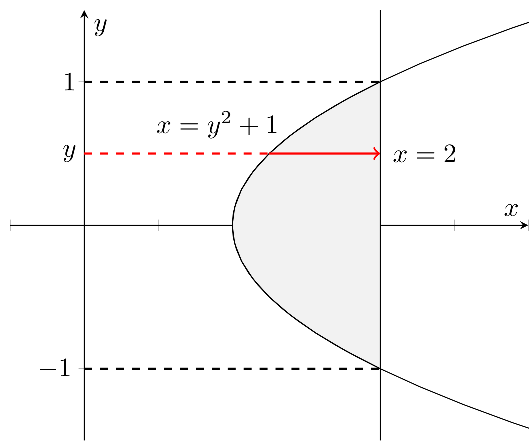
第 12 周作业解答

练习 1. 先画出区域 D，再求二重积分：

1. $\iint_D ydxdy$，其中 D 是由曲线 $x=y^2+1$ 及直线 $x=2$ 所围成的区域
2. $\iint_D y^2e^{xy}dxdy$，其中 D 是由直线 $x=0$，$y=x$ 及 $y=1$ 所围成的区域
3. $\iint_D e^{-x^2}dxdy$，其中 D 是由直线 $y=0$，$y=x$ 及 $x=1$ 所围成的区域

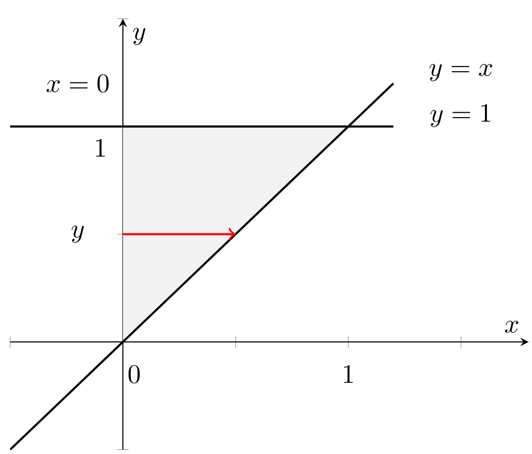
解 1. 采取先 x 后 y 的积分次序，故将 D 为 Y-型区域计算该二重积分。如图



$D=\{(x,y)|-1\le y\le 1,\, y^2+1\le x\le 2\}$。所以

$$\iint_D ydxdy=\int_{-1}^{1}\left[\int_{y^2+1}^{2}ydx\right]dy=\int_{-1}^{1}\left[xy\Big|_{y^2+1}^{2}\right]dy=\int_{-1}^{1}\left[2y-(y^2+1)y\right]dy$$
$$=\int_{-1}^{1}-y^3+ydy=(-\frac{3}{4}y^4+\frac{1}{2}y^2)\Big|_{-1}^{1}=0$$

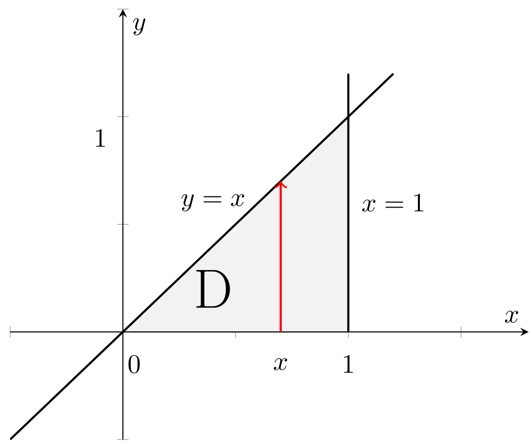
2. 采取先 x 后 y 的积分次序，故将 D 视为 Y-型区域计算该二重积分。如图



$D=\{(x,\,y)|\,0\le y\le 1,\,0\le x\le y\}$。所以

$$\iint_D y^2e^{xy}dxdy=\int_0^1\left[\int_0^y y^2e^{xy}dx\right]dy=\int_0^1\left[ye^{xy}\big|_0^y\right]dy=\int_0^1\left[ye^{y^2}-y\right]dy$$
$$=(\frac{1}{2}e^{y^2}-\frac{1}{2}y^2)\big|_0^1=\frac{1}{2}e-1$$

3. 采取先 y 后 x 的积分次序能够积出来，故将 D 视为 X-型区域计算该二重积分。如图



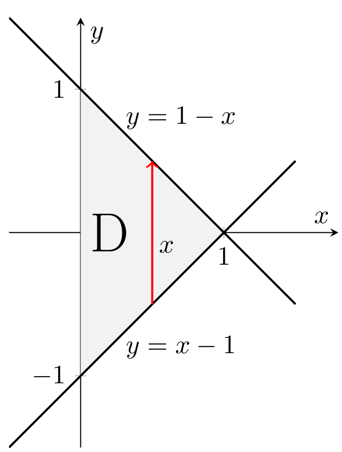
$D=\{(x,\,y)|\,0\le x\le 1,\,0\le y\le x\}$。所以

$$\iint_D e^{-x^2}dxdy=\int_0^1\left[\int_0^x e^{-x^2}dy\right]dx=\int_0^1\left[e^{-x^2}y\big|_0^x\right]dx=\int_0^1\left[xe^{-x^2}\right]dx$$
$$=(-\frac{1}{2}e^{-x^2})\big|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2e}$$

练习 2. 将下列积分化为不同积分次序的二次积分

1. $I=\iint_D f(x,\,y)dxdy$，其中 D 是由 $x+y=1$，$x-y=1$，$x=0$ 所围成的区域

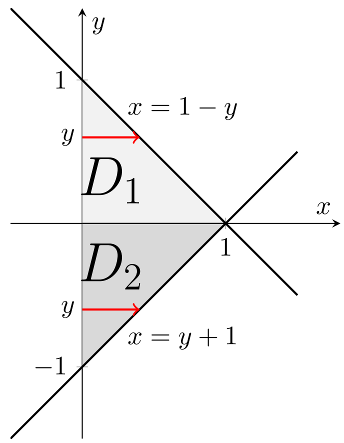
解 (a) 若要先 y 后 x 积分，则应将 D 视为 X-型区域。如图



可见 $D=\{(x,\,y)|\,0\le x\le 1,\,x-1\le y\le 1-x\}$，从而

$$\iint_D f(x,\,y)dxdy=\int_0^1\left[\int_{x-1}^{1-x}f(x,\,y)dy\right]dx$$

(b) 若要先 x 后 y 积分，则应将 D 视为 Y-型区域。实际上 D 为两个 Y-型区域 D_1 与 D_2 的并，如图



其中

$$D_1=\{(x,\,y)|\,0\le y\le 1,\,0\le x\le 1-y\}$$
$$D_2=\{(x,\,y)|-1\le y\le 0,\,0\le x\le y+1\}$$

从而

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,\,y)dxdy&=\iint_{D_1}f(x,\,y)dxdy+\iint_{D_2}f(x,\,y)dxdy\\&=\int_0^1\left[\int_0^{1-y}f(x,\,y)dx\right]dy+\int_{-1}^0\left[\int_0^{y+1}f(x,\,y)dx\right]dy\end{aligned}$$

练习 3. 求下列微分方程的通解，或在给定初始条件下的特解：

1. $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y},\quad y|_{x=0}=2$
2. $x\sqrt{1-y^2}dx+y\sqrt{1+x^2}dy=0$

解 (1) 这是可分离变量的微分方程：

$$ydy=-xdx$$

两边积分得

$$\int ydy=\int -xdx\quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}y^2=-\frac{1}{2}x^2+C_1$$

所以通解是

$$x^2+y^2=C$$

(其中 $C=2C_1$)。将 $x=0,\,y=2$ 代入通解，可知 $C=0^2+2^2=4$。所以特解是

$$x^2+y^2=4$$

(2) 这是可分离变量的微分方程：

$$\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy = -\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

两边积分得

$$\begin{aligned}
&\int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy = -\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx \\
\Rightarrow &\frac{1}{2}\int (1-y^2)^{-\frac{1}{2}}dy^2 = -\frac{1}{2}\int (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}dx^2 \\
\Rightarrow &\frac{1}{2}\int (1-y^2)^{-\frac{1}{2}}d(1-y^2) = \frac{1}{2}\int (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}d(1+x^2) \\
\Rightarrow &(1-y^2)^{\frac{1}{2}} = (1+x^2)^{\frac{1}{2}} + C
\end{aligned}$$

即通解为

$$\sqrt{1-y^2} = \sqrt{1+x^2} + C$$