

一、选择题（共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

1. 极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{xy-1}{\sqrt{xy}-1}$ 之值为()
- A. 0. B. 不存在. C. 2. D. 1.
2. 设 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0, \end{cases}$ 则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处 ()
- A. 偏导数不存在. B. 偏导数存在但不可微.
C. 可微但偏导数不连续. D. 偏导数连续.
3. 改变 $\int_0^2 dy \int_{y^2}^{2y} f(x,y) dx$ 的积分顺序, 结果为 ()
- A. $\int_0^2 dx \int_0^2 f(x,y) dy$. B. $\int_0^4 dx \int_0^x f(x,y) dy$.
C. $\int_0^4 dx \int_x^{\sqrt{x}} f(x,y) dy$. D. $\int_0^4 dx \int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y) dy$.
4. 微分方程 $x(\frac{d^2y}{dx^2}) - (\frac{dy}{dx})^5 - \sin(xy) = 0$ 的阶数为 ()
- A. 3. B. 4. C. 2. D. 5.
5. 曲面 $z = \frac{x^2+y^2}{4}$ 与平面 $y=4$ 的交线在 $x=2$ 的切线与 x 轴正向所成的角为 ()
- A. $\frac{\pi}{4}$. B. $\frac{3\pi}{4}$. C. $\frac{\pi}{3}$. D. $\frac{2\pi}{3}$.
6. 设 $z = x^{2y}$ 在 $(1,1)$ 处的全微分是()
- A. $\frac{1}{2}(dx+2dy)$. B. $2dx$. C. $dx+dy$. D. $2dx+2dy$.
7. 设 $x - e^{x+y} = 0$, 则 $\frac{dy}{dx} =$ ()
- A. $e^{x+y} + 1$ B. $e^{-x-y} + 1$. C. $e^{-x-y} - 1$. D. e^{-x-y} .
8. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 ()
- A. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛. B. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛.
C. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$ 收敛. D. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ 收敛.
9. 设 $f(x) = x^2, 0 \leq x \leq 1$, 而 $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x, -\infty < x < +\infty$, 其中

$$b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx, \quad n=1, 2, 3, \dots, \quad \text{则 } s(-\frac{1}{2}) = (\quad)$$

- A. $-\frac{1}{2}$. B. $-\frac{1}{4}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $\frac{1}{2}$.

10. 设 L 为椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 其周长为 a , 则 $\oint_L (2xy + 3x^2 + 4y^2) ds = (\quad)$

- A. a . B. $3a$. C. $6a$. D. $12a$.

二、填空题 (共 5 小题, 每题 3 分, 共 15 分)

1. 设 $u = e^{-x} \sin \frac{x}{y}$, 则 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ 在点 $(2, \frac{1}{\pi})$ 处的值为_____.

2. 过点 $M(1, 2, -1)$ 且与直线 $\begin{cases} x = -t + 2 \\ y = 3t - 4 \\ z = t - 1 \end{cases}$ 垂直的平面方程是_____.

3. 函数 $u = xyz$ 在点 $M(1, 1, 1)$ 处的梯度 $\text{grad} u|_M =$ _____.

4. 设向量 x 与向量 $a = (2, -1, 1)$ 共线, 且 $a \cdot x = -18$, 则 $x =$ _____.

5. 已知 $\frac{(x+ay)dx + ydy}{(x+y)^2}$ 为某函数的全微分, 则 $a =$ _____.

三、计算题 1 (共 4 小题, 每小题 7 分, 共 28 分)

1. 求 $\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy$ 的值, 其中 D 是由圆周 $x^2 + y^2 = Rx$ 所围成的闭区域.

2. 验证: $(3x^2y + 8xy^2)dx + (x^3 + 8x^2y + 12ye^y)dy$ 在整个 xoy 平面内是某个函数的全微分, 并求出一个这样的函数.

3. 求函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在点 $A(1, 0, 1)$ 处沿 A 指向点 $B(2, 2, 3)$ 的方向的方向导数.

4. $\int_L (x^2 - y)dx - (x + \sin^2 y)dy$, 其中 L 是在圆周 $y = \sqrt{2x - x^2}$ 上由点 $(0, 0)$ 到点 $(1, 1)$ 的一段弧.

四、计算题 2 (共 3 小题, 每小题 8 分, 共 24 分)

1. 计算 $I = \iint_{\Sigma} (y-z)dydz + (z-x)dzdx + (x-y)dxdy$, 其中 Σ 是上半球面 $x^2 + y^2$

$+z^2 = 2Rx$ 被柱面 $x^2 + y^2 = 2rx$ ($0 < r < R$) 截下部分的上侧.

2. 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ 的和函数.

3. 设 $y = e^x$ 是微分方程 $xy' + P(x)y = x$ 的一个解, 求此微分方程满足 $y|_{x=\ln 2} = 0$ 的特解.

五、应用题 (共 1 小题, 每小题 8 分, 共 8 分)

1. 在曲面 $z = 2 - x^2 - y^2$ 位于第一卦限部分上求一点, 使得该点的切平面与三个坐标面所围成的四面体的体积最小

六、证明题 (共 1 小题, 每小题 5 分, 共 5 分)

1. 设 $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n}), n = 1, 2, 3, \dots$, 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1)$ 收敛.