第 11 章 c：积分路径无关；格林公式

数学系　梁卓滨

2016-2017 学年 II

例 证明积分 $\int_{(1,1)}^{(2,3)}(x+y)dx+(x-y)dy$ 的值与路径无关，并计算积分值。

解 只要说明向量场 $F=(x+y,x-y)$ 是梯度向量场：

$$(x+y,x-y)=\nabla f=(f_x,f_y)$$

$$\Rightarrow \quad f_x=x+y$$

$$\Rightarrow \quad f=\frac{1}{2}x^2+xy+C(y)$$

$$\Rightarrow \quad f_y=(\frac{1}{2}x^2+xy+C(y))'_y=x+C'(y)=x-y$$

$$\Rightarrow \quad C'(y)=-y \quad \Rightarrow \quad \text{不妨取} C(y)=-y$$

所以 $f=\frac{1}{2}x^2+xy-\frac{1}{2}y^2$ 满足 $\nabla f=(f_x,f_y)=(x+y,x-y)$。所以该曲线积分与路径无关，并且

$$\int_{(1,1)}^{(2,3)}(x+y)dx+(x-y)dy=f(2,3)-f(1,1)=\frac{5}{2}$$

例 证明积分 $\int_{(1,0)}^{(2,1)}(2xy-y^4+3)dx+(x^2-4xy^3)dy$ 的值与路径无关，并计算积分值。

解 只要说明向量场 $F=(2xy-y^4+3,\,x^2-4xy^3)$ 是梯度向量场：

$$(2xy-y^4+3,\,x^2-4xy^3)=\nabla f=(f_x,f_y)$$

$$\Rightarrow\quad f_x=2xy-y^4+3$$

$$\Rightarrow\quad f=x^2y-xy^4+3x+C(y)$$

$$\Rightarrow\quad f_y=(x^2y-xy^4+3x+C(y))'_y=x^2-4xy^3+C'(y)=x^2-4xy^3$$

$$\Rightarrow\quad C'(y)=0\quad\Rightarrow\quad \text{不妨取}C(y)=0$$

所以 $f=x^2y-xy^4+3x$ 满足

$\nabla f=(f_x,f_y)=(2xy-y^4+3,\,x^2-4xy^3)$。所以该曲线积分与路径无关，并且

$$\int_{(1,0)}^{(2,1)}(2xy-y^4+3)dx+(x^2-4xy^3)dy=f(2,1)-f(1,0)=11$$