

第 06 周作业

练习 1. 令 $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ 。证明 $Av = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \theta) \\ \sin(\alpha + \theta) \end{pmatrix}$, 并计算 A^n 。

练习 2. 求满足 $A^2 = O$ 的所有 2×2 矩阵 A 。

练习 3. 设 A 为 n 阶方阵, 分别解答:

1. 假设 $|A| = -2$, 计算 $|2A|A^T|$ 。
2. 假设 $AA^T = I_n$ 且 $|A| < 0$, 计算 $|A|$ 。

练习 4. 判断 2 阶方阵 $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出逆矩阵。

练习 5. 判断 3 阶方阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出逆矩阵。

练习 6. 3 阶方阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & k \\ 1 & 4 & k^2 \end{pmatrix}$ 可逆时, k 满足什么条件?

练习 7. 设 M_n 是 n 阶方阵, $n \geq 2$, 全部元素按列次序为 $1, 2, 3, \dots, n^2$ 。例如

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}.$$

问当 n 为何值时, M_n 可逆。

练习 8. 假设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 - 3A - 5I = O$, 证明 $A + I$ 可逆, 并求 $(A + I)^{-1}$ 。

练习 9. 设 A 为 4 阶方阵, 满足 $|A| = \frac{1}{2}$, 求 $|(3A)^{-1} - 2A^*|$ 的值。

练习 10. 设 A, B 为 n 阶对称方阵, 证明方阵 $AB + BA$ 也是对称。