# §8.7 二重积分

2017-2018 学年 II

# Outline

1. 二重积分的基本概念

2. 二重积分的计算

# We are here now...

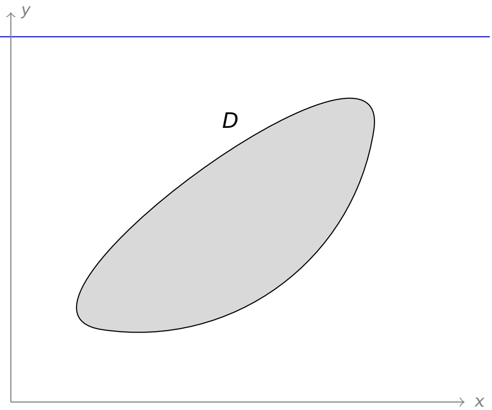
1. 二重积分的基本概念

2. 二重积分的计算

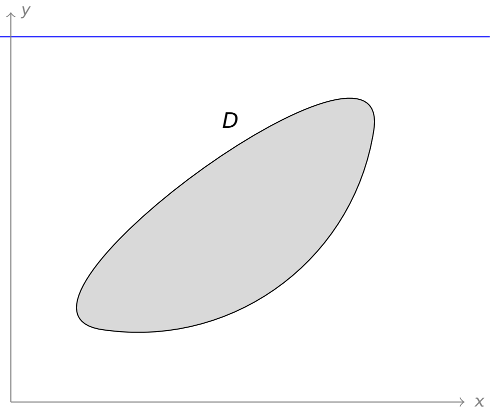
# 平面薄片的质量

假设

- 区域 $D$ 为平面薄片
- 密度为 $\mu$
- 质量为 $m$



# 平面薄片的质量

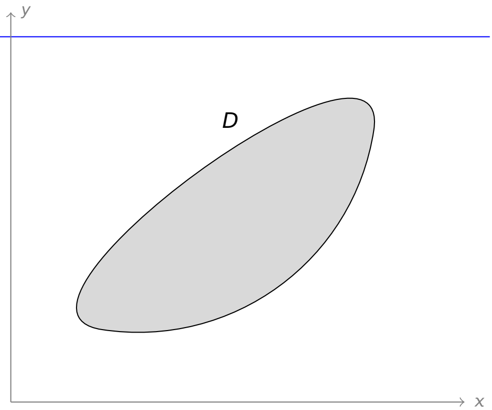



假设

- 区域 $D$ 为平面薄片
- 密度为 $\mu$
- 质量为 $m$

- 当薄片均匀时（$\mu=$ 常数），
- 当薄片非均匀时（$\mu=\mu(x,y)$ 为 $D$ 上函数），

# 平面薄片的质量




假设

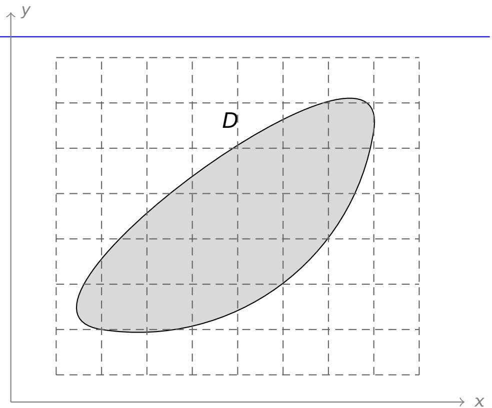
- 区域 $D$ 为平面薄片
- 密度为 $\mu$
- 质量为 $m$

- 当薄片均匀时（$\mu=$ 常数），

$$m=\mu\cdot\mathrm{Area}(D)$$

- 当薄片非均匀时（$\mu=\mu(x,y)$ 为 $D$ 上函数），

# 平面薄片的质量




假设

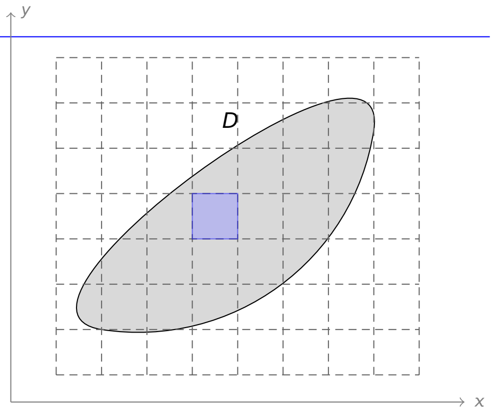
- 区域 $D$ 为平面薄片
- 密度为 $\mu$
- 质量为 $m$

- 当薄片均匀时（$\mu=$ 常数），

$$m=\mu\cdot \text{Area}(D)$$

- 当薄片非均匀时（$\mu=\mu(x,y)$ 为 $D$ 上函数），利用微元法可知

# 平面薄片的质量




假设

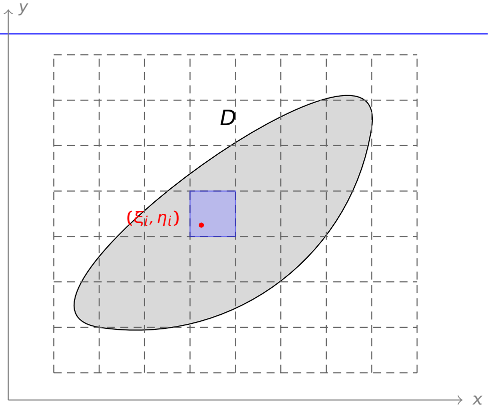
- 区域 $D$ 为平面薄片
- 密度为 $\mu$
- 质量为 $m$

- 当薄片均匀时（$\mu=$ 常数），

$$m=\mu\cdot\mathrm{Area}(D)$$

- 当薄片非均匀时（$\mu=\mu(x,y)$ 为 $D$ 上函数），利用微元法可知

# 平面薄片的质量




假设

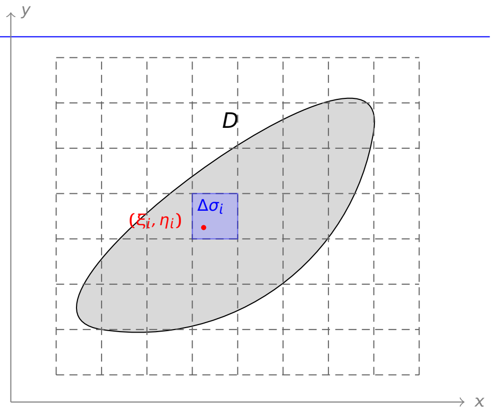
- 区域 $D$ 为平面薄片
- 密度为 $\mu$
- 质量为 $m$

- 当薄片均匀时（$\mu=$ 常数），

$$m = \mu \cdot \mathrm{Area}(D)$$

- 当薄片非均匀时（$\mu = \mu(x, y)$ 为 $D$ 上函数），利用微元法可知

# 平面薄片的质量




假设

- 区域 $D$ 为平面薄片
- 密度为 $\mu$
- 质量为 $m$

- 当薄片均匀时（$\mu =$ 常数），

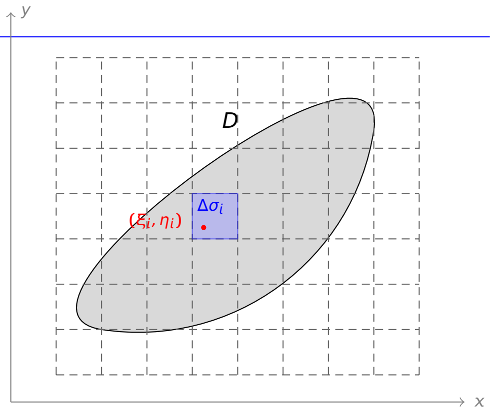
$$m = \mu \cdot \text{Area}(D)$$

- 当薄片非均匀时（$\mu = \mu(x, y)$ 为 $D$ 上函数），利用微元法可知

# 平面薄片的质量

假设

- 区域 $D$ 为平面薄片
- 密度为 $\mu$
- 质量为 $m$



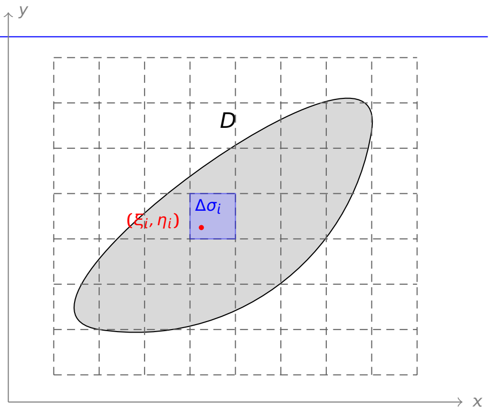

- 当薄片均匀时（$\mu =$ 常数），

$$m = \mu \cdot \text{Area}(D)$$

- 当薄片非均匀时（$\mu = \mu(x, y)$ 为 $D$ 上函数），利用微元法可知

$$\mu(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

# 平面薄片的质量




假设

- 区域 $D$ 为平面薄片
- 密度为 $\mu$
- 质量为 $m$

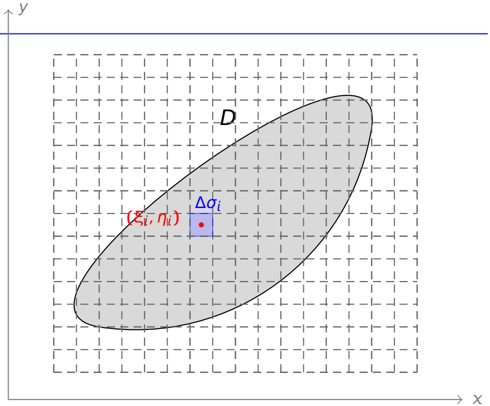
- 当薄片均匀时（$\mu =$ 常数），

$$m = \mu \cdot \text{Area}(D)$$

- 当薄片非均匀时（$\mu = \mu(x, y)$ 为 $D$ 上函数），利用微元法可知

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

# 平面薄片的质量




假设

- 区域 $D$ 为平面薄片
- 密度为 $\mu$
- 质量为 $m$

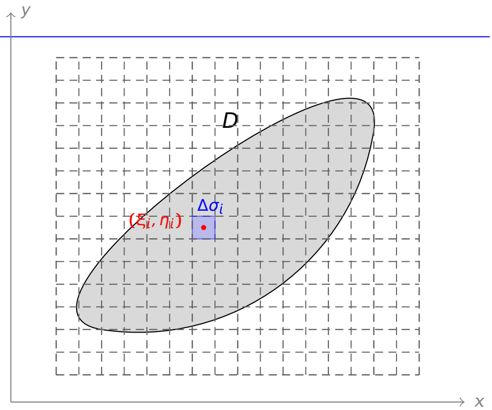
- 当薄片均匀时（$\mu =$ 常数），

$$m = \mu \cdot \mathrm{Area}(D)$$

- 当薄片非均匀时（$\mu = \mu(x, y)$ 为 $D$ 上函数），利用微元法可知

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

# 平面薄片的质量




假设

- 区域 $D$ 为平面薄片
- 密度为 $\mu$
- 质量为 $m$

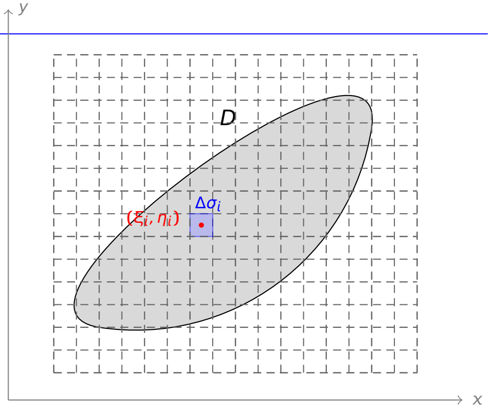
- 当薄片均匀时（$\mu =$ 常数），

$$m = \mu \cdot \text{Area}(D)$$

- 当薄片非均匀时（$\mu = \mu(x, y)$ 为 $D$ 上函数），利用微元法可知

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \mu(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

# 平面薄片的质量




假设

- 区域 $D$ 为平面薄片
- 密度为 $\mu$
- 质量为 $m$

- 当薄片均匀时（$\mu =$ 常数），

$$m = \mu \cdot \text{Area}(D)$$

- 当薄片非均匀时（$\mu = \mu(x, y)$ 为 $D$ 上函数），利用微元法可知

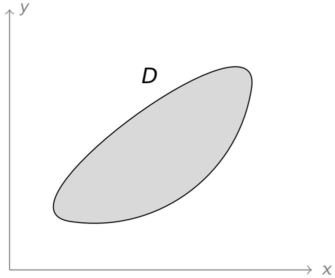
$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \mu(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

# 二重积分的定义

**二重积分定义** 设

- $D$ 是平面上有界闭区域，
- $f(x, y)$ 是 $D$ 上的有界函数，

若

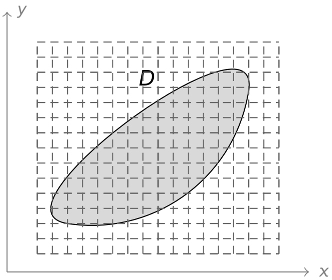


# 二重积分的定义

二重积分定义 设

- $D$ 是平面上有界闭区域，
- $f(x, y)$ 是 $D$ 上的有界函数，

若

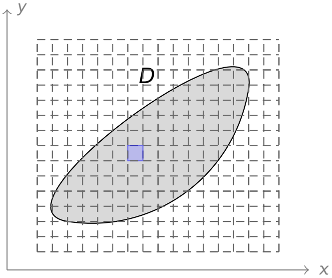


# 二重积分的定义

**二重积分定义** 设

- $D$ 是平面上有界闭区域，
- $f(x, y)$ 是 $D$ 上的有界函数，

若

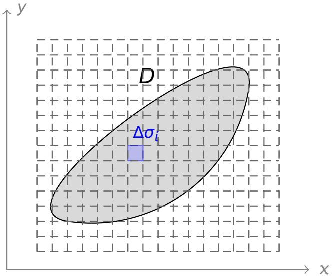


# 二重积分的定义

二重积分定义 设

- $D$ 是平面上有界闭区域,
- $f(x, y)$ 是 $D$ 上的有界函数,

若

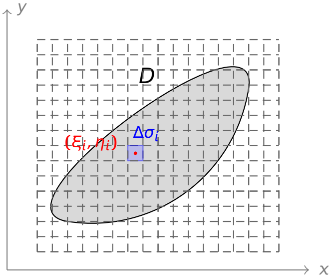


# 二重积分的定义

二重积分定义 设

- $D$ 是平面上有界闭区域,
- $f(x, y)$ 是 $D$ 上的有界函数,

若



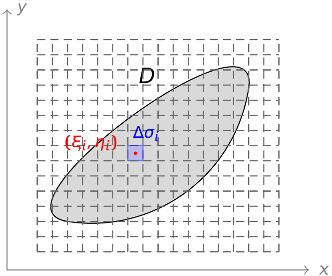
# 二重积分的定义

**二重积分定义** 设

- $D$ 是平面上有界闭区域，
- $f(x, y)$ 是 $D$ 上的有界函数，

若

$$f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$



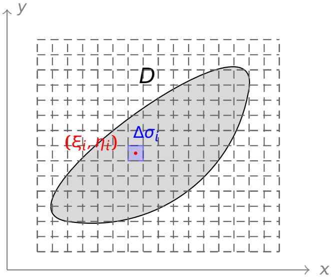
# 二重积分的定义

**二重积分定义** 设

- $D$ 是平面上有界闭区域，
- $f(x, y)$ 是 $D$ 上的有界函数，

若

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$



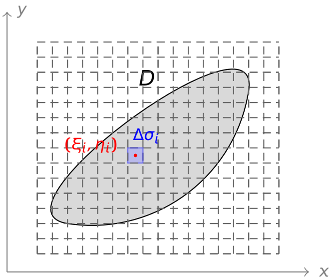
# 二重积分的定义

二重积分定义 设

- $D$ 是平面上有界闭区域，
- $f(x, y)$ 是 $D$ 上的有界函数，

若

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$



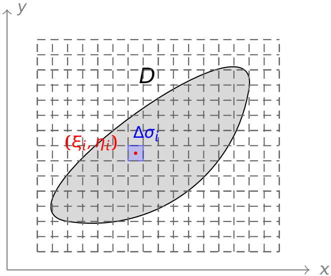
# 二重积分的定义

二重积分定义 设

- $D$ 是平面上有界闭区域，
- $f(x, y)$ 是 $D$ 上的有界函数，

若

- 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$存在，



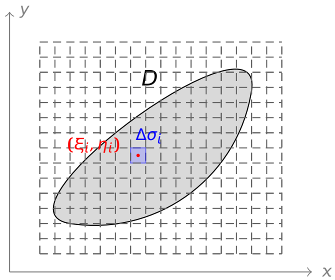
# 二重积分的定义

二重积分定义 设

- $D$ 是平面上有界闭区域，
- $f(x, y)$ 是 $D$ 上的有界函数，

若

- 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$存在，且极限
- 与上述 $D$ 的划分、$(\xi_i, \eta_i)$ 的选取无关，



# 二重积分的定义

二重积分定义 设

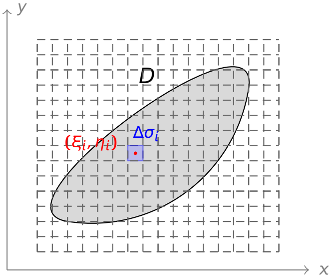
- $D$ 是平面上有界闭区域,
- $f(x,y)$ 是 $D$ 上的有界函数,

若

- 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$存在，且极限
- 与上述 $D$ 的划分、$(\xi_i,\eta_i)$ 的选取无关,

则定义

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$



# 二重积分的定义

二重积分定义 设

- $D$ 是平面上有界闭区域，
- $f(x,y)$ 是 $D$ 上的有界函数，

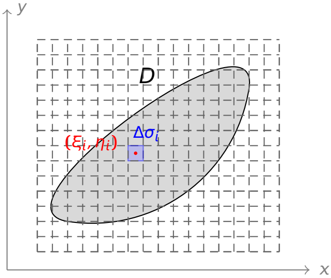
若

- 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$存在，且极限
- 与上述 $D$ 的划分、$(\xi_i,\eta_i)$ 的选取无关，

则定义

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

称为 $f(x,y)$ 在 $D$ 上的二重积分。



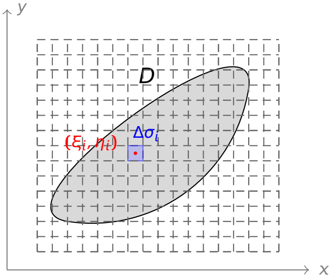
# 二重积分的定义

二重积分定义 设

- $D$ 是平面上有界闭区域，
- $f(x,y)$ 是 $D$ 上的有界函数，

若

- 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$存在，且极限
- 与上述 $D$ 的划分、$(\xi_i,\eta_i)$ 的选取无关，




则定义

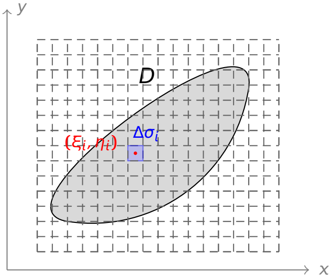
$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

称为 $f(x,y)$ 在 $D$ 上的二重积分。$d\sigma$ 称为面积元素。

# 二重积分的定义

二重积分定义 设

- $D$ 是平面上有界闭区域,
- $f(x, y)$ 是 $D$ 上的有界函数,




若

- 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$存在，且极限
- 与上述 $D$ 的划分、$(\xi_i, \eta_i)$ 的选取无关,

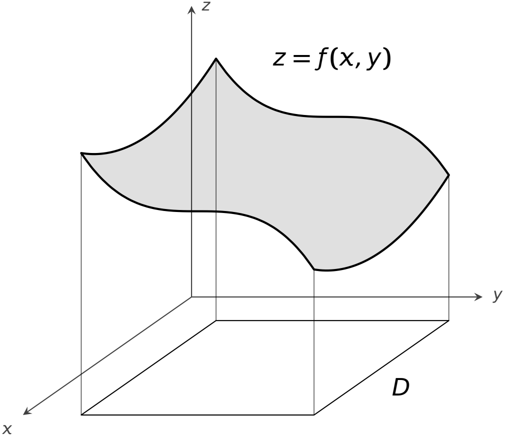
则定义

$$\iint_D f(x, y)d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

称为 $f(x, y)$ 在 $D$ 上的二重积分。$d\sigma$ 称为面积元素。

定理 若 $f(x, y)$ 在有界闭区域 $D$ 上连续，则 $\iint_D f(x, y)d\sigma$ 存在。

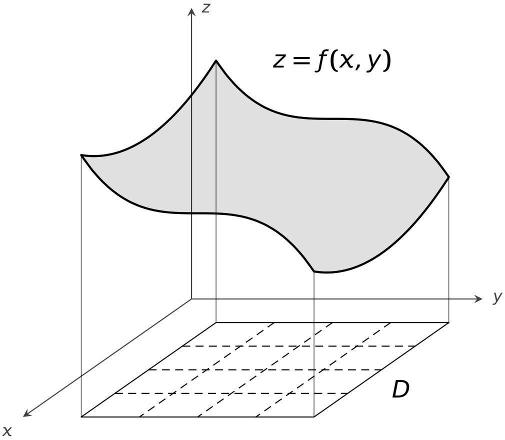
# 二重积分的几何意义




曲顶柱体的体积：

$$V$$

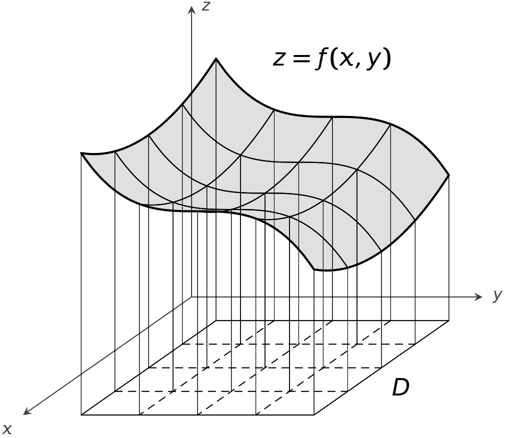
# 二重积分的几何意义




曲顶柱体的体积：

$V$

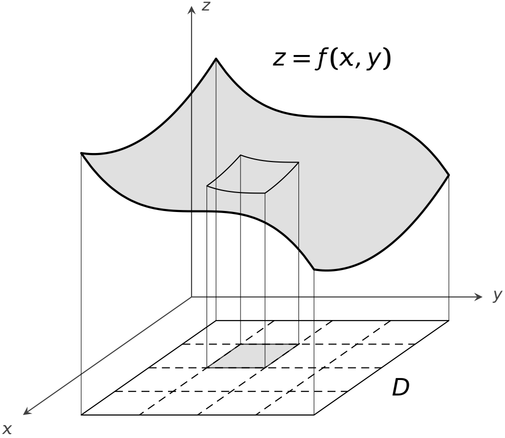
# 二重积分的几何意义




曲顶柱体的体积：

$$V$$

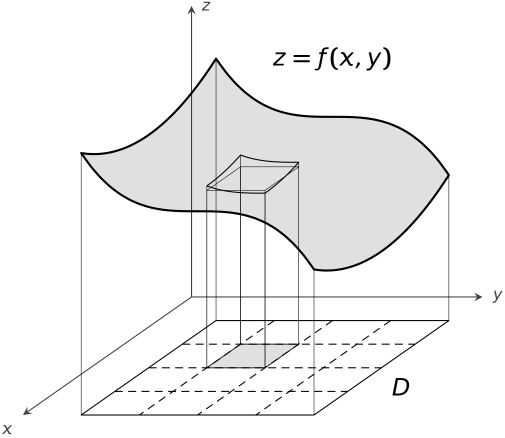
# 二重积分的几何意义




曲顶柱体的体积：

$$V$$

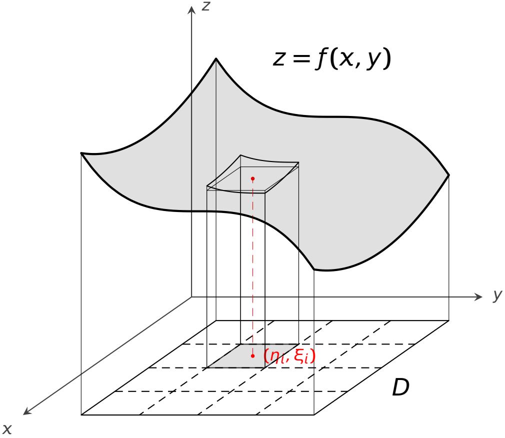
# 二重积分的几何意义




曲顶柱体的体积：

$$V$$

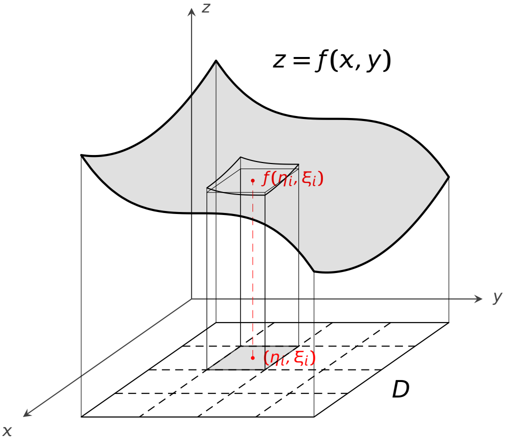
# 二重积分的几何意义




曲顶柱体的体积：

$$V$$

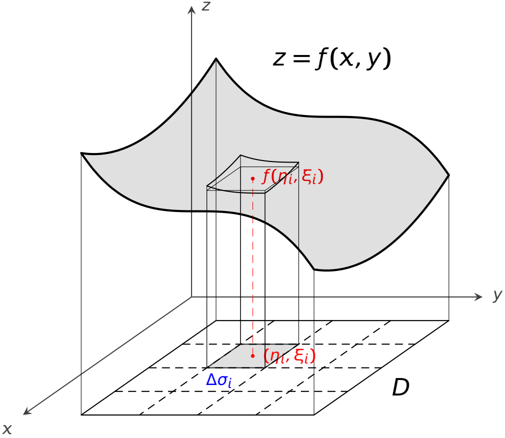
# 二重积分的几何意义




曲顶柱体的体积：

$$V$$

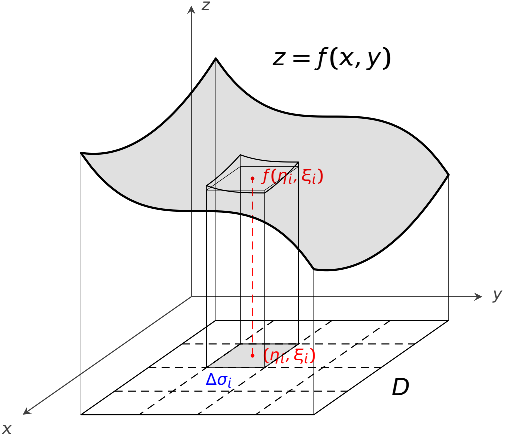
# 二重积分的几何意义




曲顶柱体的体积：

$$V$$

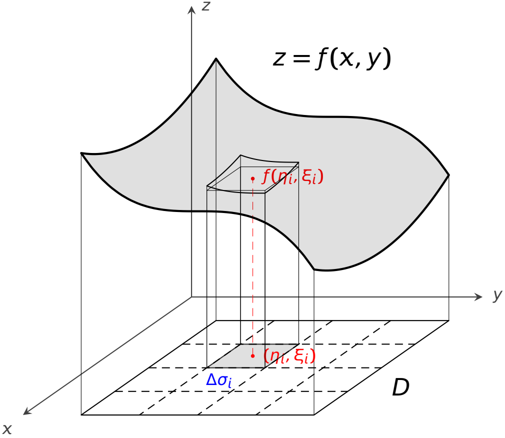
# 二重积分的几何意义




曲顶柱体的体积：

$$V \qquad\qquad f(\eta_i, \xi_i)\Delta\sigma_i$$

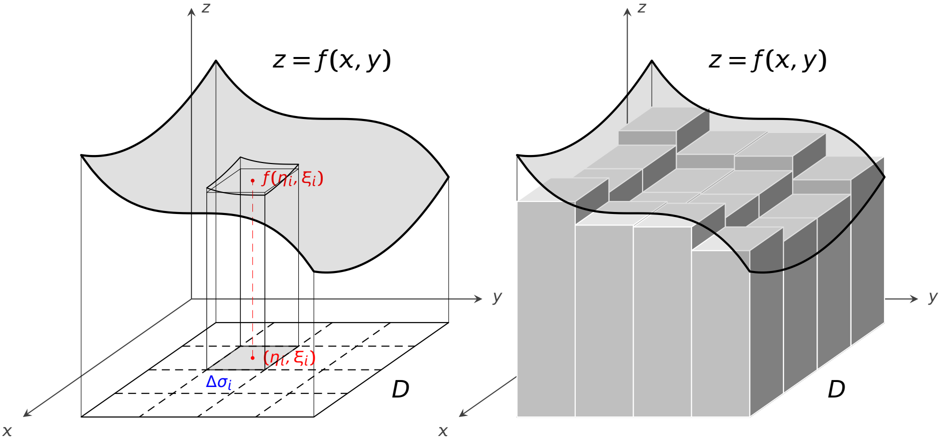
# 二重积分的几何意义




曲顶柱体的体积：

$$V \qquad \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i, \xi_i)\Delta\sigma_i$$

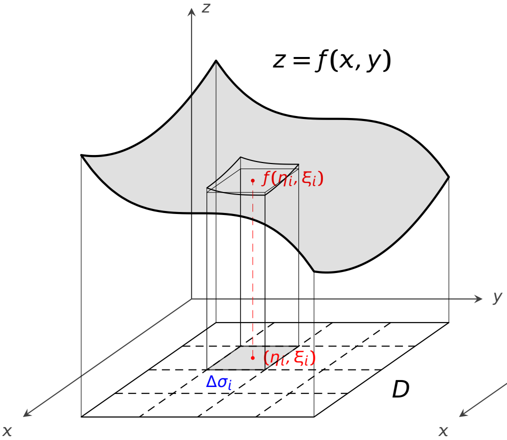
# 二重积分的几何意义

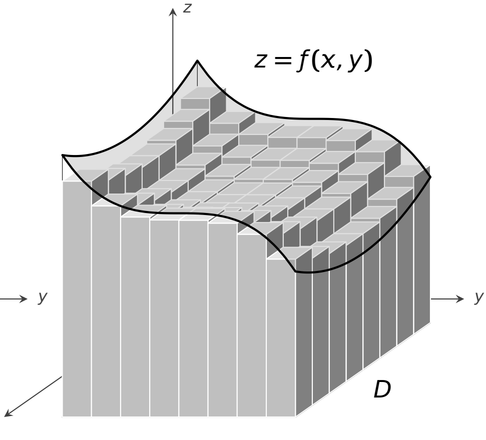



曲顶柱体的体积：

$$V \qquad \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i,\ \xi_i)\Delta\sigma_i$$

# 二重积分的几何意义

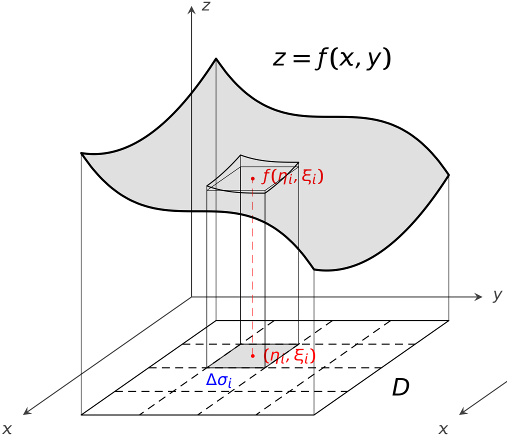


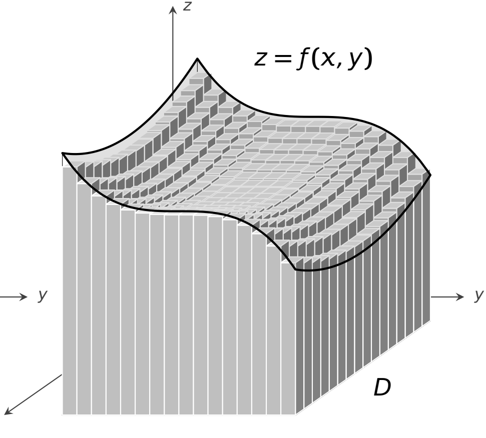




曲顶柱体的体积：

$$V \qquad \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i,\ \xi_i)\Delta\sigma_i$$

# 二重积分的几何意义

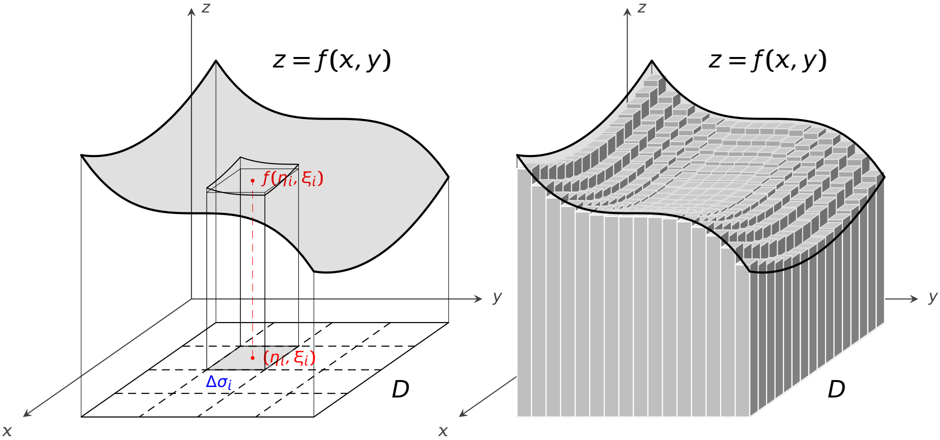



曲顶柱体的体积：

$$V \qquad \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i, \xi_i)\Delta\sigma_i$$

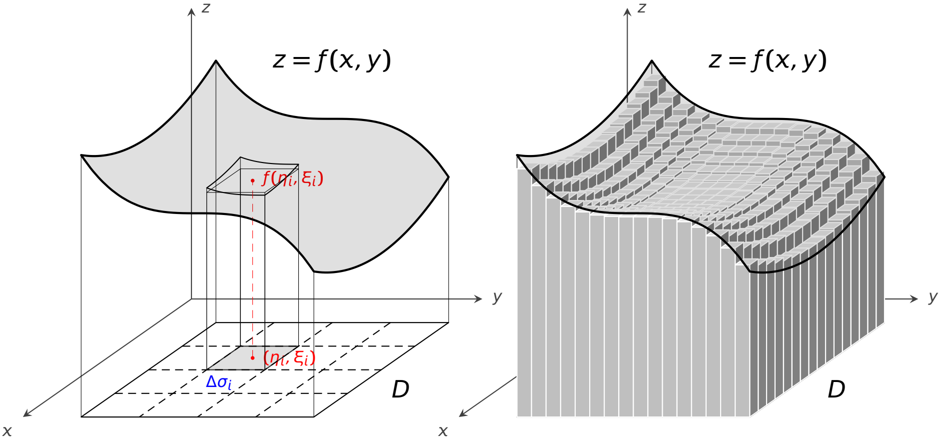
# 二重积分的几何意义




曲顶柱体的体积：

$$V=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\eta_i,\xi_i)\Delta\sigma_i$$

# 二重积分的几何意义




曲顶柱体的体积：

$$V=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\eta_i,\ \xi_i)\Delta\sigma_i=\iint_D f(x,\ y)d\sigma$$

# 二重积分的性质

**性质 1（线性性）**

$$\iint_D \alpha f(x,y)+\beta g(x,y)d\sigma=\alpha\iint_D f(x,y)d\sigma+\beta\iint_D g(x,y)d\sigma,$$

其中 $\alpha, \beta$ 是常数。

# 二重积分的性质

**性质 1（线性性）**

$\iint_D \alpha f(x, y) + \beta g(x, y) d\sigma = \alpha \iint_D f(x, y) d\sigma + \beta \iint_D g(x, y) d\sigma$,

其中 $\alpha, \beta$ 是常数。

**证明**

$$\iint_D \alpha f(x, y) + \beta g(x, y) d\sigma$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} [\alpha f(\xi_i, \eta_i) + \beta g(\xi_i, \eta_i)] \Delta\sigma_i$$

# 二重积分的性质

性质 1（线性性）

$\iint_D \alpha f(x, y) + \beta g(x, y) d\sigma = \alpha \iint_D f(x, y) d\sigma + \beta \iint_D g(x, y) d\sigma$，

其中 $\alpha, \beta$ 是常数。

证明

$$\iint_D \alpha f(x, y) + \beta g(x, y) d\sigma$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} [\alpha f(\xi_i, \eta_i) + \beta g(\xi_i, \eta_i)] \Delta\sigma_i$$

$$= \alpha \cdot \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i + \beta \cdot \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

# 二重积分的性质

性质 1（线性性）

$\iint_D \alpha f(x, y) + \beta g(x, y) d\sigma = \alpha \iint_D f(x, y) d\sigma + \beta \iint_D g(x, y) d\sigma$,
其中 $\alpha, \beta$ 是常数。

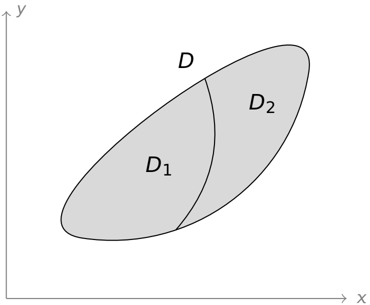
证明

$$\begin{aligned}
&\iint_D \alpha f(x, y) + \beta g(x, y) d\sigma \\
&= \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} [\alpha f(\xi_i, \eta_i) + \beta g(\xi_i, \eta_i)] \Delta\sigma_i \\
&= \alpha \cdot \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i + \beta \cdot \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i \\
&= \alpha \iint_D f(x, y) d\sigma + \beta \iint_D g(x, y) d\sigma
\end{aligned}$$

# 二重积分的性质 (Cont.)

性质 2（积分可加性） 将 $D$ 划分成两部分 $D_1$ 和 $D_2$，则

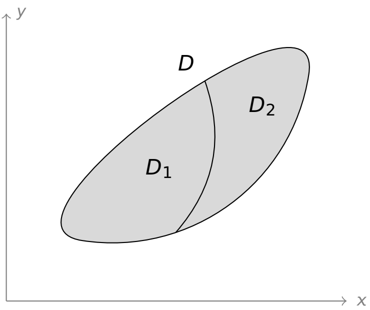
$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)d\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)d\sigma$$

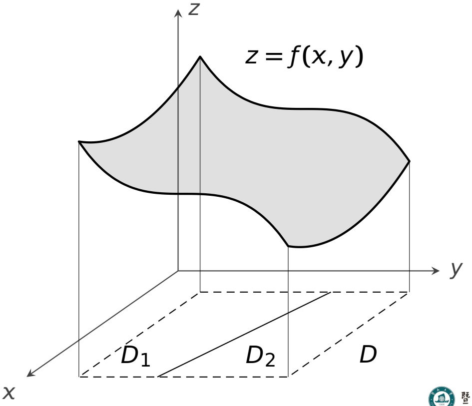


# 二重积分的性质 (Cont.)

性质 2（积分可加性） 将 $D$ 划分成两部分 $D_1$ 和 $D_2$，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)d\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)d\sigma$$

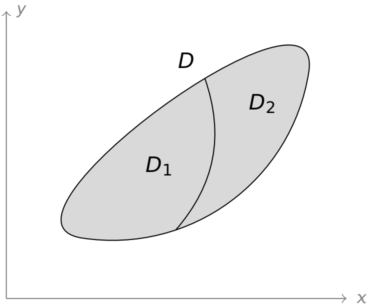


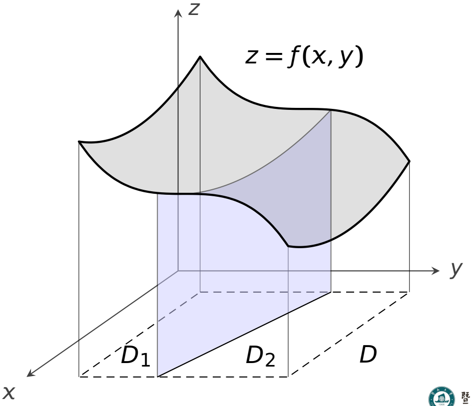



# 二重积分的性质 (Cont.)

性质 2（积分可加性） 将 $D$ 划分成两部分 $D_1$ 和 $D_2$，则

$$\iint_D f(x, y)d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y)d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y)d\sigma$$



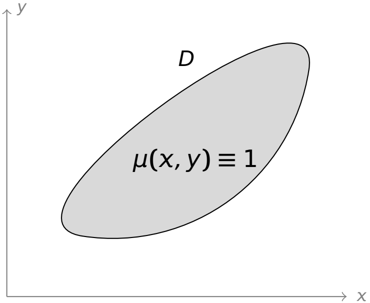



# 二重积分的性质 (Cont.)

性质 3 $\iint_D 1 d\sigma = |D|$（$D$ 的面积）。

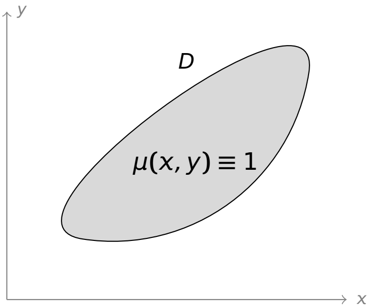
# 二重积分的性质 (Cont.)

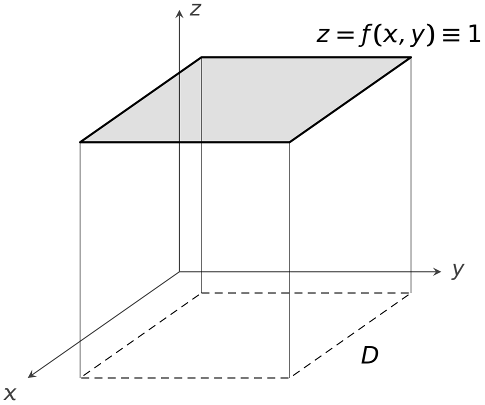
性质 3 $\iint_D 1 d\sigma = |D|$（$D$ 的面积）。



# 二重积分的性质 (Cont.)

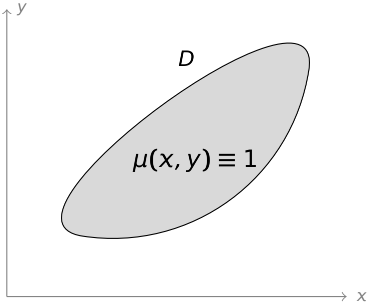
性质 3 $\iint_D 1 d\sigma = |D|$（$D$ 的面积）。

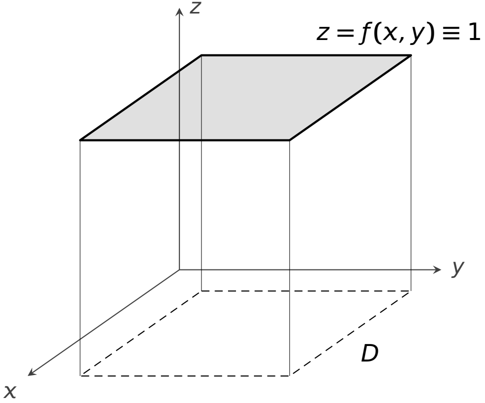


# 二重积分的性质 (Cont.)

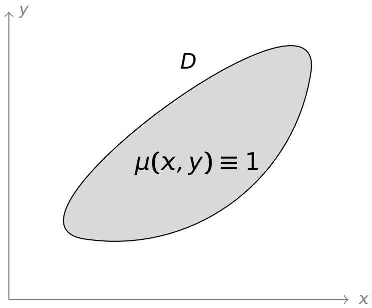
性质 3 $\iint_D 1 d\sigma = |D|$（$D$ 的面积）。特别地，$\iint_D k d\sigma =$ 　　　。

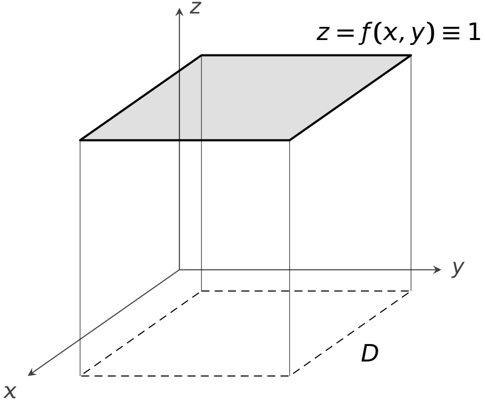


# 二重积分的性质 (Cont.)

性质 3 $\iint_D 1 d\sigma = |D|$（$D$ 的面积）。特别地，$\iint_D k d\sigma = k|D|$。



# 二重积分的性质 (Cont.)

性质 4 如果在 $D$ 上成立 $f(x, y) \leq g(x, y)$，则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma$$

# 二重积分的性质 (Cont.)

性质 4 如果在 $D$ 上成立 $f(x, y) \leq g(x, y)$，则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma$$

性质 5 假设在 $D$ 上成立 $m \leq f(x, y) \leq M$，则

$$m\sigma \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M\sigma,$$

# 二重积分的性质 (Cont.)

性质 4 如果在 $D$ 上成立 $f(x,y) \le g(x,y)$，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma \le \iint_D g(x,y)d\sigma$$

性质 5 假设在 $D$ 上成立 $m \le f(x,y) \le M$，则

$$m\sigma \le \iint_D f(x,y)d\sigma \le M\sigma, \qquad (\sigma\text{为}D\text{的面积})$$

# 二重积分的性质 (Cont.)

**性质 4** 如果在 $D$ 上成立 $f(x,y) \le g(x,y)$，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma \le \iint_D g(x,y)d\sigma$$

**性质 5** 假设在 $D$ 上成立 $m \le f(x,y) \le M$，则

$$m\sigma \le \iint_D f(x,y)d\sigma \le M\sigma, \qquad (\sigma\text{为}D\text{的面积})$$

**证明**

$$\iint_D m d\sigma \le \iint_D f(x,y)d\sigma \le \iint_D M d\sigma$$

# 二重积分的性质 (Cont.)

性质 4 如果在 $D$ 上成立 $f(x, y) \leq g(x, y)$，则

$$\iint_D f(x, y)d\sigma \leq \iint_D g(x, y)d\sigma$$

性质 5 假设在 $D$ 上成立 $m \leq f(x, y) \leq M$，则

$$m\sigma \leq \iint_D f(x, y)d\sigma \leq M\sigma, \qquad （\sigma为D的面积）$$

证明

$$\iint_D m d\sigma \leq \iint_D f(x, y)d\sigma \leq \iint_D M d\sigma = M\sigma$$

# 二重积分的性质 (Cont.)

**性质 4** 如果在 $D$ 上成立 $f(x, y) \leq g(x, y)$，则

$$\iint_D f(x, y)d\sigma \leq \iint_D g(x, y)d\sigma$$

**性质 5** 假设在 $D$ 上成立 $m \leq f(x, y) \leq M$，则

$$m\sigma \leq \iint_D f(x, y)d\sigma \leq M\sigma, \qquad (\sigma\text{为}D\text{的面积})$$

**证明**

$$m\sigma = \iint_D m d\sigma \leq \iint_D f(x, y)d\sigma \leq \iint_D M d\sigma = M\sigma$$

例 估计下列积分 $I=\iint_D(x^2+4y^2+9)d\sigma$ 值的范围，其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$。

例 估计下列积分 $I=\iint_D(x^2+4y^2+9)d\sigma$ 值的范围，其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$。

解

$$9\le x^2+4y^2+9$$

例 估计下列积分 $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$ 值的范围，其中 $D = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \leq 4\}$。

解

$$9 \leq x^2 + 4y^2 + 9 = (x^2 + y^2) + 3y^2 + 9$$

例 估计下列积分 $I=\iint_D(x^2+4y^2+9)d\sigma$ 值的范围，其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leq 4\}$。

解

$$9\leq x^2+4y^2+9=(x^2+y^2)+3y^2+9\leq 4+3\cdot 4+9$$

例 估计下列积分 $I=\iint_D(x^2+4y^2+9)d\sigma$ 值的范围，其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$。

解

$$9 \le x^2+4y^2+9=(x^2+y^2)+3y^2+9 \le 4+3\cdot 4+9=25$$

**例** 估计下列积分 $I=\iint_D(x^2+4y^2+9)d\sigma$ 值的范围，其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$。

**解**

$$9\le x^2+4y^2+9=(x^2+y^2)+3y^2+9\le 4+3\cdot 4+9=25$$

$$\Rightarrow\quad 9|D|\le I\le 25|D|$$

**例** 估计下列积分 $I=\iint_D(x^2+4y^2+9)d\sigma$ 值的范围，其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$。

**解**

$$9\le x^2+4y^2+9=(x^2+y^2)+3y^2+9\le 4+3\cdot 4+9=25$$

$$\Rightarrow \quad 9|D|\le I\le 25|D| \quad \xRightarrow{|D|=4\pi}$$

例 估计下列积分 $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$ 值的范围，其中 $D = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \leq 4\}$。

解

$$9 \leq x^2 + 4y^2 + 9 = (x^2 + y^2) + 3y^2 + 9 \leq 4 + 3 \cdot 4 + 9 = 25$$

$$\Rightarrow \quad 9|D| \leq I \leq 25|D| \quad \xrightarrow{|D| = 4\pi} \quad 36\pi \leq I \leq 100\pi$$

# 二重积分的性质 (Cont.)

**性质 6（二重积分的中值定理）** 设函数 $f(x, y)$ 在闭区域 $D$ 上连续，$|D|$ 是 $D$ 的面积，则在 $D$ 上至少存在一点 $(\xi, \eta)$，使得

$$\iint_D f(x, y)d\sigma = f(\xi, \eta) \cdot |D|.$$

# 二重积分的性质 (Cont.)

性质 6（二重积分的中值定理） 设函数 $f(x, y)$ 在闭区域 $D$ 上连续，$|D|$ 是 $D$ 的面积，则在 $D$ 上至少存在一点 $(\xi, \eta)$，使得

$$\iint_D f(x, y)d\sigma = f(\xi, \eta) \cdot |D|.$$

证明

$$m \cdot |D| \leq \iint_D f(x, y)d\sigma \leq M \cdot |D|$$

# 二重积分的性质 (Cont.)

性质 6（二重积分的中值定理） 设函数 $f(x, y)$ 在闭区域 $D$ 上连续，$|D|$ 是 $D$ 的面积，则在 $D$ 上至少存在一点 $(\xi, \eta)$，使得

$$\iint_D f(x, y)d\sigma = f(\xi, \eta) \cdot |D|.$$

证明

$$m \cdot |D| \leq \iint_D f(x, y)d\sigma \leq M \cdot |D| \quad \Rightarrow \quad m \leq \frac{1}{|D|} \iint_D f(x, y)d\sigma \leq M$$

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

# 二重积分的性质 (Cont.)

性质 6（二重积分的中值定理） 设函数 $f(x, y)$ 在闭区域 $D$ 上连续，$|D|$ 是 $D$ 的面积，则在 $D$ 上至少存在一点 $(\xi, \eta)$，使得

$$\iint_D f(x, y)d\sigma = f(\xi, \eta) \cdot |D|.$$

证明 因为

$$m \cdot |D| \le \iint_D f(x, y)d\sigma \le M \cdot |D| \quad \Rightarrow \quad m \le \frac{1}{|D|}\iint_D f(x, y)d\sigma \le M$$

由闭区域上连续函数的中值定理可知：存在 $(\xi, \eta) \in D$，使得

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{|D|}\iint_D f(x, y)d\sigma,$$

# 二重积分的性质 (Cont.)

**性质 6（二重积分的中值定理）** 设函数 $f(x, y)$ 在闭区域 $D$ 上连续，$|D|$ 是 $D$ 的面积，则在 $D$ 上至少存在一点 $(\xi, \eta)$，使得

$$\iint_D f(x, y)d\sigma = f(\xi, \eta)\cdot|D|.$$

**证明** 因为

$$m\cdot|D| \le \iint_D f(x, y)d\sigma \le M\cdot|D| \quad \Rightarrow \quad m \le \frac{1}{|D|}\iint_D f(x, y)d\sigma \le M$$

由闭区域上连续函数的中值定理可知：存在 $(\xi, \eta)\in D$，使得

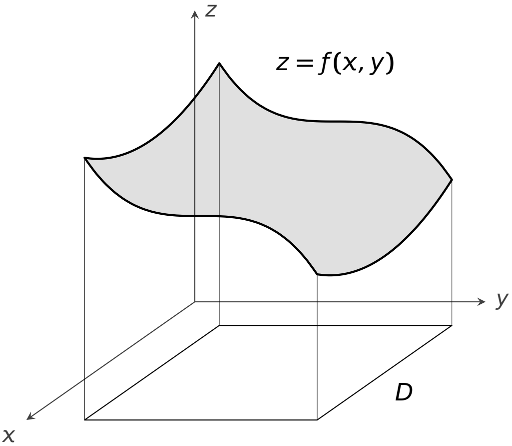
$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{|D|}\iint_D f(x, y)d\sigma,$$

即

$$\iint_D f(x, y)d\sigma = f(\xi, \eta)\cdot|D|.$$

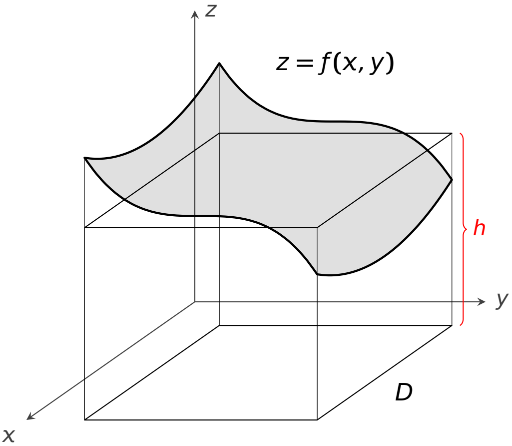
暨南大学 JINAN UNIVERSITY

# 二重积分中值定理的几何直观



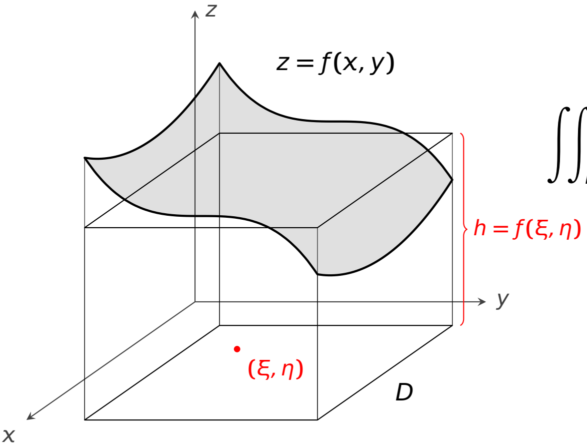

$$\iint_D f(x, y)d\sigma$$

## 二重积分中值定理的几何直观



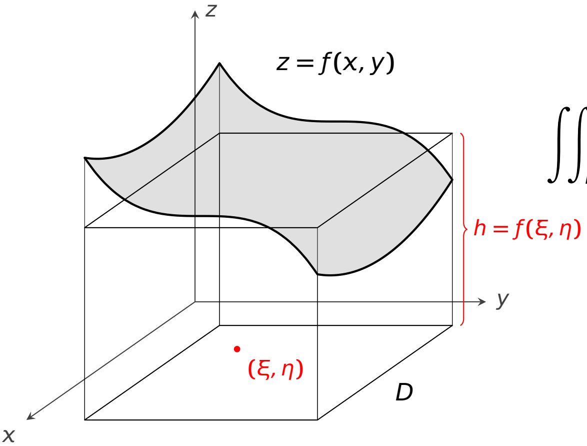

$$\iint_D f(x, y)d\sigma = h|D|$$

# 二重积分中值定理的几何直观




$$\iint_D f(x,\,y)d\sigma = h|D|$$

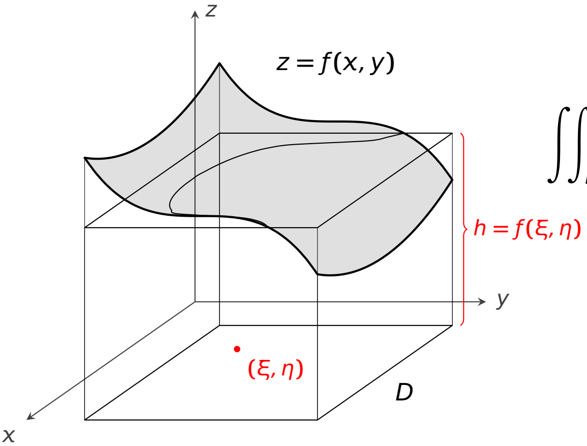
## 二重积分中值定理的几何直观




$$\iint_D f(x, y)d\sigma = h|D|$$

$$= f(\xi, \eta)|D|$$

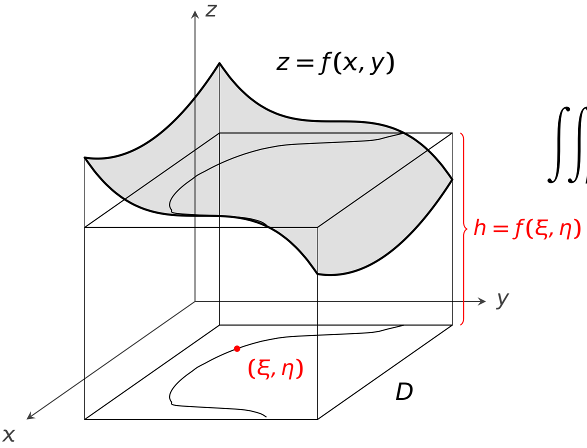
## 二重积分中值定理的几何直观




$$\iint_D f(x,y)d\sigma = h|D|$$

$$= f(\xi,\eta)|D|$$

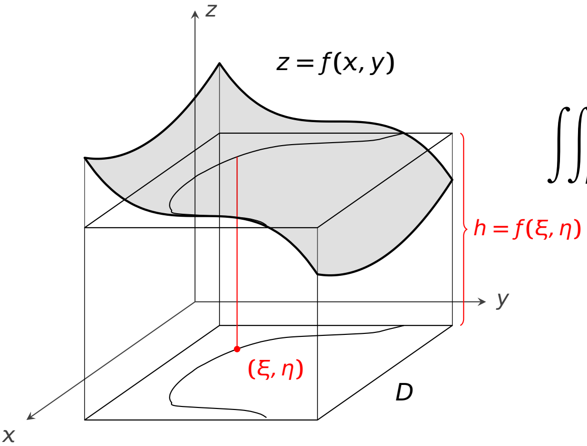
## 二重积分中值定理的几何直观




$$\iint_D f(x, y) d\sigma = h|D|$$

$$= f(\xi, \eta)|D|$$

## 二重积分中值定理的几何直观




$$\iint_D f(x, y)d\sigma = h|D|$$

$$= f(\xi, \eta)|D|$$

# We are here now...

1. 二重积分的基本概念

2. 二重积分的计算

- 一般方法 化二重积分为“累次积分”:

$$\iint_D f(x, y) d\sigma =$$

- 一般方法 化二重积分为 “累次积分”:

$$\iint_D f(x, y)d\sigma = \iint_D f(x, y)dxdy$$

- 一般方法 化二重积分为“累次积分”:

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f(x,y)dxdy = \int \quad \int \quad f(x,y)dx \ \ dy$$

- 一般方法 化二重积分为 “累次积分”:

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f(x,y)dxdy = \int \left[\int f(x,y)dx\right]dy$$

- 一般方法 化二重积分为 “累次积分”:

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(x, y) dx dy = \int \quad \left[ \int_*^* f(x, y) dx \right] dy$$

- 一般方法 化二重积分为“累次积分”:

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_*^* \left[\int_*^* f(x,y)dx\right]dy$$

- 一般方法 化二重积分为“累次积分”:

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_*^* \left[\int_*^* f(x,y)dx\right]dy$$

$$= \int_*^* \left[\int_*^* f(x,y)dy\right]dx$$

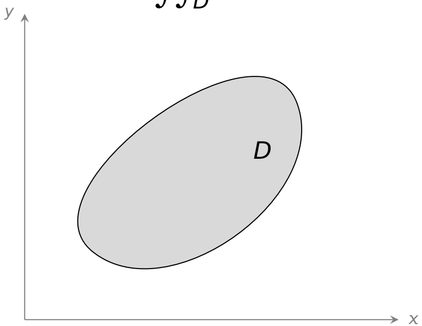
- 一般方法 化二重积分为“累次积分”:

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_*^* \left[\int_*^* f(x,y)dx\right]dy$$
$$= \int_*^* \left[\int_*^* f(x,y)dy\right]dx$$

- 问题：如何确定积分上下限？

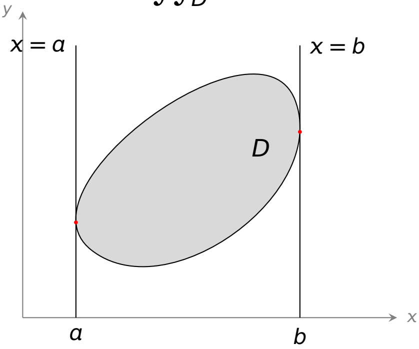
# 固定 $x$，先对 $y$ 积分

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int \left[\int \qquad f(x, y)dy\right]dx$$



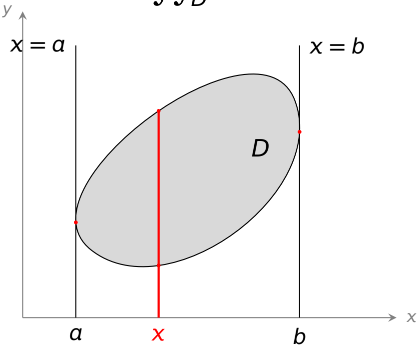
# 固定 $x$，先对 $y$ 积分

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int \left[\int \qquad f(x,y)dy\right]dx$$



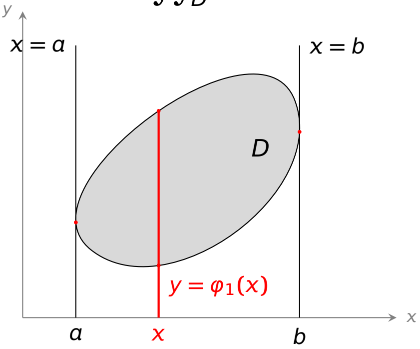
# 固定 $x$，先对 $y$ 积分

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int \left[ \int \quad f(x,y)dy \right] dx$$



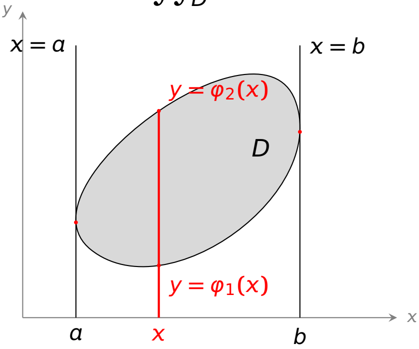
# 固定 $x$，先对 $y$ 积分

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int \left[\int \qquad f(x, y)dy\right]dx$$



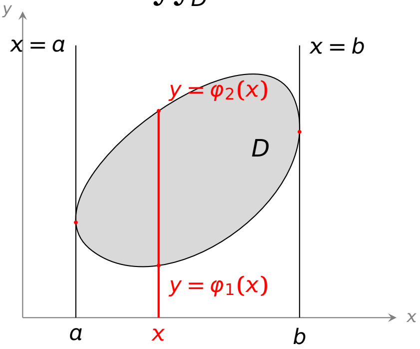
# 固定 $x$，先对 $y$ 积分

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int \left[ \int \qquad f(x,y)dy \right] dx$$



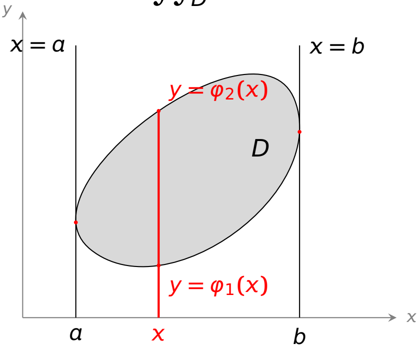
# 固定 $x$，先对 $y$ 积分

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[ \int \qquad f(x,y)dy \right] dx$$



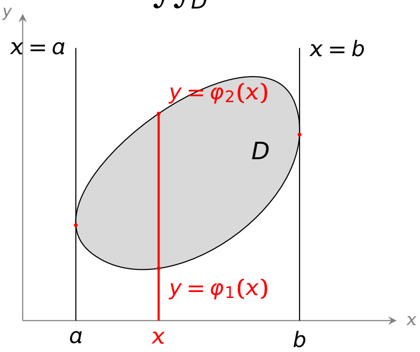
# 固定 $x$，先对 $y$ 积分

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right] dx$$



# 固定 $x$，先对 $y$ 积分

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right] dx$$



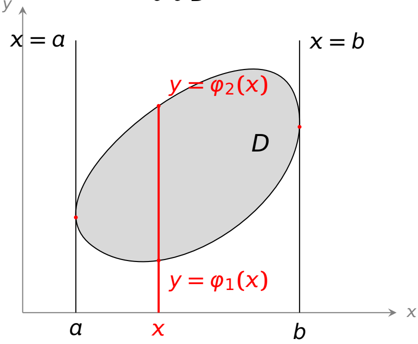

注 上述区域 $D$ 可以表示成

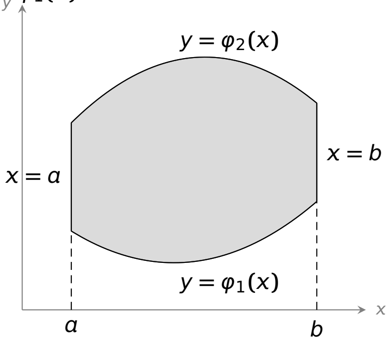
$$D = \{(x,y) | \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x), a \le x \le b\}$$

称为 $X$-型区域。

# 固定 $x$，先对 $y$ 积分

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx$$



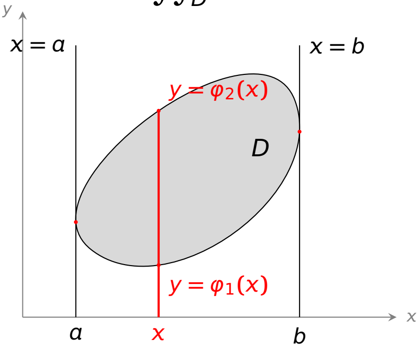

注 上述区域 $D$ 可以表示成

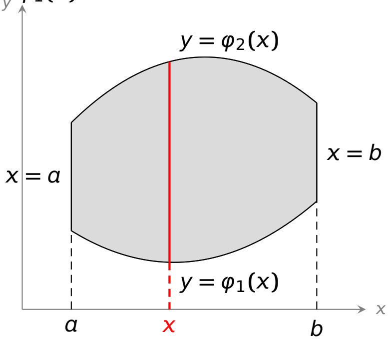
$$D = \{(x,y) | \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x),\ a \le x \le b\}$$

称为 $X$-型区域。

# 固定 $x$，先对 $y$ 积分

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx$$




注 上述区域 $D$ 可以表示成

$$D = \{(x,y) \mid \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x),\ a \le x \le b\}$$

称为 $X$-型区域。

# 二次积分化为累次积分：几何解释

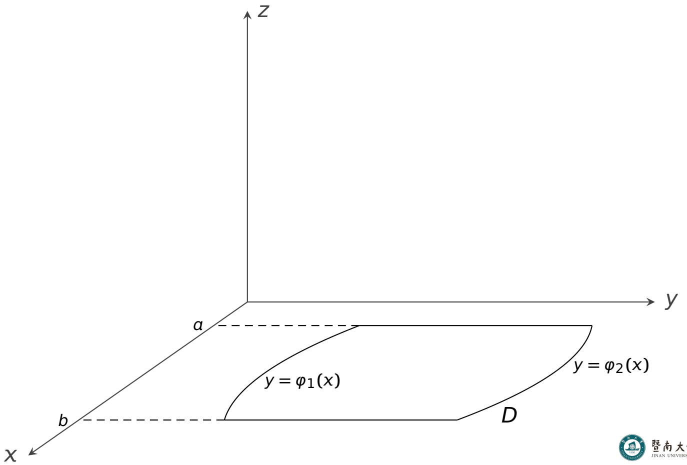
- 设 $D=\{(x,y)|\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x),\ a\le x\le b\}$，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx$$

# 二次积分化为累次积分：几何解释

- 设 $D = \{(x, y) | \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x), a \le x \le b\}$，则

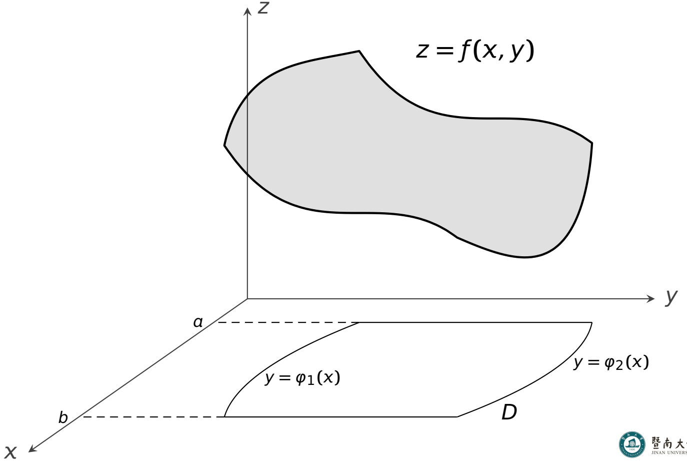
$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b \left[ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$



# 二次积分化为累次积分：几何解释

- 设 $D = \{(x, y) | \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x), a \le x \le b\}$，则

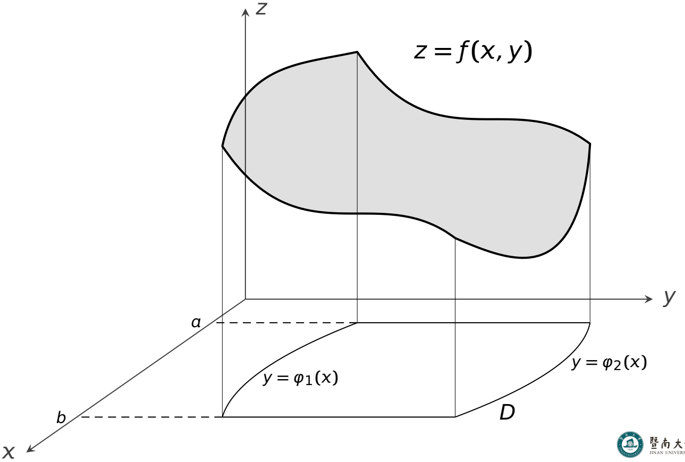
$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b \left[ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$



# 二次积分化为累次积分：几何解释

- 设 $D=\{(x,y)|\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x),\ a\le x\le b\}$，则

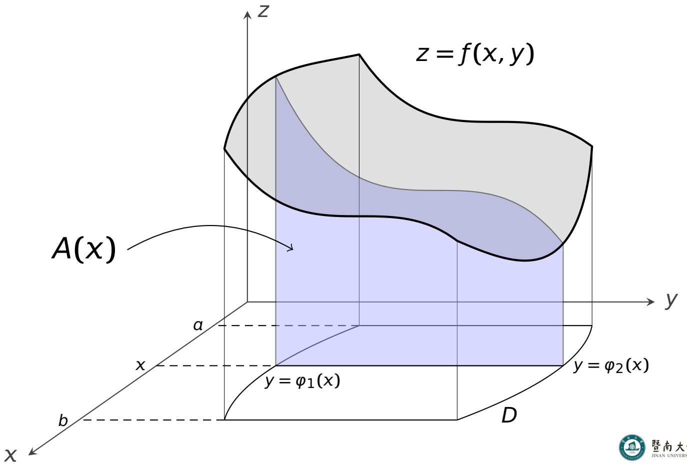
$$\iint_D f(x,y)d\sigma = V \qquad \int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx$$



# 二次积分化为累次积分：几何解释

- 设 $D=\{(x,y)\,|\,\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x),\ a\le x\le b\}$，则

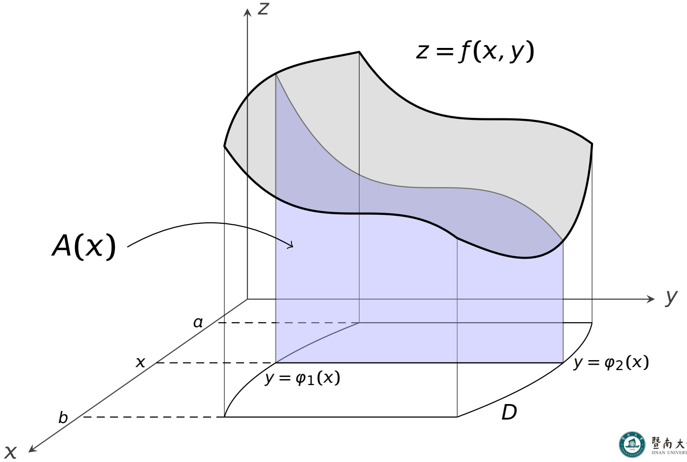
$$\iint_D f(x,y)d\sigma = V \qquad \int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx$$



# 二次积分化为累次积分：几何解释

- 设 $D = \{(x, y) | \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x), a \le x \le b\}$，则

$$\iint_D f(x, y)d\sigma = V = \int_a^b A(x)dx \quad \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy\right]dx$$

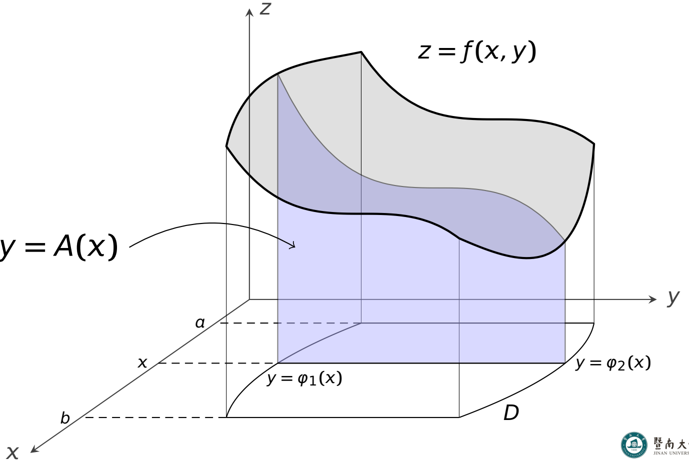


# 二次积分化为累次积分：几何解释

- 设 $D = \{(x, y) | \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b\}$，则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = V = \int_a^b A(x) dx \qquad \int_a^b \left[ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy = A(x)$$

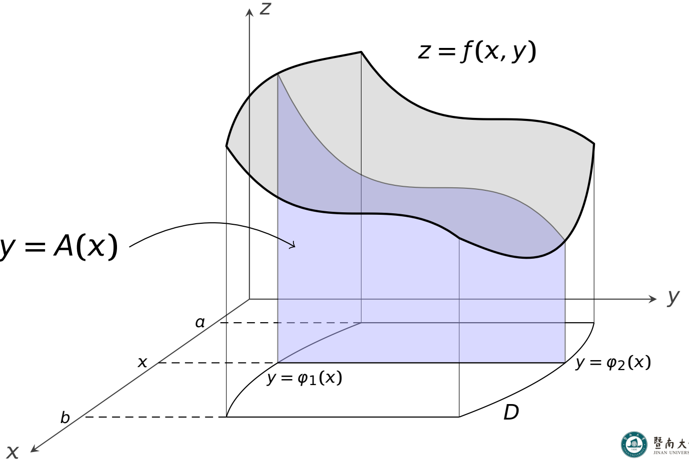


# 二次积分化为累次积分：几何解释

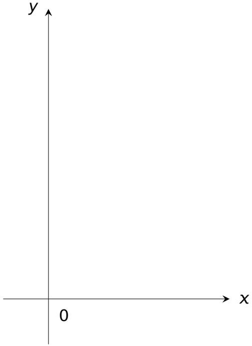
- 设 $D=\{(x,y)\,|\,\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x),\ a\le x\le b\}$，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = V = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx$$

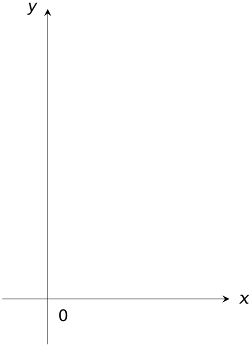
$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy = A(x)$$



例 1 计算 $\iint_D xydxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。



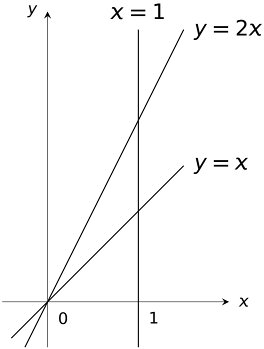
**例 1** 计算 $\iint_D xydxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。




**解**

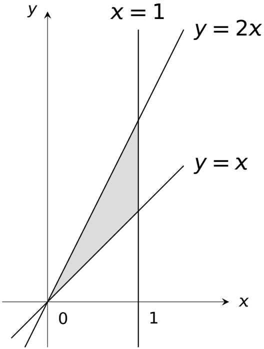
$$\iint_D xydxdy = \int \left[\int \quad xydy\right]dx$$

例 1 计算 $\iint_D xydxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。



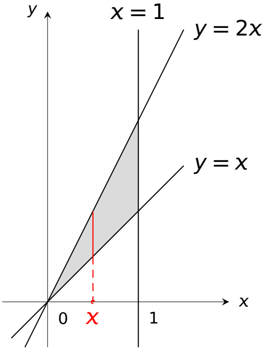

解 $$\iint_D xydxdy = \int \left[\int \quad xydy\right]dx$$

例 1 计算 $\iint_D xydxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。



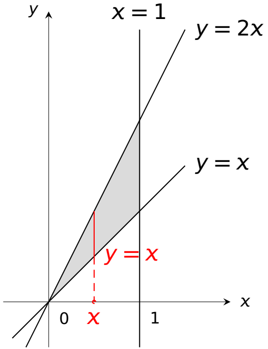

解 $$\iint_D xydxdy = \int \left[\int \quad xydy\right]dx$$

例 1 计算 $\iint_D xydxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。




解 $$\iint_D xydxdy = \int \left[\int \quad xydy\right]dx$$

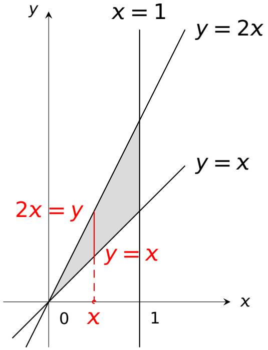
**例 1** 计算 $\iint_D xydxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。




**解**

$$\iint_D xydxdy = \int \left[ \int \quad xydy \right] dx$$

**例 1** 计算 $\iint_D xydxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。



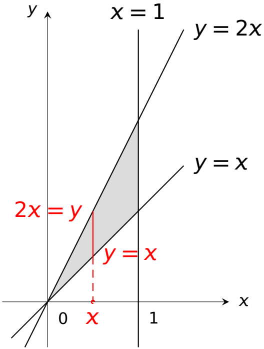

**解**

$$\iint_D xydxdy = \int \left[\int \quad xydy\right]dx$$

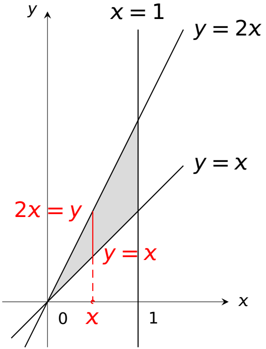
**例 1** 计算 $\iint_D xydxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。

**解**

$$\iint_D xydxdy = \int_0^1 \left[ \int \quad xydy \right] dx$$



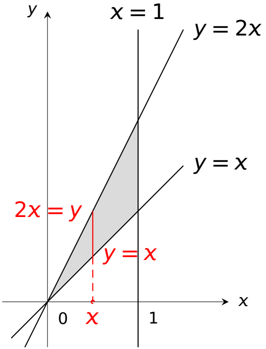
**例 1** 计算 $\iint_D xydxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。




**解**

$$\iint_D xydxdy = \int_0^1 \left[ \int_x^{2x} xydy \right] dx$$

**例 1** 计算 $\iint_D xydxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。

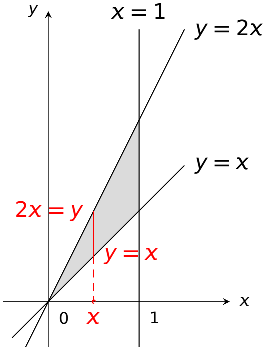



**解**

$$\iint_D xydxdy = \int_0^1 \left[ \int_x^{2x} xydy \right] dx$$

$$= \quad \frac{1}{2}xy^2$$

**例 1** 计算 $\iint_D xydxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。

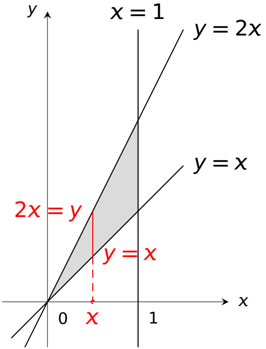



**解**

$$\iint_D xydxdy = \int_0^1 \left[ \int_x^{2x} xydy \right] dx$$

$$= \quad \frac{1}{2}xy^2 \Big|_x^{2x}$$

**例 1** 计算 $\iint_D xydxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。

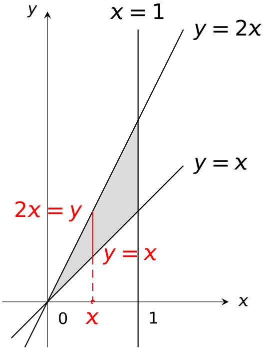



**解**

$$\iint_D xydxdy = \int_0^1 \left[\int_x^{2x} xydy\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}xy^2\Big|_x^{2x} = \frac{3}{2}x^3$$

**例 1** 计算 $\iint_D xydxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。

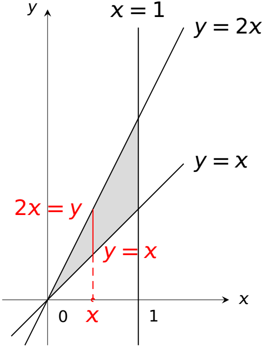



**解**

$$\iint_D xydxdy = \int_0^1 \Big[\int_x^{2x} xydy\Big]dx$$

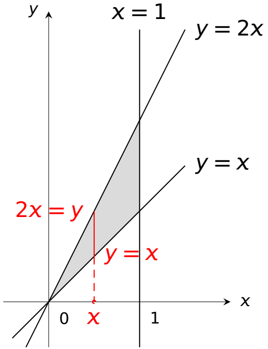
$$= \int_0^1 \Big[\frac{1}{2}xy^2\Big|_x^{2x}\Big]dx = \qquad \frac{3}{2}x^3$$

例 1 计算 $\iint_D xydxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。



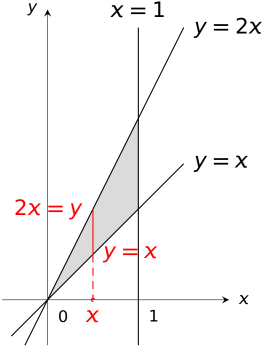

解
$$\iint_D xydxdy = \int_0^1 \Big[\int_x^{2x} xydy\Big]dx$$
$$= \int_0^1 \Big[\frac{1}{2}xy^2\Big|_x^{2x}\Big]dx = \int_0^1 \frac{3}{2}x^3dx$$

**例 1** 计算 $\iint_D xydxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。




**解**
$$\iint_D xydxdy = \int_0^1 \left[\int_x^{2x} xydy\right]dx$$
$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}xy^2\Big|_x^{2x}\right]dx = \int_0^1 \frac{3}{2}x^3dx = \frac{3}{8}x^4$$

**例 1** 计算 $\iint_D xydxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。

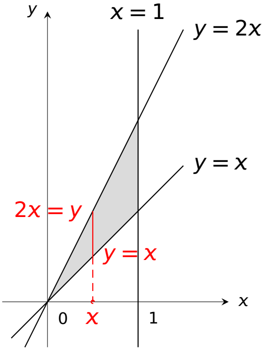



**解**

$$\iint_D xydxdy = \int_0^1 \left[\int_x^{2x} xydy\right]dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}xy^2\Big|_x^{2x}\right]dx = \int_0^1 \frac{3}{2}x^3dx = \frac{3}{8}x^4\Big|_0^1$$

**例 1** 计算 $\iint_D xy\,dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。

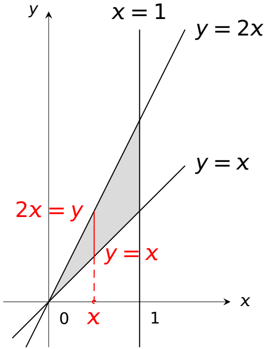



**解**

$$\iint_D xy\,dxdy = \int_0^1 \left[\int_x^{2x} xy\,dy\right]dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}xy^2\Big|_x^{2x}\right]dx = \int_0^1 \frac{3}{2}x^3dx = \frac{3}{8}x^4\Big|_0^1 = \frac{3}{8}$$

例 1 计算 $\iint_D xy\,dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。




解
$$\iint_D xy\,dxdy=\int_0^1\left[\int_x^{2x} xy\,dy\right]dx$$

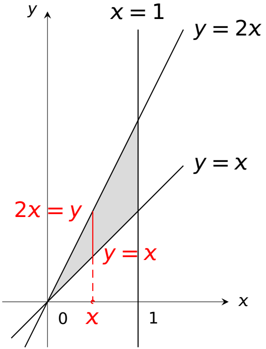
$$=\int_0^1\left[\frac{1}{2}xy^2\Big|_x^{2x}\right]dx=\int_0^1\frac{3}{2}x^3dx=\frac{3}{8}x^4\Big|_0^1=\frac{3}{8}$$

---

注 $D$ 是 $X$-型区域，可以表示为

$$D=\{(x,y)|\qquad\qquad\qquad\}$$

**例 1** 计算 $\iint_D xydxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。




**解**

$$\iint_D xydxdy = \int_0^1 \left[\int_x^{2x} xydy\right]dx$$

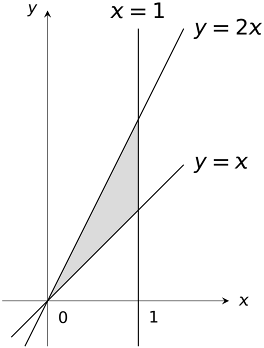
$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}xy^2\Big|_x^{2x}\right]dx = \int_0^1 \frac{3}{2}x^3dx = \frac{3}{8}x^4\Big|_0^1 = \frac{3}{8}$$

---

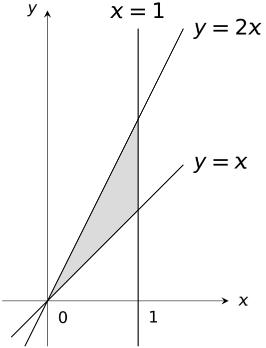
**注** $D$ 是 $X$-型区域，可以表示为

$$D=\{(x,y)|\,x\le y\le 2x,\ 0\le x\le 1\}$$

例 2 计算 $\iint_D e^{x+y}dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。



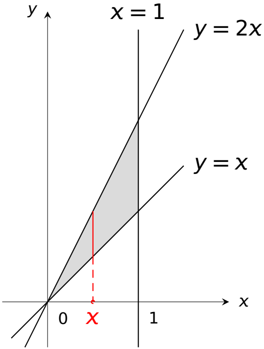
**例 2** 计算 $\iint_D e^{x+y}dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。




**解**

$$\iint_D e^{x+y}dxdy = \int \left[\int \quad e^{x+y}dy\right]dx$$

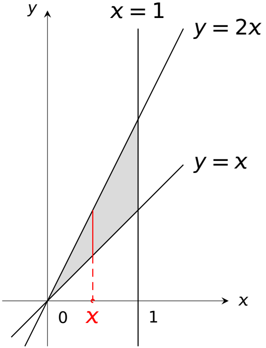
**例 2** 计算 $\iint_D e^{x+y}dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。




**解**

$$\iint_D e^{x+y}dxdy = \int \left[\int \quad e^{x+y}dy\right]dx$$

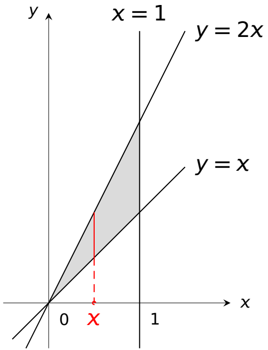
**例 2** 计算 $\iint_D e^{x+y}dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。




**解**

$$\iint_D e^{x+y}dxdy = \int_0^1 \Big[\int \qquad e^{x+y}dy\Big]dx$$

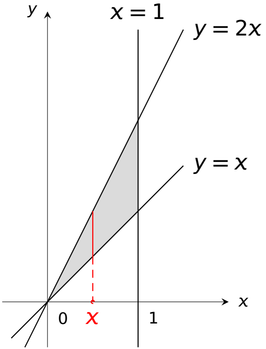
**例 2** 计算 $\iint_D e^{x+y}dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。




**解**

$$\iint_D e^{x+y}dxdy = \int_0^1 \left[\int_x^{2x} e^{x+y}dy\right]dx$$

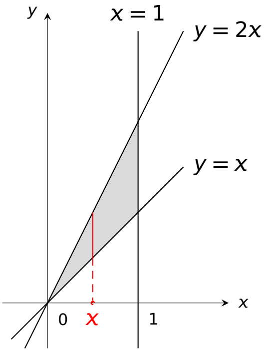
**例 2** 计算 $\iint_D e^{x+y}dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。




**解**

$$\iint_D e^{x+y}dxdy = \int_0^1 \left[\int_x^{2x} e^{x+y}dy\right]dx = \qquad e^{x+y}$$

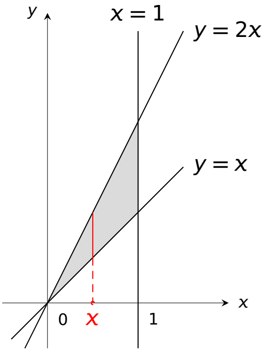
例 2 计算 $\iint_D e^{x+y}dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。




解

$$\iint_D e^{x+y}dxdy = \int_0^1 \left[\int_x^{2x} e^{x+y}dy\right]dx = \qquad e^{x+y}\Big|_x^{2x}$$

例 2 计算 $\iint_D e^{x+y}dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。

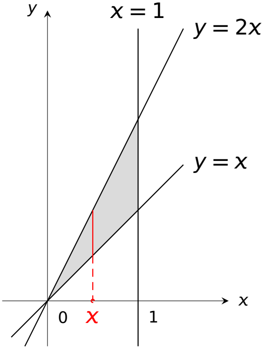



解

$$\iint_D e^{x+y}dxdy = \int_0^1 \left[\int_x^{2x} e^{x+y}dy\right]dx = \qquad e^{x+y}\Big|_x^{2x}$$

$$= \quad e^{3x} - e^{2x}$$

例 2 计算 $\iint_D e^{x+y}dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。

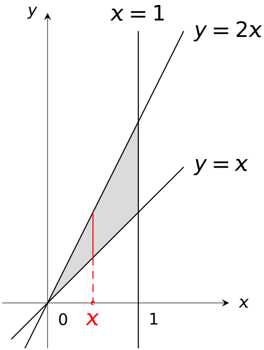



解

$$\iint_D e^{x+y}dxdy = \int_0^1 \left[\int_x^{2x} e^{x+y}dy\right]dx = \int_0^1 \left[e^{x+y}\Big|_x^{2x}\right]dx$$

$$= \quad e^{3x} - e^{2x}$$

例 2 计算 $\iint_D e^{x+y}dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。

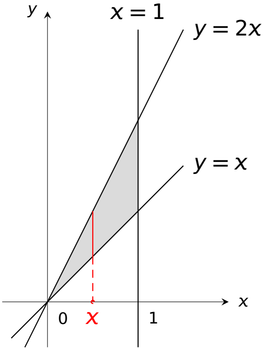



解

$$\iint_D e^{x+y}dxdy = \int_0^1 \left[\int_x^{2x} e^{x+y}dy\right]dx = \int_0^1 \left[e^{x+y}\Big|_x^{2x}\right]dx$$

$$= \int_0^1 e^{3x} - e^{2x}dx$$

例 2 计算 $\iint_D e^{x+y}dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。

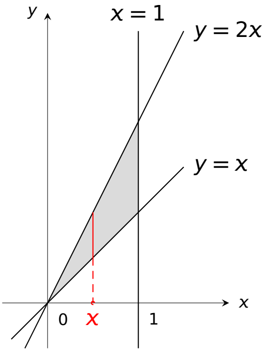



解

$$\iint_D e^{x+y}dxdy = \int_0^1 \left[\int_x^{2x} e^{x+y}dy\right]dx = \int_0^1 \left[e^{x+y}\Big|_x^{2x}\right]dx$$

$$= \int_0^1 e^{3x} - e^{2x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{2}e^{2x}$$

例 2 计算 $\iint_D e^{x+y}dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。

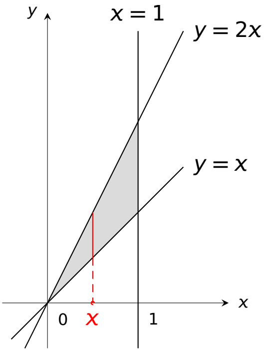



解

$$\iint_D e^{x+y}dxdy = \int_0^1 \left[\int_x^{2x} e^{x+y}dy\right]dx = \int_0^1 \left[e^{x+y}\Big|_x^{2x}\right]dx$$

$$= \int_0^1 e^{3x} - e^{2x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1$$

例 2 计算 $\iint_D e^{x+y}dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。

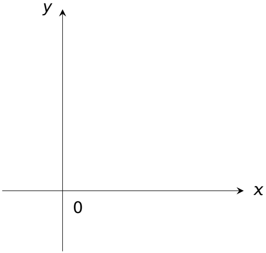



解

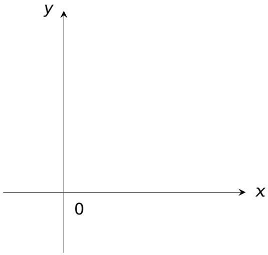
$$\iint_D e^{x+y}dxdy = \int_0^1\left[\int_x^{2x} e^{x+y}dy\right]dx = \int_0^1\left[e^{x+y}\Big|_x^{2x}\right]dx$$

$$= \int_0^1 e^{3x} - e^{2x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{6}$$

例 3 计算 $\iint_D (2x+6y)dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $x=0$，$y=1$ 和 $y=x$ 所围成区域。



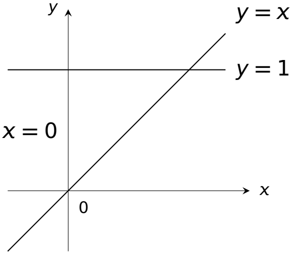
例 3 计算 $\iint_D (2x+6y)dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $x=0$，$y=1$ 和 $y=x$ 所围成区域。




解

$$\iint_D (2x+6y)dxdy = \int \left[\int (2x+6y)dy\right]dx$$

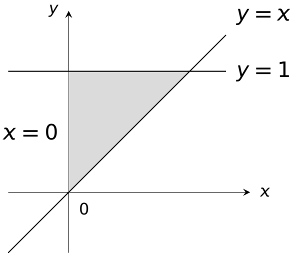
**例 3** 计算 $\iint_D (2x+6y)dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $x=0$，$y=1$ 和 $y=x$ 所围成区域。




**解**

$$\iint_D (2x+6y)dxdy = \int \left[\int (2x+6y)dy\right]dx$$

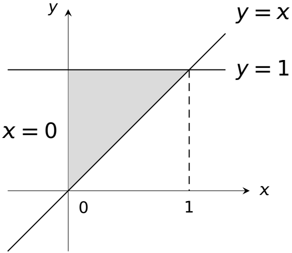
例 3 计算 $\iint_D (2x+6y)dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $x=0$，$y=1$ 和 $y=x$ 所围成区域。




解

$$\iint_D (2x+6y)dxdy = \int \left[\int (2x+6y)dy\right]dx$$

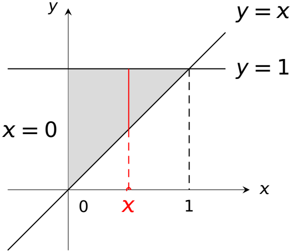
**例 3** 计算 $\iint_D (2x+6y)dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $x=0$，$y=1$ 和 $y=x$ 所围成区域。




**解**

$$\iint_D (2x+6y)dxdy = \int \left[ \int (2x+6y)dy \right] dx$$

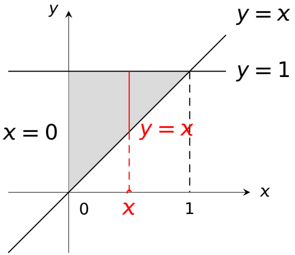
**例 3** 计算 $\iint_D (2x+6y)dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $x=0$，$y=1$ 和 $y=x$ 所围成区域。




**解**

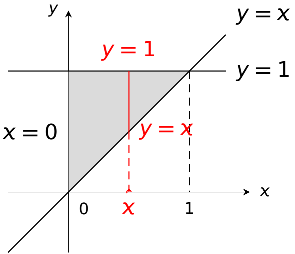
$$\iint_D (2x+6y)dxdy = \int \left[ \int (2x+6y)dy \right] dx$$

**例 3** 计算 $\iint_D (2x+6y)dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $x=0$，$y=1$ 和 $y=x$ 所围成区域。




**解**

$$\iint_D (2x+6y)dxdy = \int \left[\int (2x+6y)dy\right]dx$$

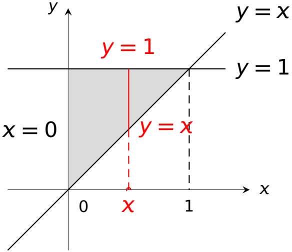



**例 3** 计算 $\iint_D (2x+6y)dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $x=0$，$y=1$ 和 $y=x$ 所围成区域。

**解**

$$\iint_D (2x+6y)dxdy = \int \left[ \int (2x+6y)dy \right] dx$$

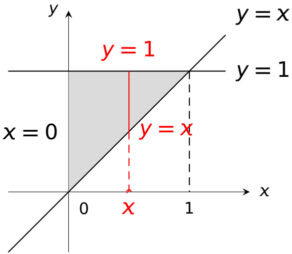
**例 3** 计算 $\iint_D (2x+6y)dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $x=0$，$y=1$ 和 $y=x$ 所围成区域。




**解**

$$\iint_D (2x+6y)dxdy = \int_0^1 \left[ \int \quad (2x+6y)dy \right] dx$$

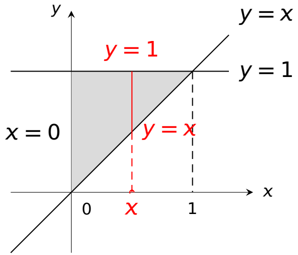
**例 3** 计算 $\iint_D (2x+6y)dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $x=0$，$y=1$ 和 $y=x$ 所围成区域。




**解**

$$\iint_D (2x+6y)dxdy = \int_0^1 \left[ \int_x^1 (2x+6y)dy \right] dx$$

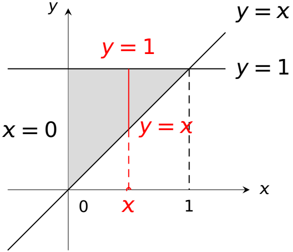
例 3 计算 $\iint_D (2x+6y)dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $x=0$，$y=1$ 和 $y=x$ 所围成区域。




解

$$\iint_D (2x+6y)dxdy = \int_0^1 \left[\int_x^1 (2x+6y)dy\right]dx$$

$$= \qquad 2xy+3y^2$$

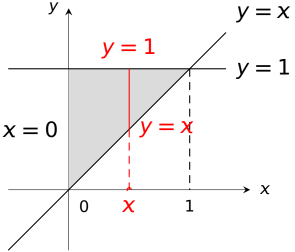



**例 3** 计算 $\iint_D (2x+6y)dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $x=0$，$y=1$ 和 $y=x$ 所围成区域。

**解**

$$\iint_D (2x+6y)dxdy = \int_0^1 \left[\int_x^1 (2x+6y)dy\right]dx$$

$$= \qquad 2xy+3y^2\Big|_x^1$$



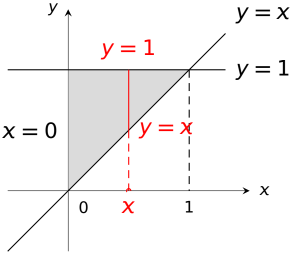

**例 3** 计算 $\iint_D (2x+6y)dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $x=0$，$y=1$ 和 $y=x$ 所围成区域。

**解**

$$\iint_D (2x+6y)dxdy = \int_0^1 \left[\int_x^1 (2x+6y)dy\right]dx$$

$$= \quad 2xy+3y^2\Big|_x^1 \quad = \quad -5x^2+2x+3$$

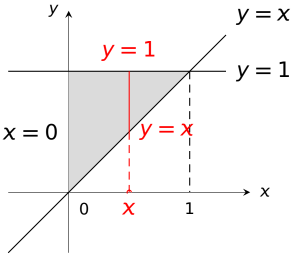
**例 3** 计算 $\iint_D (2x+6y)dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $x=0$，$y=1$ 和 $y=x$ 所围成区域。




**解**

$$\iint_D (2x+6y)dxdy = \int_0^1 \left[ \int_x^1 (2x+6y)dy \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[ 2xy + 3y^2 \Big|_x^1 \right] dx = \qquad -5x^2+2x+3$$



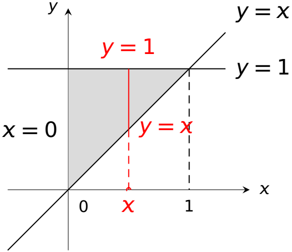

例 3 计算 $\iint_D (2x+6y)dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $x=0$，$y=1$ 和 $y=x$ 所围成区域。

解

$$\iint_D (2x+6y)dxdy = \int_0^1 \left[\int_x^1 (2x+6y)dy\right]dx$$

$$= \int_0^1 \left[2xy+3y^2\Big|_x^1\right]dx = \int_0^1 -5x^2+2x+3dx$$

例 3 计算 $\iint_D (2x+6y)dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $x=0$，$y=1$ 和 $y=x$ 所围成区域。



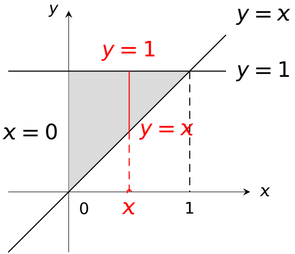

解

$$\iint_D (2x+6y)dxdy = \int_0^1 \left[\int_x^1 (2x+6y)dy\right]dx$$

$$= \int_0^1 \left[2xy+3y^2\Big|_x^1\right]dx = \int_0^1 -5x^2+2x+3dx$$

$$= -\frac{5}{3}x^3+x^2+3x$$

**例 3** 计算 $\iint_D (2x+6y)dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $x=0$，$y=1$ 和 $y=x$ 所围成区域。



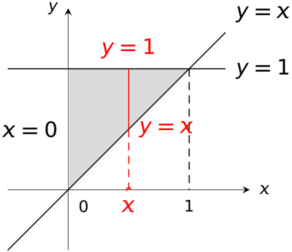

**解**

$$\iint_D (2x+6y)dxdy = \int_0^1 \left[ \int_x^1 (2x+6y)dy \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[ 2xy + 3y^2 \Big|_x^1 \right] dx = \int_0^1 -5x^2+2x+3dx$$

$$= -\frac{5}{3}x^3 + x^2 + 3x \Big|_0^1$$

**例 3** 计算 $\iint_D (2x+6y)dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $x=0$，$y=1$ 和 $y=x$ 所围成区域。



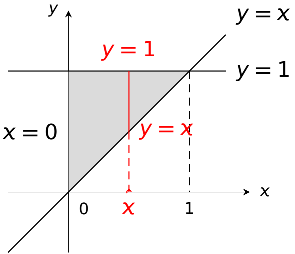

**解**

$$\iint_D (2x+6y)dxdy = \int_0^1 \left[\int_x^1 (2x+6y)dy\right]dx$$

$$= \int_0^1 \left[2xy+3y^2\Big|_x^1\right]dx = \int_0^1 -5x^2+2x+3dx$$

$$= -\frac{5}{3}x^3+x^2+3x\Big|_0^1 = \frac{7}{3}$$

例 3 计算 $\iint_D (2x+6y)dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $x=0$，$y=1$ 和 $y=x$ 所围成区域。




解

$$\iint_D (2x+6y)dxdy = \int_0^1 \left[\int_x^1 (2x+6y)dy\right]dx$$

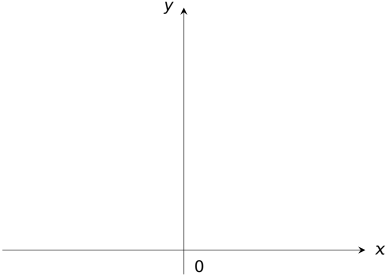
$$= \int_0^1 \left[2xy+3y^2\Big|_x^1\right]dx = \int_0^1 -5x^2+2x+3dx$$

$$= -\frac{5}{3}x^3+x^2+3x\Big|_0^1 = \frac{7}{3}$$

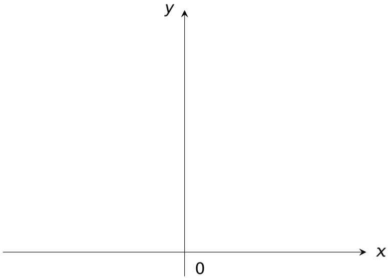
注 $D$ 是 $X$-型区域，可以表示为

$$D = \{(x,y) | x \le y \le 1, 0 \le x \le 1\}$$

例 4 计算 $\iint_D x^2 y dxdy$，其中 $D$ 是由曲线 $y = x^2$ 和直线 $y = 1$ 所围成区域。



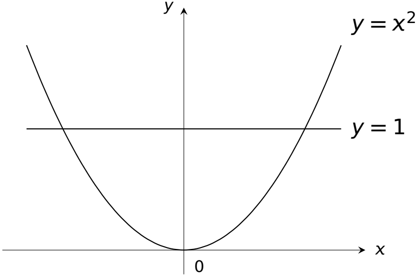
例 4 计算 $\iint_D x^2 y dxdy$，其中 $D$ 是由曲线 $y = x^2$ 和直线 $y = 1$ 所围成区域。




解

$$\iint_D x^2 y dxdy = \int \left[ \int x^2 y dy \right] dx$$

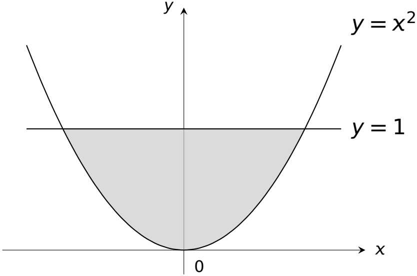
例 4 计算 $\iint_D x^2 y dxdy$，其中 $D$ 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 所围成区域。




解

$$\iint_D x^2 y dxdy = \int \quad \left[\int \quad x^2 y dy\right] dx$$

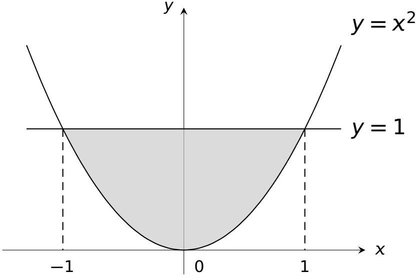
例 4 计算 $\iint_D x^2ydxdy$，其中 $D$ 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 所围成区域。




解

$$\iint_D x^2ydxdy=\int\ \ \Big[\int\ \ x^2ydy\Big]dx$$

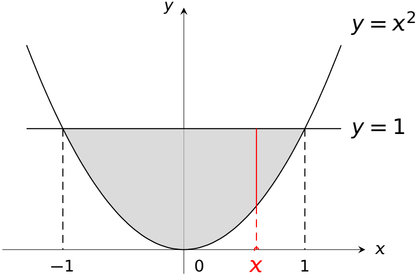
**例 4** 计算 $\iint_D x^2 y dxdy$，其中 $D$ 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 所围成区域。




**解**

$$\iint_D x^2 y dxdy = \int \quad \left[\int \quad x^2 y dy\right] dx$$

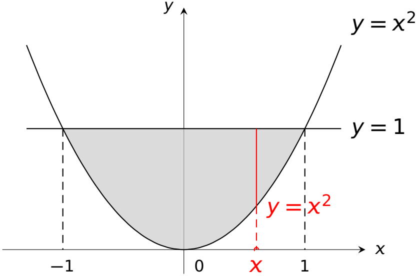
**例 4** 计算 $\iint_D x^2 y dx dy$，其中 $D$ 是由曲线 $y = x^2$ 和直线 $y = 1$ 所围成区域。




**解**

$$\iint_D x^2 y dx dy = \int \left[ \int x^2 y dy \right] dx$$

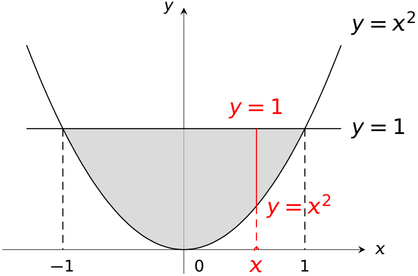
例 4 计算 $\iint_D x^2 y dxdy$，其中 $D$ 是由曲线 $y = x^2$ 和直线 $y = 1$ 所围成区域。




解

$$\iint_D x^2 y dxdy = \int \quad \left[ \int \quad x^2 y dy \right] dx$$

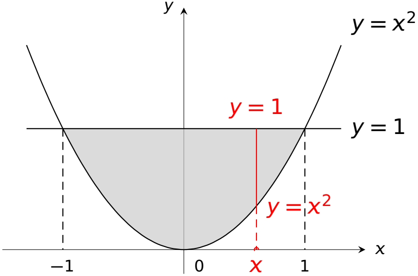
例 4 计算 $\iint_D x^2 y dxdy$，其中 $D$ 是由曲线 $y = x^2$ 和直线 $y = 1$ 所围成区域。




解

$$\iint_D x^2 y dxdy = \int \left[ \int x^2 y dy \right] dx$$

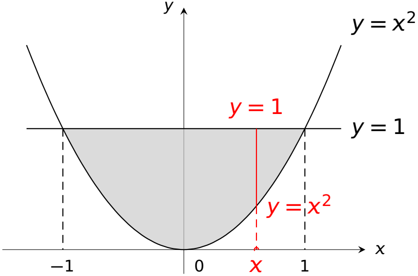
例 4 计算 $\iint_D x^2 y dxdy$，其中 $D$ 是由曲线 $y = x^2$ 和直线 $y = 1$ 所围成区域。




解

$$\iint_D x^2 y dxdy = \int_{-1}^{1} \left[ \int \quad x^2 y dy \right] dx$$

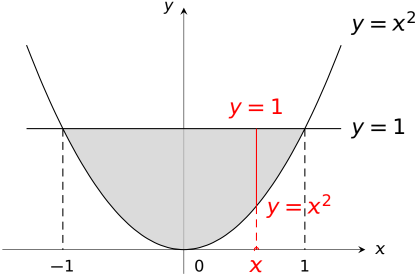
例 4 计算 $\iint_D x^2 y dxdy$，其中 $D$ 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 所围成区域。




解

$$\iint_D x^2 y dxdy = \int_{-1}^{1}\left[\int_{x^2}^{1} x^2 y dy\right]dx$$

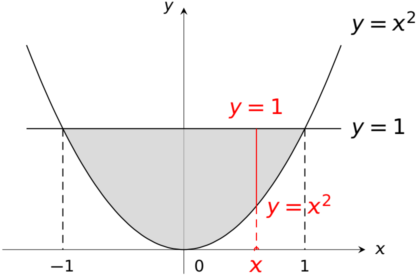
例 4 计算 $\iint_D x^2 y dxdy$，其中 $D$ 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 所围成区域。




解

$$\iint_D x^2 y dxdy = \int_{-1}^{1}\left[\int_{x^2}^{1} x^2 y dy\right]dx = \qquad \frac{1}{2}x^2y^2$$

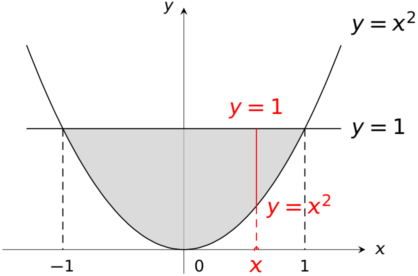
例 4 计算 $\iint_D x^2 y dxdy$，其中 $D$ 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 所围成区域。




解

$$\iint_D x^2 y dxdy = \int_{-1}^{1}\left[\int_{x^2}^{1} x^2 y dy\right]dx = \qquad \frac{1}{2}x^2y^2\Big|_{x^2}^{1}$$

例 4 计算 $\iint_D x^2 y dxdy$，其中 $D$ 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 所围成区域。

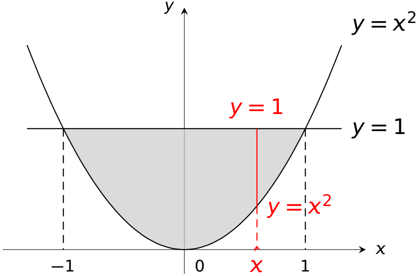



解

$$\iint_D x^2 y dxdy = \int_{-1}^{1} \left[ \int_{x^2}^{1} x^2 y dy \right] dx = \qquad \frac{1}{2} x^2 y^2 \Big|_{x^2}^{1}$$

$$= \qquad \frac{1}{2} x^2 (1 - x^4)$$

**例 4** 计算 $\iint_D x^2 y dxdy$，其中 $D$ 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 所围成区域。

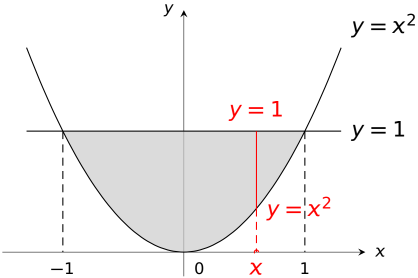



**解**

$$\iint_D x^2 y dxdy = \int_{-1}^{1}\left[\int_{x^2}^{1} x^2 y dy\right]dx = \int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}x^2y^2\Big|_{x^2}^{1}\right]dx$$

$$= \qquad \frac{1}{2}x^2(1-x^4)$$

例 4 计算 $\iint_D x^2 y dxdy$，其中 $D$ 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 所围成区域。

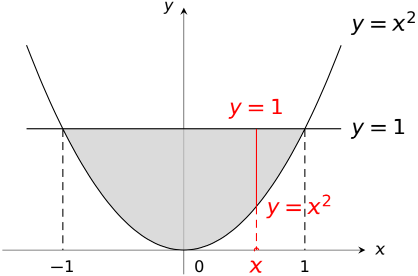



解

$$\iint_D x^2 y dxdy = \int_{-1}^{1}\left[\int_{x^2}^{1} x^2 y dy\right]dx = \int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}x^2y^2\Big|_{x^2}^{1}\right]dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\frac{1}{2}x^2(1-x^4)dx$$

例 4 计算 $\iint_D x^2 y dxdy$，其中 $D$ 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 所围成区域。

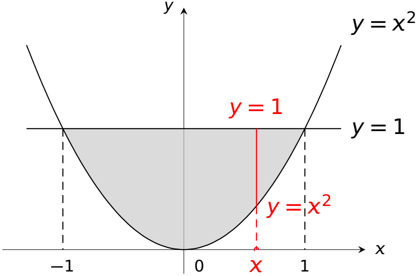



解

$$\iint_D x^2 y dxdy = \int_{-1}^{1}\Big[\int_{x^2}^{1} x^2 y dy\Big]dx = \int_{-1}^{1}\Big[\frac{1}{2}x^2y^2\Big|_{x^2}^{1}\Big]dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\frac{1}{2}x^2(1-x^4)dx = \frac{1}{2}(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{7}x^7)$$

**例 4** 计算 $\iint_D x^2 y dxdy$，其中 $D$ 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 所围成区域。

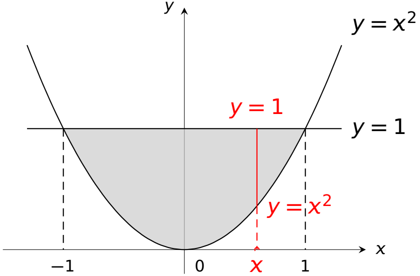



**解**

$$\iint_D x^2 y dxdy = \int_{-1}^{1}\left[\int_{x^2}^{1} x^2 y dy\right]dx = \int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}x^2y^2\Big|_{x^2}^{1}\right]dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\frac{1}{2}x^2(1-x^4)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{7}x^7\right)\Big|_{-1}^{1}$$

例 4 计算 $\iint_D x^2 y dxdy$，其中 $D$ 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 所围成区域。

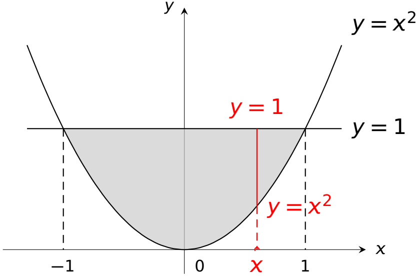



解

$$\iint_D x^2 y dxdy = \int_{-1}^{1}\Big[\int_{x^2}^{1} x^2 y dy\Big]dx = \int_{-1}^{1}\Big[\frac{1}{2}x^2y^2\Big|_{x^2}^{1}\Big]dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\frac{1}{2}x^2(1-x^4)dx = \frac{1}{2}(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{7}x^7)\Big|_{-1}^{1} = \frac{4}{21}$$

**例 4** 计算 $\iint_D x^2y\,dxdy$，其中 $D$ 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 所围成区域。




**解**

$$\iint_D x^2y\,dxdy=\int_{-1}^{1}\left[\int_{x^2}^{1}x^2y\,dy\right]dx=\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}x^2y^2\Big|_{x^2}^{1}\right]dx$$

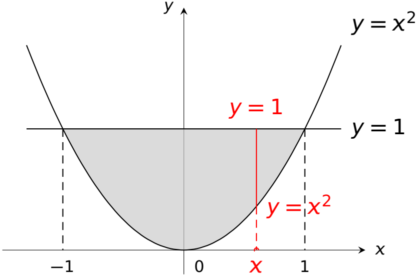
$$=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}x^2(1-x^4)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{7}x^7\right)\Big|_{-1}^{1}=\frac{4}{21}$$

---

**注** $D$ 是 $X$-型区域，可以表示为

$$D=\{(x,y)| \qquad\qquad\qquad\qquad \}$$

**例 4** 计算 $\iint_D x^2 y dxdy$，其中 $D$ 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 所围成区域。




**解**

$$\iint_D x^2 y dxdy = \int_{-1}^{1}\Big[\int_{x^2}^{1} x^2 y dy\Big]dx = \int_{-1}^{1}\Big[\frac{1}{2}x^2 y^2\Big|_{x^2}^{1}\Big]dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\frac{1}{2}x^2(1-x^4)dx = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{7}x^7\Big)\Big|_{-1}^{1} = \frac{4}{21}$$

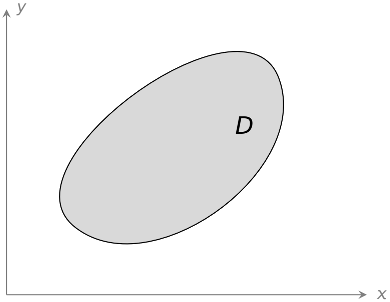
---

**注** $D$ 是 $X$-型区域，可以表示为

$$D=\{(x,y)\,|\,x^2\le y\le 1,\ -1\le x\le 1\}$$

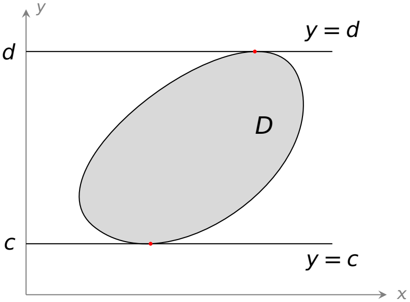
# 固定 $y$，先对 $x$ 积分

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int \Big[ \int \qquad f(x,y)dx \Big] dy$$



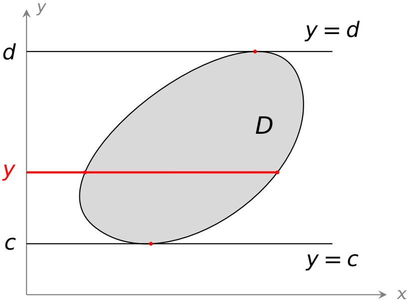
# 固定 $y$，先对 $x$ 积分

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int \left[\int \qquad f(x,y)dx\right]dy$$



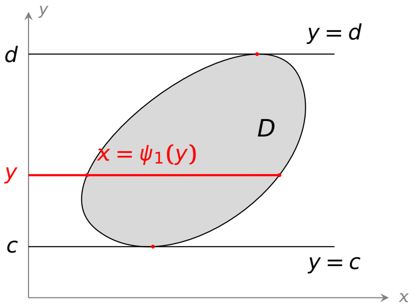
# 固定 $y$，先对 $x$ 积分

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int \left[ \int \qquad f(x,y)dx \right] dy$$



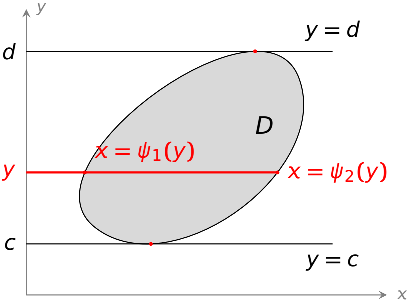
# 固定 $y$，先对 $x$ 积分

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int \left[ \int \qquad f(x,y)dx \right] dy$$



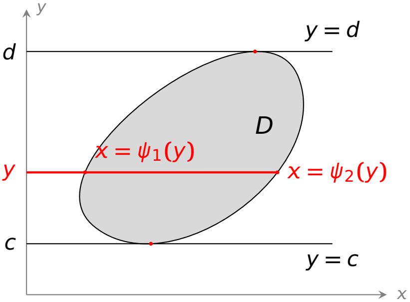
# 固定 $y$，先对 $x$ 积分

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int \left[ \int \qquad f(x,y)\,dx \right] dy$$



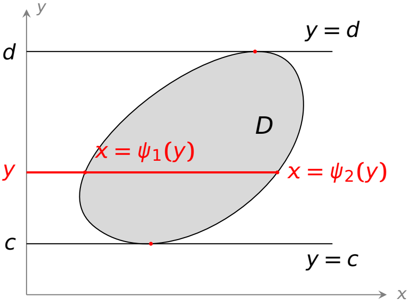
# 固定 $y$，先对 $x$ 积分

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \Big[ \int \qquad f(x,y)dx \Big] dy$$



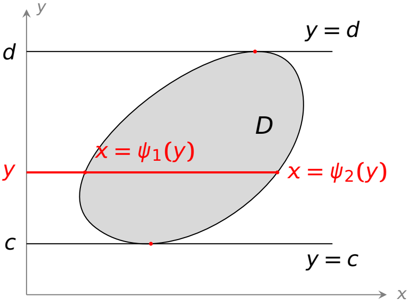
# 固定 $y$，先对 $x$ 积分

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left[ \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right] dy$$



# 固定 $y$，先对 $x$ 积分

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left[ \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right] dy$$



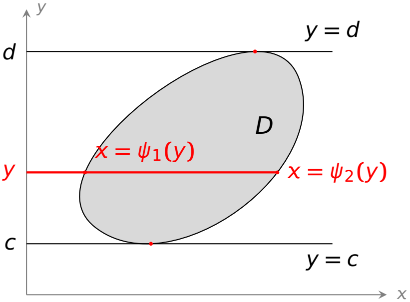

注 上述区域 $D$ 可以表示成

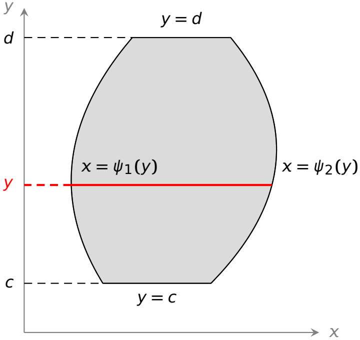
$$D = \{(x,y) | \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y), c \le y \le d\}$$

称为 $Y$-型区域。

# 固定 $y$，先对 $x$ 积分

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx\right]dy$$



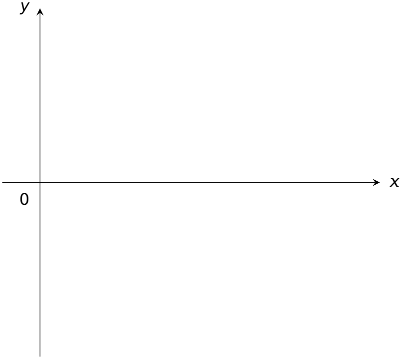




**注** 上述区域 $D$ 可以表示成

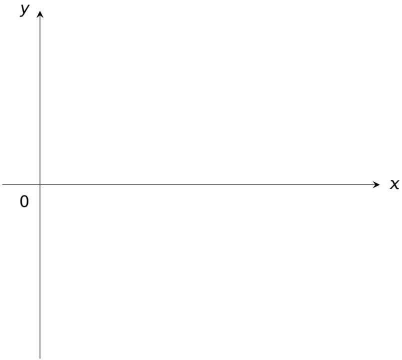
$$D = \{(x,y) | \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y),\ c \le y \le d\}$$

称为 $Y$-型区域。

例 1 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x = y^2$ 和直线 $y = x - 2$ 所围成区域。



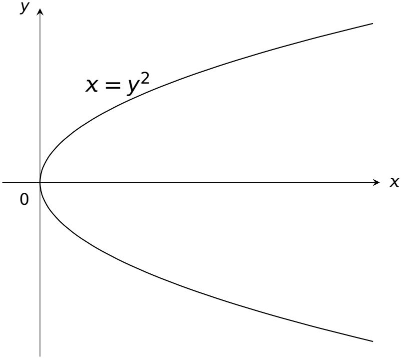
例 1 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x = y^2$ 和直线 $y = x - 2$ 所围成区域。




解

$$原式 = \int \left[ \int \quad xydx \right] dy$$

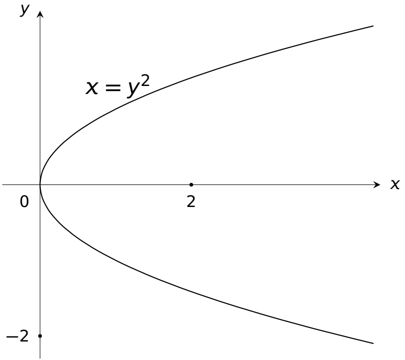
例 1 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。




解

$$\text{原式} = \int \left[ \int \quad xydx \right] dy$$

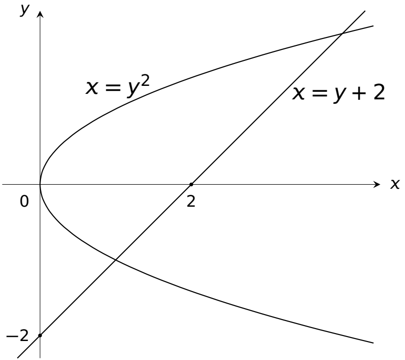
**例 1** 计算 $\iint_D xy\,dxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。




**解**

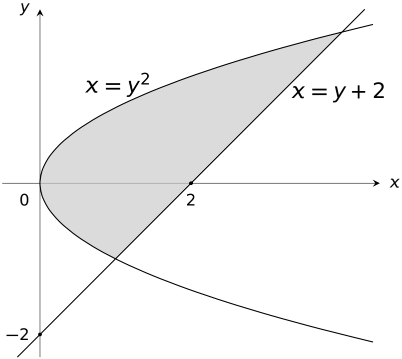
$$\text{原式} = \int \left[ \int \quad xy\,dx \right] dy$$

**例 1** 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。




**解**

$$原式=\int\left[\int xydx\right]dy$$

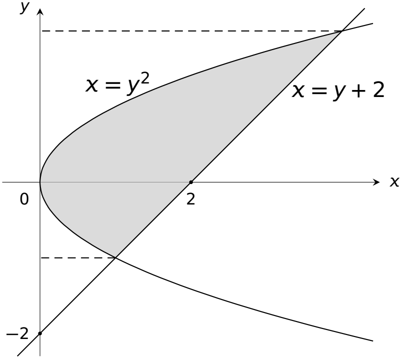



例 1 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x = y^2$ 和直线 $y = x - 2$ 所围成区域。

解

$$原式 = \int \left[ \int \quad xydx \right] dy$$

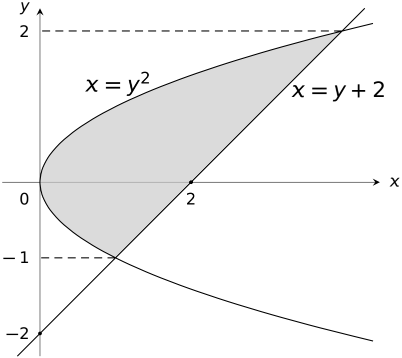
例 1 计算 $\iint_D xy\,dxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。




解

$$原式=\int \left[\int \quad xy\,dx\right]dy$$

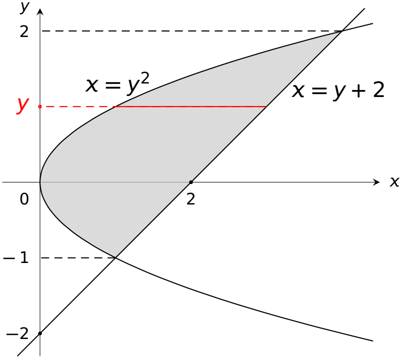
例 1 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。




解

$$\text{原式} = \int \left[ \int \quad xydx \right] dy$$

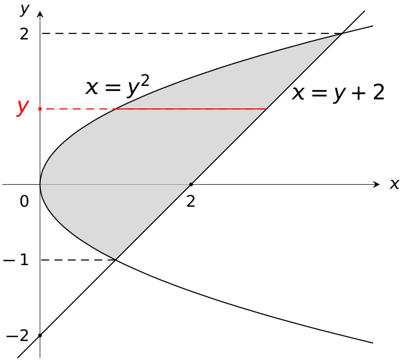
例 1 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x = y^2$ 和直线 $y = x - 2$ 所围成区域。




解

$$原式 = \int \left[ \int xydx \right] dy$$

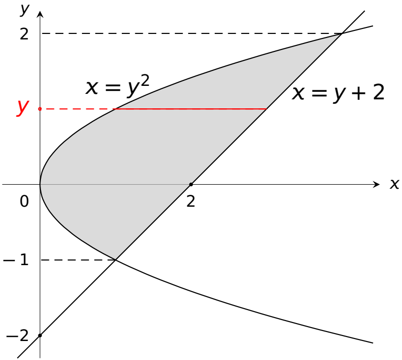
例 1 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。




解

$$\text{原式}=\int_{-1}^{2}\Big[\int \quad xydx\Big]dy$$

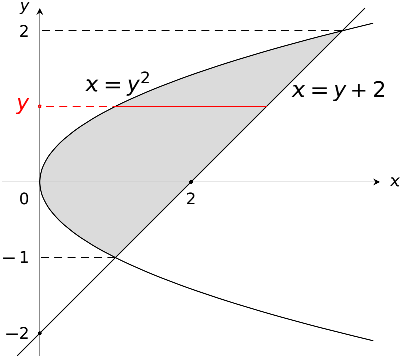
**例 1** 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。




**解**

$$原式=\int_{-1}^{2}\left[\int_{y^2}^{y+2}xydx\right]dy$$

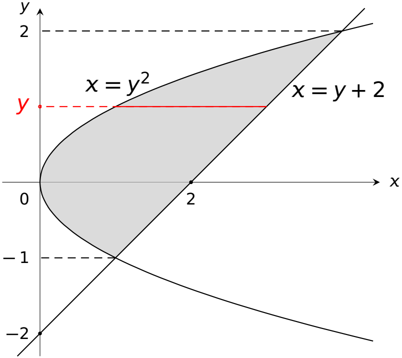
例 1 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。




解

$$原式=\int_{-1}^{2}\left[\int_{y^2}^{y+2}xydx\right]dy= \qquad \frac{1}{2}x^2y$$

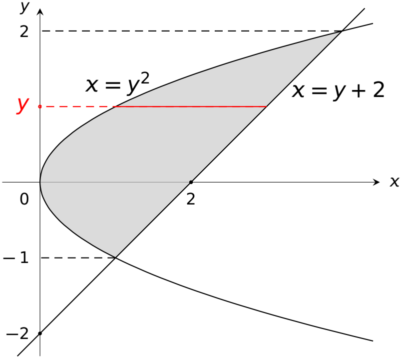
例 1 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。




解

$$\text{原式}=\int_{-1}^{2}\Big[\int_{y^2}^{y+2} xydx\Big]dy = \qquad \frac{1}{2}x^2y\Big|_{y^2}^{y+2}$$

例 1 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。

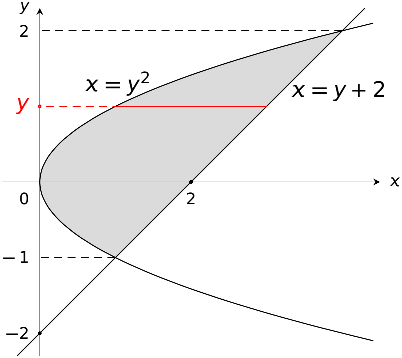



解

$$原式 = \int_{-1}^{2}\left[\int_{y^2}^{y+2} xydx\right]dy = \qquad \frac{1}{2}x^2y\Big|_{y^2}^{y+2}$$

$$= \qquad \frac{1}{2}y\left[(y+2)^2-y^4\right]$$

**例 1** 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。

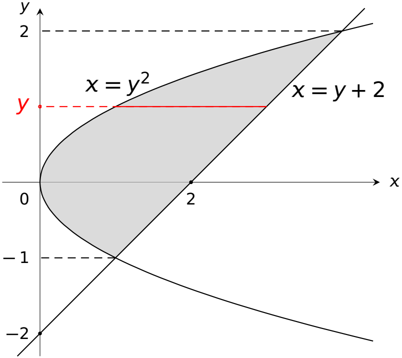



**解**

$$\text{原式}=\int_{-1}^{2}\left[\int_{y^2}^{y+2}xydx\right]dy=\int_{-1}^{2}\left[\frac{1}{2}x^2y\Big|_{y^2}^{y+2}\right]dy$$

$$=\quad\frac{1}{2}y\left[(y+2)^2-y^4\right]$$

例 1 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。

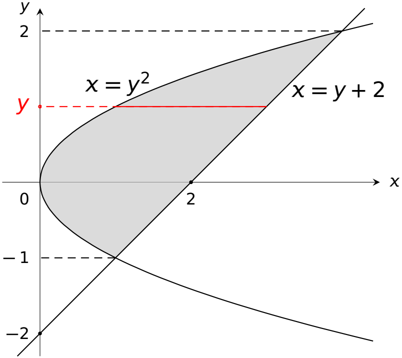



解

$$原式=\int_{-1}^{2}\left[\int_{y^2}^{y+2}xydx\right]dy=\int_{-1}^{2}\left[\frac{1}{2}x^2y\Big|_{y^2}^{y+2}\right]dy$$

$$=\int_{-1}^{2}\frac{1}{2}y\left[(y+2)^2-y^4\right]dy$$

例 1 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。

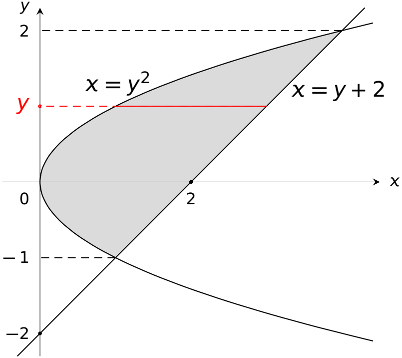



解

$$原式 = \int_{-1}^{2}\left[\int_{y^2}^{y+2} xydx\right]dy = \int_{-1}^{2}\left[\frac{1}{2}x^2y\Big|_{y^2}^{y+2}\right]dy$$

$$= \int_{-1}^{2}\frac{1}{2}y\left[(y+2)^2 - y^4\right]dy = \frac{1}{2}\int_{-1}^{2} -y^5 + y^3 + 4y^2 + 4ydy$$

例 1 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。

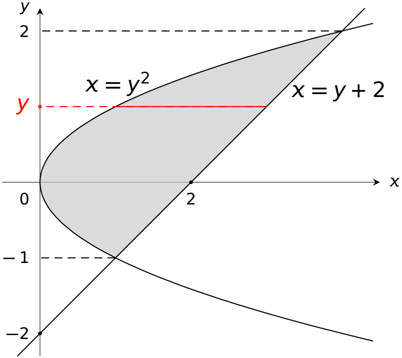



解

$$\text{原式} = \int_{-1}^{2}\Big[\int_{y^2}^{y+2} xydx\Big]dy = \int_{-1}^{2}\Big[\frac{1}{2}x^2y\Big|_{y^2}^{y+2}\Big]dy$$

$$= \int_{-1}^{2}\frac{1}{2}y\big[(y+2)^2-y^4\big]dy = \frac{1}{2}\int_{-1}^{2} -y^5+y^3+4y^2+4ydy = \frac{45}{8}$$

**例 1** 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。




**解**

$$\text{原式}=\int_{-1}^{2}\left[\int_{y^2}^{y+2} xydx\right]dy=\int_{-1}^{2}\left[\frac{1}{2}x^2y\Big|_{y^2}^{y+2}\right]dy$$

$$=\int_{-1}^{2}\frac{1}{2}y\left[(y+2)^2-y^4\right]dy=\frac{1}{2}\int_{-1}^{2}-y^5+y^3+4y^2+4ydy=\frac{45}{8}$$

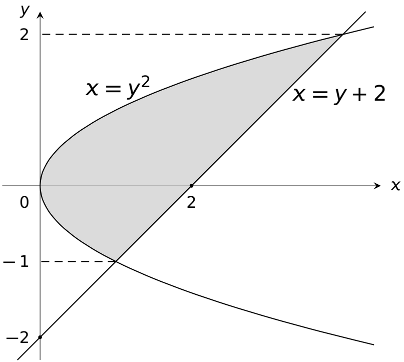
---

**注** $D$ 是 $X$-型区域，可以表示为

$$D=\{(x,y)|\,y^2\le x\le y+2,-1\le y\le 2\}$$

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

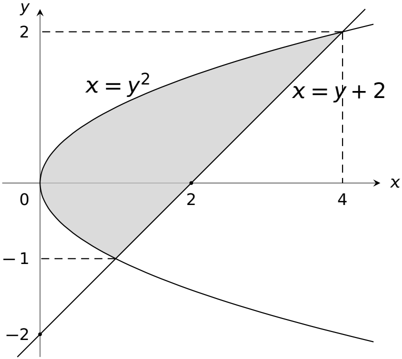
例 1 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。




解

$$\text{原式} = \int \left[ \int xydy \right] dx$$

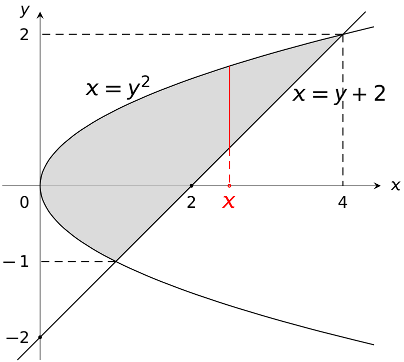
**例 1** 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x = y^2$ 和直线 $y = x - 2$ 所围成区域。




**解**

$$原式 = \int \left[ \int \quad xydy \right] dx$$

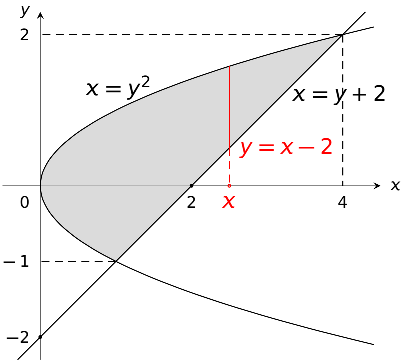
**例 1** 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。




**解**

$$\text{原式}=\int \quad \left[\int \quad xydy\right]dx$$

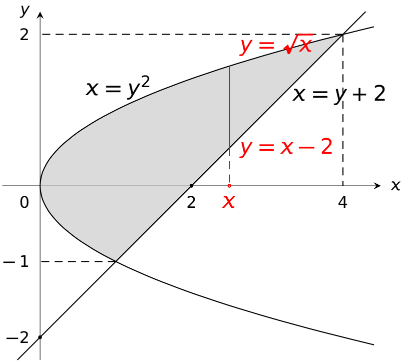
**例 1** 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x = y^2$ 和直线 $y = x - 2$ 所围成区域。




**解**

$$原式 = \int \quad \left[ \int \quad xydy \right] dx$$

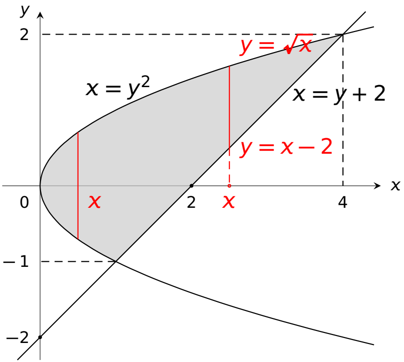
**例 1** 计算 $\iint_D xy\,dx\,dy$，其中是由抛物线 $x = y^2$ 和直线 $y = x - 2$ 所围成区域。




**解**

$$原式 = \int \left[ \int xy\,dy \right] dx$$

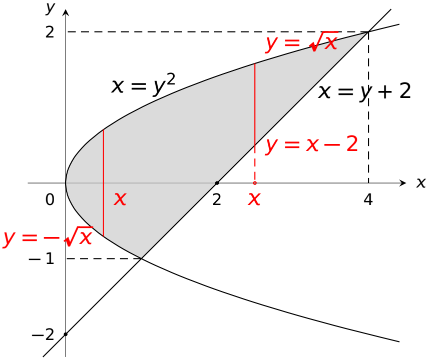
**例 1** 计算 $\iint_D xy\,dxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。




**解**

$$原式=\int\Big[\int xydy\Big]dx$$

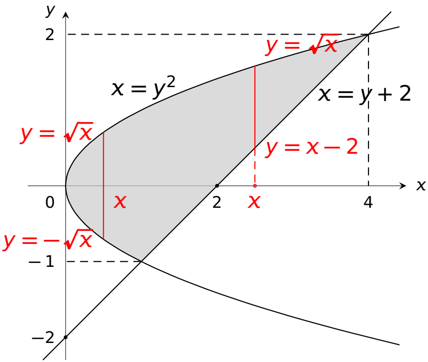
**例 1** 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。




**解**

$$原式 = \int \left[ \int xydy \right] dx$$

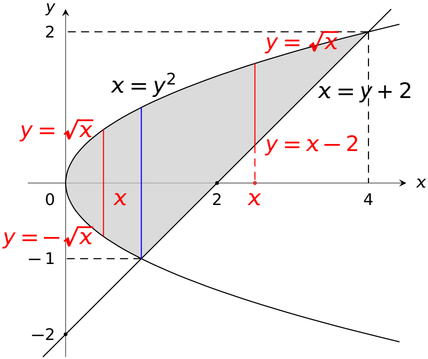
**例 1** 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。




**解**

$$\text{原式}=\int \left[\int xydy\right]dx$$

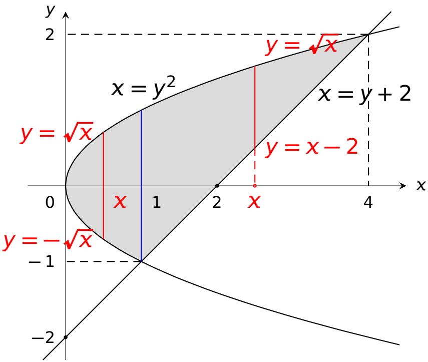
**例 1** 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。




**解**

$$\text{原式}=\int \left[\int \quad xydy\right]dx$$

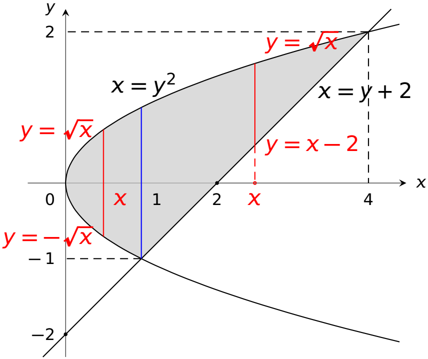
**例 1** 计算 $\iint_D xy\,dx\,dy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。




**解**

$$\text{原式} = \int \quad \left[\int \quad xy\,dy\right]dx$$

**例 1** 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。

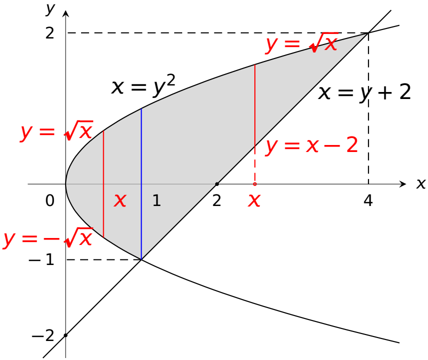



**解**

$$\text{原式} = \int \left[\int xydy\right]dx$$

$$= \int_0^1 \left[\int xydy\right]dx + \int_1^4 \left[\int xydy\right]dx$$

**例 1** 计算 $\iint_D xy\,dxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。

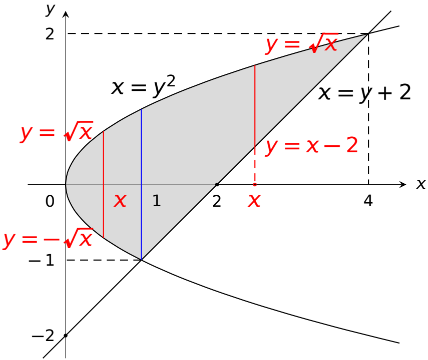



**解**

$$原式=\int\Big[\int xydy\Big]dx$$

$$=\int_0^1\Big[\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}xydy\Big]dx+\int_1^4\Big[\int xydy\Big]dx$$

例 1 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。

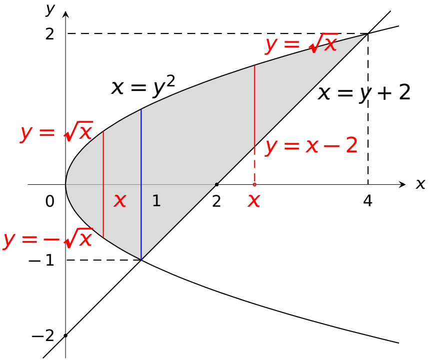



**解**

$$\text{原式} = \int \quad \left[\int \quad xydy\right]dx$$

$$= \int_0^1 \left[\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} xydy\right]dx + \int_1^4 \left[\int_{x-2}^{\sqrt{x}} xydy\right]dx$$

**例 1** 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。

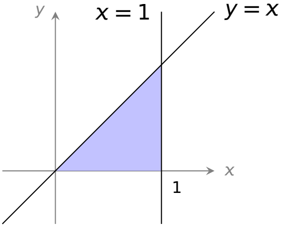



**解**

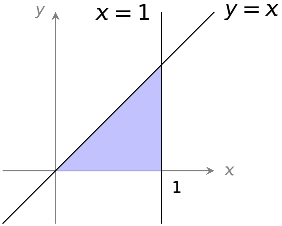
$$原式=\int\quad\Big[\int\qquad xydy\Big]dx$$

$$=\int_0^1\Big[\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}xydy\Big]dx+\int_1^4\Big[\int_{x-2}^{\sqrt{x}}xydy\Big]dx=\cdots$$

例 2 计算 $\iint_D e^{x^2}dxdy$，其中 $D$ 是由 $y=x$，$x=1$，$x$ 轴所围成的区域



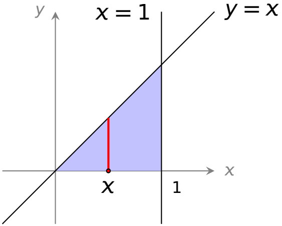
例 2 计算 $\iint_D e^{x^2}dxdy$，其中 $D$ 是由 $y=x$，$x=1$，$x$ 轴所围成的区域




解法一 固定 $x$，先对 $y$ 积分：

$$\iint_D e^{x^2}dxdy = \int \left[\int \quad e^{x^2}dy\right]dx$$

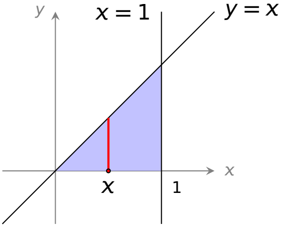
**例 2** 计算 $\iint_D e^{x^2}dxdy$，其中 $D$ 是由 $y=x$，$x=1$，$x$ 轴所围成的区域




**解法一** 固定 $x$，先对 $y$ 积分：

$$\iint_D e^{x^2}dxdy = \int \left[\int \quad e^{x^2}dy\right]dx$$

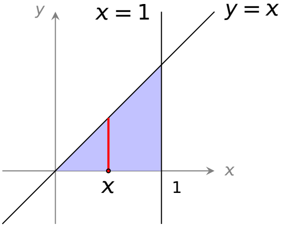
**例 2** 计算 $\iint_D e^{x^2}dxdy$，其中 $D$ 是由 $y=x$，$x=1$，$x$ 轴所围成的区域




**解法一** 固定 $x$，先对 $y$ 积分：

$$\iint_D e^{x^2}dxdy = \int_0^1 \left[\int \quad e^{x^2}dy\right]dx$$

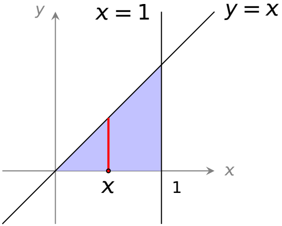
例 2 计算 $\iint_D e^{x^2}dxdy$，其中 $D$ 是由 $y=x$，$x=1$，$x$ 轴所围成的区域




解法一 固定 $x$，先对 $y$ 积分：

$$\iint_D e^{x^2}dxdy = \int_0^1 \left[\int_0^x e^{x^2}dy\right]dx$$

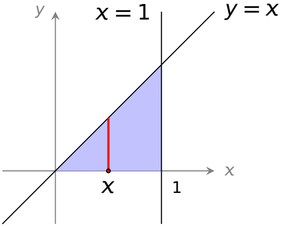
例 2 计算 $\iint_D e^{x^2}dxdy$，其中 $D$ 是由 $y=x$，$x=1$，$x$ 轴所围成的区域




解法一 固定 $x$，先对 $y$ 积分：

$$\iint_D e^{x^2}dxdy = \int_0^1 \left[\int_0^x e^{x^2}dy\right]dx = \qquad e^{x^2}y\Big|_0^x$$

例 2 计算 $\iint_D e^{x^2}dxdy$，其中 $D$ 是由 $y=x$，$x=1$，$x$ 轴所围成的区域

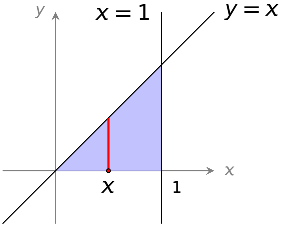



**解法一** 固定 $x$，先对 $y$ 积分：

$$\iint_D e^{x^2}dxdy = \int_0^1 \left[\int_0^x e^{x^2}dy\right]dx = \qquad e^{x^2}y\Big|_0^x$$

$$= \qquad xe^{x^2}$$

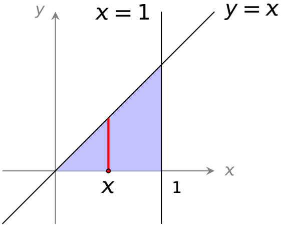
例 2 计算 $\iint_D e^{x^2}dxdy$，其中 $D$ 是由 $y=x$，$x=1$，$x$ 轴所围成的区域




解法一 固定 $x$，先对 $y$ 积分：

$$\iint_D e^{x^2}dxdy = \int_0^1\left[\int_0^x e^{x^2}dy\right]dx = \int_0^1\left[e^{x^2}y\Big|_0^x\right]dx$$

$$= \quad xe^{x^2}$$



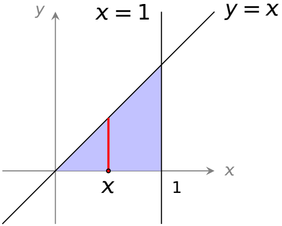

例 2 计算 $\iint_D e^{x^2}dxdy$，其中 $D$ 是由 $y=x$，$x=1$，$x$ 轴所围成的区域

解法一 固定 $x$，先对 $y$ 积分：

$$\iint_D e^{x^2}dxdy=\int_0^1\left[\int_0^x e^{x^2}dy\right]dx=\int_0^1\left[e^{x^2}y\Big|_0^x\right]dx$$

$$=\int_0^1 xe^{x^2}dx$$

例 2 计算 $\iint_D e^{x^2}dxdy$，其中 $D$ 是由 $y=x$，$x=1$，$x$ 轴所围成的区域

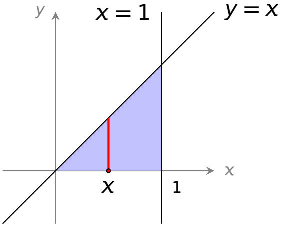



解法一 固定 $x$，先对 $y$ 积分：

$$\iint_D e^{x^2}dxdy = \int_0^1\left[\int_0^x e^{x^2}dy\right]dx = \int_0^1\left[e^{x^2}y\Big|_0^x\right]dx$$

$$= \int_0^1 xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1$$

**例 2** 计算 $\iint_D e^{x^2}dxdy$，其中 $D$ 是由 $y=x$，$x=1$，$x$ 轴所围成的区域

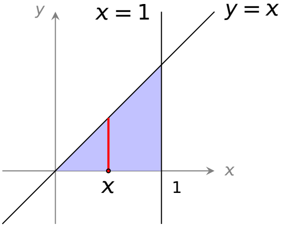



**解法一** 固定 $x$，先对 $y$ 积分：

$$\iint_D e^{x^2}dxdy=\int_0^1\left[\int_0^x e^{x^2}dy\right]dx=\int_0^1\left[e^{x^2}y\Big|_0^x\right]dx$$

$$=\int_0^1 xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}$$

例 2 计算 $\iint_D e^{x^2}dxdy$，其中 $D$ 是由 $y=x$，$x=1$，$x$ 轴所围成的区域




解法一 固定 $x$，先对 $y$ 积分：

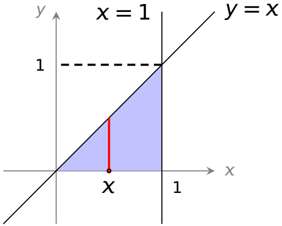
$$\iint_D e^{x^2}dxdy=\int_0^1\left[\int_0^x e^{x^2}dy\right]dx=\int_0^1\left[e^{x^2}y\Big|_0^x\right]dx$$

$$=\int_0^1 xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}$$

解法二 固定 $y$，先对 $x$ 积分：

$$\iint_D e^{x^2}dxdy=\int\ \left[\int\ e^{x^2}dx\right]dy$$

例 2 计算 $\iint_D e^{x^2}dxdy$，其中 $D$ 是由 $y=x$，$x=1$，$x$ 轴所围成的区域




解法一 固定 $x$，先对 $y$ 积分：

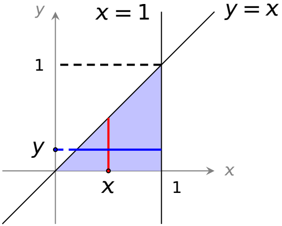
$$\iint_D e^{x^2}dxdy=\int_0^1\Big[\int_0^x e^{x^2}dy\Big]dx=\int_0^1\Big[e^{x^2}y\Big|_0^x\Big]dx$$

$$=\int_0^1 xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}$$

解法二 固定 $y$，先对 $x$ 积分：

$$\iint_D e^{x^2}dxdy=\int\Big[\int e^{x^2}dx\Big]dy$$

**例 2** 计算 $\iint_D e^{x^2}dxdy$，其中 $D$ 是由 $y=x$，$x=1$，$x$ 轴所围成的区域




**解法一** 固定 $x$，先对 $y$ 积分：

$$\iint_D e^{x^2}dxdy=\int_0^1\left[\int_0^x e^{x^2}dy\right]dx=\int_0^1\left[e^{x^2}y\Big|_0^x\right]dx$$

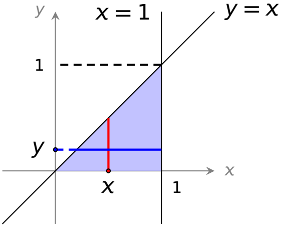
$$=\int_0^1 xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}$$

---

**解法二** 固定 $y$，先对 $x$ 积分：

$$\iint_D e^{x^2}dxdy=\int\left[\int e^{x^2}dx\right]dy$$

例 2 计算 $\iint_D e^{x^2}dxdy$，其中 $D$ 是由 $y=x$，$x=1$，$x$ 轴所围成的区域




解法一 固定 $x$，先对 $y$ 积分：

$$\iint_D e^{x^2}dxdy=\int_0^1\Big[\int_0^x e^{x^2}dy\Big]dx=\int_0^1\Big[e^{x^2}y\Big|_0^x\Big]dx$$

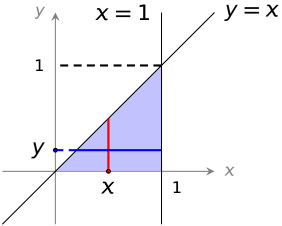
$$=\int_0^1 xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}$$

---

解法二 固定 $y$，先对 $x$ 积分：

$$\iint_D e^{x^2}dxdy=\int_0^1\Big[\int\quad e^{x^2}dx\Big]dy$$

**例 2** 计算 $\iint_D e^{x^2}dxdy$，其中 $D$ 是由 $y=x$，$x=1$，$x$ 轴所围成的区域




**解法一** 固定 $x$，先对 $y$ 积分：

$$\iint_D e^{x^2}dxdy = \int_0^1\left[\int_0^x e^{x^2}dy\right]dx = \int_0^1\left[e^{x^2}y\Big|_0^x\right]dx$$

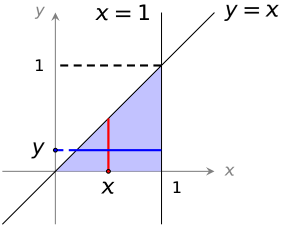
$$= \int_0^1 xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}$$

---

**解法二** 固定 $y$，先对 $x$ 积分：

$$\iint_D e^{x^2}dxdy = \int_0^1\left[\int_y^1 e^{x^2}dx\right]dy$$

**例 2** 计算 $\iint_D e^{x^2}dxdy$，其中 $D$ 是由 $y=x$，$x=1$，$x$ 轴所围成的区域




**解法一** 固定 $x$，先对 $y$ 积分：

$$\iint_D e^{x^2}dxdy=\int_0^1\Big[\int_0^x e^{x^2}dy\Big]dx=\int_0^1\Big[e^{x^2}y\Big|_0^x\Big]dx$$

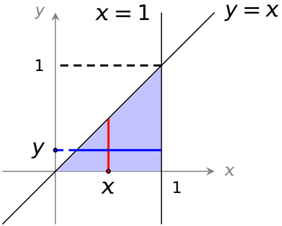
$$=\int_0^1 xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}$$

---

**解法二** 固定 $y$，先对 $x$ 积分：

$$\iint_D e^{x^2}dxdy=\int_0^1\Big[\int_y^1 e^{x^2}dx\Big]dy=\cdots\cdots\text{积不出}$$

**例 2** 计算 $\iint_D e^{x^2}dxdy$，其中 $D$ 是由 $y=x$，$x=1$，$x$ 轴所围成的区域




**解法一** 固定 $x$，先对 $y$ 积分：

$$\iint_D e^{x^2}dxdy = \int_0^1\left[\int_0^x e^{x^2}dy\right]dx = \int_0^1\left[e^{x^2}y\Big|_0^x\right]dx$$

$$= \int_0^1 xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}$$

---

**解法二** 固定 $y$，先对 $x$ 积分：

$$\iint_D e^{x^2}dxdy = \int_0^1\left[\int_y^1 e^{x^2}dx\right]dy = \cdots\cdots \text{积不出}$$

**注** 选择恰当的积分次序，才能算出二重积分！