一、 **选择题**（共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分，答案请填入下表格中。）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	**B**	**C**	**D**	**C**	**B**	**B**	**C**	**A**	**D**

1. 函数 $f(x)=\sin 3x$ 的全体原函数是(A.)

A. $-\frac{1}{3}\cos 3x+C$　　B. $\frac{1}{3}\cos 3x+C$　　C. $\sin 3x$　　D. $\frac{1}{3}\cos 3x+C$

2. （1） $\int(1-3x)^3\mathrm{d}x$ =（ **B** ）

A. $-\frac{1}{4}(1-3x)^4+C$；　　**B.** $-\frac{1}{12}(1-3x)^4+C$

C. $-\frac{1}{12}(1-3x)^3+C$　　**D.** $\frac{1}{12}(1-3x)^4+C$

3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x t^2\mathrm{d}t=$（ C ）

A. $\frac{x^3}{3}$　　B. t^2　　C. x^2　　D. $2x^2$

4. 函数 $f(x,y)=\frac{1}{1-x^2-y^2}$ 的定义域是（ **D** ）。

A. $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=1\}$；　　B. $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2>1\}$；

C. $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<1\}$；　　D. $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\neq 1\}$.

5.微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\cos x$ 的通解为（ C ）

A. $y=\cos x+C$　　B. $y=\sin x$

C. $y=\sin x+C$ (C 为任意常数)　　D. $y=\cos x$

6. 若 $f(x,y)=x^2y-yx$ 　则 $\frac{\partial f}{\partial x}=$（ **B** ）

A. $xy-y$　　B. $2xy-y$；　　C. $2x-yx$　　D. $2x-y$

7.设 $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=2$，$\int_0^3 g(x)\mathrm{d}x=3$，则 $\int_0^3[2f(x)-3g(x)]\mathrm{d}x=$（ B ）

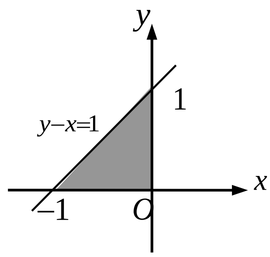
A. -6　　B.-5　　C.5　　D. 6

8 若曲线 $y=f(x)$ 在点 x 处的切线斜率为 $-x$，且过点（1，2），则该曲线方程为（ C ）.

A. $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}$　　B. $y=-\frac{1}{2}x^2+2$

C. $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}$　　D. $y=-x^2$

9. 设 D 是由 x 轴、y 轴与直线 $x+y=1$ 围成的三角形区域如图，用先积 y 后积 x（$X-$型）的方法将二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化为二次积分为（ A ）.



A. $\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_{0}^{x+1}f(x,y)\mathrm{d}y$　　B. $\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{1-y}f(x,y)\mathrm{d}y$

C. $\int_{0}^{1-x}\mathrm{d}x\int_{0}^{1}f(x,y)\mathrm{d}y$　　D. $\int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_{0}^{x+1}f(x,y)\mathrm{d}x$

10. $y_n=n^2+2n$ 差分 $\Delta y_n=$（ **D** ）

A. $2n$　　B. $2n+1$　　C. $2n+2$　　D. $2n+3$

二、填空题（共 9 小题，每小题 2 分，共 18 分，请将答案写在答题栏内）

答题栏	
1、 $\dfrac{30^t}{\ln 30}+C$	**2、** $3x^2-4y^3$
3、 2	**4、** 3
5、 8	**6、** 1
7、 $(1,1)$	**8、** $-2\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$
9、 22.5	

1. $\int 6^t\cdot 5^t\,\mathrm{d}t=\dfrac{30^t}{\ln 30}+C$

2. 已知 $z=x^2+x^3y-y^4x$ 则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=3x^2-4y^3$.

3. $\int_0^{\pi}(\cos x+\sin x)\mathrm{d}x=$ __2__

4. $\dfrac{\Gamma(4)\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}$ __3__

5. 若 $f(x,y)=x-4x^2y+4y^2$，则 $f_y'(0,1)=$ __8__

6.广义积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{e^x}\mathrm{d}x$ __1__

7.函数 $f(x,y)=2(x-y)-x^2+y^2$ 的驻点为 $(1,1)$

8. 函数 $z=\dfrac{y}{x}$ 在点（1,2）的全微分为 __$-2\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$__

9. 已知生产某种产品总收入的变化率是时间 t（单位：年）的函数 $f(t)=t+2(t\geq 0)$ 则第

一个五年的总收入为 $\underline{\quad 22.5 \quad}$

三、计算题 I（共 4 小题，每小题 6 分，共 24 分）

1．求不定积分 $\int (x^4+\frac{1}{x}+3^x-2\cos x+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x$

解:原式 $=\frac{1}{5}x^5+\ln|x|+\frac{3^x}{\ln 3}-2\sin x+\mathrm{e}^x+C$ ………………6 分

2. 求不定积分 $\int xe^x\mathrm{d}x$

解：$\int xe^x\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}e^x$ ………………………………2 分

$=xe^{-x}\int e^{-x}\mathrm{d}x$ ………………………4 分

$=xe^{-x}-e^{-x}+C$ ………………………6 分

3. 求定积分 $\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

解：令 $\sqrt{x}=t$， $x=t^2$ $\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$ $x=0$ 时 $t=0$，当 $x=4$ 时 $t=2$ …………2 分

$\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int_0^2 \frac{t}{1+t}\mathrm{d}t$ ………3 分

$=3\int_0^2 \frac{t+1-1}{1+t}\mathrm{d}t=2[\int_0^2 \mathrm{d}t-\int_0^2 \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t]$ ………4 分

$=2[t-\ln(1+t)]\Big|_0^2=2(2-\ln 3)$ ……………6 分

4. 求定积分 $\int_0^5 x\,\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$

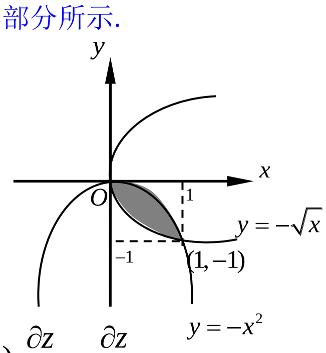
解：$\int_0^5 x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^5 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x^2$ ………………3 分

$=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}\Big|_0^5=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{5^2}-\mathrm{e}^0)=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{25}-1)$ ………………6 分

四、计算题（共 4 小题，每小题 6 分，共 24 分）

1. 求由曲线 $y=-x^2$ 与 $y=-\sqrt{x}$ 所围成的面积，如图阴影部分所示.

解:所求面积为



$A=\int_0^1[-x^2-(-\sqrt{x})]dx=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx$ ----------3 分

$=\int_0^1(x^{\frac{1}{2}}-x^2)dx=(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3)\Big|_0^1=\frac{1}{3}$ --------6 分

2. 设方程 $x^2+y^2+z^2=4z$ 确定的隐函数导数 $z=f(x,y)$ $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$，.

解： 解：方程变形为 $x^2+y^2+z^2-4z=0$

设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4z$, **……1 分**

则 $F'_x=2x$，…………2 分

$F'_y=2y$，……………3 分

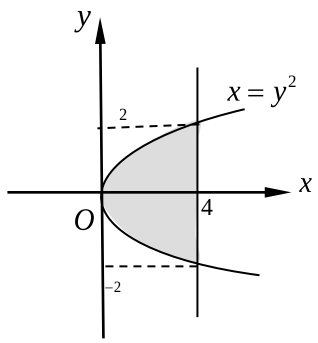
$F'_z=2z-4$ ……………4 分

于是

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=\frac{x}{2-z}\text{，}\quad ……………5\text{ 分}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=\frac{y}{2-z}\quad ……………6\text{ 分}$$

3．求二重积分 $\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由曲线 $x=y^2$ 及直线 $x=4$ 所围成的区域. 如图阴影部分所示



解：选择先积 x 得积分区域为

$D=\{(x,y)|\ -2\leqslant y\leqslant 2, y^2\leqslant x\leqslant 4\}$ **……1 分**

于是

$$\iint\limits_D \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=\int_{-2}^{2}\mathrm{d}\,y\int_{y^2}^{4}y\,\mathrm{d}\,x \quad \textbf{……3 分}$$

$$=\int_{-2}^{2}yx\Big|_{y^2}^{4}\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-2}^{2}y(4-y^2)dy=\int_{-2}^{2}(4y-y^3)dy \quad \textbf{……5 分}$$

$$=(2y^2-\frac{1}{4}y^4)\Big|_{-2}^{2}=0 \quad \textbf{……6 分}$$

4.求微分方程 $xy'-y=4$ 的通解

解：方程化为 $y'-\frac{1}{x}y=\frac{4}{x}$ ………1 分

则 $p(x)=-\frac{1}{x}$，$q(x)=\frac{4}{x}$ **………2 分**

代入通解公式 $y=e^{-\int p(x)dx}[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C]$ **………4 分**

得

$$y=e^{-\int p(x)dx}[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C]=e^{\int\frac{1}{x}dx}[\int\frac{4}{x}e^{-\int\frac{1}{x}dx}dx+C] \quad \textbf{………5 分}$$

$$=e^{\ln x}[\int\frac{4}{x}e^{-\ln x}dx+C]=x[\int 4\frac{1}{x^2}dx+C]=x(-4\frac{1}{x}+C)=-4+xC$$

即通解为：$y=-4+xC$ **…………6 分**

(本题也可用可分离变量求)

五、应用题（共 1 小题，每小题 10 分，共 10 分）

10. 已知某工厂生产某种产品的数量 Q 与所投入劳动力的数量 L 和资本的数量 K 之间有关系式：$Q=L^{\frac{2}{3}}K^{\frac{1}{3}}$. 其中，劳动力（$L$）的价格为 2 元，资本（$K$）的价格为 1 元.

如果工厂希望生产 800 个单位的产品，问应投入 K 和 L 各多少才能使成本最低？

解：设成本为 $C=C(L,K)$，问题化为求 $C=C(L,K)=2L+K$ 在条件 $L^{\frac{2}{3}}K^{\frac{1}{3}}=800$ 下的极值问题：

作拉格朗日函数 $F(x,y,\lambda)=2L+K+\lambda(L^{\frac{2}{3}}K^{\frac{1}{3}}-800)$ **……4 分**

令 $\begin{cases} F_L'=2+\dfrac{2}{3}\lambda L^{-\frac{1}{3}}K^{\frac{1}{3}}=0 \\ F_K'=1+\dfrac{1}{3}\lambda L^{\frac{2}{3}}K^{-\frac{2}{3}}=0 \\ F_\lambda'=L^{\frac{2}{3}}K^{\frac{1}{3}}-800=0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 2+\dfrac{2}{3}\lambda L^{-\frac{1}{3}}K^{\frac{1}{3}}=0\cdots\cdots(1) \\ 1+\dfrac{1}{3}\lambda L^{\frac{2}{3}}K^{-\frac{2}{3}}=0\cdots\cdots(2) \\ L^{\frac{2}{3}}K^{\frac{1}{3}}-800=0\cdots\cdots\ (3) \end{cases}$ **……6 分**

由（1），（2）将常数移到方程左边 $\dfrac{(1)}{(2)}$ 消去 λ，得 $L=K$，代入（3）解得驻点，

$L=800,\ K=800$，即 $(800,\ 800)$ ……………**8 分**

由于驻点唯一，且此问题一定存在最大值，因此在 K 和 L 上各应投入 800 元能使成本最低。

答： 它在 K 和 L 上各应投入 800 元能使成本最低。…………**10 分**

六、证明题（共 1 小题，每小题 4 分，共 4 分）

设 $z=xy+xF(u)$，而 $u=\dfrac{x}{y}$， $F(u)$ 为可导函数，证明: $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z+xy$

证：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=y+F(u)+xF'(u)\dfrac{1}{y}=y+F(u)+\dfrac{x}{y}F'(u)$， **……2 分**

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x+xF'(u)(-\frac{x}{y^2})=x-\frac{x^2}{y^2}F'(u) \text{ ……3 分}$$

左边$=x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=x[y+F(u)+\dfrac{x}{y}F'(u)]+y[x-\dfrac{x^2}{y^2}F'(u)]$

$$=xy+xF(x)+\frac{x^2}{y}F'(u)+xy-\frac{x^2}{y}F'(u)$$

$$=xy+xF(x)+xy=z+xy \text{ =右边}$$

即 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z+xy$ **……4 分**