

第 4 章 α : 矩阵的特征值与特征向量

数学系 梁卓滨

2020-2021 学年 I

定义 设 A 是 n 阶方阵。

$$A\alpha = \lambda\alpha$$

定义 设 A 是 n 阶方阵。若存在数 λ 及非零 n 维向量 α ，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha$$

定义 设 A 是 n 阶方阵。若存在数 λ 及非零 n 维向量 α ，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha$$

则称 λ 是一个 **特征值**， α 为对应特征值 λ 的 **特征向量**。

定义 设 A 是 n 阶方阵。若存在数 λ 及非零 n 维向量 α ，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha$$

则称 λ 是一个 **特征值**， α 为对应特征值 λ 的 **特征向量**。

例 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & b & -1 \end{pmatrix}$ ， λ 为特征值， $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 为相应的特征向量，求 a , b 和 λ 。

定义 设 A 是 n 阶方阵。若存在数 λ 及非零 n 维向量 α ，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha$$

则称 λ 是一个 **特征值**， α 为对应特征值 λ 的 **特征向量**。

例 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & b & -1 \end{pmatrix}$ ， λ 为特征值， $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 为相应的特征向量，求 a , b 和 λ 。

解

$$A\alpha = \lambda\alpha \Rightarrow$$

定义 设 A 是 n 阶方阵。若存在数 λ 及非零 n 维向量 α ，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha$$

则称 λ 是一个 **特征值**， α 为对应特征值 λ 的 **特征向量**。

例 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & b & -1 \end{pmatrix}$ ， λ 为特征值， $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 为相应的特征向量，求 a , b 和 λ 。

解

$$A\alpha = \lambda\alpha \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & b & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

定义 设 A 是 n 阶方阵。若存在数 λ 及非零 n 维向量 α ，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha$$

则称 λ 是一个 **特征值**， α 为对应特征值 λ 的 **特征向量**。

例 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & b & -1 \end{pmatrix}$ ， λ 为特征值， $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 为相应的特征向量，求 a ， b 和 λ 。

解

$$A\alpha = \lambda\alpha \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & b & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 \\ a+10 \\ -2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ -2\lambda \\ 3\lambda \end{pmatrix}$$

定义 设 A 是 n 阶方阵。若存在数 λ 及非零 n 维向量 α ，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha$$

则称 λ 是一个 **特征值**， α 为对应特征值 λ 的 **特征向量**。

例 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & b & -1 \end{pmatrix}$ ， λ 为特征值， $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 为相应的特征向量，求 a ， b 和 λ 。

解

$$A\alpha = \lambda\alpha \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & b & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 \\ a+10 \\ -2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ -2\lambda \\ 3\lambda \end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{cases} \lambda = -4 \\ a = \\ b = \end{cases}.$$

定义 设 A 是 n 阶方阵。若存在数 λ 及非零 n 维向量 α ，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha$$

则称 λ 是一个 **特征值**， α 为对应特征值 λ 的 **特征向量**。

例 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & b & -1 \end{pmatrix}$ ， λ 为特征值， $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 为相应的特征向量，求 a ， b 和 λ 。

解

$$A\alpha = \lambda\alpha \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & b & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 \\ a+10 \\ -2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ -2\lambda \\ 3\lambda \end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{cases} \lambda = -4 \\ a = -2 \\ b = \end{cases} .$$

定义 设 A 是 n 阶方阵。若存在数 λ 及非零 n 维向量 α ，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha$$

则称 λ 是一个 **特征值**， α 为对应特征值 λ 的 **特征向量**。

例 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & b & -1 \end{pmatrix}$ ， λ 为特征值， $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 为相应的特征向量，求 a ， b 和 λ 。

解

$$A\alpha = \lambda\alpha \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & b & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 \\ a+10 \\ -2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ -2\lambda \\ 3\lambda \end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{cases} \lambda = -4 \\ a = -2 \\ b = 6 \end{cases}.$$

特征值与特征向量的求解

定义 设 A 是 n 阶方阵。若存在数 λ 及非零 n 维向量 α ，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha$$

则称 λ 是一个**特征值**， α 为对应特征值 λ 的**特征向量**。

特征值与特征向量的求解

定义 设 A 是 n 阶方阵。若存在数 λ 及非零 n 维向量 α ，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha$$

则称 λ 是一个 **特征值**， α 为对应特征值 λ 的 **特征向量**。

求解 λ, α 步骤

特征值与特征向量的求解

定义 设 A 是 n 阶方阵。若存在数 λ 及非零 n 维向量 α ，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha \quad \left(\Rightarrow \lambda\alpha - A\alpha = 0 \right)$$

则称 λ 是一个 **特征值**， α 为对应特征值 λ 的 **特征向量**。

求解 λ, α 步骤

特征值与特征向量的求解

定义 设 A 是 n 阶方阵。若存在数 λ 及非零 n 维向量 α ，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha \quad \left(\Rightarrow \lambda\alpha - A\alpha = 0 \implies (\lambda I - A)\alpha = 0 \right)$$

则称 λ 是一个 **特征值**， α 为对应特征值 λ 的 **特征向量**。

求解 λ, α 步骤

特征值与特征向量的求解

定义 设 A 是 n 阶方阵。若存在数 λ 及非零 n 维向量 α ，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha \quad \left(\Rightarrow \lambda\alpha - A\alpha = 0 \xrightarrow{\text{"变量分离"}} (\lambda I - A)\alpha = 0 \right)$$

则称 λ 是一个 **特征值**， α 为对应特征值 λ 的 **特征向量**。

求解 λ, α 步骤

特征值与特征向量的求解

定义 设 A 是 n 阶方阵。若存在数 λ 及非零 n 维向量 α ，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha \quad \left(\Rightarrow \lambda\alpha - A\alpha = 0 \xrightarrow{\text{"变量分离"}} (\lambda I - A)\alpha = 0 \right)$$

则称 λ 是一个 **特征值**， α 为对应特征值 λ 的 **特征向量**。

求解 λ, α 步骤

特征值与特征向量的求解

定义 设 A 是 n 阶方阵。若存在数 λ 及非零 n 维向量 α ，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha \quad \left(\Rightarrow \lambda\alpha - A\alpha = 0 \xrightarrow{\text{"变量分离"}} (\lambda I - A)\alpha = 0 \right)$$

则称 λ 是一个 **特征值**， α 为对应特征值 λ 的 **特征向量**。

求解 λ, α 步骤

α 是 $(\lambda I - A)x = 0$ 的非零解

特征值与特征向量的求解

定义 设 A 是 n 阶方阵。若存在数 λ 及非零 n 维向量 α ，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha \quad \left(\Rightarrow \lambda\alpha - A\alpha = 0 \xrightarrow{\text{"变量分离"}} (\lambda I - A)\alpha = 0 \right)$$

则称 λ 是一个 **特征值**， α 为对应特征值 λ 的 **特征向量**。

求解 λ, α 步骤

α 是 $(\lambda I - A)x = 0$ 的非零解

$$|\lambda I - A| = 0$$

特征值与特征向量的求解

定义 设 A 是 n 阶方阵。若存在数 λ 及非零 n 维向量 α ，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha \quad \left(\Rightarrow \lambda\alpha - A\alpha = 0 \xrightarrow{\text{"变量分离"}} (\lambda I - A)\alpha = 0 \right)$$

则称 λ 是一个 **特征值**， α 为对应特征值 λ 的 **特征向量**。

求解 λ, α 步骤

α 是 $(\lambda I - A)x = 0$ 的非零解

$$|\lambda I - A| = 0$$

特征方程

特征值与特征向量的求解

定义 设 A 是 n 阶方阵。若存在数 λ 及非零 n 维向量 α ，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha \quad \left(\Rightarrow \lambda\alpha - A\alpha = 0 \xrightarrow{\text{"变量分离"}} (\lambda I - A)\alpha = 0 \right)$$

则称 λ 是一个 **特征值**， α 为对应特征值 λ 的 **特征向量**。

求解 λ, α 步骤

1. 先求解特征值 λ ：等价于求解

$$|\lambda I - A| = 0$$

特征方程

α 是 $(\lambda I - A)x = 0$ 的非零解

特征值与特征向量的求解

定义 设 A 是 n 阶方阵。若存在数 λ 及非零 n 维向量 α ，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha \quad \left(\Rightarrow \lambda\alpha - A\alpha = 0 \xrightarrow{\text{"变量分离"}} (\lambda I - A)\alpha = 0 \right)$$

则称 λ 是一个 **特征值**， α 为对应特征值 λ 的 **特征向量**。

求解 λ, α 步骤

1. 先求解特征值 λ ：等价于求解

$$|\lambda I - A| = 0$$

特征方程

2. 再求解对应 λ 的特征向量 α ：

α 是 $(\lambda I - A)x = 0$ 的非零解

特征值与特征向量的求解

定义 设 A 是 n 阶方阵。若存在数 λ 及非零 n 维向量 α ，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha \quad \left(\Rightarrow \lambda\alpha - A\alpha = 0 \xrightarrow{\text{"变量分离"}} (\lambda I - A)\alpha = 0 \right)$$

则称 λ 是一个 **特征值**， α 为对应特征值 λ 的 **特征向量**。

求解 λ, α 步骤

1. 先求解特征值 λ ：等价于求解

$$|\lambda I - A| = 0$$

特征方程

2. 再求解对应 λ 的特征向量 α ：等价于求解

$$(\lambda I - A)x = 0$$

的所有非零解。

α 是 $(\lambda I - A)x = 0$ 的非零解

特征值与特征向量的求解

定义 设 A 是 n 阶方阵。若存在数 λ 及非零 n 维向量 α ，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha \quad \left(\Rightarrow \lambda\alpha - A\alpha = 0 \xrightarrow{\text{"变量分离"}} (\lambda I - A)\alpha = 0 \right)$$

则称 λ 是一个 **特征值**， α 为对应特征值 λ 的 **特征向量**。

求解 λ, α 步骤

1. 先求解特征值 λ ：等价于求解

$$|\lambda I - A| = 0$$

特征方程

2. 再求解对应 λ 的特征向量 α ：等价于求解

$$(\lambda I - A)x = 0$$

的所有非零解。设 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 是基础解系，则

$$\alpha = c_1\alpha_1 + \dots + c_s\alpha_s, \quad (c_1, \dots, c_s \text{ 不全为零})$$

α 是 $(\lambda I - A)x = 0$ 的非零解

例 1 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

例 1 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程: $0 = |\lambda I - A|$

例 1 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程: $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -5 & \lambda + 1 \end{vmatrix} =$

例 1 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程: $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -5 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda + 1) - 5$

例 1 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程: $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -5 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 8$

例 1 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程: $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -5 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda + 2)$

例 1 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

● 求解特征方程： $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -5 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda + 2)$

所以 $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 4$ 。

例 1 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程: $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -5 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda + 2)$

所以 $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 4$ 。

- 当 $\lambda_1 = -2$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

- 当 $\lambda_2 = 4$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

例 1 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程: $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -5 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda + 2)$

所以 $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 4$ 。

- 当 $\lambda_1 = -2$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(-2I - A : 0) = \left(\begin{array}{cc|c} -5 & -1 & 0 \\ -5 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

- 当 $\lambda_2 = 4$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

例 1 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程: $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -5 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda + 2)$

所以 $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 4$ 。

- 当 $\lambda_1 = -2$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(-2I - A : 0) = \left(\begin{array}{cc|c} -5 & -1 & 0 \\ -5 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- 当 $\lambda_2 = 4$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

例 1 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程: $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -5 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda + 2)$

所以 $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 4$ 。

- 当 $\lambda_1 = -2$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(-2I - A : 0) = \left(\begin{array}{cc|c} -5 & -1 & 0 \\ -5 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad 5x_1 + x_2 = 0$$

- 当 $\lambda_2 = 4$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

例 1 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程: $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -5 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda + 2)$

所以 $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 4$ 。

- 当 $\lambda_1 = -2$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(-2I - A : 0) = \left(\begin{array}{cc|c} -5 & -1 & 0 \\ -5 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} 5x_1 + x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_2 = -5x_1 \end{array}$$

- 当 $\lambda_2 = 4$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

例 1 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程: $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -5 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda + 2)$

所以 $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 4$ 。

- 当 $\lambda_1 = -2$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(-2I - A : 0) = \left(\begin{array}{cc|c} -5 & -1 & 0 \\ -5 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} 5x_1 + x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_2 = -5x_1 \end{array}$$

基础解系: $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ 。

- 当 $\lambda_2 = 4$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

例 1 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程: $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -5 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda + 2)$

所以 $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 4$ 。

- 当 $\lambda_1 = -2$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(-2I - A : 0) = \left(\begin{array}{cc|c} -5 & -1 & 0 \\ -5 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} 5x_1 + x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_2 = -5x_1 \end{array}$$

基础解系: $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ 。 $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

- 当 $\lambda_2 = 4$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

例 1 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程: $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -5 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda + 2)$

所以 $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 4$ 。

- 当 $\lambda_1 = -2$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(-2I - A : 0) = \left(\begin{array}{cc|c} -5 & -1 & 0 \\ -5 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} 5x_1 + x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_2 = -5x_1 \end{array}$$

基础解系: $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ 。特征向量: $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, 其中 $c_1 \neq 0$

- 当 $\lambda_2 = 4$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

例 1 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程: $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -5 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda + 2)$

所以 $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 4$ 。

- 当 $\lambda_1 = -2$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(-2I - A : 0) = \left(\begin{array}{cc|c} -5 & -1 & 0 \\ -5 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} 5x_1 + x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_2 = -5x_1 \end{array}$$

基础解系: $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ 。特征向量: $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, 其中 $c_1 \neq 0$

- 当 $\lambda_2 = 4$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(4I - A : 0) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \end{array} \right)$$

例 1 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程: $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -5 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda + 2)$

所以 $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 4$ 。

- 当 $\lambda_1 = -2$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(-2I - A : 0) = \left(\begin{array}{cc|c} -5 & -1 & 0 \\ -5 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} 5x_1 + x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_2 = -5x_1 \end{array}$$

基础解系: $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ 。特征向量: $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, 其中 $c_1 \neq 0$

- 当 $\lambda_2 = 4$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(4I - A : 0) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

例 1 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程: $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -5 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda + 2)$

所以 $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 4$ 。

- 当 $\lambda_1 = -2$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(-2I - A : 0) = \left(\begin{array}{cc|c} -5 & -1 & 0 \\ -5 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} 5x_1 + x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_2 = -5x_1 \end{array}$$

基础解系: $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ 。特征向量: $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, 其中 $c_1 \neq 0$

- 当 $\lambda_2 = 4$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(4I - A : 0) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad x_1 - x_2 = 0$$

例 1 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程: $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -5 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda + 2)$

所以 $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 4$ 。

- 当 $\lambda_1 = -2$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(-2I - A : 0) = \left(\begin{array}{cc|c} -5 & -1 & 0 \\ -5 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} 5x_1 + x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_2 = -5x_1 \end{array}$$

基础解系: $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ 。特征向量: $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, 其中 $c_1 \neq 0$

- 当 $\lambda_2 = 4$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(4I - A : 0) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_1 = x_2 \end{array}$$

例 1 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程: $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -5 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda + 2)$

所以 $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 4$ 。

- 当 $\lambda_1 = -2$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(-2I - A : 0) = \left(\begin{array}{cc|c} -5 & -1 & 0 \\ -5 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} 5x_1 + x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_2 = -5x_1 \end{array}$$

基础解系: $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ 。特征向量: $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, 其中 $c_1 \neq 0$

- 当 $\lambda_2 = 4$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(4I - A : 0) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_1 = x_2 \end{array}$$

基础解系: $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。

例 1 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程: $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -5 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda + 2)$

所以 $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 4$ 。

- 当 $\lambda_1 = -2$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(-2I - A : 0) = \left(\begin{array}{cc|c} -5 & -1 & 0 \\ -5 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} 5x_1 + x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_2 = -5x_1 \end{array}$$

基础解系: $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ 。特征向量: $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, 其中 $c_1 \neq 0$

- 当 $\lambda_2 = 4$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(4I - A : 0) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_1 = x_2 \end{array}$$

基础解系: $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。 $c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

例 1 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程: $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -5 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda + 2)$

所以 $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 4$ 。

- 当 $\lambda_1 = -2$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(-2I - A : 0) = \left(\begin{array}{cc|c} -5 & -1 & 0 \\ -5 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} 5x_1 + x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_2 = -5x_1 \end{array}$$

基础解系: $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ 。特征向量: $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, 其中 $c_1 \neq 0$

- 当 $\lambda_2 = 4$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(4I - A : 0) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_1 = x_2 \end{array}$$

基础解系: $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。特征向量: $c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 其中 $c_2 \neq 0$

例 1 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程: $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -5 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda + 2)$

所以 $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 4$ 。

- 当 $\lambda_1 = -2$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(-2I - A : 0) = \left(\begin{array}{cc|c} -5 & -1 & 0 \\ -5 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} 5x_1 + x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_2 = -5x_1 \end{array}$$

基础解系: $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ 。特征向量: $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, 其中 $c_1 \neq 0$

- 当 $\lambda_2 = 4$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(4I - A : 0) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_1 = x_2 \end{array}$$

基础解系: $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。特征向量: $c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 其中 $c_2 \neq 0$

例 2 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

例 2 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程： $0 = |\lambda I - A|$

例 2 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程: $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} =$

例 2 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程: $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 2) - 1$

例 2 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程: $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3$

例 2 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程： $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$

例 2 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程: $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$

所以 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ 。

例 2 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程: $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$

所以 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ 。

- 当 $\lambda_1 = 1$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

- 当 $\lambda_2 = 3$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

例 2 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程: $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$

所以 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ 。

- 当 $\lambda_1 = 1$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(1I - A : 0) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

- 当 $\lambda_2 = 3$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

例 2 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程: $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$

所以 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ 。

- 当 $\lambda_1 = 1$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(1I - A : 0) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- 当 $\lambda_2 = 3$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

例 2 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程: $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$

所以 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ 。

- 当 $\lambda_1 = 1$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(1I - A : 0) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad x_1 + x_2 = 0$$

- 当 $\lambda_2 = 3$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

例 2 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程: $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$

所以 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ 。

- 当 $\lambda_1 = 1$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(1I - A : 0) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_1 = -x_2 \end{array}$$

- 当 $\lambda_2 = 3$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

例 2 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程: $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$

所以 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ 。

- 当 $\lambda_1 = 1$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(1I - A : 0) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_1 = -x_2 \end{array}$$

基础解系: $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。

- 当 $\lambda_2 = 3$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

例 2 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程: $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$

所以 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ 。

- 当 $\lambda_1 = 1$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(1I - A : 0) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_1 = -x_2 \end{array}$$

基础解系: $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。 $c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- 当 $\lambda_2 = 3$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

例 2 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程： $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$

所以 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ 。

- 当 $\lambda_1 = 1$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(1I - A : 0) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_1 = -x_2 \end{array}$$

基础解系： $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。特征向量： $c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，其中 $c_1 \neq 0$

- 当 $\lambda_2 = 3$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

例 2 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程: $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$

所以 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ 。

- 当 $\lambda_1 = 1$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(1I - A : 0) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_1 = -x_2 \end{array}$$

基础解系: $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。特征向量: $c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 其中 $c_1 \neq 0$

- 当 $\lambda_2 = 3$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(3I - A : 0) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

例 2 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程: $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$

所以 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ 。

- 当 $\lambda_1 = 1$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(1I - A : 0) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_1 = -x_2 \end{array}$$

基础解系: $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。特征向量: $c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 其中 $c_1 \neq 0$

- 当 $\lambda_2 = 3$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(3I - A : 0) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

例 2 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程: $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$

所以 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ 。

- 当 $\lambda_1 = 1$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(1I - A : 0) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_1 = -x_2 \end{array}$$

基础解系: $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。特征向量: $c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 其中 $c_1 \neq 0$

- 当 $\lambda_2 = 3$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(3I - A : 0) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad x_1 - x_2 = 0$$

例 2 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程: $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$

所以 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ 。

- 当 $\lambda_1 = 1$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(1I - A : 0) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_1 = -x_2 \end{array}$$

基础解系: $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。特征向量: $c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 其中 $c_1 \neq 0$

- 当 $\lambda_2 = 3$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(3I - A : 0) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_1 = x_2 \end{array}$$

例 2 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程: $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$

所以 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ 。

- 当 $\lambda_1 = 1$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(1I - A : 0) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_1 = -x_2 \end{array}$$

基础解系: $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。特征向量: $c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 其中 $c_1 \neq 0$

- 当 $\lambda_2 = 3$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(3I - A : 0) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_1 = x_2 \end{array}$$

基础解系: $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。

例 2 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程: $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$

所以 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ 。

- 当 $\lambda_1 = 1$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(1I - A : 0) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_1 = -x_2 \end{array}$$

基础解系: $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。特征向量: $c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 其中 $c_1 \neq 0$

- 当 $\lambda_2 = 3$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(3I - A : 0) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_1 = x_2 \end{array}$$

基础解系: $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。 $c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

例 2 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程: $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$

所以 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ 。

- 当 $\lambda_1 = 1$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(1I - A : 0) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_1 = -x_2 \end{array}$$

基础解系: $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。特征向量: $c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 其中 $c_1 \neq 0$

- 当 $\lambda_2 = 3$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(3I - A : 0) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_1 = x_2 \end{array}$$

基础解系: $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。特征向量: $c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 其中 $c_2 \neq 0$

例 2 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程: $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$

所以 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ 。

- 当 $\lambda_1 = 1$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(1I - A : 0) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_1 = -x_2 \end{array}$$

基础解系: $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。特征向量: $c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 其中 $c_1 \neq 0$

- 当 $\lambda_2 = 3$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(3I - A : 0) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_1 = x_2 \end{array}$$

基础解系: $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。特征向量: $c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 其中 $c_2 \neq 0$

例 3 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

例 3 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解 $0 = |\lambda I - A|$

例 3 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解 $0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 1)^2(\lambda - 8)$ [Details](#)

例 3 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解 $0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 1)^2(\lambda - 8)$ [Details](#) 得：

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 8$$

例 3 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解 $0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 1)^2(\lambda - 8)$ [Details](#) 得：

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 8$$

- 当 $\lambda_1 = -1$ ，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$ [Details](#)

- 当 $\lambda_2 = 8$ ，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$ [Details](#)

例 3 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解 $0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 1)^2(\lambda - 8)$ [Details](#) 得：

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 8$$

- 当 $\lambda_1 = -1$ ，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$ [Details](#)

得基础解系： $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}。$

- 当 $\lambda_2 = 8$ ，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$ [Details](#)

例 3 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解 $0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 1)^2(\lambda - 8)$ [Details](#) 得：

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 8$$

- 当 $\lambda_1 = -1$ ，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$ [Details](#)

得基础解系： $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}。$

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$$

- 当 $\lambda_2 = 8$ ，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$ [Details](#)

例 3 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解 $0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 1)^2(\lambda - 8)$ [Details](#) 得：

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 8$$

- 当 $\lambda_1 = -1$ ，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$ [Details](#)

得基础解系： $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}。$

对应 $\lambda_1 = -1$ 特征向量： $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$ ，其中 c_1, c_2 不全为零。

- 当 $\lambda_2 = 8$ ，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$ [Details](#)

例 3 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解 $0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 1)^2(\lambda - 8)$ [Details](#) 得：

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 8$$

- 当 $\lambda_1 = -1$ ，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$ [Details](#)

得基础解系： $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}。$

对应 $\lambda_1 = -1$ 特征向量： $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$ ，其中 c_1, c_2 不全为零。

- 当 $\lambda_2 = 8$ ，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$ [Details](#)

得基础解系： $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}。$

例 3 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解 $0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 1)^2(\lambda - 8)$ [Details](#) 得：

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 8$$

- 当 $\lambda_1 = -1$ ，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$ [Details](#)

得基础解系： $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}。$

对应 $\lambda_1 = -1$ 特征向量： $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$ ，其中 c_1, c_2 不全为零。

- 当 $\lambda_2 = 8$ ，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$ [Details](#)

得基础解系： $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}。$

$$c_3\alpha_3$$

例 3 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解 $0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 1)^2(\lambda - 8)$ [Details](#) 得：

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 8$$

- 当 $\lambda_1 = -1$ ，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$ [Details](#)

得基础解系： $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}。$

对应 $\lambda_1 = -1$ 特征向量： $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$ ，其中 c_1, c_2 不全为零。

- 当 $\lambda_2 = 8$ ，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$ [Details](#)

得基础解系： $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}。$

对应 $\lambda_2 = 8$ 特征向量： $c_3\alpha_3$ ，其中 $c_3 \neq 0$ 。

例 3 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解 $0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 1)^2(\lambda - 8)$ 得:

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = -1 & \text{二重特征值} \\ \lambda_2 = 8 & \text{一重特征值} \end{array}$$

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 8$$

- 当 $\lambda_1 = -1$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$

得基础解系: $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}。$

对应 $\lambda_1 = -1$ 特征向量: $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$, 其中 c_1, c_2 不全为零。

- 当 $\lambda_2 = 8$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$

得基础解系: $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}。$

对应 $\lambda_2 = 8$ 特征向量: $c_3\alpha_3$, 其中 $c_3 \neq 0$ 。

例 4 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

例 4 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解 $0 = |\lambda I - A|$

例 4 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解 $0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 2)^2(\lambda - 6)$ [Details](#)

例 4 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解 $0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 2)^2(\lambda - 6)$ [Details](#) 得：

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 6$$

例 4 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解 $0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 2)^2(\lambda - 6)$ [Details](#) 得：

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 6$$

- 当 $\lambda_1 = 2$ ，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$ [Details](#)

- 当 $\lambda_2 = 6$ ，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$ [Details](#)

例 4 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解 $0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 2)^2(\lambda - 6)$ [Details](#) 得：

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 6$$

- 当 $\lambda_1 = 2$ ，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$ [Details](#)

得基础解系： $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}。$

- 当 $\lambda_2 = 6$ ，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$ [Details](#)

例 4 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解 $0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 2)^2(\lambda - 6)$ [Details](#) 得：

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 6$$

- 当 $\lambda_1 = 2$ ，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$ [Details](#)

得基础解系： $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}。$

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$$

- 当 $\lambda_2 = 6$ ，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$ [Details](#)

例 4 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解 $0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 2)^2(\lambda - 6)$ [Details](#) 得：

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 6$$

- 当 $\lambda_1 = 2$ ，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$ [Details](#)

得基础解系： $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}。$

对应 $\lambda_1 = 2$ 特征向量： $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$ ，其中 c_1, c_2 不全为零。

- 当 $\lambda_2 = 6$ ，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$ [Details](#)

例 4 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解 $0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 2)^2(\lambda - 6)$ [Details](#) 得：

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 6$$

- 当 $\lambda_1 = 2$ ，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$ [Details](#)

得基础解系： $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}。$

对应 $\lambda_1 = 2$ 特征向量： $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$ ，其中 c_1, c_2 不全为零。

- 当 $\lambda_2 = 6$ ，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$ [Details](#)

得基础解系： $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}。$

例 4 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解 $0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 2)^2(\lambda - 6)$ [Details](#) 得：

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 6$$

- 当 $\lambda_1 = 2$ ，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$ [Details](#)

得基础解系： $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}。$

对应 $\lambda_1 = 2$ 特征向量： $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$ ，其中 c_1, c_2 不全为零。

- 当 $\lambda_2 = 6$ ，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$ [Details](#)

得基础解系： $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}。$

$$c_3\alpha_3$$

例 4 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解 $0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 2)^2(\lambda - 6)$ [Details](#) 得：

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 6$$

- 当 $\lambda_1 = 2$ ，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$ [Details](#)

得基础解系： $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}。$

对应 $\lambda_1 = 2$ 特征向量： $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$ ，其中 c_1, c_2 不全为零。

- 当 $\lambda_2 = 6$ ，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$ [Details](#)

得基础解系： $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}。$

对应 $\lambda_2 = 6$ 特征向量： $c_3\alpha_3$ ，其中 $c_3 \neq 0$ 。

例 4 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解 $0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 2)^2(\lambda - 6)$ 得：

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = 2 & \text{二重特征值} \\ \lambda_2 = 6 & \text{一重特征值} \end{array}$$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 6$$

- 当 $\lambda_1 = 2$ ，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$

得基础解系： $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}。$

对应 $\lambda_1 = 2$ 特征向量： $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$ ，其中 c_1, c_2 不全为零。

- 当 $\lambda_2 = 6$ ，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$

得基础解系： $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}。$

对应 $\lambda_2 = 6$ 特征向量： $c_3\alpha_3$ ，其中 $c_3 \neq 0$ 。

例 5 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

例 5 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 解 $0 = |\lambda I - A|$

例 5 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 解 $0 = |\lambda I - A| = \lambda(\lambda - 3)(\lambda - 4)$ [Details](#)

例 5 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 解 $0 = |\lambda I - A| = \lambda(\lambda - 3)(\lambda - 4)$ [Details](#) 得:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 4$$

例 5 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 解 $0 = |\lambda I - A| = \lambda(\lambda - 3)(\lambda - 4)$ [Details](#) 得:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 4$$

- 当 $\lambda_1 = 0$, 解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$ [Details](#)

- 当 $\lambda_2 = 3$, 解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$ [Details](#)

- 当 $\lambda_3 = 4$, 解 $(\lambda_3 I - A)x = 0$ [Details](#)

例 5 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 解 $0 = |\lambda I - A| = \lambda(\lambda - 3)(\lambda - 4)$ [Details](#) 得:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 4$$

- 当 $\lambda_1 = 0$, 解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$ [Details](#) 基础解系: $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- 当 $\lambda_2 = 3$, 解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$ [Details](#)

- 当 $\lambda_3 = 4$, 解 $(\lambda_3 I - A)x = 0$ [Details](#)

例 5 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 解 $0 = |\lambda I - A| = \lambda(\lambda - 3)(\lambda - 4)$ [Details](#) 得:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 4$$

- 当 $\lambda_1 = 0$, 解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$ [Details](#) 基础解系: $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$c_1 \alpha_1$$

- 当 $\lambda_2 = 3$, 解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$ [Details](#)

- 当 $\lambda_3 = 4$, 解 $(\lambda_3 I - A)x = 0$ [Details](#)

例 5 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 解 $0 = |\lambda I - A| = \lambda(\lambda - 3)(\lambda - 4)$ [Details](#) 得：

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 4$$

- 当 $\lambda_1 = 0$ ，解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$ [Details](#) 基础解系： $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

对应 $\lambda_1 = 0$ 的特征向量： $c_1 \alpha_1$ ，其中 $c_1 \neq 0$ 。

- 当 $\lambda_2 = 3$ ，解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$ [Details](#)

- 当 $\lambda_3 = 4$ ，解 $(\lambda_3 I - A)x = 0$ [Details](#)

例 5 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 解 $0 = |\lambda I - A| = \lambda(\lambda - 3)(\lambda - 4)$ [Details](#) 得：

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 4$$

- 当 $\lambda_1 = 0$ ，解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$ [Details](#) 基础解系： $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

对应 $\lambda_1 = 0$ 的特征向量： $c_1 \alpha_1$ ，其中 $c_1 \neq 0$ 。

- 当 $\lambda_2 = 3$ ，解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$ [Details](#) 基础解系： $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- 当 $\lambda_3 = 4$ ，解 $(\lambda_3 I - A)x = 0$ [Details](#)

例 5 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 解 $0 = |\lambda I - A| = \lambda(\lambda - 3)(\lambda - 4)$ [Details](#) 得：

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 4$$

- 当 $\lambda_1 = 0$, 解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$ [Details](#) 基础解系: $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

对应 $\lambda_1 = 0$ 的特征向量: $c_1 \alpha_1$, 其中 $c_1 \neq 0$ 。

- 当 $\lambda_2 = 3$, 解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$ [Details](#) 基础解系: $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$c_2 \alpha_2$$

- 当 $\lambda_3 = 4$, 解 $(\lambda_3 I - A)x = 0$ [Details](#)

例 5 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 解 $0 = |\lambda I - A| = \lambda(\lambda - 3)(\lambda - 4)$ [Details](#) 得：

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 4$$

- 当 $\lambda_1 = 0$, 解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$ [Details](#) 基础解系: $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

对应 $\lambda_1 = 0$ 的特征向量: $c_1 \alpha_1$, 其中 $c_1 \neq 0$ 。

- 当 $\lambda_2 = 3$, 解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$ [Details](#) 基础解系: $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

对应 $\lambda_2 = 3$ 特征向量: $c_2 \alpha_2$, 其中 $c_2 \neq 0$ 。

- 当 $\lambda_3 = 4$, 解 $(\lambda_3 I - A)x = 0$ [Details](#)

例 5 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 解 $0 = |\lambda I - A| = \lambda(\lambda - 3)(\lambda - 4)$ [Details](#) 得：

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 4$$

- 当 $\lambda_1 = 0$, 解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$ [Details](#) 基础解系: $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

对应 $\lambda_1 = 0$ 的特征向量: $c_1 \alpha_1$, 其中 $c_1 \neq 0$ 。

- 当 $\lambda_2 = 3$, 解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$ [Details](#) 基础解系: $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

对应 $\lambda_2 = 3$ 特征向量: $c_2 \alpha_2$, 其中 $c_2 \neq 0$ 。

- 当 $\lambda_3 = 4$, 解 $(\lambda_3 I - A)x = 0$ [Details](#) 基础解系: $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

例 5 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 解 $0 = |\lambda I - A| = \lambda(\lambda - 3)(\lambda - 4)$ [Details](#) 得：

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 4$$

- 当 $\lambda_1 = 0$ ，解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$ [Details](#) 基础解系： $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

对应 $\lambda_1 = 0$ 的特征向量： $c_1 \alpha_1$ ，其中 $c_1 \neq 0$ 。

- 当 $\lambda_2 = 3$ ，解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$ [Details](#) 基础解系： $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

对应 $\lambda_2 = 3$ 特征向量： $c_2 \alpha_2$ ，其中 $c_2 \neq 0$ 。

- 当 $\lambda_3 = 4$ ，解 $(\lambda_3 I - A)x = 0$ [Details](#) 基础解系： $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$c_3 \alpha_3$$

例 5 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 解 $0 = |\lambda I - A| = \lambda(\lambda - 3)(\lambda - 4)$ [Details](#) 得：

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 4$$

- 当 $\lambda_1 = 0$ ，解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$ [Details](#) 基础解系： $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

对应 $\lambda_1 = 0$ 的特征向量： $c_1 \alpha_1$ ，其中 $c_1 \neq 0$ 。

- 当 $\lambda_2 = 3$ ，解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$ [Details](#) 基础解系： $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

对应 $\lambda_2 = 3$ 特征向量： $c_2 \alpha_2$ ，其中 $c_2 \neq 0$ 。

- 当 $\lambda_3 = 4$ ，解 $(\lambda_3 I - A)x = 0$ [Details](#) 基础解系： $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

对应 $\lambda_3 = 4$ 特征向量： $c_3 \alpha_3$ ，其中 $c_3 \neq 0$ 。

例 5 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 解 $0 = |\lambda I - A| = \lambda(\lambda - 3)(\lambda - 4)$ [Details](#) 得：

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 4$$

- 当 $\lambda_1 = 0$, 解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$ [Details](#) 基础解系: $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

对应 $\lambda_1 = 0$ 的特征向量: $c_1 \alpha_1$, 其中 $c_1 \neq 0$ 。

- 当 $\lambda_2 = 3$, 解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$ [Details](#) 基础解系: $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

对应 $\lambda_2 = 3$ 特征向量: $c_2 \alpha_2$, 其中 $c_2 \neq 0$ 。

- 当 $\lambda_3 = 4$, 解 $(\lambda_3 I - A)x = 0$ [Details](#) 基础解系: $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

对应 $\lambda_3 = 4$ 特征向量: $c_3 \alpha_3$, 其中 $c_3 \neq 0$ 。

$\lambda_1 = 0$ 一重特征值
 $\lambda_2 = 3$ 一重特征值
 $\lambda_3 = 4$ 一重特征值

例 6 n 阶矩阵 A 是奇异 $\Leftrightarrow 0$ 是 A 的一个特征值。

例 6 n 阶矩阵 A 是奇异 $\Leftrightarrow 0$ 是 A 的一个特征值。

证明

$\lambda = 0$ 是 A 的特征值 \Leftrightarrow

例 6 n 阶矩阵 A 是奇异 $\Leftrightarrow 0$ 是 A 的一个特征值。

证明

$\lambda = 0$ 是 A 的特征值 $\Leftrightarrow \lambda = 0$ 是 $|\lambda I - A| = 0$ 的解

例 6 n 阶矩阵 A 是奇异 $\Leftrightarrow 0$ 是 A 的一个特征值。

证明

$$\begin{aligned}\lambda = 0 \text{ 是 } A \text{ 的特征值} &\Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ 是 } |\lambda I - A| = 0 \text{ 的解} \\ &\Leftrightarrow |-A| = 0\end{aligned}$$

例 6 n 阶矩阵 A 是奇异 $\Leftrightarrow 0$ 是 A 的一个特征值。

证明

$\lambda = 0$ 是 A 的特征值 $\Leftrightarrow \lambda = 0$ 是 $|\lambda I - A| = 0$ 的解

$$\Leftrightarrow |-A| = 0 \qquad \color{red}{|-A| = |(-1)A|}$$

例 6 n 阶矩阵 A 是奇异 $\Leftrightarrow 0$ 是 A 的一个特征值。

证明

$\lambda = 0$ 是 A 的特征值 $\Leftrightarrow \lambda = 0$ 是 $|\lambda I - A| = 0$ 的解

$$\Leftrightarrow |-A| = 0$$

$$\begin{aligned} |-A| &= |(-1)A| \\ &= (-1)^n |A| \end{aligned}$$

例 6 n 阶矩阵 A 是奇异 $\Leftrightarrow 0$ 是 A 的一个特征值。

证明

$\lambda = 0$ 是 A 的特征值 $\Leftrightarrow \lambda = 0$ 是 $|\lambda I - A| = 0$ 的解

$$\Leftrightarrow |-A| = 0$$

$$\Leftrightarrow |A| = 0$$

$$\begin{aligned} |-A| &= |(-1)A| \\ &= (-1)^n |A| \end{aligned}$$

例 6 n 阶矩阵 A 是奇异 $\Leftrightarrow 0$ 是 A 的一个特征值。

证明

$\lambda = 0$ 是 A 的特征值 $\Leftrightarrow \lambda = 0$ 是 $|\lambda I - A| = 0$ 的解

$$\Leftrightarrow |-A| = 0$$

$$\Leftrightarrow |A| = 0$$

$$\Leftrightarrow A \text{ 是奇异}$$

$$\begin{aligned} |-A| &= |(-1)A| \\ &= (-1)^n |A| \end{aligned}$$

例 6 n 阶矩阵 A 是奇异 $\Leftrightarrow 0$ 是 A 的一个特征值。

证明

$\lambda = 0$ 是 A 的特征值 $\Leftrightarrow \lambda = 0$ 是 $|\lambda I - A| = 0$ 的解

$$\Leftrightarrow |-A| = 0$$

$$\Leftrightarrow |A| = 0$$

$$\Leftrightarrow A \text{ 是奇异}$$

$$\begin{aligned} |-A| &= |(-1)A| \\ &= (-1)^n |A| \end{aligned}$$

注 0 不是 A 的特征值 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

例 6 n 阶矩阵 A 是奇异 $\Leftrightarrow 0$ 是 A 的一个特征值。

证明

$\lambda = 0$ 是 A 的特征值 $\Leftrightarrow \lambda = 0$ 是 $|\lambda I - A| = 0$ 的解

$$\Leftrightarrow |-A| = 0$$

$$\Leftrightarrow |A| = 0$$

$$\Leftrightarrow A \text{ 是奇异}$$

$$\begin{aligned} |-A| &= |(-1)A| \\ &= (-1)^n |A| \end{aligned}$$

注 0 不是 A 的特征值 $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A$ 可逆

例 7 设 n 阶方阵 A 有特征值 λ , 则

1. A^2 有特征值 λ^2 ;

例 7 设 n 阶方阵 A 有特征值 λ , 则

1. A^2 有特征值 λ^2 ;

证明 设 α 是 A 的对应特征值 λ 的特征向量 ($\alpha \neq 0$), 即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

例 7 设 n 阶方阵 A 有特征值 λ , 则

1. A^2 有特征值 λ^2 ;

证明 设 α 是 A 的对应特征值 λ 的特征向量 ($\alpha \neq 0$), 即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证:

$$A^2 \square$$

$$= \lambda^2 \square$$

例 7 设 n 阶方阵 A 有特征值 λ , 则

1. A^2 有特征值 λ^2 ;

证明 设 α 是 A 的对应特征值 λ 的特征向量 ($\alpha \neq 0$), 即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证:

$$A^2 \boxed{\alpha}$$

$$= \lambda^2 \boxed{}$$

例 7 设 n 阶方阵 A 有特征值 λ , 则

1. A^2 有特征值 λ^2 ;

证明 设 α 是 A 的对应特征值 λ 的特征向量 ($\alpha \neq 0$), 即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证:

$$A^2 \boxed{\alpha} = A(A\alpha) \qquad \qquad \qquad = \lambda^2 \boxed{}$$

例 7 设 n 阶方阵 A 有特征值 λ , 则

1. A^2 有特征值 λ^2 ;

证明 设 α 是 A 的对应特征值 λ 的特征向量 ($\alpha \neq 0$), 即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证:

$$A^2 \boxed{\alpha} = A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda^2 \boxed{\alpha}$$

例 7 设 n 阶方阵 A 有特征值 λ , 则

1. A^2 有特征值 λ^2 ;

证明 设 α 是 A 的对应特征值 λ 的特征向量 ($\alpha \neq 0$), 即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证:

$$A^2 \boxed{\alpha} = A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda^2 \boxed{\alpha}$$

例 7 设 n 阶方阵 A 有特征值 λ , 则

1. A^2 有特征值 λ^2 ;

证明 设 α 是 A 的对应特征值 λ 的特征向量 ($\alpha \neq 0$), 即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证:

$$A^2 \boxed{\alpha} = A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda \cdot \lambda\alpha = \lambda^2 \boxed{\alpha}$$

例 7 设 n 阶方阵 A 有特征值 λ , 则

1. A^2 有特征值 λ^2 ;

证明 设 α 是 A 的对应特征值 λ 的特征向量 ($\alpha \neq 0$), 即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证:

$$A^2 \boxed{\alpha} = A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda \cdot \lambda\alpha = \lambda^2 \boxed{\alpha}$$

例 7 设 n 阶方阵 A 有特征值 λ , 则

1. A^2 有特征值 λ^2 ; 一般地, $bA^2 + cA + dI$ 有特征值 $b\lambda^2 + c\lambda + d$

证明 设 α 是 A 的对应特征值 λ 的特征向量 ($\alpha \neq 0$), 即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证:

$$A^2 \boxed{\alpha} = A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda \cdot \lambda\alpha = \lambda^2 \boxed{\alpha}$$

例 7 设 n 阶方阵 A 有特征值 λ , 则

1. A^2 有特征值 λ^2 ; 一般地, $bA^2 + cA + dI$ 有特征值 $b\lambda^2 + c\lambda + d$

证明 设 α 是 A 的对应特征值 λ 的特征向量 ($\alpha \neq 0$), 即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证:

$$\begin{aligned} A^2 \alpha &= A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda \cdot \lambda\alpha = \lambda^2 \alpha \\ (bA^2 + cA + dI) \alpha &= (b\lambda^2 + c\lambda + d)\alpha \end{aligned}$$

例 7 设 n 阶方阵 A 有特征值 λ , 则

1. A^2 有特征值 λ^2 ; 一般地, $bA^2 + cA + dI$ 有特征值 $b\lambda^2 + c\lambda + d$

证明 设 α 是 A 的对应特征值 λ 的特征向量 ($\alpha \neq 0$), 即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证:

$$\begin{aligned} A^2 \alpha &= A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda \cdot \lambda\alpha = \lambda^2 \alpha \\ (bA^2 + cA + dI) \alpha &= (b\lambda^2 + c\lambda + d) \alpha \end{aligned}$$

例 7 设 n 阶方阵 A 有特征值 λ , 则

1. A^2 有特征值 λ^2 ; 一般地, $bA^2 + cA + dI$ 有特征值 $b\lambda^2 + c\lambda + d$

证明 设 α 是 A 的对应特征值 λ 的特征向量 ($\alpha \neq 0$), 即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证:

$$A^2 \alpha = A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda \cdot \lambda\alpha = \lambda^2 \alpha$$

$$\begin{aligned}(bA^2 + cA + dI) \alpha &= bA^2\alpha + cA\alpha + dI\alpha = \\ &= (b\lambda^2 + c\lambda + d) \alpha\end{aligned}$$

例 7 设 n 阶方阵 A 有特征值 λ , 则

1. A^2 有特征值 λ^2 ; 一般地, $bA^2 + cA + dI$ 有特征值 $b\lambda^2 + c\lambda + d$

证明 设 α 是 A 的对应特征值 λ 的特征向量 ($\alpha \neq 0$), 即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证:

$$\begin{aligned} A^2 \alpha &= A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda \cdot \lambda\alpha = \lambda^2 \alpha \\ (bA^2 + cA + dI) \alpha &= bA^2\alpha + cA\alpha + dI\alpha = b\lambda^2\alpha + \\ &= (b\lambda^2 + c\lambda + d) \end{aligned}$$

例 7 设 n 阶方阵 A 有特征值 λ , 则

1. A^2 有特征值 λ^2 ; 一般地, $bA^2 + cA + dI$ 有特征值 $b\lambda^2 + c\lambda + d$

证明 设 α 是 A 的对应特征值 λ 的特征向量 ($\alpha \neq 0$), 即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证:

$$\begin{aligned} A^2 \alpha &= A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda \cdot \lambda\alpha = \lambda^2 \alpha \\ (bA^2 + cA + dI) \alpha &= bA^2\alpha + cA\alpha + dI\alpha = b\lambda^2\alpha + c\lambda\alpha + \\ &= (b\lambda^2 + c\lambda + d) \alpha \end{aligned}$$

例 7 设 n 阶方阵 A 有特征值 λ , 则

1. A^2 有特征值 λ^2 ; 一般地, $bA^2 + cA + dI$ 有特征值 $b\lambda^2 + c\lambda + d$

证明 设 α 是 A 的对应特征值 λ 的特征向量 ($\alpha \neq 0$), 即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证:

$$\begin{aligned} A^2 \alpha &= A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda \cdot \lambda\alpha = \lambda^2 \alpha \\ (bA^2 + cA + dI) \alpha &= bA^2\alpha + cA\alpha + dI\alpha = b\lambda^2\alpha + c\lambda\alpha + d\alpha \\ &= (b\lambda^2 + c\lambda + d) \alpha \end{aligned}$$

例 7 设 n 阶方阵 A 有特征值 λ , 则

1. A^2 有特征值 λ^2 ; 一般地, $bA^2 + cA + dI$ 有特征值 $b\lambda^2 + c\lambda + d$

证明 设 α 是 A 的对应特征值 λ 的特征向量 ($\alpha \neq 0$), 即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证:

$$\begin{aligned} A^2 \alpha &= A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda \cdot \lambda\alpha = \lambda^2 \alpha \\ (bA^2 + cA + dI) \alpha &= bA^2\alpha + cA\alpha + dI\alpha = b\lambda^2\alpha + c\lambda\alpha + d\alpha \\ &= (b\lambda^2 + c\lambda + d) \alpha \end{aligned}$$

例 7 设 n 阶方阵 A 有特征值 λ , 则

1. A^2 有特征值 λ^2 ; 一般地, $bA^2 + cA + dI$ 有特征值 $b\lambda^2 + c\lambda + d$
2. 若 A 可逆, 则 A^* 有特征值 $\frac{1}{\lambda}|A|$ 。

证明 设 α 是 A 的对应特征值 λ 的特征向量 ($\alpha \neq 0$), 即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证:

$$\begin{aligned} A^2 \alpha &= A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda \cdot \lambda\alpha = \lambda^2 \alpha \\ (bA^2 + cA + dI) \alpha &= bA^2\alpha + cA\alpha + dI\alpha = b\lambda^2\alpha + c\lambda\alpha + d\alpha \\ &= (b\lambda^2 + c\lambda + d) \alpha \end{aligned}$$

例 7 设 n 阶方阵 A 有特征值 λ , 则

1. A^2 有特征值 λ^2 ; 一般地, $bA^2 + cA + dI$ 有特征值 $b\lambda^2 + c\lambda + d$
2. 若 A 可逆, 则 A^* 有特征值 $\frac{1}{\lambda}|A|$ 。

证明 设 α 是 A 的对应特征值 λ 的特征向量 ($\alpha \neq 0$), 即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证:

$$\begin{aligned} A^2 \alpha &= A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda \cdot \lambda\alpha = \lambda^2 \alpha \\ (bA^2 + cA + dI) \alpha &= bA^2\alpha + cA\alpha + dI\alpha = b\lambda^2\alpha + c\lambda\alpha + d\alpha \\ &= (b\lambda^2 + c\lambda + d) \alpha \end{aligned}$$

2. 验证:

$$A^* \square = \frac{|A|}{\lambda} \square$$

例 7 设 n 阶方阵 A 有特征值 λ , 则

1. A^2 有特征值 λ^2 ; 一般地, $bA^2 + cA + dI$ 有特征值 $b\lambda^2 + c\lambda + d$
2. 若 A 可逆, 则 A^* 有特征值 $\frac{1}{\lambda}|A|$ 。

证明 设 α 是 A 的对应特征值 λ 的特征向量 ($\alpha \neq 0$), 即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证:

$$\begin{aligned} A^2 \alpha &= A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda \cdot \lambda\alpha = \lambda^2 \alpha \\ (bA^2 + cA + dI) \alpha &= bA^2\alpha + cA\alpha + dI\alpha = b\lambda^2\alpha + c\lambda\alpha + d\alpha \\ &= (b\lambda^2 + c\lambda + d) \alpha \end{aligned}$$

2. 验证:

$$A^* A = |A| I \qquad A^* \square = \frac{|A|}{\lambda} \square$$

例 7 设 n 阶方阵 A 有特征值 λ , 则

1. A^2 有特征值 λ^2 ; 一般地, $bA^2 + cA + dI$ 有特征值 $b\lambda^2 + c\lambda + d$
2. 若 A 可逆, 则 A^* 有特征值 $\frac{1}{\lambda}|A|$ 。

证明 设 α 是 A 的对应特征值 λ 的特征向量 ($\alpha \neq 0$), 即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证:

$$\begin{aligned} A^2 \alpha &= A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda \cdot \lambda\alpha = \lambda^2 \alpha \\ (bA^2 + cA + dI) \alpha &= bA^2\alpha + cA\alpha + dI\alpha = b\lambda^2\alpha + c\lambda\alpha + d\alpha \\ &= (b\lambda^2 + c\lambda + d) \alpha \end{aligned}$$

2. 验证:

$$A^* A\alpha = |A|I\alpha \qquad A^* \square = \frac{|A|}{\lambda} \square$$

例 7 设 n 阶方阵 A 有特征值 λ , 则

1. A^2 有特征值 λ^2 ; 一般地, $bA^2 + cA + dI$ 有特征值 $b\lambda^2 + c\lambda + d$
2. 若 A 可逆, 则 A^* 有特征值 $\frac{1}{\lambda}|A|$ 。

证明 设 α 是 A 的对应特征值 λ 的特征向量 ($\alpha \neq 0$), 即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证:

$$\begin{aligned} A^2 \alpha &= A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda \cdot \lambda\alpha = \lambda^2 \alpha \\ (bA^2 + cA + dI) \alpha &= bA^2\alpha + cA\alpha + dI\alpha = b\lambda^2\alpha + c\lambda\alpha + d\alpha \\ &= (b\lambda^2 + c\lambda + d) \alpha \end{aligned}$$

2. 验证:

$$A^* A\alpha = |A|I\alpha = |A|\alpha \qquad A^* \square = \frac{|A|}{\lambda} \square$$

例 7 设 n 阶方阵 A 有特征值 λ , 则

1. A^2 有特征值 λ^2 ; 一般地, $bA^2 + cA + dI$ 有特征值 $b\lambda^2 + c\lambda + d$
2. 若 A 可逆, 则 A^* 有特征值 $\frac{1}{\lambda}|A|$ 。

证明 设 α 是 A 的对应特征值 λ 的特征向量 ($\alpha \neq 0$), 即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证:

$$\begin{aligned} A^2 \alpha &= A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda \cdot \lambda\alpha = \lambda^2 \alpha \\ (bA^2 + cA + dI) \alpha &= bA^2\alpha + cA\alpha + dI\alpha = b\lambda^2\alpha + c\lambda\alpha + d\alpha \\ &= (b\lambda^2 + c\lambda + d) \alpha \end{aligned}$$

2. 验证:

$$A^*(\lambda\alpha) = A^*A\alpha = |A|I\alpha = |A|\alpha \qquad A^* \square = \frac{|A|}{\lambda} \square$$

例 7 设 n 阶方阵 A 有特征值 λ , 则

1. A^2 有特征值 λ^2 ; 一般地, $bA^2 + cA + dI$ 有特征值 $b\lambda^2 + c\lambda + d$
2. 若 A 可逆, 则 A^* 有特征值 $\frac{1}{\lambda}|A|$ 。

证明 设 α 是 A 的对应特征值 λ 的特征向量 ($\alpha \neq 0$), 即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证:

$$\begin{aligned} A^2 \alpha &= A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda \cdot \lambda\alpha = \lambda^2 \alpha \\ (bA^2 + cA + dI) \alpha &= bA^2\alpha + cA\alpha + dI\alpha = b\lambda^2\alpha + c\lambda\alpha + d\alpha \\ &= (b\lambda^2 + c\lambda + d) \alpha \end{aligned}$$

2. 验证:

$$A^*(\lambda\alpha) = A^*A\alpha = |A|I\alpha = |A|\alpha \quad \Rightarrow \quad A^* \alpha = \frac{|A|}{\lambda} \alpha$$

例 7 设 n 阶方阵 A 有特征值 λ , 则

1. A^2 有特征值 λ^2 ; 一般地, $bA^2 + cA + dI$ 有特征值 $b\lambda^2 + c\lambda + d$
2. 若 A 可逆, 则 A^* 有特征值 $\frac{1}{\lambda}|A|$ 。

证明 设 α 是 A 的对应特征值 λ 的特征向量 ($\alpha \neq 0$), 即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证:

$$\begin{aligned} A^2 \alpha &= A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda \cdot \lambda\alpha = \lambda^2 \alpha \\ (bA^2 + cA + dI) \alpha &= bA^2\alpha + cA\alpha + dI\alpha = b\lambda^2\alpha + c\lambda\alpha + d\alpha \\ &= (b\lambda^2 + c\lambda + d) \alpha \end{aligned}$$

2. 验证:

$$A^*(\lambda\alpha) = A^*A\alpha = |A|I\alpha = |A|\alpha \quad \Rightarrow \quad A^* \alpha = \frac{|A|}{\lambda} \alpha$$

(用到 A 可逆 $\Rightarrow \lambda \neq 0$)

特征值与特征向量的基本性质

定理 n 阶方阵 A 与其转置矩阵 A^T 有相同特征值

特征值与特征向量的基本性质

定理 n 阶方阵 A 与其转置矩阵 A^T 有相同特征值

证明 由于

$$|\lambda I - A|$$

$$|\lambda I - A^T|$$

特征值与特征向量的基本性质

定理 n 阶方阵 A 与其转置矩阵 A^T 有相同特征值

证明 由于

$$|\lambda I - A| = |(\lambda I - A)^T| \qquad |\lambda I - A^T|$$

特征值与特征向量的基本性质

定理 n 阶方阵 A 与其转置矩阵 A^T 有相同特征值

证明 由于

$$|\lambda I - A| = |(\lambda I - A)^T| = |\lambda I^T - A^T| = |\lambda I - A^T|$$

特征值与特征向量的基本性质

定理 n 阶方阵 A 与其转置矩阵 A^T 有相同特征值

证明 由于

$$|\lambda I - A| = |(\lambda I - A)^T| = |\lambda I^T - A^T| = |\lambda I - A^T|$$

特征值与特征向量的基本性质

定理 n 阶方阵 A 与其转置矩阵 A^T 有相同特征值

证明 由于

$$|\lambda I - A| = |(\lambda I - A)^T| = |\lambda I^T - A^T| = |\lambda I - A^T|$$

所以

$$\lambda \text{ 是 } A \text{ 特征值} \iff |\lambda I - A| = 0$$

特征值与特征向量的基本性质

定理 n 阶方阵 A 与其转置矩阵 A^T 有相同特征值

证明 由于

$$|\lambda I - A| = |(\lambda I - A)^T| = |\lambda I^T - A^T| = |\lambda I - A^T|$$

所以

$$\begin{aligned}\lambda \text{ 是 } A \text{ 特征值} &\iff |\lambda I - A| = 0 \\ &\iff |\lambda I - A^T| = 0\end{aligned}$$

特征值与特征向量的基本性质

定理 n 阶方阵 A 与其转置矩阵 A^T 有相同特征值

证明 由于

$$|\lambda I - A| = |(\lambda I - A)^T| = |\lambda I^T - A^T| = |\lambda I - A^T|$$

所以

$$\lambda \text{ 是 } A \text{ 特征值} \iff |\lambda I - A| = 0$$

$$\iff |\lambda I - A^T| = 0$$

$$\iff \lambda \text{ 是 } A^T \text{ 特征值}$$

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ ，其对应的特征向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性无关。

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ ，其对应的特征向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 以 $m = 2$ 为例进行证明。假设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = 0$$

$$\underline{k_1 = k_2 = 0}$$

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ ，其对应的特征向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 以 $m = 2$ 为例进行证明。假设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = 0$$

两边左乘 A ，得

$$k_1A\alpha_1 + k_2A\alpha_2 = 0$$

$$\underline{k_1 = k_2 = 0}$$

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, 其对应的特征向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 以 $m = 2$ 为例进行证明。假设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = 0$$

两边左乘 A , 得

$$k_1A\alpha_1 + k_2A\alpha_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1\lambda_1\alpha_1 + k_2\lambda_2\alpha_2 = 0$$

$$\underline{k_1 = k_2 = 0}$$

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ ，其对应的特征向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 以 $m = 2$ 为例进行证明。假设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = 0 \quad \xrightarrow{\times \lambda_1}$$

两边左乘 A ，得

$$k_1A\alpha_1 + k_2A\alpha_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1\lambda_1\alpha_1 + k_2\lambda_2\alpha_2 = 0$$

$$\underline{k_1 = k_2 = 0}$$

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ ，其对应的特征向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 以 $m = 2$ 为例进行证明。假设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = 0 \quad \xRightarrow{\times \lambda_1} \quad k_1\lambda_1\alpha_1 + k_2\lambda_1\alpha_2 = 0$$

两边左乘 A ，得

$$k_1A\alpha_1 + k_2A\alpha_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1\lambda_1\alpha_1 + k_2\lambda_2\alpha_2 = 0$$

$$\underline{k_1 = k_2 = 0}$$

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ ，其对应的特征向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 以 $m = 2$ 为例进行证明。假设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = 0 \quad \xrightarrow{\times \lambda_1} \quad k_1\lambda_1\alpha_1 + k_2\lambda_1\alpha_2 = 0$$

两边左乘 A ，得

$$k_1A\alpha_1 + k_2A\alpha_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1\lambda_1\alpha_1 + k_2\lambda_2\alpha_2 = 0$$

两式相减得：

$$\underline{k_1 = k_2 = 0}$$

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ ，其对应的特征向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 以 $m = 2$ 为例进行证明。假设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = 0 \quad \xrightarrow{\times \lambda_1} \quad k_1\lambda_1\alpha_1 + k_2\lambda_1\alpha_2 = 0$$

两边左乘 A ，得

$$k_1A\alpha_1 + k_2A\alpha_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1\lambda_1\alpha_1 + k_2\lambda_2\alpha_2 = 0$$

两式相减得：

$$k_2(\lambda_1 - \lambda_2)\alpha_2 = 0$$

$$\underline{k_1 = k_2 = 0}$$

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ ，其对应的特征向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 以 $m = 2$ 为例进行证明。假设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = 0 \quad \xrightarrow{\times \lambda_1} \quad k_1\lambda_1\alpha_1 + k_2\lambda_1\alpha_2 = 0$$

两边左乘 A ，得

$$k_1A\alpha_1 + k_2A\alpha_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1\lambda_1\alpha_1 + k_2\lambda_2\alpha_2 = 0$$

两式相减得：

$$k_2(\lambda_1 - \lambda_2)\alpha_2 = 0$$

因为 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ， $\alpha_2 \neq 0$ ，所以 $k_2 = 0$ 。

$$\underline{k_1 = k_2 = 0}$$

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, 其对应的特征向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 以 $m = 2$ 为例进行证明。假设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = 0 \quad \xrightarrow{\times \lambda_1} \quad k_1\lambda_1\alpha_1 + k_2\lambda_1\alpha_2 = 0$$

两边左乘 A , 得

$$k_1A\alpha_1 + k_2A\alpha_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1\lambda_1\alpha_1 + k_2\lambda_2\alpha_2 = 0$$

两式相减得:

$$k_2(\lambda_1 - \lambda_2)\alpha_2 = 0$$

因为 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\alpha_2 \neq 0$, 所以 $k_2 = 0$ 。

代回 (1) 式, 得 $k_1\alpha_1 = 0$, 所以 $k_1 = 0$ 。

$$\underline{k_1 = k_2 = 0}$$

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, 其对应的特征向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 以 $m = 2$ 为例进行证明。假设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = 0 \quad \xrightarrow{\times \lambda_1} \quad k_1\lambda_1\alpha_1 + k_2\lambda_1\alpha_2 = 0$$

两边左乘 A , 得

$$k_1A\alpha_1 + k_2A\alpha_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1\lambda_1\alpha_1 + k_2\lambda_2\alpha_2 = 0$$

两式相减得:

$$k_2(\lambda_1 - \lambda_2)\alpha_2 = 0$$

因为 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\alpha_2 \neq 0$, 所以 $k_2 = 0$ 。

代回 (1) 式, 得 $k_1\alpha_1 = 0$, 所以 $k_1 = 0$ 。

所以 $k_1 = k_2 = 0$, α_1, α_2 线性无关。

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, 其对应的特征向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性无关。

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, 其对应的特征向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 数学归纳法。

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, 其对应的特征向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 数学归纳法。 $m = 1$ 时,

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, 其对应的特征向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 数学归纳法。 $m = 1$ 时, 显然。

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, 其对应的特征向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 数学归纳法。 $m = 1$ 时, 显然。假设结论对 $m - 1$ 成立。

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, 其对应的特征向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 数学归纳法。 $m = 1$ 时, 显然。假设结论对 $m - 1$ 成立。

假设

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\alpha_m = 0 \quad (1)$$

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, 其对应的特征向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 数学归纳法。 $m = 1$ 时, 显然。假设结论对 $m - 1$ 成立。

假设

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\alpha_m = 0 \quad (1)$$

$$\underline{k_1 = \dots = k_{m-1} = k_m = 0}$$

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, 其对应的特征向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 数学归纳法。 $m = 1$ 时, 显然。假设结论对 $m - 1$ 成立。

假设

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\alpha_m = 0 \quad (1)$$

两边左乘 A , 得

$$k_1 = \dots = k_{m-1} = k_m = 0$$

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, 其对应的特征向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 数学归纳法。 $m = 1$ 时, 显然。假设结论对 $m - 1$ 成立。

假设

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\alpha_m = 0 \quad (1)$$

两边左乘 A , 得

$$k_1A\alpha_1 + \dots + k_{m-1}A\alpha_{m-1} + k_mA\alpha_m = 0$$

$$\underline{k_1 = \dots = k_{m-1} = k_m = 0}$$

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, 其对应的特征向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 数学归纳法。 $m = 1$ 时, 显然。假设结论对 $m - 1$ 成立。

假设

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\alpha_m = 0 \quad (1)$$

两边左乘 A , 得

$$k_1A\alpha_1 + \dots + k_{m-1}A\alpha_{m-1} + k_mA\alpha_m = 0$$

$$\lambda_1\alpha_1$$

$$\underline{k_1 = \dots = k_{m-1} = k_m = 0}$$

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, 其对应的特征向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 数学归纳法。 $m = 1$ 时, 显然。假设结论对 $m - 1$ 成立。

假设

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\alpha_m = 0 \quad (1)$$

两边左乘 A , 得

$$k_1A\alpha_1 + \dots + k_{m-1}A\alpha_{m-1} + k_mA\alpha_m = 0$$

$$\lambda_1\alpha_1$$

$$\lambda_{m-1}\alpha_{m-1}$$

$$k_1 = \dots = k_{m-1} = k_m = 0$$

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, 其对应的特征向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 数学归纳法。 $m = 1$ 时, 显然。假设结论对 $m - 1$ 成立。

假设

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\alpha_m = 0 \quad (1)$$

两边左乘 A , 得

$$k_1A\alpha_1 + \dots + k_{m-1}A\alpha_{m-1} + k_mA\alpha_m = 0$$

$$\lambda_1\alpha_1$$

$$\lambda_{m-1}\alpha_{m-1}$$

$$\lambda_m\alpha_m$$

$$k_1 = \dots = k_{m-1} = k_m = 0$$

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, 其对应的特征向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 数学归纳法。 $m = 1$ 时, 显然。假设结论对 $m - 1$ 成立。

假设

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\alpha_m = 0 \quad (1)$$

两边左乘 A , 得

$$k_1A\alpha_1 + \dots + k_{m-1}A\alpha_{m-1} + k_mA\alpha_m = 0$$

$$\Rightarrow k_1\lambda_1\alpha_1 + \dots + k_{m-1}\lambda_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\lambda_m\alpha_m = 0 \quad (2)$$

$$\underline{k_1 = \dots = k_{m-1} = k_m = 0}$$

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, 其对应的特征向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 数学归纳法。 $m = 1$ 时, 显然。假设结论对 $m - 1$ 成立。

假设

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\alpha_m = 0 \quad (1)$$

两边左乘 A , 得

$$k_1A\alpha_1 + \dots + k_{m-1}A\alpha_{m-1} + k_mA\alpha_m = 0$$

$$\Rightarrow k_1\lambda_1\alpha_1 + \dots + k_{m-1}\lambda_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\lambda_m\alpha_m = 0 \quad (2)$$

$$k_1 = \dots = k_{m-1} = k_m = 0$$

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, 其对应的特征向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 数学归纳法。 $m = 1$ 时, 显然。假设结论对 $m - 1$ 成立。

假设

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\alpha_m = 0 \quad (1)$$

两边左乘 A , 得

$$k_1A\alpha_1 + \dots + k_{m-1}A\alpha_{m-1} + k_mA\alpha_m = 0$$

$$\Rightarrow k_1\lambda_1\alpha_1 + \dots + k_{m-1}\lambda_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\lambda_m\alpha_m = 0 \quad (2)$$

$\lambda_m \times (1) - (2)$ 得:

$$k_1 = \dots = k_{m-1} = k_m = 0$$

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, 其对应的特征向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 数学归纳法。 $m = 1$ 时, 显然。假设结论对 $m - 1$ 成立。

假设

$$k_1 \lambda_m \alpha_1 + \dots + k_{m-1} \lambda_m \alpha_{m-1} + k_m \lambda_m \alpha_m = 0 \quad (1)$$

两边左乘 A , 得

$$k_1 A \alpha_1 + \dots + k_{m-1} A \alpha_{m-1} + k_m A \alpha_m = 0$$

$$\Rightarrow k_1 \lambda_1 \alpha_1 + \dots + k_{m-1} \lambda_{m-1} \alpha_{m-1} + k_m \lambda_m \alpha_m = 0 \quad (2)$$

$\lambda_m \times (1) - (2)$ 得:

$$k_1 = \dots = k_{m-1} = k_m = 0$$

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, 其对应的特征向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 数学归纳法。 $m = 1$ 时, 显然。假设结论对 $m - 1$ 成立。

假设

$$k_1 \lambda_m \alpha_1 + \dots + k_{m-1} \lambda_m \alpha_{m-1} + k_m \lambda_m \alpha_m = 0 \quad (1)$$

两边左乘 A , 得

$$k_1 A \alpha_1 + \dots + k_{m-1} A \alpha_{m-1} + k_m A \alpha_m = 0$$

$$\Rightarrow k_1 \lambda_1 \alpha_1 + \dots + k_{m-1} \lambda_{m-1} \alpha_{m-1} + k_m \lambda_m \alpha_m = 0 \quad (2)$$

$\lambda_m \times (1) - (2)$ 得:

$$k_1 (\lambda_m - \lambda_1) \alpha_1 + \dots + k_{m-1} (\lambda_m - \lambda_{m-1}) \alpha_{m-1} = 0$$

$$k_1 = \dots = k_{m-1} = k_m = 0$$

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, 其对应的特征向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 数学归纳法。 $m = 1$ 时, 显然。假设结论对 $m - 1$ 成立。

假设

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\alpha_m = 0 \quad (1)$$

两边左乘 A , 得

$$k_1A\alpha_1 + \dots + k_{m-1}A\alpha_{m-1} + k_mA\alpha_m = 0$$

$$\Rightarrow k_1\lambda_1\alpha_1 + \dots + k_{m-1}\lambda_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\lambda_m\alpha_m = 0 \quad (2)$$

$\lambda_m \times (1) - (2)$ 得:

$$k_1(\lambda_m - \lambda_1)\alpha_1 + \dots + k_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1})\alpha_{m-1} = 0$$

由归纳假设 $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$ 线性无关, 所以

$$k_1 = \dots = k_{m-1} = k_m = 0$$

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, 其对应的特征向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 数学归纳法。 $m = 1$ 时, 显然。假设结论对 $m - 1$ 成立。

假设

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\alpha_m = 0 \quad (1)$$

两边左乘 A , 得

$$k_1A\alpha_1 + \dots + k_{m-1}A\alpha_{m-1} + k_mA\alpha_m = 0$$

$$\Rightarrow k_1\lambda_1\alpha_1 + \dots + k_{m-1}\lambda_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\lambda_m\alpha_m = 0 \quad (2)$$

$\lambda_m \times (1) - (2)$ 得:

$$k_1(\lambda_m - \lambda_1)\alpha_1 + \dots + k_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1})\alpha_{m-1} = 0$$

由归纳假设 $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$ 线性无关, 所以

$$k_1(\lambda_m - \lambda_1) = \dots = k_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1}) = 0$$

$$k_1 = \dots = k_{m-1} = k_m = 0$$

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, 其对应的特征向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 数学归纳法。 $m = 1$ 时, 显然。假设结论对 $m - 1$ 成立。

假设

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\alpha_m = 0 \quad (1)$$

两边左乘 A , 得

$$k_1A\alpha_1 + \dots + k_{m-1}A\alpha_{m-1} + k_mA\alpha_m = 0$$

$$\Rightarrow k_1\lambda_1\alpha_1 + \dots + k_{m-1}\lambda_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\lambda_m\alpha_m = 0 \quad (2)$$

$\lambda_m \times (1) - (2)$ 得:

$$k_1(\lambda_m - \lambda_1)\alpha_1 + \dots + k_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1})\alpha_{m-1} = 0$$

由归纳假设 $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$ 线性无关, 所以

$$k_1(\lambda_m - \lambda_1) = \dots = k_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1}) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = \dots = k_{m-1} = 0$$

$$k_1 = \dots = k_{m-1} = k_m = 0$$

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, 其对应的特征向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 数学归纳法。 $m = 1$ 时, 显然。假设结论对 $m - 1$ 成立。

假设

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\alpha_m = 0 \quad (1)$$

两边左乘 A , 得

$$k_1A\alpha_1 + \dots + k_{m-1}A\alpha_{m-1} + k_mA\alpha_m = 0$$

$$\Rightarrow k_1\lambda_1\alpha_1 + \dots + k_{m-1}\lambda_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\lambda_m\alpha_m = 0 \quad (2)$$

$\lambda_m \times (1) - (2)$ 得:

$$k_1(\lambda_m - \lambda_1)\alpha_1 + \dots + k_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1})\alpha_{m-1} = 0$$

由归纳假设 $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$ 线性无关, 所以

$$k_1(\lambda_m - \lambda_1) = \dots = k_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1}) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = \dots = k_{m-1} = 0$$

进而

$$k_m\alpha_m = 0$$

$$k_1 = \dots = k_{m-1} = k_m = 0$$

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, 其对应的特征向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 数学归纳法。 $m = 1$ 时, 显然。假设结论对 $m - 1$ 成立。

假设

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\alpha_m = 0 \quad (1)$$

两边左乘 A , 得

$$k_1A\alpha_1 + \dots + k_{m-1}A\alpha_{m-1} + k_mA\alpha_m = 0$$

$$\Rightarrow k_1\lambda_1\alpha_1 + \dots + k_{m-1}\lambda_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\lambda_m\alpha_m = 0 \quad (2)$$

$\lambda_m \times (1) - (2)$ 得:

$$k_1(\lambda_m - \lambda_1)\alpha_1 + \dots + k_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1})\alpha_{m-1} = 0$$

由归纳假设 $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$ 线性无关, 所以

$$k_1(\lambda_m - \lambda_1) = \dots = k_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1}) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = \dots = k_{m-1} = 0$$

进而

$$k_m\alpha_m = 0 \quad \Rightarrow \quad k_m = 0$$

$$k_1 = \dots = k_{m-1} = k_m = 0$$

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, 其对应的特征向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 数学归纳法。 $m = 1$ 时, 显然。假设结论对 $m - 1$ 成立。

假设

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\alpha_m = 0 \quad (1)$$

两边左乘 A , 得

$$k_1A\alpha_1 + \dots + k_{m-1}A\alpha_{m-1} + k_mA\alpha_m = 0$$

$$\Rightarrow k_1\lambda_1\alpha_1 + \dots + k_{m-1}\lambda_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\lambda_m\alpha_m = 0 \quad (2)$$

$\lambda_m \times (1) - (2)$ 得:

$$k_1(\lambda_m - \lambda_1)\alpha_1 + \dots + k_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1})\alpha_{m-1} = 0$$

由归纳假设 $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$ 线性无关, 所以

$$k_1(\lambda_m - \lambda_1) = \dots = k_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1}) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = \dots = k_{m-1} = 0$$

进而

$$k_m\alpha_m = 0 \quad \Rightarrow \quad k_m = 0$$

所以 $k_1 = \dots = k_{m-1} = k_m = 0$

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, 其对应的特征向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 数学归纳法。 $m = 1$ 时, 显然。假设结论对 $m - 1$ 成立。

假设

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\alpha_m = 0 \quad (1)$$

两边左乘 A , 得

$$k_1A\alpha_1 + \dots + k_{m-1}A\alpha_{m-1} + k_mA\alpha_m = 0$$

$$\Rightarrow k_1\lambda_1\alpha_1 + \dots + k_{m-1}\lambda_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\lambda_m\alpha_m = 0 \quad (2)$$

$\lambda_m \times (1) - (2)$ 得:

$$k_1(\lambda_m - \lambda_1)\alpha_1 + \dots + k_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1})\alpha_{m-1} = 0$$

由归纳假设 $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$ 线性无关, 所以

$$k_1(\lambda_m - \lambda_1) = \dots = k_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1}) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = \dots = k_{m-1} = 0$$

进而

$$k_m\alpha_m = 0 \quad \Rightarrow \quad k_m = 0$$

所以 $k_1 = \dots = k_{m-1} = k_m = 0$, $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性无关。

特征值与矩阵元素关系 ($n = 3$)

设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, 则

特征值与矩阵元素关系 ($n = 3$)

设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, 则

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = |A|$$

特征值与矩阵元素关系 ($n = 3$)

设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, 则

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = |A|$$

这是:

$$|\lambda I - A| =$$

特征值与矩阵元素关系 ($n = 3$)

设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, 则

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= a_{11} + a_{22} + a_{33} \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 &= |A|\end{aligned}$$

这是:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix}$$

特征值与矩阵元素关系 ($n = 3$)

设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, 则

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= a_{11} + a_{22} + a_{33} \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 &= |A|\end{aligned}$$

这是:

$$\begin{aligned}|\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} \\ &= \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + \end{aligned}$$

特征值与矩阵元素关系 ($n = 3$)

设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, 则

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= a_{11} + a_{22} + a_{33} \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 &= |A|\end{aligned}$$

这是:

$$\begin{aligned}| \lambda I - A | &= \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} \\ &= \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + \\ &\quad + (-1)^2 \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \right) \lambda\end{aligned}$$

特征值与矩阵元素关系 ($n = 3$)

设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, 则

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= a_{11} + a_{22} + a_{33} \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 &= |A|\end{aligned}$$

这是:

$$\begin{aligned}| \lambda I - A | &= \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} \\ &= \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + \\ &\quad + (-1)^2 \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \right) \lambda \\ &\quad + (-1)^3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\end{aligned}$$

特征值与矩阵元素关系 ($n = 3$)

设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, 则

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= a_{11} + a_{22} + a_{33} \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 &= |A|\end{aligned}$$

这是:

$$\begin{aligned}|\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} \\ &= \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + \\ &\quad + (-1)^2 \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \right) \lambda \\ &\quad + (-1)^3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\end{aligned}$$

另一方面,

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)$$

特征值与矩阵元素关系 ($n = 3$)

设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, 则

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= a_{11} + a_{22} + a_{33} \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 &= |A|\end{aligned}$$

这是:

$$\begin{aligned}|\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} \\ &= \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + \\ &\quad + (-1)^2 \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \right) \lambda \\ &\quad + (-1)^3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}|\lambda I - A| &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) \\ &= \lambda^3 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\lambda^2 + (-1)^2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)\lambda + (-1)^3\lambda_1\lambda_2\lambda_3\end{aligned}$$

特征值与矩阵元素关系 ($n = 3$)

设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, 则

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= a_{11} + a_{22} + a_{33} \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 &= |A|\end{aligned}$$

这是:

$$\begin{aligned}|\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} \\ &= \lambda^3 - \underline{(a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2} + \\ &\quad + (-1)^2 \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \right) \lambda \\ &\quad + (-1)^3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}|\lambda I - A| &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) \\ &= \lambda^3 - \underline{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\lambda^2} + (-1)^2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)\lambda + (-1)^3\lambda_1\lambda_2\lambda_3\end{aligned}$$

特征值与矩阵元素关系 ($n = 3$)

设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, 则

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= a_{11} + a_{22} + a_{33} \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 &= |A|\end{aligned}$$

这是:

$$\begin{aligned}|\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} \\ &= \lambda^3 - \underline{(a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2} + \\ &\quad + (-1)^2 \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \right) \lambda \\ &\quad + (-1)^3 \underline{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}\end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}|\lambda I - A| &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) \\ &= \lambda^3 - \underline{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\lambda^2} + (-1)^2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)\lambda + (-1)^3 \underline{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}\end{aligned}$$

特征值与矩阵元素关系

设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 则

特征值与矩阵元素关系

设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 则

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n &= a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} \\ \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n &= |A|\end{aligned}$$

特征值与矩阵元素关系

设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 则

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n &= a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} \\ \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n &= |A|\end{aligned}$$

这是:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

特征值与矩阵元素关系

设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 则

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n &= a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} \\ \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n &= |A|\end{aligned}$$

这是:

$$\begin{aligned}|\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + * \lambda + |-A|\end{aligned}$$

特征值与矩阵元素关系

设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 则

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n &= a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} \\ \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n &= |A|\end{aligned}$$

这是:

$$\begin{aligned}|\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + * \lambda + \underbrace{|-A|}_{(-1)^n |A|}\end{aligned}$$

特征值与矩阵元素关系

设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 则

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n &= a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} \\ \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n &= |A|\end{aligned}$$

这是:

$$\begin{aligned}|\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + * \lambda + \underbrace{|-A|}_{(-1)^n |A|}\end{aligned}$$

另一方面,

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$$

特征值与矩阵元素关系

设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 则

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n &= a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} \\ \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n &= |A|\end{aligned}$$

这是:

$$\begin{aligned}|\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + * \lambda + \underbrace{|-A|}_{(-1)^n |A|}\end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}|\lambda I - A| &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n) \\ &= \lambda^n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)\lambda^{n-1} + \cdots + * \lambda + (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n\end{aligned}$$

例 1 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & x & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 已知 A 有特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$, 求 x 的值, 及另外一个特征值 λ_3 。

例 1 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & x & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 已知 A 有特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$, 求 x 的值, 及另外一个特征值 λ_3 。

解 由特征值与矩阵系数关系:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + x + 1 \\ \end{cases}$$

例 1 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & x & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 已知 A 有特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$, 求 x 的值, 及另外一个特征值 λ_3 。

解 由特征值与矩阵系数关系:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + x + 1 \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & x & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} \end{cases}$$

例 1 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & x & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 已知 A 有特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$, 求 x 的值, 及另外一个特征值 λ_3 。

解 由特征值与矩阵系数关系:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + x + 1 \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & x & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & x \end{vmatrix} \end{cases}$$

例 1 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & x & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 已知 A 有特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$, 求 x 的值, 及另外一个特征值 λ_3 。

解 由特征值与矩阵系数关系:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + x + 1 \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & x & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & x \end{vmatrix} = x + 2 \end{cases}$$

例 1 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & x & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 已知 A 有特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$, 求 x 的值, 及另外一个特征值 λ_3 。

解 由特征值与矩阵系数关系:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + x + 1 \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & x & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & x \end{vmatrix} = x + 2 \end{cases}$$

所以

$$\begin{cases} 1 + 2 + \lambda_3 = 2 + x \\ 1 \cdot 2 \cdot \lambda_3 = x + 2 \end{cases}$$

例 1 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & x & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 已知 A 有特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$, 求 x 的值, 及另外一个特征值 λ_3 。

解 由特征值与矩阵系数关系:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + x + 1 \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & x & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & x \end{vmatrix} = x + 2 \end{cases}$$

所以

$$\begin{cases} 1 + 2 + \lambda_3 = 2 + x \\ 1 \cdot 2 \cdot \lambda_3 = x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_3 - x = -1 \\ 2\lambda_3 - x = 2 \end{cases}$$

例 1 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & x & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 已知 A 有特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$, 求 x 的值, 及另外一个特征值 λ_3 。

解 由特征值与矩阵系数关系:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + x + 1 \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & x & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & x \end{vmatrix} = x + 2 \end{cases}$$

所以

$$\begin{cases} 1 + 2 + \lambda_3 = 2 + x \\ 1 \cdot 2 \cdot \lambda_3 = x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_3 - x = -1 \\ 2\lambda_3 - x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_3 = 3 \\ x = 4 \end{cases}$$

例 2 已知 $A = \begin{pmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 有特征值 2, 6, 求 x 的值。

例 2 已知 $A = \begin{pmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 有特征值 2, 6, 求 x 的值。

解 设 A 的第三个特征值为 λ , 由特征值与矩阵系数关系:

例 2 已知 $A = \begin{pmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 有特征值 2, 6, 求 x 的值。

解 设 A 的第三个特征值为 λ , 由特征值与矩阵系数关系:

$$\begin{cases} 2 + 6 + \lambda_3 = x + 4 + 5 \\ \end{cases}$$

例 2 已知 $A = \begin{pmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 有特征值 2, 6, 求 x 的值。

解 设 A 的第三个特征值为 λ_3 , 由特征值与矩阵系数关系:

$$\begin{cases} 2 + 6 + \lambda_3 = x + 4 + 5 \\ 2 \cdot 6 \cdot \lambda_3 = \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{vmatrix} \end{cases}$$

例 2 已知 $A = \begin{pmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 有特征值 2, 6, 求 x 的值。

解 设 A 的第三个特征值为 λ , 由特征值与矩阵系数关系:

$$\begin{cases} 2 + 6 + \lambda_3 = x + 4 + 5 \\ 2 \cdot 6 \cdot \lambda_3 = \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{vmatrix} \end{cases}$$

其中

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3 - 5r_1]{r_2 + 2r_1}$$

例 2 已知 $A = \begin{pmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 有特征值 2, 6, 求 x 的值。

解 设 A 的第三个特征值为 λ , 由特征值与矩阵系数关系:

$$\begin{cases} 2 + 6 + \lambda_3 = x + 4 + 5 \\ 2 \cdot 6 \cdot \lambda_3 = \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{vmatrix} \end{cases}$$

其中

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3 - 5r_1]{r_2 + 2r_1} \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 + 2x & 2 & 0 \\ -3 - 5x & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

例 2 已知 $A = \begin{pmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 有特征值 2, 6, 求 x 的值。

解 设 A 的第三个特征值为 λ , 由特征值与矩阵系数关系:

$$\begin{cases} 2 + 6 + \lambda_3 = x + 4 + 5 \\ 2 \cdot 6 \cdot \lambda_3 = \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{vmatrix} \end{cases}$$

其中

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3 - 5r_1]{r_2 + 2r_1} \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 + 2x & 2 & 0 \\ -3 - 5x & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 + 2x & 2 \\ -3 - 5x & 2 \end{vmatrix}$$

例 2 已知 $A = \begin{pmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 有特征值 2, 6, 求 x 的值。

解 设 A 的第三个特征值为 λ , 由特征值与矩阵系数关系:

$$\begin{cases} 2 + 6 + \lambda_3 = x + 4 + 5 \\ 2 \cdot 6 \cdot \lambda_3 = \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{vmatrix} \end{cases}$$

其中

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3 - 5r_1]{r_2 + 2r_1} \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 + 2x & 2 & 0 \\ -3 - 5x & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 + 2x & 2 \\ -3 - 5x & 2 \end{vmatrix} = 2(7x + 5)$$

例 2 已知 $A = \begin{pmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 有特征值 2, 6, 求 x 的值。

解 设 A 的第三个特征值为 λ , 由特征值与矩阵系数关系:

$$\begin{cases} 2 + 6 + \lambda_3 = x + 4 + 5 \\ 2 \cdot 6 \cdot \lambda_3 = \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{vmatrix} \end{cases}$$

其中

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3 - 5r_1]{r_2 + 2r_1} \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 + 2x & 2 & 0 \\ -3 - 5x & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 + 2x & 2 \\ -3 - 5x & 2 \end{vmatrix} = 2(7x + 5)$$

所以

$$\begin{cases} \lambda_3 - x = 1 \\ 6\lambda_3 - 7x = 5 \end{cases}$$

例 2 已知 $A = \begin{pmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 有特征值 2, 6, 求 x 的值。

解 设 A 的第三个特征值为 λ , 由特征值与矩阵系数关系:

$$\begin{cases} 2 + 6 + \lambda_3 = x + 4 + 5 \\ 2 \cdot 6 \cdot \lambda_3 = \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{vmatrix} \end{cases}$$

其中

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3 - 5r_1]{r_2 + 2r_1} \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 + 2x & 2 & 0 \\ -3 - 5x & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 + 2x & 2 \\ -3 - 5x & 2 \end{vmatrix} = 2(7x + 5)$$

所以

$$\begin{cases} \lambda_3 - x = 1 \\ 6\lambda_3 - 7x = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_3 = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

—————The End—————

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| =$$

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda & -2 \\ -4 & -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix}$$

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda & -2 \\ -4 & -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{r_3 - 2r_2}}$$

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda & -2 \\ -4 & -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{r_3 - 2r_2}} \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda & -2 \\ 0 & -2 - 2\lambda & \lambda + 1 \end{vmatrix}$$

● 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda & -2 \\ -4 & -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{r_3 - 2r_2}} \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda & -2 \\ 0 & -2 - 2\lambda & \lambda + 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda + 1) \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

● 求解特征方程

$$\begin{aligned} 0 = |\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda & -2 \\ -4 & -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow{\underline{\underline{r_3 - 2r_2}}} \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda & -2 \\ 0 & -2 - 2\lambda & \lambda + 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda + 1) \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{c_2 + 2c_3}}} \end{aligned}$$

● 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda & -2 \\ -4 & -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{r_3 - 2r_2}} \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda & -2 \\ 0 & -2 - 2\lambda & \lambda + 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda + 1) \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} \underline{\underline{c_2 + 2c_3}} (\lambda + 1) \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -10 & -4 \\ -2 & \lambda - 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

● 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda & -2 \\ -4 & -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{r_3 - 2r_2}} \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda & -2 \\ 0 & -2 - 2\lambda & \lambda + 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda + 1) \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} \underline{\underline{c_2 + 2c_3}} (\lambda + 1) \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -10 & -4 \\ -2 & \lambda - 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda + 1) \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -10 \\ -2 & \lambda - 4 \end{vmatrix}$$

● 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda & -2 \\ -4 & -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{r_3 - 2r_2}} \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda & -2 \\ 0 & -2 - 2\lambda & \lambda + 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda + 1) \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} \underline{\underline{c_2 + 2c_3}} (\lambda + 1) \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -10 & -4 \\ -2 & \lambda - 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda + 1) \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -10 \\ -2 & \lambda - 4 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda + 1)(\lambda^2 - 7\lambda - 8) =$$

► Back

● 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda & -2 \\ -4 & -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{r_3 - 2r_2}} \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda & -2 \\ 0 & -2 - 2\lambda & \lambda + 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda + 1) \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} \underline{\underline{c_2 + 2c_3}} (\lambda + 1) \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -10 & -4 \\ -2 & \lambda - 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda + 1) \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -10 \\ -2 & \lambda - 4 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda + 1)(\lambda^2 - 7\lambda - 8) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 8)$$

► Back

- 当 $\lambda_1 = -1$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(-I - A : 0) =$$

- 当 $\lambda_1 = -1$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(-I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & -4 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \\ -4 & -2 & -4 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$$

- 当 $\lambda_1 = -1$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(-I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & -4 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \\ -4 & -2 & -4 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

- 当 $\lambda_1 = -1$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$\begin{aligned}(-I - A : 0) &= \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & -4 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \\ -4 & -2 & -4 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)\end{aligned}$$

- 当 $\lambda_1 = -1$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$\begin{aligned} (-I - A : 0) &= \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & -4 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \\ -4 & -2 & -4 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

所以

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$$

- 当 $\lambda_1 = -1$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$\begin{aligned}(-I - A : 0) &= \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & -4 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \\ -4 & -2 & -4 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)\end{aligned}$$

所以

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -2x_1 - 2x_3$$

- 当 $\lambda_1 = -1$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$\begin{aligned} (-I - A : 0) &= \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & -4 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \\ -4 & -2 & -4 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

所以

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -2x_1 - 2x_3$$

基础解系: $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- 当 $\lambda_1 = -1$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$\begin{aligned} (-I - A : 0) &= \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & -4 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \\ -4 & -2 & -4 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

所以

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -2x_1 - 2x_3$$

$$\text{基础解系: } \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- 当 $\lambda_1 = -1$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$\begin{aligned} (-I - A : 0) &= \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & -4 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \\ -4 & -2 & -4 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

所以

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -2x_1 - 2x_3$$

基础解系: $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

- 当 $\lambda_2 = 8$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(8I - A : 0) =$$

- 当 $\lambda_2 = 8$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(8I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -4 & 0 \\ -2 & 8 & -2 & 0 \\ -4 & -2 & 5 & 0 \end{array} \right)$$

- 当 $\lambda_2 = 8$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(8I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -4 & 0 \\ -2 & 8 & -2 & 0 \\ -4 & -2 & 5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{1}{2}r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 5 & 0 \end{array} \right)$$

- 当 $\lambda_2 = 8$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(8I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -4 & 0 \\ -2 & 8 & -2 & 0 \\ -4 & -2 & 5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{1}{2}r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 5 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3 + 4r_2]{r_1 - 5r_2}$$

- 当 $\lambda_2 = 8$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(8I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -4 & 0 \\ -2 & 8 & -2 & 0 \\ -4 & -2 & 5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{1}{2}r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 5 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3+4r_2]{r_1-5r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 18 & -9 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -18 & 9 & 0 \end{array} \right)$$

- 当 $\lambda_2 = 8$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(8I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -4 & 0 \\ -2 & 8 & -2 & 0 \\ -4 & -2 & 5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{1}{2}r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 5 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3+4r_2]{r_1-5r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 18 & -9 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -18 & 9 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- 当 $\lambda_2 = 8$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(8I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -4 & 0 \\ -2 & 8 & -2 & 0 \\ -4 & -2 & 5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{1}{2}r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 5 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3+4r_2]{r_1-5r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 18 & -9 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -18 & 9 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_1-r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- 当 $\lambda_2 = 8$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(8I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -4 & 0 \\ -2 & 8 & -2 & 0 \\ -4 & -2 & 5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{1}{2}r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 5 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3+4r_2]{r_1-5r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 18 & -9 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -18 & 9 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_1-r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

所以
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 & = 0 \end{cases}$$

- 当 $\lambda_2 = 8$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(8I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -4 & 0 \\ -2 & 8 & -2 & 0 \\ -4 & -2 & 5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{1}{2}r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 5 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3+4r_2]{r_1-5r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 18 & -9 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -18 & 9 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_1-r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

所以
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

- 当 $\lambda_2 = 8$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(8I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -4 & 0 \\ -2 & 8 & -2 & 0 \\ -4 & -2 & 5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{1}{2}r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 5 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3+4r_2]{r_1-5r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 18 & -9 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -18 & 9 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_1-r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

所以
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ x_3 = 2x_2 \end{cases}$$

- 当 $\lambda_2 = 8$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(8I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -4 & 0 \\ -2 & 8 & -2 & 0 \\ -4 & -2 & 5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{1}{2}r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 5 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3+4r_2]{r_1-5r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 18 & -9 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -18 & 9 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_1-r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

所以
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ x_3 = 2x_2 \end{cases}$$

基础解系: $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

- 当 $\lambda_2 = 8$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(8I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -4 & 0 \\ -2 & 8 & -2 & 0 \\ -4 & -2 & 5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{1}{2}r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 5 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3+4r_2]{r_1-5r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 18 & -9 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -18 & 9 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_1-r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

所以
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ x_3 = 2x_2 \end{cases}$$

基础解系: $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| =$$

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & -1 \\ -2 & \lambda - 4 & 2 \\ 3 & 3 & \lambda - 5 \end{vmatrix}$$

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & -1 \\ -2 & \lambda - 4 & 2 \\ 3 & 3 & \lambda - 5 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{C_3 + C_2}}$$

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & -1 \\ -2 & \lambda - 4 & 2 \\ 3 & 3 & \lambda - 5 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{C_3 + C_2}} \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & 0 \\ -2 & \lambda - 4 & \lambda - 2 \\ 3 & 3 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$$

● 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & -1 \\ -2 & \lambda - 4 & 2 \\ 3 & 3 & \lambda - 5 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{C_3 + C_2}} \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & 0 \\ -2 & \lambda - 4 & \lambda - 2 \\ 3 & 3 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & 0 \\ -2 & \lambda - 4 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

● 求解特征方程

$$\begin{aligned} 0 = |\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & -1 \\ -2 & \lambda - 4 & 2 \\ 3 & 3 & \lambda - 5 \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow{\underline{\underline{C_3 + C_2}}} \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & 0 \\ -2 & \lambda - 4 & \lambda - 2 \\ 3 & 3 & \lambda - 2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & 0 \\ -2 & \lambda - 4 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{r_2 - r_3}}} \end{aligned}$$

● 求解特征方程

$$\begin{aligned}
 0 = |\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & -1 \\ -2 & \lambda - 4 & 2 \\ 3 & 3 & \lambda - 5 \end{vmatrix} \\
 &\xrightarrow{\underline{\underline{C_3 + C_2}}} \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & 0 \\ -2 & \lambda - 4 & \lambda - 2 \\ 3 & 3 & \lambda - 2 \end{vmatrix} \\
 &= (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & 0 \\ -2 & \lambda - 4 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{r_2 - r_3}}} (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & 0 \\ -5 & \lambda - 7 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

► Back

● 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & -1 \\ -2 & \lambda - 4 & 2 \\ 3 & 3 & \lambda - 5 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3 + c_2} \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & 0 \\ -2 & \lambda - 4 & \lambda - 2 \\ 3 & 3 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & 0 \\ -2 & \lambda - 4 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_3} (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & 0 \\ -5 & \lambda - 7 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -5 & \lambda - 7 \end{vmatrix}$$

● 求解特征方程

$$\begin{aligned}0 &= |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & -1 \\ -2 & \lambda - 4 & 2 \\ 3 & 3 & \lambda - 5 \end{vmatrix} \\&\xrightarrow{c_3 + c_2} \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & 0 \\ -2 & \lambda - 4 & \lambda - 2 \\ 3 & 3 & \lambda - 2 \end{vmatrix} \\&= (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & 0 \\ -2 & \lambda - 4 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_3} (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & 0 \\ -5 & \lambda - 7 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\&= (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -5 & \lambda - 7 \end{vmatrix} \\&= (\lambda - 2)(\lambda^2 - 8\lambda + 12) =\end{aligned}$$

► Back

● 求解特征方程

$$\begin{aligned}0 &= |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & -1 \\ -2 & \lambda - 4 & 2 \\ 3 & 3 & \lambda - 5 \end{vmatrix} \\&\xrightarrow{c_3 + c_2} \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & 0 \\ -2 & \lambda - 4 & \lambda - 2 \\ 3 & 3 & \lambda - 2 \end{vmatrix} \\&= (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & 0 \\ -2 & \lambda - 4 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_3} (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & 0 \\ -5 & \lambda - 7 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\&= (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -5 & \lambda - 7 \end{vmatrix} \\&= (\lambda - 2)(\lambda^2 - 8\lambda + 12) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 6)\end{aligned}$$

► Back

- 当 $\lambda_1 = 2$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(2I - A : 0) =$$

- 当 $\lambda_1 = 2$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(2I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 0 \end{array} \right)$$

- 当 $\lambda_1 = 2$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(2I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- 当 $\lambda_1 = 2$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(2I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

所以

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

- 当 $\lambda_1 = 2$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(2I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

所以

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -x_2 + x_3$$

- 当 $\lambda_1 = 2$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(2I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

所以

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -x_2 + x_3$$

基础解系: $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

► Back

- 当 $\lambda_1 = 2$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(2I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

所以

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -x_2 + x_3$$

基础解系: $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

▸ Back

- 当 $\lambda_1 = 2$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(2I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

所以

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -x_2 + x_3$$

基础解系: $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

► Back

- 当 $\lambda_2 = 6$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(6I - A : 0) =$$

- 当 $\lambda_2 = 6$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(6I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

- 当 $\lambda_2 = 6$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(6I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{1}{2}r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

- 当 $\lambda_2 = 6$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(6I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{1}{2}r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_2]{r_1-5r_2}$$

- 当 $\lambda_2 = 6$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$\begin{aligned}(6I - A : 0) &= \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{1}{2}r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow[r_3+3r_2]{r_1-5r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 6 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 0 \end{array} \right)\end{aligned}$$

- 当 $\lambda_2 = 6$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$\begin{aligned}(6I - A : 0) &= \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{1}{2}r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow[r_3+3r_2]{r_1-5r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 6 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)\end{aligned}$$

- 当 $\lambda_2 = 6$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(6I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{1}{2}r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_2]{r_1-5r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 6 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3} \times r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- 当 $\lambda_2 = 6$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(6I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{1}{2}r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_2]{r_1-5r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 6 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3} \times r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1+r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- 当 $\lambda_2 = 6$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(6I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{1}{2}r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_2]{r_1-5r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 6 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3} \times r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1+r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

所以
$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{3}x_3 = 0 \end{cases}$$

- 当 $\lambda_2 = 6$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(6I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{1}{2}r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_2]{r_1-5r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 6 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3} \times r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1+r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

所以
$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{3}x_3 = 0 \\ x_2 + \frac{2}{3}x_3 = 0 \end{cases}$$

- 当 $\lambda_2 = 6$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(6I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{1}{2}r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_2]{r_1-5r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 6 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3} \times r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1+r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

所以
$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{3}x_3 = 0 \\ x_2 + \frac{2}{3}x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}x_3 \\ x_2 = -\frac{2}{3}x_3 \end{cases}$$

- 当 $\lambda_2 = 6$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(6I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{1}{2}r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_2]{r_1-5r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 6 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3} \times r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1+r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

所以
$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{3}x_3 = 0 \\ x_2 + \frac{2}{3}x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}x_3 \\ x_2 = -\frac{2}{3}x_3 \end{cases}$$

基础解系:

- 当 $\lambda_2 = 6$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(6I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{1}{2}r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_2]{r_1-5r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 6 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3} \times r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1+r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

所以
$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{3}x_3 = 0 \\ x_2 + \frac{2}{3}x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}x_3 \\ x_2 = -\frac{2}{3}x_3 \end{cases}$$

基础解系: $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

- 当 $\lambda_2 = 6$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(6I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{1}{2}r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_2]{r_1-5r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 6 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3} \times r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1+r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

所以
$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{3}x_3 = 0 \\ x_2 + \frac{2}{3}x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}x_3 \\ x_2 = -\frac{2}{3}x_3 \end{cases}$$

基础解系: $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

- 当 $\lambda_2 = 6$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(6I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{1}{2}r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_2]{r_1-5r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 6 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3} \times r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1+r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

所以
$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{3}x_3 = 0 \\ x_2 + \frac{2}{3}x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}x_3 \\ x_2 = -\frac{2}{3}x_3 \end{cases}$$

基础解系: $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| =$$

► Back

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda - 3 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$$

► Back

- 求解特征方程

$$\begin{aligned} 0 = |\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda - 3 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 3) \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

- 求解特征方程

$$\begin{aligned} 0 = |\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda - 3 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 3) \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 3) \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 \\ -2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

► Back

- 求解特征方程

$$\begin{aligned} 0 = |\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda - 3 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 3) \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 3) \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 \\ -2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 3)(\lambda^2 - 4\lambda) = \end{aligned}$$

► Back

- 求解特征方程

$$\begin{aligned} 0 = |\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda - 3 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 3) \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 3) \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 \\ -2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 3)(\lambda^2 - 4\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda - 4)\lambda \end{aligned}$$

► Back

- 当 $\lambda_1 = 0$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(0I - A : 0) =$$

- 当 $\lambda_1 = 0$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(0I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

- 当 $\lambda_1 = 0$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(0I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- 当 $\lambda_1 = 0$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(0I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

所以

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

- 当 $\lambda_1 = 0$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(0I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

所以

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

- 当 $\lambda_1 = 0$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(0I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

所以

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

- 当 $\lambda_1 = 0$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(0I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

所以

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

基础解系: $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

► Back

- 当 $\lambda_1 = 0$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(0I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

所以

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

基础解系: $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

► Back

- 当 $\lambda_1 = 0$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(0I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

所以

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

基础解系: $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

► Back

- 当 $\lambda_2 = 3$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(3I - A : 0) =$$

- 当 $\lambda_2 = 3$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(3I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

- 当 $\lambda_2 = 3$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(3I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- 当 $\lambda_2 = 3$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(3I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- 当 $\lambda_2 = 3$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$\begin{aligned}(3I - A : 0) &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)\end{aligned}$$

- 当 $\lambda_2 = 3$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$\begin{aligned}(3I - A : 0) &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)\end{aligned}$$

所以

$$\begin{cases} x_1 \\ \end{cases} = 0$$

- 当 $\lambda_2 = 3$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(3I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

所以

$$\begin{cases} x_1 & = 0 \\ x_3 & = 0 \end{cases}$$

- 当 $\lambda_2 = 3$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$\begin{aligned}(3I - A : 0) &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)\end{aligned}$$

所以

$$\begin{cases} x_1 & = 0 \\ x_3 & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

- 当 $\lambda_2 = 3$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$\begin{aligned}(3I - A : 0) &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)\end{aligned}$$

所以

$$\begin{cases} x_1 & = 0 \\ x_3 & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{基础解系: } \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ \end{pmatrix}$$

- 当 $\lambda_2 = 3$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$\begin{aligned}(3I - A : 0) &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)\end{aligned}$$

所以

$$\begin{cases} x_1 & = 0 \\ x_3 & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

基础解系: $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- 当 $\lambda_2 = 3$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$\begin{aligned}(3I - A : 0) &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)\end{aligned}$$

所以

$$\begin{cases} x_1 & = 0 \\ x_3 & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

基础解系: $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- 当 $\lambda_3 = 4$, 求解 $(\lambda_3 I - A)x = 0$:

$$(4I - A : 0) =$$

- 当 $\lambda_3 = 4$, 求解 $(\lambda_3 I - A)x = 0$:

$$(4I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

- 当 $\lambda_3 = 4$, 求解 $(\lambda_3 I - A)x = 0$:

$$(4I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- 当 $\lambda_3 = 4$, 求解 $(\lambda_3 I - A)x = 0$:

$$(4I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

所以

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

- 当 $\lambda_3 = 4$, 求解 $(\lambda_3 I - A)x = 0$:

$$(4I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

所以

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

- 当 $\lambda_3 = 4$, 求解 $(\lambda_3 I - A)x = 0$:

$$(4I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

所以

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

- 当 $\lambda_3 = 4$, 求解 $(\lambda_3 I - A)x = 0$:

$$(4I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

所以

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

基础解系: $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

► Back

- 当 $\lambda_3 = 4$, 求解 $(\lambda_3 I - A)x = 0$:

$$(4I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

所以

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

基础解系: $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

► Back

- 当 $\lambda_3 = 4$, 求解 $(\lambda_3 I - A)x = 0$:

$$(4I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

所以

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

基础解系: $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

► Back

代数学基本定理 n 次多项式方程

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

在复数域上一定有 n 个根（计算重数）。

▸ back

代数学基本定理 n 次多项式方程

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

在复数域上一定有 n 个根（计算重数）。

例 1 $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$

代数学基本定理 n 次多项式方程

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

在复数域上一定有 n 个根（计算重数）。

例 1 $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$

代数学基本定理 n 次多项式方程

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

在复数域上一定有 n 个根（计算重数）。

例 1 $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$ 有三个根

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 2$$

代数学基本定理 n 次多项式方程

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

在复数域上一定有 n 个根 (计算重数)。

例 1 $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$ 有三个根

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 2$$

例 2 $\lambda^2 + 1 = 0$

▶ back

代数学基本定理 n 次多项式方程

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

在复数域上一定有 n 个根 (计算重数)。

例 1 $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$ 有三个根

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 2$$

例 2 $\lambda^2 + 1 = 0$ 有两个 (复) 根

$$\lambda_1 = \sqrt{-1}, \quad \lambda_2 = -\sqrt{-1}$$

▶ back