

第 02 周作业解答

作业改为周四交, 请注意!

练习 1. 求一曲线的方程, 这曲线通过原点, 并且曲线上任一点 (x, y) 处的斜率是 $3x + y$ 。

解 1. 假设曲线是函数 $y = f(x)$ 的图形。则 f 是如下微分方程的解:

$$\begin{cases} y' = 3x + y \\ y(0) = 0 \end{cases}.$$

这是一阶线性微分方程。

2. 求解齐次部分

$$\frac{dy}{dx} = y \Rightarrow \frac{dy}{y} = dx$$

两边积分

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx \Rightarrow \ln |y| = x + C_1 \Rightarrow y = Ce^x.$$

3. 常数变易。设 $y = u(x)e^x$, 代入原方程得:

$$u' \cdot e^x = 3x \Rightarrow u = \int 3xe^{-x} dx \Rightarrow u = -3xe^{-x} - 3e^{-x} + C.$$

4. 所以原方程通解

$$y = (-3xe^{-x} - 3e^{-x} + C)e^x = Ce^x - 3x - 3.$$

5. 求积分常数, 将初始条件代入:

$$0 = y(0) = Ce^x - 3x - 3|_{x=0} = C - 3 \Rightarrow C = 3$$

6. 所以曲线方程是

$$y = 3e^x - 3x - 3.$$

练习 2. 求微分方程 $(y^2 - 4x)\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ 通解。

解 假设 x, y 的关系可表示为 $x = x(y)$ 。将原方程改写:

$$(y^2 - 4x)dy + 2ydx = 0 \Rightarrow (y^2 - 4x) + 2y\frac{dx}{dy} = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dy} + (-\frac{2x}{y}) = -\frac{y}{2}$$

这是关于未知函数 $x = x(y)$ 的一阶线性微分方程。

1. 求解齐次方程

$$\frac{dx}{dy} + (-\frac{2x}{y}) = 0 \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{2dy}{y} \Rightarrow \ln |x| = 2 \ln |y| + C_1 \Rightarrow x = Cy^2$$

2. 常数变易。设 $x = u(y) \cdot y^2$, 代入原方程

$$\frac{du}{dy} \cdot y^2 = -\frac{y}{2} \Rightarrow u = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{y} dy = -\frac{1}{2} \ln |y| + C.$$

3. 所以原方程通解

$$x = (-\frac{1}{2} \ln |y| + C) \cdot y^2 = Cy^2 - \frac{1}{2} y^2 \ln |y|.$$

练习 3. 求解微分方程 $\begin{cases} y'' - 3y' - 4y = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = -5 \end{cases}$.

解 1. 特征方程为:

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

所以有两个互异的实根 $r_1 = 4, r_2 = -1$ 。所以通解是

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x}.$$

2. 代入初始条件

$$\begin{aligned} 0 &= y(0) = C_1 + C_2 \\ -5 &= y'(0) = 4C_1 - C_2 \end{aligned}$$

所以 $C_1 = -1, C_2 = 1$

3. 特解是

$$y = -e^{4x} + e^{-x}.$$

练习 4. 求解微分方程 $\begin{cases} y'' - 4y' + 13y = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 3 \end{cases}$.

解 1. 特征方程为:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$$

所以有两个互异的复数根

$$r_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 13}}{2} = 2 \pm 3\sqrt{-1}$$

所以通解是

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) = e^{2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

2. 代入初始条件

$$0 = y(0) = C_1$$

及

$$3 = y'(0) = C_2 (e^{2x} \sin 3x)'|_{x=0} = 3C_2 \Rightarrow C_2 = 1.$$

3. 特解是

$$y = e^{2x} \sin 3x.$$

练习 5. 求解微分方程 $\begin{cases} 4y'' + 4y' + y = 0 \\ y(0) = 2, y'(0) = 0 \end{cases}$.

解 1. 特征方程为:

$$4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0$$

有重根

$$r_{1,2} = -\frac{1}{2}$$

所以通解是

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{rx} = (C_1 + C_2 x) e^{-\frac{1}{2}x}.$$

2. 代入初始条件

$$2 = y(0) = C_1$$

及

$$0 = y'(0) = ((2 + C_2 x) e^{-\frac{1}{2}x})'|_{x=0} = -1 + C_2 \Rightarrow C_2 = 1.$$

3. 特解是

$$y = (2 + x) e^{-\frac{1}{2}x}.$$

练习 6. 填空, 写出下列方程的一个特解。

1. $y'' + 4y' - y = 2e^x$: $y^* = \underline{\frac{1}{2}e^x}$.
2. $y'' - 3y' + 2y = 5$: $y^* = \underline{\frac{5}{2}}$.
3. $y'' - 4y' = 5$: $y^* = \underline{-\frac{5}{4}x}$.
4. $y'' + 5y' + 4y = 3 - 2x$: $y^* = \underline{-\frac{1}{2}x + \frac{11}{8}}$.
5. $2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x - 2$: $y^* = \underline{\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{2}{25}x}$.

解

1. 设 $y = ke^x$, 代入原方程得: $y'' + 4y' - y = (k + 4k - k)e^x = 4e^x$, 所以 $k = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}e^x$.
2. $y = \frac{5}{2}$
3. $y' = -\frac{5}{4}$, 不妨取 $y = -\frac{5}{4}x$
4. 设 $y = ax + b$, 代入方程:

$$y'' + 5y' + 4y = 5a + 4(ax + b) = 3 - 2x$$

所以 $4a = -2$, $5a + 4b = 3$. 所以 $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{11}{8}$. 所以 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{11}{8}$.

5. 设 $y' = ax^2 + bx + c$, 代入方程:

$$2y'' + 5y' = 2(2ax + b) + 5(ax^2 + bx + c) = 5x^2 - 2x - 2$$

所以

$$\begin{cases} 5a = 5 \\ 5b + 4a = -2 \\ 2b + 5c = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -\frac{6}{5} \\ c = \frac{7}{25} \end{cases}$$

所以 $y' = x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{7}{25}$. 不妨取 $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{7}{25}x$.

练习 7. 求微分方程 $y'' + 3y' + 2y = 3xe^{-x}$ 的通解。

解 1. 特征方程 $r^2 + 3r + 2 = 0$, 特征值为 $r_1 = -2$ 和 $r_2 = -1$. 所以齐次的通解是:

$$C_1e^{-2x} + C_2e^{-x}.$$

2. 非齐次项 $f(x) = 3xe^{-x}$. 其中 $\lambda = -1$, $P(x) = 3x$ 为一次多项式. 因为 $\lambda = -1$ 是 (一重) 特征值. 故设特解为

$$y^* = e^{\lambda x}R(x) = e^{-x}R(x)$$

其中 $R'(x)$ 为一次多项式, $R'(x) = ax + b$. 将上式代入原方程, 整理可得

$$R'' + (2\lambda + p)R' + (\lambda^2 + p\lambda + q)R = P \Rightarrow a + (ax + b) = 3x$$

所以

$$\begin{cases} a = 3 \\ a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -3 \end{cases}.$$

所以 $R'(x) = 3x - 3$, 取 $R(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3x$. 特解为

$$y^* = (\frac{3}{2}x^2 - 3x)e^{-x}.$$

3. 所以通解是

$$y = (\frac{3}{2}x^2 - 3x)e^{-x} + C_1e^{-2x} + C_2e^{-x}.$$

练习 8. 求微分方程 $y'' + y = 4xe^x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ 的特解。

解 1. 特征方程 $r^2 + 1 = 0$, 特征值为 $r_1 = -i$ 和 $r_2 = i$ 。所以齐次的通解是:

$$C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

2. 非齐次项 $f(x) = 4xe^x$ 。其中 $\lambda = 1$, $P(x) = 4x$ 为一次多项式。因为 $\lambda = 1$ 不是特征值。故设特解为

$$y^* = e^{\lambda x} R(x) = e^x R(x)$$

其中 $R(x)$ 为一次多项式, $R(x) = ax + b$ 。将上式代入原方程, 整理可得

$$R'' + (2\lambda + p)R' + (\lambda^2 + p\lambda + q)R = P \Rightarrow 2a + 2(ax + b) = 4x$$

所以

$$\begin{cases} 2a = 4 \\ 2a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \end{cases}.$$

所以 $R(x) = 2x - 2$ 。特解为

$$y^* = (2x - 2)e^x.$$

3. 所以通解是

$$y = (2x - 2)e^x + C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

4. 将初始条件代入

$$y(0) = (2x - 2)e^x + C_1 \cos x + C_2 \sin x \Big|_{x=0} = -2 + C_1 = 0$$

所以 $C_1 = 2$ 。

$$y'(0) = 2xe^x - 2 \sin x + C_2 \cos x \Big|_{x=0} = C_2 = 1$$

即 $C_2 = 1$ 。所以

$$y = (2x - 2)e^x + 2 \cos x + \sin x.$$

练习 9. 求微分方程 $y'' + 4y = x \cos x$ 的通解。

解 1. 特征方程 $r^2 + 4r = 0$, 特征值为 $r_1 = -2i$ 和 $r_2 = 2i$ 。所以齐次的通解是:

$$e^{0x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

2. 非齐次项 $f(x) = x \cos x$ 。其中 $\lambda = 0$, $\omega = 1$, $P(x) = x$ 为一次多项式。因为 $\lambda + i\omega = i$ 不是特征值。故设特解为

$$y^* = e^{\lambda x} [(ax + b) \cos \omega x + (cx + d) \sin \omega x] = (ax + b) \cos x + (cx + d) \sin x.$$

所以

$$\begin{aligned} y^{*'} &= (a + cx + d) \cos x + (c - ax - b) \sin x \\ y^{*''} &= (c + c - ax - b) \cos x + (-a - a - cx - d) \sin x \end{aligned}$$

代入原方程, 得

$$\begin{aligned} y^{*''} + 4y^* &= (2c - ax - b + 4ax + 4b) \cos x + (-2a - cx - d + 4cx + 4d) \sin x \\ &= (3ax + 3b + 2c) \cos x + (3cx + 3d - 2a) \sin x \\ &= x \cos x \end{aligned}$$

所以

$$\begin{cases} 3a = 1 \\ 3b + 2c = 0 \\ 3c = 0 \\ 3d - 2a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = \frac{2}{9} \end{cases}.$$

特解为

$$y^* = \frac{1}{3}x \cos x + \frac{2}{9} \sin x.$$

3. 所以通解是

$$y = y^* + C_1 y_1 + C_2 y_2 = \frac{1}{3}x \cos x + \frac{2}{9} \sin x + C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$