§9.1 微分方程的基本概念

2017-2018 学年 II

Outline

微分方程

- 设 $y = f(x)$ 为未知函数，如下方程

$$\frac{dy}{dx} = y \sin x, \quad y' - 2xy + e^x = 0,$$

$$(y''')^4 - (y'')^2 = 5 - y, \ \ldots$$

都是所谓常微分方程

微分方程

- 设 $y = f(x)$ 为未知函数，如下方程

$$\frac{dy}{dx} = y\sin x, \quad y' - 2xy + e^x = 0,$$

$$(y''')^4 - (y'')^2 = 5 - y, \ \ldots$$

  都是所谓常微分方程

- 注 $xdy + ydx = 0$ 也是常微分方程

微分方程

- 设 $y=f(x)$ 为未知函数，如下方程

$$\frac{dy}{dx}=y\sin x, \quad y'-2xy+e^x=0,$$

$$(y''')^4-(y'')^2=5-y, \ \ldots$$

都是所谓常微分方程

- 注 $xdy+ydx=0$ 也是常微分方程：

$$xdy+ydx=0 \quad \Rightarrow \quad x\frac{dy}{dx}+y=0$$

微分方程

- 设 $y = f(x)$ 为未知函数，如下方程

$$\frac{dy}{dx} = y\sin x, \quad y' - 2xy + e^x = 0,$$

$$(y''')^4 - (y'')^2 = 5 - y, \ \ldots$$

  都是所谓常微分方程

- 注 $xdy + ydx = 0$ 也是常微分方程：

$$xdy + ydx = 0 \quad \Rightarrow \quad x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

- 实际问题 $\xrightarrow{\text{建模}}$ 微分方程 $\xrightarrow{\text{求解方程}}$ 实际问题

常微分方程

例 在理想实验条件下，任何时刻，培养皿中细菌的分裂速度与细菌数目成正比，比例常数 k 为正常数。问细菌数目随时间变化规律。

常微分方程

例 在理想实验条件下，任何时刻，培养皿中细菌的分裂速度与细菌数目成正比，比例常数 k 为正常数。问细菌数目随时间变化规律。

探讨 设 $y(t)$ 为 t 时刻细菌数目，

常微分方程

例 在理想实验条件下，任何时刻，培养皿中细菌的分裂速度与细菌数目成正比，比例常数 k 为正常数。问细菌数目随时间变化规律。

探讨 设 $y(t)$ 为 t 时刻细菌数目，则 $y'(t)$ 为细菌分裂速度，

常微分方程

例 在理想实验条件下，任何时刻，培养皿中细菌的分裂速度与细菌数目成正比，比例常数 k 为正常数。问细菌数目随时间变化规律。

探讨 设 $y(t)$ 为 t 时刻细菌数目，则 $y'(t)$ 为细菌分裂速度，并且

$$y'(t) = k \cdot y(t)$$

常微分方程

例 在理想实验条件下，任何时刻，培养皿中细菌的分裂速度与细菌数目成正比，比例常数 k 为正常数。问细菌数目随时间变化规律。

探讨 设 $y(t)$ 为 t 时刻细菌数目，则 $y'(t)$ 为细菌分裂速度，并且

$$y'(t) = k \cdot y(t)$$

如何求出 $y(t)$？

常微分方程的阶

- 常微分方程中，未知函数的导数的最高阶数称为微分方程的阶

例

常微分方程	阶数
$y' - 2xy^3 + e^x = 0$	
$(y''')^{400} - (y'')^2 + y' = 5e^x - y$	
$xdy + ydx = 0$	
$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 7x = 0$	

常微分方程的阶

- 常微分方程中，未知函数的导数的最高阶数称为微分方程的阶

例

常微分方程	阶数
$y' - 2xy^3 + e^x = 0$	1
$(y''')^{400} - (y'')^2 + y' = 5e^x - y$	
$xdy + ydx = 0$	
$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 7x = 0$	

常微分方程的阶

- 常微分方程中，未知函数的导数的最高阶数称为微分方程的阶

例

常微分方程	阶数
$y' - 2xy^3 + e^x = 0$	1
$(y''')^{400} - (y'')^2 + y' = 5e^x - y$	3
$xdy + ydx = 0$	
$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 7x = 0$	

常微分方程的阶

- 常微分方程中，未知函数的导数的最高阶数称为微分方程的阶

例

常微分方程	阶数
$y' - 2xy^3 + e^x = 0$	1
$(y''')^{400} - (y'')^2 + y' = 5e^x - y$	3
$xdy + ydx = 0$	1
$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 7x = 0$	

常微分方程的阶

- 常微分方程中，未知函数的导数的最高阶数称为**微分方程的阶**

例

常微分方程	阶数
$y' - 2xy^3 + e^x = 0$	1
$(y''')^{400} - (y'')^2 + y' = 5e^x - y$	3
$xdy + ydx = 0$	1
$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 7x = 0$	2

常微分方程的解 I

- 若一个函数代入常微分方程后，使方程成为恒等式，则称该函数为该微分方程的解

常微分方程的解 I

- 若一个函数代入常微分方程后，使方程成为恒等式，则称该函数为该微分方程的解

例 验证 $y = Ce^{3x}$ 是否微分方程 $\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ 的解，其中 C 为任意常数。

常微分方程的解 I

- 若一个函数代入常微分方程后，使方程成为恒等式，则称该函数为该微分方程的解

例 验证 $y = Ce^{3x}$ 是否微分方程 $\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ 的解，其中 C 为任意常数。

解 $$\frac{dy}{dx} - 3y$$

常微分方程的解 I

- 若一个函数代入常微分方程后，使方程成为恒等式，则称该函数为该微分方程的解

例 验证 $y = Ce^{3x}$ 是否微分方程 $\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ 的解，其中 C 为任意常数。

解
$$\frac{dy}{dx} - 3y = \left(Ce^{3x}\right)' - 3Ce^{3x} =$$

常微分方程的解 I

- 若一个函数代入常微分方程后，使方程成为恒等式，则称该函数为该微分方程的解

例 验证 $y = Ce^{3x}$ 是否微分方程 $\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ 的解，其中 C 为任意常数。

解
$$\frac{dy}{dx} - 3y = \left(Ce^{3x}\right)' - 3Ce^{3x} = C \cdot 3e^{3x} -$$

常微分方程的解 I

- 若一个函数代入常微分方程后，使方程成为恒等式，则称该函数为该微分方程的解

例 验证 $y = Ce^{3x}$ 是否微分方程 $\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ 的解，其中 C 为任意常数。

解

$$\frac{dy}{dx} - 3y = \left(Ce^{3x}\right)' - 3Ce^{3x} = C \cdot 3e^{3x} - 3Ce^{3x}$$

常微分方程的解 I

- 若一个函数代入常微分方程后，使方程成为恒等式，则称该函数为该微分方程的解

例 验证 $y = Ce^{3x}$ 是否微分方程 $\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ 的解，其中 C 为任意常数。

解
$$\frac{dy}{dx} - 3y = \left(Ce^{3x}\right)' - 3Ce^{3x} = C \cdot 3e^{3x} - 3Ce^{3x} = 0$$

常微分方程的解 I

- 若一个函数代入常微分方程后，使方程成为恒等式，则称该函数为该微分方程的解

例 验证 $y = Ce^{3x}$ 是否微分方程 $\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ 的解，其中 C 为任意常数。

解

$$\frac{dy}{dx} - 3y = \left(Ce^{3x}\right)' - 3Ce^{3x} = C \cdot 3e^{3x} - 3Ce^{3x} = 0$$

注 通常，满足微分方程的函数可以有很多。

常微分方程的解 I

- 若一个函数代入常微分方程后，使方程成为恒等式，则称该函数为该微分方程的解

例 验证 $y = Ce^{3x}$ 是否微分方程 $\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ 的解，其中 C 为任意常数。

解
$$\frac{dy}{dx} - 3y = \left(Ce^{3x}\right)' - 3Ce^{3x} = C \cdot 3e^{3x} - 3Ce^{3x} = 0$$

注 通常，满足微分方程的函数可以有很多。这时要对方程附加额外条件，才有可能得到唯一解。一般添加所谓“初始条件”。

常微分方程的解 I

- 若一个函数代入常微分方程后，使方程成为恒等式，则称该函数为该微分方程的解

例 验证 $y = Ce^{3x}$ 是否微分方程 $\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ 的解，其中 C 为任意常数。

解
$$\frac{dy}{dx} - 3y = \left(Ce^{3x}\right)' - 3Ce^{3x} = C \cdot 3e^{3x} - 3Ce^{3x} = 0$$

注 通常，满足微分方程的函数可以有很多。这时要对方程附加额外条件，才有可能得到唯一解。一般添加所谓“初始条件”。

例 求 $\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ 在初始条件 $y(0) = 2$ 下的解。

常微分方程的解 I

- 若一个函数代入常微分方程后，使方程成为恒等式，则称该函数为该微分方程的解

例 验证 $y = Ce^{3x}$ 是否微分方程 $\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ 的解，其中 C 为任意常数。

解
$$\frac{dy}{dx} - 3y = \left(Ce^{3x}\right)' - 3Ce^{3x} = C \cdot 3e^{3x} - 3Ce^{3x} = 0$$

注 通常，满足微分方程的函数可以有很多。这时要对方程附加额外条件，才有可能得到唯一解。一般添加所谓“初始条件”。

例 求 $\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ 在初始条件 $y(0) = 2$ 下的解。

解 已知 $y = Ce^{3x}$。

常微分方程的解 I

- 若一个函数代入常微分方程后，使方程成为恒等式，则称该函数为该微分方程的解

例 验证 $y = Ce^{3x}$ 是否微分方程 $\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ 的解，其中 C 为任意常数。

解
$$\frac{dy}{dx} - 3y = \left(Ce^{3x}\right)' - 3Ce^{3x} = C \cdot 3e^{3x} - 3Ce^{3x} = 0$$

注 通常，满足微分方程的函数可以有很多。这时要对方程附加额外条件，才有可能得到唯一解。一般添加所谓"初始条件"。

例 求 $\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ 在初始条件 $y(0) = 2$ 下的解。

解 已知 $y = Ce^{3x}$。将 $y(0) = 2$ 代入，得 $2 = C \cdot e^{3 \cdot 0} =$

常微分方程的解 I

- 若一个函数代入常微分方程后，使方程成为恒等式，则称该函数为该微分方程的解

例 验证 $y = Ce^{3x}$ 是否微分方程 $\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ 的解，其中 C 为任意常数。

解
$$\frac{dy}{dx} - 3y = \left(Ce^{3x}\right)' - 3Ce^{3x} = C \cdot 3e^{3x} - 3Ce^{3x} = 0$$

注 通常，满足微分方程的函数可以有很多。这时要对方程附加额外条件，才有可能得到唯一解。一般添加所谓“初始条件”。

例 求 $\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ 在初始条件 $y(0) = 2$ 下的解。

解 已知 $y = Ce^{3x}$。将 $y(0) = 2$ 代入，得 $2 = C \cdot e^{3 \cdot 0} = C$

常微分方程的解 I

- 若一个函数代入常微分方程后，使方程成为恒等式，则称该函数为该微分方程的解

例 验证 $y = Ce^{3x}$ 是否微分方程 $\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ 的解，其中 C 为任意常数。

解
$$\frac{dy}{dx} - 3y = \left(Ce^{3x}\right)' - 3Ce^{3x} = C \cdot 3e^{3x} - 3Ce^{3x} = 0$$

注 通常，满足微分方程的函数可以有很多。这时要对方程附加额外条件，才有可能得到唯一解。一般添加所谓“初始条件”。

例 求 $\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ 在初始条件 $y(0) = 2$ 下的解。

解 已知 $y = Ce^{3x}$。将 $y(0) = 2$ 代入，得 $2 = C \cdot e^{3 \cdot 0} = C$，所以 $y = 2e^{3x}$。

常微分方程的解 II

例 验证 $y = xe^x$ 是否微分方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 的解?

常微分方程的解 II

例 验证 $y = xe^x$ 是否微分方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 的解?

解

$$\because\ y' =$$

$$y'' =$$

$$\therefore\ y'' - 2y' + y =$$

常微分方程的解 II

例 验证 $y = xe^x$ 是否微分方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 的解?

解

$$\because\ y' = (xe^x)' =$$

$$y'' =$$

$$\therefore\ y'' - 2y' + y =$$

常微分方程的解 II

例 验证 $y = xe^x$ 是否微分方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 的解?

解

$$\because\ y' = (xe^x)' = e^x + xe^x$$

$$y'' =$$

$$\therefore\ y'' - 2y' + y =$$

常微分方程的解 II

例 验证 $y = xe^x$ 是否微分方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 的解?

解

$$\because\ y' = (xe^x)' = e^x + xe^x$$

$$y'' = (e^x + xe^x)' =$$

$$\therefore\ y'' - 2y' + y =$$

常微分方程的解 II

例 验证 $y = xe^x$ 是否微分方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 的解?

解

$$\because\ y' = (xe^x)' = e^x + xe^x$$

$$y'' = (e^x + xe^x)' = e^x + e^x + xe^x =$$

$$\therefore\ y'' - 2y' + y =$$

常微分方程的解 II

例 验证 $y = xe^x$ 是否微分方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 的解?

解

$$\because \; y' = (xe^x)' = e^x + xe^x$$

$$y'' = (e^x + xe^x)' = e^x + e^x + xe^x = 2e^x + xe^x$$

$$\therefore \; y'' - 2y' + y =$$

常微分方程的解 II

例 验证 $y = xe^x$ 是否微分方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 的解?

解

$$\because\ y' = (xe^x)' = e^x + xe^x$$

$$y'' = (e^x + xe^x)' = e^x + e^x + xe^x = 2e^x + xe^x$$

$$\therefore\ y'' - 2y' + y = (2e^x + xe^x) - 2(e^x + xe^x) + xe^x$$

常微分方程的解 II

例 验证 $y = xe^x$ 是否微分方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 的解?

解

$$\because\ y' = (xe^x)' = e^x + xe^x$$

$$y'' = (e^x + xe^x)' = e^x + e^x + xe^x = 2e^x + xe^x$$

$$\therefore\ y'' - 2y' + y = (2e^x + xe^x) - 2(e^x + xe^x) + xe^x = 0$$

常微分方程的解 II

例 验证 $y = xe^x$ 是否微分方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 的解?

解

$$\because\ y' = (xe^x)' = e^x + xe^x$$

$$y'' = (e^x + xe^x)' = e^x + e^x + xe^x = 2e^x + xe^x$$

$$\therefore\ y'' - 2y' + y = (2e^x + xe^x) - 2(e^x + xe^x) + xe^x = 0$$

所以 $y = xe^x$ 是微分方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 的解

常微分方程的解 III

例 验证 $y = c_1 x + c_2 x^2$ 是否微分方程 $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0$ 的解？其中 c_1，c_2 是任意常数

常微分方程的解 III

例 验证 $y = c_1 x + c_2 x^2$ 是否微分方程 $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0$ 的解？其中 c_1，c_2 是任意常数

解

$$\because\ y' =$$

$$y'' =$$

$$\therefore\ y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y =$$

常微分方程的解 III

例 验证 $y = c_1x + c_2x^2$ 是否微分方程 $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0$ 的解？其中 c_1, c_2 是任意常数

解

$$\because\ y' = (c_1x + c_2x^2)' =$$

$$y'' =$$

$$\therefore\ y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y =$$

例 验证 $y = c_1 x + c_2 x^2$ 是否微分方程 $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0$ 的解？其中 c_1, c_2 是任意常数

解

$$\because\ y' = (c_1 x + c_2 x^2)' = c_1 + 2c_2 x$$

$$y'' =$$

$$\therefore\ y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y =$$

常微分方程的解 III

例 验证 $y = c_1x + c_2x^2$ 是否微分方程 $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0$ 的解？其中 c_1，c_2 是任意常数

解

$$\because\ y' = (c_1x + c_2x^2)' = c_1 + 2c_2x$$

$$y'' = (c_1 + 2c_2x)' =$$

$$\therefore\ y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y =$$

常微分方程的解 III

例 验证 $y = c_1 x + c_2 x^2$ 是否微分方程 $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0$ 的解？其中 c_1, c_2 是任意常数

解

$$\because\ y' = (c_1 x + c_2 x^2)' = c_1 + 2c_2 x$$

$$y'' = (c_1 + 2c_2 x)' = 2c_2$$

$$\therefore\ y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y =$$

常微分方程的解 III

例 验证 $y = c_1x + c_2x^2$ 是否微分方程 $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0$ 的解？其中 c_1, c_2 是任意常数

解

$$\because\ y' = (c_1x + c_2x^2)' = c_1 + 2c_2x$$

$$y'' = (c_1 + 2c_2x)' = 2c_2$$

$$\therefore\ y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = (2c_2) - \frac{2}{x}(c_1 + 2c_2x) + \frac{2}{x^2}(c_1x + c_2x^2)$$

常微分方程的解 III

例 验证 $y = c_1x + c_2x^2$ 是否微分方程 $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0$ 的解？其中 c_1，c_2 是任意常数

解

$$\because\ y' = (c_1x + c_2x^2)' = c_1 + 2c_2x$$

$$y'' = (c_1 + 2c_2x)' = 2c_2$$

$$\begin{aligned}\therefore\ y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y &= (2c_2) - \frac{2}{x}(c_1 + 2c_2x) + \frac{2}{x^2}(c_1x + c_2x^2)\\ &= 2c_2 - \frac{2c_1}{x} - 4c_2 + \frac{2c_1}{x} + 2c_2\end{aligned}$$

常微分方程的解 III

例 验证 $y = c_1x + c_2x^2$ 是否微分方程 $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0$ 的解？其中 c_1，c_2 是任意常数

解

$$\because\ y' = (c_1x + c_2x^2)' = c_1 + 2c_2x$$

$$y'' = (c_1 + 2c_2x)' = 2c_2$$

$$\therefore\ y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = (2c_2) - \frac{2}{x}(c_1 + 2c_2x) + \frac{2}{x^2}(c_1x + c_2x^2)$$

$$= 2c_2 - \frac{2c_1}{x} - 4c_2 + \frac{2c_1}{x} + 2c_2 = 0$$

常微分方程的解 III

例 验证 $y = c_1x + c_2x^2$ 是否微分方程 $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0$ 的解？其中 c_1, c_2 是任意常数

解

$$\because\ y' = (c_1x + c_2x^2)' = c_1 + 2c_2x$$

$$y'' = (c_1 + 2c_2x)' = 2c_2$$

$$\therefore\ y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = (2c_2) - \frac{2}{x}(c_1 + 2c_2x) + \frac{2}{x^2}(c_1x + c_2x^2)$$

$$= 2c_2 - \frac{2c_1}{x} - 4c_2 + \frac{2c_1}{x} + 2c_2 = 0$$

所以 $y = c_1x + c_2x^2$ 是微分方程 $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0$ 的解

常微分方程的解 IV

比较：

1. $y = Ce^{3x}$ 是 $y' - 3y = 0$ 的解
2. $y = xe^{x}$ 是 $y'' - 2y' + y = 0$ 的解
3. $y = c_1 x + c_2 x^2$ 是 $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0$ 的解

常微分方程的解 IV

- 如果常微分方程的解含有相互独立的任意常数，且数目与常微分方程的阶相同，则称此解是微分方程的通解

比较：

1. $y = Ce^{3x}$ 是 $y' - 3y = 0$ 的解
2. $y = xe^{x}$ 是 $y'' - 2y' + y = 0$ 的解
3. $y = c_1 x + c_2 x^2$ 是 $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0$ 的解

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

常微分方程的解 IV

- 如果常微分方程的解含有相互独立的任意常数，且数目与常微分方程的阶相同，则称此解是微分方程的通解
- 如果常微分方程的解不包含有任意取值的常数，则称此解是微分方程的特解

比较：

1. $y = Ce^{3x}$ 是 $y' - 3y = 0$ 的解
2. $y = xe^{x}$ 是 $y'' - 2y' + y = 0$ 的解
3. $y = c_1x + c_2x^2$ 是 $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0$ 的解

常微分方程的解 IV

- 如果常微分方程的解含有相互独立的任意常数，且数目与常微分方程的阶相同，则称此解是微分方程的通解
- 如果常微分方程的解不包含有任意取值的常数，则称此解是微分方程的特解

比较：

1. $y = Ce^{3x}$ 是 $y' - 3y = 0$ 的解（通解）
2. $y = xe^{x}$ 是 $y'' - 2y' + y = 0$ 的解
3. $y = c_1 x + c_2 x^2$ 是 $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0$ 的解

常微分方程的解 IV

- 如果常微分方程的解含有相互独立的任意常数，且数目与常微分方程的阶相同，则称此解是微分方程的通解
- 如果常微分方程的解不包含有任意取值的常数，则称此解是微分方程的特解

比较：

1. $y = Ce^{3x}$ 是 $y' - 3y = 0$ 的解（通解），$y = 2e^{3x}$ 是特解
2. $y = xe^{x}$ 是 $y'' - 2y' + y = 0$ 的解
3. $y = c_1x + c_2x^2$ 是 $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0$ 的解

常微分方程的解 IV

- 如果常微分方程的解含有相互独立的任意常数，且数目与常微分方程的阶相同，则称此解是微分方程的通解
- 如果常微分方程的解不包含有任意取值的常数，则称此解是微分方程的特解

比较：

1. $y = Ce^{3x}$ 是 $y' - 3y = 0$ 的解（通解），$y = 2e^{3x}$ 是特解
2. $y = xe^{x}$ 是 $y'' - 2y' + y = 0$ 的解（特解）
3. $y = c_1 x + c_2 x^2$ 是 $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0$ 的解

常微分方程的解 IV

- 如果常微分方程的解含有相互独立的任意常数，且数目与常微分方程的阶相同，则称此解是微分方程的通解
- 如果常微分方程的解不包含有任意取值的常数，则称此解是微分方程的特解

比较：

1. $y = Ce^{3x}$ 是 $y' - 3y = 0$ 的解（通解），$y = 2e^{3x}$ 是特解
2. $y = xe^{x}$ 是 $y'' - 2y' + y = 0$ 的解（特解）
3. $y = c_1x + c_2x^2$ 是 $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0$ 的解（通解）

常微分方程的解 IV

- 如果常微分方程的解含有相互独立的任意常数，且数目与常微分方程的阶相同，则称此解是微分方程的通解
- 如果常微分方程的解不包含有任意取值的常数，则称此解是微分方程的特解

比较：

1. $y = Ce^{3x}$ 是 $y' - 3y = 0$ 的解（通解），$y = 2e^{3x}$ 是特解
2. $y = xe^{x}$ 是 $y'' - 2y' + y = 0$ 的解（特解）
3. $y = c_1 x + c_2 x^2$ 是 $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0$ 的解（通解）

注 通常，添加初始条件后，可确定出通解中的常数，从而得出特解。