# 第3章 d:函数的单调性与凹凸性

数学系 梁卓滨

2019-2020 学年 I

## **Outline**

1. 函数的单调性

2. 函数的凹凸性



# We are here now...

1. 函数的单调性

2. 函数的凹凸性



• (a,b) 上恒成立  $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$  在 [a,b] 上(严格)单调增加.

- (a, b) 上恒成立  $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$  在 [a, b] 上(严格)单调增加.
- (a,b) 上恒成立  $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$  在 [a,b] 上(严格)单调递减.

- (a, b) 上恒成立  $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$  在 [a, b] 上(严格)单调增加.
- (a, b) 上恒成立  $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$  在 [a, b] 上(严格)单调递减.

 $\mathbf{i}$  将条件放宽以允许 (a,b) 上有限个点成立 f'(x) = 0,结论仍然成立.



- (a, b) 上恒成立  $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$  在 [a, b] 上(严格)单调增加.
- (a, b) 上恒成立  $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$  在 [a, b] 上(严格)单调递减.

 $\mathbf{i}$  将条件放宽以允许 (a, b) 上有限个点成立 f'(x) = 0,结论仍然成立.



- (a, b) 上恒成立  $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$  在 [a, b] 上(严格)单调增加.
- (a, b) 上恒成立  $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$  在 [a, b] 上(严格)单调递减.

 $\mathbf{i}$  将条件放宽以允许 (a, b) 上有限个点成立 f'(x) = 0,结论仍然成立.

例 1 判定  $y = x - \sin x$  在  $[-\pi, \pi]$  上的单调性.

 $\mathbf{W}$  y 在  $[-\pi, \pi]$  上连续,在  $(-\pi, \pi)$  上成立  $y' = 1 - \cos x$ 

- (a, b) 上恒成立  $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$  在 [a, b] 上(严格)单调增加.
- (a, b) 上恒成立  $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$  在 [a, b] 上(严格)单调递减.

 $\mathbf{i}$  将条件放宽以允许 (a, b) 上有限个点成立 f'(x) = 0,结论仍然成立.

例 1 判定  $y = x - \sin x$  在  $[-\pi, \pi]$  上的单调性.

**解** y 在  $[-\pi, \pi]$  上连续,在  $(-\pi, \pi)$  上成立  $y' = 1 - \cos x \ge 0$ 

- (a, b) 上恒成立  $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$  在 [a, b] 上(严格)单调增加.
- (a, b) 上恒成立  $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$  在 [a, b] 上(严格)单调递减.

 $\mathbf{i}$  将条件放宽以允许 (a, b) 上有限个点成立 f'(x) = 0,结论仍然成立.

**例 1** 判定  $y = x - \sin x$  在  $[-\pi, \pi]$  上的单调性.

**解** y 在  $[-\pi, \pi]$  上连续,在  $(-\pi, \pi)$  上成立  $y' = 1 - \cos x \ge 0$ ,且只有 y'(0) = 0. 所以 y 是单调递增.

- (a,b) 上恒成立  $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$  在 [a,b] 上(严格)单调增加.
- (a,b) 上恒成立  $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$  在 [a,b] 上(严格)单调递减.

注 将条件放宽以允许 (a, b) 上有限个点成立 f'(x) = 0,结论仍然成立.

**M** $1 判定 <math>y = x - \sin x$  在  $[-\pi, \pi]$  上的单调性.

解 y 在  $[-\pi, \pi]$  上连续,在  $(-\pi, \pi)$  上成立  $y' = 1 - \cos x \ge 0$ ,且只有 y'(0) = 0. 所以 y 是单调递增.

**例 2** 讨论  $y = e^x - x - 1$  的单调性.

- (a,b) 上恒成立  $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$  在 [a,b] 上(严格)单调增加.
- (a,b) 上恒成立  $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$  在 [a,b] 上(严格)单调递减.

注 将条件放宽以允许 (a,b) 上有限个点成立 f'(x) = 0,结论仍然成立.

**M1** 判定  $y = x - \sin x$  在  $[-\pi, \pi]$  上的单调性.

**解** y 在  $[-\pi, \pi]$  上连续,在  $(-\pi, \pi)$  上成立  $y' = 1 - \cos x \ge 0$ ,且只有 y'(0) = 0. 所以 y 是单调递增.

**例 2** 讨论  $y = e^x - x - 1$  的单调性.

$$v' = e^{x} - 1$$



(a, b) 上恒成立 f'(x) > 0 ⇒ f(x) 在 [a, b] 上(严格) 单调增加.

**定理** 设 f(x) 在闭区间 [a,b] 上连续,在开区间 (a,b) 内可导,则

- a (a, b) 上标成立 f(x) < 0 → f(x) 左 [a, b] 上 (平枚) 色油溢点
- (a,b) 上恒成立  $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$  在 [a,b] 上(严格)单调递减.

**注** 将条件放宽以允许 (a, b) 上有限个点成立 f'(x) = 0,结论仍然成立.

**例1** 判定  $y = x - \sin x$  在  $[-\pi, \pi]$  上的单调性.

**解** y 在  $[-\pi, \pi]$  上连续,在  $(-\pi, \pi)$  上成立  $y' = 1 - \cos x \ge 0$ ,且只有 y'(0) = 0. 所以 y 是单调递增.

**例 2** 讨论  $y = e^x - x - 1$  的单调性.

解  

$$y' = e^{x} - 1$$
 ⇒  $\begin{cases} 在(0, +\infty) \perp y' > 0 \\ 在(-\infty, 0) \perp y' < 0 \end{cases}$ 



- (a,b) 上恒成立  $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$  在 [a,b] 上(严格)单调增加.
- (a,b) 上恒成立  $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$  在 [a,b] 上(严格)单调递减.

 $\mathbf{i}$  将条件放宽以允许 (a,b) 上有限个点成立 f'(x) = 0,结论仍然成立.

**例 1** 判定  $v = x - \sin x$  在  $[-\pi, \pi]$  上的单调性.

 $\mathbf{H}$   $\mathbf{H}$  有 y'(0) = 0. 所以 y 是单调递增.

**例 2** 讨论  $y = e^{x} - x - 1$  的单调性.

$$y' = e^{x} - 1 \Rightarrow \begin{cases} 在(0, +\infty) \perp y' > 0 \Rightarrow y \in [0, +\infty)$$
上单调递增 
$$(-\infty, 0) \perp y' < 0$$



(a, b) 上恒成立 f'(x) > 0 ⇒ f(x) 在 [a, b] 上(严格) 单调增加.

**定理** 设 f(x) 在闭区间 [a,b] 上连续,在开区间 (a,b) 内可导,则

- (a,b)上恒成立 f'(x) < 0 ⇒ f(x)在 [a,b]上(严格)单调递减.</li>
- 注 将条件放宽以允许 (a,b) 上有限个点成立 f'(x) = 0,结论仍然成立.

解 y 在  $[-\pi, \pi]$  上连续,在  $(-\pi, \pi)$  上成立  $y' = 1 - \cos x \ge 0$ ,且只有 y'(0) = 0. 所以 y 是单调递增.

**例 2** 讨论  $y = e^{x} - x - 1$  的单调性.

 $y' = e^x - 1 \Rightarrow \begin{cases} 在(0, +\infty) \perp y' > 0 \Rightarrow y \in [0, +\infty)$ 上单调递增  $(-\infty, 0) \perp y' < 0 \Rightarrow y \in (-\infty, 0]$ 上单调递减

$$y' = \frac{2}{3x^{1/3}}$$

$$y' = \frac{2}{3x^{1/3}} \implies \begin{cases} \text{ } \pm (0, +\infty) \pm y' > 0 \\ \text{ } \pm (-\infty, 0) \pm y' < 0 \end{cases}$$

$$y' = \frac{2}{3x^{1/3}} \Rightarrow \begin{cases} \text{在}(0, +\infty) \perp y' > 0 \Rightarrow y\text{在}[0, +\infty) \perp \text{单调递增} \\ \text{在}(-\infty, 0) \perp y' < 0 \end{cases}$$

$$y' = \frac{2}{3x^{1/3}}$$
  $\Rightarrow$   $\begin{cases} \text{在}(0, +\infty) \perp y' > 0 \Rightarrow y \text{在}[0, +\infty) \perp \text{单调递增} \\ \text{在}(-\infty, 0) \perp y' < 0 \Rightarrow y \text{在}(-\infty, 0] \perp \text{单调递减} \end{cases}$ 



$$y' = \frac{2}{3x^{1/3}}$$
  $\Rightarrow$   $\begin{cases} \text{在}(0, +\infty) \perp y' > 0 \Rightarrow y \text{在}[0, +\infty) \perp \text{单调递增} \\ \text{在}(-\infty, 0) \perp y' < 0 \Rightarrow y \text{在}(-\infty, 0] \perp \text{单调递减} \end{cases}$ 

**例 4** 确定  $v = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$  的单调区间.

$$y' = \frac{2}{3x^{1/3}}$$
  $\Rightarrow$   $\begin{cases} \text{在}(0, +\infty) \perp y' > 0 \Rightarrow y \text{在}[0, +\infty) \perp \text{单调递增} \\ \text{在}(-\infty, 0) \perp y' < 0 \Rightarrow y \text{在}(-\infty, 0] \perp \text{单调递减} \end{cases}$ 

**例 4** 确定  $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$  的单调区间.

$$y' = 6x^2 - 18x + 12$$

$$y' = \frac{2}{3x^{1/3}}$$
  $\Rightarrow$   $\begin{cases} \text{在}(0, +\infty) \perp y' > 0 \Rightarrow y \text{在}[0, +\infty) \perp \text{单调递增} \\ \text{在}(-\infty, 0) \perp y' < 0 \Rightarrow y \text{在}(-\infty, 0] \perp \text{单调递减} \end{cases}$ 

**例 4** 确定  $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$  的单调区间.

$$y' = 6x^2 - 18x + 12 = 12(x-1)(x-2)$$



解

$$y' = \frac{2}{3x^{1/3}}$$
  $\Rightarrow$   $\begin{cases} \text{在}(0, +\infty) \perp y' > 0 \Rightarrow y \text{在}[0, +\infty) \perp \text{单调递增} \\ \text{在}(-\infty, 0) \perp y' < 0 \Rightarrow y \text{在}(-\infty, 0] \perp \text{单调递减} \end{cases}$ 

**例 4** 确定  $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$  的单调区间.

$$y' = 6x^2 - 18x + 12 = 12(x-1)(x-2) = 0$$

解

$$y' = \frac{2}{3x^{1/3}}$$
  $\Rightarrow$   $\begin{cases} \text{在}(0, +\infty) \perp y' > 0 \Rightarrow y \text{在}[0, +\infty) \perp \text{单调递增} \\ \text{在}(-\infty, 0) \perp y' < 0 \Rightarrow y \text{在}(-\infty, 0] \perp \text{单调递减} \end{cases}$ 

**例 4** 确定  $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$  的单调区间.

$$y' = 6x^2 - 18x + 12 = 12(x - 1)(x - 2) = 0 \implies x = 1, 2$$

$$y' = \frac{2}{3x^{1/3}}$$
  $\Rightarrow$   $\begin{cases} \text{在}(0, +\infty) \perp y' > 0 \Rightarrow y \text{在}[0, +\infty) \perp \text{单调递增} \\ \text{在}(-\infty, 0) \perp y' < 0 \Rightarrow y \text{在}(-\infty, 0] \perp \text{单调递减} \end{cases}$ 

**例 4** 确定  $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$  的单调区间.

$$y' = 6x^2 - 18x + 12 = 12(x - 1)(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 1, 2$$



$$y' = \frac{2}{3x^{1/3}} \Rightarrow \begin{cases} \text{在}(0, +\infty) \perp y' > 0 \Rightarrow y\text{在}[0, +\infty) \perp \text{单调递增} \\ \text{在}(-\infty, 0) \perp y' < 0 \Rightarrow y\text{在}(-\infty, 0] \perp \text{单调递减} \end{cases}$$

**例 4** 确定  $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$  的单调区间.

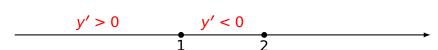
$$y' = 6x^2 - 18x + 12 = 12(x - 1)(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 1, 2$$



$$y' = \frac{2}{3x^{1/3}}$$
  $\Rightarrow$   $\begin{cases} \text{在}(0, +\infty) \perp y' > 0 \Rightarrow y \text{在}[0, +\infty) \perp \text{单调递增} \\ \text{在}(-\infty, 0) \perp y' < 0 \Rightarrow y \text{在}(-\infty, 0] \perp \text{单调递减} \end{cases}$ 

**例 4** 确定  $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$  的单调区间.

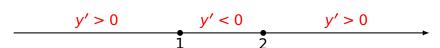
$$y' = 6x^2 - 18x + 12 = 12(x - 1)(x - 2) = 0 \implies x = 1, 2$$



$$y' = \frac{2}{3x^{1/3}}$$
  $\Rightarrow$   $\begin{cases} \text{在}(0, +\infty) \perp y' > 0 \Rightarrow y \text{在}[0, +\infty) \perp \text{单调递增} \\ \text{在}(-\infty, 0) \perp y' < 0 \Rightarrow y \text{在}(-\infty, 0] \perp \text{单调递减} \end{cases}$ 

**例 4** 确定  $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$  的单调区间.

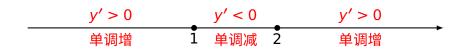
$$y' = 6x^2 - 18x + 12 = 12(x - 1)(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 1, 2$$



$$y' = \frac{2}{3x^{1/3}}$$
  $\Rightarrow$   $\begin{cases} \text{在}(0, +\infty) \perp y' > 0 \Rightarrow y \text{在}[0, +\infty) \perp \text{单调递增} \\ \text{在}(-\infty, 0) \perp y' < 0 \Rightarrow y \text{在}(-\infty, 0] \perp \text{单调递减} \end{cases}$ 

**例 4** 确定  $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$  的单调区间.

$$y' = 6x^2 - 18x + 12 = 12(x - 1)(x - 2) = 0 \implies x = 1, 2$$

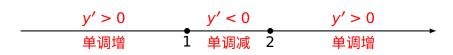


$$y' = \frac{2}{3x^{1/3}}$$
  $\Rightarrow$   $\begin{cases} \text{在}(0, +\infty) \perp y' > 0 \Rightarrow y \text{在}[0, +\infty) \perp \text{单调递增} \\ \text{在}(-\infty, 0) \perp y' < 0 \Rightarrow y \text{在}(-\infty, 0] \perp \text{单调递减} \end{cases}$ 

**例 4** 确定  $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$  的单调区间.

#### 解

$$y' = 6x^2 - 18x + 12 = 12(x - 1)(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 1, 2$$







$$\mathbf{M} \Leftrightarrow f(x) = x^5 - 5x + 1 = 0$$



$$\mathbf{H} \Leftrightarrow f(x) = x^5 - 5x + 1 = 0$$

- 1. 存在性.
- 2. 唯一性.



$$\mathbf{H} \Leftrightarrow f(x) = x^5 - 5x + 1 = 0$$

- 1. 存在性. f(0) = 1, f(1) = -3
- 2. 唯一性.



例 5 证明方程  $x^5 - 5x + 1 = 0$  在 [0, 1] 上由唯一实根.

$$\mathbf{H} \Leftrightarrow f(x) = x^5 - 5x + 1 = 0$$

- 1. 存在性. f(0) = 1, f(1) = -3  $\xrightarrow{\uparrow \text{ figta}}$   $\exists \xi \in (0,1)$  使得  $f(\xi) = 0$ .
- 2. 唯一性.



例 5 证明方程  $x^5 - 5x + 1 = 0$  在 [0, 1] 上由唯一实根.

$$\mathbf{H} \Leftrightarrow f(x) = x^5 - 5x + 1 = 0$$

- 1. 存在性. f(0) = 1, f(1) = -3  $\xrightarrow{\text{frighter}} \exists \xi \in (0, 1)$  使得  $f(\xi) = 0$ .
- 2. 唯一性.  $f'(x) = 5x^4 5 < 0$ ,  $x \in (0, 1) \Rightarrow f(x)$  单调递减

例 5 证明方程  $x^5 - 5x + 1 = 0$  在 [0, 1] 上由唯一实根.

$$\mathbf{H} \Leftrightarrow f(x) = x^5 - 5x + 1 = 0$$

- 1. 存在性. f(0) = 1, f(1) = -3  $\xrightarrow{\text{fights}} \exists \xi \in (0, 1)$  使得  $f(\xi) = 0$ .
- 2. 唯一性.  $f'(x) = 5x^4 5 < 0$ , $x ∈ (0, 1) \Rightarrow f(x)$  单调递减 ⇒ 该 ξ 是 [0, 1] 中满足方程 f(x) = 0 的解.



3d 单调性与凹凸性 4/10 < ▶ △ ▼

# We are here now...

1. 函数的单调性

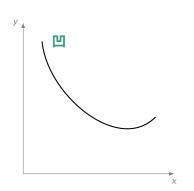
2. 函数的凹凸性



● 称 f(x) 是  $\square$  (上凹)是指: $\forall x_1, x_2 \in I$  均成立

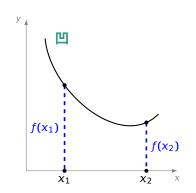
$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

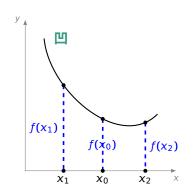


● 称 f(x) 是  $\square$  (上凹)是指: $\forall x_1, x_2 \in I$  均成立

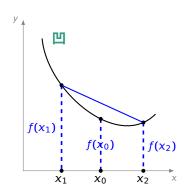
$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$



$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

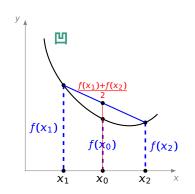


$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$



● 称 f(x) 是  $\square$  (上凹)是指: $\forall x_1, x_2 \in I$  均成立

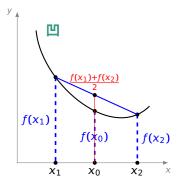
$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$



● 称 f(x) 是 💾 (上凹) 是指:  $\forall x_1, x_2 \in I$  均成立

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

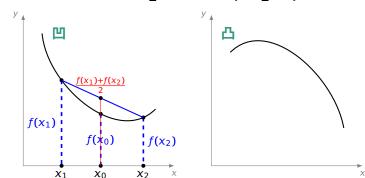
$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} < f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$



称 f(x) 是 □ (上凹) 是指: ∀x<sub>1</sub>, x<sub>2</sub> ∈ I 均成立

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

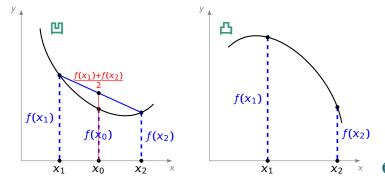
$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} < f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$



● 称 f(x) 是 😃 (上凹)是指:  $\forall x_1, x_2 \in I$  均成立

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} < f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

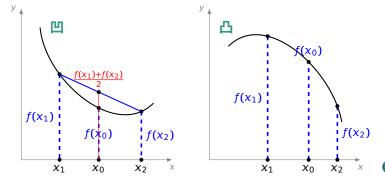


称 f(x) 是 □ (上凹) 是指: ∀x<sub>1</sub>, x<sub>2</sub> ∈ I 均成立

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

● 称f(x) 是凸(下凹)是指: $\forall x_1, x_2 \in I$  均成立

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} < f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

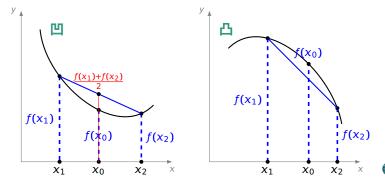


称 f(x) 是 □ (上凹) 是指: ∀x<sub>1</sub>, x<sub>2</sub> ∈ I 均成立

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

● 称f(x) 是凸(下凹)是指: $\forall x_1, x_2 \in I$  均成立

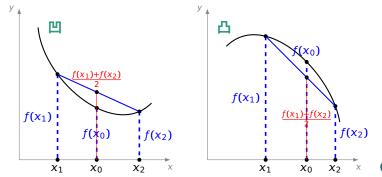
$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} < f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

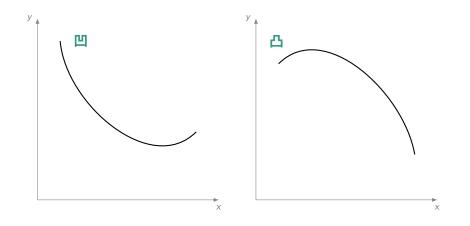


称 f(x) 是 □ (上凹) 是指: ∀x<sub>1</sub>, x<sub>2</sub> ∈ I 均成立

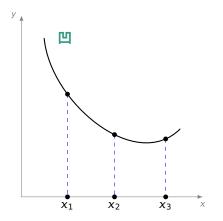
$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

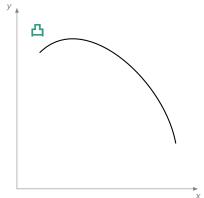
$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} < f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$



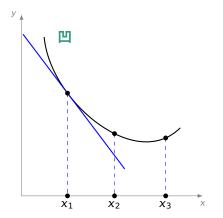


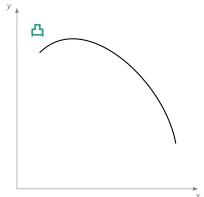


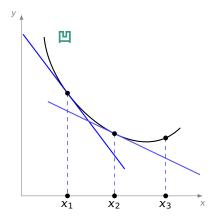


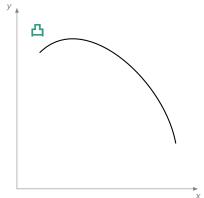




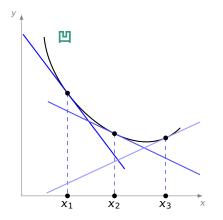


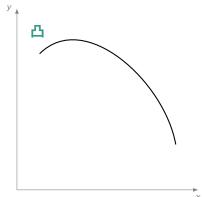


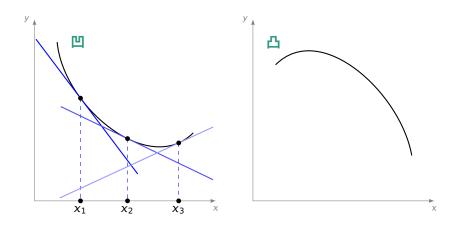


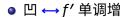




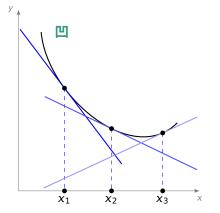


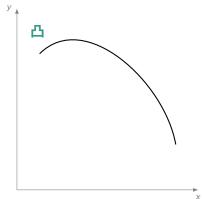


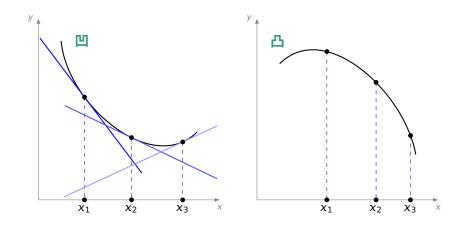




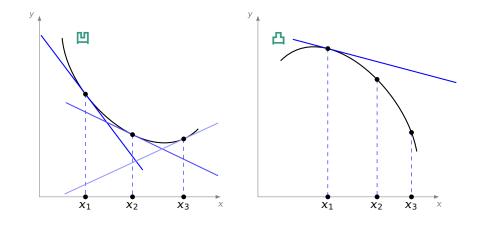




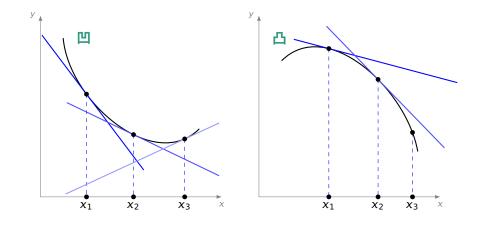




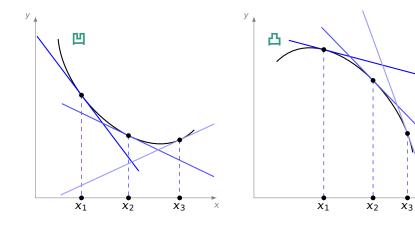


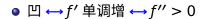




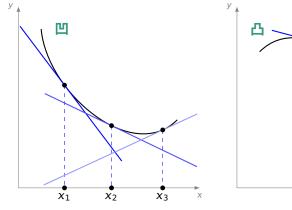


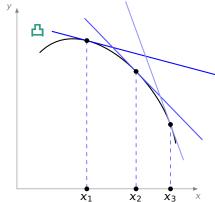






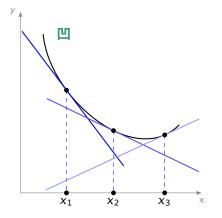


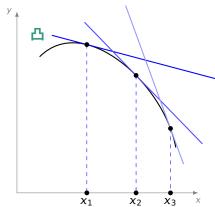




- 凹 ↔ f' 单调增 ↔ f" > 0
- 凸 ← f' 单调减







- 凹 ↔ f' 单调增 ↔ f" > 0
- 凸 ↔ f' 单调减 ↔ f" < 0</li>



● (a, b) 上恒成立  $f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$  在 [a, b] 上是凹的.

- (a, b) 上恒成立  $f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$  在 [a, b] 上是凹的.
- (a, b) 上恒成立  $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$  在 [a, b] 上是凸的.

- (a, b) 上恒成立  $f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$  在 [a, b] 上是凹的.
- (a, b) 上恒成立  $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$  在 [a, b] 上是凸的.

证明 设 f" > 0

- (a, b) 上恒成立  $f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$  在 [a, b] 上是凹的.
- (a,b) 上恒成立  $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$  在 [a,b] 上是凸的.

证明 设 
$$f'' > 0$$

$$f(x_0) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

- (a, b) 上恒成立  $f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$  在 [a, b] 上是凹的.
- (a, b) 上恒成立  $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$  在 [a, b] 上是凸的.

$$f(x_0) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \Leftrightarrow [f(x_2) - f(x_0)] - [f(x_0) - f(x_1)] > 0.$$

- (a, b) 上恒成立 f''(x) > 0 ⇒ f(x) 在 [a, b] 上是凹的.
- (a, b) 上恒成立 f''(x) < 0 ⇒ f(x) 在 [a, b] 上是凸的.</li>

**证明** 设 f" > 0

$$f(x_0) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \Leftrightarrow [f(x_2) - f(x_0)] - [f(x_0) - f(x_1)] > 0.$$

利用拉格朗日中值定理:

 $[f(x_2)-f(x_0)]-[f(x_0)-f(x_1)]=f'(\xi_2)(x_2-x_0)-f'(\xi_1)(x_0-x_1)$ 

- (a, b) 上恒成立 f''(x) > 0 ⇒ f(x) 在 [a, b] 上是凹的.

**证明** 设 f" > 0

• 
$$(a,b)$$
 上恒成立  $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$  在  $[a,b]$  上是凸的.

$$f(x_0) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \Leftrightarrow [f(x_2) - f(x_0)] - [f(x_0) - f(x_1)] > 0.$$

 $[f(x_2)-f(x_0)]-[f(x_0)-f(x_1)]=f'(\xi_2)(x_2-x_0)-f'(\xi_1)(x_0-x_1)$ 

 $= [f'(\xi_2) - f'(\xi_1)] \cdot \frac{x_2 - x_1}{2}$ 



导数,那么

定理 设 f(x) 在闭区间 [a,b] 上连续,在开区间 (a,b) 内有一阶和二阶

- (a, b) 上恒成立 f''(x) > 0 ⇒ f(x) 在 [a, b] 上是凹的.
- (a, b) 上恒成立 f''(x) < 0 ⇒ f(x) 在 [a, b] 上是凸的.</li>

利用拉格朗日中值定理:

$$f(x_1) + f(x_2)$$

 $f(x_0) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \Leftrightarrow [f(x_2) - f(x_0)] - [f(x_0) - f(x_1)] > 0.$ 

利用拉格朗日中值定理:
$$f(x_2)-f(x_0)]-[f(x_0)-f(x_1)]=f'(\xi_2)(x_2-x_0)-f'(\xi_1)(x_0-x_0)$$

 $[f(x_2)-f(x_0)]-[f(x_0)-f(x_1)]=f'(\xi_2)(x_2-x_0)-f'(\xi_1)(x_0-x_1)$ 

$$= [f'(\xi_2) - f'(\xi_1)] \cdot \frac{x_2 - x_1}{2}$$

$$= f''(\xi) \cdot (\xi_2 - \xi_1) \cdot \frac{x_2 - x_1}{2}$$

导数,那么

定理 设 f(x) 在闭区间 [a,b] 上连续,在开区间 (a,b) 内有一阶和二阶

- (a, b) 上恒成立 f''(x) > 0 ⇒ f(x) 在 [a, b] 上是凹的.
- (a, b) 上恒成立 f''(x) < 0 ⇒ f(x) 在 [a, b] 上是凸的.</li>

**证明** 设 f" > 0

$$f(x_0) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \Leftrightarrow [f(x_2) - f(x_0)] - [f(x_0) - f(x_1)] > 0.$$

利用拉格朗日中值定理:

$$[f(x_2) - f(x_0)] - [f(x_0) - f(x_1)] = f'(\xi_2)(x_2 - x_0) - f'(\xi_1)(x_0 - x_1)$$
$$= [f'(\xi_2) - f'(\xi_1)] \cdot \frac{x_2 - x_1}{2}$$

 $=f''(\xi)\cdot(\xi_2-\xi_1)\cdot\frac{x_2-x_1}{2}>0$ 

(a, b) 上恒成立 f''(x) > 0 ⇒ f(x) 在 [a, b] 上是凹的.

定理 设 f(x) 在闭区间 [a,b] 上连续,在开区间 (a,b) 内有一阶和二阶

(a, b) 上恒成立 f''(x) < 0 ⇒ f(x) 在 [a, b] 上是凸的.</li>

导数,那么

**证明** 设 f" > 0

利用拉格朗日中值定理:

$$f(x_2) - f(x_0) - [f(x_0) - f(x_0)]$$

 $[f(x_2)-f(x_0)]-[f(x_0)-f(x_1)]=f'(\xi_2)(x_2-x_0)-f'(\xi_1)(x_0-x_1)$ 

$$|x_{2}| - f(x_{0})| - |f(x_{0}) - f(x_{1})| = f'(\xi_{2})(x_{2} - x_{0}) - f'(\xi_{1})(x_{1})$$

$$= [f'(\xi_{2}) - f'(\xi_{1})] \cdot \frac{x_{2} - x_{1}}{2}$$

所以  $f'' > 0 \Rightarrow f$  是凹的.

$$f(x_0) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \Leftrightarrow [f(x_2) - f(x_0)] - [f(x_0) - f(x_1)] > 0.$$
  
利用拉格朗日中值定理:

$$f'(\xi_1)(x_0-x_0)$$

$$=f''(\xi)\cdot(\xi_2-\xi_1)\cdot\frac{x_2-x_1}{2}>0$$



$$\mathbf{\cancel{\mu}} \ y' = \frac{1}{x} \Rightarrow y'' = -\frac{1}{x^2}$$

**M** 
$$y' = \frac{1}{x} \Rightarrow y'' = -\frac{1}{x^2} < 0$$

$$\mathbf{W} y' = \frac{1}{x} \Rightarrow y'' = -\frac{1}{x^2} < 0 \Rightarrow y = \ln x$$
 为凸.

$$\mathbf{H} \ y' = \frac{1}{x} \Rightarrow y'' = -\frac{1}{x^2} < 0 \Rightarrow y = \ln x$$
 为凸.

**例 2** 判定函数  $y = x^3$  的凹凸性.

**例 2** 判定函数  $y = x^3$  的凹凸性.

$$y' = 3x^2 \Rightarrow y'' = 6x$$



$$\mathbf{H} y' = \frac{1}{x} \Rightarrow y'' = -\frac{1}{x^2} < 0 \Rightarrow y = \ln x$$
 为凸.

例 2 判定函数  $y = x^3$  的凹凸性.

$$y' = 3x^2 \Rightarrow y'' = 6x \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\text{$t$}(0, +\infty) \perp y'' > 0$} \\ \boxed{\text{$t$}(-\infty, 0) \perp y'' < 0$} \end{cases}$$

$$\mathbf{H} y' = \frac{1}{x} \Rightarrow y'' = -\frac{1}{x^2} < 0 \Rightarrow y = \ln x$$
 为凸.

例 2 判定函数  $y = x^3$  的凹凸性.

$$y' = 3x^2 \Rightarrow y'' = 6x \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\text{$(0, +\infty)$ \dotsymbol{\psi} \begin{aligned} \equiv (-\infty, 0) \dotsymbol{\psi} \dotsymbol{\psi} \equiv (-\infty, 0) \dotsymbol{\psi} \dotsym$$

$$\mathbf{H} y' = \frac{1}{x} \Rightarrow y'' = -\frac{1}{x^2} < 0 \Rightarrow y = \ln x$$
 为凸.

例 2 判定函数  $y = x^3$  的凹凸性.

$$y' = 3x^2 \Rightarrow y'' = 6x \Rightarrow \begin{cases} 在(0, +\infty) \perp y'' > 0 \Rightarrow y \in [0, +\infty)$$
是凹  
在(-\infty, 0) \perp \frac{y''}{2} < 0



$$\mathbf{H} \ y' = \frac{1}{x} \Rightarrow y'' = -\frac{1}{x^2} < 0 \Rightarrow y = \ln x$$
 为凸.

例 2 判定函数  $y = x^3$  的凹凸性.

$$y' = 3x^2 \Rightarrow y'' = 6x \Rightarrow \begin{cases} 在(0, +\infty) \perp y'' > 0 \Rightarrow y \in [0, +\infty)$$
是凹  
 
$$+ (-\infty, 0) \perp y'' < 0 \Rightarrow y \in [-\infty, 0]$$
是凸



$$\mathbf{H} y' = \frac{1}{x} \Rightarrow y'' = -\frac{1}{x^2} < 0 \Rightarrow y = \ln x$$
 为凸.

例 2 判定函数  $y = x^3$  的凹凸性.

$$y' = 3x^2 \Rightarrow y'' = 6x \Rightarrow \begin{cases} 在(0, +\infty) \perp y'' > 0 \Rightarrow y$$
在[0, +∞)是凹  
在(-∞, 0)上 $y'' < 0 \Rightarrow y$ 在(-∞, 0]是凸

$$(x = 0$$
 称为拐点)



$$\mathbf{H} y' = \frac{1}{x} \Rightarrow y'' = -\frac{1}{x^2} < 0 \Rightarrow y = \ln x$$
 为凸.

例 2 判定函数  $y = x^3$  的凹凸性.

解

$$y' = 3x^2 \Rightarrow y'' = 6x \Rightarrow \begin{cases} 在(0, +\infty) \perp y'' > 0 \Rightarrow y \in [0, +\infty) \in \mathbb{Z} \\ -\infty, 0 \mid y'' < 0 \Rightarrow y \in (-\infty, 0) \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$(x=0$$
称为拐点)

定义 函数凹和凸的分界点称为拐点.

- (1) 求出满足f''(x) = 0的点;
- (2) 求出 f''(x) 不存在的点;

- (1) 求出满足f''(x) = 0的点;
- (2) 求出 f''(x) 不存在的点;
- (3) 设 $x_0$  是上述求出的点,若f'' 在 $x_0$  两侧的符号相反,则 $x_0$  是拐点.

- (1) 求出满足f''(x) = 0的点;
- (2) 求出 f''(x) 不存在的点;
- (3) 设 $x_0$  是上述求出的点,若f'' 在 $x_0$  两侧的符号相反,则 $x_0$  是拐点.

**例 1** 求函数  $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 14$  的拐点,及凹凸区间.

- (1) 求出满足f''(x) = 0的点;
- (2) 求出 f''(x) 不存在的点;
- (3) 设 $x_0$  是上述求出的点,若f'' 在 $x_0$  两侧的符号相反,则 $x_0$  是拐点.

**例 1** 求函数 
$$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 14$$
 的拐点,及凹凸区间.

$$\mathbf{p}' = 6x^2 + 6x - 12 \implies y'' = 12x + 6$$

- (1) 求出满足f''(x) = 0的点;
- (2) 求出 f''(x) 不存在的点;
- (3) 设 $x_0$  是上述求出的点,若f'' 在 $x_0$  两侧的符号相反,则 $x_0$  是拐点.

**例 1** 求函数 
$$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 14$$
 的拐点,及凹凸区间.

$$\mathbf{p}' = 6x^2 + 6x - 12 \implies \mathbf{y}'' = 12x + 6 = 0$$



- (1) 求出满足f''(x) = 0的点;
- (2) 求出 f''(x) 不存在的点;
- (3) 设 $x_0$  是上述求出的点,若f'' 在 $x_0$  两侧的符号相反,则 $x_0$  是拐点.

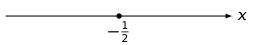
**例 1** 求函数 
$$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 14$$
 的拐点,及凹凸区间.

$$y' = 6x^2 + 6x - 12 \implies y'' = 12x + 6 = 0 \implies x = -\frac{1}{2}$$

- (1) 求出满足 f''(x) = 0 的点;
- (2) 求出 *f*"(x) 不存在的点;
- (3) 设 $x_0$  是上述求出的点,若f'' 在 $x_0$  两侧的符号相反,则 $x_0$  是拐点.

**例 1** 求函数 
$$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 14$$
 的拐点,及凹凸区间.

$$y' = 6x^2 + 6x - 12 \implies y'' = 12x + 6 = 0 \implies x = -\frac{1}{2}$$



- (1) 求出满足f''(x) = 0的点;
- (2) 求出 f''(x) 不存在的点;
- (3) 设 $x_0$  是上述求出的点,若f'' 在 $x_0$  两侧的符号相反,则 $x_0$  是拐点.

**例 1** 求函数 
$$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 14$$
 的拐点,及凹凸区间.

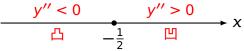
$$y' = 6x^2 + 6x - 12 \implies y'' = 12x + 6 = 0 \implies x = -\frac{1}{2}$$
  
 $y'' < 0 \qquad y'' > 0$ 



- (1) 求出满足f''(x) = 0的点;
- (2) 求出 f''(x) 不存在的点;
- (3) 设 $x_0$  是上述求出的点,若f'' 在 $x_0$  两侧的符号相反,则 $x_0$  是拐点.

**例 1** 求函数 
$$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 14$$
 的拐点,及凹凸区间.

$$\mathbf{p}'' = 6x^2 + 6x - 12 \implies y'' = 12x + 6 = 0 \implies x = -\frac{1}{2}$$
 $\mathbf{p}''' < 0 \qquad y''' > 0$ 



- (1) 求出满足 f''(x) = 0 的点;
- (2) 求出 f''(x) 不存在的点;
- (3) 设 $x_0$ 是上述求出的点,若f''在 $x_0$ 两侧的符号相反,则 $x_0$ 是拐点.

**例 1** 求函数  $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 14$  的拐点,及凹凸区间.

$$\frac{\mathbf{p}''}{\mathbf{p}'} = 6x^2 + 6x - 12 \quad \Rightarrow \quad y'' = 12x + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\mathbf{p}''' < 0}{\frac{1}{2}} \quad \frac{\mathbf{p}''' > 0}{\frac{1}{2}}$$

所以  $x = -\frac{1}{2}$  为拐点,在  $(-\infty, -\frac{1}{2}]$  上 y 是凸,在  $[-\frac{1}{2}, \infty)$  上 y 是凹.

- (1) 求出满足 f''(x) = 0 的点;
- (2) 求出 f''(x) 不存在的点;
- (3) 设 $x_0$  是上述求出的点,若f'' 在 $x_0$  两侧的符号相反,则 $x_0$  是拐点.

**例1** 求函数 
$$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 14$$
 的拐点,及凹凸区间.

$$\frac{\mathbf{ff}}{y' = 6x^2 + 6x - 12} \Rightarrow y'' = 12x + 6 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{y'' < 0}{\Box} \qquad \frac{y'' > 0}{-\frac{1}{2}} \qquad \Box$$

所以  $x = -\frac{1}{2}$  为拐点,在  $(-\infty, -\frac{1}{2}]$  上 y 是凸,在  $[-\frac{1}{2}, \infty)$  上 y 是凹.



$$y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \implies y'' = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$$



$$y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \implies y'' = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$$



$$y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \implies y'' = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$$

$$y'' > 0 \qquad y'' < 0$$
0



$$y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \implies y'' = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$$
 $y'' > 0 \qquad y'' < 0$ 
 $\square \qquad 0 \qquad \square$ 



解

$$y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow y'' = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$$

$$y'' > 0 \qquad y'' < 0$$

$$0 \qquad \triangle$$

所以 x = 0 为拐点,在  $(-\infty, 0]$  上 y 是凹,在  $[0, \infty)$  上 y 是凸.

解

$$y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \quad \Rightarrow \quad y'' = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$$

$$y'' > 0 \qquad \qquad y'' < 0$$

$$\square \qquad 0 \qquad \square$$

所以 x = 0 为拐点,在  $(-\infty, 0]$  上 y 是凹,在  $[0, \infty)$  上 y 是凸.

解

$$y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \quad \Rightarrow \quad y'' = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$$

$$y'' > 0 \qquad \qquad y'' < 0$$

$$\square \qquad 0 \qquad \square$$

所以 x = 0 为拐点,在  $(-\infty, 0]$  上 y 是凹,在  $[0, \infty)$  上 y 是凸.

$$y' = 4x^3 \quad \Rightarrow \quad y'' = 12x^2 = 0$$

解

$$y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \implies y'' = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$$
 $y'' > 0 \qquad y'' < 0$ 
 $\square \qquad 0 \qquad \square$ 

所以 x = 0 为拐点,在  $(-\infty, 0]$  上 y 是凹,在  $[0, \infty)$  上 y 是凸.

$$y' = 4x^3 \quad \Rightarrow \quad y'' = 12x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$



$$y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \implies y'' = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$$

$$y'' > 0 \qquad y'' < 0$$

$$0 \qquad D$$

所以 x = 0 为拐点,在  $(-\infty, 0]$  上 y 是凹,在  $[0, \infty)$  上 y 是凸.

$$y' = 4x^3 \quad \Rightarrow \quad y'' = 12x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$





$$y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \quad \Rightarrow \quad y'' = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$$

$$y'' > 0 \qquad \qquad y'' < 0$$

$$0 \qquad \triangle \qquad \qquad X$$

所以 x = 0 为拐点,在  $(-\infty, 0]$  上 y 是凹,在  $[0, \infty)$  上 y 是凸.

**例 3** 问函数 
$$y = x^4$$
 是否有拐点?

$$y' = 4x^3 \quad \Rightarrow \quad y'' = 12x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

$$y'' > 0 \qquad y'' > 0$$



$$y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \quad \Rightarrow \quad y'' = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$$

$$y'' > 0 \qquad \qquad y'' < 0$$

$$0 \qquad \Box \qquad X$$

所以 x = 0 为拐点,在  $(-\infty, 0]$  上 y 是凹,在  $[0, \infty)$  上 y 是凸.

 $v' = 4x^3 \Rightarrow v'' = 12x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ 

**例 3** 问函数 
$$y = x^4$$
 是否有拐点?

$$y'' > 0 \qquad y'' > 0$$

$$0 \qquad \square$$



解

$$y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \implies y'' = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$$

$$y'' > 0 \qquad y'' < 0$$

$$0 \qquad \triangle$$

**例 2** 求函数  $V = X^{\frac{1}{3}}$  的拐点,及凹凸区间.

所以 x = 0 为拐点,在  $(-\infty, 0]$  上 y 是凹,在  $[0, \infty)$  上 y 是凸.

例 3 问函数  $y = x^4$  是否有拐点?

$$y' = 4x^3 \quad \Rightarrow \quad y'' = 12x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

$$\frac{y'' > 0}{\square} \quad y'' > 0$$

点. v 没有拐点.

可见 y 在  $(-\infty, 0]$  上 y 是凹,在  $[0, \infty)$  上 y 是凹. 所以 x = 0 不是拐