# 第 1 章 $c$：行列式的展开

数学系　梁卓滨

2020-2021 学年 I

# We are here now...

1. 余子式、代数余子式
2. 行列式的展开
3. 行列式的展开 II

# 余子式，代数余子式

在 $n$ 阶行列式 $D$ 中，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j} & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i1} & \dots & a_{ij-1} & a_{ij} & a_{ij+1} & \dots & a_{in} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

# 余子式，代数余子式

在 $n$ 阶行列式 $D$ 中，将元素 $a_{ij}$ 所在的行和列划掉：

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\
a_{i1} & \cdots & a_{ij-1} & a_{ij} & a_{ij+1} & \cdots & a_{in} \\
a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

# 余子式，代数余子式

在 $n$ 阶行列式 $D$ 中，将元素 $a_{ij}$ 所在的行和列划掉：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1j-1} & & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ & & & & & & \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1j-1} & & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

# 余子式，代数余子式

在 $n$ 阶行列式 $D$ 中，将元素 $a_{ij}$ 所在的行和列划掉：

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

所得的 $n-1$ 阶行列式称为 $a_{ij}$ 的**余子式**。

# 余子式，代数余子式

在 $n$ 阶行列式 $D$ 中，将元素 $a_{ij}$ 所在的行和列划掉：

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij-1} & a_{ij} & a_{ij+1} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

所得的 $n-1$ 阶行列式称为 $a_{ij}$ 的**余子式**。

# 余子式，代数余子式

在 $n$ 阶行列式 $D$ 中，将元素 $a_{ij}$ 所在的行和列划掉：

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j} & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i1} & \dots & a_{ij-1} & a_{ij} & a_{ij+1} & \dots & a_{in} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

所得的 $n-1$ 阶行列式称为 $a_{ij}$ 的**余子式**。而将

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

定义为元素 $a_{ij}$ 的**代数余子式**。

# 余子式，代数余子式

在 $n$ 阶行列式 $D$ 中，将元素 $a_{ij}$ 所在的行和列划掉：

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij-1} & a_{ij} & a_{ij+1} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

所得的 $n-1$ 阶行列式称为 $a_{ij}$ 的**余子式**。而将

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

定义为元素 $a_{ij}$ 的**代数余子式**。

**注** 余子式、代数余子式何时相等?

# 例子

**例** 行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 中

- 元素 $a_{32} = -2$ 的余子式是

  $M_{32} =$

  代数余子式是 $A_{32} =$

# 例子

**例** 行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 中

- 元素 $a_{32} = -2$ 的余子式是

  $M_{32} = \begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$

  代数余子式是 $A_{32} =$

# 例子

**例** 行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 中

- 元素 $a_{32} = -2$ 的余子式是

  $$M_{32} = \begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} =$$

  代数余子式是 $A_{32} =$

# 例子

**例** 行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 中

- 元素 $a_{32} = -2$ 的余子式是

$$M_{32} = \begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -29$$

代数余子式是 $A_{32} =$

# 例子

**例** 行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 中

- 元素 $a_{32} = -2$ 的余子式是

  $$M_{32} = \begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -29$$

  代数余子式是 $A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} =$

# 例子

**例** 行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 中

- 元素 $a_{32} = -2$ 的余子式是

  $$M_{32} = \begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -29$$

  代数余子式是 $A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = 29$

# 例子

**例** 行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 中

- 元素 $a_{32} = -2$ 的余子式是

  $$M_{32} = \begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -29$$

  代数余子式是 $A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = 29$

- 元素 $a_{13} = 4$ 的余子式是 $M_{13} =$

  代数余子式是 $A_{13} =$

# 例子

**例** 行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 中

- 元素 $a_{32} = -2$ 的余子式是

  $$M_{32} = \begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -29$$

  代数余子式是 $A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = 29$

- 元素 $a_{13} = 4$ 的余子式是 $M_{13} = \begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$

  代数余子式是 $A_{13} =$

# 例子

**例** 行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 中

- 元素 $a_{32} = -2$ 的余子式是

  $$M_{32} = \begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -29$$

  代数余子式是 $A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = 29$

- 元素 $a_{13} = 4$ 的余子式是 $M_{13} = \begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} =$

  代数余子式是 $A_{13} =$

# 例子

**例** 行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 中

- 元素 $a_{32} = -2$ 的余子式是

  $$M_{32} = \begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -29$$

  代数余子式是 $A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = 29$

- 元素 $a_{13} = 4$ 的余子式是 $M_{13} = \begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -8$

  代数余子式是 $A_{13} =$

# 例子

**例** 行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 中

- 元素 $a_{32} = -2$ 的余子式是

  $$M_{32} = \begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -29$$

  代数余子式是 $A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = 29$

- 元素 $a_{13} = 4$ 的余子式是 $M_{13} = \begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -8$

  代数余子式是 $A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} =$

# 例子

**例** 行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 中

- 元素 $a_{32} = -2$ 的余子式是

  $$M_{32} = \begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -29$$

  代数余子式是 $A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = 29$

- 元素 $a_{13} = 4$ 的余子式是 $M_{13} = \begin{vmatrix} -3 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -8$

  代数余子式是 $A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = -8$

# We are here now...

1. 余子式、代数余子式

2. 行列式的展开

3. 行列式的展开 II

# 行列式展开——以 3 阶为例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

# 行列式展开——以 3 阶为例

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\
&\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}
\end{aligned}
$$

# 行列式展开——以 3 阶为例

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\
&\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \\
&= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})
\end{aligned}
$$

# 行列式展开——以 3 阶为例

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33}
\end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\
&\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \\
&= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})
\end{aligned}
$$

# 行列式展开——以 3 阶为例

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33}
\end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\
&\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \\
&= a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})
\end{aligned}
$$

# 行列式展开——以 3 阶为例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11} \qquad - a_{12} \qquad + a_{13}$$

# 行列式展开——以 3 阶为例

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
$$

$$
= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}
$$

$$
- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}
$$

$$
= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})
$$

$$
= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \qquad\qquad + a_{13}
$$

# 行列式展开——以 3 阶为例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \qquad\qquad + a_{13}$$

# 行列式展开——以 3 阶为例

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\
&\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \\
&= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\
&= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \qquad\qquad + a_{13} \\
&= a_{11}M_{11}
\end{aligned}
$$

# 行列式展开——以 3 阶为例

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\
&\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \\
&= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\
&= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \\
&= a_{11}M_{11}
\end{aligned}
$$

# 行列式展开——以 3 阶为例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}$$

$$= a_{11}M_{11}$$

# 行列式展开——以 3 阶为例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}$$

$$= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12}$$

# 行列式展开——以 3 阶为例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12}$$

# 行列式展开——以 3 阶为例

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\
&\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \\
&= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\
&= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12}
\end{aligned}
$$

# 行列式展开——以 3 阶为例

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
$$

$$
= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}
$$

$$
- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}
$$

$$
= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})
$$

$$
= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}
$$

$$
= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}
$$

# 行列式展开——以 3 阶为例

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\
&\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \\
&= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\
&= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} \\
&= a_{11}A_{11} +
\end{aligned}
$$

# 行列式展开——以 3 阶为例

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
=\ & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\
& - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \\
=\ & a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}) \\
=\ & a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
=\ & a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} \\
=\ & a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} +
\end{aligned}
$$

# 行列式展开——以 3 阶为例

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
= & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\
& - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \\
= & a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\
= & a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
= & a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} \\
= & a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}
\end{aligned}
$$

# 行列式展开——以 3 阶为例

$$\begin{vmatrix} a_{13} & a_{13} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

# 行列式展开——以 3 阶为例

3 阶行列式按第 1 行展开：

$$\begin{vmatrix} a_{13} & a_{13} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

# 行列式展开——以 3 阶为例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{12} & a_{23} \\ a_{31} & a_{12} & a_{33} \end{vmatrix}$$

# 行列式展开——以 3 阶为例

3 阶行列式按第 2 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

# 行列式展开——以 3 阶为例

3 阶行列式按第 2 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & {\color{red}a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & {\color{red}a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & {\color{red}a_{32}} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12} \qquad a_{22} \qquad a_{32}$$

# 行列式展开——以 3 阶为例

3 阶行列式按第 2 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} \quad a_{22}A_{22} \quad a_{32}A_{32}$$

# 行列式展开——以 3 阶为例

3 阶行列式按第 2 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$

# 行列式展开——以 3 阶为例

3 阶行列式按第 2 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \color{red}{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & \color{red}{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & \color{red}{a_{32}} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$

$$= a_{12} \qquad\qquad\qquad\qquad + a_{22}$$

$$+ a_{32}$$

# 行列式展开——以 3 阶为例

3 阶行列式按第 2 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$

$$= a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} + a_{22}$$

$$+ a_{32}$$

# 行列式展开——以 3 阶为例

3 阶行列式按第 2 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$

$$= a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} + a_{22}$$

$$+ a_{32}$$

# 行列式展开——以 3 阶为例

3 阶行列式按第 2 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$

$$= a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}$$

$$+ a_{32}$$

# 行列式展开——以 3 阶为例

3 阶行列式按第 2 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$

$$= a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^{2+2}\left| \phantom{\begin{matrix} a \\ a \end{matrix}} \right|$$

$$+ a_{32}$$

# 行列式展开——以 3 阶为例

3 阶行列式按第 2 列展开：

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}
$$

$$
= a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}
$$

$$
+ a_{32}
$$

# 行列式展开——以 3 阶为例

3 阶行列式按第 2 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$

$$= a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{32}$$

# 行列式展开——以 3 阶为例

3 阶行列式按第 2 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$

$$= a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{32}(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}$$

# 行列式展开——以 3 阶为例

3 阶行列式按第 2 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$

$$= a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{32}(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} \phantom{a_{11}} & \phantom{a_{13}} \\ \phantom{a_{21}} & \phantom{a_{23}} \end{vmatrix}$$

# 行列式展开——以 3 阶为例

3 阶行列式按第 2 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$

$$= a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{32}(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

# 行列式展开——以 3 阶为例

3 阶行列式按第 2 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$

$$= a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{32}(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

**注** 说明计算 3 阶行列式可转化为计算 3 个 2 阶行列式

# 行列式展开——以 4 阶为例

4 阶行列式按第 1 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

# 行列式展开——以 4 阶为例

4 阶行列式按第 1 列展开：

$$\begin{vmatrix} \color{red}{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \color{red}{a_{21}} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \color{red}{a_{31}} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \color{red}{a_{41}} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \qquad + a_{21} \qquad + a_{31} \qquad + a_{41}$$

# 行列式展开——以 4 阶为例

4 阶行列式按第 1 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{21} \qquad + a_{31} \qquad + a_{41}$$

# 行列式展开——以 4 阶为例

4 阶行列式按第 1 列展开：

$$\begin{vmatrix} \color{red}{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \color{red}{a_{21}} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \color{red}{a_{31}} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \color{red}{a_{41}} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31} \qquad + a_{41}$$

# 行列式展开——以 4 阶为例

4 阶行列式按第 1 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}$$

# 行列式展开——以 4 阶为例

4 阶行列式按第 1 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41}$$

# 行列式展开——以 4 阶为例

4 阶行列式按第 1 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$$

# 行列式展开——以 4 阶为例

4 阶行列式按第 1 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$$

# 行列式展开——以 4 阶为例

4 阶行列式按第 1 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

# 行列式展开——以 4 阶为例

4 阶行列式按第 1 列展开：

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{vmatrix}
$$

$$
= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41}
$$

$$
= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}
a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{vmatrix} + a_{21}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}
 & & \\
 & & \\
 & & 
\end{vmatrix}
$$

# 行列式展开——以 4 阶为例

4 阶行列式按第 1 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{21}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$$

# 行列式展开——以 4 阶为例

4 阶行列式按第 1 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{21}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

# 行列式展开——以 4 阶为例

4 阶行列式按第 1 列展开：

$$\begin{vmatrix} \color{red}{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \color{red}{a_{21}} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \color{red}{a_{31}} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \color{red}{a_{41}} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{21}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{31}(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} \; & \; & \; \\ \; & \; & \; \\ \; & \; & \; \end{vmatrix}$$

# 行列式展开——以 4 阶为例

4 阶行列式按第 1 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{21}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{31}(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$$

# 行列式展开——以 4 阶为例

4 阶行列式按第 1 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{21}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{31}(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

# 行列式展开——以 4 阶为例

4 阶行列式按第 1 列展开：

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{vmatrix}
$$

$$
= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41}
$$

$$
= a_{11}(-1)^{1+1}
\begin{vmatrix}
a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{vmatrix}
+ a_{21}(-1)^{2+1}
\begin{vmatrix}
a_{12} & a_{13} & a_{14} \\
a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{vmatrix}
$$

$$
+ a_{31}(-1)^{3+1}
\begin{vmatrix}
a_{12} & a_{13} & a_{14} \\
a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{vmatrix}
+ a_{41}(-1)^{4+1}
\begin{vmatrix}
 & & \\
 & & \\
 & & 
\end{vmatrix}
$$

# 行列式展开——以 4 阶为例

4 阶行列式按第 1 列展开：

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{vmatrix}
$$

$$
= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41}
$$

$$
= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}
a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{vmatrix}
+ a_{21}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}
a_{12} & a_{13} & a_{14} \\
a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{vmatrix}
$$

$$
+ a_{31}(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}
a_{12} & a_{13} & a_{14} \\
a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{vmatrix}
+ a_{41}(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}
\ & \ & \ \\
\ & \ & \ \\
\ & \ & \
\end{vmatrix}
$$

# 行列式展开——以 4 阶为例

4 阶行列式按第 1 列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{21}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{31}(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{41}(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

# 行列式展开——以 4 阶为例

4 阶行列式按第 1 列展开：

$$\begin{vmatrix} \color{red}{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \color{red}{a_{21}} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \color{red}{a_{31}} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \color{red}{a_{41}} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{21}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{31}(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{41}(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

**注** 说明计算 4 阶行列式可转化为计算 4 个 3 阶行列式

# 行列式展开定理

**定理** 对 $n$ 阶行列式 $D$，取第 $i$ 行

# 行列式展开定理

**定理** 对 $n$ 阶行列式 $D$，取第 $i$ 行

$$a_{i1} \qquad a_{i2} \qquad \cdots \qquad a_{in}$$

# 行列式展开定理

**定理** 对 $n$ 阶行列式 $D$，取第 $i$ 行，按该行的展开公式是：

$$a_{i1} \qquad a_{i2} \qquad \cdots \qquad a_{in}$$

# 行列式展开定理

**定理** 对 $n$ 阶行列式 $D$，取第 $i$ 行，按该行的展开公式是：

$$a_{i1}A_{i1} \quad a_{i2}A_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}A_{in}$$

# 行列式展开定理

**定理** 对 $n$ 阶行列式 $D$，取第 $i$ 行，按该行的展开公式是：

$$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

# 行列式展开定理

**定理** 对 $n$ 阶行列式 $D$，取第 $i$ 行，按该行的展开公式是：

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

# 行列式展开定理

**定理** 对 $n$ 阶行列式 $D$，取第 $i$ 行，按该行的展开公式是：

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

类似地，取第 $j$ 列

# 行列式展开定理

**定理** 对 $n$ 阶行列式 $D$，取第 $i$ 行，按该行的展开公式是：

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

类似地，取第 $j$ 列

$$a_{1j} \qquad a_{2j} \qquad \cdots \quad a_{nj}$$

# 行列式展开定理

**定理** 对 $n$ 阶行列式 $D$，取第 $i$ 行，按该行的展开公式是：

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

类似地，取第 $j$ 列，按该列的展开公式是：

$$a_{1j} \qquad a_{2j} \qquad \cdots \qquad a_{nj}$$

# 行列式展开定理

**定理** 对 $n$ 阶行列式 $D$，取第 $i$ 行，按该行的展开公式是：

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

类似地，取第 $j$ 列，按该列的展开公式是：

$$a_{1j}A_{1j} \quad a_{2j}A_{2j} \quad \cdots \quad a_{nj}A_{nj}$$

# 行列式展开定理

**定理** 对 $n$ 阶行列式 $D$，取第 $i$ 行，按该行的展开公式是：

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

类似地，取第 $j$ 列，按该列的展开公式是：

$$a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

# 行列式展开定理

**定理** 对 $n$ 阶行列式 $D$，取第 $i$ 行，按该行的展开公式是：

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

类似地，取第 $j$ 列，按该列的展开公式是：

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

# 行列式展开定理

**定理** 对 $n$ 阶行列式 $D$，取第 $i$ 行，按该行的展开公式是：

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

类似地，取第 $j$ 列，按该列的展开公式是：

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

**注** 该定理说明：计算 $n$ 阶行列式可转化为计算 $n$ 个 $n-1$ 阶行列式！

# 行列式展开定理

**定理** 对 $n$ 阶行列式 $D$，取第 $i$ 行，按该行的展开公式是：

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

类似地，取第 $j$ 列，按该列的展开公式是：

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

**注** 该定理说明：计算 $n$ 阶行列式可转化为计算 $n$ 个 $n-1$ 阶行列式！

其实，通过一些小技巧，可以把 $n$ 阶行列式转化为 1 个 $n-1$ 阶行列式...... 最后转化为 1 个 2 阶，后面再详说

下面以 4 阶行列式按第一行的展开公式为例证明。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

下面以 4 阶行列式按第一行的展开公式为例证明。

也就是要证明：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

下面以 4 阶行列式按第一行的展开公式为例证明。

也就是要证明:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

---

**引理** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} =$

下面以 4 阶行列式按第一行的展开公式为例证明。

也就是要证明：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

---

**引理** $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

# 引理证明

**引理证明** 定义一种运算：

$$\left\| \begin{matrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{matrix} \right\| \triangleq$$

**引理证明** 定义一种运算：

$$\left\|\begin{matrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{matrix}\right\| \triangleq \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix}$$

**引理证明** 定义一种运算：

$$\left\| \begin{matrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{matrix} \right\| \triangleq \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix}$$

验证这种运算满足规范性、反称性、数乘性、可加性：

**引理证明** 定义一种运算：

$$\left\|\begin{matrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{matrix}\right\| \triangleq \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix}$$

验证这种运算满足规范性、反称性、数乘性、可加性：

- 规范性：

**引理证明** 定义一种运算：

$$\left\|\begin{matrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{matrix}\right\| \triangleq \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix}$$

验证这种运算满足规范性、反称性、数乘性、可加性：

- 规范性： $\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\| =$

**引理证明** 定义一种运算：

$$\left\|\begin{matrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{matrix}\right\| \triangleq \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix}$$

验证这种运算满足规范性、反称性、数乘性、可加性：

- 规范性： $\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

**引理证明** 定义一种运算：

$$\left\|\begin{matrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{matrix}\right\| \triangleq \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix}$$

验证这种运算满足规范性、反称性、数乘性、可加性：

- 规范性：$\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

**引理证明** 定义一种运算：

$$\left\| \begin{matrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{matrix} \right\| \triangleq \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix}$$

验证这种运算满足规范性、反称性、数乘性、可加性：

- 规范性：$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$
- 反称性：

**引理证明** 定义一种运算：

$$\left\|\begin{matrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{matrix}\right\| \triangleq \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix}$$

验证这种运算满足规范性、反称性、数乘性、可加性：

- 规范性： $\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$
- 反称性：比如，

$$\left\|\begin{matrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{matrix}\right\| = \qquad -\left\|\begin{matrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{matrix}\right\|$$

**引理证明** 定义一种运算：

$$\left\|\begin{matrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{matrix}\right\| \triangleq \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix}$$

验证这种运算满足规范性、反称性、数乘性、可加性：

- 规范性：$\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$
- 反称性：比如，

$$\left\|\begin{matrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{matrix}\right\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} \qquad -\left\|\begin{matrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{matrix}\right\|$$

**引理证明** 定义一种运算：

$$\left\|\begin{matrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{matrix}\right\| \triangleq \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix}$$

验证这种运算满足规范性、反称性、数乘性、可加性：

- 规范性： $\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$
- 反称性：比如，

$$\left\|\begin{matrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{matrix}\right\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & x & y & z \\ 0 & u & v & w \end{vmatrix} \quad -\left\|\begin{matrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{matrix}\right\|$$

**引理证明** 定义一种运算：

$$\left\| \begin{matrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{matrix} \right\| \triangleq \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix}$$

验证这种运算满足规范性、反称性、数乘性、可加性：

- 规范性： $\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$
- 反称性：比如，

$$\left\| \begin{matrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{matrix} \right\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & x & y & z \\ 0 & u & v & w \end{vmatrix} = - \left\| \begin{matrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{matrix} \right\|$$

- 数乘性：

- 数乘性：比如，

$$\left\|\begin{matrix} a & b & c \\ ku & kv & kw \\ x & y & z \end{matrix}\right\| = k\left\|\begin{matrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{matrix}\right\|$$

- 数乘性：比如，

$$\left\|\begin{matrix} a & b & c \\ ku & kv & kw \\ x & y & z \end{matrix}\right\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & ku & kv & kw \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} \qquad k\left\|\begin{matrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{matrix}\right\|$$

- 数乘性：比如，

$$\left\|\begin{matrix} a & b & c \\ ku & kv & kw \\ x & y & z \end{matrix}\right\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & ku & kv & kw \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} \quad k\left\|\begin{matrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{matrix}\right\|$$

- 数乘性：比如，

$$\left\|\begin{matrix} a & b & c \\ ku & kv & kw \\ x & y & z \end{matrix}\right\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & ku & kv & kw \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} = k \left\|\begin{matrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{matrix}\right\|$$

- 数乘性：比如，

$$\left\| \begin{matrix} a & b & c \\ ku & kv & kw \\ x & y & z \end{matrix} \right\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & ku & kv & kw \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} = k \left\| \begin{matrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{matrix} \right\|$$

- 可加性：

- 数乘性：比如，

$$\begin{Vmatrix} a & b & c \\ ku & kv & kw \\ x & y & z \end{Vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & ku & kv & kw \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} = k \begin{Vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{Vmatrix}$$

- 可加性：比如，

$$\begin{Vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x+p & y+q & z+r \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ p & q & r \end{Vmatrix}$$

- 数乘性：比如，

$$\left\|\begin{array}{ccc} a & b & c \\ ku & kv & kw \\ x & y & z \end{array}\right\| = \left|\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & ku & kv & kw \\ 0 & x & y & z \end{array}\right| = k\left|\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{array}\right| = k\left\|\begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{array}\right\|$$

- 可加性：比如，

$$\left\|\begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ x+p & y+q & z+r \end{array}\right\| = \left|\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x+p & y+q & z+r \end{array}\right|$$

$$\left\|\begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{array}\right\| + \left\|\begin{array}{ccc} a & b & c \\ u & v & w \\ p & q & r \end{array}\right\|$$

- 数乘性：比如，

$$\left\|\begin{matrix} a & b & c \\ ku & kv & kw \\ x & y & z \end{matrix}\right\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & ku & kv & kw \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} = k\left\|\begin{matrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{matrix}\right\|$$

- 可加性：比如，

$$\left\|\begin{matrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x+p & y+q & z+r \end{matrix}\right\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x+p & y+q & z+r \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & p & q & r \end{vmatrix} \quad \left\|\begin{matrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{matrix}\right\| + \left\|\begin{matrix} a & b & c \\ u & v & w \\ p & q & r \end{matrix}\right\|$$

- 数乘性：比如，

$$\left\|\begin{matrix} a & b & c \\ ku & kv & kw \\ x & y & z \end{matrix}\right\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & ku & kv & kw \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} = k\left\|\begin{matrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{matrix}\right\|$$

- 可加性：比如，

$$\left\|\begin{matrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x+p & y+q & z+r \end{matrix}\right\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x+p & y+q & z+r \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & p & q & r \end{vmatrix} = \left\|\begin{matrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{matrix}\right\| + \left\|\begin{matrix} a & b & c \\ u & v & w \\ p & q & r \end{matrix}\right\|$$

- 数乘性：比如，

$$\begin{Vmatrix} a & b & c \\ ku & kv & kw \\ x & y & z \end{Vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & ku & kv & kw \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} = k \begin{Vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{Vmatrix}$$

- 可加性：比如，

$$\begin{Vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x+p & y+q & z+r \end{Vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x+p & y+q & z+r \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & p & q & r \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ p & q & r \end{Vmatrix}$$

所以：

$$\begin{Vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{Vmatrix}$$

- 数乘性：比如，

$$\left\|\begin{matrix} a & b & c \\ ku & kv & kw \\ x & y & z \end{matrix}\right\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & ku & kv & kw \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} = k\left\|\begin{matrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{matrix}\right\|$$

- 可加性：比如，

$$\left\|\begin{matrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x+p & y+q & z+r \end{matrix}\right\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x+p & y+q & z+r \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & p & q & r \end{vmatrix} = \left\|\begin{matrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{matrix}\right\| + \left\|\begin{matrix} a & b & c \\ u & v & w \\ p & q & r \end{matrix}\right\|$$

所以：

$$\left\|\begin{matrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{matrix}\right\| \overset{\text{唯一性}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

- 数乘性：比如，

$$\left\|\begin{matrix} a & b & c \\ ku & kv & kw \\ x & y & z \end{matrix}\right\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & ku & kv & kw \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} = k\left\|\begin{matrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{matrix}\right\|$$

- 可加性：比如，

$$\left\|\begin{matrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x+p & y+q & z+r \end{matrix}\right\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x+p & y+q & z+r \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & p & q & r \end{vmatrix} = \left\|\begin{matrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{matrix}\right\| + \left\|\begin{matrix} a & b & c \\ u & v & w \\ p & q & r \end{matrix}\right\|$$

所以：$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} = \left\|\begin{matrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{matrix}\right\| \overset{\text{唯一性}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

回到 4 阶行列式按第一行的展开公式的证明:

$$\begin{vmatrix} \color{red}{a_{11}} & \color{red}{a_{12}} & \color{red}{a_{13}} & \color{red}{a_{14}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

回到 4 阶行列式按第一行的展开公式的证明:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

回到 4 阶行列式按第一行的展开公式的证明：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

回到 4 阶行列式按第一行的展开公式的证明:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

回到 4 阶行列式按第一行的展开公式的证明：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

回到 4 阶行列式按第一行的展开公式的证明:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{12} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

回到 4 阶行列式按第一行的展开公式的证明:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{12} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & 0 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & 0 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

回到 4 阶行列式按第一行的展开公式的证明:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

回到 4 阶行列式按第一行的展开公式的证明:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

回到 4 阶行列式按第一行的展开公式的证明：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

回到 4 阶行列式按第一行的展开公式的证明：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

# 行列式展开例子

**例 1** 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开，算出行列式

**解**

# 行列式展开例子

**例 1** 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开，算出行列式

**解** $D = 1 \qquad\qquad 0 \qquad\qquad 1$

# 行列式展开例子

**例 1** 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开，算出行列式

**解** $D = 1 \cdot A_{21} \quad 0 \quad\quad\quad 1$

# 行列式展开例子

**例 1** 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开，算出行列式

**解** $D = 1 \cdot A_{21} \quad 0 \cdot A_{22} \quad 1$

# 行列式展开例子

**例 1** 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开，算出行列式

**解** $D = 1 \cdot A_{21} \quad 0 \cdot A_{22} \quad 1 \cdot A_{23}$

# 行列式展开例子

**例 1** 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开，算出行列式

**解** $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

# 行列式展开例子

**例 1** 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开，算出行列式

**解** $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix}$$

# 行列式展开例子

**例 1** 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开，算出行列式

**解** $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix}$$

# 行列式展开例子

**例 1** 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开，算出行列式

**解** $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}$$

# 行列式展开例子

**例 1** 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开，算出行列式

**解** $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix}$$

# 行列式展开例子

**例 1** 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开，算出行列式

**解**

$$D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}$$

# 行列式展开例子

**例 1** 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开，算出行列式

**解** $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix}$$

# 行列式展开例子

**例 1** 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开，算出行列式

**解** $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

# 行列式展开例子

**例 1** 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开，算出行列式

**解**

$$\begin{aligned} D &= 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23} \\ &= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \\ &= -11 + 0 - 14 = -25 \end{aligned}$$

# 行列式展开例子

**例 1** 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开，算出行列式

**解**

$$D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -11 + 0 - 14 = -25$$

---

**例 2** 将行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$ 按第 1 行展开，算出行列式

**解**

# 行列式展开例子

**例 1** 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开，算出行列式

**解**

$$
\begin{aligned}
D &= 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23} \\
&= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \\
&= -11 + 0 - 14 = -25
\end{aligned}
$$

---

**例 2** 将行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$ 按第 1 行展开，算出行列式

**解** $D = 1 \qquad\qquad 1 \qquad\qquad 1$

# 行列式展开例子

**例 1** 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开，算出行列式

**解** $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -11 + 0 - 14 = -25$$

---

**例 2** 将行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$ 按第 1 行展开，算出行列式

**解** $D = 1 \cdot A_{11} \quad 1 \qquad\qquad 1$

# 行列式展开例子

**例 1** 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开，算出行列式

**解** $D = 1\cdot A_{21} + 0\cdot A_{22} + 1\cdot A_{23}$

$$= 1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -11 + 0 - 14 = -25$$

---

**例 2** 将行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$ 按第 1 行展开，算出行列式

**解** $D = 1\cdot A_{11} \quad 1\cdot A_{12} \quad 1$

# 行列式展开例子

**例 1** 将行列式$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$按第 2 行展开，算出行列式

**解** $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -11 + 0 - 14 = -25$$

---

**例 2** 将行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$按第 1 行展开，算出行列式

**解** $D = 1 \cdot A_{11} \quad 1 \cdot A_{12} \quad 1 \cdot A_{13}$

# 行列式展开例子

**例 1** 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开，算出行列式

**解** $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -11 + 0 - 14 = -25$$

---

**例 2** 将行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$ 按第 1 行展开，算出行列式

**解** $D = 1 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{12} + 1 \cdot A_{13}$

# 行列式展开例子

**例 1** 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开，算出行列式

**解** $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -11 + 0 - 14 = -25$$

---

**例 2** 将行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$ 按第 1 行展开，算出行列式

**解** $D = 1 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{12} + 1 \cdot A_{13}$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \left| \qquad \right| + 1 \cdot (-1)^{1+2} \left| \qquad \right| + 1 \cdot (-1)^{1+3} \left| \qquad \right|$$

# 行列式展开例子

**例 1** 将行列式 $\begin{vmatrix}4&3&2\\1&0&1\\2&5&7\end{vmatrix}$ 按第 2 行展开，算出行列式

**解** $D = 1\cdot A_{21}+0\cdot A_{22}+1\cdot A_{23}$

$$= 1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}3&2\\5&7\end{vmatrix}+0\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}4&2\\2&7\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}4&3\\2&5\end{vmatrix}$$

$$=-11+0-14=-25$$

---

**例 2** 将行列式 $\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&4\\4&9&16\end{vmatrix}$ 按第 1 行展开，算出行列式

**解** $D = 1\cdot A_{11}+1\cdot A_{12}+1\cdot A_{13}$

$$=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}$$

# 行列式展开例子

**例 1** 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开，算出行列式

**解** $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -11 + 0 - 14 = -25$$

---

**例 2** 将行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$ 按第 1 行展开，算出行列式

**解** $D = 1 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{12} + 1 \cdot A_{13}$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 16 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix}$$

# 行列式展开例子

**例 1** 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开，算出行列式

**解** $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -11 + 0 - 14 = -25$$

---

**例 2** 将行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$ 按第 1 行展开，算出行列式

**解** $D = 1 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{12} + 1 \cdot A_{13}$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 16 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix}$$

# 行列式展开例子

**例 1** 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开，算出行列式

**解** $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -11 + 0 - 14 = -25$$

---

**例 2** 将行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$ 按第 1 行展开，算出行列式

**解** $D = 1 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{12} + 1 \cdot A_{13}$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 16 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}$$

# 行列式展开例子

**例 1** 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开，算出行列式

**解** $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -11 + 0 - 14 = -25$$

---

**例 2** 将行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$ 按第 1 行展开，算出行列式

**解** $D = 1 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{12} + 1 \cdot A_{13}$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 16 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}$$

# 行列式展开例子

**例 1** 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开，算出行列式

**解** $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -11 + 0 - 14 = -25$$

---

**例 2** 将行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$ 按第 1 行展开，算出行列式

**解** $D = 1 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{12} + 1 \cdot A_{13}$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 16 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}$$

# 行列式展开例子

**例 1** 将行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开，算出行列式

**解** $D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23}$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -11 + 0 - 14 = -25$$

---

**例 2** 将行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$ 按第 1 行展开，算出行列式

**解** $D = 1 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{12} + 1 \cdot A_{13}$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 16 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= 12 - 16 + 6 = 2$$

## 例 3

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

**例 3** 可利用行列式性质，将第 2 行化为 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$，再展开：

$$\begin{vmatrix}4 & 3 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 5 & 7\end{vmatrix}$$

**例 3** 可利用行列式性质，将第 2 行化为 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$，再展开：

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3-c_1}$$

**例 3** 可利用行列式性质，将第 2 行化为 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$，再展开：

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3 - c_1} \begin{vmatrix} 4 & 3 & \phantom{0} \\ 1 & 0 & \\ 2 & 5 & \end{vmatrix} =$$

**例 3** 可利用行列式性质，将第 2 行化为 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$，再展开：

$$\begin{vmatrix}4 & 3 & 2\\1 & 0 & 1\\2 & 5 & 7\end{vmatrix} \xlongequal{c_3-c_1} \begin{vmatrix}4 & 3 & -2\\1 & 0 & 0\\2 & 5 & 5\end{vmatrix} =$$

**例 3** 可利用行列式性质，将第 2 行化为 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$，再展开：

$$\begin{vmatrix}4 & 3 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 5 & 7\end{vmatrix} \xlongequal{c_3-c_1} \begin{vmatrix}4 & 3 & -2\\ 1 & 0 & 0\\ 2 & 5 & 5\end{vmatrix} = 1\cdot A_{21} + 0\cdot A_{22} + 0\cdot A_{23}$$

**例 3** 可利用行列式性质，将第 2 行化为 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$，再展开：

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3 - c_1} \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}$$

**例 3** 可利用行列式性质，将第 2 行化为 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$，再展开：

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3-c_1} \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix}$$

**例 3** 可利用行列式性质，将第 2 行化为 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$，再展开：

$$\begin{vmatrix}4 & 3 & 2\\1 & 0 & 1\\2 & 5 & 7\end{vmatrix} \xlongequal{c_3-c_1} \begin{vmatrix}4 & 3 & -2\\1 & 0 & 0\\2 & 5 & 5\end{vmatrix} = 1\cdot A_{21} + 0\cdot A_{22} + 0\cdot A_{23}$$

$$= 1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}3 & -2\\5 & 5\end{vmatrix}$$

**例 3** 可利用行列式性质，将第 2 行化为 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$，再展开：

$$\begin{vmatrix}4 & 3 & 2\\1 & 0 & 1\\2 & 5 & 7\end{vmatrix} \xlongequal{c_3-c_1} \begin{vmatrix}4 & 3 & -2\\1 & 0 & 0\\2 & 5 & 5\end{vmatrix} = 1\cdot A_{21} + 0\cdot A_{22} + 0\cdot A_{23}$$

$$= 1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}3 & -2\\5 & 5\end{vmatrix} = -25$$

**例 3** 可利用行列式性质，将第 2 行化为 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$，再展开：

$$\begin{vmatrix}4 & 3 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 5 & 7\end{vmatrix} \xlongequal{c_3-c_1} \begin{vmatrix}4 & 3 & -2\\ 1 & 0 & 0\\ 2 & 5 & 5\end{vmatrix} = 1\cdot A_{21} + 0\cdot A_{22} + 0\cdot A_{23}$$

$$= 1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}3 & -2\\ 5 & 5\end{vmatrix} = -25$$

---

**例 4**

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 4\\ 4 & 9 & 16\end{vmatrix}$$

**例 3** 可利用行列式性质，将第 2 行化为 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$，再展开：

$$\begin{vmatrix}4 & 3 & 2\\1 & 0 & 1\\2 & 5 & 7\end{vmatrix} \xlongequal{c_3-c_1} \begin{vmatrix}4 & 3 & -2\\1 & 0 & 0\\2 & 5 & 5\end{vmatrix} = 1\cdot A_{21} + 0\cdot A_{22} + 0\cdot A_{23}$$

$$= 1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}3 & -2\\5 & 5\end{vmatrix} = -25$$

---

**例 4** 利用行列式的变换，将第 1 行化为 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$，再按第一行展开：

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 3 & 4\\4 & 9 & 16\end{vmatrix}$$

**例 3** 可利用行列式性质，将第 2 行化为 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$，再展开：

$$\begin{vmatrix}4 & 3 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 5 & 7\end{vmatrix} \xlongequal{c_3-c_1} \begin{vmatrix}4 & 3 & -2\\ 1 & 0 & 0\\ 2 & 5 & 5\end{vmatrix} = 1\cdot A_{21}+0\cdot A_{22}+0\cdot A_{23}$$

$$=1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}3 & -2\\ 5 & 5\end{vmatrix} = -25$$

---

**例 4** 利用行列式的变换，将第 1 行化为 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$，再按第一行展开：

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 4\\ 4 & 9 & 16\end{vmatrix} \xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1}$$

**例 3** 可利用行列式性质，将第 2 行化为 $(1 \quad 0 \quad 0)$，再展开：

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3 - c_1} \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = -25$$

---

**例 4** 利用行列式的变换，将第 1 行化为 $(1 \quad 0 \quad 0)$，再按第一行展开：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} \xlongequal[c_3 - c_1]{c_2 - c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \\ 2 & 1 & \\ 4 & 5 & \end{vmatrix}$$

**例 3** 可利用行列式性质，将第 2 行化为 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$，再展开：

$$\begin{vmatrix}4 & 3 & 2\\1 & 0 & 1\\2 & 5 & 7\end{vmatrix} \xlongequal{c_3-c_1} \begin{vmatrix}4 & 3 & -2\\1 & 0 & 0\\2 & 5 & 5\end{vmatrix} = 1\cdot A_{21} + 0\cdot A_{22} + 0\cdot A_{23}$$

$$= 1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}3 & -2\\5 & 5\end{vmatrix} = -25$$

---

**例 4** 利用行列式的变换，将第 1 行化为 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$，再按第一行展开：

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 3 & 4\\4 & 9 & 16\end{vmatrix} \xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1} \begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\2 & 1 & 2\\4 & 5 & 12\end{vmatrix}$$

**例 3** 可利用行列式性质，将第 2 行化为 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$，再展开：

$$\begin{vmatrix}4 & 3 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 5 & 7\end{vmatrix} \xlongequal{c_3-c_1} \begin{vmatrix}4 & 3 & -2\\ 1 & 0 & 0\\ 2 & 5 & 5\end{vmatrix} = 1\cdot A_{21} + 0\cdot A_{22} + 0\cdot A_{23}$$

$$= 1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}3 & -2\\ 5 & 5\end{vmatrix} = -25$$

**例 4** 利用行列式的变换，将第 1 行化为 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$，再按第一行展开：

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 4\\ 4 & 9 & 16\end{vmatrix} \xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1} \begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 2\\ 4 & 5 & 12\end{vmatrix} = 1\cdot A_{11} + 0\cdot A_{12} + 0\cdot A_{13}$$

**例 3** 可利用行列式性质，将第 2 行化为 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$，再展开：

$$\begin{vmatrix}4 & 3 & 2\\1 & 0 & 1\\2 & 5 & 7\end{vmatrix} \xlongequal{c_3-c_1} \begin{vmatrix}4 & 3 & -2\\1 & 0 & 0\\2 & 5 & 5\end{vmatrix} = 1\cdot A_{21} + 0\cdot A_{22} + 0\cdot A_{23}$$

$$= 1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}3 & -2\\5 & 5\end{vmatrix} = -25$$

---

**例 4** 利用行列式的变换，将第 1 行化为 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$，再按第一行展开：

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 3 & 4\\4 & 9 & 16\end{vmatrix} \xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1} \begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\2 & 1 & 2\\4 & 5 & 12\end{vmatrix} = 1\cdot A_{11} + 0\cdot A_{12} + 0\cdot A_{13}$$

$$= 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}$$

**例 3** 可利用行列式性质，将第 2 行化为 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$，再展开：

$$\begin{vmatrix}4 & 3 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 5 & 7\end{vmatrix} \xlongequal{c_3-c_1} \begin{vmatrix}4 & 3 & -2\\ 1 & 0 & 0\\ 2 & 5 & 5\end{vmatrix} = 1\cdot A_{21} + 0\cdot A_{22} + 0\cdot A_{23}$$

$$= 1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}3 & -2\\ 5 & 5\end{vmatrix} = -25$$

---

**例 4** 利用行列式的变换，将第 1 行化为 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$，再按第一行展开：

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 4\\ 4 & 9 & 16\end{vmatrix} \xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1} \begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 2\\ 4 & 5 & 12\end{vmatrix} = 1\cdot A_{11} + 0\cdot A_{12} + 0\cdot A_{13}$$

$$= 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix}$$

**例 3** 可利用行列式性质，将第 2 行化为 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$，再展开：

$$\begin{vmatrix}4 & 3 & 2\\1 & 0 & 1\\2 & 5 & 7\end{vmatrix} \xlongequal{c_3-c_1} \begin{vmatrix}4 & 3 & -2\\1 & 0 & 0\\2 & 5 & 5\end{vmatrix} = 1\cdot A_{21} + 0\cdot A_{22} + 0\cdot A_{23}$$

$$= 1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}3 & -2\\5 & 5\end{vmatrix} = -25$$

---

**例 4** 利用行列式的变换，将第 1 行化为 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$，再按第一行展开：

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 3 & 4\\4 & 9 & 16\end{vmatrix} \xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1} \begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\2 & 1 & 2\\4 & 5 & 12\end{vmatrix} = 1\cdot A_{11} + 0\cdot A_{12} + 0\cdot A_{13}$$

$$= 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 2\\5 & 12\end{vmatrix}$$

**例 3** 可利用行列式性质，将第 2 行化为 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$，再展开：

$$\begin{vmatrix}4 & 3 & 2\\1 & 0 & 1\\2 & 5 & 7\end{vmatrix} \xlongequal{c_3 - c_1} \begin{vmatrix}4 & 3 & -2\\1 & 0 & 0\\2 & 5 & 5\end{vmatrix} = 1\cdot A_{21} + 0\cdot A_{22} + 0\cdot A_{23}$$

$$= 1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}3 & -2\\5 & 5\end{vmatrix} = -25$$

---

**例 4** 利用行列式的变换，将第 1 行化为 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$，再按第一行展开：

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 3 & 4\\4 & 9 & 16\end{vmatrix} \underset{c_3 - c_1}{\xlongequal{c_2 - c_1}} \begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\2 & 1 & 2\\4 & 5 & 12\end{vmatrix} = 1\cdot A_{11} + 0\cdot A_{12} + 0\cdot A_{13}$$

$$= 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 2\\5 & 12\end{vmatrix} = 2$$

# 行列式的计算方法 II：降阶法

1. 利用行列式性质，将某一行（或列）化为至多只有一个非零元素
2. 将行列式按该行（或列）展开，从而化为低阶行列式

# 行列式的计算方法 II：降阶法

1. 利用行列式性质，将某一行（或列）化为至多只有一个非零元素
2. 将行列式按该行（或列）展开，从而化为低阶行列式
3. 重复以上操作，直至化为 2 阶行列式

# 行列式的计算方法 II：降阶法

1. 利用行列式性质，将某一行（或列）化为至多只有一个非零元素
2. 将行列式按该行（或列）展开，从而化为低阶行列式
3. 重复以上操作，直至化为 2 阶行列式

图示：
$$\begin{vmatrix} * & * & * & * \\ * & * & a & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{vmatrix}$$

# 行列式的计算方法 II：降阶法

1. 利用行列式性质，将某一行（或列）化为至多只有一个非零元素
2. 将行列式按该行（或列）展开，从而化为低阶行列式
3. 重复以上操作，直至化为 2 阶行列式

图示：

$$\begin{vmatrix} * & * & * & * \\ * & * & a & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{运算}} \begin{vmatrix} * & * & 0 & * \\ * & * & a & * \\ * & * & 0 & * \\ * & * & 0 & * \end{vmatrix}$$

# 行列式的计算方法 II：降阶法

1. 利用行列式性质，将某一行（或列）化为至多只有一个非零元素
2. 将行列式按该行（或列）展开，从而化为低阶行列式
3. 重复以上操作，直至化为 2 阶行列式

图示：

$$\begin{vmatrix} * & * & * & * \\ * & * & a & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{运算}} \begin{vmatrix} * & * & 0 & * \\ * & * & a & * \\ * & * & 0 & * \\ * & * & 0 & * \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{展开}} \begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix}$$

# 行列式的计算方法 II：降阶法

1. 利用行列式性质，将某一行（或列）化为至多只有一个非零元素
2. 将行列式按该行（或列）展开，从而化为低阶行列式
3. 重复以上操作，直至化为 2 阶行列式

图示：

$$\begin{vmatrix} * & * & * & * \\ * & * & a & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{运算}} \begin{vmatrix} * & * & 0 & * \\ * & * & a & * \\ * & * & 0 & * \\ * & * & 0 & * \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{展开}} \begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{选择}} \begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & b \\ * & * & * \end{vmatrix}$$

# 行列式的计算方法 II：降阶法

1. 利用行列式性质，将某一行（或列）化为至多只有一个非零元素
2. 将行列式按该行（或列）展开，从而化为低阶行列式
3. 重复以上操作，直至化为 2 阶行列式

图示：

$$\begin{vmatrix} * & * & * & * \\ * & * & a & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{运算}} \begin{vmatrix} * & * & 0 & * \\ * & * & a & * \\ * & * & 0 & * \\ * & * & 0 & * \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{展开}} \begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{选择}} \begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & b \\ * & * & * \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{运算}} \begin{vmatrix} * & * & * \\ 0 & 0 & b \\ * & * & * \end{vmatrix}$$

# 行列式的计算方法 II：降阶法

1. 利用行列式性质，将某一行（或列）化为至多只有一个非零元素
2. 将行列式按该行（或列）展开，从而化为低阶行列式
3. 重复以上操作，直至化为 2 阶行列式

图示：

$$\begin{vmatrix} * & * & * & * \\ * & * & a & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{运算}} \begin{vmatrix} * & * & 0 & * \\ * & * & a & * \\ * & * & 0 & * \\ * & * & 0 & * \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{展开}} \begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{选择}} \begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & b \\ * & * & * \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{运算}} \begin{vmatrix} * & * & * \\ 0 & 0 & b \\ * & * & * \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{展开}} \begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix}$$

# 行列式的计算方法 II：降阶法

1. 利用行列式性质，将某一行（或列）化为至多只有一个非零元素
2. 将行列式按该行（或列）展开，从而化为低阶行列式
3. 重复以上操作，直至化为 2 阶行列式

图示：

$$\begin{vmatrix} * & * & * & * \\ * & * & a & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{运算}} \begin{vmatrix} * & * & 0 & * \\ * & * & a & * \\ * & * & 0 & * \\ * & * & 0 & * \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{展开}} \begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{选择}} \begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & b \\ * & * & * \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{运算}} \begin{vmatrix} * & * & * \\ 0 & 0 & b \\ * & * & * \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{展开}} \begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix}$$

**注** 对比 **化行列式为三角行列式的方法**，更推荐 **降阶法**，因为更灵活！

**练习 1** 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

**练习 1** 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

**提示** 先化第二行为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，再按第二行展开

**练习 1** 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

**提示** 先化第二行为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，再按第二行展开

**解**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

**练习 1** 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

**提示** 先化第二行为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，再按第二行展开

**解**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3-c_1}$$

**练习 1** 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

**提示** 先化第二行为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，再按第二行展开

**解**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3-c_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & & \\ 1 & 0 & & \\ 3 & -1 & & \\ 1 & 2 & & \end{vmatrix} =$$

**练习 1** 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

**提示** 先化第二行为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，再按第二行展开

**解**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3 - c_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \\ 1 & 0 & 0 & \\ 3 & -1 & -4 & \\ 1 & 2 & -1 & \end{vmatrix} =$$

**练习 1** 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

**提示** 先化第二行为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，再按第二行展开

**解**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4-2c_1]{c_3-c_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \\ 1 & 0 & 0 & \\ 3 & -1 & -4 & \\ 1 & 2 & -1 & \end{vmatrix} =$$

**练习 1** 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

**提示** 先化第二行为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，再按第二行展开

**解**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \overset{c_3-c_1}{\underset{c_4-2c_1}{=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} =$$

**练习 1** 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

**提示** 先化第二行为 $(1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$，再按第二行展开

**解**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \overset{c_3-c_1}{\underset{c_4-2c_1}{=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix}$$

**练习 1** 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

**提示** 先化第二行为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，再按第二行展开

**解**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4-2c_1]{c_3-c_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix}$$

**练习 1** 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

**提示** 先化第二行为 $(1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$，再按第二行展开

**解**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4-2c_1]{c_3-c_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2-c_1}$$

**练习 1** 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

**提示** 先化第二行为 $(1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$，再按第二行展开

**解**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4-2c_1]{c_3-c_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2-c_1} -2 \begin{vmatrix} 1 & & \\ -1 & & \\ 2 & & \end{vmatrix}$$

**练习 1** 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

**提示** 先化第二行为 $(1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$，再按第二行展开

**解**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4-2c_1]{c_3-c_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2-c_1} -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & \\ -1 & -3 & \\ 2 & -3 & \end{vmatrix}$$

**练习 1** 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

**提示** 先化第二行为 $(1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$，再按第二行展开

**解**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4-2c_1]{c_3-c_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} \xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1} -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & \\ -1 & -3 & \\ 2 & -3 & \end{vmatrix}$$

**练习 1** 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

**提示** 先化第二行为 $(1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$，再按第二行展开

**解**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4-2c_1]{c_3-c_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} \xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1} -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -5 \\ 2 & -3 & -9 \end{vmatrix}$$

**练习 1** 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

**提示** 先化第二行为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，再按第二行展开

**解**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4-2c_1]{c_3-c_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} \xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1} -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -5 \\ 2 & -3 & -9 \end{vmatrix} = -2\cdot$$

**练习 1** 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

**提示** 先化第二行为 $(1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$，再按第二行展开

**解**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4-2c_1]{c_3-c_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= -2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} \xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1} -2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -5 \\ 2 & -3 & -9 \end{vmatrix} = -2\cdot 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -3 & -5 \\ -3 & -9 \end{vmatrix}$$

**练习 1** 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

**提示** 先化第二行为 $(1\quad 0\quad 0\quad 0)$，再按第二行展开

**解**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \overset{c_3-c_1}{\underset{c_4-2c_1}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} \overset{c_2-c_1}{\underset{c_3-c_1}{=\!=\!=}} -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -5 \\ 2 & -3 & -9 \end{vmatrix} = -2\cdot 1\cdot(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ -3 & -9 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_2-r_1}{=\!=\!=}$$

**练习 1** 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

**提示** 先化第二行为 $(1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$，再按第二行展开

**解**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4-2c_1]{c_3-c_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} \xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1} -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -5 \\ 2 & -3 & -9 \end{vmatrix} = -2\cdot 1\cdot(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ -3 & -9 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2-r_1} -2\cdot 1\cdot(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}$$

**练习 1** 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

**提示** 先化第二行为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，再按第二行展开

**解**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4-2c_1]{c_3-c_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} \xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1} -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -5 \\ 2 & -3 & -9 \end{vmatrix} = -2\cdot 1\cdot(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ -3 & -9 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2-r_1} -2\cdot 1\cdot(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -2\cdot(-3)\cdot(-4) = -24$$

**练习 2** 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$

**练习 2** 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$ （**提示** 先化第一列为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，再展开）

**练习 2** 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$ (**提示** 先化第一列为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，再展开)

**解**

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$$

**练习 2** 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$ （**提示** 先化第一列为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，再展开）

**解**

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2-2r_1}$$

**练习 2** 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$ （**提示** 先化第一列为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，再展开）

**解**

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix} =$$

**练习 2** 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$ （**提示** 先化第一列为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，再展开）

**解**

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 7 & -5 & 13 \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix} =$$

**练习 2** 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$ （**提示** 先化第一列为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，再展开）

**解**

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 7 & -5 & 13 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ & & & \end{vmatrix} =$$

**练习 2** 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$ （**提示** 先化第一列为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，再展开）

**解**

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \overset{r_2-2r_1}{\underset{r_4-r_1}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 7 & -5 & 13 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ & & & \end{vmatrix} =$$

**练习 2** 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$ （**提示** 先化第一列为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，再展开）

**解**

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_1]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 7 & -5 & 13 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} =$$

**练习 2** 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$ （**提示** 先化第一列为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，再展开）

**解**

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \overset{r_2-2r_1}{\underset{r_4-r_1}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 7 & -5 & 13 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$$

**练习 2** 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$ （**提示** 先化第一列为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，再展开）

**解**

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_1]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 7 & -5 & 13 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1+2c_2}$$

**练习 2** 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$ （**提示** 先化第一列为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，再展开）

**解**

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_1]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 7 & -5 & 13 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1+2c_2} \begin{vmatrix} & -5 & \\ & -1 & \\ & -7 & \end{vmatrix}$$

**练习 2** 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$ （**提示** 先化第一列为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，再展开）

**解**

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_1]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 7 & -5 & 13 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1+2c_2} \begin{vmatrix} -3 & -5 & \\ 0 & -1 & \\ -7 & -7 & \end{vmatrix}$$

**练习 2** 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$ （**提示** 先化第一列为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，再展开）

**解**

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_1]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 7 & -5 & 13 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3+2c_2]{c_1+2c_2} \begin{vmatrix} -3 & -5 & \\ 0 & -1 & \\ -7 & -7 & \end{vmatrix}$$

**练习 2** 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$ （**提示** 先化第一列为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，再展开）

**解**

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_1]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 7 & -5 & 13 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3+2c_2]{c_1+2c_2} \begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -7 & -7 & -2 \end{vmatrix}$$

**练习 2** 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$ （**提示** 先化第一列为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，再展开）

**解**

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_1]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 7 & -5 & 13 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3+2c_2]{c_1+2c_2} \begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -7 & -7 & -2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot$$

**练习 2** 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$（**提示** 先化第一列为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，再展开）

**解**

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_1]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 7 & -5 & 13 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3+2c_2]{c_1+2c_2} \begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -7 & -7 & -2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -7 & -2 \end{vmatrix}$$

**练习 2** 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$（**提示** 先化第一列为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，再展开）

**解**

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 - r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 7 & -5 & 13 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3 + 2c_2]{c_1 + 2c_2} \begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -7 & -7 & -2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -7 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \cdot (6 + 21)$$

**练习 2** 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$（**提示** 先化第一列为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，再展开）

**解**

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_1]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 7 & -5 & 13 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3+2c_2]{c_1+2c_2} \begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -7 & -7 & -2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -7 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)\cdot(6+21) = -27$$

**练习 3** 计算行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

**练习 3** 计算行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

**解**

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

**练习 3** 计算行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

**解**

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4-c_1]{c_3+c_1}$$

**练习 3** 计算行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

**解**

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4-c_1]{c_3+c_1} \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

**练习 3** 计算行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

**解**

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4-c_1]{c_3+c_1} \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第二行展开}}$$

**练习 3** 计算行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

**解**

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4-c_1]{c_3+c_1} \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第二行展开}} 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

**练习 3** 计算行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

**解**

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4-c_1]{c_3+c_1} \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第二行展开}} 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1}$$

**练习 3** 计算行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

**解**

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4-c_1]{c_3+c_1} \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第二行展开}} 1\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -6 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

**练习 3** 计算行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

**解**

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4-c_1]{c_3+c_1} \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第二行展开}} 1\cdot(-1)^{2+1}\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -6 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

**练习 3** 计算行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

**解**

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4-c_1]{c_3+c_1} \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第二行展开}} 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -6 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -22$$

**练习 4** 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 2 & \lambda & 2100 & -90 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$

**练习 4** 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 2 & \lambda & 2100 & -90 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$

**解**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 2 & \lambda & 2100 & -90 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

**练习 4** 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 2 & \lambda & 2100 & -90 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$

**解**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 2 & \lambda & 2100 & -90 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix} \overset{r_2-2r_1}{=\!=\!=\!=}$$

**练习 4** 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 2 & \lambda & 2100 & -90 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$

**解**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 2 & \lambda & 2100 & -90 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix} \overset{r_2-2r_1}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix}$$

**练习 4** 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 2 & \lambda & 2100 & -90 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$

**解**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 2 & \lambda & 2100 & -90 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix} \xlongequal{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 0 & \lambda-4 & 1900 & -96 \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix}$$

**练习 4** 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 2 & \lambda & 2100 & -90 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$

**解**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 2 & \lambda & 2100 & -90 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix} \xlongequal{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 0 & \lambda-4 & 1900 & -96 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

**练习 4** 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 2 & \lambda & 2100 & -90 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$

**解**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 2 & \lambda & 2100 & -90 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix} \xlongequal{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 0 & \lambda-4 & 1900 & -96 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} \lambda-4 & 1900 & -96 \\ 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

**练习 4** 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 2 & \lambda & 2100 & -90 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$

**解**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 2 & \lambda & 2100 & -90 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix} \xlongequal{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 0 & \lambda-4 & 1900 & -96 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} \lambda-4 & 1900 & -96 \\ 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-4)\begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

**练习 4** 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 2 & \lambda & 2100 & -90 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$

**解**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 2 & \lambda & 2100 & -90 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix} \xlongequal{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 0 & \lambda-4 & 1900 & -96 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} \lambda-4 & 1900 & -96 \\ 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-4) \begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-4)(\lambda^2-4)$$

**练习 4** 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 2 & \lambda & 2100 & -90 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$

**解**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 2 & \lambda & 2100 & -90 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix} \xlongequal{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 100 & 3 \\ 0 & \lambda-4 & 1900 & -96 \\ 0 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} \lambda-4 & 1900 & -96 \\ 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-4) \begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-4)(\lambda^2-4) = (\lambda-4)(\lambda-2)(\lambda+2)$$

# We are here now...

1. 余子式、代数余子式

2. 行列式的展开

3. 行列式的展开 II

$$a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

将其中 $a_{21}, a_{22}, a_{23}$ 分别换成任意数 $u, v, w$ 得:

$$a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

将其中 $a_{21}, a_{22}, a_{23}$ 分别换成任意数 $u, v, w$ 得:

$$\Rightarrow \quad uA_{21}+vA_{22}+wA_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ u & v & w \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

将其中 $a_{21}, a_{22}, a_{23}$ 分别换成任意数 $u, v, w$ 得:

$$\Rightarrow \quad uA_{21}+vA_{22}+wA_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ u & v & w \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

---

**例 1** 设行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$，计算 $A_{13}+4A_{23}-5A_{33}$

$$a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

将其中 $a_{21}, a_{22}, a_{23}$ 分别换成任意数 $u, v, w$ 得:

$$\Rightarrow \quad uA_{21} + vA_{22} + wA_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ u & v & w \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

---

**例 1** 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$，计算 $A_{13} + 4A_{23} - 5A_{33}$

**解** $\quad A_{13} + 4A_{23} - 5A_{33}$

$$a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

将其中 $a_{21}, a_{22}, a_{23}$ 分别换成任意数 $u, v, w$ 得:

$$\Rightarrow \quad uA_{21}+vA_{22}+wA_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ u & v & w \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

---

**例 1** 设行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$，计算 $A_{13}+4A_{23}-5A_{33}$

**解**

$$A_{13}+4A_{23}-5A_{33}=1\cdot A_{13}+4\cdot A_{23}+(-5)\cdot A_{33}$$

$$a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

将其中 $a_{21}, a_{22}, a_{23}$ 分别换成任意数 $u, v, w$ 得:

$$\Rightarrow \quad uA_{21}+vA_{22}+wA_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ u & v & w \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

---

**例 1** 设行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$，计算 $A_{13}+4A_{23}-5A_{33}$

**解**

$$A_{13}+4A_{23}-5A_{33}=1\cdot A_{13}+4\cdot A_{23}+(-5)\cdot A_{33}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 8 & -6 & -5 \end{vmatrix}$$

$$a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

将其中 $a_{21}, a_{22}, a_{23}$ 分别换成任意数 $u, v, w$ 得:

$$\Rightarrow \quad uA_{21}+vA_{22}+wA_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ u & v & w \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

---

**例 1** 设行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$，计算 $A_{13}+4A_{23}-5A_{33}$

**解** $$A_{13}+4A_{23}-5A_{33}=1\cdot A_{13}+4\cdot A_{23}+(-5)\cdot A_{33}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 8 & -6 & -5 \end{vmatrix} \overset{c_2-2c_1}{=\!=\!=\!=}$$

$$a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

将其中 $a_{21}, a_{22}, a_{23}$ 分别换成任意数 $u, v, w$ 得:

$$\Rightarrow \quad uA_{21}+vA_{22}+wA_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ u & v & w \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

---

**例 1** 设行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$，计算 $A_{13}+4A_{23}-5A_{33}$

**解**
$$A_{13}+4A_{23}-5A_{33}=1\cdot A_{13}+4\cdot A_{23}+(-5)\cdot A_{33}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 8 & -6 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2-2c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \\ 3 & -2 & \\ 8 & -22 & \end{vmatrix}$$

$$a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

将其中 $a_{21}, a_{22}, a_{23}$ 分别换成任意数 $u, v, w$ 得:

$$\Rightarrow \quad uA_{21}+vA_{22}+wA_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ u & v & w \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

---

**例 1** 设行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$，计算 $A_{13}+4A_{23}-5A_{33}$

**解**

$$A_{13}+4A_{23}-5A_{33}=1\cdot A_{13}+4\cdot A_{23}+(-5)\cdot A_{33}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 8 & -6 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal[c_3-c_1]{c_2-2c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \\ 3 & -2 & \\ 8 & -22 & \end{vmatrix}$$

$$a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

将其中 $a_{21}, a_{22}, a_{23}$ 分别换成任意数 $u, v, w$ 得:

$$\Rightarrow \quad uA_{21}+vA_{22}+wA_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ u & v & w \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

---

**例 1** 设行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$，计算 $A_{13}+4A_{23}-5A_{33}$

**解**

$$A_{13}+4A_{23}-5A_{33}=1\cdot A_{13}+4\cdot A_{23}+(-5)\cdot A_{33}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 8 & -6 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal[c_3-c_1]{c_2-2c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 8 & -22 & -13 \end{vmatrix}$$

$$a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

将其中 $a_{21}, a_{22}, a_{23}$ 分别换成任意数 $u, v, w$ 得:

$$\Rightarrow \quad uA_{21}+vA_{22}+wA_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ u & v & w \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

---

**例 1** 设行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$，计算 $A_{13}+4A_{23}-5A_{33}$

**解** $$A_{13}+4A_{23}-5A_{33}=1\cdot A_{13}+4\cdot A_{23}+(-5)\cdot A_{33}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 8 & -6 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal[c_3-c_1]{c_2-2c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 8 & -22 & -13 \end{vmatrix}=48$$

**例 2** 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$，计算第 2 行的余子式之和

**例 2** 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$，计算第 2 行的余子式之和

**解**

$$M_{21} + M_{22} + M_{23}$$

**例 2** 设行列式 $D=\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ 3 & 4 & 0\\ 8 & -6 & 5\end{vmatrix}$，计算第 2 行的余子式之和

**解**

$$M_{21}+M_{22}+M_{23}=(-1)\cdot A_{21}$$

**例 2** 设行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$，计算第 2 行的余子式之和

**解**

$$M_{21}+M_{22}+M_{23}=(-1)\cdot A_{21}+1\cdot A_{22}$$

**例 2** 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$，计算第 2 行的余子式之和

**解**

$$M_{21} + M_{22} + M_{23} = (-1) \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{22} + (-1) \cdot A_{23}$$

**例 2** 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$，计算第 2 行的余子式之和

**解**

$$M_{21} + M_{22} + M_{23} = (-1) \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{22} + (-1) \cdot A_{23}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$$

**例 2** 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$，计算第 2 行的余子式之和

**解**

$$M_{21} + M_{22} + M_{23} = (-1) \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{22} + (-1) \cdot A_{23}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 + c_2}$$

**例 2** 设行列式 $D=\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ 3 & 4 & 0\\ 8 & -6 & 5\end{vmatrix}$，计算第 2 行的余子式之和

**解**

$$M_{21}+M_{22}+M_{23}=(-1)\cdot A_{21}+1\cdot A_{22}+(-1)\cdot A_{23}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ -1 & 1 & -1\\ 8 & -6 & 5\end{vmatrix} \xlongequal{c_1+c_2} \begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$$

**例 2** 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$，计算第 2 行的余子式之和

**解**

$$M_{21} + M_{22} + M_{23} = (-1) \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{22} + (-1) \cdot A_{23}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 + c_2} \begin{vmatrix} 3 & & \\ 0 & & \\ 2 & & \end{vmatrix}$$

**例 2** 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$，计算第 2 行的余子式之和

**解**

$$M_{21} + M_{22} + M_{23} = (-1) \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{22} + (-1) \cdot A_{23}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 + c_2} \begin{vmatrix} 3 & 2 & \\ 0 & 1 & \\ 2 & -6 & \end{vmatrix}$$

**例 2** 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$，计算第 2 行的余子式之和

**解**

$$M_{21} + M_{22} + M_{23} = (-1) \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{22} + (-1) \cdot A_{23}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix} \xlongequal[c_3 + c_2]{c_1 + c_2} \begin{vmatrix} 3 & 2 & \\ 0 & 1 & \\ 2 & -6 & \end{vmatrix}$$

**例 2** 设行列式 $D=\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ 3 & 4 & 0\\ 8 & -6 & 5\end{vmatrix}$，计算第 2 行的余子式之和

**解**

$$M_{21}+M_{22}+M_{23}=(-1)\cdot A_{21}+1\cdot A_{22}+(-1)\cdot A_{23}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ -1 & 1 & -1\\ 8 & -6 & 5\end{vmatrix} \overset{c_1+c_2}{\underset{c_3+c_2}{=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix}3 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & -6 & -1\end{vmatrix}$$

**例 2** 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$，计算第 2 行的余子式之和

**解**

$$M_{21} + M_{22} + M_{23} = (-1) \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{22} + (-1) \cdot A_{23}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix} \xlongequal[c_3+c_2]{c_1+c_2} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

**例 2** 设行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&-2\\3&4&0\\8&-6&5\end{vmatrix}$，计算第 2 行的余子式之和

**解**

$$M_{21}+M_{22}+M_{23}=(-1)\cdot A_{21}+1\cdot A_{22}+(-1)\cdot A_{23}$$

$$=\begin{vmatrix}1&2&-2\\-1&1&-1\\8&-6&5\end{vmatrix}\overset{c_1+c_2}{\underset{c_3+c_2}{=\!=\!=\!=}}\begin{vmatrix}3&2&0\\0&1&0\\2&-6&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&0\\2&-1\end{vmatrix}=-3$$

**例 2** 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix}$，计算第 2 行的余子式之和

**解**

$$M_{21} + M_{22} + M_{23} = (-1) \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{22} + (-1) \cdot A_{23}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix} \xlongequal[c_3+c_2]{c_1+c_2} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

---

**例 3** 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$，计算 $3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

**例 3** 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$，计算 $3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

**例 3** 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$，计算 $3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

**解**

$$3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$$

**例 3** 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$，计算 $3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

**解**

$$3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$$

$$= (-3) \cdot A_{41}$$

**例 3** 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$，计算 $3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

**解**

$$3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$$

$$= (-3) \cdot A_{41} + 4 \cdot A_{42}$$

**例 3** 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$，计算 $3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

**解**

$$3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$$

$$= (-3) \cdot A_{41} + 4 \cdot A_{42} + 5 \cdot A_{43}$$

**例 3** 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$，计算 $3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

**解**

$$3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$$
$$= (-3)\cdot A_{41} + 4\cdot A_{42} + 5\cdot A_{43} + (-2)\cdot A_{44}$$

**例 3** 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$，计算 $3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

**解**

$$3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$$

$$= (-3) \cdot A_{41} + 4 \cdot A_{42} + 5 \cdot A_{43} + (-2) \cdot A_{44}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -3 & 4 & 5 & -2 \end{vmatrix}$$

**例 3** 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$，计算 $3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$

**解**

$$3M_{41} + 4M_{42} - 5M_{43} - 2M_{44}$$

$$= (-3) \cdot A_{41} + 4 \cdot A_{42} + 5 \cdot A_{43} + (-2) \cdot A_{44}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -3 & 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3 - 3c_2}$$

**例 3** 设 $D=\begin{vmatrix}3 & 2 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 3 & 0\\ 4 & -6 & 0 & 5\\ -1 & 3 & -2 & 1\end{vmatrix}$，计算 $3M_{41}+4M_{42}-5M_{43}-2M_{44}$

**解**

$$3M_{41}+4M_{42}-5M_{43}-2M_{44}$$

$$=(-3)\cdot A_{41}+4\cdot A_{42}+5\cdot A_{43}+(-2)\cdot A_{44}$$

$$=\begin{vmatrix}3 & 2 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 3 & 0\\ 4 & -6 & 0 & 5\\ -3 & 4 & 5 & -2\end{vmatrix} \xlongequal{c_3-3c_2} \begin{vmatrix}3 & 2 & & -2\\ 0 & 1 & & 0\\ 4 & -6 & & 5\\ -3 & 4 & & -2\end{vmatrix}$$

**例 3** 设 $D=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$，计算 $3M_{41}+4M_{42}-5M_{43}-2M_{44}$

**解**

$$3M_{41}+4M_{42}-5M_{43}-2M_{44}$$

$$=(-3)\cdot A_{41}+4\cdot A_{42}+5\cdot A_{43}+(-2)\cdot A_{44}$$

$$=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -3 & 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3-3c_2} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 18 & 5 \\ -3 & 4 & -7 & -2 \end{vmatrix}$$

**例 3** 设 $D=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$，计算 $3M_{41}+4M_{42}-5M_{43}-2M_{44}$

**解**

$$3M_{41}+4M_{42}-5M_{43}-2M_{44}$$

$$=(-3)\cdot A_{41}+4\cdot A_{42}+5\cdot A_{43}+(-2)\cdot A_{44}$$

$$=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -3 & 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3-3c_2} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 18 & 5 \\ -3 & 4 & -7 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 4 & 18 & 5 \\ -3 & -7 & -2 \end{vmatrix}$$

**例 3** 设 $D=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$，计算 $3M_{41}+4M_{42}-5M_{43}-2M_{44}$

**解**

$$3M_{41}+4M_{42}-5M_{43}-2M_{44}$$

$$=(-3)\cdot A_{41}+4\cdot A_{42}+5\cdot A_{43}+(-2)\cdot A_{44}$$

$$=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -3 & 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} \overset{c_3-3c_2}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 18 & 5 \\ -3 & 4 & -7 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 4 & 18 & 5 \\ -3 & -7 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_3+r_1}{=\!=\!=}$$

**例 3** 设 $D=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$，计算 $3M_{41}+4M_{42}-5M_{43}-2M_{44}$

**解**

$$3M_{41}+4M_{42}-5M_{43}-2M_{44}$$

$$=(-3)\cdot A_{41}+4\cdot A_{42}+5\cdot A_{43}+(-2)\cdot A_{44}$$

$$=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -3 & 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3-3c_2} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 18 & 5 \\ -3 & 4 & -7 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 4 & 18 & 5 \\ -3 & -7 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3+r_1} \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 4 & 18 & 5 \\ & & \end{vmatrix}$$

**例 3** 设 $D=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$，计算 $3M_{41}+4M_{42}-5M_{43}-2M_{44}$

**解**

$$3M_{41}+4M_{42}-5M_{43}-2M_{44}$$

$$=(-3)\cdot A_{41}+4\cdot A_{42}+5\cdot A_{43}+(-2)\cdot A_{44}$$

$$=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -3 & 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3-3c_2} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 18 & 5 \\ -3 & 4 & -7 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 4 & 18 & 5 \\ -3 & -7 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3+r_1} \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 4 & 18 & 5 \\ 0 & -12 & -4 \end{vmatrix}$$

**例 3** 设 $D=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$，计算 $3M_{41}+4M_{42}-5M_{43}-2M_{44}$

**解**

$$3M_{41}+4M_{42}-5M_{43}-2M_{44}$$

$$=(-3)\cdot A_{41}+4\cdot A_{42}+5\cdot A_{43}+(-2)\cdot A_{44}$$

$$=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -3 & 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} \overset{c_3-3c_2}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 18 & 5 \\ -3 & 4 & -7 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 4 & 18 & 5 \\ -3 & -7 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_3+r_1}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 4 & 18 & 5 \\ 0 & -12 & -4 \end{vmatrix} \overset{c_2-3c_3}{=\!=\!=}$$

**例 3** 设 $D=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$，计算 $3M_{41}+4M_{42}-5M_{43}-2M_{44}$

**解**

$$3M_{41}+4M_{42}-5M_{43}-2M_{44}$$

$$=(-3)\cdot A_{41}+4\cdot A_{42}+5\cdot A_{43}+(-2)\cdot A_{44}$$

$$=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -3 & 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3-3c_2} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 18 & 5 \\ -3 & 4 & -7 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 4 & 18 & 5 \\ -3 & -7 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3+r_1} \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 4 & 18 & 5 \\ 0 & -12 & -4 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2-3c_3} \begin{vmatrix} 3 & & -2 \\ 4 & & 5 \\ 0 & & -4 \end{vmatrix}$$

**例 3** 设 $D=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$，计算 $3M_{41}+4M_{42}-5M_{43}-2M_{44}$

**解**

$$3M_{41}+4M_{42}-5M_{43}-2M_{44}$$

$$=(-3)\cdot A_{41}+4\cdot A_{42}+5\cdot A_{43}+(-2)\cdot A_{44}$$

$$=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -3 & 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3-3c_2} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 18 & 5 \\ -3 & 4 & -7 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 4 & 18 & 5 \\ -3 & -7 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3+r_1} \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 4 & 18 & 5 \\ 0 & -12 & -4 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2-3c_3} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

**例 3** 设 $D=\begin{vmatrix}3 & 2 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 3 & 0\\ 4 & -6 & 0 & 5\\ -1 & 3 & -2 & 1\end{vmatrix}$，计算 $3M_{41}+4M_{42}-5M_{43}-2M_{44}$

**解**

$$3M_{41}+4M_{42}-5M_{43}-2M_{44}$$

$$=(-3)\cdot A_{41}+4\cdot A_{42}+5\cdot A_{43}+(-2)\cdot A_{44}$$

$$=\begin{vmatrix}3 & 2 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 3 & 0\\ 4 & -6 & 0 & 5\\ -3 & 4 & 5 & -2\end{vmatrix}\xlongequal{c_3-3c_2}\begin{vmatrix}3 & 2 & -5 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 4 & -6 & 18 & 5\\ -3 & 4 & -7 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & -5 & -2\\ 4 & 18 & 5\\ -3 & -7 & -2\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3+r_1}\begin{vmatrix}3 & -5 & -2\\ 4 & 18 & 5\\ 0 & -12 & -4\end{vmatrix}\xlongequal{c_2-3c_3}\begin{vmatrix}3 & 1 & -2\\ 4 & 3 & 5\\ 0 & 0 & -4\end{vmatrix}=(-4)\cdot\begin{vmatrix}3 & 1\\ 4 & 3\end{vmatrix}$$

**例 3** 设 $D=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$，计算 $3M_{41}+4M_{42}-5M_{43}-2M_{44}$

**解**

$$3M_{41}+4M_{42}-5M_{43}-2M_{44}$$

$$=(-3)\cdot A_{41}+4\cdot A_{42}+5\cdot A_{43}+(-2)\cdot A_{44}$$

$$=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -3 & 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3-3c_2} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 18 & 5 \\ -3 & 4 & -7 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 4 & 18 & 5 \\ -3 & -7 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3+r_1} \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 4 & 18 & 5 \\ 0 & -12 & -4 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2-3c_3} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = (-4)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -20$$

**例 4** 设 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 8 & 27 & 64 & 125 \end{vmatrix}$，计算 $M_{41}-M_{42}+M_{43}-M_{44}$

**例 4** 设 $D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 4 & 5\\ 4 & 9 & 16 & 25\\ 8 & 27 & 64 & 125\end{vmatrix}$，计算 $M_{41}-M_{42}+M_{43}-M_{44}$

**解**

$$M_{41}-M_{42}+M_{43}-M_{44}$$

**例 4** 设 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 8 & 27 & 64 & 125 \end{vmatrix}$，计算 $M_{41}-M_{42}+M_{43}-M_{44}$

**解**

$$\begin{aligned} & M_{41}-M_{42}+M_{43}-M_{44} \\ = & -A_{41}-A_{42}-A_{43}-A_{44} \end{aligned}$$

**例 4** 设 $D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&3&4&5\\4&9&16&25\\8&27&64&125\end{vmatrix}$，计算 $M_{41}-M_{42}+M_{43}-M_{44}$

**解**

$$M_{41}-M_{42}+M_{43}-M_{44}$$

$$=-A_{41}-A_{42}-A_{43}-A_{44}$$

$$=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&3&4&5\\4&9&16&25\\-1&-1&-1&-1\end{vmatrix}$$

**例 4** 设 $D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 4 & 5\\ 4 & 9 & 16 & 25\\ 8 & 27 & 64 & 125\end{vmatrix}$，计算 $M_{41}-M_{42}+M_{43}-M_{44}$

**解**

$$\begin{aligned}&M_{41}-M_{42}+M_{43}-M_{44}\\ =&-A_{41}-A_{42}-A_{43}-A_{44}\\ =&\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 4 & 5\\ 4 & 9 & 16 & 25\\ -1 & -1 & -1 & -1\end{vmatrix}=0\end{aligned}$$

# 行列式展开的进一步应用

$$a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

将其中 $a_{21}, a_{22}, a_{23}$ 分别换成任意数 $u, v, w$ 得:

$$\Rightarrow \quad uA_{21} + vA_{22} + wA_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ u & v & w \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

# 行列式展开的进一步应用

$$a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

将其中 $a_{21}$, $a_{22}$, $a_{23}$ 分别换成任意数 $u$, $v$, $w$ 得:

$$\Rightarrow \quad uA_{21}+vA_{22}+wA_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ u & v & w \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

取 $u$, $v$, $w$ 为第一行元素 $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{13}$

$$\Rightarrow a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

# 行列式展开的进一步应用

$$a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

将其中 $a_{21}, a_{22}, a_{23}$ 分别换成任意数 $u, v, w$ 得：

$$\Rightarrow \quad uA_{21}+vA_{22}+wA_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ u & v & w \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

取 $u, v, w$ 为第一行元素 $a_{11}, a_{12}, a_{13}$

$$\Rightarrow a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=0$$

# 行列式展开定理

**定理** 对于行列式 $D$ 的第 $r$ 行元素和第 $i$ 行代数余子式，我们有

# 行列式展开定理

**定理** 对于行列式 $D$ 的第 $r$ 行元素和第 $i$ 行代数余子式，我们有

$$a_{r1} \qquad a_{r2} \qquad\qquad a_{rn}$$

# 行列式展开定理

**定理** 对于行列式 $D$ 的第 $r$ 行元素和第 $i$ 行代数余子式，我们有

$$a_{r1}A_{i1} \quad a_{r2}A_{i2} \qquad\qquad a_{rn}A_{in}$$

# 行列式展开定理

**定理** 对于行列式 $D$ 的第 $r$ 行元素和第 $i$ 行代数余子式，我们有

$$a_{r1}A_{i1} + a_{r2}A_{i2} + \cdots + a_{rn}A_{in}$$

# 行列式展开定理

**定理** 对于行列式 $D$ 的第 $r$ 行元素和第 $i$ 行代数余子式，我们有

$$a_{r1}A_{i1} + a_{r2}A_{i2} + \cdots + a_{rn}A_{in} = \begin{cases} & \text{若} i = r \\ & \text{若} i \neq r \end{cases}$$

# 行列式展开定理

**定理** 对于行列式 $D$ 的第 $r$ 行元素和第 $i$ 行代数余子式，我们有

$$a_{r1}A_{i1} + a_{r2}A_{i2} + \cdots + a_{rn}A_{in} = \begin{cases} D & \text{若} i = r \\ & \text{若} i \neq r \end{cases}$$

# 行列式展开定理

**定理** 对于行列式 $D$ 的第 $r$ 行元素和第 $i$ 行代数余子式，我们有

$$a_{r1}A_{i1}+a_{r2}A_{i2}+\cdots+a_{rn}A_{in}=\begin{cases}D & 若 i=r\\ 0 & 若 i\neq r\end{cases}$$

# 行列式展开定理

**定理** 对于行列式 $D$ 的第 $r$ 行元素和第 $i$ 行代数余子式，我们有

$$a_{r1}A_{i1} + a_{r2}A_{i2} + \cdots + a_{rn}A_{in} = \begin{cases} D & 若 i = r \\ 0 & 若 i \neq r \end{cases}$$

类似地，对于行列式 $D$ 的第 $s$ 列元素和第 $j$ 列代数余子式，有

$$a_{1s}A_{1j} + a_{2s}A_{2j} + \cdots + a_{ns}A_{nj} =$$

# 行列式展开定理

**定理** 对于行列式 $D$ 的第 $r$ 行元素和第 $i$ 行代数余子式，我们有

$$a_{r1}A_{i1} + a_{r2}A_{i2} + \cdots + a_{rn}A_{in} = \begin{cases} D & 若 i = r \\ 0 & 若 i \neq r \end{cases}$$

类似地，对于行列式 $D$ 的第 $s$ 列元素和第 $j$ 列代数余子式，有

$$a_{1s}A_{1j} + a_{2s}A_{2j} + \cdots + a_{ns}A_{nj} = \begin{cases} & 若 j = s \\ & 若 j \neq s \end{cases}$$

# 行列式展开定理

**定理** 对于行列式 $D$ 的第 $r$ 行元素和第 $i$ 行代数余子式，我们有

$$a_{r1}A_{i1}+a_{r2}A_{i2}+\cdots+a_{rn}A_{in}=\begin{cases} D & \text{若} i=r \\ 0 & \text{若} i\neq r \end{cases}$$

类似地，对于行列式 $D$ 的第 $s$ 列元素和第 $j$ 列代数余子式，有

$$a_{1s}A_{1j}+a_{2s}A_{2j}+\cdots+a_{ns}A_{nj}=\begin{cases} D & \text{若} j=s \\ & \text{若} j\neq s \end{cases}$$

# 行列式展开定理

**定理** 对于行列式 $D$ 的第 $r$ 行元素和第 $i$ 行代数余子式，我们有

$$a_{r1}A_{i1}+a_{r2}A_{i2}+\cdots+a_{rn}A_{in}=\begin{cases}D & 若 i=r\\ 0 & 若 i\neq r\end{cases}$$

类似地，对于行列式 $D$ 的第 $s$ 列元素和第 $j$ 列代数余子式，有

$$a_{1s}A_{1j}+a_{2s}A_{2j}+\cdots+a_{ns}A_{nj}=\begin{cases}D & 若 j=s\\ 0 & 若 j\neq s\end{cases}$$