第 7 章 b：一阶微分方程

数学系　　梁卓滨

2017.07 暑期班

提要

假设 $y=y(x)$ 为未知函数，本节探讨如何求解以下四种**一阶微分方程**：

- 变量分离的一阶微分方程

$$g(y)dy=f(x)dx$$

- 可分离变量的一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x)\cdot g(y),\quad y'=f(x)\cdot g(y)$$

- 齐次微分方程

$$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right),\quad y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

- 一阶线性微分方程

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x),\quad y'+p(x)y=q(x)$$

变量已分离的一阶微分方程：

$$g(y)dy = f(x)dx \quad \Longleftrightarrow \quad g(y)\frac{dy}{dx} = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad g(y)y' = f(x)$$

变量已分离的一阶微分方程：$g(y)dy = f(x)dx$

计算通解的方法：

$$g(y)dy = f(x)dx \quad \Longrightarrow \quad \int g(y)dy = \int f(x)dx$$

$$\Longrightarrow \quad G(y) + C_1 = F(x) + C_2$$

$$\Longrightarrow \quad G(y) = F(x) + C$$ （不必写成 $y = y(x)$）

其中 $F(x)$, $G(y)$ 分别是 $f(x)$, $g(y)$ 的一个原函数，$C = C_2 - C_1$

验证：对关系式 $\quad G(y(x)) \quad G(y) = F(x) + C$

两边求 x 关于的导数：

$$G'(y) \cdot y' = F'(x) \quad \Longrightarrow \quad g(y)y' = f(x) \quad \Longrightarrow \quad y' = \frac{f(x)}{g(y)}$$

$$\Longrightarrow \quad dy = \frac{f(x)}{g(y)}dx \quad \Longrightarrow \quad g(y)dy = f(x)dx$$

例 求 $(y+1)dy = e^x dx$ 的通解

解 两边积分

$$\int (y+1)dy = \int e^x dx \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 + y + C_1 = e^x + C_2$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 + y = e^x + C_2 - C_1$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 + y = e^x + C$$

例 求 $ydy = xdx$ 的通解

解 两边积分

$$\int ydy = \int xdx \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 + C_1 = \frac{1}{2}x^2 + C_2$$

$$\Longrightarrow \quad y^2 = x^2 + 2(C_2 - C_1)$$

$$\Longrightarrow \quad y^2 = x^2 + C$$

可分离变量的一阶微分方程：$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$

计算通解的方法：

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \quad &\Longrightarrow \quad dy = f(x) \cdot g(y) dx \\
&\Longrightarrow \quad \frac{1}{g(y)} dy = f(x) dx \\
&\Longrightarrow \quad \int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx
\end{aligned}
$$

回忆 一阶常微分方程

$$f'(t) = \gamma f(t), \qquad \gamma\text{是常数}$$

的通解是

$$f(t) = Ce^{\gamma t}$$

请问为什么？

解 这是可分离变量微分方程

$$\frac{df}{dt} = \gamma f \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{f} df = \gamma dt \quad \Longrightarrow \int \frac{1}{f} df = \gamma \int dt$$

$$\Longrightarrow \quad \ln |f| = \gamma t + C_1$$

$$\Longrightarrow \quad |f| = e^{\gamma t + C_1}$$

$$\Longrightarrow \quad f = \pm e^{C_1} \cdot e^{\gamma t} = Ce^{\gamma t}$$

例 求 $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$ 的通解，以及在初始条件 $y\big|_{x=1}=3$ 下的特解

解 这是可分离变量微分方程

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y} \quad\Longrightarrow\quad ydy=-xdx \quad\Longrightarrow \int ydy=\int -xdx$$

$$\Longrightarrow\quad \frac{1}{2}y^2=-\frac{1}{2}x^2+C_1$$

$$\Longrightarrow\quad x^2+y^2=2C_1=C$$

所以

- 通解为 $x^2+y^2=C$（C 为任意常数）
- 当 $x=1$ 时 $y=3$，则 $1^2+3^2=C \quad\Rightarrow\quad C=10$

  所以特解是 $x^2+y^2=10$

例 求 $y' = e^{2x-y}$ 的通解及在初始条件 $y\big|_{x=0} = 0$ 下的特解

解 这是可分离变量微分方程

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x}\cdot e^{-y} \quad \Longrightarrow \quad e^y dy = e^{2x}dx$$

$$\Longrightarrow \quad \int e^y dy = \int e^{2x}dx$$

$$\Longrightarrow \quad e^y = \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

所以

- 通解为 $e^y = \frac{1}{2}e^{2x} + C$（$C$ 为任意常数）
- 当 $x = 0$ 时 $y = 0$，则 $1 = \frac{1}{2} + C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{2}$

  所以特解是 $e^y = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}$

例 求 $y' = -\frac{y}{x}$ 的通解

解 这是可分离变量微分方程

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \implies \frac{1}{y}dy = -\frac{1}{x}dx \implies \int \frac{1}{y}dy = \int -\frac{1}{x}dx$$

$$\implies \ln|y| = -\ln|x| + C_1$$

$$\implies \ln|xy| = C_1$$

$$\implies |xy| = e^{C_1}$$

$$\implies xy = \pm e^{C_1} = C$$

所以通解就是

$$xy = C$$

例 求 $y' = 2xy - 6x$ 的通解

解 这是可分离变量微分方程

$$\frac{dy}{dx} = 2x(y-3) \implies \int \frac{1}{y-3}dy = \int 2xdx$$

$$\implies \ln|y-3| = x^2 + C_1$$

$$\implies |y-3| = e^{x^2+C_1} = e^{C_1} \cdot e^{x^2}$$

$$\implies y-3 = \pm e^{C_1} \cdot e^{x^2} = Ce^{x^2}$$

$$\implies y = C \cdot e^{x^2} + 3$$

所以通解就是

$$y = C \cdot e^{x^2} + 3$$

例 求 $\frac{dy}{dx}+p(x)y=0$ 的通解，其中 $p(x)$ 是已知函数。

解 这是可分离变量微分方程

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}+p(x)y=0 \quad &\Longrightarrow \quad \int \frac{1}{y}dy=\int -p(x)dx \\ &\Longrightarrow \quad \ln|y|=-P(x)+C_1 \\ &\Longrightarrow \quad |y|=e^{-P(x)+C_1}=e^{C_1}\cdot e^{-P(x)} \\ &\Longrightarrow \quad y=\pm e^{C_1}\cdot e^{-P(x)}=Ce^{-P(x)}\end{aligned}$$

其中 $P(x)$ 是 $p(x)$ 的一个原函数。所以通解就是

$$y=Ce^{-P(x)}$$

注 上述的通解也写作

$$y=Ce^{-\int p(x)dx}$$

这里 $\int p(x)dx$ 仅表示 $p(x)$ 的一个原函数，不含积分常数。

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y=0$ 的通解

解

$$y=Ce^{-\int p(x)dx}=Ce^{\int\frac{1}{x}dx}=Ce^{\ln|x|}=C|x|=\pm Cx=C_1x$$

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=0$ 的通解

解

$$y=Ce^{-\int p(x)dx}=Ce^{-\int\frac{1}{x}dx}=Ce^{-\ln|x|}=C|x|^{-1}=\pm C\frac{1}{x}=\frac{C_1}{x}$$

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=0$ 的通解

解

$$y=Ce^{-\int p(x)dx}=Ce^{\int\frac{2}{x+1}dx}=Ce^{2\ln|x+1|}=C|x+1|^2=C(x+1)^2$$

齐次微分方程：$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

计算通解步骤：

1. 作变量代换 $u = \frac{y}{x}$，$y = xu$，并代入原方程：

$$\frac{d}{dx}(xu) = \varphi(u) \quad \Longrightarrow \quad u + x\frac{du}{dx} = \varphi(u) \quad \Longrightarrow \quad x\frac{du}{dx} = \varphi(u) - u$$

2. 分离变量：

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x} \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x}$$

3. 还原变量：求出积分后，将 $\frac{y}{x}$ 代替 u

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{xy-x^2}$ 的通解

解 1. 化为齐次方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{xy-x^2}=\frac{y^2/x^2}{y/x-1}$$

2. 变量代换：$u=\frac{y}{x}$（$y=ux$）

$$\frac{d}{dx}(ux)=\frac{u^2}{u-1} \quad\Rightarrow\quad u'x+u=\frac{u^2}{u-1} \quad\Rightarrow\quad u'x=\frac{u}{u-1}$$

3. 分离变量

$$\begin{aligned}\frac{u-1}{u}du=\frac{1}{x}dx \quad &\Rightarrow \quad \int\left(1-\frac{1}{u}\right)du=\int\frac{1}{x}dx\\ &\Rightarrow \quad u-\ln|u|=\ln|x|+C_1\\ &\Rightarrow \quad e^u=Cux\end{aligned}$$

4. 还原变量(代回 $u=y/x$)：

$$e^{y/x}=Cy$$

例 求微分方程 $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, \quad y|_{x=1} = 2$ 的解

解 1. 变量代换：$u = \frac{y}{x}$（$y = ux$）

$$(ux)' = \frac{1}{u} + u \quad \Rightarrow \quad u'x + u = \frac{1}{u} + u \quad \Rightarrow \quad u'x = \frac{1}{u}$$

2. 分离变量

$$udu = \frac{1}{x}dx \quad \Rightarrow \quad \int udu = \int \frac{1}{x}dx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}u^2 = \ln|x| + C_1 \quad \Rightarrow \quad e^{\frac{1}{2}u^2} = Cx$$

3. 还原变量(代回 $u = y/x$)：

$$e^{\frac{y^2}{2x^2}} = Cx$$

4. 代入初始值

$$e^2 = C$$

所以 $e^{\frac{y^2}{2x^2}} = e^2x$

- 一阶线性微分方程形的标准形式：

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$$

其中 $p(x), q(x)$ 是已知函数，$y=y(x)$ 是未知函数。

例

	是否一阶线性？	$p(x)$	$q(x)$
$y'=y^2+\sin x$	×		
$y'=y\sin x+e^x$	✓	$-\sin x$	e^x
$y'=\frac{2y}{x+1}$	✓（齐次）	$-\frac{2}{x+1}$	0

- 当 $q(x)\equiv 0$ 时，

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0$$

称为一阶齐次线性微分方程

求解一阶线性微分方程：$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$

利用常数变易法求解，步骤：

1. 求解齐次部分：

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0 \quad\Rightarrow\quad \int\frac{dy}{y}=\int -p(x)dx \quad\Rightarrow\quad y=Ce^{\int -p(x)dx}$$

2. 常数变易：假设 $y=u(x)e^{\int -p(x)dx}$，代入原方程：

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x) \Rightarrow \left(u(x)e^{\int -p(x)dx}\right)'+p(x)u(x)e^{\int -p(x)dx}=q(x)$$

$$\Rightarrow u'(x)e^{-\int p(x)dx}=q(x)u'(x) \qquad =q(x)e$$

$$\Rightarrow u(x)=\int\left[q(x)e^{\int p(x)dx}\right]dx+C$$

$$\therefore \quad y=u(x)e^{\int -p(x)dx}=\left(\int\left[q(x)e^{\int p(x)dx}\right]dx+C\right)e^{\int -p(x)dx}$$

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^{\frac{5}{2}}$ 的通解

解 1. 先求解齐次部分

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1}y = 0 \;\Rightarrow\; y = Ce^{-\int p(x)dx} = Ce^{\int \frac{2}{x+1}dx} = Ce^{2\ln|x+1|}$$

$$= C|x+1|^2 = C(x+1)^2$$

2. 常数变易：假设 $y = u(x)\cdot(x+1)^2$，代入原方程

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^{\frac{5}{2}}$$

$$\Rightarrow \left[u\cdot(x+1)^2\right]' - \frac{2}{x+1}\cdot u\cdot(x+1)^2 = (x+1)^{\frac{5}{2}}$$

$$\Rightarrow u'\cdot(x+1)^2 = (x+1)^{\frac{5}{2}} \;\Rightarrow\; u' = (x+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow u(x) = \int (x+1)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C$$

因此 $y = u(x)\cdot(x+1)^2 = \left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C\right](x+1)^2$

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y=\ln x$ 的通解

解 1. 先求解齐次部分

$$\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y=0 \Rightarrow y=Ce^{-\int p(x)dx}=Ce^{\int \frac{1}{x}dx}=Ce^{\ln|x|}$$

$$=C|x|=\pm Cx=C_1x$$

2. 常数变易：假设 $y=u(x)\cdot x$，代入原方程

$$\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y=\ln x$$

$$\Rightarrow (u\cdot x)'-\frac{1}{x}\cdot u\cdot x=\ln x$$

$$\Rightarrow u'\cdot x=\ln x$$

$$\Rightarrow u(x)=\int\frac{1}{x}\ln x dx=\int \ln x d\ln x=\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$$

因此 $y=u(x)\cdot x=\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2+C\right]x$

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - y = e^x \sin x$ 的通解

解 1. 先求解齐次部分

$$\frac{dy}{dx} - y = 0 \;\Rightarrow\; y = Ce^{-\int p(x)dx} = Ce^{\int 1dx} = Ce^x$$

2. 常数变易：假设 $y = u(x) \cdot e^x$，代入原方程

$$\frac{dy}{dx} - y = e^x \sin x$$

$$\Rightarrow \left(u(x) \cdot e^x\right)' - u(x) \cdot e^x = e^x \sin x$$

$$\Rightarrow u' = \sin x$$

$$\Rightarrow u(x) = \int \sin x dx = -\cos x + C$$

因此 $y = u(x) \cdot e^x = (-\cos x + C)e^x$

例 求 $x^2y' + xy + 1 = 0$ 的满足初始条件 $y(2) = 1$ 的特解。

解 1. 化为标准形式 $$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = -\frac{1}{x^2}$$

2. 先求解齐次部分

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = 0 \Rightarrow y = Ce^{-\int p(x)dx} = Ce^{-\int \frac{1}{x}dx} = Ce^{-\ln|x|}$$

$$= C|x|^{-1} = \pm C\frac{1}{x} = \frac{C_1}{x}$$

3. 常数变易：假设 $y = \frac{u(x)}{x}$，代入原方程

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow \left(\frac{u}{x}\right)' + \frac{1}{x}\cdot\frac{u}{x} = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{u'}{x} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow u(x) = \int -\frac{1}{x}dx = -\ln|x| + C$$

因此 $y = \frac{1}{x}(-\ln|x| + C)$

$\vdots$

$\vdots$

因此 $y = \frac{1}{x}(-\ln|x| + C)$

4. $y(2) = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{1}{2}(-\ln 2 + C) \quad \Rightarrow \quad C = 2 + \ln 2$。所以

$$y = \frac{u(x)}{x} = \frac{1}{x}(-\ln|x| + 2 + \ln 2)$$

例 求微分方程 $(y^2-6x)\frac{dy}{dx}+2y=0$ 的通解

解 1. 转化为一阶线性微分方程：

$$(y^2-6x)\frac{dy}{dx}+2y=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{2y}{y^2-6x}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{dx}{dy}=-\frac{y^2-6x}{2y}=-\frac{1}{2}y+\frac{3}{y}x$$

$$\Rightarrow\quad \frac{dx}{dy}-\frac{3}{y}x=-\frac{1}{2}y$$

2. 求解齐次部分 $\frac{dx}{dy}-\frac{3}{y}x=0 \;\Rightarrow\; x=Cy^3$

3. 常数变易：假设 $x=u(y)\cdot y^3$，代入方程

$$\frac{dx}{dy}-\frac{3}{y}x=-\frac{1}{2}y \;\Rightarrow\; u'=-\frac{1}{2}y^{-2} \;\Rightarrow\; u=\frac{1}{2}y^{-1}+C$$

因此 $x=uy^3=\left[\frac{1}{2}y^{-1}+C\right]y^3=\frac{1}{2}y^2+Cy^3$