第 9 章 d：隐函数的求导公式

数学系　梁卓滨

2017-2018 学年 II

Outline

1. 隐函数的求导法：一个方程的情形

2. 隐函数的求导法：方程组的情形

3. 隐函数定理

We are here now...

1. 隐函数的求导法：一个方程的情形

2. 隐函数的求导法：方程组的情形

3. 隐函数定理

隐函数的求导法 I

公式 设 $y = y(x)$ 满足 $F(x, y) = 0$,

隐函数的求导法 I

公式 设 $y = y(x)$ 满足 $F(x, y) = 0$，即 $F(x, y(x)) = 0$，

隐函数的求导法 I

公式 设 $y = y(x)$ 满足 $F(x, y) = 0$，即 $F(x, y(x)) = 0$，则

$$\frac{dy}{dx} =$$

隐函数的求导法 I

公式 设 $y = y(x)$ 满足 $F(x, y) = 0$，即 $F(x, y(x)) = 0$，则

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

隐函数的求导法 I

公式 设 $y = y(x)$ 满足 $F(x, y) = 0$，即 $F(x, y(x)) = 0$，则

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} \qquad (F_y \neq 0)$$

隐函数的求导法 I

公式 设 $y = y(x)$ 满足 $F(x, y) = 0$，即 $F(x, y(x)) = 0$，则

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} \qquad (F_y \neq 0)$$

证明 $\because \quad F(x, y(x)) = 0$

隐函数的求导法 I

公式 设 $y = y(x)$ 满足 $F(x, y) = 0$，即 $F(x, y(x)) = 0$，则

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} \qquad (F_y \neq 0)$$

证明

$$\because \quad F(x, y(x)) = 0$$

$$\therefore \quad 0 = \frac{d}{dx} F(x, y(x)) =$$

隐函数的求导法 I

公式 设 $y = y(x)$ 满足 $F(x, y) = 0$，即 $F(x, y(x)) = 0$，则

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} \qquad (F_y \neq 0)$$

证明

$$\because \quad F(x, y(x)) = 0$$

$$\therefore \quad 0 = \frac{d}{dx}F(x, y(x)) =$$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & x & \\ F \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & y \arrow[r] & x \end{tikzcd}$$

隐函数的求导法 I

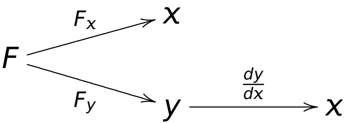
公式 设 $y = y(x)$ 满足 $F(x, y) = 0$，即 $F(x, y(x)) = 0$，则

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} \qquad (F_y \neq 0)$$

证明

$$\because \quad F(x, y(x)) = 0$$

$$\therefore \quad 0 = \frac{d}{dx} F(x, y(x)) =$$



隐函数的求导法 I

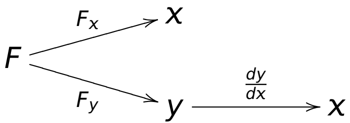
公式 设 $y = y(x)$ 满足 $F(x, y) = 0$，即 $F(x, y(x)) = 0$，则

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} \qquad (F_y \neq 0)$$

证明

$$\because \quad F(x, y(x)) = 0$$

$$\therefore \quad 0 = \frac{d}{dx}F(x, y(x)) = F_x +$$



隐函数的求导法 I

公式 设 $y = y(x)$ 满足 $F(x, y) = 0$，即 $F(x, y(x)) = 0$，则

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} \qquad (F_y \neq 0)$$

证明

$$\because \quad F(x, y(x)) = 0$$

$$\therefore \quad 0 = \frac{d}{dx}F(x, y(x)) = F_x + F_y \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\begin{tikzcd}
 & x & \\
F \arrow[ur, "F_x"] \arrow[dr, "F_y"'] & & \\
 & y \arrow[r, "\frac{dy}{dx}"] & x
\end{tikzcd}$$

隐函数的求导法 I

公式 设 $y = y(x)$ 满足 $F(x, y) = 0$，即 $F(x, y(x)) = 0$，则

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} \qquad (F_y \neq 0)$$

证明

$$\because \quad F(x, y(x)) = 0$$

$$\therefore \quad 0 = \frac{d}{dx}F(x, y(x)) = F_x + F_y \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

$$\begin{tikzcd}
 & x & \\
F \arrow[ur, "F_x"] \arrow[dr, "F_y"'] & & \\
 & y \arrow[r, "\frac{dy}{dx}"] & x
\end{tikzcd}$$

例 设 $y = f(x)$ 满足 $\sin y + e^x = xy^2$，求 $\frac{dy}{dx}$

例 设 $y=f(x)$ 满足 $\sin y+e^x=xy^2$，求 $\frac{dy}{dx}$

方法一

$F(x,\, y)=0$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=$$

例 设 $y=f(x)$ 满足 $\sin y+e^x=xy^2$，求 $\frac{dy}{dx}$

方法一 注意 $\sin y+e^x-xy^2=0$

$F(x, y)=0$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=$$

例 设 $y = f(x)$ 满足 $\sin y + e^x = xy^2$，求 $\frac{dy}{dx}$

方法一 注意 $\sin y + e^x - xy^2 = 0$，令 $F(x, y) = \sin y + e^x - xy^2$，$F(x, y) = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} =$$

例 设 $y=f(x)$ 满足 $\sin y+e^x=xy^2$，求 $\frac{dy}{dx}$

方法一 注意 $\sin y+e^x-xy^2=0$，令 $F(x,y)=\sin y+e^x-xy^2$，则 $F(x,y)=0$，所以

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{(\sin y+e^x-xy^2)'_x}{(\sin y+e^x-xy^2)'_y}=$$

例 设 $y=f(x)$ 满足 $\sin y+e^x=xy^2$，求 $\frac{dy}{dx}$

方法一 注意 $\sin y+e^x-xy^2=0$，令 $F(x,y)=\sin y+e^x-xy^2$，则 $F(x,y)=0$，所以

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{(\sin y+e^x-xy^2)'_x}{(\sin y+e^x-xy^2)'_y}=-\underline{\qquad\qquad}$$

例 设 $y=f(x)$ 满足 $\sin y+e^x=xy^2$，求 $\frac{dy}{dx}$

方法一 注意 $\sin y+e^x-xy^2=0$，令 $F(x,y)=\sin y+e^x-xy^2$，则 $F(x,y)=0$，所以

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{(\sin y+e^x-xy^2)'_x}{(\sin y+e^x-xy^2)'_y}=-\frac{e^x-y^2}{\qquad\qquad}$$

例 设 $y = f(x)$ 满足 $\sin y + e^x = xy^2$，求 $\frac{dy}{dx}$

方法一 注意 $\sin y + e^x - xy^2 = 0$，令 $F(x, y) = \sin y + e^x - xy^2$，则 $F(x, y) = 0$，所以

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{(\sin y + e^x - xy^2)'_x}{(\sin y + e^x - xy^2)'_y} = -\frac{e^x - y^2}{\cos y - 2xy}$$

例 设 $y=f(x)$ 满足 $\sin y+e^x=xy^2$，求 $\frac{dy}{dx}$

方法一 注意 $\sin y+e^x-xy^2=0$，令 $F(x,y)=\sin y+e^x-xy^2$，则 $F(x,y)=0$，所以

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{(\sin y+e^x-xy^2)'_x}{(\sin y+e^x-xy^2)'_y}=-\frac{e^x-y^2}{\cos y-2xy}$$

方法二

例 设 $y=f(x)$ 满足 $\sin y+e^x=xy^2$，求 $\frac{dy}{dx}$

方法一 注意 $\sin y+e^x-xy^2=0$，令 $F(x,y)=\sin y+e^x-xy^2$，则 $F(x,y)=0$，所以

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{(\sin y+e^x-xy^2)'_x}{(\sin y+e^x-xy^2)'_y}=-\frac{e^x-y^2}{\cos y-2xy}$$

方法二 注意 $\sin y(x)+e^x-xy(x)^2=0$，

例 设 $y=f(x)$ 满足 $\sin y+e^x=xy^2$，求 $\frac{dy}{dx}$

方法一 注意 $\sin y+e^x-xy^2=0$，令 $F(x,y)=\sin y+e^x-xy^2$，则 $F(x,y)=0$，所以

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{(\sin y+e^x-xy^2)'_x}{(\sin y+e^x-xy^2)'_y}=-\frac{e^x-y^2}{\cos y-2xy}$$

方法二 注意 $\sin y(x)+e^x-xy(x)^2=0$，所以

$$0=\left(\sin y(x)+e^x-xy(x)^2\right)'_x$$

例 设 $y=f(x)$ 满足 $\sin y+e^x=xy^2$，求 $\frac{dy}{dx}$

方法一 注意 $\sin y+e^x-xy^2=0$，令 $F(x,y)=\sin y+e^x-xy^2$，则 $F(x,y)=0$，所以

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{(\sin y+e^x-xy^2)'_x}{(\sin y+e^x-xy^2)'_y}=-\frac{e^x-y^2}{\cos y-2xy}$$

方法二 注意 $\sin y(x)+e^x-xy(x)^2=0$，所以

$$\begin{aligned}0&=\left(\sin y(x)+e^x-xy(x)^2\right)'_x\\&=(\sin y(x))'_x+(e^x)'_x-(xy(x)^2)'_x\end{aligned}$$

例 设 $y=f(x)$ 满足 $\sin y+e^x=xy^2$，求 $\frac{dy}{dx}$

方法一 注意 $\sin y+e^x-xy^2=0$，令 $F(x,y)=\sin y+e^x-xy^2$，则 $F(x,y)=0$，所以

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{(\sin y+e^x-xy^2)'_x}{(\sin y+e^x-xy^2)'_y}=-\frac{e^x-y^2}{\cos y-2xy}$$

方法二 注意 $\sin y(x)+e^x-xy(x)^2=0$，所以

$$\begin{aligned}0&=\left(\sin y(x)+e^x-xy(x)^2\right)'_x\\&=(\sin y(x))'_x+(e^x)'_x-(xy(x)^2)'_x\\&=\cos y\cdot y'\end{aligned}$$

例 设 $y=f(x)$ 满足 $\sin y+e^x=xy^2$，求 $\frac{dy}{dx}$

方法一 注意 $\sin y+e^x-xy^2=0$，令 $F(x,y)=\sin y+e^x-xy^2$，则 $F(x,y)=0$，所以

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{(\sin y+e^x-xy^2)'_x}{(\sin y+e^x-xy^2)'_y}=-\frac{e^x-y^2}{\cos y-2xy}$$

方法二 注意 $\sin y(x)+e^x-xy(x)^2=0$，所以

$$\begin{aligned}0&=\left(\sin y(x)+e^x-xy(x)^2\right)'_x\\&=(\sin y(x))'_x+(e^x)'_x-(xy(x)^2)'_x\\&=\cos y\cdot y'+e^x\end{aligned}$$

例 设 $y=f(x)$ 满足 $\sin y+e^x=xy^2$，求 $\frac{dy}{dx}$

方法一 注意 $\sin y+e^x-xy^2=0$，令 $F(x,y)=\sin y+e^x-xy^2$，则 $F(x,y)=0$，所以

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{(\sin y+e^x-xy^2)'_x}{(\sin y+e^x-xy^2)'_y}=-\frac{e^x-y^2}{\cos y-2xy}$$

方法二 注意 $\sin y(x)+e^x-xy(x)^2=0$，所以

$$\begin{aligned}0&=\left(\sin y(x)+e^x-xy(x)^2\right)'_x\\&=(\sin y(x))'_x+(e^x)'_x-(xy(x)^2)'_x\\&=\cos y\cdot y'+e^x-y^2-2xy\cdot y'\end{aligned}$$

例 设 $y=f(x)$ 满足 $\sin y+e^x=xy^2$，求 $\frac{dy}{dx}$

方法一 注意 $\sin y+e^x-xy^2=0$，令 $F(x,y)=\sin y+e^x-xy^2$，则 $F(x,y)=0$，所以

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{(\sin y+e^x-xy^2)'_x}{(\sin y+e^x-xy^2)'_y}=-\frac{e^x-y^2}{\cos y-2xy}$$

方法二 注意 $\sin y(x)+e^x-xy(x)^2=0$，所以

$$\begin{aligned}0&=\left(\sin y(x)+e^x-xy(x)^2\right)'_x\\&=(\sin y(x))'_x+(e^x)'_x-(xy(x)^2)'_x\\&=\cos y\cdot y'+e^x-y^2-2xy\cdot y'\\&=e^x-y^2+(\cos y-2xy)y'\end{aligned}$$

例 设 $y=f(x)$ 满足 $\sin y+e^x=xy^2$，求 $\frac{dy}{dx}$

方法一 注意 $\sin y+e^x-xy^2=0$，令 $F(x,y)=\sin y+e^x-xy^2$，则 $F(x,y)=0$，所以

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{(\sin y+e^x-xy^2)'_x}{(\sin y+e^x-xy^2)'_y}=-\frac{e^x-y^2}{\cos y-2xy}$$

方法二 注意 $\sin y(x)+e^x-xy(x)^2=0$，所以

$$\begin{aligned}0&=\left(\sin y(x)+e^x-xy(x)^2\right)'_x\\&=(\sin y(x))'_x+(e^x)'_x-(xy(x)^2)'_x\\&=\cos y\cdot y'+e^x-y^2-2xy\cdot y'\\&=e^x-y^2+(\cos y-2xy)y'\end{aligned}$$

所以 $y'=-\frac{e^x-y^2}{\cos y-2xy}$

例 设 $y = f(x)$ 满足 $\ln(x^2 + y^2) + 3xy = 4$，求 $\frac{dy}{dx}$

例 设 $y = f(x)$ 满足 $\ln(x^2 + y^2) + 3xy = 4$，求 $\frac{dy}{dx}$

解

$$F(x, y) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} =$$

例 设 $y = f(x)$ 满足 $\ln(x^2 + y^2) + 3xy = 4$，求 $\frac{dy}{dx}$

解 注意 $\ln(x^2 + y^2) + 3xy - 4 = 0$

$F(x, y) = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} =$$

例 设 $y=f(x)$ 满足 $\ln(x^2+y^2)+3xy=4$，求 $\frac{dy}{dx}$

解 注意 $\ln(x^2+y^2)+3xy-4=0$，令

$$F(x,y)=\ln(x^2+y^2)+3xy-4$$

$F(x,y)=0$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=$$

例 设 $y=f(x)$ 满足 $\ln(x^2+y^2)+3xy=4$，求 $\frac{dy}{dx}$

解 注意 $\ln(x^2+y^2)+3xy-4=0$，令

$$F(x,y)=\ln(x^2+y^2)+3xy-4$$

则 $F(x,y)=0$，所以

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{(\ln(x^2+y^2)+3xy-4)'_x}{(\ln(x^2+y^2)+3xy-4)'_y}$$

例 设 $y=f(x)$ 满足 $\ln(x^2+y^2)+3xy=4$，求 $\frac{dy}{dx}$

解 注意 $\ln(x^2+y^2)+3xy-4=0$，令

$$F(x,y)=\ln(x^2+y^2)+3xy-4$$

则 $F(x,y)=0$，所以

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{(\ln(x^2+y^2)+3xy-4)'_x}{(\ln(x^2+y^2)+3xy-4)'_y}$$

$$=-\frac{\qquad}{\qquad}$$

例 设 $y=f(x)$ 满足 $\ln(x^2+y^2)+3xy=4$，求 $\frac{dy}{dx}$

解 注意 $\ln(x^2+y^2)+3xy-4=0$，令

$$F(x,y)=\ln(x^2+y^2)+3xy-4$$

则 $F(x,y)=0$，所以

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{(\ln(x^2+y^2)+3xy-4)'_x}{(\ln(x^2+y^2)+3xy-4)'_y}$$

$$=-\frac{\frac{2x}{x^2+y^2}+3y}{}$$

例 设 $y=f(x)$ 满足 $\ln(x^2+y^2)+3xy=4$，求 $\frac{dy}{dx}$

解 注意 $\ln(x^2+y^2)+3xy-4=0$，令

$$F(x,y)=\ln(x^2+y^2)+3xy-4$$

则 $F(x,y)=0$，所以

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{(\ln(x^2+y^2)+3xy-4)'_x}{(\ln(x^2+y^2)+3xy-4)'_y}$$

$$=-\frac{\frac{2x}{x^2+y^2}+3y}{\frac{2y}{x^2+y^2}+3x}$$

例 设 $y=f(x)$ 满足 $\ln(x^2+y^2)+3xy=4$，求 $\frac{dy}{dx}$

解 注意 $\ln(x^2+y^2)+3xy-4=0$，令

$$F(x,y)=\ln(x^2+y^2)+3xy-4$$

则 $F(x,y)=0$，所以

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{(\ln(x^2+y^2)+3xy-4)'_x}{(\ln(x^2+y^2)+3xy-4)'_y}$$

$$=-\frac{\frac{2x}{x^2+y^2}+3y}{\frac{2y}{x^2+y^2}+3x}$$

$$=-\frac{2x+3x^2y+3y^3}{2y+3xy^2+3x^3}$$

隐函数的求导法 II

公式 设 $z = z(x, y)$ 满足 $F(x, y, z) = 0$,

隐函数的求导法 II

公式 设 $z = z(x, y)$ 满足 $F(x, y, z) = 0$，即 $F(x, y, z(x, y)) = 0$，

隐函数的求导法 II

公式 设 $z = z(x, y)$ 满足 $F(x, y, z) = 0$，即 $F(x, y, z(x, y)) = 0$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \qquad , \qquad \frac{\partial z}{\partial y} =$$

隐函数的求导法 II

公式 设 $z = z(x, y)$ 满足 $F(x, y, z) = 0$，即 $F(x, y, z(x, y)) = 0$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} =$$

隐函数的求导法 II

公式 设 $z = z(x, y)$ 满足 $F(x, y, z) = 0$，即 $F(x, y, z(x, y)) = 0$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

隐函数的求导法 II

公式 设 $z = z(x, y)$ 满足 $F(x, y, z) = 0$，即 $F(x, y, z(x, y)) = 0$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} \qquad (F_z \neq 0)$$

隐函数的求导法 II

公式 设 $z = z(x, y)$ 满足 $F(x, y, z) = 0$，即 $F(x, y, z(x, y)) = 0$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} \qquad (F_z \neq 0)$$

证明 $\because \quad F(x, y, z(x, y)) = 0$

隐函数的求导法 II

公式 设 $z=z(x,y)$ 满足 $F(x,y,z)=0$，即 $F(x,y,z(x,y))=0$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}\qquad (F_z\neq 0)$$

证明

$$\because\quad F(x,y,z(x,y))=0$$

$$\therefore\quad 0=\frac{\partial}{\partial x}F(x,y,z(x,y))=$$

隐函数的求导法 II

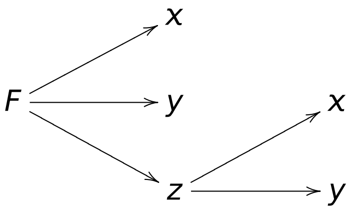
公式 设 $z = z(x, y)$ 满足 $F(x, y, z) = 0$，即 $F(x, y, z(x, y)) = 0$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} \qquad (F_z \neq 0)$$

证明

$$\because \quad F(x, y, z(x, y)) = 0$$

$$\therefore \quad 0 = \frac{\partial}{\partial x} F(x, y, z(x, y)) =$$



隐函数的求导法 II

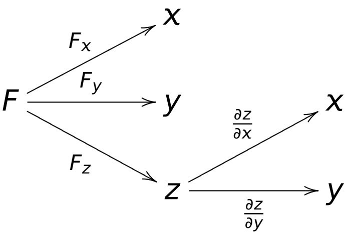
公式 设 $z=z(x,y)$ 满足 $F(x,y,z)=0$，即 $F(x,y,z(x,y))=0$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}\qquad (F_z\neq 0)$$

证明

$$\because\quad F(x,y,z(x,y))=0$$

$$\therefore\quad 0=\frac{\partial}{\partial x}F(x,y,z(x,y))=$$



隐函数的求导法 II

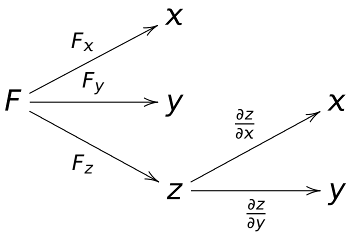
公式 设 $z = z(x, y)$ 满足 $F(x, y, z) = 0$，即 $F(x, y, z(x, y)) = 0$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} \qquad (F_z \neq 0)$$

证明

$$\because \quad F(x, y, z(x, y)) = 0$$

$$\therefore \quad 0 = \frac{\partial}{\partial x} F(x, y, z(x, y)) = F_x + F_z \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$$



隐函数的求导法 II

公式 设 $z = z(x, y)$ 满足 $F(x, y, z) = 0$，即 $F(x, y, z(x, y)) = 0$，则

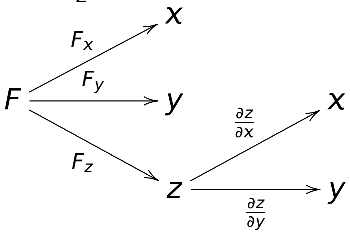
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} \qquad (F_z \neq 0)$$

证明

$$\because \quad F(x, y, z(x, y)) = 0$$

$$\therefore \quad 0 = \frac{\partial}{\partial x} F(x, y, z(x, y)) = F_x + F_z \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z},$$



隐函数的求导法 II

公式 设 $z = z(x, y)$ 满足 $F(x, y, z) = 0$，即 $F(x, y, z(x, y)) = 0$，则

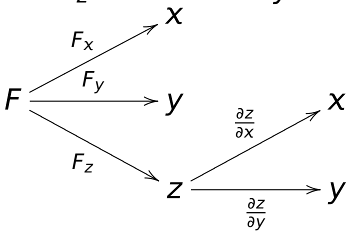
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} \qquad (F_z \neq 0)$$

证明

$$\because \quad F(x, y, z(x, y)) = 0$$

$$\therefore \quad 0 = \frac{\partial}{\partial x} F(x, y, z(x, y)) = F_x + F_z \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \qquad \text{同理} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$



例 设 $z = f(x, y)$ 满足 $x + y + xz = e^z - 1$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

例 设 $z = f(x, y)$ 满足 $x + y + xz = e^z - 1$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 $F(x, y, z) = 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} =$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} =$$

例 设 $z = f(x, y)$ 满足 $x + y + xz = e^z - 1$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x, y, z) = x + y + xz - e^z + 1$，　　$F(x, y, z) = 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} =$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} =$$

例 设 $z=f(x,y)$ 满足 $x+y+xz=e^z-1$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x,y,z)=x+y+xz-e^z+1$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(x+y+xz-e^z+1)'_x}{(x+y+xz-e^z+1)'_z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(x+y+xz-e^z+1)'_y}{(x+y+xz-e^z+1)'_z}$$

例 设 $z = f(x, y)$ 满足 $x + y + xz = e^z - 1$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x, y, z) = x + y + xz - e^z + 1$，则 $F(x, y, z) = 0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{(x + y + xz - e^z + 1)'_x}{(x + y + xz - e^z + 1)'_z}$$

$$= -\frac{\qquad}{\qquad}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{(x + y + xz - e^z + 1)'_y}{(x + y + xz - e^z + 1)'_z}$$

$$= -\frac{\qquad}{\qquad}$$

例 设 $z=f(x,y)$ 满足 $x+y+xz=e^z-1$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x,y,z)=x+y+xz-e^z+1$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(x+y+xz-e^z+1)'_x}{(x+y+xz-e^z+1)'_z}$$

$$=-\frac{\quad\quad\quad\quad}{0}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(x+y+xz-e^z+1)'_y}{(x+y+xz-e^z+1)'_z}$$

$$=-\frac{\quad\quad\quad\quad}{\quad}$$

例 设 $z=f(x,y)$ 满足 $x+y+xz=e^z-1$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x,y,z)=x+y+xz-e^z+1$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(x+y+xz-e^z+1)'_x}{(x+y+xz-e^z+1)'_z}$$

$$=-\frac{\qquad}{0+0}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(x+y+xz-e^z+1)'_y}{(x+y+xz-e^z+1)'_z}$$

$$=-\frac{\qquad}{\qquad}$$

例 设 $z=f(x,y)$ 满足 $x+y+xz=e^z-1$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x,y,z)=x+y+xz-e^z+1$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(x+y+xz-e^z+1)'_x}{(x+y+xz-e^z+1)'_z}$$

$$=-\frac{\qquad}{0+0+x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(x+y+xz-e^z+1)'_y}{(x+y+xz-e^z+1)'_z}$$

$$=-\frac{\qquad}{\qquad}$$

例 设 $z = f(x, y)$ 满足 $x + y + xz = e^z - 1$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x, y, z) = x + y + xz - e^z + 1$，则 $F(x, y, z) = 0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{(x + y + xz - e^z + 1)'_x}{(x + y + xz - e^z + 1)'_z}$$

$$= -\frac{\qquad}{0 + 0 + x - e^z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{(x + y + xz - e^z + 1)'_y}{(x + y + xz - e^z + 1)'_z}$$

$$= -\frac{\qquad}{\qquad}$$

例 设 $z = f(x, y)$ 满足 $x + y + xz = e^z - 1$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x, y, z) = x + y + xz - e^z + 1$，则 $F(x, y, z) = 0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{(x + y + xz - e^z + 1)'_x}{(x + y + xz - e^z + 1)'_z}$$

$$= -\frac{\qquad\qquad}{0 + 0 + x - e^z + 0}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{(x + y + xz - e^z + 1)'_y}{(x + y + xz - e^z + 1)'_z}$$

$$= -\frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad}$$

例 设 $z=f(x,y)$ 满足 $x+y+xz=e^z-1$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x,y,z)=x+y+xz-e^z+1$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(x+y+xz-e^z+1)'_x}{(x+y+xz-e^z+1)'_z}$$

$$=-\frac{}{0+0+x-e^z+0}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(x+y+xz-e^z+1)'_y}{(x+y+xz-e^z+1)'_z}$$

$$=-\frac{}{0+0+x-e^z+0}$$

例 设 $z = f(x, y)$ 满足 $x + y + xz = e^z - 1$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x, y, z) = x + y + xz - e^z + 1$，则 $F(x, y, z) = 0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{(x + y + xz - e^z + 1)'_x}{(x + y + xz - e^z + 1)'_z}$$

$$= -\frac{1}{0 + 0 + x - e^z + 0}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{(x + y + xz - e^z + 1)'_y}{(x + y + xz - e^z + 1)'_z}$$

$$= -\frac{}{0 + 0 + x - e^z + 0}$$

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

例 设 $z=f(x,y)$ 满足 $x+y+xz=e^z-1$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x,y,z)=x+y+xz-e^z+1$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(x+y+xz-e^z+1)'_x}{(x+y+xz-e^z+1)'_z}$$

$$=-\frac{1+0}{0+0+x-e^z+0}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(x+y+xz-e^z+1)'_y}{(x+y+xz-e^z+1)'_z}$$

$$=-\frac{}{0+0+x-e^z+0}$$

例 设 $z=f(x,y)$ 满足 $x+y+xz=e^z-1$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x,y,z)=x+y+xz-e^z+1$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(x+y+xz-e^z+1)'_x}{(x+y+xz-e^z+1)'_z}$$

$$=-\frac{1+0+z}{0+0+x-e^z+0}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(x+y+xz-e^z+1)'_y}{(x+y+xz-e^z+1)'_z}$$

$$=-\frac{}{0+0+x-e^z+0}$$

例 设 $z = f(x, y)$ 满足 $x + y + xz = e^z - 1$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x, y, z) = x + y + xz - e^z + 1$，则 $F(x, y, z) = 0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{(x + y + xz - e^z + 1)'_x}{(x + y + xz - e^z + 1)'_z}$$

$$= -\frac{1 + 0 + z - 0}{0 + 0 + x - e^z + 0}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{(x + y + xz - e^z + 1)'_y}{(x + y + xz - e^z + 1)'_z}$$

$$= -\frac{\quad}{0 + 0 + x - e^z + 0}$$

例 设 $z=f(x,y)$ 满足 $x+y+xz=e^z-1$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x,y,z)=x+y+xz-e^z+1$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(x+y+xz-e^z+1)'_x}{(x+y+xz-e^z+1)'_z}$$

$$=-\frac{1+0+z-0+0}{0+0+x-e^z+0}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(x+y+xz-e^z+1)'_y}{(x+y+xz-e^z+1)'_z}$$

$$=-\frac{\qquad}{0+0+x-e^z+0}$$

例 设 $z=f(x,y)$ 满足 $x+y+xz=e^z-1$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x,y,z)=x+y+xz-e^z+1$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(x+y+xz-e^z+1)'_x}{(x+y+xz-e^z+1)'_z}$$

$$=-\frac{1+0+z-0+0}{0+0+x-e^z+0}=-\frac{1+z}{x-e^z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(x+y+xz-e^z+1)'_y}{(x+y+xz-e^z+1)'_z}$$

$$=-\frac{\qquad}{0+0+x-e^z+0}$$

例 设 $z=f(x,y)$ 满足 $x+y+xz=e^z-1$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x,y,z)=x+y+xz-e^z+1$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(x+y+xz-e^z+1)'_x}{(x+y+xz-e^z+1)'_z}$$

$$=-\frac{1+0+z-0+0}{0+0+x-e^z+0}=-\frac{1+z}{x-e^z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(x+y+xz-e^z+1)'_y}{(x+y+xz-e^z+1)'_z}$$

$$=-\frac{0}{0+0+x-e^z+0}$$

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

例 设 $z=f(x,y)$ 满足 $x+y+xz=e^z-1$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x,y,z)=x+y+xz-e^z+1$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(x+y+xz-e^z+1)'_x}{(x+y+xz-e^z+1)'_z}$$

$$=-\frac{1+0+z-0+0}{0+0+x-e^z+0}=-\frac{1+z}{x-e^z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(x+y+xz-e^z+1)'_y}{(x+y+xz-e^z+1)'_z}$$

$$=-\frac{0+1}{0+0+x-e^z+0}$$

例 设 $z = f(x, y)$ 满足 $x + y + xz = e^z - 1$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x, y, z) = x + y + xz - e^z + 1$，则 $F(x, y, z) = 0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{(x + y + xz - e^z + 1)'_x}{(x + y + xz - e^z + 1)'_z}$$

$$= -\frac{1 + 0 + z - 0 + 0}{0 + 0 + x - e^z + 0} = -\frac{1 + z}{x - e^z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{(x + y + xz - e^z + 1)'_y}{(x + y + xz - e^z + 1)'_z}$$

$$= -\frac{0 + 1 + 0}{0 + 0 + x - e^z + 0}$$

例 设 $z=f(x,y)$ 满足 $x+y+xz=e^z-1$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x,y,z)=x+y+xz-e^z+1$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(x+y+xz-e^z+1)'_x}{(x+y+xz-e^z+1)'_z}$$
$$=-\frac{1+0+z-0+0}{0+0+x-e^z+0}=-\frac{1+z}{x-e^z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(x+y+xz-e^z+1)'_y}{(x+y+xz-e^z+1)'_z}$$
$$=-\frac{0+1+0-0}{0+0+x-e^z+0}$$

例 设 $z=f(x,y)$ 满足 $x+y+xz=e^z-1$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x,y,z)=x+y+xz-e^z+1$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(x+y+xz-e^z+1)'_x}{(x+y+xz-e^z+1)'_z}$$

$$=-\frac{1+0+z-0+0}{0+0+x-e^z+0}=-\frac{1+z}{x-e^z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(x+y+xz-e^z+1)'_y}{(x+y+xz-e^z+1)'_z}$$

$$=-\frac{0+1+0-0+0}{0+0+x-e^z+0}=-\frac{1}{x-e^z}$$

例 设 $z = f(x, y)$ 满足 $2\sin(x+2y-3z) = x+2y-3z$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

例 设 $z = f(x, y)$ 满足 $2\sin(x + 2y - 3z) = x + 2y - 3z$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解

$F(x, y, z) = 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} =$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} =$$

例 设 $z=f(x, y)$ 满足 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x, y, z)=2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z$,

$F(x, y, z)=0$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=$$

例 设 $z=f(x,y)$ 满足 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x,y,z)=2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_x}{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_y}{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_z}$$

$$=$$

例 设 $z=f(x,y)$ 满足 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x,y,z)=2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z$，则

$F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_x}{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_z}$$

$$=-\frac{}{}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_y}{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_z}$$

$$=-\frac{}{}$$

例 设 $z=f(x,y)$ 满足 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x,y,z)=2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_x}{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_z}$$

$$=-\frac{\qquad}{-6\cos(x+2y-3z)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_y}{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_z}$$

$$=-\frac{\qquad}{\qquad}$$

例 设 $z=f(x,y)$ 满足 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x,y,z)=2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_x}{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_z}$$

$$=-\frac{}{-6\cos(x+2y-3z)+3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_y}{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_z}$$

$$=-\frac{}{}$$

例 设 $z = f(x, y)$ 满足 $2\sin(x + 2y - 3z) = x + 2y - 3z$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x, y, z) = 2\sin(x + 2y - 3z) - x - 2y + 3z$，则 $F(x, y, z) = 0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{(2\sin(x + 2y - 3z) - x - 2y + 3z)'_x}{(2\sin(x + 2y - 3z) - x - 2y + 3z)'_z}$$

$$= -\frac{2\cos(x + 2y - 3z)}{-6\cos(x + 2y - 3z) + 3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{(2\sin(x + 2y - 3z) - x - 2y + 3z)'_y}{(2\sin(x + 2y - 3z) - x - 2y + 3z)'_z}$$

$$= -\frac{\qquad}{\qquad}$$

例 设 $z=f(x,y)$ 满足 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x,y,z)=2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_x}{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_z}$$

$$=-\frac{2\cos(x+2y-3z)-1}{-6\cos(x+2y-3z)+3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_y}{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_z}$$

$$=-\frac{}{}$$

例 设 $z=f(x,y)$ 满足 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x,y,z)=2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_x}{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_z}$$

$$=-\frac{2\cos(x+2y-3z)-1}{-6\cos(x+2y-3z)+3}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_y}{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_z}$$

$$=-\frac{\qquad}{\qquad}$$

例 设 $z = f(x, y)$ 满足 $2\sin(x+2y-3z) = x+2y-3z$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x, y, z) = 2\sin(x+2y-3z) - x - 2y + 3z$，则

$F(x, y, z) = 0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_x}{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_z}$$

$$= -\frac{2\cos(x+2y-3z)-1}{-6\cos(x+2y-3z)+3} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_y}{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_z}$$

$$= -\frac{\quad}{-6\cos(x+2y-3z)+3}$$

例 设 $z=f(x,y)$ 满足 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x,y,z)=2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_x}{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_z}$$

$$=-\frac{2\cos(x+2y-3z)-1}{-6\cos(x+2y-3z)+3}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_y}{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_z}$$

$$=-\frac{4\cos(x+2y-3z)}{-6\cos(x+2y-3z)+3}$$

例 设 $z=f(x,y)$ 满足 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x,y,z)=2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_x}{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_z}=-\frac{2\cos(x+2y-3z)-1}{-6\cos(x+2y-3z)+3}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_y}{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_z}=-\frac{4\cos(x+2y-3z)-2}{-6\cos(x+2y-3z)+3}$$

例 设 $z = f(x, y)$ 满足 $z - y - x + xe^{z-y-x} = 0$，求 dz

例 设 $z = f(x, y)$ 满足 $z - y - x + xe^{z-y-x} = 0$，求 dz

解

$$\frac{\partial z}{\partial x} =$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} =$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy =$$

例 设 $z=f(x,y)$ 满足 $z-y-x+xe^{z-y-x}=0$，求 dz

解 令 $F(x,y,z)=z-y-x+xe^{z-y-x}$，则 $F(x,y,z)=0$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=$$

例 设 $z = f(x, y)$ 满足 $z - y - x + xe^{z-y-x} = 0$，求 dz

解 令 $F(x, y, z) = z - y - x + xe^{z-y-x}$，则 $F(x, y, z) = 0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} =$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} =$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy =$$

例 设 $z=f(x,y)$ 满足 $z-y-x+xe^{z-y-x}=0$，求 dz

解 令 $F(x,y,z)=z-y-x+xe^{z-y-x}$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_x}{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_y}{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_z}$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=$$

例 设 $z=f(x,y)$ 满足 $z-y-x+xe^{z-y-x}=0$，求 dz

解 令 $F(x,y,z)=z-y-x+xe^{z-y-x}$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(z-y-x+xe^{z-y-x})_x'}{(z-y-x+xe^{z-y-x})_z'}$$

$$=-\frac{\qquad}{\qquad}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(z-y-x+xe^{z-y-x})_y'}{(z-y-x+xe^{z-y-x})_z'}=-\frac{\qquad}{\qquad}$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=$$

例 设 $z=f(x,y)$ 满足 $z-y-x+xe^{z-y-x}=0$，求 dz

解 令 $F(x,y,z)=z-y-x+xe^{z-y-x}$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_x}{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_z}$$

$$=-\frac{\qquad}{1+xe^{z-y-x}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_y}{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_z}=-\frac{\qquad}{\qquad}$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=$$

例 设 $z=f(x,y)$ 满足 $z-y-x+xe^{z-y-x}=0$，求 dz

解 令 $F(x,y,z)=z-y-x+xe^{z-y-x}$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_x}{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_z}$$

$$=-\frac{-1}{1+xe^{z-y-x}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_y}{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_z}=-\frac{\qquad}{\qquad}$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=$$

例 设 $z=f(x,y)$ 满足 $z-y-x+xe^{z-y-x}=0$，求 dz

解 令 $F(x,y,z)=z-y-x+xe^{z-y-x}$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_x}{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_z}$$

$$=-\frac{-1+e^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_y}{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_z}=-\frac{\qquad}{\qquad}$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=$$

例 设 $z=f(x,y)$ 满足 $z-y-x+xe^{z-y-x}=0$，求 dz

解 令 $F(x,y,z)=z-y-x+xe^{z-y-x}$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_x}{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_z}$$

$$=-\frac{-1+e^{z-y-x}-xe^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_y}{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_z}=-\underline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=$$

例 设 $z = f(x, y)$ 满足 $z - y - x + xe^{z-y-x} = 0$，求 dz

解 令 $F(x, y, z) = z - y - x + xe^{z-y-x}$，则 $F(x, y, z) = 0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_x}{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_z}$$

$$= -\frac{-1+e^{z-y-x}-xe^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}} = \frac{1+(x-1)e^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_y}{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_z} = -\frac{\qquad}{\qquad}$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy =$$

例 设 $z=f(x,y)$ 满足 $z-y-x+xe^{z-y-x}=0$，求 dz

解 令 $F(x,y,z)=z-y-x+xe^{z-y-x}$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_x}{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_z}$$

$$=-\frac{-1+e^{z-y-x}-xe^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}}=\frac{1+(x-1)e^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_y}{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_z}=-\frac{\quad}{1+xe^{z-y-x}}$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=$$

例 设 $z=f(x,y)$ 满足 $z-y-x+xe^{z-y-x}=0$，求 dz

解 令 $F(x,y,z)=z-y-x+xe^{z-y-x}$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_x}{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_z}$$

$$=-\frac{-1+e^{z-y-x}-xe^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}}=\frac{1+(x-1)e^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_y}{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_z}=-\frac{-1}{1+xe^{z-y-x}}$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=$$

例 设 $z=f(x,y)$ 满足 $z-y-x+xe^{z-y-x}=0$，求 dz

解 令 $F(x,y,z)=z-y-x+xe^{z-y-x}$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_x}{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_z}$$

$$=-\frac{-1+e^{z-y-x}-xe^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}}=\frac{1+(x-1)e^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_y}{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_z}=-\frac{-1-xe^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}}$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=$$

例 设 $z=f(x,y)$ 满足 $z-y-x+xe^{z-y-x}=0$，求 dz

解 令 $F(x,y,z)=z-y-x+xe^{z-y-x}$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_x}{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_z}$$

$$=-\frac{-1+e^{z-y-x}-xe^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}}=\frac{1+(x-1)e^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_y}{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_z}=-\frac{-1-xe^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}}=1$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=$$

暨南大学 JINAN UNIVERSITY

例 设 $z=f(x,y)$ 满足 $z-y-x+xe^{z-y-x}=0$，求 dz

解 令 $F(x,y,z)=z-y-x+xe^{z-y-x}$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_x}{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_z}$$

$$=-\frac{-1+e^{z-y-x}-xe^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}}=\frac{1+(x-1)e^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_y}{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_z}=-\frac{-1-xe^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}}=1$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=-\frac{1+(x-1)e^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}}dx+dy$$

例 设 $\Phi(u, v)$ 具有连续偏导数，函数 $z = z(x, y)$ 满足 $\Phi(cx - az, cy - bz) = 0$，证明：

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c.$$

例 设 $\Phi(u, v)$ 具有连续偏导数，函数 $z = z(x, y)$ 满足 $\Phi(cx - az, cy - bz) = 0$，证明：

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c.$$

解 令 $F(x, y, z) = \Phi(cx - az, cy - bz)$，则

例 设 $\Phi(u, v)$ 具有连续偏导数，函数 $z = z(x, y)$ 满足 $\Phi(cx - az, cy - bz) = 0$，证明：

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c.$$

解 令 $F(x, y, z) = \Phi(cx - az, cy - bz)$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} =$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} =$$

例 设 $\Phi(u, v)$ 具有连续偏导数，函数 $z = z(x, y)$ 满足 $\Phi(cx - az, cy - bz) = 0$，证明：

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c.$$

解 令 $F(x, y, z) = \Phi(cx - az, cy - bz)$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} =$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} =$$

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} =$$

例 设 $\Phi(u, v)$ 具有连续偏导数，函数 $z = z(x, y)$ 满足 $\Phi(cx - az, cy - bz) = 0$，证明：

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c.$$

解 令 $F(x, y, z) = \Phi(cx - az, cy - bz)$，则

$$F_x =$$

$$F_y =$$

$$F_z =$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} =$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} =$$

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} =$$

例 设 $\Phi(u, v)$ 具有连续偏导数，函数 $z = z(x, y)$ 满足 $\Phi(cx - az, cy - bz) = 0$，证明：

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c.$$

解 令 $F(x, y, z) = \Phi(cx - az, cy - bz)$，则

$$F_x = \Phi_u \cdot u_x + \Phi_v \cdot v_x$$

$$F_y =$$

$$F_z =$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} =$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} =$$

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} =$$

例 设 $\Phi(u, v)$ 具有连续偏导数，函数 $z = z(x, y)$ 满足 $\Phi(cx - az, cy - bz) = 0$，证明：

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c.$$

解 令 $F(x, y, z) = \Phi(cx - az, cy - bz)$，则

$$F_x = \Phi_u \cdot u_x + \Phi_v \cdot v_x = c\Phi_u$$

$$F_y =$$

$$F_z =$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} =$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} =$$

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} =$$

例 设 $\Phi(u, v)$ 具有连续偏导数，函数 $z = z(x, y)$ 满足 $\Phi(cx - az, cy - bz) = 0$，证明：

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c.$$

解 令 $F(x, y, z) = \Phi(cx - az, cy - bz)$，则

$$F_x = \Phi_u \cdot u_x + \Phi_v \cdot v_x = c\Phi_u$$

$$F_y = \Phi_u \cdot u_y + \Phi_v \cdot v_y$$

$$F_z =$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} =$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} =$$

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} =$$

例 设 $\Phi(u, v)$ 具有连续偏导数，函数 $z = z(x, y)$ 满足 $\Phi(cx - az, cy - bz) = 0$，证明：

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c.$$

解 令 $F(x, y, z) = \Phi(cx - az, cy - bz)$，则

$$F_x = \Phi_u \cdot u_x + \Phi_v \cdot v_x = c\Phi_u$$

$$F_y = \Phi_u \cdot u_y + \Phi_v \cdot v_y = c\Phi_v$$

$$F_z =$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} =$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} =$$

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} =$$

例 设 $\Phi(u, v)$ 具有连续偏导数，函数 $z = z(x, y)$ 满足 $\Phi(cx - az, cy - bz) = 0$，证明：

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c.$$

解 令 $F(x, y, z) = \Phi(cx - az, cy - bz)$，则

$$F_x = \Phi_u \cdot u_x + \Phi_v \cdot v_x = c\Phi_u$$

$$F_y = \Phi_u \cdot u_y + \Phi_v \cdot v_y = c\Phi_v$$

$$F_z = \Phi_u \cdot u_z + \Phi_v \cdot v_z$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} =$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} =$$

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} =$$

例 设 $\Phi(u, v)$ 具有连续偏导数，函数 $z = z(x, y)$ 满足 $\Phi(cx - az, cy - bz) = 0$，证明：

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c.$$

解 令 $F(x, y, z) = \Phi(cx - az, cy - bz)$，则

$$F_x = \Phi_u \cdot u_x + \Phi_v \cdot v_x = c\Phi_u$$

$$F_y = \Phi_u \cdot u_y + \Phi_v \cdot v_y = c\Phi_v$$

$$F_z = \Phi_u \cdot u_z + \Phi_v \cdot v_z = -a\Phi_u - b\Phi_v$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} =$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} =$$

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} =$$

例 设 $\Phi(u,v)$ 具有连续偏导数，函数 $z=z(x,y)$ 满足 $\Phi(cx-az,cy-bz)=0$，证明：

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c.$$

解 令 $F(x,y,z)=\Phi(cx-az,cy-bz)$，则

$$F_x=\Phi_u\cdot u_x+\Phi_v\cdot v_x=c\Phi_u$$

$$F_y=\Phi_u\cdot u_y+\Phi_v\cdot v_y=c\Phi_v$$

$$F_z=\Phi_u\cdot u_z+\Phi_v\cdot v_z=-a\Phi_u-b\Phi_v$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{c\Phi_u}{a\Phi_u+b\Phi_v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=$$

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=$$

例 设 $\Phi(u, v)$ 具有连续偏导数，函数 $z = z(x, y)$ 满足 $\Phi(cx - az, cy - bz) = 0$，证明：

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c.$$

解 令 $F(x, y, z) = \Phi(cx - az, cy - bz)$，则

$$F_x = \Phi_u \cdot u_x + \Phi_v \cdot v_x = c\Phi_u$$

$$F_y = \Phi_u \cdot u_y + \Phi_v \cdot v_y = c\Phi_v$$

$$F_z = \Phi_u \cdot u_z + \Phi_v \cdot v_z = -a\Phi_u - b\Phi_v$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{c\Phi_u}{a\Phi_u + b\Phi_v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{c\Phi_v}{a\Phi_u + b\Phi_v}$$

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} =$$

例 设 $\Phi(u, v)$ 具有连续偏导数，函数 $z = z(x, y)$ 满足 $\Phi(cx - az, cy - bz) = 0$，证明：

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c.$$

解 令 $F(x, y, z) = \Phi(cx - az, cy - bz)$，则

$$F_x = \Phi_u \cdot u_x + \Phi_v \cdot v_x = c\Phi_u$$

$$F_y = \Phi_u \cdot u_y + \Phi_v \cdot v_y = c\Phi_v$$

$$F_z = \Phi_u \cdot u_z + \Phi_v \cdot v_z = -a\Phi_u - b\Phi_v$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{c\Phi_u}{a\Phi_u + b\Phi_v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{c\Phi_v}{a\Phi_u + b\Phi_v}$$

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{ac\Phi_u}{a\Phi_u + b\Phi_v} + \frac{bc\Phi_v}{a\Phi_u + b\Phi_v}$$

例 设 $\Phi(u, v)$ 具有连续偏导数，函数 $z = z(x, y)$ 满足 $\Phi(cx - az, cy - bz) = 0$，证明：

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c.$$

解 令 $F(x, y, z) = \Phi(cx - az, cy - bz)$，则

$$F_x = \Phi_u \cdot u_x + \Phi_v \cdot v_x = c\Phi_u$$

$$F_y = \Phi_u \cdot u_y + \Phi_v \cdot v_y = c\Phi_v$$

$$F_z = \Phi_u \cdot u_z + \Phi_v \cdot v_z = -a\Phi_u - b\Phi_v$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{c\Phi_u}{a\Phi_u + b\Phi_v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{c\Phi_v}{a\Phi_u + b\Phi_v}$$

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{ac\Phi_u}{a\Phi_u + b\Phi_v} + \frac{bc\Phi_v}{a\Phi_u + b\Phi_v} = c$$

例 设 $z=f(x, y)$ 满足 $z=x+ye^z$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

例 设 $z=f(x, y)$ 满足 $z=x+ye^z$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

解 $F(x, y, z)=x+ye^z-z$，则 $F(x, y, z)=0$

例 设 $z=f(x,y)$ 满足 $z=x+ye^z$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

解 $F(x,y,z)=x+ye^z-z$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=$$

例 设 $z=f(x,y)$ 满足 $z=x+ye^z$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

解 $F(x,y,z)=x+ye^z-z$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=$$

例 设 $z = f(x, y)$ 满足 $z = x + ye^z$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

解 $F(x, y, z) = x + ye^z - z$，则 $F(x, y, z) = 0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{(x + ye^z - z)_x}{(x + ye^z - z)_z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} =$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) =$$

例 设 $z = f(x, y)$ 满足 $z = x + ye^z$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

解 $F(x, y, z) = x + ye^z - z$，则 $F(x, y, z) = 0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{(x + ye^z - z)_x}{(x + ye^z - z)_z} = -\underline{\qquad\qquad}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} =$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) =$$

例 设 $z=f(x, y)$ 满足 $z=x+ye^z$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

解 $F(x, y, z)=x+ye^z-z$，则 $F(x, y, z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(x+ye^z-z)_x}{(x+ye^z-z)_z}=-\frac{\quad}{ye^z-1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=$$

例 设 $z = f(x, y)$ 满足 $z = x + ye^z$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

解 $F(x, y, z) = x + ye^z - z$，则 $F(x, y, z) = 0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{(x + ye^z - z)_x}{(x + ye^z - z)_z} = -\frac{1}{ye^z - 1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} =$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) =$$

例 设 $z=f(x,y)$ 满足 $z=x+ye^z$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

解 $F(x,y,z)=x+ye^z-z$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(x+ye^z-z)_x}{(x+ye^z-z)_z}=-\frac{1}{ye^z-1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(x+ye^z-z)_y}{(x+ye^z-z)_z}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=$$

例 设 $z=f(x,y)$ 满足 $z=x+ye^z$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

解 $F(x,y,z)=x+ye^z-z$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(x+ye^z-z)_x}{(x+ye^z-z)_z}=-\frac{1}{ye^z-1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(x+ye^z-z)_y}{(x+ye^z-z)_z}=-\frac{e^z}{ye^z-1}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=$$

例 设 $z=f(x,y)$ 满足 $z=x+ye^z$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

解 $F(x,y,z)=x+ye^z-z$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(x+ye^z-z)_x}{(x+ye^z-z)_z}=-\frac{1}{ye^z-1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(x+ye^z-z)_y}{(x+ye^z-z)_z}=-\frac{e^z}{ye^z-1}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(-\frac{1}{ye^z-1}\right)'_y$$

例 设 $z=f(x, y)$ 满足 $z=x+ye^z$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

解 $F(x, y, z)=x+ye^z-z$，则 $F(x, y, z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(x+ye^z-z)_x}{(x+ye^z-z)_z}=-\frac{1}{ye^z-1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(x+ye^z-z)_y}{(x+ye^z-z)_z}=-\frac{e^z}{ye^z-1}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(-\frac{1}{ye^z-1}\right)'_y=\frac{(ye^z-1)'_y}{(ye^z-1)^2}$$

例 设 $z=f(x,y)$ 满足 $z=x+ye^z$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

解 $F(x,y,z)=x+ye^z-z$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(x+ye^z-z)_x}{(x+ye^z-z)_z}=-\frac{1}{ye^z-1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(x+ye^z-z)_y}{(x+ye^z-z)_z}=-\frac{e^z}{ye^z-1}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(-\frac{1}{ye^z-1}\right)'_y=\frac{(ye^z-1)'_y}{(ye^z-1)^2}$$

$$=\frac{e^z+y(e^z)'_y}{(ye^z-1)^2}$$

例 设 $z=f(x,y)$ 满足 $z=x+ye^z$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

解 $F(x,y,z)=x+ye^z-z$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(x+ye^z-z)_x}{(x+ye^z-z)_z}=-\frac{1}{ye^z-1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(x+ye^z-z)_y}{(x+ye^z-z)_z}=-\frac{e^z}{ye^z-1}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(-\frac{1}{ye^z-1}\right)_y'=\frac{(ye^z-1)_y'}{(ye^z-1)^2}$$

$$=\frac{e^z+y(e^z)_y'}{(ye^z-1)^2}=\frac{e^z+ye^z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}}{(ye^z-1)^2}$$

例 设 $z=f(x,y)$ 满足 $z=x+ye^z$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

解 $F(x,y,z)=x+ye^z-z$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(x+ye^z-z)_x}{(x+ye^z-z)_z}=-\frac{1}{ye^z-1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(x+ye^z-z)_y}{(x+ye^z-z)_z}=-\frac{e^z}{ye^z-1}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(-\frac{1}{ye^z-1}\right)'_y=\frac{(ye^z-1)'_y}{(ye^z-1)^2}$$

$$=\frac{e^z+y(e^z)'_y}{(ye^z-1)^2}=\frac{e^z+ye^z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}}{(ye^z-1)^2}=\frac{e^z+ye^z\cdot\left(-\frac{e^z}{ye^z-1}\right)}{(ye^z-1)^2}$$

例 设 $z=f(x,y)$ 满足 $z=x+ye^z$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

解 $F(x,y,z)=x+ye^z-z$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(x+ye^z-z)_x}{(x+ye^z-z)_z}=-\frac{1}{ye^z-1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(x+ye^z-z)_y}{(x+ye^z-z)_z}=-\frac{e^z}{ye^z-1}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(-\frac{1}{ye^z-1}\right)_y'=\frac{(ye^z-1)_y'}{(ye^z-1)^2}$$

$$=\frac{e^z+y(e^z)_y'}{(ye^z-1)^2}=\frac{e^z+ye^z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}}{(ye^z-1)^2}=\frac{e^z+ye^z\cdot\left(-\frac{e^z}{ye^z-1}\right)}{(ye^z-1)^2}$$

$$=\frac{-e^z}{(ye^z-1)^3}$$

例 设 $z=f(x,y)$ 满足 $z=x+ye^z$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

解 $F(x,y,z)=x+ye^z-z$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(x+ye^z-z)_x}{(x+ye^z-z)_z}=-\frac{1}{ye^z-1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(x+ye^z-z)_y}{(x+ye^z-z)_z}=-\frac{e^z}{ye^z-1}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(-\frac{1}{ye^z-1}\right)'_y=\frac{(ye^z-1)'_y}{(ye^z-1)^2}$$

$$=\frac{e^z+y(e^z)'_y}{(ye^z-1)^2}=\frac{e^z+ye^z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}}{(ye^z-1)^2}=\frac{e^z+ye^z\cdot\left(-\frac{e^z}{ye^z-1}\right)}{(ye^z-1)^2}$$

$$=\frac{-e^z}{(ye^z-1)^3}=\frac{e^z}{(1+x-z)^3}$$

We are here now...

1. 隐函数的求导法：一个方程的情形

2. 隐函数的求导法：方程组的情形

3. 隐函数定理

回顾：二元线性方程组的求解

二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 & (1) \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 & (2) \end{cases}$$

用消元法解：

回顾：二元线性方程组的求解

二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 & (1)\times a_{22} \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 & (2)\times a_{12} \end{cases}$$

用消元法解：

$(1)\times a_{22} - (2)\times a_{12}$，消去 y，得：

回顾：二元线性方程组的求解

二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}\,a_{22}x + a_{12}\,a_{22}y = a_{22}b_1 & (1)\times a_{22} \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 & (2)\times a_{12} \end{cases}$$

用消元法解：

$(1)\times a_{22} - (2)\times a_{12}$，消去 y，得：

回顾：二元线性方程组的求解

二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}\,a_{22}x + a_{12}\,a_{22}y = a_{22}b_1 & (1)\times a_{22} \\ a_{21}\,a_{12}x + a_{22}\,a_{12}y = a_{12}b_2 & (2)\times a_{12} \end{cases}$$

用消元法解：

$(1)\times a_{22}-(2)\times a_{12}$，消去 y，得：

回顾：二元线性方程组的求解

二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}\,a_{22}x + a_{12}\,a_{22}y = a_{22}b_1 & (1) \times a_{22} \\ a_{21}\,a_{12}x + a_{22}\,a_{12}y = a_{12}b_2 & (2) \times a_{12} \end{cases}$$

用消元法解：

$(1) \times a_{22} - (2) \times a_{12}$，消去 y，得：

$$x = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

回顾：二元线性方程组的求解

二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 & (1) \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 & (2) \end{cases}$$

用消元法解：

$(1) \times a_{22} - (2) \times a_{12}$，消去 y，得：

$$x = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

回顾：二元线性方程组的求解

二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 & (1) \times a_{21} \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 & (2) \times a_{11} \end{cases}$$

用消元法解：

$(1) \times a_{22} - (2) \times a_{12}$，消去 y，得：

$$x = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

$(2) \times a_{11} - (1) \times a_{21}$，消去 x，得：

回顾：二元线性方程组的求解

二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 & (1) \times a_{21} \\ a_{21}\,a_{11}x + a_{22}\,a_{11}y = a_{11}b_2 & (2) \times a_{11} \end{cases}$$

用消元法解：

$(1) \times a_{22} - (2) \times a_{12}$，消去 y，得：

$$x = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$(2) \times a_{11} - (1) \times a_{21}$，消去 x，得：

回顾：二元线性方程组的求解

二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}\,a_{21}x + a_{12}\,a_{21}y = a_{21}b_1 & (1)\times a_{21} \\ a_{21}\,a_{11}x + a_{22}\,a_{11}y = a_{11}b_2 & (2)\times a_{11} \end{cases}$$

用消元法解：

$(1)\times a_{22}-(2)\times a_{12}$，消去 y，得：

$$x=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

$(2)\times a_{11}-(1)\times a_{21}$，消去 x，得：

回顾：二元线性方程组的求解

二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}\,a_{21}x + a_{12}\,a_{21}y = a_{21}b_1 & (1)\times a_{21} \\ a_{21}\,a_{11}x + a_{22}\,a_{11}y = a_{11}b_2 & (2)\times a_{11} \end{cases}$$

用消元法解：

$(1)\times a_{22}-(2)\times a_{12}$，消去 y，得：

$$x=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

$(2)\times a_{11}-(1)\times a_{21}$，消去 x，得：

$$y=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

回顾：二元线性方程组的求解

二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 & (1) \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 & (2) \end{cases}$$

用消元法解：

$(1) \times a_{22} - (2) \times a_{12}$，消去 y，得：

$$x = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

$(2) \times a_{11} - (1) \times a_{21}$，消去 x，得：

$$y = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

回顾：二元线性方程组的求解

二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 & (1) \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 & (2) \end{cases}$$

用消元法解：

$(1) \times a_{22} - (2) \times a_{12}$，消去 y，得：

$$x = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

$(2) \times a_{11} - (1) \times a_{21}$，消去 x，得：

$$y = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

回顾：二元线性方程组的求解

二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 & (1) \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 & (2) \end{cases}$$

用消元法解：

$(1)\times a_{22} - (2)\times a_{12}$，消去 y，得：

$$x = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

$(2)\times a_{11} - (1)\times a_{21}$，消去 x，得：

$$y = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{\qquad}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

回顾：二元线性方程组的求解

二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 & (1) \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 & (2) \end{cases}$$

用消元法解：

$(1) \times a_{22} - (2) \times a_{12}$，消去 y，得：

$$x = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

$(2) \times a_{11} - (1) \times a_{21}$，消去 x，得：

$$y = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

公式：

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

公式：

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \Rightarrow \quad x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

练习 利用二阶行列式求解下面二元线性方程组

1. $\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ 3x + 8y = 4 \end{cases}$ $x =$ ， $y =$

2. $\begin{cases} 7x + 16y = 1 \\ 2x + 5y = -1 \end{cases}$ $x =$ ， $y =$

公式：

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \Rightarrow \quad x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

练习 利用二阶行列式求解下面二元线性方程组

1. $\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ 3x + 8y = 4 \end{cases}$ $x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \underline{\qquad}$ ， $y =$

2. $\begin{cases} 7x + 16y = 1 \\ 2x + 5y = -1 \end{cases}$ $x =$ ， $y =$

公式:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \Rightarrow \quad x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

练习 利用二阶行列式求解下面二元线性方程组

1. $\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ 3x + 8y = 4 \end{cases}$ $x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \underline{\qquad}$, $y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \underline{\ }$

2. $\begin{cases} 7x + 16y = 1 \\ 2x + 5y = -1 \end{cases}$ $x =$, $y =$

公式：

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \Rightarrow \quad x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

练习 利用二阶行列式求解下面二元线性方程组

1. $\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ 3x + 8y = 4 \end{cases} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{\quad}{1} \qquad , \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = -$

2. $\begin{cases} 7x + 16y = 1 \\ 2x + 5y = -1 \end{cases} \quad x = \qquad , \ y =$

公式：

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \Rightarrow \quad x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

练习 利用二阶行列式求解下面二元线性方程组

1. $\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ 3x + 8y = 4 \end{cases}$ $x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{\quad}{1}$, $y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{\quad}{1}$

2. $\begin{cases} 7x + 16y = 1 \\ 2x + 5y = -1 \end{cases}$ $x =$, $y =$

公式：

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \Rightarrow \quad x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

练习 利用二阶行列式求解下面二元线性方程组

1. $\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ 3x + 8y = 4 \end{cases} \quad x = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \dfrac{-20}{1} \quad , \quad y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \dfrac{}{1}$

2. $\begin{cases} 7x + 16y = 1 \\ 2x + 5y = -1 \end{cases} \quad x = \qquad , \ y =$

公式：

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \Rightarrow \quad x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

练习 利用二阶行列式求解下面二元线性方程组

1. $\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ 3x + 8y = 4 \end{cases}$ $\quad x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{-20}{1}$, $\quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{8}{1}$

2. $\begin{cases} 7x + 16y = 1 \\ 2x + 5y = -1 \end{cases}$ $\quad x =$, $y =$

公式:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \Rightarrow \quad x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

练习 利用二阶行列式求解下面二元线性方程组

1. $\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ 3x + 8y = 4 \end{cases} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{-20}{1} = -20, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{8}{1}$

2. $\begin{cases} 7x + 16y = 1 \\ 2x + 5y = -1 \end{cases} \quad x =$, $y =$

公式：

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

练习 利用二阶行列式求解下面二元线性方程组

1. $\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ 3x + 8y = 4 \end{cases}$ $x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{-20}{1} = -20, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{8}{1} = 8$

2. $\begin{cases} 7x + 16y = 1 \\ 2x + 5y = -1 \end{cases}$ $x =$, $y =$

公式：

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \Rightarrow \quad x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

练习 利用二阶行列式求解下面二元线性方程组

1. $\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ 3x + 8y = 4 \end{cases}$ $\quad x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{-20}{1} = -20, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{8}{1} = 8$

2. $\begin{cases} 7x + 16y = 1 \\ 2x + 5y = -1 \end{cases}$ $\quad x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 16 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 16 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{\quad}{\quad} \quad , \; y =$

公式：

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \Rightarrow \quad x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

练习 利用二阶行列式求解下面二元线性方程组

1. $\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ 3x + 8y = 4 \end{cases}$ $\quad x = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \dfrac{-20}{1} = -20, \quad y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \dfrac{8}{1} = 8$

2. $\begin{cases} 7x + 16y = 1 \\ 2x + 5y = -1 \end{cases}$ $\quad x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 16 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 16 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \underline{\qquad}, \quad y = \dfrac{\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 16 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \underline{\qquad}$

公式：

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \Rightarrow \quad x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

练习 利用二阶行列式求解下面二元线性方程组

1. $\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ 3x + 8y = 4 \end{cases}$ $\quad x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{-20}{1} = -20, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{8}{1} = 8$

2. $\begin{cases} 7x + 16y = 1 \\ 2x + 5y = -1 \end{cases}$ $\quad x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 16 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 16 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{\quad}{3} \quad , \; y = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 16 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{\quad}{\quad}$

公式：

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \Rightarrow \quad x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

练习 利用二阶行列式求解下面二元线性方程组

1. $\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ 3x + 8y = 4 \end{cases} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{-20}{1} = -20, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{8}{1} = 8$

2. $\begin{cases} 7x + 16y = 1 \\ 2x + 5y = -1 \end{cases} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 16 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 16 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{}{3} \quad , \; y = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 16 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{}{3}$

公式：

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \Rightarrow \quad x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

练习 利用二阶行列式求解下面二元线性方程组

1. $\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ 3x + 8y = 4 \end{cases}$ $\quad x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{-20}{1} = -20, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{8}{1} = 8$

2. $\begin{cases} 7x + 16y = 1 \\ 2x + 5y = -1 \end{cases}$ $\quad x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 16 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 16 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{21}{3} \quad , \; y = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 16 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{\quad}{3}$

公式:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \Rightarrow \quad x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

练习 利用二阶行列式求解下面二元线性方程组

1. $\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ 3x + 8y = 4 \end{cases}$ $\quad x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{-20}{1} = -20, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{8}{1} = 8$

2. $\begin{cases} 7x + 16y = 1 \\ 2x + 5y = -1 \end{cases}$ $\quad x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 16 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 16 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{21}{3} \quad , \; y = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 16 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-9}{3}$

公式：

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \Rightarrow \quad x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

练习 利用二阶行列式求解下面二元线性方程组

1. $\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ 3x + 8y = 4 \end{cases}$ $\quad x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{-20}{1} = -20, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{8}{1} = 8$

2. $\begin{cases} 7x + 16y = 1 \\ 2x + 5y = -1 \end{cases}$ $\quad x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 16 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 16 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{21}{3} = 7, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 16 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-9}{3}$

公式：

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \Rightarrow \quad x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

练习 利用二阶行列式求解下面二元线性方程组

1. $\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ 3x + 8y = 4 \end{cases}$ $\quad x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{-20}{1} = -20, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{8}{1} = 8$

2. $\begin{cases} 7x + 16y = 1 \\ 2x + 5y = -1 \end{cases}$ $\quad x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 16 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 16 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{21}{3} = 7, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 16 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-9}{3} = -3$

方程组的隐函数求导公式

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0, \\ G(x, y, u, v) = 0. \end{cases}$$

方程组的隐函数求导公式

假设函数 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 满足方程组

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0, \\ G(x, y, u, v) = 0. \end{cases}$$

方程组的隐函数求导公式

假设函数 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 满足方程组

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0, \\ G(x, y, u, v) = 0. \end{cases}$$

问题：如何计算 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$?

方程组的隐函数求导公式

假设函数 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 满足方程组

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0, \\ G(x, y, u, v) = 0. \end{cases}$$

问题：如何计算 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$?

求解如下：

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}}$$

方程组的隐函数求导公式

假设函数 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 满足方程组

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0, \\ G(x, y, u, v) = 0. \end{cases}$$

问题：如何计算 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$?

求解如下：

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} F_x + F_u \cdot u_x + F_v \cdot v_x = 0 \\ \end{cases}$$

方程组的隐函数求导公式

假设函数 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 满足方程组

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0, \\ G(x, y, u, v) = 0. \end{cases}$$

问题：如何计算 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$?

求解如下：

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} F_x + F_u \cdot u_x + F_v \cdot v_x = 0 \\ G_x + G_u \cdot u_x + G_v \cdot v_x = 0 \end{cases}$$

方程组的隐函数求导公式

假设函数 $u=u(x,\, y),\, v=v(x,\, y)$ 满足方程组

$$\begin{cases} F(x,\, y,\, u,\, v)=0, \\ G(x,\, y,\, u,\, v)=0. \end{cases}$$

问题：如何计算 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$?

求解如下：

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} F_u\cdot u_x+F_v\cdot v_x=-F_x \\ G_u\cdot u_x+G_v\cdot v_x=-G_x \end{cases}$$

方程组的隐函数求导公式

假设函数 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 满足方程组

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0, \\ G(x, y, u, v) = 0. \end{cases}$$

问题：如何计算 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$?

求解如下：

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} F_u \cdot u_x + F_v \cdot v_x = -F_x \\ G_u \cdot u_x + G_v \cdot v_x = -G_x \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_x = \underline{\qquad\qquad}, \quad v_x = \underline{\qquad\qquad}$$

方程组的隐函数求导公式

假设函数 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 满足方程组

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0, \\ G(x, y, u, v) = 0. \end{cases}$$

问题：如何计算 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ ？

求解如下：

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} F_u \cdot u_x + F_v \cdot v_x = -F_x \\ G_u \cdot u_x + G_v \cdot v_x = -G_x \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_x = \frac{\qquad}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}, \quad v_x = \frac{\qquad}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$$

暨南大学 JINAN UNIVERSITY

方程组的隐函数求导公式

假设函数 $u = u(x, y), v = v(x, y)$ 满足方程组

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0, \\ G(x, y, u, v) = 0. \end{cases}$$

问题：如何计算 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$?

求解如下：

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} F_u \cdot u_x + F_v \cdot v_x = -F_x \\ G_u \cdot u_x + G_v \cdot v_x = -G_x \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_x = \frac{\begin{vmatrix} -F_x & F_v \\ -G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}, \quad v_x = \frac{}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$$

方程组的隐函数求导公式

假设函数 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 满足方程组

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0, \\ G(x, y, u, v) = 0. \end{cases}$$

问题：如何计算 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$?

求解如下：

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} F_u \cdot u_x + F_v \cdot v_x = -F_x \\ G_u \cdot u_x + G_v \cdot v_x = -G_x \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_x = \frac{\begin{vmatrix} -F_x & F_v \\ -G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}, \quad v_x = \frac{\begin{vmatrix} F_u & -F_x \\ G_u & -G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$$

方程组的隐函数求导公式

假设函数 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ 满足方程组

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0, \\ G(x,y,u,v)=0. \end{cases}$$

问题：如何计算 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$？

求解如下：

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} F_u\cdot u_x+F_v\cdot v_x=-F_x \\ G_u\cdot u_x+G_v\cdot v_x=-G_x \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_x=-\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}, \quad v_x=-\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$$

方程组的隐函数求导公式

假设函数 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ 满足方程组

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0, \\ G(x,y,u,v)=0. \end{cases}$$

问题：如何计算 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$?

求解如下：

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} F_u\cdot u_x+F_v\cdot v_x=-F_x \\ G_u\cdot u_x+G_v\cdot v_x=-G_x \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_x=-\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}, \quad v_x=-\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$$

$$=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}$$

方程组的隐函数求导公式

假设函数 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ 满足方程组

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0, \\ G(x,y,u,v)=0. \end{cases}$$

问题：如何计算 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$?

求解如下：

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} F_u\cdot u_x+F_v\cdot v_x=-F_x \\ G_u\cdot u_x+G_v\cdot v_x=-G_x \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_x=-\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}, \quad v_x=-\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}$$

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases} \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}}$$

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \begin{cases} F_y + F_u \cdot u_y + F_v \cdot v_y = 0 \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \begin{cases} F_y + F_u \cdot u_y + F_v \cdot v_y = 0 \\ G_y + G_u \cdot u_y + G_v \cdot v_y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \begin{cases} F_u\cdot u_y+F_v\cdot v_y=-F_y \\ G_u\cdot u_y+G_v\cdot v_y=-G_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \begin{cases} F_u \cdot u_y + F_v \cdot v_y = -F_y \\ G_u \cdot u_y + G_v \cdot v_y = -G_y \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_y = \underline{\qquad\qquad}, \quad v_y = \underline{\qquad\qquad}$$

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \begin{cases} F_u \cdot u_y + F_v \cdot v_y = -F_y \\ G_u \cdot u_y + G_v \cdot v_y = -G_y \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_y = \frac{\qquad}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}, \quad v_y = \frac{\qquad}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$$

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \begin{cases} F_u\cdot u_y+F_v\cdot v_y=-F_y \\ G_u\cdot u_y+G_v\cdot v_y=-G_y \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_y=\frac{\begin{vmatrix} -F_y & F_v \\ -G_y & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}},\quad v_y=\frac{}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$$

$$
\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases} \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \begin{cases} F_u \cdot u_y + F_v \cdot v_y = -F_y \\ G_u \cdot u_y + G_v \cdot v_y = -G_y \end{cases}
$$

$$
\Rightarrow u_y = \frac{\begin{vmatrix} -F_y & F_v \\ -G_y & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}, \quad v_y = \frac{\begin{vmatrix} F_u & -F_y \\ G_u & -G_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}
$$

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \begin{cases} F_u \cdot u_y + F_v \cdot v_y = -F_y \\ G_u \cdot u_y + G_v \cdot v_y = -G_y \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_y = -\frac{\begin{vmatrix} F_y & F_v \\ G_y & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}, \quad v_y = -\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_y \\ G_u & G_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$$

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \begin{cases} F_u\cdot u_y+F_v\cdot v_y=-F_y \\ G_u\cdot u_y+G_v\cdot v_y=-G_y \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_y=-\frac{\begin{vmatrix} F_y & F_v \\ G_y & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}},\quad v_y=-\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_y \\ G_u & G_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$$

$$=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}$$

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases} \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \begin{cases} F_u\cdot u_y+F_v\cdot v_y=-F_y \\ G_u\cdot u_y+G_v\cdot v_y=-G_y \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_y=-\frac{\begin{vmatrix} F_y & F_v \\ G_y & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}},\quad v_y=-\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_y \\ G_u & G_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$$

$$=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)} \qquad =-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}$$

总结 设 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 满足方程组

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$$

总结 设 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 满足方程组

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$$

$u_x =$ $\qquad$ $v_x =$

$u_y =$ $\qquad$ $v_y =$

总结 设 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 满足方程组

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \\ \\ \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \end{matrix}$$

$u_x =$ $\qquad\qquad$ $v_x =$

$u_y =$ $\qquad\qquad$ $v_y =$

总结 设 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 满足方程组

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases} \overset{\frac{\partial}{\partial x}}{\Longrightarrow} \begin{cases} F_x + F_u \cdot u_x + F_v \cdot v_x = 0 \\ G_x + G_u \cdot u_x + G_v \cdot v_x = 0 \end{cases}$$

$$\overset{\frac{\partial}{\partial y}}{\Longrightarrow}$$

$u_x =$ $\qquad$ $v_x =$

$u_y =$ $\qquad$ $v_y =$

总结 设 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ 满足方程组

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} F_x+F_u\cdot u_x+F_v\cdot v_x=0 \\ G_x+G_u\cdot u_x+G_v\cdot v_x=0 \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \begin{cases} F_y+F_u\cdot u_y+F_v\cdot v_y=0 \\ G_y+G_u\cdot u_y+G_v\cdot v_y=0 \end{cases}$$

$u_x=$ $\qquad$ $v_x=$

$u_y=$ $\qquad$ $v_y=$

总结 设 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ 满足方程组

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} F_x+F_u\cdot u_x+F_v\cdot v_x=0 \\ G_x+G_u\cdot u_x+G_v\cdot v_x=0 \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \begin{cases} F_y+F_u\cdot u_y+F_v\cdot v_y=0 \\ G_y+G_u\cdot u_y+G_v\cdot v_y=0 \end{cases}$$

所以

$$u_x=-\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} \qquad v_x=-\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$$

$$u_y= \qquad v_y=$$

总结 设 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ 满足方程组

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} F_x+F_u\cdot u_x+F_v\cdot v_x=0 \\ G_x+G_u\cdot u_x+G_v\cdot v_x=0 \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \begin{cases} F_y+F_u\cdot u_y+F_v\cdot v_y=0 \\ G_y+G_u\cdot u_y+G_v\cdot v_y=0 \end{cases}$$

所以

$$u_x=-\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} \qquad v_x=-\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$$

$$u_y=-\frac{\begin{vmatrix} F_y & F_v \\ G_y & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} \qquad v_y=-\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_y \\ G_u & G_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$$

总结 设 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ 满足方程组

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} F_x+F_u\cdot u_x+F_v\cdot v_x=0 \\ G_x+G_u\cdot u_x+G_v\cdot v_x=0 \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \begin{cases} F_y+F_u\cdot u_y+F_v\cdot v_y=0 \\ G_y+G_u\cdot u_y+G_v\cdot v_y=0 \end{cases}$$

所以

$$u_x=-\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}, \quad v_x=-\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$$

$$u_y=-\frac{\begin{vmatrix} F_y & F_v \\ G_y & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} \qquad v_y=-\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_y \\ G_u & G_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$$

总结 设 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 满足方程组

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases} \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} F_x + F_u \cdot u_x + F_v \cdot v_x = 0 \\ G_x + G_u \cdot u_x + G_v \cdot v_x = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \begin{cases} F_y + F_u \cdot u_y + F_v \cdot v_y = 0 \\ G_y + G_u \cdot u_y + G_v \cdot v_y = 0 \end{cases}$$

所以

$$u_x = -\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)}, \quad v_x = -\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)}$$

$$u_y = -\frac{\begin{vmatrix} F_y & F_v \\ G_y & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} \qquad v_y = -\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_y \\ G_u & G_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$$

总结 设 $u=u(x,y),\ v=v(x,y)$ 满足方程组

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} F_x+F_u\cdot u_x+F_v\cdot v_x=0 \\ G_x+G_u\cdot u_x+G_v\cdot v_x=0 \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \begin{cases} F_y+F_u\cdot u_y+F_v\cdot v_y=0 \\ G_y+G_u\cdot u_y+G_v\cdot v_y=0 \end{cases}$$

所以

$$u_x=-\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)},\qquad v_x=-\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}$$

$$u_y=-\frac{\begin{vmatrix} F_y & F_v \\ G_y & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)},\qquad v_y=-\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_y \\ G_u & G_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$$

总结 设 $u=u(x,y),\ v=v(x,y)$ 满足方程组

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases} \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} F_x+F_u\cdot u_x+F_v\cdot v_x=0 \\ G_x+G_u\cdot u_x+G_v\cdot v_x=0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \begin{cases} F_y+F_u\cdot u_y+F_v\cdot v_y=0 \\ G_y+G_u\cdot u_y+G_v\cdot v_y=0 \end{cases}$$

所以

$$u_x=-\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)},\quad v_x=-\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}$$

$$u_y=-\frac{\begin{vmatrix} F_y & F_v \\ G_y & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)},\quad v_y=-\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_y \\ G_u & G_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}$$

例 设 $\begin{cases} x = e^u + u\sin v \\ y = e^u - u\cos v \end{cases}$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$

例 设 $\begin{cases} x = e^u + u\sin v \\ y = e^u - u\cos v \end{cases}$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$

解

$$\begin{cases} e^u + u\sin v = x \\ e^u - u\cos v = y \end{cases} \quad \stackrel{\frac{\partial}{\partial x}}{\Longrightarrow} \qquad \stackrel{\frac{\partial}{\partial y}}{\Longrightarrow}$$

$u_x =$ $\qquad$ $v_x =$

$u_y =$ $\qquad$ $v_y =$

例 设 $\begin{cases} x = e^u + u\sin v \\ y = e^u - u\cos v \end{cases}$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$

解

$$\begin{cases} e^u + u\sin v = x \\ e^u - u\cos v = y \end{cases} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} (e^u + \sin v)u_x + u\cos v \cdot v_x = 1 \\ \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\frac{\partial}{\partial y}}$$

$u_x =$ $\qquad$ $v_x =$

$u_y =$ $\qquad$ $v_y =$

例 设 $\begin{cases} x = e^u + u\sin v \\ y = e^u - u\cos v \end{cases}$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$

解

$$\begin{cases} e^u + u\sin v = x \\ e^u - u\cos v = y \end{cases} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} (e^u + \sin v)u_x + u\cos v \cdot v_x = 1 \\ (e^u - \cos v)u_x + u\sin v \cdot v_x = 0 \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\frac{\partial}{\partial y}}$$

$u_x =$ $\qquad$ $v_x =$

$u_y =$ $\qquad$ $v_y =$

例 设 $\begin{cases} x = e^u + u\sin v \\ y = e^u - u\cos v \end{cases}$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$

解

$$\begin{cases} e^u + u\sin v = x \\ e^u - u\cos v = y \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} (e^u + \sin v)u_x + u\cos v \cdot v_x = 1 \\ (e^u - \cos v)u_x + u\sin v \cdot v_x = 0 \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \begin{cases} (e^u + \sin v)u_y + u\cos v \cdot v_y = 0 \\ \end{cases}$$

$u_x =$ 　　　　 $v_x =$

$u_y =$ 　　　　 $v_y =$

例 设 $\begin{cases} x = e^u + u\sin v \\ y = e^u - u\cos v \end{cases}$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$

解

$$\begin{cases} e^u + u\sin v = x \\ e^u - u\cos v = y \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} (e^u + \sin v)u_x + u\cos v \cdot v_x = 1 \\ (e^u - \cos v)u_x + u\sin v \cdot v_x = 0 \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \begin{cases} (e^u + \sin v)u_y + u\cos v \cdot v_y = 0 \\ (e^u - \cos v)u_y + u\sin v \cdot v_y = 1 \end{cases}$$

$u_x=$ $v_x=$

$u_y=$ $v_y=$

例 设 $\begin{cases} x = e^u + u\sin v \\ y = e^u - u\cos v \end{cases}$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$

解

$$\begin{cases} e^u + u\sin v = x \\ e^u - u\cos v = y \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} (e^u + \sin v)u_x + u\cos v \cdot v_x = 1 \\ (e^u - \cos v)u_x + u\sin v \cdot v_x = 0 \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \begin{cases} (e^u + \sin v)u_y + u\cos v \cdot v_y = 0 \\ (e^u - \cos v)u_y + u\sin v \cdot v_y = 1 \end{cases}$$

所以 $J = \begin{vmatrix} e^u + \sin v & u\cos v \\ e^u - \cos v & u\sin v \end{vmatrix}$

$u_x =$ $\qquad$ $v_x =$

$u_y =$ $\qquad$ $v_y =$

例 设 $\begin{cases} x = e^u + u\sin v \\ y = e^u - u\cos v \end{cases}$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$

解

$$\begin{cases} e^u + u\sin v = x \\ e^u - u\cos v = y \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} (e^u + \sin v)u_x + u\cos v \cdot v_x = 1 \\ (e^u - \cos v)u_x + u\sin v \cdot v_x = 0 \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \begin{cases} (e^u + \sin v)u_y + u\cos v \cdot v_y = 0 \\ (e^u - \cos v)u_y + u\sin v \cdot v_y = 1 \end{cases}$$

所以 $J = \begin{vmatrix} e^u + \sin v & u\cos v \\ e^u - \cos v & u\sin v \end{vmatrix}$

$$u_x = \frac{\begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix}}{J} \qquad v_x = \frac{\begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix}}{J}$$

$$u_y = \frac{\begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix}}{J} \qquad v_y = \frac{\begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix}}{J}$$

例 设 $\begin{cases} x = e^u + u\sin v \\ y = e^u - u\cos v \end{cases}$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$

解

$$\begin{cases} e^u + u\sin v = x \\ e^u - u\cos v = y \end{cases} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} (e^u + \sin v)u_x + u\cos v \cdot v_x = 1 \\ (e^u - \cos v)u_x + u\sin v \cdot v_x = 0 \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \begin{cases} (e^u + \sin v)u_y + u\cos v \cdot v_y = 0 \\ (e^u - \cos v)u_y + u\sin v \cdot v_y = 1 \end{cases}$$

所以 $J = \begin{vmatrix} e^u + \sin v & u\cos v \\ e^u - \cos v & u\sin v \end{vmatrix}$

$$u_x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & u\cos v \\ 0 & u\sin v \end{vmatrix}}{J} \qquad v_x = \frac{\begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix}}{J}$$

$$u_y = \frac{\begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix}}{J} \qquad v_y = \frac{\begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix}}{J}$$

例 设 $\begin{cases} x = e^u + u\sin v \\ y = e^u - u\cos v \end{cases}$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$

解

$$\begin{cases} e^u + u\sin v = x \\ e^u - u\cos v = y \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} (e^u + \sin v)u_x + u\cos v \cdot v_x = 1 \\ (e^u - \cos v)u_x + u\sin v \cdot v_x = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \begin{cases} (e^u + \sin v)u_y + u\cos v \cdot v_y = 0 \\ (e^u - \cos v)u_y + u\sin v \cdot v_y = 1 \end{cases}$$

所以 $J = \begin{vmatrix} e^u + \sin v & u\cos v \\ e^u - \cos v & u\sin v \end{vmatrix}$

$$u_x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & u\cos v \\ 0 & u\sin v \end{vmatrix}}{J} \qquad v_x = \frac{\begin{vmatrix} e^u + \sin v & 1 \\ e^u - \cos v & 0 \end{vmatrix}}{J}$$

$$u_y = \frac{\begin{vmatrix} \\ \end{vmatrix}}{J} \qquad v_y = \frac{\begin{vmatrix} \\ \end{vmatrix}}{J}$$

例 设 $\begin{cases} x = e^u + u\sin v \\ y = e^u - u\cos v \end{cases}$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$

解

$$\begin{cases} e^u + u\sin v = x \\ e^u - u\cos v = y \end{cases} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} (e^u + \sin v)u_x + u\cos v \cdot v_x = 1 \\ (e^u - \cos v)u_x + u\sin v \cdot v_x = 0 \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \begin{cases} (e^u + \sin v)u_y + u\cos v \cdot v_y = 0 \\ (e^u - \cos v)u_y + u\sin v \cdot v_y = 1 \end{cases}$$

所以 $J = \begin{vmatrix} e^u + \sin v & u\cos v \\ e^u - \cos v & u\sin v \end{vmatrix}$

$$u_x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & u\cos v \\ 0 & u\sin v \end{vmatrix}}{J} \qquad v_x = \frac{\begin{vmatrix} e^u + \sin v & 1 \\ e^u - \cos v & 0 \end{vmatrix}}{J}$$

$$u_y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & u\cos v \\ 1 & u\sin v \end{vmatrix}}{J} \qquad v_y = \frac{\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}}{J}$$

例 设 $\begin{cases} x = e^u + u\sin v \\ y = e^u - u\cos v \end{cases}$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$

解

$$\begin{cases} e^u + u\sin v = x \\ e^u - u\cos v = y \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} (e^u + \sin v)u_x + u\cos v \cdot v_x = 1 \\ (e^u - \cos v)u_x + u\sin v \cdot v_x = 0 \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \begin{cases} (e^u + \sin v)u_y + u\cos v \cdot v_y = 0 \\ (e^u - \cos v)u_y + u\sin v \cdot v_y = 1 \end{cases}$$

所以 $J = \begin{vmatrix} e^u + \sin v & u\cos v \\ e^u - \cos v & u\sin v \end{vmatrix}$

$$u_x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & u\cos v \\ 0 & u\sin v \end{vmatrix}}{J} \qquad v_x = \frac{\begin{vmatrix} e^u + \sin v & 1 \\ e^u - \cos v & 0 \end{vmatrix}}{J}$$

$$u_y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & u\cos v \\ 1 & u\sin v \end{vmatrix}}{J} \qquad v_y = \frac{\begin{vmatrix} e^u + \sin v & 0 \\ e^u - \cos v & 1 \end{vmatrix}}{J}$$

例 设 $\begin{cases} x = e^u + u\sin v \\ y = e^u - u\cos v \end{cases}$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$

解

$$\begin{cases} e^u + u\sin v = x \\ e^u - u\cos v = y \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} (e^u + \sin v)u_x + u\cos v \cdot v_x = 1 \\ (e^u - \cos v)u_x + u\sin v \cdot v_x = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \begin{cases} (e^u + \sin v)u_y + u\cos v \cdot v_y = 0 \\ (e^u - \cos v)u_y + u\sin v \cdot v_y = 1 \end{cases}$$

所以 $J = \begin{vmatrix} e^u + \sin v & u\cos v \\ e^u - \cos v & u\sin v \end{vmatrix} = ue^u(\sin v - \cos v) + u$

$$u_x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & u\cos v \\ 0 & u\sin v \end{vmatrix}}{J} \qquad v_x = \frac{\begin{vmatrix} e^u + \sin v & 1 \\ e^u - \cos v & 0 \end{vmatrix}}{J}$$

$$u_y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & u\cos v \\ 1 & u\sin v \end{vmatrix}}{J} \qquad v_y = \frac{\begin{vmatrix} e^u + \sin v & 0 \\ e^u - \cos v & 1 \end{vmatrix}}{J}$$

例 设 $\begin{cases} x = e^u + u\sin v \\ y = e^u - u\cos v \end{cases}$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$

解

$$\begin{cases} e^u + u\sin v = x \\ e^u - u\cos v = y \end{cases} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} (e^u + \sin v)u_x + u\cos v \cdot v_x = 1 \\ (e^u - \cos v)u_x + u\sin v \cdot v_x = 0 \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \begin{cases} (e^u + \sin v)u_y + u\cos v \cdot v_y = 0 \\ (e^u - \cos v)u_y + u\sin v \cdot v_y = 1 \end{cases}$$

所以 $J = \begin{vmatrix} e^u + \sin v & u\cos v \\ e^u - \cos v & u\sin v \end{vmatrix} = ue^u(\sin v - \cos v) + u$

$$u_x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & u\cos v \\ 0 & u\sin v \end{vmatrix}}{J} = \frac{\sin v}{e^u(\sin v - \cos v) + 1}, \quad v_x = \frac{\begin{vmatrix} e^u + \sin v & 1 \\ e^u - \cos v & 0 \end{vmatrix}}{J}$$

$$u_y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & u\cos v \\ 1 & u\sin v \end{vmatrix}}{J} \qquad v_y = \frac{\begin{vmatrix} e^u + \sin v & 0 \\ e^u - \cos v & 1 \end{vmatrix}}{J}$$

例 设 $\begin{cases} x = e^u + u\sin v \\ y = e^u - u\cos v \end{cases}$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$

解

$$\begin{cases} e^u + u\sin v = x \\ e^u - u\cos v = y \end{cases} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} (e^u + \sin v)u_x + u\cos v \cdot v_x = 1 \\ (e^u - \cos v)u_x + u\sin v \cdot v_x = 0 \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \begin{cases} (e^u + \sin v)u_y + u\cos v \cdot v_y = 0 \\ (e^u - \cos v)u_y + u\sin v \cdot v_y = 1 \end{cases}$$

所以 $J = \begin{vmatrix} e^u + \sin v & u\cos v \\ e^u - \cos v & u\sin v \end{vmatrix} = ue^u(\sin v - \cos v) + u$

$$u_x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & u\cos v \\ 0 & u\sin v \end{vmatrix}}{J} = \frac{\sin v}{e^u(\sin v - \cos v) + 1}, \quad v_x = \frac{\begin{vmatrix} e^u + \sin v & 1 \\ e^u - \cos v & 0 \end{vmatrix}}{J} = \frac{-e^u + \cos v}{ue^u(\sin v - \cos v) + u}$$

$$u_y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & u\cos v \\ 1 & u\sin v \end{vmatrix}}{J} \qquad v_y = \frac{\begin{vmatrix} e^u + \sin v & 0 \\ e^u - \cos v & 1 \end{vmatrix}}{J}$$

例 设 $\begin{cases} x = e^u + u\sin v \\ y = e^u - u\cos v \end{cases}$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$

解

$$\begin{cases} e^u + u\sin v = x \\ e^u - u\cos v = y \end{cases} \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} (e^u + \sin v)u_x + u\cos v \cdot v_x = 1 \\ (e^u - \cos v)u_x + u\sin v \cdot v_x = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \begin{cases} (e^u + \sin v)u_y + u\cos v \cdot v_y = 0 \\ (e^u - \cos v)u_y + u\sin v \cdot v_y = 1 \end{cases}$$

所以 $J = \begin{vmatrix} e^u + \sin v & u\cos v \\ e^u - \cos v & u\sin v \end{vmatrix} = ue^u(\sin v - \cos v) + u$

$$u_x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & u\cos v \\ 0 & u\sin v \end{vmatrix}}{J} = \frac{\sin v}{e^u(\sin v - \cos v) + 1}, \quad v_x = \frac{\begin{vmatrix} e^u + \sin v & 1 \\ e^u - \cos v & 0 \end{vmatrix}}{J} = \frac{-e^u + \cos v}{ue^u(\sin v - \cos v) + u}$$

$$u_y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & u\cos v \\ 1 & u\sin v \end{vmatrix}}{J} = \frac{-\cos v}{e^u(\sin v - \cos v) + 1}, \quad v_y = \frac{\begin{vmatrix} e^u + \sin v & 0 \\ e^u - \cos v & 1 \end{vmatrix}}{J}$$

例 设 $\begin{cases} x = e^u + u\sin v \\ y = e^u - u\cos v \end{cases}$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$

解

$$\begin{cases} e^u + u\sin v = x \\ e^u - u\cos v = y \end{cases} \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} (e^u + \sin v)u_x + u\cos v \cdot v_x = 1 \\ (e^u - \cos v)u_x + u\sin v \cdot v_x = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \begin{cases} (e^u + \sin v)u_y + u\cos v \cdot v_y = 0 \\ (e^u - \cos v)u_y + u\sin v \cdot v_y = 1 \end{cases}$$

所以 $J = \begin{vmatrix} e^u + \sin v & u\cos v \\ e^u - \cos v & u\sin v \end{vmatrix} = ue^u(\sin v - \cos v) + u$

$$u_x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & u\cos v \\ 0 & u\sin v \end{vmatrix}}{J} = \frac{\sin v}{e^u(\sin v - \cos v) + 1}, \quad v_x = \frac{\begin{vmatrix} e^u + \sin v & 1 \\ e^u - \cos v & 0 \end{vmatrix}}{J} = \frac{-e^u + \cos v}{ue^u(\sin v - \cos v) + u}$$

$$u_y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & u\cos v \\ 1 & u\sin v \end{vmatrix}}{J} = \frac{-\cos v}{e^u(\sin v - \cos v) + 1}, \quad v_y = \frac{\begin{vmatrix} e^u + \sin v & 0 \\ e^u - \cos v & 1 \end{vmatrix}}{J} = \frac{e^u + \sin v}{ue^u(\sin v - \cos v) + u}$$

We are here now...

1. 隐函数的求导法：一个方程的情形

2. 隐函数的求导法：方程组的情形

3. 隐函数定理

假设 $f(x, y)$ 是光滑的二元函数，其零点集 $\{f = 0\}$ 是平面上点集。

1. $\{f = 0\}$ 的形状通常是一条曲线，为什么？
2. 如何求曲线 $\{f = 0\}$ 上每一点处的切线？

假设 $f(x, y)$ 是光滑的二元函数，其零点集 $\{f=0\}$ 是平面上点集。

1. $\{f=0\}$ 的形状通常是一条曲线，为什么？
2. 如何求曲线 $\{f=0\}$ 上每一点处的切线？

- 关于第一个问题，$\{f=0\}$ 的形状可以任意复杂。

假设 $f(x, y)$ 是光滑的二元函数，其零点集 $\{f = 0\}$ 是平面上点集。

1. $\{f = 0\}$ 的形状通常是一条曲线，为什么？
2. 如何求曲线 $\{f = 0\}$ 上每一点处的切线？

- 关于第一个问题，$\{f = 0\}$ 的形状可以任意复杂。事实上，任意一个闭集，都是某个光滑函数的零点集。

假设 $f(x, y)$ 是光滑的二元函数，其零点集 $\{f = 0\}$ 是平面上点集。

1. $\{f = 0\}$ 的形状通常是一条曲线，为什么？
2. 如何求曲线 $\{f = 0\}$ 上每一点处的切线？

- 关于第一个问题，$\{f = 0\}$ 的形状可以任意复杂。事实上，任意一个闭集，都是某个光滑函数的零点集。
- 隐函数定理：何时 $\{f = 0\}$ 是一条光滑曲线

设 $f(x,y)$ 是光滑的二元函数，考察零点集 $\{f=0\}$：

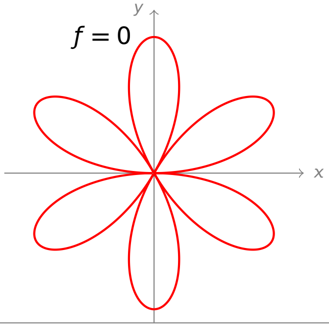
$$f(x,y)=\left(3x^2-y^2\right)^2 y^2-\left(x^2+y^2\right)^4$$

$$f(x,y)=\left(x^2+y^2+y\right)^2-\left(x^2+y^2\right)$$

$$f(x,y)=x^2+y^2$$

设 $f(x,y)$ 是光滑的二元函数，考察零点集 $\{f=0\}$：

$$f(x,y)=\left(3x^2-y^2\right)^2 y^2-\left(x^2+y^2\right)^4$$

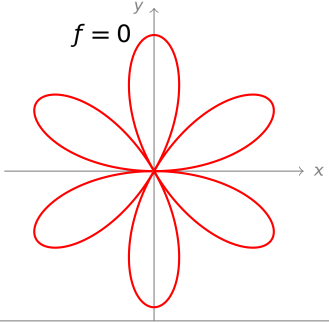


$$f(x,y)=\left(x^2+y^2+y\right)^2-\left(x^2+y^2\right)$$

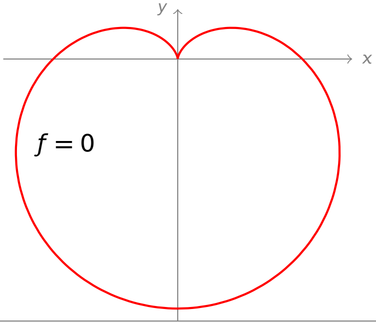
$$f(x,y)=x^2+y^2$$

设 $f(x,y)$ 是光滑的二元函数，考察零点集 $\{f=0\}$：

$$f(x,y)=\left(3x^2-y^2\right)^2y^2-\left(x^2+y^2\right)^4$$

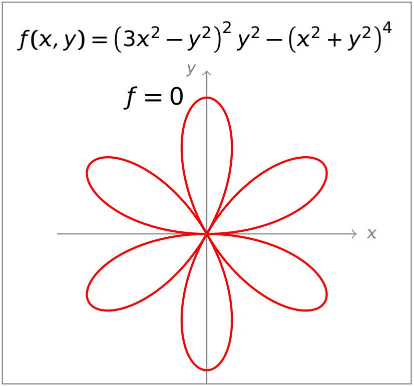


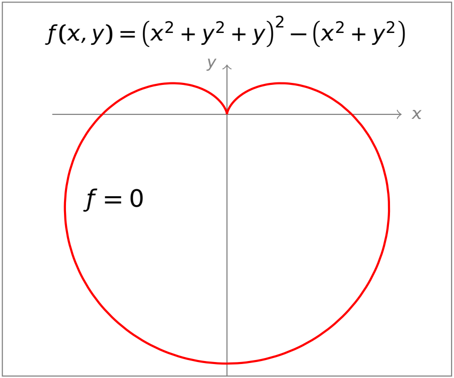
$$f(x,y)=\left(x^2+y^2+y\right)^2-\left(x^2+y^2\right)$$

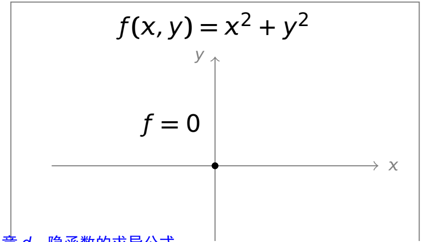


$$f(x,y)=x^2+y^2$$

设 $f(x,y)$ 是光滑的二元函数，考察零点集 $\{f=0\}$：

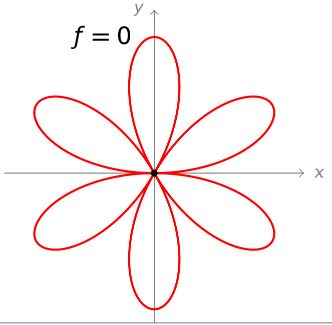




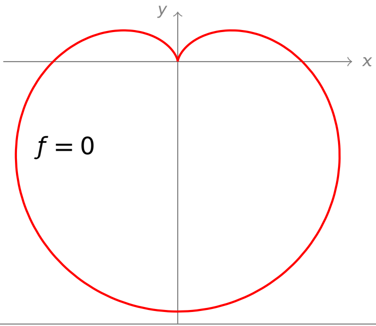


设 $f(x,y)$ 是光滑的二元函数，考察零点集 $\{f=0\}$：

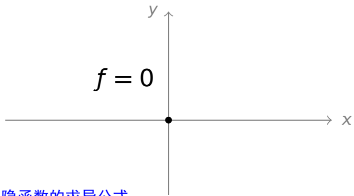
$f(x,y)=\left(3x^2-y^2\right)^2y^2-\left(x^2+y^2\right)^4$



$f(x,y)=\left(x^2+y^2+y\right)^2-\left(x^2+y^2\right)$

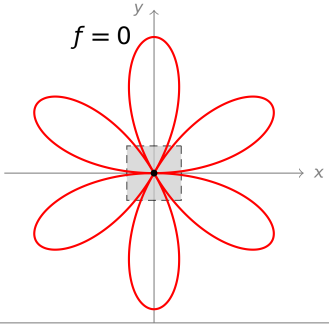


$f(x,y)=x^2+y^2$

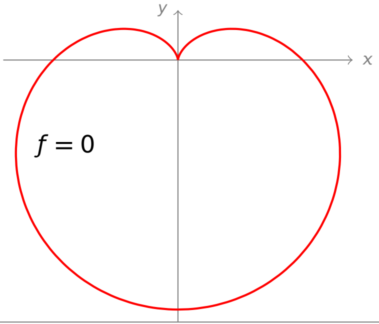


设 $f(x,y)$ 是光滑的二元函数，考察零点集 $\{f=0\}$：

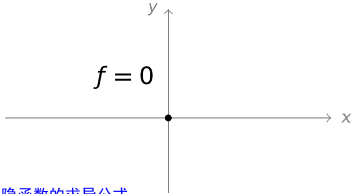
$$f(x,y)=\left(3x^2-y^2\right)^2y^2-\left(x^2+y^2\right)^4$$



$$f(x,y)=\left(x^2+y^2+y\right)^2-\left(x^2+y^2\right)$$

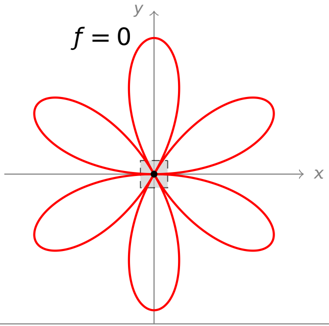


$$f(x,y)=x^2+y^2$$

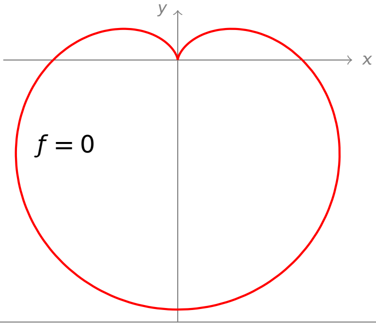


设 $f(x,y)$ 是光滑的二元函数，考察零点集 $\{f=0\}$：

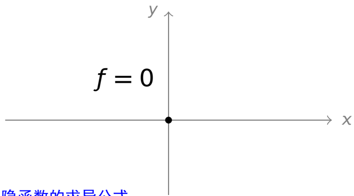
$$f(x,y)=\left(3x^2-y^2\right)^2y^2-\left(x^2+y^2\right)^4$$



$$f(x,y)=\left(x^2+y^2+y\right)^2-\left(x^2+y^2\right)$$

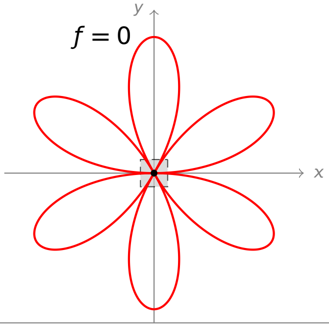


$$f(x,y)=x^2+y^2$$

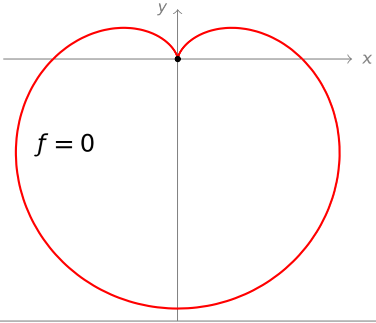


设 $f(x,y)$ 是光滑的二元函数，考察零点集 $\{f=0\}$：

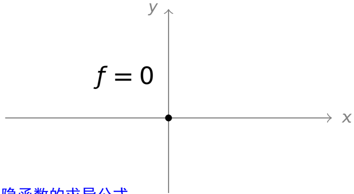
$f(x,y)=(3x^2-y^2)^2y^2-(x^2+y^2)^4$



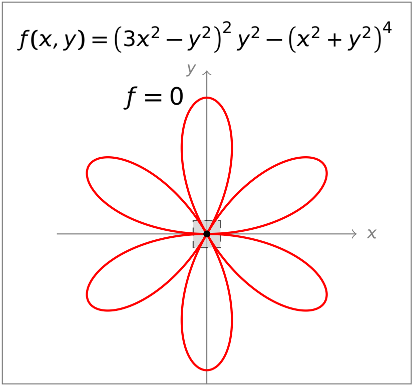
$f(x,y)=(x^2+y^2+y)^2-(x^2+y^2)$

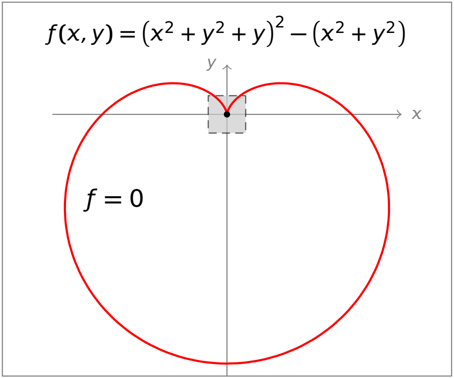


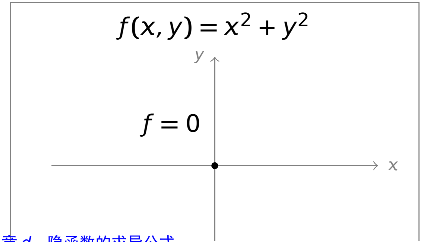
$f(x,y)=x^2+y^2$



设 $f(x,y)$ 是光滑的二元函数，考察零点集 $\{f=0\}$：

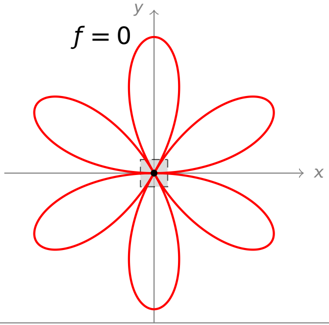




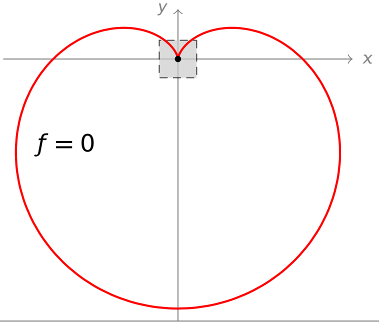


设 $f(x,y)$ 是光滑的二元函数，考察零点集 $\{f=0\}$：

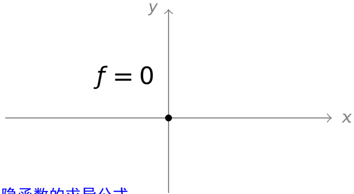
$f(x,y)=\left(3x^2-y^2\right)^2y^2-\left(x^2+y^2\right)^4$



$f(x,y)=\left(x^2+y^2+y\right)^2-\left(x^2+y^2\right)$



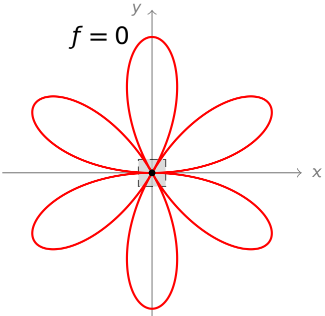
$f(x,y)=x^2+y^2$



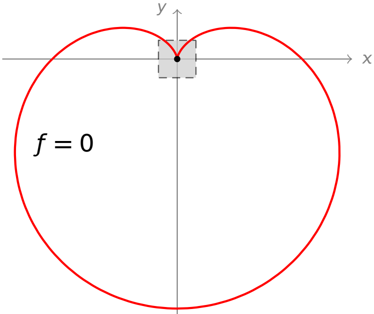
- $(0,0)$ 处 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，不存在切线

设 $f(x,y)$ 是光滑的二元函数，考察零点集 $\{f=0\}$：

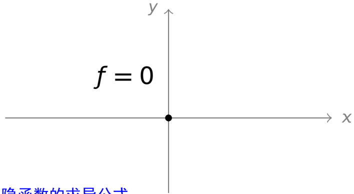
$$f(x,y)=\left(3x^2-y^2\right)^2y^2-\left(x^2+y^2\right)^4$$



$$f(x,y)=\left(x^2+y^2+y\right)^2-\left(x^2+y^2\right)$$



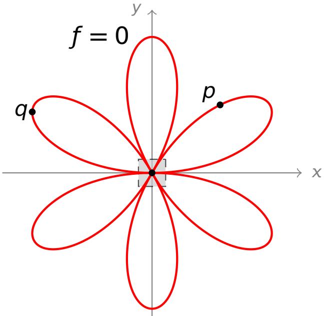
$$f(x,y)=x^2+y^2$$



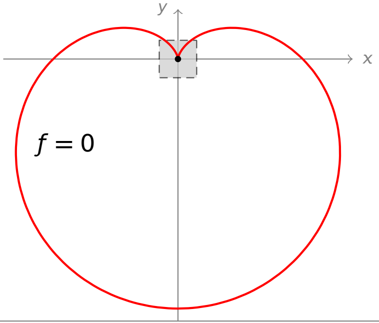
- $(0,0)$ 处 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，不存在切线
- 其他点处偏导数不全为零，在附近是光滑曲线

设 $f(x,y)$ 是光滑的二元函数，考察零点集 $\{f=0\}$：

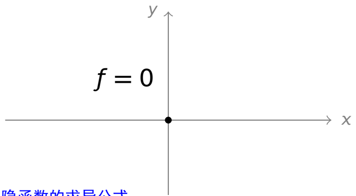
$f(x,y)=(3x^2-y^2)^2y^2-(x^2+y^2)^4$



$f(x,y)=(x^2+y^2+y)^2-(x^2+y^2)$

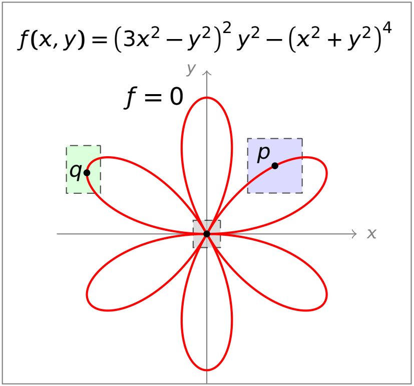


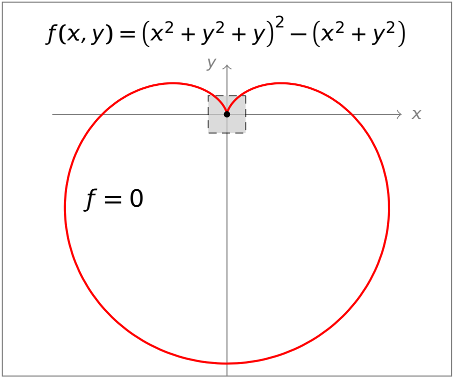
$f(x,y)=x^2+y^2$

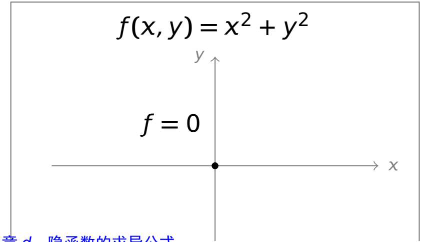


- $(0,0)$ 处 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，不存在切线
- 其他点处偏导数不全为零，在附近是光滑曲线

设 $f(x,y)$ 是光滑的二元函数，考察零点集 $\{f=0\}$：

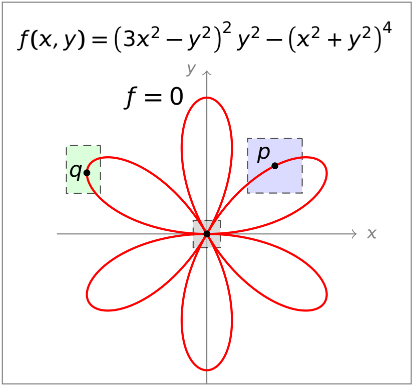


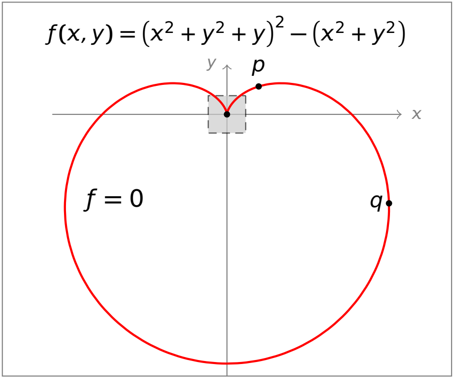


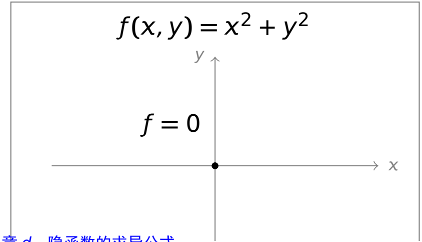


- $(0,0)$ 处 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，不存在切线
- 其他点处偏导数不全为零，在附近是光滑曲线

设 $f(x,y)$ 是光滑的二元函数，考察零点集 $\{f=0\}$：

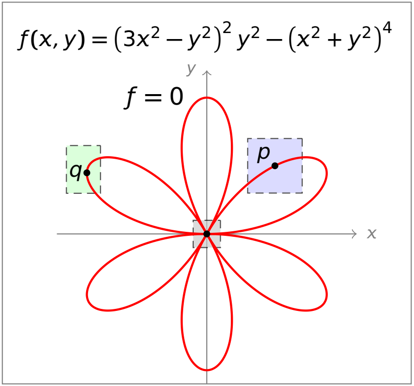


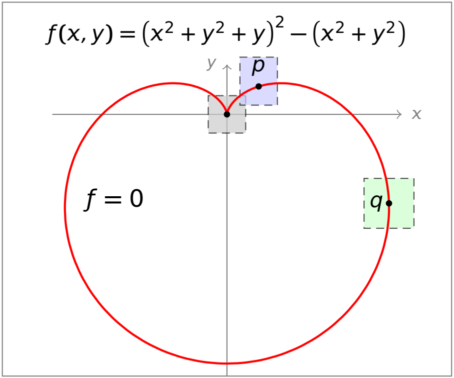


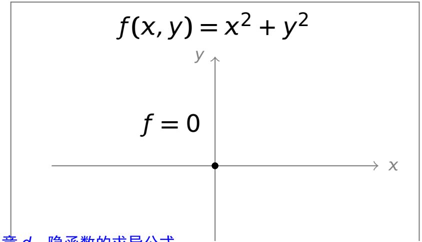


- $(0,0)$ 处 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，不存在切线
- 其他点处偏导数不全为零，在附近是光滑曲线

设 $f(x,y)$ 是光滑的二元函数，考察零点集 $\{f=0\}$：



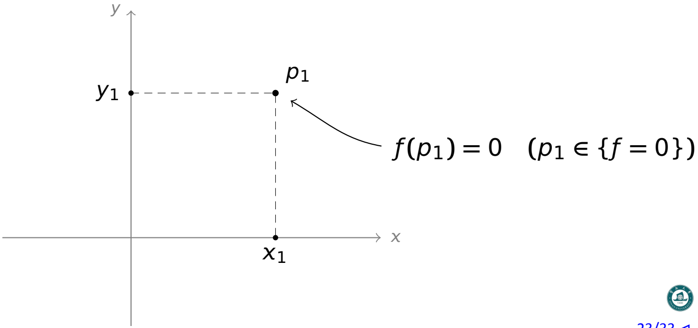




- $(0,0)$ 处 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，不存在切线
- 其他点处偏导数不全为零，在附近是光滑曲线

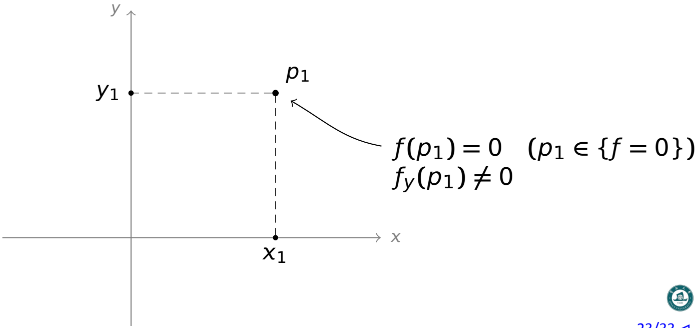
隐函数定理 1.1 设 $f(x,y)$ 在点 $p_1(x_1,y_1)$ 附近有定义，具有连续偏导；$f(x_1,y_1)=0$；

零点集 $\{f=0\}$ 在 p_1 附近的形状



隐函数定理 1.1 设 $f(x,y)$ 在点 $p_1(x_1,y_1)$ 附近有定义，具有连续偏导；$f(x_1,y_1)=0$；$f_y(x_1,y_1)\neq 0$。

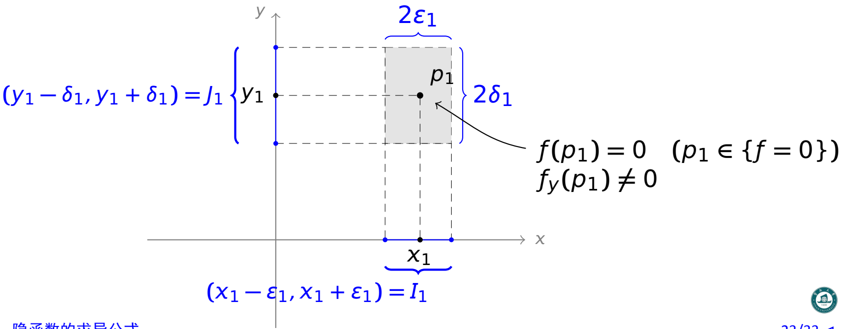
零点集 $\{f=0\}$ 在 p_1 附近的形状



隐函数定理 1.1 设 $f(x,y)$ 在点 $p_1(x_1,y_1)$ 附近有定义，具有连续偏导；$f(x_1,y_1)=0$；$f_y(x_1,y_1)\neq 0$。则存在

- 区间 $I_1=(x_1-\varepsilon,\ x_1+\varepsilon)$ 和 $J_1=(y_1-\delta,\ y_1+\delta)$，

零点集$\{f=0\}$在p_1附近的形状

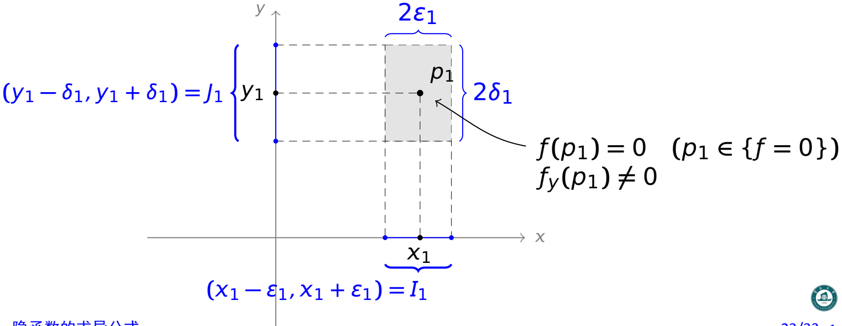


隐函数定理 1.1 设 $f(x, y)$ 在点 $p_1(x_1, y_1)$ 附近有定义，具有连续偏导；$f(x_1, y_1) = 0$；$f_y(x_1, y_1) \neq 0$。则存在

- 区间 $I_1 = (x_1 - \varepsilon,\ x_1 + \varepsilon)$ 和 $J_1 = (y_1 - \delta,\ y_1 + \delta)$，

$$\{f = 0\} \cap (I_1 \times J_1) =$$

零点集 $\{f = 0\}$ 在 p_1 附近的形状

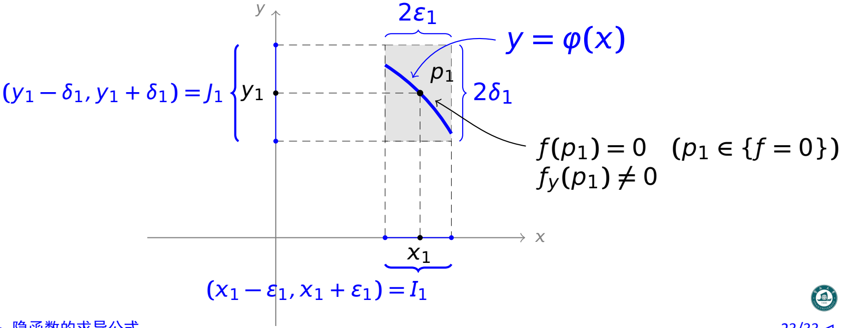


隐函数定理 1.1 设 $f(x,y)$ 在点 $p_1(x_1,y_1)$ 附近有定义，具有连续偏导；$f(x_1,y_1)=0$；$f_y(x_1,y_1)\neq 0$。则存在

- 区间 $I_1=(x_1-\varepsilon,\ x_1+\varepsilon)$ 和 $J_1=(y_1-\delta,\ y_1+\delta)$，
- 函数 $\varphi: I_1\to J_1$，$y=\varphi(x)$，且具有连续导数

$$\{f=0\}\cap(I_1\times J_1)=$$

零点集 $\{f=0\}$ 在 p_1 附近的形状



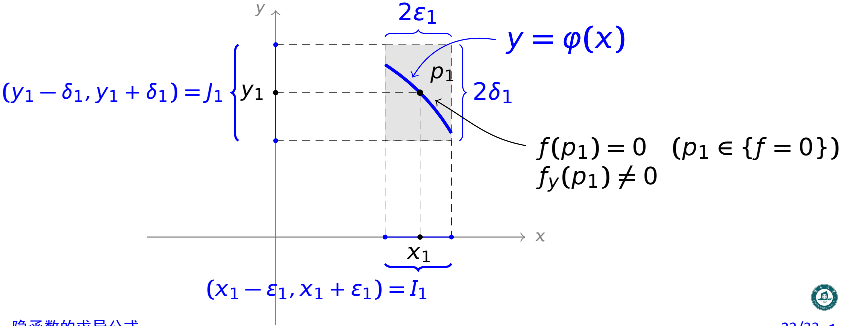
隐函数定理 1.1 设 $f(x,y)$ 在点 $p_1(x_1,y_1)$ 附近有定义，具有连续偏导；$f(x_1,y_1)=0$；$f_y(x_1,y_1)\neq 0$。则存在

- 区间 $I_1=(x_1-\varepsilon,\ x_1+\varepsilon)$ 和 $J_1=(y_1-\delta,\ y_1+\delta)$，
- 函数 $\varphi: I_1\to J_1$，$y=\varphi(x)$，且具有连续导数

使得

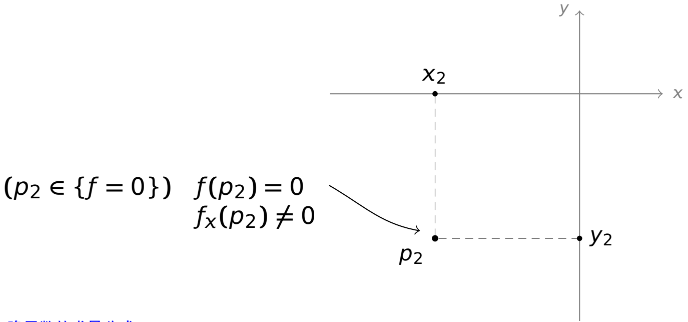
$$\{f=0\}\cap(I_1\times J_1)=\mathrm{Graph}(\varphi).$$

零点集$\{f=0\}$在p_1附近的形状



隐函数定理 1.2 设 $f(x,y)$ 在点 $p_2(x_2,y_2)$ 附近有定义，具有连续偏导；$f(x_2,y_2)=0$；$f_x(x_2,y_2)\neq 0$。

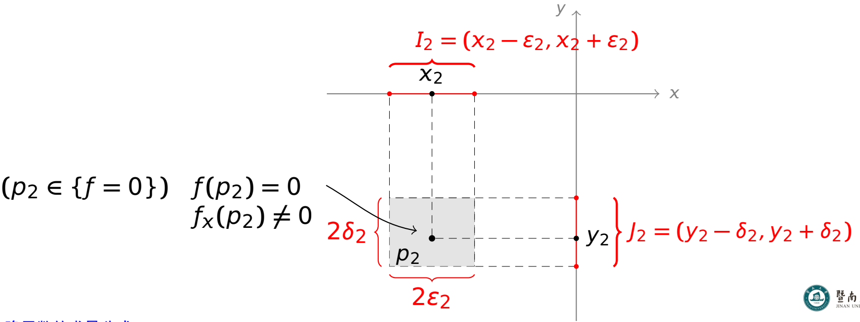
零点集$\{f=0\}$在p_1附近的形状



隐函数定理 1.2 设 $f(x,y)$ 在点 $p_2(x_2,y_2)$ 附近有定义，具有连续偏导；$f(x_2,y_2)=0$；$f_x(x_2,y_2)\neq 0$。则存在

- 区间 $I_2=(x_2-\varepsilon,\ x_2+\varepsilon)$ 和 $J_2=(y_2-\delta,\ y_2+\delta)$，

零点集$\{f=0\}$在p_1附近的形状

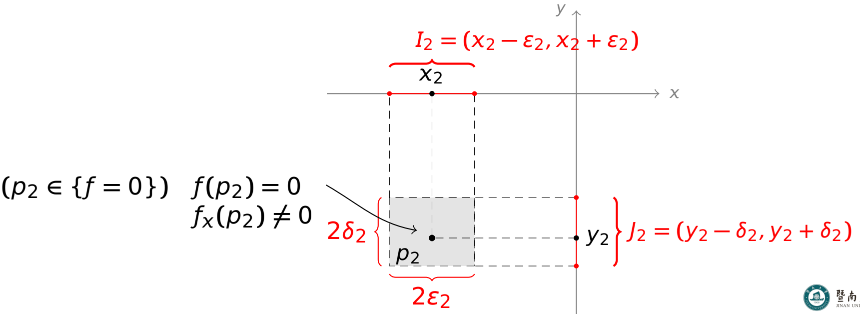


隐函数定理 1.2 设 $f(x,y)$ 在点 $p_2(x_2,y_2)$ 附近有定义，具有连续偏导；$f(x_2,y_2)=0$；$f_x(x_2,y_2)\neq 0$。则存在

- 区间 $I_2=(x_2-\varepsilon,\ x_2+\varepsilon)$ 和 $J_2=(y_2-\delta,\ y_2+\delta)$，

$$\{f=0\}\cap(J_2\times I_2)=$$

零点集 $\{f=0\}$ 在 p_1 附近的形状



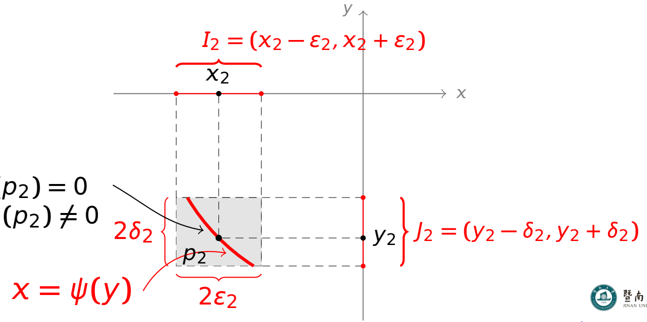
隐函数定理 1.2 设 $f(x,y)$ 在点 $p_2(x_2,y_2)$ 附近有定义，具有连续偏导；$f(x_2,y_2)=0$；$f_x(x_2,y_2)\neq 0$。则存在

- 区间 $I_2=(x_2-\varepsilon,\ x_2+\varepsilon)$ 和 $J_2=(y_2-\delta,\ y_2+\delta)$，
- 函数 $\psi: J_2\to I_2$，$x=\psi(y)$，且具有连续导数

$$\{f=0\}\cap(J_2\times I_2)=$$

零点集 $\{f=0\}$ 在 p_1 附近的形状

$(p_2\in\{f=0\})$ $f(p_2)=0$
$f_x(p_2)\neq 0$



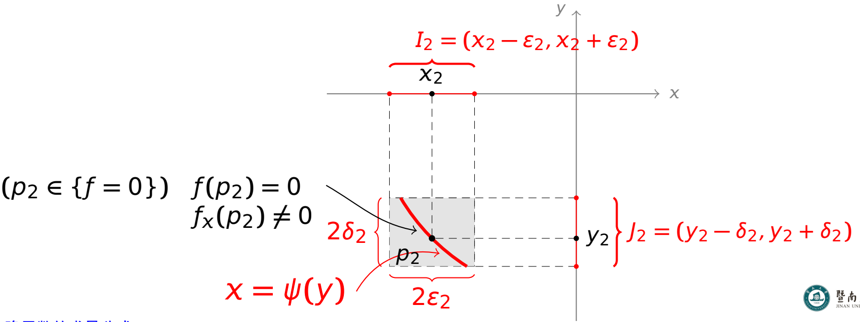
隐函数定理 1.2 设 $f(x,y)$ 在点 $p_2(x_2,y_2)$ 附近有定义，具有连续偏导；$f(x_2,y_2)=0$；$f_x(x_2,y_2)\neq 0$。则存在

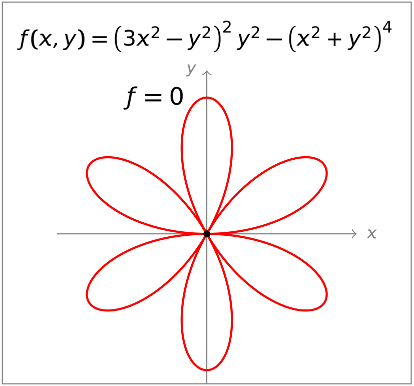
- 区间 $I_2=(x_2-\varepsilon,\ x_2+\varepsilon)$ 和 $J_2=(y_2-\delta,\ y_2+\delta)$，
- 函数 $\psi: J_2\to I_2$，$x=\psi(y)$，且具有连续导数

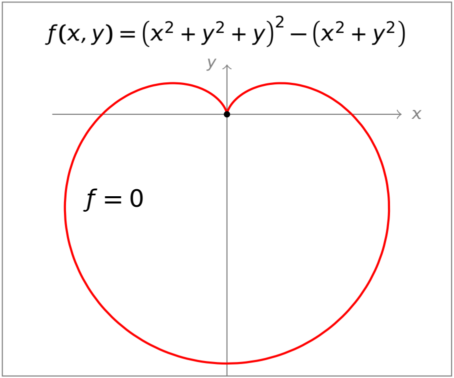
使得

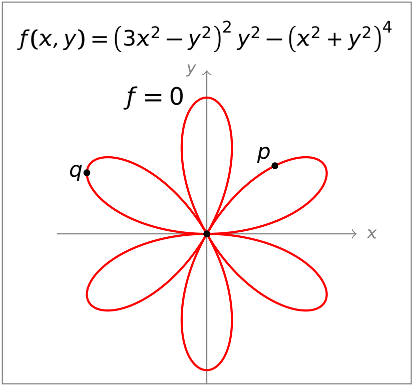
$$\{f=0\}\cap(J_2\times I_2)=\mathrm{Graph}(\psi).$$

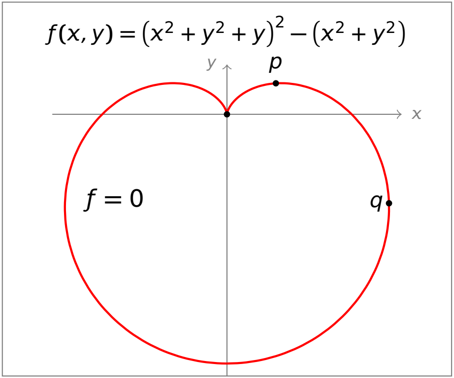
零点集 $\{f=0\}$ 在 p_1 附近的形状

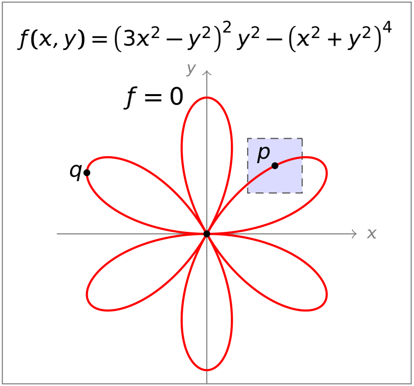


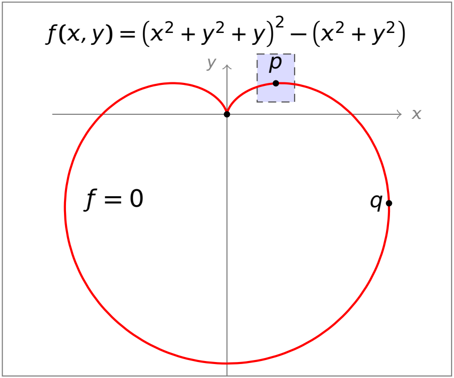

$f(x,y)=\left(3x^2-y^2\right)^2y^2-\left(x^2+y^2\right)^4$
y
$f=0$
x


$f(x,y)=\left(x^2+y^2+y\right)^2-\left(x^2+y^2\right)$
y
x
$f=0$

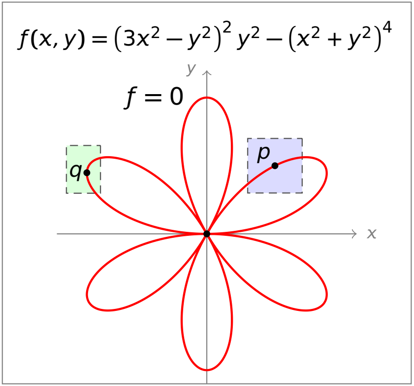

$f(x,y)=\left(3x^2-y^2\right)^2y^2-\left(x^2+y^2\right)^4$
y
$f=0$
p
q
x

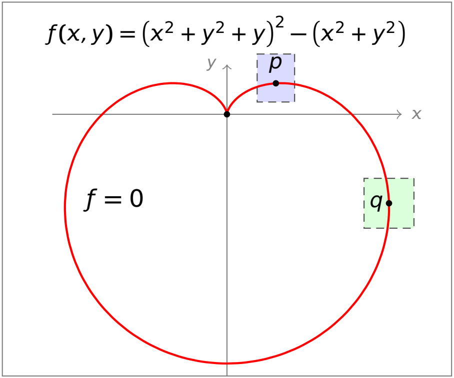

$f(x,y)=\left(x^2+y^2+y\right)^2-\left(x^2+y^2\right)$
y
p
x
$f=0$
q





- 在 p 点附近，$\{f = 0\}$ 是函数 $y = \varphi(x)$ 的图形





- 在 p 点附近，$\{f=0\}$ 是函数 $y=\varphi(x)$ 的图形
- 在 q 点附近，$\{f=0\}$ 是函数 $x=\psi(y)$ 的图形

- 设 $f(x,y)$ 是二元函数，其零点集 $\{f=0\}$ 是平面上的点集。

- 设 $f(x, y)$ 是二元函数，其零点集 $\{f = 0\}$ 是平面上的点集。
- 由隐函数定理可知：只要偏导数 f_x, f_y 不全为零，则 $\{f = 0\}$ 是光滑曲线，

- 设 $f(x,y)$ 是二元函数，其零点集 $\{f=0\}$ 是平面上的点集。
- 由隐函数定理可知：只要偏导数 f_x, f_y 不全为零，则 $\{f=0\}$ 是光滑曲线，并且局部上是光滑一元函数 $y=\varphi(x)$ 或 $x=\psi(y)$ 的图像。

- 设 $f(x,y)$ 是二元函数，其零点集 $\{f=0\}$ 是平面上的点集。
- 由隐函数定理可知：只要偏导数 f_x, f_y 不全为零，则 $\{f=0\}$ 是光滑曲线，并且局部上是光滑一元函数 $y=\varphi(x)$ 或 $x=\psi(y)$ 的图像。
- 此时，$\{f=0\}$ 的切线，就是 $y=\varphi(x)$ 或 $x=\psi(y)$ 的图像的切线：

- 设 $f(x,y)$ 是二元函数，其零点集 $\{f=0\}$ 是平面上的点集。
- 由隐函数定理可知：只要偏导数 f_x, f_y 不全为零，则 $\{f=0\}$ 是光滑曲线，并且局部上是光滑一元函数 $y=\varphi(x)$ 或 $x=\psi(y)$ 的图像。
- 此时，$\{f=0\}$ 的切线，就是 $y=\varphi(x)$ 或 $x=\psi(y)$ 的图像的切线：
  - $y=\varphi(x)$ 图像的斜率是
  - $x=\psi(y)$ 图像的斜率是

- 设 $f(x,y)$ 是二元函数，其零点集 $\{f=0\}$ 是平面上的点集。
- 由隐函数定理可知：只要偏导数 f_x, f_y 不全为零，则 $\{f=0\}$ 是光滑曲线，并且局部上是光滑一元函数 $y=\varphi(x)$ 或 $x=\psi(y)$ 的图像。
- 此时，$\{f=0\}$ 的切线，就是 $y=\varphi(x)$ 或 $x=\psi(y)$ 的图像的切线：
  - $y=\varphi(x)$ 图像的斜率是 $\varphi'(x)$
  - $x=\psi(y)$ 图像的斜率是

- 设 $f(x,y)$ 是二元函数，其零点集 $\{f=0\}$ 是平面上的点集。
- 由隐函数定理可知：只要偏导数 f_x, f_y 不全为零，则 $\{f=0\}$ 是光滑曲线，并且局部上是光滑一元函数 $y=\varphi(x)$ 或 $x=\psi(y)$ 的图像。
- 此时，$\{f=0\}$ 的切线，就是 $y=\varphi(x)$ 或 $x=\psi(y)$ 的图像的切线：
  - $y=\varphi(x)$ 图像的斜率是 $\varphi'(x)=-\frac{f_x}{f_y}$
  - $x=\psi(y)$ 图像的斜率是

- 设 $f(x,y)$ 是二元函数，其零点集 $\{f=0\}$ 是平面上的点集。
- 由隐函数定理可知：只要偏导数 f_x, f_y 不全为零，则 $\{f=0\}$ 是光滑曲线，并且局部上是光滑一元函数 $y=\varphi(x)$ 或 $x=\psi(y)$ 的图像。
- 此时，$\{f=0\}$ 的切线，就是 $y=\varphi(x)$ 或 $x=\psi(y)$ 的图像的切线：
    - $y=\varphi(x)$ 图像的斜率是 $\varphi'(x)=-\frac{f_x}{f_y}$，所以切线平行于 $(f_y,-f_x)$
    - $x=\psi(y)$ 图像的斜率是

- 设 $f(x, y)$ 是二元函数，其零点集 $\{f = 0\}$ 是平面上的点集。
- 由隐函数定理可知：只要偏导数 f_x, f_y 不全为零，则 $\{f = 0\}$ 是光滑曲线，并且局部上是光滑一元函数 $y = \varphi(x)$ 或 $x = \psi(y)$ 的图像。
- 此时，$\{f = 0\}$ 的切线，就是 $y = \varphi(x)$ 或 $x = \psi(y)$ 的图像的切线：
  - $y = \varphi(x)$ 图像的斜率是 $\varphi'(x) = -\frac{f_x}{f_y}$，所以切线平行于 $(f_y, -f_x)$
  - $x = \psi(y)$ 图像的斜率是 $\frac{1}{\psi'(y)}$

- 设 $f(x,y)$ 是二元函数，其零点集 $\{f=0\}$ 是平面上的点集。
- 由隐函数定理可知：只要偏导数 f_x, f_y 不全为零，则 $\{f=0\}$ 是光滑曲线，并且局部上是光滑一元函数 $y=\varphi(x)$ 或 $x=\psi(y)$ 的图像。
- 此时，$\{f=0\}$ 的切线，就是 $y=\varphi(x)$ 或 $x=\psi(y)$ 的图像的切线：
    - $y=\varphi(x)$ 图像的斜率是 $\varphi'(x)=-\frac{f_x}{f_y}$，所以切线平行于 $(f_y,-f_x)$
    - $x=\psi(y)$ 图像的斜率是 $\frac{1}{\psi'(y)}=-\frac{f_x}{f_y}$

- 设 $f(x, y)$ 是二元函数，其零点集 $\{f = 0\}$ 是平面上的点集。
- 由隐函数定理可知：只要偏导数 f_x, f_y 不全为零，则 $\{f = 0\}$ 是光滑曲线，并且局部上是光滑一元函数 $y = \varphi(x)$ 或 $x = \psi(y)$ 的图像。
- 此时，$\{f = 0\}$ 的切线，就是 $y = \varphi(x)$ 或 $x = \psi(y)$ 的图像的切线：
  - $y = \varphi(x)$ 图像的斜率是 $\varphi'(x) = -\frac{f_x}{f_y}$，所以切线平行于 $(f_y, -f_x)$
  - $x = \psi(y)$ 图像的斜率是 $\frac{1}{\psi'(y)} = -\frac{f_x}{f_y}$，所以切线平行于 $(f_y, -f_x)$

- 设 $f(x,y)$ 是二元函数，其零点集 $\{f=0\}$ 是平面上的点集。
- 由隐函数定理可知：只要偏导数 f_x, f_y 不全为零，则 $\{f=0\}$ 是光滑曲线，并且局部上是光滑一元函数 $y=\varphi(x)$ 或 $x=\psi(y)$ 的图像。
- 此时，$\{f=0\}$ 的切线，就是 $y=\varphi(x)$ 或 $x=\psi(y)$ 的图像的切线：
  - $y=\varphi(x)$ 图像的斜率是 $\varphi'(x)=-\frac{f_x}{f_y}$，所以切线平行于 $(f_y,-f_x)$
  - $x=\psi(y)$ 图像的斜率是 $\frac{1}{\psi'(y)}=-\frac{f_x}{f_y}$，所以切线平行于 $(f_y,-f_x)$
- 总结：若 f_x, f_y 不全为零，则光滑曲线 $\{f=0\}$ 上的切线平行于向量 $(f_y,-f_x)$

- 设 $f(x,y)$ 是二元函数，其零点集 $\{f=0\}$ 是平面上的点集。
- 由隐函数定理可知：只要偏导数 f_x, f_y 不全为零，则 $\{f=0\}$ 是光滑曲线，并且局部上是光滑一元函数 $y=\varphi(x)$ 或 $x=\psi(y)$ 的图像。
- 此时，$\{f=0\}$ 的切线，就是 $y=\varphi(x)$ 或 $x=\psi(y)$ 的图像的切线：
  - $y=\varphi(x)$ 图像的斜率是 $\varphi'(x)=-\frac{f_x}{f_y}$，所以切线平行于 $(f_y,-f_x)$
  - $x=\psi(y)$ 图像的斜率是 $\frac{1}{\psi'(y)}=-\frac{f_x}{f_y}$，所以切线平行于 $(f_y,-f_x)$
- 总结：若 f_x, f_y 不全为零，则光滑曲线 $\{f=0\}$ 上的切线平行于向量 $(f_y,-f_x)$

定理 设 $f(x, y)$ 具有连续偏导数，$p(x_0, y_0)$ 满足 $f(x_0,y_0)=0$，且偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 和 $f_y(x_0,y_0)$ 不全为零。则

- 点集 $\{f=0\}$ 在 p 点附近是光滑曲线；
- 曲线 $\{f=0\}$ 在 p 点处的切线平行于向量 $(f_y,-f_x)$。

设 $f(x, y)$ 具有连续偏导数，c 是常数，考虑平面点集 $\{f = c\}$。

设 $f(x, y)$ 具有连续偏导数，c 是常数，考虑平面点集 $\{f = c\}$。与零点集情形类似，有如下结论：

设 $f(x, y)$ 具有连续偏导数，c 是常数，考虑平面点集 $\{f = c\}$。与零点集情形类似，有如下结论：

定理 设 $p(x_0, y_0)$ 满足 $f(x_0, y_0) = c$，且偏导数 $f_x(x_0, y_0)$ 和 $f_y(x_0, y_0)$ 不全为零。则

设 $f(x,y)$ 具有连续偏导数，c 是常数，考虑平面点集 $\{f=c\}$。与零点集情形类似，有如下结论：

定理 设 $p(x_0,y_0)$ 满足 $f(x_0,y_0)=c$，且偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 和 $f_y(x_0,y_0)$ 不全为零。则

- 点集 $\{f=c\}$ 在 p 点附近是光滑曲线；
- 曲线 $\{f=c\}$ 在 p 点处的切线平行于向量 $(f_y,-f_x)$。

设 $f(x, y)$ 具有连续偏导数，c 是常数，考虑平面点集 $\{f = c\}$。与零点集情形类似，有如下结论：

定理 设 $p(x_0, y_0)$ 满足 $f(x_0, y_0) = c$，且偏导数 $f_x(x_0, y_0)$ 和 $f_y(x_0, y_0)$ 不全为零。则

- 点集 $\{f = c\}$ 在 p 点附近是光滑曲线；
- 曲线 $\{f = c\}$ 在 p 点处的切线平行于向量 $(f_y, -f_x)$。

证明 令 $F(x, y) = f(x, y) - c$，则 $\{f = c\} = \{F = 0\}$，运用上一个结论即可。

设 $f(x, y)$ 具有连续偏导数，c 是常数，考虑平面点集 $\{f = c\}$。与零点集情形类似，有如下结论：

定理 设 $p(x_0, y_0)$ 满足 $f(x_0, y_0) = c$，且偏导数 $f_x(x_0, y_0)$ 和 $f_y(x_0, y_0)$ 不全为零。则

- 点集 $\{f = c\}$ 在 p 点附近是光滑曲线；
- 曲线 $\{f = c\}$ 在 p 点处的切线平行于向量 $(f_y, -f_x)$。

证明 令 $F(x, y) = f(x, y) - c$，则 $\{f = c\} = \{F = 0\}$，运用上一个结论即可。

注 1 若 f_x 和 f_y 处处不全为零，则 $\{f = c\}$ 关于参数 c 构成平面上一族曲线，

设 $f(x, y)$ 具有连续偏导数，c 是常数，考虑平面点集 $\{f = c\}$。与零点集情形类似，有如下结论：

定理 设 $p(x_0, y_0)$ 满足 $f(x_0, y_0) = c$，且偏导数 $f_x(x_0, y_0)$ 和 $f_y(x_0, y_0)$ 不全为零。则

- 点集 $\{f = c\}$ 在 p 点附近是光滑曲线；
- 曲线 $\{f = c\}$ 在 p 点处的切线平行于向量 $(f_y, -f_x)$。

证明 令 $F(x, y) = f(x, y) - c$，则 $\{f = c\} = \{F = 0\}$，运用上一个结论即可。

注 1 若 f_x 和 f_y 处处不全为零，则 $\{f = c\}$ 关于参数 c 构成平面上一族曲线，称为函数 $f(x, y)$ 的等值线。

设 $f(x,y)$ 具有连续偏导数，c 是常数，考虑平面点集 $\{f=c\}$。与零点集情形类似，有如下结论：

定理 设 $p(x_0,y_0)$ 满足 $f(x_0,y_0)=c$，且偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 和 $f_y(x_0,y_0)$ 不全为零。则

- 点集 $\{f=c\}$ 在 p 点附近是光滑曲线；
- 曲线 $\{f=c\}$ 在 p 点处的切线平行于向量 $(f_y,-f_x)$。

证明 令 $F(x,y)=f(x,y)-c$，则 $\{f=c\}=\{F=0\}$，运用上一个结论即可。

注 1 若 f_x 和 f_y 处处不全为零，则 $\{f=c\}$ 关于参数 c 构成平面上一族曲线，称为函数 $f(x,y)$ 的等值线。

注 2 等值线 $\{f=c\}$ 可视为空间曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ z=c \end{cases}$ 在 xoy 坐标面上的投影。

例 设 $f(x,y)=\left(3x^2-y^2\right)^2y^2-\left(x^2+y^2\right)^4$

- 在 desmos 上画出等值线 $\{f=c\}$
- 在 CalcPlot3D 上画出曲面 $z=f(x,y)$，平面 $z=c$，及交线空间曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ z=c \end{cases}$

例 设 $f(x,y)=\left(3x^2-y^2\right)^2 y^2-\left(x^2+y^2\right)^4$

- 在 desmos 上画出等值线 $\{f=c\}$
- 在 CalcPlot3D 上画出曲面 $z=f(x,y)$，平面 $z=c$，及交线空间曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ z=c \end{cases}$

（参考值 $c=-2,\ -0.3,\ 0,\ 0.1$）

设 $f(x,y,z)$ 是三元函数，其零点集 $\{f=0\}$ 是空间中的点集。

设 $f(x,y,z)$ 是三元函数，其零点集 $\{f=0\}$ 是空间中的点集。只要偏导数 f_x, f_y, f_z 不全为零，则 $\{f=0\}$ 是光滑曲面，

设 $f(x,y,z)$ 是三元函数，其零点集 $\{f=0\}$ 是空间中的点集。只要偏导数 f_x, f_y, f_z 不全为零，则 $\{f=0\}$ 是光滑曲面，并且局部上是光滑二元函数的图像。

设 $f(x,y,z)$ 是三元函数，其零点集 $\{f=0\}$ 是空间中的点集。只要偏导数 f_x, f_y, f_z 不全为零，则 $\{f=0\}$ 是光滑曲面，并且局部上是光滑二元函数的图像。

准确来说，就是如下的隐函数定理：

隐函数定理 2.1

设 $f(x,y,z)$ 是三元函数，其零点集 $\{f=0\}$ 是空间中的点集。只要偏导数 f_x, f_y, f_z 不全为零，则 $\{f=0\}$ 是光滑曲面，并且局部上是光滑二元函数的图像。

准确来说，就是如下的隐函数定理：

隐函数定理 2.1 设 $f(x,y,z)$ 在点 $p(x_0,y_0,z_0)$ 附近有定义，具有连续偏导；$f(x_0,y_0,z_0)=0$；$f_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$。

设 $f(x,y,z)$ 是三元函数，其零点集 $\{f=0\}$ 是空间中的点集。只要偏导数 f_x, f_y, f_z 不全为零，则 $\{f=0\}$ 是光滑曲面，并且局部上是光滑二元函数的图像。

准确来说，就是如下的隐函数定理：

隐函数定理 2.1 设 $f(x,y,z)$ 在点 $p(x_0,y_0,z_0)$ 附近有定义，具有连续偏导；$f(x_0,y_0,z_0)=0$；$f_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$。则存在

- 区间

  $$I_1=(x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon),\quad I_2=(y_0-\varepsilon,\ y_0+\varepsilon),\quad J=(z_0-\delta,\ z_0+\delta),$$

设 $f(x,y,z)$ 是三元函数，其零点集 $\{f=0\}$ 是空间中的点集。只要偏导数 f_x, f_y, f_z 不全为零，则 $\{f=0\}$ 是光滑曲面，并且局部上是光滑二元函数的图像。

准确来说，就是如下的隐函数定理：

隐函数定理 2.1 设 $f(x,y,z)$ 在点 $p(x_0,y_0,z_0)$ 附近有定义，具有连续偏导；$f(x_0,y_0,z_0)=0$；$f_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$。则存在

- 区间
  $$I_1=(x_0-\varepsilon,\, x_0+\varepsilon),\quad I_2=(y_0-\varepsilon,\, y_0+\varepsilon),\quad J=(z_0-\delta,\, z_0+\delta),$$

$$\{f=0\}\cap(I_1\times I_2\times J)=$$

设 $f(x,y,z)$ 是三元函数，其零点集 $\{f=0\}$ 是空间中的点集。只要偏导数 f_x, f_y, f_z 不全为零，则 $\{f=0\}$ 是光滑曲面，并且局部上是光滑二元函数的图像。

准确来说，就是如下的隐函数定理：

隐函数定理 2.1 设 $f(x,y,z)$ 在点 $p(x_0,y_0,z_0)$ 附近有定义，具有连续偏导；$f(x_0,y_0,z_0)=0$；$f_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$。则存在

- 区间

  $I_1=(x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon),\quad I_2=(y_0-\varepsilon,\ y_0+\varepsilon),\quad J=(z_0-\delta,\ z_0+\delta)$,

- 函数 $\varphi: I_1\times I_2\to J$，$z=\varphi(x,\ y)$，且具有连续偏导数

$$\{f=0\}\cap(I_1\times I_2\times J)=$$

设 $f(x,y,z)$ 是三元函数，其零点集 $\{f=0\}$ 是空间中的点集。只要偏导数 f_x, f_y, f_z 不全为零，则 $\{f=0\}$ 是光滑曲面，并且局部上是光滑二元函数的图像。

准确来说，就是如下的隐函数定理：

隐函数定理 2.1 设 $f(x,y,z)$ 在点 $p(x_0,y_0,z_0)$ 附近有定义，具有连续偏导；$f(x_0,y_0,z_0)=0$；$f_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$。则存在

- 区间
  $$I_1=(x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon),\quad I_2=(y_0-\varepsilon,\ y_0+\varepsilon),\quad J=(z_0-\delta,\ z_0+\delta),$$
- 函数 $\varphi: I_1\times I_2\to J$，$z=\varphi(x,\ y)$，且具有连续偏导数

使得
$$\{f=0\}\cap(I_1\times I_2\times J)=\mathrm{Graph}(\varphi).$$

设 $f(x,y,z)$ 是三元函数，其零点集 $\{f=0\}$ 是空间中的点集。只要偏导数 f_x, f_y, f_z 不全为零，则 $\{f=0\}$ 是光滑曲面，并且局部上是光滑二元函数的图像。

准确来说，就是如下的隐函数定理：

隐函数定理 2.2 设 $f(x,y,z)$ 在点 $p(x_0,y_0,z_0)$ 附近有定义，具有连续偏导；$f(x_0,y_0,z_0)=0$；$f_y(x_0,y_0,z_0)\neq 0$。则存在

- 区间

  $I_1 = (\qquad\qquad\qquad)$, $\quad I_2 = (\qquad\qquad\qquad)$, $\quad J = (\qquad\qquad\qquad)$,
- 函数 $\varphi : I_1 \times I_2 \to J$, $\qquad\qquad\qquad$ ，且具有连续偏导数

使得

$$\{f=0\} \cap (I_1 \times I_2 \times J) = \mathrm{Graph}(\varphi).$$

设 $f(x, y, z)$ 是三元函数，其零点集 $\{f = 0\}$ 是空间中的点集。只要偏导数 f_x, f_y, f_z 不全为零，则 $\{f = 0\}$ 是光滑曲面，并且局部上是光滑二元函数的图像。

准确来说，就是如下的隐函数定理：

隐函数定理 2.2 设 $f(x, y, z)$ 在点 $p(x_0, y_0, z_0)$ 附近有定义，具有连续偏导；$f(x_0, y_0, z_0) = 0$；$f_y(x_0, y_0, z_0) \neq 0$。则存在

- 区间

  $I_1 = (\qquad\qquad)$， $I_2 = (\qquad\qquad)$， $J = (\qquad\qquad)$，

- 函数 $\varphi : I_1 \times I_2 \to J$，$y = \varphi(x, z)$，且具有连续偏导数

使得

$$\{f = 0\} \cap (I_1 \times I_2 \times J) = \text{Graph}(\varphi).$$

设 $f(x,y,z)$ 是三元函数，其零点集 $\{f=0\}$ 是空间中的点集。只要偏导数 f_x, f_y, f_z 不全为零，则 $\{f=0\}$ 是光滑曲面，并且局部上是光滑二元函数的图像。

准确来说，就是如下的隐函数定理：

隐函数定理 2.2 设 $f(x,y,z)$ 在点 $p(x_0,y_0,z_0)$ 附近有定义，具有连续偏导；$f(x_0,y_0,z_0)=0$；$f_y(x_0,y_0,z_0)\neq 0$。则存在

- 区间
  $$I_1=(x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon),\quad I_2=(z_0-\varepsilon,\ z_0+\varepsilon),\quad J=(y_0-\delta,\ y_0+\delta),$$
- 函数 $\varphi: I_1\times I_2\to J$，$y=\varphi(x,z)$，且具有连续偏导数

使得
$$\{f=0\}\cap(I_1\times I_2\times J)=\mathrm{Graph}(\varphi).$$

设 $f(x,y,z)$ 是三元函数，其零点集 $\{f=0\}$ 是空间中的点集。只要偏导数 f_x, f_y, f_z 不全为零，则 $\{f=0\}$ 是光滑曲面，并且局部上是光滑二元函数的图像。

准确来说，就是如下的隐函数定理：

隐函数定理 2.3 设 $f(x,y,z)$ 在点 $p(x_0,y_0,z_0)$ 附近有定义，具有连续偏导；$f(x_0,y_0,z_0)=0$；$f_x(x_0,y_0,z_0)\neq 0$。则存在

- 区间

  $I_1=(\qquad\qquad\qquad)$， $I_2=(\qquad\qquad\qquad)$， $J=(\qquad\qquad\qquad)$，

- 函数 $\varphi: I_1\times I_2\to J$， ，且具有连续偏导数

使得

$$\{f=0\}\cap(I_1\times I_2\times J)=\mathrm{Graph}(\varphi).$$

设 $f(x,y,z)$ 是三元函数，其零点集 $\{f=0\}$ 是空间中的点集。只要偏导数 f_x, f_y, f_z 不全为零，则 $\{f=0\}$ 是光滑曲面，并且局部上是光滑二元函数的图像。

准确来说，就是如下的隐函数定理：

隐函数定理 2.3 设 $f(x,y,z)$ 在点 $p(x_0,y_0,z_0)$ 附近有定义，具有连续偏导；$f(x_0,y_0,z_0)=0$；$f_x(x_0,y_0,z_0)\neq 0$。则存在

- 区间

  $I_1=(\qquad\qquad\qquad)$， $I_2=(\qquad\qquad\qquad)$， $J=(\qquad\qquad\qquad)$，

- 函数 $\varphi: I_1\times I_2\to J$，$x=\varphi(y,z)$，且具有连续偏导数

使得

$$\{f=0\}\cap(I_1\times I_2\times J)=\mathrm{Graph}(\varphi).$$

设 $f(x,y,z)$ 是三元函数，其零点集 $\{f=0\}$ 是空间中的点集。只要偏导数 f_x, f_y, f_z 不全为零，则 $\{f=0\}$ 是光滑曲面，并且局部上是光滑二元函数的图像。

准确来说，就是如下的隐函数定理：

隐函数定理 2.3 设 $f(x,y,z)$ 在点 $p(x_0,y_0,z_0)$ 附近有定义，具有连续偏导；$f(x_0,y_0,z_0)=0$；$f_x(x_0,y_0,z_0)\neq 0$。则存在

- 区间

  $I_1=(y_0-\varepsilon,\ y_0+\varepsilon),\quad I_2=(z_0-\varepsilon,\ z_0+\varepsilon),\quad J=(x_0-\delta,\ x_0+\delta),$

- 函数 $\varphi: I_1\times I_2\to J$，$x=\varphi(y,z)$，且具有连续偏导数

使得

$$\{f=0\}\cap(I_1\times I_2\times J)=\mathrm{Graph}(\varphi).$$

例 设 $f(x, y) = (2x^2 + y^2 + z^2 - 1)^3 - \frac{1}{10}x^2z^3 - y^2z^3$

- 求出 $\{f = 0\}$ 上偏导数全为零的点（临界点）
- 在 CalcPlot3D 上画出曲面 $\{f = 0\}$
- 观察临界点附近是否光滑
- 观察曲面哪些部分可以表示成光滑二元函数 $z = \varphi(x, y)$，或 $y = \psi(x, z)$，或 $x = \gamma(y, z)$ 的图形

设 $f(x, y, z)$ 具有连续偏导数，c 是常数，考虑平面点集 $\{f = c\}$。

设 $f(x, y, z)$ 具有连续偏导数，c 是常数，考虑平面点集 $\{f = c\}$。

定理 设 $p(x_0, y_0, z_0)$ 满足 $f(x_0, y_0, z_0) = c$，且偏导数 $f_x(x_0, y_0, z_0)$、$f_y(x_0, y_0, z_0)$ 和 $f_z(x_0, y_0, z_0)$ 不全为零。则

设 $f(x, y, z)$ 具有连续偏导数，c 是常数，考虑平面点集 $\{f = c\}$。

定理 设 $p(x_0, y_0, z_0)$ 满足 $f(x_0, y_0, z_0) = c$，且偏导数 $f_x(x_0, y_0, z_0)$、$f_y(x_0, y_0, z_0)$ 和 $f_z(x_0, y_0, z_0)$ 不全为零。则 $\{f = c\}$ 在 p 点附近是光滑曲面，并且是某一个光滑二元函数的图像。

设 $f(x, y, z)$ 具有连续偏导数，c 是常数，考虑平面点集 $\{f = c\}$。

定理 设 $p(x_0, y_0, z_0)$ 满足 $f(x_0, y_0, z_0) = c$，且偏导数 $f_x(x_0, y_0, z_0)$、$f_y(x_0, y_0, z_0)$ 和 $f_z(x_0, y_0, z_0)$ 不全为零。则 $\{f = c\}$ 在 p 点附近是光滑曲面，并且是某一个光滑二元函数的图像。

进一步，若偏导数处处不全为零，则 $\{f = c\}$ 是空间中光滑曲面（称为等值面）。