第 9 章 e：方向导数与梯度

数学系　　梁卓滨

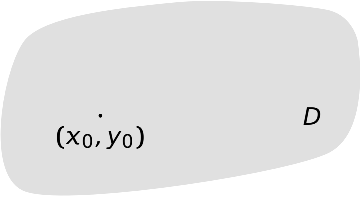
2017-2018 学年 II

提要

1. 二元函数的
   - 梯度
   - 等值线
   - 方向导数
2. 三元函数的
   - 梯度
   - 等值面
   - 方向导数

梯度

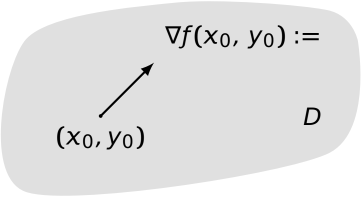
定义 设 $f(x, y)$ 定义在区域 D 上，对每一点 $p_0(x_0, y_0) \in D$，



梯度

定义 设 $f(x, y)$ 定义在区域 D 上，对每一点 $p_0(x_0, y_0) \in D$，定义向量

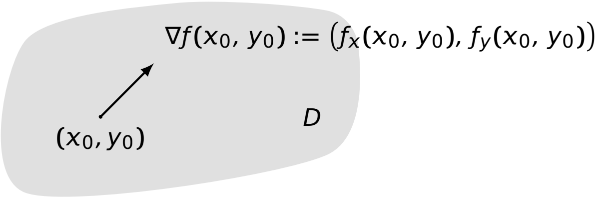
$$\operatorname{grad} f(x_0, y_0) \equiv \nabla f(x_0, y_0)$$



梯度

定义 设 $f(x, y)$ 定义在区域 D 上，对每一点 $p_0(x_0, y_0) \in D$，定义向量

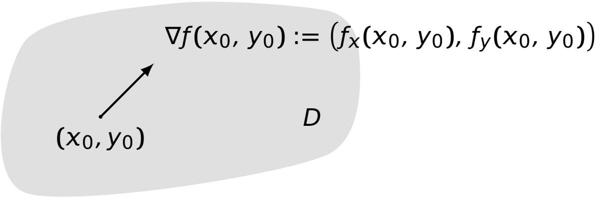
$$\operatorname{grad} f(x_0, y_0) \equiv \nabla f(x_0, y_0) := \big(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)\big)$$



梯度

定义 设 $f(x,y)$ 定义在区域 D 上，对每一点 $p_0(x_0,y_0)\in D$，定义向量

$$\operatorname{grad} f(x_0,y_0)\equiv\nabla f(x_0,y_0):=\big(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0)\big)$$
$$=f_x(x_0,y_0)\,\overrightarrow{i}+f_y(x_0,y_0)\,\overrightarrow{j}$$

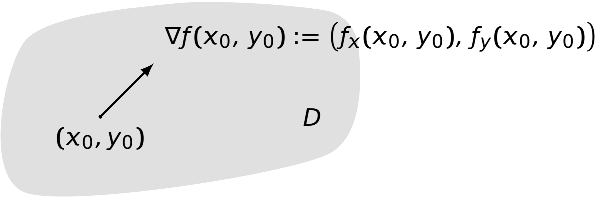


梯度

定义 设 $f(x, y)$ 定义在区域 D 上，对每一点 $p_0(x_0, y_0) \in D$，定义向量

$$\operatorname{grad} f(x_0, y_0) \equiv \nabla f(x_0, y_0) := \big(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)\big)$$
$$= f_x(x_0, y_0)\,\overrightarrow{i} + f_y(x_0, y_0)\,\overrightarrow{j}$$

称为 $f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处的梯度 。

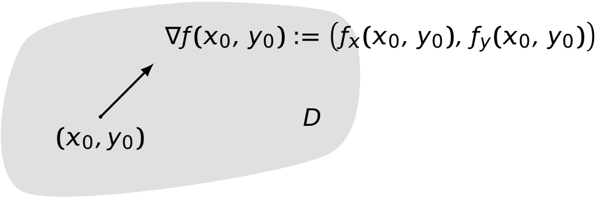


梯度

定义 设 $f(x, y)$ 定义在区域 D 上，对每一点 $p_0(x_0, y_0) \in D$，定义向量

$$\operatorname{grad} f(x_0, y_0) \equiv \nabla f(x_0, y_0) := \big(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)\big)$$
$$= f_x(x_0, y_0)\,\overrightarrow{i} + f_y(x_0, y_0)\,\overrightarrow{j}$$

称为 $f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处的梯度 。



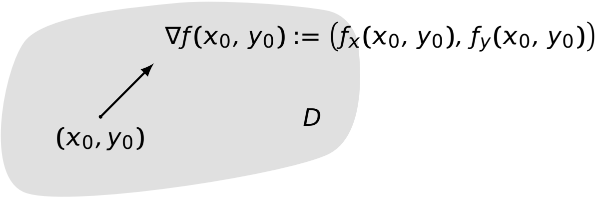
例 设 $f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$，求 ∇f

梯度

定义 设 $f(x, y)$ 定义在区域 D 上，对每一点 $p_0(x_0, y_0) \in D$，定义向量

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} f(x_0, y_0) \equiv \nabla f(x_0, y_0) &:= \big(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)\big) \\ &= f_x(x_0, y_0)\,\vec{i} + f_y(x_0, y_0)\,\vec{j}\end{aligned}$$

称为 $f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处的梯度 。



例 设 $f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$，求 ∇f

解 $\nabla f = (f_x, f_y) = (\quad , \qquad)$

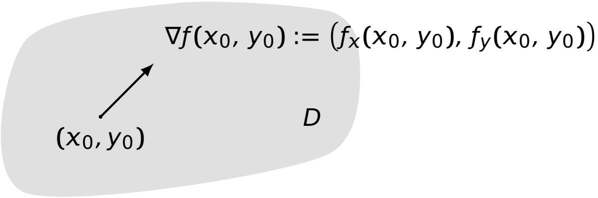
梯度

定义 设 $f(x, y)$ 定义在区域 D 上，对每一点 $p_0(x_0, y_0) \in D$，定义向量

$$\operatorname{grad} f(x_0, y_0) \equiv \nabla f(x_0, y_0) := \big(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)\big)$$

$$= f_x(x_0, y_0)\,\overrightarrow{i} + f_y(x_0, y_0)\,\overrightarrow{j}$$

称为 $f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处的梯度 。



例 设 $f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$，求 ∇f

解 $\nabla f = (f_x, f_y) = \left(\frac{x}{2}, \quad\right)$

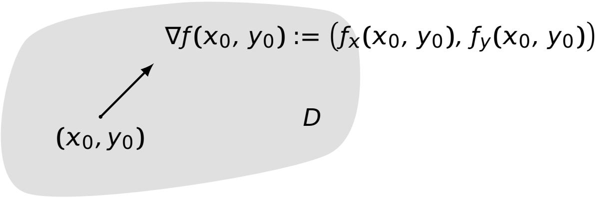
梯度

定义 设 $f(x, y)$ 定义在区域 D 上，对每一点 $p_0(x_0, y_0) \in D$，定义向量

$$\operatorname{grad} f(x_0, y_0) \equiv \nabla f(x_0, y_0) := \big(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)\big)$$

$$= f_x(x_0, y_0)\,\overrightarrow{i} + f_y(x_0, y_0)\,\overrightarrow{j}$$

称为 $f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处的梯度 。

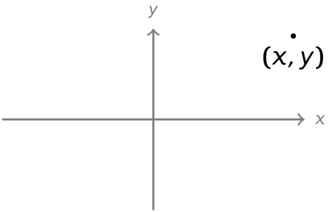


例 设 $f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$，求 ∇f

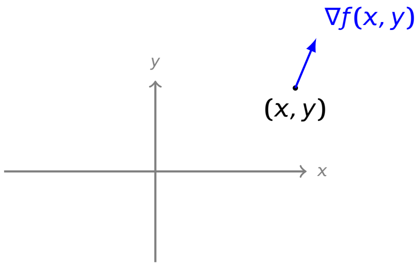
解 $\nabla f = (f_x, f_y) = \left(\frac{x}{2}, 2y\right)$

例 设 $f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$，则 $\nabla f(x, y) = (\frac{x}{2}, 2y)$

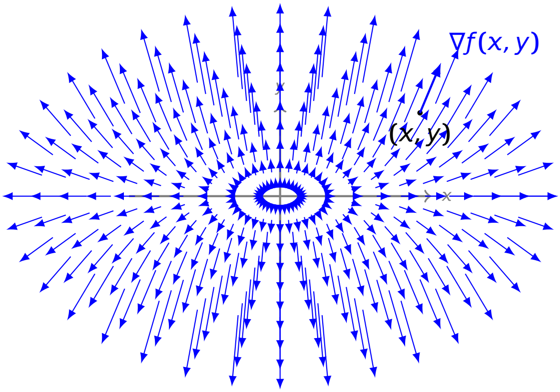
例 设 $f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$，则 $\nabla f(x, y) = (\frac{x}{2}, 2y)$



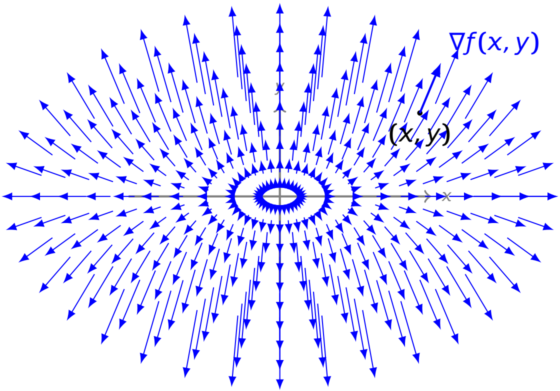
例 设 $f(x,y)=\frac{x^2}{4}+y^2$，则 $\nabla f(x,y)=(\frac{x}{2},2y)$



例 设 $f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$，则 $\nabla f(x, y) = (\frac{x}{2}, 2y)$

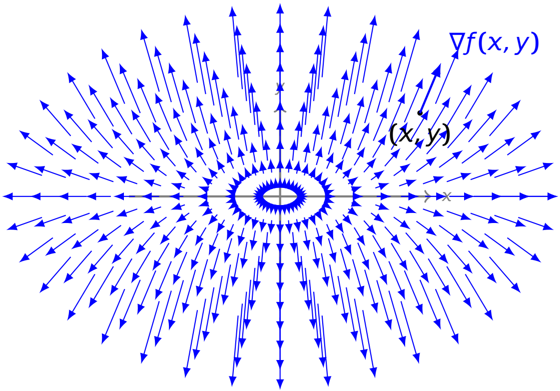


例 设 $f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$，则 $\nabla f(x, y) = (\frac{x}{2}, 2y)$



- 梯度 ∇f 是一个向量场

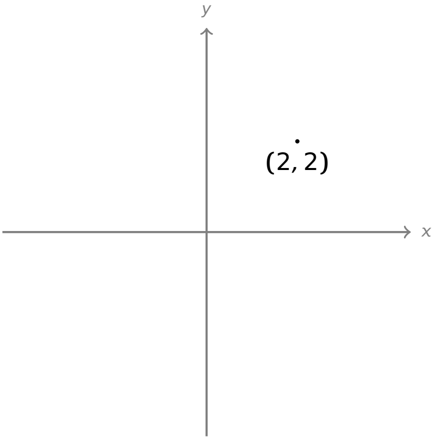
例 设 $f(x,y)=\frac{x^2}{4}+y^2$，则 $\nabla f(x,y)=(\frac{x}{2},2y)$



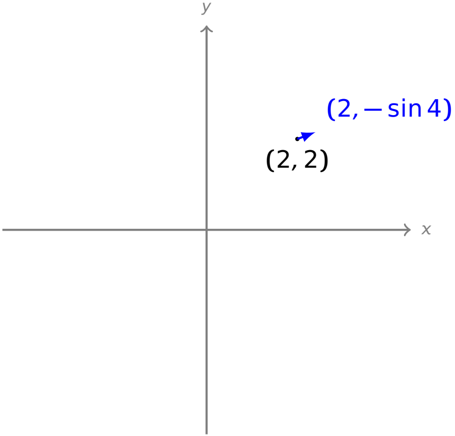
- 梯度 ∇f 是一个向量场
- 反过来，向量场并不总是某个函数的梯度！

例 向量场 $F(x, y) = (y, -\sin(xy))$，不是任何函数的梯度

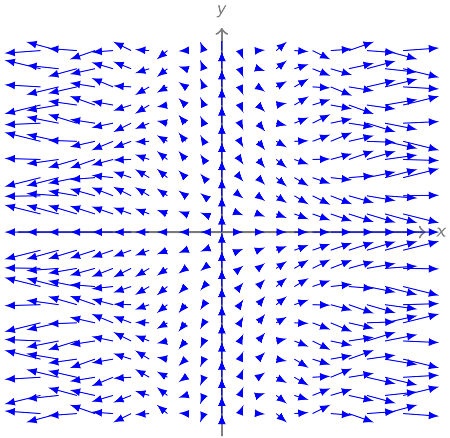
例 向量场 $F(x, y) = (y, -\sin(xy))$，不是任何函数的梯度



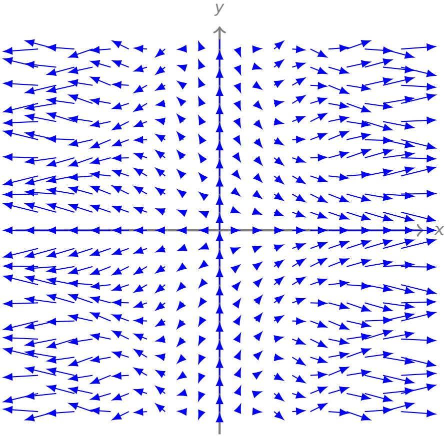
例 向量场 $F(x, y) = (y, -\sin(xy))$，不是任何函数的梯度



例 向量场 $F(x, y) = (y, -\sin(xy))$，不是任何函数的梯度

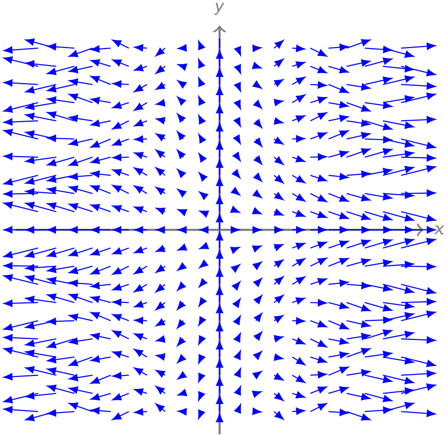


例 向量场 $F(x, y) = (y, -\sin(xy))$，不是任何函数的梯度



证明 若 $F(x, y) = (y, -\sin(xy)) = \nabla f = (f_x, f_y)$，则

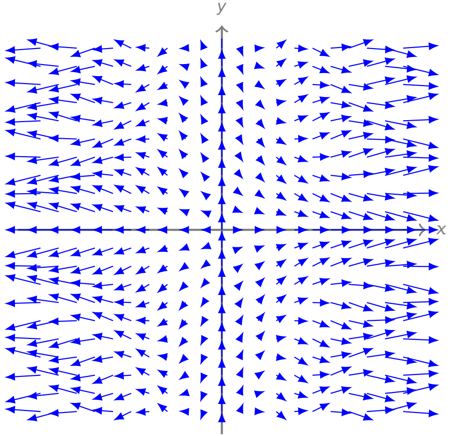
例 向量场 $F(x, y) = (y, -\sin(xy))$，不是任何函数的梯度



证明 若 $F(x, y) = (y, -\sin(xy)) = \nabla f = (f_x, f_y)$，则

$$f_x = y, \quad f_y = -\sin(xy)$$

例 向量场 $F(x,y)=(y,-\sin(xy))$，不是任何函数的梯度

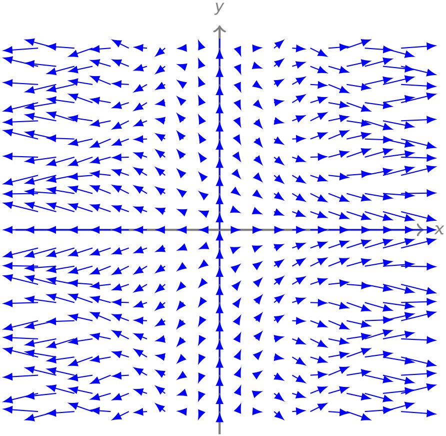


证明 若 $F(x,y)=(y,-\sin(xy))=\nabla f=(f_x,f_y)$，则

$$f_x=y,\quad f_y=-\sin(xy)$$

$$f_{xy}=\quad,\quad f_{yx}=$$

例 向量场 $F(x, y) = (y, -\sin(xy))$，不是任何函数的梯度

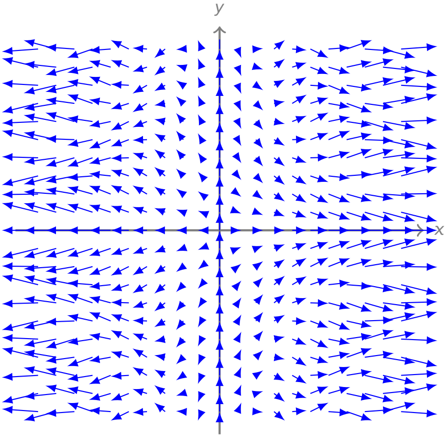


证明 若 $F(x, y) = (y, -\sin(xy)) = \nabla f = (f_x, f_y)$，则

$$f_x = y, \quad f_y = -\sin(xy)$$

$$f_{xy} = 1, \quad f_{yx} =$$

例 向量场 $F(x,y)=(y,-\sin(xy))$，不是任何函数的梯度

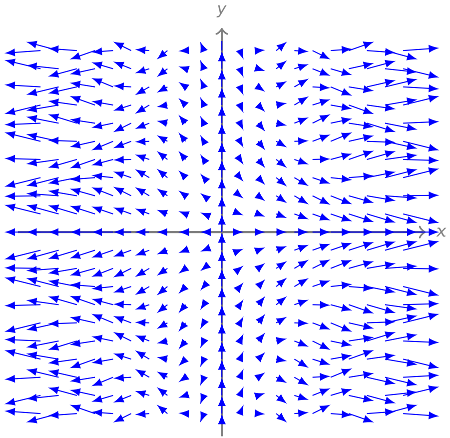


证明 若 $F(x,y)=(y,-\sin(xy))=\nabla f=(f_x,f_y)$，则

$$f_x=y,\quad f_y=-\sin(xy)$$

$$f_{xy}=1,\quad f_{yx}=-y\cos(xy)$$

例 向量场 $F(x,y)=(y,-\sin(xy))$，不是任何函数的梯度

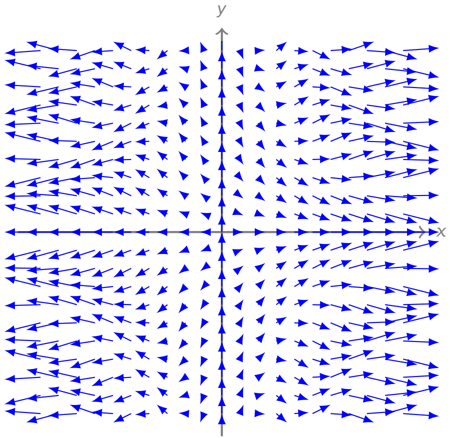


证明 若 $F(x,y)=(y,-\sin(xy))=\nabla f=(f_x,f_y)$，则

$$f_x=y,\quad f_y=-\sin(xy)$$

$$f_{xy}=1,\quad f_{yx}=-y\cos(xy)\quad\Rightarrow\quad f_{xy}\neq f_{yx}$$

例 向量场 $F(x, y) = (y, -\sin(xy))$，不是任何函数的梯度



证明 若 $F(x, y) = (y, -\sin(xy)) = \nabla f = (f_x, f_y)$，则

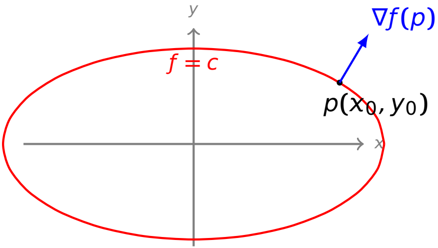
$$f_x = y, \quad f_y = -\sin(xy)$$

$$f_{xy} = 1, \quad f_{yx} = -y\cos(xy) \quad \Rightarrow \quad f_{xy} \neq f_{yx}$$

不可能

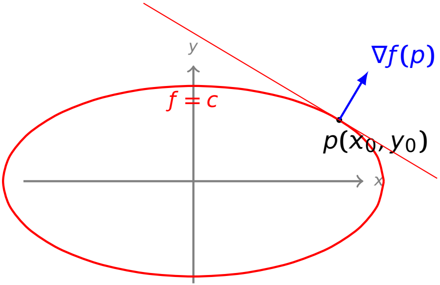
梯度垂直于等值线

$$f(x,y)=\frac{x^2}{4}+y^2$$



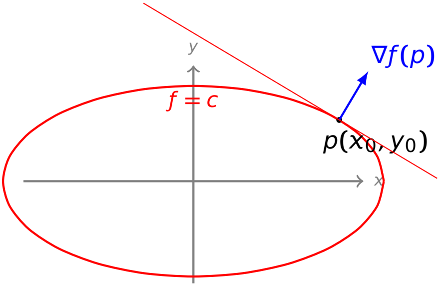
梯度垂直于等值线

$$f(x,y) = \frac{x^2}{4} + y^2$$



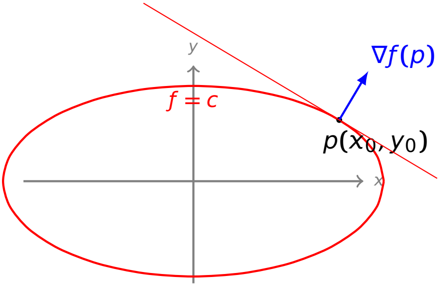
梯度垂直于等值线

$$f(x,y)=\frac{x^2}{4}+y^2$$



性质 设 $p(x_0,y_0)$ 在等值线 $\{f=c\}$ 上，并且 $\nabla f(p)\neq 0$，

梯度垂直于等值线

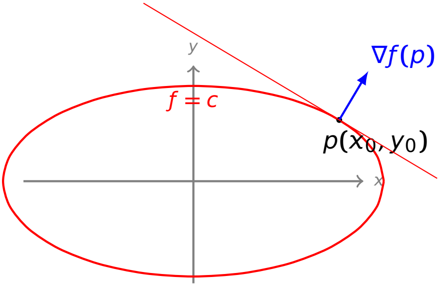


$f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$

性质 设 $p(x_0, y_0)$ 在等值线 $\{f = c\}$ 上，并且 $\nabla f(p) \neq 0$，则 $\nabla f(p)$ 与等值线 $\{f = c\}$ 在 p 点处的切线垂直。

梯度垂直于等值线

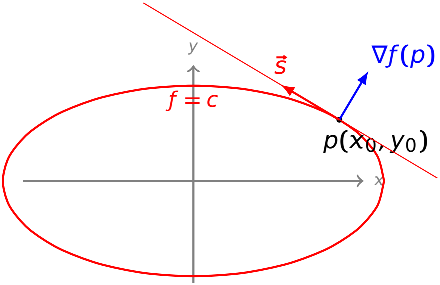
$f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$



性质 设 $p(x_0, y_0)$ 在等值线 $\{f = c\}$ 上，并且 $\nabla f(p) \neq 0$，则 $\nabla f(p)$ 与等值线 $\{f = c\}$ 在 p 点处的切线垂直。

证明 $\nabla f(p) \neq 0 \xRightarrow{\text{隐函数定理}}$

梯度垂直于等值线



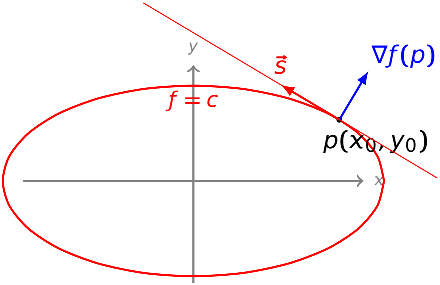
$f(x,y)=\frac{x^2}{4}+y^2$

性质 设 $p(x_0,y_0)$ 在等值线 $\{f=c\}$ 上，并且 $\nabla f(p)\neq 0$，则 $\nabla f(p)$ 与等值线 $\{f=c\}$ 在 p 点处的切线垂直。

证明 $\nabla f(p)\neq 0 \xRightarrow{\text{隐函数定理}}$ 等值线 $\{f=c\}$ 在 p 点处的切线的方向向量是 $\vec{s}=$ 　　　　　　　　。

梯度垂直于等值线

$$f(x,y)=\frac{x^2}{4}+y^2$$

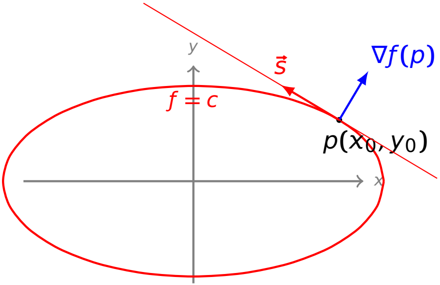


性质 设 $p(x_0,y_0)$ 在等值线 $\{f=c\}$ 上，并且 $\nabla f(p)\neq 0$，则 $\nabla f(p)$ 与等值线 $\{f=c\}$ 在 p 点处的切线垂直。

证明 $\nabla f(p)\neq 0 \xRightarrow{\text{隐函数定理}}$ 等值线 $\{f=c\}$ 在 p 点处的切线的方向向量是 $\vec{s}=(f_y(p),-f_x(p))$。

梯度垂直于等值线

$f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$



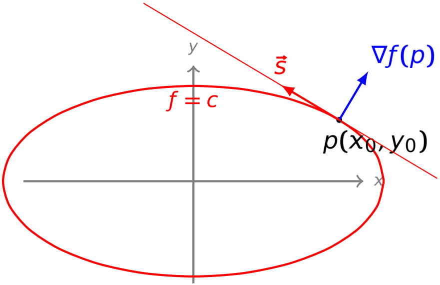
性质 设 $p(x_0, y_0)$ 在等值线 $\{f = c\}$ 上，并且 $\nabla f(p) \neq 0$，则 $\nabla f(p)$ 与等值线 $\{f = c\}$ 在 p 点处的切线垂直。

证明 $\nabla f(p) \neq 0 \xRightarrow{\text{隐函数定理}}$ 等值线 $\{f = c\}$ 在 p 点处的切线的方向向量是$\vec{s} = (f_y(p), -f_x(p))$。所以

$$\vec{s} \cdot \nabla f(p) =$$

梯度垂直于等值线

$f(x,y)=\frac{x^2}{4}+y^2$



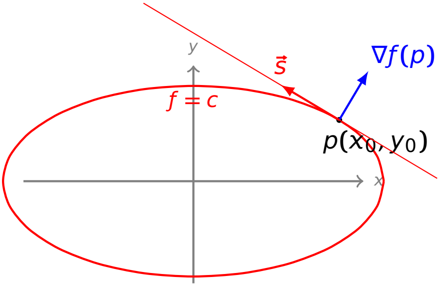
性质 设 $p(x_0,y_0)$ 在等值线 $\{f=c\}$ 上，并且 $\nabla f(p)\neq 0$，则 $\nabla f(p)$ 与等值线 $\{f=c\}$ 在 p 点处的切线垂直。

证明 $\nabla f(p)\neq 0 \xrightarrow{\text{隐函数定理}}$ 等值线 $\{f=c\}$ 在 p 点处的切线的方向向量是$\vec{s}=(f_y(p),-f_x(p))$。所以

$$\vec{s}\cdot\nabla f(p)=(f_y(p),-f_x(p))\cdot(f_x(p),f_y(p))$$

梯度垂直于等值线

$$f(x,y) = \frac{x^2}{4} + y^2$$



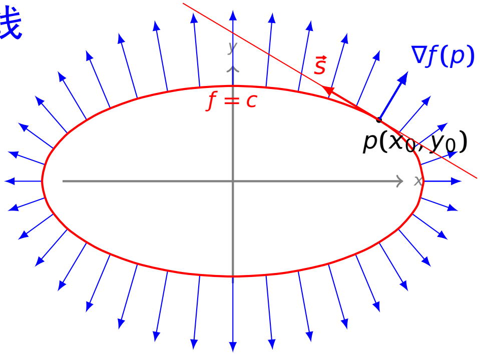
性质 设 $p(x_0, y_0)$ 在等值线 $\{f = c\}$ 上，并且 $\nabla f(p) \neq 0$，则 $\nabla f(p)$ 与等值线 $\{f = c\}$ 在 p 点处的切线垂直。

证明 $\nabla f(p) \neq 0 \xRightarrow{\text{隐函数定理}}$ 等值线 $\{f = c\}$ 在 p 点处的切线的方向向量是$\vec{s} = (f_y(p), -f_x(p))$。所以

$$\vec{s} \cdot \nabla f(p) = (f_y(p), -f_x(p)) \cdot (f_x(p), f_y(p)) = 0$$

梯度垂直于等值线

$$f(x,y)=\frac{x^2}{4}+y^2$$



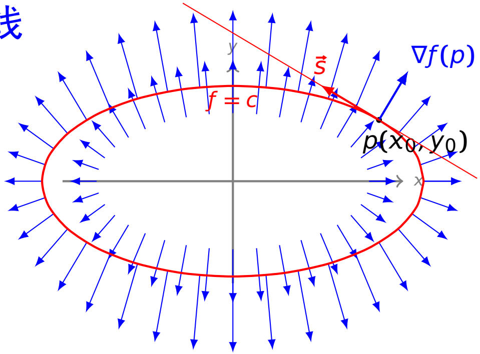
性质 设 $p(x_0,y_0)$ 在等值线 $\{f=c\}$ 上，并且 $\nabla f(p)\neq 0$，则 $\nabla f(p)$ 与等值线 $\{f=c\}$ 在 p 点处的切线垂直。

证明 $\nabla f(p)\neq 0 \xRightarrow{\text{隐函数定理}}$ 等值线 $\{f=c\}$ 在 p 点处的切线的方向向量是 $\vec{s}=(f_y(p),-f_x(p))$。所以

$$\vec{s}\cdot\nabla f(p)=(f_y(p),-f_x(p))\cdot(f_x(p),f_y(p))=0$$

梯度垂直于等值线

$f(x,y)=\frac{x^2}{4}+y^2$

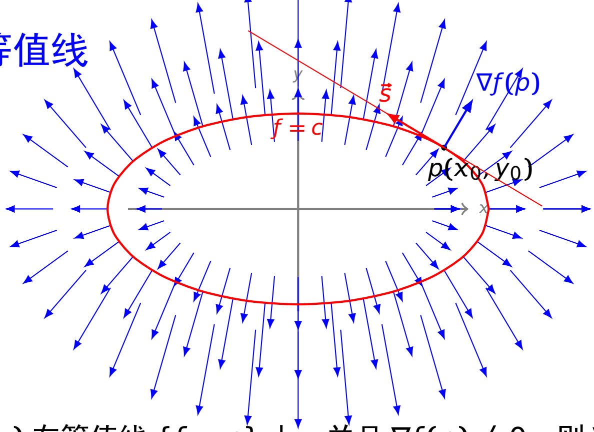


性质 设 $p(x_0,y_0)$ 在等值线 $\{f=c\}$ 上，并且 $\nabla f(p)\neq 0$，则 $\nabla f(p)$ 与等值线 $\{f=c\}$ 在 p 点处的切线垂直。

证明 $\nabla f(p)\neq 0 \xRightarrow{\text{隐函数定理}}$ 等值线 $\{f=c\}$ 在 p 点处的切线的方向向量是$\vec{s}=(f_y(p),-f_x(p))$。所以

$$\vec{s}\cdot\nabla f(p)=(f_y(p),-f_x(p))\cdot(f_x(p),f_y(p))=0$$

梯度垂直于等值线



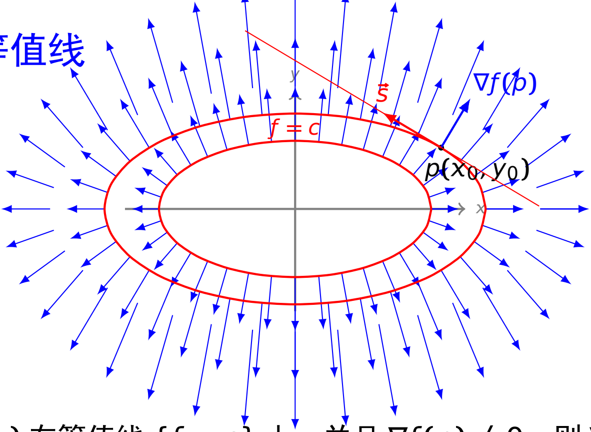
性质 设 $p(x_0,y_0)$ 在等值线 $\{f=c\}$ 上，并且 $\nabla f(p)\neq 0$，则 $\nabla f(p)$ 与等值线 $\{f=c\}$ 在 p 点处的切线垂直。

证明 $\nabla f(p)\neq 0 \xRightarrow{\text{隐函数定理}}$ 等值线 $\{f=c\}$ 在 p 点处的切线的方向向量是 $\vec{s}=(f_y(p),-f_x(p))$。所以

$$\vec{s}\cdot\nabla f(p)=(f_y(p),-f_x(p))\cdot(f_x(p),f_y(p))=0$$

梯度垂直于等值线

$f(x,y)=\frac{x^2}{4}+y^2$



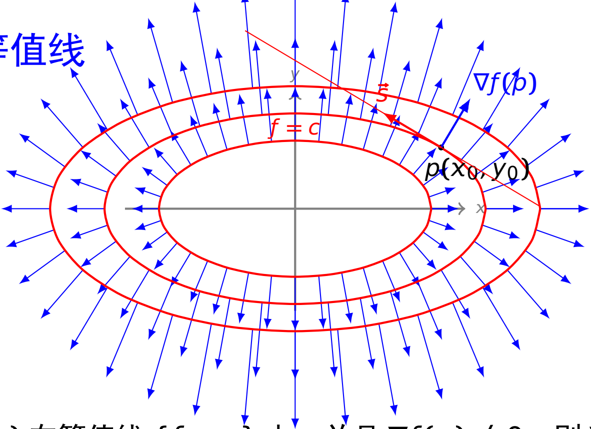
性质 设 $p(x_0,y_0)$ 在等值线 $\{f=c\}$ 上，并且 $\nabla f(p)\neq 0$，则 $\nabla f(p)$ 与等值线 $\{f=c\}$ 在 p 点处的切线垂直。

证明 $\nabla f(p)\neq 0 \xRightarrow{\text{隐函数定理}}$ 等值线 $\{f=c\}$ 在 p 点处的切线的方向向量是 $\vec{s}=(f_y(p),-f_x(p))$。所以

$$\vec{s}\cdot\nabla f(p)=(f_y(p),-f_x(p))\cdot(f_x(p),f_y(p))=0$$

梯度垂直于等值线

$$f(x,y)=\frac{x^2}{4}+y^2$$

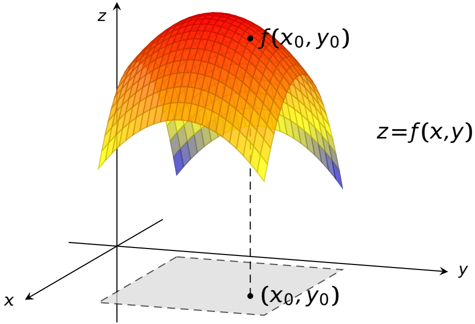


性质 设 $p(x_0,y_0)$ 在等值线 $\{f=c\}$ 上，并且 $\nabla f(p)\neq 0$，则 $\nabla f(p)$ 与等值线 $\{f=c\}$ 在 p 点处的切线垂直。

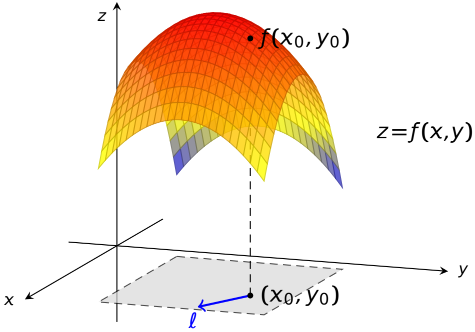
证明 $\nabla f(p)\neq 0 \xRightarrow{\text{隐函数定理}}$ 等值线 $\{f=c\}$ 在 p 点处的切线的方向向量是 $\vec{s}=(f_y(p),-f_x(p))$。所以

$$\vec{s}\cdot\nabla f(p)=(f_y(p),-f_x(p))\cdot(f_x(p),f_y(p))=0$$

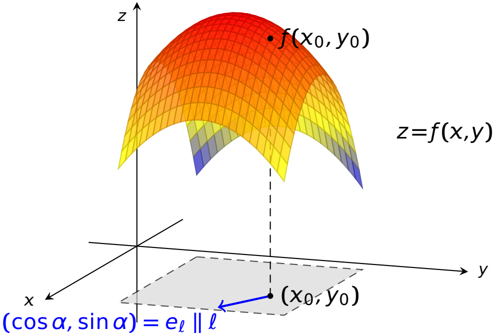
方向导数



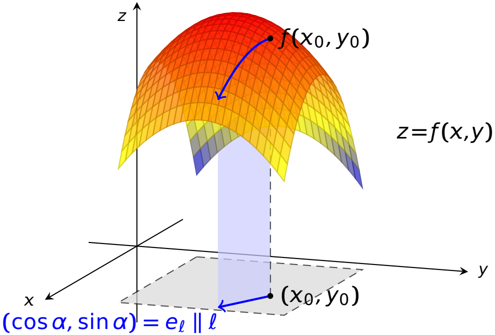
方向导数



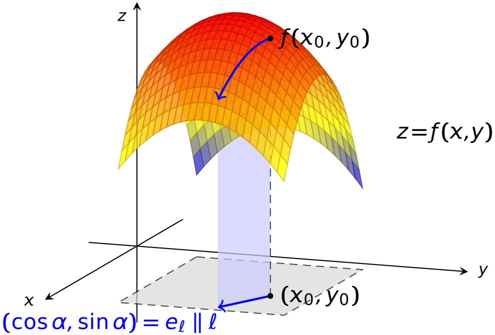
方向导数



方向导数



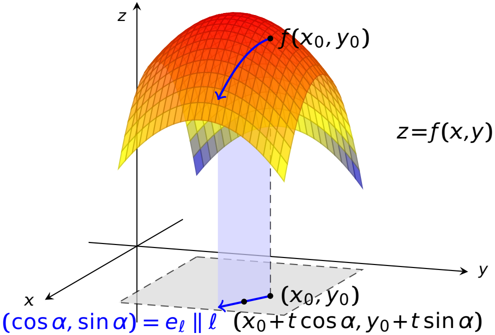
方向导数



$z = f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处沿方向 ℓ 的变化率，即方向导数：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0, y_0)} :=$$

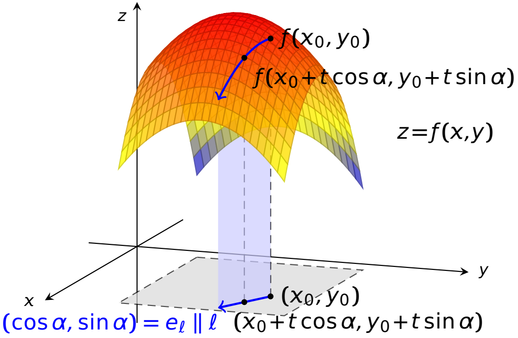
方向导数



$z = f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处沿方向 ℓ 的变化率，即方向导数：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0, y_0)} :=$$

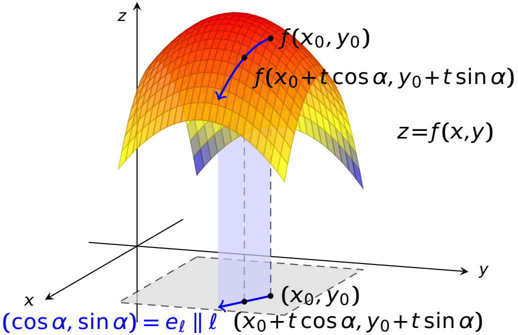
方向导数



$z = f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处沿方向 ℓ 的变化率，即方向导数：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0, y_0)} :=$$

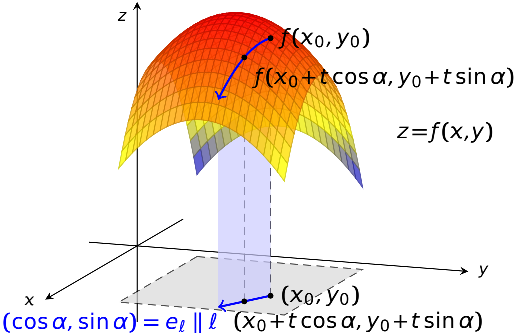
方向导数



$z = f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处沿方向 ℓ 的变化率，即方向导数：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0, y_0)} := \frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha) - f(x_0, y_0)}{t}$$

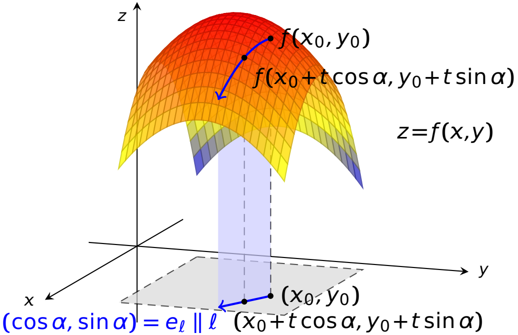
方向导数



$z = f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处沿方向 ℓ 的变化率，即方向导数：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0)} := \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\sin\alpha) - f(x_0, y_0)}{t}$$

方向导数

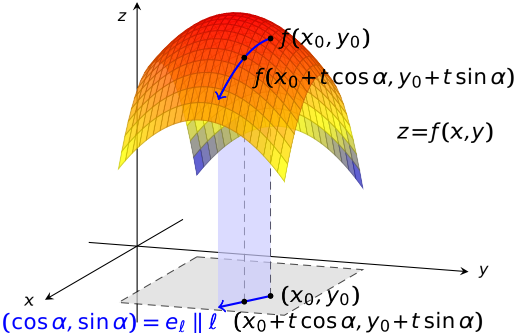


$z = f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处沿方向 ℓ 的变化率，即方向导数：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0, y_0)} := \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha) - f(x_0, y_0)}{t}$$

$$= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha)$$

方向导数



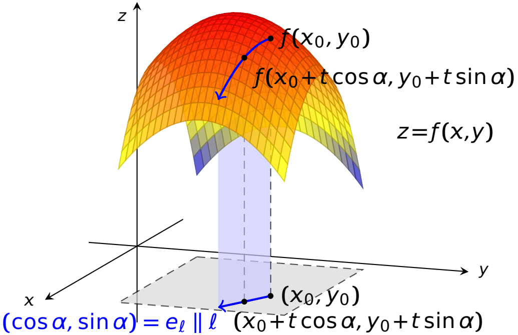
$z = f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处沿方向 ℓ 的变化率，即方向导数：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0, y_0)} := \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha) - f(x_0, y_0)}{t}$$

$$= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha)$$

$$= f_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f_y(x_0, y_0)\sin\alpha$$

方向导数



$z = f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处沿方向 ℓ 的变化率，即方向导数：

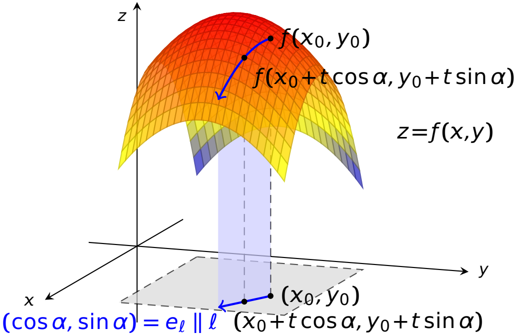
$$\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0, y_0)} := \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\sin\alpha) - f(x_0, y_0)}{t}$$

$$= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\sin\alpha)$$

$$= f_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f_y(x_0, y_0)\sin\alpha$$

$$= \nabla f(x_0, y_0)\cdot e_\ell$$

方向导数



$z = f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处沿方向 ℓ 的变化率，即方向导数：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0, y_0)} := \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha) - f(x_0, y_0)}{t}$$

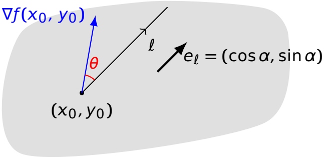
$$= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha)$$

$$= f_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f_y(x_0, y_0)\sin\alpha$$

$$= \nabla f(x_0, y_0)\cdot e_\ell = |\nabla f|\cos\theta$$

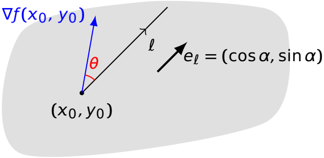
- $z=f(x,y)$ 在点 $p_0(x_0,y_0)$ 处沿方向 ℓ 的方向导数：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0)} = \nabla f(x_0,y_0)\cdot e_\ell = |\nabla f|\cos\theta$$

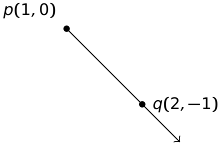


- $z = f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处沿方向 ℓ 的方向导数：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0, y_0)} = \nabla f(x_0, y_0) \cdot e_\ell = |\nabla f| \cos\theta$$

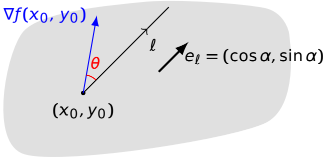


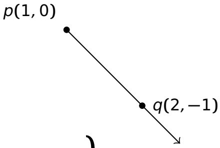
例 求 $z = xe^{2y}$ 在点 $p(1, 0)$ 处，往点 $q(2, -1)$ 方向上的方向导数。



- $z = f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处沿方向 ℓ 的方向导数：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0, y_0)} = \nabla f(x_0, y_0) \cdot e_\ell = |\nabla f| \cos\theta$$





例 求 $z = xe^{2y}$ 在点 $p(1, 0)$ 处，往点 $q(2, -1)$ 方向上的方向导数。

解 1. 方向 $\ell = \overrightarrow{pq} = (\qquad)$，对应单位向量 $e_\ell = (\qquad)$

2. 计算梯度

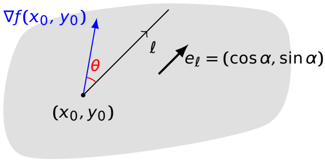
$$\nabla z = (z_x, z_y) =$$

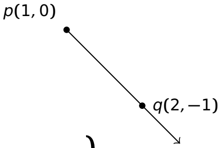
3. 方向导数

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \ell}\right|_{(1,0)} = \nabla z(1, 0) \cdot e_\ell =$$

- $z = f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处沿方向 ℓ 的方向导数：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0, y_0)} = \nabla f(x_0, y_0) \cdot e_\ell = |\nabla f| \cos\theta$$





例 求 $z = xe^{2y}$ 在点 $p(1, 0)$ 处，往点 $q(2, -1)$ 方向上的方向导数。

解 1. 方向 $\ell = \overrightarrow{pq} = (1, -1)$，对应单位向量 $e_\ell = ($ $\qquad\qquad$ $)$

2. 计算梯度

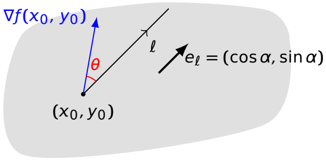
$$\nabla z = (z_x, z_y) =$$

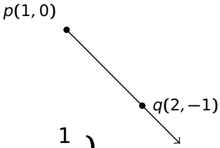
3. 方向导数

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \ell}\right|_{(1,0)} = \nabla z(1, 0) \cdot e_\ell =$$

- $z = f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处沿方向 ℓ 的方向导数：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0, y_0)} = \nabla f(x_0, y_0) \cdot e_\ell = |\nabla f| \cos\theta$$





例 求 $z = xe^{2y}$ 在点 $p(1, 0)$ 处，往点 $q(2, -1)$ 方向上的方向导数。

解 1. 方向 $\ell = \overrightarrow{pq} = (1, -1)$，对应单位向量 $e_\ell = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$

2. 计算梯度

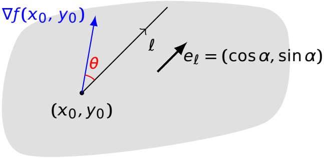
$$\nabla z = (z_x, z_y) =$$

3. 方向导数

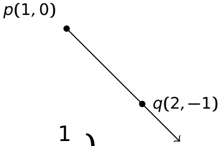
$$\left.\frac{\partial z}{\partial \ell}\right|_{(1, 0)} = \nabla z(1, 0) \cdot e_\ell =$$

- $z=f(x,y)$ 在点 $p_0(x_0,y_0)$ 处沿方向 ℓ 的方向导数：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0)} = \nabla f(x_0,y_0)\cdot e_\ell = |\nabla f|\cos\theta$$



例 求 $z=xe^{2y}$ 在点 $p(1,0)$ 处，往点 $q(2,-1)$ 方向上的方向导数。



解 1. 方向 $\ell=\overrightarrow{pq}=(1,-1)$，对应单位向量 $e_\ell=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$

2. 计算梯度

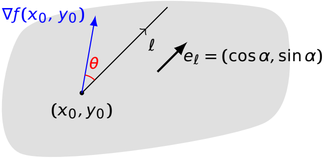
$$\nabla z=(z_x,z_y)=(e^{2y},2xe^{2y})$$

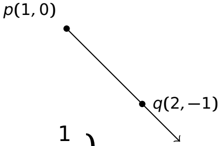
3. 方向导数

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \ell}\right|_{(1,0)} = \nabla z(1,0)\cdot e_\ell =$$

- $z=f(x,y)$ 在点 $p_0(x_0,y_0)$ 处沿方向 ℓ 的**方向导数**：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0)}=\nabla f(x_0,y_0)\cdot e_\ell=|\nabla f|\cos\theta$$





例 求 $z=xe^{2y}$ 在点 $p(1,0)$ 处，往点 $q(2,-1)$ 方向上的方向导数。

解 1. 方向 $\ell=\overrightarrow{pq}=(1,-1)$，对应单位向量 $e_\ell=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$

2. 计算梯度

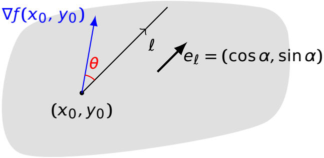
$$\nabla z=(z_x,z_y)=(e^{2y},2xe^{2y})$$

3. 方向导数

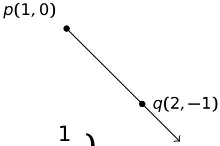
$$\left.\frac{\partial z}{\partial \ell}\right|_{(1,0)}=\nabla z(1,0)\cdot e_\ell=(1,2)\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$$

- $z=f(x,y)$ 在点 $p_0(x_0,y_0)$ 处沿方向 ℓ 的方向导数：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0)} = \nabla f(x_0,y_0)\cdot e_\ell = |\nabla f|\cos\theta$$



例 求 $z=xe^{2y}$ 在点 $p(1,0)$ 处，往点 $q(2,-1)$ 方向上的方向导数。



解 1. 方向 $\ell=\overrightarrow{pq}=(1,-1)$，对应单位向量 $e_\ell=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$

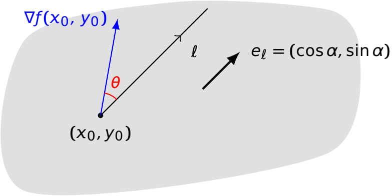
2. 计算梯度

$$\nabla z=(z_x,z_y)=(e^{2y},2xe^{2y})$$

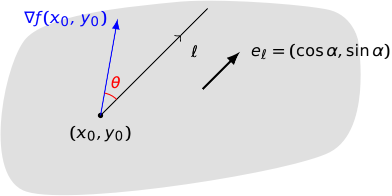
3. 方向导数

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \ell}\right|_{(1,0)} = \nabla z(1,0)\cdot e_\ell = (1,2)\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

- $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0)} = |\nabla f(x_0, y_0)| \cos\theta$



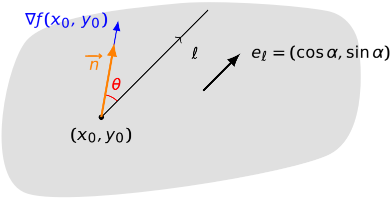
- $\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0, y_0)} = |\nabla f(x_0, y_0)| \cos\theta$



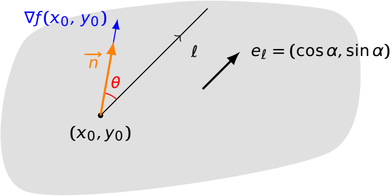
假设 $\nabla f \neq 0$，

- $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0)} = |\nabla f(x_0, y_0)| \cos\theta$

假设 $\nabla f \neq 0$，令 $\overrightarrow{n} := \frac{1}{|\nabla f|}\nabla f$



- $\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0)} = |\nabla f(x_0, y_0)|\cos\theta$



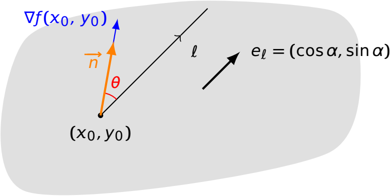
假设 $\nabla f \neq 0$，令 $\overrightarrow{n} := \frac{1}{|\nabla f|}\nabla f$

- 当 $\theta = 0$ 时，

- 当 $\theta = \pi$ 时，

- 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时，

- $\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0)} = |\nabla f(x_0, y_0)| \cos\theta$



假设 $\nabla f \neq 0$，令 $\vec{n} := \frac{1}{|\nabla f|}\nabla f$

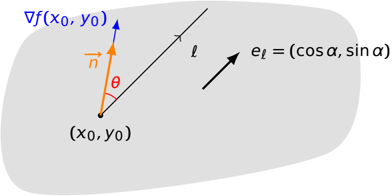
- 当 $\theta = 0$ 时，$e_\ell = \vec{n}$，

- 当 $\theta = \pi$ 时，

- 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时，

- $$\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0)} = |\nabla f(x_0, y_0)| \cos\theta$$

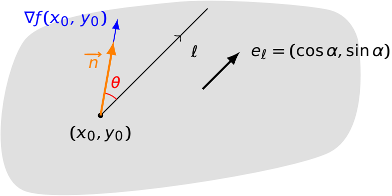
假设 $\nabla f \neq 0$，令 $\overrightarrow{n} := \frac{1}{|\nabla f|}\nabla f$



- 当 $\theta = 0$ 时，$e_\ell = \overrightarrow{n}$，并且方向导数达到最大值：
$$\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0)} = |\nabla f(x_0, y_0)| > 0,$$
- 当 $\theta = \pi$ 时，
- 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时，

- $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0)} = |\nabla f(x_0, y_0)| \cos\theta$

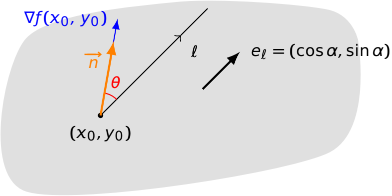
假设 $\nabla f \neq 0$，令 $\overrightarrow{n} := \frac{1}{|\nabla f|}\nabla f$



- 当 $\theta = 0$ 时，$e_\ell = \overrightarrow{n}$，并且方向导数达到最大值：
$\left.\dfrac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0)} = |\nabla f(x_0, y_0)| > 0$，说明沿梯度方向，函数增速最快
- 当 $\theta = \pi$ 时，
- 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时，

- $\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0)} = |\nabla f(x_0, y_0)| \cos\theta$

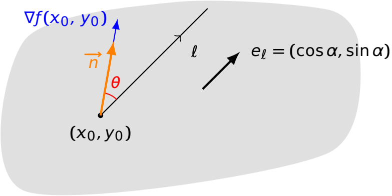
假设 $\nabla f \neq 0$，令 $\vec{n} := \frac{1}{|\nabla f|}\nabla f$



- 当 $\theta = 0$ 时，$e_\ell = \vec{n}$，并且方向导数达到最大值：
  $\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0)} = |\nabla f(x_0, y_0)| > 0$，说明沿梯度方向，函数增速最快
- 当 $\theta = \pi$ 时，$e_\ell = -\vec{n}$，

- 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时，

- $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0)} = |\nabla f(x_0, y_0)| \cos\theta$



假设 $\nabla f \neq 0$，令 $\vec{n} := \frac{1}{|\nabla f|}\nabla f$

- 当 $\theta = 0$ 时，$e_\ell = \vec{n}$，并且方向导数达到最大值：

  $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0)} = |\nabla f(x_0, y_0)| > 0$，说明沿梯度方向，函数增速最快

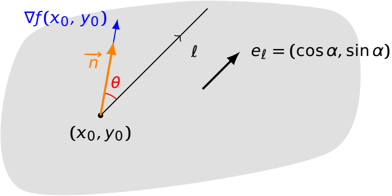
- 当 $\theta = \pi$ 时，$e_\ell = -\vec{n}$，并且方向导数达到最小值：

  $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0)} = -|\nabla f(x_0, y_0)| < 0$，

- 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时，

- $$\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0)} = |\nabla f(x_0, y_0)| \cos\theta$$

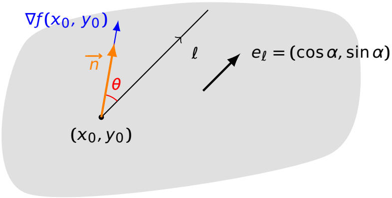
假设 $\nabla f \neq 0$，令 $\vec{n} := \frac{1}{|\nabla f|}\nabla f$



- 当 $\theta = 0$ 时，$e_\ell = \vec{n}$，并且方向导数达到最大值：
  $$\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0)} = |\nabla f(x_0, y_0)| > 0,$$ 说明沿梯度方向，函数增速最快
- 当 $\theta = \pi$ 时，$e_\ell = -\vec{n}$，并且方向导数达到最小值：
  $$\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0)} = -|\nabla f(x_0, y_0)| < 0,$$ 说明沿梯度反方向，函数减速最快
- 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时，

- $\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0)} = |\nabla f(x_0,y_0)|\cos\theta$

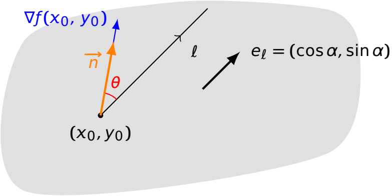
假设 $\nabla f \neq 0$，令 $\vec{n} := \frac{1}{|\nabla f|}\nabla f$



- 当 $\theta = 0$ 时，$e_\ell = \vec{n}$，并且方向导数达到最大值：
  $\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0)} = |\nabla f(x_0,y_0)| > 0$，说明沿梯度方向，函数增速最快
- 当 $\theta = \pi$ 时，$e_\ell = -\vec{n}$，并且方向导数达到最小值：
  $\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0)} = -|\nabla f(x_0,y_0)| < 0$，说明沿梯度反方向，函数减速最快
- 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时，$e_\ell \perp \vec{n}$，

- $\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0)} = |\nabla f(x_0, y_0)| \cos\theta$

假设 $\nabla f \neq 0$，令 $\vec{n} := \frac{1}{|\nabla f|}\nabla f$



- 当 $\theta = 0$ 时，$e_\ell = \vec{n}$，并且方向导数达到最大值：

  $\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0)} = |\nabla f(x_0, y_0)| > 0$，说明沿梯度方向，函数增速最快

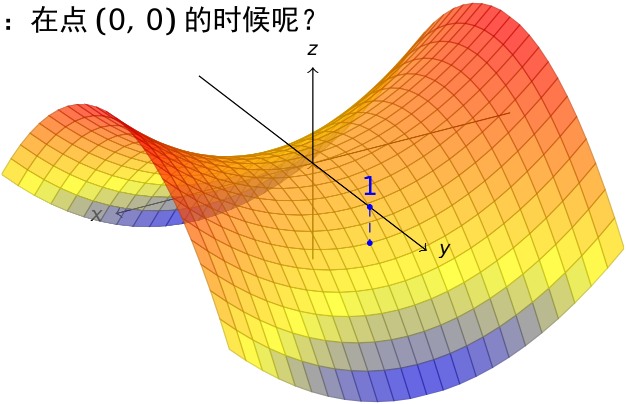
- 当 $\theta = \pi$ 时，$e_\ell = -\vec{n}$，并且方向导数达到最小值：

  $\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0)} = -|\nabla f(x_0, y_0)| < 0$，说明沿梯度反方向，函数减速最快

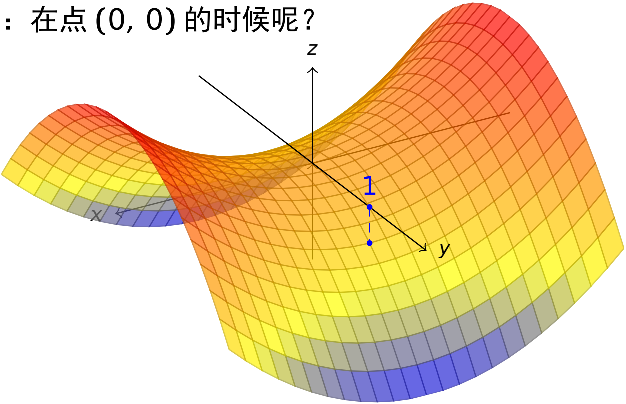
- 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时，$e_\ell \perp \vec{n}$，并且方向导数为零：$\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0)} = 0$。

例 函数 $z = x^2 - y^2$ 在点 $(0, 1)$ 沿什么方向，其增加、减少的速度最大？并思考：在点 $(0, 0)$ 的时候呢？

例 函数 $z = x^2 - y^2$ 在点 (0, 1) 沿什么方向，其增加、减少的速度最大？并思考：在点 (0, 0) 的时候呢？

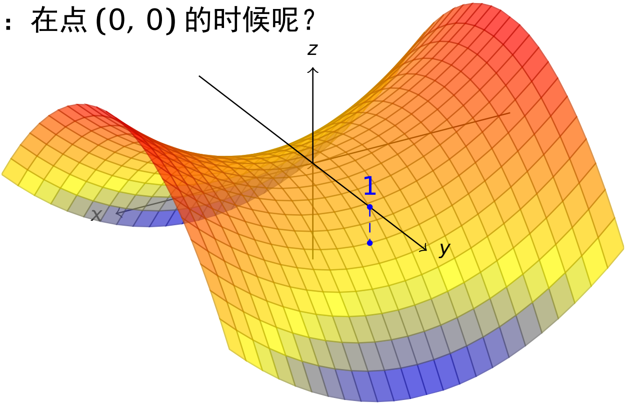


例 函数 $z = x^2 - y^2$ 在点 $(0, 1)$ 沿什么方向，其增加、减少的速度最大？并思考：在点 $(0, 0)$ 的时候呢？



解 梯度 $\nabla z = (2x, -2y)$,

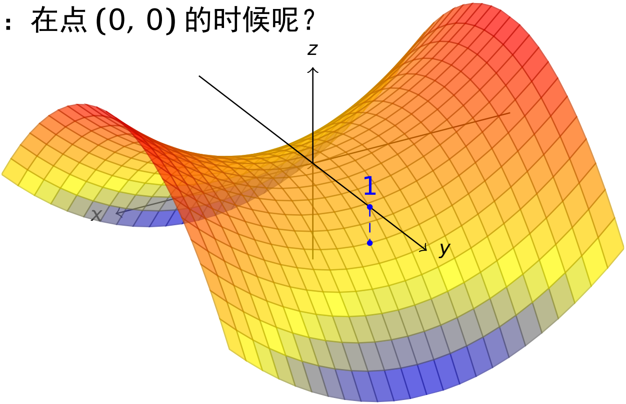
例 函数 $z = x^2 - y^2$ 在点 $(0, 1)$ 沿什么方向，其增加、减少的速度最大？并思考：在点 $(0, 0)$ 的时候呢？



解 梯度 $\nabla z = (2x, -2y)$，

- 沿方向 $\nabla z(0, 1) = ($ $\qquad$ $)$增加最快
- 沿方向 $-\nabla z(0, 1) = ($ $\qquad$ 减少最快

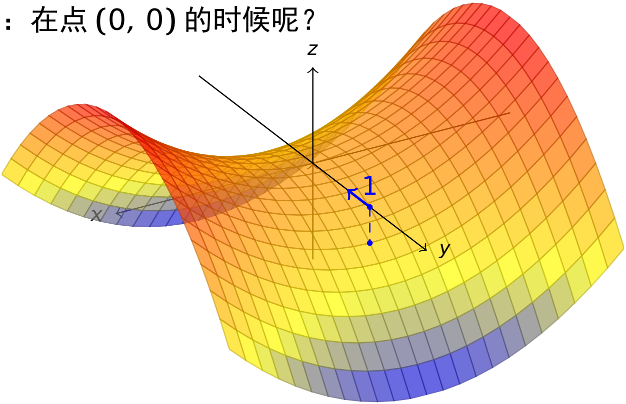
例 函数 $z = x^2 - y^2$ 在点 $(0, 1)$ 沿什么方向，其增加、减少的速度最大？并思考：在点 $(0, 0)$ 的时候呢？



解 梯度 $\nabla z = (2x, -2y)$，所以在点 $(0, 1)$ 时，

- 沿方向 $\nabla z(0, 1) = (0, -2)$增加最快
- 沿方向 $-\nabla z(0, 1) = (0, 2)$减少最快

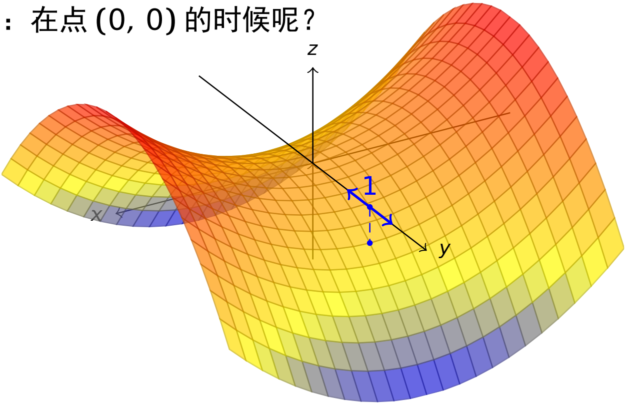
例 函数 $z = x^2 - y^2$ 在点 $(0, 1)$ 沿什么方向，其增加、减少的速度最大？并思考：在点 $(0, 0)$ 的时候呢？



解 梯度 $\nabla z = (2x, -2y)$，所以在点 $(0, 1)$ 时，

- 沿方向 $\nabla z(0, 1) = (0, -2)$增加最快
- 沿方向 $-\nabla z(0, 1) = (0, 2)$减少最快

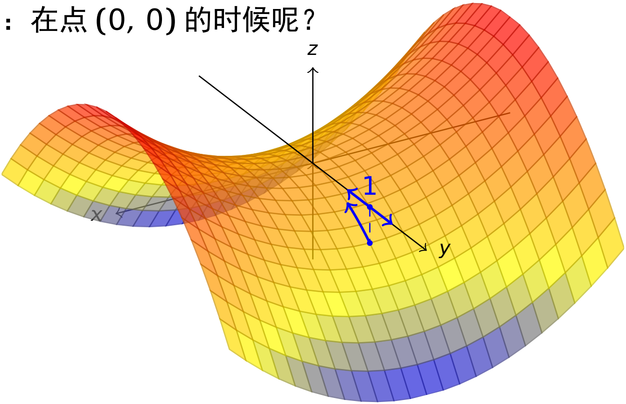
例 函数 $z = x^2 - y^2$ 在点 $(0, 1)$ 沿什么方向，其增加、减少的速度最大？并思考：在点 $(0, 0)$ 的时候呢？



解 梯度 $\nabla z = (2x, -2y)$，所以在点 $(0, 1)$ 时，

- 沿方向 $\nabla z(0, 1) = (0, -2)$增加最快
- 沿方向 $-\nabla z(0, 1) = (0, 2)$减少最快

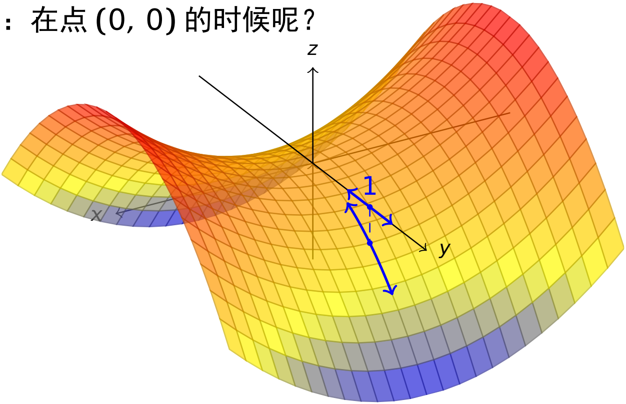
例 函数 $z = x^2 - y^2$ 在点 $(0,\ 1)$ 沿什么方向，其增加、减少的速度最大？并思考：在点 $(0,\ 0)$ 的时候呢？



解 梯度 $\nabla z = (2x, -2y)$，所以在点 $(0,\ 1)$ 时，

- 沿方向 $\nabla z(0,\ 1) = (0, -2)$增加最快
- 沿方向 $-\nabla z(0,\ 1) = (0,\ 2)$减少最快

例 函数 $z = x^2 - y^2$ 在点 $(0,\ 1)$ 沿什么方向，其增加、减少的速度最大？并思考：在点 $(0,\ 0)$ 的时候呢？

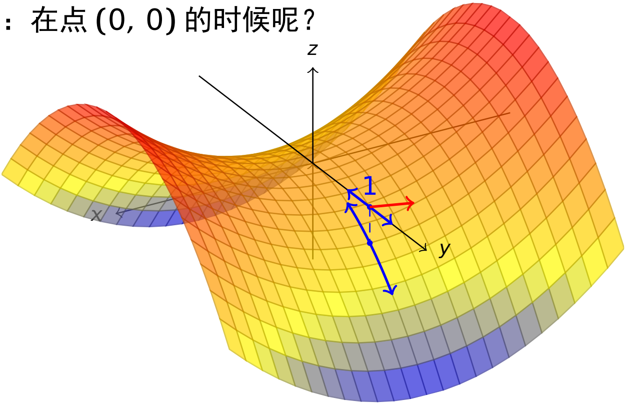


解 梯度 $\nabla z = (2x, -2y)$，所以在点 $(0,\ 1)$ 时，

- 沿方向 $\nabla z(0,\ 1) = (0,\ -2)$增加最快
- 沿方向 $-\nabla z(0,\ 1) = (0,\ 2)$减少最快

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

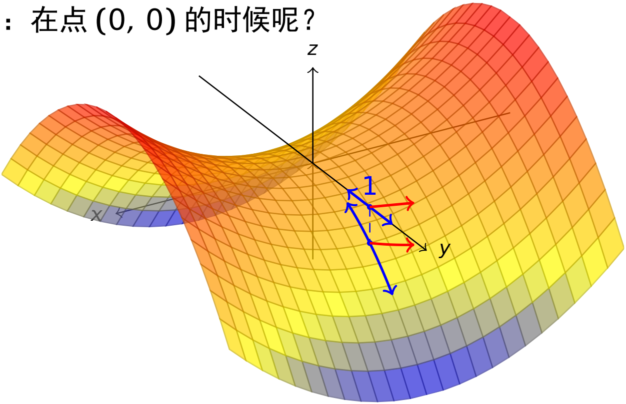
例 函数 $z = x^2 - y^2$ 在点 (0, 1) 沿什么方向，其增加、减少的速度最大？并思考：在点 (0, 0) 的时候呢？



解 梯度 $\nabla z = (2x, -2y)$，所以在点 (0, 1) 时，

- 沿方向 $\nabla z(0, 1) = (0, -2)$增加最快
- 沿方向 $-\nabla z(0, 1) = (0, 2)$减少最快

例 函数 $z = x^2 - y^2$ 在点 $(0, 1)$ 沿什么方向，其增加、减少的速度最大？并思考：在点 $(0, 0)$ 的时候呢？



解 梯度 $\nabla z = (2x, -2y)$，所以在点 $(0, 1)$ 时，

- 沿方向 $\nabla z(0, 1) = (0, -2)$增加最快
- 沿方向 $-\nabla z(0, 1) = (0, 2)$减少最快

三元函数梯度

三元函数 $z = f(x, y, z)$ 在点 $p(x_0, y_0, z_0)$ 的梯度：

$$\operatorname{grad} f(p) \xlongequal{\text{或}} \nabla f(p) :=$$

三元函数梯度

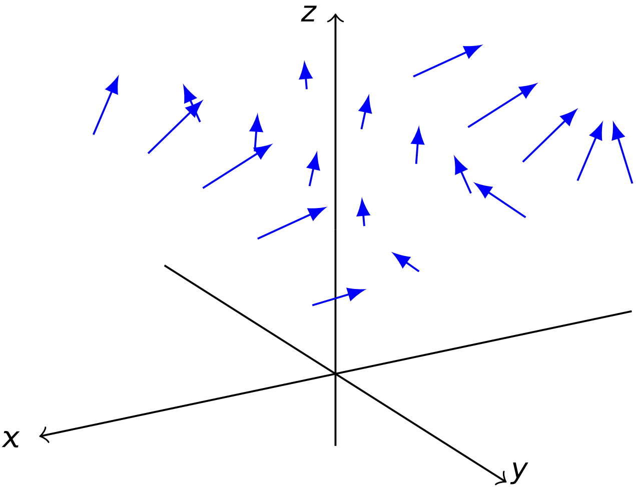
三元函数 $z = f(x, y, z)$ 在点 $p(x_0, y_0, z_0)$ 的梯度：

$$\operatorname{grad} f(p) \xlongequal{\text{或}} \nabla f(p) := \big(f_x(p), f_y(p), f_z(p)\big)$$

三元函数梯度

三元函数 $z = f(x, y, z)$ 在点 $p(x_0, y_0, z_0)$ 的梯度：

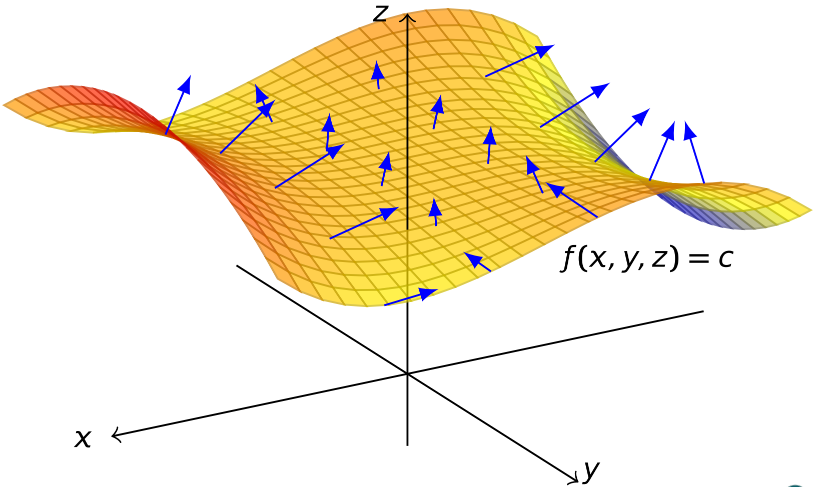
$$\operatorname{grad} f(p) \overset{或}{=\!=} \nabla f(p) := \left(f_x(p), f_y(p), f_z(p)\right)$$



三元函数梯度

三元函数 $z = f(x, y, z)$ 在点 $p(x_0, y_0, z_0)$ 的梯度：

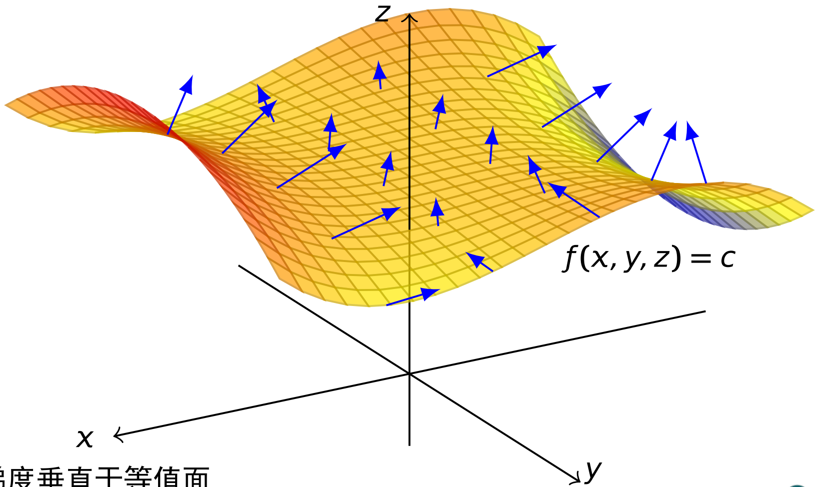
$$\operatorname{grad} f(p) \xlongequal{\text{或}} \nabla f(p) := \big(f_x(p), f_y(p), f_z(p)\big)$$



三元函数梯度

三元函数 $z = f(x, y, z)$ 在点 $p(x_0, y_0, z_0)$ 的梯度：

$$\operatorname{grad} f(p) \xlongequal{\text{或}} \nabla f(p) := \big(f_x(p), f_y(p), f_z(p)\big)$$



注 梯度垂直于等值面

例 函数 $f(x, y, z) = -x^3 + xy^2 + z$ 在点 $p(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ 的梯度

例 函数 $f(x, y, z) = -x^3 + xy^2 + z$ 在点 $p(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ 的梯度

解 $\nabla f = (f_x, f_y, f_z) =$

例 函数 $f(x, y, z) = -x^3 + xy^2 + z$ 在点 $p(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ 的梯度

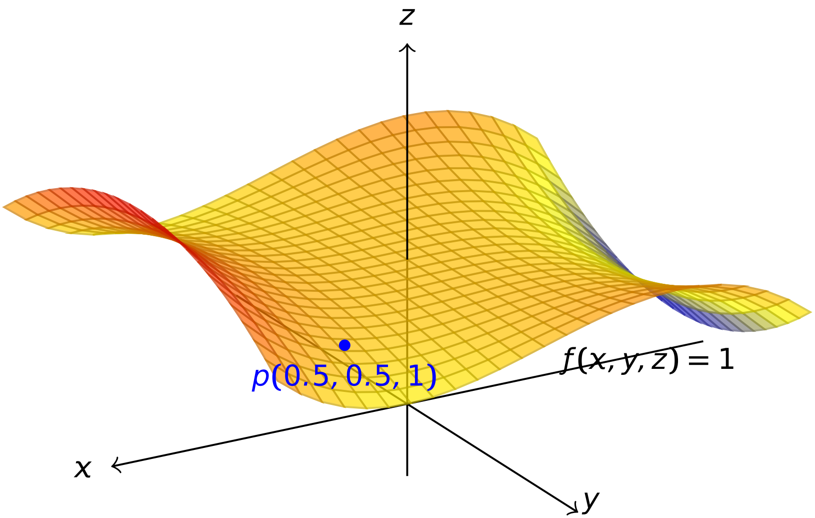
解 $\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = \; = (-3x^2 + y^2, 2xy, 1)$

例 函数 $f(x, y, z) = -x^3 + xy^2 + z$ 在点 $p(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ 的梯度

解 $\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = \ = (-3x^2 + y^2, 2xy, 1) \Rightarrow \nabla f(p) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$

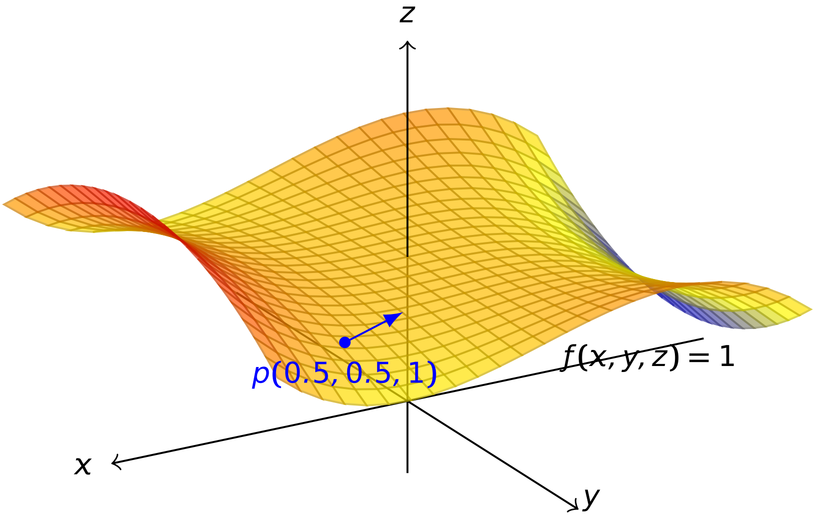
例 函数 $f(x, y, z) = -x^3 + xy^2 + z$ 在点 $p(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ 的梯度

解 $\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = \; = (-3x^2 + y^2, 2xy, 1) \Rightarrow \nabla f(p) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$



例 函数 $f(x, y, z) = -x^3 + xy^2 + z$ 在点 $p(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ 的梯度

解 $\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = \ = (-3x^2 + y^2, 2xy, 1) \Rightarrow \nabla f(p) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$



设三元函数 $f(x, y, z)$ 在点 $p_0(x_0, y_0, z_0)$ 的一个邻域内有定义，设 ℓ 是从 p_0 出发的射线，方向向量为

$$e_\ell = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

设三元函数 $f(x, y, z)$ 在点 $p_0(x_0, y_0, z_0)$ 的一个邻域内有定义，设 ℓ 是从 p_0 出发的射线，方向向量为

$$e_\ell = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

则 $f(x, y, z)$ 在点 p_0 处沿方向 ℓ 的变化率，即方向导数，为

设三元函数 $f(x, y, z)$ 在点 $p_0(x_0, y_0, z_0)$ 的一个邻域内有定义，设 ℓ 是从 p_0 出发的射线，方向向量为

$$e_\ell = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

则 $f(x, y, z)$ 在点 p_0 处沿方向 ℓ 的变化率，即方向导数，为

$$\frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{t}$$

设三元函数 $f(x, y, z)$ 在点 $p_0(x_0, y_0, z_0)$ 的一个邻域内有定义，设 ℓ 是从 p_0 出发的射线，方向向量为

$$e_\ell = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

则 $f(x, y, z)$ 在点 p_0 处沿方向 ℓ 的变化率，即方向导数，为

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{t}$$

设三元函数 $f(x, y, z)$ 在点 $p_0(x_0, y_0, z_0)$ 的一个邻域内有定义，设 ℓ 是从 p_0 出发的射线，方向向量为

$$e_\ell = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

则 $f(x, y, z)$ 在点 p_0 处沿方向 ℓ 的变化率，即方向导数，为 $\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0, y_0, z_0)}$：

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{t}$$

设三元函数 $f(x, y, z)$ 在点 $p_0(x_0, y_0, z_0)$ 的一个邻域内有定义，设 ℓ 是从 p_0 出发的射线，方向向量为

$$e_\ell = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

则 $f(x, y, z)$ 在点 p_0 处沿方向 ℓ 的变化率，即方向导数，为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0, y_0, z_0)}:$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{t}$$

$$= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma)$$

设三元函数 $f(x, y, z)$ 在点 $p_0(x_0, y_0, z_0)$ 的一个邻域内有定义，设 ℓ 是从 p_0 出发的射线，方向向量为

$$e_\ell = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

则 $f(x, y, z)$ 在点 p_0 处沿方向 ℓ 的变化率，即方向导数，为 $\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0, y_0, z_0)}$：

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{t}$$

$$= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma)$$

$$= f_x(x_0, y_0, z_0)\cos\alpha + f_y(x_0, y_0, z_0)\cos\beta + f_z(x_0, y_0, z_0)\cos\gamma$$

设三元函数 $f(x, y, z)$ 在点 $p_0(x_0, y_0, z_0)$ 的一个邻域内有定义，设 ℓ 是从 p_0 出发的射线，方向向量为

$$e_\ell = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

则 $f(x, y, z)$ 在点 p_0 处沿方向 ℓ 的变化率，即方向导数，为 $\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0, y_0, z_0)}$：

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{t} \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma) \\
&= f_x(x_0, y_0, z_0)\cos\alpha + f_y(x_0, y_0, z_0)\cos\beta + f_z(x_0, y_0, z_0)\cos\gamma \\
&= \nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot e_\ell
\end{aligned}$$

设三元函数 $f(x, y, z)$ 在点 $p_0(x_0, y_0, z_0)$ 的一个邻域内有定义，设 ℓ 是从 p_0 出发的射线，方向向量为

$$e_\ell = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

则 $f(x, y, z)$ 在点 p_0 处沿方向 ℓ 的变化率，即方向导数，为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0, y_0, z_0)}:$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{t}$$

$$= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma)$$

$$= f_x(x_0, y_0, z_0)\cos\alpha + f_y(x_0, y_0, z_0)\cos\beta + f_z(x_0, y_0, z_0)\cos\gamma$$

$$= \nabla f(x_0, y_0, z_0)\cdot e_\ell = |\nabla f|\cos\theta$$

其中 θ 是 $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ 与 e_ℓ 的夹角

当 $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ 时，则函数在点 (x_0, y_0, z_0) 处，

- 沿梯度方向，增加速度最快，
- 沿梯度反方向，减少速度最快，
- 梯度垂直方向，其变化率为零

当 $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ 时，则函数在点 (x_0, y_0, z_0) 处，

- 沿梯度方向，增加速度最快，达到 $|\nabla f(x_0, y_0, z_0)|$
- 沿梯度反方向，减少速度最快，达到 $-|\nabla f(x_0, y_0, z_0)|$
- 梯度垂直方向，其变化率为零

当 $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ 时，则函数在点 (x_0, y_0, z_0) 处，

- 沿梯度方向，增加速度最快，达到 $|\nabla f(x_0, y_0, z_0)|$
- 沿梯度反方向，减少速度最快，达到 $-|\nabla f(x_0, y_0, z_0)|$
- 梯度垂直方向，其变化率为零

例 设 $f(x, y, z) = -x^3 + xy^2 + z$，$p_0(0.5, 0.5, 1)$。问：$f$ 在 p_0 点沿什么方向变化最快，变化率是多少？

当 $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ 时，则函数在点 (x_0, y_0, z_0) 处，

- 沿梯度方向，增加速度最快，达到 $|\nabla f(x_0, y_0, z_0)|$
- 沿梯度反方向，减少速度最快，达到 $-|\nabla f(x_0, y_0, z_0)|$
- 梯度垂直方向，其变化率为零

例 设 $f(x, y, z) = -x^3 + xy^2 + z$，$p_0(0.5, 0.5, 1)$。问：$f$ 在 p_0 点沿什么方向变化最快，变化率是多少？

解 1. $\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = (\qquad\qquad\qquad\qquad)$

当 $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ 时，则函数在点 (x_0, y_0, z_0) 处，

- 沿梯度方向，增加速度最快，达到 $|\nabla f(x_0, y_0, z_0)|$
- 沿梯度反方向，减少速度最快，达到 $-|\nabla f(x_0, y_0, z_0)|$
- 梯度垂直方向，其变化率为零

例 设 $f(x, y, z) = -x^3 + xy^2 + z$，$p_0(0.5, 0.5, 1)$。问：$f$ 在 p_0 点沿什么方向变化最快，变化率是多少？

解 1. $\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = (-3x^2 + y^2, \qquad\qquad)$

当 $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ 时，则函数在点 (x_0, y_0, z_0) 处，

- 沿梯度方向，增加速度最快，达到 $|\nabla f(x_0, y_0, z_0)|$
- 沿梯度反方向，减少速度最快，达到 $-|\nabla f(x_0, y_0, z_0)|$
- 梯度垂直方向，其变化率为零

例 设 $f(x, y, z) = -x^3 + xy^2 + z$，$p_0(0.5, 0.5, 1)$。问：$f$ 在 p_0 点沿什么方向变化最快，变化率是多少？

解 1. $\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = (-3x^2 + y^2, 2xy, \quad)$

当 $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ 时，则函数在点 (x_0, y_0, z_0) 处，

- 沿梯度方向，增加速度最快，达到 $|\nabla f(x_0, y_0, z_0)|$
- 沿梯度反方向，减少速度最快，达到 $-|\nabla f(x_0, y_0, z_0)|$
- 梯度垂直方向，其变化率为零

例 设 $f(x, y, z) = -x^3 + xy^2 + z$，$p_0(0.5, 0.5, 1)$。问：$f$ 在 p_0 点沿什么方向变化最快，变化率是多少？

解 1. $\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = (-3x^2 + y^2, 2xy, 1)$

当 $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ 时，则函数在点 (x_0, y_0, z_0) 处，

- 沿梯度方向，增加速度最快，达到 $|\nabla f(x_0, y_0, z_0)|$
- 沿梯度反方向，减少速度最快，达到 $-|\nabla f(x_0, y_0, z_0)|$
- 梯度垂直方向，其变化率为零

例 设 $f(x, y, z) = -x^3 + xy^2 + z$，$p_0(0.5, 0.5, 1)$。问：$f$ 在 p_0 点沿什么方向变化最快，变化率是多少？

解 1. $\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = (-3x^2 + y^2, 2xy, 1) \quad \Rightarrow$

$\nabla f(0.5, 0.5, 1) =$

当 $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ 时，则函数在点 (x_0, y_0, z_0) 处，

- 沿梯度方向，增加速度最快，达到 $|\nabla f(x_0, y_0, z_0)|$
- 沿梯度反方向，减少速度最快，达到 $-|\nabla f(x_0, y_0, z_0)|$
- 梯度垂直方向，其变化率为零

例 设 $f(x, y, z) = -x^3 + xy^2 + z$，$p_0(0.5, 0.5, 1)$。问：$f$ 在 p_0 点沿什么方向变化最快，变化率是多少？

解 1. $\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = (-3x^2 + y^2, 2xy, 1) \quad \Rightarrow$
$\nabla f(0.5, 0.5, 1) = (-0.5, 0.5, 1)$

当 $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ 时，则函数在点 (x_0, y_0, z_0) 处，

- 沿梯度方向，增加速度最快，达到 $|\nabla f(x_0, y_0, z_0)|$
- 沿梯度反方向，减少速度最快，达到 $-|\nabla f(x_0, y_0, z_0)|$
- 梯度垂直方向，其变化率为零

例 设 $f(x, y, z) = -x^3 + xy^2 + z$，$p_0(0.5, 0.5, 1)$。问：$f$ 在 p_0 点沿什么方向变化最快，变化率是多少？

解 1. $\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = (-3x^2 + y^2, 2xy, 1) \quad \Rightarrow$

$\nabla f(0.5, 0.5, 1) = (-0.5, 0.5, 1)$

2. 函数沿梯度方向 $\nabla f(0.5, 0.5, 1)$ ，增加速度最大，达到 $|\nabla f(x_0, y_0)|$

当 $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ 时，则函数在点 (x_0, y_0, z_0) 处，

- 沿梯度方向，增加速度最快，达到 $|\nabla f(x_0, y_0, z_0)|$
- 沿梯度反方向，减少速度最快，达到 $-|\nabla f(x_0, y_0, z_0)|$
- 梯度垂直方向，其变化率为零

例 设 $f(x, y, z) = -x^3 + xy^2 + z$，$p_0(0.5, 0.5, 1)$。问：$f$ 在 p_0 点沿什么方向变化最快，变化率是多少？

解 1. $\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = (-3x^2 + y^2, 2xy, 1) \quad \Rightarrow$

$\nabla f(0.5, 0.5, 1) = (-0.5, 0.5, 1)$

2. 函数沿梯度方向 $\nabla f(0.5, 0.5, 1) = (-0.5, 0.5, 1)$，增加速度最大，达到 $|\nabla f(x_0, y_0)|$

当 $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ 时，则函数在点 (x_0, y_0, z_0) 处，

- 沿梯度方向，增加速度最快，达到 $|\nabla f(x_0, y_0, z_0)|$
- 沿梯度反方向，减少速度最快，达到 $-|\nabla f(x_0, y_0, z_0)|$
- 梯度垂直方向，其变化率为零

例 设 $f(x, y, z) = -x^3 + xy^2 + z$，$p_0(0.5, 0.5, 1)$。问：$f$ 在 p_0 点沿什么方向变化最快，变化率是多少？

解 1. $\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = (-3x^2 + y^2, 2xy, 1) \quad \Rightarrow$
$\nabla f(0.5, 0.5, 1) = (-0.5, 0.5, 1)$

2. 函数沿梯度方向 $\nabla f(0.5, 0.5, 1) = (-0.5, 0.5, 1)$，增加速度最大，达到 $|\nabla f(x_0, y_0)| = \sqrt{1.5}$

当 $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ 时，则函数在点 (x_0, y_0, z_0) 处，

- 沿梯度方向，增加速度最快，达到 $|\nabla f(x_0, y_0, z_0)|$
- 沿梯度反方向，减少速度最快，达到 $-|\nabla f(x_0, y_0, z_0)|$
- 梯度垂直方向，其变化率为零

例 设 $f(x, y, z) = -x^3 + xy^2 + z$，$p_0(0.5, 0.5, 1)$。问：$f$ 在 p_0 点沿什么方向变化最快，变化率是多少？

解 1. $\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = (-3x^2 + y^2, 2xy, 1) \quad \Rightarrow$
$\nabla f(0.5, 0.5, 1) = (-0.5, 0.5, 1)$

2. 函数沿梯度方向 $\nabla f(0.5, 0.5, 1) = (-0.5, 0.5, 1)$，增加速度最大，达到 $|\nabla f(x_0, y_0)| = \sqrt{1.5}$

3. 函数沿梯度反方向 $-\nabla f(0.5, 0.5, 1)$ ，减少速度最大，达到 $-|\nabla f(x_0, y_0)|$

当 $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ 时，则函数在点 (x_0, y_0, z_0) 处，

- 沿梯度方向，增加速度最快，达到 $|\nabla f(x_0, y_0, z_0)|$
- 沿梯度反方向，减少速度最快，达到 $-|\nabla f(x_0, y_0, z_0)|$
- 梯度垂直方向，其变化率为零

例 设 $f(x, y, z) = -x^3 + xy^2 + z$，$p_0(0.5, 0.5, 1)$。问：$f$ 在 p_0 点沿什么方向变化最快，变化率是多少？

解 1. $\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = (-3x^2 + y^2, 2xy, 1) \quad \Rightarrow$

$\nabla f(0.5, 0.5, 1) = (-0.5, 0.5, 1)$

2. 函数沿梯度方向 $\nabla f(0.5, 0.5, 1) = (-0.5, 0.5, 1)$，增加速度最大，达到 $|\nabla f(x_0, y_0)| = \sqrt{1.5}$

3. 函数沿梯度反方向 $-\nabla f(0.5, 0.5, 1) = (0.5, -0.5, -1)$，减少速度最大，达到 $-|\nabla f(x_0, y_0)|$

当 $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ 时，则函数在点 (x_0, y_0, z_0) 处，

- 沿梯度方向，增加速度最快，达到 $|\nabla f(x_0, y_0, z_0)|$
- 沿梯度反方向，减少速度最快，达到 $-|\nabla f(x_0, y_0, z_0)|$
- 梯度垂直方向，其变化率为零

例 设 $f(x, y, z) = -x^3 + xy^2 + z$，$p_0(0.5, 0.5, 1)$。问：$f$ 在 p_0 点沿什么方向变化最快，变化率是多少？

解 1. $\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = (-3x^2 + y^2, 2xy, 1) \quad \Rightarrow$
$\nabla f(0.5, 0.5, 1) = (-0.5, 0.5, 1)$

2. 函数沿梯度方向 $\nabla f(0.5, 0.5, 1) = (-0.5, 0.5, 1)$，增加速度最大，达到 $|\nabla f(x_0, y_0)| = \sqrt{1.5}$

3. 函数沿梯度反方向 $-\nabla f(0.5, 0.5, 1) = (0.5, -0.5, -1)$，减少速度最大，达到 $-|\nabla f(x_0, y_0)| = -\sqrt{1.5}$