第 9 章 e：方向导数与梯度

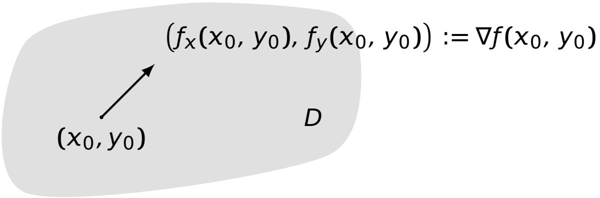
数学系　　梁卓滨

2017.07 暑期班

提要

1. 二元函数的
   - 梯度
   - 方向导数
2. 三元函数的
   - 梯度
   - 方向导数

梯度



定义 设 $f(x, y)$ 在平面区域 D 内具有一阶连续偏导数，对于每一点 $p_0(x_0, y_0)$，定义向量

$$\big(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)\big),$$

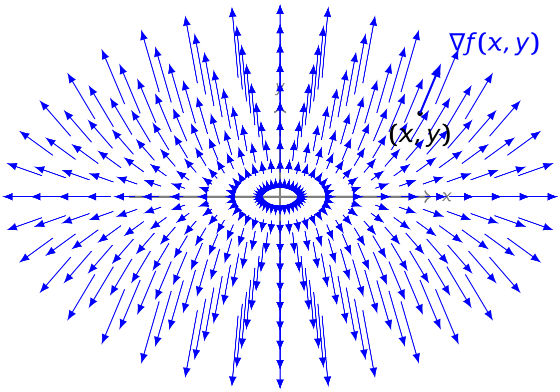
称为 $f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处的梯度，记为

$$\operatorname{grad} f(x_0, y_0) \quad \text{或} \quad \nabla f(x_0, y_0)$$

例 设 $f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$，求 ∇f

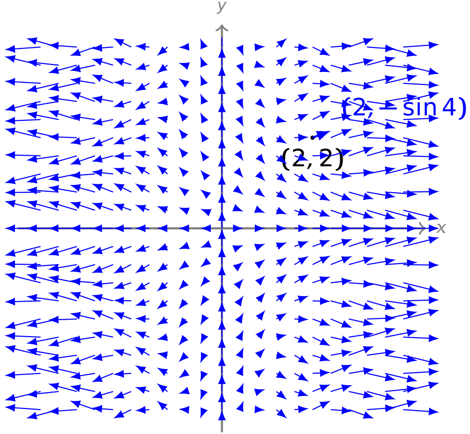
解 $\nabla f = (f_x, f_y) = \left(\frac{x}{2}, 2y\right)$

例 设 $f(x,y)=\frac{x^2}{4}+y^2$，则 $\nabla f(x,y)=(\frac{x}{2},2y)$



- 梯度 ∇f 是一个向量场
- 反过来，向量场并不总是某个函数的梯度！

例 向量场 $F(x, y) = (y, -\sin(xy))$，不是任何函数的梯度



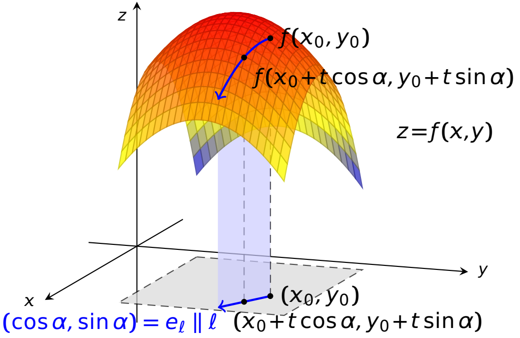
证明 若 $F(x, y) = (y, -\sin(xy)) = \nabla f = (f_x, f_y)$，则

$$f_x = y, \quad f_y = -\sin(xy)$$

$$f_{xy} = 1, \quad f_{yx} = -y\cos(xy) \quad \Rightarrow \quad f_{xy} \neq f_{yx}$$

不可能

方向导数



$z = f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处沿方向 ℓ 的变化率，即方向导数：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0, y_0)} := \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\sin\alpha) - f(x_0, y_0)}{t}$$

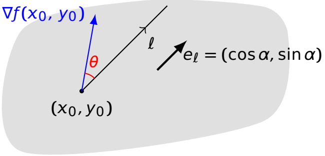
$$= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\sin\alpha)$$

$$= f_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f_y(x_0, y_0)\sin\alpha$$

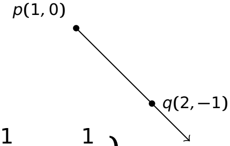
$$= \nabla f(x_0, y_0)\cdot e_\ell = |\nabla f|\cos\theta$$

- $z=f(x,y)$ 在点 $p_0(x_0,y_0)$ 处沿方向 ℓ 的方向导数：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0)}=\nabla f(x_0,y_0)\cdot e_\ell=|\nabla f|\cos\theta$$



例 求 $z=xe^{2y}$ 在点 $p(1,0)$ 处，往点 $q(2,-1)$ 方向上的方向导数。



解 1. 方向 $\ell=\overrightarrow{pq}=(1,-1)$，对应单位向量 $e_\ell=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$

2. 计算梯度

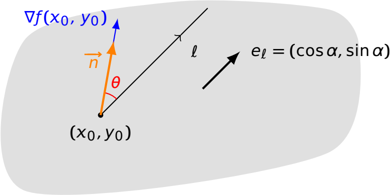
$$\nabla z=(z_x,z_y)=(e^{2y},2xe^{2y})$$

3. 方向导数

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \ell}\right|_{(1,0)}=\nabla z(1,0)\cdot e_\ell=(1,2)\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

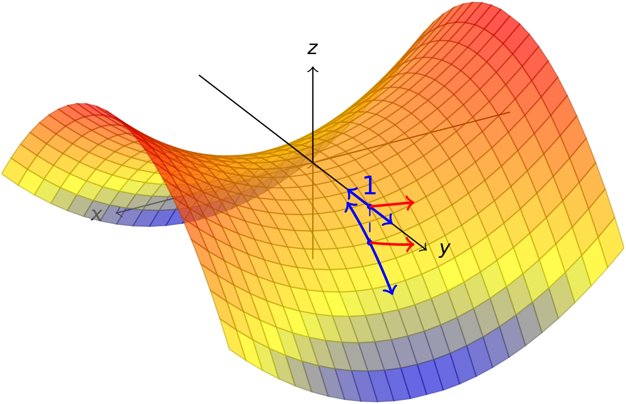
- $$\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0)} = |\nabla f(x_0,y_0)|\cos\theta$$

假设 $\nabla f \neq 0$，令 $\overrightarrow{n} := \frac{1}{|\nabla f|}\nabla f$



- 当 $\theta = 0$ 时，$e_\ell = \overrightarrow{n}$，并且方向导数达到最大值：
  $$\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0)} = |\nabla f(x_0,y_0)| > 0$$，说明沿梯度方向，函数增速最快
- 当 $\theta = \pi$ 时，$e_\ell = -\overrightarrow{n}$，并且方向导数达到最小值：
  $$\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0)} = -|\nabla f(x_0,y_0)| < 0$$，说明沿梯度反方向，函数减速最快
- 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时，$e_\ell \perp \overrightarrow{n}$，并且方向导数为零：$\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0)} = 0$。

例 函数 $z = x^2 - y^2$ 在点 $(0, 1)$ 处沿什么方向，其增加、减少的速度最大？



解 梯度 $\nabla z = (2x, -2y)$，所以在点 $(0, 1)$ 时，

- 沿方向 $\nabla z(0, 1) = (0, -2)$增加最快
- 沿方向 $-\nabla z(0, 1) = (0, 2)$减少最快

三元函数梯度

- 三元函数 $z = f(x, y, z)$ 在点 $p_0(x_0, y_0, z_0)$ 的梯度：

$$\mathrm{grad}\, f(x_0, y_0, z_0) \xlongequal{\text{或}} \nabla f(x_0, y_0, z_0)$$

$$= f_x(x_0, y_0, z_0)\overrightarrow{i} + f_y(x_0, y_0, z_0)\overrightarrow{j} + f_z(x_0, y_0, z_0)\overrightarrow{k}$$

$$= \Big(f_x(x_0, y_0, z_0), f_y(x_0, y_0, z_0), f_z(x_0, y_0, z_0)\Big)$$

例 设 $f(x, y, z) = e^{xy}\sin z$，计算 ∇f。

解 f 的梯度是

$$\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = (ye^{xy}\sin z, xe^{xy}\sin z, e^{xy}\cos z)$$

当 $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ 时，则函数在点 (x_0, y_0, z_0) 处，

- 沿梯度方向，增加速度最快，达到 $|\nabla f(x_0, y_0, z_0)|$
- 沿梯度反方向，减少速度最快，达到 $-|\nabla f(x_0, y_0, z_0)|$
- 梯度垂直方向，其改变率为零

例 设 $f(x, y, z) = -x^3 + xy^2 + z$，$p_0(0.5, 0.5, 1)$。问：$f$ 在 p_0 点沿什么方向变化最快，变化率是多少？

解 1. f 的梯度是

$$\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = (-3x^2 + y^2, 2xy, 1)$$

所以 $\nabla f(0.5, 0.5, 1) = (-0.5, 0.5, 1)$

2. 函数沿梯度方向 $\nabla f(0.5, 0.5, 1) = (-0.5, 0.5, 1)$，增加速度最大，达到 $|\nabla f(x_0, y_0)| = \sqrt{1.5}$

3. 函数沿梯度反方向 $-\nabla f(0.5, 0.5, 1) = (0.5, -0.5, -1)$，减少速度最大，达到 $-|\nabla f(x_0, y_0)| = -\sqrt{1.5}$

设三元函数 $f(x, y, z)$ 在点 $p_0(x_0, y_0, z_0)$ 的一个邻域内有定义，设 ℓ 是从 p_0 出发的射线，方向向量为

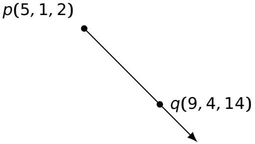
$$e_\ell = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

则 $f(x, y, z)$ 在点 p_0 处沿方向 ℓ 的变化率，即方向导数，为 $\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0, y_0, z_0)}$:

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{t} \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma) \\
&= f_x(x_0, y_0, z_0)\cos\alpha + f_y(x_0, y_0, z_0)\cos\beta + f_z(x_0, y_0, z_0)\cos\gamma \\
&= \nabla f(x_0, y_0, z_0)\cdot e_\ell = |\nabla f|\cos\theta
\end{aligned}$$

其中 θ 是 $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ 与 e_ℓ 的夹角

例 求 $u = xyz$ 在点 $p(5, 1, 2)$ 处，往点 $q(9, 4, 14)$ 方向上的方向导数。



解 1. 方向 $\ell = \overrightarrow{pq} = (4, 3, 12)$，对应单位向量 $e_\ell = (\frac{4}{13}, \frac{3}{13}, \frac{12}{13})$

2. 计算梯度

$$\nabla u = (u_x, u_y, u_z) = (yz, xz, xy)$$

3. 方向导数

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \ell}\right|_{(5,1,2)} = \nabla u(5, 1, 2) \cdot e_\ell = (2, 10, 5) \cdot (\frac{4}{13}, \frac{3}{13}, \frac{12}{13}) = \frac{98}{13}$$

例 求 $u=xy^2z$ 在点 $p(1,-1,2)$ 处增加最快的方向，并求沿这个方向的方向导数。

解 1. u 的梯度是

$$\nabla u=(u_x,u_y,u_z)=(y^2z,2xyz,xy^2)$$

函数沿梯度方向 $\nabla u(1,-1,2)=(2,-4,1)$增加最快。

2. 梯度方向的单位化向量是 $e=\frac{1}{|\nabla u|}\nabla u$，所以沿梯度方向的方向导数是

$$\begin{aligned}\nabla u\cdot e\big|_{(1,-1,2)}&=\nabla u\cdot\left(\frac{1}{|\nabla u|}\nabla u\right)\Big|_{(1,-1,2)}\\&=|\nabla u|_{(1,-1,2)}=\sqrt{2^2+(-4)^2+1^2}=\sqrt{21}\end{aligned}$$