第 14 周作业解答

练习 1. 利用逐项求导或逐项积分，求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2(n-1)}$ 的和函数。

解（1）1. 先求收敛域。直接计算

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{4(n+1)+1}}{4(n+1)+1}}{\frac{x^{4n+1}}{4n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{4n+1}{4n+5}\cdot x^4 = x^4$$

所以当 $|x|<1$ 时收敛；当 $|x|>1$ 时发散。收敛区间是 $(-1,1)$。

讨论 $x=\pm1$ 时的敛散性。

当 $x=1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+1}$，利用比较审敛法的极限形式，与发散调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 作比较，可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+1}$ 发散，所以 $x=1$ 是发散点；

当 $x=-1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{4n+1}=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+1}$，也是发散，所以 $x=-1$ 是发散点；

结论：收敛域是 $(-1,1)$。

2. 设

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1},\qquad x\in(-1,1).$$

在任意 $x\in(-1,1)$ 处，逐项求导可得

$$S'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n}=x^4+x^8+x^{12}+\cdots+x^{4n}+\cdots=\frac{1}{1-x^4}-1.$$

注意

$$\frac{1}{1-x^4}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{1+x^2}\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)+\frac{1}{1+x^2}\right]=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-x}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}.$$

所以

$$\begin{aligned}S(x)&=\int\left(\frac{1}{1-x^4}-1\right)dx=\int\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-x}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}-1\right)dx\\&=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x+C.\end{aligned}$$

显然 $S(0)=0$，所以 $C=0$，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x,\qquad x\in(-1,1).$$

（2）先求收敛域。直接计算

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{2(n+1)-1}{2^{n+1}}x^{2(n+1-1)}}{\frac{2n-1}{2^n}x^{2(n-1)}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2(2n-1)}\cdot x^2=\frac{1}{2}x^2\qquad\begin{cases}<1 & \text{收敛}\\ >1 & \text{发散}\end{cases}$$

所以当 $|x| < \sqrt{2}$ 时收敛；当 $|x| > \sqrt{2}$ 时发散。收敛区间是 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$。

讨论 $x = \pm\sqrt{2}$ 时的敛散性。

当 $x = \pm\sqrt{2}$ 时，$\frac{2n-1}{2^n}x^{2(n-1)} = \frac{2n-1}{2} \nrightarrow 0$，所以 $x = \pm\sqrt{2}$ 是发散点。

结论：收敛域是 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$。

2. 设

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2(n-1)} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2}x^2 + \frac{5}{2^3}x^4 + \frac{7}{2^4}x^6 + \cdots, \qquad x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

在任意 $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 且 $x \neq 0$ 处，利用逐项求导公式可得

$$\begin{aligned}
S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)x^{2n-2}}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^{2n-1}}{2^n}\right)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2^n}\right)' = \left(\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n}\right)' \\
&= \left\{\frac{1}{x}\left[\frac{x^2}{2} + \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{2}\right)^3 + \left(\frac{x^2}{2}\right)^4 + \cdots + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n + \cdots\right]\right\}' \\
&= \left\{\frac{1}{x}\left[\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}} - 1\right]\right\}' = \left(\frac{2}{x(2-x^2)} - \frac{1}{x}\right)' \\
&= \frac{-2(2-3x^2)}{x^2(2-x^2)^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{(2-x^2)^2 - 2(2-3x^2)}{x^2(2-x^2)^2} = \frac{x^2+2}{(2-x^2)^2}.
\end{aligned}$$

另外，显然 $S(0) = \frac{1}{2}$，所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2(n-1)} = \frac{x^2+2}{(2-x^2)^2}$$

对任何 $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 都成立。

练习 2. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ 的值。

提示构造幂级数 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = S(1)$；求解 $S(x)$；利用逐步求导公式，将 $S(x)$ 化为幂级数 $1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots = e^x$。

解 (1) 先求出级数级数 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}x^{n-1}$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = S(1)$。

(2) 先求收敛域。直接计算

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}x^{n+1-1}}{\frac{n^2}{n!}x^{n-1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2} \cdot |x| = 0$$

所以对任意 $x \in (-\infty, \infty)$，级数都是收敛，收敛域是 $(-\infty, \infty)$。

(3) 利用逐项求导公式，可得：

$$\begin{aligned}
S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^n)'}{(n-1)!} = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!}\right]' \\
&= \left[x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right]' = \left[x\left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots\right)\right]' \\
&= [xe^x]' = (1+x)e^x.
\end{aligned}$$

(4) 所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}=S(1)=2e.$$

练习 3. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x<0,\\ 1, & 0\le x<\pi.\end{cases}$$

画出 $f(x)$ 的图形，求解 $f(x)$ 的傅里叶级数，并且问傅里叶级数在各点 x 的取值。

解略

练习 4. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x<-\pi/2,\\ 1, & -\pi/2\le x<0,\\ 0, & 0\le x<\pi,\end{cases}$$

画出 $f(x)$ 的图形，求解 $f(x)$ 的傅里叶级数，并且问傅里叶级数在各点 x 的取值。尝试利用软件画出该傅里叶级数的取 $n\le 9$ 的部分和，并和 $f(x)$ 的图形做比较。

解

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}-\cos nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos nxdx\\&=\frac{1}{n\pi}\left[-\sin n\pi\Big|_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}+\sin n\pi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\right]=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{\pi}{2}n\\&=\begin{cases}\frac{2}{n\pi}, & n=1,5,9,13,\cdots\\ -\frac{2}{n\pi}, & n=3,7,11,15,\cdots\\ 0, & n\text{为偶数}\end{cases}\end{aligned}$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}-1dx+\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}1dx=0,$$

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}-\sin nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\sin nxdx\\&=\frac{1}{n\pi}\left[\cos n\pi\Big|_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}-\cos n\pi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\right]=\frac{1}{n\pi}\left[2\cos\frac{n}{2}\pi-\cos n\pi-1\right]\\&=\begin{cases}-\frac{4}{n\pi}, & n=2,6,10,14,\cdots\\ 0, & n=4,8,12,16,\cdots\\ 0, & n\text{为奇数}\end{cases}\end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 的傅里叶级数是

$$\frac{2}{\pi}\left[\sin x-\cos 2x-\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x-\frac{1}{3}\cos 6x-\frac{1}{7}\sin 7x+\frac{1}{9}\sin 9x-\frac{1}{5}\cos 10x+\cdots\right]$$