

## 第 11 章 $d$ : 对面积的曲面积分

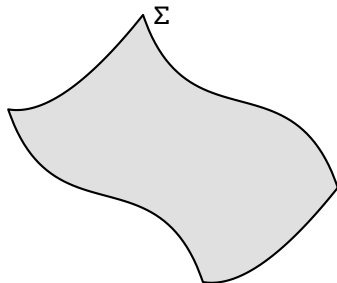
数学系 梁卓滨

2018-2019 学年 II

# 曲面的质量

假设

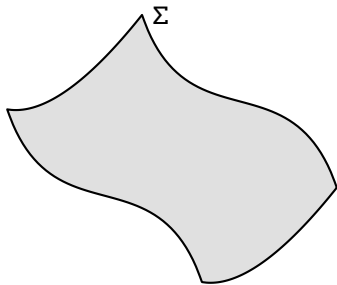
- $\Sigma$  为空间中曲面
- 密度为  $\mu$
- 质量为  $m$



# 曲面的质量

假设

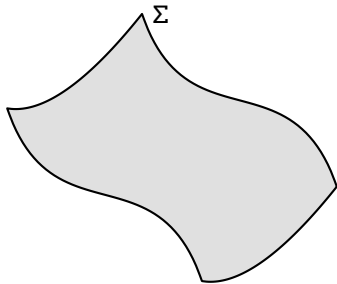
- $\Sigma$  为空间中曲面
  - 密度为  $\mu$
  - 质量为  $m$
- 
- 当材料均匀时 ( $\mu = \text{常数}$ ),
  
  
  - 当材料非均匀时 ( $\mu = \mu(x, y, z)$  为  $\Sigma$  上函数),



# 曲面的质量

假设

- $\Sigma$  为空间中曲面
- 密度为  $\mu$
- 质量为  $m$



- 当材料均匀时 ( $\mu = \text{常数}$ ),

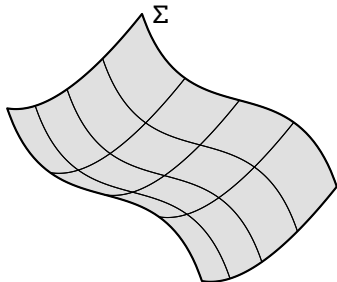
$$m = \mu \cdot \text{Area}(\Sigma)$$

- 当材料非均匀时 ( $\mu = \mu(x, y, z)$  为  $\Sigma$  上函数),

# 曲面的质量

假设

- $\Sigma$  为空间中曲面
- 密度为  $\mu$
- 质量为  $m$



- 当材料均匀时 ( $\mu = \text{常数}$ ),

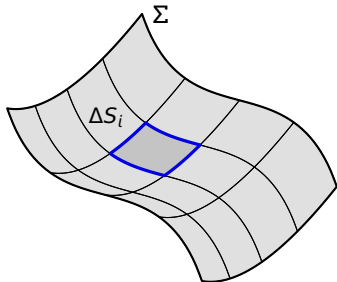
$$m = \mu \cdot \text{Area}(\Sigma)$$

- 当材料非均匀时 ( $\mu = \mu(x, y, z)$  为  $\Sigma$  上函数), 利用微元法可知

# 曲面的质量

假设

- $\Sigma$  为空间中曲面
- 密度为  $\mu$
- 质量为  $m$



- 当材料均匀时 ( $\mu = \text{常数}$ ),

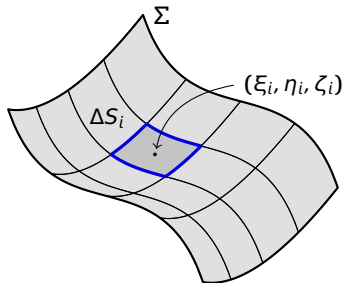
$$m = \mu \cdot \text{Area}(\Sigma)$$

- 当材料非均匀时 ( $\mu = \mu(x, y, z)$  为  $\Sigma$  上函数), 利用微元法可知

# 曲面的质量

假设

- $\Sigma$  为空间中曲面
- 密度为  $\mu$
- 质量为  $m$



- 当材料均匀时 ( $\mu = \text{常数}$ ),

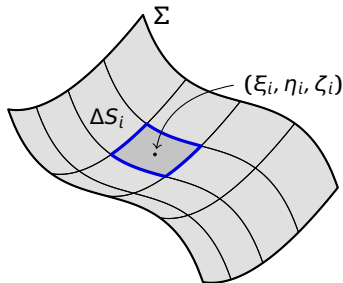
$$m = \mu \cdot \text{Area}(\Sigma)$$

- 当材料非均匀时 ( $\mu = \mu(x, y, z)$  为  $\Sigma$  上函数), 利用微元法可知

# 曲面的质量

假设

- $\Sigma$  为空间中曲面
- 密度为  $\mu$
- 质量为  $m$



- 当材料均匀时 ( $\mu = \text{常数}$ ),

$$m = \mu \cdot \text{Area}(\Sigma)$$

- 当材料非均匀时 ( $\mu = \mu(x, y, z)$  为  $\Sigma$  上函数), 利用微元法可知

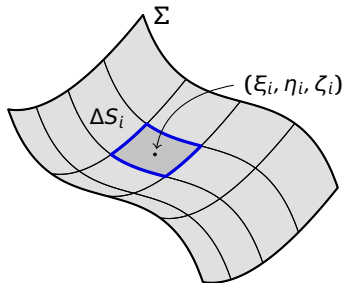
$$\mu(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$$



# 曲面的质量

假设

- $\Sigma$  为空间中曲面
- 密度为  $\mu$
- 质量为  $m$



- 当材料均匀时 ( $\mu = \text{常数}$ ),

$$m = \mu \cdot \text{Area}(\Sigma)$$

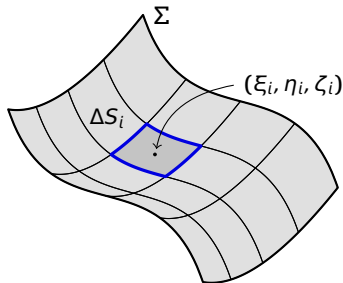
- 当材料非均匀时 ( $\mu = \mu(x, y, z)$  为  $\Sigma$  上函数), 利用微元法可知

$$\sum_{i=1}^n \mu(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$$

# 曲面的质量

假设

- $\Sigma$  为空间中曲面
- 密度为  $\mu$
- 质量为  $m$



- 当材料均匀时 ( $\mu = \text{常数}$ ),

$$m = \mu \cdot \text{Area}(\Sigma)$$

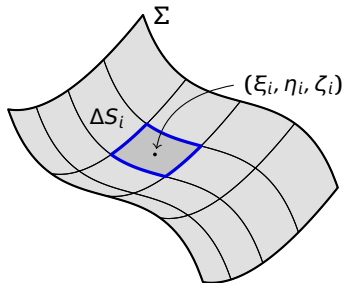
- 当材料非均匀时 ( $\mu = \mu(x, y, z)$  为  $\Sigma$  上函数), 利用微元法可知

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mu(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$$

# 曲面的质量

假设

- $\Sigma$  为空间中曲面
- 密度为  $\mu$
- 质量为  $m$



- 当材料均匀时 ( $\mu = \text{常数}$ ),

$$m = \mu \cdot \text{Area}(\Sigma)$$

- 当材料非均匀时 ( $\mu = \mu(x, y, z)$  为  $\Sigma$  上函数), 利用微元法可知

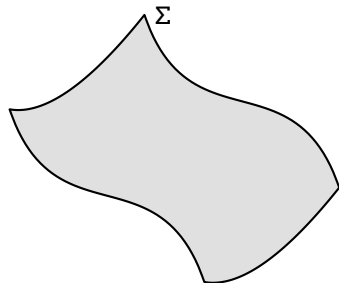
$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mu(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$$

# 对面积的曲面积分的定义

设

- $\Sigma$  是空间中有界分片光滑曲面,
- $f(x, y, z)$  是  $\Sigma$  上的有界函数,

若

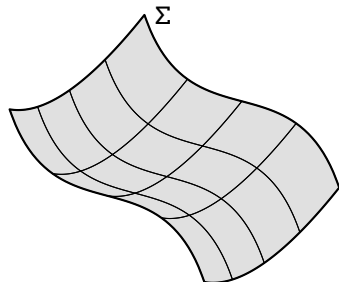


# 对面积的曲面积分的定义

设

- $\Sigma$  是空间中有界分片光滑曲面,
- $f(x, y, z)$  是  $\Sigma$  上的有界函数,

若

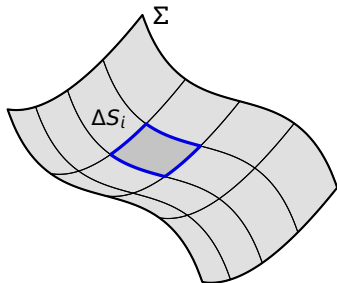


# 对面积的曲面积分的定义

设

- $\Sigma$  是空间中有界分片光滑曲面,
- $f(x, y, z)$  是  $\Sigma$  上的有界函数,

若

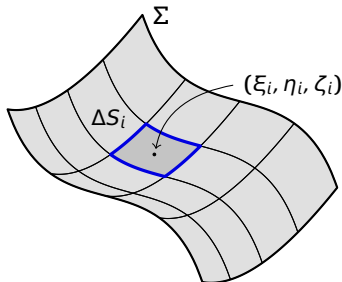


# 对面积的曲面积分的定义

设

- $\Sigma$  是空间中有界分片光滑曲面,
- $f(x, y, z)$  是  $\Sigma$  上的有界函数,

若



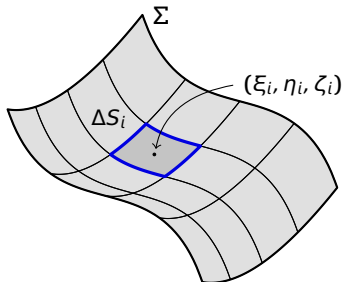
# 对面积的曲面积分的定义

设

- $\Sigma$  是空间中有界分片光滑曲面,
- $f(x, y, z)$  是  $\Sigma$  上的有界函数,

若

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$$





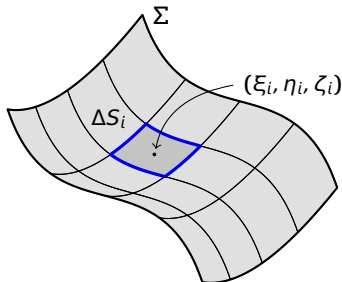
# 对面积的曲面积分的定义

设

- $\Sigma$  是空间中有界分片光滑曲面,
- $f(x, y, z)$  是  $\Sigma$  上的有界函数,

若

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$$



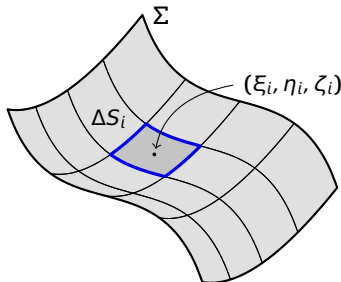
# 对面积的曲面积分的定义

设

- $\Sigma$  是空间中有界分片光滑曲面,
- $f(x, y, z)$  是  $\Sigma$  上的有界函数,

若

- 极限  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$  存在,



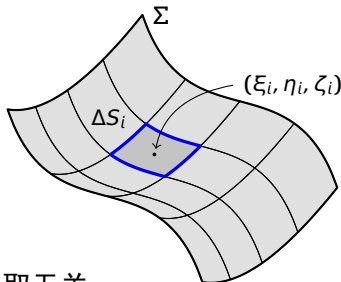
# 对面积的曲面积分的定义

设

- $\Sigma$  是空间中有界分片光滑曲面,
- $f(x, y, z)$  是  $\Sigma$  上的有界函数,

若

- 极限  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$  存在,
- 且该极限与  $\Sigma$  的划分、 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  的选取无关,



# 对面积的曲面积分的定义

设

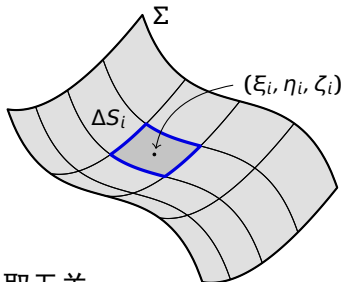
- $\Sigma$  是空间中有界分片光滑曲面,
- $f(x, y, z)$  是  $\Sigma$  上的有界函数,

若

- 极限  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$  存在,
- 且该极限与  $\Sigma$  的划分、 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  的选取无关,

则定义

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$$



# 对面积的曲面积分的定义

设

- $\Sigma$  是空间中有界分片光滑曲面,
- $f(x, y, z)$  是  $\Sigma$  上的有界函数,

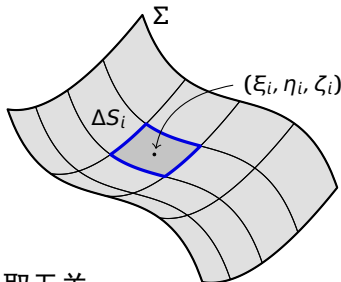
若

- 极限  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$  存在,
- 且该极限与  $\Sigma$  的划分、 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  的选取无关,

则定义

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$$

称为  $f(x, y, z)$  在  $\Sigma$  上对面积的曲面积分。



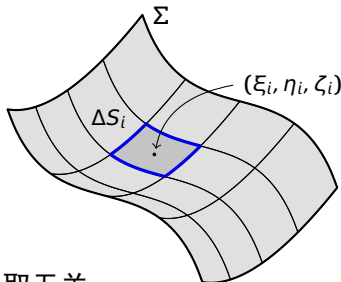
# 对面积的曲面积分的定义

设

- $\Sigma$  是空间中有界分片光滑曲面,
- $f(x, y, z)$  是  $\Sigma$  上的有界函数,

若

- 极限  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$  存在,
- 且该极限与  $\Sigma$  的划分、 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  的选取无关,



则定义

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$$

称为  $f(x, y, z)$  在  $\Sigma$  上对面积的曲面积分。 $dS$  称为面积元素。

# 对面积的曲面积分的定义

设

- $\Sigma$  是空间中有界分片光滑曲面,
- $f(x, y, z)$  是  $\Sigma$  上的有界函数,

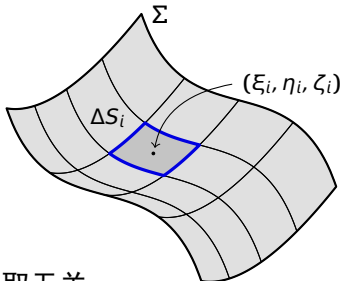
若

- 极限  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$  存在,
- 且该极限与  $\Sigma$  的划分、 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  的选取无关,

则定义

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$$

称为  $f(x, y, z)$  在  $\Sigma$  上对面积的曲面积分。 $dS$  称为面积元素。



**注** 对面积曲面积分的定义式与二重积分的类似, 故性质也类似

# 对面积曲面积分的性质

- 存在性 若  $f(x, y, z)$  在有界曲面  $\Sigma$  上连续, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$$

存在。



# 对面积曲面积分的性质

- 存在性 若  $f(x, y, z)$  在有界曲面  $\Sigma$  上连续, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$$

存在。

- 线性性  $\iint_{\Sigma} (\alpha f + \beta g) dS = \alpha \iint_{\Sigma} f dS + \beta \iint_{\Sigma} g dS$

# 对面积曲面积分的性质

- 存在性 若  $f(x, y, z)$  在有界曲面  $\Sigma$  上连续, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$$

存在。

- 线性性  $\iint_{\Sigma} (\alpha f + \beta g) dS = \alpha \iint_{\Sigma} f dS + \beta \iint_{\Sigma} g dS$
- 可加性  $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{\Sigma_1} f(x, y, z) dS + \iint_{\Sigma_2} f(x, y, z) dS$

# 对面积曲面积分的性质

- 存在性 若  $f(x, y, z)$  在有界曲面  $\Sigma$  上连续, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$$

存在。

- 线性性  $\iint_{\Sigma} (\alpha f + \beta g) dS = \alpha \iint_{\Sigma} f dS + \beta \iint_{\Sigma} g dS$
- 可加性  $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{\Sigma_1} f(x, y, z) dS + \iint_{\Sigma_2} f(x, y, z) dS$
- $\iint_{\Sigma} 1 dS = \text{Area}(\Sigma)$

# 对面积曲面积分的性质

- 存在性 若  $f(x, y, z)$  在有界曲面  $\Sigma$  上连续, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$$

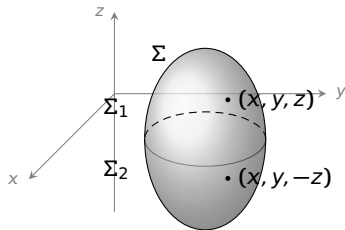
存在。

- 线性性  $\iint_{\Sigma} (\alpha f + \beta g) dS = \alpha \iint_{\Sigma} f dS + \beta \iint_{\Sigma} g dS$
- 可加性  $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{\Sigma_1} f(x, y, z) dS + \iint_{\Sigma_2} f(x, y, z) dS$
- $\iint_{\Sigma} 1 dS = \text{Area}(\Sigma)$
- 若  $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$ , 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS \leq \iint_{\Sigma} g(x, y, z) dS$$

# 积分的对称性

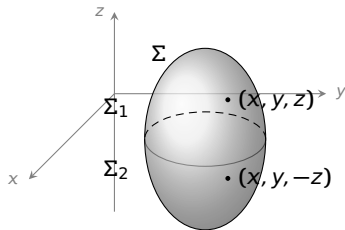
性质 设曲面  $\Sigma$  关于  $xoy$  坐标面对称,



# 积分的对称性

性质 设曲面  $\Sigma$  关于  $xoy$  坐标面对称,

- 若  $f(x, y, z)$  关于  $z$  是奇函数 (即:  $f(x, y, -z) = -f(x, y, z)$ ), 则

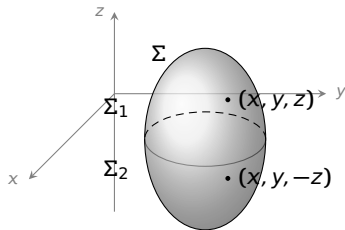


# 积分的对称性

性质 设曲面  $\Sigma$  关于  $xoy$  坐标面对称,

- 若  $f(x, y, z)$  关于  $z$  是奇函数 (即:  $f(x, y, -z) = -f(x, y, z)$ ), 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = 0$$



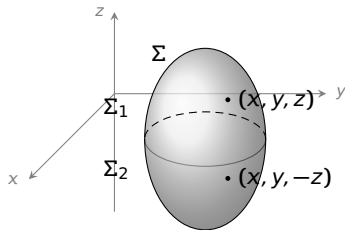
# 积分的对称性

性质 设曲面  $\Sigma$  关于  $xoy$  坐标面对称,

- 若  $f(x, y, z)$  关于  $z$  是奇函数 (即:  $f(x, y, -z) = -f(x, y, z)$ ), 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = 0$$

- 若  $f(x, y, z)$  关于  $z$  是偶函数 (即:  $f(x, y, -z) = f(x, y, z)$ ), 则





# 积分的对称性

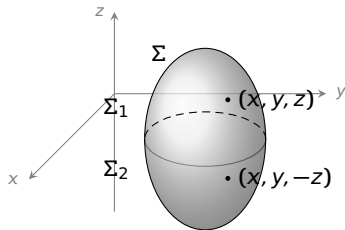
性质 设曲面  $\Sigma$  关于  $xoy$  坐标面对称,

- 若  $f(x, y, z)$  关于  $z$  是奇函数 (即:  $f(x, y, -z) = -f(x, y, z)$ ), 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = 0$$

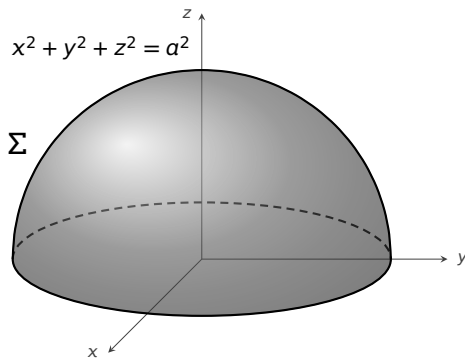
- 若  $f(x, y, z)$  关于  $z$  是偶函数 (即:  $f(x, y, -z) = f(x, y, z)$ ), 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = 2 \iint_{\Sigma_1} f(x, y, z) dS = 2 \iint_{\Sigma_2} f(x, y, z) dS$$



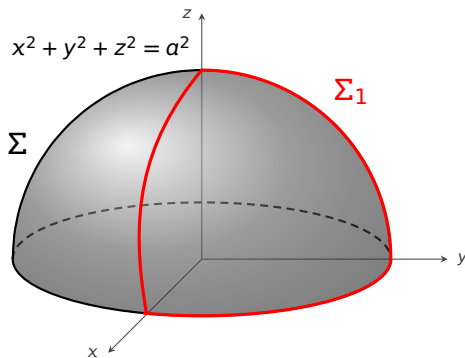
例 设曲面  $\Sigma$  为上半球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  ( $z \geq 0$ );  $\Sigma_1$  为  $\Sigma$  在第一卦限的部分。则有 ( )

- (A)  $\iint_{\Sigma} x dS = 4 \iint_{\Sigma_1} x dS$
- (B)  $\iint_{\Sigma} y dS = 4 \iint_{\Sigma_1} y dS$
- (C)  $\iint_{\Sigma} z dS = 4 \iint_{\Sigma_1} z dS$
- (D)  $\iint_{\Sigma} xyz dS = 4 \iint_{\Sigma_1} xyz dS$



例 设曲面  $\Sigma$  为上半球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  ( $z \geq 0$ )； $\Sigma_1$  为  $\Sigma$  在第一卦限的部分。则有 ( )

- (A)  $\iint_{\Sigma} x dS = 4 \iint_{\Sigma_1} x dS$
- (B)  $\iint_{\Sigma} y dS = 4 \iint_{\Sigma_1} y dS$
- (C)  $\iint_{\Sigma} z dS = 4 \iint_{\Sigma_1} z dS$
- (D)  $\iint_{\Sigma} xyz dS = 4 \iint_{\Sigma_1} xyz dS$



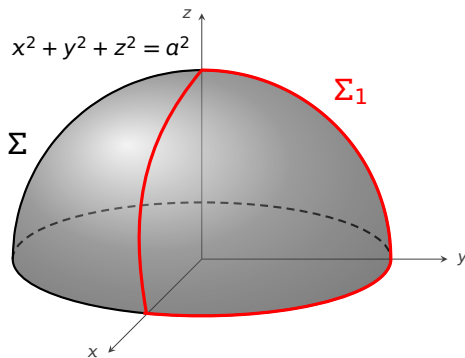
例 设曲面  $\Sigma$  为上半球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  ( $z \geq 0$ )； $\Sigma_1$  为  $\Sigma$  在第一卦限的部分。则有 ( C )

(A)  $\iint_{\Sigma} x dS = 4 \iint_{\Sigma_1} x dS$

(B)  $\iint_{\Sigma} y dS = 4 \iint_{\Sigma_1} y dS$

(C)  $\iint_{\Sigma} z dS = 4 \iint_{\Sigma_1} z dS$

(D)  $\iint_{\Sigma} xyz dS = 4 \iint_{\Sigma_1} xyz dS$



例 计算  $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS$ , 其中  $\Sigma$  是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 。

**例** 计算  $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS$ , 其中  $\Sigma$  是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 。

**解** 由对称性:

$$\iint_{\Sigma} x^2 dS = \iint_{\Sigma} y^2 dS = \iint_{\Sigma} z^2 dS$$

**例** 计算  $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS$ , 其中  $\Sigma$  是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 。

**解** 由对称性:

$$\iint_{\Sigma} x^2 dS = \iint_{\Sigma} y^2 dS = \iint_{\Sigma} z^2 dS$$

所以

$$\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS = 2 \iint_{\Sigma} x^2 dS$$

**例** 计算  $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS$ , 其中  $\Sigma$  是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 。

**解** 由对称性:

$$\iint_{\Sigma} x^2 dS = \iint_{\Sigma} y^2 dS = \iint_{\Sigma} z^2 dS$$

所以

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS &= 2 \iint_{\Sigma} x^2 dS \\ &= \frac{2}{3} \left[ \iint_{\Sigma} x^2 dS + \iint_{\Sigma} y^2 dS + \iint_{\Sigma} z^2 dS \right] \end{aligned}$$



**例** 计算  $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS$ , 其中  $\Sigma$  是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 。

**解** 由对称性:

$$\iint_{\Sigma} x^2 dS = \iint_{\Sigma} y^2 dS = \iint_{\Sigma} z^2 dS$$

所以

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS &= 2 \iint_{\Sigma} x^2 dS \\ &= \frac{2}{3} \left[ \iint_{\Sigma} x^2 dS + \iint_{\Sigma} y^2 dS + \iint_{\Sigma} z^2 dS \right] \\ &= \frac{2}{3} \iint_{\Sigma} x^2 + y^2 + z^2 dS \end{aligned}$$

**例** 计算  $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS$ , 其中  $\Sigma$  是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 。

**解** 由对称性:

$$\iint_{\Sigma} x^2 dS = \iint_{\Sigma} y^2 dS = \iint_{\Sigma} z^2 dS$$

所以

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS &= 2 \iint_{\Sigma} x^2 dS \\ &= \frac{2}{3} \left[ \iint_{\Sigma} x^2 dS + \iint_{\Sigma} y^2 dS + \iint_{\Sigma} z^2 dS \right] \\ &= \frac{2}{3} \iint_{\Sigma} x^2 + y^2 + z^2 dS \\ &= \frac{2}{3} \iint_{\Sigma} R^2 dS \end{aligned}$$

**例** 计算  $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS$ , 其中  $\Sigma$  是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 。

**解** 由对称性:

$$\iint_{\Sigma} x^2 dS = \iint_{\Sigma} y^2 dS = \iint_{\Sigma} z^2 dS$$

所以

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS &= 2 \iint_{\Sigma} x^2 dS \\ &= \frac{2}{3} \left[ \iint_{\Sigma} x^2 dS + \iint_{\Sigma} y^2 dS + \iint_{\Sigma} z^2 dS \right] \\ &= \frac{2}{3} \iint_{\Sigma} x^2 + y^2 + z^2 dS \\ &= \frac{2}{3} \iint_{\Sigma} R^2 dS = \frac{2}{3} R^2 \text{Area}(\Sigma) \end{aligned}$$

**例** 计算  $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS$ , 其中  $\Sigma$  是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 。

**解** 由对称性:

$$\iint_{\Sigma} x^2 dS = \iint_{\Sigma} y^2 dS = \iint_{\Sigma} z^2 dS$$

所以

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS &= 2 \iint_{\Sigma} x^2 dS \\ &= \frac{2}{3} \left[ \iint_{\Sigma} x^2 dS + \iint_{\Sigma} y^2 dS + \iint_{\Sigma} z^2 dS \right] \\ &= \frac{2}{3} \iint_{\Sigma} x^2 + y^2 + z^2 dS \\ &= \frac{2}{3} \iint_{\Sigma} R^2 dS = \frac{2}{3} R^2 \text{Area}(\Sigma) = \frac{2}{3} R^2 \cdot 4\pi R^2 \end{aligned}$$

**例** 计算  $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS$ , 其中  $\Sigma$  是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 。

**解** 由对称性:

$$\iint_{\Sigma} x^2 dS = \iint_{\Sigma} y^2 dS = \iint_{\Sigma} z^2 dS$$

所以

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS &= 2 \iint_{\Sigma} x^2 dS \\ &= \frac{2}{3} \left[ \iint_{\Sigma} x^2 dS + \iint_{\Sigma} y^2 dS + \iint_{\Sigma} z^2 dS \right] \\ &= \frac{2}{3} \iint_{\Sigma} x^2 + y^2 + z^2 dS \\ &= \frac{2}{3} \iint_{\Sigma} R^2 dS = \frac{2}{3} R^2 \text{Area}(\Sigma) = \frac{2}{3} R^2 \cdot 4\pi R^2 = \frac{8}{3} \pi R^4 \end{aligned}$$

# 对面积曲面积分的计算

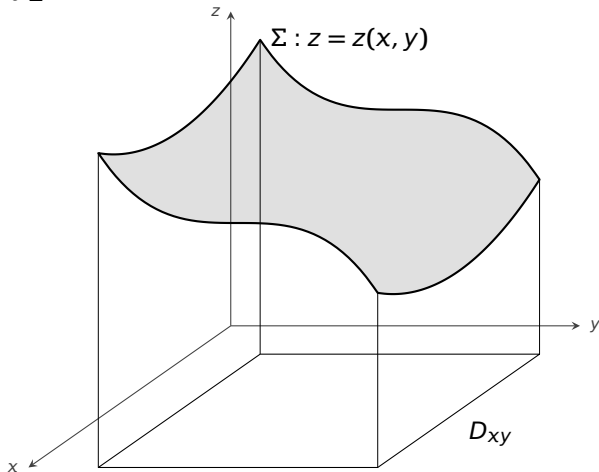
- 假设  $\Sigma$  是二元函数  $z = z(x, y)$ ,  $(x, y) \in D_{xy}$  的图形, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS =$$

# 对面积曲面积分的计算

- 假设  $\Sigma$  是二元函数  $z = z(x, y)$ ,  $(x, y) \in D_{xy}$  的图形, 则

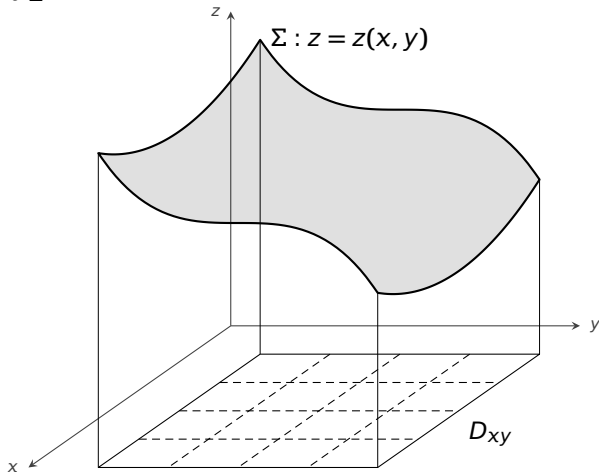
$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS =$$



# 对面积曲面积分的计算

- 假设  $\Sigma$  是二元函数  $z = z(x, y)$ ,  $(x, y) \in D_{xy}$  的图形, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS =$$

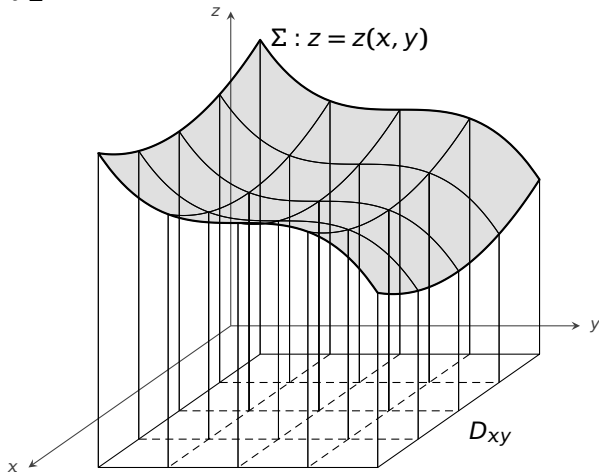




# 对面积曲面积分的计算

- 假设  $\Sigma$  是二元函数  $z = z(x, y)$ ,  $(x, y) \in D_{xy}$  的图形, 则

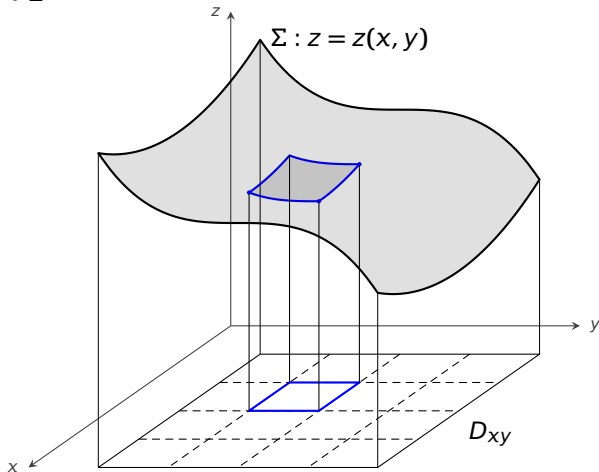
$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS =$$



# 对面积曲面积分的计算

- 假设  $\Sigma$  是二元函数  $z = z(x, y)$ ,  $(x, y) \in D_{xy}$  的图形, 则

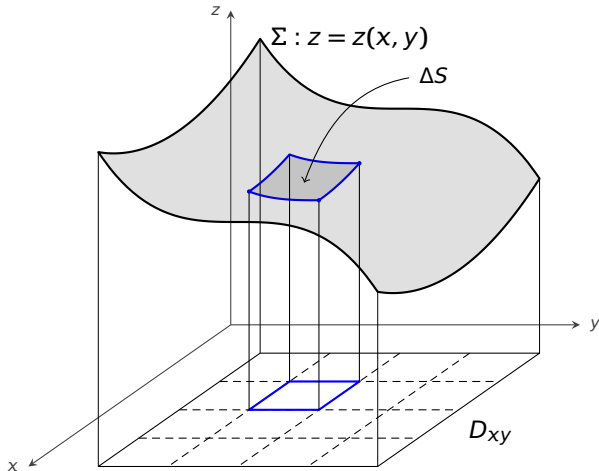
$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS =$$



# 对面积曲面积分的计算

- 假设  $\Sigma$  是二元函数  $z = z(x, y)$ ,  $(x, y) \in D_{xy}$  的图形, 则

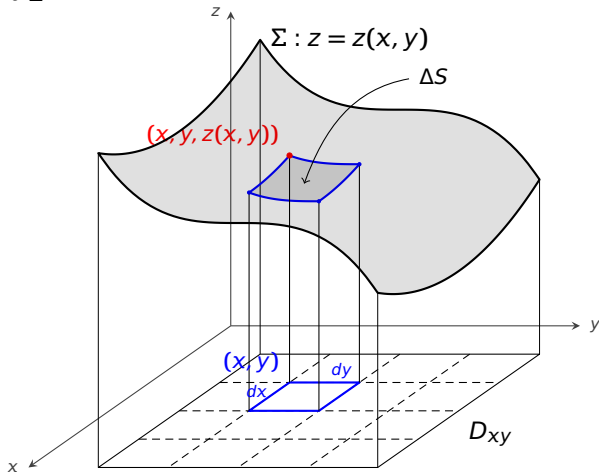
$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS =$$



# 对面积曲面积分的计算

- 假设  $\Sigma$  是二元函数  $z = z(x, y)$ ,  $(x, y) \in D_{xy}$  的图形, 则

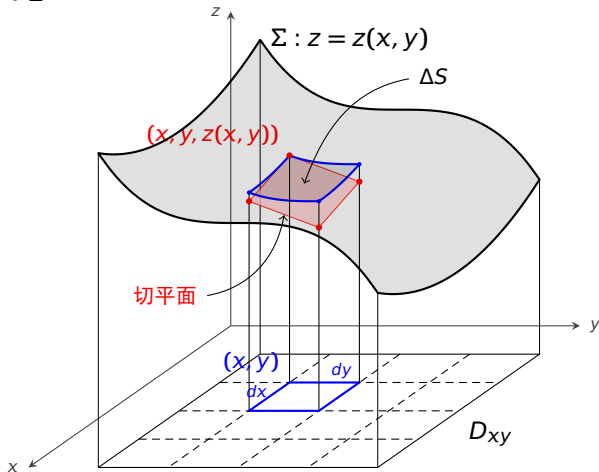
$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS =$$



# 对面积曲面积分的计算

- 假设  $\Sigma$  是二元函数  $z = z(x, y)$ ,  $(x, y) \in D_{xy}$  的图形, 则

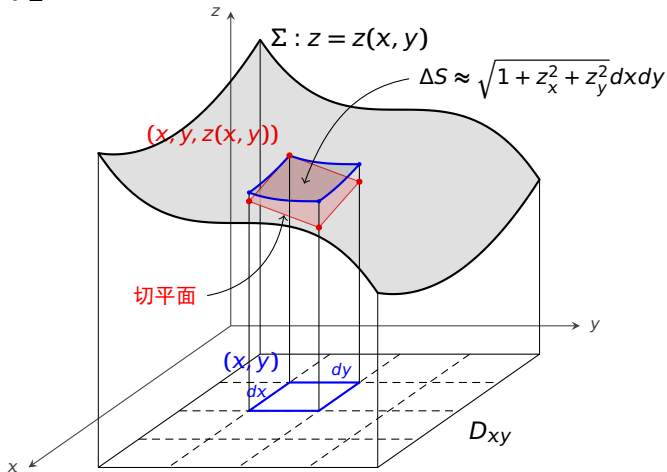
$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS =$$



# 对面积曲面积分的计算

- 假设  $\Sigma$  是二元函数  $z = z(x, y)$ ,  $(x, y) \in D_{xy}$  的图形, 则

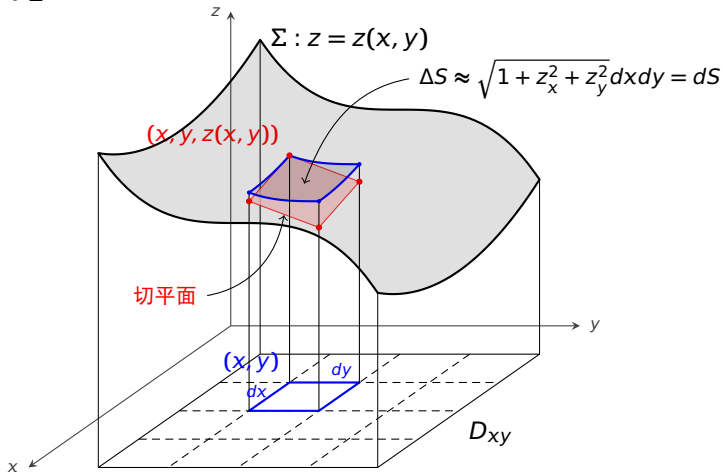
$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS =$$



# 对面积曲面积分的计算

- 假设  $\Sigma$  是二元函数  $z = z(x, y)$ ,  $(x, y) \in D_{xy}$  的图形, 则

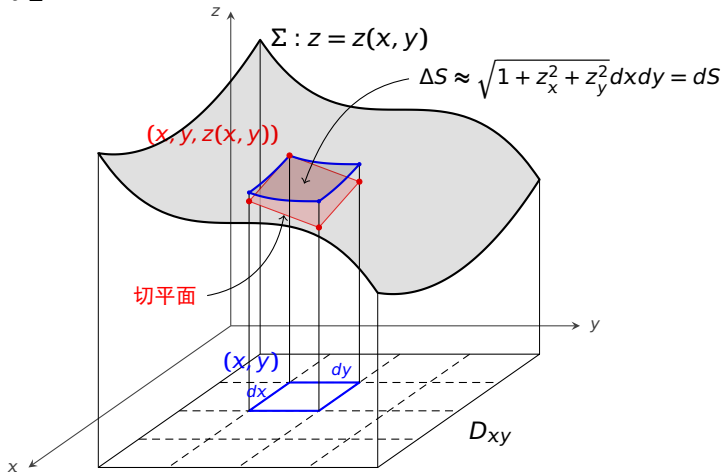
$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS =$$



# 对面积曲面积分的计算

- 假设  $\Sigma$  是二元函数  $z = z(x, y)$ ,  $(x, y) \in D_{xy}$  的图形, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$$

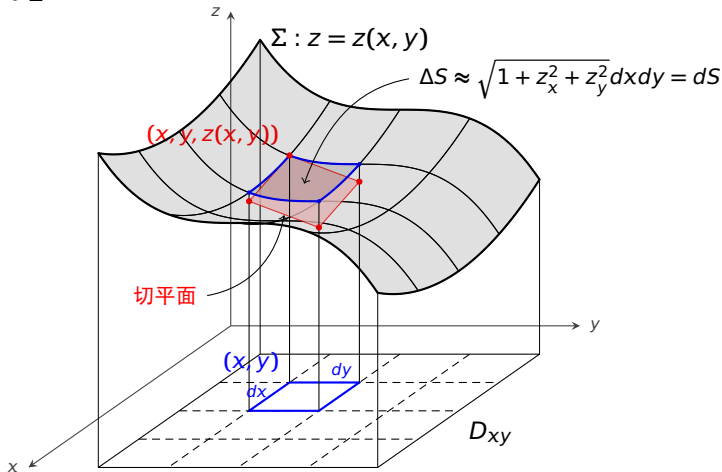




# 对面积曲面积分的计算

- 假设  $\Sigma$  是二元函数  $z = z(x, y)$ ,  $(x, y) \in D_{xy}$  的图形, 则

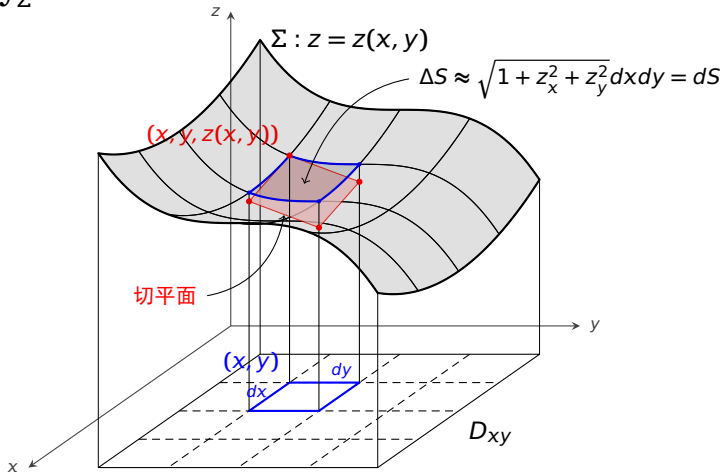
$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$$



# 对面积曲面积分的计算

- 假设  $\Sigma$  是二元函数  $z = z(x, y)$ ,  $(x, y) \in D_{xy}$  的图形, 则

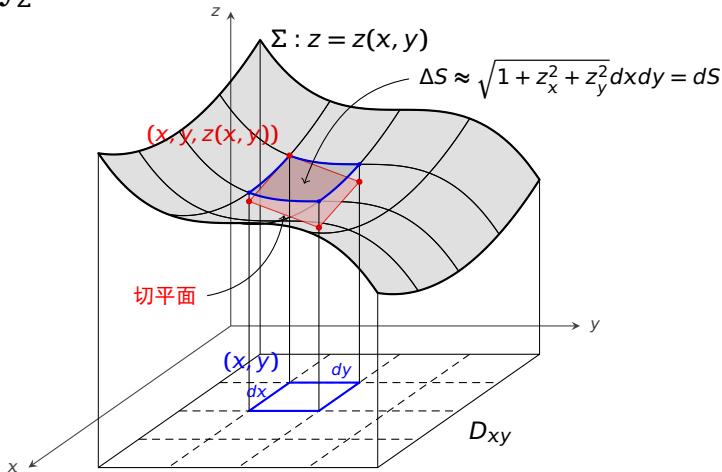
$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \sum f(x, y, z(x, y)) \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$$



# 对面积曲面积分的计算

- 假设  $\Sigma$  是二元函数  $z = z(x, y)$ ,  $(x, y) \in D_{xy}$  的图形, 则

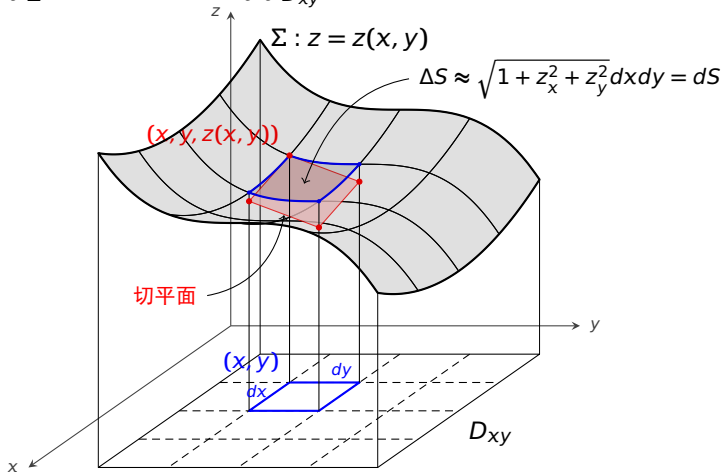
$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \lim \sum f(x, y, z(x, y)) \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$$



# 对面积曲面积分的计算

- 假设  $\Sigma$  是二元函数  $z = z(x, y)$ ,  $(x, y) \in D_{xy}$  的图形, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$$



# 对面积曲面积分的计算

- 假设  $\Sigma$  是二元函数  $z = z(x, y)$ ,  $(x, y) \in D_{xy}$  的图形, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$$

## 对面积曲面积分的计算

- 假设  $\Sigma$  是二元函数  $z = z(x, y)$ ,  $(x, y) \in D_{xy}$  的图形, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$$

- 假设  $\Sigma$  是二元函数  $y = y(x, z)$ ,  $(x, z) \in D_{xz}$  的图形, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS =$$

- 假设  $\Sigma$  是二元函数  $x = x(y, z)$ ,  $(y, z) \in D_{yz}$  的图形, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS =$$

# 对面积曲面积分的计算

- 假设  $\Sigma$  是二元函数  $z = z(x, y)$ ,  $(x, y) \in D_{xy}$  的图形, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$$

- 假设  $\Sigma$  是二元函数  $y = y(x, z)$ ,  $(x, z) \in D_{xz}$  的图形, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xz}} f(x, y(x, z), z) \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} dx dz$$

- 假设  $\Sigma$  是二元函数  $x = x(y, z)$ ,  $(y, z) \in D_{yz}$  的图形, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z) \sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2} dy dz$$

# 对面积曲面积分的计算

- 假设  $\Sigma$  是二元函数  $z = z(x, y)$ ,  $(x, y) \in D_{xy}$  的图形, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$$

- 假设  $\Sigma$  是二元函数  $y = y(x, z)$ ,  $(x, z) \in D_{xz}$  的图形, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xz}} f(x, y(x, z), z) \cdot \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} dx dz$$

- 假设  $\Sigma$  是二元函数  $x = x(y, z)$ ,  $(y, z) \in D_{yz}$  的图形, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z) \cdot \sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2} dy dz$$



# 对面积曲面积分的计算

- 假设  $\Sigma$  是二元函数  $z = z(x, y)$ ,  $(x, y) \in D_{xy}$  的图形, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$$

- 假设  $\Sigma$  是二元函数  $y = y(x, z)$ ,  $(x, z) \in D_{xz}$  的图形, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xz}} f(x, y(x, z), z) \cdot \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} dx dz$$

- 假设  $\Sigma$  是二元函数  $x = x(y, z)$ ,  $(y, z) \in D_{yz}$  的图形, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS =$$

# 对面积曲面积分的计算

- 假设  $\Sigma$  是二元函数  $z = z(x, y)$ ,  $(x, y) \in D_{xy}$  的图形, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$$

- 假设  $\Sigma$  是二元函数  $y = y(x, z)$ ,  $(x, z) \in D_{xz}$  的图形, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xz}} f(x, y(x, z), z) \cdot \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} dx dz$$

- 假设  $\Sigma$  是二元函数  $x = x(y, z)$ ,  $(y, z) \in D_{yz}$  的图形, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z) \sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2} dy dz$$

# 对面积曲面积分的计算

- 假设  $\Sigma$  是二元函数  $z = z(x, y)$ ,  $(x, y) \in D_{xy}$  的图形, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$$

- 假设  $\Sigma$  是二元函数  $y = y(x, z)$ ,  $(x, z) \in D_{xz}$  的图形, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xz}} f(x, y(x, z), z) \cdot \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} dx dz$$

- 假设  $\Sigma$  是二元函数  $x = x(y, z)$ ,  $(y, z) \in D_{yz}$  的图形, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z) \cdot \sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2} dy dz$$

## 对面积曲面积分的计算

- 假设  $\Sigma$  是二元函数  $z = z(x, y)$ ,  $(x, y) \in D_{xy}$  的图形, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$$

- 假设  $\Sigma$  是二元函数  $y = y(x, z)$ ,  $(x, z) \in D_{xz}$  的图形, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xz}} f(x, y(x, z), z) \cdot \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} dx dz$$

- 假设  $\Sigma$  是二元函数  $x = x(y, z)$ ,  $(y, z) \in D_{yz}$  的图形, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z) \cdot \sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2} dy dz$$

## 对面积曲面积分的计算

- 假设  $\Sigma$  是二元函数  $z = z(x, y)$ ,  $(x, y) \in D_{xy}$  的图形, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$$

- 假设  $\Sigma$  是二元函数  $y = y(x, z)$ ,  $(x, z) \in D_{xz}$  的图形, 则

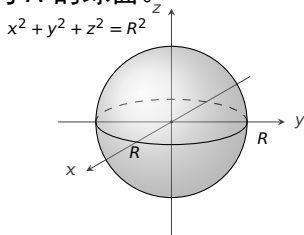
$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xz}} f(x, y(x, z), z) \cdot \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} dx dz$$

- 假设  $\Sigma$  是二元函数  $x = x(y, z)$ ,  $(y, z) \in D_{yz}$  的图形, 则

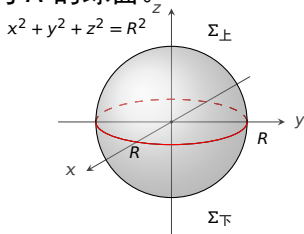
$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z) \cdot \sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2} dy dz$$

**注** 对于复杂的曲面  $\Sigma$ , 尝试将其分解成若干部分  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$ , 每一部分  $\Sigma_k$  都分别是某个二元函数的图形

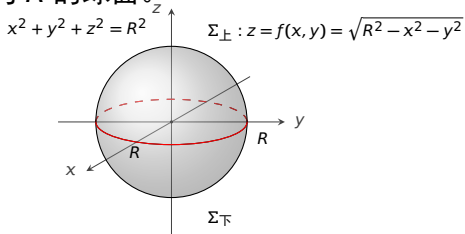
例 1 将对面积的曲面积分  $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$  转换为重积分, 其中  $\Sigma$  是球心在原点, 半径为  $R$  的球面。



**例 1** 将对面积的曲面积分  $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$  转换为重积分, 其中  $\Sigma$  是球心在原点, 半径为  $R$  的球面。

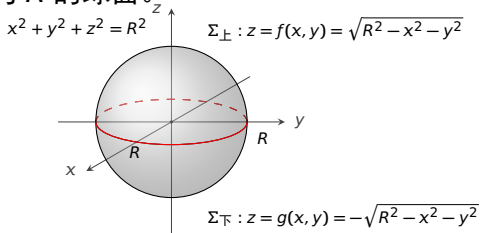


**例 1** 将对面积的曲面积分  $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$  转换为重积分, 其中  $\Sigma$  是球心在原点, 半径为  $R$  的球面。

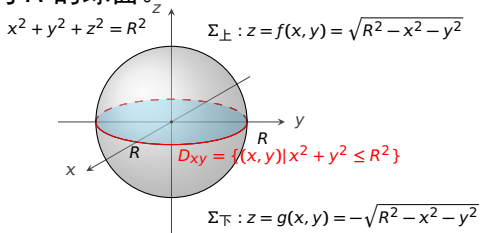




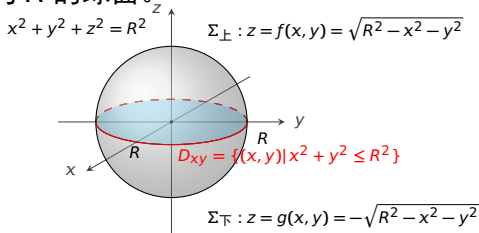
**例 1** 将对面积的曲面积分  $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$  转换为重积分, 其中  $\Sigma$  是球心在 origin, 半径为  $R$  的球面。



**例 1** 将对面积的曲面积分  $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$  转换为重积分, 其中  $\Sigma$  是球心在 origin, 半径为  $R$  的球面。

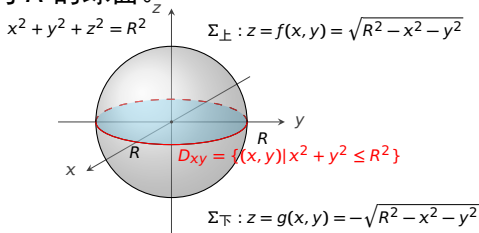


**例 1** 将对面积的曲面积分  $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$  转换为重积分, 其中  $\Sigma$  是球心在 origin, 半径为  $R$  的球面。



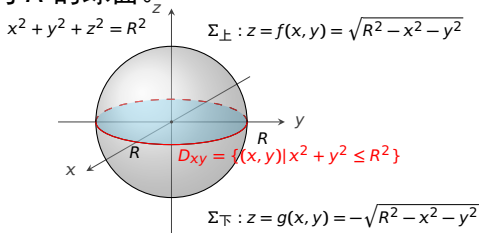
$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{\Sigma_+} f(x, y, z) dS + \iint_{\Sigma_-} f(x, y, z) dS$$

**例 1** 将对面积的曲面积分  $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$  转换为重积分, 其中  $\Sigma$  是球心在 origin, 半径为  $R$  的球面。



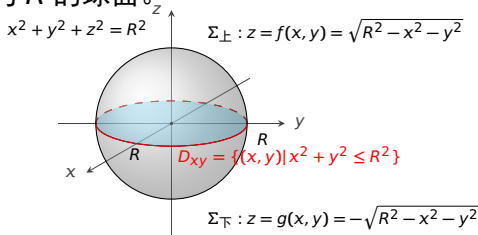
$$\begin{aligned}
 \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS &= \iint_{\Sigma_{+}} f(x, y, z) dS + \iint_{\Sigma_{-}} f(x, y, z) dS \\
 &= \iint_{D_{xy}} f(x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}) \cdot \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy
 \end{aligned}$$

**例 1** 将对面积的曲面积分  $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$  转换为重积分, 其中  $\Sigma$  是球心在原点, 半径为  $R$  的球面。



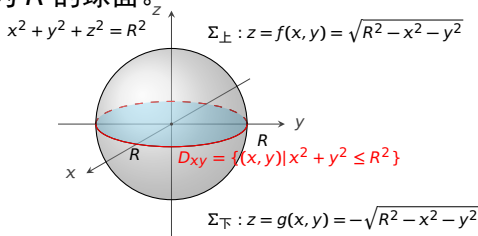
$$\begin{aligned}
 \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS &= \iint_{\Sigma_{\text{上}}} f(x, y, z) dS + \iint_{\Sigma_{\text{下}}} f(x, y, z) dS \\
 &= \iint_{D_{xy}} f(x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}) \cdot \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy \\
 &\quad + \iint_{D_{xy}} f(x, y, -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}) \cdot \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2} dx dy
 \end{aligned}$$

**例 1** 将对面积的曲面积分  $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$  转换为重积分, 其中  $\Sigma$  是球心在 origin, 半径为  $R$  的球面。



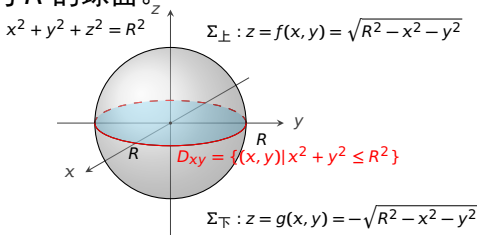
$$\begin{aligned}
 \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS &= \iint_{\Sigma_+} f(x, y, z) dS + \iint_{\Sigma_-} f(x, y, z) dS \\
 &= \iint_{D_{xy}} f(x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}) \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\
 &\quad + \iint_{D_{xy}} f(x, y, -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}) \cdot \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2} dx dy
 \end{aligned}$$

**例 1** 将对面积的曲面积分  $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$  转换为重积分, 其中  $\Sigma$  是球心在 origin, 半径为  $R$  的球面。



$$\begin{aligned}
 \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS &= \iint_{\Sigma_+} f(x, y, z) dS + \iint_{\Sigma_-} f(x, y, z) dS \\
 &= \iint_{D_{xy}} f(x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}) \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\
 &\quad + \iint_{D_{xy}} f(x, y, -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}) \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy
 \end{aligned}$$

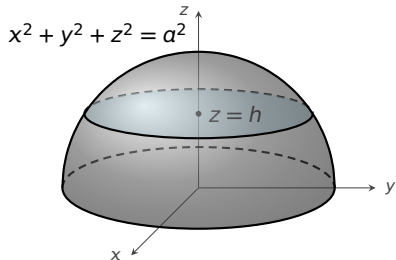
**例 1** 将对面积的曲面积分  $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$  转换为重积分, 其中  $\Sigma$  是球心在 origin, 半径为  $R$  的球面。



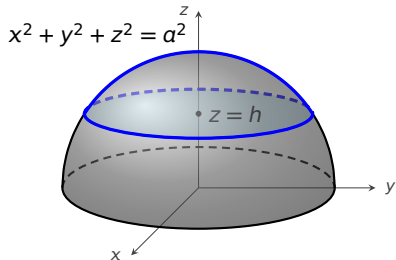
$$\begin{aligned}
 \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS &= \iint_{\Sigma_+} f(x, y, z) dS + \iint_{\Sigma_-} f(x, y, z) dS \\
 &= \iint_{D_{xy}} f(x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}) \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\
 &\quad + \iint_{D_{xy}} f(x, y, -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}) \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\
 &= \iint_{D_{xy}} \left[ f(x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}) + f(x, y, -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}) \right] \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy
 \end{aligned}$$



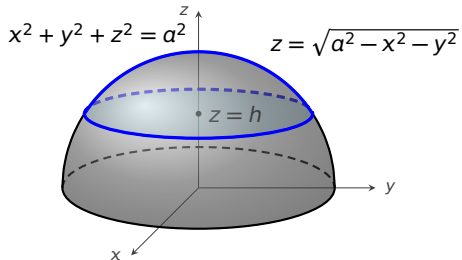
例 2 计算  $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$ , 其中曲面  $\Sigma$  如图所示。



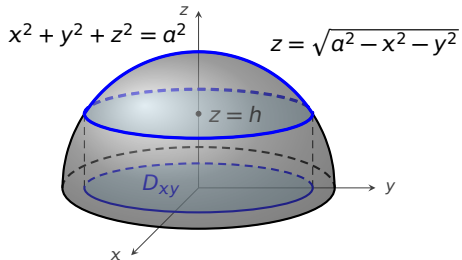
例 2 计算  $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$ , 其中曲面  $\Sigma$  如图所示。



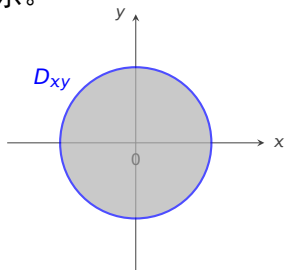
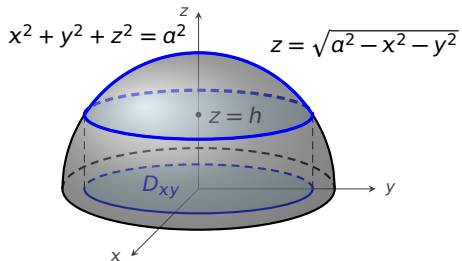
例 2 计算  $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$ , 其中曲面  $\Sigma$  如图所示。



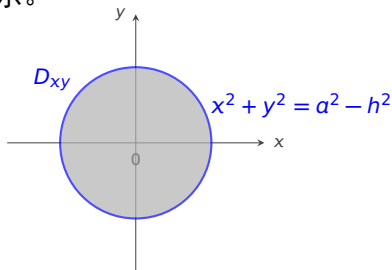
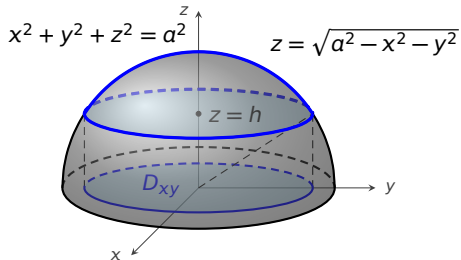
例 2 计算  $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$ , 其中曲面  $\Sigma$  如图所示。



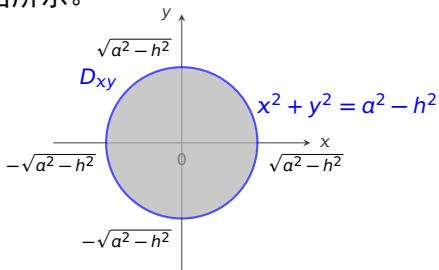
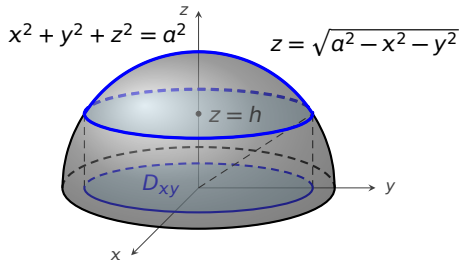
例 2 计算  $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$ , 其中曲面  $\Sigma$  如图所示。



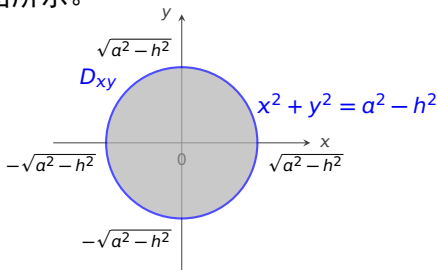
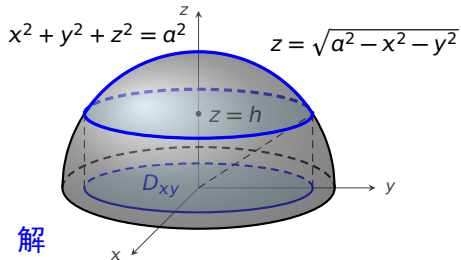
例 2 计算  $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$ , 其中曲面  $\Sigma$  如图所示。



例 2 计算  $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$ , 其中曲面  $\Sigma$  如图所示。



例 2 计算  $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$ , 其中曲面  $\Sigma$  如图所示。

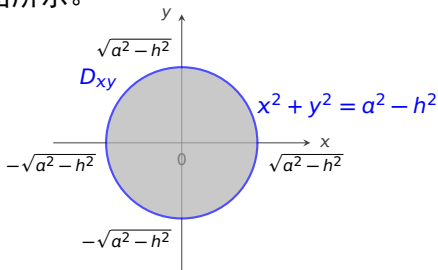
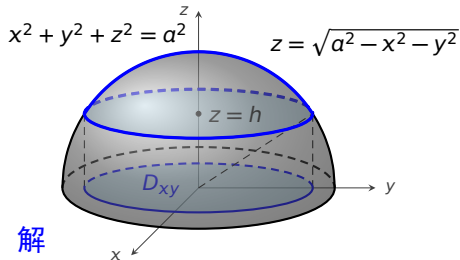


解

原式 =



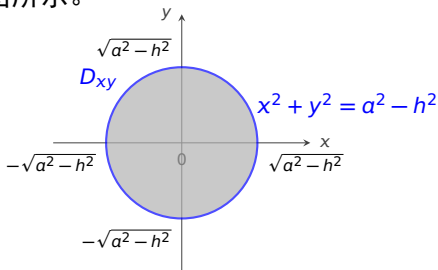
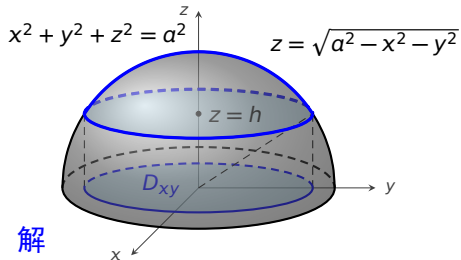
例 2 计算  $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$ , 其中曲面  $\Sigma$  如图所示。



解

原式 = 
$$\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

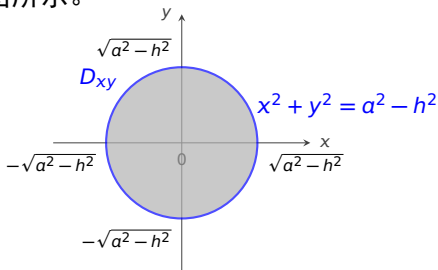
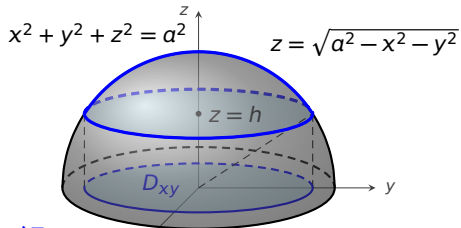
例 2 计算  $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$ , 其中曲面  $\Sigma$  如图所示。



解

原式 = 
$$\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$$

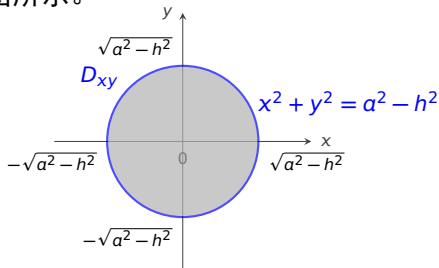
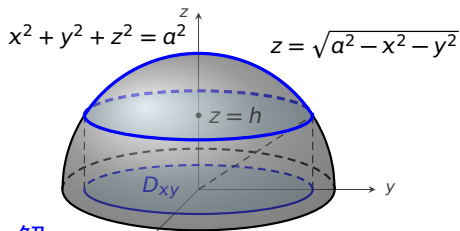
例 2 计算  $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$ , 其中曲面  $\Sigma$  如图所示。



解

$$\text{原式} = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$$

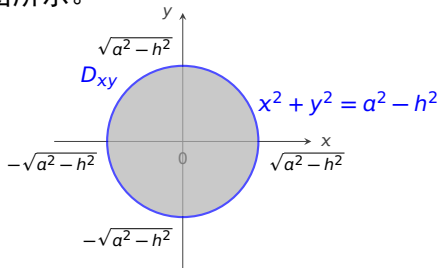
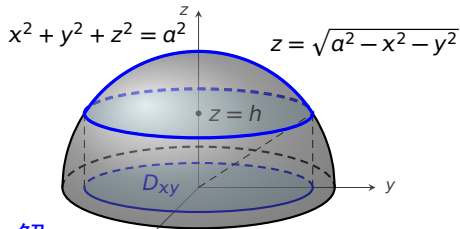
例 2 计算  $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$ , 其中曲面  $\Sigma$  如图所示。



解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \\ &\quad \cdot \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - x^2 - y^2}} \end{aligned}$$

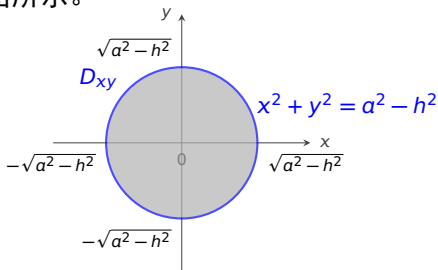
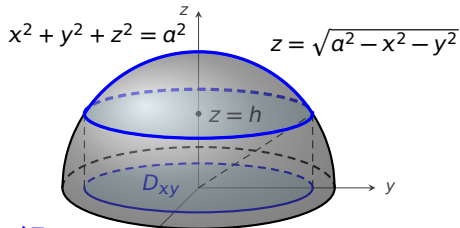
例 2 计算  $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$ , 其中曲面  $\Sigma$  如图所示。



解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \cdot \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy \end{aligned}$$

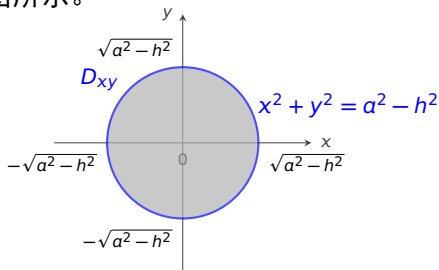
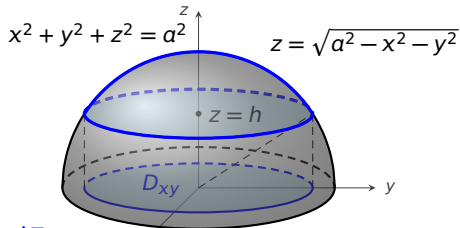
例 2 计算  $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$ , 其中曲面  $\Sigma$  如图所示。



解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2 - x^2 - y^2} dx dy \end{aligned}$$

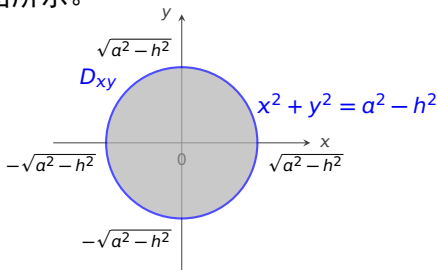
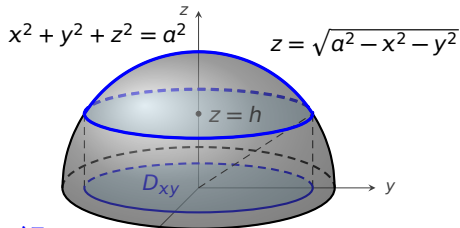
例 2 计算  $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$ , 其中曲面  $\Sigma$  如图所示。



解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2 - x^2 - y^2} dx dy \quad \begin{array}{l} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{array} \end{aligned}$$

例 2 计算  $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$ , 其中曲面  $\Sigma$  如图所示。

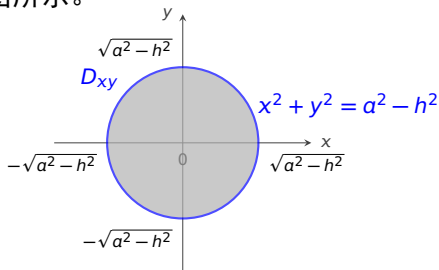
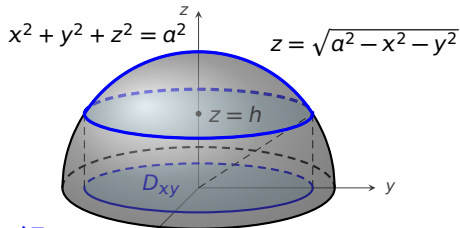


解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \\
 &= \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2 - x^2 - y^2} dx dy \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta
 \end{aligned}$$



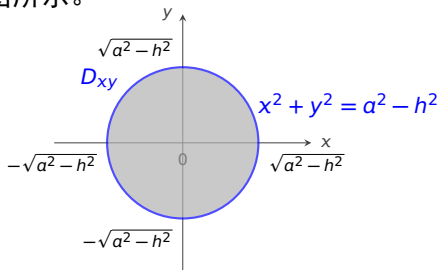
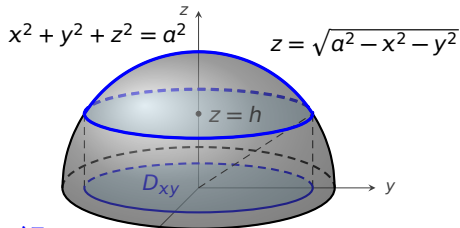
例 2 计算  $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$ , 其中曲面  $\Sigma$  如图所示。



解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \\
 &= \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2 - x^2 - y^2} dx dy \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta \\
 &= \int \left[ \int \frac{a}{a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta
 \end{aligned}$$

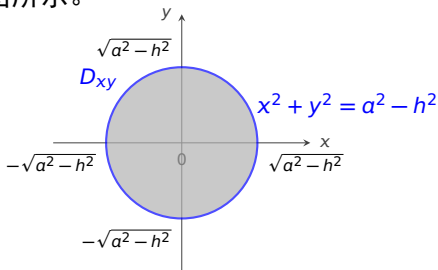
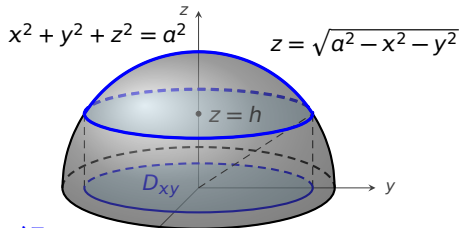
例 2 计算  $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$ , 其中曲面  $\Sigma$  如图所示。



解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \\
 &= \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2 - x^2 - y^2} dx dy \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[ \int \frac{a}{a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta
 \end{aligned}$$

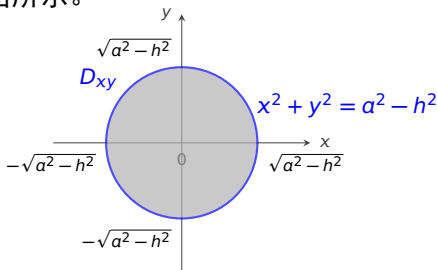
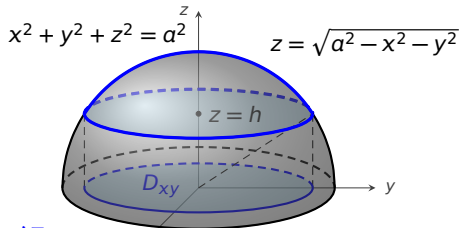
例 2 计算  $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$ , 其中曲面  $\Sigma$  如图所示。



解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \\
 &= \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2 - x^2 - y^2} dx dy \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^{\sqrt{a^2 - h^2}} \frac{a}{a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta
 \end{aligned}$$

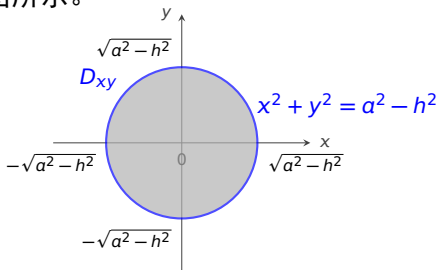
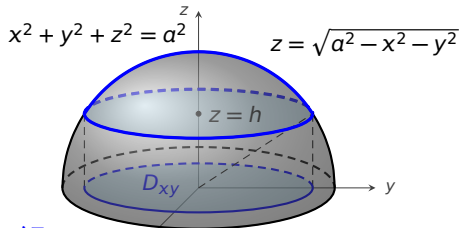
例 2 计算  $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$ , 其中曲面  $\Sigma$  如图所示。



解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \\
 &= \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2 - x^2 - y^2} dx dy \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^{\sqrt{a^2 - h^2}} \frac{a}{a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta = 2\pi.
 \end{aligned}$$

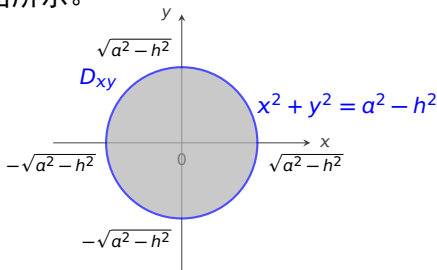
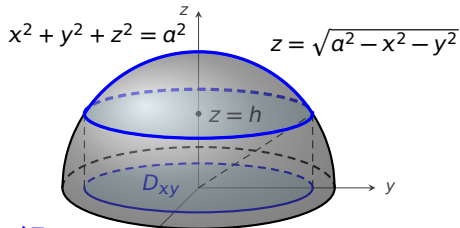
例 2 计算  $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$ , 其中曲面  $\Sigma$  如图所示。



解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \\
 &= \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2 - x^2 - y^2} dx dy \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^{\sqrt{a^2 - h^2}} \frac{a}{a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta \stackrel{u=a^2 - \rho^2}{=} 2\pi.
 \end{aligned}$$

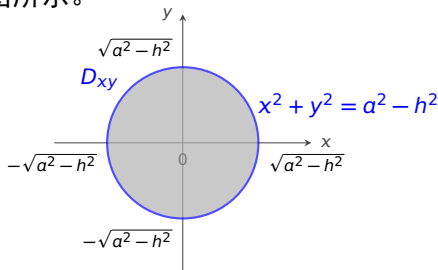
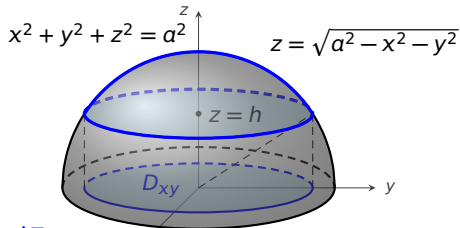
例 2 计算  $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$ , 其中曲面  $\Sigma$  如图所示。



解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \\
 &= \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2 - x^2 - y^2} dx dy \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^{\sqrt{a^2 - h^2}} \frac{a}{a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta \stackrel{u=a^2 - \rho^2}{=} 2\pi \cdot \frac{a}{u}
 \end{aligned}$$

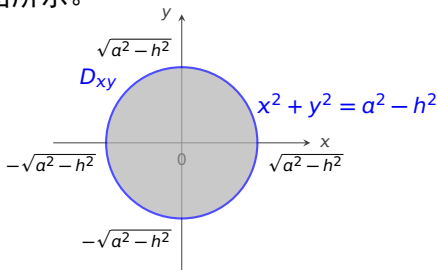
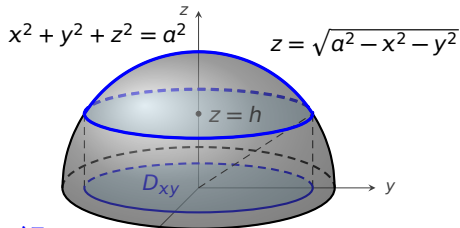
例 2 计算  $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$ , 其中曲面  $\Sigma$  如图所示。



解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \\
 &= \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2 - x^2 - y^2} dx dy \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^{\sqrt{a^2 - h^2}} \frac{a}{a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta \stackrel{u=a^2 - \rho^2}{=} 2\pi \cdot \frac{a}{u} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du
 \end{aligned}$$

例 2 计算  $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$ , 其中曲面  $\Sigma$  如图所示。

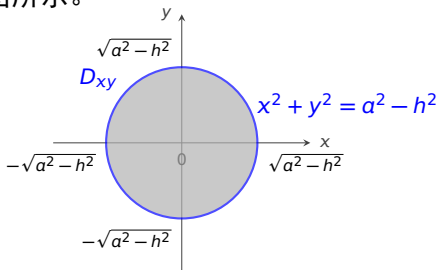
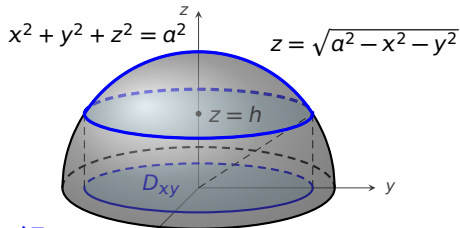


解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \\
 &= \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2 - x^2 - y^2} dx dy \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^{\sqrt{a^2 - h^2}} \frac{a}{a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta \stackrel{u=a^2 - \rho^2}{=} 2\pi \cdot \int_{a^2}^{h^2} \frac{a}{u} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du
 \end{aligned}$$



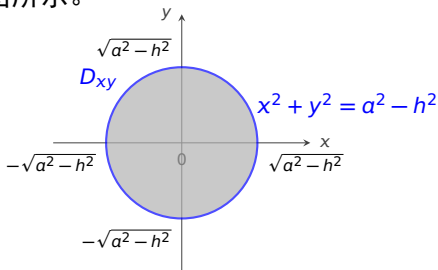
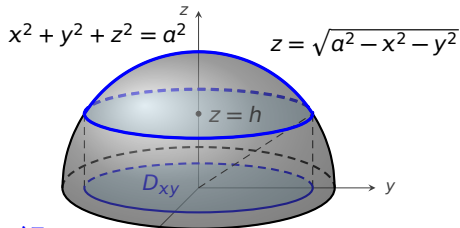
例 2 计算  $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$ , 其中曲面  $\Sigma$  如图所示。



解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \\
 &= \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2 - x^2 - y^2} dx dy \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^{\sqrt{a^2 - h^2}} \frac{a}{a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta \stackrel{u=a^2 - \rho^2}{=} 2\pi \cdot \int_{a^2}^{h^2} \frac{a}{u} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du \\
 &= -\pi a \ln u \Big|_{a^2}^{h^2}
 \end{aligned}$$

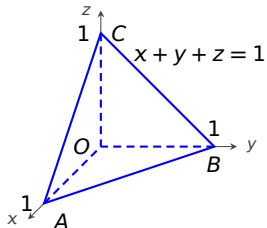
例 2 计算  $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$ , 其中曲面  $\Sigma$  如图所示。



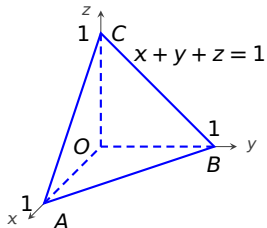
解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \\
 &= \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2 - x^2 - y^2} dx dy \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^{\sqrt{a^2 - h^2}} \frac{a}{a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta \stackrel{u=a^2 - \rho^2}{=} 2\pi \cdot \int_{a^2}^{h^2} \frac{a}{u} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du \\
 &= -\pi a \ln u \Big|_{a^2}^{h^2} = 2\pi a \ln \frac{a}{h}
 \end{aligned}$$

例 3 计算  $\iint_{\Sigma} xyz dS$ , 其中曲面  $\Sigma$  如图所示。



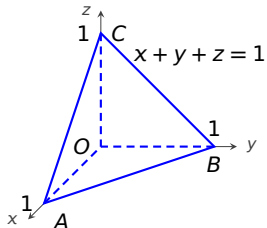
例 3 计算  $\iint_{\Sigma} xyz dS$ , 其中曲面  $\Sigma$  如图所示。



解

$$\text{原式} = \left( \iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC} \right) xyz dS$$

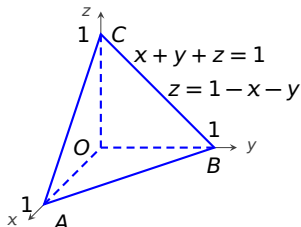
例 3 计算  $\iint_{\Sigma} xyzdS$ , 其中曲面  $\Sigma$  如图所示。



解

$$\text{原式} = \left( \iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC} \right) xyzdS = \iint_{\Delta ABC} xyzdS$$

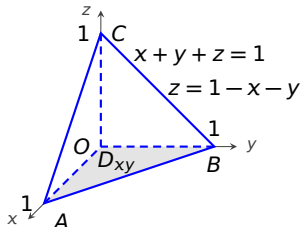
例 3 计算  $\iint_{\Sigma} xyzdS$ , 其中曲面  $\Sigma$  如图所示。



解

$$\text{原式} = \left( \iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC} \right) xyzdS = \iint_{\Delta ABC} xyzdS$$

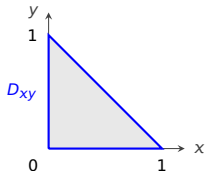
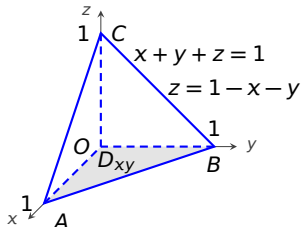
例 3 计算  $\iint_{\Sigma} xyzdS$ , 其中曲面  $\Sigma$  如图所示。



解

$$\text{原式} = \left( \iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC} \right) xyzdS = \iint_{\Delta ABC} xyzdS$$

例 3 计算  $\iint_{\Sigma} xyzdS$ , 其中曲面  $\Sigma$  如图所示。

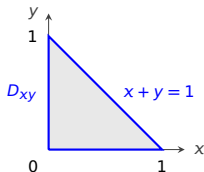
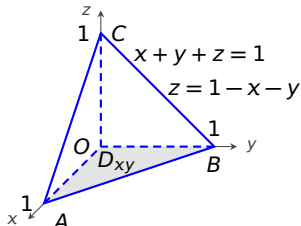


解

$$\text{原式} = \left( \iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC} \right) xyzdS = \iint_{\Delta ABC} xyzdS$$



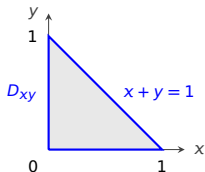
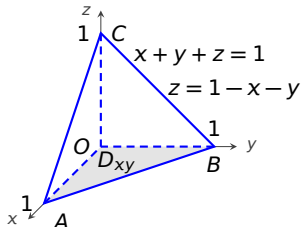
例 3 计算  $\iint_{\Sigma} xyzdS$ , 其中曲面  $\Sigma$  如图所示。



解

$$\text{原式} = \left( \iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC} \right) xyzdS = \iint_{\Delta ABC} xyzdS$$

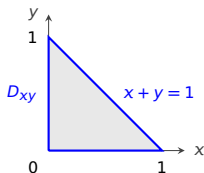
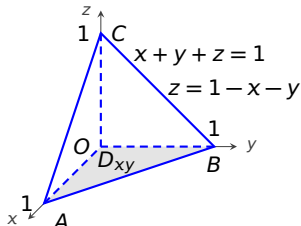
例 3 计算  $\iint_{\Sigma} xyzdS$ , 其中曲面  $\Sigma$  如图所示。



解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \left( \iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC} \right) xyzdS = \iint_{\Delta ABC} xyzdS \\ &\quad xy(1-x-y) \end{aligned}$$

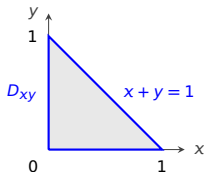
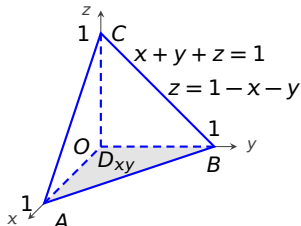
例 3 计算  $\iint_{\Sigma} xyzdS$ , 其中曲面  $\Sigma$  如图所示。



解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \left( \iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC} \right) xyzdS = \iint_{\Delta ABC} xyzdS \\ &= \iint_{D_{xy}} xy(1-x-y) \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy \end{aligned}$$

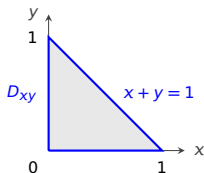
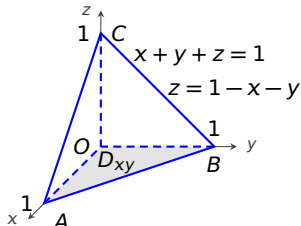
例 3 计算  $\iint_{\Sigma} xyzdS$ , 其中曲面  $\Sigma$  如图所示。



解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \left( \iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC} \right) xyzdS = \iint_{\Delta ABC} xyzdS \\ &= \iint_{D_{xy}} xy(1-x-y) \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \end{aligned}$$

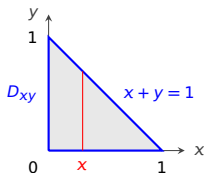
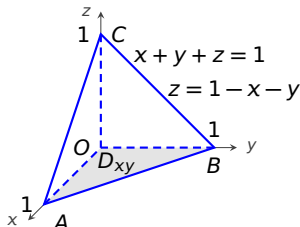
例 3 计算  $\iint_{\Sigma} xyzdS$ , 其中曲面  $\Sigma$  如图所示。



解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \left( \iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC} \right) xyzdS = \iint_{\Delta ABC} xyzdS \\
 &= \iint_{D_{xy}} xy(1-x-y) \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy \\
 &= \int \left[ \int xy(1-x-y) \cdot \sqrt{3} dy \right] dx
 \end{aligned}$$

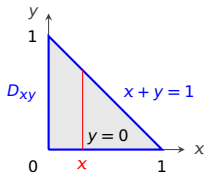
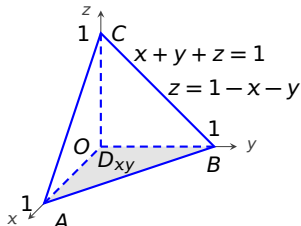
例 3 计算  $\iint_{\Sigma} xyzdS$ , 其中曲面  $\Sigma$  如图所示。



解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \left( \iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC} \right) xyzdS = \iint_{\Delta ABC} xyzdS \\
 &= \iint_{D_{xy}} xy(1-x-y) \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy \\
 &= \int \left[ \int xy(1-x-y) \cdot \sqrt{3} dy \right] dx
 \end{aligned}$$

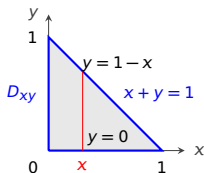
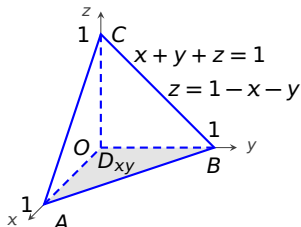
例 3 计算  $\iint_{\Sigma} xyzdS$ , 其中曲面  $\Sigma$  如图所示。



解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \left( \iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC} \right) xyzdS = \iint_{\Delta ABC} xyzdS \\
 &= \iint_{D_{xy}} xy(1-x-y) \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy \\
 &= \int \left[ \int xy(1-x-y) \cdot \sqrt{3} dy \right] dx
 \end{aligned}$$

例 3 计算  $\iint_{\Sigma} xyzdS$ , 其中曲面  $\Sigma$  如图所示。

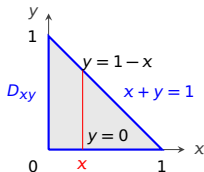
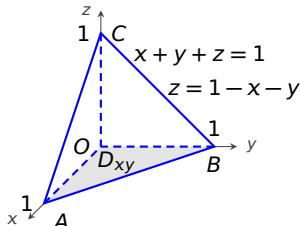


解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \left( \iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC} \right) xyzdS = \iint_{\Delta ABC} xyzdS \\
 &= \iint_{D_{xy}} xy(1-x-y) \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy \\
 &= \int \left[ \int xy(1-x-y) \cdot \sqrt{3} dy \right] dx
 \end{aligned}$$



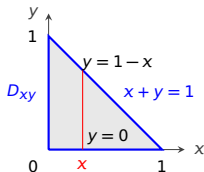
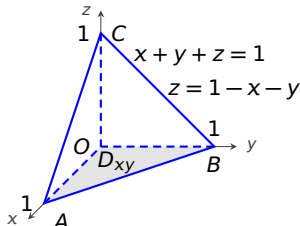
例 3 计算  $\iint_{\Sigma} xyzdS$ , 其中曲面  $\Sigma$  如图所示。



解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \left( \iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC} \right) xyzdS = \iint_{\Delta ABC} xyzdS \\
 &= \iint_{D_{xy}} xy(1-x-y) \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy \\
 &= \int_0^1 \left[ \int xy(1-x-y) \cdot \sqrt{3} dy \right] dx
 \end{aligned}$$

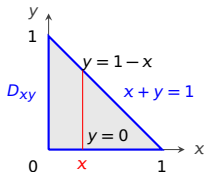
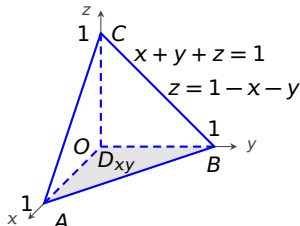
例 3 计算  $\iint_{\Sigma} xyzdS$ , 其中曲面  $\Sigma$  如图所示。



解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \left( \iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC} \right) xyzdS = \iint_{\Delta ABC} xyzdS \\
 &= \iint_{D_{xy}} xy(1-x-y) \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy \\
 &= \int_0^1 \left[ \int_0^{1-x} xy(1-x-y) \cdot \sqrt{3} dy \right] dx
 \end{aligned}$$

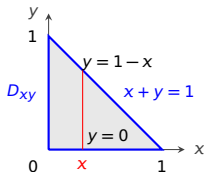
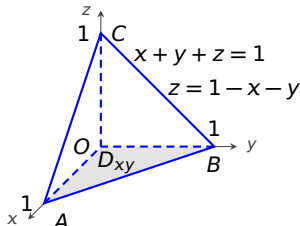
例3 计算  $\iint_{\Sigma} xyz dS$ , 其中曲面  $\Sigma$  如图所示。



解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \left( \iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC} \right) xyz dS = \iint_{\Delta ABC} xyz dS \\
 &= \iint_{D_{xy}} xy(1-x-y) \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \\
 &= \int_0^1 \left[ \int_0^{1-x} xy(1-x-y) \cdot \sqrt{3} dy \right] dx \\
 &= x \left[ (1-x) \frac{y^2}{2} - \frac{1}{3} y^3 \right]
 \end{aligned}$$

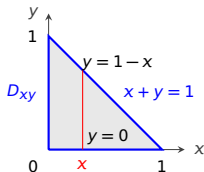
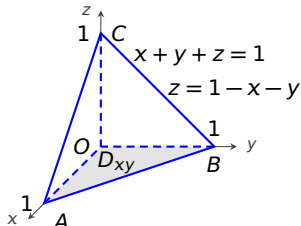
例3 计算  $\iint_{\Sigma} xyz dS$ , 其中曲面  $\Sigma$  如图所示。



解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \left( \iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC} \right) xyz dS = \iint_{\Delta ABC} xyz dS \\
 &= \iint_{D_{xy}} xy(1-x-y) \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy \\
 &= \int_0^1 \left[ \int_0^{1-x} xy(1-x-y) \cdot \sqrt{3} dy \right] dx \\
 &= x \left[ (1-x) \frac{y^2}{2} - \frac{1}{3} y^3 \right] \Big|_0^{1-x}
 \end{aligned}$$

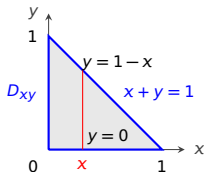
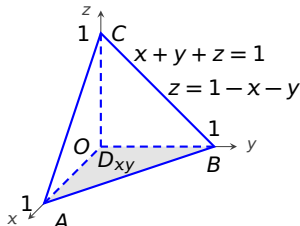
例3 计算  $\iint_{\Sigma} xyz dS$ , 其中曲面  $\Sigma$  如图所示。



解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \left( \iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC} \right) xyz dS = \iint_{\Delta ABC} xyz dS \\
 &= \iint_{D_{xy}} xy(1-x-y) \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy \\
 &= \int_0^1 \left[ \int_0^{1-x} xy(1-x-y) \cdot \sqrt{3} dy \right] dx \\
 &= \sqrt{3} \int_0^1 x \left[ (1-x) \frac{y^2}{2} - \frac{1}{3} y^3 \right] \Big|_0^{1-x} dx
 \end{aligned}$$

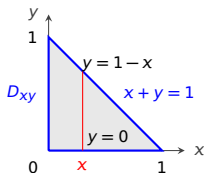
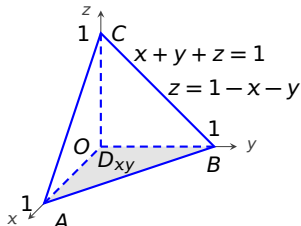
例3 计算  $\iint_{\Sigma} xyz dS$ , 其中曲面  $\Sigma$  如图所示。



解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \left( \iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC} \right) xyz dS = \iint_{\Delta ABC} xyz dS \\
 &= \iint_{D_{xy}} xy(1-x-y) \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy \\
 &= \int_0^1 \left[ \int_0^{1-x} xy(1-x-y) \cdot \sqrt{3} dy \right] dx \\
 &= \sqrt{3} \int_0^1 x \left[ (1-x) \frac{y^2}{2} - \frac{1}{3} y^3 \right] \Big|_0^{1-x} dx = \sqrt{3} \int_0^1 \frac{1}{6} x(1-x)^3 dx
 \end{aligned}$$

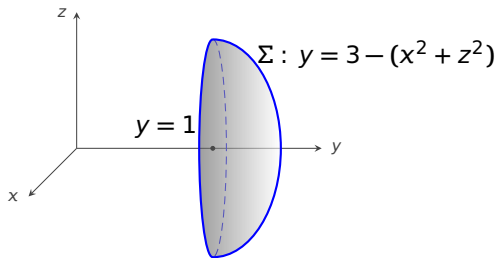
例 3 计算  $\iint_{\Sigma} xyz dS$ , 其中曲面  $\Sigma$  如图所示。



解

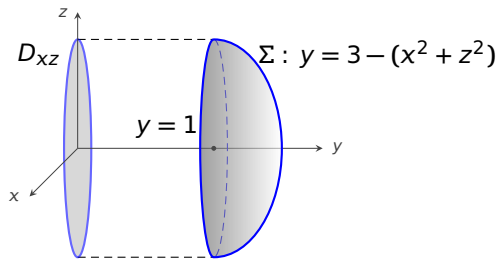
$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \left( \iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC} \right) xyz dS = \iint_{\Delta ABC} xyz dS \\
 &= \iint_{D_{xy}} xy(1-x-y) \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy \\
 &= \int_0^1 \left[ \int_0^{1-x} xy(1-x-y) \cdot \sqrt{3} dy \right] dx \\
 &= \sqrt{3} \int_0^1 x \left[ (1-x) \frac{y^2}{2} - \frac{1}{3} y^3 \right] \Big|_0^{1-x} dx = \sqrt{3} \int_0^1 \frac{1}{6} x(1-x)^3 dx = \frac{\sqrt{3}}{120}
 \end{aligned}$$

例 4 计算  $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + z^2 + y) dS$ , 其中  $\Sigma$  是曲面  $y = 3 - (x^2 + z^2)$  在  $y \geq 1$  的部分。

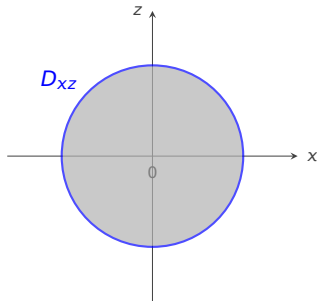
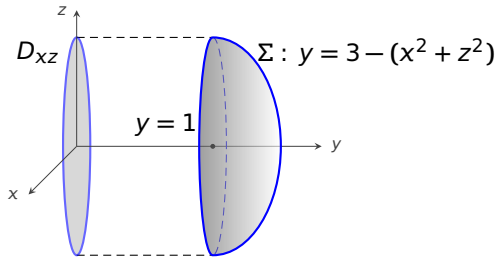




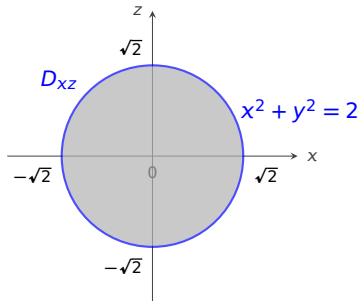
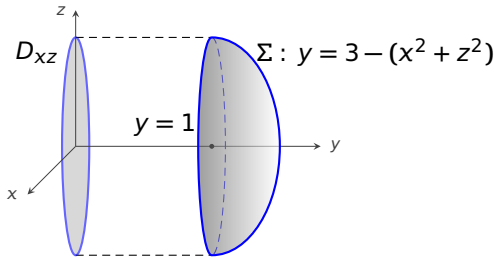
例 4 计算  $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + z^2 + y) dS$ , 其中  $\Sigma$  是曲面  $y = 3 - (x^2 + z^2)$  在  $y \geq 1$  的部分。



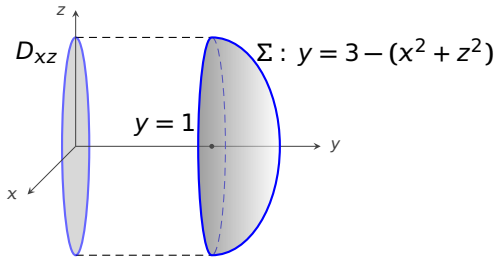
例 4 计算  $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + z^2 + y) dS$ , 其中  $\Sigma$  是曲面  $y = 3 - (x^2 + z^2)$  在  $y \geq 1$  的部分。



例 4 计算  $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + z^2 + y) dS$ , 其中  $\Sigma$  是曲面  $y = 3 - (x^2 + z^2)$  在  $y \geq 1$  的部分。

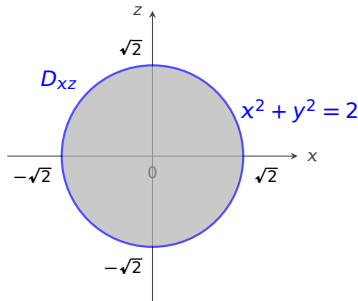


例 4 计算  $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + z^2 + y) dS$ , 其中  $\Sigma$  是曲面  $y = 3 - (x^2 + z^2)$  在  $y \geq 1$  的部分。

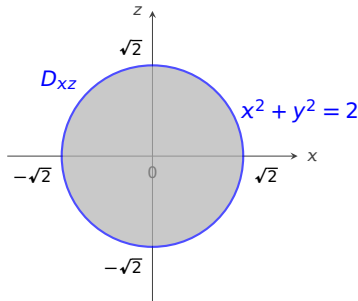
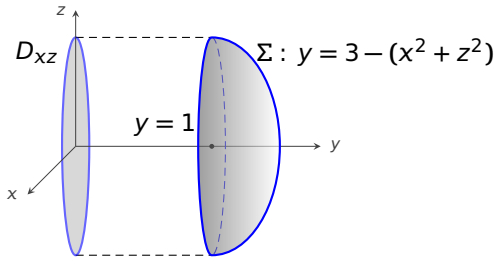


解

$$I = 3$$



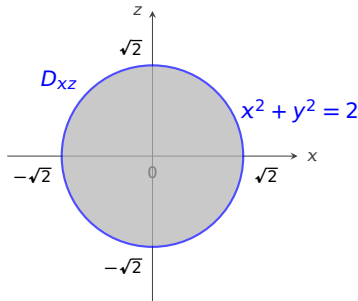
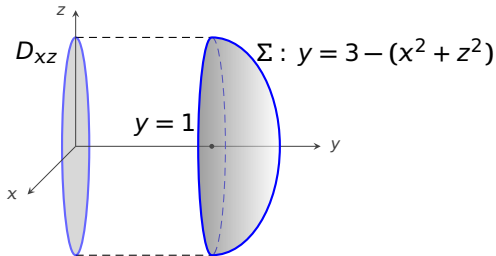
例 4 计算  $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + z^2 + y) dS$ , 其中  $\Sigma$  是曲面  $y = 3 - (x^2 + z^2)$  在  $y \geq 1$  的部分。



解

$$I = \iint_{D_{xz}} 3 \cdot \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} dx dz$$

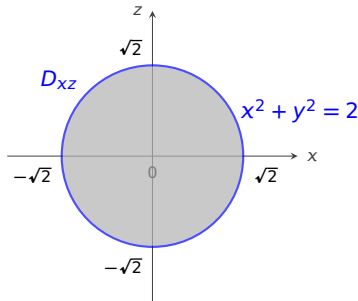
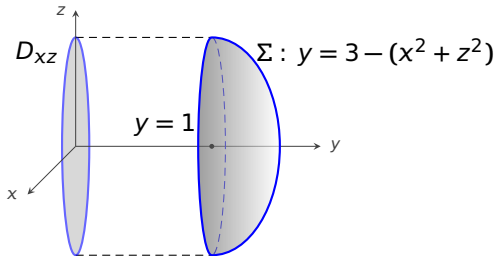
**例 4** 计算  $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + z^2 + y) dS$ , 其中  $\Sigma$  是曲面  $y = 3 - (x^2 + z^2)$  在  $y \geq 1$  的部分。



**解**

$$I = \iint_{D_{xz}} 3 \cdot \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} dx dz$$

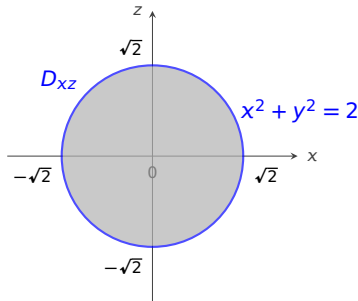
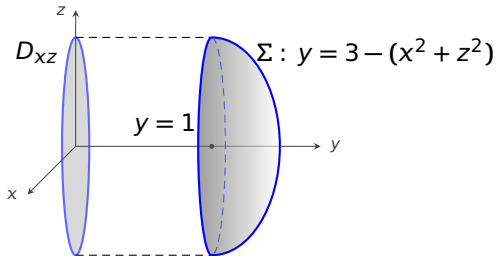
**例 4** 计算  $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + z^2 + y) dS$ , 其中  $\Sigma$  是曲面  $y = 3 - (x^2 + z^2)$  在  $y \geq 1$  的部分。



**解**

$$I = \iint_{D_{xz}} 3 \cdot \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} dx dz = \iint_{D_{xz}} 3 \cdot \sqrt{1 + 4x^2 + 4z^2} dx dz$$

**例 4** 计算  $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + z^2 + y) dS$ , 其中  $\Sigma$  是曲面  $y = 3 - (x^2 + z^2)$  在  $y \geq 1$  的部分。



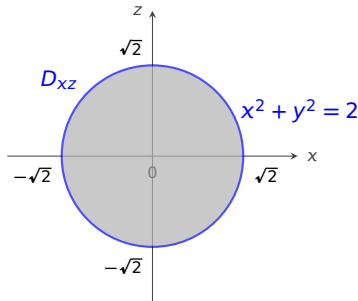
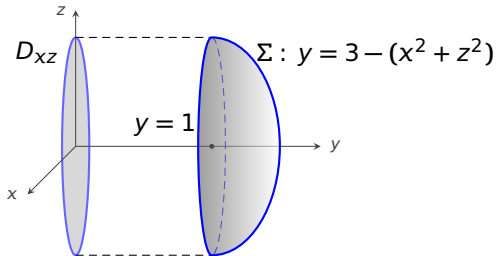
**解**

$$I = \iint_{D_{xz}} 3 \cdot \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} dx dz = \iint_{D_{xz}} 3 \cdot \sqrt{1 + 4x^2 + 4z^2} dx dz$$

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta \\ z &= \rho \sin \theta \end{aligned}$$



**例 4** 计算  $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + z^2 + y) dS$ , 其中  $\Sigma$  是曲面  $y = 3 - (x^2 + z^2)$  在  $y \geq 1$  的部分。

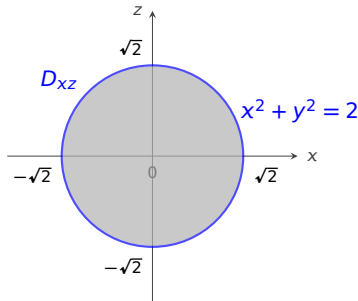
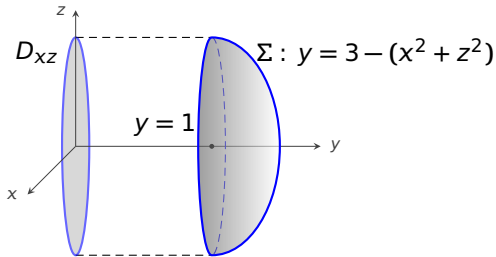


**解**

$$I = \iint_{D_{xz}} 3 \cdot \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} dx dz = \iint_{D_{xz}} 3 \cdot \sqrt{1 + 4x^2 + 4z^2} dx dz$$

$$\begin{matrix} x = \rho \cos \theta \\ z = \rho \sin \theta \end{matrix} \iint_{D_{xz}} 3 \sqrt{1 + 4\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta$$

**例 4** 计算  $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + z^2 + y) dS$ , 其中  $\Sigma$  是曲面  $y = 3 - (x^2 + z^2)$  在  $y \geq 1$  的部分。

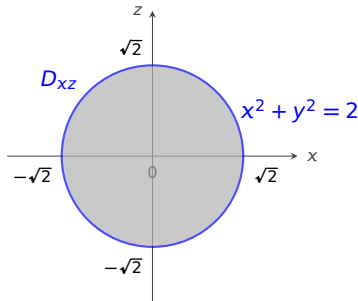
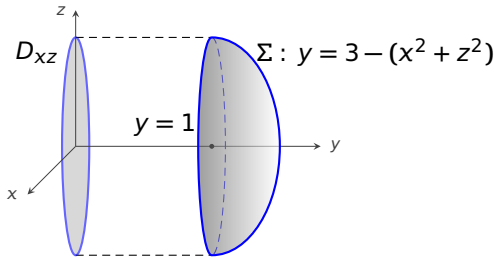


**解**

$$I = \iint_{D_{xz}} 3 \cdot \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} dx dz = \iint_{D_{xz}} 3 \cdot \sqrt{1 + 4x^2 + 4z^2} dx dz$$

$$\begin{aligned} \frac{x=\rho \cos \theta}{z=\rho \sin \theta} \iint_{D_{xz}} 3 \sqrt{1 + 4\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta &= \int \left[ \int 3 \sqrt{1 + 4\rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta \end{aligned}$$

**例 4** 计算  $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + z^2 + y) dS$ , 其中  $\Sigma$  是曲面  $y = 3 - (x^2 + z^2)$  在  $y \geq 1$  的部分。

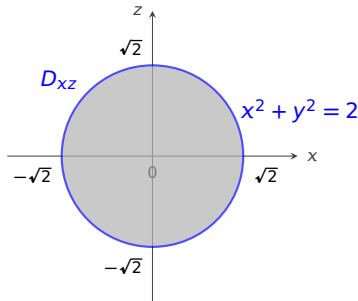
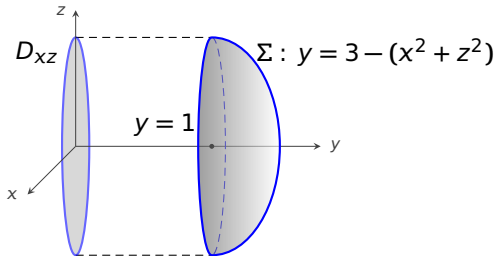


**解**

$$I = \iint_{D_{xz}} 3 \cdot \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} dx dz = \iint_{D_{xz}} 3 \cdot \sqrt{1 + 4x^2 + 4z^2} dx dz$$

$$\begin{aligned} \frac{x = \rho \cos \theta}{z = \rho \sin \theta} \iint_{D_{xz}} 3 \sqrt{1 + 4\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta &= \int_0^{2\pi} \left[ \int 3 \sqrt{1 + 4\rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta \end{aligned}$$

**例 4** 计算  $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + z^2 + y) dS$ , 其中  $\Sigma$  是曲面  $y = 3 - (x^2 + z^2)$  在  $y \geq 1$  的部分。

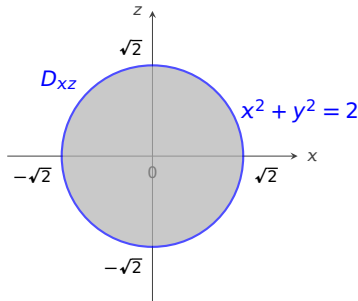
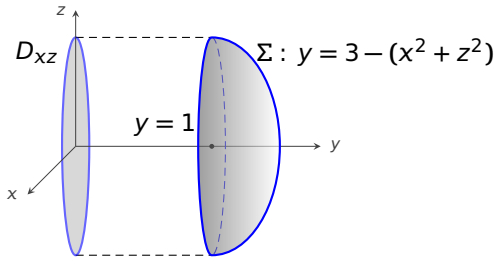


**解**

$$I = \iint_{D_{xz}} 3 \cdot \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} dx dz = \iint_{D_{xz}} 3 \cdot \sqrt{1 + 4x^2 + 4z^2} dx dz$$

$$\begin{aligned} \frac{x = \rho \cos \theta}{z = \rho \sin \theta} \iint_{D_{xz}} 3 \sqrt{1 + 4\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta &= \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^{\sqrt{2}} 3 \sqrt{1 + 4\rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta \end{aligned}$$

**例 4** 计算  $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + z^2 + y) dS$ , 其中  $\Sigma$  是曲面  $y = 3 - (x^2 + z^2)$  在  $y \geq 1$  的部分。



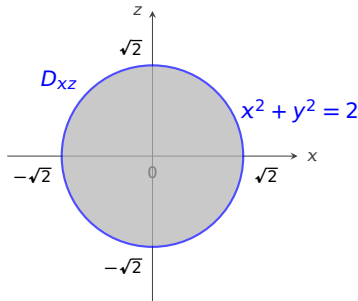
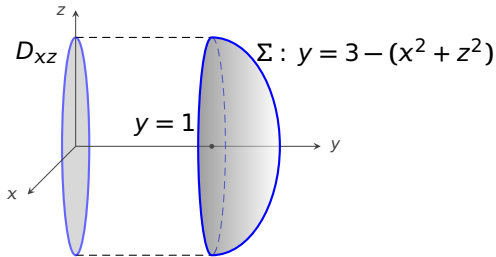
解

$$I = \iint_{D_{xz}} 3 \cdot \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} dx dz = \iint_{D_{xz}} 3 \cdot \sqrt{1 + 4x^2 + 4z^2} dx dz$$

$$\frac{x=\rho \cos \theta}{z=\rho \sin \theta} \iint_{D_{xz}} 3 \sqrt{1+4 \rho^2} \cdot \rho d \rho d \theta = \int_0^{2 \pi} \left[ \int_0^{\sqrt{2}} 3 \sqrt{1+4 \rho^2} \cdot \rho d \rho \right] d \theta$$

$$= 2\pi.$$

**例 4** 计算  $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + z^2 + y) dS$ , 其中  $\Sigma$  是曲面  $y = 3 - (x^2 + z^2)$  在  $y \geq 1$  的部分。



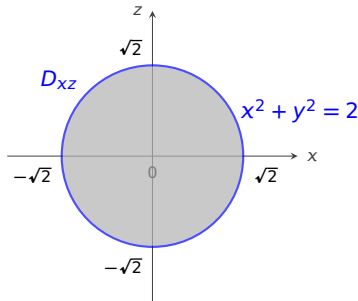
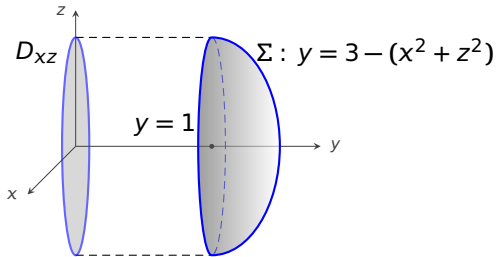
**解**

$$I = \iint_{D_{xz}} 3 \cdot \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} dx dz = \iint_{D_{xz}} 3 \cdot \sqrt{1 + 4x^2 + 4z^2} dx dz$$

$$\begin{aligned} \frac{x = \rho \cos \theta}{z = \rho \sin \theta} \iint_{D_{xz}} 3 \sqrt{1 + 4\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta &= \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^{\sqrt{2}} 3 \sqrt{1 + 4\rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta \end{aligned}$$

$$\frac{u = 1 + 4\rho^2}{2\pi} \cdot 2\pi \cdot$$

**例 4** 计算  $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + z^2 + y) dS$ , 其中  $\Sigma$  是曲面  $y = 3 - (x^2 + z^2)$  在  $y \geq 1$  的部分。



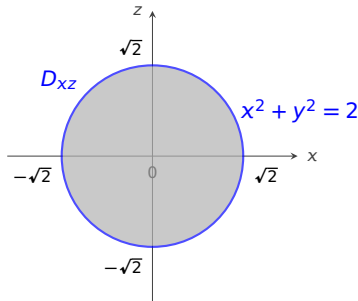
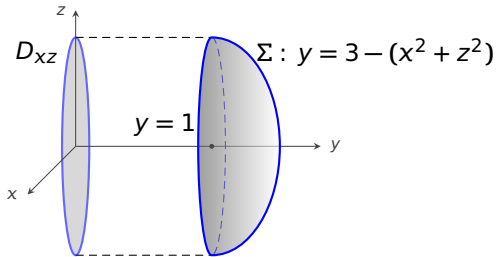
**解**

$$I = \iint_{D_{xz}} 3 \cdot \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} dx dz = \iint_{D_{xz}} 3 \cdot \sqrt{1 + 4x^2 + 4z^2} dx dz$$

$$\begin{aligned} \frac{x = \rho \cos \theta}{z = \rho \sin \theta} \iint_{D_{xz}} 3 \sqrt{1 + 4\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta &= \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^{\sqrt{2}} 3 \sqrt{1 + 4\rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta \end{aligned}$$

$$\frac{u = 1 + 4\rho^2}{2\pi \cdot 3\sqrt{u}}$$

**例 4** 计算  $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + z^2 + y) dS$ , 其中  $\Sigma$  是曲面  $y = 3 - (x^2 + z^2)$  在  $y \geq 1$  的部分。



**解**

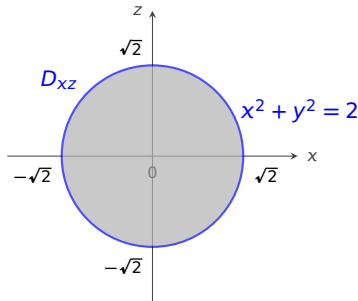
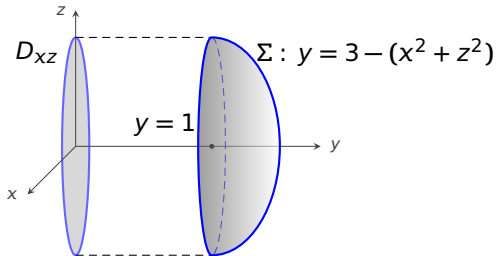
$$I = \iint_{D_{xz}} 3 \cdot \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} dx dz = \iint_{D_{xz}} 3 \cdot \sqrt{1 + 4x^2 + 4z^2} dx dz$$

$$\begin{aligned} \frac{x = \rho \cos \theta}{z = \rho \sin \theta} \iint_{D_{xz}} 3 \sqrt{1 + 4\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta &= \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^{\sqrt{2}} 3 \sqrt{1 + 4\rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta \end{aligned}$$

$$\frac{u = 1 + 4\rho^2}{2\pi \cdot 3\sqrt{u} \cdot \frac{1}{8} du}$$



**例 4** 计算  $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + z^2 + y) dS$ , 其中  $\Sigma$  是曲面  $y = 3 - (x^2 + z^2)$  在  $y \geq 1$  的部分。



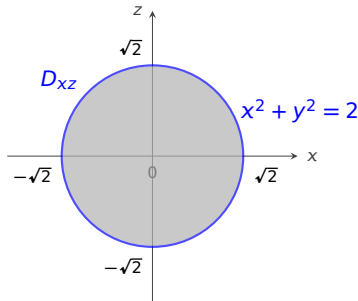
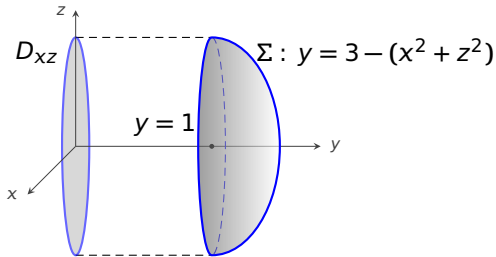
**解**

$$I = \iint_{D_{xz}} 3 \cdot \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} dx dz = \iint_{D_{xz}} 3 \cdot \sqrt{1 + 4x^2 + 4z^2} dx dz$$

$$\begin{aligned} \frac{x = \rho \cos \theta}{z = \rho \sin \theta} \iint_{D_{xz}} 3 \sqrt{1 + 4\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta &= \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^{\sqrt{2}} 3 \sqrt{1 + 4\rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta \end{aligned}$$

$$\frac{u = 1 + 4\rho^2}{2\pi \cdot \int_1^9 3\sqrt{u} \cdot \frac{1}{8} du}$$

**例 4** 计算  $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + z^2 + y) dS$ , 其中  $\Sigma$  是曲面  $y = 3 - (x^2 + z^2)$  在  $y \geq 1$  的部分。



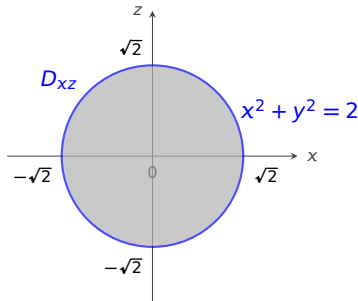
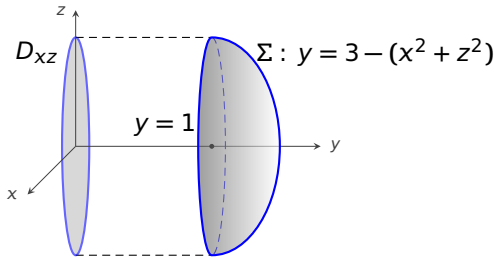
**解**

$$I = \iint_{D_{xz}} 3 \cdot \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} dx dz = \iint_{D_{xz}} 3 \cdot \sqrt{1 + 4x^2 + 4z^2} dx dz$$

$$\begin{aligned} \frac{x = \rho \cos \theta}{z = \rho \sin \theta} \iint_{D_{xz}} 3 \sqrt{1 + 4\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta &= \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^{\sqrt{2}} 3 \sqrt{1 + 4\rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta \end{aligned}$$

$$\frac{u = 1 + 4\rho^2}{2\pi \cdot \int_1^9 3\sqrt{u} \cdot \frac{1}{8} du} = \frac{1}{2} \pi u^{\frac{3}{2}} \Big|_1^9$$

**例 4** 计算  $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + z^2 + y) dS$ , 其中  $\Sigma$  是曲面  $y = 3 - (x^2 + z^2)$  在  $y \geq 1$  的部分。



**解**

$$I = \iint_{D_{xz}} 3 \cdot \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} dx dz = \iint_{D_{xz}} 3 \cdot \sqrt{1 + 4x^2 + 4z^2} dx dz$$

$$\begin{aligned} \frac{x = \rho \cos \theta}{z = \rho \sin \theta} \iint_{D_{xz}} 3 \sqrt{1 + 4\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta &= \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^{\sqrt{2}} 3 \sqrt{1 + 4\rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta \end{aligned}$$

$$\frac{u = 1 + 4\rho^2}{2\pi \cdot \int_1^9 3\sqrt{u} \cdot \frac{1}{8} du} = \frac{1}{2} \pi u^{\frac{3}{2}} \Big|_1^9 = 13\pi$$