

第 3 章 α : 微分中值定理

数学系 梁卓滨

2019-2020 学年 I

Outline

费马引理

定义 设 $y = f(x)$ 是定义在开区间 I 上的可导函数, $x_0 \in I$. 如果 $f'(x_0) = 0$, 则称 x_0 是 $y = f(x)$ 的**驻点**.

费马引理

定义 设 $y = f(x)$ 是定义在开区间 I 上的可导函数, $x_0 \in I$. 如果 $f'(x_0) = 0$, 则称 x_0 是 $y = f(x)$ 的 **驻点**.

驻点的几何意义 x_0 是 $y = f(x)$ 的驻点 \Leftrightarrow 曲线 $y = f(x)$ 在 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线是水平.

费马引理

定义 设 $y = f(x)$ 是定义在开区间 I 上的可导函数, $x_0 \in I$. 如果 $f'(x_0) = 0$, 则称 x_0 是 $y = f(x)$ 的 **驻点**.

驻点的几何意义 x_0 是 $y = f(x)$ 的驻点 \Leftrightarrow 曲线 $y = f(x)$ 在 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线是水平.

费马引理 设 $y = f(x)$ 在 x_0 处可导, 并且取到局部最大值
即: 在 x_0 附近成立

$$f(x) \leq f(x_0)$$

那么 x_0 是驻点.

费马引理

定义 设 $y = f(x)$ 是定义在开区间 I 上的可导函数, $x_0 \in I$. 如果 $f'(x_0) = 0$, 则称 x_0 是 $y = f(x)$ 的 **驻点**.

驻点的几何意义 x_0 是 $y = f(x)$ 的驻点 \Leftrightarrow 曲线 $y = f(x)$ 在 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线是水平.

费马引理 设 $y = f(x)$ 在 x_0 处可导, 并且取到局部最大值 (最小值), 即: 在 x_0 附近成立

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0))$$

那么 x_0 是驻点.

费马引理

定义 设 $y = f(x)$ 是定义在开区间 I 上的可导函数, $x_0 \in I$. 如果 $f'(x_0) = 0$, 则称 x_0 是 $y = f(x)$ 的 **驻点**.

驻点的几何意义 x_0 是 $y = f(x)$ 的驻点 \Leftrightarrow 曲线 $y = f(x)$ 在 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线是水平.

费马引理 设 $y = f(x)$ 在 x_0 处可导, 并且取到局部最大值 (最小值), 即: 在 x_0 附近成立

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0))$$

那么 x_0 是驻点.

证明 设 $f(x) \leq f(x_0)$, 则

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

费马引理

定义 设 $y = f(x)$ 是定义在开区间 I 上的可导函数, $x_0 \in I$. 如果 $f'(x_0) = 0$, 则称 x_0 是 $y = f(x)$ 的 **驻点**.

驻点的几何意义 x_0 是 $y = f(x)$ 的驻点 \Leftrightarrow 曲线 $y = f(x)$ 在 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线是水平.

费马引理 设 $y = f(x)$ 在 x_0 处可导, 并且取到局部最大值 (最小值), 即: 在 x_0 附近成立

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0))$$

那么 x_0 是驻点.

证明 设 $f(x) \leq f(x_0)$, 则

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0,$$

费马引理

定义 设 $y = f(x)$ 是定义在开区间 I 上的可导函数, $x_0 \in I$. 如果 $f'(x_0) = 0$, 则称 x_0 是 $y = f(x)$ 的 **驻点**.

驻点的几何意义 x_0 是 $y = f(x)$ 的驻点 \Leftrightarrow 曲线 $y = f(x)$ 在 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线是水平.

费马引理 设 $y = f(x)$ 在 x_0 处可导, 并且取到局部最大值 (最小值), 即: 在 x_0 附近成立

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0))$$

那么 x_0 是驻点.

证明 设 $f(x) \leq f(x_0)$, 则

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0,$$

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

费马引理

定义 设 $y = f(x)$ 是定义在开区间 I 上的可导函数, $x_0 \in I$. 如果 $f'(x_0) = 0$, 则称 x_0 是 $y = f(x)$ 的**驻点**.

驻点的几何意义 x_0 是 $y = f(x)$ 的驻点 \Leftrightarrow 曲线 $y = f(x)$ 在 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线是水平.

费马引理 设 $y = f(x)$ 在 x_0 处可导, 并且取到局部最大值 (最小值), 即: 在 x_0 附近成立

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0))$$

那么 x_0 是驻点.

证明 设 $f(x) \leq f(x_0)$, 则

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0,$$

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$

费马引理

定义 设 $y = f(x)$ 是定义在开区间 I 上的可导函数, $x_0 \in I$. 如果 $f'(x_0) = 0$, 则称 x_0 是 $y = f(x)$ 的 **驻点**.

驻点的几何意义 x_0 是 $y = f(x)$ 的驻点 \Leftrightarrow 曲线 $y = f(x)$ 在 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线是水平.

费马引理 设 $y = f(x)$ 在 x_0 处可导, 并且取到局部最大值 (最小值), 即: 在 x_0 附近成立

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0))$$

那么 x_0 是驻点.

证明 设 $f(x) \leq f(x_0)$, 则

$$\left. \begin{aligned} f'(x_0) = f'_+(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, \\ f'(x_0) = f'_-(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

费马引理

$y = f(x)$ 在 x_0 处取到局部最大（或最小） $\Rightarrow x_0$ 是驻点

费马引理

$y = f(x)$ 在 x_0 处取到局部最大（或最小） $\Rightarrow x_0$ 是驻点

注 费马定理的逆命题不成立.

费马引理

$y = f(x)$ 在 x_0 处取到局部最大（或最小） $\Rightarrow x_0$ 是驻点

注 费马定理的逆命题不成立. 也就是:

x_0 是驻点 $\nRightarrow y = f(x)$ 在 x_0 处取到局部最大（或最小）

费马引理

$y = f(x)$ 在 x_0 处取到局部最大（或最小） $\Rightarrow x_0$ 是驻点

注 费马定理的逆命题不成立. 也就是:

x_0 是驻点 $\nRightarrow y = f(x)$ 在 x_0 处取到局部最大（或最小）

例 $x_0 = 0$ 是 $y = x^3$ 的驻点，但不是局部最大（或最小）值点.

罗尔定理

定理 如果函数 $f(x)$ 满足条件：

- (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，
- (2) 在开区间 (a, b) 上可导，
- (3) 在端点处 $f(a) = f(b)$ ，

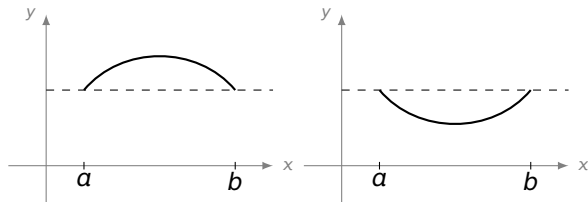
则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ ，使得 $f'(\xi) = 0$.

罗尔定理

定理 如果函数 $f(x)$ 满足条件：

- (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，
- (2) 在开区间 (a, b) 上可导，
- (3) 在端点处 $f(a) = f(b)$ ，

则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ ，使得 $f'(\xi) = 0$ 。

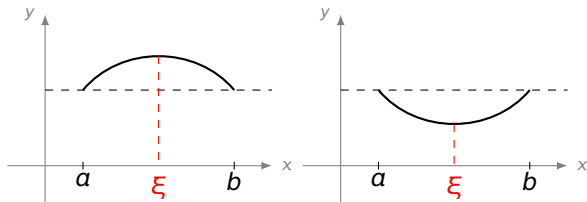


罗尔定理

定理 如果函数 $f(x)$ 满足条件：

- (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，
- (2) 在开区间 (a, b) 上可导，
- (3) 在端点处 $f(a) = f(b)$ ，

则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ ，使得 $f'(\xi) = 0$ 。

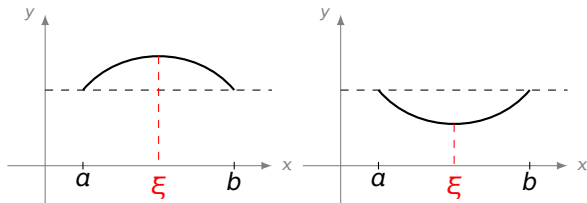


罗尔定理

定理 如果函数 $f(x)$ 满足条件：

- (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，
- (2) 在开区间 (a, b) 上可导，
- (3) 在端点处 $f(a) = f(b)$ ，

则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ ，使得 $f'(\xi) = 0$ 。



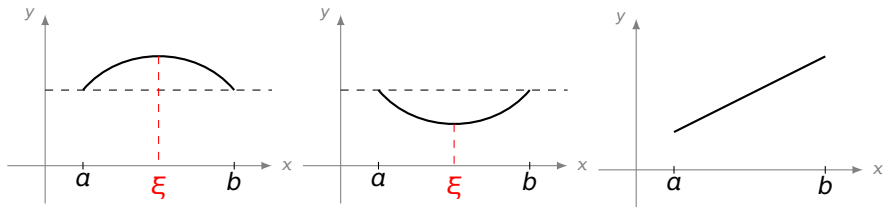
注 罗尔定理的三个条件，缺一不可，否则都有反例。

罗尔定理

定理 如果函数 $f(x)$ 满足条件：

- (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，
- (2) 在开区间 (a, b) 上可导，
- (3) 在端点处 $f(a) = f(b)$ ，

则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ ，使得 $f'(\xi) = 0$ 。



注 罗尔定理的三个条件，缺一不可，否则都有反例。

例 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，在上可导，而且 $f(0) = 0$ ， $f(1) = 1$. 证明：存在 $\xi \in (0, 1)$ ，使得 $f'(\xi) = 2\xi$.

例 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，在上可导，而且 $f(0) = 0$ ， $f(1) = 1$. 证明：存在 $\xi \in (0, 1)$ ，使得 $f'(\xi) = 2\xi$.

证明 令 $g(x) = f(x) - x^2$ ，则 $g(x)$ 满足罗尔定理的三个条件：

例 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，在上可导，而且 $f(0) = 0$ ， $f(1) = 1$. 证明：存在 $\xi \in (0, 1)$ ，使得 $f'(\xi) = 2\xi$.

证明 令 $g(x) = f(x) - x^2$ ，则 $g(x)$ 满足罗尔定理的三个条件：

(1) 在闭区间 $0, 1]$ 上连续，

例 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，在上可导，而且 $f(0) = 0$ ， $f(1) = 1$. 证明：存在 $\xi \in (0, 1)$ ，使得 $f'(\xi) = 2\xi$.

证明 令 $g(x) = f(x) - x^2$ ，则 $g(x)$ 满足罗尔定理的三个条件：

- (1) 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续，
- (2) 在开区间 $(0, 1)$ 上可导，

例 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，在上可导，而且 $f(0) = 0$ ， $f(1) = 1$. 证明：存在 $\xi \in (0, 1)$ ，使得 $f'(\xi) = 2\xi$.

证明 令 $g(x) = f(x) - x^2$ ，则 $g(x)$ 满足罗尔定理的三个条件：

- (1) 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续，
- (2) 在开区间 $(0, 1)$ 上可导，
- (3) 端点处 $g(0) = g(1)$

例 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，在上可导，而且 $f(0) = 0$ ， $f(1) = 1$. 证明：存在 $\xi \in (0, 1)$ ，使得 $f'(\xi) = 2\xi$.

证明 令 $g(x) = f(x) - x^2$ ，则 $g(x)$ 满足罗尔定理的三个条件：

- (1) 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续，
- (2) 在开区间 $(0, 1)$ 上可导，
- (3) 端点处 $g(0) = g(1)$ ($g(0) = f(0) - 0 = 0$ ，

例 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，在上可导，而且 $f(0) = 0$ ， $f(1) = 1$. 证明：存在 $\xi \in (0, 1)$ ，使得 $f'(\xi) = 2\xi$.

证明 令 $g(x) = f(x) - x^2$ ，则 $g(x)$ 满足罗尔定理的三个条件：

- (1) 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续，
- (2) 在开区间 $(0, 1)$ 上可导，
- (3) 端点处 $g(0) = g(1)$ ($g(0) = f(0) - 0 = 0$ ， $g(1) = f(1) - 1 = 0$)

例 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，在上可导，而且 $f(0) = 0$ ， $f(1) = 1$. 证明：存在 $\xi \in (0, 1)$ ，使得 $f'(\xi) = 2\xi$.

证明 令 $g(x) = f(x) - x^2$ ，则 $g(x)$ 满足罗尔定理的三个条件：

- (1) 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续，
- (2) 在开区间 $(0, 1)$ 上可导，
- (3) 端点处 $g(0) = g(1)$ ($g(0) = f(0) - 0 = 0$ ， $g(1) = f(1) - 1 = 0$)

所以由罗尔定理可知：存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得 $g'(\xi) = 0$.

例 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，在上可导，而且 $f(0) = 0$ ， $f(1) = 1$. 证明：存在 $\xi \in (0, 1)$ ，使得 $f'(\xi) = 2\xi$.

证明 令 $g(x) = f(x) - x^2$ ，则 $g(x)$ 满足罗尔定理的三个条件：

- (1) 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续，
- (2) 在开区间 $(0, 1)$ 上可导，
- (3) 端点处 $g(0) = g(1)$ ($g(0) = f(0) - 0 = 0$ ， $g(1) = f(1) - 1 = 0$)

所以由罗尔定理可知：存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得 $g'(\xi) = 0$.

因为 $g'(x) = f'(x) - 2x$ ，所以 $f'(\xi) - 2\xi = 0$.

拉格朗日中值定理

定理 如果函数 $f(x)$ 满足条件:

- (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续,
- (2) 在开区间 (a, b) 上可导,

拉格朗日中值定理

定理 如果函数 $f(x)$ 满足条件:

- (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续,
- (2) 在开区间 (a, b) 上可导,

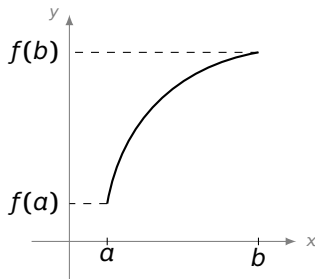
则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

拉格朗日中值定理

定理 如果函数 $f(x)$ 满足条件:

- (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续,
- (2) 在开区间 (a, b) 上可导,

则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

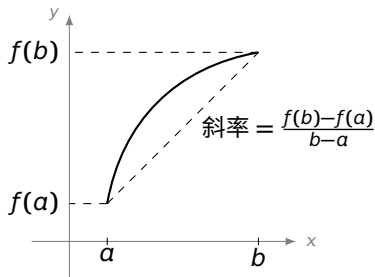


拉格朗日中值定理

定理 如果函数 $f(x)$ 满足条件:

- (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续,
- (2) 在开区间 (a, b) 上可导,

则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

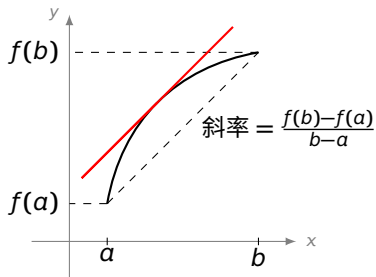


拉格朗日中值定理

定理 如果函数 $f(x)$ 满足条件:

- (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续,
- (2) 在开区间 (a, b) 上可导,

则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

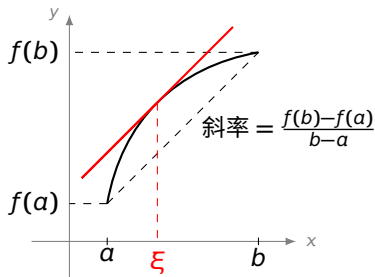


拉格朗日中值定理

定理 如果函数 $f(x)$ 满足条件:

- (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续,
- (2) 在开区间 (a, b) 上可导,

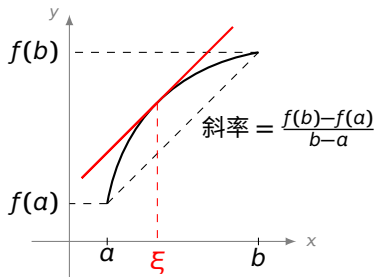
则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.



拉格朗日中值定理

定理 如果函数 $f(x)$ 满足条件:

- (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续,
- (2) 在开区间 (a, b) 上可导,



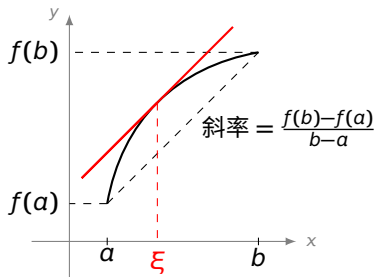
则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

推论 设 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 上可导并且恒成立 $f'(x) = 0$, 则 f 是常数.

拉格朗日中值定理

定理 如果函数 $f(x)$ 满足条件:

- (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续,
- (2) 在开区间 (a, b) 上可导,



则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

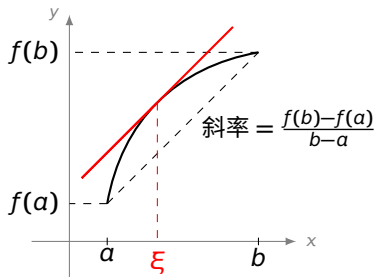
推论 设 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 上可导并且恒成立 $f'(x) = 0$, 则 f 是常数.

证明 任取 $a \leq x_1 < x_2 \leq b$. 在区间 $[x_1, x_2]$ 上运用拉氏中值定理知:

拉格朗日中值定理

定理 如果函数 $f(x)$ 满足条件:

- (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续,
- (2) 在开区间 (a, b) 上可导,



则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

推论 设 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 上可导并且恒成立 $f'(x) = 0$, 则 f 是常数.

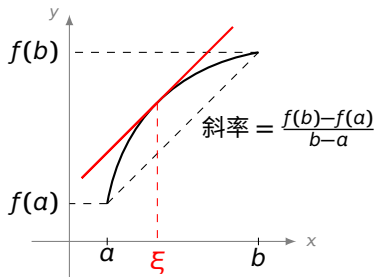
证明 任取 $a \leq x_1 < x_2 \leq b$. 在区间 $[x_1, x_2]$ 上运用拉氏中值定理知:
 $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

拉格朗日中值定理

定理 如果函数 $f(x)$ 满足条件:

- (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续,
- (2) 在开区间 (a, b) 上可导,



则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

推论 设 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 上可导并且恒成立 $f'(x) = 0$, 则 f 是常数.

证明 任取 $a \leq x_1 < x_2 \leq b$. 在区间 $[x_1, x_2]$ 上运用拉氏中值定理知:
 $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

由条件 $f'(\xi) = 0$, 所以 $f(x_2) = f(x_1)$.

例 1 证明当 $x_1 < x_2$ 时, 成立不等式:

$$\arctan x_2 - \arctan x_1 \leq x_2 - x_1.$$

例 1 证明当 $x_1 < x_2$ 时, 成立不等式:

$$\arctan x_2 - \arctan x_1 \leq x_2 - x_1.$$

证明 令 $f(x) = \arctan x$, 则 $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上满足拉氏中值定理的条件,

例 1 证明当 $x_1 < x_2$ 时, 成立不等式:

$$\arctan x_2 - \arctan x_1 \leq x_2 - x_1.$$

证明 令 $f(x) = \arctan x$, 则 $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上满足拉氏中值定理的条件, 故 $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ 使得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi)$$

例 1 证明当 $x_1 < x_2$ 时, 成立不等式:

$$\arctan x_2 - \arctan x_1 \leq x_2 - x_1.$$

证明 令 $f(x) = \arctan x$, 则 $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上满足拉氏中值定理的条件, 故 $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ 使得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) = \frac{1}{1 + \xi^2}$$

例 1 证明当 $x_1 < x_2$ 时, 成立不等式:

$$\arctan x_2 - \arctan x_1 \leq x_2 - x_1.$$

证明 令 $f(x) = \arctan x$, 则 $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上满足拉氏中值定理的条件, 故 $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ 使得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) = \frac{1}{1 + \xi^2} \leq 1$$

例 1 证明当 $x_1 < x_2$ 时, 成立不等式:

$$\arctan x_2 - \arctan x_1 \leq x_2 - x_1.$$

证明 令 $f(x) = \arctan x$, 则 $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上满足拉氏中值定理的条件, 故 $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ 使得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) = \frac{1}{1 + \xi^2} \leq 1$$

所以 $\arctan x_2 - \arctan x_1 = f(x_2) - f(x_1) \leq x_2 - x_1$

例 1 证明当 $x_1 < x_2$ 时, 成立不等式:

$$\arctan x_2 - \arctan x_1 \leq x_2 - x_1.$$

证明 令 $f(x) = \arctan x$, 则 $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上满足拉氏中值定理的条件, 故 $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ 使得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) = \frac{1}{1 + \xi^2} \leq 1$$

所以 $\arctan x_2 - \arctan x_1 = f(x_2) - f(x_1) \leq x_2 - x_1$

例 2 证明当 $x_1 < x_2$ 时, 成立不等式:

$$\sin x_2 - \sin x_1 \leq x_2 - x_1.$$

例 1 证明当 $x_1 < x_2$ 时, 成立不等式:

$$\arctan x_2 - \arctan x_1 \leq x_2 - x_1.$$

证明 令 $f(x) = \arctan x$, 则 $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上满足拉氏中值定理的条件, 故 $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ 使得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) = \frac{1}{1 + \xi^2} \leq 1$$

所以 $\arctan x_2 - \arctan x_1 = f(x_2) - f(x_1) \leq x_2 - x_1$

例 2 证明当 $x_1 < x_2$ 时, 成立不等式:

$$\sin x_2 - \sin x_1 \leq x_2 - x_1.$$

证明 令 $f(x) = \sin x$, 则 $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上满足拉氏中值定理的条件,

例 1 证明当 $x_1 < x_2$ 时, 成立不等式:

$$\arctan x_2 - \arctan x_1 \leq x_2 - x_1.$$

证明 令 $f(x) = \arctan x$, 则 $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上满足拉氏中值定理的条件, 故 $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ 使得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) = \frac{1}{1 + \xi^2} \leq 1$$

所以 $\arctan x_2 - \arctan x_1 = f(x_2) - f(x_1) \leq x_2 - x_1$

例 2 证明当 $x_1 < x_2$ 时, 成立不等式:

$$\sin x_2 - \sin x_1 \leq x_2 - x_1.$$

证明 令 $f(x) = \sin x$, 则 $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上满足拉氏中值定理的条件, 故 $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ 使得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi)$$

例 1 证明当 $x_1 < x_2$ 时, 成立不等式:

$$\arctan x_2 - \arctan x_1 \leq x_2 - x_1.$$

证明 令 $f(x) = \arctan x$, 则 $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上满足拉氏中值定理的条件, 故 $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ 使得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) = \frac{1}{1 + \xi^2} \leq 1$$

所以 $\arctan x_2 - \arctan x_1 = f(x_2) - f(x_1) \leq x_2 - x_1$

例 2 证明当 $x_1 < x_2$ 时, 成立不等式:

$$\sin x_2 - \sin x_1 \leq x_2 - x_1.$$

证明 令 $f(x) = \sin x$, 则 $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上满足拉氏中值定理的条件, 故 $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ 使得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) = \cos \xi \leq 1$$

例 1 证明当 $x_1 < x_2$ 时, 成立不等式:

$$\arctan x_2 - \arctan x_1 \leq x_2 - x_1.$$

证明 令 $f(x) = \arctan x$, 则 $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上满足拉氏中值定理的条件, 故 $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ 使得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) = \frac{1}{1 + \xi^2} \leq 1$$

所以 $\arctan x_2 - \arctan x_1 = f(x_2) - f(x_1) \leq x_2 - x_1$

例 2 证明当 $x_1 < x_2$ 时, 成立不等式:

$$\sin x_2 - \sin x_1 \leq x_2 - x_1.$$

证明 令 $f(x) = \sin x$, 则 $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上满足拉氏中值定理的条件, 故 $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ 使得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) = \cos \xi \leq 1$$

所以 $\sin x_2 - \sin x_1 = f(x_2) - f(x_1) \leq x_2 - x_1$

例 3 证明当 $x > 0$ 时, 成立不等式:

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

证明

例 3 证明当 $x > 0$ 时, 成立不等式:

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

证明 (1) 令

$$f(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x).$$

在 $[0, x]$ 上, f 满足拉氏中值定理的条件,

例 3 证明当 $x > 0$ 时, 成立不等式:

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

证明 (1) 令

$$f(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x).$$

在 $[0, x]$ 上, f 满足拉氏中值定理的条件, 故 $\exists \xi \in (0, x)$ 使得

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi)$$

例 3 证明当 $x > 0$ 时, 成立不等式:

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

证明 (1) 令

$$f(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x).$$

在 $[0, x]$ 上, f 满足拉氏中值定理的条件, 故 $\exists \xi \in (0, x)$ 使得

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi) = \frac{-\xi}{(\xi + 1)^2}$$

例 3 证明当 $x > 0$ 时, 成立不等式:

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

证明 (1) 令

$$f(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x).$$

在 $[0, x]$ 上, f 满足拉氏中值定理的条件, 故 $\exists \xi \in (0, x)$ 使得

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi) = \frac{-\xi}{(\xi + 1)^2} < 0.$$

例 3 证明当 $x > 0$ 时, 成立不等式:

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

证明 (1) 令

$$f(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x).$$

在 $[0, x]$ 上, f 满足拉氏中值定理的条件, 故 $\exists \xi \in (0, x)$ 使得

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi) = \frac{-\xi}{(\xi + 1)^2} < 0.$$

所以 $f(x) < f(0)$

例 3 证明当 $x > 0$ 时, 成立不等式:

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

证明 (1) 令

$$f(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x).$$

在 $[0, x]$ 上, f 满足拉氏中值定理的条件, 故 $\exists \xi \in (0, x)$ 使得

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi) = \frac{-\xi}{(\xi + 1)^2} < 0.$$

所以 $f(x) < f(0) = 0$

例 3 证明当 $x > 0$ 时, 成立不等式:

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

证明 (1) 令

$$f(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x).$$

在 $[0, x]$ 上, f 满足拉氏中值定理的条件, 故 $\exists \xi \in (0, x)$ 使得

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi) = \frac{-\xi}{(\xi + 1)^2} < 0.$$

所以 $f(x) < f(0) = 0$, 即 $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x)$.

例 3 证明当 $x > 0$ 时, 成立不等式:

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

证明 (1) 令

$$f(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x).$$

在 $[0, x]$ 上, f 满足拉氏中值定理的条件, 故 $\exists \xi \in (0, x)$ 使得

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi) = \frac{-\xi}{(\xi + 1)^2} < 0.$$

所以 $f(x) < f(0) = 0$, 即 $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x)$.

(2) 令

$$g(x) = \ln(1+x) - x.$$

在 $[0, x]$ 上, g 满足拉氏中值定理的条件,

例 3 证明当 $x > 0$ 时, 成立不等式:

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

证明 (1) 令

$$f(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x).$$

在 $[0, x]$ 上, f 满足拉氏中值定理的条件, 故 $\exists \xi \in (0, x)$ 使得

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi) = \frac{-\xi}{(\xi + 1)^2} < 0.$$

所以 $f(x) < f(0) = 0$, 即 $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x)$.

(2) 令

$$g(x) = \ln(1+x) - x.$$

在 $[0, x]$ 上, g 满足拉氏中值定理的条件, 故 $\exists \xi \in (0, x)$ 使得

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(\xi)$$

例 3 证明当 $x > 0$ 时, 成立不等式:

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

证明 (1) 令

$$f(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x).$$

在 $[0, x]$ 上, f 满足拉氏中值定理的条件, 故 $\exists \xi \in (0, x)$ 使得

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi) = \frac{-\xi}{(\xi + 1)^2} < 0.$$

所以 $f(x) < f(0) = 0$, 即 $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x)$.

(2) 令

$$g(x) = \ln(1+x) - x.$$

在 $[0, x]$ 上, g 满足拉氏中值定理的条件, 故 $\exists \xi \in (0, x)$ 使得

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(\xi) = \frac{-\xi}{1 + \xi}$$

例 3 证明当 $x > 0$ 时, 成立不等式:

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

证明 (1) 令

$$f(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x).$$

在 $[0, x]$ 上, f 满足拉氏中值定理的条件, 故 $\exists \xi \in (0, x)$ 使得

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi) = \frac{-\xi}{(\xi + 1)^2} < 0.$$

所以 $f(x) < f(0) = 0$, 即 $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x)$.

(2) 令

$$g(x) = \ln(1+x) - x.$$

在 $[0, x]$ 上, g 满足拉氏中值定理的条件, 故 $\exists \xi \in (0, x)$ 使得

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(\xi) = \frac{-\xi}{1 + \xi} < 0.$$

例 3 证明当 $x > 0$ 时, 成立不等式:

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

证明 (1) 令

$$f(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x).$$

在 $[0, x]$ 上, f 满足拉氏中值定理的条件, 故 $\exists \xi \in (0, x)$ 使得

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi) = \frac{-\xi}{(\xi + 1)^2} < 0.$$

所以 $f(x) < f(0) = 0$, 即 $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x)$.

(2) 令

$$g(x) = \ln(1+x) - x.$$

在 $[0, x]$ 上, g 满足拉氏中值定理的条件, 故 $\exists \xi \in (0, x)$ 使得

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(\xi) = \frac{-\xi}{1 + \xi} < 0.$$

所以 $g(x) < g(0)$

例 3 证明当 $x > 0$ 时, 成立不等式:

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

证明 (1) 令

$$f(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x).$$

在 $[0, x]$ 上, f 满足拉氏中值定理的条件, 故 $\exists \xi \in (0, x)$ 使得

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi) = \frac{-\xi}{(\xi + 1)^2} < 0.$$

所以 $f(x) < f(0) = 0$, 即 $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x)$.

(2) 令

$$g(x) = \ln(1+x) - x.$$

在 $[0, x]$ 上, g 满足拉氏中值定理的条件, 故 $\exists \xi \in (0, x)$ 使得

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(\xi) = \frac{-\xi}{1 + \xi} < 0.$$

所以 $g(x) < g(0) = 0$

例 3 证明当 $x > 0$ 时, 成立不等式:

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

证明 (1) 令

$$f(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x).$$

在 $[0, x]$ 上, f 满足拉氏中值定理的条件, 故 $\exists \xi \in (0, x)$ 使得

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi) = \frac{-\xi}{(\xi + 1)^2} < 0.$$

所以 $f(x) < f(0) = 0$, 即 $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x)$.

(2) 令

$$g(x) = \ln(1+x) - x.$$

在 $[0, x]$ 上, g 满足拉氏中值定理的条件, 故 $\exists \xi \in (0, x)$ 使得

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(\xi) = \frac{-\xi}{1 + \xi} < 0.$$

所以 $g(x) < g(0) = 0$, 即 $\ln(1+x) < x$.

柯西中值定理

定理 如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足条件：

- (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，
- (2) 在开区间 (a, b) 上可导，
- (3) 在开区间 (a, b) 内 $g'(x) \neq 0$ ，

则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ ，使得 $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ 。

