

§2.4 逆矩阵

数学系 梁卓滨

2018 - 2019 学年上学期

逆矩阵引入

- 一元线性方程: $ax = b \xRightarrow{a \neq 0}$

逆矩阵引入

- 一元线性方程: $ax = b \xRightarrow{a \neq 0} x = b/a$

逆矩阵引入

- 一元线性方程: $ax = b \xRightarrow{a \neq 0} x = b/a$

- 二元线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \xRightarrow{\text{写成}} Ax = b$$

逆矩阵引入

- 一元线性方程: $ax = b \xRightarrow{a \neq 0} x = b/a$

- 二元线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \xRightarrow{\text{写成}} Ax = b \xRightarrow{A \neq 0} x = b/A ?$$

逆矩阵引入

- 一元线性方程: $ax = b \xrightarrow{a \neq 0} x = b/a$

◇ 可避免除法, $ax = b \implies$

- 二元线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{写成}} Ax = b \xrightarrow{A \neq 0} x = b/A ?$$

逆矩阵引入

- 一元线性方程: $ax = b \xrightarrow{a \neq 0} x = b/a$

◇ 可避免除法, $a^{-1}ax = a^{-1}b \implies$

- 二元线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{写成}} Ax = b \xrightarrow{A \neq 0} x = b/A ?$$

逆矩阵引入

- 一元线性方程: $ax = b \xrightarrow{a \neq 0} x = b/a$

- ◇ 可避免除法, $a^{-1}ax = a^{-1}b \implies x = a^{-1}b$

- 二元线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{写成}} Ax = b \xrightarrow{A \neq 0} x = b/A ?$$

逆矩阵引入

- 一元线性方程: $ax = b \xrightarrow{a \neq 0} x = b/a$

- ◇ 可避免除法, $a^{-1}ax = a^{-1}b \implies x = a^{-1}b$

- 二元线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{写成}} Ax = b \xrightarrow{A \neq 0} x = b/A ?$$

- ◇ 可避免除法, 寻找一个 2 阶方阵 B 使得: $BA = I_2$ 。

逆矩阵引入

- 一元线性方程: $ax = b \xrightarrow{a \neq 0} x = b/a$

- ◇ 可避免除法, $a^{-1}ax = a^{-1}b \implies x = a^{-1}b$

- 二元线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{写成}} Ax = b \xrightarrow{A \neq 0} x = b/A ?$$

- ◇ 可避免除法, 寻找一个 2 阶方阵 B 使得: $BA = I_2$ 。这样

$$Ax = b$$

逆矩阵引入

- 一元线性方程: $ax = b \xrightarrow{a \neq 0} x = b/a$

- ◇ 可避免除法, $a^{-1}ax = a^{-1}b \implies x = a^{-1}b$

- 二元线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{写成}} Ax = b \xrightarrow{A \neq 0} x = b/A ?$$

- ◇ 可避免除法, 寻找一个 2 阶方阵 B 使得: $BA = I_2$ 。这样

$$BAx = Bb$$

逆矩阵引入

- 一元线性方程: $ax = b \xrightarrow{a \neq 0} x = b/a$

- ◇ 可避免除法, $a^{-1}ax = a^{-1}b \implies x = a^{-1}b$

- 二元线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{写成}} Ax = b \xrightarrow{A \neq 0} x = b/A ?$$

- ◇ 可避免除法, 寻找一个 2 阶方阵 B 使得: $BA = I_2$ 。这样

$$BAx = Bb \implies I_2x = Bb$$

逆矩阵引入

- 一元线性方程: $ax = b \xrightarrow{a \neq 0} x = b/a$

- ◇ 可避免除法, $a^{-1}ax = a^{-1}b \implies x = a^{-1}b$

- 二元线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{写成}} Ax = b \xrightarrow{A \neq 0} x = b/A ?$$

- ◇ 可避免除法, 寻找一个 2 阶方阵 B 使得: $BA = I_2$ 。这样

$$BAx = Bb \implies I_2x = Bb \implies x = Bb$$

逆矩阵引入

- 一元线性方程: $ax = b \xrightarrow{a \neq 0} x = b/a$

- ◇ 可避免除法, $a^{-1}ax = a^{-1}b \implies x = a^{-1}b$

- 二元线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{写成}} Ax = b \xrightarrow{A \neq 0} x = b/A ?$$

- ◇ 可避免除法, 寻找一个 2 阶方阵 B 使得: $BA = I_2$ 。这样

$$BAx = Bb \implies I_2x = Bb \implies x = Bb$$

问题 这样的 B 是否存在;

逆矩阵引入

- 一元线性方程: $ax = b \xrightarrow{a \neq 0} x = b/a$

- ◇ 可避免除法, $a^{-1}ax = a^{-1}b \implies x = a^{-1}b$

- 二元线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{写成}} Ax = b \xrightarrow{A \neq 0} x = b/A ?$$

- ◇ 可避免除法, 寻找一个 2 阶方阵 B 使得: $BA = I_2$ 。这样

$$BAx = Bb \implies I_2x = Bb \implies x = Bb$$

问题 这样的 B 是否存在; 存在的话如何找出来?

例 求解方程组
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = -1 \\ x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$$

求解思路：



例 求解方程组 $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = -1 \\ x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$

求解思路：

$$Ax = b$$



例 求解方程组
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = -1 \\ x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$$

求解思路：

$$Ax = b$$

$$\Downarrow$$

$$BAx = Bb$$

$$\Downarrow$$

例 求解方程组
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = -1 \\ x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$$

求解思路：

$$Ax = b$$

$$\Downarrow BA=I_2$$

$$BAx = Bb$$

$$\Downarrow$$

例 求解方程组
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = -1 \\ x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$$

求解思路：

$$Ax = b$$

$$\Downarrow BA=I_2$$

$$BAx = Bb$$

$$\Downarrow$$

$$I_2x = Bb$$

$$\Downarrow$$

例 求解方程组
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = -1 \\ x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$$

求解思路：

$$Ax = b$$

$$\Downarrow BA=I_2$$

$$BAx = Bb$$

$$\Downarrow$$

$$I_2x = Bb$$

$$\Downarrow$$

$$x = Bb$$

例 求解方程组
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = -1 \\ x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$$

求解思路：

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$\Downarrow$$

$$Ax = b$$

$$\Downarrow BA = I_2$$

$$BAx = Bb$$

$$\Downarrow$$

$$I_2 x = Bb$$

$$\Downarrow$$

$$x = Bb$$

例 求解方程组
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = -1 \\ x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$$

求解思路：

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

\Downarrow

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

\Downarrow

$$Ax = b$$

$$\Downarrow BA = I_2$$

$$BAx = Bb$$

\Downarrow

$$I_2 x = Bb$$

\Downarrow

$$x = Bb$$

例 求解方程组
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = -1 \\ x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$$

求解思路：

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

\Downarrow

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

\Downarrow

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

\Downarrow

$$Ax = b$$

$$\Downarrow BA=I_2$$

$$BAx = Bb$$

\Downarrow

$$I_2x = Bb$$

\Downarrow

$$x = Bb$$

例 求解方程组
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = -1 \\ x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$$

求解思路：

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

\Downarrow

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

\Downarrow

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 18 \end{pmatrix}$$

\Downarrow

$$Ax = b$$

$$\Downarrow BA = I_2$$

$$BAx = Bb$$

\Downarrow

$$I_2 x = Bb$$

\Downarrow

$$x = Bb$$

例 求解方程组
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = -1 \\ x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$$

求解思路：

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

\Downarrow

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

\Downarrow

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 7 \end{pmatrix}$$

\Downarrow

$$Ax = b$$

$$\Downarrow BA = I_2$$

$$BAx = Bb$$

\Downarrow

$$I_2 x = Bb$$

\Downarrow

$$x = Bb$$

例 求解方程组
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = -1 \\ x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$$

求解思路：

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

\Downarrow

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

\Downarrow

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 7 \end{pmatrix}$$

\Downarrow

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$Ax = b$$

$$\Downarrow BA=I_2$$

$$BAx = Bb$$

\Downarrow

$$I_2x = Bb$$

\Downarrow

$$x = Bb$$

逆矩阵引入

n 元线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

逆矩阵引入

n 元线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

改写成矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

逆矩阵引入

n 元线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

改写成矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Rightarrow Ax = b$$

逆矩阵引入

n 元线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

改写成矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Rightarrow Ax = b$$

问题 寻找 n 阶方阵 B 使得: $BA = I_n$ 。

逆矩阵引入

n 元线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

改写成矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Rightarrow Ax = b$$

问题 寻找 n 阶方阵 B 使得: $BA = I_n$ 。这样

$$Ax = b$$

逆矩阵引入

n 元线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

改写成矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Rightarrow Ax = b$$

问题 寻找 n 阶方阵 B 使得: $BA = I_n$ 。这样

$$BAx = Bb$$

逆矩阵引入

n 元线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

改写成矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Rightarrow Ax = b$$

问题 寻找 n 阶方阵 B 使得: $BA = I_n$ 。这样

$$BAx = Bb \implies I_n x = Bb$$

逆矩阵引入

n 元线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

改写成矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Rightarrow Ax = b$$

问题 寻找 n 阶方阵 B 使得: $BA = I_n$ 。这样

$$BAx = Bb \implies I_n x = Bb \implies x = Bb$$

逆矩阵

定义 对于 n 阶矩阵 A , 如果存在 n 阶矩阵 B , 使得 $BA = I_n$ 并且 $AB = I_n$,

逆矩阵

定义 对于 n 阶矩阵 A ，如果存在 n 阶矩阵 B ，使得 $BA = I_n$ 并且 $AB = I_n$ ，则称矩阵 A 为可逆矩阵，

逆矩阵

定义 对于 n 阶矩阵 A ，如果存在 n 阶矩阵 B ，使得 $BA = I_n$ 并且 $AB = I_n$ ，则称矩阵 A 为**可逆矩阵**，同时称 B 为 A 的**逆矩阵**。

逆矩阵

定义 对于 n 阶矩阵 A ，如果存在 n 阶矩阵 B ，使得 $BA = I_n$ 并且 $AB = I_n$ ，则称矩阵 A 为**可逆矩阵**，同时称 B 为 A 的**逆矩阵**。

性质 如果 A 可逆，那么逆矩阵是唯一的。

逆矩阵

定义 对于 n 阶矩阵 A ，如果存在 n 阶矩阵 B ，使得 $BA = I_n$ 并且 $AB = I_n$ ，则称矩阵 A 为**可逆矩阵**，同时称 B 为 A 的**逆矩阵**。

性质 如果 A 可逆，那么逆矩阵是唯一的。

证明 设 B_1 和 B_2 都是 A 的逆矩阵，要证明 $B_1 = B_2$ 。

逆矩阵

定义 对于 n 阶矩阵 A ，如果存在 n 阶矩阵 B ，使得 $BA = I_n$ 并且 $AB = I_n$ ，则称矩阵 A 为**可逆矩阵**，同时称 B 为 A 的**逆矩阵**。

性质 如果 A 可逆，那么逆矩阵是唯一的。

证明 设 B_1 和 B_2 都是 A 的逆矩阵，要证明 $B_1 = B_2$ 。

$$B_1AB_2$$

逆矩阵

定义 对于 n 阶矩阵 A ，如果存在 n 阶矩阵 B ，使得 $BA = I_n$ 并且 $AB = I_n$ ，则称矩阵 A 为**可逆矩阵**，同时称 B 为 A 的**逆矩阵**。

性质 如果 A 可逆，那么逆矩阵是唯一的。

证明 设 B_1 和 B_2 都是 A 的逆矩阵，要证明 $B_1 = B_2$ 。

$$B_1(AB_2) = B_1AB_2 = (B_1A)B_2$$

逆矩阵

定义 对于 n 阶矩阵 A ，如果存在 n 阶矩阵 B ，使得 $BA = I_n$ 并且 $AB = I_n$ ，则称矩阵 A 为**可逆矩阵**，同时称 B 为 A 的**逆矩阵**。

性质 如果 A 可逆，那么逆矩阵是唯一的。

证明 设 B_1 和 B_2 都是 A 的逆矩阵，要证明 $B_1 = B_2$ 。

$$B_1(AB_2) = B_1AB_2 = (B_1A)B_2 = I_nB_2$$

逆矩阵

定义 对于 n 阶矩阵 A ，如果存在 n 阶矩阵 B ，使得 $BA = I_n$ 并且 $AB = I_n$ ，则称矩阵 A 为**可逆矩阵**，同时称 B 为 A 的**逆矩阵**。

性质 如果 A 可逆，那么逆矩阵是唯一的。

证明 设 B_1 和 B_2 都是 A 的逆矩阵，要证明 $B_1 = B_2$ 。

$$B_1(AB_2) = B_1AB_2 = (B_1A)B_2 = I_nB_2 = B_2$$

逆矩阵

定义 对于 n 阶矩阵 A ，如果存在 n 阶矩阵 B ，使得 $BA = I_n$ 并且 $AB = I_n$ ，则称矩阵 A 为**可逆矩阵**，同时称 B 为 A 的**逆矩阵**。

性质 如果 A 可逆，那么逆矩阵是唯一的。

证明 设 B_1 和 B_2 都是 A 的逆矩阵，要证明 $B_1 = B_2$ 。

$$B_1 I_n = B_1 (AB_2) = B_1 AB_2 = (B_1 A) B_2 = I_n B_2 = B_2$$

逆矩阵

定义 对于 n 阶矩阵 A ，如果存在 n 阶矩阵 B ，使得 $BA = I_n$ 并且 $AB = I_n$ ，则称矩阵 A 为**可逆矩阵**，同时称 B 为 A 的**逆矩阵**。

性质 如果 A 可逆，那么逆矩阵是唯一的。

证明 设 B_1 和 B_2 都是 A 的逆矩阵，要证明 $B_1 = B_2$ 。

$$B_1 = B_1 I_n = B_1 (AB_2) = B_1 AB_2 = (B_1 A) B_2 = I_n B_2 = B_2$$

逆矩阵

定义 对于 n 阶矩阵 A ，如果存在 n 阶矩阵 B ，使得 $BA = I_n$ 并且 $AB = I_n$ ，则称矩阵 A 为**可逆矩阵**，同时称 B 为 A 的**逆矩阵**。

性质 如果 A 可逆，那么逆矩阵是唯一的。

证明 设 B_1 和 B_2 都是 A 的逆矩阵，要证明 $B_1 = B_2$ 。

$$B_1 = B_1 I_n = B_1 (AB_2) = B_1 AB_2 = (B_1 A) B_2 = I_n B_2 = B_2$$

注 由于 A 的逆矩阵是唯一的，我们就把它记为 A^{-1} 。

逆矩阵

定义 对于 n 阶矩阵 A ，如果存在 n 阶矩阵 B ，使得 $BA = I_n$ 并且 $AB = I_n$ ，则称矩阵 A 为**可逆矩阵**，同时称 B 为 A 的**逆矩阵**。

性质 如果 A 可逆，那么逆矩阵是唯一的。

证明 设 B_1 和 B_2 都是 A 的逆矩阵，要证明 $B_1 = B_2$ 。

$$B_1 = B_1 I_n = B_1 (AB_2) = B_1 AB_2 = (B_1 A) B_2 = I_n B_2 = B_2$$

注 由于 A 的逆矩阵是唯一的，我们就把它记为 A^{-1} 。

性质 如果 A 可逆，则 $|A| \neq 0$ 。

逆矩阵

定义 对于 n 阶矩阵 A ，如果存在 n 阶矩阵 B ，使得 $BA = I_n$ 并且 $AB = I_n$ ，则称矩阵 A 为**可逆矩阵**，同时称 B 为 A 的**逆矩阵**。

性质 如果 A 可逆，那么逆矩阵是唯一的。

证明 设 B_1 和 B_2 都是 A 的逆矩阵，要证明 $B_1 = B_2$ 。

$$B_1 = B_1 I_n = B_1 (AB_2) = B_1 AB_2 = (B_1 A) B_2 = I_n B_2 = B_2$$

注 由于 A 的逆矩阵是唯一的，我们就把它记为 A^{-1} 。

性质 如果 A 可逆，则 $|A| \neq 0$ 。

证明 $AA^{-1} = I_n$

逆矩阵

定义 对于 n 阶矩阵 A ，如果存在 n 阶矩阵 B ，使得 $BA = I_n$ 并且 $AB = I_n$ ，则称矩阵 A 为**可逆矩阵**，同时称 B 为 A 的**逆矩阵**。

性质 如果 A 可逆，那么逆矩阵是唯一的。

证明 设 B_1 和 B_2 都是 A 的逆矩阵，要证明 $B_1 = B_2$ 。

$$B_1 = B_1 I_n = B_1 (AB_2) = B_1 AB_2 = (B_1 A) B_2 = I_n B_2 = B_2$$

注 由于 A 的逆矩阵是唯一的，我们就把它记为 A^{-1} 。

性质 如果 A 可逆，则 $|A| \neq 0$ 。

证明 $AA^{-1} = I_n \Rightarrow |AA^{-1}| = |I_n|$

逆矩阵

定义 对于 n 阶矩阵 A ，如果存在 n 阶矩阵 B ，使得 $BA = I_n$ 并且 $AB = I_n$ ，则称矩阵 A 为**可逆矩阵**，同时称 B 为 A 的**逆矩阵**。

性质 如果 A 可逆，那么逆矩阵是唯一的。

证明 设 B_1 和 B_2 都是 A 的逆矩阵，要证明 $B_1 = B_2$ 。

$$B_1 = B_1 I_n = B_1 (AB_2) = B_1 AB_2 = (B_1 A) B_2 = I_n B_2 = B_2$$

注 由于 A 的逆矩阵是唯一的，我们就把它记为 A^{-1} 。

性质 如果 A 可逆，则 $|A| \neq 0$ 。

证明 $AA^{-1} = I_n \Rightarrow |AA^{-1}| = |I_n| = 1$

逆矩阵

定义 对于 n 阶矩阵 A ，如果存在 n 阶矩阵 B ，使得 $BA = I_n$ 并且 $AB = I_n$ ，则称矩阵 A 为**可逆矩阵**，同时称 B 为 A 的**逆矩阵**。

性质 如果 A 可逆，那么逆矩阵是唯一的。

证明 设 B_1 和 B_2 都是 A 的逆矩阵，要证明 $B_1 = B_2$ 。

$$B_1 = B_1 I_n = B_1 (AB_2) = B_1 AB_2 = (B_1 A) B_2 = I_n B_2 = B_2$$

注 由于 A 的逆矩阵是唯一的，我们就把它记为 A^{-1} 。

性质 如果 A 可逆，则 $|A| \neq 0$ 。

证明 $AA^{-1} = I_n \Rightarrow |AA^{-1}| = |I_n| = 1 \Rightarrow |A| \cdot |A^{-1}| = 1$

逆矩阵

定义 对于 n 阶矩阵 A ，如果存在 n 阶矩阵 B ，使得 $BA = I_n$ 并且 $AB = I_n$ ，则称矩阵 A 为**可逆矩阵**，同时称 B 为 A 的**逆矩阵**。

性质 如果 A 可逆，那么逆矩阵是唯一的。

证明 设 B_1 和 B_2 都是 A 的逆矩阵，要证明 $B_1 = B_2$ 。

$$B_1 = B_1 I_n = B_1 (AB_2) = B_1 AB_2 = (B_1 A) B_2 = I_n B_2 = B_2$$

注 由于 A 的逆矩阵是唯一的，我们就把它记为 A^{-1} 。

性质 如果 A 可逆，则 $|A| \neq 0$ 。

证明 $AA^{-1} = I_n \Rightarrow |AA^{-1}| = |I_n| = 1 \Rightarrow |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \therefore |A| \neq 0$

逆矩阵

定义 对于 n 阶矩阵 A ，如果存在 n 阶矩阵 B ，使得 $BA = I_n$ 并且 $AB = I_n$ ，则称矩阵 A 为**可逆矩阵**，同时称 B 为 A 的**逆矩阵**。

性质 如果 A 可逆，那么逆矩阵是唯一的。

证明 设 B_1 和 B_2 都是 A 的逆矩阵，要证明 $B_1 = B_2$ 。

$$B_1 = B_1 I_n = B_1 (AB_2) = B_1 AB_2 = (B_1 A) B_2 = I_n B_2 = B_2$$

注 由于 A 的逆矩阵是唯一的，我们就把它记为 A^{-1} 。

性质 如果 A 可逆，则 $|A| \neq 0$ 。并且 $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ 。

证明 $AA^{-1} = I_n \Rightarrow |AA^{-1}| = |I_n| = 1 \Rightarrow |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \therefore |A| \neq 0$

逆矩阵

定义 一般地，对任意 n 阶方阵 A ，

2. 如果 $|A| \neq 0$ ，则称 A 为非奇异矩阵；

逆矩阵

定义 一般地，对任意 n 阶方阵 A ，

1. 如果 $|A| = 0$ ，则称 A 为奇异矩阵；
2. 如果 $|A| \neq 0$ ，则称 A 为非奇异矩阵；

逆矩阵

例

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$$

逆矩阵

例

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & \ddots \\ & & & a_n \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{(i=1, 2, \dots, n)}]{\text{假设 } a_i \neq 0}$$

逆矩阵

例

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & \ddots \\ & & & a_n \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{(i=1, 2, \dots, n)}]{\text{假设 } a_i \neq 0}} A^{-1} =$$

逆矩阵

例

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & \ddots \\ & & & a_n \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{(i=1, 2, \dots, n)}]{\text{假设 } a_i \neq 0}} A^{-1} = \begin{pmatrix} a_1^{-1} & & \\ & a_2^{-1} & \\ & & \ddots \\ & & & a_n^{-1} \end{pmatrix}$$

逆矩阵

例

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & \ddots \\ & & & a_n \end{pmatrix} \xrightarrow[(i=1, 2, \dots, n)]{\text{假设 } a_i \neq 0} A^{-1} = \begin{pmatrix} a_1^{-1} & & \\ & a_2^{-1} & \\ & & \ddots \\ & & & a_n^{-1} \end{pmatrix}$$

这是

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^{-1} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} =$$

逆矩阵

例

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & \ddots \\ & & & a_n \end{pmatrix} \xrightarrow[(i=1, 2, \dots, n)]{\text{假设 } a_i \neq 0} A^{-1} = \begin{pmatrix} a_1^{-1} & & \\ & a_2^{-1} & \\ & & \ddots \\ & & & a_n^{-1} \end{pmatrix}$$

这是

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_n a_n^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} =$$

逆矩阵

例

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & \ddots \\ & & & a_n \end{pmatrix} \xrightarrow[(i=1, 2, \dots, n)]{\text{假设 } a_i \neq 0} A^{-1} = \begin{pmatrix} a_1^{-1} & & \\ & a_2^{-1} & \\ & & \ddots \\ & & & a_n^{-1} \end{pmatrix}$$

这是

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_n a_n^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} =$$

逆矩阵

例

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & \ddots \\ & & & a_n \end{pmatrix} \xrightarrow[(i=1, 2, \dots, n)]{\text{假设 } a_i \neq 0} A^{-1} = \begin{pmatrix} a_1^{-1} & & \\ & a_2^{-1} & \\ & & \ddots \\ & & & a_n^{-1} \end{pmatrix}$$

这是

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_n a_n^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^{-1} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^{-1} a_n \end{pmatrix}$$

逆矩阵

例

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & \ddots \\ & & & a_n \end{pmatrix} \xrightarrow[(i=1, 2, \dots, n)]{\text{假设 } a_i \neq 0} A^{-1} = \begin{pmatrix} a_1^{-1} & & \\ & a_2^{-1} & \\ & & \ddots \\ & & & a_n^{-1} \end{pmatrix}$$

这是

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_n a_n^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^{-1} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^{-1} a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

逆矩阵的判断与计算

定理 设 A 为 n 阶方阵, 则:

逆矩阵的判断与计算

定理 设 A 为 n 阶方阵, 则:

1. A 可逆 $\Rightarrow |A| \neq 0$;

逆矩阵的判断与计算

定理 设 A 为 n 阶方阵, 则:

1. A 可逆 $\iff |A| \neq 0$;

逆矩阵的判断与计算

定理 设 A 为 n 阶方阵，则：

1. A 可逆 $\iff |A| \neq 0$;
2. 若 A 可逆，则 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$,

逆矩阵的判断与计算

定理 设 A 为 n 阶方阵, 则:

1. A 可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$;
2. 若 A 可逆, 则 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$, 其中

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

逆矩阵的判断与计算

定理 设 A 为 n 阶方阵, 则:

1. A 可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$;
2. 若 A 可逆, 则 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$, 其中

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

A_{ij} 是行列式 $|A|$ 中 a_{ij} 的代数余子式。

逆矩阵的判断与计算

定理 设 A 为 n 阶方阵, 则:

1. A 可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$;
2. 若 A 可逆, 则 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$, 其中

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

A_{ij} 是行列式 $|A|$ 中 a_{ij} 的代数余子式。

注 1 A^* 的 (i, j) 位置的元素是

逆矩阵的判断与计算

定理 设 A 为 n 阶方阵, 则:

1. A 可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$;
2. 若 A 可逆, 则 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$, 其中

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

A_{ij} 是行列式 $|A|$ 中 a_{ij} 的代数余子式。

注 1 A^* 的 (i, j) 位置的元素是 A_{ji}

逆矩阵的判断与计算

定理 设 A 为 n 阶方阵, 则:

1. A 可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$;
2. 若 A 可逆, 则 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$, 其中

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

A_{ij} 是行列式 $|A|$ 中 a_{ij} 的代数余子式。

注 1 A^* 的 (i, j) 位置的元素是 A_{ji}

注 2 一般地, 对任意方阵 A , 称上述定义之 A^* 为 A 的伴随矩阵

证明

$$A \cdot A^* =$$

证明

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

证明

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

证明

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

证明

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & * & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

证明

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

证明

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & * \\ & \end{pmatrix}$$

证明

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

证明

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \color{red}{a_{21}} & \color{red}{a_{22}} & \cdots & \color{red}{a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \color{red}{A_{11}} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ \color{red}{A_{12}} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \color{red}{A_{1n}} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| \\ \color{red}{*} \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

证明

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \color{red}{a_{21}} & \color{red}{a_{22}} & \cdots & \color{red}{a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \color{red}{A_{11}} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ \color{red}{A_{12}} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \color{red}{A_{1n}} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

证明

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \color{red}{a_{21}} & \color{red}{a_{22}} & \cdots & \color{red}{a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & \color{red}{A_{21}} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & \color{red}{A_{22}} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \color{red}{\vdots} & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \color{red}{A_{2n}} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & & & \\ & \color{red}{*} & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

证明

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \color{red}{a_{21}} & \color{red}{a_{22}} & \cdots & \color{red}{a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & \color{red}{A_{21}} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & \color{red}{A_{22}} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \color{red}{\vdots} & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \color{red}{A_{2n}} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A| \end{pmatrix}$$

证明

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \color{red}{a_{21}} & \color{red}{a_{22}} & \cdots & \color{red}{a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & \color{red}{A_{n1}} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & \color{red}{A_{n2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \color{red}{\vdots} \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & \color{red}{A_{nn}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & \color{red}{*} \end{pmatrix}$$

证明

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \color{red}{a_{21}} & \color{red}{a_{22}} & \cdots & \color{red}{a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & \color{red}{A_{n1}} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & \color{red}{A_{n2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & \color{red}{A_{nn}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A| \end{pmatrix}$$

证明

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A| \end{pmatrix}$$

证明

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A| \end{pmatrix}$$

证明

$$\begin{aligned} A \cdot A^* &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A| \end{pmatrix} \\ &= |A| \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

证明

$$\begin{aligned} A \cdot A^* &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A| \end{pmatrix} \\ &= |A| \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 \end{pmatrix} = |A| I_n \end{aligned}$$

证明

$$\begin{aligned} A \cdot A^* &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A| \end{pmatrix} \\ &= |A| \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \end{pmatrix} = |A| I_n \end{aligned}$$

注 对任意 n 阶方阵 A , 都成立:

$$AA^* = |A| I_n$$

证明

$$\begin{aligned} A \cdot A^* &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A| \end{pmatrix} \\ &= |A| \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \end{pmatrix} = |A| I_n \end{aligned}$$

- 当 $|A| \neq 0$ 时, $A \cdot \left(\frac{1}{|A|} A^* \right) = I_n$ 。

注 对任意 n 阶方阵 A , 都成立:

$$AA^* = |A| I_n$$

证明

$$\begin{aligned} A \cdot A^* &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A| \end{pmatrix} \\ &= |A| \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \end{pmatrix} = |A| I_n \end{aligned}$$

- 当 $|A| \neq 0$ 时, $A \cdot \left(\frac{1}{|A|} A^*\right) = I_n$ 。

注 对任意 n 阶方阵 A , 都成立:

$$A^* A = A A^* = |A| I_n$$

证明

$$\begin{aligned} A \cdot A^* &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A| \end{pmatrix} \\ &= |A| \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \end{pmatrix} = |A| I_n \end{aligned}$$

- 当 $|A| \neq 0$ 时, $A \cdot \left(\frac{1}{|A|} A^*\right) = I_n$ 。同理, $\left(\frac{1}{|A|} A^*\right) \cdot A = I_n$ 。

注 对任意 n 阶方阵 A , 都成立:

$$A^* A = A A^* = |A| I_n$$

证明

$$\begin{aligned} A \cdot A^* &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A| \end{pmatrix} \\ &= |A| \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \end{pmatrix} = |A| I_n \end{aligned}$$

- 当 $|A| \neq 0$ 时, $A \cdot \left(\frac{1}{|A|} A^*\right) = I_n$ 。同理, $\left(\frac{1}{|A|} A^*\right) \cdot A = I_n$ 。
所以此时 A 可逆

注 对任意 n 阶方阵 A , 都成立:

$$A^* A = A A^* = |A| I_n$$

证明

$$\begin{aligned} A \cdot A^* &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A| \end{pmatrix} \\ &= |A| \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \end{pmatrix} = |A| I_n \end{aligned}$$

- 当 $|A| \neq 0$ 时, $A \cdot \left(\frac{1}{|A|} A^*\right) = I_n$ 。同理, $\left(\frac{1}{|A|} A^*\right) \cdot A = I_n$ 。
所以此时 A 可逆, 且 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$ 。

注 对任意 n 阶方阵 A , 都成立:

$$A^* A = A A^* = |A| I_n$$

例 1 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1} 。

例 1 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

2. 求出伴随矩阵 A^* :

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 1 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

2. 求出伴随矩阵 A^* :

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 1 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{C_3 + C_1}}}$$

2. 求出伴随矩阵 A^* :

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 1 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3+c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

2. 求出伴随矩阵 A^* :

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 1 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3+c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$$

2. 求出伴随矩阵 A^* :

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 1 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3+c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

2. 求出伴随矩阵 A^* :

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 1 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3+c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

可见 $|A| \neq 0$, 所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 1 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3+c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

可见 $|A| \neq 0$, 所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 1 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3+c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

可见 $|A| \neq 0$, 所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 1 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} \cancel{1} & 0 & \cancel{-1} \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3+c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

可见 $|A| \neq 0$, 所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 1 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} \cancel{1} & 0 & \cancel{-1} \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3+c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

可见 $|A| \neq 0$, 所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 1 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3+c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

可见 $|A| \neq 0$, 所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & & \\ * & & \\ & & \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 1 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{-1} \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3+c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

可见 $|A| \neq 0$, 所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & & \\ 10 & & \\ & & \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 1 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} \cancel{1} & 0 & \cancel{-1} \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3+c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

可见 $|A| \neq 0$, 所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & & \\ 10 & & \\ * & & \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 1 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} \cancel{1} & 0 & \cancel{-1} \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3+c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

可见 $|A| \neq 0$, 所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & & \\ 10 & & \\ 7 & & \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 1 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3+c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

可见 $|A| \neq 0$, 所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & * \\ 10 & \\ 7 & \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 1 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3+c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

可见 $|A| \neq 0$, 所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 10 & \\ 7 & \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 1 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3+c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

可见 $|A| \neq 0$, 所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 10 & * \\ 7 & \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 1 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3+c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

可见 $|A| \neq 0$, 所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 10 & -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 1 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3+c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

可见 $|A| \neq 0$, 所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 10 & -2 \\ 7 & * \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 1 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3+c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

可见 $|A| \neq 0$, 所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 10 & -2 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 1 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3+C_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

可见 $|A| \neq 0$, 所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 & * \\ 10 & -2 & \\ 7 & -2 & \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 1 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3+C_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

可见 $|A| \neq 0$, 所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 1 \\ 10 & -2 & \\ 7 & -2 & \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 1 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3+c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

可见 $|A| \neq 0$, 所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 1 \\ 10 & -2 & * \\ 7 & -2 & \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 1 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3+c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

可见 $|A| \neq 0$, 所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 1 \\ 10 & -2 & 2 \\ 7 & -2 & \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 1 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3+C_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

可见 $|A| \neq 0$, 所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 1 \\ 10 & -2 & 2 \\ 7 & -2 & * \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 1 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3+c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

可见 $|A| \neq 0$, 所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 1 \\ 10 & -2 & 2 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 1 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3+c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

可见 $|A| \neq 0$, 所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 1 \\ 10 & -2 & 2 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 9 & -2 & 1 \\ 10 & -2 & 2 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

例 1 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3+c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

可见 $|A| \neq 0$, 所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 1 \\ 10 & -2 & 2 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 9 & -2 & 1 \\ 10 & -2 & 2 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/2 & -1 & 1/2 \\ 5 & -1 & 1 \\ 7/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

例 2 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

例 2 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

2. 求出伴随矩阵 A^* :

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 2 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

2. 求出伴随矩阵 A^* :

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 2 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}$$

2. 求出伴随矩阵 A^* :

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 2 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{vmatrix}$$

2. 求出伴随矩阵 A^* :

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 2 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}$$

2. 求出伴随矩阵 A^* :

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 2 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 2$$

2. 求出伴随矩阵 A^* :

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 2 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 2$$

可见 $|A| \neq 0$, 所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 2 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 2$$

可见 $|A| \neq 0$, 所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 2 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 2$$

可见 $|A| \neq 0$, 所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 2 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 2$$

可见 $|A| \neq 0$, 所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 2 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 2$$

可见 $|A| \neq 0$, 所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 2 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 2$$

可见 $|A| \neq 0$, 所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ * \\ \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 2 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 2$$

可见 $|A| \neq 0$, 所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 2 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 2$$

可见 $|A| \neq 0$, 所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ * \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 2 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 2$$

可见 $|A| \neq 0$, 所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 2 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 2$$

可见 $|A| \neq 0$, 所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & * \\ -5 & \\ 1 & \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 2 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 2$$

可见 $|A| \neq 0$, 所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 1 \\ -5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 2 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 2$$

可见 $|A| \neq 0$, 所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -5 & * \\ 1 & \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 2 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 2$$

可见 $|A| \neq 0$, 所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 1 \\ -5 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 2 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 2$$

可见 $|A| \neq 0$, 所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 1 \\ -5 & 8 & * \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 2 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 2$$

可见 $|A| \neq 0$, 所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 1 \\ -5 & 8 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 2 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 2$$

可见 $|A| \neq 0$, 所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -6 & * \\ -5 & 8 & \\ 1 & -2 & \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 2 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 2$$

可见 $|A| \neq 0$, 所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & \\ 1 & -2 & \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 2 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 2$$

可见 $|A| \neq 0$, 所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & * \\ 1 & -2 & \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 2 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 2$$

可见 $|A| \neq 0$, 所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 2 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 2$$

可见 $|A| \neq 0$, 所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & * \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 2 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 2$$

可见 $|A| \neq 0$, 所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 2 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 2$$

可见 $|A| \neq 0$, 所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

例 2 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 2$$

可见 $|A| \neq 0$, 所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -5/2 & 4 & -3/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

例 3 假设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的行列式不为零, 求 A^{-1} 。

例 3 假设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的行列式不为零, 求 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

2. 求出伴随矩阵 A^* :

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 3 假设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的行列式不为零, 求 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

2. 求出伴随矩阵 A^* :

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 3 假设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的行列式不为零, 求 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

2. 求出伴随矩阵 A^* :

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 3 假设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的行列式不为零, 求 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

由假设 $|A| \neq 0$ 。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 3 假设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的行列式不为零, 求 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

由假设 $|A| \neq 0$ 。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 3 假设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的行列式不为零, 求 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

由假设 $|A| \neq 0$ 。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 3 假设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的行列式不为零, 求 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

由假设 $|A| \neq 0$ 。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 3 假设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的行列式不为零, 求 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

由假设 $|A| \neq 0$ 。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 3 假设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的行列式不为零, 求 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

由假设 $|A| \neq 0$ 。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & \\ * & \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 3 假设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的行列式不为零, 求 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

由假设 $|A| \neq 0$ 。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 3 假设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的行列式不为零, 求 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

由假设 $|A| \neq 0$ 。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & * \\ -c & * \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 3 假设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的行列式不为零, 求 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

由假设 $|A| \neq 0$ 。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 3 假设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的行列式不为零, 求 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

由假设 $|A| \neq 0$ 。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & * \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 3 假设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的行列式不为零, 求 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

由假设 $|A| \neq 0$ 。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 3 假设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的行列式不为零, 求 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

由假设 $|A| \neq 0$ 。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

例 3 假设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的行列式不为零, 求 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

由假设 $|A| \neq 0$ 。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

例如 $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$

例 3 假设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的行列式不为零, 求 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

由假设 $|A| \neq 0$ 。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

例如 $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\quad} \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$

例 3 假设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的行列式不为零, 求 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

由假设 $|A| \neq 0$ 。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

例如 $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

例 3 假设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的行列式不为零, 求 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

由假设 $|A| \neq 0$ 。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

例如 $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & \\ & 6 \end{pmatrix}$

例 3 假设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的行列式不为零, 求 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

由假设 $|A| \neq 0$ 。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

例如 $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$

例 3 假设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的行列式不为零, 求 A^{-1} 。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

由假设 $|A| \neq 0$ 。

2. 求出伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

例如 $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

例 求解方程组 $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = -1 \\ x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$

解

例 求解方程组 $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = -1 \\ x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$

解

$$Ax = b$$

例 求解方程组 $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = -1 \\ x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow Ax = b$$

例 求解方程组 $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = -1 \\ x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow Ax = b$$

$$\Rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b$$

例 求解方程组 $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = -1 \\ x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow Ax = b$$

$$\Rightarrow Ix = A^{-1}Ax = A^{-1}b$$

例 求解方程组 $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = -1 \\ x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow Ax = b$$

$$\Rightarrow x = Ix = A^{-1}Ax = A^{-1}b$$

例 求解方程组 $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = -1 \\ x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow Ax = b$$

$$\Rightarrow x = Ix = A^{-1}Ax = A^{-1}b$$

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

例 求解方程组 $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = -1 \\ x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow Ax = b$$

$$\Rightarrow x = Ix = A^{-1}Ax = A^{-1}b$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x &= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\quad} \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例 求解方程组 $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = -1 \\ x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow Ax = b$$

$$\Rightarrow x = Ix = A^{-1}Ax = A^{-1}b$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x &= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2 \cdot 3 - 5 \cdot 1} \begin{pmatrix} \quad \quad \quad \\ \quad \quad \quad \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例 求解方程组 $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = -1 \\ x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow Ax = b$$

$$\Rightarrow x = Ix = A^{-1}Ax = A^{-1}b$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x &= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2 \cdot 3 - 5 \cdot 1} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例 求解方程组 $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = -1 \\ x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow Ax = b$$

$$\Rightarrow x = Ix = A^{-1}Ax = A^{-1}b$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x &= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2 \cdot 3 - 5 \cdot 1} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例 求解方程组 $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = -1 \\ x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow Ax = b$$

$$\Rightarrow x = Ix = A^{-1}Ax = A^{-1}b$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x &= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2 \cdot 3 - 5 \cdot 1} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -18 \\ 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例 3 判断 $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

例 3 判断 $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{pmatrix}$$

例 3 判断 $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{pmatrix}$$



计算量很大...

例3 判断 $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出 A^{-1} 。

解

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{pmatrix}$$



- 计算量很大...

- 后面还会介绍其他计算方法...

可逆矩阵性质

性质 对于 n 阶矩阵 A , 如果 $AB = I_n$, 则 B 为 A 的逆矩阵

可逆矩阵性质

性质 对于 n 阶矩阵 A , 如果 $AB = I_n$, 则 B 为 A 的逆矩阵 (也就是此时自动成立 $BA = I_n$)。

可逆矩阵性质

性质 对于 n 阶矩阵 A , 如果 $AB = I_n$, 则 B 为 A 的逆矩阵 (也就是此时自动成立 $BA = I_n$)。

证明 1. 先说明 $|A| \neq 0$:

可逆矩阵性质

性质 对于 n 阶矩阵 A , 如果 $AB = I_n$, 则 B 为 A 的逆矩阵 (也就是此时自动成立 $BA = I_n$)。

证明 1. 先说明 $|A| \neq 0$:

$$|AB| = |I_n|$$

可逆矩阵性质

性质 对于 n 阶矩阵 A ，如果 $AB = I_n$ ，则 B 为 A 的逆矩阵（也就是此时自动成立 $BA = I_n$ ）。

证明 1. 先说明 $|A| \neq 0$ ：

$$|AB| = |I_n| = 1$$

可逆矩阵性质

性质 对于 n 阶矩阵 A , 如果 $AB = I_n$, 则 B 为 A 的逆矩阵 (也就是此时自动成立 $BA = I_n$)。

证明 1. 先说明 $|A| \neq 0$:

$$|AB| = |I_n| = 1 \quad \Rightarrow \quad |A| \cdot |B| = 1$$

可逆矩阵性质

性质 对于 n 阶矩阵 A , 如果 $AB = I_n$, 则 B 为 A 的逆矩阵 (也就是此时自动成立 $BA = I_n$)。

证明 1. 先说明 $|A| \neq 0$:

$$|AB| = |I_n| = 1 \Rightarrow |A| \cdot |B| = 1 \Rightarrow |A| \neq 0$$

可逆矩阵性质

性质 对于 n 阶矩阵 A , 如果 $AB = I_n$, 则 B 为 A 的逆矩阵 (也就是此时自动成立 $BA = I_n$)。

证明 1. 先说明 $|A| \neq 0$:

$$|AB| = |I_n| = 1 \Rightarrow |A| \cdot |B| = 1 \Rightarrow |A| \neq 0$$

2. 由于 $|A| \neq 0$, 故 A 可逆, 存在 A^{-1} 。

可逆矩阵性质

性质 对于 n 阶矩阵 A , 如果 $AB = I_n$, 则 B 为 A 的逆矩阵 (也就是此时自动成立 $BA = I_n$)。

证明 1. 先说明 $|A| \neq 0$:

$$|AB| = |I_n| = 1 \Rightarrow |A| \cdot |B| = 1 \Rightarrow |A| \neq 0$$

2. 由于 $|A| \neq 0$, 故 A 可逆, 存在 A^{-1} 。所以

$$A^{-1}AB$$

可逆矩阵性质

性质 对于 n 阶矩阵 A , 如果 $AB = I_n$, 则 B 为 A 的逆矩阵 (也就是此时自动成立 $BA = I_n$)。

证明 1. 先说明 $|A| \neq 0$:

$$|AB| = |I_n| = 1 \Rightarrow |A| \cdot |B| = 1 \Rightarrow |A| \neq 0$$

2. 由于 $|A| \neq 0$, 故 A 可逆, 存在 A^{-1} 。所以

$$= A^{-1}AB =$$

可逆矩阵性质

性质 对于 n 阶矩阵 A , 如果 $AB = I_n$, 则 B 为 A 的逆矩阵 (也就是此时自动成立 $BA = I_n$)。

证明 1. 先说明 $|A| \neq 0$:

$$|AB| = |I_n| = 1 \Rightarrow |A| \cdot |B| = 1 \Rightarrow |A| \neq 0$$

2. 由于 $|A| \neq 0$, 故 A 可逆, 存在 A^{-1} 。所以

$$= A^{-1}AB = I_n B =$$

可逆矩阵性质

性质 对于 n 阶矩阵 A , 如果 $AB = I_n$, 则 B 为 A 的逆矩阵 (也就是此时自动成立 $BA = I_n$)。

证明 1. 先说明 $|A| \neq 0$:

$$|AB| = |I_n| = 1 \Rightarrow |A| \cdot |B| = 1 \Rightarrow |A| \neq 0$$

2. 由于 $|A| \neq 0$, 故 A 可逆, 存在 A^{-1} 。所以

$$= A^{-1}AB = I_n B = B$$

可逆矩阵性质

性质 对于 n 阶矩阵 A , 如果 $AB = I_n$, 则 B 为 A 的逆矩阵 (也就是此时自动成立 $BA = I_n$)。

证明 1. 先说明 $|A| \neq 0$:

$$|AB| = |I_n| = 1 \Rightarrow |A| \cdot |B| = 1 \Rightarrow |A| \neq 0$$

2. 由于 $|A| \neq 0$, 故 A 可逆, 存在 A^{-1} 。所以

$$= A^{-1}I_n = A^{-1}AB = I_nB = B$$

可逆矩阵性质

性质 对于 n 阶矩阵 A , 如果 $AB = I_n$, 则 B 为 A 的逆矩阵 (也就是此时自动成立 $BA = I_n$)。

证明 1. 先说明 $|A| \neq 0$:

$$|AB| = |I_n| = 1 \Rightarrow |A| \cdot |B| = 1 \Rightarrow |A| \neq 0$$

2. 由于 $|A| \neq 0$, 故 A 可逆, 存在 A^{-1} 。所以

$$A^{-1} = A^{-1}I_n = A^{-1}AB = I_nB = B$$

可逆矩阵性质

性质 对于 n 阶矩阵 A , 如果 $AB = I_n$, 则 B 为 A 的逆矩阵 (也就是此时自动成立 $BA = I_n$)。

证明 1. 先说明 $|A| \neq 0$:

$$|AB| = |I_n| = 1 \Rightarrow |A| \cdot |B| = 1 \Rightarrow |A| \neq 0$$

2. 由于 $|A| \neq 0$, 故 A 可逆, 存在 A^{-1} 。所以

$$A^{-1} = A^{-1}I_n = A^{-1}AB = I_nB = B$$

例 1 假设方阵 A 满足 $2A^2 - 3A + 4I = O$, 证明 A 可逆, 并求出 A^{-1}

可逆矩阵性质

性质 对于 n 阶矩阵 A , 如果 $AB = I_n$, 则 B 为 A 的逆矩阵 (也就是此时自动成立 $BA = I_n$)。

证明 1. 先说明 $|A| \neq 0$:

$$|AB| = |I_n| = 1 \Rightarrow |A| \cdot |B| = 1 \Rightarrow |A| \neq 0$$

2. 由于 $|A| \neq 0$, 故 A 可逆, 存在 A^{-1} 。所以

$$A^{-1} = A^{-1}I_n = A^{-1}AB = I_nB = B$$

例 1 假设方阵 A 满足 $2A^2 - 3A + 4I = O$, 证明 A 可逆, 并求出 A^{-1}

解

$$A \left(\quad \right) = I$$

可逆矩阵性质

性质 对于 n 阶矩阵 A , 如果 $AB = I_n$, 则 B 为 A 的逆矩阵 (也就是此时自动成立 $BA = I_n$)。

证明 1. 先说明 $|A| \neq 0$:

$$|AB| = |I_n| = 1 \Rightarrow |A| \cdot |B| = 1 \Rightarrow |A| \neq 0$$

2. 由于 $|A| \neq 0$, 故 A 可逆, 存在 A^{-1} 。所以

$$A^{-1} = A^{-1}I_n = A^{-1}AB = I_nB = B$$

例 1 假设方阵 A 满足 $2A^2 - 3A + 4I = O$, 证明 A 可逆, 并求出 A^{-1}

解 $2A^2 - 3A = -4I$

$$A \left(\quad \right) = I$$

可逆矩阵性质

性质 对于 n 阶矩阵 A , 如果 $AB = I_n$, 则 B 为 A 的逆矩阵 (也就是此时自动成立 $BA = I_n$)。

证明 1. 先说明 $|A| \neq 0$:

$$|AB| = |I_n| = 1 \Rightarrow |A| \cdot |B| = 1 \Rightarrow |A| \neq 0$$

2. 由于 $|A| \neq 0$, 故 A 可逆, 存在 A^{-1} 。所以

$$A^{-1} = A^{-1}I_n = A^{-1}AB = I_nB = B$$

例 1 假设方阵 A 满足 $2A^2 - 3A + 4I = O$, 证明 A 可逆, 并求出 A^{-1}

解 $2A^2 - 3A = -4I \Rightarrow A(2A - 3I) = -4I \quad A \left(\quad \right) = I$

可逆矩阵性质

性质 对于 n 阶矩阵 A , 如果 $AB = I_n$, 则 B 为 A 的逆矩阵 (也就是此时自动成立 $BA = I_n$)。

证明 1. 先说明 $|A| \neq 0$:

$$|AB| = |I_n| = 1 \Rightarrow |A| \cdot |B| = 1 \Rightarrow |A| \neq 0$$

2. 由于 $|A| \neq 0$, 故 A 可逆, 存在 A^{-1} 。所以

$$A^{-1} = A^{-1}I_n = A^{-1}AB = I_nB = B$$

例 1 假设方阵 A 满足 $2A^2 - 3A + 4I = O$, 证明 A 可逆, 并求出 A^{-1}

解 $2A^2 - 3A = -4I \Rightarrow A(2A - 3I) = -4I \Rightarrow A\left(-\frac{1}{2}A + \frac{3}{4}I\right) = I$

可逆矩阵性质

性质 对于 n 阶矩阵 A , 如果 $AB = I_n$, 则 B 为 A 的逆矩阵 (也就是此时自动成立 $BA = I_n$)。

证明 1. 先说明 $|A| \neq 0$:

$$|AB| = |I_n| = 1 \Rightarrow |A| \cdot |B| = 1 \Rightarrow |A| \neq 0$$

2. 由于 $|A| \neq 0$, 故 A 可逆, 存在 A^{-1} 。所以

$$A^{-1} = A^{-1}I_n = A^{-1}AB = I_nB = B$$

例 1 假设方阵 A 满足 $2A^2 - 3A + 4I = O$, 证明 A 可逆, 并求出 A^{-1}

解 $2A^2 - 3A = -4I \Rightarrow A(2A - 3I) = -4I \Rightarrow A\left(-\frac{1}{2}A + \frac{3}{4}I\right) = I$

所以 A 可逆

可逆矩阵性质

性质 对于 n 阶矩阵 A , 如果 $AB = I_n$, 则 B 为 A 的逆矩阵 (也就是此时自动成立 $BA = I_n$)。

证明 1. 先说明 $|A| \neq 0$:

$$|AB| = |I_n| = 1 \Rightarrow |A| \cdot |B| = 1 \Rightarrow |A| \neq 0$$

2. 由于 $|A| \neq 0$, 故 A 可逆, 存在 A^{-1} 。所以

$$A^{-1} = A^{-1}I_n = A^{-1}AB = I_nB = B$$

例 1 假设方阵 A 满足 $2A^2 - 3A + 4I = O$, 证明 A 可逆, 并求出 A^{-1}

解 $2A^2 - 3A = -4I \Rightarrow A(2A - 3I) = -4I \Rightarrow A\left(-\frac{1}{2}A + \frac{3}{4}I\right) = I$

所以 A 可逆, 并且 $A^{-1} = -\frac{1}{2}A + \frac{3}{4}I$

可逆矩阵性质

例 2 假设方阵 A 满足 $2A^2 + 5A - I = O$, 证明 A 可逆, 并求出 A^{-1}

可逆矩阵性质

例 2 假设方阵 A 满足 $2A^2 + 5A - I = O$, 证明 A 可逆, 并求出 A^{-1}

解

$$A(\quad) = I$$

可逆矩阵性质

例 2 假设方阵 A 满足 $2A^2 + 5A - I = O$, 证明 A 可逆, 并求出 A^{-1}

解

$$2A^2 + 5A = I \quad A(\quad) = I$$

可逆矩阵性质

例 2 假设方阵 A 满足 $2A^2 + 5A - I = O$, 证明 A 可逆, 并求出 A^{-1}

解

$$2A^2 + 5A = I \Rightarrow A(2A + 5I) = I$$

可逆矩阵性质

例 2 假设方阵 A 满足 $2A^2 + 5A - I = O$, 证明 A 可逆, 并求出 A^{-1}

解

$$2A^2 + 5A = I \Rightarrow A(2A + 5I) = I$$

所以 A 可逆

可逆矩阵性质

例 2 假设方阵 A 满足 $2A^2 + 5A - I = O$, 证明 A 可逆, 并求出 A^{-1}

解

$$2A^2 + 5A = I \Rightarrow A(2A + 5I) = I$$

所以 A 可逆, 并且 $A^{-1} = 2A + 5I$

可逆矩阵性质

1. 若 A 可逆, 则 A^{-1} 也可逆

可逆矩阵性质

1. 若 A 可逆, 则 A^{-1} 也可逆, 而且 $(A^{-1})^{-1} = A$;

可逆矩阵性质

1. 若 A 可逆, 则 A^{-1} 也可逆, 而且 $(A^{-1})^{-1} = A$;

证明

1. 这是: $AA^{-1} = I_n$

可逆矩阵性质

1. 若 A 可逆, 则 A^{-1} 也可逆, 而且 $(A^{-1})^{-1} = A$;
2. 若 A 可逆且 $k \neq 0$, 则 kA 也可逆

证明

1. 这是: $AA^{-1} = I_n$

可逆矩阵性质

1. 若 A 可逆, 则 A^{-1} 也可逆, 而且 $(A^{-1})^{-1} = A$;
2. 若 A 可逆且 $k \neq 0$, 则 kA 也可逆, 而且 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$;

证明

1. 这是: $AA^{-1} = I_n$

可逆矩阵性质

1. 若 A 可逆, 则 A^{-1} 也可逆, 而且 $(A^{-1})^{-1} = A$;
2. 若 A 可逆且 $k \neq 0$, 则 kA 也可逆, 而且 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$;

证明

1. 这是: $AA^{-1} = I_n$
2. 这是: $(kA)\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right) =$

可逆矩阵性质

1. 若 A 可逆, 则 A^{-1} 也可逆, 而且 $(A^{-1})^{-1} = A$;
2. 若 A 可逆且 $k \neq 0$, 则 kA 也可逆, 而且 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$;

证明

1. 这是: $AA^{-1} = I_n$
2. 这是: $(kA)\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right) = (k\frac{1}{k})(AA^{-1}) =$

可逆矩阵性质

1. 若 A 可逆, 则 A^{-1} 也可逆, 而且 $(A^{-1})^{-1} = A$;
2. 若 A 可逆且 $k \neq 0$, 则 kA 也可逆, 而且 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$;

证明

1. 这是: $AA^{-1} = I_n$
2. 这是: $(kA)\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right) = \left(k\frac{1}{k}\right)(AA^{-1}) = I_n$

可逆矩阵性质

1. 若 A 可逆, 则 A^{-1} 也可逆, 而且 $(A^{-1})^{-1} = A$;
2. 若 A 可逆且 $k \neq 0$, 则 kA 也可逆, 而且 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$;
3. 若 A, B 为同阶可逆矩阵, 则 AB 也可逆

证明

1. 这是: $AA^{-1} = I_n$
2. 这是: $(kA)\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right) = \left(k\frac{1}{k}\right)(AA^{-1}) = I_n$

可逆矩阵性质

1. 若 A 可逆, 则 A^{-1} 也可逆, 而且 $(A^{-1})^{-1} = A$;
2. 若 A 可逆且 $k \neq 0$, 则 kA 也可逆, 而且 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$;
3. 若 A, B 为同阶可逆矩阵, 则 AB 也可逆, 而且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

证明

1. 这是: $AA^{-1} = I_n$
2. 这是: $(kA)\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right) = (k\frac{1}{k})(AA^{-1}) = I_n$

可逆矩阵性质

1. 若 A 可逆, 则 A^{-1} 也可逆, 而且 $(A^{-1})^{-1} = A$;
2. 若 A 可逆且 $k \neq 0$, 则 kA 也可逆, 而且 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$;
3. 若 A, B 为同阶可逆矩阵, 则 AB 也可逆, 而且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

证明

1. 这是: $AA^{-1} = I_n$
2. 这是: $(kA)\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right) = \left(k\frac{1}{k}\right)(AA^{-1}) = I_n$
3. 这是: $(AB)(B^{-1}A^{-1}) =$

可逆矩阵性质

1. 若 A 可逆, 则 A^{-1} 也可逆, 而且 $(A^{-1})^{-1} = A$;
2. 若 A 可逆且 $k \neq 0$, 则 kA 也可逆, 而且 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$;
3. 若 A, B 为同阶可逆矩阵, 则 AB 也可逆, 而且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

证明

1. 这是: $AA^{-1} = I_n$
2. 这是: $(kA)\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right) = \left(k\frac{1}{k}\right)(AA^{-1}) = I_n$
3. 这是: $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} =$

可逆矩阵性质

1. 若 A 可逆, 则 A^{-1} 也可逆, 而且 $(A^{-1})^{-1} = A$;
2. 若 A 可逆且 $k \neq 0$, 则 kA 也可逆, 而且 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$;
3. 若 A, B 为同阶可逆矩阵, 则 AB 也可逆, 而且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

证明

1. 这是: $AA^{-1} = I_n$
2. 这是: $(kA)\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right) = \left(k\frac{1}{k}\right)(AA^{-1}) = I_n$
3. 这是: $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = AI_nA^{-1} =$

可逆矩阵性质

1. 若 A 可逆, 则 A^{-1} 也可逆, 而且 $(A^{-1})^{-1} = A$;
2. 若 A 可逆且 $k \neq 0$, 则 kA 也可逆, 而且 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$;
3. 若 A, B 为同阶可逆矩阵, 则 AB 也可逆, 而且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

证明

1. 这是: $AA^{-1} = I_n$
2. 这是: $(kA)\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right) = \left(k\frac{1}{k}\right)(AA^{-1}) = I_n$
3. 这是: $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} =$

可逆矩阵性质

1. 若 A 可逆, 则 A^{-1} 也可逆, 而且 $(A^{-1})^{-1} = A$;
2. 若 A 可逆且 $k \neq 0$, 则 kA 也可逆, 而且 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$;
3. 若 A, B 为同阶可逆矩阵, 则 AB 也可逆, 而且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

证明

1. 这是: $AA^{-1} = I_n$
2. 这是: $(kA)\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right) = \left(k\frac{1}{k}\right)(AA^{-1}) = I_n$
3. 这是: $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$

可逆矩阵性质

1. 若 A 可逆, 则 A^{-1} 也可逆, 而且 $(A^{-1})^{-1} = A$;
2. 若 A 可逆且 $k \neq 0$, 则 kA 也可逆, 而且 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$;
3. 若 A, B 为同阶可逆矩阵, 则 AB 也可逆, 而且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
4. 若 A 可逆, 则 $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

证明

1. 这是: $AA^{-1} = I_n$
2. 这是: $(kA)\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right) = (k\frac{1}{k})(AA^{-1}) = I_n$
3. 这是: $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$

可逆矩阵性质

1. 若 A 可逆, 则 A^{-1} 也可逆, 而且 $(A^{-1})^{-1} = A$;
2. 若 A 可逆且 $k \neq 0$, 则 kA 也可逆, 而且 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$;
3. 若 A, B 为同阶可逆矩阵, 则 AB 也可逆, 而且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
4. 若 A 可逆, 则 $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

证明

1. 这是: $AA^{-1} = I_n$
2. 这是: $(kA)\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right) = (k\frac{1}{k})(AA^{-1}) = I_n$
3. 这是: $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$
4. 这是: $|AA^{-1}| = |I_n|$

可逆矩阵性质

1. 若 A 可逆, 则 A^{-1} 也可逆, 而且 $(A^{-1})^{-1} = A$;
2. 若 A 可逆且 $k \neq 0$, 则 kA 也可逆, 而且 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$;
3. 若 A, B 为同阶可逆矩阵, 则 AB 也可逆, 而且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
4. 若 A 可逆, 则 $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

证明

1. 这是: $AA^{-1} = I_n$
2. 这是: $(kA)\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right) = (k\frac{1}{k})(AA^{-1}) = I_n$
3. 这是: $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$
4. 这是: $|AA^{-1}| = |I_n| = 1$

可逆矩阵性质

1. 若 A 可逆, 则 A^{-1} 也可逆, 而且 $(A^{-1})^{-1} = A$;
2. 若 A 可逆且 $k \neq 0$, 则 kA 也可逆, 而且 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$;
3. 若 A, B 为同阶可逆矩阵, 则 AB 也可逆, 而且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
4. 若 A 可逆, 则 $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

证明

1. 这是: $AA^{-1} = I_n$
2. 这是: $(kA)\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right) = (k\frac{1}{k})(AA^{-1}) = I_n$
3. 这是: $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$
4. 这是: $|A| \cdot |A^{-1}| = |AA^{-1}| = |I_n| = 1$

例 1 由于矩阵的乘法是不满足交换律的，因此求解矩阵方程时要注意逆矩阵的摆放位置。例如

$$1. AX = C \implies X = ?$$

例 1 由于矩阵的乘法是不满足交换律的，因此求解矩阵方程时要注意逆矩阵的摆放位置。例如

$$1. AX = C \implies X = A^{-1}C$$

例 1 由于矩阵的乘法是不满足交换律的，因此求解矩阵方程时要注意逆矩阵的摆放位置。例如

$$1. AX = C \xrightarrow{AX=C} X = A^{-1}C$$

例 1 由于矩阵的乘法是不满足交换律的，因此求解矩阵方程时要注意逆矩阵的摆放位置。例如

$$1. AX = C \xrightarrow{A^{-1}AX=A^{-1}C} X = A^{-1}C$$

例 1 由于矩阵的乘法是不满足交换律的，因此求解矩阵方程时要注意逆矩阵的摆放位置。例如

$$1. AX = C \xrightarrow{A^{-1}AX=A^{-1}C} X = A^{-1}C$$

$$2. XA = C \xrightarrow{\quad\quad\quad} X = ?$$

例 1 由于矩阵的乘法是不满足交换律的，因此求解矩阵方程时要注意逆矩阵的摆放位置。例如

$$1. AX = C \xrightarrow{A^{-1}AX=A^{-1}C} X = A^{-1}C$$

$$2. XA = C \xrightarrow{\quad\quad\quad} X = CA^{-1}$$

例 1 由于矩阵的乘法是不满足交换律的，因此求解矩阵方程时要注意逆矩阵的摆放位置。例如

$$1. AX = C \xrightarrow{A^{-1}AX=A^{-1}C} X = A^{-1}C$$

$$2. XA = C \xrightarrow{XA=C} X = CA^{-1}$$

例 1 由于矩阵的乘法是不满足交换律的，因此求解矩阵方程时要注意逆矩阵的摆放位置。例如

$$1. AX = C \xrightarrow{A^{-1}AX=A^{-1}C} X = A^{-1}C$$

$$2. XA = C \xrightarrow{XAA^{-1}=CA^{-1}} X = CA^{-1}$$

例 1 由于矩阵的乘法是不满足交换律的，因此求解矩阵方程时要注意逆矩阵的摆放位置。例如

$$1. AX = C \xrightarrow{A^{-1}AX=A^{-1}C} X = A^{-1}C$$

$$2. XA = C \xrightarrow{XAA^{-1}=CA^{-1}} X = CA^{-1}$$

$$3. AXB = C \xrightarrow{\hspace{2cm}} X = ?$$

$$4. XAB = C \xrightarrow{\hspace{2cm}} X = ?$$

$$5. ABX = C \xrightarrow{\hspace{2cm}} X = ?$$

例 1 由于矩阵的乘法是不满足交换律的，因此求解矩阵方程时要注意逆矩阵的摆放位置。例如

$$1. AX = C \xrightarrow{A^{-1}AX=A^{-1}C} X = A^{-1}C$$

$$2. XA = C \xrightarrow{XAA^{-1}=CA^{-1}} X = CA^{-1}$$

$$3. AXB = C \xrightarrow{\hspace{1cm}} X = A^{-1}CB^{-1}$$

$$4. XAB = C \xrightarrow{\hspace{1cm}} X = ?$$

$$5. ABX = C \xrightarrow{\hspace{1cm}} X = ?$$

例 1 由于矩阵的乘法是不满足交换律的，因此求解矩阵方程时要注意逆矩阵的摆放位置。例如

$$1. AX = C \xrightarrow{A^{-1}AX=A^{-1}C} X = A^{-1}C$$

$$2. XA = C \xrightarrow{XAA^{-1}=CA^{-1}} X = CA^{-1}$$

$$3. AXB = C \xrightarrow{AXB = C} X = A^{-1}CB^{-1}$$

$$4. XAB = C \xrightarrow{\quad\quad\quad} X = ?$$

$$5. ABX = C \xrightarrow{\quad\quad\quad} X = ?$$

例 1 由于矩阵的乘法是不满足交换律的，因此求解矩阵方程时要注意逆矩阵的摆放位置。例如

$$1. AX = C \xrightarrow{A^{-1}AX=A^{-1}C} X = A^{-1}C$$

$$2. XA = C \xrightarrow{XAA^{-1}=CA^{-1}} X = CA^{-1}$$

$$3. AXB = C \xrightarrow{A^{-1}AXB = A^{-1}C} X = A^{-1}CB^{-1}$$

$$4. XAB = C \xrightarrow{\hspace{1cm}} X = ?$$

$$5. ABX = C \xrightarrow{\hspace{1cm}} X = ?$$

例 1 由于矩阵的乘法是不满足交换律的，因此求解矩阵方程时要注意逆矩阵的摆放位置。例如

$$1. AX = C \xrightarrow{A^{-1}AX=A^{-1}C} X = A^{-1}C$$

$$2. XA = C \xrightarrow{XAA^{-1}=CA^{-1}} X = CA^{-1}$$

$$3. AXB = C \xrightarrow{A^{-1}AXB B^{-1}=A^{-1}CB^{-1}} X = A^{-1}CB^{-1}$$

$$4. XAB = C \xrightarrow{\hspace{1cm}} X = ?$$

$$5. ABX = C \xrightarrow{\hspace{1cm}} X = ?$$

例 1 由于矩阵的乘法是不满足交换律的，因此求解矩阵方程时要注意逆矩阵的摆放位置。例如

$$1. AX = C \xrightarrow{A^{-1}AX=A^{-1}C} X = A^{-1}C$$

$$2. XA = C \xrightarrow{XAA^{-1}=CA^{-1}} X = CA^{-1}$$

$$3. AXB = C \xrightarrow{A^{-1}AXB B^{-1}=A^{-1}CB^{-1}} X = A^{-1}CB^{-1}$$

$$4. XAB = C \xrightarrow{\hspace{1cm}} X = CB^{-1}A^{-1}$$

$$5. ABX = C \xrightarrow{\hspace{1cm}} X = ?$$

例 1 由于矩阵的乘法是不满足交换律的，因此求解矩阵方程时要注意逆矩阵的摆放位置。例如

$$1. AX = C \xrightarrow{A^{-1}AX=A^{-1}C} X = A^{-1}C$$

$$2. XA = C \xrightarrow{XAA^{-1}=CA^{-1}} X = CA^{-1}$$

$$3. AXB = C \xrightarrow{A^{-1}AXB B^{-1}=A^{-1}CB^{-1}} X = A^{-1}CB^{-1}$$

$$4. XAB = C \xrightarrow{X= C(AB)^{-1}} X = CB^{-1}A^{-1}$$

$$5. ABX = C \xrightarrow{\hspace{1cm}} X = ?$$

例 1 由于矩阵的乘法是不满足交换律的，因此求解矩阵方程时要注意逆矩阵的摆放位置。例如

$$1. AX = C \xrightarrow{A^{-1}AX=A^{-1}C} X = A^{-1}C$$

$$2. XA = C \xrightarrow{XAA^{-1}=CA^{-1}} X = CA^{-1}$$

$$3. AXB = C \xrightarrow{A^{-1}AXB B^{-1}=A^{-1}CB^{-1}} X = A^{-1}CB^{-1}$$

$$4. XAB = C \xrightarrow{X= C(AB)^{-1}=CB^{-1}A^{-1}} X = CB^{-1}A^{-1}$$

$$5. ABX = C \xrightarrow{\hspace{1cm}} X = ?$$

例 1 由于矩阵的乘法是不满足交换律的，因此求解矩阵方程时要注意逆矩阵的摆放位置。例如

$$1. AX = C \xrightarrow{A^{-1}AX=A^{-1}C} X = A^{-1}C$$

$$2. XA = C \xrightarrow{XAA^{-1}=CA^{-1}} X = CA^{-1}$$

$$3. AXB = C \xrightarrow{A^{-1}AXB B^{-1}=A^{-1}CB^{-1}} X = A^{-1}CB^{-1}$$

$$4. XAB = C \xrightarrow{X= C(AB)^{-1}=CB^{-1}A^{-1}} X = CB^{-1}A^{-1}$$

$$5. ABX = C \xrightarrow{\hspace{1cm}} X = B^{-1}A^{-1}C$$

例 1 由于矩阵的乘法是不满足交换律的，因此求解矩阵方程时要注意逆矩阵的摆放位置。例如

$$1. AX = C \xrightarrow{A^{-1}AX=A^{-1}C} X = A^{-1}C$$

$$2. XA = C \xrightarrow{XAA^{-1}=CA^{-1}} X = CA^{-1}$$

$$3. AXB = C \xrightarrow{A^{-1}AXB B^{-1}=A^{-1}CB^{-1}} X = A^{-1}CB^{-1}$$

$$4. XAB = C \xrightarrow{X= C(AB)^{-1}=CB^{-1}A^{-1}} X = CB^{-1}A^{-1}$$

$$5. ABX = C \xrightarrow{X=} X = B^{-1}A^{-1}C$$

例 1 由于矩阵的乘法是不满足交换律的，因此求解矩阵方程时要注意逆矩阵的摆放位置。例如

$$1. AX = C \xrightarrow{A^{-1}AX=A^{-1}C} X = A^{-1}C$$

$$2. XA = C \xrightarrow{XAA^{-1}=CA^{-1}} X = CA^{-1}$$

$$3. AXB = C \xrightarrow{A^{-1}AXB B^{-1}=A^{-1}CB^{-1}} X = A^{-1}CB^{-1}$$

$$4. XAB = C \xrightarrow{X= C(AB)^{-1}=CB^{-1}A^{-1}} X = CB^{-1}A^{-1}$$

$$5. ABX = C \xrightarrow{X=(AB)^{-1}C} X = B^{-1}A^{-1}C$$

例 1 由于矩阵的乘法是不满足交换律的，因此求解矩阵方程时要注意逆矩阵的摆放位置。例如

$$1. AX = C \xrightarrow{A^{-1}AX=A^{-1}C} X = A^{-1}C$$

$$2. XA = C \xrightarrow{XAA^{-1}=CA^{-1}} X = CA^{-1}$$

$$3. AXB = C \xrightarrow{A^{-1}AXB B^{-1}=A^{-1}CB^{-1}} X = A^{-1}CB^{-1}$$

$$4. XAB = C \xrightarrow{X= C(AB)^{-1}=CB^{-1}A^{-1}} X = CB^{-1}A^{-1}$$

$$5. ABX = C \xrightarrow{X=(AB)^{-1}C=B^{-1}A^{-1}C} X = B^{-1}A^{-1}C$$

例 2 假设 2 阶方阵 X 满足: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, 求 X 。

例 2 假设 2 阶方阵 X 满足: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, 求 X 。

解

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

例 2 假设 2 阶方阵 X 满足: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, 求 X 。

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

例 2 假设 2 阶方阵 X 满足: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, 求 X 。

解 $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

例 2 假设 2 阶方阵 X 满足: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, 求 X 。

解 $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$, 所以 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 可逆, 且

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

例 2 假设 2 阶方阵 X 满足: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, 求 X 。

解 $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$, 所以 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 可逆, 且

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-} \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

例 2 假设 2 阶方阵 X 满足: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, 求 X 。

解 $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$, 所以 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 可逆, 且

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

例 2 假设 2 阶方阵 X 满足: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, 求 X 。

解 $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$, 所以 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 可逆, 且

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

例 2 假设 2 阶方阵 X 满足: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, 求 X 。

解 $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$, 所以 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 可逆, 且

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

例 2 假设 2 阶方阵 X 满足: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, 求 X 。

解 $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$, 所以 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 可逆, 且

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \end{aligned}$$

例 2 假设 2 阶方阵 X 满足: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, 求 X 。

解 $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$, 所以 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 可逆, 且

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

例 2 假设 2 阶方阵 X 满足: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, 求 X 。

解 $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$, 所以 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 可逆, 且

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例 2 假设 2 阶方阵 X 满足: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, 求 X 。

解 $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$, 所以 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 可逆, 且

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例 3 假设 2 阶方阵 X 满足: $X \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, 求 X 。

例 3 假设 2 阶方阵 X 满足: $X \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, 求 X 。

例 3 假设 2 阶方阵 X 满足: $X \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, 求 X 。

解

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$$

例 3 假设 2 阶方阵 X 满足: $X \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, 求 X 。

解

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$$

例 3 假设 2 阶方阵 X 满足: $X \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, 求 X 。

解 $\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 8$

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$$

例 3 假设 2 阶方阵 X 满足: $X \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, 求 X 。

解 $\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 8$, 所以 $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ 可逆, 且

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$$

例 3 假设 2 阶方阵 X 满足: $X \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, 求 X 。

解 $\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 8$, 所以 $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ 可逆, 且

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$$

例 3 假设 2 阶方阵 X 满足: $X \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, 求 X 。

解 $\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 8$, 所以 $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ 可逆, 且

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$$

例 3 假设 2 阶方阵 X 满足: $X \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, 求 X 。

解 $\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 8$, 所以 $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ 可逆, 且

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & \\ & 6 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$$

例 3 假设 2 阶方阵 X 满足: $X \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, 求 X 。

解 $\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 8$, 所以 $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ 可逆, 且

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$$

例 3 假设 2 阶方阵 X 满足: $X \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, 求 X 。

解 $\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 8$, 所以 $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ 可逆, 且

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \end{aligned}$$

例 3 假设 2 阶方阵 X 满足: $X \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, 求 X 。

解 $\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 8$, 所以 $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ 可逆, 且

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

例3 假设 2 阶方阵 X 满足: $X \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, 求 X 。

解 $\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 8$, 所以 $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ 可逆, 且

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$