§3.2 向量与向量组的线性组合

数学系 梁卓滨

2017 - 2018 学年 I

向量

- n 维行向量

$$\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

向量

- n 维行向量

$$\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

即为：$1 \times n$ 的矩阵。

向量

- n 维行向量

$$\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

即为：$1 \times n$ 的矩阵。a_i 称为 α 的第 i 个分量。

向量

- n 维行向量

$$\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

即为：$1 \times n$ 的矩阵。a_i 称为 α 的第 i 个分量。

- n 维列向量

$$\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$$

向量

- n 维行向量

$$\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

即为：$1 \times n$ 的矩阵。a_i 称为 α 的第 i 个分量。

- n 维列向量

$$\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$$

即为：$n \times 1$ 的矩阵。

向量

- n 维行向量

$$\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

即为：$1 \times n$ 的矩阵。a_i 称为 α 的第 i 个分量。

- n 维列向量

$$\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$$

即为：$n \times 1$ 的矩阵。b_i 称为 β 的第 i 个分量。

向量

- n 维行向量

$$\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

即为：$1 \times n$ 的矩阵。a_i 称为 α 的第 i 个分量。

- n 维列向量

$$\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$$

即为：$n \times 1$ 的矩阵。b_i 称为 β 的第 i 个分量。

- 行向量、列向量统称向量。

向量

- n 维行向量

$$\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

即为：$1 \times n$ 的矩阵。a_i 称为 α 的第 i 个分量。

- n 维列向量

$$\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$$

即为：$n \times 1$ 的矩阵。b_i 称为 β 的第 i 个分量。

- 行向量、列向量统称向量。

  根据上下文判断“向量”是行向量，或列向量

向量

- n 维行向量

$$\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

即为：$1 \times n$ 的矩阵。a_i 称为 α 的第 i 个分量。

- n 维列向量

$$\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$$

即为：$n \times 1$ 的矩阵。b_i 称为 β 的第 i 个分量。

- 行向量、列向量统称向量。

  根据上下文判断“向量”是行向量，或列向量

- 零向量 $O = (0, 0, \cdots, 0)$

向量的线性运算

- 设 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$，$\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$，$k \in \mathbb{R}$，则

$$\alpha + \beta = \qquad\qquad , \quad \alpha - \beta = \qquad\qquad , \quad k\alpha =$$

向量的线性运算

- 设 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$，$\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$，$k \in \mathbb{R}$，则

$$\alpha + \beta = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}, \quad \alpha - \beta = \qquad\qquad\qquad , \quad k\alpha =$$

向量的线性运算

- 设 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$，$\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$，$k \in \mathbb{R}$，则

$$\alpha+\beta = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix}, \quad \alpha-\beta = \begin{pmatrix} a_1-b_1 \\ a_2-b_2 \\ \vdots \\ a_n-b_n \end{pmatrix}, \quad k\alpha =$$

向量的线性运算

- 设 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$，$\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$，$k \in \mathbb{R}$，则

$$\alpha+\beta = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix}, \quad \alpha-\beta = \begin{pmatrix} a_1-b_1 \\ a_2-b_2 \\ \vdots \\ a_n-b_n \end{pmatrix}, \quad k\alpha = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_n \end{pmatrix}$$

向量的线性运算

- 设 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$，$\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$，$k \in \mathbb{R}$，则

$$\alpha + \beta = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}, \quad \alpha - \beta = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ \vdots \\ a_n - b_n \end{pmatrix}, \quad k\alpha = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_n \end{pmatrix}$$

- 行向量类似

线性组合问题

给定向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \alpha_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

及一向量 $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

线性组合问题

给定向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \alpha_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

及一向量 $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

问 是否存在数 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 使得:

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n\,?$$

线性组合问题

给定向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \alpha_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

及一向量 $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

问 是否存在数 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 使得：

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n\,?$$

如果能，则称 β 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 的线性组合。

线性组合问题

例 判断 β 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，若能，写出线性表示等式 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$。

- (1) 问

$$\begin{array}{cccc} \beta & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

线性组合问题

例 判断 β 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，若能，写出线性表示等式 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$。

- (1) 问

$$\begin{array}{c} \beta \\ \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} \end{array} = \underline{\quad} \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} + \underline{\qquad} \begin{array}{c} \alpha_2 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} + \underline{\quad} \begin{array}{c} \alpha_3 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

线性组合问题

例 判断 β 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，若能，写出线性表示等式 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$。

- (1) 问

$$\begin{array}{c} \beta \\ \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} \end{array} = \underline{2} \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} + \underline{\qquad} \begin{array}{c} \alpha_2 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} + \underline{\qquad} \begin{array}{c} \alpha_3 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

线性组合问题

例 判断 β 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，若能，写出线性表示等式 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$。

- (1) 问

$$\begin{array}{c}\beta\\ \begin{pmatrix}2\\-7\\5\end{pmatrix}\end{array} = \underline{2}\begin{array}{c}\alpha_1\\ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\end{array} + \underline{-7}\begin{array}{c}\alpha_2\\ \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\end{array} + \underline{\quad}\begin{array}{c}\alpha_3\\ \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\end{array}$$

线性组合问题

例 判断 β 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，若能，写出线性表示等式 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$。

- (1) 问

$$\overset{\beta}{\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}} = \underline{2}\overset{\alpha_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} + \underline{-7}\overset{\alpha_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} + \underline{\frac{5}{2}}\overset{\alpha_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

线性组合问题

例 判断 β 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，若能，写出线性表示等式 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$。

- (1) 问

$$\begin{array}{c} \beta \\ \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} \end{array} = \underline{2} \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} + \underline{-7} \begin{array}{c} \alpha_2 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} + \underline{\frac{5}{2}} \begin{array}{c} \alpha_3 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

所以 $\beta = 2\alpha_1 - 7\alpha_2 + \frac{5}{2}\alpha_3$；

线性组合问题

例 判断 β 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，若能，写出线性表示等式

$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$。

- (1) 问

$$\begin{array}{ccccccc} \beta & & \alpha_1 & & \alpha_2 & & \alpha_3 \\ \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} & = \underline{2} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & + \underline{-7} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & + \underline{\frac{5}{2}} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

所以 $\beta = 2\alpha_1 - 7\alpha_2 + \frac{5}{2}\alpha_3$；$\beta$ 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出

线性组合问题

例 判断 β 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，若能，写出线性表示等式 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$。

- (1) 问

$$\begin{array}{ccccccc} \beta & & \alpha_1 & & \alpha_2 & & \alpha_3 \\ \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} & = \underline{2} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & + \underline{-7} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & + \underline{\frac{5}{2}} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

所以 $\beta = 2\alpha_1 - 7\alpha_2 + \frac{5}{2}\alpha_3$；$\beta$ 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出

- (2) 问

$$\begin{array}{cccc} \beta & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

线性组合问题

例 判断 β 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，若能，写出线性表示等式

$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$。

- (1) 问

$$\begin{array}{c}\beta \\ \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}\end{array} = \underline{2} \begin{array}{c}\alpha_1 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\end{array} + \underline{-7} \begin{array}{c}\alpha_2 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\end{array} + \underline{\frac{5}{2}} \begin{array}{c}\alpha_3 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\end{array}$$

所以 $\beta = 2\alpha_1 - 7\alpha_2 + \frac{5}{2}\alpha_3$；$\beta$ 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出

- (2) 问

$$\begin{array}{c}\beta \\ \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}\end{array} = \underline{\quad} \begin{array}{c}\alpha_1 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\end{array} + \underline{\quad} \begin{array}{c}\alpha_2 \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\end{array} + \underline{\quad} \begin{array}{c}\alpha_3 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\end{array}$$

线性组合问题

例 判断 β 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，若能，写出线性表示等式

$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$。

- (1) 问

$$\begin{array}{cccccccccc} \beta & & & \alpha_1 & & & \alpha_2 & & & \alpha_3 \\ \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} & = & \underline{2} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & + & \underline{-7} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & + & \underline{\frac{5}{2}} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

所以 $\beta = 2\alpha_1 - 7\alpha_2 + \frac{5}{2}\alpha_3$；$\beta$ 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出

- (2) 问

$$\begin{array}{cccccccccc} \beta & & & \alpha_1 & & & \alpha_2 & & & \alpha_3 \\ \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} & \cancel{=} & \underline{\quad} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & + & \underline{\quad} & \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} & + & \underline{\quad} & \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

线性组合问题

例 判断 β 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，若能，写出线性表示等式

$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$。

- (1) 问

$$
\begin{array}{ccccccc}
\beta & & \alpha_1 & & \alpha_2 & & \alpha_3 \\
\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} & = \underline{2} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & + \underline{-7} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & + \underline{\frac{5}{2}} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

所以 $\beta = 2\alpha_1 - 7\alpha_2 + \frac{5}{2}\alpha_3$；$\beta$ 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出

- (2) 问

$$
\begin{array}{ccccccc}
\beta & & \alpha_1 & & \alpha_2 & & \alpha_3 \\
\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} & \cancel{=} \underline{\quad} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & + \underline{\quad} & \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} & + \underline{\quad} & \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

所以 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出！

线性组合问题

例 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$；及 $\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$，问

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \_\_ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \_\_ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \_\_ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

即：β 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出？如果能，线性表达式是什么？

线性组合问题

例 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$；及 $\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$，问

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \underline{\quad} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \underline{\quad} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \underline{\quad} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

即：β 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出？如果能，线性表达式是什么？

问题

- 一般地，如何判断 β 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性表出？

线性组合问题

例 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$；及 $\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$，问

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \underline{\quad} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \underline{\quad} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \underline{\quad} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

即：β 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出？如果能，线性表达式是什么？

问题

- 一般地，如何判断 β 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性表出？
- 如果能线性表出，如何求出 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = \beta\,?$$

线性表示问题与线性方程组求解问题的联系

问题是否存在数 $k_1, k_2, \dots, k_n$ 使

$$\overset{\beta}{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}} = k_1 \overset{\alpha_1}{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}} + k_2 \overset{\alpha_2}{\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}} + \cdots + k_n \overset{\alpha_n}{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}}$$

线性表示问题与线性方程组求解问题的联系

问题是否存在数 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 使

$$\overset{\beta}{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}} = k_1 \overset{\alpha_1}{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}} + k_2 \overset{\alpha_2}{\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}} + \cdots + k_n \overset{\alpha_n}{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}}$$

等价于

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

线性表示问题与线性方程组求解问题的联系

问题是否存在数 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 使

$$\begin{array}{cccccccc} \beta & & \alpha_1 & & \alpha_2 & & & \alpha_n \\ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} & = k_1 & \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} & + k_2 & \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} & + \cdots + & k_n & \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

等价于

$$\begin{array}{c} \alpha_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \end{array}$$

线性表示问题与线性方程组求解问题的联系

问题是否存在数 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 使

$$\overset{\beta}{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}} = k_1 \overset{\alpha_1}{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}} + k_2 \overset{\alpha_2}{\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}} + \cdots + k_n \overset{\alpha_n}{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}}$$

等价于

$$\begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & & \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

线性表示问题与线性方程组求解问题的联系

问题是否存在数 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 使

$$
\begin{array}{c} \beta \\ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \end{array}
= k_1 \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \end{array}
+ k_2 \begin{array}{c} \alpha_2 \\ \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \end{array}
+ \cdots + k_n \begin{array}{c} \alpha_n \\ \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}
$$

等价于

$$
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}
\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}
$$

线性表示问题与线性方程组求解问题的联系

问题是否存在数 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 使

$$\overset{\beta}{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}} = k_1 \overset{\alpha_1}{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}} + k_2 \overset{\alpha_2}{\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}} + \cdots + k_n \overset{\alpha_n}{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}}$$

等价于

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \overset{\beta}{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}$$

线性表示问题与线性方程组求解问题的联系

问题是否存在数 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 使

$$\overset{\beta}{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}} = k_1 \overset{\alpha_1}{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}} + k_2 \overset{\alpha_2}{\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}} + \cdots + k_n \overset{\alpha_n}{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}}$$

等价于

$$\underbrace{\begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_n \\ \multicolumn{4}{c}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}} \end{array}}_{A} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \overset{\beta}{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}$$

线性表示问题与线性方程组求解问题的联系

问题是否存在数 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 使

$$\overset{\beta}{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}} = k_1 \overset{\alpha_1}{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}} + k_2 \overset{\alpha_2}{\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}} + \cdots + k_n \overset{\alpha_n}{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}}$$

等价于

$$\underbrace{\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}}_{A} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \overset{\beta}{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}} \quad \Longleftrightarrow \quad Ax = \beta$$

线性表示问题与线性方程组求解问题的联系

问题是否存在数 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 使

$$\overset{\beta}{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}} = k_1 \overset{\alpha_1}{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}} + k_2 \overset{\alpha_2}{\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}} + \cdots + k_n \overset{\alpha_n}{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}}$$

等价于

$$\underbrace{\begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_n \\ \hline \end{array}\!\!\!\!\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \overset{\beta}{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}} \quad \Leftrightarrow \quad Ax = \beta$$

方程有解等价于

线性表示问题与线性方程组求解问题的联系

问题是否存在数 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 使

$$\overset{\beta}{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}} = k_1 \overset{\alpha_1}{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}} + k_2 \overset{\alpha_2}{\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}} + \cdots + k_n \overset{\alpha_n}{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}}$$

等价于

$$\underbrace{\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}}_{A} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \overset{\beta}{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}} \quad \Leftrightarrow \quad Ax = \beta$$

方程组有解等价于

$$r(A) = r(A \vdots \beta)$$

线性表示问题与线性方程组求解问题的联系

问题是否存在数 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 使

$$\overset{\beta}{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}} = k_1 \overset{\alpha_1}{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}} + k_2 \overset{\alpha_2}{\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}} + \cdots + k_n \overset{\alpha_n}{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}}$$

等价于

$$\underbrace{\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}}_{A} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \overset{\beta}{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}} \quad \Leftrightarrow \quad Ax = \beta$$

方程有解等价于

$$r(A) = r(A \vdots \beta) \quad \Leftrightarrow \quad r(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n) = r(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n \beta)$$

初等行变换求线性表示问题——例 1

例 判断 β 是否能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，若能，写出线性表示等式。

(1)

$$(\,\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3 \,|\, \beta\,) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

初等行变换求线性表示问题——例 1

例 判断 β 是否能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，若能，写出线性表示等式。

(1)

$$(\,\alpha_1 \;\; \alpha_2 \;\; \alpha_3 \mid \beta\,) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

初等行变换求线性表示问题——例 1

例 判断 β 是否能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，若能，写出线性表示等式。

(1)

$$(\alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \ \alpha_3 \mid \beta) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- 所以 $r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) =$ ，$r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta) =$ ，

初等行变换求线性表示问题——例 1

例 判断 β 是否能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，若能，写出线性表示等式。

(1)

$$(\,\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3 \mid \beta\,) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- 所以 $r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) =\quad$ ，$r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta) =\quad$ ，

初等行变换求线性表示问题——例 1

例 判断 β 是否能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，若能，写出线性表示等式。

(1)

$$(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3 \mid \beta) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- 所以 $r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = 3$，$r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta) = \quad$,

初等行变换求线性表示问题——例 1

例 判断 β 是否能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，若能，写出线性表示等式。

(1)

$$(\,\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\,|\,\beta\,) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- 所以 $r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = 3$，$r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta) = 3$，

初等行变换求线性表示问题——例 1

例 判断 β 是否能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，若能，写出线性表示等式。

(1)

$$(\ \alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3 \mid \beta\ ) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- 所以 $r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = 3$，$r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta) = 3$，成立

$$r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta)$$

初等行变换求线性表示问题——例 1

例 判断 β 是否能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，若能，写出线性表示等式。

(1)

$$(\,\alpha_1 \;\; \alpha_2 \;\; \alpha_3 \,|\, \beta\,) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- 所以 $r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = 3$，$r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta) = 3$，成立

$$r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta)$$

β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示。

初等行变换求线性表示问题——例 1

例 判断 β 是否能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，若能，写出线性表示等式。

(1)

$$(\,\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\,|\,\beta\,) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- 所以 $r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = 3$，$r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta) = 3$，成立

$$r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta)$$

β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示。

初等行变换求线性表示问题——例 1

例 判断 β 是否能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，若能，写出线性表示等式。

(1)

$$(\,\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3 \mid \beta\,) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \alpha_1' & & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

- 所以 $r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = 3$，$r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta) = 3$，成立

$$r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta)$$

β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示。

初等行变换求线性表示问题——例 1

例 判断 β 是否能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，若能，写出线性表示等式。

(1)

$$(\ \alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3 \,|\, \beta\ ) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \alpha_1' & \alpha_2' & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

- 所以 $r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = 3$，$r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta) = 3$，成立

$$r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta)$$

β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示。

初等行变换求线性表示问题——例 1

例 判断 β 是否能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，若能，写出线性表示等式。

(1)

$$(\,\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3 \mid \beta\,) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3' & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

- 所以 $r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = 3$，$r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta) = 3$，成立

$$r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta)$$

β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示。

初等行变换求线性表示问题——例 1

例 判断 β 是否能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，若能，写出线性表示等式。

(1)

$$(\,\alpha_1 \;\; \alpha_2 \;\; \alpha_3 \,|\, \beta\,) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3' & \beta' \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

- 所以 $r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = 3$，$r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta) = 3$，成立

$$r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta)$$

β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示。

初等行变换求线性表示问题——例 1

例 判断 β 是否能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，若能，写出线性表示等式。

(1)

$$(\,\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3 \,|\, \beta\,) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{array}{cccc} \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3' & \beta' \\ \multicolumn{4}{c}{\left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)} \end{array}$$

- 所以 $r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = 3$，$r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta) = 3$，成立

$$r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta)$$

β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示。

- 显然 $\beta' = \alpha_1' - \alpha_2' + \alpha_3'$，

初等行变换求线性表示问题——例 1

例 判断 β 是否能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，若能，写出线性表示等式。

(1)

$$\left(\alpha_1 \;\; \alpha_2 \;\; \alpha_3 \,|\, \beta \right) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{array}{cccc} \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3' & \beta' \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3' & \beta' \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

- 所以 $r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = 3$，$r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta) = 3$，成立

$$r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta)$$

β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示。

- 显然 $\beta' = \alpha_1' - \alpha_2' + \alpha_3'$，是否也有 $\beta = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3$？

初等行变换求线性表示问题——例 1

例 判断 β 是否能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，若能，写出线性表示等式。

(1)

$$(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3 \mid \beta) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 2 \\ 0 & -1 & 2 & | & 3 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 2 & -2 & 1 & | & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3' & \beta' \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

- 所以 $r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = 3$，$r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta) = 3$，成立

$$r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta)$$

  β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示。

- 显然 $\beta' = \alpha_1' - \alpha_2' + \alpha_3'$，是否也有 $\beta = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3$？ 是的

初等行变换求线性表示问题——例 1

例 判断 β 是否能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，若能，写出线性表示等式。

(1)

$$(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3 \mid \beta) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{array}{cccc} \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3' & \beta' \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- 所以 $r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = 3$，$r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta) = 3$，成立

$$r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta)$$

  β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示。

- 显然 $\beta' = \alpha_1' - \alpha_2' + \alpha_3'$，是否也有 $\beta = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3$？ 是的

注 可证明：作初等行变换不改变列与列之间的“线性关系”。

初等行变换求线性表示问题——例 2

例 判断 β 是否能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，若能，写出线性表示等式。

(2)

$$(\alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \ \alpha_3 \mid \beta) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 11 \end{array}\right)$$

初等行变换求线性表示问题——例 2

例 判断 β 是否能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，若能，写出线性表示等式。

(2)

$$(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3 \mid \beta) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

初等行变换求线性表示问题——例 2

例 判断 β 是否能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，若能，写出线性表示等式。

(2)

$$(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3 \,|\, \beta) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- 所以 $r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) =$ ， $r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta) =$ ，

初等行变换求线性表示问题——例 2

例 判断 β 是否能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，若能，写出线性表示等式。

(2)

$$(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3 \mid \beta) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- 所以 $r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) =$ ，$r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta) =$ ，

初等行变换求线性表示问题——例 2

例 判断 β 是否能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，若能，写出线性表示等式。

(2)

$$(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3 \,|\, \beta) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- 所以 $r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = 2$，$r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta) = \quad$，

初等行变换求线性表示问题——例 2

例 判断 β 是否能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，若能，写出线性表示等式。

(2)

$$(\alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \ \alpha_3 \,|\, \beta) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- 所以 $r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = 2$，$r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta) = 3$，

初等行变换求线性表示问题——例 2

例 判断 β 是否能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，若能，写出线性表示等式。

(2)

$$(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \mid \beta) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- 所以 $r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = 2$，$r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta) = 3$，成立

$$r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) \neq r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta)$$

初等行变换求线性表示问题——例 2

例 判断 β 是否能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，若能，写出线性表示等式。

(2)

$$(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3 \,|\, \beta) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- 所以 $r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = 2$，$r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta) = 3$，成立

$$r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) \neq r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta)$$

β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示。

初等行变换求线性表示问题——总结

问题 β 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性表示？若能，写出线性表示等式。

步骤

初等行变换求线性表示问题——总结

问题 β 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性表示？若能，写出线性表示等式。

步骤 作初等行变换：

$$\left(\alpha_1 \;\; \alpha_2 \;\; \cdots \;\; \alpha_n \,\middle|\, \beta \right)$$

初等行变换求线性表示问题——总结

问题 β 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性表示？若能，写出线性表示等式。

步骤 作初等 行 变换：

$$\left(\alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \ \cdots \ \ \alpha_n \,\middle|\, \beta \right) \xrightarrow{\text{初等行变换}}$$

初等行变换求线性表示问题——总结

问题 β 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性表示？若能，写出线性表示等式。

步骤 作初等行变换：

$$\left(\alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \ \cdots \ \ \alpha_n \,\middle|\, \beta\right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\alpha_1' \ \ \alpha_2' \ \ \cdots \ \ \alpha_n' \,\middle|\, \beta'\right)_{\substack{\text{（简化）} \\ \text{阶梯型矩阵}}}$$

初等行变换求线性表示问题——总结

问题 β 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性表示？若能，写出线性表示等式。

步骤 作初等 行 变换：

$$\left(\alpha_1 \;\; \alpha_2 \;\; \cdots \;\; \alpha_n \,\middle|\, \beta \right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\alpha_1' \;\; \alpha_2' \;\; \cdots \;\; \alpha_n' \,\middle|\, \beta' \right)_{\text{阶梯型矩阵}}^{\text{（简化）}}$$

变换前后，列与列的线性关系没改变。

初等行变换求线性表示问题——总结

问题 β 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性表示？若能，写出线性表示等式。

步骤 作初等 行 变换：

$$\left(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n \,\middle|\, \beta\right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\alpha_1' \ \alpha_2' \ \cdots \ \alpha_n' \,\middle|\, \beta'\right)_{\substack{\text{（简化）}\\ \text{阶梯型矩阵}}}$$

变换前后，列与列的线性关系没改变。具体地：

初等行变换求线性表示问题——总结

问题 β 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性表示？若能，写出线性表示等式。

步骤 作初等行变换：

$$(\alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \ \cdots \ \ \alpha_n \mid \beta) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (\alpha_1' \ \ \alpha_2' \ \ \cdots \ \ \alpha_n' \mid \beta')_{\substack{\text{（简化）}\\ \text{阶梯型矩阵}}}$$

变换前后，列与列的线性关系没改变。具体地：

β'由$\alpha_1', \cdots, \alpha_n'$线性表示 $\iff$ β由$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$线性表示

β'不能由$\alpha_1', \cdots, \alpha_n'$线性表示 $\iff$ β不能由$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$线性表示

初等行变换求线性表示问题——总结

问题 β 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性表示？若能，写出线性表示等式。

步骤 作初等 行 变换：

$$(\alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \ \cdots \ \ \alpha_n \mid \beta) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (\alpha_1' \ \ \alpha_2' \ \ \cdots \ \ \alpha_n' \mid \beta')_{\text{阶梯型矩阵}}^{\text{（简化）}}$$

变换前后，列与列的线性关系没改变。具体地：

β'由$\alpha_1', \cdots, \alpha_n'$线性表示 $\Leftrightarrow$ β由$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$线性表示

$(\beta' = k_1\alpha_1' + \cdots + k_n\alpha_n')$ $\qquad$ $(\beta = k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n)$

β'不能由$\alpha_1', \cdots, \alpha_n'$线性表示 $\Leftrightarrow$ β不能由$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$线性表示

初等行变换求线性表示问题——总结

问题 β 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性表示？若能，写出线性表示等式。

步骤 作初等 行 变换：

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n & \beta \end{array}\right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{cccc|c} \alpha_1' & \alpha_2' & \cdots & \alpha_n' & \beta' \end{array}\right)_{\text{阶梯型矩阵}}^{\text{（简化）}}$$

变换前后，列与列的线性关系没改变。具体地：

β'由$\alpha_1', \cdots, \alpha_n'$线性表示 $\Leftrightarrow$ β由$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$线性表示

$(\beta' = k_1\alpha_1' + \cdots + k_n\alpha_n')$ $\qquad$ $(\beta = k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n)$

$\Updownarrow$

$r(\alpha_1' \cdots \alpha_n') = r(\alpha_1' \cdots \alpha_n' \, \beta')$

β'不能由$\alpha_1', \cdots, \alpha_n'$线性表示 $\Leftrightarrow$ β不能由$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$线性表示

初等行变换求线性表示问题——总结

问题 β 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性表示？若能，写出线性表示等式。

步骤 作初等 行 变换：

$$(\,\alpha_1 \;\; \alpha_2 \;\; \cdots \;\; \alpha_n \,|\, \beta\,) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (\,\alpha_1' \;\; \alpha_2' \;\; \cdots \;\; \alpha_n' \,|\, \beta'\,)_{\substack{\text{（简化）}\\\text{阶梯型矩阵}}}$$

变换前后，列与列的线性关系没改变。具体地：

β'由$\alpha_1', \cdots, \alpha_n'$线性表示 $\Longleftrightarrow$ β由$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$线性表示

$(\beta' = k_1\alpha_1' + \cdots + k_n\alpha_n')$ $\qquad$ $(\beta = k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n)$

$\Updownarrow$

$$r(\alpha_1' \cdots \alpha_n') = r(\alpha_1' \cdots \alpha_n' \, \beta') \Longleftrightarrow r(\alpha_1 \cdots \alpha_n) = r(\alpha_1 \cdots \alpha_n \, \beta)$$

β'不能由$\alpha_1', \cdots, \alpha_n'$线性表示 $\Longleftrightarrow$ β不能由$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$线性表示

初等行变换求线性表示问题——总结

问题 β 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性表示？若能，写出线性表示等式。

步骤 作初等行变换：

$$(\,\alpha_1 \;\; \alpha_2 \;\; \cdots \;\; \alpha_n \,|\, \beta\,) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (\,\alpha_1' \;\; \alpha_2' \;\; \cdots \;\; \alpha_n' \,|\, \beta'\,)_{\substack{\text{（简化）}\\ \text{阶梯型矩阵}}}$$

变换前后，列与列的线性关系没改变。具体地：

$$\beta' \text{由} \alpha_1', \cdots, \alpha_n' \text{线性表示} \quad \Leftrightarrow \quad \beta \text{由} \alpha_1, \ldots, \alpha_n \text{线性表示}$$

$$(\beta' = k_1\alpha_1' + \cdots + k_n\alpha_n') \qquad\qquad (\beta = k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n)$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$r(\alpha_1' \cdots \alpha_n') = r(\alpha_1' \cdots \alpha_n' \, \beta') \quad \Leftrightarrow \quad r(\alpha_1 \cdots \alpha_n) = r(\alpha_1 \cdots \alpha_n \, \beta)$$

$$\beta' \text{不能由} \alpha_1', \cdots, \alpha_n' \text{线性表示} \quad \Leftrightarrow \quad \beta \text{不能由} \alpha_1, \ldots, \alpha_n \text{线性表示}$$

初等行变换求线性表示问题——总结

问题 β 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性表示？若能，写出线性表示等式。

步骤 作初等 行 变换：

$$(\,\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_n \,|\, \beta\,) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (\,\alpha_1'\ \ \alpha_2'\ \ \cdots\ \ \alpha_n' \,|\, \beta'\,)_{\substack{\text{（简化）}\\ \text{阶梯型矩阵}}}$$

变换前后，列与列的线性关系没改变。具体地：

$$\begin{array}{ccc}
\beta' \text{由} \alpha_1', \cdots, \alpha_n' \text{线性表示} & \Leftrightarrow & \beta \text{由} \alpha_1, \ldots, \alpha_n \text{线性表示} \\
(\beta' = k_1\alpha_1' + \cdots + k_n\alpha_n') & & (\beta = k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n) \\
\Updownarrow & & \Updownarrow \\
r(\alpha_1' \cdots \alpha_n') = r(\alpha_1' \cdots \alpha_n'\, \beta') & \Leftrightarrow & r(\alpha_1 \cdots \alpha_n) = r(\alpha_1 \cdots \alpha_n\, \beta)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\beta' \text{不能由} \alpha_1', \cdots, \alpha_n' \text{线性表示} & \Leftrightarrow & \beta \text{不能由} \alpha_1, \ldots, \alpha_n \text{线性表示} \\
\Updownarrow & & \Updownarrow \\
r(\alpha_1' \cdots \alpha_n') < r(\alpha_1'\alpha_2' \cdots \alpha_n'\, \beta') & \Leftrightarrow & r(\alpha_1 \cdots \alpha_n) < r(\alpha_1 \cdots \alpha_n\, \beta)
\end{array}$$

例 $\beta=\begin{pmatrix}2\\3\\0\\5\end{pmatrix}$能否由$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\2\\0\\1\end{pmatrix}$线性表示？

解

例 $\beta=\begin{pmatrix}2\\3\\0\\5\end{pmatrix}$能否由$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\2\\0\\1\end{pmatrix}$线性表示？

解

$$\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta\end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 2\\0 & -1 & 2 & 3\\1 & 1 & 0 & 0\\2 & -2 & 1 & 5\end{array}\right)\end{array}$$

例 $\beta=\begin{pmatrix}2\\3\\0\\5\end{pmatrix}$能否由$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\2\\0\\1\end{pmatrix}$线性表示？

解

$$\begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[r_4-2r_1]{r_3-r_1}$$

例 $\beta=\begin{pmatrix}2\\3\\0\\5\end{pmatrix}$能否由$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\2\\0\\1\end{pmatrix}$线性表示？

解

$$\begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2\\ 0 & -1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -2 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[r_4-2r_1]{r_3-r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2\\ 0 & -1 & 2 & 3\\ & & & \\ & & & \end{array}\right)$$

例 $\beta=\begin{pmatrix}2\\3\\0\\5\end{pmatrix}$能否由$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\2\\0\\1\end{pmatrix}$线性表示？

解

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 5 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow[r_4-2r_1]{r_3-r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ & & & \end{array}\right)$$

例 $\beta=\begin{pmatrix}2\\3\\0\\5\end{pmatrix}$ 能否由 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\2\\0\\1\end{pmatrix}$ 线性表示？

解

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 5 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow[r_4-2r_1]{r_3-r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & -6 & -5 & 1 \end{array}\right)$$

例 $\beta=\begin{pmatrix}2\\3\\0\\5\end{pmatrix}$ 能否由 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\2\\0\\1\end{pmatrix}$ 线性表示？

解

$$\begin{array}{c} \quad\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\beta \\ \left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&2\\0&-1&2&3\\1&1&0&0\\2&-2&1&5\end{array}\right)\end{array}\xrightarrow[r_4-2r_1]{r_3-r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&2\\0&-1&2&3\\0&-1&-3&-2\\0&-6&-5&1\end{array}\right)\xrightarrow{(-1)\times r_2}$$

例 $\beta=\begin{pmatrix}2\\3\\0\\5\end{pmatrix}$能否由$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\2\\0\\1\end{pmatrix}$线性表示？

解

$$\begin{array}{cccc}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 2\\0 & -1 & 2 & 3\\1 & 1 & 0 & 0\\2 & -2 & 1 & 5\end{array}\right)\xrightarrow[r_4-2r_1]{r_3-r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 2\\0 & -1 & 2 & 3\\0 & -1 & -3 & -2\\0 & -6 & -5 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{(-1)\times r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 2\\0 & 1 & -2 & -3\\0 & -1 & -3 & -2\\0 & -6 & -5 & 1\end{array}\right)$$

例 $\beta=\begin{pmatrix}2\\3\\0\\5\end{pmatrix}$ 能否由 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\2\\0\\1\end{pmatrix}$ 线性表示？

解

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta\end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&2\\0&-1&2&3\\1&1&0&0\\2&-2&1&5\end{array}\right)\end{array} \xrightarrow[r_4-2r_1]{r_3-r_1} \left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&2\\0&-1&2&3\\0&-1&-3&-2\\0&-6&-5&1\end{array}\right) \xrightarrow{(-1)\times r_2} \left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&2\\0&1&-2&-3\\0&-1&-3&-2\\0&-6&-5&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4+6r_2]{r_3+r_2}$$

例 $\beta=\begin{pmatrix}2\\3\\0\\5\end{pmatrix}$能否由$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\2\\0\\1\end{pmatrix}$线性表示？

解

$$\begin{array}{cccc}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&2\\0&-1&2&3\\1&1&0&0\\2&-2&1&5\end{array}\right)\xrightarrow[r_4-2r_1]{r_3-r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&2\\0&-1&2&3\\0&-1&-3&-2\\0&-6&-5&1\end{array}\right)\xrightarrow{(-1)\times r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&2\\0&1&-2&-3\\0&-1&-3&-2\\0&-6&-5&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4+6r_2]{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&2\\0&1&-2&-3\\&&&\\&&&\end{array}\right)$$

例 $\beta=\begin{pmatrix}2\\3\\0\\5\end{pmatrix}$ 能否由 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\2\\0\\1\end{pmatrix}$ 线性表示？

解

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta\end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 2\\0 & -1 & 2 & 3\\1 & 1 & 0 & 0\\2 & -2 & 1 & 5\end{array}\right)\end{array} \xrightarrow[r_4-2r_1]{r_3-r_1} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 2\\0 & -1 & 2 & 3\\0 & -1 & -3 & -2\\0 & -6 & -5 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{(-1)\times r_2} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 2\\0 & 1 & -2 & -3\\0 & -1 & -3 & -2\\0 & -6 & -5 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4+6r_2]{r_3+r_2} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 2\\0 & 1 & -2 & -3\\0 & 0 & -5 & -5\\ & & & \end{array}\right)$$

例 $\beta=\begin{pmatrix}2\\3\\0\\5\end{pmatrix}$能否由$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\2\\0\\1\end{pmatrix}$线性表示？

解

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta\end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 2\\0 & -1 & 2 & 3\\1 & 1 & 0 & 0\\2 & -2 & 1 & 5\end{array}\right)\end{array} \xrightarrow[r_4-2r_1]{r_3-r_1} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 2\\0 & -1 & 2 & 3\\0 & -1 & -3 & -2\\0 & -6 & -5 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{(-1)\times r_2} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 2\\0 & 1 & -2 & -3\\0 & -1 & -3 & -2\\0 & -6 & -5 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4+6r_2]{r_3+r_2} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 2\\0 & 1 & -2 & -3\\0 & 0 & -5 & -5\\0 & 0 & -17 & -17\end{array}\right)$$

例 $\beta=\begin{pmatrix}2\\3\\0\\5\end{pmatrix}$能否由$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\2\\0\\1\end{pmatrix}$线性表示？

解

$$\begin{array}{cccc}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 2\\0 & -1 & 2 & 3\\1 & 1 & 0 & 0\\2 & -2 & 1 & 5\end{array}\right)\xrightarrow[r_4-2r_1]{r_3-r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 2\\0 & -1 & 2 & 3\\0 & -1 & -3 & -2\\0 & -6 & -5 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{(-1)\times r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 2\\0 & 1 & -2 & -3\\0 & -1 & -3 & -2\\0 & -6 & -5 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4+6r_2]{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 2\\0 & 1 & -2 & -3\\0 & 0 & -5 & -5\\0 & 0 & -17 & -17\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 2\\0 & 1 & -2 & -3\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)$$

例 $\beta=\begin{pmatrix}2\\3\\0\\5\end{pmatrix}$能否由$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\-2\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\2\\0\\1\end{pmatrix}$线性表示？

解

$$\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta\end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 2\\ 0 & -1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -2 & 1 & 5\end{array}\right)\end{array}\xrightarrow[r_4-2r_1]{r_3-r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 2\\ 0 & -1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & -3 & -2\\ 0 & -6 & -5 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{(-1)\times r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 2\\ 0 & 1 & -2 & -3\\ 0 & -1 & -3 & -2\\ 0 & -6 & -5 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4+6r_2]{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 2\\ 0 & 1 & -2 & -3\\ 0 & 0 & -5 & -5\\ 0 & 0 & -17 & -17\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 2\\ 0 & 1 & -2 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{r_4-r_3}$$

例 $\beta=\begin{pmatrix}2\\3\\0\\5\end{pmatrix}$能否由$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\-2\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\2\\0\\1\end{pmatrix}$线性表示？

解

$$\begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2\\ 0 & -1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -2 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[r_4-2r_1]{r_3-r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2\\ 0 & -1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & -3 & -2\\ 0 & -6 & -5 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(-1)\times r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2\\ 0 & 1 & -2 & -3\\ 0 & -1 & -3 & -2\\ 0 & -6 & -5 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4+6r_2]{r_3+r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2\\ 0 & 1 & -2 & -3\\ 0 & 0 & -5 & -5\\ 0 & 0 & -17 & -17 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2\\ 0 & 1 & -2 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_4-r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2\\ 0 & 1 & -2 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

例 $\beta=\begin{pmatrix}2\\3\\0\\5\end{pmatrix}$能否由$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\2\\0\\1\end{pmatrix}$线性表示？

解

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 5 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow[r_4-2r_1]{r_3-r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & -6 & -5 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(-1)\times r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & -6 & -5 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4+6r_2]{r_3+r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -17 & -17 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_4-r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1-3r_3]{r_2-2r_3}$$

例 $\beta=\begin{pmatrix}2\\3\\0\\5\end{pmatrix}$能否由$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\2\\0\\1\end{pmatrix}$线性表示？

解

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta\end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 5 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow[r_4-2r_1]{r_3-r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & -6 & -5 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(-1)\times r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & -6 & -5 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4+6r_2]{r_3+r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -17 & -17 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_4-r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1-3r_3]{r_2-2r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

例 $\beta=\begin{pmatrix}2\\3\\0\\5\end{pmatrix}$ 能否由 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\2\\0\\1\end{pmatrix}$ 线性表示？

解

$$\begin{array}{c} \quad\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \beta \\ \left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&2\\0&-1&2&3\\1&1&0&0\\2&-2&1&5\end{array}\right)\end{array} \xrightarrow[r_4-2r_1]{r_3-r_1} \left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&2\\0&-1&2&3\\0&-1&-3&-2\\0&-6&-5&1\end{array}\right) \xrightarrow{(-1)\times r_2} \left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&2\\0&1&-2&-3\\0&-1&-3&-2\\0&-6&-5&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4+6r_2]{r_3+r_2} \left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&2\\0&1&-2&-3\\0&0&-5&-5\\0&0&-17&-17\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&2\\0&1&-2&-3\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{array}\right) \xrightarrow{r_4-r_3} \left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&2\\0&1&-2&-3\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1-3r_3]{r_2-2r_3} \left(\begin{array}{ccc|c}0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

例 $\beta=\begin{pmatrix}2\\3\\0\\5\end{pmatrix}$ 能否由 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\2\\0\\1\end{pmatrix}$ 线性表示？

解

$$\begin{array}{cccc}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 2\\ 0 & -1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -2 & 1 & 5\end{array}\right)\xrightarrow[r_4-2r_1]{r_3-r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 2\\ 0 & -1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & -3 & -2\\ 0 & -6 & -5 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{(-1)\times r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 2\\ 0 & 1 & -2 & -3\\ 0 & -1 & -3 & -2\\ 0 & -6 & -5 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4+6r_2]{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 2\\ 0 & 1 & -2 & -3\\ 0 & 0 & -5 & -5\\ 0 & 0 & -17 & -17\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 2\\ 0 & 1 & -2 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{r_4-r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 2\\ 0 & 1 & -2 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1-3r_3]{r_2-2r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

例 $\beta=\begin{pmatrix}2\\3\\0\\5\end{pmatrix}$能否由$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\2\\0\\1\end{pmatrix}$线性表示？

解 $\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \beta$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&2\\0&-1&2&3\\1&1&0&0\\2&-2&1&5\end{array}\right)\xrightarrow[r_4-2r_1]{r_3-r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&2\\0&-1&2&3\\0&-1&-3&-2\\0&-6&-5&1\end{array}\right)\xrightarrow{(-1)\times r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&2\\0&1&-2&-3\\0&-1&-3&-2\\0&-6&-5&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4+6r_2]{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&2\\0&1&-2&-3\\0&0&-5&-5\\0&0&-17&-17\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&2\\0&1&-2&-3\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_4-r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&2\\0&1&-2&-3\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1-3r_3]{r_2-2r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-2r_2}$$

例 $\beta=\begin{pmatrix}2\\3\\0\\5\end{pmatrix}$能否由$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\2\\0\\1\end{pmatrix}$线性表示？

解

$$\begin{array}{cccc}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&2\\0&-1&2&3\\1&1&0&0\\2&-2&1&5\end{array}\right)\xrightarrow[r_4-2r_1]{r_3-r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&2\\0&-1&2&3\\0&-1&-3&-2\\0&-6&-5&1\end{array}\right)\xrightarrow{(-1)\times r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&2\\0&1&-2&-3\\0&-1&-3&-2\\0&-6&-5&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4+6r_2]{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&2\\0&1&-2&-3\\0&0&-5&-5\\0&0&-17&-17\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&2\\0&1&-2&-3\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_4-r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&2\\0&1&-2&-3\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1-3r_3]{r_2-2r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-2r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

例 $\beta=\begin{pmatrix}2\\3\\0\\5\end{pmatrix}$能否由$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\2\\0\\1\end{pmatrix}$线性表示？

解 $\quad\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\beta$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&2\\0&-1&2&3\\1&1&0&0\\2&-2&1&5\end{array}\right)\xrightarrow[r_4-2r_1]{r_3-r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&2\\0&-1&2&3\\0&-1&-3&-2\\0&-6&-5&1\end{array}\right)\xrightarrow{(-1)\times r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&2\\0&1&-2&-3\\0&-1&-3&-2\\0&-6&-5&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4+6r_2]{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&2\\0&1&-2&-3\\0&0&-5&-5\\0&0&-17&-17\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&2\\0&1&-2&-3\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_4-r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&2\\0&1&-2&-3\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1-3r_3]{r_2-2r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-2r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

例 $\beta=\begin{pmatrix}2\\3\\0\\5\end{pmatrix}$能否由$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\-2\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\2\\0\\1\end{pmatrix}$线性表示？

解

$$\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta\end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&2\\0&-1&2&3\\1&1&0&0\\2&-2&1&5\end{array}\right)\end{array}\xrightarrow[r_4-2r_1]{r_3-r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&2\\0&-1&2&3\\0&-1&-3&-2\\0&-6&-5&1\end{array}\right)\xrightarrow{(-1)\times r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&2\\0&1&-2&-3\\0&-1&-3&-2\\0&-6&-5&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4+6r_2]{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&2\\0&1&-2&-3\\0&0&-5&-5\\0&0&-17&-17\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&2\\0&1&-2&-3\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_4-r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&2\\0&1&-2&-3\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1-3r_3]{r_2-2r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-2r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

所以 $r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)=r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta)$，

例 $\beta=\begin{pmatrix}2\\3\\0\\5\end{pmatrix}$能否由$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\-2\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\2\\0\\1\end{pmatrix}$线性表示？

解

$$\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta\end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 2\\ 0 & -1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -2 & 1 & 5\end{array}\right)\end{array} \xrightarrow[r_4-2r_1]{r_3-r_1} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 2\\ 0 & -1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & -3 & -2\\ 0 & -6 & -5 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{(-1)\times r_2} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 2\\ 0 & 1 & -2 & -3\\ 0 & -1 & -3 & -2\\ 0 & -6 & -5 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4+6r_2]{r_3+r_2} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 2\\ 0 & 1 & -2 & -3\\ 0 & 0 & -5 & -5\\ 0 & 0 & -17 & -17\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 2\\ 0 & 1 & -2 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{r_4-r_3} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 2\\ 0 & 1 & -2 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1-3r_3]{r_2-2r_3} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{r_1-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

所以 $r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)=r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta)$，能线性表示

例 $\beta=\begin{pmatrix}2\\3\\0\\5\end{pmatrix}$能否由$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\2\\0\\1\end{pmatrix}$线性表示？

解

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 5 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow[r_4-2r_1]{r_3-r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & -6 & -5 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(-1)\times r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & -6 & -5 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4+6r_2]{r_3+r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -17 & -17 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_4-r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1-3r_3]{r_2-2r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

所以 $r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)=r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta)$，能线性表示，且 $\beta=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$

例 $\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\6\end{pmatrix}$能否由$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\\4\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}4\\3\\0\\11\end{pmatrix}$线性表示？

解

例 $\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\6\end{pmatrix}$能否由$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\\4\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}4\\3\\0\\11\end{pmatrix}$线性表示？

解

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 11 & 6 \end{array}\right) \end{array}$$

例 $\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\6\end{pmatrix}$能否由$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\\4\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}4\\3\\0\\11\end{pmatrix}$线性表示？

解

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 11 & 6 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3}$$

例 $\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\6\end{pmatrix}$能否由$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\\4\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}4\\3\\0\\11\end{pmatrix}$线性表示？

解

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta\end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c}2 & -1 & 4 & 1\\-1 & 3 & 3 & 2\\1 & -2 & 0 & -1\\1 & 4 & 11 & 6\end{array}\right) \end{array} \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 0 & -1\\-1 & 3 & 3 & 2\\2 & -1 & 4 & 1\\1 & 4 & 11 & 6\end{array}\right)$$

例 $\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\6\end{pmatrix}$ 能否由 $\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\\4\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}4\\3\\0\\11\end{pmatrix}$ 线性表示？

解

$$\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta\end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc|c}2 & -1 & 4 & 1\\ -1 & 3 & 3 & 2\\ 1 & -2 & 0 & -1\\ 1 & 4 & 11 & 6\end{array}\right)\end{array} \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 0 & -1\\ -1 & 3 & 3 & 2\\ 2 & -1 & 4 & 1\\ 1 & 4 & 11 & 6\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3-2r_1\\ r_4-r_1}]{r_2+r_1}$$

例 $\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\6\end{pmatrix}$能否由$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\\4\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}4\\3\\0\\11\end{pmatrix}$线性表示？

解

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 11 & 6 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 11 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3-2r_1\\ r_4-r_1}]{r_2+r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{array}\right)$$

例 $\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\6\end{pmatrix}$能否由$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\\4\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}4\\3\\0\\11\end{pmatrix}$线性表示？

解

$$\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta\end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc|c}2 & -1 & 4 & 1\\ -1 & 3 & 3 & 2\\ 1 & -2 & 0 & -1\\ 1 & 4 & 11 & 6\end{array}\right)\end{array} \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 0 & -1\\ -1 & 3 & 3 & 2\\ 2 & -1 & 4 & 1\\ 1 & 4 & 11 & 6\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3-2r_1\\ r_4-r_1}]{r_2+r_1} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 3 & 1\\ & & & \\ & & & \end{array}\right)$$

例 $\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\6\end{pmatrix}$能否由$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\\4\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}4\\3\\0\\11\end{pmatrix}$线性表示？

解

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta\end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 1\\ -1 & 3 & 3 & 2\\ 1 & -2 & 0 & -1\\ 1 & 4 & 11 & 6\end{array}\right)\end{array} \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1\\ -1 & 3 & 3 & 2\\ 2 & -1 & 4 & 1\\ 1 & 4 & 11 & 6\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3-2r_1\\ r_4-r_1}]{r_2+r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 3 & 4 & 3\\ & & & \end{array}\right)$$

例 $\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\6\end{pmatrix}$能否由$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\\4\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}4\\3\\0\\11\end{pmatrix}$线性表示？

解

$$\begin{array}{c} \quad\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \beta \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 11 & 6 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 11 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3-2r_1\\ r_4-r_1}]{r_2+r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & 11 & 7 \end{array}\right)$$

例 $\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\6\end{pmatrix}$ 能否由 $\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\\4\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}4\\3\\0\\11\end{pmatrix}$ 线性表示？

解

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta\end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c}2 & -1 & 4 & 1\\ -1 & 3 & 3 & 2\\ 1 & -2 & 0 & -1\\ 1 & 4 & 11 & 6\end{array}\right)\end{array} \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 0 & -1\\ -1 & 3 & 3 & 2\\ 2 & -1 & 4 & 1\\ 1 & 4 & 11 & 6\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3-2r_1\\ r_4-r_1}]{r_2+r_1} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 3 & 4 & 3\\ 0 & 6 & 11 & 7\end{array}\right) \xrightarrow[r_4-6r_2]{r_3-3r_2}$$

例 $\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\6\end{pmatrix}$能否由$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\\4\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}4\\3\\0\\11\end{pmatrix}$线性表示？

解

$$\begin{array}{c} \quad\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \beta \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 11 & 6 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 11 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3-2r_1\\ r_4-r_1}]{r_2+r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & 11 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[r_4-6r_2]{r_3-3r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ & & & \\ & & & \end{array}\right)$$

例 $\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\6\end{pmatrix}$能否由$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\\4\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}4\\3\\0\\11\end{pmatrix}$线性表示？

解

$$\begin{array}{c} \quad\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \beta \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 11 & 6 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 11 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3-2r_1\\ r_4-r_1}]{r_2+r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & 11 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[r_4-6r_2]{r_3-3r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ & & & \end{array}\right)$$

例 $\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\6\end{pmatrix}$能否由$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\\4\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}4\\3\\0\\11\end{pmatrix}$线性表示？

解

$$\begin{array}{c} \quad\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \beta \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 11 & 6 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 11 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3-2r_1\\ r_4-r_1}]{r_2+r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & 11 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[r_4-6r_2]{r_3-3r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 1 \end{array}\right)$$

例 $\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\6\end{pmatrix}$能否由$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\\4\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}4\\3\\0\\11\end{pmatrix}$线性表示？

解

$$\begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 11 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 11 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3-2r_1 \\ r_4-r_1}]{r_2+r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & 11 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[r_4-6r_2]{r_3-3r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{5}\times r_3}$$

例 $\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\6\end{pmatrix}$ 能否由 $\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\\4\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}4\\3\\0\\11\end{pmatrix}$ 线性表示？

解

$$\begin{array}{c} \quad\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \beta \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 11 & 6 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 11 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3-2r_1 \\ r_4-r_1}]{r_2+r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & 11 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[r_4-6r_2]{r_3-3r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{5}\times r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 1 \end{array}\right)$$

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

例 $\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\6\end{pmatrix}$能否由$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\\4\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}4\\3\\0\\11\end{pmatrix}$线性表示？

解

$$\begin{array}{c} \quad\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\beta \\ \left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&4&1\\-1&3&3&2\\1&-2&0&-1\\1&4&11&6\end{array}\right)\end{array} \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&0&-1\\-1&3&3&2\\2&-1&4&1\\1&4&11&6\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3-2r_1\\r_4-r_1}]{r_2+r_1} \left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&0&-1\\0&1&3&1\\0&3&4&3\\0&6&11&7\end{array}\right) \xrightarrow[r_4-6r_2]{r_3-3r_2} \left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&0&-1\\0&1&3&1\\0&0&-5&0\\0&0&-7&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{5}\times r_3} \left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&0&-1\\0&1&3&1\\0&0&1&0\\0&0&-7&1\end{array}\right) \xrightarrow{r_4+7r_3}$$

例 $\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\6\end{pmatrix}$能否由$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\\4\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}4\\3\\0\\11\end{pmatrix}$线性表示？

解

$$\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta\end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc|c}2 & -1 & 4 & 1\\ -1 & 3 & 3 & 2\\ 1 & -2 & 0 & -1\\ 1 & 4 & 11 & 6\end{array}\right)\end{array} \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 0 & -1\\ -1 & 3 & 3 & 2\\ 2 & -1 & 4 & 1\\ 1 & 4 & 11 & 6\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3-2r_1\\ r_4-r_1}]{r_2+r_1} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 3 & 4 & 3\\ 0 & 6 & 11 & 7\end{array}\right) \xrightarrow[r_4-6r_2]{r_3-3r_2} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & -5 & 0\\ 0 & 0 & -7 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{5}\times r_3} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -7 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{r_4+7r_3} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

例 $\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\6\end{pmatrix}$能否由$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\\4\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}4\\3\\0\\11\end{pmatrix}$线性表示？

解

$$\begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 11 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 11 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3-2r_1\\ r_4-r_1}]{r_2+r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & 11 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[r_4-6r_2]{r_3-3r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{5}\times r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_4+7r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

例 $\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\6\end{pmatrix}$ 能否由 $\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\\4\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}4\\3\\0\\11\end{pmatrix}$ 线性表示？

解

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 11 & 6 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 11 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3-2r_1\\ r_4-r_1}]{r_2+r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & 11 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[r_4-6r_2]{r_3-3r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{5}\times r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_4+7r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

可见 $r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta)=4>3=r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$，

例 $\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\6\end{pmatrix}$能否由$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\\4\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}4\\3\\0\\11\end{pmatrix}$线性表示？

解

$$\begin{array}{c}\quad\ \alpha_1\quad\ \alpha_2\quad\ \alpha_3\quad\ \ \beta\\ \left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&4&1\\-1&3&3&2\\1&-2&0&-1\\1&4&11&6\end{array}\right)\end{array}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&0&-1\\-1&3&3&2\\2&-1&4&1\\1&4&11&6\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3-2r_1\\ r_4-r_1}]{r_2+r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&0&-1\\0&1&3&1\\0&3&4&3\\0&6&11&7\end{array}\right)\xrightarrow[r_4-6r_2]{r_3-3r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&0&-1\\0&1&3&1\\0&0&-5&0\\0&0&-7&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{5}\times r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&0&-1\\0&1&3&1\\0&0&1&0\\0&0&-7&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_4+7r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&0&-1\\0&1&3&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right)$$

可见 $r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta)=4>3=r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$，所以不能线性表示。

向量组的线性组合

定义 设有两个向量组

$$(A): \quad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$$

$$(B): \quad \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$$

1. 如果中 (A) 中每一向量均可由 (B) 线性表示，则称向量组 (A) 可由向量组 (B) 线性表示。

向量组的线性组合

定义 设有两个向量组

$$(A): \quad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$$

$$(B): \quad \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$$

1. 如果中 (A) 中每一向量均可由 (B) 线性表示，则称向量组 (A) 可由向量组 (B) **线性表示**。
2. 如果 (A) 与 (B) 可相互线性表示，则称向量组 (A) 与 (B) **等价**。

向量组的线性组合

定义 设有两个向量组

$$(A):\quad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$$

$$(B):\quad \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$$

1. 如果中 (A) 中每一向量均可由 (B) 线性表示，则称向量组 (A) 可由向量组 (B) 线性表示。
2. 如果 (A) 与 (B) 可相互线性表示，则称向量组 (A) 与 (B) 等价。

定理（向量组线性表示的传递性） 假设向量组 $(A), (B), (C)$ 满足：(A) 可由 (B) 线性表示，(B) 可由 (C) 线性表示，则 (A) 可由 (C) 线性表示。