

## 第 15 周作业解答

练习 1. 写出二次型  $f = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3$  所对应的矩阵。

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

练习 2. 用初等变换法求以下二次型的标准型, 写出所做的非退化线性变量代换  $x = Cy$  是什么, 并指出正、负惯性指标是多少。

1.  $f = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

2.  $f = x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$

3.  $f = 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 7x_2x_3$

解 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-2c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_3-c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3-\frac{1}{3}c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_3-\frac{1}{3}c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{7}{3} \\ 1 & -2 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-\frac{1}{3}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} \\ 1 & -2 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

所以作线性变换  $x = Cy$ , 其中  $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 则  $f = y_1^2 - 3y_2^2 + \frac{7}{3}y_3^2$ 。

2.

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & -3 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{c_2+c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -3 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_3-c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -4 \\ \hline 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \\ \hline 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{c_3-2c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

所以作线性变换  $x = Cy$ , 其中  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 则  $f = y_1^2 - y_2^2$ 。

3.

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -\frac{7}{2} \\ -1 & -\frac{7}{2} & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{c_1+c_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -\frac{7}{2} \\ -\frac{9}{2} & -\frac{7}{2} & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+r_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -\frac{9}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{7}{2} \\ -\frac{9}{2} & -\frac{7}{2} & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{c_2-\frac{1}{2}c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -\frac{9}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ -\frac{9}{2} & -\frac{5}{4} & 0 \\ \hline 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-\frac{1}{2}r_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -\frac{9}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{4} \\ -\frac{9}{2} & -\frac{5}{4} & 0 \\ \hline 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{c_3+\frac{9}{4}c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{4} \\ -\frac{9}{2} & -\frac{5}{4} & -\frac{81}{8} \\ \hline 1 & -\frac{1}{2} & \frac{9}{8} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{9}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+\frac{9}{4}r_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{4} \\ 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{81}{8} \\ \hline 1 & -\frac{1}{2} & \frac{9}{8} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{9}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{c_3-\frac{5}{2}c_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{5}{4} & 7 \\ \hline 1 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-\frac{5}{2}r_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 7 \\ \hline 1 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

所以作线性变换  $x = Cy$ , 其中  $C = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 则  $f = 2y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 + 7y_3^2$ 。

**练习 3.** 用正交变换法求以下二次型的标准型, 写出所做的非退化线性变量代换  $x = Cy$  是什么, 并指出正、负惯性指标是多少。

$$1. f(x_1, x_2) = x_1^2 - 7x_2^2 + 6x_1x_2$$

$$2. f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

解 (1)

1. 二次型的系数矩阵为  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$ 。特征方程:  $0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 8)(\lambda - 2)$ 。有两个互异特征值  $\lambda_1 = -8, \lambda_2 = 2$ 。

2. 关于特征值  $\lambda_1 = -8$ , 求解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$ 。得基础解系:  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ 。单位化得:  $\gamma_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} \\ -3/\sqrt{10} \end{pmatrix}$ 。

关于特征值  $\lambda_2 = 2$ , 求解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$ 。得基础解系:  $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。单位化得:  $\gamma_2 = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} \end{pmatrix}$ 。

3. 令  $Q = (\alpha_1, \alpha_2) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \\ -3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \end{pmatrix}$ , 则  $Q$  是正交矩阵, 且  $Q^T A Q = \begin{pmatrix} -8 & \\ & 2 \end{pmatrix}$ 。

4. 作线性变换  $x = Qy$  (也就是  $y = Q^{-1}x = Q^T x$ ), 则有  $f(y_1, y_2) = -8y_1^2 + 2y_2^2$ 。

(2)

1. 二次型的系数矩阵为  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 。特征方程:  $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda + 1 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1+c_3} \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda + 1 & 1 \\ \lambda - 2 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda + 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda - 1)$ 。有三个互异特征值  $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$ 。

2. 关于特征值  $\lambda_1 = -2$ , 求解  $(\lambda_1 I - A)x = 0$ 。得基础解系:  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。单位化得:  $\gamma_1 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$ 。

关于特征值  $\lambda_2 = 1$ , 求解  $(\lambda_2 I - A)x = 0$ 。得基础解系:  $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。单位化得:  $\gamma_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ 。

关于特征值  $\lambda_3 = 2$ , 求解  $(\lambda_3 I - A)x = 0$ 。得基础解系:  $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。单位化得:  $\gamma_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ 。

4. 令  $Q = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ , 则  $Q$  是正交矩阵, 且  $Q^T A Q = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$ 。

5. 做线性变换  $x = Qy$  (也就是  $y = Q^{-1}x = Q^T x$ ), 则有  $f(y_1, y_2) = -2y_1^2 + y_2^2 + 2y_3^2$ 。

练习 4.  $t$  为何值时, 二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$  是正定?

解  $f$  的系数矩阵是:

$$\begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}.$$

$f$  是正定当且仅当所有顺序主子式大于零, 所以

$$A_1 = t > 0,$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2 - 1 > 0 \Rightarrow t > 1 \quad \text{or} \quad t < -1 \xrightarrow{t > 0} t > 1,$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2+r_1 \\ r_3-t \times r_1}} \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ t+1 & t+1 & 0 \\ 1-t^2 & -1-t & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+1 & t+1 \\ 1-t^2 & -1-t \end{vmatrix} = (t+1)^2(t-2) > 0 \xrightarrow{t > 1} t > 2.$$

所以  $t > 2$ .