

第 11 章 d : 对面积的曲面积分

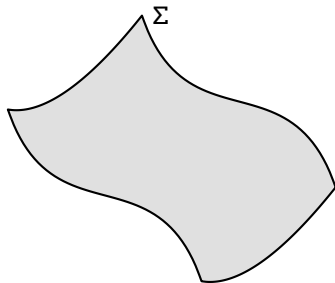
数学系 梁卓滨

2017.07 暑期班

曲面的质量

假设

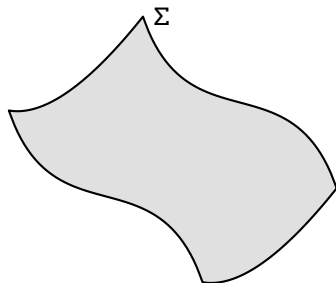
- Σ 为空间中曲面
- 密度为 μ
- 质量为 m



曲面的质量

假设

- Σ 为空间中曲面
- 密度为 μ
- 质量为 m

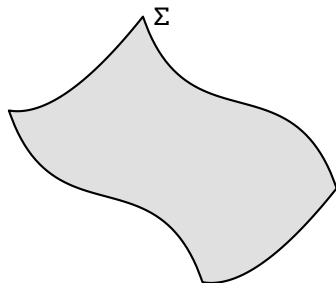


- 当材料均匀时 ($\mu = \text{常数}$),
- 当材料非均匀时 ($\mu = \mu(x, y, z)$ 为 Σ 上函数),

曲面的质量

假设

- Σ 为空间中曲面
- 密度为 μ
- 质量为 m



- 当材料均匀时 ($\mu = \text{常数}$),

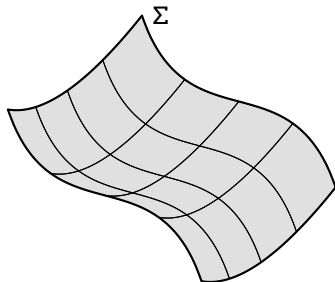
$$m = \mu \cdot \text{Area}(\Sigma)$$

- 当材料非均匀时 ($\mu = \mu(x, y, z)$ 为 Σ 上函数),

曲面的质量

假设

- Σ 为空间中曲面
- 密度为 μ
- 质量为 m



- 当材料均匀时 ($\mu = \text{常数}$),

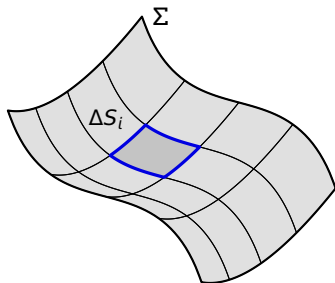
$$m = \mu \cdot \text{Area}(\Sigma)$$

- 当材料非均匀时 ($\mu = \mu(x, y, z)$ 为 Σ 上函数), 利用微元法可知

曲面的质量

假设

- Σ 为空间中曲面
- 密度为 μ
- 质量为 m



- 当材料均匀时 ($\mu = \text{常数}$),

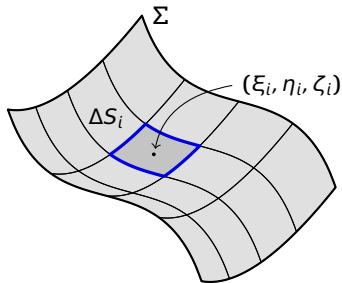
$$m = \mu \cdot \text{Area}(\Sigma)$$

- 当材料非均匀时 ($\mu = \mu(x, y, z)$ 为 Σ 上函数), 利用微元法可知

曲面的质量

假设

- Σ 为空间中曲面
- 密度为 μ
- 质量为 m



- 当材料均匀时 ($\mu = \text{常数}$),

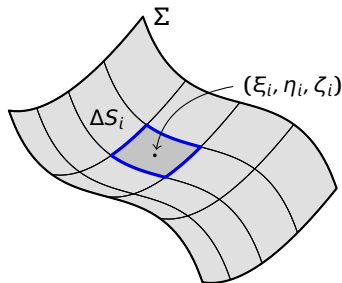
$$m = \mu \cdot \text{Area}(\Sigma)$$

- 当材料非均匀时 ($\mu = \mu(x, y, z)$ 为 Σ 上函数), 利用微元法可知

曲面的质量

假设

- Σ 为空间中曲面
- 密度为 μ
- 质量为 m



- 当材料均匀时 ($\mu = \text{常数}$),

$$m = \mu \cdot \text{Area}(\Sigma)$$

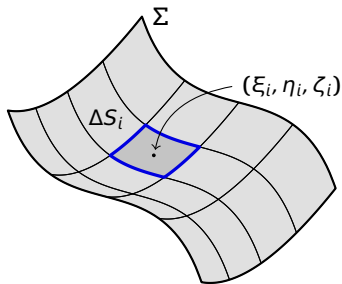
- 当材料非均匀时 ($\mu = \mu(x, y, z)$ 为 Σ 上函数), 利用微元法可知

$$\mu(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$$

曲面的质量

假设

- Σ 为空间中曲面
- 密度为 μ
- 质量为 m



- 当材料均匀时 ($\mu = \text{常数}$),

$$m = \mu \cdot \text{Area}(\Sigma)$$

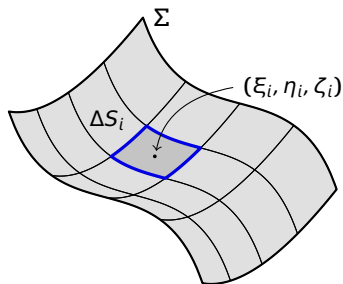
- 当材料非均匀时 ($\mu = \mu(x, y, z)$ 为 Σ 上函数), 利用微元法可知

$$\sum_{i=1}^n \mu(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$$

曲面的质量

假设

- Σ 为空间中曲面
- 密度为 μ
- 质量为 m



- 当材料均匀时 ($\mu = \text{常数}$),

$$m = \mu \cdot \text{Area}(\Sigma)$$

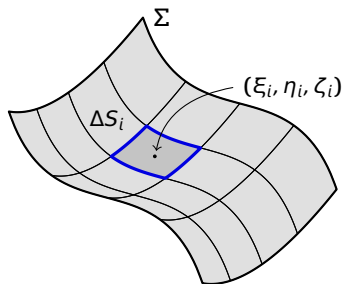
- 当材料非均匀时 ($\mu = \mu(x, y, z)$ 为 Σ 上函数), 利用微元法可知

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mu(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$$

曲面的质量

假设

- Σ 为空间中曲面
- 密度为 μ
- 质量为 m



- 当材料均匀时 ($\mu = \text{常数}$),

$$m = \mu \cdot \text{Area}(\Sigma)$$

- 当材料非均匀时 ($\mu = \mu(x, y, z)$ 为 Σ 上函数), 利用微元法可知

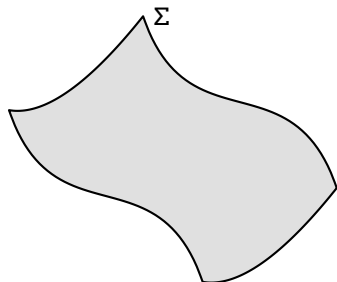
$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mu(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$$

对面积的曲面积分的定义

设

- Σ 是空间中有界分片光滑曲面,
- $f(x, y, z)$ 是 Σ 上的有界函数,

若

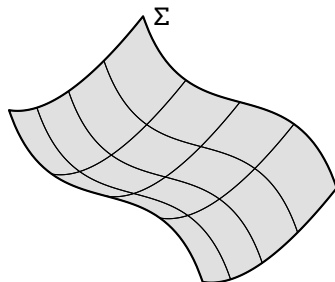


对面积的曲面积分的定义

设

- Σ 是空间中有界分片光滑曲面,
- $f(x, y, z)$ 是 Σ 上的有界函数,

若

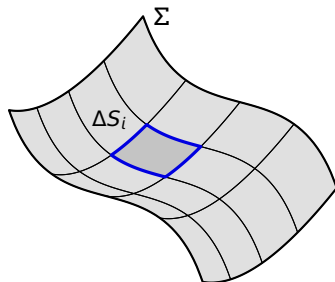


对面积的曲面积分的定义

设

- Σ 是空间中有界分片光滑曲面,
- $f(x, y, z)$ 是 Σ 上的有界函数,

若

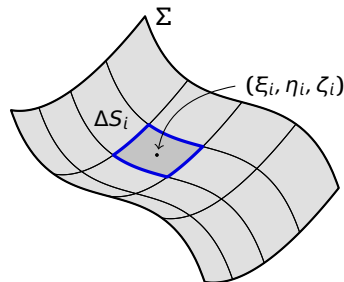


对面积的曲面积分的定义

设

- Σ 是空间中有界分片光滑曲面,
- $f(x, y, z)$ 是 Σ 上的有界函数,

若



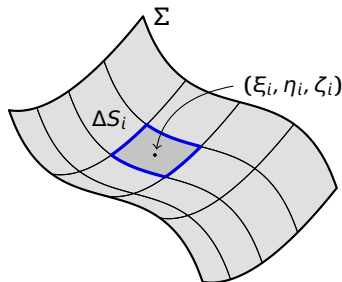
对面积的曲面积分的定义

设

- Σ 是空间中有界分片光滑曲面,
- $f(x, y, z)$ 是 Σ 上的有界函数,

若

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$$



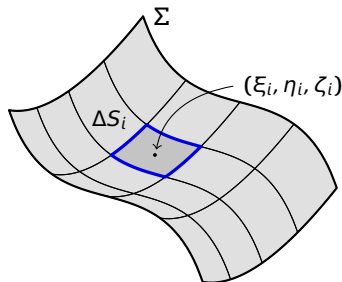
对面积的曲面积分的定义

设

- Σ 是空间中有界分片光滑曲面,
- $f(x, y, z)$ 是 Σ 上的有界函数,

若

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$$



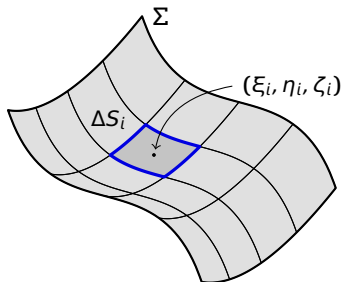
对面积的曲面积分的定义

设

- Σ 是空间中有界分片光滑曲面,
- $f(x, y, z)$ 是 Σ 上的有界函数,

若

- 极限 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$ 存在,



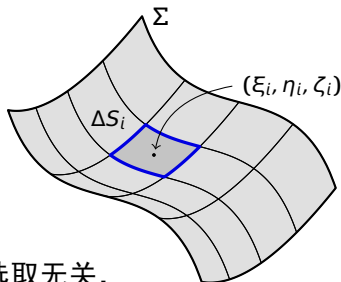
对面积的曲面积分的定义

设

- Σ 是空间中有界分片光滑曲面,
- $f(x, y, z)$ 是 Σ 上的有界函数,

若

- 极限 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$ 存在,
- 且该极限与 Σ 的划分、 (ξ_i, η_i, ζ_i) 的选取无关,



对面积的曲面积分的定义

设

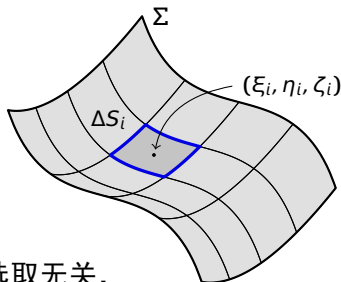
- Σ 是空间中有界分片光滑曲面,
- $f(x, y, z)$ 是 Σ 上的有界函数,

若

- 极限 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$ 存在,
- 且该极限与 Σ 的划分、 (ξ_i, η_i, ζ_i) 的选取无关,

则定义

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$$



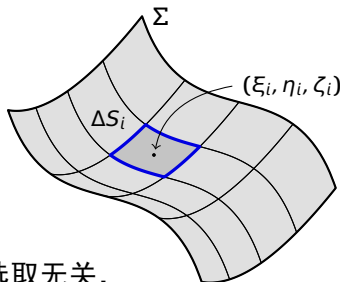
对面积的曲面积分的定义

设

- Σ 是空间中有界分片光滑曲面,
- $f(x, y, z)$ 是 Σ 上的有界函数,

若

- 极限 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$ 存在,
- 且该极限与 Σ 的划分、 (ξ_i, η_i, ζ_i) 的选取无关,



则定义

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$$

称为 $f(x, y, z)$ 在 Σ 上对面积的曲面积分。

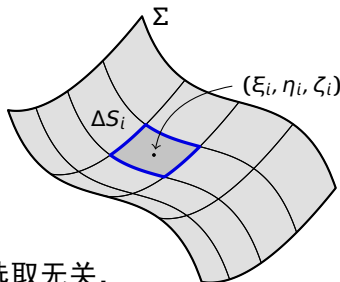
对面积的曲面积分的定义

设

- Σ 是空间中有界分片光滑曲面,
- $f(x, y, z)$ 是 Σ 上的有界函数,

若

- 极限 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$ 存在,
- 且该极限与 Σ 的划分、 (ξ_i, η_i, ζ_i) 的选取无关,



则定义

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$$

称为 $f(x, y, z)$ 在 Σ 上对面积的曲面积分。 dS 称为面积元素。

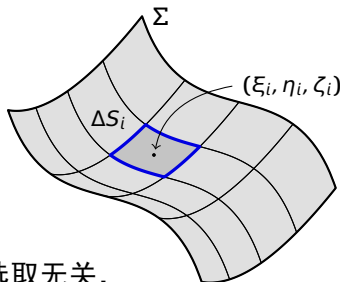
对面积的曲面积分的定义

设

- Σ 是空间中有界分片光滑曲面,
- $f(x, y, z)$ 是 Σ 上的有界函数,

若

- 极限 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$ 存在,
- 且该极限与 Σ 的划分、 (ξ_i, η_i, ζ_i) 的选取无关,



则定义

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$$

称为 $f(x, y, z)$ 在 Σ 上对面积的曲面积分。 dS 称为面积元素。

注 对面积曲面积分的定义式与二重积分的类似, 故性质也类似

对面积曲面积分的性质

- 存在性 若 $f(x, y, z)$ 在有界曲面 Σ 上连续, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$$

存在。

对面积曲面积分的性质

- 存在性 若 $f(x, y, z)$ 在有界曲面 Σ 上连续, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$$

存在。

- 线性性 $\iint_{\Sigma} (\alpha f + \beta g) dS = \alpha \iint_{\Sigma} f dS + \beta \iint_{\Sigma} g dS$

对面积曲面积分的性质

- **存在性** 若 $f(x, y, z)$ 在有界曲面 Σ 上连续, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$$

存在。

- **线性性** $\iint_{\Sigma} (\alpha f + \beta g) dS = \alpha \iint_{\Sigma} f dS + \beta \iint_{\Sigma} g dS$
- **可加性** $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{\Sigma_1} f(x, y, z) dS + \iint_{\Sigma_2} f(x, y, z) dS$

对面积曲面积分的性质

- **存在性** 若 $f(x, y, z)$ 在有界曲面 Σ 上连续, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$$

存在。

- **线性性** $\iint_{\Sigma} (\alpha f + \beta g) dS = \alpha \iint_{\Sigma} f dS + \beta \iint_{\Sigma} g dS$
- **可加性** $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{\Sigma_1} f(x, y, z) dS + \iint_{\Sigma_2} f(x, y, z) dS$
- $\iint_{\Sigma} 1 dS = \text{Area}(\Sigma)$

对面积曲面积分的性质

- **存在性** 若 $f(x, y, z)$ 在有界曲面 Σ 上连续, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$$

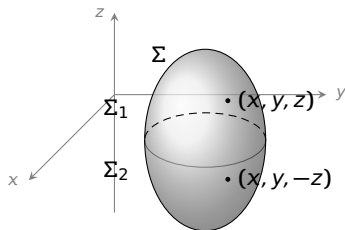
存在。

- **线性性** $\iint_{\Sigma} (\alpha f + \beta g) dS = \alpha \iint_{\Sigma} f dS + \beta \iint_{\Sigma} g dS$
- **可加性** $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{\Sigma_1} f(x, y, z) dS + \iint_{\Sigma_2} f(x, y, z) dS$
- $\iint_{\Sigma} 1 dS = \text{Area}(\Sigma)$
- 若 $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS \leq \iint_{\Sigma} g(x, y, z) dS$$

积分的对称性

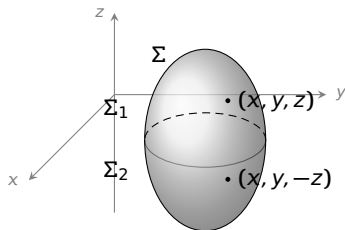
性质 设曲面 Σ 关于 xoy 坐标面对称,



积分的对称性

性质 设曲面 Σ 关于 xoy 坐标面对称,

- 若 $f(x, y, z)$ 关于 z 是奇函数 (即: $f(x, y, -z) = -f(x, y, z)$), 则

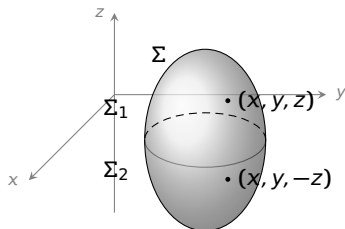


积分的对称性

性质 设曲面 Σ 关于 xoy 坐标面对称,

- 若 $f(x, y, z)$ 关于 z 是奇函数 (即: $f(x, y, -z) = -f(x, y, z)$), 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = 0$$



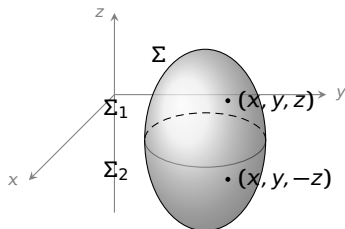
积分的对称性

性质 设曲面 Σ 关于 xoy 坐标面对称,

- 若 $f(x, y, z)$ 关于 z 是奇函数 (即: $f(x, y, -z) = -f(x, y, z)$), 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = 0$$

- 若 $f(x, y, z)$ 关于 z 是偶函数 (即: $f(x, y, -z) = f(x, y, z)$), 则



积分的对称性

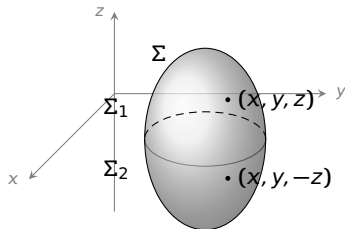
性质 设曲面 Σ 关于 xoy 坐标面对称,

- 若 $f(x, y, z)$ 关于 z 是奇函数 (即: $f(x, y, -z) = -f(x, y, z)$), 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = 0$$

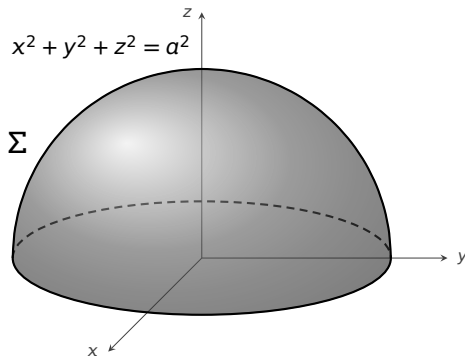
- 若 $f(x, y, z)$ 关于 z 是偶函数 (即: $f(x, y, -z) = f(x, y, z)$), 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = 2 \iint_{\Sigma_1} f(x, y, z) dS = 2 \iint_{\Sigma_2} f(x, y, z) dS$$



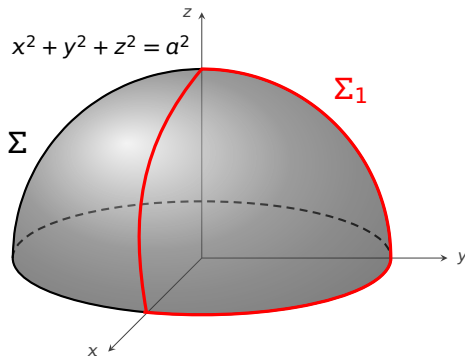
例 设曲面 Σ 为上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($z \geq 0$); Σ_1 为 Σ 在第一卦限的部分。则有 ()

- (A) $\iint_{\Sigma} x dS = 4 \iint_{\Sigma_1} x dS$
- (B) $\iint_{\Sigma} y dS = 4 \iint_{\Sigma_1} y dS$
- (C) $\iint_{\Sigma} z dS = 4 \iint_{\Sigma_1} z dS$
- (D) $\iint_{\Sigma} xyz dS = 4 \iint_{\Sigma_1} xyz dS$



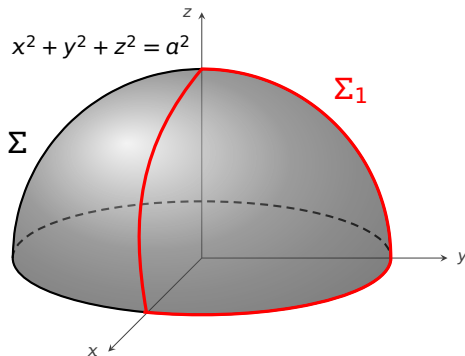
例 设曲面 Σ 为上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($z \geq 0$); Σ_1 为 Σ 在第一卦限的部分。则有 ()

- (A) $\iint_{\Sigma} x dS = 4 \iint_{\Sigma_1} x dS$
- (B) $\iint_{\Sigma} y dS = 4 \iint_{\Sigma_1} y dS$
- (C) $\iint_{\Sigma} z dS = 4 \iint_{\Sigma_1} z dS$
- (D) $\iint_{\Sigma} xyz dS = 4 \iint_{\Sigma_1} xyz dS$



例 设曲面 Σ 为上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($z \geq 0$); Σ_1 为 Σ 在第一卦限的部分。则有 (C)

- (A) $\iint_{\Sigma} x dS = 4 \iint_{\Sigma_1} x dS$
- (B) $\iint_{\Sigma} y dS = 4 \iint_{\Sigma_1} y dS$
- (C) $\iint_{\Sigma} z dS = 4 \iint_{\Sigma_1} z dS$
- (D) $\iint_{\Sigma} xyz dS = 4 \iint_{\Sigma_1} xyz dS$



例 计算 $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS$, 其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 。

例 计算 $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS$, 其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 。

解 由对称性:

$$\iint_{\Sigma} x^2 dS = \iint_{\Sigma} y^2 dS = \iint_{\Sigma} z^2 dS$$

例 计算 $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS$, 其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 。

解 由对称性:

$$\iint_{\Sigma} x^2 dS = \iint_{\Sigma} y^2 dS = \iint_{\Sigma} z^2 dS$$

所以

$$\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS = 2 \iint_{\Sigma} x^2 dS$$

例 计算 $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS$, 其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 。

解 由对称性:

$$\iint_{\Sigma} x^2 dS = \iint_{\Sigma} y^2 dS = \iint_{\Sigma} z^2 dS$$

所以

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS &= 2 \iint_{\Sigma} x^2 dS \\ &= \frac{2}{3} \left[\iint_{\Sigma} x^2 dS + \iint_{\Sigma} y^2 dS + \iint_{\Sigma} z^2 dS \right] \end{aligned}$$

例 计算 $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS$, 其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 。

解 由对称性:

$$\iint_{\Sigma} x^2 dS = \iint_{\Sigma} y^2 dS = \iint_{\Sigma} z^2 dS$$

所以

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS &= 2 \iint_{\Sigma} x^2 dS \\ &= \frac{2}{3} \left[\iint_{\Sigma} x^2 dS + \iint_{\Sigma} y^2 dS + \iint_{\Sigma} z^2 dS \right] \\ &= \frac{2}{3} \iint_{\Sigma} x^2 + y^2 + z^2 dS \end{aligned}$$

例 计算 $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS$, 其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 。

解 由对称性:

$$\iint_{\Sigma} x^2 dS = \iint_{\Sigma} y^2 dS = \iint_{\Sigma} z^2 dS$$

所以

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS &= 2 \iint_{\Sigma} x^2 dS \\ &= \frac{2}{3} \left[\iint_{\Sigma} x^2 dS + \iint_{\Sigma} y^2 dS + \iint_{\Sigma} z^2 dS \right] \\ &= \frac{2}{3} \iint_{\Sigma} x^2 + y^2 + z^2 dS \\ &= \frac{2}{3} \iint_{\Sigma} R^2 dS \end{aligned}$$

例 计算 $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS$, 其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 。

解 由对称性:

$$\iint_{\Sigma} x^2 dS = \iint_{\Sigma} y^2 dS = \iint_{\Sigma} z^2 dS$$

所以

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS &= 2 \iint_{\Sigma} x^2 dS \\ &= \frac{2}{3} \left[\iint_{\Sigma} x^2 dS + \iint_{\Sigma} y^2 dS + \iint_{\Sigma} z^2 dS \right] \\ &= \frac{2}{3} \iint_{\Sigma} x^2 + y^2 + z^2 dS \\ &= \frac{2}{3} \iint_{\Sigma} R^2 dS = \frac{2}{3} R^2 \text{Area}(\Sigma) \end{aligned}$$

例 计算 $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS$, 其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 。

解 由对称性:

$$\iint_{\Sigma} x^2 dS = \iint_{\Sigma} y^2 dS = \iint_{\Sigma} z^2 dS$$

所以

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS &= 2 \iint_{\Sigma} x^2 dS \\ &= \frac{2}{3} \left[\iint_{\Sigma} x^2 dS + \iint_{\Sigma} y^2 dS + \iint_{\Sigma} z^2 dS \right] \\ &= \frac{2}{3} \iint_{\Sigma} x^2 + y^2 + z^2 dS \\ &= \frac{2}{3} \iint_{\Sigma} R^2 dS = \frac{2}{3} R^2 \text{Area}(\Sigma) = \frac{2}{3} R^2 \cdot 4\pi R^2 \end{aligned}$$

例 计算 $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS$, 其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 。

解 由对称性:

$$\iint_{\Sigma} x^2 dS = \iint_{\Sigma} y^2 dS = \iint_{\Sigma} z^2 dS$$

所以

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS &= 2 \iint_{\Sigma} x^2 dS \\ &= \frac{2}{3} \left[\iint_{\Sigma} x^2 dS + \iint_{\Sigma} y^2 dS + \iint_{\Sigma} z^2 dS \right] \\ &= \frac{2}{3} \iint_{\Sigma} x^2 + y^2 + z^2 dS \\ &= \frac{2}{3} \iint_{\Sigma} R^2 dS = \frac{2}{3} R^2 \text{Area}(\Sigma) = \frac{2}{3} R^2 \cdot 4\pi R^2 = \frac{8}{3} \pi R^4 \end{aligned}$$

对面积曲面积分的计算

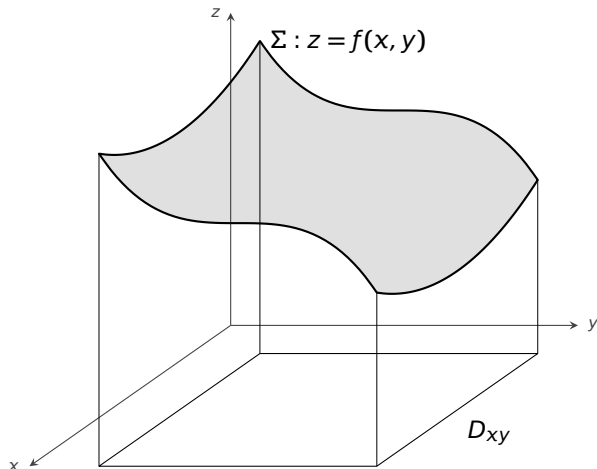
- 假设 Σ 是二元函数 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 的图形, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS =$$

对面积曲面积分的计算

- 假设 Σ 是二元函数 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 的图形, 则

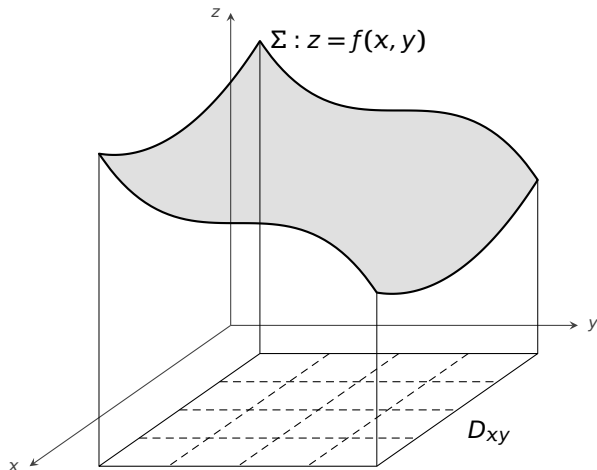
$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS =$$



对面积曲面积分的计算

- 假设 Σ 是二元函数 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 的图形, 则

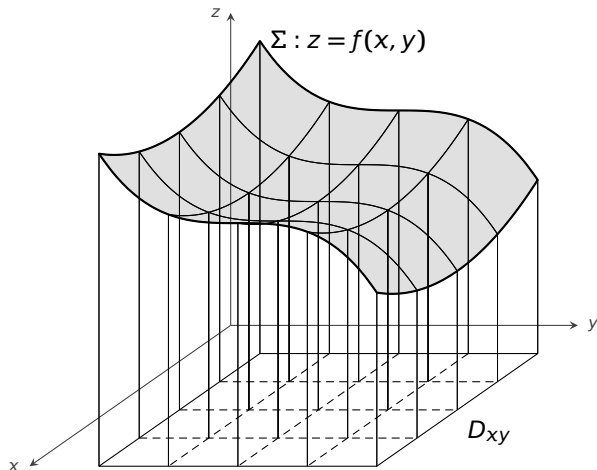
$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS =$$



对面积曲面积分的计算

- 假设 Σ 是二元函数 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 的图形, 则

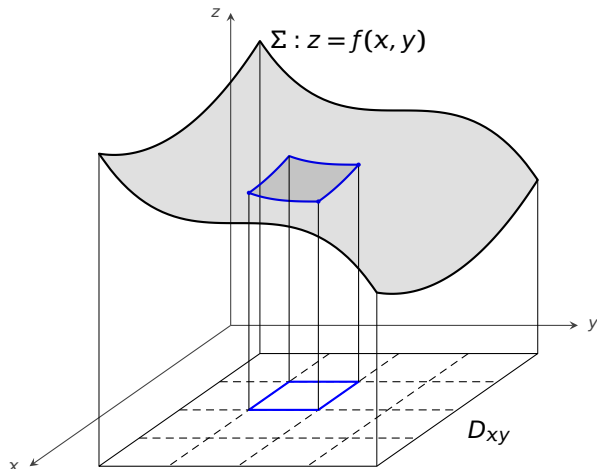
$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS =$$



对面积曲面积分的计算

- 假设 Σ 是二元函数 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 的图形, 则

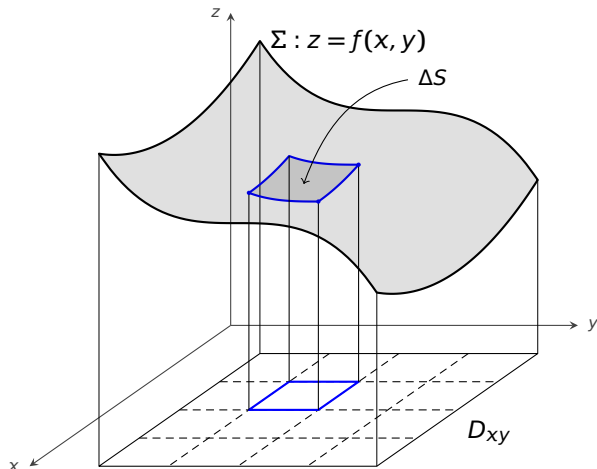
$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS =$$



对面积曲面积分的计算

- 假设 Σ 是二元函数 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 的图形, 则

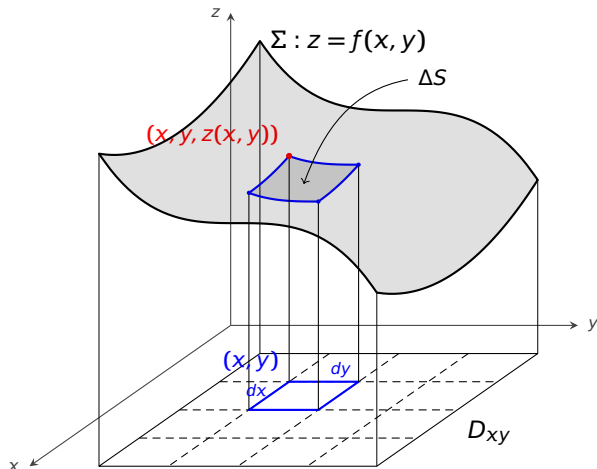
$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS =$$



对面积曲面积分的计算

- 假设 Σ 是二元函数 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 的图形, 则

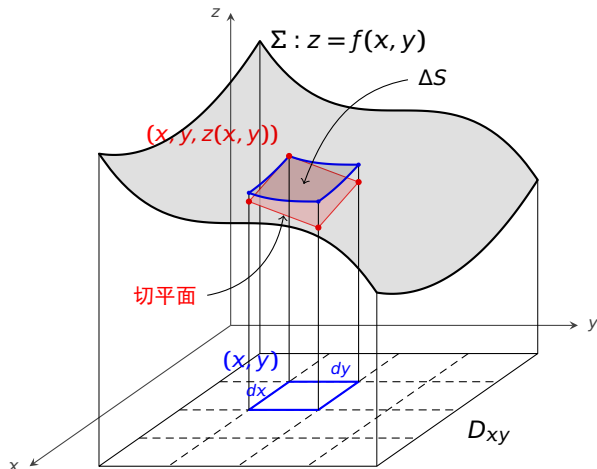
$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS =$$



对面积曲面积分的计算

- 假设 Σ 是二元函数 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 的图形, 则

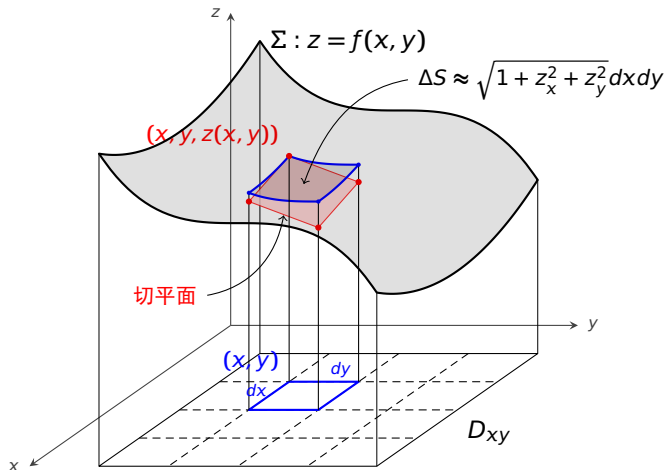
$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS =$$



对面积曲面积分的计算

- 假设 Σ 是二元函数 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 的图形, 则

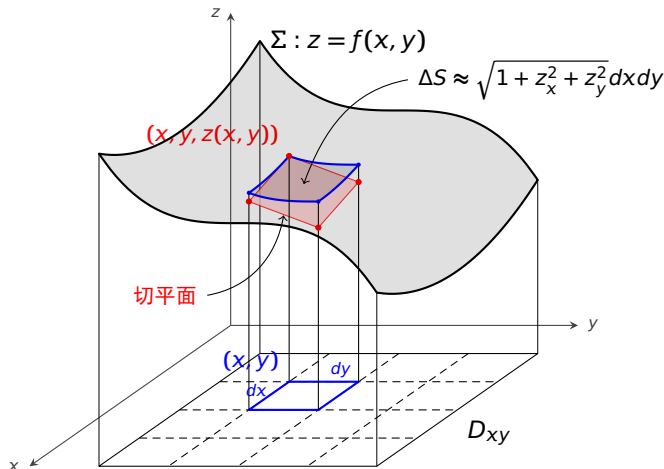
$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS =$$



对面积曲面积分的计算

- 假设 Σ 是二元函数 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 的图形, 则

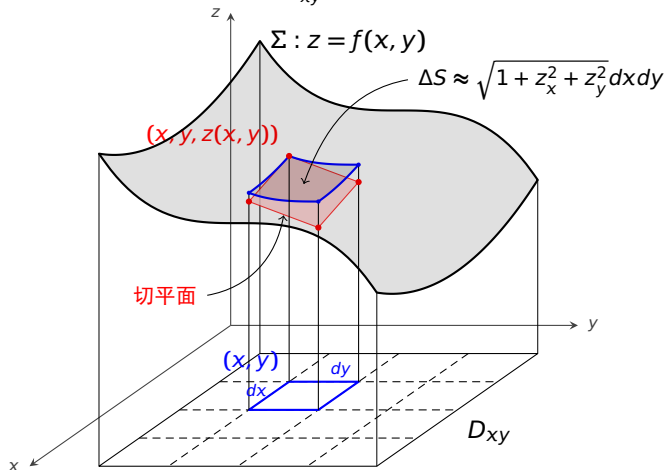
$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$$



对面积曲面积分的计算

- 假设 Σ 是二元函数 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 的图形, 则

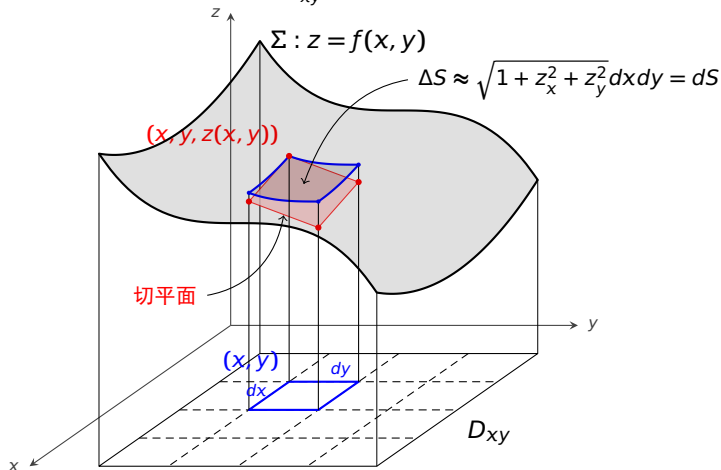
$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$$



对面积曲面积分的计算

- 假设 Σ 是二元函数 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 的图形, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$$



对面积曲面积分的计算

- 假设 Σ 是二元函数 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 的图形, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$$

对面积曲面积分的计算

- 假设 Σ 是二元函数 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 的图形, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$$

- 假设 Σ 是二元函数 $y = y(x, z)$, $(x, z) \in D_{xz}$ 的图形, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS =$$

- 假设 Σ 是二元函数 $x = x(y, z)$, $(y, z) \in D_{yz}$ 的图形, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS =$$

对面积曲面积分的计算

- 假设 Σ 是二元函数 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 的图形, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$$

- 假设 Σ 是二元函数 $y = y(x, z)$, $(x, z) \in D_{xz}$ 的图形, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xz}} f(x, y(x, z), z) \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} dx dz$$

- 假设 Σ 是二元函数 $x = x(y, z)$, $(y, z) \in D_{yz}$ 的图形, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z) \sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2} dy dz$$

对面积曲面积分的计算

- 假设 Σ 是二元函数 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 的图形, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$$

- 假设 Σ 是二元函数 $y = y(x, z)$, $(x, z) \in D_{xz}$ 的图形, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xz}} f(x, y(x, z), z) \cdot \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} dx dz$$

- 假设 Σ 是二元函数 $x = x(y, z)$, $(y, z) \in D_{yz}$ 的图形, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z) \cdot \sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2} dy dz$$

对面积曲面积分的计算

- 假设 Σ 是二元函数 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 的图形, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$$

- 假设 Σ 是二元函数 $y = y(x, z)$, $(x, z) \in D_{xz}$ 的图形, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xz}} f(x, y(x, z), z) \cdot \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} dx dz$$

- 假设 Σ 是二元函数 $x = x(y, z)$, $(y, z) \in D_{yz}$ 的图形, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS =$$

对面积曲面积分的计算

- 假设 Σ 是二元函数 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 的图形, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$$

- 假设 Σ 是二元函数 $y = y(x, z)$, $(x, z) \in D_{xz}$ 的图形, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xz}} f(x, y(x, z), z) \cdot \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} dx dz$$

- 假设 Σ 是二元函数 $x = x(y, z)$, $(y, z) \in D_{yz}$ 的图形, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z) \sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2} dy dz$$

对面积曲面积分的计算

- 假设 Σ 是二元函数 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 的图形, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$$

- 假设 Σ 是二元函数 $y = y(x, z)$, $(x, z) \in D_{xz}$ 的图形, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xz}} f(x, y(x, z), z) \cdot \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} dx dz$$

- 假设 Σ 是二元函数 $x = x(y, z)$, $(y, z) \in D_{yz}$ 的图形, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z) \cdot \sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2} dy dz$$

对面积曲面积分的计算

- 假设 Σ 是二元函数 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 的图形, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$$

- 假设 Σ 是二元函数 $y = y(x, z)$, $(x, z) \in D_{xz}$ 的图形, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xz}} f(x, y(x, z), z) \cdot \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} dx dz$$

- 假设 Σ 是二元函数 $x = x(y, z)$, $(y, z) \in D_{yz}$ 的图形, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z) \cdot \sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2} dy dz$$

对面积曲面积分的计算

- 假设 Σ 是二元函数 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 的图形, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$$

- 假设 Σ 是二元函数 $y = y(x, z)$, $(x, z) \in D_{xz}$ 的图形, 则

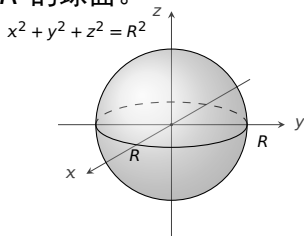
$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xz}} f(x, y(x, z), z) \cdot \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} dx dz$$

- 假设 Σ 是二元函数 $x = x(y, z)$, $(y, z) \in D_{yz}$ 的图形, 则

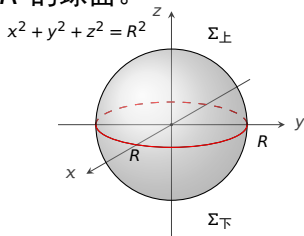
$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z) \cdot \sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2} dy dz$$

注 对于复杂的曲面 Σ , 尝试将其分解成若干部分 $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$, 每一部分 Σ_k 都分别是某个二元函数的图形

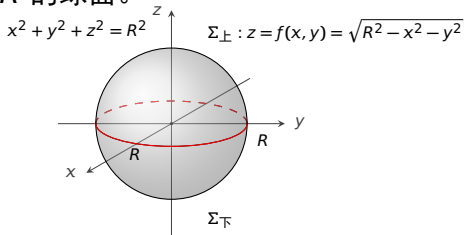
例 将对面积的曲面积分 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$ 转换为重积分, 其中 Σ 是球心在原点, 半径为 R 的球面。



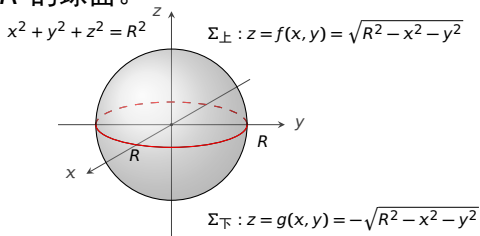
例 将对面积的曲面积分 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$ 转换为重积分, 其中 Σ 是球心在原点, 半径为 R 的球面。



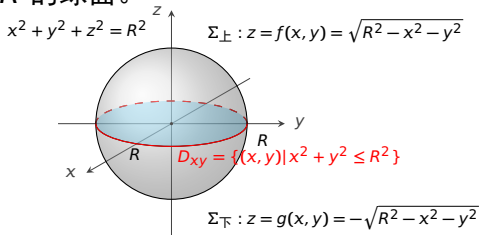
例 将对面积的曲面积分 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$ 转换为重积分, 其中 Σ 是球心在原点, 半径为 R 的球面。



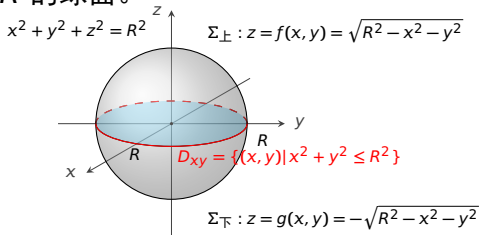
例 将对面积的曲面积分 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$ 转换为重积分, 其中 Σ 是球心在原点, 半径为 R 的球面。



例 将对面积的曲面积分 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$ 转换为重积分, 其中 Σ 是球心在原点, 半径为 R 的球面。

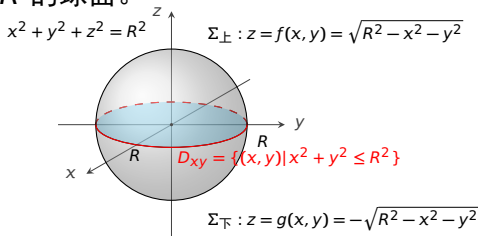


例 将对面积的曲面积分 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$ 转换为重积分, 其中 Σ 是球心在原点, 半径为 R 的球面。



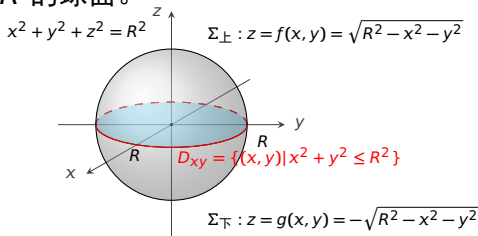
$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{\Sigma_{+}} f(x, y, z) dS + \iint_{\Sigma_{-}} f(x, y, z) dS$$

例 将对面积的曲面积分 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$ 转换为重积分, 其中 Σ 是球心在原点, 半径为 R 的球面。



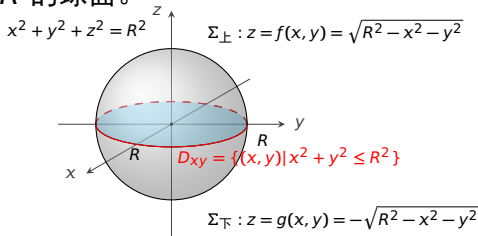
$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS &= \iint_{\Sigma_{\text{上}}} f(x, y, z) dS + \iint_{\Sigma_{\text{下}}} f(x, y, z) dS \\ &= \iint_{D_{xy}} f(x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}) \cdot \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy\end{aligned}$$

例 将对面积的曲面积分 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$ 转换为重积分, 其中 Σ 是球心在原点, 半径为 R 的球面。



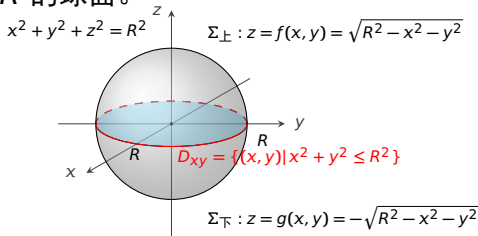
$$\begin{aligned}
 \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS &= \iint_{\Sigma_{+}} f(x, y, z) dS + \iint_{\Sigma_{-}} f(x, y, z) dS \\
 &= \iint_{D_{xy}} f(x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}) \cdot \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy \\
 &\quad + \iint_{D_{xy}} f(x, y, -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}) \cdot \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2} dx dy
 \end{aligned}$$

例 将对面积的曲面积分 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$ 转换为重积分, 其中 Σ 是球心在原点, 半径为 R 的球面。



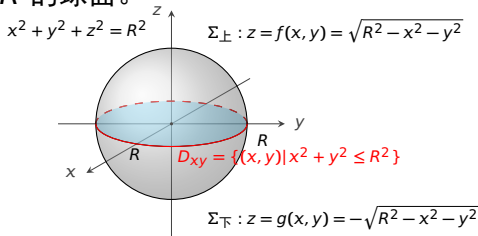
$$\begin{aligned}
 \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS &= \iint_{\Sigma_{\text{上}}} f(x, y, z) dS + \iint_{\Sigma_{\text{下}}} f(x, y, z) dS \\
 &= \iint_{D_{xy}} f(x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}) \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\
 &\quad + \iint_{D_{xy}} f(x, y, -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}) \cdot \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2} dx dy
 \end{aligned}$$

例 将对面积的曲面积分 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$ 转换为重积分, 其中 Σ 是球心在原点, 半径为 R 的球面。



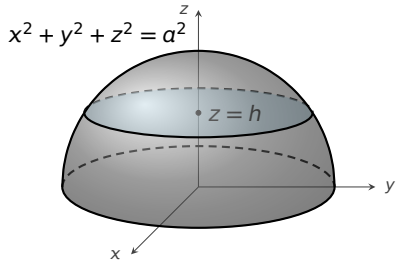
$$\begin{aligned}
 \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS &= \iint_{\Sigma_{\text{上}}} f(x, y, z) dS + \iint_{\Sigma_{\text{下}}} f(x, y, z) dS \\
 &= \iint_{D_{xy}} f(x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}) \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\
 &\quad + \iint_{D_{xy}} f(x, y, -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}) \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy
 \end{aligned}$$

例 将对面积的曲面积分 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$ 转换为重积分, 其中 Σ 是球心在原点, 半径为 R 的球面。

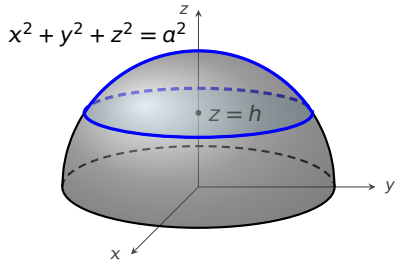


$$\begin{aligned}
 \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS &= \iint_{\Sigma_+} f(x, y, z) dS + \iint_{\Sigma_-} f(x, y, z) dS \\
 &= \iint_{D_{xy}} f(x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}) \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\
 &\quad + \iint_{D_{xy}} f(x, y, -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}) \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\
 &= \iint_{D_{xy}} \left[f(x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}) + f(x, y, -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}) \right] \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy
 \end{aligned}$$

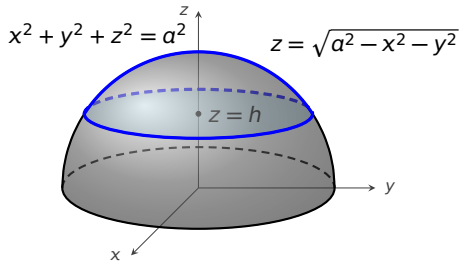
例 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$, 其中曲面 Σ 如图所示。



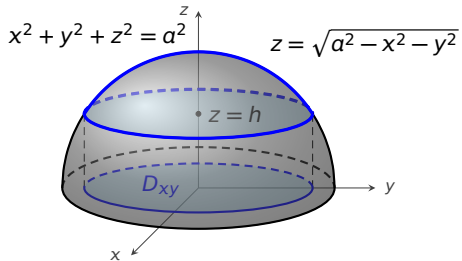
例 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$, 其中曲面 Σ 如图所示。



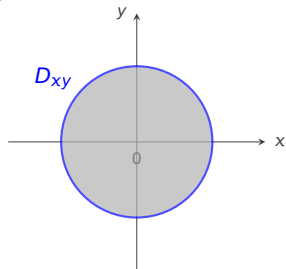
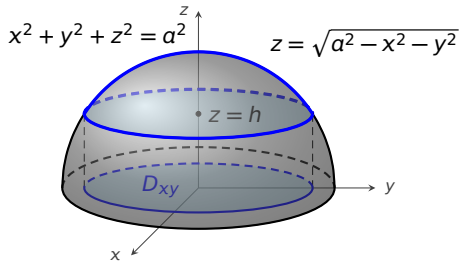
例 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$, 其中曲面 Σ 如图所示。



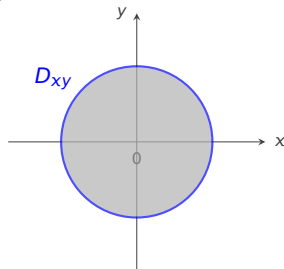
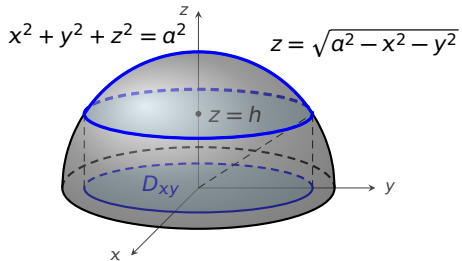
例 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$, 其中曲面 Σ 如图所示。



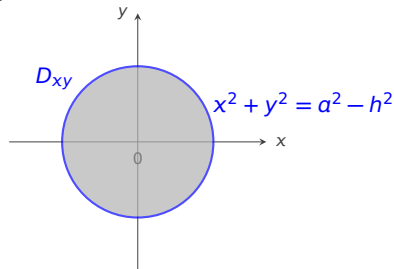
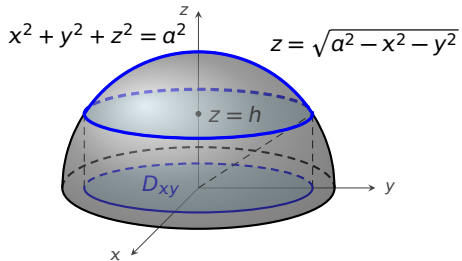
例 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$, 其中曲面 Σ 如图所示。



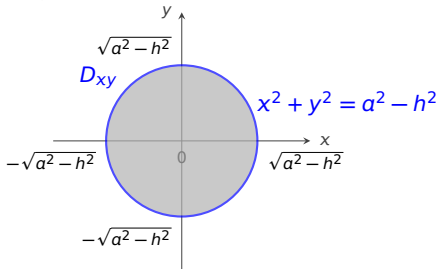
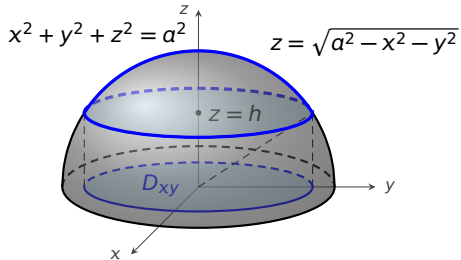
例 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$, 其中曲面 Σ 如图所示。



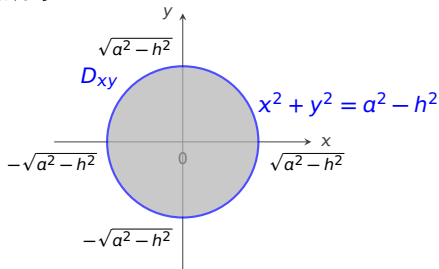
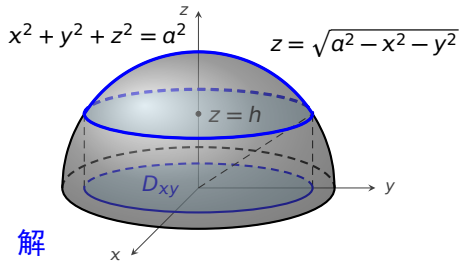
例 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$, 其中曲面 Σ 如图所示。



例 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$, 其中曲面 Σ 如图所示。



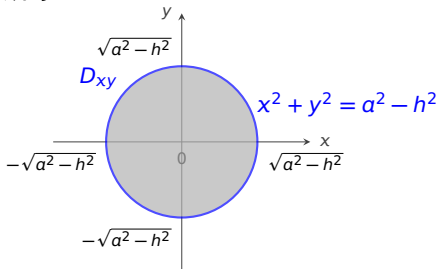
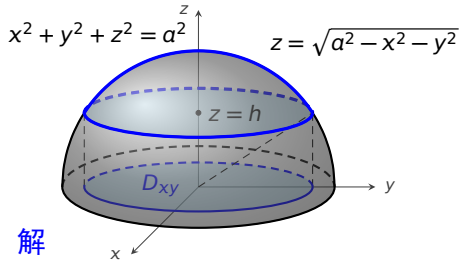
例 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$, 其中曲面 Σ 如图所示。



解

原式 =

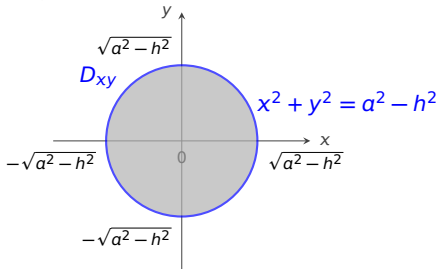
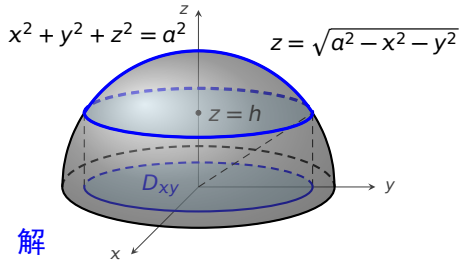
例 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$, 其中曲面 Σ 如图所示。



解

原式 =
$$\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

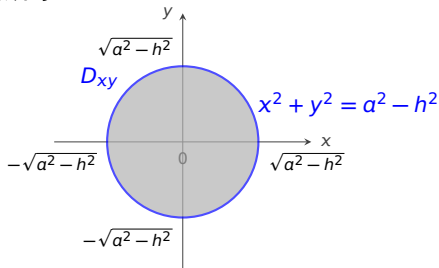
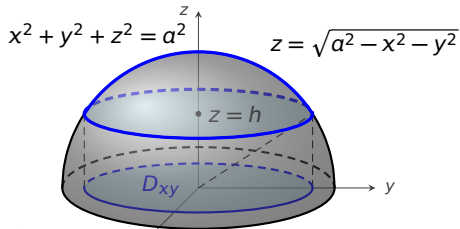
例 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$, 其中曲面 Σ 如图所示。



解

原式 =
$$\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$$

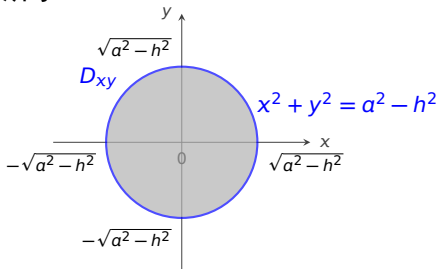
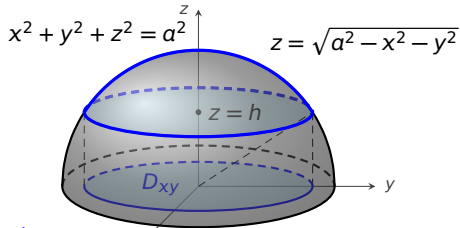
例 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$, 其中曲面 Σ 如图所示。



解

$$\text{原式} = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$$

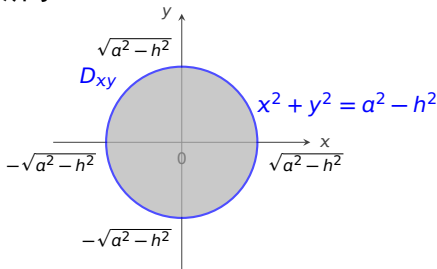
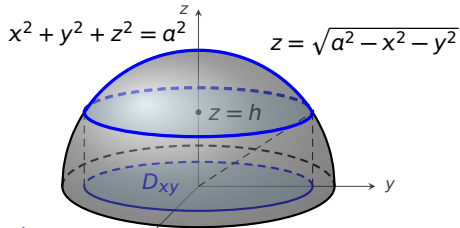
例 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$, 其中曲面 Σ 如图所示。



解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \\ &\quad \cdot \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - x^2 - y^2}} \end{aligned}$$

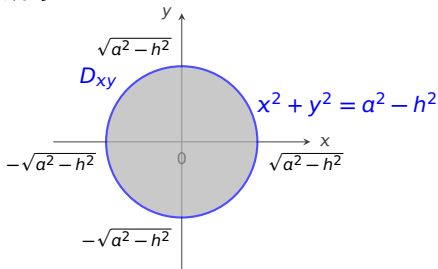
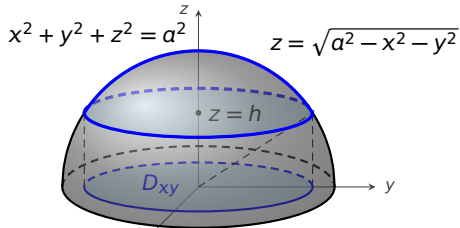
例 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$, 其中曲面 Σ 如图所示。



解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \cdot \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy \end{aligned}$$

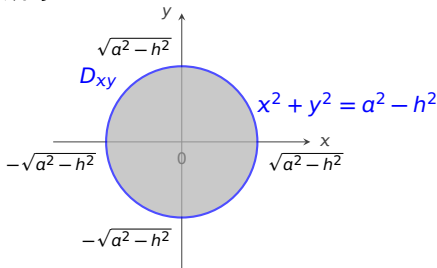
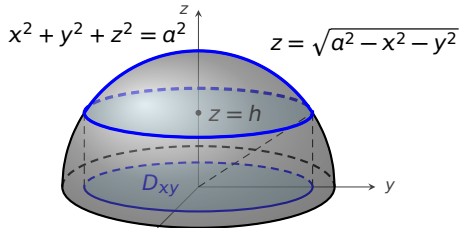
例 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$, 其中曲面 Σ 如图所示。



解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2 - x^2 - y^2} dx dy \end{aligned}$$

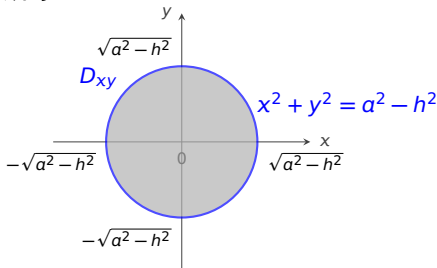
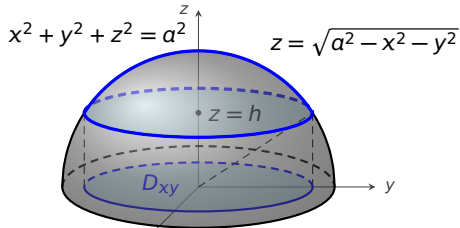
例 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$, 其中曲面 Σ 如图所示。



解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2 - x^2 - y^2} dx dy \quad \begin{array}{l} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{array} \end{aligned}$$

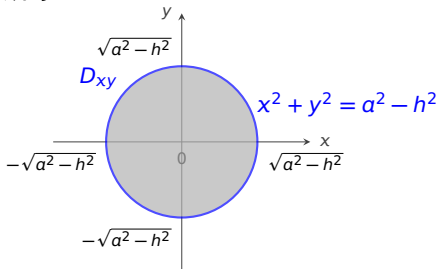
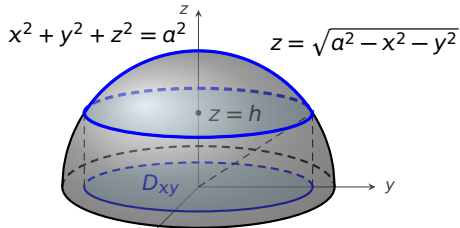
例 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$, 其中曲面 Σ 如图所示。



解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \\
 &= \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2 - x^2 - y^2} dx dy \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta
 \end{aligned}$$

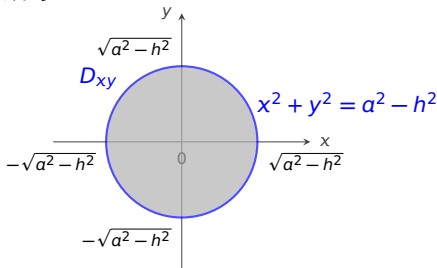
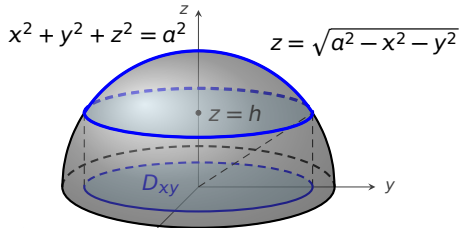
例 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$, 其中曲面 Σ 如图所示。



解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \\
 &= \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2 - x^2 - y^2} dx dy \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta \\
 &= \int \left[\int \frac{a}{a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta
 \end{aligned}$$

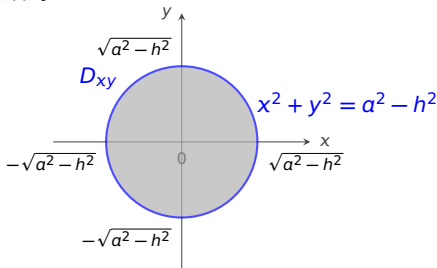
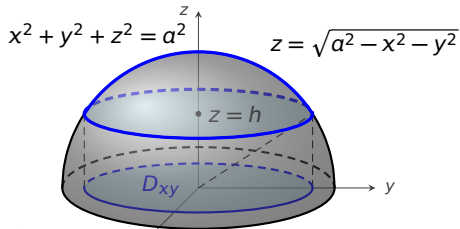
例 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$, 其中曲面 Σ 如图所示。



解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \\
 &= \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2 - x^2 - y^2} dx dy \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[\int \frac{a}{a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta
 \end{aligned}$$

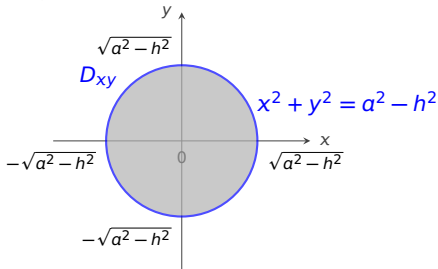
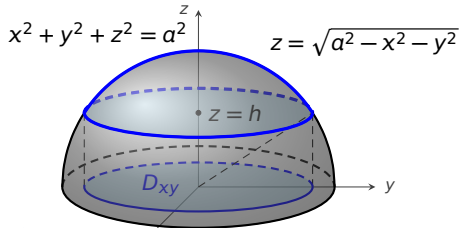
例 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$, 其中曲面 Σ 如图所示。



解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \\
 &= \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2 - x^2 - y^2} dx dy \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\sqrt{a^2 - h^2}} \frac{a}{a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta
 \end{aligned}$$

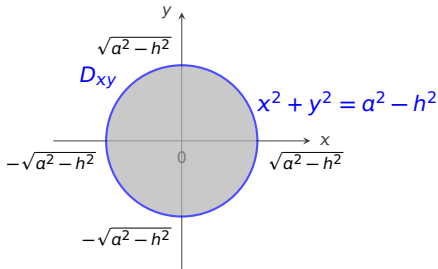
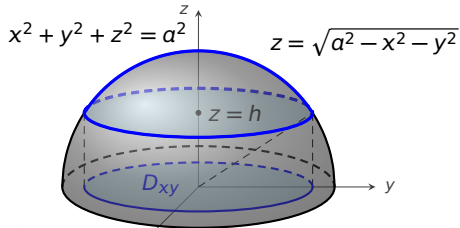
例 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$, 其中曲面 Σ 如图所示。



解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \\
 &= \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2 - x^2 - y^2} dx dy \stackrel{\substack{x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta}}{=} \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\sqrt{a^2 - h^2}} \frac{a}{a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta = 2\pi.
 \end{aligned}$$

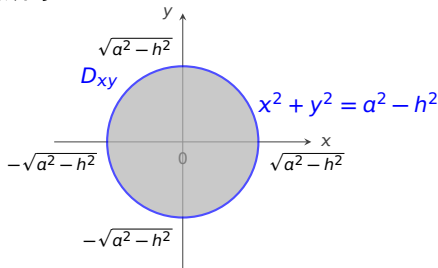
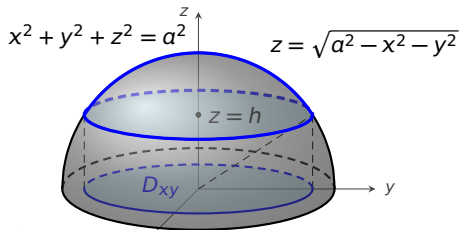
例 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$, 其中曲面 Σ 如图所示。



解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \\
 &= \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2 - x^2 - y^2} dx dy \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\sqrt{a^2 - h^2}} \frac{a}{a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta \stackrel{u=a^2 - \rho^2}{=} 2\pi \cdot
 \end{aligned}$$

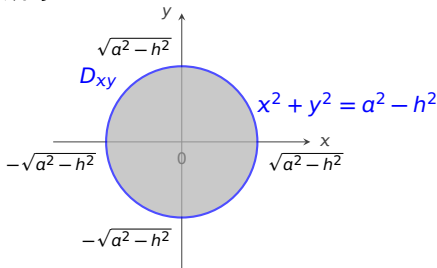
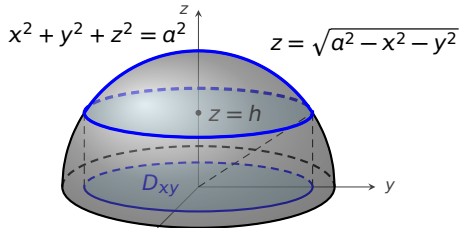
例 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$, 其中曲面 Σ 如图所示。



解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \\
 &= \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2 - x^2 - y^2} dx dy \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\sqrt{a^2 - h^2}} \frac{a}{a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta \stackrel{u=a^2 - \rho^2}{=} 2\pi \cdot \frac{a}{u}
 \end{aligned}$$

例 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$, 其中曲面 Σ 如图所示。



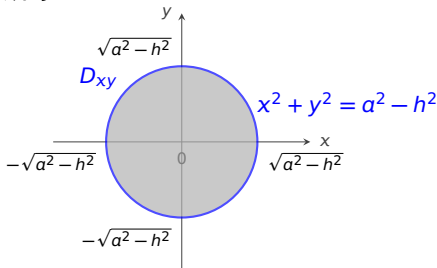
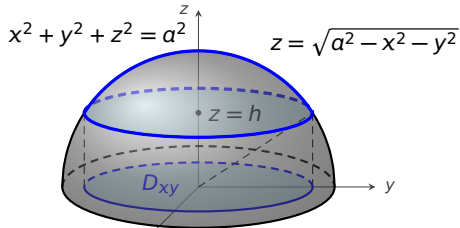
解

$$\text{原式} = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$$

$$= \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2 - x^2 - y^2} dx dy \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\sqrt{a^2 - h^2}} \frac{a}{a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta \stackrel{u=a^2 - \rho^2}{=} 2\pi \cdot \frac{a}{u} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du$$

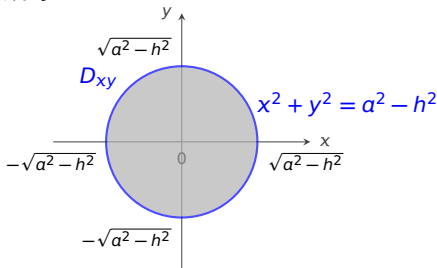
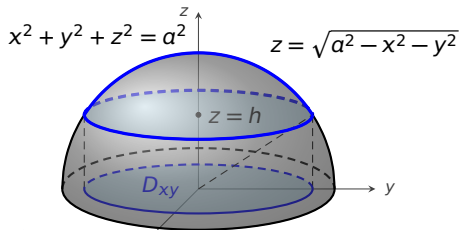
例 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$, 其中曲面 Σ 如图所示。



解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \\
 &= \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2 - x^2 - y^2} dx dy \stackrel{\substack{x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta}}{=} \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\sqrt{a^2 - h^2}} \frac{a}{a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta \stackrel{u = a^2 - \rho^2}{=} 2\pi \cdot \int_{a^2}^{h^2} \frac{a}{u} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du
 \end{aligned}$$

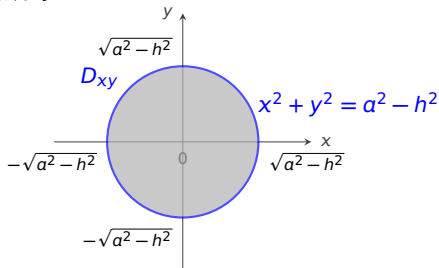
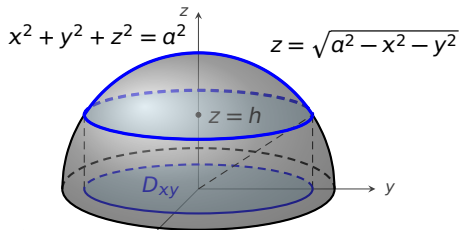
例 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$, 其中曲面 Σ 如图所示。



解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \\
 &= \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2 - x^2 - y^2} dx dy \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\sqrt{a^2 - h^2}} \frac{a}{a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta \stackrel{u=a^2 - \rho^2}{=} 2\pi \cdot \int_{a^2}^{h^2} \frac{a}{u} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du \\
 &= -\pi a \ln u \Big|_{a^2}^{h^2}
 \end{aligned}$$

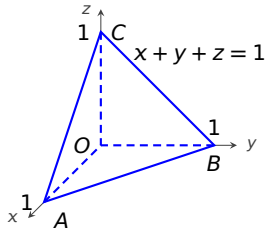
例 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$, 其中曲面 Σ 如图所示。



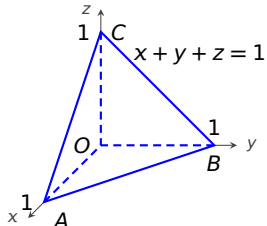
解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \\
 &= \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2 - x^2 - y^2} dx dy \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\sqrt{a^2 - h^2}} \frac{a}{a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta \stackrel{u=a^2 - \rho^2}{=} 2\pi \cdot \int_{a^2}^{h^2} \frac{a}{u} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du \\
 &= -\pi a \ln u \Big|_{a^2}^{h^2} = 2\pi a \ln \frac{a}{h}
 \end{aligned}$$

例 计算 $\iint_{\Sigma} xyz dS$, 其中曲面 Σ 如图所示。



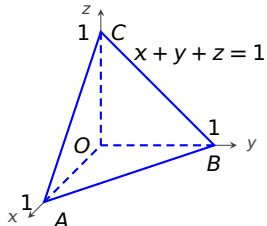
例 计算 $\iint_{\Sigma} xyz dS$, 其中曲面 Σ 如图所示。



解

$$\text{原式} = \left(\iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC} \right) xyz dS$$

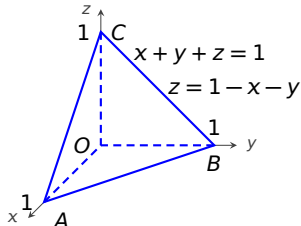
例 计算 $\iint_{\Sigma} xyz dS$, 其中曲面 Σ 如图所示。



解

$$\text{原式} = \left(\iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC} \right) xyz dS = \iint_{\Delta ABC} xyz dS$$

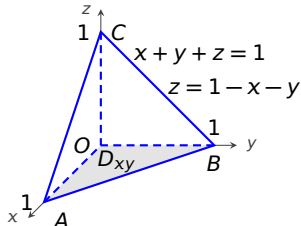
例 计算 $\iint_{\Sigma} xyz dS$, 其中曲面 Σ 如图所示。



解

$$\text{原式} = \left(\iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC} \right) xyz dS = \iint_{\Delta ABC} xyz dS$$

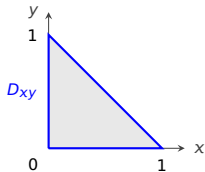
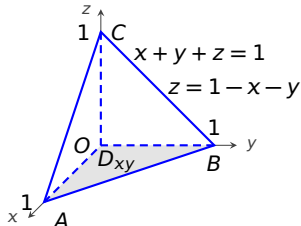
例 计算 $\iint_{\Sigma} xyz dS$, 其中曲面 Σ 如图所示。



解

$$\text{原式} = \left(\iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC} \right) xyz dS = \iint_{\Delta ABC} xyz dS$$

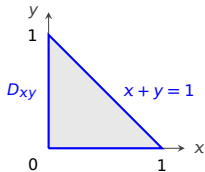
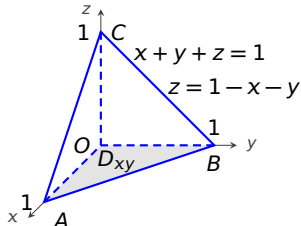
例 计算 $\iint_{\Sigma} xyz dS$, 其中曲面 Σ 如图所示。



解

$$\text{原式} = \left(\iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC} \right) xyz dS = \iint_{\Delta ABC} xyz dS$$

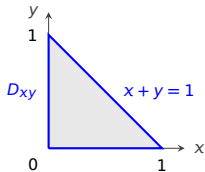
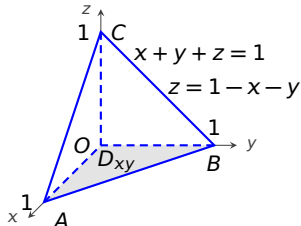
例 计算 $\iint_{\Sigma} xyz dS$, 其中曲面 Σ 如图所示。



解

$$\text{原式} = \left(\iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC} \right) xyz dS = \iint_{\Delta ABC} xyz dS$$

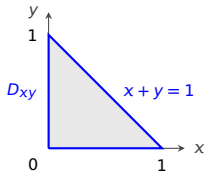
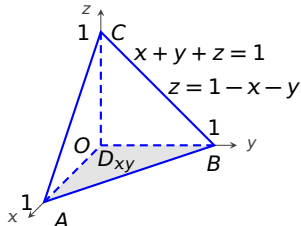
例 计算 $\iint_{\Sigma} xyz dS$, 其中曲面 Σ 如图所示。



解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \left(\iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC} \right) xyz dS = \iint_{\Delta ABC} xyz dS \\ &\quad xy(1-x-y) \end{aligned}$$

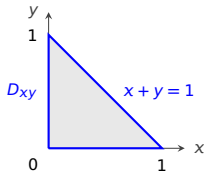
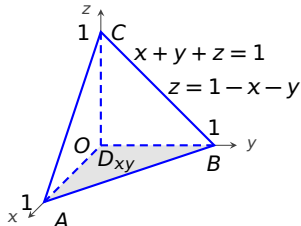
例 计算 $\iint_{\Sigma} xyz dS$, 其中曲面 Σ 如图所示。



解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \left(\iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC} \right) xyz dS = \iint_{\Delta ABC} xyz dS \\ &= \iint_{D_{xy}} xy(1-x-y) \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy \end{aligned}$$

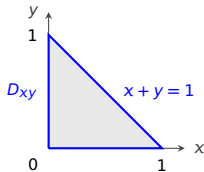
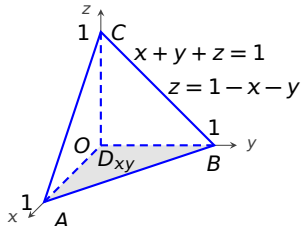
例 计算 $\iint_{\Sigma} xyz dS$, 其中曲面 Σ 如图所示。



解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \left(\iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC} \right) xyz dS = \iint_{\Delta ABC} xyz dS \\ &= \iint_{D_{xy}} xy(1-x-y) \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy \end{aligned}$$

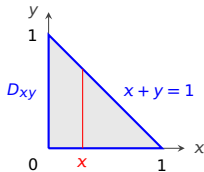
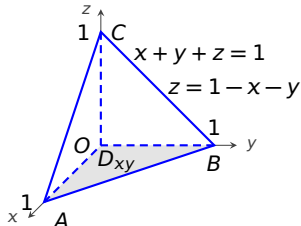
例 计算 $\iint_{\Sigma} xyz dS$, 其中曲面 Σ 如图所示。



解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \left(\iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC} \right) xyz dS = \iint_{\Delta ABC} xyz dS \\ &= \iint_{D_{xy}} xy(1-x-y) \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy \\ &= \int \left[\int xy(1-x-y) \cdot \sqrt{3} dy \right] dx \end{aligned}$$

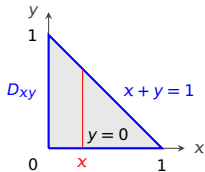
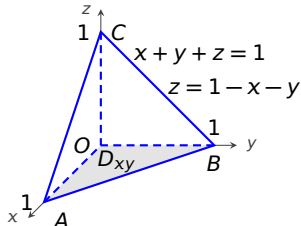
例 计算 $\iint_{\Sigma} xyz dS$, 其中曲面 Σ 如图所示。



解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \left(\iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC} \right) xyz dS = \iint_{\Delta ABC} xyz dS \\
 &= \iint_{D_{xy}} xy(1-x-y) \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy \\
 &= \int \left[\int xy(1-x-y) \cdot \sqrt{3} dy \right] dx
 \end{aligned}$$

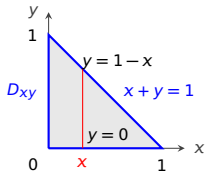
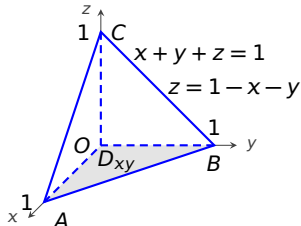
例 计算 $\iint_{\Sigma} xyz dS$, 其中曲面 Σ 如图所示。



解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \left(\iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC} \right) xyz dS = \iint_{\Delta ABC} xyz dS \\ &= \iint_{D_{xy}} xy(1-x-y) \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy \\ &= \int \left[\int xy(1-x-y) \cdot \sqrt{3} dy \right] dx \end{aligned}$$

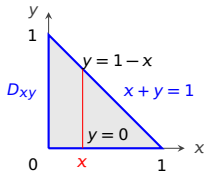
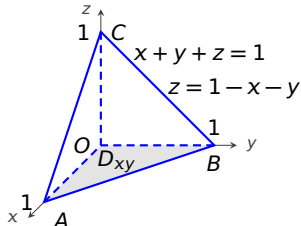
例 计算 $\iint_{\Sigma} xyz dS$, 其中曲面 Σ 如图所示。



解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \left(\iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC} \right) xyz dS = \iint_{\Delta ABC} xyz dS \\ &= \iint_{D_{xy}} xy(1-x-y) \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy \\ &= \int \left[\int xy(1-x-y) \cdot \sqrt{3} dy \right] dx \end{aligned}$$

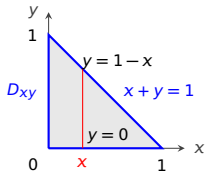
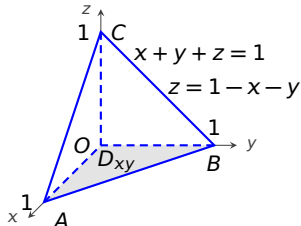
例 计算 $\iint_{\Sigma} xyz dS$, 其中曲面 Σ 如图所示。



解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \left(\iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC} \right) xyz dS = \iint_{\Delta ABC} xyz dS \\ &= \iint_{D_{xy}} xy(1-x-y) \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy \\ &= \int_0^1 \left[\int xy(1-x-y) \cdot \sqrt{3} dy \right] dx \end{aligned}$$

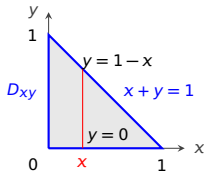
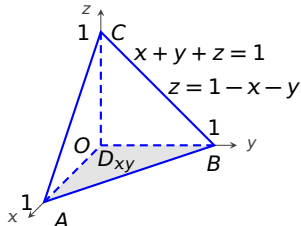
例 计算 $\iint_{\Sigma} xyz dS$, 其中曲面 Σ 如图所示。



解

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \left(\iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC} \right) xyz dS = \iint_{\Delta ABC} xyz dS \\ &= \iint_{D_{xy}} xy(1-x-y) \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} xy(1-x-y) \cdot \sqrt{3} dy \right] dx\end{aligned}$$

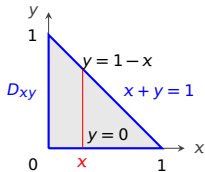
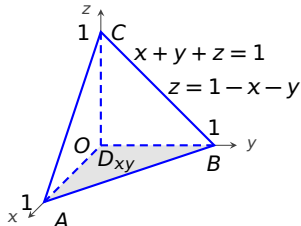
例 计算 $\iint_{\Sigma} xyz dS$, 其中曲面 Σ 如图所示。



解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \left(\iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC} \right) xyz dS = \iint_{\Delta ABC} xyz dS \\
 &= \iint_{D_{xy}} xy(1-x-y) \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \\
 &= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} xy(1-x-y) \cdot \sqrt{3} dy \right] dx \\
 &= x \left[(1-x) \frac{y^2}{2} - \frac{1}{3} y^3 \right]
 \end{aligned}$$

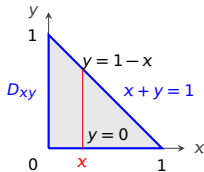
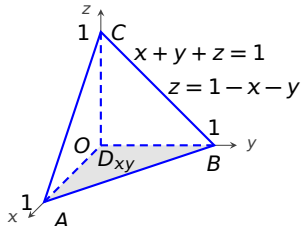
例 计算 $\iint_{\Sigma} xyz dS$, 其中曲面 Σ 如图所示。



解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \left(\iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC} \right) xyz dS = \iint_{\Delta ABC} xyz dS \\
 &= \iint_{D_{xy}} xy(1-x-y) \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \\
 &= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} xy(1-x-y) \cdot \sqrt{3} dy \right] dx \\
 &= x \left[(1-x) \frac{y^2}{2} - \frac{1}{3} y^3 \right] \Big|_0^{1-x}
 \end{aligned}$$

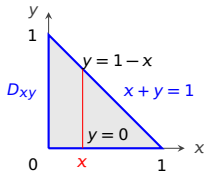
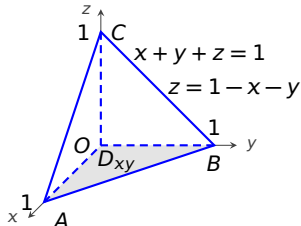
例 计算 $\iint_{\Sigma} xyz dS$, 其中曲面 Σ 如图所示。



解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \left(\iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC} \right) xyz dS = \iint_{\Delta ABC} xyz dS \\
 &= \iint_{D_{xy}} xy(1-x-y) \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \\
 &= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} xy(1-x-y) \cdot \sqrt{3} dy \right] dx \\
 &= \sqrt{3} \int_0^1 x \left[(1-x) \frac{y^2}{2} - \frac{1}{3} y^3 \right] \Big|_0^{1-x} dx
 \end{aligned}$$

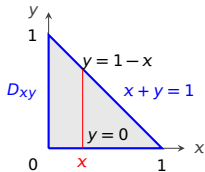
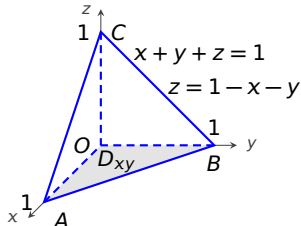
例 计算 $\iint_{\Sigma} xyz dS$, 其中曲面 Σ 如图所示。



解

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \left(\iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC} \right) xyz dS = \iint_{\Delta ABC} xyz dS \\ &= \iint_{D_{xy}} xy(1-x-y) \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} xy(1-x-y) \cdot \sqrt{3} dy \right] dx \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 x \left[(1-x) \frac{y^2}{2} - \frac{1}{3} y^3 \right] \Big|_0^{1-x} dx = \sqrt{3} \int_0^1 \frac{1}{6} x(1-x)^3 dx\end{aligned}$$

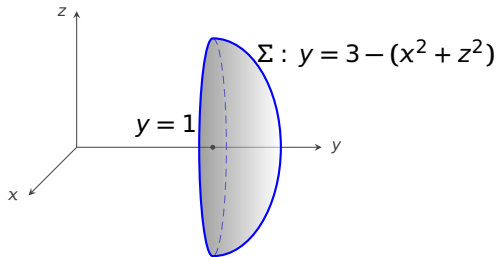
例 计算 $\iint_{\Sigma} xyz dS$, 其中曲面 Σ 如图所示。



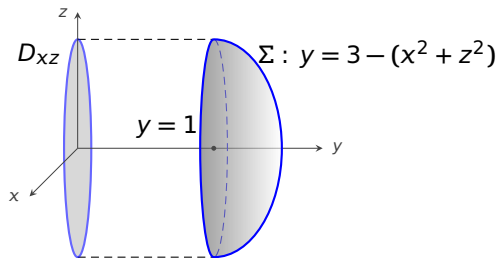
解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \left(\iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC} \right) xyz dS = \iint_{\Delta ABC} xyz dS \\ &= \iint_{D_{xy}} xy(1-x-y) \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} xy(1-x-y) \cdot \sqrt{3} dy \right] dx \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 x \left[(1-x) \frac{y^2}{2} - \frac{1}{3} y^3 \right] \Big|_0^{1-x} dx = \sqrt{3} \int_0^1 \frac{1}{6} x(1-x)^3 dx = \frac{\sqrt{3}}{120} \end{aligned}$$

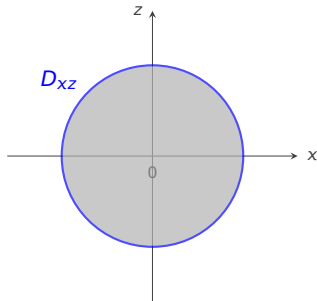
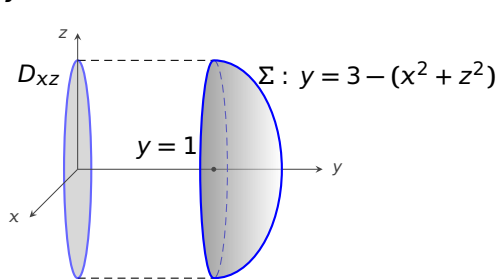
例 计算 $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + z^2 + y) dS$, 其中 Σ 是曲面 $y = 3 - (x^2 + z^2)$ 在 $y \geq 1$ 的部分。



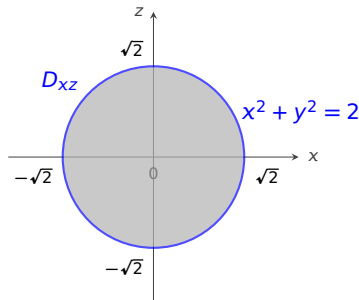
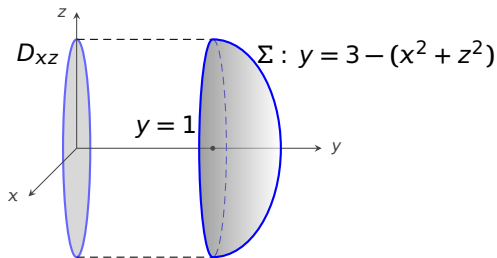
例 计算 $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + z^2 + y) dS$, 其中 Σ 是曲面 $y = 3 - (x^2 + z^2)$ 在 $y \geq 1$ 的部分。



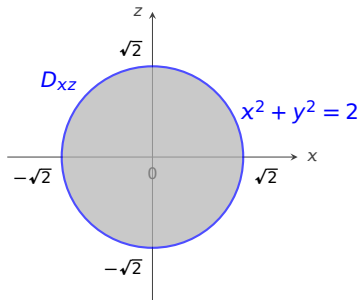
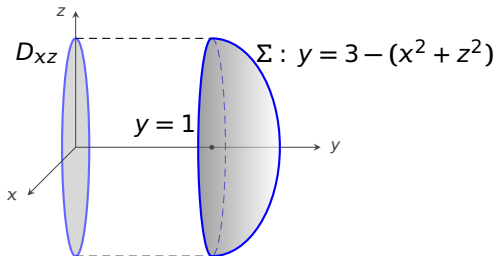
例 计算 $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + z^2 + y) dS$, 其中 Σ 是曲面 $y = 3 - (x^2 + z^2)$ 在 $y \geq 1$ 的部分。



例 计算 $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + z^2 + y) dS$, 其中 Σ 是曲面 $y = 3 - (x^2 + z^2)$ 在 $y \geq 1$ 的部分。



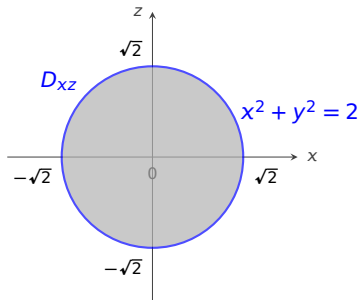
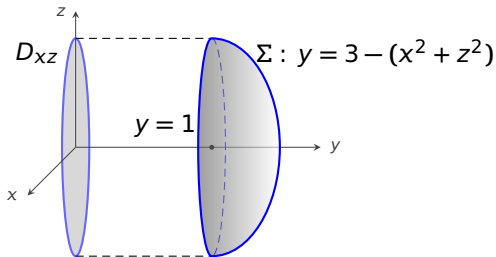
例 计算 $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + z^2 + y) dS$, 其中 Σ 是曲面 $y = 3 - (x^2 + z^2)$ 在 $y \geq 1$ 的部分。



解

$$I = 3$$

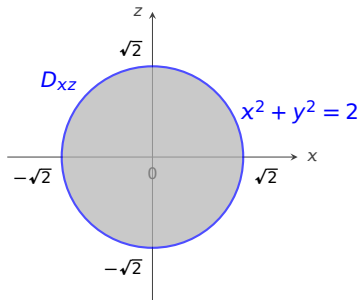
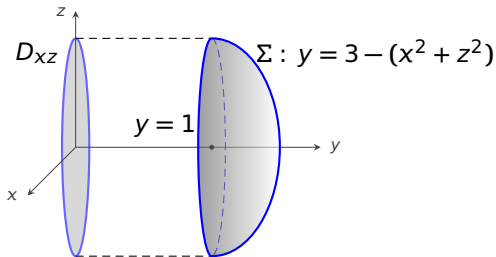
例 计算 $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + z^2 + y) dS$, 其中 Σ 是曲面 $y = 3 - (x^2 + z^2)$ 在 $y \geq 1$ 的部分。



解

$$I = 3 \cdot \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} dx dz$$

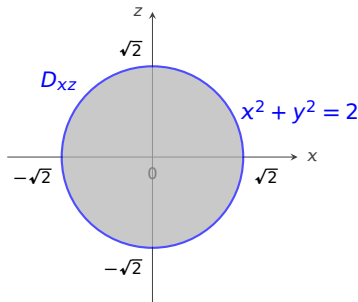
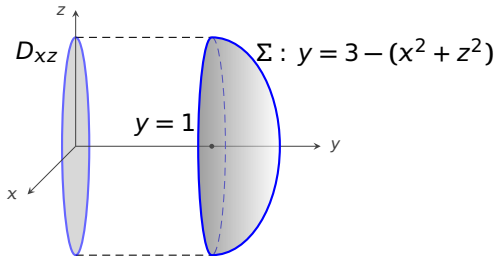
例 计算 $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + z^2 + y) dS$, 其中 Σ 是曲面 $y = 3 - (x^2 + z^2)$ 在 $y \geq 1$ 的部分。



解

$$I = \iint_{D_{xz}} 3 \cdot \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} dx dz$$

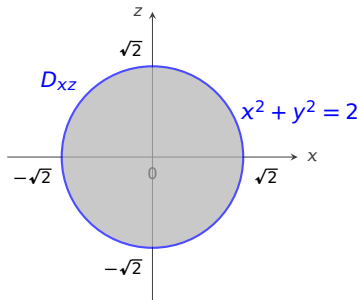
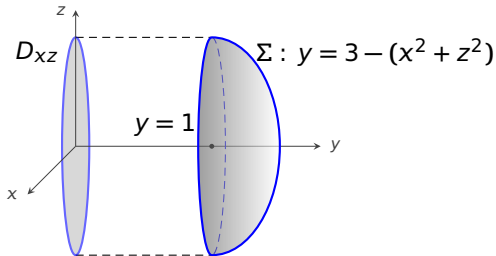
例 计算 $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + z^2 + y) dS$, 其中 Σ 是曲面 $y = 3 - (x^2 + z^2)$ 在 $y \geq 1$ 的部分。



解

$$I = \iint_{D_{xz}} 3 \cdot \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} dx dz = \iint_{D_{xz}} 3 \cdot \sqrt{1 + 4x^2 + 4z^2} dx dz$$

例 计算 $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + z^2 + y) dS$, 其中 Σ 是曲面 $y = 3 - (x^2 + z^2)$ 在 $y \geq 1$ 的部分。

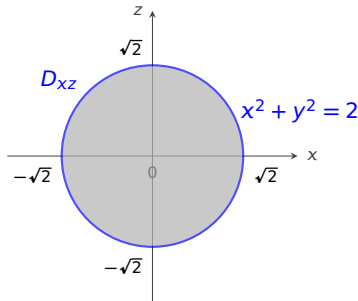
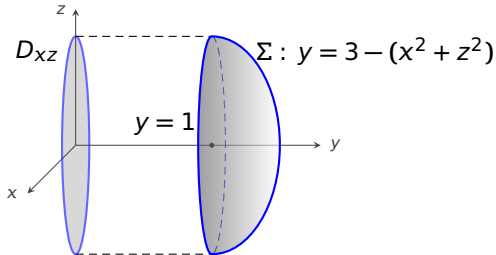


解

$$I = \iint_{D_{xz}} 3 \cdot \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} dx dz = \iint_{D_{xz}} 3 \cdot \sqrt{1 + 4x^2 + 4z^2} dx dz$$

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta \\ z &= \rho \sin \theta \end{aligned}$$

例 计算 $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + z^2 + y) dS$, 其中 Σ 是曲面 $y = 3 - (x^2 + z^2)$ 在 $y \geq 1$ 的部分。

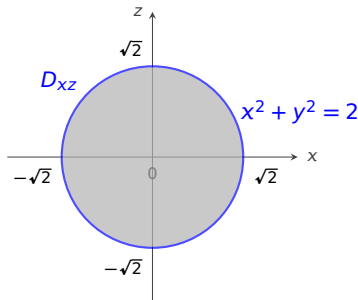
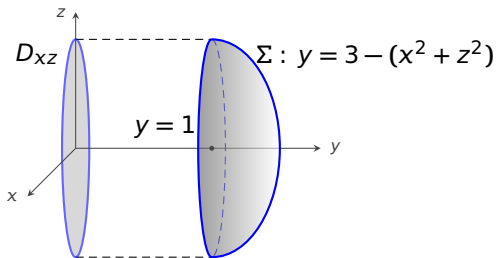


解

$$I = \iint_{D_{xz}} 3 \cdot \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} dx dz = \iint_{D_{xz}} 3 \cdot \sqrt{1 + 4x^2 + 4z^2} dx dz$$

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta \\ z &= \rho \sin \theta \end{aligned} \iint_{D_{xz}} 3 \sqrt{1 + 4\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta$$

例 计算 $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + z^2 + y) dS$, 其中 Σ 是曲面 $y = 3 - (x^2 + z^2)$ 在 $y \geq 1$ 的部分。

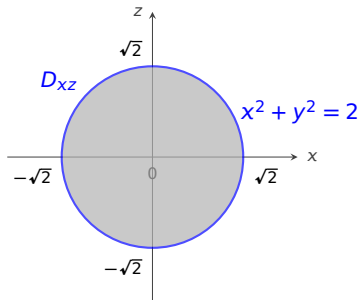
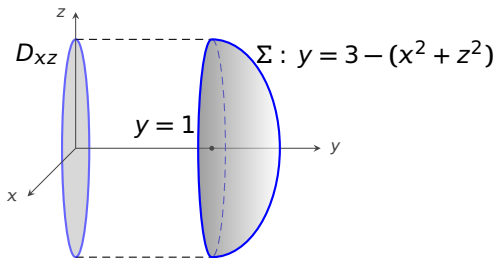


解

$$I = \iint_{D_{xz}} 3 \cdot \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} dx dz = \iint_{D_{xz}} 3 \cdot \sqrt{1 + 4x^2 + 4z^2} dx dz$$

$$\begin{aligned} \frac{x = \rho \cos \theta}{z = \rho \sin \theta} \iint_{D_{xz}} 3 \sqrt{1 + 4\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta &= \int \left[\int 3 \sqrt{1 + 4\rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta \end{aligned}$$

例 计算 $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + z^2 + y) dS$, 其中 Σ 是曲面 $y = 3 - (x^2 + z^2)$ 在 $y \geq 1$ 的部分。

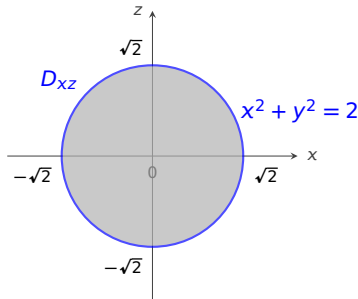
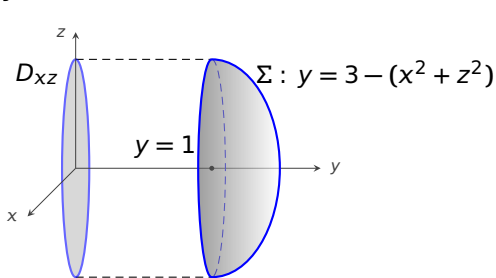


解

$$I = \iint_{D_{xz}} 3 \cdot \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} dx dz = \iint_{D_{xz}} 3 \cdot \sqrt{1 + 4x^2 + 4z^2} dx dz$$

$$\begin{aligned} \frac{x = \rho \cos \theta}{z = \rho \sin \theta} \iint_{D_{xz}} 3 \sqrt{1 + 4\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta &= \int_0^{2\pi} \left[\int 3 \sqrt{1 + 4\rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta \end{aligned}$$

例 计算 $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + z^2 + y) dS$, 其中 Σ 是曲面 $y = 3 - (x^2 + z^2)$ 在 $y \geq 1$ 的部分。

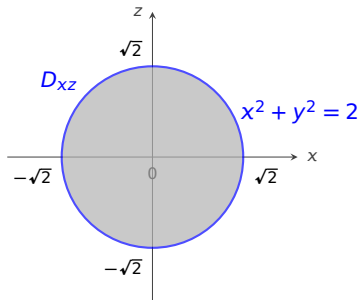
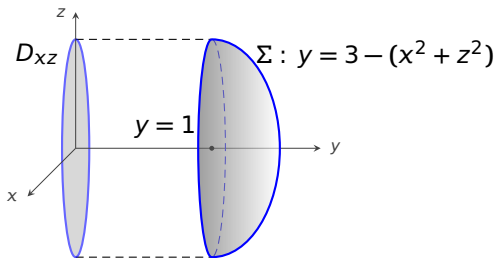


解

$$I = \iint_{D_{xz}} 3 \cdot \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} dx dz = \iint_{D_{xz}} 3 \cdot \sqrt{1 + 4x^2 + 4z^2} dx dz$$

$$\begin{aligned} \frac{x = \rho \cos \theta}{z = \rho \sin \theta} \iint_{D_{xz}} 3 \sqrt{1 + 4\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\sqrt{2}} 3 \sqrt{1 + 4\rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta \end{aligned}$$

例 计算 $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + z^2 + y) dS$, 其中 Σ 是曲面 $y = 3 - (x^2 + z^2)$ 在 $y \geq 1$ 的部分。

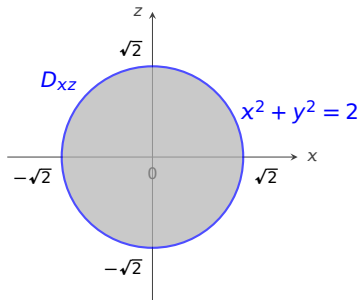
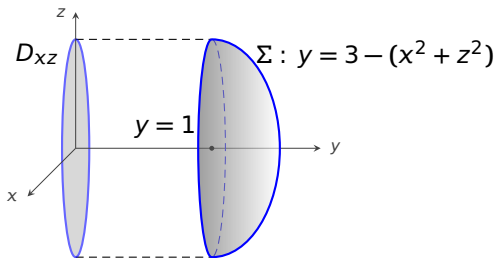


解

$$I = \iint_{D_{xz}} 3 \cdot \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} dx dz = \iint_{D_{xz}} 3 \cdot \sqrt{1 + 4x^2 + 4z^2} dx dz$$

$$\begin{aligned} \frac{x = \rho \cos \theta}{z = \rho \sin \theta} \iint_{D_{xz}} 3 \sqrt{1 + 4\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\sqrt{2}} 3 \sqrt{1 + 4\rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta \\ &= 2\pi \cdot \end{aligned}$$

例 计算 $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + z^2 + y) dS$, 其中 Σ 是曲面 $y = 3 - (x^2 + z^2)$ 在 $y \geq 1$ 的部分。



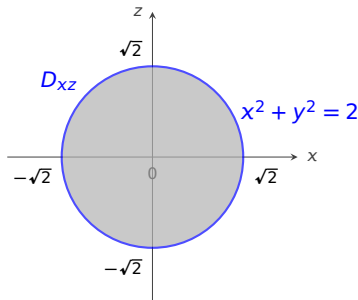
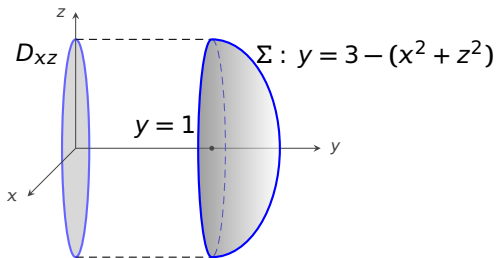
解

$$I = \iint_{D_{xz}} 3 \cdot \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} dx dz = \iint_{D_{xz}} 3 \cdot \sqrt{1 + 4x^2 + 4z^2} dx dz$$

$$\begin{aligned} \frac{x = \rho \cos \theta}{z = \rho \sin \theta} \iint_{D_{xz}} 3 \sqrt{1 + 4\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\sqrt{2}} 3 \sqrt{1 + 4\rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta \end{aligned}$$

$$\frac{u = 1 + 4\rho^2}{=} 2\pi \cdot$$

例 计算 $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + z^2 + y) dS$, 其中 Σ 是曲面 $y = 3 - (x^2 + z^2)$ 在 $y \geq 1$ 的部分。



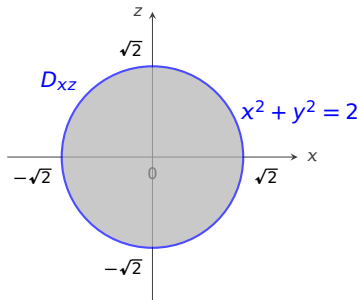
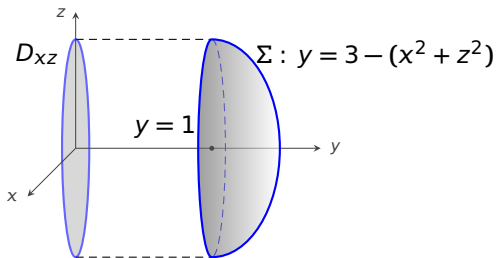
解

$$I = \iint_{D_{xz}} 3 \cdot \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} dx dz = \iint_{D_{xz}} 3 \cdot \sqrt{1 + 4x^2 + 4z^2} dx dz$$

$$\begin{aligned} \frac{x = \rho \cos \theta}{z = \rho \sin \theta} \iint_{D_{xz}} 3 \sqrt{1 + 4\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\sqrt{2}} 3 \sqrt{1 + 4\rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta \end{aligned}$$

$$\frac{u = 1 + 4\rho^2}{2\pi \cdot 3\sqrt{u}}$$

例 计算 $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + z^2 + y) dS$, 其中 Σ 是曲面 $y = 3 - (x^2 + z^2)$ 在 $y \geq 1$ 的部分。



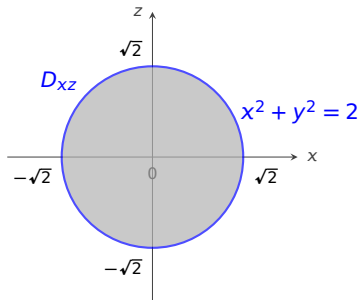
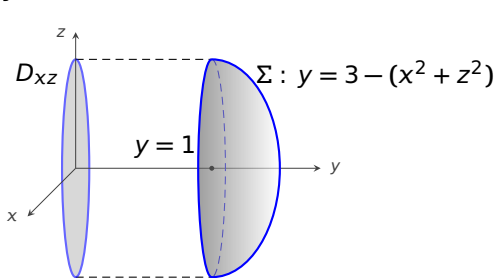
解

$$I = \iint_{D_{xz}} 3 \cdot \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} dx dz = \iint_{D_{xz}} 3 \cdot \sqrt{1 + 4x^2 + 4z^2} dx dz$$

$$\begin{aligned} \frac{x = \rho \cos \theta}{z = \rho \sin \theta} \iint_{D_{xz}} 3 \sqrt{1 + 4\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\sqrt{2}} 3 \sqrt{1 + 4\rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta \end{aligned}$$

$$\frac{u = 1 + 4\rho^2}{2\pi \cdot} 3\sqrt{u} \cdot \frac{1}{8} du$$

例 计算 $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + z^2 + y) dS$, 其中 Σ 是曲面 $y = 3 - (x^2 + z^2)$ 在 $y \geq 1$ 的部分。



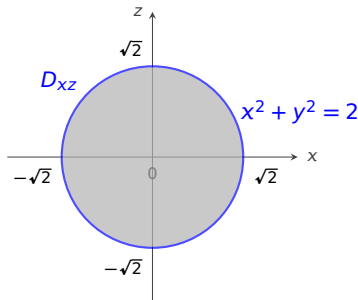
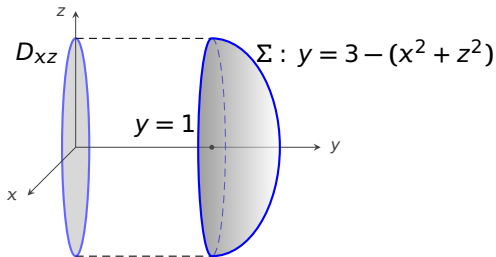
解

$$I = \iint_{D_{xz}} 3 \cdot \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} dx dz = \iint_{D_{xz}} 3 \cdot \sqrt{1 + 4x^2 + 4z^2} dx dz$$

$$\begin{aligned} \frac{x = \rho \cos \theta}{z = \rho \sin \theta} \iint_{D_{xz}} 3 \sqrt{1 + 4\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\sqrt{2}} 3 \sqrt{1 + 4\rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta \end{aligned}$$

$$\frac{u = 1 + 4\rho^2}{2\pi \cdot \int_1^9 3\sqrt{u} \cdot \frac{1}{8} du}$$

例 计算 $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + z^2 + y) dS$, 其中 Σ 是曲面 $y = 3 - (x^2 + z^2)$ 在 $y \geq 1$ 的部分。



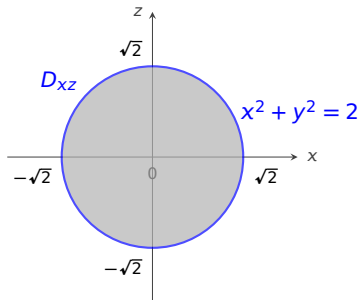
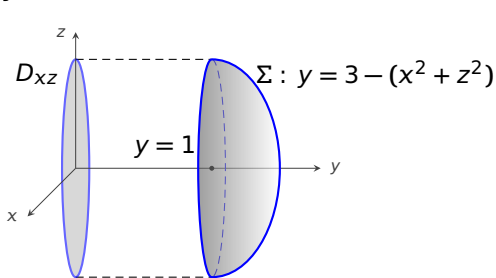
解

$$I = \iint_{D_{xz}} 3 \cdot \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} dx dz = \iint_{D_{xz}} 3 \cdot \sqrt{1 + 4x^2 + 4z^2} dx dz$$

$$\begin{aligned} \frac{x = \rho \cos \theta}{z = \rho \sin \theta} \iint_{D_{xz}} 3 \sqrt{1 + 4\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\sqrt{2}} 3 \sqrt{1 + 4\rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta \end{aligned}$$

$$\frac{u = 1 + 4\rho^2}{=} 2\pi \cdot \int_1^9 3\sqrt{u} \cdot \frac{1}{8} du = \frac{1}{2} \pi u^{\frac{3}{2}} \Big|_1^9$$

例 计算 $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + z^2 + y) dS$, 其中 Σ 是曲面 $y = 3 - (x^2 + z^2)$ 在 $y \geq 1$ 的部分。



解

$$I = \iint_{D_{xz}} 3 \cdot \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} dx dz = \iint_{D_{xz}} 3 \cdot \sqrt{1 + 4x^2 + 4z^2} dx dz$$

$$\begin{aligned} \frac{x = \rho \cos \theta}{z = \rho \sin \theta} \iint_{D_{xz}} 3 \sqrt{1 + 4\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\sqrt{2}} 3 \sqrt{1 + 4\rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta \end{aligned}$$

$$\frac{u = 1 + 4\rho^2}{2\pi \cdot \int_1^9 3\sqrt{u} \cdot \frac{1}{8} du} = \frac{1}{2} \pi u^{\frac{3}{2}} \Big|_1^9 = 13\pi$$