

本节内容

- ◇ 二次型，二次型与对称矩阵一一对应
- ♣ 二次型的标准型、规范型
- ♥ 矩阵的合同关系

二次型：引例

二元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2$$

二次型：引例

二元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

二元二次齐次多项式

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2) &= 6x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\&= (6x_1 + 2x_2, 2x_1 - 2x_2)\end{aligned}$$

二次型：引例

二元二次齐次多项式

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2) &= 6x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\&= (6x_1 + 2x_2, 2x_1 - 2x_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

二次型：引例

二元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

二元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

一般地，

$$f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

二次型：引例

二元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

一般地，

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \\ &= (x_1, x_2) \begin{pmatrix} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

二次型：引例

二元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

一般地，

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \\ &= (x_1, x_2) \begin{pmatrix} a_{11} & \\ & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

二次型：引例

二元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

一般地，

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \\ &= (x_1, x_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

二次型：引例

二元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

一般地，

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \\ &= (x_1, x_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2, a_{12}x_1 + a_{22}x_2) \end{aligned}$$

二次型：引例

二元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

一般地，

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \\ &= (x_1, x_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2, a_{12}x_1 + a_{22}x_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

二次型：引例

二元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

一般地，

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \\ &= (x_1, x_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

二次型：引例

二元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

一般地,

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \\ &= \underbrace{(x_1, x_2)}_{x^T} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_x \end{aligned}$$

二次型：引例

二元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

一般地,

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \\ &= \underbrace{(x_1, x_2)}_{x^T} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_x = x^T A x \end{aligned}$$

二次型：引例

二元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

一般地,

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \\ &= \underbrace{(x_1, x_2)}_{x^T} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_x = x^T A x \end{aligned}$$

例

$$f(x_1, x_2) = -3x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 =$$

二次型：引例

二元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

一般地,

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \\ &= \underbrace{(x_1, x_2)}_{x^T} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_x = x^T A x \end{aligned}$$

例

$$f(x_1, x_2) = -3x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

二元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

一般地,

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \\ &= \underbrace{(x_1, x_2)}_{x^T} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_x = x^T A x \end{aligned}$$

例

$$f(x_1, x_2) = -3x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

二元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

一般地,

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \\ &= \underbrace{(x_1, x_2)}_{x^T} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_x = x^T A x \end{aligned}$$

例

$$f(x_1, x_2) = -3x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

二元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

一般地,

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \\ &= \underbrace{(x_1, x_2)}_{x^T} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_x = x^T A x \end{aligned}$$

例

$$f(x_1, x_2) = -3x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) = & a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 \\ & + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 \end{aligned}$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 \\ &\quad + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 \\ &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 \\ &\quad + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 \\ &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 \\ &\quad + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 \\ &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \\ & a_{22} & \\ & & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 \\ &\quad + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 \\ &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{22} & \\ & & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 \\ &\quad + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 \\ &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{22} & a_{23} \\ & & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 \\ &\quad + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 \end{aligned}$$

$$= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 \\ + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$$

$$= \underbrace{(x_1, x_2, x_3)}_{x^T} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_x$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 \\ &\quad + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 \end{aligned}$$

$$= \underbrace{(x_1, x_2, x_3)}_{x^T} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_x = x^T A x$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 \\ &\quad + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 \end{aligned}$$

$$= \underbrace{(x_1, x_2, x_3)}_{x^T} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_x = x^T A x$$

例

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_3^2 - 2x_2x_3$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 \\ &\quad + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 \\ &= \underbrace{(x_1, x_2, x_3)}_{x^T} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_x = x^T A x \end{aligned}$$

例

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_3^2 - 2x_2x_3 \\ &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 \\ &\quad + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 \\ &= \underbrace{(x_1, x_2, x_3)}_{x^T} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_x = x^T A x \end{aligned}$$

例

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_3^2 - 2x_2x_3 \\ &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 0 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 \\ &\quad + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 \end{aligned}$$

$$= \underbrace{(x_1, x_2, x_3)}_{x^T} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_x = x^T A x$$

例

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_3^2 - 2x_2x_3$$

$$= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 \\ &\quad + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 \\ &= \underbrace{(x_1, x_2, x_3)}_{x^T} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_x = x^T A x \end{aligned}$$

例

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_3^2 - 2x_2x_3 \\ &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 \\ &\quad + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 \\ &= \underbrace{(x_1, x_2, x_3)}_{x^T} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_x = x^T A x \end{aligned}$$

例 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_3^2 - 2x_2x_3$

$$= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \\ & 0 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 \\ &\quad + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 \\ &= \underbrace{(x_1, x_2, x_3)}_{x^T} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_x = x^T A x \end{aligned}$$

例 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_3^2 - 2x_2x_3$

$$= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ & 0 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 \\ &\quad + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 \\ &= \underbrace{(x_1, x_2, x_3)}_{x^T} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_x = x^T A x \end{aligned}$$

例 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_3^2 - 2x_2x_3$

$$= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ & 0 & -1 \\ & & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 \\ &\quad + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 \\ &= \underbrace{(x_1, x_2, x_3)}_{x^T} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_x = x^T A x \end{aligned}$$

例

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_3^2 - 2x_2x_3 \\ &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

二次型：引例

例 给定二次型，写出对称矩阵 A ：

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

二次型：引例

例 给定二次型，写出对称矩阵 A ：

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

例 给定对称矩阵 A ，写出相应二次型：

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

=

二次型：引例

例 给定二次型，写出对称矩阵 A ：

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\ &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例 给定对称矩阵 A ，写出相应二次型：

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= \end{aligned}$$

二次型：引例

例 给定二次型，写出对称矩阵 A ：

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\ &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例 给定对称矩阵 A ，写出相应二次型：

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= \end{aligned}$$

二次型：引例

例 给定二次型，写出对称矩阵 A ：

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\ &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例 给定对称矩阵 A ，写出相应二次型：

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= \end{aligned}$$

二次型：引例

例 给定二次型，写出对称矩阵 A ：

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\ &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例 给定对称矩阵 A ，写出相应二次型：

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= \end{aligned}$$

二次型：引例

例 给定二次型，写出对称矩阵 A ：

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\ &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 3 \\ & 2 & 4 \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例 给定对称矩阵 A ，写出相应二次型：

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= \end{aligned}$$

二次型：引例

例 给定二次型，写出对称矩阵 A ：

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\ &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例 给定对称矩阵 A ，写出相应二次型：

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ & 1 & 2 & 0 \\ & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= \end{aligned}$$

二次型：引例

例 给定二次型，写出对称矩阵 A ：

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\ &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ & 2 & 2 \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例 给定对称矩阵 A ，写出相应二次型：

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ & 1 & 2 & 0 \\ & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= \end{aligned}$$

二次型：引例

例 给定二次型，写出对称矩阵 A ：

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\ &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例 给定对称矩阵 A ，写出相应二次型：

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= \end{aligned}$$

二次型：引例

例 给定二次型，写出对称矩阵 A ：

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\ &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例 给定对称矩阵 A ，写出相应二次型：

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= \underline{\quad} x_1^2 + \underline{\quad} x_2^2 + \underline{\quad} x_3^2 + 2\underline{\quad} x_1x_2 + 2\underline{\quad} x_1x_3 + 2\underline{\quad} x_2x_3 \end{aligned}$$

二次型：引例

例 给定二次型，写出对称矩阵 A ：

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\ &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例 给定对称矩阵 A ，写出相应二次型：

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= \underline{\quad} x_1^2 + \underline{\quad} x_2^2 + \underline{\quad} x_3^2 + 2 \underline{\quad} x_1x_2 + 2 \underline{\quad} x_1x_3 + 2 \underline{\quad} x_2x_3 \end{aligned}$$

二次型：引例

例 给定二次型，写出对称矩阵 A ：

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\ &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例 给定对称矩阵 A ，写出相应二次型：

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= \underline{-1}x_1^2 + \underline{2}x_2^2 + \underline{\quad}x_3^2 + 2\underline{\quad}x_1x_2 + 2\underline{\quad}x_1x_3 + 2\underline{\quad}x_2x_3 \end{aligned}$$

二次型：引例

例 给定二次型，写出对称矩阵 A ：

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\ &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例 给定对称矩阵 A ，写出相应二次型：

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= \underline{-1}x_1^2 + \underline{2}x_2^2 + \underline{0}x_3^2 + 2\underline{\quad}x_1x_2 + 2\underline{\quad}x_1x_3 + 2\underline{\quad}x_2x_3 \end{aligned}$$

二次型：引例

例 给定二次型，写出对称矩阵 A ：

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\ &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例 给定对称矩阵 A ，写出相应二次型：

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= \underline{-1}x_1^2 + \underline{2}x_2^2 + \underline{0}x_3^2 + 2 \cdot \underline{1} \cdot x_1x_2 + 2 \underline{\quad} x_1x_3 + 2 \underline{\quad} x_2x_3 \end{aligned}$$

二次型：引例

例 给定二次型，写出对称矩阵 A ：

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\ &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例 给定对称矩阵 A ，写出相应二次型：

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= \underline{-1}x_1^2 + \underline{2}x_2^2 + \underline{0}x_3^2 + 2 \cdot \underline{1} \cdot x_1x_2 + 2 \cdot \underline{\frac{1}{2}} \cdot x_1x_3 + 2 \underline{\quad} x_2x_3 \end{aligned}$$

二次型：引例

例 给定二次型，写出对称矩阵 A ：

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\ &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例 给定对称矩阵 A ，写出相应二次型：

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= \underline{-1}x_1^2 + \underline{2}x_2^2 + \underline{0}x_3^2 + 2 \cdot \underline{1} \cdot x_1x_2 + 2 \cdot \underline{\frac{1}{2}} \cdot x_1x_3 + 2 \cdot \underline{0} \cdot x_2x_3 \end{aligned}$$

二次型：引例

例 给定二次型，写出对称矩阵 A ：

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\ &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例 给定对称矩阵 A ，写出相应二次型：

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= \underline{-1}x_1^2 + \underline{2}x_2^2 + \underline{0}x_3^2 + 2 \cdot \underline{1} \cdot x_1x_2 + 2 \cdot \underline{\frac{1}{2}} \cdot x_1x_3 + 2 \cdot \underline{0} \cdot x_2x_3 \\ &= -x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_3 + x_1x_3 \end{aligned}$$

二次型

定义 n 元二次型

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & + \dots\dots\dots \\ & + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

二次型

定义 n 元二次型

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & + \dots \end{aligned}$$

$$+ a_{nn}x_n^2$$

$$= (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

二次型

定义 n 元二次型

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + a_{nn}x_n^2 \\ = & (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

二次型

定义 n 元二次型

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + a_{nn}x_n^2 \\ = & (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

二次型

定义 n 元二次型

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + a_{nn}x_n^2 \\ = (x_1, x_2, \dots, x_n) & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

二次型

定义 n 元二次型

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + a_{nn}x_n^2 \\ = (x_1, x_2, \dots, x_n) & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

二次型

定义 n 元二次型

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + a_{nn}x_n^2 \\ = & (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

二次型

定义 n 元二次型

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + a_{nn}x_n^2 \\ = & \underbrace{(x_1, x_2, \dots, x_n)}_{x^T} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_x \end{aligned}$$

二次型

定义 n 元二次型

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + a_{nn}x_n^2 \\ = & \underbrace{(x_1, x_2, \dots, x_n)}_{x^T} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_x \\ = & x^T A x \end{aligned}$$

二次型

定义 n 元二次型

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + a_{nn}x_n^2 \\ = & \underbrace{(x_1, x_2, \dots, x_n)}_{x^T} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_x \\ = & x^T A x \end{aligned}$$

注 n 元二次型与对称矩阵，是一一对应

给定二次型

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & + \cdots \cdots \\ & + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

给定二次型

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & + \dots \dots \dots \\ & + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

作变量代换：

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + \dots + c_{1n}y_n \\ \vdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + \dots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

给定二次型

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & + \cdots \cdots \\ & + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

作变量代换:

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + \cdots + c_{1n}y_n \\ \vdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

代入二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 得

$$f = b_{11}y_1^2 + 2b_{12}y_1y_2 + \cdots \quad (\text{关于 } y_1, \dots, y_n \text{ 的二次型})$$

给定二次型

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & + \cdots \cdots \\ & + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

作变量代换：

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + \cdots + c_{1n}y_n \\ \vdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

代入二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 得

$$f = b_{11}y_1^2 + 2b_{12}y_1y_2 + \cdots \quad (\text{关于 } y_1, \dots, y_n \text{ 的二次型})$$

问题：在新变量 y_1, y_2, \dots, y_n 下， f 能化简到怎样的程度？

给定二次型

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & + \cdots \cdots \\ & + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

作变量代换：（要求 $C = (c_{ij})$ 是可逆矩阵，所以可以反解出 y ）

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + \cdots + c_{1n}y_n \\ \vdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

代入二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 得

$$f = b_{11}y_1^2 + 2b_{12}y_1y_2 + \cdots \quad (\text{关于 } y_1, \dots, y_n \text{ 的二次型})$$

问题：在新变量 y_1, y_2, \dots, y_n 下， f 能化简到怎样的程度？

给定二次型

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & + \cdots \cdots \\ & + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

作变量代换：（要求 $C = (c_{ij})$ 是可逆矩阵，所以可以反解出 y ）

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + \cdots + c_{1n}y_n \\ \vdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

代入二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 得

$$f = b_{11}y_1^2 + 2b_{12}y_1y_2 + \cdots \quad (\text{关于 } y_1, \dots, y_n \text{ 的二次型})$$

问题：在新变量 y_1, y_2, \dots, y_n 下， f 能化简到怎样的程度？

给定二次型

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & + \cdots \cdots \\ & + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

作变量代换：（要求 $C = (c_{ij})$ 是可逆矩阵，所以可以反解出 y ）

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + \cdots + c_{1n}y_n \\ \vdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow x = Cy$$

代入二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 得

$$f = b_{11}y_1^2 + 2b_{12}y_1y_2 + \cdots \quad (\text{关于 } y_1, \dots, y_n \text{ 的二次型})$$

问题：在新变量 y_1, y_2, \dots, y_n 下， f 能化简到怎样的程度？

给定二次型

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & + \cdots \cdots \\ & + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

作变量代换：（要求 $C = (c_{ij})$ 是可逆矩阵，所以可以反解出 $y = C^{-1}x$ ）

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + \cdots + c_{1n}y_n \\ \vdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow x = Cy$$

代入二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 得

$$f = b_{11}y_1^2 + 2b_{12}y_1y_2 + \cdots \quad (\text{关于 } y_1, \dots, y_n \text{ 的二次型})$$

问题：在新变量 y_1, y_2, \dots, y_n 下， f 能化简到怎样的程度？

问题：在新变量 y_1, y_2, \dots, y_n ($x = Cy$) 下, f 能化简到怎样的程度?

问题：在新变量 y_1, y_2, \dots, y_n ($x = Cy$) 下, f 能化简到怎样的程度?

注意到:

$$f = x^T A x \xrightarrow{x=Cy}$$

问题：在新变量 y_1, y_2, \dots, y_n ($x = Cy$) 下, f 能化简到怎样的程度?

注意到:

$$f = x^T A x \xrightarrow{x=Cy} (Cy)^T A (Cy)$$

问题： 在新变量 y_1, y_2, \dots, y_n ($x = Cy$) 下, f 能化简到怎样的程度?

注意到:

$$f = x^T A x \xrightarrow{x=Cy} (Cy)^T A (Cy) = y^T C^T$$

问题： 在新变量 y_1, y_2, \dots, y_n ($x = Cy$) 下, f 能化简到怎样的程度?

注意到:

$$f = x^T A x \xrightarrow{x=Cy} (Cy)^T A (Cy) = y^T C^T A C y$$

问题： 在新变量 y_1, y_2, \dots, y_n ($x = Cy$) 下, f 能化简到怎样的程度?

注意到:

$$f = x^T A x \xrightarrow{x=Cy} (Cy)^T A (Cy) = y^T C^T A C y$$

所以上述问题等价于以下问题:

问题’： 给定对称矩阵 A , 尝试找出可逆矩阵 C 使得

$$C^T A C$$

尽可能简单?

问题： 在新变量 y_1, y_2, \dots, y_n ($x = Cy$) 下, f 能化简到怎样的程度?

注意到:

$$f = x^T A x \xrightarrow{x=Cy} (Cy)^T A (Cy) = y^T C^T A C y$$

所以上述问题等价于以下问题:

问题': 给定对称矩阵 A , 尝试找出可逆矩阵 C 使得

$$C^T A C$$

尽可能简单?

回忆:

定理 任意对称矩阵 A , 都存在正交矩阵 Q , 使得 $Q^T A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

问题： 在新变量 y_1, y_2, \dots, y_n ($x = Cy$) 下, f 能化简到怎样的程度?

注意到:

$$f = x^T A x \stackrel{x=Cy}{=} (Cy)^T A (Cy) = y^T C^T A C y$$

所以上述问题等价于以下问题:

问题': 给定对称矩阵 A , 尝试找出可逆矩阵 C 使得

$$C^T A C$$

尽可能简单?

回忆:

定理 任意对称矩阵 A , 都存在正交矩阵 Q , 使得 $Q^T A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

推论 任意二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 都存在非退化线性变换 $x = Qy$, 使得

问题： 在新变量 y_1, y_2, \dots, y_n ($x = Cy$) 下, f 能化简到怎样的程度?

注意到:

$$f = x^T A x \xrightarrow{x=Cy} (Cy)^T A (Cy) = y^T C^T A C y$$

所以上述问题等价于以下问题:

问题': 给定对称矩阵 A , 尝试找出可逆矩阵 C 使得

$$C^T A C$$

尽可能简单?

回忆:

定理 任意对称矩阵 A , 都存在正交矩阵 Q , 使得 $Q^T A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

推论 任意二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 都存在非退化线性变换 $x = Qy$, 使得

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

二次型的标准型

定义 二次型 f 称为标准型，是指

$$f = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_r y_r^2$$

二次型的标准型

定义 二次型 f 称为标准型，是指

$$f = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_r y_r^2$$

其中 $0 \leq r \leq n$,

二次型的标准型

定义 二次型 f 称为标准型，是指

$$f = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_r y_r^2$$

其中 $0 \leq r \leq n$, $d_1, d_2, \dots, d_r \neq 0$ 。

二次型的标准型

定义 二次型 f 称为标准型，是指

$$f = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_r y_r^2$$

其中 $0 \leq r \leq n$, $d_1, d_2, \dots, d_r \neq 0$ 。

注 标准型不唯一。换言之，同一个二次型 f ，可以化出不同的标准型。

例 化二次型 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 为标准型

例 化二次型 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 为标准型

解

• f 系数所构成的对称矩阵是: $A = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

例 化二次型 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 为标准型

解

• f 系数所构成的对称矩阵是: $A = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 5 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$

例 化二次型 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 为标准型

解

• f 系数所构成的对称矩阵是: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ & 5 & -4 \\ & & 5 \end{pmatrix}$

例 化二次型 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 为标准型

解

• f 系数所构成的对称矩阵是: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ & 5 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$

例 化二次型 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 为标准型

解

• f 系数所构成的对称矩阵是: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ & 5 & -4 \\ & & 5 \end{pmatrix}$

例 化二次型 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 为标准型

解

• f 系数所构成的对称矩阵是: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

例 化二次型 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 为标准型

解

- f 系数所构成的对称矩阵是: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$
- 特征方程: $0 = |\lambda I - A|$

例 化二次型 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 为标准型

解

- f 系数所构成的对称矩阵是: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$
- 特征方程: $0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 1)^2(\lambda - 10)$

例 化二次型 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 为标准型

解

- f 系数所构成的对称矩阵是: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

- 特征方程: $0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 1)^2(\lambda - 10)$

- $\lambda_1 = 1$ (二重)

- $\lambda_3 = 10$

例 化二次型 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 为标准型

解

- f 系数所构成的对称矩阵是: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

- 特征方程: $0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 1)^2(\lambda - 10)$

- $\lambda_1 = 1$ (二重)

- $\lambda_3 = 10$

-

$$x = Qy, \text{ 则 } f = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2$$

例 化二次型 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 为标准型

解

- f 系数所构成的对称矩阵是: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

- 特征方程: $0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 1)^2(\lambda - 10)$

- $\lambda_1 = 1$ (二重), 特征向量

$$\begin{cases} \alpha_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- $\lambda_3 = 10$

-

$$x = Qy, \text{ 则 } f = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2$$

例 化二次型 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 为标准型

解

- f 系数所构成的对称矩阵是: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

- 特征方程: $0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 1)^2(\lambda - 10)$

- $\lambda_1 = 1$ (二重), 特征向量

$$\begin{cases} \alpha_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \xrightarrow{\text{正交化}} \begin{cases} \beta_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \beta_2 = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 4/5 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- $\lambda_3 = 10$

-

$$x = Qy, \text{ 则 } f = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2$$

例 化二次型 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 为标准型

解

- f 系数所构成的对称矩阵是: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

- 特征方程: $0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 1)^2(\lambda - 10)$

- $\lambda_1 = 1$ (二重), 特征向量

$$\begin{cases} \alpha_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \xrightarrow{\text{正交化}} \begin{cases} \beta_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \beta_2 = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 4/5 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \xrightarrow{\text{单位化}} \begin{cases} \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \gamma_2 = \frac{5}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2/5 \\ 4/5 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- $\lambda_3 = 10$

-

$$x = Qy, \text{ 则 } f = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2$$

例 化二次型 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 为标准型

解

- f 系数所构成的对称矩阵是: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

- 特征方程: $0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 1)^2(\lambda - 10)$

- $\lambda_1 = 1$ (二重), 特征向量

$$\begin{cases} \alpha_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \xrightarrow{\text{正交化}} \begin{cases} \beta_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \beta_2 = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 4/5 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \xrightarrow{\text{单位化}} \begin{cases} \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \gamma_2 = \frac{5}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2/5 \\ 4/5 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- $\lambda_3 = 10$, 特征向量 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

-

$$x = Qy, \text{ 则 } f = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2$$

例 化二次型 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 为标准型

解

- f 系数所构成的对称矩阵是: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

- 特征方程: $0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 1)^2(\lambda - 10)$

- $\lambda_1 = 1$ (二重), 特征向量

$$\begin{cases} \alpha_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \xrightarrow{\text{正交化}} \begin{cases} \beta_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \beta_2 = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 4/5 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \xrightarrow{\text{单位化}} \begin{cases} \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \gamma_2 = \frac{5}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2/5 \\ 4/5 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- $\lambda_3 = 10$, 特征向量 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{单位化}} \gamma_3 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$

-

$$x = Qy, \text{ 则 } f = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2$$

例 化二次型 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 为标准型

解

- f 系数所构成的对称矩阵是: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

- 特征方程: $0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 1)^2(\lambda - 10)$

- $\lambda_1 = 1$ (二重), 特征向量

$$\begin{cases} \alpha_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \xrightarrow{\text{正交化}} \begin{cases} \beta_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \beta_2 = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 4/5 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \xrightarrow{\text{单位化}} \begin{cases} \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \gamma_2 = \frac{5}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2/5 \\ 4/5 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- $\lambda_3 = 10$, 特征向量 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{单位化}} \gamma_3 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$

- 令 $Q = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & 1/3 \\ 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & 2/3 \\ 0 & \sqrt{5}/3 & -2/3 \end{pmatrix}$, $x = Qy$, 则 $f = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2$

例 化二次型 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 为标准型

解

- f 系数所构成的对称矩阵是: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

- 特征方程: $0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 1)^2(\lambda - 10)$

- $\lambda_1 = 1$ (二重), 特征向量

$$\begin{cases} \alpha_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \xrightarrow{\text{正交化}} \begin{cases} \beta_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \beta_2 = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 4/5 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \xrightarrow{\text{单位化}} \begin{cases} \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \gamma_2 = \frac{5}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2/5 \\ 4/5 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- $\lambda_3 = 10$, 特征向量 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{单位化}} \gamma_3 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$

- 令 $Q = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & 1/3 \\ 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & 2/3 \\ 0 & \sqrt{5}/3 & -2/3 \end{pmatrix}$, $x = Qy$, 则 $f = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2$
($y = Q^T x$)

化二次型为标准型的另一方法：配方法

- 想法： $a^2 + 2ab =$

化二次型为标准型的另一方法：配方法

- 想法： $a^2 + 2ab = a^2 + 2ab + b^2 - b^2 =$

化二次型为标准型的另一方法：配方法

- 想法：
$$a^2 + 2ab = a^2 + 2ab + b^2 - b^2 = (a + b)^2 - b^2$$

化二次型为标准型的另一方法：配方法

- 想法：
$$a^2 + 2ab = a^2 + 2ab + b^2 - b^2 = (a + b)^2 - b^2$$
$$a^2 + 2ab + 2ac =$$

化二次型为标准型的另一方法：配方法

- 想法： $a^2 + 2ab = a^2 + 2ab + b^2 - b^2 = (a + b)^2 - b^2$

$$a^2 + 2ab + 2ac = a^2 + 2a(b + c)$$

=

化二次型为标准型的另一方法：配方法

- 想法：
$$\begin{aligned}a^2 + 2ab &= a^2 + 2ab + b^2 - b^2 = (a + b)^2 - b^2 \\a^2 + 2ab + 2ac &= a^2 + 2a(b + c) \\&= a^2 + 2a(b + c) + (b + c)^2 - (b + c)^2 \\&= \end{aligned}$$

化二次型为标准型的另一方法：配方法

- 想法：
$$\begin{aligned}a^2 + 2ab &= a^2 + 2ab + b^2 - b^2 = (a + b)^2 - b^2 \\a^2 + 2ab + 2ac &= a^2 + 2a(b + c) \\&= a^2 + 2a(b + c) + (b + c)^2 - (b + c)^2 \\&= (a + b + c)^2 - (b + c)^2\end{aligned}$$

化二次型为标准型的另一方法：配方法

● 想法：

$$\begin{aligned}a^2 + 2ab &= a^2 + 2ab + b^2 - b^2 = (a + b)^2 - b^2 \\a^2 + 2ab + 2ac &= a^2 + 2a(b + c) \\&= a^2 + 2a(b + c) + (b + c)^2 - (b + c)^2 \\&= (a + b + c)^2 - (b + c)^2\end{aligned}$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned}f &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\&= \end{aligned}$$

化二次型为标准型的另一方法：配方法

● 想法：

$$\begin{aligned}a^2 + 2ab &= a^2 + 2ab + b^2 - b^2 = (a + b)^2 - b^2 \\a^2 + 2ab + 2ac &= a^2 + 2a(b + c) \\&= a^2 + 2a(b + c) + (b + c)^2 - (b + c)^2 \\&= (a + b + c)^2 - (b + c)^2\end{aligned}$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned}f &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\&= x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3)\end{aligned}$$

化二次型为标准型的另一方法：配方法

● 想法：

$$\begin{aligned}a^2 + 2ab &= a^2 + 2ab + b^2 - b^2 = (a + b)^2 - b^2 \\a^2 + 2ab + 2ac &= a^2 + 2a(b + c) \\&= a^2 + 2a(b + c) + (b + c)^2 - (b + c)^2 \\&= (a + b + c)^2 - (b + c)^2\end{aligned}$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned}f &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\&= x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3) + (x_2 + x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2\end{aligned}$$

化二次型为标准型的另一方法：配方法

● 想法：

$$\begin{aligned}a^2 + 2ab &= a^2 + 2ab + b^2 - b^2 = (a + b)^2 - b^2 \\a^2 + 2ab + 2ac &= a^2 + 2a(b + c) \\&= a^2 + 2a(b + c) + (b + c)^2 - (b + c)^2 \\&= (a + b + c)^2 - (b + c)^2\end{aligned}$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned}f &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\&= x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3) + (x_2 + x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\&= \end{aligned}$$

化二次型为标准型的另一方法：配方法

- 想法：
$$\begin{aligned}a^2 + 2ab &= a^2 + 2ab + b^2 - b^2 = (a + b)^2 - b^2 \\a^2 + 2ab + 2ac &= a^2 + 2a(b + c) \\&= a^2 + 2a(b + c) + (b + c)^2 - (b + c)^2 \\&= (a + b + c)^2 - (b + c)^2\end{aligned}$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned}f &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\&= x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3) + (x_2 + x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 +\end{aligned}$$

化二次型为标准型的另一方法：配方法

● 想法：

$$\begin{aligned}a^2 + 2ab &= a^2 + 2ab + b^2 - b^2 = (a + b)^2 - b^2 \\a^2 + 2ab + 2ac &= a^2 + 2a(b + c) \\&= a^2 + 2a(b + c) + (b + c)^2 - (b + c)^2 \\&= (a + b + c)^2 - (b + c)^2\end{aligned}$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned}f &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\&= x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3) + (x_2 + x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 \\&= \end{aligned}$$

化二次型为标准型的另一方法：配方法

● 想法：

$$\begin{aligned}a^2 + 2ab &= a^2 + 2ab + b^2 - b^2 = (a + b)^2 - b^2 \\a^2 + 2ab + 2ac &= a^2 + 2a(b + c) \\&= a^2 + 2a(b + c) + (b + c)^2 - (b + c)^2 \\&= (a + b + c)^2 - (b + c)^2\end{aligned}$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned}f &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\&= x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3) + (x_2 + x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 \\&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2 \\&= \end{aligned}$$

化二次型为标准型的另一方法：配方法

● 想法：

$$\begin{aligned}a^2 + 2ab &= a^2 + 2ab + b^2 - b^2 = (a + b)^2 - b^2 \\a^2 + 2ab + 2ac &= a^2 + 2a(b + c) \\&= a^2 + 2a(b + c) + (b + c)^2 - (b + c)^2 \\&= (a + b + c)^2 - (b + c)^2\end{aligned}$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned}f &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\&= x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3) + (x_2 + x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 \\&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2 \\&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2\end{aligned}$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned}f &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\&= x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3) + (x_2 + x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 \\&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2 \\&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2\end{aligned}$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned}f &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\&= x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3) + (x_2 + x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 \\&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2 \\&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2\end{aligned}$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = \quad \quad x_2 + x_3 \\ y_3 = \quad \quad \quad x_3 \end{cases}$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned}f &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\&= x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3) + (x_2 + x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 \\&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2 \\&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2\end{aligned}$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = \quad \quad x_2 + x_3 \\ y_3 = \quad \quad \quad x_3 \end{cases}$$

则

$$f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned}f &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\&= x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3) + (x_2 + x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 \\&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2 \\&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2\end{aligned}$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = \quad \quad x_2 + x_3 \\ y_3 = \quad \quad \quad x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \\ x_2 = \\ x_3 = \end{cases}$$

则

$$f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned}f &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\&= x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3) + (x_2 + x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 \\&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2 \\&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2\end{aligned}$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = \quad \quad x_2 + x_3 \\ y_3 = \quad \quad \quad x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \\ x_2 = \\ x_3 = \quad \quad y_3 \end{cases}$$

则

$$f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned}f &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\&= x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3) + (x_2 + x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 \\&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2 \\&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2\end{aligned}$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = \quad \quad x_2 + x_3 \\ y_3 = \quad \quad \quad x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \\ x_2 = \quad y_2 - y_3 \\ x_3 = \quad \quad y_3 \end{cases}$$

则

$$f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned}f &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\&= x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3) + (x_2 + x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 \\&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2 \\&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2\end{aligned}$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = \quad \quad x_2 + x_3 \\ y_3 = \quad \quad \quad x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = \quad \quad y_2 - y_3 \\ x_3 = \quad \quad \quad y_3 \end{cases}$$

则

$$f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned}f &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\&= x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3) + (x_2 + x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 \\&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2 \\&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2\end{aligned}$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 + x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_2 - y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} y_1 - y_2 \\ y_2 - y_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

则

$$f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned}f &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\&= x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3) + (x_2 + x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 \\&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2 \\&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2\end{aligned}$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 + x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_2 - y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y$$

则

$$f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned}f &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\&= x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3) + (x_2 + x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 \\&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2 \\&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2\end{aligned}$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 + x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_2 - y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y$$

则

$$f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned}f &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\&= x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3) + (x_2 + x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 \\&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2 \\&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2\end{aligned}$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 + x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_2 - y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y$$

则

$$f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned}f &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\&= x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3) + (x_2 + x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 \\&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2 \\&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2\end{aligned}$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 + x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_2 - y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C: \text{可逆}} y$$

则

$$f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned}f &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\&= x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3) + (x_2 + x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 \\&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2 \\&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2\end{aligned}$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 + x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_2 - y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C: \text{可逆}} y$$

则

$$f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

例 2 配方法化 $f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$ 为标准型

例 2 配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$
$$=$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned} f &= x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\ &= x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) \end{aligned}$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned} f &= x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\ &= x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2 \end{aligned}$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned}f &= x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\&= x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2 \\&\quad + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2\end{aligned}$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned}f &= x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\&= x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2 \\&\quad + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\&= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2\end{aligned}$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned}f &= x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\&= x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2 \\&\quad + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\&= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2\end{aligned}$$

例2 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned}f &= x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\&= x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2 \\&\quad + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\&= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2\end{aligned}$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ y_2 = x_2 \end{cases}$$

例2 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned}f &= x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\&= x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2 \\&\quad + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\&= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2\end{aligned}$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ y_2 = x_2 \end{cases}$$

则

$$f = y_1^2 - 2y_2^2$$

例2 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned}f &= x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\&= x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2 \\&\quad + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\&= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2\end{aligned}$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$$

则

$$f = y_1^2 - 2y_2^2$$

例2 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned}f &= x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\&= x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2 \\&\quad + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\&= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2\end{aligned}$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases}$$

则

$$f = y_1^2 - 2y_2^2$$

例2 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned}f &= x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\&= x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2 \\&\quad + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\&= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2\end{aligned}$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ y_2 = \quad \quad \quad x_2 \\ y_3 = \quad \quad \quad x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 - 2y_3 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

则

$$f = y_1^2 - 2y_2^2$$

例2 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned}f &= x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\&= x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2 \\&\quad + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\&= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2\end{aligned}$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ y_2 = \quad \quad \quad x_2 \\ y_3 = \quad \quad \quad x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 - 2y_3 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

则

$$f = y_1^2 - 2y_2^2$$

例2 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned}f &= x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\&= x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2 \\&\quad + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\&= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2\end{aligned}$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 - 2y_3 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

则

$$f = y_1^2 - 2y_2^2$$

例2 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned}f &= x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\&= x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2 \\&\quad + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\&= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2\end{aligned}$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 - 2y_3 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C: \text{可逆}} y$$

则

$$f = y_1^2 - 2y_2^2$$

例2 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned} f &= x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\ &= x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2 \\ &\quad + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\ &= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2 \end{aligned}$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 - 2y_3 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C: \text{可逆}} y$$

则

$$f = y_1^2 - 2y_2^2$$

例3 配方法化 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 为标准型

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

=

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3}$$

=

例 3 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned} f &= \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3 \\ &= 2[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) \quad \quad \quad] \end{aligned}$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned} f &= \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3 \\ &= 2[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2] \end{aligned}$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned} f &= \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3 \\ &= 2[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2] - 2(x_2 - x_3)^2 \end{aligned}$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned} f &= \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3 \\ &= 2[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2] - 2(x_2 - x_3)^2 \\ &\quad + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3 \end{aligned}$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned} f &= \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3 \\ &= 2[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2] - 2(x_2 - x_3)^2 \\ &\quad + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3 \\ &= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 \end{aligned}$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned} f &= \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3 \\ &= 2[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2] - 2(x_2 - x_3)^2 \\ &\quad + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3 \\ &= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3 \end{aligned}$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned} f &= \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3 \\ &= 2[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2] - 2(x_2 - x_3)^2 \\ &\quad + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3 \\ &= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3 \\ &\quad + 3[x_2^2 - 2x_2 \cdot \frac{2}{3}x_3 \quad \quad \quad] \end{aligned}$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned}f &= \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3 \\&= 2[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2] - 2(x_2 - x_3)^2 \\&\quad + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3 \\&= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3 \\&\quad + 3[x_2^2 - 2x_2 \cdot \frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2]\end{aligned}$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned}f &= \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3 \\&= 2[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2] - 2(x_2 - x_3)^2 \\&\quad + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3 \\&= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3 \\&\quad + 3[x_2^2 - 2x_2 \cdot \frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2] - 3(\frac{2}{3}x_3)^2\end{aligned}$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned}f &= \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3 \\&= 2[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2] - 2(x_2 - x_3)^2 \\&\quad + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3 \\&= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3 \\&\quad + 3[x_2^2 - 2x_2 \cdot \frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2] - 3(\frac{2}{3}x_3)^2 + 3x_3^2\end{aligned}$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$+ 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3[x_2^2 - 2x_2 \cdot \frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2] - 3(\frac{2}{3}x_3)^2 + 3x_3^2$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned}f &= \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3 \\&= 2[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2] - 2(x_2 - x_3)^2 \\&\quad + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3 \\&= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3 \\&= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3[x_2^2 - 2x_2 \cdot \frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2] - 3(\frac{2}{3}x_3)^2 + 3x_3^2 \\&= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2\end{aligned}$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned}f &= \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3 \\&= 2[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2] - 2(x_2 - x_3)^2 \\&\quad + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3 \\&= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3 \\&= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3[x_2^2 - 2x_2 \cdot \frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2] - 3(\frac{2}{3}x_3)^2 + 3x_3^2 \\&= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3(x_2 - \frac{2}{3}x_3)^2\end{aligned}$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned}f &= \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3 \\&= 2[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2] - 2(x_2 - x_3)^2 \\&\quad + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3 \\&= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3 \\&= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3[x_2^2 - 2x_2 \cdot \frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2] - 3(\frac{2}{3}x_3)^2 + 3x_3^2 \\&= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3(x_2 - \frac{2}{3}x_3)^2 + \frac{5}{3}x_3^2\end{aligned}$$

例3 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned}f &= \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3 \\&= 2[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2] - 2(x_2 - x_3)^2 \\&\quad + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3 \\&= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3 \\&= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3[x_2^2 - 2x_2 \cdot \frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2] - 3(\frac{2}{3}x_3)^2 + 3x_3^2 \\&= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3(x_2 - \frac{2}{3}x_3)^2 + \frac{5}{3}x_3^2\end{aligned}$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = x_2 - \frac{2}{3}x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$$

例3 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned}f &= \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3 \\&= 2[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2] - 2(x_2 - x_3)^2 \\&\quad + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3 \\&= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3 \\&= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3[x_2^2 - 2x_2 \cdot \frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2] - 3(\frac{2}{3}x_3)^2 + 3x_3^2 \\&= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3(x_2 - \frac{2}{3}x_3)^2 + \frac{5}{3}x_3^2\end{aligned}$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = x_2 - \frac{2}{3}x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$$

$$\text{则 } f = 2y_1^2 + 3y_2^2 + \frac{5}{3}y_3^2$$

例3 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned}f &= \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3 \\&= 2[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2] - 2(x_2 - x_3)^2 \\&\quad + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3 \\&= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3 \\&= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3[x_2^2 - 2x_2 \cdot \frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2] - 3(\frac{2}{3}x_3)^2 + 3x_3^2 \\&= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3(x_2 - \frac{2}{3}x_3)^2 + \frac{5}{3}x_3^2\end{aligned}$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = x_2 - \frac{2}{3}x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + y_3 \\ x_2 = y_2 + \frac{2}{3}y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

$$\text{则 } f = 2y_1^2 + 3y_2^2 + \frac{5}{3}y_3^2$$

例3 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned}f &= \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3 \\&= 2[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2] - 2(x_2 - x_3)^2 \\&\quad + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3 \\&= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3 \\&= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3[x_2^2 - 2x_2 \cdot \frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2] - 3(\frac{2}{3}x_3)^2 + 3x_3^2 \\&= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3(x_2 - \frac{2}{3}x_3)^2 + \frac{5}{3}x_3^2\end{aligned}$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = x_2 - \frac{2}{3}x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + y_3 \\ x_2 = y_2 + \frac{2}{3}y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

$$\text{则 } f = 2y_1^2 + 3y_2^2 + \frac{5}{3}y_3^2$$

例3 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned}f &= \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3 \\&= 2[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2] - 2(x_2 - x_3)^2 \\&\quad + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3 \\&= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3 \\&= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3[x_2^2 - 2x_2 \cdot \frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2] - 3(\frac{2}{3}x_3)^2 + 3x_3^2 \\&= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3(x_2 - \frac{2}{3}x_3)^2 + \frac{5}{3}x_3^2\end{aligned}$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = x_2 - \frac{2}{3}x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + \frac{1}{3}y_3 \\ x_2 = y_2 + \frac{2}{3}y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

$$\text{则 } f = 2y_1^2 + 3y_2^2 + \frac{5}{3}y_3^2$$

例3 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned}f &= \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3 \\&= 2[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2] - 2(x_2 - x_3)^2 \\&\quad + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3 \\&= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3 \\&= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3[x_2^2 - 2x_2 \cdot \frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2] - 3(\frac{2}{3}x_3)^2 + 3x_3^2 \\&= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3(x_2 - \frac{2}{3}x_3)^2 + \frac{5}{3}x_3^2\end{aligned}$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = x_2 - \frac{2}{3}x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + \frac{1}{3}y_3 \\ x_2 = y_2 + \frac{2}{3}y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C: \text{可逆}} y$$

$$\text{则 } f = 2y_1^2 + 3y_2^2 + \frac{5}{3}y_3^2$$

对 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 采取两种方法化为标准型:

对 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 采取两种方法化为标准型:

- 方法一: 求系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值 ($\lambda = 1, 1, 10$)、

特征向量

对 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 采取两种方法化为标准型:

- 方法一: 求系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值 ($\lambda = 1, 1, 10$)、

特征向量 $\xrightarrow{\text{单位正交化}}$

对 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 采取两种方法化为标准型:

- 方法一: 求系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值 ($\lambda = 1, 1, 10$)、

特征向量 $\xrightarrow{\text{单位正交化}}$ 得到正交矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & 1/3 \\ 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & 2/3 \\ 0 & \sqrt{5}/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

对 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 采取两种方法化为标准型:

- 方法一: 求系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值 ($\lambda = 1, 1, 10$)、

特征向量 $\xrightarrow{\text{单位正交化}}$ 得到正交矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & 1/3 \\ 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & 2/3 \\ 0 & \sqrt{5}/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

令 $x = Qy$, 则

对 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 采取两种方法化为标准型:

- 方法一: 求系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值 ($\lambda = 1, 1, 10$)、

特征向量 $\xrightarrow{\text{单位正交化}}$ 得到正交矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & 1/3 \\ 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & 2/3 \\ 0 & \sqrt{5}/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

令 $x = Qy$, 则

$$f = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2$$

对 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 采取两种方法化为标准型:

- 方法一: 求系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值 ($\lambda = 1, 1, 10$)、

特征向量 $\xrightarrow{\text{单位正交化}}$ 得到正交矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & 1/3 \\ 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & 2/3 \\ 0 & \sqrt{5}/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

令 $x = Qy$, 则

$$f = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2$$

- 方法二: 配方法

对 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 采取两种方法化为标准型:

- 方法一: 求系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值 ($\lambda = 1, 1, 10$)、

特征向量 $\xrightarrow{\text{单位正交化}}$ 得到正交矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & 1/3 \\ 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & 2/3 \\ 0 & \sqrt{5}/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

令 $x = Qy$, 则

$$f = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2$$

- 方法二: 配方法

$$f = 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3(x_2 - \frac{2}{3}x_3)^2 + \frac{5}{3}x_3^2$$

对 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 采取两种方法化为标准型:

- 方法一: 求系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值 ($\lambda = 1, 1, 10$)、

特征向量 $\xrightarrow{\text{单位正交化}}$ 得到正交矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & 1/3 \\ 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & 2/3 \\ 0 & \sqrt{5}/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

令 $x = Qy$, 则

$$f = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2$$

- 方法二: 配方法

$$f = 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3(x_2 - \frac{2}{3}x_3)^2 + \frac{5}{3}x_3^2 = 2y_1^2 + 3y_2^2 + \frac{5}{3}y_3^2$$

对 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 采取两种方法化为标准型:

- 方法一: 求系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值 ($\lambda = 1, 1, 10$)、

特征向量 $\xrightarrow{\text{单位正交化}}$ 得到正交矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & 1/3 \\ 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & 2/3 \\ 0 & \sqrt{5}/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

令 $x = Qy$, 则

$$f = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2$$

- 方法二: 配方法

$$f = 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3(x_2 - \frac{2}{3}x_3)^2 + \frac{5}{3}x_3^2 = 2y_1^2 + 3y_2^2 + \frac{5}{3}y_3^2$$

注 标准型不唯一

设二次型

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & + \cdots \cdots \cdots \\ & + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

的一个标准型是

$$f = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ry_r^2$$

其中 $0 \leq r \leq n$, $d_1, d_2, \dots, d_r \neq 0$ 。

设二次型

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & + \dots\dots\dots \\ & + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

的一个标准型是

$$f = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \dots + d_ry_r^2$$

其中 $0 \leq r \leq n$, $d_1, d_2, \dots, d_r \neq 0$ 。则:

定理 $r = r(A)$

设二次型

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & + \dots \dots \dots \\ & + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

的一个标准型是

$$f = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \dots + d_ry_r^2$$

其中 $0 \leq r \leq n$, $d_1, d_2, \dots, d_r \neq 0$ 。则:

定理 $r = r(A)$

证明

$$A \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & d_r & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

设二次型

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & + \dots \dots \dots \\ & + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

的一个标准型是

$$f = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \dots + d_ry_r^2$$

其中 $0 \leq r \leq n$, $d_1, d_2, \dots, d_r \neq 0$ 。则:

定理 $r = r(A)$

证明 设该非退化线性变换为 $x = Cy$, 其中 C 是可逆矩阵。

$$A \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & d_r & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

设二次型

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & + \dots \dots \dots \\ & + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

的一个标准型是

$$f = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \dots + d_ry_r^2$$

其中 $0 \leq r \leq n$, $d_1, d_2, \dots, d_r \neq 0$ 。则:

定理 $r = r(A)$

证明 设该非退化线性变换为 $x = Cy$, 其中 C 是可逆矩阵。注意到

$$C^TAC = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & d_r & \\ & & & 0 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

设二次型

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & + \dots \dots \dots \\ & + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

的一个标准型是

$$f = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \dots + d_ry_r^2$$

其中 $0 \leq r \leq n$, $d_1, d_2, \dots, d_r \neq 0$ 。则：

定理 $r = r(A)$

证明 设该非退化线性变换为 $x = Cy$ ，其中 C 是可逆矩阵。注意到

$$C^TAC = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & d_r & \\ & & & 0 \end{pmatrix} =: D$$

设二次型

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & + \dots \dots \dots \\ & + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

的一个标准型是

$$f = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \dots + d_ry_r^2$$

其中 $0 \leq r \leq n$, $d_1, d_2, \dots, d_r \neq 0$ 。则:

定理 $r = r(A)$

证明 设该非退化线性变换为 $x = Cy$, 其中 C 是可逆矩阵。注意到

$$C^TAC = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & d_r & \\ & & & 0 \end{pmatrix} =: D$$

所以 $r(A) = r(D)$

设二次型

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & + \dots \dots \dots \\ & + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

的一个标准型是

$$f = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \dots + d_ry_r^2$$

其中 $0 \leq r \leq n$, $d_1, d_2, \dots, d_r \neq 0$ 。则:

定理 $r = r(A)$

证明 设该非退化线性变换为 $x = Cy$, 其中 C 是可逆矩阵。注意到

$$C^TAC = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & d_r & \\ & & & 0 \end{pmatrix} =: D$$

所以 $r(A) = r(D) = r$

设二次型

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & + \cdots \cdots \\ & + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

的一个标准型是

$$f = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ry_r^2$$

其中 $0 \leq r \leq n$, $d_1, d_2, \dots, d_r \neq 0$ 。则：

定理 $r = r(A)$ ，并且 d_1, \dots, d_r 中正、负数的个数**唯一**。

证明 设该非退化线性变换为 $x = Cy$ ，其中 C 是可逆矩阵。注意到

$$C^TAC = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & d_r & \\ & & & 0 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} =: D$$

所以 $r(A) = r(D) = r$

设二次型

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & + \dots \dots \dots \\ & + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

的一个标准型是

$$f = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \dots + d_ry_r^2$$

其中 $0 \leq r \leq n$, $d_1, d_2, \dots, d_r \neq 0$ 。则：

定理 $r = r(A)$ ，并且 d_1, \dots, d_r 中正、负数的个数**唯一**。

证明 设该非退化线性变换为 $x = Cy$ ，其中 C 是可逆矩阵。注意到

$$C^TAC = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & d_r & \\ & & & 0 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} =: D$$

所以 $r(A) = r(D) = r$ 。（第二个结论证明略）

设二次型

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & + \dots\dots\dots \\ & + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

的一个标准型是

$$f = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \dots + d_ry_r^2$$

其中 $0 \leq r \leq n$, $d_1, d_2, \dots, d_r \neq 0$ 。则：

定理 $r = r(A)$, 并且 d_1, \dots, d_r 中正、负数的个数**唯一**。

设二次型

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & + \dots \dots \dots \\ & + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

的一个标准型是

$$f = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \dots + d_ry_r^2$$

其中 $0 \leq r \leq n$, $d_1, d_2, \dots, d_r \neq 0$ 。则：

定理 $r = r(A)$, 并且 d_1, \dots, d_r 中正、负数的个数**唯一**。

定义

1. **正惯性指标** : d_1, \dots, d_r 中正数的个数
2. **负惯性指标** : d_1, \dots, d_r 中负数的个数

例 1

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

正惯性指标 = __; 负惯性指标 = __

例 2

$$f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

正惯性指标 = __; 负惯性指标 = __

例 1

$$\begin{aligned}f &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2\end{aligned}$$

正惯性指标 = __; 负惯性指标 = __

例 2

$$f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

正惯性指标 = __; 负惯性指标 = __

例 1

$$\begin{aligned}f &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2 \\&= y_1^2 + y_2^2 - y_3^2\end{aligned}$$

正惯性指标 = __; 负惯性指标 = __

例 2

$$f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

正惯性指标 = __; 负惯性指标 = __

例 1

$$\begin{aligned}f &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2 \\&= y_1^2 + y_2^2 - y_3^2\end{aligned}$$

所以正惯性指标 = 2；负惯性指标 =

例 2

$$f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

正惯性指标 = ；负惯性指标 =

例 1

$$\begin{aligned}f &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2 \\&= y_1^2 + y_2^2 - y_3^2\end{aligned}$$

所以正惯性指标 = 2；负惯性指标 = 1

例 2

$$f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

正惯性指标 = __；负惯性指标 = __

例 1

$$\begin{aligned}f &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2 \\&= y_1^2 + y_2^2 - y_3^2\end{aligned}$$

所以正惯性指标 = 2；负惯性指标 = 1

例 2

$$\begin{aligned}f &= 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3 \\&= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2\end{aligned}$$

正惯性指标 = ；负惯性指标 =

例 1

$$\begin{aligned}f &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2 \\&= y_1^2 + y_2^2 - y_3^2\end{aligned}$$

所以正惯性指标 = 2；负惯性指标 = 1

例 2

$$\begin{aligned}f &= 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3 \\&= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2 \\&= y_1^2 - 2y_2^2\end{aligned}$$

正惯性指标 = ；负惯性指标 =

例 1

$$\begin{aligned}f &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2 \\&= y_1^2 + y_2^2 - y_3^2\end{aligned}$$

所以正惯性指标 = 2；负惯性指标 = 1

例 2

$$\begin{aligned}f &= 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3 \\&= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2 \\&= y_1^2 - 2y_2^2\end{aligned}$$

所以正惯性指标 = 1；负惯性指标 =

例 1

$$\begin{aligned}f &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2 \\&= y_1^2 + y_2^2 - y_3^2\end{aligned}$$

所以正惯性指标 = 2；负惯性指标 = 1

例 2

$$\begin{aligned}f &= 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3 \\&= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2 \\&= y_1^2 - 2y_2^2\end{aligned}$$

所以正惯性指标 = 1；负惯性指标 = 1

二次型的规范型

定理 任意二次型 $f(x_1, \dots, x_n)$ 都可以通过非退化线性变换

$$x = Cy$$

化为

$$f = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_r y_r^2$$

二次型的规范型

定理 任意二次型 $f(x_1, \dots, x_n)$ 都可以通过非退化线性变换

$$x = Cy$$

化为

$$f = y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_r^2$$

二次型的规范型

定理 任意二次型 $f(x_1, \dots, x_n)$ 都可以通过非退化线性变换

$$x = Cy$$

化为

$$f = y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_r^2$$

$$\begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$$

二次型的规范型

定理 任意二次型 $f(x_1, \dots, x_n)$ 都可以通过非退化线性变换

$$x = Cy$$

化为

$$f = y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_r^2$$

$$A \quad \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$$

二次型的规范型

定理 任意二次型 $f(x_1, \dots, x_n)$ 都可以通过非退化线性变换

$$x = Cy$$

化为

$$f = y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_r^2$$

$$C^T A C = \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$$

二次型的规范型

定理 任意二次型 $f(x_1, \dots, x_n)$ 都可以通过非退化线性变换

$$x = Cy$$

化为

$$f = y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_r^2$$

也就是, 任意对称矩阵 A , 都存在可逆矩阵 C , 使得

$$C^T A C = \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$$

二次型的规范型

定理 任意二次型 $f(x_1, \dots, x_n)$ 都可以通过非退化线性变换

$$x = Cy$$

化为

$$f = y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_r^2 \quad (\text{规范型})$$

也就是, 任意对称矩阵 A , 都存在可逆矩阵 C , 使得

$$C^T A C = \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$$

二次型的规范型

定理 任意二次型 $f(x_1, \dots, x_n)$ 都可以通过非退化线性变换

$$x = Cy$$

化为

$$f = y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_r^2 \quad (\text{规范型})$$

也就是, 任意对称矩阵 A , 都存在可逆矩阵 C , 使得

$$C^T A C = \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$$

注

- $r = r(A)$, $p =$ 正惯性指标, $r - p =$ 负惯性指标

二次型的规范型

定理 任意二次型 $f(x_1, \dots, x_n)$ 都可以通过非退化线性变换

$$x = Cy$$

化为

$$f = y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_r^2 \quad (\text{规范型})$$

也就是, 任意对称矩阵 A , 都存在可逆矩阵 C , 使得

$$C^T A C = \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$$

注

- $r = r(A)$, $p =$ 正惯性指标, $r - p =$ 负惯性指标
- p 是由 A 唯一确定的

二次型的规范型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

配方法

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

二次型的规范型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

配方法

$$\begin{aligned} &= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2 \\ &\quad (\sqrt{2}x_2)^2 \end{aligned}$$

二次型的规范型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

配方法

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - (\sqrt{2}x_2)^2$$

二次型的规范型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

配方法

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - (\sqrt{2}x_2)^2$$

$$= y_1^2 - y_2^2$$

二次型的规范型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

配方法

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - (\sqrt{2}x_2)^2$$

$$\text{变量代换 } y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

$$= y_1^2 - y_2^2$$

二次型的规范型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

配方法

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - (\sqrt{2}x_2)^2$$

$$\text{变量代换 } y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -2 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y$$

$$= y_1^2 - y_2^2$$

二次型的规范型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

配方法

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - (\sqrt{2}x_2)^2$$

$$\text{变量代换 } y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x \Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -2 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_C y$$

$$= y_1^2 - y_2^2$$

二次型的规范型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

配方法

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - (\sqrt{2}x_2)^2$$

$$\text{变量代换 } y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x \Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -2 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_C y$$

$$= y_1^2 - y_2^2$$

注

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

二次型的规范型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

配方法

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - (\sqrt{2}x_2)^2$$

$$\text{变量代换 } y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x \Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -2 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_C y$$

$$= y_1^2 - y_2^2$$

注

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}}_A$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

二次型的规范型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

配方法

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - (\sqrt{2}x_2)^2$$

$$\text{变量代换 } y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x \Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -2 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_C y$$

$$= y_1^2 - y_2^2$$

注

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C^T} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -2 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_C = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

二次型的规范型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

配方法

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - (\sqrt{2}x_2)^2$$

$$\text{变量代换 } y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x \Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -2 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_C y$$

$$= y_1^2 - y_2^2$$

注 特别地，找到了可逆阵 C ，使得

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C^T} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -2 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_C = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

二次型的规范型

$$f = x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$$

配方法

$$= \frac{3}{4}x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 + \left(-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3\right)^2$$

二次型的规范型

$$f = x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$$

配方法

$$\begin{aligned} &= \frac{3}{4}x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 + \left(-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3\right)^2 \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_1\right)^2 \end{aligned}$$

二次型的规范型

$$f = x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$$

配方法

$$= \frac{3}{4}x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 + \left(-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3\right)^2$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_1\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3\right)^2$$

二次型的规范型

$$f = x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$$

配方法

$$= \frac{3}{4}x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 + \left(-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3\right)^2$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_1\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3\right)^2 - (x_1 - x_2)^2$$

二次型的规范型

$$f = x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$$

配方法

$$\begin{aligned} &= \frac{3}{4}x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 + \left(-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3\right)^2 \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_1\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3\right)^2 - (x_1 - x_2)^2 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 \end{aligned}$$

二次型的规范型

$$f = x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$$

配方法

$$\begin{aligned} &= \frac{3}{4}x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 + \left(-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3\right)^2 \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_1\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3\right)^2 - (x_1 - x_2)^2 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 \end{aligned}$$

$$\text{变量代换 } y = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x$$

二次型的规范型

$$f = x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$$

配方法

$$\begin{aligned} &= \frac{3}{4}x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 + \left(-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3\right)^2 \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_1\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3\right)^2 - (x_1 - x_2)^2 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 \end{aligned}$$

$$\text{变量代换 } y = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 2/\sqrt{3} & 0 & -1 \\ -1/\sqrt{3} & 1 & 1 \end{pmatrix} y$$

二次型的规范型

$$f = x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$$

配方法

$$= \frac{3}{4}x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 + \left(-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3\right)^2$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_1\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3\right)^2 - (x_1 - x_2)^2 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

$$\text{变量代换 } y = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x \Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} 2/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 2/\sqrt{3} & 0 & -1 \\ -1/\sqrt{3} & 1 & 1 \end{pmatrix}}_C y$$

二次型的规范型

$$f = x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$$

配方法

$$\begin{aligned} &= \frac{3}{4}x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 + \left(-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3\right)^2 \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_1\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3\right)^2 - (x_1 - x_2)^2 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 \end{aligned}$$

$$\text{变量代换 } y = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x \Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} 2/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 2/\sqrt{3} & 0 & -1 \\ -1/\sqrt{3} & 1 & 1 \end{pmatrix}}_C y$$

注

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

二次型的规范型

$$f = x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$$

配方法

$$\begin{aligned} &= \frac{3}{4}x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 + \left(-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3\right)^2 \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_1\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3\right)^2 - (x_1 - x_2)^2 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 \end{aligned}$$

$$\text{变量代换 } y = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x \Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} 2/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 2/\sqrt{3} & 0 & -1 \\ -1/\sqrt{3} & 1 & 1 \end{pmatrix}}_C y$$

注

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}}_A$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

二次型的规范型

$$f = x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$$

配方法

$$\begin{aligned} &= \frac{3}{4}x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 + \left(-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3\right)^2 \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_1\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3\right)^2 - (x_1 - x_2)^2 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 \end{aligned}$$

$$\text{变量代换 } y = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x \Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} 2/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 2/\sqrt{3} & 0 & -1 \\ -1/\sqrt{3} & 1 & 1 \end{pmatrix}}_C y$$

注

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{3} \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{C^T} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} 2/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{3} & -1 & 1 \\ 2/\sqrt{3} & -1 & 0 \end{pmatrix}}_C = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

二次型的规范型

$$f = x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$$

配方法

$$\begin{aligned} &= \frac{3}{4}x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 + \left(-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3\right)^2 \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_1\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3\right)^2 - (x_1 - x_2)^2 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 \end{aligned}$$

$$\text{变量代换 } y = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x \Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} 2/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 2/\sqrt{3} & 0 & -1 \\ -1/\sqrt{3} & 1 & 1 \end{pmatrix}}_C y$$

注 特别地，找到了可逆阵 C ，使得

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{3} \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{C^T} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} 2/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{3} & -1 & 1 \\ 2/\sqrt{3} & -1 & 0 \end{pmatrix}}_C = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

合同，合同的等价条件

定义 设 A, B 为两个 n 阶方阵，若存在可逆 n 阶方阵 C ，使得

$$C^T A C = B$$

则称 A 合同于 B ，记为 $A \simeq B$

合同，合同的等价条件

定义 设 A, B 为两个 n 阶方阵，若存在可逆 n 阶方阵 C ，使得

$$C^T A C = B$$

则称 A 合同于 B ，记为 $A \simeq B$

定理 任意对称矩阵 A ，都成立

$$A \simeq \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$$

合同, 合同的等价条件

定义 设 A, B 为两个 n 阶方阵, 若存在可逆 n 阶方阵 C , 使得

$$C^T A C = B$$

则称 A 合同于 B , 记为 $A \simeq B$

定理 任意对称矩阵 A , 都成立

$$A \simeq \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$$

定理 设 A, B 为对称矩阵, 则 $A \simeq B$ 的充分必要条件是 A, B 具有相同的规范形 (也就是, 秩、正惯性指标都相等)

合同，合同的等价条件

定义 设 A, B 为两个 n 阶方阵，若存在可逆 n 阶方阵 C ，使得

$$C^T A C = B$$

则称 A 合同于 B ，记为 $A \simeq B$

定理 任意对称矩阵 A ，都成立

$$A \simeq \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$$

定理 设 A, B 为对称矩阵，则 $A \simeq B$ 的充分必要条件是 A, B 具有相同的规范形（也就是，秩、正惯性指标都相等）

证明 （练习）