第 12 周作业解答

练习 1. 计算

1. $\iint_{\Delta ABC} xzdS$，ΔABC 是空间中三角形区域，顶点坐标为 $A(1,0,0)$，$B(0,1,0)$，$C(0,0,1)$。
2. $\iint_{\Sigma} zdS$，其中 Σ 是抛物面 $z=x^2+y^2$ 在平面 $z=1$ 下方的部分。
3. $\iint_{\Sigma}(x+y+z)dS$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 在 $z\geq h$ 的部分（$0<h<a$）。
4. $\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)dS$，其中 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和平面 $z=1$ 所围成区域的整个的表面。

解 1. $\frac{1}{24}$
2. $\frac{\pi}{16}(\frac{10}{3}\sqrt{5}+\frac{2}{15})$
3. Σ 是二元函数 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, $(x,\,y)\in D_{xy}=\{(x,\,y)|\,x^2+y^2\leq a^2-h^2\}$ 的图形，所以

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma}(x+y+z)dS &\xlongequal{\text{对称性}} \iint_{\Sigma} zdS\\ &=\iint_{D_{xy}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy\\ &=\iint_{D_{xy}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy\\ &=a\iint_{D_{xy}}dxdy=a\text{Area}(D_{xy})=a(a^2-h^2)\pi\end{aligned}$$

4. Σ 由两部分 Σ_1 和 Σ_2 组成，其中 Σ_1 是二元函数 $z=f(x,y)=1$, $(x,\,y)\in D_{xy}=\{(x,\,y)|\,x^2+y^2\leq 1\}$ 的图形，Σ_2 是二元函数 $z=g(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, $(x,\,y)\in D_{xy}=\{(x,\,y)|\,x^2+y^2\leq 1\}$ 的图形，所以

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)dS &= \iint_{\Sigma_1}(x^2+y^2)dS+\iint_{\Sigma_2}(x^2+y^2)dS\\ &=\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\cdot\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}dxdy+\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\cdot\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}dxdy\\ &=\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy+\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\cdot\sqrt{2}dxdy\\ &=(1+\sqrt{2})\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy\\ &=(1+\sqrt{2})\iint_{D_{xy}}\rho^2\cdot\rho d\rho d\theta\\ &=(1+\sqrt{2})\int_0^{2\pi}\left[\int_0^1\rho^3d\rho\right]d\theta=\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})\pi.\end{aligned}$$

练习 2. 计算

1. $\iint_{\Sigma} xdydz+ydzdx+zdxdy$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 在第一卦象的部分，取单位外法向量。
2. $\iint_{\Sigma} ydydz-xdzdx+zdxdy$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 在第一卦象的部分，取单位外法向量。

3. $\iint_\Sigma xdydz+ydzdx+2zdxdy$，其中 Σ 是抛物面 $z=5-x^2-y^2$ 在 xoy 坐标面上方部分，取单位外法向量。

解 1.

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma xdydz+ydzdx+zdxdy &= \iint_\Sigma (x,y,\,z)\cdot\overrightarrow{n}dS\\ &\xlongequal{\overrightarrow{n}=(x,y,z)} \iint_\Sigma x^2+y^2+z^2dS\\ &= \iint_\Sigma 1dS=|\Sigma|=\frac{1}{8}\cdot 4\pi=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

2. 注意到 Σ 是二元函数 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的图形，定义域为 $D_{xy}=\{(x,\,y):\,x^2+y^2\leq 4,\,x\geq 0,\,y\geq 0\}$。$\Sigma$ 的单位外法向量是 $\overrightarrow{n}=\frac{1}{2}(x,\,y,\,z)$。所以

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma ydydz-xdzdx+zdxdy &= \iint_\Sigma (y,\,-x,\,z)\cdot\overrightarrow{n}dS\\ &= \frac{1}{2}\iint_\Sigma z^2dS\\ &= \frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}(4-x^2-y^2)\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy\\ &= \iint_{D_{xy}}\sqrt{4-x^2-y^2}dxdy\\ &\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_{D_{xy}}\sqrt{4-\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^2\sqrt{4-\rho^2}\cdot\rho d\rho\right]d\theta\\ &= \frac{1}{2}\pi\int_0^2\sqrt{4-\rho^2}\cdot\rho d\rho\\ &\xlongequal{u=\sqrt{4-\rho^2}} \frac{1}{2}\pi\int_2^0 u\cdot(-u)du\\ &= \frac{4}{3}\pi\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma xdydz+ydzdx+2zdxdy &= \iint_\Sigma V\cdot\overrightarrow{n}dS\\ &\xlongequal[\overrightarrow{n}=\frac{(z_x,z_y,-1)}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}=\frac{(-2x,-2y,-1)}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}]{V=(x,y,2z)} \iint_\Sigma(-2x^2-2y^2-2z)\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}dS\\ &\xlongequal{z=5-x^2-y^2} \iint_\Sigma\frac{-10}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}dS\\ &= \iint_{\{x^2+y^2\leq 5\}}\frac{-10}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy\\ &= \iint_{\{x^2+y^2\leq 5\}}-10dxdy\\ &= -50\pi.\end{aligned}$$