题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总 分
得 分											

得分	评阅人

一、选择题（共6小题，每小题3 分，共18分，请将答案写在答题栏内。）

答 题 栏

题 号	1	2	3	4	5	6
答 案	B	C	A	C	D	C

1. $y''' + x^3y' + y^2 = x^4 + 1$则以下说法正确的是(　　)

(A) 该方程为四阶非齐次方程；　　(B)该方程为三阶非齐次方程；

(C)该方程为三阶齐次方程；　　(D) 该方程为四阶齐次方程。

2. 把积分$\iint\limits_D xydxdy$表示成对极坐标形式的二次积分，其中

$D=\{(x,y)|(x-1)^2+y^2\le 1, y\ge 0\}$,下列说法正确的是(　　)

(A) $\int_0^{\pi/2}\int_0^1 \rho^3\sin\theta\cos\theta d\rho d\theta$；　　(B) $\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\cos\theta} \rho^2\sin\theta\cos\theta d\rho d\theta$；

(C) $\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} \rho^3\sin\theta\cos\theta d\rho d\theta$；　　(D) $\int_0^{\pi}\int_0^1 \rho^2\sin\theta\cos\theta d\rho d\theta$。

3. 直线$\frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{-4}$ 与平面$x+y+z=3$ 的关系为(　　)

(A) 直线在平面内；　　(B) 平行；

(C) 相交但不垂直；　　(D)垂直。

4. 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则以下级数收敛的是(　　)

(A)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$；　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$；　　(C)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n+a_{n+1}$；　　(D)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$。

5. 设$f(x,y)$为二元函数，(x_0,y_0)为定义域内的一点，则下列命题中一定正确的是(　　)

(A)若$f(x,y)$在(x_0,y_0)连续，则$f(x,y)$在(x_0,y_0)可导；

(B) 若$f(x,y)$在(x_0,y_0)的两个偏导数都存在，则$f(x,y)$在(x_0,y_0)连续；

(C) 若$f(x,y)$在(x_0,y_0)的两个偏导数都存在，则$f(x,y)$在(x_0,y_0)可微；

(D) 若$f(x,y)$在(x_0,y_0)可微，则$f(x,y)$在(x_0,y_0)连续。

6. $y''+y=xe^{-x}$特解的形状为(　　)

(A) Axe^{-x}；　　(B) $(Ax^2+Bx+C)e^{-x}$；

(C) $(Ax+B)e^{-x}$；　　(D) Ae^{-x}。

得分	评阅人

二、填空题（共8题，每题3分，共24分，请将答案写在相应题目划线空白处）

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy} = \underline{-\dfrac{1}{4}}$。

2. 设$\cos y + e^x - xy^2 = 0$, 则$\dfrac{dy}{dx} = \underline{\dfrac{e^x - y^2}{\sin y + 2xy}}$。

3. Ω为曲面$z = x^2 + y^2$与平面$z = 1$所围成的闭区域，计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \underline{\frac{\pi}{3}}$。

4. 将函数$f(x) = xe^{x^2}$展开成x的幂级数$\underline{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}}$。

5. 设y_1 y_2 是一阶线性非齐次微分方程$y' + p(x)y = q(x)$的两个特解，若常数λ, μ使$\lambda y_1 + \mu y_2$ 为方程的解，$\lambda y_1 - \mu y_2$ 为齐次方程的解，则$\lambda = \underline{\frac{1}{2}}$，$\mu = \underline{\frac{1}{2}}$。

6. 将曲线$x^2 + z^2 = 1$绕z轴旋转一周，则所生成的旋转曲面方程$\underline{x^2 + y^2 + z^2 = 1}$。

7. 假设Σ 为平面$x + y + z = 1$在第一卦限中的部分，计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma} zdS = \underline{\frac{\sqrt{3}}{6}}$。

8. 设$f(x)$为周期为2π 的周期函数，在$[-\pi, \pi)$ 上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & -\pi \le x < 0 \\ 0, & 0 \le x < \pi \end{cases}$$

且$f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, 其中$(-\infty < x < +\infty; x \neq \pm\pi, \neq \pm 3\pi \cdots)$，求$a_1 = \underline{\qquad\qquad}$。

得分	评阅人

三、计算题（共6题，每题7分，共42分，）

1. 设$f(x,y,z)=e^{xy}\sin(x-y)+z^2$,

(1)求函数在$M=(1,1,1)$处沿曲线$x=t,y=2t^2-1,z=t^3$在该点切线正方向（对应于t增大的方向）的方向导数；

(2)求函数在$M=(1,1,1)$处的梯度。

解：令$r(t)=(t,2t^2-1,t^3)$,则$r'(t)=(1,4t,3t^2)$, 所以$r'(1)=(1,4,3)$，与切线同向的单位向量为$\frac{1}{\sqrt{26}}(1,4,3)$。因为函数可微分，所以

$$\frac{\partial f}{\partial x}|_{(1,1,1)}=e^{xy}(y\sin(x-y)+\cos(x-y))=e$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}|_{(1,1,1)}=e^{xy}(x\sin(x-y)-\cos(x-y))=-e$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}|_{(1,1,1)}=2z=2$$

(3 分)

所以梯度为$\nabla f=ei-ej+2k$　　(5分)

方向导数为$\frac{\partial f}{\partial l}|_{(1,1,1)}=(e,-e,2)\cdot\frac{1}{\sqrt{26}}(1,4,3)=\frac{3}{\sqrt{26}}(2-e)$　　(7分)

2. 求下列微分方程$\dfrac{dy}{dx}+y=e^{-x}$的通解。

解：求对应的齐次方程的通解$\dfrac{dy}{dx}+y=0$, 即$\dfrac{dy}{y}=-dx$,　　(2 分)

两端同时积分可得$\ln y=-x+C$, 即$y=Ce^x$，其中C为常数。　　(4分)

用常数变易法，将C 换成$u(x)$,则$y=u(x)e^{-x}$

代入原方程并整理可得$u'(x)e^{-x}=e^{-x}$

所以$u'(x)=1$，两端积分可得$u(x)=x+C$

所以原方程的通解为$y=(x+C)e^{-x}$　　(7分)

3. 计算重积分$\iint\limits_{D}\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$是由$y=\sqrt{x}$ 与$y=x$ 所围区域。

解: $\iint\limits_{D}\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\int_{y^2}^{y}\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ (3 分)

$=\int_0^1(\sin y-y\sin y)dx$ (5分)

$=1-\sin 1$ (7分)

4. 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(x-1)^n$的收敛半径，收敛域及和函数。

解: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=|x-1|$

由比值审敛法可知，当$|x-1|<1$时级数收敛。当$x=0$和$x=2$时级数发散。

所以级数的收敛半径为$R=1$, 收敛域为（0,2） (4分)

在收敛域内，幂级数的和函数$s(x)$ 为

$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(x-1)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x-1)((x-1)^n)'=\frac{x-1}{(x-2)^2}$。 (7分)

5. 验证$\int_{(0,0)}^{(1,2)}(4x^3y^3-3y^2+5)\mathrm{d}x+(3x^4y^2-6xy-4)\mathrm{d}y$ 在整个xoy平面内与路径无关，并计算积分值。

解:（1）$P=(4x^3y^3-3y^2+5)$, $Q=(3x^4y^2-6xy-4)$

$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=12x^3y^2-6y$, 且函数$P(x,y),Q(x,y)$ 在单连通区域xoy内有一阶连续偏导数，所以与路径无关。 (4分)

$\int_{(0,0)}^{(1,2)}(4x^3y^3-3y^2+5)\mathrm{d}x+(3x^4y^2-6xy-4)\mathrm{d}y$

$=\int_0^1 5\mathrm{d}x+\int_0^2 3y^2-6y-4dy=-7$ (7分)

6. 计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}(y^2-z)dydz+(z^2-x)dzdx+(x^2-y)dxdy$，其中$\Sigma$ 为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$，介于平面$z=0$，$z=1$之间部分的下侧。

解: 设Σ_1为$z=1$的上侧，则Σ 和Σ_1 一起构成一个封闭曲面，记它们围成的空间闭区域为Ω。利用高斯公式可知

$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}(y^2-z)dydz+(z^2-x)dzdx+(x^2-y)dxdy=0$ (4分)

所以$\iint\limits_{\Sigma}(y^2-z)dydz+(z^2-x)dzdx+(x^2-y)dxdy$

$=-\iint\limits_{\Sigma_1}(x^2-y)dxdy$

$=-\iint\limits_{D}(x^2-y)dxdy$,其中$D=\{x^2+y^2\le 1\}$

利用极坐标计算可知，

$$-\iint\limits_{D}(x^2-y)dxdy=-\int_0^{2\pi}\int_0^1(\rho^3\cos^2\theta-\rho^2\sin\theta)d\rho d\theta=-\frac{\pi}{4} \qquad (7分)$$

得分	评阅人

四、应用题（共1小题，共10 分）

1. 某工厂生产某种商品需要原料甲和乙，设甲的单价为2，而乙的单价为1，假设商品的产量Z与原料甲的数量x和原料乙的数量y之间的关系为

$$Z=20-x^2+10x-2y^2+5y$$

若产品的销售价格为5，购买原材料的预算为9，求此时的最大利润。

解：(1)设$P(x,y)$为分别生产x单位甲和y单位乙所得总利润。

则$P(x,y)=5(20-x^2+10x-2y^2+5y)-2x-y$

$=100-5x^2+48x-10y^2+24y$, 约束条件为2x+y=9 (3分)

作拉格朗日函数$L(x,y,\lambda)=100-5x^2+48x-10y^2+24y+\lambda(2x+y-9)$,求其对$x,y,\lambda$的一阶偏导数可得

$$\begin{cases} -10x+48+2\lambda=0 \\ -20y+24+\lambda=0 \\ 2x+y-9=0 \end{cases}$$

解得$x=4,y=1$, (8分)

因为由于问题本身可知最大值一定存在，所以最大值就在这个可能的极值点处取得，为226 (10 分)

得分	评阅人

五、证明题（共1题，共6分）

1. 设$a_0=0$, $a_n=\sqrt{2+a_{n-1}}(n\geq 1)$, 证明：

（1）$\lim_{n\to\infty} a_n$存在。

（2）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sqrt{2-a_n}$收敛。

证明：(1)断言a_n为单调递增数列，且$a_n<2$。

显然$a_1=\sqrt{2}$满足，$2>a_1>a_0$。假设$2>a_n>a_{n-1}$,则$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}<\sqrt{2+2}=2$, 且$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}>\sqrt{2+a_{n-1}}=a_n$。所以由归纳假设法可知断言成立。

因为a_n为单调有界数列，所以$\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在，两边令$n\to\infty$, 则$A=\sqrt{2+A}$, 所以$\lim_{n\to\infty} a_n=2$。　　(3分)

(2)利用比值审敛法可知级数收敛

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2-a_{n+1}}}{\sqrt{2-a_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+a_n}}}{\sqrt{2-a_n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+a_n}}\sqrt{2+\sqrt{2+a_n}}}{\sqrt{2-a_n}\sqrt{2+\sqrt{2+a_n}}}=\frac{1}{2}<1$$

(6 分)