

第 11 章 f : 高斯公式、斯托克斯公式

数学系 梁卓滨

2018-2019 学年 II

We are here now...

1. 高斯公式

2. 斯托克斯公式

向量场的散度

定义 设 $F = (P, Q, R)$ 是空间中向量场，定义

$$\operatorname{div} F := \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

称为向量场 F 的散度。

向量场的散度

定义 设 $F = (P, Q, R)$ 是空间中向量场，定义

$$\operatorname{div} F := \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

称为向量场 F 的散度。

例 1 计算向量场 $F = (x^2 + yz, y^2 + xz, z^2 + xy)$ 的散度。

向量场的散度

定义 设 $F = (P, Q, R)$ 是空间中向量场, 定义

$$\operatorname{div} F := \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

称为向量场 F 的散度。

例 1 计算向量场 $F = (x^2 + yz, y^2 + xz, z^2 + xy)$ 的散度。

解

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + yz) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2 + xz) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2 + xy)$$

向量场的散度

定义 设 $F = (P, Q, R)$ 是空间中向量场, 定义

$$\operatorname{div} F := \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

称为向量场 F 的散度。

例 1 计算向量场 $F = (x^2 + yz, y^2 + xz, z^2 + xy)$ 的散度。

解

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + yz) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2 + xz) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2 + xy) = 2x + 2y + 2z.$$

例 2 计算梯度场 $\nabla \frac{1}{r}$ ($r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) 的散度。

例 2 计算梯度场 $\nabla \frac{1}{r}$ ($r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) 的散度。

解

$$\nabla \frac{1}{r}$$

$$\operatorname{div} \nabla \frac{1}{r}$$

例 2 计算梯度场 $\nabla \frac{1}{r}$ ($r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) 的散度。

解

$$\nabla \frac{1}{r} = \left(\frac{\partial}{\partial x} r^{-1}, \frac{\partial}{\partial y} r^{-1}, \frac{\partial}{\partial z} r^{-1} \right)$$

$$\operatorname{div} \nabla \frac{1}{r}$$

例 2 计算梯度场 $\nabla \frac{1}{r}$ ($r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) 的散度。

解

$$\nabla \frac{1}{r} = \left(\frac{\partial}{\partial x} r^{-1}, \frac{\partial}{\partial y} r^{-1}, \frac{\partial}{\partial z} r^{-1} \right)$$
$$= -r^{-2} \cdot r_x$$

$$\operatorname{div} \nabla \frac{1}{r}$$

例 2 计算梯度场 $\nabla \frac{1}{r}$ ($r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) 的散度。

解

$$\begin{aligned}\nabla \frac{1}{r} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} r^{-1}, \frac{\partial}{\partial y} r^{-1}, \frac{\partial}{\partial z} r^{-1} \right) \\ &= (-r^{-2} \cdot r_x, -r^{-2} \cdot r_y, -r^{-2} \cdot r_z)\end{aligned}$$

$$\operatorname{div} \nabla \frac{1}{r}$$

例 2 计算梯度场 $\nabla \frac{1}{r}$ ($r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) 的散度。

解

$$r_x = \frac{x}{r},$$

$$\nabla \frac{1}{r} = \left(\frac{\partial}{\partial x} r^{-1}, \frac{\partial}{\partial y} r^{-1}, \frac{\partial}{\partial z} r^{-1} \right)$$

$$= (-r^{-2} \cdot r_x, -r^{-2} \cdot r_y, -r^{-2} \cdot r_z)$$

$$\operatorname{div} \nabla \frac{1}{r}$$

例 2 计算梯度场 $\nabla \frac{1}{r}$ ($r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) 的散度。

解

$$r_x = \frac{x}{r}, \quad r_y = \frac{y}{r}, \quad r_z = \frac{z}{r},$$

$$\nabla \frac{1}{r} = \left(\frac{\partial}{\partial x} r^{-1}, \frac{\partial}{\partial y} r^{-1}, \frac{\partial}{\partial z} r^{-1} \right)$$

$$= (-r^{-2} \cdot r_x, -r^{-2} \cdot r_y, -r^{-2} \cdot r_z)$$

$$\operatorname{div} \nabla \frac{1}{r}$$

例 2 计算梯度场 $\nabla \frac{1}{r}$ ($r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) 的散度。

解

$$r_x = \frac{x}{r}, \quad r_y = \frac{y}{r}, \quad r_z = \frac{z}{r},$$

$$\nabla \frac{1}{r} = \left(\frac{\partial}{\partial x} r^{-1}, \frac{\partial}{\partial y} r^{-1}, \frac{\partial}{\partial z} r^{-1} \right)$$

$$= (-r^{-2} \cdot r_x, -r^{-2} \cdot r_y, -r^{-2} \cdot r_z) = \left(-\frac{x}{r^3}, -\frac{y}{r^3}, -\frac{z}{r^3} \right),$$

$$\operatorname{div} \nabla \frac{1}{r}$$

例 2 计算梯度场 $\nabla \frac{1}{r}$ ($r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) 的散度。

解

$$r_x = \frac{x}{r}, \quad r_y = \frac{y}{r}, \quad r_z = \frac{z}{r},$$

$$\nabla \frac{1}{r} = \left(\frac{\partial}{\partial x} r^{-1}, \frac{\partial}{\partial y} r^{-1}, \frac{\partial}{\partial z} r^{-1} \right)$$

$$= (-r^{-2} \cdot r_x, -r^{-2} \cdot r_y, -r^{-2} \cdot r_z) = \left(-\frac{x}{r^3}, -\frac{y}{r^3}, -\frac{z}{r^3} \right),$$

$$\operatorname{div} \nabla \frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{y}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{z}{r^3} \right)$$

例 2 计算梯度场 $\nabla \frac{1}{r}$ ($r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) 的散度。

解

$$r_x = \frac{x}{r}, \quad r_y = \frac{y}{r}, \quad r_z = \frac{z}{r},$$

$$\nabla \frac{1}{r} = \left(\frac{\partial}{\partial x} r^{-1}, \frac{\partial}{\partial y} r^{-1}, \frac{\partial}{\partial z} r^{-1} \right)$$

$$= (-r^{-2} \cdot r_x, -r^{-2} \cdot r_y, -r^{-2} \cdot r_z) = \left(-\frac{x}{r^3}, -\frac{y}{r^3}, -\frac{z}{r^3} \right),$$

$$\operatorname{div} \nabla \frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{y}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{z}{r^3} \right)$$

$$\left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5} \right)$$

例 2 计算梯度场 $\nabla \frac{1}{r}$ ($r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) 的散度。

解

$$r_x = \frac{x}{r}, \quad r_y = \frac{y}{r}, \quad r_z = \frac{z}{r},$$

$$\nabla \frac{1}{r} = \left(\frac{\partial}{\partial x} r^{-1}, \frac{\partial}{\partial y} r^{-1}, \frac{\partial}{\partial z} r^{-1} \right)$$

$$= (-r^{-2} \cdot r_x, -r^{-2} \cdot r_y, -r^{-2} \cdot r_z) = \left(-\frac{x}{r^3}, -\frac{y}{r^3}, -\frac{z}{r^3} \right),$$

$$\operatorname{div} \nabla \frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{y}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{z}{r^3} \right)$$

$$= \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5} \right) + \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5} \right) + \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5} \right)$$

例 2 计算梯度场 $\nabla \frac{1}{r}$ ($r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) 的散度。

解

$$r_x = \frac{x}{r}, \quad r_y = \frac{y}{r}, \quad r_z = \frac{z}{r},$$

$$\nabla \frac{1}{r} = \left(\frac{\partial}{\partial x} r^{-1}, \frac{\partial}{\partial y} r^{-1}, \frac{\partial}{\partial z} r^{-1} \right)$$

$$= (-r^{-2} \cdot r_x, -r^{-2} \cdot r_y, -r^{-2} \cdot r_z) = \left(-\frac{x}{r^3}, -\frac{y}{r^3}, -\frac{z}{r^3} \right),$$

$$\operatorname{div} \nabla \frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{y}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{z}{r^3} \right)$$

$$= \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5} \right) + \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5} \right) + \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5} \right)$$

$$= -\frac{3}{r^3} + \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5}$$

例 2 计算梯度场 $\nabla \frac{1}{r}$ ($r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) 的散度。

解

$$r_x = \frac{x}{r}, \quad r_y = \frac{y}{r}, \quad r_z = \frac{z}{r},$$

$$\nabla \frac{1}{r} = \left(\frac{\partial}{\partial x} r^{-1}, \frac{\partial}{\partial y} r^{-1}, \frac{\partial}{\partial z} r^{-1} \right)$$

$$= (-r^{-2} \cdot r_x, -r^{-2} \cdot r_y, -r^{-2} \cdot r_z) = \left(-\frac{x}{r^3}, -\frac{y}{r^3}, -\frac{z}{r^3} \right),$$

$$\operatorname{div} \nabla \frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{y}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{z}{r^3} \right)$$

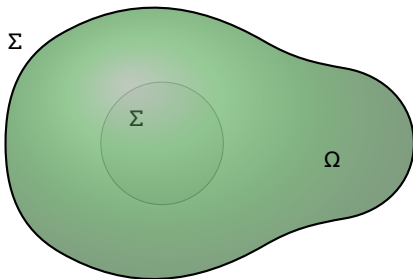
$$= \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5} \right) + \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5} \right) + \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5} \right)$$

$$= -\frac{3}{r^3} + \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = 0.$$

高斯公式

定理（高斯公式） 假设

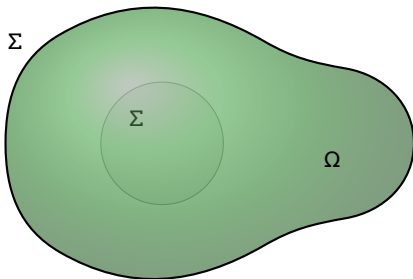
- 空间闭区域 Ω 的边界是分片光滑的闭曲面 Σ ,
- \vec{n} 是 Σ 的单位外法向量,



高斯公式

定理（高斯公式） 假设

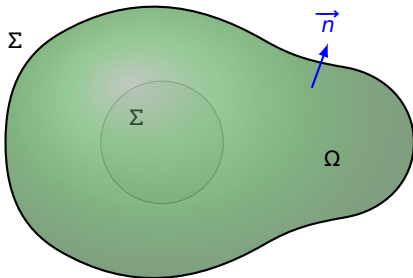
- 空间闭区域 Ω 的边界是分片光滑的闭曲面 Σ ,
- \vec{n} 是 Σ 的单位外法向量, (指向 Ω 外部)



高斯公式

定理（高斯公式） 假设

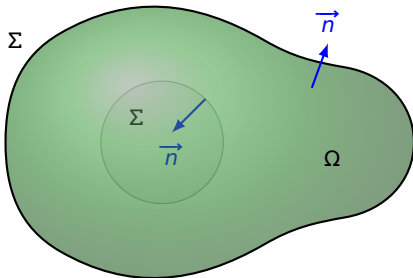
- 空间闭区域 Ω 的边界是分片光滑的闭曲面 Σ ,
- \vec{n} 是 Σ 的单位外法向量, (指向 Ω 外部)



高斯公式

定理（高斯公式） 假设

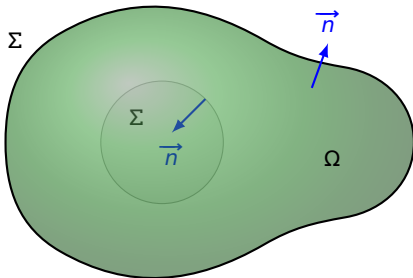
- 空间闭区域 Ω 的边界是分片光滑的闭曲面 Σ ,
- \vec{n} 是 Σ 的单位外法向量, (指向 Ω 外部)



高斯公式

定理（高斯公式） 假设

- 空间闭区域 Ω 的边界是分片光滑的闭曲面 Σ ,
- \vec{n} 是 Σ 的单位外法向量, (指向 Ω 外部)
- $F = (P, Q, R)$ 是 Ω 中向量场, 且 P, Q, R 具有一阶连续的偏导数,



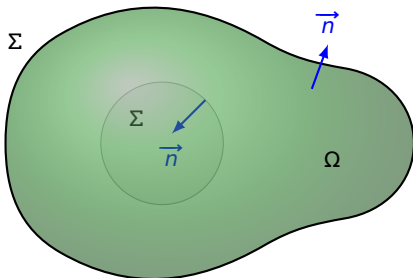
高斯公式

定理（高斯公式） 假设

- 空间闭区域 Ω 的边界是分片光滑的闭曲面 Σ ,
- \vec{n} 是 Σ 的单位外法向量, (指向 Ω 外部)
- $F = (P, Q, R)$ 是 Ω 中向量场, 且 P, Q, R 具有一阶连续的偏导数,

则

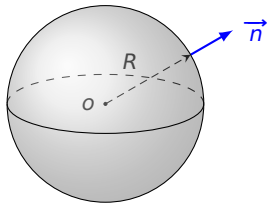
$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dV = \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS$$



例 1 计算

$$I = \iint_{\Sigma} 2x dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$$

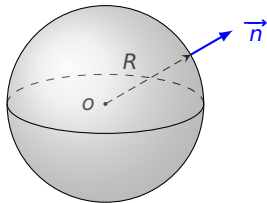
其中定向曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, 定向取外侧



例 1 计算

$$I = \iint_{\Sigma} 2x dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$$

其中定向曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, 定向取外侧



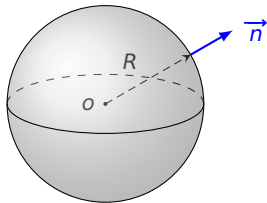
解

$$I \stackrel{\text{=====}}{=} \iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

例 1 计算

$$I = \iint_{\Sigma} 2x dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$$

其中定向曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, 定向取外侧



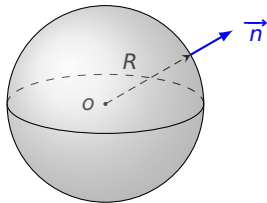
解

$$I \xlongequal{\hspace{1cm}} \iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} dS \xlongequal{\hspace{1cm} \text{高斯公式} \hspace{1cm}} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} dV$$

例 1 计算

$$I = \iint_{\Sigma} 2x dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$$

其中定向曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, 定向取外侧



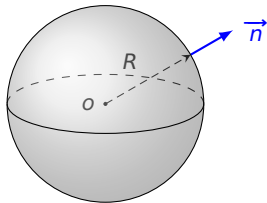
解

$$I \xrightarrow{F=(2x, y^2, z^2)} \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS \xrightarrow{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv$$

例 1 计算

$$I = \iint_{\Sigma} 2x dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$$

其中定向曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, 定向取外侧



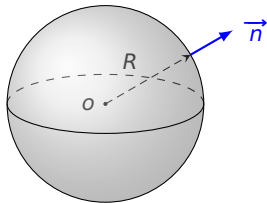
解

$$\begin{aligned} I &\stackrel{F=(2x, y^2, z^2)}{=} \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS \stackrel{\text{高斯公式}}{=} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dV \\ &= \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}(2x) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2) \right] dV \end{aligned}$$

例 1 计算

$$I = \iint_{\Sigma} 2x dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$$

其中定向曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, 定向取外侧



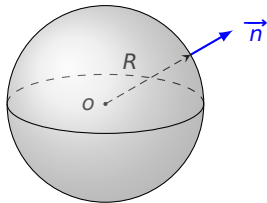
解

$$\begin{aligned} I &\stackrel{F=(2x, y^2, z^2)}{=} \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS \stackrel{\text{高斯公式}}{=} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv \\ &= \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}(2x) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2) \right] dv = \iiint_{\Omega} (2 + 2y + 2z) dv \end{aligned}$$

例 1 计算

$$I = \iint_{\Sigma} 2x dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$$

其中定向曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, 定向取外侧



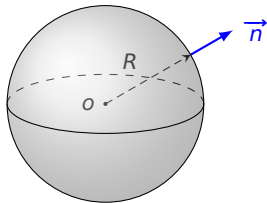
解

$$\begin{aligned} I &\stackrel{F=(2x, y^2, z^2)}{=} \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS \stackrel{\text{高斯公式}}{=} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv \\ &= \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}(2x) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2) \right] dv = \iiint_{\Omega} (2 + 2y + 2z) dv \\ &\stackrel{\text{对称性}}{=} \iiint_{\Omega} 2 dv \end{aligned}$$

例 1 计算

$$I = \iint_{\Sigma} 2x dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$$

其中定向曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, 定向取外侧



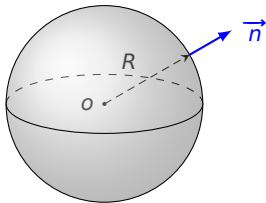
解

$$\begin{aligned} I &\stackrel{F=(2x, y^2, z^2)}{=} \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS \stackrel{\text{高斯公式}}{=} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv \\ &= \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}(2x) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2) \right] dv = \iiint_{\Omega} (2 + 2y + 2z) dv \\ &\stackrel{\text{对称性}}{=} \iiint_{\Omega} 2 dv = 2 \operatorname{Vol}(\Omega) \end{aligned}$$

例 1 计算

$$I = \iint_{\Sigma} 2x dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$$

其中定向曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, 定向取外侧



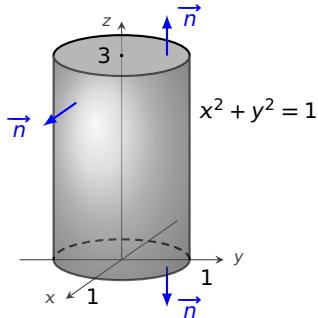
解

$$\begin{aligned} I &\stackrel{F=(2x, y^2, z^2)}{=} \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS \stackrel{\text{高斯公式}}{=} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv \\ &= \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}(2x) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2) \right] dv = \iiint_{\Omega} (2 + 2y + 2z) dv \\ &\stackrel{\text{对称性}}{=} \iiint_{\Omega} 2 dv = 2 \operatorname{Vol}(\Omega) = \frac{8}{3} \pi R^3 \end{aligned}$$

例 2 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x - y) dx dy + (y - z) x dy dz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



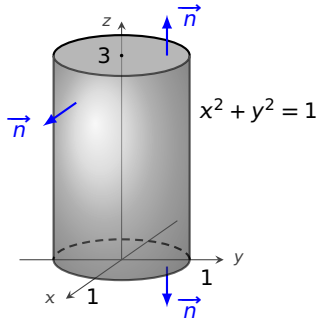
例 2 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x - y) dx dy + (y - z) x dy dz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面

解

$$I \equiv \iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \vec{n} dS$$



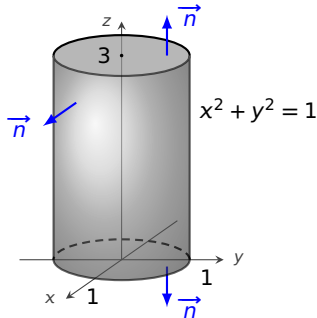
例 2 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x-y)dx dy + (y-z)x dy dz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面

解

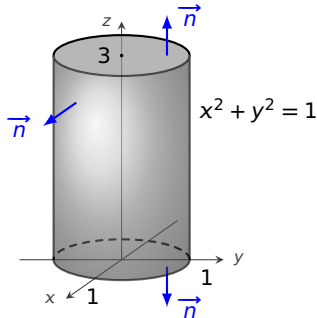
$$I \xlongequal{\hspace{1cm}} \iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} dV$$



例 2 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x-y)dx dy + (y-z)x dy dz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



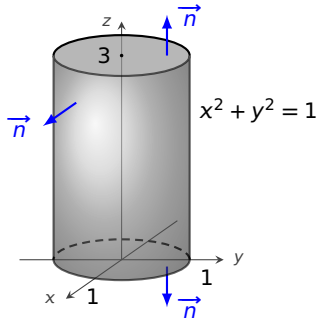
解

$$I \xrightarrow{F=((y-z)x, 0, x-y)} \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS \xrightarrow{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dV$$

例 2 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x-y)dx dy + (y-z)x dy dz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



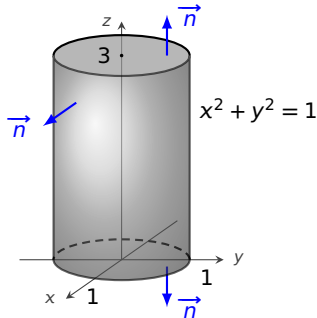
解

$$\begin{aligned} I & \xrightarrow{F=((y-z)x, 0, x-y)} \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS \xrightarrow{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv \\ & = \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}((y-z)x) + \frac{\partial}{\partial y} 0 + \frac{\partial}{\partial z}(x-y) \right] dv \end{aligned}$$

例 2 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x-y)dx dy + (y-z)x dy dz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



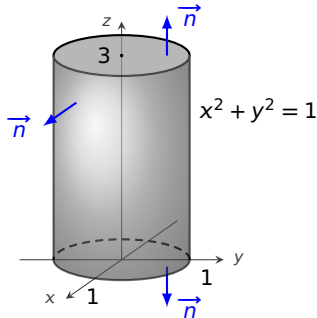
解

$$\begin{aligned} I &\stackrel{F=((y-z)x, 0, x-y)}{=} \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS \stackrel{\text{高斯公式}}{=} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dV \\ &= \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}((y-z)x) + \frac{\partial}{\partial y} 0 + \frac{\partial}{\partial z}(x-y) \right] dV = \iiint_{\Omega} y - z dx dy dz \end{aligned}$$

例 2 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x-y)dx dy + (y-z)x dy dz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



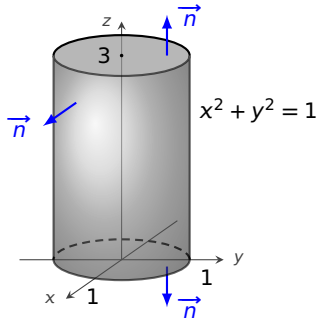
解

$$\begin{aligned} I &\stackrel{F=((y-z)x, 0, x-y)}{=} \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS \stackrel{\text{高斯公式}}{=} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv \\ &= \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}((y-z)x) + \frac{\partial}{\partial y} 0 + \frac{\partial}{\partial z}(x-y) \right] dv = \iiint_{\Omega} y - z dx dy dz \\ &\stackrel{\text{对称性}}{=} \iiint_{\Omega} -z dx dy dz \end{aligned}$$

例 2 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x-y)dx dy + (y-z)x dy dz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



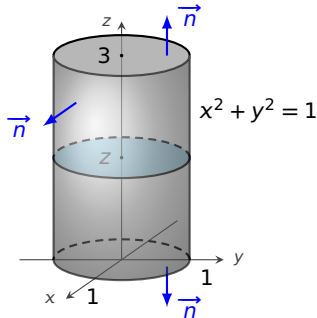
解

$$\begin{aligned} I &\stackrel{F=((y-z)x, 0, x-y)}{=} \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS \stackrel{\text{高斯公式}}{=} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv \\ &= \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}((y-z)x) + \frac{\partial}{\partial y} 0 + \frac{\partial}{\partial z}(x-y) \right] dv = \iiint_{\Omega} y - z dx dy dz \\ &\stackrel{\text{对称性}}{=} \iiint_{\Omega} -z dx dy dz = \int \left[\iint -z dx dy \right] dz \end{aligned}$$

例 2 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x-y)dx dy + (y-z)x dy dz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



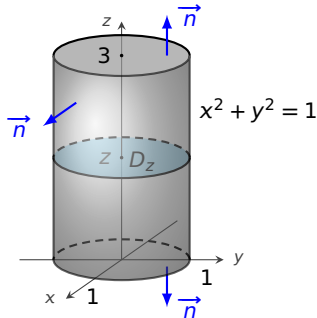
解

$$\begin{aligned} I & \stackrel{F=((y-z)x, 0, x-y)}{=} \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS \stackrel{\text{高斯公式}}{=} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv \\ & = \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}((y-z)x) + \frac{\partial}{\partial y} 0 + \frac{\partial}{\partial z}(x-y) \right] dv = \iiint_{\Omega} y - z dx dy dz \\ & \stackrel{\text{对称性}}{=} \iiint_{\Omega} -z dx dy dz = \int \left[\iint -z dx dy \right] dz \end{aligned}$$

例 2 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x-y)dx dy + (y-z)x dy dz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



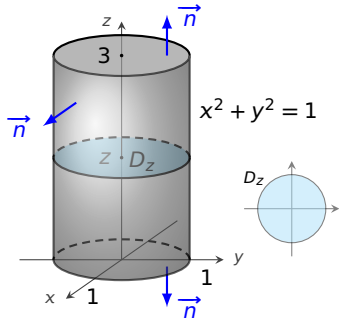
解

$$\begin{aligned} I &\stackrel{F=((y-z)x, 0, x-y)}{=} \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS \stackrel{\text{高斯公式}}{=} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv \\ &= \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}((y-z)x) + \frac{\partial}{\partial y} 0 + \frac{\partial}{\partial z}(x-y) \right] dv = \iiint_{\Omega} y - z dx dy dz \\ &\stackrel{\text{对称性}}{=} \iiint_{\Omega} -z dx dy dz = \int \left[\iint -z dx dy \right] dz \end{aligned}$$

例 2 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x-y)dx dy + (y-z)x dy dz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



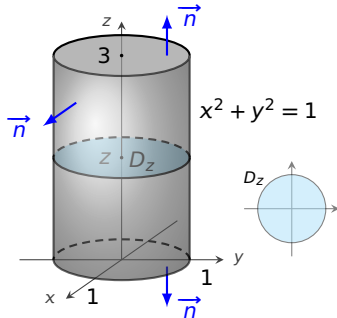
解

$$\begin{aligned} I & \stackrel{F=((y-z)x, 0, x-y)}{=} \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS \stackrel{\text{高斯公式}}{=} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv \\ & = \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}((y-z)x) + \frac{\partial}{\partial y} 0 + \frac{\partial}{\partial z}(x-y) \right] dv = \iiint_{\Omega} y - z dx dy dz \\ & \stackrel{\text{对称性}}{=} \iiint_{\Omega} -z dx dy dz = \int \left[\iint -z dx dy \right] dz \end{aligned}$$

例 2 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x-y)dx dy + (y-z)x dy dz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



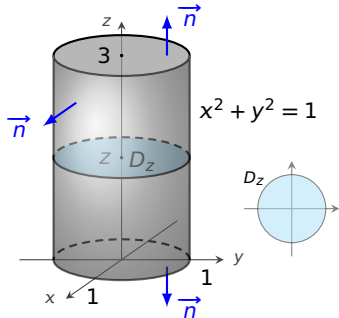
解

$$\begin{aligned} I & \stackrel{F=((y-z)x, 0, x-y)}{=} \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS \stackrel{\text{高斯公式}}{=} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv \\ & = \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}((y-z)x) + \frac{\partial}{\partial y} 0 + \frac{\partial}{\partial z}(x-y) \right] dv = \iiint_{\Omega} y - z dx dy dz \\ & \stackrel{\text{对称性}}{=} \iiint_{\Omega} -z dx dy dz = \int_0^3 \left[\iint -z dx dy \right] dz \end{aligned}$$

例 2 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x-y)dx dy + (y-z)x dy dz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



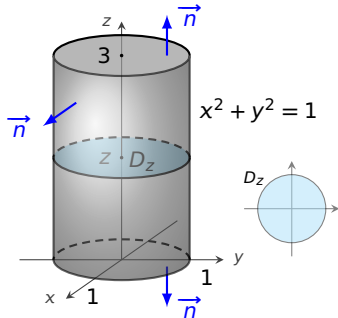
解

$$\begin{aligned} I &\stackrel{F=((y-z)x, 0, x-y)}{=} \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS \stackrel{\text{高斯公式}}{=} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv \\ &= \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}((y-z)x) + \frac{\partial}{\partial y} 0 + \frac{\partial}{\partial z}(x-y) \right] dv = \iiint_{\Omega} y - z dx dy dz \\ &\stackrel{\text{对称性}}{=} \iiint_{\Omega} -z dx dy dz = \int_0^3 \left[\iint_{D_z} -z dx dy \right] dz \end{aligned}$$

例 2 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x-y)dx dy + (y-z)x dy dz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



解

$$\begin{aligned} I &\stackrel{F=((y-z)x, 0, x-y)}{=} \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS \stackrel{\text{高斯公式}}{=} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv \\ &= \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}((y-z)x) + \frac{\partial}{\partial y} 0 + \frac{\partial}{\partial z}(x-y) \right] dv = \iiint_{\Omega} y - z dx dy dz \\ &\stackrel{\text{对称性}}{=} \iiint_{\Omega} -z dx dy dz = \int_0^3 \left[\iint_{D_z} -z dx dy \right] dz = -z|D_z| \end{aligned}$$

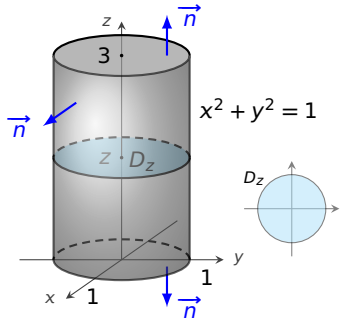
例 2 计算

$$I = \iiint_{\Sigma} (x - y) dx dy + (y - z) x dy dz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面

解

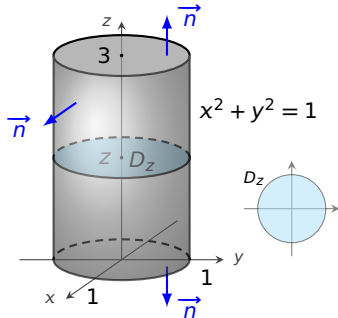
$$\begin{aligned} I &= \frac{F=((y-z)x, 0, x-y)}{\int \int_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS \xrightarrow{\text{高斯公式}} \int \int \int_{\Omega} \operatorname{div} F dv} \\ &= \int \int \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}((y-z)x) + \frac{\partial}{\partial y} 0 + \frac{\partial}{\partial z}(x-y) \right] dv = \int \int \int_{\Omega} y - z dx dy dz \\ &\xrightarrow{\text{对称性}} \int \int \int_{\Omega} -z dx dy dz = \int_0^3 \left[\int \int_{D_z} -z dx dy \right] dz = -z|D_z| \\ &= -Z\pi \end{aligned}$$



例 2 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x-y)dx dy + (y-z)x dy dz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



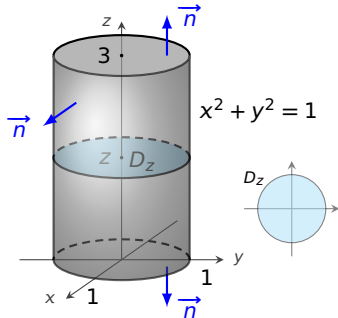
解

$$\begin{aligned} I & \xrightarrow{F=((y-z)x, 0, x-y)} \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS \xrightarrow{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv \\ & = \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}((y-z)x) + \frac{\partial}{\partial y} 0 + \frac{\partial}{\partial z}(x-y) \right] dv = \iiint_{\Omega} y - z dx dy dz \\ & \xrightarrow{\text{对称性}} \iiint_{\Omega} -z dx dy dz = \int_0^3 \left[\iint_{D_z} -z dx dy \right] dz = \int_0^3 \left[-z |D_z| \right] dz \\ & = -Z\pi \end{aligned}$$

例 2 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x-y)dx dy + (y-z)x dy dz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



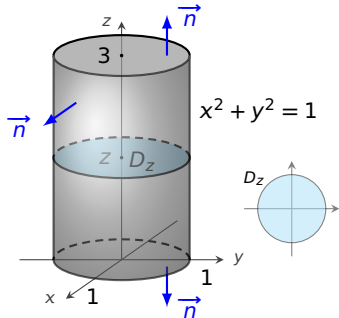
解

$$\begin{aligned} I & \xrightarrow{F=((y-z)x, 0, x-y)} \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS \xrightarrow{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv \\ & = \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}((y-z)x) + \frac{\partial}{\partial y} 0 + \frac{\partial}{\partial z}(x-y) \right] dv = \iiint_{\Omega} y - z dx dy dz \\ & \xrightarrow{\text{对称性}} \iiint_{\Omega} -z dx dy dz = \int_0^3 \left[\iint_{D_z} -z dx dy \right] dz = \int_0^3 \left[-z |D_z| \right] dz \\ & = \int_0^3 \left[-z \pi \right] dz \end{aligned}$$

例 2 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x-y)dx dy + (y-z)x dy dz$$

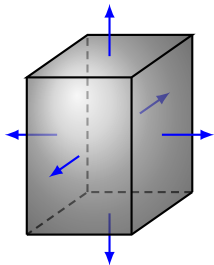
其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



解

$$\begin{aligned} I &\stackrel{F=((y-z)x, 0, x-y)}{=} \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS \stackrel{\text{高斯公式}}{=} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv \\ &= \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}((y-z)x) + \frac{\partial}{\partial y} 0 + \frac{\partial}{\partial z}(x-y) \right] dv = \iiint_{\Omega} y - z dx dy dz \\ &\stackrel{\text{对称性}}{=} \iiint_{\Omega} -z dx dy dz = \int_0^3 \left[\iint_{D_z} -z dx dy \right] dz = \int_0^3 \left[-z |D_z| \right] dz \\ &= \int_0^3 \left[-z \pi \right] dz = -\frac{9}{2} \pi \end{aligned}$$

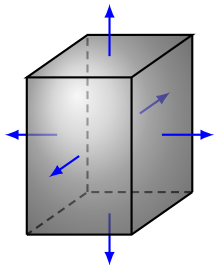
例 3 计算流体 $F = (x - y^2, y, z^3)$ 流向长方体 $[0, 1] \times [1, 2] \times [1, 4]$ 外侧的通量。



例 3 计算流体 $F = (x - y^2, y, z^3)$ 流向长方体 $[0, 1] \times [1, 2] \times [1, 4]$ 外侧的通量。

解

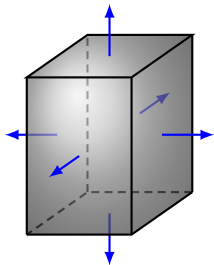
$$\Phi = \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS$$



例 3 计算流体 $F = (x - y^2, y, z^3)$ 流向长方体 $[0, 1] \times [1, 2] \times [1, 4]$ 外侧的通量。

解

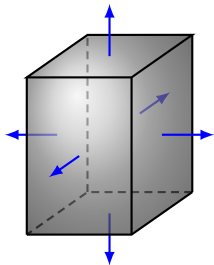
$$\Phi = \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS \xrightarrow{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv$$



例3 计算流体 $F = (x - y^2, y, z^3)$ 流向长方体 $[0, 1] \times [1, 2] \times [1, 4]$ 外侧的通量。

解

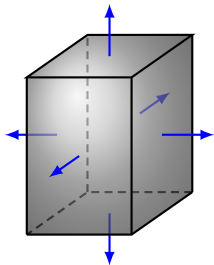
$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS \xrightarrow{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv \\ &= \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}(x - y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z^3) \right] dv\end{aligned}$$



例 3 计算流体 $F = (x - y^2, y, z^3)$ 流向长方体 $[0, 1] \times [1, 2] \times [1, 4]$ 外侧的通量。

解

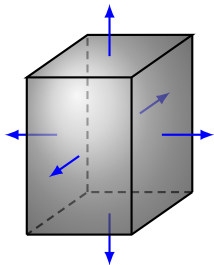
$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS \xrightarrow{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv \\&= \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}(x - y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z^3) \right] dv \\&= \iiint_{\Omega} (2 + 3z^2) dx dy dz\end{aligned}$$



例 3 计算流体 $F = (x - y^2, y, z^3)$ 流向长方体 $[0, 1] \times [1, 2] \times [1, 4]$ 外侧的通量。

解

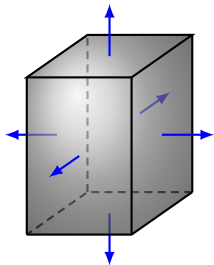
$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS \xrightarrow{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv \\&= \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}(x - y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z^3) \right] dv \\&= \iiint_{\Omega} (2 + 3z^2) dx dy dz = \int \left[\int \left[\int (2 + 3z^2) dz \right] dy \right] dx\end{aligned}$$



例 3 计算流体 $F = (x - y^2, y, z^3)$ 流向长方体 $[0, 1] \times [1, 2] \times [1, 4]$ 外侧的通量。

解

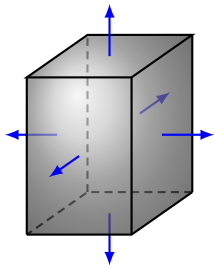
$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS \xrightarrow{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv \\&= \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}(x - y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z^3) \right] dv \\&= \iiint_{\Omega} (2 + 3z^2) dx dy dz = \int_0^1 \left[\int \left[\int (2 + 3z^2) dz \right] dy \right] dx\end{aligned}$$



例3 计算流体 $F = (x - y^2, y, z^3)$ 流向长方体 $[0, 1] \times [1, 2] \times [1, 4]$ 外侧的通量。

解

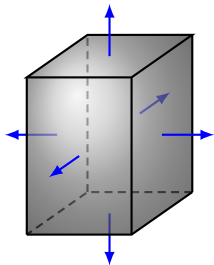
$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS \xrightarrow{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv \\&= \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}(x - y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z^3) \right] dv \\&= \iiint_{\Omega} (2 + 3z^2) dx dy dz = \int_0^1 \left[\int_1^2 \left[\int (2 + 3z^2) dz \right] dy \right] dx\end{aligned}$$



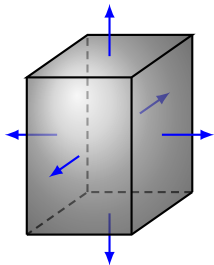
例 3 计算流体 $F = (x - y^2, y, z^3)$ 流向长方体 $[0, 1] \times [1, 2] \times [1, 4]$ 外侧的通量。

解

$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS \xrightarrow{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv \\&= \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}(x - y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z^3) \right] dv \\&= \iiint_{\Omega} (2 + 3z^2) dx dy dz = \int_0^1 \left[\int_1^2 \left[\int_1^4 (2 + 3z^2) dz \right] dy \right] dx\end{aligned}$$



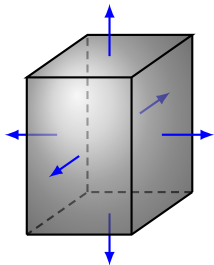
例 3 计算流体 $F = (x - y^2, y, z^3)$ 流向长方体 $[0, 1] \times [1, 2] \times [1, 4]$ 外侧的通量。



解

$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS \xrightarrow{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv \\&= \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}(x - y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z^3) \right] dv \\&= \iiint_{\Omega} (2 + 3z^2) dx dy dz = \int_0^1 \left[\int_1^2 \left[\int_1^4 (2 + 3z^2) dz \right] dy \right] dx \\&= \int_0^1 1 dx \cdot \int_1^2 1 dy \cdot \int_1^4 (2 + 3z^2) dz\end{aligned}$$

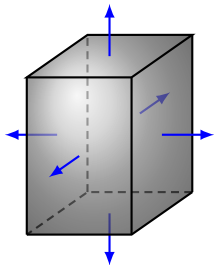
例3 计算流体 $F = (x - y^2, y, z^3)$ 流向长方体 $[0, 1] \times [1, 2] \times [1, 4]$ 外侧的通量。



解

$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS \xrightarrow{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv \\&= \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}(x - y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z^3) \right] dv \\&= \iiint_{\Omega} (2 + 3z^2) dx dy dz = \int_0^1 \left[\int_1^2 \left[\int_1^4 (2 + 3z^2) dz \right] dy \right] dx \\&= \int_0^1 1 dx \cdot \int_1^2 1 dy \cdot \int_1^4 (2 + 3z^2) dz = 1 \cdot 1 \cdot (2z + z^3) \Big|_1^4\end{aligned}$$

例 3 计算流体 $F = (x - y^2, y, z^3)$ 流向长方体 $[0, 1] \times [1, 2] \times [1, 4]$ 外侧的通量。



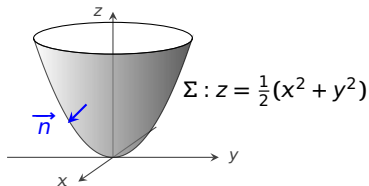
解

$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS \xrightarrow{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv \\&= \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}(x - y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z^3) \right] dv \\&= \iiint_{\Omega} (2 + 3z^2) dx dy dz = \int_0^1 \left[\int_1^2 \left[\int_1^4 (2 + 3z^2) dz \right] dy \right] dx \\&= \int_0^1 1 dx \cdot \int_1^2 1 dy \cdot \int_1^4 (2 + 3z^2) dz = 1 \cdot 1 \cdot (2z + z^3) \Big|_1^4 = 69\end{aligned}$$

例 4 计算

$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz - z dx dy$$

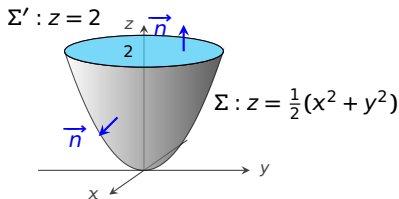
其中定向曲面 Σ 是抛物面的一部分，
取单位外法向量，如图：



例 4 计算

$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz - z dx dy$$

其中定向曲面 Σ 是抛物面的一部分，
取单位外法向量，如图：

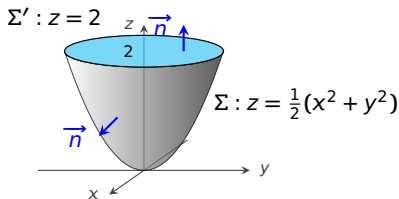


解 如图补充平面 Σ' ，则 $\Sigma \cup \Sigma'$ 构成 3 维区域 Ω 边界，应用高斯公式：

例 4 计算

$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz - z dx dy$$

其中定向曲面 Σ 是抛物面的一部分，
取单位外法向量，如图：



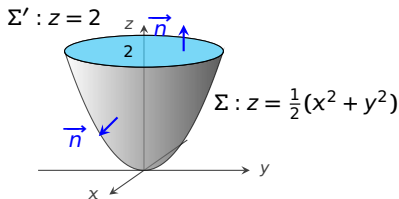
解 如图补充平面 Σ' ，则 $\Sigma \cup \Sigma'$ 构成 3 维区域 Ω 边界，应用高斯公式：

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma \cup \Sigma'} F \cdot \vec{n} dS - \iint_{\Sigma'} F \cdot \vec{n} dS$$

例 4 计算

$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz - z dx dy$$

其中定向曲面 Σ 是抛物面的一部分，
取单位外法向量，如图：



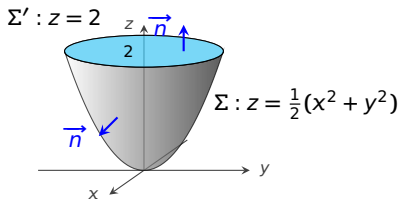
解 如图补充平面 Σ' ，则 $\Sigma \cup \Sigma'$ 构成 3 维区域 Ω 边界，应用高斯公式：

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iint_{\Sigma \cup \Sigma'} F \cdot \vec{n} dS - \iint_{\Sigma'} F \cdot \vec{n} dS \\ &= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv \end{aligned}$$

例 4 计算

$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz - z dx dy$$

其中定向曲面 Σ 是抛物面的一部分，
取单位外法向量，如图：



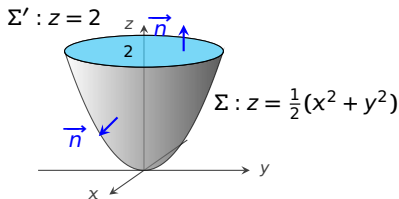
解 如图补充平面 Σ' ，则 $\Sigma \cup \Sigma'$ 构成 3 维区域 Ω 边界，应用高斯公式：

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iint_{\Sigma \cup \Sigma'} F \cdot \vec{n} dS - \iint_{\Sigma'} F \cdot \vec{n} dS \\ &= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv - \iint_{\Sigma'} F \cdot \vec{n} dS \end{aligned}$$

例 4 计算

$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz - z dx dy$$

其中定向曲面 Σ 是抛物面的一部分，
取单位外法向量，如图：



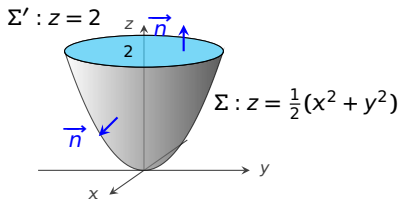
解 如图补充平面 Σ' ，则 $\Sigma \cup \Sigma'$ 构成 3 维区域 Ω 边界，应用高斯公式：

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iint_{\Sigma \cup \Sigma'} F \cdot \vec{n} dS - \iint_{\Sigma'} F \cdot \vec{n} dS \\ &= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv - \iint_{\Sigma'} F \cdot \vec{n} dS \\ &\quad \underline{\underline{F = (z^2 + x, 0, -z)}} \end{aligned}$$

例 4 计算

$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz - z dx dy$$

其中定向曲面 Σ 是抛物面的一部分，
取单位外法向量，如图：



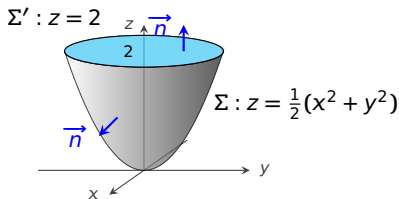
解 如图补充平面 Σ' ，则 $\Sigma \cup \Sigma'$ 构成 3 维区域 Ω 边界，应用高斯公式：

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iint_{\Sigma \cup \Sigma'} F \cdot \vec{n} dS - \iint_{\Sigma'} F \cdot \vec{n} dS \\ &= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv - \iint_{\Sigma'} F \cdot \vec{n} dS \\ &\quad \underline{\underline{F = (z^2 + x, 0, -z)}} \\ &\quad \underline{\underline{\operatorname{div} F = 0}} \end{aligned}$$

例 4 计算

$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz - z dx dy$$

其中定向曲面 Σ 是抛物面的一部分，
取单位外法向量，如图：



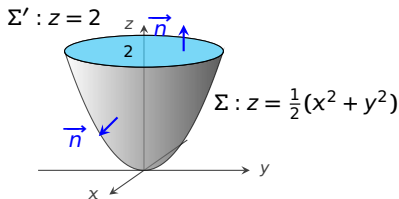
解 如图补充平面 Σ' ，则 $\Sigma \cup \Sigma'$ 构成 3 维区域 Ω 边界，应用高斯公式：

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iint_{\Sigma \cup \Sigma'} F \cdot \vec{n} dS - \iint_{\Sigma'} F \cdot \vec{n} dS \\ &= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv - \iint_{\Sigma'} F \cdot \vec{n} dS \\ &\quad \frac{F=(z^2+x, 0, -z)}{\operatorname{div} F=0} - \iint_{\Sigma'} F \cdot \vec{n} dS \end{aligned}$$

例 4 计算

$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz - z dx dy$$

其中定向曲面 Σ 是抛物面的一部分，
取单位外法向量，如图：



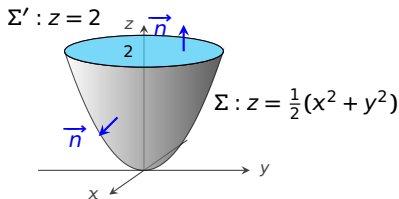
解 如图补充平面 Σ' ，则 $\Sigma \cup \Sigma'$ 构成 3 维区域 Ω 边界，应用高斯公式：

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iint_{\Sigma \cup \Sigma'} F \cdot \vec{n} dS - \iint_{\Sigma'} F \cdot \vec{n} dS \\ &= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv - \iint_{\Sigma'} F \cdot \vec{n} dS \\ &\quad \underline{\underline{F=(z^2+x, 0, -z)}} \\ &\quad \underline{\underline{\operatorname{div} F=0}} \quad - \iint_{\Sigma'} F \cdot \vec{n} dS \\ &\quad \underline{\underline{\vec{n}=(0, 0, 1)}} \end{aligned}$$

例 4 计算

$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz - z dx dy$$

其中定向曲面 Σ 是抛物面的一部分，
取单位外法向量，如图：



解 如图补充平面 Σ' ，则 $\Sigma \cup \Sigma'$ 构成 3 维区域 Ω 边界，应用高斯公式：

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma \cup \Sigma'} F \cdot \vec{n} dS - \iint_{\Sigma'} F \cdot \vec{n} dS$$

$$= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv - \iint_{\Sigma'} F \cdot \vec{n} dS$$

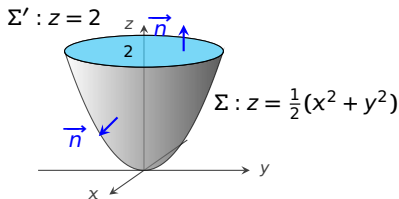
$$\frac{F=(z^2+x, 0, -z)}{\operatorname{div} F=0} - \iint_{\Sigma'} F \cdot \vec{n} dS$$

$$\frac{\vec{n}=(0,0,1)}{F \cdot \vec{n}=-z}$$

例 4 计算

$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz - z dx dy$$

其中定向曲面 Σ 是抛物面的一部分，
取单位外法向量，如图：



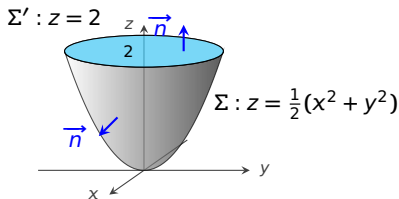
解 如图补充平面 Σ' ，则 $\Sigma \cup \Sigma'$ 构成 3 维区域 Ω 边界，应用高斯公式：

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iint_{\Sigma \cup \Sigma'} F \cdot \vec{n} dS - \iint_{\Sigma'} F \cdot \vec{n} dS \\ &= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv - \iint_{\Sigma'} F \cdot \vec{n} dS \\ &\quad \underline{\underline{F=(z^2+x, 0, -z)}} \quad - \iint_{\Sigma'} F \cdot \vec{n} dS \\ &\quad \underline{\underline{\operatorname{div} F=0}} \\ &\quad \underline{\underline{\vec{n}=(0, 0, 1)}} \quad - \iint_{\Sigma'} -2 dS \\ &\quad \underline{\underline{F \cdot \vec{n} = -z}} \end{aligned}$$

例 4 计算

$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz - z dx dy$$

其中定向曲面 Σ 是抛物面的一部分，
取单位外法向量，如图：



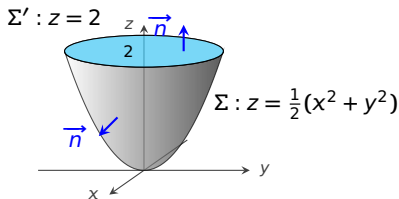
解 如图补充平面 Σ' ，则 $\Sigma \cup \Sigma'$ 构成 3 维区域 Ω 边界，应用高斯公式：

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iint_{\Sigma \cup \Sigma'} F \cdot \vec{n} dS - \iint_{\Sigma'} F \cdot \vec{n} dS \\ &= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv - \iint_{\Sigma'} F \cdot \vec{n} dS \\ &\quad \underline{\underline{F=(z^2+x, 0, -z)}} \quad - \iint_{\Sigma'} F \cdot \vec{n} dS \\ &\quad \underline{\underline{\operatorname{div} F=0}} \\ &\quad \underline{\underline{\vec{n}=(0, 0, 1)}} \quad - \iint_{\Sigma'} -2 dS = 2 \operatorname{Area}(\Sigma') \\ &\quad \underline{\underline{F \cdot \vec{n} = -z}} \end{aligned}$$

例 4 计算

$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz - z dx dy$$

其中定向曲面 Σ 是抛物面的一部分，
取单位外法向量，如图：

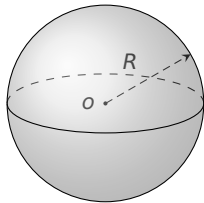


解 如图补充平面 Σ' ，则 $\Sigma \cup \Sigma'$ 构成 3 维区域 Ω 边界，应用高斯公式：

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iint_{\Sigma \cup \Sigma'} F \cdot \vec{n} dS - \iint_{\Sigma'} F \cdot \vec{n} dS \\ &= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv - \iint_{\Sigma'} F \cdot \vec{n} dS \\ &\quad \underline{\underline{F=(z^2+x, 0, -z)}} \quad - \iint_{\Sigma'} F \cdot \vec{n} dS \\ &\quad \underline{\underline{\operatorname{div} F=0}} \\ &\quad \underline{\underline{\vec{n}=(0, 0, 1)}} \quad - \iint_{\Sigma'} -2 dS = 2 \operatorname{Area}(\Sigma') = 8\pi \\ &\quad \underline{\underline{F \cdot \vec{n} = -z}} \end{aligned}$$

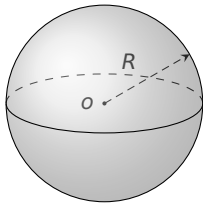
例 5 设 S , V 分别是半径为 R 的球体的表面积和体积。证明

$$V = \frac{R}{3}S.$$



例 5 设 S, V 分别是半径为 R 的球体的表面积和体积。证明

$$V = \frac{R}{3}S.$$

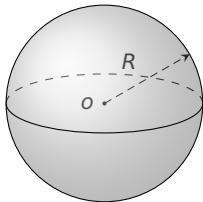


解

$$V = \iiint_{\Omega} 1 dv$$

例 5 设 S, V 分别是半径为 R 的球体的表面积和体积。证明

$$V = \frac{R}{3}S.$$

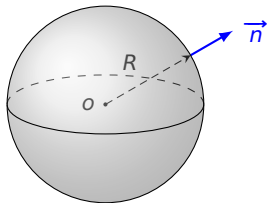


解

$$V = \iiint_{\Omega} 1 dv \quad \quad \quad \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv$$

例 5 设 S , V 分别是半径为 R 的球体的表面积和体积。证明

$$V = \frac{R}{3} S.$$

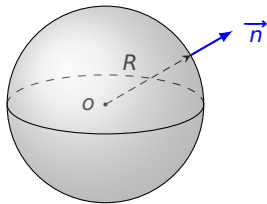


解

$$V = \iiint_{\Omega} 1 dv \xlongequal{\hspace{1cm}} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv \xlongequal[\text{高斯公式}]{\hspace{1cm}} \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS$$

例 5 设 S, V 分别是半径为 R 的球体的表面积和体积。证明

$$V = \frac{R}{3} S.$$

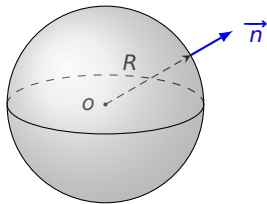


解

$$V = \iiint_{\Omega} 1 dV \xrightarrow{F=(x,y,z)} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dV \xrightarrow{\text{高斯公式}} \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS$$

例 5 设 S, V 分别是半径为 R 的球体的表面积和体积。证明

$$V = \frac{R}{3} S.$$

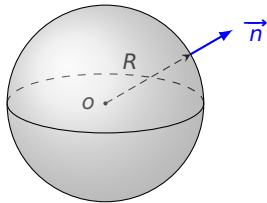


解

$$V = \iiint_{\Omega} 1 dV \xrightarrow[\text{div} F = 3]{F = (x, y, z)} \iiint_{\Omega} \text{div} F dV \xrightarrow{\text{高斯公式}} \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS$$

例5 设 S, V 分别是半径为 R 的球体的表面积和体积。证明

$$V = \frac{R}{3} S.$$

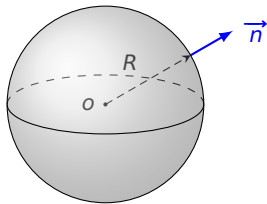


解

$$V = \iiint_{\Omega} 1 dV \xrightarrow[\text{div} F = 3]{F = (x, y, z)} \frac{1}{3} \iiint_{\Omega} \text{div} F dV \xrightarrow{\text{高斯公式}} \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS$$

例 5 设 S , V 分别是半径为 R 的球体的表面积和体积。证明

$$V = \frac{R}{3} S.$$

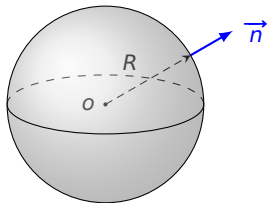


解

$$V = \iiint_{\Omega} 1 dV \xrightarrow[\text{div} F = 3]{F = (x, y, z)} \frac{1}{3} \iiint_{\Omega} \text{div} F dV \xrightarrow{\text{高斯公式}} \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS$$

例 5 设 S, V 分别是半径为 R 的球体的表面积和体积。证明

$$V = \frac{R}{3} S.$$



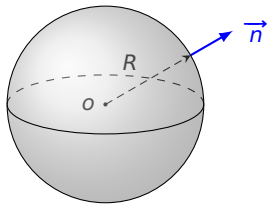
解

$$V = \iiint_{\Omega} 1 dV \xrightarrow[\text{div} F = 3]{F = (x, y, z)} \frac{1}{3} \iiint_{\Omega} \text{div} F dV \xrightarrow{\text{高斯公式}} \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS$$

$$\underline{\underline{\vec{n} = \frac{1}{R}(x, y, z)}}$$

例 5 设 S , V 分别是半径为 R 的球体的表面积和体积。证明

$$V = \frac{R}{3} S.$$

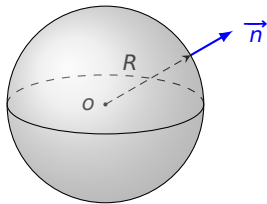


解

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_{\Omega} 1 dV \xrightarrow[\text{div} F = 3]{F = (x, y, z)} \frac{1}{3} \iiint_{\Omega} \text{div} F dV \xrightarrow{\text{高斯公式}} \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS \\
 &\quad \underline{\underline{\vec{n} = \frac{1}{R}(x, y, z)}} \\
 &\quad \underline{\underline{F \cdot \vec{n} = \frac{1}{R}(x^2 + y^2 + z^2)}}
 \end{aligned}$$

例 5 设 S, V 分别是半径为 R 的球体的表面积和体积。证明

$$V = \frac{R}{3} S.$$

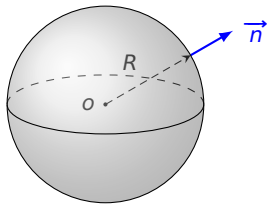


解

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_{\Omega} 1 dV \xrightarrow[\text{div} F = 3]{F = (x, y, z)} \frac{1}{3} \iiint_{\Omega} \text{div} F dV \xrightarrow{\text{高斯公式}} \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS \\
 &\quad \underline{\underline{\vec{n} = \frac{1}{R}(x, y, z)}} \\
 &\quad \underline{\underline{F \cdot \vec{n} = \frac{1}{R}(x^2 + y^2 + z^2) = R}}
 \end{aligned}$$

例 5 设 S , V 分别是半径为 R 的球体的表面积和体积。证明

$$V = \frac{R}{3} S.$$

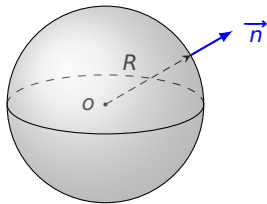


解

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega} 1 dV \xrightarrow[\text{div} F = 3]{F = (x, y, z)} \frac{1}{3} \iiint_{\Omega} \text{div} F dV \xrightarrow{\text{高斯公式}} \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS \\ &\xrightarrow[\text{F} \cdot \vec{n} = \frac{1}{R}(x^2 + y^2 + z^2) = R]{\vec{n} = \frac{1}{R}(x, y, z)} \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} R dS \end{aligned}$$

例5 设 S , V 分别是半径为 R 的球体的表面积和体积。证明

$$V = \frac{R}{3}S.$$



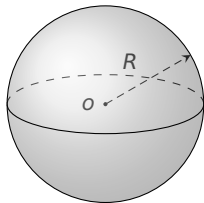
解

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega} 1 dV \xrightarrow[\text{div} F = 3]{F = (x, y, z)} \frac{1}{3} \iiint_{\Omega} \text{div} F dV \xrightarrow{\text{高斯公式}} \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS \\ &\xrightarrow[\text{F} \cdot \vec{n} = \frac{1}{R}(x^2 + y^2 + z^2) = R]{\vec{n} = \frac{1}{R}(x, y, z)} \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} R dS = \frac{1}{3}RS \end{aligned}$$

例 6 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS$$

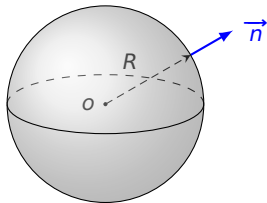
其中曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$



例 6 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS$$

其中曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$



解

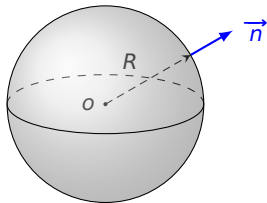
$$\iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS$$

$$= \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS \xrightarrow{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv$$

例 6 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS$$

其中曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$



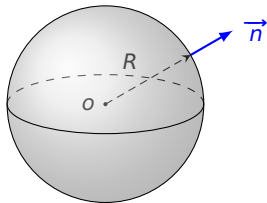
解 球面单位外法向量 $\vec{n} = \frac{1}{R}(x, y, z)$, 所以

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS \\ &= \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS \xrightarrow{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv \end{aligned}$$

例 6 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS$$

其中曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$



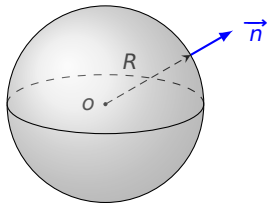
解 球面单位外法向量 $\vec{n} = \frac{1}{R}(x, y, z)$, 所以

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS &= \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) \cdot \frac{1}{R}(x, y, z) dS \\ &= \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS \stackrel{\text{高斯公式}}{=} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv \end{aligned}$$

例 6 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS$$

其中曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$



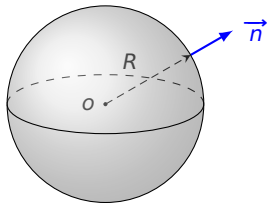
解 球面单位外法向量 $\vec{n} = \frac{1}{R}(x, y, z)$, 所以

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS &= \iint_{\Sigma} R(x, y, z) \cdot \frac{1}{R}(x, y, z) dS \\ &= \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS \stackrel{\text{高斯公式}}{=} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv \end{aligned}$$

例 6 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS$$

其中曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$



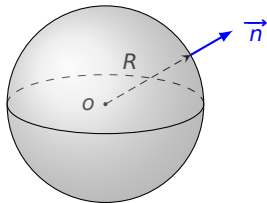
解 球面单位外法向量 $\vec{n} = \frac{1}{R}(x, y, z)$, 所以

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS &= \iint_{\Sigma} R(x, y, z) \cdot \frac{1}{R}(x, y, z) dS \\ &= \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS \xrightarrow{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv \end{aligned}$$

例 6 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS$$

其中曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$



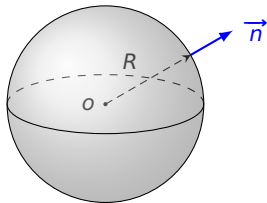
解 球面单位外法向量 $\vec{n} = \frac{1}{R}(x, y, z)$, 所以

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS &= \iint_{\Sigma} R(x, 1, 1) \cdot \frac{1}{R}(x, y, z) dS \\ &= \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS \xrightarrow{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv \\ &= \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}(Rx) + \frac{\partial}{\partial y}(R) + \frac{\partial}{\partial z}(R) \right] dv \end{aligned}$$

例 6 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS$$

其中曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$



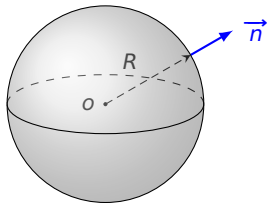
解 球面单位外法向量 $\vec{n} = \frac{1}{R}(x, y, z)$, 所以

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS &= \iint_{\Sigma} R(x, 1, 1) \cdot \frac{1}{R}(x, y, z) dS \\ &= \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS \xrightarrow{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv \\ &= \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}(Rx) + \frac{\partial}{\partial y}(R) + \frac{\partial}{\partial z}(R) \right] dv \\ &= \iiint_{\Omega} R dx dy dz \end{aligned}$$

例 6 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS$$

其中曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$



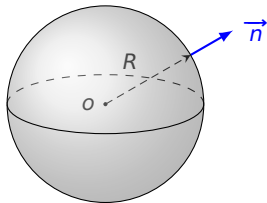
解 球面单位外法向量 $\vec{n} = \frac{1}{R}(x, y, z)$, 所以

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS &= \iint_{\Sigma} R(x, 1, 1) \cdot \frac{1}{R}(x, y, z) dS \\ &= \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS \xrightarrow{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv \\ &= \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}(Rx) + \frac{\partial}{\partial y}(R) + \frac{\partial}{\partial z}(R) \right] dv \\ &= \iiint_{\Omega} R dx dy dz = R \operatorname{Vol}(\Omega) \end{aligned}$$

例 6 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS$$

其中曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$



解 球面单位外法向量 $\vec{n} = \frac{1}{R}(x, y, z)$, 所以

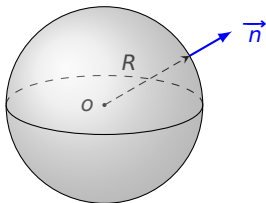
$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS &= \iint_{\Sigma} R(x, 1, 1) \cdot \frac{1}{R}(x, y, z) dS \\ &= \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS \stackrel{\text{高斯公式}}{=} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv \\ &= \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}(Rx) + \frac{\partial}{\partial y}(R) + \frac{\partial}{\partial z}(R) \right] dv \\ &= \iiint_{\Omega} R dx dy dz = R \operatorname{Vol}(\Omega) = \frac{4}{3} \pi R^4 \end{aligned}$$

例 6 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS$$

其中曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

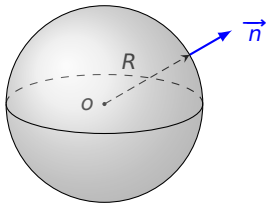
解法二 (不用高斯公式, 直接计算)



例 6 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS$$

其中曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$



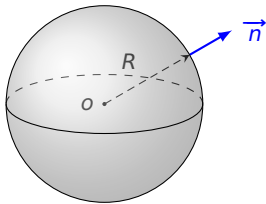
解法二 (不用高斯公式, 直接计算)

$$\iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS \xrightarrow{\text{对称性}} \iint_{\Sigma} x^2 dS$$

例 6 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS$$

其中曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$



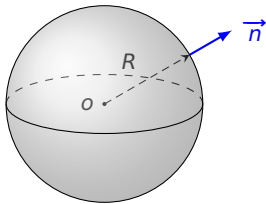
解法二 (不用高斯公式, 直接计算)

$$\iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS \xrightarrow{\text{对称性}} \iint_{\Sigma} x^2 dS = \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} (x^2 + x^2 + x^2) dS$$

例 6 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS$$

其中曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$



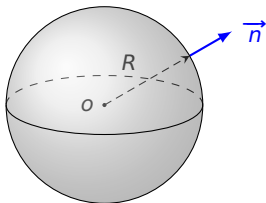
解法二 (不用高斯公式, 直接计算)

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS &\stackrel{\text{对称性}}{=} \iint_{\Sigma} x^2 dS = \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} (x^2 + x^2 + x^2) dS \\ &\stackrel{\text{对称性}}{=} \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS \end{aligned}$$

例 6 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS$$

其中曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$



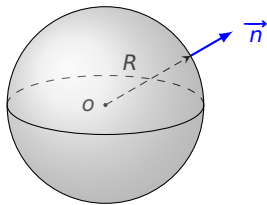
解法二 (不用高斯公式, 直接计算)

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS &\stackrel{\text{对称性}}{=} \iint_{\Sigma} x^2 dS = \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} (x^2 + x^2 + x^2) dS \\ &\stackrel{\text{对称性}}{=} \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS \\ &= \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} R^2 dS \end{aligned}$$

例 6 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS$$

其中曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$



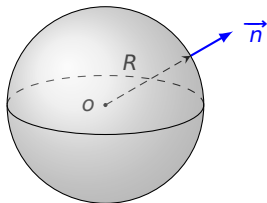
解法二 (不用高斯公式, 直接计算)

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS &\stackrel{\text{对称性}}{=} \iint_{\Sigma} x^2 dS = \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} (x^2 + x^2 + x^2) dS \\ &\stackrel{\text{对称性}}{=} \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS \\ &= \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} R^2 dS = \frac{1}{3} R^2 \text{Area}(\Sigma) \end{aligned}$$

例 6 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS$$

其中曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$



解法二 (不用高斯公式, 直接计算)

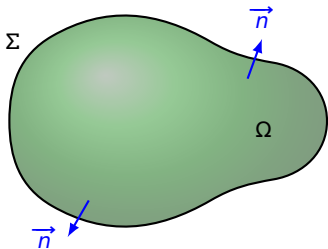
$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS &\stackrel{\text{对称性}}{=} \iint_{\Sigma} x^2 dS = \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} (x^2 + x^2 + x^2) dS \\ &\stackrel{\text{对称性}}{=} \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS \\ &= \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} R^2 dS = \frac{1}{3} R^2 \text{Area}(\Sigma) = \frac{4}{3} \pi R^4 \end{aligned}$$

散度 $\operatorname{div} F$ 的物理解释

$$\text{高斯公式 } \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dV = \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS$$

散度 $\operatorname{div} F$ 的物理解释

- 假设 $F = (P, Q, R)$ 是流体的速度向量场,



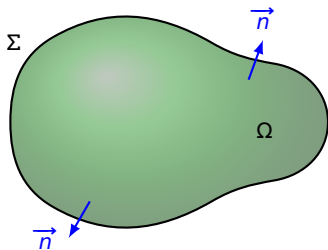
$$\text{高斯公式 } \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dV = \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS$$

散度 $\operatorname{div} F$ 的物理解释

- 假设 $F = (P, Q, R)$ 是流体的速度向量场，则

$$\iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS$$

表示单位时间流向 Σ 外侧的通量。



$$\text{高斯公式 } \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dV = \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS$$

散度 $\text{div} F$ 的物理解释

- 假设 $F = (P, Q, R)$ 是流体的速度向量场，则

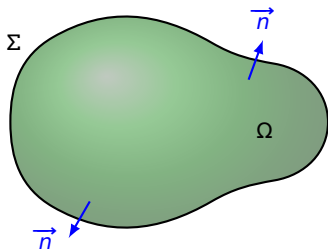
$$\iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS$$

表示单位时间流向 Σ 外侧的通量。

$$\iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS > 0$$

$$\iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS < 0$$

$$\text{高斯公式 } \iiint_{\Omega} \text{div} F dV = \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS$$



散度 $\text{div} F$ 的物理解释

- 假设 $F = (P, Q, R)$ 是流体的速度向量场，则

$$\iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS$$

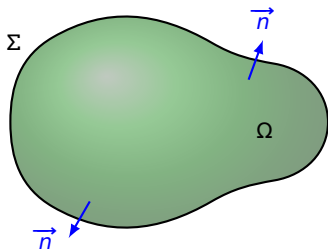
表示单位时间流向 Σ 外侧的通量。

- 进一步假设流体是不可压，则

$$\iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS > 0$$

$$\iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS < 0$$

$$\text{高斯公式 } \iiint_{\Omega} \text{div} F dV = \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS$$



散度 $\text{div} F$ 的物理解释

- 假设 $F = (P, Q, R)$ 是流体的速度向量场，则

$$\iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS$$

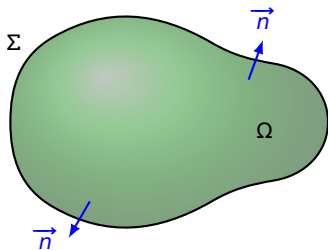
表示单位时间流向 Σ 外侧的通量。

- 进一步假设流体是不可压，则

$$\iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS > 0 \Rightarrow \Omega \text{ 内有 "source"}$$

$$\iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS < 0$$

$$\text{高斯公式 } \iiint_{\Omega} \text{div} F dV = \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS$$



散度 $\text{div} F$ 的物理解释

- 假设 $F = (P, Q, R)$ 是流体的速度向量场，则

$$\iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS$$

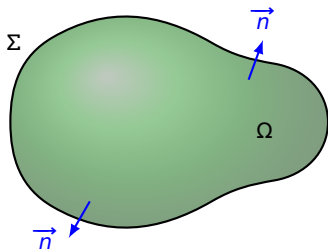
表示单位时间流向 Σ 外侧的通量。

- 进一步假设流体是不可压，则

$$\iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS > 0 \Rightarrow \Omega \text{ 内有 "source"}$$

$$\iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS < 0 \Rightarrow \Omega \text{ 内有 "sink"}$$

$$\text{高斯公式 } \iiint_{\Omega} \text{div} F dV = \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS$$



散度 $\text{div}F$ 的物理解释

- 假设 $F = (P, Q, R)$ 是流体的速度向量场，则

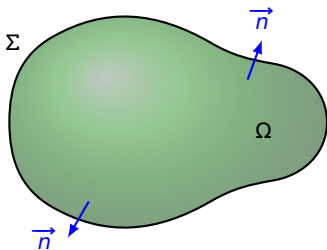
$$\iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS$$

表示单位时间流向 Σ 外侧的通量。

- 进一步假设流体是不可压，则

$$\iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS > 0 \Rightarrow \Omega \text{ 内有 "source"}$$

$$\iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS < 0 \Rightarrow \Omega \text{ 内有 "sink"}$$



注高斯公式 $\iiint_{\Omega} \text{div}F dV = \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS$ 表明： $\text{div}F$ 反映这种 “source” 和 “sink” 的强度。

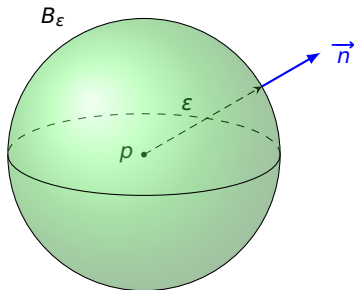
散度 $\operatorname{div} F$ 的物理解释 (2)

$p \bullet$

$\operatorname{div} F(p)$

散度 $\operatorname{div} F$ 的物理解释 (2)

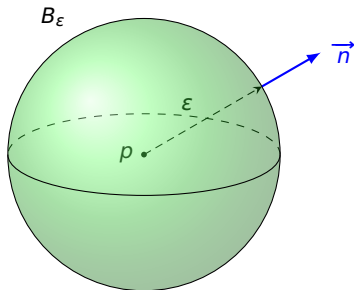
$$\operatorname{div} F(p)$$



散度 $\operatorname{div} F$ 的物理解释 (2)

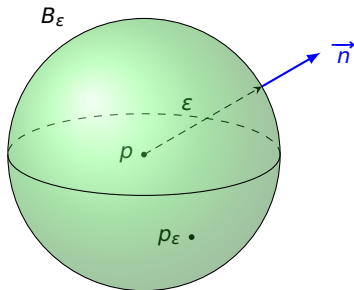
$$= \frac{\iint_{\partial B_\varepsilon} F \cdot \vec{n} dS}{\iiint_{B_\varepsilon} \operatorname{div} F dv}$$

$$\operatorname{div} F(p)$$



散度 $\text{div}F$ 的物理解释 (2)

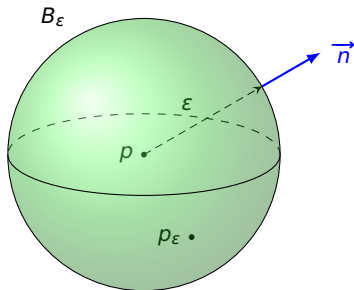
$$\begin{aligned} & \iint_{\partial B_\epsilon} F \cdot \vec{n} dS \\ = & \iiint_{B_\epsilon} \text{div}F dv \\ = & \text{Vol}(B_\epsilon) \text{div}F(p_\epsilon) \\ & \text{div}F(p) \end{aligned}$$



散度 $\text{div}F$ 的物理解释 (2)

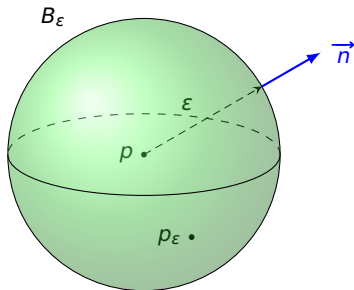
$$\begin{aligned} & \frac{1}{\text{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \iint_{\partial B_\varepsilon} F \cdot \vec{n} dS \\ = & \frac{1}{\text{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \iiint_{B_\varepsilon} \text{div}F dv \\ = & \frac{1}{\text{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \text{Vol}(B_\varepsilon) \text{div}F(p_\varepsilon) \end{aligned}$$

$$\text{div}F(p)$$



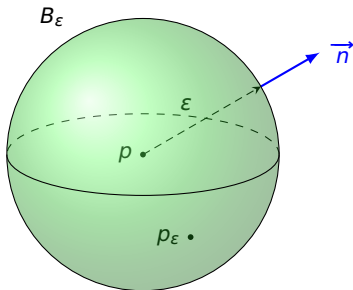
散度 $\operatorname{div} F$ 的物理解释 (2)

$$\begin{aligned}& \frac{1}{\operatorname{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \iint_{\partial B_\varepsilon} F \cdot \vec{n} \, dS \\&= \frac{1}{\operatorname{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \iiint_{B_\varepsilon} \operatorname{div} F \, dv \\&= \frac{1}{\operatorname{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \operatorname{Vol}(B_\varepsilon) \operatorname{div} F(p_\varepsilon) \\&= \operatorname{div} F(p_\varepsilon) \\& \operatorname{div} F(p)\end{aligned}$$



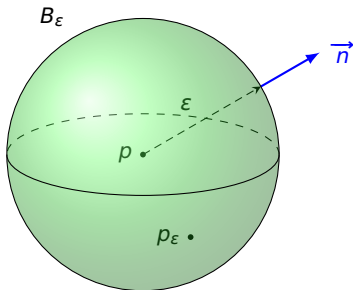
散度 $\operatorname{div} F$ 的物理解释 (2)

$$\begin{aligned}& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\operatorname{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \iint_{\partial B_\varepsilon} F \cdot \vec{n} \, dS \\&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\operatorname{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \iiint_{B_\varepsilon} \operatorname{div} F \, dv \\&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\operatorname{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \operatorname{Vol}(B_\varepsilon) \operatorname{div} F(p_\varepsilon) \\&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \operatorname{div} F(p_\varepsilon) \\&\quad \operatorname{div} F(p)\end{aligned}$$



散度 $\operatorname{div} F$ 的物理解释 (2)

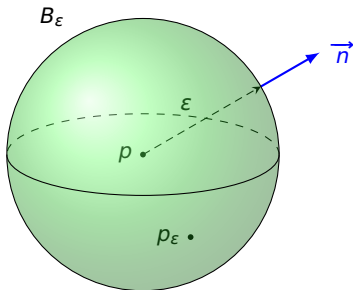
$$\begin{aligned}& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\operatorname{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \iint_{\partial B_\varepsilon} F \cdot \vec{n} \, dS \\&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\operatorname{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \iiint_{B_\varepsilon} \operatorname{div} F \, dv \\&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\operatorname{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \operatorname{Vol}(B_\varepsilon) \operatorname{div} F(p_\varepsilon) \\&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \operatorname{div} F(p_\varepsilon) \\&= \operatorname{div} F(p)\end{aligned}$$



散度 $\operatorname{div} F$ 的物理解释 (2)

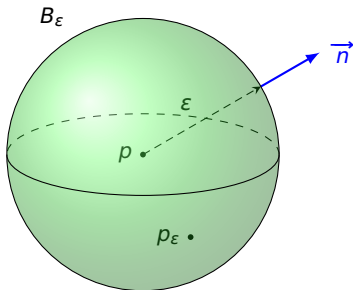
$$\begin{aligned}& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\operatorname{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \iint_{\partial B_\varepsilon} F \cdot \vec{n} \, dS \\&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\operatorname{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \iiint_{B_\varepsilon} \operatorname{div} F \, dv \\&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\operatorname{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \operatorname{Vol}(B_\varepsilon) \operatorname{div} F(p_\varepsilon) \\&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \operatorname{div} F(p_\varepsilon) \\&= \operatorname{div} F(p)\end{aligned}$$

- $\operatorname{div} F(p) > 0$ 时,
- $\operatorname{div} F(p) < 0$ 时,



散度 $\operatorname{div} F$ 的物理解释 (2)

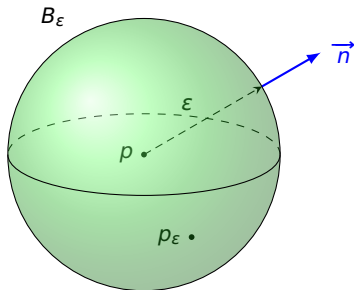
$$\begin{aligned}& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\operatorname{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \iint_{\partial B_\varepsilon} F \cdot \vec{n} dS \\&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\operatorname{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \iiint_{B_\varepsilon} \operatorname{div} F dv \\&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\operatorname{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \operatorname{Vol}(B_\varepsilon) \operatorname{div} F(p_\varepsilon) \\&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \operatorname{div} F(p_\varepsilon) \\&= \operatorname{div} F(p)\end{aligned}$$



- $\operatorname{div} F(p) > 0$ 时, $\iint_{\partial B_\varepsilon} F \cdot \vec{n} dS > 0$ (ε 充分小),
- $\operatorname{div} F(p) < 0$ 时,

散度 $\operatorname{div} F$ 的物理解释 (2)

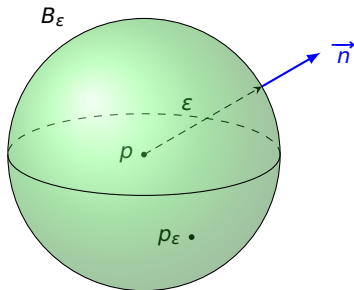
$$\begin{aligned}& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\operatorname{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \iint_{\partial B_\varepsilon} F \cdot \vec{n} dS \\&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\operatorname{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \iiint_{B_\varepsilon} \operatorname{div} F dv \\&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\operatorname{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \operatorname{Vol}(B_\varepsilon) \operatorname{div} F(p_\varepsilon) \\&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \operatorname{div} F(p_\varepsilon) \\&= \operatorname{div} F(p)\end{aligned}$$



- $\operatorname{div} F(p) > 0$ 时, $\iint_{\partial B_\varepsilon} F \cdot \vec{n} dS > 0$ (ε 充分小), 说明 p 点是 source
- $\operatorname{div} F(p) < 0$ 时,

散度 $\operatorname{div} F$ 的物理解释 (2)

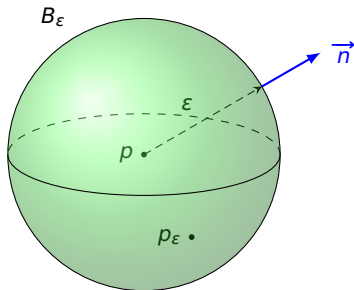
$$\begin{aligned}& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\operatorname{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \iint_{\partial B_\varepsilon} F \cdot \vec{n} dS \\&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\operatorname{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \iiint_{B_\varepsilon} \operatorname{div} F dv \\&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\operatorname{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \operatorname{Vol}(B_\varepsilon) \operatorname{div} F(p_\varepsilon) \\&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \operatorname{div} F(p_\varepsilon) \\&= \operatorname{div} F(p)\end{aligned}$$



- $\operatorname{div} F(p) > 0$ 时, $\iint_{\partial B_\varepsilon} F \cdot \vec{n} dS > 0$ (ε 充分小), 说明 p 点是 source
- $\operatorname{div} F(p) < 0$ 时, $\iint_{\partial B_\varepsilon} F \cdot \vec{n} dS < 0$ (ε 充分小),

散度 $\operatorname{div} F$ 的物理解释 (2)

$$\begin{aligned}& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\operatorname{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \iint_{\partial B_\varepsilon} F \cdot \vec{n} \, dS \\&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\operatorname{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \iiint_{B_\varepsilon} \operatorname{div} F \, dV \\&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\operatorname{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \operatorname{Vol}(B_\varepsilon) \operatorname{div} F(p_\varepsilon) \\&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \operatorname{div} F(p_\varepsilon) \\&= \operatorname{div} F(p)\end{aligned}$$



- $\operatorname{div} F(p) > 0$ 时, $\iint_{\partial B_\varepsilon} F \cdot \vec{n} \, dS > 0$ (ε 充分小), 说明 p 点是 source
- $\operatorname{div} F(p) < 0$ 时, $\iint_{\partial B_\varepsilon} F \cdot \vec{n} \, dS < 0$ (ε 充分小), 说明 p 点是 sink

We are here now...

1. 高斯公式

2. 斯托克斯公式

向量场的旋度

定义 设 $F = (P, Q, R)$ 是空间中向量场，定义

$$\operatorname{rot} F := \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

称为向量场 F 的旋度。

向量场的旋度

定义 设 $F = (P, Q, R)$ 是空间中向量场，定义

$$\operatorname{rot} F := \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix}, \quad , \quad \right)$$

称为向量场 F 的旋度。

向量场的旋度

定义 设 $F = (P, Q, R)$ 是空间中向量场, 定义

$$\operatorname{rot} F := \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & R \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \right)$$

称为向量场 F 的旋度。

向量场的旋度

定义 设 $F = (P, Q, R)$ 是空间中向量场，定义

$$\operatorname{rot} F := \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & R \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \right)$$

称为向量场 F 的旋度。

向量场的旋度

定义 设 $F = (P, Q, R)$ 是空间中向量场，定义

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F &:= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & R \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \right) \\ &= (R_y - Q_z, \quad , \quad) \end{aligned}$$

称为向量场 F 的旋度。

向量场的旋度

定义 设 $F = (P, Q, R)$ 是空间中向量场，定义

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F &:= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & R \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \right) \\ &= (R_y - Q_z, P_z - R_x, \quad \quad \quad) \end{aligned}$$

称为向量场 F 的旋度。

向量场的旋度

定义 设 $F = (P, Q, R)$ 是空间中向量场，定义

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} F &:= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & R \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \right) \\ &= (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)\end{aligned}$$

称为向量场 F 的旋度。

向量场的旋度

定义 设 $F = (P, Q, R)$ 是空间中向量场, 定义

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} F &:= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & R \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \right) \\ &= (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)\end{aligned}$$

称为向量场 F 的**旋度**。

例 计算向量场 $F = (y, -x, e^{xz})$ 的旋度。

向量场的旋度

定义 设 $F = (P, Q, R)$ 是空间中向量场, 定义

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} F &:= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & R \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \right) \\ &= (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)\end{aligned}$$

称为向量场 F 的**旋度**。

例 计算向量场 $F = (y, -x, e^{xz})$ 的旋度。

解

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & e^{xz} \end{vmatrix}$$

向量场的旋度

定义 设 $F = (P, Q, R)$ 是空间中向量场, 定义

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} F &:= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & R \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \right) \\ &= (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)\end{aligned}$$

称为向量场 F 的**旋度**。

例 计算向量场 $F = (y, -x, e^{xz})$ 的旋度。

解

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & e^{xz} \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -x & e^{xz} \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & e^{xz} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y & -x \end{vmatrix} \right)$$

向量场的旋度

定义 设 $F = (P, Q, R)$ 是空间中向量场, 定义

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} F &:= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & R \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \right) \\ &= (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)\end{aligned}$$

称为向量场 F 的旋度。

例 计算向量场 $F = (y, -x, e^{xz})$ 的旋度。

解

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} F &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & e^{xz} \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -x & e^{xz} \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & e^{xz} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y & -x \end{vmatrix} \right) \\ &= (0, \quad , \quad)\end{aligned}$$

向量场的旋度

定义 设 $F = (P, Q, R)$ 是空间中向量场, 定义

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} F &:= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & R \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \right) \\ &= (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)\end{aligned}$$

称为向量场 F 的旋度。

例 计算向量场 $F = (y, -x, e^{xz})$ 的旋度。

解

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} F &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & e^{xz} \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -x & e^{xz} \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & e^{xz} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y & -x \end{vmatrix} \right) \\ &= (0, -ze^{xz}, \quad)\end{aligned}$$

向量场的旋度

定义 设 $F = (P, Q, R)$ 是空间中向量场, 定义

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} F &:= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & R \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \right) \\ &= (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)\end{aligned}$$

称为向量场 F 的**旋度**。

例 计算向量场 $F = (y, -x, e^{xz})$ 的旋度。

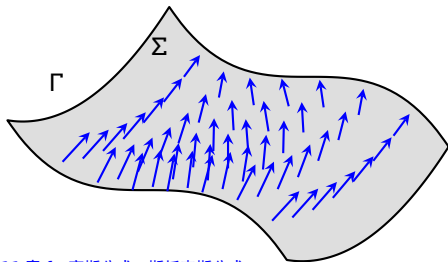
解

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} F &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & e^{xz} \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -x & e^{xz} \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & e^{xz} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y & -x \end{vmatrix} \right) \\ &= (0, -ze^{xz}, -2)\end{aligned}$$

斯托克斯公式

定理（斯托克斯公式） 假设

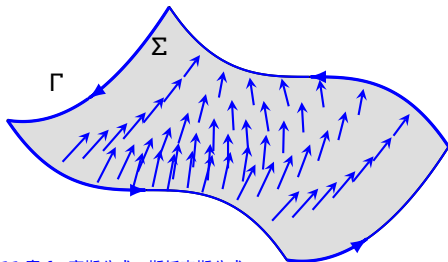
- Σ 是空间中分片光滑的定向曲面，选定单位法向量场 \vec{n} ，
- Γ 是 Σ 的边界，且赋予“边界定向”，



斯托克斯公式

定理（斯托克斯公式） 假设

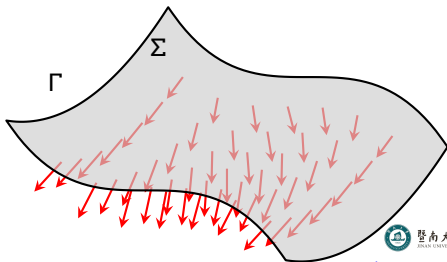
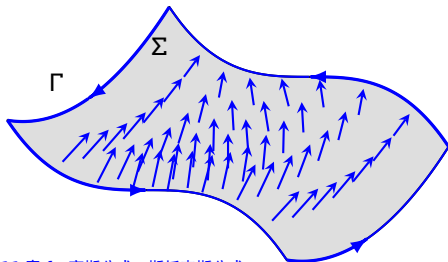
- Σ 是空间中分片光滑的定向曲面，选定单位法向量场 \vec{n} ，
- Γ 是 Σ 的边界，且赋予“边界定向”，



斯托克斯公式

定理（斯托克斯公式） 假设

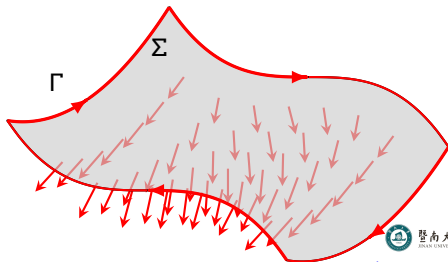
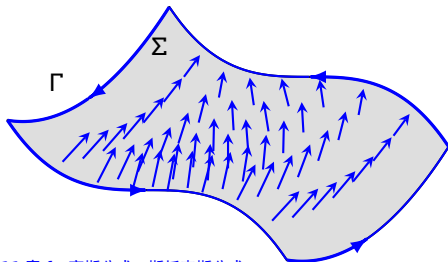
- Σ 是空间中分片光滑的定向曲面，选定单位法向量场 \vec{n} ，
- Γ 是 Σ 的边界，且赋予“边界定向”，



斯托克斯公式

定理（斯托克斯公式） 假设

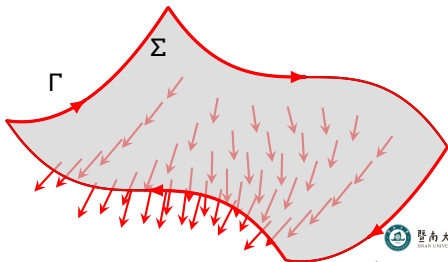
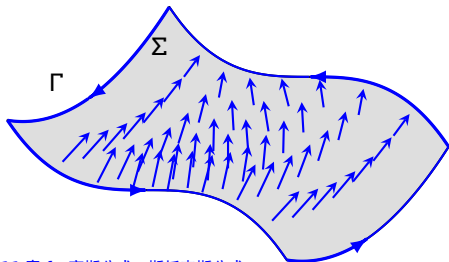
- Σ 是空间中分片光滑的定向曲面，选定单位法向量场 \vec{n} ，
- Γ 是 Σ 的边界，且赋予“边界定向”，



斯托克斯公式

定理（斯托克斯公式） 假设

- Σ 是空间中分片光滑的定向曲面，选定单位法向量场 \vec{n} ，
- Γ 是 Σ 的边界，且赋予“边界定向”，
- $F = (P, Q, R)$ 是空间向量场，且 P, Q, R 具有一阶连续偏导数，

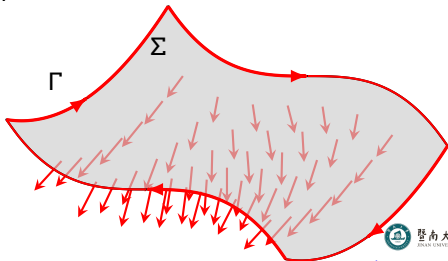
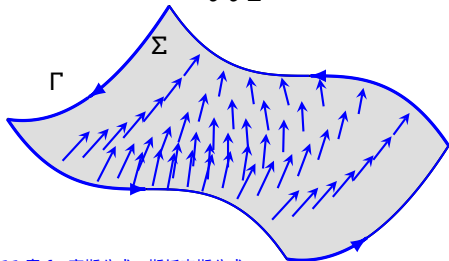


斯托克斯公式

定理（斯托克斯公式） 假设

- Σ 是空间中分片光滑的定向曲面，选定单位法向量场 \vec{n} ，
- Γ 是 Σ 的边界，且赋予“边界定向”，
- $F = (P, Q, R)$ 是空间向量场，且 P, Q, R 具有一阶连续偏导数，

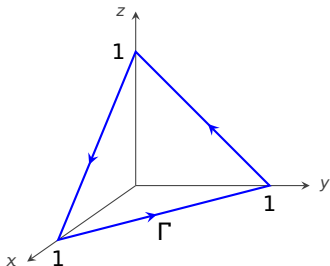
则成立：
$$\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot \vec{n} dS = \int_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz.$$



例 1 试利用斯托克斯公式计算

$$I = \int_{\Gamma} zdx + xdy + ydz$$

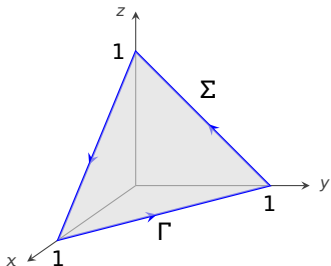
其中有向曲线 Γ 如图：



例 1 试利用斯托克斯公式计算

$$I = \int_{\Gamma} zdx + xdy + ydz$$

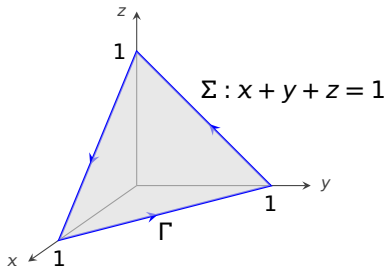
其中有向曲线 Γ 如图：



例 1 试利用斯托克斯公式计算

$$I = \int_{\Gamma} zdx + xdy + ydz$$

其中有向曲线 Γ 如图：

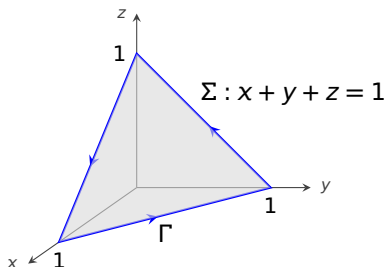


例 1 试利用斯托克斯公式计算

$$I = \int_{\Gamma} zdx + xdy + ydz$$

其中有向曲线 Γ 如图:

解设 $F = (z, x, y)$, 则



所以

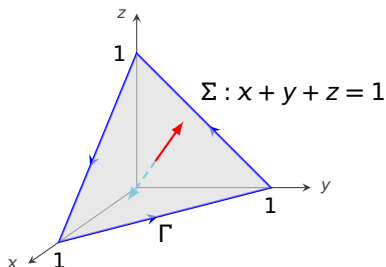
$$\int_{\Gamma} zdx + xdy + ydz = \iint_{\Sigma} \text{rot } F \cdot \vec{n} dS$$

例 1 试利用斯托克斯公式计算

$$I = \int_{\Gamma} zdx + xdy + ydz$$

其中有向曲线 Γ 如图:

解设 $F = (z, x, y)$, 则



所以

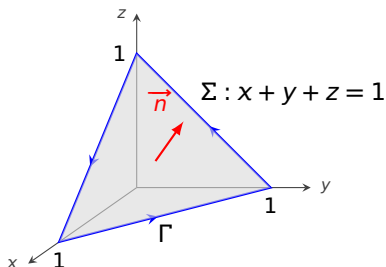
$$\int_{\Gamma} zdx + xdy + ydz = \iint_{\Sigma} \text{rot } F \cdot \vec{n} dS$$

例 1 试利用斯托克斯公式计算

$$I = \int_{\Gamma} zdx + xdy + ydz$$

其中有向曲线 Γ 如图:

解设 $F = (z, x, y)$, 则



所以

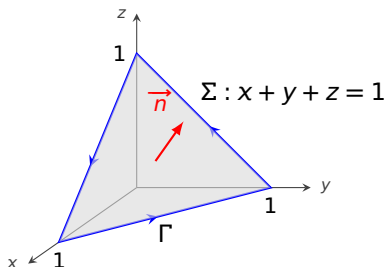
$$\int_{\Gamma} zdx + xdy + ydz = \iint_{\Sigma} \text{rot } F \cdot \vec{n} dS$$

例 1 试利用斯托克斯公式计算

$$I = \int_{\Gamma} zdx + xdy + ydz$$

其中有向曲线 Γ 如图:

解设 $F = (z, x, y)$, 则



所以

$$\int_{\Gamma} zdx + xdy + ydz = \iint_{\Sigma} \text{rot } F \cdot \vec{n} dS \underline{\underline{\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)}}$$

例 1 试利用斯托克斯公式计算

$$I = \int_{\Gamma} zdx + xdy + ydz$$

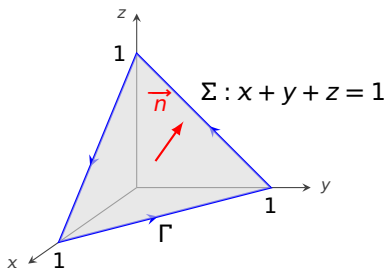
其中有向曲线 Γ 如图:

解 设 $F = (z, x, y)$, 则

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

所以

$$\int_{\Gamma} zdx + xdy + ydz = \iint_{\Sigma} \text{rot } F \cdot \vec{n} dS \quad \underline{\underline{\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)}}$$



例 1 试利用斯托克斯公式计算

$$I = \int_{\Gamma} zdx + xdy + ydz$$

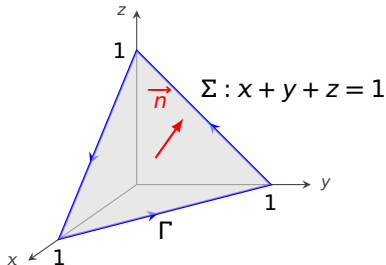
其中有向曲线 Γ 如图:

解 设 $F = (z, x, y)$, 则

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix} = \left(\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y \end{array} \right|, - \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & y \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ z & x \end{array} \right| \right)$$

所以

$$\int_{\Gamma} zdx + xdy + ydz = \iint_{\Sigma} \text{rot } F \cdot \vec{n} dS \quad \underline{\underline{\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)}}$$



例 1 试利用斯托克斯公式计算

$$I = \int_{\Gamma} zdx + xdy + ydz$$

其中有向曲线 Γ 如图:

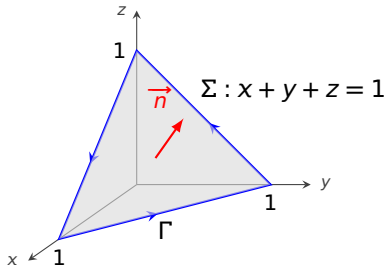
解 设 $F = (z, x, y)$, 则

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix} = \left(\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y \end{array} \right|, - \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & y \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ z & x \end{array} \right| \right)$$

$$= (1, -1, 1)$$

所以

$$\int_{\Gamma} zdx + xdy + ydz = \iint_{\Sigma} \text{rot } F \cdot \vec{n} dS \quad \underline{\underline{\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)}}$$



例 1 试利用斯托克斯公式计算

$$I = \int_{\Gamma} zdx + xdy + ydz$$

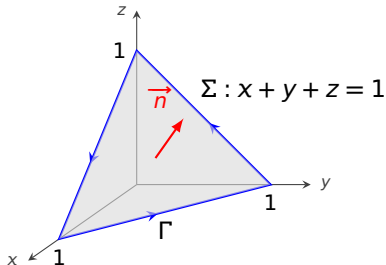
其中有向曲线 Γ 如图:

解 设 $F = (z, x, y)$, 则

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix} = \left(\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y \end{array} \right|, - \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & y \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ z & x \end{array} \right| \right)$$
$$= (1, 1, 1)$$

所以

$$\int_{\Gamma} zdx + xdy + ydz = \iint_{\Sigma} \text{rot } F \cdot \vec{n} dS \quad \underline{\underline{\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)}}$$



例 1 试利用斯托克斯公式计算

$$I = \int_{\Gamma} zdx + xdy + ydz$$

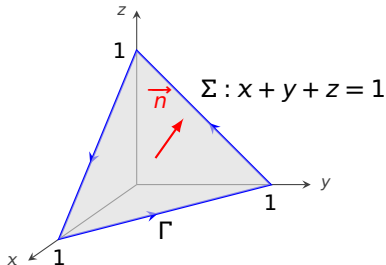
其中有向曲线 Γ 如图:

解 设 $F = (z, x, y)$, 则

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix} = \left(\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y \end{array} \right|, - \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & y \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ z & x \end{array} \right| \right) \\ &= (1, 1, 1) \end{aligned}$$

所以

$$\int_{\Gamma} zdx + xdy + ydz = \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot \vec{n} dS \quad \underline{\underline{\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)}}$$



例 1 试利用斯托克斯公式计算

$$I = \int_{\Gamma} zdx + xdy + ydz$$

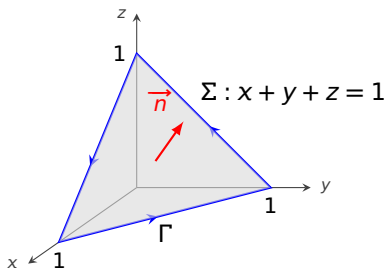
其中有向曲线 Γ 如图:

解 设 $F = (z, x, y)$, 则

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix} = \left(\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y \end{array} \right|, - \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & y \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ z & x \end{array} \right| \right) \\ &= (1, 1, 1) \end{aligned}$$

所以

$$\int_{\Gamma} zdx + xdy + ydz = \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot \vec{n} dS \stackrel{\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)}{=} \iint_{\Sigma} \sqrt{3} dS$$



例 1 试利用斯托克斯公式计算

$$I = \int_{\Gamma} zdx + xdy + ydz$$

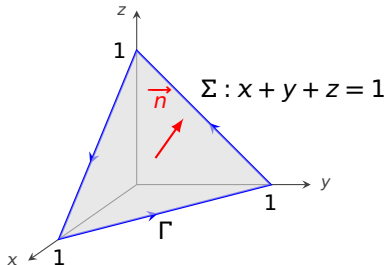
其中有向曲线 Γ 如图:

解 设 $F = (z, x, y)$, 则

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix} = \left(\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y \end{array} \right|, - \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & y \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ z & x \end{array} \right| \right) \\ &= (1, 1, 1) \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} zdx + xdy + ydz &= \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot \vec{n} dS \stackrel{\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)}{=} \iint_{\Sigma} \sqrt{3} dS \\ &= \sqrt{3} \operatorname{Area}(\Sigma) \end{aligned}$$



例 1 试利用斯托克斯公式计算

$$I = \int_{\Gamma} zdx + xdy + ydz$$

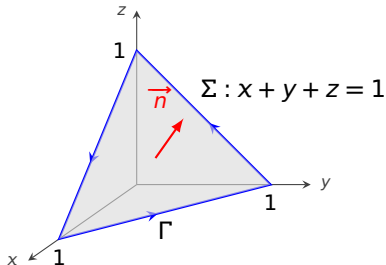
其中有向曲线 Γ 如图:

解 设 $F = (z, x, y)$, 则

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix} = \left(\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y \end{array} \right|, - \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & y \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ z & x \end{array} \right| \right) \\ &= (1, 1, 1) \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} zdx + xdy + ydz &= \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot \vec{n} dS \stackrel{\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)}{=} \iint_{\Sigma} \sqrt{3} dS \\ &= \sqrt{3} \operatorname{Area}(\Sigma) = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$



例 1 试利用斯托克斯公式计算

$$I = \int_{\Gamma} zdx + xdy + ydz$$

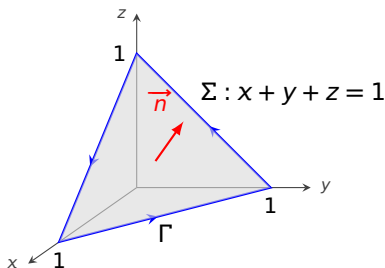
其中有向曲线 Γ 如图:

解设 $F = (z, x, y)$, 则

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix} = \left(\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y \end{array} \right|, - \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & y \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ z & x \end{array} \right| \right) \\ &= (1, 1, 1) \end{aligned}$$

所以

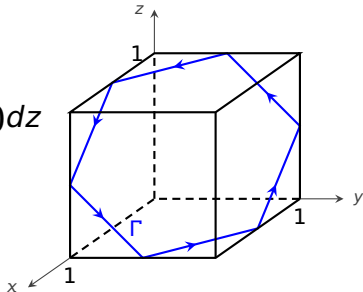
$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} zdx + xdy + ydz &= \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot \vec{n} dS \stackrel{\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)}{=} \iint_{\Sigma} \sqrt{3} dS \\ &= \sqrt{3} \operatorname{Area}(\Sigma) = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$



例 2 试利用斯托克斯公式计算

$$I = \int_{\Gamma} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$$

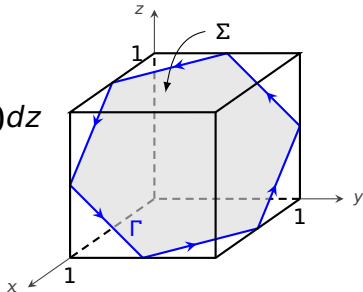
其中有向曲线 Γ 如图：



例 2 试利用斯托克斯公式计算

$$I = \int_{\Gamma} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$$

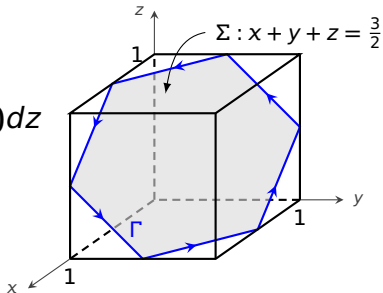
其中有向曲线 Γ 如图:



例 2 试利用斯托克斯公式计算

$$I = \int_{\Gamma} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$$

其中有向曲线 Γ 如图：

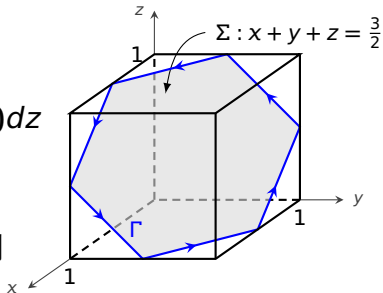


例 2 试利用斯托克斯公式计算

$$I = \int_{\Gamma} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$$

其中有向曲线 Γ 如图：

解 设 $F = (y^2 - z^2, z^2 - x^2, x^2 - y^2)$ ，则



所以

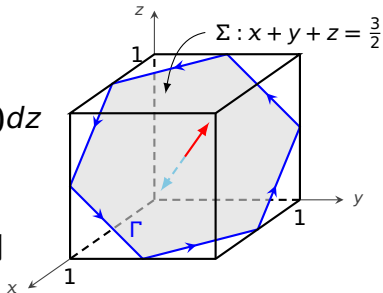
$$I = \iint_{\Sigma} \text{rot } F \cdot \vec{n} dS$$

例 2 试利用斯托克斯公式计算

$$I = \int_{\Gamma} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$$

其中有向曲线 Γ 如图:

解 设 $F = (y^2 - z^2, z^2 - x^2, x^2 - y^2)$, 则



所以

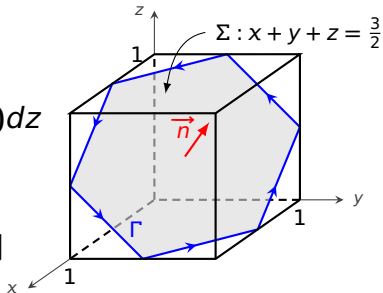
$$I = \iint_{\Sigma} \text{rot } F \cdot \vec{n} dS$$

例 2 试利用斯托克斯公式计算

$$I = \int_{\Gamma} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$$

其中有向曲线 Γ 如图:

解 设 $F = (y^2 - z^2, z^2 - x^2, x^2 - y^2)$, 则



所以

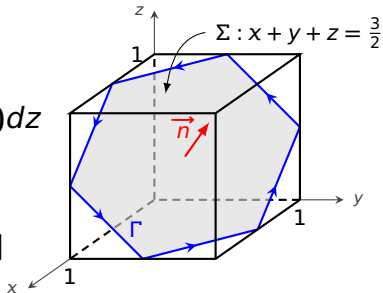
$$I = \iint_{\Sigma} \text{rot } F \cdot \vec{n} dS$$

例 2 试利用斯托克斯公式计算

$$I = \int_{\Gamma} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$$

其中有向曲线 Γ 如图:

解 设 $F = (y^2 - z^2, z^2 - x^2, x^2 - y^2)$, 则



所以

$$I = \iint_{\Sigma} \text{rot } F \cdot \vec{n} dS \underline{\underline{\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)}}$$

例 2 试利用斯托克斯公式计算

$$I = \int_{\Gamma} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$$

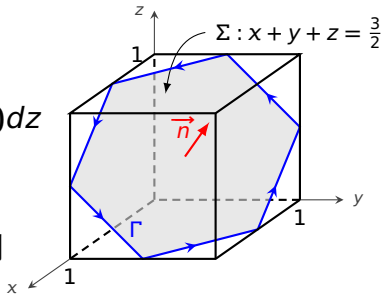
其中有向曲线 Γ 如图:

解 设 $F = (y^2 - z^2, z^2 - x^2, x^2 - y^2)$, 则

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - z^2 & z^2 - x^2 & x^2 - y^2 \end{vmatrix}$$

所以

$$I = \iint_{\Sigma} \text{rot } F \cdot \vec{n} dS \quad \underline{\underline{\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)}}$$



例 2 试利用斯托克斯公式计算

$$I = \int_{\Gamma} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$$

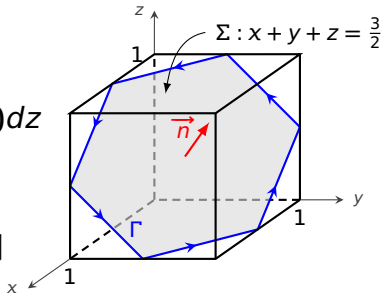
其中有向曲线 Γ 如图：

解 设 $F = (y^2 - z^2, z^2 - x^2, x^2 - y^2)$ ，则

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - z^2 & z^2 - x^2 & x^2 - y^2 \end{vmatrix} = (-2y - 2z, \quad , \quad)$$

所以

$$I = \iint_{\Sigma} \text{rot } F \cdot \vec{n} dS \quad \underline{\underline{\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)}}$$



例 2 试利用斯托克斯公式计算

$$I = \int_{\Gamma} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$$

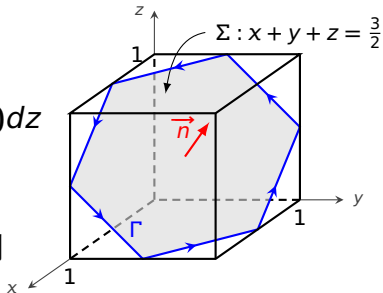
其中有向曲线 Γ 如图:

解 设 $F = (y^2 - z^2, z^2 - x^2, x^2 - y^2)$, 则

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - z^2 & z^2 - x^2 & x^2 - y^2 \end{vmatrix} = (-2y - 2z, -2z - 2x, \quad)$$

所以

$$I = \iint_{\Sigma} \text{rot } F \cdot \vec{n} dS \quad \underline{\underline{\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)}}$$



例 2 试利用斯托克斯公式计算

$$I = \int_{\Gamma} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$$

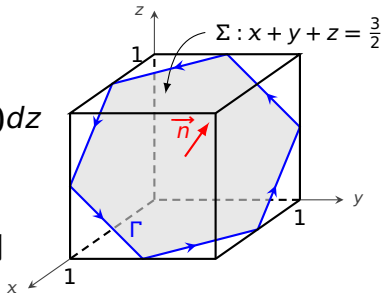
其中有向曲线 Γ 如图：

解 设 $F = (y^2 - z^2, z^2 - x^2, x^2 - y^2)$ ，则

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - z^2 & z^2 - x^2 & x^2 - y^2 \end{vmatrix} = (-2y - 2z, -2z - 2x, -2x - 2y)$$

所以

$$I = \iint_{\Sigma} \text{rot } F \cdot \vec{n} dS \quad \underline{\underline{\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)}}$$



例 2 试利用斯托克斯公式计算

$$I = \int_{\Gamma} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$$

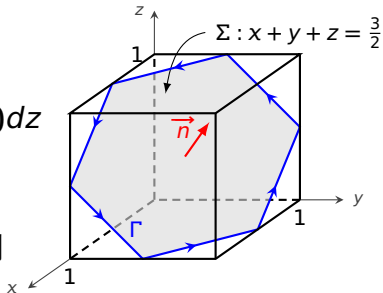
其中有向曲线 Γ 如图：

解 设 $F = (y^2 - z^2, z^2 - x^2, x^2 - y^2)$ ，则

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - z^2 & z^2 - x^2 & x^2 - y^2 \end{vmatrix} = (-2y - 2z, -2z - 2x, -2x - 2y)$$

所以

$$I = \iint_{\Sigma} \text{rot } F \cdot \vec{n} dS \stackrel{\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)}{=} \frac{-4}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} (x + y + z) dS$$



例 2 试利用斯托克斯公式计算

$$I = \int_{\Gamma} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$$

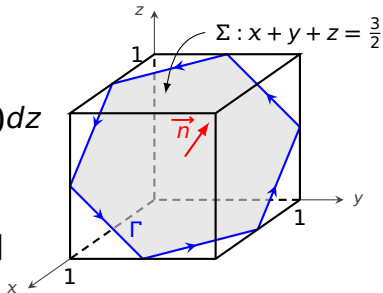
其中有向曲线 Γ 如图:

解 设 $F = (y^2 - z^2, z^2 - x^2, x^2 - y^2)$, 则

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - z^2 & z^2 - x^2 & x^2 - y^2 \end{vmatrix} = (-2y - 2z, -2z - 2x, -2x - 2y)$$

所以

$$I = \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot \vec{n} dS \stackrel{\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)}{=} \frac{-4}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} (x + y + z) dS = \frac{-4}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} \frac{3}{2} dS$$



例 2 试利用斯托克斯公式计算

$$I = \int_{\Gamma} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$$

其中有向曲线 Γ 如图:

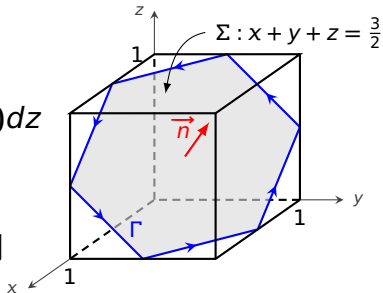
解 设 $F = (y^2 - z^2, z^2 - x^2, x^2 - y^2)$, 则

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - z^2 & z^2 - x^2 & x^2 - y^2 \end{vmatrix} = (-2y - 2z, -2z - 2x, -2x - 2y)$$

所以

$$I = \iint_{\Sigma} \text{rot } F \cdot \vec{n} dS \stackrel{\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)}{=} \frac{-4}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} (x + y + z) dS = \frac{-4}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} \frac{3}{2} dS$$

$$= -2\sqrt{3}\text{Area}(\Sigma)$$



例 2 试利用斯托克斯公式计算

$$I = \int_{\Gamma} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$$

其中有向曲线 Γ 如图:

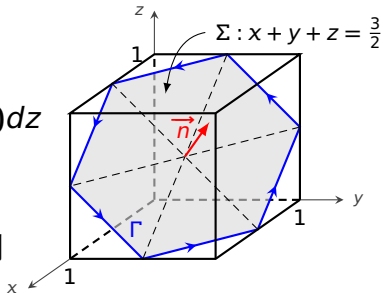
解 设 $F = (y^2 - z^2, z^2 - x^2, x^2 - y^2)$, 则

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - z^2 & z^2 - x^2 & x^2 - y^2 \end{vmatrix} = (-2y - 2z, -2z - 2x, -2x - 2y)$$

所以

$$I = \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot \vec{n} dS \stackrel{\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)}{=} \frac{-4}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} (x + y + z) dS = \frac{-4}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} \frac{3}{2} dS$$

$$= -2\sqrt{3} \operatorname{Area}(\Sigma)$$



例 2 试利用斯托克斯公式计算

$$I = \int_{\Gamma} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$$

其中有向曲线 Γ 如图:

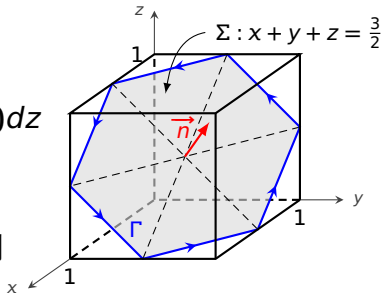
解 设 $F = (y^2 - z^2, z^2 - x^2, x^2 - y^2)$, 则

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - z^2 & z^2 - x^2 & x^2 - y^2 \end{vmatrix} = (-2y - 2z, -2z - 2x, -2x - 2y)$$

所以

$$I = \iint_{\Sigma} \text{rot } F \cdot \vec{n} dS \stackrel{\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)}{=} \frac{-4}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} (x + y + z) dS = \frac{-4}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} \frac{3}{2} dS$$

$$= -2\sqrt{3} \text{Area}(\Sigma) = -2\sqrt{3} \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sin \frac{\pi}{3}$$



例 2 试利用斯托克斯公式计算

$$I = \int_{\Gamma} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$$

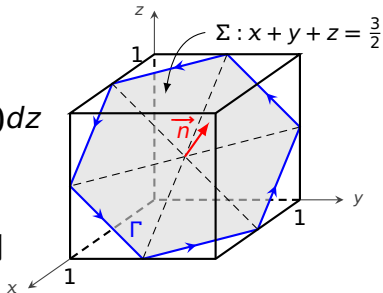
其中有向曲线 Γ 如图:

解 设 $F = (y^2 - z^2, z^2 - x^2, x^2 - y^2)$, 则

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - z^2 & z^2 - x^2 & x^2 - y^2 \end{vmatrix} = (-2y - 2z, -2z - 2x, -2x - 2y)$$

所以

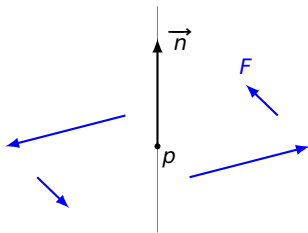
$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma} \text{rot } F \cdot \vec{n} dS \stackrel{\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)}{=} \frac{-4}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} (x + y + z) dS = \frac{-4}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} \frac{3}{2} dS \\ &= -2\sqrt{3} \text{Area}(\Sigma) = -2\sqrt{3} \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sin \frac{\pi}{3} = -\frac{9}{2} \end{aligned}$$



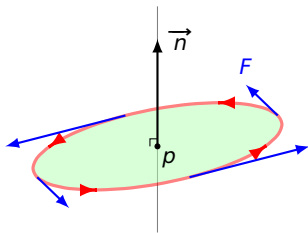
旋度 $\text{rot } F$ 的解释



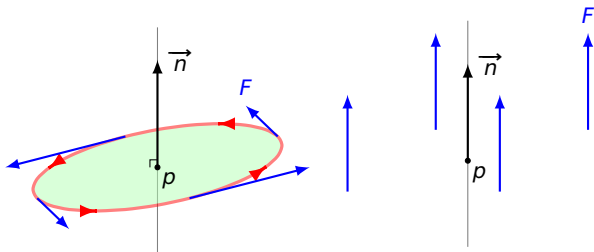
旋度 $\text{rot } F$ 的解释



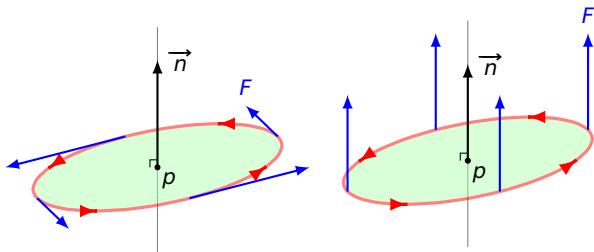
旋度 $\text{rot } F$ 的解释



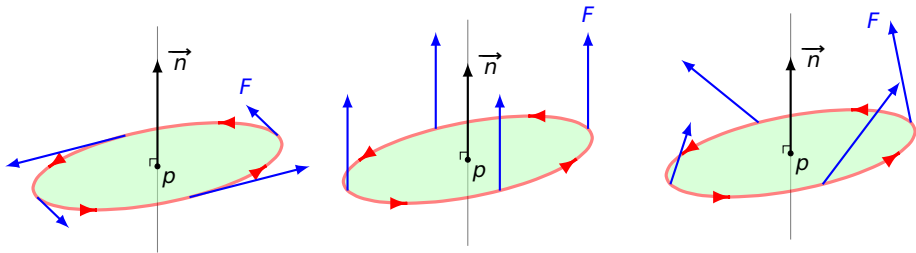
旋度 $\text{rot } F$ 的解释



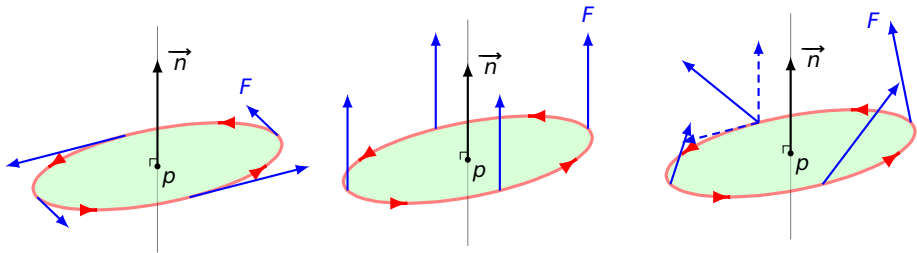
旋度 $\text{rot } F$ 的解释



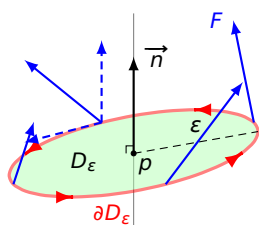
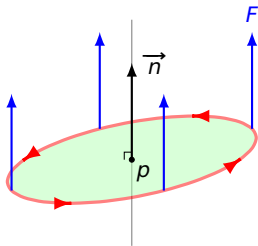
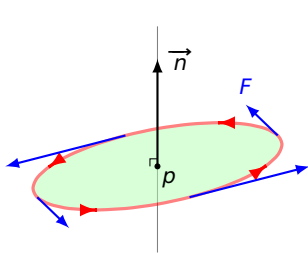
旋度 $\text{rot } F$ 的解释



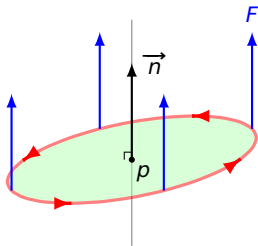
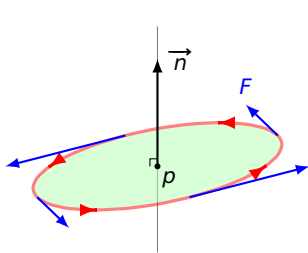
旋度 $\text{rot } F$ 的解释



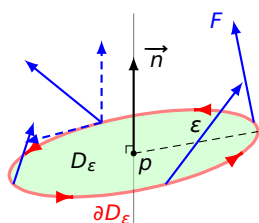
旋度 $\text{rot } F$ 的解释



旋度 $\text{rot } F$ 的解释

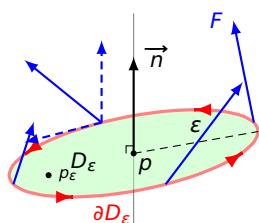
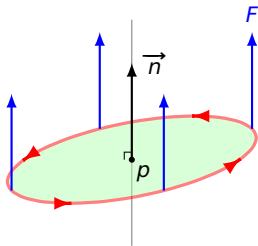
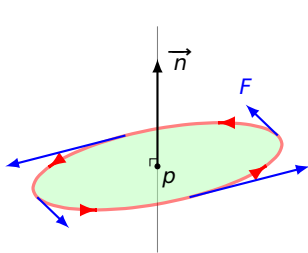


$$\int_{\partial D_\epsilon} Pdx + Qdy + Rdz =$$



$$\iint_{D_\epsilon} \text{rot } F \cdot \vec{n} \, dv$$

旋度 $\text{rot } F$ 的解释

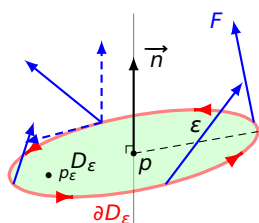
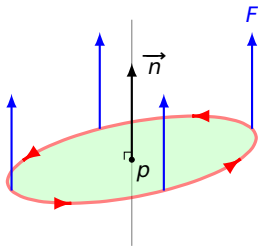
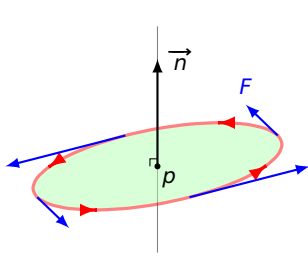


$$\int_{\partial D_\epsilon} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$\iint_{D_\epsilon} \text{rot } F \cdot \vec{n} dv$$

$$= \text{Area}(D_\epsilon) \text{rot } F(p_\epsilon) \cdot \vec{n}$$

旋度 $\text{rot } F$ 的解释



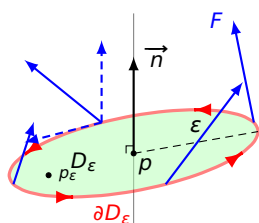
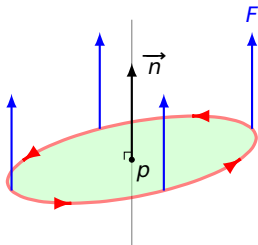
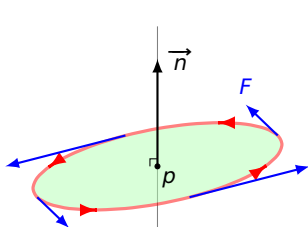
$$\int_{\partial D_\epsilon} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$\iint_{D_\epsilon} \text{rot } F \cdot \vec{n} \, dv$$

$$= \text{Area}(D_\epsilon) \text{rot } F(p_\epsilon) \cdot \vec{n}$$

$$\text{rot } F(p) \cdot \vec{n}$$

旋度 $\text{rot } F$ 的解释



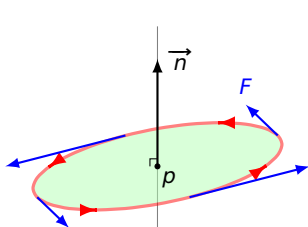
$$\frac{1}{\text{Area}(D_\epsilon)} \cdot \int_{\partial D_\epsilon} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \frac{1}{\text{Area}(D_\epsilon)} \text{Area}(D_\epsilon) \text{rot } F(p_\epsilon) \cdot \vec{n}$$

$$\text{rot } F(p) \cdot \vec{n}$$

$$\frac{1}{\text{Area}(D_\epsilon)} \cdot \iint_{D_\epsilon} \text{rot } F \cdot \vec{n} dv$$

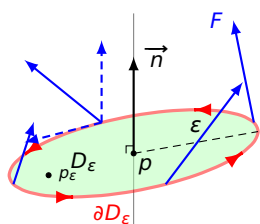
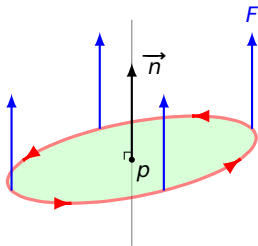
旋度 $\text{rot } F$ 的解释



$$\frac{1}{\text{Area}(D_\epsilon)} \cdot \int_{\partial D_\epsilon} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \frac{1}{\text{Area}(D_\epsilon)} \text{Area}(D_\epsilon) \text{rot } F(p_\epsilon) \cdot \vec{n} =$$

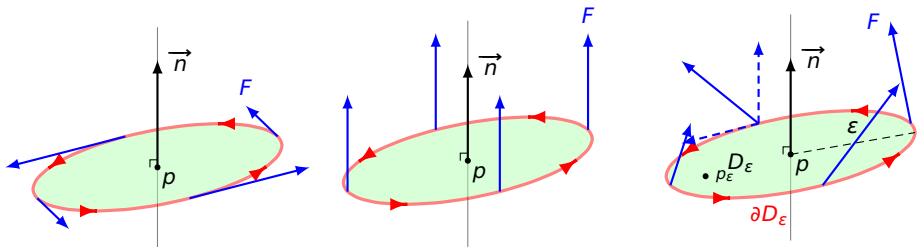
$$\text{rot } F(p) \cdot \vec{n}$$



$$\frac{1}{\text{Area}(D_\epsilon)} \cdot \iint_{D_\epsilon} \text{rot } F \cdot \vec{n} dv$$

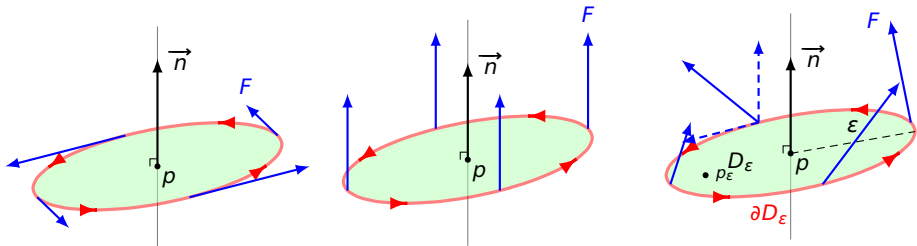
$$\text{rot } F(p_\epsilon) \cdot \vec{n}$$

旋度 $\text{rot } F$ 的解释



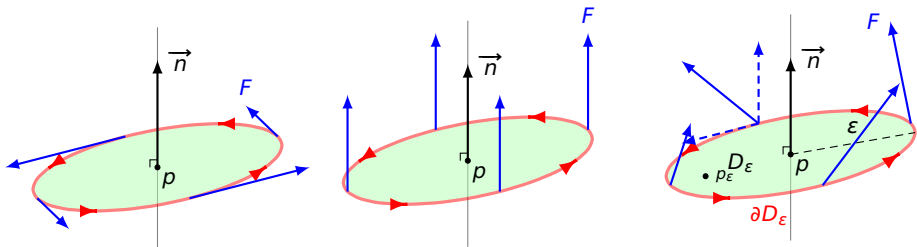
$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\text{Area}(D_\epsilon)} \cdot \int_{\partial D_\epsilon} P dx + Q dy + R dz &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\text{Area}(D_\epsilon)} \cdot \iint_{D_\epsilon} \text{rot } F \cdot \vec{n} \, dv \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\text{Area}(D_\epsilon)} \text{Area}(D_\epsilon) \text{rot } F(p_\epsilon) \cdot \vec{n} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \text{rot } F(p_\epsilon) \cdot \vec{n} \\ &\quad \text{rot } F(p) \cdot \vec{n} \end{aligned}$$

旋度 $\text{rot } F$ 的解释



$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\text{Area}(D_\epsilon)} \cdot \int_{\partial D_\epsilon} P dx + Q dy + R dz &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\text{Area}(D_\epsilon)} \cdot \iint_{D_\epsilon} \text{rot } F \cdot \vec{n} \, dv \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\text{Area}(D_\epsilon)} \text{Area}(D_\epsilon) \text{rot } F(p_\epsilon) \cdot \vec{n} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \text{rot } F(p_\epsilon) \cdot \vec{n} \\ &= \text{rot } F(p) \cdot \vec{n} \end{aligned}$$

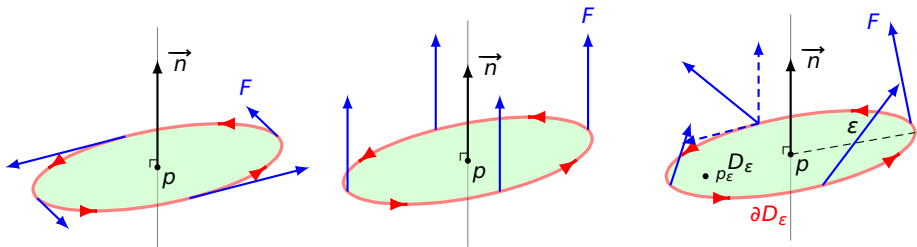
旋度 $\text{rot } F$ 的解释



$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\text{Area}(D_\epsilon)} \cdot \int_{\partial D_\epsilon} Pdx + Qdy + Rdz &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\text{Area}(D_\epsilon)} \cdot \iint_{D_\epsilon} \text{rot } F \cdot \vec{n} \, dv \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\text{Area}(D_\epsilon)} \text{Area}(D_\epsilon) \text{rot } F(p_\epsilon) \cdot \vec{n} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \text{rot } F(p_\epsilon) \cdot \vec{n} \\ &= \text{rot } F(p) \cdot \vec{n} \end{aligned}$$

注 $\text{rot } F \neq 0$ 说明有旋,

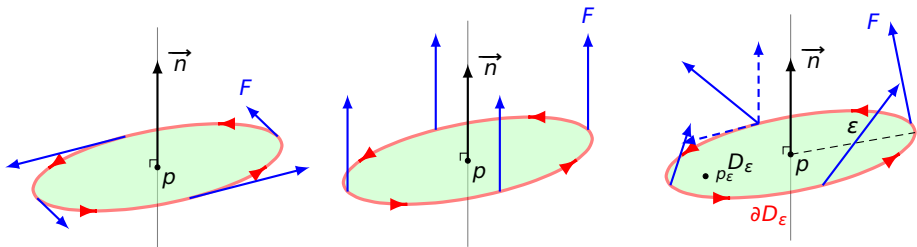
旋度 $\text{rot } F$ 的解释



$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\text{Area}(D_\epsilon)} \cdot \int_{\partial D_\epsilon} P dx + Q dy + R dz &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\text{Area}(D_\epsilon)} \cdot \iint_{D_\epsilon} \text{rot } F \cdot \vec{n} dv \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\text{Area}(D_\epsilon)} \text{Area}(D_\epsilon) \text{rot } F(p_\epsilon) \cdot \vec{n} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \text{rot } F(p_\epsilon) \cdot \vec{n} \\ &= \text{rot } F(p) \cdot \vec{n} \end{aligned}$$

注 $\text{rot } F \neq 0$ 说明有旋，此时可认为 F 在 p 点附近绕轴 $\vec{n} = \frac{\text{rot } F}{|\text{rot } F|}$ 旋转；

旋度 $\text{rot } F$ 的解释



$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\text{Area}(D_\varepsilon)} \cdot \int_{\partial D_\varepsilon} Pdx + Qdy + Rdz &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\text{Area}(D_\varepsilon)} \cdot \iint_{D_\varepsilon} \text{rot } F \cdot \vec{n} \, dv \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\text{Area}(D_\varepsilon)} \text{Area}(D_\varepsilon) \text{rot } F(p_\varepsilon) \cdot \vec{n} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \text{rot } F(p_\varepsilon) \cdot \vec{n} \\ &= \text{rot } F(p) \cdot \vec{n} \end{aligned}$$

注 $\text{rot } F \neq 0$ 说明有旋，此时可认为 F 在 p 点附近绕轴 $\vec{n} = \frac{\text{rot } F}{|\text{rot } F|}$ 旋转；
 $\text{rot } F = 0$ 说明无旋。