第 12 周作业解答

练习 1. 判断矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 可否对角化，说明理由。

解

- 解特征方程 $|\lambda I-A|=0$。

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\0&\lambda-1&-1\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^3$$

所以特征值为 $\lambda_1=1$（三重特征值）。

- 由于 $r(\lambda_1 I-A)=2\neq 0$ （即 $r(\lambda_1 I-A)\neq n-n_1$，其中 n_1 为 λ_1 的重数），所以 A 不可对角化。

练习 2. 设 3 阶方阵 A 的特征值为 $1,2,3$，求 $|A|$ 的值。

解 $|A|=1\times 2\times 3=6$。

练习 3. 假设 3 阶方阵 A 的特征值为 $2,1,-1$。求行列式 $|A^2-2I|$ 和 $|A^{-1}-2I|$。

解由假设知 3 阶方阵 A 有 3 个不同特征值，所以 A 可以对角化。设存在可逆矩阵 P 使得

$$P^{-1}AP=\Lambda \quad\Rightarrow\quad A=P\Lambda P^{-1},$$

其中 $\Lambda=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$。所以

$$A^2=P\Lambda P^{-1}P\Lambda P^{-1}=P\Lambda^2P^{-1},\quad A^{-1}=(P\Lambda P^{-1})^{-1}=P\Lambda^{-1}P^{-1}$$

得:

$$\begin{aligned}|A^2-2I|&=|P\Lambda^2P^{-1}-2PIP^{-1}|=|P|\cdot|\Lambda^2-2I|\cdot|P^{-1}|=|\Lambda^2-2I|\\&=\left|\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\right|\\&=2\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}|A^{-1}-2I|&=|P\Lambda^{-1}P^{-1}-2PIP^{-1}|=|P|\cdot|\Lambda^{-1}-2I|\cdot|P^{-1}|=|\Lambda^{-1}-2I|\\&=\left|\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}&0&0\\0&-3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\right|\\&=-\frac{9}{2}\end{aligned}$$

以下是附加题，做出来的同学下次课交，可以加分。注意解答过程要详细。

练习 4. 设 D 为平面三角形区域 $\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}: 0 \le x, 0 \le y, x+y \le 1\}$，设 $p = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ 为 D 中一点，设 $A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 \\ 0.6 & 0.7 \end{pmatrix}$。假设点 p 在平面上随时间运动，第 n 时刻的位置是 $p_n = A^n p$。

(a) 证明对任何时刻 $n \ge 0$，都有 $p_n \in D$。(即，点 p 的运动限制在区域 D 中。)

(b) 求 $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$。(即，求 p 点的最终位置)

证明：(1) 由点 p 的任意性，只需证明 $Ap \in D$. 因为 $Ap = \begin{pmatrix} 0.4a+0.3b \\ 0.6a+0.7b \end{pmatrix}$ 满足 $0.4a+0.3b \ge 0$, $0.6a+0.7b \ge 0$ 及 $0.4a+0.3b+0.6a+0.7b = a+b \le 1$，所以 $Ap \in D$.

(2) $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 0.4 & -0.3 \\ -0.6 & \lambda - 0.7 \end{vmatrix} = (\lambda - 0.1)(\lambda - 1)$。$\lambda = 1$ 对应的特征值是 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，$\lambda = 0.1$ 对应的特征值是 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$。所以

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ & 0.1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$$

所以

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} p_n &= \lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ & 0.1^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &= \frac{a+b}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

练习 5. 设 u 是 n 维非零列向量，$A = uu^T$ 是 n 阶方阵。证明 $||u||^2$ 是 A 的一个特征值。

证明注意到

$$Au = uu^Tu = u(u^Tu) = ||u||^2 u.$$

因为 $u \neq 0$，所以上述说明 $||u||^2$ 是 A 的一个特征值，而 u 是一个相应的特征向量。

练习 6. 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 1$，对应的特征向量分别为 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$。求 A。

解由题意知，A 有 3 个线性无关特征向量，故 A 可对角化。令 $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP = \Lambda$。所以 $A = P\Lambda P^{-1}$。先求 P^{-1}：

$$\begin{aligned}(P \vdots I) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \\ &\xrightarrow{(-1)\times r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2 - r_3]{r_1 - r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \\ &\xrightarrow{r_1 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).\end{aligned}$$

所以 $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$。所以

$$A = P\Lambda P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -4 & 5 & -3 \\ -4 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

练习 7. 将下列向量组正交化

1. $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}$

解

1.

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T\beta_1}{||\beta_1||^2}\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -1 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\alpha_3^T\beta_1}{||\beta_1||^2}\beta_1 - \frac{\alpha_3^T\beta_2}{||\beta_2||^2}\beta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -1 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

2.

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T\beta_1}{||\beta_1||^2}\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{-10}{10}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\alpha_3^T\beta_1}{||\beta_1||^2}\beta_1 - \frac{\alpha_3^T\beta_2}{||\beta_2||^2}\beta_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix} - \frac{30}{10}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{-26}{26}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$