第 10 周作业解答

练习 1. 计算

1. $\int_L (x+y)ds$，其中 L 是连接 $(1,0)$ 及 $(0,1)$ 两点的直线段；
2. $\int_C x ds$，其中 C 为直线 $y=x$ 及抛物线 $y=x^2$ 所围成区域的整个边界；
3. $\int_L \frac{1}{x^2+y^2+z^2} ds$，其中 L 为曲线 $x=e^t\cos t,\ y=e^t\sin t,\ z=e^t$ 上相应于 t 从 0 到 2 的这段弧。

解 1. L 的参数方程为 $x=t, y=1-t, 0\le t\le 1$，所以

$$\int_L (x+y)ds = \int_0^1 (t+1-t)\sqrt{[(t)']^2+[(1-t)']^2}dt = \int_0^1 \sqrt{2}dt = \sqrt{2}.$$

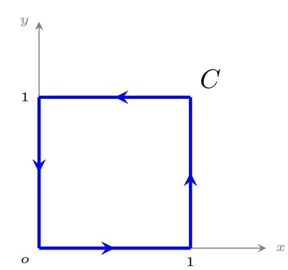
2. C 可分成两段 L_1 和 L_2，其中 L_1 的参数方程为 $x=t, y=t^2, 0\le t\le 1$，L_2 的参数方程为 $x=t, y=t, 0\le t\le 1$，所以

$$\begin{aligned}\int_C x ds &= \int_{L_1} x ds + \int_{L_2} x ds\\ &= \int_0^1 t\sqrt{[(t)']^2+[(t^2)']^2}dt + \int_0^1 t\sqrt{[(t)']^2+[(t)']^2}dt\\ &= \int_0^1 t\sqrt{1+4t^2}dt + \int_0^1 t\sqrt{2}dt\\ &= \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}(1+4t^2)^{3/2}\Big|_0^1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t^2\Big|_0^1 = \frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)+\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\int_L \frac{1}{x^2+y^2+z^2}ds &= \int_0^2 \frac{1}{(e^t\cos t)^2+(e^t\sin t)^2+(e^t)^2}\sqrt{[(e^t\cos t)']^2+[(e^t\sin t)']^2+[(e^t)']^2}dt\\ &= \int_0^2 \frac{1}{2}e^{-2t}\cdot e^t\sqrt{3}dt = \frac{\sqrt{3}}{2}(1-e^{-2}).\end{aligned}$$

练习 2. 计算 $\int_C x^2dx + xydy$，其中 C 是正方形 $[0,1]\times[0,1]$ 边界，逆时针方向。



解

$$\begin{aligned}
\int_C x^2dx+xydy &= \int_{C_1} x^2dx+xydy+\int_{C_2} x^2dx+xydy+\int_{C_3} x^2dx+xydy+\int_{C_4} x^2dx+xydy \\
&= \int_0^1 \left[t^2\cdot(t)'+t\cdot 0\cdot(0)'\right]dt+\int_0^1 \left[1^2\cdot(1)'+1\cdot t\cdot(t)'\right]dt \\
&\quad+\int_0^1 \left[(1-t)^2\cdot(1-t)'+(1-t)\cdot 1\cdot(1)'\right]dt+\int_0^1 \left[0^2\cdot(0)'+0\cdot(1-t)\cdot(1-t)'\right]dt \\
&= \int_0^1 \left[t^2\right]dt+\int_0^1 [t]\,dt+\int_0^1 \left[-(1-t)^2\right]dt \\
&= \frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

练习 3. 计算

1. $\int_L (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$，其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上从点 $(-1,1)$ 到点 $(1,1)$ 的一段弧；
2. $\int_L xdx+ydy+(x+y-1)dz$ ，其中 L 是从点 $(1,1,1)$ 到 $(2,3,4)$ 的直线段。

解 1. L 的参数方程为 $x=t,\, y=t^2,\, t:-1\to 1$，所以

$$\begin{aligned}
\int_L (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy &= \int_{-1}^1 [(t^2-2\cdot t\cdot t^2)(t)'+(t^4-2\cdot t\cdot t^2)(t^2)']dt \\
&= \int_{-1}^1 [t^2-2t^3+2t^5-4t^4]dt \\
&= 2\int_0^1 [t^2-4t^4]dt = 2(\frac{1}{3}-\frac{4}{5}) = -\frac{14}{15}.
\end{aligned}$$

2. L 的参数方程为 $x=1+t,\, y=1+2t,\, z=1+3t,\, t:0\to 1$，所以

$$\begin{aligned}
\int_L xdx+ydy+(x+y-1)dz &= \int_0^1 [(1+t)(1+t)'+(1+2t)(1+2t)'+(1+t+1+2t-1)(1+3t)']dt \\
&= \int_0^1 [6+14t]dt = 13.
\end{aligned}$$

练习 4. 1. 计算 $\int_L (x+y+yz)ds$，其中曲线 L 是螺旋线 $\gamma(t)=(\sin t,\, \cos t,\, t),\, 0\le t\le 2\pi$。

2. 计算 $\int_L xdx+ydy+zdz$，其中有向曲线 L 的参数方程是 $\gamma(t)=(e^t,\, t,\, t^2),\, 0\le t\le 1$。
3. 计算 $\int_L (\sin z)dx+(\cos z)dy-(xy)^{1/3}dz$，其中有向曲线 L 的参数方程是 $\gamma(\theta)=(\cos^3\theta,\, \sin^3\theta,\, \theta),\, 0\le \theta\le \frac{7}{2}\pi$。

解 1.

$$\begin{aligned}
\int_L (x+y+yz)ds &= \int_0^{2\pi} (\sin t+\cos t+t\cos t)\sqrt{[(\sin t)']^2+[(\cos t)']^2+[(t)']^2}dt \\
&= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} (\sin t+\cos t+t\cos t)dt = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} t\cos t dt = \sqrt{2}(t\sin t+\cos t)\Big|_0^{2\pi} = 0.
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\int_L xdx+ydy+zdz &= \int_0^1 [e^t\cdot(e^t)'+t\cdot(t)'+t^2\cdot(t^2)']dt \\
&= \int_0^1 [e^{2t}+t+2t^3]dt = (\frac{1}{2}e^{2t}+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t^4)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\int_L (\sin z)dx + (\cos z)dy - (xy)^{1/3}dz &= \int_0^{\frac{7}{2}\pi} [\sin\theta\cdot(\cos^3\theta)' + \cos\theta\cdot(\sin^3\theta)' - (\cos^3\theta\sin^3\theta)^{1/3}\cdot(\theta)']d\theta \\ &= \int_0^{\frac{7}{2}\pi} [-3\sin^2\theta\cos^2\theta + 3\cos^2\theta\sin^2\theta - \cos\theta\sin\theta]d\theta \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{7}{2}\pi} \sin 2\theta d\theta = \frac{1}{4}\cos 2\theta\Big|_0^{\frac{7}{2}\pi} = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

练习 5. 证明曲线积分 $\int_{(1,2)}^{(3,4)}(6xy^2 - y^3)dx + (6x^2y - 3xy^2)dy$ 与路径无关，并计算积分值。

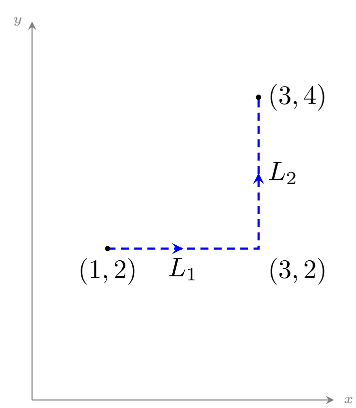
证法一注意到向量场 $F = (6xy^2 - y^3, 6x^2y - 3xy^2) = \nabla f$，这里 $f = 3x^2y^2 - xy^3$。所以 F 是梯度向量场，故 F 的曲线积分与路径无关，并且

$$\int_{(1,2)}^{(3,4)} (6xy^2 - y^3)dx + (6x^2y - 3xy^2)dy = f(3,4) - f(1,2) = (3\cdot 144 - 3\cdot 64) - (3\cdot 4 - 8) = 236.$$

证法二因为在全平面上成立

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 6xy^2 - y^3 & 6x^2y - 3xy^2 \end{vmatrix} = 0$$

并且全平面是单连通区域，所以该曲线积分与路径无关。选择 $(1,2)$ 到 $(3,4)$ 的一条路径以计算该曲线积分：令 $L_1: (t, 2), t: 1 \to 3$ 及 $L_2: (3, t), t: 2 \to 4$，



所以

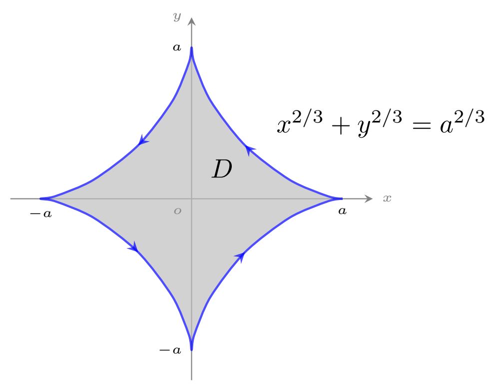
$$\begin{aligned}\int_{(1,2)}^{(3,4)} (6xy^2 - y^3)dx + (6x^2y - 3xy^2)dy &= \int_{L_1} (6xy^2 - y^3)dx + (6x^2y - 3xy^2)dy + \int_{L_2} (6xy^2 - y^3)dx + (6x^2y - 3xy^2)dy \\ &= \int_1^3 (6t\cdot 2^2 - 2^3)dt + \int_2^4 (6\cdot 3^2\cdot t - 3\cdot 3\cdot t^2)dt \\ &= (12t^2 - 8t)\Big|_1^3 + (27t^2 - 3t^3)\Big|_2^4 \\ &= 236.\end{aligned}$$

练习 6. 利用格林公式计算 $\int_C (2x^3 - y^3)dx + (x^3 + y^3)dy$，其中 C 是圆周 $x^2 + y^2 = 1$，逆时针方向。

解

$$\begin{aligned}
\int_C (2x^3-y^3)dx+(x^3+y^3)dy &= \iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 2x^3-y^3 & x^3+y^3 \end{vmatrix} dxdy \\
&= \iint_D (3x^2+3y^2)dxdy \\
&\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} 3\iint_D \rho^2\cdot\rho d\rho d\theta \\
&= 3\int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 \rho^3 d\rho\right]d\theta = 6\pi\int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{3}{2}\pi.
\end{aligned}$$

练习 7. 利用格林公式的推论 $\mathrm{Area}(D)=\frac{1}{2}\int_{\partial D} -ydx+xdy$ 计算曲线 $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ 所围成区域 D 的面积。



解

边界 ∂D（逆时针方向）的参数方程为 $x=a\cos^3\theta$, $y=a\sin^3\theta$, $\theta: 0\to 2\pi$，所以

$$\begin{aligned}
\mathrm{Area}(D) &= \frac{1}{2}\int_{\partial D} -ydx+xdy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[(-a\sin^3\theta)(a\cos^3\theta)'+(a\cos^3\theta)(a\sin^3\theta)']d\theta \\
&= \frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi}[3\sin^4\theta\cos^2\theta+3\cos^4\theta\sin^2\theta]d\theta \\
&= \frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos^2\theta d\theta \\
&= \frac{3}{8}a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 2\theta d\theta \\
&= \frac{3}{8}a^2\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4\theta}{2}d\theta \\
&= \frac{3}{16}a^2(\theta-\frac{1}{4}\sin 4\theta)\Big|_0^{2\pi} = \frac{3}{8}\pi a^2.
\end{aligned}$$

练习 8. 设平面区域 D 具有光滑边界，证明 D 的面积 A 满足：

$$A=\int_{\partial D} xdy = -\int_{\partial D} ydx$$

其中 ∂D 取边界正向。

证明这是

$$\int_{\partial D} x dy = \iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & x \end{vmatrix} dxdy = \iint_D 1 dxdy = A$$

以及

$$\int_{\partial D} -y dy = \iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ -y & 0 \end{vmatrix} dxdy = \iint_D 1 dxdy = A$$