第 14 周作业解答

练习 1. 写出二次型 $f=x_1^2+x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2-x_1x_3+2x_2x_3$ 所对应的矩阵。

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

练习 2. 用**初等变换法**求以下二次型的标准型，写出所做的非退化线性变量代换 $x=Cy$ 是什么，并指出正、负惯性指标是多少。

1. $f=x_1^2+x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$
2. $f=x_1^2-3x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$
3. $f=2x_1x_2-2x_1x_3-7x_2x_3$

解 1.

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{c_2-2c_1} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ \hline 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ \hline 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{c_3-c_1} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ \hline 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3-r_1} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ \hline 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{c_3-\frac{1}{3}c_2} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ \hline 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{c_3-\frac{1}{3}c_2} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{7}{3} \\ \hline 1 & -2 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3-\frac{1}{3}r_2} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} \\ \hline 1 & -2 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

所以作线性变换 $x=Cy$，其中 $C=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则 $f=y_1^2-3y_2^2+\frac{7}{3}y_3^2$。

2.

$$\left(\begin{array}{ccc}1&-1&1\\-1&0&-3\\1&-3&-3\\\hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{c_2+c_1}\left(\begin{array}{ccc}1&0&1\\-1&-1&-3\\1&-2&-3\\\hline 1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_2+r_1}\left(\begin{array}{ccc}1&0&1\\0&-1&-2\\1&-2&-3\\\hline 1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{c_3-c_1}\left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&-1&-2\\1&-2&-4\\\hline 1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-r_1}\left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&-1&-2\\0&-2&-4\\\hline 1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{c_3-2c_2}\left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&-1&0\\0&-2&0\\\hline 1&1&-3\\0&1&-2\\0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-2r_2}\left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\\\hline 1&1&-3\\0&1&-2\\0&0&1\end{array}\right)$$

所以作线性变换 $x=Cy$，其中 $C=\begin{pmatrix}1&1&-3\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 $f=y_1^2-y_2^2$。

3.

$$\left(\begin{array}{ccc}0&1&-1\\1&0&-\frac{7}{2}\\-1&-\frac{7}{2}&0\\\hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{c_1+c_2}\left(\begin{array}{ccc}1&1&-1\\1&0&-\frac{7}{2}\\-\frac{9}{2}&-\frac{7}{2}&0\\\hline 1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc}2&1&-\frac{9}{2}\\1&0&-\frac{7}{2}\\-\frac{9}{2}&-\frac{7}{2}&0\\\hline 1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{c_2-\frac{1}{2}c_1}\left(\begin{array}{ccc}2&0&-\frac{9}{2}\\1&-\frac{1}{2}&-\frac{7}{2}\\-\frac{9}{2}&-\frac{5}{4}&0\\\hline 1&-\frac{1}{2}&0\\1&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-\frac{1}{2}r_1}\left(\begin{array}{ccc}2&0&-\frac{9}{2}\\0&-\frac{1}{2}&-\frac{5}{4}\\-\frac{9}{2}&-\frac{5}{4}&0\\\hline 1&-\frac{1}{2}&0\\1&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{c_3+\frac{9}{4}c_1}\left(\begin{array}{ccc}2&0&0\\0&-\frac{1}{2}&-\frac{5}{4}\\-\frac{9}{2}&-\frac{5}{4}&-\frac{81}{8}\\\hline 1&-\frac{1}{2}&\frac{9}{4}\\1&\frac{1}{2}&\frac{9}{4}\\0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+\frac{9}{4}r_1}\left(\begin{array}{ccc}2&0&0\\0&-\frac{1}{2}&-\frac{5}{4}\\0&-\frac{5}{4}&-\frac{81}{8}\\\hline 1&-\frac{1}{2}&\frac{9}{4}\\1&\frac{1}{2}&\frac{9}{4}\\0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{c_3-\frac{5}{2}c_2}\left(\begin{array}{ccc}2&0&0\\0&-\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{5}{4}&7\\\hline 1&-\frac{1}{2}&\frac{7}{2}\\1&\frac{1}{2}&1\\0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-\frac{5}{2}r_2}\left(\begin{array}{ccc}2&0&0\\0&-\frac{1}{2}&0\\0&0&7\\\hline 1&-\frac{1}{2}&\frac{7}{2}\\1&\frac{1}{2}&1\\0&0&1\end{array}\right)$$

所以作线性变换 $x=Cy$，其中 $C=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&\frac{7}{2}\\1&\frac{1}{2}&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 $f=2y_1^2-\frac{1}{2}y_2^2+7y_3^2$。

练习 3. 用**正交变换法**求以下二次型的标准型，写出所做的非退化线性变量代换 $x=Cy$ 是什么，并指出正、负惯性指标是多少。

1. $f(x_1,x_2)=x_1^2-7x_2^2+6x_1x_2$

2. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$

解 (1)

1. 二次型的系数矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & -7\end{pmatrix}$。特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda+8)(\lambda-2)$。有两个互异特征值 $\lambda_1=-8$，$\lambda_2=2$。

2. 关于特征值 $\lambda_1=-8$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$。得基础解系：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\ -3\end{pmatrix}$。单位化得：$\gamma_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{10}\\ -3/\sqrt{10}\end{pmatrix}$。

关于特征值 $\lambda_2=2$，求解 $(\lambda_2 I-A)x=0$。得基础解系：$\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}$。单位化得：$\gamma_2=\begin{pmatrix}3/\sqrt{10}\\ 1/\sqrt{10}\end{pmatrix}$。

3. 令 $Q=(\alpha_1,\alpha_2)=\begin{pmatrix}1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10}\\ -3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10}\end{pmatrix}$，则 Q 是正交矩阵，且 $Q^TAQ=\begin{pmatrix}-8 & \\ & 2\end{pmatrix}$。

4. 作线性变换 $x=Qy$（也就是 $y=Q^{-1}x=Q^Tx$），则有 $f(y_1,y_2)=-8y_1^2+2y_2^2$。

(2)

1. 二次型的系数矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$。特征方程：$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & -1\\ -1 & \lambda+1 & 1\\ -1 & 1 & \lambda-1\end{vmatrix}\xlongequal{c_1+c_3}$ $\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & -1\\ 0 & \lambda+1 & 1\\ \lambda-2 & 1 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & \lambda+1 & 1\\ 1 & 1 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda-1)$。有三个互异特征值 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=2$。

2. 关于特征值 $\lambda_1=-2$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$。得基础解系：$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$。单位化得：$\gamma_1=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{6}\\ 2/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$。

关于特征值 $\lambda_2=1$，求解 $(\lambda_2 I-A)x=0$。得基础解系：$\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$。单位化得：$\gamma_2=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{3}\\ -1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$。

关于特征值 $\lambda_3=2$，求解 $(\lambda_3 I-A)x=0$。得基础解系：$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$。单位化得：$\gamma_3=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ 0\\ 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$。

4. 令 $Q=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2}\\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} & 0\\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$，则 Q 是正交矩阵，且 $Q^TAQ=\begin{pmatrix}-2 & & \\ & 1 & \\ & & 2\end{pmatrix}$。

5. 做线性变换 $x=Qy$（也就是 $y=Q^{-1}x=Q^Tx$），则有 $f(y_1,y_2)=-2y_1^2+y_2^2+2y_3^2$。

练习 4. t 为何值时，二次型 $f(x_1,\,x_2,\,x_3)=t(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$ 是正定？

解 f 的系数矩阵是：

$$\begin{pmatrix}t & 1 & 1\\ 1 & t & -1\\ 1 & -1 & t\end{pmatrix}.$$

f 是正定当且仅当所以顺序主子式大于零，所以

$A_1=t>0,$

$A_2=\begin{vmatrix}t & 1\\ 1 & t\end{vmatrix}=t^2-1>0\Rightarrow t>1\quad\text{or}\quad t<-1\xRightarrow{t>0}t>1,$

$A_3=\begin{vmatrix}t & 1 & 1\\ 1 & t & -1\\ 1 & -1 & t\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-t\times r_1]{r_2+r_1}\begin{vmatrix}t & 1 & 1\\ t+1 & t+1 & 0\\ 1-t^2 & -1-t & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}t+1 & t+1\\ 1-t^2 & -1-t\end{vmatrix}=(t+1)^2(t-2)>0\xRightarrow{t>1}t>2.$

所以 $t > 2$.