§1.3 行列式的展开

数学系　梁卓滨

2017 - 2018 学年 I

Outline of §1.3

1. 余子式、代数余子式

2. 行列式的展开

3. 行列式的展开 II

We are here now...

1. 余子式、代数余子式

2. 行列式的展开

3. 行列式的展开 II

暨南大学
JINAN UNIVERSITY

余子式，代数余子式

在 n 阶行列式 D 中，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j} & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i1} & \dots & a_{ij-1} & a_{ij} & a_{ij+1} & \dots & a_{in} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

余子式，代数余子式

在 n 阶行列式 D 中，将元素 a_{ij} 所在的行和列划掉：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \ldots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j} & a_{i-1j+1} & \ldots & a_{i-1n} \\ a_{i1} & \ldots & a_{ij-1} & a_{ij} & a_{ij+1} & \ldots & a_{in} \\ a_{i+11} & \ldots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j} & a_{i+1j+1} & \ldots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj-1} & a_{nj} & a_{nj+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

余子式，代数余子式

在 n 阶行列式 D 中，将元素 a_{ij} 所在的行和列划掉：

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij-1} & a_{ij} & a_{ij+1} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

余子式，代数余子式

在 n 阶行列式 D 中，将元素 a_{ij} 所在的行和列划掉：

$$
M_{ij} = \begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\
a_{i1} & \cdots & a_{ij-1} & a_{ij} & a_{ij+1} & \cdots & a_{in} \\
a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

所得的 $n-1$ 阶行列式称为 a_{ij} 的余子式。

余子式，代数余子式

在 n 阶行列式 D 中，将元素 a_{ij} 所在的行和列划掉：

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \ldots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \ldots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \ldots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \ldots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

所得的 $n-1$ 阶行列式称为 a_{ij} 的余子式。

余子式，代数余子式

在 n 阶行列式 D 中，将元素 a_{ij} 所在的行和列划掉：

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij-1} & a_{ij} & a_{ij+1} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

所得的 $n-1$ 阶行列式称为 a_{ij} 的余子式。

余子式，代数余子式

在 n 阶行列式 D 中，将元素 a_{ij} 所在的行和列划掉：

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij-1} & a_{ij} & a_{ij+1} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

所得的 $n-1$ 阶行列式称为 a_{ij} 的余子式。而将

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

定义为元素 a_{ij} 的代数余子式。

余子式，代数余子式

在 n 阶行列式 D 中，将元素 a_{ij} 所在的行和列划掉：

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \ldots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j} & a_{i-1j+1} & \ldots & a_{i-1n} \\ a_{i1} & \ldots & a_{ij-1} & a_{ij} & a_{ij+1} & \ldots & a_{in} \\ a_{i+11} & \ldots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j} & a_{i+1j+1} & \ldots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj-1} & a_{nj} & a_{nj+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

所得的 $n-1$ 阶行列式称为 a_{ij} 的余子式。而将

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

定义为元素 a_{ij} 的代数余子式。

注 余子式、代数余子式何时相等？

例子

例 行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 中

- 元素 $a_{32} = -2$ 的余子式是

  $M_{32} =$

  代数余子式是 $A_{32} =$

例子

例 行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 中

- 元素 $a_{32} = -2$ 的余子式是

$$M_{32} = \begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

代数余子式是 $A_{32} =$

例子

例 行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 中

- 元素 $a_{32} = -2$ 的余子式是

$$M_{32} = \begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} =$$

代数余子式是 $A_{32} =$

例子

例 行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 中

- 元素 $a_{32} = -2$ 的余子式是

$$M_{32} = \begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -29$$

代数余子式是 $A_{32} =$

例子

例 行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 中

- 元素 $a_{32} = -2$ 的余子式是

$$M_{32} = \begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -29$$

代数余子式是 $A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} =$

例子

例 行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 中

- 元素 $a_{32} = -2$ 的余子式是

$$M_{32} = \begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -29$$

代数余子式是 $A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = 29$

例子

例 行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 中

- 元素 $a_{32} = -2$ 的余子式是

$$M_{32} = \begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -29$$

代数余子式是 $A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = 29$

- 元素 $a_{13} = 4$ 的余子式是 $M_{13} =$

代数余子式是 $A_{13} =$

例子

例 行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 中

- 元素 $a_{32} = -2$ 的余子式是

$$M_{32} = \begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -29$$

代数余子式是 $A_{32} = (-1)^{3+2}M_{32} = 29$

- 元素 $a_{13} = 4$ 的余子式是 $M_{13} = \begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$

代数余子式是 $A_{13} =$

例子

例 行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 中

- 元素 $a_{32} = -2$ 的余子式是

$$M_{32} = \begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -29$$

代数余子式是 $A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = 29$

- 元素 $a_{13} = 4$ 的余子式是 $M_{13} = \begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} =$

代数余子式是 $A_{13} =$

例子

例 行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 中

- 元素 $a_{32} = -2$ 的余子式是

$$M_{32} = \begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -29$$

代数余子式是 $A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = 29$

- 元素 $a_{13} = 4$ 的余子式是 $M_{13} = \begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -8$

代数余子式是 $A_{13} =$

例子

例 行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 中

- 元素 $a_{32} = -2$ 的余子式是

$$M_{32} = \begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -29$$

代数余子式是 $A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = 29$

- 元素 $a_{13} = 4$ 的余子式是 $M_{13} = \begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -8$

代数余子式是 $A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} =$

例子

例 行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 中

- 元素 $a_{32} = -2$ 的余子式是

$$M_{32} = \begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -29$$

代数余子式是 $A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = 29$

- 元素 $a_{13} = 4$ 的余子式是 $M_{13} = \begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -8$

代数余子式是 $A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = -8$

We are here now...

1. 余子式、代数余子式

2. 行列式的展开

3. 行列式的展开 II

行列式展开——以 3 阶为例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

行列式展开——以 3 阶为例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

行列式展开——以 3 阶为例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})$$

行列式展开——以 3 阶为例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})$$

行列式展开——以 3 阶为例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

暨南大学
JINAN UNIVERSITY

行列式展开——以 3 阶为例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11} \qquad\qquad - a_{12} \qquad\qquad + a_{13}$$

暨南大学
JINAN UNIVERSITY

行列式展开——以 3 阶为例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \qquad\qquad + a_{13}$$

行列式展开——以 3 阶为例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \qquad\qquad + a_{13}$$

行列式展开——以 3 阶为例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \qquad\qquad + a_{13}$$

$$= a_{11}M_{11}$$

行列式展开——以 3 阶为例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}$$

$$= a_{11}M_{11}$$

行列式展开——以 3 阶为例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}$$

$$= a_{11}M_{11}$$

行列式展开——以 3 阶为例

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
$$

$$
= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}
$$

$$
- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}
$$

$$
= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})
$$

$$
= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}
$$

$$
= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12}
$$

行列式展开——以 3 阶为例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12}$$

行列式展开——以 3 阶为例

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33}
\end{vmatrix}
$$

$$
= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}
$$

$$
\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}
$$

$$
= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})
$$

$$
= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}
$$

$$
= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12}
$$

行列式展开——以 3 阶为例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$

$\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$

$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$

$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

$= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$

行列式展开——以 3 阶为例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}M_{11}$$

行列式展开——以 3 阶为例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12}$$

行列式展开——以 3 阶为例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}M_{13}$$

行列式展开——以 3 阶为例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}M_{13}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

行列式展开——以 3 阶为例

$$\begin{vmatrix} a_{13} & a_{13} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}M_{13}$$
$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

行列式展开——以 3 阶为例

3 阶行列式按第 1 行展开：

$$\begin{vmatrix} a_{13} & a_{13} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}M_{13}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

行列式展开——以 3 阶为例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{12} & a_{23} \\ a_{31} & a_{12} & a_{33} \end{vmatrix}$$

行列式展开——以 3 阶为例

3 阶行列式按第 2 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

行列式展开——以 3 阶为例

3 阶行列式按第 2 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12} \qquad a_{22} \qquad a_{23}$$

行列式展开——以 3 阶为例

3 阶行列式按第 2 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} \quad a_{22}A_{22} \quad a_{23}A_{23}$$

行列式展开——以 3 阶为例

3 阶行列式按第 2 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \textcolor{red}{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & \textcolor{red}{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & \textcolor{red}{a_{32}} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$

行列式展开——以 3 阶为例

3 阶行列式按第 2 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$

$$= a_{12} \qquad\qquad + a_{22}$$

$$+ a_{32}$$

行列式展开——以 3 阶为例

3 阶行列式按第 2 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$

$$= a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} & & \\ & & \end{vmatrix} + a_{22}$$

$$+ a_{32}$$

行列式展开——以 3 阶为例

3 阶行列式按第 2 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cancel{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$

$$= a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} + a_{22}$$

$$+ a_{32}$$

行列式展开——以 3 阶为例

3 阶行列式按第 2 列展开:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$

$$= a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}$$
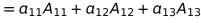
$$+ a_{32}$$

行列式展开——以 3 阶为例

3 阶行列式按第 2 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$

$$= a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}$$

$$+ a_{32}$$

行列式展开——以 3 阶为例

3 阶行列式按第 2 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$

$$= a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}$$

$$+ a_{32}$$

行列式展开——以 3 阶为例

3 阶行列式按第 2 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$

$$= a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{32}$$

行列式展开——以 3 阶为例

3 阶行列式按第 2 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$

$$= a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{32}(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}$$

行列式展开——以 3 阶为例

3 阶行列式按第 2 列展开：

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}
$$

$$
= a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}
$$

$$
+ a_{32}(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}
$$

行列式展开——以 3 阶为例

3 阶行列式按第 2 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$

$$= a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{32}(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

4 阶行列式按第 1 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

4 阶行列式按第 1 列展开：

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{vmatrix}
$$

$= a_{11} \qquad + a_{21} \qquad + a_{31} \qquad + a_{41}$

4 阶行列式按第 1 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{21} \qquad + a_{31} \qquad + a_{41}$$

4 阶行列式按第 1 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31} \qquad + a_{41}$$

4 阶行列式按第 1 列展开:

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{vmatrix}
$$

$$
= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}
$$

4 阶行列式按第 1 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41}$$

4 阶行列式按第 1 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} & & \\ & & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} & & \\ & & \end{vmatrix}$$

4 阶行列式按第 1 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} & & \\ & & \end{vmatrix}$$

4 阶行列式按第 1 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

4 阶行列式按第 1 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{21}(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} & & \end{vmatrix}$$

4 阶行列式按第 1 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{21}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} \end{vmatrix}$$

4 阶行列式按第 1 列展开:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{21}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

4 阶行列式按第 1 列展开:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{21}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{31}(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$$

4 阶行列式按第 1 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{21}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{31}(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix}\quad\begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$$

4 阶行列式按第 1 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{21}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{31}(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

4 阶行列式按第 1 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{21}(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{31}(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{41}(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$$

4 阶行列式按第 1 列展开：

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{vmatrix}
$$

$$
= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41}
$$

$$
= a_{11}(-1)^{1+1}
\begin{vmatrix}
a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{vmatrix}
+ a_{21}(-1)^{2+1}
\begin{vmatrix}
a_{12} & a_{13} & a_{14} \\
a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{vmatrix}
$$

$$
+ a_{31}(-1)^{3+1}
\begin{vmatrix}
a_{12} & a_{13} & a_{14} \\
a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{vmatrix}
+ a_{41}(-1)^{4+1}
\begin{vmatrix}
 & & \\
 & & \\
 & &
\end{vmatrix}
$$

4 阶行列式按第 1 列展开：

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{vmatrix}
$$

$$
= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41}
$$

$$
= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{21}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}
$$

$$
+ a_{31}(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{41}(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}
$$

行列式展开展开定理

定理 对 n 阶行列式 D, 取第 i 行

行列式展开展开定理

定理 对 n 阶行列式 D，取第 i 行

$$a_{i1} \qquad a_{i2} \qquad \cdots \qquad a_{in}$$

行列式展开展开定理

定理 对 n 阶行列式 D，取第 i 行，按该行的展开公式是：

$$a_{i1} \qquad a_{i2} \qquad \cdots \qquad a_{in}$$

行列式展开展开定理

定理 对 n 阶行列式 D，取第 i 行，按该行的展开公式是：

$$a_{i1}A_{i1} \quad a_{i2}A_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}A_{in}$$

行列式展开展开定理

定理 对 n 阶行列式 D，取第 i 行，按该行的展开公式是：

$$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

行列式展开展开定理

定理 对 n 阶行列式 D，取第 i 行，按该行的展开公式是：

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

行列式展开展开定理

定理 对 n 阶行列式 D，取第 i 行，按该行的展开公式是：

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

类似地，取第 j 列

行列式展开展开定理

定理 对 n 阶行列式 D，取第 i 行，按该行的展开公式是：

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

类似地，取第 j 列

$$a_{1j} \qquad a_{2j} \qquad \cdots \qquad a_{nj}$$

行列式展开展开定理

定理 对 n 阶行列式 D，取第 i 行，按该行的展开公式是：

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

类似地，取第 j 列，按该列的展开公式是：

$$a_{1j} \qquad a_{2j} \qquad \cdots \qquad a_{nj}$$

行列式展开展开定理

定理 对 n 阶行列式 D，取第 i 行，按该行的展开公式是：

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

类似地，取第 j 列，按该列的展开公式是：

$$a_{1j}A_{1j} \quad a_{2j}A_{2j} \quad \cdots \quad a_{nj}A_{nj}$$

行列式展开展开定理

定理 对 n 阶行列式 D，取第 i 行，按该行的展开公式是：

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

类似地，取第 j 列，按该列的展开公式是：

$$a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

行列式展开展开定理

定理 对 n 阶行列式 D，取第 i 行，按该行的展开公式是：

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

类似地，取第 j 列，按该列的展开公式是：

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

行列式展开展开定理

定理 对 n 阶行列式 D，取第 i 行，按该行的展开公式是：

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

类似地，取第 j 列，按该列的展开公式是：

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

注 该定理说明：计算 n 阶行列式可转化为计算 $n-1$ 阶行列式！

下面以 4 阶行列式按第一行的展开公式为例证明。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

下面以 4 阶行列式按第一行的展开公式为例证明。

也就是要证明：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

下面以 4 阶行列式按第一行的展开公式为例证明。

也就是要证明：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

引理 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} =$

下面以 4 阶行列式按第一行的展开公式为例证明。

也就是要证明：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

引理 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix}$

引理证明

定义一种运算：

$$\left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{array} \right\| \overset{\Delta}{=\!=}$$

定义一种运算：

$$\left\|\begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{array}\right\| \stackrel{\triangle}{=\!=} \left|\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{array}\right|$$

引理证明 定义一种运算：

$$
\left\|
\begin{matrix}
a & b & c \\
u & v & w \\
x & y & z
\end{matrix}
\right\|
\triangleq
\left|
\begin{matrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & a & b & c \\
0 & u & v & w \\
0 & x & y & z
\end{matrix}
\right|
$$

验证这种运算满足规范性、反称性、数乘性、可加性：

引理证明 定义一种运算:

$$\left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{array} \right\| \triangleq \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{array} \right|$$

验证这种运算满足规范性、反称性、数乘性、可加性:

- 规范性:

引理证明 定义一种运算：

$$\left\|\begin{matrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{matrix}\right\| \overset{\triangle}{=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix}$$

验证这种运算满足规范性、反称性、数乘性、可加性：

- 规范性：$\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\| =$

引理证明 定义一种运算：

$$\left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{array} \right\| \overset{\triangle}{=\!=} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{array} \right|$$

验证这种运算满足规范性、反称性、数乘性、可加性：

- 规范性：
$$\left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right|$$

引理证明 定义一种运算：

$$\left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{array} \right\| \overset{\triangle}{=} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{array} \right|$$

验证这种运算满足规范性、反称性、数乘性、可加性：

- 规范性：
$$\left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| = 1$$

引理证明 定义一种运算:

$$\left\|\begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{array}\right\| \overset{\triangle}{=\!=} \left|\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{array}\right|$$

验证这种运算满足规范性、反称性、数乘性、可加性:

- 规范性:
$$\left\|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right\| = \left|\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right| = 1$$

- 反称性:

引理证明 定义一种运算：

$$\left\| \begin{matrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{matrix} \right\| \overset{\triangle}{=\!=} \left| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{matrix} \right|$$

验证这种运算满足规范性、反称性、数乘性、可加性：

- 规范性：
$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| = \left| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right| = 1$$

- 反称性：比如，

$$\left\| \begin{matrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{matrix} \right\| = \qquad\qquad\qquad -\left\| \begin{matrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{matrix} \right\|$$

引理证明 定义一种运算：

$$\left\|\begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{array}\right\| \overset{\triangle}{=\joinrel=} \left|\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{array}\right|$$

验证这种运算满足规范性、反称性、数乘性、可加性：

- 规范性：

$$\left\|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right\| = \left|\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right| = 1$$

- 反称性：比如，

$$\left\|\begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{array}\right\| = \left|\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{array}\right| \qquad\qquad -\left\|\begin{array}{ccc} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{array}\right\|$$

引理证明 定义一种运算：

$$\left\|\begin{matrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{matrix}\right\| \overset{\triangle}{=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix}$$

验证这种运算满足规范性、反称性、数乘性、可加性：

- 规范性：
$$\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

- 反称性：比如，
$$\left\|\begin{matrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{matrix}\right\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & x & y & z \\ 0 & u & v & w \end{vmatrix} \quad - \left\|\begin{matrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{matrix}\right\|$$

引理证明 定义一种运算：

$$\left\|\begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{array}\right\| \triangleq \left|\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{array}\right|$$

验证这种运算满足规范性、反称性、数乘性、可加性：

- 规范性：
$$\left\|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right\| = \left|\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right| = 1$$

- 反称性：比如，
$$\left\|\begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{array}\right\| = \left|\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{array}\right| = -\left|\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & x & y & z \\ 0 & u & v & w \end{array}\right| = -\left\|\begin{array}{ccc} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{array}\right\|$$

- 数乘性：

- 数乘性：比如，

$$\begin{Vmatrix} a & b & c \\ ku & kv & kw \\ x & y & z \end{Vmatrix} = k \begin{Vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{Vmatrix}$$

- 数乘性：比如，

$$\begin{Vmatrix} a & b & c \\ ku & kv & kw \\ x & y & z \end{Vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & ku & kv & kw \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} \qquad k\begin{Vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{Vmatrix}$$

- 数乘性: 比如,

$$
\left\|
\begin{matrix}
a & b & c \\
ku & kv & kw \\
x & y & z
\end{matrix}
\right\|
=
\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & a & b & c \\
0 & ku & kv & kw \\
0 & x & y & z
\end{vmatrix}
= k
\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & a & b & c \\
0 & u & v & w \\
0 & x & y & z
\end{vmatrix}
\quad
k
\left\|
\begin{matrix}
a & b & c \\
u & v & w \\
x & y & z
\end{matrix}
\right\|
$$

- 数乘性：比如，

$$\left\| \begin{matrix} a & b & c \\ ku & kv & kw \\ x & y & z \end{matrix} \right\| = \left| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & ku & kv & kw \\ 0 & x & y & z \end{matrix} \right| = k \left| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{matrix} \right| = k \left\| \begin{matrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{matrix} \right\|$$

- 数乘性：比如，

$$\begin{Vmatrix} a & b & c \\ ku & kv & kw \\ x & y & z \end{Vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & ku & kv & kw \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} = k\begin{Vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{Vmatrix}$$

- 可加性：

- 数乘性：比如，

$$\begin{Vmatrix} a & b & c \\ ku & kv & kw \\ x & y & z \end{Vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & ku & kv & kw \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} = k\begin{Vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{Vmatrix}$$

- 可加性：比如，

$$\begin{Vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x+p & y+q & z+r \end{Vmatrix} =$$

$$\begin{Vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ p & q & r \end{Vmatrix}$$

- 数乘性：比如，

$$\left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ ku & kv & kw \\ x & y & z \end{array} \right\| = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & ku & kv & kw \\ 0 & x & y & z \end{array} \right| = k \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{array} \right| = k \left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{array} \right\|$$

- 可加性：比如，

$$\left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ x+p & y+q & z+r \end{array} \right\| = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x+p & y+q & z+r \end{array} \right|$$

$$\left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ p & q & r \end{array} \right\|$$

- 数乘性：比如，

$$\begin{Vmatrix} a & b & c \\ ku & kv & kw \\ x & y & z \end{Vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & ku & kv & kw \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} = k \begin{Vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{Vmatrix}$$

- 可加性：比如，

$$\begin{Vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x+p & y+q & z+r \end{Vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x+p & y+q & z+r \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & p & q & r \end{vmatrix} \quad \begin{Vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ p & q & r \end{Vmatrix}$$

- 数乘性：比如，

$$\begin{Vmatrix} a & b & c \\ ku & kv & kw \\ x & y & z \end{Vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & ku & kv & kw \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} = k \begin{Vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{Vmatrix}$$

- 可加性：比如，

$$\begin{Vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x+p & y+q & z+r \end{Vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x+p & y+q & z+r \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & p & q & r \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ p & q & r \end{Vmatrix}$$

- 数乘性：比如，

$$\begin{Vmatrix} a & b & c \\ ku & kv & kw \\ x & y & z \end{Vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & ku & kv & kw \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} = k \begin{Vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{Vmatrix}$$

- 可加性：比如，

$$\begin{Vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x+p & y+q & z+r \end{Vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x+p & y+q & z+r \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & p & q & r \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ p & q & r \end{Vmatrix}$$

所以：
$$\begin{Vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{Vmatrix}$$

- 数乘性：比如，

$$\left\| \begin{matrix} a & b & c \\ ku & kv & kw \\ x & y & z \end{matrix} \right\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & ku & kv & kw \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} = k\left\| \begin{matrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{matrix} \right\|$$

- 可加性：比如，

$$\left\| \begin{matrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x+p & y+q & z+r \end{matrix} \right\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x+p & y+q & z+r \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & p & q & r \end{vmatrix} = \left\| \begin{matrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} a & b & c \\ u & v & w \\ p & q & r \end{matrix} \right\|$$

所以：

$$\left\| \begin{matrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{matrix} \right\| \overset{\text{唯一性}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

- 数乘性：比如，

$$
\left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ ku & kv & kw \\ x & y & z \end{array} \right\| = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & ku & kv & kw \\ 0 & x & y & z \end{array} \right| = k \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{array} \right| = k \left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{array} \right\|
$$

- 可加性：比如，

$$
\left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ x+p & y+q & z+r \end{array} \right\| = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x+p & y+q & z+r \end{array} \right|
$$

$$
= \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & p & q & r \end{array} \right| = \left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ p & q & r \end{array} \right\|
$$

所以：
$$
\left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{array} \right| = \left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{array} \right\| \xlongequal{\text{唯一性}} \left| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{array} \right|
$$

回到 4 阶行列式按第一行的展开公式的证明：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

回到 4 阶行列式按第一行的展开公式的证明：

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
a_{11} & 0 & 0 & 0 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix}
0 & a_{12} & 0 & 0 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{vmatrix}
$$

$$
+
\begin{vmatrix}
0 & 0 & a_{13} & 0 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix}
0 & 0 & 0 & a_{14} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{vmatrix}
$$

回到 4 阶行列式按第一行的展开公式的证明：

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
a_{11} & 0 & 0 & 0 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix}
0 & a_{12} & 0 & 0 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{vmatrix}
$$

$$
+
\begin{vmatrix}
0 & 0 & a_{13} & 0 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix}
0 & 0 & 0 & a_{14} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{vmatrix}
$$

$$
= a_{11}
\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{vmatrix}
$$

回到 4 阶行列式按第一行的展开公式的证明：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

回到 4 阶行列式按第一行的展开公式的证明：

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}
$$

$$
+ \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}
$$

$$
= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}
$$

回到 4 阶行列式按第一行的展开公式的证明：

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
a_{11} & 0 & 0 & 0 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix}
0 & a_{12} & 0 & 0 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{vmatrix}
$$

$$
+
\begin{vmatrix}
0 & 0 & a_{13} & 0 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix}
0 & 0 & 0 & a_{14} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{vmatrix}
$$

$$
= a_{11}
\begin{vmatrix}
a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{vmatrix}
+ a_{12}
\begin{vmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{vmatrix}
$$

回到 4 阶行列式按第一行的展开公式的证明：

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
a_{11} & 0 & 0 & 0 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix}
0 & a_{12} & 0 & 0 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{vmatrix}
$$

$$
+
\begin{vmatrix}
0 & 0 & a_{13} & 0 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix}
0 & 0 & 0 & a_{14} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{vmatrix}
$$

$$
= a_{11}
\begin{vmatrix}
a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{vmatrix}
+ a_{12}
\begin{vmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 \\
a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} \\
a_{31} & 0 & a_{33} & a_{34} \\
a_{41} & 0 & a_{43} & a_{44}
\end{vmatrix}
$$

回到 4 阶行列式按第一行的展开公式的证明：

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
a_{11} & 0 & 0 & 0 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix}
0 & a_{12} & 0 & 0 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{vmatrix}
$$

$$
+
\begin{vmatrix}
0 & 0 & a_{13} & 0 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix}
0 & 0 & 0 & a_{14} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{vmatrix}
$$

$$
= a_{11}
\begin{vmatrix}
a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{vmatrix}
- a_{12}
\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & a_{21} & a_{23} & a_{24} \\
0 & a_{31} & a_{33} & a_{34} \\
0 & a_{41} & a_{43} & a_{44}
\end{vmatrix}
$$

回到 4 阶行列式按第一行的展开公式的证明：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

回到 4 阶行列式按第一行的展开公式的证明：

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
a_{11} & 0 & 0 & 0 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix}
0 & a_{12} & 0 & 0 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{vmatrix}
$$

$$
+
\begin{vmatrix}
0 & 0 & a_{13} & 0 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix}
0 & 0 & 0 & a_{14} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{vmatrix}
$$

$$
= a_{11}
\begin{vmatrix}
a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{vmatrix}
- a_{12}
\begin{vmatrix}
a_{21} & a_{23} & a_{24} \\
a_{31} & a_{33} & a_{34} \\
a_{41} & a_{43} & a_{44}
\end{vmatrix}
$$

$$
+ a_{13}
\begin{vmatrix}
a_{21} & a_{22} & a_{24} \\
a_{31} & a_{32} & a_{34} \\
a_{41} & a_{42} & a_{44}
\end{vmatrix}
$$

回到 4 阶行列式按第一行的展开公式的证明：

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}
$$

$$
+ \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}
$$

$$
= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}
$$

$$
+ a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}
$$

行列式展开例子

例 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开，算出行列式

行列式展开例子

例 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开，算出行列式

解　$D = 1 \qquad\quad 0 \qquad\qquad 1$

行列式展开例子

例 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开，算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{21}$ 0   1

行列式展开例子

例 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开，算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{21} \quad 0 \cdot A_{22} \quad 1$

行列式展开例子

例 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开，算出行列式

解 $\quad D = 1 \cdot A_{21} \quad 0 \cdot A_{22} \quad 1 \cdot A_{23}$

行列式展开例子

例 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开，算出行列式

解 $\quad D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

例 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开，算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}$$

行列式展开例子

例 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开，算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}$$

行列式展开例子

例 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开，算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}$$

行列式展开例子

例 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开，算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}$$

行列式展开例子

例 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开，算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}$

行列式展开例子

例 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开，算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}$$

行列式展开例子

例 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开，算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

行列式展开例子

例 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开，算出行列式

解 $\quad D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -11 + 0 - 14 = -25$$

行列式展开例子

例 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开，算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -11 + 0 - 14 = -25$$

例 将行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$ 按第 1 行展开，算出行列式

行列式展开例子

例 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开，算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$= -11 + 0 - 14 = -25$

例 将行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$ 按第 1 行展开，算出行列式

解 $D = 1 \qquad\qquad 1 \qquad\qquad 1$

行列式展开例子

例 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开，算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$= -11 + 0 - 14 = -25$

例 将行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$ 按第 1 行展开，算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{11} \quad 1 \qquad 1$

行列式展开例子

例 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开，算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -11 + 0 - 14 = -25$$

例 将行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$ 按第 1 行展开，算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{11} \quad 1 \cdot A_{12} \quad 1$

行列式展开例子

例 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开，算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -11 + 0 - 14 = -25$$

例 将行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$ 按第 1 行展开，算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{11} \quad 1 \cdot A_{12} \quad 1 \cdot A_{13}$

行列式展开例子

例 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开，算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$\qquad = 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$\qquad = -11 + 0 - 14 = -25$

例 将行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$ 按第 1 行展开，算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{12} + 1 \cdot A_{13}$

行列式展开例子

例 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开，算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -11 + 0 - 14 = -25$$

例 将行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$ 按第 1 行展开，算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{12} + 1 \cdot A_{13}$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}$$

行列式展开例子

例 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开，算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$\quad = 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$\quad = -11 + 0 - 14 = -25$

例 将行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$ 按第 1 行展开，算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{12} + 1 \cdot A_{13}$

$\quad = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}$

行列式展开例子

例 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开，算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -11 + 0 - 14 = -25$$

例 将行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$ 按第 1 行展开，算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{12} + 1 \cdot A_{13}$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 16 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}$$

行列式展开例子

例 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开，算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$\quad = 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$\quad = -11 + 0 - 14 = -25$

例 将行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$ 按第 1 行展开，算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{12} + 1 \cdot A_{13}$

$\quad = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 16 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}$

行列式展开例子

例 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开, 算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -11 + 0 - 14 = -25$$

例 将行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$ 按第 1 行展开, 算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{12} + 1 \cdot A_{13}$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 16 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}$$

行列式展开例子

例 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开，算出行列式

解　$D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -11 + 0 - 14 = -25$$

例 将行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$ 按第 1 行展开，算出行列式

解　$D = 1 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{12} + 1 \cdot A_{13}$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 16 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}$$

行列式展开例子

例 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开，算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$\quad = 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$\quad = -11 + 0 - 14 = -25$

例 将行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$ 按第 1 行展开，算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{12} + 1 \cdot A_{13}$

$\quad = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 16 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}$

行列式展开例子

例 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开，算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -11 + 0 - 14 = -25$$

例 将行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$ 按第 1 行展开，算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{12} + 1 \cdot A_{13}$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 16 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= 12 - 16 + 6 = 2$$

暨南大学
JINAN UNIVERSITY

例

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

例 可利用行列式性质，将第 2 行化为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，再展开：

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

例 可利用行列式性质，将第 2 行化为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，再展开：

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3 - c_1}$$

例 可利用行列式性质，将第 2 行化为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，再展开：

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{\;c_3 - c_1\;} \begin{vmatrix} 4 & 3 & \\ 1 & 0 & \\ 2 & 5 & \end{vmatrix} =$$

例 可利用行列式性质，将第 2 行化为 $(1 \quad 0 \quad 0)$，再展开：

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3 - c_1} \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = $$

例 可利用行列式性质，将第 2 行化为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，再展开：

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3-c_1} \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23}$$

例 可利用行列式性质，将第 2 行化为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，再展开：

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3 - c_1} \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} & & \\ & & \end{vmatrix}$$

例 可利用行列式性质，将第 2 行化为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，再展开：

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3 - c_1} \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}$$

例 可利用行列式性质，将第 2 行化为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，再展开：

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3-c_1} \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix}$$

例 可利用行列式性质，将第 2 行化为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，再展开：

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3 - c_1} \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = -25$$

例 可利用行列式性质，将第 2 行化为 $(1 \quad 0 \quad 0)$，再展开：

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3 - c_1} \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = -25$$

练习

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$$

例 可利用行列式性质，将第 2 行化为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，再展开：

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3 - c_1} \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = -25$$

练习 利用行列式的变换，将第 1 行化为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，再按第一行展开：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$$

例 可利用行列式性质，将第 2 行化为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，再展开：

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3 - c_1} \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = -25$$

练习 利用行列式的变换，将第 1 行化为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，再按第一行展开：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} \begin{array}{c} c_2 - c_1 \\ \hline c_3 - c_1 \end{array}$$

例 可利用行列式性质，将第 2 行化为 $(1 \quad 0 \quad 0)$，再展开：

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3 - c_1} \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = -25$$

练习 利用行列式的变换，将第 1 行化为 $(1 \quad 0 \quad 0)$，再按第一行展开：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} \begin{array}{c} c_2 - c_1 \\ \overline{} \\ c_3 - c_1 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \\ 2 & 1 & \\ 4 & 5 & \end{vmatrix}$$

例 可利用行列式性质，将第 2 行化为 $(1 \quad 0 \quad 0)$，再展开：

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3 - c_1} \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = -25$$

练习 利用行列式的变换，将第 1 行化为 $(1 \quad 0 \quad 0)$，再按第一行展开：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \scriptstyle c_2 - c_1 \\ \overline{} \\ \scriptstyle c_3 - c_1 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 12 \end{vmatrix}$$

例 可利用行列式性质，将第 2 行化为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，再展开：

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3 - c_1} \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = -25$$

练习 利用行列式的变换，将第 1 行化为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，再按第一行展开：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} \xrightarrow[c_3 - c_1]{c_2 - c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 12 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{13}$$

例 可利用行列式性质，将第 2 行化为 $(1 \quad 0 \quad 0)$，再展开：

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3 - c_1} \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = -25$$

练习 利用行列式的变换，将第 1 行化为 $(1 \quad 0 \quad 0)$，再按第一行展开：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} \xlongequal[c_3 - c_1]{c_2 - c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 12 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{13}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}$$

例 可利用行列式性质，将第 2 行化为 $(1 \quad 0 \quad 0)$，再展开：

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3 - c_1} \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = -25$$

练习 利用行列式的变换，将第 1 行化为 $(1 \quad 0 \quad 0)$，再按第一行展开：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} \xrightarrow[c_3 - c_1]{c_2 - c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 12 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{13}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}$$

例 可利用行列式性质，将第 2 行化为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，再展开：

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} \x!=!=^{c_3 - c_1} \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = -25$$

练习 利用行列式的变换，将第 1 行化为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，再按第一行展开：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} \xrightarrow[c_3 - c_1]{c_2 - c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 12 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{13}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 12 \end{vmatrix}$$

例 可利用行列式性质，将第 2 行化为 $(1 \quad 0 \quad 0)$，再展开：

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3 - c_1} \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = -25$$

练习 利用行列式的变换，将第 1 行化为 $(1 \quad 0 \quad 0)$，再按第一行展开：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} \xlongequal[c_3 - c_1]{c_2 - c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 12 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{13}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} = 2$$

行列式的计算方法 II：降阶法

1. 利用行列式性质，将某一行（或列）化为至多只有一个非零元素

2. 将行列式按该行（或列）展开，从而化为低阶行列式

行列式的计算方法 II：降阶法

1. 利用行列式性质，将某一行（或列）化为至多只有一个非零元素

2. 将行列式按该行（或列）展开，从而化为低阶行列式

3. 重复以上操作，直至化为 2 阶行列式

行列式的计算方法 II：降阶法

1. 利用行列式性质，将某一行（或列）化为至多只有一个非零元素

2. 将行列式按该行（或列）展开，从而化为低阶行列式

3. 重复以上操作，直至化为 2 阶行列式

图示：
$$
\begin{vmatrix}
* & * & * & * \\
* & * & a & * \\
* & * & * & * \\
* & * & * & *
\end{vmatrix}
$$

行列式的计算方法 II：降阶法

1. 利用行列式性质，将某一行（或列）化为至多只有一个非零元素

2. 将行列式按该行（或列）展开，从而化为低阶行列式

3. 重复以上操作，直至化为 2 阶行列式

图示：
$$
\begin{vmatrix}
* & * & * & * \\
* & * & a & * \\
* & * & * & * \\
* & * & * & *
\end{vmatrix}
\xrightarrow{\text{运算}}
\begin{vmatrix}
* & * & 0 & * \\
* & * & a & * \\
* & * & 0 & * \\
* & * & 0 & *
\end{vmatrix}
$$

行列式的计算方法 II：降阶法

1. 利用行列式性质，将某一行（或列）化为至多只有一个非零元素

2. 将行列式按该行（或列）展开，从而化为低阶行列式

3. 重复以上操作，直至化为 2 阶行列式

图示：
$$
\begin{vmatrix} * & * & * & * \\ * & * & a & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{vmatrix}
\xrightarrow{\text{运算}}
\begin{vmatrix} * & * & 0 & * \\ * & * & a & * \\ * & * & 0 & * \\ * & * & 0 & * \end{vmatrix}
\xrightarrow{\text{展开}}
\begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix}
$$

行列式的计算方法 II：降阶法

1. 利用行列式性质，将某一行（或列）化为至多只有一个非零元素

2. 将行列式按该行（或列）展开，从而化为低阶行列式

3. 重复以上操作，直至化为 2 阶行列式

图示：

$$
\begin{vmatrix} * & * & * & * \\ * & * & a & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{vmatrix}
\xrightarrow{\text{运算}}
\begin{vmatrix} * & * & 0 & * \\ * & * & a & * \\ * & * & 0 & * \\ * & * & 0 & * \end{vmatrix}
\xrightarrow{\text{展开}}
\begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{\text{选择}}
\begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & b \\ * & * & * \end{vmatrix}
$$

行列式的计算方法 II：降阶法

1. 利用行列式性质，将某一行（或列）化为至多只有一个非零元素

2. 将行列式按该行（或列）展开，从而化为低阶行列式

3. 重复以上操作，直至化为 2 阶行列式

图示：

行列式的计算方法 II：降阶法

1. 利用行列式性质，将某一行（或列）化为至多只有一个非零元素

2. 将行列式按该行（或列）展开，从而化为低阶行列式

3. 重复以上操作，直至化为 2 阶行列式

图示：

行列式的计算方法 II：降阶法

1. 利用行列式性质，将某一行（或列）化为至多只有一个非零元素

2. 将行列式按该行（或列）展开，从而化为低阶行列式

3. 重复以上操作，直至化为 2 阶行列式

图示：

注 较之前"化行列式为三角行列式的方法"，更推荐降阶法，因为更灵活！

练习 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

练习 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

提示 先化第二行为 $(1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$，再按第二行展开

练习 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

提示 先化第二行为 $(1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$，再按第二行展开

解

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

练习 计算
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

提示 先化第二行为 $(1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$，再按第二行展开

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3 - c_1}$$

练习 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

提示 先化第二行为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 再按第二行展开

解

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow{\ c_3 - c_1\ } \begin{vmatrix} 1 & 2 & & \\ 1 & 0 & & \\ 3 & -1 & & \\ 1 & 2 & & \end{vmatrix} =$

练习 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

提示 先化第二行为 $(1\ \ 0\ \ 0\ \ 0)$，再按第二行展开

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3-c_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \\ 1 & 0 & 0 & \\ 3 & -1 & -4 & \\ 1 & 2 & -1 & \end{vmatrix} =$$

练习 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

提示 先化第二行为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，再按第二行展开

解

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow[c_4-2c_1]{c_3-c_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \\ 1 & 0 & 0 & \\ 3 & -1 & -4 & \\ 1 & 2 & -1 & \end{vmatrix} =$

练习 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

提示 先化第二行为 $(1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$，再按第二行展开

解

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4-2c_1]{c_3-c_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} =$

练习 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

提示 先化第二行为 $(1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$，再按第二行展开

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{c_4-2c_1}]{\substack{c_3-c_1}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix}$$

练习 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

提示 先化第二行为 $(1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$，再按第二行展开

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4-2c_1]{c_3-c_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix}$$

练习 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

提示 先化第二行为 $(1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$，再按第二行展开

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4-2c_1]{c_3-c_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2-c_1}$$

练习 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

提示 先化第二行为 $(1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$, 再按第二行展开

解

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4-2c_1]{c_3-c_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix}$

$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2-c_1} -2 \begin{vmatrix} 1 & & \\ -1 & & \\ 2 & & \end{vmatrix}$

练习 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

提示 先化第二行为 $(1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$, 再按第二行展开

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4-2c_1]{c_3-c_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2-c_1} -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & \\ -1 & -3 & \\ 2 & -3 & \end{vmatrix}$$

练习 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

提示 先化第二行为 $(1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$，再按第二行展开

解

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4-2c_1]{c_3-c_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix}$

$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} \xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1} -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & \\ -1 & -3 & \\ 2 & -3 & \end{vmatrix}$

练习 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

提示 先化第二行为 $(1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$，再按第二行展开

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \xfrac{c_3-c_1}{c_4-2c_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} \xfrac{c_2-c_1}{c_3-c_1} -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -5 \\ 2 & -3 & -9 \end{vmatrix}$$

练习 计算
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

提示 先化第二行为 $(1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$，再按第二行展开

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow[c_4-2c_1]{c_3-c_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} \xrightarrow[c_3-c_1]{c_2-c_1} -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -5 \\ 2 & -3 & -9 \end{vmatrix} = -2 \cdot$$

练习 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

提示 先化第二行为 $(1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$，再按第二行展开

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4-2c_1]{c_3-c_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} \xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1} -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -5 \\ 2 & -3 & -9 \end{vmatrix} = -2 \cdot 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ -3 & -9 \end{vmatrix}$$

练习 计算
$$
\begin{vmatrix}
1 & 2 & 3 & 4 \\
1 & 0 & 1 & 2 \\
3 & -1 & -1 & 0 \\
1 & 2 & 0 & -5
\end{vmatrix}
$$

提示 先化第二行为 $(1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$，再按第二行展开

解
$$
\begin{vmatrix}
1 & 2 & 3 & 4 \\
1 & 0 & 1 & 2 \\
3 & -1 & -1 & 0 \\
1 & 2 & 0 & -5
\end{vmatrix}
\xlongequal[c_4 - 2c_1]{c_3 - c_1}
\begin{vmatrix}
1 & 2 & 2 & 2 \\
1 & 0 & 0 & 0 \\
3 & -1 & -4 & -6 \\
1 & 2 & -1 & -7
\end{vmatrix}
= 1 \cdot (-1)^{2+1}
\begin{vmatrix}
2 & 2 & 2 \\
-1 & -4 & -6 \\
2 & -1 & -7
\end{vmatrix}
$$

$$
= -2
\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 \\
-1 & -4 & -6 \\
2 & -1 & -7
\end{vmatrix}
\xlongequal[c_3 - c_1]{c_2 - c_1}
-2
\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 \\
-1 & -3 & -5 \\
2 & -3 & -9
\end{vmatrix}
= -2 \cdot 1 \cdot (-1)^{1+1}
\begin{vmatrix}
-3 & -5 \\
-3 & -9
\end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal{r_2 - r_1}
$$

练习 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

提示 先化第二行为 $(1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$，再按第二行展开

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4-2c_1]{c_3-c_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} \xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1} -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -5 \\ 2 & -3 & -9 \end{vmatrix} = -2\cdot1\cdot(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ -3 & -9 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2-r_1} -2\cdot1\cdot(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}$$

练习 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

提示 先化第二行为 $(1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$，再按第二行展开

解

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{c_3-c_1 \\ c_4-2c_1}]{} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix}$

$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{c_2-c_1 \\ c_3-c_1}]{} -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -5 \\ 2 & -3 & -9 \end{vmatrix} = -2 \cdot 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ -3 & -9 \end{vmatrix}$

$\xrightarrow[]{r_2-r_1} -2 \cdot 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-3) \cdot (-4) = -24$

练习 计算
$$
\begin{vmatrix}
1 & -3 & 0 & -6 \\
2 & 1 & -5 & 1 \\
0 & 2 & -1 & 2 \\
1 & 4 & -7 & 6
\end{vmatrix}
$$

练习 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$ （提示 先化第一列为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，再展开）

练习 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$ （提示 先化第一列为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，再展开）

解

$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$

练习 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$ （提示 先化第一列为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，再展开）

解

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow{\;r_2-2r_1\;}$$

练习 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$（提示 先化第一列为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，再展开）

解

$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix} =$

练习 计算
$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$
（提示 先化第一列为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，再展开）

解

$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow{\quad r_2-2r_1 \quad} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 7 & -5 & 13 \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix} =$

练习 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$ （提示 先化第一列为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，再展开）

解

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 - 2r_1} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 7 & -5 & 13 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

练习 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$ （提示 先化第一列为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，再展开）

解

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4-r_1]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 7 & -5 & 13 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ \end{vmatrix} =$$

练习 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$ （提示 先化第一列为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，再展开）

解

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_1]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 7 & -5 & 13 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} =$$

练习 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$ （提示 先化第一列为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，再展开）

解

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_1]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 7 & -5 & 13 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$$

练习 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$ （提示 先化第一列为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，再展开）

解

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_1]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 7 & -5 & 13 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1+2c_2}$$

练习 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$ （提示 先化第一列为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，再展开）

解

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_1]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 7 & -5 & 13 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1+2c_2} \begin{vmatrix} & -5 & \\ & -1 & \\ & -7 & \end{vmatrix}$$

练习 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$ （提示 先化第一列为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，再展开）

解

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_1]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 7 & -5 & 13 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1+2c_2} \begin{vmatrix} -3 & -5 & \\ 0 & -1 & \\ -7 & -7 & \end{vmatrix}$$

练习 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$ （提示 先化第一列为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 再展开）

解

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_1]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 7 & -5 & 13 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3+2c_2]{c_1+2c_2} \begin{vmatrix} -3 & -5 & \\ 0 & -1 & \\ -7 & -7 & \end{vmatrix}$$

练习 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$ （提示 先化第一列为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，再展开）

解

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_1]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 7 & -5 & 13 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3+2c_2]{c_1+2c_2} \begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -7 & -7 & -2 \end{vmatrix}$$

练习 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$ (提示 先化第一列为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，再展开)

解

$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_1]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 7 & -5 & 13 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$

$\xlongequal[c_3+2c_2]{c_1+2c_2} \begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -7 & -7 & -2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot$

练习 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$ （提示 先化第一列为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，再展开）

解

$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_1]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 7 & -5 & 13 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$

$\xlongequal[c_3+2c_2]{c_1+2c_2} \begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -7 & -7 & -2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -7 & -2 \end{vmatrix}$

练习 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$ （**提示** 先化第一列为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，再展开）

解

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow[\overline{r_4-r_1}]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 7 & -5 & 13 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\overline{c_3+2c_2}]{c_1+2c_2} \begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -7 & -7 & -2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -7 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \cdot (6 + 21)$$

练习 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$ （提示 先化第一列为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，再展开）

解

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_1]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 7 & -5 & 13 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3+2c_2]{c_1+2c_2} \begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -7 & -7 & -2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -7 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \cdot (6 + 21) = -27$$

练习 计算行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

练习 计算行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

解

$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

练习 计算行列式
$$
\begin{vmatrix}
-3 & 1 & 4 & -2 \\
1 & 0 & -1 & 1 \\
2 & 1 & 0 & -3 \\
0 & -2 & 1 & 2
\end{vmatrix}
$$

解

$$
\begin{vmatrix}
-3 & 1 & 4 & -2 \\
1 & 0 & -1 & 1 \\
2 & 1 & 0 & -3 \\
0 & -2 & 1 & 2
\end{vmatrix}
\xlongequal[c_4-c_1]{c_3+c_1}
$$

练习 计算行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xeequal[c_4-c_1]{c_3+c_1} \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

练习 计算行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4 - c_1]{c_3 + c_1} \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

按第二行展开

练习 计算行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4 - c_1]{c_3 + c_1} \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第二行展开}} 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

练习 计算行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4-c_1]{c_3+c_1} \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第二行展开}} 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1}$$

练习 计算行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xupparrow[c_4-c_1]{c_3+c_1} \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xupparrow{\text{按第二行展开}} 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xupparrow[c_3-c_1]{c_2-c_1} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -6 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

练习 计算行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4 - c_1]{c_3 + c_1} \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第二行展开}} 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3 - c_1]{c_2 - c_1} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -6 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

练习 计算行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4-c_1]{c_3+c_1} \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第二行展开}} 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -6 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -22$$

练习 计算
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 2 & \lambda & 2014 & -90 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

练习 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 2 & \lambda & 2014 & -90 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$

解

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 2 & \lambda & 2014 & -90 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$

练习 计算
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 2 & \lambda & 2014 & -90 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 2 & \lambda & 2014 & -90 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix} \xlongequal{\ r_2 - 2r_1\ }$$

练习 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 2 & \lambda & 2014 & -90 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 2 & \lambda & 2014 & -90 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 - 2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix}$$

练习 计算
$$
\begin{vmatrix}
1 & 2 & 100 & 3 \\
2 & \lambda & 2014 & -90 \\
0 & 0 & \lambda & 2 \\
0 & 0 & 2 & \lambda
\end{vmatrix}
$$

解

$$
\begin{vmatrix}
1 & 2 & 100 & 3 \\
2 & \lambda & 2014 & -90 \\
0 & 0 & \lambda & 2 \\
0 & 0 & 2 & \lambda
\end{vmatrix}
\xlongequal{r_2-2r_1}
\begin{vmatrix}
1 & 2 & 100 & 3 \\
0 & \lambda-4 & 1814 & -96 \\
 & & & \\
 & & &
\end{vmatrix}
$$

练习 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 2 & \lambda & 2014 & -90 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 2 & \lambda & 2014 & -90 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 0 & \lambda - 4 & 1814 & -96 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

练习 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 2 & \lambda & 2014 & -90 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 2 & \lambda & 2014 & -90 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 - 2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 0 & \lambda - 4 & 1814 & -96 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} \lambda - 4 & 1814 & -96 \\ 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

练习 计算
$$
\begin{vmatrix}
1 & 2 & 100 & 3 \\
2 & \lambda & 2014 & -90 \\
0 & 0 & \lambda & 2 \\
0 & 0 & 2 & \lambda
\end{vmatrix}
$$

解

$$
\begin{vmatrix}
1 & 2 & 100 & 3 \\
2 & \lambda & 2014 & -90 \\
0 & 0 & \lambda & 2 \\
0 & 0 & 2 & \lambda
\end{vmatrix}
\xlongequal{r_2 - 2r_1}
\begin{vmatrix}
1 & 2 & 100 & 3 \\
0 & \lambda - 4 & 1814 & -96 \\
0 & 0 & \lambda & 2 \\
0 & 0 & 2 & \lambda
\end{vmatrix}
$$

$$
= 1 \cdot (-1)^{1+1}
\begin{vmatrix}
\lambda - 4 & 1814 & -96 \\
0 & \lambda & 2 \\
0 & 2 & \lambda
\end{vmatrix}
$$

$$
= (\lambda - 4)
\begin{vmatrix}
\lambda & 2 \\
2 & \lambda
\end{vmatrix}
$$

练习 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 2 & \lambda & 2014 & -90 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 2 & \lambda & 2014 & -90 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 - 2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 0 & \lambda - 4 & 1814 & -96 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} \lambda - 4 & 1814 & -96 \\ 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 4) \begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda^2 - 4)$$

练习 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 2 & \lambda & 2014 & -90 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 2 & \lambda & 2014 & -90 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix} \xlongequal{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 0 & \lambda-4 & 1814 & -96 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} \lambda-4 & 1814 & -96 \\ 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-4) \begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-4)(\lambda^2-4) = (\lambda-4)(\lambda-2)(\lambda+2)$$

We are here now...

1. 余子式、代数余子式

2. 行列式的展开

3. **行列式的展开 II**

$$a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

将其中 a_{21}, a_{22}, a_{23} 分别换成任意数 u, v, w 得：

$$a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

将其中 a_{21}, a_{22}, a_{23} 分别换成任意数 u, v, w 得：

$$\Rightarrow \quad uA_{21} + vA_{22} + wA_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ u & v & w \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

将其中 a_{21}, a_{22}, a_{23} 分别换成任意数 u, v, w 得：

$$\Rightarrow \quad uA_{21} + vA_{22} + wA_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ u & v & w \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

例 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$，计算 $M_{13} - 4M_{23} - 5M_{33}$

$$a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

将其中 $a_{21},\ a_{22},\ a_{23}$ 分别换成任意数 $u,\ v,\ w$ 得：

$$\Rightarrow \quad uA_{21} + vA_{22} + wA_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ u & v & w \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

例 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$，计算 $M_{13} - 4M_{23} - 5M_{33}$

解 $M_{13} - 4M_{23} - 5M_{33}$

$$a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

将其中 $a_{21},\ a_{22},\ a_{23}$ 分别换成任意数 $u,\ v,\ w$ 得：

$$\Rightarrow \quad uA_{21} + vA_{22} + wA_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ u & v & w \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

例 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$, 计算 $M_{13} - 4M_{23} - 5M_{33}$

解 $\qquad M_{13} - 4M_{23} - 5M_{33} = 1 \cdot A_{13}$

$$a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

将其中 a_{21}, a_{22}, a_{23} 分别换成任意数 u, v, w 得：

$$\Rightarrow \quad uA_{21} + vA_{22} + wA_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ u & v & w \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

例 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$, 计算 $M_{13} - 4M_{23} - 5M_{33}$

解 $\quad M_{13} - 4M_{23} - 5M_{33} = 1 \cdot A_{13} + 4 \cdot A_{23}$

$$a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

将其中 $a_{21},\ a_{22},\ a_{23}$ 分别换成任意数 $u,\ v,\ w$ 得：

$$\Rightarrow \quad uA_{21} + vA_{22} + wA_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ u & v & w \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

例 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$, 计算 $M_{13} - 4M_{23} - 5M_{33}$

解 $\quad M_{13} - 4M_{23} - 5M_{33} = 1 \cdot A_{13} + 4 \cdot A_{23} + (-5) \cdot A_{33}$

$$a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

将其中 a_{21}, a_{22}, a_{23} 分别换成任意数 u, v, w 得:

$$\Rightarrow \quad uA_{21} + vA_{22} + wA_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ u & v & w \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

例 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$, 计算 $M_{13} - 4M_{23} - 5M_{33}$

解 $\quad M_{13} - 4M_{23} - 5M_{33} = 1 \cdot A_{13} + 4 \cdot A_{23} + (-5) \cdot A_{33}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 8 & -6 & -5 \end{vmatrix}$$

$$a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

将其中 $a_{21},\ a_{22},\ a_{23}$ 分别换成任意数 $u,\ v,\ w$ 得：

$$\Rightarrow \quad uA_{21} + vA_{22} + wA_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ u & v & w \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

例 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$, 计算 $M_{13} - 4M_{23} - 5M_{33}$

解 $\qquad M_{13} - 4M_{23} - 5M_{33} = 1 \cdot A_{13} + 4 \cdot A_{23} + (-5) \cdot A_{33}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 8 & -6 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2 - 2c_1}$$

$$a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

将其中 a_{21}, a_{22}, a_{23} 分别换成任意数 u, v, w 得：

$$\Rightarrow \quad uA_{21} + vA_{22} + wA_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ u & v & w \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

例 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$, 计算 $M_{13} - 4M_{23} - 5M_{33}$

解
$$M_{13} - 4M_{23} - 5M_{33} = 1 \cdot A_{13} + 4 \cdot A_{23} + (-5) \cdot A_{33}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 8 & -6 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2 - 2c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \\ 3 & -2 & \\ 8 & -22 & \end{vmatrix}$$

$$a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

将其中 a_{21}, a_{22}, a_{23} 分别换成任意数 u, v, w 得:

$$\Rightarrow \quad uA_{21} + vA_{22} + wA_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ u & v & w \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

例 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$, 计算 $M_{13} - 4M_{23} - 5M_{33}$

解 $\quad M_{13} - 4M_{23} - 5M_{33} = 1 \cdot A_{13} + 4 \cdot A_{23} + (-5) \cdot A_{33}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 8 & -6 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow[c_3 - c_1]{c_2 - 2c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \\ 3 & -2 & \\ 8 & -22 & \end{vmatrix}$$

$$a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

将其中 a_{21}, a_{22}, a_{23} 分别换成任意数 u, v, w 得：

$$\Rightarrow \quad uA_{21} + vA_{22} + wA_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ u & v & w \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

例 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$，计算 $M_{13} - 4M_{23} - 5M_{33}$

解 $\quad M_{13} - 4M_{23} - 5M_{33} = 1 \cdot A_{13} + 4 \cdot A_{23} + (-5) \cdot A_{33}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 8 & -6 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{c_3 - c_1}]{c_2 - 2c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 8 & -22 & -13 \end{vmatrix}$$

$$a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

将其中 a_{21}, a_{22}, a_{23} 分别换成任意数 u, v, w 得：

$$\Rightarrow \quad uA_{21} + vA_{22} + wA_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ u & v & w \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

例 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$, 计算 $M_{13} - 4M_{23} - 5M_{33}$

解 $\quad M_{13} - 4M_{23} - 5M_{33} = 1 \cdot A_{13} + 4 \cdot A_{23} + (-5) \cdot A_{33}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 8 & -6 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{c_3 - c_1}]{c_2 - 2c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 8 & -22 & -13 \end{vmatrix} = 48$$

例 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$，计算第 2 行的余子式之和

例 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$ ，计算第 2 行的余子式之和

解　　　$M_{21} + M_{22} + M_{23}$

例 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$，计算第 2 行的余子式之和

解　　　$M_{21} + M_{22} + M_{23} = (-1) \cdot A_{21}$

例 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$，计算第 2 行的余子式之和

解 $\qquad M_{21} + M_{22} + M_{23} = (-1) \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{22}$

例 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$，计算第 2 行的余子式之和

解 $M_{21} + M_{22} + M_{23} = (-1) \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{22} + (-1) \cdot A_{23}$

例 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$，计算第 2 行的余子式之和

解
$$M_{21} + M_{22} + M_{23} = (-1) \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{22} + (-1) \cdot A_{23}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$$

例 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$，计算第 2 行的余子式之和

解 $\qquad M_{21} + M_{22} + M_{23} = (-1) \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{22} + (-1) \cdot A_{23}$

$\qquad = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 + c_2}$

例 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$，计算第 2 行的余子式之和

解

$$M_{21} + M_{22} + M_{23} = (-1) \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{22} + (-1) \cdot A_{23}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 + c_2} \begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$$

例 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$，计算第 2 行的余子式之和

解　$M_{21} + M_{22} + M_{23} = (-1) \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{22} + (-1) \cdot A_{23}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 + c_2} \begin{vmatrix} 3 & & \\ 0 & & \\ 2 & & \end{vmatrix}$$

例 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$，计算第 2 行的余子式之和

解
$$M_{21} + M_{22} + M_{23} = (-1) \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{22} + (-1) \cdot A_{23}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 + c_2} \begin{vmatrix} 3 & 2 & \\ 0 & 1 & \\ 2 & -6 & \end{vmatrix}$$

例 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$，计算第 2 行的余子式之和

解
$$M_{21} + M_{22} + M_{23} = (-1) \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{22} + (-1) \cdot A_{23}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix} \xlongequal[c_3+c_2]{c_1+c_2} \begin{vmatrix} 3 & 2 & \\ 0 & 1 & \\ 2 & -6 & \end{vmatrix}$$

例 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$，计算第 2 行的余子式之和

解
$$M_{21} + M_{22} + M_{23} = (-1) \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{22} + (-1) \cdot A_{23}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow[c_3 + c_2]{c_1 + c_2} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & -1 \end{vmatrix}$$

例 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$，计算第 2 行的余子式之和

解
$$M_{21} + M_{22} + M_{23} = (-1) \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{22} + (-1) \cdot A_{23}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow[c_3+c_2]{c_1+c_2} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

例 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$, 计算第 2 行的余子式之和

解

$$M_{21} + M_{22} + M_{23} = (-1) \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{22} + (-1) \cdot A_{23}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow[c_3 + c_2]{c_1 + c_2} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

例 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$，计算第 2 行的余子式之和

解 $M_{21} + M_{22} + M_{23} = (-1) \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{22} + (-1) \cdot A_{23}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow[c_3 + c_2]{c_1 + c_2} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

练习 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$，计算 $3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

练习 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$，计算 $3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

练习 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, 计算 $3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

解

$3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

练习 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, 计算 $3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

解

$3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

$= (-3) \cdot A_{41}$

练习 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, 计算 $3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

解

$3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

$= (-3) \cdot A_{41} + 4 \cdot A_{42}$

练习 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, 计算 $3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

解

$3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

$= (-3) \cdot A_{41} + 4 \cdot A_{42} + 5 \cdot A_{43}$

练习 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, 计算 $3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

解

$3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

$= (-3) \cdot A_{41} + 4 \cdot A_{42} + 5 \cdot A_{43} + (-2) \cdot A_{44}$

练习 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, 计算 $3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

解

$3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

$= (-3) \cdot A_{41} + 4 \cdot A_{42} + 5 \cdot A_{43} + (-2) \cdot A_{44}$

$= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -3 & 4 & 5 & -2 \end{vmatrix}$

练习 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, 计算 $3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

解

$3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

$= (-3) \cdot A_{41} + 4 \cdot A_{42} + 5 \cdot A_{43} + (-2) \cdot A_{44}$

$= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -3 & 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3 - 3c_2}$

练习 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, 计算 $3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

解

$3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

$= (-3) \cdot A_{41} + 4 \cdot A_{42} + 5 \cdot A_{43} + (-2) \cdot A_{44}$

$= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -3 & 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3 - 3c_2} \begin{vmatrix} 3 & 2 & & -2 \\ 0 & 1 & & 0 \\ 4 & -6 & & 5 \\ -3 & 4 & & -2 \end{vmatrix}$

练习 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, 计算 $3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

解

$3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

$= (-3) \cdot A_{41} + 4 \cdot A_{42} + 5 \cdot A_{43} + (-2) \cdot A_{44}$

$= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -3 & 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3 - 3c_2} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 18 & 5 \\ -3 & 4 & -7 & -2 \end{vmatrix}$

练习 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, 计算 $3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

解

$3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

$= (-3) \cdot A_{41} + 4 \cdot A_{42} + 5 \cdot A_{43} + (-2) \cdot A_{44}$

$= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -3 & 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3 - 3c_2} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 18 & 5 \\ -3 & 4 & -7 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 4 & 18 & 5 \\ -3 & -7 & -2 \end{vmatrix}$

练习 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$，计算 $3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

解

$3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

$= (-3) \cdot A_{41} + 4 \cdot A_{42} + 5 \cdot A_{43} + (-2) \cdot A_{44}$

$= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -3 & 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3 - 3c_2} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 18 & 5 \\ -3 & 4 & -7 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 4 & 18 & 5 \\ -3 & -7 & -2 \end{vmatrix}$

$\xlongequal{r_3 + r_1}$

练习 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, 计算 $3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

解

$3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

$= (-3) \cdot A_{41} + 4 \cdot A_{42} + 5 \cdot A_{43} + (-2) \cdot A_{44}$

$= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -3 & 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\ c_3 - 3c_2\ } \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 18 & 5 \\ -3 & 4 & -7 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 4 & 18 & 5 \\ -3 & -7 & -2 \end{vmatrix}$

$\xrightarrow{\ r_3 + r_1\ } \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 4 & 18 & 5 \end{vmatrix}$

练习 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, 计算 $3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

解

$3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

$= (-3) \cdot A_{41} + 4 \cdot A_{42} + 5 \cdot A_{43} + (-2) \cdot A_{44}$

$= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -3 & 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3 - 3c_2} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 18 & 5 \\ -3 & 4 & -7 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 4 & 18 & 5 \\ -3 & -7 & -2 \end{vmatrix}$

$\xlongequal{r_3 + r_1} \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 4 & 18 & 5 \\ 0 & -12 & -4 \end{vmatrix}$

练习 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$，计算 $3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

解

$3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

$= (-3) \cdot A_{41} + 4 \cdot A_{42} + 5 \cdot A_{43} + (-2) \cdot A_{44}$

$= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -3 & 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3 - 3c_2} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 18 & 5 \\ -3 & 4 & -7 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 4 & 18 & 5 \\ -3 & -7 & -2 \end{vmatrix}$

$\xrightarrow{r_3 + r_1} \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 4 & 18 & 5 \\ 0 & -12 & -4 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2 - 3c_3}$

练习 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, 计算 $3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

解

$3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

$= (-3) \cdot A_{41} + 4 \cdot A_{42} + 5 \cdot A_{43} + (-2) \cdot A_{44}$

$= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -3 & 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\ c_3 - 3c_2\ } \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 18 & 5 \\ -3 & 4 & -7 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 4 & 18 & 5 \\ -3 & -7 & -2 \end{vmatrix}$

$\xrightarrow{\ r_3 + r_1\ } \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 4 & 18 & 5 \\ 0 & -12 & -4 \end{vmatrix} \xrightarrow{\ c_2 - 3c_3\ } \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}$

练习 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, 计算 $3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

解

$3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

$= (-3) \cdot A_{41} + 4 \cdot A_{42} + 5 \cdot A_{43} + (-2) \cdot A_{44}$

$= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -3 & 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3 - 3c_2} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 18 & 5 \\ -3 & 4 & -7 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 4 & 18 & 5 \\ -3 & -7 & -2 \end{vmatrix}$

$\xlongequal{r_3 + r_1} \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 4 & 18 & 5 \\ 0 & -12 & -4 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2 - 3c_3} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$

练习 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, 计算 $3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

解

$3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

$= (-3) \cdot A_{41} + 4 \cdot A_{42} + 5 \cdot A_{43} + (-2) \cdot A_{44}$

$= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -3 & 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} \xLeftrightarrow{c_3 - 3c_2} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 18 & 5 \\ -3 & 4 & -7 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 4 & 18 & 5 \\ -3 & -7 & -2 \end{vmatrix}$

$\xLeftrightarrow{r_3 + r_1} \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 4 & 18 & 5 \\ 0 & -12 & -4 \end{vmatrix} \xLeftrightarrow{c_2 - 3c_3} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = (-4) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$

练习 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$，计算 $3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

解

$3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

$= (-3) \cdot A_{41} + 4 \cdot A_{42} + 5 \cdot A_{43} + (-2) \cdot A_{44}$

$= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -3 & 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3 - 3c_2} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 18 & 5 \\ -3 & 4 & -7 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 4 & 18 & 5 \\ -3 & -7 & -2 \end{vmatrix}$

$\xlongequal{r_3 + r_1} \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 4 & 18 & 5 \\ 0 & -12 & -4 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2 - 3c_3} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = (-4) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -20$

例 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 8 & 27 & 64 & 125 \end{vmatrix}$, 计算 $M_{41} - M_{42} + M_{43} - M_{44}$

例 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 8 & 27 & 64 & 125 \end{vmatrix}$, 计算 $M_{41} - M_{42} + M_{43} - M_{44}$

解

$$M_{41} - M_{42} + M_{43} - M_{44}$$

例 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 8 & 27 & 64 & 125 \end{vmatrix}$, 计算 $M_{41} - M_{42} + M_{43} - M_{44}$

解

$$M_{41} - M_{42} + M_{43} - M_{44}$$

$$= -A_{41} - A_{42} - A_{43} - A_{44}$$

例 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 8 & 27 & 64 & 125 \end{vmatrix}$, 计算 $M_{41} - M_{42} + M_{43} - M_{44}$

解

$$M_{41} - M_{42} + M_{43} - M_{44}$$

$$= -A_{41} - A_{42} - A_{43} - A_{44}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

例 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 8 & 27 & 64 & 125 \end{vmatrix}$，计算 $M_{41} - M_{42} + M_{43} - M_{44}$

解

$$M_{41} - M_{42} + M_{43} - M_{44}$$

$$= -A_{41} - A_{42} - A_{43} - A_{44}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

行列式展开式的进一步应用

$$a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

将其中 a_{21}, a_{22}, a_{23} 分别换成任意数 u, v, w 得：

$$\Rightarrow \quad uA_{21} + vA_{22} + wA_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ u & v & w \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

行列式展开式的进一步应用

$$a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

将其中 $a_{21},\ a_{22},\ a_{23}$ 分别换成任意数 $u,\ v,\ w$ 得：

$$\Rightarrow \quad uA_{21} + vA_{22} + wA_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ u & v & w \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

取 $u,\ v,\ w$ 为第一行元素 $a_{11},\ a_{12},\ a_{13}$

$$\Rightarrow a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

行列式展开式的进一步应用

$$a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

将其中 $a_{21},\ a_{22},\ a_{23}$ 分别换成任意数 $u,\ v,\ w$ 得：

$$\Rightarrow \quad uA_{21} + vA_{22} + wA_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ u & v & w \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

取 $u,\ v,\ w$ 为第一行元素 $a_{11},\ a_{12},\ a_{13}$

$$\Rightarrow a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

行列式展开式定理

定理 对于行列式 D 的第 r 行元素和第 i 行代数余子式，我们有

行列式展开式定理

定理 对于行列式 D 的第 r 行元素和第 i 行代数余子式，我们有

$$a_{r1} \qquad a_{r2} \qquad a_{rn}$$

行列式展开式定理

定理 对于行列式 D 的第 r 行元素和第 i 行代数余子式，我们有

$$a_{r1}A_{i1} \quad a_{r2}A_{i2} \qquad a_{rn}A_{in}$$

行列式展开式定理

定理 对于行列式 D 的第 r 行元素和第 i 行代数余子式，我们有

$$a_{r1}A_{i1} + a_{r2}A_{i2} + \cdots + a_{rn}A_{in}$$

行列式展开式定理

定理 对于行列式 D 的第 r 行元素和第 i 行代数余子式，我们有

$$a_{r1}A_{i1} + a_{r2}A_{i2} + \cdots + a_{rn}A_{in} = \left\{ \begin{array}{ll} & \text{若} i = r \\ & \text{若} i \neq r \end{array} \right.$$

行列式展开式定理

定理 对于行列式 D 的第 r 行元素和第 i 行代数余子式, 我们有

$$a_{r1}A_{i1} + a_{r2}A_{i2} + \cdots + a_{rn}A_{in} = \begin{cases} D & \text{若} i = r \\ & \text{若} i \neq r \end{cases}$$

行列式展开式定理

定理 对于行列式 D 的第 r 行元素和第 i 行代数余子式，我们有

$$a_{r1}A_{i1} + a_{r2}A_{i2} + \cdots + a_{rn}A_{in} = \begin{cases} D & \text{若}\, i = r \\ 0 & \text{若}\, i \neq r \end{cases}$$

行列式展开式定理

定理 对于行列式 D 的第 r 行元素和第 i 行代数余子式，我们有

$$a_{r1}A_{i1} + a_{r2}A_{i2} + \cdots + a_{rn}A_{in} = \begin{cases} D & \text{若} i = r \\ 0 & \text{若} i \neq r \end{cases}$$

类似地，对于行列式 D 的第 s 列元素和第 j 列代数余子式，有

$$a_{1s}A_{1j} + a_{2s}A_{2j} + \cdots + a_{ns}A_{nj} =$$

行列式展开式定理

定理 对于行列式 D 的第 r 行元素和第 i 行代数余子式，我们有

$$a_{r1}A_{i1} + a_{r2}A_{i2} + \cdots + a_{rn}A_{in} = \begin{cases} D & \text{若} i = r \\ 0 & \text{若} i \neq r \end{cases}$$

类似地，对于行列式 D 的第 s 列元素和第 j 列代数余子式，有

$$a_{1s}A_{1j} + a_{2s}A_{2j} + \cdots + a_{ns}A_{nj} = \begin{cases} & \text{若} j = s \\ & \text{若} j \neq s \end{cases}$$

行列式展开式定理

定理 对于行列式 D 的第 r 行元素和第 i 行代数余子式，我们有

$$a_{r1}A_{i1} + a_{r2}A_{i2} + \cdots + a_{rn}A_{in} = \begin{cases} D & \text{若}\, i = r \\ 0 & \text{若}\, i \neq r \end{cases}$$

类似地，对于行列式 D 的第 s 列元素和第 j 列代数余子式，有

$$a_{1s}A_{1j} + a_{2s}A_{2j} + \cdots + a_{ns}A_{nj} = \begin{cases} D & \text{若}\, j = s \\ & \text{若}\, j \neq s \end{cases}$$

行列式展开式定理

定理 对于行列式 D 的第 r 行元素和第 i 行代数余子式，我们有

$$a_{r1}A_{i1} + a_{r2}A_{i2} + \cdots + a_{rn}A_{in} = \begin{cases} D & \text{若} i = r \\ 0 & \text{若} i \neq r \end{cases}$$

类似地，对于行列式 D 的第 s 列元素和第 j 列代数余子式，有

$$a_{1s}A_{1j} + a_{2s}A_{2j} + \cdots + a_{ns}A_{nj} = \begin{cases} D & \text{若} j = s \\ 0 & \text{若} j \neq s \end{cases}$$

范德蒙行列式

- 3 阶范德蒙行列式
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}$$

范德蒙行列式

- 3 阶范德蒙行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1)$

范德蒙行列式

- 3 阶范德蒙行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1)$

- 4 阶范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix}$$

范德蒙行列式

- 3 阶范德蒙行列式
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1)$$

- 4 阶范德蒙行列式
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix} = (x_4 - x_3)(x_4 - x_2)(x_4 - x_1) \cdot$$

范德蒙行列式

- 3 阶范德蒙行列式
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1)$$

- 4 阶范德蒙行列式
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix} = \begin{matrix} (x_4 - x_3)(x_4 - x_2)(x_4 - x_1) \cdot \\ (x_3 - x_2)(x_3 - x_1) \end{matrix}$$

范德蒙行列式

- 3 阶范德蒙行列式
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1)$$

- 4 阶范德蒙行列式
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} (x_4 - x_3)(x_4 - x_2)(x_4 - x_1) \cdot \\ (x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1) \end{array}$$

范德蒙行列式

- 3 阶范德蒙行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1)$

- 4 阶范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} (x_4 - x_3)(x_4 - x_2)(x_4 - x_1) \cdot \\ (x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1) \end{array}$$

- n 阶范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-2} & x_3^{n-3} & \cdots & x_n^{n-4} \end{vmatrix}$$

范德蒙行列式

- 3 阶范德蒙行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1)$

- 4 阶范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} (x_4 - x_3)(x_4 - x_2)(x_4 - x_1) \cdot \\ (x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1) \end{array}$$

- n 阶范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-2} & x_3^{n-3} & \cdots & x_n^{n-4} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$