

# 第 4 章 $\alpha$ : 矩阵的特征值与特征向量

数学系 梁卓滨

2019-2020 学年 I

**定义** 设  $A$  是  $n$  阶方阵。

$$A\alpha = \lambda\alpha$$

**定义** 设  $A$  是  $n$  阶方阵。若存在数  $\lambda$  及非零  $n$  维向量  $\alpha$ , 满足

$$A\alpha = \lambda\alpha$$

**定义** 设  $A$  是  $n$  阶方阵。若存在数  $\lambda$  及非零  $n$  维向量  $\alpha$ ，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha$$

则称  $\lambda$  是一个**特征值**， $\alpha$  为对应特征值  $\lambda$  的**特征向量**。

**定义** 设  $A$  是  $n$  阶方阵。若存在数  $\lambda$  及非零  $n$  维向量  $\alpha$ ，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha$$

则称  $\lambda$  是一个 **特征值**， $\alpha$  为对应特征值  $\lambda$  的 **特征向量**。

---

**例** 设  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & b & -1 \end{pmatrix}$ ， $\lambda$  为特征值， $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$  为相应的特征向量，求  $a$ ,  $b$  和  $\lambda$ 。

**定义** 设  $A$  是  $n$  阶方阵。若存在数  $\lambda$  及非零  $n$  维向量  $\alpha$ ，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha$$

则称  $\lambda$  是一个 **特征值**， $\alpha$  为对应特征值  $\lambda$  的 **特征向量**。

---

**例** 设  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & b & -1 \end{pmatrix}$ ， $\lambda$  为特征值， $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$  为相应的特征向量，求  $a$ ,  $b$  和  $\lambda$ 。

**解**

$$A\alpha = \lambda\alpha \Rightarrow$$

**定义** 设  $A$  是  $n$  阶方阵。若存在数  $\lambda$  及非零  $n$  维向量  $\alpha$ ，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha$$

则称  $\lambda$  是一个 **特征值**， $\alpha$  为对应特征值  $\lambda$  的 **特征向量**。

---

**例** 设  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & b & -1 \end{pmatrix}$ ， $\lambda$  为特征值， $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$  为相应的特征向量，求  $a$ ,  $b$  和  $\lambda$ 。

**解**

$$A\alpha = \lambda\alpha \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & b & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

**定义** 设  $A$  是  $n$  阶方阵。若存在数  $\lambda$  及非零  $n$  维向量  $\alpha$ ，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha$$

则称  $\lambda$  是一个 **特征值**， $\alpha$  为对应特征值  $\lambda$  的 **特征向量**。

---

**例** 设  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & b & -1 \end{pmatrix}$ ， $\lambda$  为特征值， $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$  为相应的特征向量，求  $a, b$  和  $\lambda$ 。

**解**

$$A\alpha = \lambda\alpha \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & b & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 \\ a+10 \\ -2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ -2\lambda \\ 3\lambda \end{pmatrix}$$



**定义** 设  $A$  是  $n$  阶方阵。若存在数  $\lambda$  及非零  $n$  维向量  $\alpha$ ，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha$$

则称  $\lambda$  是一个 **特征值**， $\alpha$  为对应特征值  $\lambda$  的 **特征向量**。

---

**例** 设  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & b & -1 \end{pmatrix}$ ， $\lambda$  为特征值， $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$  为相应的特征向量，求  $a$ ,  $b$  和  $\lambda$ 。

**解**

$$A\alpha = \lambda\alpha \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & b & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 \\ a+10 \\ -2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ -2\lambda \\ 3\lambda \end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{cases} \lambda = -4 \\ a = \\ b = \end{cases}.$$

**定义** 设  $A$  是  $n$  阶方阵。若存在数  $\lambda$  及非零  $n$  维向量  $\alpha$ ，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha$$

则称  $\lambda$  是一个 **特征值**， $\alpha$  为对应特征值  $\lambda$  的 **特征向量**。

---

**例** 设  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & b & -1 \end{pmatrix}$ ， $\lambda$  为特征值， $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$  为相应的特征向量，求  $a$ ,  $b$  和  $\lambda$ 。

**解**

$$A\alpha = \lambda\alpha \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & b & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 \\ a+10 \\ -2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ -2\lambda \\ 3\lambda \end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{cases} \lambda = -4 \\ a = -2 \\ b = \end{cases} .$$

**定义** 设  $A$  是  $n$  阶方阵。若存在数  $\lambda$  及非零  $n$  维向量  $\alpha$ ，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha$$

则称  $\lambda$  是一个 **特征值**， $\alpha$  为对应特征值  $\lambda$  的 **特征向量**。

---

**例** 设  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & b & -1 \end{pmatrix}$ ， $\lambda$  为特征值， $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$  为相应的特征向量，求  $a$ ,  $b$  和  $\lambda$ 。

**解**

$$A\alpha = \lambda\alpha \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & b & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 \\ a+10 \\ -2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ -2\lambda \\ 3\lambda \end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{cases} \lambda = -4 \\ a = -2 \\ b = 6 \end{cases}.$$

# 特征值与特征向量的求解

**定义** 设  $A$  是  $n$  阶方阵。若存在数  $\lambda$  及非零  $n$  维向量  $\alpha$ ，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha$$

则称  $\lambda$  是一个**特征值**， $\alpha$  为对应特征值  $\lambda$  的**特征向量**。

# 特征值与特征向量的求解

**定义** 设  $A$  是  $n$  阶方阵。若存在数  $\lambda$  及非零  $n$  维向量  $\alpha$ ，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha$$

则称  $\lambda$  是一个 **特征值**， $\alpha$  为对应特征值  $\lambda$  的 **特征向量**。

---

**求解  $\lambda, \alpha$  步骤**

# 特征值与特征向量的求解

**定义** 设  $A$  是  $n$  阶方阵。若存在数  $\lambda$  及非零  $n$  维向量  $\alpha$ ，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha \quad \left( \Rightarrow \lambda\alpha - A\alpha = 0 \right)$$

则称  $\lambda$  是一个 **特征值**， $\alpha$  为对应特征值  $\lambda$  的 **特征向量**。

---

**求解  $\lambda, \alpha$  步骤**

# 特征值与特征向量的求解

**定义** 设  $A$  是  $n$  阶方阵。若存在数  $\lambda$  及非零  $n$  维向量  $\alpha$ ，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha \quad \left( \Rightarrow \lambda\alpha - A\alpha = 0 \implies (\lambda I - A)\alpha = 0 \right)$$

则称  $\lambda$  是一个 **特征值**， $\alpha$  为对应特征值  $\lambda$  的 **特征向量**。

---

**求解  $\lambda, \alpha$  步骤**

# 特征值与特征向量的求解

**定义** 设  $A$  是  $n$  阶方阵。若存在数  $\lambda$  及非零  $n$  维向量  $\alpha$ ，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha \quad \left( \Rightarrow \lambda\alpha - A\alpha = 0 \xrightarrow{\text{"变量分离"}} (\lambda I - A)\alpha = 0 \right)$$

则称  $\lambda$  是一个 **特征值**， $\alpha$  为对应特征值  $\lambda$  的 **特征向量**。

---

**求解  $\lambda, \alpha$  步骤**



# 特征值与特征向量的求解

**定义** 设  $A$  是  $n$  阶方阵。若存在数  $\lambda$  及非零  $n$  维向量  $\alpha$ ，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha \quad \left( \Rightarrow \lambda\alpha - A\alpha = 0 \xrightarrow{\text{"变量分离"}} (\lambda I - A)\alpha = 0 \right)$$

则称  $\lambda$  是一个 **特征值**， $\alpha$  为对应特征值  $\lambda$  的 **特征向量**。

---

**求解  $\lambda, \alpha$  步骤**

# 特征值与特征向量的求解

**定义** 设  $A$  是  $n$  阶方阵。若存在数  $\lambda$  及非零  $n$  维向量  $\alpha$ ，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha \quad \left( \Rightarrow \lambda\alpha - A\alpha = 0 \xrightarrow{\text{“变量分离”}} (\lambda I - A)\alpha = 0 \right)$$

则称  $\lambda$  是一个 **特征值**， $\alpha$  为对应特征值  $\lambda$  的 **特征向量**。

**求解  $\lambda, \alpha$  步骤**

$\alpha$  是  $(\lambda I - A)x = 0$  的非零解

# 特征值与特征向量的求解

**定义** 设  $A$  是  $n$  阶方阵。若存在数  $\lambda$  及非零  $n$  维向量  $\alpha$ ，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha \quad \left( \Rightarrow \lambda\alpha - A\alpha = 0 \xrightarrow{\text{"变量分离"}} (\lambda I - A)\alpha = 0 \right)$$

则称  $\lambda$  是一个 **特征值**， $\alpha$  为对应特征值  $\lambda$  的 **特征向量**。

**求解  $\lambda, \alpha$  步骤**

$\alpha$  是  $(\lambda I - A)x = 0$  的非零解

$$|\lambda I - A| = 0$$

# 特征值与特征向量的求解

**定义** 设  $A$  是  $n$  阶方阵。若存在数  $\lambda$  及非零  $n$  维向量  $\alpha$ ，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha \quad \left( \Rightarrow \lambda\alpha - A\alpha = 0 \xrightarrow{\text{"变量分离"}} (\lambda I - A)\alpha = 0 \right)$$

则称  $\lambda$  是一个 **特征值**， $\alpha$  为对应特征值  $\lambda$  的 **特征向量**。

**求解  $\lambda, \alpha$  步骤**

$\alpha$  是  $(\lambda I - A)x = 0$  的非零解

$$|\lambda I - A| = 0$$

特征方程

# 特征值与特征向量的求解

**定义** 设  $A$  是  $n$  阶方阵。若存在数  $\lambda$  及非零  $n$  维向量  $\alpha$ ，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha \quad \left( \Rightarrow \lambda\alpha - A\alpha = 0 \xrightarrow{\text{"变量分离"}} (\lambda I - A)\alpha = 0 \right)$$

则称  $\lambda$  是一个 **特征值**， $\alpha$  为对应特征值  $\lambda$  的 **特征向量**。

## 求解 $\lambda, \alpha$ 步骤

1. 先求解特征值  $\lambda$ ：等价于求解

$$|\lambda I - A| = 0$$

特征方程

$\alpha$  是  $(\lambda I - A)x = 0$  的非零解

# 特征值与特征向量的求解

**定义** 设  $A$  是  $n$  阶方阵。若存在数  $\lambda$  及非零  $n$  维向量  $\alpha$ ，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha \quad \left( \Rightarrow \lambda\alpha - A\alpha = 0 \xrightarrow{\text{"变量分离"}} (\lambda I - A)\alpha = 0 \right)$$

则称  $\lambda$  是一个 **特征值**， $\alpha$  为对应特征值  $\lambda$  的 **特征向量**。

## 求解 $\lambda, \alpha$ 步骤

1. 先求解特征值  $\lambda$ ：等价于求解

$$|\lambda I - A| = 0$$

特征方程

2. 再求解对应  $\lambda$  的特征向量  $\alpha$ ：

$\alpha$  是  $(\lambda I - A)x = 0$  的非零解

# 特征值与特征向量的求解

**定义** 设  $A$  是  $n$  阶方阵。若存在数  $\lambda$  及非零  $n$  维向量  $\alpha$ ，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha \quad \left( \Rightarrow \lambda\alpha - A\alpha = 0 \xrightarrow{\text{"变量分离"}} (\lambda I - A)\alpha = 0 \right)$$

则称  $\lambda$  是一个 **特征值**， $\alpha$  为对应特征值  $\lambda$  的 **特征向量**。

## 求解 $\lambda, \alpha$ 步骤

1. 先求解特征值  $\lambda$ ：等价于求解

$$|\lambda I - A| = 0$$

特征方程

2. 再求解对应  $\lambda$  的特征向量  $\alpha$ ：等价于求解

$$(\lambda I - A)x = 0$$

的所有非零解。

$\alpha$  是  $(\lambda I - A)x = 0$  的非零解

# 特征值与特征向量的求解

**定义** 设  $A$  是  $n$  阶方阵。若存在数  $\lambda$  及非零  $n$  维向量  $\alpha$ ，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha \quad \left( \Rightarrow \lambda\alpha - A\alpha = 0 \xrightarrow{\text{"变量分离"}} (\lambda I - A)\alpha = 0 \right)$$

则称  $\lambda$  是一个 **特征值**， $\alpha$  为对应特征值  $\lambda$  的 **特征向量**。

## 求解 $\lambda, \alpha$ 步骤

1. 先求解特征值  $\lambda$ ：等价于求解

$$|\lambda I - A| = 0$$

特征方程

2. 再求解对应  $\lambda$  的特征向量  $\alpha$ ：等价于求解

$$(\lambda I - A)x = 0$$

的所有非零解。设  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  是基础解系，则

$$\alpha = c_1\alpha_1 + \dots + c_s\alpha_s, \quad (c_1, \dots, c_s \text{ 不全为零})$$

$\alpha$  是  $(\lambda I - A)x = 0$  的非零解



**例 1** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**例 1** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解特征方程:  $0 = |\lambda I - A|$

**例 1** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解特征方程:  $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -5 & \lambda + 1 \end{vmatrix} =$

**例 1** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解特征方程:  $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -5 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda + 1) - 5$

**例 1** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解特征方程:  $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -5 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 8$

**例 1** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解特征方程:  $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -5 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda + 2)$

**例 1** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

● 求解特征方程： $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -5 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda + 2)$

所以  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = 4$ 。

**例 1** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解特征方程:  $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -5 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda + 2)$

所以  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = 4$ 。

- 当  $\lambda_1 = -2$ , 求解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$ :

- 当  $\lambda_2 = 4$ , 求解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$ :



**例 1** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解特征方程:  $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -5 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda + 2)$

所以  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = 4$ 。

- 当  $\lambda_1 = -2$ , 求解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$ :

$$(-2I - A : 0) = \left( \begin{array}{cc|c} -5 & -1 & 0 \\ -5 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

- 当  $\lambda_2 = 4$ , 求解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$ :

**例 1** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解特征方程:  $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -5 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda + 2)$

所以  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = 4$ 。

- 当  $\lambda_1 = -2$ , 求解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$ :

$$(-2I - A : 0) = \left( \begin{array}{cc|c} -5 & -1 & 0 \\ -5 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- 当  $\lambda_2 = 4$ , 求解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$ :

**例 1** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解特征方程:  $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -5 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda + 2)$

所以  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = 4$ 。

- 当  $\lambda_1 = -2$ , 求解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$ :

$$(-2I - A : 0) = \left( \begin{array}{cc|c} -5 & -1 & 0 \\ -5 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad 5x_1 + x_2 = 0$$

- 当  $\lambda_2 = 4$ , 求解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$ :

**例 1** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解特征方程:  $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -5 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda + 2)$

所以  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = 4$ 。

- 当  $\lambda_1 = -2$ , 求解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$ :

$$(-2I - A : 0) = \left( \begin{array}{cc|c} -5 & -1 & 0 \\ -5 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} 5x_1 + x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_2 = -5x_1 \end{array}$$

- 当  $\lambda_2 = 4$ , 求解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$ :

**例 1** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解特征方程:  $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -5 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda + 2)$

所以  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = 4$ 。

- 当  $\lambda_1 = -2$ , 求解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$ :

$$(-2I - A : 0) = \left( \begin{array}{cc|c} -5 & -1 & 0 \\ -5 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} 5x_1 + x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_2 = -5x_1 \end{array}$$

基础解系:  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ 。

- 当  $\lambda_2 = 4$ , 求解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$ :

**例 1** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解特征方程:  $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -5 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda + 2)$

所以  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = 4$ 。

- 当  $\lambda_1 = -2$ , 求解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$ :

$$(-2I - A : 0) = \left( \begin{array}{cc|c} -5 & -1 & 0 \\ -5 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} 5x_1 + x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_2 = -5x_1 \end{array}$$

基础解系:  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ 。  $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

- 当  $\lambda_2 = 4$ , 求解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$ :

**例 1** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解特征方程:  $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -5 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda + 2)$

所以  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = 4$ 。

- 当  $\lambda_1 = -2$ , 求解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$ :

$$(-2I - A : 0) = \left( \begin{array}{cc|c} -5 & -1 & 0 \\ -5 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} 5x_1 + x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_2 = -5x_1 \end{array}$$

基础解系:  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ 。特征向量:  $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ , 其中  $c_1 \neq 0$

- 当  $\lambda_2 = 4$ , 求解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$ :

**例 1** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解特征方程:  $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -5 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda + 2)$

所以  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = 4$ 。

- 当  $\lambda_1 = -2$ , 求解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$ :

$$(-2I - A : 0) = \left( \begin{array}{cc|c} -5 & -1 & 0 \\ -5 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} 5x_1 + x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_2 = -5x_1 \end{array}$$

基础解系:  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ 。特征向量:  $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ , 其中  $c_1 \neq 0$

- 当  $\lambda_2 = 4$ , 求解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$ :

$$(4I - A : 0) = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \end{array} \right)$$



**例 1** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解特征方程:  $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -5 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda + 2)$

所以  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = 4$ 。

- 当  $\lambda_1 = -2$ , 求解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$ :

$$(-2I - A : 0) = \left( \begin{array}{cc|c} -5 & -1 & 0 \\ -5 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} 5x_1 + x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_2 = -5x_1 \end{array}$$

基础解系:  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ 。特征向量:  $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ , 其中  $c_1 \neq 0$

- 当  $\lambda_2 = 4$ , 求解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$ :

$$(4I - A : 0) = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

**例 1** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解特征方程:  $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -5 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda + 2)$

所以  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = 4$ 。

- 当  $\lambda_1 = -2$ , 求解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$ :

$$(-2I - A : 0) = \left( \begin{array}{cc|c} -5 & -1 & 0 \\ -5 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} 5x_1 + x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_2 = -5x_1 \end{array}$$

基础解系:  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ 。特征向量:  $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ , 其中  $c_1 \neq 0$

- 当  $\lambda_2 = 4$ , 求解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$ :

$$(4I - A : 0) = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad x_1 - x_2 = 0$$

**例 1** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解特征方程:  $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -5 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda + 2)$

所以  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = 4$ 。

- 当  $\lambda_1 = -2$ , 求解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$ :

$$(-2I - A : 0) = \left( \begin{array}{cc|c} -5 & -1 & 0 \\ -5 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} 5x_1 + x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_2 = -5x_1 \end{array}$$

基础解系:  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ 。特征向量:  $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ , 其中  $c_1 \neq 0$

- 当  $\lambda_2 = 4$ , 求解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$ :

$$(4I - A : 0) = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_1 = x_2 \end{array}$$

**例 1** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解特征方程:  $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -5 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda + 2)$

所以  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = 4$ 。

- 当  $\lambda_1 = -2$ , 求解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$ :

$$(-2I - A : 0) = \left( \begin{array}{cc|c} -5 & -1 & 0 \\ -5 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} 5x_1 + x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_2 = -5x_1 \end{array}$$

基础解系:  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ 。特征向量:  $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ , 其中  $c_1 \neq 0$

- 当  $\lambda_2 = 4$ , 求解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$ :

$$(4I - A : 0) = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_1 = x_2 \end{array}$$

基础解系:  $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。

**例 1** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解特征方程:  $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -5 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda + 2)$

所以  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = 4$ 。

- 当  $\lambda_1 = -2$ , 求解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$ :

$$(-2I - A : 0) = \left( \begin{array}{cc|c} -5 & -1 & 0 \\ -5 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} 5x_1 + x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_2 = -5x_1 \end{array}$$

基础解系:  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ 。特征向量:  $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ , 其中  $c_1 \neq 0$

- 当  $\lambda_2 = 4$ , 求解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$ :

$$(4I - A : 0) = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_1 = x_2 \end{array}$$

基础解系:  $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。  $c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

**例 1** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解特征方程:  $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -5 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda + 2)$

所以  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = 4$ 。

- 当  $\lambda_1 = -2$ , 求解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$ :

$$(-2I - A : 0) = \left( \begin{array}{cc|c} -5 & -1 & 0 \\ -5 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} 5x_1 + x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_2 = -5x_1 \end{array}$$

基础解系:  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ 。特征向量:  $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ , 其中  $c_1 \neq 0$

- 当  $\lambda_2 = 4$ , 求解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$ :

$$(4I - A : 0) = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_1 = x_2 \end{array}$$

基础解系:  $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。特征向量:  $c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 其中  $c_2 \neq 0$

**例 1** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解特征方程:  $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -5 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda + 2)$

所以  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = 4$ 。

- 当  $\lambda_1 = -2$ , 求解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$ :

$$(-2I - A : 0) = \left( \begin{array}{cc|c} -5 & -1 & 0 \\ -5 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} 5x_1 + x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_2 = -5x_1 \end{array}$$

基础解系:  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ 。特征向量:  $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ , 其中  $c_1 \neq 0$

- 当  $\lambda_2 = 4$ , 求解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$ :

$$(4I - A : 0) = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_1 = x_2 \end{array}$$

基础解系:  $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。特征向量:  $c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 其中  $c_2 \neq 0$

**例 2** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。



**例 2** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解特征方程:  $0 = |\lambda I - A|$

**例 2** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解特征方程:  $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} =$

**例 2** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解特征方程:  $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 2) - 1$

**例 2** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解特征方程:  $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3$

**例 2** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解特征方程:  $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$

**例 2** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解特征方程:  $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$

所以  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 3$ 。

**例 2** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解特征方程:  $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$

所以  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 3$ 。

- 当  $\lambda_1 = 1$ , 求解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$ :

- 当  $\lambda_2 = 3$ , 求解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$ :

**例 2** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解特征方程:  $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$

所以  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 3$ 。

- 当  $\lambda_1 = 1$ , 求解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$ :

$$(1I - A : 0) = \left( \begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

- 当  $\lambda_2 = 3$ , 求解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$ :



**例 2** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解特征方程:  $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$

所以  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 3$ 。

- 当  $\lambda_1 = 1$ , 求解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$ :

$$(1I - A : 0) = \left( \begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- 当  $\lambda_2 = 3$ , 求解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$ :

**例 2** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解特征方程:  $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$

所以  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 3$ 。

- 当  $\lambda_1 = 1$ , 求解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$ :

$$(1I - A : 0) = \left( \begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad x_1 + x_2 = 0$$

- 当  $\lambda_2 = 3$ , 求解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$ :

**例 2** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解特征方程:  $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$

所以  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 3$ 。

- 当  $\lambda_1 = 1$ , 求解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$ :

$$(1I - A : 0) = \left( \begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_1 = -x_2 \end{array}$$

- 当  $\lambda_2 = 3$ , 求解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$ :

**例 2** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解特征方程:  $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$

所以  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 3$ 。

- 当  $\lambda_1 = 1$ , 求解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$ :

$$(1I - A : 0) = \left( \begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_1 = -x_2 \end{array}$$

基础解系:  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。

- 当  $\lambda_2 = 3$ , 求解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$ :

**例 2** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解特征方程:  $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$

所以  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 3$ 。

- 当  $\lambda_1 = 1$ , 求解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$ :

$$(1I - A : 0) = \left( \begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_1 = -x_2 \end{array}$$

基础解系:  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。  $c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- 当  $\lambda_2 = 3$ , 求解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$ :

**例 2** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解特征方程：  $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$

所以  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 3$ 。

- 当  $\lambda_1 = 1$ , 求解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$ :

$$(1I - A : 0) = \left( \begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_1 = -x_2 \end{array}$$

基础解系：  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。特征向量：  $c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，其中  $c_1 \neq 0$

- 当  $\lambda_2 = 3$ , 求解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$ :

**例 2** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解特征方程:  $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$

所以  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 3$ 。

- 当  $\lambda_1 = 1$ , 求解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$ :

$$(1I - A : 0) = \left( \begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_1 = -x_2 \end{array}$$

基础解系:  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。特征向量:  $c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 其中  $c_1 \neq 0$

- 当  $\lambda_2 = 3$ , 求解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$ :

$$(3I - A : 0) = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

**例 2** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解特征方程:  $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$

所以  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 3$ 。

- 当  $\lambda_1 = 1$ , 求解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$ :

$$(1I - A : 0) = \left( \begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_1 = -x_2 \end{array}$$

基础解系:  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。特征向量:  $c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 其中  $c_1 \neq 0$

- 当  $\lambda_2 = 3$ , 求解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$ :

$$(3I - A : 0) = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$



**例 2** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解特征方程:  $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$

所以  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 3$ 。

- 当  $\lambda_1 = 1$ , 求解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$ :

$$(1I - A : 0) = \left( \begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_1 = -x_2 \end{array}$$

基础解系:  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。特征向量:  $c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 其中  $c_1 \neq 0$

- 当  $\lambda_2 = 3$ , 求解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$ :

$$(3I - A : 0) = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad x_1 - x_2 = 0$$

**例 2** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解特征方程:  $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$

所以  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 3$ 。

- 当  $\lambda_1 = 1$ , 求解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$ :

$$(1I - A : 0) = \left( \begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ \Downarrow \\ x_1 = -x_2 \end{array}$$

基础解系:  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。特征向量:  $c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 其中  $c_1 \neq 0$

- 当  $\lambda_2 = 3$ , 求解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$ :

$$(3I - A : 0) = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 0 \\ \Downarrow \\ x_1 = x_2 \end{array}$$

**例 2** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解特征方程:  $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$

所以  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 3$ 。

- 当  $\lambda_1 = 1$ , 求解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$ :

$$(1I - A : 0) = \left( \begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ \Downarrow \\ x_1 = -x_2 \end{array}$$

基础解系:  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。特征向量:  $c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 其中  $c_1 \neq 0$

- 当  $\lambda_2 = 3$ , 求解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$ :

$$(3I - A : 0) = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 0 \\ \Downarrow \\ x_1 = x_2 \end{array}$$

基础解系:  $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。

**例 2** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解特征方程:  $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$

所以  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 3$ 。

- 当  $\lambda_1 = 1$ , 求解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$ :

$$(1I - A : 0) = \left( \begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_1 = -x_2 \end{array}$$

基础解系:  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。特征向量:  $c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 其中  $c_1 \neq 0$

- 当  $\lambda_2 = 3$ , 求解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$ :

$$(3I - A : 0) = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_1 = x_2 \end{array}$$

基础解系:  $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。  $c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

**例 2** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解特征方程:  $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$

所以  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 3$ 。

- 当  $\lambda_1 = 1$ , 求解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$ :

$$(1I - A : 0) = \left( \begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_1 = -x_2 \end{array}$$

基础解系:  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。特征向量:  $c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 其中  $c_1 \neq 0$

- 当  $\lambda_2 = 3$ , 求解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$ :

$$(3I - A : 0) = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_1 = x_2 \end{array}$$

基础解系:  $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。特征向量:  $c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 其中  $c_2 \neq 0$

**例 2** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解特征方程:  $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$

所以  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 3$ 。

- 当  $\lambda_1 = 1$ , 求解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$ :

$$(1I - A : 0) = \left( \begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_1 = -x_2 \end{array}$$

基础解系:  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。特征向量:  $c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 其中  $c_1 \neq 0$

- 当  $\lambda_2 = 3$ , 求解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$ :

$$(3I - A : 0) = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_1 = x_2 \end{array}$$

基础解系:  $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。特征向量:  $c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 其中  $c_2 \neq 0$

**例 3** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**例 3** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解  $0 = |\lambda I - A|$



**例 3** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解  $0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 1)^2(\lambda - 8)$  [Details](#)

**例 3** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解  $0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 1)^2(\lambda - 8)$  [Details](#) 得:

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 8$$

**例 3** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解  $0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 1)^2(\lambda - 8)$  [Details](#) 得：

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 8$$

- 当  $\lambda_1 = -1$ ，求解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$  [Details](#)

- 当  $\lambda_2 = 8$ ，求解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$  [Details](#)

**例 3** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解  $0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 1)^2(\lambda - 8)$  [Details](#) 得：

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 8$$

- 当  $\lambda_1 = -1$ ，求解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$  [Details](#)

得基础解系：  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}。$

- 当  $\lambda_2 = 8$ ，求解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$  [Details](#)

**例 3** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解  $0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 1)^2(\lambda - 8)$  [Details](#) 得：

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 8$$

- 当  $\lambda_1 = -1$ ，求解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$  [Details](#)

得基础解系：  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}。$

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$$

- 当  $\lambda_2 = 8$ ，求解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$  [Details](#)

**例 3** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解  $0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 1)^2(\lambda - 8)$  [Details](#) 得：

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 8$$

- 当  $\lambda_1 = -1$ ，求解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$  [Details](#)

得基础解系：  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}。$

对应  $\lambda_1 = -1$  特征向量：  $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$ ，其中  $c_1, c_2$  不全为零。

- 当  $\lambda_2 = 8$ ，求解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$  [Details](#)

**例 3** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解  $0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 1)^2(\lambda - 8)$  [Details](#) 得：

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 8$$

- 当  $\lambda_1 = -1$ ，求解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$  [Details](#)

得基础解系：  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}。$

对应  $\lambda_1 = -1$  特征向量：  $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$ ，其中  $c_1, c_2$  不全为零。

- 当  $\lambda_2 = 8$ ，求解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$  [Details](#)

得基础解系：  $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}。$

**例 3** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解  $0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 1)^2(\lambda - 8)$  [Details](#) 得：

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 8$$

- 当  $\lambda_1 = -1$ ，求解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$  [Details](#)

得基础解系：  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}。$

对应  $\lambda_1 = -1$  特征向量：  $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$ ，其中  $c_1, c_2$  不全为零。

- 当  $\lambda_2 = 8$ ，求解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$  [Details](#)

得基础解系：  $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}。$

$$c_3\alpha_3$$



**例 3** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解  $0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 1)^2(\lambda - 8)$  [Details](#) 得：

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 8$$

- 当  $\lambda_1 = -1$ ，求解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$  [Details](#)

得基础解系：  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}。$

对应  $\lambda_1 = -1$  特征向量：  $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$ ，其中  $c_1, c_2$  不全为零。

- 当  $\lambda_2 = 8$ ，求解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$  [Details](#)

得基础解系：  $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}。$

对应  $\lambda_2 = 8$  特征向量：  $c_3\alpha_3$ ，其中  $c_3 \neq 0$ 。

**例 3** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解  $0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 1)^2(\lambda - 8)$  [Details](#) 得：

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = -1 & \text{二重特征值} \\ \lambda_2 = 8 & \text{一重特征值} \end{array}$$

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 8$$

- 当  $\lambda_1 = -1$ ，求解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$  [Details](#)

得基础解系：  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}。$

对应  $\lambda_1 = -1$  特征向量：  $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$ ，其中  $c_1, c_2$  不全为零。

- 当  $\lambda_2 = 8$ ，求解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$  [Details](#)

得基础解系：  $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}。$

对应  $\lambda_2 = 8$  特征向量：  $c_3\alpha_3$ ，其中  $c_3 \neq 0$ 。

**例 4** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**例 4** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解  $0 = |\lambda I - A|$

**例 4** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解  $0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 2)^2(\lambda - 6)$  [Details](#)

**例 4** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解  $0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 2)^2(\lambda - 6)$  [Details](#) 得：

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 6$$

**例 4** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解  $0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 2)^2(\lambda - 6)$  [Details](#) 得：

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 6$$

- 当  $\lambda_1 = 2$ ，求解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$  [Details](#)

- 当  $\lambda_2 = 6$ ，求解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$  [Details](#)

**例 4** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解  $0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 2)^2(\lambda - 6)$  [Details](#) 得：

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 6$$

- 当  $\lambda_1 = 2$ ，求解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$  [Details](#)

得基础解系：  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}。$

- 当  $\lambda_2 = 6$ ，求解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$  [Details](#)



**例 4** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解  $0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 2)^2(\lambda - 6)$  [Details](#) 得：

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 6$$

- 当  $\lambda_1 = 2$ ，求解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$  [Details](#)

得基础解系：  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}。$

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$$

- 当  $\lambda_2 = 6$ ，求解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$  [Details](#)

**例 4** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解  $0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 2)^2(\lambda - 6)$  [Details](#) 得：

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 6$$

- 当  $\lambda_1 = 2$ ，求解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$  [Details](#)

得基础解系：  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}。$

对应  $\lambda_1 = 2$  特征向量：  $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$ ，其中  $c_1, c_2$  不全为零。

- 当  $\lambda_2 = 6$ ，求解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$  [Details](#)

**例 4** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解  $0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 2)^2(\lambda - 6)$  [Details](#) 得：

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 6$$

- 当  $\lambda_1 = 2$ ，求解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$  [Details](#)

得基础解系：  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}。$

对应  $\lambda_1 = 2$  特征向量：  $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$ ，其中  $c_1, c_2$  不全为零。

- 当  $\lambda_2 = 6$ ，求解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$  [Details](#)

得基础解系：  $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}。$

**例 4** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解  $0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 2)^2(\lambda - 6)$  [Details](#) 得：

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 6$$

- 当  $\lambda_1 = 2$ ，求解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$  [Details](#)

得基础解系：  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}。$

对应  $\lambda_1 = 2$  特征向量：  $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$ ，其中  $c_1, c_2$  不全为零。

- 当  $\lambda_2 = 6$ ，求解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$  [Details](#)

得基础解系：  $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}。$

$$c_3\alpha_3$$

**例 4** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解  $0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 2)^2(\lambda - 6)$  [Details](#) 得：

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 6$$

- 当  $\lambda_1 = 2$ ，求解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$  [Details](#)

得基础解系：  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}。$

对应  $\lambda_1 = 2$  特征向量：  $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$ ，其中  $c_1, c_2$  不全为零。

- 当  $\lambda_2 = 6$ ，求解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$  [Details](#)

得基础解系：  $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}。$

对应  $\lambda_2 = 6$  特征向量：  $c_3\alpha_3$ ，其中  $c_3 \neq 0$ 。

**例 4** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 求解  $0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 2)^2(\lambda - 6)$  得：

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = 2 & \text{二重特征值} \\ \lambda_2 = 6 & \text{一重特征值} \end{array}$$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 6$$

- 当  $\lambda_1 = 2$ ，求解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$

得基础解系：  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}。$

对应  $\lambda_1 = 2$  特征向量：  $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$ ，其中  $c_1, c_2$  不全为零。

- 当  $\lambda_2 = 6$ ，求解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$

得基础解系：  $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}。$

对应  $\lambda_2 = 6$  特征向量：  $c_3\alpha_3$ ，其中  $c_3 \neq 0$ 。

**例 5** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**例 5** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 解  $0 = |\lambda I - A|$



**例 5** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 解  $0 = |\lambda I - A| = \lambda(\lambda - 3)(\lambda - 4)$  [Details](#)

**例 5** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 解  $0 = |\lambda I - A| = \lambda(\lambda - 3)(\lambda - 4)$  [Details](#) 得:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 4$$

**例 5** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 解  $0 = |\lambda I - A| = \lambda(\lambda - 3)(\lambda - 4)$  [Details](#) 得:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 4$$

- 当  $\lambda_1 = 0$ , 解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$  [Details](#)

- 当  $\lambda_2 = 3$ , 解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$  [Details](#)

- 当  $\lambda_3 = 4$ , 解  $(\lambda_3 I - A)x = 0$  [Details](#)

**例 5** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 解  $0 = |\lambda I - A| = \lambda(\lambda - 3)(\lambda - 4)$  [Details](#) 得：

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 4$$

- 当  $\lambda_1 = 0$ ，解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$  [Details](#) 基础解系：  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- 当  $\lambda_2 = 3$ ，解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$  [Details](#)

- 当  $\lambda_3 = 4$ ，解  $(\lambda_3 I - A)x = 0$  [Details](#)

**例 5** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 解  $0 = |\lambda I - A| = \lambda(\lambda - 3)(\lambda - 4)$  [Details](#) 得：

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 4$$

- 当  $\lambda_1 = 0$ ，解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$  [Details](#) 基础解系：  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$c_1 \alpha_1$$

- 当  $\lambda_2 = 3$ ，解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$  [Details](#)

- 当  $\lambda_3 = 4$ ，解  $(\lambda_3 I - A)x = 0$  [Details](#)

**例 5** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 解  $0 = |\lambda I - A| = \lambda(\lambda - 3)(\lambda - 4)$  [Details](#) 得：

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 4$$

- 当  $\lambda_1 = 0$ ，解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$  [Details](#) 基础解系：  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

对应  $\lambda_1 = 0$  的特征向量：  $c_1 \alpha_1$ ，其中  $c_1 \neq 0$ 。

- 当  $\lambda_2 = 3$ ，解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$  [Details](#)

- 当  $\lambda_3 = 4$ ，解  $(\lambda_3 I - A)x = 0$  [Details](#)

**例 5** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 解  $0 = |\lambda I - A| = \lambda(\lambda - 3)(\lambda - 4)$  [Details](#) 得：

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 4$$

- 当  $\lambda_1 = 0$ , 解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$  [Details](#) 基础解系:  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

对应  $\lambda_1 = 0$  的特征向量:  $c_1 \alpha_1$ , 其中  $c_1 \neq 0$ 。

- 当  $\lambda_2 = 3$ , 解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$  [Details](#) 基础解系:  $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- 当  $\lambda_3 = 4$ , 解  $(\lambda_3 I - A)x = 0$  [Details](#)

**例 5** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 解  $0 = |\lambda I - A| = \lambda(\lambda - 3)(\lambda - 4)$  [Details](#) 得：

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 4$$

- 当  $\lambda_1 = 0$ , 解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$  [Details](#) 基础解系:  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

对应  $\lambda_1 = 0$  的特征向量:  $c_1 \alpha_1$ , 其中  $c_1 \neq 0$ 。

- 当  $\lambda_2 = 3$ , 解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$  [Details](#) 基础解系:  $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$c_2 \alpha_2$$

- 当  $\lambda_3 = 4$ , 解  $(\lambda_3 I - A)x = 0$  [Details](#)



**例 5** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 解  $0 = |\lambda I - A| = \lambda(\lambda - 3)(\lambda - 4)$  [Details](#) 得：

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 4$$

- 当  $\lambda_1 = 0$ ，解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$  [Details](#) 基础解系：  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

对应  $\lambda_1 = 0$  的特征向量：  $c_1 \alpha_1$ ，其中  $c_1 \neq 0$ 。

- 当  $\lambda_2 = 3$ ，解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$  [Details](#) 基础解系：  $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

对应  $\lambda_2 = 3$  特征向量：  $c_2 \alpha_2$ ，其中  $c_2 \neq 0$ 。

- 当  $\lambda_3 = 4$ ，解  $(\lambda_3 I - A)x = 0$  [Details](#)

**例 5** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 解  $0 = |\lambda I - A| = \lambda(\lambda - 3)(\lambda - 4)$  [Details](#) 得：

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 4$$

- 当  $\lambda_1 = 0$ , 解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$  [Details](#) 基础解系:  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

对应  $\lambda_1 = 0$  的特征向量:  $c_1 \alpha_1$ , 其中  $c_1 \neq 0$ 。

- 当  $\lambda_2 = 3$ , 解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$  [Details](#) 基础解系:  $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

对应  $\lambda_2 = 3$  特征向量:  $c_2 \alpha_2$ , 其中  $c_2 \neq 0$ 。

- 当  $\lambda_3 = 4$ , 解  $(\lambda_3 I - A)x = 0$  [Details](#) 基础解系:  $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

**例 5** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 解  $0 = |\lambda I - A| = \lambda(\lambda - 3)(\lambda - 4)$  [Details](#) 得：

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 4$$

- 当  $\lambda_1 = 0$ , 解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$  [Details](#) 基础解系:  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

对应  $\lambda_1 = 0$  的特征向量:  $c_1 \alpha_1$ , 其中  $c_1 \neq 0$ 。

- 当  $\lambda_2 = 3$ , 解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$  [Details](#) 基础解系:  $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

对应  $\lambda_2 = 3$  特征向量:  $c_2 \alpha_2$ , 其中  $c_2 \neq 0$ 。

- 当  $\lambda_3 = 4$ , 解  $(\lambda_3 I - A)x = 0$  [Details](#) 基础解系:  $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$c_3 \alpha_3$$

**例 5** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 解  $0 = |\lambda I - A| = \lambda(\lambda - 3)(\lambda - 4)$  [Details](#) 得：

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 4$$

- 当  $\lambda_1 = 0$ ，解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$  [Details](#) 基础解系：  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

对应  $\lambda_1 = 0$  的特征向量：  $c_1 \alpha_1$ ，其中  $c_1 \neq 0$ 。

- 当  $\lambda_2 = 3$ ，解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$  [Details](#) 基础解系：  $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

对应  $\lambda_2 = 3$  特征向量：  $c_2 \alpha_2$ ，其中  $c_2 \neq 0$ 。

- 当  $\lambda_3 = 4$ ，解  $(\lambda_3 I - A)x = 0$  [Details](#) 基础解系：  $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

对应  $\lambda_3 = 4$  特征向量：  $c_3 \alpha_3$ ，其中  $c_3 \neq 0$ 。

**例 5** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量。

**解**

- 解  $0 = |\lambda I - A| = \lambda(\lambda - 3)(\lambda - 4)$  [Details](#) 得：

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 4$$

- 当  $\lambda_1 = 0$ , 解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$  [Details](#) 基础解系:  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

对应  $\lambda_1 = 0$  的特征向量:  $c_1 \alpha_1$ , 其中  $c_1 \neq 0$ 。

- 当  $\lambda_2 = 3$ , 解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$  [Details](#) 基础解系:  $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

对应  $\lambda_2 = 3$  特征向量:  $c_2 \alpha_2$ , 其中  $c_2 \neq 0$ 。

- 当  $\lambda_3 = 4$ , 解  $(\lambda_3 I - A)x = 0$  [Details](#) 基础解系:  $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

对应  $\lambda_3 = 4$  特征向量:  $c_3 \alpha_3$ , 其中  $c_3 \neq 0$ 。

$\lambda_1 = 0$  一重特征值  
 $\lambda_2 = 3$  一重特征值  
 $\lambda_3 = 4$  一重特征值

**例**  $n$  阶矩阵  $A$  是奇异  $\Leftrightarrow 0$  是  $A$  的一个特征值。

**例**  $n$  阶矩阵  $A$  是奇异  $\Leftrightarrow 0$  是  $A$  的一个特征值。

**证明**

$\lambda = 0$  是  $A$  的特征值  $\Leftrightarrow$

**例**  $n$  阶矩阵  $A$  是奇异  $\Leftrightarrow 0$  是  $A$  的一个特征值。

**证明**

$\lambda = 0$  是  $A$  的特征值  $\Leftrightarrow \lambda = 0$  是  $|\lambda I - A| = 0$  的解



**例**  $n$  阶矩阵  $A$  是奇异  $\Leftrightarrow 0$  是  $A$  的一个特征值。

**证明**

$$\begin{aligned}\lambda = 0 \text{ 是 } A \text{ 的特征值} &\Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ 是 } |\lambda I - A| = 0 \text{ 的解} \\ &\Leftrightarrow |-A| = 0\end{aligned}$$

**例**  $n$  阶矩阵  $A$  是奇异  $\Leftrightarrow 0$  是  $A$  的一个特征值。

**证明**

$\lambda = 0$  是  $A$  的特征值  $\Leftrightarrow \lambda = 0$  是  $|\lambda I - A| = 0$  的解

$$\Leftrightarrow |-A| = 0 \qquad \color{red}{|-A| = |(-1)A|}$$

**例**  $n$  阶矩阵  $A$  是奇异  $\Leftrightarrow 0$  是  $A$  的一个特征值。

**证明**

$\lambda = 0$  是  $A$  的特征值  $\Leftrightarrow \lambda = 0$  是  $|\lambda I - A| = 0$  的解

$$\Leftrightarrow |-A| = 0$$

$$\begin{aligned} |-A| &= |(-1)A| \\ &= (-1)^n |A| \end{aligned}$$

**例**  $n$  阶矩阵  $A$  是奇异  $\Leftrightarrow 0$  是  $A$  的一个特征值。

**证明**

$\lambda = 0$  是  $A$  的特征值  $\Leftrightarrow \lambda = 0$  是  $|\lambda I - A| = 0$  的解

$$\Leftrightarrow |-A| = 0$$

$$\Leftrightarrow |A| = 0$$

$$\begin{aligned} |-A| &= |(-1)A| \\ &= (-1)^n |A| \end{aligned}$$

**例**  $n$  阶矩阵  $A$  是奇异  $\Leftrightarrow 0$  是  $A$  的一个特征值。

**证明**

$\lambda = 0$  是  $A$  的特征值  $\Leftrightarrow \lambda = 0$  是  $|\lambda I - A| = 0$  的解

$$\Leftrightarrow |-A| = 0$$

$$\Leftrightarrow |A| = 0$$

$$\Leftrightarrow A \text{ 是奇异}$$

$$\begin{aligned} |-A| &= |(-1)A| \\ &= (-1)^n |A| \end{aligned}$$

**例**  $n$  阶矩阵  $A$  是奇异  $\Leftrightarrow 0$  是  $A$  的一个特征值。

**证明**

$\lambda = 0$  是  $A$  的特征值  $\Leftrightarrow \lambda = 0$  是  $|\lambda I - A| = 0$  的解

$$\Leftrightarrow |-A| = 0$$

$$\Leftrightarrow |A| = 0$$

$$\Leftrightarrow A \text{ 是奇异}$$

$$\begin{aligned} |-A| &= |(-1)A| \\ &= (-1)^n |A| \end{aligned}$$

**注**  $0$  不是  $A$  的特征值  $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

**例**  $n$  阶矩阵  $A$  是奇异  $\Leftrightarrow 0$  是  $A$  的一个特征值。

**证明**

$\lambda = 0$  是  $A$  的特征值  $\Leftrightarrow \lambda = 0$  是  $|\lambda I - A| = 0$  的解

$$\Leftrightarrow |-A| = 0$$

$$\Leftrightarrow |A| = 0$$

$$\Leftrightarrow A \text{ 是奇异}$$

$$\begin{aligned} |-A| &= |(-1)A| \\ &= (-1)^n |A| \end{aligned}$$

**注**  $0$  不是  $A$  的特征值  $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A$  可逆

**例** 设  $n$  阶方阵  $A$  有特征值  $\lambda$ , 则

1.  $A^2$  有特征值  $\lambda^2$ ;



**例** 设  $n$  阶方阵  $A$  有特征值  $\lambda$ , 则

1.  $A^2$  有特征值  $\lambda^2$ ;

**证明** 设  $\alpha$  是  $A$  的对应特征值  $\lambda$  的特征向量 ( $\alpha \neq 0$ ), 即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

**例** 设  $n$  阶方阵  $A$  有特征值  $\lambda$ , 则

1.  $A^2$  有特征值  $\lambda^2$ ;

**证明** 设  $\alpha$  是  $A$  的对应特征值  $\lambda$  的特征向量 ( $\alpha \neq 0$ ), 即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证:

$$A^2 \square$$

$$= \lambda^2 \square$$

**例** 设  $n$  阶方阵  $A$  有特征值  $\lambda$ , 则

1.  $A^2$  有特征值  $\lambda^2$ ;

**证明** 设  $\alpha$  是  $A$  的对应特征值  $\lambda$  的特征向量 ( $\alpha \neq 0$ ), 即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证:

$$A^2 \boxed{\alpha}$$

$$= \lambda^2 \boxed{\phantom{\alpha}}$$

**例** 设  $n$  阶方阵  $A$  有特征值  $\lambda$ , 则

1.  $A^2$  有特征值  $\lambda^2$ ;

**证明** 设  $\alpha$  是  $A$  的对应特征值  $\lambda$  的特征向量 ( $\alpha \neq 0$ ), 即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证:

$$A^2 \boxed{\alpha} = A(A\alpha) \qquad \qquad \qquad = \lambda^2 \boxed{\phantom{\alpha}}$$

**例** 设  $n$  阶方阵  $A$  有特征值  $\lambda$ , 则

1.  $A^2$  有特征值  $\lambda^2$ ;

**证明** 设  $\alpha$  是  $A$  的对应特征值  $\lambda$  的特征向量 ( $\alpha \neq 0$ ), 即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证:

$$A^2 \boxed{\alpha} = A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda^2 \boxed{\phantom{\alpha}}$$

**例** 设  $n$  阶方阵  $A$  有特征值  $\lambda$ , 则

1.  $A^2$  有特征值  $\lambda^2$ ;

**证明** 设  $\alpha$  是  $A$  的对应特征值  $\lambda$  的特征向量 ( $\alpha \neq 0$ ), 即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证:

$$A^2 \boxed{\alpha} = A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda^2 \boxed{\alpha}$$

**例** 设  $n$  阶方阵  $A$  有特征值  $\lambda$ , 则

1.  $A^2$  有特征值  $\lambda^2$ ;

**证明** 设  $\alpha$  是  $A$  的对应特征值  $\lambda$  的特征向量 ( $\alpha \neq 0$ ), 即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证:

$$A^2 \boxed{\alpha} = A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda \cdot \lambda\alpha = \lambda^2 \boxed{\phantom{\alpha}}$$

**例** 设  $n$  阶方阵  $A$  有特征值  $\lambda$ , 则

1.  $A^2$  有特征值  $\lambda^2$ ;

**证明** 设  $\alpha$  是  $A$  的对应特征值  $\lambda$  的特征向量 ( $\alpha \neq 0$ ), 即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证:

$$A^2 \boxed{\alpha} = A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda \cdot \lambda\alpha = \lambda^2 \boxed{\alpha}$$



**例** 设  $n$  阶方阵  $A$  有特征值  $\lambda$ , 则

1.  $A^2$  有特征值  $\lambda^2$ ; 一般地,  $bA^2 + cA + dI$  有特征值  $b\lambda^2 + c\lambda + d$

**证明** 设  $\alpha$  是  $A$  的对应特征值  $\lambda$  的特征向量 ( $\alpha \neq 0$ ), 即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证:

$$A^2 \boxed{\alpha} = A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda \cdot \lambda\alpha = \lambda^2 \boxed{\alpha}$$

**例** 设  $n$  阶方阵  $A$  有特征值  $\lambda$ , 则

1.  $A^2$  有特征值  $\lambda^2$ ; 一般地,  $bA^2 + cA + dI$  有特征值  $b\lambda^2 + c\lambda + d$

**证明** 设  $\alpha$  是  $A$  的对应特征值  $\lambda$  的特征向量 ( $\alpha \neq 0$ ), 即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证:

$$\begin{aligned} A^2 \alpha &= A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda \cdot \lambda\alpha = \lambda^2 \alpha \\ (bA^2 + cA + dI) \alpha &= (b\lambda^2 + c\lambda + d)\alpha \end{aligned}$$

**例** 设  $n$  阶方阵  $A$  有特征值  $\lambda$ , 则

1.  $A^2$  有特征值  $\lambda^2$ ; 一般地,  $bA^2 + cA + dI$  有特征值  $b\lambda^2 + c\lambda + d$

**证明** 设  $\alpha$  是  $A$  的对应特征值  $\lambda$  的特征向量 ( $\alpha \neq 0$ ), 即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证:

$$\begin{aligned} A^2 \alpha &= A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda \cdot \lambda\alpha = \lambda^2 \alpha \\ (bA^2 + cA + dI) \alpha &= (b\lambda^2 + c\lambda + d) \alpha \end{aligned}$$

**例** 设  $n$  阶方阵  $A$  有特征值  $\lambda$ , 则

1.  $A^2$  有特征值  $\lambda^2$ ; 一般地,  $bA^2 + cA + dI$  有特征值  $b\lambda^2 + c\lambda + d$

**证明** 设  $\alpha$  是  $A$  的对应特征值  $\lambda$  的特征向量 ( $\alpha \neq 0$ ), 即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证:

$$A^2 \alpha = A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda \cdot \lambda\alpha = \lambda^2 \alpha$$

$$\begin{aligned}(bA^2 + cA + dI)\alpha &= bA^2\alpha + cA\alpha + dI\alpha = \\ &= (b\lambda^2 + c\lambda + d)\end{aligned}$$

**例** 设  $n$  阶方阵  $A$  有特征值  $\lambda$ , 则

1.  $A^2$  有特征值  $\lambda^2$ ; 一般地,  $bA^2 + cA + dI$  有特征值  $b\lambda^2 + c\lambda + d$

**证明** 设  $\alpha$  是  $A$  的对应特征值  $\lambda$  的特征向量 ( $\alpha \neq 0$ ), 即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证:

$$A^2 \alpha = A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda \cdot \lambda\alpha = \lambda^2 \alpha$$

$$\begin{aligned}(bA^2 + cA + dI)\alpha &= bA^2\alpha + cA\alpha + dI\alpha = b\lambda^2\alpha + \\ &= (b\lambda^2 + c\lambda + d)\end{aligned}$$

**例** 设  $n$  阶方阵  $A$  有特征值  $\lambda$ , 则

1.  $A^2$  有特征值  $\lambda^2$ ; 一般地,  $bA^2 + cA + dI$  有特征值  $b\lambda^2 + c\lambda + d$

**证明** 设  $\alpha$  是  $A$  的对应特征值  $\lambda$  的特征向量 ( $\alpha \neq 0$ ), 即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证:

$$\begin{aligned} A^2 \alpha &= A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda \cdot \lambda\alpha = \lambda^2 \alpha \\ (bA^2 + cA + dI) \alpha &= bA^2\alpha + cA\alpha + dI\alpha = b\lambda^2\alpha + c\lambda\alpha + \\ &= (b\lambda^2 + c\lambda + d) \alpha \end{aligned}$$

**例** 设  $n$  阶方阵  $A$  有特征值  $\lambda$ , 则

1.  $A^2$  有特征值  $\lambda^2$ ; 一般地,  $bA^2 + cA + dI$  有特征值  $b\lambda^2 + c\lambda + d$

**证明** 设  $\alpha$  是  $A$  的对应特征值  $\lambda$  的特征向量 ( $\alpha \neq 0$ ), 即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证:

$$\begin{aligned} A^2 \alpha &= A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda \cdot \lambda\alpha = \lambda^2 \alpha \\ (bA^2 + cA + dI) \alpha &= bA^2\alpha + cA\alpha + dI\alpha = b\lambda^2\alpha + c\lambda\alpha + d\alpha \\ &= (b\lambda^2 + c\lambda + d) \alpha \end{aligned}$$

**例** 设  $n$  阶方阵  $A$  有特征值  $\lambda$ , 则

1.  $A^2$  有特征值  $\lambda^2$ ; 一般地,  $bA^2 + cA + dI$  有特征值  $b\lambda^2 + c\lambda + d$

**证明** 设  $\alpha$  是  $A$  的对应特征值  $\lambda$  的特征向量 ( $\alpha \neq 0$ ), 即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证:

$$\begin{aligned} A^2 \alpha &= A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda \cdot \lambda\alpha = \lambda^2 \alpha \\ (bA^2 + cA + dI) \alpha &= bA^2\alpha + cA\alpha + dI\alpha = b\lambda^2\alpha + c\lambda\alpha + d\alpha \\ &= (b\lambda^2 + c\lambda + d) \alpha \end{aligned}$$



**例** 设  $n$  阶方阵  $A$  有特征值  $\lambda$ , 则

1.  $A^2$  有特征值  $\lambda^2$ ; 一般地,  $bA^2 + cA + dI$  有特征值  $b\lambda^2 + c\lambda + d$
2. 若  $A$  可逆, 则  $A^*$  有特征值  $\frac{1}{\lambda}|A|$ 。

**证明** 设  $\alpha$  是  $A$  的对应特征值  $\lambda$  的特征向量 ( $\alpha \neq 0$ ), 即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证:

$$\begin{aligned} A^2 \alpha &= A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda \cdot \lambda\alpha = \lambda^2 \alpha \\ (bA^2 + cA + dI) \alpha &= bA^2\alpha + cA\alpha + dI\alpha = b\lambda^2\alpha + c\lambda\alpha + d\alpha \\ &= (b\lambda^2 + c\lambda + d) \alpha \end{aligned}$$

**例** 设  $n$  阶方阵  $A$  有特征值  $\lambda$ , 则

1.  $A^2$  有特征值  $\lambda^2$ ; 一般地,  $bA^2 + cA + dI$  有特征值  $b\lambda^2 + c\lambda + d$
2. 若  $A$  可逆, 则  $A^*$  有特征值  $\frac{1}{\lambda}|A|$ 。

**证明** 设  $\alpha$  是  $A$  的对应特征值  $\lambda$  的特征向量 ( $\alpha \neq 0$ ), 即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证:

$$\begin{aligned} A^2 \alpha &= A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda \cdot \lambda\alpha = \lambda^2 \alpha \\ (bA^2 + cA + dI) \alpha &= bA^2\alpha + cA\alpha + dI\alpha = b\lambda^2\alpha + c\lambda\alpha + d\alpha \\ &= (b\lambda^2 + c\lambda + d) \alpha \end{aligned}$$

2. 验证:

$$A^* \square = \frac{|A|}{\lambda} \square$$

**例** 设  $n$  阶方阵  $A$  有特征值  $\lambda$ , 则

1.  $A^2$  有特征值  $\lambda^2$ ; 一般地,  $bA^2 + cA + dI$  有特征值  $b\lambda^2 + c\lambda + d$
2. 若  $A$  可逆, 则  $A^*$  有特征值  $\frac{1}{\lambda}|A|$ 。

**证明** 设  $\alpha$  是  $A$  的对应特征值  $\lambda$  的特征向量 ( $\alpha \neq 0$ ), 即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证:

$$\begin{aligned} A^2 \alpha &= A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda \cdot \lambda\alpha = \lambda^2 \alpha \\ (bA^2 + cA + dI) \alpha &= bA^2\alpha + cA\alpha + dI\alpha = b\lambda^2\alpha + c\lambda\alpha + d\alpha \\ &= (b\lambda^2 + c\lambda + d) \alpha \end{aligned}$$

2. 验证:

$$A^* A = |A| I \qquad A^* \square = \frac{|A|}{\lambda} \square$$

**例** 设  $n$  阶方阵  $A$  有特征值  $\lambda$ , 则

1.  $A^2$  有特征值  $\lambda^2$ ; 一般地,  $bA^2 + cA + dI$  有特征值  $b\lambda^2 + c\lambda + d$
2. 若  $A$  可逆, 则  $A^*$  有特征值  $\frac{1}{\lambda}|A|$ 。

**证明** 设  $\alpha$  是  $A$  的对应特征值  $\lambda$  的特征向量 ( $\alpha \neq 0$ ), 即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证:

$$\begin{aligned} A^2 \alpha &= A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda \cdot \lambda\alpha = \lambda^2 \alpha \\ (bA^2 + cA + dI) \alpha &= bA^2\alpha + cA\alpha + dI\alpha = b\lambda^2\alpha + c\lambda\alpha + d\alpha \\ &= (b\lambda^2 + c\lambda + d) \alpha \end{aligned}$$

2. 验证:

$$A^* A\alpha = |A|I\alpha \qquad A^* \square = \frac{|A|}{\lambda} \square$$

**例** 设  $n$  阶方阵  $A$  有特征值  $\lambda$ , 则

1.  $A^2$  有特征值  $\lambda^2$ ; 一般地,  $bA^2 + cA + dI$  有特征值  $b\lambda^2 + c\lambda + d$
2. 若  $A$  可逆, 则  $A^*$  有特征值  $\frac{1}{\lambda}|A|$ 。

**证明** 设  $\alpha$  是  $A$  的对应特征值  $\lambda$  的特征向量 ( $\alpha \neq 0$ ), 即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证:

$$\begin{aligned} A^2 \alpha &= A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda \cdot \lambda\alpha = \lambda^2 \alpha \\ (bA^2 + cA + dI) \alpha &= bA^2\alpha + cA\alpha + dI\alpha = b\lambda^2\alpha + c\lambda\alpha + d\alpha \\ &= (b\lambda^2 + c\lambda + d) \alpha \end{aligned}$$

2. 验证:

$$A^* A\alpha = |A|I\alpha = |A|\alpha \qquad A^* \square = \frac{|A|}{\lambda} \square$$

**例** 设  $n$  阶方阵  $A$  有特征值  $\lambda$ , 则

1.  $A^2$  有特征值  $\lambda^2$ ; 一般地,  $bA^2 + cA + dI$  有特征值  $b\lambda^2 + c\lambda + d$
2. 若  $A$  可逆, 则  $A^*$  有特征值  $\frac{1}{\lambda}|A|$ 。

**证明** 设  $\alpha$  是  $A$  的对应特征值  $\lambda$  的特征向量 ( $\alpha \neq 0$ ), 即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证:

$$\begin{aligned} A^2 \alpha &= A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda \cdot \lambda\alpha = \lambda^2 \alpha \\ (bA^2 + cA + dI) \alpha &= bA^2\alpha + cA\alpha + dI\alpha = b\lambda^2\alpha + c\lambda\alpha + d\alpha \\ &= (b\lambda^2 + c\lambda + d) \alpha \end{aligned}$$

2. 验证:

$$A^*(\lambda\alpha) = A^*A\alpha = |A|I\alpha = |A|\alpha \qquad A^* \square = \frac{|A|}{\lambda} \square$$

**例** 设  $n$  阶方阵  $A$  有特征值  $\lambda$ , 则

1.  $A^2$  有特征值  $\lambda^2$ ; 一般地,  $bA^2 + cA + dI$  有特征值  $b\lambda^2 + c\lambda + d$
2. 若  $A$  可逆, 则  $A^*$  有特征值  $\frac{1}{\lambda}|A|$ 。

**证明** 设  $\alpha$  是  $A$  的对应特征值  $\lambda$  的特征向量 ( $\alpha \neq 0$ ), 即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证:

$$\begin{aligned} A^2 \alpha &= A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda \cdot \lambda\alpha = \lambda^2 \alpha \\ (bA^2 + cA + dI) \alpha &= bA^2\alpha + cA\alpha + dI\alpha = b\lambda^2\alpha + c\lambda\alpha + d\alpha \\ &= (b\lambda^2 + c\lambda + d) \alpha \end{aligned}$$

2. 验证:

$$A^*(\lambda\alpha) = A^*A\alpha = |A|I\alpha = |A|\alpha \quad \Rightarrow \quad A^* \alpha = \frac{|A|}{\lambda} \alpha$$

**例** 设  $n$  阶方阵  $A$  有特征值  $\lambda$ , 则

1.  $A^2$  有特征值  $\lambda^2$ ; 一般地,  $bA^2 + cA + dI$  有特征值  $b\lambda^2 + c\lambda + d$
2. 若  $A$  可逆, 则  $A^*$  有特征值  $\frac{1}{\lambda}|A|$ 。

**证明** 设  $\alpha$  是  $A$  的对应特征值  $\lambda$  的特征向量 ( $\alpha \neq 0$ ), 即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证:

$$\begin{aligned} A^2 \alpha &= A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda \cdot \lambda\alpha = \lambda^2 \alpha \\ (bA^2 + cA + dI) \alpha &= bA^2\alpha + cA\alpha + dI\alpha = b\lambda^2\alpha + c\lambda\alpha + d\alpha \\ &= (b\lambda^2 + c\lambda + d) \alpha \end{aligned}$$

2. 验证:

$$A^*(\lambda\alpha) = A^*A\alpha = |A|I\alpha = |A|\alpha \quad \Rightarrow \quad A^* \alpha = \frac{|A|}{\lambda} \alpha$$

(用到  $A$  可逆  $\Rightarrow \lambda \neq 0$ )



# 特征值与特征向量的基本性质

**定理**  $n$  阶方阵  $A$  与其转置矩阵  $A^T$  有相同特征值

# 特征值与特征向量的基本性质

**定理**  $n$  阶方阵  $A$  与其转置矩阵  $A^T$  有相同特征值

**证明** 由于

$$|\lambda I - A|$$

$$|\lambda I - A^T|$$

# 特征值与特征向量的基本性质

**定理**  $n$  阶方阵  $A$  与其转置矩阵  $A^T$  有相同特征值

**证明** 由于

$$|\lambda I - A| = |(\lambda I - A)^T| \qquad |\lambda I - A^T|$$

# 特征值与特征向量的基本性质

**定理**  $n$  阶方阵  $A$  与其转置矩阵  $A^T$  有相同特征值

**证明** 由于

$$|\lambda I - A| = |(\lambda I - A)^T| = |\lambda I^T - A^T| = |\lambda I - A^T|$$

# 特征值与特征向量的基本性质

**定理**  $n$  阶方阵  $A$  与其转置矩阵  $A^T$  有相同特征值

**证明** 由于

$$|\lambda I - A| = |(\lambda I - A)^T| = |\lambda I^T - A^T| = |\lambda I - A^T|$$

# 特征值与特征向量的基本性质

**定理**  $n$  阶方阵  $A$  与其转置矩阵  $A^T$  有相同特征值

**证明** 由于

$$|\lambda I - A| = |(\lambda I - A)^T| = |\lambda I^T - A^T| = |\lambda I - A^T|$$

所以

$$\lambda \text{ 是 } A \text{ 特征值} \iff |\lambda I - A| = 0$$

# 特征值与特征向量的基本性质

**定理**  $n$  阶方阵  $A$  与其转置矩阵  $A^T$  有相同特征值

**证明** 由于

$$|\lambda I - A| = |(\lambda I - A)^T| = |\lambda I^T - A^T| = |\lambda I - A^T|$$

所以

$$\begin{aligned}\lambda \text{ 是 } A \text{ 特征值} &\iff |\lambda I - A| = 0 \\ &\iff |\lambda I - A^T| = 0\end{aligned}$$

# 特征值与特征向量的基本性质

**定理**  $n$  阶方阵  $A$  与其转置矩阵  $A^T$  有相同特征值

**证明** 由于

$$|\lambda I - A| = |(\lambda I - A)^T| = |\lambda I^T - A^T| = |\lambda I - A^T|$$

所以

$$\begin{aligned}\lambda \text{ 是 } A \text{ 特征值} &\iff |\lambda I - A| = 0 \\ &\iff |\lambda I - A^T| = 0 \\ &\iff \lambda \text{ 是 } A^T \text{ 特征值}\end{aligned}$$



**定理**  $n$  阶方阵  $A$  互不相同的特征值  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , 其对应的特征向量  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性无关。

**定理**  $n$  阶方阵  $A$  互不相同的特征值  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , 其对应的特征向量  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性无关。

**证明** 以  $m = 2$  为例进行证明。假设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = 0$$

$$\underline{k_1 = k_2 = 0}$$

**定理**  $n$  阶方阵  $A$  互不相同的特征值  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , 其对应的特征向量  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性无关。

**证明** 以  $m = 2$  为例进行证明。假设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = 0$$

两边左乘  $A$ , 得

$$k_1A\alpha_1 + k_2A\alpha_2 = 0$$

$$\underline{k_1 = k_2 = 0}$$

**定理**  $n$  阶方阵  $A$  互不相同的特征值  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , 其对应的特征向量  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性无关。

**证明** 以  $m = 2$  为例进行证明。假设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = 0$$

两边左乘  $A$ , 得

$$k_1A\alpha_1 + k_2A\alpha_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1\lambda_1\alpha_1 + k_2\lambda_2\alpha_2 = 0$$

$$\underline{k_1 = k_2 = 0}$$

**定理**  $n$  阶方阵  $A$  互不相同的特征值  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , 其对应的特征向量  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性无关。

**证明** 以  $m = 2$  为例进行证明。假设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = 0 \quad \xRightarrow{\times \lambda_1}$$

两边左乘  $A$ , 得

$$k_1A\alpha_1 + k_2A\alpha_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1\lambda_1\alpha_1 + k_2\lambda_2\alpha_2 = 0$$

$$\underline{k_1 = k_2 = 0}$$

**定理**  $n$  阶方阵  $A$  互不相同的特征值  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , 其对应的特征向量  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性无关。

**证明** 以  $m = 2$  为例进行证明。假设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = 0 \quad \xRightarrow{\times \lambda_1} \quad k_1\lambda_1\alpha_1 + k_2\lambda_1\alpha_2 = 0$$

两边左乘  $A$ , 得

$$k_1A\alpha_1 + k_2A\alpha_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1\lambda_1\alpha_1 + k_2\lambda_2\alpha_2 = 0$$

$$\underline{k_1 = k_2 = 0}$$

**定理**  $n$  阶方阵  $A$  互不相同的特征值  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , 其对应的特征向量  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性无关。

**证明** 以  $m = 2$  为例进行证明。假设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = 0 \quad \xrightarrow{\times \lambda_1} \quad k_1\lambda_1\alpha_1 + k_2\lambda_1\alpha_2 = 0$$

两边左乘  $A$ , 得

$$k_1A\alpha_1 + k_2A\alpha_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1\lambda_1\alpha_1 + k_2\lambda_2\alpha_2 = 0$$

两式相减得:

$$\underline{k_1 = k_2 = 0}$$

**定理**  $n$  阶方阵  $A$  互不相同的特征值  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ ，其对应的特征向量  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性无关。

**证明** 以  $m = 2$  为例进行证明。假设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = 0 \xrightarrow{\times \lambda_1} k_1\lambda_1\alpha_1 + k_2\lambda_1\alpha_2 = 0$$

两边左乘  $A$ ，得

$$k_1A\alpha_1 + k_2A\alpha_2 = 0 \Rightarrow k_1\lambda_1\alpha_1 + k_2\lambda_2\alpha_2 = 0$$

两式相减得：

$$k_2(\lambda_1 - \lambda_2)\alpha_2 = 0$$

$$\underline{k_1 = k_2 = 0}$$



**定理**  $n$  阶方阵  $A$  互不相同的特征值  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , 其对应的特征向量  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性无关。

**证明** 以  $m = 2$  为例进行证明。假设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = 0 \quad \xrightarrow{\times \lambda_1} \quad k_1\lambda_1\alpha_1 + k_2\lambda_1\alpha_2 = 0$$

两边左乘  $A$ , 得

$$k_1A\alpha_1 + k_2A\alpha_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1\lambda_1\alpha_1 + k_2\lambda_2\alpha_2 = 0$$

两式相减得:

$$k_2(\lambda_1 - \lambda_2)\alpha_2 = 0$$

因为  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ,  $\alpha_2 \neq 0$ , 所以  $k_2 = 0$ 。

$$\underline{k_1 = k_2 = 0}$$

**定理**  $n$  阶方阵  $A$  互不相同的特征值  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ ，其对应的特征向量  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性无关。

**证明** 以  $m = 2$  为例进行证明。假设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = 0 \quad \xrightarrow{\times \lambda_1} \quad k_1\lambda_1\alpha_1 + k_2\lambda_1\alpha_2 = 0$$

两边左乘  $A$ ，得

$$k_1A\alpha_1 + k_2A\alpha_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1\lambda_1\alpha_1 + k_2\lambda_2\alpha_2 = 0$$

两式相减得：

$$k_2(\lambda_1 - \lambda_2)\alpha_2 = 0$$

因为  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ， $\alpha_2 \neq 0$ ，所以  $k_2 = 0$ 。

代回 (1) 式，得  $k_1\alpha_1 = 0$ ，所以  $k_1 = 0$ 。

$$\underline{k_1 = k_2 = 0}$$

**定理**  $n$  阶方阵  $A$  互不相同的特征值  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , 其对应的特征向量  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性无关。

**证明** 以  $m = 2$  为例进行证明。假设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = 0 \quad \xrightarrow{\times \lambda_1} \quad k_1\lambda_1\alpha_1 + k_2\lambda_1\alpha_2 = 0$$

两边左乘  $A$ , 得

$$k_1A\alpha_1 + k_2A\alpha_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1\lambda_1\alpha_1 + k_2\lambda_2\alpha_2 = 0$$

两式相减得:

$$k_2(\lambda_1 - \lambda_2)\alpha_2 = 0$$

因为  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ,  $\alpha_2 \neq 0$ , 所以  $k_2 = 0$ 。

代回 (1) 式, 得  $k_1\alpha_1 = 0$ , 所以  $k_1 = 0$ 。

所以  $k_1 = k_2 = 0$ ,  $\alpha_1, \alpha_2$  线性无关。

**定理**  $n$  阶方阵  $A$  互不相同的特征值  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , 其对应的特征向量  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性无关。

**定理**  $n$  阶方阵  $A$  互不相同的特征值  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , 其对应的特征向量  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性无关。

**证明** 数学归纳法。

**定理**  $n$  阶方阵  $A$  互不相同的特征值  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , 其对应的特征向量  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性无关。

**证明** 数学归纳法。  $m = 1$  时,

**定理**  $n$  阶方阵  $A$  互不相同的特征值  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , 其对应的特征向量  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性无关。

**证明** 数学归纳法。  $m = 1$  时, 显然。

**定理**  $n$  阶方阵  $A$  互不相同的特征值  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , 其对应的特征向量  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性无关。

**证明** 数学归纳法。  $m = 1$  时, 显然。假设结论对  $m - 1$  成立。



**定理**  $n$  阶方阵  $A$  互不相同的特征值  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , 其对应的特征向量  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性无关。

**证明** 数学归纳法。  $m = 1$  时, 显然。假设结论对  $m - 1$  成立。

假设

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\alpha_m = 0 \quad (1)$$

**定理**  $n$  阶方阵  $A$  互不相同的特征值  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , 其对应的特征向量  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性无关。

**证明** 数学归纳法。  $m = 1$  时, 显然。假设结论对  $m - 1$  成立。

假设

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\alpha_m = 0 \quad (1)$$

$$k_1 = \dots = k_{m-1} = k_m = 0$$

**定理**  $n$  阶方阵  $A$  互不相同的特征值  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , 其对应的特征向量  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性无关。

**证明** 数学归纳法。  $m = 1$  时, 显然。假设结论对  $m - 1$  成立。

假设

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\alpha_m = 0 \quad (1)$$

两边左乘  $A$ , 得

$$k_1 = \dots = k_{m-1} = k_m = 0$$

**定理**  $n$  阶方阵  $A$  互不相同的特征值  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , 其对应的特征向量  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性无关。

**证明** 数学归纳法。  $m = 1$  时, 显然。假设结论对  $m - 1$  成立。

假设

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\alpha_m = 0 \quad (1)$$

两边左乘  $A$ , 得

$$k_1A\alpha_1 + \dots + k_{m-1}A\alpha_{m-1} + k_mA\alpha_m = 0$$

$$\underline{k_1 = \dots = k_{m-1} = k_m = 0}$$

**定理**  $n$  阶方阵  $A$  互不相同的特征值  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , 其对应的特征向量  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性无关。

**证明** 数学归纳法。  $m = 1$  时, 显然。假设结论对  $m - 1$  成立。

假设

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\alpha_m = 0 \quad (1)$$

两边左乘  $A$ , 得

$$k_1A\alpha_1 + \dots + k_{m-1}A\alpha_{m-1} + k_mA\alpha_m = 0$$

$$\lambda_1\alpha_1$$

$$k_1 = \dots = k_{m-1} = k_m = 0$$

**定理**  $n$  阶方阵  $A$  互不相同的特征值  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , 其对应的特征向量  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性无关。

**证明** 数学归纳法。  $m = 1$  时, 显然。假设结论对  $m - 1$  成立。

假设

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\alpha_m = 0 \quad (1)$$

两边左乘  $A$ , 得

$$k_1A\alpha_1 + \dots + k_{m-1}A\alpha_{m-1} + k_mA\alpha_m = 0$$

$$\lambda_1\alpha_1$$

$$\lambda_{m-1}\alpha_{m-1}$$

$$k_1 = \dots = k_{m-1} = k_m = 0$$

**定理**  $n$  阶方阵  $A$  互不相同的特征值  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , 其对应的特征向量  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性无关。

**证明** 数学归纳法。  $m = 1$  时, 显然。假设结论对  $m - 1$  成立。

假设

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\alpha_m = 0 \quad (1)$$

两边左乘  $A$ , 得

$$k_1A\alpha_1 + \dots + k_{m-1}A\alpha_{m-1} + k_mA\alpha_m = 0$$

$$\lambda_1\alpha_1$$

$$\lambda_{m-1}\alpha_{m-1}$$

$$\lambda_m\alpha_m$$

$$k_1 = \dots = k_{m-1} = k_m = 0$$

**定理**  $n$  阶方阵  $A$  互不相同的特征值  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , 其对应的特征向量  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性无关。

**证明** 数学归纳法。  $m = 1$  时, 显然。假设结论对  $m - 1$  成立。

假设

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\alpha_m = 0 \quad (1)$$

两边左乘  $A$ , 得

$$k_1A\alpha_1 + \dots + k_{m-1}A\alpha_{m-1} + k_mA\alpha_m = 0$$

$$\Rightarrow k_1\lambda_1\alpha_1 + \dots + k_{m-1}\lambda_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\lambda_m\alpha_m = 0 \quad (2)$$

$$\underline{k_1 = \dots = k_{m-1} = k_m = 0}$$



**定理**  $n$  阶方阵  $A$  互不相同的特征值  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , 其对应的特征向量  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性无关。

**证明** 数学归纳法。  $m = 1$  时, 显然。假设结论对  $m - 1$  成立。

假设

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\alpha_m = 0 \quad (1)$$

两边左乘  $A$ , 得

$$k_1A\alpha_1 + \dots + k_{m-1}A\alpha_{m-1} + k_mA\alpha_m = 0$$

$$\Rightarrow k_1\lambda_1\alpha_1 + \dots + k_{m-1}\lambda_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\lambda_m\alpha_m = 0 \quad (2)$$

$$k_1 = \dots = k_{m-1} = k_m = 0$$

**定理**  $n$  阶方阵  $A$  互不相同的特征值  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , 其对应的特征向量  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性无关。

**证明** 数学归纳法。  $m = 1$  时, 显然。假设结论对  $m - 1$  成立。

假设

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\alpha_m = 0 \quad (1)$$

两边左乘  $A$ , 得

$$k_1A\alpha_1 + \dots + k_{m-1}A\alpha_{m-1} + k_mA\alpha_m = 0$$

$$\Rightarrow k_1\lambda_1\alpha_1 + \dots + k_{m-1}\lambda_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\lambda_m\alpha_m = 0 \quad (2)$$

$\lambda_m \times (1) - (2)$  得:

$$k_1 = \dots = k_{m-1} = k_m = 0$$

**定理**  $n$  阶方阵  $A$  互不相同的特征值  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , 其对应的特征向量  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性无关。

**证明** 数学归纳法。  $m = 1$  时, 显然。假设结论对  $m - 1$  成立。

假设

$$k_1 \lambda_m \alpha_1 + \dots + k_{m-1} \lambda_m \alpha_{m-1} + k_m \lambda_m \alpha_m = 0 \quad (1)$$

两边左乘  $A$ , 得

$$k_1 A \alpha_1 + \dots + k_{m-1} A \alpha_{m-1} + k_m A \alpha_m = 0$$

$$\Rightarrow k_1 \lambda_1 \alpha_1 + \dots + k_{m-1} \lambda_{m-1} \alpha_{m-1} + k_m \lambda_m \alpha_m = 0 \quad (2)$$

$\lambda_m \times (1) - (2)$  得:

$$k_1 = \dots = k_{m-1} = k_m = 0$$

**定理**  $n$  阶方阵  $A$  互不相同的特征值  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , 其对应的特征向量  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性无关。

**证明** 数学归纳法。  $m = 1$  时, 显然。假设结论对  $m - 1$  成立。

假设

$$k_1 \lambda_m \alpha_1 + \dots + k_{m-1} \lambda_m \alpha_{m-1} + k_m \lambda_m \alpha_m = 0 \quad (1)$$

两边左乘  $A$ , 得

$$k_1 A \alpha_1 + \dots + k_{m-1} A \alpha_{m-1} + k_m A \alpha_m = 0$$

$$\Rightarrow k_1 \lambda_1 \alpha_1 + \dots + k_{m-1} \lambda_{m-1} \alpha_{m-1} + k_m \lambda_m \alpha_m = 0 \quad (2)$$

$\lambda_m \times (1) - (2)$  得:

$$k_1 (\lambda_m - \lambda_1) \alpha_1 + \dots + k_{m-1} (\lambda_m - \lambda_{m-1}) \alpha_{m-1} = 0$$

$$k_1 = \dots = k_{m-1} = k_m = 0$$

**定理**  $n$  阶方阵  $A$  互不相同的特征值  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , 其对应的特征向量  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性无关。

**证明** 数学归纳法。  $m = 1$  时, 显然。假设结论对  $m - 1$  成立。

假设

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\alpha_m = 0 \quad (1)$$

两边左乘  $A$ , 得

$$k_1A\alpha_1 + \dots + k_{m-1}A\alpha_{m-1} + k_mA\alpha_m = 0$$

$$\Rightarrow k_1\lambda_1\alpha_1 + \dots + k_{m-1}\lambda_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\lambda_m\alpha_m = 0 \quad (2)$$

$\lambda_m \times (1) - (2)$  得:

$$k_1(\lambda_m - \lambda_1)\alpha_1 + \dots + k_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1})\alpha_{m-1} = 0$$

由归纳假设  $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$  线性无关, 所以

$$k_1 = \dots = k_{m-1} = k_m = 0$$

**定理**  $n$  阶方阵  $A$  互不相同的特征值  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , 其对应的特征向量  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性无关。

**证明** 数学归纳法。  $m = 1$  时, 显然。假设结论对  $m - 1$  成立。

假设

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\alpha_m = 0 \quad (1)$$

两边左乘  $A$ , 得

$$k_1A\alpha_1 + \dots + k_{m-1}A\alpha_{m-1} + k_mA\alpha_m = 0$$

$$\Rightarrow k_1\lambda_1\alpha_1 + \dots + k_{m-1}\lambda_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\lambda_m\alpha_m = 0 \quad (2)$$

$\lambda_m \times (1) - (2)$  得:

$$k_1(\lambda_m - \lambda_1)\alpha_1 + \dots + k_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1})\alpha_{m-1} = 0$$

由归纳假设  $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$  线性无关, 所以

$$k_1(\lambda_m - \lambda_1) = \dots = k_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1}) = 0$$

$$k_1 = \dots = k_{m-1} = k_m = 0$$

**定理**  $n$  阶方阵  $A$  互不相同的特征值  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , 其对应的特征向量  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性无关。

**证明** 数学归纳法。  $m = 1$  时, 显然。假设结论对  $m - 1$  成立。

假设

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\alpha_m = 0 \quad (1)$$

两边左乘  $A$ , 得

$$k_1A\alpha_1 + \dots + k_{m-1}A\alpha_{m-1} + k_mA\alpha_m = 0$$

$$\Rightarrow k_1\lambda_1\alpha_1 + \dots + k_{m-1}\lambda_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\lambda_m\alpha_m = 0 \quad (2)$$

$\lambda_m \times (1) - (2)$  得:

$$k_1(\lambda_m - \lambda_1)\alpha_1 + \dots + k_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1})\alpha_{m-1} = 0$$

由归纳假设  $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$  线性无关, 所以

$$k_1(\lambda_m - \lambda_1) = \dots = k_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1}) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = \dots = k_{m-1} = 0$$

$$k_1 = \dots = k_{m-1} = k_m = 0$$

**定理**  $n$  阶方阵  $A$  互不相同的特征值  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , 其对应的特征向量  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性无关。

**证明** 数学归纳法。  $m = 1$  时, 显然。假设结论对  $m - 1$  成立。

假设

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\alpha_m = 0 \quad (1)$$

两边左乘  $A$ , 得

$$k_1A\alpha_1 + \dots + k_{m-1}A\alpha_{m-1} + k_mA\alpha_m = 0$$

$$\Rightarrow k_1\lambda_1\alpha_1 + \dots + k_{m-1}\lambda_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\lambda_m\alpha_m = 0 \quad (2)$$

$\lambda_m \times (1) - (2)$  得:

$$k_1(\lambda_m - \lambda_1)\alpha_1 + \dots + k_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1})\alpha_{m-1} = 0$$

由归纳假设  $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$  线性无关, 所以

$$k_1(\lambda_m - \lambda_1) = \dots = k_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1}) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = \dots = k_{m-1} = 0$$

进而

$$k_m\alpha_m = 0$$

$$k_1 = \dots = k_{m-1} = k_m = 0$$



**定理**  $n$  阶方阵  $A$  互不相同的特征值  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , 其对应的特征向量  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性无关。

**证明** 数学归纳法。  $m = 1$  时, 显然。假设结论对  $m - 1$  成立。

假设

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\alpha_m = 0 \quad (1)$$

两边左乘  $A$ , 得

$$k_1A\alpha_1 + \dots + k_{m-1}A\alpha_{m-1} + k_mA\alpha_m = 0$$

$$\Rightarrow k_1\lambda_1\alpha_1 + \dots + k_{m-1}\lambda_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\lambda_m\alpha_m = 0 \quad (2)$$

$\lambda_m \times (1) - (2)$  得:

$$k_1(\lambda_m - \lambda_1)\alpha_1 + \dots + k_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1})\alpha_{m-1} = 0$$

由归纳假设  $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$  线性无关, 所以

$$k_1(\lambda_m - \lambda_1) = \dots = k_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1}) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = \dots = k_{m-1} = 0$$

进而

$$k_m\alpha_m = 0 \quad \Rightarrow \quad k_m = 0$$

$$k_1 = \dots = k_{m-1} = k_m = 0$$

**定理**  $n$  阶方阵  $A$  互不相同的特征值  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , 其对应的特征向量  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性无关。

**证明** 数学归纳法。  $m = 1$  时, 显然。假设结论对  $m - 1$  成立。

假设

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\alpha_m = 0 \quad (1)$$

两边左乘  $A$ , 得

$$k_1A\alpha_1 + \dots + k_{m-1}A\alpha_{m-1} + k_mA\alpha_m = 0$$

$$\Rightarrow k_1\lambda_1\alpha_1 + \dots + k_{m-1}\lambda_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\lambda_m\alpha_m = 0 \quad (2)$$

$\lambda_m \times (1) - (2)$  得:

$$k_1(\lambda_m - \lambda_1)\alpha_1 + \dots + k_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1})\alpha_{m-1} = 0$$

由归纳假设  $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$  线性无关, 所以

$$k_1(\lambda_m - \lambda_1) = \dots = k_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1}) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = \dots = k_{m-1} = 0$$

进而

$$k_m\alpha_m = 0 \quad \Rightarrow \quad k_m = 0$$

所以  $k_1 = \dots = k_{m-1} = k_m = 0$

**定理**  $n$  阶方阵  $A$  互不相同的特征值  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , 其对应的特征向量  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性无关。

**证明** 数学归纳法。  $m = 1$  时, 显然。假设结论对  $m - 1$  成立。

假设

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\alpha_m = 0 \quad (1)$$

两边左乘  $A$ , 得

$$k_1A\alpha_1 + \dots + k_{m-1}A\alpha_{m-1} + k_mA\alpha_m = 0$$

$$\Rightarrow k_1\lambda_1\alpha_1 + \dots + k_{m-1}\lambda_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\lambda_m\alpha_m = 0 \quad (2)$$

$\lambda_m \times (1) - (2)$  得:

$$k_1(\lambda_m - \lambda_1)\alpha_1 + \dots + k_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1})\alpha_{m-1} = 0$$

由归纳假设  $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$  线性无关, 所以

$$k_1(\lambda_m - \lambda_1) = \dots = k_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1}) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = \dots = k_{m-1} = 0$$

进而

$$k_m\alpha_m = 0 \quad \Rightarrow \quad k_m = 0$$

所以  $k_1 = \dots = k_{m-1} = k_m = 0$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性无关。

# 特征值与矩阵元素关系 ( $n = 3$ )

设  $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ , 则

## 特征值与矩阵元素关系 ( $n = 3$ )

设  $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ , 则

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = |A|$$

## 特征值与矩阵元素关系 ( $n = 3$ )

设  $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ , 则

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = |A|$$

这是:

$$|\lambda I - A| =$$

## 特征值与矩阵元素关系 ( $n = 3$ )

设  $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ , 则

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= a_{11} + a_{22} + a_{33} \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 &= |A|\end{aligned}$$

这是:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix}$$

## 特征值与矩阵元素关系 ( $n = 3$ )

设  $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ , 则

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= a_{11} + a_{22} + a_{33} \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 &= |A|\end{aligned}$$

这是:

$$\begin{aligned}| \lambda I - A | &= \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} \\ &= \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + \end{aligned}$$



# 特征值与矩阵元素关系 ( $n = 3$ )

设  $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ , 则

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= a_{11} + a_{22} + a_{33} \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 &= |A|\end{aligned}$$

这是:

$$\begin{aligned}| \lambda I - A | &= \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} \\ &= \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + \\ &\quad + (-1)^2 \left( \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \right) \lambda\end{aligned}$$

# 特征值与矩阵元素关系 ( $n = 3$ )

设  $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ , 则

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= a_{11} + a_{22} + a_{33} \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 &= |A|\end{aligned}$$

这是:

$$\begin{aligned}| \lambda I - A | &= \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} \\ &= \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + \\ &\quad + (-1)^2 \left( \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \right) \lambda \\ &\quad + (-1)^3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\end{aligned}$$

## 特征值与矩阵元素关系 ( $n = 3$ )

设  $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ , 则

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= a_{11} + a_{22} + a_{33} \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 &= |A|\end{aligned}$$

这是:

$$\begin{aligned}| \lambda I - A | &= \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} \\ &= \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + \\ &\quad + (-1)^2 \left( \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \right) \lambda \\ &\quad + (-1)^3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\end{aligned}$$

另一方面,

$$| \lambda I - A | = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)$$

## 特征值与矩阵元素关系 ( $n = 3$ )

设  $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ , 则

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= a_{11} + a_{22} + a_{33} \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 &= |A|\end{aligned}$$

这是:

$$\begin{aligned}|\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} \\ &= \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + \\ &\quad + (-1)^2 \left( \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \right) \lambda \\ &\quad + (-1)^3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}|\lambda I - A| &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) \\ &= \lambda^3 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\lambda^2 + (-1)^2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)\lambda + (-1)^3\lambda_1\lambda_2\lambda_3\end{aligned}$$

## 特征值与矩阵元素关系 ( $n = 3$ )

设  $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ , 则

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= a_{11} + a_{22} + a_{33} \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 &= |A|\end{aligned}$$

这是:

$$\begin{aligned}|\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} \\ &= \lambda^3 - \underline{(a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2} + \\ &\quad + (-1)^2 \left( \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \right) \lambda \\ &\quad + (-1)^3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}|\lambda I - A| &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) \\ &= \lambda^3 - \underline{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\lambda^2} + (-1)^2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)\lambda + (-1)^3\lambda_1\lambda_2\lambda_3\end{aligned}$$

## 特征值与矩阵元素关系 ( $n = 3$ )

设  $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ , 则

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= a_{11} + a_{22} + a_{33} \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 &= |A|\end{aligned}$$

这是:

$$\begin{aligned}|\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} \\ &= \lambda^3 - \underline{(a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2} + \\ &\quad + (-1)^2 \left( \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \right) \lambda \\ &\quad + \underline{(-1)^3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}\end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}|\lambda I - A| &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) \\ &= \lambda^3 - \underline{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\lambda^2} + (-1)^2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)\lambda + \underline{(-1)^3\lambda_1\lambda_2\lambda_3}\end{aligned}$$

# 特征值与矩阵元素关系

设  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ , 则

# 特征值与矩阵元素关系

设  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ , 则

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n &= a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} \\ \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n &= |A|\end{aligned}$$



# 特征值与矩阵元素关系

设  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ , 则

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n &= a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} \\ \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n &= |A|\end{aligned}$$

这是:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

# 特征值与矩阵元素关系

设  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ , 则

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n &= a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} \\ \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n &= |A|\end{aligned}$$

这是:

$$\begin{aligned}|\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + * \lambda + |-A|\end{aligned}$$

# 特征值与矩阵元素关系

设  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ , 则

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n &= a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} \\ \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n &= |A|\end{aligned}$$

这是:

$$\begin{aligned}|\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + * \lambda + \underbrace{|-A|}_{(-1)^n |A|}\end{aligned}$$

# 特征值与矩阵元素关系

设  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ , 则

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n &= a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} \\ \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n &= |A|\end{aligned}$$

这是:

$$\begin{aligned}|\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + * \lambda + \underbrace{|-A|}_{(-1)^n |A|}\end{aligned}$$

另一方面,

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$$

# 特征值与矩阵元素关系

设  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ , 则

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n &= a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} \\ \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n &= |A|\end{aligned}$$

这是:

$$\begin{aligned}|\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + * \lambda + \underbrace{|-A|}_{(-1)^n |A|}\end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}|\lambda I - A| &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n) \\ &= \lambda^n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)\lambda^{n-1} + \cdots + * \lambda + (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n\end{aligned}$$

**例 1** 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & x & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ , 已知  $A$  有特征值  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ , 求  $x$  的值, 及另外一个特征值  $\lambda_3$ 。

**例 1** 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & x & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ , 已知  $A$  有特征值  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ , 求  $x$  的值, 及另外一个特征值  $\lambda_3$ 。

**解** 由特征值与矩阵系数关系:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + x + 1 \\ \end{cases}$$

**例 1** 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & x & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ , 已知  $A$  有特征值  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ , 求  $x$  的值, 及另外一个特征值  $\lambda_3$ 。

**解** 由特征值与矩阵系数关系:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + x + 1 \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & x & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} \end{cases}$$



**例 1** 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & x & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ , 已知  $A$  有特征值  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ , 求  $x$  的值, 及另外一个特征值  $\lambda_3$ 。

**解** 由特征值与矩阵系数关系:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + x + 1 \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & x & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & x \end{vmatrix} \end{cases}$$

**例 1** 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & x & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ , 已知  $A$  有特征值  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ , 求  $x$  的值, 及另外一个特征值  $\lambda_3$ 。

**解** 由特征值与矩阵系数关系:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + x + 1 \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & x & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & x \end{vmatrix} = x + 2 \end{cases}$$

**例 1** 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & x & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ , 已知  $A$  有特征值  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ , 求  $x$  的值, 及另外一个特征值  $\lambda_3$ 。

**解** 由特征值与矩阵系数关系:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + x + 1 \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & x & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & x \end{vmatrix} = x + 2 \end{cases}$$

所以

$$\begin{cases} 1 + 2 + \lambda_3 = 2 + x \\ 1 \cdot 2 \cdot \lambda_3 = x + 2 \end{cases}$$

**例 1** 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & x & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ , 已知  $A$  有特征值  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ , 求  $x$  的值, 及另外一个特征值  $\lambda_3$ 。

**解** 由特征值与矩阵系数关系:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + x + 1 \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & x & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & x \end{vmatrix} = x + 2 \end{cases}$$

所以

$$\begin{cases} 1 + 2 + \lambda_3 = 2 + x \\ 1 \cdot 2 \cdot \lambda_3 = x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_3 - x = -1 \\ 2\lambda_3 - x = 2 \end{cases}$$

**例 1** 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & x & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ , 已知  $A$  有特征值  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ , 求  $x$  的值, 及另外一个特征值  $\lambda_3$ 。

**解** 由特征值与矩阵系数关系:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + x + 1 \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & x & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & x \end{vmatrix} = x + 2 \end{cases}$$

所以

$$\begin{cases} 1 + 2 + \lambda_3 = 2 + x \\ 1 \cdot 2 \cdot \lambda_3 = x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_3 - x = -1 \\ 2\lambda_3 - x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_3 = 3 \\ x = 4 \end{cases}$$

**例 2** 已知  $A = \begin{pmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$  有特征值 2, 6, 求  $x$  的值。

**例 2** 已知  $A = \begin{pmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$  有特征值 2, 6, 求  $x$  的值。

**解** 设  $A$  的第三个特征值为  $\lambda$ , 由特征值与矩阵系数关系:

**例 2** 已知  $A = \begin{pmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$  有特征值 2, 6, 求  $x$  的值。

**解** 设  $A$  的第三个特征值为  $\lambda$ , 由特征值与矩阵系数关系:

$$\begin{cases} 2 + 6 + \lambda_3 = x + 4 + 5 \\ \end{cases}$$



**例 2** 已知  $A = \begin{pmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$  有特征值 2, 6, 求  $x$  的值。

**解** 设  $A$  的第三个特征值为  $\lambda$ , 由特征值与矩阵系数关系:

$$\begin{cases} 2 + 6 + \lambda_3 = x + 4 + 5 \\ 2 \cdot 6 \cdot \lambda_3 = \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{vmatrix} \end{cases}$$

**例 2** 已知  $A = \begin{pmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$  有特征值 2, 6, 求  $x$  的值。

**解** 设  $A$  的第三个特征值为  $\lambda$ , 由特征值与矩阵系数关系:

$$\begin{cases} 2 + 6 + \lambda_3 = x + 4 + 5 \\ 2 \cdot 6 \cdot \lambda_3 = \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{vmatrix} \end{cases}$$

其中

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3 - 5r_1]{r_2 + 2r_1}$$

**例 2** 已知  $A = \begin{pmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$  有特征值 2, 6, 求  $x$  的值。

**解** 设  $A$  的第三个特征值为  $\lambda$ , 由特征值与矩阵系数关系:

$$\begin{cases} 2 + 6 + \lambda_3 = x + 4 + 5 \\ 2 \cdot 6 \cdot \lambda_3 = \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{vmatrix} \end{cases}$$

其中

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3 - 5r_1]{r_2 + 2r_1} \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 + 2x & 2 & 0 \\ -3 - 5x & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

**例 2** 已知  $A = \begin{pmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$  有特征值 2, 6, 求  $x$  的值。

**解** 设  $A$  的第三个特征值为  $\lambda$ , 由特征值与矩阵系数关系:

$$\begin{cases} 2 + 6 + \lambda_3 = x + 4 + 5 \\ 2 \cdot 6 \cdot \lambda_3 = \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{vmatrix} \end{cases}$$

其中

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3 - 5r_1]{r_2 + 2r_1} \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 + 2x & 2 & 0 \\ -3 - 5x & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 + 2x & 2 \\ -3 - 5x & 2 \end{vmatrix}$$

**例 2** 已知  $A = \begin{pmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$  有特征值 2, 6, 求  $x$  的值。

**解** 设  $A$  的第三个特征值为  $\lambda$ , 由特征值与矩阵系数关系:

$$\begin{cases} 2 + 6 + \lambda_3 = x + 4 + 5 \\ 2 \cdot 6 \cdot \lambda_3 = \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{vmatrix} \end{cases}$$

其中

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3 - 5r_1]{r_2 + 2r_1} \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 + 2x & 2 & 0 \\ -3 - 5x & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 + 2x & 2 \\ -3 - 5x & 2 \end{vmatrix} = 2(7x + 5)$$

**例 2** 已知  $A = \begin{pmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$  有特征值 2, 6, 求  $x$  的值。

**解** 设  $A$  的第三个特征值为  $\lambda$ , 由特征值与矩阵系数关系:

$$\begin{cases} 2 + 6 + \lambda_3 = x + 4 + 5 \\ 2 \cdot 6 \cdot \lambda_3 = \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{vmatrix} \end{cases}$$

其中

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3 - 5r_1]{r_2 + 2r_1} \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 + 2x & 2 & 0 \\ -3 - 5x & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 + 2x & 2 \\ -3 - 5x & 2 \end{vmatrix} = 2(7x + 5)$$

所以

$$\begin{cases} \lambda_3 - x = 1 \\ 6\lambda_3 - 7x = 5 \end{cases}$$

**例 2** 已知  $A = \begin{pmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$  有特征值 2, 6, 求  $x$  的值。

**解** 设  $A$  的第三个特征值为  $\lambda$ , 由特征值与矩阵系数关系:

$$\begin{cases} 2 + 6 + \lambda_3 = x + 4 + 5 \\ 2 \cdot 6 \cdot \lambda_3 = \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{vmatrix} \end{cases}$$

其中

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3 - 5r_1]{r_2 + 2r_1} \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 + 2x & 2 & 0 \\ -3 - 5x & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 + 2x & 2 \\ -3 - 5x & 2 \end{vmatrix} = 2(7x + 5)$$

所以

$$\begin{cases} \lambda_3 - x = 1 \\ 6\lambda_3 - 7x = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_3 = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$