

# 第 11 章 $b$ : 对坐标的曲线积分

数学系 梁卓滨

2016-2017 学年 II

# Outline

---

1. 对坐标的曲线积分：平面有向曲线
2. 对坐标的曲线积分：空间有向曲线
3. 两类曲线积分的联系

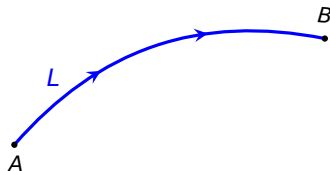
# We are here now...

---

1. 对坐标的曲线积分：平面有向曲线
2. 对坐标的曲线积分：空间有向曲线
3. 两类曲线积分的联系

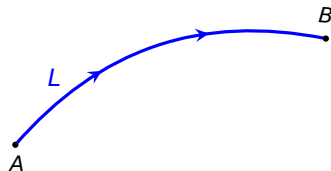
# 平面有向曲线

- 有向曲线 是指定起点、终点的曲线



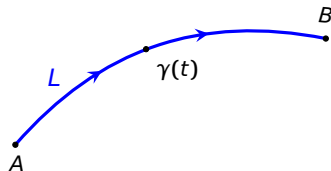
# 平面有向曲线

- 有向曲线 是指定起点、终点的曲线
- 有向曲线可理解成粒子运动轨迹



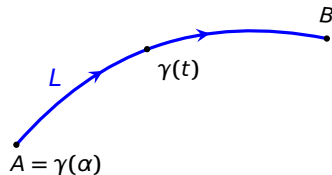
# 平面有向曲线

- 有向曲线 是指定起点、终点的曲线
- 有向曲线可理解成粒子运动轨迹
- 参数方程：



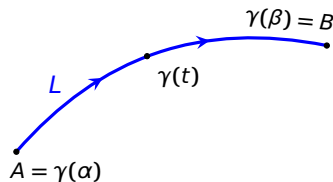
# 平面有向曲线

- 有向曲线 是指定起点、终点的曲线
- 有向曲线可理解成粒子运动轨迹
- 参数方程：



# 平面有向曲线

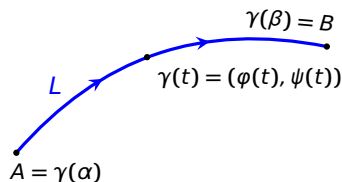
- 有向曲线 是指定起点、终点的曲线
- 有向曲线可理解成粒子运动轨迹
- 参数方程：





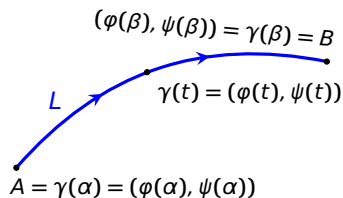
# 平面有向曲线

- 有向曲线 是指定起点、终点的曲线
- 有向曲线可理解成粒子运动轨迹
- 参数方程：



# 平面有向曲线

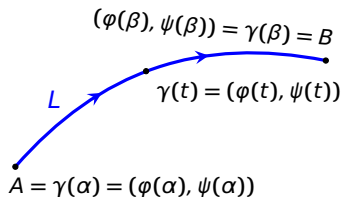
- 有向曲线 是指定起点、终点的曲线
- 有向曲线可理解成粒子运动轨迹
- 参数方程：



# 平面有向曲线

- 有向曲线 是指定起点、终点的曲线
- 有向曲线可理解成粒子运动轨迹
- 参数方程：

$$\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t)), t: \alpha \rightarrow \beta$$



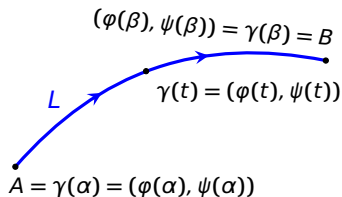
# 平面有向曲线

- 有向曲线 是指定起点、终点的曲线
- 有向曲线可理解成粒子运动轨迹
- 参数方程：

$$\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t)), t: \alpha \rightarrow \beta$$

或者写作

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), t: \alpha \rightarrow \beta$$



# 平面有向曲线

- 有向曲线 是指定起点、终点的曲线

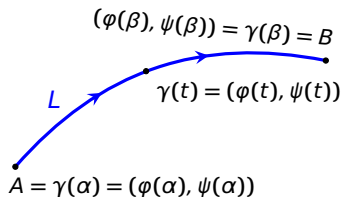
- 有向曲线可理解成粒子运动轨迹

- 参数方程:

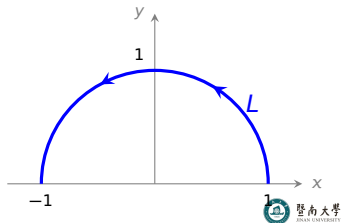
$$\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t)), t: \alpha \rightarrow \beta$$

或者写作

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), t: \alpha \rightarrow \beta$$



例 如图有向曲线  $L$  的参数方程是:



# 平面有向曲线

- 有向曲线 是指定起点、终点的曲线

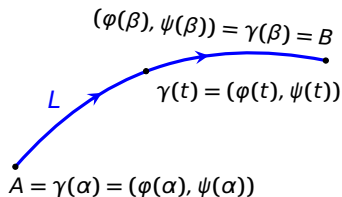
- 有向曲线可理解成粒子运动轨迹

- 参数方程:

$$\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t)), t: \alpha \rightarrow \beta$$

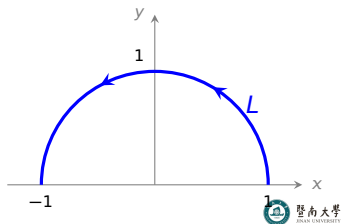
或者写作

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), t: \alpha \rightarrow \beta$$



例 如图有向曲线  $L$  的参数方程是:

- $\gamma(t) = (\cos t, \sin t), t: 0 \rightarrow \pi$



# 平面有向曲线

- 有向曲线 是指定起点、终点的曲线

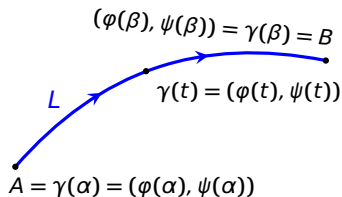
- 有向曲线可理解成粒子运动轨迹

- 参数方程:

$$\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t)), t: \alpha \rightarrow \beta$$

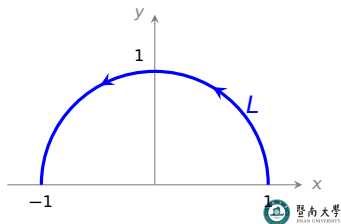
或者写作

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), t: \alpha \rightarrow \beta$$



例 如图有向曲线  $L$  的参数方程是:

- $\gamma(t) = (\cos t, \sin t), t: 0 \rightarrow \pi$
- $\gamma(t) = (\cos 2t, \sin 2t),$



# 平面有向曲线

- 有向曲线 是指定起点、终点的曲线

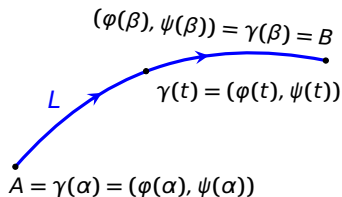
- 有向曲线可理解成粒子运动轨迹

- 参数方程:

$$\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t)), t: \alpha \rightarrow \beta$$

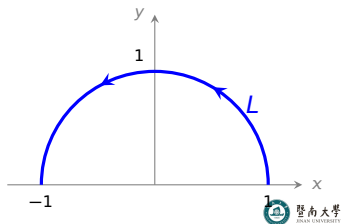
或者写作

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), t: \alpha \rightarrow \beta$$



例 如图有向曲线  $L$  的参数方程是:

- $\gamma(t) = (\cos t, \sin t), t: 0 \rightarrow \pi$
- $\gamma(t) = (\cos 2t, \sin 2t), t: 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$





# 平面有向曲线

- 有向曲线 是指定起点、终点的曲线

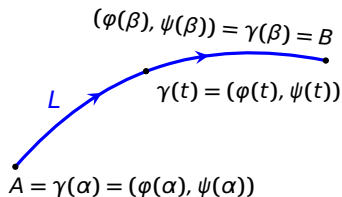
- 有向曲线可理解成粒子运动轨迹

- 参数方程：

$$\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t)), t: \alpha \rightarrow \beta$$

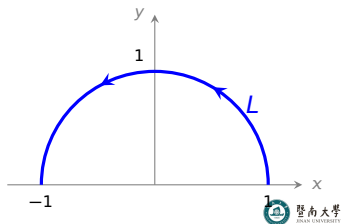
或者写作

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), t: \alpha \rightarrow \beta$$



例 如图有向曲线  $L$  的参数方程是：

- $\gamma(t) = (\cos t, \sin t), t: 0 \rightarrow \pi$
- $\gamma(t) = (\cos 2t, \sin 2t), t: 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$
- $\gamma(t) = (t, \sqrt{1-t^2}),$



# 平面有向曲线

- 有向曲线 是指定起点、终点的曲线

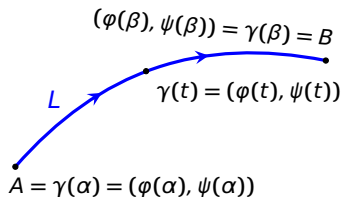
- 有向曲线可理解成粒子运动轨迹

- 参数方程:

$$\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t)), t: \alpha \rightarrow \beta$$

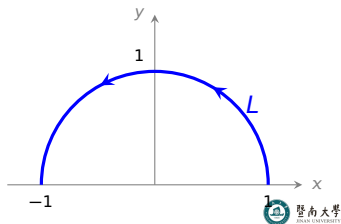
或者写作

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), t: \alpha \rightarrow \beta$$



例 如图有向曲线  $L$  的参数方程是:

- $\gamma(t) = (\cos t, \sin t), t: 0 \rightarrow \pi$
- $\gamma(t) = (\cos 2t, \sin 2t), t: 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$
- $\gamma(t) = (t, \sqrt{1-t^2}), t: 1 \rightarrow -1$



# 平面有向曲线

- 有向曲线 是指定起点、终点的曲线

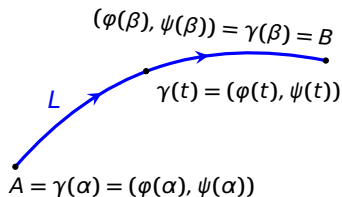
- 有向曲线可理解成粒子运动轨迹

- 参数方程：

$$\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t)), t: \alpha \rightarrow \beta$$

或者写作

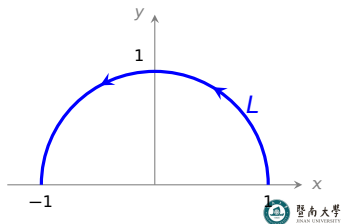
$$x = \varphi(t), y = \psi(t), t: \alpha \rightarrow \beta$$



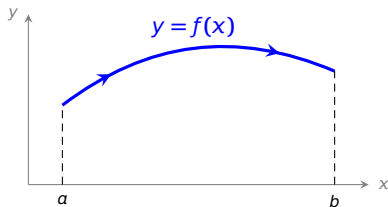
例 如图有向曲线  $L$  的参数方程是：

- $\gamma(t) = (\cos t, \sin t), t: 0 \rightarrow \pi$
- $\gamma(t) = (\cos 2t, \sin 2t), t: 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$
- $\gamma(t) = (t, \sqrt{1-t^2}), t: 1 \rightarrow -1$

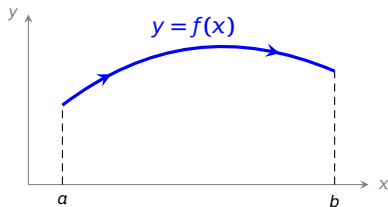
等等... (参数方程不唯一)



例 如图有向曲线  $L$  的参数方程是：



例 如图有向曲线  $L$  的参数方程是：  
 $x = t, y = f(t), \quad t : a \rightarrow b$

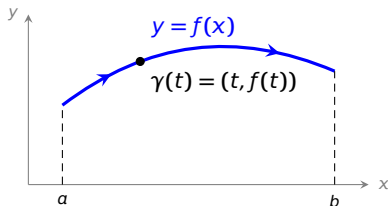


例 如图有向曲线  $L$  的参数方程是:

$$x = t, y = f(t), \quad t : a \rightarrow b$$

或者写作:

$$\gamma(t) = (t, f(t)), \quad t : a \rightarrow b$$

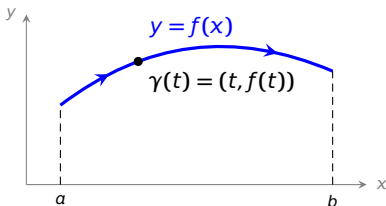


例 如图有向曲线  $L$  的参数方程是:

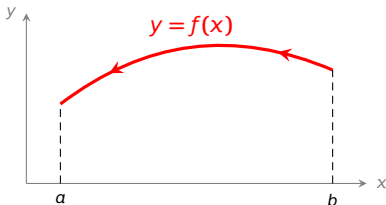
$$x = t, y = f(t), \quad t: a \rightarrow b$$

或者写作:

$$\gamma(t) = (t, f(t)), \quad t: a \rightarrow b$$



例 如图有向曲线  $L$  的参数方程是:

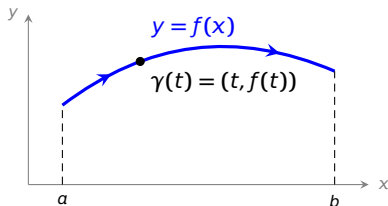


例 如图有向曲线  $L$  的参数方程是:

$$x = t, y = f(t), \quad t: a \rightarrow b$$

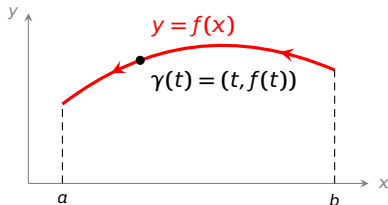
或者写作:

$$\gamma(t) = (t, f(t)), \quad t: a \rightarrow b$$



例 如图有向曲线  $L$  的参数方程是:

$$x = t, y = f(t),$$



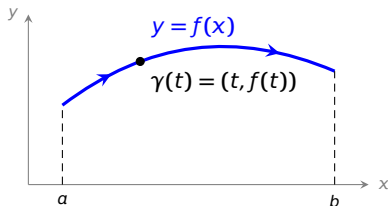


例 如图有向曲线  $L$  的参数方程是:

$$x = t, y = f(t), \quad t: a \rightarrow b$$

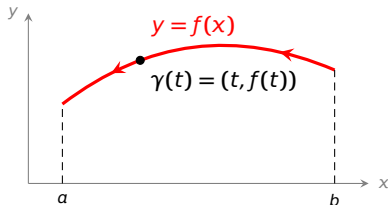
或者写作:

$$\gamma(t) = (t, f(t)), \quad t: a \rightarrow b$$



例 如图有向曲线  $L$  的参数方程是:

$$x = t, y = f(t), \quad t: b \rightarrow a$$

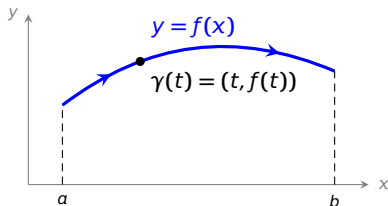


例 如图有向曲线  $L$  的参数方程是:

$$x = t, y = f(t), \quad t: a \rightarrow b$$

或者写作:

$$\gamma(t) = (t, f(t)), \quad t: a \rightarrow b$$

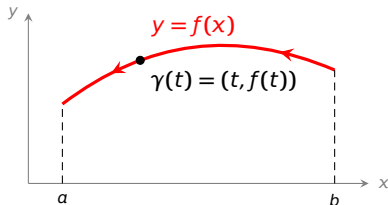


例 如图有向曲线  $L$  的参数方程是:

$$x = t, y = f(t), \quad t: b \rightarrow a$$

或者写作:

$$\gamma(t) = (t, f(t)), \quad t: b \rightarrow a$$

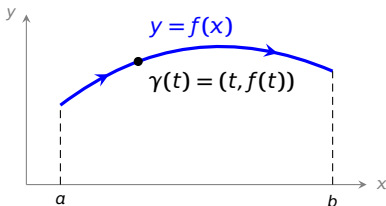


例 如图有向曲线  $L$  的参数方程是:

$$x = t, y = f(t), \quad t: a \rightarrow b$$

或者写作:

$$\gamma(t) = (t, f(t)), \quad t: a \rightarrow b$$



例 如图有向曲线  $L$  的参数方程是:

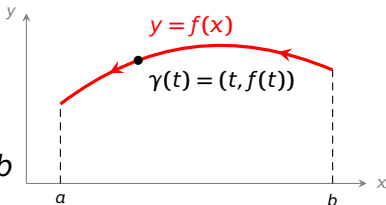
$$x = t, y = f(t), \quad t: b \rightarrow a$$

或者写作:

$$\gamma(t) = (t, f(t)), \quad t: b \rightarrow a$$

参数方程也可以取为:

$$t: a \rightarrow b$$

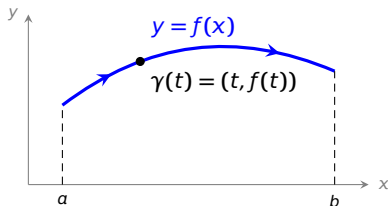


例 如图有向曲线  $L$  的参数方程是:

$$x = t, y = f(t), \quad t: a \rightarrow b$$

或者写作:

$$\gamma(t) = (t, f(t)), \quad t: a \rightarrow b$$



例 如图有向曲线  $L$  的参数方程是:

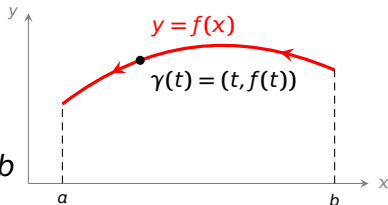
$$x = t, y = f(t), \quad t: b \rightarrow a$$

或者写作:

$$\gamma(t) = (t, f(t)), \quad t: b \rightarrow a$$

参数方程也可以取为:

$$\gamma(t) = (a+b-t, f(a+b-t)), \quad t: a \rightarrow b$$



# 曲线积分

---

假设

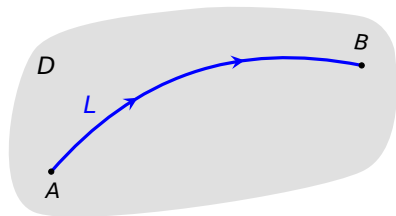
- $P(x, y), Q(x, y)$  定义在区域  $D$  上



# 曲线积分

假设

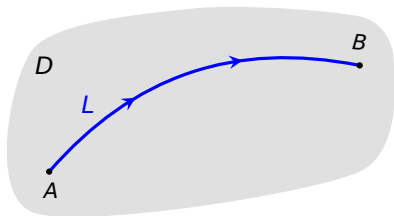
- $P(x, y), Q(x, y)$  定义在区域  $D$  上
- $L$  是  $D$  中从点  $A$  到  $B$  的有向曲线



# 曲线积分

假设

- $P(x, y), Q(x, y)$  定义在区域  $D$  上
- $L$  是  $D$  中从点  $A$  到  $B$  的有向曲线



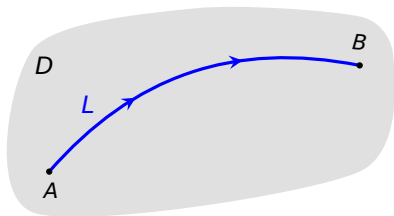
所谓有向曲线  $L$  上的曲线积分（或者“第二类曲线积分”）指：

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

# 曲线积分

假设

- $P(x, y), Q(x, y)$  定义在区域  $D$  上
- $L$  是  $D$  中从点  $A$  到  $B$  的有向曲线



所谓有向曲线  $L$  上的曲线积分（或者“第二类曲线积分”）指：

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

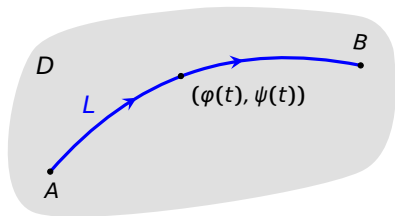
计算方法：设  $x = \varphi(t), y = \psi(t)$  是  $L$  的参数方程， $t$  从  $\alpha$  到  $\beta$ ，则



# 曲线积分

假设

- $P(x, y), Q(x, y)$  定义在区域  $D$  上
- $L$  是  $D$  中从点  $A$  到  $B$  的有向曲线



所谓有向曲线  $L$  上的曲线积分（或者“第二类曲线积分”）指：

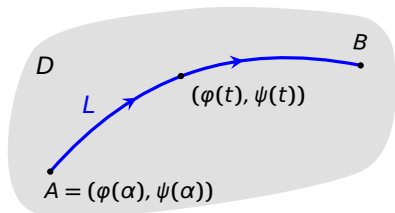
$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

计算方法：设  $x = \varphi(t), y = \psi(t)$  是  $L$  的参数方程， $t$  从  $\alpha$  到  $\beta$ ，则

# 曲线积分

假设

- $P(x, y), Q(x, y)$  定义在区域  $D$  上
- $L$  是  $D$  中从点  $A$  到  $B$  的有向曲线



所谓有向曲线  $L$  上的曲线积分（或者“第二类曲线积分”）指：

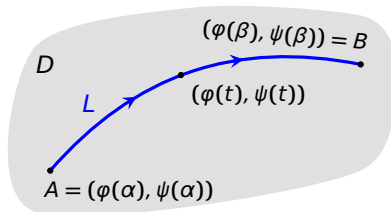
$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

计算方法：设  $x = \varphi(t), y = \psi(t)$  是  $L$  的参数方程， $t$  从  $\alpha$  到  $\beta$ ，则

# 曲线积分

假设

- $P(x, y), Q(x, y)$  定义在区域  $D$  上
- $L$  是  $D$  中从点  $A$  到  $B$  的有向曲线



所谓有向曲线  $L$  上的曲线积分（或者“第二类曲线积分”）指：

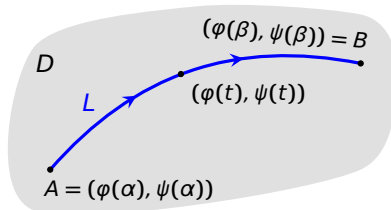
$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

计算方法：设  $x = \varphi(t), y = \psi(t)$  是  $L$  的参数方程， $t$  从  $\alpha$  到  $\beta$ ，则

# 曲线积分

假设

- $P(x, y), Q(x, y)$  定义在区域  $D$  上
- $L$  是  $D$  中从点  $A$  到  $B$  的有向曲线



所谓有向曲线  $L$  上的曲线积分（或者“第二类曲线积分”）指：

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

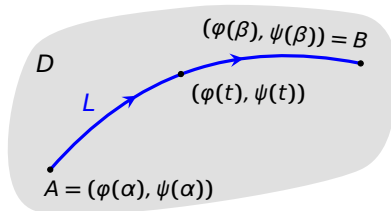
计算方法：设  $x = \varphi(t), y = \psi(t)$  是  $L$  的参数方程， $t$  从  $\alpha$  到  $\beta$ ，则

$$\int_L Pdx + Qdy := \int_{\alpha}^{\beta} \left[ P(\varphi(t), \psi(t))d\varphi(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))d\psi(t) \right]$$

# 曲线积分

假设

- $P(x, y), Q(x, y)$  定义在区域  $D$  上
- $L$  是  $D$  中从点  $A$  到  $B$  的有向曲线



所谓有向曲线  $L$  上的曲线积分（或者“第二类曲线积分”）指：

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

计算方法：设  $x = \varphi(t), y = \psi(t)$  是  $L$  的参数方程， $t$  从  $\alpha$  到  $\beta$ ，则

$$\begin{aligned}\int_L Pdx + Qdy &:= \int_{\alpha}^{\beta} \left[ P(\varphi(t), \psi(t))d\varphi(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))d\psi(t) \right] \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[ P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) \right] dt\end{aligned}$$

性质 曲线积分的计算方法

$$\int_L Pdx + Qdy := \int_{\alpha}^{\beta} \left[ P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) \right] dt$$

性质 曲线积分的计算方法

$$\int_L Pdx + Qdy := \int_{\alpha}^{\beta} \left[ P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) \right] dt$$

不依赖于参数方程的选取。

性质 曲线积分的计算方法

$$\int_L Pdx + Qdy := \int_{\alpha}^{\beta} \left[ P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) \right] dt$$

不依赖于参数方程的选取。也就是：

若  $x = \tilde{\varphi}(t)$ ,  $y = \tilde{\psi}(t)$ ,  $t: \tilde{\alpha} \rightarrow \tilde{\beta}$ , 是有向曲线  $L$  的另外一组参数方程,



性质 曲线积分的计算方法

$$\int_L Pdx + Qdy := \int_{\alpha}^{\beta} \left[ P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) \right] dt$$

不依赖于参数方程的选取。也就是：

若  $x = \tilde{\varphi}(t)$ ,  $y = \tilde{\psi}(t)$ ,  $t : \tilde{\alpha} \rightarrow \tilde{\beta}$ , 是有向曲线  $L$  的另外一组参数方程, 则

$$\int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} \left[ P(\tilde{\varphi}(t), \tilde{\psi}(t))\tilde{\varphi}'(t) + Q(\tilde{\varphi}(t), \tilde{\psi}(t))\tilde{\psi}'(t) \right] dt$$

性质 曲线积分的计算方法

$$\int_L Pdx + Qdy := \int_{\alpha}^{\beta} \left[ P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) \right] dt$$

不依赖于参数方程的选取。也就是：

若  $x = \tilde{\varphi}(t)$ ,  $y = \tilde{\psi}(t)$ ,  $t : \tilde{\alpha} \rightarrow \tilde{\beta}$ , 是有向曲线  $L$  的另外一组参数方程, 则

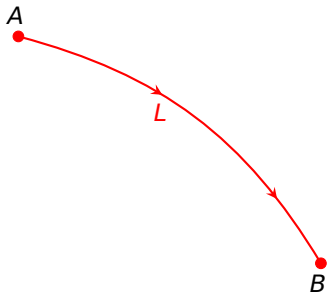
$$\begin{aligned} & \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} \left[ P(\tilde{\varphi}(t), \tilde{\psi}(t))\tilde{\varphi}'(t) + Q(\tilde{\varphi}(t), \tilde{\psi}(t))\tilde{\psi}'(t) \right] dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[ P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) \right] dt \end{aligned}$$

性质 设

- $L$  是有向曲线,
- $L^{-}$  是  $L$  的反向曲线,

则

$$\int_{L^{-}} Pdx + Qdy = - \int_L Pdx + Qdy$$

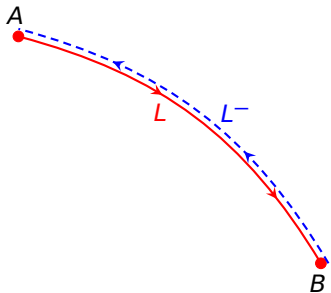


性质 设

- $L$  是有向曲线,
- $L^-$  是  $L$  的反向曲线,

则

$$\int_{L^-} Pdx + Qdy = - \int_L Pdx + Qdy$$

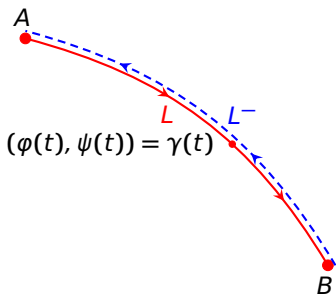


性质 设

- $L$  是有向曲线,
- $L^-$  是  $L$  的反向曲线,

则

$$\int_{L^-} Pdx + Qdy = - \int_L Pdx + Qdy$$



证明 设  $L$  的参数方程是  $\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ ,  $t : \alpha \rightarrow \beta$ ,

性质 设

- $L$  是有向曲线,
- $L^-$  是  $L$  的反向曲线,

则

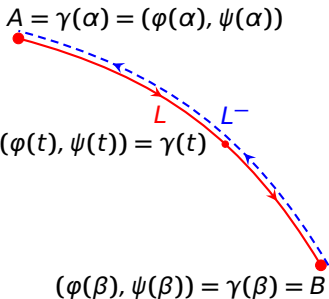
$$\int_{L^-} Pdx + Qdy = - \int_L Pdx + Qdy$$

$$A = \gamma(\alpha) = (\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$$

$$(\varphi(t), \psi(t)) = \gamma(t)$$

$$(\varphi(\beta), \psi(\beta)) = \gamma(\beta) = B$$

证明 设  $L$  的参数方程是  $\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ ,  $t : \alpha \rightarrow \beta$ ,



性质 设

- $L$  是有向曲线,
- $L^-$  是  $L$  的反向曲线,

则

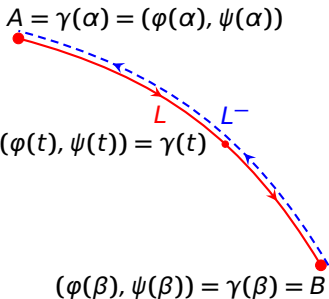
$$\int_{L^-} Pdx + Qdy = - \int_L Pdx + Qdy$$

$$A = \gamma(\alpha) = (\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$$

$$(\varphi(t), \psi(t)) = \gamma(t)$$

$$(\varphi(\beta), \psi(\beta)) = \gamma(\beta) = B$$

**证明** 设  $L$  的参数方程是  $\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ ,  $t: \alpha \rightarrow \beta$ , 则  $L^-$  的参数方程是  $\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ ,  $t: \beta \rightarrow \alpha$ 。



性质 设

- $L$  是有向曲线,
- $L^-$  是  $L$  的反向曲线,

则

$$\int_{L^-} Pdx + Qdy = - \int_L Pdx + Qdy$$

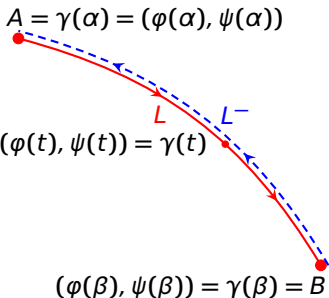
$$A = \gamma(\alpha) = (\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$$

$$(\varphi(t), \psi(t)) = \gamma(t)$$

$$(\varphi(\beta), \psi(\beta)) = \gamma(\beta) = B$$

**证明** 设  $L$  的参数方程是  $\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ ,  $t: \alpha \rightarrow \beta$ , 则  $L^-$  的参数方程是  $\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ ,  $t: \beta \rightarrow \alpha$ 。所以

$$\int_{L^-} Pdx + Qdy = \int_{\beta}^{\alpha} \left[ P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) \right] dt$$





性质 设

- $L$  是有向曲线,
- $L^-$  是  $L$  的反向曲线,

则

$$\int_{L^-} Pdx + Qdy = - \int_L Pdx + Qdy$$

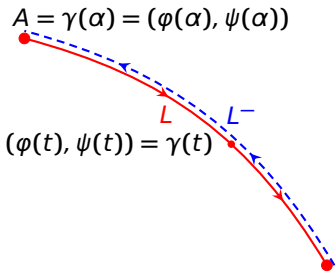
$$A = \gamma(\alpha) = (\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$$

$$(\varphi(t), \psi(t)) = \gamma(t)$$

$$(\varphi(\beta), \psi(\beta)) = \gamma(\beta) = B$$

**证明** 设  $L$  的参数方程是  $\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ ,  $t: \alpha \rightarrow \beta$ , 则  $L^-$  的参数方程是  $\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ ,  $t: \beta \rightarrow \alpha$ 。所以

$$\begin{aligned} \int_{L^-} Pdx + Qdy &= \int_{\beta}^{\alpha} \left[ P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) \right] dt \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} \left[ P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) \right] dt \\ &= - \int_L Pdx + Qdy \end{aligned}$$

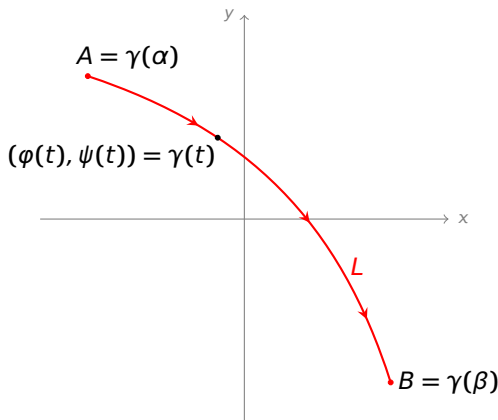


# 曲线积分的其他表达式

---

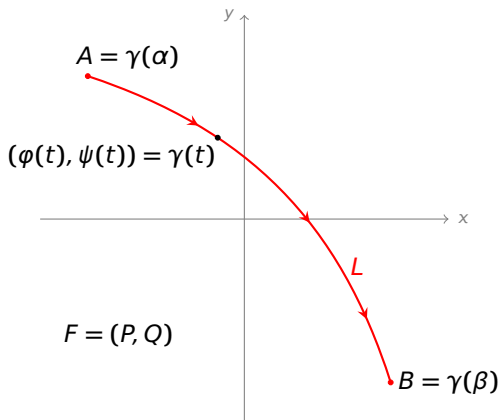
# 曲线积分的其他表达式

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_{\alpha}^{\beta} \left[ P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) \right] dt$$



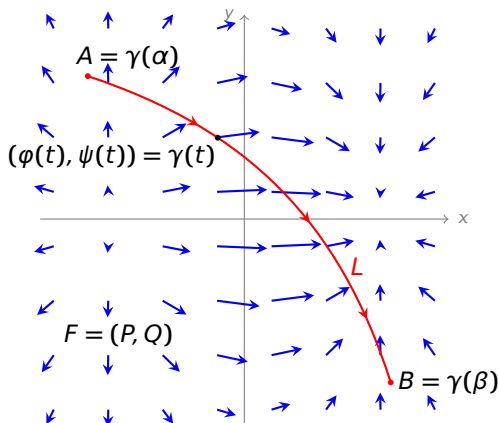
# 曲线积分的其他表达式

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_{\alpha}^{\beta} \left[ P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) \right] dt$$



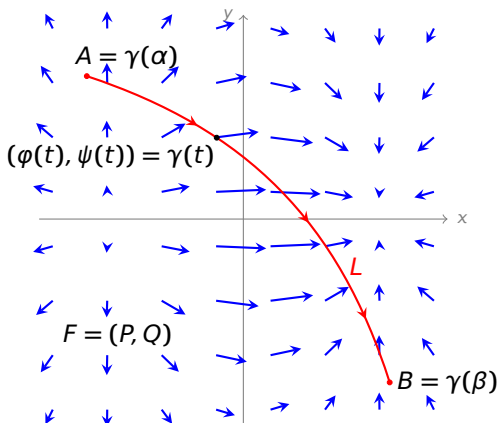
# 曲线积分的其他表达式

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_{\alpha}^{\beta} \left[ P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) \right] dt$$



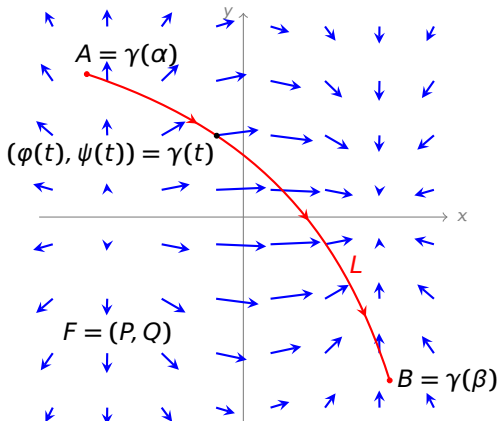
# 曲线积分的其他表达式

$$\begin{aligned}\int_L Pdx + Qdy &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[ P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) \right] dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[ (P(\gamma(t)), Q(\gamma(t))) \cdot (\varphi'(t), \psi'(t)) \right] dt\end{aligned}$$



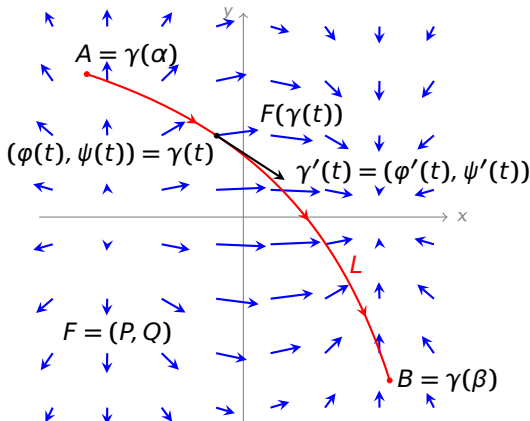
# 曲线积分的其他表达式

$$\begin{aligned}\int_L Pdx + Qdy &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[ P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) \right] dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[ (P(\gamma(t)), Q(\gamma(t))) \cdot (\varphi'(t), \psi'(t)) \right] dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[ F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \right] dt\end{aligned}$$



# 曲线积分的其他表达式

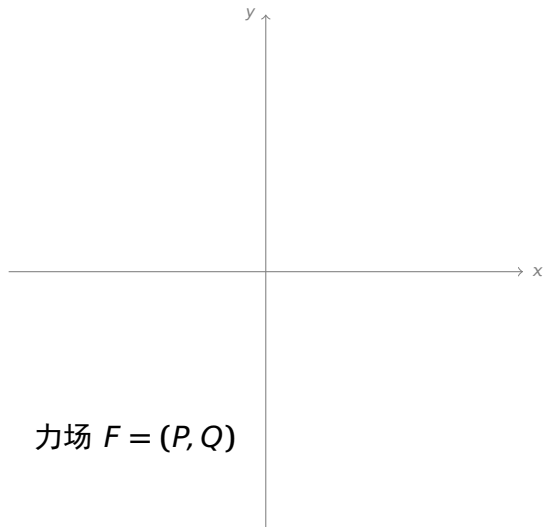
$$\begin{aligned}\int_L Pdx + Qdy &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[ P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) \right] dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[ (P(\gamma(t)), Q(\gamma(t))) \cdot (\varphi'(t), \psi'(t)) \right] dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[ F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \right] dt\end{aligned}$$



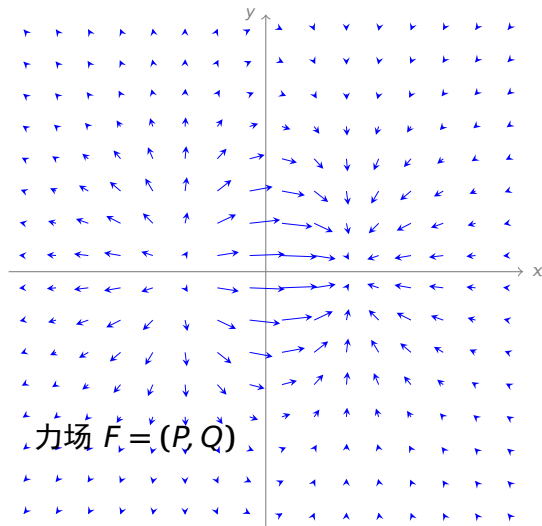


# 对弧长的曲线积分的物理应用：做功

---

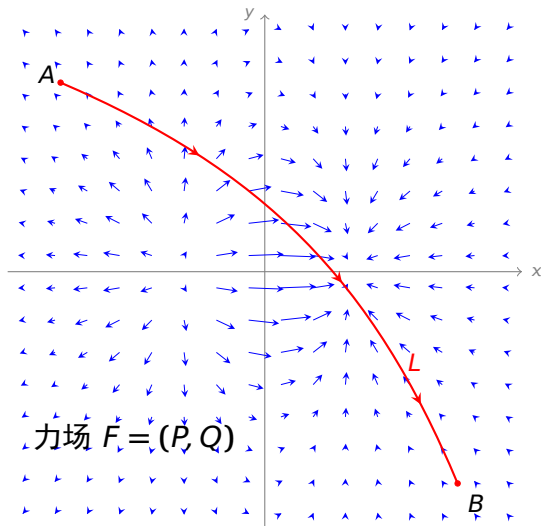


# 对弧长的曲线积分的物理应用：做功



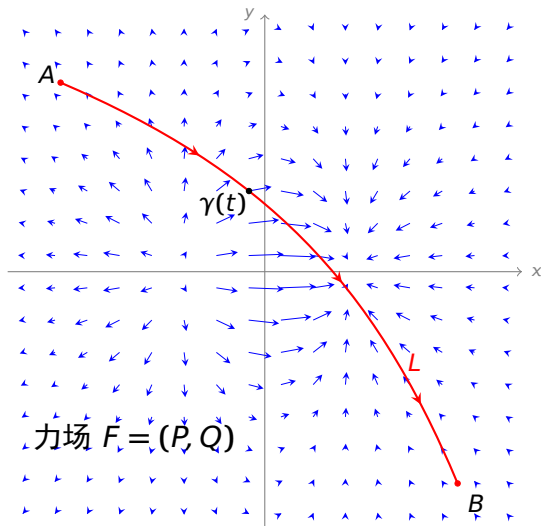
# 对弧长的曲线积分的物理应用：做功

$W =$



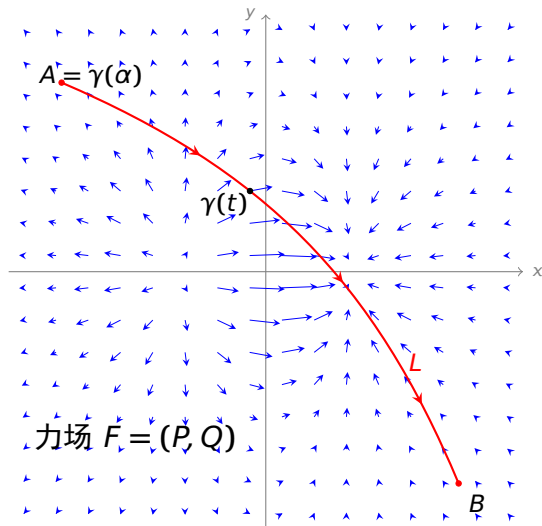
# 对弧长的曲线积分的物理应用：做功

$W =$



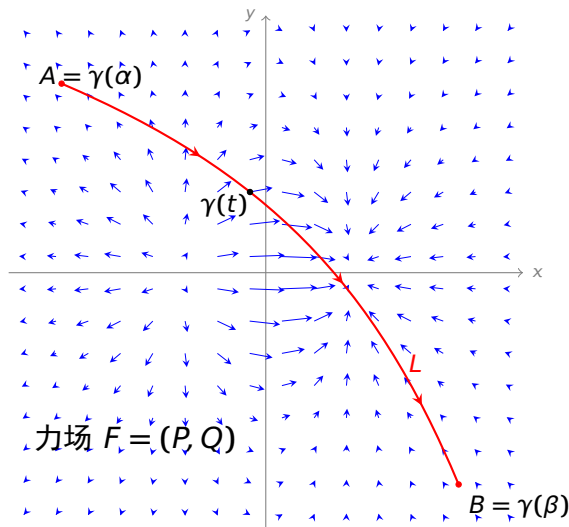
# 对弧长的曲线积分的物理应用：做功

$$W =$$



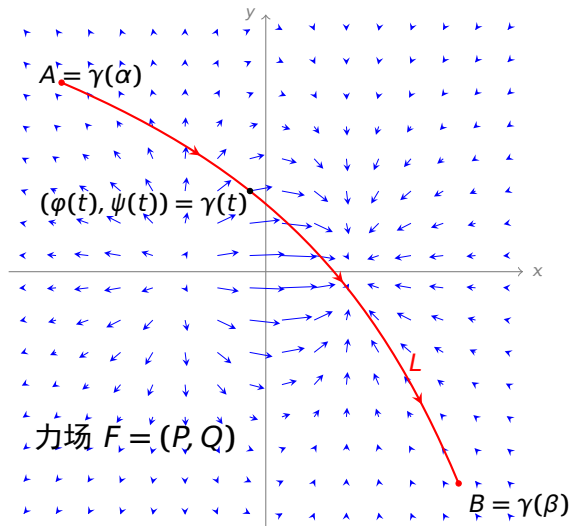
# 对弧长的曲线积分的物理应用：做功

$$W =$$



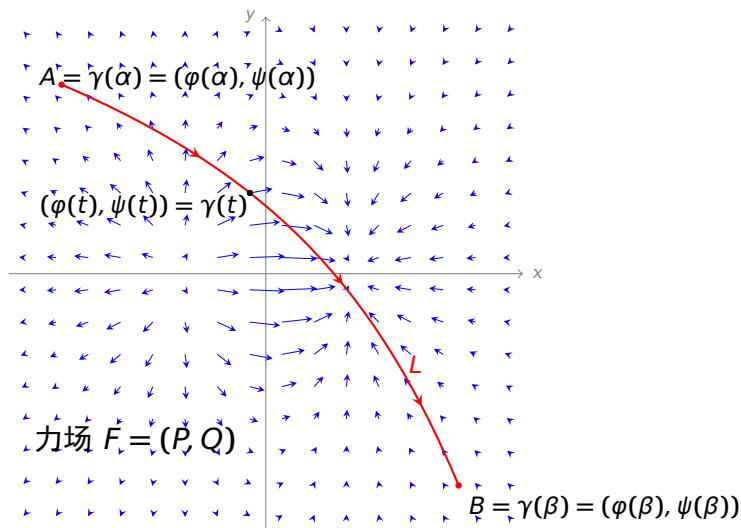
# 对弧长的曲线积分的物理应用：做功

$$W =$$



# 对弧长的曲线积分的物理应用：做功

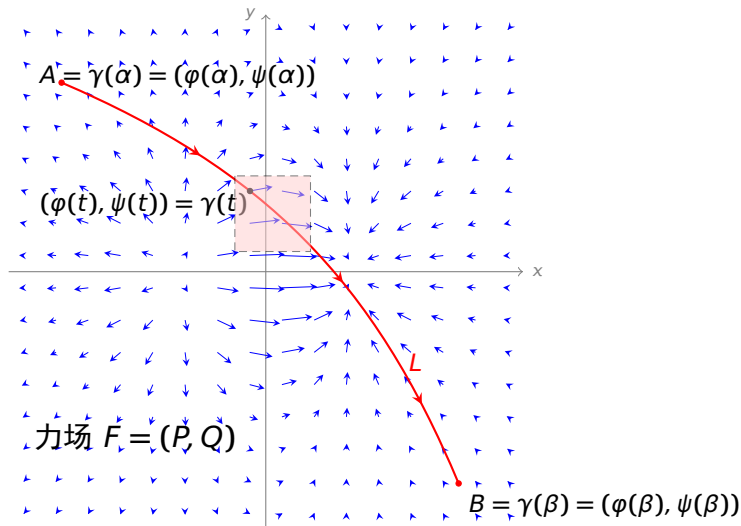
$$W =$$





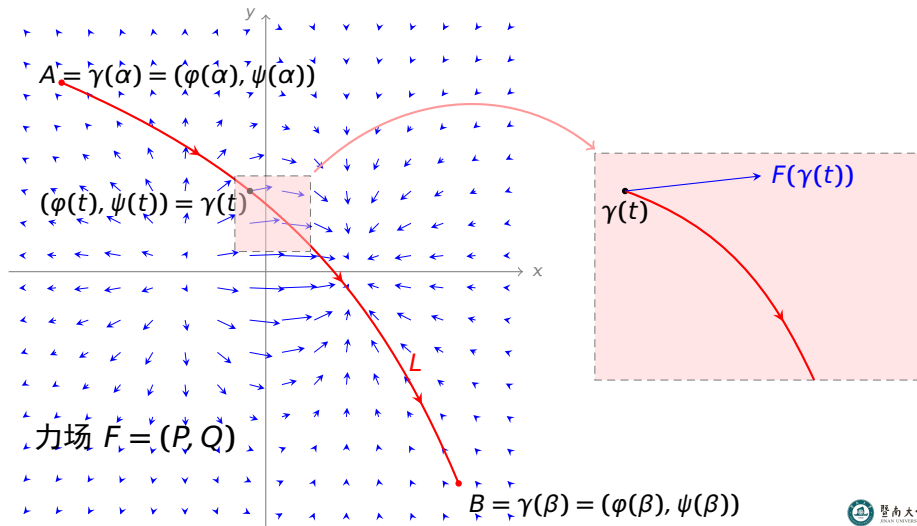
# 对弧长的曲线积分的物理应用：做功

$$W =$$



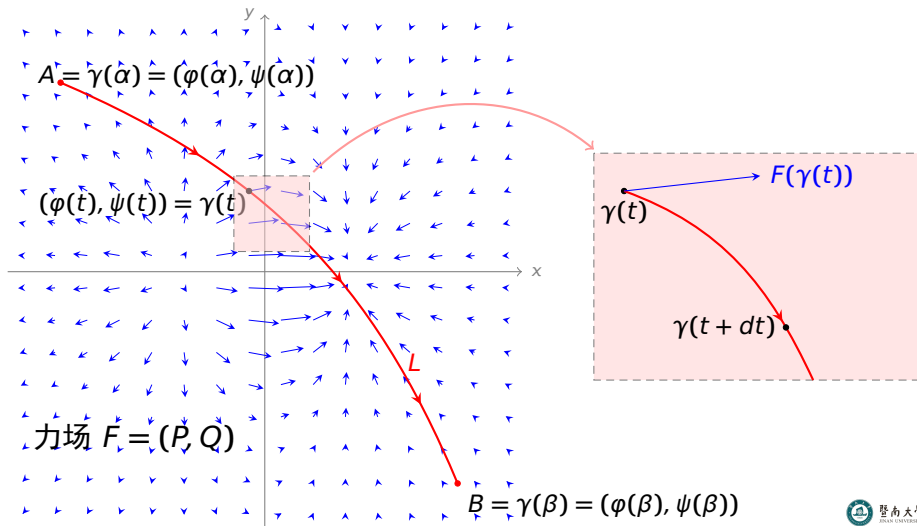
# 对弧长的曲线积分的物理应用：做功

$$W =$$



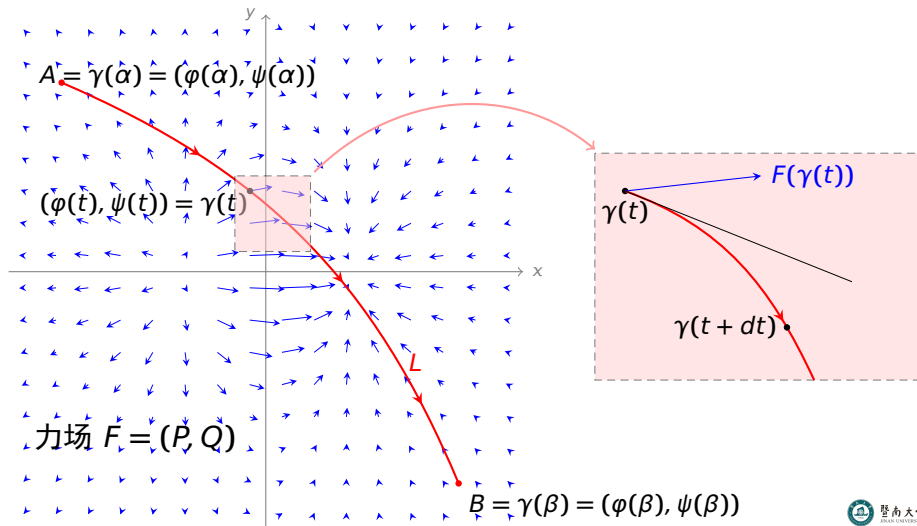
# 对弧长的曲线积分的物理应用：做功

$$W =$$



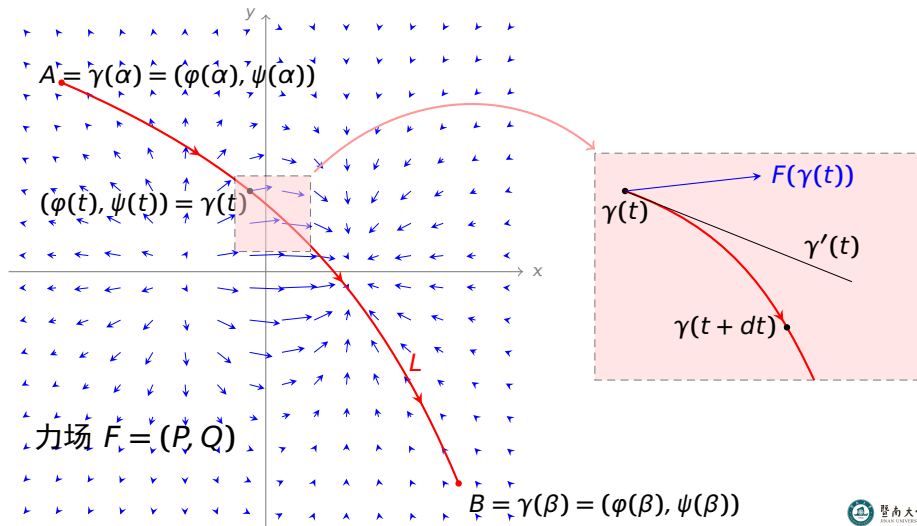
# 对弧长的曲线积分的物理应用：做功

$$W =$$



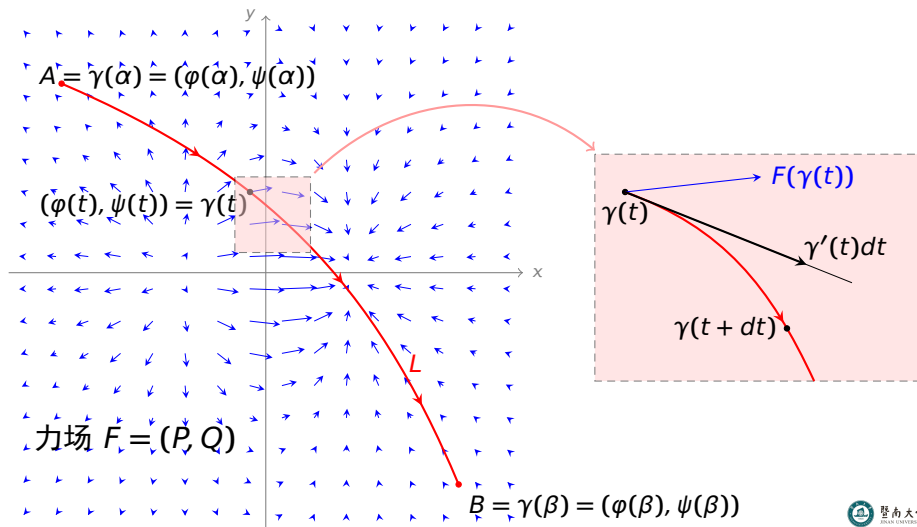
# 对弧长的曲线积分的物理应用：做功

$$W =$$



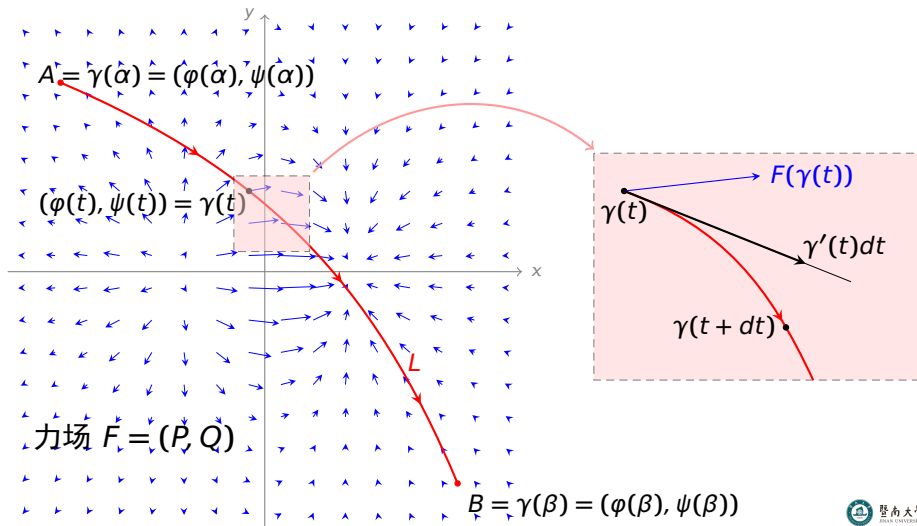
# 对弧长的曲线积分的物理应用：做功

$$W =$$



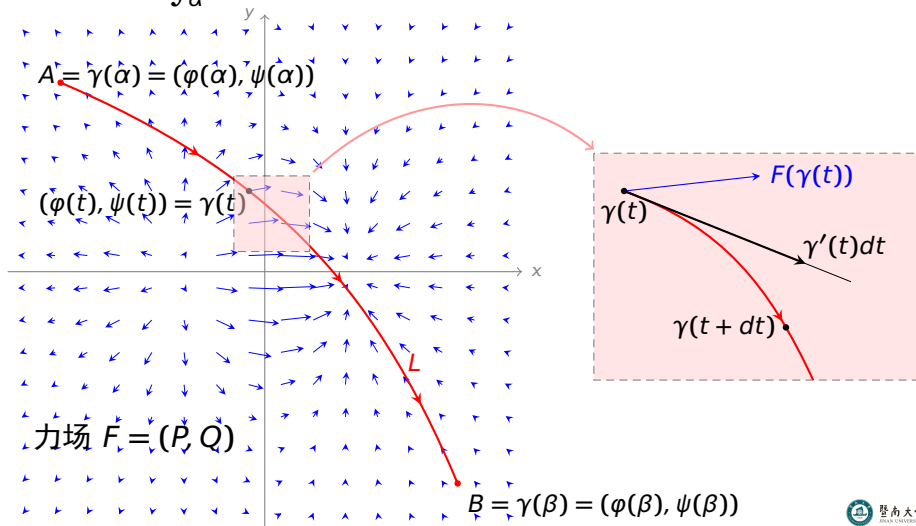
# 对弧长的曲线积分的物理应用：做功

$$W = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$



# 对弧长的曲线积分的物理应用：做功

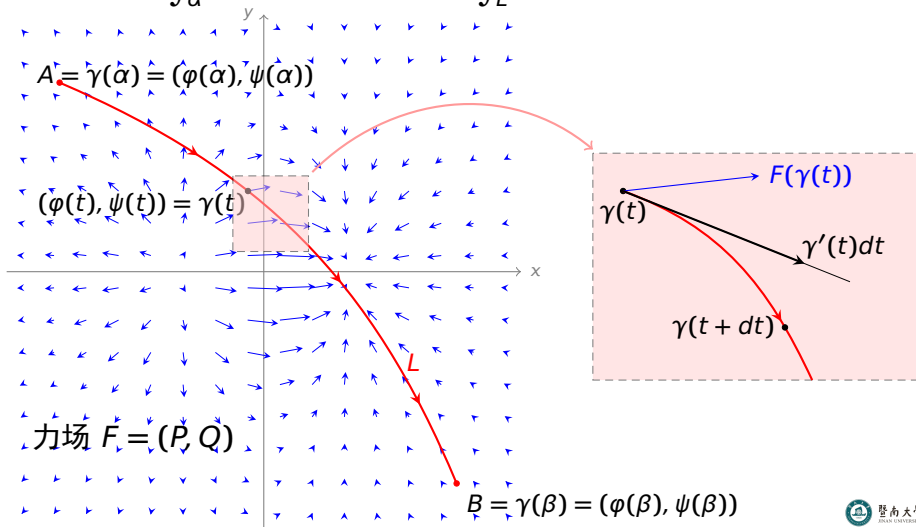
$$W = \int_{\alpha}^{\beta} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$





# 对弧长的曲线积分的物理应用：做功

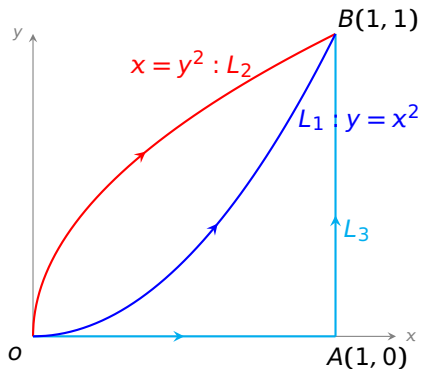
$$W = \int_{\alpha}^{\beta} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$



例 计算

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy$$

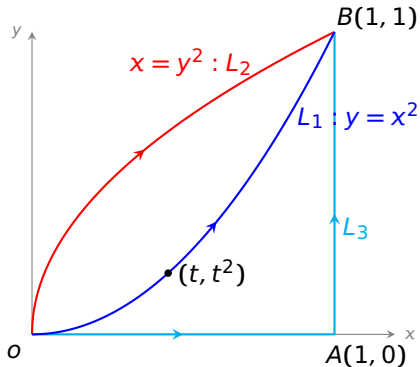
( $i = 1, 2, 3$ ), 其中  $L_i$  如右图所示



例 计算

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy$$

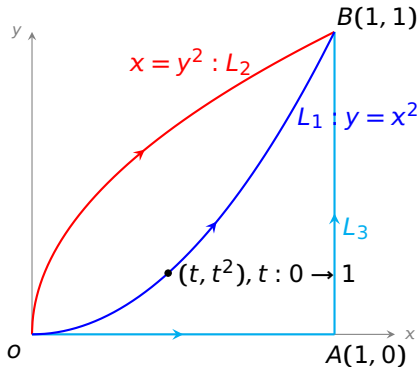
( $i = 1, 2, 3$ ), 其中  $L_i$  如右图所示



例 计算

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy$$

( $i = 1, 2, 3$ ), 其中  $L_i$  如右图所示



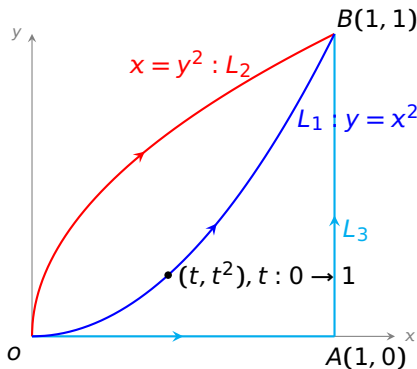
例 计算

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy$$

( $i = 1, 2, 3$ ), 其中  $L_i$  如右图所示

解

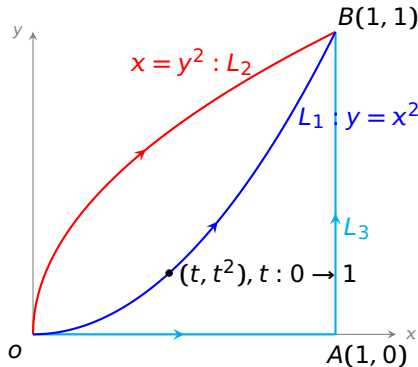
$$I_1 = \int_0^1 \left[ 2t \cdot t^2 \cdot t' + t^2 \cdot (t^2)' \right] dt$$



例 计算

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy$$

( $i = 1, 2, 3$ ), 其中  $L_i$  如右图所示



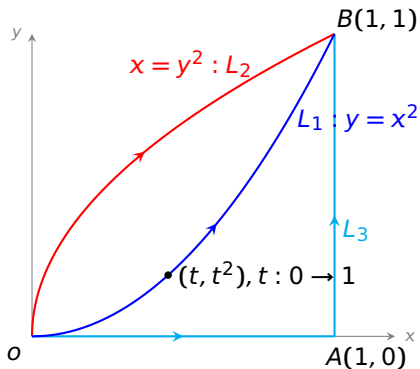
解

$$I_1 = \int_0^1 \left[ 2t \cdot t^2 \cdot t' + t^2 \cdot (t^2)' \right] dt = 4 \int_0^1 t^3 dt$$

例 计算

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy$$

( $i = 1, 2, 3$ ), 其中  $L_i$  如右图所示



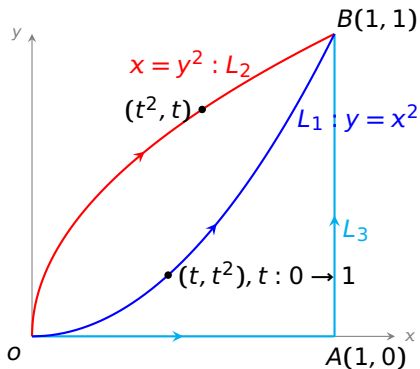
解

$$I_1 = \int_0^1 \left[ 2t \cdot t^2 \cdot t' + t^2 \cdot (t^2)' \right] dt = 4 \int_0^1 t^3 dt = 1,$$

例 计算

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy$$

( $i = 1, 2, 3$ ), 其中  $L_i$  如右图所示



解

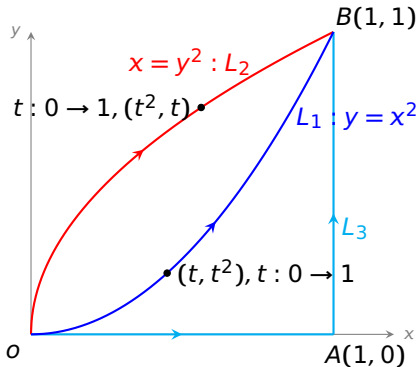
$$I_1 = \int_0^1 \left[ 2t \cdot t^2 \cdot t' + t^2 \cdot (t^2)' \right] dt = 4 \int_0^1 t^3 dt = 1,$$



例 计算

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy$$

( $i = 1, 2, 3$ ), 其中  $L_i$  如右图所示



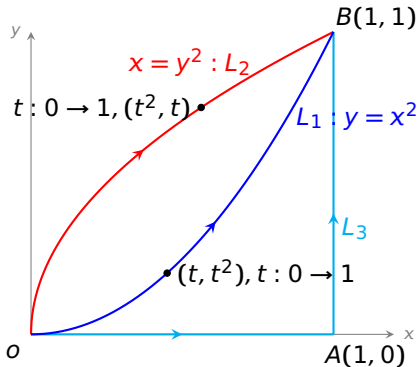
解

$$I_1 = \int_0^1 \left[ 2t \cdot t^2 \cdot t' + t^2 \cdot (t^2)' \right] dt = 4 \int_0^1 t^3 dt = 1,$$

例 计算

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy$$

( $i = 1, 2, 3$ ), 其中  $L_i$  如右图所示



解

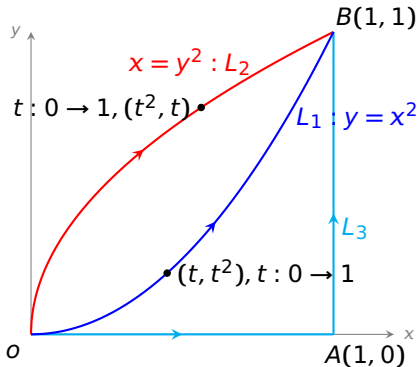
$$I_1 = \int_0^1 \left[ 2t \cdot t^2 \cdot t' + t^2 \cdot (t^2)' \right] dt = 4 \int_0^1 t^3 dt = 1,$$

$$I_2 = \int_0^1 \left[ 2t^2 \cdot t \cdot (t^2)' + (t^2)^2 \cdot t' \right] dt$$

例 计算

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy$$

( $i = 1, 2, 3$ ), 其中  $L_i$  如右图所示



解

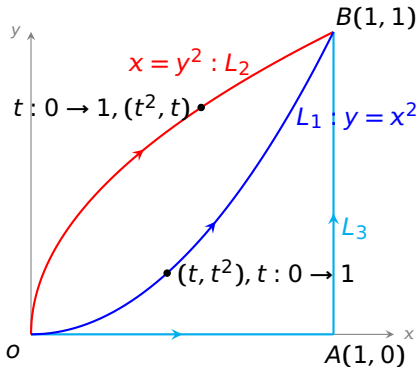
$$I_1 = \int_0^1 \left[ 2t \cdot t^2 \cdot t' + t^2 \cdot (t^2)' \right] dt = 4 \int_0^1 t^3 dt = 1,$$

$$I_2 = \int_0^1 \left[ 2t^2 \cdot t \cdot (t^2)' + (t^2)^2 \cdot t' \right] dt = 5 \int_0^1 t^4 dt$$

例 计算

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy$$

( $i = 1, 2, 3$ ), 其中  $L_i$  如右图所示



解

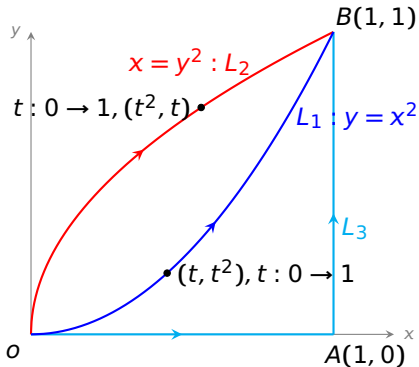
$$I_1 = \int_0^1 \left[ 2t \cdot t^2 \cdot t' + t^2 \cdot (t^2)' \right] dt = 4 \int_0^1 t^3 dt = 1,$$

$$I_2 = \int_0^1 \left[ 2t^2 \cdot t \cdot (t^2)' + (t^2)^2 \cdot t' \right] dt = 5 \int_0^1 t^4 dt = 1,$$

例 计算

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy$$

( $i = 1, 2, 3$ ), 其中  $L_i$  如右图所示



解

$$I_1 = \int_0^1 \left[ 2t \cdot t^2 \cdot t' + t^2 \cdot (t^2)' \right] dt = 4 \int_0^1 t^3 dt = 1,$$

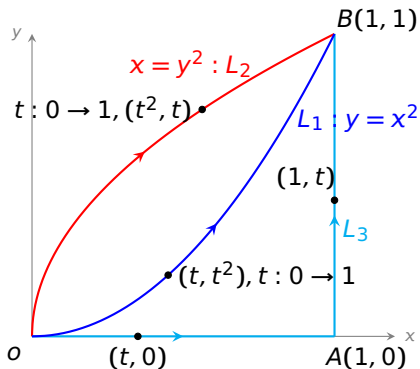
$$I_2 = \int_0^1 \left[ 2t^2 \cdot t \cdot (t^2)' + (t^2)^2 \cdot t' \right] dt = 5 \int_0^1 t^4 dt = 1,$$

$$I_3 = \int_{OA} (2xydx + x^2)dy + \int_{AB} (2xydx + x^2)dy$$

例 计算

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy$$

( $i = 1, 2, 3$ ), 其中  $L_i$  如右图所示



解

$$I_1 = \int_0^1 \left[ 2t \cdot t^2 \cdot t' + t^2 \cdot (t^2)' \right] dt = 4 \int_0^1 t^3 dt = 1,$$

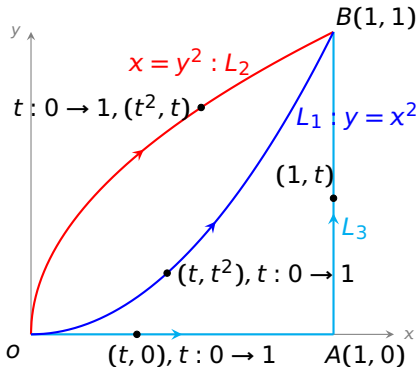
$$I_2 = \int_0^1 \left[ 2t^2 \cdot t \cdot (t^2)' + (t^2)^2 \cdot t' \right] dt = 5 \int_0^1 t^4 dt = 1,$$

$$I_3 = \int_{OA} (2xydx + x^2)dy + \int_{AB} (2xydx + x^2)dy$$

例 计算

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy$$

( $i = 1, 2, 3$ ), 其中  $L_i$  如右图所示



解

$$I_1 = \int_0^1 \left[ 2t \cdot t^2 \cdot t' + t^2 \cdot (t^2)' \right] dt = 4 \int_0^1 t^3 dt = 1,$$

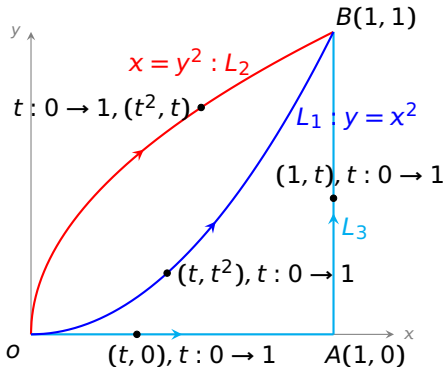
$$I_2 = \int_0^1 \left[ 2t^2 \cdot t \cdot (t^2)' + (t^2)^2 \cdot t' \right] dt = 5 \int_0^1 t^4 dt = 1,$$

$$I_3 = \int_{OA} (2xydx + x^2)dy + \int_{AB} (2xydx + x^2)dy$$

例 计算

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy$$

( $i = 1, 2, 3$ ), 其中  $L_i$  如右图所示



解

$$I_1 = \int_0^1 \left[ 2t \cdot t^2 \cdot t' + t^2 \cdot (t^2)' \right] dt = 4 \int_0^1 t^3 dt = 1,$$

$$I_2 = \int_0^1 \left[ 2t^2 \cdot t \cdot (t^2)' + (t^2)^2 \cdot t' \right] dt = 5 \int_0^1 t^4 dt = 1,$$

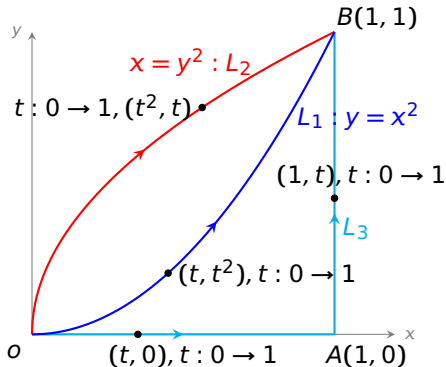
$$I_3 = \int_{OA} (2xydx + x^2)dy + \int_{AB} (2xydx + x^2)dy$$



例 计算

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy$$

( $i = 1, 2, 3$ ), 其中  $L_i$  如右图所示



解

$$I_1 = \int_0^1 [2t \cdot t^2 \cdot t' + t^2 \cdot (t^2)'] dt = 4 \int_0^1 t^3 dt = 1,$$

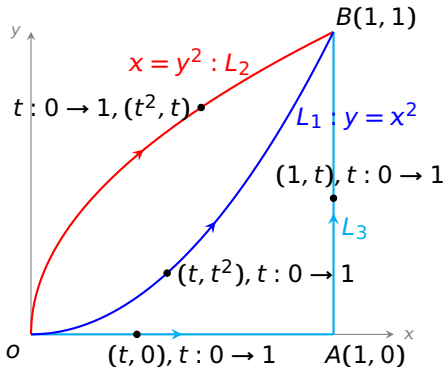
$$I_2 = \int_0^1 [2t^2 \cdot t \cdot (t^2)' + (t^2)^2 \cdot t'] dt = 5 \int_0^1 t^4 dt = 1,$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{OA} (2xydx + x^2)dy + \int_{AB} (2xydx + x^2)dy \\ &= \int_0^1 [2t \cdot 0 \cdot t' + t^2 \cdot 0'] dt + \end{aligned}$$

例 计算

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy$$

( $i = 1, 2, 3$ ), 其中  $L_i$  如右图所示



解

$$I_1 = \int_0^1 \left[ 2t \cdot t^2 \cdot t' + t^2 \cdot (t^2)' \right] dt = 4 \int_0^1 t^3 dt = 1,$$

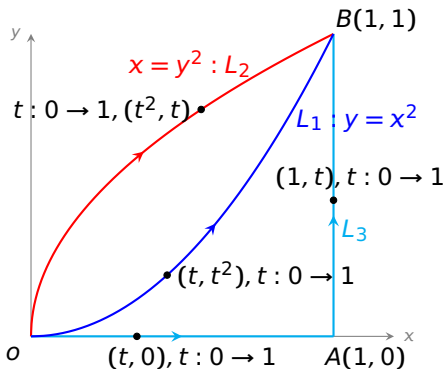
$$I_2 = \int_0^1 \left[ 2t^2 \cdot t \cdot (t^2)' + (t^2)^2 \cdot t' \right] dt = 5 \int_0^1 t^4 dt = 1,$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{OA} (2xydx + x^2)dy + \int_{AB} (2xydx + x^2)dy \\ &= \int_0^1 \left[ 2t \cdot 0 \cdot t' + t^2 \cdot 0' \right] dt + \int_0^1 \left[ 2 \cdot 1 \cdot t \cdot 1' + 1^2 \cdot t' \right] dt \end{aligned}$$

例 计算

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy$$

( $i = 1, 2, 3$ ), 其中  $L_i$  如右图所示



解

$$I_1 = \int_0^1 [2t \cdot t^2 \cdot t' + t^2 \cdot (t^2)'] dt = 4 \int_0^1 t^3 dt = 1,$$

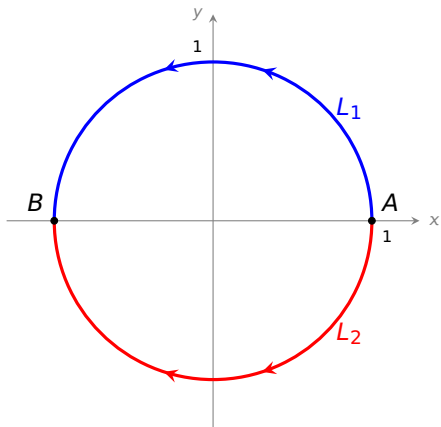
$$I_2 = \int_0^1 [2t^2 \cdot t \cdot (t^2)' + (t^2)^2 \cdot t'] dt = 5 \int_0^1 t^4 dt = 1,$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{OA} (2xydx + x^2)dy + \int_{AB} (2xydx + x^2)dy \\ &= \int_0^1 [2t \cdot 0 \cdot t' + t^2 \cdot 0'] dt + \int_0^1 [2 \cdot 1 \cdot t \cdot 1' + 1^2 \cdot t'] dt = 1. \end{aligned}$$

例 计算

$$I_i = \int_{L_i} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

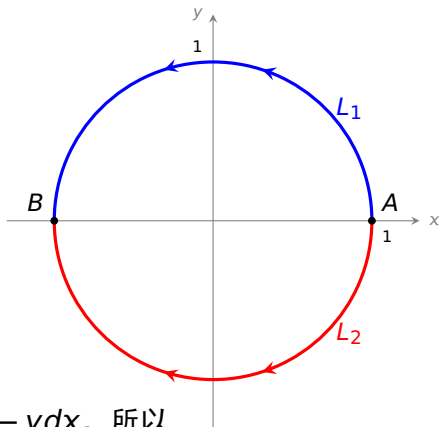
( $i = 1, 2$ ), 其中  $L_i$  如右图所示



例 计算

$$I_i = \int_{L_i} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

( $i = 1, 2$ ), 其中  $L_i$  如右图所示

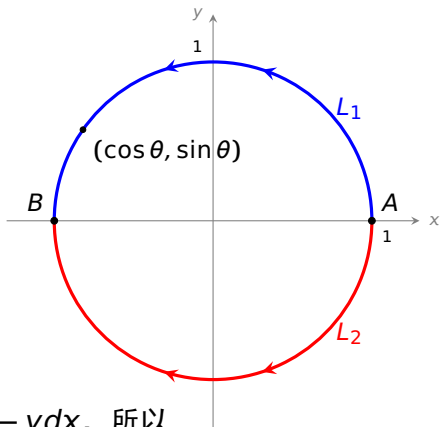


解 注意在单位圆周上,  $I_i = \int_{L_i} xdy - ydx$ , 所以

例 计算

$$I_i = \int_{L_i} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

( $i = 1, 2$ ), 其中  $L_i$  如右图所示

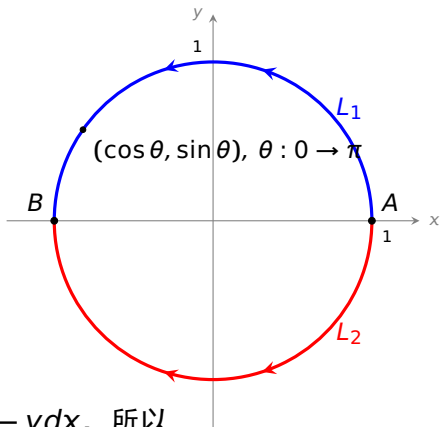


解 注意在单位圆周上,  $I_i = \int_{L_i} xdy - ydx$ , 所以

例 计算

$$I_i = \int_{L_i} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

( $i = 1, 2$ ), 其中  $L_i$  如右图所示

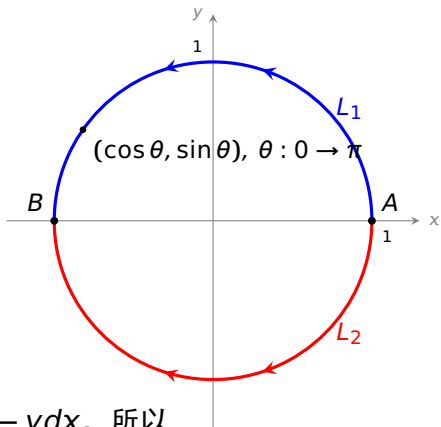


解 注意在单位圆周上,  $I_i = \int_{L_i} xdy - ydx$ , 所以

例 计算

$$I_i = \int_{L_i} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

( $i = 1, 2$ ), 其中  $L_i$  如右图所示



解 注意在单位圆周上,  $I_i = \int_{L_i} xdy - ydx$ , 所以

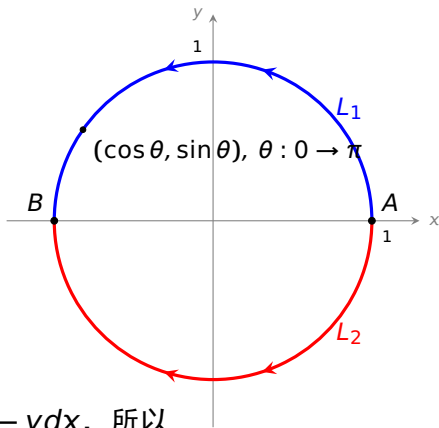
$$I_1 = \int_0^\pi [\cos \theta \cdot (\sin \theta)' - \sin \theta \cdot (\cos \theta)'] d\theta$$



例 计算

$$I_i = \int_{L_i} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

( $i = 1, 2$ ), 其中  $L_i$  如右图所示



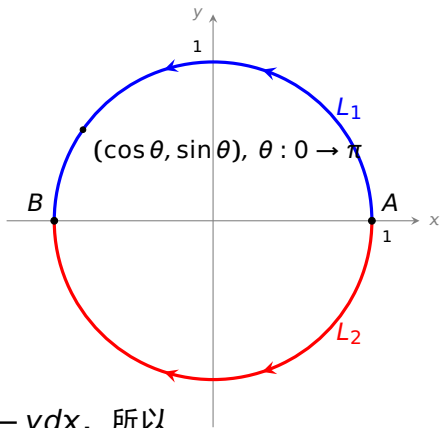
解 注意在单位圆周上,  $I_i = \int_{L_i} xdy - ydx$ , 所以

$$I_1 = \int_0^\pi [\cos \theta \cdot (\sin \theta)' - \sin \theta \cdot (\cos \theta)'] d\theta = \int_0^\pi 1 d\theta$$

例 计算

$$I_i = \int_{L_i} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

( $i = 1, 2$ ), 其中  $L_i$  如右图所示



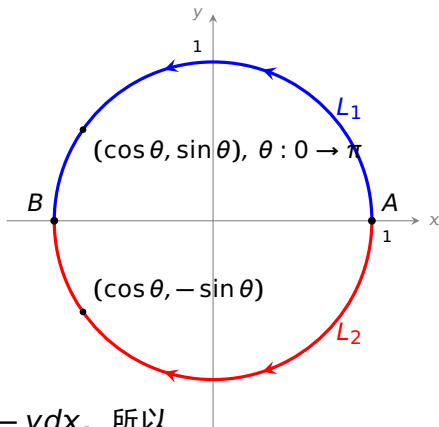
解 注意在单位圆周上,  $I_i = \int_{L_i} xdy - ydx$ , 所以

$$I_1 = \int_0^\pi [\cos \theta \cdot (\sin \theta)' - \sin \theta \cdot (\cos \theta)'] d\theta = \int_0^\pi 1 d\theta = \pi,$$

例 计算

$$I_i = \int_{L_i} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

( $i = 1, 2$ ), 其中  $L_i$  如右图所示



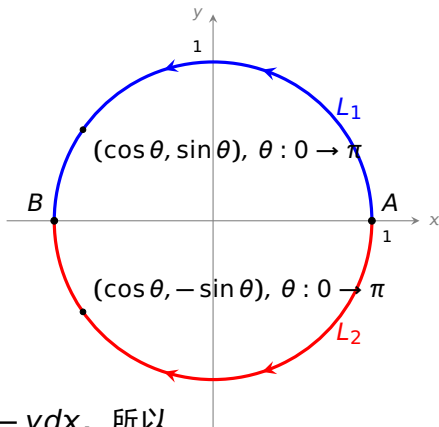
解 注意在单位圆周上,  $I_i = \int_{L_i} xdy - ydx$ , 所以

$$I_1 = \int_0^\pi \left[ \cos \theta \cdot (\sin \theta)' - \sin \theta \cdot (\cos \theta)' \right] d\theta = \int_0^\pi 1 d\theta = \pi,$$

例 计算

$$I_i = \int_{L_i} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

( $i = 1, 2$ ), 其中  $L_i$  如右图所示



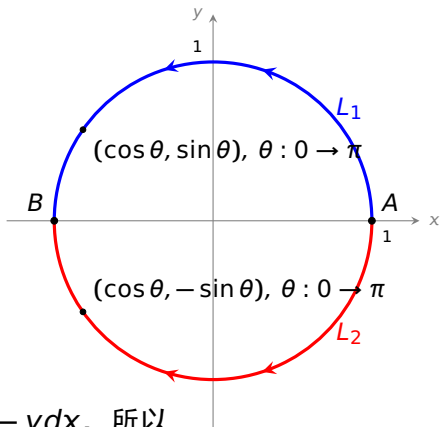
解 注意在单位圆周上,  $I_i = \int_{L_i} xdy - ydx$ , 所以

$$I_1 = \int_0^\pi \left[ \cos \theta \cdot (\sin \theta)' - \sin \theta \cdot (\cos \theta)' \right] d\theta = \int_0^\pi 1 d\theta = \pi,$$

例 计算

$$I_i = \int_{L_i} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

( $i = 1, 2$ ), 其中  $L_i$  如右图所示



解 注意在单位圆周上,  $I_i = \int_{L_i} xdy - ydx$ , 所以

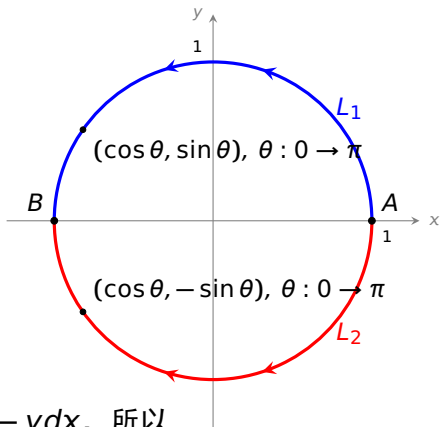
$$I_1 = \int_0^\pi [\cos \theta \cdot (\sin \theta)' - \sin \theta \cdot (\cos \theta)'] d\theta = \int_0^\pi 1 d\theta = \pi,$$

$$I_2 = \int_0^\pi [\cos \theta \cdot (-\sin \theta)' - (-\sin \theta) \cdot (\cos \theta)'] dt$$

例 计算

$$I_i = \int_{L_i} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

( $i = 1, 2$ ), 其中  $L_i$  如右图所示



解 注意在单位圆周上,  $I_i = \int_{L_i} xdy - ydx$ , 所以

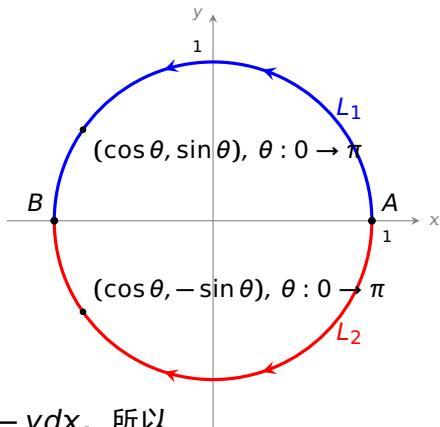
$$I_1 = \int_0^\pi [\cos \theta \cdot (\sin \theta)' - \sin \theta \cdot (\cos \theta)'] d\theta = \int_0^\pi 1 d\theta = \pi,$$

$$I_2 = \int_0^\pi [\cos \theta \cdot (-\sin \theta)' - (-\sin \theta) \cdot (\cos \theta)'] dt = \int_0^\pi -1 d\theta$$

例 计算

$$I_i = \int_{L_i} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

( $i = 1, 2$ ), 其中  $L_i$  如右图所示



解 注意在单位圆周上,  $I_i = \int_{L_i} xdy - ydx$ , 所以

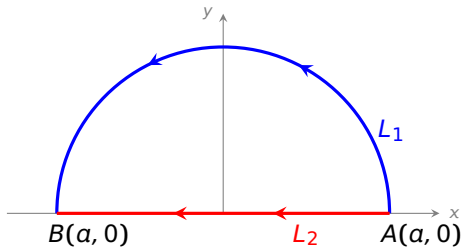
$$I_1 = \int_0^\pi [\cos \theta \cdot (\sin \theta)' - \sin \theta \cdot (\cos \theta)'] d\theta = \int_0^\pi 1 d\theta = \pi,$$

$$I_2 = \int_0^\pi [\cos \theta \cdot (-\sin \theta)' - (-\sin \theta) \cdot (\cos \theta)'] d\theta = \int_0^\pi -1 d\theta = -\pi.$$

例 计算

$$I_i = \int_{L_i} (x + y + 1)dx + ydy$$

( $i = 1, 2$ ), 其中  $L_i$  如右图所示

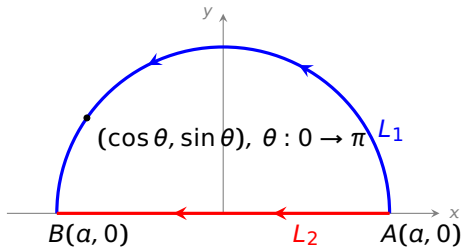




例 计算

$$I_i = \int_{L_i} (x + y + 1)dx + ydy$$

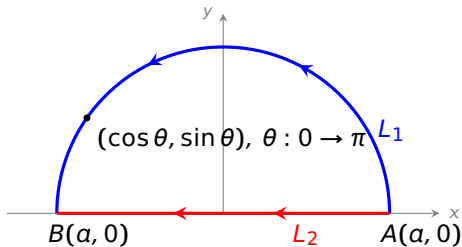
( $i = 1, 2$ ), 其中  $L_i$  如右图所示



例 计算

$$I_i = \int_{L_i} (x + y + 1)dx + ydy$$

( $i = 1, 2$ ), 其中  $L_i$  如右图所示



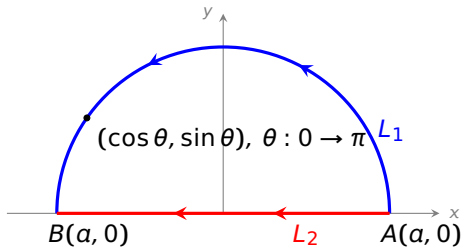
解

$$I_1 = \int_0^\pi \left[ (a \cos t + a \sin t + 1) \cdot (a \cos t)' + a \sin t \cdot (a \sin t)' \right] d\theta$$

例 计算

$$I_i = \int_{L_i} (x + y + 1)dx + ydy$$

( $i = 1, 2$ ), 其中  $L_i$  如右图所示



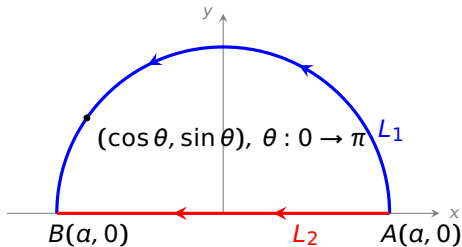
解

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\pi \left[ (a \cos t + a \sin t + 1) \cdot (a \cos t)' + a \sin t \cdot (a \sin t)' \right] d\theta \\ &= \int_0^\pi \left[ -a^2 \sin^2 t - a \sin t \right] dt \end{aligned}$$

例 计算

$$I_i = \int_{L_i} (x + y + 1)dx + ydy$$

( $i = 1, 2$ ), 其中  $L_i$  如右图所示



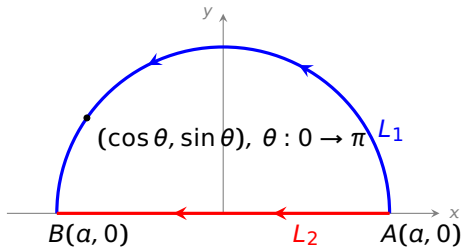
解

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\pi \left[ (a \cos t + a \sin t + 1) \cdot (a \cos t)' + a \sin t \cdot (a \sin t)' \right] d\theta \\ &= \int_0^\pi \left[ -a^2 \sin^2 t - a \sin t \right] dt \\ &= -a^2 \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2t}{2} dt - a \int_0^\pi \sin t dt \end{aligned}$$

例 计算

$$I_i = \int_{L_i} (x + y + 1)dx + ydy$$

( $i = 1, 2$ ), 其中  $L_i$  如右图所示



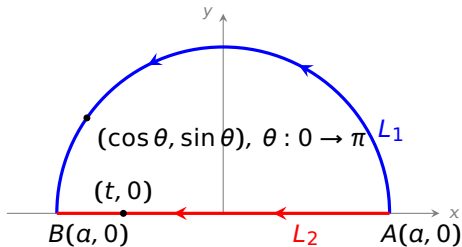
解

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\pi \left[ (a \cos t + a \sin t + 1) \cdot (a \cos t)' + a \sin t \cdot (a \sin t)' \right] d\theta \\ &= \int_0^\pi \left[ -a^2 \sin^2 t - a \sin t \right] dt \\ &= -a^2 \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2t}{2} dt - a \int_0^\pi \sin t dt = -\frac{1}{2} \pi a^2 - 2a, \end{aligned}$$

例 计算

$$I_i = \int_{L_i} (x + y + 1)dx + ydy$$

( $i = 1, 2$ ), 其中  $L_i$  如右图所示



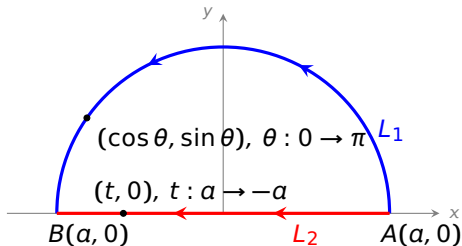
解

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\pi \left[ (a \cos t + a \sin t + 1) \cdot (a \cos t)' + a \sin t \cdot (a \sin t)' \right] d\theta \\ &= \int_0^\pi \left[ -a^2 \sin^2 t - a \sin t \right] dt \\ &= -a^2 \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2t}{2} dt - a \int_0^\pi \sin t dt = -\frac{1}{2} \pi a^2 - 2a, \end{aligned}$$

例 计算

$$I_i = \int_{L_i} (x + y + 1)dx + ydy$$

( $i = 1, 2$ ), 其中  $L_i$  如右图所示



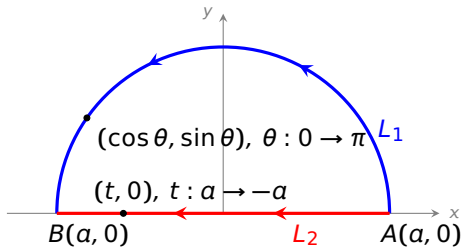
解

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\pi \left[ (a \cos t + a \sin t + 1) \cdot (a \cos t)' + a \sin t \cdot (a \sin t)' \right] d\theta \\ &= \int_0^\pi \left[ -a^2 \sin^2 t - a \sin t \right] dt \\ &= -a^2 \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2t}{2} dt - a \int_0^\pi \sin t dt = -\frac{1}{2} \pi a^2 - 2a, \end{aligned}$$

例 计算

$$I_i = \int_{L_i} (x + y + 1)dx + ydy$$

( $i = 1, 2$ ), 其中  $L_i$  如右图所示



解

$$I_1 = \int_0^\pi \left[ (a \cos t + a \sin t + 1) \cdot (a \cos t)' + a \sin t \cdot (a \sin t)' \right] d\theta$$

$$= \int_0^\pi \left[ -a^2 \sin^2 t - a \sin t \right] dt$$

$$= -a^2 \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2t}{2} dt - a \int_0^\pi \sin t dt = -\frac{1}{2} \pi a^2 - 2a,$$

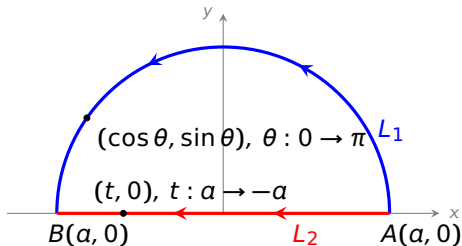
$$I_2 = \int_a^{-a} \left[ (t + 0 + 1) \cdot (t)' + 0 \cdot (0)' \right] dt$$



例 计算

$$I_i = \int_{L_i} (x + y + 1)dx + ydy$$

( $i = 1, 2$ ), 其中  $L_i$  如右图所示



解

$$I_1 = \int_0^\pi \left[ (a \cos t + a \sin t + 1) \cdot (a \cos t)' + a \sin t \cdot (a \sin t)' \right] d\theta$$

$$= \int_0^\pi \left[ -a^2 \sin^2 t - a \sin t \right] dt$$

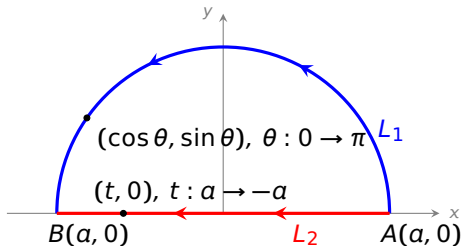
$$= -a^2 \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2t}{2} dt - a \int_0^\pi \sin t dt = -\frac{1}{2} \pi a^2 - 2a,$$

$$I_2 = \int_a^{-a} \left[ (t + 0 + 1) \cdot (t)' + 0 \cdot (0)' \right] dt = \int_a^{-a} (t + 1) dt$$

例 计算

$$I_i = \int_{L_i} (x + y + 1)dx + ydy$$

( $i = 1, 2$ ), 其中  $L_i$  如右图所示



解

$$I_1 = \int_0^\pi \left[ (a \cos t + a \sin t + 1) \cdot (a \cos t)' + a \sin t \cdot (a \sin t)' \right] d\theta$$

$$= \int_0^\pi \left[ -a^2 \sin^2 t - a \sin t \right] dt$$

$$= -a^2 \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2t}{2} dt - a \int_0^\pi \sin t dt = -\frac{1}{2} \pi a^2 - 2a,$$

$$I_2 = \int_a^{-a} \left[ (t + 0 + 1) \cdot (t)' + 0 \cdot (0)' \right] dt = \int_a^{-a} (t + 1) dt = -2a.$$

# We are here now...

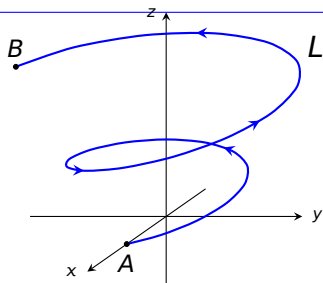
---

1. 对坐标的曲线积分：平面有向曲线
2. 对坐标的曲线积分：空间有向曲线
3. 两类曲线积分的联系

# 空间曲线的曲线积分

假设

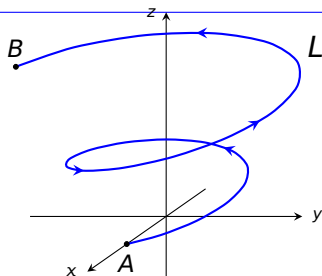
- $D$  是空间中三维有界闭区域
- $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$  定义在  $D$  上
- $L$  是  $D$  中从点  $A$  到  $B$  的有向曲线



# 空间曲线的曲线积分

假设

- $D$  是空间中三维有界闭区域
- $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$  定义在  $D$  上
- $L$  是  $D$  中从点  $A$  到点  $B$  的有向曲线



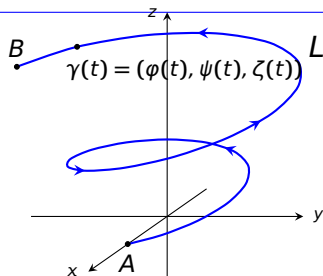
所谓有向曲线  $L$  上的曲线积分（或者“第二类曲线积分”）指：

$$\int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

# 空间曲线的曲线积分

假设

- $D$  是空间中三维有界闭区域
- $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$  定义在  $D$  上
- $L$  是  $D$  中从点  $A$  到点  $B$  的有向曲线



所谓有向曲线  $L$  上的曲线积分（或者“第二类曲线积分”）指：

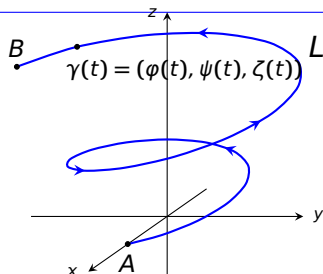
$$\int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

计算方法：设  $\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t), \xi(t))$  是  $L$  参数方程， $t: \alpha \rightarrow \beta$ ，则

# 空间曲线的曲线积分

假设

- $D$  是空间中三维有界闭区域
- $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$  定义在  $D$  上
- $L$  是  $D$  中从点  $A$  到点  $B$  的有向曲线



所谓有向曲线  $L$  上的曲线积分（或者“第二类曲线积分”）指：

$$\int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

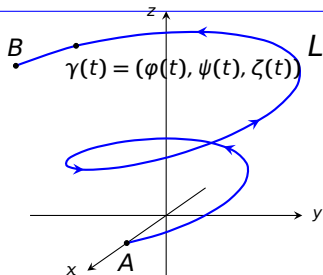
计算方法：设  $\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t), \xi(t))$  是  $L$  参数方程， $t: \alpha \rightarrow \beta$ ，则

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz = \int_{\alpha}^{\beta} \left[ P(\gamma(t))d\varphi(t) + Q(\gamma(t))d\psi(t) + R(\gamma(t))d\zeta(t) \right]$$

# 空间曲线的曲线积分

假设

- $D$  是空间中三维有界闭区域
- $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$  定义在  $D$  上
- $L$  是  $D$  中从点  $A$  到  $B$  的有向曲线



所谓有向曲线  $L$  上的曲线积分（或者“第二类曲线积分”）指：

$$\int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

计算方法：设  $\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t), \xi(t))$  是  $L$  参数方程， $t: \alpha \rightarrow \beta$ ，则

$$\begin{aligned}\int_L Pdx + Qdy + Rdz &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[ P(\gamma(t))d\varphi(t) + Q(\gamma(t))d\psi(t) + R(\gamma(t))d\zeta(t) \right] \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[ P(\gamma(t))\varphi'(t) + Q(\gamma(t))\psi'(t) + R(\gamma(t))\zeta'(t) \right] dt\end{aligned}$$



例 计算  $\int_L \cos z dx + e^x dy + e^y dz$ , 其中  $L$  是有向曲线  
 $\gamma(t) = (1, t, e^t), t: 0 \rightarrow 2$

例 计算  $\int_L \cos z dx + e^x dy + e^y dz$ , 其中  $L$  是有向曲线  
 $\gamma(t) = (1, t, e^t), t: 0 \rightarrow 2$

解

$$\text{原式} = \int_0^2 \left[ \cos(e^t) \cdot (1)' + e^1 \cdot (t)' + e^t \cdot (e^t)' \right] dt$$

**例** 计算  $\int_L \cos z dx + e^x dy + e^y dz$ , 其中  $L$  是有向曲线  
 $\gamma(t) = (1, t, e^t)$ ,  $t: 0 \rightarrow 2$

**解**

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int_0^2 \left[ \cos(e^t) \cdot (1)' + e^1 \cdot (t)' + e^t \cdot (e^t)' \right] dt \\ &= \int_0^2 \left[ e + e^{2t} \right] dt\end{aligned}$$

例 计算  $\int_L \cos z dx + e^x dy + e^y dz$ , 其中  $L$  是有向曲线  
 $\gamma(t) = (1, t, e^t)$ ,  $t: 0 \rightarrow 2$

解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_0^2 \left[ \cos(e^t) \cdot (1)' + e^1 \cdot (t)' + e^t \cdot (e^t)' \right] dt \\ &= \int_0^2 \left[ e + e^{2t} \right] dt = et + \frac{1}{2} e^{2t} \Big|_0^2 \end{aligned}$$

例 计算  $\int_L \cos z dx + e^x dy + e^y dz$ , 其中  $L$  是有向曲线  
 $\gamma(t) = (1, t, e^t)$ ,  $t: 0 \rightarrow 2$

解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_0^2 \left[ \cos(e^t) \cdot (1)' + e^1 \cdot (t)' + e^t \cdot (e^t)' \right] dt \\ &= \int_0^2 \left[ e + e^{2t} \right] dt = et + \frac{1}{2} e^{2t} \Big|_0^2 = \frac{1}{2} e^4 + 2e - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

# We are here now...

---

1. 对坐标的曲线积分：平面有向曲线
2. 对坐标的曲线积分：空间有向曲线
3. 两类曲线积分的联系

假设

- $P(x, y), Q(x, y)$  是定义在平面区域  $D$  上二元函数,
- $X = (P, Q)$  是  $D$  上向量场,
- 平面曲线  $L$  的参数方程为  $\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t)), t: \alpha \rightarrow \beta$ ,

则

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy =$$

假设

- $P(x, y), Q(x, y)$  是定义在平面区域  $D$  上二元函数,
- $X = (P, Q)$  是  $D$  上向量场,
- 平面曲线  $L$  的参数方程为  $\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t)), t: \alpha \rightarrow \beta$ ,

则

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_L X(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt$$



假设

- $P(x, y), Q(x, y)$  是定义在平面区域  $D$  上二元函数,
- $X = (P, Q)$  是  $D$  上向量场,
- 平面曲线  $L$  的参数方程为  $\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t)), t: \alpha \rightarrow \beta$ ,

则

$$\begin{aligned}\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy &= \int_L X(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt \\ &= \int_L X(\gamma(t)) \cdot \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} \cdot |\gamma'(t)|dt\end{aligned}$$

假设

- $P(x, y), Q(x, y)$  是定义在平面区域  $D$  上二元函数,
- $X = (P, Q)$  是  $D$  上向量场,
- 平面曲线  $L$  的参数方程为  $\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t)), t: \alpha \rightarrow \beta$ ,

则

$$\begin{aligned}\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy &= \int_L X(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt \\ &= \int_L X(\gamma(t)) \cdot \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} \cdot |\gamma'(t)|dt \\ &= \int_L X(\gamma(t)) \cdot \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} \cdot \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}dt\end{aligned}$$

假设

- $P(x, y), Q(x, y)$  是定义在平面区域  $D$  上二元函数,
- $X = (P, Q)$  是  $D$  上向量场,
- 平面曲线  $L$  的参数方程为  $\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t)), t: \alpha \rightarrow \beta$ ,

则

$$\begin{aligned}\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy &= \int_L X(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt \\&= \int_L X(\gamma(t)) \cdot \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} \cdot |\gamma'(t)|dt \\&= \int_L X(\gamma(t)) \cdot \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} \cdot \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}dt \\&= \int_L X(\gamma(t)) \cdot \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} ds\end{aligned}$$