

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总 分
得 分											

得分	评阅人

一、选择题（共6小题，每小题3分，共18分，请将答案写在答题栏内。）

### 答 题 栏

题 号	1	2	3	4	5	6
答 案	B	C	A	C	D	C

1.  $y''' + x^3y' + y^2 = x^4 + 1$ 则以下说法正确的是( )

- (A) 该方程为四阶非齐次方程;                      (B)该方程为三阶非齐次方程;  
 (C)该方程为三阶齐次方程;                      (D) 该方程为四阶齐次方程。

2. 把积分  $\iint_D xy dx dy$  表示成对极坐标形式的二次积分, 其中

$D = \{(x, y) | (x-1)^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ , 下列说法正确的是( )

- (A)  $\int_0^{\pi/2} \int_0^1 \rho^3 \sin \theta \cos \theta d\rho d\theta$ ; (B)  $\int_0^{\pi/4} \int_0^{2\cos\theta} \rho^2 \sin \theta \cos \theta d\rho d\theta$ ;  
 (C)  $\int_0^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} \rho^3 \sin \theta \cos \theta d\rho d\theta$ ; (D)  $\int_0^{\pi} \int_0^1 \rho^2 \sin \theta \cos \theta d\rho d\theta$ 。

3. 直线  $\frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-4}$  与平面  $x+y+z=3$  的关系为( )

- (A) 直线在平面内; (B) 平行;  
 (C) 相交但不垂直; (D) 垂直。

4. 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 则以下级数收敛的是( )

- (A)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ ; (B)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ ; (C)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + a_{n+1}$ ; (D)  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 。

5. 设  $f(x, y)$  为二元函数,  $(x_0, y_0)$  为定义域内的一点, 则下列命题中一定正确的是( )

- (A) 若  $f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  连续, 则  $f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  可导;  
 (B) 若  $f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  的两个偏导数都存在, 则  $f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  连续;  
 (C) 若  $f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  的两个偏导数都存在, 则  $f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  可微;  
 (D) 若  $f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  可微, 则  $f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  连续。

6.  $y'' + y = xe^{-x}$  特解的形状为( )

- (A)  $Axe^{-x}$ ; (B)  $(Ax^2 + Bx + C)e^{-x}$ ;  
 (C)  $(Ax + B)e^{-x}$ ; (D)  $Ae^{-x}$ 。

得分	评阅人

二、填空题 (共8题, 每题3分, 共24分, 请将答案写在相应题目划线空白处)

1.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2 - \sqrt{xy+4}}{xy} = -\frac{1}{4}$ 。

2. 设  $\cos y + e^x - xy^2 = 0$ , 则  $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x - y^2}{\sin y + 2xy}$ 。

3.  $\Omega$  为曲面  $z = x^2 + y^2$  与平面  $z = 1$  所围成的闭区域, 计算三重积分  $\iiint_{\Omega} z dx dy dz = \frac{\pi}{3}$ 。

4. 将函数  $f(x) = xe^{x^2}$  展开成  $x$  的幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}$ 。

5. 设  $y_1, y_2$  是一阶线性非齐次微分方程  $y' + p(x)y = q(x)$  的两个特解, 若常数  $\lambda, \mu$  使  $\lambda y_1 + \mu y_2$  为方程的解,  $\lambda y_1 - \mu y_2$  为齐次方程的解, 则  $\lambda = \frac{1}{2}$ ,  $\mu = \frac{1}{2}$ 。

6. 将曲线  $x^2 + z^2 = 1$  绕  $z$  轴旋转一周, 则所生成的旋转曲面方程  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 。

7. 假设  $\Sigma$  为平面  $x + y + z = 1$  在第一卦限中的部分, 计算曲面积分  $\iint_{\Sigma} z dS = \frac{\sqrt{3}}{6}$ 。

8. 设  $f(x)$  为周期为  $2\pi$  的周期函数, 在  $[-\pi, \pi)$  上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & -\pi \leq x < 0 \\ 0, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

且  $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ , 其中  $(-\infty < x < +\infty; x \neq \pm\pi, \neq \pm 3\pi \cdots)$ , 求  $a_1 =$  。

得分	评阅人

## 三、计算题 (共6题, 每题7分, 共42分,)

1. 设  $f(x, y, z) = e^{xy} \sin(x - y) + z^2$ ,

(1) 求函数在  $M = (1, 1, 1)$  处沿曲线  $x = t, y = 2t^2 - 1, z = t^3$  在该点切线正方向 (对应于  $t$  增大的方向) 的方向导数;

(2) 求函数在  $M = (1, 1, 1)$  处的梯度。

解: 令  $r(t) = (t, 2t^2 - 1, t^3)$ , 则  $r'(t) = (1, 4t, 3t^2)$ , 所以  $r'(1) = (1, 4, 3)$ , 与切线同向的单位向量为  $\frac{1}{\sqrt{26}}(1, 4, 3)$ 。因为函数可微分, 所以

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}|_{(1,1,1)} &= e^{xy}(y \sin(x - y) + \cos(x - y)) = e \\ \frac{\partial f}{\partial y}|_{(1,1,1)} &= e^{xy}(x \sin(x - y) - \cos(x - y)) = -e \\ \frac{\partial f}{\partial z}|_{(1,1,1)} &= 2z = 2\end{aligned}$$

(3 分)

所以梯度为  $\nabla f = ei - ej + 2k$  (5分)

方向导数为  $\frac{\partial f}{\partial l}|_{(1,1,1)} = (e, -e, 2) \cdot \frac{1}{\sqrt{26}}(1, 4, 3) = \frac{3}{\sqrt{26}}(2 - e)$  (7分)

2. 求下列微分方程  $\frac{dy}{dx} + y = e^{-x}$  的通解。

解: 求对应的齐次方程的通解  $\frac{dy}{dx} + y = 0$ , 即  $\frac{dy}{y} = -dx$ , (2 分)

两端同时积分可得  $\ln y = -x + C$ , 即  $y = Ce^{-x}$ , 其中  $C$  为常数。 (4分)

用常数变易法, 将  $C$  换成  $u(x)$ , 则  $y = u(x)e^{-x}$

代入原方程并整理可得  $u'(x)e^{-x} = e^{-x}$

所以  $u'(x) = 1$ , 两端积分可得  $u(x) = x + C$

所以原方程的通解为  $y = (x + C)e^{-x}$  (7分)

3. 计算重积分  $\iint_D \frac{\sin y}{y} dx dy$ , 其中  $D$  是由  $y = \sqrt{x}$  与  $y = x$  所围区域。

$$\text{解: } \iint_D \frac{\sin y}{y} dx dy = \int_0^1 \int_{y^2}^y \frac{\sin y}{y} dx dy \quad (3 \text{ 分})$$

$$= \int_0^1 (\sin y - y \sin y) dy \quad (5 \text{ 分})$$

$$= 1 - \sin 1 \quad (7 \text{ 分})$$

4. 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n$  的收敛半径, 收敛域及和函数。

$$\text{解: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |x-1|$$

由比值审敛法可知, 当  $|x-1| < 1$  时级数收敛。当  $x=0$  和  $x=2$  时级数发散。

所以级数的收敛半径为  $R=1$ , 收敛域为  $(0,2)$  (4分)

在收敛域内, 幂级数的和函数  $s(x)$  为

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (x-1)((x-1)^n)' = \frac{x-1}{(x-2)^2}. \quad (7 \text{ 分})$$

5. 验证  $\int_{(0,0)}^{(1,2)} (4x^3y^3 - 3y^2 + 5)dx + (3x^4y^2 - 6xy - 4)dy$  在整个  $xoy$  平面内与路径无关, 并计算积分值。

$$\text{解: } (1) P = (4x^3y^3 - 3y^2 + 5), Q = (3x^4y^2 - 6xy - 4)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 12x^3y^2 - 6y, \text{ 且函数 } P(x,y), Q(x,y) \text{ 在单连通区域 } xoy \text{ 内有一阶}$$

连续偏导数, 所以与路径无关。 (4分)

$$\begin{aligned} & \int_{(0,0)}^{(1,2)} (4x^3y^3 - 3y^2 + 5)dx + (3x^4y^2 - 6xy - 4)dy \\ &= \int_0^1 5dx + \int_0^2 3y^2 - 6y - 4dy = -7 \end{aligned} \quad (7 \text{ 分})$$

6. 计算曲面积分  $\iint_{\Sigma} (y^2 - z)dydz + (z^2 - x)dzdx + (x^2 - y)dxdy$ , 其中  $\Sigma$  为锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , 介于平面  $z=0$ ,  $z=1$  之间部分的下侧。

解: 设  $\Sigma_1$  为  $z=1$  的上侧, 则  $\Sigma$  和  $\Sigma_1$  一起构成一个封闭曲面, 记它们围成的空间闭区域为  $\Omega$ 。利用高斯公式可知

$$\iint_{\Sigma + \Sigma_1} (y^2 - z)dydz + (z^2 - x)dzdx + (x^2 - y)dxdy = 0 \quad (4 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned}
& \text{所以 } \iint_{\Sigma} (y^2 - z) dy dz + (z^2 - x) dz dx + (x^2 - y) dx dy \\
&= - \iint_{\Sigma_1} (x^2 - y) dx dy \\
&= - \iint_D (x^2 - y) dx dy, \text{ 其中 } D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}
\end{aligned}$$

利用极坐标计算可知,

$$- \iint_D (x^2 - y) dx dy = - \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\rho^3 \cos^2 \theta - \rho^2 \sin \theta) d\rho d\theta = -\frac{\pi}{4} \quad (7\text{分})$$

得分	评阅人

#### 四、应用题 (共1小题, 共10 分)

1. 某工厂生产某种商品需要原料甲和乙, 设甲的单价为2, 而乙的单价为1, 假设商品的产量 $Z$ 与原料甲的数量 $x$ 和原料乙的数量 $y$ 之间的关系为

$$Z = 20 - x^2 + 10x - 2y^2 + 5y$$

若产品的销售价格为5, 购买原材料的预算为9, 求此时的最大利润。

解: (1) 设 $P(x, y)$ 为分别生产 $x$ 单位甲和 $y$ 单位乙所得总利润。

$$\begin{aligned}
& \text{则 } P(x, y) = 5(20 - x^2 + 10x - 2y^2 + 5y) - 2x - y \\
&= 100 - 5x^2 + 48x - 10y^2 + 24y, \text{ 约束条件为 } 2x + y = 9 \quad (3\text{分})
\end{aligned}$$

作拉格朗日函数 $L(x, y, \lambda) = 100 - 5x^2 + 48x - 10y^2 + 24y + \lambda(2x + y - 9)$ , 求其

对 $x, y, \lambda$ 的一阶偏导数可得

$$\begin{cases} -10x + 48 + 2\lambda = 0 \\ -20y + 24 + \lambda = 0 \\ 2x + y - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\text{解得 } x = 4, y = 1, \quad (8\text{分})$$

因为由于问题本身可知最大值一定存在, 所以最大值就在这个可能的极值点处取

得, 为226 (10 分)

得分	评阅人

#### 五、证明题 (共1题, 共6分)

1. 设  $a_0 = 0$ ,  $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$  ( $n \geq 1$ ), 证明:

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  存在。

(2)  $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{2 - a_n}$  收敛。

证明: (1) 断言  $a_n$  为单调递增数列, 且  $a_n < 2$ 。

显然  $a_1 = \sqrt{2}$  满足,  $2 > a_1 > a_0$ 。假设  $2 > a_n > a_{n-1}$ , 则  $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{2 + 2} = 2$ , 且  $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} > \sqrt{2 + a_{n-1}} = a_n$ 。所以由归纳假设可知断言成立。

因为  $a_n$  为单调有界数列, 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  存在, 两边令  $n \rightarrow \infty$ , 则  $A = \sqrt{2 + A}$ , 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ 。 (3分)

(2) 利用比值审敛法可知级数收敛

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2 - a_{n+1}}}{\sqrt{2 - a_n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2 + a_n}}}{\sqrt{2 - a_n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2 + a_n}} \sqrt{2 + \sqrt{2 + a_n}}}{\sqrt{2 - a_n} \sqrt{2 + \sqrt{2 + a_n}}} = \frac{1}{2} < 1 \end{aligned}$$

(6分)