

第 01 周作业解答

练习 1. 1. $y^4 + y'' + 2x = 0$ 的阶是 2。

2. $(7x - 6)dy + (x + y)dx = 0$ 的阶是 1。

练习 2. 验证 $y = Cx - \frac{1}{4}C^2$ (C 为任意常数) 是常微分方程 $y = xy' - \frac{1}{4}(y')^2$ 的通解。验证 $y = x^2$ 也是解, 由此说明通解不一定包含所有解。

解: 验证如下: $xy' - \frac{1}{4}(y')^2 = x(Cx - \frac{1}{4}C^2)' - \frac{1}{4}((Cx - \frac{1}{4}C^2)')^2 = xC^2 - \frac{1}{4}C^2 = y$, 所是解。又因为包含一个任意常数, 而方程是一阶, 所以为通解。另一方面, 直接可验证 $y = x^2$ 也是解, 但不包含在通解 $y = Cx - \frac{1}{4}C^2$ 中。所以这里, 通解并不包含所有解。

练习 3. 1. 假设 $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$ 是微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的解, 判断 $y = C_1y_1 + C_2y_2$ (其中 C_1, C_2 为任意常数) 是否也是该方程的解?

2. 假设 $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$ 是微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的解, 判断 $y = C_1y_1 + C_2y_2$ (其中 C_1, C_2 为任意常数) 是否也是该方程的解?

解: 1. 是的。验证如下:

$$\begin{aligned}y'' + p(x)y' + q(x)y &= [C_1y_1 + C_2y_2]'' + p(x)[C_1y_1 + C_2y_2]' + q(x)[C_1y_1 + C_2y_2] \\&= C_1[y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1] + C_2[y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2] \\&= 0 + 0 = 0\end{aligned}$$

2. 一般而言不是 (除非 $f(x) = 0$)。这是:

$$\begin{aligned}y'' + p(x)y' + q(x)y &= [C_1y_1 + C_2y_2]'' + p(x)[C_1y_1 + C_2y_2]' + q(x)[C_1y_1 + C_2y_2] \\&= C_1[y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1] + C_2[y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2] \\&= C_1f(x) + C_2f(x) = (C_1 + C_2)f(x) \neq f(x)\end{aligned}$$

练习 4. (关于半衰期) 设 $M(t)$ 为某放射物质在时刻 t 的含量。已知任何时刻, 该物质衰变速度与剩余含量之比为 $-\lambda$ (λ 是正常数)。问需要经过多长时间, 该物质含量减少为初始时刻 $t = 0$ 时含量的一半?

这个时间与 $M(0)$ 的具体数值没有关系, 称为半衰期。

解:

$$\frac{M'(t)}{M(t)} = -\lambda \Rightarrow M'(t) = -\lambda M(t) \Rightarrow M(t) = M(0)e^{-\lambda t}$$

求解 t 满足

$$\frac{1}{2}M(0) = M(t) = M(0)e^{-\lambda t}$$

解得

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln 2$$

注: 从半衰期的表达式可见: 半衰期与初始时刻物质的量没有关系。同一种物质, 任何量开始衰变到剩余一半量, 所需要的时间一样。

练习 5. 已知弹簧系统（详细见课件）满足方程

$$x'' + \frac{9}{4}x = 0$$

问该物体的运动周期是多少？假设物体的初始位置 $x(0) = 2$ ，初始速度 $x'(0) = -1$ ，求该物体的位置函数 $x(t)$ 。

解：通解是

$$x = C_1 \cos(\frac{3}{2}t) + C_2 \sin(\frac{3}{2}t).$$

所以运动周期是 $\frac{2\pi}{3/2} = \frac{4}{3}\pi$ 。

假设 $x(0) = 2$, $x'(0) = -1$, 则

$$\begin{aligned} 2 = x(0) &= C_1 \cos(\frac{3}{2}t) + C_2 \sin(\frac{3}{2}t)|_{t=0} = C_1 \\ -1 = x'(0) &= -C_1 \cdot \frac{3}{2} \sin(\frac{3}{2}t) + C_2 \frac{3}{2} \cdot \cos(\frac{3}{2}t)|_{t=0} = \frac{3}{2}C_2 \end{aligned}$$

所以 $C_1 = 2$, $C_2 = -\frac{2}{3}$

$$x(t) = 2 \cos(\frac{3}{2}t) - \frac{2}{3} \sin(\frac{3}{2}t).$$

注： $x(t)$ 可以进一步改写成

$$\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{2^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2} \left[\frac{2}{\sqrt{2^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2}} \cos(\frac{3}{2}t) + \frac{-\frac{2}{3}}{\sqrt{2^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2}} \sin(\frac{3}{2}t) \right] \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{10} \left[\sin \theta \cos(\frac{3}{2}t) + \cos \theta \sin(\frac{3}{2}t) \right] \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{10} \sin(\frac{3}{2}t + \theta) \end{aligned}$$

练习 6. 求出 $y' = x^2y$ 的通解。

解这是可分离变量的微分方程。

$$\frac{dy}{dx} = x^2y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = x^2 dx$$

两边积分

$$\int \frac{dy}{y} = \int x^2 dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \frac{1}{3}x^3 + C_1 \quad \Rightarrow \quad y = \pm e^{C_1} e^{\frac{1}{3}x^3}$$

所以通解是

$$y = C e^{\frac{1}{3}x^3}.$$

练习 7. 求解初值问题 $\begin{cases} xydx + (x^2 + 1)dy = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ 。

解这是可分离变量的微分方程。先求通解。

$$xydx + (x^2 + 1)dy = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -\frac{x}{1+x^2} dx$$

两边积分

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{x}{1+x^2} dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = -\frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C_1$$

所以通解是

$$y = C(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

代入初值条件

$$1 = y(0) = C(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}|_{x=0} = C$$

得 $C = 1$ 。所以初值问题的解是

$$y = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

注. 1. 求积分 $\int \frac{x}{1+x^2} dx$ 的方法:

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \int \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1}{2} d(1+x^2) \stackrel{u=1+x^2}{=} \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} \ln|u| + C = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

2. 下面这个公式直接用, 可减少计算量:

$$\ln|a| = \ln|b| + C_1 \Rightarrow a = Cb$$

其中 $C = \pm e^{C_1}$ 。

练习 8. 求解初值问题 $\begin{cases} \cos y dx + (1+e^{-x}) \sin y dy = 0 \\ y(0) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$ 。

解这是可分离变量的微分方程。先求通解。

$$\cos y dx + (1+e^{-x}) \sin y dy \Rightarrow \frac{\sin y}{\cos y} dy = -\frac{1}{1+e^{-x}} dx$$

两边积分

$$\int \frac{\sin y}{\cos y} dy = -\int \frac{1}{1+e^{-x}} dx \Rightarrow -\ln|\cos y| = -\ln(e^x+1) + C_1$$

所以通解是

$$\cos y = C(e^x+1).$$

代入初值条件

$$\frac{\pi}{4} = y(0) \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4} = \cos y(0) = C(e^0+1)|_{x=0} = 2C$$

得 $C = \frac{\sqrt{2}}{4}$ 。所以初值问题的解是

$$\cos y = \frac{\sqrt{2}}{4}(e^x+1).$$

注. 1. 求积分 $\int \frac{\sin y}{\cos y} dy$ 的方法:

$$\int \frac{\sin y}{\cos y} dy = \int \frac{1}{\cos y} \cdot (-1) d \cos y \stackrel{u=\cos y}{=} -\int \frac{1}{u} du = -\ln|u| + C = -\ln|\cos y| + C.$$

2. 求积分 $\int \frac{1}{1+e^{-x}} dx$ 的方法:

$$\int \frac{1}{1+e^{-x}} dx = \int \frac{e^x}{e^x+1} dx = \int \frac{1}{e^x+1} d(e^x+1) \stackrel{u=e^x+1}{=} \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C = \ln(e^x+1) + C.$$

练习 9. 求出 $(x^2+y^2)dx - xydy = 0$ 的通解。

解这是齐次方程。

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

令 $u = \frac{y}{x}$, 则 $y = xu$, $y' = u + xu'$. 代入上述方程, 得

$$u + xu' = \frac{1}{u} + u \Rightarrow u' = \frac{1}{xu} \Rightarrow udu = \frac{dx}{x}.$$

两边积分

$$\int udu = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{1}{2}u^2 = \ln|x| + C$$

将 $u = \frac{y}{x}$ 回代, 得

$$\frac{y^2}{2x^2} = \ln|x| + C \Rightarrow y^2 = 2x^2(\ln|x| + C).$$

练习 10. 求出 $y' - \frac{3y}{x} + \frac{1}{2}x = 0$ 的通解。

解这是一阶线性微分方程:

$$y' + \left(-\frac{3}{x}\right)y = -\frac{x}{2}.$$

1. 求解齐次方程

$$y' + \left(-\frac{3}{x}\right)y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = 3\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = 3\ln|x| + C_1 \Rightarrow y = Cx^3.$$

2. 常数变易。设 $y = u(x)x^3$, 代入原方程得

$$u' \cdot x^3 = -\frac{x}{2} \Rightarrow u = -\int \frac{1}{2x^2} dx \Rightarrow u = \frac{1}{2x} + C.$$

3. 所以原方程通解

$$y = \left(C + \frac{1}{2x}\right)x^3 = Cx^3 + \frac{x^2}{2}.$$

练习 11. 求解微分方程 $\begin{cases} y' + y \cot x = 5e^{\cos x} \\ y(\frac{\pi}{2}) = -4 \end{cases}$.

解这是一阶线性微分方程:

$$y' + (\cot x)y = 5e^{\cos x}.$$

1. 求解齐次方程

$$y' + (\cot x)y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{\cos x}{\sin x} dx$$

两边积分得

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{\cos x}{\sin x} dx \Rightarrow \ln|y| = -\ln|\sin x| + C_1 \Rightarrow y = \frac{C}{\sin x}$$

2. 常数变易。设 $y = \frac{u(x)}{\sin x}$, 代入原方程

$$\frac{u'}{\sin x} = 5e^{\cos x} \Rightarrow u = 5 \int e^{\cos x} \sin x dx = -5 \int e^{\cos x} d \cos x = -5e^{\cos x} + C.$$

3. 所以原方程通解

$$y = (-5e^{\cos x} + C) \cdot \frac{1}{\sin x} = \frac{C}{\sin x} - \frac{5e^{\cos x}}{\sin x}.$$

4. 将初始条件代入，得

$$-4 = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{C}{\sin x} - \frac{5e^{\cos x}}{\sin x} \Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = C - 5 \quad \Rightarrow \quad C = 1.$$

所以

$$y = \frac{1 - 5e^{\cos x}}{\sin x}.$$