第 1 章 b：极限

数学系　梁卓滨

2019-2020 学年 I

Outline

1. 数列极限
2. 函数极限
3. 极限运算
4. 极限性质
5. 两个重要极限
6. 无穷大，无穷小

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

We are here now...

1. 数列极限
2. 函数极限
3. 极限运算
4. 极限性质
5. 两个重要极限
6. 无穷大，无穷小

考察一个无穷数列 $\{x_n\}$：

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$

考察一个无穷数列 $\{x_n\}$：

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$

如果 n 无限增大时，x_n 无限接近一个数 a，则称 $\{x_n\}$ 的“极限”为 a

考察一个无穷数列 $\{x_n\}$：

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$

如果 n 无限增大时，x_n 无限接近一个数 a，则称 $\{x_n\}$ 的“极限”为 a

?

考察一个无穷数列 $\{x_n\}$：

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$

如果 $\boxed{n \text{ 无限增大时，} x_n \text{ 无限接近一个数 } a}$，则称 $\{x_n\}$ 的“极限”为 a

?

定义 任意给定 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N，使得 $n > N$ 时，有 $|x_n - a| < \varepsilon$，则称 a 是 $\{x_n\}$ 的**极限**

考察一个无穷数列 $\{x_n\}$：

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$

如果 $\boxed{n \text{ 无限增大时，} x_n \text{ 无限接近一个数 } a}$，则称 $\{x_n\}$ 的“极限”为 a

?

$x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$

定义 任意给定 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N，使得 $n > N$ 时，有 $\boxed{|x_n - a| < \varepsilon}$，则称 a 是 $\{x_n\}$ 的**极限**

考察一个无穷数列 $\{x_n\}$：

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$

如果 n 无限增大时，x_n 无限接近一个数 a，则称 $\{x_n\}$ 的“极限”为 a

?

$x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$

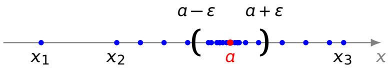
定义 任意给定 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N，使得 $n > N$ 时，有 $\boxed{|x_n - a| < \varepsilon}$，则称 a 是 $\{x_n\}$ 的**极限**

考察一个无穷数列 $\{x_n\}$：

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$

如果 n 无限增大时，x_n 无限接近一个数 a，则称 $\{x_n\}$ 的“极限”为 a

?



$x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$

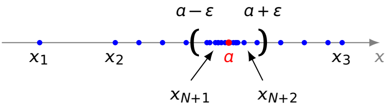
定义 任意给定 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N，使得 $n > N$ 时，有 $\boxed{|x_n - a| < \varepsilon}$，则称 a 是 $\{x_n\}$ 的**极限**

考察一个无穷数列 $\{x_n\}$：

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$

如果 n 无限增大时，x_n 无限接近一个数 a，则称 $\{x_n\}$ 的“极限”为 a

?



$x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$

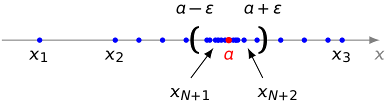
定义 任意给定 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N，使得 $n > N$ 时，有 $\boxed{|x_n - a| < \varepsilon}$，则称 a 是 $\{x_n\}$ 的**极限**

考察一个无穷数列 $\{x_n\}$：

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$

如果 n 无限增大时，x_n 无限接近一个数 a，则称 $\{x_n\}$ 的“极限”为 a

?



$x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$

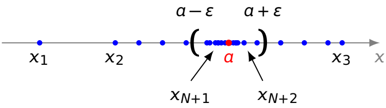
定义 任意给定 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N，使得 $n > N$ 时，有 $\boxed{|x_n - a| < \varepsilon}$，则称 a 是 $\{x_n\}$ 的**极限**，或称 $\{x_n\}$ **收敛于** a，

考察一个无穷数列 $\{x_n\}$：

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$

如果 n 无限增大时，x_n 无限接近一个数 a，则称 $\{x_n\}$ 的“极限”为 a

?



$x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$

定义 任意给定 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N，使得 $n > N$ 时，有 $\boxed{|x_n - a| < \varepsilon}$，则称 a 是 $\{x_n\}$ 的**极限**，或称 $\{x_n\}$ **收敛于** a，记为

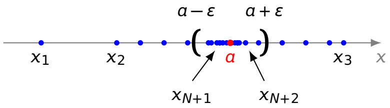
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \qquad 或 \qquad x_n \to a \quad (n \to \infty)$$

考察一个无穷数列 $\{x_n\}$：

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$

如果 $\boxed{n \text{ 无限增大时，} x_n \text{ 无限接近一个数 } a}$，则称 $\{x_n\}$ 的“极限”为 a

?



$x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$

定义 任意给定 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N，使得 $n > N$ 时，有 $\boxed{|x_n - a| < \varepsilon}$，则称 a 是 $\{x_n\}$ 的**极限**，或称 $\{x_n\}$ **收敛于** a，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \qquad \text{或} \qquad x_n \to a \quad (n \to \infty)$$

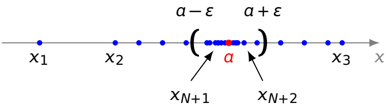
若不存在这样的数 a，称为 $\{x_n\}$ **发散**，或 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 不存在

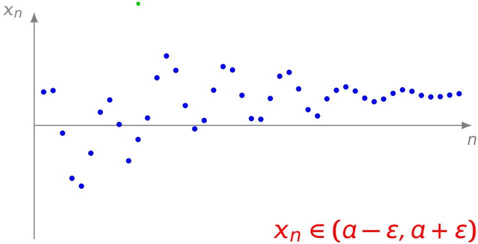
考察一个无穷数列 $\{x_n\}$：

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$

如果 $\boxed{n\text{ 无限增大时，}x_n\text{ 无限接近一个数 }a}$，则称 $\{x_n\}$ 的“极限”为 a

?





$x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$

定义 任意给定 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N，使得 $n > N$ 时，有 $\boxed{|x_n - a| < \varepsilon}$，则称 a 是 $\{x_n\}$ 的**极限**，或称 $\{x_n\}$ **收敛于** a，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \qquad \text{或} \qquad x_n \to a \quad (n \to \infty)$$

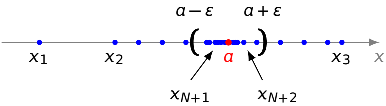
若不存在这样的数 a，称为 $\{x_n\}$ **发散**，或 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 不存在

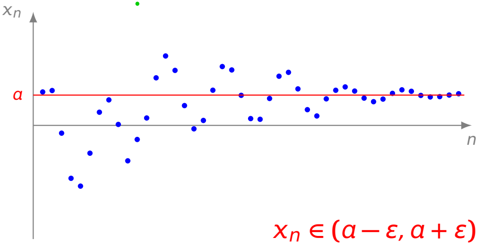
考察一个无穷数列 $\{x_n\}$：

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$

如果 $\boxed{n \text{ 无限增大时，} x_n \text{ 无限接近一个数 } a}$，则称 $\{x_n\}$ 的“极限”为 a

?





定义 任意给定 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N，使得 $n > N$ 时，有 $\boxed{|x_n - a| < \varepsilon}$，则称 a 是 $\{x_n\}$ 的**极限**，或称 $\{x_n\}$ **收敛于** a，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \qquad \text{或} \qquad x_n \to a \quad (n \to \infty)$$

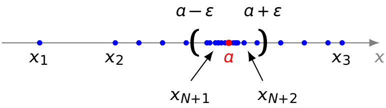
若不存在这样的数 a，称为 $\{x_n\}$ **发散**，或 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 不存在

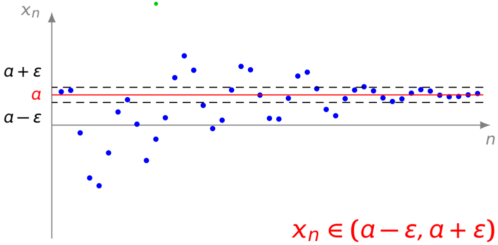
考察一个无穷数列 $\{x_n\}$：

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$

如果 n 无限增大时，x_n 无限接近一个数 a，则称 $\{x_n\}$ 的“极限”为 a

?





定义 任意给定 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N，使得 $n > N$ 时，有 $\boxed{|x_n - a| < \varepsilon}$，则称 a 是 $\{x_n\}$ 的**极限**，或称 $\{x_n\}$ **收敛于** a，记为

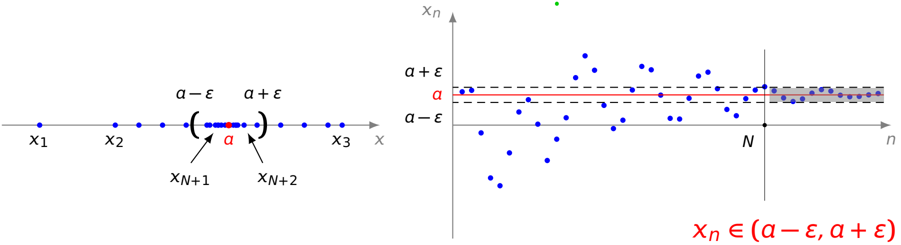
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \qquad \text{或} \qquad x_n \to a \quad (n \to \infty)$$

若不存在这样的数 a，称为 $\{x_n\}$ **发散**，或 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 不存在

考察一个无穷数列 $\{x_n\}$：

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$

如果 n 无限增大时，x_n 无限接近一个数 a，则称 $\{x_n\}$ 的“极限”为 a ?



定义 任意给定 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N，使得 $n > N$ 时，有 $\boxed{|x_n - a| < \varepsilon}$，则称 a 是 $\{x_n\}$ 的**极限**，或称 $\{x_n\}$ **收敛于** a，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \qquad \text{或} \qquad x_n \to a \quad (n \to \infty)$$

若不存在这样的数 a，称为 $\{x_n\}$ **发散**，或 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 不存在

例 1 证明 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

例 1 证明 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

证明 $\forall \varepsilon > 0$，取 $N =$ ，则当 $n > N$ 时，有

$$|x_n - 0| \qquad\qquad < \varepsilon$$

例 1 证明 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

证明 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=$ ，则当 $n>N$ 时，有

$$|x_n-0|=\left|\frac{1}{n}-0\right| \qquad <\varepsilon$$

例 1 证明 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

证明 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=$ ，则当 $n>N$ 时，有

$$|x_n-0|=\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}\qquad<\varepsilon$$

例 1 证明 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

证明 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=$ ，则当 $n>N$ 时，有

$$|x_n-0|=\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\varepsilon$$

例 1 证明 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

证明 $\forall \varepsilon > 0$，取 $N = (\text{一个大于} \frac{1}{\varepsilon} \text{的正整数})$，则当 $n > N$ 时，有

$$|x_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

例 1 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

证明 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=$ (一个大于 $\frac{1}{\varepsilon}$ 的正整数)，则当 $n>N$ 时，有

$$|x_n-0|=\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\varepsilon$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$

例 1 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

证明 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=$ (一个大于 $\frac{1}{\varepsilon}$ 的正整数)，则当 $n>N$ 时，有

$$|x_n-0|=\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\varepsilon$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$

例 2 证明数列 $2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots$ 的极限是 1

例 1 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

证明 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=$ (一个大于 $\frac{1}{\varepsilon}$ 的正整数)，则当 $n>N$ 时，有

$$|x_n-0|=\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\varepsilon$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$

例 2 证明数列 $2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots$ 的极限是 1

证明 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=$ ，则当 $n>N$ 时，有

$$|x_n-1| \qquad\qquad\qquad\qquad <\varepsilon$$

例 1 证明 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

证明 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=$(一个大于 $\frac{1}{\varepsilon}$ 的正整数)，则当 $n>N$ 时，有

$$|x_n-0|=\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\varepsilon$$

所以 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$

例 2 证明数列 $2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots$ 的极限是 1

证明 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=$ ，则当 $n>N$ 时，有

$$|x_n-1|=\left|\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right| \qquad <\varepsilon$$

例 1 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

证明 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=$ (一个大于 $\frac{1}{\varepsilon}$ 的正整数)，则当 $n>N$ 时，有

$$|x_n-0|=\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\varepsilon$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$

例 2 证明数列 $2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots$ 的极限是 1

证明 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=$ ，则当 $n>N$ 时，有

$$|x_n-1|=\left|\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|=\frac{1}{n}\qquad<\varepsilon$$

例 1 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

证明 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=$(一个大于 $\frac{1}{\varepsilon}$ 的正整数)，则当 $n>N$ 时，有

$$|x_n-0|=\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\varepsilon$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$

例 2 证明数列 $2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots$ 的极限是 1

证明 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=$ ，则当 $n>N$ 时，有

$$|x_n-1|=\left|\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|=\frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\varepsilon$$

例 1 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

证明 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=($一个大于 $\frac{1}{\varepsilon}$ 的正整数$)$，则当 $n>N$ 时，有

$$|x_n-0|=\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\varepsilon$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$

例 2 证明数列 $2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots$ 的极限是 1

证明 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=($一个大于 $\frac{1}{\varepsilon}$ 的正整数$)$，则当 $n>N$ 时，有

$$|x_n-1|=\left|\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|=\frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\varepsilon$$

例 1 证明 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

证明 $\forall \varepsilon > 0$，取 $N = (\text{一个大于 } \frac{1}{\varepsilon} \text{ 的正整数})$，则当 $n > N$ 时，有

$$|x_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

所以 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

例 2 证明数列 $2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}, \cdots$ 的极限是 1

证明 $\forall \varepsilon > 0$，取 $N = (\text{一个大于 } \frac{1}{\varepsilon} \text{ 的正整数})$，则当 $n > N$ 时，有

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n + (-1)^{n-1}}{n} - 1\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

所以 $\lim_{n\to\infty} \frac{n+(-1)^{n-1}}{n} = 1.$

例 3 设 $|q| < 1$，证明等比数列 $1, q, q^2, \cdots, q^{n-1}, \cdots$ 的极限是 0

例 3 设 $|q| < 1$，证明等比数列 $1, q, q^2, \cdots, q^{n-1}, \cdots$ 的极限是 0

证明 $\forall \varepsilon > 0$，取 $N =$ ，则当 $n > N$ 时，有

$$|x_n - 0| \qquad\qquad < \varepsilon$$

例 3 设 $|q|<1$，证明等比数列 $1, q, q^2, \cdots, q^{n-1}, \cdots$ 的极限是 0

证明 $\forall \varepsilon > 0$，取 $N =$ ，则当 $n > N$ 时，有

$$|x_n - 0| = \left|q^{n-1}\right| \qquad < \varepsilon$$

例 3 设 $|q| < 1$，证明等比数列 $1, q, q^2, \cdots, q^{n-1}, \cdots$ 的极限是 0

证明 $\forall \varepsilon > 0$，取 $N =$ ，则当 $n > N$ 时，有

$$|x_n - 0| = \left|q^{n-1}\right| \leq |q|^{n-1} \qquad < \varepsilon$$

例 3 设 $|q| < 1$，证明等比数列 $1, q, q^2, \cdots, q^{n-1}, \cdots$ 的极限是 0

证明 $\forall \varepsilon > 0$，取 $N =$ ，则当 $n > N$ 时，有

$$|x_n - 0| = \left|q^{n-1}\right| \le |q|^{n-1} \le |q|^N < \varepsilon$$

例 3 设 $|q|<1$，证明等比数列 $1, q, q^2, \cdots, q^{n-1}, \cdots$ 的极限是 0

证明 $\forall \varepsilon>0$，取 $N=$ ，则当 $n>N$ 时，有

$$|x_n-0|=\left|q^{n-1}\right| \leq |q|^{n-1} \leq \boxed{|q|^N<\varepsilon}$$

例 3 设 $|q| < 1$，证明等比数列 $1, q, q^2, \cdots, q^{n-1}, \cdots$ 的极限是 0

证明 $\forall \varepsilon > 0$，取 $N =$ ，则当 $n > N$ 时，有

$$|x_n - 0| = \left|q^{n-1}\right| \leq |q|^{n-1} \leq \boxed{|q|^N < \varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow N \ln |q| < \ln \varepsilon$$

例 3 设 $|q| < 1$，证明等比数列 $1, q, q^2, \cdots, q^{n-1}, \cdots$ 的极限是 0

证明 $\forall \varepsilon > 0$，取 $N =$ ，则当 $n > N$ 时，有

$$|x_n - 0| = \left|q^{n-1}\right| \le |q|^{n-1} \le \boxed{|q|^N < \varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow N \ln|q| < \ln\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow N > \frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$$

例 3 设 $|q| < 1$，证明等比数列 $1, q, q^2, \cdots, q^{n-1}, \cdots$ 的极限是 0

证明 $\forall \varepsilon > 0$，取 $N = $(一个大于 $\frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|}$ 的正整数)，则当 $n > N$ 时，有

$$|x_n - 0| = \left|q^{n-1}\right| \le |q|^{n-1} \le \boxed{|q|^N < \varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow N \ln |q| < \ln \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow N > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|}$$

例 3 设 $|q| < 1$，证明等比数列 $1, q, q^2, \cdots, q^{n-1}, \cdots$ 的极限是 0

证明 $\forall \varepsilon > 0$，取 $N =$ (一个大于 $\frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|}$ 的正整数)，则当 $n > N$ 时，有

$$|x_n - 0| = \left|q^{n-1}\right| \leq |q|^{n-1} \leq \boxed{|q|^N < \varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow N \ln |q| < \ln \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow N > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n-1} = 0.$

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

例 3 设 $|q| < 1$，证明等比数列 $1, q, q^2, \cdots, q^{n-1}, \cdots$ 的极限是 0

证明 $\forall \varepsilon > 0$，取 $N =$ (一个大于 $\frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|}$ 的正整数)，则当 $n > N$ 时，有

$$|x_n - 0| = \left|q^{n-1}\right| \leq |q|^{n-1} \leq \boxed{|q|^N < \varepsilon}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n-1} = 0$.

$\Leftrightarrow N \ln |q| < \ln \varepsilon$

$\Leftrightarrow N > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|}$

例 4 设 $x_n = 0.\underbrace{33\cdots3}_{n个3}$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{3}$

例 3 设 $|q| < 1$，证明等比数列 $1, q, q^2, \cdots, q^{n-1}, \cdots$ 的极限是 0

证明 $\forall \varepsilon > 0$，取 $N =$ (一个大于 $\frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|}$ 的正整数)，则当 $n > N$ 时，有

$$|x_n - 0| = \left|q^{n-1}\right| \le |q|^{n-1} \le \boxed{|q|^N < \varepsilon}$$

所以 $\lim_{n\to\infty} q^{n-1} = 0.$

$\Leftrightarrow N \ln |q| < \ln \varepsilon$

$\Leftrightarrow N > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|}$

例 4 设 $x_n = 0.\underbrace{33\cdots3}_{n\text{个}3}$，证明 $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{3}$

提示 $|x_n - \frac{1}{3}| = \frac{1}{3}|3x_n - 1| = \frac{1}{3} \times 10^{-n}$

例 3 设 $|q| < 1$，证明等比数列 $1, q, q^2, \cdots, q^{n-1}, \cdots$ 的极限是 0

证明 $\forall \varepsilon > 0$，取 $N =$ (一个大于 $\frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|}$ 的正整数)，则当 $n > N$ 时，有

$$|x_n - 0| = \left|q^{n-1}\right| \le |q|^{n-1} \le \boxed{|q|^N < \varepsilon}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n-1} = 0.$

$\Leftrightarrow N \ln |q| < \ln \varepsilon$

$\Leftrightarrow N > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|}$

例 4 设 $x_n = 0.\underbrace{33\cdots3}_{n\text{个}3}$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{3}$

提示 $|x_n - \frac{1}{3}| = \frac{1}{3}|3x_n - 1| = \frac{1}{3} \times 10^{-n}$

例 5 证明数列 $1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n-1}, \cdots$ 是发散

例 5 证明数列 $1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n-1}, \cdots$ 是发散

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

例 5 证明数列 $1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n-1}, \cdots$ 是发散

证明 反证法. 假设数列收敛，极限为 a.

例 5 证明数列 $1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n-1}, \cdots$ 是发散

证明 反证法. 假设数列收敛，极限为 a.则对 $\varepsilon = \frac{1}{2}$，存在正整数 N，当 $n > N$ 时

$$|x_n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2}$$

例 5 证明数列 $1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n-1},\cdots$ 是发散

证明 反证法. 假设数列收敛，极限为 a.则对 $\varepsilon=\frac{1}{2}$，存在正整数 N，当 $n>N$ 时

$$|x_n-a|<\varepsilon=\frac{1}{2}$$

从而有

$$|1-a|<\frac{1}{2} \quad \text{并且} \quad |-1-a|<\frac{1}{2}$$

例 5 证明数列 $1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n-1}, \cdots$ 是发散

证明 反证法. 假设数列收敛，极限为 a.则对 $\varepsilon = \frac{1}{2}$，存在正整数 N，当 $n > N$ 时

$$|x_n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2}$$

从而有

$$|1-a| < \frac{1}{2} \quad \text{并且} \quad |-1-a| < \frac{1}{2}$$

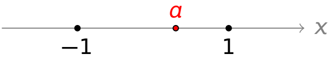
但上述两式不可能同时成立,

例 5 证明数列 $1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n-1}, \cdots$ 是发散

证明 反证法. 假设数列收敛，极限为 a.则对 $\varepsilon = \frac{1}{2}$，存在正整数 N，当 $n > N$ 时

$$|x_n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2}$$

从而有



$$|1 - a| < \frac{1}{2} \quad \text{并且} \quad |-1 - a| < \frac{1}{2}$$

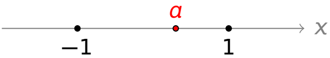
但上述两式不可能同时成立，

例 5 证明数列 $1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n-1}, \cdots$ 是发散

证明 反证法. 假设数列收敛，极限为 a.则对 $\varepsilon = \frac{1}{2}$，存在正整数 N，当 $n > N$ 时

$$|x_n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2}$$

从而有



$$|1 - a| < \frac{1}{2} \quad \text{并且} \quad |-1 - a| < \frac{1}{2}$$

但上述两式不可能同时成立，否则:

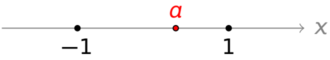
$$2 = (1 - a) + (1 + a)$$

例 5 证明数列 $1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n-1}, \cdots$ 是发散

证明 反证法. 假设数列收敛，极限为 a.则对 $\varepsilon = \frac{1}{2}$，存在正整数 N，当 $n > N$ 时

$$|x_n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2}$$

从而有



$$|1 - a| < \frac{1}{2} \quad \text{并且} \quad |-1 - a| < \frac{1}{2}$$

但上述两式不可能同时成立，否则：

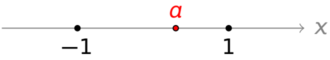
$$2 = (1 - a) + (1 + a) \leq |1 - a| + |1 + a|$$

例 5 证明数列 $1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n-1}, \cdots$ 是发散

证明 反证法. 假设数列收敛，极限为 a.则对 $\varepsilon = \frac{1}{2}$，存在正整数 N，当 $n > N$ 时

$$|x_n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2}$$

从而有



$$|1 - a| < \frac{1}{2} \quad \text{并且} \quad |-1 - a| < \frac{1}{2}$$

但上述两式不可能同时成立，否则：

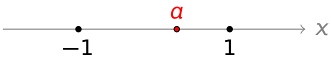
$$2 = (1 - a) + (1 + a) \leq |1 - a| + |1 + a| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

例 5 证明数列 $1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n-1}, \cdots$ 是发散

证明 反证法. 假设数列收敛，极限为 a.则对 $\varepsilon = \frac{1}{2}$，存在正整数 N，当 $n > N$ 时

$$|x_n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2}$$

从而有



$$|1 - a| < \frac{1}{2} \quad \text{并且} \quad |-1 - a| < \frac{1}{2}$$

但上述两式不可能同时成立，否则:

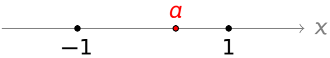
$$2 = (1 - a) + (1 + a) \leq |1 - a| + |1 + a| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

例 5 证明数列 $1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n-1}, \cdots$ 是发散

证明 反证法. 假设数列收敛，极限为 a.则对 $\varepsilon = \frac{1}{2}$，存在正整数 N，当 $n > N$ 时

$$|x_n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2}$$

从而有



$$|1 - a| < \frac{1}{2} \quad 并且 \quad |-1 - a| < \frac{1}{2}$$

但上述两式不可能同时成立，否则：

$$2 = (1 - a) + (1 + a) \leq |1 - a| + |1 + a| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

矛盾. 所以数列发散.

收敛数列的性质

性质 1 收敛数列的极限唯一.

收敛数列的性质

性质 1 收敛数列的极限唯一.

证明 反证法. 设 $\{x_n\}$ 有两个不同的极限 a，b.

收敛数列的性质

性质 1 收敛数列的极限唯一.

证明 反证法. 设 $\{x_n\}$ 有两个不同的极限 a，b.

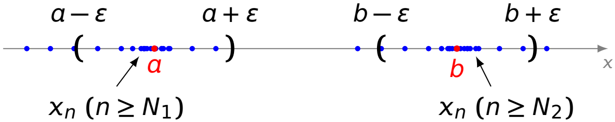
收敛数列的性质

性质 1 收敛数列的极限唯一.

证明 反证法. 设 $\{x_n\}$ 有两个不同的极限 a，b.

收敛数列的性质

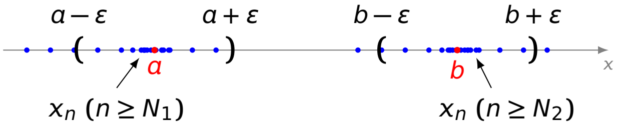
性质 1 收敛数列的极限唯一.



证明 反证法. 设 $\{x_n\}$ 有两个不同的极限 a，b.

收敛数列的性质

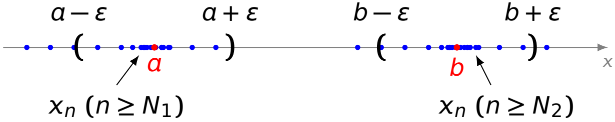
性质 1 收敛数列的极限唯一.



证明 反证法. 设 $\{x_n\}$ 有两个不同的极限 a，b. 取 $\varepsilon = \frac{1}{4}|a-b| > 0$.

收敛数列的性质

性质 1 收敛数列的极限唯一.

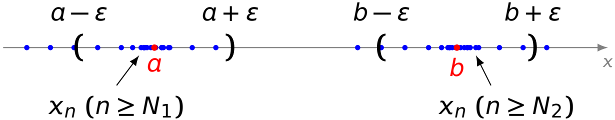


证明 反证法. 设 $\{x_n\}$ 有两个不同的极限 a，b. 取 $\varepsilon = \frac{1}{4}|a-b| > 0$.

- a 是 $\{x_n\}$ 极限 $\Rightarrow \exists N_1$，当 $n > N_1$ 时，$|x_n - a| < \varepsilon$.

收敛数列的性质

性质 1 收敛数列的极限唯一.

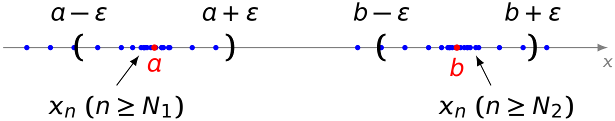


证明 反证法. 设 $\{x_n\}$ 有两个不同的极限 a，b. 取 $\varepsilon=\frac{1}{4}|a-b|>0$.

- a 是 $\{x_n\}$ 极限 $\Rightarrow \exists N_1$，当 $n>N_1$ 时，$|x_n-a|<\varepsilon$.
- b 是 $\{x_n\}$ 极限 $\Rightarrow \exists N_2$，当 $n>N_2$ 时，$|x_n-b|<\varepsilon$.

收敛数列的性质

性质 1 收敛数列的极限唯一.



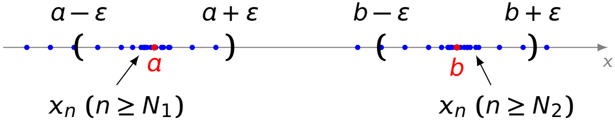
证明 反证法. 设 $\{x_n\}$ 有两个不同的极限 a，b. 取 $\varepsilon = \frac{1}{4}|a-b| > 0$.

- a 是 $\{x_n\}$ 极限 $\Rightarrow \exists N_1$，当 $n > N_1$ 时，$|x_n - a| < \varepsilon$.
- b 是 $\{x_n\}$ 极限 $\Rightarrow \exists N_2$，当 $n > N_2$ 时，$|x_n - b| < \varepsilon$.

当 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时，上述两个不等式同时成立，

收敛数列的性质

性质 1 收敛数列的极限唯一.



证明 反证法. 设 $\{x_n\}$ 有两个不同的极限 a，b. 取 $\varepsilon = \frac{1}{4}|a-b| > 0$.

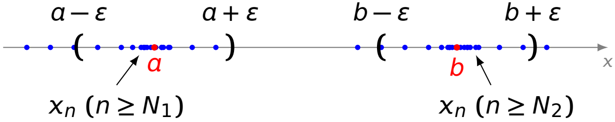
- a 是 $\{x_n\}$ 极限 $\Rightarrow \exists N_1$，当 $n > N_1$ 时，$|x_n - a| < \varepsilon$.
- b 是 $\{x_n\}$ 极限 $\Rightarrow \exists N_2$，当 $n > N_2$ 时，$|x_n - b| < \varepsilon$.

当 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时，上述两个不等式同时成立，从而

$$|a-b| = |a - x_n + x_n - b|$$

收敛数列的性质

性质 1 收敛数列的极限唯一.



证明 反证法. 设 $\{x_n\}$ 有两个不同的极限 a，b. 取 $\varepsilon = \frac{1}{4}|a-b| > 0$.

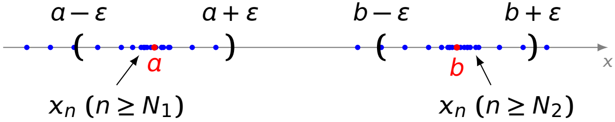
- a 是 $\{x_n\}$ 极限 $\Rightarrow \exists N_1$，当 $n > N_1$ 时，$|x_n - a| < \varepsilon$.
- b 是 $\{x_n\}$ 极限 $\Rightarrow \exists N_2$，当 $n > N_2$ 时，$|x_n - b| < \varepsilon$.

当 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时，上述两个不等式同时成立，从而

$$|a-b| = |a - x_n + x_n - b| \leq |a - x_n| + |x_n - b|$$

收敛数列的性质

性质 1 收敛数列的极限唯一.



证明 反证法. 设 $\{x_n\}$ 有两个不同的极限 a，b. 取 $\varepsilon = \frac{1}{4}|a-b| > 0$.

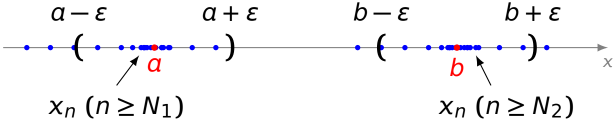
- a 是 $\{x_n\}$ 极限 $\Rightarrow \exists N_1$，当 $n > N_1$ 时，$|x_n - a| < \varepsilon$.
- b 是 $\{x_n\}$ 极限 $\Rightarrow \exists N_2$，当 $n > N_2$ 时，$|x_n - b| < \varepsilon$.

当 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时，上述两个不等式同时成立，从而

$$|a-b| = |a - x_n + x_n - b| \leq |a - x_n| + |x_n - b| < 2\varepsilon$$

收敛数列的性质

性质 1 收敛数列的极限唯一.



证明 反证法. 设 $\{x_n\}$ 有两个不同的极限 a，b. 取 $\varepsilon = \frac{1}{4}|a-b| > 0$.

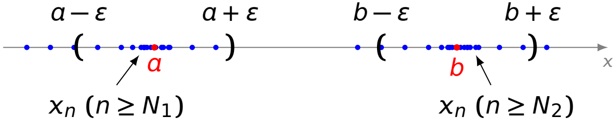
- a 是 $\{x_n\}$ 极限 $\Rightarrow \exists N_1$，当 $n > N_1$ 时，$|x_n - a| < \varepsilon$.
- b 是 $\{x_n\}$ 极限 $\Rightarrow \exists N_2$，当 $n > N_2$ 时，$|x_n - b| < \varepsilon$.

当 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时，上述两个不等式同时成立，从而

$$|a-b| = |a - x_n + x_n - b| \leq |a - x_n| + |x_n - b| < 2\varepsilon = \frac{1}{2}|a-b|$$

收敛数列的性质

性质 1 收敛数列的极限唯一.



证明 反证法. 设 $\{x_n\}$ 有两个不同的极限 a，b. 取 $\varepsilon = \frac{1}{4}|a-b| > 0$.

- a 是 $\{x_n\}$ 极限 $\Rightarrow \exists N_1$，当 $n > N_1$ 时，$|x_n - a| < \varepsilon$.
- b 是 $\{x_n\}$ 极限 $\Rightarrow \exists N_2$，当 $n > N_2$ 时，$|x_n - b| < \varepsilon$.

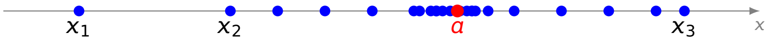
当 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时，上述两个不等式同时成立，从而

$$|a-b| = |a - x_n + x_n - b| \leq |a - x_n| + |x_n - b| < 2\varepsilon = \frac{1}{2}|a-b|$$

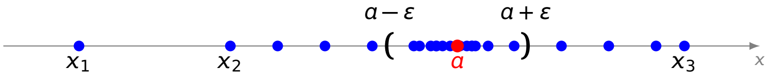
所以 $|a-b| < 0$，不可能.

性质 2 收敛数列一定有界.

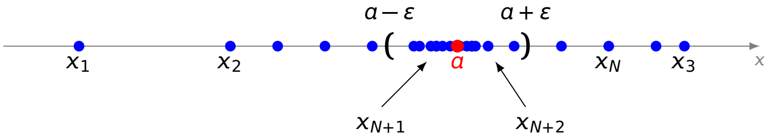
性质 2 收敛数列一定有界.



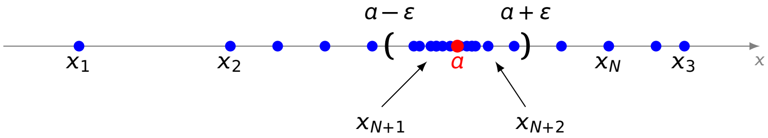
性质 2 收敛数列一定有界.



性质 2 收敛数列一定有界.



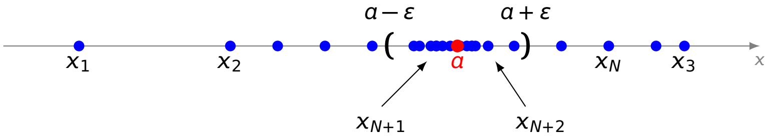
性质 2 收敛数列一定有界.



证明 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. 取 $\varepsilon = 1$，$\exists$ 正整数 N，当 $n > N$ 时，有

$$|x_n - a| < \varepsilon = 1.$$

性质 2 收敛数列一定有界.

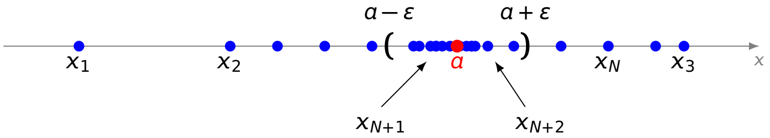


证明 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. 取 $\varepsilon = 1$，$\exists$ 正整数 N，当 $n > N$ 时，有

$$|x_n - a| < \varepsilon = 1.$$

从而 $|x_n| \leq |a| + 1$.

性质 2 收敛数列一定有界.



证明 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. 取 $\varepsilon = 1$，$\exists$ 正整数 N，当 $n > N$ 时，有

$$|x_n - a| < \varepsilon = 1.$$

从而 $|x_n| \le |a| + 1$.取

$$M = \max\{|x_1|, \cdots, |x_N|, |a| + 1\}$$

则对所有 n，成立

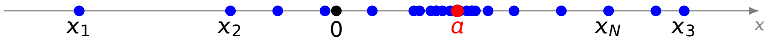
$$|x_n| \le M.$$

性质 3 设 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

- 若 $a > 0$，则 $\exists$ 正整数 N，当 $n > N$ 时，都有 $x_n > 0$.

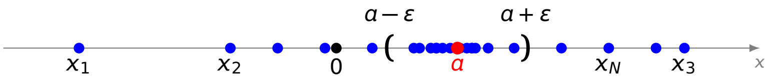
性质 3 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

- 若 $a > 0$，则 $\exists$ 正整数 N，当 $n > N$ 时，都有 $x_n > 0$.



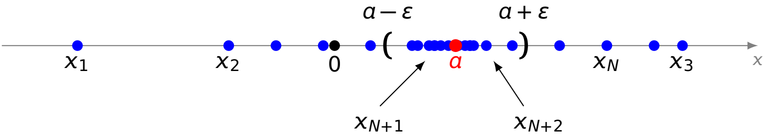
性质 3 设 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

- 若 $a > 0$，则 $\exists$ 正整数 N，当 $n > N$ 时，都有 $x_n > 0$.



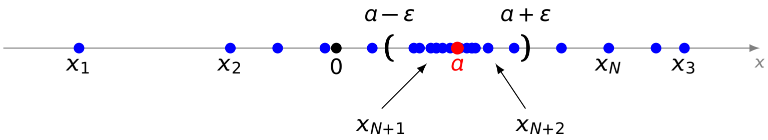
性质 3 设 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

- 若 $a > 0$，则 $\exists$ 正整数 N，当 $n > N$ 时，都有 $x_n > 0$.



性质 3 设 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

- 若 $a > 0$，则 ∃ 正整数 N，当 $n > N$ 时，都有 $x_n > 0$.

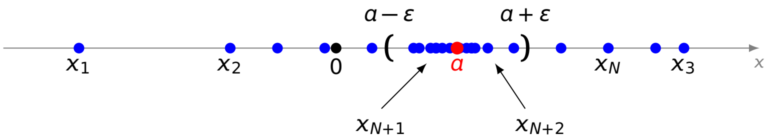


证明 设 $a > 0$，取 $\varepsilon = \frac{1}{2}a > 0$，∃$N$，当 $n > N$ 时，成立

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

性质 3 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

- 若 $a > 0$，则 $\exists$ 正整数 N，当 $n > N$ 时，都有 $x_n > 0$.

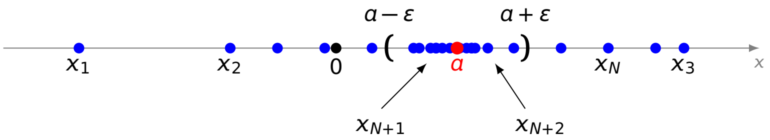


证明 设 $a > 0$，取 $\varepsilon = \frac{1}{2}a > 0$，$\exists N$，当 $n > N$ 时，成立

$$|x_n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2}a$$

性质 3 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

- 若 $a > 0$，则 ∃ 正整数 N，当 $n > N$ 时，都有 $x_n > 0$.

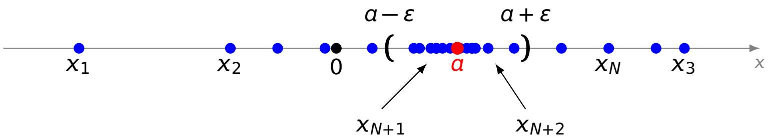


证明 设 $a > 0$，取 $\varepsilon = \frac{1}{2}a > 0$，∃$N$，当 $n > N$ 时，成立

$$|x_n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2}a \quad \Rightarrow \quad x_n > a - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a > 0$$

性质 3 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

- 若 $a > 0$，则 ∃ 正整数 N，当 $n > N$ 时，都有 $x_n > 0$.
- 若 $a < 0$，则 ∃ 正整数 N，当 $n > N$ 时，都有 $x_n < 0$.

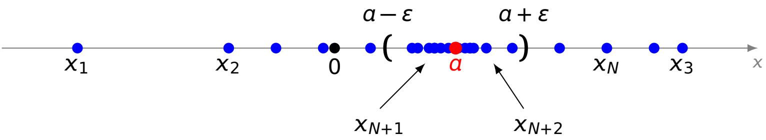


证明 设 $a > 0$，取 $\varepsilon = \frac{1}{2}a > 0$，∃$N$，当 $n > N$ 时，成立

$$|x_n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2}a \quad \Rightarrow \quad x_n > a - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a > 0$$

性质 3 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

- 若 $a > 0$，则 $\exists$ 正整数 N，当 $n > N$ 时，都有 $x_n > 0$.
- 若 $a < 0$，则 $\exists$ 正整数 N，当 $n > N$ 时，都有 $x_n < 0$.



证明 设 $a > 0$，取 $\varepsilon = \frac{1}{2}a > 0$，$\exists N$，当 $n > N$ 时，成立

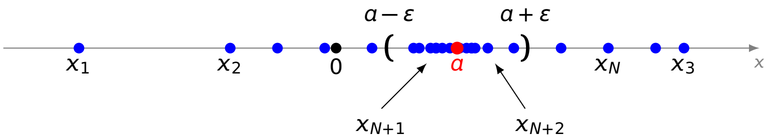
$$|x_n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2}a \quad \Rightarrow \quad x_n > a - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a > 0$$

推论 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

- 若从某一项开始 $x_n \geq 0$，则 $a \geq 0$.

性质 3 设 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

- 若 $a > 0$，则 ∃ 正整数 N，当 $n > N$ 时，都有 $x_n > 0$.
- 若 $a < 0$，则 ∃ 正整数 N，当 $n > N$ 时，都有 $x_n < 0$.



证明 设 $a > 0$，取 $\varepsilon = \frac{1}{2}a > 0$，∃$N$，当 $n > N$ 时，成立

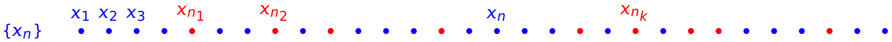
$$|x_n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2}a \quad \Rightarrow \quad x_n > a - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a > 0$$

推论 设 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

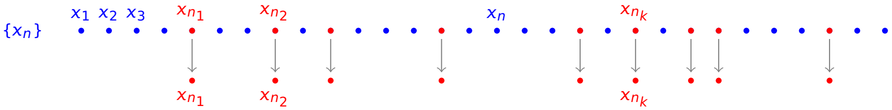
- 若从某一项开始 $x_n \geq 0$，则 $a \geq 0$.
- 若从某一项开始 $x_n \leq 0$，则 $a \leq 0$.

从数列 $\{x_n\}$ 中，依此抽取无穷多项出来：

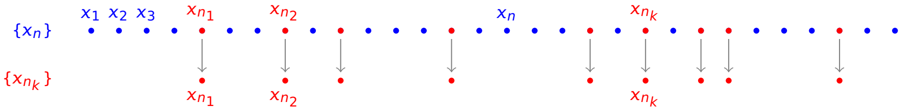
从数列 $\{x_n\}$ 中，依此抽取无穷多项出来：



从数列 $\{x_n\}$ 中，依此抽取无穷多项出来：

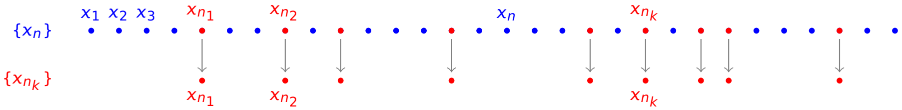


从数列 $\{x_n\}$ 中，依此抽取无穷多项出来：



所得到的 $\{x_{n_k}\}$ 称为 $\{x_n\}$ 的一个**子列**.

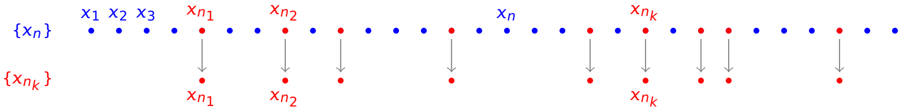
从数列 $\{x_n\}$ 中，依此抽取无穷多项出来:



所得到的 $\{x_{n_k}\}$ 称为 $\{x_n\}$ 的一个**子列**.

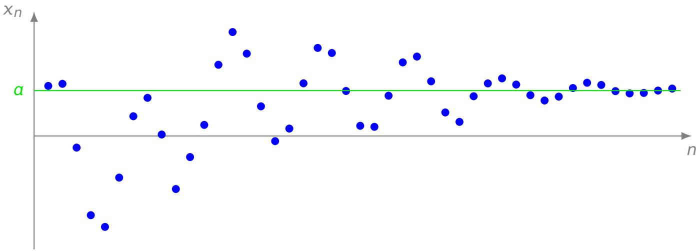
定理 “$\{x_n\}$ 收敛于 a” $\Leftrightarrow$ “任意子列 $\{x_{n_k}\}$ 都收敛于同一个 a”.

从数列 $\{x_n\}$ 中，依此抽取无穷多项出来：

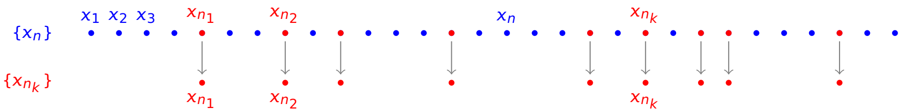


所得到的 $\{x_{n_k}\}$ 称为 $\{x_n\}$ 的一个**子列**.

定理 "$\{x_n\}$ 收敛于 a" $\Leftrightarrow$ "任意子列 $\{x_{n_k}\}$ 都收敛于同一个 a".

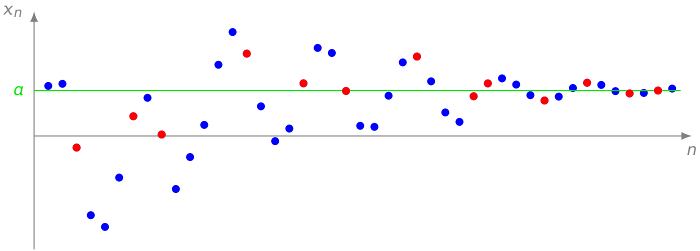


从数列 $\{x_n\}$ 中，依此抽取无穷多项出来：



所得到的 $\{x_{n_k}\}$ 称为 $\{x_n\}$ 的一个**子列**.

定理 "$\{x_n\}$ 收敛于 a" $\Leftrightarrow$ "任意子列 $\{x_{n_k}\}$ 都收敛于同一个 a".



例 数列 $1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n-1}, \cdots$ 发散.

例 数列 $1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n-1}, \cdots$ 发散.

证明 偶数项构成子列

$$1, 1, \cdots, 1, \cdots$$

奇数项构成子列

$$-1, -1, \cdots, -1, \cdots$$

这两个子列的极限显然不等，所以原数列发散.

We are here now...

1. 数列极限
2. 函数极限
3. 极限运算
4. 极限性质
5. 两个重要极限
6. 无穷大，无穷小

函数极限，简单说就是，当自变量无限“趋近”某个量时，函数值是否“趋于”一致.

函数极限，简单说就是，当自变量无限“趋近”某个量时，函数值是否“趋于”一致.

下面将介绍以下的极限过程：

$$\lim_{x\to x_0} f(x), \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x), \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x), \quad \lim_{x\to+\infty} f(x), \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

“$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$”：如果 x 无限接近 x_0 时，$f(x)$ 无限接近一个数 A，则称 $f(x)$ 在 $x \to x_0$ 时的“极限”为 A.

“$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$”：如果 x 无限接近 x_0 时，$f(x)$ 无限接近一个数 A，则称 $f(x)$ 在 $x \to x_0$ 时的“极限”为 A.

定义 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，

“$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$”：如果 x 无限接近 x_0 时，$f(x)$ 无限接近一个数 A，则称 $f(x)$ 在 $x \to x_0$ 时的“极限”为 A.

定义 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称 A 是 $f(x)$ 在 $x \to x_0$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \qquad \text{或} \qquad f(x) \to A \quad (x \to x_0)$$

“$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$”：如果 x 无限接近 x_0 时，$f(x)$ 无限接近一个数 A，则称 $f(x)$ 在 $x \to x_0$ 时的“极限”为 A.

定义 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称 A 是 $f(x)$ 在 $x \to x_0$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \qquad 或 \qquad f(x) \to A \quad (x \to x_0)$$

若不存在这样的数 A，称 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

“$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$”：如果 x 无限接近 x_0 时，$f(x)$ 无限接近一个数 A，则称 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的“极限”为 A.

定义 $\underbrace{\forall\varepsilon>0，\exists\delta>0}^{\varepsilon-\delta\text{语言}}$，使得 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 是 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \qquad \text{或} \qquad f(x)\to A \quad (x\to x_0)$$

若不存在这样的数 A，称 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在

“$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$”：如果 x 无限接近 x_0 时，$f(x)$ 无限接近一个数 A，则称 $f(x)$ 在 $x \to x_0$ 时的“极限”为 A.

f 在 x_0 去心邻域有定义，
而不必在 x_0 处有定义

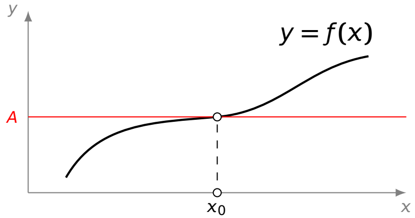
定义 $\underbrace{\forall \varepsilon > 0，\exists \delta > 0}_{\varepsilon-\delta\text{语言}}$，使得 $\boxed{0 < |x - x_0| < \delta}$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称 A 是 $f(x)$ 在 $x \to x_0$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \qquad \text{或} \qquad f(x) \to A \quad (x \to x_0)$$

若不存在这样的数 A，称 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 不存在

暨南大學
JINAN UNIVERSITY

“$\lim_{x\to x_0} f(x)=A$”：如果 x 无限接近 x_0 时，$f(x)$ 无限接近一个数 A，则称 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的“极限”为 A.



$$\underbrace{\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0}_{\varepsilon-\delta\text{语言}}$$

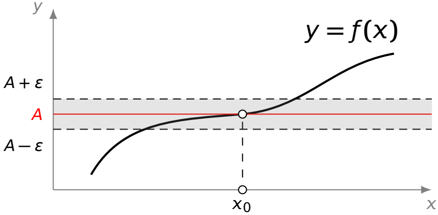
f 在 x_0 去心邻域有定义，
而不必在 x_0 处有定义

定义 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得 $\boxed{0<|x-x_0|<\delta}$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 是 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \qquad \text{或} \qquad f(x)\to A \quad (x\to x_0)$$

若不存在这样的数 A，称 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 不存在

"$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$"：如果 x 无限接近 x_0 时，$f(x)$ 无限接近一个数 A，则称 $f(x)$ 在 $x \to x_0$ 时的"极限"为 A.



f 在 x_0 去心邻域有定义，
而不必在 x_0 处有定义

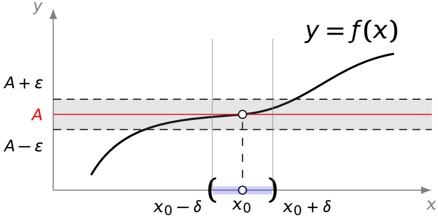
定义 $\underbrace{\forall \varepsilon > 0，\exists \delta > 0}_{\varepsilon-\delta\text{语言}}$，使得 $\boxed{0 < |x - x_0| < \delta}$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称 A 是 $f(x)$ 在 $x \to x_0$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \qquad \text{或} \qquad f(x) \to A \quad (x \to x_0)$$

若不存在这样的数 A，称 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 不存在

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

"$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$"：如果 x 无限接近 x_0 时，$f(x)$ 无限接近一个数 A，则称 $f(x)$ 在 $x \to x_0$ 时的"极限"为 A.



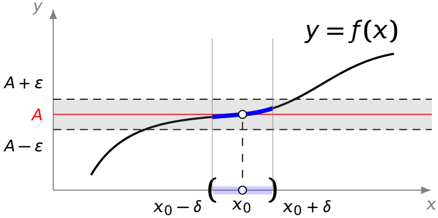
f 在 x_0 去心邻域有定义，
而不必在 x_0 处有定义

定义 $\overbrace{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0}^{\varepsilon-\delta\text{语言}}$，使得 $\boxed{0 < |x - x_0| < \delta}$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称 A 是 $f(x)$ 在 $x \to x_0$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \qquad \text{或} \qquad f(x) \to A \quad (x \to x_0)$$

若不存在这样的数 A，称 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在

“$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$”：如果 x 无限接近 x_0 时，$f(x)$ 无限接近一个数 A，则称 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的“极限”为 A.



f 在 x_0 去心邻域有定义，
而不必在 x_0 处有定义

定义 $\underbrace{\forall\varepsilon>0，\exists\delta>0}_{\varepsilon-\delta\text{语言}}$，使得 $\boxed{0<|x-x_0|<\delta}$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 是 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \qquad \text{或} \qquad f(x)\to A \quad (x\to x_0)$$

若不存在这样的数 A，称 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在

例 1 验证 $\lim\limits_{x\to x_0} c = c.$

例 2 验证 $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0.$

例 3 验证 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^2-2}{x-1} = 4.$

例 1 验证 $\lim_{x \to x_0} c = c$.

证明 这里 $f(x) \equiv c$ 是常值函数.

例 2 验证 $\lim_{x \to x_0} x = x_0$.

例 3 验证 $\lim_{x \to 1} \frac{2x^2-2}{x-1} = 4$.

例 1 验证 $\lim\limits_{x\to x_0} c = c.$

证明 这里 $f(x) \equiv c$ 是常值函数. $\forall \varepsilon > 0$，取 $\delta =$ ，则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有

$$|f(x) - c| \qquad\qquad < \varepsilon.$$

例 2 验证 $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0.$

例 3 验证 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^2-2}{x-1} = 4.$

例 1 验证 $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$.

证明 这里 $f(x) \equiv c$ 是常值函数. $\forall \varepsilon > 0$，取 $\delta =$ ，则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有

$$|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

例 2 验证 $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.

例 3 验证 $\lim\limits_{x \to 1} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} = 4$.

例 1 验证 $\lim\limits_{x \to x_0} c = c.$

证明 这里 $f(x) \equiv c$ 是常值函数. $\forall \varepsilon > 0$，取 $\delta = 1$，则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有

$$|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

例 2 验证 $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0.$

例 3 验证 $\lim\limits_{x \to 1} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} = 4.$

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

例 1 验证 $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$.

证明 这里 $f(x)\equiv c$ 是常值函数. $\forall \varepsilon > 0$，取 $\delta = 1$，则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有

$$|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$.

例 2 验证 $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$.

例 3 验证 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^2-2}{x-1} = 4$.

例 1 验证 $\lim\limits_{x\to x_0} c = c.$

证明 这里 $f(x)\equiv c$ 是常值函数. $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=1$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-c|=|c-c|=0<\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{x\to x_0} c = c.$

例 2 验证 $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0.$

证明 这里 $f(x)=x.$

例 3 验证 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-2}{x-1} = 4.$

例 1 验证 $\lim\limits_{x\to x_0} c = c.$

证明 这里 $f(x) \equiv c$ 是常值函数. $\forall \varepsilon > 0$，取 $\delta = 1$，则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有

$$|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{x\to x_0} c = c.$

例 2 验证 $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0.$

证明 这里 $f(x) = x$. $\forall \varepsilon > 0$，取 $\delta =$ ，则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有

$$|f(x) - x_0| \qquad\qquad \varepsilon.$$

例 3 验证 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^2-2}{x-1} = 4.$

例 1 验证 $\lim\limits_{x\to x_0} c = c.$

证明 这里 $f(x)\equiv c$ 是常值函数. $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=1$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-c| = |c-c| = 0 < \varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{x\to x_0} c = c.$

例 2 验证 $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0.$

证明 这里 $f(x)=x$. $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=$ ，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-x_0| = |x-x_0| \qquad \varepsilon.$$

例 3 验证 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2-2}{x-1} = 4.$

例 1 验证 $\lim\limits_{x\to x_0} c = c.$

证明 这里 $f(x)\equiv c$ 是常值函数. $\forall \varepsilon > 0$，取 $\delta = 1$，则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有

$$|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{x\to x_0} c = c.$

例 2 验证 $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0.$

证明 这里 $f(x) = x$. $\forall \varepsilon > 0$，取 $\delta =$ ，则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有

$$|f(x) - x_0| = |x - x_0| < \delta \quad \varepsilon.$$

例 3 验证 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^2-2}{x-1} = 4.$

例 1 验证 $\lim_{x\to x_0} c = c$.

证明 这里 $f(x)\equiv c$ 是常值函数. $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=1$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-c|=|c-c|=0<\varepsilon.$$

所以 $\lim_{x\to x_0} c = c$.

例 2 验证 $\lim_{x\to x_0} x = x_0$.

证明 这里 $f(x)=x$. $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-x_0|=|x-x_0|<\delta=\varepsilon.$$

例 3 验证 $\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-2}{x-1}=4$.

例 1 验证 $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$.

证明 这里 $f(x)\equiv c$ 是常值函数. $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=1$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-c| = |c-c| = 0 < \varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$.

例 2 验证 $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$.

证明 这里 $f(x)=x$. $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-x_0| = |x-x_0| < \delta = \varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$.

例 3 验证 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^2-2}{x-1} = 4$.

例 3 验证 $\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-2}{x-1}=4$

例 3 验证 $\lim\limits_{x\to1}\frac{2x^2-2}{x-1}=4$

证明 在 $x\to1$ 过程中，$x\neq1$，所以 $\frac{2x^2-2}{x-1}$ 有意义，并且

例 3 验证 $\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-2}{x-1}=4$

证明 在 $x\to 1$ 过程中，$x\neq 1$，所以 $\frac{2x^2-2}{x-1}$ 有意义，并且

$$\frac{2x^2-2}{x-1}=\frac{2(x-1)(x+1)}{x-1}$$

例 3 验证 $\lim_{x \to 1} \frac{2x^2-2}{x-1} = 4$

证明 在 $x \to 1$ 过程中，$x \neq 1$，所以 $\frac{2x^2-2}{x-1}$ 有意义，并且

$$\frac{2x^2-2}{x-1} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x-1} = 2x+2.$$

例 3 验证 $\lim_{x\to1}\frac{2x^2-2}{x-1}=4$

证明 在 $x\to1$ 过程中，$x\neq1$，所以 $\frac{2x^2-2}{x-1}$ 有意义，并且

$$\frac{2x^2-2}{x-1}=\frac{2(x-1)(x+1)}{x-1}=2x+2.$$

所以

$$\lim_{x\to1}\frac{2x^2-2}{x-1}=\lim_{x\to1}2x+2$$

例 3 验证 $\lim_{x\to 1} \frac{2x^2-2}{x-1} = 4$

证明 在 $x \to 1$ 过程中，$x \neq 1$，所以 $\frac{2x^2-2}{x-1}$ 有意义，并且

$$\frac{2x^2-2}{x-1} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x-1} = 2x+2.$$

所以

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^2-2}{x-1} = \lim_{x\to 1} 2x+2$$

所以只需证明

$$\lim_{x\to 1} 2x+2 = 4\ ?$$

例 3 验证 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2-2}{x-1}=4$

证明 在 $x\to 1$ 过程中，$x\neq 1$，所以 $\frac{2x^2-2}{x-1}$ 有意义，并且

$$\frac{2x^2-2}{x-1}=\frac{2(x-1)(x+1)}{x-1}=2x+2.$$

所以

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}2x+2$$

所以只需证明

$$\lim_{x\to 1}2x+2=4\ ?$$

$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=$ ，则当 $0<|x-2|<\delta$ 时，有

$$|2x+2-4|$$

所以极限为 2.

例 3 验证 $\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-2}{x-1}=4$

证明 在 $x\to 1$ 过程中，$x\neq 1$，所以 $\frac{2x^2-2}{x-1}$ 有意义，并且

$$\frac{2x^2-2}{x-1}=\frac{2(x-1)(x+1)}{x-1}=2x+2.$$

所以

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}2x+2$$

所以只需证明

$$\lim_{x\to 1}2x+2=4\,?$$

$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=$ ，则当 $0<|x-2|<\delta$ 时，有

$$|2x+2-4|=2|x-2|<2\delta$$

所以极限为 2.

例 3 验证 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2-2}{x-1}=4$

证明 在 $x\to 1$ 过程中，$x\neq 1$，所以 $\frac{2x^2-2}{x-1}$ 有意义，并且

$$\frac{2x^2-2}{x-1}=\frac{2(x-1)(x+1)}{x-1}=2x+2.$$

所以

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}2x+2$$

所以只需证明

$$\lim_{x\to 1}2x+2=4\ ?$$

$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=$ ，则当 $0<|x-2|<\delta$ 时，有

$$|2x+2-4|=2|x-2|<2\delta=\varepsilon.$$

所以极限为 2.

例 3 验证 $\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-2}{x-1}=4$

证明 在 $x\to 1$ 过程中，$x\neq 1$，所以 $\frac{2x^2-2}{x-1}$ 有意义，并且

$$\frac{2x^2-2}{x-1}=\frac{2(x-1)(x+1)}{x-1}=2x+2.$$

所以

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}2x+2$$

所以只需证明

$$\lim_{x\to 1}2x+2=4\ ?$$

$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\frac{1}{2}\varepsilon>0$，则当 $0<|x-2|<\delta$ 时，有

$$|2x+2-4|=2|x-2|<2\delta=\varepsilon.$$

所以极限为 2.

- “$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$”：

- “$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = B$”：

- “$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A$”：当 x 从左边无限接近 x_0 时，$f(x)$ 无限接近数 A，

- “$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = B$”：

- “$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$”：当 x 从左边无限接近 x_0 时，$f(x)$ 无限接近数 A，则称 $f(x)$ 在 $x\to x_0^-$ 时的 “**左极限**” 为 A. 也记为 $f(x_0^-)=A$.
- “$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=B$”：

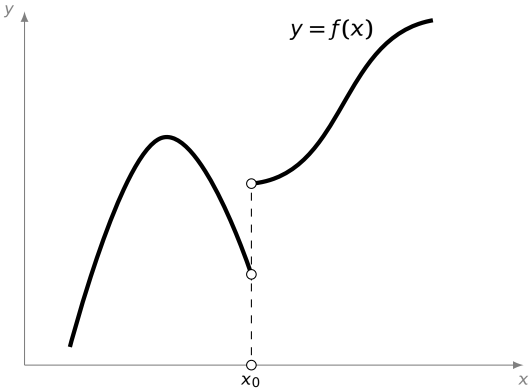
暨南大學 JINAN UNIVERSITY

- “$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A$”：当 x 从左边无限接近 x_0 时，$f(x)$ 无限接近数 A，则称 $f(x)$ 在 $x \to x_0^-$ 时的“**左极限**”为 A. 也记为 $f(x_0^-) = A$.
- “$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = B$”：当 x 从右边无限接近 x_0 时，$f(x)$ 无限接近数 B，

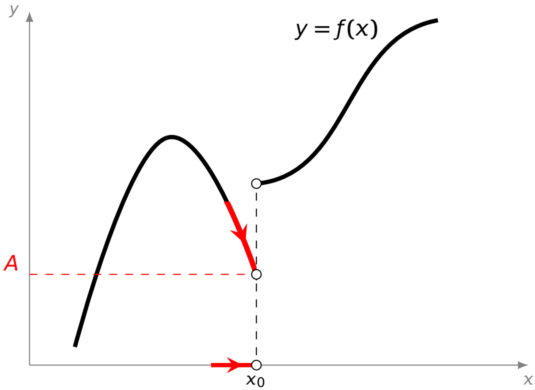
- “$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$”：当 x 从左边无限接近 x_0 时，$f(x)$ 无限接近数 A，则称 $f(x)$ 在 $x\to x_0^-$ 时的“**左极限**”为 A. 也记为 $f(x_0^-)=A$.
- “$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=B$”：当 x 从右边无限接近 x_0 时，$f(x)$ 无限接近数 B，则称 $f(x)$ 在 $x\to x_0^+$ 时的“**右极限**”为 A. 也记为 $f(x_0^+)=B$.

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

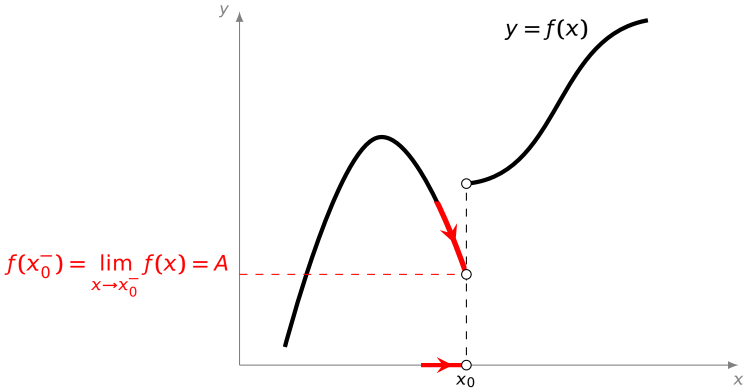
- “$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A$”：当 x 从左边无限接近 x_0 时，$f(x)$ 无限接近数 A，则称 $f(x)$ 在 $x \to x_0^-$ 时的“**左极限**”为 A. 也记为 $f(x_0^-) = A$.
- “$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = B$”：当 x 从右边无限接近 x_0 时，$f(x)$ 无限接近数 B，则称 $f(x)$ 在 $x \to x_0^+$ 时的“**右极限**”为 A. 也记为 $f(x_0^+) = B$.



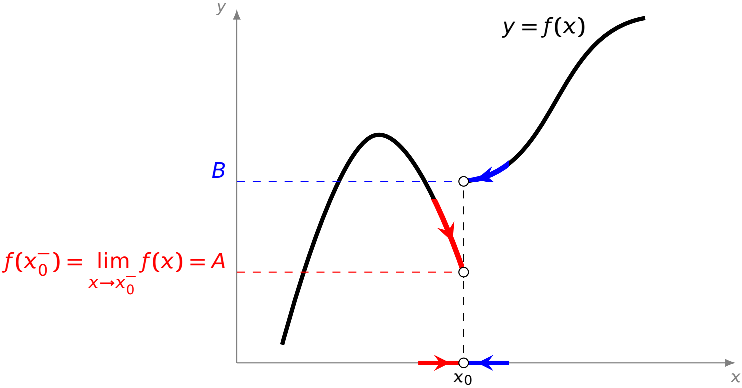
- “$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$”：当 x 从左边无限接近 x_0 时，$f(x)$ 无限接近数 A，则称 $f(x)$ 在 $x\to x_0^-$ 时的“**左极限**”为 A. 也记为 $f(x_0^-)=A$.
- “$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=B$”：当 x 从右边无限接近 x_0 时，$f(x)$ 无限接近数 B，则称 $f(x)$ 在 $x\to x_0^+$ 时的“**右极限**”为 A. 也记为 $f(x_0^+)=B$.



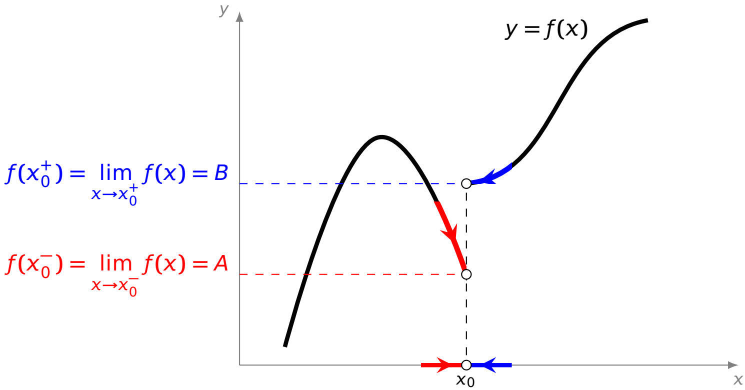
- “$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$”：当 x 从左边无限接近 x_0 时，$f(x)$ 无限接近数 A，则称 $f(x)$ 在 $x\to x_0^-$ 时的“**左极限**”为 A. 也记为 $f(x_0^-)=A$.
- “$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=B$”：当 x 从右边无限接近 x_0 时，$f(x)$ 无限接近数 B，则称 $f(x)$ 在 $x\to x_0^+$ 时的“**右极限**”为 A. 也记为 $f(x_0^+)=B$.



- “$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$”：当 x 从左边无限接近 x_0 时，$f(x)$ 无限接近数 A，则称 $f(x)$ 在 $x\to x_0^-$ 时的“**左极限**”为 A. 也记为 $f(x_0^-)=A$.
- “$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=B$”：当 x 从右边无限接近 x_0 时，$f(x)$ 无限接近数 B，则称 $f(x)$ 在 $x\to x_0^+$ 时的“**右极限**”为 A. 也记为 $f(x_0^+)=B$.



- “$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$”：当 x 从左边无限接近 x_0 时，$f(x)$ 无限接近数 A，则称 $f(x)$ 在 $x\to x_0^-$ 时的“**左极限**”为 A. 也记为 $f(x_0^-)=A$.
- “$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=B$”：当 x 从右边无限接近 x_0 时，$f(x)$ 无限接近数 B，则称 $f(x)$ 在 $x\to x_0^+$ 时的“**右极限**”为 A. 也记为 $f(x_0^+)=B$.



性质 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 均存在并相等. 此时，这三个极限相等.

性质 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 均存在并相等. 此时，这三个极限相等.

例 设

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x+1, & x>0. \end{cases}$$

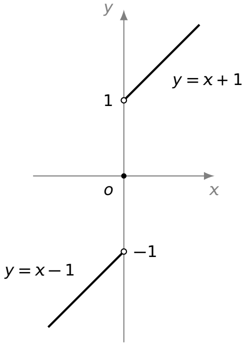
求出 $f(0^+)$ 和 $f(0^-)$，并证明 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

性质 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 均存在并相等. 此时，这三个极限相等.

例 设

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x+1, & x>0. \end{cases}$$

求出 $f(0^+)$ 和 $f(0^-)$，并证明 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

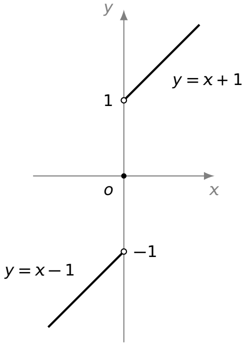


性质 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在 $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 均存在并相等. 此时，这三个极限相等.

例 设

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ x+1, & x>0. \end{cases}$$

求出 $f(0^+)$ 和 $f(0^-)$，并证明 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.



解 由

$$f(0^-)=$$

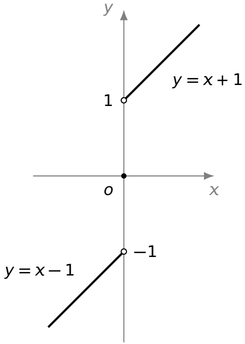
$$f(0^+)=$$

性质 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 均存在并相等. 此时，这三个极限相等.

例 设

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ x+1, & x>0. \end{cases}$$

求出 $f(0^+)$ 和 $f(0^-)$，并证明 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.



解 由

$$f(0^-)=\lim_{x\to 0^-} f(x)$$

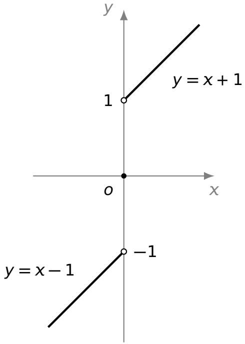
$$f(0^+)=$$

性质 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow$ $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ 均存在并相等. 此时，这三个极限相等.

例 设

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x+1, & x>0. \end{cases}$$

求出 $f(0^+)$ 和 $f(0^-)$，并证明 $\lim_{x\to 0} f(x)$ 不存在.



解 由

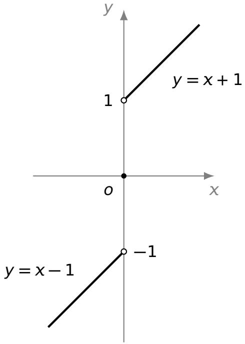
$$f(0^-)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x-1)$$

$$f(0^+)=$$

性质 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 均存在并相等. 此时，这三个极限相等.

例 设

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x+1, & x>0. \end{cases}$$



求出 $f(0^+)$ 和 $f(0^-)$，并证明 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

解 由

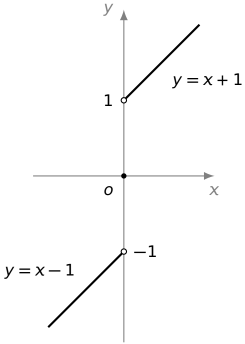
$$f(0^-)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x-1)\xlongequal{\text{上述性质}}\lim_{x\to 0}(x-1)$$

$$f(0^+)=$$

性质 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在 $\Longleftrightarrow$ $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ 均存在并相等. 此时，这三个极限相等.

例 设

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ x+1, & x>0. \end{cases}$$



求出 $f(0^+)$ 和 $f(0^-)$，并证明 $\lim_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

解 由

$$f(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(x-1) \xlongequal{\text{上述性质}} \lim_{x\to 0}(x-1) = -1$$

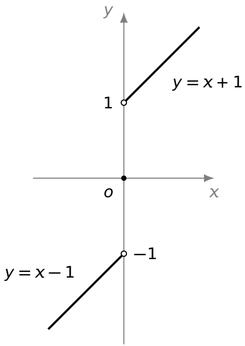
$$f(0^+) =$$

性质 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 均存在并相等. 此时，这三个极限相等.

例 设

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x+1, & x>0. \end{cases}$$

求出 $f(0^+)$ 和 $f(0^-)$，并证明 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

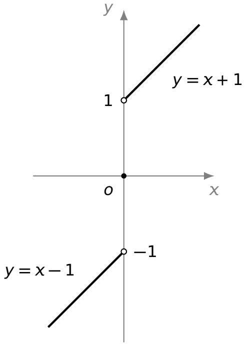


解 由

$$f(0^-)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x-1)\xlongequal{\text{上述性质}}\lim_{x\to 0}(x-1)=-1$$

$$f(0^+)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+1)\xlongequal{\text{上述性质}}\lim_{x\to 0}(x+1)=1$$

性质 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow$ $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ 均存在并相等. 此时，这三个极限相等.



例 设

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ x+1, & x>0. \end{cases}$$

求出 $f(0^+)$ 和 $f(0^-)$，并证明 $\lim_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

解 由

$$f(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(x-1) \xlongequal{\text{上述性质}} \lim_{x\to 0}(x-1) = -1$$

$$f(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x+1) \xlongequal{\text{上述性质}} \lim_{x\to 0}(x+1) = 1$$

知 $f(0^-) \neq f(0^+)$，所以 $\lim_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

“$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$”：当 $|x|$ 无限增大时，$f(x)$ 无限接近一个数 A.

“$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$”：当 $|x|$ 无限增大时，$f(x)$ 无限接近一个数 A.

定义 任意给定 $\varepsilon > 0$，存在正数 X，使得 $|x| > X$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，

"$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$"：当 $|x|$ 无限增大时，$f(x)$ 无限接近一个数 A.

$x < -X$ 且 $x > X$

定义 任意给定 $\varepsilon > 0$，存在正数 X，使得 $\boxed{|x| > X}$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，

“$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$”：当 $|x|$ 无限增大时，$f(x)$ 无限接近一个数 A.

$x < -X$ 且 $x > X$

定义 任意给定 $\varepsilon > 0$，存在正数 X，使得 $\boxed{|x| > X}$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称 A 是 $f(x)$ 在 $x \to \infty$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \qquad \text{或} \qquad f(x) \to A \quad (x \to \infty)$$

“$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$”：当 $|x|$ 无限增大时，$f(x)$ 无限接近一个数 A.

$x<-X$ 且 $x>X$

定义 任意给定 $\varepsilon>0$，存在正数 X，使得 $\boxed{|x|>X}$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 是 $f(x)$ 在 $x\to\infty$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \qquad \text{或} \qquad f(x)\to A \quad (x\to\infty)$$

若不存在这样的数 A，称 $f(x)$ 在 $x\to\infty$ 时**发散**，或 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 不存在.

暨南大学 JINAN UNIVERSITY

“$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$”：当 $|x|$ 无限增大时，$f(x)$ 无限接近一个数 A.

$x<-X$ 且 $x>X$

定义 任意给定 $\varepsilon>0$，存在正数 X，使得 $\boxed{|x|>X}$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 是 $f(x)$ 在 $x\to\infty$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \qquad \text{或} \qquad f(x)\to A \quad (x\to\infty)$$

若不存在这样的数 A，称 $f(x)$ 在 $x\to\infty$ 时**发散**，或 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 不存在.

例 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$

“$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$”：当 $|x|$ 无限增大时，$f(x)$ 无限接近一个数 A.

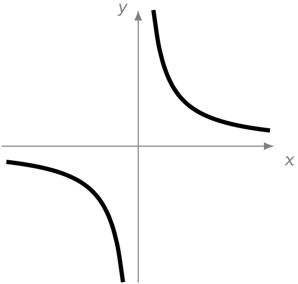
$x < -X$ 且 $x > X$

定义 任意给定 $\varepsilon > 0$，存在正数 X，使得 $\boxed{|x| > X}$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称 A 是 $f(x)$ 在 $x \to \infty$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \qquad \text{或} \qquad f(x) \to A \quad (x \to \infty)$$

若不存在这样的数 A，称 $f(x)$ 在 $x \to \infty$ 时**发散**，或 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 不存在.

例 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$



“$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$”：当 $|x|$ 无限增大时，$f(x)$ 无限接近一个数 A.

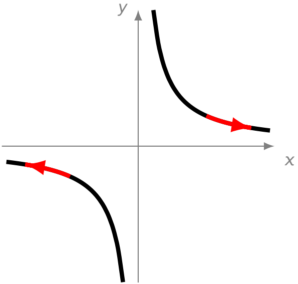
$x < -X$ 且 $x > X$

定义 任意给定 $\varepsilon > 0$，存在正数 X，使得 $\boxed{|x| > X}$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称 A 是 $f(x)$ 在 $x \to \infty$ 时的**极限**，记作

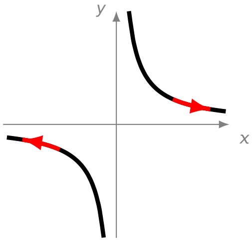
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \qquad 或 \qquad f(x) \to A \quad (x \to \infty)$$

若不存在这样的数 A，称 $f(x)$ 在 $x \to \infty$ 时**发散**，或 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 不存在.

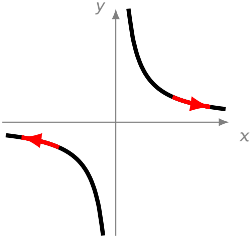
例 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.



例 1 证明 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$



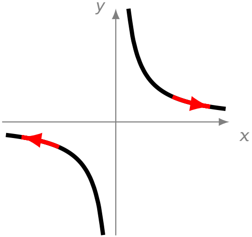
例 1 证明 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$



证明 $\forall \varepsilon > 0$，取 $X =$ ，当 $|x| > X$ 时，都有

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right|$$

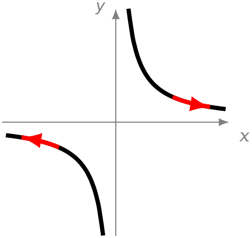
例 1 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$



证明 $\forall\varepsilon>0$，取 $X=$ 　　　　，当 $|x|>X$ 时，都有

$$\left|\frac{1}{x}-0\right|=\frac{1}{|x|}$$

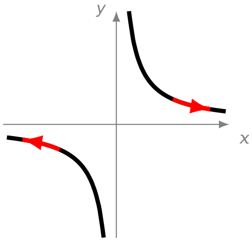
例 1 证明 $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$



证明 $\forall\varepsilon>0$，取 $X=$ ，当 $|x|>X$ 时，都有

$$\left|\frac{1}{x}-0\right|=\frac{1}{|x|}<\frac{1}{X}$$

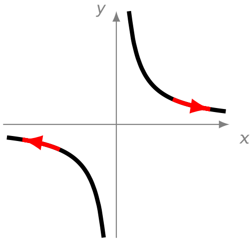
例 1 证明 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$



证明 $\forall \varepsilon > 0$，取 $X = \frac{1}{\varepsilon} > 0$，当 $|x| > X$ 时，都有

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| = \frac{1}{|x|} < \frac{1}{X} = \varepsilon.$$

例 1 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

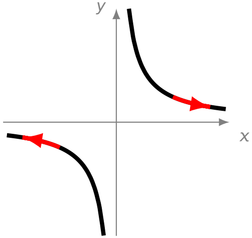


证明 $\forall\varepsilon>0$，取 $X=\frac{1}{\varepsilon}>0$，当 $|x|>X$ 时，都有

$$\left|\frac{1}{x}-0\right|=\frac{1}{|x|}<\frac{1}{X}=\varepsilon.$$

例 2 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$

例 1 证明 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$



证明 $\forall \varepsilon > 0$，取 $X = \frac{1}{\varepsilon} > 0$，当 $|x| > X$ 时，都有

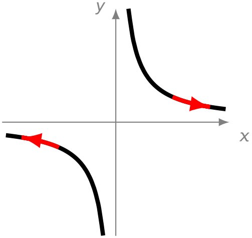
$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| = \frac{1}{|x|} < \frac{1}{X} = \varepsilon.$$

例 2 证明 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

证明 $\forall \varepsilon > 0$，取 $X = \qquad > 0$，当 $x > X$ 时，都有

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 0\right|$$

例 1 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$



证明 $\forall\varepsilon>0$，取 $X=\frac{1}{\varepsilon}>0$，当 $|x|>X$ 时，都有

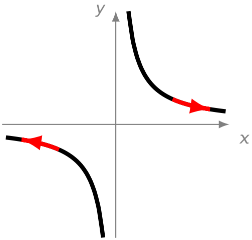
$$\left|\frac{1}{x}-0\right|=\frac{1}{|x|}<\frac{1}{X}=\varepsilon.$$

例 2 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$

证明 $\forall\varepsilon>0$，取 $X=\quad>0$，当 $x>X$ 时，都有

$$\left|\frac{\sin x}{x}-0\right|\le\frac{1}{|x|}$$

例 1 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$



证明 $\forall\varepsilon>0$，取 $X=\frac{1}{\varepsilon}>0$，当 $|x|>X$ 时，都有

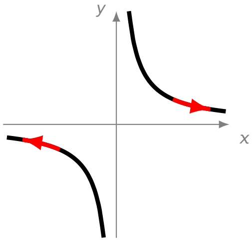
$$\left|\frac{1}{x}-0\right|=\frac{1}{|x|}<\frac{1}{X}=\varepsilon.$$

例 2 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$

证明 $\forall\varepsilon>0$，取 $X=\quad>0$，当 $x>X$ 时，都有

$$\left|\frac{\sin x}{x}-0\right|\le\frac{1}{|x|}<\frac{1}{X}$$

例 1 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$



证明 $\forall\varepsilon>0$，取 $X=\frac{1}{\varepsilon}>0$，当 $|x|>X$ 时，都有

$$\left|\frac{1}{x}-0\right|=\frac{1}{|x|}<\frac{1}{X}=\varepsilon.$$

例 2 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$

证明 $\forall\varepsilon>0$，取 $X=\frac{1}{\varepsilon}>0$，当 $x>X$ 时，都有

$$\left|\frac{\sin x}{x}-0\right|\le\frac{1}{|x|}<\frac{1}{X}=\varepsilon.$$

“$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$”：如果 x 无限增大时，$f(x)$ 无限接近一个数 A，则称 $f(x)$ 在 $x \to +\infty$ 时的“极限”为 A.

“$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$”：如果 x 无限增大时，$f(x)$ 无限接近一个数 A，则称 $f(x)$ 在 $x\to+\infty$ 时的“极限”为 A.

定义 任意给定 $\varepsilon > 0$，存在正数 X，使得 $x > X$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，

“$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$”：如果 x 无限增大时，$f(x)$ 无限接近一个数 A，则称 $f(x)$ 在 $x \to +\infty$ 时的“极限”为 A.

定义 任意给定 $\varepsilon > 0$，存在正数 X，使得 $x > X$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称 A 是 $f(x)$ 在 $x \to +\infty$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \qquad 或 \qquad f(x) \to A \quad (x \to +\infty)$$

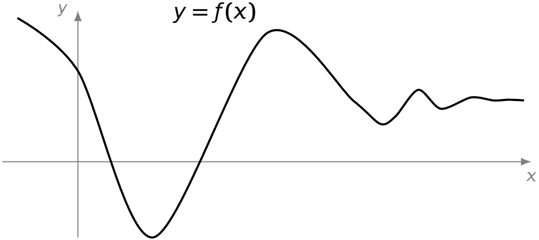
“$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$”：如果 x 无限增大时，$f(x)$ 无限接近一个数 A，则称 $f(x)$ 在 $x \to +\infty$ 时的“极限”为 A.

定义 任意给定 $\varepsilon > 0$，存在正数 X，使得 $x > X$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称 A 是 $f(x)$ 在 $x \to +\infty$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \qquad \text{或} \qquad f(x) \to A \quad (x \to +\infty)$$

若不存在这样的数 A，称 $f(x)$ 在 $x \to +\infty$ 时**发散**，或 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 不存在

“$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$”：如果 x 无限增大时，$f(x)$ 无限接近一个数 A，则称 $f(x)$ 在 $x\to+\infty$ 时的“极限”为 A.

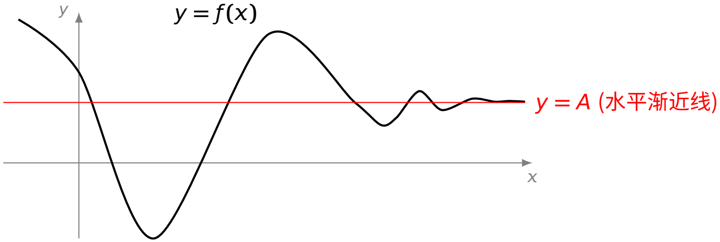


定义 任意给定 $\varepsilon>0$，存在正数 X，使得 $x>X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 是 $f(x)$ 在 $x\to+\infty$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \qquad \text{或} \qquad f(x)\to A \quad (x\to+\infty)$$

若不存在这样的数 A，称 $f(x)$ 在 $x\to+\infty$ 时**发散**，或 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 不存在

“$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$”：如果 x 无限增大时，$f(x)$ 无限接近一个数 A，则称 $f(x)$ 在 $x\to+\infty$ 时的“极限”为 A.



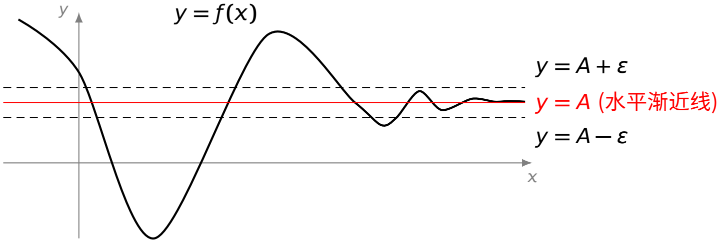
定义 任意给定 $\varepsilon>0$，存在正数 X，使得 $x>X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 是 $f(x)$ 在 $x\to+\infty$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \qquad 或 \qquad f(x)\to A \quad (x\to+\infty)$$

若不存在这样的数 A，称 $f(x)$ 在 $x\to+\infty$ 时**发散**，或 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 不存在

暨南大学 JINAN UNIVERSITY

“$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$”：如果 x 无限增大时，$f(x)$ 无限接近一个数 A，则称 $f(x)$ 在 $x\to+\infty$ 时的“极限”为 A.

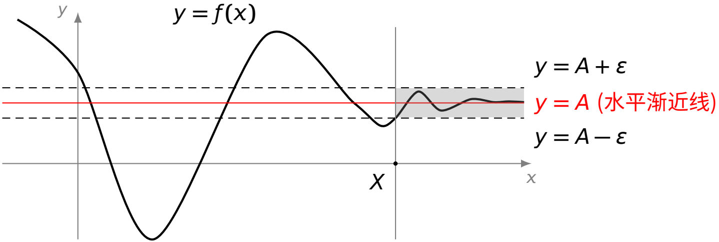


定义 任意给定 $\varepsilon > 0$，存在正数 X，使得 $x > X$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称 A 是 $f(x)$ 在 $x\to+\infty$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \qquad \text{或} \qquad f(x)\to A \quad (x\to+\infty)$$

若不存在这样的数 A，称 $f(x)$ 在 $x\to+\infty$ 时**发散**，或 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 不存在

“$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$”：如果 x 无限增大时，$f(x)$ 无限接近一个数 A，则称 $f(x)$ 在 $x \to +\infty$ 时的“极限”为 A.



定义 任意给定 $\varepsilon > 0$，存在正数 X，使得 $x > X$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称 A 是 $f(x)$ 在 $x \to +\infty$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \qquad \text{或} \qquad f(x) \to A \quad (x \to +\infty)$$

若不存在这样的数 A，称 $f(x)$ 在 $x \to +\infty$ 时**发散**，或 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 不存在

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

例 验证

1. $a > 1$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{a^x} = 0$.
2. $0 < b < 1$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty} b^x = 0$.

例 验证

1. $a > 1$ 时，$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{a^x} = 0.$
2. $0 < b < 1$ 时，$\lim\limits_{x \to +\infty} b^x = 0.$

证明 1. $\forall \varepsilon \in (0, 1)$，取 $X =$ ，当 $x > X$ 时，都有

$$\left| \frac{1}{a^x} - 0 \right| =$$

例 验证

1. $a > 1$ 时，$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{a^x} = 0.$
2. $0 < b < 1$ 时，$\lim\limits_{x \to +\infty} b^x = 0.$

证明 1. $\forall \varepsilon \in (0, 1)$，取 $X =$ ，当 $x > X$ 时，都有

$$\left| \frac{1}{a^x} - 0 \right| = a^{-x}$$

例 验证

1. $a > 1$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{a^x} = 0.$
2. $0 < b < 1$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty} b^x = 0.$

证明 1. $\forall \varepsilon \in (0,1)$，取 $X =$ ，当 $x > X$ 时，都有

$$\left|\frac{1}{a^x} - 0\right| = a^{-x} = e^{\ln a^{-x}}$$

例 验证

1. $a > 1$ 时，$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{a^x} = 0$.
2. $0 < b < 1$ 时，$\lim\limits_{x \to +\infty} b^x = 0$.

证明 1. $\forall \varepsilon \in (0, 1)$，取 $X =$ ，当 $x > X$ 时，都有

$$\left| \frac{1}{a^x} - 0 \right| = a^{-x} = e^{\ln a^{-x}}$$

例 验证

1. $a > 1$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{a^x} = 0$.
2. $0 < b < 1$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty} b^x = 0$.

证明 1. $\forall \varepsilon \in (0, 1)$，取 $X =$ ，当 $x > X$ 时，都有

$$\left|\frac{1}{a^x} - 0\right| = a^{-x} = e^{\ln a^{-x}} = e^{-x\ln a}$$

例 验证

1. $a > 1$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{a^x} = 0.$
2. $0 < b < 1$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty} b^x = 0.$

证明 **1.** $\forall \varepsilon \in (0, 1)$，取 $X =$ ，当 $x > X$ 时，都有

$$\left|\frac{1}{a^x} - 0\right| = a^{-x} = e^{\ln a^{-x}} = e^{-x \ln a} < e^{-X \ln a}$$

例 验证

1. $a > 1$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{a^x} = 0.$
2. $0 < b < 1$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty} b^x = 0.$

证明 **1.** $\forall \varepsilon \in (0,1)$，取 $X = -\frac{\ln\varepsilon}{\ln a} > 0$，当 $x > X$ 时，都有

$$\left|\frac{1}{a^x} - 0\right| = a^{-x} = e^{\ln a^{-x}} = e^{-x\ln a} < e^{-X\ln a} = e^{\ln\varepsilon}$$

例 验证

1. $a > 1$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{a^x} = 0$.
2. $0 < b < 1$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty} b^x = 0$.

证明 **1.** $\forall \varepsilon \in (0,1)$，取 $X = -\frac{\ln \varepsilon}{\ln a} > 0$，当 $x > X$ 时，都有

$$\left|\frac{1}{a^x} - 0\right| = a^{-x} = e^{\ln a^{-x}} = e^{-x\ln a} < e^{-X\ln a} = e^{\ln \varepsilon} = \varepsilon.$$

例 验证

1. $a > 1$ 时，$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{a^x} = 0$.
2. $0 < b < 1$ 时，$\lim\limits_{x \to +\infty} b^x = 0$.

证明 **1.** $\forall \varepsilon \in (0, 1)$，取 $X = -\frac{\ln \varepsilon}{\ln a} > 0$，当 $x > X$ 时，都有

$$\left| \frac{1}{a^x} - 0 \right| = a^{-x} = e^{\ln a^{-x}} = e^{-x \ln a} < e^{-X \ln a} = e^{\ln \varepsilon} = \varepsilon.$$

2.

$$\lim_{x \to +\infty} b^x \xlongequal{a=\frac{1}{b}>1}$$

例 验证

1. $a>1$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{a^x}=0$.
2. $0<b<1$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}b^x=0$.

证明 **1.** $\forall\varepsilon\in(0,1)$，取 $X=-\frac{\ln\varepsilon}{\ln a}>0$，当 $x>X$ 时，都有

$$\left|\frac{1}{a^x}-0\right|=a^{-x}=e^{\ln a^{-x}}=e^{-x\ln a}<e^{-X\ln a}=e^{\ln\varepsilon}=\varepsilon.$$

2.

$$\lim_{x\to+\infty}b^x\xlongequal{a=\frac{1}{b}>1}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^x$$

例 验证

1. $a > 1$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{a^x} = 0.$
2. $0 < b < 1$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty} b^x = 0.$

证明 1. $\forall \varepsilon \in (0, 1)$，取 $X = -\frac{\ln \varepsilon}{\ln a} > 0$，当 $x > X$ 时，都有

$$\left|\frac{1}{a^x} - 0\right| = a^{-x} = e^{\ln a^{-x}} = e^{-x \ln a} < e^{-X \ln a} = e^{\ln \varepsilon} = \varepsilon.$$

2.

$$\lim_{x\to+\infty} b^x \xlongequal{a=\frac{1}{b}>1} \lim_{x\to+\infty} (\frac{1}{a})^x = 0.$$

例 验证

1. $a>1$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{a^x}=0.$
2. $0<b<1$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}b^x=0.$

证明 **1.** $\forall\varepsilon\in(0,1)$，取 $X=-\frac{\ln\varepsilon}{\ln a}>0$，当 $x>X$ 时，都有

$$\left|\frac{1}{a^x}-0\right|=a^{-x}=e^{\ln a^{-x}}=e^{-x\ln a}<e^{-X\ln a}=e^{\ln\varepsilon}=\varepsilon.$$

2.

$$\lim_{x\to+\infty}b^x\xlongequal{a=\frac{1}{b}>1}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^x=0.$$

注 数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 可以归结成函数极限：定义函数 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$，$f(n)=a_n$，则

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{x\to+\infty}f(x).$$

“$\lim_{x\to -\infty} f(x) = A$”：如果 x 无限减少时，$f(x)$ 无限接近一个数 A，则称 $f(x)$ 在 $x\to -\infty$ 时的“极限”为 A.

"$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A$"：如果 x 无限减少时，$f(x)$ 无限接近一个数 A，则称 $f(x)$ 在 $x \to -\infty$ 时的“极限”为 A.

定义 任意给定 $\varepsilon > 0$，存在正数 X，当 $x < -X$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，

“$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$”：如果 x 无限减少时，$f(x)$ 无限接近一个数 A，则称 $f(x)$ 在 $x \to -\infty$ 时的“极限”为 A.

定义 任意给定 $\varepsilon > 0$，存在正数 X，当 $x < -X$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称 A 是 $f(x)$ 在 $x \to -\infty$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A \qquad 或 \qquad f(x) \to A \quad (x \to -\infty)$$

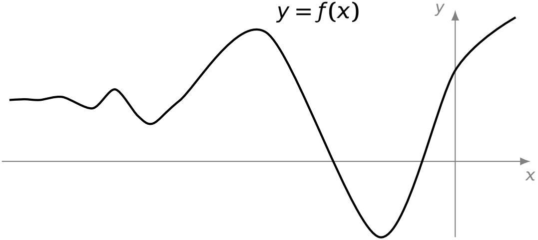
“$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$”：如果 x 无限减少时，$f(x)$ 无限接近一个数 A，则称 $f(x)$ 在 $x\to-\infty$ 时的“极限”为 A.

定义 任意给定 $\varepsilon>0$，存在正数 X，当 $x<-X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 是 $f(x)$ 在 $x\to-\infty$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A \qquad \text{或} \qquad f(x)\to A \quad (x\to-\infty)$$

若不存在这样的数 A，称 $f(x)$ 在 $x\to-\infty$ 时**发散**，或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 不存在

“$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$”：如果 x 无限减少时，$f(x)$ 无限接近一个数 A，则称 $f(x)$ 在 $x \to -\infty$ 时的“极限”为 A.

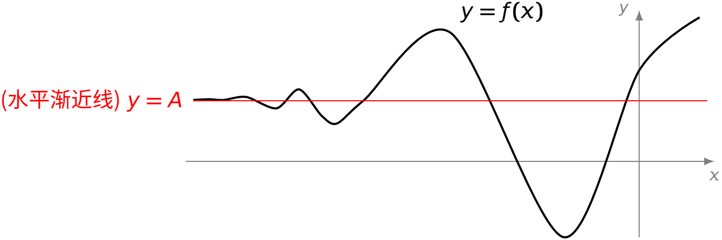


定义 任意给定 $\varepsilon > 0$，存在正数 X，当 $x < -X$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称 A 是 $f(x)$ 在 $x \to -\infty$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A \qquad 或 \qquad f(x) \to A \quad (x \to -\infty)$$

若不存在这样的数 A，称 $f(x)$ 在 $x \to -\infty$ 时**发散**，或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 不存在

“$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$”：如果 x 无限减少时，$f(x)$ 无限接近一个数 A，则称 $f(x)$ 在 $x\to-\infty$ 时的“极限”为 A.



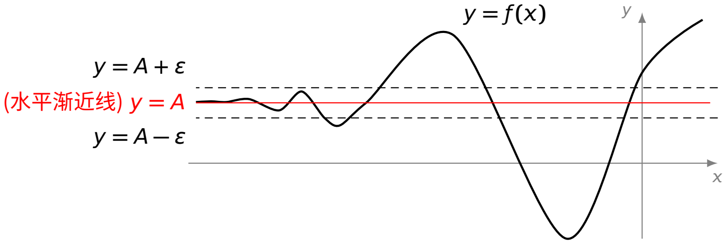
定义 任意给定 $\varepsilon>0$，存在正数 X，当 $x<-X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 是 $f(x)$ 在 $x\to-\infty$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A \qquad 或 \qquad f(x)\to A \quad (x\to-\infty)$$

若不存在这样的数 A，称 $f(x)$ 在 $x\to-\infty$ 时**发散**，或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 不存在

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

“$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$”：如果 x 无限减少时，$f(x)$ 无限接近一个数 A，则称 $f(x)$ 在 $x\to-\infty$ 时的“极限”为 A.

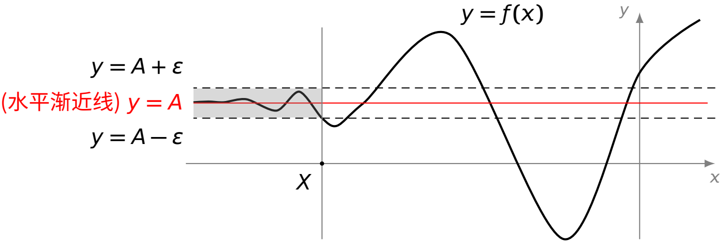


定义 任意给定 $\varepsilon>0$，存在正数 X，当 $x<-X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 是 $f(x)$ 在 $x\to-\infty$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A \qquad \text{或} \qquad f(x)\to A \quad (x\to-\infty)$$

若不存在这样的数 A，称 $f(x)$ 在 $x\to-\infty$ 时**发散**，或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 不存在

“$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$”：如果 x 无限减少时，$f(x)$ 无限接近一个数 A，则称 $f(x)$ 在 $x\to-\infty$ 时的“极限”为 A.



定义 任意给定 $\varepsilon>0$，存在正数 X，当 $x<-X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 是 $f(x)$ 在 $x\to-\infty$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A \qquad 或 \qquad f(x)\to A \quad (x\to-\infty)$$

若不存在这样的数 A，称 $f(x)$ 在 $x\to-\infty$ 时**发散**，或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 不存在

暨南大学 JINAN UNIVERSITY

性质 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 均存在并相等. 此时，这三个极限相等.

We are here now...

1. 数列极限
2. 函数极限
3. 极限运算
4. 极限性质
5. 两个重要极限
6. 无穷大，无穷小

前面我们已经**验证**了一些特殊的极限，例如：

$$\lim_{x\to x_0} c = c, \quad \lim_{x\to x_0} x = x_0,$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} a^x = 0\,(0 < a < 1), \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{a^x} = 0\,(a > 1)$$

前面我们已经**验证**了一些特殊的极限，例如：

$$\lim_{x\to x_0} c = c, \quad \lim_{x\to x_0} x = x_0,$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} a^x = 0\,(0 < a < 1), \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{a^x} = 0\,(a > 1)$$

但实际中，我们需要的是**计算**极限，例如：

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}$$

为了计算一般式子的极限，我们需要知道极限的 **运算性质**。

前面我们已经**验证**了一些特殊的极限，例如：

$$\lim_{x\to x_0} c = c, \quad \lim_{x\to x_0} x = x_0,$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} a^x = 0\,(0 < a < 1), \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{a^x} = 0\,(a > 1)$$

但实际中，我们需要的是**计算**极限，例如：

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-2x-3}{x^2-9}$$

为了计算一般式子的极限，我们需要知道极限的 **运算性质**。

这些运算性质一般与具体的极限过程无关：

$$\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to--\infty} f(x), \lim_{x\to\infty} f(x), \lim_{x\to x_0} f(x), \lim_{x\to x_0^+} f(x), \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

因此叙述相关性质时，简单地用“$\lim f(x)$”表示上述任意的极限过程

定理（极限的四则运算） 设 $\lim f(x)$，$\lim g(x)$ 存在，$a, b \in \mathbb{R}$，则

1. $\lim[af(x) + bg(x)] = a\lim f(x) + b\lim g(x)$

定理（极限的四则运算） 设 $\lim f(x)$，$\lim g(x)$ 存在，$a, b \in \mathbb{R}$，则

1. $\lim[af(x) + bg(x)] = a\lim f(x) + b\lim g(x)$

（特别地，$\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$）

定理（极限的四则运算） 设 $\lim f(x)$，$\lim g(x)$ 存在，$a, b \in \mathbb{R}$，则

1. $\lim[af(x) + bg(x)] = a \lim f(x) + b \lim g(x)$

   （特别地，$\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$）

2. $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$

定理（极限的四则运算） 设 $\lim f(x)$，$\lim g(x)$ 存在，$a, b \in \mathbb{R}$，则

1. $\lim[af(x) + bg(x)] = a \lim f(x) + b \lim g(x)$

   （特别地，$\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$）

2. $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$

   （特别地，$\lim[f(x)^n] = [\lim f(x)]^n$）

定理（极限的四则运算） 设 $\lim f(x)$，$\lim g(x)$ 存在，$a, b \in \mathbb{R}$，则

1. $\lim[af(x)+bg(x)] = a\lim f(x) + b\lim g(x)$

   （特别地，$\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$）

2. $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$

   （特别地，$\lim[f(x)^n] = [\lim f(x)]^n$）

3. 若 $\lim g(x) \neq 0$，则 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$

定理（极限的四则运算） 设 $\lim f(x)$，$\lim g(x)$ 存在，$a, b \in \mathbb{R}$，则

1. $\lim[af(x) + bg(x)] = a \lim f(x) + b \lim g(x)$

   （特别地，$\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$）

2. $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$

   （特别地，$\lim[f(x)^n] = [\lim f(x)]^n$）

3. 若 $\lim g(x) \neq 0$，则 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$

例 1 计算 $\lim\limits_{x \to 1}(3x^2 - 2x + 1)$

定理（极限的四则运算） 设 $\lim f(x)$，$\lim g(x)$ 存在，$a, b \in \mathbb{R}$，则

1. $\lim[af(x)+bg(x)] = a\lim f(x) + b\lim g(x)$

   （特别地，$\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$）

2. $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$

   （特别地，$\lim[f(x)^n] = [\lim f(x)]^n$）

3. 若 $\lim g(x) \neq 0$，则 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$

例 1 计算 $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2 - 2x + 1)$

解 原式 $= 3\lim\limits_{x\to 1} x^2 - 2\lim\limits_{x\to 1} x + \lim\limits_{x\to 1} 1 =$

定理（极限的四则运算） 设 $\lim f(x)$，$\lim g(x)$ 存在，$a, b \in \mathbb{R}$，则

1. $\lim[af(x)+bg(x)] = a\lim f(x) + b\lim g(x)$

   （特别地，$\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$）

2. $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$

   （特别地，$\lim[f(x)^n] = [\lim f(x)]^n$）

3. 若 $\lim g(x) \neq 0$，则 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$

例 1 计算 $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2 - 2x + 1)$

解 原式 $= 3\boxed{\lim\limits_{x\to 1} x^2} - 2\lim\limits_{x\to 1} x + \lim\limits_{x\to 1} 1 =$

$= [\lim\limits_{x\to 1} x]^2$

定理（极限的四则运算） 设 $\lim f(x)$，$\lim g(x)$ 存在，$a, b \in \mathbb{R}$，则

1. $\lim[af(x)+bg(x)] = a\lim f(x) + b\lim g(x)$

   （特别地，$\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$）

2. $\lim[f(x)\cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$

   （特别地，$\lim[f(x)^n] = [\lim f(x)]^n$）

3. 若 $\lim g(x) \neq 0$，则 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$

例 1 计算 $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2 - 2x + 1)$

解 原式 $= 3\boxed{\lim\limits_{x\to 1} x^2} - 2\boxed{\lim\limits_{x\to 1} x} + \lim\limits_{x\to 1} 1 =$

$= [\lim\limits_{x\to 1} x]^2$　　$\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$

定理（极限的四则运算） 设 $\lim f(x)$，$\lim g(x)$ 存在，$a, b \in \mathbb{R}$，则

1. $\lim[af(x) + bg(x)] = a\lim f(x) + b\lim g(x)$

   （特别地，$\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$）

2. $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$

   （特别地，$\lim[f(x)^n] = [\lim f(x)]^n$）

3. 若 $\lim g(x) \neq 0$，则 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$

例 1 计算 $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2 - 2x + 1)$

解 原式 $= 3\boxed{\lim\limits_{x\to 1} x^2} - 2\boxed{\lim\limits_{x\to 1} x} + \boxed{\lim\limits_{x\to 1} 1} =$

$= [\lim\limits_{x\to 1} x]^2$ $\quad \lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$ $\quad \lim\limits_{x\to x_0} c = c$

定理（极限的四则运算） 设 $\lim f(x)$，$\lim g(x)$ 存在，$a, b \in \mathbb{R}$，则

1. $\lim[af(x)+bg(x)] = a\lim f(x) + b\lim g(x)$

   （特别地，$\lim[f(x)\pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$）

2. $\lim[f(x)\cdot g(x)] = \lim f(x)\cdot \lim g(x)$

   （特别地，$\lim[f(x)^n] = [\lim f(x)]^n$）

3. 若 $\lim g(x) \neq 0$，则 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$

例 1 计算 $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2-2x+1)$

解 原式 $= 3\boxed{\lim\limits_{x\to 1} x^2} - 2\boxed{\lim\limits_{x\to 1} x} + \boxed{\lim\limits_{x\to 1} 1} = 3\cdot 1^2 - 2\cdot 1 + 1 = 2$

$= [\lim\limits_{x\to 1} x]^2$ $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$ $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$

定理（极限的四则运算） 设 $\lim f(x)$，$\lim g(x)$ 存在，$a, b \in \mathbb{R}$，则

1. $\lim[af(x) + bg(x)] = a \lim f(x) + b \lim g(x)$

   （特别地，$\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$）

2. $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$

   （特别地，$\lim[f(x)^n] = [\lim f(x)]^n$）

3. 若 $\lim g(x) \neq 0$，则 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$

例 1 计算 $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2 - 2x + 1)$

解 $\underbrace{\text{原式}}_{\lim\limits_{x\to 1} f(x)} = 3\underbrace{\boxed{\lim\limits_{x\to 1} x^2}}_{=[\lim\limits_{x\to 1} x]^2} - 2\underbrace{\boxed{\lim\limits_{x\to 1} x}}_{\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0} + \underbrace{\boxed{\lim\limits_{x\to 1} 1}}_{\lim\limits_{x\to x_0} c = c} = \underline{3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 1} = 2$

定理（极限的四则运算） 设 $\lim f(x)$，$\lim g(x)$ 存在，$a, b \in \mathbb{R}$，则

1. $\lim[af(x) + bg(x)] = a\lim f(x) + b\lim g(x)$

   （特别地，$\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$）

2. $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$

   （特别地，$\lim[f(x)^n] = [\lim f(x)]^n$）

3. 若 $\lim g(x) \neq 0$，则 $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$

例 1 计算 $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2 - 2x + 1)$

解 $\underbrace{\text{原式}}_{\lim\limits_{x\to 1} f(x)} = 3\underbrace{\boxed{\lim\limits_{x\to 1} x^2}}_{=[\lim\limits_{x\to 1} x]^2} - 2\underbrace{\boxed{\lim\limits_{x\to 1} x}}_{\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0} + \underbrace{\boxed{\lim\limits_{x\to 1} 1}}_{\lim\limits_{x\to x_0} c = c} = \underbrace{3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 1}_{f(1)} = 2$

定理（极限的四则运算） 设 $\lim f(x)$，$\lim g(x)$ 存在，$a, b \in \mathbb{R}$，则

1. $\lim[af(x)+bg(x)] = a\lim f(x) + b\lim g(x)$

   （特别地，$\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$）

2. $\lim[f(x)\cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$

   （特别地，$\lim[f(x)^n] = [\lim f(x)]^n$）

3. 若 $\lim g(x) \neq 0$，则 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$

例 1 计算 $\lim\limits_{x\to1}(3x^2 - 2x + 1)$

解 $\underbrace{\text{原式}}_{\lim\limits_{x\to1} f(x)} = 3\boxed{\lim\limits_{x\to1} x^2} - 2\boxed{\lim\limits_{x\to1} x} + \boxed{\lim\limits_{x\to1} 1} = \underbrace{3\cdot1^2 - 2\cdot1 + 1}_{f(1)} = 2$

$= [\lim\limits_{x\to1} x]^2$　　$\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$　　$\lim\limits_{x\to x_0} c = c$

注 一般地，对任意多项式 $f(x)$，均成立 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

例 2 计算 $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-2x+3}{x^2+9}$

例 3 计算 $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-2x-3}{x^2-9}$

例 4 计算 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2-2x-1}{2x^2-9}$

例 2 计算 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+9}$

解 原式 $=\dfrac{\lim\limits_{x\to 3}x^2-2x+3}{\lim\limits_{x\to 3}x^2+9}$

例 3 计算 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$

例 4 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^2-9}$

例 2 计算 $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-2x+3}{x^2+9}$

解 原式 $=\frac{\lim\limits_{x\to 3}x^2-2x+3}{\lim\limits_{x\to 3}x^2+9}=\frac{3^2-2\cdot 3+3}{3^2+9}$

例 3 计算 $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^2-9}$

例 4 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-1}{2x^2-9}$

例 2 计算 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+9}$

解 原式 $=\dfrac{\lim\limits_{x\to 3}x^2-2x+3}{\lim\limits_{x\to 3}x^2+9}=\dfrac{3^2-2\cdot 3+3}{3^2+9}=\dfrac{1}{3}$

例 3 计算 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$

例 4 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^2-9}$

例 2 计算 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+9}$

解 原式 $=\dfrac{\lim\limits_{x\to 3}x^2-2x+3}{\lim\limits_{x\to 3}x^2+9}=\dfrac{3^2-2\cdot 3+3}{3^2+9}=\dfrac{1}{3}$

例 3 计算 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$

解 原式 $=\dfrac{\lim\limits_{x\to 3}x^2-2x-3}{\lim\limits_{x\to 3}x^2-9}$

例 4 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^2-9}$

例 2 计算 $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-2x+3}{x^2+9}$

解 原式 $= \dfrac{\lim\limits_{x\to 3} x^2-2x+3}{\lim\limits_{x\to 3} x^2+9} = \dfrac{3^2-2\cdot 3+3}{3^2+9} = \dfrac{1}{3}$

例 3 计算 $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$

解 原式 $= \dfrac{\lim\limits_{x\to 3} x^2-2x-3}{\lim\limits_{x\to 3} x^2-9}$ 错误!

例 4 计算 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2-2x-1}{2x^2-9}$

例 2 计算 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+9}$

解 原式 $=\dfrac{\lim\limits_{x\to 3}x^2-2x+3}{\lim\limits_{x\to 3}x^2+9}=\dfrac{3^2-2\cdot 3+3}{3^2+9}=\dfrac{1}{3}$

例 3 计算 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$

解 原式 $=\dfrac{\lim\limits_{x\to 3}x^2-2x-3}{\lim\limits_{x\to 3}x^2-9}=\dfrac{3^2-2\cdot 3-3}{3^2-9}=\dfrac{0}{0}$ 错误!

例 4 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^2-9}$

例 2 计算 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+9}$

解 原式 $=\dfrac{\lim\limits_{x\to 3}x^2-2x+3}{\lim\limits_{x\to 3}x^2+9}=\dfrac{3^2-2\cdot 3+3}{3^2+9}=\dfrac{1}{3}$

例 3 计算 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$

解 原式 $=\dfrac{\lim\limits_{x\to 3}x^2-2x-3}{\lim\limits_{x\to 3}x^2-9}=\dfrac{3^2-2\cdot 3-3}{3^2-9}=\dfrac{0}{0}$ 错误!

正解：原式

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+1)}{(x+3)(x-3)}$$

例 4 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^2-9}$

例 2 计算 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+9}$

解 原式 $=\dfrac{\lim\limits_{x\to 3}x^2-2x+3}{\lim\limits_{x\to 3}x^2+9}=\dfrac{3^2-2\cdot 3+3}{3^2+9}=\dfrac{1}{3}$

例 3 计算 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$

解 原式 $=\dfrac{\lim\limits_{x\to 3}x^2-2x-3}{\lim\limits_{x\to 3}x^2-9}=\dfrac{3^2-2\cdot 3-3}{3^2-9}=\dfrac{0}{0}$　　错误!

正解：原式

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+1)}{(x+3)(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+1}{x+3}$$

例 4 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^2-9}$

例 2 计算 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+9}$

解 原式 $=\dfrac{\lim\limits_{x\to 3}x^2-2x+3}{\lim\limits_{x\to 3}x^2+9}=\dfrac{3^2-2\cdot 3+3}{3^2+9}=\dfrac{1}{3}$

例 3 计算 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$

解 原式 $=\dfrac{\lim\limits_{x\to 3}x^2-2x-3}{\lim\limits_{x\to 3}x^2-9}=\dfrac{3^2-2\cdot 3-3}{3^2-9}=\dfrac{0}{0}$ 错误！

正解：原式

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+1)}{(x+3)(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+1}{x+3}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}x+1}{\lim\limits_{x\to 3}x+3}$$

例 4 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^2-9}$

例 2 计算 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+9}$

解 原式 $=\dfrac{\lim\limits_{x\to 3}x^2-2x+3}{\lim\limits_{x\to 3}x^2+9}=\dfrac{3^2-2\cdot 3+3}{3^2+9}=\dfrac{1}{3}$

例 3 计算 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$

解 原式 $=\dfrac{\lim\limits_{x\to 3}x^2-2x-3}{\lim\limits_{x\to 3}x^2-9}=\dfrac{3^2-2\cdot 3-3}{3^2-9}=\dfrac{0}{0}$ 错误!

正解：原式

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+1)}{(x+3)(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+1}{x+3}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}x+1}{\lim\limits_{x\to 3}x+3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

例 4 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^2-9}$

例 4 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-1}{2x^2-9}$

例 5 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-1}{2x^3-9}$

例 4 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^2-9}$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2\cdot\frac{1}{x}+3\cdot\frac{1}{x^2}}{2-9\cdot\frac{1}{x^2}}$

例 5 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^3-9}$

例 4 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^2-9}$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2\cdot\frac{1}{x}+3\cdot\frac{1}{x^2}}{2-9\cdot\frac{1}{x^2}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}1-2\cdot\frac{1}{x}+3\cdot\frac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}2-9\cdot\frac{1}{x^2}}$

例 5 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^3-9}$

例 4 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^2-9}$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2\cdot\frac{1}{x}+3\cdot\frac{1}{x^2}}{2-9\cdot\frac{1}{x^2}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}1-2\cdot\frac{1}{x}+3\cdot\frac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}2-9\cdot\frac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{2}$

例 5 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^3-9}$

例 4 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^2-9}$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2\cdot\frac{1}{x}+3\cdot\frac{1}{x^2}}{2-9\cdot\frac{1}{x^2}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}1-2\cdot\frac{1}{x}+3\cdot\frac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}2-9\cdot\frac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{2}$

例 5 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^3-9}$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}-2\cdot\frac{1}{x^2}+3\cdot\frac{1}{x^3}}{2-9\cdot\frac{1}{x^3}}$

例 4 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^2-9}$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2\cdot\frac{1}{x}+3\cdot\frac{1}{x^2}}{2-9\cdot\frac{1}{x^2}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}1-2\cdot\frac{1}{x}+3\cdot\frac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}2-9\cdot\frac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{2}$

例 5 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^3-9}$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}-2\cdot\frac{1}{x^2}+3\cdot\frac{1}{x^3}}{2-9\cdot\frac{1}{x^3}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}-2\cdot\frac{1}{x^2}+3\cdot\frac{1}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\infty}2-9\cdot\frac{1}{x^3}}$

例 4 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^2-9}$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2\cdot\frac{1}{x}+3\cdot\frac{1}{x^2}}{2-9\cdot\frac{1}{x^2}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}1-2\cdot\frac{1}{x}+3\cdot\frac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}2-9\cdot\frac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{2}$

例 5 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^3-9}$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}-2\cdot\frac{1}{x^2}+3\cdot\frac{1}{x^3}}{2-9\cdot\frac{1}{x^3}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}-2\cdot\frac{1}{x^2}+3\cdot\frac{1}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\infty}2-9\cdot\frac{1}{x^3}}=\dfrac{0}{2}=0$

性质 设 $\lim f(x) = 0$，而 $g(x)$ 是有界函数，则 $\lim[f(x) \cdot g(x)] = 0$.

（证明作为练习）

性质 设 $\lim f(x)=0$，而 $g(x)$ 是有界函数，则 $\lim[f(x)\cdot g(x)]=0$.
（证明作为练习）

例 6 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$

性质 设 $\lim f(x) = 0$，而 $g(x)$ 是有界函数，则 $\lim[f(x) \cdot g(x)] = 0$.
（证明作为练习）

例 6 计算 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x}$

错误解法 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{\lim\limits_{x\to\infty} \sin x}{\lim\limits_{x\to\infty} x}$

性质 设 $\lim f(x)=0$，而 $g(x)$ 是有界函数，则 $\lim[f(x)\cdot g(x)]=0$.（证明作为练习）

例 6 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$

错误解法 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\sin x}{\lim\limits_{x\to\infty}x}$

正解 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$，而 $\sin x$ 是有界函数（$|\sin x|\le 1$），所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$.

性质 设 $\lim f(x)=0$，而 $g(x)$ 是有界函数，则 $\lim[f(x)\cdot g(x)]=0$.
（证明作为练习）

例 6 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$

错误解法 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\sin x}{\lim\limits_{x\to\infty}x}$

正解 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，而 $\sin x$ 是有界函数（$|\sin x|\le 1$），所以
$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$.

注 若 $\lim f(x)=0$，则称在该极限过程下，f 是**无穷小量**. 上述性质就是说，无穷小量与有界量的乘积仍然是无穷小量.

问题 是否可以通过 **变量代换** 求极限?

问题 是否可以通过 **变量代换** 求极限？例如：

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

问题 是否可以通过 **变量代换** 求极限？例如：

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \xrightarrow{x=x_0+t}$$

问题 是否可以通过 **变量代换** 求极限? 例如:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \xrightarrow{x=x_0+t} \lim f(x_0+t)$$

问题 是否可以通过 **变量代换** 求极限？例如：

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \xrightarrow{x=x_0+t} \lim_{t\to 0} f(x_0+t)$$

问题 是否可以通过 **变量代换** 求极限? 例如:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \xrightarrow{x=x_0+t} \lim_{t\to 0} f(x_0+t)$$

则前后两个结论是否相等?

问题 是否可以通过 **变量代换** 求极限？例如：

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \xrightarrow{x=x_0+t} \lim_{t \to 0} f(x_0 + t)$$

则前后两个结论是否相等？或者更复杂地，考虑

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

问题 是否可以通过 **变量代换** 求极限？例如：

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \xrightarrow{x=x_0+t} \lim_{t\to 0} f(x_0+t)$$

则前后两个结论是否相等？或者更复杂地，考虑

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \xrightarrow{\text{假设 } x=g(t)}$$

问题 是否可以通过 **变量代换** 求极限？例如：

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \xrightarrow{x=x_0+t} \lim_{t\to 0} f(x_0+t)$$

则前后两个结论是否相等？或者更复杂地，考虑

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \xrightarrow{\text{假设 } x=g(t)} \lim f[g(t)]$$

问题 是否可以通过 **变量代换** 求极限？例如：

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \xrightarrow{x=x_0+t} \lim_{t\to 0} f(x_0+t)$$

则前后两个结论是否相等？或者更复杂地，考虑

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \xrightarrow[x\to x_0\,(t\to t_0)]{\text{假设 } x=g(t)} \lim f[g(t)]$$

问题 是否可以通过 **变量代换** 求极限？例如：

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \xrightarrow{x=x_0+t} \lim_{t\to 0} f(x_0+t)$$

则前后两个结论是否相等？或者更复杂地，考虑

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \xrightarrow[x\to x_0\,(t\to t_0)]{\text{假设}\, x=g(t)} \lim_{t\to t_0} f[g(t)]$$

问题 是否可以通过 **变量代换** 求极限？例如：

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \xrightarrow{x=x_0+t} \lim_{t\to 0} f(x_0+t)$$

则前后两个结论是否相等？或者更复杂地，考虑

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \xrightarrow[x\to x_0\,(t\to t_0)]{\text{假设 } x=g(t)} \lim_{t\to t_0} f[g(t)]$$

事实上，上述“一般”情况都成立，称为 **复合函数的极限运算法则**

问题 是否可以通过 **变量代换** 求极限？例如：

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \xrightarrow{x=x_0+t} \lim_{t\to 0} f(x_0+t)$$

则前后两个结论是否相等？或者更复杂地，考虑

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \xrightarrow[x\to x_0\,(t\to t_0)]{\text{假设 } x=g(t)} \lim_{t\to t_0} f[g(t)]$$

事实上，上述“一般”情况都成立，称为 **复合函数的极限运算法则**

例 假设已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$

问题 是否可以通过 **变量代换** 求极限？例如：

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \xrightarrow{x=x_0+t} \lim_{t\to 0} f(x_0+t)$$

则前后两个结论是否相等？或者更复杂地，考虑

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \xrightarrow[x\to x_0\,(t\to t_0)]{\text{假设}\, x=g(t)} \lim_{t\to t_0} f[g(t)]$$

事实上，上述“一般”情况都成立，称为 **复合函数的极限运算法则**

例 假设已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} \overset{x=\sin t}{=\!=\!=}$$

问题 是否可以通过 **变量代换** 求极限？例如：

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \xrightarrow{x=x_0+t} \lim_{t\to 0} f(x_0+t)$$

则前后两个结论是否相等？或者更复杂地，考虑

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \xrightarrow[x\to x_0\,(t\to t_0)]{\text{假设 } x=g(t)} \lim_{t\to t_0} f[g(t)]$$

事实上，上述“一般”情况都成立，称为 **复合函数的极限运算法则**

例 假设已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} \xlongequal{x=\sin t} \lim \frac{t}{\sin t}$$

问题 是否可以通过 **变量代换** 求极限？例如：

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \xrightarrow{x=x_0+t} \lim_{t\to 0} f(x_0+t)$$

则前后两个结论是否相等？或者更复杂地，考虑

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \xrightarrow[x\to x_0\,(t\to t_0)]{\text{假设}\, x=g(t)} \lim_{t\to t_0} f[g(t)]$$

事实上，上述“一般”情况都成立，称为 **复合函数的极限运算法则**

例 假设已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} \overset{x=\sin t}{=\!=\!=} \lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}$$

问题 是否可以通过 **变量代换** 求极限？例如：

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \xrightarrow{x=x_0+t} \lim_{t\to 0} f(x_0+t)$$

则前后两个结论是否相等？或者更复杂地，考虑

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \xrightarrow[x\to x_0\ (t\to t_0)]{\text{假设 } x=g(t)} \lim_{t\to t_0} f[g(t)]$$

事实上，上述“一般”情况都成立，称为 **复合函数的极限运算法则**

例 假设已知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}$

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} \xlongequal{x=\sin t} \lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=1$$

We are here now...

1. 数列极限
2. 函数极限
3. 极限运算
4. 极限性质
5. 两个重要极限
6. 无穷大，无穷小

函数极限的性质

定理 1（唯一性） 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，那么这极限唯一.

函数极限的性质

定理 1（唯一性） 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，那么这极限唯一.

定理 2（有界性） 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 存在，那么 f 在 x_0 附近是有界

函数极限的性质

定理 1（唯一性） 如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，那么这极限唯一.

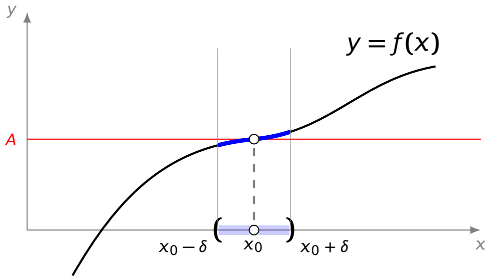
定理 2（有界性） 如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 存在，那么 f 在 x_0 附近是有界：存在常数 $M > 0$ 和 $\delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x)| \leq M$.

定理 3（保号性） 如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，

- 若 $A > 0$，则 $\exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，都有 $f(x) > 0$.

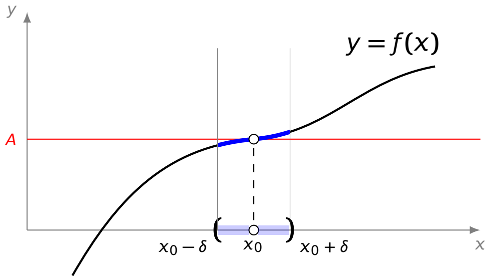
定理 3（保号性） 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，

- 若 $A > 0$，则 $\exists\delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，都有 $f(x) > 0$.



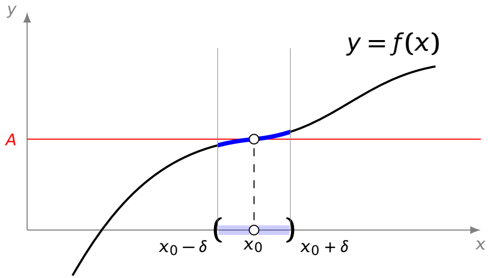
定理 3（保号性） 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，

- 若 $A > 0$，则 $\exists\delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，都有 $f(x) > 0$.
- 若 $A < 0$，则 $\exists\delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，都有 $f(x) < 0$.



定理 3（保号性） 如果 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$，

- 若 $A > 0$，则 $\exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，都有 $f(x) > 0$.
- 若 $A < 0$，则 $\exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，都有 $f(x) < 0$.

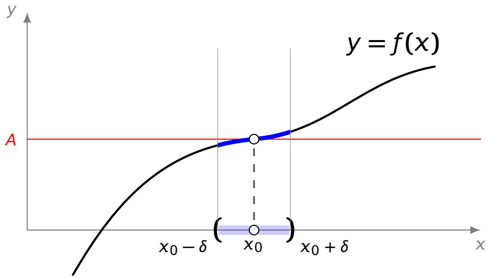


推论 设 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$，

- 若在 x_0 附近都有 $f(x) \geq 0$，则 $A \geq 0$.

定理 3（保号性） 如果 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$，

- 若 $A > 0$，则 $\exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，都有 $f(x) > 0$.
- 若 $A < 0$，则 $\exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，都有 $f(x) < 0$.



推论 设 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$，

- 若在 x_0 附近都有 $f(x) \geq 0$，则 $A \geq 0$.
- 若在 x_0 附近都有 $f(x) \leq 0$，则 $A \leq 0$.

We are here now...

两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

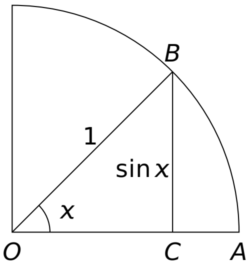
重要极限 I $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ （也就是，$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$ ）

重要极限 I $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ （也就是，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$ ）

证明 只需证明 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$，所以假设 $x>0$.

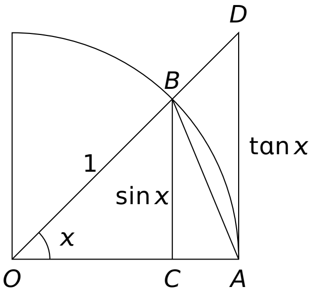
重要极限 I $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ （也就是，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$ ）

证明 只需证明 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$，所以假设 $x>0$.如图



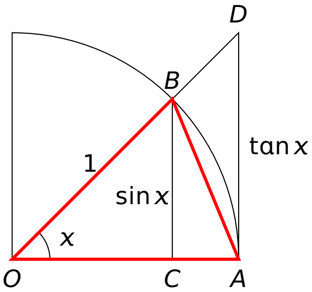
重要极限 I $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ （也就是，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$）

证明 只需证明 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$，所以假设 $x>0$.如图



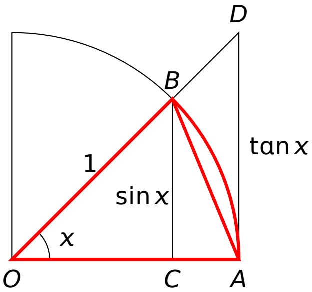
重要极限 I $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ （也就是，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$）

证明 只需证明 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$，所以假设 $x>0$.如图



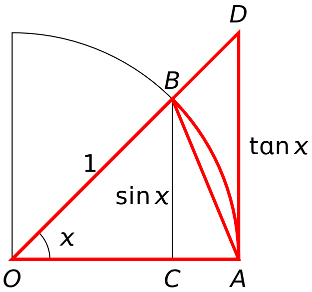
重要极限 I $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ （也就是，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$）

证明 只需证明 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$，所以假设 $x>0$.如图



重要极限 I $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ （也就是，$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$ ）

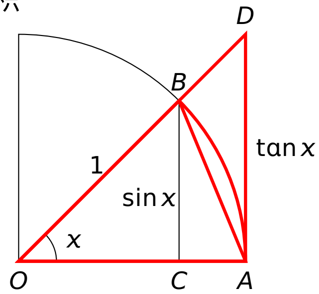
证明 只需证明 $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$，所以假设 $x>0$.如图



重要极限 I $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ （也就是，$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$）

证明 只需证明 $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$，所以假设 $x>0$.如图

ΔAOB面积 $<$ 扇形AOB面积 $<$ ΔAOD面积

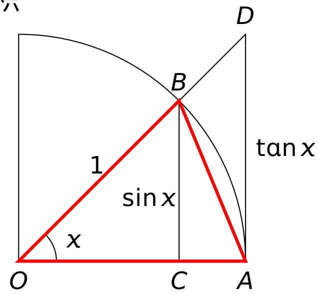


重要极限 I $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ （也就是，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$）

证明 只需证明 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$，所以假设 $x>0$.如图

ΔAOB面积 $<$ 扇形AOB面积 $<$ ΔAOD面积

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \sin x$$

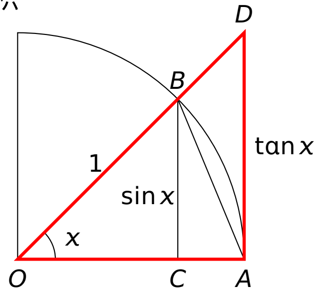


重要极限 I $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ （也就是，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$）

证明 只需证明 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$，所以假设 $x>0$.如图

ΔAOB面积 $<$ 扇形AOB面积 $<$ ΔAOD面积

$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \sin x$ $\qquad\qquad$ $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \tan x$

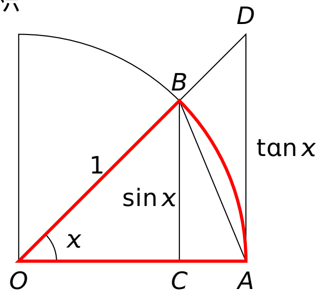


重要极限 I $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ （也就是，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$）

证明 只需证明 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$，所以假设 $x>0$.如图

ΔAOB面积 $<$ 扇形AOB面积 $<$ ΔAOD面积

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \sin x \qquad \frac{x}{2\pi}\cdot\pi \qquad \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\tan x$$

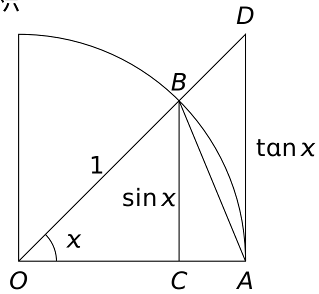


重要极限 I $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ （也就是，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$ ）

证明 只需证明 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$，所以假设 $x>0$.如图

ΔAOB面积 $<$ 扇形AOB面积 $<$ ΔAOD面积

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \sin x < \frac{x}{2\pi}\cdot \pi < \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \tan x$$



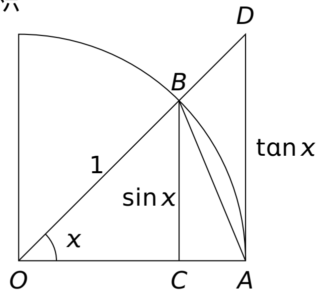
重要极限 I $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ （也就是，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$）

证明 只需证明 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1$，所以假设 $x>0$.如图

ΔAOB面积 $<$ 扇形AOB面积 $<$ ΔAOD面积

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \sin x<\frac{x}{2\pi}\cdot\pi<\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\tan x$$

$$\Rightarrow \quad \sin x<x<\tan x$$



重要极限 I $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ （也就是，$\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1$ ）

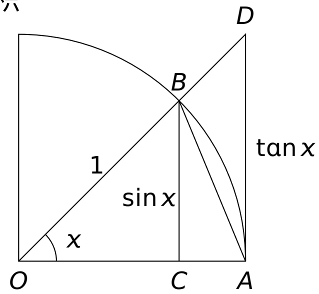
证明 只需证明 $\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=1$，所以假设 $x>0$.如图

$$\Delta AOB\text{面积} < \text{扇形}AOB\text{面积} < \Delta AOD\text{面积}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{2}\cdot1\cdot\sin x<\frac{x}{2\pi}\cdot\pi<\frac{1}{2}\cdot1\cdot\tan x$$

$$\Rightarrow\quad \sin x<x<\tan x$$

$$\Rightarrow\quad \cos x<\frac{\sin x}{x}<1$$



重要极限 I $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ （也就是，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$）

证明 只需证明 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1$，所以假设 $x>0$.如图

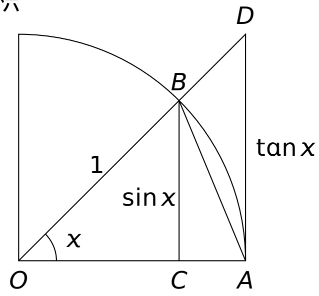
ΔAOB面积 < 扇形AOB面积 < ΔAOD面积

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \sin x<\frac{x}{2\pi}\cdot\pi<\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\tan x$$

$$\Rightarrow \quad \sin x<x<\tan x$$

$$\Rightarrow \quad \cos x<\frac{\sin x}{x}<1$$

$$\Rightarrow \quad 0<\frac{\sin x}{x}<1-\cos x$$



重要极限 I $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ （也就是，$\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1$）

证明 只需证明 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=1$，所以假设 $x>0$.如图

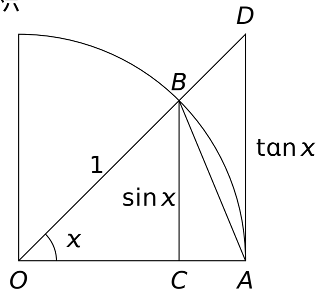
$$\Delta AOB\text{面积} < \text{扇形}AOB\text{面积} < \Delta AOD\text{面积}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{2}\cdot1\cdot\sin x<\frac{x}{2\pi}\cdot\pi<\frac{1}{2}\cdot1\cdot\tan x$$

$$\Rightarrow\quad \sin x<x<\tan x$$

$$\Rightarrow\quad \cos x<\frac{\sin x}{x}<1$$

$$\Rightarrow\quad 0<\frac{\sin x}{x}<1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$$



重要极限 I $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ （也就是，$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$ ）

证明 只需证明 $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$，所以假设 $x>0$.如图

ΔAOB面积 $<$ 扇形AOB面积 $<$ ΔAOD面积

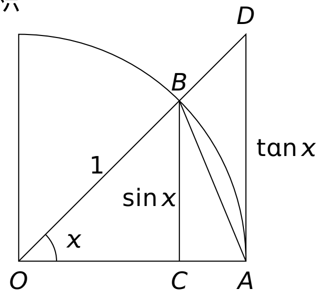
$$\Rightarrow\quad \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sin x<\frac{x}{2\pi}\cdot\pi<\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\tan x$$

$$\Rightarrow\quad \sin x<x<\tan x$$

$$\Rightarrow\quad \cos x<\frac{\sin x}{x}<1$$

(利用 $\sin\frac{x}{2}<\frac{x}{2}$)

$$\Rightarrow\quad 0<\frac{\sin x}{x}<1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$$



重要极限 I $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ （也就是，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$ ）

证明 只需证明 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$，所以假设 $x>0$.如图

ΔAOB面积 $<$ 扇形AOB面积 $<$ ΔAOD面积

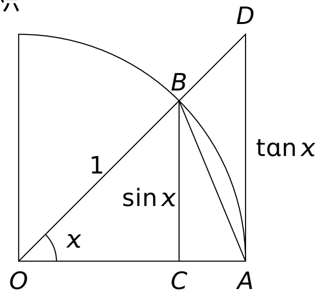
$$\Rightarrow\quad \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sin x<\frac{x}{2\pi}\cdot\pi<\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\tan x$$

$$\Rightarrow\quad \sin x<x<\tan x$$

$$\Rightarrow\quad \cos x<\frac{\sin x}{x}<1$$

(利用 $\sin\frac{x}{2}<\frac{x}{2}$)

$$\Rightarrow\quad 0<\frac{\sin x}{x}<1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}<\frac{x^2}{2}$$



重要极限 I $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ （也就是，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$ ）

证明 只需证明 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$，所以假设 $x>0$.如图

$$\Delta AOB\text{面积} < \text{扇形}AOB\text{面积} < \Delta AOD\text{面积}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \sin x < \frac{x}{2\pi}\cdot\pi < \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\tan x$$

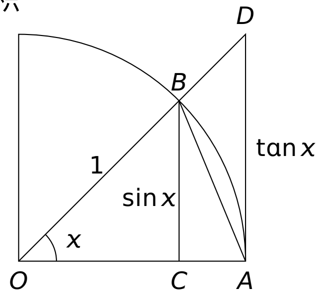
$$\Rightarrow \quad \sin x < x < \tan x$$

$$\Rightarrow \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

(利用 $\sin\frac{x}{2}<\frac{x}{2}$)

$$\Rightarrow \quad 0 < \frac{\sin x}{x} < 1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} < \frac{x^2}{2}$$

可见 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$



重要极限 I $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ （也就是，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$）

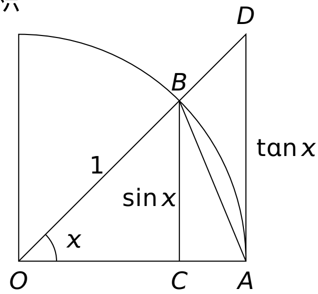
证明 只需证明 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$，所以假设 $x>0$.如图

$$\Delta AOB\text{面积} < \text{扇形}AOB\text{面积} < \Delta AOD\text{面积}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \sin x < \frac{x}{2\pi}\cdot\pi < \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\tan x$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\sin x < x < \tan x}$$

$$\Rightarrow \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$



(利用 $\sin\frac{x}{2} < \frac{x}{2}$)

$$\Rightarrow \quad 0 < \frac{\sin x}{x} < 1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} < \frac{x^2}{2}$$

可见 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$

注 1 重要不等式：$x>0$ 时，成立 $x<\sin x<\tan x$

重要极限 I $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ （也就是，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$）

证明 只需证明 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$，所以假设 $x>0$.如图

$$\Delta AOB\text{面积} < \text{扇形}AOB\text{面积} < \Delta AOD\text{面积}$$

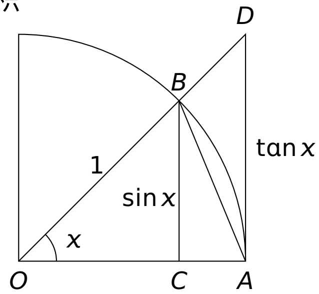
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \sin x < \frac{x}{2\pi}\cdot\pi < \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\tan x$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\sin x < x < \tan x}$$

$$\Rightarrow \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

(利用 $\sin\frac{x}{2} < \frac{x}{2}$)

$$\Rightarrow \quad 0 < \frac{\sin x}{x} < 1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} < \frac{x^2}{2}$$



可见 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$

注 1 重要不等式：$x>0$ 时，成立 $x<\sin x<\tan x$

注 2 由证明可知：$\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$

例 1 计算 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x}$

例 2 计算 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{\sin 4x}$

例 3 计算 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$

例 1 计算 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x}$

解 原式 $= 3 \lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x}$

例 2 计算 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\sin 4x}$

例 3 计算 $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$

例 1 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$

解 原式 $= 3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x} \xlongequal{t=3x} 3\lim \dfrac{\sin t}{t}$

例 2 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sin 4x}$

例 3 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$

例 1 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$

解 原式 $= 3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x} \xlongequal{t=3x} 3\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}$

例 2 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sin 4x}$

例 3 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$

例 1 计算 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x}$

解 原式 $= 3\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} \xlongequal{t=3x} 3\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 3$

例 2 计算 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sin 4x}$

例 3 计算 $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$

例 1 计算 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{x}$

解 原式 $= 3\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{3x} \xlongequal{t=3x} 3\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 3$

例 2 计算 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\sin 4x}$

解 原式 $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{\sin x}{x} \cdot \dfrac{4x}{\sin 4x}$

例 3 计算 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x}$

例 1 计算 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x}$

解 原式 $= 3\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} \xlongequal{t=3x} 3\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 3$

例 2 计算 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sin 4x}$

解 原式 $= \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{4x}{\sin 4x} = \frac{1}{4} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{4x}{\sin 4x}$

例 3 计算 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$

例 1 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$

解 原式 $= 3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x} \xlongequal{t=3x} 3\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 3$

例 2 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin 4x}$

解 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{4x}{\sin 4x} = \frac{1}{4}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x}{\sin 4x} = \frac{1}{4}\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{4}$

例 3 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$

例 1 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$

解 原式 $=3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}\xlongequal{t=3x}3\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=3$

例 2 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sin 4x}$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{4x}{\sin 4x}=\dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\sin 4x}=\dfrac{1}{4}\cdot 1\cdot 1=\dfrac{1}{4}$

例 3 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}$

例 1 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$

解 原式 $=3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x} \xlongequal{t=3x} 3\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=3$

例 2 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin 4x}$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{4x}{\sin 4x}=\frac{1}{4}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x}{\sin 4x}=\frac{1}{4}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{4}$

例 3 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}$

例 1 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$

解 原式 $= 3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x} \xlongequal{t=3x} 3\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 3$

例 2 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin 4x}$

解 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{4x}{\sin 4x} = \frac{1}{4}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x}{\sin 4x} = \frac{1}{4}\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{4}$

例 3 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$

解 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1\cdot 1 = 1$

例 1 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$

解 原式 $= 3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x} \xlongequal{t=3x} 3\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 3$

例 2 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin 4x}$

解 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{4x}{\sin 4x} = \frac{1}{4}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x}{\sin 4x} = \frac{1}{4}\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{4}$

例 3 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$

解 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1\cdot 1 = 1$

例 4 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin\sqrt{x}\tan\sqrt{x}}{x}$

暨南大学 JINAN UNIVERSITY

例 4 计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(2x^2)}{3x^2}$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}$，$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin\sqrt{x}\tan\sqrt{x}}{x}$

解

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(2x^2)}{3x^2}\xlongequal{t=x^2}$$

例 4 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin\sqrt{x}\tan\sqrt{x}}{x}$

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x^2)}{3x^2} \xlongequal{t=x^2} \lim\frac{\sin 2t}{3t}$$

例 4 计算 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$，$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}$，$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin\sqrt{x}\tan\sqrt{x}}{x}$

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x^2)}{3x^2}\xlongequal{t=x^2}\lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{3t}$$

例 4 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x^2)}{3x^2}$， $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}$， $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin\sqrt{x}\tan\sqrt{x}}{x}$

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x^2)}{3x^2}\overset{t=x^2}{=\!=\!=}\lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{3t} = \frac{2}{3}$$

例 4 计算 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$，$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin3x}{\tan5x}$，$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin\sqrt{x}\tan\sqrt{x}}{x}$

解

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(2x^2)}{3x^2}\xlongequal{t=x^2}\lim_{t\to0}\frac{\sin2t}{3t}=\lim_{t\to0}\frac{\sin2t}{2t}\cdot\frac{3t}{\sin3t}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

例 4 计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(2x^2)}{3x^2}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}$, $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin\sqrt{x}\tan\sqrt{x}}{x}$

解

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(2x^2)}{3x^2} \xlongequal{t=x^2} \lim_{t\to0}\frac{\sin 2t}{3t} = \lim_{t\to0}\frac{\sin 2t}{2t}\cdot\frac{3t}{\sin 3t}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \lim_{x\to0}\frac{3}{5}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{5x}{\tan 5x}$$

例 4 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin\sqrt{x}\tan\sqrt{x}}{x}$

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x^2)}{3x^2} \xlongequal{t=x^2} \lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{3t} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{2t}\cdot\frac{3t}{\sin 3t}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \lim_{x\to 0}\frac{3}{5}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{5x}{\tan 5x} = \frac{3}{5}\cdot 1\cdot 1 = \frac{3}{5}$$

例 4 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin\sqrt{x}\tan\sqrt{x}}{x}$

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x^2)}{3x^2}\xlongequal{t=x^2}\lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{3t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{2t}\cdot\frac{3t}{\sin 3t}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{5}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{5x}{\tan 5x}=\frac{3}{5}\cdot 1\cdot 1=\frac{3}{5}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin\sqrt{x}\tan\sqrt{x}}{x}\xlongequal{t=\sqrt{x}}$$

例 4 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin\sqrt{x}\tan\sqrt{x}}{x}$

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x^2)}{3x^2} \overset{t=x^2}{=\!=\!=} \lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{3t} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{2t}\cdot\frac{3t}{\sin 3t}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \lim_{x\to 0}\frac{3}{5}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{5x}{\tan 5x} = \frac{3}{5}\cdot 1\cdot 1 = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin\sqrt{x}\tan\sqrt{x}}{x} \overset{t=\sqrt{x}}{=\!=\!=} \lim \frac{\sin t\tan t}{t^2}$$

例 4 计算 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}$, $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin\sqrt{x}\tan\sqrt{x}}{x}$

解

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(2x^2)}{3x^2}\xlongequal{t=x^2}\lim_{t\to0}\frac{\sin 2t}{3t}=\lim_{t\to0}\frac{\sin 2t}{2t}\cdot\frac{3t}{\sin 3t}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}=\lim_{x\to0}\frac{3}{5}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{5x}{\tan 5x}=\frac{3}{5}\cdot1\cdot1=\frac{3}{5}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin\sqrt{x}\tan\sqrt{x}}{x}\xlongequal{t=\sqrt{x}}\lim_{t\to0^+}\frac{\sin t\tan t}{t^2}$$

例 4 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin\sqrt{x}\tan\sqrt{x}}{x}$

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x^2)}{3x^2} \overset{t=x^2}{=\!=\!=} \lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{3t} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{2t}\cdot\frac{3t}{\sin 3t}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \lim_{x\to 0}\frac{3}{5}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{5x}{\tan 5x} = \frac{3}{5}\cdot 1\cdot 1 = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin\sqrt{x}\tan\sqrt{x}}{x} \overset{t=\sqrt{x}}{=\!=\!=} \lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t\tan t}{t^2} = \lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{t}\cdot\lim_{t\to 0^+}\frac{\tan t}{t}$$

例 4 计算 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$，$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}$，$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin\sqrt{x}\tan\sqrt{x}}{x}$

解

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(2x^2)}{3x^2}\overset{t=x^2}{=\!=\!=}\lim_{t\to0}\frac{\sin 2t}{3t}=\lim_{t\to0}\frac{\sin 2t}{2t}\cdot\frac{3t}{\sin 3t}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}=\lim_{x\to0}\frac{3}{5}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{5x}{\tan 5x}=\frac{3}{5}\cdot1\cdot1=\frac{3}{5}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin\sqrt{x}\tan\sqrt{x}}{x}\overset{t=\sqrt{x}}{=\!=\!=}\lim_{t\to0^+}\frac{\sin t\tan t}{t^2}=\lim_{t\to0^+}\frac{\sin t}{t}\cdot\lim_{t\to0^+}\frac{\tan t}{t}=1$$

例 4 计算 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}$, $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin\sqrt{x}\tan\sqrt{x}}{x}$

解

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(2x^2)}{3x^2}\xlongequal{t=x^2}\lim_{t\to0}\frac{\sin 2t}{3t}=\lim_{t\to0}\frac{\sin 2t}{2t}\cdot\frac{3t}{\sin 3t}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}=\lim_{x\to0}\frac{3}{5}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{5x}{\tan 5x}=\frac{3}{5}\cdot1\cdot1=\frac{3}{5}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin\sqrt{x}\tan\sqrt{x}}{x}\xlongequal{t=\sqrt{x}}\lim_{t\to0^+}\frac{\sin t\tan t}{t^2}=\lim_{t\to0^+}\frac{\sin t}{t}\cdot\lim_{t\to0^+}\frac{\tan t}{t}=1$$

例 5 计算 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arctan x}{x}$

暨南大学 JINAN UNIVERSITY

例 4 计算 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}$, $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin\sqrt{x}\tan\sqrt{x}}{x}$

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x^2)}{3x^2} \xlongequal{t=x^2} \lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{3t} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{2t}\cdot\frac{3t}{\sin 3t}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \lim_{x\to 0}\frac{3}{5}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{5x}{\tan 5x} = \frac{3}{5}\cdot 1\cdot 1 = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin\sqrt{x}\tan\sqrt{x}}{x} \xlongequal{t=\sqrt{x}} \lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t\tan t}{t^2} = \lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{t}\cdot\lim_{t\to 0^+}\frac{\tan t}{t} = 1$$

例 5 计算 $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}$, $\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}$

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} \xlongequal{x=\sin t}$$

例 4 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin\sqrt{x}\tan\sqrt{x}}{x}$

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x^2)}{3x^2}\xlongequal{t=x^2}\lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{3t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{2t}\cdot\frac{3t}{\sin 3t}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{5}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{5x}{\tan 5x}=\frac{3}{5}\cdot 1\cdot 1=\frac{3}{5}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin\sqrt{x}\tan\sqrt{x}}{x}\xlongequal{t=\sqrt{x}}\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t\tan t}{t^2}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{t}\cdot\lim_{t\to 0^+}\frac{\tan t}{t}=1$$

例 5 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}$

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}\xlongequal{x=\sin t}\lim\frac{t}{\sin t}$$

例 4 计算 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$，$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}$，$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin\sqrt{x}\tan\sqrt{x}}{x}$

解

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(2x^2)}{3x^2}\overset{t=x^2}{=\!=\!=}\lim_{t\to0}\frac{\sin 2t}{3t}=\lim_{t\to0}\frac{\sin 2t}{2t}\cdot\frac{3t}{\sin 3t}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}=\lim_{x\to0}\frac{3}{5}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{5x}{\tan 5x}=\frac{3}{5}\cdot1\cdot1=\frac{3}{5}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin\sqrt{x}\tan\sqrt{x}}{x}\overset{t=\sqrt{x}}{=\!=\!=}\lim_{t\to0^+}\frac{\sin t\tan t}{t^2}=\lim_{t\to0^+}\frac{\sin t}{t}\cdot\lim_{t\to0^+}\frac{\tan t}{t}=1$$

例 5 计算 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}$，$\lim\limits_{x\to0}\frac{\arctan x}{x}$

解

$$\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}\overset{x=\sin t}{=\!=\!=}\lim_{t\to0}\frac{t}{\sin t}$$

例 4 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin\sqrt{x}\tan\sqrt{x}}{x}$

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x^2)}{3x^2} \xlongequal{t=x^2} \lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{3t} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{2t}\cdot\frac{3t}{\sin 3t}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \lim_{x\to 0}\frac{3}{5}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{5x}{\tan 5x} = \frac{3}{5}\cdot 1\cdot 1 = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin\sqrt{x}\tan\sqrt{x}}{x} \xlongequal{t=\sqrt{x}} \lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t\tan t}{t^2} = \lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{t}\cdot\lim_{t\to 0^+}\frac{\tan t}{t} = 1$$

例 5 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}$

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} \xlongequal{x=\sin t} \lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t} = 1,$$

例 4 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin\sqrt{x}\tan\sqrt{x}}{x}$

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x^2)}{3x^2} \xlongequal{t=x^2} \lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{3t} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{2t}\cdot\frac{3t}{\sin 3t}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \lim_{x\to 0}\frac{3}{5}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{5x}{\tan 5x} = \frac{3}{5}\cdot 1\cdot 1 = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin\sqrt{x}\tan\sqrt{x}}{x} \xlongequal{t=\sqrt{x}} \lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t\tan t}{t^2} = \lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{t}\cdot\lim_{t\to 0^+}\frac{\tan t}{t} = 1$$

例 5 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}$

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} \xlongequal{x=\sin t} \lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t} = 1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x} \xlongequal{x=\tan t}$$

例 4 计算 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$，$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}$，$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin\sqrt{x}\tan\sqrt{x}}{x}$

解

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(2x^2)}{3x^2}\xlongequal{t=x^2}\lim_{t\to0}\frac{\sin 2t}{3t}=\lim_{t\to0}\frac{\sin 2t}{2t}\cdot\frac{3t}{\sin 3t}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}=\lim_{x\to0}\frac{3}{5}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{5x}{\tan 5x}=\frac{3}{5}\cdot1\cdot1=\frac{3}{5}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin\sqrt{x}\tan\sqrt{x}}{x}\xlongequal{t=\sqrt{x}}\lim_{t\to0^+}\frac{\sin t\tan t}{t^2}=\lim_{t\to0^+}\frac{\sin t}{t}\cdot\lim_{t\to0^+}\frac{\tan t}{t}=1$$

例 5 计算 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}$，$\lim\limits_{x\to0}\frac{\arctan x}{x}$

解

$$\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}\xlongequal{x=\sin t}\lim_{t\to0}\frac{t}{\sin t}=1,\qquad \lim_{x\to0}\frac{\arctan x}{x}\xlongequal{x=\tan t}\lim\frac{t}{\tan t}$$

例 4 计算 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$，$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}$，$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin\sqrt{x}\tan\sqrt{x}}{x}$

解

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(2x^2)}{3x^2}\xlongequal{t=x^2}\lim_{t\to0}\frac{\sin 2t}{3t}=\lim_{t\to0}\frac{\sin 2t}{2t}\cdot\frac{3t}{\sin 3t}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}=\lim_{x\to0}\frac{3}{5}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{5x}{\tan 5x}=\frac{3}{5}\cdot1\cdot1=\frac{3}{5}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin\sqrt{x}\tan\sqrt{x}}{x}\xlongequal{t=\sqrt{x}}\lim_{t\to0^+}\frac{\sin t\tan t}{t^2}=\lim_{t\to0^+}\frac{\sin t}{t}\cdot\lim_{t\to0^+}\frac{\tan t}{t}=1$$

例 5 计算 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}$，$\lim\limits_{x\to0}\frac{\arctan x}{x}$

解

$$\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}\xlongequal{x=\sin t}\lim_{t\to0}\frac{t}{\sin t}=1,\qquad \lim_{x\to0}\frac{\arctan x}{x}\xlongequal{x=\tan t}\lim_{t\to0}\frac{t}{\tan t}$$

例 4 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin\sqrt{x}\tan\sqrt{x}}{x}$

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x^2)}{3x^2}\xlongequal{t=x^2}\lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{3t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{2t}\cdot\frac{3t}{\sin 3t}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{5}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{5x}{\tan 5x}=\frac{3}{5}\cdot 1\cdot 1=\frac{3}{5}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin\sqrt{x}\tan\sqrt{x}}{x}\xlongequal{t=\sqrt{x}}\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t\tan t}{t^2}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{t}\cdot\lim_{t\to 0^+}\frac{\tan t}{t}=1$$

例 5 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}$

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}\xlongequal{x=\sin t}\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}\xlongequal{x=\tan t}\lim_{t\to 0}\frac{t}{\tan t}=1$$

小结

我们已经得到了以下常用极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\cos x=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1$$

重要极限 II $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

重要极限 II $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \quad \xRightarrow{t=1/x} \quad \lim\,(1+t)^{1/t} = e$

重要极限 II $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \quad \xRightarrow{t=1/x} \quad \lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t} = e$

例 1 计算

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x$$

例 1 计算

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x \xlongequal{x=2t}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x$$

例 1 计算

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x \xlongequal{x=2t} \lim\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x$$

重要极限 II $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \quad \xRightarrow{t=1/x} \quad \lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{1/t} = e$

例 1 计算

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x \xlongequal{x=2t} \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x$$

例 1 计算

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x \xlongequal{x=2t} \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^2$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x$$

重要极限 II $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \xRightarrow{t=1/x} \lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t} = e$

例 1 计算

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x \xlongequal{x=2t} \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^2 = e^2$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x$$

例 1 计算

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x \xlongequal{x=2t} \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^2 = e^2$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x \xlongequal{x=-2t}$$

例 1 计算

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x \xlongequal{x=2t} \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^2 = e^2$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x \xlongequal{x=-2t} \lim\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-2t}$$

重要极限 II $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \quad \xRightarrow{t=1/x} \quad \lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t} = e$

例 1 计算

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x \xlongequal{x=2t} \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^2 = e^2$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x \xlongequal{x=-2t} \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-2t}$$

例 1 计算

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x \xlongequal{x=2t} \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^2 = e^2$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x \xlongequal{x=-2t} \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-2t} = \lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^{-2}$$

重要极限 II $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \xRightarrow{t=1/x} \lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t} = e$

例 1 计算

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x \xlongequal{x=2t} \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^2 = e^2$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x \xlongequal{x=-2t} \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-2t} = \lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^{-2} = e^{-2}$$

重要极限 II $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \xRightarrow{t=1/x} \lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{1/t} = e$

例 1 计算

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x \xlongequal{x=2t} \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^2 = e^2$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x \xlongequal{x=-2t} \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-2t} = \lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^{-2} = e^{-2}$$

例 2 计算

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

重要极限 II $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \xRightarrow{t=1/x} \lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t} = e$

例 1 计算

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x \xlongequal{x=2t} \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^2 = e^2$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x \xlongequal{x=-2t} \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-2t} = \lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^{-2} = e^{-2}$$

例 2 计算

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \xlongequal{t=x/2}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

重要极限 II $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \xRightarrow{t=1/x} \lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t} = e$

例 1 计算

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x \xlongequal{x=2t} \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^2 = e^2$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x \xlongequal{x=-2t} \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-2t} = \lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^{-2} = e^{-2}$$

例 2 计算

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \xlongequal{t=x/2} \lim(1+t)^{\frac{1}{2t}}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

重要极限 II $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \quad \xRightarrow{t=1/x} \quad \lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{1/t} = e$

例 1 计算

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x \overset{x=2t}{=\!=\!=} \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^2 = e^2$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x \overset{x=-2t}{=\!=\!=} \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-2t} = \lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^{-2} = e^{-2}$$

例 2 计算

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \overset{t=x/2}{=\!=\!=} \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{2t}}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

重要极限 II $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \xRightarrow{t=1/x} \lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t} = e$

例 1 计算

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x \xlongequal{x=2t} \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^2 = e^2$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x \xlongequal{x=-2t} \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-2t} = \lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^{-2} = e^{-2}$$

例 2 计算

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \xlongequal{t=x/2} \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{2t}} = \lim_{t\to 0}\left[(1+t)^{1/t}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

重要极限 II $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \xRightarrow{t=1/x} \lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{1/t} = e$

例 1 计算

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x \overset{x=2t}{=\!=\!=} \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^2 = e^2$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x \overset{x=-2t}{=\!=\!=} \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-2t} = \lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^{-2} = e^{-2}$$

例 2 计算

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \overset{t=x/2}{=\!=\!=} \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{2t}} = \lim_{t\to 0}\left[(1+t)^{1/t}\right]^{\frac{1}{2}} = e^{1/2}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

重要极限 II $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \quad \xRightarrow{t=1/x} \quad \lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{1/t} = e$

例 1 计算

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x \xlongequal{x=2t} \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^2 = e^2$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x \xlongequal{x=-2t} \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-2t} = \lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^{-2} = e^{-2}$$

例 2 计算

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \xlongequal{t=x/2} \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{2t}} = \lim_{t\to 0}\left[(1+t)^{1/t}\right]^{\frac{1}{2}} = e^{1/2}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \xlongequal{t=-x/2}$$

重要极限 II $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \quad \xRightarrow{t=1/x} \quad \lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{1/t} = e$

例 1 计算

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x \xlongequal{x=2t} \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^2 = e^2$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x \xlongequal{x=-2t} \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-2t} = \lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^{-2} = e^{-2}$$

例 2 计算

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \xlongequal{t=x/2} \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{2t}} = \lim_{t\to 0}\left[(1+t)^{1/t}\right]^{\frac{1}{2}} = e^{1/2}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \xlongequal{t=-x/2} \lim (1+t)^{-\frac{1}{2t}}$$

重要极限 II $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \xRightarrow{t=1/x} \lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{1/t} = e$

例 1 计算

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x \xlongequal{x=2t} \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^2 = e^2$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x \xlongequal{x=-2t} \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-2t} = \lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^{-2} = e^{-2}$$

例 2 计算

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \xlongequal{t=x/2} \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{2t}} = \lim_{t\to 0}\left[(1+t)^{1/t}\right]^{\frac{1}{2}} = e^{1/2}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \xlongequal{t=-x/2} \lim_{t\to 0}(1+t)^{-\frac{1}{2t}}$$

重要极限 II $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \xRightarrow{t=1/x} \lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{1/t} = e$

例 1 计算

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x \overset{x=2t}{=\!=\!=} \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^2 = e^2$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x \overset{x=-2t}{=\!=\!=} \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-2t} = \lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^{-2} = e^{-2}$$

例 2 计算

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \overset{t=x/2}{=\!=\!=} \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{2t}} = \lim_{t\to 0}\left[(1+t)^{1/t}\right]^{\frac{1}{2}} = e^{1/2}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \overset{t=-x/2}{=\!=\!=} \lim_{t\to 0}(1+t)^{-\frac{1}{2t}} = \lim_{t\to 0}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{t}}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

重要极限 II $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \xRightarrow{t=1/x} \lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t} = e$

例 1 计算

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x \overset{x=2t}{=\!=\!=} \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^2 = e^2$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x \overset{x=-2t}{=\!=\!=} \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-2t} = \lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^{-2} = e^{-2}$$

例 2 计算

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \overset{t=x/2}{=\!=\!=} \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{2t}} = \lim_{t\to 0}\left[(1+t)^{1/t}\right]^{\frac{1}{2}} = e^{1/2}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \overset{t=-x/2}{=\!=\!=} \lim_{t\to 0}(1+t)^{-\frac{1}{2t}} = \lim_{t\to 0}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{t}}\right]^{-\frac{1}{2}} = e^{-1/2}$$

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

例 3 计算

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{x+1}$$

例 3 计算

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^x$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{x+1}$$

例 3 计算

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^x$$

$$\underline{\underline{t=\frac{x-1}{2}}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{x+1}$$

例 3 计算

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^x$$

$$\xlongequal{t=\frac{x-1}{2}} \lim\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t+1}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{x+1}$$

例 3 计算

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^x$$

$$\xlongequal{t=\frac{x-1}{2}} \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t+1}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{x+1}$$

例 3 计算

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{x}$$

$$\xlongequal{t=\frac{x-1}{2}} \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t+1} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t}\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{x+1}$$

例 3 计算

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^x$$

$$\xlongequal{t=\frac{x-1}{2}} \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t+1} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t}\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right) = e^2$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{x+1}$$

例 3 计算

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^x$$

$$\xlongequal{t=\frac{x-1}{2}}\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t+1}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t}\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)=e^2$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x+1}$$

例 3 计算

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^x$$

$$\xlongequal{t=\frac{x-1}{2}} \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t+1} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t}\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right) = e^2$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x+1}$$

$$\xlongequal{t=-x}$$

例 3 计算

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^x$$

$$\xlongequal{t=\frac{x-1}{2}} \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t+1} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t}\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right) = e^2$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x+1}$$

$$\xlongequal{t=-x} \lim \left(1+\frac{1}{t}\right)^{-t+1}$$

例 3 计算

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{x}$$

$$\xlongequal{t=\frac{x-1}{2}}\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t+1}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t}\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)=e^{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x+1}$$

$$\xlongequal{t=-x}\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-t+1}$$

例 3 计算

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^x$$

$$\xlongequal{t=\frac{x-1}{2}} \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t+1} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t}\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right) = e^2$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x+1}$$

$$\xlongequal{t=-x} \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-t+1} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{t}\right)^t}\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)$$

例 3 计算

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^x$$

$$\xlongequal{t=\frac{x-1}{2}} \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t+1} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t}\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right) = e^2$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x+1}$$

$$\xlongequal{t=-x} \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-t+1} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{t}\right)^t}\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right) = e^{-1}$$

例 3 计算

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^x$$

$$\xlongequal{t=\frac{x-1}{2}} \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t+1} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t}\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right) = e^2$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x+1}$$

$$\xlongequal{t=-x} \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-t+1} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{t}\right)^t}\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right) = e^{-1}$$

例 4 计算

$$\lim_{x\to1} x^{\frac{1}{x-1}}$$

例 3 计算

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^x$$

$$\xlongequal{t=\frac{x-1}{2}} \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t+1} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t}\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right) = e^2$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x+1}$$

$$\xlongequal{t=-x} \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-t+1} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{t}\right)^t}\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right) = e^{-1}$$

例 4 计算

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} \xlongequal{t=x-1}$$

例 3 计算

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^x$$

$$\xlongequal{t=\frac{x-1}{2}} \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t+1} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t}\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right) = e^2$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x+1}$$

$$\xlongequal{t=-x} \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-t+1} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{t}\right)^t}\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right) = e^{-1}$$

例 4 计算

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} \xlongequal{t=x-1} \lim\,(t+1)^{\frac{1}{t}}$$

例 3 计算

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^x$$

$$\xlongequal{t=\frac{x-1}{2}} \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t+1} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t}\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right) = e^2$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x+1}$$

$$\xlongequal{t=-x} \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-t+1} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{t}\right)^t}\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right) = e^{-1}$$

例 4 计算

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} \xlongequal{t=x-1} \lim_{t\to 0}(t+1)^{\frac{1}{t}}$$

例 3 计算

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{x}$$

$$\xlongequal{t=\frac{x-1}{2}} \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t+1} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t}\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right) = e^{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x+1}$$

$$\xlongequal{t=-x} \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-t+1} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}}\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right) = e^{-1}$$

例 4 计算

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} \xlongequal{t=x-1} \lim_{t\to 0}(t+1)^{\frac{1}{t}} = e$$

例 5 计算

$$\lim_{x \to 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{\sin x}}$$

$$\lim_{x \to 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{4x}}$$

例 5 计算

$$\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{3x}\cdot\frac{3x}{\sin x}}$$

$$\lim_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{4x}}$$

例 5 计算

$$\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{3x}\cdot\frac{3x}{\sin x}} = \lim_{x\to 0}\left[(1+3x)^{\frac{1}{3x}}\right]^{\frac{3x}{\sin x}}$$

$$\lim_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{4x}}$$

例 5 计算

$$\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{3x}\cdot\frac{3x}{\sin x}} = \lim_{x\to 0}\left[(1+3x)^{\frac{1}{3x}}\right]^{\frac{3x}{\sin x}} = e^3$$

$$\lim_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{4x}}$$

例 5 计算

$$\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{3x}\cdot\frac{3x}{\sin x}} = \lim_{x\to 0}\left[(1+3x)^{\frac{1}{3x}}\right]^{\frac{3x}{\sin x}} = e^3$$

$$\lim_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{4x}} = \lim_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{4x}}$$

例 5 计算

$$\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{3x}\cdot\frac{3x}{\sin x}} = \lim_{x\to 0}\left[(1+3x)^{\frac{1}{3x}}\right]^{\frac{3x}{\sin x}} = e^3$$

$$\lim_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{4x}} = \lim_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{4x}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[(1-\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\frac{\sin x}{4x}}$$

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

例 5 计算

$$\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{3x}\cdot\frac{3x}{\sin x}} = \lim_{x\to 0}\left[(1+3x)^{\frac{1}{3x}}\right]^{\frac{3x}{\sin x}} = e^3$$

$$\lim_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{4x}} = \lim_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{4x}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[(1-\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\frac{\sin x}{4x}}$$

(利用 $\lim_{t\to\infty}(1-t)^{\frac{1}{t}} = e^{-1}$)

例 5 计算

$$\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{3x}\cdot\frac{3x}{\sin x}} = \lim_{x\to 0}\left[(1+3x)^{\frac{1}{3x}}\right]^{\frac{3x}{\sin x}} = e^3$$

$$\lim_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{4x}} = \lim_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{4x}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[(1-\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\frac{\sin x}{4x}} = e^{-\frac{1}{4}}$$

(利用 $\lim_{t\to\infty}(1-t)^{\frac{1}{t}} = e^{-1}$)

小结

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}=e^{-1}$$

$$\lim_{t\to 0}(1-t)^{\frac{1}{t}}=e^{-1}$$

We are here now...

1. 数列极限
2. 函数极限
3. 极限运算
4. 极限性质
5. 两个重要极限
6. 无穷大，无穷小

定义 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ （或 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$），则称 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的**无穷小**.

定义 如果 $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ （或 $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$），则称 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的**无穷小**.

例 因为 $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$，所以说 $\frac{1}{x}$ 为当 $x\to\infty$ 时的无穷小.

定义 如果 $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ （或 $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$），则称 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ （或 $x\to\infty$）时的**无穷小**.

例 因为 $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$，所以说 $\frac{1}{x}$ 为当 $x\to\infty$ 时的无穷小.

性质 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Longleftrightarrow f(x)=A+\alpha$，其中 α 为当 $x\to x_0$ 时的无穷小.

定义 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ （或 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$），则称 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的**无穷小**.

例 因为 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$，所以说 $\frac{1}{x}$ 为当 $x \to \infty$ 时的无穷小.

性质 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$，其中 α 为当 $x \to x_0$ 时的无穷小.

证明

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} [f(x) - A] = 0$$

定义 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ （或 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$），则称 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的**无穷小**.

例 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$，所以说 $\frac{1}{x}$ 为当 $x\to\infty$ 时的无穷小.

性质 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$，其中 α 为当 $x\to x_0$ 时的无穷小.

证明

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{x\to x_0}[f(x)-A]=0$$

$$\Leftrightarrow\quad f(x)-A \text{ 是无穷小}$$

定义 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ （或 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$），则称 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的**无穷小**.

例 因为 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$，所以说 $\frac{1}{x}$ 为当 $x \to \infty$ 时的无穷小.

性质 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$，其中 α 为当 $x \to x_0$ 时的无穷小.

证明

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0} f(x) = A \quad &\Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} [f(x) - A] = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha := f(x) - A \text{ 是无穷小} \end{aligned}$$

定义 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ （或 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$），则称 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ （或 $x\to\infty$）时的**无穷小**.

例 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$，所以说 $\frac{1}{x}$ 为当 $x\to\infty$ 时的无穷小.

性质 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$，其中 α 为当 $x\to x_0$ 时的无穷小.

(把 $x\to x_0$ 换成 $x\to\infty$，上述结论仍成立)

证明

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{x\to x_0}[f(x)-A]=0$$

$$\Leftrightarrow\quad \alpha:=f(x)-A \text{ 是无穷小}$$

定义 如果 $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$（或 $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$），则称 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的**无穷大**.

定义 如果 $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$（或 $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$），则称 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的**无穷大**.

注 $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ 指：$\forall M > 0$，$\exists \delta > 0$，使得 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x)| > M$.

定义 如果 $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$（或 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$），则称 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的**无穷大**.

注 $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$ 指：$\forall M>0$，$\exists\delta>0$，使得 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|>M$.

同理可定义 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

定义 如果 $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$（或 $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$），则称 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的**无穷大**.

注 $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ 指：$\forall M > 0$，$\exists \delta > 0$，使得 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x)| > M$.

同理可定义 $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

例 验证 $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$，所以说 $\frac{1}{x}$ 为当 $x \to 0$ 时的无穷大。

定义 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$（或 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$），则称 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的**无穷大**.

注 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ 指：$\forall M>0$，$\exists\delta>0$，使得 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|>M$.

同理可定义 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

例 验证 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$，所以说 $\frac{1}{x}$ 为当 $x\to 0$ 时的无穷大。

性质 假设 $f(x)\neq 0$，则 $\lim f(x)=0 \Leftrightarrow \lim \frac{1}{f(x)}=\infty$.

定义 设 α 和 β 都是无穷小.

- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$，那么称 β 是比 α **高阶的无穷小**，记作 $\beta = o(\alpha)$.

定义 设 α 和 β 都是无穷小.

- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$，那么称 β 是比 α **高阶的无穷小**，记作 $\beta = o(\alpha)$.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$，那么称 β 是比 α **低阶的无穷小**.

定义 设 α 和 β 都是无穷小.

- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$，那么称 β 是比 α **高阶的无穷小**，记作 $\beta = o(\alpha)$.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$，那么称 β 是比 α **低阶的无穷小**.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$，那么称 β 与 α 是 **同阶无穷小**.

定义 设 α 和 β 都是无穷小.

- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$，那么称 β 是比 α **高阶的无穷小**，记作 $\beta = o(\alpha)$.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$，那么称 β 是比 α **低阶的无穷小**.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$，那么称 β 与 α 是 **同阶无穷小**.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$，那么称 β 与 α 是 **等价无穷小**，记作 $\alpha \sim \beta$.

定义 设 α 和 β 都是无穷小.

- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$，那么称 β 是比 α **高阶的无穷小**，记作 $\beta = o(\alpha)$.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$，那么称 β 是比 α **低阶的无穷小**.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$，那么称 β 与 α 是 **同阶无穷小**.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$，那么称 β 与 α 是 **等价无穷小**，记作 $\alpha \sim \beta$.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0$，那么称 β 是关于 α 的 k **阶的无穷小**.

定义 设 α 和 β 都是无穷小.

- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$，那么称 β 是比 α **高阶的无穷小**，记作 $\beta = o(\alpha)$.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$，那么称 β 是比 α **低阶的无穷小**.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$，那么称 β 与 α 是 **同阶无穷小**.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$，那么称 β 与 α 是 **等价无穷小**，记作 $\alpha \sim \beta$.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0$，那么称 β 是关于 α 的 **k 阶的无穷小**.

例

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x^2}{x} = 0$

定义 设 α 和 β 都是无穷小.

- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$，那么称 β 是比 α **高阶的无穷小**，记作 $\beta = o(\alpha)$.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$，那么称 β 是比 α **低阶的无穷小**.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$，那么称 β 与 α 是 **同阶无穷小**.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$，那么称 β 与 α 是 **等价无穷小**，记作 $\alpha \sim \beta$.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0$，那么称 β 是关于 α 的 **k 阶的无穷小**.

例

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x^2}{x} = 0 \Rightarrow$ 当 $x \to 0$ 时，$3x^2$ 是比 x 高阶的无穷小，

定义 设 α 和 β 都是无穷小.

- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$，那么称 β 是比 α **高阶的无穷小**，记作 $\beta = o(\alpha)$.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$，那么称 β 是比 α **低阶的无穷小**.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$，那么称 β 与 α 是 **同阶无穷小**.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$，那么称 β 与 α 是 **等价无穷小**，记作 $\alpha \sim \beta$.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0$，那么称 β 是关于 α 的 k **阶的无穷小**.

例

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x^2}{x} = 0 \Rightarrow$ 当 $x \to 0$ 时，$3x^2$ 是比 x 高阶的无穷小，记作
$$3x^2 = o(x)\ (x \to 0).$$

定义 设 α 和 β 都是无穷小.

- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$，那么称 β 是比 α **高阶的无穷小**，记作 $\beta = o(\alpha)$.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$，那么称 β 是比 α **低阶的无穷小**.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$，那么称 β 与 α 是 **同阶无穷小**.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$，那么称 β 与 α 是 **等价无穷小**，记作 $\alpha \sim \beta$.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0$，那么称 β 是关于 α 的 **k 阶的无穷小**.

例

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x^2}{x} = 0 \Rightarrow$ 当 $x \to 0$ 时，$3x^2$ 是比 x 高阶的无穷小，记作
$$3x^2 = o(x)\ (x \to 0).$$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

定义 设 α 和 β 都是无穷小.

- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$，那么称 β 是比 α **高阶的无穷小**，记作 $\beta = o(\alpha)$.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$，那么称 β 是比 α **低阶的无穷小**.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$，那么称 β 与 α 是 **同阶无穷小**.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$，那么称 β 与 α 是 **等价无穷小**，记作 $\alpha \sim \beta$.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0$，那么称 β 是关于 α 的 **k 阶的无穷小**.

例

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x^2}{x} = 0 \Rightarrow$ 当 $x \to 0$ 时，$3x^2$ 是比 x 高阶的无穷小，记作
$$3x^2 = o(x)\ (x \to 0).$$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ 当 $x \to 0$ 时，$1-\cos x$ 与 x^2 是同阶无穷小，

暨南大学 JINAN UNIVERSITY

定义 设 α 和 β 都是无穷小.

- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$，那么称 β 是比 α **高阶的无穷小**，记作 $\beta = o(\alpha)$.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$，那么称 β 是比 α **低阶的无穷小**.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$，那么称 β 与 α 是 **同阶无穷小**.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$，那么称 β 与 α 是 **等价无穷小**，记作 $\alpha \sim \beta$.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0$，那么称 β 是关于 α 的 **k 阶的无穷小**.

例

- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3x^2}{x} = 0 \Rightarrow$ 当 $x \to 0$ 时，$3x^2$ 是比 x 高阶的无穷小，记作
$$3x^2 = o(x)\ (x \to 0).$$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ 当 $x \to 0$ 时，$1 - \cos x$ 与 x^2 是同阶无穷小，$1 - \cos x$ 是 x 的 2 阶无穷小，

定义 设 α 和 β 都是无穷小.

- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$，那么称 β 是比 α **高阶的无穷小**，记作 $\beta = o(\alpha)$.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$，那么称 β 是比 α **低阶的无穷小**.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$，那么称 β 与 α 是 **同阶无穷小**.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$，那么称 β 与 α 是 **等价无穷小**，记作 $\alpha \sim \beta$.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0$，那么称 β 是关于 α 的 **k 阶的无穷小**.

例

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x^2}{x} = 0 \Rightarrow$ 当 $x \to 0$ 时，$3x^2$ 是比 x 高阶的无穷小，记作
$$3x^2 = o(x)\ (x \to 0).$$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ 当 $x \to 0$ 时，$1-\cos x$ 与 x^2 是同阶无穷小，$1-\cos x$ 是 x 的 2 阶无穷小，$1-\cos x$ 与 $\frac{1}{2}x^2$ 是等价无穷小.