第 14 周作业解答

练习 1. 设 A, B 均是 n 阶正定矩阵，证明 $A+B$ 也是正定矩阵。

证明设 $x \neq 0$ 为 n 维列向量，则

$$x^T(A+B)x = x^TAx + x^TBx > 0$$

其中最后一步用到 A, B 的正定性。所以 $A+B$ 为正定矩阵。

练习 2. 设 n 阶对称矩阵 A 满足 $A^2 - 4A + 3I = 0$。证明 A 是正定矩阵。

证明设 λ 为 A 的任一特征值，α 为相应特征向量，即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

从而

$$\begin{aligned} 0 &= (A^2 - 4A + 3I)\alpha \\ &= A^2\alpha - 4A\alpha + 3\alpha \\ &= \lambda^2\alpha - 4\lambda\alpha + 3\alpha \\ &= (\lambda^2 - 4\lambda + 3)\alpha \end{aligned}$$

所以

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

得 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = 3$。总之，$\lambda > 0$。说明 A 的特征值均是大于零，所以 A 是正定。

练习 3. t 为何值时，二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 是正定?

解 f 的系数矩阵是:

$$\begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}.$$

f 是正定当且仅当所以顺序主子式大于零，所以

$A_1 = t > 0,$

$A_2 = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2 - 1 > 0 \Rightarrow t > 1 \quad \text{or} \quad t < -1 \xRightarrow{t>0} t > 1,$

$A_3 = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} \xlongequal[r_3 - t\times r_1]{r_2 + r_1} \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ t+1 & t+1 & 0 \\ 1-t^2 & -1-t & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+1 & t+1 \\ 1-t^2 & -1-t \end{vmatrix} = (t+1)^2(t-2) > 0 \xRightarrow{t>1} t > 2.$

所以 $t > 2$.