

第 11 周作业解答

练习 1. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量。

解

- 解特征方程 $|\lambda I - A| = 0$ 。

$$\begin{aligned} |\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -6 & 3 \\ 1 & \lambda & -1 \\ -1 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -6 & 3 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 0 & \lambda - 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -6 & 3 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2 - c_3} (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -9 & 3 \\ 1 & \lambda + 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -9 \\ 1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (\lambda - 2)^3 \end{aligned}$$

所以特征值为 $\lambda_1 = 2$ (这是三重特征值)。

- 关于特征值 $\lambda_1 = 2$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$ 。

$$(\lambda_1 I - A)x = 0 = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -6 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

同解方程组为

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -2x_2 + x_3$$

自由变量取为 x_2, x_3 。分别取 $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 得基础解系

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以对应于特征值 $\lambda_1 = 2$ 的所有特征向量为:

$$c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

其中 c_1, c_2 是不全为零的任意常数。

练习 2. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量。

解

- 解特征方程 $|\lambda I - A| = 0$ 。

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

所以特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ 。

- 关于特征值 $\lambda_1 = 1$ ，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$ 。

$$(\lambda_1 I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

同解方程组为

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

取 x_1 为自由变量，得基础解系

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

所以对应于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的所有特征向量为：

$$c_1 \alpha_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

其中 $c_1 \neq 0$ 。

- 关于特征值 $\lambda_2 = 2$ ，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$ 。

$$(\lambda_2 I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

取 x_2 为自由变量，得基础解系

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

所以对应于特征值 $\lambda_2 = 2$ 的所有特征向量为：

$$c_2 \alpha_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

其中 $c_2 \neq 0$ 。

- 关于特征值 $\lambda_3 = 3$, 求解 $(\lambda_3 I - A)x = 0$ 。

$$(\lambda_3 I - A; 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

取 x_3 为自由变量, 得基础解系

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以对应于特征值 $\lambda_3 = 3$ 的所有特征向量为:

$$c_3 \alpha_3 = c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

其中 $c_3 \neq 0$ 。

练习 3. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$ 和 $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & y \end{pmatrix}$ 相似, 求 x, y 的值。

解 因为 $A \sim B$, 所以 A, B 有相同特征值, 设为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 。由特征值和矩阵元素的关系, 得

$$2 + 0 + x = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2 + 3 + y$$

及

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & y \end{vmatrix}.$$

所以

$$\begin{cases} 2 + x = 5 + y \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & y \end{vmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 + x = 5 + y \\ -1 = 3y + 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \end{cases}$$

练习 4. 判断矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ 可否对角化。若能, 求出相应的对角阵 Λ , 和可逆矩阵 P 。

解

- 解特征方程 $|\lambda I - A| = 0$ 。

$$\begin{aligned} |\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 3 & -3 \\ -3 & \lambda + 5 & -3 \\ -6 & 6 & \lambda - 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3 + c_2} \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 3 & 0 \\ -3 & \lambda + 5 & \lambda + 2 \\ -6 & 6 & \lambda + 2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda + 2) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 3 & 0 \\ -3 & \lambda + 5 & 1 \\ -6 & 6 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_3} (\lambda + 2) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 3 & 0 \\ 3 & \lambda - 1 & 0 \\ -6 & 6 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda + 2) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 3 \\ 3 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda^2 - 2\lambda - 8) = (\lambda + 2)^2(\lambda - 4) \end{aligned}$$

所以特征值为 $\lambda_1 = -2$ (二重特征值), $\lambda_2 = 4$ 。

- 关于特征值 $\lambda_1 = -2$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$ 。

$$(-2I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & -3 & 0 \\ -6 & 6 & -6 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

同解方程组为

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 - x_3$$

自由变量取为 x_2, x_3 。分别取 $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 得基础解系

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以对应于特征值 $\lambda_1 = -2$ 的有 2 个线性无关特征向量。(等价于 $r(-2I - A) = 3 - 2 = 1$ 。)

- 关于特征值 $\lambda_1 = 4$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$ 。

$$\begin{aligned} (-2I - A : 0) &= \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & -3 & 0 \\ -3 & 9 & -3 & 0 \\ -6 & 6 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{-\frac{1}{3} \times r_1 \\ -\frac{1}{3} \times r_2 \\ -\frac{1}{6} \times r_3}]{\frac{1}{3} \times r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{r_2 - r_1 \\ r_3 - r_1}]{\frac{r_2 - r_1}{r_3 - r_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{-\frac{1}{2} \times r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 + r_2]{r_1 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = 2x_2 \end{cases}$$

自由变量取为 x_2 。取 $x_2 = 1$, 得基础解系

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- 可见 A 有 3 个线性无关特征向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 所以 A 可对角化。令

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & -2 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$$

则

$$P^{-1}AP = \Lambda.$$

注. P 的选取不唯一。 Λ 也可以是 $\begin{pmatrix} -2 & & \\ & 4 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} 4 & & \\ & -2 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$, 但此时 P 要作相应调整。