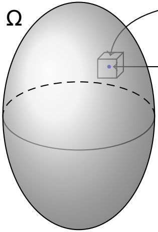
第 10 章 c：三重积分

数学系　　梁卓滨

2017.07 暑期班

三维物体的质量

假设
- Ω 为空间中三维闭区域
- 密度为 μ
- 质量为 m



- 当材料均匀时（$\mu =$ 常数），

$$m = \mu \cdot \mathrm{Vol}(\Omega)$$

- 当材料非均匀时（$\mu = \mu(x, y, z)$ 为 Ω 上函数），利用微元法可知

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \mu(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$$

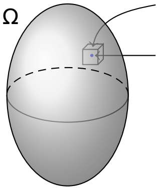
三重积分的定义

三重积分定义 设

- Ω 是空间中有界闭区域，
- $f(x,y,z)$ 是 Ω 上的有界函数，

若

- 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$存在，且极限
- 与上述 Ω 的划分、(ξ_i,η_i,ζ_i) 的选取无关，



则定义
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$$
称为 $f(x,y,z)$ 在 D 上的三重积分。dv 称为体积元素。$dv = dxdydz$

注 三重积分的定义式与二重积分的类似，故性质也类似

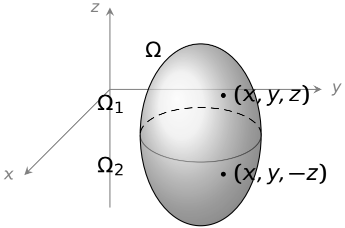
三重积分的性质

- 存在性 若 $f(x, y, z)$ 在空间有界闭区域 Ω 上连续，则
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$$
存在。
- 线性性 $\iiint_{\Omega} (\alpha f + \beta g) dv = \alpha \iiint_{\Omega} f dv + \beta \iiint_{\Omega} g dv$
- 可加性
$\iiint_{\Omega} f(x,y,z) dv = \iiint_{\Omega_1} f(x,y,z) dv + \iiint_{\Omega_2} f(x,y,z) dv$
- $\iiint_{\Omega} 1 dv = \mathrm{Vol}(\Omega)$
- 若 $f(x,y,z) \le g(x,y,z)$，则
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z) dv \le \iiint_{\Omega} g(x,y,z) dv$$

积分的对称性

性质 设空间中三维闭区域 Ω 关于 xoy 坐标面对称，

- 若 $f(x,y,z)$ 关于 z 是奇函数（即：$f(x,y,-z)=-f(x,y,z)$），则
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)dv = 0$$
- 若 $f(x,y,z)$ 关于 z 是偶函数（即：$f(x,y,-z)=f(x,y,z)$），则
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = 2\iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)dv = 2\iiint_{\Omega_2} f(x,y,z)dv$$



例 计算 $\iiint_\Omega \frac{z\ln(1+x^2+y^2)}{1+x^2+y^2+z^2}dxdydz$，其中 Ω 为球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$

解 因为

1. 被积函数函数关于变量 z 是奇函数；
2. 积分区域 Ω 关于 xoy 坐标面对称，

所以积分为 0

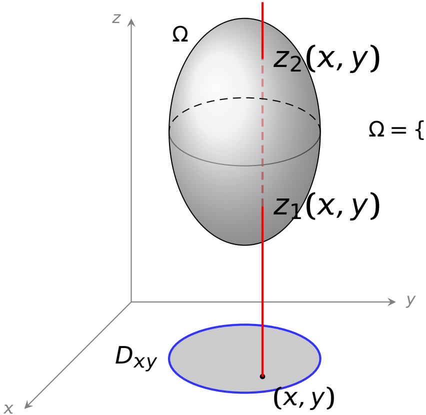
计算三重积分的基本做法：化为累次积分

- "先一后二"
  1. $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iint_* \left[\int_*^* f(x,\ y,\ z)dz \right] dxdy$
  2. $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iint_* \left[\int_*^* f(x,\ y,\ z)dy \right] dxdz$
  3. $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iint_* \left[\int_*^* f(x,\ y,\ z)dz \right] dxdy$
- "先二后一"
  1. $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \int_*^* \left[\iint_* f(x,\ y,\ z)dxdy \right] dz$
  2. $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \int_*^* \left[\iint_* f(x,\ y,\ z)dxdz \right] dy$
  3. $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \int_*^* \left[\iint_* f(x,\ y,\ z)dydz \right] dx$

投影法（“先一后二”）

1. 先积 z，再积 xy

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D_{xy}} \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,\ y,\ z)dz \right] d$$



$$\Omega = \{(x,y,z) | z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y),\ (x,y) \in D_{xy}\}$$

投影法（“先一后二”）

1. 先积 z，再积 xy

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D_{xy}} \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,\ y,\ z)dz \right] dxdy$$

类似地

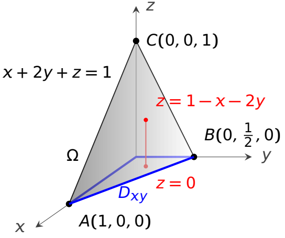
2. 先积 x，再积 yz

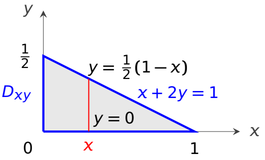
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D_{yz}} \left[\int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x,\ y,\ z)dx \right]$$

3. 先积 y，再积 xz

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D_{xz}} \left[\int_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x,\ y,\ z)dy \right]$$

例 计算 $\iiint_\Omega x\,dxdydz$，其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域。





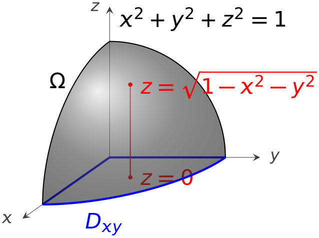
解

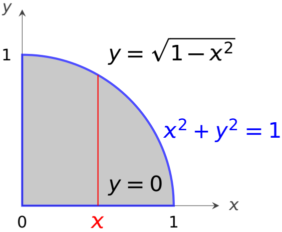
$$\text{原式} = \iint_{D_{xy}}\left[\int_0^{1-x-2y} x\,dz\right]dxdy = \iint_{D_{xy}} x(1-x-2y)\,dxdy$$

$$= \int_0^1\left[\int_0^{\frac{1-x}{2}} x(1-x-2y)\,dy\right]dx = \int_0^1\left[x\left[(1-x)y-y^2\right]\Big|_0^{\frac{1-x}{2}}\right]$$

$$= \int_0^1\left[\frac{1}{4}x(1-x)^2\right]dx = \frac{1}{48}$$

例 计算 $\iiint_\Omega xyzdxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$ 在第一象限的部分。





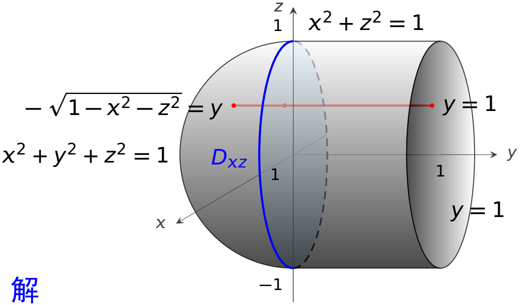
解

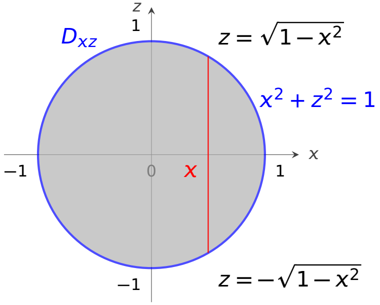
$$原式=\iint_{D_{xy}}\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyzdz\right]dxdy=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{2}xy(1-x^2$$

$$=\int_0^1\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{2}xy(1-x^2-y^2)dy\right]dx=\int_0^1\left[\frac{1}{8}x(1-x^2\right.$$

$$=\frac{1}{48}$$

例 计算 $\iiint_\Omega y\sqrt{1-x^2}\,dxdydz$，其中 Ω 是如图的闭区域。





解

$$\text{原式}=\iint_{D_{xz}}\left[\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{1} y\sqrt{1-x^2}\,dy\right]dxdz=\iint_{D_{xz}}\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{2}(x^2$$

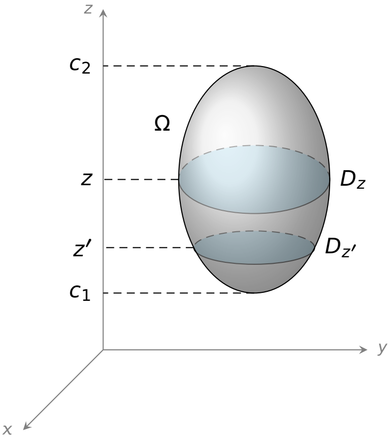
$$=\int_{-1}^{1}\left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{2}(x^2+z^2)\,dz\right]dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{3}(1+x^2-2x^4)\right]dx=\frac{28}{45}$$

截面法（“先二后一”）

1. 先积 xy，再积 z

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_{c_1}^{c_2} \left[\iint_{D_z} f(x,y,z)dxdy \right] dz$$



截面法（“先二后一”）

1. 先积 xy，再积 z

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_{c_1}^{c_2} \left[\iint_{D_z} f(x,\ y,\ z)dxdy \right] dz$$

类似地

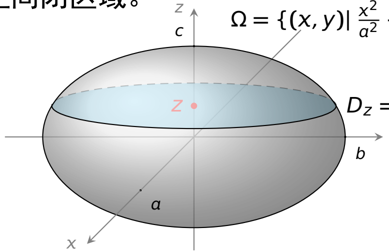
2. 先积 yz，再积 x

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_{d_1}^{d_2} \left[\iint_{D_x} f(x,\ y,\ z)dydz \right] dx$$

3. 先积 xz，再积 y

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_{e_1}^{e_2} \left[\iint_{D_y} f(x,\ y,\ z)dxdz \right] dy$$

例 计算 $\iiint_\Omega z^2 dxdydz$，其中 Ω 是由椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所围成的空间闭区域。



$$\Omega=\{(x,y)|\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\}$$

$$D_z=\left\{(x,y)\Big|\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1-\frac{z^2}{c^2}\right\}$$

$$=\left\{(x,y)\Bigg|\ \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2}\le 1\right\}$$

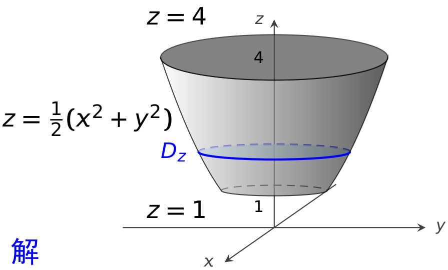
解

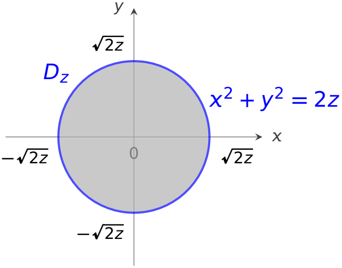
$$\text{原式}=\int_{-c}^{c}\left[\iint_{D_z} z^2 dxdy\right]dz=\int_{-c}^{c} z^2\left[\iint_{D_z} dxdy\right]dz$$

$$=\int_{-c}^{c} z^2\left[\pi\cdot ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\right]dz$$

$$=\pi\cdot ab\int_{1}^{4}\left(z^2-\frac{z^4}{c^2}\right)dz=\frac{4}{15}\pi abc^3$$

例 计算 $\iiint_\Omega (x^2 + 5xy^2 \sin\sqrt{x^2+y^2})dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 与平面 $z=1$ 和 $z=4$ 所围成。





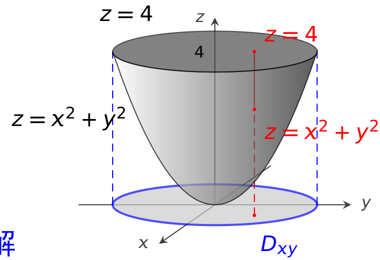
解

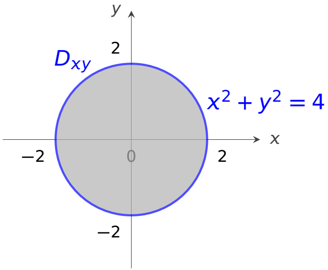
$$\text{原式} \xlongequal{\text{对称性}} \iiint_\Omega x^2 dxdydz = \int_1^4 \left[\iint_{D_z} x^2 dxdy\right]dz$$

$$= \int_1^4 \left[\iint_{D_z} \frac{1}{2}(x^2+y^2)dxdy\right]dz$$

$$= \int_1^4 \left[\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\sqrt{2z}} \rho^2 \cdot \rho d\rho\right)d\theta\right]dz = \pi \int_1^4 z^2 dz = 21\pi$$

例 计算 $\iiint_\Omega z\,dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=4$ 所围成的闭区域。





解

$$\text{原式}=\iint_{D_{xy}}\left[\int_{x^2+y^2}^{4} z\,dz\right]dxdy=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{2}\left[16-(x^2+y^2)^2\right]dx$$

$$\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}\iint_{D_{xy}}\frac{1}{2}\left[16-\rho^4\right]\cdot\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^2\frac{1}{2}\left[16-\rho^4\right]\cdot\rho\,d\rho\right]d\theta=\pi\int_0^2(16-\rho^4)\cdot\rho\,d\rho=\frac{64}{3}$$

例 计算 $\iiint_\Omega z dv$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域。（用“先一后二”及“先二后一”）

解一 “先一后二”：Ω 在 xoy 面上投影：$D_{xy}=\{(x,y)|\,x^2+y^2\le 1\}$

$$\iiint_\Omega z dv=\iint_{D_{xy}}\left[\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z dz\right]dxdy=\iint_{D_{xy}}\left[\frac{1}{2}z^2\Big|_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}\right.$$

$$=\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}\left[2-x^2-y^2-(x^2+y^2)^2\right]dxdy$$

$$\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}\left[2-\rho^2-\rho^4\right]\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^1\left[2-\rho^2-\rho^4\right]\cdot\rho d\rho\right\}d\theta=\pi\int_0^1\left[2\rho-\rho^3-\rho^5\right]$$

$$=\pi\left(\rho^2-\frac{1}{4}\rho^4-\frac{1}{6}\rho^6\right)\Big|_0^1=\frac{7}{12}\pi$$

例 计算 $\iiint_\Omega z dv$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域。（用“先一后二”及“先二后一”）

解二 “先二后一”法：$0\le z\le\sqrt{2}$。

当 $0\le z\le 1$ 时，截面 $D_z=\{(x,y)|x^2+y^2\le z\}$；

当 $1\le z\le\sqrt{2}$ 时，截面 $D_z=\{(x,y)|x^2+y^2\le 2-z^2\}$。

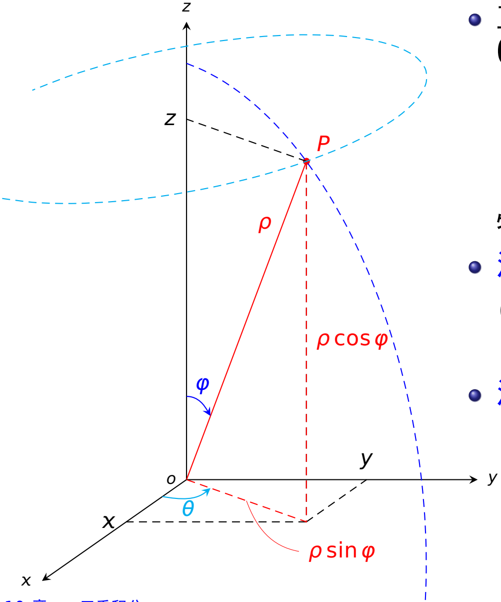
$$\iiint_\Omega z dv=\int_0^{\sqrt{2}}\Big[\iint_{D_z} z dxdy\Big]dz=\int_0^{\sqrt{2}} z\Big[\iint_{D_z} dxdy\Big]dz$$

$$=\int_0^{\sqrt{2}} z|D_z|dz=\int_0^1 z|D_z|dz+\int_1^{\sqrt{2}} z|D_z|dz$$

$$=\int_0^1 z(\pi z)dz+\int_1^{\sqrt{2}} z\pi(2-z^2)dz$$

$$=\frac{1}{3}\pi z^3\Big|_0^1+\pi(z^2-\frac{1}{4}z^4)\Big|_1^{\sqrt{2}}=\frac{7}{12}\pi$$

球面坐标



- 直角坐标 (x, y, z)，球面坐标 (ρ, φ, θ) 的转换：

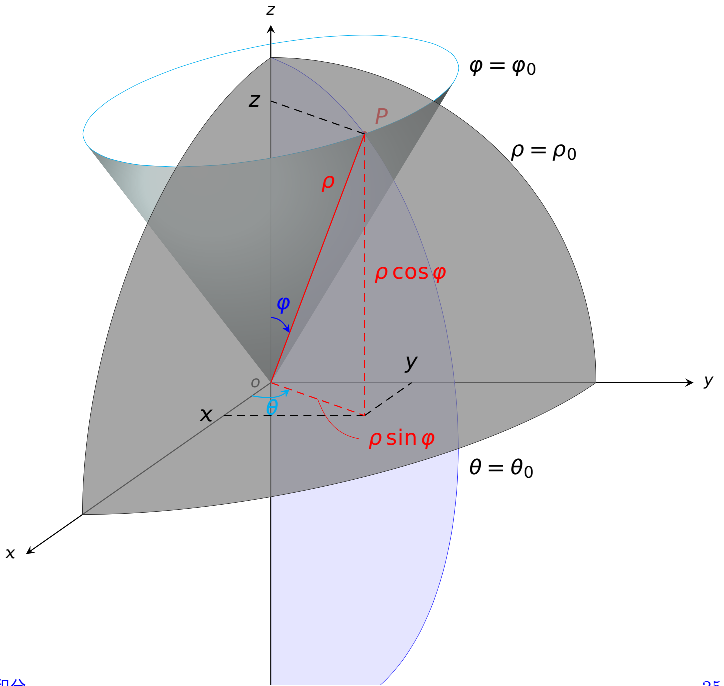
$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

特别地，$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$

- 注

$$0 \leq \rho < \infty,\ 0 \leq \varphi \leq \pi,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

- 注 三组坐标面
    - $\rho = \rho_0$：球面
    - $\varphi = \varphi_0$：以原点为顶点、z 轴为轴的圆锥面
    - $\theta = \theta_0$：过 z 轴的半平面


z
φ = φ0
z
P
ρ = ρ0
ρ
ρ cos φ
φ
y
y
o
θ
x
ρ sin φ
θ = θ0
x

例 函数 $f(x, y, z) = e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ 在球面坐标系下的表示是什么？

解 因为 $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$，所以 $f = e^{\rho^3}$

例 球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ 在球面坐标下的表示是什么？

解 $\{0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$

球面坐标下计算三重积分

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv \xlongequal[\substack{y=\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=\rho\cos\varphi}]{x=\rho\sin\varphi\cos\theta}$$

$$\iiint_\Omega f(\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi)\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$=\int \left\{\int \left[\int F(\rho,\varphi,\theta)\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho\right]d\varphi\right\}d\theta$$

- 当 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le a^2$ 时，

$$\Omega=\{0\le\rho\le a,\ 0\le\varphi\le\pi,\ 0\le\theta\le 2\pi\}$$

并且

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv=\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{\pi}\left[\int_0^{a}F(\rho,\varphi,\theta)\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho\right]d\varphi\right\}$$

例 求 $\iiint_\Omega e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le R^2$。

解 引入球面坐标

$$\text{原式}=\iiint_\Omega e^{\rho^3}\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{\pi}\left[\int_0^{R}e^{\rho^3}\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho\right]d\varphi\right\}d\theta$$

$$=2\pi\cdot\left\{\int_0^{\pi}\left[\int_0^{R}e^{\rho^3}\cdot\rho^2 d\rho\right]\sin\varphi d\varphi\right\}$$

$$=2\pi\cdot\left[\int_0^{R}e^{\rho^3}\cdot\rho^2 d\rho\right]\cdot\left[\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\right]$$

$$=2\pi\cdot\left(\frac{1}{3}e^{\rho^3}\right)\Big|_0^R\cdot 2=\frac{4}{3}\pi(e^{R^3}-1)$$

例 计算球体 Ω：　$x^2+y^2+z^2 \le R^2$ 的体积（利用球面坐标）。

解

$$\text{球体体积} = \iiint_\Omega 1 dxdydz = \iiint_\Omega 1 \cdot \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \left[\int_0^{R} \rho^2 \sin\varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta$$

$$= 2\pi \cdot \left\{ \int_0^{\pi} \left[\int_0^{R} \rho^2 d\rho \right] \sin\varphi d\varphi \right\}$$

$$= 2\pi \cdot \left[\int_0^{R} \rho^2 d\rho \right] \cdot \left[\int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \right]$$

$$= 2\pi \cdot \left(\frac{1}{3}\rho^3 \right) \Big|_0^R \cdot 2 = \frac{4}{3}\pi R^3$$