

## 第 2 章 c: 特殊矩阵

数学系 梁卓滨

2020-2021 学年 I

# 提要

- 单位矩阵    数量矩阵    对角矩阵    三角矩阵

# 提要

- 单位矩阵  $\subset$  数量矩阵  $\subset$  对角矩阵  $\subset$  三角矩阵

# 提要

- 单位矩阵  $\subset$  数量矩阵  $\subset$  对角矩阵  $\subset$  三角矩阵
- 对称矩阵

# 单位矩阵

**定义** 对角线元素都是 1，其余元素均为 0 的  $n$  阶矩阵称为 **单位矩阵**，记为  $I_n$ （有时简记为  $I$ ），即

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

# 单位矩阵

**定义** 对角线元素都是 1，其余元素均为 0 的  $n$  阶矩阵称为 **单位矩阵**，记为  $I_n$ （有时简记为  $I$ ），即

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

**性质** 对任意矩阵  $A_{n \times m}$ ，成立

$$I_n A_{n \times m} = \quad A_{n \times m} I_m =$$

# 单位矩阵

**定义** 对角线元素都是 1，其余元素均为 0 的  $n$  阶矩阵称为 **单位矩阵**，记为  $I_n$ （有时简记为  $I$ ），即

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

**性质** 对任意矩阵  $A_{n \times m}$ ，成立

$$I_n A_{n \times m} = A_{n \times m}, \quad A_{n \times m} I_m =$$

# 单位矩阵

**定义** 对角线元素都是 1，其余元素均为 0 的  $n$  阶矩阵称为 **单位矩阵**，记为  $I_n$ （有时简记为  $I$ ），即

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

**性质** 对任意矩阵  $A_{n \times m}$ ，成立

$$I_n A_{n \times m} = A_{n \times m}, \quad A_{n \times m} I_m = A_{n \times m}$$



# 数量矩阵

**定义** 对角线元素都是同一个数  $k$ ，其余元素均为 0 的  $n$  阶矩阵称为**数量矩阵**

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n \times n}$$

# 数量矩阵

**定义** 对角线元素都是同一个数  $k$ ，其余元素均为 0 的  $n$  阶矩阵称为**数量矩阵**，即

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n \times n} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

# 数量矩阵

**定义** 对角线元素都是同一个数  $k$ ，其余元素均为 0 的  $n$  阶矩阵称为**数量矩阵**，即

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n \times n} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n} = kI_n$$

# 数量矩阵

**定义** 对角线元素都是同一个数  $k$ ，其余元素均为 0 的  $n$  阶矩阵称为**数量矩阵**，即

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n \times n} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n} = kI_n$$

可见，数量矩阵可表示为  $kI_n$ 。

# 数量矩阵

**定义** 对角线元素都是同一个数  $k$ ，其余元素均为 0 的  $n$  阶矩阵称为**数量矩阵**，即

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n \times n} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n} = kI_n$$

可见，数量矩阵可表示为  $kI_n$ 。

**性质** 两个数量矩阵的和、差、乘积仍是数量矩阵

# 数量矩阵

**定义** 对角线元素都是同一个数  $k$ ，其余元素均为 0 的  $n$  阶矩阵称为**数量矩阵**，即

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n \times n} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n} = kI_n$$

可见，数量矩阵可表示为  $kI_n$ 。

**性质** 两个数量矩阵的和、差、乘积仍是数量矩阵，例如

1.  $kI_n + lI_n =$

# 数量矩阵

**定义** 对角线元素都是同一个数  $k$ ，其余元素均为 0 的  $n$  阶矩阵称为**数量矩阵**，即

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n \times n} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n} = kI_n$$

可见，数量矩阵可表示为  $kI_n$ 。

**性质** 两个数量矩阵的和、差、乘积仍是数量矩阵，例如

1.  $kI_n + lI_n = (k + l)I_n$

# 数量矩阵

**定义** 对角线元素都是同一个数  $k$ ，其余元素均为 0 的  $n$  阶矩阵称为**数量矩阵**，即

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n \times n} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n} = kI_n$$

可见，数量矩阵可表示为  $kI_n$ 。

**性质** 两个数量矩阵的和、差、乘积仍是数量矩阵，例如

1.  $kI_n + lI_n = (k + l)I_n$ ,  $kI_n - lI_n =$



# 数量矩阵

**定义** 对角线元素都是同一个数  $k$ ，其余元素均为 0 的  $n$  阶矩阵称为**数量矩阵**，即

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n \times n} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n} = kI_n$$

可见，数量矩阵可表示为  $kI_n$ 。

**性质** 两个数量矩阵的和、差、乘积仍是数量矩阵，例如

1.  $kI_n + lI_n = (k + l)I_n$ ,  $kI_n - lI_n = (k - l)I_n$

# 数量矩阵

**定义** 对角线元素都是同一个数  $k$ ，其余元素均为 0 的  $n$  阶矩阵称为**数量矩阵**，即

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n \times n} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n} = kI_n$$

可见，数量矩阵可表示为  $kI_n$ 。

**性质** 两个数量矩阵的和、差、乘积仍是数量矩阵，例如

1.  $kI_n + lI_n = (k + l)I_n$ ,  $kI_n - lI_n = (k - l)I_n$
2.  $(kI_n)(lI_n) =$

# 数量矩阵

**定义** 对角线元素都是同一个数  $k$ ，其余元素均为 0 的  $n$  阶矩阵称为**数量矩阵**，即

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n \times n} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n} = kI_n$$

可见，数量矩阵可表示为  $kI_n$ 。

**性质** 两个数量矩阵的和、差、乘积仍是数量矩阵，例如

1.  $kI_n + lI_n = (k + l)I_n$ ,  $kI_n - lI_n = (k - l)I_n$
2.  $(kI_n)(lI_n) = (kl)I_nI_n =$

# 数量矩阵

**定义** 对角线元素都是同一个数  $k$ ，其余元素均为 0 的  $n$  阶矩阵称为**数量矩阵**，即

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n \times n} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n} = kI_n$$

可见，数量矩阵可表示为  $kI_n$ 。

**性质** 两个数量矩阵的和、差、乘积仍是数量矩阵，例如

1.  $kI_n + lI_n = (k + l)I_n$ ,  $kI_n - lI_n = (k - l)I_n$
2.  $(kI_n)(lI_n) = (kl)I_nI_n = (kl)I_n$

# 对角矩阵

**定义** 除了对角线，其余位置都是 0 的  $n$  阶矩阵，称为 **对角矩阵**，即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

# 对角矩阵

**定义** 除了对角线，其余位置都是 0 的  $n$  阶矩阵，称为**对角矩阵**，即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n} \quad \underline{\underline{\text{或写成}}} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & & \\ & & a_{33} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

# 对角矩阵

**定义** 除了对角线，其余位置都是 0 的  $n$  阶矩阵，称为**对角矩阵**，即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n} \quad \underline{\underline{\text{或写成}}} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & & \\ & & a_{33} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

**性质** 两个对角矩阵的和、差、乘积仍是对角矩阵

## 对角矩阵的和、差

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & & & \\ & a_{22} + b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} + b_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$



## 对角矩阵的和、差

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & & & \\ & a_{22} - b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} - b_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

## 对角矩阵的和、差

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & & & \\ & a_{22} \pm b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \pm b_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

# 对角矩阵的乘积

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

# 对角矩阵的乘积

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}_{n \times n}$$

# 对角矩阵的乘积

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}_{n \times n}$$

## 对角矩阵的乘积

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & & & \\ & a_{22}b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \end{pmatrix}_{n \times n}$$

## 对角矩阵的乘积

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & & & \\ & a_{22}b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \end{pmatrix}_{n \times n}$$

## 对角矩阵的乘积

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & & & \\ & a_{22}b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$



# 三角矩阵

- 上三角矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & * & \cdots & * \\ & a_{22} & * & \cdots & * \\ & & a_{33} & \cdots & * \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

# 三角矩阵

- 上三角矩阵 
$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & * & \cdots & * \\ & a_{22} & * & \cdots & * \\ & & a_{33} & \cdots & * \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- 下三角矩阵 
$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ * & a_{22} & & & \\ * & * & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ * & * & * & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

# 三角矩阵

● 上三角矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & * & \cdots & * \\ & a_{22} & * & \cdots & * \\ & & a_{33} & \cdots & * \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

● 下三角矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ * & a_{22} & & & \\ * & * & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ * & * & * & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

**性质** 两个上（下）三角矩阵的和、差、乘积仍是上（下）三角矩阵

## 三角矩阵的和、差

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ & a_{22} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \Delta & \cdots & \Delta \\ & b_{22} & \cdots & \Delta \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \odot & \cdots & \odot \\ & a_{22} + b_{22} & \cdots & \odot \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} + b_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

## 三角矩阵的和、差

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ & a_{22} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & \Delta & \cdots & \Delta \\ & b_{22} & \cdots & \Delta \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & \odot & \cdots & \odot \\ & a_{22} - b_{22} & \cdots & \odot \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} - b_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

## 三角矩阵的和、差

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ & a_{22} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & \Delta & \cdots & \Delta \\ & b_{22} & \cdots & \Delta \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & \odot & \cdots & \odot \\ & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & \odot \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \pm b_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

# 三角矩阵的乘积

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ & a_{22} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \Delta & \cdots & \Delta \\ & b_{22} & \cdots & \Delta \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

# 三角矩阵的乘积

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ & a_{22} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \Delta & \cdots & \Delta \\ & b_{22} & \cdots & \Delta \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}_{n \times n}$$



## 三角矩阵的乘积

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ & a_{22} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \Delta & \cdots & \Delta \\ & b_{22} & \cdots & \Delta \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & \odot & \cdots & \odot \\ & a_{22}b_{22} & \cdots & \odot \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

# 对称矩阵

**定义** 如果  $n$  阶方阵  $A = (a_{ij})$  满足

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n$$

则称为 **对称矩阵**。

# 对称矩阵

**定义** 如果  $n$  阶方阵  $A = (a_{ij})$  满足

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n$$

则称为 **对称矩阵**。

**例**  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$  都是对称矩阵。

# 对称矩阵

**定义** 如果  $n$  阶方阵  $A = (a_{ij})$  满足

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n$$

则称为 **对称矩阵**。

**例**  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$  都是对称矩阵。

# 对称矩阵

**定义** 如果  $n$  阶方阵  $A = (a_{ij})$  满足

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n$$

则称为 **对称矩阵**。

**例**  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$  都是对称矩阵。

**注** 方阵  $A$  对称，等价于它满足  $A^T = A$ 。

# 对称矩阵

**定义** 如果  $n$  阶方阵  $A = (a_{ij})$  满足

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n$$

则称为 **对称矩阵**。

**例**  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$  都是对称矩阵。

**注** 方阵  $A$  对称，等价于它满足  $A^T = A$ 。这是：

	$A$	$A^T$
位置 $(i, j)$ 上的元素		

# 对称矩阵

**定义** 如果  $n$  阶方阵  $A = (a_{ij})$  满足

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n$$

则称为 **对称矩阵**。

**例**  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$  都是对称矩阵。

**注** 方阵  $A$  对称，等价于它满足  $A^T = A$ 。这是：

	$A$	$A^T$
位置 $(i, j)$ 上的元素	$a_{ij}$	

# 对称矩阵

**定义** 如果  $n$  阶方阵  $A = (a_{ij})$  满足

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n$$

则称为 **对称矩阵**。

**例**  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$  都是对称矩阵。

**注** 方阵  $A$  对称，等价于它满足  $A^T = A$ 。这是：

	$A$	$A^T$
位置 $(i, j)$ 上的元素	$a_{ij}$	$a_{ji}$



## 性质

1. 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $A \pm B, kA$  也是  $n$  阶对称矩阵.

## 性质

1. 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $A \pm B, kA$  也是  $n$  阶对称矩阵.

## 证明

1.  $(A \pm B)^T =$

## 性质

1. 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $A \pm B, kA$  也是  $n$  阶对称矩阵.

## 证明

1.  $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T =$

## 性质

1. 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $A \pm B, kA$  也是  $n$  阶对称矩阵.

## 证明

1.  $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$

## 性质

1. 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $A \pm B, kA$  也是  $n$  阶对称矩阵.

## 证明

1.  $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$ , 所以  $A \pm B$  对称.

## 性质

1. 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $A \pm B, kA$  也是  $n$  阶对称矩阵.

## 证明

1.  $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$ , 所以  $A \pm B$  对称.  
 $(kA)^T =$

## 性质

1. 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $A \pm B, kA$  也是  $n$  阶对称矩阵.

## 证明

1.  $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$ , 所以  $A \pm B$  对称.  
 $(kA)^T = kA^T =$

## 性质

1. 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $A \pm B, kA$  也是  $n$  阶对称矩阵.

## 证明

1.  $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$ , 所以  $A \pm B$  对称.  
 $(kA)^T = kA^T = kA$



## 性质

1. 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $A \pm B, kA$  也是  $n$  阶对称矩阵.

## 证明

1.  $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$ , 所以  $A \pm B$  对称.  
 $(kA)^T = kA^T = kA$ , 所以  $kA$  对称.

## 性质

1. 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $A \pm B, kA$  也是  $n$  阶对称矩阵.
2. 设  $C$  为任一  $n$  阶方阵, 则  $C + C^T$  为  $n$  阶对称矩阵.

## 证明

1.  $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$ , 所以  $A \pm B$  对称.  
 $(kA)^T = kA^T = kA$ , 所以  $kA$  对称.

## 性质

1. 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $A \pm B, kA$  也是  $n$  阶对称矩阵.
2. 设  $C$  为任一  $n$  阶方阵, 则  $C + C^T$  为  $n$  阶对称矩阵.

## 证明

1.  $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$ , 所以  $A \pm B$  对称.  
 $(kA)^T = kA^T = kA$ , 所以  $kA$  对称.
2.  $(C + C^T)^T =$

## 性质

1. 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $A \pm B, kA$  也是  $n$  阶对称矩阵.
2. 设  $C$  为任一  $n$  阶方阵, 则  $C + C^T$  为  $n$  阶对称矩阵.

## 证明

1.  $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$ , 所以  $A \pm B$  对称.  
 $(kA)^T = kA^T = kA$ , 所以  $kA$  对称.
2.  $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T =$

## 性质

1. 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $A \pm B, kA$  也是  $n$  阶对称矩阵.
2. 设  $C$  为任一  $n$  阶方阵, 则  $C + C^T$  为  $n$  阶对称矩阵.

## 证明

1.  $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$ , 所以  $A \pm B$  对称.  
 $(kA)^T = kA^T = kA$ , 所以  $kA$  对称.
2.  $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C =$

## 性质

1. 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $A \pm B, kA$  也是  $n$  阶对称矩阵.
2. 设  $C$  为任一  $n$  阶方阵, 则  $C + C^T$  为  $n$  阶对称矩阵.

## 证明

1.  $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$ , 所以  $A \pm B$  对称.  
 $(kA)^T = kA^T = kA$ , 所以  $kA$  对称.
2.  $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C = C + C^T$

## 性质

1. 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $A \pm B, kA$  也是  $n$  阶对称矩阵.
2. 设  $C$  为任一  $n$  阶方阵, 则  $C + C^T$  为  $n$  阶对称矩阵.

## 证明

1.  $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$ , 所以  $A \pm B$  对称.  
 $(kA)^T = kA^T = kA$ , 所以  $kA$  对称.
2.  $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C = C + C^T$ , 所以  $C + C^T$  对称.

## 性质

1. 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $A \pm B, kA$  也是  $n$  阶对称矩阵.
2. 设  $C$  为任一  $n$  阶方阵, 则  $C + C^T$  为  $n$  阶对称矩阵.
3. 设  $D$  为任一  $m \times n$  矩阵, 则  $DD^T$  为  $m$  阶对称方阵;  $D^TD$  为  $n$  阶对称方阵.

## 证明

1.  $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$ , 所以  $A \pm B$  对称.  
 $(kA)^T = kA^T = kA$ , 所以  $kA$  对称.
2.  $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C = C + C^T$ , 所以  $C + C^T$  对称.



## 性质

1. 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $A \pm B, kA$  也是  $n$  阶对称矩阵.
2. 设  $C$  为任一  $n$  阶方阵, 则  $C + C^T$  为  $n$  阶对称矩阵.
3. 设  $D$  为任一  $m \times n$  矩阵, 则  $DD^T$  为  $m$  阶对称方阵;  $D^TD$  为  $n$  阶对称方阵.

## 证明

1.  $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$ , 所以  $A \pm B$  对称.  
 $(kA)^T = kA^T = kA$ , 所以  $kA$  对称.
2.  $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C = C + C^T$ , 所以  $C + C^T$  对称.
3.  $D$  为  $m \times n$ ,  $D^T$  为  $n \times m$ , 所以  $DD^T$  为  $m \times m$  方阵,  $D^TD$  为  $n \times n$  方阵.

## 性质

1. 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $A \pm B, kA$  也是  $n$  阶对称矩阵.
2. 设  $C$  为任一  $n$  阶方阵, 则  $C + C^T$  为  $n$  阶对称矩阵.
3. 设  $D$  为任一  $m \times n$  矩阵, 则  $DD^T$  为  $m$  阶对称方阵;  $D^TD$  为  $n$  阶对称方阵.

## 证明

1.  $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$ , 所以  $A \pm B$  对称.  
 $(kA)^T = kA^T = kA$ , 所以  $kA$  对称.
2.  $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C = C + C^T$ , 所以  $C + C^T$  对称.
3.  $D$  为  $m \times n$ ,  $D^T$  为  $n \times m$ , 所以  $DD^T$  为  $m \times m$ ,  $D^TD$  为

## 性质

1. 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $A \pm B, kA$  也是  $n$  阶对称矩阵.
2. 设  $C$  为任一  $n$  阶方阵, 则  $C + C^T$  为  $n$  阶对称矩阵.
3. 设  $D$  为任一  $m \times n$  矩阵, 则  $DD^T$  为  $m$  阶对称方阵;  $D^TD$  为  $n$  阶对称方阵.

## 证明

1.  $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$ , 所以  $A \pm B$  对称.  
 $(kA)^T = kA^T = kA$ , 所以  $kA$  对称.
2.  $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C = C + C^T$ , 所以  $C + C^T$  对称.
3.  $D$  为  $m \times n$ ,  $D^T$  为  $n \times m$ , 所以  $DD^T$  为  $m \times m$ ,  $D^TD$  为  $n \times n$

## 性质

1. 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $A \pm B, kA$  也是  $n$  阶对称矩阵.
2. 设  $C$  为任一  $n$  阶方阵, 则  $C + C^T$  为  $n$  阶对称矩阵.
3. 设  $D$  为任一  $m \times n$  矩阵, 则  $DD^T$  为  $m$  阶对称方阵;  $D^TD$  为  $n$  阶对称方阵.

## 证明

1.  $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$ , 所以  $A \pm B$  对称.  
 $(kA)^T = kA^T = kA$ , 所以  $kA$  对称.
2.  $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C = C + C^T$ , 所以  $C + C^T$  对称.
3.  $D$  为  $m \times n$ ,  $D^T$  为  $n \times m$ , 所以  $DD^T$  为  $m \times m$ ,  $D^TD$  为  $n \times n$ .  
此外:

$$(DD^T)^T =$$

## 性质

1. 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $A \pm B, kA$  也是  $n$  阶对称矩阵.
2. 设  $C$  为任一  $n$  阶方阵, 则  $C + C^T$  为  $n$  阶对称矩阵.
3. 设  $D$  为任一  $m \times n$  矩阵, 则  $DD^T$  为  $m$  阶对称方阵;  $D^TD$  为  $n$  阶对称方阵.

## 证明

1.  $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$ , 所以  $A \pm B$  对称.  
 $(kA)^T = kA^T = kA$ , 所以  $kA$  对称.
2.  $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C = C + C^T$ , 所以  $C + C^T$  对称.
3.  $D$  为  $m \times n$ ,  $D^T$  为  $n \times m$ , 所以  $DD^T$  为  $m \times m$ ,  $D^TD$  为  $n \times n$ .  
此外:

$$(DD^T)^T = (D^T)^T D^T =$$

## 性质

1. 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $A \pm B, kA$  也是  $n$  阶对称矩阵.
2. 设  $C$  为任一  $n$  阶方阵, 则  $C + C^T$  为  $n$  阶对称矩阵.
3. 设  $D$  为任一  $m \times n$  矩阵, 则  $DD^T$  为  $m$  阶对称方阵;  $D^TD$  为  $n$  阶对称方阵.

## 证明

1.  $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$ , 所以  $A \pm B$  对称.  
 $(kA)^T = kA^T = kA$ , 所以  $kA$  对称.
2.  $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C = C + C^T$ , 所以  $C + C^T$  对称.
3.  $D$  为  $m \times n$ ,  $D^T$  为  $n \times m$ , 所以  $DD^T$  为  $m \times m$ ,  $D^TD$  为  $n \times n$ .  
此外:

$$(DD^T)^T = (D^T)^T D^T = DD^T$$

## 性质

1. 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $A \pm B, kA$  也是  $n$  阶对称矩阵.
2. 设  $C$  为任一  $n$  阶方阵, 则  $C + C^T$  为  $n$  阶对称矩阵.
3. 设  $D$  为任一  $m \times n$  矩阵, 则  $DD^T$  为  $m$  阶对称方阵;  $D^T D$  为  $n$  阶对称方阵.

## 证明

1.  $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$ , 所以  $A \pm B$  对称.  
 $(kA)^T = kA^T = kA$ , 所以  $kA$  对称.
2.  $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C = C + C^T$ , 所以  $C + C^T$  对称.
3.  $D$  为  $m \times n$ ,  $D^T$  为  $n \times m$ , 所以  $DD^T$  为  $m \times m$ ,  $D^T D$  为  $n \times n$ .  
此外:

$$(DD^T)^T = (D^T)^T D^T = DD^T$$

$$(D^T D)^T =$$

## 性质

1. 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $A \pm B, kA$  也是  $n$  阶对称矩阵.
2. 设  $C$  为任一  $n$  阶方阵, 则  $C + C^T$  为  $n$  阶对称矩阵.
3. 设  $D$  为任一  $m \times n$  矩阵, 则  $DD^T$  为  $m$  阶对称方阵;  $D^TD$  为  $n$  阶对称方阵.

## 证明

1.  $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$ , 所以  $A \pm B$  对称.  
 $(kA)^T = kA^T = kA$ , 所以  $kA$  对称.
2.  $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C = C + C^T$ , 所以  $C + C^T$  对称.
3.  $D$  为  $m \times n$ ,  $D^T$  为  $n \times m$ , 所以  $DD^T$  为  $m \times m$ ,  $D^TD$  为  $n \times n$ .  
此外:

$$(DD^T)^T = (D^T)^T D^T = DD^T$$

$$(D^TD)^T = D^T (D^T)^T =$$



## 性质

1. 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $A \pm B, kA$  也是  $n$  阶对称矩阵.
2. 设  $C$  为任一  $n$  阶方阵, 则  $C + C^T$  为  $n$  阶对称矩阵.
3. 设  $D$  为任一  $m \times n$  矩阵, 则  $DD^T$  为  $m$  阶对称方阵;  $D^T D$  为  $n$  阶对称方阵.

## 证明

1.  $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$ , 所以  $A \pm B$  对称.  
 $(kA)^T = kA^T = kA$ , 所以  $kA$  对称.
2.  $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C = C + C^T$ , 所以  $C + C^T$  对称.
3.  $D$  为  $m \times n$ ,  $D^T$  为  $n \times m$ , 所以  $DD^T$  为  $m \times m$ ,  $D^T D$  为  $n \times n$ .  
此外:

$$(DD^T)^T = (D^T)^T D^T = DD^T$$

$$(D^T D)^T = D^T (D^T)^T = D^T D$$

## 性质

1. 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $A \pm B, kA$  也是  $n$  阶对称矩阵.
2. 设  $C$  为任一  $n$  阶方阵, 则  $C + C^T$  为  $n$  阶对称矩阵.
3. 设  $D$  为任一  $m \times n$  矩阵, 则  $DD^T$  为  $m$  阶对称方阵;  $D^T D$  为  $n$  阶对称方阵.

## 证明

1.  $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$ , 所以  $A \pm B$  对称.  
 $(kA)^T = kA^T = kA$ , 所以  $kA$  对称.
2.  $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C = C + C^T$ , 所以  $C + C^T$  对称.
3.  $D$  为  $m \times n$ ,  $D^T$  为  $n \times m$ , 所以  $DD^T$  为  $m \times m$ ,  $D^T D$  为  $n \times n$ .  
此外:

$$(DD^T)^T = (D^T)^T D^T = DD^T$$

$$(D^T D)^T = D^T (D^T)^T = D^T D$$

所以  $DD^T, D^T D$  均对称.

# 对称矩阵

**注** 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 然而  $AB$  未必对称。

## 对称矩阵

**注** 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 然而  $AB$  未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

## 对称矩阵

**注** 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 然而  $AB$  未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

## 对称矩阵

**注** 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 然而  $AB$  未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

# 对称矩阵

**注** 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 然而  $AB$  未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ 却不是对称。}$$

# 对称矩阵

**注** 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 然而  $AB$  未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ 却不是对称。}$$

**性质** 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $AB$  对称的充分必要条件是交换 (i.e.  $AB = BA$ )。



# 对称矩阵

**注** 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 然而  $AB$  未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ 却不是对称。}$$

**性质** 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $AB$  对称的充分必要条件是交换 (i.e.  $AB = BA$ )。

**证明**

$AB$  对称

# 对称矩阵

**注** 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 然而  $AB$  未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ 却不是对称。}$$

**性质** 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $AB$  对称的充分必要条件是交换 (i.e.  $AB = BA$ )。

**证明**

$$AB \text{ 对称} \implies AB = (AB)^T =$$

# 对称矩阵

**注** 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 然而  $AB$  未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ 却不是对称。}$$

**性质** 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $AB$  对称的充分必要条件是交换 (i.e.  $AB = BA$ )。

**证明**

$$AB \text{ 对称} \implies AB = (AB)^T = B^T A^T =$$

# 对称矩阵

**注** 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 然而  $AB$  未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ 却不是对称。}$$

**性质** 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $AB$  对称的充分必要条件是交换 (i.e.  $AB = BA$ )。

**证明**

$$AB \text{ 对称} \implies AB = (AB)^T = B^T A^T = BA$$

# 对称矩阵

**注** 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 然而  $AB$  未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ 却不是对称。}$$

**性质** 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $AB$  对称的充分必要条件是交换 (i.e.  $AB = BA$ )。

**证明**

$$AB \text{ 对称} \implies AB = (AB)^T = B^T A^T = BA$$

反之,

$$AB = BA \implies$$

# 对称矩阵

**注** 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 然而  $AB$  未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ 却不是对称。}$$

**性质** 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $AB$  对称的充分必要条件是交换 (i.e.  $AB = BA$ )。

**证明**

$$AB \text{ 对称} \implies AB = (AB)^T = B^T A^T = BA$$

反之,

$$AB = BA \implies (AB)^T = AB$$

# 对称矩阵

**注** 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 然而  $AB$  未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ 却不是对称。}$$

**性质** 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $AB$  对称的充分必要条件是交换 (i.e.  $AB = BA$ )。

**证明**

$$AB \text{ 对称} \implies AB = (AB)^T = B^T A^T = BA$$

反之,

$$AB = BA \implies (AB)^T = B^T A^T = AB$$

# 对称矩阵

**注** 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 然而  $AB$  未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ 却不是对称。}$$

**性质** 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $AB$  对称的充分必要条件是交换 (i.e.  $AB = BA$ )。

**证明**

$$AB \text{ 对称} \implies AB = (AB)^T = B^T A^T = BA$$

反之,

$$AB = BA \implies (AB)^T = B^T A^T = BA \quad AB$$



# 对称矩阵

**注** 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 然而  $AB$  未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ 却不是对称。}$$

**性质** 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $AB$  对称的充分必要条件是交换 (i.e.  $AB = BA$ )。

**证明**

$$AB \text{ 对称} \implies AB = (AB)^T = B^T A^T = BA$$

反之,

$$AB = BA \implies (AB)^T = B^T A^T = BA = AB$$

# 对称矩阵

**注** 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 然而  $AB$  未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ 却不是对称。}$$

**性质** 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $AB$  对称的充分必要条件是交换 (i.e.  $AB = BA$ )。

**证明**

$$AB \text{ 对称} \implies AB = (AB)^T = B^T A^T = BA$$

反之,

$$AB = BA \implies (AB)^T = B^T A^T = BA = AB \implies AB \text{ 对称}$$