

§8.6 多元函数的极值

2017-2018 学年 II

Outline

1. 多元函数的极值点
2. 条件极值及拉格朗日乘数法

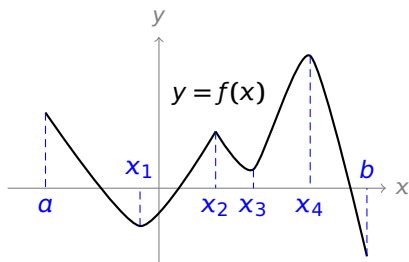
We are here now...

1. 多元函数的极值点

2. 条件极值及拉格朗日乘数法

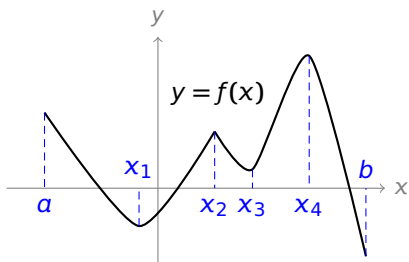
回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

假设 $y = f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上，如图



回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

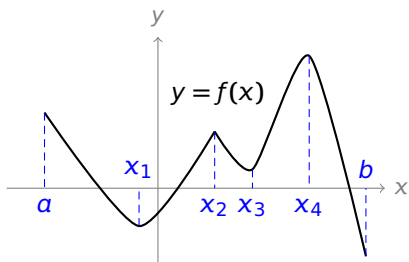
假设 $y = f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上, 如图



	极值点	驻点	最值点
a			
x_1			
x_2			
x_3			
x_4			
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

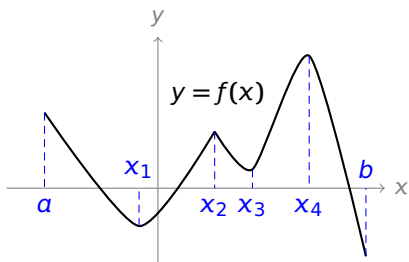
假设 $y = f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上, 如图



	极值点	驻点	最值点
a			
x_1	极小值点		
x_2			
x_3			
x_4			
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

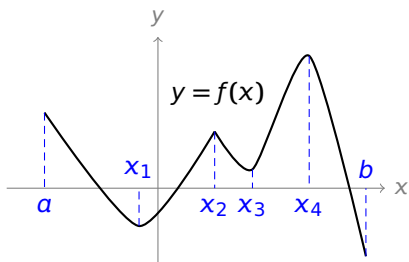
假设 $y = f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上, 如图



	极值点	驻点	最值点
a			
x_1	极小值点		
x_2	极大值点		
x_3			
x_4			
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

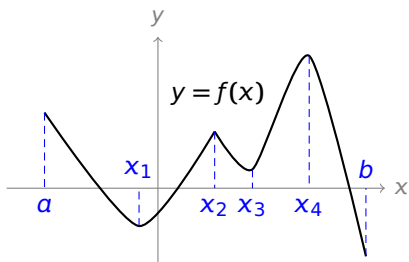
假设 $y = f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上, 如图



	极值点	驻点	最值点
a			
x_1	极小值点		
x_2	极大值点		
x_3	极小值点		
x_4			
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

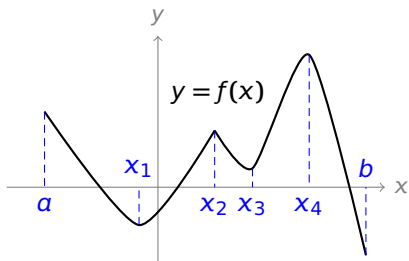
假设 $y = f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上, 如图



	极值点	驻点	最值点
a			
x_1	极小值点		
x_2	极大值点		
x_3	极小值点		
x_4	极大值点		
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

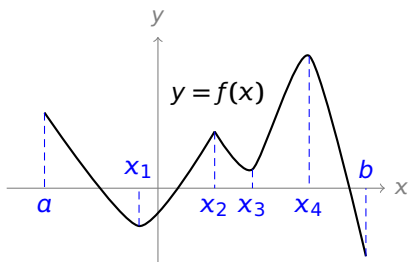
假设 $y = f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上, 如图



	极值点	驻点	最值点
a			
x_1	极小值点	✓	
x_2	极大值点		
x_3	极小值点		
x_4	极大值点		
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

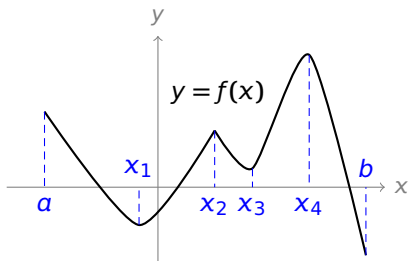
假设 $y = f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上, 如图



	极值点	驻点	最值点
a			
x_1	极小值点	✓	
x_2	极大值点	× (不可导)	
x_3	极小值点		
x_4	极大值点		
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

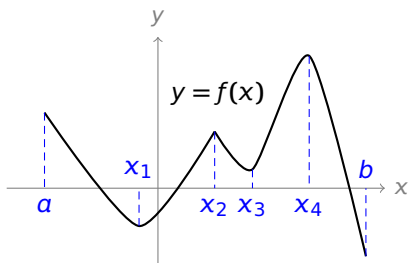
假设 $y = f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上, 如图



	极值点	驻点	最值点
a			
x_1	极小值点	✓	
x_2	极大值点	× (不可导)	
x_3	极小值点	✓	
x_4	极大值点		
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

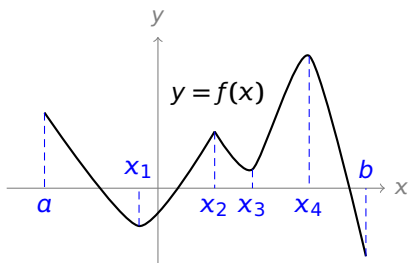
假设 $y = f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上, 如图



	极值点	驻点	最值点
a			
x_1	极小值点	✓	
x_2	极大值点	× (不可导)	
x_3	极小值点	✓	
x_4	极大值点	✓	
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

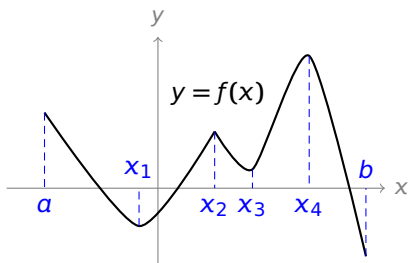
假设 $y = f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上, 如图



	极值点	驻点	最值点
a			×
x_1	极小值点	✓	
x_2	极大值点	× (不可导)	
x_3	极小值点	✓	
x_4	极大值点	✓	
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

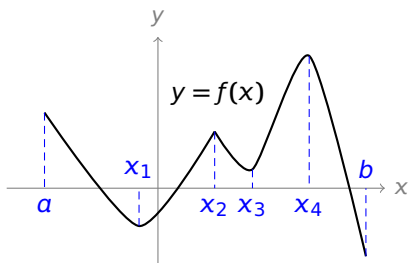
假设 $y = f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上, 如图



	极值点	驻点	最值点
a			×
x_1	极小值点	✓	×
x_2	极大值点	× (不可导)	
x_3	极小值点	✓	
x_4	极大值点	✓	
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

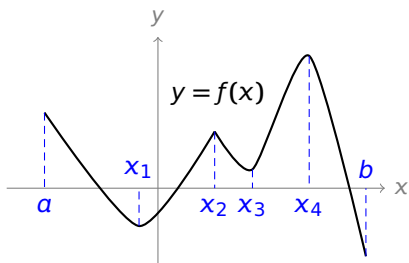
假设 $y = f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上, 如图



	极值点	驻点	最值点
a			×
x_1	极小值点	✓	×
x_2	极大值点	× (不可导)	×
x_3	极小值点	✓	
x_4	极大值点	✓	
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

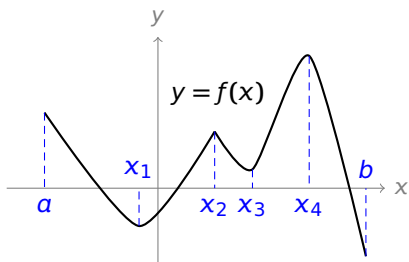
假设 $y = f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上, 如图



	极值点	驻点	最值点
a			×
x_1	极小值点	✓	×
x_2	极大值点	× (不可导)	×
x_3	极小值点	✓	×
x_4	极大值点	✓	
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

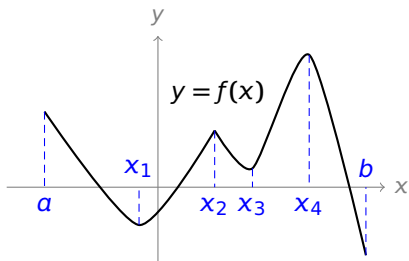
假设 $y = f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上, 如图



	极值点	驻点	最值点
a			×
x_1	极小值点	✓	×
x_2	极大值点	× (不可导)	×
x_3	极小值点	✓	×
x_4	极大值点	✓	最大值点
b			

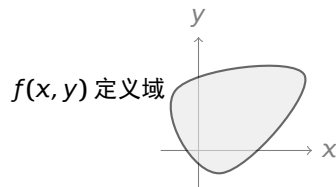
回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

假设 $y = f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上, 如图

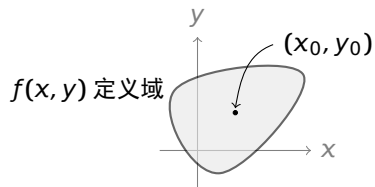


	极值点	驻点	最值点
a			×
x_1	极小值点	✓	×
x_2	极大值点	× (不可导)	×
x_3	极小值点	✓	×
x_4	极大值点	✓	最大值点
b			最小值点

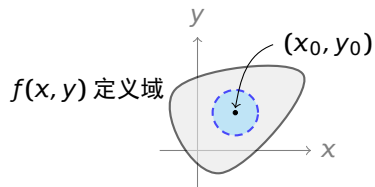
多元函数的极值、极值点



多元函数的极值、极值点



多元函数的极值、极值点

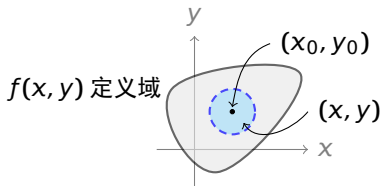


多元函数的极值、极值点

定义 在点 (x_0, y_0) 的某个邻域内

- 如果总是成立

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0), \quad \text{其中 } (x, y) \neq (x_0, y_0)$$



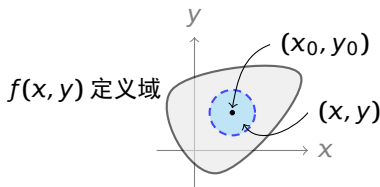
多元函数的极值、极值点

定义 在点 (x_0, y_0) 的某个邻域内

- 如果总是成立

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0), \quad \text{其中 } (x, y) \neq (x_0, y_0)$$

则称点 (x_0, y_0) 是函数 $f(x, y)$ **极大值点**,



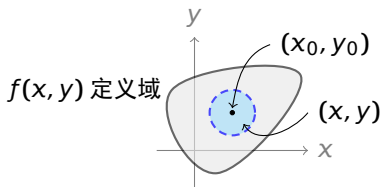
多元函数的极值、极值点

定义 在点 (x_0, y_0) 的某个邻域内

- 如果总是成立

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0), \quad \text{其中 } (x, y) \neq (x_0, y_0)$$

则称点 (x_0, y_0) 是函数 $f(x, y)$ **极大值点**, $f(x_0, y_0)$ 是**极大值**



多元函数的极值、极值点

定义 在点 (x_0, y_0) 的某个邻域内

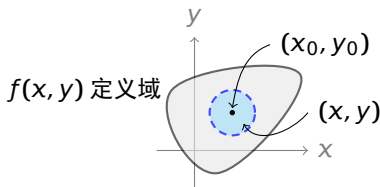
- 如果总是成立

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0), \quad \text{其中 } (x, y) \neq (x_0, y_0)$$

则称点 (x_0, y_0) 是函数 $f(x, y)$ **极大值点**, $f(x_0, y_0)$ 是**极大值**

- 如果总是成立

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0), \quad \text{其中 } (x, y) \neq (x_0, y_0)$$



多元函数的极值、极值点

定义 在点 (x_0, y_0) 的某个邻域内

- 如果总是成立

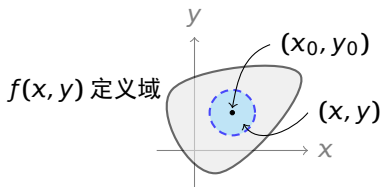
$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0), \quad \text{其中 } (x, y) \neq (x_0, y_0)$$

则称点 (x_0, y_0) 是函数 $f(x, y)$ **极大值点**, $f(x_0, y_0)$ 是**极大值**

- 如果总是成立

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0), \quad \text{其中 } (x, y) \neq (x_0, y_0)$$

则称点 (x_0, y_0) 是函数 $f(x, y)$ **极小值点**,



多元函数的极值、极值点

定义 在点 (x_0, y_0) 的某个邻域内

- 如果总是成立

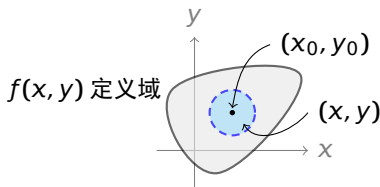
$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0), \quad \text{其中 } (x, y) \neq (x_0, y_0)$$

则称点 (x_0, y_0) 是函数 $f(x, y)$ **极大值点**, $f(x_0, y_0)$ 是**极大值**

- 如果总是成立

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0), \quad \text{其中 } (x, y) \neq (x_0, y_0)$$

则称点 (x_0, y_0) 是函数 $f(x, y)$ **极小值点**, $f(x_0, y_0)$ 是**极小值**



多元函数的极值、极值点

定义 在点 (x_0, y_0) 的某个邻域内

- 如果总是成立

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0), \quad \text{其中 } (x, y) \neq (x_0, y_0)$$

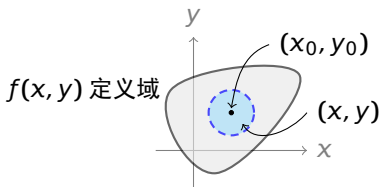
则称点 (x_0, y_0) 是函数 $f(x, y)$ **极大值点**, $f(x_0, y_0)$ 是**极大值**

- 如果总是成立

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0), \quad \text{其中 } (x, y) \neq (x_0, y_0)$$

则称点 (x_0, y_0) 是函数 $f(x, y)$ **极小值点**, $f(x_0, y_0)$ 是**极小值**

- 极大、极小值点统称**极值点**; 极大、极小值统称**极值**。



例

- $z = x^2 + y^2$

点 $p_0(0, 0)$ 是

- $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$

点 $p_0(0, 0)$ 是

- $z = xy$

点 $p_0(0, 0)$ 是

例

- $z = x^2 + y^2$

点 $p_0(0, 0)$ 是极小值点;

- $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$

点 $p_0(0, 0)$ 是

- $z = xy$

点 $p_0(0, 0)$ 是

例

- $z = x^2 + y^2$

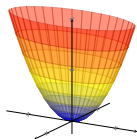
点 $p_0(0, 0)$ 是极小值点;

- $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$

点 $p_0(0, 0)$ 是

- $z = xy$

点 $p_0(0, 0)$ 是



例

- $z = x^2 + y^2$

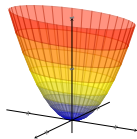
点 $p_0(0, 0)$ 是极小值点;

- $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$

点 $p_0(0, 0)$ 是极大值点;

- $z = xy$

点 $p_0(0, 0)$ 是



例

- $z = x^2 + y^2$

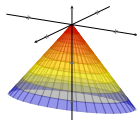
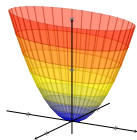
点 $p_0(0, 0)$ 是极小值点;

- $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$

点 $p_0(0, 0)$ 是极大值点;

- $z = xy$

点 $p_0(0, 0)$ 是



例

- $z = x^2 + y^2$

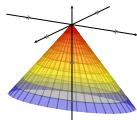
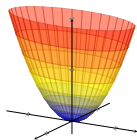
点 $p_0(0, 0)$ 是极小值点;

- $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$

点 $p_0(0, 0)$ 是极大值点;

- $z = xy$

点 $p_0(0, 0)$ 不是极值点。



例

- $z = x^2 + y^2$

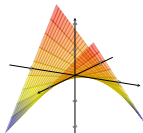
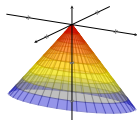
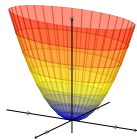
点 $p_0(0, 0)$ 是极小值点;

- $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$

点 $p_0(0, 0)$ 是极大值点;

- $z = xy$

点 $p_0(0, 0)$ 不是极值点。



例

- $z = x^2 + y^2$

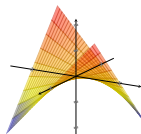
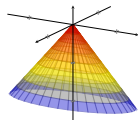
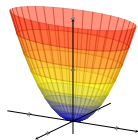
点 $p_0(0, 0)$ 是极小值点;

- $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$

点 $p_0(0, 0)$ 是极大值点;

- $z = xy$

点 $p_0(0, 0)$ 不是极值点。



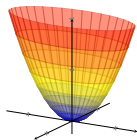
问题

- $z = xy$ 是否有极值点?

例

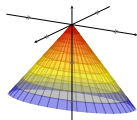
- $z = x^2 + y^2$

点 $p_0(0, 0)$ 是极小值点;



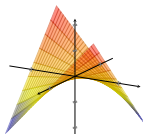
- $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$

点 $p_0(0, 0)$ 是极大值点;



- $z = xy$

点 $p_0(0, 0)$ 不是极值点。



问题

- $z = xy$ 是否有极值点?
- 是否有一般方法求出函数的极值点? 如:

$$z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$$

定理 设 $z = f(x, y)$ 在内点 (x_0, y_0) 处存在偏导数, 则 (x_0, y_0) 是极值点的必要条件是

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

定理 设 $z = f(x, y)$ 在内点 (x_0, y_0) 处存在偏导数, 则 (x_0, y_0) 是极值点的必要条件是

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

证明

1. 一元函数 $x \mapsto f(x, y_0)$

定理 设 $z = f(x, y)$ 在内点 (x_0, y_0) 处存在偏导数, 则 (x_0, y_0) 是极值点的必要条件是

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

证明

1. 一元函数 $x \mapsto f(x, y_0)$ 具有极值点 $x = x_0$,

定理 设 $z = f(x, y)$ 在内点 (x_0, y_0) 处存在偏导数, 则 (x_0, y_0) 是极值点的必要条件是

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

证明

1. 一元函数 $x \mapsto f(x, y_0)$ 具有极值点 $x = x_0$, 所以

$$\frac{d}{dx} [f(x, y_0)] \Big|_{x=x_0} = 0$$

定理 设 $z = f(x, y)$ 在内点 (x_0, y_0) 处存在偏导数, 则 (x_0, y_0) 是极值点的必要条件是

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

证明

1. 一元函数 $x \mapsto f(x, y_0)$ 具有极值点 $x = x_0$, 所以

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{d}{dx} [f(x, y_0)] \Big|_{x=x_0} = 0$$

定理 设 $z = f(x, y)$ 在内点 (x_0, y_0) 处存在偏导数, 则 (x_0, y_0) 是极值点的必要条件是

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

证明

1. 一元函数 $x \mapsto f(x, y_0)$ 具有极值点 $x = x_0$, 所以

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{d}{dx} [f(x, y_0)] \Big|_{x=x_0} = 0$$

2. 一元函数 $y \mapsto f(x_0, y)$ 具有极值点 $y = y_0$,

定理 设 $z = f(x, y)$ 在内点 (x_0, y_0) 处存在偏导数, 则 (x_0, y_0) 是极值点的必要条件是

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

证明

1. 一元函数 $x \mapsto f(x, y_0)$ 具有极值点 $x = x_0$, 所以

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{d}{dx} [f(x, y_0)] \Big|_{x=x_0} = 0$$

2. 一元函数 $y \mapsto f(x_0, y)$ 具有极值点 $y = y_0$, 所以

$$\frac{d}{dy} [f(x_0, y)] \Big|_{y=y_0} = 0$$

定理 设 $z = f(x, y)$ 在内点 (x_0, y_0) 处存在偏导数, 则 (x_0, y_0) 是极值点的必要条件是

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

证明

1. 一元函数 $x \mapsto f(x, y_0)$ 具有极值点 $x = x_0$, 所以

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{d}{dx} [f(x, y_0)] \Big|_{x=x_0} = 0$$

2. 一元函数 $y \mapsto f(x_0, y)$ 具有极值点 $y = y_0$, 所以

$$f_y(x_0, y_0) = \frac{d}{dy} [f(x_0, y)] \Big|_{y=y_0} = 0$$

定理 设 $z = f(x, y)$ 在内点 (x_0, y_0) 处存在偏导数, 则 (x_0, y_0) 是极值点的必要条件是

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

证明

1. 一元函数 $x \mapsto f(x, y_0)$ 具有极值点 $x = x_0$, 所以

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{d}{dx} [f(x, y_0)] \Big|_{x=x_0} = 0$$

2. 一元函数 $y \mapsto f(x_0, y)$ 具有极值点 $y = y_0$, 所以

$$f_y(x_0, y_0) = \frac{d}{dy} [f(x_0, y)] \Big|_{y=y_0} = 0$$

定义 使偏导数为零的点, 称为驻点

定理 设 $z = f(x, y)$ 在内点 (x_0, y_0) 处存在偏导数, 则 (x_0, y_0) 是极值点的必要条件是

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

证明

1. 一元函数 $x \mapsto f(x, y_0)$ 具有极值点 $x = x_0$, 所以

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{d}{dx} [f(x, y_0)] \Big|_{x=x_0} = 0$$

2. 一元函数 $y \mapsto f(x_0, y)$ 具有极值点 $y = y_0$, 所以

$$f_y(x_0, y_0) = \frac{d}{dy} [f(x_0, y)] \Big|_{y=y_0} = 0$$

定义 使偏导数为零的点, 称为**驻点**

注 如果函数存在偏导数, 则 $\{\text{极值点}\} \subset \{\text{驻点}\}$

例 1 点 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点，从而也是驻点。

例 1 点 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点，从而也是驻点。直接验证 $(0, 0)$ 是驻点，则如下：

$$\begin{cases} z_x = \\ z_y = \end{cases}$$

例 1 点 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点，从而也是驻点。直接验证 $(0, 0)$ 是驻点，则如下：

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases}$$

例 1 点 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点，从而也是驻点。直接验证 $(0, 0)$ 是驻点，则如下：

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_x(0, 0) = 0 \\ z_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

例 1 点 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点，从而也是驻点。直接验证 $(0, 0)$ 是驻点，则如下：

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \implies \begin{cases} z_x(0, 0) = 0 \\ z_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

例 2 点 $(0, 0)$ 是 $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ 的极大值点，但不是驻点：

例 1 点 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点，从而也是驻点。直接验证 $(0, 0)$ 是驻点，则如下：

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \implies \begin{cases} z_x(0, 0) = 0 \\ z_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

例 2 点 $(0, 0)$ 是 $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ 的极大值点，但不是驻点：一阶偏导 $z_x(0, 0), z_y(0, 0)$

不存在。

例 1 点 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点，从而也是驻点。直接验证 $(0, 0)$ 是驻点，则如下：

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \implies \begin{cases} z_x(0, 0) = 0 \\ z_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

例 2 点 $(0, 0)$ 是 $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ 的极大值点，但不是驻点：一阶偏导 $z_x(0, 0), \quad z_y(0, 0)$

不存在。

$$\left(\frac{d}{dx} z(x, 0) \Big|_{x=0} = \right)$$

例 1 点 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点，从而也是驻点。直接验证 $(0, 0)$ 是驻点，则如下：

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \implies \begin{cases} z_x(0, 0) = 0 \\ z_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

例 2 点 $(0, 0)$ 是 $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ 的极大值点，但不是驻点：一阶偏导 $z_x(0, 0), z_y(0, 0)$

不存在。

$$(z(x, 0) = \frac{d}{dx} z(x, 0) \Big|_{x=0} =)$$

例 1 点 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点，从而也是驻点。直接验证 $(0, 0)$ 是驻点，则如下：

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \implies \begin{cases} z_x(0, 0) = 0 \\ z_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

例 2 点 $(0, 0)$ 是 $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ 的极大值点，但不是驻点：一阶偏导

$$z_x(0, 0), \quad z_y(0, 0)$$

不存在。

$$(z(x, 0) = -\sqrt{x^2} = \quad \quad \quad \frac{d}{dx}z(x, 0)|_{x=0} = \quad \quad \quad)$$

例 1 点 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点，从而也是驻点。直接验证 $(0, 0)$ 是驻点，则如下：

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \implies \begin{cases} z_x(0, 0) = 0 \\ z_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

例 2 点 $(0, 0)$ 是 $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ 的极大值点，但不是驻点：一阶偏导

$$z_x(0, 0), \quad z_y(0, 0)$$

不存在。

$$(z(x, 0) = -\sqrt{x^2} = -|x|, \quad \frac{d}{dx}z(x, 0)|_{x=0} =)$$

例 1 点 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点，从而也是驻点。直接验证 $(0, 0)$ 是驻点，则如下：

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \implies \begin{cases} z_x(0, 0) = 0 \\ z_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

例 2 点 $(0, 0)$ 是 $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ 的极大值点，但不是驻点：一阶偏导

$$z_x(0, 0), \quad z_y(0, 0)$$

不存在。

$$(z(x, 0) = -\sqrt{x^2} = -|x|, \quad \frac{d}{dx}z(x, 0)|_{x=0} = -\frac{d}{dx}|x||_{x=0} \quad)$$

例 1 点 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点，从而也是驻点。直接验证 $(0, 0)$ 是驻点，则如下：

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \implies \begin{cases} z_x(0, 0) = 0 \\ z_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

例 2 点 $(0, 0)$ 是 $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ 的极大值点，但不是驻点：一阶偏导

$$z_x(0, 0), \quad z_y(0, 0)$$

不存在。

$$(z(x, 0) = -\sqrt{x^2} = -|x|, \quad \frac{d}{dx}z(x, 0)|_{x=0} = -\frac{d}{dx}|x||_{x=0} \text{ 不存在})$$

例 1 点 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点，从而也是驻点。直接验证 $(0, 0)$ 是驻点，则如下：

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \implies \begin{cases} z_x(0, 0) = 0 \\ z_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

例 2 点 $(0, 0)$ 是 $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ 的极大值点，但不是驻点：一阶偏导 $z_x(0, 0), z_y(0, 0)$

不存在。

($z(x, 0) = -\sqrt{x^2} = -|x|$, $\frac{d}{dx}z(x, 0)|_{x=0} = -\frac{d}{dx}|x||_{x=0}$ 不存在)

例 3 (驻点不一定是极值点) 设 $z = xy$ 。

例 1 点 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点，从而也是驻点。直接验证 $(0, 0)$ 是驻点，则如下：

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \implies \begin{cases} z_x(0, 0) = 0 \\ z_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

例 2 点 $(0, 0)$ 是 $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ 的极大值点，但不是驻点：一阶偏导 $z_x(0, 0), z_y(0, 0)$

不存在。

($z(x, 0) = -\sqrt{x^2} = -|x|$, $\frac{d}{dx}z(x, 0)|_{x=0} = -\frac{d}{dx}|x||_{x=0}$ 不存在)

例 3 (驻点不一定是极值点) 设 $z = xy$ 。点 $(0, 0)$ 是驻点：

例 1 点 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点，从而也是驻点。直接验证 $(0, 0)$ 是驻点，则如下：

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \implies \begin{cases} z_x(0, 0) = 0 \\ z_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

例 2 点 $(0, 0)$ 是 $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ 的极大值点，但不是驻点：一阶偏导 $z_x(0, 0), z_y(0, 0)$

不存在。

($z(x, 0) = -\sqrt{x^2} = -|x|$, $\frac{d}{dx}z(x, 0)|_{x=0} = -\frac{d}{dx}|x||_{x=0}$ 不存在)

例 3 (驻点不一定是极值点) 设 $z = xy$ 。点 $(0, 0)$ 是驻点：

$$\begin{cases} z_x = y \\ z_y = x \end{cases}$$

例 1 点 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点，从而也是驻点。直接验证 $(0, 0)$ 是驻点，则如下：

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \implies \begin{cases} z_x(0, 0) = 0 \\ z_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

例 2 点 $(0, 0)$ 是 $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ 的极大值点，但不是驻点：一阶偏导 $z_x(0, 0), z_y(0, 0)$

不存在。

($z(x, 0) = -\sqrt{x^2} = -|x|$, $\frac{d}{dx}z(x, 0)|_{x=0} = -\frac{d}{dx}|x||_{x=0}$ 不存在)

例 3 (驻点不一定是极值点) 设 $z = xy$ 。点 $(0, 0)$ 是驻点：

$$\begin{cases} z_x = y \\ z_y = x \end{cases} \implies \begin{cases} z_x(0, 0) = 0 \\ z_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

例 1 点 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点，从而也是驻点。直接验证 $(0, 0)$ 是驻点，则如下：

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \implies \begin{cases} z_x(0, 0) = 0 \\ z_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

例 2 点 $(0, 0)$ 是 $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ 的极大值点，但不是驻点：一阶偏导 $z_x(0, 0), z_y(0, 0)$

不存在。

($z(x, 0) = -\sqrt{x^2} = -|x|$, $\frac{d}{dx}z(x, 0)|_{x=0} = -\frac{d}{dx}|x||_{x=0}$ 不存在)

例 3 (驻点不一定是极值点) 设 $z = xy$ 。点 $(0, 0)$ 是驻点：

$$\begin{cases} z_x = y \\ z_y = x \end{cases} \implies \begin{cases} z_x(0, 0) = 0 \\ z_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

但点 $(0, 0)$ 不是极值点。

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$, 求驻点。

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$, 求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = \\ z_y = \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$, 求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$, 求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$, 求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$, 求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$, 求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(x+3)(x-1) = 0 \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$, 求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(x+3)(x-1) = 0 \\ -3y(y-2) = 0 \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$, 求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(x+3)(x-1) = 0 \\ -3y(y-2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \\ y = \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$, 求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(x+3)(x-1) = 0 \\ -3y(y-2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3, 1 \\ y = \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$, 求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(x+3)(x-1) = 0 \\ -3y(y-2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3, 1 \\ y = 0, 2 \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$, 求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(x+3)(x-1) = 0 \\ -3y(y-2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3, 1 \\ y = 0, 2 \end{cases}$$

所以驻点为

$y = 2$		
$y = 0$		
	$x = -3$	$x = 1$

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$, 求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(x+3)(x-1) = 0 \\ -3y(y-2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3, 1 \\ y = 0, 2 \end{cases}$$

所以驻点为

$y = 2$		
$y = 0$	$(-3, 0)$	
	$x = -3$	$x = 1$

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$, 求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(x+3)(x-1) = 0 \\ -3y(y-2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3, 1 \\ y = 0, 2 \end{cases}$$

所以驻点为

$y = 2$	$(-3, 2)$	
$y = 0$	$(-3, 0)$	
	$x = -3$	$x = 1$

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$, 求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(x+3)(x-1) = 0 \\ -3y(y-2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3, 1 \\ y = 0, 2 \end{cases}$$

所以驻点为

$y = 2$	$(-3, 2)$	
$y = 0$	$(-3, 0)$	$(1, 0)$
	$x = -3$	$x = 1$

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$, 求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(x+3)(x-1) = 0 \\ -3y(y-2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3, 1 \\ y = 0, 2 \end{cases}$$

所以驻点为

$y = 2$	$(-3, 2)$	$(1, 2)$
$y = 0$	$(-3, 0)$	$(1, 0)$
	$x = -3$	$x = 1$

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$, 求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

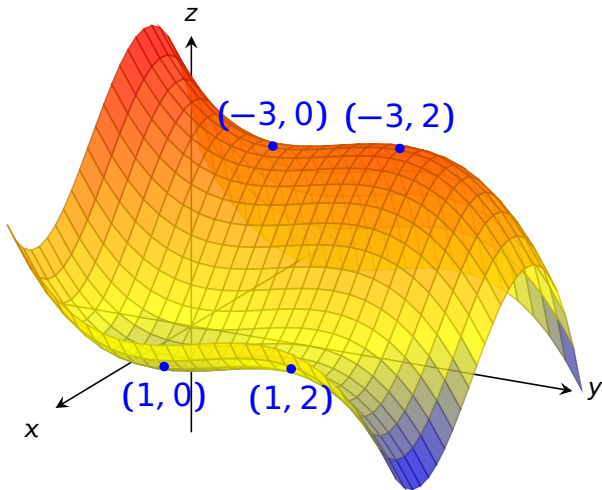
$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(x+3)(x-1) = 0 \\ -3y(y-2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3, 1 \\ y = 0, 2 \end{cases}$$

所以驻点为

$y = 2$	$(-3, 2)$	$(1, 2)$
$y = 0$	$(-3, 0)$	$(1, 0)$
	$x = -3$	$x = 1$

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$, 求驻点。

$$z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$$



例 设 $z = x^3 + y^3 - 3xy$, 求驻点。

例 设 $z = x^3 + y^3 - 3xy$, 求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = \\ z_y = \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 + y^3 - 3xy$, 求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y \\ z_y = \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 + y^3 - 3xy$, 求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y \\ z_y = 3y^2 - 3x \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 + y^3 - 3xy$, 求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y \\ z_y = 3y^2 - 3x \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ z_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 + y^3 - 3xy$, 求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y \\ z_y = 3y^2 - 3x \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ z_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 + y^3 - 3xy$, 求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y \\ z_y = 3y^2 - 3x \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ z_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = y \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 + y^3 - 3xy$, 求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y \\ z_y = 3y^2 - 3x \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ z_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 + y^3 - 3xy$, 求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y \\ z_y = 3y^2 - 3x \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ z_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases} \implies x^4 = x$$

例 设 $z = x^3 + y^3 - 3xy$, 求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y \\ z_y = 3y^2 - 3x \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ z_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases} \Rightarrow x^4 = x \Rightarrow x = 0, 1$$

例 设 $z = x^3 + y^3 - 3xy$, 求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y \\ z_y = 3y^2 - 3x \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ z_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases} \Rightarrow x^4 = x \Rightarrow x = 0, 1$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 + y^3 - 3xy$, 求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y \\ z_y = 3y^2 - 3x \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ z_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases} \Rightarrow x^4 = x \Rightarrow x = 0, 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 + y^3 - 3xy$, 求驻点。

解 求一阶偏导

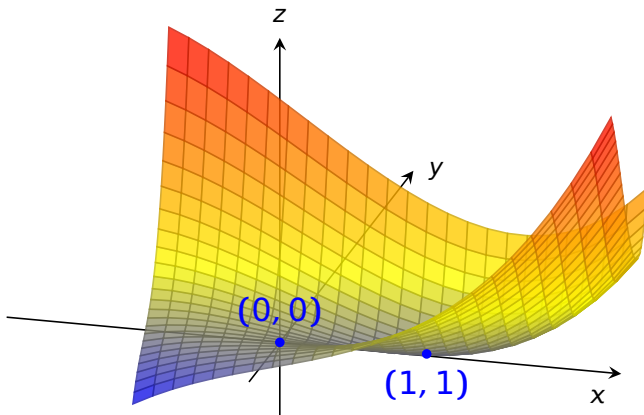
$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y \\ z_y = 3y^2 - 3x \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{aligned} \begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ z_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases} \Rightarrow x^4 = x \Rightarrow x = 0, 1 \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

所以驻点为 $(1, 1)$, $(0, 0)$

$$z = x^3 + y^3 - 3xy$$



- 问题 如何从驻点中判别哪些是极值点？

- 问题 如何从驻点中判别哪些是极值点？

定理（极值的充分条件） 设 $z = f(x, y)$ 具有直到二阶的连续偏导数， (x_0, y_0) 是驻点。

- 问题 如何从驻点中判别哪些是极值点？

定理（极值的充分条件） 设 $z = f(x, y)$ 具有直到二阶的连续偏导数， (x_0, y_0) 是驻点。定义判别式

$$P(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$$

结论是：

- 问题 如何从驻点中判别哪些是极值点？

定理（极值的充分条件） 设 $z = f(x, y)$ 具有直到二阶的连续偏导数， (x_0, y_0) 是驻点。定义判别式

$$P(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$$

结论是：

3. 若 $P(x_0, y_0) < 0$ ，则 (x_0, y_0) 一定不是极值点；

- 问题 如何从驻点中判别哪些是极值点？

定理（极值的充分条件） 设 $z = f(x, y)$ 具有直到二阶的连续偏导数， (x_0, y_0) 是驻点。定义判别式

$$P(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$$

结论是：

3. 若 $P(x_0, y_0) < 0$ ，则 (x_0, y_0) 一定不是极值点；
4. 若 $P(x_0, y_0) = 0$ ，则此判定法失效，结论不确定。

● 问题 如何从驻点中判别哪些是极值点？

定理（极值的充分条件） 设 $z = f(x, y)$ 具有直到二阶的连续偏导数， (x_0, y_0) 是驻点。定义判别式

$$P(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$$

结论是：

1. 若 $P(x_0, y_0) > 0$,
2. 若 $P(x_0, y_0) > 0$,
3. 若 $P(x_0, y_0) < 0$ ，则 (x_0, y_0) 一定不是极值点；
4. 若 $P(x_0, y_0) = 0$ ，则此判定法失效，结论不确定。

● 问题 如何从驻点中判别哪些是极值点？

定理（极值的充分条件） 设 $z = f(x, y)$ 具有直到二阶的连续偏导数， (x_0, y_0) 是驻点。定义判别式

$$P(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$$

结论是：

1. 若 $P(x_0, y_0) > 0$ ，且 $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ ，则 (x_0, y_0) 是极大值点；
2. 若 $P(x_0, y_0) > 0$ ，
3. 若 $P(x_0, y_0) < 0$ ，则 (x_0, y_0) 一定不是极值点；
4. 若 $P(x_0, y_0) = 0$ ，则此判定法失效，结论不确定。

● 问题 如何从驻点中判别哪些是极值点？

定理（极值的充分条件） 设 $z = f(x, y)$ 具有直到二阶的连续偏导数， (x_0, y_0) 是驻点。定义判别式

$$P(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$$

结论是：

1. 若 $P(x_0, y_0) > 0$ ，且 $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ ，则 (x_0, y_0) 是极大值点；
2. 若 $P(x_0, y_0) > 0$ ，且 $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ ，则 (x_0, y_0) 是极小值点；
3. 若 $P(x_0, y_0) < 0$ ，则 (x_0, y_0) 一定不是极值点；
4. 若 $P(x_0, y_0) = 0$ ，则此判定法失效，结论不确定。

- **问题** 如何从驻点中判别哪些是极值点？

定理（极值的充分条件） 设 $z = f(x, y)$ 具有直到二阶的连续偏导数， (x_0, y_0) 是驻点。定义判别式

$$P(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$$

结论是：

1. 若 $P(x_0, y_0) > 0$ ，且 $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ ，则 (x_0, y_0) 是极大值点；
2. 若 $P(x_0, y_0) > 0$ ，且 $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ ，则 (x_0, y_0) 是极小值点；
3. 若 $P(x_0, y_0) < 0$ ，则 (x_0, y_0) 一定不是极值点；
4. 若 $P(x_0, y_0) = 0$ ，则此判定法失效，结论不确定。

-
- **总结** 求 $z = f(x, y)$ 极值点的步骤：

1. 求驻点：

● **问题** 如何从驻点中判别哪些是极值点？

定理（极值的充分条件） 设 $z = f(x, y)$ 具有直到二阶的连续偏导数， (x_0, y_0) 是驻点。定义判别式

$$P(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$$

结论是：

1. 若 $P(x_0, y_0) > 0$ ，且 $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ ，则 (x_0, y_0) 是极大值点；
2. 若 $P(x_0, y_0) > 0$ ，且 $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ ，则 (x_0, y_0) 是极小值点；
3. 若 $P(x_0, y_0) < 0$ ，则 (x_0, y_0) 一定不是极值点；
4. 若 $P(x_0, y_0) = 0$ ，则此判定法失效，结论不确定。

● **总结** 求 $z = f(x, y)$ 极值点的步骤：

1. 求驻点：解方程 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ ，设解为 (x_0, y_0)

● **问题** 如何从驻点中判别哪些是极值点？

定理（极值的充分条件） 设 $z = f(x, y)$ 具有直到二阶的连续偏导数， (x_0, y_0) 是驻点。定义判别式

$$P(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$$

结论是：

1. 若 $P(x_0, y_0) > 0$ ，且 $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ ，则 (x_0, y_0) 是极大值点；
2. 若 $P(x_0, y_0) > 0$ ，且 $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ ，则 (x_0, y_0) 是极小值点；
3. 若 $P(x_0, y_0) < 0$ ，则 (x_0, y_0) 一定不是极值点；
4. 若 $P(x_0, y_0) = 0$ ，则此判定法失效，结论不确定。

● **总结** 求 $z = f(x, y)$ 极值点的步骤：

1. 求驻点：解方程
$$\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$$
，设解为 (x_0, y_0)
2. 通过 $P(x_0, y_0)$ 辨别驻点 (x_0, y_0) 是否极值点

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = \quad , \quad z_y =$$

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \quad z_y =$$

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \quad z_y = -3y^2 + 6y$$

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \quad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组
$$\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \quad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \quad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$P(x, y) =$$

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \quad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = \\ z_{xy} = \\ z_{yy} = \end{cases} \implies P(x, y) =$$

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \quad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = \\ z_{yy} = \end{cases} \implies P(x, y) =$$

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \quad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = \end{cases} \quad \Rightarrow P(x, y) =$$

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \quad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = -6y + 6 \end{cases} \implies P(x, y) =$$

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \quad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = -6y + 6 \end{cases} \Rightarrow P(x, y) = -36(x + 1)(y - 1)$$

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \quad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = -6y + 6 \end{cases} \implies P(x, y) = -36(x + 1)(y - 1)$$

3. 结论

	$(-3, 0)$	$(-3, 2)$	$(1, 0)$	$(1, 2)$
$P(x_0, y_0)$				
$z_{xx}(x_0, y_0)$				
是否极值点				

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \quad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = -6y + 6 \end{cases} \implies P(x, y) = -36(x + 1)(y - 1)$$

3. 结论

	$(-3, 0)$	$(-3, 2)$	$(1, 0)$	$(1, 2)$
$P(x_0, y_0)$	$-72 < 0$			
$z_{xx}(x_0, y_0)$				
是否极值点				

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \quad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = -6y + 6 \end{cases} \implies P(x, y) = -36(x+1)(y-1)$$

3. 结论

	$(-3, 0)$	$(-3, 2)$	$(1, 0)$	$(1, 2)$
$P(x_0, y_0)$	$-72 < 0$			
$z_{xx}(x_0, y_0)$				
是否极值点	×			

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \quad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = -6y + 6 \end{cases} \implies P(x, y) = -36(x+1)(y-1)$$

3. 结论

	$(-3, 0)$	$(-3, 2)$	$(1, 0)$	$(1, 2)$
$P(x_0, y_0)$	$-72 < 0$	$72 > 0$		
$z_{xx}(x_0, y_0)$				
是否极值点	×			

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \quad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = -6y + 6 \end{cases} \Rightarrow P(x, y) = -36(x+1)(y-1)$$

3. 结论

	$(-3, 0)$	$(-3, 2)$	$(1, 0)$	$(1, 2)$
$P(x_0, y_0)$	$-72 < 0$	$72 > 0$		
$z_{xx}(x_0, y_0)$		$-12 < 0$		
是否极值点	×			

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \quad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = -6y + 6 \end{cases} \implies P(x, y) = -36(x+1)(y-1)$$

3. 结论

	$(-3, 0)$	$(-3, 2)$	$(1, 0)$	$(1, 2)$
$P(x_0, y_0)$	$-72 < 0$	$72 > 0$		
$z_{xx}(x_0, y_0)$		$-12 < 0$		
是否极值点	×	极大值点		

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \quad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = -6y + 6 \end{cases} \implies P(x, y) = -36(x+1)(y-1)$$

3. 结论

	$(-3, 0)$	$(-3, 2)$	$(1, 0)$	$(1, 2)$
$P(x_0, y_0)$	$-72 < 0$	$72 > 0$	$72 > 0$	
$z_{xx}(x_0, y_0)$		$-12 < 0$		
是否极值点	×	极大值点		

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \quad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = -6y + 6 \end{cases} \implies P(x, y) = -36(x+1)(y-1)$$

3. 结论

	$(-3, 0)$	$(-3, 2)$	$(1, 0)$	$(1, 2)$
$P(x_0, y_0)$	$-72 < 0$	$72 > 0$	$72 > 0$	
$z_{xx}(x_0, y_0)$		$-12 < 0$	$12 > 0$	
是否极值点	×	极大值点		

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \quad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = -6y + 6 \end{cases} \implies P(x, y) = -36(x+1)(y-1)$$

3. 结论

	$(-3, 0)$	$(-3, 2)$	$(1, 0)$	$(1, 2)$
$P(x_0, y_0)$	$-72 < 0$	$72 > 0$	$72 > 0$	
$z_{xx}(x_0, y_0)$		$-12 < 0$	$12 > 0$	
是否极值点	×	极大值点	极小值点	

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \quad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = -6y + 6 \end{cases} \Rightarrow P(x, y) = -36(x+1)(y-1)$$

3. 结论

	$(-3, 0)$	$(-3, 2)$	$(1, 0)$	$(1, 2)$
$P(x_0, y_0)$	$-72 < 0$	$72 > 0$	$72 > 0$	$-72 < 0$
$z_{xx}(x_0, y_0)$		$-12 < 0$	$12 > 0$	
是否极值点	×	极大值点	极小值点	

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \quad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

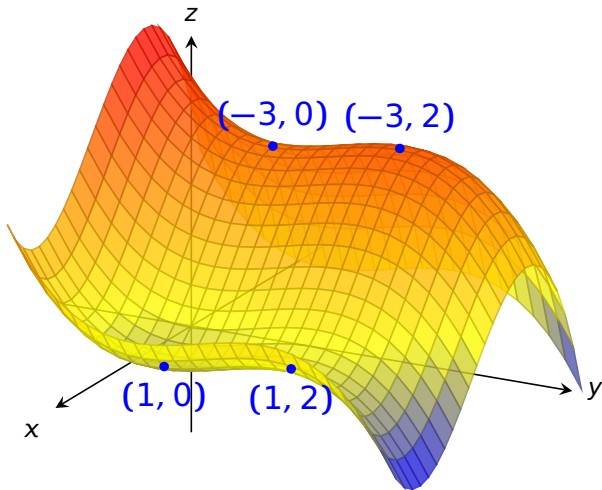
2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = -6y + 6 \end{cases} \Rightarrow P(x, y) = -36(x+1)(y-1)$$

3. 结论

	$(-3, 0)$	$(-3, 2)$	$(1, 0)$	$(1, 2)$
$P(x_0, y_0)$	$-72 < 0$	$72 > 0$	$72 > 0$	$-72 < 0$
$z_{xx}(x_0, y_0)$		$-12 < 0$	$12 > 0$	
是否极值点	×	极大值点	极小值点	×

$$z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$$



例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = \quad , \quad z_y =$$

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \quad z_y =$$

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \quad z_y = 3y^2 - 3x$$

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \quad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组
$$\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \quad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(1, 1), (0, 0)$

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \quad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(1, 1), (0, 0)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$P(x, y) =$$

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \quad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(1, 1), (0, 0)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = \\ z_{xy} = \\ z_{yy} = \end{cases} \implies P(x, y) =$$

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \quad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(1, 1), (0, 0)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x \\ z_{xy} = \\ z_{yy} = \end{cases} \implies P(x, y) =$$

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \quad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(1, 1), (0, 0)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x \\ z_{xy} = -3 \\ z_{yy} = \end{cases} \implies P(x, y) =$$

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \quad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(1, 1), (0, 0)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x \\ z_{xy} = -3 \\ z_{yy} = 6y \end{cases} \implies P(x, y) =$$

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \quad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(1, 1), (0, 0)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x \\ z_{xy} = -3 \\ z_{yy} = 6y \end{cases} \implies P(x, y) = 36xy - 9$$

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \quad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(1, 1), (0, 0)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x \\ z_{xy} = -3 \\ z_{yy} = 6y \end{cases} \implies P(x, y) = 36xy - 9$$

3. 结论

	$(1, 1)$	$(0, 0)$
$P(x_0, y_0)$		
$z_{xx}(x_0, y_0)$		
是否极值点		

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \quad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(1, 1), (0, 0)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x \\ z_{xy} = -3 \\ z_{yy} = 6y \end{cases} \implies P(x, y) = 36xy - 9$$

3. 结论

	$(1, 1)$	$(0, 0)$
$P(x_0, y_0)$	$27 > 0$	
$z_{xx}(x_0, y_0)$		
是否极值点		

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \quad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(1, 1), (0, 0)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x \\ z_{xy} = -3 \\ z_{yy} = 6y \end{cases} \implies P(x, y) = 36xy - 9$$

3. 结论

	$(1, 1)$	$(0, 0)$
$P(x_0, y_0)$	$27 > 0$	
$z_{xx}(x_0, y_0)$	$6 > 0$	
是否极值点		

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \quad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(1, 1), (0, 0)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x \\ z_{xy} = -3 \\ z_{yy} = 6y \end{cases} \implies P(x, y) = 36xy - 9$$

3. 结论

	$(1, 1)$	$(0, 0)$
$P(x_0, y_0)$	$27 > 0$	
$z_{xx}(x_0, y_0)$	$6 > 0$	
是否极值点	极小值点	

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \quad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(1, 1), (0, 0)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x \\ z_{xy} = -3 \\ z_{yy} = 6y \end{cases} \implies P(x, y) = 36xy - 9$$

3. 结论

	$(1, 1)$	$(0, 0)$
$P(x_0, y_0)$	$27 > 0$	$-9 < 0$
$z_{xx}(x_0, y_0)$	$6 > 0$	
是否极值点	极小值点	

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \quad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(1, 1), (0, 0)$

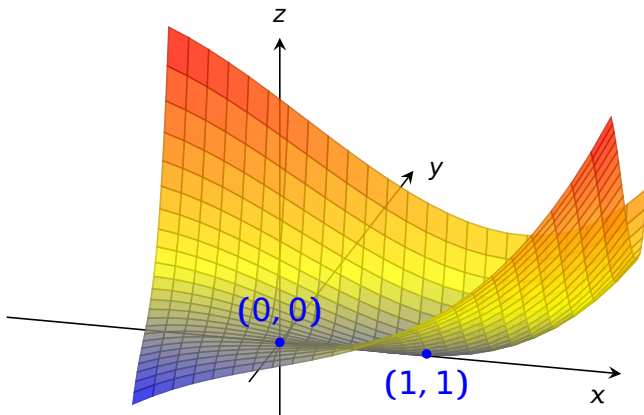
2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x \\ z_{xy} = -3 \\ z_{yy} = 6y \end{cases} \implies P(x, y) = 36xy - 9$$

3. 结论

	$(1, 1)$	$(0, 0)$
$P(x_0, y_0)$	$27 > 0$	$-9 < 0$
$z_{xx}(x_0, y_0)$	$6 > 0$	
是否极值点	极小值点	×

$$z = x^3 + y^3 - 3xy$$



三元函数的极值点

- 设 $u = f(x, y, z)$ 。
- (x_0, y_0, z_0) 是驻点指在该点处偏导数全为零：

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f_z(x_0, y_0, z_0) = 0$$

三元函数的极值点

- 设 $u = f(x, y, z)$ 。
- (x_0, y_0, z_0) 是驻点指在该点处偏导数全为零：

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f_z(x_0, y_0, z_0) = 0$$

- 设 (x_0, y_0, z_0) 是 $u = f(x, y, z)$ 的极值点，则 (x_0, y_0, z_0) 一定是驻点

三元函数的极值点

- 设 $u = f(x, y, z)$ 。
- (x_0, y_0, z_0) 是驻点指在该点处偏导数全为零：

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f_z(x_0, y_0, z_0) = 0$$

- 设 (x_0, y_0, z_0) 是 $u = f(x, y, z)$ 的极值点，则 (x_0, y_0, z_0) 一定是驻点
- 如何进一步判别哪些驻点为极值点？

三元函数的极值点

- 设 $u = f(x, y, z)$ 。
- (x_0, y_0, z_0) 是驻点指在该点处偏导数全为零：

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f_z(x_0, y_0, z_0) = 0$$

- 设 (x_0, y_0, z_0) 是 $u = f(x, y, z)$ 的极值点，则 (x_0, y_0, z_0) 一定是驻点
- 如何进一步判别哪些驻点为极值点？考虑矩阵

$$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}_{(x_0, y_0, z_0)}$$

三元函数的极值点

- 设 $u = f(x, y, z)$ 。
- (x_0, y_0, z_0) 是驻点指在该点处偏导数全为零：

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f_z(x_0, y_0, z_0) = 0$$

- 设 (x_0, y_0, z_0) 是 $u = f(x, y, z)$ 的极值点，则 (x_0, y_0, z_0) 一定是驻点
- 如何进一步判别哪些驻点为极值点？考虑矩阵

$$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}_{(x_0, y_0, z_0)}$$

- 如果是正定矩阵，则 (x_0, y_0, z_0) 是极小值点
- 如果是负定矩阵，则 (x_0, y_0, z_0) 是极大值点

二元函数的最大值和最小值

- 设二元函数 $z = f(x, y)$ 在有界闭区域 \overline{D} 上连续, 则 $z = f(x, y)$ 在 \overline{D} 上取到最大值和最小值。

二元函数的最大值和最小值

- 设二元函数 $z = f(x, y)$ 在有界闭区域 \bar{D} 上连续, 则 $z = f(x, y)$ 在 \bar{D} 上取到最大值和最小值。
- 最大值点 (x_{\max}, y_{\max}) , 最小值点 (x_{\min}, y_{\min}) 或者出现在:
 - 区域的内部。
- 或者出现在:
 - 区域的边界。

二元函数的最大值和最小值

- 设二元函数 $z = f(x, y)$ 在有界闭区域 \bar{D} 上连续, 则 $z = f(x, y)$ 在 \bar{D} 上取到最大值和最小值。
- 最大值点 (x_{\max}, y_{\max}) , 最小值点 (x_{\min}, y_{\min}) 或者出现在:
 - 区域的内部。此时可通过找极值点, 从而找出最值点或者出现在:
 - 区域的边界。

二元函数的最大值和最小值

- 设二元函数 $z = f(x, y)$ 在有界闭区域 \bar{D} 上连续, 则 $z = f(x, y)$ 在 \bar{D} 上取到最大值和最小值。
- 最大值点 (x_{\max}, y_{\max}) , 最小值点 (x_{\min}, y_{\min}) 或者出现在:
 - 区域的内部。此时可通过找极值点, 从而找出最值点
 - 或者出现在:
 - 区域的边界。
- 在实际中, 往往根据问题背景判断目标函数 $z = f(x, y)$ 是有最值。

二元函数的最大值和最小值

- 设二元函数 $z = f(x, y)$ 在有界闭区域 \bar{D} 上连续, 则 $z = f(x, y)$ 在 \bar{D} 上取到最大值和最小值。
- 最大值点 (x_{\max}, y_{\max}) , 最小值点 (x_{\min}, y_{\min}) 或者出现在:
 - 区域的内部。此时可通过找极值点, 从而找出最值点
 - 或者出现在:
 - 区域的边界。
- 在实际中, 往往根据问题背景判断目标函数 $z = f(x, y)$ 是有最值。若此时计算发现 $z = f(x, y)$ 只有一个极大(小)值点, 那么就是最大(小)值点。

例 设生产甲产品 x 单位，乙产品 y 单位时，公司利润为

$$L(x, y) = x + 2y - 0.01(x^2 + xy + y^2) - 10$$

问两种产品各生产多少时，利润最大？

解

例 设生产甲产品 x 单位, 乙产品 y 单位时, 公司利润为

$$L(x, y) = x + 2y - 0.01(x^2 + xy + y^2) - 10$$

问两种产品各生产多少时, 利润最大?

解 1. 求解驻点 (一阶偏导数为零):

2. 计算判别式 $P(x, y)$

3.

例 设生产甲产品 x 单位, 乙产品 y 单位时, 公司利润为

$$L(x, y) = x + 2y - 0.01(x^2 + xy + y^2) - 10$$

问两种产品各生产多少时, 利润最大?

解 1. 求解驻点 (一阶偏导数为零):

$$\begin{cases} L_x = \\ L_y = \end{cases}$$

2. 计算判别式 $P(x, y)$

3.

例 设生产甲产品 x 单位, 乙产品 y 单位时, 公司利润为

$$L(x, y) = x + 2y - 0.01(x^2 + xy + y^2) - 10$$

问两种产品各生产多少时, 利润最大?

解 1. 求解驻点 (一阶偏导数为零):

$$\begin{cases} L_x = 1 - 0.02x - 0.01y \\ L_y = \end{cases}$$

2. 计算判别式 $P(x, y)$

3.

例 设生产甲产品 x 单位, 乙产品 y 单位时, 公司利润为

$$L(x, y) = x + 2y - 0.01(x^2 + xy + y^2) - 10$$

问两种产品各生产多少时, 利润最大?

解 1. 求解驻点 (一阶偏导数为零):

$$\begin{cases} L_x = 1 - 0.02x - 0.01y = 0 \\ L_y = \end{cases}$$

2. 计算判别式 $P(x, y)$

3.

例 设生产甲产品 x 单位, 乙产品 y 单位时, 公司利润为

$$L(x, y) = x + 2y - 0.01(x^2 + xy + y^2) - 10$$

问两种产品各生产多少时, 利润最大?

解 1. 求解驻点 (一阶偏导数为零):

$$\begin{cases} L_x = 1 - 0.02x - 0.01y = 0 \\ L_y = 2 - 0.01x - 0.02y = 0 \end{cases}$$

2. 计算判别式 $P(x, y)$

3.

例 设生产甲产品 x 单位, 乙产品 y 单位时, 公司利润为

$$L(x, y) = x + 2y - 0.01(x^2 + xy + y^2) - 10$$

问两种产品各生产多少时, 利润最大?

解 1. 求解驻点 (一阶偏导数为零):

$$\begin{cases} L_x = 1 - 0.02x - 0.01y = 0 \\ L_y = 2 - 0.01x - 0.02y = 0 \end{cases}$$

2. 计算判别式 $P(x, y)$

3.

例 设生产甲产品 x 单位, 乙产品 y 单位时, 公司利润为

$$L(x, y) = x + 2y - 0.01(x^2 + xy + y^2) - 10$$

问两种产品各生产多少时, 利润最大?

解 1. 求解驻点 (一阶偏导数为零):

$$\begin{cases} L_x = 1 - 0.02x - 0.01y = 0 \\ L_y = 2 - 0.01x - 0.02y = 0 \end{cases} \implies (x, y) =$$

2. 计算判别式 $P(x, y)$

3.

例 设生产甲产品 x 单位, 乙产品 y 单位时, 公司利润为

$$L(x, y) = x + 2y - 0.01(x^2 + xy + y^2) - 10$$

问两种产品各生产多少时, 利润最大?

解 1. 求解驻点 (一阶偏导数为零):

$$\begin{cases} L_x = 1 - 0.02x - 0.01y = 0 \\ L_y = 2 - 0.01x - 0.02y = 0 \end{cases} \implies (x, y) = (0, 100)$$

2. 计算判别式 $P(x, y)$

3.

例 设生产甲产品 x 单位, 乙产品 y 单位时, 公司利润为

$$L(x, y) = x + 2y - 0.01(x^2 + xy + y^2) - 10$$

问两种产品各生产多少时, 利润最大?

解 1. 求解驻点 (一阶偏导数为零):

$$\begin{cases} L_x = 1 - 0.02x - 0.01y = 0 \\ L_y = 2 - 0.01x - 0.02y = 0 \end{cases} \implies (x, y) = (0, 100)$$

2. 计算判别式 $P(x, y)$

$$P(x, y) =$$

3.

例 设生产甲产品 x 单位, 乙产品 y 单位时, 公司利润为

$$L(x, y) = x + 2y - 0.01(x^2 + xy + y^2) - 10$$

问两种产品各生产多少时, 利润最大?

解 1. 求解驻点 (一阶偏导数为零):

$$\begin{cases} L_x = 1 - 0.02x - 0.01y = 0 \\ L_y = 2 - 0.01x - 0.02y = 0 \end{cases} \implies (x, y) = (0, 100)$$

2. 计算判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} L_{xx} = \\ L_{xy} = \\ L_{yy} = \end{cases} \implies P(x, y) =$$

3.

例 设生产甲产品 x 单位, 乙产品 y 单位时, 公司利润为

$$L(x, y) = x + 2y - 0.01(x^2 + xy + y^2) - 10$$

问两种产品各生产多少时, 利润最大?

解 1. 求解驻点 (一阶偏导数为零):

$$\begin{cases} L_x = 1 - 0.02x - 0.01y = 0 \\ L_y = 2 - 0.01x - 0.02y = 0 \end{cases} \implies (x, y) = (0, 100)$$

2. 计算判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} L_{xx} = -0.02 \\ L_{xy} = \\ L_{yy} = \end{cases} \implies P(x, y) =$$

3.

例 设生产甲产品 x 单位, 乙产品 y 单位时, 公司利润为

$$L(x, y) = x + 2y - 0.01(x^2 + xy + y^2) - 10$$

问两种产品各生产多少时, 利润最大?

解 1. 求解驻点 (一阶偏导数为零):

$$\begin{cases} L_x = 1 - 0.02x - 0.01y = 0 \\ L_y = 2 - 0.01x - 0.02y = 0 \end{cases} \implies (x, y) = (0, 100)$$

2. 计算判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} L_{xx} = -0.02 \\ L_{xy} = -0.01 \\ L_{yy} = \end{cases} \implies P(x, y) =$$

3.

例 设生产甲产品 x 单位, 乙产品 y 单位时, 公司利润为

$$L(x, y) = x + 2y - 0.01(x^2 + xy + y^2) - 10$$

问两种产品各生产多少时, 利润最大?

解 1. 求解驻点 (一阶偏导数为零):

$$\begin{cases} L_x = 1 - 0.02x - 0.01y = 0 \\ L_y = 2 - 0.01x - 0.02y = 0 \end{cases} \implies (x, y) = (0, 100)$$

2. 计算判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} L_{xx} = -0.02 \\ L_{xy} = -0.01 \\ L_{yy} = -0.02 \end{cases} \implies P(x, y) =$$

3.

例 设生产甲产品 x 单位, 乙产品 y 单位时, 公司利润为

$$L(x, y) = x + 2y - 0.01(x^2 + xy + y^2) - 10$$

问两种产品各生产多少时, 利润最大?

解 1. 求解驻点 (一阶偏导数为零):

$$\begin{cases} L_x = 1 - 0.02x - 0.01y = 0 \\ L_y = 2 - 0.01x - 0.02y = 0 \end{cases} \implies (x, y) = (0, 100)$$

2. 计算判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} L_{xx} = -0.02 \\ L_{xy} = -0.01 \\ L_{yy} = -0.02 \end{cases} \implies P(x, y) = 3 \times 10^{-4}$$

3.

例 设生产甲产品 x 单位, 乙产品 y 单位时, 公司利润为

$$L(x, y) = x + 2y - 0.01(x^2 + xy + y^2) - 10$$

问两种产品各生产多少时, 利润最大?

解 1. 求解驻点 (一阶偏导数为零):

$$\begin{cases} L_x = 1 - 0.02x - 0.01y = 0 \\ L_y = 2 - 0.01x - 0.02y = 0 \end{cases} \implies (x, y) = (0, 100)$$

2. 计算判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} L_{xx} = -0.02 \\ L_{xy} = -0.01 \\ L_{yy} = -0.02 \end{cases} \implies P(x, y) = 3 \times 10^{-4}$$

3. $P(0, 100) > 0$,

例 设生产甲产品 x 单位, 乙产品 y 单位时, 公司利润为

$$L(x, y) = x + 2y - 0.01(x^2 + xy + y^2) - 10$$

问两种产品各生产多少时, 利润最大?

解 1. 求解驻点 (一阶偏导数为零):

$$\begin{cases} L_x = 1 - 0.02x - 0.01y = 0 \\ L_y = 2 - 0.01x - 0.02y = 0 \end{cases} \implies (x, y) = (0, 100)$$

2. 计算判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} L_{xx} = -0.02 \\ L_{xy} = -0.01 \\ L_{yy} = -0.02 \end{cases} \implies P(x, y) = 3 \times 10^{-4}$$

3. $P(0, 100) > 0$, $L_{xx}(0, 100) < 0$,

例 设生产甲产品 x 单位, 乙产品 y 单位时, 公司利润为

$$L(x, y) = x + 2y - 0.01(x^2 + xy + y^2) - 10$$

问两种产品各生产多少时, 利润最大?

解 1. 求解驻点 (一阶偏导数为零):

$$\begin{cases} L_x = 1 - 0.02x - 0.01y = 0 \\ L_y = 2 - 0.01x - 0.02y = 0 \end{cases} \implies (x, y) = (0, 100)$$

2. 计算判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} L_{xx} = -0.02 \\ L_{xy} = -0.01 \\ L_{yy} = -0.02 \end{cases} \implies P(x, y) = 3 \times 10^{-4}$$

3. $P(0, 100) > 0$, $L_{xx}(0, 100) < 0$, $(0, 100)$ 为极大值点。

例 设生产甲产品 x 单位, 乙产品 y 单位时, 公司利润为

$$L(x, y) = x + 2y - 0.01(x^2 + xy + y^2) - 10$$

问两种产品各生产多少时, 利润最大?

解 1. 求解驻点 (一阶偏导数为零):

$$\begin{cases} L_x = 1 - 0.02x - 0.01y = 0 \\ L_y = 2 - 0.01x - 0.02y = 0 \end{cases} \implies (x, y) = (0, 100)$$

2. 计算判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} L_{xx} = -0.02 \\ L_{xy} = -0.01 \\ L_{yy} = -0.02 \end{cases} \implies P(x, y) = 3 \times 10^{-4}$$

3. $P(0, 100) > 0$, $L_{xx}(0, 100) < 0$, $(0, 100)$ 为极大值点。由唯一性, $(0, 100)$ 也是最大值点, 最大利润为 $L(0, 100) = 90$

例 设生产甲产品 x 单位，乙产品 y 单位时，公司利润为

$$L(x, y) = -0.1x^2 - 0.1y^2 + 60x + 50y$$

问两种产品各生产多少时，利润最大？

解

例 设生产甲产品 x 单位, 乙产品 y 单位时, 公司利润为

$$L(x, y) = -0.1x^2 - 0.1y^2 + 60x + 50y$$

问两种产品各生产多少时, 利润最大?

解 1. 求解驻点 (一阶偏导数为零):

2. 计算判别式 $P(x, y)$

3.

例 设生产甲产品 x 单位, 乙产品 y 单位时, 公司利润为

$$L(x, y) = -0.1x^2 - 0.1y^2 + 60x + 50y$$

问两种产品各生产多少时, 利润最大?

解 1. 求解驻点 (一阶偏导数为零):

$$\begin{cases} L_x = \\ L_y = \end{cases}$$

2. 计算判别式 $P(x, y)$

3.

例 设生产甲产品 x 单位, 乙产品 y 单位时, 公司利润为

$$L(x, y) = -0.1x^2 - 0.1y^2 + 60x + 50y$$

问两种产品各生产多少时, 利润最大?

解 1. 求解驻点 (一阶偏导数为零):

$$\begin{cases} L_x = -0.2x + 60 \\ L_y = \end{cases}$$

2. 计算判别式 $P(x, y)$

3.

例 设生产甲产品 x 单位, 乙产品 y 单位时, 公司利润为

$$L(x, y) = -0.1x^2 - 0.1y^2 + 60x + 50y$$

问两种产品各生产多少时, 利润最大?

解 1. 求解驻点 (一阶偏导数为零):

$$\begin{cases} L_x = -0.2x + 60 = 0 \\ L_y = \end{cases}$$

2. 计算判别式 $P(x, y)$

3.

例 设生产甲产品 x 单位, 乙产品 y 单位时, 公司利润为

$$L(x, y) = -0.1x^2 - 0.1y^2 + 60x + 50y$$

问两种产品各生产多少时, 利润最大?

解 1. 求解驻点 (一阶偏导数为零):

$$\begin{cases} L_x = -0.2x + 60 = 0 \\ L_y = -0.2y + 50 \end{cases}$$

2. 计算判别式 $P(x, y)$

3.

例 设生产甲产品 x 单位, 乙产品 y 单位时, 公司利润为

$$L(x, y) = -0.1x^2 - 0.1y^2 + 60x + 50y$$

问两种产品各生产多少时, 利润最大?

解 1. 求解驻点 (一阶偏导数为零):

$$\begin{cases} L_x = -0.2x + 60 = 0 \\ L_y = -0.2y + 50 = 0 \end{cases}$$

2. 计算判别式 $P(x, y)$

3.

例 设生产甲产品 x 单位, 乙产品 y 单位时, 公司利润为

$$L(x, y) = -0.1x^2 - 0.1y^2 + 60x + 50y$$

问两种产品各生产多少时, 利润最大?

解 1. 求解驻点 (一阶偏导数为零):

$$\begin{cases} L_x = -0.2x + 60 = 0 \\ L_y = -0.2y + 50 = 0 \end{cases} \implies (x, y) =$$

2. 计算判别式 $P(x, y)$

3.

例 设生产甲产品 x 单位, 乙产品 y 单位时, 公司利润为

$$L(x, y) = -0.1x^2 - 0.1y^2 + 60x + 50y$$

问两种产品各生产多少时, 利润最大?

解 1. 求解驻点 (一阶偏导数为零):

$$\begin{cases} L_x = -0.2x + 60 = 0 \\ L_y = -0.2y + 50 = 0 \end{cases} \implies (x, y) = (300, 250)$$

2. 计算判别式 $P(x, y)$

3.

例 设生产甲产品 x 单位, 乙产品 y 单位时, 公司利润为

$$L(x, y) = -0.1x^2 - 0.1y^2 + 60x + 50y$$

问两种产品各生产多少时, 利润最大?

解 1. 求解驻点 (一阶偏导数为零):

$$\begin{cases} L_x = -0.2x + 60 = 0 \\ L_y = -0.2y + 50 = 0 \end{cases} \implies (x, y) = (300, 250)$$

2. 计算判别式 $P(x, y)$

$$P(x, y) =$$

3.

例 设生产甲产品 x 单位, 乙产品 y 单位时, 公司利润为

$$L(x, y) = -0.1x^2 - 0.1y^2 + 60x + 50y$$

问两种产品各生产多少时, 利润最大?

解 1. 求解驻点 (一阶偏导数为零):

$$\begin{cases} L_x = -0.2x + 60 = 0 \\ L_y = -0.2y + 50 = 0 \end{cases} \implies (x, y) = (300, 250)$$

2. 计算判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} L_{xx} = \\ L_{xy} = \\ L_{yy} = \end{cases} \implies P(x, y) =$$

3.

例 设生产甲产品 x 单位, 乙产品 y 单位时, 公司利润为

$$L(x, y) = -0.1x^2 - 0.1y^2 + 60x + 50y$$

问两种产品各生产多少时, 利润最大?

解 1. 求解驻点 (一阶偏导数为零):

$$\begin{cases} L_x = -0.2x + 60 = 0 \\ L_y = -0.2y + 50 = 0 \end{cases} \implies (x, y) = (300, 250)$$

2. 计算判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} L_{xx} = -0.2 \\ L_{xy} = \\ L_{yy} = \end{cases} \implies P(x, y) =$$

3.

例 设生产甲产品 x 单位, 乙产品 y 单位时, 公司利润为

$$L(x, y) = -0.1x^2 - 0.1y^2 + 60x + 50y$$

问两种产品各生产多少时, 利润最大?

解 1. 求解驻点 (一阶偏导数为零):

$$\begin{cases} L_x = -0.2x + 60 = 0 \\ L_y = -0.2y + 50 = 0 \end{cases} \implies (x, y) = (300, 250)$$

2. 计算判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} L_{xx} = -0.2 \\ L_{xy} = 0 \\ L_{yy} = \end{cases} \implies P(x, y) =$$

3.

例 设生产甲产品 x 单位, 乙产品 y 单位时, 公司利润为

$$L(x, y) = -0.1x^2 - 0.1y^2 + 60x + 50y$$

问两种产品各生产多少时, 利润最大?

解 1. 求解驻点 (一阶偏导数为零):

$$\begin{cases} L_x = -0.2x + 60 = 0 \\ L_y = -0.2y + 50 = 0 \end{cases} \implies (x, y) = (300, 250)$$

2. 计算判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} L_{xx} = -0.2 \\ L_{xy} = 0 \\ L_{yy} = -0.2 \end{cases} \implies P(x, y) =$$

3.

例 设生产甲产品 x 单位, 乙产品 y 单位时, 公司利润为

$$L(x, y) = -0.1x^2 - 0.1y^2 + 60x + 50y$$

问两种产品各生产多少时, 利润最大?

解 1. 求解驻点 (一阶偏导数为零):

$$\begin{cases} L_x = -0.2x + 60 = 0 \\ L_y = -0.2y + 50 = 0 \end{cases} \implies (x, y) = (300, 250)$$

2. 计算判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} L_{xx} = -0.2 \\ L_{xy} = 0 \\ L_{yy} = -0.2 \end{cases} \implies P(x, y) = (-0.2) \times (-0.2) - 0^2 = 0.04$$

3.

例 设生产甲产品 x 单位, 乙产品 y 单位时, 公司利润为

$$L(x, y) = -0.1x^2 - 0.1y^2 + 60x + 50y$$

问两种产品各生产多少时, 利润最大?

解 1. 求解驻点 (一阶偏导数为零):

$$\begin{cases} L_x = -0.2x + 60 = 0 \\ L_y = -0.2y + 50 = 0 \end{cases} \implies (x, y) = (300, 250)$$

2. 计算判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} L_{xx} = -0.2 \\ L_{xy} = 0 \\ L_{yy} = -0.2 \end{cases} \implies P(x, y) = (-0.2) \times (-0.2) - 0^2 = 0.04$$

3. $P(300, 250) > 0$,

例 设生产甲产品 x 单位, 乙产品 y 单位时, 公司利润为

$$L(x, y) = -0.1x^2 - 0.1y^2 + 60x + 50y$$

问两种产品各生产多少时, 利润最大?

解 1. 求解驻点 (一阶偏导数为零):

$$\begin{cases} L_x = -0.2x + 60 = 0 \\ L_y = -0.2y + 50 = 0 \end{cases} \implies (x, y) = (300, 250)$$

2. 计算判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} L_{xx} = -0.2 \\ L_{xy} = 0 \\ L_{yy} = -0.2 \end{cases} \implies P(x, y) = (-0.2) \times (-0.2) - 0^2 = 0.04$$

3. $P(300, 250) > 0$, $L_{xx}(300, 250) < 0$,

例 设生产甲产品 x 单位, 乙产品 y 单位时, 公司利润为

$$L(x, y) = -0.1x^2 - 0.1y^2 + 60x + 50y$$

问两种产品各生产多少时, 利润最大?

解 1. 求解驻点 (一阶偏导数为零):

$$\begin{cases} L_x = -0.2x + 60 = 0 \\ L_y = -0.2y + 50 = 0 \end{cases} \implies (x, y) = (300, 250)$$

2. 计算判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} L_{xx} = -0.2 \\ L_{xy} = 0 \\ L_{yy} = -0.2 \end{cases} \implies P(x, y) = (-0.2) \times (-0.2) - 0^2 = 0.04$$

3. $P(300, 250) > 0$, $L_{xx}(300, 250) < 0$, $(300, 250)$ 为极大值点。

例 设生产甲产品 x 单位, 乙产品 y 单位时, 公司利润为

$$L(x, y) = -0.1x^2 - 0.1y^2 + 60x + 50y$$

问两种产品各生产多少时, 利润最大?

解 1. 求解驻点 (一阶偏导数为零):

$$\begin{cases} L_x = -0.2x + 60 = 0 \\ L_y = -0.2y + 50 = 0 \end{cases} \implies (x, y) = (300, 250)$$

2. 计算判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} L_{xx} = -0.2 \\ L_{xy} = 0 \\ L_{yy} = -0.2 \end{cases} \implies P(x, y) = (-0.2) \times (-0.2) - 0^2 = 0.04$$

3. $P(300, 250) > 0$, $L_{xx}(300, 250) < 0$, $(300, 250)$ 为极大值点。

由唯一性, $(300, 250)$ 也是最大值点, 此时达到最大利润。

We are here now...

1. 多元函数的极值点

2. 条件极值及拉格朗日乘数法

条件极值问题：引入

例

工厂	产量	总成本	总生产任务
A	x	$f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$	500
B	y		

如何分配工厂生产任务，使总成本最少？

条件极值问题：引入

例

工厂	产量	总成本	总生产任务
A	x	$f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$	500
B	y		

如何分配工厂生产任务，使总成本最少？

即：求 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$
值。

最小

条件极值问题：引入

例

工厂	产量	总成本	总生产任务
A	x	$f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$	500
B	y		

如何分配工厂生产任务，使总成本最少？

即：求 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$ 在条件 $x + y = 500$ 下的最小值。

条件极值问题：引入

例

工厂	产量	总成本	总生产任务
A	x	$f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$	500
B	y		

如何分配工厂生产任务，使总成本最少？

即：求 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$ 在条件 $x + y = 500$ 下的最小值。

解法一 将 $y = 500 - x$ 代入 f 表达式，减少未知数：

$$f =$$

条件极值问题：引入

例

工厂	产量	总成本	总生产任务
A	x	$f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$	500
B	y		

如何分配工厂生产任务，使总成本最少？

即：求 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$ 在条件 $x + y = 500$ 下的最小值。

解法一 将 $y = 500 - x$ 代入 f 表达式，减少未知数：

$$f = x^2 + 2(500 - x)^2 + 5x(500 - x) + 700$$

条件极值问题：引入

例

工厂	产量	总成本	总生产任务
A	x	$f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$	500
B	y		

如何分配工厂生产任务，使总成本最少？

即：求 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$ 在条件 $x + y = 500$ 下的最小值。

解法一 将 $y = 500 - x$ 代入 f 表达式，减少未知数：

$$f = x^2 + 2(500 - x)^2 + 5x(500 - x) + 700$$

所以

$$\frac{df}{dx} =$$

条件极值问题：引入

例

工厂	产量	总成本	总生产任务
A	x	$f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$	500
B	y		

如何分配工厂生产任务，使总成本最少？

即：求 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$ 在条件 $x + y = 500$ 下的最小值。

解法一 将 $y = 500 - x$ 代入 f 表达式，减少未知数：

$$f = x^2 + 2(500 - x)^2 + 5x(500 - x) + 700$$

所以

$$\frac{df}{dx} = 500 - 4x$$

条件极值问题：引入

例

工厂	产量	总成本	总生产任务
A	x	$f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$	500
B	y		

如何分配工厂生产任务，使总成本最少？

即：求 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$ 在条件 $x + y = 500$ 下的最小值。

解法一 将 $y = 500 - x$ 代入 f 表达式，减少未知数：

$$f = x^2 + 2(500 - x)^2 + 5x(500 - x) + 700$$

所以

$$\frac{df}{dx} = 500 - 4x$$

解 $\frac{df}{dx} = 0$ 可得： $x =$,

条件极值问题：引入

例

工厂	产量	总成本	总生产任务
A	x	$f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$	500
B	y		

如何分配工厂生产任务，使总成本最少？

即：求 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$ 在条件 $x + y = 500$ 下的最小值。

解法一 将 $y = 500 - x$ 代入 f 表达式，减少未知数：

$$f = x^2 + 2(500 - x)^2 + 5x(500 - x) + 700$$

所以

$$\frac{df}{dx} = 500 - 4x$$

解 $\frac{df}{dx} = 0$ 可得： $x = 125$,

条件极值问题：引入

例

工厂	产量	总成本	总生产任务
A	x	$f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$	500
B	y		

如何分配工厂生产任务，使总成本最少？

即：求 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$ 在条件 $x + y = 500$ 下的最小值。

解法一 将 $y = 500 - x$ 代入 f 表达式，减少未知数：

$$f = x^2 + 2(500 - x)^2 + 5x(500 - x) + 700$$

所以

$$\frac{df}{dx} = 500 - 4x$$

解 $\frac{df}{dx} = 0$ 可得： $x = 125$ ，此时生产成本最小，

条件极值问题：引入

例

工厂	产量	总成本	总生产任务
A	x	$f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$	500
B	y		

如何分配工厂生产任务，使总成本最少？

即：求 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$ 在条件 $x + y = 500$ 下的最小值。

解法一 将 $y = 500 - x$ 代入 f 表达式，减少未知数：

$$f = x^2 + 2(500 - x)^2 + 5x(500 - x) + 700$$

所以

$$\frac{df}{dx} = 500 - 4x$$

解 $\frac{df}{dx} = 0$ 可得： $x = 125$ ，此时生产成本最小， $y = 500 - x =$ 。

条件极值问题：引入

例

工厂	产量	总成本	总生产任务
A	x	$f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$	500
B	y		

如何分配工厂生产任务，使总成本最少？

即：求 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$ 在条件 $x + y = 500$ 下的最小值。

解法一 将 $y = 500 - x$ 代入 f 表达式，减少未知数：

$$f = x^2 + 2(500 - x)^2 + 5x(500 - x) + 700$$

所以

$$\frac{df}{dx} = 500 - 4x$$

解 $\frac{df}{dx} = 0$ 可得： $x = 125$ ，此时生产成本最小， $y = 500 - x = 375$ 。

条件极值及拉格朗日乘数法

- 问题 求 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$ 在条件 $x + y - 500 = 0$ 下最小值

条件极值及拉格朗日乘数法

- **问题** 求 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$ 在条件 $x + y - 500 = 0$ 下最小值
- **更一般问题** 求 $f(x, y)$ 在条件 $g(x, y) = 0$ 下的最值（最优解）

条件极值及拉格朗日乘数法

- **问题** 求 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$ 在条件 $x + y - 500 = 0$ 下最小值
- **更一般问题** 求 $f(x, y)$ 在条件 $g(x, y) = 0$ 下的最值（最优解）
- **拉格朗日乘数法** 求解：
 1. 构造辅助函数（称为**拉格朗日函数**）：
 2. 求解方程组：

条件极值及拉格朗日乘数法

- **问题** 求 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$ 在条件 $x + y - 500 = 0$ 下最小值
- **更一般问题** 求 $f(x, y)$ 在条件 $g(x, y) = 0$ 下的最值（最优解）
- **拉格朗日乘数法** 求解：
 1. 构造辅助函数（称为**拉格朗日函数**）：

$$F(x, y, \lambda)$$

2. 求解方程组：

条件极值及拉格朗日乘数法

- **问题** 求 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$ 在条件 $x + y - 500 = 0$ 下最小值
- **更一般问题** 求 $f(x, y)$ 在条件 $g(x, y) = 0$ 下的最值（最优解）
- **拉格朗日乘数法** 求解：
 1. 构造辅助函数（称为**拉格朗日函数**）：

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

2. 求解方程组：

条件极值及拉格朗日乘数法

- **问题** 求 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$ 在条件 $x + y - 500 = 0$ 下最小值
- **更一般问题** 求 $f(x, y)$ 在条件 $g(x, y) = 0$ 下的最值（最优解）
- **拉格朗日乘数法** 求解：
 1. 构造辅助函数（称为**拉格朗日函数**）：

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

其中 λ 是待定常数，称为**拉格朗日乘数**

2. 求解方程组：

条件极值及拉格朗日乘数法

- **问题** 求 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$ 在条件 $x + y - 500 = 0$ 下最小值
- **更一般问题** 求 $f(x, y)$ 在条件 $g(x, y) = 0$ 下的最值（最优解）
- **拉格朗日乘数法** 求解：
 1. 构造辅助函数（称为**拉格朗日函数**）：

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

其中 λ 是待定常数，称为**拉格朗日乘数**

2. 求解方程组：

$$\begin{cases} F_x(x, y, \lambda) & = 0 \\ F_y(x, y, \lambda) & = 0 \\ g(x, y) & = 0 \end{cases}$$

条件极值及拉格朗日乘数法

- **问题** 求 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$ 在条件 $x + y - 500 = 0$ 下最小值
- **更一般问题** 求 $f(x, y)$ 在条件 $g(x, y) = 0$ 下的最值（最优解）
- **拉格朗日乘数法** 求解：
 1. 构造辅助函数（称为**拉格朗日函数**）：

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

其中 λ 是待定常数，称为**拉格朗日乘数**

2. 求解方程组：

$$\begin{cases} F_x(x, y, \lambda) = f_x(x, y) + \lambda g_x(x, y) = 0 \\ F_y(x, y, \lambda) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

条件极值及拉格朗日乘数法

- **问题** 求 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$ 在条件 $x + y - 500 = 0$ 下最小值
- **更一般问题** 求 $f(x, y)$ 在条件 $g(x, y) = 0$ 下的最值（最优解）
- **拉格朗日乘数法** 求解：
 1. 构造辅助函数（称为**拉格朗日函数**）：

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

其中 λ 是待定常数，称为**拉格朗日乘数**

2. 求解方程组：

$$\begin{cases} F_x(x, y, \lambda) = f_x(x, y) + \lambda g_x(x, y) = 0 \\ F_y(x, y, \lambda) = f_y(x, y) + \lambda g_y(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

条件极值及拉格朗日乘数法

- **问题** 求 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$ 在条件 $x + y - 500 = 0$ 下最小值
- **更一般问题** 求 $f(x, y)$ 在条件 $g(x, y) = 0$ 下的最值（最优解）
- **拉格朗日乘数法** 求解：
 1. 构造辅助函数（称为**拉格朗日函数**）：

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

其中 λ 是待定常数，称为**拉格朗日乘数**

2. 求解方程组：

$$\begin{cases} F_x(x, y, \lambda) = f_x(x, y) + \lambda g_x(x, y) = 0 \\ F_y(x, y, \lambda) = f_y(x, y) + \lambda g_y(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

条件极值点（甚至问题的最优解）一般就蕴含在上述方程组的全部解 $\{(x_0, y_0)\}$ 中

用拉格朗日乘数法求解 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$ 在条件
 $x + y - 500 = 0$ 下最小值

解

用拉格朗日乘数法求解 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$ 在条件 $x + y - 500 = 0$ 下最小值

解₁. 构造拉格朗日函数:

2. 求解方程组:

用拉格朗日乘数法求解 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$ 在条件 $x + y - 500 = 0$ 下最小值

解₁. 构造拉格朗日函数:

$$F(x, y, \lambda) =$$

2. 求解方程组:

用拉格朗日乘数法求解 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$ 在条件 $x + y - 500 = 0$ 下最小值

解1. 构造拉格朗日函数:

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) \\ =$$

2. 求解方程组:

用拉格朗日乘数法求解 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$ 在条件 $x + y - 500 = 0$ 下最小值

解₁. 构造拉格朗日函数:

$$\begin{aligned} F(x, y, \lambda) &= f(x, y) + \lambda g(x, y) \\ &= x^2 + 2y^2 + 5xy + 700 + \end{aligned}$$

2. 求解方程组:

用拉格朗日乘数法求解 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$ 在条件 $x + y - 500 = 0$ 下最小值

解₁. 构造拉格朗日函数:

$$\begin{aligned} F(x, y, \lambda) &= f(x, y) + \lambda g(x, y) \\ &= x^2 + 2y^2 + 5xy + 700 + \lambda(x + y - 500) \end{aligned}$$

2. 求解方程组:

用拉格朗日乘数法求解 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$ 在条件 $x + y - 500 = 0$ 下最小值

解₁. 构造拉格朗日函数:

$$\begin{aligned} F(x, y, \lambda) &= f(x, y) + \lambda g(x, y) \\ &= x^2 + 2y^2 + 5xy + 700 + \lambda(x + y - 500) \end{aligned}$$

2. 求解方程组:

$$\begin{cases} F_x(x, y, \lambda) &= 0 \\ F_y(x, y, \lambda) &= 0 \\ g(x, y) = x + y - 500 &= 0 \end{cases}$$

用拉格朗日乘数法求解 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$ 在条件 $x + y - 500 = 0$ 下最小值

解₁. 构造拉格朗日函数:

$$\begin{aligned} F(x, y, \lambda) &= f(x, y) + \lambda g(x, y) \\ &= x^2 + 2y^2 + 5xy + 700 + \lambda(x + y - 500) \end{aligned}$$

2. 求解方程组:

$$\begin{cases} F_x(x, y, \lambda) = 2x + 5y + \lambda = 0 \\ F_y(x, y, \lambda) = 0 \\ g(x, y) = x + y - 500 = 0 \end{cases}$$

用拉格朗日乘数法求解 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$ 在条件 $x + y - 500 = 0$ 下最小值

解₁. 构造拉格朗日函数:

$$\begin{aligned} F(x, y, \lambda) &= f(x, y) + \lambda g(x, y) \\ &= x^2 + 2y^2 + 5xy + 700 + \lambda(x + y - 500) \end{aligned}$$

2. 求解方程组:

$$\begin{cases} F_x(x, y, \lambda) = 2x + 5y + \lambda = 0 \\ F_y(x, y, \lambda) = 4y + 5x + \lambda = 0 \\ g(x, y) = x + y - 500 = 0 \end{cases}$$

用拉格朗日乘数法求解 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$ 在条件 $x + y - 500 = 0$ 下最小值

解₁. 构造拉格朗日函数:

$$\begin{aligned} F(x, y, \lambda) &= f(x, y) + \lambda g(x, y) \\ &= x^2 + 2y^2 + 5xy + 700 + \lambda(x + y - 500) \end{aligned}$$

2. 求解方程组:

$$\begin{cases} F_x(x, y, \lambda) = 2x + 5y + \lambda = 0 \\ F_y(x, y, \lambda) = 4y + 5x + \lambda = 0 \\ g(x, y) = x + y - 500 = 0 \end{cases}$$

方程组的解是 $\begin{cases} x = \\ y = \end{cases}$ 。

用拉格朗日乘数法求解 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$ 在条件 $x + y - 500 = 0$ 下最小值

解₁. 构造拉格朗日函数:

$$\begin{aligned} F(x, y, \lambda) &= f(x, y) + \lambda g(x, y) \\ &= x^2 + 2y^2 + 5xy + 700 + \lambda(x + y - 500) \end{aligned}$$

2. 求解方程组:

$$\begin{cases} F_x(x, y, \lambda) = 2x + 5y + \lambda = 0 \\ F_y(x, y, \lambda) = 4y + 5x + \lambda = 0 \\ g(x, y) = x + y - 500 = 0 \end{cases}$$

方程组的解是 $\begin{cases} x = 125 \\ y = \end{cases}$ 。

用拉格朗日乘数法求解 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$ 在条件 $x + y - 500 = 0$ 下最小值

解₁. 构造拉格朗日函数:

$$\begin{aligned} F(x, y, \lambda) &= f(x, y) + \lambda g(x, y) \\ &= x^2 + 2y^2 + 5xy + 700 + \lambda(x + y - 500) \end{aligned}$$

2. 求解方程组:

$$\begin{cases} F_x(x, y, \lambda) = 2x + 5y + \lambda = 0 \\ F_y(x, y, \lambda) = 4y + 5x + \lambda = 0 \\ g(x, y) = x + y - 500 = 0 \end{cases}$$

方程组的解是 $\begin{cases} x = 125 \\ y = 375 \end{cases}$ 。

用拉格朗日乘数法求解 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$ 在条件 $x + y - 500 = 0$ 下最小值

解₁. 构造拉格朗日函数:

$$\begin{aligned} F(x, y, \lambda) &= f(x, y) + \lambda g(x, y) \\ &= x^2 + 2y^2 + 5xy + 700 + \lambda(x + y - 500) \end{aligned}$$

2. 求解方程组:

$$\begin{cases} F_x(x, y, \lambda) = 2x + 5y + \lambda = 0 \\ F_y(x, y, \lambda) = 4y + 5x + \lambda = 0 \\ g(x, y) = x + y - 500 = 0 \end{cases}$$

方程组的解是 $\begin{cases} x = 125 \\ y = 375 \end{cases}$ 。

3. 由问题的实际背景, 本条件极值问题有最小值。

用拉格朗日乘数法求解 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$ 在条件 $x + y - 500 = 0$ 下最小值

解₁. 构造拉格朗日函数:

$$\begin{aligned} F(x, y, \lambda) &= f(x, y) + \lambda g(x, y) \\ &= x^2 + 2y^2 + 5xy + 700 + \lambda(x + y - 500) \end{aligned}$$

2. 求解方程组:

$$\begin{cases} F_x(x, y, \lambda) = 2x + 5y + \lambda = 0 \\ F_y(x, y, \lambda) = 4y + 5x + \lambda = 0 \\ g(x, y) = x + y - 500 = 0 \end{cases}$$

方程组的解是 $\begin{cases} x = 125 \\ y = 375 \end{cases}$ 。

3. 由问题的实际背景, 本条件极值问题有最小值。从而 $\begin{cases} x = 125 \\ y = 375 \end{cases}$

是最优解。

例

原料	单价	数量	预算	生产产品数量
A	1	x	120	$f(x, y) = x^2y$
B	2	y		

如何采购原料，使生产量最大？

例

原料	单价	数量	预算	生产产品数量
A	1	x	120	$f(x, y) = x^2y$
B	2	y		

如何采购原料，使生产量最大？

即：求 $f(x, y) = x^2y$

最大值。

例

原料	单价	数量	预算	生产产品数量
A	1	x	120	$f(x, y) = x^2y$
B	2	y		

如何采购原料，使生产量最大？

即：求 $f(x, y) = x^2y$ 在条件 $x + 2y = 120$ 下的最大值。

例

原料	单价	数量	预算	生产产品数量
A	1	x	120	$f(x, y) = x^2y$
B	2	y		

如何采购原料，使生产量最大？

即：求 $f(x, y) = x^2y$ 在条件 $x + 2y = 120$ 下的最大值。

拉格朗日乘数法求解法

1. 构造拉格朗日函数：

2. 求解方程组：

,

例

原料	单价	数量	预算	生产产品数量
A	1	x	120	$f(x, y) = x^2y$
B	2	y		

如何采购原料，使生产量最大？

即：求 $f(x, y) = x^2y$ 在条件 $x + 2y = 120$ 下的最大值。

拉格朗日乘数法求解法

1. 构造拉格朗日函数：

$$F(x, y, \lambda) =$$

2. 求解方程组：

,

例

原料	单价	数量	预算	生产产品数量
A	1	x	120	$f(x, y) = x^2y$
B	2	y		

如何采购原料，使生产量最大？

即：求 $f(x, y) = x^2y$ 在条件 $x + 2y = 120$ 下的最大值。

拉格朗日乘数法求解法

1. 构造拉格朗日函数：

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) =$$

2. 求解方程组：

,

例

原料	单价	数量	预算	生产产品数量
A	1	x	120	$f(x, y) = x^2y$
B	2	y		

如何采购原料，使生产量最大？

即：求 $f(x, y) = x^2y$ 在条件 $x + 2y = 120$ 下的最大值。

拉格朗日乘数法求解法

1. 构造拉格朗日函数：

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = x^2y +$$

2. 求解方程组：

,

例

原料	单价	数量	预算	生产产品数量
A	1	x	120	$f(x, y) = x^2y$
B	2	y		

如何采购原料，使生产量最大？

即：求 $f(x, y) = x^2y$ 在条件 $x + 2y = 120$ 下的最大值。

拉格朗日乘数法求解法

1. 构造拉格朗日函数：

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = x^2y + \lambda(x + 2y - 120)$$

2. 求解方程组：

,

例

原料	单价	数量	预算	生产产品数量
A	1	x	120	$f(x, y) = x^2y$
B	2	y		

如何采购原料，使生产量最大？

即：求 $f(x, y) = x^2y$ 在条件 $x + 2y = 120$ 下的最大值。

拉格朗日乘数法求解法

1. 构造拉格朗日函数：

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = x^2y + \lambda(x + 2y - 120)$$

2. 求解方程组：

$$\begin{cases} F_x(x, y, \lambda) &= 0 \\ F_y(x, y, \lambda) &= 0 \\ g(x, y) = x + 2y - 120 &= 0 \end{cases},$$

例

原料	单价	数量	预算	生产产品数量
A	1	x	120	$f(x, y) = x^2y$
B	2	y		

如何采购原料，使生产量最大？

即：求 $f(x, y) = x^2y$ 在条件 $x + 2y = 120$ 下的最大值。

拉格朗日乘数法求解法

1. 构造拉格朗日函数：

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = x^2y + \lambda(x + 2y - 120)$$

2. 求解方程组：

$$\begin{cases} F_x(x, y, \lambda) = 2xy + \lambda = 0 \\ F_y(x, y, \lambda) = x^2 + 2\lambda = 0 \\ g(x, y) = x + 2y - 120 = 0 \end{cases},$$

例

原料	单价	数量	预算	生产产品数量
A	1	x	120	$f(x, y) = x^2y$
B	2	y		

如何采购原料，使生产量最大？

即：求 $f(x, y) = x^2y$ 在条件 $x + 2y = 120$ 下的最大值。

拉格朗日乘数法求解法

1. 构造拉格朗日函数：

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = x^2y + \lambda(x + 2y - 120)$$

2. 求解方程组：

$$\begin{cases} F_x(x, y, \lambda) = 2xy + \lambda = 0 \\ F_y(x, y, \lambda) = x^2 + 2\lambda = 0 \\ g(x, y) = x + 2y - 120 = 0 \end{cases},$$

例

原料	单价	数量	预算	生产产品数量
A	1	x	120	$f(x, y) = x^2y$
B	2	y		

如何采购原料，使生产量最大？

即：求 $f(x, y) = x^2y$ 在条件 $x + 2y = 120$ 下的最大值。

拉格朗日乘数法求解法

1. 构造拉格朗日函数：

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = x^2y + \lambda(x + 2y - 120)$$

2. 求解方程组：

$$\begin{cases} F_x(x, y, \lambda) = 2xy + \lambda = 0 \\ F_y(x, y, \lambda) = x^2 + 2\lambda = 0 \\ g(x, y) = x + 2y - 120 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \\ y = \end{cases},$$

例

原料	单价	数量	预算	生产产品数量
A	1	x	120	$f(x, y) = x^2y$
B	2	y		

如何采购原料，使生产量最大？

即：求 $f(x, y) = x^2y$ 在条件 $x + 2y = 120$ 下的最大值。

拉格朗日乘数法求解法

1. 构造拉格朗日函数：

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = x^2y + \lambda(x + 2y - 120)$$

2. 求解方程组：

$$\begin{cases} F_x(x, y, \lambda) = 2xy + \lambda = 0 \\ F_y(x, y, \lambda) = x^2 + 2\lambda = 0 \\ g(x, y) = x + 2y - 120 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 60 \end{cases},$$

例

原料	单价	数量	预算	生产产品数量
A	1	x	120	$f(x, y) = x^2y$
B	2	y		

如何采购原料，使生产量最大？

即：求 $f(x, y) = x^2y$ 在条件 $x + 2y = 120$ 下的最大值。

拉格朗日乘数法求解法

1. 构造拉格朗日函数：

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = x^2y + \lambda(x + 2y - 120)$$

2. 求解方程组：

$$\begin{cases} F_x(x, y, \lambda) = 2xy + \lambda = 0 \\ F_y(x, y, \lambda) = x^2 + 2\lambda = 0 \\ g(x, y) = x + 2y - 120 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 60 \end{cases}, \begin{cases} x = 80 \\ y = 20 \end{cases}$$

例

原料	单价	数量	预算	生产产品数量
A	1	x	120	$f(x, y) = x^2 y$
B	2	y		

如何采购原料，使生产量最大？

即：求 $f(x, y) = x^2 y$ 在条件 $x + 2y = 120$ 下的最大值。

拉格朗日乘数法求解法

1. 构造拉格朗日函数：

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = x^2 y + \lambda(x + 2y - 120)$$

2. 求解方程组：

$$\begin{cases} F_x(x, y, \lambda) = 2xy + \lambda = 0 \\ F_y(x, y, \lambda) = x^2 + 2\lambda = 0 \\ g(x, y) = x + 2y - 120 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 60 \end{cases}, \begin{cases} x = 80 \\ y = 20 \end{cases}$$

3. 由问题的实际背景，本条件极值问题有最大值。

例

原料	单价	数量	预算	生产产品数量
A	1	x	120	$f(x, y) = x^2y$
B	2	y		

如何采购原料，使生产量最大？

即：求 $f(x, y) = x^2y$ 在条件 $x + 2y = 120$ 下的最大值。

拉格朗日乘数法求解法

1. 构造拉格朗日函数：

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = x^2y + \lambda(x + 2y - 120)$$

2. 求解方程组：

$$\begin{cases} F_x(x, y, \lambda) = 2xy + \lambda = 0 \\ F_y(x, y, \lambda) = x^2 + 2\lambda = 0 \\ g(x, y) = x + 2y - 120 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 60 \end{cases}, \begin{cases} x = 80 \\ y = 20 \end{cases}$$

3. 由问题的实际背景，本条件极值问题有最大值。而

$$f(0, 60) \quad f(80, 20),$$

例

原料	单价	数量	预算	生产产品数量
A	1	x	120	$f(x, y) = x^2y$
B	2	y		

如何采购原料，使生产量最大？

即：求 $f(x, y) = x^2y$ 在条件 $x + 2y = 120$ 下的最大值。

拉格朗日乘数法求解法

1. 构造拉格朗日函数：

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = x^2y + \lambda(x + 2y - 120)$$

2. 求解方程组：

$$\begin{cases} F_x(x, y, \lambda) = 2xy + \lambda = 0 \\ F_y(x, y, \lambda) = x^2 + 2\lambda = 0 \\ g(x, y) = x + 2y - 120 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 60 \end{cases}, \begin{cases} x = 80 \\ y = 20 \end{cases}$$

3. 由问题的实际背景，本条件极值问题有最大值。而

$$f(0, 60) = 0 < f(80, 20),$$

例

原料	单价	数量	预算	生产产品数量
A	1	x	120	$f(x, y) = x^2y$
B	2	y		

如何采购原料，使生产量最大？

即：求 $f(x, y) = x^2y$ 在条件 $x + 2y = 120$ 下的最大值。

拉格朗日乘数法求解法

1. 构造拉格朗日函数：

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = x^2y + \lambda(x + 2y - 120)$$

2. 求解方程组：

$$\begin{cases} F_x(x, y, \lambda) = 2xy + \lambda = 0 \\ F_y(x, y, \lambda) = x^2 + 2\lambda = 0 \\ g(x, y) = x + 2y - 120 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 60 \end{cases}, \begin{cases} x = 80 \\ y = 20 \end{cases}$$

3. 由问题的实际背景，本条件极值问题有最大值。而

$$f(0, 60) = 0 < f(80, 20), \text{ 从而 } \begin{cases} x = 80 \\ y = 20 \end{cases} \text{ 是最优解。}$$

例

原料	单价	数量	预算	生产产品数量
A	1	x	120	$f(x, y) = x^2y$
B	2	y		
如何采购原料，使生产量最大？				

即：求 $f(x, y) = x^2y$ 在条件 $x + 2y = 120$ 下的最大值。

另解

例

原料	单价	数量	预算	生产产品数量
A	1	x	120	$f(x, y) = x^2y$
B	2	y		
如何采购原料，使生产量最大？				

即：求 $f(x, y) = x^2y$ 在条件 $x + 2y = 120$ 下的最大值。

另解 将 $y = 60 - \frac{1}{2}x$ 代入 f 表达式，减少未知数：

$$f = x^2y =$$

例

原料	单价	数量	预算	生产产品数量
A	1	x	120	$f(x, y) = x^2y$
B	2	y		
如何采购原料，使生产量最大？				

即：求 $f(x, y) = x^2y$ 在条件 $x + 2y = 120$ 下的最大值。

另解 将 $y = 60 - \frac{1}{2}x$ 代入 f 表达式，减少未知数：

$$f = x^2y = x^2(60 - \frac{1}{2}x)$$

例

原料	单价	数量	预算	生产产品数量
A	1	x	120	$f(x, y) = x^2y$
B	2	y		
如何采购原料，使生产量最大？				

即：求 $f(x, y) = x^2y$ 在条件 $x + 2y = 120$ 下的最大值。

另解 将 $y = 60 - \frac{1}{2}x$ 代入 f 表达式，减少未知数：

$$f = x^2y = x^2(60 - \frac{1}{2}x) = -\frac{1}{2}x^3 + 60x^2$$

例

原料	单价	数量	预算	生产产品数量
A	1	x	120	$f(x, y) = x^2y$
B	2	y		
如何采购原料，使生产量最大？				

即：求 $f(x, y) = x^2y$ 在条件 $x + 2y = 120$ 下的最大值。

另解 将 $y = 60 - \frac{1}{2}x$ 代入 f 表达式，减少未知数：

$$f = x^2y = x^2(60 - \frac{1}{2}x) = -\frac{1}{2}x^3 + 60x^2$$

$\frac{df}{dx} = -\frac{3}{2}x^2 + 120x = 0$		

例

原料	单价	数量	预算	生产产品数量
A	1	x	120	$f(x, y) = x^2y$
B	2	y		
如何采购原料，使生产量最大？				

即：求 $f(x, y) = x^2y$ 在条件 $x + 2y = 120$ 下的最大值。

另解 将 $y = 60 - \frac{1}{2}x$ 代入 f 表达式，减少未知数：

$$f = x^2y = x^2(60 - \frac{1}{2}x) = -\frac{1}{2}x^3 + 60x^2$$

$\frac{df}{dx} = -\frac{3}{2}x^2 + 120x = 0$		
$x = 0$		

例

原料	单价	数量	预算	生产产品数量
A	1	x	120	$f(x, y) = x^2y$
B	2	y		
如何采购原料，使生产量最大？				

即：求 $f(x, y) = x^2y$ 在条件 $x + 2y = 120$ 下的最大值。

另解 将 $y = 60 - \frac{1}{2}x$ 代入 f 表达式，减少未知数：

$$f = x^2y = x^2(60 - \frac{1}{2}x) = -\frac{1}{2}x^3 + 60x^2$$

$\frac{df}{dx} = -\frac{3}{2}x^2 + 120x = 0$		
$x = 0$		
$x = 80$		

例

原料	单价	数量	预算	生产产品数量
A	1	x	120	$f(x, y) = x^2y$
B	2	y		
如何采购原料，使生产量最大？				

即：求 $f(x, y) = x^2y$ 在条件 $x + 2y = 120$ 下的最大值。

另解 将 $y = 60 - \frac{1}{2}x$ 代入 f 表达式，减少未知数：

$$f = x^2y = x^2(60 - \frac{1}{2}x) = -\frac{1}{2}x^3 + 60x^2$$

$\frac{df}{dx} = -\frac{3}{2}x^2 + 120x = 0$	$\frac{d^2f}{dx^2} = -3x + 120$	
$x = 0$		
$x = 80$		

例

原料	单价	数量	预算	生产产品数量
A	1	x	120	$f(x, y) = x^2y$
B	2	y		
如何采购原料，使生产量最大？				

即：求 $f(x, y) = x^2y$ 在条件 $x + 2y = 120$ 下的最大值。

另解 将 $y = 60 - \frac{1}{2}x$ 代入 f 表达式，减少未知数：

$$f = x^2y = x^2(60 - \frac{1}{2}x) = -\frac{1}{2}x^3 + 60x^2$$

$\frac{df}{dx} = -\frac{3}{2}x^2 + 120x = 0$	$\frac{d^2f}{dx^2} = -3x + 120$	
$x = 0$	> 0	
$x = 80$		

例

原料	单价	数量	预算	生产产品数量
A	1	x	120	$f(x, y) = x^2y$
B	2	y		
如何采购原料，使生产量最大？				

即：求 $f(x, y) = x^2y$ 在条件 $x + 2y = 120$ 下的最大值。

另解 将 $y = 60 - \frac{1}{2}x$ 代入 f 表达式，减少未知数：

$$f = x^2y = x^2(60 - \frac{1}{2}x) = -\frac{1}{2}x^3 + 60x^2$$

$\frac{df}{dx} = -\frac{3}{2}x^2 + 120x = 0$	$\frac{d^2f}{dx^2} = -3x + 120$	
$x = 0$	> 0	
$x = 80$	< 0	

例

原料	单价	数量	预算	生产产品数量
A	1	x	120	$f(x, y) = x^2y$
B	2	y		
如何采购原料，使生产量最大？				

即：求 $f(x, y) = x^2y$ 在条件 $x + 2y = 120$ 下的最大值。

另解 将 $y = 60 - \frac{1}{2}x$ 代入 f 表达式，减少未知数：

$$f = x^2y = x^2(60 - \frac{1}{2}x) = -\frac{1}{2}x^3 + 60x^2$$

$\frac{df}{dx} = -\frac{3}{2}x^2 + 120x = 0$	$\frac{d^2f}{dx^2} = -3x + 120$	
$x = 0$	> 0	极小值
$x = 80$	< 0	

例

原料	单价	数量	预算	生产产品数量
A	1	x	120	$f(x, y) = x^2y$
B	2	y		
如何采购原料，使生产量最大？				

即：求 $f(x, y) = x^2y$ 在条件 $x + 2y = 120$ 下的最大值。

另解 将 $y = 60 - \frac{1}{2}x$ 代入 f 表达式，减少未知数：

$$f = x^2y = x^2(60 - \frac{1}{2}x) = -\frac{1}{2}x^3 + 60x^2$$

$\frac{df}{dx} = -\frac{3}{2}x^2 + 120x = 0$	$\frac{d^2f}{dx^2} = -3x + 120$	
$x = 0$	> 0	极小值
$x = 80$	< 0	极大值

例

原料	单价	数量	预算	生产产品数量
A	1	x	120	$f(x, y) = x^2y$
B	2	y		
如何采购原料，使生产量最大？				

即：求 $f(x, y) = x^2y$ 在条件 $x + 2y = 120$ 下的最大值。

另解 将 $y = 60 - \frac{1}{2}x$ 代入 f 表达式，减少未知数：

$$f = x^2y = x^2(60 - \frac{1}{2}x) = -\frac{1}{2}x^3 + 60x^2$$

$\frac{df}{dx} = -\frac{3}{2}x^2 + 120x = 0$	$\frac{d^2f}{dx^2} = -3x + 120$	
$x = 0$	> 0	极小值
$x = 80$	< 0	极大值

$\begin{cases} x = 80 \\ y = \end{cases}$ 时，产量最大。

例

原料	单价	数量	预算	生产产品数量
A	1	x	120	$f(x, y) = x^2y$
B	2	y		
如何采购原料，使生产量最大？				

即：求 $f(x, y) = x^2y$ 在条件 $x + 2y = 120$ 下的最大值。

另解 将 $y = 60 - \frac{1}{2}x$ 代入 f 表达式，减少未知数：

$$f = x^2y = x^2(60 - \frac{1}{2}x) = -\frac{1}{2}x^3 + 60x^2$$

$\frac{df}{dx} = -\frac{3}{2}x^2 + 120x = 0$	$\frac{d^2f}{dx^2} = -3x + 120$	
$x = 0$	> 0	极小值
$x = 80$	< 0	极大值

$\begin{cases} x = 80 \\ y = 20 \end{cases}$ 时，产量最大。

条件极值（二元函数 + 一个附加条件）

问题 求解二元函数 $u = f(x, y)$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的极值点。

求解步骤（拉格朗日乘数法）

1. 构造拉格朗日函数 $L = f + \lambda\varphi$ ，其中 λ 是待定常数。

2. 求解方程组

$$\begin{cases} L_x = f_x + \lambda\varphi_x = 0 \\ L_y = f_y + \lambda\varphi_y = 0 \\ \varphi = 0 \end{cases}$$

3. 条件极值点（如果存在的话）包含在上述解 $\{(x, y)\}$ 中。

（至于如何判断解是否条件极值点，需具体问题具体分析。）

条件极值（三元函数 + 一个附加条件）

问题 求解三元函数 $u = f(x, y, z)$ 在附加条件 $\varphi(x, y, z) = 0$ 下的极值点。

求解步骤（拉格朗日乘数法）

1. 构造拉格朗日函数 $L = f + \lambda\varphi$ ，其中 λ 是待定常数。
2. 求解方程组

$$\begin{cases} L_x = f_x + \lambda\varphi_x = 0 \\ L_y = f_y + \lambda\varphi_y = 0 \\ L_z = f_z + \lambda\varphi_z = 0 \\ \varphi = 0 \end{cases}$$

3. 条件极值点（如果存在的话）包含在上述解 $\{(x, y, z)\}$ 中。
（至于如何判断解是否条件极值点，需具体问题具体分析。）

条件极值（三元函数 + 两个附加条件）

问题 求解三元函数 $u = f(x, y, z)$ 在附加条件 $\begin{cases} \varphi(x, y, z) = 0 \\ \psi(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 下的极值点。

求解步骤（拉格朗日乘数法）

1. 构造拉格朗日函数 $L = f + \lambda\varphi + \mu\psi$ ，其中 λ, μ 是待定常数。

2. 求解方程组
$$\begin{cases} L_x = f_x + \lambda\varphi_x + \mu\psi_x = 0 \\ L_y = f_y + \lambda\varphi_y + \mu\psi_y = 0 \\ L_z = f_z + \lambda\varphi_z + \mu\psi_z = 0 \\ \varphi = 0 \\ \psi = 0 \end{cases}$$

3. 条件极值点（如果存在的话）包含在上述解 $\{(x, y, z)\}$ 中。

（至于如何判断解是否条件极值点，需具体问题具体分析。）