

第 3 章 c: 泰勒公式

数学系 梁卓滨

2019-2020 学年 I

Outline

多项式逼近函数

问题 是否可以用多项式“逼近”一般函数 $f(x)$?

多项式逼近函数

问题 是否可以用多项式“逼近”一般函数 $f(x)$?

性质 设 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导, 则存在 n 阶多项式 $p_n(x)$, 使得

$$f^{(k)}(x_0) = p_n^{(k)}(x_0) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

多项式逼近函数

问题 是否可以用多项式“逼近”一般函数 $f(x)$?

性质 设 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导, 则存在 n 阶多项式 $p_n(x)$, 使得

$$f^{(k)}(x_0) = p_n^{(k)}(x_0) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

证明 设

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n.$$

多项式逼近函数

问题 是否可以用多项式“逼近”一般函数 $f(x)$?

性质 设 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导, 则存在 n 阶多项式 $p_n(x)$, 使得

$$f^{(k)}(x_0) = p_n^{(k)}(x_0) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

证明 设

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n.$$

则 $f(x_0) = p_n(x_0)$

多项式逼近函数

问题 是否可以用多项式“逼近”一般函数 $f(x)$?

性质 设 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导, 则存在 n 阶多项式 $p_n(x)$, 使得

$$f^{(k)}(x_0) = p_n^{(k)}(x_0) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

证明 设

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n.$$

则 $f(x_0) = p_n(x_0) = a_0$

多项式逼近函数

问题 是否可以用多项式“逼近”一般函数 $f(x)$?

性质 设 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导, 则存在 n 阶多项式 $p_n(x)$, 使得

$$f^{(k)}(x_0) = p_n^{(k)}(x_0) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

证明 设

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n.$$

则 $f(x_0) = p_n(x_0) = a_0$

$$f'(x_0) = p'_n(x_0)$$

多项式逼近函数

问题 是否可以用多项式“逼近”一般函数 $f(x)$?

性质 设 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导, 则存在 n 阶多项式 $p_n(x)$, 使得

$$f^{(k)}(x_0) = p_n^{(k)}(x_0) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

证明 设

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n.$$

则 $f(x_0) = p_n(x_0) = a_0$

$$p'_n(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \dots + na_n(x - x_0)^{n-1}$$

$$f'(x_0) = p'_n(x_0)$$

多项式逼近函数

问题 是否可以用多项式“逼近”一般函数 $f(x)$?

性质 设 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导, 则存在 n 阶多项式 $p_n(x)$, 使得

$$f^{(k)}(x_0) = p_n^{(k)}(x_0) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

证明 设

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n.$$

则 $f(x_0) = p_n(x_0) = a_0$

$$p'_n(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \dots + na_n(x - x_0)^{n-1}$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = p'_n(x_0) = a_1$$

多项式逼近函数

问题 是否可以用多项式“逼近”一般函数 $f(x)$?

性质 设 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导, 则存在 n 阶多项式 $p_n(x)$, 使得

$$f^{(k)}(x_0) = p_n^{(k)}(x_0) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

证明 设

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n.$$

则 $f(x_0) = p_n(x_0) = a_0$

$$p'_n(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \dots + na_n(x - x_0)^{n-1}$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = p'_n(x_0) = a_1$$

$$f''(x_0) = p''_n(x_0)$$

多项式逼近函数

问题 是否可以用多项式“逼近”一般函数 $f(x)$?

性质 设 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导, 则存在 n 阶多项式 $p_n(x)$, 使得

$$f^{(k)}(x_0) = p_n^{(k)}(x_0) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

证明 设

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n.$$

则 $f(x_0) = p_n(x_0) = a_0$

$$p'_n(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \dots + na_n(x - x_0)^{n-1}$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = p'_n(x_0) = a_1$$

$$p''_n(x) = 2a_2 + \dots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2}$$

$$f''(x_0) = p''_n(x_0)$$

多项式逼近函数

问题 是否可以用多项式“逼近”一般函数 $f(x)$?

性质 设 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导, 则存在 n 阶多项式 $p_n(x)$, 使得

$$f^{(k)}(x_0) = p_n^{(k)}(x_0) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

证明 设

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n.$$

则 $f(x_0) = p_n(x_0) = a_0$

$$p'_n(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \dots + na_n(x - x_0)^{n-1}$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = p'_n(x_0) = a_1$$

$$p''_n(x) = 2a_2 + \dots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2}$$

$$\Rightarrow f''(x_0) = p''_n(x_0) = 2a_2$$

多项式逼近函数

问题 是否可以用多项式“逼近”一般函数 $f(x)$?

性质 设 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导, 则存在 n 阶多项式 $p_n(x)$, 使得

$$f^{(k)}(x_0) = p_n^{(k)}(x_0) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

证明 设

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n.$$

则 $f(x_0) = p_n(x_0) = a_0$

$$p'_n(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \dots + na_n(x - x_0)^{n-1}$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = p'_n(x_0) = a_1$$

$$p''_n(x) = 2a_2 + \dots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2}$$

$$\Rightarrow f''(x_0) = p''_n(x_0) = 2a_2$$

\vdots

$$f^{(n)}(x_0) = p_n^{(n)}(x_0)$$

多项式逼近函数

问题 是否可以用多项式“逼近”一般函数 $f(x)$?

性质 设 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导, 则存在 n 阶多项式 $p_n(x)$, 使得

$$f^{(k)}(x_0) = p_n^{(k)}(x_0) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

证明 设

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n.$$

则 $f(x_0) = p_n(x_0) = a_0$

$$p'_n(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \dots + na_n(x - x_0)^{n-1}$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = p'_n(x_0) = a_1$$

$$p''_n(x) = 2a_2 + \dots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2}$$

$$\Rightarrow f''(x_0) = p''_n(x_0) = 2a_2$$

\vdots

$$p_n^{(n)}(x) = n!a_n$$

$$f^{(n)}(x_0) = p_n^{(n)}(x_0)$$

多项式逼近函数

问题 是否可以用多项式“逼近”一般函数 $f(x)$?

性质 设 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导, 则存在 n 阶多项式 $p_n(x)$, 使得

$$f^{(k)}(x_0) = p_n^{(k)}(x_0) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

证明 设

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n.$$

则 $f(x_0) = p_n(x_0) = a_0$

$$p'_n(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \dots + na_n(x - x_0)^{n-1}$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = p'_n(x_0) = a_1$$

$$p''_n(x) = 2a_2 + \dots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2}$$

$$\Rightarrow f''(x_0) = p''_n(x_0) = 2a_2$$

\vdots

$$p_n^{(n)}(x) = n!a_n$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(x_0) = p_n^{(n)}(x_0) = n!a_n$$

多项式逼近函数

问题 是否可以用多项式“逼近”一般函数 $f(x)$?

性质 设 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导, 则存在 n 阶多项式 $p_n(x)$, 使得

$$f^{(k)}(x_0) = p_n^{(k)}(x_0) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

证明 设

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n.$$

则 $f(x_0) = p_n(x_0) = a_0$

$$\left. \begin{aligned} p'_n(x) &= a_1 + 2a_2(x - x_0) + \dots + na_n(x - x_0)^{n-1} \\ &\Rightarrow f'(x_0) = p'_n(x_0) = a_1 \\ p''_n(x) &= 2a_2 + \dots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} \\ &\Rightarrow f''(x_0) = p''_n(x_0) = 2a_2 \\ &\vdots \\ p_n^{(n)}(x) &= n!a_n \\ &\Rightarrow f^{(n)}(x_0) = p_n^{(n)}(x_0) = n!a_n \end{aligned} \right\} k!a_k = f^{(k)}(x_0)$$

多项式逼近函数

问题 是否可以用多项式“逼近”一般函数 $f(x)$?

性质 设 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导, 则存在 n 阶多项式 $p_n(x)$, 使得

$$f^{(k)}(x_0) = p_n^{(k)}(x_0) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

证明 设

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n.$$

则 $f(x_0) = p_n(x_0) = a_0$

$$\left. \begin{aligned} p'_n(x) &= a_1 + 2a_2(x - x_0) + \dots + na_n(x - x_0)^{n-1} \\ &\Rightarrow f'(x_0) = p'_n(x_0) = a_1 \\ p''_n(x) &= 2a_2 + \dots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} \\ &\Rightarrow f''(x_0) = p''_n(x_0) = 2a_2 \\ &\vdots \\ p_n^{(n)}(x) &= n!a_n \\ &\Rightarrow f^{(n)}(x_0) = p_n^{(n)}(x_0) = n!a_n \end{aligned} \right\} \begin{aligned} k!a_k &= f^{(k)}(x_0) \\ a_k &= \frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0) \end{aligned}$$

小结 设 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导, 则 n 阶多项式

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 \\ + \cdots + \frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

满足:

$$f^{(k)}(x_0) = p_n^{(k)}(x_0) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

小结 设 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导, 则 n 阶多项式

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 \\ + \cdots + \frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

满足:

$$f^{(k)}(x_0) = p_n^{(k)}(x_0) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

定义 $p_n(x)$ 称为 $f(x)$ 在 x_0 处的 n 次泰勒多项式.

小结 设 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导, 则 n 阶多项式

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 \\ + \cdots + \frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

满足:

$$f^{(k)}(x_0) = p_n^{(k)}(x_0) \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n).$$

定义 $p_n(x)$ 称为 $f(x)$ 在 x_0 处的 n 次泰勒多项式.

注 当 $x_0 = 0$ 时

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \cdots + \frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^k + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n$$

小结 设 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导, 则 n 阶多项式

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 \\ + \cdots + \frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

满足:

$$f^{(k)}(x_0) = p_n^{(k)}(x_0) \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n).$$

定义 $p_n(x)$ 称为 $f(x)$ 在 x_0 处的 n 次泰勒多项式.

注 当 $x_0 = 0$ 时

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \cdots + \frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^k + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n$$

也称为 n 次麦克劳林多项式

小结 设 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导, 则 n 阶多项式

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 \\ + \cdots + \frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

满足:

$$f^{(k)}(x_0) = p_n^{(k)}(x_0) \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n).$$

定义 $p_n(x)$ 称为 $f(x)$ 在 x_0 处的 n 次泰勒多项式.

注 当 $x_0 = 0$ 时

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \cdots + \frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^k + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n$$

也称为 n 次麦克劳林多项式

例 1 求 $f(x) = e^x$ 在 $x = 0$ 处的 n 次泰勒多项式.

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

例 1 求 $f(x) = e^x$ 在 $x = 0$ 处的 n 次泰勒级数.

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

例 1 求 $f(x) = e^x$ 在 $x = 0$ 处的 n 次泰勒级数.

解

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x$$

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

例 1 求 $f(x) = e^x$ 在 $x = 0$ 处的 n 次泰勒级数.

解

$$\begin{aligned} f(x) &= f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x \\ \Rightarrow f(0) &= f'(0) = f''(0) = f'''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 1 \end{aligned}$$

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

例 1 求 $f(x) = e^x$ 在 $x = 0$ 处的 n 次泰勒级数.

解

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x$$

$$\Rightarrow f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 1$$

$$\Rightarrow n\text{次泰勒级数: } 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n$$

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

例 1 求 $f(x) = e^x$ 在 $x = 0$ 处的 n 次泰勒级数.

解

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x$$

$$\Rightarrow f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 1$$

$$\Rightarrow n\text{次泰勒级数: } 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n$$

例 2 求 $f(x) = \sin x$ 在 $x = 0$ 处的泰勒多项式.

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

例 2 求 $f(x) = \sin x$ 在 $x = 0$ 处的泰勒多项式.

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

例 2 求 $f(x) = \sin x$ 在 $x = 0$ 处的泰勒多项式.

解

	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
$n = 0, 4, 8 \dots$	$\sin x$	0
$n = 1, 5, 9 \dots$	$\cos x$	1
$n = 2, 6, 10 \dots$	$-\sin x$	0
$n = 3, 7, 11 \dots$	$-\cos x$	-1

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

例 2 求 $f(x) = \sin x$ 在 $x = 0$ 处的泰勒多项式.

解

	$f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n}{2}\pi)$	$f^{(n)}(0)$
$n = 0, 4, 8 \dots$	$\sin x$	0
$n = 1, 5, 9 \dots$	$\cos x$	1
$n = 2, 6, 10 \dots$	$-\sin x$	0
$n = 3, 7, 11 \dots$	$-\cos x$	-1

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

例 2 求 $f(x) = \sin x$ 在 $x = 0$ 处的泰勒多项式.

解

	$f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n}{2}\pi)$	$f^{(n)}(0) = \sin(\frac{n}{2}\pi)$
$n = 0, 4, 8 \dots$	$\sin x$	0
$n = 1, 5, 9 \dots$	$\cos x$	1
$n = 2, 6, 10 \dots$	$-\sin x$	0
$n = 3, 7, 11 \dots$	$-\cos x$	-1

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

例 2 求 $f(x) = \sin x$ 在 $x = 0$ 处的泰勒多项式.

解

	$f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n}{2}\pi)$	$f^{(n)}(0) = \sin(\frac{n}{2}\pi)$
$n = 0, 4, 8 \dots$	$\sin x$	0
$n = 1, 5, 9 \dots$	$\cos x$	1
$n = 2, 6, 10 \dots$	$-\sin x$	0
$n = 3, 7, 11 \dots$	$-\cos x$	-1

所以 n 次泰勒多项式是

$$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots$$

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

例 2 求 $f(x) = \sin x$ 在 $x = 0$ 处的泰勒多项式.

解

	$f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n}{2}\pi)$	$f^{(n)}(0) = \sin(\frac{n}{2}\pi)$
$n = 0, 4, 8 \dots$	$\sin x$	0
$n = 1, 5, 9 \dots$	$\cos x$	1
$n = 2, 6, 10 \dots$	$-\sin x$	0
$n = 3, 7, 11 \dots$	$-\cos x$	-1

所以 n 次泰勒多项式是

$$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1}$$

小结 $\sin x$ 的 n 次泰勒多项式是

小结 $\sin x$ 的 n 次泰勒多项式是

$$p_1 = x;$$

小结 $\sin x$ 的 n 次泰勒多项式是

$$p_1 = p_2 = x;$$

小结 $\sin x$ 的 n 次泰勒多项式是

$$p_1 = p_2 = x;$$

$$p_3 = x - \frac{1}{3!}x^3;$$

小结 $\sin x$ 的 n 次泰勒多项式是

$$p_1 = p_2 = x;$$

$$p_3 = p_4 = x - \frac{1}{3!}x^3;$$

小结 $\sin x$ 的 n 次泰勒多项式是

$$p_1 = p_2 = x;$$

$$p_3 = p_4 = x - \frac{1}{3!}x^3;$$

$$p_5 = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5;$$

小结 $\sin x$ 的 n 次泰勒多项式是

$$p_1 = p_2 = x;$$

$$p_3 = p_4 = x - \frac{1}{3!}x^3;$$

$$p_5 = p_6 = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5;$$

小结 $\sin x$ 的 n 次泰勒多项式是

$$p_1 = p_2 = x;$$

$$p_3 = p_4 = x - \frac{1}{3!}x^3;$$

$$p_5 = p_6 = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5;$$

$$\vdots$$

$$p_{2m+1}$$

小结 $\sin x$ 的 n 次泰勒多项式是

$$p_1 = p_2 = x;$$

$$p_3 = p_4 = x - \frac{1}{3!}x^3;$$

$$p_5 = p_6 = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5;$$

$$\vdots$$

$$p_{2m+1} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1}$$

小结 $\sin x$ 的 n 次泰勒多项式是

$$p_1 = p_2 = x;$$

$$p_3 = p_4 = x - \frac{1}{3!}x^3;$$

$$p_5 = p_6 = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5;$$

\vdots

$$p_{2m+1} = p_{2m+2} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1}$$

小结 $\sin x$ 的 n 次泰勒多项式是

$$p_1 = p_2 = x;$$

$$p_3 = p_4 = x - \frac{1}{3!}x^3;$$

$$p_5 = p_6 = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5;$$

$$\vdots$$

$$p_{2m+1} = p_{2m+2} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1}$$

例 3 求 $f(x) = \cos x$ 在 $x = 0$ 处的泰勒多项式.

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

例 3 求 $f(x) = \cos x$ 在 $x = 0$ 处的泰勒多项式.

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

例 3 求 $f(x) = \cos x$ 在 $x = 0$ 处的泰勒多项式.

解

	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
$n = 0, 4, 8 \dots$	$\cos x$	1
$n = 1, 5, 9 \dots$	$-\sin x$	0
$n = 2, 6, 10 \dots$	$-\cos x$	-1
$n = 3, 7, 11 \dots$	$\sin x$	0

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

例 3 求 $f(x) = \cos x$ 在 $x = 0$ 处的泰勒多项式.

解

	$f^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{n}{2}\pi)$	$f^{(n)}(0)$
$n = 0, 4, 8 \dots$	$\cos x$	1
$n = 1, 5, 9 \dots$	$-\sin x$	0
$n = 2, 6, 10 \dots$	$-\cos x$	-1
$n = 3, 7, 11 \dots$	$\sin x$	0

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

例 3 求 $f(x) = \cos x$ 在 $x = 0$ 处的泰勒多项式.

解

	$f^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{n}{2}\pi)$	$f^{(n)}(0) = \cos(\frac{n}{2}\pi)$
$n = 0, 4, 8 \dots$	$\cos x$	1
$n = 1, 5, 9 \dots$	$-\sin x$	0
$n = 2, 6, 10 \dots$	$-\cos x$	-1
$n = 3, 7, 11 \dots$	$\sin x$	0

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

例 3 求 $f(x) = \cos x$ 在 $x = 0$ 处的泰勒多项式.

解

	$f^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{n}{2}\pi)$	$f^{(n)}(0) = \cos(\frac{n}{2}\pi)$
$n = 0, 4, 8 \dots$	$\cos x$	1
$n = 1, 5, 9 \dots$	$-\sin x$	0
$n = 2, 6, 10 \dots$	$-\cos x$	-1
$n = 3, 7, 11 \dots$	$\sin x$	0

所以泰勒级数多项式是

$$1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots$$

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

例 3 求 $f(x) = \cos x$ 在 $x = 0$ 处的泰勒多项式.

解

	$f^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{n}{2}\pi)$	$f^{(n)}(0) = \cos(\frac{n}{2}\pi)$
$n = 0, 4, 8 \dots$	$\cos x$	1
$n = 1, 5, 9 \dots$	$-\sin x$	0
$n = 2, 6, 10 \dots$	$-\cos x$	-1
$n = 3, 7, 11 \dots$	$\sin x$	0

所以泰勒级数多项式是

$$1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m)!}x^{2m}$$

小结 $\cos x$ 的 n 次泰勒多项式是

小结 $\cos x$ 的 n 次泰勒多项式是

$$p_0 = 1;$$

小结 $\cos x$ 的 n 次泰勒多项式是

$$p_0 = p_1 = 1;$$

小结 $\cos x$ 的 n 次泰勒多项式是

$$p_0 = p_1 = 1;$$

$$p_2 = 1 - \frac{1}{2!}x^2;$$

小结 $\cos x$ 的 n 次泰勒多项式是

$$p_0 = p_1 = 1;$$

$$p_2 = p_3 = 1 - \frac{1}{2!}x^2;$$

小结 $\cos x$ 的 n 次泰勒多项式是

$$p_0 = p_1 = 1;$$

$$p_2 = p_3 = 1 - \frac{1}{2!}x^2;$$

$$p_4 = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4;$$

小结 $\cos x$ 的 n 次泰勒多项式是

$$p_0 = p_1 = 1;$$

$$p_2 = p_3 = 1 - \frac{1}{2!}x^2;$$

$$p_4 = p_5 = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4;$$

小结 $\cos x$ 的 n 次泰勒多项式是

$$p_0 = p_1 = 1;$$

$$p_2 = p_3 = 1 - \frac{1}{2!}x^2;$$

$$p_4 = p_5 = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4;$$

$$\vdots$$

$$p_{2m}(x)$$

小结 $\cos x$ 的 n 次泰勒多项式是

$$p_0 = p_1 = 1;$$

$$p_2 = p_3 = 1 - \frac{1}{2!}x^2;$$

$$p_4 = p_5 = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4;$$

$$\vdots$$

$$p_{2m}(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m)!}x^{2m}$$

小结 $\cos x$ 的 n 次泰勒多项式是

$$p_0 = p_1 = 1;$$

$$p_2 = p_3 = 1 - \frac{1}{2!}x^2;$$

$$p_4 = p_5 = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4;$$

$$\vdots$$

$$p_{2m}(x) = p_{2m+1}(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m)!}x^{2m}$$

小结 $\cos x$ 的 n 次泰勒多项式是

$$p_0 = p_1 = 1;$$

$$p_2 = p_3 = 1 - \frac{1}{2!}x^2;$$

$$p_4 = p_5 = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4;$$

$$\vdots$$

$$p_{2m}(x) = p_{2m+1}(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m)!}x^{2m}$$

例 4 求 $f(x) = \ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 次泰勒多项式.

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

例 4 求 $f(x) = \ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 次泰勒多项式.

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

例 4 求 $f(x) = \ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 次泰勒多项式.

解

$$f = \ln(1+x), \quad f' = \frac{1}{1+x},$$

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

例 4 求 $f(x) = \ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 次泰勒多项式.

解

$$f = \ln(1+x), \quad f' = \frac{1}{1+x}, \quad f'' = \frac{(-1)}{(1+x)^2},$$

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

例 4 求 $f(x) = \ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 次泰勒多项式.

解

$$f = \ln(1+x), \quad f' = \frac{1}{1+x}, \quad f'' = \frac{(-1)}{(1+x)^2}, \quad f''' = \frac{2}{(1+x)^3},$$

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

例 4 求 $f(x) = \ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 次泰勒多项式.

解

$$f = \ln(1+x), \quad f' = \frac{1}{1+x}, \quad f'' = \frac{(-1)}{(1+x)^2}, \quad f''' = \frac{2}{(1+x)^3},$$

$$f^{(4)} = \frac{-2 \cdot 3}{(1+x)^4},$$

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

例 4 求 $f(x) = \ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 次泰勒多项式.

解

$$f = \ln(1+x), \quad f' = \frac{1}{1+x}, \quad f'' = \frac{(-1)}{(1+x)^2}, \quad f''' = \frac{2}{(1+x)^3},$$

$$f^{(4)} = \frac{-2 \cdot 3}{(1+x)^4}, \quad f^{(5)} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{(1+x)^5}, \quad \dots,$$

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

例 4 求 $f(x) = \ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 次泰勒多项式.

解

$$f = \ln(1+x), \quad f' = \frac{1}{1+x}, \quad f'' = \frac{(-1)}{(1+x)^2}, \quad f''' = \frac{2}{(1+x)^3},$$
$$f^{(4)} = \frac{-2 \cdot 3}{(1+x)^4}, \quad f^{(5)} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{(1+x)^5}, \quad \dots, \quad f^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

例 4 求 $f(x) = \ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 次泰勒多项式.

解

$$f = \ln(1+x), \quad f' = \frac{1}{1+x}, \quad f'' = \frac{(-1)}{(1+x)^2}, \quad f''' = \frac{2}{(1+x)^3},$$

$$f^{(4)} = \frac{-2 \cdot 3}{(1+x)^4}, \quad f^{(5)} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{(1+x)^5}, \quad \dots, \quad f^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

$$\text{所以 } \frac{1}{n!}f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^{n-1}}{n},$$

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

例 4 求 $f(x) = \ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 次泰勒多项式.

解

$$f = \ln(1+x), \quad f' = \frac{1}{1+x}, \quad f'' = \frac{(-1)}{(1+x)^2}, \quad f''' = \frac{2}{(1+x)^3},$$

$$f^{(4)} = \frac{-2 \cdot 3}{(1+x)^4}, \quad f^{(5)} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{(1+x)^5}, \quad \dots, \quad f^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

所以 $\frac{1}{n!}f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, n 次泰勒多项式是

$$p_n(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots$$

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

例 4 求 $f(x) = \ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 次泰勒多项式.

解

$$f = \ln(1+x), \quad f' = \frac{1}{1+x}, \quad f'' = \frac{(-1)}{(1+x)^2}, \quad f''' = \frac{2}{(1+x)^3},$$

$$f^{(4)} = \frac{-2 \cdot 3}{(1+x)^4}, \quad f^{(5)} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{(1+x)^5}, \quad \dots, \quad f^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

所以 $\frac{1}{n!}f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, n 次泰勒多项式是

$$p_n(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n$$

小结

e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的泰勒多项式:

$$e^x \Rightarrow 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n$$

$$\sin x \Rightarrow x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1}$$

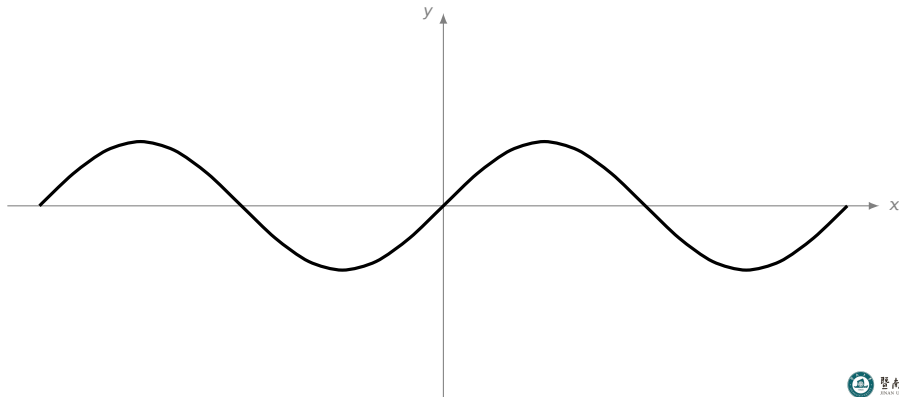
$$\cos x \Rightarrow 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m)!}x^{2m}$$

$$\ln(1+x) \Rightarrow x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}x^n$$

正弦函数的近似

比较正弦函数 $\sin x$ 及其泰勒多项式：

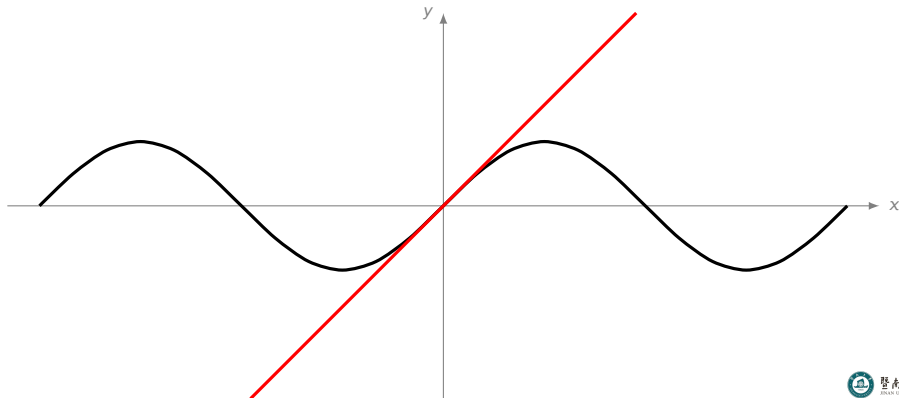
$$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1}$$



正弦函数的近似

比较正弦函数 $\sin x$ 及其泰勒多项式：

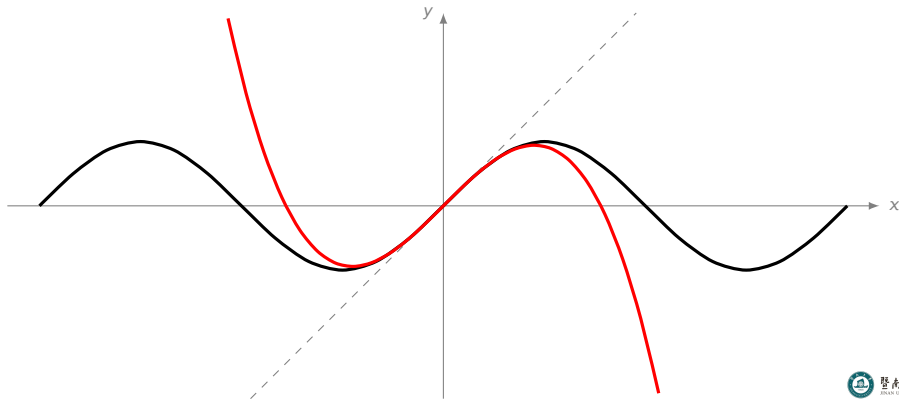
$$\boxed{x} - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1}$$



正弦函数的近似

比较正弦函数 $\sin x$ 及其泰勒多项式：

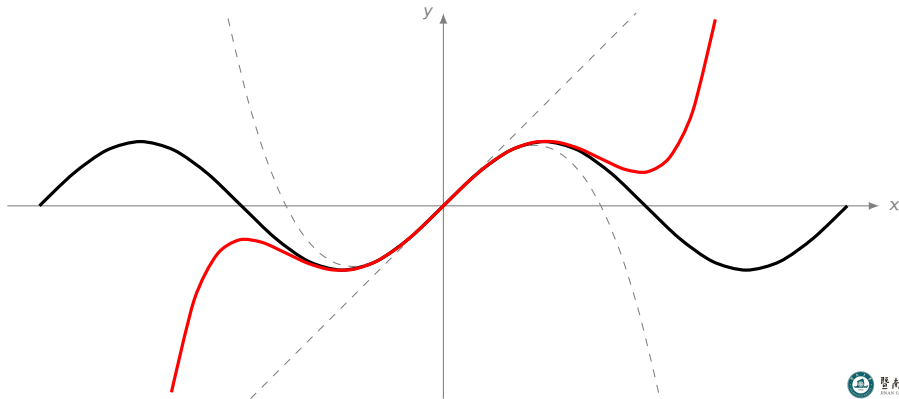
$$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1}$$



正弦函数的近似

比较正弦函数 $\sin x$ 及其泰勒多项式：

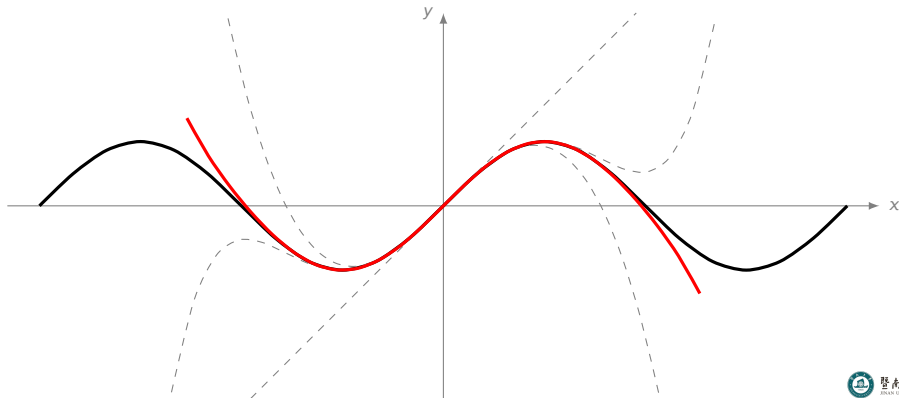
$$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1}$$



正弦函数的近似

比较正弦函数 $\sin x$ 及其泰勒多项式：

$$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1}$$



泰勒公式 (带佩亚诺余项)

设 $f(x)$ 在点 x_0 处存在 n 阶导数, 则 $f(x) - p_n(x) = o((x - x_0)^n)$

泰勒公式 (带佩亚诺余项)

设 $f(x)$ 在点 x_0 处存在 n 阶导数, 则 $f(x) - p_n(x) = o((x - x_0)^n)$

证明 令 $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$,

泰勒公式 (带佩亚诺余项)

设 $f(x)$ 在点 x_0 处存在 n 阶导数, 则 $f(x) - p_n(x) = o((x - x_0)^n)$

证明 令 $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$, 因为 $f(x)$ 与 $p_n(x)$ 在 $x = x_0$ 处, 直到 n 阶导数相等, 所以

$$R_n(x_0) = R'_n(x_0) = R''_n(x_0) = \cdots = R_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

泰勒公式 (带佩亚诺余项)

设 $f(x)$ 在点 x_0 处存在 n 阶导数, 则 $f(x) - p_n(x) = o((x - x_0)^n)$

证明 令 $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$, 因为 $f(x)$ 与 $p_n(x)$ 在 $x = x_0$ 处, 直到 n 阶导数相等, 所以

$$R_n(x_0) = R'_n(x_0) = R''_n(x_0) = \cdots = R_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n}$$

泰勒公式 (带佩亚诺余项)

设 $f(x)$ 在点 x_0 处存在 n 阶导数, 则 $f(x) - p_n(x) = o((x - x_0)^n)$

证明 令 $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$, 因为 $f(x)$ 与 $p_n(x)$ 在 $x = x_0$ 处, 直到 n 阶导数相等, 所以

$$R_n(x_0) = R'_n(x_0) = R''_n(x_0) = \cdots = R_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

利用洛必达法则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R'_n(x)}{n(x - x_0)^{n-1}}$$

泰勒公式 (带佩亚诺余项)

设 $f(x)$ 在点 x_0 处存在 n 阶导数, 则 $f(x) - p_n(x) = o((x - x_0)^n)$

证明 令 $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$, 因为 $f(x)$ 与 $p_n(x)$ 在 $x = x_0$ 处, 直到 n 阶导数相等, 所以

$$R_n(x_0) = R'_n(x_0) = R''_n(x_0) = \cdots = R_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

利用洛必达法则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R'_n(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R''_n(x)}{n(n-1)(x - x_0)^{n-2}}$$

泰勒公式 (带佩亚诺余项)

设 $f(x)$ 在点 x_0 处存在 n 阶导数, 则 $f(x) - p_n(x) = o((x - x_0)^n)$

证明 令 $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$, 因为 $f(x)$ 与 $p_n(x)$ 在 $x = x_0$ 处, 直到 n 阶导数相等, 所以

$$R_n(x_0) = R'_n(x_0) = R''_n(x_0) = \cdots = R_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

利用洛必达法则

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R'_n(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R''_n(x)}{n(n-1)(x - x_0)^{n-2}} \\ &= \cdots = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n^{(n)}(x)}{n(n-1) \cdots 1}\end{aligned}$$

泰勒公式 (带佩亚诺余项)

设 $f(x)$ 在点 x_0 处存在 n 阶导数, 则 $f(x) - p_n(x) = o((x - x_0)^n)$

证明 令 $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$, 因为 $f(x)$ 与 $p_n(x)$ 在 $x = x_0$ 处, 直到 n 阶导数相等, 所以

$$R_n(x_0) = R'_n(x_0) = R''_n(x_0) = \cdots = R^{(n)}_n(x_0) = 0.$$

利用洛必达法则

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R'_n(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R''_n(x)}{n(n-1)(x - x_0)^{n-2}} \\ &= \cdots = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R^{(n)}_n(x)}{n(n-1) \cdots 1} = R^{(n)}_n(x_0)\end{aligned}$$

泰勒公式 (带佩亚诺余项)

设 $f(x)$ 在点 x_0 处存在 n 阶导数, 则 $f(x) - p_n(x) = o((x - x_0)^n)$

证明 令 $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$, 因为 $f(x)$ 与 $p_n(x)$ 在 $x = x_0$ 处, 直到 n 阶导数相等, 所以

$$R_n(x_0) = R'_n(x_0) = R''_n(x_0) = \cdots = R^{(n)}_n(x_0) = 0.$$

利用洛必达法则

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R'_n(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R''_n(x)}{n(n-1)(x - x_0)^{n-2}} \\ &= \cdots = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R^{(n)}_n(x)}{n(n-1) \cdots 1} = R^{(n)}_n(x_0) = 0\end{aligned}$$

带佩亚诺余项的泰勒公式 $f(x) - p_n(x) = o((x - x_0)^n)$ 也写成:

带佩亚诺余项的泰勒公式 $f(x) - p_n(x) = o((x - x_0)^n)$ 也写成:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 \\ + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

带佩亚诺余项的泰勒公式 $f(x) - p_n(x) = o((x - x_0)^n)$ 也写成:

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 \\ & + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) \end{aligned}$$

$p_n(x)$

带佩亚诺余项的泰勒公式 $f(x) - p_n(x) = o((x-x_0)^n)$ 也写成:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2$$

$$+ \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

$$p_n(x)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1} + o(x^{2m+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m)!}x^{2m} + o(x^{2m+1})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}x^n + o(x^n)$$

例 1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

例 1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

解法一 为 $\frac{0}{0}$ 型未定式，利用洛必达法则：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x^3)'}$$

例 1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

解法一 为 $\frac{0}{0}$ 型未定式，利用洛必达法则：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}$$

例 1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

解法一 为 $\frac{0}{0}$ 型未定式，利用洛必达法则：

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(3x^2)'}\end{aligned}$$

例 1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

解法一 为 $\frac{0}{0}$ 型未定式，利用洛必达法则：

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(3x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x}\end{aligned}$$

例 1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

解法一 为 $\frac{0}{0}$ 型未定式，利用洛必达法则：

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(3x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

例 1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

解法一 为 $\frac{0}{0}$ 型未定式，利用洛必达法则：

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(3x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

解法二 利用泰勒公式 $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)$ ，所以

例 1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

解法一 为 $\frac{0}{0}$ 型未定式，利用洛必达法则：

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(3x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

解法二 利用泰勒公式 $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)$ ，所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \left[x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \right]}{x^3}$$

例 1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

解法一 为 $\frac{0}{0}$ 型未定式，利用洛必达法则：

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(3x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

解法二 利用泰勒公式 $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)$ ，所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \left[x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \right]}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3}$$

例 1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

解法一 为 $\frac{0}{0}$ 型未定式，利用洛必达法则：

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(3x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

解法二 利用泰勒公式 $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)$ ，所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \left[x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \right]}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

例 1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

解法一 为 $\frac{0}{0}$ 型未定式，利用洛必达法则：

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(3x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

解法二 利用泰勒公式 $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)$ ，所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \left[x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \right]}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

例 2 试用泰勒公式计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

例 2 试用泰勒公式计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

解 由泰勒公式 $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^3)$

例 2 试用泰勒公式计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

解 由泰勒公式 $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^3)$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - [1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^3)]}{x^2}$$

例 2 试用泰勒公式计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

解 由泰勒公式 $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^3)$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - [1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^3)]}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} + \frac{o(x^3)}{x^2}$$

例 2 试用泰勒公式计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

解 由泰勒公式 $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^3)$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - [1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^3)]}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} + \frac{o(x^3)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

例 3 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x + \ln(1-x)]}$

例 3 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x + \ln(1-x)]}$

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x}$$

例 3 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x + \ln(1-x)]}$

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4) \right] - x \left[1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^3) \right]}{x^3}$$

例3 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x + \ln(1-x)]}$

解

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4) \right] - x \left[1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^3) \right]}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^3 + o(x^4)}{x^3}\end{aligned}$$

例3 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x + \ln(1-x)]}$

解

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4) \right] - x \left[1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^3) \right]}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^3 + o(x^4)}{x^3} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

例 3 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x + \ln(1-x)]}$

解

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4) \right] - x \left[1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^3) \right]}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^3 + o(x^4)}{x^3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x + \ln(1-x)]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[\quad \right] - \left[\quad \right]}{x^2 \left[x + \left(\quad \right) \right]} \end{aligned}$$

例 3 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x + \ln(1-x)]}$

解

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\right] - x\left[1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^3)\right]}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^3 + o(x^4)}{x^3} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x + \ln(1-x)]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^5)\right] - \left[\right]}{x^2\left[x + \left(\right)\right]}\end{aligned}$$

例3 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x + \ln(1-x)]}$

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\right] - x\left[1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^3)\right]}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^3 + o(x^4)}{x^3} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x + \ln(1-x)]}$$

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + o(t^2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^5)\right] - \left[\right]}{x^2 \left[x + \left(\right) \right]}$$

例 3 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x + \ln(1-x)]}$

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\right] - x\left[1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^3)\right]}{x^3}$$
$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^3 + o(x^4)}{x^3} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x + \ln(1-x)]}$$
$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + o(t^2)$$
$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^5)\right] - \left[1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)\right]}{x^2\left[x + \left(\right)\right]}$$

例 3 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x + \ln(1-x)]}$

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\right] - x\left[1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^3)\right]}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^3 + o(x^4)}{x^3} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x + \ln(1-x)]}$$

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + o(t^2)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{1}{2!}t^2 + o(t^2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^5)\right] - \left[1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)\right]}{x^2\left[x + \left(\right)\right]}$$

例 3 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x + \ln(1-x)]}$

解

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\right] - x\left[1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^3)\right]}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^3 + o(x^4)}{x^3} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x + \ln(1-x)]} & \quad e^t = 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + o(t^2) \\ & \quad \ln(1+t) = t - \frac{1}{2!}t^2 + o(t^2) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^5)\right] - \left[1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)\right]}{x^2\left[x + \left(-x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)\right]}\end{aligned}$$

例 3 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x + \ln(1-x)]}$

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\right] - x\left[1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^3)\right]}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^3 + o(x^4)}{x^3} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x + \ln(1-x)]}$$

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + o(t^2)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{1}{2!}t^2 + o(t^2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^5)\right] - \left[1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)\right]}{x^2\left[x + \left(-x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)\right]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)}{-\frac{1}{2}x^4 + o(x^4)}$$

例 3 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x + \ln(1-x)]}$

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\right] - x\left[1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^3)\right]}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^3 + o(x^4)}{x^3} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x + \ln(1-x)]}$$

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + o(t^2)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{1}{2!}t^2 + o(t^2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^5)\right] - \left[1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)\right]}{x^2\left[x + \left(-x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)\right]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)}{-\frac{1}{2}x^4 + o(x^4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{12} + o(x^4)/x^4}{-\frac{1}{2} + o(x^4)/x^4}$$

例 3 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x + \ln(1-x)]}$

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\right] - x\left[1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^3)\right]}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^3 + o(x^4)}{x^3} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x + \ln(1-x)]}$$

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + o(t^2)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{1}{2!}t^2 + o(t^2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^5)\right] - \left[1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)\right]}{x^2\left[x + \left(-x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)\right]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)}{-\frac{1}{2}x^4 + o(x^4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{12} + o(x^4)/x^4}{-\frac{1}{2} + o(x^4)/x^4} = \frac{1}{6}$$

泰勒公式 (带拉格朗日余项)

设 $f(x)$ 在点 x_0 处存在 $n+1$ 阶导数, 则

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (\xi - x_0)^{n+1}$$

其中 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个值.

泰勒公式 (带拉格朗日余项)

设 $f(x)$ 在点 x_0 处存在 $n+1$ 阶导数, 则

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (\xi - x_0)^{n+1}$$

其中 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个值.

证明 令 $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$,

泰勒公式 (带拉格朗日余项)

设 $f(x)$ 在点 x_0 处存在 $n+1$ 阶导数, 则

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(\xi - x_0)^{n+1}$$

其中 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个值.

证明 令 $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$, 熟知

$$R_n(x_0) = R'_n(x_0) = R''_n(x_0) = \cdots = R_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

泰勒公式 (带拉格朗日余项)

设 $f(x)$ 在点 x_0 处存在 $n+1$ 阶导数, 则

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (\xi - x_0)^{n+1}$$

其中 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个值.

证明 令 $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$, 熟知

$$R_n(x_0) = R'_n(x_0) = R''_n(x_0) = \cdots = R_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

反复利用柯西中值定理, 可得

$$\frac{R_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}}$$

泰勒公式 (带拉格朗日余项)

设 $f(x)$ 在点 x_0 处存在 $n+1$ 阶导数, 则

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (\xi - x_0)^{n+1}$$

其中 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个值.

证明 令 $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$, 熟知

$$R_n(x_0) = R'_n(x_0) = R''_n(x_0) = \cdots = R_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

反复利用柯西中值定理, 可得

$$\frac{R_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{R'_n(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1 - x_0)^n}$$

泰勒公式 (带拉格朗日余项)

设 $f(x)$ 在点 x_0 处存在 $n+1$ 阶导数, 则

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (\xi - x_0)^{n+1}$$

其中 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个值.

证明 令 $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$, 熟知

$$R_n(x_0) = R'_n(x_0) = R''_n(x_0) = \cdots = R_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

反复利用柯西中值定理, 可得

$$\frac{R_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{R'_n(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1 - x_0)^n}$$

ξ_1 在 x 与 x_0 之间

泰勒公式 (带拉格朗日余项)

设 $f(x)$ 在点 x_0 处存在 $n+1$ 阶导数, 则

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (\xi - x_0)^{n+1}$$

其中 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个值.

证明 令 $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$, 熟知

$$R_n(x_0) = R'_n(x_0) = R''_n(x_0) = \cdots = R_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

反复利用柯西中值定理, 可得

$$\frac{R_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{R'_n(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1 - x_0)^n}$$

ξ_1 在 x 与 x_0 之间

$$\frac{R(x)}{h(x)}$$

泰勒公式 (带拉格朗日余项)

设 $f(x)$ 在点 x_0 处存在 $n+1$ 阶导数, 则

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(\xi - x_0)^{n+1}$$

其中 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个值.

证明 令 $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$, 熟知

$$R_n(x_0) = R'_n(x_0) = R''_n(x_0) = \cdots = R_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

反复利用柯西中值定理, 可得

$$\frac{R_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{R'_n(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1 - x_0)^n} \quad \xi_1 \text{ 在 } x \text{ 与 } x_0 \text{ 之间}$$

$$\frac{R(x)}{h(x)} = \frac{R(x) - R(x_0)}{h(x) - R(x_0)}$$

泰勒公式 (带拉格朗日余项)

设 $f(x)$ 在点 x_0 处存在 $n+1$ 阶导数, 则

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (\xi - x_0)^{n+1}$$

其中 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个值.

证明 令 $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$, 熟知

$$R_n(x_0) = R'_n(x_0) = R''_n(x_0) = \cdots = R_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

反复利用柯西中值定理, 可得

$$\frac{R_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{R'_n(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1 - x_0)^n} \quad \xi_1 \text{ 在 } x \text{ 与 } x_0 \text{ 之间}$$

$$\begin{aligned} \frac{R(x)}{h(x)} &= \frac{R(x) - R(x_0)}{h(x) - R(x_0)} \\ &= \frac{R'(\xi_1)}{h'(\xi_1)} \end{aligned}$$

泰勒公式 (带拉格朗日余项)

设 $f(x)$ 在点 x_0 处存在 $n+1$ 阶导数, 则

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (\xi - x_0)^{n+1}$$

其中 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个值.

证明 令 $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$, 熟知

$$R_n(x_0) = R'_n(x_0) = R''_n(x_0) = \cdots = R_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

反复利用柯西中值定理, 可得

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{R'_n(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n} \stackrel{\xi_1 \text{ 在 } x \text{ 与 } x_0 \text{ 之间}}{=} \frac{R''_n(\xi_2)}{(n+1)n(\xi_2-x_0)^{n-1}}$$

$$\begin{aligned} \frac{R(x)}{h(x)} &= \frac{R(x)-R(x_0)}{h(x)-R(x_0)} \\ &= \frac{R'(\xi_1)}{h'(\xi_1)} \end{aligned}$$

泰勒公式 (带拉格朗日余项)

设 $f(x)$ 在点 x_0 处存在 $n+1$ 阶导数, 则

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (\xi - x_0)^{n+1}$$

其中 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个值.

证明 令 $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$, 熟知

$$R_n(x_0) = R'_n(x_0) = R''_n(x_0) = \cdots = R_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

反复利用柯西中值定理, 可得

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{R'_n(\xi_1) \quad \xi_1 \text{ 在 } x \text{ 与 } x_0 \text{ 之间}}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n} = \frac{R''_n(\xi_2) \quad \xi_2 \text{ 在 } \xi_1 \text{ 与 } x_0 \text{ 之间}}{(n+1)n(\xi_2-x_0)^{n-1}}$$

$$\begin{aligned} \frac{R(x)}{h(x)} &= \frac{R(x)-R(x_0)}{h(x)-R(x_0)} \\ &= \frac{R'(\xi_1)}{h'(\xi_1)} \end{aligned}$$

泰勒公式 (带拉格朗日余项)

设 $f(x)$ 在点 x_0 处存在 $n+1$ 阶导数, 则

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (\xi - x_0)^{n+1}$$

其中 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个值.

证明 令 $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$, 熟知

$$R_n(x_0) = R'_n(x_0) = R''_n(x_0) = \cdots = R_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

反复利用柯西中值定理, 可得

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{R'_n(\xi_1) \quad \xi_1 \text{ 在 } x \text{ 与 } x_0 \text{ 之间}}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n} = \frac{R''_n(\xi_2) \quad \xi_2 \text{ 在 } \xi_1 \text{ 与 } x_0 \text{ 之间}}{(n+1)n(\xi_2-x_0)^{n-1}} = \cdots =$$

$$\begin{aligned} \frac{R(x)}{h(x)} &= \frac{R(x)-R(x_0)}{h(x)-R(x_0)} = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!} \\ &= \frac{R'_n(\xi_1)}{h'(\xi_1)} \end{aligned}$$

泰勒公式 (带拉格朗日余项)

设 $f(x)$ 在点 x_0 处存在 $n+1$ 阶导数, 则

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (\xi - x_0)^{n+1}$$

其中 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个值.

证明 令 $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$, 熟知

$$R_n(x_0) = R'_n(x_0) = R''_n(x_0) = \cdots = R_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

反复利用柯西中值定理, 可得

$$\begin{aligned} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} &= \frac{R'_n(\xi_1) \quad \xi_1 \text{ 在 } x \text{ 与 } x_0 \text{ 之间}}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n} = \frac{R''_n(\xi_2) \quad \xi_2 \text{ 在 } \xi_1 \text{ 与 } x_0 \text{ 之间}}{(n+1)n(\xi_2-x_0)^{n-1}} = \cdots = \\ \frac{R(x)}{h(x)} &= \frac{R(x)-R(x_0)}{h(x)-R(x_0)} = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!} \\ &= \frac{R'(\xi_1)}{h'(\xi_1)} \quad \xi_{n+1} \text{ 在 } \xi_n \text{ 与 } x_0 \text{ 之间} \end{aligned}$$

泰勒公式 (带拉格朗日余项)

设 $f(x)$ 在点 x_0 处存在 $n+1$ 阶导数, 则

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (\xi - x_0)^{n+1}$$

其中 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个值.

证明 令 $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$, 熟知

$$R_n(x_0) = R'_n(x_0) = R''_n(x_0) = \cdots = R_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

反复利用柯西中值定理, 可得

$$\begin{aligned} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} &= \frac{R'_n(\xi_1) \quad \xi_1 \text{ 在 } x \text{ 与 } x_0 \text{ 之间}}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n} = \frac{R''_n(\xi_2) \quad \xi_2 \text{ 在 } \xi_1 \text{ 与 } x_0 \text{ 之间}}{(n+1)n(\xi_2-x_0)^{n-1}} = \cdots = \\ \frac{R(x)}{h(x)} &= \frac{R(x)-R(x_0)}{h(x)-R(x_0)} = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!}. \\ &= \frac{R'(\xi_1)}{h'(\xi_1)} \quad \xi_{n+1} \text{ 在 } \xi_n \text{ 与 } x_0 \text{ 之间} \end{aligned}$$

带 (带拉格朗日余项) 的 泰勒公式 也写成

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 \\ + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}$$

带 (带拉格朗日余项) 的 泰勒公式 也写成

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 \\ + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \underbrace{\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}}_{R_n(x)}$$

其中 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个值.

带 (带拉格朗日余项) 的 泰勒公式 也写成

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 \\ + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \underbrace{\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}}_{R_n(x)}$$

其中 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个值.

注

1. ξ 可表示成 $(1 - \theta)x_0 + \theta x$, ($0 < \theta < 1$).

带 (带拉格朗日余项) 的 泰勒公式 也写成

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 \\ + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}$$

其中 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个值.

$R_n(x)$

注

1. ξ 可表示成 $(1 - \theta)x_0 + \theta x$, ($0 < \theta < 1$). 从而

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}((1 - \theta)x_0 + \theta x)(x - x_0)^{n+1}.$$

带 (带拉格朗日余项) 的 泰勒公式 也写成

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 \\ + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}$$

其中 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个值. $R_n(x)$

注

1. ξ 可表示成 $(1 - \theta)x_0 + \theta x$, ($0 < \theta < 1$). 从而

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}((1 - \theta)x_0 + \theta x)(x - x_0)^{n+1}.$$

2. ξ (以及 θ) 不是固定不变的, 而是随 x 和 n 的改变而变化。

带 (带拉格朗日余项) 的 泰勒公式 也写成

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 \\ + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1} \\ \underbrace{\hspace{15em}}_{R_n(x)}$$

其中 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个值。

注

1. ξ 可表示成 $(1 - \theta)x_0 + \theta x$, ($0 < \theta < 1$). 从而

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}((1 - \theta)x_0 + \theta x)(x - x_0)^{n+1}.$$

2. ξ (以及 θ) 不是固定不变的, 而是随 x 和 n 的改变而变化。
3. 当 $x_0 = 0$ 时, 则余项可写成

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}, \quad (0 < \theta < 1)$$

例 1 求 $f(x) = e^x$ 在 $x = 0$ 处的带拉格朗日余项的泰勒公式

例 1 求 $f(x) = e^x$ 在 $x = 0$ 处的带拉格朗日余项的泰勒公式

解 已求出 n 次泰勒多项式, 所以

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + R_n(x)$$

其中

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) x^{n+1}$$

例 1 求 $f(x) = e^x$ 在 $x = 0$ 处的带拉格朗日余项的泰勒公式

解 已求出 n 次泰勒多项式, 所以

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + R_n(x)$$

其中

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) x^{n+1} = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad (0 < \theta < 1).$$

例 1 求 $f(x) = e^x$ 在 $x = 0$ 处的带拉格朗日余项的泰勒公式

解 已求出 n 次泰勒多项式, 所以

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + R_n(x)$$

其中

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1} = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad (0 < \theta < 1).$$

例 2

● $\sin x$ 在 $x = 0$ 处的带拉格朗日余项

● $\cos x$ 在 $x = 0$ 处的带拉格朗日余项

例 1 求 $f(x) = e^x$ 在 $x = 0$ 处的带拉格朗日余项的泰勒公式

解 已求出 n 次泰勒多项式, 所以

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + R_n(x)$$

其中

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) x^{n+1} = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad (0 < \theta < 1).$$

例 2

- $\sin x$ 在 $x = 0$ 处的带拉格朗日余项

$$R_n(x) = \frac{\sin\left(\theta x + \frac{n+1}{2}\pi\right)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad (0 < \theta < 1).$$

- $\cos x$ 在 $x = 0$ 处的带拉格朗日余项

例 1 求 $f(x) = e^x$ 在 $x = 0$ 处的带拉格朗日余项的泰勒公式

解 已求出 n 次泰勒多项式, 所以

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + R_n(x)$$

其中

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) x^{n+1} = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad (0 < \theta < 1).$$

例 2

- $\sin x$ 在 $x = 0$ 处的带拉格朗日余项

$$R_n(x) = \frac{\sin\left(\theta x + \frac{n+1}{2}\pi\right)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad (0 < \theta < 1).$$

- $\cos x$ 在 $x = 0$ 处的带拉格朗日余项

$$R_n(x) = \frac{\cos\left(\theta x + \frac{n+1}{2}\pi\right)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad (0 < \theta < 1).$$