第 2 章 f：矩阵的初等变换

数学系　　梁卓滨

2020-2021 学年 I

We are here now...

1. 初等变换，初等矩阵

2. 等价标准形

3. 初等行变换求逆矩阵

矩阵的初等变换

初等行变换

初等列变换

矩阵的初等变换

初等行变换

- 交换第 i 行和第 j 行:
- 第 i 行乘以 k 倍（$k \neq 0$）:
- 第 i 行加上第 j 行的 l 倍:

初等列变换

矩阵的初等变换

初等行变换

- 交换第 i 行和第 j 行:
- 第 i 行乘以 k 倍（$k \neq 0$):
- 第 i 行加上第 j 行的 l 倍:

初等列变换

- 交换第 i 列和第 j 列:
- 第 i 列乘以 k 倍（$k \neq 0$):
- 第 i 列加上第 j 列的 l 倍:

矩阵的初等变换

初等行变换

- 交换第 i 行和第 j 行: $r_i \longleftrightarrow r_j$
- 第 i 行乘以 k 倍 ($k \neq 0$):
- 第 i 行加上第 j 行的 l 倍:

初等列变换

- 交换第 i 列和第 j 列:
- 第 i 列乘以 k 倍 ($k \neq 0$):
- 第 i 列加上第 j 列的 l 倍:

矩阵的初等变换

初等行变换

- 交换第 i 行和第 j 行：$r_i \longleftrightarrow r_j$
- 第 i 行乘以 k 倍（$k \neq 0$）：$k \times r_i$
- 第 i 行加上第 j 行的 l 倍：

初等列变换

- 交换第 i 列和第 j 列：
- 第 i 列乘以 k 倍（$k \neq 0$）：
- 第 i 列加上第 j 列的 l 倍：

矩阵的初等变换

初等行变换

- 交换第 i 行和第 j 行：$r_i \leftrightarrow r_j$
- 第 i 行乘以 k 倍（$k \neq 0$）：$k \times r_i$
- 第 i 行加上第 j 行的 l 倍：$r_i + lr_j$

初等列变换

- 交换第 i 列和第 j 列：
- 第 i 列乘以 k 倍（$k \neq 0$）：
- 第 i 列加上第 j 列的 l 倍：

矩阵的初等变换

初等行变换

- 交换第 i 行和第 j 行：$r_i \leftrightarrow r_j$
- 第 i 行乘以 k 倍（$k \neq 0$）：$k \times r_i$
- 第 i 行加上第 j 行的 l 倍：$r_i + lr_j$

初等列变换

- 交换第 i 列和第 j 列：$c_i \leftrightarrow c_j$
- 第 i 列乘以 k 倍（$k \neq 0$）：
- 第 i 列加上第 j 列的 l 倍：

矩阵的初等变换

初等行变换

- 交换第 i 行和第 j 行：$r_i \leftrightarrow r_j$
- 第 i 行乘以 k 倍（$k \neq 0$）：$k \times r_i$
- 第 i 行加上第 j 行的 l 倍：$r_i + lr_j$

初等列变换

- 交换第 i 列和第 j 列：$c_i \leftrightarrow c_j$
- 第 i 列乘以 k 倍（$k \neq 0$）：$k \times c_i$
- 第 i 列加上第 j 列的 l 倍：

矩阵的初等变换

初等行变换

- 交换第 i 行和第 j 行：$r_i \leftrightarrow r_j$
- 第 i 行乘以 k 倍（$k \neq 0$）：$k \times r_i$
- 第 i 行加上第 j 行的 l 倍：$r_i + lr_j$

初等列变换

- 交换第 i 列和第 j 列：$c_i \leftrightarrow c_j$
- 第 i 列乘以 k 倍（$k \neq 0$）：$k \times c_i$
- 第 i 列加上第 j 列的 l 倍：$c_i + lc_j$

例
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \longleftrightarrow r_2}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2 - c_3}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2 - c_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2 - c_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注 变换前后是两个不同的矩阵，故用“$\rightarrow$”，而不用“$=$”。

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2 - c_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注 变换前后是两个不同的矩阵，故用“$\rightarrow$”，而不用“$=$”。区别行列式的变换：

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2 - c_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注 变换前后是两个不同的矩阵，故用“→”，而不用“=”。区别行列式的变换：

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_1 \leftrightarrow r_2}{=\!=\!=}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2 - c_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注 变换前后是两个不同的矩阵，故用“$\rightarrow$”，而不用“$=$”。区别行列式的变换：

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2 - c_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注 变换前后是两个不同的矩阵，故用“→”，而不用“=”。区别行列式的变换：

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_1 \leftrightarrow r_2}{=\!=\!=} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_2 - 3r_1}{=\!=\!=}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2 - c_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注 变换前后是两个不同的矩阵，故用 “$\rightarrow$”，而不用 “$=$”。区别行列式的变换：

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 - 3r_1} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

例 $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{c_2 - c_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注 变换前后是两个不同的矩阵，故用"→"，而不用"="。区别行列式的变换：

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_1 \leftrightarrow r_2}{=\!=\!=} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_2 - 3r_1}{=\!=\!=} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_2 - c_3}{=\!=\!=}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2 - c_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注 变换前后是两个不同的矩阵，故用“→”，而不用“=”。区别行列式的变换：

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_1 \leftrightarrow r_2}{=\!=\!=} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_2 - 3r_1}{=\!=\!=} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_2 - c_3}{=\!=\!=} -\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2 - c_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注 变换前后是两个不同的矩阵，故用“→”，而不用“=”。区别行列式的变换：

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_1 \leftrightarrow r_2}{=\!=\!=} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_2 - 3r_1}{=\!=\!=} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_2 - c_3}{=\!=\!=} - \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -8$$

初等矩阵

定义 对 n 阶单位矩阵 I 施以一次初等变换得到的矩阵，称为 **初等矩阵** 。

初等矩阵

定义 对 n 阶单位矩阵 I 施以一次初等变换得到的矩阵，称为 **初等矩阵**。具体地，有如下的初等矩阵：

- 对 I 施以第一种初等变换（$r_i \leftrightarrow r_j$ 或 $c_i \leftrightarrow c_j$）得到的矩阵；

初等矩阵

定义 对 n 阶单位矩阵 I 施以一次初等变换得到的矩阵，称为 **初等矩阵**。具体地，有如下的初等矩阵：

- 对 I 施以第一种初等变换（$r_i \leftrightarrow r_j$ 或 $c_i \leftrightarrow c_j$）得到的矩阵；
- 对 I 施以第二种初等变换（$k \times r_i$ 或 $k \times c_i$）得到的矩阵；

初等矩阵

定义 对 n 阶单位矩阵 I 施以一次初等变换得到的矩阵，称为 **初等矩阵**。具体地，有如下的初等矩阵：

- 对 I 施以第一种初等变换（$r_i \leftrightarrow r_j$ 或 $c_i \leftrightarrow c_j$）得到的矩阵；
- 对 I 施以第二种初等变换（$k \times r_i$ 或 $k \times c_i$）得到的矩阵；
- 对 I 施以第三种初等变换（$r_i + lr_j$ 或 $c_i + lc_j$）得到的矩阵。

初等矩阵

定义 对 n 阶单位矩阵 I 施以一次初等变换得到的矩阵，称为 **初等矩阵** 。具体地，有如下的初等矩阵：

- 对 I 施以第一种初等变换（$r_i \leftrightarrow r_j$ 或 $c_i \leftrightarrow c_j$）得到的矩阵；
- 对 I 施以第二种初等变换（$k \times r_i$ 或 $k \times c_i$）得到的矩阵；
- 对 I 施以第三种初等变换（$r_i + lr_j$ 或 $c_i + lc_j$）得到的矩阵。

下面我们以 3 阶初等矩阵为例，进行讨论。

确定全部的 3 阶初等矩阵。

确定全部的 3 阶初等矩阵。

- 对 3 阶单位矩阵施以第一种初等变换：

确定全部的 3 阶初等矩阵。

- 对 3 阶单位矩阵施以第一种初等变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3}$$

确定全部的 3 阶初等矩阵。

- 对 3 阶单位矩阵施以第一种初等变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3}$$

确定全部的 3 阶初等矩阵。

- 对 3 阶单位矩阵施以第一种初等变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \longleftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \longleftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \longleftrightarrow r_3}$$

确定全部的 3 阶初等矩阵。

- 对 3 阶单位矩阵施以第一种初等变换：

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

确定全部的 3 阶初等矩阵。

- 对 3 阶单位矩阵施以第一种初等变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或} c_1 \leftrightarrow c_2]{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

确定全部的 3 阶初等矩阵。

- 对 3 阶单位矩阵施以第一种初等变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或} c_1 \leftrightarrow c_2]{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或} c_2 \leftrightarrow c_3]{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

确定全部的 3 阶初等矩阵。

- 对 3 阶单位矩阵施以第一种初等变换：

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{或}c_1\leftrightarrow c_2]{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{或}c_2\leftrightarrow c_3]{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{或}c_1\leftrightarrow c_3]{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

确定全部的 3 阶初等矩阵。

- 对 3 阶单位矩阵施以第一种初等变换：

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{或}c_1\leftrightarrow c_2]{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I(12)$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{或}c_2\leftrightarrow c_3]{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{或}c_1\leftrightarrow c_3]{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

确定全部的 3 阶初等矩阵。

- 对 3 阶单位矩阵施以第一种初等变换：

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{或}c_1\leftrightarrow c_2]{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I(12)$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{或}c_2\leftrightarrow c_3]{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=I(23)$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{或}c_1\leftrightarrow c_3]{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

确定全部的 3 阶初等矩阵。

- 对 3 阶单位矩阵施以第一种初等变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或} c_1 \leftrightarrow c_2]{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I(12)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或} c_2 \leftrightarrow c_3]{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = I(23)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或} c_1 \leftrightarrow c_3]{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I(13)$$

- 对 3 阶单位矩阵施以第二种初等变换：

- 对 3 阶单位矩阵施以第二种初等变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{k \times r_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{k \times r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{k \times r_3}$$

- 对 3 阶单位矩阵施以第二种初等变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{k \times r_1} \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{k \times r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{k \times r_3}$$

- 对 3 阶单位矩阵施以第二种初等变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{k\times r_1} \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{k\times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{k\times r_3}$$

- 对 3 阶单位矩阵施以第二种初等变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{k \times r_1} \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{k \times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{k \times r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

- 对 3 阶单位矩阵施以第二种初等变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或} k \times c_1]{k \times r_1} \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{k \times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{k \times r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

- 对 3 阶单位矩阵施以第二种初等变换:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或} k \times c_1]{k \times r_1} \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或} k \times c_2]{k \times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{k \times r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

- 对 3 阶单位矩阵施以第二种初等变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或} k \times c_1]{k \times r_1} \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或} k \times c_2]{k \times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或} k \times c_3]{k \times r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

- 对 3 阶单位矩阵施以第二种初等变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或} k\times c_1]{k\times r_1} \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I(1(k))$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或} k\times c_2]{k\times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或} k\times c_3]{k\times r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

- 对 3 阶单位矩阵施以第二种初等变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或} k\times c_1]{k\times r_1} \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I(1(k))$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或} k\times c_2]{k\times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I(2(k))$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或} k\times c_3]{k\times r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

- 对 3 阶单位矩阵施以第二种初等变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或}k\times c_1]{k\times r_1} \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I(1(k))$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或}k\times c_2]{k\times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I(2(k))$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或}k\times c_3]{k\times r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = I(3(k))$$

- 对 3 阶单位矩阵施以第三种初等变换：

- 对 3 阶单位矩阵施以第三种初等变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+lr_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+lr_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+lr_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+lr_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+lr_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+lr_2}$$

- 对 3 阶单位矩阵施以第三种初等变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+lr_2} \begin{pmatrix} 1 & l & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+lr_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+lr_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+lr_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+lr_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+lr_2}$$

- 对 3 阶单位矩阵施以第三种初等变换：

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+lr_2}\begin{pmatrix}1&l&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+lr_3}\begin{pmatrix}1&0&l\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+lr_1}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+lr_3}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+lr_1}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+lr_2}$$

- 对 3 阶单位矩阵施以第三种初等变换：

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+lr_2}\begin{pmatrix}1&l&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+lr_3}\begin{pmatrix}1&0&l\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+lr_1}\begin{pmatrix}1&0&0\\l&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+lr_3}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+lr_1}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+lr_2}$$

- 对 3 阶单位矩阵施以第三种初等变换：

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+lr_2}\begin{pmatrix}1&l&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+lr_3}\begin{pmatrix}1&0&l\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+lr_1}\begin{pmatrix}1&0&0\\l&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+lr_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&l\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+lr_1}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+lr_2}$$

- 对 3 阶单位矩阵施以第三种初等变换：

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+lr_2}\begin{pmatrix}1&l&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+lr_3}\begin{pmatrix}1&0&l\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+lr_1}\begin{pmatrix}1&0&0\\l&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+lr_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&l\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+lr_1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\l&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+lr_2}$$

- 对 3 阶单位矩阵施以第三种初等变换：

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+lr_2}\begin{pmatrix}1&l&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+lr_3}\begin{pmatrix}1&0&l\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+lr_1}\begin{pmatrix}1&0&0\\l&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+lr_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&l\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+lr_1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\l&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+lr_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&l&1\end{pmatrix}$$

- 对 3 阶单位矩阵施以第三种初等变换：

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{或}c_2+lc_1]{r_1+lr_2}\begin{pmatrix}1&l&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{或}c_3+lc_1]{r_1+lr_3}\begin{pmatrix}1&0&l\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{或}c_1+lc_2]{r_2+lr_1}\begin{pmatrix}1&0&0\\l&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{或}c_3+lc_2]{r_2+lr_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&l\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{或}c_1+lc_3]{r_3+lr_1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\l&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{或}c_2+lc_3]{r_3+lr_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&l&1\end{pmatrix}$$

- 对 3 阶单位矩阵施以第三种初等变换：

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{或}c_2+lc_1]{r_1+lr_2}\begin{pmatrix}1&l&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I(12(l))$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{或}c_3+lc_1]{r_1+lr_3}\begin{pmatrix}1&0&l\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{或}c_1+lc_2]{r_2+lr_1}\begin{pmatrix}1&0&0\\l&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{或}c_3+lc_2]{r_2+lr_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&l\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{或}c_1+lc_3]{r_3+lr_1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\l&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{或}c_2+lc_3]{r_3+lr_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&l&1\end{pmatrix}$$

- 对 3 阶单位矩阵施以第三种初等变换：

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{或}c_2+lc_1]{r_1+lr_2}\begin{pmatrix}1&l&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I(12(l))$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{或}c_3+lc_1]{r_1+lr_3}\begin{pmatrix}1&0&l\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I(13(l))$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{或}c_1+lc_2]{r_2+lr_1}\begin{pmatrix}1&0&0\\l&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{或}c_3+lc_2]{r_2+lr_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&l\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{或}c_1+lc_3]{r_3+lr_1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\l&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{或}c_2+lc_3]{r_3+lr_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&l&1\end{pmatrix}$$

- 对 3 阶单位矩阵施以第三种初等变换:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{或}c_2+lc_1]{r_1+lr_2}\begin{pmatrix}1&l&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I(12(l))$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{或}c_3+lc_1]{r_1+lr_3}\begin{pmatrix}1&0&l\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I(13(l))$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{或}c_1+lc_2]{r_2+lr_1}\begin{pmatrix}1&0&0\\l&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I(21(l))$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{或}c_3+lc_2]{r_2+lr_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&l\\0&0&1\end{pmatrix}=I(23(l))$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{或}c_1+lc_3]{r_3+lr_1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\l&0&1\end{pmatrix}=I(31(l))$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{或}c_2+lc_3]{r_3+lr_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&l&1\end{pmatrix}=I(32(l))$$

初等矩阵与初等变换关系

设 A 是 $m \times n$ 矩阵，则

初等矩阵与初等变换关系

设 A 是 $m \times n$ 矩阵，则

性质 1 对 A 作初等 行 变换等价于对 A 左乘 相应种类的初等矩阵

性质 2 对 A 作初等 列 变换等价于对 A 右乘 相应种类的初等矩阵

初等矩阵与初等变换关系

设 A 是 $m \times n$ 矩阵，则

性质 1 对 A 作初等行变换等价于对 A 左乘相应种类的初等矩阵：

$$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} \quad , \quad A \xrightarrow{k \times r_i} \quad , \quad A \xrightarrow{r_i + l r_j}$$

性质 2 对 A 作初等列变换等价于对 A 右乘相应种类的初等矩阵

初等矩阵与初等变换关系

设 A 是 $m \times n$ 矩阵，则

性质 1 对 A 作初等 行 变换等价于对 A 左乘 相应种类的初等矩阵：

$$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} I(ij)A, \qquad A \xrightarrow{k \times r_i} \qquad , \qquad A \xrightarrow{r_i + l r_j}$$

性质 2 对 A 作初等 列 变换等价于对 A 右乘 相应种类的初等矩阵

初等矩阵与初等变换关系

设 A 是 $m \times n$ 矩阵，则

性质 1 对 A 作初等 行 变换等价于对 A 左乘 相应种类的初等矩阵：

$$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} I(ij)A, \qquad A \xrightarrow{k \times r_i} I(i(k))A, \qquad A \xrightarrow{r_i + l r_j}$$

性质 2 对 A 作初等 列 变换等价于对 A 右乘 相应种类的初等矩阵

初等矩阵与初等变换关系

设 A 是 $m\times n$ 矩阵，则

性质 1 对 A 作初等 行 变换等价于对 A 左乘 相应种类的初等矩阵：

$$A\xrightarrow{r_i\leftrightarrow r_j} I(ij)A,\qquad A\xrightarrow{k\times r_i} I(i(k))A,\qquad A\xrightarrow{r_i+lr_j} I(ij(l))A$$

性质 2 对 A 作初等 列 变换等价于对 A 右乘 相应种类的初等矩阵

初等矩阵与初等变换关系

设 A 是 $m \times n$ 矩阵，则

性质 1 对 A 作初等 行 变换等价于对 A 左乘 相应种类的初等矩阵：

$$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} I(ij)A, \qquad A \xrightarrow{k \times r_i} I(i(k))A, \qquad A \xrightarrow{r_i + l r_j} I(ij(l))A$$

性质 2 对 A 作初等 列 变换等价于对 A 右乘 相应种类的初等矩阵：

$$A \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} \qquad\qquad, \qquad A \xrightarrow{k \times c_i} \qquad\qquad, \qquad A \xrightarrow{c_j + l c_i}$$

初等矩阵与初等变换关系

设 A 是 $m \times n$ 矩阵，则

性质 1 对 A 作初等 行 变换等价于对 A 左乘 相应种类的初等矩阵：

$$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} I(ij)A, \qquad A \xrightarrow{k \times r_i} I(i(k))A, \qquad A \xrightarrow{r_i + l r_j} I(ij(l))A$$

性质 2 对 A 作初等 列 变换等价于对 A 右乘 相应种类的初等矩阵：

$$A \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} AI(ij), \qquad A \xrightarrow{k \times c_i} \qquad\qquad , \qquad A \xrightarrow{c_j + l c_i}$$

初等矩阵与初等变换关系

设 A 是 $m \times n$ 矩阵，则

性质 1 对 A 作初等 行 变换等价于对 A 左乘 相应种类的初等矩阵：

$$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} I(ij)A, \qquad A \xrightarrow{k \times r_i} I(i(k))A, \qquad A \xrightarrow{r_i + l r_j} I(ij(l))A$$

性质 2 对 A 作初等 列 变换等价于对 A 右乘 相应种类的初等矩阵：

$$A \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} AI(ij), \qquad A \xrightarrow{k \times c_i} AI(i(k)), \qquad A \xrightarrow{c_j + l c_i}$$

初等矩阵与初等变换关系

设 A 是 $m \times n$ 矩阵，则

性质 1 对 A 作初等 行 变换等价于对 A 左乘 相应种类的初等矩阵：

$$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} I(ij)A, \qquad A \xrightarrow{k \times r_i} I(i(k))A, \qquad A \xrightarrow{r_i + l r_j} I(ij(l))A$$

性质 2 对 A 作初等 列 变换等价于对 A 右乘 相应种类的初等矩阵：

$$A \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} AI(ij), \qquad A \xrightarrow{k \times c_i} AI(i(k)), \qquad A \xrightarrow{c_j + l c_i} AI(ij(l))$$

初等矩阵与初等变换关系

设 A 是 $m \times n$ 矩阵，则

性质 1 对 A 作初等 行 变换等价于对 A 左乘 相应种类的初等矩阵：

$$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} I(ij)A, \qquad A \xrightarrow{k \times r_i} I(i(k))A, \qquad A \xrightarrow{r_i + l r_j} I(ij(l))A$$

性质 2 对 A 作初等 列 变换等价于对 A 右乘 相应种类的初等矩阵：

$$A \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} AI(ij), \qquad A \xrightarrow{k \times c_i} AI(i(k)), \qquad A \xrightarrow{c_j + l c_i} AI(ij(l))$$

注 性质 1 中的初等矩阵是 $m \times m$，而性质 2 中的初等矩阵是 $n \times n$

例 以 3 阶方阵 A 为例，验证对 A 做初等行变换 $r_1 \longleftrightarrow r_2$ 的结果，等于乘积 $I(12)A$。

例 以 3 阶方阵 A 为例，验证对 A 做初等行变换 $r_1 \longleftrightarrow r_2$ 的结果，等于乘积 $I(12)A$。

验证

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

例 以 3 阶方阵 A 为例，验证对 A 做初等行变换 $r_1 \leftrightarrow r_2$ 的结果，等于乘积 $I(12)A$。

验证

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2}$$

$$I(12)A$$

例 以 3 阶方阵 A 为例，验证对 A 做初等行变换 $r_1 \leftrightarrow r_2$ 的结果，等于乘积 $I(12)A$。

验证

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$I(12)A$

例 以 3 阶方阵 A 为例，验证对 A 做初等行变换 $r_1 \leftrightarrow r_2$ 的结果，等于乘积 $I(12)A$。

验证

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$I(12)A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

例 以 3 阶方阵 A 为例，验证对 A 做初等行变换 $r_1 \longleftrightarrow r_2$ 的结果，等于乘积 $I(12)A$。

验证

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \longleftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$I(12)A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

例 以 3 阶方阵 A 为例，验证对 A 做初等行变换 $r_1 \leftrightarrow r_2$ 的结果，等于乘积 $I(12)A$。

验证

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$I(12)A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

例 以 3 阶方阵 A 为例，验证对 A 做初等行变换 $r_1 \leftrightarrow r_2$ 的结果，等于乘积 $I(12)A$。

验证

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$I(12)A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & & \end{pmatrix}$$

例 以 3 阶方阵 A 为例，验证对 A 做初等行变换 $r_1 \longleftrightarrow r_2$ 的结果，等于乘积 $I(12)A$。

验证

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$I(12)A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$，其中（$k \neq 0$）
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$，其中（$i \neq j$）

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$，其中（$k \neq 0$）
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$，其中（$i \neq j$）

证明

- $I(ij)I(ij) =$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$，其中（$k \neq 0$）
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$，其中（$i \neq j$）

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) =$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$，其中（$k \neq 0$）
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$，其中（$i \neq j$）

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$，其中（$k \neq 0$）
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$，其中（$i \neq j$）

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} * \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j}$$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$，其中（$k \neq 0$）
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$，其中（$i \neq j$）

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} * \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} I$$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$，其中（$k \neq 0$）
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$，其中（$i \neq j$）

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} * \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} I$$

- $I(i(k))I(i(\frac{1}{k})) =$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$，其中（$k \neq 0$）
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$，其中（$i \neq j$）

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{c_i \longleftrightarrow c_j} * \xrightarrow{c_i \longleftrightarrow c_j} I$$

- $I(i(k))I(i(\frac{1}{k})) = I \cdot I(i(k)) \cdot I(i(\frac{1}{k})) =$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$，其中（$k \neq 0$）
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$，其中（$i \neq j$）

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{c_i \longleftrightarrow c_j} * \xrightarrow{c_i \longleftrightarrow c_j} I$$

- $I(i(k))I(i(\frac{1}{k})) = I \cdot I(i(k)) \cdot I(i(\frac{1}{k})) = I$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$，其中（$k \neq 0$）
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$，其中（$i \neq j$）

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} * \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} I$$

- $I(i(k))I(i(\frac{1}{k})) = I \cdot I(i(k)) \cdot I(i(\frac{1}{k})) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{k \times c_i} * \xrightarrow{\frac{1}{k} \times c_i}$$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$，其中（$k \neq 0$）
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$，其中（$i \neq j$）

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} * \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} I$$

- $I(i(k))I(i(\frac{1}{k})) = I \cdot I(i(k)) \cdot I(i(\frac{1}{k})) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{k \times c_i} * \xrightarrow{\frac{1}{k} \times c_i} I$$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$，其中（$k \neq 0$）
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$，其中（$i \neq j$）

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{c_i \longleftrightarrow c_j} * \xrightarrow{c_i \longleftrightarrow c_j} I$$

- $I(i(k))I(i(\frac{1}{k})) = I \cdot I(i(k)) \cdot I(i(\frac{1}{k})) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{k \times c_i} * \xrightarrow{\frac{1}{k} \times c_i} I$$

- $I(ij(l))I(ij(-l)) =$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$，其中（$k \neq 0$）
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$，其中（$i \neq j$）

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{c_i \longleftrightarrow c_j} * \xrightarrow{c_i \longleftrightarrow c_j} I$$

- $I(i(k))I(i(\frac{1}{k})) = I \cdot I(i(k)) \cdot I(i(\frac{1}{k})) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{k \times c_i} * \xrightarrow{\frac{1}{k} \times c_i} I$$

- $I(ij(l))I(ij(-l)) = I \cdot I(ij(l)) \cdot I(ij(-l)) =$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$，其中（$k \neq 0$）
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$，其中（$i \neq j$）

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} * \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} I$$

- $I(i(k))I(i(\frac{1}{k})) = I \cdot I(i(k)) \cdot I(i(\frac{1}{k})) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{k \times c_i} * \xrightarrow{\frac{1}{k} \times c_i} I$$

- $I(ij(l))I(ij(-l)) = I \cdot I(ij(l)) \cdot I(ij(-l)) = I$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$，其中（$k \neq 0$）
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$，其中（$i \neq j$）

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{c_i \longleftrightarrow c_j} * \xrightarrow{c_i \longleftrightarrow c_j} I$$

- $I(i(k))I(i(\frac{1}{k})) = I \cdot I(i(k)) \cdot I(i(\frac{1}{k})) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{k \times c_i} * \xrightarrow{\frac{1}{k} \times c_i} I$$

- $I(ij(l))I(ij(-l)) = I \cdot I(ij(l)) \cdot I(ij(-l)) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{c_j + lc_i} * \xrightarrow{c_j - lc_i}$$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$，其中（$k \neq 0$）
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$，其中（$i \neq j$）

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} * \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} I$$

- $I(i(k))I(i(\frac{1}{k})) = I \cdot I(i(k)) \cdot I(i(\frac{1}{k})) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{k \times c_i} * \xrightarrow{\frac{1}{k} \times c_i} I$$

- $I(ij(l))I(ij(-l)) = I \cdot I(ij(l)) \cdot I(ij(-l)) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{c_j + lc_i} * \xrightarrow{c_j - lc_i} I$$

We are here now...

1. 初等变换，初等矩阵

2. 等价标准形

3. 初等行变换求逆矩阵

矩阵的等价标准形

定理 任何矩阵 $A_{m\times n}$，经过有限次初等变换后，总可以化为如下形式的矩阵：

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}_{m\times n}$$

矩阵的等价标准形

定理 任何矩阵 $A_{m\times n}$，经过有限次初等变换后，总可以化为如下形式的矩阵：

$$D=\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix}_{m\times n}$$

即，除左上角为 r 阶单位矩阵，其余元素均为零。

矩阵的等价标准形

定理 任何矩阵 $A_{m\times n}$，经过有限次初等变换后，总可以化为如下形式的矩阵：

$$D=\begin{pmatrix}1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix}_{m\times n}=\begin{pmatrix}I_r & O\\ O & O\end{pmatrix}$$

即，除左上角为 r 阶单位矩阵，其余元素均为零。

矩阵的等价标准形

定理 任何矩阵 $A_{m\times n}$，经过有限次初等变换后，总可以化为如下形式的矩阵：

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix}_{m\times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

即，除左上角为 r 阶单位矩阵，其余元素均为零。该形式称为 A 的**等价标准形**。

矩阵的等价标准形

定理 任何矩阵 $A_{m\times n}$，经过有限次初等变换后，总可以化为如下形式的矩阵：

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix}_{m\times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

即，除左上角为 r 阶单位矩阵，其余元素均为零。该形式称为 A 的**等价标准形**。

注 r 取值范围：

矩阵的等价标准形

定理 任何矩阵 $A_{m\times n}$，经过有限次初等变换后，总可以化为如下形式的矩阵：

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}_{m\times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

即，除左上角为 r 阶单位矩阵，其余元素均为零。该形式称为 A 的 **等价标准形**。

注 r 取值范围：$0 \le r$,

矩阵的等价标准形

定理 任何矩阵 $A_{m\times n}$，经过有限次初等变换后，总可以化为如下形式的矩阵：

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix}_{m\times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

即，除左上角为 r 阶单位矩阵，其余元素均为零。该形式称为 A 的 **等价标准形** 。

注 r 取值范围：$0 \le r$，$r \le m$

矩阵的等价标准形

定理 任何矩阵 $A_{m\times n}$，经过有限次初等变换后，总可以化为如下形式的矩阵：

$$D=\begin{pmatrix}1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix}_{m\times n}=\begin{pmatrix}I_r & O\\ O & O\end{pmatrix}$$

即，除左上角为 r 阶单位矩阵，其余元素均为零。该形式称为 A 的**等价标准形**。

注 r 取值范围：$0\le r$，$r\le m$且 $r\le n$

例 1 4×3 矩阵 $\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ 所有可能的等价标准形是什么?

例 1 4×3 矩阵 $\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ 所有可能的等价标准形是什么?

4×3 矩阵等价标准形的一般形式是

$$D = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{pmatrix}_{4\times 3}$$

例 1 4×3 矩阵 $\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ 所有可能的等价标准形是什么?

4×3 矩阵等价标准形的一般形式是

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix}_{4\times 3} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

例 1 4×3 矩阵 $\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ 所有可能的等价标准形是什么?

4×3 矩阵等价标准形的一般形式是

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix}_{4\times 3} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

其中 $0 \leq r \leq 3$

例 1 4×3 矩阵 $\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ 所有可能的等价标准形是什么？

4×3 矩阵等价标准形的一般形式是

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}_{4\times 3} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

其中 $0\le r\le 3$，所以全部可能是：

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

例 1 4×3 矩阵 $\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ 所有可能的等价标准形是什么？

4×3 矩阵等价标准形的一般形式是

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix}_{4\times 3} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

其中 $0 \le r \le 3$，所以全部可能是：

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

例 1 4×3 矩阵 $\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ 所有可能的等价标准形是什么?

4×3 矩阵等价标准形的一般形式是

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}_{4\times 3} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

其中 $0 \le r \le 3$，所以全部可能是:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

例 1 4×3 矩阵 $\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ 所有可能的等价标准形是什么?

4×3 矩阵等价标准形的一般形式是

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}_{4\times 3} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

其中 $0\le r\le 3$，所以全部可能是:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 2 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

例 2 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

例 2 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1}$$

例 2 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ & & & \end{pmatrix}$$

例 2 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ & & & \end{pmatrix}$$

例 2 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

例 2 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-\frac{1}{2}c_1}$$

例 2 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-\frac{1}{2}c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & & \\ 0 & -1 & & \\ 0 & -1 & & \end{pmatrix}$$

例 2 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_3-c_1]{c_2-\frac{1}{2}c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & & \\ 0 & -1 & & \\ 0 & -1 & & \end{pmatrix}$$

例 2 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_3-c_1]{c_2-\frac{1}{2}c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

例 2 通过初等变换，求出$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{c_3 - c_1 \\ c_4 - \frac{3}{2}c_1}]{c_2 - \frac{1}{2}c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \\ 0 & -1 & -1 & \\ 0 & -1 & -1 & \end{pmatrix}$$

例 2 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{c_3-c_1 \\ c_4-\frac{3}{2}c_1}]{c_2-\frac{1}{2}c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

例 2 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{c_3-c_1 \\ c_4-\frac{3}{2}c_1}]{c_2-\frac{1}{2}c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}\times r_1}$$

例 2 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{c_3 - c_1 \\ c_4 - \frac{3}{2}c_1}]{c_2 - \frac{1}{2}c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2} \times r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

例 2 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{c_3-c_1 \\ c_4-\frac{3}{2}c_1}]{c_2-\frac{1}{2}c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}\times r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2}$$

例 2 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{c_3-c_1 \\ c_4-\frac{3}{2}c_1}]{c_2-\frac{1}{2}c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}\times r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 2 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{c_3-c_1 \\ c_4-\frac{3}{2}c_1}]{c_2-\frac{1}{2}c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}\times r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3-c_2}$$

例 2 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{c_3-c_1 \\ c_4-\frac{3}{2}c_1}]{c_2-\frac{1}{2}c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}\times r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3-c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & -1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

例 2 通过初等变换，求出$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{c_3 - c_1 \\ c_4 - \frac{3}{2}c_1}]{c_2 - \frac{1}{2}c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2} \times r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_4 - c_2]{c_3 - c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & -1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

例 2 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{c_3 - c_1 \\ c_4 - \frac{3}{2}c_1}]{c_2 - \frac{1}{2}c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2} \times r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_4 - c_2]{c_3 - c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 2 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{c_3-c_1 \\ c_4-\frac{3}{2}c_1}]{c_2-\frac{1}{2}c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}\times r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_4-c_2]{c_3-c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)\times r_2}$$

例 2 通过初等变换，求出$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{c_3 - c_1 \\ c_4 - \frac{3}{2}c_1}]{c_2 - \frac{1}{2}c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2} \times r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_4 - c_2]{c_3 - c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1) \times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 3 通过初等变换，求出$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$的等价标准形

例 3 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

例 3 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2}$$

例 3 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

例 3 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1}$$

例 3 通过初等变换，求出$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

例 3 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2 - 4c_1}$$

例 3 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2 - 4c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & 2 & & \\ 0 & -2 & & \end{pmatrix}$$

例 3 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_3 - 3c_1]{c_2 - 4c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & 2 & & \\ 0 & -2 & & \end{pmatrix}$$

例 3 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_3 - 3c_1]{c_2 - 4c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 2 & 2 & \\ 0 & -2 & -2 & \end{pmatrix}$$

例 3 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{c_3 - 3c_1 \\ c_4 - 5c_1}]{c_2 - 4c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 2 & 2 & \\ 0 & -2 & -2 & \end{pmatrix}$$

例 3 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{c_3 - 3c_1 \\ c_4 - 5c_1}]{c_2 - 4c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

例 3 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{c_3 - 3c_1 \\ c_4 - 5c_1}]{c_2 - 4c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2}$$

例 3 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{c_3 - 3c_1 \\ c_4 - 5c_1}]{c_2 - 4c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 3 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{c_3 - 3c_1 \\ c_4 - 5c_1}]{c_2 - 4c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3 - c_2}$$

例 3 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{c_3 - 3c_1 \\ c_4 - 5c_1}]{c_2 - 4c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3 - c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 2 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

例 3 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{c_3 - 3c_1 \\ c_4 - 5c_1}]{c_2 - 4c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_4 - \frac{3}{2}c_2]{c_3 - c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 2 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

例 3 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{c_3 - 3c_1 \\ c_4 - 5c_1}]{c_2 - 4c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_4 - \frac{3}{2}c_2]{c_3 - c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 3 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{c_3 - 3c_1 \\ c_4 - 5c_1}]{c_2 - 4c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_4 - \frac{3}{2}c_2]{c_3 - c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2} \times r_2}$$

例 3 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{c_3 - 3c_1 \\ c_4 - 5c_1}]{c_2 - 4c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_4 - \frac{3}{2}c_2]{c_3 - c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2} \times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 4 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

例 4 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

例 4 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+r_1}$$

例 4 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ & \end{pmatrix}$$

例 4 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ & \end{pmatrix}$$

例 4 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

例 4 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-3c_1}$$

例 4 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-3c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

例 4 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-3c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3}$$

例 4 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-3c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 4 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-3c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{5}\times r_2}$$

例 4 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-3c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{5}\times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

We are here now...

1. 初等变换，初等矩阵

2. 等价标准形

3. 初等行变换求逆矩阵

性质 任意 n 阶可逆方阵，都可通过有限次初等 行 变换化为单位矩阵。

性质 任意 n 阶可逆方阵，都可通过有限次初等 行 变换化为单位矩阵。

例 用初等行变换，把 3 阶可逆矩阵化为单位矩阵。

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

性质 任意 n 阶可逆方阵，都可通过有限次初等 行 变换化为单位矩阵。

例 用初等行变换，把 3 阶可逆矩阵化为单位矩阵。通常的步骤是：

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

性质 任意 n 阶可逆方阵，都可通过有限次初等 行 变换化为单位矩阵。

例 用初等行变换，把 3 阶可逆矩阵化为单位矩阵。通常的步骤是：

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

性质 任意 n 阶可逆方阵，都可通过有限次初等 行 变换化为单位矩阵。

例 用初等行变换，把 3 阶可逆矩阵化为单位矩阵。通常的步骤是：

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

性质 任意 n 阶可逆方阵，都可通过有限次初等 行 变换化为单位矩阵。

例 用初等行变换，把 3 阶可逆矩阵化为单位矩阵。通常的步骤是：

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$

性质 任意 n 阶可逆方阵，都可通过有限次初等 行 变换化为单位矩阵。

例 用初等行变换，把 3 阶可逆矩阵化为单位矩阵。通常的步骤是：

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$

性质 任意 n 阶可逆方阵，都可通过有限次初等 行 变换化为单位矩阵。

例 用初等行变换，把 3 阶可逆矩阵化为单位矩阵。通常的步骤是：

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

性质 任意 n 阶可逆方阵，都可通过有限次初等 行 变换化为单位矩阵。

例 用初等行变换，把 3 阶可逆矩阵化为单位矩阵。通常的步骤是：

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

性质 任意 n 阶可逆方阵，都可通过有限次初等 行 变换化为单位矩阵。

例 用初等行变换，把 3 阶可逆矩阵化为单位矩阵。通常的步骤是：

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

性质 任意 n 阶可逆方阵，都可通过有限次初等 行 变换化为单位矩阵。

例 用初等行变换，把 3 阶可逆矩阵化为单位矩阵。通常的步骤是：

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

性质 任意 n 阶可逆方阵，都可通过有限次初等 行 变换化为单位矩阵。

例 用初等行变换，把 3 阶可逆矩阵化为单位矩阵。通常的步骤是：

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

性质 任意 n 阶可逆方阵，都可通过有限次初等 行 变换化为单位矩阵。

例 用初等行变换，把 3 阶可逆矩阵化为单位矩阵。通常的步骤是：

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

初等行变换求逆矩阵的步骤 设 $A_{n\times n}$ 是可逆方阵

$$(A \vdots I)$$

性质 任意 n 阶可逆方阵，都可通过有限次初等 行 变换化为单位矩阵。

例 用初等行变换，把 3 阶可逆矩阵化为单位矩阵。通常的步骤是：

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

初等行变换求逆矩阵的步骤 设 $A_{n\times n}$ 是可逆方阵

$$(A \,\vdots\, I) \xrightarrow{\text{一系列初等行变换}}$$

性质 任意 n 阶可逆方阵，都可通过有限次初等 行 变换化为单位矩阵。

例 用初等行变换，把 3 阶可逆矩阵化为单位矩阵。通常的步骤是：

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

初等行变换求逆矩阵的步骤 设 $A_{n\times n}$ 是可逆方阵

$$(A \vdots I) \xrightarrow{\text{一系列初等行变换}} (I \vdots B)$$

性质 任意 n 阶可逆方阵，都可通过有限次初等 行 变换化为单位矩阵。

例 用初等行变换，把 3 阶可逆矩阵化为单位矩阵。通常的步骤是：

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

初等行变换求逆矩阵的步骤 设 $A_{n\times n}$ 是可逆方阵

$$(A \vdots I) \xrightarrow{\text{一系列初等行变换}} (I \vdots B)$$

则此时 B 就是逆矩阵 A^{-1}

初等行变换求逆矩阵的原理 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\2&0&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

初等行变换求逆矩阵的原理 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

初等行变换求逆矩阵的原理 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\2&0&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\2&0&1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\Downarrow_{r_3-2r_1}$$

初等行变换求逆矩阵的原理 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\2&0&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\2&0&1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\Downarrow_{r_3-2r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&-2&0&1\end{array}\right)$$

初等行变换求逆矩阵的原理 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\2&0&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\2&0&1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\Downarrow_{r_3-2r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\Downarrow_{r_2-r_3}$$

初等行变换求逆矩阵的原理 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Downarrow_{r_3 - 2r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Downarrow_{r_2 - r_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

初等行变换求逆矩阵的原理 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\2&0&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\2&0&1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\Downarrow_{r_3-2r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\Downarrow_{r_2-r_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&2&1&-1\\0&0&1&-2&0&1\end{array}\right)$$

则 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&-1\\-2&0&1\end{pmatrix}$

初等行变换求逆矩阵的原理 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\2&0&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\2&0&1&0&0&1\end{array}\right) \quad ==== \quad (A \vdots I)$$

$$\Downarrow_{r_3-2r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\Downarrow_{r_2-r_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&2&1&-1\\0&0&1&-2&0&1\end{array}\right)$$

则 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&-1\\-2&0&1\end{pmatrix}$

初等行变换求逆矩阵的原理 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\2&0&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\2&0&1&0&0&1\end{array}\right) \;=\!=\!=\; (A \vdots I)$$

$$\Downarrow_{r_3-2r_1} \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&-2&0&1\end{array}\right) \;=\!=\!=\; (P_1A \vdots P_1I)$$

$$\Downarrow_{r_2-r_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&2&1&-1\\0&0&1&-2&0&1\end{array}\right)$$

则 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&-1\\-2&0&1\end{pmatrix}$

初等行变换求逆矩阵的原理 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\2&0&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\2&0&1&0&0&1\end{array}\right) \quad = \quad (A \vdots I)$$

$$\Downarrow_{r_3-2r_1} \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&-2&0&1\end{array}\right) \quad = \quad (P_1A \vdots P_1I)=(P_1A \vdots P_1)$$

$$\Downarrow_{r_2-r_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&2&1&-1\\0&0&1&-2&0&1\end{array}\right)$$

则 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&-1\\-2&0&1\end{pmatrix}$

初等行变换求逆矩阵的原理 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\2&0&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\2&0&1&0&0&1\end{array}\right) \;=\!=\!=\; (A \vdots I)$$

$$\Downarrow_{r_3-2r_1} \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&-2&0&1\end{array}\right) \;=\!=\!=\; (P_1A \vdots P_1I)=(P_1A \vdots P_1)$$

$$\Downarrow_{r_2-r_3} \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&2&1&-1\\0&0&1&-2&0&1\end{array}\right) \;=\!=\!=\; (P_2P_1A \vdots P_2P_1)$$

则 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&-1\\-2&0&1\end{pmatrix}$

初等行变换求逆矩阵的原理 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\2&0&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\2&0&1&0&0&1\end{array}\right) \quad = \quad (A \vdots I)$$

$$\Downarrow_{r_3-2r_1} \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&-2&0&1\end{array}\right) \quad = \quad (P_1A \vdots P_1I)=(P_1A \vdots P_1)$$

$$\Downarrow_{r_2-r_3} \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&2&1&-1\\0&0&1&-2&0&1\end{array}\right) \quad = \quad (P_2P_1A \vdots P_2P_1)=(I \vdots P_2P_1)$$

则 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&-1\\-2&0&1\end{pmatrix}$

初等行变换求逆矩阵的原理 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\2&0&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\2&0&1&0&0&1\end{array}\right) \;=\!=\!=\; (A \vdots I)$$

$$\Downarrow_{r_3-2r_1} \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&-2&0&1\end{array}\right) \;=\!=\!=\; (P_1A \vdots P_1I)=(P_1A \vdots P_1)$$

$$\Downarrow_{r_2-r_3} \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&2&1&-1\\0&0&1&-2&0&1\end{array}\right) \;=\!=\!=\; (\underbrace{P_2P_1}_{A^{-1}}A \vdots P_2P_1)=(I \vdots P_2P_1)$$

则 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&-1\\-2&0&1\end{pmatrix}$

初等行变换求逆矩阵的原理 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad = \qquad (A \vdots I)$$

$$\Downarrow_{r_3 - 2r_1} \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad = \qquad (P_1 A \vdots P_1 I) = (P_1 A \vdots P_1)$$

$$\Downarrow_{r_2 - r_3} \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad = \qquad (\underbrace{P_2 P_1}_{A^{-1}} A \vdots \underbrace{P_2 P_1}_{A^{-1}}) = (I \vdots P_2 P_1)$$

则 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

例 1 求 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

例 1 求 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A \vdots I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

例 1 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\-3&2&-5\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A \vdots I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\2&1&0&0&1&0\\-3&2&-5&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-2r_1}$$

例 1 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A \vdots I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ & & & & & \end{array}\right)$$

例 1 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\-3&2&-5\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\vdots I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\2&1&0&0&1&0\\-3&2&-5&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\ & & & & & \end{array}\right)$$

例 1 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A \vdots I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

例 1 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\-3&2&-5\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\vdots I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\2&1&0&0&1&0\\-3&2&-5&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&2&-2&3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-2r_2}$$

例 1 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\-3&2&-5\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A \vdots I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\2&1&0&0&1&0\\-3&2&-5&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&2&-2&3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-2r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&0&2&7&-2&1\end{array}\right)$$

例 1 求 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A \vdots I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow{r_3-2r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}r_3}$$

例 1 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\-3&2&-5\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\,\vdots\,I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\2&1&0&0&1&0\\-3&2&-5&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&2&-2&3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-2r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&0&2&7&-2&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&0&1&7/2&-1&1/2\end{array}\right)$$

例 1 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\-3&2&-5\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\vdots I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\2&1&0&0&1&0\\-3&2&-5&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&2&-2&3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-2r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&0&2&7&-2&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&0&1&7/2&-1&1/2\end{array}\right)\xrightarrow{r_2+2r_3}$$

例 1 求 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A \vdots I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3-2r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 & -1 & 1/2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2+2r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 & -1 & 1/2 \end{array}\right)$$

例 1 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A \vdots I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 & -1 & 1/2 \end{array}\right) \xrightarrow[r_1-r_3]{r_2+2r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 & -1 & 1/2 \end{array}\right)$$

例 1 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\-3&2&-5\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A \vdots I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\2&1&0&0&1&0\\-3&2&-5&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&2&-2&3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-2r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&0&2&7&-2&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&0&1&7/2&-1&1/2\end{array}\right)\xrightarrow[r_1-r_3]{r_2+2r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-5/2&1&-1/2\\0&1&0&5&-1&1\\0&0&1&7/2&-1&1/2\end{array}\right)$$

例 1 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\-3&2&-5\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\vdots I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\2&1&0&0&1&0\\-3&2&-5&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&2&-2&3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-2r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&0&2&7&-2&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&0&1&7/2&-1&1/2\end{array}\right)\xrightarrow[r_1-r_3]{r_2+2r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-5/2&1&-1/2\\0&1&0&5&-1&1\\0&0&1&7/2&-1&1/2\end{array}\right)$$

所以 $A^{-1}=\begin{pmatrix}-5/2&1&-1/2\\5&-1&1\\7/2&-1&1/2\end{pmatrix}$

例 2 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

例 2 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&1\\2&0&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A \vdots I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\1&1&1&0&1&0\\2&0&3&0&0&1\end{array}\right)$$

例 2 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A \vdots I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2 - r_1}$$

例 2 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A \vdots I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ & & & & & \end{array}\right)$$

例 2 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&1\\2&0&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A \vdots I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\1&1&1&0&1&0\\2&0&3&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\ & & & & & \end{array}\right)$$

例 2 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&1\\2&0&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A \vdots I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\1&1&1&0&1&0\\2&0&3&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&0&-1&-2&0&1\end{array}\right)$$

例 2 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&1\\2&0&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\vdots I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\1&1&1&0&1&0\\2&0&3&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&0&-1&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{(-1)\times r_3}$$

例 2 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&1\\2&0&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\,\vdots\,I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\1&1&1&0&1&0\\2&0&3&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&0&-1&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{(-1)\times r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&0&1&2&0&-1\end{array}\right)$$

例 2 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&1\\2&0&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A \vdots I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\1&1&1&0&1&0\\2&0&3&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&0&-1&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{(-1)\times r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&0&1&2&0&-1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2+r_3}$$

例 2 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&1\\2&0&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\vdots I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\1&1&1&0&1&0\\2&0&3&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&0&-1&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{(-1)\times r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&0&1&2&0&-1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2+r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}&&&&&\\0&1&0&1&1&-1\\0&0&1&2&0&-1\end{array}\right)$$

例 2 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&1\\2&0&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A \vdots I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\1&1&1&0&1&0\\2&0&3&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&0&-1&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{(-1)\times r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&0&1&2&0&-1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1-2r_3]{r_2+r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}&&&&&\\0&1&0&1&1&-1\\0&0&1&2&0&-1\end{array}\right)$$

例 2 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&1\\2&0&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\vdots I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\1&1&1&0&1&0\\2&0&3&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&0&-1&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{(-1)\times r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&0&1&2&0&-1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1-2r_3]{r_2+r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-3&0&2\\0&1&0&1&1&-1\\0&0&1&2&0&-1\end{array}\right)$$

例 2 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&1\\2&0&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\vdots I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\1&1&1&0&1&0\\2&0&3&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&0&-1&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{(-1)\times r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&0&1&2&0&-1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1-2r_3]{r_2+r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-3&0&2\\0&1&0&1&1&-1\\0&0&1&2&0&-1\end{array}\right)$$

所以 $A^{-1}=\begin{pmatrix}-3&0&2\\1&1&-1\\2&0&-1\end{pmatrix}$

例 3 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

例 3 求 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\vdots I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\2&2&1&0&0&1\end{array}\right)$$

例 3 求 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\vdots I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\2&2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-2r_1}$$

例 3 求 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\vdots I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\2&2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&-3&-2&-2&1&0\\&&&&&\end{array}\right)$$

例 3 求 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A \vdots I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\2&2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&-3&-2&-2&1&0\\ & & & & & \end{array}\right)$$

例 3 求 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\vdots I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\2&2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&-3&-2&-2&1&0\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)$$

例 3 求 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A \vdots I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\2&2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&-3&-2&-2&1&0\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-2r_3}$$

例 3 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A \vdots I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-2r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

例 3 求 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\,\vdots\,I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\2&2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&-3&-2&-2&1&0\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-2r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+2r_2}$$

例 3 求 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\vdots I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\2&2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&-3&-2&-2&1&0\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-2r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+2r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&0&5&2&2&-3\end{array}\right)$$

例 3 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A \vdots I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-2r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3+2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}\times r_3}$$

例 3 求 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\,\vdots\,I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\2&2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&-3&-2&-2&1&0\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-2r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+2r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&0&5&2&2&-3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}\times r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&0&1&2/5&2/5&-3/5\end{array}\right)$$

例 3 求 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A \vdots I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\2&2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&-3&-2&-2&1&0\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-2r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+2r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&0&5&2&2&-3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}\times r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&0&1&2/5&2/5&-3/5\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-4r_3}$$

例 3 求 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\vdots I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\2&2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&-3&-2&-2&1&0\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-2r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+2r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&0&5&2&2&-3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}\times r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&0&1&2/5&2/5&-3/5\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-4r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}&&&&&\\0&1&0&2/5&-3/5&2/5\\0&0&1&2/5&2/5&-3/5\end{array}\right)$$

例 3 求 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\vdots I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\2&2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&-3&-2&-2&1&0\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-2r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+2r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&0&5&2&2&-3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}\times r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&0&1&2/5&2/5&-3/5\end{array}\right)\xrightarrow[r_1-2r_3]{r_2-4r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}&&&&&\\0&1&0&2/5&-3/5&2/5\\0&0&1&2/5&2/5&-3/5\end{array}\right)$$

例 3 求 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\vdots I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\2&2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&-3&-2&-2&1&0\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-2r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+2r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&0&5&2&2&-3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}\times r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&0&1&2/5&2/5&-3/5\end{array}\right)\xrightarrow[r_1-2r_3]{r_2-4r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1/5&-4/5&6/5\\0&1&0&2/5&-3/5&2/5\\0&0&1&2/5&2/5&-3/5\end{array}\right)$$

例 3 求 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\vdots I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\2&2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&-3&-2&-2&1&0\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-2r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+2r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&0&5&2&2&-3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}\times r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&0&1&2/5&2/5&-3/5\end{array}\right)\xrightarrow[r_1-2r_3]{r_2-4r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1/5&-4/5&6/5\\0&1&0&2/5&-3/5&2/5\\0&0&1&2/5&2/5&-3/5\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1-2r_2}$$

例 3 求 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\vdots I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\2&2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&-3&-2&-2&1&0\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-2r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+2r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&0&5&2&2&-3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}\times r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&0&1&2/5&2/5&-3/5\end{array}\right)\xrightarrow[r_1-2r_3]{r_2-4r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1/5&-4/5&6/5\\0&1&0&2/5&-3/5&2/5\\0&0&1&2/5&2/5&-3/5\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1-2r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-3/5&2/5&2/5\\0&1&0&2/5&-3/5&2/5\\0&0&1&2/5&2/5&-3/5\end{array}\right)$$

例 3 求 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\,\vdots\,I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\2&2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&-3&-2&-2&1&0\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-2r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+2r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&0&5&2&2&-3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}\times r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&0&1&2/5&2/5&-3/5\end{array}\right)\xrightarrow[r_1-2r_3]{r_2-4r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1/5&-4/5&6/5\\0&1&0&2/5&-3/5&2/5\\0&0&1&2/5&2/5&-3/5\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1-2r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-3/5&2/5&2/5\\0&1&0&2/5&-3/5&2/5\\0&0&1&2/5&2/5&-3/5\end{array}\right),\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}-3/5&2/5&2/5\\2/5&-3/5&2/5\\2/5&2/5&-3/5\end{pmatrix}$$

例 4 求 $A=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵，其中 a_i 都不为 0。

例 4 求 $A=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵，其中 a_i 都不为 0。

解

$$(A \vdots I) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

例 4 求 $A=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵，其中 a_i 都不为 0。

解

$$(A \vdots I) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_4 \leftrightarrow r_3} * \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_2} * \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_1}$$

例 4 求 $A=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵，其中 a_i 都不为 0。

解

$$(A \vdots I)=\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_4 \leftrightarrow r_3} * \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_2} * \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

例 4 求 $A=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵，其中 a_i 都不为 0。

解

$$(A \vdots I)=\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_4 \leftrightarrow r_3} * \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_2} * \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\frac{1}{a_1}\times r_2 \\ \frac{1}{a_2}\times r_3 \\ \frac{1}{a_3}\times r_4}]{\frac{1}{a_4}\times r_1}$$

例 4 求 $A=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵，其中 a_i 都不为 0。

解

$$(A \vdots I)=\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_4 \leftrightarrow r_3} * \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_2} * \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\frac{1}{a_1}\times r_2 \\ \frac{1}{a_2}\times r_3 \\ \frac{1}{a_3}\times r_4}]{\frac{1}{a_4}\times r_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a_3} & 0 \end{array}\right)$$

例 4 求 $A=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵，其中 a_i 都不为 0。

解

$$(A \vdots I)=\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_4 \leftrightarrow r_3} * \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_2} * \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\frac{1}{a_1}\times r_2 \\ \frac{1}{a_2}\times r_3 \\ \frac{1}{a_3}\times r_4}]{\frac{1}{a_4}\times r_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a_3} & 0 \end{array}\right)$$

所以 $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_4} \\ \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_3} & 0 \end{pmatrix}$