第 2 章 α：导数

数学系　梁卓滨

2019-2020 学年 I

Outline

1. 导数定义

2. 求导法则

   四则运算的求导法则

   反函数的求导法则

   复合函数的求导法则

3. 高阶导数

4. 隐函数求导

5. 微分

We are here now...

1. 导数定义
2. 求导法则
   - 四则运算的求导法则
   - 反函数的求导法则
   - 复合函数的求导法则
3. 高阶导数
4. 隐函数求导
5. 微分

导数概念的引入：瞬时速度

引例 假设物体沿直线作（变速）运动，在 t 时刻的位置为 $s = f(t)$.

导数概念的引入：瞬时速度

引例 假设物体沿直线作（变速）运动，在 t 时刻的位置为 $s=f(t)$.

- 从 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 时刻的平均速度为：

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$$

暨南大学 JINAN UNIVERSITY

导数概念的引入：瞬时速度

引例 假设物体沿直线作（变速）运动，在 t 时刻的位置为 $s=f(t)$.

- 从 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 时刻的平均速度为：

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$$

- 在 t_0 时刻的瞬时速度为：

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\qquad\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$$

导数概念的引入：瞬时速度

引例 假设物体沿直线作（变速）运动，在 t 时刻的位置为 $s=f(t)$.

- 从 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 时刻的平均速度为：

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$$

- 在 t_0 时刻的瞬时速度为：

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$$

导数的定义

定义 设 $y = f(x)$ 在 x_0 的邻域内有定义，如果极限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处**可导**，

导数的定义

定义 设 $y=f(x)$ 在 x_0 的邻域内有定义，如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处**可导**，上述极限值称为 $f(x)$ 在 x_0 处的**导数**（或**微商**），

导数的定义

定义 设 $y=f(x)$ 在 x_0 的邻域内有定义，如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处**可导**，上述极限值称为 $f(x)$ 在 x_0 处的**导数**（或**微商**），记为 $f'(x_0)$，$y'|_{x=x_0}$，$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$，或 $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$.

导数的定义

定义 设 $y=f(x)$ 在 x_0 的邻域内有定义，如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处**可导**，上述极限值称为 $f(x)$ 在 x_0 处的**导数**（或**微商**），记为 $f'(x_0)$，$y'|_{x=x_0}$，$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$，或 $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$.

注 1 导数反映函数变化快慢，故 $f'(x_0)$ 也称为 $f(x)$ 在 x_0 处的**变化率**.

导数的定义

定义 设 $y=f(x)$ 在 x_0 的邻域内有定义，如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处**可导**，上述极限值称为 $f(x)$ 在 x_0 处的**导数**（或**微商**），记为 $f'(x_0)$，$y'|_{x=x_0}$，$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$，或 $\frac{df(x)}{dx}\Big|_{x=x_0}$.

注 1 导数反映函数变化快慢，故 $f'(x_0)$ 也称为 $f(x)$ 在 x_0 处的**变化率**.

注 2 导数 $f'(x_0)$ 定义式的其它等价表示:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

导数的定义

定义 设 $y = f(x)$ 在 x_0 的邻域内有定义，如果极限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处**可导**，上述极限值称为 $f(x)$ 在 x_0 处的**导数**（或**微商**），记为 $f'(x_0)$，$y'|_{x=x_0}$，$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$，或 $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$.

注 1 导数反映函数变化快慢，故 $f'(x_0)$ 也称为 $f(x)$ 在 x_0 处的**变化率**.

注 2 导数 $f'(x_0)$ 定义式的其它等价表示:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

导函数

假设 $y=f(x)$ 定义在开区间 (a,b) 上.

定义 $y=f(x)$ 在 (a,b) 上**可导**，是指对任意点 $x\in(a,b)$ 可导.

导函数

假设 $y = f(x)$ 定义在开区间 (a, b) 上.

定义 $y = f(x)$ 在 (a, b) 上**可导**，是指对任意点 $x \in (a, b)$ 可导. 此时

$$x \mapsto f'(x)$$

定义了一个函数，称为**导函数**，记为 f'，y'，$\frac{dy}{dx}$，或 $\frac{df(x)}{dx}$.

导函数

假设 $y = f(x)$ 定义在开区间 (a, b) 上.

定义 $y = f(x)$ 在 (a, b) 上**可导**，是指对任意点 $x \in (a, b)$ 可导. 此时

$$x \mapsto f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

定义了一个函数，称为**导函数**，记为 f'，y'，$\frac{dy}{dx}$，或 $\frac{df(x)}{dx}$.

导函数

假设 $y = f(x)$ 定义在开区间 (a, b) 上.

定义 $y = f(x)$ 在 (a, b) 上**可导**，是指对任意点 $x \in (a, b)$ 可导. 此时

$$x \mapsto f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

定义了一个函数，称为**导函数**，记为 f'，y'，$\frac{dy}{dx}$，或 $\frac{df(x)}{dx}$.

例 1 求常值函数 $f(x) = C$ 的导数.

例 2 求函数 $f(x) = x^n$（n 为正整数）的导数.

导函数

假设 $y=f(x)$ 定义在开区间 (a,b) 上.

定义 $y=f(x)$ 在 (a,b) 上**可导**，是指对任意点 $x\in(a,b)$ 可导. 此时

$$x\mapsto f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

定义了一个函数，称为**导函数**，记为 f'，y'，$\frac{dy}{dx}$，或 $\frac{df(x)}{dx}$.

例 1 求常值函数 $f(x)=C$ 的导数.

解 $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

例 2 求函数 $f(x)=x^n$（n 为正整数）的导数.

导函数

假设 $y = f(x)$ 定义在开区间 (a, b) 上.

定义 $y = f(x)$ 在 (a, b) 上**可导**，是指对任意点 $x \in (a, b)$ 可导. 此时

$$x \mapsto f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

定义了一个函数，称为**导函数**，记为 f'，y'，$\frac{dy}{dx}$，或 $\frac{df(x)}{dx}$.

例 1 求常值函数 $f(x) = C$ 的导数.

解 $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{C-C}{h}$

例 2 求函数 $f(x) = x^n$（n 为正整数）的导数.

导函数

假设 $y=f(x)$ 定义在开区间 (a,b) 上.

定义 $y=f(x)$ 在 (a,b) 上**可导**，是指对任意点 $x\in(a,b)$ 可导. 此时

$$x\mapsto f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

定义了一个函数，称为**导函数**，记为 f'，y'，$\frac{dy}{dx}$，或 $\frac{df(x)}{dx}$.

例 1 求常值函数 $f(x)=C$ 的导数.

解 $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{C-C}{h}=\lim_{h\to 0}0$

例 2 求函数 $f(x)=x^n$（n 为正整数）的导数.

导函数

假设 $y=f(x)$ 定义在开区间 (a,b) 上.

定义 $y=f(x)$ 在 (a,b) 上**可导**，是指对任意点 $x\in(a,b)$ 可导. 此时

$$x\mapsto f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

定义了一个函数，称为**导函数**，记为 f'，y'，$\frac{dy}{dx}$，或 $\frac{df(x)}{dx}$.

例 1 求常值函数 $f(x)=C$ 的导数.

解 $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{C-C}{h}=\lim\limits_{h\to 0}0=0$

例 2 求函数 $f(x)=x^n$（n 为正整数）的导数.

导函数

假设 $y=f(x)$ 定义在开区间 (a,b) 上.

定义 $y=f(x)$ 在 (a,b) 上**可导**，是指对任意点 $x\in(a,b)$ 可导. 此时

$$x\mapsto f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

定义了一个函数，称为**导函数**，记为 f'，y'，$\frac{dy}{dx}$，或 $\frac{df(x)}{dx}$.

例 1 求常值函数 $f(x)=C$ 的导数.

解 $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{C-C}{h}=\lim\limits_{h\to 0}0=0$

例 2 求函数 $f(x)=x^n$（n 为正整数）的导数.

解 只以 $n=1,2,3$ 为例计算.

例 2 求函数 $f(x) = x^n$（n 为正整数）的导数.

解 只以 $n = 1, 2, 3$ 为例计算.

(1) $n = 1$ 时，$f(x) = x$，

(2) $n = 2$ 时，$f(x) = x^2$，

(3) $n = 3$ 时，$f(x) = x^3$，

例 2 求函数 $f(x)=x^n$（n 为正整数）的导数.

解 只以 $n=1,2,3$ 为例计算.

(1) $n=1$ 时，$f(x)=x$，这时

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

(2) $n=2$ 时，$f(x)=x^2$，

(3) $n=3$ 时，$f(x)=x^3$，

例 2 求函数 $f(x)=x^n$（n 为正整数）的导数.

解 只以 $n=1,2,3$ 为例计算.

(1) $n=1$ 时，$f(x)=x$，这时

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-(x)}{h}$$

(2) $n=2$ 时，$f(x)=x^2$，

(3) $n=3$ 时，$f(x)=x^3$，

例 2 求函数 $f(x)=x^n$（n 为正整数）的导数.

解 只以 $n=1,2,3$ 为例计算.

(1) $n=1$ 时，$f(x)=x$，这时

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-(x)}{h}=\lim_{h\to 0}1=1$$

(2) $n=2$ 时，$f(x)=x^2$,

(3) $n=3$ 时，$f(x)=x^3$,

例 2 求函数 $f(x)=x^n$（n 为正整数）的导数.

解 只以 $n=1,2,3$ 为例计算.

(1) $n=1$ 时，$f(x)=x$，这时

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-(x)}{h}=\lim_{h\to 0}1=1$$

(2) $n=2$ 时，$f(x)=x^2$，这时

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

(3) $n=3$ 时，$f(x)=x^3$，

例 2 求函数 $f(x)=x^n$（n 为正整数）的导数.

解 只以 $n=1,2,3$ 为例计算.

(1) $n=1$ 时，$f(x)=x$，这时

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-(x)}{h}=\lim_{h\to 0}1=1$$

(2) $n=2$ 时，$f(x)=x^2$，这时

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$$

(3) $n=3$ 时，$f(x)=x^3$，

例 2 求函数 $f(x)=x^n$（n 为正整数）的导数.

解 只以 $n=1,2,3$ 为例计算.

(1) $n=1$ 时，$f(x)=x$，这时

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-(x)}{h}=\lim_{h\to 0}1=1$$

(2) $n=2$ 时，$f(x)=x^2$，这时

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}$$

(3) $n=3$ 时，$f(x)=x^3$，

例 2 求函数 $f(x)=x^n$（n 为正整数）的导数.

解 只以 $n=1,2,3$ 为例计算.

(1) $n=1$ 时，$f(x)=x$，这时

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-(x)}{h}=\lim_{h\to 0}1=1$$

(2) $n=2$ 时，$f(x)=x^2$，这时

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(2x+h)$$

(3) $n=3$ 时，$f(x)=x^3$，

例 2 求函数 $f(x)=x^n$（n 为正整数）的导数.

解 只以 $n=1,2,3$ 为例计算.

(1) $n=1$ 时，$f(x)=x$，这时

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-(x)}{h}=\lim_{h\to 0}1=1$$

(2) $n=2$ 时，$f(x)=x^2$，这时

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x$$

(3) $n=3$ 时，$f(x)=x^3$，

例 2 求函数 $f(x)=x^n$（n 为正整数）的导数.

解 只以 $n=1,2,3$ 为例计算.

(1) $n=1$ 时，$f(x)=x$，这时

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-(x)}{h}=\lim_{h\to 0}1=1$$

(2) $n=2$ 时，$f(x)=x^2$，这时

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x$$

(3) $n=3$ 时，$f(x)=x^3$，这时

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

例 2 求函数 $f(x)=x^n$（n 为正整数）的导数.

解 只以 $n=1,2,3$ 为例计算.

(1) $n=1$ 时，$f(x)=x$，这时

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-(x)}{h}=\lim_{h\to 0}1=1$$

(2) $n=2$ 时，$f(x)=x^2$，这时

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x$$

(3) $n=3$ 时，$f(x)=x^3$，这时

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$$

例 2 求函数 $f(x)=x^n$（n 为正整数）的导数.

解 只以 $n=1,2,3$ 为例计算.

(1) $n=1$ 时，$f(x)=x$，这时

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-(x)}{h}=\lim_{h\to 0}1=1$$

(2) $n=2$ 时，$f(x)=x^2$，这时

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x$$

(3) $n=3$ 时，$f(x)=x^3$，这时

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}$$

例 2 求函数 $f(x)=x^n$（n 为正整数）的导数.

解 只以 $n=1,2,3$ 为例计算.

(1) $n=1$ 时，$f(x)=x$，这时

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-(x)}{h}=\lim_{h\to 0}1=1$$

(2) $n=2$ 时，$f(x)=x^2$，这时

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x$$

(3) $n=3$ 时，$f(x)=x^3$，这时

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)$$

例 2 求函数 $f(x)=x^n$（n 为正整数）的导数.

解 只以 $n=1,2,3$ 为例计算.

(1) $n=1$ 时，$f(x)=x$，这时

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-(x)}{h}=\lim_{h\to 0}1=1$$

(2) $n=2$ 时，$f(x)=x^2$，这时

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x$$

(3) $n=3$ 时，$f(x)=x^3$，这时

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)=3x^2$$

例 2 求函数 $f(x)=x^n$（n 为正整数）的导数.

解 只以 $n=1,2,3$ 为例计算.

(1) $n=1$ 时，$f(x)=x$，这时

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-(x)}{h}=\lim_{h\to 0}1=1 \quad \boxed{(x)'=1}$$

(2) $n=2$ 时，$f(x)=x^2$，这时

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x \quad \boxed{(x^2)'=2x}$$

(3) $n=3$ 时，$f(x)=x^3$，这时

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)=3x^2 \quad \boxed{(x^3)'=3x^2}$$

例 2 求函数 $f(x)=x^n$（n 为正整数）的导数. $\boxed{(x^n)'=nx^{n-1}}$

解 只以 $n=1,2,3$ 为例计算.

(1) $n=1$ 时，$f(x)=x$，这时

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-(x)}{h}=\lim_{h\to 0}1=1 \quad \boxed{(x)'=1}$$

(2) $n=2$ 时，$f(x)=x^2$，这时

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x \quad \boxed{(x^2)'=2x}$$

(3) $n=3$ 时，$f(x)=x^3$，这时

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)=3x^2 \quad \boxed{(x^3)'=3x^2}$$

例 3 求函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 的导数.

例 4 求函数 $f(x) = \sin x$ 的导数.

例 3 求函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的导数.

解

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

例 4 求函数 $f(x)=\sin x$ 的导数.

例 3 求函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 的导数.

解

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$$

例 4 求函数 $f(x) = \sin x$ 的导数.

例 3 求函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的导数.

解

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}-\frac{1}{x(x+h)}$$

例 4 求函数 $f(x)=\sin x$ 的导数.

例 3 求函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的导数.

解

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}-\frac{1}{x(x+h)}=-\frac{1}{x^2}$$

例 4 求函数 $f(x)=\sin x$ 的导数.

例 3 求函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的导数.

解

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}-\frac{1}{x(x+h)}=-\frac{1}{x^2}$$

注 1 上述说明 $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$，或等价地，$(x^{-1})'=-x^{-2}$.

例 4 求函数 $f(x)=\sin x$ 的导数.

例 3 求函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的导数.

解

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}-\frac{1}{x(x+h)}=-\frac{1}{x^2}$$

注 1 上述说明 $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$，或等价地，$(x^{-1})'=-x^{-2}$.

注 2 结合 $(x^n)'=nx^{n-1}$（n 为正整数）.

例 4 求函数 $f(x)=\sin x$ 的导数.

例 3 求函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的导数.

解

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}-\frac{1}{x(x+h)}=-\frac{1}{x^2}$$

注 1 上述说明 $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$，或等价地，$(x^{-1})'=-x^{-2}$.

注 2 结合 $(x^n)'=nx^{n-1}$（n 为正整数）. 其实对所有实数 μ，都成立

$$(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}.$$

例 4 求函数 $f(x)=\sin x$ 的导数.

例 3 求函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的导数.

解

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}-\frac{1}{x(x+h)}=-\frac{1}{x^2}$$

注 1 上述说明 $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$，或等价地，$(x^{-1})'=-x^{-2}$.

注 2 结合 $(x^n)'=nx^{n-1}$（n 为正整数）. 其实对所有实数 μ，都成立

$$(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}.$$

例 4 求函数 $f(x)=\sin x$ 的导数.

解

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

例 3 求函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的导数.

解

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\lim_{h\to0}-\frac{1}{x(x+h)}=-\frac{1}{x^2}$$

注 1 上述说明 $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$，或等价地，$(x^{-1})'=-x^{-2}$.

注 2 结合 $(x^n)'=nx^{n-1}$（n 为正整数）. 其实对所有实数 μ，都成立

$$(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}.$$

例 4 求函数 $f(x)=\sin x$ 的导数.

解

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

例 3 求函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的导数.

解

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}-\frac{1}{x(x+h)}=-\frac{1}{x^2}$$

注 1 上述说明 $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$，或等价地，$(x^{-1})'=-x^{-2}$.

注 2 结合 $(x^n)'=nx^{n-1}$（n 为正整数）. 其实对所有实数 μ，都成立

$$(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}.$$

例 4 求函数 $f(x)=\sin x$ 的导数.

解

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot 2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}$$

例 3 求函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的导数.

解

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}-\frac{1}{x(x+h)}=-\frac{1}{x^2}$$

注 1 上述说明 $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$，或等价地，$(x^{-1})'=-x^{-2}$.

注 2 结合 $(x^n)'=nx^{n-1}$（n 为正整数）. 其实对所有实数 μ，都成立

$$(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}.$$

例 4 求函数 $f(x)=\sin x$ 的导数.

解

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot 2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}=\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

例 3 求函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的导数.

解

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}-\frac{1}{x(x+h)}=-\frac{1}{x^2}$$

注 1 上述说明 $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$，或等价地，$(x^{-1})'=-x^{-2}$.

注 2 结合 $(x^n)'=nx^{n-1}$（n 为正整数）. 其实对所有实数 μ，都成立

$$(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}.$$

例 4 求函数 $f(x)=\sin x$ 的导数.

解

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot 2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}=\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=\cos x$$

例 3 求函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的导数.

解

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}-\frac{1}{x(x+h)}=-\frac{1}{x^2}$$

注 1 上述说明 $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$，或等价地，$(x^{-1})'=-x^{-2}$.

注 2 结合 $(x^n)'=nx^{n-1}$（n 为正整数）. 其实对所有实数 μ，都成立

$$(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}.$$

例 4 求函数 $f(x)=\sin x$ 的导数.　　同理 $(\cos x)'=-\sin x$

解

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot 2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}=\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=\cos x$$

小结

至此，我们通过求极限的导数定义，得到一些基本初等函数的导数：

$$(C)' = 1, \quad (x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}, \quad (\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x$$

小结

至此，我们通过求极限的导数定义，得到一些基本初等函数的导数：

$$(C)' = 1, \quad (x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}, \quad (\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x$$

另外，通过类似方法还可以得到

$$(e^x)' = e^x, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

这些导数公式都需要记住.

小结

至此，我们通过求极限的导数定义，得到一些基本初等函数的导数：

$$(C)' = 1, \quad (x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}, \quad (\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x$$

另外，通过类似方法还可以得到

$$(e^x)' = e^x, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

这些导数公式都需要记住.

后面的重点是，如何利用这些基本公式，结合导数的运算法则，求出复杂函数的导数出来.

例 5 求函数 $f(x) = |x|$ 在 $x = 0$ 处的导数.

例 5 求函数 $f(x) = |x|$ 在 $x = 0$ 处的导数.

解 $f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$,

例 5 求函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处的导数.

解 $f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$，极限不存在，

例 5 求函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处的导数.

解 $f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$，极限不存在，在 $x=0$ 处不可导.

例 5 求函数 $f(x) = |x|$ 在 $x = 0$ 处的导数.

解 $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$，极限不存在，在 $x = 0$ 处不可导.

注 尽管上述极限不存在，但单侧极限存在：

例 5 求函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处的导数.

解 $f'(0)=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{|h|}{h}$，极限不存在，在 $x=0$ 处不可导.

注 尽管上述极限不存在，但单侧极限存在：

$$\lim_{h\to0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{h}{h}=1$$

$$\lim_{h\to0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{-h}{h}=-1$$

例 5 求函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处的导数.

解 $f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$，极限不存在，在 $x=0$ 处不可导.

注 尽管上述极限不存在，但单侧极限存在：

$$f'_{+}(0)=\lim_{h\to 0^{+}}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^{+}}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0^{+}}\frac{h}{h}=1$$

$$f'_{-}(0)=\lim_{h\to 0^{-}}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^{-}}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0^{-}}\frac{-h}{h}=-1$$

例 5 求函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处的导数.

解 $f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$，极限不存在， 在 $x=0$ 处不可导.

注 尽管上述极限不存在，但单侧极限存在：

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1$$

$$f'_-(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1$$

一般地，可以定义**单侧导数**如下：

右导数 $$f'_+(x_0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(0)}{h}$$

左导数 $$f'_-(x_0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(0)}{h}$$

例 5 求函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处的导数.

解 $f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$，极限不存在，在 $x=0$ 处不可导.

注 尽管上述极限不存在，但单侧极限存在：

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1$$

$$f'_-(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1$$

一般地，可以定义**单侧导数**如下：

右导数 $$f'_+(x_0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(0)}{h}$$

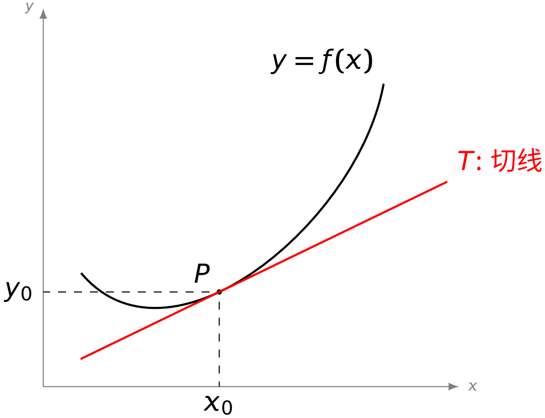
左导数 $$f'_-(x_0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(0)}{h}$$

不难证明：f 在 x_0 处可导 $\Longleftrightarrow f$ 在 x_0 处的左、右导数存在，且相等

导数的几何意义：曲线的切线

设曲线是 $y = f(x)$ 的图形
点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线是:

$$y = k(x - x_0) + y_0$$



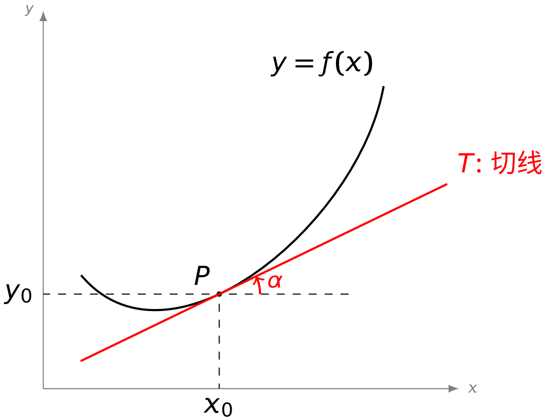
导数的几何意义：曲线的切线

设曲线是 $y=f(x)$ 的图形点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线是:

$$y=k(x-x_0)+y_0$$

其中

$$k=\tan\alpha$$



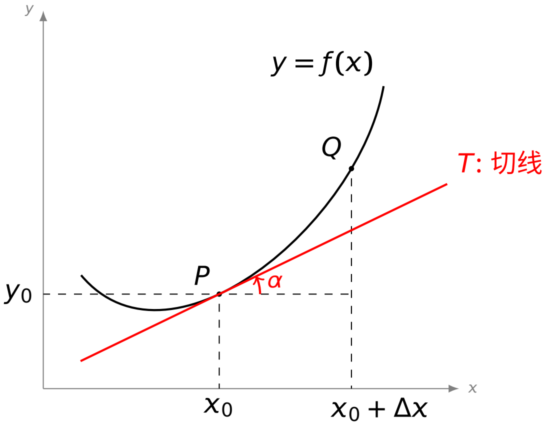
导数的几何意义：曲线的切线

设曲线是 $y = f(x)$ 的图形
点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线是：

$$y = k(x - x_0) + y_0$$

其中

$$k = \tan\alpha$$



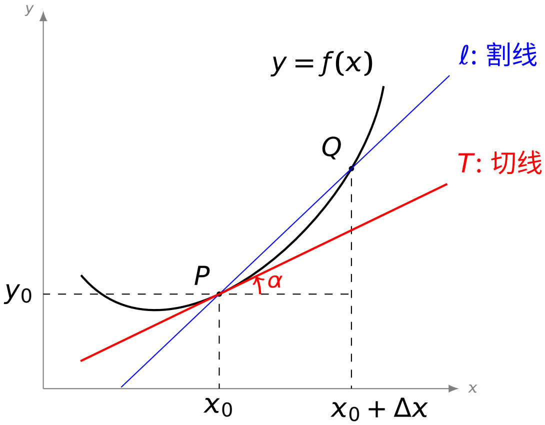
导数的几何意义：曲线的切线

设曲线是 $y = f(x)$ 的图形点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线是：

$$y = k(x - x_0) + y_0$$

其中

$$k = \tan\alpha$$



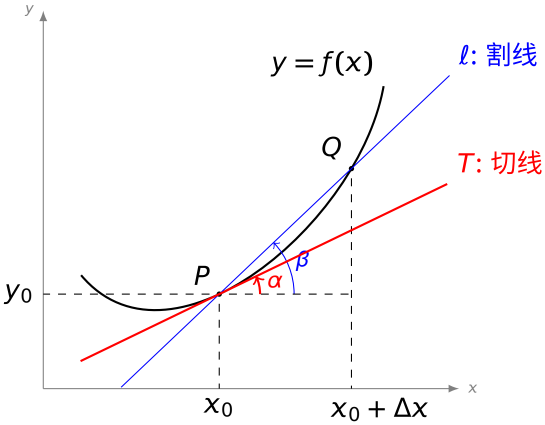
导数的几何意义：曲线的切线

设曲线是 $y = f(x)$ 的图形
点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线是：

$$y = k(x - x_0) + y_0$$

其中

$$k = \tan\alpha$$



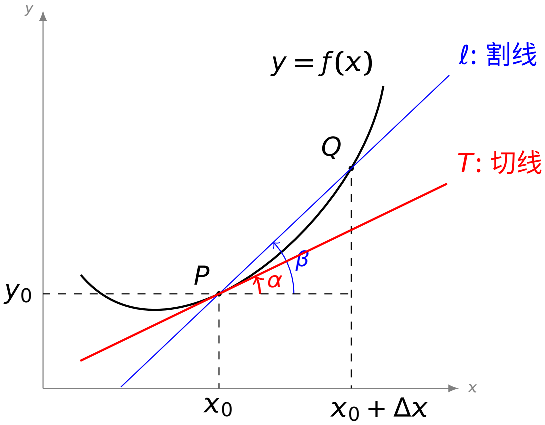
导数的几何意义：曲线的切线

设曲线是 $y = f(x)$ 的图形
点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线是：

$$y = k(x - x_0) + y_0$$

其中

$$k = \tan\alpha$$
$$= \lim_{Q \to P} \tan\beta$$



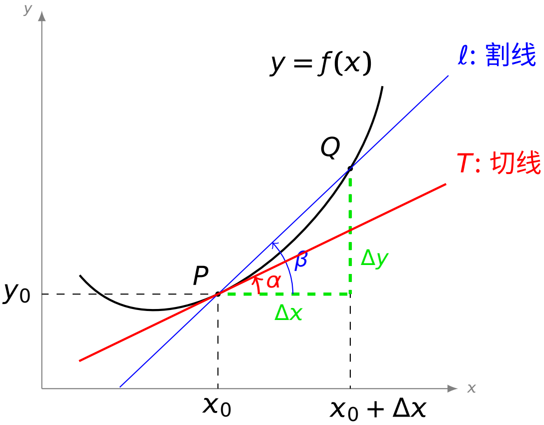
导数的几何意义：曲线的切线

设曲线是 $y=f(x)$ 的图形
点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线是:

$$y=k(x-x_0)+y_0$$

其中

$$k=\tan\alpha$$
$$=\lim_{Q\to P}\tan\beta$$



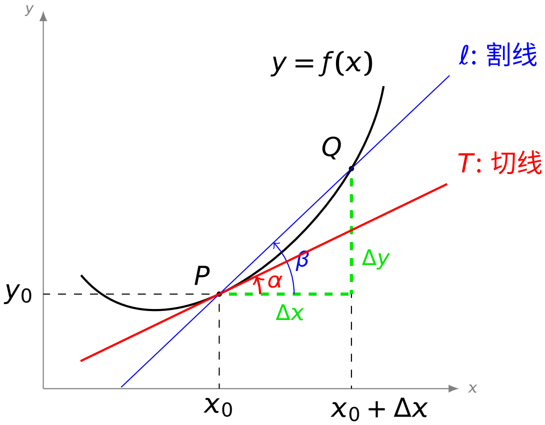
导数的几何意义：曲线的切线

设曲线是 $y = f(x)$ 的图形
点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线是:

$$y = k(x - x_0) + y_0$$

其中

$$\begin{aligned} k &= \tan\alpha \\ &= \lim_{Q\to P} \tan\beta \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \end{aligned}$$



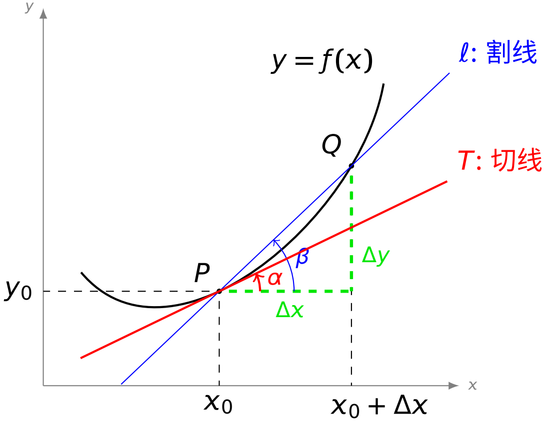
导数的几何意义：曲线的切线

设曲线是 $y = f(x)$ 的图形点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线是：

$$y = k(x - x_0) + y_0$$

其中

$$\begin{aligned} k &= \tan\alpha \\ &= \lim_{Q\to P} \tan\beta \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= f'(x_0) \end{aligned}$$



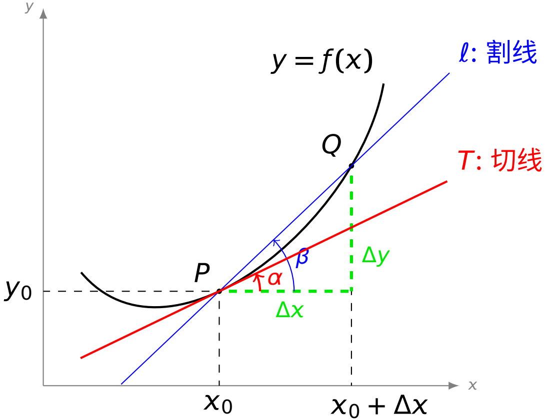
导数的几何意义：曲线的切线

设曲线是 $y=f(x)$ 的图形
点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线是:

$$y=k(x-x_0)+y_0$$

其中

$$\begin{aligned} k &= \tan\alpha \\ &= \lim_{Q\to P}\tan\beta \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= f'(x_0) \end{aligned}$$



所以在点 $P(x_0,y_0)$ 处，

- 切线方程：$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

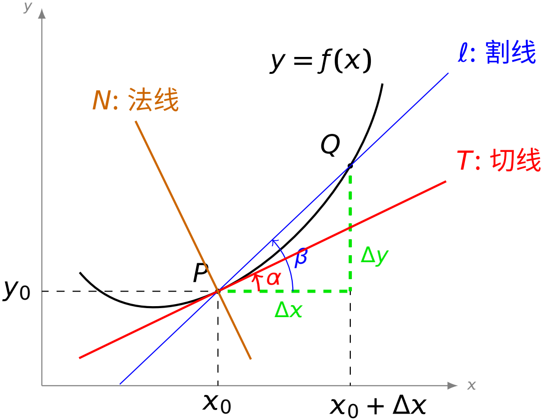
导数的几何意义：曲线的切线

设曲线是 $y=f(x)$ 的图形点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线是：

$$y=k(x-x_0)+y_0$$

其中

$$\begin{aligned}k&=\tan\alpha\\&=\lim_{Q\to P}\tan\beta\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\\&=f'(x_0)\end{aligned}$$



所以在点 $P(x_0,y_0)$ 处，

- 切线方程：$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

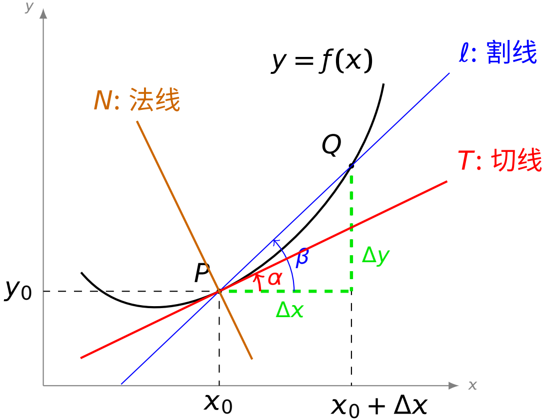
导数的几何意义：曲线的切线

设曲线是 $y=f(x)$ 的图形点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线是：

$$y=k(x-x_0)+y_0$$

其中

$$\begin{aligned} k &= \tan\alpha \\ &= \lim_{Q\to P}\tan\beta \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= f'(x_0) \end{aligned}$$



所以在点 $P(x_0,y_0)$ 处，

- 切线方程：$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$
- 法线方程：$y=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+f(x_0)$

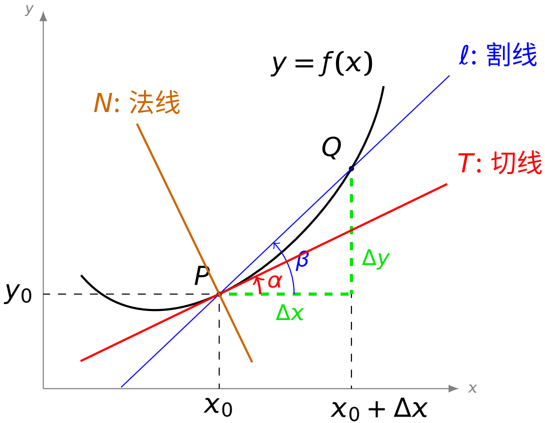
导数的几何意义：曲线的切线

设曲线是 $y=f(x)$ 的图形点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线是：

$$y=k(x-x_0)+y_0$$

其中

$$\begin{aligned} k &= \tan\alpha \\ &= \lim_{Q\to P}\tan\beta \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= f'(x_0) \end{aligned}$$



所以在点 $P(x_0,y_0)$ 处，

- 切线方程：$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$
- 法线方程：$y=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+f(x_0)$，（假设 $f'(x_0)\neq 0$）

- 切线方程：$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
- 法线方程：$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$，（假设 $f'(x_0) \neq 0$）

例 (1) 求 $f(x) = x^2$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线、法线的方程.

(2) 求 $g(x) = \frac{1}{x}$ 在点 $(2, 0.5)$ 处的切线、法线的方程.

- 切线方程：$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
- 法线方程：$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$，（假设 $f'(x_0) \neq 0$）

例 (1) 求 $f(x) = x^2$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线、法线的方程.

(2) 求 $g(x) = \frac{1}{x}$ 在点 $(2, 0.5)$ 处的切线、法线的方程.

解 (1) $f'(x) = 2x$

- 切线方程：$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
- 法线方程：$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$，（假设 $f'(x_0) \neq 0$）

例 (1) 求 $f(x) = x^2$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线、法线的方程.

(2) 求 $g(x) = \frac{1}{x}$ 在点 $(2, 0.5)$ 处的切线、法线的方程.

解 (1) $f'(x) = 2x \Rightarrow f'(1) = 2$，

- 切线方程：$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
- 法线方程：$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$，（假设 $f'(x_0) \neq 0$）

例 (1) 求 $f(x) = x^2$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线、法线的方程.

(2) 求 $g(x) = \frac{1}{x}$ 在点 $(2, 0.5)$ 处的切线、法线的方程.

解 (1) $f'(x) = 2x \Rightarrow f'(1) = 2$，所以

切线 $y = 2(x - 1) + 1$ ，法线 $y = -\frac{1}{2}(x - 1) + 1$

- 切线方程：$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$
- 法线方程：$y=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+f(x_0)$，（假设 $f'(x_0)\neq 0$）

例 (1) 求 $f(x)=x^2$ 在点 $(1,1)$ 处的切线、法线的方程.

(2) 求 $g(x)=\frac{1}{x}$ 在点 $(2,0.5)$ 处的切线、法线的方程.

解 (1) $f'(x)=2x\Rightarrow f'(1)=2$，所以

切线 $y=2(x-1)+1=2x-1$，法线 $y=-\frac{1}{2}(x-1)+1=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

- 切线方程：$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
- 法线方程：$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$，（假设 $f'(x_0) \neq 0$）

例 **(1)** 求 $f(x) = x^2$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线、法线的方程.

(2) 求 $g(x) = \frac{1}{x}$ 在点 $(2, 0.5)$ 处的切线、法线的方程.

解 **(1)** $f'(x) = 2x \Rightarrow f'(1) = 2$，所以

切线 $y = 2(x - 1) + 1 = 2x - 1$，法线 $y = -\frac{1}{2}(x - 1) + 1 = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

(2) $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$

- 切线方程：$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$
- 法线方程：$y=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+f(x_0)$，（假设 $f'(x_0)\neq 0$）

例 (1) 求 $f(x)=x^2$ 在点 $(1,1)$ 处的切线、法线的方程.

(2) 求 $g(x)=\frac{1}{x}$ 在点 $(2,0.5)$ 处的切线、法线的方程.

解 (1) $f'(x)=2x\Rightarrow f'(1)=2$，所以

切线 $y=2(x-1)+1=2x-1$，法线 $y=-\frac{1}{2}(x-1)+1=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

(2) $g'(x)=-\frac{1}{x^2}\Rightarrow g'(2)=-\frac{1}{4}$，

- 切线方程：$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$
- 法线方程：$y=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+f(x_0)$，（假设 $f'(x_0)\neq 0$）

例 **(1)** 求 $f(x)=x^2$ 在点 $(1,1)$ 处的切线、法线的方程.

(2) 求 $g(x)=\frac{1}{x}$ 在点 $(2,0.5)$ 处的切线、法线的方程.

解 **(1)** $f'(x)=2x\Rightarrow f'(1)=2$，所以

切线 $y=2(x-1)+1=2x-1$，法线 $y=-\frac{1}{2}(x-1)+1=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

(2) $g'(x)=-\frac{1}{x^2}\Rightarrow g'(2)=-\frac{1}{4}$，所以

切线 $y=-\frac{1}{4}(x-2)+\frac{1}{2}$ ，法线 $y=4(x-1)+\frac{1}{2}$

- 切线方程：$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$
- 法线方程：$y=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+f(x_0)$，（假设 $f'(x_0)\neq 0$）

例 **(1)** 求 $f(x)=x^2$ 在点 $(1,1)$ 处的切线、法线的方程.

(2) 求 $g(x)=\frac{1}{x}$ 在点 $(2,0.5)$ 处的切线、法线的方程.

解 **(1)** $f'(x)=2x\Rightarrow f'(1)=2$，所以

切线 $y=2(x-1)+1=2x-1$，法线 $y=-\frac{1}{2}(x-1)+1=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

(2) $g'(x)=-\frac{1}{x^2}\Rightarrow g'(2)=-\frac{1}{4}$，所以

切线 $y=-\frac{1}{4}(x-2)+\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}x+1$，法线 $y=4(x-1)+\frac{1}{2}=4x-\frac{7}{2}$

可导与连续性

性质 $f(x)$ 在 x_0 点可导 $\Rightarrow f(x)$ 在 x_0 点连续.

可导与连续性

性质 $f(x)$ 在 x_0 点可导 $\Rightarrow f(x)$ 在 x_0 点连续.

等价地，$f(x)$ 在 x_0 点不连续 $\Rightarrow f(x)$ 在 x_0 点不可导.

可导与连续性

性质 $f(x)$ 在 x_0 点可导 $\Rightarrow f(x)$ 在 x_0 点连续.

等价地，$f(x)$ 在 x_0 点不连续 $\Rightarrow f(x)$ 在 x_0 点不可导.

证明

$$f(x)\text{在}x_0\text{点可导} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad \text{存在}$$

可导与连续性

性质 $f(x)$ 在 x_0 点可导 $\Rightarrow f(x)$ 在 x_0 点连续.

等价地，$f(x)$ 在 x_0 点不连续 $\Rightarrow f(x)$ 在 x_0 点不可导.

证明

$$f(x)\text{ 在 } x_0 \text{ 点可导} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad \text{存在}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\alpha \quad \text{（有界量）}$$

可导与连续性

性质 $f(x)$ 在 x_0 点可导 $\Rightarrow f(x)$ 在 x_0 点连续.

等价地，$f(x)$ 在 x_0 点不连续 $\Rightarrow f(x)$ 在 x_0 点不可导.

证明

$$
\begin{aligned}
f(x)\text{ 在 }x_0\text{ 点可导} \quad & \Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad \text{存在} \\
& \Rightarrow \quad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \alpha \quad \text{（有界量）} \\
& \Rightarrow \quad f(x) = f(x_0) + \alpha(x-x_0)
\end{aligned}
$$

可导与连续性

性质 $f(x)$ 在 x_0 点可导 $\Rightarrow f(x)$ 在 x_0 点连续.

等价地，$f(x)$ 在 x_0 点不连续 $\Rightarrow f(x)$ 在 x_0 点不可导.

证明

$$
\begin{aligned}
f(x)\text{ 在 } x_0 \text{ 点可导} \quad &\Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad \text{存在} \\
&\Rightarrow \quad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \alpha \quad \text{（有界量）} \\
&\Rightarrow \quad f(x) = f(x_0) + \alpha(x-x_0) \\
&\Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}[f(x_0)+\alpha(x-x_0)]
\end{aligned}
$$

可导与连续性

性质 $f(x)$ 在 x_0 点可导 $\Rightarrow f(x)$ 在 x_0 点连续.

等价地，$f(x)$ 在 x_0 点不连续 $\Rightarrow f(x)$ 在 x_0 点不可导.

证明

$$
\begin{aligned}
f(x)\text{ 在 }x_0\text{ 点可导} \quad &\Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad \text{存在} \\
&\Rightarrow \quad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\alpha \quad \text{（有界量）} \\
&\Rightarrow \quad f(x)=f(x_0)+\alpha(x-x_0) \\
&\Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}[f(x_0)+\alpha(x-x_0)]=f(x_0)
\end{aligned}
$$

可导与连续性

性质 $f(x)$ 在 x_0 点可导 $\Rightarrow f(x)$ 在 x_0 点连续.

等价地，$f(x)$ 在 x_0 点不连续 $\Rightarrow f(x)$ 在 x_0 点不可导.

证明

$$
\begin{aligned}
f(x)\text{ 在 } x_0 \text{ 点可导} \quad & \Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad \text{存在} \\
& \Rightarrow \quad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \alpha \quad \text{（有界量）} \\
& \Rightarrow \quad f(x) = f(x_0) + \alpha(x-x_0) \\
& \Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}[f(x_0)+\alpha(x-x_0)] = f(x_0) \\
& \Rightarrow \quad f(x)\text{ 在 } x_0 \text{ 点连续}
\end{aligned}
$$

We are here now...

1. 导数定义
2. 求导法则
    - 四则运算的求导法则
    - 反函数的求导法则
    - 复合函数的求导法则
3. 高阶导数
4. 隐函数求导
5. 微分

四则运算的求导法则

定理 设 u, v 是可导函数，则

$$(Cu)' = Cu', \quad (u \pm v)' = u' \pm v',$$

$$(uv)' = \qquad \left(\frac{1}{v}\right)' = \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' =$$

四则运算的求导法则

定理 设 u, v 是可导函数，则

$$(Cu)' = Cu', \quad (u \pm v)' = u' \pm v',$$

$$(uv)' = u'v + uv', \quad \left(\frac{1}{v}\right)' = \qquad\qquad \left(\frac{u}{v}\right)' =$$

四则运算的求导法则

定理 设 u, v 是可导函数，则

$$(Cu)' = Cu', \quad (u \pm v)' = u' \pm v',$$

$$(uv)' = u'v + uv', \quad \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}, \quad \left(\frac{u}{v}\right)' =$$

四则运算的求导法则

定理 设 u, v 是可导函数，则

$$(Cu)' = Cu', \quad (u \pm v)' = u' \pm v',$$

$$(uv)' = u'v + uv', \quad \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}, \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

四则运算的求导法则

定理 设 u, v 是可导函数，则

$$(Cu)' = Cu', \quad (u \pm v)' = u' \pm v',$$

$$(uv)' = u'v + uv', \quad \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}, \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

证明

$(uv)'(x)$

四则运算的求导法则

定理 设 u, v 是可导函数，则

$$(Cu)' = Cu', \quad (u \pm v)' = u' \pm v',$$

$$(uv)' = u'v + uv', \quad \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}, \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

证明

$$(uv)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x}$$

暨南大学 JINAN UNIVERSITY

四则运算的求导法则

定理 设 u, v 是可导函数，则

$$(Cu)' = Cu', \quad (u \pm v)' = u' \pm v',$$

$$(uv)' = u'v + uv', \quad \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}, \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

证明

$$(uv)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x}$$ $-u(x+\Delta x)v(x) + u(x+\Delta x)v(x)$

四则运算的求导法则

定理 设 u, v 是可导函数，则

$$(Cu)' = Cu', \quad (u \pm v)' = u' \pm v',$$

$$(uv)' = u'v + uv', \quad \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}, \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

证明

$$(uv)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x} \quad {\color{red}-u(x+\Delta x)v(x) + u(x+\Delta x)v(x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)[v(x+\Delta x) - v(x)]}{\Delta x} + \frac{[u(x+\Delta x) - u(x)]v(x)}{\Delta x}$$

四则运算的求导法则

定理 设 u, v 是可导函数，则

$$(Cu)' = Cu', \quad (u \pm v)' = u' \pm v',$$

$$(uv)' = u'v + uv', \quad \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}, \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

证明

$$(uv)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x) \; {\color{red}-u(x+\Delta x)v(x) + u(x+\Delta x)v(x)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)[v(x+\Delta x) - v(x)]}{\Delta x} + \frac{[u(x+\Delta x) - u(x)]v(x)}{\Delta x}$$

$$= u(x)v'(x) + u'(x)v(x).$$

四则运算的求导法则

定理 设 u, v 是可导函数，则

$$(Cu)' = Cu', \quad (u \pm v)' = u' \pm v',$$

$$(uv)' = u'v + uv', \quad \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}, \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

证明

$$(uv)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x} \quad -u(x+\Delta x)v(x) + u(x+\Delta x)v(x)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)[v(x+\Delta x) - v(x)]}{\Delta x} + \frac{[u(x+\Delta x) - u(x)]v(x)}{\Delta x}$$

$$= u(x)v'(x) + u'(x)v(x).$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(u \cdot \frac{1}{v}\right)'$$

四则运算的求导法则

定理 设 u, v 是可导函数，则

$$(Cu)' = Cu', \quad (u \pm v)' = u' \pm v',$$

$$(uv)' = u'v + uv', \quad \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}, \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

证明

$$(uv)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x} \quad {\color{red}-u(x+\Delta x)v(x) + u(x+\Delta x)v(x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)[v(x+\Delta x) - v(x)]}{\Delta x} + \frac{[u(x+\Delta x) - u(x)]v(x)}{\Delta x}$$

$$= u(x)v'(x) + u'(x)v(x).$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(u \cdot \frac{1}{v}\right)' = u' \cdot \frac{1}{v} + u \cdot \left(\frac{1}{v}\right)'$$

四则运算的求导法则

定理 设 u, v 是可导函数，则

$$(Cu)' = Cu', \quad (u \pm v)' = u' \pm v',$$

$$(uv)' = u'v + uv', \quad \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}, \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

证明

$$(uv)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x} \quad -u(x+\Delta x)v(x) + u(x+\Delta x)v(x)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)[v(x+\Delta x) - v(x)]}{\Delta x} + \frac{[u(x+\Delta x) - u(x)]v(x)}{\Delta x}$$

$$= u(x)v'(x) + u'(x)v(x).$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(u \cdot \frac{1}{v}\right)' = u' \cdot \frac{1}{v} + u \cdot \left(\frac{1}{v}\right)' = u' \cdot \frac{1}{v} + u \cdot \frac{-v'}{v^2}$$

四则运算的求导法则

定理 设 u, v 是可导函数，则

$$(Cu)' = Cu', \quad (u \pm v)' = u' \pm v',$$

$$(uv)' = u'v + uv', \quad \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}, \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

证明

$$(uv)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x} \quad {\color{red}-u(x+\Delta x)v(x) + u(x+\Delta x)v(x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)[v(x+\Delta x) - v(x)]}{\Delta x} + \frac{[u(x+\Delta x) - u(x)]v(x)}{\Delta x}$$

$$= u(x)v'(x) + u'(x)v(x).$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(u \cdot \frac{1}{v}\right)' = u' \cdot \frac{1}{v} + u \cdot \left(\frac{1}{v}\right)' = u' \cdot \frac{1}{v} + u \cdot \frac{-v'}{v^2} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

四则运算的求导法则

定理 设 u, v 是可导函数，则

$$(Cu)' = Cu', \quad (u \pm v)' = u' \pm v',$$

$$(uv)' = u'v + uv', \quad \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}, \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

证明

$$(uv)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x) \; {\color{red}{-u(x+\Delta x)v(x) + u(x+\Delta x)v(x)}}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)[v(x+\Delta x) - v(x)]}{\Delta x} + \frac{[u(x+\Delta x) - u(x)]v(x)}{\Delta x}$$

$$= u(x)v'(x) + u'(x)v(x).$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(u \cdot \frac{1}{v}\right)' = u' \cdot \frac{1}{v} + u \cdot \left(\frac{1}{v}\right)' = u' \cdot \frac{1}{v} + u \cdot \frac{-v'}{v^2} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

其余证明略.

四则运算的求导法则

定理 设 u, v 是可导函数，则

$$(Cu)' = Cu', \quad (u \pm v)' = u' \pm v',$$

$$(uv)' = u'v + uv', \quad \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}, \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

例 1 $y = e^x(\sin x + \cos x)$，求 y'.

四则运算的求导法则

定理 设 u, v 是可导函数，则

$$(Cu)' = Cu', \quad (u \pm v)' = u' \pm v',$$

$$(uv)' = u'v + uv', \quad \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}, \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

例 1 $y = e^x(\sin x + \cos x)$，求 y'.

解 $y' = (e^x)'(\sin x + \cos x) + e^x(\sin x + \cos x)'$

四则运算的求导法则

定理 设 u, v 是可导函数，则

$$(Cu)' = Cu', \quad (u \pm v)' = u' \pm v',$$

$$(uv)' = u'v + uv', \quad \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}, \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

例 1 $y = e^x(\sin x + \cos x)$，求 y'.

解

$$\begin{aligned} y' &= (e^x)'(\sin x + \cos x) + e^x(\sin x + \cos x)' \\ &= e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x) \end{aligned}$$

四则运算的求导法则

定理 设 u, v 是可导函数，则

$$(Cu)' = Cu', \quad (u \pm v)' = u' \pm v',$$

$$(uv)' = u'v + uv', \quad \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}, \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

例 1 $y = e^x(\sin x + \cos x)$，求 y'.

解

$$\begin{aligned} y' &= (e^x)'(\sin x + \cos x) + e^x(\sin x + \cos x)' \\ &= e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x) = 2e^x \cos x \end{aligned}$$

四则运算的求导法则

定理 设 u, v 是可导函数，则

$$(Cu)' = Cu', \quad (u \pm v)' = u' \pm v',$$

$$(uv)' = u'v + uv', \quad \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}, \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

例 1 $y = e^x(\sin x + \cos x)$，求 y'.

解

$$\begin{aligned} y' &= (e^x)'(\sin x + \cos x) + e^x(\sin x + \cos x)' \\ &= e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x) = 2e^x \cos x \end{aligned}$$

例 2 $y = \tan x$，求 y'.

四则运算的求导法则

定理 设 u, v 是可导函数，则

$$(Cu)' = Cu', \quad (u \pm v)' = u' \pm v',$$

$$(uv)' = u'v + uv', \quad \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}, \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

例 1 $y = e^x(\sin x + \cos x)$，求 y'.

解

$$\begin{aligned} y' &= (e^x)'(\sin x + \cos x) + e^x(\sin x + \cos x)' \\ &= e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x) = 2e^x \cos x \end{aligned}$$

例 2 $y = \tan x$，求 y'.

解

$$y' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'$$

四则运算的求导法则

定理 设 u, v 是可导函数，则

$$(Cu)' = Cu', \quad (u \pm v)' = u' \pm v',$$

$$(uv)' = u'v + uv', \quad \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}, \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

例 1 $y = e^x(\sin x + \cos x)$，求 y'.

解
$$\begin{aligned} y' &= (e^x)'(\sin x + \cos x) + e^x(\sin x + \cos x)' \\ &= e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x) = 2e^x \cos x \end{aligned}$$

例 2 $y = \tan x$，求 y'.

解
$$y' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x}$$

四则运算的求导法则

定理 设 u, v 是可导函数，则

$$(Cu)' = Cu', \quad (u \pm v)' = u' \pm v',$$

$$(uv)' = u'v + uv', \quad \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}, \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

例 1 $y = e^x(\sin x + \cos x)$，求 y'.

解

$$\begin{aligned} y' &= (e^x)'(\sin x + \cos x) + e^x(\sin x + \cos x)' \\ &= e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x) = 2e^x \cos x \end{aligned}$$

例 2 $y = \tan x$，求 y'.

解

$$y' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

四则运算的求导法则

定理 设 u, v 是可导函数，则

$$(Cu)' = Cu', \quad (u \pm v)' = u' \pm v',$$

$$(uv)' = u'v + uv', \quad \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}, \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

例 1 $y = e^x(\sin x + \cos x)$，求 y'.

解
$$\begin{aligned} y' &= (e^x)'(\sin x + \cos x) + e^x(\sin x + \cos x)' \\ &= e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x) = 2e^x \cos x \end{aligned}$$

例 2 $y = \tan x$，求 y'.

解
$$y' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

例 3 $y = \cot x$，求 y'.

例 3 $y = \cot x$，求 y'.

解法一

$$y' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'$$

例 3 $y = \cot x$，求 y'.

解法一

$$y' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x}$$

例 3 $y = \cot x$，求 y'.

解法一

$$y' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)'\sin x - \cos x(\sin x)'}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{-\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x}$$

例 3 $y=\cot x$，求 y'.

解法一

$$y'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{(\cos x)'\sin x-\cos x(\sin x)'}{\sin^2 x}$$

$$=\frac{-\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

例 3 $y = \cot x$，求 y'.

解法一

$$y' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{-\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

解法二

$$y' = \left(\frac{1}{\tan x}\right)'$$

例 3 $y=\cot x$，求 y'.

解法一

$$y'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{(\cos x)'\sin x-\cos x(\sin x)'}{\sin^2 x}$$

$$=\frac{-\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

解法二

$$y'=\left(\frac{1}{\tan x}\right)'=-\frac{(\tan x)'}{\tan^2 x}$$

例 3 $y=\cot x$，求 y'.

解法一

$$y'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{(\cos x)'\sin x-\cos x(\sin x)'}{\sin^2 x}$$

$$=\frac{-\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

解法二

$$y'=\left(\frac{1}{\tan x}\right)'=-\frac{(\tan x)'}{\tan^2 x}=-\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\tan^2 x}$$

例 3 $y=\cot x$，求 y'.

解法一

$$y'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{(\cos x)'\sin x-\cos x(\sin x)'}{\sin^2 x}$$

$$=\frac{-\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

解法二

$$y'=\left(\frac{1}{\tan x}\right)'=-\frac{(\tan x)'}{\tan^2 x}=-\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\tan^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

例 3 $y=\cot x$，求 y'.

解法一

$$y'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{(\cos x)'\sin x-\cos x(\sin x)'}{\sin^2 x}$$

$$=\frac{-\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

解法二

$$y'=\left(\frac{1}{\tan x}\right)'=-\frac{(\tan x)'}{\tan^2 x}=-\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\tan^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

例 4 求 $x\ln x$ 和 $\frac{x^3+2x}{e^x}$ 的导数.

例 4 求 $x\ln x$ 和 $\frac{x^3+2x}{e^x}$ 的导数.

例 4 求 $x\ln x$ 和 $\frac{x^3+2x}{e^x}$ 的导数.

解

$$(x\ln x)' = x'\cdot\ln x + x\cdot(\ln x)'$$

.

例 4 求 $x\ln x$ 和 $\frac{x^3+2x}{e^x}$ 的导数.

解

$$(x\ln x)' = x'\cdot\ln x + x\cdot(\ln x)' = \ln x + 1$$

$$\left(\frac{x^3+2x}{e^x}\right)'$$

.

例 4 求 $x\ln x$ 和 $\frac{x^3+2x}{e^x}$ 的导数.

解

$$(x\ln x)' = x'\cdot\ln x + x\cdot(\ln x)' = \ln x + 1$$

$$\left(\frac{x^3+2x}{e^x}\right)' = \frac{(x^3+2x)'\cdot e^x - (e^x)'\cdot(x^3+2x)}{e^{2x}}$$

.

例 4 求 $x\ln x$ 和 $\frac{x^3+2x}{e^x}$ 的导数.

解

$$(x\ln x)' = x'\cdot\ln x + x\cdot(\ln x)' = \ln x + 1$$

$$\left(\frac{x^3+2x}{e^x}\right)' = \frac{(x^3+2x)'\cdot e^x - (e^x)'\cdot(x^3+2x)}{e^{2x}}$$

$$= \frac{(3x^2+2)e^x - e^x\cdot(x^3+2x)}{e^{2x}}$$

.

例 4 求 $x\ln x$ 和 $\frac{x^3+2x}{e^x}$ 的导数.

解

$$(x\ln x)' = x'\cdot\ln x + x\cdot(\ln x)' = \ln x + 1$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{x^3+2x}{e^x}\right)' &= \frac{(x^3+2x)'\cdot e^x - (e^x)'\cdot(x^3+2x)}{e^{2x}} \\ &= \frac{(3x^2+2)e^x - e^x\cdot(x^3+2x)}{e^{2x}} \\ &= \frac{-x^3+3x^2-2x+2}{e^x}.\end{aligned}$$

反函数的求导法则

定理 设函数 f 是单调、可导，且 $f' \neq 0$，则反函数 f^{-1} 也可导

反函数的求导法则

定理 设函数 f 是单调、可导，且 $f' \neq 0$，则反函数 f^{-1} 也可导，并成立

$$[f^{-1}]' = \frac{1}{f'}.$$

反函数的求导法则

定理 设函数 f 是单调、可导，且 $f' \neq 0$，则反函数 f^{-1} 也可导，并成立

$$[f^{-1}]' = \frac{1}{f'}.$$

注 若 $y = f^{-1}(x)$，

反函数的求导法则

定理 设函数 f 是单调、可导，且 $f' \neq 0$，则反函数 f^{-1} 也可导，并成立

$$[f^{-1}]' = \frac{1}{f'}.$$

注 若 $y = f^{-1}(x)$，则 $x = f(y)$，

反函数的求导法则

定理 设函数 f 是单调、可导，且 $f' \neq 0$，则反函数 f^{-1} 也可导，并成立

$$[f^{-1}]' = \frac{1}{f'}.$$

注 若 $y = f^{-1}(x)$，则 $x = f(y)$，所以更完整地，成立

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(y)}$$

反函数的求导法则

定理 设函数 f 是单调、可导，且 $f'\neq 0$，则反函数 f^{-1} 也可导，并成立

$$[f^{-1}]'=\frac{1}{f'}.$$

注 若 $y=f^{-1}(x)$，则 $x=f(y)$，所以更完整地，成立

$$[f^{-1}(x)]'=\frac{1}{f'(y)}=\frac{1}{f'(y=f^{-1}(x))}$$

反函数的求导法则

定理 设函数 f 是单调、可导，且 $f' \neq 0$，则反函数 f^{-1} 也可导，并成立

$$[f^{-1}]' = \frac{1}{f'}.$$

注 若 $y = f^{-1}(x)$，则 $x = f(y)$，所以更完整地，成立

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(y = f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

反函数的求导法则

定理 设函数 f 是单调、可导，且 $f' \neq 0$，则反函数 f^{-1} 也可导，并成立

$$[f^{-1}]' = \frac{1}{f'}. \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

注 若 $y = f^{-1}(x)$，则 $x = f(y)$，所以更完整地，成立

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(y = f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

反函数的求导法则

定理 设函数 f 是单调、可导，且 $f' \neq 0$，则反函数 f^{-1} 也可导，并成立

$$[f^{-1}]' = \frac{1}{f'}. \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

注 若 $y = f^{-1}(x)$，则 $x = f(y)$，所以更完整地，成立

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(y = f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

例 1 求 $\arcsin x$，$\arctan x$ 的导数.

反函数的求导法则

定理 设函数 f 是单调、可导，且 $f' \neq 0$，则反函数 f^{-1} 也可导，并成立

$$[f^{-1}]' = \frac{1}{f'}. \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

注 若 $y = f^{-1}(x)$，则 $x = f(y)$，所以更完整地，成立

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(y = f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

例 1 求 $\arcsin x$，$\arctan x$ 的导数.

解

$$(\arcsin x)' = (\sin^{-1}(x))'$$

反函数的求导法则

定理 设函数 f 是单调、可导，且 $f' \neq 0$，则反函数 f^{-1} 也可导，并成立

$$[f^{-1}]' = \frac{1}{f'}. \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

注 若 $y = f^{-1}(x)$，则 $x = f(y)$，所以更完整地，成立

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(y = f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

例 1 求 $\arcsin x$，$\arctan x$ 的导数.

解

$$(\arcsin x)' = (\sin^{-1}(x))' = \frac{1}{(\sin\quad)'}$$

反函数的求导法则

定理 设函数 f 是单调、可导，且 $f' \neq 0$，则反函数 f^{-1} 也可导，并成立

$$[f^{-1}]' = \frac{1}{f'}. \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

注 若 $y = f^{-1}(x)$，则 $x = f(y)$，所以更完整地，成立

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(y = f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

例 1 求 $\arcsin x$，$\arctan x$ 的导数.

解

$$(\arcsin x)' = (\sin^{-1}(x))' = \frac{1}{(\sin y)'}$$

反函数的求导法则

定理 设函数 f 是单调、可导，且 $f' \neq 0$，则反函数 f^{-1} 也可导，并成立

$$[f^{-1}]' = \frac{1}{f'}. \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

注 若 $y = f^{-1}(x)$，则 $x = f(y)$，所以更完整地，成立

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(y = f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

例 1 求 $\arcsin x$，$\arctan x$ 的导数.

解

$$(\arcsin x)' = (\sin^{-1}(x))' = \frac{1}{(\sin y)'}$$

$$= \frac{1}{\cos y}$$

反函数的求导法则

定理 设函数 f 是单调、可导，且 $f' \neq 0$，则反函数 f^{-1} 也可导，并成立

$$[f^{-1}]' = \frac{1}{f'}. \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

注 若 $y = f^{-1}(x)$，则 $x = f(y)$，所以更完整地，成立

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(y = f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

例 1 求 $\arcsin x$，$\arctan x$ 的导数.

解

$$(\arcsin x)' = (\sin^{-1}(x))' = \frac{1}{(\sin y)'}$$

注: 这里 $(\sin y)' \neq \cos y \cdot y'$

$$= \frac{1}{\cos y}$$

反函数的求导法则

定理 设函数 f 是单调、可导，且 $f' \neq 0$，则反函数 f^{-1} 也可导，并成立

$$[f^{-1}]' = \frac{1}{f'}. \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

注 若 $y = f^{-1}(x)$，则 $x = f(y)$，所以更完整地，成立

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(y = f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

例 1 求 $\arcsin x$，$\arctan x$ 的导数.

解

$$(\arcsin x)' = (\sin^{-1}(x))' = \frac{1}{(\sin y)'}$$

注: 这里 $(\sin y)' \neq \cos y \cdot y'$

$$= \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\pm\sqrt{1 - \sin^2 y}}$$

反函数的求导法则

定理 设函数 f 是单调、可导，且 $f' \neq 0$，则反函数 f^{-1} 也可导，并成立

$$[f^{-1}]' = \frac{1}{f'}. \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

注 若 $y = f^{-1}(x)$，则 $x = f(y)$，所以更完整地，成立

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(y = f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

例 1 求 $\arcsin x$，$\arctan x$ 的导数.

解 $$(\arcsin x)' = (\sin^{-1}(x))' = \frac{1}{(\sin y)'}$$ 注: 这里 $(\sin y)' \neq \cos y \cdot y'$

$y = \arcsin x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ $$= \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\pm\sqrt{1 - \sin^2 y}}$$

反函数的求导法则

定理 设函数 f 是单调、可导，且 $f' \neq 0$，则反函数 f^{-1} 也可导，并成立

$$[f^{-1}]' = \frac{1}{f'}. \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

注 若 $y = f^{-1}(x)$，则 $x = f(y)$，所以更完整地，成立

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(y = f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

例 1 求 $\arcsin x$，$\arctan x$ 的导数.

解

$$(\arcsin x)' = (\sin^{-1}(x))' = \frac{1}{(\sin y)'}$$

注: 这里 $(\sin y)' \neq \cos y \cdot y'$

$y = \arcsin x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$\cos y > 0$

$$= \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\pm\sqrt{1 - \sin^2 y}}$$

反函数的求导法则

定理 设函数 f 是单调、可导，且 $f' \neq 0$，则反函数 f^{-1} 也可导，并成立

$$[f^{-1}]' = \frac{1}{f'}. \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

注 若 $y = f^{-1}(x)$，则 $x = f(y)$，所以更完整地，成立

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(y = f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

例 1 求 $\arcsin x$，$\arctan x$ 的导数.

解 $$(\arcsin x)' = (\sin^{-1}(x))' = \frac{1}{(\sin y)'}$$ 注: 这里 $(\sin y)' \neq \cos y \cdot y'$

$y = \arcsin x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
$\cos y > 0$

$$= \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}}$$

反函数的求导法则

定理 设函数 f 是单调、可导，且 $f' \neq 0$，则反函数 f^{-1} 也可导，并成立

$$[f^{-1}]' = \frac{1}{f'}. \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

注 若 $y = f^{-1}(x)$，则 $x = f(y)$，所以更完整地，成立

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(y = f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

例 1 求 $\arcsin x$，$\arctan x$ 的导数.

解

$$(\arcsin x)' = (\sin^{-1}(x))' = \frac{1}{(\sin y)'}$$

注: 这里 $(\sin y)' \neq \cos y \cdot y'$

$y = \arcsin x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$\cos y > 0$

$$= \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

例 1 求 $\arcsin x$，$\arctan x$ 的导数.

例 1 求 $\arcsin x$，$\arctan x$ 的导数.

解

$$(\arctan x)' = (\tan^{-1}(x))'$$

例 1 求 $\arcsin x$，$\arctan x$ 的导数.

解

$$(\arctan x)' = (\tan^{-1}(x))' = \frac{1}{(\tan\quad)'}$$

例 1 求 $\arcsin x$，$\arctan x$ 的导数.

解

$$(\arctan x)' = (\tan^{-1}(x))' = \frac{1}{(\tan y)'}$$

例 1 求 $\arcsin x$，$\arctan x$ 的导数.

解

$$(\arctan x)' = (\tan^{-1}(x))' = \frac{1}{(\tan y)'}$$

$$= \cos^2 y$$

例 1 求 $\arcsin x$，$\arctan x$ 的导数.

解

$$(\arctan x)' = (\tan^{-1}(x))' = \frac{1}{(\tan y)'}$$ 注：这里 $(\tan y)' \neq \frac{1}{\cos^2 y} \cdot y'$

$$= \cos^2 y$$

例 1 求 $\arcsin x$，$\arctan x$ 的导数.

解

$$(\arctan x)' = (\tan^{-1}(x))' = \frac{1}{(\tan y)'}$$

注：这里 $(\tan y)' \neq \frac{1}{\cos^2 y} \cdot y'$

$$= \cos^2 y = \frac{1}{1+\tan^2 y}$$

例 1 求 $\arcsin x$，$\arctan x$ 的导数.

解

$$(\arctan x)' = (\tan^{-1}(x))' = \frac{1}{(\tan y)'}$$ 注：这里 $(\tan y)' \neq \frac{1}{\cos^2 y} \cdot y'$

$$= \cos^2 y = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

复合函数的求导法则

引例 求 $\sin(2x)$ 的导数

解法一

$$(\sin x)' = \cos x \qquad \Rightarrow \qquad \sin 2x = \cos 2x.$$

复合函数的求导法则

引例 求 $\sin(2x)$ 的导数

解法一

$$(\sin x)' = \cos x \qquad \Rightarrow \qquad \sin 2x = \cos 2x.$$

解法二 由二倍角公式 $\sin 2x = 2\sin x\cos x$，所以

复合函数的求导法则

引例 求 $\sin(2x)$ 的导数

解法一

$$(\sin x)' = \cos x \qquad \Rightarrow \qquad \sin 2x = \cos 2x.$$

解法二 由二倍角公式 $\sin 2x = 2\sin x\cos x$，所以

$$(\sin 2x)' = (2\sin x\cos x)'$$

复合函数的求导法则

引例 求 $\sin(2x)$ 的导数

解法一

$$(\sin x)' = \cos x \qquad \Rightarrow \qquad \sin 2x = \cos 2x.$$

解法二 由二倍角公式 $\sin 2x = 2\sin x\cos x$，所以

$$(\sin 2x)' = (2\sin x\cos x)' = 2(\sin x)'\cos x + 2\sin x(\cos x)'$$

复合函数的求导法则

引例 求 $\sin(2x)$ 的导数

解法一

$$(\sin x)' = \cos x \qquad \Rightarrow \qquad \sin 2x = \cos 2x.$$

解法二 由二倍角公式 $\sin 2x = 2\sin x\cos x$，所以

$$\begin{aligned}(\sin 2x)' &= (2\sin x\cos x)' = 2(\sin x)'\cos x + 2\sin x(\cos x)' \\ &= 2\cos^2 x - 2\sin^2 x\end{aligned}$$

复合函数的求导法则

引例 求 $\sin(2x)$ 的导数

解法一

$$(\sin x)' = \cos x \qquad \Rightarrow \qquad \sin 2x = \cos 2x.$$

解法二 由二倍角公式 $\sin 2x = 2\sin x\cos x$，所以

$$(\sin 2x)' = (2\sin x\cos x)' = 2(\sin x)'\cos x + 2\sin x(\cos x)'$$

$$= 2\cos^2 x - 2\sin^2 x = 2\cos 2x.$$

复合函数的求导法则

引例 求 $\sin(2x)$ 的导数

解法一

$$(\sin x)' = \cos x \qquad \Rightarrow \qquad \sin 2x = \cos 2x.$$

解法二 由二倍角公式 $\sin 2x = 2\sin x \cos x$，所以

$$(\sin 2x)' = (2\sin x \cos x)' = 2(\sin x)' \cos x + 2\sin x(\cos x)'$$
$$= 2\cos^2 x - 2\sin^2 x = 2\cos 2x.$$

问 1 究竟哪个正确?

复合函数的求导法则

引例 求 $\sin(2x)$ 的导数

解法一

$$(\sin x)' = \cos x \qquad \Rightarrow \qquad \sin 2x \cancel{=} \cos 2x.$$

解法二 由二倍角公式 $\sin 2x = 2\sin x\cos x$，所以

$$(\sin 2x)' = (2\sin x\cos x)' = 2(\sin x)'\cos x + 2\sin x(\cos x)'$$

$$= 2\cos^2 x - 2\sin^2 x = 2\cos 2x.$$

问 1 究竟哪个正确？解法一出错的地方是什么？

复合函数的求导法则

引例 求 $\sin(2x)$ 的导数

解法一

$$(\sin x)' = \cos x \quad \Rightarrow \quad \sin 2x \cancel{= \cos 2x}.$$

$$f(x)\text{ 的导数为 } f'(x) \quad \Rightarrow \quad f[g(x)]\text{ 的导数为 } f'[g(x)]$$

解法二 由二倍角公式 $\sin 2x = 2\sin x\cos x$，所以

$$(\sin 2x)' = (2\sin x\cos x)' = 2(\sin x)'\cos x + 2\sin x(\cos x)'$$
$$= 2\cos^2 x - 2\sin^2 x = 2\cos 2x.$$

问 1 究竟哪个正确？解法一出错的地方是什么？

复合函数的求导法则

引例 求 $\sin(2x)$ 的导数

解法一

$$(\sin x)' = \cos x \quad \Rightarrow \quad \sin 2x \cancel{= \cos} 2x.$$

$$f(x) \text{的导数为} f'(x) \quad \Rightarrow \quad f[g(x)] \text{的导数}\cancel{\text{为} f'}[g(x)]$$

解法二 由二倍角公式 $\sin 2x = 2\sin x\cos x$，所以

$$(\sin 2x)' = (2\sin x\cos x)' = 2(\sin x)'\cos x + 2\sin x(\cos x)'$$

$$= 2\cos^2 x - 2\sin^2 x = 2\cos 2x.$$

问 1 究竟哪个正确？解法一出错的地方是什么？

复合函数的求导法则

引例 求 $\sin(2x)$ 的导数

解法一

$$(\sin x)' = \cos x \qquad \Rightarrow \qquad \sin 2x \cancel{=} \cos 2x.$$

$$f(x)\text{ 的导数为 } f'(x) \qquad \Rightarrow \qquad f[g(x)]\text{ 的导数}\cancel{\text{为 } f'}[g(x)]$$

解法二 由二倍角公式 $\sin 2x = 2\sin x\cos x$，所以

$$(\sin 2x)' = (2\sin x\cos x)' = 2(\sin x)'\cos x + 2\sin x(\cos x)'$$
$$= 2\cos^2 x - 2\sin^2 x = 2\cos 2x.$$

问 1 究竟哪个正确？解法一出错的地方是什么？

问 2 复合函数 $f[g(x)]$ 的导数是什么？

复合函数的求导法则

定理 设 $y=f(u)$，$u=g(x)$ 可导，则复合函数 $y=f[g(x)]$ 的导数为：

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

复合函数的求导法则

定理 设 $y=f(u)$，$u=g(x)$ 可导，则复合函数 $y=f[g(x)]$ 的导数为：

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

等价地

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

复合函数的求导法则

定理 设 $y=f(u)$，$u=g(x)$ 可导，则复合函数 $y=f[g(x)]$ 的导数为：

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

等价地

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{或} \quad [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

复合函数的求导法则

定理 设 $y=f(u)$，$u=g(x)$ 可导，则复合函数 $y=f[g(x)]$ 的导数为：

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

等价地

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \quad 或 \quad [f(g(x))]'=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

例

$$(\sin 2x)'$$

复合函数的求导法则

定理 设 $y=f(u)$，$u=g(x)$ 可导，则复合函数 $y=f[g(x)]$ 的导数为：

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

等价地

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \quad \text{或} \quad [f(g(x))]'=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

例

$$\sin 2x = \sin(u=2x)$$

$$(\sin 2x)'$$

复合函数的求导法则

定理 设 $y=f(u)$，$u=g(x)$ 可导，则复合函数 $y=f[g(x)]$ 的导数为：

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

等价地

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \quad \text{或} \quad [f(g(x))]' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

例

$$\sin 2x = \sin(u=2x) \Rightarrow \begin{cases} y=\sin u \\ u=2x \end{cases}$$

$(\sin 2x)'$

复合函数的求导法则

定理 设 $y=f(u)$，$u=g(x)$ 可导，则复合函数 $y=f[g(x)]$ 的导数为：

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

等价地

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{或} \quad [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

例

$$\sin 2x = \sin(u = 2x) \ \Rightarrow \begin{cases} y = \sin u \\ u = 2x \end{cases}$$

$$(\sin 2x)' = y'_u \cdot u'_x$$

复合函数的求导法则

定理 设 $y=f(u)$，$u=g(x)$ 可导，则复合函数 $y=f[g(x)]$ 的导数为：

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

等价地

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \quad \text{或} \quad [f(g(x))]' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

例

$$\sin 2x = \sin(u=2x) \Rightarrow \begin{cases} y=\sin u \\ u=2x \end{cases}$$

$$(\sin 2x)' = y'_u \cdot u'_x = (\sin u)'_u \cdot (2x)'_x$$

复合函数的求导法则

定理 设 $y=f(u)$，$u=g(x)$ 可导，则复合函数 $y=f[g(x)]$ 的导数为：

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

等价地

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{或} \quad [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

例

$$\sin 2x = \sin(u=2x) \ \Rightarrow \begin{cases} y = \sin u \\ u = 2x \end{cases}$$

$$(\sin 2x)' = y'_u \cdot u'_x = (\sin u)'_u \cdot (2x)'_x = 2\cos u$$

复合函数的求导法则

定理 设 $y=f(u)$，$u=g(x)$ 可导，则复合函数 $y=f[g(x)]$ 的导数为：

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

等价地

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{或} \quad [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

例

$$\sin 2x = \sin(u=2x) \ \Rightarrow \begin{cases} y = \sin u \\ u = 2x \end{cases}$$

$$(\sin 2x)' = y'_u \cdot u'_x = (\sin u)'_u \cdot (2x)'_x = 2\cos u = 2\cos 2x$$

例 1 设 $y = e^{x^3}$，求 $\frac{dy}{dx}$.

例 1 设 $y = e^{x^3}$，求 $\frac{dy}{dx}$.

解

$$y = e^{u=x^3}$$

例 1 设 $y = e^{x^3}$，求 $\frac{dy}{dx}$.

解

$$y = e^{u=x^3} \Rightarrow \begin{cases} y = e^u \\ u = x^3 \end{cases}$$

例 1 设 $y = e^{x^3}$，求 $\frac{dy}{dx}$.

解

$$y = e^{u=x^3} \Rightarrow \begin{cases} y = e^u \\ u = x^3 \end{cases}$$

$$y' = y'_u \cdot u'_x$$

例 1 设 $y=e^{x^3}$，求 $\frac{dy}{dx}$.

解

$$y=e^{u=x^3} \Rightarrow \begin{cases} y=e^u \\ u=x^3 \end{cases}$$

$$y'=y'_u \cdot u'_x=(e^u)'_u \cdot (x^3)'_x$$

例 1 设 $y=e^{x^3}$，求 $\frac{dy}{dx}$.

解

$$y=e^{u=x^3} \Rightarrow \begin{cases} y=e^u \\ u=x^3 \end{cases}$$

$$y'=y'_u\cdot u'_x=(e^u)'_u\cdot(x^3)'_x=e^u\cdot 3x^2$$

例 1 设 $y = e^{x^3}$，求 $\frac{dy}{dx}$.

解

$$y = e^{u=x^3} \Rightarrow \begin{cases} y = e^u \\ u = x^3 \end{cases}$$

$$y' = y'_u \cdot u'_x = (e^u)'_u \cdot (x^3)'_x = e^u \cdot 3x^2 = 3x^2 e^{x^3}$$

例 1 设 $y=e^{x^3}$，求 $\frac{dy}{dx}$.

解

$$y=e^{u=x^3} \Rightarrow \begin{cases} y=e^u \\ u=x^3 \end{cases}$$

$$y'=y'_u\cdot u'_x=(e^u)'_u\cdot(x^3)'_x=e^u\cdot 3x^2=3x^2e^{x^3}$$

例 2 设 $y=\sin\frac{2x}{1+x^2}$，求 $\frac{dy}{dx}$.

例 1 设 $y = e^{x^3}$，求 $\frac{dy}{dx}$.

解
$$y = e^{u=x^3} \Rightarrow \begin{cases} y = e^u \\ u = x^3 \end{cases}$$

$$y' = y'_u \cdot u'_x = (e^u)'_u \cdot (x^3)'_x = e^u \cdot 3x^2 = 3x^2 e^{x^3}$$

例 2 设 $y = \sin \frac{2x}{1+x^2}$，求 $\frac{dy}{dx}$.

解 复合函数关系
$$y = \sin\left(u = \frac{2x}{1+x^2}\right)$$

例 1 设 $y = e^{x^3}$，求 $\frac{dy}{dx}$.

解

$$y = e^{u=x^3} \Rightarrow \begin{cases} y = e^u \\ u = x^3 \end{cases}$$

$$y' = y'_u \cdot u'_x = (e^u)'_u \cdot (x^3)'_x = e^u \cdot 3x^2 = 3x^2 e^{x^3}$$

例 2 设 $y = \sin \frac{2x}{1+x^2}$，求 $\frac{dy}{dx}$.

解 复合函数关系

$$y = \sin\left(u = \frac{2x}{1+x^2}\right) \Rightarrow \begin{cases} y = \sin u \\ u = \frac{2x}{1+x^2} \end{cases}$$

例 1 设 $y = e^{x^3}$，求 $\frac{dy}{dx}$.

解

$$y = e^{u=x^3} \Rightarrow \begin{cases} y = e^u \\ u = x^3 \end{cases}$$

$$y' = y'_u \cdot u'_x = (e^u)'_u \cdot (x^3)'_x = e^u \cdot 3x^2 = 3x^2 e^{x^3}$$

例 2 设 $y = \sin \frac{2x}{1+x^2}$，求 $\frac{dy}{dx}$.

解 复合函数关系

$$y = \sin\left(u = \frac{2x}{1+x^2}\right) \Rightarrow \begin{cases} y = \sin u \\ u = \frac{2x}{1+x^2} \end{cases}$$

复合函数导数

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

例 1 设 $y = e^{x^3}$，求 $\frac{dy}{dx}$.

解
$$y = e^{u=x^3} \Rightarrow \begin{cases} y = e^u \\ u = x^3 \end{cases}$$

$$y' = y'_u \cdot u'_x = (e^u)'_u \cdot (x^3)'_x = e^u \cdot 3x^2 = 3x^2 e^{x^3}$$

例 2 设 $y = \sin \frac{2x}{1+x^2}$，求 $\frac{dy}{dx}$.

解 复合函数关系
$$y = \sin\left(u = \frac{2x}{1+x^2}\right) \Rightarrow \begin{cases} y = \sin u \\ u = \frac{2x}{1+x^2} \end{cases}$$

各函数导数

$$y'_u = \qquad\qquad u'_x =$$

复合函数导数

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

例 1 设 $y = e^{x^3}$，求 $\frac{dy}{dx}$.

解

$$y = e^{u=x^3} \Rightarrow \begin{cases} y = e^u \\ u = x^3 \end{cases}$$

$$y' = y'_u \cdot u'_x = (e^u)'_u \cdot (x^3)'_x = e^u \cdot 3x^2 = 3x^2 e^{x^3}$$

例 2 设 $y = \sin \frac{2x}{1+x^2}$，求 $\frac{dy}{dx}$.

解 复合函数关系

$$y = \sin\left(u = \frac{2x}{1+x^2}\right) \Rightarrow \begin{cases} y = \sin u \\ u = \frac{2x}{1+x^2} \end{cases}$$

各函数导数

$$y'_u = \cos u, \quad u'_x =$$

复合函数导数

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

例 1 设 $y = e^{x^3}$，求 $\frac{dy}{dx}$.

解

$$y = e^{u=x^3} \Rightarrow \begin{cases} y = e^u \\ u = x^3 \end{cases}$$

$$y' = y'_u \cdot u'_x = (e^u)'_u \cdot (x^3)'_x = e^u \cdot 3x^2 = 3x^2 e^{x^3}$$

例 2 设 $y = \sin \frac{2x}{1+x^2}$，求 $\frac{dy}{dx}$.

解 复合函数关系

$$y = \sin\left(u = \frac{2x}{1+x^2}\right) \Rightarrow \begin{cases} y = \sin u \\ u = \frac{2x}{1+x^2} \end{cases}$$

各函数导数

$$y'_u = \cos u, \quad u'_x = \frac{(2x)'(1+x^2) - 2x(1+x^2)'}{(1+x^2)^2}$$

复合函数导数

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

例 1 设 $y = e^{x^3}$，求 $\frac{dy}{dx}$.

解

$$y = e^{u=x^3} \Rightarrow \begin{cases} y = e^u \\ u = x^3 \end{cases}$$

$$y' = y'_u \cdot u'_x = (e^u)'_u \cdot (x^3)'_x = e^u \cdot 3x^2 = 3x^2 e^{x^3}$$

例 2 设 $y = \sin \frac{2x}{1+x^2}$，求 $\frac{dy}{dx}$.

解 复合函数关系

$$y = \sin\left(u = \frac{2x}{1+x^2}\right) \Rightarrow \begin{cases} y = \sin u \\ u = \frac{2x}{1+x^2} \end{cases}$$

各函数导数

$$y'_u = \cos u, \quad u'_x = \frac{(2x)'(1+x^2) - 2x(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$$

复合函数导数

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

例 1 设 $y=e^{x^3}$，求 $\frac{dy}{dx}$.

解

$$y=e^{u=x^3} \Rightarrow \begin{cases} y=e^u \\ u=x^3 \end{cases}$$

$$y'=y'_u\cdot u'_x=(e^u)'_u\cdot(x^3)'_x=e^u\cdot 3x^2=3x^2e^{x^3}$$

例 2 设 $y=\sin\frac{2x}{1+x^2}$，求 $\frac{dy}{dx}$.

解 复合函数关系

$$y=\sin\left(u=\frac{2x}{1+x^2}\right) \Rightarrow \begin{cases} y=\sin u \\ u=\frac{2x}{1+x^2} \end{cases}$$

各函数导数

$$y'_u=\cos u,\quad u'_x=\frac{(2x)'(1+x^2)-2x(1+x^2)'}{(1+x^2)^2}=\frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$$

复合函数导数

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x=\frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}\cos u$$

例 1 设 $y=e^{x^3}$，求 $\frac{dy}{dx}$.

解

$$y=e^{u=x^3}\Rightarrow\begin{cases}y=e^u\\u=x^3\end{cases}$$

$$y'=y'_u\cdot u'_x=(e^u)'_u\cdot(x^3)'_x=e^u\cdot 3x^2=3x^2e^{x^3}$$

例 2 设 $y=\sin\frac{2x}{1+x^2}$，求 $\frac{dy}{dx}$.

解 复合函数关系

$$y=\sin\left(u=\frac{2x}{1+x^2}\right)\Rightarrow\begin{cases}y=\sin u\\u=\frac{2x}{1+x^2}\end{cases}$$

各函数导数

$$y'_u=\cos u,\quad u'_x=\frac{(2x)'(1+x^2)-2x(1+x^2)'}{(1+x^2)^2}=\frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$$

复合函数导数

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x=\frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}\cos u=\frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}\cos\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$$

例 3 求 $y = \ln \sin x$ 的导数.

例 3 求 $y = \ln \sin x$ 的导数.

解

$$(\ln \sin x)' =$$

例 3 求 $y=\ln\sin x$ 的导数.

解

$$(\ln\sin x)'=\frac{1}{\sin x}\cdot$$

例 3 求 $y = \ln \sin x$ 的导数.

解
$$(\ln \sin x)' = \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)'$$

例 3 求 $y=\ln\sin x$ 的导数.

解
$$(\ln\sin x)'=\frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)'=\frac{\cos x}{\sin x}.$$

例 3 求 $y = \ln\sin x$ 的导数.

解
$$(\ln\sin x)' = \frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

例 4 求 $y = \sqrt[3]{1-2x^2}$ 的导数.

例 3 求 $y = \ln \sin x$ 的导数.

解

$$(\ln \sin x)' = \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

例 4 求 $y = \sqrt[3]{1-2x^2}$ 的导数.

解

$$\left[(1-2x^2)^{\frac{1}{3}}\right]'$$

例 3 求 $y=\ln\sin x$ 的导数.

解

$$(\ln\sin x)'=\frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)'=\frac{\cos x}{\sin x}.$$

例 4 求 $y=\sqrt[3]{1-2x^2}$ 的导数.

解

$$\left[(1-2x^2)^{\frac{1}{3}}\right]'=\frac{1}{3}(\qquad\qquad)^{-\frac{2}{3}}\cdot$$

例 3 求 $y=\ln\sin x$ 的导数.

解
$$(\ln\sin x)'=\frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)'=\frac{\cos x}{\sin x}.$$

例 4 求 $y=\sqrt[3]{1-2x^2}$ 的导数.

解

$$\left[(1-2x^2)^{\frac{1}{3}}\right]'=\frac{1}{3}\left(1-2x^2\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot$$

例 3 求 $y = \ln\sin x$ 的导数.

解

$$(\ln\sin x)' = \frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

例 4 求 $y = \sqrt[3]{1-2x^2}$ 的导数.

解

$$\left[(1-2x^2)^{\frac{1}{3}}\right]' = \frac{1}{3}\left(1-2x^2\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot(1-2x^2)'$$

例 3 求 $y = \ln\sin x$ 的导数.

解

$$(\ln\sin x)' = \frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

例 4 求 $y = \sqrt[3]{1-2x^2}$ 的导数.

解

$$\left[(1-2x^2)^{\frac{1}{3}}\right]' = \frac{1}{3}\left(1-2x^2\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot(1-2x^2)' = -\frac{4x}{3}\left(1-2x^2\right)^{-\frac{2}{3}}.$$

例 3 求 $y = \ln\sin x$ 的导数.

解

$$(\ln\sin x)' = \frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

例 4 求 $y = \sqrt[3]{1-2x^2}$ 的导数.

解

$$\left[(1-2x^2)^{\frac{1}{3}}\right]' = \frac{1}{3}\left(1-2x^2\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot(1-2x^2)' = -\frac{4x}{3}\left(1-2x^2\right)^{-\frac{2}{3}}.$$

例 5 设 $f(x)$ 可导，则 $f(ax+b)$ 的导数是:

$$[f(ax+b)]' =$$

例 3 求 $y = \ln \sin x$ 的导数.

解

$$(\ln \sin x)' = \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

例 4 求 $y = \sqrt[3]{1 - 2x^2}$ 的导数.

解

$$\left[(1-2x^2)^{\frac{1}{3}}\right]' = \frac{1}{3}\left(1-2x^2\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot (1-2x^2)' = -\frac{4x}{3}\left(1-2x^2\right)^{-\frac{2}{3}}.$$

例 5 设 $f(x)$ 可导，则 $f(ax+b)$ 的导数是:

$$[f(ax+b)]' = af'(ax+b).$$

例 3 求 $y = \ln\sin x$ 的导数.

解

$$(\ln\sin x)' = \frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

例 4 求 $y = \sqrt[3]{1-2x^2}$ 的导数.

解

$$\left[(1-2x^2)^{\frac{1}{3}}\right]' = \frac{1}{3}\left(1-2x^2\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot(1-2x^2)' = -\frac{4x}{3}\left(1-2x^2\right)^{-\frac{2}{3}}.$$

例 5 设 $f(x)$ 可导，则 $f(ax+b)$ 的导数是：

$$[f(ax+b)]' = af'(ax+b).$$

特别地，$[f(x+b)]' = f'(x+b)$.

例 3 求 $y = \ln\sin x$ 的导数.

解
$$(\ln\sin x)' = \frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

例 4 求 $y = \sqrt[3]{1-2x^2}$ 的导数.

解
$$\left[(1-2x^2)^{\frac{1}{3}}\right]' = \frac{1}{3}\left(1-2x^2\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot(1-2x^2)' = -\frac{4x}{3}\left(1-2x^2\right)^{-\frac{2}{3}}.$$

例 5 设 $f(x)$ 可导，则 $f(ax+b)$ 的导数是：
$$[f(ax+b)]' = af'(ax+b).$$

特别地，$[f(x+b)]' = f'(x+b)$.

例如 $(e^{-5x+1})' =$ ，$(\ln 2x)' =$ ，

$(\sin(x-1))' =$

例 3 求 $y = \ln\sin x$ 的导数.

解

$$(\ln\sin x)' = \frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

例 4 求 $y = \sqrt[3]{1-2x^2}$ 的导数.

解

$$\left[(1-2x^2)^{\frac{1}{3}}\right]' = \frac{1}{3}\left(1-2x^2\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot(1-2x^2)' = -\frac{4x}{3}\left(1-2x^2\right)^{-\frac{2}{3}}.$$

例 5 设 $f(x)$ 可导，则 $f(ax+b)$ 的导数是：

$$[f(ax+b)]' = af'(ax+b).$$

特别地，$[f(x+b)]' = f'(x+b)$.

例如 $(e^{-5x+1})' = -5e^{-5x+1}$，$(\ln 2x)' =$ ，

$(\sin(x-1))' =$

例 3 求 $y = \ln\sin x$ 的导数.

解
$$(\ln\sin x)' = \frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

例 4 求 $y = \sqrt[3]{1-2x^2}$ 的导数.

解
$$\left[(1-2x^2)^{\frac{1}{3}}\right]' = \frac{1}{3}\left(1-2x^2\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot(1-2x^2)' = -\frac{4x}{3}\left(1-2x^2\right)^{-\frac{2}{3}}.$$

例 5 设 $f(x)$ 可导，则 $f(ax+b)$ 的导数是：
$$[f(ax+b)]' = af'(ax+b).$$

特别地，$[f(x+b)]' = f'(x+b)$.

例如 $(e^{-5x+1})' = -5e^{-5x+1}$，$(\ln 2x)' = \frac{2}{2x}$ ，

$(\sin(x-1))' =$

例 3 求 $y = \ln\sin x$ 的导数.

解

$$(\ln\sin x)' = \frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

例 4 求 $y = \sqrt[3]{1-2x^2}$ 的导数.

解

$$\left[(1-2x^2)^{\frac{1}{3}}\right]' = \frac{1}{3}\left(1-2x^2\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot(1-2x^2)' = -\frac{4x}{3}\left(1-2x^2\right)^{-\frac{2}{3}}.$$

例 5 设 $f(x)$ 可导，则 $f(ax+b)$ 的导数是：

$$[f(ax+b)]' = af'(ax+b).$$

特别地，$[f(x+b)]' = f'(x+b)$.

例如 $(e^{-5x+1})' = -5e^{-5x+1}$，$(\ln 2x)' = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$，

$(\sin(x-1))' =$

例 3 求 $y = \ln\sin x$ 的导数.

解

$$(\ln\sin x)' = \frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

例 4 求 $y = \sqrt[3]{1-2x^2}$ 的导数.

解

$$\left[(1-2x^2)^{\frac{1}{3}}\right]' = \frac{1}{3}\left(1-2x^2\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot(1-2x^2)' = -\frac{4x}{3}\left(1-2x^2\right)^{-\frac{2}{3}}.$$

例 5 设 $f(x)$ 可导，则 $f(ax+b)$ 的导数是：

$$[f(ax+b)]' = af'(ax+b).$$

特别地，$[f(x+b)]' = f'(x+b)$.

例如 $(e^{-5x+1})' = -5e^{-5x+1}$，$(\ln 2x)' = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$，
$(\sin(x-1))' = \cos(x-1)$

例 6 求 **幂指函数** $y = f(x)^{g(x)}$ 的导数.

例 6 求 **幂指函数** $y = f(x)^{g(x)}$ 的导数.

解法一

$y = e^{\ln y}$

例 6 求 **幂指函数** $y = f(x)^{g(x)}$ 的导数.

解法一

$$y = e^{\ln y} = e^{\ln f(x)^{g(x)}}$$

例 6 求 **幂指函数** $y = f(x)^{g(x)}$ 的导数.

解法一

$$y = e^{\ln y} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

例 6 求 **幂指函数** $y = f(x)^{g(x)}$ 的导数.

解法一

$$y = e^{\ln y} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

$$\Rightarrow y' = [e^{g(x)\ln f(x)}]'$$

例 6 求 **幂指函数** $y = f(x)^{g(x)}$ 的导数.

解法一

$$y = e^{\ln y} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

$$\Rightarrow y' = [e^{g(x)\ln f(x)}]' = e^{g(x)\ln f(x)} \cdot [g(x)\ln f(x)]'$$

例 6 求 **幂指函数** $y = f(x)^{g(x)}$ 的导数.

解法一

$$y = e^{\ln y} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

$$\Rightarrow y' = [e^{g(x)\ln f(x)}]' = e^{g(x)\ln f(x)} \cdot [g(x)\ln f(x)]' = f^g \cdot [g' \ln f + \frac{g}{f}].$$

例 6 求 **幂指函数** $y = f(x)^{g(x)}$ 的导数.

解法一

$$y = e^{\ln y} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

$$\Rightarrow y' = [e^{g(x)\ln f(x)}]' = e^{g(x)\ln f(x)} \cdot [g(x)\ln f(x)]' = f^g \cdot [g' \ln f + \frac{g}{f}].$$

解法二 $\ln y(x) = \ln f(x)^{g(x)}$

例 6 求 **幂指函数** $y = f(x)^{g(x)}$ 的导数.

解法一

$$y = e^{\ln y} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

$$\Rightarrow y' = [e^{g(x)\ln f(x)}]' = e^{g(x)\ln f(x)} \cdot [g(x)\ln f(x)]' = f^g \cdot [g'\ln f + \frac{g}{f}].$$

解法二

$$\ln y(x) = \ln f(x)^{g(x)} = g(x)\ln f(x)$$

例 6 求 **幂指函数** $y = f(x)^{g(x)}$ 的导数.

解法一

$$y = e^{\ln y} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

$$\Rightarrow y' = [e^{g(x)\ln f(x)}]' = e^{g(x)\ln f(x)} \cdot [g(x)\ln f(x)]' = f^g \cdot [g' \ln f + \frac{g}{f}].$$

解法二

$$\ln y(x) = \ln f(x)^{g(x)} = g(x)\ln f(x)$$

$$\Rightarrow [\ln y(x)]' = [g(x)\ln f(x)]'$$

例 6 求 **幂指函数** $y = f(x)^{g(x)}$ 的导数.

解法一

$$y = e^{\ln y} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

$$\Rightarrow y' = [e^{g(x)\ln f(x)}]' = e^{g(x)\ln f(x)} \cdot [g(x)\ln f(x)]' = f^g \cdot [g' \ln f + \frac{g}{f}].$$

解法二

$$\ln y(x) = \ln f(x)^{g(x)} = g(x)\ln f(x)$$

$$\Rightarrow [\ln y(x)]' = [g(x)\ln f(x)]'$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} \cdot y' =$$

例 6 求 **幂指函数** $y=f(x)^{g(x)}$ 的导数.

解法一

$$y=e^{\ln y}=e^{\ln f(x)^{g(x)}}=e^{g(x)\ln f(x)}$$

$$\Rightarrow\ y'=[e^{g(x)\ln f(x)}]'=e^{g(x)\ln f(x)}\cdot[g(x)\ln f(x)]'=f^{g}\cdot[g'\ln f+\frac{g}{f}].$$

解法二

$$\ln y(x)=\ln f(x)^{g(x)}=g(x)\ln f(x)$$

$$\Rightarrow\ [\ln y(x)]'=[g(x)\ln f(x)]'$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{y}\cdot y'=g'\ln f+\frac{g}{f}$$

例 6 求 **幂指函数** $y = f(x)^{g(x)}$ 的导数.

解法一

$$y = e^{\ln y} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

$$\Rightarrow y' = [e^{g(x)\ln f(x)}]' = e^{g(x)\ln f(x)} \cdot [g(x)\ln f(x)]' = f^g \cdot [g' \ln f + \frac{g}{f}].$$

解法二

$$\ln y(x) = \ln f(x)^{g(x)} = g(x)\ln f(x)$$

$$\Rightarrow [\ln y(x)]' = [g(x)\ln f(x)]'$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} \cdot y' = g' \ln f + \frac{g}{f}$$

$$\Rightarrow y' = f^g \cdot [g' \ln f + \frac{g}{f}].$$

例 6 求 **幂指函数** $y = f(x)^{g(x)}$ 的导数.

解法一

$$y = e^{\ln y} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

$$\Rightarrow\ y' = [e^{g(x)\ln f(x)}]' = e^{g(x)\ln f(x)} \cdot [g(x)\ln f(x)]' = f^g \cdot [g'\ln f + \frac{g}{f}].$$

解法二

$$\ln y(x) = \ln f(x)^{g(x)} = g(x)\ln f(x)$$

$$\Rightarrow\ [\ln y(x)]' = [g(x)\ln f(x)]'$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{y} \cdot y' = g'\ln f + \frac{g}{f}$$

$$\Rightarrow\ y' = f^g \cdot [g'\ln f + \frac{g}{f}].$$

例 7 求下列 **幂指函数** 导数：(1) $y = x^x$，(2) $y = (\ln x)^x$，(3) $y = x^{\sin x}$

例 7 求下列 **幂指函数** 导数：(1) $y = x^x$，(2) $y = (\ln x)^x$，(3) $y = x^{\sin x}$

例 7 求下列 **幂指函数** 导数：(1) $y = x^x$，(2) $y = (\ln x)^x$，(3) $y = x^{\sin x}$

解法一 利用恒等式 $y = e^{\ln y}$

(1)
$$x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$$

例 7 求下列 **幂指函数** 导数：(1) $y = x^x$，(2) $y = (\ln x)^x$，(3) $y = x^{\sin x}$

解法一 利用恒等式 $y = e^{\ln y}$

(1)
$$x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$$

$$\Rightarrow (x^x)' = (e^{x \ln x})'$$

例 7 求下列 **幂指函数** 导数：(1) $y = x^x$，(2) $y = (\ln x)^x$，(3) $y = x^{\sin x}$

解法一 利用恒等式 $y = e^{\ln y}$

(1)

$$x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$$

$$\Rightarrow (x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} \cdot$$

例 7 求下列 **幂指函数** 导数：(1) $y = x^x$，(2) $y = (\ln x)^x$，(3) $y = x^{\sin x}$

解法一 利用恒等式 $y = e^{\ln y}$

(1)
$$x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$$

$$\Rightarrow (x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} \cdot$$

例 7 求下列 **幂指函数** 导数：(1) $y = x^x$，(2) $y = (\ln x)^x$，(3) $y = x^{\sin x}$

解法一 利用恒等式 $y = e^{\ln y}$

(1)
$$x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$$

$$\Rightarrow (x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)'$$

例 7 求下列 **幂指函数** 导数：(1) $y = x^x$，(2) $y = (\ln x)^x$，(3) $y = x^{\sin x}$

解法一 利用恒等式 $y = e^{\ln y}$

(1)
$$x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$$

$$\Rightarrow (x^x)' = (e^{x\ln x})' = e^{x\ln x} \cdot (x \ln x)' = x^x \cdot (\ln x + 1).$$

例 7 求下列 **幂指函数** 导数：(1) $y = x^x$，(2) $y = (\ln x)^x$，(3) $y = x^{\sin x}$

解法一 利用恒等式 $y = e^{\ln y}$

(1)

$$x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$$

$$\Rightarrow (x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' = x^x \cdot (\ln x + 1).$$

(2)

$$x^x = e^{\ln(\ln x)^x} = e^{x \ln(\ln x)}$$

例 7 求下列 **幂指函数** 导数：(1) $y = x^x$，(2) $y = (\ln x)^x$，(3) $y = x^{\sin x}$

解法一 利用恒等式 $y = e^{\ln y}$

(1)

$$x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$$

$$\Rightarrow (x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' = x^x \cdot (\ln x + 1).$$

(2)

$$x^x = e^{\ln(\ln x)^x} = e^{x \ln(\ln x)}$$

$$\Rightarrow [(\ln x)^x]'$$

例 7 求下列 **幂指函数** 导数：(1) $y = x^x$，(2) $y = (\ln x)^x$，(3) $y = x^{\sin x}$

解法一 利用恒等式 $y = e^{\ln y}$

(1)

$$x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$$

$$\Rightarrow (x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' = x^x \cdot (\ln x + 1).$$

(2)

$$x^x = e^{\ln(\ln x)^x} = e^{x \ln(\ln x)}$$

$$\Rightarrow [(\ln x)^x]' = [e^{x \ln(\ln x)}]'$$

例 7 求下列 **幂指函数** 导数：(1) $y = x^x$，(2) $y = (\ln x)^x$，(3) $y = x^{\sin x}$

解法一 利用恒等式 $y = e^{\ln y}$

(1)

$$x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$$

$$\Rightarrow (x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' = x^x \cdot (\ln x + 1).$$

(2)

$$x^x = e^{\ln(\ln x)^x} = e^{x \ln(\ln x)}$$

$$\Rightarrow [(\ln x)^x]' = [e^{x \ln(\ln x)}]' = e^{x \ln(\ln x)} \cdot$$

例 7 求下列 **幂指函数** 导数：(1) $y = x^x$，(2) $y = (\ln x)^x$，(3) $y = x^{\sin x}$

解法一 利用恒等式 $y = e^{\ln y}$

(1)

$$x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$$

$$\Rightarrow (x^x)' = (e^{x\ln x})' = e^{x\ln x} \cdot (x \ln x)' = x^x \cdot (\ln x + 1).$$

(2)

$$x^x = e^{\ln(\ln x)^x} = e^{x\ln(\ln x)}$$

$$\Rightarrow [(\ln x)^x]' = [e^{x\ln(\ln x)}]' = e^{x\ln(\ln x)} \cdot [x \ln(\ln x)]'$$

例 7 求下列 **幂指函数** 导数：(1) $y = x^x$，(2) $y = (\ln x)^x$，(3) $y = x^{\sin x}$

解法一 利用恒等式 $y = e^{\ln y}$

(1)

$$x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$$

$$\Rightarrow (x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' = x^x \cdot (\ln x + 1).$$

(2)

$$x^x = e^{\ln(\ln x)^x} = e^{x \ln(\ln x)}$$

$$\Rightarrow [(\ln x)^x]' = [e^{x \ln(\ln x)}]' = e^{x \ln(\ln x)} \cdot [x \ln(\ln x)]'$$

$$= (\ln x)^x \cdot \left[\ln(\ln x) + x \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}\right]$$

例 7 求下列**幂指函数**导数：(1) $y = x^x$，(2) $y = (\ln x)^x$，(3) $y = x^{\sin x}$

解法一 利用恒等式 $y = e^{\ln y}$

(1)

$$x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$$

$$\Rightarrow (x^x)' = (e^{x\ln x})' = e^{x\ln x} \cdot (x \ln x)' = x^x \cdot (\ln x + 1).$$

(2)

$$x^x = e^{\ln(\ln x)^x} = e^{x \ln(\ln x)}$$

$$\Rightarrow [(\ln x)^x]' = [e^{x\ln(\ln x)}]' = e^{x\ln(\ln x)} \cdot [x \ln(\ln x)]'$$

$$= (\ln x)^x \cdot \left[\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} \right]$$

例 7 求下列**幂指函数**导数：(1) $y = x^x$，(2) $y = (\ln x)^x$，(3) $y = x^{\sin x}$

解法一 利用恒等式 $y = e^{\ln y}$

(1)

$$x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$$

$$\Rightarrow (x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' = x^x \cdot (\ln x + 1).$$

(2)

$$x^x = e^{\ln(\ln x)^x} = e^{x \ln(\ln x)}$$

$$\Rightarrow [(\ln x)^x]' = [e^{x \ln(\ln x)}]' = e^{x \ln(\ln x)} \cdot [x \ln(\ln x)]'$$

$$= (\ln x)^x \cdot \left[\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x}\right]$$

(3)

$$x^{\sin x} = e^{\ln x^{\sin x}} = e^{\sin x \ln x}$$

例 7 求下列 **幂指函数** 导数：(1) $y = x^x$，(2) $y = (\ln x)^x$，(3) $y = x^{\sin x}$

解法一 利用恒等式 $y = e^{\ln y}$

(1)

$$x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$$

$$\Rightarrow (x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' = x^x \cdot (\ln x + 1).$$

(2)

$$x^x = e^{\ln(\ln x)^x} = e^{x \ln(\ln x)}$$

$$\Rightarrow [(\ln x)^x]' = [e^{x \ln(\ln x)}]' = e^{x \ln(\ln x)} \cdot [x \ln(\ln x)]'$$

$$= (\ln x)^x \cdot \left[\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x}\right]$$

(3)

$$x^{\sin x} = e^{\ln x^{\sin x}} = e^{\sin x \ln x}$$

$$\Rightarrow [x^{\sin x}]' = [e^{\sin x \ln x}]'$$

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

例 7 求下列 **幂指函数** 导数：(1) $y=x^x$，(2) $y=(\ln x)^x$，(3) $y=x^{\sin x}$

解法一 利用恒等式 $y=e^{\ln y}$

(1)

$$x^x=e^{\ln x^x}=e^{x\ln x}$$

$$\Rightarrow (x^x)'=(e^{x\ln x})'=e^{x\ln x}\cdot(x\ln x)'=x^x\cdot(\ln x+1).$$

(2)

$$x^x=e^{\ln(\ln x)^x}=e^{x\ln(\ln x)}$$

$$\Rightarrow [(\ln x)^x]'=[e^{x\ln(\ln x)}]'=e^{x\ln(\ln x)}\cdot[x\ln(\ln x)]'$$

$$=(\ln x)^x\cdot\left[\ln(\ln x)+\frac{1}{\ln x}\right]$$

(3)

$$x^{\sin x}=e^{\ln x^{\sin x}}=e^{\sin x\ln x}$$

$$\Rightarrow [x^{\sin x}]'=[e^{\sin x\ln x}]'=e^{\sin x\ln x}\cdot$$

例 7 求下列 **幂指函数** 导数：(1) $y = x^x$，(2) $y = (\ln x)^x$，(3) $y = x^{\sin x}$

解法一 利用恒等式 $y = e^{\ln y}$

(1)

$$x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$$

$$\Rightarrow (x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' = x^x \cdot (\ln x + 1).$$

(2)

$$x^x = e^{\ln(\ln x)^x} = e^{x \ln(\ln x)}$$

$$\Rightarrow [(\ln x)^x]' = [e^{x \ln(\ln x)}]' = e^{x \ln(\ln x)} \cdot [x \ln(\ln x)]'$$

$$= (\ln x)^x \cdot \left[\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} \right]$$

(3)

$$x^{\sin x} = e^{\ln x^{\sin x}} = e^{\sin x \ln x}$$

$$\Rightarrow [x^{\sin x}]' = [e^{\sin x \ln x}]' = e^{\sin x \ln x} \cdot [\sin x \ln x]'$$

例 7 求下列**幂指函数**导数：(1) $y = x^x$，(2) $y = (\ln x)^x$，(3) $y = x^{\sin x}$

解法一 利用恒等式 $y = e^{\ln y}$

(1)

$$x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$$

$$\Rightarrow (x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' = x^x \cdot (\ln x + 1).$$

(2)

$$x^x = e^{\ln(\ln x)^x} = e^{x \ln(\ln x)}$$

$$\Rightarrow [(\ln x)^x]' = [e^{x \ln(\ln x)}]' = e^{x \ln(\ln x)} \cdot [x \ln(\ln x)]'$$

$$= (\ln x)^x \cdot \left[\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x}\right]$$

(3)

$$x^{\sin x} = e^{\ln x^{\sin x}} = e^{\sin x \ln x}$$

$$\Rightarrow [x^{\sin x}]' = [e^{\sin x \ln x}]' = e^{\sin x \ln x} \cdot [\sin x \ln x]'$$

$$= x^{\sin x} \cdot \left[\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}\right].$$

例 7 求下列 **幂指函数** 导数：(1) $y = x^x$，(2) $y = (\ln x)^x$，(3) $y = x^{\sin x}$

例 7 求下列 **幂指函数** 导数：(1) $y = x^x$，(2) $y = (\ln x)^x$，(3) $y = x^{\sin x}$

解法二 两边取对数，然后求导

(1)

$$\ln y = \ln x^x$$

例 7 求下列 **幂指函数** 导数：(1) $y = x^x$，(2) $y = (\ln x)^x$，(3) $y = x^{\sin x}$

解法二 两边取对数，然后求导

(1)

$$\ln y = \ln x^x = x \ln x$$

例 7 求下列 **幂指函数** 导数：(1) $y=x^x$，(2) $y=(\ln x)^x$，(3) $y=x^{\sin x}$

解法二 两边取对数，然后求导

(1)

$$\ln y=\ln x^x=x\ln x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y}\cdot y'=$$

例 7 求下列 **幂指函数** 导数：(1) $y=x^x$，(2) $y=(\ln x)^x$，(3) $y=x^{\sin x}$

解法二 两边取对数，然后求导

(1)

$$\ln y=\ln x^x=x\ln x \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{y}\cdot y'=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}$$

例 7 求下列 **幂指函数** 导数：(1) $y = x^x$，(2) $y = (\ln x)^x$，(3) $y = x^{\sin x}$

解法二 两边取对数，然后求导

(1)

$$\ln y = \ln x^x = x \ln x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y} \cdot y' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \quad y' = y(1 + \ln x)$$

例 7 求下列 **幂指函数** 导数：(1) $y=x^x$，(2) $y=(\ln x)^x$，(3) $y=x^{\sin x}$

解法二 两边取对数，然后求导

(1)

$$\ln y=\ln x^x=x\ln x \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{y}\cdot y'=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow\quad y'=y(1+\ln x)=x^x(1+\ln x).$$

例 7 求下列**幂指函数**导数：(1) $y = x^x$，(2) $y = (\ln x)^x$，(3) $y = x^{\sin x}$

解法二 两边取对数，然后求导

(1)

$$\ln y = \ln x^x = x \ln x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y} \cdot y' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \quad y' = y(1 + \ln x) = x^x(1 + \ln x).$$

(2)

$$\ln y = \ln(\ln x)^x$$

例 7 求下列 **幂指函数** 导数：(1) $y=x^x$，(2) $y=(\ln x)^x$，(3) $y=x^{\sin x}$

解法二 两边取对数，然后求导

(1)

$$\ln y=\ln x^x=x\ln x \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{y}\cdot y'=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow\quad y'=y(1+\ln x)=x^x(1+\ln x).$$

(2)

$$\ln y=\ln(\ln x)^x=x\ln(\ln x)$$

例 7 求下列 **幂指函数** 导数：(1) $y = x^x$，(2) $y = (\ln x)^x$，(3) $y = x^{\sin x}$

解法二 两边取对数，然后求导

(1)

$$\ln y = \ln x^x = x \ln x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y} \cdot y' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \quad y' = y(1 + \ln x) = x^x(1 + \ln x).$$

(2)

$$\ln y = \ln(\ln x)^x = x \ln(\ln x) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y} \cdot y'$$

例 7 求下列 **幂指函数** 导数：(1) $y = x^x$，(2) $y = (\ln x)^x$，(3) $y = x^{\sin x}$

解法二 两边取对数，然后求导

(1)

$$\ln y = \ln x^x = x \ln x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y} \cdot y' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \quad y' = y(1 + \ln x) = x^x(1 + \ln x).$$

(2)

$$\ln y = \ln(\ln x)^x = x \ln(\ln x) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y} \cdot y' = \ln(\ln x) + x \cdot$$

例 7 求下列 **幂指函数** 导数：(1) $y=x^x$，(2) $y=(\ln x)^x$，(3) $y=x^{\sin x}$

解法二 两边取对数，然后求导

(1)

$$\ln y=\ln x^x=x\ln x \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{y}\cdot y'=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow\quad y'=y(1+\ln x)=x^x(1+\ln x).$$

(2)

$$\ln y=\ln(\ln x)^x=x\ln(\ln x) \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{y}\cdot y'=\ln(\ln x)+x\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}$$

例 7 求下列 **幂指函数** 导数：(1) $y = x^x$，(2) $y = (\ln x)^x$，(3) $y = x^{\sin x}$

解法二 两边取对数，然后求导

(1)

$$\ln y = \ln x^x = x \ln x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y} \cdot y' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \quad y' = y(1 + \ln x) = x^x(1 + \ln x).$$

(2)

$$\ln y = \ln(\ln x)^x = x \ln(\ln x) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y} \cdot y' = \ln(\ln x) + x \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \quad y' = (\ln x)^x \left(\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} \right).$$

例 7 求下列 **幂指函数** 导数：(1) $y=x^x$，(2) $y=(\ln x)^x$，(3) $y=x^{\sin x}$

解法二 两边取对数，然后求导

(1)

$$\ln y=\ln x^x=x\ln x \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{y}\cdot y'=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow\quad y'=y(1+\ln x)=x^x(1+\ln x).$$

(2)

$$\ln y=\ln(\ln x)^x=x\ln(\ln x) \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{y}\cdot y'=\ln(\ln x)+x\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow\quad y'=(\ln x)^x\left(\ln(\ln x)+\frac{1}{\ln x}\right).$$

(3) 同理，过程略，

$$y'=y(\cos x\ln x+\tfrac{1}{x}\sin x)=x^{\sin x}(\cos x\ln x+\tfrac{1}{x}\sin x)$$

例 8 求 $y=\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$ 的导数.

例 8 求 $y=\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$ 的导数.

解 因为 $y=\left|\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}\right|^{\frac{1}{2}}$，所以两边取对数得：

例 8 求 $y=\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$ 的导数.

解 因为 $y=\left|\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}\right|^{\frac{1}{2}}$，所以两边取对数得:

$$\ln y$$

例 8 求 $y=\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$ 的导数.

解 因为 $y=\left|\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}\right|^{\frac{1}{2}}$，所以两边取对数得：

$$\ln y=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}\right|$$

例 8 求 $y=\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$ 的导数.

解 因为 $y=\left|\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}\right|^{\frac{1}{2}}$，所以两边取对数得:

$$
\begin{aligned}
\ln y &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}\right| \\
&= \frac{1}{2}(\ln|x-1|+\ln|x-2|-\ln|x-3|-\ln|x-4|)
\end{aligned}
$$

例 8 求 $y = \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$ 的导数.

解 因为 $y = \left|\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}\right|^{\frac{1}{2}}$，所以两边取对数得:

$$\ln y = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}\right|$$

$$= \frac{1}{2}(\ln|x-1| + \ln|x-2| - \ln|x-3| - \ln|x-4|)$$

两边对 x 求导:

例 8 求 $y=\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$ 的导数.

解 因为 $y=\left|\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}\right|^{\frac{1}{2}}$，所以两边取对数得:

$$\begin{aligned}\ln y &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}\right| \\ &= \frac{1}{2}(\ln|x-1|+\ln|x-2|-\ln|x-3|-\ln|x-4|)\end{aligned}$$

两边对 x 求导:

$$\frac{1}{y}\cdot y' =$$

例 8 求 $y=\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$ 的导数.

解 因为 $y=\left|\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}\right|^{\frac{1}{2}}$，所以两边取对数得：

$$\ln y=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}\right|$$

$$=\frac{1}{2}(\ln|x-1|+\ln|x-2|-\ln|x-3|-\ln|x-4|)$$

两边对 x 求导：（注意：$(\ln|x-a|)'=\frac{1}{x-a}$）

$$\frac{1}{y}\cdot y'=$$

例 8 求 $y=\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$ 的导数.

解 因为 $y=\left|\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}\right|^{\frac{1}{2}}$，所以两边取对数得：

$$\ln y=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}\right|$$

$$=\frac{1}{2}(\ln|x-1|+\ln|x-2|-\ln|x-3|-\ln|x-4|)$$

两边对 x 求导：（注意：$(\ln|x-a|)'=\frac{1}{x-a}$）

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right)$$

例 8 求 $y=\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$ 的导数.

解 因为 $y=\left|\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}\right|^{\frac{1}{2}}$，所以两边取对数得：

$$\ln y=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}\right|$$

$$=\frac{1}{2}(\ln|x-1|+\ln|x-2|-\ln|x-3|-\ln|x-4|)$$

两边对 x 求导：（注意：$(\ln|x-a|)'=\frac{1}{x-a}$）

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right)$$

所以

$$y'=\frac{y}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right)$$

例 8 求 $y=\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$ 的导数.

解 因为 $y=\left|\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}\right|^{\frac{1}{2}}$，所以两边取对数得:

$$\begin{aligned}\ln y &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}\right| \\ &= \frac{1}{2}(\ln|x-1|+\ln|x-2|-\ln|x-3|-\ln|x-4|)\end{aligned}$$

两边对 x 求导: （注意: $\boxed{(\ln|x-a|)'=\frac{1}{x-a}}$）

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right)$$

所以

$$y'=\frac{y}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right)$$

例 9 求 $y = \arctan x$ 和 $y = \arcsin x$ 的导数.

例 9 求 $y = \arctan x$ 和 $y = \arcsin x$ 的导数.

解 **(1)** 因为 $\tan y = x$，所以两边两边对 x 求导:

例 9 求 $y = \arctan x$ 和 $y = \arcsin x$ 的导数.

解 **(1)** 因为 $\tan y = x$，所以两边两边对 x 求导:

$$\frac{1}{\cos^2 y} \cdot$$

例 9 求 $y = \arctan x$ 和 $y = \arcsin x$ 的导数.

解 (1) 因为 $\tan y = x$，所以两边两边对 x 求导：

$$\frac{1}{\cos^2 y} \cdot y'$$

例 9 求 $y = \arctan x$ 和 $y = \arcsin x$ 的导数.

解 (1) 因为 $\tan y = x$，所以两边两边对 x 求导:

$$\frac{1}{\cos^2 y} \cdot y' = 1$$

例 9 求 $y = \arctan x$ 和 $y = \arcsin x$ 的导数.

解 **(1)** 因为 $\tan y = x$，所以两边两边对 x 求导:

$$\frac{1}{\cos^2 y} \cdot y' = 1 \quad \Rightarrow \quad y' = \cos^2 y$$

例 9 求 $y = \arctan x$ 和 $y = \arcsin x$ 的导数.

解 (1) 因为 $\tan y = x$，所以两边两边对 x 求导:

$$\frac{1}{\cos^2 y} \cdot y' = 1 \quad \Rightarrow \quad y' = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \tan^2 y}$$

例 9 求 $y=\arctan x$ 和 $y=\arcsin x$ 的导数.

解 (1) 因为 $\tan y = x$，所以两边两边对 x 求导:

$$\frac{1}{\cos^2 y}\cdot y' = 1 \quad \Rightarrow \quad y' = \cos^2 y = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

例 9 求 $y = \arctan x$ 和 $y = \arcsin x$ 的导数.

解 (1) 因为 $\tan y = x$，所以两边两边对 x 求导:

$$\frac{1}{\cos^2 y} \cdot y' = 1 \quad \Rightarrow \quad y' = \cos^2 y = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

(2) 因为 $\sin y = x$，所以两边两边对 x 求导:

例 9 求 $y = \arctan x$ 和 $y = \arcsin x$ 的导数.

解 **(1)** 因为 $\tan y = x$，所以两边两边对 x 求导:

$$\frac{1}{\cos^2 y} \cdot y' = 1 \quad \Rightarrow \quad y' = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

(2) 因为 $\sin y = x$，所以两边两边对 x 求导:

$$\cos y \cdot$$

例 9 求 $y = \arctan x$ 和 $y = \arcsin x$ 的导数.

解 (1) 因为 $\tan y = x$，所以两边两边对 x 求导：

$$\frac{1}{\cos^2 y} \cdot y' = 1 \quad \Rightarrow \quad y' = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

(2) 因为 $\sin y = x$，所以两边两边对 x 求导：

$$\cos y \cdot y'$$

例 9 求 $y = \arctan x$ 和 $y = \arcsin x$ 的导数.

解 **(1)** 因为 $\tan y = x$，所以两边两边对 x 求导:

$$\frac{1}{\cos^2 y} \cdot y' = 1 \quad \Rightarrow \quad y' = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

(2) 因为 $\sin y = x$，所以两边两边对 x 求导:

$$\cos y \cdot y' = 1$$

例 9 求 $y = \arctan x$ 和 $y = \arcsin x$ 的导数.

解 (1) 因为 $\tan y = x$，所以两边两边对 x 求导:

$$\frac{1}{\cos^2 y} \cdot y' = 1 \quad \Rightarrow \quad y' = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

(2) 因为 $\sin y = x$，所以两边两边对 x 求导:

$$\cos y \cdot y' = 1 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{\cos y}$$

例 9 求 $y = \arctan x$ 和 $y = \arcsin x$ 的导数.

解 (1) 因为 $\tan y = x$，所以两边两边对 x 求导:

$$\frac{1}{\cos^2 y} \cdot y' = 1 \quad \Rightarrow \quad y' = \cos^2 y = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

(2) 因为 $\sin y = x$，所以两边两边对 x 求导:

$$\cos y \cdot y' = 1 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$$

例 9 求 $y = \arctan x$ 和 $y = \arcsin x$ 的导数.

解 (1) 因为 $\tan y = x$，所以两边两边对 x 求导：

$$\frac{1}{\cos^2 y} \cdot y' = 1 \quad \Rightarrow \quad y' = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

(2) 因为 $\sin y = x$，所以两边两边对 x 求导：

$$\cos y \cdot y' = 1 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

We are here now...

1. 导数定义

2. 求导法则

   四则运算的求导法则

   反函数的求导法则

   复合函数的求导法则

3. 高阶导数

4. 隐函数求导

5. 微分

高阶导数

$$f \xrightarrow{\text{可导}} f'$$

高阶导数

$$f \xrightarrow{\text{可导}} f' \xrightarrow{\text{可导}} f''$$

高阶导数

$$f \xrightarrow{\text{可导}} f' \xrightarrow{\text{可导}} f''$$

二阶导数

f 二阶可导

高阶导数

$$f \xrightarrow{\text{可导}} f' \xrightarrow{\text{可导}} f'' \xrightarrow{\text{可导}} f'''$$

二阶导数

f 二阶可导

高阶导数

$$f \xrightarrow{\text{可导}} f' \xrightarrow{\text{可导}} f'' \xrightarrow{\text{可导}} f'''$$

二阶导数　　三阶导数

f 二阶可导　　f 三阶可导

高阶导数

$$f \xrightarrow{\text{可导}} f' \xrightarrow{\text{可导}} f'' \xrightarrow{\text{可导}} f''' \xrightarrow{\text{可导}} f^{(4)}$$

二阶导数　　三阶导数

f 二阶可导　　f 三阶可导

高阶导数

$$f \xrightarrow{\text{可导}} f' \xrightarrow{\text{可导}} f'' \xrightarrow{\text{可导}} f''' \xrightarrow{\text{可导}} f^{(4)}$$

二阶导数
f 二阶可导

三阶导数
f 三阶可导

四阶导数
f 四阶可导

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

高阶导数

$$f \xrightarrow{\text{可导}} f' \xrightarrow{\text{可导}} f'' \xrightarrow{\text{可导}} f''' \xrightarrow{\text{可导}} f^{(4)} \xrightarrow{\text{可导}} \cdots$$

二阶导数 三阶导数 四阶导数

f 二阶可导 f 三阶可导 f 四阶可导

高阶导数

$$f \xrightarrow{\text{可导}} f' \xrightarrow{\text{可导}} f'' \xrightarrow{\text{可导}} f''' \xrightarrow{\text{可导}} f^{(4)} \xrightarrow{\text{可导}} \cdots$$

二阶导数 f 二阶可导

三阶导数 f 三阶可导

四阶导数 f 四阶可导

一般地，f 是 n 阶可导，则存在直到 n 阶导数：

$$f', f'', \cdots, f^{(n)}.$$

高阶导数

$$f \xrightarrow{\text{可导}} f' \xrightarrow{\text{可导}} f'' \xrightarrow{\text{可导}} f''' \xrightarrow{\text{可导}} f^{(4)} \xrightarrow{\text{可导}} \cdots$$

二阶导数 f **二阶可导**　**三阶导数** f **三阶可导**　**四阶导数** f **四阶可导**

一般地，f 是 n **阶可导**，则存在直到 n **阶导数**：

$$f', f'', \cdots, f^{(n)}.$$

n 阶导数也记为

$$y^{(n)}, \quad \frac{d^n y}{dx^n}$$

高阶导数

$$f \xrightarrow{\text{可导}} f' \xrightarrow{\text{可导}} f'' \xrightarrow{\text{可导}} f''' \xrightarrow{\text{可导}} f^{(4)} \xrightarrow{\text{可导}} \cdots$$

二阶导数	三阶导数	四阶导数
f 二阶可导	f 三阶可导	f 四阶可导

一般地，f 是 n **阶可导**，则存在直到 n **阶导数**：

$$f', f'', \cdots, f^{(n)}.$$

n 阶导数也记为

$$y^{(n)}, \quad \frac{d^n y}{dx^n}$$

注 1 约定 $f^{(0)}(x) = f(x)$，$y^{(0)} = y$.

高阶导数

$$f \xrightarrow{\text{可导}} f' \xrightarrow{\text{可导}} f'' \xrightarrow{\text{可导}} f''' \xrightarrow{\text{可导}} f^{(4)} \xrightarrow{\text{可导}} \cdots$$

二阶导数 f 二阶可导　三阶导数 f 三阶可导　四阶导数 f 四阶可导

一般地，f 是 n 阶可导，则存在直到 n 阶导数：

$$f', f'', \cdots, f^{(n)}.$$

n 阶导数也记为

$$y^{(n)}, \quad \frac{d^n y}{dx^n}$$

注 1 约定 $f^{(0)}(x) = f(x)$，$y^{(0)} = y$.

注 2 设粒子的路程函数为 $x = x(t)$，则速度 $v = x'(t)$，加速度 $a = x''(t)$.

高阶导数

$$f \xrightarrow{\text{可导}} f' \xrightarrow{\text{可导}} f'' \xrightarrow{\text{可导}} f''' \xrightarrow{\text{可导}} f^{(4)} \xrightarrow{\text{可导}} \cdots$$

二阶导数	三阶导数	四阶导数
f 二阶可导	f 三阶可导	f 四阶可导

一般地，f 是 n **阶可导**，则存在直到 n **阶导数**：

$$f', f'', \cdots, f^{(n)}.$$

n 阶导数也记为

$$y^{(n)}, \quad \frac{d^n y}{dx^n}$$

注 1 约定 $f^{(0)}(x) = f(x)$，$y^{(0)} = y$.

注 2 设粒子的路程函数为 $x = x(t)$，则速度 $v = x'(t)$，加速度 $a = x''(t)$. 牛顿第二定律 $F = ma = mx''$.

暨南大学 JINAN UNIVERSITY

例 1 求下列函数的 n 的阶导数：

$$(1)\ y = x^4 \qquad (2)\ y = e^x \qquad (3)\ y = \sin x$$

例 1 求下列函数的 n 的阶导数：

$$(1)\ y=x^4 \qquad (2)\ y=e^x \qquad (3)\ y=\sin x$$

解 (1)

$y'=(x^4)'=4x^3,$

例 1 求下列函数的 n 的阶导数：

$$(1)\ y = x^4 \qquad (2)\ y = e^x \qquad (3)\ y = \sin x$$

解 (1)

$$y' = (x^4)' = 4x^3, \quad y'' = (4x^3)'$$

例 1 求下列函数的 n 的阶导数：

$$(1)\ y = x^4 \qquad (2)\ y = e^x \qquad (3)\ y = \sin x$$

解 (1)

$$y' = (x^4)' = 4x^3, \quad y'' = (4x^3)' = 12x^2,$$

例 1 求下列函数的 n 的阶导数:

$$(1)\ y = x^4 \qquad (2)\ y = e^x \qquad (3)\ y = \sin x$$

解 (1)

$$y' = (x^4)' = 4x^3, \quad y'' = (4x^3)' = 12x^2, \quad y''' = (12x^2)'$$

例 1 求下列函数的 n 的阶导数：

$$(1)\ y = x^4 \qquad (2)\ y = e^x \qquad (3)\ y = \sin x$$

解 (1)

$$y' = (x^4)' = 4x^3, \quad y'' = (4x^3)' = 12x^2, \quad y''' = (12x^2)' = 24x,$$

例 1 求下列函数的 n 的阶导数：

$$(1)\ y = x^4 \qquad (2)\ y = e^x \qquad (3)\ y = \sin x$$

解 (1)

$$y' = (x^4)' = 4x^3, \quad y'' = (4x^3)' = 12x^2, \quad y''' = (12x^2)' = 24x,$$

$$y^{(4)} = (24x)'$$

例 1 求下列函数的 n 的阶导数：

$$(1)\ y = x^4 \qquad (2)\ y = e^x \qquad (3)\ y = \sin x$$

解 (1)

$$y' = (x^4)' = 4x^3, \quad y'' = (4x^3)' = 12x^2, \quad y''' = (12x^2)' = 24x,$$

$$y^{(4)} = (24x)' = 24,$$

例 1 求下列函数的 n 的阶导数：

$$(1)\ y = x^4 \qquad (2)\ y = e^x \qquad (3)\ y = \sin x$$

解 (1)

$$y' = (x^4)' = 4x^3, \quad y'' = (4x^3)' = 12x^2, \quad y''' = (12x^2)' = 24x,$$

$$y^{(4)} = (24x)' = 24, \quad y^{(5)} = 0, \quad y^{(6)} = 0, \ldots$$

例 1 求下列函数的 n 的阶导数:

$$(1)\ y = x^4 \qquad (2)\ y = e^x \qquad (3)\ y = \sin x$$

解 (1)

$$y' = (x^4)' = 4x^3, \quad y'' = (4x^3)' = 12x^2, \quad y''' = (12x^2)' = 24x,$$

$$y^{(4)} = (24x)' = 24, \quad y^{(5)} = 0, \quad y^{(6)} = 0, \ldots$$

(2)

$$y' = (e^x)' = e^x,$$

例 1 求下列函数的 n 的阶导数：

$$(1)\ y = x^4 \qquad (2)\ y = e^x \qquad (3)\ y = \sin x$$

解 (1)

$$y' = (x^4)' = 4x^3, \quad y'' = (4x^3)' = 12x^2, \quad y''' = (12x^2)' = 24x,$$

$$y^{(4)} = (24x)' = 24, \quad y^{(5)} = 0, \quad y^{(6)} = 0, \ldots$$

(2)

$$y' = (e^x)' = e^x, \quad y'' = (e^x)' = e^x,$$

例 1 求下列函数的 n 的阶导数:

$$(1)\ y = x^4 \qquad (2)\ y = e^x \qquad (3)\ y = \sin x$$

解 (1)

$$y' = (x^4)' = 4x^3, \quad y'' = (4x^3)' = 12x^2, \quad y''' = (12x^2)' = 24x,$$

$$y^{(4)} = (24x)' = 24, \quad y^{(5)} = 0, \quad y^{(6)} = 0, \ldots$$

(2)

$$y' = (e^x)' = e^x, \quad y'' = (e^x)' = e^x, \ldots \quad , y^{(n)} = e^x, \ldots$$

例 1 求下列函数的 n 的阶导数：

$$(1)\ y = x^4 \qquad (2)\ y = e^x \qquad (3)\ y = \sin x$$

解 (1)

$$y' = (x^4)' = 4x^3, \quad y'' = (4x^3)' = 12x^2, \quad y''' = (12x^2)' = 24x,$$

$$y^{(4)} = (24x)' = 24, \quad y^{(5)} = 0, \quad y^{(6)} = 0, \ldots$$

(2)

$$y' = (e^x)' = e^x, \quad y'' = (e^x)' = e^x, \ldots \quad , y^{(n)} = e^x, \ldots$$

(3)

$$y = \sin x, \quad y' = \cos x,$$

例 1 求下列函数的 n 的阶导数:

$$(1)\ y=x^4 \qquad (2)\ y=e^x \qquad (3)\ y=\sin x$$

解 (1)

$$y'=(x^4)'=4x^3,\quad y''=(4x^3)'=12x^2,\quad y'''=(12x^2)'=24x,$$

$$y^{(4)}=(24x)'=24,\quad y^{(5)}=0,\quad y^{(6)}=0,\ldots$$

(2)

$$y'=(e^x)'=e^x,\quad y''=(e^x)'=e^x,\ldots\quad ,y^{(n)}=e^x,\ldots$$

(3)

$$y=\sin x,\quad y'=\cos x,\quad y''=-\sin x,$$

例 1 求下列函数的 n 的阶导数：

$$(1)\ y=x^4 \qquad (2)\ y=e^x \qquad (3)\ y=\sin x$$

解 (1)

$$y'=(x^4)'=4x^3,\quad y''=(4x^3)'=12x^2,\quad y'''=(12x^2)'=24x,$$

$$y^{(4)}=(24x)'=24,\quad y^{(5)}=0,\quad y^{(6)}=0,\ldots$$

(2)

$$y'=(e^x)'=e^x,\quad y''=(e^x)'=e^x,\ldots\quad ,y^{(n)}=e^x,\ldots$$

(3)

$$y=\sin x,\quad y'=\cos x,\quad y''=-\sin x,\quad y'''=-\cos x$$

例 1 求下列函数的 n 的阶导数：

$$(1)\ y=x^4 \qquad (2)\ y=e^x \qquad (3)\ y=\sin x$$

解 (1)

$$y'=(x^4)'=4x^3,\quad y''=(4x^3)'=12x^2,\quad y'''=(12x^2)'=24x,$$

$$y^{(4)}=(24x)'=24,\quad y^{(5)}=0,\quad y^{(6)}=0,\ldots$$

(2)

$$y'=(e^x)'=e^x,\quad y''=(e^x)'=e^x,\ldots\quad ,y^{(n)}=e^x,\ldots$$

(3)

$$y=\sin x,\quad y'=\cos x,\quad y''=-\sin x,\quad y'''=-\cos x$$

$$y^{(4)}=\sin x,$$

例 1 求下列函数的 n 的阶导数:

$$(1)\ y = x^4 \qquad (2)\ y = e^x \qquad (3)\ y = \sin x$$

解 (1)

$$y' = (x^4)' = 4x^3, \quad y'' = (4x^3)' = 12x^2, \quad y''' = (12x^2)' = 24x,$$

$$y^{(4)} = (24x)' = 24, \quad y^{(5)} = 0, \quad y^{(6)} = 0, \ldots$$

(2)

$$y' = (e^x)' = e^x, \quad y'' = (e^x)' = e^x, \ldots \quad , y^{(n)} = e^x, \ldots$$

(3)

$$y = \sin x, \quad y' = \cos x, \quad y'' = -\sin x, \quad y''' = -\cos x$$

$$y^{(4)} = \sin x, \quad y^{(5)} = \cos x,$$

例 1 求下列函数的 n 的阶导数:

$$(1)\ y = x^4 \qquad (2)\ y = e^x \qquad (3)\ y = \sin x$$

解 (1)

$$y' = (x^4)' = 4x^3, \quad y'' = (4x^3)' = 12x^2, \quad y''' = (12x^2)' = 24x,$$

$$y^{(4)} = (24x)' = 24, \quad y^{(5)} = 0, \quad y^{(6)} = 0, \ldots$$

(2)

$$y' = (e^x)' = e^x, \quad y'' = (e^x)' = e^x, \ldots \quad , y^{(n)} = e^x, \ldots$$

(3)

$$y = \sin x, \quad y' = \cos x, \quad y'' = -\sin x, \quad y''' = -\cos x$$

$$y^{(4)} = \sin x, \quad y^{(5)} = \cos x, \quad y^{(6)} = -\sin x,$$

例 1 求下列函数的 n 的阶导数:

$$(1)\ y = x^4 \qquad (2)\ y = e^x \qquad (3)\ y = \sin x$$

解 (1)

$$y' = (x^4)' = 4x^3, \quad y'' = (4x^3)' = 12x^2, \quad y''' = (12x^2)' = 24x,$$

$$y^{(4)} = (24x)' = 24, \quad y^{(5)} = 0, \quad y^{(6)} = 0, \ldots$$

(2)

$$y' = (e^x)' = e^x, \quad y'' = (e^x)' = e^x, \ldots \quad , y^{(n)} = e^x, \ldots$$

(3)

$$y = \sin x, \quad y' = \cos x, \quad y'' = -\sin x, \quad y''' = -\cos x$$

$$y^{(4)} = \sin x, \quad y^{(5)} = \cos x, \quad y^{(6)} = -\sin x, \quad y^{(7)} = -\cos x$$

例 1 求下列函数的 n 的阶导数：

$$(1)\ y = x^4 \qquad (2)\ y = e^x \qquad (3)\ y = \sin x$$

解 (1)

$$y' = (x^4)' = 4x^3, \quad y'' = (4x^3)' = 12x^2, \quad y''' = (12x^2)' = 24x,$$

$$y^{(4)} = (24x)' = 24, \quad y^{(5)} = 0, \quad y^{(6)} = 0, \ldots$$

(2)

$$y' = (e^x)' = e^x, \quad y'' = (e^x)' = e^x, \ldots \quad , y^{(n)} = e^x, \ldots$$

(3)

$$y = \sin x, \quad y' = \cos x, \quad y'' = -\sin x, \quad y''' = -\cos x$$

$$y^{(4)} = \sin x, \quad y^{(5)} = \cos x, \quad y^{(6)} = -\sin x, \quad y^{(7)} = -\cos x$$

$$y^{(8)} = \sin x,$$

例 1 求下列函数的 n 的阶导数：

$$(1)\ y = x^4 \qquad (2)\ y = e^x \qquad (3)\ y = \sin x$$

解 (1)

$$y' = (x^4)' = 4x^3, \quad y'' = (4x^3)' = 12x^2, \quad y''' = (12x^2)' = 24x,$$

$$y^{(4)} = (24x)' = 24, \quad y^{(5)} = 0, \quad y^{(6)} = 0, \ldots$$

(2)

$$y' = (e^x)' = e^x, \quad y'' = (e^x)' = e^x, \ldots \quad , y^{(n)} = e^x, \ldots$$

(3)

$$y = \sin x, \quad y' = \cos x, \quad y'' = -\sin x, \quad y''' = -\cos x$$

$$y^{(4)} = \sin x, \quad y^{(5)} = \cos x, \quad y^{(6)} = -\sin x, \quad y^{(7)} = -\cos x$$

$$y^{(8)} = \sin x, \quad y^{(9)} = \cos x,$$

例 1 求下列函数的 n 的阶导数:

$$(1)\ y=x^4 \qquad (2)\ y=e^x \qquad (3)\ y=\sin x$$

解 (1)

$$y'=(x^4)'=4x^3,\quad y''=(4x^3)'=12x^2,\quad y'''=(12x^2)'=24x,$$

$$y^{(4)}=(24x)'=24,\quad y^{(5)}=0,\quad y^{(6)}=0,\ldots$$

(2)

$$y'=(e^x)'=e^x,\quad y''=(e^x)'=e^x,\ldots\quad ,y^{(n)}=e^x,\ldots$$

(3)

$$y=\sin x,\quad y'=\cos x,\quad y''=-\sin x,\quad y'''=-\cos x$$

$$y^{(4)}=\sin x,\quad y^{(5)}=\cos x,\quad y^{(6)}=-\sin x,\quad y^{(7)}=-\cos x$$

$$y^{(8)}=\sin x,\quad y^{(9)}=\cos x,\quad y^{(10)}=-\sin x,$$

例 1 求下列函数的 n 的阶导数:

$$(1)\ y = x^4 \qquad (2)\ y = e^x \qquad (3)\ y = \sin x$$

解 (1)

$$y' = (x^4)' = 4x^3, \quad y'' = (4x^3)' = 12x^2, \quad y''' = (12x^2)' = 24x,$$

$$y^{(4)} = (24x)' = 24, \quad y^{(5)} = 0, \quad y^{(6)} = 0, \ldots$$

(2)

$$y' = (e^x)' = e^x, \quad y'' = (e^x)' = e^x, \ldots \quad , y^{(n)} = e^x, \ldots$$

(3)

$$y = \sin x, \quad y' = \cos x, \quad y'' = -\sin x, \quad y''' = -\cos x$$

$$y^{(4)} = \sin x, \quad y^{(5)} = \cos x, \quad y^{(6)} = -\sin x, \quad y^{(7)} = -\cos x$$

$$y^{(8)} = \sin x, \quad y^{(9)} = \cos x, \quad y^{(10)} = -\sin x, \quad y^{(11)} = -\cos x$$

例 1 求下列函数的 n 的阶导数：

$$(1)\ y = x^4 \qquad (2)\ y = e^x \qquad (3)\ y = \sin x$$

解 (1)

$$y' = (x^4)' = 4x^3, \quad y'' = (4x^3)' = 12x^2, \quad y''' = (12x^2)' = 24x,$$

$$y^{(4)} = (24x)' = 24, \quad y^{(5)} = 0, \quad y^{(6)} = 0, \ldots$$

(2)

$$y' = (e^x)' = e^x, \quad y'' = (e^x)' = e^x, \ldots \quad , y^{(n)} = e^x, \ldots$$

(3)

$$y = \sin x, \quad y' = \cos x, \quad y'' = -\sin x, \quad y''' = -\cos x$$

$$y^{(4)} = \sin x, \quad y^{(5)} = \cos x, \quad y^{(6)} = -\sin x, \quad y^{(7)} = -\cos x$$

$$y^{(8)} = \sin x, \quad y^{(9)} = \cos x, \quad y^{(10)} = -\sin x, \quad y^{(11)} = -\cos x$$

$$\vdots$$

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

例 2 求下列函数的 n 的阶导数：

$$(1)\ y=\frac{1}{x} \qquad (2)\ y=\frac{1}{x^2+x} \qquad (3)\ y=xe^x$$

例 2 求下列函数的 n 的阶导数：

$$(1)\ y=\frac{1}{x} \qquad (2)\ y=\frac{1}{x^2+x} \qquad (3)\ y=xe^x$$

解 (1)

$$(x^{-1})'=-x^{-2},$$

例 2 求下列函数的 n 的阶导数：

$$(1)\ y=\frac{1}{x}\qquad (2)\ y=\frac{1}{x^2+x}\qquad (3)\ y=xe^x$$

解 (1)

$(x^{-1})'=-x^{-2}$, $(x^{-1})''=2x^{-3}$,

例 2 求下列函数的 n 的阶导数：

$$(1)\ y = \frac{1}{x} \qquad (2)\ y = \frac{1}{x^2 + x} \qquad (3)\ y = xe^x$$

解 (1)

$$(x^{-1})' = -x^{-2},\ (x^{-1})'' = 2x^{-3},\ (x^{-1})''' = 2 \cdot (-3)x^{-4}$$

例 2 求下列函数的 n 的阶导数：

$$(1)\ y=\frac{1}{x}\qquad (2)\ y=\frac{1}{x^2+x}\qquad (3)\ y=xe^x$$

解 (1)

$$(x^{-1})'=-x^{-2},\ (x^{-1})''=2x^{-3},\ (x^{-1})'''=2\cdot(-3)x^{-4}=-2\cdot 3x^{-4},$$

例 2 求下列函数的 n 的阶导数：

$$(1)\ y=\frac{1}{x} \qquad (2)\ y=\frac{1}{x^2+x} \qquad (3)\ y=xe^x$$

解 (1)

$(x^{-1})'=-x^{-2}$, $(x^{-1})''=2x^{-3}$, $(x^{-1})'''=2\cdot(-3)x^{-4}=-2\cdot 3x^{-4}$, $(x^{-1})^{(4)}=-2\cdot 3\cdot(-4)x^{-5}$

例 2 求下列函数的 n 的阶导数：

$$(1)\ y=\frac{1}{x}\qquad (2)\ y=\frac{1}{x^2+x}\qquad (3)\ y=xe^x$$

解 (1)

$(x^{-1})'=-x^{-2}$, $(x^{-1})''=2x^{-3}$, $(x^{-1})'''=2\cdot(-3)x^{-4}=-2\cdot 3x^{-4}$,
$(x^{-1})^{(4)}=-2\cdot 3\cdot(-4)x^{-5}=2\cdot 3\cdot 4x^{-5}$,

例 2 求下列函数的 n 的阶导数：

$$(1)\ y=\frac{1}{x} \qquad (2)\ y=\frac{1}{x^2+x} \qquad (3)\ y=xe^x$$

解 (1)

$$(x^{-1})'=-x^{-2},\ (x^{-1})''=2x^{-3},\ (x^{-1})'''=2\cdot(-3)x^{-4}=-2\cdot 3x^{-4},$$

$$(x^{-1})^{(4)}=-2\cdot 3\cdot(-4)x^{-5}=2\cdot 3\cdot 4x^{-5},$$

$$\vdots$$

$$(x^{-1})^{(n)}=$$

例 2 求下列函数的 n 的阶导数：

$$(1)\ y=\frac{1}{x} \qquad (2)\ y=\frac{1}{x^2+x} \qquad (3)\ y=xe^x$$

解 (1)

$(x^{-1})'=-x^{-2}$, $(x^{-1})''=2x^{-3}$, $(x^{-1})'''=2\cdot(-3)x^{-4}=-2\cdot 3x^{-4}$,

$(x^{-1})^{(4)}=-2\cdot 3\cdot(-4)x^{-5}=2\cdot 3\cdot 4x^{-5}$,

$\vdots$

$(x^{-1})^{(n)}=(-1)^n n!x^{-n-1}$

例 2 求下列函数的 n 的阶导数：

$$(1)\ y=\frac{1}{x} \qquad (2)\ y=\frac{1}{x^2+x} \qquad (3)\ y=xe^x$$

解 (1)

$$(x^{-1})'=-x^{-2},\ (x^{-1})''=2x^{-3},\ (x^{-1})'''=2\cdot(-3)x^{-4}=-2\cdot 3x^{-4},$$

$$(x^{-1})^{(4)}=-2\cdot 3\cdot(-4)x^{-5}=2\cdot 3\cdot 4x^{-5},$$

$$\vdots$$

$$(x^{-1})^{(n)}=(-1)^n n!x^{-n-1}$$

(2) 因为 $y=\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$,

例 2 求下列函数的 n 的阶导数：

$$(1)\ y=\frac{1}{x} \qquad (2)\ y=\frac{1}{x^2+x} \qquad (3)\ y=xe^x$$

解 (1)

$$(x^{-1})'=-x^{-2},\ (x^{-1})''=2x^{-3},\ (x^{-1})'''=2\cdot(-3)x^{-4}=-2\cdot 3x^{-4},$$

$$(x^{-1})^{(4)}=-2\cdot 3\cdot(-4)x^{-5}=2\cdot 3\cdot 4x^{-5},$$

$$\vdots$$

$$(x^{-1})^{(n)}=(-1)^n n!x^{-n-1}$$

(2) 因为 $y=\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$，所以

$$\left[\frac{1}{x(x+1)}\right]^{(n)}=(-1)^n n!x^{-n-1}-$$

例 2 求下列函数的 n 的阶导数:

$$(1)\ y=\frac{1}{x} \qquad (2)\ y=\frac{1}{x^2+x} \qquad (3)\ y=xe^x$$

解 (1)

$$(x^{-1})'=-x^{-2},\ (x^{-1})''=2x^{-3},\ (x^{-1})'''=2\cdot(-3)x^{-4}=-2\cdot 3x^{-4},$$

$$(x^{-1})^{(4)}=-2\cdot 3\cdot(-4)x^{-5}=2\cdot 3\cdot 4x^{-5},$$

$$\vdots$$

$$(x^{-1})^{(n)}=(-1)^n n!x^{-n-1}$$

(2) 因为 $y=\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$, 所以

$$\left[\frac{1}{x(x+1)}\right]^{(n)}=(-1)^n n!x^{-n-1}-(-1)^n n!(x+1)^{-n-1}$$

例 2 求下列函数的 n 的阶导数：

$$(1)\ y = \frac{1}{x} \qquad (2)\ y = \frac{1}{x^2 + x} \qquad (3)\ y = xe^x$$

解 (3)

$$y' = x'e^x + x(e^x)'$$

例 2 求下列函数的 n 的阶导数：

$$(1)\ y=\frac{1}{x} \qquad (2)\ y=\frac{1}{x^2+x} \qquad (3)\ y=xe^x$$

解 (3)

$$y'=x'e^x+x(e^x)'=(x+1)e^x$$

例 2 求下列函数的 n 的阶导数：

$$(1)\ y = \frac{1}{x} \qquad (2)\ y = \frac{1}{x^2 + x} \qquad (3)\ y = xe^x$$

解 (3)

$$y' = x'e^x + x(e^x)' = (x+1)e^x$$

$$y'' = (x+1)'e^x + (x+1)(e^x)'$$

例 2 求下列函数的 n 的阶导数：

$$(1)\ y=\frac{1}{x}\qquad (2)\ y=\frac{1}{x^2+x}\qquad (3)\ y=xe^x$$

解 (3)

$$y'=x'e^x+x(e^x)'=(x+1)e^x$$

$$y''=(x+1)'e^x+(x+1)(e^x)'=(x+2)e^x$$

例 2 求下列函数的 n 的阶导数：

$$(1)\ y=\frac{1}{x}\qquad (2)\ y=\frac{1}{x^2+x}\qquad (3)\ y=xe^x$$

解 (3)

$$y'=x'e^x+x(e^x)'=(x+1)e^x$$

$$y''=(x+1)'e^x+(x+1)(e^x)'=(x+2)e^x$$

$$y'''=(x+2)'e^x+(x+2)(e^x)'$$

例 2 求下列函数的 n 的阶导数：

$$(1)\ y = \frac{1}{x} \qquad (2)\ y = \frac{1}{x^2 + x} \qquad (3)\ y = xe^x$$

解 (3)

$$y' = x'e^x + x(e^x)' = (x+1)e^x$$

$$y'' = (x+1)'e^x + (x+1)(e^x)' = (x+2)e^x$$

$$y''' = (x+2)'e^x + (x+2)(e^x)' = (x+3)e^x$$

例 2 求下列函数的 n 的阶导数：

$$(1)\ y=\frac{1}{x} \qquad (2)\ y=\frac{1}{x^2+x} \qquad (3)\ y=xe^x$$

解 (3)

$$y'=x'e^x+x(e^x)'=(x+1)e^x$$

$$y''=(x+1)'e^x+(x+1)(e^x)'=(x+2)e^x$$

$$y'''=(x+2)'e^x+(x+2)(e^x)'=(x+3)e^x$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)}=$$

例 2 求下列函数的 n 的阶导数：

$$(1)\ y=\frac{1}{x} \qquad (2)\ y=\frac{1}{x^2+x} \qquad (3)\ y=xe^x$$

解 (3)

$$y'=x'e^x+x(e^x)'=(x+1)e^x$$

$$y''=(x+1)'e^x+(x+1)(e^x)'=(x+2)e^x$$

$$y'''=(x+2)'e^x+(x+2)(e^x)'=(x+3)e^x$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)}=(x+n)e^x.$$

We are here now...

1. 导数定义

2. 求导法则

   四则运算的求导法则

   反函数的求导法则

   复合函数的求导法则

3. 高阶导数

4. 隐函数求导

5. 微分

隐函数求导

本小节两大问题：

问题 1 假设函数 $y = y(x)$ 满足一般方程

$$F(x, y) = 0,$$

如何求导数 $\frac{dy}{dx}$?

隐函数求导

本小节两大问题：

问题 1 假设函数 $y = y(x)$ 满足一般方程

$$F(x, y) = 0,$$

如何求导数 $\frac{dy}{dx}$？

问题 2 假设函数 $y = y(x)$ 满足参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases},$$

如何求导数 $\frac{dy}{dx}$？

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

问题 1 假设函数 $y = y(x)$ 满足一般方程

$$F(x, y) = 0,$$

如何求导数 $\frac{dy}{dx}$？

问题 1 假设函数 $y = y(x)$ 满足一般方程

$$F(x, y) = 0,$$

如何求导数 $\frac{dy}{dx}$?

解法 方程 $F(x, y(x)) = 0$ 两边对 x 求导，从而解出 $y'(x)$

问题 1 假设函数 $y = y(x)$ 满足一般方程

$$F(x, y) = 0,$$

如何求导数 $\frac{dy}{dx}$?

解法 方程 $F(x, y(x)) = 0$ 两边对 x 求导，从而解出 $y'(x)$

例 1 设 $y = y(x)$ 满足方程 $e^y + xy - e = 0$，求 y'.

问题 1 假设函数 $y = y(x)$ 满足一般方程

$$F(x, y) = 0,$$

如何求导数 $\frac{dy}{dx}$？

解法 方程 $F(x, y(x)) = 0$ 两边对 x 求导，从而解出 $y'(x)$

例 1 设 $y = y(x)$ 满足方程 $e^y + xy - e = 0$，求 y'.

解 把 $y = y(x)$ 代入方程，得到

$$e^{y(x)} + xy(x) - e = 0$$

暨南大学 JINAN UNIVERSITY

问题 1 假设函数 $y = y(x)$ 满足一般方程

$$F(x, y) = 0,$$

如何求导数 $\frac{dy}{dx}$？

解法 方程 $F(x, y(x)) = 0$ 两边对 x 求导，从而解出 $y'(x)$

例 1 设 $y = y(x)$ 满足方程 $e^y + xy - e = 0$，求 y'.

解 把 $y = y(x)$ 代入方程，得到

$$e^{y(x)} + xy(x) - e = 0$$

两边对 x 求导，得到

问题 1 假设函数 $y = y(x)$ 满足一般方程

$$F(x, y) = 0,$$

如何求导数 $\frac{dy}{dx}$？

解法 方程 $F(x, y(x)) = 0$ 两边对 x 求导，从而解出 $y'(x)$

例 1 设 $y = y(x)$ 满足方程 $e^y + xy - e = 0$，求 y'.

解 把 $y = y(x)$ 代入方程，得到

$$e^{y(x)} + xy(x) - e = 0$$

两边对 x 求导，得到

$$e^y \cdot y'$$

暨南大学 JINAN UNIVERSITY

问题 1 假设函数 $y = y(x)$ 满足一般方程

$$F(x, y) = 0,$$

如何求导数 $\frac{dy}{dx}$？

解法 方程 $F(x, y(x)) = 0$ 两边对 x 求导，从而解出 $y'(x)$

例 1 设 $y = y(x)$ 满足方程 $e^y + xy - e = 0$，求 y'.

解 把 $y = y(x)$ 代入方程，得到

$$e^{y(x)} + xy(x) - e = 0$$

两边对 x 求导，得到

$$e^y \cdot y' + y + x \cdot y'$$

问题 1 假设函数 $y = y(x)$ 满足一般方程

$$F(x, y) = 0,$$

如何求导数 $\frac{dy}{dx}$？

解法 方程 $F(x, y(x)) = 0$ 两边对 x 求导，从而解出 $y'(x)$

例 1 设 $y = y(x)$ 满足方程 $e^y + xy - e = 0$，求 y'.

解 把 $y = y(x)$ 代入方程，得到

$$e^{y(x)} + xy(x) - e = 0$$

两边对 x 求导，得到

$$e^y \cdot y' + y + x \cdot y' = 0$$

问题 1 假设函数 $y = y(x)$ 满足一般方程

$$F(x, y) = 0,$$

如何求导数 $\frac{dy}{dx}$？

解法 方程 $F(x, y(x)) = 0$ 两边对 x 求导，从而解出 $y'(x)$

例 1 设 $y = y(x)$ 满足方程 $e^y + xy - e = 0$，求 y'.

解 把 $y = y(x)$ 代入方程，得到

$$e^{y(x)} + xy(x) - e = 0$$

两边对 x 求导，得到

$$e^y \cdot y' + y + x \cdot y' = 0 \quad \Rightarrow \quad (e^y + x)y' = -y$$

问题 1 假设函数 $y = y(x)$ 满足一般方程

$$F(x, y) = 0,$$

如何求导数 $\frac{dy}{dx}$?

解法 方程 $F(x, y(x)) = 0$ 两边对 x 求导，从而解出 $y'(x)$

例 1 设 $y = y(x)$ 满足方程 $e^y + xy - e = 0$，求 y'.

解 把 $y = y(x)$ 代入方程，得到

$$e^{y(x)} + xy(x) - e = 0$$

两边对 x 求导，得到

$$e^y \cdot y' + y + x \cdot y' = 0 \quad \Rightarrow \quad (e^y + x)y' = -y \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{-y}{e^y + x}$$

问题 1 假设函数 $y = y(x)$ 满足一般方程

$$F(x, y) = 0,$$

如何求导数 $\frac{dy}{dx}$？

解法 方程 $F(x, y(x)) = 0$ 两边对 x 求导，从而解出 $y'(x)$

例 1 设 $y = y(x)$ 满足方程 $e^y + xy - e = 0$，求 y'.

解 把 $y = y(x)$ 代入方程，得到

$$e^{y(x)} + xy(x) - e = 0$$

两边对 x 求导，得到

$$e^y \cdot y' + y + x \cdot y' = 0 \quad \Rightarrow \quad (e^y + x)y' = -y \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{-y}{e^y + x}$$

例 2 设 $y = y(x)$ 满足方程 $y^5 + 2y - x - 3x^7 = 0$，求 y' 及 $y'(0)$.

例 2 设 $y = y(x)$ 满足方程 $y^5 + 2y - x - 3x^7 = 0$，求 y' 及 $y'(0)$.

例 2 设 $y = y(x)$ 满足方程 $y^5 + 2y - x - 3x^7 = 0$，求 y' 及 $y'(0)$.

解 方程两边对 x 求导：

例 2 设 $y=y(x)$ 满足方程 $y^5+2y-x-3x^7=0$，求 y' 及 $y'(0)$.

解 方程两边对 x 求导:

$$5y^4\cdot y'$$

例 2 设 $y = y(x)$ 满足方程 $y^5 + 2y - x - 3x^7 = 0$，求 y' 及 $y'(0)$.

解 方程两边对 x 求导:

$$5y^4 \cdot y' + 2y'$$

例 2 设 $y = y(x)$ 满足方程 $y^5 + 2y - x - 3x^7 = 0$，求 y' 及 $y'(0)$.

解 方程两边对 x 求导:

$$5y^4 \cdot y' + 2y' - 1$$

例 2 设 $y = y(x)$ 满足方程 $y^5 + 2y - x - 3x^7 = 0$，求 y' 及 $y'(0)$.

解 方程两边对 x 求导：

$$5y^4 \cdot y' + 2y' - 1 - 21x^6$$

例 2 设 $y = y(x)$ 满足方程 $y^5 + 2y - x - 3x^7 = 0$，求 y' 及 $y'(0)$.

解 方程两边对 x 求导:

$$5y^4 \cdot y' + 2y' - 1 - 21x^6 = 0$$

例 2 设 $y = y(x)$ 满足方程 $y^5 + 2y - x - 3x^7 = 0$，求 y' 及 $y'(0)$.

解 方程两边对 x 求导：

$$5y^4 \cdot y' + 2y' - 1 - 21x^6 = 0 \quad \Rightarrow \quad (5y^4 + 2)y' = 1 + 21x^6$$

例 2 设 $y=y(x)$ 满足方程 $y^5+2y-x-3x^7=0$，求 y' 及 $y'(0)$.

解 方程两边对 x 求导:

$$5y^4\cdot y'+2y'-1-21x^6=0 \quad\Rightarrow\quad (5y^4+2)y'=1+21x^6$$

$$\Rightarrow\quad y'=\frac{1+21x^6}{2+5y^4}$$

例 2 设 $y = y(x)$ 满足方程 $y^5 + 2y - x - 3x^7 = 0$，求 y' 及 $y'(0)$.

解 方程两边对 x 求导：

$$5y^4 \cdot y' + 2y' - 1 - 21x^6 = 0 \quad \Rightarrow \quad (5y^4 + 2)y' = 1 + 21x^6$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{1 + 21x^6}{2 + 5y^4}$$

当 $x = 0$ 时，$y = 0$，

例 2 设 $y = y(x)$ 满足方程 $y^5 + 2y - x - 3x^7 = 0$，求 y' 及 $y'(0)$.

解 方程两边对 x 求导：

$$5y^4 \cdot y' + 2y' - 1 - 21x^6 = 0 \quad \Rightarrow \quad (5y^4 + 2)y' = 1 + 21x^6$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{1 + 21x^6}{2 + 5y^4}$$

当 $x = 0$ 时，$y = 0$，所以 $y'(0) = \frac{1}{2}$.

例 2 设 $y = y(x)$ 满足方程 $y^5 + 2y - x - 3x^7 = 0$，求 y' 及 $y'(0)$.

解 方程两边对 x 求导：

$$5y^4 \cdot y' + 2y' - 1 - 21x^6 = 0 \quad \Rightarrow \quad (5y^4 + 2)y' = 1 + 21x^6$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{1 + 21x^6}{2 + 5y^4}$$

当 $x = 0$ 时，$y = 0$，所以 $y'(0) = \frac{1}{2}$.

例 3 求曲线 $x^2 + xy + y^2 = 4$ 在点 $(2, -2)$ 处的切线和法线方程.

例 2 设 $y = y(x)$ 满足方程 $y^5 + 2y - x - 3x^7 = 0$，求 y' 及 $y'(0)$.

解 方程两边对 x 求导：

$$5y^4 \cdot y' + 2y' - 1 - 21x^6 = 0 \quad \Rightarrow \quad (5y^4 + 2)y' = 1 + 21x^6$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{1 + 21x^6}{2 + 5y^4}$$

当 $x = 0$ 时，$y = 0$，所以 $y'(0) = \frac{1}{2}$.

例 3 求曲线 $x^2 + xy + y^2 = 4$ 在点 $(2, -2)$ 处的切线和法线方程.

解 回忆

切线方程$y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$， 法线方程$y = -\dfrac{1}{y'(x_0)}(x - x_0) + y_0$

所以只需求 $y'(2)$.

例 2 设 $y=y(x)$ 满足方程 $y^5+2y-x-3x^7=0$，求 y' 及 $y'(0)$.

解 方程两边对 x 求导：

$$5y^4\cdot y'+2y'-1-21x^6=0 \quad\Rightarrow\quad (5y^4+2)y'=1+21x^6$$

$$\Rightarrow\quad y'=\frac{1+21x^6}{2+5y^4}$$

当 $x=0$ 时，$y=0$，所以 $y'(0)=\frac{1}{2}$.

例 3 求曲线 $x^2+xy+y^2=4$ 在点 $(2,-2)$ 处的切线和法线方程.

解 回忆

切线方程$y=y'(x_0)(x-x_0)+y_0$， 法线方程$y=-\dfrac{1}{y'(x_0)}(x-x_0)+y_0$

所以只需求 $y'(2)$. 方程两边对 x 求导：

例 2 设 $y=y(x)$ 满足方程 $y^5+2y-x-3x^7=0$，求 y' 及 $y'(0)$.

解 方程两边对 x 求导：

$$5y^4\cdot y'+2y'-1-21x^6=0 \quad\Rightarrow\quad (5y^4+2)y'=1+21x^6$$

$$\Rightarrow\quad y'=\frac{1+21x^6}{2+5y^4}$$

当 $x=0$ 时，$y=0$，所以 $y'(0)=\frac{1}{2}$.

例 3 求曲线 $x^2+xy+y^2=4$ 在点 $(2,-2)$ 处的切线和法线方程.

解 回忆

切线方程$y=y'(x_0)(x-x_0)+y_0$，　法线方程$y=-\dfrac{1}{y'(x_0)}(x-x_0)+y_0$

所以只需求 $y'(2)$. 方程两边对 x 求导：

$$2x$$

例 2 设 $y = y(x)$ 满足方程 $y^5 + 2y - x - 3x^7 = 0$，求 y' 及 $y'(0)$.

解 方程两边对 x 求导：

$$5y^4 \cdot y' + 2y' - 1 - 21x^6 = 0 \quad \Rightarrow \quad (5y^4 + 2)y' = 1 + 21x^6$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{1 + 21x^6}{2 + 5y^4}$$

当 $x = 0$ 时，$y = 0$，所以 $y'(0) = \frac{1}{2}$.

例 3 求曲线 $x^2 + xy + y^2 = 4$ 在点 $(2, -2)$ 处的切线和法线方程.

解 回忆

切线方程$y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$， 法线方程$y = -\dfrac{1}{y'(x_0)}(x - x_0) + y_0$

所以只需求 $y'(2)$. 方程两边对 x 求导：

$$2x + y + x \cdot y'$$

例 2 设 $y=y(x)$ 满足方程 $y^5+2y-x-3x^7=0$，求 y' 及 $y'(0)$.

解 方程两边对 x 求导：

$$5y^4\cdot y'+2y'-1-21x^6=0 \quad\Rightarrow\quad (5y^4+2)y'=1+21x^6$$

$$\Rightarrow\quad y'=\frac{1+21x^6}{2+5y^4}$$

当 $x=0$ 时，$y=0$，所以 $y'(0)=\frac{1}{2}$.

例 3 求曲线 $x^2+xy+y^2=4$ 在点 $(2,-2)$ 处的切线和法线方程.

解 回忆

切线方程$y=y'(x_0)(x-x_0)+y_0$，　法线方程$y=-\dfrac{1}{y'(x_0)}(x-x_0)+y_0$

所以只需求 $y'(2)$. 方程两边对 x 求导：

$$2x+y+x\cdot y'+2y\cdot y'$$

例 2 设 $y = y(x)$ 满足方程 $y^5 + 2y - x - 3x^7 = 0$，求 y' 及 $y'(0)$.

解 方程两边对 x 求导:

$$5y^4 \cdot y' + 2y' - 1 - 21x^6 = 0 \quad \Rightarrow \quad (5y^4 + 2)y' = 1 + 21x^6$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{1 + 21x^6}{2 + 5y^4}$$

当 $x = 0$ 时，$y = 0$，所以 $y'(0) = \frac{1}{2}$.

例 3 求曲线 $x^2 + xy + y^2 = 4$ 在点 $(2, -2)$ 处的切线和法线方程.

解 回忆

切线方程$y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$，法线方程$y = -\dfrac{1}{y'(x_0)}(x - x_0) + y_0$

所以只需求 $y'(2)$. 方程两边对 x 求导:

$$2x + y + x \cdot y' + 2y \cdot y' = 0$$

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

例 2 设 $y=y(x)$ 满足方程 $y^5+2y-x-3x^7=0$，求 y' 及 $y'(0)$.

解 方程两边对 x 求导：

$$5y^4\cdot y'+2y'-1-21x^6=0 \quad\Rightarrow\quad (5y^4+2)y'=1+21x^6$$

$$\Rightarrow\quad y'=\frac{1+21x^6}{2+5y^4}$$

当 $x=0$ 时，$y=0$，所以 $y'(0)=\frac{1}{2}$.

例 3 求曲线 $x^2+xy+y^2=4$ 在点 $(2,-2)$ 处的切线和法线方程.

解 回忆

切线方程$y=y'(x_0)(x-x_0)+y_0$，　法线方程$y=-\dfrac{1}{y'(x_0)}(x-x_0)+y_0$

所以只需求 $y'(2)$. 方程两边对 x 求导：

$$2x+y+x\cdot y'+2y\cdot y'=0 \quad\Rightarrow\quad y'=\frac{-2x-y}{x+2y}$$

例 2 设 $y=y(x)$ 满足方程 $y^5+2y-x-3x^7=0$，求 y' 及 $y'(0)$.

解 方程两边对 x 求导：

$$5y^4\cdot y'+2y'-1-21x^6=0 \quad\Rightarrow\quad (5y^4+2)y'=1+21x^6$$

$$\Rightarrow\quad y'=\frac{1+21x^6}{2+5y^4}$$

当 $x=0$ 时，$y=0$，所以 $y'(0)=\frac{1}{2}$.

例 3 求曲线 $x^2+xy+y^2=4$ 在点 $(2,-2)$ 处的切线和法线方程.

解 回忆

切线方程$y=y'(x_0)(x-x_0)+y_0$， 法线方程$y=-\dfrac{1}{y'(x_0)}(x-x_0)+y_0$

所以只需求 $y'(2)$. 方程两边对 x 求导：

$$2x+y+x\cdot y'+2y\cdot y'=0 \quad\Rightarrow\quad y'=\frac{-2x-y}{x+2y}$$

将 $(x_0,y_0)=(2,-2)$ 代入，得到 $y'(x_0)=$

例 2 设 $y = y(x)$ 满足方程 $y^5 + 2y - x - 3x^7 = 0$，求 y' 及 $y'(0)$.

解 方程两边对 x 求导:

$$5y^4 \cdot y' + 2y' - 1 - 21x^6 = 0 \quad \Rightarrow \quad (5y^4 + 2)y' = 1 + 21x^6$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{1 + 21x^6}{2 + 5y^4}$$

当 $x = 0$ 时，$y = 0$，所以 $y'(0) = \frac{1}{2}$.

例 3 求曲线 $x^2 + xy + y^2 = 4$ 在点 $(2, -2)$ 处的切线和法线方程.

解 回忆

切线方程$y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$，　法线方程$y = -\dfrac{1}{y'(x_0)}(x - x_0) + y_0$

所以只需求 $y'(2)$. 方程两边对 x 求导:

$$2x + y + x \cdot y' + 2y \cdot y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{-2x - y}{x + 2y}$$

将 $(x_0, y_0) = (2, -2)$ 代入，得到 $y'(x_0) = 1$.

例 2 设 $y=y(x)$ 满足方程 $y^5+2y-x-3x^7=0$，求 y' 及 $y'(0)$.

解 方程两边对 x 求导：

$$5y^4\cdot y'+2y'-1-21x^6=0 \quad\Rightarrow\quad (5y^4+2)y'=1+21x^6$$

$$\Rightarrow\quad y'=\frac{1+21x^6}{2+5y^4}$$

当 $x=0$ 时，$y=0$，所以 $y'(0)=\frac{1}{2}$.

例 3 求曲线 $x^2+xy+y^2=4$ 在点 $(2,-2)$ 处的切线和法线方程.

解 回忆

切线方程$y=y'(x_0)(x-x_0)+y_0$，　法线方程$y=-\dfrac{1}{y'(x_0)}(x-x_0)+y_0$

所以只需求 $y'(2)$. 方程两边对 x 求导：

$$2x+y+x\cdot y'+2y\cdot y'=0 \quad\Rightarrow\quad y'=\frac{-2x-y}{x+2y}$$

将 $(x_0,y_0)=(2,-2)$ 代入，得到 $y'(x_0)=1$. 所以

切线方程 $y=x-4$，　法线方程 $y=-x$

暨南大学 JINAN UNIVERSITY

例 4 设 $y = y(x)$ 满足方程 $x - y + \frac{1}{2}\sin y = 0$，求 y''.

例 4 设 $y = y(x)$ 满足方程 $x - y + \frac{1}{2}\sin y = 0$，求 y''.

解 方程两边对 x 求导：

例 4 设 $y=y(x)$ 满足方程 $x-y+\frac{1}{2}\sin y=0$，求 y''.

解 方程两边对 x 求导：

$$1-y'+\frac{1}{2}\cos y\cdot y'=0$$

例 4 设 $y = y(x)$ 满足方程 $x - y + \frac{1}{2}\sin y = 0$，求 y''.

解 方程两边对 x 求导：

$$1 - y' + \frac{1}{2}\cos y \cdot y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{2}{2 - \cos y}$$

例 4 设 $y = y(x)$ 满足方程 $x - y + \frac{1}{2}\sin y = 0$，求 y''.

解 方程两边对 x 求导:

$$1 - y' + \frac{1}{2}\cos y \cdot y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{2}{2 - \cos y}$$

所以

$$y'' = \left(\frac{2}{2 - \cos y}\right)'_x$$

例 4 设 $y = y(x)$ 满足方程 $x - y + \frac{1}{2}\sin y = 0$，求 y''.

解 方程两边对 x 求导：

$$1 - y' + \frac{1}{2}\cos y \cdot y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{2}{2 - \cos y}$$

所以

$$y'' = \left(\frac{2}{2 - \cos y}\right)'_x = -\frac{2(2 - \cos y)'_x}{(2 - \cos y)^2}$$

暨南大学 JINAN UNIVERSITY

例 4 设 $y = y(x)$ 满足方程 $x - y + \frac{1}{2}\sin y = 0$，求 y''.

解 方程两边对 x 求导：

$$1 - y' + \frac{1}{2}\cos y \cdot y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{2}{2 - \cos y}$$

所以

$$y'' = \left(\frac{2}{2 - \cos y}\right)_x' = -\frac{2(2 - \cos y)_x'}{(2 - \cos y)^2} = -\frac{2\sin y \cdot y'}{(2 - \cos y)^2}$$

例 4 设 $y = y(x)$ 满足方程 $x - y + \frac{1}{2}\sin y = 0$，求 y''.

解 方程两边对 x 求导：

$$1 - y' + \frac{1}{2}\cos y \cdot y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{2}{2 - \cos y}$$

所以

$$y'' = \left(\frac{2}{2 - \cos y}\right)'_x = -\frac{2(2 - \cos y)'_x}{(2 - \cos y)^2} = -\frac{2\sin y \cdot y'}{(2 - \cos y)^2}$$

$$= -\frac{2\sin y}{(2 - \cos y)^2} \cdot \frac{2}{2 - \cos y}$$

例 4 设 $y = y(x)$ 满足方程 $x - y + \frac{1}{2}\sin y = 0$，求 y''.

解 方程两边对 x 求导：

$$1 - y' + \frac{1}{2}\cos y \cdot y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{2}{2 - \cos y}$$

所以

$$y'' = \left(\frac{2}{2-\cos y}\right)_x' = -\frac{2(2-\cos y)_x'}{(2-\cos y)^2} = -\frac{2\sin y \cdot y'}{(2-\cos y)^2}$$

$$= -\frac{2\sin y}{(2-\cos y)^2} \cdot \frac{2}{2-\cos y} = -\frac{4\sin y}{(2-\cos y)^3}$$

问题 2 假设函数 $y = y(x)$ 满足以下参数方程，如何求导数 $\frac{dy}{dx}$？

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases},$$

问题 2 假设函数 $y = y(x)$ 满足以下参数方程，如何求导数 $\frac{dy}{dx}$?

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases},$$

解法

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

问题 2 假设函数 $y = y(x)$ 满足以下参数方程，如何求导数 $\frac{dy}{dx}$？

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases},$$

解法

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

问题 2 假设函数 $y = y(x)$ 满足以下参数方程，如何求导数 $\frac{dy}{dx}$？

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases},$$

解法

$$\underbrace{\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}}_{y'_x = y'_t \cdot t'_x} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

问题 2 假设函数 $y = y(x)$ 满足以下参数方程，如何求导数 $\frac{dy}{dx}$？

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases},$$

解法

$$\underbrace{\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}}_{y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

问题 2 假设函数 $y = y(x)$ 满足以下参数方程，如何求导数 $\frac{dy}{dx}$？

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases},$$

解法

$$\underbrace{\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}}_{y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

例 1 设 $y = f(x)$ 满足参数方程 $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$，求 $y = f(x)$ 的导数.

问题 2 假设函数 $y = y(x)$ 满足以下参数方程，如何求导数 $\frac{dy}{dx}$？

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases},$$

解法

$$\underbrace{\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}}_{y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

例 1 设 $y = f(x)$ 满足参数方程 $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$，求 $y = f(x)$ 的导数.

解

$$y' = \frac{(a\sin t)'}{(a\cos t)'}$$

问题 2 假设函数 $y=y(x)$ 满足以下参数方程，如何求导数 $\frac{dy}{dx}$？

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases},$$

解法

$$\underbrace{\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}}_{y'_x=y'_t\cdot t'_x=y'_t\cdot\frac{1}{x'_t}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

例 1 设 $y=f(x)$ 满足参数方程 $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \end{cases}$，求 $y=f(x)$ 的导数.

解

$$y'=\frac{(a\sin t)'}{(a\cos t)'}=\frac{a\cos t}{-a\sin t}$$

问题 2 假设函数 $y = y(x)$ 满足以下参数方程，如何求导数 $\frac{dy}{dx}$？

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases},$$

解法

$$\underbrace{\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}}_{y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

例 1 设 $y = f(x)$ 满足参数方程 $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$，求 $y = f(x)$ 的导数.

解

$$y' = \frac{(a\sin t)'}{(a\cos t)'} = \frac{a\cos t}{-a\sin t} = -\cot t.$$

例 2 设 $y = f(x)$ 满足参数方程 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = \arctan t \end{cases}$，求 y' 和 y''.

例 2 设 $y=f(x)$ 满足参数方程 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=\arctan t \end{cases}$，求 y' 和 y''.

解

$$y'=\frac{(\arctan t)'}{(\ln(1+t^2))'}$$

例 2 设 $y=f(x)$ 满足参数方程 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=\arctan t \end{cases}$，求 y' 和 y''.

解

$$y'=\frac{(\arctan t)'}{(\ln(1+t^2))'}=\frac{\frac{1}{1+t^2}}{\qquad}$$

例 2 设 $y=f(x)$ 满足参数方程 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=\arctan t \end{cases}$，求 y' 和 y''.

解

$$y'=\frac{(\arctan t)'}{(\ln(1+t^2))'}=\frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}\cdot}$$

例 2 设 $y=f(x)$ 满足参数方程 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=\arctan t \end{cases}$，求 y' 和 y''.

解

$$y' = \frac{(\arctan t)'}{(\ln(1+t^2))'} = \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}\cdot 2t}$$

例 2 设 $y = f(x)$ 满足参数方程 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = \arctan t \end{cases}$，求 y' 和 y''.

解

$$y' = \frac{(\arctan t)'}{(\ln(1+t^2))'} = \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2} \cdot 2t} = \frac{1}{2t}$$

例 2 设 $y=f(x)$ 满足参数方程 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=\arctan t \end{cases}$，求 y' 和 y''.

解

$$y'=\frac{(\arctan t)'}{(\ln(1+t^2))'}=\frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}\cdot 2t}=\frac{1}{2t}$$

y''

例 2 设 $y=f(x)$ 满足参数方程 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=\arctan t \end{cases}$ ，求 y' 和 y''.

解

$$y'=\frac{(\arctan t)'}{(\ln(1+t^2))'}=\frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}\cdot 2t}=\frac{1}{2t}$$

$\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y'=\frac{1}{2t} \end{cases}$ y''

例 2 设 $y=f(x)$ 满足参数方程 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=\arctan t \end{cases}$，求 y' 和 y''.

解

$$y'=\frac{(\arctan t)'}{(\ln(1+t^2))'}=\frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}\cdot 2t}=\frac{1}{2t}$$

$\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y'=\frac{1}{2t} \end{cases}$ $$y''=\frac{\left(\frac{1}{2t}\right)'}{(\ln(1+t^2))'}$$

例 2 设 $y=f(x)$ 满足参数方程 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=\arctan t \end{cases}$，求 y' 和 y''.

解

$$y'=\frac{(\arctan t)'}{(\ln(1+t^2))'}=\frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}\cdot 2t}=\frac{1}{2t}$$

$$\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y'=\frac{1}{2t} \end{cases} \quad y''=\frac{\left(\frac{1}{2t}\right)'}{(\ln(1+t^2))'}=\frac{-\frac{1}{2t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}$$

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

例 2 设 $y=f(x)$ 满足参数方程 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=\arctan t \end{cases}$，求 y' 和 y''.

解

$$y'=\frac{(\arctan t)'}{(\ln(1+t^2))'}=\frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}\cdot 2t}=\frac{1}{2t}$$

$\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y'=\frac{1}{2t} \end{cases}$

$$y''=\frac{\left(\frac{1}{2t}\right)'}{(\ln(1+t^2))'}=\frac{-\frac{1}{2t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=-\frac{1+t^2}{4t^3}.$$

例 2 设 $y = f(x)$ 满足参数方程 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = \arctan t \end{cases}$，求 y' 和 y''.

解

$$y' = \frac{(\arctan t)'}{(\ln(1+t^2))'} = \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}\cdot 2t} = \frac{1}{2t}$$

$\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y' = \frac{1}{2t} \end{cases}$

$$y'' = \frac{\left(\frac{1}{2t}\right)'}{(\ln(1+t^2))'} = \frac{-\frac{1}{2t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = -\frac{1+t^2}{4t^3}.$$

一般地 **二阶导数**

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)'_x$$

例 2 设 $y=f(x)$ 满足参数方程 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=\arctan t \end{cases}$，求 y' 和 y''.

解

$$y'=\frac{(\arctan t)'}{(\ln(1+t^2))'}=\frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}\cdot 2t}=\frac{1}{2t}$$

$\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y'=\frac{1}{2t} \end{cases}$

$$y''=\frac{\left(\frac{1}{2t}\right)'}{(\ln(1+t^2))'}=\frac{-\frac{1}{2t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=-\frac{1+t^2}{4t^3}.$$

一般地 **二阶导数**

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{dy}{dx}\right)_x'$$

$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y'=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \end{cases}$

例 2 设 $y=f(x)$ 满足参数方程 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=\arctan t \end{cases}$，求 y' 和 y''.

解

$$y'=\frac{(\arctan t)'}{(\ln(1+t^2))'}=\frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}\cdot 2t}=\frac{1}{2t}$$

$\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y'=\frac{1}{2t} \end{cases}$

$$y''=\frac{\left(\frac{1}{2t}\right)'}{(\ln(1+t^2))'}=\frac{-\frac{1}{2t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=-\frac{1+t^2}{4t^3}.$$

一般地 **二阶导数**

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{dy}{dx}\right)'_x=\frac{\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'_t}{\varphi'(t)}$$

$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y'=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \end{cases}$

例 2 设 $y=f(x)$ 满足参数方程 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=\arctan t \end{cases}$，求 y' 和 y''.

解

$$y'=\frac{(\arctan t)'}{(\ln(1+t^2))'}=\frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}\cdot 2t}=\frac{1}{2t}$$

$\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y'=\frac{1}{2t} \end{cases}$

$$y''=\frac{\left(\frac{1}{2t}\right)'}{(\ln(1+t^2))'}=\frac{-\frac{1}{2t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=-\frac{1+t^2}{4t^3}.$$

一般地 **二阶导数**

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{dy}{dx}\right)'_x=\frac{\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'_t}{\varphi'(t)}=\frac{\psi''\varphi'-\psi'\varphi''}{(\varphi')^3}$$

$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y'=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \end{cases}$

暨南大学 JINAN UNIVERSITY

We are here now...

1. 导数定义
2. 求导法则
    - 四则运算的求导法则
    - 反函数的求导法则
    - 复合函数的求导法则
3. 高阶导数
4. 隐函数求导
5. 微分

定义 如果函数 $y = f(x)$ 满足

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) =$$

定义 如果函数 $y=f(x)$ 满足

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x)$$

定义 如果函数 $y=f(x)$ 满足

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x)$$

其中 A 为常数（不依赖于 Δx），

定义 如果函数 $y=f(x)$ 满足

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x)$$

其中 A 为常数（不依赖于 Δx），则称 $y=f(x)$ 在点 x_0 处**可微**.

定义 如果函数 $y=f(x)$ 满足

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\boxed{A\Delta x}+o(\Delta x)$$

其中 A 为常数（不依赖于 Δx），则称 $y=f(x)$ 在点 x_0 处**可微**.

微分，记作 dy，即 $dy=A\Delta x$

定义 如果函数 $y=f(x)$ 满足

微分，记作 dy，即 $dy=A\Delta x$

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\boxed{A\Delta x}+o(\Delta x)$$

其中 A 为常数（不依赖于 Δx），则称 $y=f(x)$ 在点 x_0 处**可微**.

注 通常把 Δx 记为 dx，所以微分可表示为 $dy=Adx$.

定义 如果函数 $y=f(x)$ 满足 **微分**，记作 dy，即 $dy=A\Delta x$

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\boxed{A\Delta x}+o(\Delta x)$$

其中 A 为常数（不依赖于 Δx），则称 $y=f(x)$ 在点 x_0 处**可微**.

注 通常把 Δx 记为 dx，所以微分可表示为 $dy=Adx$.

例 证明函数 $f(x)=x^2$ 在任意点 x_0 处可微.

定义 如果函数 $y=f(x)$ 满足

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\boxed{A\Delta x}+o(\Delta x)$$

其中 A 为常数（不依赖于 Δx），则称 $y=f(x)$ 在点 x_0 处**可微**.

微分，记作 dy，即 $dy=A\Delta x$

注 通常把 Δx 记为 dx，所以微分可表示为 $dy=Adx$.

例 证明函数 $f(x)=x^2$ 在任意点 x_0 处可微.

证明

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=$$

定义 如果函数 $y = f(x)$ 满足

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \boxed{A\Delta x} + o(\Delta x)$$

其中 A 为常数（不依赖于 Δx），则称 $y = f(x)$ 在点 x_0 处**可微**. **微分**，记作 dy，即 $dy = A\Delta x$

注 通常把 Δx 记为 dx，所以微分可表示为 $dy = Adx$.

例 证明函数 $f(x) = x^2$ 在任意点 x_0 处可微.

证明

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2$$

定义 如果函数 $y = f(x)$ 满足

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \boxed{A\Delta x} + o(\Delta x)$$

其中 A 为常数（不依赖于 Δx），则称 $y = f(x)$ 在点 x_0 处**可微**.

微分，记作 dy，即 $dy = A\Delta x$

注 通常把 Δx 记为 dx，所以微分可表示为 $dy = Adx$.

例 证明函数 $f(x) = x^2$ 在任意点 x_0 处可微.

证明

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2$$

定义 如果函数 $y = f(x)$ 满足

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \boxed{A\Delta x} + o(\Delta x)$$

其中 A 为常数（不依赖于 Δx），则称 $y = f(x)$ 在点 x_0 处**可微**.

微分，记作 dy，即 $dy = A\Delta x$

注 通常把 Δx 记为 dx，所以微分可表示为 $dy = Adx$.

例 证明函数 $f(x) = x^2$ 在任意点 x_0 处可微.

证明

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = \underbrace{2x_0}_{A}\Delta x + (\Delta x)^2$$

定义 如果函数 $y = f(x)$ 满足

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \boxed{A\Delta x} + o(\Delta x)$$

其中 A 为常数（不依赖于 Δx），则称 $y = f(x)$ 在点 x_0 处**可微**. **微分**，记作 dy，即 $dy = A\Delta x$

注 通常把 Δx 记为 dx，所以微分可表示为 $dy = Adx$.

例 证明函数 $f(x) = x^2$ 在任意点 x_0 处可微.

证明

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = \underbrace{2x_0}_{A}\Delta x + \underbrace{(\Delta x)^2}_{o(\Delta x)}$$

定义 如果函数 $y=f(x)$ 满足 **微分**，记作 dy，即 $dy=A\Delta x$

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\boxed{A\Delta x}+o(\Delta x)$$

其中 A 为常数（不依赖于 Δx），则称 $y=f(x)$ 在点 x_0 处**可微**.

注 通常把 Δx 记为 dx，所以微分可表示为 $dy=Adx$.

例 证明函数 $f(x)=x^2$ 在任意点 x_0 处可微.

证明

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=\underbrace{2x_0}_{A}\Delta x+\underbrace{(\Delta x)^2}_{o(\Delta x)}$$

根据定义，f 在点 x_0 处可微，并且 $dy=2x_0dx$

定义 如果函数 $y=f(x)$ 满足 **微分**，记作 dy，即 $dy=A\Delta x$

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\boxed{A\Delta x}+o(\Delta x)$$

其中 A 为常数（不依赖于 Δx），则称 $y=f(x)$ 在点 x_0 处**可微**.

注 通常把 Δx 记为 dx，所以微分可表示为 $dy=Adx$.

例 证明函数 $f(x)=x^2$ 在任意点 x_0 处可微.

证明

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=\underbrace{2x_0}_{A}\Delta x+\underbrace{(\Delta x)^2}_{o(\Delta x)}$$

根据定义，f 在点 x_0 处可微，并且 $dy=2x_0dx$

性质 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微 $\Longleftrightarrow$ 在点 x_0 处可导.

定义 如果函数 $y=f(x)$ 满足

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\boxed{A\Delta x}+o(\Delta x)$$

微分，记作 dy，即 $dy=A\Delta x$

其中 A 为常数（不依赖于 Δx），则称 $y=f(x)$ 在点 x_0 处**可微**.

注 通常把 Δx 记为 dx，所以微分可表示为 $dy=Adx$.

例 证明函数 $f(x)=x^2$ 在任意点 x_0 处可微.

证明

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=\underbrace{2x_0}_{A}\Delta x+\underbrace{(\Delta x)^2}_{o(\Delta x)}$$

根据定义，f 在点 x_0 处可微，并且 $dy=2x_0dx$

性质 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微 $\Longleftrightarrow$ 在点 x_0 处可导. 此时成立

$$dy=f'(x_0)dx.$$

性质 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微 $\Longleftrightarrow$ 在点 x_0 处可导. 此时成立

$$dy=f'(x_0)dx.$$

性质 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微 $\Leftrightarrow$ 在点 x_0 处可导. 此时成立

$$dy=f'(x_0)dx.$$

证明 $\Rightarrow$ 设 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微,

性质 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微 $\Leftrightarrow$ 在点 x_0 处可导. 此时成立

$$dy=f'(x_0)dx.$$

证明 $\Rightarrow$ 设 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微，则

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x).$$

性质 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微 $\Leftrightarrow$ 在点 x_0 处可导. 此时成立

$$dy=f'(x_0)dx.$$

证明 $\Rightarrow$ 设 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微，则

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x).$$

所以

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

性质 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微 $\Longleftrightarrow$ 在点 x_0 处可导. 此时成立

$$dy=f'(x_0)dx.$$

证明 $\Rightarrow$ 设 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微，则

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x).$$

所以

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$$

性质 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微 $\Longleftrightarrow$ 在点 x_0 处可导. 此时成立

$$dy=f'(x_0)dx.$$

证明 $\Rightarrow$ 设 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微，则

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x).$$

所以

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}=A$$

性质 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微 $\Longleftrightarrow$ 在点 x_0 处可导. 此时成立

$$dy=f'(x_0)dx.$$

证明 $\Rightarrow$ 设 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微，则

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x).$$

所以

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}=A$$

说明 f 在点 x_0 处可导，且 $f'(x_0)=A$.

性质 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可微 $\Leftrightarrow$ 在点 x_0 处可导. 此时成立

$$dy = f'(x_0)dx.$$

证明 $\Rightarrow$ 设 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可微，则

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x).$$

所以

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A$$

说明 f 在点 x_0 处可导，且 $f'(x_0) = A$.

$\Leftarrow$ 假设 f 在点 x_0 处可导，

性质 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微 $\Longleftrightarrow$ 在点 x_0 处可导. 此时成立

$$dy=f'(x_0)dx.$$

证明 $\Rightarrow$ 设 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微，则

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x).$$

所以

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}=A$$

说明 f 在点 x_0 处可导，且 $f'(x_0)=A$.

$\Leftarrow$ 假设 f 在点 x_0 处可导，则

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$$

性质 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微 $\Leftrightarrow$ 在点 x_0 处可导. 此时成立

$$dy=f'(x_0)dx.$$

证明 $\Rightarrow$ 设 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微，则

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x).$$

所以

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}=A$$

说明 f 在点 x_0 处可导，且 $f'(x_0)=A$.

$\Leftarrow$ 假设 f 在点 x_0 处可导，则

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)\ \Rightarrow\ \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha$$

性质 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微 $\Longleftrightarrow$ 在点 x_0 处可导. 此时成立

$$dy=f'(x_0)dx.$$

证明 $\Rightarrow$ 设 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微，则

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x).$$

所以

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}=A$$

说明 f 在点 x_0 处可导，且 $f'(x_0)=A$.

$\Leftarrow$ 假设 f 在点 x_0 处可导，则

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)\Rightarrow\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha$$

$$\Rightarrow f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x$$

性质 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微 $\Longleftrightarrow$ 在点 x_0 处可导. 此时成立

$$dy=f'(x_0)dx.$$

证明 $\Rightarrow$ 设 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微，则

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x).$$

所以

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}=A$$

说明 f 在点 x_0 处可导，且 $f'(x_0)=A$.

$\Leftarrow$ 假设 f 在点 x_0 处可导，则

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)\ \Rightarrow\ \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha$$

$$\Rightarrow f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\underbrace{f'(x_0)}_{A}\Delta x+\underbrace{\alpha\Delta x}_{o(\Delta x)}$$

性质 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微 $\Leftrightarrow$ 在点 x_0 处可导. 此时成立

$$dy=f'(x_0)dx.$$

证明 $\Rightarrow$ 设 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微，则

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x).$$

所以

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}=A$$

说明 f 在点 x_0 处可导，且 $f'(x_0)=A$.

$\Leftarrow$ 假设 f 在点 x_0 处可导，则

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)\ \Rightarrow\ \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha$$

$$\Rightarrow f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\underbrace{f'(x_0)}_{A}\Delta x+\underbrace{\alpha\Delta x}_{o(\Delta x)}$$

说明 f 在点 x_0 处可微，且 $f'(x_0)=A$.

例 1 求函数 $y = x^3$ 当 $x = 2$，$\Delta x = 0.02$ 时的微分.

例 1 求函数 $y = x^3$ 当 $x = 2$，$\Delta x = 0.02$ 时的微分.

解 $dy = (x^3)'dx = 3x^2dx$,

例 1 求函数 $y = x^3$ 当 $x = 2$，$\Delta x = 0.02$ 时的微分.

解 $dy = (x^3)'dx = 3x^2dx$，所以

$$dy\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.02}} =$$

例 1 求函数 $y = x^3$ 当 $x = 2$，$\Delta x = 0.02$ 时的微分.

解 $dy = (x^3)'dx = 3x^2dx$，所以

$$dy\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.02}} = 3 \cdot 2^2 \cdot 0.02 = 0.24$$

例 1 求函数 $y = x^3$ 当 $x = 2$，$\Delta x = 0.02$ 时的微分.

解 $dy = (x^3)'dx = 3x^2dx$，所以

$$dy\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.02}} = 3 \cdot 2^2 \cdot 0.02 = 0.24$$

例 2 求微分：(1) $y = xe^x$；(2) $y = \sin(3x + 2)$

例 1 求函数 $y = x^3$ 当 $x = 2$，$\Delta x = 0.02$ 时的微分.

解 $dy = (x^3)'dx = 3x^2 dx$，所以

$$dy\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.02}} = 3 \cdot 2^2 \cdot 0.02 = 0.24$$

例 2 求微分：(1) $y = xe^x$；(2) $y = \sin(3x + 2)$

解 (1) $dy = y'dx$

例 1 求函数 $y = x^3$ 当 $x = 2$，$\Delta x = 0.02$ 时的微分.

解 $dy = (x^3)'dx = 3x^2 dx$，所以

$$dy\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.02}} = 3 \cdot 2^2 \cdot 0.02 = 0.24$$

例 2 求微分：(1) $y = xe^x$；(2) $y = \sin(3x+2)$

解 (1) $dy = y'dx = (xe^x)'dx$

例 1 求函数 $y = x^3$ 当 $x = 2$，$\Delta x = 0.02$ 时的微分.

解 $dy = (x^3)' dx = 3x^2 dx$，所以

$$dy\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.02}} = 3 \cdot 2^2 \cdot 0.02 = 0.24$$

例 2 求微分：(1) $y = xe^x$；(2) $y = \sin(3x+2)$

解 (1) $dy = y' dx = (xe^x)' dx = e^x(1+x)dx.$

例 1 求函数 $y = x^3$ 当 $x = 2$，$\Delta x = 0.02$ 时的微分.

解 $dy = (x^3)'dx = 3x^2 dx$，所以

$$dy\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.02}} = 3\cdot 2^2\cdot 0.02 = 0.24$$

例 2 求微分：(1) $y = xe^x$；(2) $y = \sin(3x+2)$

解 (1) $dy = y'dx = (xe^x)'dx = e^x(1+x)dx.$

(2) $dy = y'dx = (\sin(3x+2))'dx$

例 1 求函数 $y = x^3$ 当 $x = 2$，$\Delta x = 0.02$ 时的微分.

解 $dy = (x^3)'dx = 3x^2dx$，所以

$$dy\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.02}} = 3\cdot 2^2\cdot 0.02 = 0.24$$

例 2 求微分：(1) $y = xe^x$；(2) $y = \sin(3x+2)$

解 (1) $dy = y'dx = (xe^x)'dx = e^x(1+x)dx.$

(2) $dy = y'dx = (\sin(3x+2))'dx = 3\cos(3x+2)dx.$

微分在近似计算中的应用

设 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微，则

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$$

微分在近似计算中的应用

设 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可微，则

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \underline{o(\Delta x)}$$

当 Δx 很小时，与微分项相比，这一项可以忽略

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

微分在近似计算中的应用

设 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可微，则

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\underline{o(\Delta x)}\approx f'(x_0)\Delta x$$

当 Δx 很小时，与微分项相比，这一项可以忽略

微分在近似计算中的应用

设 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可微，则

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\underline{o(\Delta x)}\approx f'(x_0)\Delta x$$

得到如下近似估算公式：

当 Δx 很小时，与微分项相比，这一项可以忽略

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x \qquad (\text{当}\Delta x\text{接近}0)$$

微分在近似计算中的应用

设 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微，则

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\underline{o(\Delta x)}\approx f'(x_0)\Delta x$$

得到如下近似估算公式：　当 Δx 很小时，与微分项相比，这一项可以忽略

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x \qquad (\text{当}\Delta x\text{接近}0)$$

例 1 计算 $\sqrt{1.05}$ 的近似值.

微分在近似计算中的应用

设 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微，则

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\underline{o(\Delta x)}\approx f'(x_0)\Delta x$$

得到如下近似估算公式：　当 Δx 很小时，与微分项相比，这一项可以忽略

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x \qquad (当\Delta x接近0)$$

例 1 计算 $\sqrt{1.05}$ 的近似值.

解

$$\sqrt{1.05}-\sqrt{1}$$

微分在近似计算中的应用

设 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微，则

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\underline{o(\Delta x)}\approx f'(x_0)\Delta x$$

得到如下近似估算公式：　当 Δx 很小时，与微分项相比，这一项可以忽略

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x \qquad (\text{当}\Delta x\text{接近}0)$$

例 1 计算 $\sqrt{1.05}$ 的近似值.

解 令 $f(x)=\sqrt{x}$，则

$$\sqrt{1.05}-\sqrt{1}=f(1.05)-f(1)$$

微分在近似计算中的应用

设 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微，则

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\underline{o(\Delta x)}\approx f'(x_0)\Delta x$$

得到如下近似估算公式：　当 Δx 很小时，与微分项相比，这一项可以忽略

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x \qquad (\text{当}\Delta x\text{接近}0)$$

例 1 计算 $\sqrt{1.05}$ 的近似值.

解 令 $f(x)=\sqrt{x}$，则

$$\sqrt{1.05}-\sqrt{1}=f(1.05)-f(1)\approx f'(1)\Delta x$$

微分在近似计算中的应用

设 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微，则

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\underline{o(\Delta x)}\approx f'(x_0)\Delta x$$

得到如下近似估算公式：　当 Δx 很小时，与微分项相比，这一项可以忽略

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x \qquad (\text{当}\Delta x\text{接近}0)$$

例 1 计算 $\sqrt{1.05}$ 的近似值.

解 令 $f(x)=\sqrt{x}$，则

$$\sqrt{1.05}-\sqrt{1}=f(1.05)-f(1)\approx f'(1)\Delta x$$

$$f'=(x^{\frac{1}{2}})'$$

微分在近似计算中的应用

设 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微，则

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\underline{o(\Delta x)}\approx f'(x_0)\Delta x$$

得到如下近似估算公式： 当 Δx 很小时，与微分项相比，这一项可以忽略

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x \qquad (当\Delta x接近0)$$

例 1 计算 $\sqrt{1.05}$ 的近似值.

解 令 $f(x)=\sqrt{x}$，则

$$\sqrt{1.05}-\sqrt{1}=f(1.05)-f(1)\approx f'(1)\Delta x$$

$$f'=(x^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

微分在近似计算中的应用

设 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微，则

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\underline{o(\Delta x)}\approx f'(x_0)\Delta x$$

得到如下近似估算公式：　当 Δx 很小时，与微分项相比，这一项可以忽略

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x \qquad (\text{当}\Delta x\text{接近}0)$$

例 1 计算 $\sqrt{1.05}$ 的近似值.

解 令 $f(x)=\sqrt{x}$，则

$$\sqrt{1.05}-\sqrt{1}=f(1.05)-f(1)\approx f'(1)\Delta x=\frac{1}{2}\cdot 0.05$$

$$f'=(x^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

微分在近似计算中的应用

设 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微，则

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\underline{o(\Delta x)}\approx f'(x_0)\Delta x$$

得到如下近似估算公式：　当 Δx 很小时，与微分项相比，这一项可以忽略

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x \qquad (当\Delta x接近0)$$

例 1 计算 $\sqrt{1.05}$ 的近似值.

解 令 $f(x)=\sqrt{x}$，则

$$\sqrt{1.05}-\sqrt{1}=f(1.05)-f(1)\approx f'(1)\Delta x=\frac{1}{2}\cdot 0.05=0.025$$

$$f'=(x^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

微分在近似计算中的应用

设 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微，则

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\underline{o(\Delta x)}\approx f'(x_0)\Delta x$$

得到如下近似估算公式： 当 Δx 很小时，与微分项相比，这一项可以忽略

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x \qquad (当\Delta x接近0)$$

例 1 计算 $\sqrt{1.05}$ 的近似值.

解 令 $f(x)=\sqrt{x}$，则

$$\sqrt{1.05}-\sqrt{1}=f(1.05)-f(1)\approx f'(1)\Delta x=\frac{1}{2}\cdot 0.05=0.025$$

$$f'=(x^{\frac{1}{2}})'=\tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

所以 $\sqrt{1.05}\approx 1.025$.

微分在近似计算中的应用

设 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微，则

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\underline{o(\Delta x)}\approx f'(x_0)\Delta x$$

得到如下近似估算公式： 当 Δx 很小时，与微分项相比，这一项可以忽略

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x \qquad (当\Delta x接近0)$$

例 1 计算 $\sqrt{1.05}$ 的近似值.

解 令 $f(x)=\sqrt{x}$，则

$$\sqrt{1.05}-\sqrt{1}=f(1.05)-f(1)\approx f'(1)\Delta x=\frac{1}{2}\cdot 0.05=0.025$$

$$f'=(x^{\frac{1}{2}})'=\tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

所以 $\sqrt{1.05}\approx 1.025.$

例 2 计算 $\sqrt[3]{1.05}$ 的近似值.

例 2 计算 $\sqrt[3]{1.05}$ 的近似值.

解

$$\sqrt[3]{1.05} - \sqrt{1}$$

例 2 计算 $\sqrt[3]{1.05}$ 的近似值.

解 令 $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$，则

$$\sqrt[3]{1.05}-\sqrt{1}=f(1.05)-f(1)$$

例 2 计算 $\sqrt[3]{1.05}$ 的近似值.

解 令 $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$，则

$$\sqrt[3]{1.05}-\sqrt{1}=f(1.05)-f(1)\approx f'(1)\Delta x$$

例 2 计算 $\sqrt[3]{1.05}$ 的近似值.

解 令 $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$，则

$$\sqrt[3]{1.05}-\sqrt{1}=f(1.05)-f(1)\approx f'(1)\Delta x$$

$$f'=(x^{\frac{1}{3}})'$$

例 2 计算 $\sqrt[3]{1.05}$ 的近似值.

解 令 $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$，则

$$\sqrt[3]{1.05} - \sqrt{1} = f(1.05) - f(1) \approx f'(1)\Delta x$$

$$f' = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

例 2 计算 $\sqrt[3]{1.05}$ 的近似值.

解 令 $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$，则

$$\sqrt[3]{1.05}-\sqrt{1}=f(1.05)-f(1)\approx f'(1)\Delta x=\frac{1}{3}\cdot 0.05$$

$$f'=(x^{\frac{1}{3}})'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

例 2 计算 $\sqrt[3]{1.05}$ 的近似值.

解 令 $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$，则

$$\sqrt[3]{1.05}-\sqrt{1}=f(1.05)-f(1)\approx f'(1)\Delta x=\frac{1}{3}\cdot 0.05\approx 0.0167$$

$$f'=(x^{\frac{1}{3}})'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

例 2 计算 $\sqrt[3]{1.05}$ 的近似值.

解 令 $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$，则

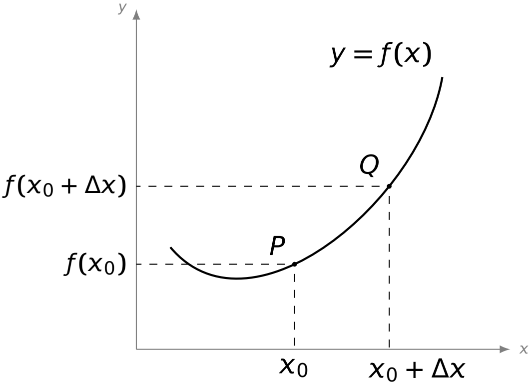
$$\sqrt[3]{1.05}-\sqrt{1}=f(1.05)-f(1)\approx f'(1)\Delta x=\frac{1}{3}\cdot 0.05\approx 0.0167$$

$$f'=(x^{\frac{1}{3}})'=\tfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

所以 $\sqrt{1.05}\approx 1.0167$.

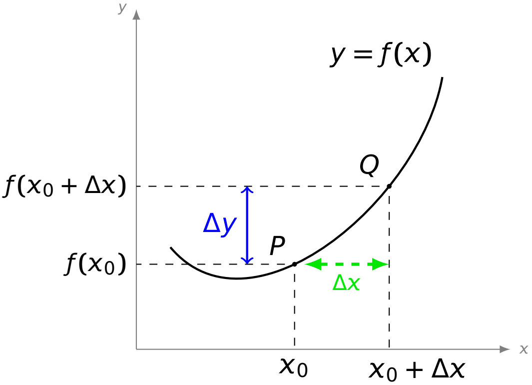
微分的几何意义

设 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可微.



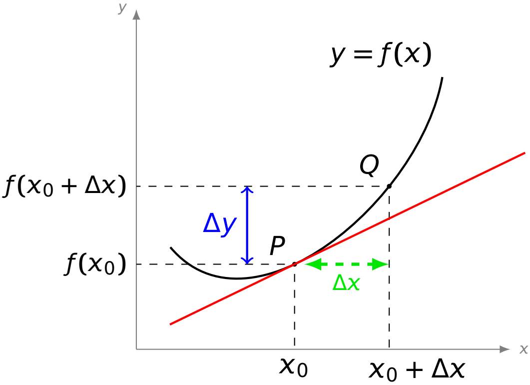
微分的几何意义

设 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可微.



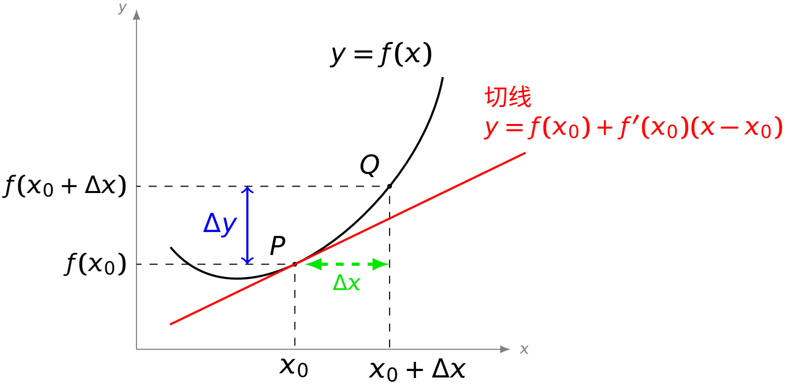
微分的几何意义

设 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可微.



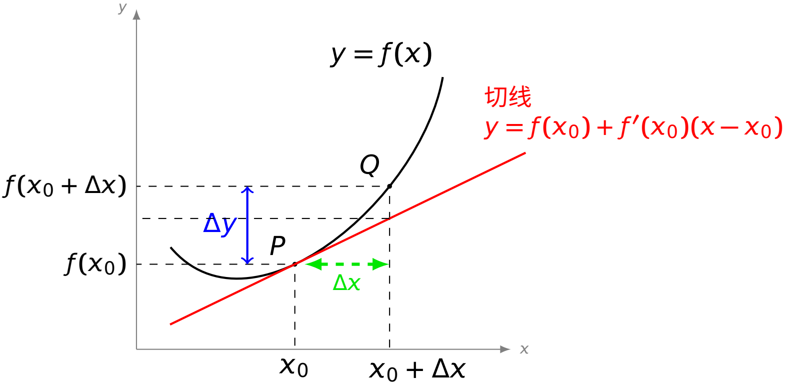
微分的几何意义

设 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可微.



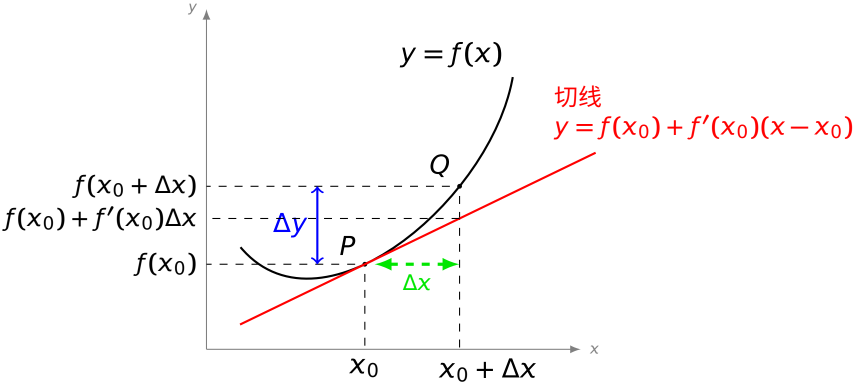
微分的几何意义

设 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可微.



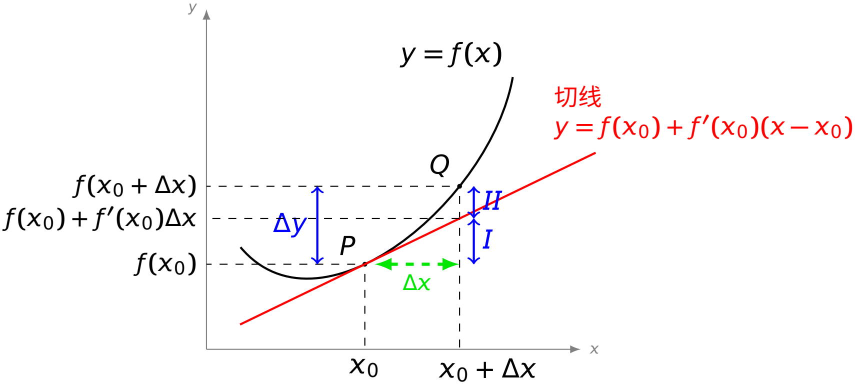
微分的几何意义

设 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可微.



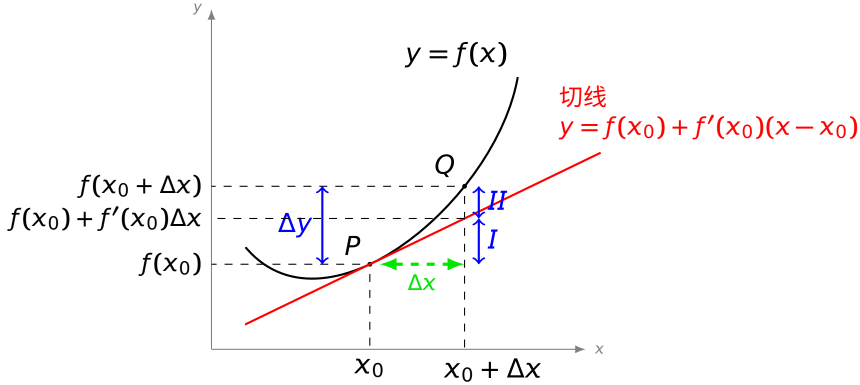
微分的几何意义

设 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可微.



微分的几何意义

设 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可微.

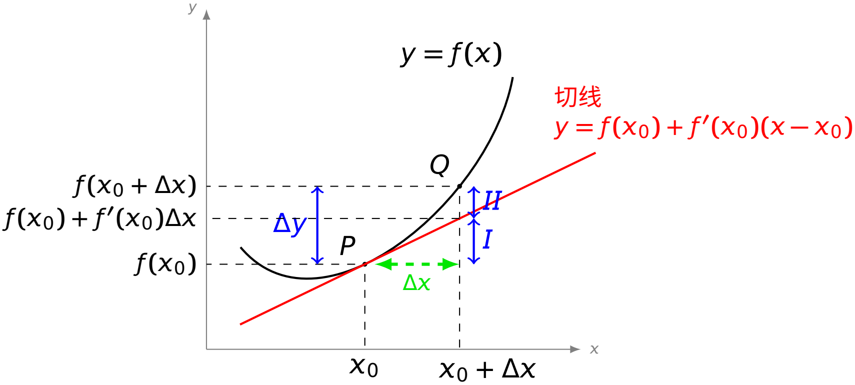


其中

$$I = \left[f(x_0) + f'(x_0)\Delta x\right] - f(x_0)$$

微分的几何意义

设 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微.

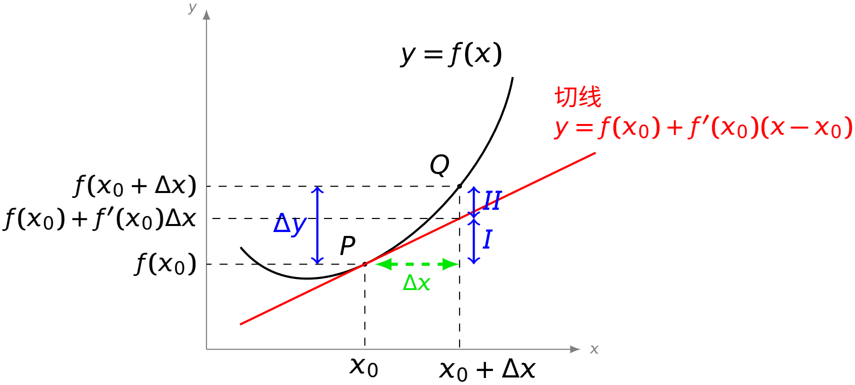


其中

$$I=\left[f(x_0)+f'(x_0)\Delta x\right]-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x$$

微分的几何意义

设 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微.

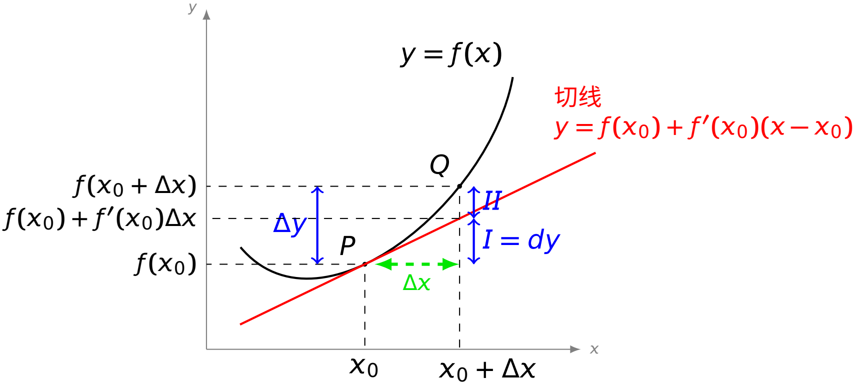


其中

$$I=\left[f(x_0)+f'(x_0)\Delta x\right]-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x=dy$$

微分的几何意义

设 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可微.

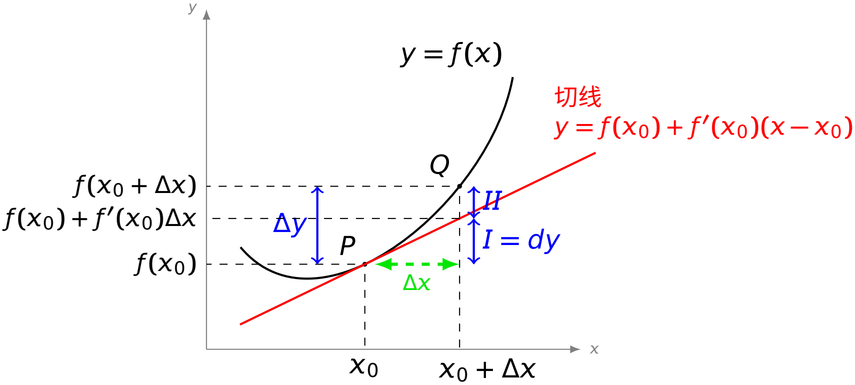


其中

$$I = \left[f(x_0) + f'(x_0)\Delta x\right] - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x = dy$$

微分的几何意义

设 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可微.



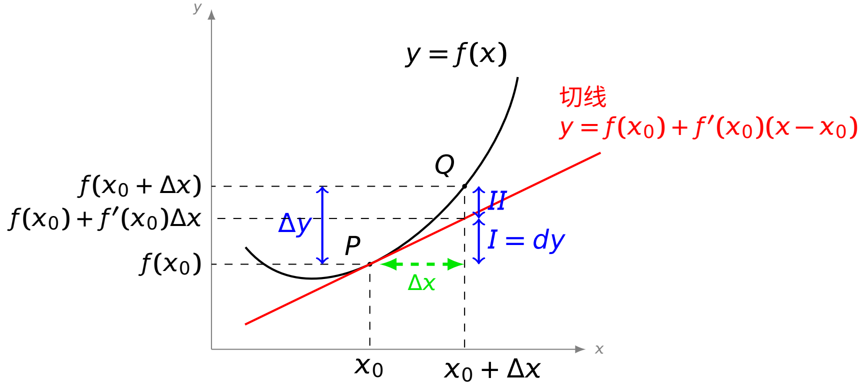
其中

$$I = \left[f(x_0) + f'(x_0)\Delta x\right] - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x = dy$$

$$II = \Delta y - dy$$

微分的几何意义

设 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可微.



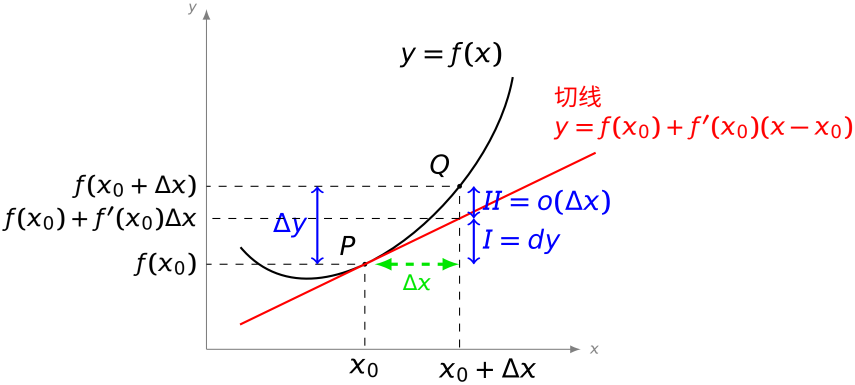
其中

$$I = \left[f(x_0) + f'(x_0)\Delta x\right] - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x = dy$$

$$II = \Delta y - dy = o(\Delta x)$$

微分的几何意义

设 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可微.



其中

$$I = \big[f(x_0) + f'(x_0)\Delta x\big] - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x = dy$$

$$II = \Delta y - dy = o(\Delta x)$$