第 07 周作业解答

练习 1. 3 阶方阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&k\\1&4&k^2\end{pmatrix}$ 可逆时，k 满足什么条件?

解

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&k\\1&4&k^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&k-1\\0&3&k^2-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&k-1\\3&k^2-1\end{vmatrix}=k^2-3k+2=(k-1)(k-2)$$

A 可逆 $\Leftrightarrow |A|\neq 0 \Leftrightarrow k\neq 1$ 且 $k\neq 2$

练习 2. 设 $A=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&5\end{pmatrix}$ 及 $AB=\begin{pmatrix}-1&2&-1\\6&-9&3\end{pmatrix}$，求出矩阵 B。

解由题意知:

$$\begin{pmatrix}1&-2\\-2&5\end{pmatrix}B=\begin{pmatrix}-1&2&-1\\6&-9&3\end{pmatrix}$$

所以

$$B=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&5\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}-1&2&-1\\6&-9&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2&-1\\6&-9&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&-8&1\\4&-5&1\end{pmatrix}$$

练习 3. 假设 n 阶方阵 A 满足 $A^2-3A-5I=O$，证明 $A+I$ 可逆，并求 $(A+I)^{-1}$。

解因为

$$A^2-3A-5I=O \quad\Rightarrow\quad A^2-3A-4I=I \quad\Rightarrow\quad (A+I)(A-4I)=I$$

所以 $A+I$ 可逆，且 $(A+I)^{-1}=A-4I$。

练习 4. 将 4 阶方阵 M 作如下分块

$$M=\left(\begin{array}{cc:cc}1&0&0&0\\3&-1&0&0\\\hdashline 1&0&-1&0\\0&1&-3&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A&O\\I&-A\end{pmatrix}$$

请按此分块方式计算 M^2。

解

$$M^2=\begin{pmatrix}A&O\\I&-A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&O\\I&-A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}AA+OI&AO+O(-A)\\IA+(-A)I&IO+(-A)(-A)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A^2&O\\O&A^2\end{pmatrix}$$

而

$$A^2=\begin{pmatrix}1&0\\3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I$$

所以

$$M=\begin{pmatrix}I&O\\O&I\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{cc:cc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\\hdashline 0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right)$$

练习 5. 将矩阵 A, B 作如下分块

$$A=\left(\begin{array}{c:cc} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ \hdashline 3 & 1 & 0 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_1 & 2I \\ 3 & A_2 \end{pmatrix},\quad B=\left(\begin{array}{cc:cc} 2 & 7 & 0 & 0 \\ \hdashline -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} B_1 & O \\ -I & B_2 \end{pmatrix},$$

请按此分块方式计算乘积 AB。

解

$$AB=\begin{pmatrix} A_1 & 2I \\ 3 & A_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & O \\ -I & B_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1B_1+2I(-I) & A_1O+2IB_2 \\ 3B_1+A_2(-I) & 3O+A_2B_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1B_1-2I & 2B_2 \\ 3B_1-A_2 & A_2B_2 \end{pmatrix}$$

其中

$$A_1B_1-2I=\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 7 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 35 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},\quad A_2B_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}$$

所以

$$M=\left(\begin{array}{cc:cc} 8 & 35 & 2 & 8 \\ 0 & -2 & 4 & 10 \\ \hdashline 5 & 21 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

练习 6. 设

$$M=\begin{pmatrix} O_{r\times s} & A_{r\times r} \\ B_{s\times s} & O_{s\times r} \end{pmatrix}$$

其中 A, B 分别为 r, s 阶可逆方阵，求 M 的逆矩阵 M^{-1}。

解设

$$M^{-1}=\begin{pmatrix} U_{s\times r} & V_{s\times s} \\ W_{r\times r} & X_{r\times s} \end{pmatrix}$$

应有

$$MM^{-1}=\begin{pmatrix} O_{r\times s} & A_{r\times r} \\ B_{s\times s} & O_{s\times r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_{s\times r} & V_{s\times s} \\ W_{r\times r} & X_{r\times s} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} OU+AW & OV+AX \\ BU+OW & BV+OX \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AW & AX \\ BU & BV \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_r & O_{r\times s} \\ O_{s\times r} & I_s \end{pmatrix}$$

故须

$$AW=I,\quad AX=O,\quad BU=O,\quad BV=I$$

利用 A, B 可逆条件，可解出

$$W=A^{-1},\quad X=O,\quad U=O,\quad V=B^{-1}$$

所以

$$M^{-1}=\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$$