第 02 周作业

练习 1. 求解微分方程 $\begin{cases} y'' - 3y' - 4y = 0 \\ y(0) = 0,\, y'(0) = -5 \end{cases}$.

练习 2. 求解微分方程 $\begin{cases} y'' - 4y' + 13y = 0 \\ y(0) = 0,\, y'(0) = 3 \end{cases}$.

练习 3. 求解微分方程 $\begin{cases} 4y'' + 4y' + y = 0 \\ y(0) = 2,\, y'(0) = 0 \end{cases}$.

练习 4. 填空，写出下列方程的一个特解。（不必严格按之前求解的套路，这些题可以比较容易地猜出来的）

1. $y'' + 4y' - y = 2e^x$
2. $y'' - 3y' + 2y = 5$
3. $y'' - 4y' = 5$
4. $y'' + 5y' + 4y = 3 - 2x$
5. $2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x - 2$

练习 5. 求微分方程 $y'' + 3y' + 2y = 3xe^{-x}$ 的通解

练习 6. 求微分方程 $y'' + y = 4xe^x$，$y(0) = 0$，$y'(0) = 1$ 的特解

练习 7. 求微分方程 $y'' + 4y = x\cos x$ 的通解

练习 8. （共振问题）假设弹簧系统的固有频率是 ω，并且受到频率为 Ω 的外力 $F = F_0\cos(\Omega t)$ 作用（ω, Ω 均为常数，F_0 是常数，$F_0 \neq 0$）。所以物体运动的方程为

$$x'' + \omega^2 x = F_0\cos(\Omega t).$$

1. 设 $\omega \neq \Omega$，求出物体运动的通解 $x = x(t)$，并回答：当 Ω 越接近 ω 时，物体的振幅有什么变化?
2. 设 $\omega = \Omega$，求出物体运动的通解 $x = x(t)$，并回答：随时间 t 的变化，物体的振幅有什么变化?。

练习 9. 1. 写出具有特解 $y_1 = xe^{-x}$ 和 $y_2 = e^{-x}$ 的二阶常系数齐次线性微分方程。

2. 写出具有特解 $y_1 = e^{-x}\cos 2x$ 和 $y_2 = e^{-x}\sin 2x$ 的二阶常系数齐次线性微分方程。

解

练习 10. 求解常系数线性微分方程 $y''' + 4y'' + y' - 6y = 0$ 的通解。（提示：寻找形如 $y = e^{rx}$ 的特解）

下面是附加题，做出来的同学下周一交上来，可以适当加分。注意解答过程要清楚。

练习 11. （关于复数）三次方程

$$x^3 = px + q$$

的费罗-塔尔塔利亚-卡尔达诺解为

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

当 $\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$ 时，这个公式不可避免出现负数的开方。然而，这时我们不能再以无解为理由而对它不予理睬，因为一个三次方程永远至少有一个实根（尝试用微积分的理论说明这一点）。以下是一个例子：考虑一元三次方程 $x^3 = 15x + 4$ 。

1. 用微积分的办法证明该方程有三个实根.
2. 根据费罗-塔尔塔利亚-卡尔达诺公式，该方程的一个根是:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

这时不能简单地认为公式中出现 $\sqrt{-121}$ 无意义而无解。这就需要引入复数并研究它的性质。试利用复数的性质说明上述解等于哪个实数？并进一步求出该方程全部的根。

（关于复数更多的历史与评论，请看《数学及其历史》(John Stillwell 著，袁向东，冯绪宁译）相关章节）