第 12 周作业解答

练习 1. 计算 $\iint_\Sigma xy^2dydz + x^2ydzdx + ydxdy$，其中 Σ 是柱体 $\Omega:\ x^2+y^2\le 1, -1\le z\le 1$ 的表面，取单位外法向量。

解利用高斯公式

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma xy^2dydz + x^2ydzdx + ydz &= \iiint_\Omega \text{div }(xy^2,\, x^2y,\, y)dv \\ &= \iiint_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x}(xy^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2y) + \frac{\partial}{\partial z}(y)\right]dv \\ &= \iiint_\Omega (x^2+y^2)dxdydz \\ &= \int_{-1}^1 \left[\iint_{\{x^2+y^2\le 1\}} x^2+y^2dxdy\right]dz \\ &= \int_{-1}^1 dz\cdot \iint_{\{x^2+y^2\le 1\}} x^2+y^2dxdy \\ &= 2\int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 \rho^2\cdot\rho d\rho\right]d\theta = \pi.\end{aligned}$$

练习 2. 设 V, A 分别表示半径为 R 的球的体积和表面积。在不算出 V, A 的确切值的情况下，试利用高斯公式证明 $V=\frac{1}{3}RA.$

证明设 Σ 为该球面,Ω 为所包裹球体。不妨 Σ 的方程为 $x^2+y^2+z^2=R^2$,取单位外法向量 $\overrightarrow{n}=\frac{1}{R}(x,\,y,\,z)$。令向量场 $F=(x,\,y,\,z)$。根据高斯公式可得:

$$\iiint_\Omega \text{div }Fdv = \iint_\Sigma F\cdot\overrightarrow{n}dS \qquad\Rightarrow\qquad \iiint_\Omega 3dv = \iint_\Sigma \frac{1}{R}(x^2+y^2+z^2)dS = \iint_\Sigma RdS$$

说明 $3V=RA$，得证。

练习 3. 设一点电荷 Q 在 $(0,0,0)$ 处，则其势函数为

$$\phi(x,\,y,\,z) = \frac{Q}{4\pi r} = \frac{Q}{4\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

电场为

$$E = -\nabla\phi = \frac{Q}{4\pi r^3}(x,\,y,\,z).$$

设 Ω 是空间中 3 维闭区域，其表面曲面记为 $\partial\Omega$。证明：当 $(0,0,0)$ 在 Ω 内部时，E 流出 Ω 的通量为 Q；当 $(0,0,0)\notin\Omega$ 时，E 流出 Ω 的通量为 0。

解 1. 当 $(0,0,0)\notin\Omega$ 时，E 在 Ω 上具有连续一阶偏导数。应用高斯公式得

$$\text{通量} = \iint_{\partial\Omega} E\cdot\overrightarrow{n}dS = \iiint_\Omega \text{div}Edv \xlongequal{\text{div }E=0} 0.$$

2. 当 $(0,0,0)$ 在 Ω 内部时，E 在 Ω 上不具有连续一阶偏导数 (事实上，在点 $(0,0,0)$ 处没有定义)，不能直接应用高斯公式。设 B_ε 是以 $(0,0,0)$ 为球心 ε 为半径的球体，并且 B_ε 也在 Ω 的内部。令 $\Omega' = \Omega - B_\varepsilon$，则 Ω' 的表面由 $\partial\Omega$ 及 ∂B_ε 构成，Ω' 的单位外法向量 $\overrightarrow{n}$ 在 ∂B_ε 上取 $\overrightarrow{n} = -\frac{1}{\varepsilon}(x, y, z)$。$E$ 在 Ω' 上具有连续一阶偏导数，故应用高斯公式：

$$\iint_{\partial\Omega} E\cdot\overrightarrow{n}dS + \iint_{\partial B_\varepsilon} E\cdot\overrightarrow{n}dS = \iint_{\Omega'} E\cdot\overrightarrow{n}dS = \iiint_{\Omega'} \mathrm{div}E dv \xlongequal{\mathrm{div}\ E=0} 0.$$

所以

$$\begin{aligned}\iint_{\partial\Omega} E\cdot\overrightarrow{n}dS &= -\iint_{\partial B_\varepsilon} E\cdot\overrightarrow{n}dS = -\iint_{\partial B_\varepsilon} \frac{Q}{4\pi r^3}(x, y, z)\cdot(-\frac{1}{\varepsilon}(x, y, z))dS \\ &= \iint_{\partial B_\varepsilon} \frac{Q}{4\pi r^3\varepsilon}\cdot(x^2+y^2+z^2)dS = \iint_{\partial B_\varepsilon} \frac{Q}{4\pi r\varepsilon}dS = \frac{Q}{4\pi\varepsilon^2}\iint_{\partial B_\varepsilon} dS = \frac{Q}{4\pi\varepsilon^2}\cdot 4\pi\varepsilon^2 = Q.\end{aligned}$$

练习 4. 设 Γ 是空间中一定向闭曲线，并且正好是某可定向曲面 Σ 的边界。计算 $\int_\Gamma ye^z dx + xe^z dy + xye^z dz$.

解设向量场 $F = (ye^z, xe^z, xye^z)$。设 $\overrightarrow{n}$ 是 Σ 上的单位向量场，与 Γ 的定向符合右手规则。注意到

$$\mathrm{rot}\ F = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ye^z & xe^z & xye^z \end{vmatrix} == \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xe^z & xye^z \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ye^z & xye^z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ ye^z & xe^z \end{vmatrix} \right) = (0, 0, 0)$$

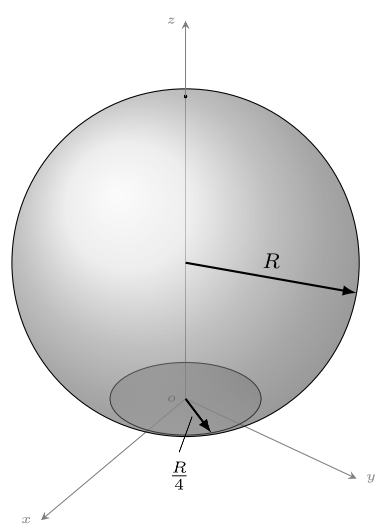
所以利用斯托克斯公式可得：

$$\int_\Gamma ye^z dx + xe^z dy + xye^z dz = \iint_\Sigma \mathrm{rot}\ F\cdot\overrightarrow{n}dS = 0.$$

练习 5. 热气球的表面是半径为 R 球面的一部分，与 xoy 坐标面的交线是半径为 $\frac{R}{4}$ 的圆周，如图。假设热气的速度向量场为

$$V = \mathrm{rot}\ (-y, x, 0).$$

问单位时间内有多少热气通过气球表面?



解　热气球表面 Σ 选取单位外法向量 $\overrightarrow{n}$；边界圆周 Γ 是 $\begin{cases} x^2+y^2=(R/4)^2 \\ z=0 \end{cases}$，选取逆时针方向，相应的参数方程是：$x = \frac{R}{4}\cos\theta, y = \frac{R}{4}\sin\theta, \theta: 0\to 2\pi$。应用斯托克斯公式，得：

$$\iint_\Sigma \mathrm{rot}\ (-y, x, 0)\cdot\overrightarrow{n}dS = \int_\Gamma -ydx + xdy + 0dz = \int_0^{2\pi}\left[-\frac{R}{4}\sin\theta\cdot(\frac{R}{4}\cos\theta)' + \frac{R}{4}\cos\theta\cdot(\frac{R}{4}\sin\theta)'\right]d\theta = \frac{1}{8}\pi R^2.$$

单位时间有 $\frac{1}{8}\pi R^2$ 单位热气通过气球表面。

练习 6. 简要列举高斯的一些数学贡献，并引用名人对高斯的评价（5 条或以上，中英文皆可）。