第 13 周作业解答

练习 1. 已知对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，求正交矩阵 Q，使得 Q^TAQ 为对角矩阵。

解

- 解特征方程 $|\lambda I - A| = 0$。

$$
\begin{aligned}
|\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda & -2 \\ -4 & -2 & \lambda-3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3-2r_2} \begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda & -2 \\ 0 & -2\lambda-2 & \lambda+1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda+1)\begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2+2c_3} (\lambda+1)\begin{vmatrix} \lambda-3 & -10 & -4 \\ -2 & \lambda-4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda+1)\begin{vmatrix} \lambda-3 & -10 \\ -2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda^2-7\lambda-8) = (\lambda+1)^2(\lambda-8)
\end{aligned}
$$

  所以特征值为 $\lambda_1 = -1$（二重特征值），$\lambda_2 = 8$。

- 关于特征值 $\lambda_1 = -1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$。

$$
(-I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & -4 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \\ -4 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

  同解方程组为

$$
2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = -2x_1 - 2x_3
$$

  自由变量取为 x_1, x_3。分别取 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，得基础解系

$$
\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.
$$

  - 下面将 α_1, α_2 正交化：

$$
\begin{aligned}
\beta_1 &= \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\beta_2 &= \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T\beta_1}{\beta_1^T\beta_1}\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

  - 下面将 β_1, β_2 单位化：

$$
\gamma_1 = \frac{1}{||\beta_1||}\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{||\beta_2||}\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{45}}\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}
$$

- 关于特征值 $\lambda_2 = 8$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$。

$$(8I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -4 & 0 \\ -2 & 8 & -2 & 0 \\ -4 & -2 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{-\frac{1}{3}\times r_2 \\ -\frac{1}{6}\times r_3}]{-\frac{1}{2}\times r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -4 & 0 \\ -4 & -2 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3+4r_1]{r_2-5r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 18 & -9 & 0 \\ 0 & -18 & 9 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1+r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(-1)\times r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ x_3 = 2x_2 \end{cases}$$

自由变量取为 x_2。取 $x_2 = 1$，得基础解系

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

  – 将 α_3 单位化得:

$$\gamma_3 = \frac{1}{||\alpha_3||}\alpha_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- 令

$$Q = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \end{array}$$

则 Q 为正交矩阵，且

$$Q^T A Q = Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 8 \end{pmatrix}.$$

注. Q 的选取不唯一。

练习 2. 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 1$，对应的特征向量分别为 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$。求 A。

解由题意知, A 有 3 个线性无关特征向量, 故 A 可对角化。令 $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$,

则 $P^{-1}AP=\Lambda$。所以 $A=P\Lambda P^{-1}$。先求 P^{-1}：

$$(P\vdots I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&1&1&1&0&0\\1&1&1&0&1&0\\1&1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&0&1&0\\0&1&1&1&0&0\\1&1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&0&1&0\\0&1&1&1&0&0\\0&0&-1&0&-1&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(-1)\times r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&0&1&0\\0&1&1&1&0&0\\0&0&1&0&1&-1\end{array}\right)\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1-r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&0&0&1\\0&1&0&1&-1&1\\0&0&1&0&1&-1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1-r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&1&0\\0&1&0&1&-1&1\\0&0&1&0&1&-1\end{array}\right).$$

所以 $P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$。所以

$$A=P\Lambda P^{-1}=\begin{pmatrix}-2&3&-3\\-4&5&-3\\-4&-4&-2\end{pmatrix}.$$

练习 3. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix}$ 和 $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&4\\0&-2&y\end{pmatrix}$ 相似，求 x,y 的值。

解因为 A 和 B 相似，所以 A 和 B 具有相同特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$。所以

$$\begin{vmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&3&4\\0&-2&y\end{vmatrix},\qquad 2+0+x=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2+3+y.$$

化简可得：

$$-2=2(3y+8),\qquad 2+x=5+y.$$

所以 $x=0,y=-3$。

练习 4. 写出二次型 $f=x_1^2+x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2-x_1x_3+2x_2x_3$ 所对应的矩阵。

解

$$\begin{pmatrix}1&2&-\frac{1}{2}\\2&1&1\\-\frac{1}{2}&1&3\end{pmatrix}$$

练习 5. 用配方法求以下二次型的标准型，写出所做的非退化线性变量代换 $y=Cx$ 是什么，并指出正、负惯性指标是多少。

1. $f=x_1^2+x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$
2. $f=x_1^2-3x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$

解

1.

$$\begin{aligned}
f &= x_1^2+2x_1(2x_2+x_3)+x_2^2+3x_3^2+2x_2x_3\\
&= x_1^2+2x_1(2x_2+x_3)+x_2^2+3x_3^2+2x_2x_3\\
&= x_1^2+2x_1(2x_2+x_3)+(2x_2+x_3)^2-(2x_2+x_3)^2+x_2^2+3x_3^2+2x_2x_3\\
&= (x_1+2x_2+x_3)^2-3x_2^2-2x_2x_3+2x_3^2\\
&= (x_1+2x_2+x_3)^2-3\left[x_2^2+2\cdot x_2\cdot\frac{1}{3}x_3\right]+2x_3^2\\
&= (x_1+2x_2+x_3)^2-3\left[x_2^2+2\cdot x_2\cdot\frac{1}{3}x_3+\left(\frac{1}{3}x_3\right)^2\right]+\frac{1}{3}x_3^2+2x_3^2\\
&= (x_1+2x_2+x_3)^2-3\left(x_2+\frac{1}{3}x_3\right)^2+\frac{7}{3}x_3^2.
\end{aligned}$$

令

$$\left\{\begin{array}{l} y_1=x_1+2x_2+\ \ x_3\\ y_2=\qquad\quad x_2+\frac{1}{3}x_3\\ y_3=\qquad\qquad\quad\ x_3\end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} x_1=y_1-2y_2-\frac{1}{3}y_3\\ x_2=\qquad\quad y_2-\frac{1}{3}y_3\\ x_3=\qquad\qquad\quad\ y_3\end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad x=\begin{pmatrix}1&-2&-\frac{1}{3}\\0&1&-\frac{1}{3}\\0&0&1\end{pmatrix}y=Cy$$

则 $|C|=1\neq 0$（说明为非退化线性变换），且

$$f=y_1^2-3y_2^2+\frac{7}{3}y_3^2.$$

正惯性指标为 2，负惯性指标为 1。

2.

$$\begin{aligned}
f &= x_1^2-3x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3\\
&= x_1^2+2x_1(-x_2+x_3)-3x_3^2-6x_2x_3\\
&= x_1^2+2x_1(-x_2+x_3)+(-x_2+x_3)^2-(-x_2+x_3)^2-3x_3^2-6x_2x_3\\
&= (x_1-x_2+x_3)^2-x_2^2-4x_2x_3-4x_3^2\\
&= (x_1-x_2+x_3)^2-(x_2+2x_3)^2
\end{aligned}$$

令

$$\left\{\begin{array}{l} y_1=x_1-x_2+\ \ x_3\\ y_2=\qquad\ x_2+2x_3\\ y_3=\qquad\qquad\ \ x_3\end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} x_1=y_1+y_2-3y_3\\ x_2=\qquad y_2-2y_3\\ x_3=\qquad\qquad\ y_3\end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad x=\begin{pmatrix}1&1&-3\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}y=Cy$$

则 $|C|=1\neq 0$（说明为非退化线性变换）

$$f=y_1^2-y_2^2.$$

正惯性指标为 1，负惯性指标为 -1。

注. 标准型不唯一。