第 14 周作业解答

练习 1. 设 A, B 均是 n 阶正定矩阵，证明 $A+B$ 也是正定矩阵。

证明设 $x \neq 0$ 为 n 维列向量，则

$$x^T(A+B)x = x^TAx + x^TBx > 0$$

其中最后一步用到 A, B 的正定性。所以 $A+B$ 为正定矩阵。

练习 2. 设 n 阶对称矩阵 A 满足 $A^2-4A+3I=0$。证明 A 是正定矩阵。

证明设 λ 为 A 的任一特征值，α 为相应特征向量，即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

从而

$$\begin{aligned} 0 &= (A^2-4A+3I)\alpha \\ &= A^2\alpha - 4A\alpha + 3\alpha \\ &= \lambda^2\alpha - 4\lambda\alpha + 3\alpha \\ &= (\lambda^2-4\lambda+3)\alpha \end{aligned}$$

所以

$$\lambda^2-4\lambda+3=0$$

得 $\lambda=1$ 或 $\lambda=3$。总之，$\lambda>0$。说明 A 的特征值均是大于零，所以 A 是正定。

练习 3. t 为何值时，二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$ 是正定?

解 $t>2$。