第 11 章 f：高斯公式、斯托克斯公式

数学系　　梁卓滨

2016-2017 学年 II

Outline

1. 高斯公式

2. 斯托克斯公式

We are here now...

1. 高斯公式

2. 斯托克斯公式

向量场的散度

定义 设 $F = (P, Q, R)$ 是空间中向量场，定义

$$\mathrm{div} F := \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

称为向量场 F 的散度。

向量场的散度

定义 设 $F=(P,Q,R)$ 是空间中向量场，定义

$$\operatorname{div} F := \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

称为向量场 F 的散度。

例 计算向量场 $F=(x^2+yz, y^2+xz, z^2+xy)$ 的散度。

向量场的散度

定义 设 $F = (P, Q, R)$ 是空间中向量场，定义

$$\mathrm{div} F := \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

称为向量场 F 的散度。

例 计算向量场 $F = (x^2 + yz, y^2 + xz, z^2 + xy)$ 的散度。

解

$$\mathrm{div} F = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + yz) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2 + xz) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2 + xy)$$

向量场的散度

定义 设 $F = (P, Q, R)$ 是空间中向量场，定义

$$\mathrm{div} F := \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

称为向量场 F 的散度。

例 计算向量场 $F = (x^2 + yz, y^2 + xz, z^2 + xy)$ 的散度。

解

$$\mathrm{div} F = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + yz) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2 + xz) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2 + xy) = 2x + 2y + 2z.$$

例 计算梯度场 $\nabla \frac{1}{r}$（$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$）的散度。

例 计算梯度场 $\nabla\frac{1}{r}$（$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$）的散度。

解

$$\nabla\frac{1}{r}$$

$$\mathrm{div}\nabla\frac{1}{r}$$

例 计算梯度场 $\nabla\frac{1}{r}$（$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$）的散度。

解

$$\nabla\frac{1}{r}=(\frac{\partial}{\partial x}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial y}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial y}r^{-1})$$

$$\mathrm{div}\nabla\frac{1}{r}$$

例 计算梯度场 $\nabla\frac{1}{r}$（$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$）的散度。

解

$$\nabla\frac{1}{r}=(\frac{\partial}{\partial x}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial y}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial y}r^{-1})$$

$$-r^{-2}\cdot r_x$$

$$\mathrm{div}\nabla\frac{1}{r}$$

例 计算梯度场 $\nabla\frac{1}{r}$（$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$）的散度。

解

$$\nabla\frac{1}{r}=(\frac{\partial}{\partial x}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial y}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial y}r^{-1})$$

$$=(-r^{-2}\cdot r_x,\ -r^{-2}\cdot r_y,\ -r^{-2}\cdot r_y)$$

$$\mathrm{div}\nabla\frac{1}{r}$$

例 计算梯度场 $\nabla\frac{1}{r}$（$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$）的散度。

解

$$r_x=\frac{x}{r},$$

$$\nabla\frac{1}{r}=(\frac{\partial}{\partial x}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial y}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial y}r^{-1})$$

$$=(-r^{-2}\cdot r_x,-r^{-2}\cdot r_y,-r^{-2}\cdot r_y)$$

$$\mathrm{div}\nabla\frac{1}{r}$$

例 计算梯度场 $\nabla\frac{1}{r}$（$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$）的散度。

解

$$r_x=\frac{x}{r},\qquad r_y=\frac{y}{r},\qquad r_z=\frac{z}{r},$$

$$\nabla\frac{1}{r}=\left(\frac{\partial}{\partial x}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial y}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial y}r^{-1}\right)$$

$$=\left(-r^{-2}\cdot r_x,\ -r^{-2}\cdot r_y,\ -r^{-2}\cdot r_y\right)$$

$$\mathrm{div}\nabla\frac{1}{r}$$

例 计算梯度场 $\nabla\frac{1}{r}$（$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$）的散度。

解

$$r_x=\frac{x}{r},\qquad r_y=\frac{y}{r},\qquad r_z=\frac{z}{r},$$

$$\nabla\frac{1}{r}=(\frac{\partial}{\partial x}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial y}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial y}r^{-1})$$

$$=(-r^{-2}\cdot r_x,\ -r^{-2}\cdot r_y,\ -r^{-2}\cdot r_y)=(-\frac{x}{r^3},\ -\frac{y}{r^3},\ -\frac{z}{r^3}),$$

$$\mathrm{div}\nabla\frac{1}{r}$$

例 计算梯度场 $\nabla\frac{1}{r}$（$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$）的散度。

解

$$r_x=\frac{x}{r},\qquad r_y=\frac{y}{r},\qquad r_z=\frac{z}{r},$$

$$\nabla\frac{1}{r}=(\frac{\partial}{\partial x}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial y}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial y}r^{-1})$$

$$=(-r^{-2}\cdot r_x,-r^{-2}\cdot r_y,-r^{-2}\cdot r_y)=(-\frac{x}{r^3},-\frac{y}{r^3},-\frac{z}{r^3}),$$

$$\mathrm{div}\nabla\frac{1}{r}=\frac{\partial}{\partial x}(-\frac{x}{r^3})+\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{y}{r^3})+\frac{\partial}{\partial z}(-\frac{z}{r^3})$$

例 计算梯度场 $\nabla\frac{1}{r}$（$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$）的散度。

解

$$r_x=\frac{x}{r},\qquad r_y=\frac{y}{r},\qquad r_z=\frac{z}{r},$$

$$\nabla\frac{1}{r}=(\frac{\partial}{\partial x}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial y}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial y}r^{-1})$$

$$=(-r^{-2}\cdot r_x,-r^{-2}\cdot r_y,-r^{-2}\cdot r_y)=(-\frac{x}{r^3},-\frac{y}{r^3},-\frac{z}{r^3}),$$

$$\mathrm{div}\nabla\frac{1}{r}=\frac{\partial}{\partial x}(-\frac{x}{r^3})+\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{y}{r^3})+\frac{\partial}{\partial z}(-\frac{z}{r^3})$$

$$(-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5})$$

例 计算梯度场 $\nabla\frac{1}{r}$（$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$）的散度。

解

$$r_x=\frac{x}{r},\qquad r_y=\frac{y}{r},\qquad r_z=\frac{z}{r},$$

$$\nabla\frac{1}{r}=(\frac{\partial}{\partial x}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial y}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial y}r^{-1})$$

$$=(-r^{-2}\cdot r_x,-r^{-2}\cdot r_y,-r^{-2}\cdot r_y)=(-\frac{x}{r^3},-\frac{y}{r^3},-\frac{z}{r^3}),$$

$$\mathrm{div}\nabla\frac{1}{r}=\frac{\partial}{\partial x}(-\frac{x}{r^3})+\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{y}{r^3})+\frac{\partial}{\partial z}(-\frac{z}{r^3})$$

$$=(-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5})+(-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5})+(-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5})$$

例 计算梯度场 $\nabla\frac{1}{r}$（$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$）的散度。

解

$$r_x=\frac{x}{r},\qquad r_y=\frac{y}{r},\qquad r_z=\frac{z}{r},$$

$$\nabla\frac{1}{r}=(\frac{\partial}{\partial x}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial y}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial y}r^{-1})$$

$$=(-r^{-2}\cdot r_x,-r^{-2}\cdot r_y,-r^{-2}\cdot r_y)=(-\frac{x}{r^3},-\frac{y}{r^3},-\frac{z}{r^3}),$$

$$\mathrm{div}\nabla\frac{1}{r}=\frac{\partial}{\partial x}(-\frac{x}{r^3})+\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{y}{r^3})+\frac{\partial}{\partial z}(-\frac{z}{r^3})$$

$$=(-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5})+(-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5})+(-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5})$$

$$=-\frac{3}{r^3}+\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}$$

例 计算梯度场 $\nabla\frac{1}{r}$（$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$）的散度。

解

$$r_x=\frac{x}{r},\qquad r_y=\frac{y}{r},\qquad r_z=\frac{z}{r},$$

$$\nabla\frac{1}{r}=\left(\frac{\partial}{\partial x}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial y}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial y}r^{-1}\right)$$

$$=(-r^{-2}\cdot r_x,-r^{-2}\cdot r_y,-r^{-2}\cdot r_y)=\left(-\frac{x}{r^3},-\frac{y}{r^3},-\frac{z}{r^3}\right),$$

$$\mathrm{div}\nabla\frac{1}{r}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{z}{r^3}\right)$$

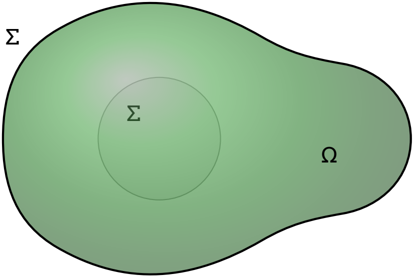
$$=\left(-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5}\right)+\left(-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5}\right)+\left(-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5}\right)$$

$$=-\frac{3}{r^3}+\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}=0.$$

高斯公式

定理（高斯公式） 假设

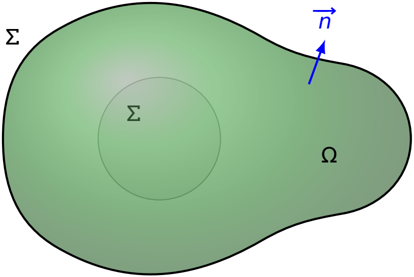
- 空间闭区域 Ω 的边界是分片光滑的闭曲面 Σ，
- $\overrightarrow{n}$ 是 Σ 的单位外法向量，



高斯公式

定理（高斯公式） 假设

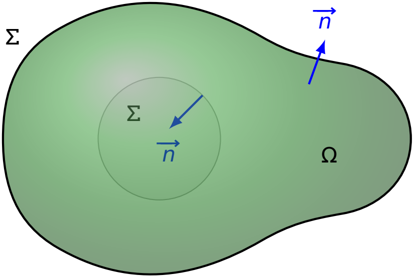
- 空间闭区域 Ω 的边界是分片光滑的闭曲面 Σ，
- $\overrightarrow{n}$ 是 Σ 的单位外法向量，



高斯公式

定理（高斯公式） 假设

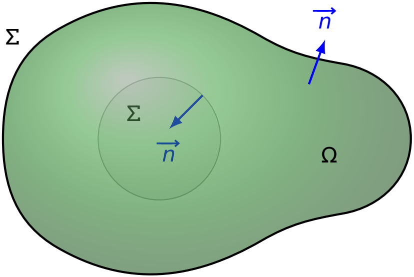
- 空间闭区域 Ω 的边界是分片光滑的闭曲面 Σ，
- $\overrightarrow{n}$ 是 Σ 的单位外法向量，



高斯公式

定理（高斯公式） 假设

- 空间闭区域 Ω 的边界是分片光滑的闭曲面 Σ,
- $\overrightarrow{n}$ 是 Σ 的单位外法向量,
- $F = (P, Q, R)$ 是 Ω 中向量场，且 P, Q, R 具有一阶连续的偏导数,

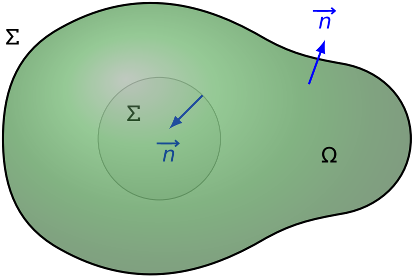


高斯公式

定理（高斯公式） 假设

- 空间闭区域 Ω 的边界是分片光滑的闭曲面 Σ，
- $\vec{n}$ 是 Σ 的单位外法向量，
- $F = (P, Q, R)$ 是 Ω 中向量场，且 P, Q, R 具有一阶连续的偏导数，

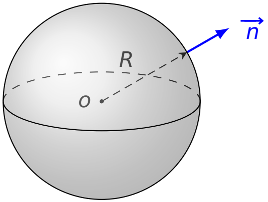
则
$$\iiint_\Omega \mathrm{div} F dv = \iint_\Sigma F \cdot \vec{n} dS$$



例 计算

$$I=\iint_{\Sigma}2xdydz+y^2dzdx+z^2dxdy$$

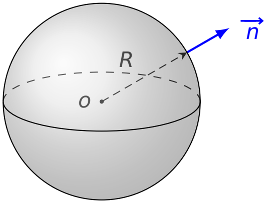
其中定向曲面 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$，定向取外侧



例 计算

$$I = \iint_{\Sigma} 2x\,dydz + y^2\,dzdx + z^2\,dxdy$$

其中定向曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$，定向取外侧



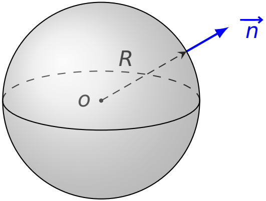
解

$$I = \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n}\, dS$$

例 计算

$$I=\iint_{\Sigma}2xdydz+y^2dzdx+z^2dxdy$$

其中定向曲面 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$，定向取外侧



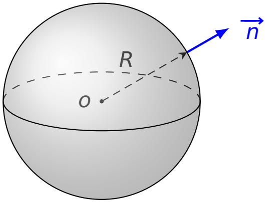
解

$$I=\iint_{\Sigma}F\cdot\vec{n}\,dS\overset{\text{高斯公式}}{=\!=\!=\!=}\iiint_{\Omega}\mathrm{div}F\,dv$$

例 计算

$$I = \iint_{\Sigma} 2x\,dydz + y^2\,dzdx + z^2\,dxdy$$

其中定向曲面 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$，定向取外侧



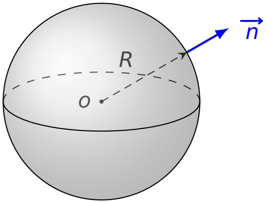
解

$$I \xlongequal{F=(2x,y^2,z^2)} \iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div}F\,dv$$

例 计算

$$I=\iint_{\Sigma} 2x\,dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$$

其中定向曲面 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$，定向取外侧



解

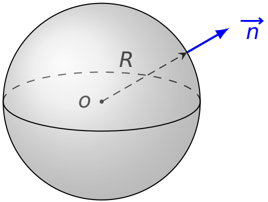
$$I \xlongequal{F=(2x,y^2,z^2)} \iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div}F\,dv$$

$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}(2x)+\frac{\partial}{\partial y}(y^2)+\frac{\partial}{\partial z}(z^2)\right]dv$$

例 计算

$$I=\iint_{\Sigma} 2xdydz+y^2dzdx+z^2dxdy$$

其中定向曲面 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$，定向取外侧



解

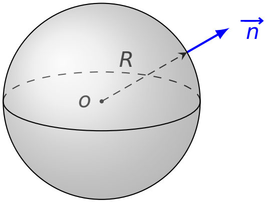
$$I \xlongequal{F=(2x,y^2,z^2)} \iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div}F dv$$

$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}(2x)+\frac{\partial}{\partial y}(y^2)+\frac{\partial}{\partial z}(z^2)\right]dv=\iiint_{\Omega}(2+y+z)dxdydz$$

例 计算

$$I=\iint_{\Sigma} 2x dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$$

其中定向曲面 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$，定向取外侧



解

$$I \xlongequal{F=(2x,y^2,z^2)} \iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div} F dv$$

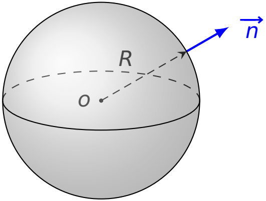
$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}(2x)+\frac{\partial}{\partial y}(y^2)+\frac{\partial}{\partial z}(z^2)\right]dv=\iiint_{\Omega}(2+y+z)dxdydz$$

$$\xlongequal{\text{对称性}} \iiint_{\Omega} 2dydz$$

例 计算

$$I=\iint_{\Sigma} 2xdydz+y^2dzdx+z^2dxdy$$

其中定向曲面 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$，定向取外侧



解

$$I \xlongequal{F=(2x,y^2,z^2)} \iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div}F dv$$

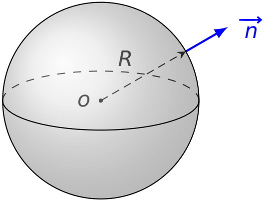
$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}(2x)+\frac{\partial}{\partial y}(y^2)+\frac{\partial}{\partial z}(z^2)\right]dv=\iiint_{\Omega}(2+y+z)dxdydz$$

$$\xlongequal{\text{对称性}} \iiint_{\Omega} 2dydz = 2\mathrm{Vol}(\Omega)$$

例 计算

$$I=\iint_{\Sigma} 2xdydz+y^2dzdx+z^2dxdy$$

其中定向曲面 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$，定向取外侧



解

$$I \xlongequal{F=(2x,y^2,z^2)} \iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div}F dv$$

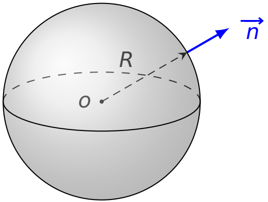
$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}(2x)+\frac{\partial}{\partial y}(y^2)+\frac{\partial}{\partial z}(z^2)\right]dv=\iiint_{\Omega}(2+y+z)dxdydz$$

$$\xlongequal{\text{对称性}} \iiint_{\Omega} 2dydz = 2\mathrm{Vol}(\Omega)$$

例 计算

$$I=\iint_{\Sigma} 2xdydz+y^2dzdx+z^2dxdy$$

其中定向曲面 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$，定向取外侧



解

$$I \xlongequal{F=(2x,y^2,z^2)} \iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div}F dv$$

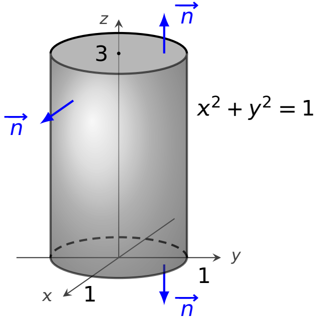
$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}(2x)+\frac{\partial}{\partial y}(y^2)+\frac{\partial}{\partial z}(z^2)\right]dv=\iiint_{\Omega}(2+y+z)dxdydz$$

$$\xlongequal{\text{对称性}} \iiint_{\Omega} 2dydz = 2\mathrm{Vol}(\Omega)=\frac{8}{3}\pi R^3$$

例 计算

$$I=\iint_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y-z)xdydz$$

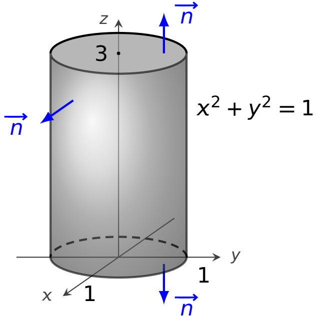
其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



例 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x-y)dxdy + (y-z)xdydz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



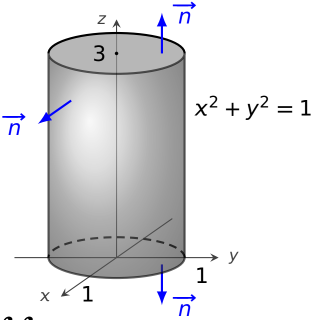
解

$$I = \!=\!=\!=\!=\!=\!= \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n}\, dS$$

例 计算

$$I=\iint_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y-z)xdydz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



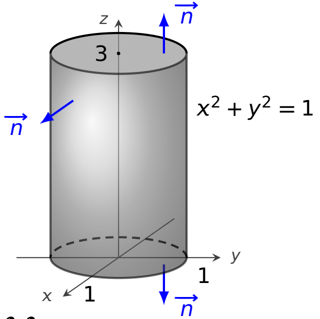
解

$$I=\!=\!=\!=\!=\!=\iint_{\Sigma}F\cdot\vec{n}\,dS\overset{\text{高斯公式}}{=\!=\!=}\iiint_{\Omega}\mathrm{div}F\,dv$$

例 计算

$$I=\iint_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y-z)xdydz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



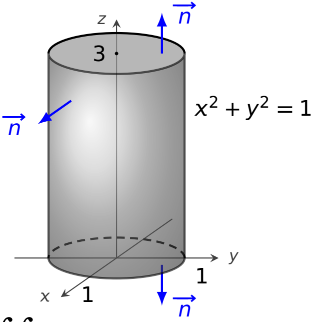
解

$$I \xlongequal{F=((y-z)x,0,x-y)} \iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv$$

例 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x-y)dxdy + (y-z)xdydz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



解

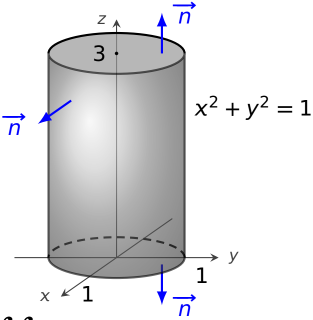
$$I \xlongequal{F=((y-z)x,0,x-y)} \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n}\, dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div} F dv$$

$$= \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}((y-z)x) + \frac{\partial}{\partial y} 0 + \frac{\partial}{\partial z}(x-y) \right] dv$$

例 计算

$$I=\iint_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y-z)xdydz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



解

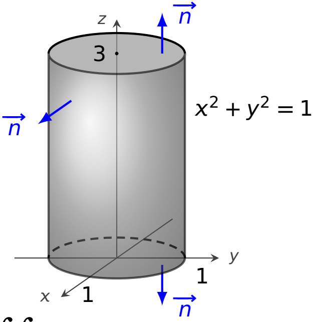
$$I \xlongequal{F=((y-z)x,0,x-y)} \iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega}\mathrm{div}F\,dv$$

$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}((y-z)x)+\frac{\partial}{\partial y}0+\frac{\partial}{\partial z}(x-y)\right]dv=\iiint_{\Omega}y-zdxdydz$$

例 计算

$$I=\iint_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y-z)xdydz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



解

$$I \xlongequal{F=((y-z)x,0,x-y)} \iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div}F dv$$

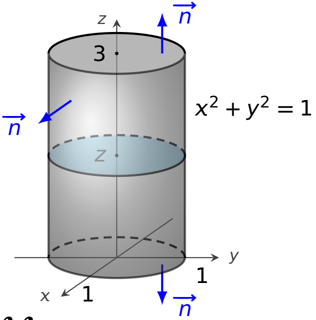
$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}((y-z)x)+\frac{\partial}{\partial y}0+\frac{\partial}{\partial z}(x-y)\right]dv=\iiint_{\Omega} y-z dxdydz$$

$$=\int\left[\iint(y-z)dxy\right]dz$$

例 计算

$$I=\iint_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y-z)xdydz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面

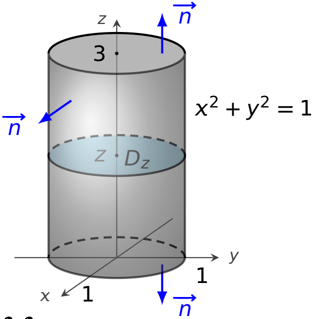


解

$$I \xlongequal{F=((y-z)x,0,x-y)} \iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{高斯公式} \iiint_{\Omega}\mathrm{div}F\,dv$$

$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}((y-z)x)+\frac{\partial}{\partial y}0+\frac{\partial}{\partial z}(x-y)\right]dv=\iiint_{\Omega}y-z\,dxdydz$$

$$=\int\left[\iint(y-z)dxy\right]dz$$



例 计算

$$I=\iint_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y-z)xdydz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面

解

$$I \xlongequal{F=((y-z)x,0,x-y)} \iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega}\mathrm{div}F dv$$

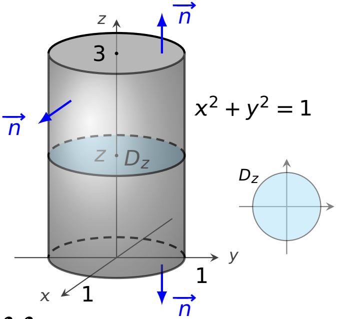
$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}((y-z)x)+\frac{\partial}{\partial y}0+\frac{\partial}{\partial z}(x-y)\right]dv=\iiint_{\Omega}y-zdxdydz$$

$$=\int\left[\iint(y-z)dxy\right]dz$$

例 计算

$$I=\iint_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y-z)xdydz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



解

$$I \xlongequal{F=((y-z)x,0,x-y)} \iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega}\mathrm{div}F\,dv$$

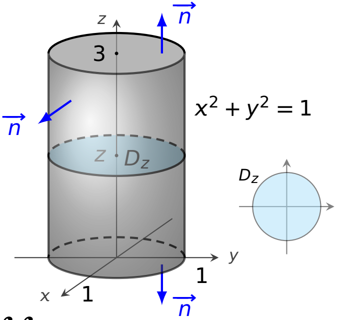
$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}((y-z)x)+\frac{\partial}{\partial y}0+\frac{\partial}{\partial z}(x-y)\right]dv=\iiint_{\Omega}y-z\,dxdydz$$

$$=\int\ \left[\iint (y-z)dxy\right]dz$$

例 计算

$$I=\iint_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y-z)xdydz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



解

$$I \xlongequal{F=((y-z)x,0,x-y)} \iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div} F dv$$

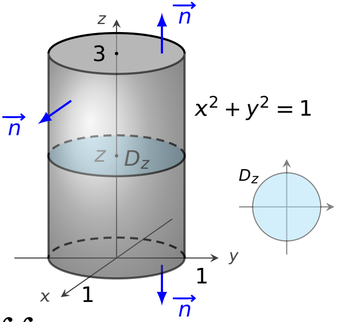
$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}((y-z)x)+\frac{\partial}{\partial y}0+\frac{\partial}{\partial z}(x-y)\right]dv=\iiint_{\Omega} y-zdxdydz$$

$$=\int_0^3\left[\iint (y-z)dxy\right]dz$$

例 计算

$$I=\iint_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y-z)xdydz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



解

$$I \xlongequal{F=((y-z)x,0,x-y)} \iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div}F dv$$

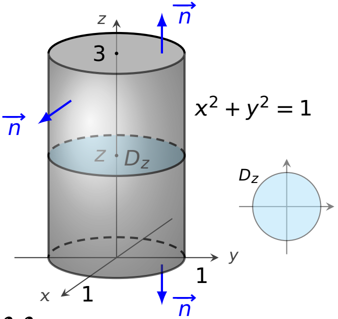
$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}((y-z)x)+\frac{\partial}{\partial y}0+\frac{\partial}{\partial z}(x-y)\right]dv=\iiint_{\Omega} y-zdxdydz$$

$$=\int_0^3\left[\iint_{D_z}(y-z)dxy\right]dz$$

例 计算

$$I=\iint_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y-z)xdydz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



解

$$I \xlongequal{F=((y-z)x,0,x-y)} \iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div} F dv$$

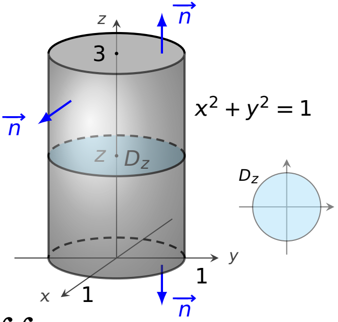
$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}((y-z)x)+\frac{\partial}{\partial y}0+\frac{\partial}{\partial z}(x-y)\right]dv=\iiint_{\Omega} y-z dxdydz$$

$$=\int_0^3\left[\iint_{D_z}(y-z)dxy\right]dz=\int_0^3\left[\iint_{D_z}-zdxy\right]dz$$

例 计算

$$I=\iint_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y-z)xdydz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



解

$$I \xlongequal{F=((y-z)x,0,x-y)} \iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega}\mathrm{div}F dv$$

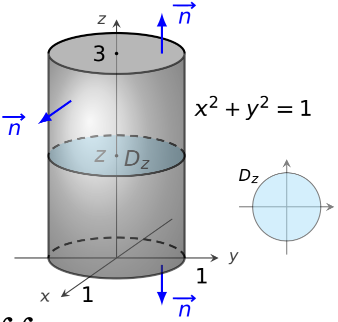
$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}((y-z)x)+\frac{\partial}{\partial y}0+\frac{\partial}{\partial z}(x-y)\right]dv=\iiint_{\Omega}y-zdxdydz$$

$$=\int_0^3\left[\iint_{D_z}(y-z)dxy\right]dz=\int_0^3\left[\iint_{D_z}-zdxy\right]dz \qquad -z|D_z|$$

例 计算

$$I=\iint_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y-z)xdydz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



解

$$I\xlongequal{F=((y-z)x,0,x-y)}\iint_{\Sigma}F\cdot\vec{n}\,dS\xlongequal{\text{高斯公式}}\iiint_{\Omega}\mathrm{div}F\,dv$$

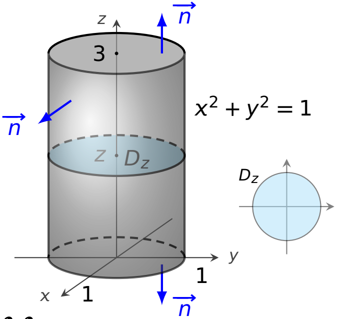
$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}((y-z)x)+\frac{\partial}{\partial y}0+\frac{\partial}{\partial z}(x-y)\right]dv=\iiint_{\Omega}y-z\,dxdydz$$

$$=\int_0^3\left[\iint_{D_z}(y-z)dxy\right]dz=\int_0^3\left[\iint_{D_z}-zdxy\right]dz=\int_0^3\left[-z|D_z|\right]dz$$

例 计算

$$I=\iint_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y-z)xdydz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



解

$$I \xlongequal{F=((y-z)x,0,x-y)} \iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega}\mathrm{div}F dv$$

$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}((y-z)x)+\frac{\partial}{\partial y}0+\frac{\partial}{\partial z}(x-y)\right]dv=\iiint_{\Omega}y-zdxdydz$$

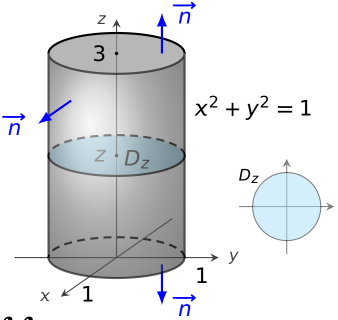
$$=\int_0^3\left[\iint_{D_z}(y-z)dxy\right]dz=\int_0^3\left[\iint_{D_z}-zdxy\right]dz=\int_0^3\left[-z|D_z|\right]dz$$

$$=\int_0^3\left[-z\pi\right]dz$$

例 计算

$$I=\iint_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y-z)xdydz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



解

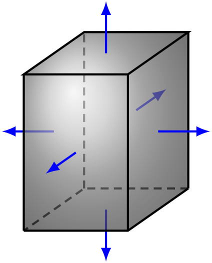
$$I \xlongequal{F=((y-z)x,0,x-y)} \iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div}F dv$$

$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}((y-z)x)+\frac{\partial}{\partial y}0+\frac{\partial}{\partial z}(x-y)\right]dv=\iiint_{\Omega}y-zdxdydz$$

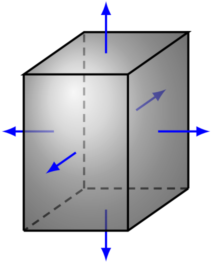
$$=\int_0^3\left[\iint_{D_z}(y-z)dxy\right]dz=\int_0^3\left[\iint_{D_z}-zdxy\right]dz=\int_0^3\left[-z|D_z|\right]dz$$

$$=\int_0^3\left[-z\pi\right]dz=-\frac{9}{2}\pi$$

例 计算流体 $F=(x-y^2, y, z^3)$ 流向长方体 $[0, 1]\times[1, 2]\times[1, 4]$ 外侧的通量。



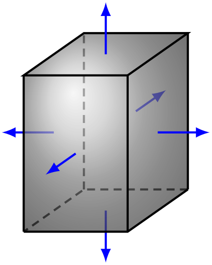
例 计算流体 $F=(x-y^2, y, z^3)$ 流向长方体 $[0,1]\times[1,2]\times[1,4]$ 外侧的通量。



解

$$\Phi=\iint_{\Sigma} F\cdot\overrightarrow{n}\,dS$$

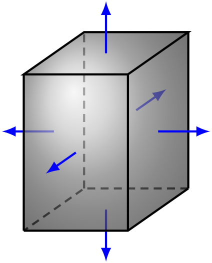
例 计算流体 $F = (x - y^2, y, z^3)$ 流向长方体 $[0, 1] \times [1, 2] \times [1, 4]$ 外侧的通量。



解

$$\Phi = \iint_{\Sigma} F \cdot \overrightarrow{n}\, dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div} F dv$$

例 计算流体 $F=(x-y^2, y, z^3)$ 流向长方体 $[0,1]\times[1,2]\times[1,4]$ 外侧的通量。

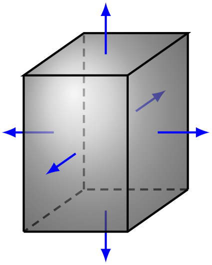


解

$$\Phi=\iint_\Sigma F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_\Omega \mathrm{div}F\,dv$$

$$=\iiint_\Omega\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-y^2)+\frac{\partial}{\partial y}(y)+\frac{\partial}{\partial z}(z^3)\right]dv$$

例 计算流体 $F=(x-y^2, y, z^3)$ 流向长方体 $[0,1]\times[1,2]\times[1,4]$ 外侧的通量。



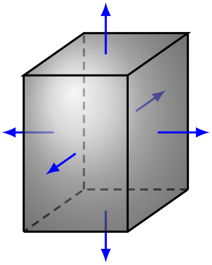
解

$$\Phi=\iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div}F\,dv$$

$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-y^2)+\frac{\partial}{\partial y}(y)+\frac{\partial}{\partial z}(z^3)\right]dv$$

$$=\iiint_{\Omega}(2+3z^2)dxdydz$$

例 计算流体 $F=(x-y^2, y, z^3)$ 流向长方体 $[0,1]\times[1,2]\times[1,4]$ 外侧的通量。



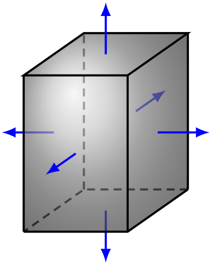
解

$$\Phi=\iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div}F\,dv$$

$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-y^2)+\frac{\partial}{\partial y}(y)+\frac{\partial}{\partial z}(z^3)\right]dv$$

$$=\iiint_{\Omega}(2+3z^2)\,dx\,dy\,dz=\int\left[\int\left[\int(2+3z^2)dz\right]dx\right]dy$$

例 计算流体 $F=(x-y^2, y, z^3)$ 流向长方体 $[0,1]\times[1,2]\times[1,4]$ 外侧的通量。



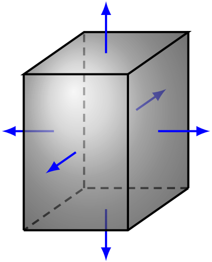
解

$$\Phi=\iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega}\mathrm{div}F\,dv$$

$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-y^2)+\frac{\partial}{\partial y}(y)+\frac{\partial}{\partial z}(z^3)\right]dv$$

$$=\iiint_{\Omega}(2+3z^2)dxdydz=\int_0^1\left[\int\ \left[\int(2+3z^2)dz\right]dx\right]dy$$

例 计算流体 $F=(x-y^2, y, z^3)$ 流向长方体 $[0,1]\times[1,2]\times[1,4]$ 外侧的通量。



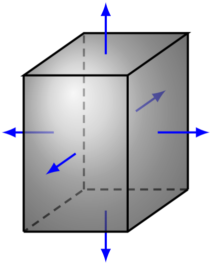
解

$$\Phi=\iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div} F dv$$

$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-y^2)+\frac{\partial}{\partial y}(y)+\frac{\partial}{\partial z}(z^3)\right]dv$$

$$=\iiint_{\Omega}(2+3z^2)dxdydz=\int_0^1\left[\int_1^2\left[\int(2+3z^2)dz\right]dx\right]dy$$

例 计算流体 $F=(x-y^2,y,z^3)$ 流向长方体 $[0,1]\times[1,2]\times[1,4]$ 外侧的通量。



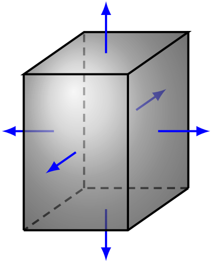
解

$$\Phi=\iint_\Sigma F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_\Omega \mathrm{div}F\,dv$$

$$=\iiint_\Omega\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-y^2)+\frac{\partial}{\partial y}(y)+\frac{\partial}{\partial z}(z^3)\right]dv$$

$$=\iiint_\Omega(2+3z^2)dxdydz=\int_0^1\left[\int_1^2\left[\int_1^4(2+3z^2)dz\right]dx\right]dy$$

例 计算流体 $F=(x-y^2, y, z^3)$ 流向长方体 $[0,1]\times[1,2]\times[1,4]$ 外侧的通量。



解

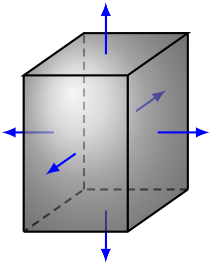
$$\Phi=\iint_\Sigma F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_\Omega \mathrm{div}F\,dv$$

$$=\iiint_\Omega\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-y^2)+\frac{\partial}{\partial y}(y)+\frac{\partial}{\partial z}(z^3)\right]dv$$

$$=\iiint_\Omega(2+3z^2)dxdydz=\int_0^1\left[\int_1^2\left[\int_1^4(2+3z^2)dz\right]dx\right]dy$$

$$=\int_0^1 1dy\cdot\int_1^2 1dx\cdot\int_1^4(2+3z^2)dz$$

例 计算流体 $F=(x-y^2,y,z^3)$ 流向长方体 $[0,1]\times[1,2]\times[1,4]$ 外侧的通量。



解

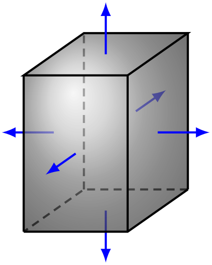
$$\Phi=\iint_\Sigma F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_\Omega \mathrm{div}F\,dv$$

$$=\iiint_\Omega\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-y^2)+\frac{\partial}{\partial y}(y)+\frac{\partial}{\partial z}(z^3)\right]dv$$

$$=\iiint_\Omega(2+3z^2)dxdydz=\int_0^1\left[\int_1^2\left[\int_1^4(2+3z^2)dz\right]dx\right]dy$$

$$=\int_0^1 1dy\cdot\int_1^2 1dx\cdot\int_1^4(2+3z^2)dz=1\cdot1\cdot(2z+z^3)\Big|_1^4$$

例 计算流体 $F=(x-y^2, y, z^3)$ 流向长方体 $[0,1]\times[1,2]\times[1,4]$ 外侧的通量。



解

$$\Phi=\iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega}\mathrm{div}F\,dv$$

$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-y^2)+\frac{\partial}{\partial y}(y)+\frac{\partial}{\partial z}(z^3)\right]dv$$

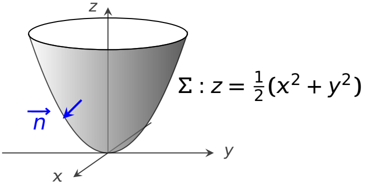
$$=\iiint_{\Omega}(2+3z^2)dxdydz=\int_0^1\left[\int_1^2\left[\int_1^4(2+3z^2)dz\right]dx\right]dy$$

$$=\int_0^1 1dy\cdot\int_1^2 1dx\cdot\int_1^4(2+3z^2)dz=1\cdot 1\cdot(2z+z^3)\Big|_1^4=69$$

例 计算

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz-zdxdy$$

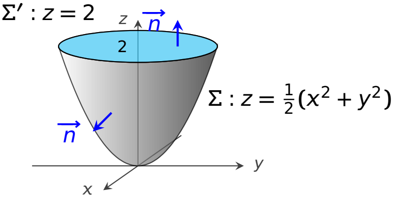
其中定向曲面 Σ 是抛物面的一部分，取单位外法向量，如图：



例 计算

$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x)dydz - zdxdy$$

其中定向曲面 Σ 是抛物面的一部分，取单位外法向量，如图：

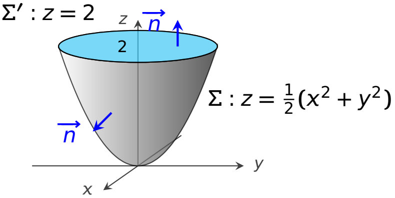


解 如图补充平面 Σ'，则 $\Sigma \cup \Sigma'$ 构成 3 维区域 Ω 边界，应用高斯公式：

例 计算

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz-zdxdy$$

其中定向曲面 Σ 是抛物面的一部分，取单位外法向量，如图：



解 如图补充平面 Σ'，则 $\Sigma\cup\Sigma'$ 构成 3 维区域 Ω 边界，应用高斯公式：

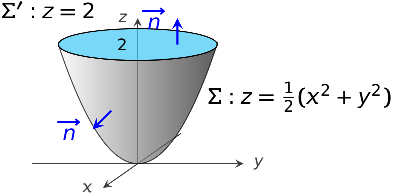
$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz-zdxdy=\iint_{\Sigma}F\cdot\vec{n}\,dS,$$

$$\iint_{\Sigma'}(z^2+x)dydz-zdxdy=\iint_{\Sigma'}F\cdot\vec{n}\,dS$$

例 计算

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz - zdxdy$$

其中定向曲面 Σ 是抛物面的一部分，取单位外法向量，如图：



解 如图补充平面 Σ'，则 $\Sigma \cup \Sigma'$ 构成 3 维区域 Ω 边界，应用高斯公式：

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz - zdxdy = \iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS,$$

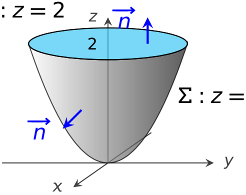
$$\iint_{\Sigma'}(z^2+x)dydz - zdxdy = \iint_{\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS$$

$$\iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS + \iint_{\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS = \iint_{\Sigma\cup\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS$$

例 计算

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz-zdxdy$$

其中定向曲面 Σ 是抛物面的一部分，取单位外法向量，如图：



解 如图补充平面 Σ'，则 $\Sigma\cup\Sigma'$ 构成 3 维区域 Ω 边界，应用高斯公式：

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz-zdxdy=\iint_{\Sigma}F\cdot\vec{n}\,dS,$$

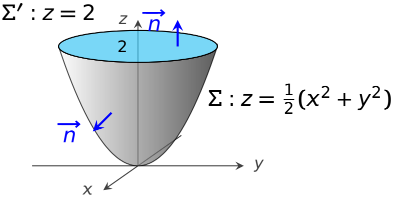
$$\iint_{\Sigma'}(z^2+x)dydz-zdxdy=\iint_{\Sigma'}F\cdot\vec{n}\,dS$$

$$\iint_{\Sigma}F\cdot\vec{n}\,dS+\iint_{\Sigma'}F\cdot\vec{n}\,dS=\iint_{\Sigma\cup\Sigma'}F\cdot\vec{n}\,dS=\iiint_{\Omega}\mathrm{div}F\,dv$$

例 计算

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz - zdxdy$$

其中定向曲面 Σ 是抛物面的一部分，取单位外法向量，如图：



解 如图补充平面 Σ'，则 $\Sigma \cup \Sigma'$ 构成 3 维区域 Ω 边界，应用高斯公式：

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz - zdxdy = \iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS,$$

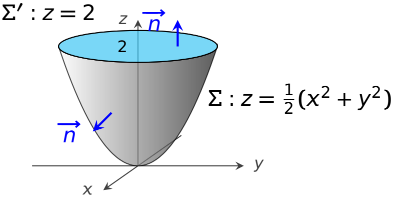
$$\iint_{\Sigma'}(z^2+x)dydz - zdxdy = \iint_{\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS$$

$$\iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS + \iint_{\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS = \iint_{\Sigma\cup\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_{\Omega}\mathrm{div}F\,dv \overset{\mathrm{div}F=0}{=\!=\!=\!=}$$

例 计算

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz-zdxdy$$

其中定向曲面 Σ 是抛物面的一部分，取单位外法向量，如图：



解 如图补充平面 Σ'，则 $\Sigma\cup\Sigma'$ 构成 3 维区域 Ω 边界，应用高斯公式：

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz-zdxdy=\iint_{\Sigma}F\cdot\vec{n}\,dS,$$

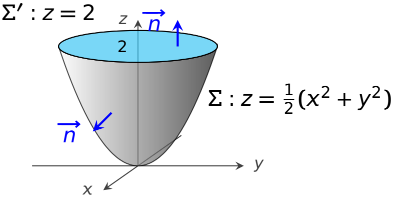
$$\iint_{\Sigma'}(z^2+x)dydz-zdxdy=\iint_{\Sigma'}F\cdot\vec{n}\,dS$$

$$\iint_{\Sigma}F\cdot\vec{n}\,dS+\iint_{\Sigma'}F\cdot\vec{n}\,dS=\iint_{\Sigma\cup\Sigma'}F\cdot\vec{n}\,dS=\iiint_{\Omega}\mathrm{div}F\,dv\xlongequal{\mathrm{div}F=0}0.$$

例 计算

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz-zdxdy$$

其中定向曲面 Σ 是抛物面的一部分，取单位外法向量，如图：



解 如图补充平面 Σ′，则 Σ ∪ Σ′ 构成 3 维区域 Ω 边界，应用高斯公式：

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz-zdxdy=\iint_{\Sigma}F\cdot\vec{n}\,dS,$$

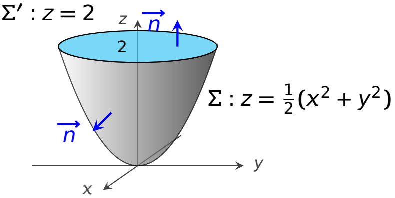
$$\iint_{\Sigma'}(z^2+x)dydz-zdxdy=\iint_{\Sigma'}F\cdot\vec{n}\,dS\ \overset{F=(z^2+x,0,-z)}{=\!=\!=\!=\!=}$$

$$\iint_{\Sigma}F\cdot\vec{n}\,dS+\iint_{\Sigma'}F\cdot\vec{n}\,dS=\iint_{\Sigma\cup\Sigma'}F\cdot\vec{n}\,dS=\iiint_{\Omega}\mathrm{div}F\,dv\ \overset{\mathrm{div}F=0}{=\!=\!=}\ 0.$$

例 计算

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz - zdxdy$$

其中定向曲面 Σ 是抛物面的一部分，取单位外法向量，如图：



解 如图补充平面 Σ'，则 $\Sigma\cup\Sigma'$ 构成 3 维区域 Ω 边界，应用高斯公式：

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz - zdxdy = \iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS,$$

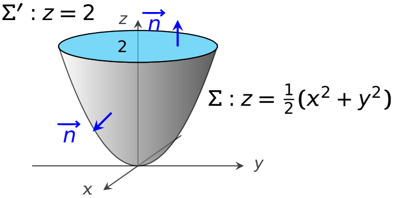
$$\iint_{\Sigma'}(z^2+x)dydz - zdxdy = \iint_{\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal[\vec{n}=(0,0,1)]{F=(z^2+x,0,-z)}$$

$$\iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS + \iint_{\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS = \iint_{\Sigma\cup\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_{\Omega}\mathrm{div}F\,dv \xlongequal{\mathrm{div}F=0} 0.$$

例 计算

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz-zdxdy$$

其中定向曲面 Σ 是抛物面的一部分，取单位外法向量，如图：



解 如图补充平面 Σ'，则 $\Sigma\cup\Sigma'$ 构成 3 维区域 Ω 边界，应用高斯公式：

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz-zdxdy=\iint_{\Sigma}F\cdot\vec{n}\,dS,$$

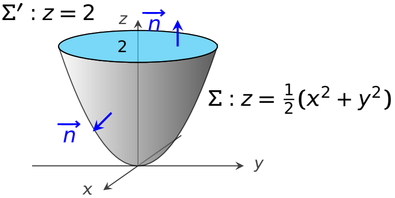
$$\iint_{\Sigma'}(z^2+x)dydz-zdxdy=\iint_{\Sigma'}F\cdot\vec{n}\,dS\ \xlongequal[\vec{n}=(0,0,1)]{F=(z^2+x,0,-z)}\ \iint_{\Sigma'}-zdS$$

$$\iint_{\Sigma}F\cdot\vec{n}\,dS+\iint_{\Sigma'}F\cdot\vec{n}\,dS=\iint_{\Sigma\cup\Sigma'}F\cdot\vec{n}\,dS=\iiint_{\Omega}\mathrm{div}F\,dv\ \xlongequal{\mathrm{div}F=0}\ 0.$$

例 计算

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz-zdxdy$$

其中定向曲面 Σ 是抛物面的一部分，取单位外法向量，如图：



解 如图补充平面 Σ'，则 $\Sigma\cup\Sigma'$ 构成 3 维区域 Ω 边界，应用高斯公式：

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz-zdxdy=\iint_{\Sigma}F\cdot\vec{n}\,dS,$$

$$\iint_{\Sigma'}(z^2+x)dydz-zdxdy=\iint_{\Sigma'}F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal[\vec{n}=(0,0,1)]{F=(z^2+x,0,-z)} \iint_{\Sigma'}-zdS$$

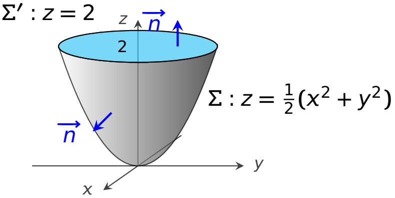
$$=\iint_{\Sigma'}-2dS$$

$$\iint_{\Sigma}F\cdot\vec{n}\,dS+\iint_{\Sigma'}F\cdot\vec{n}\,dS=\iint_{\Sigma\cup\Sigma'}F\cdot\vec{n}\,dS=\iiint_{\Omega}\mathrm{div}F\,dv \xlongequal{\mathrm{div}F=0} 0.$$

例 计算

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz-zdxdy$$

其中定向曲面 Σ 是抛物面的一部分，取单位外法向量，如图：



解 如图补充平面 Σ′，则 Σ∪Σ′ 构成 3 维区域 Ω 边界，应用高斯公式：

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz-zdxdy=\iint_{\Sigma}F\cdot\vec{n}\,dS,$$

$$\iint_{\Sigma'}(z^2+x)dydz-zdxdy=\iint_{\Sigma'}F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal[\vec{n}=(0,0,1)]{F=(z^2+x,0,-z)} \iint_{\Sigma'}-zdS$$

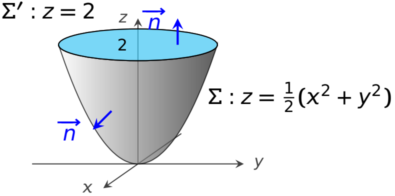
$$=\iint_{\Sigma'}-2dS=-2\mathrm{Area}(\Sigma')$$

$$\iint_{\Sigma}F\cdot\vec{n}\,dS+\iint_{\Sigma'}F\cdot\vec{n}\,dS=\iint_{\Sigma\cup\Sigma'}F\cdot\vec{n}\,dS=\iiint_{\Omega}\mathrm{div}F\,dv \xlongequal{\mathrm{div}F=0} 0.$$

例 计算

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz-zdxdy$$

其中定向曲面 Σ 是抛物面的一部分，取单位外法向量，如图：



解 如图补充平面 Σ'，则 $\Sigma\cup\Sigma'$ 构成 3 维区域 Ω 边界，应用高斯公式：

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz-zdxdy=\iint_{\Sigma}F\cdot\vec{n}\,dS,$$

$$\iint_{\Sigma'}(z^2+x)dydz-zdxdy=\iint_{\Sigma'}F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal[\vec{n}=(0,0,1)]{F=(z^2+x,0,-z)} \iint_{\Sigma'}-zdS$$

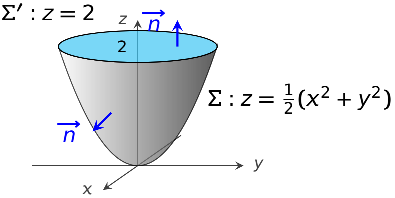
$$=\iint_{\Sigma'}-2dS=-2\,\mathrm{Area}(\Sigma')=-8\pi,$$

$$\iint_{\Sigma}F\cdot\vec{n}\,dS+\iint_{\Sigma'}F\cdot\vec{n}\,dS=\iint_{\Sigma\cup\Sigma'}F\cdot\vec{n}\,dS=\iiint_{\Omega}\mathrm{div}F\,dv \xlongequal{\mathrm{div}F=0} 0.$$

例 计算

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz - zdxdy$$

其中定向曲面 Σ 是抛物面的一部分，取单位外法向量，如图：



解 如图补充平面 Σ'，则 $\Sigma\cup\Sigma'$ 构成 3 维区域 Ω 边界，应用高斯公式：

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz - zdxdy = \iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS,$$

$$\iint_{\Sigma'}(z^2+x)dydz - zdxdy = \iint_{\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS \overset{F=(z^2+x,0,-z)}{\underset{\vec{n}=(0,0,1)}{=\!=\!=\!=}} \iint_{\Sigma'} -zdS$$

$$= \iint_{\Sigma'} -2dS = -2\,\mathrm{Area}(\Sigma') = -8\pi,$$

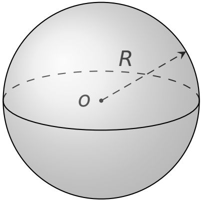
$$\iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS + \iint_{\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS = \iint_{\Sigma\cup\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_{\Omega} \mathrm{div}F\,dv \overset{\mathrm{div}F=0}{=\!=\!=} 0.$$

所以原积分等于 8π。

例 计算

$$I=\iint_{\Sigma}(x^2+y+z)dS$$

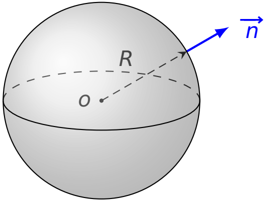
其中曲面 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$



例 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS$$

其中曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$



解

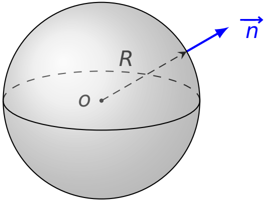
$$\iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS$$

$$= \iint_{\Sigma} F \cdot \overrightarrow{n} \, dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div} F dv$$

例 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS$$

其中曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$



解 球面单位外法向量 $\vec{n} = \frac{1}{R}(x, y, z)$，所以

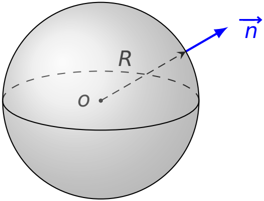
$$\iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS$$

$$= \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} \, dS \overset{\text{高斯公式}}{=\!=\!=\!=} \iiint_{\Omega} \mathrm{div} F dv$$

例 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS$$

其中曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$



解 球面单位外法向量 $\vec{n} = \frac{1}{R}(x, y, z)$，所以

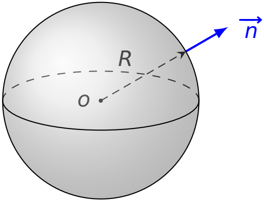
$$\iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS \qquad (\ , \quad , \quad) \cdot \frac{1}{R}(x, y, z)$$

$$= \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n}\, dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div} F dv$$

例 计算

$$I = \iint_\Sigma (x^2 + y + z)dS$$

其中曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$



解 球面单位外法向量 $\vec{n} = \frac{1}{R}(x, y, z)$，所以

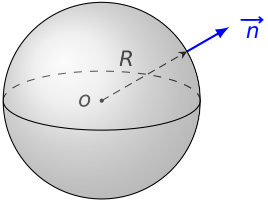
$$\iint_\Sigma (x^2 + y + z)dS \qquad R(x, 1, 1) \cdot \frac{1}{R}(x, y, z)$$

$$= \iint_\Sigma F \cdot \vec{n}\, dS \overset{\text{高斯公式}}{=\!=\!=\!=} \iiint_\Omega \mathrm{div} F dv$$

例 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z)dS$$

其中曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$



解 球面单位外法向量 $\vec{n} = \frac{1}{R}(x, y, z)$，所以

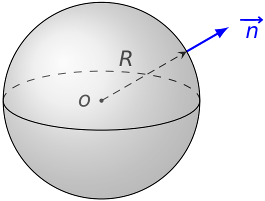
$$\iint_{\Sigma} (x^2 + y + z)dS = \iint_{\Sigma} R(x, 1, 1) \cdot \frac{1}{R}(x, y, z)dS$$

$$= \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n}\, dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div} F dv$$

例 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS$$

其中曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$



解 球面单位外法向量 $\overrightarrow{n} = \frac{1}{R}(x, y, z)$，所以

$$\iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS = \iint_{\Sigma} R(x, 1, 1) \cdot \frac{1}{R}(x, y, z) dS$$

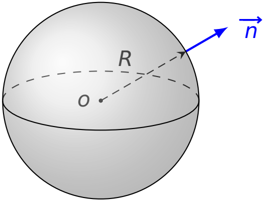
$$= \iint_{\Sigma} F \cdot \overrightarrow{n} dS \overset{\text{高斯公式}}{=\!=\!=\!=} \iiint_{\Omega} \mathrm{div} F dv$$

$$= \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}(Rx) + \frac{\partial}{\partial y}(R) + \frac{\partial}{\partial z}(R) \right] dv$$

例 计算

$$I=\iint_{\Sigma}(x^2+y+z)dS$$

其中曲面 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$



解 球面单位外法向量 $\vec{n}=\frac{1}{R}(x,y,z)$，所以

$$\iint_{\Sigma}(x^2+y+z)dS=\iint_{\Sigma}R(x,1,1)\cdot\frac{1}{R}(x,y,z)dS$$

$$=\iint_{\Sigma}F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega}\mathrm{div}F dv$$

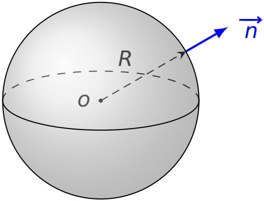
$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}(Rx)+\frac{\partial}{\partial y}(R)+\frac{\partial}{\partial z}(R)\right]dv$$

$$=\iiint_{\Omega}Rdxdydz$$

例 计算

$$I=\iint_{\Sigma}(x^2+y+z)dS$$

其中曲面 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$



解 球面单位外法向量 $\overrightarrow{n}=\frac{1}{R}(x,y,z)$，所以

$$\iint_{\Sigma}(x^2+y+z)dS=\iint_{\Sigma}R(x,1,1)\cdot\frac{1}{R}(x,y,z)dS$$

$$=\iint_{\Sigma}F\cdot\overrightarrow{n}dS\xlongequal{\text{高斯公式}}\iiint_{\Omega}\mathrm{div}F dv$$

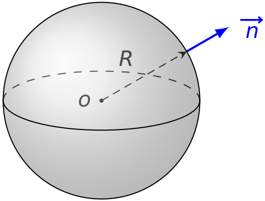
$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}(Rx)+\frac{\partial}{\partial y}(R)+\frac{\partial}{\partial z}(R)\right]dv$$

$$=\iiint_{\Omega}Rdxdydz=R\mathrm{Vol}(\Omega)$$

例 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS$$

其中曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$



解 球面单位外法向量 $\overrightarrow{n} = \frac{1}{R}(x, y, z)$，所以

$$\iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS = \iint_{\Sigma} R(x, 1, 1) \cdot \frac{1}{R}(x, y, z) dS$$

$$= \iint_{\Sigma} F \cdot \overrightarrow{n} dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div} F dv$$

$$= \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}(Rx) + \frac{\partial}{\partial y}(R) + \frac{\partial}{\partial z}(R) \right] dv$$

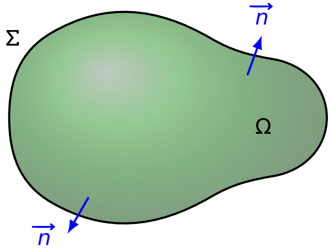
$$= \iiint_{\Omega} R dx dy dz = R \mathrm{Vol}(\Omega) = \frac{8}{3} \pi R^4$$

散度 $\mathrm{div}F$ 的物理解释

高斯公式 $\iiint_\Omega \mathrm{div}F dv = \iint_\Sigma F \cdot \overrightarrow{n} dS$

散度 $\mathrm{div}F$ 的物理解释

- 假设 $F = (P, Q, R)$ 是流体的速度向量场，



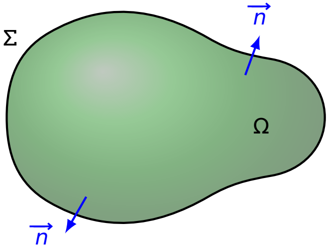
高斯公式 $\iiint_\Omega \mathrm{div}F dv = \iint_\Sigma F \cdot \vec{n}\, dS$

散度 $\mathrm{div}F$ 的物理解释

- 假设 $F = (P, Q, R)$ 是流体的速度向量场，则

$$\iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n}\, dS$$

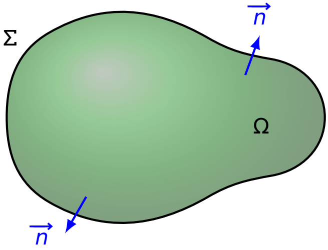
表示单位时间流向 Σ 外侧的通量。



高斯公式 $\iiint_{\Omega} \mathrm{div}F dv = \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n}\, dS$

散度 $\mathrm{div}F$ 的物理解释

- 假设 $F=(P,Q,R)$ 是流体的速度向量场，则
$$\iint_\Sigma F\cdot\overrightarrow{n}\,dS$$
表示单位时间流向 Σ 外侧的通量。



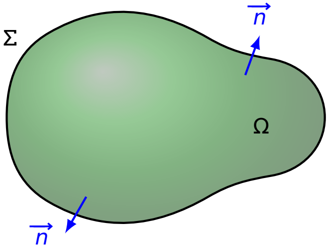
$$\iint_\Sigma F\cdot\overrightarrow{n}\,dS>0$$
$$\iint_\Sigma F\cdot\overrightarrow{n}\,dS<0$$

高斯公式 $\iiint_\Omega \mathrm{div}F dv=\iint_\Sigma F\cdot\overrightarrow{n}\,dS$

散度 $\mathrm{div}F$ 的物理解释

- 假设 $F = (P, Q, R)$ 是流体的速度向量场，则
$$\iint_\Sigma F \cdot \overrightarrow{n}\, dS$$
表示单位时间流向 Σ 外侧的通量。

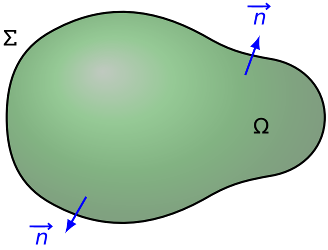
- 进一步假设流体是不可压，则
$$\iint_\Sigma F \cdot \overrightarrow{n}\, dS > 0$$
$$\iint_\Sigma F \cdot \overrightarrow{n}\, dS < 0$$



高斯公式 $\iiint_\Omega \mathrm{div}F dv = \iint_\Sigma F \cdot \overrightarrow{n}\, dS$

散度 $\mathrm{div}F$ 的物理解释

- 假设 $F = (P, Q, R)$ 是流体的速度向量场，则
$$\iint_{\Sigma} F \cdot \overrightarrow{n}\, dS$$
表示单位时间流向 Σ 外侧的通量。



- 进一步假设流体是不可压，则

$$\iint_{\Sigma} F \cdot \overrightarrow{n}\, dS > 0 \Rightarrow \Omega \text{ 内有 “source”}$$

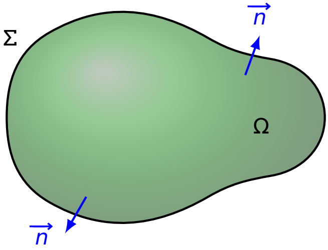
$$\iint_{\Sigma} F \cdot \overrightarrow{n}\, dS < 0$$

高斯公式 $\iiint_{\Omega} \mathrm{div}F dv = \iint_{\Sigma} F \cdot \overrightarrow{n}\, dS$

散度 $\mathrm{div}F$ 的物理解释

- 假设 $F=(P,Q,R)$ 是流体的速度向量场，则
$$\iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS$$
表示单位时间流向 Σ 外侧的通量。

- 进一步假设流体是不可压，则
$$\iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS>0 \ \Rightarrow\ \Omega \text{ 内有 “source”}$$
$$\iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS<0 \ \Rightarrow\ \Omega \text{ 内有 “sink”}$$



高斯公式 $\iiint_{\Omega}\mathrm{div}F\,dv=\iint_{\Sigma}F\cdot\vec{n}\,dS$

散度 $\mathrm{div}F$ 的物理解释

- 假设 $F=(P,Q,R)$ 是流体的速度向量场，则

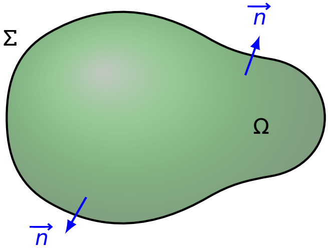
$$\iint_\Sigma F\cdot\vec{n}\,dS$$

表示单位时间流向 Σ 外侧的通量。

- 进一步假设流体是不可压，则

$$\iint_\Sigma F\cdot\vec{n}\,dS>0 \;\Rightarrow\; \Omega \text{ 内有 “source”}$$

$$\iint_\Sigma F\cdot\vec{n}\,dS<0 \;\Rightarrow\; \Omega \text{ 内有 “sink”}$$



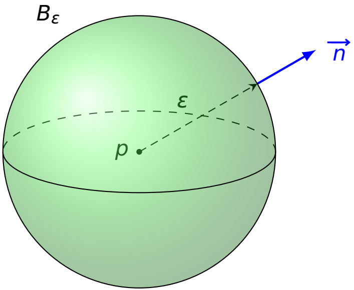
注 高斯公式 $\iiint_\Omega \mathrm{div}F\,dv=\iint_\Sigma F\cdot\vec{n}\,dS$ 表明：$\mathrm{div}F$ 反映这种 “source” 和 “sink” 的强度。

散度 $\mathrm{div}F$ 的物理解释 (2)

p •

$\mathrm{div}F(p)$

散度 $\mathrm{div}F$ 的物理解释 (2)

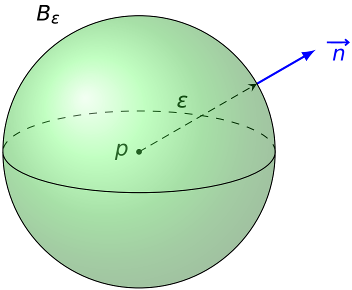


$\mathrm{div}F(p)$

散度 $\mathrm{div}F$ 的物理解释 (2)

$$\iint_{\partial B_\varepsilon} F\cdot\overrightarrow{n}\,dS$$

$$= \iiint_{B_\varepsilon} \mathrm{div}F\,dv$$



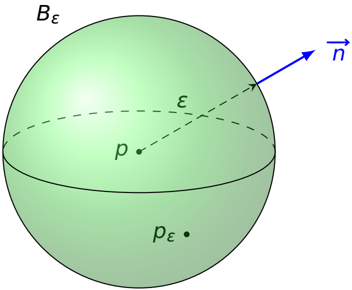
$\mathrm{div}F(p)$

散度 div$F$ 的物理解释 (2)

$$\iint_{\partial B_\varepsilon} F \cdot \overrightarrow{n}\, dS$$

$$= \iiint_{B_\varepsilon} \mathrm{div} F\, dv$$

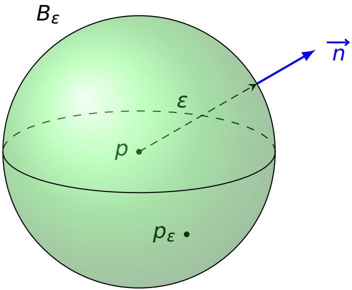
$$= \mathrm{Vol}(B_\varepsilon)\mathrm{div} F(p_\varepsilon)$$



$\mathrm{div} F(p)$

散度 div$F$ 的物理解释 (2)

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \iint_{\partial B_\varepsilon} F \cdot \overrightarrow{n}\, dS \\
= & \frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \iiint_{B_\varepsilon} \mathrm{div} F dv \\
= & \frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \mathrm{Vol}(B_\varepsilon) \mathrm{div} F(p_\varepsilon)
\end{aligned}
$$

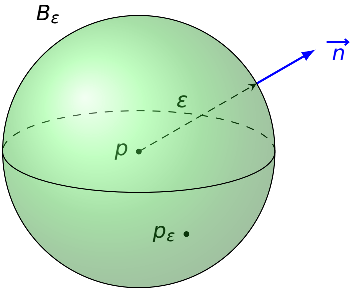


$\mathrm{div} F(p)$

散度 div$F$ 的物理解释 (2)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \iint_{\partial B_\varepsilon} F \cdot \overrightarrow{n}\, dS \\
= \quad & \frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \iiint_{B_\varepsilon} \mathrm{div} F dv \\
= \quad & \frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \mathrm{Vol}(B_\varepsilon)\mathrm{div} F(p_\varepsilon) \\
= \quad & \mathrm{div} F(p_\varepsilon)
\end{aligned}$$

$$\mathrm{div} F(p)$$



散度 div$F$ 的物理解释 (2)

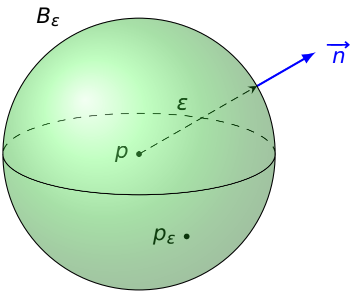
$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)}\cdot\iint_{\partial B_\varepsilon} F\cdot\vec{n}\,dS$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)}\cdot\iiint_{B_\varepsilon}\mathrm{div}F\,dv$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)}\cdot\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)\mathrm{div}F(p_\varepsilon)$$

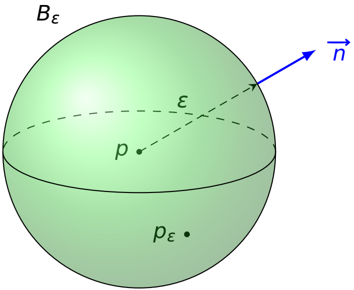
$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\mathrm{div}F(p_\varepsilon)$$

$$\mathrm{div}F(p)$$



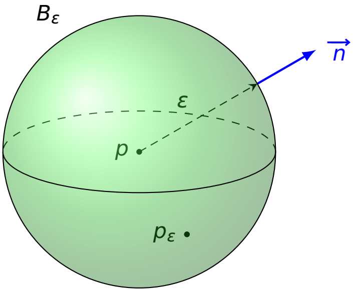
散度 div$F$ 的物理解释 (2)

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)}\cdot\iint_{\partial B_\varepsilon} F\cdot\vec{n}\,dS\\
=&\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)}\cdot\iiint_{B_\varepsilon}\mathrm{div}F\,dv\\
=&\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)}\cdot\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)\mathrm{div}F(p_\varepsilon)\\
=&\lim_{\varepsilon\to 0^+}\mathrm{div}F(p_\varepsilon)\\
=&\,\mathrm{div}F(p)
\end{aligned}
$$



散度 div$F$ 的物理解释 (2)

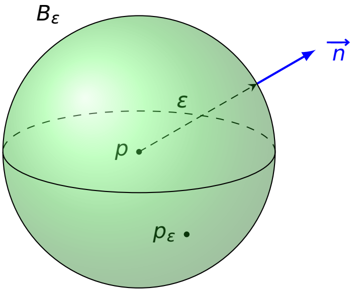
$$
\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \iint_{\partial B_\varepsilon} F\cdot \vec{n}\, dS \\
= &\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \iiint_{B_\varepsilon} \mathrm{div} F dv \\
= &\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \mathrm{Vol}(B_\varepsilon)\mathrm{div} F(p_\varepsilon) \\
= &\lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathrm{div} F(p_\varepsilon) \\
= &\,\mathrm{div} F(p)
\end{aligned}
$$



- div$F(p)>0$ 时,
- div$F(p)<0$ 时,

散度 div$F$ 的物理解释 (2)

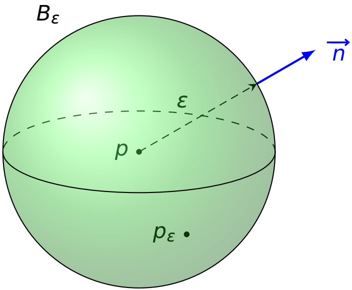
$$
\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)}\cdot\iint_{\partial B_\varepsilon}F\cdot\vec{n}\,dS\\
=&\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)}\cdot\iiint_{B_\varepsilon}\mathrm{div}F\,dv\\
=&\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)}\cdot\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)\mathrm{div}F(p_\varepsilon)\\
=&\lim_{\varepsilon\to 0^+}\mathrm{div}F(p_\varepsilon)\\
=&\,\mathrm{div}F(p)
\end{aligned}
$$



- $\mathrm{div}F(p)>0$ 时，$\iint_{\partial B_\varepsilon}F\cdot\vec{n}\,dS>0$（$\varepsilon$ 充分小），
- $\mathrm{div}F(p)<0$ 时，

散度 $\mathrm{div}F$ 的物理解释 (2)

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)}\cdot\iint_{\partial B_\varepsilon}F\cdot\vec{n}\,dS\\
=&\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)}\cdot\iiint_{B_\varepsilon}\mathrm{div}F\,dv\\
=&\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)}\cdot\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)\mathrm{div}F(p_\varepsilon)\\
=&\lim_{\varepsilon\to 0^+}\mathrm{div}F(p_\varepsilon)\\
=&\,\mathrm{div}F(p)
\end{aligned}
$$



- $\mathrm{div}F(p)>0$ 时，$\iint_{\partial B_\varepsilon}F\cdot\vec{n}\,dS>0$（$\varepsilon$ 充分小），说明 p 点是 source
- $\mathrm{div}F(p)<0$ 时，

散度 $\mathrm{div}F$ 的物理解释 (2)

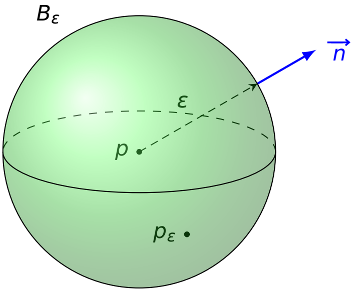
$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)}\cdot\iint_{\partial B_\varepsilon} F\cdot\vec{n}\,dS$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)}\cdot\iiint_{B_\varepsilon}\mathrm{div}F\,dv$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)}\cdot\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)\mathrm{div}F(p_\varepsilon)$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\mathrm{div}F(p_\varepsilon)$$

$$=\mathrm{div}F(p)$$



- $\mathrm{div}F(p)>0$ 时，$\iint_{\partial B_\varepsilon}F\cdot\vec{n}\,dS>0$（$\varepsilon$ 充分小），说明 p 点是 source
- $\mathrm{div}F(p)<0$ 时，$\iint_{\partial B_\varepsilon}F\cdot\vec{n}\,dS<0$（$\varepsilon$ 充分小），

散度 $\mathrm{div}F$ 的物理解释 (2)

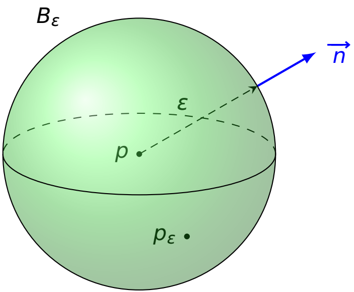
$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)}\cdot\iint_{\partial B_\varepsilon} F\cdot\vec{n}\,dS$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)}\cdot\iiint_{B_\varepsilon}\mathrm{div}F\,dv$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)}\cdot\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)\mathrm{div}F(p_\varepsilon)$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\mathrm{div}F(p_\varepsilon)$$

$$=\mathrm{div}F(p)$$



- $\mathrm{div}F(p)>0$ 时，$\iint_{\partial B_\varepsilon}F\cdot\vec{n}\,dS>0$（$\varepsilon$ 充分小），说明 p 点是 source
- $\mathrm{div}F(p)<0$ 时，$\iint_{\partial B_\varepsilon}F\cdot\vec{n}\,dS<0$（$\varepsilon$ 充分小），说明 p 点是 sink

We are here now...

1. 高斯公式

2. 斯托克斯公式

向量场的旋度

定义 设 $F=(P,Q,R)$ 是空间中向量场，定义

$$\cot F := \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

称为向量场 F 的旋度。

向量场的旋度

定义 设 $F=(P,Q,R)$ 是空间中向量场，定义

$$\cot F := \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix}, \qquad\qquad , \qquad\qquad \right)$$

称为向量场 F 的旋度。

向量场的旋度

定义 设 $F=(P,Q,R)$ 是空间中向量场，定义

$$\cot F := \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & R \end{vmatrix}, \qquad \right)$$

称为向量场 F 的旋度。

向量场的旋度

定义 设 $F=(P,Q,R)$ 是空间中向量场，定义

$$\cot F := \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & R \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \right)$$

称为向量场 F 的旋度。

向量场的旋度

定义 设 $F = (P, Q, R)$ 是空间中向量场，定义

$$\cot F := \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & R \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \right)$$

$$= (R_y - Q_z, \qquad , \qquad)$$

称为向量场 F 的旋度。

向量场的旋度

定义 设 $F=(P,Q,R)$ 是空间中向量场，定义

$$\cot F := \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & R \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \right)$$

$$= (R_y - Q_z, P_z - R_x, \qquad\qquad)$$

称为向量场 F 的旋度。

向量场的旋度

定义 设 $F=(P,Q,R)$ 是空间中向量场，定义

$$\cot F := \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & R \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \right)$$

$$= (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)$$

称为向量场 F 的旋度。

向量场的旋度

定义 设 $F=(P,Q,R)$ 是空间中向量场，定义

$$\cot F := \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & R \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \right)$$

$$= (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)$$

称为向量场 F 的旋度。

例 计算向量场 $F=(y,-x,e^{xz})$ 的旋度。

向量场的旋度

定义 设 $F=(P,Q,R)$ 是空间中向量场，定义

$$\cot F := \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & R \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \right)$$

$$= (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)$$

称为向量场 F 的旋度。

例 计算向量场 $F=(y,-x,e^{xz})$ 的旋度。

解

$$\cot F = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & e^{xz} \end{vmatrix}$$

向量场的旋度

定义 设 $F=(P,Q,R)$ 是空间中向量场，定义

$$\cot F := \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & R \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \right)$$

$$= (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)$$

称为向量场 F 的旋度。

例 计算向量场 $F=(y,-x,e^{xz})$ 的旋度。

解

$$\cot F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & e^{xz} \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -x & e^{xz} \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & e^{xz} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y & -x \end{vmatrix} \right)$$

向量场的旋度

定义 设 $F=(P,Q,R)$ 是空间中向量场，定义

$$\cot F := \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & R \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \right)$$

$$= (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)$$

称为向量场 F 的旋度。

例 计算向量场 $F=(y,-x,e^{xz})$ 的旋度。

解

$$\cot F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & e^{xz} \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -x & e^{xz} \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & e^{xz} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y & -x \end{vmatrix} \right)$$

$$= (0, \qquad , \qquad)$$

向量场的旋度

定义 设 $F=(P,Q,R)$ 是空间中向量场，定义

$$\cot F := \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & R \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \right)$$

$$= (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)$$

称为向量场 F 的旋度。

例 计算向量场 $F=(y,-x,e^{xz})$ 的旋度。

解

$$\cot F = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & e^{xz} \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -x & e^{xz} \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & e^{xz} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y & -x \end{vmatrix} \right)$$

$$= (0, -ze^{xz}, \qquad)$$

向量场的旋度

定义 设 $F=(P,Q,R)$ 是空间中向量场，定义

$$\cot F := \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & R \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \right)$$

$$= (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)$$

称为向量场 F 的旋度。

例 计算向量场 $F=(y,-x,e^{xz})$ 的旋度。

解

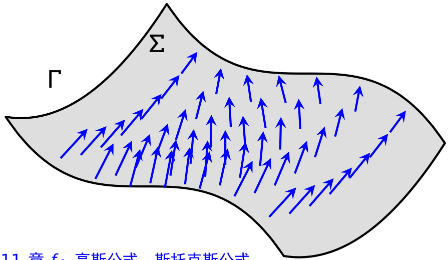
$$\cot F = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & e^{xz} \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -x & e^{xz} \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & e^{xz} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y & -x \end{vmatrix} \right)$$

$$= (0, -ze^{xz}, -2)$$

斯托克斯公式

定理（斯托克斯公式） 假设

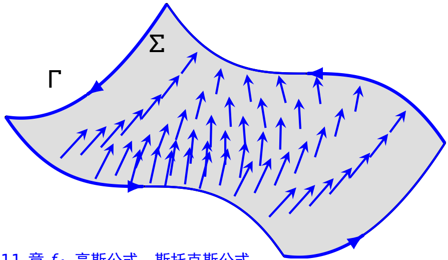
- Σ 是空间中分片光滑的定向曲面，选定单位外法向量 $\vec{n}$，
- Γ 是 Σ 的边界，且赋予“边界定向”，



斯托克斯公式

定理（斯托克斯公式） 假设

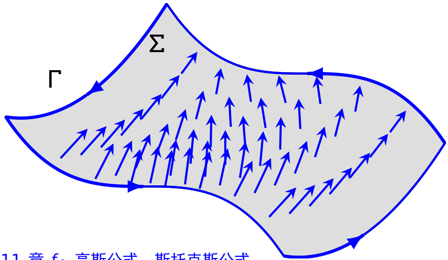
- Σ 是空间中分片光滑的定向曲面，选定单位外法向量 $\vec{n}$，
- Γ 是 Σ 的边界，且赋予“边界定向”，

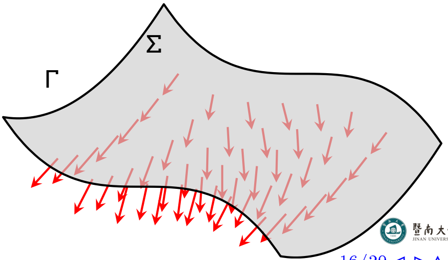


斯托克斯公式

定理（斯托克斯公式） 假设

- Σ 是空间中分片光滑的定向曲面，选定单位外法向量 $\overrightarrow{n}$，
- Γ 是 Σ 的边界，且赋予“边界定向”，

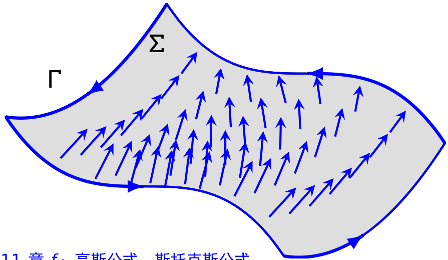


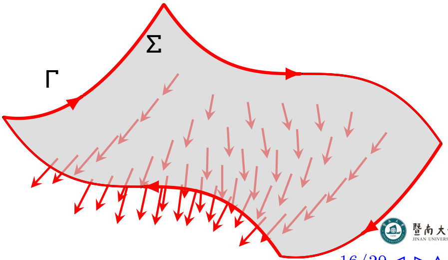


斯托克斯公式

定理（斯托克斯公式） 假设

- Σ 是空间中分片光滑的定向曲面，选定单位外法向量 $\vec{n}$，
- Γ 是 Σ 的边界，且赋予“边界定向”，
- $F = (P, Q, R)$ 是空间向量场，且 P, Q, R 具有一阶连续偏导数，





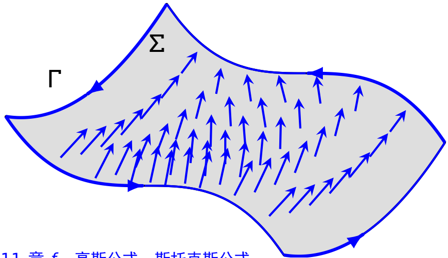
斯托克斯公式

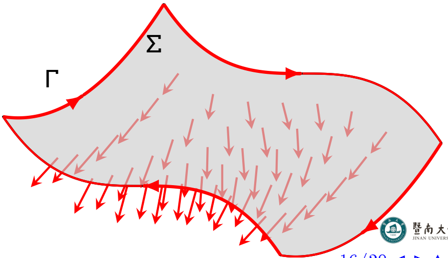
定理（斯托克斯公式） 假设

- Σ 是空间中分片光滑的定向曲面，选定单位外法向量 $\overrightarrow{n}$，
- Γ 是 Σ 的边界，且赋予“边界定向”，
- $F = (P, Q, R)$ 是空间向量场，且 P, Q, R 具有一阶连续偏导数，

则成立：

$$\iint_{\Sigma} \cot F \cdot \overrightarrow{n}\, dS = \int_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz.$$

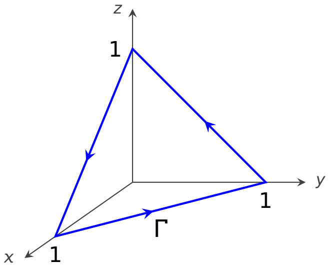




例 试利用斯托克斯公式计算

$$I = \int_{\Gamma} z dx + x dy + y dz$$

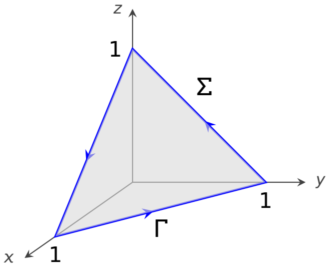
其中有向曲线 Γ 如图：



例 试利用斯托克斯公式计算

$$I = \int_{\Gamma} z\,dx + x\,dy + y\,dz$$

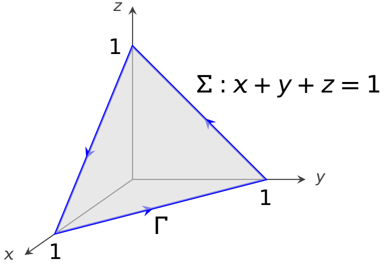
其中有向曲线 Γ 如图：



例 试利用斯托克斯公式计算

$$I=\int_{\Gamma} z dx + x dy + y dz$$

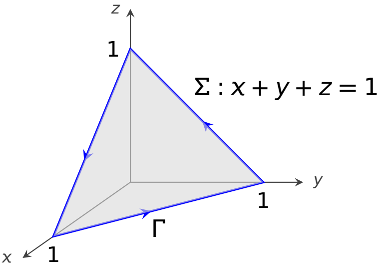
其中有向曲线 Γ 如图：



例 试利用斯托克斯公式计算

$$I=\int_{\Gamma} zdx+xdy+ydz$$

其中有向曲线 Γ 如图：



解 设 $F=(z,x,y)$，则

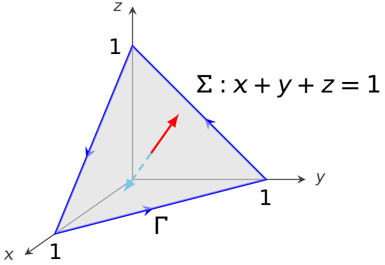
所以

$$\int_{\Gamma} zdx+xdy+ydz=\iint_{\Sigma} \mathrm{cot}\ F\cdot\overrightarrow{n}\,dS$$

例 试利用斯托克斯公式计算

$$I = \int_\Gamma zdx + xdy + ydz$$

其中有向曲线 Γ 如图：



解 设 $F = (z, x, y)$，则

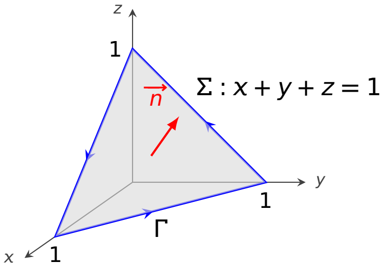
所以

$$\int_\Gamma zdx + xdy + ydz = \iint_\Sigma \mathrm{cot}\ F \cdot \overrightarrow{n}\, dS$$

例 试利用斯托克斯公式计算

$$I=\int_{\Gamma} zdx+xdy+ydz$$

其中有向曲线 Γ 如图：



解 设 $F=(z,\,x,\,y)$，则

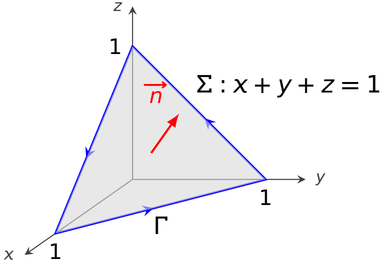
所以

$$\int_{\Gamma} zdx+xdy+ydz=\iint_{\Sigma} \cot F\cdot\overrightarrow{n}\,dS$$

例 试利用斯托克斯公式计算

$$I=\int_{\Gamma} zdx+xdy+ydz$$

其中有向曲线 Γ 如图：



解 设 $F=(z,x,y)$，则

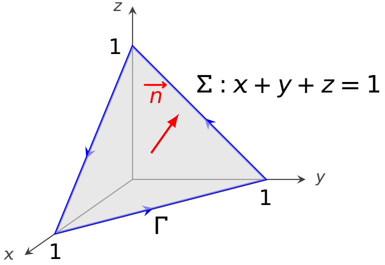
所以

$$\int_{\Gamma} zdx+xdy+ydz=\iint_{\Sigma} \operatorname{cot} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)}$$

例 试利用斯托克斯公式计算

$$I=\int_{\Gamma} zdx+xdy+ydz$$

其中有向曲线 Γ 如图：



解 设 $F=(z,x,y)$，则

$$\mathrm{cot}F=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ z & x & y\end{vmatrix}$$

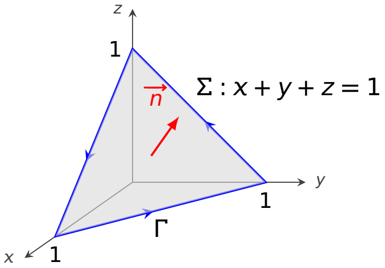
所以

$$\int_{\Gamma} zdx+xdy+ydz=\iint_{\Sigma}\mathrm{cot}\ F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)}$$

例 试利用斯托克斯公式计算

$$I = \int_{\Gamma} z dx + x dy + y dz$$

其中有向曲线 Γ 如图：



解 设 $F = (z, x, y)$，则

$$\operatorname{cot} F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & y \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ z & x \end{vmatrix} \right)$$

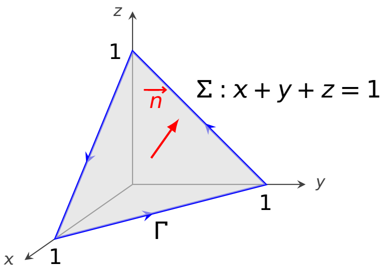
所以

$$\int_{\Gamma} z dx + x dy + y dz = \iint_{\Sigma} \operatorname{cot} F \cdot \vec{n} dS \xlongequal{\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)}$$

例 试利用斯托克斯公式计算

$$I=\int_{\Gamma} z dx + x dy + y dz$$

其中有向曲线 Γ 如图：



解 设 $F=(z,x,y)$，则

$$\mathrm{cot}F=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & y \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ z & x \end{vmatrix} \right)$$

$$= (1, \quad , \quad)$$

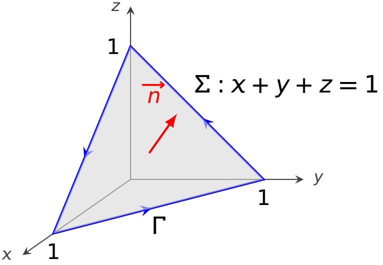
所以

$$\int_{\Gamma} z dx + x dy + y dz = \iint_{\Sigma} \mathrm{cot}\, F\cdot\vec{n}\, dS \overset{\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)}{=\!=\!=\!=\!=\!=}$$

例 试利用斯托克斯公式计算

$$I=\int_{\Gamma} zdx+xdy+ydz$$

其中有向曲线 Γ 如图：



解 设 $F=(z,x,y)$，则

$$\mathrm{cot}F=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ z & x & y\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x & y\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z}\\ z & y\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\\ z & x\end{vmatrix}\right)$$

$$=(1,1,\quad)$$

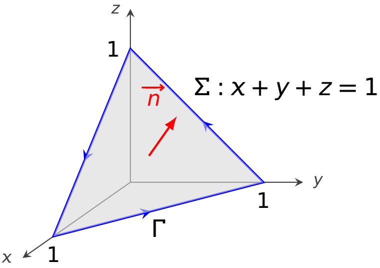
所以

$$\int_{\Gamma} zdx+xdy+ydz=\iint_{\Sigma}\mathrm{cot}\,F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)}$$

例 试利用斯托克斯公式计算

$$I=\int_\Gamma zdx+xdy+ydz$$

其中有向曲线 Γ 如图：



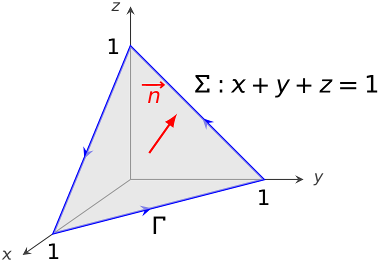
解 设 $F=(z,x,y)$，则

$$\mathrm{cot}F=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ z & x & y\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x & y\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z}\\ z & y\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\\ z & x\end{vmatrix}\right)$$

$$=(1,1,1)$$

所以

$$\int_\Gamma zdx+xdy+ydz=\iint_\Sigma \mathrm{cot}\,F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)}$$



例 试利用斯托克斯公式计算

$$I=\int_\Gamma z dx + x dy + y dz$$

其中有向曲线 Γ 如图：

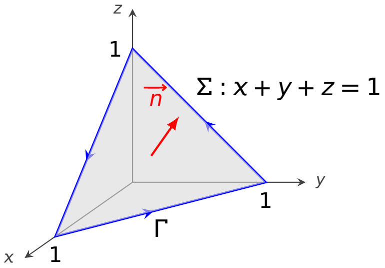
解 设 $F=(z,x,y)$，则

$$\mathrm{cot} F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & y \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ z & x \end{vmatrix} \right)$$

$$=(1,1,1)$$

所以

$$\int_\Gamma z dx + x dy + y dz = \iint_\Sigma \mathrm{cot}\, F \cdot \vec{n}\, dS \xlongequal{\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)} \iint_\Sigma \sqrt{3} dS$$



例 试利用斯托克斯公式计算

$$I = \int_\Gamma z dx + x dy + y dz$$

其中有向曲线 Γ 如图：

解 设 $F = (z, x, y)$，则

$$\mathrm{cot} F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & y \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ z & x \end{vmatrix} \right)$$

$$= (1, 1, 1)$$

所以

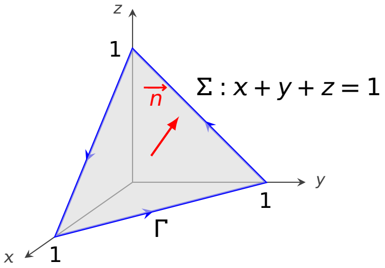
$$\int_\Gamma z dx + x dy + y dz = \iint_\Sigma \mathrm{cot}\ F \cdot \vec{n} dS \xlongequal{\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)} \iint_\Sigma \sqrt{3} dS$$

$$= \sqrt{3} \mathrm{Area}(\Sigma)$$

例 试利用斯托克斯公式计算

$$I=\int_\Gamma zdx+xdy+ydz$$

其中有向曲线 Γ 如图：



解 设 $F=(z,\,x,\,y)$，则

$$\mathrm{cot}F=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ z & x & y\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x & y\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z}\\ z & y\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\\ z & x\end{vmatrix}\right)$$

$$=(1,\,1,\,1)$$

所以

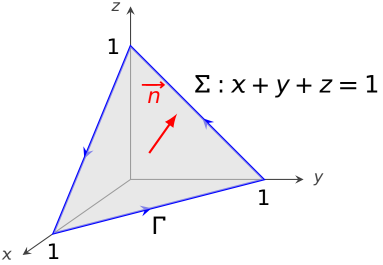
$$\int_\Gamma zdx+xdy+ydz=\iint_\Sigma \mathrm{cot}\,F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)} \iint_\Sigma \sqrt{3}dS$$

$$=\sqrt{3}\mathrm{Area}(\Sigma)=\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sin\frac{\pi}{3}$$

例 试利用斯托克斯公式计算

$$I=\int_{\Gamma} z dx + x dy + y dz$$

其中有向曲线 Γ 如图：



解 设 $F=(z,x,y)$，则

$$\mathrm{cot}F=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ z & x & y\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x & y\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z}\\ z & y\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\\ z & x\end{vmatrix}\right)$$

$$=(1,1,1)$$

所以

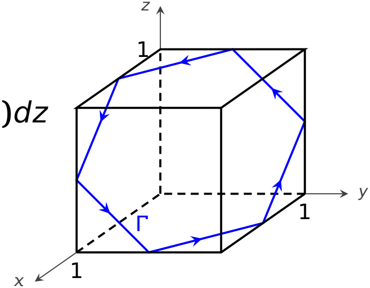
$$\int_{\Gamma} z dx + x dy + y dz=\iint_{\Sigma}\mathrm{cot}\, F\cdot\vec{n}\, dS \xlongequal{\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)} \iint_{\Sigma}\sqrt{3}\, dS$$

$$=\sqrt{3}\,\mathrm{Area}(\Sigma)=\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}$$

例 试利用斯托克斯公式计算

$$I=\int_{\Gamma}(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$$

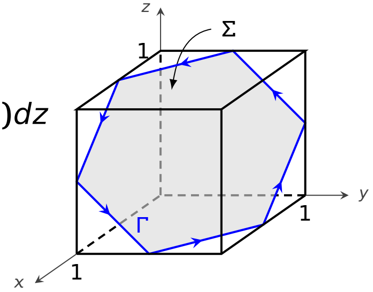
其中有向曲线 Γ 如图：



例 试利用斯托克斯公式计算

$$I=\int_{\Gamma}(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$$

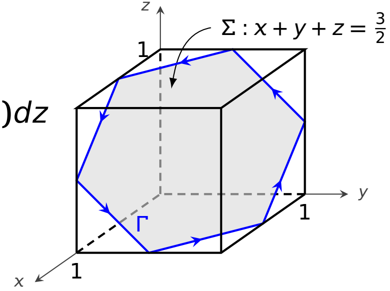
其中有向曲线 Γ 如图：



例 试利用斯托克斯公式计算

$$I=\int_{\Gamma}(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$$

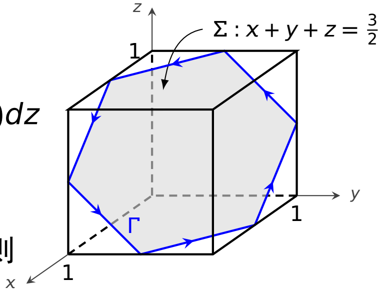
其中有向曲线 Γ 如图：



例 试利用斯托克斯公式计算

$$I=\int_\Gamma (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$$

其中有向曲线 Γ 如图：



解 设 $F=(y^2-z^2, z^2-x^2, x^2-y^2)$，则

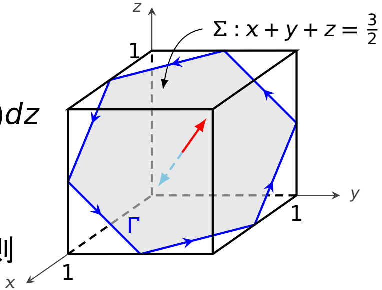
所以

$$I=\iint_\Sigma \cot F\cdot\overrightarrow{n}\,dS$$

例 试利用斯托克斯公式计算

$$I=\int_{\Gamma}(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$$

其中有向曲线 Γ 如图：



解 设 $F=(y^2-z^2,\, z^2-x^2,\, x^2-y^2)$，则

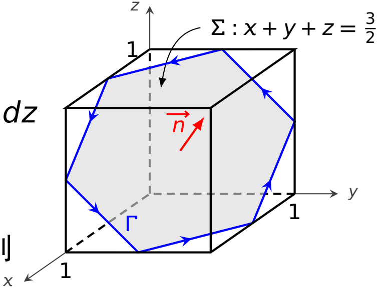
所以

$$I=\iint_{\Sigma}\cot\ F\cdot\overrightarrow{n}\,dS$$

例 试利用斯托克斯公式计算

$$I=\int_{\Gamma}(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$$

其中有向曲线 Γ 如图：



解 设 $F=(y^2-z^2, z^2-x^2, x^2-y^2)$，则

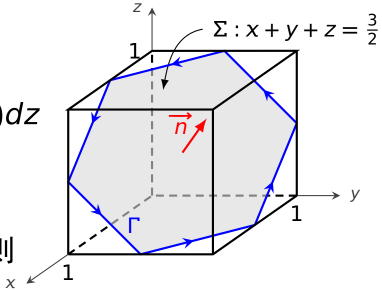
所以

$$I=\iint_{\Sigma}\cot F\cdot\vec{n}\,dS$$

例 试利用斯托克斯公式计算

$$I=\int_{\Gamma}(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$$

其中有向曲线 Γ 如图：



解 设 $F=(y^2-z^2,\ z^2-x^2,\ x^2-y^2)$，则

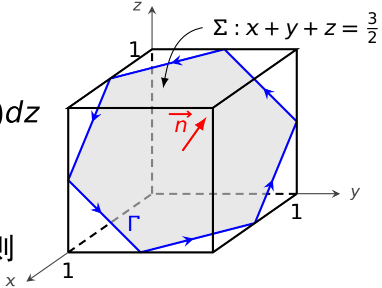
所以

$$I=\iint_{\Sigma}\operatorname{cot}\ F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)}$$

例 试利用斯托克斯公式计算

$$I=\int_{\Gamma}(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$$

其中有向曲线 Γ 如图：



解 设 $F=(y^2-z^2, z^2-x^2, x^2-y^2)$，则

$$\cot F=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2-z^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2 \end{vmatrix}$$

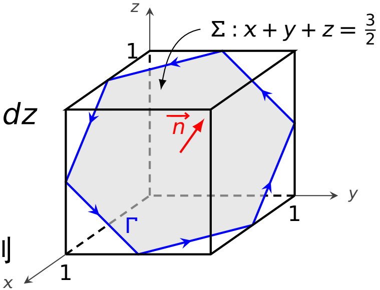
所以

$$I=\iint_{\Sigma}\cot F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)}$$

例 试利用斯托克斯公式计算

$$I=\int_\Gamma (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$$

其中有向曲线 Γ 如图：



解 设 $F=(y^2-z^2,\, z^2-x^2,\, x^2-y^2)$，则

$$\operatorname{cot} F=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2-z^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2 \end{vmatrix}=(-2y-2z, \qquad , \qquad)$$

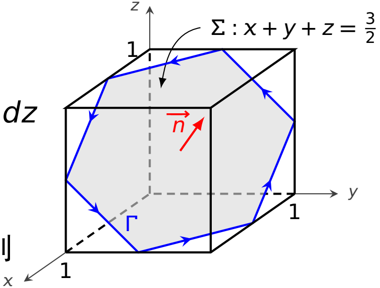
所以

$$I=\iint_\Sigma \operatorname{cot} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)}$$

例 试利用斯托克斯公式计算

$$I=\int_{\Gamma}(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$$

其中有向曲线 Γ 如图：



解 设 $F=(y^2-z^2, z^2-x^2, x^2-y^2)$，则

$$\cot F=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2-z^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2\end{vmatrix}=(-2y-2z, -2z-2x, \qquad\qquad)$$

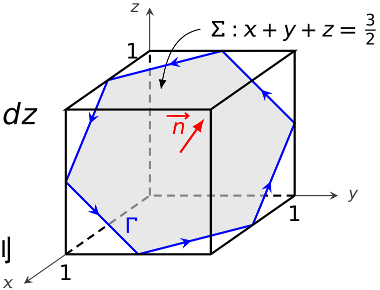
所以

$$I=\iint_{\Sigma}\cot F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)}$$

例 试利用斯托克斯公式计算

$$I=\int_{\Gamma}(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$$

其中有向曲线 Γ 如图：



解 设 $F=(y^2-z^2,\ z^2-x^2,\ x^2-y^2)$，则

$$\mathrm{cot}F=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2-z^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2\end{vmatrix}=(-2y-2z,\ -2z-2x,\ -2x-2y)$$

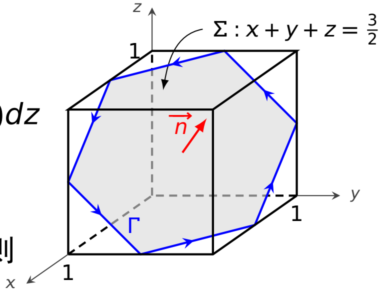
所以

$$I=\iint_{\Sigma}\mathrm{cot}\ F\cdot\vec{n}\,dS\ \overset{\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)}{=\!=\!=\!=\!=\!=}$$

例 试利用斯托克斯公式计算

$$I=\int_\Gamma (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$$

其中有向曲线 Γ 如图：



解 设 $F=(y^2-z^2,\, z^2-x^2,\, x^2-y^2)$，则

$$\operatorname{cot} F=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2-z^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2 \end{vmatrix}=(-2y-2z,\,-2z-2x,\,-2x-2y)$$

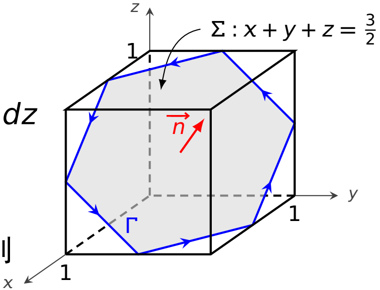
所以

$$I=\iint_\Sigma \operatorname{cot} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)} \frac{-4}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma (x+y+z)dS$$

例 试利用斯托克斯公式计算

$$I=\int_\Gamma (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$$

其中有向曲线 Γ 如图：



解 设 $F=(y^2-z^2,\ z^2-x^2,\ x^2-y^2)$，则

$$\cot F=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2-z^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2\end{vmatrix}=(-2y-2z,\ -2z-2x,\ -2x-2y)$$

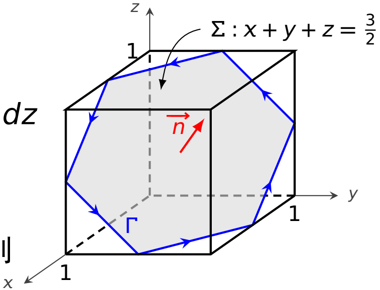
所以

$$I=\iint_\Sigma \cot F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)} \frac{-4}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma (x+y+z)dS=\frac{-4}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma \frac{3}{2}dS$$

例 试利用斯托克斯公式计算

$$I=\int_{\Gamma}(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$$

其中有向曲线 Γ 如图：



解 设 $F=(y^2-z^2,\, z^2-x^2,\, x^2-y^2)$，则

$$\mathrm{cot}F=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2-z^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2\end{vmatrix}=(-2y-2z,\,-2z-2x,\,-2x-2y)$$

所以

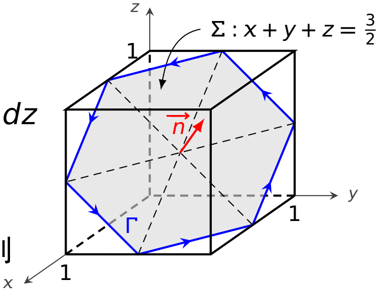
$$I=\iint_{\Sigma}\mathrm{cot}\ F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)} \frac{-4}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}(x+y+z)dS=\frac{-4}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}\frac{3}{2}dS$$

$$=-2\sqrt{3}\,\mathrm{Area}(\Sigma)$$

例 试利用斯托克斯公式计算

$$I=\int_{\Gamma}(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$$

其中有向曲线 Γ 如图：



解 设 $F=(y^2-z^2,\, z^2-x^2,\, x^2-y^2)$，则

$$\operatorname{cot}F=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2-z^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2\end{vmatrix}=(-2y-2z,\,-2z-2x,\,-2x-2y)$$

所以

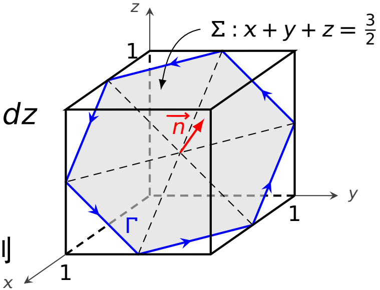
$$I=\iint_{\Sigma}\operatorname{cot}F\cdot\vec{n}\,dS\xlongequal{\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)}\frac{-4}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}(x+y+z)dS=\frac{-4}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}\frac{3}{2}dS$$

$$=-2\sqrt{3}\operatorname{Area}(\Sigma)$$

例 试利用斯托克斯公式计算

$$I=\int_\Gamma (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$$

其中有向曲线 Γ 如图：



解 设 $F=(y^2-z^2,\, z^2-x^2,\, x^2-y^2)$，则

$$\operatorname{cot} F=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2-z^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2 \end{vmatrix}=(-2y-2z,\, -2z-2x,\, -2x-2y)$$

所以

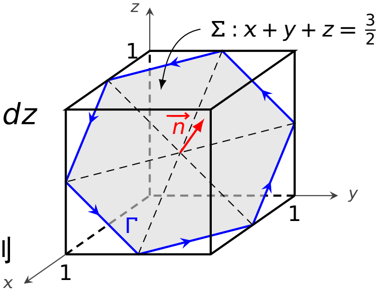
$$I=\iint_\Sigma \operatorname{cot} F\cdot\vec{n}\,dS \overset{\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)}{=\!=\!=\!=\!=} \frac{-4}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma (x+y+z)dS=\frac{-4}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma \frac{3}{2}dS$$

$$=-2\sqrt{3}\,\mathrm{Area}(\Sigma)=-2\sqrt{3}\cdot 6\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sin\frac{\pi}{3}$$

例 试利用斯托克斯公式计算

$$I=\int_{\Gamma}(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$$

其中有向曲线 Γ 如图：



解 设 $F=(y^2-z^2, z^2-x^2, x^2-y^2)$，则

$$\cot F=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2-z^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2\end{vmatrix}=(-2y-2z, -2z-2x, -2x-2y)$$

所以

$$I=\iint_{\Sigma}\cot F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)} \frac{-4}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}(x+y+z)dS=\frac{-4}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}\frac{3}{2}dS$$

$$=-2\sqrt{3}\,\mathrm{Area}(\Sigma)=-2\sqrt{3}\cdot 6\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{9}{2}$$