

第 11 周作业解答

练习 1. 用“特解 + 基础解系的线性组合”的形式, 表示线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 3 \end{cases}$$
 的通解。

解

$$\begin{aligned} (A | b) &= \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3-2r_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{r_3+r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[r_1-r_3]{r_2-r_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{r_1-2r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

1. 从最后简化的阶梯型矩阵看出, 原方程组同解于:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 - x_5 = -1 \\ x_4 + x_5 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 + x_5 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$$

2. 自由变量: x_3, x_5

3. 原方程组特解: 取自由变量 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 得特解 $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 。

4. 导出组 $Ax = 0$ 同解于

$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_3 + x_5 \\ x_4 = -x_5 \end{cases}$$

分别取 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 得基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5. 通解:

$$x = \eta + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

其中 c_1, c_2 为任意常数。

练习 2. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a & -b & -c \end{pmatrix}$ 的特征多项式。

解

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ a & b & \lambda + c \end{vmatrix} = \lambda^3 + c\lambda^2 + b\lambda + a$$

练习 3. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} -1 & k \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ 的一个特征值是 5, 求 k 的值。

解 $0 = |5I - A| = \begin{vmatrix} 5+1 & -k \\ -4 & 5-3 \end{vmatrix} = 12 - 4k$, 所以 $k = 3$ 。

练习 4. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量。

练习 5. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量。

解

- 解特征方程 $|\lambda I - A| = 0$ 。

$$\begin{aligned}
 |\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -6 & 3 \\ 1 & \lambda & -1 \\ -1 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -6 & 3 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 0 & \lambda - 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} \\
 &= (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -6 & 3 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2 - c_3} (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -9 & 3 \\ 1 & \lambda + 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -9 \\ 1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (\lambda - 2)^3
 \end{aligned}$$

所以特征值为 $\lambda_1 = 2$ (这是三重特征值)。

- 关于特征值 $\lambda_1 = 2$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$ 。

$$(\lambda_1 I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -6 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

同解方程组为

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -2x_2 + x_3$$

自由变量取为 x_2, x_3 。分别取 $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 得基础解系

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以对应于特征值 $\lambda_1 = 2$ 的所有特征向量为:

$$c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

其中 c_1, c_2 是不全为零的任意常数。

练习 6. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量。

解

- 解特征方程 $|\lambda I - A| = 0$ 。

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

所以特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ 。

- 关于特征值 $\lambda_1 = 1$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$ 。

$$(\lambda_1 I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

同解方程组为

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

取 x_1 为自由变量, 得基础解系

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

所以对应于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的所有特征向量为:

$$c_1 \alpha_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

其中 $c_1 \neq 0$ 。

- 关于特征值 $\lambda_2 = 2$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$ 。

$$(\lambda_2 I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

取 x_2 为自由变量, 得基础解系

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

所以对应于特征值 $\lambda_2 = 2$ 的所有特征向量为:

$$c_2 \alpha_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

其中 $c_2 \neq 0$ 。

- 关于特征值 $\lambda_3 = 3$, 求解 $(\lambda_3 I - A)x = 0$ 。

$$(\lambda_3 I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

取 x_3 为自由变量, 得基础解系

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以对应于特征值 $\lambda_3 = 3$ 的所有特征向量为:

$$c_3 \alpha_3 = c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

其中 $c_3 \neq 0$ 。

练习 7. 设 λ_1, λ_2 是方阵 A 的特征值, α_1, α_2 分别为 λ_1, λ_2 的特征向量。证明: 如果 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 则 $\alpha_1 + \alpha_2$ 一定不是 A 的特征向量。

证明反证法, 假设 $\alpha_1 + \alpha_2$ 是 A 的特征向量, 相应特征向值为 λ 。则

$$A(\alpha_1 + \alpha_2) = \lambda(\alpha_1 + \alpha_2).$$

另一方面

$$A(\alpha_1 + \alpha_2) = A\alpha_1 + A\alpha_2 = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2.$$

综合上述两式, 得

$$\lambda(\alpha_1 + \alpha_2) = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2.$$

所以

$$(\lambda - \lambda_1)\alpha_1 + (\lambda - \lambda_2)\alpha_2 = 0.$$

注意到对应不同特征值的特征向量线性无关, 从而上式意味

$$\lambda = \lambda_1, \quad \lambda = \lambda_2.$$

这与 λ_1, λ_2 不等矛盾。矛盾在于假设了 $\alpha_1 + \alpha_2$ 是 A 的特征向量。所以 $\alpha_1 + \alpha_2$ 一定不是 A 的特征向量。