

第 1 章 c : 行列式的展开

数学系 梁卓滨

2019-2020 学年 I

We are here now...

1. 余子式、代数余子式

2. 行列式的展开

3. 行列式的展开 II

余子式，代数余子式

在 n 阶行列式 D 中，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j} & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i1} & \dots & a_{ij-1} & a_{ij} & a_{ij+1} & \dots & a_{in} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

余子式，代数余子式

在 n 阶行列式 D 中，将元素 a_{ij} 所在的行和列划掉：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j} & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ \color{red}{a_{i1}} & \dots & \color{red}{a_{ij-1}} & \color{red}{a_{ij}} & \color{red}{a_{ij+1}} & \dots & \color{red}{a_{in}} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

余子式，代数余子式

在 n 阶行列式 D 中，将元素 a_{ij} 所在的行和列划掉：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1j-1} & & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ & & & & & & \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1j-1} & & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

余子式，代数余子式

在 n 阶行列式 D 中，将元素 a_{ij} 所在的行和列划掉：

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1j-1} & & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1j-1} & & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

所得的 $n-1$ 阶行列式称为 a_{ij} 的**余子式**。

余子式，代数余子式

在 n 阶行列式 D 中，将元素 a_{ij} 所在的行和列划掉：

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j} & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ \cancel{a_{i1}} & \dots & \cancel{a_{ij-1}} & \cancel{a_{ij}} & \cancel{a_{ij+1}} & \dots & \cancel{a_{in}} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

所得的 $n-1$ 阶行列式称为 a_{ij} 的余子式。

余子式，代数余子式

在 n 阶行列式 D 中，将元素 a_{ij} 所在的行和列划掉：

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ \cancel{a_{i1}} & \cdots & \cancel{a_{ij-1}} & \cancel{a_{ij}} & \cancel{a_{ij+1}} & \cdots & \cancel{a_{in}} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

所得的 $n-1$ 阶行列式称为 a_{ij} 的余子式。而将

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

定义为元素 a_{ij} 的代数余子式。

余子式，代数余子式

在 n 阶行列式 D 中，将元素 a_{ij} 所在的行和列划掉：

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j} & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ \cancel{a_{i1}} & \dots & \cancel{a_{ij-1}} & \cancel{a_{ij}} & \cancel{a_{ij+1}} & \dots & \cancel{a_{in}} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

所得的 $n-1$ 阶行列式称为 a_{ij} 的余子式。而将

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

定义为元素 a_{ij} 的代数余子式。

注 余子式、代数余子式何时相等？

例子

例 行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 中

- 元素 $a_{32} = -2$ 的余子式是

$$M_{32} =$$

代数余子式是 $A_{32} =$

例子

例 行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 中

- 元素 $a_{32} = -2$ 的余子式是

$$M_{32} = \begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

代数余子式是 $A_{32} =$

例子

例 行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 中

- 元素 $a_{32} = -2$ 的余子式是

$$M_{32} = \begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} =$$

代数余子式是 $A_{32} =$

例子

例 行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 中

- 元素 $a_{32} = -2$ 的余子式是

$$M_{32} = \begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -29$$

代数余子式是 $A_{32} =$

例子

例 行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 中

- 元素 $a_{32} = -2$ 的余子式是

$$M_{32} = \begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -29$$

代数余子式是 $A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} =$

例子

例 行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 中

- 元素 $a_{32} = -2$ 的余子式是

$$M_{32} = \begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -29$$

代数余子式是 $A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = 29$

例子

例 行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 中

- 元素 $a_{32} = -2$ 的余子式是

$$M_{32} = \begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -29$$

代数余子式是 $A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = 29$

- 元素 $a_{13} = 4$ 的余子式是 $M_{13} =$

代数余子式是 $A_{13} =$

例子

例 行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 中

- 元素 $a_{32} = -2$ 的余子式是

$$M_{32} = \begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -29$$

代数余子式是 $A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = 29$

- 元素 $a_{13} = 4$ 的余子式是 $M_{13} = \begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$

代数余子式是 $A_{13} =$

例子

例 行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 中

- 元素 $a_{32} = -2$ 的余子式是

$$M_{32} = \begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -29$$

代数余子式是 $A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = 29$

- 元素 $a_{13} = 4$ 的余子式是 $M_{13} = \begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} =$

代数余子式是 $A_{13} =$

例子

例 行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 中

- 元素 $a_{32} = -2$ 的余子式是

$$M_{32} = \begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -29$$

代数余子式是 $A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = 29$

- 元素 $a_{13} = 4$ 的余子式是 $M_{13} = \begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -8$

代数余子式是 $A_{13} =$

例子

例 行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 中

- 元素 $a_{32} = -2$ 的余子式是

$$M_{32} = \begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -29$$

代数余子式是 $A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = 29$

- 元素 $a_{13} = 4$ 的余子式是 $M_{13} = \begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -8$

代数余子式是 $A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} =$

例子

例 行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 中

- 元素 $a_{32} = -2$ 的余子式是

$$M_{32} = \begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -29$$

代数余子式是 $A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = 29$

- 元素 $a_{13} = 4$ 的余子式是 $M_{13} = \begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -8$

代数余子式是 $A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = -8$

We are here now...

1. 余子式、代数余子式

2. 行列式的展开

3. 行列式的展开 II

行列式展开——以 3 阶为例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

行列式展开——以 3 阶为例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

行列式展开——以 3 阶为例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) \end{aligned}$$

行列式展开——以 3 阶为例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) \end{aligned}$$

行列式展开——以 3 阶为例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

行列式展开——以 3 阶为例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11} \quad \quad \quad - a_{12} \quad \quad \quad + a_{13}$$

行列式展开——以 3 阶为例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$
$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$
$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \quad \quad \quad + a_{13}$$

行列式展开——以 3 阶为例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \quad + a_{13}$$

行列式展开——以 3 阶为例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \quad \quad + a_{13}$$

$$= a_{11}M_{11}$$

行列式展开——以 3 阶为例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}$$

$$= a_{11}M_{11}$$

行列式展开——以 3 阶为例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}$$

$$= a_{11}M_{11}$$

行列式展开——以 3 阶为例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}$$

$$= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12}$$

行列式展开——以 3 阶为例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12}$$

行列式展开——以 3 阶为例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12}$$

行列式展开——以 3 阶为例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$$

行列式展开——以 3 阶为例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$$

$$= a_{11}A_{11} +$$

行列式展开——以 3 阶为例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} +$$

行列式展开——以 3 阶为例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

行列式展开——以 3 阶为例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

行列式展开——以 3 阶为例

3 阶行列式按第 1 行展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

行列式展开——以 3 阶为例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{12} & a_{23} \\ a_{31} & a_{12} & a_{33} \end{vmatrix}$$

行列式展开——以 3 阶为例

3 阶行列式按第 2 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

行列式展开——以 3 阶为例

3 阶行列式按第 2 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12} \quad a_{22} \quad a_{32}$$

行列式展开——以 3 阶为例

3 阶行列式按第 2 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} - a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$

行列式展开——以 3 阶为例

3 阶行列式按第 2 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$

行列式展开——以 3 阶为例

3 阶行列式按第 2 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$
$$= a_{12} \quad \quad \quad + a_{22}$$
$$\quad \quad \quad + a_{32}$$

行列式展开——以 3 阶为例

3 阶行列式按第 2 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$
$$= a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

行列式展开——以 3 阶为例

3 阶行列式按第 2 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$
$$= a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

行列式展开——以 3 阶为例

3 阶行列式按第 2 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$
$$= a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}$$
$$+ a_{32}$$

行列式展开——以 3 阶为例

3 阶行列式按第 2 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$
$$= a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32}(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$
$$+ a_{32}$$

行列式展开——以 3 阶为例

3 阶行列式按第 2 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$
$$= a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32}(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$
$$+ a_{32}$$

行列式展开——以 3 阶为例

3 阶行列式按第 2 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$
$$= a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32}$$

行列式展开——以 3 阶为例

3 阶行列式按第 2 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$
$$= a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32}(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

行列式展开——以 3 阶为例

3 阶行列式按第 2 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$
$$= a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32}(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

行列式展开——以 3 阶为例

3 阶行列式按第 2 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$
$$= a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$+ a_{32}(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

行列式展开——以 3 阶为例

3 阶行列式按第 2 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$
$$= a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$+ a_{32}(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

注 说明计算 3 阶行列式可转化为计算 3 个 2 阶行列式

行列式展开——以 4 阶为例

4 阶行列式按第 1 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

行列式展开——以 4 阶为例

4 阶行列式按第 1 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11} \quad + a_{21} \quad + a_{31} \quad + a_{41}$$

行列式展开——以 4 阶为例

4 阶行列式按第 1 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}A_{11} + a_{21} \quad + a_{31} \quad + a_{41}$$

行列式展开——以 4 阶为例

4 阶行列式按第 1 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41}$$

行列式展开——以 4 阶为例

4 阶行列式按第 1 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41}$$

行列式展开——以 4 阶为例

4 阶行列式按第 1 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41}$$

行列式展开——以 4 阶为例

4 阶行列式按第 1 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix}$$

行列式展开——以 4 阶为例

4 阶行列式按第 1 列展开：

$$\begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} & \cancel{a_{14}} \\ \color{red}{a_{21}} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \color{red}{a_{31}} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \color{red}{a_{41}} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix}$$

行列式展开——以 4 阶为例

4 阶行列式按第 1 列展开：

$$\begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} & \cancel{a_{14}} \\ \color{red}{a_{21}} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \color{red}{a_{31}} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \color{red}{a_{41}} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

行列式展开——以 4 阶为例

4 阶行列式按第 1 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{21}(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{31}(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{41}(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

行列式展开——以 4 阶为例

4 阶行列式按第 1 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}} & \cancel{a_{24}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{21}(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{31}(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{41}(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

行列式展开——以 4 阶为例

4 阶行列式按第 1 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}} & \cancel{a_{24}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{21}(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

行列式展开——以 4 阶为例

4 阶行列式按第 1 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41}$$
$$= a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{21}(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$
$$+ a_{31}(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{41}(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

行列式展开——以 4 阶为例

4 阶行列式按第 1 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{21}(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\ + a_{31}(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{41}(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

行列式展开——以 4 阶为例

4 阶行列式按第 1 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{21}(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\ + a_{31}(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

行列式展开——以 4 阶为例

4 阶行列式按第 1 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41}$$
$$= a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{21}(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$
$$+ a_{31}(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{41}(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

行列式展开——以 4 阶为例

4 阶行列式按第 1 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41}$$

$$\begin{aligned} &= a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{21}(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\ &\quad + a_{31}(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{41}(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

行列式展开——以 4 阶为例

4 阶行列式按第 1 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41}$$

$$\begin{aligned} &= a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{21}(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\ &\quad + a_{31}(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{41}(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

行列式展开——以 4 阶为例

4 阶行列式按第 1 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41}$$
$$= a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{21}(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$
$$+ a_{31}(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{41}(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

注 说明计算 4 阶行列式可转化为计算 4 个 3 阶行列式

行列式展开定理

定理 对 n 阶行列式 D ，取第 i 行

行列式展开定理

定理 对 n 阶行列式 D ，取第 i 行

$$a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}$$

行列式展开定理

定理 对 n 阶行列式 D ，取第 i 行，按该行的展开公式是：

$$a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}$$

行列式展开定理

定理 对 n 阶行列式 D ，取第 i 行，按该行的展开公式是：

$$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

行列式展开定理

定理 对 n 阶行列式 D ，取第 i 行，按该行的展开公式是：

$$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

行列式展开定理

定理 对 n 阶行列式 D ，取第 i 行，按该行的展开公式是：

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

行列式展开定理

定理 对 n 阶行列式 D ，取第 i 行，按该行的展开公式是：

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

类似地，取第 j 列

行列式展开定理

定理 对 n 阶行列式 D ，取第 i 行，按该行的展开公式是：

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

类似地，取第 j 列

$$a_{1j} \quad a_{2j} \quad \cdots \quad a_{nj}$$

行列式展开定理

定理 对 n 阶行列式 D ，取第 i 行，按该行的展开公式是：

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

类似地，取第 j 列，按该列的展开公式是：

$$a_{1j} \quad a_{2j} \quad \cdots \quad a_{nj}$$

行列式展开定理

定理 对 n 阶行列式 D ，取第 i 行，按该行的展开公式是：

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

类似地，取第 j 列，按该列的展开公式是：

$$a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

行列式展开定理

定理 对 n 阶行列式 D ，取第 i 行，按该行的展开公式是：

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

类似地，取第 j 列，按该列的展开公式是：

$$a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

行列式展开定理

定理 对 n 阶行列式 D ，取第 i 行，按该行的展开公式是：

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

类似地，取第 j 列，按该列的展开公式是：

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

行列式展开定理

定理 对 n 阶行列式 D ，取第 i 行，按该行的展开公式是：

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

类似地，取第 j 列，按该列的展开公式是：

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

注 该定理说明：计算 n 阶行列式可转化为计算 n 个 $n-1$ 阶行列式！

行列式展开定理

定理 对 n 阶行列式 D ，取第 i 行，按该行的展开公式是：

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

类似地，取第 j 列，按该列的展开公式是：

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

注 该定理说明：计算 n 阶行列式可转化为计算 n 个 $n-1$ 阶行列式！
其实，通过一些小技巧，可以把 n 阶行列式转化为 1 个 $n-1$ 阶行列式..... 最后转化为 1 个 2 阶，后面再详说

下面以 4 阶行列式按第一行的展开公式为例证明。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

下面以 4 阶行列式按第一行的展开公式为例证明。

也就是要证明：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\ + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

下面以 4 阶行列式按第一行的展开公式为例证明。

也就是要证明：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\
 + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

引理

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} =$$

下面以 4 阶行列式按第一行的展开公式为例证明。

也就是要证明：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\
 + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

引理

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

引理证明

引理证明 定义一种运算：

$$\left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{array} \right\| \triangleq$$

引理证明 定义一种运算：

$$\left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{array} \right\| \stackrel{\Delta}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix}$$

引理证明 定义一种运算：

$$\left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{array} \right\| \stackrel{\Delta}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix}$$

验证这种运算满足规范性、反称性、数乘性、可加性：

引理证明 定义一种运算：

$$\left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{array} \right\| \stackrel{\Delta}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix}$$

验证这种运算满足规范性、反称性、数乘性、可加性：

- 规范性：

引理证明 定义一种运算：

$$\left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{array} \right\| \stackrel{\Delta}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix}$$

验证这种运算满足规范性、反称性、数乘性、可加性：

● 规范性： $\left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| =$

引理证明 定义一种运算：

$$\left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{array} \right\| \triangleq \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix}$$

验证这种运算满足规范性、反称性、数乘性、可加性：

● 规范性： $\left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

引理证明 定义一种运算：

$$\left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{array} \right\| \triangleq \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix}$$

验证这种运算满足规范性、反称性、数乘性、可加性：

● 规范性： $\left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

引理证明 定义一种运算：

$$\left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{array} \right\| \triangleq \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix}$$

验证这种运算满足规范性、反称性、数乘性、可加性：

● 规范性： $\left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

● 反称性：

引理证明 定义一种运算：

$$\left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{array} \right\| \triangleq \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix}$$

验证这种运算满足规范性、反称性、数乘性、可加性：

● 规范性： $\left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

● 反称性：比如，

$$\left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{array} \right\| =$$

$$- \left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{array} \right\|$$

引理证明 定义一种运算：

$$\left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{array} \right\| \stackrel{\Delta}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix}$$

验证这种运算满足规范性、反称性、数乘性、可加性：

● 规范性：
$$\left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

● 反称性：比如，

$$\left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{array} \right\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} - \left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{array} \right\|$$

引理证明 定义一种运算：

$$\left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{array} \right\| \triangleq \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix}$$

验证这种运算满足规范性、反称性、数乘性、可加性：

● 规范性：
$$\left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

● 反称性：比如，

$$\left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{array} \right\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & x & y & z \\ 0 & u & v & w \end{vmatrix} = - \left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{array} \right\|$$

引理证明 定义一种运算：

$$\left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{array} \right\| \triangleq \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix}$$

验证这种运算满足规范性、反称性、数乘性、可加性：

● 规范性： $\left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

● 反称性：比如，

$$\left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{array} \right\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & x & y & z \\ 0 & u & v & w \end{vmatrix} = - \left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{array} \right\|$$

- 数乘性：

- 数乘性：比如，

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ ku & kv & kw \\ x & y & z \end{vmatrix} =$$

$$k \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

- 数乘性：比如，

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ ku & kv & kw \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & ku & kv & kw \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix}$$

$$k \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

- 数乘性：比如，

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ ku & kv & kw \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & ku & kv \\ 0 & x & y \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & u & v \\ 0 & x & y \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

- 数乘性：比如，

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ ku & kv & kw \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & ku & kv \\ 0 & x & y \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & u & v \\ 0 & x & y \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

- 数乘性：比如，

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ ku & kv & kw \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & ku & kv \\ 0 & x & y \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & u & v \\ 0 & x & y \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

- 可加性：

- 数乘性：比如，

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ ku & kv & kw \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & ku & kv & kw \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

- 可加性：比如，

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x+p & y+q & z+r \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ p & q & r \end{vmatrix}$$

- 数乘性：比如，

$$\left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ ku & kv & kw \\ x & y & z \end{array} \right\| = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & ku & kv & kw \\ 0 & x & y & z \end{array} \right| = k \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{array} \right| = k \left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{array} \right\|$$

- 可加性：比如，

$$\left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ x+p & y+q & z+r \end{array} \right\| = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x+p & y+q & z+r \end{array} \right|$$

$$\left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ p & q & r \end{array} \right\|$$

- 数乘性：比如，

$$\left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ ku & kv & kw \\ x & y & z \end{array} \right\| = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & ku & kv & kw \\ 0 & x & y & z \end{array} \right| = k \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{array} \right| = k \left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{array} \right\|$$

- 可加性：比如，

$$\left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ x+p & y+q & z+r \end{array} \right\| = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x+p & y+q & z+r \end{array} \right|$$

$$= \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & p & q & r \end{array} \right| \left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ p & q & r \end{array} \right\|$$

- 数乘性：比如，

$$\left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ ku & kv & kw \\ x & y & z \end{array} \right\| = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & ku & kv & kw \\ 0 & x & y & z \end{array} \right| = k \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{array} \right| = k \left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{array} \right\|$$

- 可加性：比如，

$$\left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ x+p & y+q & z+r \end{array} \right\| = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x+p & y+q & z+r \end{array} \right|$$

$$= \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & p & q & r \end{array} \right| = \left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ p & q & r \end{array} \right\|$$

- 数乘性：比如，

$$\left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ ku & kv & kw \\ x & y & z \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & ku & kv & kw \\ 0 & x & y & z \end{array} \right\| = k \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{array} \right\| = k \left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{array} \right\|$$

- 可加性：比如，

$$\left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ x+p & y+q & z+r \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x+p & y+q & z+r \end{array} \right\|$$

$$= \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & p & q & r \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ p & q & r \end{array} \right\|$$

所以：

$$\left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{array} \right\|$$

- 数乘性：比如，

$$\left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ ku & kv & kw \\ x & y & z \end{array} \right\| = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & ku & kv & kw \\ 0 & x & y & z \end{array} \right| = k \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{array} \right| = k \left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{array} \right\|$$

- 可加性：比如，

$$\left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ x+p & y+q & z+r \end{array} \right\| = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x+p & y+q & z+r \end{array} \right|$$

$$= \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & p & q & r \end{array} \right| = \left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ p & q & r \end{array} \right\|$$

所以：

$$\left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{array} \right\| \xrightarrow{\text{唯一性}} \left| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{array} \right|$$

- 数乘性：比如，

$$\left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ ku & kv & kw \\ x & y & z \end{array} \right\| = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & ku & kv & kw \\ 0 & x & y & z \end{array} \right| = k \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{array} \right| = k \left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{array} \right\|$$

- 可加性：比如，

$$\left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ x+p & y+q & z+r \end{array} \right\| = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x+p & y+q & z+r \end{array} \right|$$

$$= \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & p & q & r \end{array} \right| = \left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ p & q & r \end{array} \right\|$$

所以：

$$\left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{array} \right| = \left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{array} \right\| \xrightarrow{\text{唯一性}} \left| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{array} \right|$$

回到 4 阶行列式按第一行的展开公式的证明：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

回到 4 阶行列式按第一行的展开公式的证明：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\
 + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

回到 4 阶行列式按第一行的展开公式的证明：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\
 + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\
 = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

回到 4 阶行列式按第一行的展开公式的证明：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\
 + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\
 = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

回到 4 阶行列式按第一行的展开公式的证明：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\
 + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\
 = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

回到 4 阶行列式按第一行的展开公式的证明：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\
 + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\
 = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{12} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

回到 4 阶行列式按第一行的展开公式的证明：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\
 + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\
 = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{12} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & 0 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & 0 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

回到 4 阶行列式按第一行的展开公式的证明：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\
 + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\
 = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

回到 4 阶行列式按第一行的展开公式的证明：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\
 + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\
 = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

回到 4 阶行列式按第一行的展开公式的证明：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\
 + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\
 = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\
 + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

回到 4 阶行列式按第一行的展开公式的证明：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\
 + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\
 = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\
 + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

行列式展开例子

例 1 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开，算出行列式

解

解

行列式展开例子

例 1 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开，算出行列式

解 $D = 1 \quad 0 \quad 1$

解

行列式展开例子

例 1 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开, 算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{21} \quad 0 \quad 1$

解

行列式展开例子

例 1 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开, 算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{21} \quad 0 \cdot A_{22} \quad 1$

解

行列式展开例子

例 1 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开, 算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{21} \quad 0 \cdot A_{22} \quad 1 \cdot A_{23}$

解

行列式展开例子

例 1 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开，算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

解

行列式展开例子

例 1 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开, 算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

解

行列式展开例子

例 1 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开, 算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

解

行列式展开例子

例 1 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开, 算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

解

行列式展开例子

例 1 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开, 算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

解

行列式展开例子

例 1 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开, 算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

解

行列式展开例子

例 1 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开, 算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

解

行列式展开例子

例 1 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开, 算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

解

行列式展开例子

例 1 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开, 算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$$\begin{aligned} &= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \\ &= -11 + 0 - 14 = -25 \end{aligned}$$

解

行列式展开例子

例 1 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开, 算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$$\begin{aligned} &= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \\ &= -11 + 0 - 14 = -25 \end{aligned}$$

例 2 将行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$ 按第 1 行展开, 算出行列式

解

行列式展开例子

例 1 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开, 算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$$\begin{aligned} &= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \\ &= -11 + 0 - 14 = -25 \end{aligned}$$

例 2 将行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$ 按第 1 行展开, 算出行列式

解 $D = 1 \quad \quad \quad 1 \quad \quad \quad 1$

行列式展开例子

例 1 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开, 算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$$\begin{aligned} &= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \\ &= -11 + 0 - 14 = -25 \end{aligned}$$

例 2 将行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$ 按第 1 行展开, 算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{11} \quad 1 \quad 1$

行列式展开例子

例 1 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开, 算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$$\begin{aligned} &= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \\ &= -11 + 0 - 14 = -25 \end{aligned}$$

例 2 将行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$ 按第 1 行展开, 算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{11} - 1 \cdot A_{12} + 1 \cdot A_{13}$

行列式展开例子

例 1 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开, 算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$$\begin{aligned} &= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \\ &= -11 + 0 - 14 = -25 \end{aligned}$$

例 2 将行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$ 按第 1 行展开, 算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{11} - 1 \cdot A_{12} + 1 \cdot A_{13}$

行列式展开例子

例 1 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开, 算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$$\begin{aligned} &= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \\ &= -11 + 0 - 14 = -25 \end{aligned}$$

例 2 将行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$ 按第 1 行展开, 算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{12} + 1 \cdot A_{13}$

行列式展开例子

例 1 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开, 算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$$\begin{aligned} &= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \\ &= -11 + 0 - 14 = -25 \end{aligned}$$

例 2 将行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$ 按第 1 行展开, 算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{12} + 1 \cdot A_{13}$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 16 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 9 \end{vmatrix}$$

行列式展开例子

例 1 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开, 算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$$\begin{aligned} &= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \\ &= -11 + 0 - 14 = -25 \end{aligned}$$

例 2 将行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$ 按第 1 行展开, 算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{12} + 1 \cdot A_{13}$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 16 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}$$

行列式展开例子

例 1 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开, 算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$$\begin{aligned} &= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \\ &= -11 + 0 - 14 = -25 \end{aligned}$$

例 2 将行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$ 按第 1 行展开, 算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{12} + 1 \cdot A_{13}$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 16 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}$$

行列式展开例子

例 1 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开, 算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$$\begin{aligned} &= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \\ &= -11 + 0 - 14 = -25 \end{aligned}$$

例 2 将行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$ 按第 1 行展开, 算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{12} + 1 \cdot A_{13}$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 16 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}$$

行列式展开例子

例 1 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开, 算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$$\begin{aligned} &= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \\ &= -11 + 0 - 14 = -25 \end{aligned}$$

例 2 将行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$ 按第 1 行展开, 算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{12} + 1 \cdot A_{13}$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 16 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}$$

行列式展开例子

例 1 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开, 算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$$\begin{aligned} &= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \\ &= -11 + 0 - 14 = -25 \end{aligned}$$

例 2 将行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$ 按第 1 行展开, 算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{12} + 1 \cdot A_{13}$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 16 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}$$

行列式展开例子

例 1 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开, 算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$$\begin{aligned} &= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \\ &= -11 + 0 - 14 = -25 \end{aligned}$$

例 2 将行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$ 按第 1 行展开, 算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{12} + 1 \cdot A_{13}$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 16 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}$$

行列式展开例子

例 1 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开, 算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$$\begin{aligned} &= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \\ &= -11 + 0 - 14 = -25 \end{aligned}$$

例 2 将行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$ 按第 1 行展开, 算出行列式

解 $D = 1 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{12} + 1 \cdot A_{13}$

$$\begin{aligned} &= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 16 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} \\ &= 12 - 16 + 6 = 2 \end{aligned}$$

例 3

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

例 3 可利用行列式性质，将第 2 行化为 $(1 \ 0 \ 0)$ ，再展开：

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

例 3 可利用行列式性质，将第 2 行化为 (1 0 0)，再展开：

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{C_3 - C_1}}}$$

例 3 可利用行列式性质，将第 2 行化为 (1 0 0)，再展开：

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3 - C_1} \begin{vmatrix} 4 & 3 & \\ 1 & 0 & \\ 2 & 5 & \end{vmatrix} =$$

例 3 可利用行列式性质，将第 2 行化为 (1 0 0)，再展开：

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3 - C_1} \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} =$$

例 3 可利用行列式性质，将第 2 行化为 (1 0 0)，再展开：

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3 - C_1} \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23}$$

例 3 可利用行列式性质，将第 2 行化为 $(1 \ 0 \ 0)$ ，再展开：

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{C_3 - C_1}}} \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

例 3 可利用行列式性质，将第 2 行化为 (1 0 0)，再展开：

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3 - c_1} \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

例 3 可利用行列式性质，将第 2 行化为 (1 0 0)，再展开：

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3 - C_1} \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23}$$
$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix}$$

例 3 可利用行列式性质，将第 2 行化为 (1 0 0)，再展开：

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3 - C_1} \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23}$$
$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = -25$$

例 3 可利用行列式性质，将第 2 行化为 (1 0 0)，再展开：

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3 - c_1} \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23}$$
$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = -25$$

例 4

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$$

例 3 可利用行列式性质，将第 2 行化为 $(1 \ 0 \ 0)$ ，再展开：

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3 - c_1} \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23}$$
$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = -25$$

例 4 利用行列式的变换，将第 1 行化为 $(1 \ 0 \ 0)$ ，再按第一行展开：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$$

例 3 可利用行列式性质，将第 2 行化为 $(1 \ 0 \ 0)$ ，再展开：

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{C_3 - C_1}}} \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23}$$
$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = -25$$

例 4 利用行列式的变换，将第 1 行化为 $(1 \ 0 \ 0)$ ，再按第一行展开：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} \xrightarrow[\underline{\underline{C_3 - C_1}}]{\underline{\underline{C_2 - C_1}}}$$

例 3 可利用行列式性质，将第 2 行化为 $(1 \ 0 \ 0)$ ，再展开：

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{C_3 - C_1}}} \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23}$$
$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = -25$$

例 4 利用行列式的变换，将第 1 行化为 $(1 \ 0 \ 0)$ ，再按第一行展开：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} \xrightarrow[\underline{\underline{C_3 - C_1}}]{\underline{\underline{C_2 - C_1}}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 15 \end{vmatrix}$$

例 3 可利用行列式性质，将第 2 行化为 $(1 \ 0 \ 0)$ ，再展开：

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{C_3 - C_1}}} \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23}$$
$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = -25$$

例 4 利用行列式的变换，将第 1 行化为 $(1 \ 0 \ 0)$ ，再按第一行展开：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} \xrightarrow[\underline{\underline{C_3 - C_1}}]{\underline{\underline{C_2 - C_1}}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 12 \end{vmatrix}$$

例 3 可利用行列式性质，将第 2 行化为 (1 0 0)，再展开：

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{C_3 - C_1}}} \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23}$$
$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = -25$$

例 4 利用行列式的变换，将第 1 行化为 (1 0 0)，再按第一行展开：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} \xrightarrow[\underline{\underline{C_3 - C_1}}]{\underline{\underline{C_2 - C_1}}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 12 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{13}$$

例 3 可利用行列式性质，将第 2 行化为 (1 0 0)，再展开：

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{c_3 - c_1}}} \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23}$$
$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = -25$$

例 4 利用行列式的变换，将第 1 行化为 (1 0 0)，再按第一行展开：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} \xrightarrow[\underline{\underline{c_3 - c_1}}]{\underline{\underline{c_2 - c_1}}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 12 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{13}$$
$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$$

例 3 可利用行列式性质，将第 2 行化为 $(1 \ 0 \ 0)$ ，再展开：

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{C_3 - C_1}}} \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23}$$
$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = -25$$

例 4 利用行列式的变换，将第 1 行化为 $(1 \ 0 \ 0)$ ，再按第一行展开：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} \xrightarrow[\underline{\underline{C_3 - C_1}}]{\underline{\underline{C_2 - C_1}}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 12 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{13}$$
$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$$

例 3 可利用行列式性质，将第 2 行化为 $(1 \ 0 \ 0)$ ，再展开：

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{c_3-c_1}} \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23}$$
$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = -25$$

例 4 利用行列式的变换，将第 1 行化为 $(1 \ 0 \ 0)$ ，再按第一行展开：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{c_2-c_1 \\ c_3-c_1}]{c_2-c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 12 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{13}$$
$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 12 \end{vmatrix}$$

例 3 可利用行列式性质，将第 2 行化为 $(1 \ 0 \ 0)$ ，再展开：

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3 - c_1} \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23}$$
$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = -25$$

例 4 利用行列式的变换，将第 1 行化为 $(1 \ 0 \ 0)$ ，再按第一行展开：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} \xrightarrow[c_3 - c_1]{c_2 - c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 12 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{13}$$
$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} = 2$$

行列式的计算方法 II: 降阶法

1. 利用行列式性质，将某一行（或列）化为至多只有一个非零元素
2. 将行列式按该行（或列）展开，从而化为低阶行列式

行列式的计算方法 II: 降阶法

1. 利用行列式性质，将某一行（或列）化为至多只有一个非零元素
2. 将行列式按该行（或列）展开，从而化为低阶行列式
3. 重复以上操作，直至化为 2 阶行列式

行列式的计算方法 II: 降阶法

1. 利用行列式性质，将某一行（或列）化为至多只有一个非零元素
2. 将行列式按该行（或列）展开，从而化为低阶行列式
3. 重复以上操作，直至化为 2 阶行列式

图示：

$$\begin{vmatrix} * & * & * & * \\ * & * & a & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{vmatrix}$$

行列式的计算方法 II: 降阶法

1. 利用行列式性质，将某一行（或列）化为至多只有一个非零元素
2. 将行列式按该行（或列）展开，从而化为低阶行列式
3. 重复以上操作，直至化为 2 阶行列式

图示：

$$\begin{vmatrix} * & * & * & * \\ * & * & a & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{运算}} \begin{vmatrix} * & * & 0 & * \\ * & * & a & * \\ * & * & 0 & * \\ * & * & 0 & * \end{vmatrix}$$

行列式的计算方法 II: 降阶法

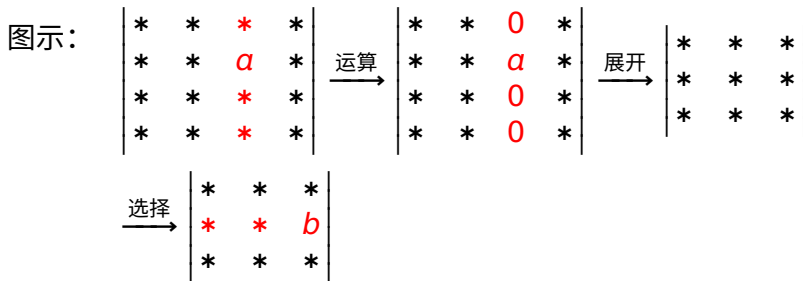
1. 利用行列式性质，将某一行（或列）化为至多只有一个非零元素
2. 将行列式按该行（或列）展开，从而化为低阶行列式
3. 重复以上操作，直至化为 2 阶行列式

图示：

$$\begin{vmatrix} * & * & * & * \\ * & * & a & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{运算}} \begin{vmatrix} * & * & 0 & * \\ * & * & a & * \\ * & * & 0 & * \\ * & * & 0 & * \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{展开}} \begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix}$$

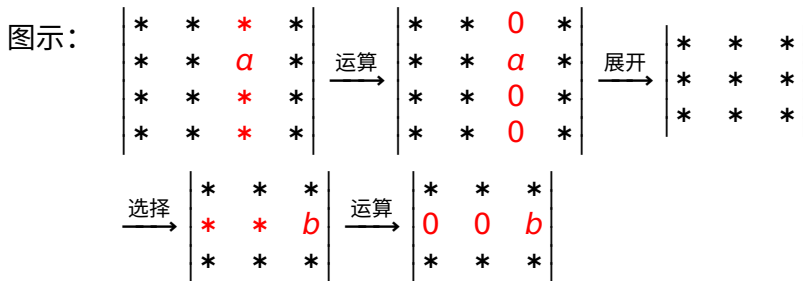
行列式的计算方法 II: 降阶法

1. 利用行列式性质，将某一行（或列）化为至多只有一个非零元素
2. 将行列式按该行（或列）展开，从而化为低阶行列式
3. 重复以上操作，直至化为 2 阶行列式



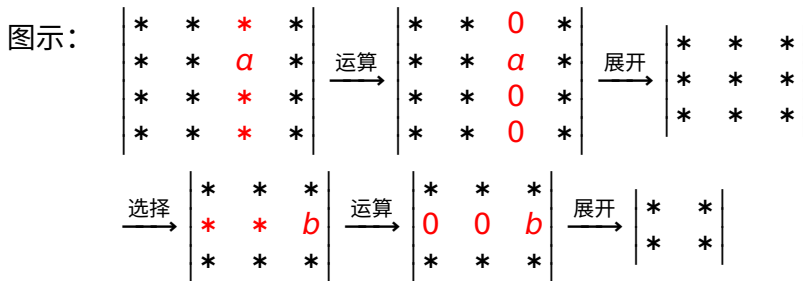
行列式的计算方法 II: 降阶法

1. 利用行列式性质，将某一行（或列）化为至多只有一个非零元素
2. 将行列式按该行（或列）展开，从而化为低阶行列式
3. 重复以上操作，直至化为 2 阶行列式



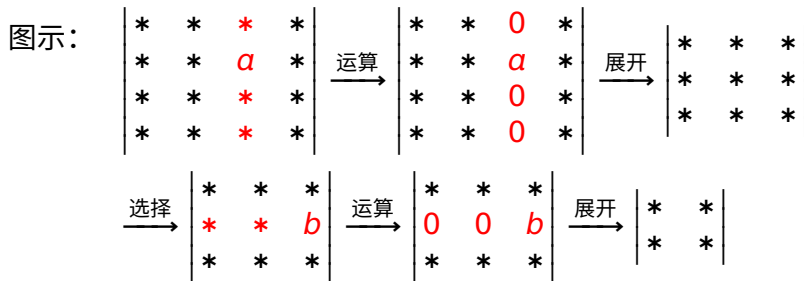
行列式的计算方法 II: 降阶法

1. 利用行列式性质，将某一行（或列）化为至多只有一个非零元素
2. 将行列式按该行（或列）展开，从而化为低阶行列式
3. 重复以上操作，直至化为 2 阶行列式



行列式的计算方法 II: 降阶法

1. 利用行列式性质，将某一行（或列）化为至多只有一个非零元素
2. 将行列式按该行（或列）展开，从而化为低阶行列式
3. 重复以上操作，直至化为 2 阶行列式



注 对比 **化行列式为三角行列式的方法**，更推荐 **降阶法**，因为更灵活！

练习 1 计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

练习 1 计算
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

提示 先化第二行为 $(1 \ 0 \ 0 \ 0)$ ，再按第二行展开

练习 1 计算
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

提示 先化第二行为 $(1 \ 0 \ 0 \ 0)$ ，再按第二行展开

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

练习 1 计算
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

提示 先化第二行为 $(1 \ 0 \ 0 \ 0)$ ，再按第二行展开

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{C_3 - C_1}}}$$

练习 1 计算
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

提示 先化第二行为 $(1 \ 0 \ 0 \ 0)$ ，再按第二行展开

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3 - c_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & & \\ 1 & 0 & & \\ 3 & -1 & & \\ 1 & 2 & & \end{vmatrix} =$$

练习 1 计算
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

提示 先化第二行为 $(1 \ 0 \ 0 \ 0)$ ，再按第二行展开

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3 - C_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} =$$

练习 1 计算
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

提示 先化第二行为 $(1 \ 0 \ 0 \ 0)$ ，再按第二行展开

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow[c_4-2c_1]{c_3-c_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -9 \end{vmatrix} =$$

练习 1 计算
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

提示 先化第二行为 $(1 \ 0 \ 0 \ 0)$ ，再按第二行展开

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow[c_4-2c_1]{c_3-c_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} =$$

练习 1 计算
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

提示 先化第二行为 $(1 \ 0 \ 0 \ 0)$ ，再按第二行展开

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow[c_4-2c_1]{c_3-c_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix}$$

练习 1 计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

提示 先化第二行为 $(1 \ 0 \ 0 \ 0)$ ，再按第二行展开

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow[c_4-2c_1]{c_3-c_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} \\ = -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix}$$

练习 1 计算
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

提示 先化第二行为 $(1 \ 0 \ 0 \ 0)$ ，再按第二行展开

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow[c_4-2c_1]{c_3-c_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2-c_1}$$

练习 1 计算
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

提示 先化第二行为 $(1 \ 0 \ 0 \ 0)$ ，再按第二行展开

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow[c_4-2c_1]{c_3-c_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2-c_1} -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & -7 \\ 2 & -3 & -9 \end{vmatrix}$$

练习 1 计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

提示 先化第二行为 $(1 \ 0 \ 0 \ 0)$ ，再按第二行展开

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow[c_4-2c_1]{c_3-c_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} \\ = -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2-c_1} -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$$

练习 1 计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

提示 先化第二行为 $(1 \ 0 \ 0 \ 0)$ ，再按第二行展开

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow[c_4-2c_1]{c_3-c_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} \xrightarrow[c_3-c_1]{c_2-c_1} -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$$

练习 1 计算
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

提示 先化第二行为 $(1 \ 0 \ 0 \ 0)$ ，再按第二行展开

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow[c_4-2c_1]{c_3-c_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} \xrightarrow[c_3-c_1]{c_2-c_1} -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -5 \\ 2 & -3 & -9 \end{vmatrix}$$

练习 1 计算
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

提示 先化第二行为 $(1 \ 0 \ 0 \ 0)$ ，再按第二行展开

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow[c_4-2c_1]{c_3-c_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} \\ = -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} \xrightarrow[c_3-c_1]{c_2-c_1} -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -5 \\ 2 & -3 & -9 \end{vmatrix} = -2.$$

练习 1 计算
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

提示 先化第二行为 $(1 \ 0 \ 0 \ 0)$ ，再按第二行展开

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow[c_4-2c_1]{c_3-c_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} \\ = -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} \xrightarrow[c_3-c_1]{c_2-c_1} -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -5 \\ 2 & -3 & -9 \end{vmatrix} = -2 \cdot 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ -3 & -9 \end{vmatrix}$$

练习 1 计算
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

提示 先化第二行为 $(1 \ 0 \ 0 \ 0)$ ，再按第二行展开

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow[c_4-2c_1]{c_3-c_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} \xrightarrow[c_3-c_1]{c_2-c_1} -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -5 \\ 2 & -3 & -9 \end{vmatrix} = -2 \cdot 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ -3 & -9 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{r_2-r_1}}$$

练习 1 计算
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

提示 先化第二行为 $(1 \ 0 \ 0 \ 0)$ ，再按第二行展开

解

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow[c_4-2c_1]{c_3-c_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} \\ & = -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} \xrightarrow[c_3-c_1]{c_2-c_1} -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -5 \\ 2 & -3 & -9 \end{vmatrix} = -2 \cdot 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ -3 & -9 \end{vmatrix} \\ & \xrightarrow{r_2-r_1} -2 \cdot 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

练习 1 计算
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

提示 先化第二行为 $(1 \ 0 \ 0 \ 0)$ ，再按第二行展开

解

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow[c_4-2c_1]{c_3-c_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} \\ & = -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} \xrightarrow[c_3-c_1]{c_2-c_1} -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -5 \\ 2 & -3 & -9 \end{vmatrix} = -2 \cdot 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ -3 & -9 \end{vmatrix} \\ & \xrightarrow{r_2-r_1} -2 \cdot 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-3) \cdot (-4) = -24 \end{aligned}$$

练习 2 计算
$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$$

练习 2 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$ (提示 先化第一列为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 再展开)

练习 2 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$ (提示 先化第一列为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 再展开)

解

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$$

练习 2 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$ (提示 先化第一列为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 再展开)

解

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{r_2 - 2r_1}}}$$

练习 2 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$ (**提示** 先化第一列为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 再展开)

解

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 7 & -5 & 13 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -9 & 12 \end{vmatrix} =$$

练习 2 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$ (**提示** 先化第一列为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 再展开)

解

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 7 & -5 & 13 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} =$$

练习 2 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$ (提示 先化第一列为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 再展开)

解

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 7 & -5 & 13 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 10 & -13 & 13 \end{vmatrix} =$$

练习 2 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$ (提示 先化第一列为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 再展开)

解

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4-r_1]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 7 & -5 & 13 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} =$$

练习 2 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$ (提示 先化第一列为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 再展开)

解

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4-r_1]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 7 & -5 & 13 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} =$$

练习 2 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$ (提示 先化第一列为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 再展开)

解

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4-r_1]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 7 & -5 & 13 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$$

练习 2 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$ (提示 先化第一列为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 再展开)

解

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4-r_1]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 7 & -5 & 13 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{c_1 + 2c_2}}$$

练习 2 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$ (提示 先化第一列为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 再展开)

解

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4-r_1]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 7 & -5 & 13 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_1+2c_2} \begin{vmatrix} -5 \\ -1 \\ -7 \end{vmatrix}$$

练习 2 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$ (提示 先化第一列为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 再展开)

解

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4-r_1]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 7 & -5 & 13 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_1+2c_2} \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 0 & -1 \\ -7 & -7 \end{vmatrix}$$

练习 2 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$ (提示 先化第一列为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 再展开)

解

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4-r_1]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 7 & -5 & 13 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \underline{\underline{c_1+2c_2}} & -3 & -5 \\ & 0 & -1 \\ c_3+2c_2 & -7 & -7 \end{vmatrix}$$

练习 2 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$ (提示 先化第一列为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 再展开)

解

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4-r_1]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 7 & -5 & 13 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_3+2c_2]{c_1+2c_2} \begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -7 & -7 & -2 \end{vmatrix}$$

练习 2 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$ (提示 先化第一列为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 再展开)

解

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4-r_1]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 7 & -5 & 13 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_3+2c_2]{c_1+2c_2} \begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -7 & -7 & -2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot$$

练习 2 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$ (提示 先化第一列为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 再展开)

解

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4-r_1]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 7 & -5 & 13 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_3+2c_2]{c_1+2c_2} \begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -7 & -7 & -2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -7 & -2 \end{vmatrix}$$

练习 2 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$ (提示 先化第一列为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 再展开)

解

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4-r_1]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 7 & -5 & 13 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_3+2c_2]{c_1+2c_2} \begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -7 & -7 & -2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -7 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \cdot (6 + 21)$$

练习 2 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$ (提示 先化第一列为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 再展开)

解

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4-r_1]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 7 & -5 & 13 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_3+2c_2]{c_1+2c_2} \begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -7 & -7 & -2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -7 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \cdot (6 + 21) = -27$$

练习 3 计算行列式

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

练习 3 计算行列式
$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

练习 3 计算行列式

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \underline{\underline{C_3 + C_1}} \\ \underline{\underline{C_4 - C_1}} \\ \end{array}$$

练习 3 计算行列式

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[\underline{\underline{C_4 - C_1}}]{C_3 + C_1} \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

练习 3 计算行列式

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{C_3+C_1 \\ C_4-C_1}]{} \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

按第二行展开

练习 3 计算行列式

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[\underline{\underline{C_4 - C_1}}]{\underline{\underline{C_3 + C_1}}} \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{\text{按第二行展开}}} 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

练习 3 计算行列式

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[\underline{\underline{C_4 - C_1}}]{\underline{\underline{C_3 + C_1}}} \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\underline{\underline{\text{按第二行展开}}}} 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\underline{\underline{C_3 - C_1}}]{\underline{\underline{C_2 - C_1}}}$$

练习 3 计算行列式

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{C_3+C_1 \\ C_4-C_1}]{} \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{按第二行展开}} 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{C_2-C_1 \\ C_3-C_1}]{} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -6 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

练习 3 计算行列式

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{C_3+C_1 \\ C_4-C_1}]{} \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{按第二行展开}} 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{C_2-C_1 \\ C_3-C_1}]{} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -6 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

练习 3 计算行列式

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{C_3+C_1 \\ C_4-C_1}]{} \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{按第二行展开}} 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{C_2-C_1 \\ C_3-C_1}]{} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -6 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -22$$

练习 4 计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 2 & \lambda & 2100 & -90 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

练习 4 计算
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 2 & \lambda & 2100 & -90 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 2 & \lambda & 2100 & -90 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

练习 4 计算
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 2 & \lambda & 2100 & -90 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 2 & \lambda & 2100 & -90 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{r_2 - 2r_1}}}$$

练习 4 计算
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 2 & \lambda & 2100 & -90 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 2 & \lambda & 2100 & -90 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{r_2 - 2r_1}}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ & & & \end{vmatrix}$$

练习 4 计算
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 2 & \lambda & 2100 & -90 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 2 & \lambda & 2100 & -90 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{r_2 - 2r_1}}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 0 & \lambda - 4 & 1900 & -96 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

练习 4 计算
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 2 & \lambda & 2100 & -90 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 2 & \lambda & 2100 & -90 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{r_2 - 2r_1}}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 0 & \lambda - 4 & 1900 & -96 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

练习 4 计算
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 2 & \lambda & 2100 & -90 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 2 & \lambda & 2100 & -90 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{r_2 - 2r_1}}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 0 & \lambda - 4 & 1900 & -96 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} \lambda - 4 & 1900 & -96 \\ 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

练习 4 计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 2 & \lambda & 2100 & -90 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 2 & \lambda & 2100 & -90 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 0 & \lambda - 4 & 1900 & -96 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} \lambda - 4 & 1900 & -96 \\ 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 4) \begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

练习 4 计算
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 2 & \lambda & 2100 & -90 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 2 & \lambda & 2100 & -90 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 0 & \lambda - 4 & 1900 & -96 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} \lambda - 4 & 1900 & -96 \\ 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 4) \begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda^2 - 4)$$

练习 4 计算
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 2 & \lambda & 2100 & -90 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 2 & \lambda & 2100 & -90 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 0 & \lambda - 4 & 1900 & -96 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} \lambda - 4 & 1900 & -96 \\ 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 4) \begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda^2 - 4) = (\lambda - 4)(\lambda - 2)(\lambda + 2)$$

We are here now...

1. 余子式、代数余子式

2. 行列式的展开

3. 行列式的展开 II

$$a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

将其中 a_{21} , a_{22} , a_{23} 分别换成任意数 u , v , w 得:

$$a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

将其中 a_{21}, a_{22}, a_{23} 分别换成任意数 u, v, w 得：

$$\Rightarrow uA_{21} + vA_{22} + wA_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ u & v & w \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

将其中 a_{21}, a_{22}, a_{23} 分别换成任意数 u, v, w 得：

$$\Rightarrow uA_{21} + vA_{22} + wA_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ u & v & w \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

例 1 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$ ，计算 $A_{13} + 4A_{23} - 5A_{33}$

$$a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

将其中 a_{21}, a_{22}, a_{23} 分别换成任意数 u, v, w 得：

$$\Rightarrow uA_{21} + vA_{22} + wA_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ u & v & w \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

例 1 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$ ，计算 $A_{13} + 4A_{23} - 5A_{33}$

解

$$A_{13} + 4A_{23} - 5A_{33}$$

$$a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

将其中 a_{21}, a_{22}, a_{23} 分别换成任意数 u, v, w 得：

$$\Rightarrow uA_{21} + vA_{22} + wA_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ u & v & w \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

例 1 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$ ，计算 $A_{13} + 4A_{23} - 5A_{33}$

解

$$A_{13} + 4A_{23} - 5A_{33} = 1 \cdot A_{13} + 4 \cdot A_{23} + (-5) \cdot A_{33}$$

$$a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

将其中 a_{21}, a_{22}, a_{23} 分别换成任意数 u, v, w 得：

$$\Rightarrow uA_{21} + vA_{22} + wA_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ u & v & w \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

例 1 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$ ，计算 $A_{13} + 4A_{23} - 5A_{33}$

解

$$\begin{aligned} A_{13} + 4A_{23} - 5A_{33} &= 1 \cdot A_{13} + 4 \cdot A_{23} + (-5) \cdot A_{33} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 8 & -6 & -5 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

将其中 a_{21}, a_{22}, a_{23} 分别换成任意数 u, v, w 得：

$$\Rightarrow uA_{21} + vA_{22} + wA_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ u & v & w \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

例 1 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$ ，计算 $A_{13} + 4A_{23} - 5A_{33}$

解

$$\begin{aligned} A_{13} + 4A_{23} - 5A_{33} &= 1 \cdot A_{13} + 4 \cdot A_{23} + (-5) \cdot A_{33} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 8 & -6 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{c_2 - 2c_1}}} \end{aligned}$$

$$a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

将其中 a_{21}, a_{22}, a_{23} 分别换成任意数 u, v, w 得：

$$\Rightarrow uA_{21} + vA_{22} + wA_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ u & v & w \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

例 1 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$ ，计算 $A_{13} + 4A_{23} - 5A_{33}$

解

$$\begin{aligned} A_{13} + 4A_{23} - 5A_{33} &= 1 \cdot A_{13} + 4 \cdot A_{23} + (-5) \cdot A_{33} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 8 & -6 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2 - 2c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 8 & -22 & -5 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

将其中 a_{21}, a_{22}, a_{23} 分别换成任意数 u, v, w 得：

$$\Rightarrow uA_{21} + vA_{22} + wA_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ u & v & w \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

例 1 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$ ，计算 $A_{13} + 4A_{23} - 5A_{33}$

解

$$\begin{aligned} A_{13} + 4A_{23} - 5A_{33} &= 1 \cdot A_{13} + 4 \cdot A_{23} + (-5) \cdot A_{33} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 8 & -6 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{c_2 - 2c_1 \\ c_3 - c_1}]{} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 8 & -22 & -13 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

将其中 a_{21}, a_{22}, a_{23} 分别换成任意数 u, v, w 得：

$$\Rightarrow uA_{21} + vA_{22} + wA_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ u & v & w \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

例 1 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$ ，计算 $A_{13} + 4A_{23} - 5A_{33}$

解

$$\begin{aligned} A_{13} + 4A_{23} - 5A_{33} &= 1 \cdot A_{13} + 4 \cdot A_{23} + (-5) \cdot A_{33} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 8 & -6 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{c_2 - 2c_1 \\ c_3 - c_1}]{} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 8 & -22 & -13 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

将其中 a_{21}, a_{22}, a_{23} 分别换成任意数 u, v, w 得：

$$\Rightarrow uA_{21} + vA_{22} + wA_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ u & v & w \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

例 1 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$ ，计算 $A_{13} + 4A_{23} - 5A_{33}$

解

$$\begin{aligned} A_{13} + 4A_{23} - 5A_{33} &= 1 \cdot A_{13} + 4 \cdot A_{23} + (-5) \cdot A_{33} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 8 & -6 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{c_2-2c_1 \\ c_3-c_1}]{} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 8 & -22 & -13 \end{vmatrix} = 48 \end{aligned}$$

例 2 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$, 计算第 2 行的余子式之和

例 2 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$, 计算第 2 行的余子式之和

解

$$M_{21} + M_{22} + M_{23}$$

例 2 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$, 计算第 2 行的余子式之和

解

$$M_{21} + M_{22} + M_{23} = (-1) \cdot A_{21}$$

例 2 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$, 计算第 2 行的余子式之和

解

$$M_{21} + M_{22} + M_{23} = (-1) \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{22}$$

例 2 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$, 计算第 2 行的余子式之和

解

$$M_{21} + M_{22} + M_{23} = (-1) \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{22} + (-1) \cdot A_{23}$$

例 2 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$, 计算第 2 行的余子式之和

解

$$\begin{aligned} M_{21} + M_{22} + M_{23} &= (-1) \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{22} + (-1) \cdot A_{23} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

例 2 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$, 计算第 2 行的余子式之和

解

$$\begin{aligned} M_{21} + M_{22} + M_{23} &= (-1) \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{22} + (-1) \cdot A_{23} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1+C_2} \end{aligned}$$

例 2 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$, 计算第 2 行的余子式之和

解

$$\begin{aligned} M_{21} + M_{22} + M_{23} &= (-1) \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{22} + (-1) \cdot A_{23} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1+C_2} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

例 2 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$, 计算第 2 行的余子式之和

解

$$\begin{aligned} M_{21} + M_{22} + M_{23} &= (-1) \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{22} + (-1) \cdot A_{23} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1+C_2} \begin{vmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 5 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

例 2 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$, 计算第 2 行的余子式之和

解

$$\begin{aligned} M_{21} + M_{22} + M_{23} &= (-1) \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{22} + (-1) \cdot A_{23} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1+c_2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

例 2 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$, 计算第 2 行的余子式之和

解

$$\begin{aligned} M_{21} + M_{22} + M_{23} &= (-1) \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{22} + (-1) \cdot A_{23} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow[c_3+c_2]{c_1+c_2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

例 2 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$, 计算第 2 行的余子式之和

解

$$\begin{aligned} M_{21} + M_{22} + M_{23} &= (-1) \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{22} + (-1) \cdot A_{23} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{C_1+C_2 \\ C_3+C_2}]{\substack{C_1+C_2 \\ C_3+C_2}} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & -1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

例 2 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$, 计算第 2 行的余子式之和

解

$$\begin{aligned} M_{21} + M_{22} + M_{23} &= (-1) \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{22} + (-1) \cdot A_{23} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{C_1+C_2 \\ C_3+C_2}]{\substack{C_1+C_2 \\ C_3+C_2}} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

例 2 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$, 计算第 2 行的余子式之和

解

$$\begin{aligned} M_{21} + M_{22} + M_{23} &= (-1) \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{22} + (-1) \cdot A_{23} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{C_1+C_2 \\ C_3+C_2}]{\substack{C_1+C_2 \\ C_3+C_2}} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \end{aligned}$$

例 2 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$, 计算第 2 行的余子式之和

解

$$\begin{aligned} M_{21} + M_{22} + M_{23} &= (-1) \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{22} + (-1) \cdot A_{23} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow[c_3+c_2]{c_1+c_2} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \end{aligned}$$

例 3 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, 计算 $3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

例 3 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, 计算 $3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

例 3 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, 计算 $3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

解

$$3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$$

例 3 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, 计算 $3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

解

$$\begin{aligned} & 3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44} \\ &= (-3) \cdot A_{41} \end{aligned}$$

例 3 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, 计算 $3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

解

$$\begin{aligned} & 3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44} \\ &= (-3) \cdot A_{41} + 4 \cdot A_{42} \end{aligned}$$

例 3 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, 计算 $3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

解

$$\begin{aligned} & 3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44} \\ &= (-3) \cdot A_{41} + 4 \cdot A_{42} + 5 \cdot A_{43} \end{aligned}$$

例 3 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, 计算 $3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

解

$$3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$$

$$= (-3) \cdot A_{41} + 4 \cdot A_{42} + 5 \cdot A_{43} + (-2) \cdot A_{44}$$

例3 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, 计算 $3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

解

$$3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$$

$$= (-3) \cdot A_{41} + 4 \cdot A_{42} + 5 \cdot A_{43} + (-2) \cdot A_{44}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -3 & 4 & 5 & -2 \end{vmatrix}$$

例3 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, 计算 $3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

解

$$3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$$

$$= (-3) \cdot A_{41} + 4 \cdot A_{42} + 5 \cdot A_{43} + (-2) \cdot A_{44}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -3 & 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{c_3 - 3c_2}}}$$

例 3 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, 计算 $3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

解

$$3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$$

$$= (-3) \cdot A_{41} + 4 \cdot A_{42} + 5 \cdot A_{43} + (-2) \cdot A_{44}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -3 & 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3 - 3c_2} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 18 & 5 \\ -3 & 4 & 13 & -2 \end{vmatrix}$$

例 3 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, 计算 $3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

解

$$3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$$

$$= (-3) \cdot A_{41} + 4 \cdot A_{42} + 5 \cdot A_{43} + (-2) \cdot A_{44}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -3 & 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{c_3 - 3c_2}}} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 18 & 5 \\ -3 & 4 & -7 & -2 \end{vmatrix}$$

例 3 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, 计算 $3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

解

$$3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$$

$$= (-3) \cdot A_{41} + 4 \cdot A_{42} + 5 \cdot A_{43} + (-2) \cdot A_{44}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -3 & 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{c_3 - 3c_2}}} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 18 & 5 \\ -3 & 4 & -7 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 4 & 18 & 5 \\ -3 & -7 & -2 \end{vmatrix}$$

例 3 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, 计算 $3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

解

$$3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$$

$$= (-3) \cdot A_{41} + 4 \cdot A_{42} + 5 \cdot A_{43} + (-2) \cdot A_{44}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -3 & 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3 - 3c_2} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 18 & 5 \\ -3 & 4 & -7 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 4 & 18 & 5 \\ -3 & -7 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 + r_1}$$

例 3 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, 计算 $3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

解

$$3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$$

$$= (-3) \cdot A_{41} + 4 \cdot A_{42} + 5 \cdot A_{43} + (-2) \cdot A_{44}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ \color{red}{-3} & \color{red}{4} & \color{red}{5} & \color{red}{-2} \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{c_3 - 3c_2}}} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 18 & 5 \\ -3 & 4 & -7 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 4 & 18 & 5 \\ -3 & -7 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\underline{\underline{r_3 + r_1}}} \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 4 & 18 & 5 \end{vmatrix}$$

例 3 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, 计算 $3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

解

$$3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$$

$$= (-3) \cdot A_{41} + 4 \cdot A_{42} + 5 \cdot A_{43} + (-2) \cdot A_{44}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -3 & 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{c_3 - 3c_2}}} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 18 & 5 \\ -3 & 4 & -7 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 4 & 18 & 5 \\ -3 & -7 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\underline{\underline{r_3 + r_1}}} \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 4 & 18 & 5 \\ 0 & -12 & -4 \end{vmatrix}$$

例 3 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, 计算 $3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

解

$$3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$$

$$= (-3) \cdot A_{41} + 4 \cdot A_{42} + 5 \cdot A_{43} + (-2) \cdot A_{44}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ \color{red}{-3} & \color{red}{4} & \color{red}{5} & \color{red}{-2} \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{c_3 - 3c_2}}} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 18 & 5 \\ -3 & 4 & -7 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 4 & 18 & 5 \\ -3 & -7 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\underline{\underline{r_3 + r_1}}} \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 4 & 18 & 5 \\ 0 & -12 & -4 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{c_2 - 3c_3}}}$$

例 3 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, 计算 $3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

解

$$3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$$

$$= (-3) \cdot A_{41} + 4 \cdot A_{42} + 5 \cdot A_{43} + (-2) \cdot A_{44}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ \color{red}{-3} & \color{red}{4} & \color{red}{5} & \color{red}{-2} \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{c_3 - 3c_2}}} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 18 & 5 \\ -3 & 4 & -7 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 4 & 18 & 5 \\ -3 & -7 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\underline{\underline{r_3 + r_1}}} \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 4 & 18 & 5 \\ 0 & -12 & -4 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{c_2 - 3c_3}}} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}$$

例 3 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, 计算 $3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

解

$$3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$$

$$= (-3) \cdot A_{41} + 4 \cdot A_{42} + 5 \cdot A_{43} + (-2) \cdot A_{44}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ \color{red}{-3} & \color{red}{4} & \color{red}{5} & \color{red}{-2} \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{c_3 - 3c_2}}} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 18 & 5 \\ -3 & 4 & -7 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 4 & 18 & 5 \\ -3 & -7 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\underline{\underline{r_3 + r_1}}} \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 4 & 18 & 5 \\ 0 & -12 & -4 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{c_2 - 3c_3}}} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

例 3 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, 计算 $3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

解

$$3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$$

$$= (-3) \cdot A_{41} + 4 \cdot A_{42} + 5 \cdot A_{43} + (-2) \cdot A_{44}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ \color{red}{-3} & \color{red}{4} & \color{red}{5} & \color{red}{-2} \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{c_3 - 3c_2}}} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 18 & 5 \\ -3 & 4 & -7 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 4 & 18 & 5 \\ -3 & -7 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\underline{\underline{r_3 + r_1}}} \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 4 & 18 & 5 \\ 0 & -12 & -4 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{c_2 - 3c_3}}} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = (-4) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$$

例 3 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, 计算 $3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

解

$$3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$$

$$= (-3) \cdot A_{41} + 4 \cdot A_{42} + 5 \cdot A_{43} + (-2) \cdot A_{44}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ \color{red}{-3} & \color{red}{4} & \color{red}{5} & \color{red}{-2} \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{c_3 - 3c_2}}} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 18 & 5 \\ -3 & 4 & -7 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 4 & 18 & 5 \\ -3 & -7 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\underline{\underline{r_3 + r_1}}} \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 4 & 18 & 5 \\ 0 & -12 & -4 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{c_2 - 3c_3}}} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = (-4) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -20$$

例 4 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 8 & 27 & 64 & 125 \end{vmatrix}$, 计算 $M_{41} - M_{42} + M_{43} - M_{44}$

例 4 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 8 & 27 & 64 & 125 \end{vmatrix}$, 计算 $M_{41} - M_{42} + M_{43} - M_{44}$

解

$$M_{41} - M_{42} + M_{43} - M_{44}$$

例 4 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 8 & 27 & 64 & 125 \end{vmatrix}$, 计算 $M_{41} - M_{42} + M_{43} - M_{44}$

解

$$\begin{aligned} & M_{41} - M_{42} + M_{43} - M_{44} \\ &= -A_{41} - A_{42} - A_{43} - A_{44} \end{aligned}$$

例 4 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 8 & 27 & 64 & 125 \end{vmatrix}$, 计算 $M_{41} - M_{42} + M_{43} - M_{44}$

解

$$\begin{aligned} & M_{41} - M_{42} + M_{43} - M_{44} \\ &= -A_{41} - A_{42} - A_{43} - A_{44} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

例 4 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 8 & 27 & 64 & 125 \end{vmatrix}$, 计算 $M_{41} - M_{42} + M_{43} - M_{44}$

解

$$\begin{aligned} & M_{41} - M_{42} + M_{43} - M_{44} \\ &= -A_{41} - A_{42} - A_{43} - A_{44} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

行列式展开的进一步应用

$$a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

将其中 a_{21} , a_{22} , a_{23} 分别换成任意数 u , v , w 得:

$$\Rightarrow uA_{21} + vA_{22} + wA_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ u & v & w \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

行列式展开的进一步应用

$$a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

将其中 a_{21} , a_{22} , a_{23} 分别换成任意数 u , v , w 得:

$$\Rightarrow uA_{21} + vA_{22} + wA_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ u & v & w \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

取 u , v , w 为第一行元素 a_{11} , a_{12} , a_{13}

$$\Rightarrow a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

行列式展开的进一步应用

$$a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

将其中 a_{21} , a_{22} , a_{23} 分别换成任意数 u , v , w 得:

$$\Rightarrow uA_{21} + vA_{22} + wA_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ u & v & w \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

取 u , v , w 为第一行元素 a_{11} , a_{12} , a_{13}

$$\Rightarrow a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

行列式展开定理

定理 对于行列式 D 的第 r 行元素和第 i 行代数余子式，我们有

行列式展开定理

定理 对于行列式 D 的第 r 行元素和第 i 行代数余子式，我们有

$$a_{r1} \quad a_{r2} \quad a_{rn}$$

行列式展开定理

定理 对于行列式 D 的第 r 行元素和第 i 行代数余子式，我们有

$$a_{r1}A_{i1} \quad a_{r2}A_{i2} \quad \dots \quad a_{rn}A_{in}$$

行列式展开定理

定理 对于行列式 D 的第 r 行元素和第 i 行代数余子式，我们有

$$a_{r1}A_{i1} + a_{r2}A_{i2} + \cdots + a_{rn}A_{in}$$

行列式展开定理

定理 对于行列式 D 的第 r 行元素和第 i 行代数余子式，我们有

$$a_{r1}A_{i1} + a_{r2}A_{i2} + \cdots + a_{rn}A_{in} = \begin{cases} 1 & \text{若 } i = r \\ 0 & \text{若 } i \neq r \end{cases}$$

行列式展开定理

定理 对于行列式 D 的第 r 行元素和第 i 行代数余子式，我们有

$$a_{r1}A_{i1} + a_{r2}A_{i2} + \cdots + a_{rn}A_{in} = \begin{cases} D & \text{若 } i = r \\ 0 & \text{若 } i \neq r \end{cases}$$

行列式展开定理

定理 对于行列式 D 的第 r 行元素和第 i 行代数余子式，我们有

$$a_{r1}A_{i1} + a_{r2}A_{i2} + \cdots + a_{rn}A_{in} = \begin{cases} D & \text{若 } i = r \\ 0 & \text{若 } i \neq r \end{cases}$$

行列式展开定理

定理 对于行列式 D 的第 r 行元素和第 i 行代数余子式，我们有

$$a_{r1}A_{i1} + a_{r2}A_{i2} + \cdots + a_{rn}A_{in} = \begin{cases} D & \text{若 } i = r \\ 0 & \text{若 } i \neq r \end{cases}$$

类似地，对于行列式 D 的第 s 列元素和第 j 列代数余子式，有

$$a_{1s}A_{1j} + a_{2s}A_{2j} + \cdots + a_{ns}A_{nj} =$$

行列式展开定理

定理 对于行列式 D 的第 r 行元素和第 i 行代数余子式，我们有

$$a_{r1}A_{i1} + a_{r2}A_{i2} + \cdots + a_{rn}A_{in} = \begin{cases} D & \text{若 } i = r \\ 0 & \text{若 } i \neq r \end{cases}$$

类似地，对于行列式 D 的第 s 列元素和第 j 列代数余子式，有

$$a_{1s}A_{1j} + a_{2s}A_{2j} + \cdots + a_{ns}A_{nj} = \begin{cases} D & \text{若 } j = s \\ 0 & \text{若 } j \neq s \end{cases}$$

行列式展开定理

定理 对于行列式 D 的第 r 行元素和第 i 行代数余子式，我们有

$$a_{r1}A_{i1} + a_{r2}A_{i2} + \cdots + a_{rn}A_{in} = \begin{cases} D & \text{若 } i = r \\ 0 & \text{若 } i \neq r \end{cases}$$

类似地，对于行列式 D 的第 s 列元素和第 j 列代数余子式，有

$$a_{1s}A_{1j} + a_{2s}A_{2j} + \cdots + a_{ns}A_{nj} = \begin{cases} D & \text{若 } j = s \\ 0 & \text{若 } j \neq s \end{cases}$$

行列式展开定理

定理 对于行列式 D 的第 r 行元素和第 i 行代数余子式，我们有

$$a_{r1}A_{i1} + a_{r2}A_{i2} + \cdots + a_{rn}A_{in} = \begin{cases} D & \text{若 } i = r \\ 0 & \text{若 } i \neq r \end{cases}$$

类似地，对于行列式 D 的第 s 列元素和第 j 列代数余子式，有

$$a_{1s}A_{1j} + a_{2s}A_{2j} + \cdots + a_{ns}A_{nj} = \begin{cases} D & \text{若 } j = s \\ 0 & \text{若 } j \neq s \end{cases}$$