第 2 章 c：特殊矩阵

数学系　梁卓滨

2019-2020 学年 I

提要

- 单位矩阵　数量矩阵　对角矩阵　三角矩阵

提要

- 单位矩阵 ⊂ 数量矩阵 ⊂ 对角矩阵 ⊂ 三角矩阵

提要

- 单位矩阵 $\subset$ 数量矩阵 $\subset$ 对角矩阵 $\subset$ 三角矩阵
- 对称矩阵

单位矩阵

定义 对角线元素都是 1，其余元素均为 0 的 n 阶矩阵称为**单位矩阵**，记为 I_n（有时简记为 I），即

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

单位矩阵

定义 对角线元素都是 1，其余元素均为 0 的 n 阶矩阵称为**单位矩阵**，记为 I_n（有时简记为 I），即

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

性质 对任意矩阵 $A_{n\times m}$ 和 $B_{m\times n}$，都有

$$I_n A_{n\times m} = \qquad\qquad B_{m\times n} I_n =$$

单位矩阵

定义 对角线元素都是 1，其余元素均为 0 的 n 阶矩阵称为**单位矩阵**，记为 I_n（有时简记为 I），即

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

性质 对任意矩阵 $A_{n\times m}$ 和 $B_{m\times n}$，都有

$$I_nA_{n\times m} = A_{n\times m}, \qquad B_{m\times n}I_n =$$

单位矩阵

定义 对角线元素都是 1，其余元素均为 0 的 n 阶矩阵称为**单位矩阵**，记为 I_n（有时简记为 I），即

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

性质 对任意矩阵 $A_{n\times m}$ 和 $B_{m\times n}$，都有

$$I_n A_{n\times m} = A_{n\times m}, \qquad B_{m\times n} I_n = B_{m\times n}$$

数量矩阵

定义 对角线元素都是同一个数 k，其余元素均为 0 的 n 阶矩阵称为**数量矩阵**

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n\times n}$$

数量矩阵

定义 对角线元素都是同一个数 k，其余元素均为 0 的 n 阶矩阵称为 **数量矩阵**，即

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n\times n} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

数量矩阵

定义 对角线元素都是同一个数 k，其余元素均为 0 的 n 阶矩阵称为 **数量矩阵**，即

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n\times n} = k\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n\times n} = kI_n$$

数量矩阵

定义 对角线元素都是同一个数 k，其余元素均为 0 的 n 阶矩阵称为 **数量矩阵**，即

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n\times n} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n\times n} = kI_n$$

可见，数量矩阵可表示为 kI_n。

数量矩阵

定义 对角线元素都是同一个数 k，其余元素均为 0 的 n 阶矩阵称为 **数量矩阵**，即

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n\times n} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n\times n} = kI_n$$

可见，数量矩阵可表示为 kI_n。

性质 两个数量矩阵的和、差、乘积仍是数量矩阵

数量矩阵

定义 对角线元素都是同一个数 k，其余元素均为 0 的 n 阶矩阵称为 **数量矩阵**，即

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n\times n} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n\times n} = kI_n$$

可见，数量矩阵可表示为 kI_n。

性质 两个数量矩阵的和、差、乘积仍是数量矩阵，例如

1. $kI_n + lI_n =$

数量矩阵

定义 对角线元素都是同一个数 k，其余元素均为 0 的 n 阶矩阵称为 **数量矩阵**，即

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n\times n} = k\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n\times n} = kI_n$$

可见，数量矩阵可表示为 kI_n。

性质 两个数量矩阵的和、差、乘积仍是数量矩阵，例如

1. $kI_n + lI_n = (k+l)I_n$

数量矩阵

定义 对角线元素都是同一个数 k，其余元素均为 0 的 n 阶矩阵称为**数量矩阵**，即

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n\times n} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n\times n} = kI_n$$

可见，数量矩阵可表示为 kI_n。

性质 两个数量矩阵的和、差、乘积仍是数量矩阵，例如

1. $kI_n + lI_n = (k+l)I_n$，$kI_n - lI_n =$

数量矩阵

定义 对角线元素都是同一个数 k，其余元素均为 0 的 n 阶矩阵称为 **数量矩阵**，即

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n\times n} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n\times n} = kI_n$$

可见，数量矩阵可表示为 kI_n。

性质 两个数量矩阵的和、差、乘积仍是数量矩阵，例如

1. $kI_n + lI_n = (k+l)I_n$，$kI_n - lI_n = (k-l)I_n$

数量矩阵

定义 对角线元素都是同一个数 k，其余元素均为 0 的 n 阶矩阵称为**数量矩阵**，即

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n\times n} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n\times n} = kI_n$$

可见，数量矩阵可表示为 kI_n。

性质 两个数量矩阵的和、差、乘积仍是数量矩阵，例如

1. $kI_n + lI_n = (k+l)I_n$，$kI_n - lI_n = (k-l)I_n$
2. $(kI_n)(lI_n) =$

数量矩阵

定义 对角线元素都是同一个数 k，其余元素均为 0 的 n 阶矩阵称为**数量矩阵**，即

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n\times n} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n\times n} = kI_n$$

可见，数量矩阵可表示为 kI_n。

性质 两个数量矩阵的和、差、乘积仍是数量矩阵，例如

1. $kI_n + lI_n = (k+l)I_n$，$kI_n - lI_n = (k-l)I_n$
2. $(kI_n)(lI_n) = (kl)I_nI_n =$

数量矩阵

定义 对角线元素都是同一个数 k，其余元素均为 0 的 n 阶矩阵称为 **数量矩阵**，即

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n\times n} = k\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n\times n} = kI_n$$

可见，数量矩阵可表示为 kI_n。

性质 两个数量矩阵的和、差、乘积仍是数量矩阵，例如

1. $kI_n + lI_n = (k+l)I_n$，$kI_n - lI_n = (k-l)I_n$
2. $(kI_n)(lI_n) = (kl)I_nI_n = (kl)I_n$

对角矩阵

定义 除了对角线，其余位置都是 0 的 n 阶矩阵，称为**对角矩阵**，即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}$$

对角矩阵

定义 除了对角线，其余位置都是 0 的 n 阶矩阵，称为**对角矩阵**，即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n} \xlongequal{\text{或写成}} \begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & & \\ & & a_{33} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

对角矩阵

定义 除了对角线，其余位置都是 0 的 n 阶矩阵，称为**对角矩阵**，即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n} \xlongequal{\text{或写成}} \begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & & \\ & & a_{33} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

性质 两个对角矩阵的和、差、乘积仍是对角矩阵

对角矩阵的和、差

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & & & \\ & a_{22}+b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}$$

对角矩阵的和、差

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & & & \\ & a_{22}-b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}-b_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}$$

对角矩阵的和、差

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & & & \\ & a_{22} \pm b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \pm b_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

对角矩阵的乘积

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

对角矩阵的乘积

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}_{n \times n}$$

对角矩阵的乘积

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}_{n \times n}$$

对角矩阵的乘积

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & & & \\ & a_{22}b_{22} & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}_{n\times n}$$

对角矩阵的乘积

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & & & \\ & a_{22}b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \end{pmatrix}_{n\times n}$$

对角矩阵的乘积

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & & & \\ & a_{22}b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}$$

三角矩阵

- **上三角矩阵** $\begin{pmatrix} a_{11} & * & * & \cdots & * \\ & a_{22} & * & \cdots & * \\ & & a_{33} & \cdots & * \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$

三角矩阵

- **上三角矩阵** $\begin{pmatrix} a_{11} & * & * & \cdots & * \\ & a_{22} & * & \cdots & * \\ & & a_{33} & \cdots & * \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$

- **下三角矩阵** $\begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ * & a_{22} & & & \\ * & * & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ * & * & * & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

三角矩阵

- **上三角矩阵** $\begin{pmatrix} a_{11} & * & * & \cdots & * \\ & a_{22} & * & \cdots & * \\ & & a_{33} & \cdots & * \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$
- **下三角矩阵** $\begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ * & a_{22} & & & \\ * & * & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ * & * & * & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

性质 两个上（下）三角矩阵的和、差、乘积仍是上（下）三角矩阵

三角矩阵的和、差

$$
\begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ & a_{22} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \triangle & \cdots & \triangle \\ & b_{22} & \cdots & \triangle \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \odot & \cdots & \odot \\ & a_{22}+b_{22} & \cdots & \odot \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}
$$

三角矩阵的和、差

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ & a_{22} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & \triangle & \cdots & \triangle \\ & b_{22} & \cdots & \triangle \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & \odot & \cdots & \odot \\ & a_{22}-b_{22} & \cdots & \odot \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}-b_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}$$

三角矩阵的和、差

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ & a_{22} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & \triangle & \cdots & \triangle \\ & b_{22} & \cdots & \triangle \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & \odot & \cdots & \odot \\ & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & \odot \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \pm b_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

三角矩阵的乘积

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ & a_{22} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \triangle & \cdots & \triangle \\ & b_{22} & \cdots & \triangle \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

三角矩阵的乘积

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ & a_{22} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \triangle & \cdots & \triangle \\ & b_{22} & \cdots & \triangle \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}_{n \times n}$$

三角矩阵的乘积

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ & a_{22} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \triangle & \cdots & \triangle \\ & b_{22} & \cdots & \triangle \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & \odot & \cdots & \odot \\ & a_{22}b_{22} & \cdots & \odot \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}$$

对称矩阵

定义 如果 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$ 满足

$$a_{ij} = a_{ji}, \qquad \forall i, j = 1, 2, \ldots n$$

则称为 **对称矩阵** 。

对称矩阵

定义 如果 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 满足

$$a_{ij}=a_{ji}, \qquad \forall i,j=1,2,\ldots n$$

则称为**对称矩阵**。

例 $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 4 & 5\\ 4 & 2 & 6\\ 5 & 6 & 3\end{pmatrix}$都是对称矩阵。

对称矩阵

定义 如果 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$ 满足

$$a_{ij} = a_{ji}, \qquad \forall i, j = 1, 2, \ldots n$$

则称为 **对称矩阵** 。

例 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$都是对称矩阵。

对称矩阵

定义 如果 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 满足

$$a_{ij}=a_{ji}, \qquad \forall i,j=1,2,\ldots n$$

则称为 **对称矩阵** 。

例 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$都是对称矩阵。

注 方阵 A 对称，等价于它满足 $A^T=A$。

对称矩阵

定义 如果 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$ 满足

$$a_{ij} = a_{ji}, \qquad \forall i, j = 1, 2, \ldots n$$

则称为 **对称矩阵** 。

例 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$都是对称矩阵。

注 方阵 A 对称，等价于它满足 $A^T = A$。这是：

	A	A^T
位置 (i, j) 上的元素		

对称矩阵

定义 如果 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 满足

$$a_{ij}=a_{ji}, \qquad \forall i,j=1,2,\dots n$$

则称为**对称矩阵**。

例 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$都是对称矩阵。

注 方阵 A 对称，等价于它满足 $A^T=A$。这是：

	A	A^T
位置 (i,j) 上的元素	a_{ij}	

对称矩阵

定义 如果 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$ 满足

$$a_{ij} = a_{ji}, \qquad \forall i, j = 1, 2, \ldots n$$

则称为 **对称矩阵** 。

例 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$都是对称矩阵。

注 方阵 A 对称，等价于它满足 $A^T = A$。这是：

	A	A^T
位置 (i, j) 上的元素	a_{ij}	a_{ji}

练习 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

假设 $aA + bB + cC = I$，求数 a, b, c 的值

练习 设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix},\ I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

假设 $aA+bB+cC=I$，求数 a, b, c 的值

解

$$aA+bB+cC=$$

练习 设

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&1\\3&0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-1&0\\1&-1\end{pmatrix},\ I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

假设 $aA+bB+cC=I$，求数 a, b, c 的值

解

$$aA+bB+cC=a\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1&1\\3&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-1&0\\1&-1\end{pmatrix}$$

练习 设

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&1\\3&0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-1&0\\1&-1\end{pmatrix},\ I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

假设 $aA+bB+cC=I$，求数 a, b, c 的值

解

$$aA+bB+cC=a\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1&1\\3&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-1&0\\1&-1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\qquad\qquad&\qquad\qquad\\ \\ \end{pmatrix}$$

练习 设

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&1\\3&0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-1&0\\1&-1\end{pmatrix},\ I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

假设 $aA+bB+cC=I$，求数 $a,\ b,\ c$ 的值

解

$$aA+bB+cC=a\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1&1\\3&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-1&0\\1&-1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a+b-c & \\ & \end{pmatrix}$$

练习 设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix},\ I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

假设 $aA+bB+cC=I$，求数 a, b, c 的值

解

$$aA+bB+cC=a\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a+b-c & b\\ & \end{pmatrix}$$

练习 设

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&1\\3&0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-1&0\\1&-1\end{pmatrix},\ I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

假设 $aA+bB+cC=I$，求数 a, b, c 的值

解

$$aA+bB+cC=a\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1&1\\3&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-1&0\\1&-1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a+b-c&b\\2a+3b+c&\end{pmatrix}$$

练习 设

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&1\\3&0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-1&0\\1&-1\end{pmatrix},\ I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

假设 $aA+bB+cC=I$，求数 a, b, c 的值

解

$$aA+bB+cC=a\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1&1\\3&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-1&0\\1&-1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a+b-c&b\\2a+3b+c&a-c\end{pmatrix}$$

练习 设

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&1\\3&0\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}-1&0\\1&-1\end{pmatrix}, I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

假设 $aA+bB+cC=I$，求数 a, b, c 的值

解

$$aA+bB+cC=a\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1&1\\3&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-1&0\\1&-1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a+b-c&b\\2a+3b+c&a-c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

练习 设

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&1\\3&0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-1&0\\1&-1\end{pmatrix},\ I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

假设 $aA+bB+cC=I$，求数 a, b, c 的值

解

$$aA+bB+cC=a\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1&1\\3&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-1&0\\1&-1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a+b-c&b\\2a+3b+c&a-c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

所以

$$\left\{\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right.$$

练习 设

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&1\\3&0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-1&0\\1&-1\end{pmatrix},\ I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

假设 $aA+bB+cC=I$，求数 a, b, c 的值

解

$$\begin{aligned}aA+bB+cC&=a\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1&1\\3&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-1&0\\1&-1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}a+b-c&b\\2a+3b+c&a-c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

所以

$$\begin{cases}a+b-c=1\\ \\ \\ \end{cases}$$

练习 设

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&1\\3&0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-1&0\\1&-1\end{pmatrix},\ I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

假设 $aA+bB+cC=I$，求数 a, b, c 的值

解

$$aA+bB+cC=a\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1&1\\3&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-1&0\\1&-1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a+b-c&b\\2a+3b+c&a-c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{cases}a+b-c=1\\b=0\\ \\ \end{cases}$$

练习 设

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&1\\3&0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-1&0\\1&-1\end{pmatrix},\ I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

假设 $aA+bB+cC=I$，求数 a, b, c 的值

解

$$\begin{aligned}aA+bB+cC&=a\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1&1\\3&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-1&0\\1&-1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}a+b-c&b\\2a+3b+c&a-c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

所以

$$\begin{cases}a+b-c=1\\b=0\\2a+3b+c=0\\ \end{cases}$$

练习 设

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&1\\3&0\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}-1&0\\1&-1\end{pmatrix},I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

假设 $aA+bB+cC=I$，求数 a, b, c 的值

解

$$\begin{aligned}aA+bB+cC&=a\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1&1\\3&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-1&0\\1&-1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}a+b-c&b\\2a+3b+c&a-c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

所以

$$\begin{cases}a+b-c=1\\b=0\\2a+3b+c=0\\a-c=1\end{cases}$$

练习 设

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&1\\3&0\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}-1&0\\1&-1\end{pmatrix},I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

假设 $aA+bB+cC=I$，求数 a, b, c 的值

解

$$aA+bB+cC=a\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1&1\\3&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-1&0\\1&-1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a+b-c&b\\2a+3b+c&a-c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{cases}a+b-c=1\\b=0\\2a+3b+c=0\\a-c=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=0\end{cases}$$

练习 设

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&1\\3&0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-1&0\\1&-1\end{pmatrix},\ I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

假设 $aA+bB+cC=I$，求数 a, b, c 的值

解

$$\begin{aligned}aA+bB+cC&=a\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1&1\\3&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-1&0\\1&-1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}a+b-c&b\\2a+3b+c&a-c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

所以

$$\begin{cases}a+b-c=1\\b=0\\2a+3b+c=0\\a-c=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{3}\\b=0\\\end{cases}$$

练习 设

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&1\\3&0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-1&0\\1&-1\end{pmatrix},\ I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

假设 $aA+bB+cC=I$，求数 a, b, c 的值

解

$$\begin{aligned} aA+bB+cC &= a\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1&1\\3&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-1&0\\1&-1\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}a+b-c&b\\2a+3b+c&a-c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

所以

$$\begin{cases}a+b-c=1\\ b=0\\ 2a+3b+c=0\\ a-c=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{3}\\ b=0\\ c=-\frac{2}{3}\end{cases}$$

对称矩阵

注 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，然而 AB 未必对称。

对称矩阵

注 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，然而 AB 未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

对称矩阵

注 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，然而 AB 未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

对称矩阵

注 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，然而 AB 未必对称。例如

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$$

对称矩阵

注 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，然而 AB 未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ 却不是对称。

对称矩阵

注 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，然而 AB 未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ 却不是对称。

性质 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，则 AB 对称的充分必要条件是交换（i.e. $AB = BA$）。

对称矩阵

注 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，然而 AB 未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\text{却不是对称。}$$

性质 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，则 AB 对称的充分必要条件是交换（i.e. $AB = BA$）。

证明

$$AB\text{对称}$$

对称矩阵

注 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，然而 AB 未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$ 却不是对称。

性质 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，则 AB 对称的充分必要条件是交换（i.e. $AB = BA$）。

证明

$$AB\text{对称} \quad \Longrightarrow \quad AB = (AB)^T =$$

对称矩阵

注 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，然而 AB 未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$ 却不是对称。

性质 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，则 AB 对称的充分必要条件是交换（i.e. $AB = BA$）。

证明

$$AB\text{对称} \quad \Longrightarrow \quad AB = (AB)^T = B^T A^T =$$

对称矩阵

注 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，然而 AB 未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$ 却不是对称。

性质 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，则 AB 对称的充分必要条件是交换（i.e. $AB = BA$）。

证明

$$AB\text{对称} \quad \Longrightarrow \quad AB = (AB)^T = B^T A^T = BA$$

对称矩阵

注 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，然而 AB 未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$ 却不是对称。

性质 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，则 AB 对称的充分必要条件是交换（i.e. $AB = BA$）。

证明

$$AB\text{对称} \quad \Longrightarrow \quad AB = (AB)^T = B^T A^T = BA$$

反之，

$$AB = BA \quad \Longrightarrow$$

对称矩阵

注 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，然而 AB 未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$ 却不是对称。

性质 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，则 AB 对称的充分必要条件是交换（i.e. $AB = BA$）。

证明

$$AB\text{对称} \quad \Longrightarrow \quad AB = (AB)^T = B^T A^T = BA$$

反之，

$$AB = BA \quad \Longrightarrow \quad (AB)^T = \qquad\qquad AB$$

对称矩阵

注 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，然而 AB 未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$ 却不是对称。

性质 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，则 AB 对称的充分必要条件是交换（i.e. $AB = BA$）。

证明

$$AB\text{对称} \quad \Longrightarrow \quad AB = (AB)^T = B^T A^T = BA$$

反之，

$$AB = BA \quad \Longrightarrow \quad (AB)^T = B^T A^T = \qquad AB$$

对称矩阵

注 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，然而 AB 未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$ 却不是对称。

性质 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，则 AB 对称的充分必要条件是交换（i.e. $AB = BA$）。

证明

$$AB\text{对称} \quad \Longrightarrow \quad AB = (AB)^T = B^T A^T = BA$$

反之，

$$AB = BA \quad \Longrightarrow \quad (AB)^T = B^T A^T = BA \quad AB$$

对称矩阵

注 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，然而 AB 未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$ 却不是对称。

性质 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，则 AB 对称的充分必要条件是交换（i.e. $AB = BA$）。

证明

$$AB\text{对称} \quad \Longrightarrow \quad AB = (AB)^T = B^T A^T = BA$$

反之，

$$AB = BA \quad \Longrightarrow \quad (AB)^T = B^T A^T = BA = AB$$

对称矩阵

注 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，然而 AB 未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ 却不是对称。

性质 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，则 AB 对称的充分必要条件是交换（i.e. $AB = BA$）。

证明

$$AB\text{对称} \quad \Longrightarrow \quad AB = (AB)^T = B^T A^T = BA$$

反之，

$$AB = BA \quad \Longrightarrow \quad (AB)^T = B^T A^T = BA = AB \quad \Rightarrow \quad AB\text{对称}$$