第 11 周作业解答

练习 1. 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量。

解

- 解特征方程 $|\lambda I-A|=0$。

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-5 & -6 & 3 \\ 1 & \lambda & -1 \\ -1 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3+r_2} \begin{vmatrix} \lambda-5 & -6 & 3 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 0 & \lambda-2 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$
$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-5 & -6 & 3 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2-c_3} (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-5 & -9 & 3 \\ 1 & \lambda+1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$
$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-5 & -9 \\ 1 & \lambda+1 \end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-4\lambda+4)=(\lambda-2)^3$$

所以特征值为 $\lambda_1=2$（这是三重特征值）。

- 关于特征值 $\lambda_1=2$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$。

$$(\lambda_1 I-A\vdots 0)=\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -6 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

同解方程组为
$$x_1+2x_2-x_3=0 \qquad \Rightarrow \qquad x_1=-2x_2+x_3$$
自由变量取为 x_2, x_3。分别取 $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，得基础解系

$$\alpha_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以对应于特征值 $\lambda_1=2$ 的所有特征向量为：

$$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2=c_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

其中 c_1, c_2 是不全为零的任意常数。

练习 2. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & b & -1 \end{pmatrix}$，如果 A 的特征值 λ 对应的一个特征向量为 $\alpha=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$，求 a, b 和 λ 值。

解注意到

$$A\alpha=\lambda\alpha \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & b & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix} -4 \\ a+10 \\ -2b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda \\ -2\lambda \\ 3\lambda \end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{cases} \lambda=-4 \\ a=-2 \\ b=6 \end{cases}.$$

练习 3. 设 λ_1, λ_2 是方阵 A 的两个不同的特征值，对应的特征向量分别为 α_1, α_2。证明 $\alpha_1+\alpha_2$ 一定不是 A 的特征向量。

解反证法，假设 $\alpha_1+\alpha_2$ 是 A 的特征向量，相应特征向值为 λ。则

$$A(\alpha_1+\alpha_2)=\lambda(\alpha_1+\alpha_2).$$

另一方面

$$A(\alpha_1+\alpha_2)=A\alpha_1+A\alpha_2=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2.$$

综合上述两式，得

$$\lambda(\alpha_1+\alpha_2)=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2.$$

所以

$$(\lambda-\lambda_1)\alpha_1+(\lambda-\lambda_2)\alpha_2=0.$$

注意到对应不同特征值的特征向量线性无关，从而上式意味

$$\lambda=\lambda_1, \quad \lambda=\lambda_2.$$

这与 λ_1, λ_2 不等矛盾。矛盾在于假设了 $\alpha_1+\alpha_2$ 是 A 的特征向量。所以 $\alpha_1+\alpha_2$ 一定不是 A 的特征向量。

练习 4. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$ 和 $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & y \end{pmatrix}$ 相似，求 x, y 的值。

解因为 $A\sim B$ ，所以 A, B 有相同特征值，设为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$。由特征值和矩阵元素的关系，得

$$2+0+x=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2+3+y$$

及

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & y \end{vmatrix}.$$

所以

$$\begin{cases} 2+x=5+y \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & y \end{vmatrix} \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} 2+x=5+y \\ -1=3y+8 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x=0 \\ y=-3 \end{cases}$$

练习 5. 判断矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ 可否对角化。若能，求出相应的对角阵 Λ，和可逆矩阵 P。

解

- 解特征方程 $|\lambda I - A| = 0$。

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 3 & -3 \\ -3 & \lambda+5 & -3 \\ -6 & 6 & \lambda-4 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3+c_2} \begin{vmatrix} \lambda-1 & 3 & 0 \\ -3 & \lambda+5 & \lambda+2 \\ -6 & 6 & \lambda+2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+2)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 3 & 0 \\ -3 & \lambda+5 & 1 \\ -6 & 6 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2-r_3} (\lambda+2)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 3 & 0 \\ 3 & \lambda-1 & 0 \\ -6 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+2)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 3 \\ 3 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda^2-2\lambda-8) = (\lambda+2)^2(\lambda-4)$$

所以特征值为 $\lambda_1 = -2$（二重特征值），$\lambda_2 = 4$。

- 关于特征值 $\lambda_1 = -2$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$。

$$(-2I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & -3 & 0 \\ -6 & 6 & -6 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

同解方程组为

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = x_2 - x_3$$

自由变量取为 x_2, x_3。分别取 $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，得基础解系

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以对应于特征值 $\lambda_1 = -2$ 的有 2 个线性无关特征向量。（等价于 $r(-2I - A) = 3 - 2 = 1$。）

- 关于特征值 $\lambda_1 = 4$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$。

$$(-2I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & -3 & 0 \\ -3 & 9 & -3 & 0 \\ -6 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{-\frac{1}{3}\times r_2 \\ -\frac{1}{6}\times r_3}]{\frac{1}{3}\times r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-r_2]{r_2-r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}\times r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3+r_2]{r_1-r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = 2x_2 \end{cases}$$

自由变量取为 x_2。取 $x_2 = 1$，得基础解系

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- 可见 A 有 3 个线性无关特征向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$，所以 A 可对角化。令

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \scriptstyle\alpha_1 & \scriptstyle\alpha_2 & \scriptstyle\alpha_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & -2 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$$

则

$$P^{-1}AP = \Lambda.$$