姓名：
专业：
学号：

第 11 周作业解答

练习 1. 求向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\3\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\5\\-3\\-1\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\5\\7\\-5\\-4\end{pmatrix}$, $\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\2\\2\\-2\\-3\end{pmatrix}$ 的一组极大无关组，并将其余向量表示成极大无关组的线性组合。

解

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-1&0&1\\1&3&5&2\\3&5&7&2\\-1&-3&-5&-2\\2&-1&-4&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&3&5&2\\-2&-1&0&1\\3&5&7&2\\-1&-3&-5&-2\\2&-1&-4&-3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_4+r_1\\r_5-2r_1}]{\substack{r_2+2r_1\\r_3-3r_1}}\begin{pmatrix}1&3&5&2\\0&5&10&5\\0&-4&-8&-4\\0&0&0&0\\0&-7&-14&-7\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{-\frac{1}{4}\times r_3\\-\frac{1}{7}\times r_5}]{\frac{1}{5}\times r_2}\begin{pmatrix}1&3&5&2\\0&1&2&1\\0&1&2&1\\0&0&0&0\\0&1&2&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_5-r_2]{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&3&5&2\\0&1&2&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-3r_2}\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&2&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

可见

- $r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)=2$，说明极大无关组应含 2 个向量；
- 从最后简化的阶梯型矩阵容易看出：α_1,α_2 线性无关，所以 α_1,α_2 构成一极大无关组；
- 也是从最后简化的阶梯型矩阵看出：

$$\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2,\qquad \alpha_4=-\alpha_1+\alpha_2.$$

练习 2. 用基础解系表示齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+4x_4-3x_5=0\\2x_1+x_2+3x_3+5x_4-5x_5=0\\x_1-x_2+3x_3-2x_4-x_5=0\\3x_1+x_2+5x_3+6x_4-7x_5=0\end{cases}$ 的通解。

解

$$\begin{pmatrix}A \mid 0\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&1&4&-3&0\\2&1&3&5&-5&0\\1&-1&3&-2&-1&0\\3&1&5&6&-7&0\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{r_3-r_1\\r_4-3r_1}]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&1&4&-3&0\\0&-1&1&-3&1&0\\0&-2&2&-6&2&0\\0&-2&2&-6&2&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{r_4-2r_2\\r_1+r_2}]{r_3-2r_2}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&2&1&-2&0\\0&-1&1&-3&1&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{(-1)\times r_2}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&2&1&-2&0\\0&1&-1&3&-1&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

1. 从最后简化的阶梯型矩阵看出，原方程组同解于：

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x_1 & & +2x_3+ & x_4- & 2x_5=0 \\ & x_2 & -x_3+ & 3x_4- & x_5=0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} x_1=-2x_3-x_4+2x_5 \\ x_2=x_3-3x_4+x_5 \end{cases}$$

2. 自由变量：x_3, x_4, x_5

3. 基础解系：

$$\xi_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2=\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_3=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. 通解：

$$x=c_1\xi_1+c_2\xi_2+c_3\xi_3$$

其中 c_1, c_2, c_3 为任意常数。