第 12 章 α：常数项级数的概念和性质

数学系　梁卓滨

2018-2019 学年 II

We are here now...

1. 常数项级数的概念

2. 常数项级数的性质

无穷级数的概念

- 和式 $u_1 + u_2 + \cdots + u_i + \cdots$ 称为无穷级数（级数）

无穷级数的概念

- 和式 $u_1 + u_2 + \cdots + u_i + \cdots =: \sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 称为无穷级数（级数）

无穷级数的概念

- 和式 $u_1 + u_2 + \cdots + u_i + \cdots =: \sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 称为无穷级数（级数）

$$
\begin{aligned}
&u_1\\
&u_1 + u_2\\
&u_1 + u_2 + u_3\\
&\vdots\\
&u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n
\end{aligned}
$$

无穷级数的概念

- 和式 $u_1 + u_2 + \cdots + u_i + \cdots =: \sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 称为无穷级数（级数）

$$\begin{aligned}
u_1 &=: s_1 \\
u_1 + u_2 &=: s_2 \\
u_1 + u_2 + u_3 &=: s_3 \\
\vdots &\quad \vdots \\
u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n &=: s_n
\end{aligned}$$

无穷级数的概念

- 和式 $u_1 + u_2 + \cdots + u_i + \cdots =: \sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 称为无穷级数（级数）

$$
\begin{aligned}
&u_1 &&=: s_1\\
&u_1 + u_2 &&=: s_2\\
&u_1 + u_2 + u_3 &&=: s_3\\
&\vdots &&\vdots\\
&u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n &&=: s_n
\end{aligned}
$$
（第n次部分和）

无穷级数的概念

- 和式 $u_1 + u_2 + \cdots + u_i + \cdots =: \sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 称为无穷级数 （级数）

$$
\begin{aligned}
&u_1 && =: s_1 \\
&u_1 + u_2 && =: s_2 \\
&u_1 + u_2 + u_3 && =: s_3 \\
&\vdots && \vdots \\
&u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n && =: s_n \quad \text{（第}n\text{次部分和）} \\
& && \quad\;\downarrow \\
& && \quad\;\; s
\end{aligned}
$$

无穷级数的概念

- 和式 $u_1 + u_2 + \cdots + u_i + \cdots =: \sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 称为无穷级数（级数）

$$\begin{aligned}
&u_1 && =: s_1 \\
&u_1 + u_2 && =: s_2 \\
&u_1 + u_2 + u_3 && =: s_3 \\
&\vdots && \vdots \\
&u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n && =: s_n \quad \text{（第}n\text{次部分和）} \\
& && \ \ \downarrow \\
& && \ \ s = \lim_{n\to\infty} s_n
\end{aligned}$$

无穷级数的概念

- 和式 $u_1 + u_2 + \cdots + u_i + \cdots =: \sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 称为无穷级数（级数）

$$
\begin{aligned}
u_1 &=: s_1 \\
u_1 + u_2 &=: s_2 \\
u_1 + u_2 + u_3 &=: s_3 \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n &=: s_n \quad \text{（第}n\text{次部分和）} \\
& \quad \downarrow \\
u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots &=: s = \lim_{n\to\infty} s_n
\end{aligned}
$$

无穷级数的概念

- 和式 $u_1 + u_2 + \cdots + u_i + \cdots =: \sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 称为无穷级数（级数）
- 若 $\{s_n\}$ 收敛，即 $\lim_{n\to\infty} s_n = s$（有限数），则称级数收敛

$$
\begin{aligned}
& u_1 && =: s_1 \\
& u_1 + u_2 && =: s_2 \\
& u_1 + u_2 + u_3 && =: s_3 \\
& \vdots && \vdots \\
& u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n && =: s_n \quad \text{（第}n\text{次部分和）} \\
& && \quad\ \downarrow \\
& u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots && =: s = \lim_{n\to\infty} s_n
\end{aligned}
$$

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

无穷级数的概念

- 和式 $u_1 + u_2 + \cdots + u_i + \cdots =: \sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i$ 称为无穷级数（级数）
- 若 $\{s_n\}$ 收敛，即 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$（有限数），则称级数收敛，并定义

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_i = u_1 + u_2 + \cdots + u_i + \cdots = s$$

$$\begin{aligned}
&u_1 &&=: s_1\\
&u_1 + u_2 &&=: s_2\\
&u_1 + u_2 + u_3 &&=: s_3\\
&\vdots &&\vdots\\
&u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n &&=: s_n \quad \text{（第}n\text{次部分和）}\\
& &&\quad\downarrow\\
&u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots &&=: s = \lim_{n\to\infty} s_n
\end{aligned}$$

无穷级数的概念

- 和式 $u_1 + u_2 + \cdots + u_i + \cdots =: \sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 称为无穷级数（级数）
- 若 $\{s_n\}$ 收敛，即 $\lim_{n\to\infty} s_n = s$（有限数），则称级数收敛，并定义

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_i = u_1 + u_2 + \cdots + u_i + \cdots = s$$

- 若 $\{s_n\}$ 发散，即 $\lim_{n\to\infty} s_n$ 不存在，则称级数发散。

$$\begin{aligned}
&u_1 && =: s_1 \\
&u_1 + u_2 && =: s_2 \\
&u_1 + u_2 + u_3 && =: s_3 \\
&\vdots && \vdots \\
&u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n && =: s_n \quad \text{（第}n\text{次部分和）} \\
& && \quad\ \downarrow \\
&u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots && =: s = \lim_{n\to\infty} s_n
\end{aligned}$$

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

无穷级数的概念

- 和式 $u_1 + u_2 + \cdots + u_i + \cdots =: \sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i$ 称为无穷级数（级数）
- 若 $\{s_n\}$ 收敛，即 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$（有限数），则称级数收敛，并定义

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_i = u_1 + u_2 + \cdots + u_i + \cdots = s$$

- 若 $\{s_n\}$ 发散，即 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 不存在，则称级数发散。发散级数没有和

$$\begin{aligned}
&u_1 && =: s_1 \\
&u_1 + u_2 && =: s_2 \\
&u_1 + u_2 + u_3 && =: s_3 \\
&\vdots && \vdots \\
&u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n && =: s_n \quad \text{（第}n\text{次部分和）} \\
& && \quad\ \ \downarrow \\
&u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots && =: s = \lim_{n\to\infty} s_n
\end{aligned}$$

无穷级数的概念

假设级数收敛，

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + \cdots = s$$

无穷级数的概念

假设级数收敛，

$$\underbrace{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}_{s_n} + u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + \cdots = s$$

无穷级数的概念

假设级数收敛，

$$\underbrace{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}_{s_n} + \underbrace{u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + \cdots}_{r_n} = s$$

无穷级数的概念

假设级数收敛，

$$\underbrace{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}_{s_n} + \underbrace{u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + \cdots}_{r_n} = s$$

- r_n 称为级数的余项

无穷级数的概念

假设级数收敛，

$$\underbrace{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}_{s_n} + \underbrace{u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + \cdots}_{r_n} = s$$

- r_n 称为级数的**余项**
- $r_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} u_i$

无穷级数的概念

假设级数收敛，

$$\underbrace{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}_{s_n} + \underbrace{u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + \cdots}_{r_n} = s$$

- r_n 称为级数的余项
- $r_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} u_i = s - s_n$

例 1 无穷级数

$$\sum_{i=0}^{\infty} aq^i = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^i + \cdots$$

称为等比级数（又称几何级数），其中 $a \neq 0$，q 称为级数的公比。

例 1 无穷级数

$$\sum_{i=0}^{\infty} aq^i = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^i + \cdots$$

称为**等比级数**（又称**几何级数**），其中 $a \neq 0$，q 称为**级数的公比**。

- 当 $q \neq 1$ 时，

- 当 $q = 1$ 时，

例 1 无穷级数

$$\sum_{i=0}^{\infty} aq^i = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^i + \cdots$$

称为等比级数（又称几何级数），其中 $a \neq 0$，q 称为级数的公比。

- 当 $q \neq 1$ 时，

  $s_n =$

- 当 $q = 1$ 时，

  $s_n =$

例 1 无穷级数

$$\sum_{i=0}^{\infty} aq^i = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^i + \cdots$$

称为等比级数（又称几何级数），其中 $a \neq 0$，q 称为级数的公比。

- 当 $q \neq 1$ 时，

  $s_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1}$

- 当 $q = 1$ 时，

  $s_n =$

例 1 无穷级数

$$\sum_{i=0}^{\infty} aq^i = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^i + \cdots$$

称为等比级数（又称几何级数），其中 $a \neq 0$，q 称为级数的公比。

- 当 $q \neq 1$ 时，

  $$s_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1} = a(1 + q + \cdots + q^{n-1})$$

- 当 $q = 1$ 时，

  $$s_n =$$

例 1 无穷级数

$$\sum_{i=0}^{\infty} aq^i = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^i + \cdots$$

称为**等比级数**（又称**几何级数**），其中 $a \neq 0$，q 称为**级数的公比**。

- 当 $q \neq 1$ 时，

  $$s_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1} = a(1 + q + \cdots + q^{n-1})$$

- 当 $q = 1$ 时，

  $$s_n =$$

$$q^n - 1 =$$

例 1 无穷级数

$$\sum_{i=0}^{\infty} aq^i = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^i + \cdots$$

称为等比级数（又称几何级数），其中 $a \neq 0$，q 称为级数的公比。

- 当 $q \neq 1$ 时，

  $$s_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1} = a(1 + q + \cdots + q^{n-1})$$

- 当 $q = 1$ 时，

  $s_n =$

$$q^n - 1 = (q-1)(q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q + 1)$$

例 1 无穷级数

$$\sum_{i=0}^{\infty} aq^i = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^i + \cdots$$

称为**等比级数**（又称**几何级数**），其中 $a \neq 0$，q 称为**级数的公比**。

- 当 $q \neq 1$ 时，

$$s_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1} = a(1 + q + \cdots + q^{n-1}) \qquad \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

- 当 $q = 1$ 时，

$$s_n =$$

$$q^n - 1 = (q-1)(q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q + 1)$$

例 1 无穷级数

$$\sum_{i=0}^{\infty} aq^i = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^i + \cdots$$

称为等比级数（又称几何级数），其中 $a \neq 0$，q 称为级数的公比。

- 当 $q \neq 1$ 时，

$$s_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1} = a(1 + q + \cdots + q^{n-1}) = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

- 当 $q = 1$ 时，

$$s_n =$$

$$q^n - 1 = (q-1)(q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q + 1)$$

例 1 无穷级数

$$\sum_{i=0}^{\infty} aq^i = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^i + \cdots$$

称为**等比级数**（又称**几何级数**），其中 $a \neq 0$，q 称为**级数的公比**。

- 当 $q \neq 1$ 时，

  $$s_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1} = a(1 + q + \cdots + q^{n-1}) = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

  - 当 $|q| < 1$ 时，
  - 当 $|q| > 1$ 或 $q = -1$ 时，

- 当 $q = 1$ 时，

  $s_n =$

$$q^n - 1 = (q - 1)(q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q + 1)$$

例 1 无穷级数

$$\sum_{i=0}^{\infty} aq^i = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^i + \cdots$$

称为**等比级数**（又称**几何级数**），其中 $a \neq 0$，q 称为**级数的公比**。

- 当 $q \neq 1$ 时，

  $$s_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1} = a(1 + q + \cdots + q^{n-1}) = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

  - 当 $|q| < 1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q}$，
  - 当 $|q| > 1$ 或 $q = -1$ 时，

- 当 $q = 1$ 时，

  $s_n =$

$$q^n - 1 = (q-1)(q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q + 1)$$

例 1 无穷级数

$$\sum_{i=0}^{\infty} aq^i = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^i + \cdots$$

称为等比级数（又称几何级数），其中 $a \neq 0$，q 称为级数的公比。

- 当 $q \neq 1$ 时，

  $$s_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1} = a(1 + q + \cdots + q^{n-1}) = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

  - 当 $|q| < 1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q}$，级数收敛，
  - 当 $|q| > 1$ 或 $q = -1$ 时，

- 当 $q = 1$ 时，

  $s_n =$

$$q^n - 1 = (q-1)(q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q + 1)$$

例 1 无穷级数

$$\sum_{i=0}^{\infty} aq^i = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^i + \cdots$$

称为等比级数（又称几何级数），其中 $a \neq 0$，q 称为级数的公比。

- 当 $q \neq 1$ 时，

  $$s_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1} = a(1 + q + \cdots + q^{n-1}) = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

  - 当 $|q| < 1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q}$，级数收敛，$\sum\limits_{i=0}^{\infty} aq^i = \frac{a}{1-q}$
  - 当 $|q| > 1$ 或 $q = -1$ 时，

- 当 $q = 1$ 时，

  $$s_n =$$

$$q^n - 1 = (q-1)(q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q + 1)$$

例 1 无穷级数

$$\sum_{i=0}^{\infty} aq^i = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^i + \cdots$$

称为等比级数（又称几何级数），其中 $a \neq 0$，q 称为级数的公比。

- 当 $q \neq 1$ 时，

$$s_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1} = a(1 + q + \cdots + q^{n-1}) = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

  - 当 $|q| < 1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q}$，级数收敛，$\sum\limits_{i=0}^{\infty} aq^i = \frac{a}{1-q}$
  - 当 $|q| > 1$ 或 $q = -1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 不存在，

- 当 $q = 1$ 时，

$$s_n =$$

$$q^n - 1 = (q - 1)(q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q + 1)$$

例 1 无穷级数

$$\sum_{i=0}^{\infty} aq^i = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^i + \cdots$$

称为等比级数（又称几何级数），其中 $a \neq 0$，q 称为级数的公比。

- 当 $q \neq 1$ 时，

$$s_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1} = a(1 + q + \cdots + q^{n-1}) = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

  - 当 $|q| < 1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q}$，级数收敛，$\sum\limits_{i=0}^{\infty} aq^i = \frac{a}{1-q}$
  - 当 $|q| > 1$ 或 $q = -1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 不存在，级数发散

- 当 $q = 1$ 时，

$$s_n =$$

$$q^n - 1 = (q-1)(q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q + 1)$$

例 1 无穷级数

$$\sum_{i=0}^{\infty} aq^i = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^i + \cdots$$

称为等比级数（又称几何级数），其中 $a \neq 0$，q 称为级数的公比。

- 当 $q \neq 1$ 时，

  $$s_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1} = a(1 + q + \cdots + q^{n-1}) = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

  - 当 $|q| < 1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q}$，级数收敛，$\sum\limits_{i=0}^{\infty} aq^i = \frac{a}{1-q}$
  - 当 $|q| > 1$ 或 $q = -1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 不存在，级数发散

- 当 $q = 1$ 时，

  $$s_n = a + a + \cdots + a$$

$$q^n - 1 = (q-1)(q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q + 1)$$

例 1 无穷级数

$$\sum_{i=0}^{\infty} aq^i = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^i + \cdots$$

称为等比级数（又称几何级数），其中 $a \neq 0$，q 称为级数的公比。

- 当 $q \neq 1$ 时，

$$s_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1} = a(1 + q + \cdots + q^{n-1}) = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

  - 当 $|q| < 1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q}$，级数收敛，$\sum\limits_{i=0}^{\infty} aq^i = \frac{a}{1-q}$
  - 当 $|q| > 1$ 或 $q = -1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 不存在，级数发散

- 当 $q = 1$ 时，

$$s_n = a + a + \cdots + a = na$$

$$q^n - 1 = (q - 1)(q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q + 1)$$

例 1 无穷级数

$$\sum_{i=0}^{\infty} aq^i = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^i + \cdots$$

称为**等比级数**（又称**几何级数**），其中 $a \neq 0$，q 称为**级数的公比**。

- 当 $q \neq 1$ 时，

  $$s_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1} = a(1 + q + \cdots + q^{n-1}) = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

  - 当 $|q| < 1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q}$，级数收敛，$\sum\limits_{i=0}^{\infty} aq^i = \frac{a}{1-q}$
  - 当 $|q| > 1$ 或 $q = -1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 不存在，级数发散

- 当 $q = 1$ 时，

  $$s_n = a + a + \cdots + a = na \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} s_n \text{不存在}$$

$$q^n - 1 = (q-1)(q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q + 1)$$

例 1 无穷级数

$$\sum_{i=0}^{\infty} aq^i = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^i + \cdots$$

称为等比级数（又称几何级数），其中 $a \neq 0$，q 称为级数的公比。

- 当 $q \neq 1$ 时，

  $$s_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1} = a(1 + q + \cdots + q^{n-1}) = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

  - 当 $|q| < 1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q}$，级数收敛，$\sum\limits_{i=0}^{\infty} aq^i = \frac{a}{1-q}$
  - 当 $|q| > 1$ 或 $q = -1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 不存在，级数发散

- 当 $q = 1$ 时，

  $$s_n = a + a + \cdots + a = na \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} s_n \text{不存在} \quad \Rightarrow \quad \text{级数发散}$$

$$q^n - 1 = (q-1)(q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q + 1)$$

小结 等比级数（$a \neq 0$）

$$\sum_{i=0}^{\infty} aq^i = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^i + \cdots$$

- 当 $|q| < 1$ 时，
- 当 $|q| \geq 1$ 时，

小结 等比级数（$a \neq 0$）

$$\sum_{i=0}^{\infty} aq^i = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^i + \cdots$$

- 当 $|q| < 1$ 时，级数收敛，
- 当 $|q| \geq 1$ 时，

小结 等比级数（$a \neq 0$）

$$\sum_{i=0}^{\infty} aq^i = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^i + \cdots$$

- 当 $|q| < 1$ 时，级数收敛，且 $\sum\limits_{i=0}^{\infty} aq^i = \frac{a}{1-q}$。
- 当 $|q| \geq 1$ 时，

小结 等比级数（$a \neq 0$）

$$\sum_{i=0}^{\infty} aq^i = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^i + \cdots$$

- 当 $|q| < 1$ 时，级数收敛，且 $\sum_{i=0}^{\infty} aq^i = \frac{a}{1-q}$。
- 当 $|q| \geq 1$ 时，级数发散。

小结 等比级数（$a \neq 0$）

$$\sum_{i=0}^{\infty} aq^i = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^i + \cdots$$

- 当 $|q| < 1$ 时，级数收敛，且 $\sum\limits_{i=0}^{\infty} aq^i = \frac{a}{1-q}$。
- 当 $|q| \geq 1$ 时，级数发散。

注 当 $|q| < 1$ 时，

$$\sum_{i=1}^{\infty} aq^i = aq + aq^2 + \cdots + aq^i + \cdots$$

小结 等比级数（$a \neq 0$）

$$\sum_{i=0}^{\infty} aq^i = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^i + \cdots$$

- 当 $|q| < 1$ 时，级数收敛，且 $\sum_{i=0}^{\infty} aq^i = \frac{a}{1-q}$。
- 当 $|q| \geq 1$ 时，级数发散。

注 当 $|q| < 1$ 时，

$$\sum_{i=1}^{\infty} aq^i = aq + aq^2 + \cdots + aq^i + \cdots$$

$$= q(a + aq + \cdots + aq^{i-1} + \cdots)$$

小结 等比级数（$a \neq 0$）

$$\sum_{i=0}^{\infty} aq^i = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^i + \cdots$$

- 当 $|q| < 1$ 时，级数收敛，且 $\sum\limits_{i=0}^{\infty} aq^i = \frac{a}{1-q}$。
- 当 $|q| \geq 1$ 时，级数发散。

注 当 $|q| < 1$ 时，

$$\sum_{i=1}^{\infty} aq^i = aq + aq^2 + \cdots + aq^i + \cdots$$

$$= q(a + aq + \cdots + aq^{i-1} + \cdots) = \frac{a}{1-q}$$

小结 等比级数（$a \neq 0$）

$$\sum_{i=0}^{\infty} aq^i = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^i + \cdots$$

- 当 $|q| < 1$ 时，级数收敛，且 $\sum_{i=0}^{\infty} aq^i = \frac{a}{1-q}$。
- 当 $|q| \geq 1$ 时，级数发散。

注 当 $|q| < 1$ 时，

$$\sum_{i=1}^{\infty} aq^i = aq + aq^2 + \cdots + aq^i + \cdots$$

$$= q(a + aq + \cdots + aq^{i-1} + \cdots) = \frac{aq}{1-q}$$

例 2 无穷级数

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{i} + \cdots$$

称为调和级数。

例 2 无穷级数

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{i} + \cdots$$

称为调和级数。这是一个发散的级数。

例 2 无穷级数

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{i} + \cdots$$

称为调和级数。这是一个发散的级数。

这是:

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

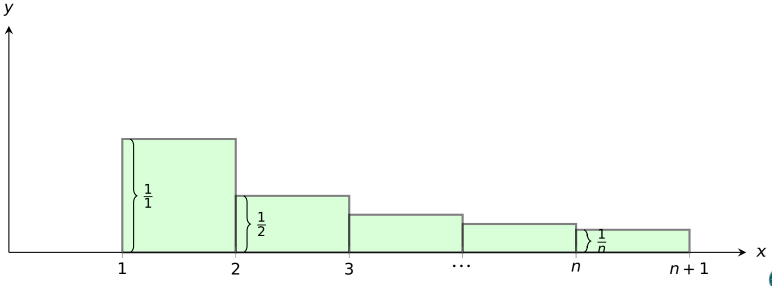
例 2 无穷级数

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{i} + \cdots$$

称为调和级数。这是一个发散的级数。

这是：

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$



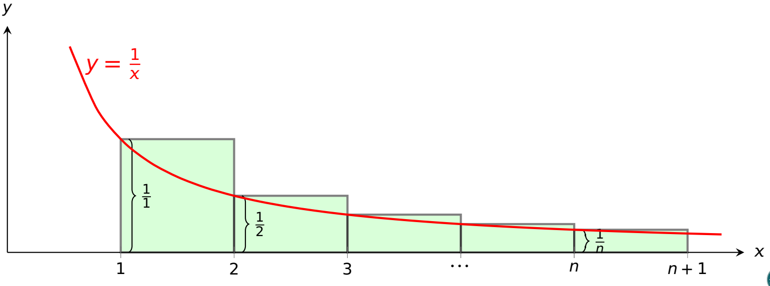
例 2 无穷级数

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{i}+\cdots$$

称为调和级数。这是一个发散的级数。

这是：

$$s_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$$



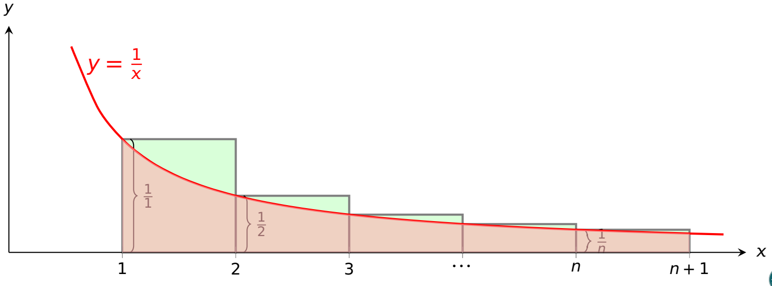
例 2 无穷级数

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{i} + \cdots$$

称为**调和级数**。这是一个发散的级数。

这是：

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$



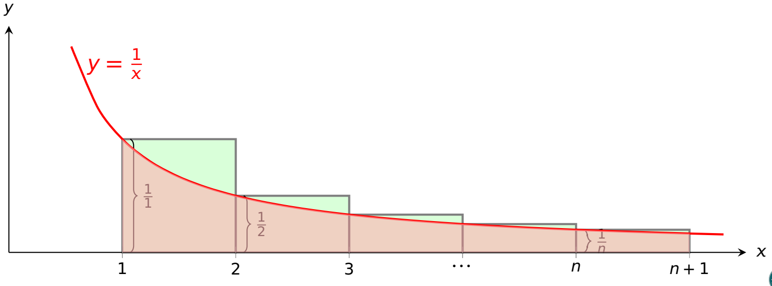
例 2 无穷级数

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{i}+\cdots$$

称为调和级数。这是一个发散的级数。

这是：

$$s_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\geq\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx$$



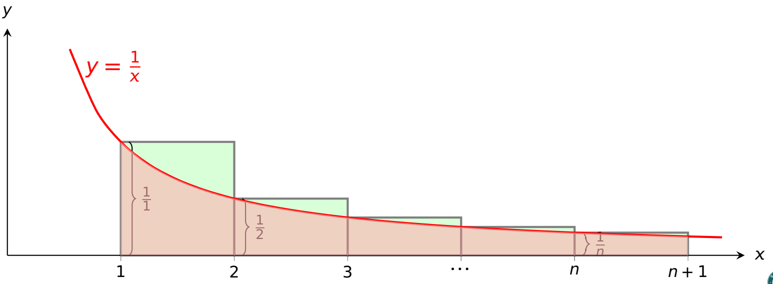
例 2 无穷级数

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{i} + \cdots$$

称为**调和级数**。这是一个发散的级数。

这是:

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^{n+1}$$



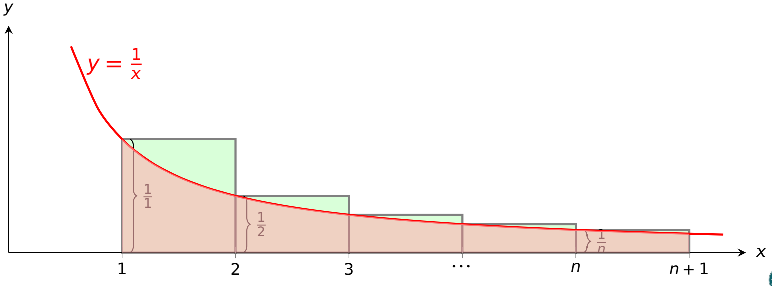
例 2 无穷级数

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{i} + \cdots$$

称为调和级数。这是一个发散的级数。

这是:

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^{n+1} = \ln(n+1)$$



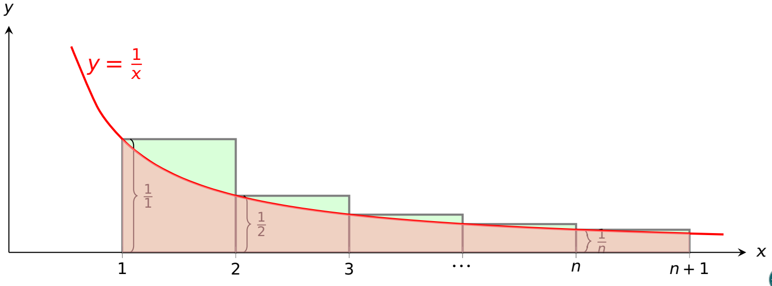
例 2 无穷级数

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{i} + \cdots$$

称为**调和级数**。这是一个发散的级数。

这是：

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^{n+1} = \ln(n+1) \to \infty$$



例 2 无穷级数

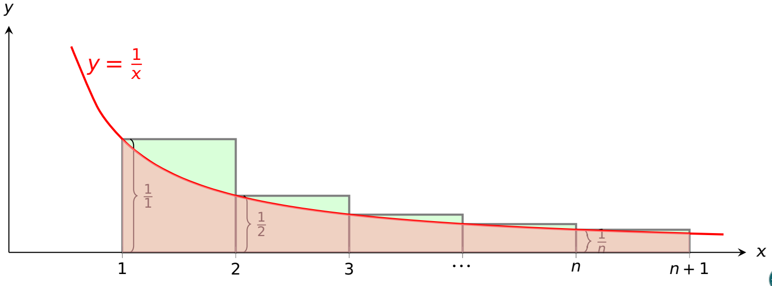
$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{i}+\cdots$$

称为调和级数。这是一个发散的级数。

这是：

$$s_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\geq\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx=\ln x\Big|_1^{n+1}=\ln(n+1)\to\infty$$

所以 $\lim_{n\to\infty}s_n$ 不存在，调和级数发散。



例 3 p 级数（$p > 0$）

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

例 3 p 级数（$p > 0$）

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

- 当 $0 < p \leq 1$ 时,

- 当 $p > 1$ 时,

例 3 p 级数（$p > 0$）

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

- 当 $0 < p \leq 1$ 时，

- 当 $p > 1$ 时，级数收敛（证明在下一节）。

例 3 p 级数（$p > 0$）

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

- 当 $0 < p \leq 1$ 时，

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}$$

- 当 $p > 1$ 时，级数收敛（证明在下一节）。

例 3 p 级数（$p > 0$）

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

- 当 $0 < p \leq 1$ 时，

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} \geq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

- 当 $p > 1$ 时，级数收敛（证明在下一节）。

例 3 p 级数（$p>0$）

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$$

- 当 $0<p\leq 1$ 时，

$$s_n=1+\frac{1}{2^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}\geq 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\geq \ln(n+1)$$

- 当 $p>1$ 时，级数收敛（证明在下一节）。

例 3 p 级数（$p > 0$）

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

- 当 $0 < p \le 1$ 时,

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} \ge 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \ge \ln(n+1) \to \infty$$

- 当 $p > 1$ 时，级数收敛（证明在下一节）。

例 3 p 级数（$p > 0$）

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

- 当 $0 < p \leq 1$ 时，

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} \geq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \geq \ln(n+1) \to \infty$$

所以级数发散。

- 当 $p > 1$ 时，级数收敛（证明在下一节）。

例 4 判断以下无穷级数的敛散性，收敛的话求出级数的和。

1. $1+2+3+\cdots+n+\cdots$
2. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}++\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\cdots$

例 4 判断以下无穷级数的敛散性，收敛的话求出级数的和。

1. $1+2+3+\cdots+n+\cdots$
2. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}++\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\cdots$

解 1.

$$s_n = 1+2+\cdots+n$$

例 4 判断以下无穷级数的敛散性，收敛的话求出级数的和。

1. $1 + 2 + 3 + \cdots + n + \cdots$
2. $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} + \cdots$

解 1.

$$s_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

例 4 判断以下无穷级数的敛散性，收敛的话求出级数的和。

1. $1+2+3+\cdots+n+\cdots$
2. $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}++\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\cdots$

解 1.

$$s_n=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2} \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty} s_n \text{不存在}$$

例 4 判断以下无穷级数的敛散性，收敛的话求出级数的和。

1. $1+2+3+\cdots+n+\cdots$
2. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}++\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\cdots$

解 1.

$$s_n=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} s_n\text{不存在} \quad \Rightarrow \quad \text{级数发散}$$

例 4 判断以下无穷级数的敛散性，收敛的话求出级数的和。

1. $1+2+3+\cdots+n+\cdots$
2. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}++\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\cdots$

解 1.

$$s_n=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} s_n \text{不存在} \quad \Rightarrow \quad \text{级数发散}$$

2.

$$s_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

例 4 判断以下无穷级数的敛散性，收敛的话求出级数的和。

1. $1+2+3+\cdots+n+\cdots$
2. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}++\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\cdots$

解 1.

$$s_n=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} s_n\text{不存在} \quad \Rightarrow \quad \text{级数发散}$$

2.

$$s_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

$$=(1-\frac{1}{2})+$$

例 4 判断以下无穷级数的敛散性，收敛的话求出级数的和。

1. $1+2+3+\cdots+n+\cdots$
2. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}++\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\cdots$

解 1.

$$s_n = 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} s_n \text{不存在} \quad \Rightarrow \quad \text{级数发散}$$

2.

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

$$= (1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+$$

例 4 判断以下无穷级数的敛散性，收敛的话求出级数的和。

1. $1+2+3+\cdots+n+\cdots$
2. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}++\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\cdots$

解 1.

$$s_n=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2} \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty} s_n\text{不存在} \quad\Rightarrow\quad \text{级数发散}$$

2.

$$s_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

$$=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+$$

例 4 判断以下无穷级数的敛散性，收敛的话求出级数的和。

1. $1+2+3+\cdots+n+\cdots$
2. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}++\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\cdots$

解 1.

$$s_n=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} s_n\text{不存在} \quad \Rightarrow \quad \text{级数发散}$$

2.

$$s_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

$$=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$$

例 4 判断以下无穷级数的敛散性，收敛的话求出级数的和。

1. $1+2+3+\cdots+n+\cdots$
2. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}++\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\cdots$

解 1.

$$s_n=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2} \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty} s_n\text{不存在} \quad\Rightarrow\quad \text{级数发散}$$

2.

$$s_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

$$=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=1-\frac{1}{n+1},$$

例 4 判断以下无穷级数的敛散性，收敛的话求出级数的和。

1. $1+2+3+\cdots+n+\cdots$
2. $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}++\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\cdots$

解 1.

$$s_n = 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} s_n \text{不存在} \quad \Rightarrow \quad \text{级数发散}$$

2.

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

$$=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=1-\frac{1}{n+1},$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} s_n$$

例 4 判断以下无穷级数的敛散性，收敛的话求出级数的和。

1. $1+2+3+\cdots+n+\cdots$
2. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}++\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\cdots$

解 1.

$$s_n = 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} s_n \text{不存在} \quad \Rightarrow \quad \text{级数发散}$$

2.

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

$$=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=1-\frac{1}{n+1},$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} s_n = 1,$$

例 4 判断以下无穷级数的敛散性，收敛的话求出级数的和。

1. $1+2+3+\cdots+n+\cdots$
2. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}++\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\cdots$

解 1.

$$s_n=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2} \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty} s_n\text{不存在} \quad\Rightarrow\quad \text{级数发散}$$

2.

$$s_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

$$=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=1-\frac{1}{n+1},$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} s_n=1,$$

所以级数收敛，并且 $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}++\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\cdots=1$

例 5 判断无穷级数 $1-1+1-1+\cdots$ 的敛散性。

例 5 判断无穷级数 $1-1+1-1+\cdots$ 的敛散性。

解 计算部分和 s_n：

- 当 n 为偶数时，
- 当 n 为奇数时，

例 5 判断无穷级数 $1-1+1-1+\cdots$ 的敛散性。

解 计算部分和 s_n：

- 当 n 为偶数时，$s_n = 1-1+1-1+\cdots+1-1$
- 当 n 为奇数时，

例 5 判断无穷级数 $1-1+1-1+\cdots$ 的敛散性。

解 计算部分和 s_n：

- 当 n 为偶数时，$s_n = 1-1+1-1+\cdots+1-1 = 0$
- 当 n 为奇数时，

例 5 判断无穷级数 $1-1+1-1+\cdots$ 的敛散性。

解 计算部分和 s_n:

- 当 n 为偶数时，$s_n = 1-1+1-1+\cdots+1-1 = 0$
- 当 n 为奇数时，$s_n = 1-1+1-1+\cdots+1-1+1$

例 5 判断无穷级数 $1-1+1-1+\cdots$ 的敛散性。

解 计算部分和 s_n:

- 当 n 为偶数时，$s_n = 1-1+1-1+\cdots+1-1=0$
- 当 n 为奇数时，$s_n = 1-1+1-1+\cdots+1-1+1=1$

例 5 判断无穷级数 $1-1+1-1+\cdots$ 的敛散性。

解 计算部分和 s_n：

- 当 n 为偶数时，$s_n = 1-1+1-1+\cdots+1-1=0$
- 当 n 为奇数时，$s_n = 1-1+1-1+\cdots+1-1+1=1$

可见极限 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 不存在，

例 5 判断无穷级数 $1-1+1-1+\cdots$ 的敛散性。

解 计算部分和 s_n：

- 当 n 为偶数时，$s_n = 1-1+1-1+\cdots+1-1 = 0$
- 当 n 为奇数时，$s_n = 1-1+1-1+\cdots+1-1+1 = 1$

可见极限 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 不存在，所以级数发散

We are here now...

1. 常数项级数的概念

2. 常数项级数的性质

性质 1 假设 $k \in \mathbb{R}$ 以及 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i = s$，则 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (ku_i) = ks$。

性质 1 假设 $k \in \mathbb{R}$ 以及 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i = s$，则 $\sum_{i=1}^{\infty} (ku_i) = ks$。

证明

$$ku_1 + ku_2 + \cdots + ku_n =$$

性质 1 假设 $k \in \mathbb{R}$ 以及 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i = s$，则 $\sum_{i=1}^{\infty} (k u_i) = ks$。

证明

$$ku_1 + ku_2 + \cdots + ku_n = k(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) =$$

性质 1 假设 $k \in \mathbb{R}$ 以及 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i = s$，则 $\sum_{i=1}^{\infty} (ku_i) = ks$。

证明

$$ku_1 + ku_2 + \cdots + ku_n = k(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = ks_n$$

性质 1 假设 $k \in \mathbb{R}$ 以及 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i = s$，则 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (ku_i) = ks$。

证明

$$ku_1 + ku_2 + \cdots + ku_n = k(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = ks_n \to ks,$$

性质 1 假设 $k \in \mathbb{R}$ 以及 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i = s$，则 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (ku_i) = ks$。

证明

$$ku_1 + ku_2 + \cdots + ku_n = k(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = ks_n \to ks,$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{\infty} (ku_i) = ks.$$

性质 1 假设 $k \in \mathbb{R}$ 以及 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i = s$，则 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (ku_i) = ks$。

证明

$$ku_1 + ku_2 + \cdots + ku_n = k(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = ks_n \to ks,$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{\infty} (ku_i) = ks.$$

性质 2 假设 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i = s$ 及 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} v_i = \sigma$，则 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (u_i \pm v_i) = s \pm \sigma$。

性质 1 假设 $k \in \mathbb{R}$ 以及 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i = s$，则 $\sum_{i=1}^{\infty}(ku_i) = ks$。

证明

$$ku_1 + ku_2 + \cdots + ku_n = k(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = ks_n \to ks,$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{\infty}(ku_i) = ks.$$

性质 2 假设 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i = s$ 及 $\sum_{i=1}^{\infty} v_i = \sigma$，则 $\sum_{i=1}^{\infty}(u_i \pm v_i) = s \pm \sigma$。

证明

$$(u_1 + v_1) + \cdots + (u_n + v_n) =$$

性质 1 假设 $k \in \mathbb{R}$ 以及 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i = s$，则 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (ku_i) = ks$。

证明

$$ku_1 + ku_2 + \cdots + ku_n = k(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = ks_n \to ks,$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{\infty} (ku_i) = ks.$$

性质 2 假设 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i = s$ 及 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} v_i = \sigma$，则 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (u_i \pm v_i) = s \pm \sigma$。

证明

$$(u_1 + v_1) + \cdots + (u_n + v_n) = (u_1 + \cdots + u_n) + (v_1 + \cdots + v_n)$$

性质 1 假设 $k \in \mathbb{R}$ 以及 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i = s$，则 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(ku_i) = ks$。

证明

$$ku_1 + ku_2 + \cdots + ku_n = k(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = ks_n \to ks,$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{\infty}(ku_i) = ks.$$

性质 2 假设 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i = s$ 及 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} v_i = \sigma$，则 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(u_i \pm v_i) = s \pm \sigma$。

证明

$$\begin{aligned}(u_1 + v_1) + \cdots + (u_n + v_n) &= (u_1 + \cdots + u_n) + (v_1 + \cdots + v_n) \\ &= s_n + \sigma_n\end{aligned}$$

性质 1 假设 $k \in \mathbb{R}$ 以及 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i = s$，则 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (ku_i) = ks$。

证明

$$ku_1 + ku_2 + \cdots + ku_n = k(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = ks_n \to ks,$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{\infty} (ku_i) = ks.$$

性质 2 假设 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i = s$ 及 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} v_i = \sigma$，则 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (u_i \pm v_i) = s \pm \sigma$。

证明

$$\begin{aligned}(u_1 + v_1) + \cdots + (u_n + v_n) &= (u_1 + \cdots + u_n) + (v_1 + \cdots + v_n) \\ &= s_n + \sigma_n \to s + \sigma,\end{aligned}$$

性质 1 假设 $k \in \mathbb{R}$ 以及 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i = s$，则 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (ku_i) = ks$。

证明

$$ku_1 + ku_2 + \cdots + ku_n = k(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = ks_n \to ks,$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{\infty} (ku_i) = ks.$$

性质 2 假设 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i = s$ 及 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} v_i = \sigma$，则 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (u_i \pm v_i) = s \pm \sigma$。

证明

$$\begin{aligned}(u_1 + v_1) + \cdots + (u_n + v_n) &= (u_1 + \cdots + u_n) + (v_1 + \cdots + v_n) \\ &= s_n + \sigma_n \to s + \sigma,\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{\infty} (u_i + v_i) = s + \sigma,$$

性质 1 假设 $k \in \mathbb{R}$ 以及 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i = s$，则 $\sum_{i=1}^{\infty}(ku_i) = ks$。

证明

$$ku_1 + ku_2 + \cdots + ku_n = k(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = ks_n \to ks,$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{\infty}(ku_i) = ks.$$

性质 2 假设 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i = s$ 及 $\sum_{i=1}^{\infty} v_i = \sigma$，则 $\sum_{i=1}^{\infty}(u_i \pm v_i) = s \pm \sigma$。

证明

$$\begin{aligned}(u_1 + v_1) + \cdots + (u_n + v_n) &= (u_1 + \cdots + u_n) + (v_1 + \cdots + v_n) \\ &= s_n + \sigma_n \to s + \sigma,\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{\infty}(u_i + v_i) = s + \sigma, \qquad \text{同理} \quad \sum_{i=1}^{\infty}(u_i - v_i) = s - \sigma.$$

性质 3 在级数中去掉、加上或改变有限项，不会改变级数的敛散性。

性质 4 设 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i = s$

$$u_1 + \cdots + u_{n_1} \quad + \quad u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2} \quad + \cdots + \quad u_{n_{k-1}+1} + \cdots + u_{n_k} \quad + \cdots$$

性质 4 设 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i = s$

$$\underbrace{(u_1+\cdots+u_{n_1})}_{v_1}+\underbrace{(u_{n_1+1}+\cdots+u_{n_2})}_{v_2}+\cdots+\underbrace{(u_{n_{k-1}+1}+\cdots+u_{n_k})}_{v_k}+\cdots$$

性质 4 设 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i = s$，则

$$\underbrace{(u_1+\cdots+u_{n_1})}_{v_1}+\underbrace{(u_{n_1+1}+\cdots+u_{n_2})}_{v_2}+\cdots+\underbrace{(u_{n_{k-1}+1}+\cdots+u_{n_k})}_{v_k}+\cdots = s$$

即：加括号后的级数也收敛，并且值不改变。

性质 4 设 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i = s$，则

$$\underbrace{(u_1+\cdots+u_{n_1})}_{v_1}+\underbrace{(u_{n_1+1}+\cdots+u_{n_2})}_{v_2}+\cdots+\underbrace{(u_{n_{k-1}+1}+\cdots+u_{n_k})}_{v_k}+\cdots = s$$

即：加括号后的级数也收敛，并且值不改变。

证明 加括号后的级数，其部分和 $\{A_k\}$：

$$A_1 = v_1$$

$$A_2 = v_1 + v_2$$

$$\vdots$$

$$A_k = v_1 + v_2 + \cdots + v_k$$

$$\vdots$$

性质 4 设 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i = s$，则

$$\underbrace{(u_1+\cdots+u_{n_1})}_{v_1}+\underbrace{(u_{n_1+1}+\cdots+u_{n_2})}_{v_2}+\cdots+\underbrace{(u_{n_{k-1}+1}+\cdots+u_{n_k})}_{v_k}+\cdots = s$$

即：加括号后的级数也收敛，并且值不改变。

证明 加括号后的级数，其部分和 $\{A_k\}$：

$$A_1 = v_1 = (u_1 + \cdots + u_{n_1})$$

$$A_2 = v_1 + v_2 = (u_1 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2})$$

$$\vdots$$

$$A_k = v_1 + v_2 + \cdots + v_k = (u_1 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}) + \cdots + (u_{n_{k-1}+1} + \cdots + u_{n_k})$$

$$\vdots$$

性质 4 设 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i = s$，则

$$\underbrace{(u_1+\cdots+u_{n_1})}_{v_1}+\underbrace{(u_{n_1+1}+\cdots+u_{n_2})}_{v_2}+\cdots+\underbrace{(u_{n_{k-1}+1}+\cdots+u_{n_k})}_{v_k}+\cdots = s$$

即：加括号后的级数也收敛，并且值不改变。

证明 加括号后的级数，其部分和 $\{A_k\}$：

$$A_1 = v_1 = (u_1 + \cdots + u_{n_1}) = s_{n_1},$$

$$A_2 = v_1 + v_2 = (u_1 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}) = s_{n_2},$$

$$\vdots$$

$$A_k = v_1 + v_2 + \cdots + v_k = (u_1 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}) + \cdots$$
$$+ (u_{n_{k-1}+1} + \cdots + u_{n_k}) = s_{n_k},$$

$$\vdots$$

性质 4 设 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i = s$，则

$$\underbrace{(u_1+\cdots+u_{n_1})}_{v_1}+\underbrace{(u_{n_1+1}+\cdots+u_{n_2})}_{v_2}+\cdots+\underbrace{(u_{n_{k-1}+1}+\cdots+u_{n_k})}_{v_k}+\cdots = s$$

即：加括号后的级数也收敛，并且值不改变。

证明 加括号后的级数，其部分和 $\{A_k\}$：

$$A_1 = v_1 = (u_1+\cdots+u_{n_1}) = s_{n_1},$$

$$A_2 = v_1+v_2 = (u_1+\cdots+u_{n_1})+(u_{n_1+1}+\cdots+u_{n_2}) = s_{n_2},$$

$$\vdots$$

$$A_k = v_1+v_2+\cdots+v_k = (u_1+\cdots+u_{n_1})+(u_{n_1+1}+\cdots+u_{n_2})+\cdots$$
$$+(u_{n_{k-1}+1}+\cdots+u_{n_k}) = s_{n_k},$$

正好是原级数部分和 $\{s_n\}$ 的子列 $\{s_{n_k}\}$。

性质 4 设 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i = s$，则

$$\underbrace{(u_1+\cdots+u_{n_1})}_{v_1}+\underbrace{(u_{n_1+1}+\cdots+u_{n_2})}_{v_2}+\cdots+\underbrace{(u_{n_{k-1}+1}+\cdots+u_{n_k})}_{v_k}+\cdots = s$$

即：加括号后的级数也收敛，并且值不改变。

证明 加括号后的级数，其部分和 $\{A_k\}$：

$$A_1 = v_1 = (u_1 + \cdots + u_{n_1}) = s_{n_1},$$

$$A_2 = v_2 + v_2 = (u_1 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}) = s_{n_2},$$

$$\vdots$$

$$A_k = v_1 + v_2 + \cdots + v_k = (u_1 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}) + \cdots$$
$$+ (u_{n_{k-1}+1} + \cdots + u_{n_k}) = s_{n_k},$$

正好是原级数部分和 $\{s_n\}$ 的子列 $\{s_{n_k}\}$。因为 $\lim_{k\to\infty} s_{n_k} = \lim_{n\to\infty} s_n = s$，所以加括号后的级数也是收敛，并且值为 s。

例 对级数 $1-1+1-1+\cdots$ 按如下两种方式加括号再运算：

$$1-1+1-1+1-1+\cdots=(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$$

及

$$1-1+1-1+1-1+\cdots=1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)\cdots$$

判断以上计算是否有问题？

例 对级数 $1-1+1-1+\cdots$ 按如下两种方式加括号再运算：

$$
\begin{aligned}
1-1+1-1+1-1+\cdots &= (1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots \\
&= 0+0+0+\cdots
\end{aligned}
$$

及

$$1-1+1-1+1-1+\cdots = 1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)\cdots$$

判断以上计算是否有问题？

例 对级数 $1-1+1-1+\cdots$ 按如下两种方式加括号再运算：

$$1-1+1-1+1-1+\cdots=(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$$
$$=0+0+0+\cdots=0$$

及

$$1-1+1-1+1-1+\cdots=1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)\cdots$$

判断以上计算是否有问题？

例 对级数 $1-1+1-1+\cdots$ 按如下两种方式加括号再运算:

$$
\begin{aligned}
1-1+1-1+1-1+\cdots &= (1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots \\
&= 0+0+0+\cdots = 0
\end{aligned}
$$

及

$$
\begin{aligned}
1-1+1-1+1-1+\cdots &= 1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)\cdots \\
&= 1+0+0+0+\cdots
\end{aligned}
$$

判断以上计算是否有问题?

例 对级数 $1-1+1-1+\cdots$ 按如下两种方式加括号再运算：

$$\begin{aligned}1-1+1-1+1-1+\cdots &= (1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots\\ &= 0+0+0+\cdots = 0\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}1-1+1-1+1-1+\cdots &= 1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)\cdots\\ &= 1+0+0+0+\cdots = 1\end{aligned}$$

判断以上计算是否有问题？

例 对级数 $1-1+1-1+\cdots$ 按如下两种方式加括号再运算：

$$1-1+1-1+1-1+\cdots=(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$$
$$=0+0+0+\cdots=0$$

及

$$1-1+1-1+1-1+\cdots=1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)\cdots$$
$$=1+0+0+0+\cdots=1$$

判断以上计算是否有问题？

出错原因：原级数 $1-1+1-1+\cdots$ 不收敛，不能随意加（无穷多个）括号！

性质 5（收敛的必要条件） 若 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$。

性质 5（收敛的必要条件） 若 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$。

证明 这是

$$\lim_{n\to\infty} u_n =$$

性质 5（收敛的必要条件） 若 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$。

证明 这是

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) =$$

性质 5（收敛的必要条件） 若 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$。

证明 这是

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} =$$

性质 5（收敛的必要条件） 若 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$。

证明 这是

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

性质 5（收敛的必要条件） 若 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$。

证明 这是

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

例

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n$ 发散

性质 5（收敛的必要条件） 若 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$。

证明 这是

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

例

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n$ 发散，这是 $n \not\to 0$。

性质 5（收敛的必要条件） 若 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$。

证明 这是

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

例

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n$ 发散，这是 $n \not\to 0$。
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n+1}$

性质 5（收敛的必要条件） 若 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$。

证明 这是

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

例

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n$ 发散，这是 $n \not\to 0$。
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n+1}$ 发散，这是 $(-1)^{n-1} \frac{n}{n+1} \not\to 0$。

性质 5（收敛的必要条件） 若 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$。

证明 这是

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

例

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n$ 发散，这是 $n \not\to 0$。
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}$ 发散，这是 $(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1} \not\to 0$。

注 但 $\lim_{n\to 0} u_n = 0$ 不一定保证级数收敛，

性质 5（收敛的必要条件） 若 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$。

证明 这是

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

例

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n$ 发散，这是 $n \not\to 0$。
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}$ 发散，这是 $(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1} \not\to 0$。

注 但 $\lim\limits_{n\to 0} u_n = 0$ 不一定保证级数收敛，例如：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0, \quad 但 \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty.$$