

第 14 周作业解答

练习 1. 第 15, 16 周周四 (6 月 14, 21 日) 上午的课进行小测, 考察范围是本学期全部内容。允许把有用的公式写在一张 A4 纸上 (可双面写, 但仅限一张)。届时自带充足草稿纸。请安排好复习时间。

练习 2. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

画出 $f(x)$ 的图形, 求解 $f(x)$ 的傅里叶级数, 并且问傅里叶级数在各点 x 的取值。

解略

练习 3. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x < -\pi/2, \\ 1, & -\pi/2 \leq x < 0, \\ 0, & 0 \leq x < \pi, \end{cases}$$

画出 $f(x)$ 的图形, 求解 $f(x)$ 的傅里叶级数, 并且问傅里叶级数在各点 x 的取值。尝试利用软件画出该傅里叶级数的取 $n \leq 9$ 的部分和, 并和 $f(x)$ 的图形做比较。

解

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{-\pi/2} -\cos nxdx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^0 \cos nxdx \\ &= \frac{1}{n\pi} \left[-\sin n\pi \Big|_{-\pi}^{-\pi/2} + \sin n\pi \Big|_{-\pi/2}^0 \right] = \frac{2}{n\pi} \sin \frac{\pi}{2} n \\ &= \begin{cases} \frac{2}{n\pi}, & n = 1, 5, 9, 13, \dots \\ -\frac{2}{n\pi}, & n = 3, 7, 11, 15, \dots \\ 0, & n \text{ 为偶数} \end{cases} \end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{-\pi/2} -1 dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^0 1 dx = 0,$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{-\pi/2} -\sin nxdx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^0 \sin nxdx \\ &= \frac{1}{n\pi} \left[\cos n\pi \Big|_{-\pi}^{-\pi/2} - \cos n\pi \Big|_{-\pi/2}^0 \right] = \frac{1}{n\pi} \left[2 \cos \frac{n}{2} \pi - \cos n\pi - 1 \right] \\ &= \begin{cases} -\frac{4}{n\pi}, & n = 2, 6, 10, 14, \dots \\ 0, & n = 4, 8, 12, 16, \dots \\ 0, & n \text{ 为奇数} \end{cases} \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 的傅里叶级数是

$$\frac{2}{\pi} \left[\cos x - \sin 2x - \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{5} \cos 5x - \frac{1}{3} \sin 6x - \frac{1}{7} \cos 7x + \frac{1}{9} \cos 9x - \frac{1}{5} \sin 10x - \frac{1}{11} \cos 11x + \dots \right]$$