第 5 章 α：二次型与对称矩阵

数学系　梁卓滨

2019-2020 学年 I

本节内容

- ◇ 二次型，二次型与对称矩阵一一对应
- ♣ 二次型的标准型、规范型
- ♡ 矩阵的合同关系

二次型：引例

$$(x_1, x_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

$$(x_1, x_2)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}}_{\text{对称矩阵}A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

$$(x_1, x_2)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}}_{\text{对称矩阵}A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{x}$$

二次型：引例

$$x^T A x = (x_1, x_2)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}}_{\text{对称矩阵}A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{x}$$

二次型：引例

$$x^T A x = (x_1, x_2)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}}_{\text{对称矩阵} A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{x} = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

二次型：引例

$$x^TAx = (x_1, x_2)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}}_{\text{对称矩阵}A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2}_{2\text{ 元 }2\text{ 次齐次多项式}}$$

二次型：引例

$$x^T A x = (x_1, x_2)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}}_{\text{对称矩阵}A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2}_{2\text{ 元 }2\text{ 次齐次多项式}}$$

一一对应

二次型：引例

$$x^TAx = (x_1, x_2)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}}_{\text{对称矩阵}A}\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2}_{\text{2 元 2 次齐次多项式}}$$

一一对应

$$A \mapsto x^TAx$$

二次型：引例

$$x^TAx = (x_1, x_2)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}}_{\text{对称矩阵}A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2}_{2\text{ 元 }2\text{ 次齐次多项式}}$$

一一对应

$$A \mapsto x^TAx$$

例

(1) 设 $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$，则

$$x^TAx = \underline{\hspace{2em}}\,x_1^2 + \underline{\hspace{3em}}\,x_1x_2 + \underline{\hspace{3em}}\,x_2^2$$

二次型：引例

$$x^T A x = (x_1, x_2)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}}_{\text{对称矩阵}A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2}_{2\text{ 元 }2\text{ 次齐次多项式}}$$

一一对应

$$A \mapsto x^T A x$$

例

(1) 设 $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$，则

$$x^T A x = \_\_\_ x_1^2 + 2\cdot\_\_\_ x_1x_2 + \_\_\_\_ x_2^2$$

二次型：引例

$$x^TAx=(x_1,x_2)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}}_{\text{对称矩阵}A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix}}_{x}=\underbrace{a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2}_{2\text{ 元 }2\text{ 次齐次多项式}}$$

一一对应

$$A\mapsto x^TAx$$

例

(1) 设 $A=\begin{pmatrix} 6 & 4\\ 4 & -2\end{pmatrix}$，则

$$x^TAx=\underline{\ 6\ }x_1^2+\underline{2\cdot\quad}x_1x_2+\underline{\qquad}x_2^2$$

二次型：引例

$$x^TAx = (x_1, x_2)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}}_{\text{对称矩阵}A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2}_{2\text{ 元 }2\text{ 次齐次多项式}}$$

一一对应

$$A \mapsto x^TAx$$

例

(1) 设 $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$，则

$$x^TAx = \underline{\ \ 6}\,x_1^2 + \underline{2\cdot\ \ \ \ }\,x_1x_2 + \underline{-2}\,x_2^2$$

二次型：引例

$$x^TAx = (x_1, x_2)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}}_{\text{对称矩阵}\,A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2}_{\text{2 元 2 次齐次多项式}}$$

一一对应

$$A \mapsto x^TAx$$

例

(1) 设 $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$，则

$$x^TAx = \underline{\quad 6}x_1^2 + \underline{2 \cdot 4}x_1x_2 + \underline{-2}x_2^2$$

二次型：引例

$$x^TAx = (x_1, x_2)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}}_{\text{对称矩阵}A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2}_{\text{2 元 2 次齐次多项式}}$$

——对应

$$A \mapsto x^TAx$$

例

(1) 设 $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$，则

$$x^TAx = \underline{\ 6}x_1^2 + \underline{2 \cdot 4}x_1x_2 + \underline{-2}x_2^2 = 6x_1^2 + 8x_1x_2 - 2x_2^2$$

二次型：引例

$$x^T A x = (x_1, x_2)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}}_{\text{对称矩阵}A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2}_{2\text{ 元 }2\text{ 次齐次多项式}}$$

一一对应

$$A \mapsto x^T A x$$

例

(1) 设 $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$，则

$$x^T A x = \underline{\ \ 6}\,x_1^2 + \underline{2\cdot 4}\,x_1x_2 + \underline{-2}\,x_2^2 = 6x_1^2 + 8x_1x_2 - 2x_2^2$$

(2) $-3x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 =$

二次型：引例

$$x^TAx=(x_1,x_2)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}}_{\text{对称矩阵}A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{x}=\underbrace{a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2}_{2\text{ 元 }2\text{ 次齐次多项式}}$$

一一对应

$$A\mapsto x^TAx$$

例

(1) 设 $A=\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$，则

$$x^TAx=\underline{6}x_1^2+\underline{2\cdot 4}x_1x_2+\underline{-2}x_2^2=6x_1^2+8x_1x_2-2x_2^2$$

(2) $-3x_1^2+2x_1x_2+5x_2^2=(x_1,x_2)\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

二次型：引例

$$x^TAx = (x_1, x_2)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}}_{\text{对称矩阵}A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2}_{2\text{ 元 }2\text{ 次齐次多项式}}$$

一一对应

$$A \mapsto x^TAx$$

例

(1) 设 $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$，则

$$x^TAx = \underline{\ 6\ }x_1^2 + \underline{2\cdot 4}x_1x_2 + \underline{-2}x_2^2 = 6x_1^2 + 8x_1x_2 - 2x_2^2$$

(2) $-3x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} -3 & \\ & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

二次型：引例

$$x^TAx=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{12}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2$$

对称矩阵 A　　x　　2 元 2 次齐次多项式

一一对应

$A\mapsto x^TAx$

例

(1) 设 $A=\begin{pmatrix}6&4\\4&-2\end{pmatrix}$，则

$$x^TAx=\underline{\ \ 6}x_1^2+\underline{2\cdot 4}x_1x_2+\underline{-2}x_2^2=6x_1^2+8x_1x_2-2x_2^2$$

(2) $-3x_1^2+2x_1x_2+5x_2^2=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}-3&1\\1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$

二次型：引例

$$(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

$$(x_1, x_2, x_3)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{\text{对称矩阵}A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

$$(x_1, x_2, x_3)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{\text{对称矩阵}A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x}$$

二次型：引例

$$x^T A x = (x_1, x_2, x_3)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{\text{对称矩阵}A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x}$$

二次型：引例

$$x^T A x = (x_1, x_2, x_3) \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{\text{对称矩阵} A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x}$$

$$= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2$$
$$+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$$

二次型：引例

$$x^TAx = (x_1, x_2, x_3)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{\text{对称矩阵}A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x}$$

$$= \underbrace{a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3}_{3\text{ 元 }2\text{ 次齐次多项式}}$$

二次型：引例

$$x^TAx = (x_1, x_2, x_3)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{\text{对称矩阵}A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x}$$

一一对应

$$\underbrace{\begin{aligned} &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 \\ &\quad + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 \end{aligned}}_{3\text{ 元 }2\text{ 次齐次多项式}}$$

二次型：引例

$$x^TAx=(x_1,x_2,x_3)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{\text{对称矩阵}A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x}$$

一一对应

$A \mapsto x^TAx$

$$\begin{aligned} &= a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2 \\ &\quad \underbrace{+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3}_{\text{3 元 2 次齐次多项式}} \end{aligned}$$

二次型：引例

$$x^T A x = (x_1, x_2, x_3) \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{\text{对称矩阵 } A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x}$$

一一对应
$A \mapsto x^T A x$

$$= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2$$
$$+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$$

3 元 2 次齐次多项式

例 1

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$，则

$$x^T A x =$$

二次型：引例

$$x^TAx=(x_1,x_2,x_3)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}}_{\text{对称矩阵}A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}}_{x}$$

一一对应
$A\mapsto x^TAx$

$$\begin{aligned}&=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2\\ &\underbrace{\quad+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3}_{\text{3 元 2 次齐次多项式}}\end{aligned}$$

例 1

设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0\\ -2 & 0 & -1\\ 0 & -1 & -3\end{pmatrix}$，则

$$x^TAx=\quad x_1^2\qquad x_2^2\qquad x_3^2\qquad x_1x_2\qquad x_1x_2\qquad x_2x_3$$

二次型：引例

$$x^TAx = (x_1, x_2, x_3)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{\text{对称矩阵}A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x}$$

一一对应

$A \mapsto x^TAx$

$$\begin{aligned} &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 \\ &\quad \underbrace{+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3}_{\text{3 元 2 次齐次多项式}} \end{aligned}$$

例 1

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$，则

$$x^TAx = 1x_1^2 + 0x_2^2 - 3x_3^2 \qquad x_1x_2 \qquad x_1x_2 \qquad x_2x_3$$

二次型：引例

$$x^TAx=(x_1,x_2,x_3)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}}_{\text{对称矩阵}A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}}_{x}$$

一一对应
$A \mapsto x^TAx$

$$\begin{aligned}&= a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2\\ &\underbrace{+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3}_{\text{3 元 2 次齐次多项式}}\end{aligned}$$

例 1

设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0\\ -2 & 0 & -1\\ 0 & -1 & -3\end{pmatrix}$，则

$$x^TAx=1x_1^2+0x_2^2-3x_3^2-4x_1x_2 \qquad x_1x_2 \qquad x_2x_3$$

二次型：引例

$$x^TAx = (x_1, x_2, x_3)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{\text{对称矩阵}A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x}$$

$$= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2$$

$$\underbrace{+\, 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3}_{3\text{ 元 }2\text{ 次齐次多项式}}$$

一一对应
$A \mapsto x^TAx$

例 1

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$，则

$$x^TAx = 1x_1^2 + 0x_2^2 - 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 0x_1x_2 \qquad x_2x_3$$

二次型：引例

$$x^TAx=(x_1,x_2,x_3)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{\text{对称矩阵}A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x}$$

一一对应
$A \mapsto x^TAx$

$$\underbrace{\begin{aligned} &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 \\ &\quad + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 \end{aligned}}_{3\text{ 元 }2\text{ 次齐次多项式}}$$

例 1

设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$，则

$$x^TAx = 1x_1^2 + 0x_2^2 - 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 0x_1x_2 - 2x_2x_3$$

二次型：引例

$$x^TAx = (x_1, x_2, x_3)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{\text{对称矩阵}A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x}$$

一一对应

$A \mapsto x^TAx$

$$\underbrace{\begin{aligned} &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 \\ &\quad + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 \end{aligned}}_{3\text{ 元 }2\text{ 次齐次多项式}}$$

例 2

$$x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_3^2 - 2x_2x_3$$

二次型：引例

$$x^TAx = (x_1, x_2, x_3)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{\text{对称矩阵 } A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x}$$

一一对应
$A \mapsto x^TAx$

$$\begin{aligned} &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 \\ &\underbrace{\quad + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3}_{3\text{ 元 } 2 \text{ 次齐次多项式}} \end{aligned}$$

例 2

$$x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_3^2 - 2x_2x_3 = (x_1,\ x_2,\ x_3)\begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

$$x^TAx = (x_1, x_2, x_3)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{\text{对称矩阵} A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x}$$

$$= \underbrace{a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3}_{3\text{ 元 }2\text{ 次齐次多项式}}$$

一一对应

$A \mapsto x^TAx$

例 2

$$x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_3^2 - 2x_2x_3 = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

$$x^TAx = (x_1, x_2, x_3)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{\text{对称矩阵}\, A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x}$$

一一对应
$A \mapsto x^TAx$

$$\begin{aligned} &= \underbrace{a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 \\ &\quad + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3}_{3\text{ 元 }2\text{ 次齐次多项式}} \end{aligned}$$

例 2

$$x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_3^2 - 2x_2x_3 = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \\ & 0 & \\ & & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

$$x^TAx = (x_1, x_2, x_3)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{\text{对称矩阵} A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x}$$

一一对应

$A \mapsto x^TAx$

$$\underbrace{= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3}_{3 \text{ 元 } 2 \text{ 次齐次多项式}}$$

例 2

$$x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_3^2 - 2x_2x_3 = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ & 0 & \\ & & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

$$x^TAx = (x_1, x_2, x_3)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{\text{对称矩阵}A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x}$$

一一对应

$A \mapsto x^TAx$

$$\underbrace{\begin{aligned} &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 \\ &\quad + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 \end{aligned}}_{3\text{ 元 }2\text{ 次齐次多项式}}$$

例 2

$$x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_3^2 - 2x_2x_3 = (x_1,\, x_2,\, x_3)\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ & 0 & -1 \\ & & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

$$x^TAx = (x_1, x_2, x_3)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{\text{对称矩阵}A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x}$$

$$\begin{aligned} &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 \\ &\quad \underbrace{+\, 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3}_{3\text{元}2\text{次齐次多项式}} \end{aligned}$$

一一对应
$A \mapsto x^TAx$

例 2

$$x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_3^2 - 2x_2x_3 = (x_1,\, x_2,\, x_3)\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

例 3 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

二次型：引例

例 3 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

例 4 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$=$$

二次型：引例

例 3 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

例 4 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$=$$

二次型：引例

例 3 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$x_1^2+x_1x_2+3x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$$

$$=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 1 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

例 4 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$=$$

二次型：引例

例 3 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$x_1^2+x_1x_2+3x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$$

$$=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

例 4 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}-1 & 1 & \frac{1}{2}\\ 1 & 2 & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$=$$

二次型：引例

例 3 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

例 4 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$=$$

二次型：引例

例 3 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$x_1^2+x_1x_2+3x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$$

$$=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \\ & 2 & \\ & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

例 4 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}-1 & 1 & \frac{1}{2}\\ 1 & 2 & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$=$$

二次型：引例

例 3 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

例 4 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$=$$

二次型：引例

例 3 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ & 2 & 2 \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

例 4 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$=$$

二次型：引例

例 3 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$x_1^2+x_1x_2+3x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$$

$$=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

例 4 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$=$$

二次型：引例

例 3 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

例 4 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\qquad} x_1^2 + \underline{\quad} x_2^2 + \underline{\quad} x_3^2 + 2\underline{\qquad} x_1x_2 + 2\underline{\qquad} x_1x_3 + 2\underline{\qquad} x_2x_3$$

二次型：引例

例 3 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$x_1^2+x_1x_2+3x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$$

$$=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2}&2&2\\ \frac{3}{2}&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

例 4 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}-1&1&\frac{1}{2}\\ 1&2&0\\ \frac{1}{2}&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

$$=\underline{-1}x_1^2+\underline{\ \ }x_2^2+\underline{\ \ }x_3^2+2\underline{\qquad}x_1x_2+2\underline{\qquad}x_1x_3+2\underline{\qquad}x_2x_3$$

二次型：引例

例 3 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

例 4 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{-1}x_1^2 + \underline{2}x_2^2 + \underline{\ \ }x_3^2 + 2\underline{\qquad}x_1x_2 + 2\underline{\qquad}x_1x_3 + 2\underline{\qquad}x_2x_3$$

二次型：引例

例 3 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

例 4 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{-1}x_1^2 + \underline{2}x_2^2 + \underline{0}x_3^2 + 2\underline{\qquad}x_1x_2 + 2\underline{\qquad}x_1x_3 + 2\underline{\qquad}x_2x_3$$

二次型：引例

例 3 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

例 4 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{-1}x_1^2 + \underline{2}x_2^2 + \underline{0}x_3^2 + 2\underline{\cdot 1 \cdot}x_1x_2 + 2\underline{\qquad}x_1x_3 + 2\underline{\qquad}x_2x_3$$

二次型：引例

例 3 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

例 4 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{-1}x_1^2 + \underline{2}x_2^2 + \underline{0}x_3^2 + 2\underline{\cdot 1 \cdot}x_1x_2 + 2\cdot\underline{\frac{1}{2}}\cdot x_1x_3 + 2\underline{\qquad}x_2x_3$$

二次型：引例

例 3 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

例 4 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{-1}x_1^2 + \underline{2}x_2^2 + \underline{0}x_3^2 + 2\underline{\cdot 1 \cdot}x_1x_2 + 2\underline{\cdot \frac{1}{2} \cdot}x_1x_3 + 2\underline{\cdot 0 \cdot}x_2x_3$$

二次型：引例

例 3 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

例 4 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{-1}x_1^2 + \underline{2}x_2^2 + \underline{0}x_3^2 + 2\underline{\cdot 1 \cdot}x_1x_2 + 2\cdot\underline{\frac{1}{2}}\cdot x_1x_3 + 2\underline{\cdot 0 \cdot}x_2x_3$$

$$= -x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_3 + x_1x_3$$

二次型

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

二次型

$$(x_1,x_2,\dots,x_n)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{对称矩阵}A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

二次型

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{对称矩阵}A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x}$$

二次型

$$x^T A x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{对称矩阵} A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x}$$

二次型

$$x^T A x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{对称矩阵} A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x}$$

$$\begin{aligned} &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\ &\quad + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{1n}x_1x_n + \cdots \\ &\quad \cdots + 2a_{ij}x_ix_j + \cdots + 2a_{n-1n}x_{n-1}x_n \end{aligned}$$

二次型

$$x^TAx = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{对称矩阵}A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x}$$

$$\underbrace{\begin{aligned} &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\ &\quad + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{1n}x_1x_n + \cdots \\ &\quad\quad \cdots + 2a_{ij}x_ix_j + \cdots + 2a_{n-1n}x_{n-1}x_n \end{aligned}}_{n\text{ 元 2 次齐次多项式}}$$

二次型

$$x^TAx = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{对称矩阵} A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x}$$

一一对应

$$\begin{aligned} &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\ &\quad + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{1n}x_1x_n + \cdots \\ &\quad \underbrace{\cdots + 2a_{ij}x_ix_j + \cdots + 2a_{n-1n}x_{n-1}x_n}_{n \text{ 元 } 2 \text{ 次齐次多项式}} \end{aligned}$$

二次型

$$x^TAx = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{对称矩阵}\,A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x}$$

一一对应

$A \mapsto x^TAx$

$$\begin{aligned} &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\ &\quad + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{1n}x_1x_n + \cdots \\ &\quad \cdots + 2a_{ij}x_ix_j + \cdots + 2a_{n-1n}x_{n-1}x_n \end{aligned}$$

n 元 2 次齐次多项式

二次型

$$x^TAx = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{对称矩阵}\,A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x}$$

$$= \underbrace{a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{1n}x_1x_n + \cdots + 2a_{ij}x_ix_j + \cdots + 2a_{n-1n}x_{n-1}x_n}_{n\text{ 元 2 次齐次多项式}\qquad\text{二次型}}$$

一一对应

$A \mapsto x^TAx$

二次型

$$x^TAx = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{对称矩阵} A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x}$$

$$\begin{aligned} &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\ &\quad + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{1n}x_1x_n + \cdots \\ &\quad \cdots + 2a_{ij}x_ix_j + \cdots + 2a_{n-1n}x_{n-1}x_n \end{aligned}$$

n 元 2 次齐次多项式　　二次型

一一对应
$A \mapsto x^TAx$

注 二次型也记作 $f(x) = x^TAx$ 或 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x^TAx$.

给定二次型

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\ & + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{1n}x_1x_n + \cdots \\ & \cdots + 2a_{ij}x_ix_j + \cdots + 2a_{n-1n}x_{n-1}x_n \end{aligned}$$

给定二次型

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\
& + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{1n}x_1x_n + \cdots \\
& \cdots + 2a_{ij}x_ix_j + \cdots + 2a_{n-1n}x_{n-1}x_n
\end{aligned}
$$

作线性变量代换：

$$
\begin{cases}
x_1 = c_{11}y_1 + \cdots + c_{1n}y_n \\
\vdots \\
x_n = c_{n1}y_1 + \cdots + c_{nn}y_n
\end{cases}
$$

给定二次型

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2, \ldots, x_n) =& a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\ &+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{1n}x_1x_n + \cdots \\ &\cdots + 2a_{ij}x_ix_j + \cdots + 2a_{n-1n}x_{n-1}x_n\end{aligned}$$

作线性变量代换：

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + \cdots + c_{1n}y_n \\ \vdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

代入二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 得

$$f = b_{11}y_1^2 + \cdots + b_{nn}y_n^2 + 2b_{12}y_1y_2 + \cdots$$

给定二次型

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2$$
$$+2a_{12}x_1x_2+2a_{1n}x_1x_n+\cdots$$
$$\cdots+2a_{ij}x_ix_j+\cdots+2a_{n-1n}x_{n-1}x_n$$

作线性变量代换：

$$\begin{cases} x_1=c_{11}y_1+\cdots+c_{1n}y_n \\ \vdots \\ x_n=c_{n1}y_1+\cdots+c_{nn}y_n \end{cases}$$

代入二次型 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 得　　关于$y_1,\cdots,y_n$ 的二次型

$$f=b_{11}y_1^2+\cdots+b_{nn}y_n^2+2b_{12}y_1y_2+\cdots$$

给定二次型

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\ + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{1n}x_1x_n + \cdots \\ \cdots + 2a_{ij}x_ix_j + \cdots + 2a_{n-1n}x_{n-1}x_n$$

作线性变量代换:

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + \cdots + c_{1n}y_n \\ \vdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

代入二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 得　　　关于$y_1, \cdots, y_n$ 的二次型

$$f = b_{11}y_1^2 + \cdots + b_{nn}y_n^2 + 2b_{12}y_1y_2 + \cdots$$

问题： 如何选择适当的变量代换 $y_1, y_2, \cdots, y_n$，把 f 化简?

给定二次型

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{1n}x_1x_n + \cdots \cdots + 2a_{ij}x_ix_j + \cdots + 2a_{n-1n}x_{n-1}x_n$$

作线性变量代换：

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + \cdots + c_{1n}y_n \\ \vdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

代入二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 得 关于$y_1, \cdots, y_n$ 的二次型

$$f = b_{11}y_1^2 + \cdots + b_{nn}y_n^2 + 2b_{12}y_1y_2 + \cdots$$

问题： 如何选择适当的变量代换 $y_1, y_2, \cdots, y_n$，把 f 化简?

关键 要知道 (a_{ij}) 与 (b_{ij}) 的关系.

给定二次型

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{1n}x_1x_n + \cdots \cdots + 2a_{ij}x_ix_j + \cdots + 2a_{n-1n}x_{n-1}x_n$$

作线性变量代换：（要求 $C = (c_{ij})$ 可逆，可反解出 y ）

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + \cdots + c_{1n}y_n \\ \vdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

代入二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 得 关于 $y_1, \cdots, y_n$ 的二次型

$$f = b_{11}y_1^2 + \cdots + b_{nn}y_n^2 + 2b_{12}y_1y_2 + \cdots$$

问题：如何选择适当的变量代换 $y_1, y_2, \cdots, y_n$，把 f 化简?

关键 要知道 (a_{ij}) 与 (b_{ij}) 的关系.

给定二次型

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2+2a_{1n}x_1x_n+\cdots \cdots+2a_{ij}x_ix_j+\cdots+2a_{n-1n}x_{n-1}x_n$$

作线性变量代换：（要求 $C=(c_{ij})$ 可逆，可反解出 y ）

$$\begin{cases} x_1=c_{11}y_1+\cdots+c_{1n}y_n \\ \vdots \\ x_n=c_{n1}y_1+\cdots+c_{nn}y_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

代入二次型 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 得　　关于$y_1,\cdots,y_n$ 的二次型

$$f=b_{11}y_1^2+\cdots+b_{nn}y_n^2+2b_{12}y_1y_2+\cdots$$

问题：如何选择适当的变量代换 $y_1,y_2,\cdots,y_n$，把 f 化简?

关键 要知道 (a_{ij}) 与 (b_{ij}) 的关系.

给定二次型

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2$$
$$+2a_{12}x_1x_2+2a_{1n}x_1x_n+\cdots$$
$$\cdots+2a_{ij}x_ix_j+\cdots+2a_{n-1n}x_{n-1}x_n$$

作线性变量代换：（要求 $C=(c_{ij})$ 可逆，可反解出 y ）

$$\begin{cases} x_1=c_{11}y_1+\cdots+c_{1n}y_n \\ \vdots \\ x_n=c_{n1}y_1+\cdots+c_{nn}y_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x=Cy$$

代入二次型 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 得 关于$y_1,\cdots,y_n$ 的二次型

$$f=b_{11}y_1^2+\cdots+b_{nn}y_n^2+2b_{12}y_1y_2+\cdots$$

问题：如何选择适当的变量代换 $y_1,y_2,\cdots,y_n$，把 f 化简?

关键 要知道 (a_{ij}) 与 (b_{ij}) 的关系.

给定二次型

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) =& a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\
& + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{1n}x_1x_n + \cdots \\
& \cdots + 2a_{ij}x_ix_j + \cdots + 2a_{n-1n}x_{n-1}x_n
\end{aligned}
$$

作线性变量代换：（要求 $C = (c_{ij})$ 可逆，可反解出 $y = C^{-1}x$）

$$
\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + \cdots + c_{1n}y_n \\ \vdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}
$$

$$
\Leftrightarrow x = Cy
$$

代入二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 得　　　关于$y_1, \cdots, y_n$ 的二次型

$$
f = b_{11}y_1^2 + \cdots + b_{nn}y_n^2 + 2b_{12}y_1y_2 + \cdots
$$

问题：如何选择适当的变量代换 $y_1, y_2, \cdots, y_n$，把 f 化简?

关键 要知道 (a_{ij}) 与 (b_{ij}) 的关系.

$$f = x^T A x$$

$$f = x^T A x \xlongequal{x=Cy}$$

$$f = x^T A x \xlongequal{x=Cy} (Cy)^T A (Cy)$$

$$f = x^T A x \xlongequal{x=Cy} (Cy)^T A (Cy) = y^T\ C^T$$

$$f = x^T A x \xlongequal{x=Cy} (Cy)^T A (Cy) = y^T\, C^T A C\, y$$

$$f = x^T A x \xlongequal{x=Cy} (Cy)^T A (Cy) = y^T \boxed{C^T A C} y$$

注

- 作变量代换 $x = Cy$ 后，二次型的系数矩阵 $A \rightarrow C^T A C$

$$f = x^T A x \xlongequal{x=Cy} (Cy)^T A (Cy) = y^T \boxed{C^T A C} y$$

注

- 作变量代换 $x = Cy$ 后，二次型的系数矩阵 $A \rightarrow C^T A C$
- A 对称 $\Rightarrow$ $\exists$ 正交阵 Q 使 $Q^{-1} A Q = \Lambda$

$$f = x^T A x \xlongequal{x=Cy} (Cy)^T A (Cy) = y^T \boxed{C^T A C} y$$

注

- 作变量代换 $x = Cy$ 后，二次型的系数矩阵 $A \rightarrow C^T A C$
- A 对称 $\Rightarrow$ $\exists$ 正交阵 Q 使 $Q^{-1}AQ = \Lambda$ $\Rightarrow$ $Q^T A Q = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$

$$f = x^TAx \xlongequal{x=Cy} (Cy)^TA(Cy) = y^T \boxed{C^TAC} y$$

注

- 作变量代换 $x = Cy$ 后，二次型的系数矩阵 $A \rightarrow C^TAC$
- A 对称 $\Rightarrow$ $\exists$ 正交阵 Q 使 $Q^{-1}AQ = \Lambda$ $\Rightarrow$ $Q^TAQ = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$

定理 $\forall$ 对称矩阵 A, $\exists$ 可逆矩阵 C，使得 $C^TAC = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$.

$$f = x^T A x \xlongequal{x=Cy} (Cy)^T A (Cy) = y^T \boxed{C^T A C} y$$

注

- 作变量代换 $x = Cy$ 后，二次型的系数矩阵 $A \rightarrow C^T A C$
- A 对称 $\Rightarrow$ $\exists$ 正交阵 Q 使 $Q^{-1}AQ = \Lambda$ $\Rightarrow$ $Q^T A Q = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$

定理 $\forall$ 对称矩阵 A, $\exists$ 可逆矩阵 C，使得 $C^T A C = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$.

所以，对 $\forall$ 二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$\exists$ 可逆线性变换$x = Cy$，使得

$$f = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2$$

$$f = x^T A x \xlongequal{x=Cy} (Cy)^T A (Cy) = y^T \boxed{C^T A C} y$$

注

- 作变量代换 $x = Cy$ 后，二次型的系数矩阵 $A \rightarrow C^T A C$
- A 对称 $\Rightarrow$ $\exists$ 正交阵 Q 使 $Q^{-1}AQ = \Lambda$ $\Rightarrow$ $Q^T A Q = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$

定理 $\forall$ 对称矩阵 A, $\exists$ 可逆矩阵 C，使得 $C^T A C = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}.$

所以，对 $\forall$ 二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$\exists$ 可逆线性变换$x = Cy$，使得

$$f = \underline{d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2} \quad \textbf{标准型}$$

在标准型

$$f = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2$$

的系数 $d_1, d_2, \ldots, d_n$ 中，

在标准型

$$f = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2$$

的系数 $d_1, d_2, \ldots, d_n$ 中，

- 非零数的个数 r，称为**二次型的秩**

在标准型

$$f = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2$$

的系数 $d_1, d_2, \ldots, d_n$ 中，

- 非零数的个数 r，称为 **二次型的秩**
- 正数的个数 p，称为 **正惯性指标**；负数的个数 q，称为 **负惯性指标**

在标准型

$$f = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2$$

的系数 $d_1, d_2, \ldots, d_n$ 中，

- 非零数的个数 r，称为**二次型的秩**
- 正数的个数 p，称为**正惯性指标**；负数的个数 q，称为**负惯性指标**

性质 **(1)** $r = p + q$；**(2)** $r = r(A)$.

在标准型

$$f = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2$$

的系数 $d_1, d_2, \ldots, d_n$ 中，

- 非零数的个数 r，称为**二次型的秩**
- 正数的个数 p，称为**正惯性指标**；负数的个数 q，称为**负惯性指标**

性质 **(1)** $r = p + q$； **(2)** $r = r(A)$.

证明 $r = p + q$ 是显然的.

在标准型

$$f = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2$$

的系数 $d_1, d_2, \ldots, d_n$ 中，

- 非零数的个数 r，称为**二次型的秩**
- 正数的个数 p，称为**正惯性指标**；负数的个数 q，称为**负惯性指标**

性质 **(1)** $r = p + q$；**(2)** $r = r(A)$.

证明 $r = p + q$ 是显然的.

由于 C 可逆，成立 $r(C^T AC) = r(A)$，

在标准型

$$f = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2$$

的系数 $d_1, d_2, \ldots, d_n$ 中，

- 非零数的个数 r，称为**二次型的秩**
- 正数的个数 p，称为**正惯性指标**；负数的个数 q，称为**负惯性指标**

性质 **(1)** $r = p + q$；**(2)** $r = r(A)$.

证明 $r = p + q$ 是显然的.

由于 C 可逆，成立 $r(C^T AC) = r(A)$，所以 $r = r(A)$.

把一般的二次型 $f = x^T A x$ 化为标准型

$$f = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2$$

主要有以下三种方法:

把一般的二次型 $f = x^T Ax$ 化为标准型

$$f = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2$$

主要有以下三种方法：

正交变换法

配方法

初等变换法

把一般的二次型 $f = x^T A x$ 化为标准型

$$f = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2$$

主要有以下三种方法：

正交变换法 找正交阵 Q 使 $Q^T A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

配方法

初等变换法

把一般的二次型 $f = x^T Ax$ 化为标准型

$$f = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2$$

主要有以下三种方法：

正交变换法 找正交阵 Q 使 $Q^T AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$（也就是，将 A 正交对角化）.

配方法

初等变换法

把一般的二次型 $f = x^T Ax$ 化为标准型

$$f = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2$$

主要有以下三种方法：

正交变换法 找正交阵 Q 使 $Q^T AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$（也就是，将 A 正交对角化）. 这时，作变量代换 $x = Qy$，

配方法

初等变换法

把一般的二次型 $f = x^T Ax$ 化为标准型

$$f = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2$$

主要有以下三种方法：

正交变换法 找正交阵 Q 使 $Q^T AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$（也就是，将 A 正交对角化）. 这时，作变量代换 $x = Qy$，则

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

配方法

初等变换法

把一般的二次型 $f = x^T A x$ 化为标准型

$$f = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2$$

主要有以下三种方法：

正交变换法 找正交阵 Q 使 $Q^T A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$（也就是，将 A 正交对角化）. 这时，作变量代换 $x = Qy$，则

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

配方法

初等变换法

注

- 用不同的方法，可能得到不同的标准型. （系数不相同）

把一般的二次型 $f = x^T Ax$ 化为标准型

$$f = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2$$

主要有以下三种方法：

正交变换法 找正交阵 Q 使 $Q^T AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$（也就是，将 A 正交对角化）．这时，作变量代换 $x = Qy$，则

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

配方法

初等变换法

注

- 用不同的方法，可能得到不同的标准型．（系数不相同）
- 但是可以证明，二次型的秩，正、负惯性指标是恒定不变．

把一般的二次型 $f = x^T Ax$ 化为标准型

$$f = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ny_n^2$$

主要有以下三种方法：

正交变换法 找正交阵 Q 使 $Q^TAQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$（也就是，将 A 正交对角化）. 这时，作变量代换 $x = Qy$，则

$$f = \lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + \cdots + \lambda_ny_n^2.$$

配方法

初等变换法

注

- 用不同的方法，可能得到不同的标准型. （系数不相同）
- 但是可以证明，二次型的秩，正、负惯性指标是恒定不变.所以，
  - ⋆ 二次型的秩 $= r(A)$

把一般的二次型 $f = x^T A x$ 化为标准型

$$f = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2$$

主要有以下三种方法：

正交变换法 找正交阵 Q 使 $Q^T A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$（也就是，将 A 正交对角化）. 这时，作变量代换 $x = Qy$，则

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

配方法

初等变换法

注

- 用不同的方法，可能得到不同的标准型. （系数不相同）
- 但是可以证明，二次型的秩，正、负惯性指标是恒定不变.所以，
  - ★ 二次型的秩 $= r(A) =$ 非零特征值的个数

把一般的二次型 $f = x^T Ax$ 化为标准型

$$f = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2$$

主要有以下三种方法:

正交变换法 找正交阵 Q 使 $Q^T AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$（也就是，将 A 正交对角化）. 这时，作变量代换 $x = Qy$，则

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

配方法

初等变换法

注

- 用不同的方法，可能得到不同的标准型.（系数不相同）
- 但是可以证明，二次型的秩，正、负惯性指标是恒定不变.所以，
    - ⋆ 二次型的秩 $= r(A) =$ 非零特征值的个数
    - ⋆ 正惯性指标 $=$ 正特征值的个数

把一般的二次型 $f = x^T A x$ 化为标准型

$$f = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2$$

主要有以下三种方法：

正交变换法 找正交阵 Q 使 $Q^T A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$（也就是，将 A 正交对角化）．这时，作变量代换 $x = Qy$，则

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

配方法

初等变换法

注

- 用不同的方法，可能得到不同的标准型．（系数不相同）
- 但是可以证明，二次型的秩，正、负惯性指标是恒定不变.所以，
  - ★ 二次型的秩 $= r(A) =$ 非零特征值的个数
  - ★ 正惯性指标 $=$ 正特征值的个数
  - ★ 负惯性指标 $=$ 负特征值的个数

例 1 用正交变换化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x = Qy$

例 1 用正交变换化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x = Qy$

解

- f 系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$

例 1 用正交变换化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x = Qy$

解

- f 系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

例 1 用正交变换化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x = Qy$

解

- f 系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

例 1 用正交变换化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x = Qy$

解

- f 系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

例 1 用正交变换化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x = Qy$

解

- f 系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ & 1 & 2 \\ & & 1 \end{pmatrix}$

例 1 用正交变换化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x = Qy$

解

- f 系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

例 1 用正交变换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x=Qy$

解

- f 系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，特征方程：$0=|\lambda I-A|$

例 1 用正交变换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x=Qy$

解

- f 系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-5)(\lambda+1)^2$

例 1 用正交变换化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x = Qy$

解

- f 系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，特征方程：$0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 5)(\lambda + 1)^2$
- $\lambda_1 = 5$
- $\lambda_2 = -1$（二重）

例 1 用正交变换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x=Qy$

解

- f 系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-5)(\lambda+1)^2$
- $\lambda_1=5$
- $\lambda_2=-1$（二重）
- $$f=5y_1^2-y_2^2-y_3^2$$

例 1 用正交变换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x=Qy$

解

- f 系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-5)(\lambda+1)^2$
- $\lambda_1=5$，特征向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$
- $\lambda_2=-1$（二重），特征向量
$$\begin{cases}\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\\ \alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\end{cases}$$
- $$f=5y_1^2-y_2^2-y_3^2$$

例 1 用正交变换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x=Qy$

解

- f 系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-5)(\lambda+1)^2$
- $\lambda_1=5$，特征向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{单位化}}\gamma_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$
- $\lambda_2=-1$（二重），特征向量

$$\begin{cases}\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\\[2ex]\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\end{cases}$$

- $$f=5y_1^2-y_2^2-y_3^2$$

例 1 用正交变换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x=Qy$

解

- f 系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-5)(\lambda+1)^2$
- $\lambda_1=5$，特征向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{单位化}}\gamma_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$
- $\lambda_2=-1$（二重），特征向量

$$\left\{\begin{aligned}\alpha_1&=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\\ \alpha_2&=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\end{aligned}\right.\xrightarrow{\text{正交化}}\left\{\begin{aligned}\beta_2&=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\\ \beta_3&=\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1\end{pmatrix}\end{aligned}\right.$$

- $f=5y_1^2-y_2^2-y_3^2$

例 1 用正交变换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x=Qy$

解

- f 系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-5)(\lambda+1)^2$
- $\lambda_1=5$，特征向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{单位化}} \gamma_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$
- $\lambda_2=-1$（二重），特征向量

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\\ \alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\end{array}\right. \xrightarrow{\text{正交化}} \left\{\begin{array}{l}\beta_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\\ \beta_3=\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1\end{pmatrix}\end{array}\right. \xrightarrow{\text{单位化}} \left\{\begin{array}{l}\gamma_2=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}\\ \gamma_3=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\end{pmatrix}\end{array}\right.$$

- $f=5y_1^2-y_2^2-y_3^2$

例 1 用正交变换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x=Qy$

解

- f 系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-5)(\lambda+1)^2$
- $\lambda_1=5$，特征向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{单位化}} \gamma_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$
- $\lambda_2=-1$（二重），特征向量

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\\ \alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\end{array}\right. \xrightarrow{\text{正交化}} \left\{\begin{array}{l}\beta_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\\ \beta_3=\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1\end{pmatrix}\end{array}\right. \xrightarrow{\text{单位化}} \left\{\begin{array}{l}\gamma_2=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}\\ \gamma_3=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\end{pmatrix}\end{array}\right.$$

- 令 $Q=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}&-1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3}&1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3}&0&2/\sqrt{6}\end{pmatrix}$， $f=5y_1^2-y_2^2-y_3^2$

例 1 用正交变换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x=Qy$

解

- f 系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-5)(\lambda+1)^2$
- $\lambda_1=5$，特征向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{单位化}}\gamma_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$
- $\lambda_2=-1$（二重），特征向量

$$\begin{cases}\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\\ \alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\end{cases}\xrightarrow{\text{正交化}}\begin{cases}\beta_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\\ \beta_3=\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1\end{pmatrix}\end{cases}\xrightarrow{\text{单位化}}\begin{cases}\gamma_2=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}\\ \gamma_3=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\end{pmatrix}\end{cases}$$

- 令 $Q=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}&-1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3}&1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3}&0&2/\sqrt{6}\end{pmatrix}$，$x=Qy$，则 $f=5y_1^2-y_2^2-y_3^2$

例 2 用正交变换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x=Qy$

例 2 用正交变换化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x = Qy$

解

- $A = \begin{pmatrix} & & \end{pmatrix}$

例 2 用正交变换化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x = Qy$

解

- $A = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 5 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$

例 2 用正交变换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x=Qy$

解

- $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & \\ & 5 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$

例 2 用正交变换化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x = Qy$

解

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ & 5 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$

例 2 用正交变换化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x = Qy$

解

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ & 5 & -4 \\ & & 5 \end{pmatrix}$

例 2 用正交变换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x=Qy$

解

- $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

例 2 用正交变换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x=Qy$

解

- $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$，特征方程：$0=|\lambda I-A|$

例 2 用正交变换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x=Qy$

解

- $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$，特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$

例 2 用正交变换化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x = Qy$

解

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$，特征方程：$0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 1)^2(\lambda - 10)$
- $\lambda_1 = 1$（二重）
- $\lambda_3 = 10$

例 2 用正交变换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x=Qy$

解

- $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$，特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$
- $\lambda_1=1$（二重）
- $\lambda_3=10$
- 则 $f=y_1^2+y_2^2+10y_3^2$

例 2 用正交变换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x=Qy$

解

- $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$，特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$
- $\lambda_1=1$（二重），特征向量

$$\begin{cases} \alpha_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \alpha_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- $\lambda_3=10$，特征向量$\alpha_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$
- 则 $f=y_1^2+y_2^2+10y_3^2$

例 2 用正交变换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x=Qy$

解

- $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & 5 & -4\\ -2 & -4 & 5\end{pmatrix}$，特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$
- $\lambda_1=1$（二重），特征向量

$$\begin{cases}\alpha_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\\ \alpha_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\end{cases}\xrightarrow{\text{正交化}}\begin{cases}\beta_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\\ \beta_2=\begin{pmatrix}2/5\\4/5\\1\end{pmatrix}\end{cases}$$

- $\lambda_3=10$，特征向量$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$
- 则 $f=y_1^2+y_2^2+10y_3^2$

例 2 用正交变换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x=Qy$

解

- $A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$，特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$
- $\lambda_1=1$（二重），特征向量

$$\left\{\begin{aligned}\alpha_1&=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\\ \alpha_2&=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\end{aligned}\right. \xrightarrow{\text{正交化}} \left\{\begin{aligned}\beta_1&=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\\ \beta_2&=\begin{pmatrix}2/5\\4/5\\1\end{pmatrix}\end{aligned}\right. \xrightarrow{\text{单位化}} \left\{\begin{aligned}\gamma_1&=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\\ \gamma_2&=\frac{5}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2/5\\4/5\\1\end{pmatrix}\end{aligned}\right.$$

- $\lambda_3=10$，特征向量$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$
- 则 $f=y_1^2+y_2^2+10y_3^2$

例 2 用正交变换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x=Qy$

解

- $A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$，特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$
- $\lambda_1=1$（二重），特征向量

$$\begin{cases}\alpha_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\\ \alpha_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\end{cases}\xrightarrow{\text{正交化}}\begin{cases}\beta_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\\ \beta_2=\begin{pmatrix}2/5\\4/5\\1\end{pmatrix}\end{cases}\xrightarrow{\text{单位化}}\begin{cases}\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\\ \gamma_2=\frac{5}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2/5\\4/5\\1\end{pmatrix}\end{cases}$$

- $\lambda_3=10$，特征向量$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{单位化}}\gamma_3=\begin{pmatrix}1/3\\2/3\\-2/3\end{pmatrix}$
- 则 $f=y_1^2+y_2^2+10y_3^2$

例 2 用正交变换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x=Qy$

解

- $A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$，特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$
- $\lambda_1=1$（二重），特征向量

$$\begin{cases}\alpha_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\\ \alpha_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\end{cases}\xrightarrow{\text{正交化}}\begin{cases}\beta_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\\ \beta_2=\begin{pmatrix}2/5\\4/5\\1\end{pmatrix}\end{cases}\xrightarrow{\text{单位化}}\begin{cases}\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\\ \gamma_2=\frac{5}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2/5\\4/5\\1\end{pmatrix}\end{cases}$$

- $\lambda_3=10$，特征向量$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{单位化}}\gamma_3=\begin{pmatrix}1/3\\2/3\\-2/3\end{pmatrix}$
- 令 $Q=\begin{pmatrix}-2/\sqrt{5}&2/3\sqrt{5}&1/3\\1/\sqrt{5}&4/3\sqrt{5}&2/3\\0&\sqrt{5}/3&-2/3\end{pmatrix}$， 则 $f=y_1^2+y_2^2+10y_3^2$

例 2 用正交变换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x=Qy$

解

- $A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$，特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$
- $\lambda_1=1$（二重），特征向量

$$\left\{\begin{aligned}\alpha_1&=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\\ \alpha_2&=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\end{aligned}\right. \xrightarrow{\text{正交化}} \left\{\begin{aligned}\beta_1&=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\\ \beta_2&=\begin{pmatrix}2/5\\4/5\\1\end{pmatrix}\end{aligned}\right. \xrightarrow{\text{单位化}} \left\{\begin{aligned}\gamma_1&=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\\ \gamma_2&=\frac{5}{3\sqrt5}\begin{pmatrix}2/5\\4/5\\1\end{pmatrix}\end{aligned}\right.$$

- $\lambda_3=10$，特征向量$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{单位化}}\gamma_3=\begin{pmatrix}1/3\\2/3\\-2/3\end{pmatrix}$
- 令 $Q=\begin{pmatrix}-2/\sqrt5&2/3\sqrt5&1/3\\1/\sqrt5&4/3\sqrt5&2/3\\0&\sqrt5/3&-2/3\end{pmatrix}$，$x=Qy$，则 $f=y_1^2+y_2^2+10y_3^2$

例 3 用正交变换化二次型

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x = Qy$

例 4 用正交变换化二次型

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x = Qy$

配方法化二次型为标准型

例 1 配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

配方法化二次型为标准型

例 1 配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2$$

配方法化二次型为标准型

- 想法：　　$a^2 + 2ab =$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

配方法化二次型为标准型

- 想法： $a^2+2ab=a^2+2ab+b^2-b^2=$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$f=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$$

配方法化二次型为标准型

- 想法： $a^2 + 2ab = a^2 + 2ab + b^2 - b^2 = (a+b)^2 - b^2$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

配方法化二次型为标准型

- 想法： $a^2+2ab=a^2+2ab+b^2-b^2=(a+b)^2-b^2$

  $a^2+2ab+2ac=$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$f=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$$

配方法化二次型为标准型

- 想法： $a^2+2ab=a^2+2ab+b^2-b^2=(a+b)^2-b^2$

$$a^2+2ab+2ac=a^2+2a(b+c)$$

$$=$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$f=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$$

配方法化二次型为标准型

- 想法： $a^2+2ab=a^2+2ab+b^2-b^2=(a+b)^2-b^2$

$$
\begin{aligned}
a^2+2ab+2ac &= a^2+2a(b+c) \\
&= a^2+2a(b+c)+(b+c)^2-(b+c)^2 \\
&=
\end{aligned}
$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$f=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$

配方法化二次型为标准型

- 想法： $a^2+2ab=a^2+2ab+b^2-b^2=(a+b)^2-b^2$

$$\begin{aligned}a^2+2ab+2ac&=a^2+2a(b+c)\\&=a^2+2a(b+c)+(b+c)^2-(b+c)^2\\&=(a+b+c)^2-(b+c)^2\end{aligned}$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$f=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$$

配方法化二次型为标准型

- 想法：$$a^2+2ab=a^2+2ab+b^2-b^2=(a+b)^2-b^2$$

$$\begin{aligned}a^2+2ab+2ac&=a^2+2a(b+c)\\&=a^2+2a(b+c)+(b+c)^2-(b+c)^2\\&=(a+b+c)^2-(b+c)^2\end{aligned}$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$f=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$$
$$=x_1^2+2x_1(x_2+x_3)$$

配方法化二次型为标准型

- 想法： $a^2+2ab=a^2+2ab+b^2-b^2=(a+b)^2-b^2$

$$\begin{aligned}a^2+2ab+2ac&=a^2+2a(b+c)\\&=a^2+2a(b+c)+(b+c)^2-(b+c)^2\\&=(a+b+c)^2-(b+c)^2\end{aligned}$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned}f&=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2\\&=x_1^2+2x_1(x_2+x_3)+(x_2+x_3)^2-(x_2+x_3)^2\end{aligned}$$

配方法化二次型为标准型

- 想法： $a^2+2ab=a^2+2ab+b^2-b^2=(a+b)^2-b^2$

$$\begin{aligned}a^2+2ab+2ac&=a^2+2a(b+c)\\&=a^2+2a(b+c)+(b+c)^2-(b+c)^2\\&=(a+b+c)^2-(b+c)^2\end{aligned}$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned}f&=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2\\&=x_1^2+2x_1(x_2+x_3)+(x_2+x_3)^2-(x_2+x_3)^2+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2\end{aligned}$$

配方法化二次型为标准型

- 想法： $a^2+2ab=a^2+2ab+b^2-b^2=(a+b)^2-b^2$

$$\begin{aligned}a^2+2ab+2ac&=a^2+2a(b+c)\\&=a^2+2a(b+c)+(b+c)^2-(b+c)^2\\&=(a+b+c)^2-(b+c)^2\end{aligned}$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned}f&=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2\\&=x_1^2+2x_1(x_2+x_3)+(x_2+x_3)^2-(x_2+x_3)^2+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2\\&=(x_1+x_2+x_3)^2+\end{aligned}$$

配方法化二次型为标准型

- 想法： $a^2+2ab=a^2+2ab+b^2-b^2=(a+b)^2-b^2$

$$
\begin{aligned}
a^2+2ab+2ac &= a^2+2a(b+c)\\
&= a^2+2a(b+c)+(b+c)^2-(b+c)^2\\
&= (a+b+c)^2-(b+c)^2
\end{aligned}
$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f &= x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2\\
&= x_1^2+2x_1(x_2+x_3)+(x_2+x_3)^2-(x_2+x_3)^2+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2\\
&= (x_1+x_2+x_3)^2+x_2^2+2x_2x_3
\end{aligned}
$$

配方法化二次型为标准型

- 想法：$a^2+2ab=a^2+2ab+b^2-b^2=(a+b)^2-b^2$

$$\begin{aligned} a^2+2ab+2ac &= a^2+2a(b+c) \\ &= a^2+2a(b+c)+(b+c)^2-(b+c)^2 \\ &= (a+b+c)^2-(b+c)^2 \end{aligned}$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned} f &= x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2 \\ &= x_1^2+2x_1(x_2+x_3)+(x_2+x_3)^2-(x_2+x_3)^2+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2 \\ &= (x_1+x_2+x_3)^2+x_2^2+2x_2x_3 \\ &= (x_1+x_2+x_3)^2+x_2^2+2x_2x_3+x_3^2-x_3^2 \end{aligned}$$

配方法化二次型为标准型

- 想法：

$$a^2+2ab=a^2+2ab+b^2-b^2=(a+b)^2-b^2$$

$$\begin{aligned}a^2+2ab+2ac&=a^2+2a(b+c)\\&=a^2+2a(b+c)+(b+c)^2-(b+c)^2\\&=(a+b+c)^2-(b+c)^2\end{aligned}$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned}f&=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2\\&=x_1^2+2x_1(x_2+x_3)+(x_2+x_3)^2-(x_2+x_3)^2+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2\\&=(x_1+x_2+x_3)^2+x_2^2+2x_2x_3\\&=(x_1+x_2+x_3)^2+x_2^2+2x_2x_3+x_3^2-x_3^2\\&=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2-x_3^2\end{aligned}$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f =& x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\
=& x_1^2 + 2x_1(x_2+x_3) + (x_2+x_3)^2 - (x_2+x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2
\end{aligned}
$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f =&x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\
=&x_1^2+2x_1(x_2+x_3)+(x_2+x_3)^2-(x_2+x_3)^2+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2 \\
=&(x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 \\
=&(x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2 \\
=&(x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2
\end{aligned}
$$

作线性变量代换

$$
\begin{cases}
y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\
y_2 = \qquad x_2 + x_3 \\
y_3 = \qquad\qquad x_3
\end{cases}
$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f =& x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\
=& x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3) + (x_2 + x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2
\end{aligned}
$$

作线性变量代换

$$
\begin{cases}
y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\
y_2 = \qquad x_2 + x_3 \\
y_3 = \qquad\qquad x_3
\end{cases}
$$

则

$$
f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2
$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$
$$= x_1^2 + 2x_1(x_2+x_3) + (x_2+x_3)^2 - (x_2+x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$
$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3$$
$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2$$
$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = \phantom{x_1 + {}} x_2 + x_3 \\ y_3 = \phantom{x_1 + x_2 + {}} x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \\ x_2 = \\ x_3 = \end{cases}$$

则

$$f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f =& x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\
=& x_1^2+2x_1(x_2+x_3)+(x_2+x_3)^2-(x_2+x_3)^2+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2
\end{aligned}
$$

作线性变量代换

$$
\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = \quad\quad x_2 + x_3 \\ y_3 = \quad\quad\quad\quad x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \\ x_2 = \\ x_3 = \quad\quad\quad\quad y_3 \end{cases}
$$

则

$$
f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2
$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f =& x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\
=& x_1^2+2x_1(x_2+x_3)+(x_2+x_3)^2-(x_2+x_3)^2+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2
\end{aligned}
$$

作线性变量代换

$$
\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = \quad\quad x_2 + x_3 \\ y_3 = \quad\quad\quad\quad x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \\ x_2 = \quad\quad y_2 - y_3 \\ x_3 = \quad\quad\quad\quad y_3 \end{cases}
$$

则

$$f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f =&x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\
=&x_1^2+2x_1(x_2+x_3)+(x_2+x_3)^2-(x_2+x_3)^2+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2 \\
=&(x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 \\
=&(x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2 \\
=&(x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2
\end{aligned}
$$

作线性变量代换

$$
\begin{cases}
y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\
y_2 = \qquad x_2 + x_3 \\
y_3 = \qquad\qquad x_3
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
x_1 = y_1 - y_2 \\
x_2 = \qquad y_2 - y_3 \\
x_3 = \qquad\qquad y_3
\end{cases}
$$

则

$$f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f =& x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\
=& x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3) + (x_2 + x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2
\end{aligned}
$$

作线性变量代换

$$
\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = \quad\;\; x_2 + x_3 \\ y_3 = \qquad\quad\;\; x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = \quad\;\; y_2 - y_3 \\ x_3 = \qquad\quad\;\; y_3 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} y
$$

则

$$
f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2
$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f =&x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2\\
=&x_1^2+2x_1(x_2+x_3)+(x_2+x_3)^2-(x_2+x_3)^2+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2\\
=&(x_1+x_2+x_3)^2+x_2^2+2x_2x_3\\
=&(x_1+x_2+x_3)^2+x_2^2+2x_2x_3+x_3^2-x_3^2\\
=&(x_1+x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2-x_3^2
\end{aligned}
$$

作线性变量代换

$$
\begin{cases} y_1=x_1+x_2+x_3\\ y_2=\qquad x_2+x_3\\ y_3=\qquad\qquad x_3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=y_1-y_2\\ x_2=\qquad y_2-y_3\\ x_3=\qquad\qquad y_3\end{cases} \Rightarrow x=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ & & \\ & & \end{pmatrix}y
$$

则

$$f=y_1^2+y_2^2-y_3^2$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$
$$= x_1^2 + 2x_1(x_2+x_3) + (x_2+x_3)^2 - (x_2+x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$
$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3$$
$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2$$
$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = \quad\quad x_2 + x_3 \\ y_3 = \quad\quad\quad\quad x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = \quad\quad y_2 - y_3 \\ x_3 = \quad\quad\quad\quad y_3 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} y$$

则

$$f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f =& x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\
=& x_1^2+2x_1(x_2+x_3)+(x_2+x_3)^2-(x_2+x_3)^2+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2
\end{aligned}
$$

作线性变量代换

$$
\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = \qquad x_2 + x_3 \\ y_3 = \qquad\qquad x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = \qquad y_2 - y_3 \\ x_3 = \qquad\qquad y_3 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y
$$

则

$$
f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2
$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f =&x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2\\
=&x_1^2+2x_1(x_2+x_3)+(x_2+x_3)^2-(x_2+x_3)^2+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2\\
=&(x_1+x_2+x_3)^2+x_2^2+2x_2x_3\\
=&(x_1+x_2+x_3)^2+x_2^2+2x_2x_3+x_3^2-x_3^2\\
=&(x_1+x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2-x_3^2
\end{aligned}
$$

作线性变量代换

$$
\begin{cases} y_1 = x_1+x_2+x_3 \\ y_2 = \quad x_2+x_3 \\ y_3 = \quad x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1-y_2 \\ x_2 = \quad y_2-y_3 \\ x_3 = \quad y_3 \end{cases} \Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C\text{: 可逆}} y
$$

则

$$
f = y_1^2+y_2^2-y_3^2
$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f =& x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\
=& x_1^2 + 2x_1(x_2+x_3) + (x_2+x_3)^2 - (x_2+x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\
=& (x_1+x_2+x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 \\
=& (x_1+x_2+x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2 \\
=& (x_1+x_2+x_3)^2 + (x_2+x_3)^2 - x_3^2
\end{aligned}
$$

作线性变量代换

$$
\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = \quad x_2 + x_3 \\ y_3 = \quad\quad x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = \quad y_2 - y_3 \\ x_3 = \quad\quad y_3 \end{cases} \Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C:\text{ 可逆}} y
$$

则

$$
f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2
$$

例 2 配方法化 $f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$ 为标准型

例 2 配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

$$=$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f =& x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\
=& x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3)
\end{aligned}
$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f =& x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\
=& x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2
\end{aligned}
$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

$$= x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2$$

$$+ 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned} f =& x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\ =& x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2 \\ & + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\ =& (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 \end{aligned}$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f =& x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\
=& x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2 \\
& + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\
=& (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2
\end{aligned}
$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f =&x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\
=&x_1^2+2x_1\cdot(2x_2+2x_3)+(2x_2+2x_3)^2-(2x_2+2x_3)^2 \\
&+2x_2^2+8x_2x_3+4x_3^2 \\
=&(x_1+2x_2+2x_3)^2-2x_2^2
\end{aligned}
$$

作线性变量代换

$$
\begin{cases}
y_1 = x_1+2x_2+2x_3 \\
y_2 = \qquad\quad x_2 \\
\end{cases}
$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f =& x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\
=& x_1^2+2x_1\cdot(2x_2+2x_3)+(2x_2+2x_3)^2-(2x_2+2x_3)^2 \\
&+2x_2^2+8x_2x_3+4x_3^2 \\
=& (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2
\end{aligned}
$$

作线性变量代换

$$
\begin{cases}
y_1 = x_1+2x_2+2x_3 \\
y_2 = \qquad\quad x_2
\end{cases}
$$

则

$$f = y_1^2 - 2y_2^2$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f = & x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\
= & x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2 \\
& + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\
= & (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2
\end{aligned}
$$

作线性变量代换

$$
\begin{cases}
y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\
y_2 = x_2 \\
y_3 = x_3
\end{cases}
$$

则

$$f = y_1^2 - 2y_2^2$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f = & x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\
& = x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2 \\
& \quad + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\
& = (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2
\end{aligned}
$$

作线性变量代换

$$
\begin{cases}
y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\
y_2 = x_2 \\
y_3 = x_3
\end{cases}
\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right.
$$

则

$$
f = y_1^2 - 2y_2^2
$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

$$= x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2$$

$$+ 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ y_2 = \quad\quad\quad x_2 \\ y_3 = \quad\quad\quad\quad\quad\quad x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \\ \\ x_3 = \quad\quad\quad\quad\quad\quad y_3 \end{cases}$$

则

$$f = y_1^2 - 2y_2^2$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f =& x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\
=& x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2 \\
& + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\
=& (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2
\end{aligned}
$$

作线性变量代换

$$
\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ y_2 = \qquad\quad x_2 \\ y_3 = \qquad\qquad\quad x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \\ x_2 = \qquad y_2 \\ x_3 = \qquad\qquad y_3 \end{cases}
$$

则

$$
f = y_1^2 - 2y_2^2
$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f =& x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\
=& x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2 \\
& + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\
=& (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2
\end{aligned}
$$

作线性变量代换

$$
\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ y_2 = \phantom{x_1 + 2{}} x_2 \\ y_3 = \phantom{x_1 + 2x_2 + 2{}} x_3 \end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 - 2y_3 \\ x_2 = \phantom{y_1 - 2{}} y_2 \\ x_3 = \phantom{y_1 - 2y_2 - 2{}} y_3 \end{cases}
$$

则

$$f = y_1^2 - 2y_2^2$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f =& x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\
=& x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2 \\
& + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\
=& (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2
\end{aligned}
$$

作线性变量代换

$$
\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 - 2y_3 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C:\text{ 可逆}} y
$$

则

$$
f = y_1^2 - 2y_2^2
$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f =& x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\
&= x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2 \\
&\quad + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\
&= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2
\end{aligned}
$$

作线性变量代换

$$
\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 - 2y_3 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C\text{：可逆}} y
$$

则

$$
f = y_1^2 - 2y_2^2
$$

例 3 配方法化 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 为标准型

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

$$=$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$=$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\Big[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) \qquad\qquad\qquad\qquad \Big]$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right]$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$+ 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$+ 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$+ 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$+ 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$+ 3\left[x_2^2 - 2x_2 \cdot \frac{2}{3}x_3 \qquad\qquad \right]$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$+ 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$+ 3\left[x_2^2 - 2x_2 \cdot \frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2\right]$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$+ 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$+ 3\left[x_2^2 - 2x_2 \cdot \frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2\right] - 3(\frac{2}{3}x_3)^2$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$+ 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$+ 3\left[x_2^2 - 2x_2 \cdot \frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2\right] - 3(\frac{2}{3}x_3)^2 + 3x_3^2$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$+ 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left[x_2^2 - 2x_2 \cdot \frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2\right] - 3(\frac{2}{3}x_3)^2 + 3x_3^2$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f=\underline{2x_1^2}+5x_2^2+5x_3^2+\underline{4x_1x_2-4x_1x_3}-8x_2x_3$$

$$=2\left[x_1^2+2x_1\cdot(x_2-x_3)+(x_2-x_3)^2\right]-2(x_2-x_3)^2$$

$$+5x_2^2+5x_3^2-8x_2x_3$$

$$=2(x_1+x_2-x_3)^2+3x_2^2+3x_3^2-4x_2x_3$$

$$=2(x_1+x_2-x_3)^2+3\left[x_2^2-2x_2\cdot\frac{2}{3}x_3+(\frac{2}{3}x_3)^2\right]-3(\frac{2}{3}x_3)^2+3x_3^2$$

$$=2(x_1+x_2-x_3)^2$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$+ 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left[x_2^2 - 2x_2 \cdot \frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2\right] - 3(\frac{2}{3}x_3)^2 + 3x_3^2$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left(x_2 - \frac{2}{3}x_3\right)^2$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$+ 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left[x_2^2 - 2x_2 \cdot \frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2\right] - 3(\frac{2}{3}x_3)^2 + 3x_3^2$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left(x_2 - \frac{2}{3}x_3\right)^2 + \frac{5}{3}x_3^2$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$+ 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left[x_2^2 - 2x_2 \cdot \frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2\right] - 3(\frac{2}{3}x_3)^2 + 3x_3^2$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left(x_2 - \frac{2}{3}x_3\right)^2 + \frac{5}{3}x_3^2$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = \qquad x_2 - \frac{2}{3}x_3 \\ y_3 = \qquad\qquad x_3 \end{cases}$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1\cdot(x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$+ 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left[x_2^2 - 2x_2\cdot\frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2\right] - 3(\frac{2}{3}x_3)^2 + 3x_3^2$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left(x_2 - \frac{2}{3}x_3\right)^2 + \frac{5}{3}x_3^2$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = \qquad x_2 - \frac{2}{3}x_3 \\ y_3 = \qquad\qquad x_3 \end{cases}$$

则 $f = 2y_1^2 + 3y_2^2 + \frac{5}{3}y_3^2$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$+ 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left[x_2^2 - 2x_2 \cdot \frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2\right] - 3(\frac{2}{3}x_3)^2 + 3x_3^2$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left(x_2 - \frac{2}{3}x_3\right)^2 + \frac{5}{3}x_3^2$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = \qquad x_2 - \frac{2}{3}x_3 \\ y_3 = \qquad\qquad x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \\ \\ x_3 = \qquad\qquad y_3 \end{cases}$$

则 $f = 2y_1^2 + 3y_2^2 + \frac{5}{3}y_3^2$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1\cdot(x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$+ 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left[x_2^2 - 2x_2\cdot\frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2\right] - 3(\frac{2}{3}x_3)^2 + 3x_3^2$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left(x_2 - \frac{2}{3}x_3\right)^2 + \frac{5}{3}x_3^2$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = \quad\quad x_2 - \frac{2}{3}x_3 \\ y_3 = \quad\quad\quad\quad x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \\ x_2 = \quad\quad y_2 + \frac{2}{3}y_3 \\ x_3 = \quad\quad\quad\quad y_3 \end{cases}$$

则 $f = 2y_1^2 + 3y_2^2 + \frac{5}{3}y_3^2$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f=\underline{2x_1^2}+5x_2^2+5x_3^2+\underline{4x_1x_2-4x_1x_3}-8x_2x_3$$

$$=2\left[x_1^2+2x_1\cdot(x_2-x_3)+(x_2-x_3)^2\right]-2(x_2-x_3)^2$$

$$+5x_2^2+5x_3^2-8x_2x_3$$

$$=2(x_1+x_2-x_3)^2+3x_2^2+3x_3^2-4x_2x_3$$

$$=2(x_1+x_2-x_3)^2+3\left[x_2^2-2x_2\cdot\frac{2}{3}x_3+(\frac{2}{3}x_3)^2\right]-3(\frac{2}{3}x_3)^2+3x_3^2$$

$$=2(x_1+x_2-x_3)^2+3\left(x_2-\frac{2}{3}x_3\right)^2+\frac{5}{3}x_3^2$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1=x_1+x_2-x_3 \\ y_2=\qquad x_2-\frac{2}{3}x_3 \\ y_3=\qquad\qquad x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=y_1-y_2+\frac{1}{3}y_3 \\ x_2=\qquad y_2+\frac{2}{3}y_3 \\ x_3=\qquad\qquad y_3 \end{cases}$$

则 $f=2y_1^2+3y_2^2+\frac{5}{3}y_3^2$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$+ 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left[x_2^2 - 2x_2 \cdot \frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2\right] - 3(\frac{2}{3}x_3)^2 + 3x_3^2$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left(x_2 - \frac{2}{3}x_3\right)^2 + \frac{5}{3}x_3^2$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = \quad\quad x_2 - \frac{2}{3}x_3 \\ y_3 = \quad\quad\quad\quad x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + \frac{1}{3}y_3 \\ x_2 = \quad\quad y_2 + \frac{2}{3}y_3 \\ x_3 = \quad\quad\quad\quad y_3 \end{cases} \Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C\text{: 可逆}} y$$

则 $f = 2y_1^2 + 3y_2^2 + \frac{5}{3}y_3^2$

初等变换法化二次型为标准型

设 A 是对称矩阵，则存在可逆矩阵 C，满足

$$C^T A C = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix} =: D$$

初等变换法 求解 C:

初等变换法化二次型为标准型

设 A 是对称矩阵，则存在可逆矩阵 C，满足

$$C^TAC = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix} =: D$$

初等变换法 求解 C:

$$\begin{pmatrix} A \\ \hline I \end{pmatrix}$$

初等变换法化二次型为标准型

设 A 是对称矩阵，则存在可逆矩阵 C，满足

$$C^TAC = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix} =: D$$

初等变换法 求解 C：

$$\begin{pmatrix} A \\ \hline I \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{2.对}A\text{作同一类型行变换}]{\text{1. 整体做列变换}}$$

初等变换法化二次型为标准型

设 A 是对称矩阵，则存在可逆矩阵 C，满足

$$C^TAC = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix} =: D$$

初等变换法 求解 C:

$$\begin{pmatrix} A \\ \hline I \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{2.对}A\text{作同一类型行变换}]{\text{1. 整体做列变换}} \cdots \xrightarrow{\text{重复直至}} \begin{pmatrix} D \\ \hline C \end{pmatrix}$$

初等变换法化二次型为标准型

设 A 是对称矩阵，则存在可逆矩阵 C，满足

$$C^TAC = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix} =: D$$

初等变换法 求解 C：

$$\begin{pmatrix} A \\ \hline I \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{2.对}A\text{作同一类型行变换}]{\text{1. 整体做列变换}} \cdots \xrightarrow{\text{重复直至}} \begin{pmatrix} D \\ \hline C \end{pmatrix}$$

例 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，求可逆矩阵 C，使得 C^TAC 为对角阵。

初等变换法化二次型为标准型

设 A 是对称矩阵，则存在可逆矩阵 C，满足

$$C^TAC = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix} =: D$$

初等变换法 求解 C：

$$\begin{pmatrix} A \\ \hline I \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{2.对}A\text{作同一类型行变换}]{\text{1. 整体做列变换}} \cdots \xrightarrow{\text{重复直至}} \begin{pmatrix} D \\ \hline C \end{pmatrix}$$

例 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，求可逆矩阵 C，使得 C^TAC 为对角阵。

解

$$\begin{pmatrix} A \\ \hline I \end{pmatrix} =$$

初等变换法化二次型为标准型

设 A 是对称矩阵，则存在可逆矩阵 C，满足

$$C^TAC = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix} =: D$$

初等变换法求解 C:

$$\left(\frac{A}{I}\right) \xrightarrow[\text{2.对}A\text{作同一类型行变换}]{\text{1. 整体做列变换}} \cdots \xrightarrow{\text{重复直至}} \left(\frac{D}{C}\right)$$

例 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，求可逆矩阵 C，使得 C^TAC 为对角阵。

解

$$\left(\frac{A}{I}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

初等变换法化二次型为标准型

设 A 是对称矩阵，则存在可逆矩阵 C，满足

$$C^TAC=\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}=:D$$

初等变换法 求解 C:

$$\begin{pmatrix} A \\ \hline I \end{pmatrix} \xrightarrow[2.\text{对}A\text{作同一类型行变换}]{1.\text{ 整体做列变换}} \cdots \xrightarrow{\text{重复直至}} \begin{pmatrix} D \\ \hline C \end{pmatrix}$$

例 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，求可逆矩阵 C，使得 C^TAC 为对角阵。

解

$$\begin{pmatrix} A \\ \hline I \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-2c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

初等变换法化二次型为标准型

设 A 是对称矩阵，则存在可逆矩阵 C，满足

$$C^TAC = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix} =: D$$

初等变换法 求解 C：

$$\left(\frac{A}{I}\right) \xrightarrow[\text{2.对}A\text{作同一类型行变换}]{\text{1. 整体做列变换}} \cdots \xrightarrow{\text{重复直至}} \left(\frac{D}{C}\right)$$

例 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，求可逆矩阵 C，使得 C^TAC 为对角阵。

解

$$\left(\frac{A}{I}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-2c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A \\ \hline I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2 - 2c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A \\ \hline I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-2c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3-2c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -3 \\ \hline 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A \\ \hline I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-2c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3-2c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -3 \\ \hline 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \\ \hline 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A \\ \hline I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2 - 2c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3 - 2c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -3 \\ \hline 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \\ \hline 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3 - \frac{2}{3}c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -\frac{5}{3} \\ \hline 1 & -2 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A \\ \hline I \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{c_2-2c_1} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{c_3-2c_1} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -3 \\ \hline 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3-2r_1} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \\ \hline 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{c_3-\frac{2}{3}c_2} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -\frac{5}{3} \\ \hline 1 & -2 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3-\frac{2}{3}r_2} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} \\ \hline 1 & -2 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$
\begin{pmatrix} \dfrac{A}{I} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{c_2-2c_1} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{c_3-2c_1} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -3 \\ \hline 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3-2r_1} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \\ \hline 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{c_3-\frac{2}{3}c_2} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -\frac{5}{3} \\ \hline 1 & -2 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3-\frac{2}{3}r_2} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} \\ \hline 1 & -2 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \therefore C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$\begin{pmatrix} A \\ \hline I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-2c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3-2c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -3 \\ \hline 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \\ \hline 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3-\frac{2}{3}c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -\frac{5}{3} \\ \hline 1 & -2 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-\frac{2}{3}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} \\ \hline 1 & -2 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \therefore C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注 A 对应的二次型，其标准型为 $y_1^2 - 3y_2^2 - \frac{5}{3}y_3^2$，

$$\begin{pmatrix} A \\ \hline I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2 - 2c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3 - 2c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -3 \\ \hline 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \\ \hline 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3 - \frac{2}{3}c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -\frac{5}{3} \\ \hline 1 & -2 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - \frac{2}{3}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} \\ \hline 1 & -2 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \therefore C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注 A 对应的二次型，其标准型为 $y_1^2 - 3y_2^2 - \frac{5}{3}y_3^2$，秩为 3，正惯性指标为 1，负惯性指标为 2

例 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$，求可逆矩阵 C，使得 C^TAC 为对角阵。

对 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 采取两种方法化为标准型：

对 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 采取两种方法化为标准型：

- **方法一**：求系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值（$\lambda = 1, 1, 10$）、

  特征向量

对 $f=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$ 采取两种方法化为标准型：

- **方法一**：求系数矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值（$\lambda=1,\ 1,\ 10$）、特征向量 $\xrightarrow{\text{单位正交化}}$

对 $f=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$ 采取两种方法化为标准型：

- **方法一**：求系数矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值（$\lambda=1, 1, 10$）、特征向量 $\xrightarrow{\text{单位正交化}}$ 得到正交矩阵

$$Q=\begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & 1/3 \\ 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & 2/3 \\ 0 & \sqrt{5}/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

对 $f=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$ 采取两种方法化为标准型：

- **方法一**：求系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$ 的特征值（$\lambda=1,1,10$）、特征向量 $\xrightarrow{\text{单位正交化}}$ 得到正交矩阵

$$Q=\begin{pmatrix}-2/\sqrt{5}&2/3\sqrt{5}&1/3\\1/\sqrt{5}&4/3\sqrt{5}&2/3\\0&\sqrt{5}/3&-2/3\end{pmatrix}$$

令 $x=Qy$，则

对 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 采取两种方法化为标准型：

- **方法一**：求系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值（$\lambda = 1, 1, 10$）、特征向量 $\xrightarrow{\text{单位正交化}}$ 得到正交矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & 1/3 \\ 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & 2/3 \\ 0 & \sqrt{5}/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

令 $x = Qy$，则

$$f = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2$$

对 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 采取两种方法化为标准型：

- **方法一**：求系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值（$\lambda = 1, 1, 10$）、特征向量 $\xrightarrow{\text{单位正交化}}$ 得到正交矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & 1/3 \\ 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & 2/3 \\ 0 & \sqrt{5}/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

令 $x = Qy$，则

$$f = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2$$

- **方法二**：配方法

对 $f=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$ 采取两种方法化为标准型：

- **方法一**：求系数矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值（$\lambda=1,1,10$）、特征向量 $\xrightarrow{\text{单位正交化}}$ 得到正交矩阵

$$Q=\begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & 1/3 \\ 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & 2/3 \\ 0 & \sqrt{5}/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

令 $x=Qy$，则

$$f=y_1^2+y_2^2+10y_3^2$$

- **方法二**：配方法

$$f=2(x_1+x_2-x_3)^2+3\left(x_2-\frac{2}{3}x_3\right)^2+\frac{5}{3}x_3^2$$

对 $f=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$ 采取两种方法化为标准型：

- **方法一**：求系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$ 的特征值（$\lambda=1,1,10$）、特征向量 $\xrightarrow{\text{单位正交化}}$ 得到正交矩阵

$$Q=\begin{pmatrix}-2/\sqrt{5}&2/3\sqrt{5}&1/3\\1/\sqrt{5}&4/3\sqrt{5}&2/3\\0&\sqrt{5}/3&-2/3\end{pmatrix}$$

令 $x=Qy$，则

$$f=y_1^2+y_2^2+10y_3^2$$

- **方法二**：配方法

$$f=2(x_1+x_2-x_3)^2+3\left(x_2-\frac{2}{3}x_3\right)^2+\frac{5}{3}x_3^2=2y_1^2+3y_2^2+\frac{5}{3}y_3^2$$

对 $f=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$ 采取两种方法化为标准型：

- **方法一**：求系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$ 的特征值（$\lambda=1,1,10$）、

  特征向量 $\xrightarrow{\text{单位正交化}}$ 得到正交矩阵

$$Q=\begin{pmatrix}-2/\sqrt{5}&2/3\sqrt{5}&1/3\\1/\sqrt{5}&4/3\sqrt{5}&2/3\\0&\sqrt{5}/3&-2/3\end{pmatrix}$$

  令 $x=Qy$，则

$$f=y_1^2+y_2^2+10y_3^2$$

- **方法二**：配方法

$$f=2(x_1+x_2-x_3)^2+3\left(x_2-\frac{2}{3}x_3\right)^2+\frac{5}{3}x_3^2=2y_1^2+3y_2^2+\frac{5}{3}y_3^2$$

注 标准型不唯一

二次型的规范型

定理 任意二次型 $f(x_1, \ldots, x_n)$ 都可以通过非退化线性变换

$$x = Cy$$

化为

$$f = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_r y_r^2$$

二次型的规范型

定理 任意二次型 $f(x_1, \ldots, x_n)$ 都可以通过非退化线性变换

$$x = Cy$$

化为

$$f = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2$$

二次型的规范型

定理 任意二次型 $f(x_1, ..., x_n)$ 都可以通过非退化线性变换

$$x = Cy$$

化为

$$f = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2 \qquad \text{(规范型)}$$

二次型的规范型

定理 任意二次型 $f(x_1, \ldots, x_n)$ 都可以通过非退化线性变换

$$x = Cy$$

化为

$$f = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2 \qquad (\text{规范型})$$

$$\begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$$

二次型的规范型

定理 任意二次型 $f(x_1, \ldots, x_n)$ 都可以通过非退化线性变换

$$x = Cy$$

化为

$$f = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2 \qquad \text{(规范型)}$$

$$A \qquad \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$$

二次型的规范型

定理 任意二次型 $f(x_1, \ldots, x_n)$ 都可以通过非退化线性变换

$$x = Cy$$

化为

$$f = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2 \qquad \text{(规范型)}$$

也就是，任意对称矩阵 A，都存在可逆矩阵 C，使得

$$C^T A C = \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$$

二次型的规范型

定理 任意二次型 $f(x_1, \ldots, x_n)$ 都可以通过非退化线性变换

$$x = Cy$$

化为

$$f = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2 \qquad \text{(规范型)}$$

也就是，任意对称矩阵 A，都存在可逆矩阵 C，使得

$$C^T AC = \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$$

注 $r = r(A)$，$p =$ 正惯性指标，$r - p =$ 负惯性指标

二次型的规范型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

配方法

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

二次型的规范型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

配方法

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

$$(\sqrt{2}x_2)^2$$

二次型的规范型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

配方法

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - (\sqrt{2}x_2)^2$$

二次型的规范型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

配方法

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - (\sqrt{2}x_2)^2$$

$$= y_1^2 - y_2^2$$

二次型的规范型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

配方法

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - (\sqrt{2}x_2)^2$$

变量代换 $y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x$

$$= y_1^2 - y_2^2$$

二次型的规范型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

配方法

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - (\sqrt{2}x_2)^2$$

变量代换 $y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -2 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y$

$$= y_1^2 - y_2^2$$

二次型的规范型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

配方法

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - (\sqrt{2}x_2)^2$$

变量代换 $y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x \Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -2 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C} y$

$$= y_1^2 - y_2^2$$

二次型的规范型

$$f = x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$$

配方法

$$= \frac{3}{4}x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 + (-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3)^2$$

二次型的规范型

$$f = x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$$

配方法

$$= \frac{3}{4}x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 + (-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3)^2$$

$$= (\frac{\sqrt{3}}{2}x_1)^2$$

二次型的规范型

$$f = x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$$

配方法

$$= \frac{3}{4}x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 + (-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3)^2$$

$$= (\frac{\sqrt{3}}{2}x_1)^2 + (-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3)^2$$

二次型的规范型

$$f = x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$$

配方法

$$= \frac{3}{4}x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 + (-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3)^2$$

$$= (\frac{\sqrt{3}}{2}x_1)^2 + (-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_1 - x_2)^2$$

二次型的规范型

$$f = x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$$

配方法

$$= \frac{3}{4}x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 + (-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3)^2$$

$$= (\frac{\sqrt{3}}{2}x_1)^2 + (-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_1 - x_2)^2 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

二次型的规范型

$$f = x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$$

配方法

$$= \frac{3}{4}x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 + (-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3)^2$$

$$= (\frac{\sqrt{3}}{2}x_1)^2 + (-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_1 - x_2)^2 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

变量代换 $y = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x$

二次型的规范型

$$f = x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$$

配方法

$$= \frac{3}{4}x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 + (-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3)^2$$

$$= (\frac{\sqrt{3}}{2}x_1)^2 + (-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_1 - x_2)^2 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

变量代换 $y = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 2/\sqrt{3} & 0 & -1 \\ -1/\sqrt{3} & 1 & 1 \end{pmatrix} y$

二次型的规范型

$$f = x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$$

配方法

$$= \frac{3}{4}x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 + (-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3)^2$$

$$= (\frac{\sqrt{3}}{2}x_1)^2 + (-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_1 - x_2)^2 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

变量代换 $y = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x \Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} 2/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 2/\sqrt{3} & 0 & -1 \\ -1/\sqrt{3} & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{C} y$

合同，合同的等价条件

定义 设 A, B 为两个 n 阶方阵，若存在可逆 n 阶方阵 C，使得

$$C^T AC = B$$

则称 A **合同于** B，记为 $A \simeq B$

合同，合同的等价条件

定义 设 A, B 为两个 n 阶方阵，若存在可逆 n 阶方阵 C，使得

$$C^T A C = B$$

则称 A **合同于** B，记为 $A \simeq B$

定理 任意对称矩阵 A，都成立

$$A \simeq \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$$

合同，合同的等价条件

定义 设 A, B 为两个 n 阶方阵，若存在可逆 n 阶方阵 C，使得

$$C^T A C = B$$

则称 A **合同于** B，记为 $A \simeq B$

定理 任意对称矩阵 A，都成立

$$A \simeq \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$$

定理 设 A, B 为对称矩阵，则 $A \simeq B$ 的充分必要条件是 A, B 具有相同的规范形（也就是，秩、正惯性指标都相等）