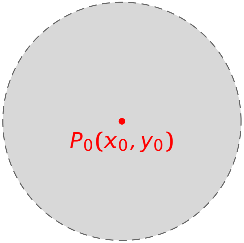
§8.3 二元函数的极限与连续

2017-2018 学年 II

二元函数的极限

定义

- 设 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的一去心邻域内有定义

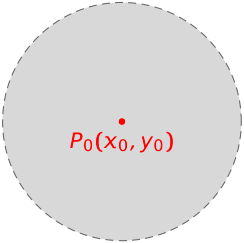


二元函数的极限

定义

- 设 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的一去心邻域内有定义

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = A \quad 或 \quad \lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x, y) = A$$

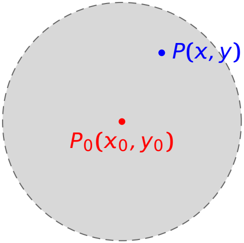


二元函数的极限

定义

- 设 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的一去心邻域内有定义

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = A \quad \text{或} \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = A$$

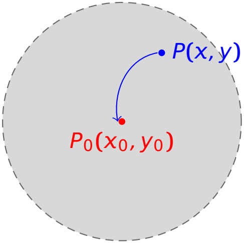


二元函数的极限

定义

- 设 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的一去心邻域内有定义

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = A \quad \text{或} \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = A$$

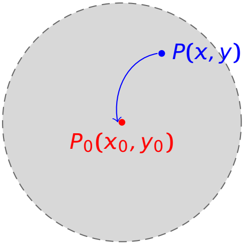


二元函数的极限

定义

- 设 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的一去心邻域内有定义

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = A \quad \text{或} \quad \lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x, y) = A$$



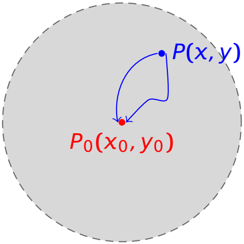
$$\Rightarrow \quad f(x, y) \to A$$

二元函数的极限

定义

- 设 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的一去心邻域内有定义

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = A \quad 或 \quad \lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x, y) = A$$



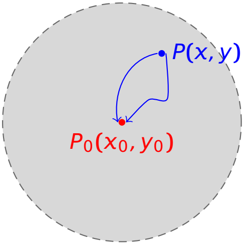
$$\Rightarrow \quad f(x, y) \to A$$

二元函数的极限

定义

- 设 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的一去心邻域内有定义
- 动点 $P(x, y)$ 以 <u>任何方式</u> 无限趋近于点 $P_0(x_0, y_0)$ 时，函数值 $f(x, y)$ 无限趋于同一个常数 A

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = A \quad \text{或} \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = A$$



$$\Rightarrow \quad f(x, y) \to A$$

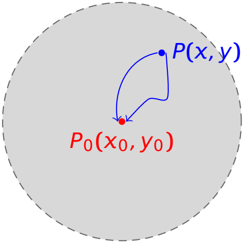
二元函数的极限

定义

- 设 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的一去心邻域内有定义
- 动点 $P(x, y)$ 以 任何方式 无限趋近于点 $P_0(x_0, y_0)$ 时，函数值 $f(x, y)$ 无限趋于同一个常数 A

则 称常数 A 为函数 $z = f(x, y)$ 当 $(x, y) \to (x_0, y_0)$ 时的极限（或二重极限），记为

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = A \quad \text{或} \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = A$$



$$\Rightarrow \quad f(x, y) \to A$$

例 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$

例 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$

解 $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} \overset{令u=x^2+y^2}{=\!=\!=\!=\!=}$$

例 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$

解 $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} \xlongequal{令u=x^2+y^2} \lim u\sin\frac{1}{u}$$

例 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$

解 $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} \xlongequal{令u=x^2+y^2} \lim_{u\to 0} u\sin\frac{1}{u}$$

例 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$

解 $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} \xlongequal{\text{令}u=x^2+y^2} \lim_{u\to 0} u\sin\frac{1}{u}=0.$$

例 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$

解 $$\lim_{\substack{x\to0\\ y\to0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\xlongequal{\text{令}u=x^2+y^2}\lim_{u\to0}u\sin\frac{1}{u}=0.$$

例 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$

解

例 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$

解 $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} \xlongequal{\text{令}u=x^2+y^2} \lim_{u\to 0}u\sin\frac{1}{u}=0.$$

例 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$

解

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy} \xlongequal{\text{令}u=xy}$$

例 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$

解

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} \xlongequal{令u=x^2+y^2} \lim_{u\to 0} u\sin\frac{1}{u}=0.$$

例 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$

解

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy} \xlongequal{令u=xy} \lim \frac{2-\sqrt{u+4}}{u}$$

例 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$

解

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} \xlongequal{令u=x^2+y^2} \lim_{u\to 0} u\sin\frac{1}{u} = 0.$$

例 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$

解

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy} \xlongequal{令u=xy} \lim_{u\to 0}\frac{2-\sqrt{u+4}}{u}$$

例 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$

解 $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} \xlongequal{令u=x^2+y^2} \lim_{u\to 0} u\sin\frac{1}{u} = 0.$$

例 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$

解

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy} \xlongequal{令u=xy} \lim_{u\to 0}\frac{2-\sqrt{u+4}}{u}$$

$\downarrow$洛必达法则

例 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$

解 $$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\overset{\text{令}u=x^2+y^2}{=\!=\!=\!=}\lim_{u\to0}u\sin\frac{1}{u}=0.$$

例 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$

解

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}\overset{\text{令}u=xy}{=\!=\!=}\lim_{u\to0}\frac{2-\sqrt{u+4}}{u}$$

↓洛必达法则

$$=\lim_{u\to0}\frac{\left[2-(u+4)^{1/2}\right]'}{u'}$$

例 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$

解
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\xlongequal{\text{令}u=x^2+y^2}\lim_{u\to 0}u\sin\frac{1}{u}=0.$$

例 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$

解
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}\xlongequal{\text{令}u=xy}\lim_{u\to 0}\frac{2-\sqrt{u+4}}{u}\qquad\downarrow\text{洛必达法则}$$
$$=\lim_{u\to 0}\frac{\left[2-(u+4)^{1/2}\right]'}{u'}=\lim_{u\to 0}\underline{\qquad\qquad\qquad}$$

例 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$

解 $$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\xlongequal{\text{令}u=x^2+y^2}\lim_{u\to0}u\sin\frac{1}{u}=0.$$

例 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$

解

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}\xlongequal{\text{令}u=xy}\lim_{u\to0}\frac{2-\sqrt{u+4}}{u}\qquad\downarrow\text{洛必达法则}$$

$$=\lim_{u\to0}\frac{\left[2-(u+4)^{1/2}\right]'}{u'}=\lim_{u\to0}\frac{\qquad}{1}$$

例 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$

解

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} \xlongequal{\text{令}u=x^2+y^2} \lim_{u\to 0} u\sin\frac{1}{u} = 0.$$

例 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$

解

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy} \xlongequal{\text{令}u=xy} \lim_{u\to 0}\frac{2-\sqrt{u+4}}{u} \qquad \downarrow\text{洛必达法则}$$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{\left[2-(u+4)^{1/2}\right]'}{u'} = \lim_{u\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(u+4)^{-1/2}}{1}$$

例 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$

解 $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} \xlongequal{令u=x^2+y^2} \lim_{u\to 0} u\sin\frac{1}{u}=0.$$

例 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$

解

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy} \xlongequal{令u=xy} \lim_{u\to 0}\frac{2-\sqrt{u+4}}{u} \qquad \downarrow 洛必达法则$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{\left[2-(u+4)^{1/2}\right]'}{u'}=\lim_{u\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(u+4)^{-1/2}}{1}$$

$$=\lim_{u\to 0}-\frac{1}{2(u+4)^{1/2}}$$

例 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$

解 $$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} \xlongequal{令u=x^2+y^2} \lim_{u\to0}u\sin\frac{1}{u}=0.$$

例 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$

解

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy} \xlongequal{令u=xy} \lim_{u\to0}\frac{2-\sqrt{u+4}}{u} \quad \downarrow 洛必达法则$$

$$=\lim_{u\to0}\frac{\left[2-(u+4)^{1/2}\right]'}{u'}=\lim_{u\to0}\frac{-\frac{1}{2}(u+4)^{-1/2}}{1}$$

$$=\lim_{u\to0}-\frac{1}{2(u+4)^{1/2}}=-\frac{1}{4}$$

暨南大学 JINAN UNIVERSITY

连续性

定义

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

则称 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续。

连续性

定义 设 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某一邻域内有定义，若

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

则称 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续。

连续性

定义 设 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某一邻域内有定义，若

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

则称 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续。若 $z = f(x, y)$ 在定义域上每一点处连续，则称 $z = f(x, y)$ 是连续函数。

连续性

定义 设 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某一邻域内有定义，若

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

则称 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续。若 $z = f(x, y)$ 在定义域上每一点处连续，则称 $z = f(x, y)$ 是连续函数。

注

- 二元初等函数在其定义域内是连续函数

连续性

定义 设 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某一邻域内有定义，若

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

则称 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续。若 $z = f(x, y)$ 在定义域上每一点处连续，则称 $z = f(x, y)$ 是连续函数。

注

- 二元初等函数：由 x 和 y 的基本初等函数经有限次的四则运算、复合运算所得的表达式
- 二元初等函数在其定义域内是连续函数

连续性

定义 设 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某一邻域内有定义，若

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

则称 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续。若 $z = f(x, y)$ 在定义域上每一点处连续，则称 $z = f(x, y)$ 是连续函数。

注

- 二元初等函数：由 x 和 y 的基本初等函数经有限次的四则运算、复合运算所得的表达式
- 二元初等函数在其定义域内是连续函数
- 二元初等函数在定义域内一点 (x_0, y_0) 的极限值，等于该点处的函数值

连续性

定义 设 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某一邻域内有定义，若

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

则称 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续。若 $z = f(x, y)$ 在定义域上每一点处连续，则称 $z = f(x, y)$ 是连续函数。

注

- 二元初等函数：由 x 和 y 的基本初等函数经有限次的四则运算、复合运算所得的表达式
- 二元初等函数在其定义域内是连续函数
- 二元初等函数在定义域内一点 (x_0, y_0) 的极限值，等于该点处的函数值

例

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} 2xy + e^{x+y}$$

连续性

定义 设 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某一邻域内有定义，若

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

则称 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续。若 $z = f(x, y)$ 在定义域上每一点处连续，则称 $z = f(x, y)$ 是连续函数。

注

- 二元初等函数：由 x 和 y 的基本初等函数经有限次的四则运算、复合运算所得的表达式
- 二元初等函数在其定义域内是连续函数
- 二元初等函数在定义域内一点 (x_0, y_0) 的极限值，等于该点处的函数值

例

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} 2xy + e^{x+y} = 2 \cdot 1 \cdot 2 + e^{1+2}$$

连续性

定义 设 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内有定义，若

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

则称 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续。若 $z=f(x,y)$ 在定义域上每一点处连续，则称 $z=f(x,y)$ 是连续函数。

注

- 二元初等函数：由 x 和 y 的基本初等函数经有限次的四则运算、复合运算所得的表达式
- 二元初等函数在其定义域内是连续函数
- 二元初等函数在定义域内一点 (x_0,y_0) 的极限值，等于该点处的函数值

例

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} 2xy+e^{x+y}=2\cdot 1\cdot 2+e^{1+2}=4+e^3$$

例 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \dfrac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2}$，$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

例 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2}$， $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

解

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

例 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2}$， $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

解

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2} = \frac{2\cdot 2^2-3\cdot 1^2}{2^2+1^2}$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

例 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2}$，$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

解

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2} = \frac{2\cdot 2^2-3\cdot 1^2}{2^2+1^2} = 1$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

例 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2}$，$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

解

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2} = \frac{2\cdot 2^2-3\cdot 1^2}{2^2+1^2} = 1$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\ln(1+e^0)}{\sqrt{1^2+0^2}}$$

例 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2}$， $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

解

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2} = \frac{2\cdot 2^2-3\cdot 1^2}{2^2+1^2} = 1$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\ln(1+e^0)}{\sqrt{1^2+0^2}} = \ln 2$$

例 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2}$，$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

解

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2} = \frac{2\cdot 2^2-3\cdot 1^2}{2^2+1^2} = 1$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\ln(1+e^0)}{\sqrt{1^2+0^2}} = \ln 2$$

例 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -1}} \frac{x+y}{x^2-y^2}$

解

例 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2}$，$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

解

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2} = \frac{2\cdot 2^2-3\cdot 1^2}{2^2+1^2} = 1$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\ln(1+e^0)}{\sqrt{1^2+0^2}} = \ln 2$$

例 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -1}} \frac{x+y}{x^2-y^2}$

解

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to -1}} \frac{x+y}{x^2-y^2} =$$

例 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2}$， $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

解

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2} = \frac{2\cdot 2^2-3\cdot 1^2}{2^2+1^2} = 1$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\ln(1+e^0)}{\sqrt{1^2+0^2}} = \ln 2$$

例 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -1}} \frac{x+y}{x^2-y^2}$

解

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to -1}} \frac{x+y}{x^2-y^2} = \lim_{\substack{x\to 1\\ y\to -1}} \frac{x+y}{(x+y)(x-y)}$$

例 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2}$，$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

解

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2} = \frac{2\cdot 2^2-3\cdot 1^2}{2^2+1^2} = 1$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\ln(1+e^0)}{\sqrt{1^2+0^2}} = \ln 2$$

例 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -1}} \frac{x+y}{x^2-y^2}$

解

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to -1}} \frac{x+y}{x^2-y^2} = \lim_{\substack{x\to 1\\ y\to -1}} \frac{x+y}{(x+y)(x-y)}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 1\\ y\to -1}} \frac{1}{x-y}$$

例 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2}$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

解

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2} = \frac{2\cdot 2^2-3\cdot 1^2}{2^2+1^2} = 1$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\ln(1+e^0)}{\sqrt{1^2+0^2}} = \ln 2$$

例 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -1}} \frac{x+y}{x^2-y^2}$

解

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to -1}} \frac{x+y}{x^2-y^2} = \lim_{\substack{x\to 1\\ y\to -1}} \frac{x+y}{(x+y)(x-y)}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 1\\ y\to -1}} \frac{1}{x-y} = \frac{1}{1-(-1)}$$

例 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2}$，$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

解

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2} = \frac{2\cdot 2^2-3\cdot 1^2}{2^2+1^2} = 1$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\ln(1+e^0)}{\sqrt{1^2+0^2}} = \ln 2$$

例 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -1}} \frac{x+y}{x^2-y^2}$

解

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to -1}} \frac{x+y}{x^2-y^2} = \lim_{\substack{x\to 1\\ y\to -1}} \frac{x+y}{(x+y)(x-y)}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 1\\ y\to -1}} \frac{1}{x-y} = \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2}$$

最大值和最小值定理

回忆 有 界闭区间 上的 连续函数 $y = f(x)$ 有最大值和最小值，并且能取到。

最大值和最小值定理

回忆 有 <u>界闭区间</u> 上的 <u>连续函数</u> $y = f(x)$ 有最大值和最小值，并且能取到。

定理 <u>有界闭区域</u> 上的 <u>连续函数</u> $z = f(x, y)$ 一定有最大值和最小值，并且能取到。

最大值和最小值定理

回忆 有 界闭区间 上的 连续函数 $y = f(x)$ 有最大值和最小值，并且能取到。

定理 有界闭区域 上的 连续函数 $z = f(x, y)$ 一定有最大值和最小值，并且能取到。

注 “有界闭区域”，“连续性”不能少，否则不一定有最大、最小值。

介值定理

回忆 有 界闭区间 上的 连续函数 的介值定理是什么说？

介值定理

回忆 有 界闭区间 上的 连续函数 的介值定理是什么说？

定理 设

- $z = f(x, y)$ 是 有界闭区域 $\overline{D}$ 上的 连续函数；

介值定理

回忆 有 界闭区间 上的 连续函数 的介值定理是什么说？

定理 设

- $z = f(x, y)$ 是 有界闭区域 $\overline{D}$ 上的 连续函数；
- C 是介于 $f(x, y)$ 最大值与最小值之间的任意一个数。

介值定理

回忆 有 <u>界闭区间</u> 上的 <u>连续函数</u> 的介值定理是什么说？

定理 设

- $z = f(x, y)$ 是 <u>有界闭区域</u> $\overline{D}$ 上的 <u>连续函数</u>；
- C 是介于 $f(x, y)$ 最大值与最小值之间的任意一个数。

则至少存在一点 $(\xi, \eta) \in \overline{D}$，使得 $f(\xi, \eta) = C$。