

不定积分补充练习

练习 1. 计算 $\int \frac{1}{x(x-2)^2} dx$.

练习 2. 计算 $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^2} dx$ (其中 $a > 0$).

练习 3. 计算 $\int \sqrt[3]{x} \ln x dx$.

练习 4. 计算 $\int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx$ 和 $\int \frac{x \arctan x}{(1+x^2)^2} dx$.

练习 5. 计算 $\int e^{2x} \arctan \sqrt{e^x - 1} dx$.

练习 6. 计算 $\int \frac{1}{\sin x} dx$.

练习 7. 计算 $\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$ 和 $\int \frac{\sin x}{2 \sin x + 3 \cos x} dx$.

练习 8. 计算 $\int \frac{1}{1+\cos x} dx$, $\int \frac{x}{1+\cos x} dx$ 和 $\int \frac{1}{1+\sin x} dx$.

练习 9. 掌握一定的积分技巧, 能够直接笔算简单的不定积分, 对今后的学习是必不可少。但积分的计算可以是非常的困难, 需要运用大量技巧, 且耗时耗力。对大多数人来说, 这些“偏题”“难题”是不必要。更何况, 许多不定积分可以通过软件求解 (这里推荐一个在线求解积分的网页 <https://www.integral-calculator.com/>)。

另外一方面, 有许多不定积分的结果是非初等函数的, 也就是, 不能表示成幂函数、指数函数、对数函数、三角函数等基本初等函数的四则运算和复合。对这些不定积分就不要尝试算出一个“函数表达式”出来。这些不定积分包括下面这些:

$$\begin{aligned} & \int \sqrt{1-x^4} dx; \\ & \int \ln(\ln x) dx, \quad \int \frac{dx}{\ln x}; \\ & \int e^{-x^2} dx, \quad \int \frac{1}{x} e^x dx, \quad \int e^{e^x} dx; \\ & \int \sin(x^2) dx, \quad \int \cos(x^2) dx, \quad \int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int \frac{\cos x}{x} dx; \\ & \int \frac{dx}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}}, \quad \int \sqrt{1-k^2 \sin^2 x} dx; \\ & \dots \end{aligned}$$

Liouville 在 1835 年得到以下定理:

定理. 设 f, g 为有理函数, g 不是常值函数, 如果 $\int f(x)e^{g(x)} dx$ 是初等函数, 则存在有理函数 h , 使得

$$\int f(x)e^{g(x)} dx = h(x)e^{g(x)} + C.$$

试利用此定理, 证明 $\int e^{-x^2} dx$ 和 $\int \frac{e^x}{x} dx$ 都是非初等不定积分 (由后者又可推出 $\int \frac{dx}{\ln x}$ 也是非初等不定积分)。