第 11 章 f：高斯公式

数学系　　梁卓滨

2017.07 暑期班

Outline

向量场的散度

定义 设 $F = (P, Q, R)$ 是空间中向量场，定义

$$\mathrm{div}F := \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

称为向量场 F 的散度。

向量场的散度

定义 设 $F=(P,Q,R)$ 是空间中向量场，定义

$$\operatorname{div} F := \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

称为向量场 F 的散度。

例 计算向量场 $F=(x^2+yz,\, y^2+xz,\, z^2+xy)$ 的散度。

向量场的散度

定义 设 $F=(P,Q,R)$ 是空间中向量场，定义

$$\mathrm{div}F := \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

称为向量场 F 的散度。

例 计算向量场 $F=(x^2+yz,\ y^2+xz,\ z^2+xy)$ 的散度。

解

$$\mathrm{div}F=\frac{\partial}{\partial x}(x^2+yz)+\frac{\partial}{\partial y}(y^2+xz)+\frac{\partial}{\partial z}(z^2+xy)$$

向量场的散度

定义 设 $F = (P, Q, R)$ 是空间中向量场，定义

$$\mathrm{div} F := \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

称为向量场 F 的散度。

例 计算向量场 $F = (x^2 + yz, y^2 + xz, z^2 + xy)$ 的散度。

解

$$\mathrm{div} F = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + yz) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2 + xz) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2 + xy) = 2x + 2y + 2z.$$

例 计算梯度场 $\nabla\frac{1}{r}$（$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$）的散度。

例 计算梯度场 $\nabla\frac{1}{r}$（$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$）的散度。

解

$$\nabla\frac{1}{r}$$

$$\operatorname{div}\nabla\frac{1}{r}$$

例 计算梯度场 $\nabla\frac{1}{r}$（$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$）的散度。

解

$$\nabla\frac{1}{r}=(\frac{\partial}{\partial x}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial y}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial z}r^{-1})$$

$$\mathrm{div}\nabla\frac{1}{r}$$

例 计算梯度场 $\nabla\frac{1}{r}$（$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$）的散度。

解

$$\nabla\frac{1}{r}=\left(\frac{\partial}{\partial x}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial y}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial z}r^{-1}\right)$$

$$-r^{-2}\cdot r_x$$

$$\operatorname{div}\nabla\frac{1}{r}$$

例 计算梯度场 $\nabla\frac{1}{r}$（$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$）的散度。

解

$$\nabla\frac{1}{r}=(\frac{\partial}{\partial x}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial y}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial z}r^{-1})$$

$$=(-r^{-2}\cdot r_x, -r^{-2}\cdot r_y, -r^{-2}\cdot r_z)$$

$$\mathrm{div}\nabla\frac{1}{r}$$

例 计算梯度场 $\nabla\frac{1}{r}$（$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$）的散度。

解

$$r_x=\frac{x}{r},$$

$$\nabla\frac{1}{r}=(\frac{\partial}{\partial x}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial y}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial z}r^{-1})$$

$$=(-r^{-2}\cdot r_x,-r^{-2}\cdot r_y,-r^{-2}\cdot r_z)$$

$$\mathrm{div}\nabla\frac{1}{r}$$

例 计算梯度场 $\nabla\frac{1}{r}$（$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$）的散度。

解

$$r_x=\frac{x}{r},\qquad r_y=\frac{y}{r},\qquad r_z=\frac{z}{r},$$

$$\nabla\frac{1}{r}=\left(\frac{\partial}{\partial x}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial y}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial z}r^{-1}\right)$$

$$=\left(-r^{-2}\cdot r_x,-r^{-2}\cdot r_y,-r^{-2}\cdot r_z\right)$$

$$\operatorname{div}\nabla\frac{1}{r}$$

例 计算梯度场 $\nabla\frac{1}{r}$（$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$）的散度。

解

$$r_x=\frac{x}{r},\qquad r_y=\frac{y}{r},\qquad r_z=\frac{z}{r},$$

$$\nabla\frac{1}{r}=(\frac{\partial}{\partial x}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial y}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial z}r^{-1})$$

$$=(-r^{-2}\cdot r_x,-r^{-2}\cdot r_y,-r^{-2}\cdot r_z)=(-\frac{x}{r^3},-\frac{y}{r^3},-\frac{z}{r^3}),$$

$$\mathrm{div}\nabla\frac{1}{r}$$

例 计算梯度场 $\nabla\frac{1}{r}$（$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$）的散度。

解

$$r_x=\frac{x}{r},\qquad r_y=\frac{y}{r},\qquad r_z=\frac{z}{r},$$

$$\nabla\frac{1}{r}=(\frac{\partial}{\partial x}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial y}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial z}r^{-1})$$

$$=(-r^{-2}\cdot r_x,\ -r^{-2}\cdot r_y,\ -r^{-2}\cdot r_z)=(-\frac{x}{r^3},\ -\frac{y}{r^3},\ -\frac{z}{r^3}),$$

$$\mathrm{div}\nabla\frac{1}{r}=\frac{\partial}{\partial x}(-\frac{x}{r^3})+\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{y}{r^3})+\frac{\partial}{\partial z}(-\frac{z}{r^3})$$

例 计算梯度场 $\nabla\frac{1}{r}$（$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$）的散度。

解

$$r_x=\frac{x}{r},\qquad r_y=\frac{y}{r},\qquad r_z=\frac{z}{r},$$

$$\nabla\frac{1}{r}=(\frac{\partial}{\partial x}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial y}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial z}r^{-1})$$

$$=(-r^{-2}\cdot r_x,-r^{-2}\cdot r_y,-r^{-2}\cdot r_z)=(-\frac{x}{r^3},-\frac{y}{r^3},-\frac{z}{r^3}),$$

$$\mathrm{div}\nabla\frac{1}{r}=\frac{\partial}{\partial x}(-\frac{x}{r^3})+\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{y}{r^3})+\frac{\partial}{\partial z}(-\frac{z}{r^3})$$

$$(-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5})$$

例 计算梯度场 $\nabla\frac{1}{r}$（$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$）的散度。

解

$$r_x=\frac{x}{r},\qquad r_y=\frac{y}{r},\qquad r_z=\frac{z}{r},$$

$$\nabla\frac{1}{r}=(\frac{\partial}{\partial x}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial y}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial z}r^{-1})$$

$$=(-r^{-2}\cdot r_x,-r^{-2}\cdot r_y,-r^{-2}\cdot r_z)=(-\frac{x}{r^3},-\frac{y}{r^3},-\frac{z}{r^3}),$$

$$\mathrm{div}\nabla\frac{1}{r}=\frac{\partial}{\partial x}(-\frac{x}{r^3})+\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{y}{r^3})+\frac{\partial}{\partial z}(-\frac{z}{r^3})$$

$$=(-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5})+(-\frac{1}{r^3}+\frac{3y^2}{r^5})+(-\frac{1}{r^3}+\frac{3z^2}{r^5})$$

例 计算梯度场 $\nabla\frac{1}{r}$（$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$）的散度。

解

$$r_x=\frac{x}{r},\qquad r_y=\frac{y}{r},\qquad r_z=\frac{z}{r},$$

$$\nabla\frac{1}{r}=(\frac{\partial}{\partial x}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial y}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial z}r^{-1})$$

$$=(-r^{-2}\cdot r_x,-r^{-2}\cdot r_y,-r^{-2}\cdot r_z)=(-\frac{x}{r^3},-\frac{y}{r^3},-\frac{z}{r^3}),$$

$$\mathrm{div}\nabla\frac{1}{r}=\frac{\partial}{\partial x}(-\frac{x}{r^3})+\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{y}{r^3})+\frac{\partial}{\partial z}(-\frac{z}{r^3})$$

$$=(-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5})+(-\frac{1}{r^3}+\frac{3y^2}{r^5})+(-\frac{1}{r^3}+\frac{3z^2}{r^5})$$

$$=-\frac{3}{r^3}+\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}$$

例 计算梯度场 $\nabla\frac{1}{r}$（$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$）的散度。

解

$$r_x=\frac{x}{r},\qquad r_y=\frac{y}{r},\qquad r_z=\frac{z}{r},$$

$$\nabla\frac{1}{r}=(\frac{\partial}{\partial x}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial y}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial z}r^{-1})$$

$$=(-r^{-2}\cdot r_x,-r^{-2}\cdot r_y,-r^{-2}\cdot r_z)=(-\frac{x}{r^3},-\frac{y}{r^3},-\frac{z}{r^3}),$$

$$\mathrm{div}\nabla\frac{1}{r}=\frac{\partial}{\partial x}(-\frac{x}{r^3})+\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{y}{r^3})+\frac{\partial}{\partial z}(-\frac{z}{r^3})$$

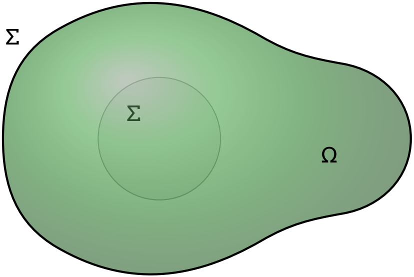
$$=(-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5})+(-\frac{1}{r^3}+\frac{3y^2}{r^5})+(-\frac{1}{r^3}+\frac{3z^2}{r^5})$$

$$=-\frac{3}{r^3}+\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}=0.$$

高斯公式

定理（高斯公式） 假设

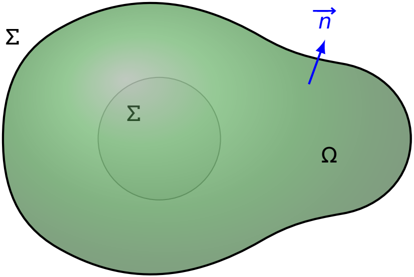
- 空间闭区域 Ω 的边界是分片光滑的闭曲面 Σ，
- $\overrightarrow{n}$ 是 Σ 的单位外法向量，



高斯公式

定理（高斯公式） 假设

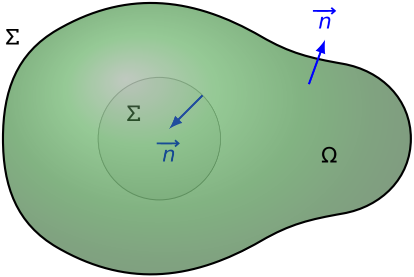
- 空间闭区域 Ω 的边界是分片光滑的闭曲面 Σ,
- $\overrightarrow{n}$ 是 Σ 的单位外法向量,



高斯公式

定理（高斯公式） 假设

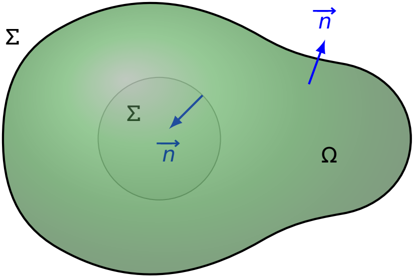
- 空间闭区域 Ω 的边界是分片光滑的闭曲面 Σ，
- $\overrightarrow{n}$ 是 Σ 的单位外法向量，



高斯公式

定理（高斯公式） 假设

- 空间闭区域 Ω 的边界是分片光滑的闭曲面 Σ，
- $\overrightarrow{n}$ 是 Σ 的单位外法向量，
- $F = (P, Q, R)$ 是 Ω 中向量场，且 P, Q, R 具有一阶连续的偏导数，



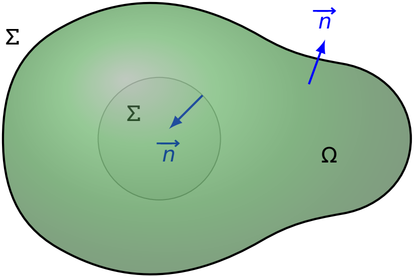
高斯公式

定理（高斯公式） 假设

- 空间闭区域 Ω 的边界是分片光滑的闭曲面 Σ，
- $\vec{n}$ 是 Σ 的单位外法向量，
- $F=(P,Q,R)$ 是 Ω 中向量场，且 P,Q,R 具有一阶连续的偏导数，

则

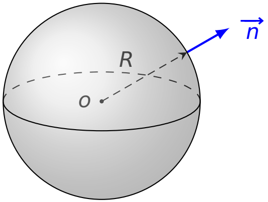
$$\iiint_\Omega \mathrm{div} F dv = \iint_\Sigma F\cdot\vec{n}\,dS$$



例 计算

$$I = \iint_{\Sigma} 2x\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy$$

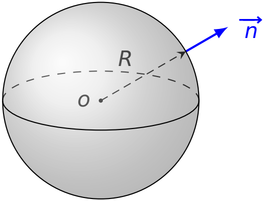
其中定向曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$，定向取外侧



例 计算

$$I=\iint_{\Sigma} 2x\,dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$$

其中定向曲面 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$，定向取外侧



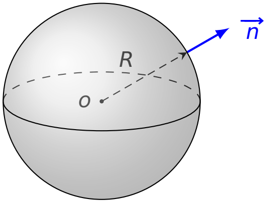
解

$$I = \!=\!=\!=\!=\!=\!= \iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS$$

例 计算

$$I = \iint_{\Sigma} 2x\,dydz + y^2\,dzdx + z^2\,dxdy$$

其中定向曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$，定向取外侧



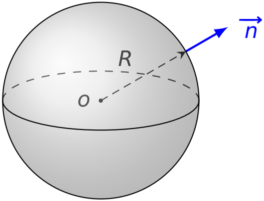
解

$$I \;=\!=\!=\!=\!=\; \iint_{\Sigma} F \cdot \overrightarrow{n}\, dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div} F\, dv$$

例 计算

$$I=\iint_{\Sigma} 2x\,dydz+y^2\,dzdx+z^2\,dxdy$$

其中定向曲面 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$，定向取外侧



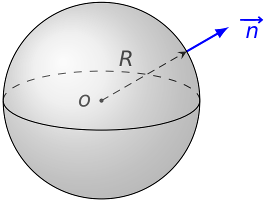
解

$$I \xlongequal{F=(2x,y^2,z^2)} \iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div}F\,dv$$

例 计算

$$I = \iint_{\Sigma} 2x\,dydz + y^2\,dzdx + z^2\,dxdy$$

其中定向曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$，定向取外侧



解

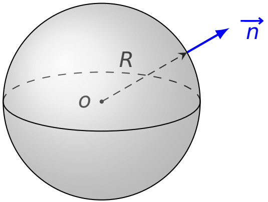
$$I \xlongequal{F=(2x,y^2,z^2)} \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n}\, dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div} F dv$$

$$= \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}(2x) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2) \right] dv$$

例 计算

$$I = \iint_{\Sigma} 2x\,dydz + y^2\,dzdx + z^2\,dxdy$$

其中定向曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$，定向取外侧



解

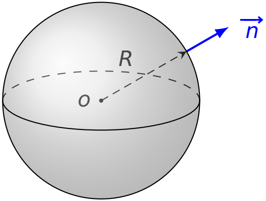
$$I \xlongequal{F=(2x,y^2,z^2)} \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n}\, dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div} F\, dv$$

$$= \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}(2x) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2) \right] dv = \iiint_{\Omega} (2 + 2y + 2z)\, dv$$

例 计算

$$I=\iint_\Sigma 2xdydz+y^2dzdx+z^2dxdy$$

其中定向曲面 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$，定向取外侧



解

$$I \xlongequal{F=(2x,y^2,z^2)} \iint_\Sigma F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_\Omega \mathrm{div}F dv$$

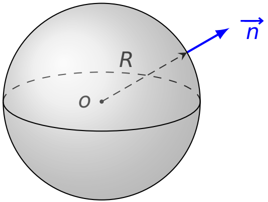
$$=\iiint_\Omega\left[\frac{\partial}{\partial x}(2x)+\frac{\partial}{\partial y}(y^2)+\frac{\partial}{\partial z}(z^2)\right]dv=\iiint_\Omega(2+2y+2z)dv$$

$$\xlongequal{\text{对称性}} \iiint_\Omega 2dv$$

例 计算

$$I = \iint_{\Sigma} 2x dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$$

其中定向曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$，定向取外侧



解

$$I \xlongequal{F=(2x,y^2,z^2)} \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n}\, dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div} F dv$$

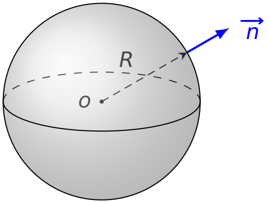
$$= \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}(2x) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2) \right] dv = \iiint_{\Omega} (2 + 2y + 2z) dv$$

$$\xlongequal{\text{对称性}} \iiint_{\Omega} 2 dv = 2\mathrm{Vol}(\Omega)$$

例 计算

$$I=\iint_{\Sigma} 2x\,dydz+y^2\,dzdx+z^2\,dxdy$$

其中定向曲面 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$，定向取外侧



解

$$I \xlongequal{F=(2x,y^2,z^2)} \iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F\,dv$$

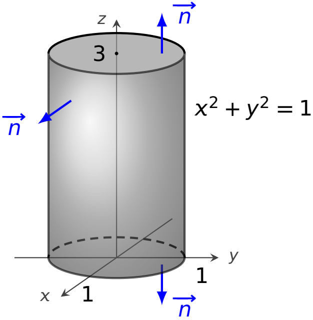
$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}(2x)+\frac{\partial}{\partial y}(y^2)+\frac{\partial}{\partial z}(z^2)\right]dv=\iiint_{\Omega}(2+2y+2z)\,dv$$

$$\xlongequal{\text{对称性}} \iiint_{\Omega} 2\,dv = 2\mathrm{Vol}(\Omega)=\frac{8}{3}\pi R^3$$

例 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x-y)dxdy + (y-z)xdydz$$

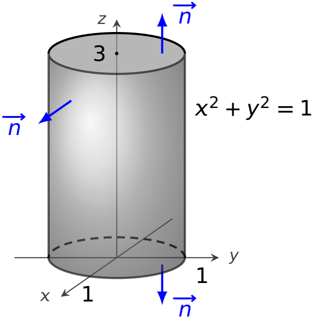
其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



例 计算

$$I=\iint_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y-z)xdydz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



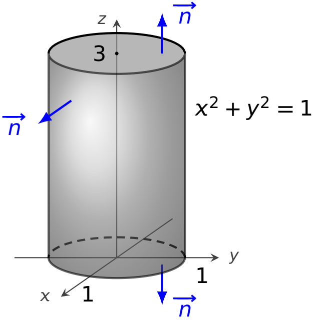
解

$$I = \!=\!=\!=\!=\!=\!=\!= \iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS$$

例 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x-y)dxdy + (y-z)xdydz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



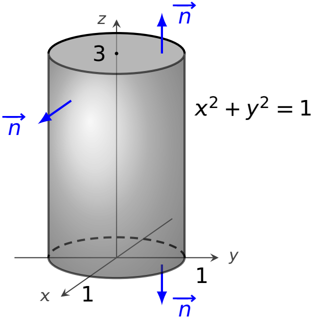
解

$$I = \!=\!=\!=\!= \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n}\, dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv$$

例 计算

$$I=\iint_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y-z)xdydz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



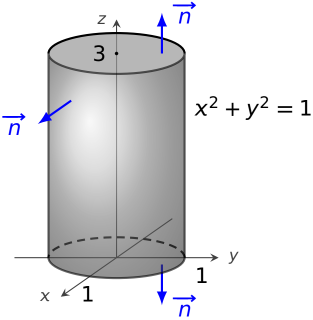
解

$$I\xlongequal{F=((y-z)x,0,x-y)}\iint_{\Sigma}F\cdot\vec{n}\,dS\xlongequal{\text{高斯公式}}\iiint_{\Omega}\mathrm{div}F\,dv$$

例 计算

$$I=\iint_\Sigma (x-y)dxdy+(y-z)xdydz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



解

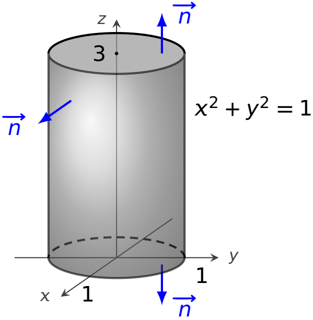
$$I \xlongequal{F=((y-z)x,0,x-y)} \iint_\Sigma F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_\Omega \mathrm{div} F dv$$

$$=\iiint_\Omega\left[\frac{\partial}{\partial x}((y-z)x)+\frac{\partial}{\partial y}0+\frac{\partial}{\partial z}(x-y)\right]dv$$

例 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x-y)dxdy + (y-z)xdydz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



解

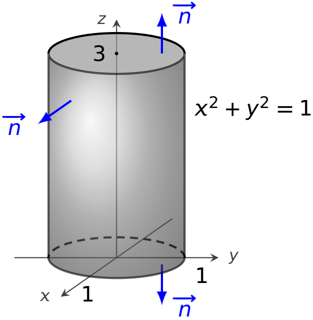
$$I \xlongequal{F=((y-z)x,0,x-y)} \iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div}F dv$$

$$= \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}((y-z)x) + \frac{\partial}{\partial y}0 + \frac{\partial}{\partial z}(x-y)\right] dv = \iiint_{\Omega} y - z dxdydz$$

例 计算

$$I=\iint_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y-z)xdydz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



解

$$I \xlongequal{F=((y-z)x,0,x-y)} \iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega}\mathrm{div}F\,dv$$

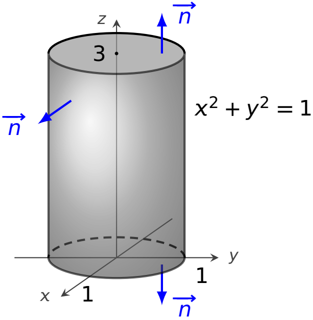
$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}((y-z)x)+\frac{\partial}{\partial y}0+\frac{\partial}{\partial z}(x-y)\right]dv=\iiint_{\Omega}y-zdxdydz$$

$$\xlongequal{\text{对称性}}\iiint_{\Omega}-zdxdydz$$

例 计算

$$I=\iint_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y-z)xdydz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



解

$$I \xlongequal{F=((y-z)x,0,x-y)} \iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div}F\,dv$$

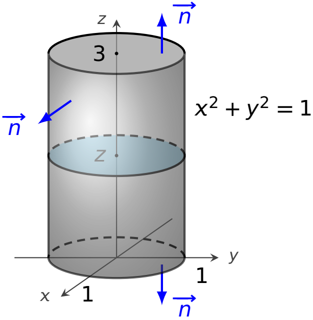
$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}((y-z)x)+\frac{\partial}{\partial y}0+\frac{\partial}{\partial z}(x-y)\right]dv=\iiint_{\Omega} y-z\,dxdydz$$

$$\xlongequal{\text{对称性}} \iiint_{\Omega}-z\,dxdydz=\int\left[\iint -z\,dxdy\right]dz$$

例 计算

$$I=\iint_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y-z)xdydz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面

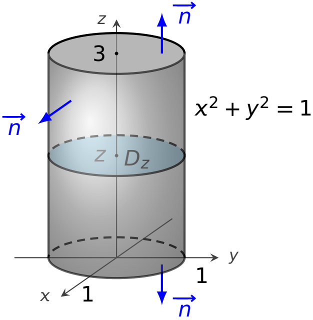


解

$$I \xlongequal{F=((y-z)x,0,x-y)} \iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div}F\,dv$$

$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}((y-z)x)+\frac{\partial}{\partial y}0+\frac{\partial}{\partial z}(x-y)\right]dv=\iiint_{\Omega} y-z\,dxdydz$$

$$\xlongequal{\text{对称性}} \iiint_{\Omega} -z\,dxdydz=\int\left[\iint -z\,dxdy\right]dz$$



例 计算

$$I=\iint_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y-z)xdydz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面

解

$$I \xlongequal{F=((y-z)x,0,x-y)} \iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega}\mathrm{div}F dv$$

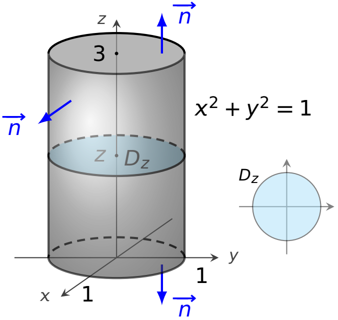
$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}((y-z)x)+\frac{\partial}{\partial y}0+\frac{\partial}{\partial z}(x-y)\right]dv=\iiint_{\Omega}y-zdxdydz$$

$$\xlongequal{\text{对称性}} \iiint_{\Omega}-zdxdydz=\int\left[\iint -zdxdy\right]dz$$

例 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x-y)dxdy + (y-z)xdydz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



解

$$I \xlongequal{F=((y-z)x,0,x-y)} \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n}\, dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div} F dv$$

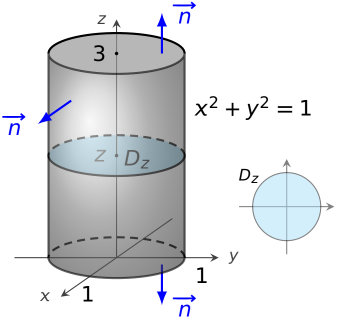
$$= \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}((y-z)x) + \frac{\partial}{\partial y} 0 + \frac{\partial}{\partial z}(x-y) \right] dv = \iiint_{\Omega} y - z dxdydz$$

$$\xlongequal{\text{对称性}} \iiint_{\Omega} -z dxdydz = \int \left[\iint \quad -z dxdy \right] dz$$

例 计算

$$I=\iint_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y-z)xdydz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



解

$$I \xlongequal{F=((y-z)x,0,x-y)} \iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega}\mathrm{div}F dv$$

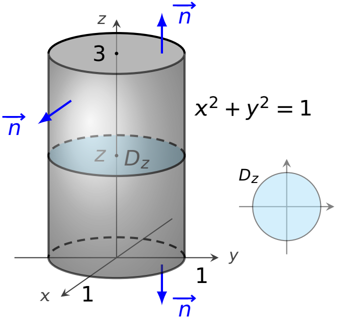
$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}((y-z)x)+\frac{\partial}{\partial y}0+\frac{\partial}{\partial z}(x-y)\right]dv=\iiint_{\Omega}y-zdxdydz$$

$$\xlongequal{\text{对称性}}\iiint_{\Omega}-zdxdydz=\int_0^3\left[\iint\ -zdxdy\right]dz$$

例 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x-y)dxdy + (y-z)xdydz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



解

$$I \xlongequal{F=((y-z)x,0,x-y)} \iint_{\Sigma} F\cdot \vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div} F dv$$

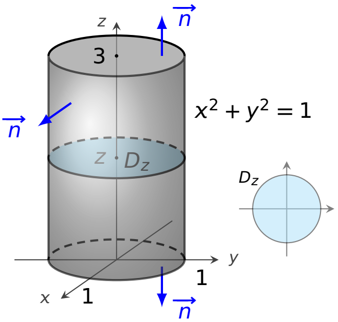
$$= \iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}((y-z)x) + \frac{\partial}{\partial y}0 + \frac{\partial}{\partial z}(x-y)\right]dv = \iiint_{\Omega} y - zdxdydz$$

$$\xlongequal{\text{对称性}} \iiint_{\Omega} -zdxdydz = \int_0^3 \left[\iint_{D_z} -zdxdy\right]dz$$

例 计算

$$I=\iint_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y-z)xdydz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



解

$$I\xlongequal{F=((y-z)x,0,x-y)}\iint_{\Sigma}F\cdot\vec{n}\,dS\xlongequal{\text{高斯公式}}\iiint_{\Omega}\mathrm{div}F\,dv$$

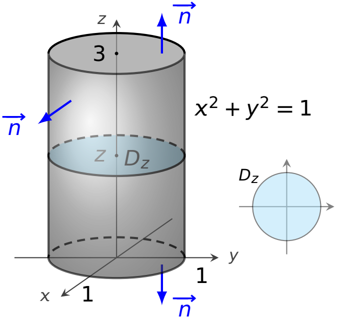
$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}((y-z)x)+\frac{\partial}{\partial y}0+\frac{\partial}{\partial z}(x-y)\right]dv=\iiint_{\Omega}y-z\,dxdydz$$

$$\xlongequal{\text{对称性}}\iiint_{\Omega}-z\,dxdydz=\int_0^3\left[\iint_{D_z}-z\,dxdy\right]dz \qquad -z|D_z|$$

例 计算

$$I=\iint_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y-z)xdydz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



解

$$I \xlongequal{F=((y-z)x,0,x-y)} \iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega}\mathrm{div}F\,dv$$

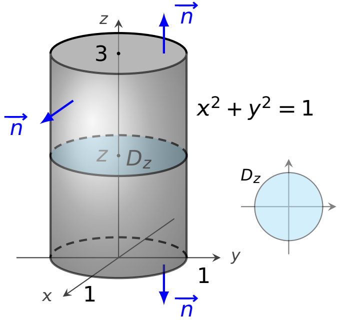
$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}((y-z)x)+\frac{\partial}{\partial y}0+\frac{\partial}{\partial z}(x-y)\right]dv=\iiint_{\Omega}y-z\,dxdydz$$

$$\xlongequal{\text{对称性}}\iiint_{\Omega}-z\,dxdydz=\int_0^3\left[\iint_{D_z}-z\,dxdy\right]dz=\int_0^3\left[-z|D_z|\right]dz$$

例 计算

$$I=\iint_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y-z)xdydz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



解

$$I \xlongequal{F=((y-z)x,0,x-y)} \iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div} F dv$$

$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}((y-z)x)+\frac{\partial}{\partial y}0+\frac{\partial}{\partial z}(x-y)\right]dv=\iiint_{\Omega}y-zdxdydz$$

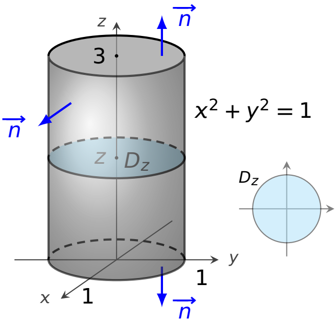
$$\xlongequal{\text{对称性}}\iiint_{\Omega}-zdxdydz=\int_0^3\left[\iint_{D_z}-zdxdy\right]dz=\int_0^3\left[-z|D_z|\right]dz$$

$$=\int_0^3\left[-z\pi\right]dz$$

例 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x-y)dxdy + (y-z)xdydz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



解

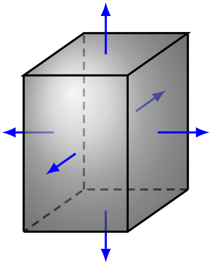
$$I \xlongequal{F=((y-z)x,0,x-y)} \iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div}F dv$$

$$= \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}((y-z)x) + \frac{\partial}{\partial y}0 + \frac{\partial}{\partial z}(x-y)\right] dv = \iiint_{\Omega} y - zdxdydz$$

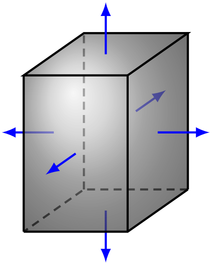
$$\xlongequal{\text{对称性}} \iiint_{\Omega} -zdxdydz = \int_0^3 \left[\iint_{D_z} -zdxdy\right]dz = \int_0^3 \left[-z|D_z|\right]dz$$

$$= \int_0^3 \left[-z\pi\right]dz = -\frac{9}{2}\pi$$

例 计算流体 $F = (x - y^2, y, z^3)$ 流向长方体 $[0, 1] \times [1, 2] \times [1, 4]$ 外侧的通量。



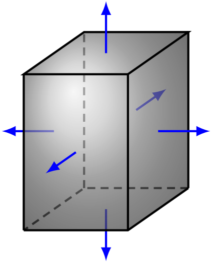
例 计算流体 $F=(x-y^2,y,z^3)$ 流向长方体 $[0,1]\times[1,2]\times[1,4]$ 外侧的通量。



解

$$\Phi=\iint_\Sigma F\cdot\vec{n}\,dS$$

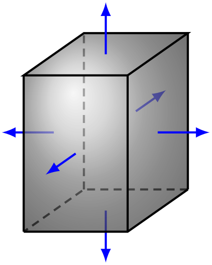
例 计算流体 $F = (x - y^2, y, z^3)$ 流向长方体 $[0, 1] \times [1, 2] \times [1, 4]$ 外侧的通量。



解

$$\Phi = \iint_{\Sigma} F \cdot \overrightarrow{n}\, dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div} F dv$$

例 计算流体 $F=(x-y^2, y, z^3)$ 流向长方体 $[0, 1]\times[1, 2]\times[1, 4]$ 外侧的通量。

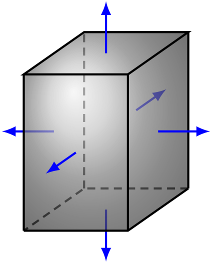


解

$$\Phi = \iint_{\Sigma} F\cdot\overrightarrow{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div}F\,dv$$

$$= \iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-y^2)+\frac{\partial}{\partial y}(y)+\frac{\partial}{\partial z}(z^3)\right]dv$$

例 计算流体 $F=(x-y^2, y, z^3)$ 流向长方体 $[0,1]\times[1,2]\times[1,4]$ 外侧的通量。



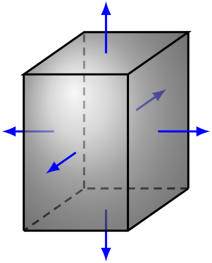
解

$$\Phi=\iint_\Sigma F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_\Omega \mathrm{div}F\,dv$$

$$=\iiint_\Omega\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-y^2)+\frac{\partial}{\partial y}(y)+\frac{\partial}{\partial z}(z^3)\right]dv$$

$$=\iiint_\Omega(2+3z^2)dxdydz$$

例 计算流体 $F=(x-y^2, y, z^3)$ 流向长方体 $[0,1]\times[1,2]\times[1,4]$ 外侧的通量。



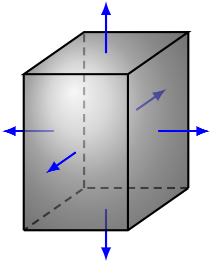
解

$$\Phi=\iint_\Sigma F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_\Omega \mathrm{div}F\,dv$$

$$=\iiint_\Omega\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-y^2)+\frac{\partial}{\partial y}(y)+\frac{\partial}{\partial z}(z^3)\right]dv$$

$$=\iiint_\Omega(2+3z^2)dxdydz=\int\left[\int\left[\int(2+3z^2)dz\right]dy\right]dx$$

例 计算流体 $F=(x-y^2, y, z^3)$ 流向长方体 $[0,1]\times[1,2]\times[1,4]$ 外侧的通量。



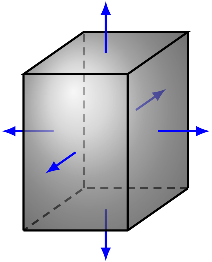
解

$$\Phi=\iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \overset{\text{高斯公式}}{=\!=\!=\!=} \iiint_{\Omega} \mathrm{div} F\,dv$$

$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-y^2)+\frac{\partial}{\partial y}(y)+\frac{\partial}{\partial z}(z^3)\right]dv$$

$$=\iiint_{\Omega}(2+3z^2)\,dxdydz=\int_0^1\left[\int\quad\left[\int(2+3z^2)dz\right]dy\right]dx$$

例 计算流体 $F=(x-y^2, y, z^3)$ 流向长方体 $[0,1]\times[1,2]\times[1,4]$ 外侧的通量。



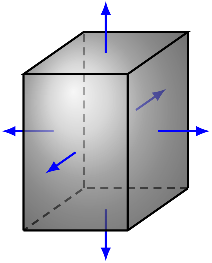
解

$$\Phi=\iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div}F\,dv$$

$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-y^2)+\frac{\partial}{\partial y}(y)+\frac{\partial}{\partial z}(z^3)\right]dv$$

$$=\iiint_{\Omega}(2+3z^2)dxdydz=\int_0^1\left[\int_1^2\left[\int(2+3z^2)dz\right]dy\right]dx$$

例 计算流体 $F=(x-y^2, y, z^3)$ 流向长方体 $[0,1]\times[1,2]\times[1,4]$ 外侧的通量。



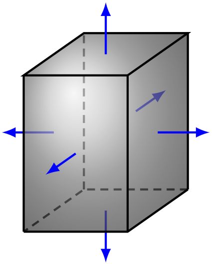
解

$$\Phi=\iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div}F\,dv$$

$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-y^2)+\frac{\partial}{\partial y}(y)+\frac{\partial}{\partial z}(z^3)\right]dv$$

$$=\iiint_{\Omega}(2+3z^2)dxdydz=\int_0^1\left[\int_1^2\left[\int_1^4(2+3z^2)dz\right]dy\right]dx$$

例 计算流体 $F=(x-y^2, y, z^3)$ 流向长方体 $[0,1]\times[1,2]\times[1,4]$ 外侧的通量。



解

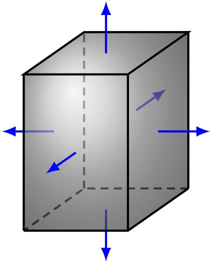
$$\Phi=\iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div}F\,dv$$

$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-y^2)+\frac{\partial}{\partial y}(y)+\frac{\partial}{\partial z}(z^3)\right]dv$$

$$=\iiint_{\Omega}(2+3z^2)dxdydz=\int_0^1\left[\int_1^2\left[\int_1^4(2+3z^2)dz\right]dy\right]dx$$

$$=\int_0^1 1dx\cdot\int_1^2 1dy\cdot\int_1^4(2+3z^2)dz$$

例 计算流体 $F=(x-y^2, y, z^3)$ 流向长方体 $[0,1]\times[1,2]\times[1,4]$ 外侧的通量。



解

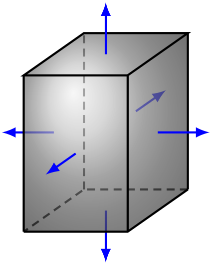
$$\Phi=\iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div}F\,dv$$

$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-y^2)+\frac{\partial}{\partial y}(y)+\frac{\partial}{\partial z}(z^3)\right]dv$$

$$=\iiint_{\Omega}(2+3z^2)dxdydz=\int_0^1\left[\int_1^2\left[\int_1^4(2+3z^2)dz\right]dy\right]dx$$

$$=\int_0^1 1dx\cdot\int_1^2 1dy\cdot\int_1^4(2+3z^2)dz=1\cdot1\cdot(2z+z^3)\Big|_1^4$$

例 计算流体 $F=(x-y^2, y, z^3)$ 流向长方体 $[0,1]\times[1,2]\times[1,4]$ 外侧的通量。



解

$$\Phi=\iint_{\Sigma}F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega}\mathrm{div}F\,dv$$

$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-y^2)+\frac{\partial}{\partial y}(y)+\frac{\partial}{\partial z}(z^3)\right]dv$$

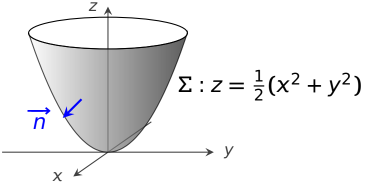
$$=\iiint_{\Omega}(2+3z^2)dxdydz=\int_0^1\left[\int_1^2\left[\int_1^4(2+3z^2)dz\right]dy\right]dx$$

$$=\int_0^1 1dx\cdot\int_1^2 1dy\cdot\int_1^4(2+3z^2)dz=1\cdot 1\cdot(2z+z^3)\Big|_1^4=69$$

例 计算

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz - zdxdy$$

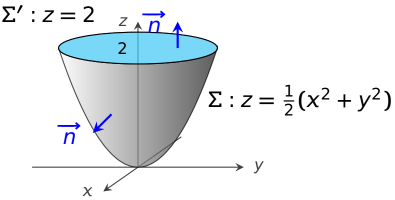
其中定向曲面 Σ 是抛物面的一部分，取单位外法向量，如图：



例 计算

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz-zdxdy$$

其中定向曲面 Σ 是抛物面的一部分，取单位外法向量，如图：

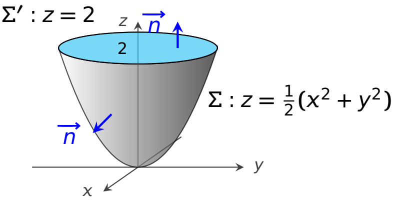


解 如图补充平面 Σ'，则 $\Sigma \cup \Sigma'$ 构成 3 维区域 Ω 边界，应用高斯公式：

例 计算

$$\iint_{\Sigma} (z^2+x)dydz - zdxdy$$

其中定向曲面 Σ 是抛物面的一部分，取单位外法向量，如图：



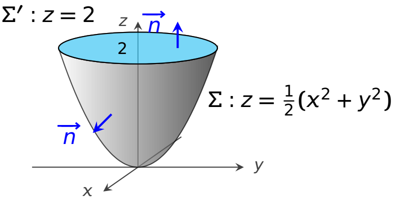
解 如图补充平面 Σ′，则 Σ ∪ Σ′ 构成 3 维区域 Ω 边界，应用高斯公式：

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma\cup\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS - \iint_{\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS$$

例 计算

$$\iint_\Sigma (z^2+x)dydz - zdxdy$$

其中定向曲面 Σ 是抛物面的一部分，取单位外法向量，如图：



解 如图补充平面 Σ'，则 $\Sigma \cup \Sigma'$ 构成 3 维区域 Ω 边界，应用高斯公式：

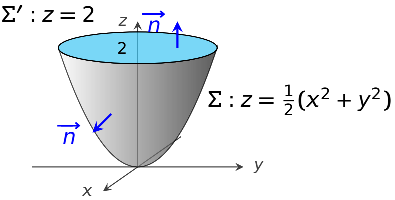
$$\text{原式} = \iint_{\Sigma\cup\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS - \iint_{\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS$$

$$= \iiint_\Omega \operatorname{div} F dv$$

例 计算

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz - zdxdy$$

其中定向曲面 Σ 是抛物面的一部分，取单位外法向量，如图：



解 如图补充平面 Σ'，则 $\Sigma \cup \Sigma'$ 构成 3 维区域 Ω 边界，应用高斯公式：

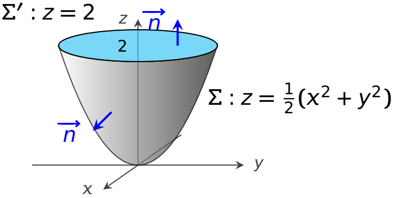
$$原式 = \iint_{\Sigma\cup\Sigma'} F \cdot \vec{n}\, dS - \iint_{\Sigma'} F \cdot \vec{n}\, dS$$

$$= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv - \iint_{\Sigma'} F \cdot \vec{n}\, dS$$

例 计算

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz - zdxdy$$

其中定向曲面 Σ 是抛物面的一部分，取单位外法向量，如图：



解 如图补充平面 Σ'，则 $\Sigma \cup \Sigma'$ 构成 3 维区域 Ω 边界，应用高斯公式：

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma\cup\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS - \iint_{\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS$$

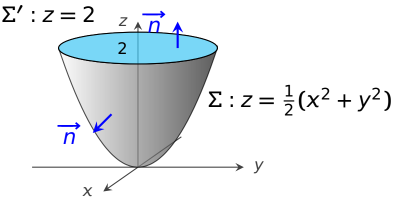
$$= \iiint_{\Omega} \mathrm{div}\, F dv - \iint_{\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS$$

$$\underline{\underline{F=(z^2+x,0,-z)}}$$

例 计算

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz - zdxdy$$

其中定向曲面 Σ 是抛物面的一部分，取单位外法向量，如图：



解 如图补充平面 Σ'，则 $\Sigma \cup \Sigma'$ 构成 3 维区域 Ω 边界，应用高斯公式：

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma\cup\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS - \iint_{\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS$$

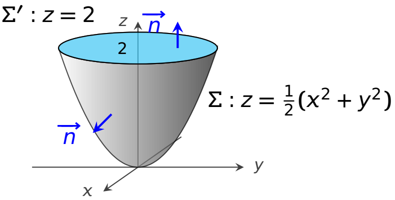
$$= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv - \iint_{\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS$$

$$\xlongequal[\operatorname{div} F=0]{F=(z^2+x,0,-z)}$$

例 计算

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz-zdxdy$$

其中定向曲面 Σ 是抛物面的一部分，取单位外法向量，如图：



解 如图补充平面 Σ′，则 Σ ∪ Σ′ 构成 3 维区域 Ω 边界，应用高斯公式：

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma\cup\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS - \iint_{\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS$$

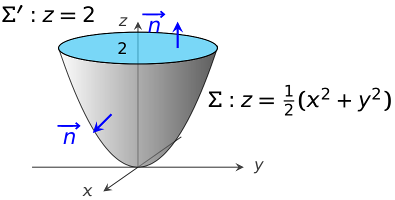
$$= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv - \iint_{\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS$$

$$\underset{\operatorname{div} F=0}{\overset{F=(z^2+x,0,-z)}{=\!=\!=\!=\!=\!=}} -\iint_{\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS$$

例 计算

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz - zdxdy$$

其中定向曲面 Σ 是抛物面的一部分，取单位外法向量，如图：



解 如图补充平面 Σ′，则 Σ∪Σ′ 构成 3 维区域 Ω 边界，应用高斯公式：

$$原式 = \iint_{\Sigma\cup\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS - \iint_{\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS$$

$$= \iiint_{\Omega} \mathrm{div}\, F dv - \iint_{\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS$$

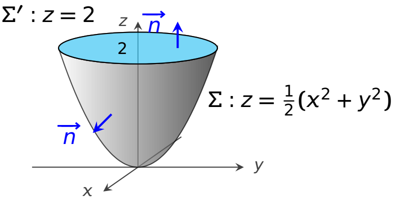
$$\xlongequal[\mathrm{div}\ F=0]{F=(z^2+x,0,-z)} - \iint_{\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS$$

$$\xlongequal{\vec{n}=(0,0,1)}$$

例 计算

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz - zdxdy$$

其中定向曲面 Σ 是抛物面的一部分，取单位外法向量，如图：



解 如图补充平面 Σ'，则 $\Sigma\cup\Sigma'$ 构成 3 维区域 Ω 边界，应用高斯公式：

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma\cup\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS - \iint_{\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS$$

$$= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv - \iint_{\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS$$

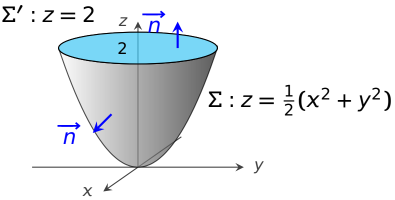
$$\xlongequal[\operatorname{div} F=0]{F=(z^2+x,0,-z)} - \iint_{\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS$$

$$\xlongequal[F\cdot\vec{n}=-z]{\vec{n}=(0,0,1)}$$

例 计算

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz-zdxdy$$

其中定向曲面 Σ 是抛物面的一部分，取单位外法向量，如图：



解 如图补充平面 Σ'，则 $\Sigma\cup\Sigma'$ 构成 3 维区域 Ω 边界，应用高斯公式：

$$\text{原式}=\iint_{\Sigma\cup\Sigma'}F\cdot\vec{n}\,dS-\iint_{\Sigma'}F\cdot\vec{n}\,dS$$

$$=\iiint_{\Omega}\operatorname{div}Fdv-\iint_{\Sigma'}F\cdot\vec{n}\,dS$$

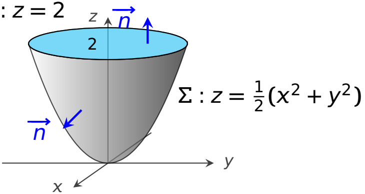
$$\overset{F=(z^2+x,0,-z)}{\underset{\operatorname{div}F=0}{=\!=\!=\!=}}-\iint_{\Sigma'}F\cdot\vec{n}\,dS$$

$$\overset{\vec{n}=(0,0,1)}{\underset{F\cdot\vec{n}=-z}{=\!=\!=\!=}}-\iint_{\Sigma'}-2dS$$

例 计算

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz - zdxdy$$

其中定向曲面 Σ 是抛物面的一部分，取单位外法向量，如图：



解 如图补充平面 Σ′，则 Σ∪Σ′ 构成 3 维区域 Ω 边界，应用高斯公式：

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma\cup\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS - \iint_{\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS$$

$$= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv - \iint_{\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS$$

$$\overset{F=(z^2+x,0,-z)}{\underset{\operatorname{div} F=0}{=\!=\!=\!=}} - \iint_{\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS$$

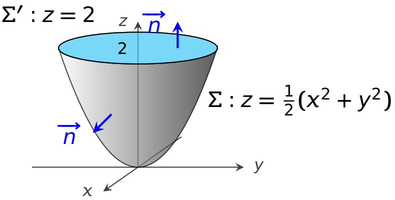
$$\overset{\vec{n}=(0,0,1)}{\underset{F\cdot\vec{n}=-z}{=\!=\!=\!=}} - \iint_{\Sigma'} -2dS$$

$$= 2\mathrm{Area}(\Sigma')$$

例 计算

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz-zdxdy$$

其中定向曲面 Σ 是抛物面的一部分，取单位外法向量，如图：



解 如图补充平面 Σ′，则 Σ∪Σ′ 构成 3 维区域 Ω 边界，应用高斯公式：

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma\cup\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS - \iint_{\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS$$

$$= \iiint_{\Omega} \mathrm{div}\, F dv - \iint_{\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS$$

$$\xlongequal[\mathrm{div}\,F=0]{F=(z^2+x,0,-z)} -\iint_{\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS$$

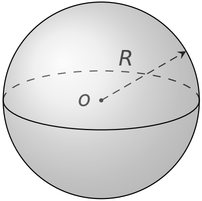
$$\xlongequal[F\cdot\vec{n}=-z]{\vec{n}=(0,0,1)} -\iint_{\Sigma'} -2dS$$

$$= 2\mathrm{Area}(\Sigma') = 8\pi$$

例 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS$$

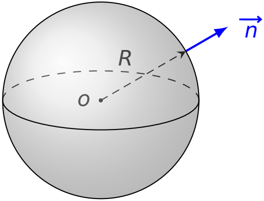
其中曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$



例 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS$$

其中曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$



解

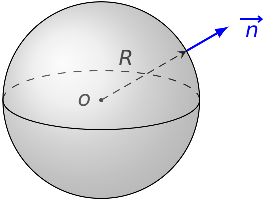
$$\iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS$$

$$= \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n}\, dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div} F dv$$

例 计算

$$I=\iint_{\Sigma}(x^2+y+z)dS$$

其中曲面 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$



解 球面单位外法向量 $\overrightarrow{n}=\frac{1}{R}(x,y,z)$，所以

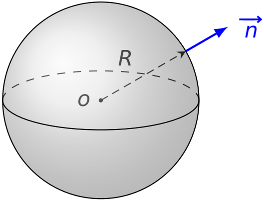
$$\iint_{\Sigma}(x^2+y+z)dS$$

$$=\iint_{\Sigma}F\cdot\overrightarrow{n}\,dS \overset{\text{高斯公式}}{=\!=\!=\!=} \iiint_{\Omega}\mathrm{div}F\,dv$$

例 计算

$$I=\iint_{\Sigma}(x^2+y+z)dS$$

其中曲面 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$



解 球面单位外法向量 $\overrightarrow{n}=\frac{1}{R}(x,y,z)$，所以

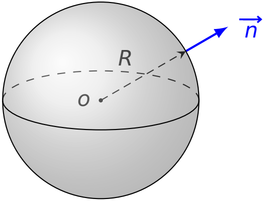
$$\iint_{\Sigma}(x^2+y+z)dS \qquad (\quad,\quad,\quad)\cdot\frac{1}{R}(x,y,z)$$

$$=\iint_{\Sigma}F\cdot\overrightarrow{n}\,dS \overset{\text{高斯公式}}{=\!=\!=\!=} \iiint_{\Omega}\mathrm{div}F\,dv$$

例 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS$$

其中曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$



解 球面单位外法向量 $\overrightarrow{n} = \frac{1}{R}(x, y, z)$，所以

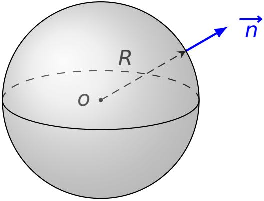
$$\iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS \qquad R(x, 1, 1) \cdot \frac{1}{R}(x, y, z)$$

$$= \iint_{\Sigma} F \cdot \overrightarrow{n} dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div} F dv$$

例 计算

$$I=\iint_{\Sigma}(x^2+y+z)dS$$

其中曲面 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$



解 球面单位外法向量 $\vec{n}=\frac{1}{R}(x, y, z)$，所以

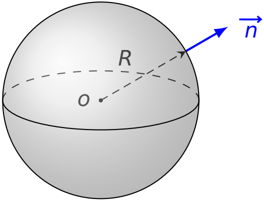
$$\iint_{\Sigma}(x^2+y+z)dS=\iint_{\Sigma}R(x, 1, 1)\cdot\frac{1}{R}(x, y, z)dS$$

$$=\iint_{\Sigma}F\cdot\vec{n}\,dS\xlongequal{\text{高斯公式}}\iiint_{\Omega}\mathrm{div}F\,dv$$

例 计算

$$I=\iint_{\Sigma}(x^2+y+z)dS$$

其中曲面 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$



解 球面单位外法向量 $\overrightarrow{n}=\frac{1}{R}(x,y,z)$，所以

$$\iint_{\Sigma}(x^2+y+z)dS=\iint_{\Sigma}R(x,1,1)\cdot\frac{1}{R}(x,y,z)dS$$

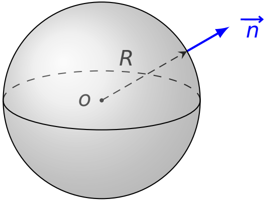
$$=\iint_{\Sigma}F\cdot\overrightarrow{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega}\mathrm{div}F dv$$

$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}(Rx)+\frac{\partial}{\partial y}(R)+\frac{\partial}{\partial z}(R)\right]dv$$

例 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS$$

其中曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$



解 球面单位外法向量 $\vec{n} = \frac{1}{R}(x, y, z)$，所以

$$\iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS = \iint_{\Sigma} R(x, 1, 1) \cdot \frac{1}{R}(x, y, z) dS$$

$$= \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n}\, dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div} F dv$$

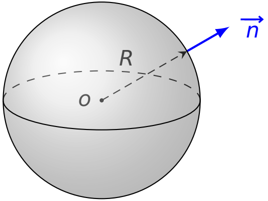
$$= \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}(Rx) + \frac{\partial}{\partial y}(R) + \frac{\partial}{\partial z}(R) \right] dv$$

$$= \iiint_{\Omega} R dxdydz$$

例 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS$$

其中曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$



解 球面单位外法向量 $\overrightarrow{n} = \frac{1}{R}(x, y, z)$，所以

$$\iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS = \iint_{\Sigma} R(x, 1, 1) \cdot \frac{1}{R}(x, y, z) dS$$

$$= \iint_{\Sigma} F \cdot \overrightarrow{n}\, dS \overset{\text{高斯公式}}{\equiv} \iiint_{\Omega} \mathrm{div} F dv$$

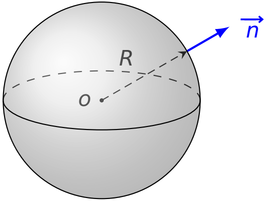
$$= \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}(Rx) + \frac{\partial}{\partial y}(R) + \frac{\partial}{\partial z}(R) \right] dv$$

$$= \iiint_{\Omega} R dxdydz = R \mathrm{Vol}(\Omega)$$

例 计算

$$I = \iint_\Sigma (x^2 + y + z)dS$$

其中曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$



解 球面单位外法向量 $\overrightarrow{n} = \frac{1}{R}(x, y, z)$，所以

$$\iint_\Sigma (x^2 + y + z)dS = \iint_\Sigma R(x, 1, 1) \cdot \frac{1}{R}(x, y, z)dS$$

$$= \iint_\Sigma F \cdot \overrightarrow{n}\, dS \overset{\text{高斯公式}}{=\!=\!=\!=} \iiint_\Omega \mathrm{div} F dv$$

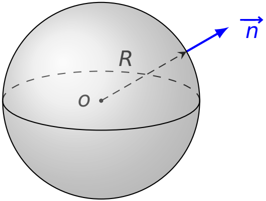
$$= \iiint_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x}(Rx) + \frac{\partial}{\partial y}(R) + \frac{\partial}{\partial z}(R)\right] dv$$

$$= \iiint_\Omega R dxdydz = R\mathrm{Vol}(\Omega) = \frac{4}{3}\pi R^4$$

例 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS$$

其中曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

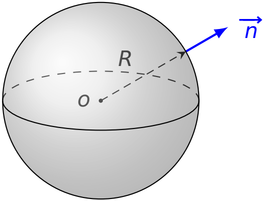


解法二 （不用高斯公式，直接计算）

例 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS$$

其中曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$



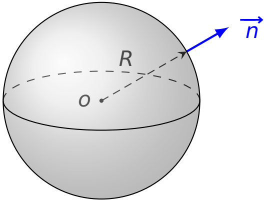
解法二 （不用高斯公式，直接计算）

$$\iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS \xlongequal{\text{对称性}} \iint_{\Sigma} x^2 dS$$

例 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS$$

其中曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$



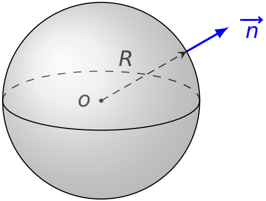
解法二 （不用高斯公式，直接计算）

$$\iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS \overset{\text{对称性}}{=\!=\!=} \iint_{\Sigma} x^2 dS = \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} (x^2 + x^2 + x^2) dS$$

例 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS$$

其中曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$



解法二 （不用高斯公式，直接计算）

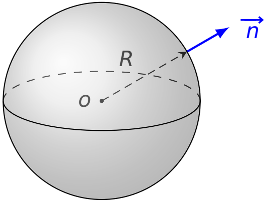
$$\iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS \xlongequal{\text{对称性}} \iint_{\Sigma} x^2 dS = \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} (x^2 + x^2 + x^2) dS$$

$$\xlongequal{\text{对称性}} \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS$$

例 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS$$

其中曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$



解法二 （不用高斯公式，直接计算）

$$\iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS \xlongequal{\text{对称性}} \iint_{\Sigma} x^2 dS = \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} (x^2 + x^2 + x^2) dS$$

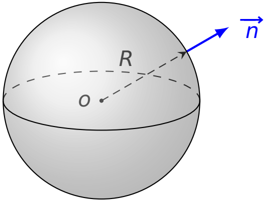
$$\xlongequal{\text{对称性}} \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS$$

$$= \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} R^2 dS$$

例 计算

$$I=\iint_\Sigma (x^2+y+z)dS$$

其中曲面 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$



解法二 （不用高斯公式，直接计算）

$$\iint_\Sigma (x^2+y+z)dS \xlongequal{\text{对称性}} \iint_\Sigma x^2 dS = \frac{1}{3}\iint_\Sigma (x^2+x^2+x^2)dS$$

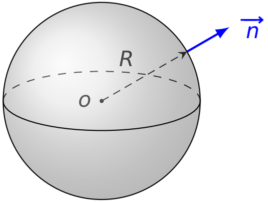
$$\xlongequal{\text{对称性}} \frac{1}{3}\iint_\Sigma (x^2+y^2+z^2)dS$$

$$= \frac{1}{3}\iint_\Sigma R^2 dS = \frac{1}{3}R^2\,\mathrm{Area}(\Sigma)$$

例 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS$$

其中曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$



解法二 （不用高斯公式，直接计算）

$$\iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS \xlongequal{\text{对称性}} \iint_{\Sigma} x^2 dS = \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} (x^2 + x^2 + x^2) dS$$

$$\xlongequal{\text{对称性}} \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS$$

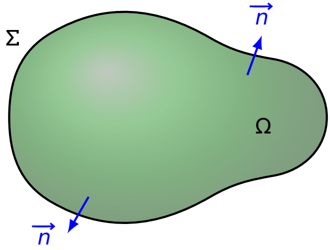
$$= \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} R^2 dS = \frac{1}{3} R^2 \mathrm{Area}(\Sigma) = \frac{4}{3} \pi R^4$$

散度 $\mathrm{div}F$ 的物理解释

高斯公式 $\iiint_\Omega \mathrm{div}F dv = \iint_\Sigma F\cdot\overrightarrow{n}dS$

散度 $\mathrm{div} F$ 的物理解释

- 假设 $F = (P, Q, R)$ 是流体的速度向量场，



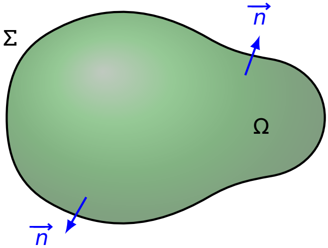
高斯公式 $\iiint_\Omega \mathrm{div} F dv = \iint_\Sigma F \cdot \vec{n} \, dS$

散度 div$F$ 的物理解释

- 假设 $F = (P, Q, R)$ 是流体的速度向量场，则

$$\iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n}\, dS$$

表示单位时间流向 Σ 外侧的通量。



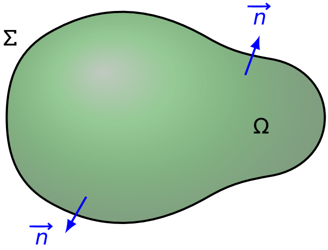
高斯公式 $\iiint_{\Omega} \mathrm{div} F dv = \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n}\, dS$

散度 div$F$ 的物理解释

- 假设 $F = (P, Q, R)$ 是流体的速度向量场，则

$$\iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n}\, dS$$

表示单位时间流向 Σ 外侧的通量。



$$\iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n}\, dS > 0$$

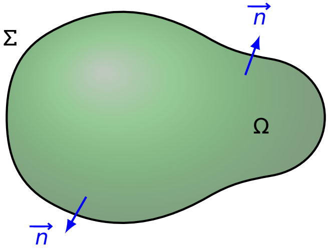
$$\iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n}\, dS < 0$$

高斯公式 $\iiint_{\Omega} \mathrm{div} F dv = \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n}\, dS$

散度 div$F$ 的物理解释

- 假设 $F=(P,Q,R)$ 是流体的速度向量场，则
$$\iint_\Sigma F\cdot\overrightarrow{n}\,dS$$
表示单位时间流向 Σ 外侧的通量。

- 进一步假设流体是不可压，则
$$\iint_\Sigma F\cdot\overrightarrow{n}\,dS>0$$
$$\iint_\Sigma F\cdot\overrightarrow{n}\,dS<0$$

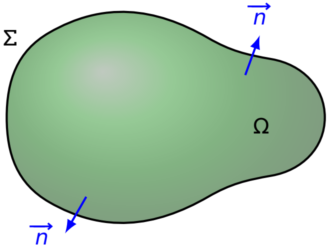


高斯公式 $\iiint_\Omega \mathrm{div}F\,dv=\iint_\Sigma F\cdot\overrightarrow{n}\,dS$

散度 $\mathrm{div}F$ 的物理解释

- 假设 $F=(P,Q,R)$ 是流体的速度向量场，则
$$\iint_\Sigma F\cdot\vec{n}\,dS$$
表示单位时间流向 Σ 外侧的通量。

- 进一步假设流体是不可压，则
$$\iint_\Sigma F\cdot\vec{n}\,dS>0 \;\Rightarrow\; \Omega \text{ 内有 “source”}$$
$$\iint_\Sigma F\cdot\vec{n}\,dS<0$$

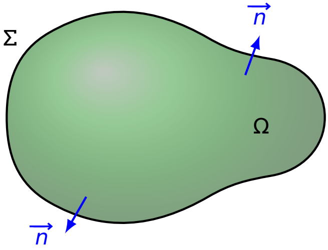


高斯公式 $\iiint_\Omega \mathrm{div}F\,dv=\iint_\Sigma F\cdot\vec{n}\,dS$

散度 $\mathrm{div}F$ 的物理解释

- 假设 $F=(P,Q,R)$ 是流体的速度向量场，则
$$\iint_{\Sigma} F\cdot\overrightarrow{n}\,dS$$
表示单位时间流向 Σ 外侧的通量。

- 进一步假设流体是不可压，则
$$\iint_{\Sigma} F\cdot\overrightarrow{n}\,dS>0 \;\Rightarrow\; \Omega \text{ 内有 “source”}$$
$$\iint_{\Sigma} F\cdot\overrightarrow{n}\,dS<0 \;\Rightarrow\; \Omega \text{ 内有 “sink”}$$

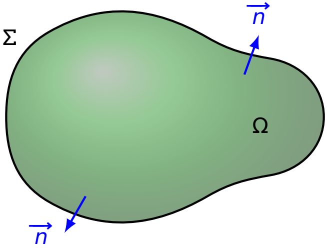


高斯公式 $\iiint_{\Omega}\mathrm{div}F\,dv=\iint_{\Sigma}F\cdot\overrightarrow{n}\,dS$

散度 div$F$ 的物理解释

- 假设 $F=(P,Q,R)$ 是流体的速度向量场，则
$$\iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS$$
表示单位时间流向 Σ 外侧的通量。

- 进一步假设流体是不可压，则
$$\iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS>0 \Rightarrow \Omega \text{ 内有 “source”}$$
$$\iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS<0 \Rightarrow \Omega \text{ 内有 “sink”}$$



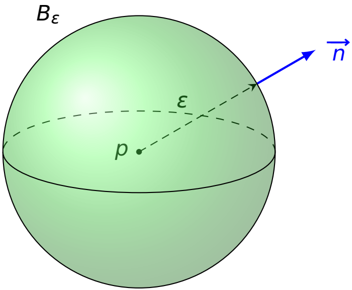
注 高斯公式 $\iiint_{\Omega}\mathrm{div}F\,dv=\iint_{\Sigma}F\cdot\vec{n}\,dS$ 表明：div$F$ 反映这种 “source” 和 “sink” 的强度。

散度 div$F$ 的物理解释 (2)

$p \bullet$

$\mathrm{div} F(p)$

散度 $\mathrm{div}F$ 的物理解释 (2)

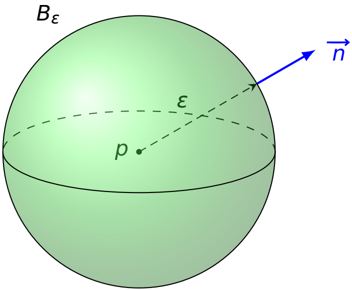


$\mathrm{div}F(p)$

散度 div$F$ 的物理解释 (2)

$$\iint_{\partial B_\varepsilon} F \cdot \vec{n}\, dS$$

$$= \qquad \iiint_{B_\varepsilon} \mathrm{div} F dv$$



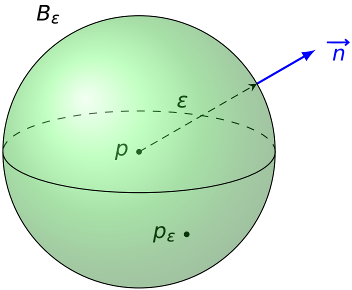
$$\mathrm{div} F(p)$$

散度 $\mathrm{div}\boldsymbol{F}$ 的物理解释 (2)

$$\iint_{\partial B_\varepsilon} F \cdot \overrightarrow{n}\, dS$$

$$= \iiint_{B_\varepsilon} \mathrm{div} F dv$$

$$= \mathrm{Vol}(B_\varepsilon)\mathrm{div} F(p_\varepsilon)$$



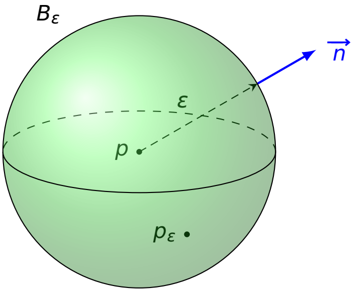
$\mathrm{div} F(p)$

散度 div$F$ 的物理解释 (2)

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \iint_{\partial B_\varepsilon} F \cdot \overrightarrow{n}\, dS$$

$$= \frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \iiint_{B_\varepsilon} \mathrm{div} F dv$$

$$= \frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \mathrm{Vol}(B_\varepsilon) \mathrm{div} F(p_\varepsilon)$$



$\mathrm{div} F(p)$

散度 div$F$ 的物理解释 (2)

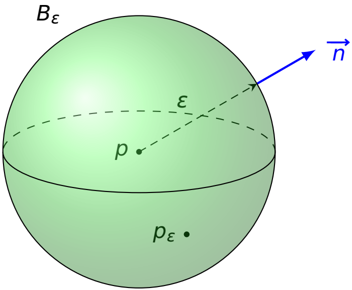
$$\frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \iint_{\partial B_\varepsilon} F \cdot \vec{n}\, dS$$

$$= \frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \iiint_{B_\varepsilon} \mathrm{div} F dv$$

$$= \frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \mathrm{Vol}(B_\varepsilon) \mathrm{div} F(p_\varepsilon)$$

$$= \mathrm{div} F(p_\varepsilon)$$

$$\mathrm{div} F(p)$$



散度 div$F$ 的物理解释 (2)

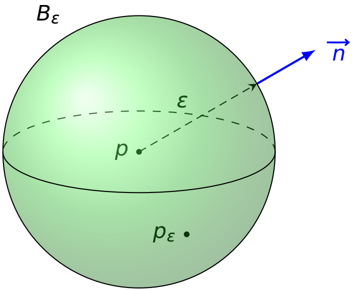
$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \iint_{\partial B_\varepsilon} F \cdot \overrightarrow{n}\, dS$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \iiint_{B_\varepsilon} \mathrm{div} F dv$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \mathrm{Vol}(B_\varepsilon)\mathrm{div} F(p_\varepsilon)$$

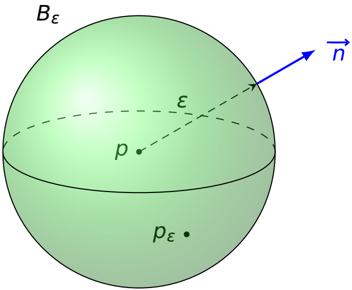
$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathrm{div} F(p_\varepsilon)$$

$$\mathrm{div} F(p)$$



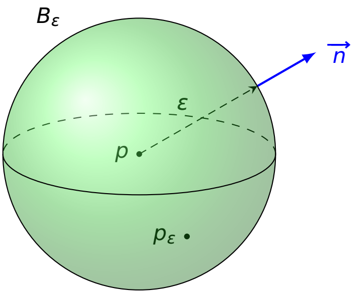
散度 $\mathrm{div}F$ 的物理解释 (2)

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \iint_{\partial B_\varepsilon} F\cdot\vec{n}\,dS$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \iiint_{B_\varepsilon} \mathrm{div}F\,dv$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \mathrm{Vol}(B_\varepsilon)\mathrm{div}F(p_\varepsilon)$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathrm{div}F(p_\varepsilon)$$
$$= \mathrm{div}F(p)$$



散度 div$F$ 的物理解释 (2)

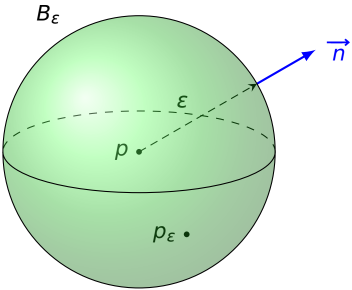
$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)}\cdot\iint_{\partial B_\varepsilon} F\cdot\vec{n}\,dS$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)}\cdot\iiint_{B_\varepsilon}\mathrm{div}F\,dv$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)}\cdot\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)\mathrm{div}F(p_\varepsilon)$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\mathrm{div}F(p_\varepsilon)$$
$$=\mathrm{div}F(p)$$



- div$F(p)>0$ 时,
- div$F(p)<0$ 时,

散度 div$F$ 的物理解释 (2)

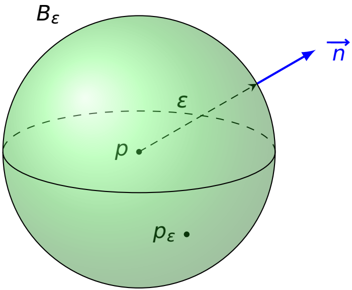
$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)}\cdot\iint_{\partial B_\varepsilon} F\cdot\vec{n}\,dS\\
=&\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)}\cdot\iiint_{B_\varepsilon}\mathrm{div}F\,dv\\
=&\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)}\cdot\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)\mathrm{div}F(p_\varepsilon)\\
=&\lim_{\varepsilon\to 0^+}\mathrm{div}F(p_\varepsilon)\\
=&\,\mathrm{div}F(p)
\end{aligned}$$



- $\mathrm{div}F(p)>0$ 时，$\iint_{\partial B_\varepsilon} F\cdot\vec{n}\,dS>0$（$\varepsilon$ 充分小），
- $\mathrm{div}F(p)<0$ 时，

散度 div$F$ 的物理解释 (2)

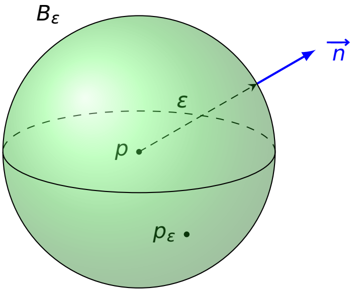
$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)}\cdot\iint_{\partial B_\varepsilon} F\cdot\vec{n}\,dS$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)}\cdot\iiint_{B_\varepsilon}\mathrm{div}F\,dv$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)}\cdot\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)\mathrm{div}F(p_\varepsilon)$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\mathrm{div}F(p_\varepsilon)$$
$$=\mathrm{div}F(p)$$



- $\mathrm{div}F(p)>0$ 时，$\iint_{\partial B_\varepsilon} F\cdot\vec{n}\,dS>0$（$\varepsilon$ 充分小），说明 p 点是 source
- $\mathrm{div}F(p)<0$ 时，

散度 div$F$ 的物理解释 (2)

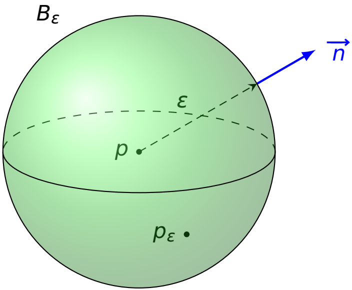
$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)}\cdot\iint_{\partial B_\varepsilon} F\cdot\vec{n}\,dS$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)}\cdot\iiint_{B_\varepsilon}\mathrm{div}F\,dv$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)}\cdot\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)\mathrm{div}F(p_\varepsilon)$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\mathrm{div}F(p_\varepsilon)$$
$$=\mathrm{div}F(p)$$



- div$F(p)>0$ 时，$\iint_{\partial B_\varepsilon} F\cdot\vec{n}\,dS>0$（$\varepsilon$ 充分小），说明 p 点是 source
- div$F(p)<0$ 时，$\iint_{\partial B_\varepsilon} F\cdot\vec{n}\,dS<0$（$\varepsilon$ 充分小），

散度 div$F$ 的物理解释 (2)

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)}\cdot\iint_{\partial B_\varepsilon} F\cdot\vec{n}\,dS\\
=&\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)}\cdot\iiint_{B_\varepsilon}\mathrm{div}F\,dv\\
=&\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)}\cdot\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)\mathrm{div}F(p_\varepsilon)\\
=&\lim_{\varepsilon\to 0^+}\mathrm{div}F(p_\varepsilon)\\
=&\,\mathrm{div}F(p)
\end{aligned}$$



- div$F(p)>0$ 时，$\iint_{\partial B_\varepsilon} F\cdot\vec{n}\,dS>0$（$\varepsilon$ 充分小），说明 p 点是 source
- div$F(p)<0$ 时，$\iint_{\partial B_\varepsilon} F\cdot\vec{n}\,dS<0$（$\varepsilon$ 充分小），说明 p 点是 sink