第 11 章 f：高斯公式、斯托克斯公式

数学系　梁卓滨

2017-2018 学年 II

Outline

1. 高斯公式

2. 斯托克斯公式

We are here now...

1. 高斯公式

2. 斯托克斯公式

向量场的散度

定义 设 $F=(P,Q,R)$ 是空间中向量场，定义

$$\mathrm{div}F := \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

称为向量场 F 的散度。

向量场的散度

定义 设 $F=(P,Q,R)$ 是空间中向量场，定义

$$\mathrm{div}F := \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

称为向量场 F 的散度。

例 1 计算向量场 $F=(x^2+yz,\, y^2+xz,\, z^2+xy)$ 的散度。

向量场的散度

定义 设 $F = (P, Q, R)$ 是空间中向量场，定义

$$\mathrm{div}F := \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

称为向量场 F 的散度。

例 1 计算向量场 $F = (x^2 + yz, y^2 + xz, z^2 + xy)$ 的散度。

解

$$\mathrm{div}F = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + yz) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2 + xz) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2 + xy)$$

向量场的散度

定义 设 $F=(P,Q,R)$ 是空间中向量场，定义

$$\mathrm{div}F := \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

称为向量场 F 的散度。

例 1 计算向量场 $F=(x^2+yz,\ y^2+xz,\ z^2+xy)$ 的散度。

解

$$\mathrm{div}F=\frac{\partial}{\partial x}(x^2+yz)+\frac{\partial}{\partial y}(y^2+xz)+\frac{\partial}{\partial z}(z^2+xy)=2x+2y+2z.$$

例 2 计算梯度场 $\nabla\frac{1}{r}$（$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$）的散度。

例 2 计算梯度场 $\nabla\frac{1}{r}$（$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$）的散度。

解

$$\nabla\frac{1}{r}$$

$$\mathrm{div}\nabla\frac{1}{r}$$

例 2 计算梯度场 $\nabla\frac{1}{r}$（$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$）的散度。

解

$$\nabla\frac{1}{r}=(\frac{\partial}{\partial x}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial y}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial z}r^{-1})$$

$$\mathrm{div}\nabla\frac{1}{r}$$

例 2 计算梯度场 $\nabla\frac{1}{r}$（$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$）的散度。

解

$$\nabla\frac{1}{r}=\left(\frac{\partial}{\partial x}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial y}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial z}r^{-1}\right)$$

$$-r^{-2}\cdot r_x$$

$$\operatorname{div}\nabla\frac{1}{r}$$

例 2 计算梯度场 $\nabla\frac{1}{r}$（$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$）的散度。

解

$$\nabla\frac{1}{r}=(\frac{\partial}{\partial x}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial y}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial z}r^{-1})$$

$$=(-r^{-2}\cdot r_x, -r^{-2}\cdot r_y, -r^{-2}\cdot r_z)$$

$$\mathrm{div}\nabla\frac{1}{r}$$

例 2 计算梯度场 $\nabla\frac{1}{r}$（$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$）的散度。

解

$$r_x=\frac{x}{r},$$

$$\nabla\frac{1}{r}=(\frac{\partial}{\partial x}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial y}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial z}r^{-1})$$

$$=(-r^{-2}\cdot r_x, -r^{-2}\cdot r_y, -r^{-2}\cdot r_z)$$

$$\mathrm{div}\nabla\frac{1}{r}$$

例 2 计算梯度场 $\nabla\frac{1}{r}$（$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$）的散度。

解

$$r_x=\frac{x}{r},\qquad r_y=\frac{y}{r},\qquad r_z=\frac{z}{r},$$

$$\nabla\frac{1}{r}=\left(\frac{\partial}{\partial x}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial y}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial z}r^{-1}\right)$$

$$=\left(-r^{-2}\cdot r_x,\ -r^{-2}\cdot r_y,\ -r^{-2}\cdot r_z\right)$$

$$\mathrm{div}\nabla\frac{1}{r}$$

例 2 计算梯度场 $\nabla\frac{1}{r}$（$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$）的散度。

解

$$r_x=\frac{x}{r},\qquad r_y=\frac{y}{r},\qquad r_z=\frac{z}{r},$$

$$\nabla\frac{1}{r}=\left(\frac{\partial}{\partial x}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial y}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial z}r^{-1}\right)$$

$$=\left(-r^{-2}\cdot r_x,\ -r^{-2}\cdot r_y,\ -r^{-2}\cdot r_z\right)=\left(-\frac{x}{r^3},\ -\frac{y}{r^3},\ -\frac{z}{r^3}\right),$$

$$\mathrm{div}\nabla\frac{1}{r}$$

例 2 计算梯度场 $\nabla\frac{1}{r}$（$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$）的散度。

解

$$r_x=\frac{x}{r},\qquad r_y=\frac{y}{r},\qquad r_z=\frac{z}{r},$$

$$\nabla\frac{1}{r}=(\frac{\partial}{\partial x}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial y}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial z}r^{-1})$$

$$=(-r^{-2}\cdot r_x,\ -r^{-2}\cdot r_y,\ -r^{-2}\cdot r_z)=(-\frac{x}{r^3},\ -\frac{y}{r^3},\ -\frac{z}{r^3}),$$

$$\mathrm{div}\nabla\frac{1}{r}=\frac{\partial}{\partial x}(-\frac{x}{r^3})+\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{y}{r^3})+\frac{\partial}{\partial z}(-\frac{z}{r^3})$$

例 2 计算梯度场 $\nabla\frac{1}{r}$（$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$）的散度。

解

$$r_x=\frac{x}{r},\qquad r_y=\frac{y}{r},\qquad r_z=\frac{z}{r},$$

$$\nabla\frac{1}{r}=(\frac{\partial}{\partial x}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial y}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial z}r^{-1})$$

$$=(-r^{-2}\cdot r_x,\ -r^{-2}\cdot r_y,\ -r^{-2}\cdot r_z)=(-\frac{x}{r^3},\ -\frac{y}{r^3},\ -\frac{z}{r^3}),$$

$$\mathrm{div}\nabla\frac{1}{r}=\frac{\partial}{\partial x}(-\frac{x}{r^3})+\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{y}{r^3})+\frac{\partial}{\partial z}(-\frac{z}{r^3})$$

$$(-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5})$$

例 2 计算梯度场 $\nabla\frac{1}{r}$（$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$）的散度。

解

$$r_x=\frac{x}{r},\qquad r_y=\frac{y}{r},\qquad r_z=\frac{z}{r},$$

$$\nabla\frac{1}{r}=(\frac{\partial}{\partial x}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial y}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial z}r^{-1})$$

$$=(-r^{-2}\cdot r_x,-r^{-2}\cdot r_y,-r^{-2}\cdot r_z)=(-\frac{x}{r^3},-\frac{y}{r^3},-\frac{z}{r^3}),$$

$$\mathrm{div}\nabla\frac{1}{r}=\frac{\partial}{\partial x}(-\frac{x}{r^3})+\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{y}{r^3})+\frac{\partial}{\partial z}(-\frac{z}{r^3})$$

$$=(-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5})+(-\frac{1}{r^3}+\frac{3y^2}{r^5})+(-\frac{1}{r^3}+\frac{3z^2}{r^5})$$

例 2 计算梯度场 $\nabla\frac{1}{r}$（$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$）的散度。

解

$$r_x=\frac{x}{r},\qquad r_y=\frac{y}{r},\qquad r_z=\frac{z}{r},$$

$$\nabla\frac{1}{r}=(\frac{\partial}{\partial x}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial y}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial z}r^{-1})$$

$$=(-r^{-2}\cdot r_x,-r^{-2}\cdot r_y,-r^{-2}\cdot r_z)=(-\frac{x}{r^3},-\frac{y}{r^3},-\frac{z}{r^3}),$$

$$\mathrm{div}\nabla\frac{1}{r}=\frac{\partial}{\partial x}(-\frac{x}{r^3})+\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{y}{r^3})+\frac{\partial}{\partial z}(-\frac{z}{r^3})$$

$$=(-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5})+(-\frac{1}{r^3}+\frac{3y^2}{r^5})+(-\frac{1}{r^3}+\frac{3z^2}{r^5})$$

$$=-\frac{3}{r^3}+\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}$$

例 2 计算梯度场 $\nabla\frac{1}{r}$（$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$）的散度。

解

$$r_x=\frac{x}{r},\qquad r_y=\frac{y}{r},\qquad r_z=\frac{z}{r},$$

$$\nabla\frac{1}{r}=\left(\frac{\partial}{\partial x}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial y}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial z}r^{-1}\right)$$

$$=(-r^{-2}\cdot r_x,\ -r^{-2}\cdot r_y,\ -r^{-2}\cdot r_z)=\left(-\frac{x}{r^3},\ -\frac{y}{r^3},\ -\frac{z}{r^3}\right),$$

$$\operatorname{div}\nabla\frac{1}{r}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{z}{r^3}\right)$$

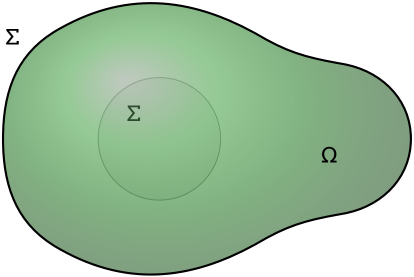
$$=\left(-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5}\right)+\left(-\frac{1}{r^3}+\frac{3y^2}{r^5}\right)+\left(-\frac{1}{r^3}+\frac{3z^2}{r^5}\right)$$

$$=-\frac{3}{r^3}+\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}=0.$$

高斯公式

定理（高斯公式） 假设

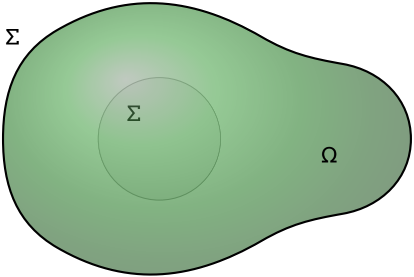
- 空间闭区域 Ω 的边界是分片光滑的闭曲面 Σ,
- $\overrightarrow{n}$ 是 Σ 的单位外法向量,



高斯公式

定理（高斯公式） 假设

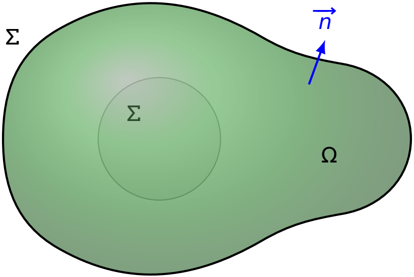
- 空间闭区域 Ω 的边界是分片光滑的闭曲面 Σ,
- $\vec{n}$ 是 Σ 的单位外法向量，（指向 Ω 外部）



高斯公式

定理（高斯公式） 假设

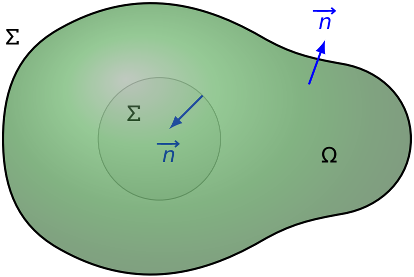
- 空间闭区域 Ω 的边界是分片光滑的闭曲面 Σ,
- $\overrightarrow{n}$ 是 Σ 的单位外法向量，（指向 Ω 外部）



高斯公式

定理（高斯公式） 假设

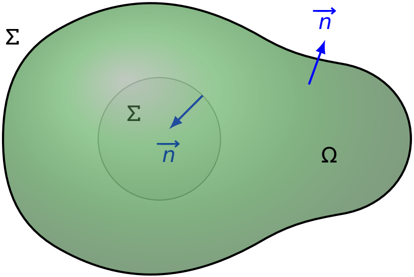
- 空间闭区域 Ω 的边界是分片光滑的闭曲面 Σ,
- $\vec{n}$ 是 Σ 的单位外法向量，（指向 Ω 外部）



高斯公式

定理（高斯公式） 假设

- 空间闭区域 Ω 的边界是分片光滑的闭曲面 Σ,
- $\overrightarrow{n}$ 是 Σ 的单位外法向量，（指向 Ω 外部）
- $F = (P, Q, R)$ 是 Ω 中向量场，且 P, Q, R 具有一阶连续的偏导数，



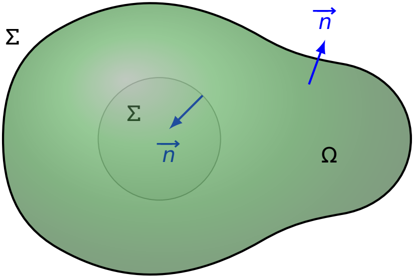
高斯公式

定理（高斯公式） 假设

- 空间闭区域 Ω 的边界是分片光滑的闭曲面 Σ，
- $\overrightarrow{n}$ 是 Σ 的单位外法向量，（指向 Ω 外部）
- $F=(P,Q,R)$ 是 Ω 中向量场，且 P,Q,R 具有一阶连续的偏导数，

则

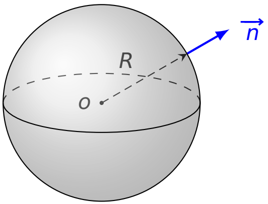
$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv = \iint_{\Sigma} F \cdot \overrightarrow{n} dS$$



例 1 计算

$$I = \iint_{\Sigma} 2x dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$$

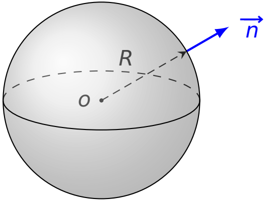
其中定向曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$，定向取外侧



例 1 计算

$$I = \iint_{\Sigma} 2xdydz + y^2dzdx + z^2dxdy$$

其中定向曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$，定向取外侧



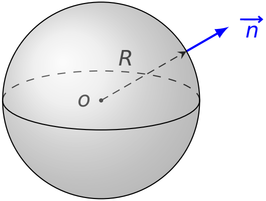
解

$$I = \!=\!=\!=\!=\!= \iint_{\Sigma} F \cdot \overrightarrow{n}\, dS$$

例 1 计算

$$I=\iint_{\Sigma} 2xdydz+y^2dzdx+z^2dxdy$$

其中定向曲面 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$，定向取外侧



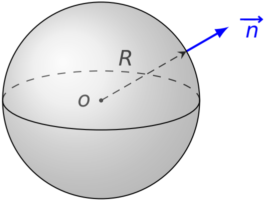
解

$$I=\!=\!=\!=\!=\!=\!= \iint_{\Sigma} F\cdot\overrightarrow{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div}F\,dv$$

例 1 计算

$$I = \iint_{\Sigma} 2x dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$$

其中定向曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$，定向取外侧



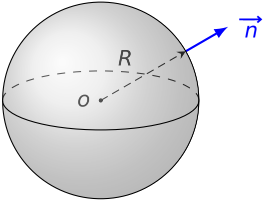
解

$$I \xlongequal{F=(2x,y^2,z^2)} \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n}\, dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div} F dv$$

例 1 计算

$$I=\iint_{\Sigma} 2xdydz+y^2dzdx+z^2dxdy$$

其中定向曲面 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$，定向取外侧



解

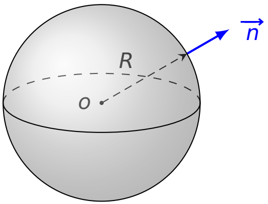
$$I \xlongequal{F=(2x,y^2,z^2)} \iint_{\Sigma} F\cdot\overrightarrow{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div}F\,dv$$

$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}(2x)+\frac{\partial}{\partial y}(y^2)+\frac{\partial}{\partial z}(z^2)\right]dv$$

例 1 计算

$$I = \iint_{\Sigma} 2x\,dydz + y^2\,dzdx + z^2\,dxdy$$

其中定向曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$，定向取外侧



解

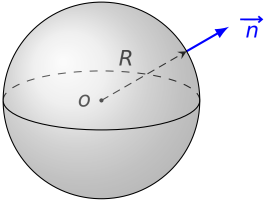
$$I \xlongequal{F=(2x,y^2,z^2)} \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div} F\,dv$$

$$= \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}(2x) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2) \right] dv = \iiint_{\Omega} (2 + 2y + 2z)\,dv$$

例 1 计算

$$I = \iint_\Sigma 2xdydz + y^2dzdx + z^2dxdy$$

其中定向曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$，定向取外侧



解

$$I \xlongequal{F=(2x,y^2,z^2)} \iint_\Sigma F \cdot \vec{n}\, dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_\Omega \mathrm{div}F dv$$

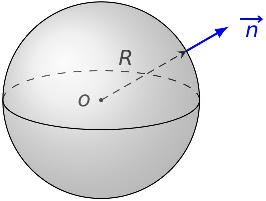
$$= \iiint_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x}(2x) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2) \right] dv = \iiint_\Omega (2 + 2y + 2z) dv$$

$$\xlongequal{\text{对称性}} \iiint_\Omega 2dv$$

例 1 计算

$$I=\iint_{\Sigma} 2x\,dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$$

其中定向曲面 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$，定向取外侧



解

$$I \xlongequal{F=(2x,y^2,z^2)} \iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div}F\,dv$$

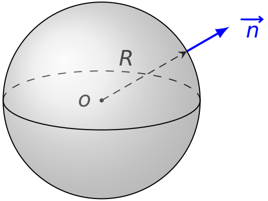
$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}(2x)+\frac{\partial}{\partial y}(y^2)+\frac{\partial}{\partial z}(z^2)\right]dv=\iiint_{\Omega}(2+2y+2z)dv$$

$$\xlongequal{\text{对称性}} \iiint_{\Omega} 2dv = 2\mathrm{Vol}(\Omega)$$

例 1 计算

$$I=\iint_{\Sigma} 2x\,dydz+y^2\,dzdx+z^2\,dxdy$$

其中定向曲面 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$，定向取外侧



解

$$I \xlongequal{F=(2x,y^2,z^2)} \iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div}F\,dv$$

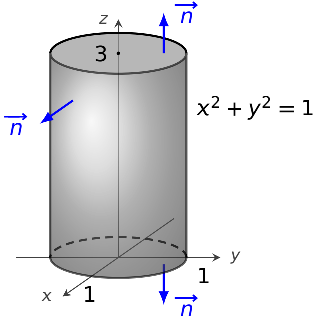
$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}(2x)+\frac{\partial}{\partial y}(y^2)+\frac{\partial}{\partial z}(z^2)\right]dv=\iiint_{\Omega}(2+2y+2z)dv$$

$$\xlongequal{\text{对称性}} \iiint_{\Omega} 2dv=2\mathrm{Vol}(\Omega)=\frac{8}{3}\pi R^3$$

例 2 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x-y)dxdy + (y-z)xdydz$$

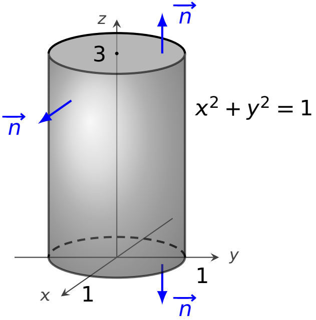
其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



例 2 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x-y)dxdy + (y-z)xdydz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



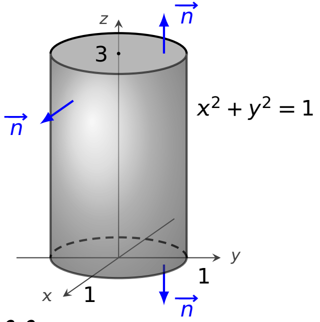
解

$$I =\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!= \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n}\, dS$$

例 2 计算

$$I=\iint_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y-z)xdydz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



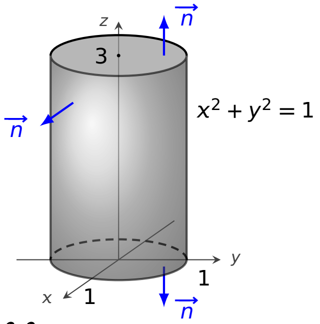
解

$$I=\!=\!=\!=\!=\iint_{\Sigma}F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega}\mathrm{div}F\,dv$$

例 2 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x-y)dxdy + (y-z)xdydz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



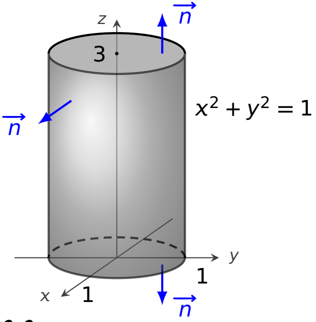
解

$$I \xlongequal{F=((y-z)x,0,x-y)} \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n}\, dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div} F dv$$

例 2 计算

$$I=\iint_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y-z)xdydz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



解

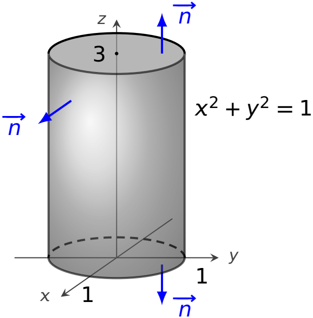
$$I \xlongequal{F=((y-z)x,0,x-y)} \iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega}\mathrm{div}F\,dv$$

$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}((y-z)x)+\frac{\partial}{\partial y}0+\frac{\partial}{\partial z}(x-y)\right]dv$$

例 2 计算

$$I=\iint_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y-z)xdydz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



解

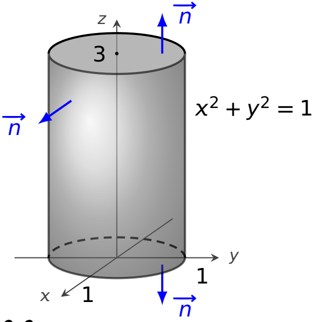
$$I \xlongequal{F=((y-z)x,0,x-y)} \iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div}F\,dv$$

$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}((y-z)x)+\frac{\partial}{\partial y}0+\frac{\partial}{\partial z}(x-y)\right]dv=\iiint_{\Omega} y-z\,dxdydz$$

例 2 计算

$$I=\iint_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y-z)xdydz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



解

$$I \xlongequal{F=((y-z)x,0,x-y)} \iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega}\mathrm{div}F\,dv$$

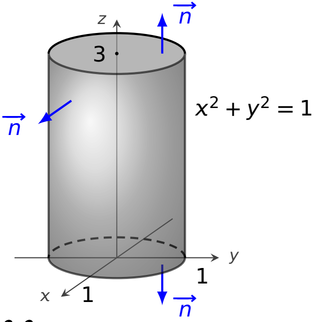
$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}((y-z)x)+\frac{\partial}{\partial y}0+\frac{\partial}{\partial z}(x-y)\right]dv=\iiint_{\Omega}y-z\,dxdydz$$

$$\xlongequal{\text{对称性}}\iiint_{\Omega}-z\,dxdydz$$

例 2 计算

$$I=\iint_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y-z)xdydz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



解

$$I \overset{F=((y-z)x,0,x-y)}{=\!=\!=\!=} \iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \overset{\text{高斯公式}}{=\!=\!=} \iiint_{\Omega} \mathrm{div}F\,dv$$

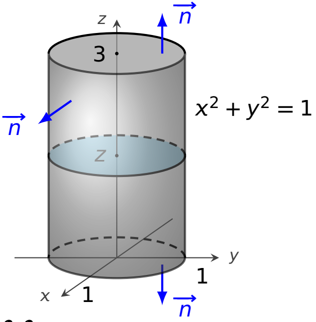
$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}((y-z)x)+\frac{\partial}{\partial y}0+\frac{\partial}{\partial z}(x-y)\right]dv=\iiint_{\Omega} y-z\,dxdydz$$

$$\overset{\text{对称性}}{=\!=\!=}\iiint_{\Omega}-z\,dxdydz=\int\left[\iint -z\,dxdy\right]dz$$

例 2 计算

$$I=\iint_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y-z)xdydz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



解

$$I \xlongequal{F=((y-z)x,0,x-y)} \iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega}\mathrm{div}F dv$$

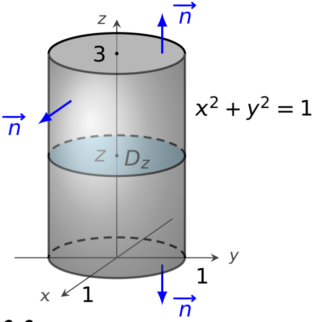
$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}((y-z)x)+\frac{\partial}{\partial y}0+\frac{\partial}{\partial z}(x-y)\right]dv=\iiint_{\Omega}y-zdxdydz$$

$$\xlongequal{\text{对称性}}\iiint_{\Omega}-zdxdydz=\int\left[\iint\quad -zdxdy\right]dz$$

例 2 计算

$$I=\iint_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y-z)xdydz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



解

$$I \xlongequal{F=((y-z)x,0,x-y)} \iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega}\mathrm{div}F\,dv$$

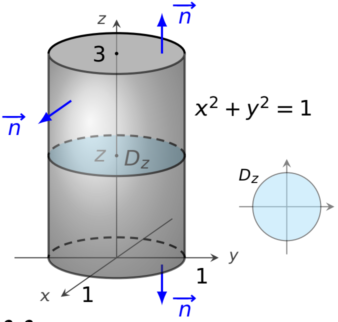
$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}((y-z)x)+\frac{\partial}{\partial y}0+\frac{\partial}{\partial z}(x-y)\right]dv=\iiint_{\Omega}y-z\,dxdydz$$

$$\xlongequal{\text{对称性}} \iiint_{\Omega}-z\,dxdydz=\int\left[\iint -z\,dxdy\right]dz$$

例 2 计算

$$I=\iint_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y-z)xdydz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



解

$$I \xlongequal{F=((y-z)x,0,x-y)} \iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega}\mathrm{div}F dv$$

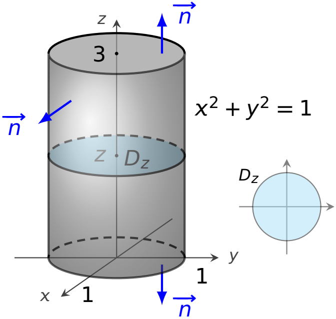
$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}((y-z)x)+\frac{\partial}{\partial y}0+\frac{\partial}{\partial z}(x-y)\right]dv=\iiint_{\Omega}y-zdxdydz$$

$$\xlongequal{\text{对称性}}\iiint_{\Omega}-zdxdydz=\int\left[\iint -zdxdy\right]dz$$

例 2 计算

$$I=\iint_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y-z)xdydz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



解

$$I \xlongequal{F=((y-z)x,0,x-y)} \iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega}\mathrm{div}F dv$$

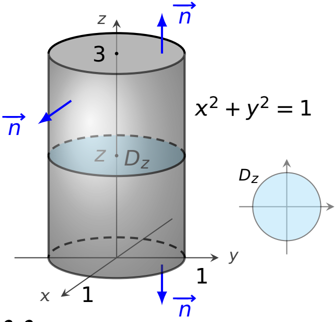
$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}((y-z)x)+\frac{\partial}{\partial y}0+\frac{\partial}{\partial z}(x-y)\right]dv=\iiint_{\Omega}y-zdxdydz$$

$$\xlongequal{\text{对称性}}\iiint_{\Omega}-zdxdydz=\int_0^3\left[\iint \quad -zdxdy\right]dz$$

例 2 计算

$$I=\iint_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y-z)xdydz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



解

$$I\xlongequal{F=((y-z)x,0,x-y)}\iint_{\Sigma}F\cdot\vec{n}\,dS\xlongequal{\text{高斯公式}}\iiint_{\Omega}\mathrm{div}F dv$$

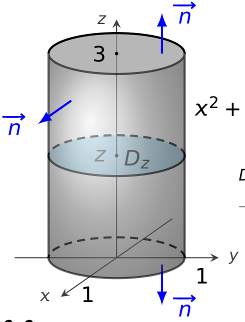
$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}((y-z)x)+\frac{\partial}{\partial y}0+\frac{\partial}{\partial z}(x-y)\right]dv=\iiint_{\Omega}y-zdxdydz$$

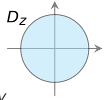
$$\xlongequal{\text{对称性}}\iiint_{\Omega}-zdxdydz=\int_0^3\left[\iint_{D_z}-zdxdy\right]dz$$

例 2 计算

$$I=\iint_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y-z)xdydz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面





解

$$I \xlongequal{F=((y-z)x,0,x-y)} \iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega}\mathrm{div}F\,dv$$

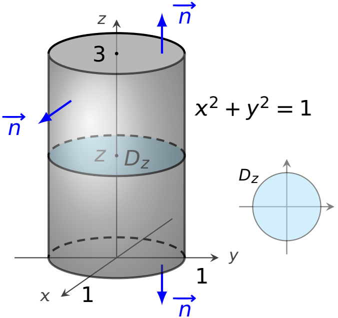
$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}((y-z)x)+\frac{\partial}{\partial y}0+\frac{\partial}{\partial z}(x-y)\right]dv=\iiint_{\Omega}y-z\,dxdydz$$

$$\xlongequal{\text{对称性}}\iiint_{\Omega}-z\,dxdydz=\int_0^3\left[\iint_{D_z}-z\,dxdy\right]dz= \qquad -z|D_z|$$

例 2 计算

$$I=\iint_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y-z)xdydz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



解

$$I\xlongequal{F=((y-z)x,0,x-y)}\iint_{\Sigma}F\cdot\vec{n}\,dS\xlongequal{\text{高斯公式}}\iiint_{\Omega}\mathrm{div}F\,dv$$

$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}((y-z)x)+\frac{\partial}{\partial y}0+\frac{\partial}{\partial z}(x-y)\right]dv=\iiint_{\Omega}y-z\,dxdydz$$

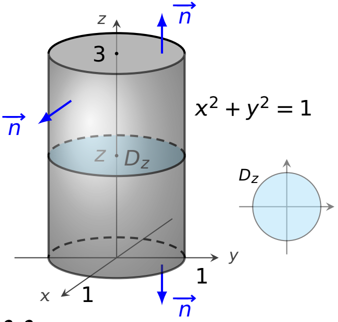
$$\xlongequal{\text{对称性}}\iiint_{\Omega}-z\,dxdydz=\int_0^3\left[\iint_{D_z}-z\,dxdy\right]dz=\qquad -z|D_z|$$

$$=\qquad -z\pi$$

例 2 计算

$$I=\iint_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y-z)xdydz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



解

$$I \xlongequal{F=((y-z)x,0,x-y)} \iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div}F dv$$

$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}((y-z)x)+\frac{\partial}{\partial y}0+\frac{\partial}{\partial z}(x-y)\right]dv=\iiint_{\Omega} y-zdxdydz$$

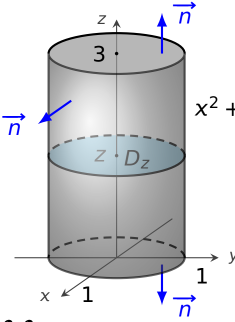
$$\xlongequal{\text{对称性}} \iiint_{\Omega}-zdxdydz=\int_0^3\left[\iint_{D_z}-zdxdy\right]dz=\int_0^3\left[-z|D_z|\right]dz$$

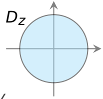
$$= \quad -z\pi$$

例 2 计算

$$I=\iint_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y-z)xdydz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面





解

$$I\xlongequal{F=((y-z)x,0,x-y)}\iint_{\Sigma}F\cdot\vec{n}\,dS\xlongequal{\text{高斯公式}}\iiint_{\Omega}\mathrm{div}F\,dv$$

$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}((y-z)x)+\frac{\partial}{\partial y}0+\frac{\partial}{\partial z}(x-y)\right]dv=\iiint_{\Omega}y-zdxdydz$$

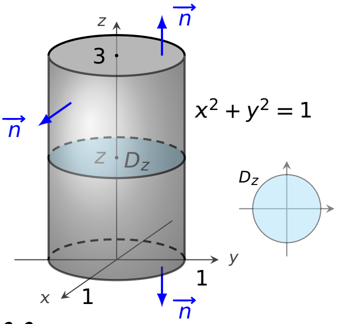
$$\xlongequal{\text{对称性}}\iiint_{\Omega}-zdxdydz=\int_0^3\left[\iint_{D_z}-zdxdy\right]dz=\int_0^3\left[-z|D_z|\right]dz$$

$$=\int_0^3\left[-z\pi\right]dz$$

例 2 计算

$$I=\iint_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y-z)xdydz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



解

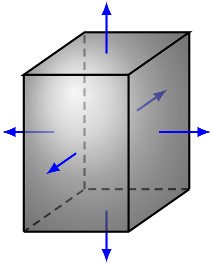
$$I \xlongequal{F=((y-z)x,0,x-y)} \iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega}\mathrm{div}F\,dv$$

$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}((y-z)x)+\frac{\partial}{\partial y}0+\frac{\partial}{\partial z}(x-y)\right]dv=\iiint_{\Omega}y-z\,dxdydz$$

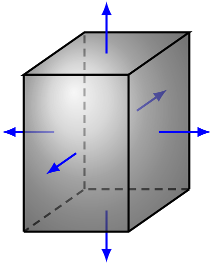
$$\xlongequal{\text{对称性}}\iiint_{\Omega}-z\,dxdydz=\int_0^3\left[\iint_{D_z}-z\,dxdy\right]dz=\int_0^3\left[-z|D_z|\right]dz$$

$$=\int_0^3\left[-z\pi\right]dz=-\frac{9}{2}\pi$$

例 3 计算流体 $F = (x - y^2, y, z^3)$ 流向长方体 $[0, 1] \times [1, 2] \times [1, 4]$ 外侧的通量。



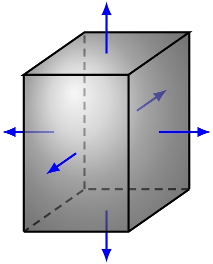
例 3 计算流体 $F = (x - y^2, y, z^3)$ 流向长方体 $[0, 1] \times [1, 2] \times [1, 4]$ 外侧的通量。



解

$$\Phi = \iint_{\Sigma} F \cdot \overrightarrow{n}\, dS$$

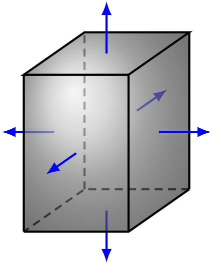
例 3 计算流体 $F = (x - y^2, y, z^3)$ 流向长方体 $[0, 1] \times [1, 2] \times [1, 4]$ 外侧的通量。



解

$$\Phi = \iint_{\Sigma} F \cdot \overrightarrow{n}\, dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div} F\, dv$$

例 3 计算流体 $F = (x - y^2, y, z^3)$ 流向长方体 $[0, 1] \times [1, 2] \times [1, 4]$ 外侧的通量。

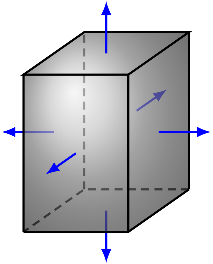


解

$$\Phi = \iint_\Sigma F \cdot \overrightarrow{n}\, dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_\Omega \mathrm{div} F dv$$

$$= \iiint_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x}(x - y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z^3) \right] dv$$

例 3 计算流体 $F=(x-y^2,\ y,\ z^3)$ 流向长方体 $[0,1]\times[1,2]\times[1,4]$ 外侧的通量。

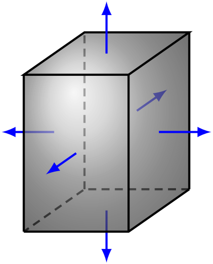


解

$$\Phi=\iint_{\Sigma}F\cdot\vec{n}\,dS \overset{\text{高斯公式}}{=\!=\!=\!=} \iiint_{\Omega}\mathrm{div}F\,dv$$

$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-y^2)+\frac{\partial}{\partial y}(y)+\frac{\partial}{\partial z}(z^3)\right]dv$$

$$=\iiint_{\Omega}(2+3z^2)\,dxdydz$$



例 3 计算流体 $F=(x-y^2,\ y,\ z^3)$ 流向长方体 $[0,1]\times[1,2]\times[1,4]$ 外侧的通量。

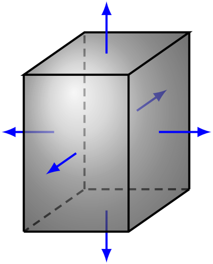
解

$$\Phi=\iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega}\mathrm{div}F\,dv$$

$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-y^2)+\frac{\partial}{\partial y}(y)+\frac{\partial}{\partial z}(z^3)\right]dv$$

$$=\iiint_{\Omega}(2+3z^2)dxdydz=\int\left[\int\left[\int(2+3z^2)dz\right]dy\right]dx$$

例 3 计算流体 $F=(x-y^2,\ y,\ z^3)$ 流向长方体 $[0,1]\times[1,2]\times[1,4]$ 外侧的通量。



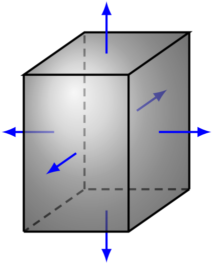
解

$$\Phi=\iint_{\Sigma}F\cdot\overrightarrow{n}\,dS \overset{\text{高斯公式}}{=\!=\!=\!=} \iiint_{\Omega}\operatorname{div}F\,dv$$

$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-y^2)+\frac{\partial}{\partial y}(y)+\frac{\partial}{\partial z}(z^3)\right]dv$$

$$=\iiint_{\Omega}(2+3z^2)dxdydz=\int_0^1\left[\int\left[\int(2+3z^2)dz\right]dy\right]dx$$

例 3 计算流体 $F = (x - y^2, y, z^3)$ 流向长方体 $[0, 1] \times [1, 2] \times [1, 4]$ 外侧的通量。

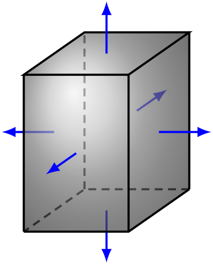


解

$$\Phi = \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n}\, dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div} F dv$$

$$= \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}(x - y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z^3) \right] dv$$

$$= \iiint_{\Omega} (2 + 3z^2) dx dy dz = \int_0^1 \left[\int_1^2 \left[\int (2 + 3z^2) dz \right] dy \right] dx$$



例 3 计算流体 $F = (x - y^2, y, z^3)$ 流向长方体 $[0, 1] \times [1, 2] \times [1, 4]$ 外侧的通量。

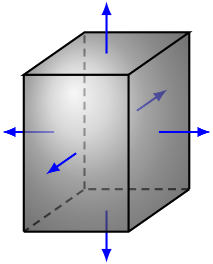
解

$$\Phi = \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n}\, dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div} F dv$$

$$= \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}(x - y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z^3) \right] dv$$

$$= \iiint_{\Omega} (2 + 3z^2) dxdydz = \int_0^1 \left[\int_1^2 \left[\int_1^4 (2 + 3z^2) dz \right] dy \right] dx$$

例 3 计算流体 $F=(x-y^2, y, z^3)$ 流向长方体 $[0,1]\times[1,2]\times[1,4]$ 外侧的通量。



解

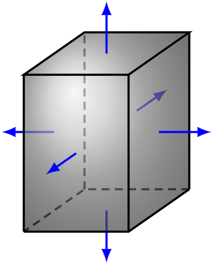
$$\Phi=\iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega}\operatorname{div}F\,dv$$

$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-y^2)+\frac{\partial}{\partial y}(y)+\frac{\partial}{\partial z}(z^3)\right]dv$$

$$=\iiint_{\Omega}(2+3z^2)\,dxdydz=\int_0^1\left[\int_1^2\left[\int_1^4(2+3z^2)dz\right]dy\right]dx$$

$$=\int_0^1 1dx\cdot\int_1^2 1dy\cdot\int_1^4(2+3z^2)dz$$

例 3 计算流体 $F=(x-y^2, y, z^3)$ 流向长方体 $[0,1]\times[1,2]\times[1,4]$ 外侧的通量。



解

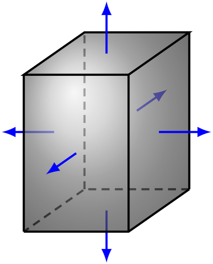
$$\Phi=\iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div}F\,dv$$

$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-y^2)+\frac{\partial}{\partial y}(y)+\frac{\partial}{\partial z}(z^3)\right]dv$$

$$=\iiint_{\Omega}(2+3z^2)dxdydz=\int_0^1\left[\int_1^2\left[\int_1^4(2+3z^2)dz\right]dy\right]dx$$

$$=\int_0^1 1dx\cdot\int_1^2 1dy\cdot\int_1^4(2+3z^2)dz=1\cdot1\cdot(2z+z^3)\Big|_1^4$$

例 3 计算流体 $F=(x-y^2,\ y,\ z^3)$ 流向长方体 $[0,1]\times[1,2]\times[1,4]$ 外侧的通量。



解

$$\Phi=\iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div}F\,dv$$

$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-y^2)+\frac{\partial}{\partial y}(y)+\frac{\partial}{\partial z}(z^3)\right]dv$$

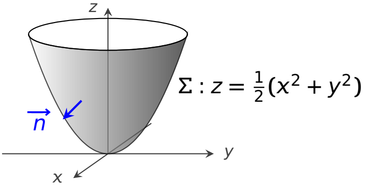
$$=\iiint_{\Omega}(2+3z^2)\,dxdydz=\int_0^1\left[\int_1^2\left[\int_1^4(2+3z^2)\,dz\right]dy\right]dx$$

$$=\int_0^1 1\,dx\cdot\int_1^2 1\,dy\cdot\int_1^4(2+3z^2)\,dz=1\cdot1\cdot(2z+z^3)\Big|_1^4=69$$

例 4 计算

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz - zdxdy$$

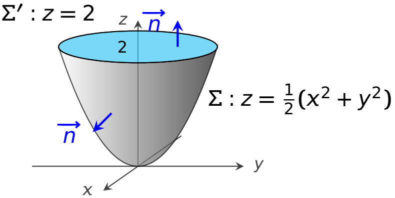
其中定向曲面 Σ 是抛物面的一部分，取单位外法向量，如图：



例 4 计算

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz-zdxdy$$

其中定向曲面 Σ 是抛物面的一部分，取单位外法向量，如图：

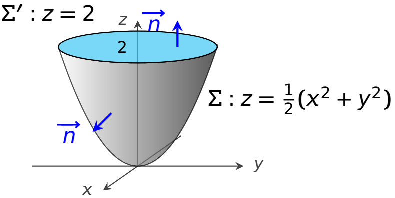


解 如图补充平面 Σ'，则 $\Sigma\cup\Sigma'$ 构成 3 维区域 Ω 边界，应用高斯公式：

例 4 计算

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz - zdxdy$$

其中定向曲面 Σ 是抛物面的一部分，取单位外法向量，如图：



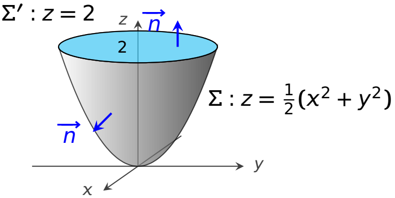
解 如图补充平面 Σ′，则 Σ ∪ Σ′ 构成 3 维区域 Ω 边界，应用高斯公式：

$$原式 = \iint_{\Sigma\cup\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS - \iint_{\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS$$

例 4 计算

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz - zdxdy$$

其中定向曲面 Σ 是抛物面的一部分，取单位外法向量，如图：



解 如图补充平面 Σ′，则 Σ ∪ Σ′ 构成 3 维区域 Ω 边界，应用高斯公式：

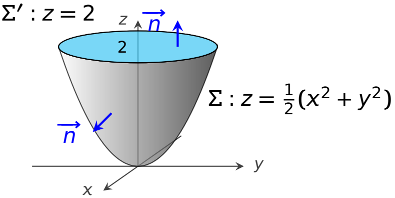
$$原式 = \iint_{\Sigma\cup\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS - \iint_{\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS$$

$$= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv$$

例 4 计算

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz-zdxdy$$

其中定向曲面 Σ 是抛物面的一部分，取单位外法向量，如图：



解 如图补充平面 Σ'，则 $\Sigma\cup\Sigma'$ 构成 3 维区域 Ω 边界，应用高斯公式：

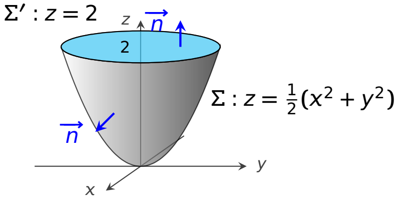
$$原式=\iint_{\Sigma\cup\Sigma'}F\cdot\vec{n}\,dS-\iint_{\Sigma'}F\cdot\vec{n}\,dS$$

$$=\iiint_{\Omega}\operatorname{div}F\,dv-\iint_{\Sigma'}F\cdot\vec{n}\,dS$$

例 4 计算

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz - zdxdy$$

其中定向曲面 Σ 是抛物面的一部分，取单位外法向量，如图：



解 如图补充平面 Σ'，则 $\Sigma\cup\Sigma'$ 构成 3 维区域 Ω 边界，应用高斯公式：

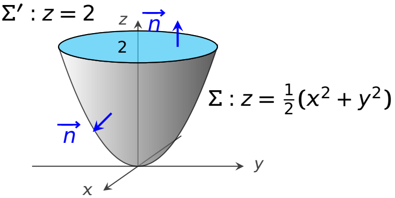
$$原式 = \iint_{\Sigma\cup\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS - \iint_{\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS$$

$$\underset{F=(z^2+x,0,-z)}{=\!=\!=\!=} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv - \iint_{\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS$$

例 4 计算

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz - zdxdy$$

其中定向曲面 Σ 是抛物面的一部分，取单位外法向量，如图：



解 如图补充平面 Σ'，则 $\Sigma\cup\Sigma'$ 构成 3 维区域 Ω 边界，应用高斯公式：

$$原式 = \iint_{\Sigma\cup\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS - \iint_{\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS$$

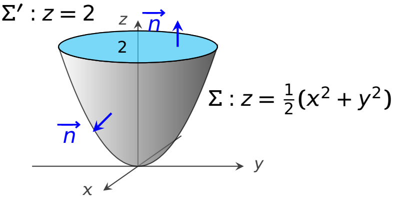
$$= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv - \iint_{\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS$$

$$\xlongequal[\operatorname{div} F=0]{F=(z^2+x,0,-z)}$$

例 4 计算

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz - zdxdy$$

其中定向曲面 Σ 是抛物面的一部分，取单位外法向量，如图：



解 如图补充平面 Σ'，则 $\Sigma\cup\Sigma'$ 构成 3 维区域 Ω 边界，应用高斯公式：

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma\cup\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS - \iint_{\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS$$

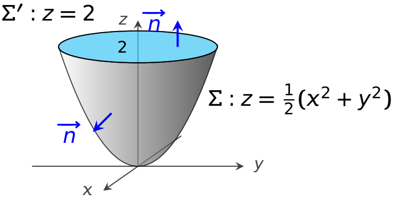
$$= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv - \iint_{\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS$$

$$\xlongequal[\operatorname{div} F=0]{F=(z^2+x,0,-z)} -\iint_{\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS$$

例 4 计算

$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x)dydz - zdxdy$$

其中定向曲面 Σ 是抛物面的一部分，取单位外法向量，如图：



解 如图补充平面 Σ′，则 Σ ∪ Σ′ 构成 3 维区域 Ω 边界，应用高斯公式：

$$原式 = \iint_{\Sigma\cup\Sigma'} F \cdot \vec{n}\, dS - \iint_{\Sigma'} F \cdot \vec{n}\, dS$$

$$= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv - \iint_{\Sigma'} F \cdot \vec{n}\, dS$$

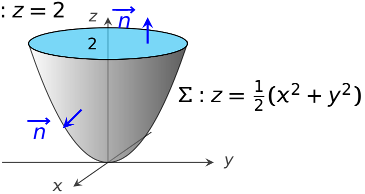
$$\xlongequal[\operatorname{div} F=0]{F=(z^2+x,0,-z)} - \iint_{\Sigma'} F \cdot \vec{n}\, dS$$

$$\xlongequal{\vec{n}=(0,0,1)}$$

例 4 计算

$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x)dydz - zdxdy$$

其中定向曲面 Σ 是抛物面的一部分，取单位外法向量，如图：



解 如图补充平面 Σ'，则 $\Sigma \cup \Sigma'$ 构成 3 维区域 Ω 边界，应用高斯公式：

$$原式 = \iint_{\Sigma\cup\Sigma'} F \cdot \vec{n}\, dS - \iint_{\Sigma'} F \cdot \vec{n}\, dS$$

$$= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv - \iint_{\Sigma'} F \cdot \vec{n}\, dS$$

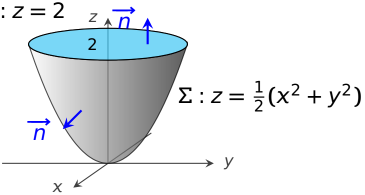
$$\xlongequal[\operatorname{div} F = 0]{F = (z^2 + x, 0, -z)} - \iint_{\Sigma'} F \cdot \vec{n}\, dS$$

$$\xlongequal[F \cdot \vec{n} = -z]{\vec{n} = (0,0,1)}$$

例 4 计算

$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x)dydz - zdxdy$$

其中定向曲面 Σ 是抛物面的一部分，取单位外法向量，如图：



解 如图补充平面 Σ′，则 Σ ∪ Σ′ 构成 3 维区域 Ω 边界，应用高斯公式：

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma\cup\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS - \iint_{\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS$$

$$= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv - \iint_{\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS$$

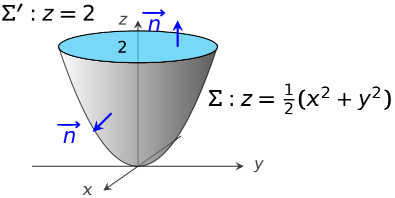
$$\xlongequal[\operatorname{div} F=0]{F=(z^2+x,0,-z)} - \iint_{\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS$$

$$\xlongequal[F\cdot\vec{n}=-z]{\vec{n}=(0,0,1)} - \iint_{\Sigma'} -2dS$$

例 4 计算

$$\iint_{\Sigma} (z^2+x)dydz - zdxdy$$

其中定向曲面 Σ 是抛物面的一部分，取单位外法向量，如图：



解 如图补充平面 Σ'，则 $\Sigma\cup\Sigma'$ 构成 3 维区域 Ω 边界，应用高斯公式：

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma\cup\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS - \iint_{\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS$$

$$= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv - \iint_{\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS$$

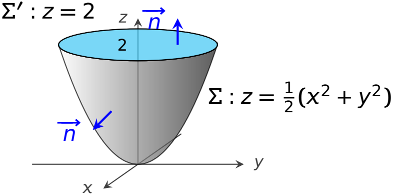
$$\xlongequal[\operatorname{div} F=0]{F=(z^2+x,0,-z)} -\iint_{\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS$$

$$\xlongequal[F\cdot\vec{n}=-z]{\vec{n}=(0,0,1)} -\iint_{\Sigma'} -2dS = 2\text{Area}(\Sigma')$$

例 4 计算

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz - zdxdy$$

其中定向曲面 Σ 是抛物面的一部分，取单位外法向量，如图：



解 如图补充平面 Σ′，则 Σ ∪ Σ′ 构成 3 维区域 Ω 边界，应用高斯公式：

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma\cup\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS - \iint_{\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS$$

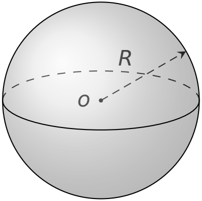
$$= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv - \iint_{\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS$$

$$\overset{F=(z^2+x,0,-z)}{\underset{\operatorname{div} F=0}{=\!=\!=\!=\!=}} - \iint_{\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS$$

$$\overset{\vec{n}=(0,0,1)}{\underset{F\cdot\vec{n}=-z}{=\!=\!=\!=}} - \iint_{\Sigma'} -2dS = 2\text{Area}(\Sigma') = 8\pi$$

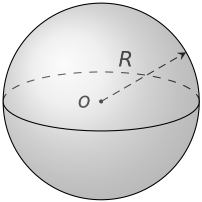
例 5 设 S, V 分别是半径为 R 的球体的表面积和体积。证明

$$V = \frac{R}{3} S.$$



例 5 设 S, V 分别是半径为 R 的球体的表面积和体积。证明

$$V = \frac{R}{3} S.$$

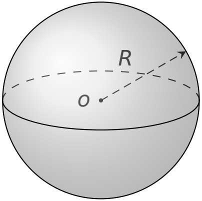


解

$$V = \iiint_{\Omega} 1 dv$$

例 5 设 S, V 分别是半径为 R 的球体的表面积和体积。证明

$$V = \frac{R}{3}S.$$

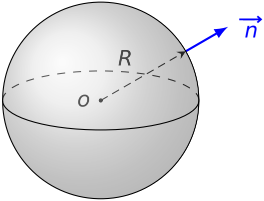


解

$$V = \iiint_{\Omega} 1 dv = \!=\!=\!=\!=\!= \iiint_{\Omega} \mathrm{div} F dv$$

例 5 设 S, V 分别是半径为 R 的球体的表面积和体积。证明

$$V = \frac{R}{3}S.$$

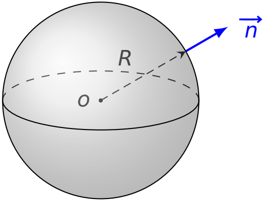


解

$$V = \iiint_{\Omega} 1 dv \xlongequal{\qquad\qquad} \iiint_{\Omega} \mathrm{div} F dv \xlongequal{\text{高斯公式}} \iint_{\Sigma} F \cdot \overrightarrow{n} dS$$

例 5 设 S, V 分别是半径为 R 的球体的表面积和体积。证明

$$V = \frac{R}{3}S.$$

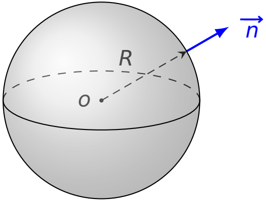


解

$$V = \iiint_{\Omega} 1 dv \xlongequal{F=(x,y,z)} \iiint_{\Omega} \mathrm{div} F dv \xlongequal{\text{高斯公式}} \iint_{\Sigma} F \cdot \overrightarrow{n} dS$$

例 5 设 S, V 分别是半径为 R 的球体的表面积和体积。证明

$$V = \frac{R}{3}S.$$

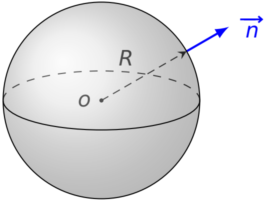


解

$$V = \iiint_{\Omega} 1 dv \xlongequal[\mathrm{div}F=3]{F=(x,y,z)} \iiint_{\Omega} \mathrm{div}F dv \xlongequal{\text{高斯公式}} \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS$$

例 5 设 S, V 分别是半径为 R 的球体的表面积和体积。证明

$$V = \frac{R}{3}S.$$

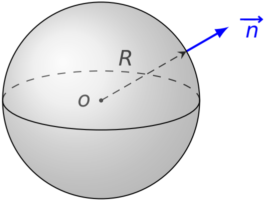


解

$$V = \iiint_{\Omega} 1 dv \xlongequal[\operatorname{div}F=3]{F=(x,y,z)} \frac{1}{3}\iiint_{\Omega} \operatorname{div}F dv \xlongequal{\text{高斯公式}} \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n}\, dS$$

例 5 设 S, V 分别是半径为 R 的球体的表面积和体积。证明

$$V = \frac{R}{3} S.$$

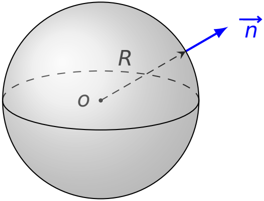


解

$$V = \iiint_{\Omega} 1 dv \xlongequal[\mathrm{div}F=3]{F=(x,y,z)} \frac{1}{3} \iiint_{\Omega} \mathrm{div} F dv \xlongequal{\text{高斯公式}} \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS$$

例 5 设 S, V 分别是半径为 R 的球体的表面积和体积。证明

$$V = \frac{R}{3} S.$$



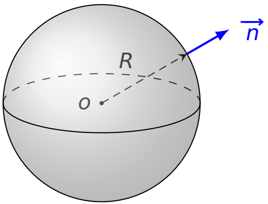
解

$$V = \iiint_{\Omega} 1 dv \xlongequal[\operatorname{div} F = 3]{F=(x,y,z)} \frac{1}{3} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv \xlongequal{\text{高斯公式}} \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n}\, dS$$

$$\xlongequal{\vec{n} = \frac{1}{R}(x,y,z)}$$

例 5 设 S, V 分别是半径为 R 的球体的表面积和体积。证明

$$V = \frac{R}{3} S.$$



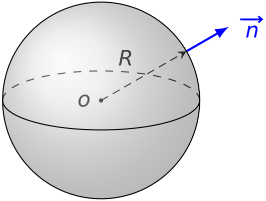
解

$$V = \iiint_{\Omega} 1 dv \xlongequal[\operatorname{div} F = 3]{F=(x,y,z)} \frac{1}{3} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv \xlongequal{\text{高斯公式}} \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS$$

$$\xlongequal[F\cdot\vec{n}=\frac{1}{R}(x^2+y^2+z^2)]{\vec{n}=\frac{1}{R}(x,y,z)}$$

例 5 设 S, V 分别是半径为 R 的球体的表面积和体积。证明

$$V = \frac{R}{3} S.$$



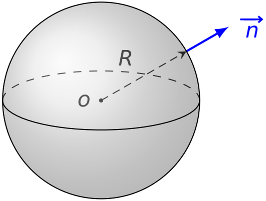
解

$$V = \iiint_{\Omega} 1 dv \xlongequal[\operatorname{div} F = 3]{F=(x,y,z)} \frac{1}{3} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv \xlongequal{\text{高斯公式}} \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS$$

$$\xlongequal[F \cdot \vec{n} = \frac{1}{R}(x^2+y^2+z^2) = R]{\vec{n} = \frac{1}{R}(x,y,z)}$$

例 5 设 S, V 分别是半径为 R 的球体的表面积和体积。证明

$$V = \frac{R}{3}S.$$



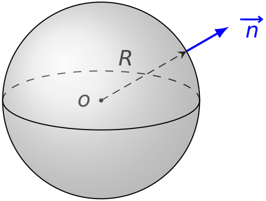
解

$$V = \iiint_\Omega 1 dv \xlongequal[\mathrm{div}F=3]{F=(x,y,z)} \frac{1}{3}\iiint_\Omega \mathrm{div}F dv \xlongequal{\text{高斯公式}} \frac{1}{3}\iint_\Sigma F\cdot\overrightarrow{n}\,dS$$

$$\xlongequal[F\cdot\overrightarrow{n}=\frac{1}{R}(x^2+y^2+z^2)=R]{\overrightarrow{n}=\frac{1}{R}(x,y,z)} \frac{1}{3}\iint_\Sigma R\,dS$$

例 5 设 S, V 分别是半径为 R 的球体的表面积和体积。证明

$$V=\frac{R}{3}S.$$



解

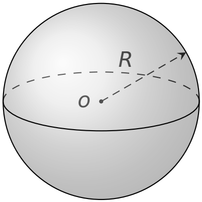
$$V=\iiint_\Omega 1dv \xlongequal[\operatorname{div}F=3]{F=(x,y,z)} \frac{1}{3}\iiint_\Omega \operatorname{div}F dv \xlongequal{\text{高斯公式}} \frac{1}{3}\iint_\Sigma F\cdot\overrightarrow{n}dS$$

$$\xlongequal[F\cdot\overrightarrow{n}=\frac{1}{R}(x^2+y^2+z^2)=R]{\overrightarrow{n}=\frac{1}{R}(x,y,z)} \frac{1}{3}\iint_\Sigma RdS=\frac{1}{3}RS$$

例 6 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS$$

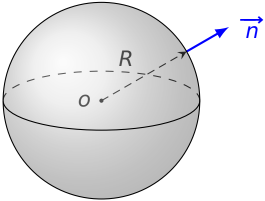
其中曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$



例 6 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS$$

其中曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$



解

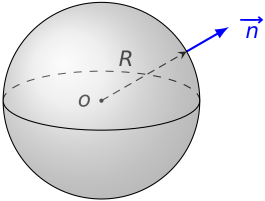
$$\iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS$$

$$= \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n}\, dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div} F dv$$

例 6 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z)dS$$

其中曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$



解 球面单位外法向量 $\overrightarrow{n} = \frac{1}{R}(x, y, z)$，所以

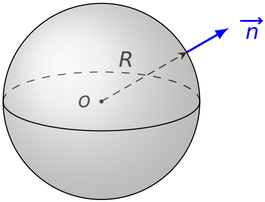
$$\iint_{\Sigma} (x^2 + y + z)dS$$

$$= \iint_{\Sigma} F \cdot \overrightarrow{n}\, dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div} F dv$$

例 6 计算

$$I=\iint_{\Sigma}(x^2+y+z)dS$$

其中曲面 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$



解 球面单位外法向量 $\vec{n}=\frac{1}{R}(x,y,z)$，所以

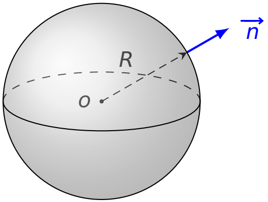
$$\iint_{\Sigma}(x^2+y+z)dS \qquad (\quad,\quad,\quad)\cdot\frac{1}{R}(x,y,z)$$

$$=\iint_{\Sigma}F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega}\mathrm{div}F\,dv$$

例 6 计算

$$I=\iint_{\Sigma}(x^2+y+z)dS$$

其中曲面 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$



解 球面单位外法向量 $\overrightarrow{n}=\frac{1}{R}(x, y, z)$，所以

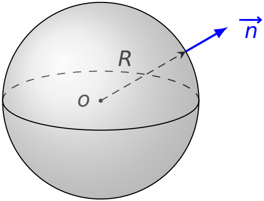
$$\iint_{\Sigma}(x^2+y+z)dS \qquad R(x, 1, 1)\cdot\frac{1}{R}(x, y, z)$$

$$=\iint_{\Sigma}F\cdot\overrightarrow{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega}\mathrm{div}F\,dv$$

例 6 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS$$

其中曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$



解 球面单位外法向量 $\vec{n} = \frac{1}{R}(x, y, z)$，所以

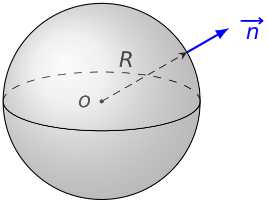
$$\iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS = \iint_{\Sigma} R(x, 1, 1) \cdot \frac{1}{R}(x, y, z) dS$$

$$= \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n}\, dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv$$

例 6 计算

$$I=\iint_{\Sigma}(x^2+y+z)dS$$

其中曲面 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$



解 球面单位外法向量 $\vec{n}=\frac{1}{R}(x,y,z)$，所以

$$\iint_{\Sigma}(x^2+y+z)dS=\iint_{\Sigma}R(x,1,1)\cdot\frac{1}{R}(x,y,z)dS$$

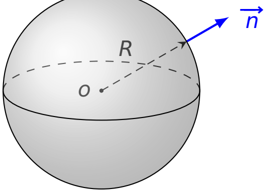
$$=\iint_{\Sigma}F\cdot\vec{n}\,dS\xlongequal{\text{高斯公式}}\iiint_{\Omega}\mathrm{div}F\,dv$$

$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}(Rx)+\frac{\partial}{\partial y}(R)+\frac{\partial}{\partial z}(R)\right]dv$$

例 6 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS$$

其中曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$



解 球面单位外法向量 $\vec{n} = \frac{1}{R}(x, y, z)$，所以

$$\iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS = \iint_{\Sigma} R(x, 1, 1) \cdot \frac{1}{R}(x, y, z) dS$$

$$= \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dv$$

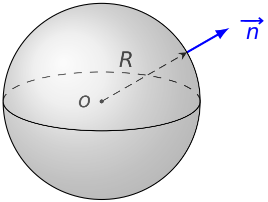
$$= \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}(Rx) + \frac{\partial}{\partial y}(R) + \frac{\partial}{\partial z}(R) \right] dv$$

$$= \iiint_{\Omega} R dx dy dz$$

例 6 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS$$

其中曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$



解 球面单位外法向量 $\vec{n} = \frac{1}{R}(x, y, z)$，所以

$$\iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS = \iint_{\Sigma} R(x, 1, 1) \cdot \frac{1}{R}(x, y, z) dS$$

$$= \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} \, dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div} F dv$$

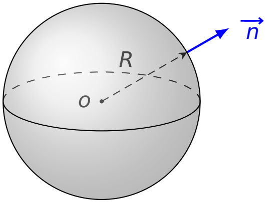
$$= \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}(Rx) + \frac{\partial}{\partial y}(R) + \frac{\partial}{\partial z}(R) \right] dv$$

$$= \iiint_{\Omega} R dxdydz = R\mathrm{Vol}(\Omega)$$

例 6 计算

$$I=\iint_{\Sigma}(x^2+y+z)dS$$

其中曲面 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$



解 球面单位外法向量 $\vec{n}=\frac{1}{R}(x,y,z)$，所以

$$\iint_{\Sigma}(x^2+y+z)dS=\iint_{\Sigma}R(x,1,1)\cdot\frac{1}{R}(x,y,z)dS$$

$$=\iint_{\Sigma}F\cdot\vec{n}\,dS\ \xlongequal{\text{高斯公式}}\ \iiint_{\Omega}\mathrm{div}F\,dv$$

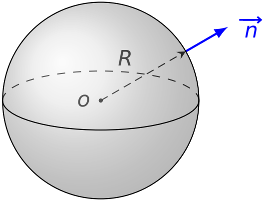
$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}(Rx)+\frac{\partial}{\partial y}(R)+\frac{\partial}{\partial z}(R)\right]dv$$

$$=\iiint_{\Omega}R\,dxdydz=R\,\mathrm{Vol}(\Omega)=\frac{4}{3}\pi R^4$$

例 6 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS$$

其中曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

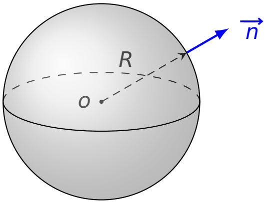


解法二 （不用高斯公式，直接计算）

例 6 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z)dS$$

其中曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$



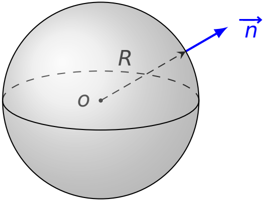
解法二 （不用高斯公式，直接计算）

$$\iint_{\Sigma} (x^2 + y + z)dS \xlongequal{\text{对称性}} \iint_{\Sigma} x^2 dS$$

例 6 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z)dS$$

其中曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$



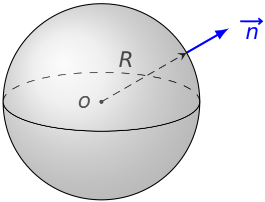
解法二 （不用高斯公式，直接计算）

$$\iint_{\Sigma} (x^2 + y + z)dS \xlongequal{\text{对称性}} \iint_{\Sigma} x^2 dS = \frac{1}{3}\iint_{\Sigma} (x^2 + x^2 + x^2)dS$$

例 6 计算

$$I=\iint_{\Sigma}(x^2+y+z)dS$$

其中曲面 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$



解法二 （不用高斯公式，直接计算）

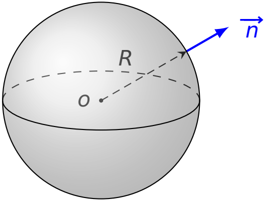
$$\iint_{\Sigma}(x^2+y+z)dS \xlongequal{\text{对称性}} \iint_{\Sigma}x^2dS=\frac{1}{3}\iint_{\Sigma}(x^2+x^2+x^2)dS$$

$$\xlongequal{\text{对称性}} \frac{1}{3}\iint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS$$

例 6 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS$$

其中曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$



解法二（不用高斯公式，直接计算）

$$\iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS \xlongequal{\text{对称性}} \iint_{\Sigma} x^2 dS = \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} (x^2 + x^2 + x^2) dS$$

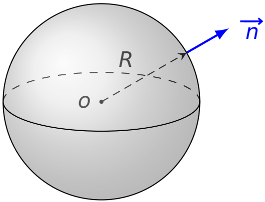
$$\xlongequal{\text{对称性}} \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS$$

$$= \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} R^2 dS$$

例 6 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS$$

其中曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$



解法二 （不用高斯公式，直接计算）

$$\iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS \xlongequal{\text{对称性}} \iint_{\Sigma} x^2 dS = \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} (x^2 + x^2 + x^2) dS$$

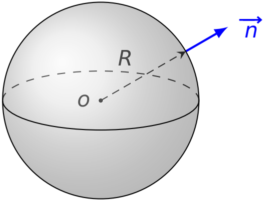
$$\xlongequal{\text{对称性}} \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS$$

$$= \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} R^2 dS = \frac{1}{3} R^2 \text{Area}(\Sigma)$$

例 6 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS$$

其中曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$



解法二 （不用高斯公式，直接计算）

$$\iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS \xlongequal{\text{对称性}} \iint_{\Sigma} x^2 dS = \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} (x^2 + x^2 + x^2) dS$$

$$\xlongequal{\text{对称性}} \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS$$

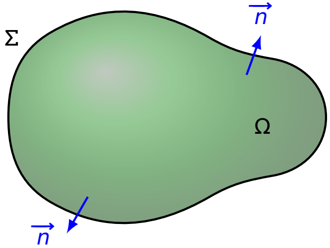
$$= \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} R^2 dS = \frac{1}{3} R^2 \text{Area}(\Sigma) = \frac{4}{3} \pi R^4$$

散度 div$F$ 的物理解释

高斯公式 $\iiint_\Omega \mathrm{div}F dv = \iint_\Sigma F \cdot \overrightarrow{n} dS$

散度 div$F$ 的物理解释

- 假设 $F = (P, Q, R)$ 是流体的速度向量场，



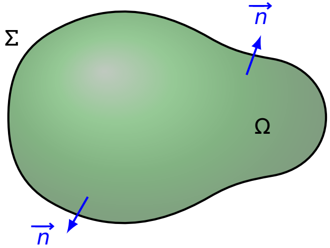
高斯公式 $\iiint_\Omega \mathrm{div} F dv = \iint_\Sigma F \cdot \overrightarrow{n} dS$

散度 div$F$ 的物理解释

- 假设 $F = (P, Q, R)$ 是流体的速度向量场，则

$$\iint_{\Sigma} F \cdot \overrightarrow{n}\, dS$$

表示单位时间流向 Σ 外侧的通量。



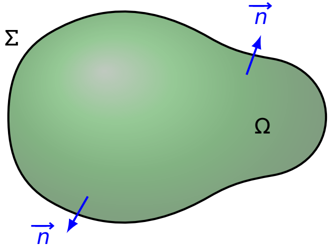
高斯公式 $\iiint_{\Omega} \mathrm{div} F dv = \iint_{\Sigma} F \cdot \overrightarrow{n}\, dS$

散度 div$F$ 的物理解释

- 假设 $F = (P, Q, R)$ 是流体的速度向量场，则

$$\iint_\Sigma F \cdot \vec{n}\, dS$$

表示单位时间流向 Σ 外侧的通量。



$$\iint_\Sigma F \cdot \vec{n}\, dS > 0$$

$$\iint_\Sigma F \cdot \vec{n}\, dS < 0$$

高斯公式 $\iiint_\Omega \mathrm{div} F dv = \iint_\Sigma F \cdot \vec{n}\, dS$

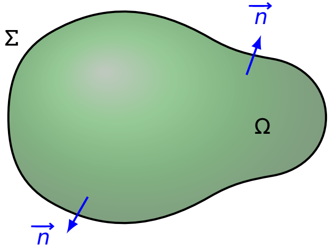
散度 div$F$ 的物理解释

- 假设 $F=(P, Q, R)$ 是流体的速度向量场，则
$$\iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS$$
表示单位时间流向 Σ 外侧的通量。

- 进一步假设流体是不可压，则

$$\iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS>0$$
$$\iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS<0$$

高斯公式 $\iiint_{\Omega}\mathrm{div}F\,dv=\iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS$



散度 div$F$ 的物理解释

- 假设 $F=(P,Q,R)$ 是流体的速度向量场，则

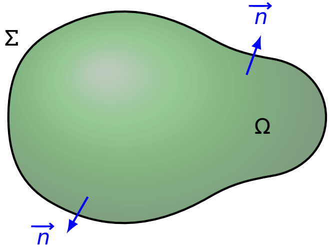
$$\iint_{\Sigma} F\cdot\overrightarrow{n}\,dS$$

表示单位时间流向 Σ 外侧的通量。

- 进一步假设流体是不可压，则

$$\iint_{\Sigma} F\cdot\overrightarrow{n}\,dS>0 \;\Rightarrow\; \Omega \text{ 内有 “source”}$$

$$\iint_{\Sigma} F\cdot\overrightarrow{n}\,dS<0$$



高斯公式 $\iiint_{\Omega}\mathrm{div}F\,dv=\iint_{\Sigma}F\cdot\overrightarrow{n}\,dS$

散度 div$F$ 的物理解释

- 假设 $F = (P, Q, R)$ 是流体的速度向量场，则

$$\iint_\Sigma F \cdot \vec{n}\, dS$$

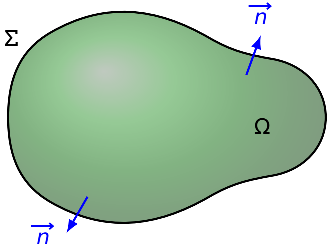
表示单位时间流向 Σ 外侧的通量。

- 进一步假设流体是不可压，则

$$\iint_\Sigma F \cdot \vec{n}\, dS > 0 \;\Rightarrow\; \Omega \text{ 内有 “source”}$$

$$\iint_\Sigma F \cdot \vec{n}\, dS < 0 \;\Rightarrow\; \Omega \text{ 内有 “sink”}$$

高斯公式 $\iiint_\Omega \mathrm{div} F dv = \iint_\Sigma F \cdot \vec{n}\, dS$

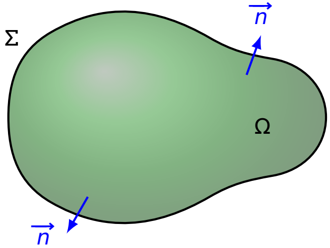


散度 div$F$ 的物理解释

- 假设 $F = (P, Q, R)$ 是流体的速度向量场，则

$$\iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n}\, dS$$

表示单位时间流向 Σ 外侧的通量。



- 进一步假设流体是不可压，则

$$\iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n}\, dS > 0 \;\Rightarrow\; \Omega \text{ 内有 “source”}$$

$$\iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n}\, dS < 0 \;\Rightarrow\; \Omega \text{ 内有 “sink”}$$

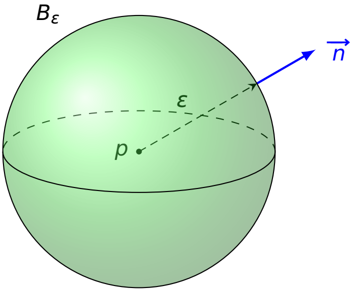
注 高斯公式 $\iiint_{\Omega} \mathrm{div} F dv = \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n}\, dS$ 表明：div$F$ 反映这种 “source” 和 “sink” 的强度。

散度 div$F$ 的物理解释 (2)

p •

div$F(p)$

散度 div$F$ 的物理解释 (2)

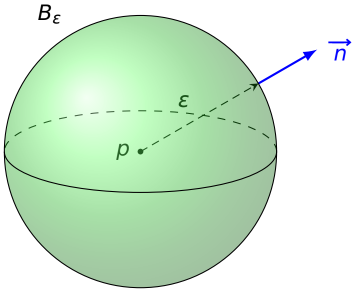


$$\mathrm{div}F(p)$$

散度 div$F$ 的物理解释 (2)

$$\iint_{\partial B_\varepsilon} F\cdot\overrightarrow{n}\,dS$$

$$= \iiint_{B_\varepsilon} \mathrm{div}F\,dv$$



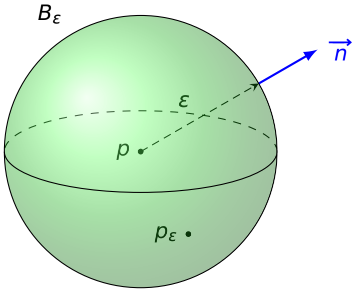
$\mathrm{div}F(p)$

散度 div$F$ 的物理解释 (2)

$$\iint_{\partial B_\varepsilon} F \cdot \overrightarrow{n}\, dS$$

$$= \iiint_{B_\varepsilon} \mathrm{div} F dv$$

$$= \mathrm{Vol}(B_\varepsilon) \mathrm{div} F(p_\varepsilon)$$



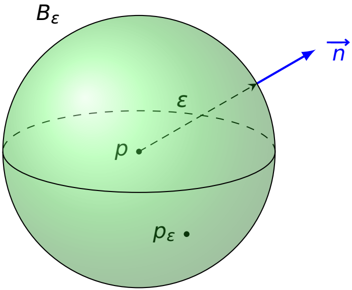
$\mathrm{div} F(p)$

散度 div$F$ 的物理解释 (2)

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \iint_{\partial B_\varepsilon} F \cdot \overrightarrow{n}\, dS$$

$$= \frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \iiint_{B_\varepsilon} \mathrm{div} F dv$$

$$= \frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \mathrm{Vol}(B_\varepsilon) \mathrm{div} F(p_\varepsilon)$$

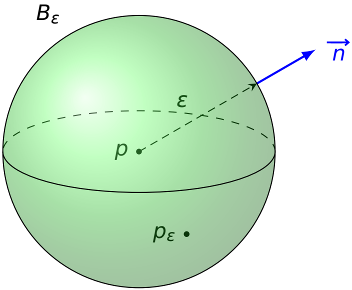


$\mathrm{div} F(p)$

散度 div$F$ 的物理解释 (2)

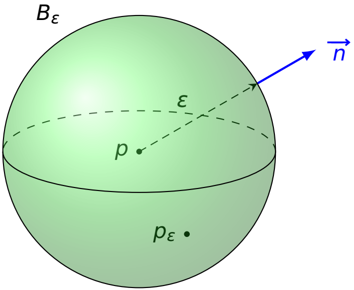
$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \iint_{\partial B_\varepsilon} F \cdot \vec{n}\, dS \\
= \; & \frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \iiint_{B_\varepsilon} \mathrm{div} F dv \\
= \; & \frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \mathrm{Vol}(B_\varepsilon) \mathrm{div} F(p_\varepsilon) \\
= \; & \mathrm{div} F(p_\varepsilon)
\end{aligned}
$$

$$\mathrm{div} F(p)$$



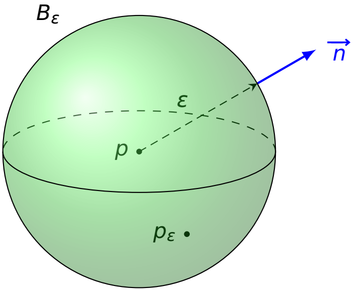
散度 div$F$ 的物理解释 (2)

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \iint_{\partial B_\varepsilon} F\cdot \overrightarrow{n}\, dS$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \iiint_{B_\varepsilon} \mathrm{div}F dv$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \mathrm{Vol}(B_\varepsilon)\mathrm{div}F(p_\varepsilon)$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathrm{div}F(p_\varepsilon)$$
$$\mathrm{div}F(p)$$



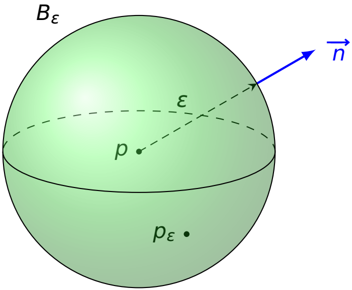
散度 div$F$ 的物理解释 (2)

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \iint_{\partial B_\varepsilon} F \cdot \overrightarrow{n}\, dS \\
= &\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \iiint_{B_\varepsilon} \mathrm{div} F dv \\
= &\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \mathrm{Vol}(B_\varepsilon)\mathrm{div} F(p_\varepsilon) \\
= &\lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathrm{div} F(p_\varepsilon) \\
= &\, \mathrm{div} F(p)
\end{aligned}
$$



散度 div$F$ 的物理解释 (2)

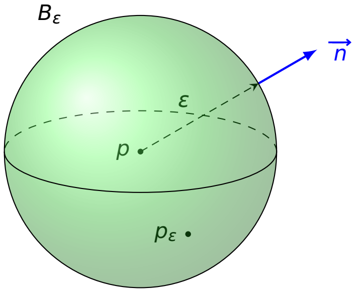
$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)}\cdot\iint_{\partial B_\varepsilon} F\cdot\overrightarrow{n}\,dS$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)}\cdot\iiint_{B_\varepsilon}\mathrm{div}F\,dv$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)}\cdot\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)\mathrm{div}F(p_\varepsilon)$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\mathrm{div}F(p_\varepsilon)$$
$$=\mathrm{div}F(p)$$



- div$F(p)>0$ 时，
- div$F(p)<0$ 时，

散度 div$F$ 的物理解释 (2)

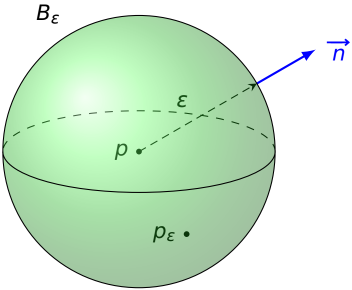
$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \iint_{\partial B_\varepsilon} F\cdot \overrightarrow{n}\, dS$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \iiint_{B_\varepsilon} \mathrm{div} F dv$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \mathrm{Vol}(B_\varepsilon)\mathrm{div}F(p_\varepsilon)$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathrm{div}F(p_\varepsilon)$$
$$= \mathrm{div}F(p)$$



- div$F(p)>0$ 时，$\iint_{\partial B_\varepsilon} F\cdot\overrightarrow{n}\, dS>0$（$\varepsilon$ 充分小），
- div$F(p)<0$ 时，

散度 div$F$ 的物理解释 (2)

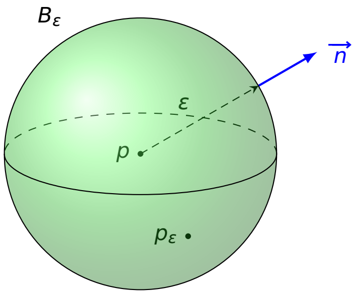
$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)}\cdot\iint_{\partial B_\varepsilon} F\cdot\overrightarrow{n}\,dS \\
=&\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)}\cdot\iiint_{B_\varepsilon}\mathrm{div}F\,dv \\
=&\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)}\cdot\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)\mathrm{div}F(p_\varepsilon) \\
=&\lim_{\varepsilon\to 0^+}\mathrm{div}F(p_\varepsilon) \\
=&\,\mathrm{div}F(p)
\end{aligned}$$



- div$F(p)>0$ 时，$\iint_{\partial B_\varepsilon} F\cdot\overrightarrow{n}\,dS>0$（$\varepsilon$ 充分小），说明 p 点是 source
- div$F(p)<0$ 时，

散度 div$F$ 的物理解释 (2)

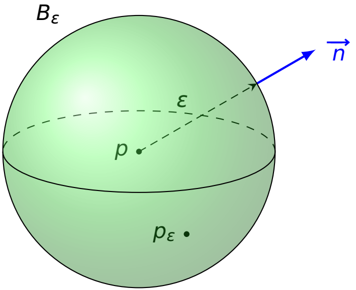
$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)}\cdot\iint_{\partial B_\varepsilon} F\cdot\overrightarrow{n}\,dS$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)}\cdot\iiint_{B_\varepsilon}\mathrm{div}F\,dv$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)}\cdot\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)\mathrm{div}F(p_\varepsilon)$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\mathrm{div}F(p_\varepsilon)$$
$$=\mathrm{div}F(p)$$



- div$F(p)>0$ 时，$\iint_{\partial B_\varepsilon} F\cdot\overrightarrow{n}\,dS>0$（$\varepsilon$ 充分小），说明 p 点是 source
- div$F(p)<0$ 时，$\iint_{\partial B_\varepsilon} F\cdot\overrightarrow{n}\,dS<0$（$\varepsilon$ 充分小），

散度 div$F$ 的物理解释 (2)

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)}\cdot\iint_{\partial B_\varepsilon} F\cdot\vec{n}\,dS$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)}\cdot\iiint_{B_\varepsilon}\mathrm{div}F\,dv$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)}\cdot\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)\mathrm{div}F(p_\varepsilon)$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\mathrm{div}F(p_\varepsilon)$$
$$=\mathrm{div}F(p)$$



- div$F(p)>0$ 时，$\iint_{\partial B_\varepsilon} F\cdot\vec{n}\,dS>0$（$\varepsilon$ 充分小），说明 p 点是 source
- div$F(p)<0$ 时，$\iint_{\partial B_\varepsilon} F\cdot\vec{n}\,dS<0$（$\varepsilon$ 充分小），说明 p 点是 sink

We are here now...

1. 高斯公式

2. 斯托克斯公式

向量场的旋度

定义 设 $F=(P,Q,R)$ 是空间中向量场，定义

$$\operatorname{rot} F := \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

称为向量场 F 的旋度。

向量场的旋度

定义 设 $F=(P,Q,R)$ 是空间中向量场，定义

$$\operatorname{rot} F := \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix}, \qquad\qquad , \qquad\qquad \right)$$

称为向量场 F 的旋度。

向量场的旋度

定义 设 $F=(P,Q,R)$ 是空间中向量场，定义

$$\operatorname{rot} F := \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & R \end{vmatrix}, \qquad \right)$$

称为向量场 F 的旋度。

向量场的旋度

定义 设 $F=(P,Q,R)$ 是空间中向量场，定义

$$\operatorname{rot} F := \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & R \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \right)$$

称为向量场 F 的旋度。

向量场的旋度

定义 设 $F=(P,Q,R)$ 是空间中向量场，定义

$$\operatorname{rot} F := \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & R \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \right)$$

$$= (R_y - Q_z, \qquad , \qquad)$$

称为向量场 F 的旋度。

向量场的旋度

定义 设 $F = (P, Q, R)$ 是空间中向量场，定义

$$\operatorname{rot} F := \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & R \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \right)$$

$$= (R_y - Q_z, P_z - R_x, \qquad\qquad)$$

称为向量场 F 的旋度。

向量场的旋度

定义 设 $F=(P,Q,R)$ 是空间中向量场，定义

$$\operatorname{rot} F := \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & R \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \right)$$

$$= (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)$$

称为向量场 F 的旋度。

向量场的旋度

定义 设 $F=(P,Q,R)$ 是空间中向量场，定义

$$\operatorname{rot} F := \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & R \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \right)$$

$$= (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)$$

称为向量场 F 的旋度。

例 计算向量场 $F=(y,-x,e^{xz})$ 的旋度。

向量场的旋度

定义 设 $F=(P,Q,R)$ 是空间中向量场，定义

$$\operatorname{rot} F := \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & R \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \right)$$

$$= (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)$$

称为向量场 F 的旋度。

例 计算向量场 $F=(y,-x,e^{xz})$ 的旋度。

解

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & e^{xz} \end{vmatrix}$$

向量场的旋度

定义 设 $F=(P,Q,R)$ 是空间中向量场，定义

$$\operatorname{rot} F := \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & R \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \right)$$

$$= (R_y - Q_z,\ P_z - R_x,\ Q_x - P_y)$$

称为向量场 F 的旋度。

例 计算向量场 $F=(y,-x,e^{xz})$ 的旋度。

解

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & e^{xz} \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -x & e^{xz} \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & e^{xz} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y & -x \end{vmatrix} \right)$$

向量场的旋度

定义 设 $F=(P,Q,R)$ 是空间中向量场，定义

$$\operatorname{rot} F := \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & R \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \right)$$

$$= (R_y - Q_z,\ P_z - R_x,\ Q_x - P_y)$$

称为向量场 F 的旋度。

例 计算向量场 $F=(y,-x,e^{xz})$ 的旋度。

解

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & e^{xz} \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -x & e^{xz} \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & e^{xz} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y & -x \end{vmatrix} \right)$$

$$= (0, \qquad , \qquad)$$

向量场的旋度

定义 设 $F=(P,Q,R)$ 是空间中向量场，定义

$$\operatorname{rot} F := \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & R \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \right)$$

$$= (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)$$

称为向量场 F 的旋度。

例 计算向量场 $F=(y,-x,e^{xz})$ 的旋度。

解

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & e^{xz} \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -x & e^{xz} \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & e^{xz} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y & -x \end{vmatrix} \right)$$

$$= (0, \; -ze^{xz}, \qquad)$$

向量场的旋度

定义 设 $F=(P,Q,R)$ 是空间中向量场，定义

$$\operatorname{rot} F := \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & R \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \right)$$

$$= (R_y - Q_z,\ P_z - R_x,\ Q_x - P_y)$$

称为向量场 F 的旋度。

例 计算向量场 $F=(y,-x,e^{xz})$ 的旋度。

解

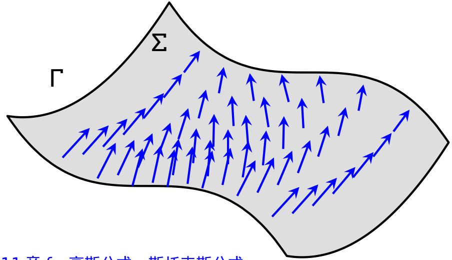
$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & e^{xz} \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -x & e^{xz} \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & e^{xz} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y & -x \end{vmatrix} \right)$$

$$= (0,\ -ze^{xz},\ -2)$$

斯托克斯公式

定理（斯托克斯公式） 假设

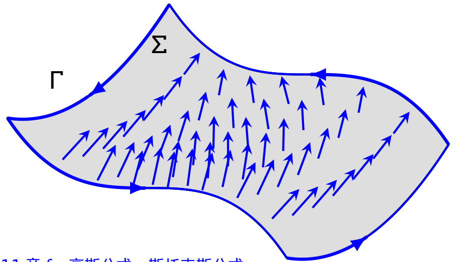
- Σ 是空间中分片光滑的定向曲面，选定单位法向量场 $\vec{n}$，
- Γ 是 Σ 的边界，且赋予“边界定向”，



斯托克斯公式

定理（斯托克斯公式） 假设

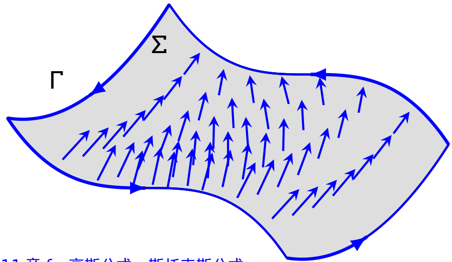
- Σ 是空间中分片光滑的定向曲面，选定单位法向量场 $\vec{n}$，
- Γ 是 Σ 的边界，且赋予“边界定向”，

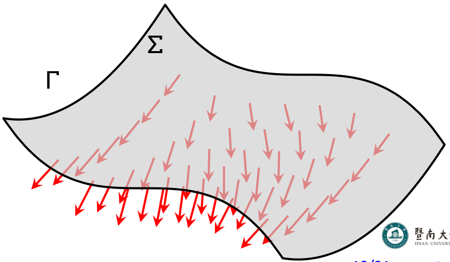


斯托克斯公式

定理（斯托克斯公式） 假设

- Σ 是空间中分片光滑的定向曲面，选定单位法向量场 $\vec{n}$，
- Γ 是 Σ 的边界，且赋予“边界定向”，

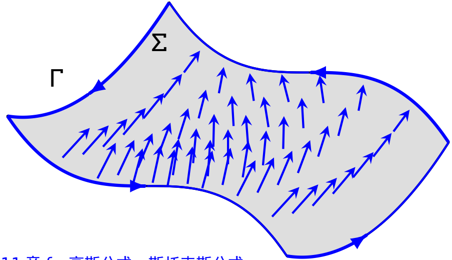


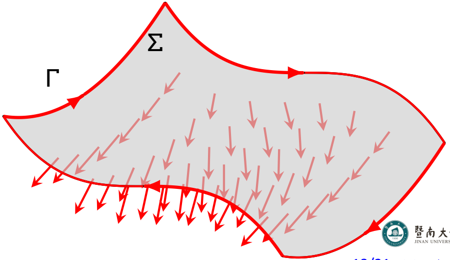


斯托克斯公式

定理（斯托克斯公式） 假设

- Σ 是空间中分片光滑的定向曲面，选定单位法向量场 $\vec{n}$，
- Γ 是 Σ 的边界，且赋予“边界定向”，

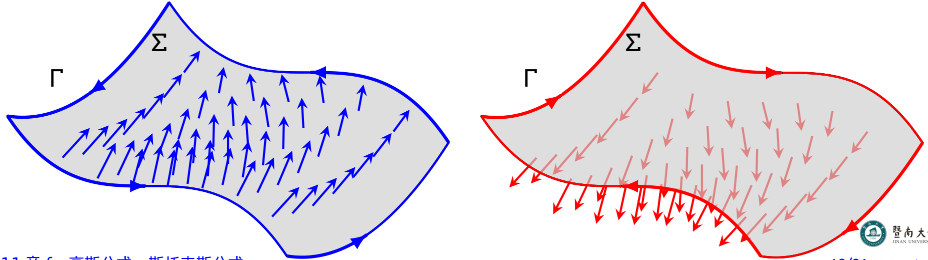




斯托克斯公式

定理（斯托克斯公式） 假设

- Σ 是空间中分片光滑的定向曲面，选定单位法向量场 $\vec{n}$，
- Γ 是 Σ 的边界，且赋予“边界定向”，
- $F = (P, Q, R)$ 是空间向量场，且 P, Q, R 具有一阶连续偏导数，

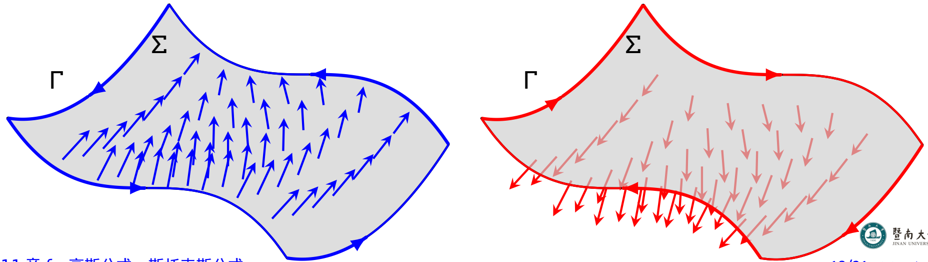


斯托克斯公式

定理（斯托克斯公式） 假设

- Σ 是空间中分片光滑的定向曲面，选定单位法向量场 $\overrightarrow{n}$，
- Γ 是 Σ 的边界，且赋予“边界定向”，
- $F=(P,Q,R)$ 是空间向量场，且 P,Q,R 具有一阶连续偏导数，

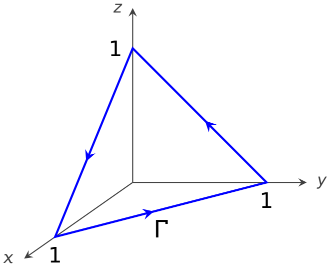
则成立：
$$\iint_\Sigma \operatorname{rot} F\cdot\overrightarrow{n}\,dS=\int_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz.$$



例 1 试利用斯托克斯公式计算

$$I=\int_{\Gamma} z\,dx+x\,dy+y\,dz$$

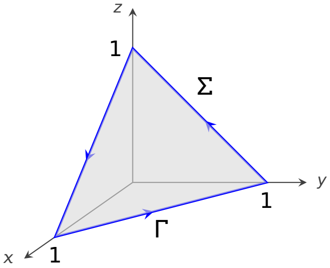
其中有向曲线 Γ 如图：



例 1 试利用斯托克斯公式计算

$$I = \int_{\Gamma} z dx + x dy + y dz$$

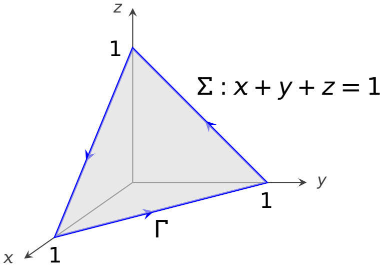
其中有向曲线 Γ 如图：



例 1 试利用斯托克斯公式计算

$$I=\int_{\Gamma} zdx+xdy+ydz$$

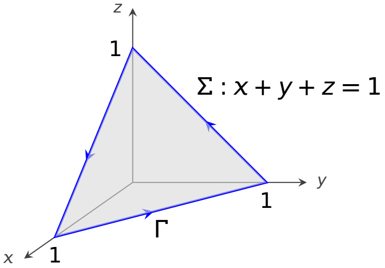
其中有向曲线 Γ 如图:



例 1 试利用斯托克斯公式计算

$$I=\int_{\Gamma} zdx+xdy+ydz$$

其中有向曲线 Γ 如图：



解 设 $F=(z,x,y)$，则

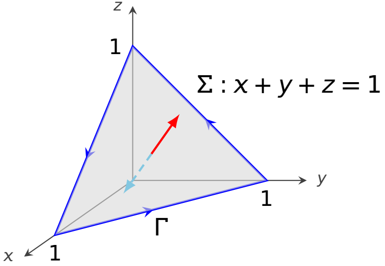
所以

$$\int_{\Gamma} zdx+xdy+ydz=\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} F\cdot\overrightarrow{n}\,dS$$

例 1 试利用斯托克斯公式计算

$$I=\int_{\Gamma} zdx+xdy+ydz$$

其中有向曲线 Γ 如图：



解 设 $F=(z,\ x,\ y)$，则

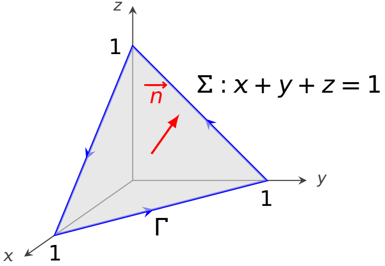
所以

$$\int_{\Gamma} zdx+xdy+ydz=\iint_{\Sigma} \text{rot}\, F\cdot\overrightarrow{n}\, dS$$

例 1 试利用斯托克斯公式计算

$$I = \int_{\Gamma} z dx + x dy + y dz$$

其中有向曲线 Γ 如图：



解 设 $F = (z, x, y)$，则

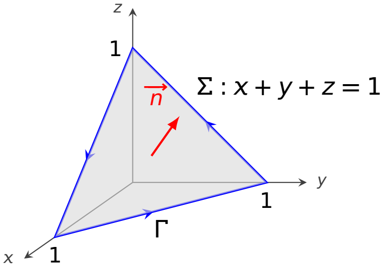
所以

$$\int_{\Gamma} z dx + x dy + y dz = \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot \vec{n}\, dS$$

例 1 试利用斯托克斯公式计算

$$I = \int_{\Gamma} zdx + xdy + ydz$$

其中有向曲线 Γ 如图：



解 设 $F = (z, x, y)$，则

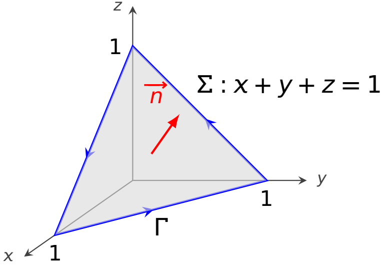
所以

$$\int_{\Gamma} zdx + xdy + ydz = \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot \vec{n}\, dS \xlongequal{\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)}$$

例 1 试利用斯托克斯公式计算

$$I = \int_{\Gamma} zdx + xdy + ydz$$

其中有向曲线 Γ 如图：



解 设 $F = (z, x, y)$，则

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

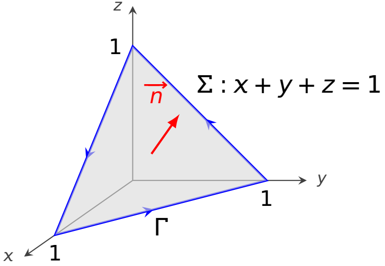
所以

$$\int_{\Gamma} zdx + xdy + ydz = \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot \vec{n}\, dS \xlongequal{\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)}$$

例 1 试利用斯托克斯公式计算

$$I=\int_\Gamma zdx+xdy+ydz$$

其中有向曲线 Γ 如图：



解 设 $F=(z,x,y)$，则

$$\operatorname{rot}F=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ z & x & y\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x & y\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z}\\ z & y\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\\ z & x\end{vmatrix}\right)$$

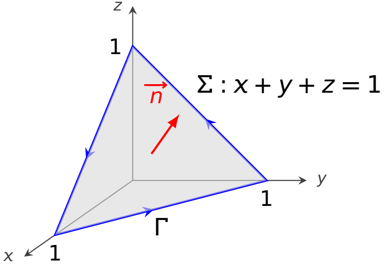
所以

$$\int_\Gamma zdx+xdy+ydz=\iint_\Sigma \operatorname{rot}F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)}$$

例 1 试利用斯托克斯公式计算

$$I = \int_\Gamma zdx + xdy + ydz$$

其中有向曲线 Γ 如图：



解 设 $F = (z, x, y)$，则

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & y \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ z & x \end{vmatrix} \right)$$

$$= (1, \quad , \quad)$$

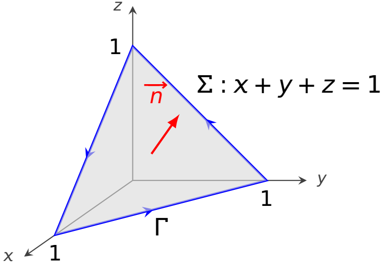
所以

$$\int_\Gamma zdx + xdy + ydz = \iint_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot \vec{n}\, dS \xlongequal{\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)}$$

例 1 试利用斯托克斯公式计算

$$I=\int_\Gamma z\,dx+x\,dy+y\,dz$$

其中有向曲线 Γ 如图：



解 设 $F=(z,x,y)$，则

$$\operatorname{rot}F=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ z & x & y\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x & y\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z}\\ z & y\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\\ z & x\end{vmatrix}\right)$$

$$=(1,1,\quad)$$

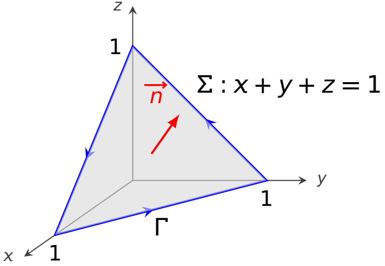
所以

$$\int_\Gamma z\,dx+x\,dy+y\,dz=\iint_\Sigma \operatorname{rot}F\cdot\vec{n}\,dS\ \overset{\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)}{=\!=\!=\!=\!=\!=}$$

例 1 试利用斯托克斯公式计算

$$I=\int_{\Gamma} zdx+xdy+ydz$$

其中有向曲线 Γ 如图:



解 设 $F=(z,x,y)$，则

$$\operatorname{rot} F=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y \end{vmatrix},-\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & y \end{vmatrix},\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ z & x \end{vmatrix}\right)$$

$$=(1,1,1)$$

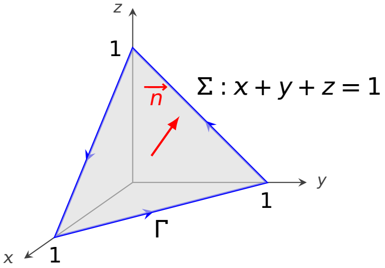
所以

$$\int_{\Gamma} zdx+xdy+ydz=\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)}$$

例 1 试利用斯托克斯公式计算

$$I=\int_{\Gamma} zdx+xdy+ydz$$

其中有向曲线 Γ 如图：



解 设 $F=(z,\,x,\,y)$，则

$$\operatorname{rot} F=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ z & x & y\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x & y\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z}\\ z & y\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\\ z & x\end{vmatrix}\right)$$

$$=(1,\,1,\,1)$$

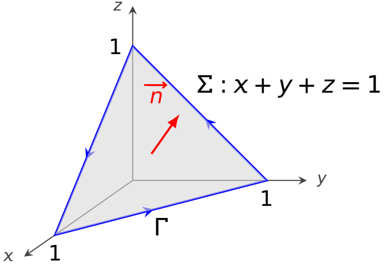
所以

$$\int_{\Gamma} zdx+xdy+ydz=\iint_{\Sigma}\operatorname{rot} F\cdot\vec{n}\,dS\xlongequal{\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)}\iint_{\Sigma}\sqrt{3}\,dS$$

例 1 试利用斯托克斯公式计算

$$I = \int_{\Gamma} zdx + xdy + ydz$$

其中有向曲线 Γ 如图：



解 设 $F=(z, x, y)$，则

$$\mathrm{rot}\, F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & y \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ z & x \end{vmatrix} \right)$$

$$= (1, 1, 1)$$

所以

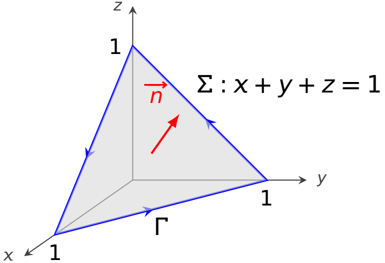
$$\int_{\Gamma} zdx + xdy + ydz = \iint_{\Sigma} \mathrm{rot}\, F \cdot \vec{n}\, dS \xlongequal{\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)} \iint_{\Sigma} \sqrt{3} dS$$

$$= \sqrt{3}\mathrm{Area}(\Sigma)$$

例 1 试利用斯托克斯公式计算

$$I = \int_\Gamma z dx + x dy + y dz$$

其中有向曲线 Γ 如图：



解 设 $F = (z, x, y)$，则

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & y \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ z & x \end{vmatrix} \right)$$

$$= (1, 1, 1)$$

所以

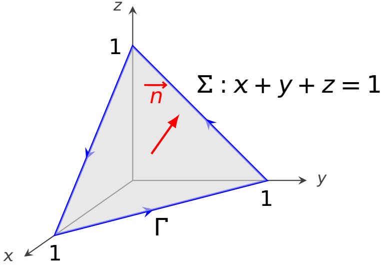
$$\int_\Gamma z dx + x dy + y dz = \iint_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot \vec{n}\, dS \xlongequal{\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)} \iint_\Sigma \sqrt{3} dS$$

$$= \sqrt{3} \text{Area}(\Sigma) = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{3}$$

例 1 试利用斯托克斯公式计算

$$I=\int_\Gamma zdx+xdy+ydz$$

其中有向曲线 Γ 如图：



解 设 $F=(z,x,y)$，则

$$\operatorname{rot} F=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ z & x & y\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x & y\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z}\\ z & y\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\\ z & x\end{vmatrix}\right)$$

$$=(1,1,1)$$

所以

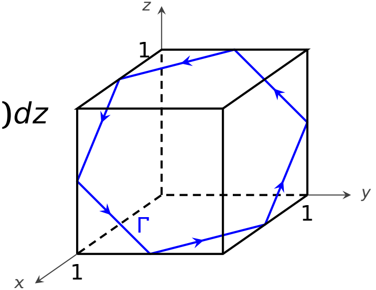
$$\int_\Gamma zdx+xdy+ydz=\iint_\Sigma \operatorname{rot} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)} \iint_\Sigma \sqrt{3}dS$$

$$=\sqrt{3}\mathrm{Area}(\Sigma)=\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}$$

例 2 试利用斯托克斯公式计算

$$I=\int_\Gamma (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$$

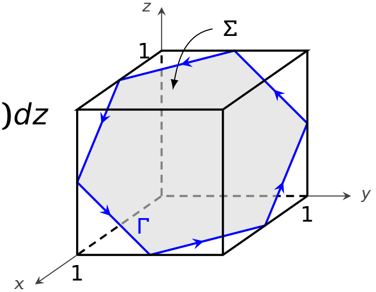
其中有向曲线 Γ 如图：



例 2 试利用斯托克斯公式计算

$$I = \int_\Gamma (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$$

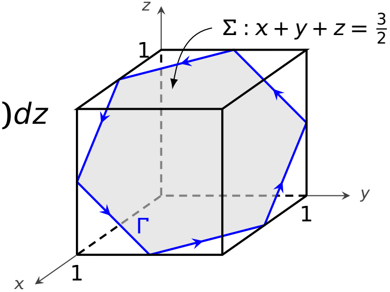
其中有向曲线 Γ 如图：



例 2 试利用斯托克斯公式计算

$$I=\int_{\Gamma}(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$$

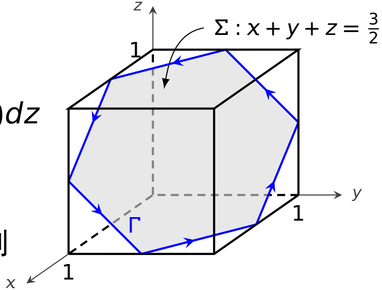
其中有向曲线 Γ 如图：



例 2 试利用斯托克斯公式计算

$$I=\int_{\Gamma}(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$$

其中有向曲线 Γ 如图：



解 设 $F=(y^2-z^2,\, z^2-x^2,\, x^2-y^2)$，则

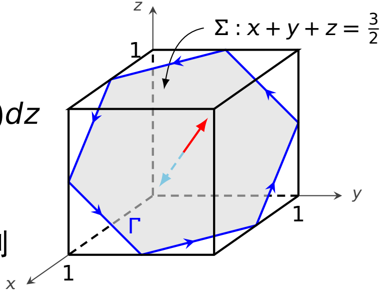
所以

$$I=\iint_{\Sigma}\operatorname{rot}F\cdot\overrightarrow{n}\,dS$$

例 2 试利用斯托克斯公式计算

$$I=\int_\Gamma (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$$

其中有向曲线 Γ 如图：



解 设 $F=(y^2-z^2,\, z^2-x^2,\, x^2-y^2)$，则

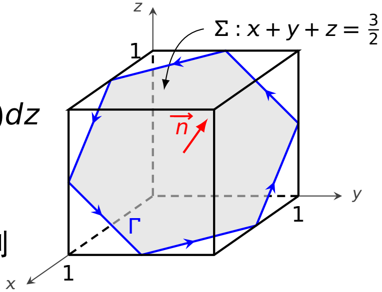
所以

$$I=\iint_\Sigma \operatorname{rot} F\cdot \overrightarrow{n}\, dS$$

例 2 试利用斯托克斯公式计算

$$I=\int_\Gamma (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$$

其中有向曲线 Γ 如图：



解 设 $F=(y^2-z^2, z^2-x^2, x^2-y^2)$，则

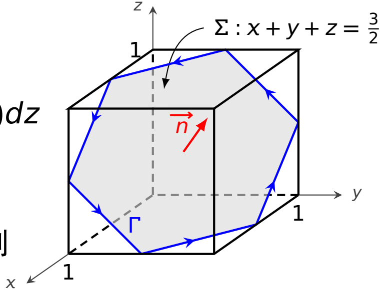
所以

$$I=\iint_\Sigma \mathrm{rot}\, F\cdot\vec{n}\, dS$$

例 2 试利用斯托克斯公式计算

$$I=\int_{\Gamma}(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$$

其中有向曲线 Γ 如图：



解 设 $F=(y^2-z^2,\ z^2-x^2,\ x^2-y^2)$，则

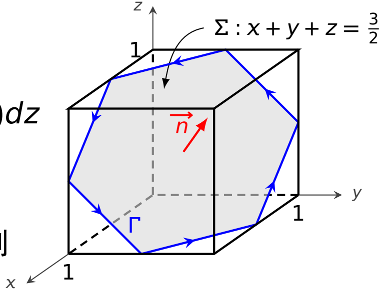
所以

$$I=\iint_{\Sigma}\mathrm{rot}\,F\cdot\vec{n}\,dS \overset{\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)}{=\!=\!=\!=\!=}$$

例 2 试利用斯托克斯公式计算

$$I = \int_{\Gamma} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$$

其中有向曲线 Γ 如图：



解 设 $F = (y^2 - z^2, z^2 - x^2, x^2 - y^2)$，则

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - z^2 & z^2 - x^2 & x^2 - y^2 \end{vmatrix}$$

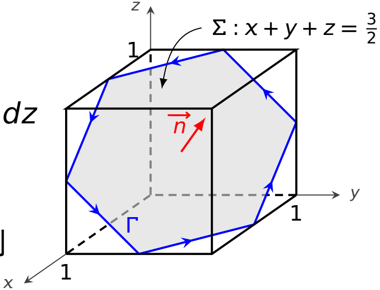
所以

$$I = \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot \vec{n}\, dS \overset{\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}$$

例 2 试利用斯托克斯公式计算

$$I=\int_{\Gamma}(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$$

其中有向曲线 Γ 如图：



解 设 $F=(y^2-z^2,\ z^2-x^2,\ x^2-y^2)$，则

$$\text{rot}\,F=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2-z^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2\end{vmatrix}=(-2y-2z,\qquad\qquad ,\qquad\qquad)$$

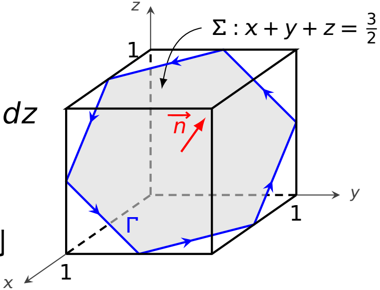
所以

$$I=\iint_{\Sigma}\text{rot}\,F\cdot\vec{n}\,dS\ \overset{\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)}{=\!=\!=\!=\!=\!=}$$

例 2 试利用斯托克斯公式计算

$$I=\int_\Gamma (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$$

其中有向曲线 Γ 如图：



解 设 $F=(y^2-z^2,\ z^2-x^2,\ x^2-y^2)$，则

$$\mathrm{rot}\,F=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2-z^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2\end{vmatrix}=(-2y-2z,\ -2z-2x,\qquad\qquad)$$

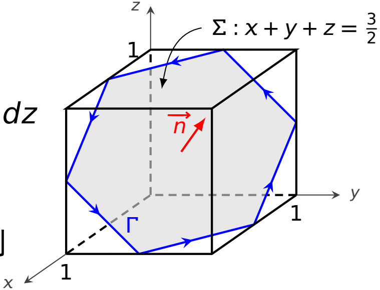
所以

$$I=\iint_\Sigma \mathrm{rot}\,F\cdot\vec{n}\,dS \overset{\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)}{=\!=\!=\!=\!=}$$

例 2 试利用斯托克斯公式计算

$$I=\int_{\Gamma}(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$$

其中有向曲线 Γ 如图：



解 设 $F=(y^2-z^2,\ z^2-x^2,\ x^2-y^2)$，则

$$\operatorname{rot} F=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2-z^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2\end{vmatrix}=(-2y-2z,\ -2z-2x,\ -2x-2y)$$

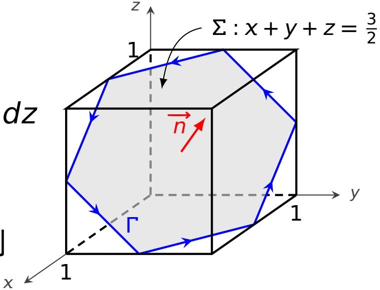
所以

$$I=\iint_{\Sigma}\operatorname{rot} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)}$$

例 2 试利用斯托克斯公式计算

$$I=\int_\Gamma (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$$

其中有向曲线 Γ 如图：



解 设 $F=(y^2-z^2,\ z^2-x^2,\ x^2-y^2)$，则

$$\text{rot}\,F=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2-z^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2\end{vmatrix}=(-2y-2z,\ -2z-2x,\ -2x-2y)$$

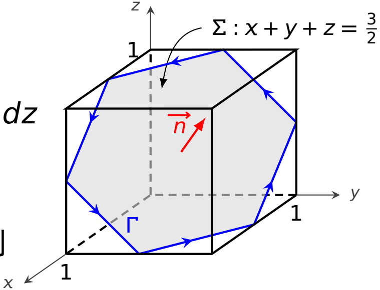
所以

$$I=\iint_\Sigma \text{rot}\,F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)} \frac{-4}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma (x+y+z)dS$$

例 2 试利用斯托克斯公式计算

$$I=\int_{\Gamma}(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$$

其中有向曲线 Γ 如图：



解 设 $F=(y^2-z^2,\, z^2-x^2,\, x^2-y^2)$，则

$$\operatorname{rot}F=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2-z^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2\end{vmatrix}=(-2y-2z,\,-2z-2x,\,-2x-2y)$$

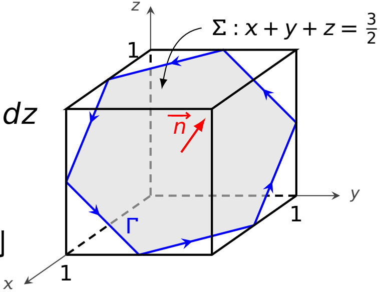
所以

$$I=\iint_{\Sigma}\operatorname{rot}F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)} \frac{-4}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}(x+y+z)dS=\frac{-4}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}\frac{3}{2}dS$$

例 2 试利用斯托克斯公式计算

$$I=\int_\Gamma (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$$

其中有向曲线 Γ 如图：



解 设 $F=(y^2-z^2,\, z^2-x^2,\, x^2-y^2)$，则

$$\operatorname{rot} F=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2-z^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2 \end{vmatrix}=(-2y-2z,\,-2z-2x,\,-2x-2y)$$

所以

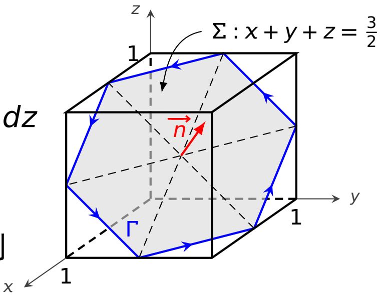
$$I=\iint_\Sigma \operatorname{rot} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)} \frac{-4}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma (x+y+z)dS=\frac{-4}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma \frac{3}{2}dS$$

$$=-2\sqrt{3}\operatorname{Area}(\Sigma)$$

例 2 试利用斯托克斯公式计算

$$I=\int_\Gamma (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$$

其中有向曲线 Γ 如图：



解 设 $F=(y^2-z^2, z^2-x^2, x^2-y^2)$，则

$$\text{rot}\, F=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2-z^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2 \end{vmatrix}=(-2y-2z, -2z-2x, -2x-2y)$$

所以

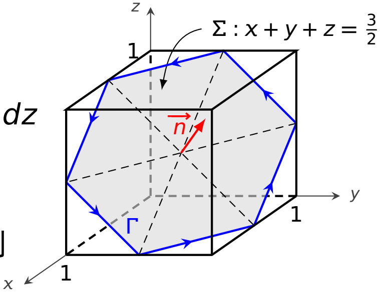
$$I=\iint_\Sigma \text{rot}\, F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)} \frac{-4}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma (x+y+z)dS=\frac{-4}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma \frac{3}{2}dS$$

$$=-2\sqrt{3}\text{Area}(\Sigma)$$

例 2 试利用斯托克斯公式计算

$$I=\int_\Gamma (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$$

其中有向曲线 Γ 如图:



解 设 $F=(y^2-z^2,\ z^2-x^2,\ x^2-y^2)$,则

$$\mathrm{rot}\,F=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2-z^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2\end{vmatrix}=(-2y-2z,\ -2z-2x,\ -2x-2y)$$

所以

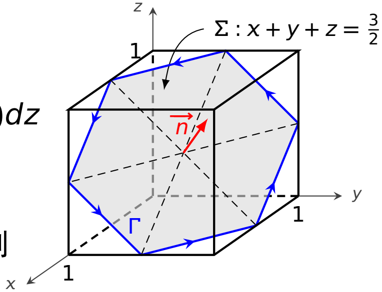
$$I=\iint_\Sigma \mathrm{rot}\,F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)} \frac{-4}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma (x+y+z)dS=\frac{-4}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma \frac{3}{2}dS$$

$$=-2\sqrt{3}\mathrm{Area}(\Sigma)=-2\sqrt{3}\cdot 6\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sin\frac{\pi}{3}$$

例 2 试利用斯托克斯公式计算

$$I=\int_\Gamma (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$$

其中有向曲线 Γ 如图：



解 设 $F=(y^2-z^2,\, z^2-x^2,\, x^2-y^2)$，则

$$\operatorname{rot} F=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2-z^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2 \end{vmatrix}=(-2y-2z,\, -2z-2x,\, -2x-2y)$$

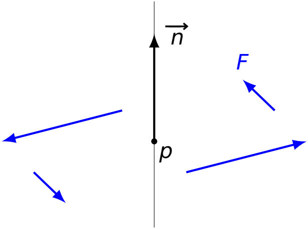
所以

$$I=\iint_\Sigma \operatorname{rot} F\cdot\vec{n}\, dS \xlongequal{\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)} \frac{-4}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma (x+y+z)dS=\frac{-4}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma \frac{3}{2}dS$$

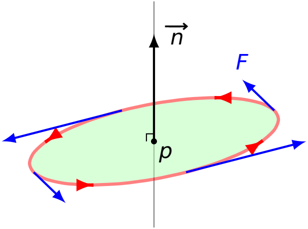
$$=-2\sqrt{3}\text{Area}(\Sigma)=-2\sqrt{3}\cdot 6\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{9}{2}$$

旋度 rot F 的解释

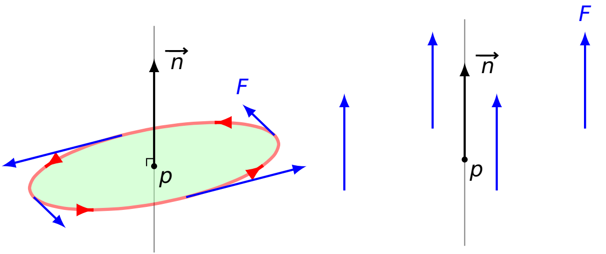
旋度 rot F 的解释



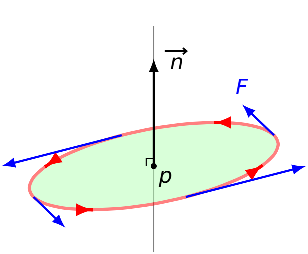
旋度 rot F 的解释

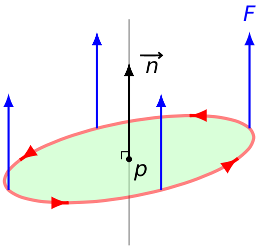


旋度 rot F 的解释

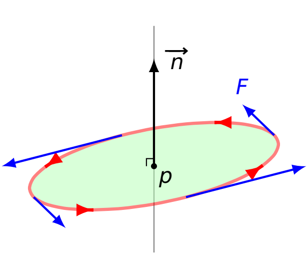


旋度 rot F 的解释

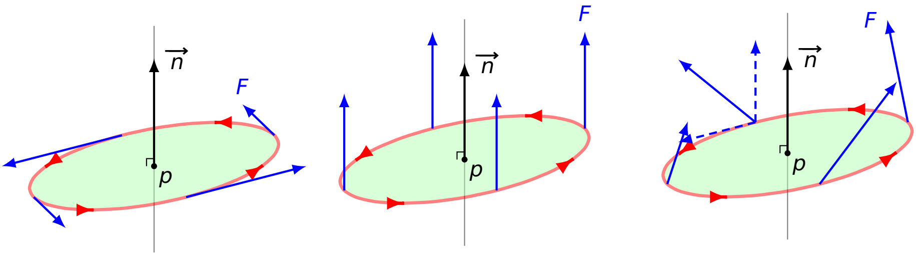




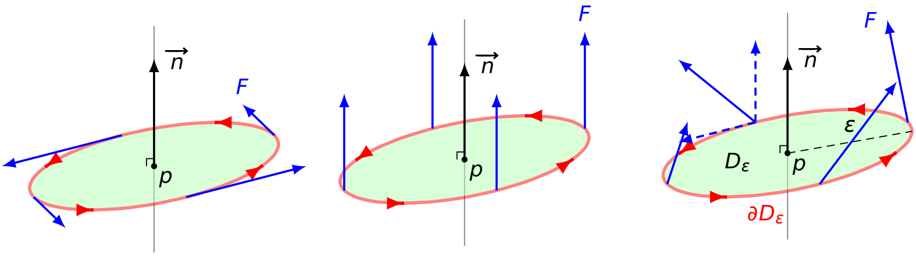
旋度 rot F 的解释



旋度 rot F 的解释

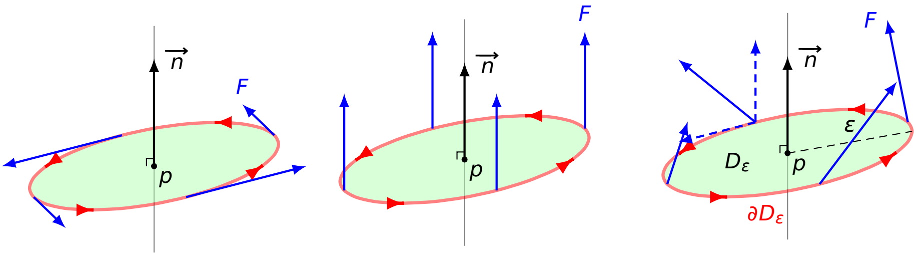


旋度 rot F 的解释



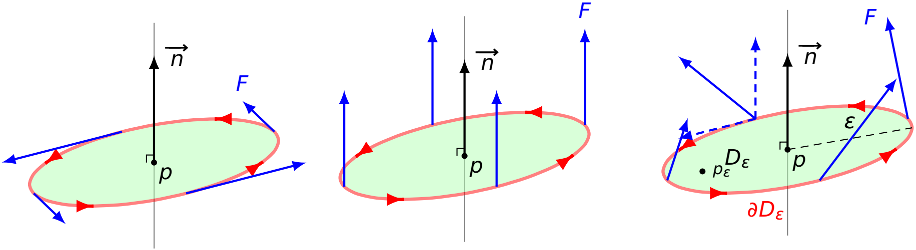
$\vec{n}$
F
p
$\vec{n}$
F
p
F
$\vec{n}$
ε
D_ε
p
∂D_ε

旋度 rot F 的解释



$$\int_{\partial D_\varepsilon} Pdx + Qdy + Rdz = \qquad \iint_{D_\varepsilon} \operatorname{rot} F \cdot \vec{n}\, dv$$

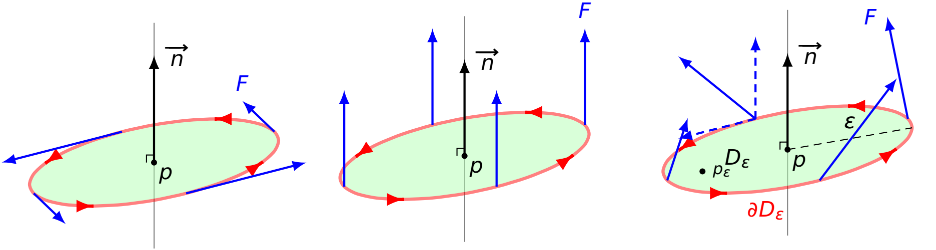
旋度 rot F 的解释



$$\int_{\partial D_\varepsilon} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{D_\varepsilon} \operatorname{rot} F \cdot \vec{n}\, dv$$

$$= \operatorname{Area}(D_\varepsilon) \operatorname{rot} F(p_\varepsilon) \cdot \vec{n}$$

旋度 rot F 的解释

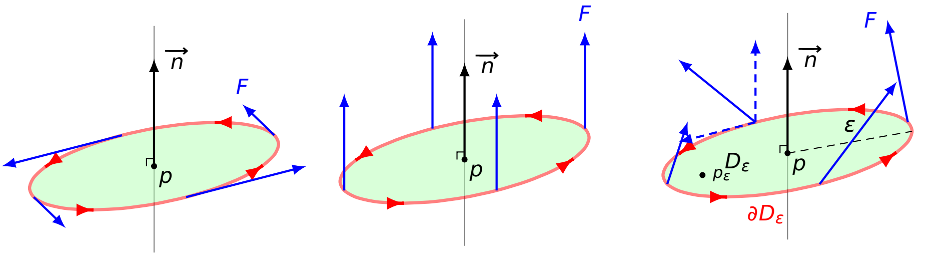


$$\int_{\partial D_\varepsilon} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{D_\varepsilon} \operatorname{rot} F \cdot \vec{n}\, dv$$

$$= \text{Area}(D_\varepsilon) \operatorname{rot} F(p_\varepsilon) \cdot \vec{n}$$

$$\operatorname{rot} F(p) \cdot \vec{n}$$

旋度 rot F 的解释

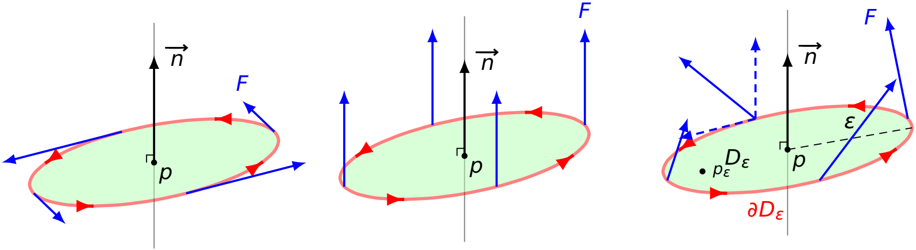


$$\frac{1}{\text{Area}(D_\varepsilon)} \cdot \int_{\partial D_\varepsilon} P dx + Q dy + R dz = \frac{1}{\text{Area}(D_\varepsilon)} \cdot \iint_{D_\varepsilon} \text{rot}\, F \cdot \vec{n}\, dv$$

$$= \frac{1}{\text{Area}(D_\varepsilon)} \text{Area}(D_\varepsilon)\, \text{rot}\, F(p_\varepsilon) \cdot \vec{n}$$

$$\text{rot}\, F(p) \cdot \vec{n}$$

旋度 rot F 的解释

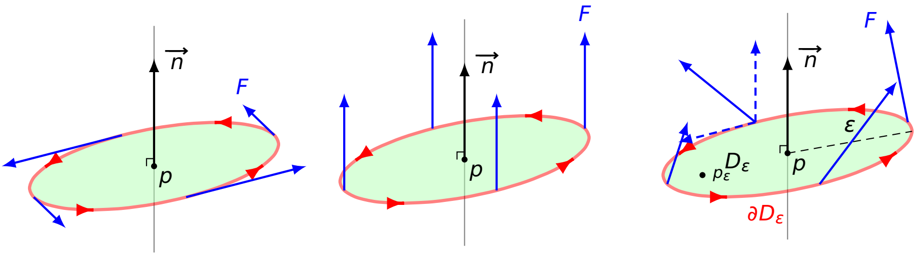


$$\frac{1}{\text{Area}(D_\varepsilon)}\cdot\int_{\partial D_\varepsilon} Pdx + Qdy + Rdz = \frac{1}{\text{Area}(D_\varepsilon)}\cdot\iint_{D_\varepsilon} \text{rot}\, F\cdot\vec{n}\, dv$$

$$= \frac{1}{\text{Area}(D_\varepsilon)}\text{Area}(D_\varepsilon)\,\text{rot}\, F(p_\varepsilon)\cdot\vec{n} = \text{rot}\, F(p_\varepsilon)\cdot\vec{n}$$

$$\text{rot}\, F(p)\cdot\vec{n}$$

旋度 rot F 的解释

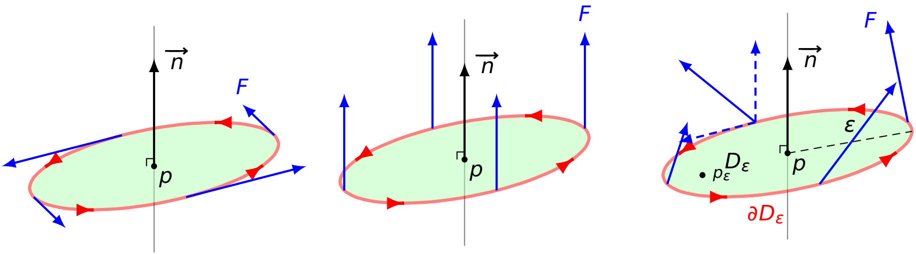


$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\mathrm{Area}(D_\varepsilon)}\cdot\int_{\partial D_\varepsilon} Pdx+Qdy+Rdz=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\mathrm{Area}(D_\varepsilon)}\cdot\iint_{D_\varepsilon}\mathrm{rot}\,F\cdot\vec{n}\,dv$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\mathrm{Area}(D_\varepsilon)}\mathrm{Area}(D_\varepsilon)\,\mathrm{rot}\,F(p_\varepsilon)\cdot\vec{n}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\mathrm{rot}\,F(p_\varepsilon)\cdot\vec{n}$$

$$\mathrm{rot}\,F(p)\cdot\vec{n}$$

旋度 rot F 的解释

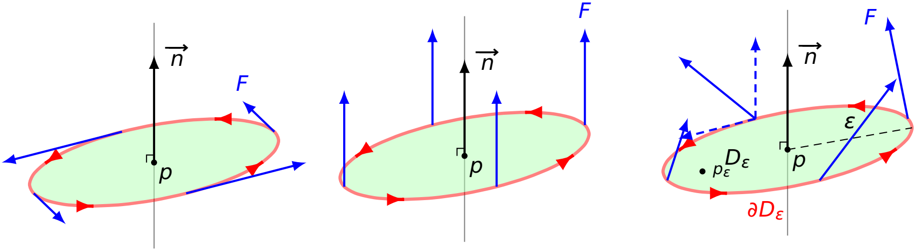


$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{1}{\text{Area}(D_\varepsilon)}\cdot\int_{\partial D_\varepsilon}Pdx+Qdy+Rdz=\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{1}{\text{Area}(D_\varepsilon)}\cdot\iint_{D_\varepsilon}\text{rot}\,F\cdot\overrightarrow{n}\,dv$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{1}{\text{Area}(D_\varepsilon)}\text{Area}(D_\varepsilon)\,\text{rot}\,F(p_\varepsilon)\cdot\overrightarrow{n}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\text{rot}\,F(p_\varepsilon)\cdot\overrightarrow{n}$$

$$=\text{rot}\,F(p)\cdot\overrightarrow{n}$$

旋度 rot F 的解释



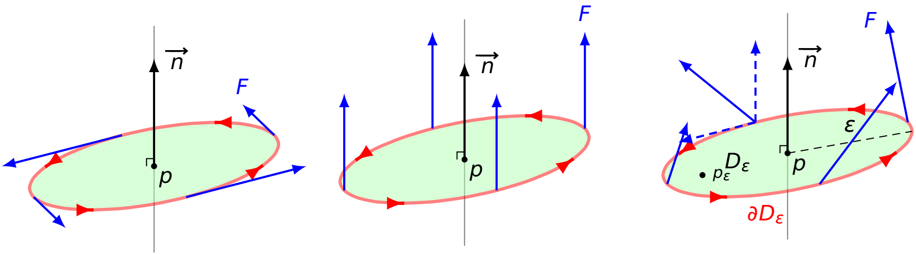
$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\text{Area}(D_\varepsilon)}\cdot\int_{\partial D_\varepsilon} Pdx+Qdy+Rdz=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\text{Area}(D_\varepsilon)}\cdot\iint_{D_\varepsilon}\text{rot}\,F\cdot\vec{n}\,dv$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\text{Area}(D_\varepsilon)}\text{Area}(D_\varepsilon)\,\text{rot}\,F(p_\varepsilon)\cdot\vec{n}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\text{rot}\,F(p_\varepsilon)\cdot\vec{n}$$

$$=\text{rot}\,F(p)\cdot\vec{n}$$

注 cot $F\neq 0$ 说明有旋，

旋度 rot F 的解释



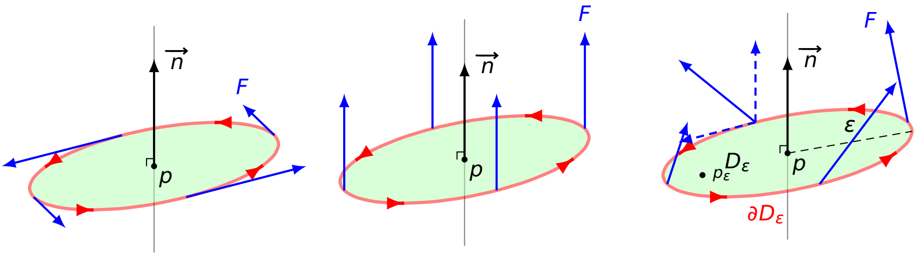
$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\mathrm{Area}(D_\varepsilon)}\cdot\int_{\partial D_\varepsilon} P dx+Q dy+R dz=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\mathrm{Area}(D_\varepsilon)}\cdot\iint_{D_\varepsilon}\mathrm{rot}\, F\cdot\overrightarrow{n}\, dv$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\mathrm{Area}(D_\varepsilon)}\mathrm{Area}(D_\varepsilon)\,\mathrm{rot}\, F(p_\varepsilon)\cdot\overrightarrow{n}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\mathrm{rot}\, F(p_\varepsilon)\cdot\overrightarrow{n}$$

$$=\mathrm{rot}\, F(p)\cdot\overrightarrow{n}$$

注 $\mathrm{cot}\, F\neq 0$ 说明有旋，此时可认为 F 在 p 点附近绕轴 $\overrightarrow{n}=\frac{\mathrm{rot}\, F}{|\mathrm{rot}\, F|}$ 旋转；

旋度 rot F 的解释



$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{1}{\mathrm{Area}(D_\varepsilon)}\cdot\int_{\partial D_\varepsilon}Pdx+Qdy+Rdz=\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{1}{\mathrm{Area}(D_\varepsilon)}\cdot\iint_{D_\varepsilon}\mathrm{rot}\,F\cdot\vec{n}\,dv$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{1}{\mathrm{Area}(D_\varepsilon)}\mathrm{Area}(D_\varepsilon)\,\mathrm{rot}\,F(p_\varepsilon)\cdot\vec{n}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\mathrm{rot}\,F(p_\varepsilon)\cdot\vec{n}$$

$$=\mathrm{rot}\,F(p)\cdot\vec{n}$$

注 cot $F\neq0$ 说明有旋，此时可认为 F 在 p 点附近绕轴 $\vec{n}=\frac{\mathrm{rot}\,F}{|\mathrm{rot}\,F|}$ 旋转；cot $F=0$ 说明无旋。