第 12 章 c：幂级数

数学系　　梁卓滨

2017.07 暑期班

- 设 $$u_0(x), u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots$$
  是定义在区间 I 上的函数列，则称
  $$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$
  为定义在区间 I 上的（函数项）（无穷）级数。
- 如果 $x \in I$ 使得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ 收敛，则称 x 是函数项级数的收敛点，全体收敛点构成的集合称为收敛域；
- 如果 $x \in I$ 使得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ 发散，则称 x 是函数项级数的发散点，全体发散点构成的集合称为发散域；
- 函数项级数 $$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$
  可为视为定义在收敛域上的函数，也称为函数项级数的和函数。

- 形如
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$
的函数项级数称为幂级数。

- 如果函数项级数是形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

则通过变量代换 $t = x - x_0$，可得到前述的幂级数形式：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n + \cdots$$

问题 如何确定幂级数的收敛域？

- 尝试先用比值审敛法的极限形式 或者 根值审敛法

例 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n+1}x^{n+1}}{\frac{1}{n}x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}x\right| = |x|$$

- 当 $|x| < 1$ 时，收敛；$|x| > 1$ 时，发散；$x = \pm 1$ 时，另外讨论
- 当 $x = 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散
- 当 $x = -1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛

所以收敛域是 $[-1, 1)$.

注 1 当 $x \in (-1, 1)$时，级数绝对收敛；$x = -1$ 是，级数条件收敛.

注 2 当 $x \in [-1, 1)$时：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots = -\ln(1-x)$.

例 计算函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}x^n = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n}x^n\right|} = \lim_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{n}} |x| = |x|$$

- 当 $|x| < 1$ 时，收敛；$|x| > 1$ 时，发散；$x = \pm 1$ 时，另外讨论
- 当 $x = 1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散
- 当 $x = -1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛

所以收敛域是 $[-1, 1)$

例 计算函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}}{\frac{x^n}{n\cdot 2^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2(n+1)} |x| = \frac{1}{2} |x|$$

- 当 $|x| < 2$ 时，收敛；$|x| > 2$ 时，发散；$x = \pm 2$ 时，另外讨论
- 当 $x = 2$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\cdot 2^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散
- 当 $x = -2$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\cdot 2^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛

所以收敛域是 $[-2, 2)$

注 1 当 $x \in (-2, 2)$时，级数绝对收敛；$x = -2$ 是，级数条件收敛.

例 计算函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n\to\infty} \left| \sqrt[n]{\frac{x^n}{n \cdot 2^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} (n+1)^{-\frac{1}{n}} \frac{1}{2} |x| = \frac{1}{2} |x|$$

- 当 $|x| < 2$ 时，收敛；$|x| > 2$ 时，发散；$x = \pm 2$ 时，另外讨论
- 当 $x = 2$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散
- 当 $x = -2$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛

所以收敛域是 $[-2, 2)$

例 计算函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! \cdot x^n$ 的收敛域

解 注意到当 $x \neq 0$ 时都有

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)! \cdot x^n}{n! \cdot x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} (n+1)\,|x| = \infty > 1$$

说明 $x \neq 0$ 时，函数项级数都发散。所以收敛域是 $\{0\}$。

例 计算函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$$

说明对任何 x，函数项级数都绝对收敛。所以收敛域是 $(-\infty, \infty)$。

定理 假设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的系数满足条件：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho \qquad \text{或} \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho.$$

则成立：

- 若 $\rho \neq 0$，则当 $|x| < \frac{1}{\rho}$ 时级数绝对收敛，$|x| > \frac{1}{\rho}$ 时级数发散，$x = \pm\frac{1}{\rho}$ 时不确定（需具体问题具体分析）；
- 若 $\rho = 0$，则对任意 $x \in \mathbb{R}$，级数绝对收敛；
- 若 $\rho = \infty$，则只有当 $x = 0$ 时级数收敛，$x \neq 0$ 时，级数发散。

证明 运用比值审敛法的极限形式和根值审敛法。因为

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \rho|x| \quad \text{或} \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n x^n|} = \rho|x|$$

所以 $|x| < \frac{1}{\rho}$ 时，级数（绝对）收敛；$|x| > \frac{1}{\rho}$ 时，级数发散。

如果极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ 不存在，则需另觅它法。

定理 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域一定是如下几种情况之一：

- 收敛域是单点集 $\{0\}$；（收敛半径 $R=0$）
- 收敛域是全部实数 $(-\infty,\infty)$；（收敛半径 $R=\infty$）
- 收敛域是如下四种可能的有限区间：（收敛半径 R 有限）

  $$(-R,R),\quad [-R,R),\quad (-R,R],\quad [-R,R]$$

  其中 $0<R<\infty$。

注

- R 称为收敛半径。
- $(-R,R)$ 称为收敛区间。收敛区间 $\subseteq$ 收敛域。
- 可以证明在收敛区间 $(-R,R)$ 内，级数绝对收敛。

例 假设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的系数满足条件：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho \qquad \text{或} \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho$$

则收敛半径

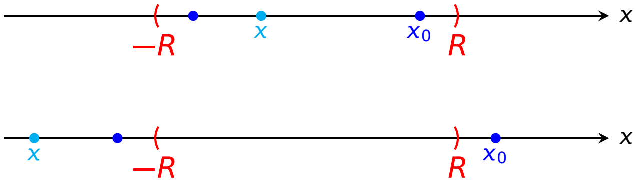
$$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, & \rho \neq 0, \\ +\infty, & \rho = 0, \\ 0, & \rho = +\infty. \end{cases}$$

证明 这是由比值审敛法的极限形式和根值审敛法知：$|x| < \frac{1}{\rho}$ 时，级数（绝对）收敛；$|x| > \frac{1}{\rho}$ 时，级数发散。所以收敛半径 $R = \frac{1}{\rho}$。

例 假设有幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$，及在 $x_0 \neq 0$。那么

- 若 x_0 是收敛点，则对所有满足 $|x| < |x_0|$ 的 x，级数均绝对收敛。
- 若 x_0 是发散点，则对所有满足 $|x| > |x_0|$ 的 x，级数均发散。

证明 设该幂级数的收敛半径为 R。则证明如图：



性质 1 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域 I 上是连续函数。

性质 2 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域 I 上可积，并成立逐项积分公式：

$$\int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right] dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \qquad (x \in I)$$

逐项积分后的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 与原级数有相同收敛半径，但收敛域不一定相同。

例 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 的收敛域是 $(-1, 1)$，而逐项积分后的幂级数是

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

其收敛域是 $[-1, 1)$。

逐项积分公式的应用

例 对级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 运用逐项积分公式：

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}, \qquad x \in [-1, 1)$$

另一方面 $\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$，所以

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-t)\Big|_0^x = -\ln(1-x), \qquad x \in [-1, 1)$$

综上两式，得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = \qquad -\ln(1-x), \qquad x \in [-1, 1)$$

性质 3 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R, R)$ 上可导，并成立逐项求导公式：

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \qquad x \in (-R, R)$$

逐项求导后的幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 与原级数有相同收敛半径。

推论 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R, R)$ 上具有任意阶的导数，并成立逐项求导公式：

$$\frac{d^k}{dx^k}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^k}{dx^k}(a_n x^n), \qquad x \in (-R, R)$$

逐项求导后的幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{d^k}{dx^k}(a_n x^n)$ 与原级数有相同收敛半径。

利用逐项求导、或逐项积分，把级数化为简单的级数，从而求出原级数。

例 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ 的和函数。

解 Step 1. 求收敛域：

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

$$\therefore\ R=\frac{1}{\rho}=1,\qquad \text{收敛区间}(-1,1)$$

当$x=1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散

当$x=-1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ 收敛

$\therefore$ 收敛域$[-1,1)$

例 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的和函数。

解 Step 2. 记 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$, $x \in [-1, 1)$，则：

$$xS(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad x \in [-1, 1)$$

当 $x \in (-1, 1)$ 时，两边求导可得：

$$[xS(x)]' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

所以

$$xS(x) = \int \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-x) + C, \quad x \in (-1, 1)$$

上式取 $x = 0$ 时，可得 $C = 0$，所以

$$xS(x) = -\ln(1-x), \quad x \in (-1, 1).$$

例 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的和函数。

解 Step 3. 至此已知：$S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的收敛域是 $x \in [-1, 1)$，而

$$xS(x) = -\ln(1-x), \quad x \in (-1, 1)$$

- 当 $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ 时，$S(x) = -\frac{1}{x}\ln(1-x)$
- 当 $x = 0$ 时，$S(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n+1} = 1$
- 当 $x = -1$ 时，由连续性

$$S(-1) = \lim_{x \to (-1)^+} S(x) = \lim_{x \to (-1)^+} -\frac{1}{x}\ln(1-x) = -\frac{1}{x}\ln(1-x)\Big|_{x=-1}$$

综上

$$S(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x}\ln(1-x) & x \in [-1, 1) \backslash \{0\}, \\ 1 & x = 0. \end{cases}$$

注 在等式

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=\begin{cases}-\frac{1}{x}\ln(1-x) & x\in[-1,1)\setminus\{0\},\\ 1 & x=0.\end{cases}$$

中取 $x=-1$，可得

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\cdots=\ln 2.$$

例 求幂级数 $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots$ 的和函数。

解 Step 1. 求收敛域：

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}=1$$

$$\therefore\ R=\frac{1}{\rho}=1,\qquad \text{收敛区间}(-1,1)$$

当 $x=1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ 发散（比较审敛法）

当 $x=-1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}}{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{2n-1}$ 发散

$\therefore$ 收敛域 $(-1,1)$

例 求幂级数 $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots$ 的和函数。

解 Step 2. 记 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1},\quad x\in(-1,1)$，两边求导可得：

$$S'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}$$

$$=1+x^2+x^4+x^6+\cdots=\frac{1}{1-x^2}$$

所以

$$S(x)=\int\frac{1}{1-x^2}dx=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+C,\quad x\in(-1,1)$$

上式取 $x=0$ 时，可得 $C=0$，所以

$$S(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\quad x\in(-1,1)$$

例 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n+1}$ 的和函数。

解 Step 1. 求收敛域：

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1$$

$$\therefore\ R = \frac{1}{\rho} = 1, \qquad \text{收敛区间}(-1,\ 1)$$

当$x = \pm 1$ 时，一般项$nx^{n+1} = n(\pm 1)^{n+1} \not\to 0$，级数发散

$\therefore$ 收敛域$(-1,\ 1)$

Step 2. 记 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n+1} = x^2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$， $x \in (-1,\ 1)$，则：

$$S(x) = x^2\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)' = x^2\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)' = \left(\frac{1}{1-x} - 1\right)' = \frac{x^2}{(1-x)^2}$$

注 等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n+1} = \frac{x^2}{(1-x)^2}, \quad x \in (-1, 1)$$

推出

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad x \in (-1, 1)$$

中取 $x = \frac{1}{2}$，可得

$$1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \frac{5}{2^4} + \cdots = 4.$$