

第 04 周作业解答

练习 1. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, 计算 $B+C$, AB , BA , AC , CA 和 $A(2B-3C)$ 。

解

$$\begin{aligned} B+C &= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}, & AB &= \begin{pmatrix} 15 & -14 \\ -15 & 14 \end{pmatrix}, & BA &= \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -4 & 16 & -8 \\ 7 & -28 & 14 \end{pmatrix} \\ AC &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & CA &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -8 & 4 \\ 4 & -16 & 8 \end{pmatrix}, & A(2B-3C) &= \begin{pmatrix} 30 & -28 \\ -30 & 28 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

练习 2. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 计算 AA^T 及 $A^T A$ 。

解

$$\begin{aligned} AA^T &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 2 \\ 2 & 13 \end{pmatrix} \\ A^T A &= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 20 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

练习 3. 若 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ 和 $AB = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 6 & -9 & 3 \end{pmatrix}$, 求 B 。

解由题意知:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 6 & -9 & 3 \end{pmatrix}$$

所以

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 6 & -9 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 6 & -9 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 1 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

练习 4. 令 $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ 。证明 $Av = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \theta) \\ \sin(\alpha + \theta) \end{pmatrix}$, 并计算 A^n 。

解

$$\begin{aligned} Av &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha \\ \sin \theta \cos \alpha + \cos \theta \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \theta) \\ \sin(\alpha + \theta) \end{pmatrix}, \\ A^n &= \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

练习 5. 求满足 $A^2 = O$ 的所有 2×2 矩阵 A 。

解 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, 其中 b 和 c 为任意数, a 满足 $a^2 = -bc$ 。

练习 6. 设 A 为 n 阶方阵, 分别解答:

1. 假设 $|A| = -2$, 计算 $|2|A|A^T|$ 。
2. 假设 $AA^T = I_n$ 且 $|A| < 0$, 计算 $|A|$ 。

解 1. $|2|A|A^T| = (2|A|)^n |A^T| = (2|A|)^n |A| = 2^n |A|^{n+1} = 2^n (-2)^{n+1} = (-1)^{n+1} 2^{2n+1}$ 。

2. 计算等式 $AA^T = I_n$ 两边的行列式:

$$1 = |I_n| = |AA^T| = |A| \cdot |A^T| = |A| \cdot |A|$$

所以 $|A| = \pm 1$ 。又因为 $|A| < 0$, 所以 $|A| = -1$ 。