# §3.5 线性方程组解的结构

数学系 梁卓滨

2018 - 2019 学年上学期





例解齐次线性方程组:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

例解齐次线性方程组: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

例 解齐次线性方程组: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

⇒ 
$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta g}}$$
  $\overline{\eta g}$ 

例 解齐次线性方程组: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta} \neq \emptyset} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\text{treph}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

例 解齐次线性方程组: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A : 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta g}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

自由变量 *X*3, *X*4



⇒ 
$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta g}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$
  $r(A) = 2$ 
⇒  $\begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$   $\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$ 

例 解齐次线性方程组: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta g}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{cases}$$
自由变量

例 解齐次线性方程组: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

⇒ 
$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta} \neq +} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$
  $r(A) = 2$ 

⇒  $\begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{cases}$  ⇒  $\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{cases}$  自由变量

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - & x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

 $X_3, X_4$ 

$$\Rightarrow (A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\text{figh}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \qquad \text{althous}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_3 = x_3 = x_3 = x_3 = x_4 \\ x_3 = x_3 = x_3 = x_4 = x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 = x_3 = x_4 = x_3 = x_4 = x_3 = x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \\ x_2 = \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$

⇒ 
$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta} \neq +} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \xrightarrow{\text{Elinos}} \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$



$$\Rightarrow (A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{iffigh}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \qquad \text{and} \qquad \text{and$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$



⇒ 
$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\eta \neq +} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

⇒  $\begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$  ⇒  $\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$  \text{\text{eligible}}

\[
\begin{align\*}
\text{(\$x\_1 = -2c\_1 + 3c\_2 \\ \$x\_2 = c\_1 - 2c\_2 \end{align\*}}
\]

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$



$$\Rightarrow (A : 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\eta \not \Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \xrightarrow{\text{above}} \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 - 2c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 = c_1 - 2c_2 \\ x_4 = c_1 - 2c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 = c_1 - 2c_2 \\ x_4 = c_1 - 2c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 = c_1 - 2c_2 \\ x_4 = c_1 - 2c_2 \\ x_4 = c_1 - 2c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 = c_1 - 2c_2 \\ x_4 = c_1 - 2c_2 \\ x_5 = c_1 -$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c_1 \\ c_1 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3c_2 \\ -2c_2 \\ 0 \\ c_2 \end{pmatrix}$$



$$\Rightarrow (A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\text{tigh}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \xrightarrow{\text{eline}} \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$\Rightarrow (A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta} \not \oplus} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \qquad \stackrel{\text{自由变量}}{\underset{X_3, X_4}{}}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = x_3 - 2c_1 \end{cases} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 = x_3 - 2c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$



$$\Rightarrow (A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{\overline{A794}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - & x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 & \text{ 自由变量} \\ x_2 = x_3 - 2x_4 & x_3, x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$$



例 解齐次线性方程组: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\text{freph}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$$

 $\xi_1$ ,  $\xi_2$ 基础解系



例 解齐次线性方程组:  $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ 

$$\Rightarrow (A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\text{freph}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

⇒ 
$$\begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - & x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$
 ⇒  $\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$  \text{\text{\text{\text{along}}}} \text{\text{\text{\text{\$\

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

 $\Rightarrow x = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$ 

 $\xi_1$ ,  $\xi_2$ 基础解系

例 解齐次线性方程组: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta \oplus \phi}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

例解齐次线性方程组: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta g}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

自由变量 *X*<sub>2</sub>, *X*<sub>4</sub>



例解齐次线性方程组: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

⇒ 
$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta} \neq +} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$
  $r(A) = 2$ 

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 & + x_4 = 0 \end{cases}$$
 自由变量

 $X_2, X_4$ 

例解齐次线性方程组: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

⇒ 
$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta g}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$
  $r(A) = 2$ 

⇒  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 & + x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$   $\exists \text{big} \Xi$ 



例 解齐次线性方程组: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

⇒ 
$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta} \not \oplus} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 & + x_4 = 0 \\ - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \qquad \text{自由变量}$$

$$\Rightarrow (A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta} \not \oplus} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 & + x_4 = 0 \\ - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \qquad \text{lenge}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$



$$\Rightarrow (A : 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\eta \not \Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 & + x_4 = 0 \\ - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \qquad \text{althous}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A : 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta} \not \oplus} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 & + x_4 = 0 \\ - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \qquad \text{althous}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_1 + 2c_2 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$



$$\Rightarrow (A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{figh}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{1} + 2x_{2} & + x_{4} = 0 \\ - x_{2} + x_{3} - 2x_{4} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} = -2x_{2} - x_{4} \\ x_{3} = x_{2} + 2x_{4} \end{cases} \qquad \text{althouse}$$

$$\begin{cases} x_{1} = -2c_{1} - c_{2} \\ x_{2} = c_{1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_1 + 2c_2 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$



例 解齐次线性方程组: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta} \not \oplus} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 & + x_4 = 0 \\ - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \qquad \text{in the properties of the prop$$

例解齐次线性方程组: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A : 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta} \not \oplus} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 & + x_4 = 0 \\ - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \qquad \stackrel{\text{althouse}}{\underset{x_1}{\text{althouse}}} \qquad \underset{x_2}{\text{althouse}} \qquad \underset{x_2}{\text{althouse}} \qquad \underset{x_3}{\text{althouse}} \qquad \underset{x_4}{\text{althouse}} \qquad \underset{x$$

$$\Rightarrow (A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\eta \not \Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 & + x_4 = 0 \\ - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \qquad \text{alimbel}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_1 + 2c_2 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x \end{cases} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$



$$\Rightarrow (A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta} \not\cong \bigoplus} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases}$$
 \text{\text{\text{\text{bigs}}}} \text{\text{\text{\$\$\text{\$\exititt{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\tex{\$\$\text{\$\text{\$\tex{\$\$\text{\$\text{\$\tex{\$\$\text{\$\text{\$\$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_1 + 2c_2 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$$



例解齐次线性方程组:  $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ 

$$\Rightarrow (A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta} \not \oplus} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases}$$
 \text{\text{\text{bin \text{\$\sigma\_2\$}}} \text{\text{\text{\$\sigma\_2\$}}} \text{\text{\$\sigma\_2\$}}

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_1 + 2c_2 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ \xi_2 \end{cases}$$

 $\Rightarrow x = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$ 

 $\xi_1$ ,  $\xi_2$ 基础解系

例解齐次线性方程组: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta} \neq +} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases}$$
 \text{\text{\text{\text{bigs}}}} \text{\text{\text{\$\crim{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\}\exitt{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\tex{\$\$\text{\$\e

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_1 + 2c_2 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$$

 $\xi_1$ ,  $\xi_2$ 基础解系

### 齐次线性方程组的基础解系

定义 如果  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ , ...,  $\xi_s$  是齐次线性方程组

Ax = 0

的解,线性无关,并且任意解均可表示成它们的线性组合,则称

$$\xi_1,\,\xi_2,\,\ldots,\,\xi_s$$

是齐次方程组的一个基础解系。

### 齐次线性方程组的基础解系

定义 如果  $ξ_1$ ,  $ξ_2$ , ...,  $ξ_s$  是齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

的解,线性无关,并且任意解均可表示成它们的线性组合,则称

$$\xi_1, \, \xi_2, \, \ldots, \, \xi_s$$

是齐次方程组的一个基础解系。

### 定理 若齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

满足

$$r(A) = r < n$$

则方程组的基础解系存在,且每个基础解系恰恰有 n-r 个向量组成:

$$\xi_1, \, \xi_2, \, \ldots, \, \xi_s, \, (s = n - r)$$



### 齐次线性方程组的基础解系

定义 如果  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ , ...,  $\xi_s$  是齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

的解,线性无关,并且任意解均可表示成它们的线性组合,则称

$$\xi_1,\,\xi_2,\,\ldots,\,\xi_s$$

是齐次方程组的一个基础解系。

### 定理 若齐次线性方程组

满足

$$Ax = 0$$

$$r(A) = r < n$$

也是自由变量个数

则方程组的基础解系存在,且每个基础解系恰恰有<mark>\_n-r</mark>\_个向量组成:

$$\xi_1, \, \xi_2, \, \ldots, \, \xi_s, \, (s = n - r)$$

# 齐次线性方程组的基础解系

定义 如果  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ , ...,  $\xi_s$  是齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

的解,线性无关,并且任意解均可表示成它们的线性组合,则称

$$\xi_1,\,\xi_2,\,\ldots,\,\xi_s$$

是齐次方程组的一个基础解系。

定理 若齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

满足

$$r(A) = r < n$$

也是自由变量个数

则方程组的基础解系存在,且每个基础解系恰恰有<mark>\_n-r\_</mark>个向量组成:

$$\xi_1, \, \xi_2, \, \ldots, \, \xi_s, \qquad (s=n-r)$$

并且,方程组的任意解x,均可由基础解系线性表示:

$$x = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_s \xi_s$$



- 1. (A:0) <sup>初等行变换</sup> 简化的阶梯型矩阵;
- 2. 确定自由变量, 写出同解的方程组;
- 3. 求基础解系:

4. 通解就是:基础解系的线性组合

- 1. (A:0) <sup>初等行变换</sup> 简化的阶梯型矩阵;
- 2. 确定自由变量, 写出同解的方程组;
- 3. 求基础解系:
  - 将一个自由变量取值为 1, 其余取 0, 得到一个解向量;
  - 对所有 n-r(A) 个自由变量作类似操作,便得 n-r(A) 个解向量,构成基础解系
- 4. 通解就是:基础解系的线性组合



- 1. (A:0) <sup>初等行变换</sup> 简化的阶梯型矩阵;
- 2. 确定自由变量, 写出同解的方程组;
- 3. 求基础解系:
  - 将一个自由变量取值为 1, 其余取 0, 得到一个解向量;
  - 对所有 n-r(A) 个自由变量作类似操作,便得 n-r(A) 个解向量,构成基础解系
- 4. 通解就是:基础解系的线性组合

- 1. 假设自由变量为 X<sub>3</sub>, X<sub>4</sub>
- 2. 求得同解方程组为  $\begin{cases} x_1 & 2x_3-3x_4=0\\ x_2-x_3+2x_4=0 \end{cases}$

- 1. (A:0) <sup>初等行变换</sup> 简化的阶梯型矩阵;
- 2. 确定自由变量, 写出同解的方程组;
- 3. 求基础解系:
  - 将一个自由变量取值为 1, 其余取 0, 得到一个解向量;
  - 对所有 n-r(A) 个自由变量作类似操作,便得 n-r(A) 个解向量,构成基础解系
- 4. 通解就是:基础解系的线性组合

- 1. 假设自由变量为 X<sub>3</sub>, X<sub>4</sub>
- 2. 求得同解方程组为  $\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 2x_4 \end{cases}$

- 1. (A:0) <sup>初等行变换</sup> 简化的阶梯型矩阵;
- 2. 确定自由变量, 写出同解的方程组;
- 3. 求基础解系:
  - 将一个自由变量取值为 1, 其余取 0, 得到一个解向量;
  - 对所有 n-r(A) 个自由变量作类似操作,便得 n-r(A) 个解向量,构成基础解系
- 4. 通解就是:基础解系的线性组合

- 1. 假设自由变量为 x<sub>3</sub>, x<sub>4</sub>
- 2. 求得同解方程组为  $\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 2x_4 \end{cases}$

3. 基础解系 
$$\xi_1$$
,  $\xi_2$ :  $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 

- 1. (A:0) <sup>初等行变换</sup> 简化的阶梯型矩阵;
- 2. 确定自由变量,写出同解的方程组;
- 3. 求基础解系:
  - 将一个自由变量取值为 1, 其余取 0, 得到一个解向量;
  - 对所有 n-r(A) 个自由变量作类似操作,便得 n-r(A) 个解向量,构成基础解系
- 4. 通解就是:基础解系的线性组合

- 1. 假设自由变量为 x<sub>3</sub>, x<sub>4</sub>
- 2. 求得同解方程组为  $\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 2x_4 \end{cases}$

3. 基础解系 
$$\xi_1$$
,  $\xi_2$ :  $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 



- 1. (A:0) <sup>初等行变换</sup> 简化的阶梯型矩阵;
- 2. 确定自由变量, 写出同解的方程组;
- 3. 求基础解系:
  - 将一个自由变量取值为 1, 其余取 0, 得到一个解向量;
  - 对所有 n-r(A) 个自由变量作类似操作,便得 n-r(A) 个解向量,构成基础解系
- 4. 通解就是:基础解系的线性组合

- 1. 假设自由变量为 x<sub>3</sub>, x<sub>4</sub>
- 2. 求得同解方程组为  $\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 2x_4 \end{cases}$

3. 基础解系 
$$\xi_1$$
,  $\xi_2$ :  $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 



- 1. (A:0) <sup>初等行变换</sup> 简化的阶梯型矩阵;
- 2. 确定自由变量, 写出同解的方程组;
- 3. 求基础解系:
  - 将一个自由变量取值为 1, 其余取 0, 得到一个解向量;
  - 对所有 n-r(A) 个自由变量作类似操作,便得 n-r(A) 个解向量,构成基础解系
- 4. 通解就是:基础解系的线性组合

- 1. 假设自由变量为 x<sub>3</sub>, x<sub>4</sub>
- 2. 求得同解方程组为  $\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 2x_4 \end{cases}$

3. 基础解系 
$$\xi_1$$
,  $\xi_2$ :  $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 



- 1. (A:0) <sup>初等行变换</sup> 简化的阶梯型矩阵;
- 2. 确定自由变量, 写出同解的方程组;
- 3. 求基础解系:
  - 将一个自由变量取值为 1, 其余取 0, 得到一个解向量;
  - 对所有 n-r(A) 个自由变量作类似操作,便得 n-r(A) 个解向量,构成基础解系
- 4. 通解就是:基础解系的线性组合

- 1. 假设自由变量为 x<sub>3</sub>, x<sub>4</sub>
- 2. 求得同解方程组为  $\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 2x_4 \end{cases}$

3. 基础解系 
$$\xi_1$$
,  $\xi_2$ :  $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 



- 1. (A:0) <sup>初等行变换</sup> 简化的阶梯型矩阵;
- 2. 确定自由变量,写出同解的方程组;
- 3. 求基础解系:
  - 将一个自由变量取值为 1, 其余取 0, 得到一个解向量;
  - 对所有 n − r(A) 个自由变量作类似操作,便得 n − r(A) 个解向量,构成基础解系
- 4. 通解就是:基础解系的线性组合

#### 例

- 1. 假设自由变量为 *x*<sub>3</sub>, *x*<sub>4</sub>
- 2. 求得同解方程组为  $\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 2x_4 \end{cases}$

3. 基础解系 
$$\xi_1$$
,  $\xi_2$ :  $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 

4. 通解:  $x = c_1\xi_1 + c_2\xi_2$ 



$$(A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \frac{r_2 - 2r_1}{r_3 - 3r_1}$$

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

例 1 用基础解系表示 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$
的通解 
$$3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 7x_4 = 0$$

$$(A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$r_1-r_2$$

例 1 用基础解系表示 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$
的通解 
$$3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 7x_4 = 0$$

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 - r_2}_{r_3 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



例 1 用基础解系表示 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$
的通解 
$$3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 7x_4 = 0$$

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

自由变量 $X_3, X_4$ ,

例 1 用基础解系表示 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$
的通解 
$$3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 7x_4 = 0$$

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

自由变量  $x_3$ ,  $x_4$ , 所以同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + & 7x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$$

例 1 用基础解系表示 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$
的通解 
$$3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 7x_4 = 0$$

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

自由变量  $x_3$ ,  $x_4$  , 所以同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + & 7x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$



例 1 用基础解系表示 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$
的通解 
$$3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 7x_4 = 0$$

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[r_3 - 2r_2]{r_3 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

自由变量  $x_3$ ,  $x_4$  , 所以同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + & 7x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -7x_3 + 4x_4 \\ x_2 = 3x_3 - x_4 \end{cases}$$



例 1 用基础解系表示 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$
的通解 
$$3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 7x_4 = 0$$

$$(A:0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

1. 自由变量 
$$x_3$$
,  $x_4$ , 同解方程组  $\begin{cases} x_1 = -7x_3 + 4x_4 \\ x_2 = 3x_3 - x_4 \end{cases}$ 



例 1 用基础解系表示 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$
的通解 
$$3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 7x_4 = 0$$

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. 自由变量 
$$x_3$$
,  $x_4$ , 同解方程组  $\begin{cases} x_1 = -7x_3 + 4x_4 \\ x_2 = 3x_3 - x_4 \end{cases}$ 

2. 基础解系 ξ1, ξ2:



例 1 用基础解系表示 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$
的通解 
$$3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 7x_4 = 0$$

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. 自由变量 
$$x_3$$
,  $x_4$ , 同解方程组  $\begin{cases} x_1 = -7x_3 + 4x_4 \\ x_2 = 3x_3 - x_4 \end{cases}$ 

2. 基础解系 
$$\xi_1$$
,  $\xi_2$ :  $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 



例 1 用基础解系表示 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$
的通解 
$$3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 7x_4 = 0$$

$$(A:0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

1. 自由变量 
$$x_3$$
,  $x_4$ , 同解方程组  $\begin{cases} x_1 = -7x_3 + 4x_4 \\ x_2 = 3x_3 - x_4 \end{cases}$ 

2. 基础解系 
$$\xi_1$$
,  $\xi_2$ :  $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 

例 1 用基础解系表示 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$
的通解 
$$3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 7x_4 = 0$$

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. 自由变量 
$$x_3$$
,  $x_4$ , 同解方程组  $\begin{cases} x_1 = -7x_3 + 4x_4 \\ x_2 = 3x_3 - x_4 \end{cases}$ 

2. 基础解系 
$$\xi_1$$
,  $\xi_2$ :  $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 

例 1 用基础解系表示 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$
的通解 
$$3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 7x_4 = 0$$

$$(A:0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

1. 自由变量 
$$x_3$$
,  $x_4$ , 同解方程组  $\begin{cases} x_1 = -7x_3 + 4x_4 \\ x_2 = 3x_3 - x_4 \end{cases}$ 

2. 基础解系 
$$\xi_1$$
,  $\xi_2$ :  $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 

例 1 用基础解系表示 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$
的通解 
$$3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 7x_4 = 0$$

$$(A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. 自由变量 
$$x_3$$
,  $x_4$ , 同解方程组  $\begin{cases} x_1 = -7x_3 + 4x_4 \\ x_2 = 3x_3 - x_4 \end{cases}$ 

2. 基础解系 
$$\xi_1$$
,  $\xi_2$ :  $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 

例 1 用基础解系表示 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$
的通解 
$$3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 7x_4 = 0$$

$$(A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. 自由变量 
$$x_3$$
,  $x_4$ , 同解方程组  $\begin{cases} x_1 = -7x_3 + 4x_4 \\ x_2 = 3x_3 - x_4 \end{cases}$ 

2. 基础解系 
$$\xi_1$$
,  $\xi_2$ :  $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 

3. 通解:  $x = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$ 

$$(A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{pmatrix}$$



$$(A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \xrightarrow{r_3 - 3r_1}$$



$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$



$$(A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$r_1 + r_2$$



例 2 用基础解系表示  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 7x_4 = 0 \text{ 的通解} \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 - 11x_4 = 0 \end{cases}$ 

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_2]{r_1+r_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

例 2 用基础解系表示 
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 7x_4 = 0 \text{ 的通解} \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 - 11x_4 = 0 \end{cases}$$

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

自由变量  $x_2, x_4$ ,

例 2 用基础解系表示 
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 7x_4 = 0 \text{ 的通解} \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 - 11x_4 = 0 \end{cases}$$

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_2]{r_1+r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

自由变量  $x_2$ ,  $x_4$ , 所以同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_4 = 0 \end{cases}$$

例 2 用基础解系表示 
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 7x_4 = 0 \text{ 的通解} \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 - 11x_4 = 0 \end{cases}$$

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_2]{\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}}$$

自由变量  $x_2$ ,  $x_4$ , 所以同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

例 2 用基础解系表示  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 7x_4 = 0 \text{ 的通解} \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 - 11x_4 = 0 \end{cases}$ 

解

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_2]{\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}}$$

自由变量  $x_2$ ,  $x_4$ , 所以同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 & -4x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$$



例 2 用基础解系表示 
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$$
的通解 
$$3x_1 + 6x_2 - x_3 - 11x_4 = 0$$

$$(A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. 自由变量 
$$x_2$$
,  $x_4$ , 同解方程组  $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$ 



例 2 用基础解系表示 
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$$
的通解 
$$3x_1 + 6x_2 - x_3 - 11x_4 = 0$$

$$(A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. 自由变量 
$$x_2$$
,  $x_4$ , 同解方程组  $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$ 

2. 基础解系 ξ1, ξ2:



例 2 用基础解系表示 
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$$
的通解 
$$3x_1 + 6x_2 - x_3 - 11x_4 = 0$$

$$(A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. 自由变量 
$$x_2$$
,  $x_4$ , 同解方程组  $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$ 

2. 基础解系 
$$\xi_1$$
,  $\xi_2$ :  $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 



例 2 用基础解系表示 
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$$
的通解 
$$3x_1 + 6x_2 - x_3 - 11x_4 = 0$$

$$(A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & | & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & | & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & | & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

- 1. 自由变量  $x_2$ ,  $x_4$ , 同解方程组  $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$
- 2. 基础解系  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ :  $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$



例 2 用基础解系表示 
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$$
的通解 
$$3x_1 + 6x_2 - x_3 - 11x_4 = 0$$

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & | & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & | & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & | & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

1. 自由变量 
$$x_2$$
,  $x_4$ , 同解方程组  $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$ 

2. 基础解系 
$$\xi_1$$
,  $\xi_2$ :  $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 



例 2 用基础解系表示 
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$$
的通解 
$$3x_1 + 6x_2 - x_3 - 11x_4 = 0$$

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & | & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & | & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & | & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

- 1. 自由变量  $x_2$ ,  $x_4$ , 同解方程组  $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$
- 2. 基础解系  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ :  $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



例 2 用基础解系表示 
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$$
的通解 
$$3x_1 + 6x_2 - x_3 - 11x_4 = 0$$

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & | & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & | & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & | & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

1. 自由变量 
$$x_2$$
,  $x_4$ , 同解方程组  $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$ 

2. 基础解系 
$$\xi_1$$
,  $\xi_2$ :  $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 



例 2 用基础解系表示 
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$$
的通解 
$$3x_1 + 6x_2 - x_3 - 11x_4 = 0$$

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & | & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & | & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & | & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

1. 自由变量 
$$x_2$$
,  $x_4$ , 同解方程组  $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$ 

2. 基础解系 
$$\xi_1$$
,  $\xi_2$ :  $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 



例 2 用基础解系表示  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$ 的通解  $3x_1 + 6x_2 - x_3 - 11x_4 = 0$ 

$$(A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 1. 自由变量  $x_2$ ,  $x_4$ , 同解方程组  $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$
- 2. 基础解系  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ :  $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- 3. 通解:  $x = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$



$$Ax = 0$$

的解有下列性质:

1. 若  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  是解, 则  $\xi_1 + \xi_2$  也是解

$$Ax = 0$$

- 1. 若  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  是解, 则  $\xi_1 + \xi_2$  也是解
- 2. 若 ξ 是解,则对  $\forall c \in \mathbb{R}$ , cξ 也是解

$$Ax = 0$$

- 1. 若  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  是解, 则  $\xi_1 + \xi_2$  也是解
- 2. 若 ξ 是解,则对  $\forall c \in \mathbb{R}$ , cξ 也是解
- 3. 更一般地,若  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ , ...,  $\xi_s$  是解, $c_1$ ,  $c_2$ , ...,  $c_s$  是任意常数,则解的线性组合

也是解 
$$\xi = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_s \xi_s$$

$$Ax = 0$$

#### 的解有下列性质:

- 1. 若  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  是解, 则  $\xi_1 + \xi_2$  也是解
- 2. 若 ξ 是解,则对  $\forall c \in \mathbb{R}$ , cξ 也是解
- 3. 更一般地,若  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ , ...,  $\xi_s$  是解, $c_1$ ,  $c_2$ , ...,  $c_s$  是任意常数,则解的线性组合

$$\xi = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_s \xi_s$$

证明

Αξ

$$Ax = 0$$

#### 的解有下列性质:

- 1. 若  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  是解, 则  $\xi_1 + \xi_2$  也是解
- 2. 若 ξ 是解,则对  $\forall c \in \mathbb{R}$ , cξ 也是解
- 3. 更一般地,若  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ , ...,  $\xi_s$  是解, $c_1$ ,  $c_2$ , ...,  $c_s$  是任意常数,则解的线性组合

也是解 
$$\xi = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_s \xi_s$$
$$A\xi = A(c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_s \xi_s)$$

证明



$$Ax = 0$$

- 1. 若  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  是解, 则  $\xi_1 + \xi_2$  也是解
- 2. 若 ξ 是解,则对  $\forall c \in \mathbb{R}$ , cξ 也是解
- 3. 更一般地,若  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ , ...,  $\xi_s$  是解, $c_1$ ,  $c_2$ , ...,  $c_s$  是任意常数,则解的线性组合

$$\xi = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_s \xi_s$$

$$A\xi = A(c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \dots + c_s\xi_s)$$
$$= c_1A\xi_1 + c_2A\xi_2 + \dots + c_sA\xi_s$$



$$Ax = 0$$

- 1. 若  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  是解, 则  $\xi_1 + \xi_2$  也是解
- 2. 若 ξ 是解,则对  $\forall c \in \mathbb{R}$ , cξ 也是解
- 3. 更一般地,若  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ , ...,  $\xi_s$  是解, $c_1$ ,  $c_2$ , ...,  $c_s$  是任意常数,则解的线性组合

$$\xi = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_s \xi_s$$

$$A\xi = A(c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \dots + c_s\xi_s)$$

$$= c_1A\xi_1 + c_2A\xi_2 + \dots + c_sA\xi_s$$

$$= c_10 + c_20 + \dots + c_s0$$

$$Ax = 0$$

- 1. 若  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  是解, 则  $\xi_1$  +  $\xi_2$  也是解
- 2. 若 ξ 是解,则对  $\forall c \in \mathbb{R}$ , cξ 也是解
- 3. 更一般地,若  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ , ...,  $\xi_s$  是解, $c_1$ ,  $c_2$ , ...,  $c_s$  是任意常数,则解的线性组合

$$\xi = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_s \xi_s$$

$$A\xi = A(c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \dots + c_s\xi_s)$$

$$= c_1A\xi_1 + c_2A\xi_2 + \dots + c_sA\xi_s$$

$$= c_10 + c_20 + \dots + c_s0 = 0$$

- 1.  $\xi_1$ ,  $\xi_2 + \xi_3$
- 2.  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $\xi_3$ ,  $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3$
- 3.  $\xi_1 \xi_2$ ,  $\xi_2 \xi_3$ ,  $\xi_1 \xi_3$
- 4.  $\xi_1 + \xi_2$ ,  $\xi_2 + \xi_3$ ,  $\xi_3 + \xi_1$

- 1.  $\xi_1$ ,  $\xi_2 + \xi_3$
- 2.  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $\xi_3$ ,  $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3$
- 3.  $\xi_1 \xi_2$ ,  $\xi_2 \xi_3$ ,  $\xi_1 \xi_3$
- 4.  $\xi_1 + \xi_2$ ,  $\xi_2 + \xi_3$ ,  $\xi_3 + \xi_1$

# 提示 判断

1. 是否为解

- 1.  $\xi_1$ ,  $\xi_2 + \xi_3$
- 2.  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $\xi_3$ ,  $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3$
- 3.  $\xi_1 \xi_2$ ,  $\xi_2 \xi_3$ ,  $\xi_1 \xi_3$
- 4.  $\xi_1 + \xi_2$ ,  $\xi_2 + \xi_3$ ,  $\xi_3 + \xi_1$

## 提示判断

- 1. 是否为解
- 2. 是否包含 3 个解(基础解系包含向量的个数是定值)

- 1.  $\xi_1$ ,  $\xi_2 + \xi_3$
- 2.  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $\xi_3$ ,  $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3$
- 3.  $\xi_1 \xi_2$ ,  $\xi_2 \xi_3$ ,  $\xi_1 \xi_3$
- 4.  $\xi_1 + \xi_2$ ,  $\xi_2 + \xi_3$ ,  $\xi_3 + \xi_1$

# 提示判断

- 1. 是否为解
- 2. 是否包含 3 个解(基础解系包含向量的个数是定值)
- 3. 是否为线性无关



$$\Rightarrow (A:b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

⇒ 
$$(A : b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta} \neq b} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (A:b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta} \neq b} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r(A) = r(A:b)} = 2$$

$$\Rightarrow (A \vdots b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{figs}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} r(A) = r(A \vdots b)$$

自由变量 *X*<sub>3</sub>, *X*<sub>4</sub>



$$\Rightarrow (A:b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{iff}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} r(A) = r(A:b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ & x_3, x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A : b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\text{tigh}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} r(A) = r(A : b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_2 - & x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases}$$
 自由变量  $x_3, x_4$ 

$$\Rightarrow (A:b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{iff}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} r(A) = r(A:b)$$

$$= 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_2 - & x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 3x_4 & \text{自由变量} \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 & x_3, x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{iff}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} r(A) = r(A:b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_2 - & x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 3x_4 & \text{自由变量} \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 & x_3, x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$



$$\Rightarrow (A:b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{inff}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} r(A) = r(A:b)$$

$$= 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_2 - & x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 3x_4 & \text{自由变量} \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 & x_3, x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$



例 解非齐次线性方程组:  $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2\\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1\\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = -4 \end{cases}$ 

⇒ 
$$(A \vdots b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\text{frg}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} r(A) = r(A \vdots b)$$
= 2

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_2 - & x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 3x_4 & \text{自由变量} \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 & x_3, x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 & 3x_4 = 2 \\ x_2 = x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 & 2x_3 + 3x_4 & \text{Ellipte} \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 & x_3, x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2c_1 \\ c_1 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3c_2 \\ -2c_2 \\ 0 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

例 解非齐次线性方程组:  $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2\\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1\\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = -4 \end{cases}$ 

$$\Rightarrow (A \vdots b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta} \not\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} r(A) = r(A \vdots b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_2 - & x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 3x_4 & \text{自由变量} \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 & x_3, x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



例 解非齐次线性方程组:  $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = -4 \end{cases}$ 

⇒ 
$$(A \vdots b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\text{frg}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} r(A) = r(A \vdots b)$$
= 2

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_2 - & x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 3x_4 & \text{自由变量} \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 & x_3, x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ \eta \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$



例 解非齐次线性方程组:  $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2\\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1\\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = -4 \end{cases}$ 

$$\Rightarrow (A : b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta g}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} r(A) = r(A : b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_2 - & x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 3x_4 & \text{自由变量} \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 & x_3, x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow x = \eta + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$$



例 解非齐次线性方程组:  $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2\\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1\\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = -4 \end{cases}$ 

⇒ 
$$(A : b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{{\bf 7724}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} r(A) = r(A : b)$$

$$= 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_2 - & x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 3x_4 & \text{自由变量} \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 & x_3, x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow x = \eta + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$$

$$\Rightarrow X = \eta + C_1 \xi_1 + C_2 \xi_2$$

$$\eta : AX = b - \uparrow M$$



例 解非齐次线性方程组:  $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = -4 \end{cases}$ 

$$\Rightarrow (A:b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{figs}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} r(A) = r(A:b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_2 - & x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 3x_4 & \text{自由变量} \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 & x_3, x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ \eta \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = \eta + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$$

 $\eta: Ax = b$ 一个解



例 解非齐次线性方程组:  $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2\\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1\\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = -4 \end{cases}$ 

$$\Rightarrow (A : b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta g}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} r(A) = r(A : b)$$

⇒ 
$$\begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_2 - & x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases}$$
 ⇒  $\begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 3x_4 \text{ 自由变量} \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 & x_3, x_4 \end{cases}$ 

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = n + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$$

$$\Rightarrow x = \eta + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$$

n: Ax = b一个解



例 解非齐次线性方程组:  $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2\\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1\\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = -4 \end{cases}$ 

$$\Rightarrow (A:b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{iff}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} r(A) = r(A:b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 3x_4 & \text{ and } \text{$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = \eta + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$$

 $\xi_1, \xi_2: Ax = 0$ 基础解系



### 定义 在非齐次线性方程组

$$Ax = b$$

中,用0代替b,所得到的齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

称为原方程组 Ax = b 的导出组。

## 定义 在非齐次线性方程组

$$Ax = b$$

中,用0代替b,所得到的齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

称为原方程组 Ax = b 的导出组。

如 
$$\begin{cases} x_1 -2x_2 +4x_3 -7x_4 = 1 \\ 2x_1 +x_2 -2x_3 +x_4 = 4 & \text{的导出组是} \\ 3x_1 -x_2 +2x_3 -6x_4 = -9 \end{cases}$$

## 定义 在非齐次线性方程组

$$Ax = b$$

中,用0代替b,所得到的齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

称为原方程组 Ax = b 的导出组。

如 
$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & +4x_3 & -7x_4 & = 1 \\ 2x_1 & +x_2 & -2x_3 & +x_4 & = 4 & \text{的导出组是} \\ 3x_1 & -x_2 & +2x_3 & -6x_4 & = -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & +4x_3 & -7x_4 & = 0 \\ 2x_1 & +x_2 & -2x_3 & +x_4 & = 0 \\ 3x_1 & -x_2 & +2x_3 & -6x_4 & = 0 \end{cases}$$

# 定理 如果 $\eta$ 是非齐次线性方程组

$$Ax = b$$

的一个解,则原方程组的任意解 x 可以表示成

$$x = \eta + \xi$$

其中 ξ 是导出组 Ax = 0 的解。

$$Ax = b$$

的一个解,则原方程组的任意解 x 可以表示成

$$x = \eta + \xi$$

其中 ξ 是导出组 Ax = 0 的解。

进一步,设导出组Ax = 0的基础解系是

$$\xi_1,\,\xi_2,\,\ldots,\,\xi_s$$

$$Ax = b$$

的一个解,则原方程组的任意解 x 可以表示成

$$x = \eta + \xi$$

其中 ξ 是导出组 Ax = 0 的解。

进一步,设导出组Ax = 0的基础解系是

$$\xi_1,\,\xi_2,\,\ldots,\,\xi_s$$

$$\underline{\varsigma}_1 \xi_1 + \varsigma_2 \xi_2 + \cdots + \varsigma_s \xi_s$$

$$Ax = b$$

的一个解,则原方程组的任意解 x 可以表示成

$$x = \eta + \xi$$

其中 ξ 是导出组 Ax = 0 的解。

进一步,设导出组Ax = 0的基础解系是

$$\xi_1,\,\xi_2,\,\ldots,\,\xi_s$$

则原方程组的任意解 x 可以表示成

$$x = \eta + \underline{\xi} = \eta + \underline{c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_s \xi_s}$$

$$Ax = b$$

的一个解,则原方程组的任意解 x 可以表示成

$$x = \eta + \xi$$

其中 ξ 是导出组 Ax = 0 的解。

进一步,设导出组 Ax = 0 的基础解系是

$$\xi_1,\,\xi_2,\,\ldots,\,\xi_s$$

则原方程组的任意解 x 可以表示成

$$x = \eta + \underline{\xi} = \eta + \underline{c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_s \xi_s}$$

证明 因为 Ax = b,  $A\eta = b$ 

$$Ax = b$$

的一个解,则原方程组的任意解 x 可以表示成

$$x = \eta + \xi$$

其中 ξ 是导出组 Ax = 0 的解。

进一步,设导出组 Ax = 0 的基础解系是

$$\xi_1,\,\xi_2,\,\ldots,\,\xi_s$$

则原方程组的任意解 x 可以表示成

$$x = \eta + \underline{\xi} = \eta + \underline{c_1}\xi_1 + \underline{c_2}\xi_2 + \dots + \underline{c_s}\xi_s$$

证明 因为

$$Ax = b$$
,  $A\eta = b$ 

所以 $A(x-\eta) = Ax - A\eta = b - b = 0$ 

$$Ax = b$$

的一个解,则原方程组的任意解x可以表示成

$$x = \eta + \xi$$

其中 ξ 是导出组 Ax = 0 的解。

进一步,设导出组 Ax = 0 的基础解系是

$$\xi_1, \, \xi_2, \, \ldots, \, \xi_s$$

则原方程组的任意解x可以表示成

$$x = \eta + \underline{\xi} = \eta + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_s \xi_s$$

证明 因为

$$Ax = b$$
,  $A\eta = b$ 

所以  $A(x-\eta) = Ax - A\eta = b - b = 0$ ,说明  $x - \eta$  是导出组 Ax = 0

$$Ax = b$$

的一个解,则原方程组的任意解x可以表示成

$$x = \eta + \xi$$

其中 ξ 是导出组 Ax = 0 的解。

进一步,设导出组 Ax = 0 的基础解系是

的解。所以 $x - \eta = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_s\xi_s$ .

$$\xi_1, \, \xi_2, \, \ldots, \, \xi_s$$

则原方程组的任意解求可以表示成

$$x = \eta + \xi = \eta + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_s \xi_s$$

证明 因为

$$Ax = b$$
,  $An = b$ 

所以  $A(x-\eta) = Ax - A\eta = b - b = 0$ ,说明  $x - \eta$  是导出组 Ax = 0

# 用基础解系表示 Ax = b 通解

### 先是

- 将增广矩阵 (A, b) 化为简化的阶梯形矩阵, 写出同解方程组;
- 确定自由未知变量:

### 然后

- 求出一个特解 η:
- 求出导出组 Ax = 0 的基础解系:  $ξ_1, ξ_2, ..., ξ_s$

则 Ax = b 的通解是



# 用基础解系表示 Ax = b 通解

#### 先是

- 将增广矩阵 (A, b) 化为简化的阶梯形矩阵, 写出同解方程组;
- 确定自由未知变量:

### 然后

- 求出一个特解 η:
- 求出导出组 Ax = 0 的基础解系:  $ξ_1, ξ_2, ..., ξ_s$

则 Ax = b 的通解是

$$x = \eta + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \cdots + c_s \xi_s$$



# 用基础解系表示 Ax = b 通解

### 先是

- 将增广矩阵 (A, b) 化为简化的阶梯形矩阵, 写出同解方程组;
- 确定自由未知变量;

### 然后

- 求出一个特解η: 可取自由未知量全为0得到
- 求出导出组 Ax = 0 的基础解系:  $ξ_1, ξ_2, ..., ξ_s$

则 Ax = b 的通解是

$$x = \eta + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_s \xi_s$$



例用"特解+基础解系的线性组合"的形式,求出  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$ 的通解。  $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 3 \end{cases}$ 

$$(A \mid b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \mid 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \mid 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 \mid 3 \end{pmatrix}$$

$$(A \mid b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \mid 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \mid 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 \mid 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_1}$$

$$(A \mid b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \mid 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \mid 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 \mid 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \mid 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \mid 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \mid 1 \end{pmatrix}$$



例用"特解+基础解系的线性组合"的形式,求出  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$ 的通解。  $2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 3$ 

$$\left(\begin{array}{cccc|c} A \mid b\end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 & 3\end{array}\right) \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)$$

$$r_3 + r_2$$



$$(A \mid b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \mid 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \mid 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 \mid 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \mid 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \mid 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \mid 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$(A \mid b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \mid 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \mid 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 \mid 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \mid 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \mid 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \mid 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2-r_3} r_1-r_3$$

$$(A \mid b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \mid 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \mid 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 \mid 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \mid 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \mid 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \mid 1 \end{pmatrix}$$



$$(A \mid b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \mid 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \mid 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 \mid 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \mid 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \mid 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \mid 1 \end{pmatrix}$$

$$r_1 - 2r_2$$



$$(A \mid b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \mid 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \mid 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 \mid 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \mid 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \mid 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \mid 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$



$$(A \mid b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \mid 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \mid 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 \mid 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \mid 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \mid 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \mid 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$



例用"特解+基础解系的线性组合"的形式,求出  $\left\{ \begin{array}{ccccc} x_1+ & 2x_2+ & x_3+ & x_4- & x_5=1 \\ & x_2+ & x_3+ & x_4 & =1 & \text{的} \\ 2x_1+ & 3x_2+ & x_3+ & 2x_4- & x_5=3 \end{array} \right.$ 

$$(A \mid b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. 同解于: 
$$\begin{cases} x_1 & -x_3 & = 1 \\ x_2 & +x_3 & -x_5 & = -1 \\ x_4 & +x_5 & = 2 \end{cases}$$



例用"特解+基础解系的线性组合"的形式,求出  $\begin{cases} x_1 + & 2x_2 + & x_3 + & x_4 - & x_5 = 1 \\ & x_2 + & x_3 + & x_4 & = 1 \text{ bi} \text{im} \\ 2x_1 + & 3x_2 + & x_3 + & 2x_4 - & x_5 = 3 \end{cases}$ 

$$\frac{r_{1}-2r_{2}}{0} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_{1}-r_{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. 同解于:  $\begin{cases} x_1 & -x_3 & = 1 \\ x_2 + x_3 & -x_5 = -1 \\ x_4 + x_5 & = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 + x_5 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$ 

$$\begin{cases} x_1 & -x_3 & = 1 \\ x_2 & +x_3 & -x_5 & = -1 \\ x_4 & +x_5 & = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 + x_5 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 & -x_3 & = 1 \\ x_2 & +x_3 & -x_5 & = -1 \\ x_4 & +x_5 & = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 + x_5 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$$

2. 自由变量: *X*<sub>3</sub>, *X*<sub>5</sub>

$$\begin{cases} x_1 & -x_3 & = 1 \\ x_2 & +x_3 & -x_5 & = -1 \\ x_4 & +x_5 & = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 + x_5 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$$

- 2. 自由变量: *X*<sub>3</sub>, *X*<sub>5</sub>
- 3. 原方程组特解: 取自由变量  $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,

1. 原方程组同解干:

$$\begin{cases} x_1 & -x_3 & = 1 \\ x_2 & +x_3 & -x_5 & = -1 \\ x_4 & +x_5 & = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 + x_5 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$$

- 2. 自由变量:  $x_3$ ,  $x_5$ 3. 原方程组特解: 取自由变量  $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , 得特解  $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

1. 原方程组同解干:

$$\begin{cases} x_1 & -x_3 & = 1 \\ x_2 & +x_3 & -x_5 & = -1 \\ x_4 & +x_5 & = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 + x_5 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$$

- 2. 自由变量: X3, X5
- 2. 自由变量:  $x_3, x_5$ 3. 原方程组特解: 取自由变量  $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , 得特解  $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

4. 导出组 Ax = 0



1. 原方程组同解干:

$$\begin{cases} x_1 & -x_3 & = 1 \\ x_2 & +x_3 & -x_5 & = -1 \\ x_4 & +x_5 & = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 + x_5 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$$

- 2. 自由变量:  $x_3, x_5$ 3. 原方程组特解: 取自由变量  $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , 得特解  $\eta = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 。

4. 导出组 
$$Ax = 0$$
同解于 
$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_3 + x_5 \\ x_4 = -x_5 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x_1 & -x_3 & = 1 \\ x_2 & +x_3 & -x_5 & = -1 \\ x_4 & +x_5 & = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 + x_5 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$$

2. 自由变量: X<sub>3</sub>, X<sub>5</sub>

2. 自由变量: 
$$x_3, x_5$$
3. 原方程组特解: 取自由变量  $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , 得特解  $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

4. 导出组 
$$Ax = 0$$
同解于 
$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_3 + x_5 \\ x_4 = -x_5 \end{cases}$$
 .分别取 
$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
 和

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, 得基础解系  $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$$

$$\begin{cases} x_1 & -x_3 & = 1 \\ x_2 & +x_3 & -x_5 & = -1 \\ x_4 & +x_5 & = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 + x_5 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$$

2. 自由变量: *x*<sub>3</sub>, *x*<sub>5</sub>

1. 原方程组同解干:

2. 自由变量: 
$$x_3, x_5$$
3. 原方程组特解: 取自由变量  $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , 得特解  $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

4. 导出组 
$$Ax = 0$$
同解于  $\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_3 + x_5 \end{cases}$  .分别取  $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 得基础解系  $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

5. 通解:  $X = \eta + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$  其中  $c_1, c_2$  为任意常数。

