第 9 章 g：多元函数的极值

数学系　　梁卓滨

2017.07 暑期班

Outline

1. 多元函数的极值点

2. 条件极值（这次就算了）

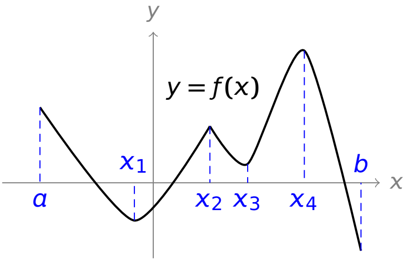
We are here now...

1. 多元函数的极值点

2. 条件极值（这次就算了）

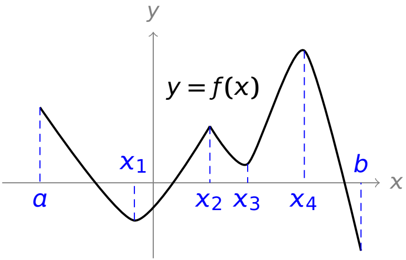
回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

假设 $y = f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上，如图



回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

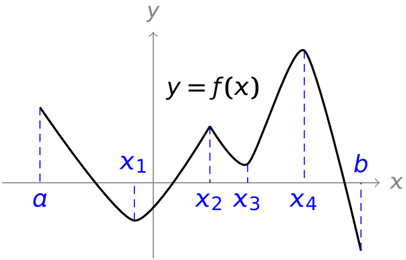
假设 $y = f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上，如图



	极值点	驻点	最值点
a			
x_1			
x_2			
x_3			
x_4			
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

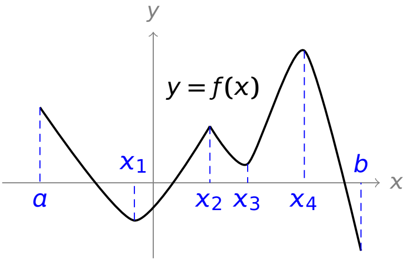
假设 $y = f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上，如图



	极值点	驻点	最值点
a			
x_1	极小值点		
x_2			
x_3			
x_4			
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

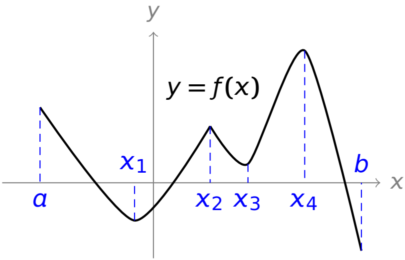
假设 $y = f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上，如图



	极值点	驻点	最值点
a			
x_1	极小值点		
x_2	极大值点		
x_3			
x_4			
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

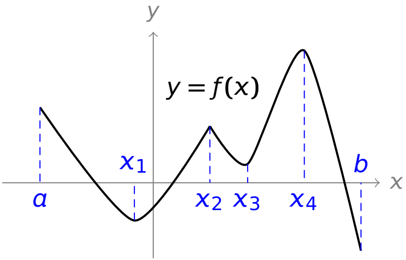
假设 $y = f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上，如图



	极值点	驻点	最值点
a			
x_1	极小值点		
x_2	极大值点		
x_3	极小值点		
x_4			
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

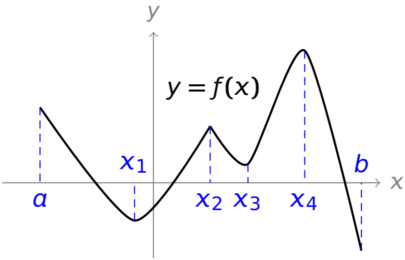
假设 $y=f(x)$ 定义在区间 $[a,b]$ 上，如图



	极值点	驻点	最值点
a			
x_1	极小值点		
x_2	极大值点		
x_3	极小值点		
x_4	极大值点		
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

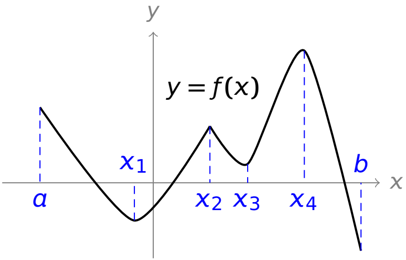
假设 $y=f(x)$ 定义在区间 $[a,b]$ 上，如图



	极值点	驻点	最值点
a			
x_1	极小值点	✓	
x_2	极大值点		
x_3	极小值点		
x_4	极大值点		
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

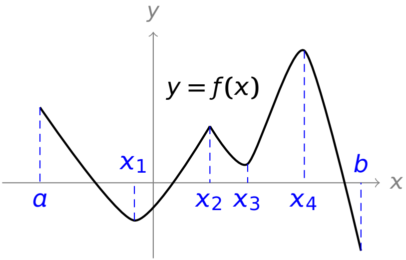
假设 $y = f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上，如图



	极值点	驻点	最值点
a			
x_1	极小值点	✓	
x_2	极大值点	×(不可导)	
x_3	极小值点		
x_4	极大值点		
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

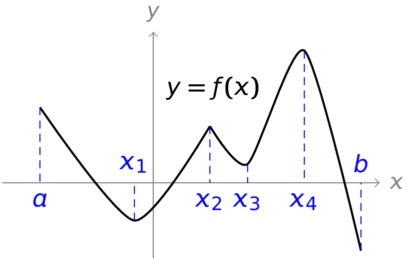
假设 $y=f(x)$ 定义在区间 $[a,b]$ 上，如图



	极值点	驻点	最值点
a			
x_1	极小值点	$\checkmark$	
x_2	极大值点	$\times$（不可导）	
x_3	极小值点	$\checkmark$	
x_4	极大值点		
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

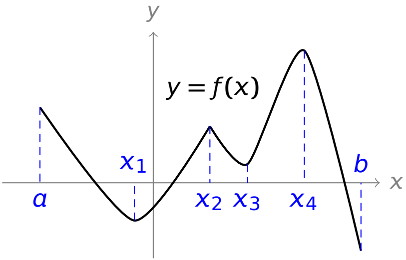
假设 $y=f(x)$ 定义在区间 $[a,b]$ 上，如图



	极值点	驻点	最值点
a			
x_1	极小值点	$\checkmark$	
x_2	极大值点	$\times$(不可导)	
x_3	极小值点	$\checkmark$	
x_4	极大值点	$\checkmark$	
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

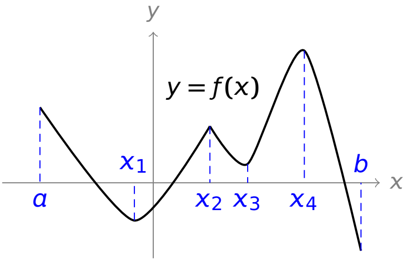
假设 $y = f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上，如图



	极值点	驻点	最值点
a			$\times$
x_1	极小值点	$\checkmark$	
x_2	极大值点	$\times$(不可导)	
x_3	极小值点	$\checkmark$	
x_4	极大值点	$\checkmark$	
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

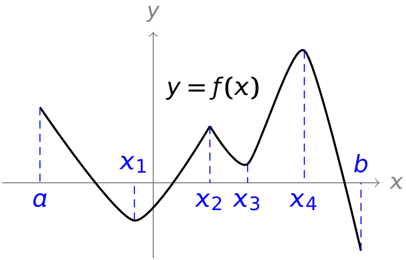
假设 $y = f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上，如图



	极值点	驻点	最值点
a			×
x_1	极小值点	√	×
x_2	极大值点	×(不可导)	
x_3	极小值点	√	
x_4	极大值点	√	
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

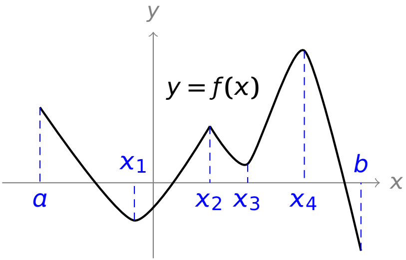
假设 $y = f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上，如图



	极值点	驻点	最值点
a			×
x_1	极小值点	√	×
x_2	极大值点	×(不可导)	×
x_3	极小值点	√	
x_4	极大值点	√	
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

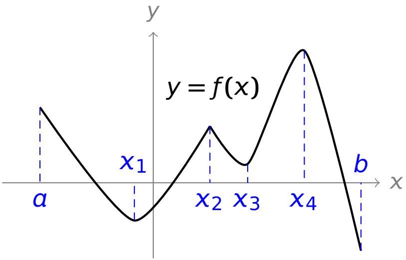
假设 $y=f(x)$ 定义在区间 $[a,b]$ 上，如图



	极值点	驻点	最值点
a			×
x_1	极小值点	√	×
x_2	极大值点	×(不可导)	×
x_3	极小值点	√	×
x_4	极大值点	√	
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

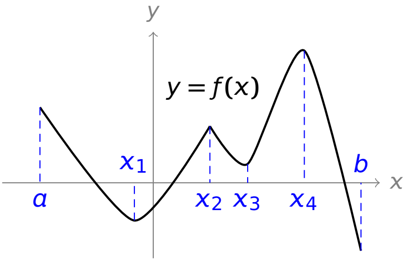
假设 $y=f(x)$ 定义在区间 $[a,b]$ 上，如图



	极值点	驻点	最值点
a			×
x_1	极小值点	√	×
x_2	极大值点	×(不可导)	×
x_3	极小值点	√	×
x_4	极大值点	√	最大值点
b			

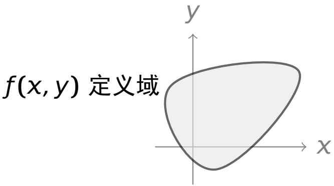
回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

假设 $y=f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上，如图

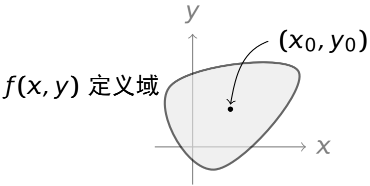


	极值点	驻点	最值点
a			×
x_1	极小值点	√	×
x_2	极大值点	×(不可导)	×
x_3	极小值点	√	×
x_4	极大值点	√	最大值点
b			最小值点

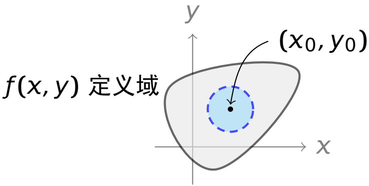
多元函数的极值、极值点



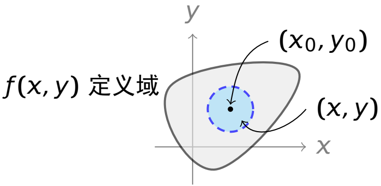
多元函数的极值、极值点



多元函数的极值、极值点



多元函数的极值、极值点

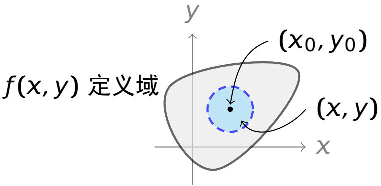


定义 在点 (x_0, y_0) 的某个邻域内

- 如果总是成立

$$f(x, y) \le f(x_0, y_0), \quad 其中(x, y) \ne (x_0, y_0)$$

多元函数的极值、极值点



定义 在点 (x_0, y_0) 的某个邻域内

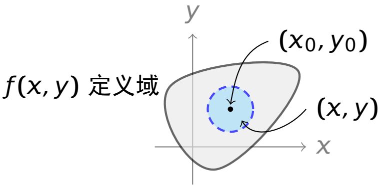
- 如果总是成立

$$f(x,y) \le f(x_0,y_0), \quad \text{其中}(x,y) \ne (x_0,y_0)$$

则称点 (x_0, y_0) 是函数 $f(x, y)$ **极大值点**,

多元函数的极值、极值点

定义 在点 (x_0, y_0) 的某个邻域内



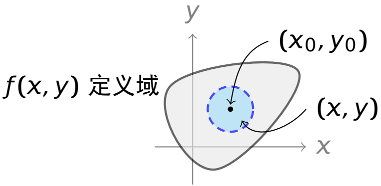
- 如果总是成立

$$f(x, y) \le f(x_0, y_0), \quad \text{其中}(x, y) \ne (x_0, y_0)$$

则称点 (x_0, y_0) 是函数 $f(x, y)$ 极大值点，$f(x_0, y_0)$ 是极大值

多元函数的极值、极值点

定义 在点 (x_0, y_0) 的某个邻域内



- 如果总是成立

$$f(x, y) \le f(x_0, y_0), \quad \text{其中}(x, y) \ne (x_0, y_0)$$

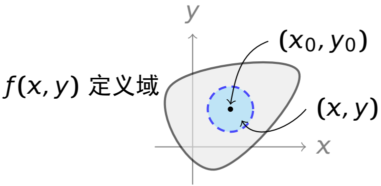
则称点 (x_0, y_0) 是函数 $f(x, y)$ 极大值点，$f(x_0, y_0)$ 是极大值

- 如果总是成立

$$f(x, y) \ge f(x_0, y_0), \quad \text{其中}(x, y) \ne (x_0, y_0)$$

多元函数的极值、极值点

定义 在点 (x_0, y_0) 的某个邻域内



- 如果总是成立

$$f(x, y) \le f(x_0, y_0), \quad \text{其中}(x, y) \ne (x_0, y_0)$$

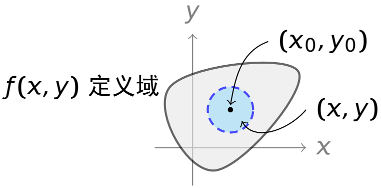
则称点 (x_0, y_0) 是函数 $f(x, y)$ 极大值点，$f(x_0, y_0)$ 是极大值

- 如果总是成立

$$f(x, y) \ge f(x_0, y_0), \quad \text{其中}(x, y) \ne (x_0, y_0)$$

则称点 (x_0, y_0) 是函数 $f(x, y)$ 极小值点，

多元函数的极值、极值点



定义 在点 (x_0, y_0) 的某个邻域内

- 如果总是成立

$$f(x, y) \le f(x_0, y_0), \quad \text{其中}(x, y) \ne (x_0, y_0)$$

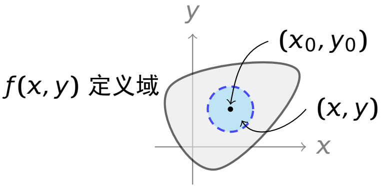
则称点 (x_0, y_0) 是函数 $f(x, y)$ 极大值点，$f(x_0, y_0)$ 是极大值

- 如果总是成立

$$f(x, y) \ge f(x_0, y_0), \quad \text{其中}(x, y) \ne (x_0, y_0)$$

则称点 (x_0, y_0) 是函数 $f(x, y)$ 极小值点，$f(x_0, y_0)$ 是极小值

多元函数的极值、极点



定义 在点 (x_0, y_0) 的某个邻域内

- 如果总是成立

$$f(x, y) \le f(x_0, y_0), \quad 其中(x, y) \ne (x_0, y_0)$$

则称点 (x_0, y_0) 是函数 $f(x, y)$ 极大值点，$f(x_0, y_0)$ 是极大值

- 如果总是成立

$$f(x, y) \ge f(x_0, y_0), \quad 其中(x, y) \ne (x_0, y_0)$$

则称点 (x_0, y_0) 是函数 $f(x, y)$ 极小值点，$f(x_0, y_0)$ 是极小值

- 极大、极小值点统称极值点；极大、极小值统称极值。

例

- $z = x^2 + y^2$

  点 $p_0(0, 0)$ 是

- $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$

  点 $p_0(0, 0)$ 是

- $z = xy$

  点 $p_0(0, 0)$ 是

例

- $z = x^2 + y^2$

  点 $p_0(0, 0)$ 是极小值点；

- $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$

  点 $p_0(0, 0)$ 是

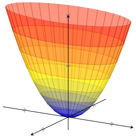
- $z = xy$

  点 $p_0(0, 0)$ 是

例

- $z = x^2 + y^2$

  点 $p_0(0, 0)$ 是极小值点；



- $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$

  点 $p_0(0, 0)$ 是

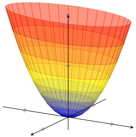
- $z = xy$

  点 $p_0(0, 0)$ 是

例

- $z = x^2 + y^2$

  点 $p_0(0, 0)$ 是极小值点；



- $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$

  点 $p_0(0, 0)$ 是极大值点；

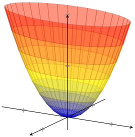
- $z = xy$

  点 $p_0(0, 0)$ 是

例

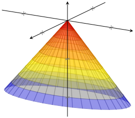
- $z = x^2 + y^2$

  点 $p_0(0,0)$ 是极小值点；



- $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$

  点 $p_0(0,0)$ 是极大值点；



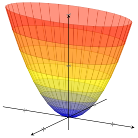
- $z = xy$

  点 $p_0(0,0)$ 是

例

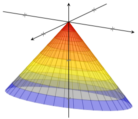
- $z = x^2 + y^2$

  点 $p_0(0, 0)$ 是极小值点；



- $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$

  点 $p_0(0, 0)$ 是极大值点；



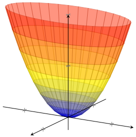
- $z = xy$

  点 $p_0(0, 0)$ 不是极值点。

例

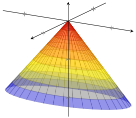
- $z = x^2 + y^2$

  点 $p_0(0, 0)$ 是极小值点；



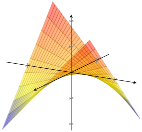
- $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$

  点 $p_0(0, 0)$ 是极大值点；



- $z = xy$

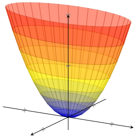
  点 $p_0(0, 0)$ 不是极值点。



例

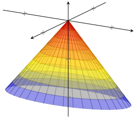
- $z = x^2 + y^2$

  点 $p_0(0, 0)$ 是极小值点；



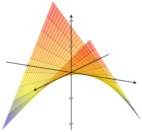
- $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$

  点 $p_0(0, 0)$ 是极大值点；



- $z = xy$

  点 $p_0(0, 0)$ 不是极值点。



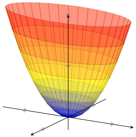
问题

- $z = xy$ 是否有极值点？

例

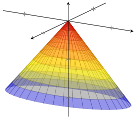
- $z = x^2 + y^2$

  点 $p_0(0, 0)$ 是极小值点；



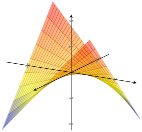
- $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$

  点 $p_0(0, 0)$ 是极大值点；



- $z = xy$

  点 $p_0(0, 0)$ 不是极值点。



问题

- $z = xy$ 是否有极值点？
- 是否有一般方法求出函数的极值点？如：

$$z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$$

定理 设 $z = f(x, y)$ 在内点 (x_0, y_0) 处存在偏导数，则 (x_0, y_0) 是极值点的必要条件是

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

定理 设 $z=f(x,y)$ 在内点 (x_0,y_0) 处存在偏导数，则 (x_0,y_0) 是极值点的必要条件是

$$f_x(x_0,y_0)=0,\quad f_y(x_0,y_0)=0.$$

证明

1. 一元函数 $x\mapsto f(x,y_0)$

定理 设 $z = f(x, y)$ 在内点 (x_0, y_0) 处存在偏导数，则 (x_0, y_0) 是极值点的必要条件是

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

证明

1. 一元函数 $x \mapsto f(x, y_0)$具有极值点 $x = x_0$，

定理 设 $z = f(x, y)$ 在内点 (x_0, y_0) 处存在偏导数，则 (x_0, y_0) 是极值点的必要条件是

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

证明

1. 一元函数 $x \mapsto f(x, y_0)$具有极值点 $x = x_0$，所以

$$\frac{d}{dx}[f(x, y_0)]\Big|_{x=x_0} = 0$$

定理 设 $z = f(x, y)$ 在内点 (x_0, y_0) 处存在偏导数，则 (x_0, y_0) 是极值点的必要条件是

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

证明

1. 一元函数 $x \mapsto f(x, y_0)$具有极值点 $x = x_0$，所以

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{d}{dx}[f(x, y_0)]\Big|_{x=x_0} = 0$$

定理 设 $z=f(x,y)$ 在内点 (x_0,y_0) 处存在偏导数，则 (x_0,y_0) 是极值点的必要条件是

$$f_x(x_0,y_0)=0,\quad f_y(x_0,y_0)=0.$$

证明

1. 一元函数 $x\mapsto f(x,y_0)$具有极值点 $x=x_0$，所以

$$f_x(x_0,y_0)=\frac{d}{dx}[f(x,y_0)]\Big|_{x=x_0}=0$$

2. 一元函数 $y\mapsto f(x_0,y)$ 具有极值点 $y=y_0$，

定理 设 $z=f(x,y)$ 在内点 (x_0,y_0) 处存在偏导数，则 (x_0,y_0) 是极值点的必要条件是

$$f_x(x_0,y_0)=0,\quad f_y(x_0,y_0)=0.$$

证明

1. 一元函数 $x\mapsto f(x,y_0)$具有极值点 $x=x_0$，所以

$$f_x(x_0,y_0)=\frac{d}{dx}[f(x,y_0)]\Big|_{x=x_0}=0$$

2. 一元函数 $y\mapsto f(x_0,y)$ 具有极值点 $y=y_0$，所以

$$\frac{d}{dy}[f(x_0,y)]\Big|_{y=y_0}=0$$

定理 设 $z = f(x, y)$ 在内点 (x_0, y_0) 处存在偏导数，则 (x_0, y_0) 是极值点的必要条件是

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

证明

1. 一元函数 $x \mapsto f(x, y_0)$具有极值点 $x = x_0$，所以
$$f_x(x_0, y_0) = \frac{d}{dx}[f(x, y_0)]\Big|_{x=x_0} = 0$$
2. 一元函数 $y \mapsto f(x_0, y)$ 具有极值点 $y = y_0$，所以
$$f_y(x_0, y_0) = \frac{d}{dy}[f(x_0, y)]\Big|_{y=y_0} = 0$$

定理 设 $z = f(x, y)$ 在内点 (x_0, y_0) 处存在偏导数，则 (x_0, y_0) 是极值点的必要条件是

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

证明

1. 一元函数 $x \mapsto f(x, y_0)$具有极值点 $x = x_0$，所以
$$f_x(x_0, y_0) = \frac{d}{dx}[f(x, y_0)]\Big|_{x=x_0} = 0$$

2. 一元函数 $y \mapsto f(x_0, y)$ 具有极值点 $y = y_0$，所以
$$f_y(x_0, y_0) = \frac{d}{dy}[f(x_0, y)]\Big|_{y=y_0} = 0$$

定义 使偏导数为零的点，称为驻点

定理 设 $z=f(x,y)$ 在内点 (x_0,y_0) 处存在偏导数，则 (x_0,y_0) 是极值点的必要条件是

$$f_x(x_0,y_0)=0,\quad f_y(x_0,y_0)=0.$$

证明

1. 一元函数 $x\mapsto f(x,y_0)$具有极值点 $x=x_0$，所以
$$f_x(x_0,y_0)=\frac{d}{dx}[f(x,y_0)]\Big|_{x=x_0}=0$$
2. 一元函数 $y\mapsto f(x_0,y)$ 具有极值点 $y=y_0$，所以
$$f_y(x_0,y_0)=\frac{d}{dy}[f(x_0,y)]\Big|_{y=y_0}=0$$

定义 使偏导数为零的点，称为驻点

注 如果函数存在偏导数，则 $\{$极值点$\}\subset\{$驻点$\}$

例 1 点 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点，从而也是驻点。

例 1 点 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点，从而也是驻点。直接验证 $(0, 0)$ 是驻点，则如下：

$$\begin{cases} z_x = \\ z_y = \end{cases}$$

例 1 点 (0, 0) 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点，从而也是驻点。直接验证 (0, 0) 是驻点，则如下：

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases}$$

例 1 点 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点，从而也是驻点。直接验证 $(0, 0)$ 是驻点，则如下：

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_x(0, 0) = 0 \\ z_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

例 1 点 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点，从而也是驻点。直接验证 $(0, 0)$ 是驻点，则如下：

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \implies \begin{cases} z_x(0, 0) = 0 \\ z_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

例 2 点 $(0, 0)$ 是 $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ 的极大值点，但不是驻点：

例 1 点 $(0, 0)$ 是 $z=x^2+y^2$ 的极小值点，从而也是驻点。直接验证 $(0, 0)$ 是驻点，则如下：

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_x(0, 0) = 0 \\ z_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

例 2 点 $(0, 0)$ 是 $z=-\sqrt{x^2+y^2}$ 的极大值点，但不是驻点：一阶偏导

$$z_x(0, 0), \quad z_y(0, 0)$$

不存在。

例 1 点 (0, 0) 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点，从而也是驻点。直接验证 (0, 0) 是驻点，则如下：

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \implies \begin{cases} z_x(0, 0) = 0 \\ z_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

例 2 点 (0, 0) 是 $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ 的极大值点，但不是驻点：一阶偏导

$$z_x(0, 0), \quad z_y(0, 0)$$

不存在。

例 3（驻点不一定是极值点） 设 $z = xy$。

例 1 点 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点，从而也是驻点。直接验证 $(0, 0)$ 是驻点，则如下：

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_x(0, 0) = 0 \\ z_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

例 2 点 $(0, 0)$ 是 $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ 的极大值点，但不是驻点：一阶偏导

$$z_x(0, 0), \quad z_y(0, 0)$$

不存在。

例 3（驻点不一定是极值点） 设 $z = xy$。点 $(0, 0)$ 是驻点：

例 1 点 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点，从而也是驻点。直接验证 $(0, 0)$ 是驻点，则如下：

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \implies \begin{cases} z_x(0, 0) = 0 \\ z_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

例 2 点 $(0, 0)$ 是 $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ 的极大值点，但不是驻点：一阶偏导

$$z_x(0, 0), \quad z_y(0, 0)$$

不存在。

例 3（驻点不一定是极值点） 设 $z = xy$。点 $(0, 0)$ 是驻点：

$$\begin{cases} z_x = y \\ z_y = x \end{cases}$$

例 1 点 (0, 0) 是 $z=x^2+y^2$ 的极小值点，从而也是驻点。直接验证 (0, 0) 是驻点，则如下：

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_x(0,0) = 0 \\ z_y(0,0) = 0 \end{cases}$$

例 2 点 (0, 0) 是 $z=-\sqrt{x^2+y^2}$ 的极大值点，但不是驻点：一阶偏导

$$z_x(0,0), \quad z_y(0,0)$$

不存在。

例 3（驻点不一定是极值点） 设 $z=xy$。点 (0, 0) 是驻点：

$$\begin{cases} z_x = y \\ z_y = x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_x(0,0) = 0 \\ z_y(0,0) = 0 \end{cases}$$

例 1 点 (0, 0) 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点，从而也是驻点。直接验证 (0, 0) 是驻点，则如下：

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \implies \begin{cases} z_x(0, 0) = 0 \\ z_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

例 2 点 (0, 0) 是 $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ 的极大值点，但不是驻点：一阶偏导

$$z_x(0, 0), \quad z_y(0, 0)$$

不存在。

例 3（驻点不一定是极值点） 设 $z = xy$。点 (0, 0) 是驻点：

$$\begin{cases} z_x = y \\ z_y = x \end{cases} \implies \begin{cases} z_x(0, 0) = 0 \\ z_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

但点 (0, 0) 不是极值点。

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$，求驻点。

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = \\ z_y = \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = \end{cases}$$

例 设 $z=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2+6x-9 \\ z_y = -3y^2+6y \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \\ \\ \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3(x+3)(x-1) = 0 \\ \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3(x+3)(x-1) = 0 \\ -3y(y-2) = 0 \end{cases}$$

例 设 $z=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2+6x-9 \\ z_y = -3y^2+6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2+6x-9=0 \\ z_y = -3y^2+6y=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3(x+3)(x-1)=0 \\ -3y(y-2)=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x= \\ y= \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3(x+3)(x-1) = 0 \\ -3y(y-2) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -3,\ 1 \\ y = \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3(x+3)(x-1) = 0 \\ -3y(y-2) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -3,\ 1 \\ y = 0,\ 2 \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3(x+3)(x-1) = 0 \\ -3y(y-2) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -3,\ 1 \\ y = 0,\ 2 \end{cases}$$

所以驻点为

$y = 2$		
$y = 0$		
	$x = -3$	$x = 1$

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3(x+3)(x-1) = 0 \\ -3y(y-2) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -3,\ 1 \\ y = 0,\ 2 \end{cases}$$

所以驻点为

$y = 2$		
$y = 0$	$(-3, 0)$	
	$x = -3$	$x = 1$

例 设 $z=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x=3x^2+6x-9 \\ z_y=-3y^2+6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x=3x^2+6x-9=0 \\ z_y=-3y^2+6y=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3(x+3)(x-1)=0 \\ -3y(y-2)=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=-3,\ 1 \\ y=0,\ 2 \end{cases}$$

所以驻点为

$y=2$	$(-3,2)$	
$y=0$	$(-3,0)$	
	$x=-3$	$x=1$

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3(x+3)(x-1) = 0 \\ -3y(y-2) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -3,\ 1 \\ y = 0,\ 2 \end{cases}$$

所以驻点为

$y = 2$	$(-3, 2)$	
$y = 0$	$(-3, 0)$	$(1, 0)$
	$x = -3$	$x = 1$

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3(x+3)(x-1) = 0 \\ -3y(y-2) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -3,\ 1 \\ y = 0,\ 2 \end{cases}$$

所以驻点为

$y = 2$	$(-3, 2)$	$(1, 2)$
$y = 0$	$(-3, 0)$	$(1, 0)$
	$x = -3$	$x = 1$

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

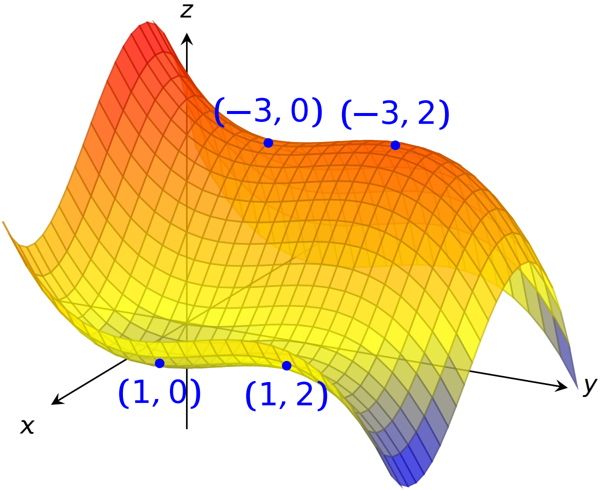
$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3(x+3)(x-1) = 0 \\ -3y(y-2) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -3,\ 1 \\ y = 0,\ 2 \end{cases}$$

所以驻点为

$y = 2$	$(-3, 2)$	$(1, 2)$
$y = 0$	$(-3, 0)$	$(1, 0)$
	$x = -3$	$x = 1$

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$，求驻点。

$$z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$$



例 设 $z = x^3 + y^3 - 3xy$，求驻点。

例 设 $z = x^3 + y^3 - 3xy$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = \\ z_y = \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 + y^3 - 3xy$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y \\ z_y = \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 + y^3 - 3xy$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y \\ z_y = 3y^2 - 3x \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 + y^3 - 3xy$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y \\ z_y = 3y^2 - 3x \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ z_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 + y^3 - 3xy$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y \\ z_y = 3y^2 - 3x \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ z_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 + y^3 - 3xy$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y \\ z_y = 3y^2 - 3x \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ z_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ \end{cases}$$

例 设 $z=x^3+y^3-3xy$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2-3y \\ z_y = 3y^2-3x \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2-3y=0 \\ z_y = 3y^2-3x=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 + y^3 - 3xy$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y \\ z_y = 3y^2 - 3x \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ z_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases} \Longrightarrow x^4 = x$$

例 设 $z = x^3 + y^3 - 3xy$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y \\ z_y = 3y^2 - 3x \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ z_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases} \Longrightarrow x^4 = x \quad \Longrightarrow x = 0, 1$$

例 设 $z = x^3 + y^3 - 3xy$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y \\ z_y = 3y^2 - 3x \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ z_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases} \Longrightarrow x^4 = x \Longrightarrow x = 0,\ 1$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 + y^3 - 3xy$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y \\ z_y = 3y^2 - 3x \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ z_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases} \Longrightarrow x^4 = x \quad \Longrightarrow x = 0, 1$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 + y^3 - 3xy$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y \\ z_y = 3y^2 - 3x \end{cases}$$

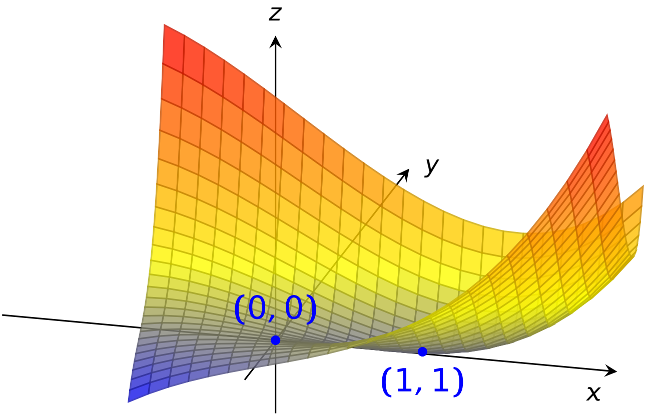
求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ z_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases} \Longrightarrow x^4 = x \Longrightarrow x = 0, 1$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

所以驻点为 $(1, 1)$，$(0, 0)$

$$z = x^3 + y^3 - 3xy$$



- 问题 如何从驻点中判别哪些是极值点？

- 问题 如何从驻点中判别哪些是极值点？

定理（极值的充分条件） 设 $z=f(x,y)$ 具有直到二阶的连续偏导数，(x_0,y_0) 是驻点。

- 问题 如何从驻点中判别哪些是极值点？

定理（极值的充分条件） 设 $z = f(x, y)$ 具有直到二阶的连续偏导数，(x_0, y_0) 是驻点。定义判别式

$$P(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$$

结论是：

- 问题 如何从驻点中判别哪些是极值点？

定理（极值的充分条件） 设 $z = f(x, y)$ 具有直到二阶的连续偏导数，(x_0, y_0) 是驻点。定义判别式

$$P(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$$

结论是：

3. 若 $P(x_0, y_0) < 0$，则 (x_0, y_0) 一定不是极值点；

- 问题 如何从驻点中判别哪些是极值点？

定理（极值的充分条件） 设 $z = f(x, y)$ 具有直到二阶的连续偏导数，(x_0, y_0) 是驻点。定义判别式

$$P(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$$

结论是：

3. 若 $P(x_0, y_0) < 0$，则 (x_0, y_0) 一定不是极值点；
4. 若 $P(x_0, y_0) = 0$，则此判定法失效，结论不确定。

- 问题 如何从驻点中判别哪些是极值点？

定理（极值的充分条件） 设 $z = f(x, y)$ 具有直到二阶的连续偏导数，(x_0, y_0) 是驻点。定义判别式

$$P(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$$

结论是：

1. 若 $P(x_0, y_0) > 0$，
2. 若 $P(x_0, y_0) > 0$，
3. 若 $P(x_0, y_0) < 0$，则 (x_0, y_0) 一定不是极值点；
4. 若 $P(x_0, y_0) = 0$，则此判定法失效，结论不确定。

- 问题 如何从驻点中判别哪些是极值点？

定理（极值的充分条件） 设 $z=f(x,y)$ 具有直到二阶的连续偏导数，(x_0,y_0) 是驻点。定义判别式

$$P(x,y)=f_{xx}(x,y)\cdot f_{yy}(x,y)-f_{xy}(x,y)^2$$

结论是：

1. 若 $P(x_0,y_0)>0$，且 $f_{xx}(x_0,y_0)<0$，则 (x_0,y_0) 是极大值点；
2. 若 $P(x_0,y_0)>0$，
3. 若 $P(x_0,y_0)<0$，则 (x_0,y_0) 一定不是极值点；
4. 若 $P(x_0,y_0)=0$，则此判定法失效，结论不确定。

- **问题** 如何从驻点中判别哪些是极值点？

定理（极值的充分条件） 设 $z=f(x,y)$ 具有直到二阶的连续偏导数，(x_0,y_0) 是驻点。定义判别式

$$P(x,y)=f_{xx}(x,y)\cdot f_{yy}(x,y)-f_{xy}(x,y)^2$$

结论是：

1. 若 $P(x_0,y_0)>0$，且 $f_{xx}(x_0,y_0)<0$，则 (x_0,y_0) 是极大值点；
2. 若 $P(x_0,y_0)>0$，且 $f_{xx}(x_0,y_0)>0$，则 (x_0,y_0) 是极小值点；
3. 若 $P(x_0,y_0)<0$，则 (x_0,y_0) 一定不是极值点；
4. 若 $P(x_0,y_0)=0$，则此判定法失效，结论不确定。

- **问题** 如何从驻点中判别哪些是极值点？

定理（极值的充分条件） 设 $z = f(x, y)$ 具有直到二阶的连续偏导数，(x_0, y_0) 是驻点。定义判别式

$$P(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$$

结论是：

1. 若 $P(x_0, y_0) > 0$，且 $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$，则 (x_0, y_0) 是极大值点；
2. 若 $P(x_0, y_0) > 0$，且 $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$，则 (x_0, y_0) 是极小值点；
3. 若 $P(x_0, y_0) < 0$，则 (x_0, y_0) 一定不是极值点；
4. 若 $P(x_0, y_0) = 0$，则此判定法失效，结论不确定。

- **总结** 求 $z = f(x, y)$ 极值点的步骤：

  1. 求驻点：

- **问题** 如何从驻点中判别哪些是极值点？

定理（极值的充分条件） 设 $z=f(x, y)$ 具有直到二阶的连续偏导数，(x_0, y_0) 是驻点。定义判别式

$$P(x, y)=f_{xx}(x, y)\cdot f_{yy}(x, y)-f_{xy}(x, y)^2$$

结论是：

1. 若 $P(x_0,y_0)>0$，且 $f_{xx}(x_0,y_0)<0$，则 (x_0,y_0) 是极大值点；
2. 若 $P(x_0,y_0)>0$，且 $f_{xx}(x_0,y_0)>0$，则 (x_0,y_0) 是极小值点；
3. 若 $P(x_0, y_0)<0$，则 (x_0, y_0) 一定不是极值点；
4. 若 $P(x_0, y_0)=0$，则此判定法失效，结论不确定。

- **总结** 求 $z=f(x, y)$ 极值点的步骤：

  1. 求驻点：解方程 $\begin{cases} z_x(x, y)=0 \\ z_y(x, y)=0 \end{cases}$，设解为 (x_0, y_0)

- 问题 如何从驻点中判别哪些是极值点？

定理（极值的充分条件） 设 $z = f(x, y)$ 具有直到二阶的连续偏导数，(x_0, y_0) 是驻点。定义判别式

$$P(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$$

结论是：

1. 若 $P(x_0, y_0) > 0$，且 $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$，则 (x_0, y_0) 是极大值点；
2. 若 $P(x_0, y_0) > 0$，且 $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$，则 (x_0, y_0) 是极小值点；
3. 若 $P(x_0, y_0) < 0$，则 (x_0, y_0) 一定不是极值点；
4. 若 $P(x_0, y_0) = 0$，则此判定法失效，结论不确定。

- 总结 求 $z = f(x, y)$ 极值点的步骤：
  1. 求驻点：解方程 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$，设解为 (x_0, y_0)
  2. 通过 $P(x_0, y_0)$ 辨别驻点 (x_0, y_0) 是否极值点

例 求 $z=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值点。

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = \qquad\qquad , \qquad z_y =$$

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \qquad z_y =$$

例 求 $z=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x=3x^2+6x-9, \qquad z_y=-3y^2+6y$$

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \qquad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \qquad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \qquad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$P(x, y) =$$

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \qquad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = \\ z_{xy} = \\ z_{yy} = \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) =$$

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \qquad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = \\ z_{yy} = \end{cases} \qquad \Longrightarrow P(x, y) =$$

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \qquad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) =$$

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \qquad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = -6y + 6 \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) =$$

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \qquad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = -6y + 6 \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = -36(x+1)(y-1)$$

例 求 $z=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x=3x^2+6x-9, \qquad z_y=-3y^2+6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x,y)=0 \\ z_y(x,y)=0 \end{cases}$ 得：$(-3,0)$, $(-3,2)$, $(1,0)$, $(1,2)$

2. 再求判别式 $P(x,y)$

$$\begin{cases} z_{xx}=6x+6 \\ z_{xy}=0 \\ z_{yy}=-6y+6 \end{cases} \Longrightarrow P(x,y)=-36(x+1)(y-1)$$

3. 结论

	$(-3,0)$	$(-3,2)$	$(1,0)$	$(1,2)$
$P(x_0,y_0)$				
$z_{xx}(x_0,y_0)$				
是否极值点				

例 求 $z=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x=3x^2+6x-9,\qquad z_y=-3y^2+6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x,y)=0 \\ z_y(x,y)=0 \end{cases}$ 得：$(-3,0), (-3,2), (1,0), (1,2)$

2. 再求判别式 $P(x,y)$

$$\begin{cases} z_{xx}=6x+6 \\ z_{xy}=0 \\ z_{yy}=-6y+6 \end{cases} \Longrightarrow P(x,y)=-36(x+1)(y-1)$$

3. 结论

	$(-3,0)$	$(-3,2)$	$(1,0)$	$(1,2)$
$P(x_0,y_0)$	$-72<0$			
$z_{xx}(x_0,y_0)$				
是否极值点				

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \qquad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(-3, 0)$, $(-3, 2)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = -6y + 6 \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = -36(x+1)(y-1)$$

3. 结论

	$(-3, 0)$	$(-3, 2)$	$(1, 0)$	$(1, 2)$
$P(x_0, y_0)$	$-72 < 0$			
$z_{xx}(x_0, y_0)$				
是否极值点	×			

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \qquad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(-3, 0)$, $(-3, 2)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = -6y + 6 \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = -36(x+1)(y-1)$$

3. 结论

	$(-3, 0)$	$(-3, 2)$	$(1, 0)$	$(1, 2)$
$P(x_0, y_0)$	$-72 < 0$	$72 > 0$		
$z_{xx}(x_0, y_0)$				
是否极值点	×			

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \qquad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = -6y + 6 \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = -36(x+1)(y-1)$$

3. 结论

	$(-3, 0)$	$(-3, 2)$	$(1, 0)$	$(1, 2)$
$P(x_0, y_0)$	$-72 < 0$	$72 > 0$		
$z_{xx}(x_0, y_0)$		$-12 < 0$		
是否极值点	×			

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \qquad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(-3, 0)$, $(-3, 2)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = -6y + 6 \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = -36(x+1)(y-1)$$

3. 结论

	$(-3, 0)$	$(-3, 2)$	$(1, 0)$	$(1, 2)$
$P(x_0, y_0)$	$-72 < 0$	$72 > 0$		
$z_{xx}(x_0, y_0)$		$-12 < 0$		
是否极值点	×	极大值点		

例 求 $z=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x=3x^2+6x-9, \qquad z_y=-3y^2+6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x,y)=0 \\ z_y(x,y)=0 \end{cases}$ 得：$(-3,0)$, $(-3,2)$, $(1,0)$, $(1,2)$

2. 再求判别式 $P(x,y)$

$$\begin{cases} z_{xx}=6x+6 \\ z_{xy}=0 \\ z_{yy}=-6y+6 \end{cases} \Longrightarrow P(x,y)=-36(x+1)(y-1)$$

3. 结论

	$(-3,0)$	$(-3,2)$	$(1,0)$	$(1,2)$
$P(x_0,y_0)$	$-72<0$	$72>0$	$72>0$	
$z_{xx}(x_0,y_0)$		$-12<0$		
是否极值点	×	极大值点		

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \qquad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(-3, 0)$, $(-3, 2)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = -6y + 6 \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = -36(x+1)(y-1)$$

3. 结论

	$(-3, 0)$	$(-3, 2)$	$(1, 0)$	$(1, 2)$
$P(x_0, y_0)$	$-72 < 0$	$72 > 0$	$72 > 0$	
$z_{xx}(x_0, y_0)$		$-12 < 0$	$12 > 0$	
是否极值点	×	极大值点		

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \qquad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(-3, 0)$, $(-3, 2)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = -6y + 6 \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = -36(x+1)(y-1)$$

3. 结论

	$(-3, 0)$	$(-3, 2)$	$(1, 0)$	$(1, 2)$
$P(x_0, y_0)$	$-72 < 0$	$72 > 0$	$72 > 0$	
$z_{xx}(x_0, y_0)$		$-12 < 0$	$12 > 0$	
是否极值点	×	极大值点	极小值点	

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \qquad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = -6y + 6 \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = -36(x + 1)(y - 1)$$

3. 结论

	$(-3, 0)$	$(-3, 2)$	$(1, 0)$	$(1, 2)$
$P(x_0, y_0)$	$-72 < 0$	$72 > 0$	$72 > 0$	$-72 < 0$
$z_{xx}(x_0, y_0)$		$-12 < 0$	$12 > 0$	
是否极值点	×	极大值点	极小值点	

例 求 $z=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x=3x^2+6x-9, \qquad z_y=-3y^2+6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x,y)=0 \\ z_y(x,y)=0 \end{cases}$ 得：$(-3,0)$, $(-3,2)$, $(1,0)$, $(1,2)$

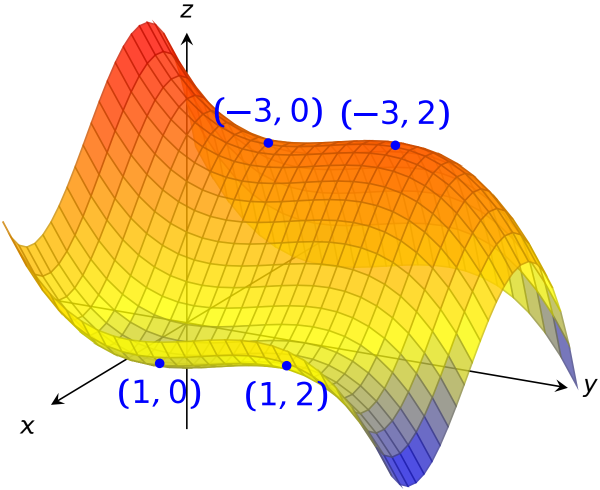
2. 再求判别式 $P(x,y)$

$$\begin{cases} z_{xx}=6x+6 \\ z_{xy}=0 \\ z_{yy}=-6y+6 \end{cases} \Longrightarrow P(x,y)=-36(x+1)(y-1)$$

3. 结论

	$(-3,0)$	$(-3,2)$	$(1,0)$	$(1,2)$
$P(x_0,y_0)$	$-72<0$	$72>0$	$72>0$	$-72<0$
$z_{xx}(x_0,y_0)$		$-12<0$	$12>0$	
是否极值点	×	极大值点	极小值点	×

$$z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$$



例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = \qquad\qquad , \qquad z_y =$$

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \qquad z_y =$$

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \qquad z_y = 3y^2 - 3x$$

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \qquad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \qquad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(1, 1)$，$(0, 0)$

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \qquad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(1, 1)$，$(0, 0)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$P(x, y) =$$

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \qquad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：(1, 1)，(0, 0)

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = \\ z_{xy} = \\ z_{yy} = \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) =$$

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \qquad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(1, 1)$，$(0, 0)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x \\ z_{xy} = \\ z_{yy} = \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) =$$

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \qquad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(1, 1)$，$(0, 0)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x \\ z_{xy} = -3 \\ z_{yy} = \end{cases} \implies P(x, y) =$$

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \qquad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(1, 1)$，$(0, 0)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x \\ z_{xy} = -3 \\ z_{yy} = 6y \end{cases} \implies P(x, y) =$$

例 求 $z=x^3+y^3-3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x=3x^2-3y, \qquad z_y=3y^2-3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x,y)=0 \\ z_y(x,y)=0 \end{cases}$ 得：$(1,1)$，$(0,0)$

2. 再求判别式 $P(x,y)$

$$\begin{cases} z_{xx}=6x \\ z_{xy}=-3 \\ z_{yy}=6y \end{cases} \Longrightarrow P(x,y)=36xy-9$$

例 求 $z=x^3+y^3-3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x=3x^2-3y, \qquad z_y=3y^2-3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x,y)=0 \\ z_y(x,y)=0 \end{cases}$ 得：$(1,1)$，$(0,0)$

2. 再求判别式 $P(x,y)$

$$\begin{cases} z_{xx}=6x \\ z_{xy}=-3 \\ z_{yy}=6y \end{cases} \Longrightarrow P(x,y)=36xy-9$$

3. 结论

	$(1,1)$	$(0,0)$
$P(x_0,y_0)$		
$z_{xx}(x_0,y_0)$		
是否极值点		

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \qquad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(1, 1)$，$(0, 0)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x \\ z_{xy} = -3 \\ z_{yy} = 6y \end{cases} \implies P(x, y) = 36xy - 9$$

3. 结论

	$(1, 1)$	$(0, 0)$
$P(x_0, y_0)$	$27 > 0$	
$z_{xx}(x_0, y_0)$		
是否极值点		

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \qquad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：(1, 1)，(0, 0)

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x \\ z_{xy} = -3 \\ z_{yy} = 6y \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = 36xy - 9$$

3. 结论

	(1, 1)	(0, 0)
$P(x_0, y_0)$	$27 > 0$	
$z_{xx}(x_0, y_0)$	$6 > 0$	
是否极值点		

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \qquad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(1, 1)$，$(0, 0)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x \\ z_{xy} = -3 \\ z_{yy} = 6y \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = 36xy - 9$$

3. 结论

	$(1, 1)$	$(0, 0)$
$P(x_0, y_0)$	$27 > 0$	
$z_{xx}(x_0, y_0)$	$6 > 0$	
是否极值点	极小值点	

例 求 $z=x^3+y^3-3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x=3x^2-3y,\qquad z_y=3y^2-3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x,y)=0 \\ z_y(x,y)=0 \end{cases}$ 得：$(1,1)$，$(0,0)$

2. 再求判别式 $P(x,y)$

$$\begin{cases} z_{xx}=6x \\ z_{xy}=-3 \\ z_{yy}=6y \end{cases} \Longrightarrow P(x,y)=36xy-9$$

3. 结论

	$(1,1)$	$(0,0)$
$P(x_0,y_0)$	$27>0$	$-9<0$
$z_{xx}(x_0,y_0)$	$6>0$	
是否极值点	极小值点	

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \qquad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(1, 1)$，$(0, 0)$

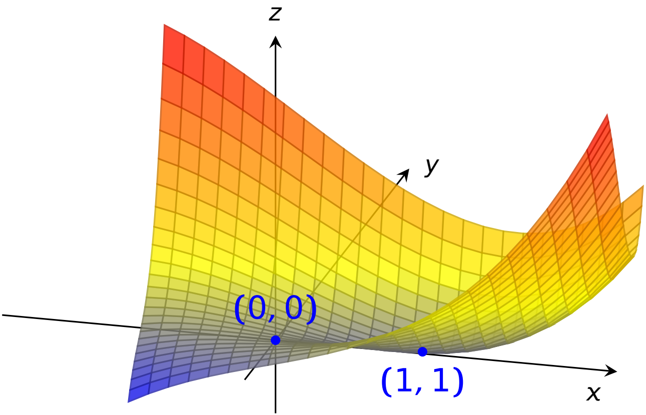
2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x \\ z_{xy} = -3 \\ z_{yy} = 6y \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = 36xy - 9$$

3. 结论

	$(1, 1)$	$(0, 0)$
$P(x_0, y_0)$	$27 > 0$	$-9 < 0$
$z_{xx}(x_0, y_0)$	$6 > 0$	
是否极值点	极小值点	×

$$z = x^3 + y^3 - 3xy$$



三元函数的极值点

- 设 $u = f(x, y, z)$。
- (x_0, y_0, z_0) 是**驻点**指在该点处偏导数全为零：

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f_z(x_0, y_0, z_0) = 0$$

三元函数的极值点

- 设 $u = f(x, y, z)$。
- (x_0, y_0, z_0) 是驻点指在该点处偏导数全为零：

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f_z(x_0, y_0, z_0) = 0$$

- 设 (x_0, y_0, z_0) 是 $u = f(x, y, z)$ 的极值点，则 (x_0, y_0, z_0) 一定是驻点

三元函数的极值点

- 设 $u = f(x, y, z)$。
- (x_0, y_0, z_0) 是驻点指在该点处偏导数全为零：

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f_z(x_0, y_0, z_0) = 0$$

- 设 (x_0, y_0, z_0) 是 $u = f(x, y, z)$ 的极值点，则 (x_0, y_0, z_0) 一定是驻点
- 如何进一步判别哪些驻点为极值点？

三元函数的极值点

- 设 $u = f(x, y, z)$。
- (x_0, y_0, z_0) 是驻点指在该点处偏导数全为零：

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f_z(x_0, y_0, z_0) = 0$$

- 设 (x_0, y_0, z_0) 是 $u = f(x, y, z)$ 的极值点，则 (x_0, y_0, z_0) 一定是驻点
- 如何进一步判别哪些驻点为极值点？考虑矩阵

$$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}_{(x_0, y_0, z_0)}$$

三元函数的极值点

- 设 $u=f(x,y,z)$。
- (x_0,y_0,z_0) 是驻点指在该点处偏导数全为零：

$$f_x(x_0,y_0,z_0)=0,\quad f_y(x_0,y_0,z_0)=0,\quad f_z(x_0,y_0,z_0)=0$$

- 设 (x_0,y_0,z_0) 是 $u=f(x,y,z)$ 的极值点，则 (x_0,y_0,z_0) 一定是驻点
- 如何进一步判别哪些驻点为极值点？考虑矩阵

$$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}_{(x_0,y_0,z_0)}$$

  - 如果是正定矩阵，则 (x_0,y_0,z_0) 是极小值点
  - 如果是负定矩阵，则 (x_0,y_0,z_0) 是极大值点

We are here now...

1. 多元函数的极值点

2. 条件极值（这次就算了）