§4.3　实对称矩阵的特征值和特征向量

数学系　　梁卓滨

2018 - 2019 学年上学期

本节内容

◇ 向量的内积

♣ 正交向量组，施密特正交化方法

♡ 正交矩阵

♠ 对称矩阵可对角化

向量内积

定义 $\mathbb{R}^n$ 中两个向量 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 和 $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 的内积定义为：

$$\alpha^T \beta =$$

向量内积

定义 $\mathbb{R}^n$ 中两个向量 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 和 $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 的内积定义为：

$$\alpha^T \beta = (\, a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n \,) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} =$$

向量内积

定义 $\mathbb{R}^n$ 中两个向量 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 和 $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 的内积定义为：

$$\alpha^T \beta = (\, a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n \,) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

向量内积

定义 $\mathbb{R}^n$ 中两个向量 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 和 $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 的内积定义为：

$$\alpha^T \beta = (\, a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n \,) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

例 $\mathbb{R}^4$ 中两个向量 $\alpha = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ 和 $\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 的内积是

向量内积

定义 $\mathbb{R}^n$ 中两个向量 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 和 $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 的内积定义为：

$$\alpha^T \beta = (\,a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n\,) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

例 $\mathbb{R}^4$ 中两个向量 $\alpha = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ 和 $\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 的内积是

$$\alpha^T \beta$$

向量内积

定义 $\mathbb{R}^n$ 中两个向量 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 和 $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 的内积定义为：

$$\alpha^T \beta = (\, a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n \,) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

例 $\mathbb{R}^4$ 中两个向量 $\alpha = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ 和 $\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 的内积是
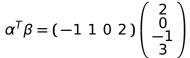
$$\alpha^T \beta = (\, -1 \ 1 \ 0 \ 2 \,) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

向量内积

定义 $\mathbb{R}^n$ 中两个向量 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 和 $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 的**内积**定义为：

$$\alpha^T\beta = (\,a_1\ a_2\ \cdots\ a_n\,)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n.$$

例 $\mathbb{R}^4$ 中两个向量 $\alpha = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ 和 $\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 的内积是

$$\alpha^T\beta = (\,-1\ 1\ 0\ 2\,)\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

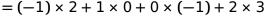$$= (-1) \times 2 + 1 \times 0 + 0 \times (-1) + 2 \times 3$$

向量内积

定义 $\mathbb{R}^n$ 中两个向量 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 和 $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 的内积定义为：

$$\alpha^T \beta = (\, a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n \,) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

例 $\mathbb{R}^4$ 中两个向量 $\alpha = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ 和 $\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 的内积是

$$\alpha^T \beta = (-1 \ 1 \ 0 \ 2) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= (-1) \times 2 + 1 \times 0 + 0 \times (-1) + 2 \times 3 = 4$$

内积性质

1. $\alpha^T \beta = \beta^T \alpha$

2. $(k\alpha)^T \beta = k\alpha^T \beta$，（$k$ 是实数）

3. $(\alpha + \beta)^T \gamma = \alpha^T \gamma + \beta^T \gamma$

4. $\alpha^T \alpha \geq 0$，并且仅当 $\alpha = 0$ 时，$\alpha^T \alpha = 0$

内积性质

1. $\alpha^T\beta = \beta^T\alpha$

内积性质

1. $\alpha^T \beta = \beta^T \alpha$

证明 设 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 和 $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, 则

$$\alpha^T \beta =$$

$$\beta^T \alpha =$$

内积性质

1. $\alpha^T \beta = \beta^T \alpha$

证明 设 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 和 $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, 则

$$\alpha^T \beta = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n,$$

$$\beta^T \alpha =$$

内积性质

1. $\alpha^T \beta = \beta^T \alpha$

证明 设 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 和 $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$，则

$$\alpha^T \beta = (\, a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n \,) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n,$$

$$\beta^T \alpha = (\, b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n \,) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

内积性质

1. $\alpha^T \beta = \beta^T \alpha$

证明 设 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 和 $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$，则

$$\alpha^T \beta = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n,$$

$$\beta^T \alpha = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = b_1 a_1 + b_2 a_2 + \cdots + b_n a_n.$$

内积性质

1. $\alpha^T\beta = \beta^T\alpha$

证明 设 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 和 $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$，则

$$\alpha^T\beta = (\, a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n \,) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n,$$

$$\beta^T\alpha = (\, b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n \,) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = b_1 a_1 + b_2 a_2 + \cdots + b_n a_n.$$

所以 $\alpha^T\beta = \beta^T\alpha$

内积性质

1. $\alpha^T \beta = \beta^T \alpha$

证明 设 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 和 $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, 则

$$\alpha^T \beta = (\, a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n \,) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n,$$

$$\beta^T \alpha = (\, b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n \,) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = b_1 a_1 + b_2 a_2 + \cdots + b_n a_n.$$

所以 $\alpha^T \beta = \beta^T \alpha$

另证 $\alpha^T \beta = \left(\alpha^T \beta \right)^T =$

内积性质

1. $\alpha^T \beta = \beta^T \alpha$

证明 设 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 和 $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, 则

$$\alpha^T \beta = (\, a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n \,) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n,$$

$$\beta^T \alpha = (\, b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n \,) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = b_1 a_1 + b_2 a_2 + \cdots + b_n a_n.$$

所以 $\alpha^T \beta = \beta^T \alpha$

另证 $\alpha^T \beta = \left(\alpha^T \beta \right)^T = \beta^T \left(\alpha^T \right)^T =$

内积性质

1. $\alpha^T \beta = \beta^T \alpha$

证明 设 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 和 $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, 则

$$\alpha^T \beta = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n,$$

$$\beta^T \alpha = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = b_1 a_1 + b_2 a_2 + \cdots + b_n a_n.$$

所以 $\alpha^T \beta = \beta^T \alpha$

另证 $\alpha^T \beta = \left(\alpha^T \beta \right)^T = \beta^T \left(\alpha^T \right)^T = \beta^T \alpha$

内积性质

2. $(k\alpha)^T\beta = k\alpha^T\beta$，（$k$ 是实数）

3. $(\alpha + \beta)^T\gamma = \alpha^T\gamma + \beta^T\gamma$

4. $\alpha^T\alpha \geq 0$，并且仅当 $\alpha = 0$ 时，$\alpha^T\alpha = 0$

证明

内积性质

2. $(k\alpha)^T\beta = k\alpha^T\beta$，（$k$ 是实数）

3. $(\alpha + \beta)^T\gamma = \alpha^T\gamma + \beta^T\gamma$

4. $\alpha^T\alpha \geq 0$，并且仅当 $\alpha = 0$ 时，$\alpha^T\alpha = 0$

证明

2. 显然

内积性质

2. $(k\alpha)^T\beta = k\alpha^T\beta$，（$k$ 是实数）

3. $(\alpha + \beta)^T\gamma = \alpha^T\gamma + \beta^T\gamma$

4. $\alpha^T\alpha \geq 0$，并且仅当 $\alpha = 0$ 时，$\alpha^T\alpha = 0$

证明

2. 显然

3. $(\alpha + \beta)^T\gamma =$

内积性质

2. $(k\alpha)^T\beta = k\alpha^T\beta$，（$k$ 是实数）

3. $(\alpha + \beta)^T\gamma = \alpha^T\gamma + \beta^T\gamma$

4. $\alpha^T\alpha \geq 0$，并且仅当 $\alpha = 0$ 时，$\alpha^T\alpha = 0$

证明

2. 显然

3. $(\alpha + \beta)^T\gamma = (\alpha^T + \beta^T)\gamma =$

内积性质

2. $(k\alpha)^T\beta = k\alpha^T\beta$，（$k$ 是实数）

3. $(\alpha + \beta)^T\gamma = \alpha^T\gamma + \beta^T\gamma$

4. $\alpha^T\alpha \geq 0$，并且仅当 $\alpha = 0$ 时，$\alpha^T\alpha = 0$

证明

2. 显然

3. $(\alpha + \beta)^T\gamma = (\alpha^T + \beta^T)\gamma = \alpha^T\gamma + \beta^T\gamma$

内积性质

2. $(k\alpha)^T\beta = k\alpha^T\beta$,（$k$ 是实数）

3. $(\alpha + \beta)^T\gamma = \alpha^T\gamma + \beta^T\gamma$

4. $\alpha^T\alpha \geq 0$，并且仅当 $\alpha = 0$ 时，$\alpha^T\alpha = 0$

证明

2. 显然

3. $(\alpha + \beta)^T\gamma = (\alpha^T + \beta^T)\gamma = \alpha^T\gamma + \beta^T\gamma$

4. $\alpha^T\alpha = (\ a_1\ a_2\ \cdots\ a_n\ )\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$

内积性质

2. $(k\alpha)^T\beta = k\alpha^T\beta$，（$k$ 是实数）

3. $(\alpha + \beta)^T\gamma = \alpha^T\gamma + \beta^T\gamma$

4. $\alpha^T\alpha \geq 0$，并且仅当 $\alpha = 0$ 时，$\alpha^T\alpha = 0$

证明

2. 显然

3. $(\alpha + \beta)^T\gamma = (\alpha^T + \beta^T)\gamma = \alpha^T\gamma + \beta^T\gamma$

4. $\alpha^T\alpha = (\ a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n\ ) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq 0$

向量长度

定义

$$\|\alpha\| := \sqrt{\alpha^T \alpha} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

称为向量的长度或范数。

向量长度

定义

$$\|\alpha\| := \sqrt{\alpha^T \alpha} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

称为向量的长度或范数。

例 求向量 $\alpha = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ 的长度。

向量长度

定义

$$\|\alpha\| := \sqrt{\alpha^T \alpha} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

称为向量的长度或范数。

例 求向量 $\alpha = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ 的长度。

解

$$\|\alpha\| =$$

$$\|\beta\| =$$

向量长度

定义

$$||\alpha|| := \sqrt{\alpha^T \alpha} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

称为向量的长度或范数。

例 求向量 $\alpha = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ 的长度。

解

$$||\alpha|| = \sqrt{(-4)^2 + (-5)^2 + 6^2} =$$

$$||\beta|| =$$

向量长度

定义

$$||\alpha|| := \sqrt{\alpha^T \alpha} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

称为向量的长度或范数。

例 求向量 $\alpha = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ 的长度。

解

$$||\alpha|| = \sqrt{(-4)^2 + (-5)^2 + 6^2} = \sqrt{16 + 25 + 36} =$$

$$||\beta|| =$$

向量长度

定义

$$\|\alpha\| := \sqrt{\alpha^T \alpha} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

称为向量的长度或范数。

例 求向量 $\alpha = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ 的长度。

解

$$\|\alpha\| = \sqrt{(-4)^2 + (-5)^2 + 6^2} = \sqrt{16 + 25 + 36} = \sqrt{77}$$

$$\|\beta\| =$$

向量长度

定义

$$\|\alpha\| := \sqrt{\alpha^T \alpha} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

称为向量的长度或范数。

例 求向量 $\alpha = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ 的长度。

解

$$\|\alpha\| = \sqrt{(-4)^2 + (-5)^2 + 6^2} = \sqrt{16 + 25 + 36} = \sqrt{77}$$

$$\|\beta\| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 1^2 + 5^2} =$$

向量长度

定义

$$\|\alpha\| := \sqrt{\alpha^T \alpha} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

称为向量的长度或范数。

例 求向量 $\alpha = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ 的长度。

解

$$\|\alpha\| = \sqrt{(-4)^2 + (-5)^2 + 6^2} = \sqrt{16 + 25 + 36} = \sqrt{77}$$

$$\|\beta\| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 1^2 + 5^2} = \sqrt{1 + 9 + 1 + 25} =$$

向量长度

定义

$$\|\alpha\| := \sqrt{\alpha^T \alpha} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

称为向量的长度或范数。

例 求向量 $\alpha = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ 的长度。

解

$$\|\alpha\| = \sqrt{(-4)^2 + (-5)^2 + 6^2} = \sqrt{16 + 25 + 36} = \sqrt{77}$$

$$\|\beta\| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 1^2 + 5^2} = \sqrt{1 + 9 + 1 + 25} = 6$$

- 向量的长度或范数

$$\|\alpha\| := \sqrt{\alpha^T \alpha} = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2}$$

- 向量的长度或范数

$$\|\alpha\| := \sqrt{\alpha^T \alpha} = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2}$$

长度性质

1. $\|\alpha\| \geq 0$，并且仅当 $\alpha = 0$ 时，$\|\alpha\| = 0$

- 向量的**长度**或**范数**

$$\|\alpha\| := \sqrt{\alpha^T \alpha} = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2}$$

长度性质

1. $\|\alpha\| \geq 0$，并且仅当 $\alpha = 0$ 时，$\|\alpha\| = 0$

2. $\|k\alpha\| = |k| \cdot \|\alpha\|$，（$k$ 是实数）

- 向量的长度或范数

$$\|\alpha\| := \sqrt{\alpha^T \alpha} = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2}$$

长度性质

1. $\|\alpha\| \geq 0$，并且仅当 $\alpha = 0$ 时，$\|\alpha\| = 0$

2. $\|k\alpha\| = |k| \cdot \|\alpha\|$，（$k$ 是实数）

3. 对任意向量 α, β，都成立

$$|\alpha^T \beta| \leq \|\alpha\| \cdot \|\beta\|$$

- 向量的**长度**或**范数**

$$||\alpha|| := \sqrt{\alpha^T \alpha} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

长度性质

1. $||\alpha|| \geq 0$，并且仅当 $\alpha = 0$ 时，$||\alpha|| = 0$

2. $||k\alpha|| = |k| \cdot ||\alpha||$，（$k$ 是实数）

3. 对任意向量 α, β，都成立

$$|\alpha^T \beta| \leq ||\alpha|| \cdot ||\beta||$$

即

$$|a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n| \leq \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2}$$

向量单位化

- **定义** 长度为 1 的向量称为**单位向量**。

向量单位化

- **定义** 长度为 1 的向量称为 单位向量。

- **例** 向量

$$\alpha = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \ \beta = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-th}$$

都是单位向量

向量单位化

- **定义** 长度为 1 的向量称为**单位向量**。

- **例** 向量

$$\alpha = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \; \beta = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-th}$$

  都是单位向量

- 设 $\alpha \neq 0$，则 $\|\alpha\| \neq 0$，

向量单位化

- **定义** 长度为 1 的向量称为**单位向量**。

- **例** 向量

$$\alpha = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \ \beta = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-th}$$

都是单位向量

- 设 $\alpha \neq 0$，则 $||\alpha|| \neq 0$，向量 $\frac{1}{||\alpha||}\alpha$ 是单位向量：

向量单位化

- **定义** 长度为 1 的向量称为**单位向量**。

- **例** 向量

$$\alpha = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-th}$$

  都是单位向量

- 设 $\alpha \neq 0$，则 $\|\alpha\| \neq 0$，向量 $\frac{1}{\|\alpha\|}\alpha$ 是单位向量：

$$\left\| \frac{1}{\|\alpha\|}\alpha \right\| = \frac{1}{\|\alpha\|}\|\alpha\| = 1$$

向量单位化

- **定义** 长度为 1 的向量称为单位向量。

- **例** 向量

$$\alpha = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \ \beta = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-th}$$

  都是单位向量

- 设 $\alpha \neq 0$，则 $\|\alpha\| \neq 0$，向量 $\frac{1}{\|\alpha\|}\alpha$ 是单位向量：

$$\left\| \frac{1}{\|\alpha\|}\alpha \right\| = \frac{1}{\|\alpha\|}\|\alpha\| = 1$$

  称 $\frac{1}{\|\alpha\|}\alpha$ 为 α 的单位化

例 将下列向量单位化

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

例 将下列向量单位化

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \; \beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

解

1. $\|\alpha\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14},$

例 将下列向量单位化

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

解

1. $\|\alpha\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$，所以的 α 单位化为：

$$\frac{1}{\|\alpha\|}\alpha = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{14} \\ 2/\sqrt{14} \\ 3/\sqrt{14} \end{pmatrix}$$

例 将下列向量单位化

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

解

1. $||\alpha|| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$，所以的 α 单位化为：

$$\frac{1}{||\alpha||}\alpha = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{14} \\ 2/\sqrt{14} \\ 3/\sqrt{14} \end{pmatrix}$$

2. $||\beta|| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{49} = 7,$

例 将下列向量单位化

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

解

1. $\|\alpha\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$, 所以的 α 单位化为：

$$\frac{1}{\|\alpha\|}\alpha = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{14} \\ 2/\sqrt{14} \\ 3/\sqrt{14} \end{pmatrix}$$

2. $\|\beta\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{49} = 7$, 所以的 β 单位化为：

$$\frac{1}{\|\beta\|}\beta = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/7 \\ 2/7 \\ 4/7 \\ 5/7 \end{pmatrix}$$

向量正交

定义 若 $\alpha^T\beta = 0$，则称 α, β 正交（或垂直）

向量正交

定义 若 $\alpha^T \beta = 0$，则称 α, β 正交（或垂直）

例 零向量与任意向量正交：
$$0^T \alpha$$

向量正交

定义 若 $\alpha^T\beta = 0$，则称 α, β 正交（或垂直）

例 零向量与任意向量正交：

$$0^T\alpha = 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + \cdots + 0 \cdot a_n = 0$$

向量正交

定义 若 $\alpha^T\beta = 0$，则称 α, β 正交（或垂直）

例 零向量与任意向量正交：

$$0^T\alpha = 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + \cdots + 0 \cdot a_n = 0$$

例 $\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ 与 $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ 正交：

向量正交

定义 若 $\alpha^T \beta = 0$，则称 α, β 正交（或垂直）

例 零向量与任意向量正交：

$$0^T \alpha = 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + \cdots + 0 \cdot a_n = 0$$

例 $\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ 与 $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ 正交：

$$\alpha^T \beta = 2 \times 1 + 4 \times 2 + 5 \times (-2) = 0$$

向量正交

定义 若 $\alpha^T \beta = 0$，则称 α, β 正交（或垂直）

例 零向量与任意向量正交：

$$0^T \alpha = 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + \cdots + 0 \cdot a_n = 0$$

例 $\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ 与 $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ 正交：

$$\alpha^T \beta = 2 \times 1 + 4 \times 2 + 5 \times (-2) = 0$$

例 向量组 $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 中的向量两两正交：

向量正交

定义 若 $\alpha^T\beta = 0$，则称 α, β 正交（或垂直）

例 零向量与任意向量正交：

$$0^T\alpha = 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + \cdots + 0 \cdot a_n = 0$$

例 $\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ 与 $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ 正交：

$$\alpha^T\beta = 2 \times 1 + 4 \times 2 + 5 \times (-2) = 0$$

例 向量组 $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 中的向量两两正交：

$$\varepsilon_1^T\varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_1^T\varepsilon_3 = 0, \quad \varepsilon_2^T\varepsilon_3 = 0$$

正交向量组

定义 若 $\mathbb{R}^n$ 中向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 满足

1. 每个向量非零：$\alpha_i \neq 0$，$i = 1, 2, \ldots, s$

2. 两两正交：$\alpha_i^T \alpha_j = 0$，$i \neq j$

即则称该向量组为正交向量组。

正交向量组

定义 若 $\mathbb{R}^n$ 中向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 满足

1. 每个向量非零：$\alpha_i \neq 0$，$i = 1, 2, \ldots, s$

2. 两两正交：$\alpha_i^T \alpha_j = 0$，$i \neq j$

即则称该向量组为 正交向量组。

例 向量组 $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是正交向量组

正交向量组

定义 若 $\mathbb{R}^n$ 中向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 满足

1. 每个向量非零：$\alpha_i \neq 0$，$i = 1, 2, \ldots, s$

2. 两两正交：$\alpha_i^T \alpha_j = 0$，$i \neq j$

即则称该向量组为正交向量组。

例 向量组 $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是正交向量组

例 向量组 $\alpha = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

正交向量组

定义 若 $\mathbb{R}^n$ 中向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 满足

1. 每个向量非零：$\alpha_i \neq 0$，$i = 1, 2, \ldots, s$

2. 两两正交：$\alpha_i^T \alpha_j = 0$，$i \neq j$

即则称该向量组为正交向量组。

例 向量组 $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是正交向量组

例 向量组 $\alpha = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$，$\gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ 是正交向量组

定理 $\mathbb{R}^n$ 中正交向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 一定线性无关。

定理 $\mathbb{R}^n$ 中正交向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 一定线性无关。

证明 设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$$

定理 $\mathbb{R}^n$ 中正交向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 一定线性无关。

证明 设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$

则

$$0 = \alpha_i^T(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_i\alpha_i + \cdots + k_s\alpha_s)$$

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$$

定理 $\mathbb{R}^n$ 中正交向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 一定线性无关。

证明 设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$

则

$$0 = \alpha_i^T(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_i\alpha_i + \cdots + k_s\alpha_s) \overset{\alpha_i^T\alpha_j=0 \text{ for } i\neq j}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}$$

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$$

定理 $\mathbb{R}^n$ 中正交向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 一定线性无关。

证明 设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$

则

$$0 = \alpha_i^T(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_i\alpha_i + \cdots + k_s\alpha_s) \xlongequal{\alpha_i^T\alpha_j=0 \text{ for } i\neq j} k_i\alpha_i^T\alpha_i$$

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$$

定理 $\mathbb{R}^n$ 中正交向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 一定线性无关。

证明 设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$

则

$$0 = \alpha_i^T(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_i\alpha_i + \cdots + k_s\alpha_s) \xeqraw{\alpha_i^T\alpha_j=0 \text{ for } i \neq j} k_i\underbrace{\alpha_i^T\alpha_i}_{\neq 0}$$

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$$

定理 $\mathbb{R}^n$ 中正交向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 一定线性无关。

证明 设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$

则

$$0 = \alpha_i^T(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_i\alpha_i + \cdots + k_s\alpha_s) \xlongequal{\alpha_i^T\alpha_j=0 \text{ for } i\neq j} k_i\underbrace{\alpha_i^T\alpha_i}_{\neq 0}$$

所以 $k_i = 0$。

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$$

定理 $\mathbb{R}^n$ 中正交向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 一定线性无关。

证明 设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$

则

$$0 = \alpha_i^T(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_i\alpha_i + \cdots + k_s\alpha_s) \xlongequal{\alpha_i^T\alpha_j=0 \text{ for } i\neq j} k_i\underbrace{\alpha_i^T\alpha_i}_{\neq 0}$$

所以 $k_i = 0$。由 i 的任意性

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$$

正交化

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\,(线性无关) \longrightarrow \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s\,(等价，两两正交)$$

正交化

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s(线性无关) \xrightarrow{\ 正交化\ } \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s(等价，两两正交)$$

正交化

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$（线性无关）$\xrightarrow{\text{正交化}}$ $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$（等价，两两正交）

实现正交化步骤（施密特正交化方法）：

$$\beta_1 =$$

$$\beta_2 =$$

$$\beta_3 =$$

$$\vdots$$

$$\beta_s =$$

正交化

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s (\text{线性无关}) \xrightarrow{\text{正交化}} \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s (\text{等价,两两正交})$$

实现正交化步骤(施密特正交化方法):

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 =$$

$$\beta_3 =$$

$$\vdots$$

$$\beta_s =$$

正交化

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$(线性无关) $\xrightarrow{\text{正交化}}$ $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$(等价，两两正交)

实现正交化步骤（施密特正交化方法）：

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \text{———} \beta_1$$

$$\beta_3 =$$

$$\vdots$$

$$\beta_s =$$

正交化

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s(\text{线性无关}) \xrightarrow{\text{正交化}} \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s(\text{等价，两两正交})$$

实现正交化步骤（施密特正交化方法）：

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{}{||\beta_1||^2}\beta_1$$

$$\beta_3 =$$

$$\vdots$$

$$\beta_s =$$

正交化

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s(\text{线性无关}) \xrightarrow{\text{正交化}} \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s(\text{等价，两两正交})$$

实现正交化步骤（施密特正交化方法）：

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{||\beta_1||^2} \beta_1$$

$$\beta_3 =$$

$$\vdots$$

$$\beta_s =$$

正交化

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$(线性无关) $\xrightarrow{\text{正交化}}$ $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$(等价，两两正交)

实现正交化步骤（施密特正交化方法）:

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{||\beta_1||^2} \beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\quad\quad}{} \beta_1 - \frac{\quad\quad}{} \beta_2$$

$$\vdots$$

$$\beta_s =$$

正交化

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$（线性无关）$\xrightarrow{\text{正交化}}$ $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$（等价，两两正交）

实现正交化步骤（施密特正交化方法）：

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{\|\beta_1\|^2}\beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{}{\|\beta_1\|^2}\beta_1 - \underline{\qquad}\beta_2$$

$$\vdots$$

$$\beta_s =$$

正交化

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$（线性无关）$\xrightarrow{\text{正交化}} \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$（等价，两两正交）

实现正交化步骤（施密特正交化方法）：

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{||\beta_1||^2} \beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{}{||\beta_1||^2} \beta_1 - \frac{}{||\beta_2||^2} \beta_2$$

$$\vdots$$

$$\beta_s =$$

正交化

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$（线性无关）$\xrightarrow{\text{正交化}}$ $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$（等价，两两正交）

实现正交化步骤（施密特正交化方法）：

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{||\beta_1||^2} \beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\alpha_3^T \beta_1}{||\beta_1||^2} \beta_1 - \frac{}{||\beta_2||^2} \beta_2$$

$$\vdots$$

$$\beta_s =$$

正交化

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$（线性无关）$\xrightarrow{\text{正交化}}$ $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$（等价，两两正交）

实现正交化步骤（施密特正交化方法）：

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{||\beta_1||^2} \beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\alpha_3^T \beta_1}{||\beta_1||^2} \beta_1 - \frac{\alpha_3^T \beta_2}{||\beta_2||^2} \beta_2$$

$$\vdots$$

$$\beta_s =$$

正交化

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$（线性无关）$\xrightarrow{\text{正交化}}$ $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$（等价，两两正交）

实现正交化步骤（施密特正交化方法）：

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{||\beta_1||^2} \beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\alpha_3^T \beta_1}{||\beta_1||^2} \beta_1 - \frac{\alpha_3^T \beta_2}{||\beta_2||^2} \beta_2$$

$$\vdots$$

$$\beta_s = \alpha_s - \underline{\qquad} \beta_1 - \underline{\qquad} \beta_2 - \cdots - \underline{\qquad} \beta_{s-1}$$

正交化

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$(线性无关) $\xrightarrow{\text{正交化}}$ $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$(等价，两两正交)

实现正交化步骤（施密特正交化方法）：

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{||\beta_1||^2}\beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\alpha_3^T \beta_1}{||\beta_1||^2}\beta_1 - \frac{\alpha_3^T \beta_2}{||\beta_2||^2}\beta_2$$

$$\vdots$$

$$\beta_s = \alpha_s - \frac{}{||\beta_1||^2}\beta_1 - \text{———}\beta_2 - \cdots - \text{———}\beta_{s-1}$$

正交化

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$（线性无关）$\xrightarrow{\text{正交化}}$ $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$（等价，两两正交）

实现正交化步骤（施密特正交化方法）：

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{\|\beta_1\|^2} \beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\alpha_3^T \beta_1}{\|\beta_1\|^2} \beta_1 - \frac{\alpha_3^T \beta_2}{\|\beta_2\|^2} \beta_2$$

$$\vdots$$

$$\beta_s = \alpha_s - \frac{}{\|\beta_1\|^2} \beta_1 - \frac{}{\|\beta_2\|^2} \beta_2 - \cdots - \frac{}{\quad\quad\quad} \beta_{s-1}$$

正交化

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$（线性无关）$\xrightarrow{\text{正交化}}$ $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$（等价，两两正交）

实现正交化步骤（施密特正交化方法）：

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{||\beta_1||^2} \beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\alpha_3^T \beta_1}{||\beta_1||^2} \beta_1 - \frac{\alpha_3^T \beta_2}{||\beta_2||^2} \beta_2$$

$$\vdots$$

$$\beta_s = \alpha_s - \frac{\alpha_s^T \beta_1}{||\beta_1||^2} \beta_1 - \frac{\alpha_s^T \beta_2}{||\beta_2||^2} \beta_2 - \cdots - \frac{\alpha_s^T \beta_{s-1}}{||\beta_{s-1}||^2} \beta_{s-1}$$

正交化

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$(线性无关) $\xrightarrow{\text{正交化}}$ $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$(等价，两两正交)

实现正交化步骤（施密特正交化方法）：

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{||\beta_1||^2} \beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\alpha_3^T \beta_1}{||\beta_1||^2} \beta_1 - \frac{\alpha_3^T \beta_2}{||\beta_2||^2} \beta_2$$

$$\vdots$$

$$\beta_s = \alpha_s - \frac{\alpha_s^T \beta_1}{||\beta_1||^2} \beta_1 - \frac{}{||\beta_2||^2} \beta_2 - \cdots - \frac{}{||\beta_{s-1}||^2} \beta_{s-1}$$

正交化

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$（线性无关） $\xrightarrow{\text{正交化}} \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$（等价，两两正交）

实现正交化步骤（施密特正交化方法）：

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{||\beta_1||^2} \beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\alpha_3^T \beta_1}{||\beta_1||^2} \beta_1 - \frac{\alpha_3^T \beta_2}{||\beta_2||^2} \beta_2$$

$$\vdots$$

$$\beta_s = \alpha_s - \frac{\alpha_s^T \beta_1}{||\beta_1||^2} \beta_1 - \frac{\alpha_s^T \beta_2}{||\beta_2||^2} \beta_2 - \cdots - \frac{\alpha_s^T \beta_{s-1}}{||\beta_{s-1}||^2} \beta_{s-1}$$

正交化

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$（线性无关）$\xrightarrow{\text{正交化}}$ $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$（等价，两两正交）

实现正交化步骤（施密特正交化方法）：

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{||\beta_1||^2} \beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\alpha_3^T \beta_1}{||\beta_1||^2} \beta_1 - \frac{\alpha_3^T \beta_2}{||\beta_2||^2} \beta_2$$

$$\vdots$$

$$\beta_s = \alpha_s - \frac{\alpha_s^T \beta_1}{||\beta_1||^2} \beta_1 - \frac{\alpha_s^T \beta_2}{||\beta_2||^2} \beta_2 - \cdots - \frac{\alpha_s^T \beta_{s-1}}{||\beta_{s-1}||^2} \beta_{s-1}$$

正交化

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$（线性无关） $\xrightarrow{\text{正交化}}$ $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$（等价，两两正交）

实现正交化步骤（施密特正交化方法）：

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_1^T \beta_2 = \beta_1^T \left(\alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{\|\beta_1\|^2} \beta_1 \right)$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\alpha_3^T \beta_1}{\|\beta_1\|^2} \beta_1 - \frac{\alpha_3^T \beta_2}{\|\beta_2\|^2} \beta_2$$

$$\vdots$$

$$\beta_s = \alpha_s - \frac{\alpha_s^T \beta_1}{\|\beta_1\|^2} \beta_1 - \frac{\alpha_s^T \beta_2}{\|\beta_2\|^2} \beta_2 - \cdots - \frac{\alpha_s^T \beta_{s-1}}{\|\beta_{s-1}\|^2} \beta_{s-1}$$

正交化

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s(\text{线性无关}) \xrightarrow{\text{正交化}} \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s(\text{等价，两两正交})$$

实现正交化步骤（施密特正交化方法）：

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_1^T \beta_2 = \beta_1^T \left(\alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{\|\beta_1\|^2} \beta_1 \right) = \beta_1^T \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{\|\beta_1\|^2} \beta_1^T \beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\alpha_3^T \beta_1}{\|\beta_1\|^2} \beta_1 - \frac{\alpha_3^T \beta_2}{\|\beta_2\|^2} \beta_2$$

$$\vdots$$

$$\beta_s = \alpha_s - \frac{\alpha_s^T \beta_1}{\|\beta_1\|^2} \beta_1 - \frac{\alpha_s^T \beta_2}{\|\beta_2\|^2} \beta_2 - \cdots - \frac{\alpha_s^T \beta_{s-1}}{\|\beta_{s-1}\|^2} \beta_{s-1}$$

正交化

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$（线性无关）$\xrightarrow{\text{正交化}}$ $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$（等价，两两正交）

实现正交化步骤（施密特正交化方法）：

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_1^T \beta_2 = \beta_1^T\left(\alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{\|\beta_1\|^2}\beta_1\right) = \beta_1^T \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{\|\beta_1\|^2}\beta_1^T\beta_1 = 0$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\alpha_3^T \beta_1}{\|\beta_1\|^2}\beta_1 - \frac{\alpha_3^T \beta_2}{\|\beta_2\|^2}\beta_2$$

$$\vdots$$

$$\beta_s = \alpha_s - \frac{\alpha_s^T \beta_1}{\|\beta_1\|^2}\beta_1 - \frac{\alpha_s^T \beta_2}{\|\beta_2\|^2}\beta_2 - \cdots - \frac{\alpha_s^T \beta_{s-1}}{\|\beta_{s-1}\|^2}\beta_{s-1}$$

正交化

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$（线性无关）$\xrightarrow{\text{正交化}}$ $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$（等价，两两正交）

实现正交化步骤（施密特正交化方法）：

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_1^T \beta_2 = \beta_1^T \left(\alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{||\beta_1||^2} \beta_1 \right) = \beta_1^T \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{||\beta_1||^2} \beta_1^T \beta_1 = 0$$

$$\beta_1^T \beta_3 = \beta_1^T \left(\alpha_3 - \frac{\alpha_3^T \beta_1}{||\beta_1||^2} \beta_1 - \frac{\alpha_3^T \beta_2}{||\beta_2||^2} \beta_2 \right)$$

$$\vdots$$

$$\beta_s = \alpha_s - \frac{\alpha_s^T \beta_1}{||\beta_1||^2} \beta_1 - \frac{\alpha_s^T \beta_2}{||\beta_2||^2} \beta_2 - \cdots - \frac{\alpha_s^T \beta_{s-1}}{||\beta_{s-1}||^2} \beta_{s-1}$$

正交化

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$（线性无关）$\xrightarrow{\text{正交化}}$ $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$（等价，两两正交）

实现正交化步骤（施密特正交化方法）：

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\textcolor{red}{\beta_1^T}\beta_2 = \textcolor{red}{\beta_1^T}\left(\alpha_2 - \frac{\alpha_2^T\beta_1}{\|\beta_1\|^2}\beta_1\right) = \textcolor{red}{\beta_1^T}\alpha_2 - \frac{\alpha_2^T\beta_1}{\|\beta_1\|^2}\textcolor{red}{\beta_1^T}\beta_1 = 0$$

$$\textcolor{red}{\beta_1^T}\beta_3 = \textcolor{red}{\beta_1^T}\left(\alpha_3 - \frac{\alpha_3^T\beta_1}{\|\beta_1\|^2}\beta_1 - \frac{\alpha_3^T\beta_2}{\|\beta_2\|^2}\beta_2\right) = \textcolor{red}{\beta_1^T}\alpha_3 - \frac{\alpha_3^T\beta_1}{\|\beta_1\|^2}\textcolor{red}{\beta_1^T}\beta_1$$

$$\vdots$$

$$\beta_s = \alpha_s - \frac{\alpha_s^T\beta_1}{\|\beta_1\|^2}\beta_1 - \frac{\alpha_s^T\beta_2}{\|\beta_2\|^2}\beta_2 - \cdots - \frac{\alpha_s^T\beta_{s-1}}{\|\beta_{s-1}\|^2}\beta_{s-1}$$

正交化

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$（线性无关）$\xrightarrow{\text{正交化}} \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$（等价，两两正交）

实现正交化步骤（施密特正交化方法）：

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_1^T \beta_2 = \beta_1^T \left(\alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{||\beta_1||^2} \beta_1 \right) = \beta_1^T \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{||\beta_1||^2} \beta_1^T \beta_1 = 0$$

$$\beta_1^T \beta_3 = \beta_1^T \left(\alpha_3 - \frac{\alpha_3^T \beta_1}{||\beta_1||^2} \beta_1 - \frac{\alpha_3^T \beta_2}{||\beta_2||^2} \beta_2 \right) = \beta_1^T \alpha_3 - \frac{\alpha_3^T \beta_1}{||\beta_1||^2} \beta_1^T \beta_1 = 0$$

$$\vdots$$

$$\beta_s = \alpha_s - \frac{\alpha_s^T \beta_1}{||\beta_1||^2} \beta_1 - \frac{\alpha_s^T \beta_2}{||\beta_2||^2} \beta_2 - \cdots - \frac{\alpha_s^T \beta_{s-1}}{||\beta_{s-1}||^2} \beta_{s-1}$$

正交化

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$（线性无关）$\xrightarrow{\text{正交化}}$ $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$（等价，两两正交）

实现正交化步骤（施密特正交化方法）：

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_1^T \beta_2 = \beta_1^T \left(\alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{||\beta_1||^2} \beta_1 \right) = \beta_1^T \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{||\beta_1||^2} \beta_1^T \beta_1 = 0$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\alpha_3^T \beta_1}{||\beta_1||^2} \beta_1 - \frac{\alpha_3^T \beta_2}{||\beta_2||^2} \beta_2$$

$$\vdots$$

$$\beta_s = \alpha_s - \frac{\alpha_s^T \beta_1}{||\beta_1||^2} \beta_1 - \frac{\alpha_s^T \beta_2}{||\beta_2||^2} \beta_2 - \cdots - \frac{\alpha_s^T \beta_{s-1}}{||\beta_{s-1}||^2} \beta_{s-1}$$

正交化

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$（线性无关）$\xrightarrow{\text{正交化}}$ $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$（等价，两两正交）

实现正交化步骤（施密特正交化方法）：

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_1^T \beta_2 = \beta_1^T \left(\alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{\|\beta_1\|^2} \beta_1 \right) = \beta_1^T \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{\|\beta_1\|^2} \beta_1^T \beta_1 = 0$$

$$\beta_2^T \beta_3 = \beta_2^T \left(\alpha_3 - \frac{\alpha_3^T \beta_1}{\|\beta_1\|^2} \beta_1 - \frac{\alpha_3^T \beta_2}{\|\beta_2\|^2} \beta_2 \right)$$

$$\vdots$$

$$\beta_s = \alpha_s - \frac{\alpha_s^T \beta_1}{\|\beta_1\|^2} \beta_1 - \frac{\alpha_s^T \beta_2}{\|\beta_2\|^2} \beta_2 - \cdots - \frac{\alpha_s^T \beta_{s-1}}{\|\beta_{s-1}\|^2} \beta_{s-1}$$

正交化

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$（线性无关）$\xrightarrow{\text{正交化}}$ $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$（等价，两两正交）

实现正交化步骤（施密特正交化方法）：

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_1^T \beta_2 = \beta_1^T \left(\alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{||\beta_1||^2} \beta_1 \right) = \beta_1^T \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{||\beta_1||^2} \beta_1^T \beta_1 = 0$$

$$\beta_2^T \beta_3 = \beta_2^T \left(\alpha_3 - \frac{\alpha_3^T \beta_1}{||\beta_1||^2} \beta_1 - \frac{\alpha_3^T \beta_2}{||\beta_2||^2} \beta_2 \right) = \beta_2^T \alpha_3 - \frac{\alpha_3^T \beta_2}{||\beta_2||^2} \beta_2^T \beta_2$$

$$\vdots$$

$$\beta_s = \alpha_s - \frac{\alpha_s^T \beta_1}{||\beta_1||^2} \beta_1 - \frac{\alpha_s^T \beta_2}{||\beta_2||^2} \beta_2 - \cdots - \frac{\alpha_s^T \beta_{s-1}}{||\beta_{s-1}||^2} \beta_{s-1}$$

正交化

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$（线性无关） $\xrightarrow{\text{正交化}}$ $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$（等价，两两正交）

实现正交化步骤（施密特正交化方法）：

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_1^T \beta_2 = \beta_1^T \left(\alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{\|\beta_1\|^2} \beta_1 \right) = \beta_1^T \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{\|\beta_1\|^2} \beta_1^T \beta_1 = 0$$

$$\beta_2^T \beta_3 = \beta_2^T \left(\alpha_3 - \frac{\alpha_3^T \beta_1}{\|\beta_1\|^2} \beta_1 - \frac{\alpha_3^T \beta_2}{\|\beta_2\|^2} \beta_2 \right) = \beta_2^T \alpha_3 - \frac{\alpha_3^T \beta_2}{\|\beta_2\|^2} \beta_2^T \beta_2 = 0$$

$$\vdots$$

$$\beta_s = \alpha_s - \frac{\alpha_s^T \beta_1}{\|\beta_1\|^2} \beta_1 - \frac{\alpha_s^T \beta_2}{\|\beta_2\|^2} \beta_2 - \cdots - \frac{\alpha_s^T \beta_{s-1}}{\|\beta_{s-1}\|^2} \beta_{s-1}$$

正交化

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$（线性无关）$\xrightarrow{\text{正交化}}$ $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$（等价，两两正交）

实现正交化步骤（施密特正交化方法）：

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{||\beta_1||^2}\beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\alpha_3^T \beta_1}{||\beta_1||^2}\beta_1 - \frac{\alpha_3^T \beta_2}{||\beta_2||^2}\beta_2$$

$$\vdots$$

$$\beta_s = \alpha_s - \frac{\alpha_s^T \beta_1}{||\beta_1||^2}\beta_1 - \frac{\alpha_s^T \beta_2}{||\beta_2||^2}\beta_2 - \cdots - \frac{\alpha_s^T \beta_{s-1}}{||\beta_{s-1}||^2}\beta_{s-1}$$

例 1 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ 正交化

例 1 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 =$$

$$\beta_2 =$$

$$\beta_3 =$$

例 1 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 =$$

$$\beta_3 =$$

例 1 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\quad\quad}{\quad\quad}\beta_1$$

$$\beta_3 =$$

例 1 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \underline{\quad\quad}\beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \underline{\quad\quad}\beta_1 - \underline{\quad\quad}\beta_2$$

例 1 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{\|\beta_1\|^2} \beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \underline{\qquad} \beta_1 - \underline{\qquad} \beta_2$$

例 1 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{\|\beta_1\|^2} \beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\alpha_3^T \beta_1}{\|\beta_1\|^2} \beta_1 - \text{————} \beta_2$$

例 1 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{\|\beta_1\|^2} \beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\alpha_3^T \beta_1}{\|\beta_1\|^2} \beta_1 - \frac{\alpha_3^T \beta_2}{\|\beta_2\|^2} \beta_2$$

例 1 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\quad\quad}{\quad\quad}\beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\quad\quad}{\quad\quad}\beta_1 - \frac{\quad\quad}{\quad\quad}\beta_2$$

例 1 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\qquad}{\qquad} \beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\qquad}{\qquad} \beta_1 - \frac{\qquad}{\qquad} \beta_2$$

例 1 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\quad\quad}{\quad\quad}\beta_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\quad\quad}{\quad\quad}\beta_1 - \frac{\quad\quad}{\quad\quad}\beta_2$$

例 1 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\qquad}{\qquad}\beta_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{\qquad}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\qquad}{\qquad}\beta_1 - \frac{\qquad}{\qquad}\beta_2$$

例 1 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\quad\quad}{\quad\quad}\beta_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{4}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\quad\quad}{\quad\quad}\beta_1 - \frac{\quad\quad}{\quad\quad}\beta_2$$

例 1 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\quad}{\quad} \beta_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{4}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\quad}{\quad} \beta_1 - \frac{\quad}{\quad} \beta_2$$

例 1 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\beta_2 = \alpha_2 - \dfrac{\quad}{\quad} \beta_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \dfrac{4}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\beta_3 = \alpha_3 - \dfrac{\quad}{\quad} \beta_1 - \dfrac{\quad}{\quad} \beta_2$

$= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} - \dfrac{\quad}{\quad} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \dfrac{\quad}{\quad} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

例 1 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\quad}{\quad}\beta_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{4}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\quad}{\quad}\beta_1 - \frac{\quad}{\quad}\beta_2$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} - \frac{\quad}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\quad}{\quad}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

例 1 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{}{}\beta_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{4}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{}{}\beta_1 - \frac{}{}\beta_2$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} - \frac{12}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{}{}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

例 1 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\quad}{\quad}\beta_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{4}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\quad}{\quad}\beta_1 - \frac{\quad}{\quad}\beta_2$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} - \frac{12}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\quad}{16}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

例 1 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\quad}{\quad}\beta_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{4}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\quad}{\quad}\beta_1 - \frac{\quad}{\quad}\beta_2$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} - \frac{12}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-32}{16}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

例 1 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{}{}\beta_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{4}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{}{}\beta_1 - \frac{}{}\beta_2$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} - \frac{12}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-32}{16}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

例 2 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 正交化

例 2 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$\qquad \beta_1 =$

$\qquad \beta_2 =$

$\qquad \beta_3 =$

例 2 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 =$$

$$\beta_3 =$$

例 2 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{}{} \beta_1$$

$$\beta_3 =$$

例 2 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\quad\quad}{\quad\quad}\beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\quad\quad}{\quad\quad}\beta_1 - \frac{\quad\quad}{\quad\quad}\beta_2$$

例 2 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{}{} \beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{}{} \beta_1 - \frac{}{} \beta_2$$

例 2 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\quad}{\quad}\beta_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\quad}{\quad}\beta_1 - \frac{\quad}{\quad}\beta_2$$

例 2 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\quad}{\quad}\beta_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\quad}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\quad}{\quad}\beta_1 - \frac{\quad}{\quad}\beta_2$$

例 2 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{}{} \beta_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{6}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{}{} \beta_1 - \frac{}{} \beta_2$$

例 2 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{}{} \beta_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{6}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{}{} \beta_1 - \frac{}{} \beta_2$$

例 2 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{}{} \beta_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{6}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{}{} \beta_1 - \frac{}{} \beta_2$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

例 2 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\quad}{\quad} \beta_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{6}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\quad}{\quad} \beta_1 - \frac{\quad}{\quad} \beta_2$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{\quad}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\quad}{\quad} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

例 2 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\quad}{\quad}\beta_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{6}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\quad}{\quad}\beta_1 - \frac{\quad}{\quad}\beta_2$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{6}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

例 2 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{}{} \beta_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{6}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{}{} \beta_1 - \frac{}{} \beta_2$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{6}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

例 2 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\quad\quad}{\quad\quad}\beta_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{6}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\quad\quad}{\quad\quad}\beta_1 - \frac{\quad\quad}{\quad\quad}\beta_2$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{6}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{0}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

例 2 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\quad}{\quad}\beta_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{6}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\quad}{\quad}\beta_1 - \frac{\quad}{\quad}\beta_2$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{6}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{0}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

例 3 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 正交化

例 3 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 =$$

$$\beta_2 =$$

$$\beta_3 =$$

例 3 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$\beta_1 = \alpha_1$

$\beta_2 =$

$\beta_3 =$

例 3 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \underline{\hspace{2cm}}\beta_1$$

$$\beta_3 =$$

例 3 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{}{} \beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{}{} \beta_1 - \frac{}{} \beta_2$$

例 3 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\quad\quad}{\quad\quad}\beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\quad\quad}{\quad\quad}\beta_1 - \frac{\quad\quad}{\quad\quad}\beta_2$$

例 3 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{}{} \beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{}{} \beta_1 - \frac{}{} \beta_2$$

例 3 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \underline{\quad\quad} \beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\quad}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \underline{\quad\quad} \beta_1 - \underline{\quad\quad} \beta_2$$

例 3 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{}{}\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{}{}\beta_1 - \frac{}{}\beta_2$$

例 3 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{}{}\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{}{}\beta_1 - \frac{}{}\beta_2$$

例 3 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \text{———} \beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \text{———} \beta_1 - \text{———} \beta_2$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

例 3 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \text{——} \beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \text{——} \beta_1 - \text{——} \beta_2$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

例 3 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\quad}{\quad}\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\quad}{\quad}\beta_1 - \frac{\quad}{\quad}\beta_2$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - -\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

例 3 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\qquad}{\qquad}\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\qquad}{\qquad}\beta_1 - \frac{\qquad}{\qquad}\beta_2$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

例 3 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\quad}{\quad}\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\quad}{\quad}\beta_1 - \frac{\quad}{\quad}\beta_2$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

例 3 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{}{}\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{}{}\beta_1 - \frac{}{}\beta_2$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 \\ -1/4 \\ -1/4 \\ 3/4 \end{pmatrix}$$

正交矩阵

定义 设 n 阶矩阵 Q 满足 $Q^T Q = I_n$，则称 Q 是 正交矩阵。

正交矩阵

定义 设 n 阶矩阵 Q 满足 $Q^T Q = I_n$，则称 Q 是正交矩阵。

例 $Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 是正交矩阵：

正交矩阵

定义 设 n 阶矩阵 Q 满足 $Q^T Q = I_n$，则称 Q 是 正交矩阵。

例 $Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 是正交矩阵：

$$Q^T Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

正交矩阵

定义 设 n 阶矩阵 Q 满足 $Q^T Q = I_n$，则称 Q 是正交矩阵。

例 $Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 是正交矩阵：

$$Q^T Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

正交矩阵

定义 设 n 阶矩阵 Q 满足 $Q^T Q = I_n$，则称 Q 是 正交矩阵。

例 $Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 是正交矩阵：

$$Q^T Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

性质

1. 若 Q 为正交矩阵，则 $|Q| = 1$ 或 $|Q| = -1$；

正交矩阵

定义 设 n 阶矩阵 Q 满足 $Q^T Q = I_n$，则称 Q 是正交矩阵。

例 $Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 是正交矩阵：

$$Q^T Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

性质

  1. 若 Q 为正交矩阵，则 $|Q| = 1$ 或 $|Q| = -1$；

证明

  1. $Q^T Q = I_n \Rightarrow$

正交矩阵

定义 设 n 阶矩阵 Q 满足 $Q^T Q = I_n$，则称 Q 是正交矩阵。

例 $Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 是正交矩阵：

$$Q^T Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

性质

1. 若 Q 为正交矩阵，则 $|Q| = 1$ 或 $|Q| = -1$；

证明

1. $Q^T Q = I_n \Rightarrow \qquad |I_n| = |Q^T Q|$

正交矩阵

定义 设 n 阶矩阵 Q 满足 $Q^T Q = I_n$，则称 Q 是正交矩阵。

例 $Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 是正交矩阵：

$$Q^T Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

性质

  1. 若 Q 为正交矩阵，则 $|Q| = 1$ 或 $|Q| = -1$；

证明

  1. $Q^T Q = I_n \Rightarrow 1 = |I_n| = |Q^T Q|$

正交矩阵

定义 设 n 阶矩阵 Q 满足 $Q^T Q = I_n$，则称 Q 是正交矩阵。

例 $Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 是正交矩阵：

$$Q^T Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

性质

1. 若 Q 为正交矩阵，则 $|Q| = 1$ 或 $|Q| = -1$；

证明

1. $Q^T Q = I_n \Rightarrow 1 = |I_n| = |Q^T Q| = |Q^T| \cdot |Q|$

正交矩阵

定义 设 n 阶矩阵 Q 满足 $Q^T Q = I_n$，则称 Q 是 正交矩阵。

例 $Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 是正交矩阵：

$$Q^T Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

性质

1. 若 Q 为正交矩阵，则 $|Q| = 1$ 或 $|Q| = -1$；

证明

1. $Q^T Q = I_n \Rightarrow 1 = |I_n| = |Q^T Q| = |Q^T| \cdot |Q| = |Q|^2$

正交矩阵

定义 设 n 阶矩阵 Q 满足 $Q^T Q = I_n$，则称 Q 是 正交矩阵。

例 $Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 是正交矩阵：

$$Q^T Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

性质

1. 若 Q 为正交矩阵，则 $|Q| = 1$ 或 $|Q| = -1$；

证明

1. $Q^T Q = I_n \ \Rightarrow \ 1 = |I_n| = |Q^T Q| = |Q^T| \cdot |Q| = |Q|^2 \ \Rightarrow \ |Q| = \pm 1$

正交矩阵

定义 设 n 阶矩阵 Q 满足 $Q^T Q = I_n$，则称 Q 是 正交矩阵。

例 $Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 是正交矩阵：

$$Q^T Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

性质

1. 若 Q 为正交矩阵，则 $|Q| = 1$ 或 $|Q| = -1$；

2. 若 Q 为正交矩阵，则 Q 可逆，且 $Q^{-1} = Q^T$；

证明

1. $Q^T Q = I_n \Rightarrow 1 = |I_n| = |Q^T Q| = |Q^T| \cdot |Q| = |Q|^2 \Rightarrow |Q| = \pm 1$

正交矩阵

定义 设 n 阶矩阵 Q 满足 $Q^T Q = I_n$，则称 Q 是 正交矩阵。

例 $Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 是正交矩阵：

$$Q^T Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

性质

1. 若 Q 为正交矩阵，则 $|Q| = 1$ 或 $|Q| = -1$；

2. 若 Q 为正交矩阵，则 Q 可逆，且 $Q^{-1} = Q^T$；

证明

1. $Q^T Q = I_n \Rightarrow 1 = |I_n| = |Q^T Q| = |Q^T| \cdot |Q| = |Q|^2 \Rightarrow |Q| = \pm 1$

2. 显然

正交矩阵

定义 设 n 阶矩阵 Q 满足 $Q^T Q = I_n$，则称 Q 是正交矩阵。

例 $Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 是正交矩阵：

$$Q^T Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

性质

1. 若 Q 为正交矩阵，则 $|Q| = 1$ 或 $|Q| = -1$；

2. 若 Q 为正交矩阵，则 Q 可逆，且 $Q^{-1} = Q^T$；

3. 若 P, Q 为正交矩阵，则 PQ 也是正交矩阵。

证明

1. $Q^T Q = I_n \Rightarrow 1 = |I_n| = |Q^T Q| = |Q^T| \cdot |Q| = |Q|^2 \Rightarrow |Q| = \pm 1$

2. 显然

正交矩阵

定义 设 n 阶矩阵 Q 满足 $Q^T Q = I_n$，则称 Q 是 正交矩阵。

例 $Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 是正交矩阵：

$$Q^T Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

性质

1. 若 Q 为正交矩阵，则 $|Q| = 1$ 或 $|Q| = -1$；

2. 若 Q 为正交矩阵，则 Q 可逆，且 $Q^{-1} = Q^T$；

3. 若 P, Q 为正交矩阵，则 PQ 也是正交矩阵。

证明

1. $Q^T Q = I_n \Rightarrow 1 = |I_n| = |Q^T Q| = |Q^T| \cdot |Q| = |Q|^2 \Rightarrow |Q| = \pm 1$

2. 显然

3. $(PQ)^T (PQ) =$

正交矩阵

定义 设 n 阶矩阵 Q 满足 $Q^T Q = I_n$，则称 Q 是 正交矩阵。

例 $Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 是正交矩阵：

$$Q^T Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

性质

1. 若 Q 为正交矩阵，则 $|Q| = 1$ 或 $|Q| = -1$；

2. 若 Q 为正交矩阵，则 Q 可逆，且 $Q^{-1} = Q^T$；

3. 若 P, Q 为正交矩阵，则 PQ 也是正交矩阵。

证明

1. $Q^T Q = I_n \Rightarrow 1 = |I_n| = |Q^T Q| = |Q^T| \cdot |Q| = |Q|^2 \Rightarrow |Q| = \pm 1$

2. 显然

3. $(PQ)^T (PQ) = Q^T P^T P Q =$

正交矩阵

定义 设 n 阶矩阵 Q 满足 $Q^T Q = I_n$，则称 Q 是 正交矩阵。

例 $Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 是正交矩阵：

$$Q^T Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

性质

1. 若 Q 为正交矩阵，则 $|Q| = 1$ 或 $|Q| = -1$；

2. 若 Q 为正交矩阵，则 Q 可逆，且 $Q^{-1} = Q^T$；

3. 若 P, Q 为正交矩阵，则 PQ 也是正交矩阵。

证明

1. $Q^T Q = I_n \Rightarrow 1 = |I_n| = |Q^T Q| = |Q^T| \cdot |Q| = |Q|^2 \Rightarrow |Q| = \pm 1$

2. 显然

3. $(PQ)^T(PQ) = Q^T P^T P Q = Q^T I_n Q =$

正交矩阵

定义 设 n 阶矩阵 Q 满足 $Q^T Q = I_n$，则称 Q 是正交矩阵。

例 $Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 是正交矩阵：

$$Q^T Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

性质

1. 若 Q 为正交矩阵，则 $|Q| = 1$ 或 $|Q| = -1$；

2. 若 Q 为正交矩阵，则 Q 可逆，且 $Q^{-1} = Q^T$；

3. 若 P, Q 为正交矩阵，则 PQ 也是正交矩阵。

证明

1. $Q^T Q = I_n \Rightarrow 1 = |I_n| = |Q^T Q| = |Q^T| \cdot |Q| = |Q|^2 \Rightarrow |Q| = \pm 1$

2. 显然

3. $(PQ)^T (PQ) = Q^T P^T P Q = Q^T I_n Q = Q^T Q =$

正交矩阵

定义 设 n 阶矩阵 Q 满足 $Q^T Q = I_n$，则称 Q 是 正交矩阵。

例 $Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 是正交矩阵：

$$Q^T Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

性质

1. 若 Q 为正交矩阵，则 $|Q| = 1$ 或 $|Q| = -1$；

2. 若 Q 为正交矩阵，则 Q 可逆，且 $Q^{-1} = Q^T$；

3. 若 P, Q 为正交矩阵，则 PQ 也是正交矩阵。

证明

1. $Q^T Q = I_n \Rightarrow 1 = |I_n| = |Q^T Q| = |Q^T| \cdot |Q| = |Q|^2 \Rightarrow |Q| = \pm 1$

2. 显然

3. $(PQ)^T(PQ) = Q^T P^T P Q = Q^T I_n Q = Q^T Q = I_n$

正交矩阵

定理 n 阶矩阵 Q 是正交矩阵的充分必要条件是：Q 的列（行）向量组是单位正交向量组。

正交矩阵

定理 n 阶矩阵 Q 是正交矩阵的充分必要条件是：Q 的列（行）向量组是单位正交向量组。

证明 设 $Q = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \ldots \ \alpha_n)$，则

$$Q^T Q = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix} (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \ldots \ \alpha_n)$$

正交矩阵

定理 n 阶矩阵 Q 是正交矩阵的充分必要条件是：Q 的列（行）向量组是单位正交向量组。

证明 设 $Q = (\alpha_1\ \alpha_2\ \dots\ \alpha_n)$，则

$$Q^T Q = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix} (\alpha_1\ \alpha_2\ \dots\ \alpha_n) = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

正交矩阵

定理 n 阶矩阵 Q 是正交矩阵的充分必要条件是：Q 的列（行）向量组是单位正交向量组。

证明 设 $Q = (\alpha_1\ \alpha_2\ \dots\ \alpha_n)$，则

$$Q^T Q = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix} (\alpha_1\ \alpha_2\ \dots\ \alpha_n) = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \alpha_1 & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

正交矩阵

定理 n 阶矩阵 Q 是正交矩阵的充分必要条件是：Q 的列（行）向量组是单位正交向量组。

证明 设 $Q = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \ldots \ \alpha_n)$，则

$$Q^T Q = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix} (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \ldots \ \alpha_n) = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \alpha_1 & \alpha_1^T \alpha_2 & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

正交矩阵

定理 n 阶矩阵 Q 是正交矩阵的充分必要条件是：Q 的列（行）向量组是单位正交向量组。

证明 设 $Q = (\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_n)$，则

$$Q^T Q = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix} (\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_n) = \begin{pmatrix} \alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

正交矩阵

定理 n 阶矩阵 Q 是正交矩阵的充分必要条件是：Q 的列（行）向量组是单位正交向量组。

证明 设 $Q = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \ldots \ \alpha_n)$，则

$$Q^T Q = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix} (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \ldots \ \alpha_n) = \begin{pmatrix} \alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n \\ \alpha_2^T\alpha_1 & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

正交矩阵

定理 n 阶矩阵 Q 是正交矩阵的充分必要条件是：Q 的列（行）向量组是单位正交向量组。

证明 设 $Q = (\alpha_1\ \alpha_2\ \dots\ \alpha_n)$，则

$$Q^T Q = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix} (\alpha_1\ \alpha_2\ \dots\ \alpha_n) = \begin{pmatrix} \alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n \\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

正交矩阵

定理 n 阶矩阵 Q 是正交矩阵的充分必要条件是：Q 的列（行）向量组是单位正交向量组。

证明 设 $Q = (\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_n)$，则

$$Q^T Q = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix} (\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_n) = \begin{pmatrix} \alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n \\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n \\ & & & \end{pmatrix}$$

正交矩阵

定理 n 阶矩阵 Q 是正交矩阵的充分必要条件是：Q 的列（行）向量组是单位正交向量组。

证明 设 $Q = (\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_n)$，则

$$Q^TQ = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix} (\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_n) = \begin{pmatrix} \alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n \\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n^T\alpha_1 & & & \end{pmatrix}$$

正交矩阵

定理 n 阶矩阵 Q 是正交矩阵的充分必要条件是：Q 的列（行）向量组是单位正交向量组。

证明 设 $Q = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \ldots \ \alpha_n)$，则

$$Q^T Q = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix} (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \ldots \ \alpha_n) = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \alpha_1 & \alpha_1^T \alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T \alpha_n \\ \alpha_2^T \alpha_1 & \alpha_2^T \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T \alpha_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n^T \alpha_1 & \alpha_n^T \alpha_2 \end{pmatrix}$$

正交矩阵

定理 n 阶矩阵 Q 是正交矩阵的充分必要条件是：Q 的列（行）向量组是单位正交向量组。

证明 设 $Q = (\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_n)$，则

$$Q^T Q = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix} (\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_n) = \begin{pmatrix} \alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n \\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n \end{pmatrix}$$

正交矩阵

定理 n 阶矩阵 Q 是正交矩阵的充分必要条件是：Q 的列（行）向量组是单位正交向量组。

证明 设 $Q = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \ldots \ \alpha_n)$，则

$$Q^T Q = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix} (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \ldots \ \alpha_n) = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \alpha_1 & \alpha_1^T \alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T \alpha_n \\ \alpha_2^T \alpha_1 & \alpha_2^T \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T \alpha_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n^T \alpha_1 & \alpha_n^T \alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T \alpha_n \end{pmatrix}$$

所以

$$Q^T Q = I$$

正交矩阵

定理 n 阶矩阵 Q 是正交矩阵的充分必要条件是：Q 的列（行）向量组是单位正交向量组。

证明 设 $Q = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \ldots \ \alpha_n)$，则

$$Q^T Q = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix} (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \ldots \ \alpha_n) = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \alpha_1 & \alpha_1^T \alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T \alpha_n \\ \alpha_2^T \alpha_1 & \alpha_2^T \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T \alpha_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n^T \alpha_1 & \alpha_n^T \alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T \alpha_n \end{pmatrix}$$

所以

$$Q^T Q = I \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha_i^T \alpha_i = 1, \\ \alpha_i^T \alpha_j = 0, \end{cases}$$

正交矩阵

定理 n 阶矩阵 Q 是正交矩阵的充分必要条件是：Q 的列（行）向量组是单位正交向量组。

证明 设 $Q = (\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_n)$，则

$$Q^T Q = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix} (\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_n) = \begin{pmatrix} \alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n \\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n \end{pmatrix}$$

所以

$$Q^T Q = I \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha_i^T\alpha_i = 1, & (i = 1, 2, \ldots, n) \\ \alpha_i^T\alpha_j = 0, & (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

例 验证下列矩阵是否正交矩阵：

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

例 验证下列矩阵是否正交矩阵：

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

提示 验证：列向量组是单位正交向量组

例 验证下列矩阵是否正交矩阵：

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

提示 验证：列向量组是单位正交向量组

答案 A_1 是正交矩阵

例 验证下列矩阵是否正交矩阵：

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

提示 验证：列向量组是单位正交向量组

答案 A_1 是正交矩阵，A_2 不是正交矩阵

实对称矩阵的特征值和特征向量

- 对任意 n 阶方阵：
  1. 一定有 n 个特征值（计算重数，复数域内），可能有非实数特征值
  2. 不一定能对角化

实对称矩阵的特征值和特征向量

- 对任意 n 阶方阵：
  1. 一定有 n 个特征值（计算重数，复数域内），可能有非实数特征值
  2. 不一定能对角化

例 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 的特征值方程是

$$0 = |\lambda I - A| =$$

实对称矩阵的特征值和特征向量

- 对任意 n 阶方阵：
  1. 一定有 n 个特征值（计算重数，复数域内），可能有非实数特征值
  2. 不一定能对角化

例 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 的特征值方程是

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} =$$

实对称矩阵的特征值和特征向量

- 对任意 n 阶方阵：
  1. 一定有 n 个特征值（计算重数，复数域内），可能有非实数特征值
  2. 不一定能对角化

例 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 的特征值方程是

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

实对称矩阵的特征值和特征向量

- 对任意 n 阶方阵：
    1. 一定有 n 个特征值（计算重数，复数域内），可能有非实数特征值
    2. 不一定能对角化

例 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 的特征值方程是

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

所以特征值是 $\lambda_1 = -\sqrt{-1}$，$\lambda_2 = \sqrt{-1}$。

实对称矩阵的特征值和特征向量

- 对任意 n 阶方阵：
    1. 一定有 n 个特征值（计算重数，复数域内），可能有非实数特征值
    2. 不一定能对角化

例 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 的特征值方程是

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

所以特征值是 $\lambda_1 = -\sqrt{-1}$，$\lambda_2 = \sqrt{-1}$。

- 对实对称矩阵，总成立：
    1. 定理 实对称矩阵的特征值都是实数。
    2. 定理 实对称矩阵一定可以对角化。

定理 实对称矩阵一定可以对角化。

定理 实对称矩阵一定可以对角化。

也就是：设 A 为实对称矩阵，则一定存在可逆矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

定理 实对称矩阵一定可以对角化。

也就是：设 A 为实对称矩阵，则一定存在可逆矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

事实上，还可以进一步要求 P 是正交矩阵：

定理 实对称矩阵一定可以对角化。

也就是：设 A 为实对称矩阵，则一定存在可逆矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

事实上，还可以进一步要求 P 是正交矩阵：

定理 设 A 为实对称矩阵，则一定存在正交矩阵 Q，使得

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

定理 实对称矩阵一定可以对角化。

也就是：设 A 为实对称矩阵，则一定存在可逆矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

事实上，还可以进一步要求 P 是正交矩阵：

定理 设 A 为实对称矩阵，则一定存在正交矩阵 Q，使得

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

注 由于正交矩阵满足 $Q^{-1} = Q^T$，

定理 实对称矩阵一定可以对角化。

也就是：设 A 为实对称矩阵，则一定存在可逆矩阵 P ，使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

事实上，还可以进一步要求 P 是正交矩阵：

定理 设 A 为实对称矩阵，则一定存在正交矩阵 Q ，使得

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

注 由于正交矩阵满足 $Q^{-1} = Q^T$ ，上述等价于 $Q^TAQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

定理 实对称矩阵的对应于不同特征值的特征向量正交。

定理 实对称矩阵的对应于不同特征值的特征向量正交。

证明 设 A 为实对称矩阵，$\lambda_1 \neq \lambda_2$ 为两特征值，α_1, α_2 为相应特征向量，

$$\alpha_2^T \alpha_1 = 0$$

定理 实对称矩阵的对应于不同特征值的特征向量正交。

证明 设 A 为实对称矩阵，$\lambda_1 \neq \lambda_2$ 为两特征值，α_1, α_2 为相应特征向量，则

$$A\alpha_1 = \lambda_1 \alpha_1$$

$$A\alpha_2 = \lambda_2 \alpha_2$$

$$\alpha_2^T \alpha_1 = 0$$

定理 实对称矩阵的对应于不同特征值的特征向量正交。

证明 设 A 为实对称矩阵，$\lambda_1 \neq \lambda_2$ 为两特征值，α_1, α_2 为相应特征向量，则

$$A\alpha_1 = \lambda_1 \alpha_1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2^T A \alpha_1 = \lambda_1\, \alpha_2^T \alpha_1$$

$$A\alpha_2 = \lambda_2 \alpha_2$$

$$\alpha_2^T \alpha_1 = 0$$

定理 实对称矩阵的对应于不同特征值的特征向量正交。

证明 设 A 为实对称矩阵，$\lambda_1 \neq \lambda_2$ 为两特征值，α_1, α_2 为相应特征向量，则

$$A\alpha_1 = \lambda_1 \alpha_1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2^T A \alpha_1 = \lambda_1 \, \alpha_2^T \alpha_1$$

$$A\alpha_2 = \lambda_2 \alpha_2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1^T A \alpha_2 = \lambda_2 \, \alpha_1^T \alpha_2$$

$$\alpha_2^T \alpha_1 = 0$$

定理 实对称矩阵的对应于不同特征值的特征向量正交。

证明 设 A 为实对称矩阵，$\lambda_1 \neq \lambda_2$ 为两特征值，α_1, α_2 为相应特征向量，则

$$A\alpha_1 = \lambda_1 \alpha_1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2^T A \alpha_1 = \lambda_1 \boxed{\alpha_2^T \alpha_1}$$
$$A\alpha_2 = \lambda_2 \alpha_2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1^T A \alpha_2 = \lambda_2 \boxed{\alpha_1^T \alpha_2}$$

$$\alpha_2^T \alpha_1 = 0$$

定理 实对称矩阵的对应于不同特征值的特征向量正交。

证明 设 A 为实对称矩阵，$\lambda_1 \neq \lambda_2$ 为两特征值，α_1, α_2 为相应特征向量，则

$$A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha_2^T A\alpha_1} = \lambda_1 \boxed{\alpha_2^T \alpha_1}$$

$$A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha_1^T A\alpha_2} = \lambda_2 \boxed{\alpha_1^T \alpha_2}$$

$$\alpha_2^T \alpha_1 = 0$$

定理 实对称矩阵的对应于不同特征值的特征向量正交。

证明 设 A 为实对称矩阵，$\lambda_1 \neq \lambda_2$ 为两特征值，α_1, α_2 为相应特征向量，则

$$A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha_2^T A\alpha_1} = \lambda_1 \boxed{\alpha_2^T\alpha_1}$$

$$A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha_1^T A\alpha_2} = \lambda_2 \boxed{\alpha_1^T\alpha_2}$$

注意 $\alpha_2^T A\alpha_1 = \left(\alpha_2^T A\alpha_1\right)^T =$

$$\alpha_2^T\alpha_1 = 0$$

定理 实对称矩阵的对应于不同特征值的特征向量正交。

证明 设 A 为实对称矩阵，$\lambda_1 \neq \lambda_2$ 为两特征值，α_1, α_2 为相应特征向量，则

$$A\alpha_1 = \lambda_1 \alpha_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha_2^T A \alpha_1} = \lambda_1 \boxed{\alpha_2^T \alpha_1}$$

$$A\alpha_2 = \lambda_2 \alpha_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha_1^T A \alpha_2} = \lambda_2 \boxed{\alpha_1^T \alpha_2}$$

注意 $\alpha_2^T A \alpha_1 = \left(\alpha_2^T A \alpha_1\right)^T = \alpha_1^T A^T \left(\alpha_2^T\right)^T =$

$$\alpha_2^T \alpha_1 = 0$$

定理 实对称矩阵的对应于不同特征值的特征向量正交。

证明 设 A 为实对称矩阵，$\lambda_1 \neq \lambda_2$ 为两特征值，α_1, α_2 为相应特征向量，则

$$A\alpha_1 = \lambda_1 \alpha_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha_2^T A \alpha_1} = \lambda_1 \boxed{\alpha_2^T \alpha_1}$$

$$A\alpha_2 = \lambda_2 \alpha_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha_1^T A \alpha_2} = \lambda_2 \boxed{\alpha_1^T \alpha_2}$$

注意 $\alpha_2^T A \alpha_1 = \left(\alpha_2^T A \alpha_1\right)^T = \alpha_1^T A^T \left(\alpha_2^T\right)^T = \alpha_1^T A \alpha_2$

$$\alpha_2^T \alpha_1 = 0$$

定理 实对称矩阵的对应于不同特征值的特征向量正交。

证明 设 A 为实对称矩阵，$\lambda_1 \neq \lambda_2$ 为两特征值，α_1, α_2 为相应特征向量，则

$$A\alpha_1 = \lambda_1 \alpha_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha_2^T A \alpha_1} = \lambda_1 \boxed{\alpha_2^T \alpha_1}$$

$$A\alpha_2 = \lambda_2 \alpha_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha_1^T A \alpha_2} = \lambda_2 \boxed{\alpha_1^T \alpha_2}$$

注意 $\alpha_2^T A \alpha_1 = \left(\alpha_2^T A \alpha_1\right)^T = \alpha_1^T A^T \left(\alpha_2^T\right)^T = \alpha_1^T A \alpha_2$，两式相减得

$$0 = (\lambda_1 - \lambda_2)\alpha_2^T \alpha_1$$

$$\alpha_2^T \alpha_1 = 0$$

定理 实对称矩阵的对应于不同特征值的特征向量正交。

证明 设 A 为实对称矩阵，$\lambda_1 \neq \lambda_2$ 为两特征值，α_1, α_2 为相应特征向量，则

$$A\alpha_1 = \lambda_1 \alpha_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha_2^T A \alpha_1} = \lambda_1 \boxed{\alpha_2^T \alpha_1}$$

$$A\alpha_2 = \lambda_2 \alpha_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha_1^T A \alpha_2} = \lambda_2 \boxed{\alpha_1^T \alpha_2}$$

注意 $\alpha_2^T A \alpha_1 = \left(\alpha_2^T A \alpha_1\right)^T = \alpha_1^T A^T \left(\alpha_2^T\right)^T = \alpha_1^T A \alpha_2$，两式相减得

$$0 = (\lambda_1 - \lambda_2)\alpha_2^T \alpha_1$$

由于 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，所以

$$\alpha_2^T \alpha_1 = 0$$

定理 设 A 为实对称矩阵，则存在正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。

定理 设 A 为实对称矩阵，则存在正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。

解释示意图

不同 特征值	重 数	正交化	单位化
λ_1	n_1		
λ_2	n_2		
$\vdots$	$\vdots$		
λ_s	n_s		
	共 n		

$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$

定理 设 A 为实对称矩阵，则存在正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。

解释示意图

不同特征值	重数	$(\lambda_i I - A)x = 0$ 基础解系	正交化	单位化
λ_1	n_1			
λ_2	n_2			
$\vdots$	$\vdots$			
λ_s	n_s			
	共 n			

$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$

定理 设 A 为实对称矩阵，则存在正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。

解释示意图

不同 特征值	重 数	$(\lambda_i I - A)x = 0$ 基础解系	正交化	单位化
λ_1	n_1	$\alpha_1^{(1)}, \cdots, \alpha_{n_1}^{(1)}$		
λ_2	n_2			
$\vdots$	$\vdots$			
λ_s	n_s			
	共 n			
$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$				

定理 设 A 为实对称矩阵，则存在正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。

解释示意图

不同 特征值	重 数	$(\lambda_i I - A)x = 0$ 基础解系	正交化	单位化
λ_1	n_1	$\alpha_1^{(1)}, \cdots, \alpha_{n_1}^{(1)}$		
λ_2	n_2	$\alpha_1^{(2)}, \cdots, \alpha_{n_2}^{(2)}$		
$\vdots$	$\vdots$			
λ_s	n_s			
	共 n			

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$$

定理 设 A 为实对称矩阵，则存在正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。

解释示意图

不同 特征值	重 数	$(\lambda_i I - A)x = 0$ 基础解系	正交化	单位化
λ_1	n_1	$\alpha_1^{(1)}, \cdots, \alpha_{n_1}^{(1)}$		
λ_2	n_2	$\alpha_1^{(2)}, \cdots, \alpha_{n_2}^{(2)}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
λ_s	n_s	$\alpha_1^{(s)}, \cdots, \alpha_{n_s}^{(s)}$		
	共 n			

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$$

定理 设 A 为实对称矩阵，则存在正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。

解释示意图

不同 特征值	重 数	$(\lambda_i I - A)x = 0$ 基础解系	正交化	单位化
λ_1	n_1	$\alpha_1^{(1)}, \cdots, \alpha_{n_1}^{(1)}$		
λ_2	n_2	$\alpha_1^{(2)}, \cdots, \alpha_{n_2}^{(2)}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
λ_s	n_s	$\alpha_1^{(s)}, \cdots, \alpha_{n_s}^{(s)}$		
	共 n	共 n 个无关特征向量		

$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$

定理 设 A 为实对称矩阵，则存在正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。

解释示意图

不同 特征值	重 数	$(\lambda_i I - A)x = 0$ 基础解系	正交化	单位化
λ_1	n_1	$\alpha_1^{(1)}, \cdots, \alpha_{n_1}^{(1)}$		
λ_2	n_2	$\alpha_1^{(2)}, \cdots, \alpha_{n_2}^{(2)}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
λ_s	n_s	$\alpha_1^{(s)}, \cdots, \alpha_{n_s}^{(s)}$		
	共 n	共 n 个无关特征向量		

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$$

- 令 $P = (\alpha_1^{(1)}, \cdots, \alpha_{n_s}^{(n_s)})$，则 $P^{-1}AP = \Lambda$。

定理 设 A 为实对称矩阵，则存在正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。

解释示意图

不同 特征值	重 数	$(\lambda_i I - A)x = 0$ 基础解系	正交化	单位化
λ_1	n_1	$\alpha_1^{(1)}, \cdots, \alpha_{n_1}^{(1)}$		
λ_2	n_2	$\alpha_1^{(2)}, \cdots, \alpha_{n_2}^{(2)}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
λ_s	n_s	$\alpha_1^{(s)}, \cdots, \alpha_{n_s}^{(s)}$		

共 n　　共 n 个无关特征向量

$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$

- 令 $P = (\alpha_1^{(1)}, \cdots, \alpha_{n_s}^{(n_s)})$，则 $P^{-1}AP = \Lambda$。但一般地，P 不是正交矩阵。

定理 设 A 为实对称矩阵，则存在正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。

解释示意图

不同 特征值	重 数	$(\lambda_i I - A)x = 0$ 基础解系	正交化	单位化
λ_1	n_1	$\alpha_1^{(1)}, \cdots, \alpha_{n_1}^{(1)}$ $\Rightarrow$	$\beta_1^{(1)}, \cdots, \beta_{n_1}^{(1)}$	
λ_2	n_2	$\alpha_1^{(2)}, \cdots, \alpha_{n_2}^{(2)}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
λ_s	n_s	$\alpha_1^{(s)}, \cdots, \alpha_{n_s}^{(s)}$		
	共 n	共 n 个无关特征向量		

$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda - \lambda_s)^{n_s}$

- 令 $P = (\alpha_1^{(1)}, \cdots, \alpha_{n_s}^{(n_s)})$，则 $P^{-1}AP = \Lambda$。但一般地，P 不是正交矩阵。

定理 设 A 为实对称矩阵，则存在正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。

解释示意图

不同特征值	重数	$(\lambda_i I - A)x = 0$ 基础解系	正交化	单位化
λ_1	n_1	$\alpha_1^{(1)}, \cdots, \alpha_{n_1}^{(1)}$ $\Rightarrow$	$\beta_1^{(1)}, \cdots, \beta_{n_1}^{(1)}$ $\Rightarrow$	$\gamma_1^{(1)}, \cdots, \gamma_{n_1}^{(1)}$
λ_2	n_2	$\alpha_1^{(2)}, \cdots, \alpha_{n_2}^{(2)}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
λ_s	n_s	$\alpha_1^{(s)}, \cdots, \alpha_{n_s}^{(s)}$		
	共 n	共 n 个无关特征向量		

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$$

- 令 $P = (\alpha_1^{(1)}, \cdots, \alpha_{n_s}^{(n_s)})$，则 $P^{-1}AP = \Lambda$。但一般地，P 不是正交矩阵。

定理 设 A 为实对称矩阵，则存在正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。

解释示意图

不同 特征值	重 数	$(\lambda_i I - A)x = 0$ 基础解系	正交化	单位化
λ_1	n_1	$\alpha_1^{(1)}, \cdots, \alpha_{n_1}^{(1)}$ $\Rightarrow$	$\beta_1^{(1)}, \cdots, \beta_{n_1}^{(1)}$ $\Rightarrow$	$\gamma_1^{(1)}, \cdots, \gamma_{n_1}^{(1)}$
λ_2	n_2	$\alpha_1^{(2)}, \cdots, \alpha_{n_2}^{(2)}$ $\Rightarrow$	$\beta_1^{(2)}, \cdots, \beta_{n_2}^{(2)}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
λ_s	n_s	$\alpha_1^{(s)}, \cdots, \alpha_{n_s}^{(s)}$		

共 n　共 n 个无关特征向量

$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$

- 令 $P = (\alpha_1^{(1)}, \cdots, \alpha_{n_s}^{(n_s)})$，则 $P^{-1}AP = \Lambda$。但一般地，P 不是正交矩阵。

定理 设 A 为实对称矩阵，则存在正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。

解释示意图

不同 特征值	重 数	$(\lambda_i I - A)x = 0$ 基础解系	正交化	单位化
λ_1	n_1	$\alpha_1^{(1)}, \cdots, \alpha_{n_1}^{(1)}$ $\Rightarrow$	$\beta_1^{(1)}, \cdots, \beta_{n_1}^{(1)}$ $\Rightarrow$	$\gamma_1^{(1)}, \cdots, \gamma_{n_1}^{(1)}$
λ_2	n_2	$\alpha_1^{(2)}, \cdots, \alpha_{n_2}^{(2)}$ $\Rightarrow$	$\beta_1^{(2)}, \cdots, \beta_{n_2}^{(2)}$ $\Rightarrow$	$\gamma_1^{(2)}, \cdots, \gamma_{n_2}^{(2)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
λ_s	n_s	$\alpha_1^{(s)}, \cdots, \alpha_{n_s}^{(s)}$		

共 n 共 n 个无关特征向量

$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$

- 令 $P = (\alpha_1^{(1)}, \cdots, \alpha_{n_s}^{(n_s)})$，则 $P^{-1}AP = \Lambda$。但一般地，P 不是正交矩阵。

定理 设 A 为实对称矩阵，则存在正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。

解释示意图

不同 特征值	重 数	$(\lambda_i I - A)x = 0$ 基础解系	正交化	单位化
λ_1	n_1	$\alpha_1^{(1)}, \cdots, \alpha_{n_1}^{(1)}$ $\Rightarrow$	$\beta_1^{(1)}, \cdots, \beta_{n_1}^{(1)}$ $\Rightarrow$	$\gamma_1^{(1)}, \cdots, \gamma_{n_1}^{(1)}$
λ_2	n_2	$\alpha_1^{(2)}, \cdots, \alpha_{n_2}^{(2)}$ $\Rightarrow$	$\beta_1^{(2)}, \cdots, \beta_{n_2}^{(2)}$ $\Rightarrow$	$\gamma_1^{(2)}, \cdots, \gamma_{n_2}^{(2)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
λ_s	n_s	$\alpha_1^{(s)}, \cdots, \alpha_{n_s}^{(s)}$ $\Rightarrow$	$\beta_1^{(s)}, \cdots, \beta_{n_s}^{(s)}$	
	共 n	共 n 个无关特征向量		

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$$

- 令 $P = (\alpha_1^{(1)}, \cdots, \alpha_{n_s}^{(n_s)})$，则 $P^{-1}AP = \Lambda$。但一般地，P 不是正交矩阵。

定理 设 A 为实对称矩阵，则存在正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。

解释示意图

不同 特征值	重 数	$(\lambda_i I - A)x = 0$ 基础解系	正交化	单位化
λ_1	n_1	$\alpha_1^{(1)}, \cdots, \alpha_{n_1}^{(1)}$ $\Rightarrow$	$\beta_1^{(1)}, \cdots, \beta_{n_1}^{(1)}$ $\Rightarrow$	$\gamma_1^{(1)}, \cdots, \gamma_{n_1}^{(1)}$
λ_2	n_2	$\alpha_1^{(2)}, \cdots, \alpha_{n_2}^{(2)}$ $\Rightarrow$	$\beta_1^{(2)}, \cdots, \beta_{n_2}^{(2)}$ $\Rightarrow$	$\gamma_1^{(2)}, \cdots, \gamma_{n_2}^{(2)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
λ_s	n_s	$\alpha_1^{(s)}, \cdots, \alpha_{n_s}^{(s)}$ $\Rightarrow$	$\beta_1^{(s)}, \cdots, \beta_{n_s}^{(s)}$ $\Rightarrow$	$\gamma_1^{(s)}, \cdots, \gamma_{n_s}^{(s)}$

共 n　　共 n 个无关特征向量

$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda - \lambda_s)^{n_s}$

- 令 $P = (\alpha_1^{(1)}, \cdots, \alpha_{n_s}^{(n_s)})$，则 $P^{-1}AP = \Lambda$。但一般地，P 不是正交矩阵。

定理 设 A 为实对称矩阵，则存在正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。

解释示意图

不同特征值	重数	$(\lambda_i I - A)x = 0$ 基础解系		正交化		单位化
λ_1	n_1	$\alpha_1^{(1)}, \cdots, \alpha_{n_1}^{(1)}$	$\Rightarrow$	$\beta_1^{(1)}, \cdots, \beta_{n_1}^{(1)}$	$\Rightarrow$	$\gamma_1^{(1)}, \cdots, \gamma_{n_1}^{(1)}$
λ_2	n_2	$\alpha_1^{(2)}, \cdots, \alpha_{n_2}^{(2)}$	$\Rightarrow$	$\beta_1^{(2)}, \cdots, \beta_{n_2}^{(2)}$	$\Rightarrow$	$\gamma_1^{(2)}, \cdots, \gamma_{n_2}^{(2)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
λ_s	n_s	$\alpha_1^{(s)}, \cdots, \alpha_{n_s}^{(s)}$	$\Rightarrow$	$\beta_1^{(s)}, \cdots, \beta_{n_s}^{(s)}$	$\Rightarrow$	$\gamma_1^{(s)}, \cdots, \gamma_{n_s}^{(s)}$
	共 n	共 n 个无关特征向量				构成单位正交特征向量

$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$

- 令 $P = (\alpha_1^{(1)}, \cdots, \alpha_{n_s}^{(n_s)})$，则 $P^{-1}AP = \Lambda$。但一般地，P 不是正交矩阵。

定理 设 A 为实对称矩阵，则存在正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。

解释示意图

不同 特征值	重数	$(\lambda_i I - A)x = 0$ 基础解系		正交化		单位化
λ_1	n_1	$\alpha_1^{(1)}, \cdots, \alpha_{n_1}^{(1)}$	$\Rightarrow$	$\beta_1^{(1)}, \cdots, \beta_{n_1}^{(1)}$	$\Rightarrow$	$\gamma_1^{(1)}, \cdots, \gamma_{n_1}^{(1)}$
λ_2	n_2	$\alpha_1^{(2)}, \cdots, \alpha_{n_2}^{(2)}$	$\Rightarrow$	$\beta_1^{(2)}, \cdots, \beta_{n_2}^{(2)}$	$\Rightarrow$	$\gamma_1^{(2)}, \cdots, \gamma_{n_2}^{(2)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
λ_s	n_s	$\alpha_1^{(s)}, \cdots, \alpha_{n_s}^{(s)}$	$\Rightarrow$	$\beta_1^{(s)}, \cdots, \beta_{n_s}^{(s)}$	$\Rightarrow$	$\gamma_1^{(s)}, \cdots, \gamma_{n_s}^{(s)}$
	共 n	共 n 个无关特征向量				构成单位正交特 征向量

$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$

- 令 $P = (\alpha_1^{(1)}, \cdots, \alpha_{n_s}^{(n_s)})$，则 $P^{-1}AP = \Lambda$。但一般地，P 不是正交矩阵。
- 令 $Q = (\gamma_1^{(1)}, \cdots, \gamma_{n_s}^{(n_s)})$，

定理 设 A 为实对称矩阵，则存在正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。

解释示意图

不同特征值	重数	$(\lambda_i I - A)x = 0$ 基础解系		正交化		单位化
λ_1	n_1	$\alpha_1^{(1)}, \cdots, \alpha_{n_1}^{(1)}$	$\Rightarrow$	$\beta_1^{(1)}, \cdots, \beta_{n_1}^{(1)}$	$\Rightarrow$	$\gamma_1^{(1)}, \cdots, \gamma_{n_1}^{(1)}$
λ_2	n_2	$\alpha_1^{(2)}, \cdots, \alpha_{n_2}^{(2)}$	$\Rightarrow$	$\beta_1^{(2)}, \cdots, \beta_{n_2}^{(2)}$	$\Rightarrow$	$\gamma_1^{(2)}, \cdots, \gamma_{n_2}^{(2)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
λ_s	n_s	$\alpha_1^{(s)}, \cdots, \alpha_{n_s}^{(s)}$	$\Rightarrow$	$\beta_1^{(s)}, \cdots, \beta_{n_s}^{(s)}$	$\Rightarrow$	$\gamma_1^{(s)}, \cdots, \gamma_{n_s}^{(s)}$
	共 n	共 n 个无关特征向量				构成单位正交特征向量

$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$

- 令 $P = (\alpha_1^{(1)}, \cdots, \alpha_{n_s}^{(s)})$，则 $P^{-1}AP = \Lambda$。但一般地，P 不是正交矩阵。
- 令 $Q = (\gamma_1^{(1)}, \cdots, \gamma_{n_s}^{(s)})$，则 $Q^{-1}AQ = \Lambda$，

定理 设 A 为实对称矩阵，则存在正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。

解释示意图

不同 特征值	重 数	$(\lambda_i I - A)x = 0$ 基础解系		正交化		单位化
λ_1	n_1	$\alpha_1^{(1)}, \cdots, \alpha_{n_1}^{(1)}$	$\Rightarrow$	$\beta_1^{(1)}, \cdots, \beta_{n_1}^{(1)}$	$\Rightarrow$	$\gamma_1^{(1)}, \cdots, \gamma_{n_1}^{(1)}$
λ_2	n_2	$\alpha_1^{(2)}, \cdots, \alpha_{n_2}^{(2)}$	$\Rightarrow$	$\beta_1^{(2)}, \cdots, \beta_{n_2}^{(2)}$	$\Rightarrow$	$\gamma_1^{(2)}, \cdots, \gamma_{n_2}^{(2)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
λ_s	n_s	$\alpha_1^{(s)}, \cdots, \alpha_{n_s}^{(s)}$	$\Rightarrow$	$\beta_1^{(s)}, \cdots, \beta_{n_s}^{(s)}$	$\Rightarrow$	$\gamma_1^{(s)}, \cdots, \gamma_{n_s}^{(s)}$
	共 n	共 n 个无关特征向量				构成单位正交特 征向量

$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$

- 令 $P = (\alpha_1^{(1)}, \cdots, \alpha_{n_s}^{(s)})$，则 $P^{-1}AP = \Lambda$。但一般地，P 不是正交矩阵。
- 令 $Q = (\gamma_1^{(1)}, \cdots, \gamma_{n_s}^{(s)})$，则 $Q^{-1}AQ = \Lambda$，并且 Q 是正交矩阵。

例 1 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} * & \\ & * \end{pmatrix}$$

例 1 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解 • 特征方程：$0 = |\lambda I - A|$

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} * & \\ & * \end{pmatrix}$$

例 1 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解 ● 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} =$

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} * & \\ & * \end{pmatrix}$$

例 1 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解 ● 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2 - 1$

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} * & \\ & * \end{pmatrix}$$

例 1 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解 ● 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} * & \\ & * \end{pmatrix}$$

例 1 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解 • 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$

• $\lambda_1 = 1$

• $\lambda_2 = 3$

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} * & \\ & * \end{pmatrix}$$

例 1 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$

- $\lambda_1 = 1$

- $\lambda_2 = 3$

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 3 \end{pmatrix}$$

例 1 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解
- 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$

- $\lambda_1 = 1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

- $\lambda_2 = 3$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 3 \end{pmatrix}$$

例 1 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解 ● 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$

● $\lambda_1 = 1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(1I - A \vdots 0) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & | & 0 \\ -1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

● $\lambda_2 = 3$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 3 \end{pmatrix}$$

例 1 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解 ● 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$

● $\lambda_1 = 1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(1I - A \vdots 0) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & \vline & 0 \\ -1 & -1 & \vline & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \vline & 0 \\ 0 & 0 & \vline & 0 \end{pmatrix}$$

● $\lambda_2 = 3$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 3 \end{pmatrix}$$

例 1 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解 • 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$

• $\lambda_1 = 1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(1I - A \vdots 0) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & | & 0 \\ -1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad \textcolor{red}{x_1 + x_2 = 0}$$

• $\lambda_2 = 3$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 3 \end{pmatrix}$$

例 1 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解 ● 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$

● $\lambda_1 = 1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(1I - A \vdots 0) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & | & 0 \\ -1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} x_1 + x_2 = 0 \\ \Downarrow \\ x_1 = -x_2 \end{array}$$

● $\lambda_2 = 3$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 3 \end{pmatrix}$$

例 1 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解 ● 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$

● $\lambda_1 = 1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(1I - A \vdots 0) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & | & 0 \\ -1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} x_1 + x_2 = 0 \\ \Downarrow \\ x_1 = -x_2 \end{array}$$

基础解系：$\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

● $\lambda_2 = 3$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 3 \end{pmatrix}$$

例 1 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解 ● 特征方程: $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$

● $\lambda_1 = 1$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(1I - A \vdots 0) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & | & 0 \\ -1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} x_1 + x_2 = 0 \\ \Downarrow \\ x_1 = -x_2 \end{array}$$

基础解系: $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{单位化}} \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

● $\lambda_2 = 3$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 3 \end{pmatrix}$$

例 1 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解 • 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$

• $\lambda_1 = 1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(1I - A \vdots 0) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & \big| & 0 \\ -1 & -1 & \big| & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \big| & 0 \\ 0 & 0 & \big| & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} \color{red}{x_1 + x_2 = 0} \\ \color{red}{\Downarrow} \\ \color{red}{x_1 = -x_2} \end{array}$$

基础解系：$\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{单位化}} \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

• $\lambda_2 = 3$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(3I - A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \big| & 0 \\ -1 & 1 & \big| & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 3 \end{pmatrix}$$

例 1 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解 • 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$

• $\lambda_1 = 1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(1I - A \vdots 0) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & | & 0 \\ -1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} {\color{red} x_1 + x_2 = 0} \\ {\color{red} \Downarrow} \\ {\color{red} x_1 = -x_2} \end{array}$$

基础解系：$\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{单位化}} \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

• $\lambda_2 = 3$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(3I - A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 0 \\ -1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 3 \end{pmatrix}$$

例 1 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解
- 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$

- $\lambda_1 = 1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(1I - A \vdots 0) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & | & 0 \\ -1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} x_1 + x_2 = 0 \\ \Downarrow \\ x_1 = -x_2 \end{array}$$

基础解系：$\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{单位化}} \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $\lambda_2 = 3$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(3I - A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 0 \\ -1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad x_1 - x_2 = 0$$

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 3 \end{pmatrix}$$

例 1 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解
- 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$

- $\lambda_1 = 1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(1I - A \vdots 0) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & | & 0 \\ -1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} x_1 + x_2 = 0 \\ \Downarrow \\ x_1 = -x_2 \end{matrix}$$

基础解系：$\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{单位化}} \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $\lambda_2 = 3$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(3I - A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 0 \\ -1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} x_1 - x_2 = 0 \\ \Downarrow \\ x_1 = x_2 \end{matrix}$$

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 3 \end{pmatrix}$$

例 1 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解
- 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$

- $\lambda_1 = 1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(1I - A \vdots 0) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & | & 0 \\ -1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} x_1 + x_2 = 0 \\ \Downarrow \\ x_1 = -x_2 \end{array}$$

基础解系：$\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{单位化}} \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $\lambda_2 = 3$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(3I - A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 0 \\ -1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} x_1 - x_2 = 0 \\ \Downarrow \\ x_1 = x_2 \end{array}$$

基础解系：$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 3 \end{pmatrix}$$

例 1 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解 ● 特征方程： $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$

● $\lambda_1 = 1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(1I - A \vdots 0) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & \big| & 0 \\ -1 & -1 & \big| & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \big| & 0 \\ 0 & 0 & \big| & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} \color{red}{x_1 + x_2 = 0} \\ \color{red}{\Downarrow} \\ \color{red}{x_1 = -x_2} \end{array}$$

基础解系： $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{单位化}} \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

● $\lambda_2 = 3$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(3I - A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \big| & 0 \\ -1 & 1 & \big| & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & \big| & 0 \\ 0 & 0 & \big| & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} \color{red}{x_1 - x_2 = 0} \\ \color{red}{\Downarrow} \\ \color{red}{x_1 = x_2} \end{array}$$

基础解系： $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{单位化}} \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 3 \end{pmatrix}$$

例 1 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解 ● 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$

● $\lambda_1 = 1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(1I - A \vdots 0) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & \big| & 0 \\ -1 & -1 & \big| & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \big| & 0 \\ 0 & 0 & \big| & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} {\color{red}x_1 + x_2 = 0} \\ {\color{red}\Downarrow} \\ {\color{red}x_1 = -x_2} \end{array}$$

基础解系：$\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{单位化}} \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

● $\lambda_2 = 3$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(3I - A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \big| & 0 \\ -1 & 1 & \big| & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & \big| & 0 \\ 0 & 0 & \big| & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} {\color{red}x_1 - x_2 = 0} \\ {\color{red}\Downarrow} \\ {\color{red}x_1 = x_2} \end{array}$$

基础解系：$\underset{\gamma_1}{\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \underset{\gamma_2}{\xrightarrow{\text{单位化}} \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

所以取 $Q = \underbrace{\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{Q：\text{正交阵}}$，则 $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 3 \end{pmatrix}$

例 2 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} * & \\ & * \end{pmatrix}$$

例 2 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解 • 特征方程：$0 = |\lambda I - A|$

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} * & \\ & * \end{pmatrix}$$

例 2 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解 ● 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} =$

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} * & \\ & * \end{pmatrix}$$

例 2 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解 ● 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - (-2)^2$

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} * & \\ & * \end{pmatrix}$$

例 2 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解 • 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 3)$

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} * & \\ & * \end{pmatrix}$$

例 2 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解 ● 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 3)$

● $\lambda_1 = -1$

● $\lambda_2 = 3$

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} * & \\ & * \end{pmatrix}$$

例 2 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解 • 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 3)$

• $\lambda_1 = -1$

• $\lambda_2 = 3$

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 3 \end{pmatrix}$$

例 2 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解 • 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 3)$

• $\lambda_1 = -1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

• $\lambda_2 = 3$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 3 \end{pmatrix}$$

例 2 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解 ● 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 3)$

● $\lambda_1 = -1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(-I - A \vdots 0) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & \big| & 0 \\ -2 & -2 & \big| & 0 \end{pmatrix}$$

● $\lambda_2 = 3$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 3 \end{pmatrix}$$

例 2 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解 ● 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 3)$

● $\lambda_1 = -1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(-I - A \vdots 0) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & \vdots & 0 \\ -2 & -2 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

● $\lambda_2 = 3$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 3 \end{pmatrix}$$

例 2 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解
- 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 3)$

- $\lambda_1 = -1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(-I - A \vdots 0) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & | & 0 \\ -2 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad \textcolor{red}{x_1 + x_2 = 0}$$

- $\lambda_2 = 3$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 3 \end{pmatrix}$$

例 2 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解 • 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 3)$

• $\lambda_1 = -1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(-I - A \vdots 0) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & \vdots & 0 \\ -2 & -2 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 + x_2 = 0 \\ \Downarrow \\ x_1 = -x_2 \end{matrix}$$

• $\lambda_2 = 3$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 3 \end{pmatrix}$$

例 2 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解 ● 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 3)$

● $\lambda_1 = -1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(-I - A \vdots 0) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & | & 0 \\ -2 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x_1 + x_2 = 0 \\ \Downarrow \\ x_1 = -x_2 \end{matrix}$$

基础解系：$\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

● $\lambda_2 = 3$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 3 \end{pmatrix}$$

例 2 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解 ● 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 3)$

● $\lambda_1 = -1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(-I - A \vdots 0) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & | & 0 \\ -2 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} x_1 + x_2 = 0 \\ \Downarrow \\ x_1 = -x_2 \end{matrix}$$

基础解系：$\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{单位化}} \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

● $\lambda_2 = 3$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 3 \end{pmatrix}$$

例 2 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解 ● 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 3)$

● $\lambda_1 = -1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(-I - A \vdots 0) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} {\color{red} x_1 + x_2 = 0} \\ {\color{red} \Downarrow} \\ {\color{red} x_1 = -x_2} \end{array}$$

基础解系：$\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{单位化}} \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

● $\lambda_2 = 3$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(3I - A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 3 \end{pmatrix}$$

例 2 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解 ● 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 3)$

● $\lambda_1 = -1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(-I - A \vdots 0) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} x_1 + x_2 = 0 \\ \Downarrow \\ x_1 = -x_2 \end{array}$$

基础解系：$\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{单位化}} \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

● $\lambda_2 = 3$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(3I - A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 3 \end{pmatrix}$$

例 2 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解 ● 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 3)$

● $\lambda_1 = -1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(-I - A \vdots 0) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & | & 0 \\ -2 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} x_1 + x_2 = 0 \\ \Downarrow \\ x_1 = -x_2 \end{array}$$

基础解系：$\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{单位化}} \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

● $\lambda_2 = 3$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(3I - A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & | & 0 \\ -2 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \quad x_1 - x_2 = 0$$

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 3 \end{pmatrix}$$

例 2 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解 ● 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 3)$

● $\lambda_1 = -1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(-I - A \vdots 0) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & | & 0 \\ -2 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x_1 + x_2 = 0 \\ \Downarrow \\ x_1 = -x_2 \end{matrix}$$

基础解系：$\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{单位化}} \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

● $\lambda_2 = 3$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(3I - A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & | & 0 \\ -2 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x_1 - x_2 = 0 \\ \Downarrow \\ x_1 = x_2 \end{matrix}$$

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 3 \end{pmatrix}$$

例 2 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解 ● 特征方程： $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 3)$

● $\lambda_1 = -1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(-I - A \vdots 0) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & | & 0 \\ -2 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} x_1 + x_2 = 0 \\ \Downarrow \\ x_1 = -x_2 \end{matrix}$$

基础解系： $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{单位化}} \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

● $\lambda_2 = 3$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(3I - A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & | & 0 \\ -2 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} x_1 - x_2 = 0 \\ \Downarrow \\ x_1 = x_2 \end{matrix}$$

基础解系： $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 3 \end{pmatrix}$$

例 2 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解 • 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 3)$

• $\lambda_1 = -1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(-I - A \vdots 0) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & | & 0 \\ -2 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} x_1 + x_2 = 0 \\ \Downarrow \\ x_1 = -x_2 \end{array}$$

基础解系：$\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{单位化}} \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

• $\lambda_2 = 3$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(3I - A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & | & 0 \\ -2 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} x_1 - x_2 = 0 \\ \Downarrow \\ x_1 = x_2 \end{array}$$

基础解系：$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{单位化}} \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 3 \end{pmatrix}$$

例 2 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解 • 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 3)$

• $\lambda_1 = -1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(-I - A \vdots 0) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & | & 0 \\ -2 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} x_1 + x_2 = 0 \\ \Downarrow \\ x_1 = -x_2 \end{array}$$

基础解系：$\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{单位化}} \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

• $\lambda_2 = 3$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(3I - A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & | & 0 \\ -2 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} x_1 - x_2 = 0 \\ \Downarrow \\ x_1 = x_2 \end{array}$$

基础解系：$\underset{\gamma_1}{\alpha_2} = \underset{\gamma_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \xrightarrow{\text{单位化}} \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

所以取 $Q = \underbrace{\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{Q：\text{正交阵}}$，则 $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 3 \end{pmatrix}$

例 1 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} * & & \\ & * & \\ & & * \end{pmatrix}$$

例 1 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$，特征方程：$0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 1)(\lambda - 2)(\lambda - 5)$

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} * & & \\ & * & \\ & & * \end{pmatrix}$$

例 1 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 1)(\lambda - 2)(\lambda - 5)$

- $\lambda_1 = -1$,

- $\lambda_2 = 2$,

- $\lambda_3 = 5$,

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} * & & \\ & * & \\ & & * \end{pmatrix}$$

例 1 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, 特征方程: $0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 1)(\lambda - 2)(\lambda - 5)$

- $\lambda_1 = -1$,

- $\lambda_2 = 2$,

- $\lambda_3 = 5$,

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 2 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$$

例 1 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 1)(\lambda - 2)(\lambda - 5)$

- $\lambda_1 = -1$，特征向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $\lambda_2 = 2$,

- $\lambda_3 = 5$,

$$Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 2 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$$

例 1 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 1)(\lambda - 2)(\lambda - 5)$

- $\lambda_1 = -1$，特征向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $\lambda_2 = 2$，特征向量 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

- $\lambda_3 = 5$，

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 2 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$$

例 1 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$，特征方程：$0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 1)(\lambda - 2)(\lambda - 5)$

- $\lambda_1 = -1$，特征向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $\lambda_2 = 2$，特征向量 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

- $\lambda_3 = 5$，特征向量 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 2 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$$

例 1 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$，特征方程：$0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 1)(\lambda - 2)(\lambda - 5)$

- $\lambda_1 = -1$，特征向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow{\text{单位化}}$ $\gamma_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

- $\lambda_2 = 2$，特征向量 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

- $\lambda_3 = 5$，特征向量 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 2 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$$

例 1 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = (\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-5)$

- $\lambda_1 = -1$, 特征向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow{\text{单位化}}$ $\gamma_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

- $\lambda_2 = 2$, 特征向量 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow{\text{单位化}}$ $\gamma_2 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$

- $\lambda_3 = 5$, 特征向量 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 2 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$$

例 1 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 1)(\lambda - 2)(\lambda - 5)$

- $\lambda_1 = -1$, 特征向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow{\text{单位化}}$ $\gamma_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

- $\lambda_2 = 2$, 特征向量 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow{\text{单位化}}$ $\gamma_2 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$

- $\lambda_3 = 5$, 特征向量 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow{\text{单位化}}$ $\gamma_3 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 2 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$$

例 1 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = (\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-5)$

- $\lambda_1 = -1$，特征向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow{\text{单位化}}$ $\gamma_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

- $\lambda_2 = 2$，特征向量 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow{\text{单位化}}$ $\gamma_2 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$

- $\lambda_3 = 5$，特征向量 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow{\text{单位化}}$ $\gamma_3 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

所以取 $Q = \underbrace{\begin{pmatrix} \overset{\gamma_1}{2/3} & \overset{\gamma_2}{2/3} & \overset{\gamma_3}{1/3} \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix}}_{Q：正交阵}$，则 $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 2 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$

例 2 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

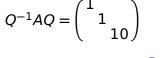$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} * & & \\ & * & \\ & & * \end{pmatrix}$$

例 2 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 1)^2 (\lambda - 10)$

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} * & & \\ & * & \\ & & * \end{pmatrix}$$

例 2 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$，特征方程：$0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 1)^2(\lambda - 10)$

- $\lambda_1 = 1$（二重）

- $\lambda_3 = 10$

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} * & & \\ & * & \\ & & * \end{pmatrix}$$

例 2 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 1)^2(\lambda - 10)$

- $\lambda_1 = 1$（二重）

- $\lambda_3 = 10$

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 10 \end{pmatrix}$$

例 2 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$，特征方程：$0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 1)^2 (\lambda - 10)$

- $\lambda_1 = 1$（二重），特征向量

$$\begin{cases} \alpha_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \\ \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- $\lambda_3 = 10$

$$Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 10 \end{pmatrix}$$

例 2 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 1)^2 (\lambda - 10)$

- $\lambda_1 = 1$（二重），特征向量

$$\begin{cases} \alpha_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \\ \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- $\lambda_3 = 10$，特征向量 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 10 \end{pmatrix}$$

例 2 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$，特征方程：$0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 1)^2(\lambda - 10)$

- $\lambda_1 = 1$（二重），特征向量

$$\begin{cases} \alpha_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \xrightarrow{\text{正交化}} \begin{cases} \beta_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \beta_2 = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 4/5 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- $\lambda_3 = 10$，特征向量 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 10 \end{pmatrix}$$

例 2 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, 特征方程: $0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 1)^2(\lambda - 10)$

- $\lambda_1 = 1$ (二重), 特征向量

$$\begin{cases} \alpha_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \xrightarrow{\text{正交化}} \begin{cases} \beta_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \beta_2 = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 4/5 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \xrightarrow{\text{单位化}} \begin{cases} \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \gamma_2 = \frac{5}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2/5 \\ 4/5 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- $\lambda_3 = 10$, 特征向量 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 10 \end{pmatrix}$$

例 2 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$，特征方程：$0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 1)^2 (\lambda - 10)$

- $\lambda_1 = 1$（二重），特征向量

$$\begin{cases} \alpha_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \xrightarrow{\text{正交化}} \begin{cases} \beta_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \beta_2 = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 4/5 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \xrightarrow{\text{单位化}} \begin{cases} \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \gamma_2 = \frac{5}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2/5 \\ 4/5 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- $\lambda_3 = 10$，特征向量 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{单位化}} \gamma_3 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$

$$Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 10 \end{pmatrix}$$

例 2 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$，特征方程：$0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 1)^2(\lambda - 10)$

- $\lambda_1 = 1$（二重），特征向量

$$\begin{cases} \alpha_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \xrightarrow{\text{正交化}} \begin{cases} \beta_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \beta_2 = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 4/5 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \xrightarrow{\text{单位化}} \begin{cases} \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \gamma_2 = \frac{5}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2/5 \\ 4/5 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- $\lambda_3 = 10$，特征向量 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{单位化}} \gamma_3 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$

$$\underset{\gamma_1 \quad\quad \gamma_2 \quad\quad \gamma_3}{}$$

所以取 $Q = \underbrace{\begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & 1/3 \\ 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & 2/3 \\ 0 & \sqrt{5}/3 & -2/3 \end{pmatrix}}_{Q：\text{正交阵}}$，则 $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 10 \end{pmatrix}$

例 3 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} * & & \\ & * & \\ & & * \end{pmatrix}$$

例 3 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，特征方程：$0 = |\lambda I - A| =$

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} * & & \\ & * & \\ & & * \end{pmatrix}$$

例 3 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 特征方程: $0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 1)^2 (\lambda - 5)$ ▸ Det

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} * & & \\ & * & \\ & & * \end{pmatrix}$$

例 3 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，特征方程：$0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 1)^2 (\lambda - 5)$ ▸ Det

- $\lambda_1 = -1$（二重）

- $\lambda_2 = 5$

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} * & & \\ & * & \\ & & * \end{pmatrix}$$

例 3 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 特征方程: $0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 1)^2 (\lambda - 5)$ ▸ Det

- $\lambda_1 = -1$（二重）

- $\lambda_2 = 5$

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$$

例 3 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，特征方程：$0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 1)^2 (\lambda - 5)$ $\boxed{\text{▸ Det}}$

- $\lambda_1 = -1$（二重），特征向量：$\boxed{\text{▸ Detail}}$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \\ \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- $\lambda_2 = 5$

$$Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$$

例 3 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 特征方程: $0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 1)^2(\lambda - 5)$ ▸Det

- $\lambda_1 = -1$ (二重), 特征向量: ▸Detail

$$\begin{cases} \alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- $\lambda_2 = 5$, 特征向量: ▸Det $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$$

例 3 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，特征方程：$0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 1)^2(\lambda - 5)$ ▸ Det

- $\lambda_1 = -1$（二重），特征向量：▸ Detail

$$\begin{cases} \alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \xrightarrow[\text{▸ Det}]{\text{正交化}}$$

- $\lambda_2 = 5$，特征向量：▸ Det $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$$

例 3 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，特征方程：$0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 1)^2(\lambda - 5)$ ▸ Det

- $\lambda_1 = -1$（二重），特征向量： ▸ Detail

$$\begin{cases} \alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\[3mm] \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \xrightarrow[\text{▸ Det}]{\text{正交化}} \begin{cases} \beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\[3mm] \beta_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- $\lambda_2 = 5$，特征向量： ▸ Det $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$$

例 3 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 1)^2(\lambda - 5)$ ▸ Det

- $\lambda_1 = -1$（二重）, 特征向量： ▸ Detail

$$\begin{cases} \alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \xrightarrow[\text{▸ Det}]{\text{正交化}} \begin{cases} \beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \beta_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \xrightarrow{\text{单位化}} \begin{cases} \gamma_1 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \gamma_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \end{cases}$$

- $\lambda_2 = 5$, 特征向量： ▸ Det $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$$

例 3 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，特征方程：$0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 1)^2(\lambda - 5)$ ▸ Det

- $\lambda_1 = -1$（二重），特征向量：▸ Detail

$$\begin{cases} \alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \xrightarrow[\text{▸ Det}]{\text{正交化}} \begin{cases} \beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \beta_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \xrightarrow{\text{单位化}} \begin{cases} \gamma_1 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \gamma_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \end{cases}$$

- $\lambda_2 = 5$，特征向量：▸ Det $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{单位化}} \gamma_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$$

例 3 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，特征方程：$0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 1)^2 (\lambda - 5)$ `▶ Det`

- $\lambda_1 = -1$（二重），特征向量：`▶ Detail`

$$\begin{cases} \alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \xrightarrow[\substack{正交化 \\ \text{▶ Det}}]{} \begin{cases} \beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \beta_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \xrightarrow{单位化} \begin{cases} \gamma_1 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \gamma_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \end{cases}$$

- $\lambda_2 = 5$，特征向量：`▶ Det` $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{单位化} \gamma_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{ccc} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{array}$$

取 $Q = \underbrace{\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}}_{Q: 正交阵}$，则 $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$

————————————————The End————————————————

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| =$$

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{r_3 - r_2}}$$

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ 0 & -\lambda - 1 & \lambda + 1 \end{vmatrix}$$

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3 - r_2} \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ 0 & -\lambda - 1 & \lambda + 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda + 1) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3 - r_2} \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ 0 & -\lambda - 1 & \lambda + 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda + 1) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2 + c_3}$$

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ 0 & -\lambda - 1 & \lambda + 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda + 1) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2 + c_3} (\lambda + 1) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -4 & -2 \\ -2 & \lambda - 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

▸ Back

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ 0 & -\lambda - 1 & \lambda + 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda + 1) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2 + c_3} (\lambda + 1) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -4 & -2 \\ -2 & \lambda - 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda + 1) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -4 \\ -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix}$$

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ 0 & -\lambda - 1 & \lambda + 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda + 1) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2 + c_3} (\lambda + 1) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -4 & -2 \\ -2 & \lambda - 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda + 1) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -4 \\ -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda + 1)(\lambda^2 - 4\lambda - 5)$$

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ 0 & -\lambda - 1 & \lambda + 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda + 1) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2 + c_3} (\lambda + 1) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -4 & -2 \\ -2 & \lambda - 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda + 1) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -4 \\ -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda + 1)(\lambda^2 - 4\lambda - 5)$$

$$= (\lambda + 1)^2(\lambda - 5)$$

- 当 $\lambda_1 = -1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(-I - A \vdots 0) =$$

- 当 $\lambda_1 = -1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(-I - A \vdots 0) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \ \middle| \ 0 \\ -2 & -2 & -2 \ \middle| \ 0 \\ -2 & -2 & -2 \ \middle| \ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

- 当 $\lambda_1 = -1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(-I - A \vdots 0) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 & \bigg| & 0 \\ -2 & -2 & -2 & \bigg| & 0 \\ -2 & -2 & -2 & \bigg| & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \bigg| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bigg| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bigg| & 0 \end{pmatrix}$$

‣ Back

- 当 $\lambda_1 = -1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(-I - A \vdots 0) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 & \bigm| & 0 \\ -2 & -2 & -2 & \bigm| & 0 \\ -2 & -2 & -2 & \bigm| & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \bigm| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bigm| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bigm| & 0 \end{pmatrix}$$

所以

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

- 当 $\lambda_1 = -1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(-I - A \vdots 0) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 & \bigm| & 0 \\ -2 & -2 & -2 & \bigm| & 0 \\ -2 & -2 & -2 & \bigm| & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \bigm| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bigm| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bigm| & 0 \end{pmatrix}$$

所以

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -x_2 - x_3$$

▸ Back

- 当 $\lambda_1 = -1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(-I - A \vdots 0) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 & | & 0 \\ -2 & -2 & -2 & | & 0 \\ -2 & -2 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

所以

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -x_2 - x_3$$

基础解系：$\alpha_1 = \begin{pmatrix} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

▸ Back

- 当 $\lambda_1 = -1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(-I - A \vdots 0) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 & \Big| & 0 \\ -2 & -2 & -2 & \Big| & 0 \\ -2 & -2 & -2 & \Big| & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \Big| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Big| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Big| & 0 \end{pmatrix}$$

所以

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -x_2 - x_3$$

基础解系：$\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

▸ Back

- 当 $\lambda_1 = -1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(-I - A \vdots 0) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -x_2 - x_3$$

基础解系：$\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

▶ Back

- 当 $\lambda_2 = 5$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(5I - A \,\vdots\, 0) =$$

- 当 $\lambda_2 = 5$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(5I - A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 & \bigg| & 0 \\ -2 & 4 & -2 & \bigg| & 0 \\ -2 & -2 & 4 & \bigg| & 0 \end{pmatrix}$$

- 当 $\lambda_2 = 5$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(5I - A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 & \bigg| & 0 \\ -2 & 4 & -2 & \bigg| & 0 \\ -2 & -2 & 4 & \bigg| & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & \bigg| & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \bigg| & 0 \\ 1 & 1 & -2 & \bigg| & 0 \end{pmatrix}$$

- 当 $\lambda_2 = 5$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(5I - A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 & | & 0 \\ -2 & 4 & -2 & | & 0 \\ -2 & -2 & 4 & | & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & | & 0 \\ 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & -2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\;r_1 \longleftrightarrow r_3\;}$$

- 当 $\lambda_2 = 5$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(5I - A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 & \big| & 0 \\ -2 & 4 & -2 & \big| & 0 \\ -2 & -2 & 4 & \big| & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & \big| & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \big| & 0 \\ 1 & 1 & -2 & \big| & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 \longleftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & \big| & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \big| & 0 \\ 2 & -1 & -1 & \big| & 0 \end{pmatrix}$$

- 当 $\lambda_2 = 5$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(5I - A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 & | & 0 \\ -2 & 4 & -2 & | & 0 \\ -2 & -2 & 4 & | & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & | & 0 \\ 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & -2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 2 & -1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & -3 & 3 & | & 0 \\ 0 & -3 & 3 & | & 0 \end{pmatrix}$$

▸ Back

- 当 $\lambda_2 = 5$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(5I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- 当 $\lambda_2 = 5$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(5I - A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 当 $\lambda_2 = 5$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(5I - A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 & \Big| & 0 \\ -2 & 4 & -2 & \Big| & 0 \\ -2 & -2 & 4 & \Big| & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & \Big| & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \Big| & 0 \\ 1 & 1 & -2 & \Big| & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & \Big| & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \Big| & 0 \\ 2 & -1 & -1 & \Big| & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & \Big| & 0 \\ 0 & -3 & 3 & \Big| & 0 \\ 0 & -3 & 3 & \Big| & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & \Big| & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \Big| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Big| & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \Big| & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \Big| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Big| & 0 \end{pmatrix}$$

所以 $\begin{cases} x_1 \quad\quad - x_3 = 0 \end{cases}$

- 当 $\lambda_2 = 5$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(5I - A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 & \Big| & 0 \\ -2 & 4 & -2 & \Big| & 0 \\ -2 & -2 & 4 & \Big| & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & \Big| & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \Big| & 0 \\ 1 & 1 & -2 & \Big| & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & \Big| & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \Big| & 0 \\ 2 & -1 & -1 & \Big| & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & \Big| & 0 \\ 0 & -3 & 3 & \Big| & 0 \\ 0 & -3 & 3 & \Big| & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & \Big| & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \Big| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Big| & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \Big| & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \Big| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Big| & 0 \end{pmatrix}$$

所以
$$\begin{cases} x_1 & - x_3 = 0 \\ & x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

- 当 $\lambda_2 = 5$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(5I - A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 & \big| & 0 \\ -2 & 4 & -2 & \big| & 0 \\ -2 & -2 & 4 & \big| & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & \big| & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \big| & 0 \\ 1 & 1 & -2 & \big| & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & \big| & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \big| & 0 \\ 2 & -1 & -1 & \big| & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & \big| & 0 \\ 0 & -3 & 3 & \big| & 0 \\ 0 & -3 & 3 & \big| & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & \big| & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \big| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \big| & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \big| & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \big| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \big| & 0 \end{pmatrix}$$

所以 $\qquad \begin{cases} x_1 & - x_3 = 0 \\ & x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$

▸ Back

- 当 $\lambda_2 = 5$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(5I - A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以 $\begin{cases} x_1 \quad - x_3 = 0 \\ \quad x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$

基础解系：$\alpha_3 = \begin{pmatrix} \\ \\ 1 \end{pmatrix}$

▸ Back

- 当 $\lambda_2 = 5$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(5I - A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 & \bigg| & 0 \\ -2 & 4 & -2 & \bigg| & 0 \\ -2 & -2 & 4 & \bigg| & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & \bigg| & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \bigg| & 0 \\ 1 & 1 & -2 & \bigg| & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & \bigg| & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \bigg| & 0 \\ 2 & -1 & -1 & \bigg| & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & \bigg| & 0 \\ 0 & -3 & 3 & \bigg| & 0 \\ 0 & -3 & 3 & \bigg| & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & \bigg| & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \bigg| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bigg| & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \bigg| & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \bigg| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bigg| & 0 \end{pmatrix}$$

所以 $\qquad \begin{cases} x_1 \quad - x_3 = 0 \\ \quad\; x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$

基础解系：$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 正交化：

将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 正交化：

$\beta_1 =$

$\beta_2 =$

将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 正交化：

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 =$$

将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 正交化:

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \text{———}\beta_1$$

将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 正交化:

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \text{———}\beta_1$$

将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 正交化:

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\quad}{\quad}\beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 正交化:

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{}{}\beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

▸ Back

将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 正交化:

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \underline{\quad\quad}\beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 正交化:

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\quad}{\quad}\beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

▶ Back