第 10 周作业解答

练习 1. 计算

1. $\int_L (x+y)ds$，其中 L 是连接 $(1,0)$ 及 $(0,1)$ 两点的直线段；
2. $\int_C xds$，其中 C 为直线 $y=x$ 及抛物线 $y=x^2$ 所围成区域的整个边界；
3. $\int_L \frac{1}{x^2+y^2+z^2}ds$，其中 L 为曲线 $x=e^t\cos t,\ y=e^t\sin t,\ z=e^t$ 上相应于 t 从 0 到 2 的这段弧。

解 1. L 的参数方程为 $x=t, y=1-t, 0\le t\le 1$，所以

$$\int_L (x+y)ds=\int_0^1 (t+1-t)\sqrt{[(t)']^2+[(1-t)']^2}dt=\int_0^1 \sqrt{2}dt=\sqrt{2}.$$

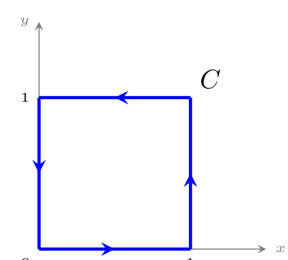
2. C 可分成两段 L_1 和 L_2，其中 L_1 的参数方程为 $x=t, y=t^2, 0\le t\le 1$，L_2 的参数方程为 $x=t, y=t, 0\le t\le 1$，所以

$$\begin{aligned}\int_C xds&=\int_{L_1} xds+\int_{L_2} xds\\&=\int_0^1 t\sqrt{[(t)']^2+[(t^2)']^2}dt+\int_0^1 t\sqrt{[(t)']^2+[(t)']^2}dt\\&=\int_0^1 t\sqrt{1+4t^2}dt+\int_0^1 t\sqrt{2}dt\\&=\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}(1+4t^2)^{3/2}\Big|_0^1+\frac{\sqrt{2}}{2}t^2\Big|_0^1=\frac{1}{12}+\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\int_L \frac{1}{x^2+y^2+z^2}ds&=\int_0^2 \frac{1}{(e^t\cos t)^2+(e^t\sin t)^2+(e^t)^2}\sqrt{[(e^t\cos t)']^2+[(e^t\sin t)']^2+[(e^t)']^2}dt\\&=\int_0^2 \frac{1}{2}e^{-2t}\cdot e^t\sqrt{3}dt=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-e^{-2}).\end{aligned}$$

练习 2. 计算 $\int_C x^2dx+xydy$，其中 C 是正方形 $[0,1]\times[0,1]$ 边界，逆时针方向。



解

$$
\begin{aligned}
\int_C x^2dx+xydy &= \int_{C_1} x^2dx+xydy+\int_{C_2} x^2dx+xydy+\int_{C_3} x^2dx+xydy+\int_{C_4} x^2dx+xydy \\
&= \int_0^1 \left[t^2\cdot(t)'+t\cdot 0\cdot(0)'\right]dt+\int_0^1 \left[1^2\cdot(1)'+1\cdot t\cdot(t)'\right]dt \\
&\quad +\int_0^1 \left[(1-t)^2\cdot(1-t)'+(1-t)\cdot 1\cdot(1)'\right]dt+\int_0^1 \left[0^2\cdot(0)'+0\cdot(1-t)\cdot(1-t)'\right]dt \\
&= \int_0^1 \left[t^2\right]dt+\int_0^1 [t]\,dt+\int_0^1 \left[-(1-t)^2\right]dt \\
&= \frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

练习 3. 计算

1. $\int_L(x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$，其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上从点 $(-1,1)$ 到点 $(1,1)$ 的一段弧；
2. $\int_L xdx+ydy+(x+y-1)dz$ ，其中 L 是从点 $(1,1,1)$ 到 $(2,3,4)$ 的直线段。

解 1. L 的参数方程为 $x=t,\, y=t^2,\, t:-1\to 1$，所以

$$
\begin{aligned}
\int_L(x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy &= \int_{-1}^1[(t^2-2\cdot t\cdot t^2)(t)'+(t^4-2\cdot t\cdot t^2)(t^2)']dt \\
&= \int_{-1}^1[t^2-2t^3+2t^5-4t^4]dt \\
&= 2\int_0^1[t^2-4t^4]dt=2(\frac{1}{3}-\frac{4}{5})=-\frac{14}{15}.
\end{aligned}
$$

2. L 的参数方程为 $x=1+t,\, y=1+2t,\, z=1+3t,\, t:0\to 1$，所以

$$
\begin{aligned}
\int_L xdx+ydy+(x+y-1)dz &= \int_0^1[(1+t)(1+t)'+(1+2t)(1+2t)'+(1+t+1+2t-1)(1+3t)']dt \\
&= \int_0^1[6+14t]dt=13.
\end{aligned}
$$