第 11 章 d：对面积的曲面积分

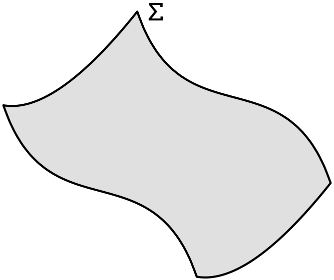
数学系　梁卓滨

2016-2017 学年 II

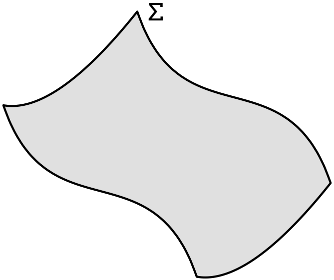
曲面的质量

假设

- Σ 为空间中曲面
- 密度为 μ
- 质量为 m



曲面的质量



假设

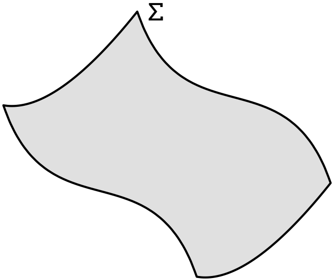
- Σ 为空间中曲面
- 密度为 μ
- 质量为 m

- 当材料均匀时（$\mu=$ 常数），
- 当材料非均匀时（$\mu=\mu(x,y,z)$ 为 Σ 上函数），

曲面的质量

假设

- Σ 为空间中曲面
- 密度为 μ
- 质量为 m

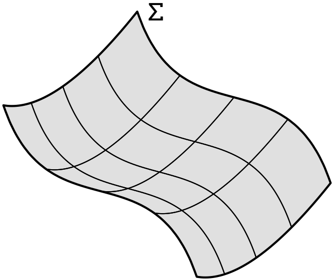


- 当材料均匀时（$\mu =$ 常数），

$$m = \mu \cdot \mathrm{Area}(\Sigma)$$

- 当材料非均匀时（$\mu = \mu(x, y, z)$ 为 Σ 上函数），

曲面的质量



假设

- Σ 为空间中曲面
- 密度为 μ
- 质量为 m

- 当材料均匀时（$\mu =$ 常数），

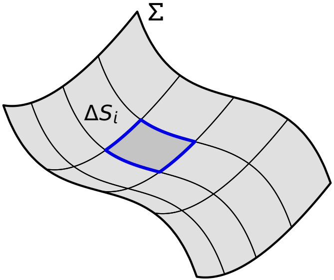
$$m = \mu \cdot \mathrm{Area}(\Sigma)$$

- 当材料非均匀时（$\mu = \mu(x, y, z)$ 为 Σ 上函数），利用微元法可知

曲面的质量

假设

- Σ 为空间中曲面
- 密度为 μ
- 质量为 m



- 当材料均匀时（$\mu =$ 常数），

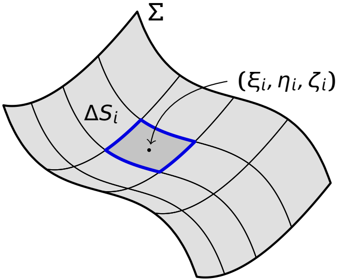
$$m = \mu \cdot \mathrm{Area}(\Sigma)$$

- 当材料非均匀时（$\mu = \mu(x, y, z)$ 为 Σ 上函数），利用微元法可知

曲面的质量

假设

- Σ 为空间中曲面
- 密度为 μ
- 质量为 m



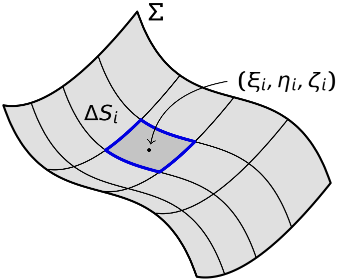
- 当材料均匀时（$\mu =$ 常数），

$$m = \mu \cdot \mathrm{Area}(\Sigma)$$

- 当材料非均匀时（$\mu = \mu(x, y, z)$ 为 Σ 上函数），利用微元法可知

曲面的质量

假设
- Σ 为空间中曲面
- 密度为 μ
- 质量为 m



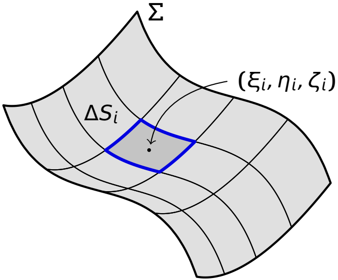
- 当材料均匀时（$\mu =$ 常数），

$$m = \mu \cdot \mathrm{Area}(\Sigma)$$

- 当材料非均匀时（$\mu = \mu(x, y, z)$ 为 Σ 上函数），利用微元法可知

$$\mu(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i$$

曲面的质量



假设

- Σ 为空间中曲面
- 密度为 μ
- 质量为 m

- 当材料均匀时（$\mu =$ 常数），

$$m = \mu \cdot \mathrm{Area}(\Sigma)$$

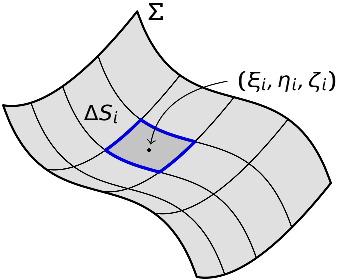
- 当材料非均匀时（$\mu = \mu(x, y, z)$ 为 Σ 上函数），利用微元法可知

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i$$

曲面的质量

假设

- Σ 为空间中曲面
- 密度为 μ
- 质量为 m



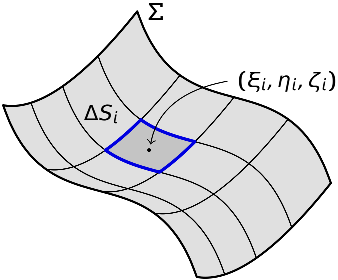
- 当材料均匀时（$\mu =$ 常数），

$$m = \mu \cdot \mathrm{Area}(\Sigma)$$

- 当材料非均匀时（$\mu = \mu(x, y, z)$ 为 Σ 上函数），利用微元法可知

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \mu(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$$

曲面的质量



假设

- Σ 为空间中曲面
- 密度为 μ
- 质量为 m

- 当材料均匀时（$\mu =$ 常数），

$$m = \mu \cdot \mathrm{Area}(\Sigma)$$

- 当材料非均匀时（$\mu = \mu(x, y, z)$ 为 Σ 上函数），利用微元法可知

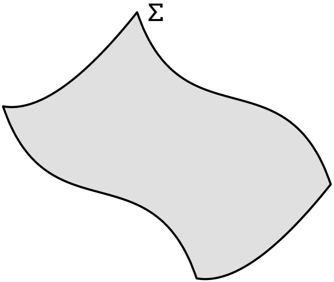
$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \mu(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$$

对面积的曲面积分的定义

设

- Σ 是空间中有界分片光滑曲面，
- $f(x, y, z)$ 是 Σ 上的有界函数，

若

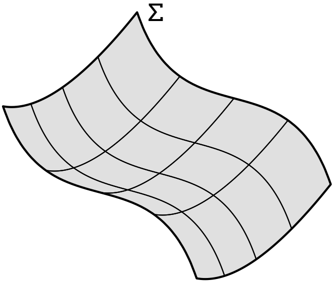


对面积的曲面积分的定义

设

- Σ 是空间中有界分片光滑曲面，
- $f(x, y, z)$ 是 Σ 上的有界函数，

若

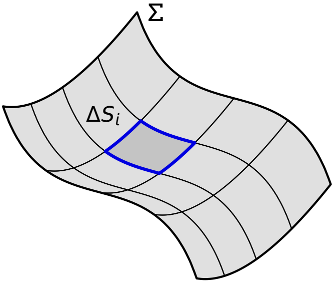


对面积的曲面积分的定义

设

- Σ 是空间中有界分片光滑曲面，
- $f(x, y, z)$ 是 Σ 上的有界函数，

若

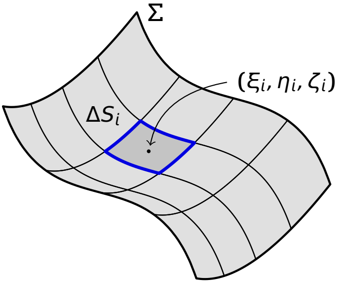


对面积的曲面积分的定义

设

- Σ 是空间中有界分片光滑曲面，
- $f(x, y, z)$ 是 Σ 上的有界函数，

若



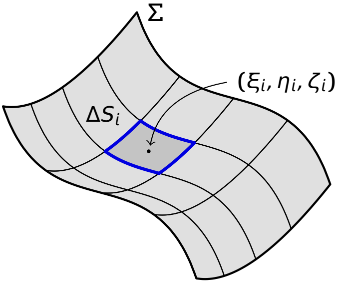
对面积的曲面积分的定义

设

- Σ 是空间中有界分片光滑曲面，
- $f(x, y, z)$ 是 Σ 上的有界函数，

若

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i$$



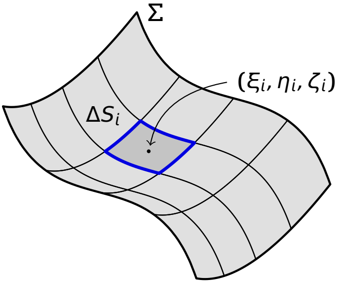
对面积的曲面积分的定义

设

- Σ 是空间中有界分片光滑曲面，
- $f(x, y, z)$ 是 Σ 上的有界函数，

若

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$$



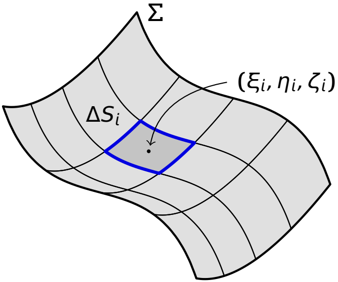
对面积的曲面积分的定义

设

- Σ 是空间中有界分片光滑曲面，
- $f(x, y, z)$ 是 Σ 上的有界函数，

若

- 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i$存在，



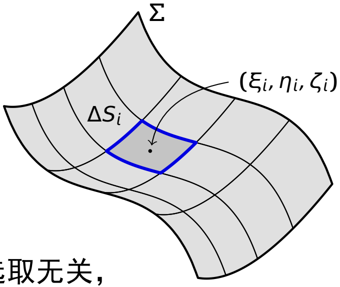
对面积的曲面积分的定义

设

- Σ 是空间中有界分片光滑曲面，
- $f(x, y, z)$ 是 Σ 上的有界函数，

若

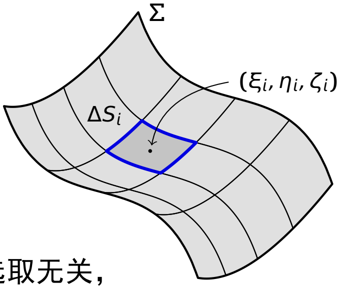
- 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i$存在，
- 且该极限与 Σ 的划分、(ξ_i, η_i, ζ_i) 的选取无关，



对面积的曲面积分的定义

设

- Σ 是空间中有界分片光滑曲面，
- $f(x, y, z)$ 是 Σ 上的有界函数，



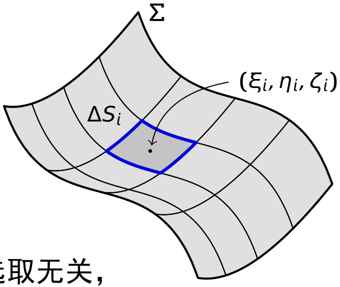
若

- 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i$存在，
- 且该极限与 Σ 的划分、(ξ_i, η_i, ζ_i) 的选取无关，

则定义

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)dS = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i$$

对面积的曲面积分的定义



设

- Σ 是空间中有界分片光滑曲面，
- $f(x, y, z)$ 是 Σ 上的有界函数，

若

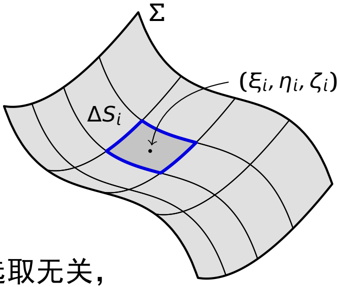
- 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i$存在，
- 且该极限与 Σ 的划分、(ξ_i, η_i, ζ_i) 的选取无关，

则定义

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)dS = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i$$

称为 $f(x, y, z)$ 在 Σ 上对面积的曲面积分。

对面积的曲面积分的定义



设

- Σ 是空间中有界分片光滑曲面，
- $f(x, y, z)$ 是 Σ 上的有界函数，

若

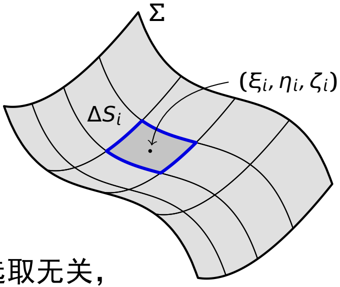
- 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i$存在，
- 且该极限与 Σ 的划分、(ξ_i, η_i, ζ_i) 的选取无关，

则定义

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)dS = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i$$

称为 $f(x, y, z)$ 在 Σ 上对面积的曲面积分。dS 称为面积元素。

对面积的曲面积分的定义



设

- Σ 是空间中有界分片光滑曲面，
- $f(x, y, z)$ 是 Σ 上的有界函数，

若

- 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i$存在，
- 且该极限与 Σ 的划分、(ξ_i, η_i, ζ_i) 的选取无关，

则定义

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)dS = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i$$

称为 $f(x, y, z)$ 在 Σ 上对面积的曲面积分。dS 称为面积元素。

注 对面积曲面积分的定义式与二重积分的类似，故性质也类似

对面积曲面积分的性质

- 存在性 若 $f(x, y, z)$ 在有界曲面 Σ 上连续，则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$$

存在。

对面积曲面积分的性质

- 存在性 若 $f(x, y, z)$ 在有界曲面 Σ 上连续，则
$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)dS$$
存在。
- 线性性 $\iint_{\Sigma}(\alpha f + \beta g)dS = \alpha \iint_{\Sigma} f dS + \beta \iint_{\Sigma} g dS$

对面积曲面积分的性质

- 存在性 若 $f(x, y, z)$ 在有界曲面 Σ 上连续，则
$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$$
存在。
- 线性性 $\iint_{\Sigma}(\alpha f+\beta g) dS=\alpha \iint_{\Sigma} f dS+\beta \iint_{\Sigma} g dS$
- 可加性 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS=\iint_{\Sigma_1} f(x, y, z) dS+\iint_{\Sigma_2} f(x, y, z) dS$

对面积曲面积分的性质

- 存在性 若 $f(x, y, z)$ 在有界曲面 Σ 上连续，则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$$

存在。

- 线性性 $\iint_{\Sigma} (\alpha f + \beta g) dS = \alpha \iint_{\Sigma} f dS + \beta \iint_{\Sigma} g dS$
- 可加性 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{\Sigma_1} f(x, y, z) dS + \iint_{\Sigma_2} f(x, y, z) dS$
- $\iint_{\Sigma} 1 dS = \mathrm{Area}(\Sigma)$

对面积曲面积分的性质

- **存在性** 若 $f(x, y, z)$ 在有界曲面 Σ 上连续，则

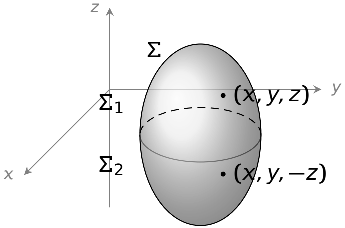
$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$$

  存在。
- **线性性** $\iint_{\Sigma}(\alpha f + \beta g) dS = \alpha \iint_{\Sigma} f dS + \beta \iint_{\Sigma} g dS$
- **可加性** $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{\Sigma_1} f(x, y, z) dS + \iint_{\Sigma_2} f(x, y, z) dS$
- $\iint_{\Sigma} 1 dS = \mathrm{Area}(\Sigma)$
- 若 $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$，则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS \leq \iint_{\Sigma} g(x, y, z) dS$$

积分的对称性

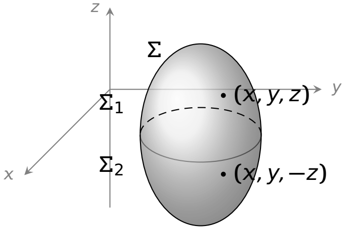
性质 设曲面 Σ 关于 xoy 坐标面对称，



积分的对称性

性质 设曲面 Σ 关于 xoy 坐标面对称，

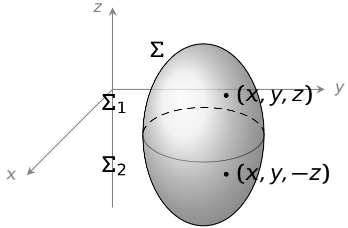
- 若 $f(x,y,z)$ 关于 z 是奇函数（即：$f(x,y,-z) = -f(x,y,z)$），则



积分的对称性

性质 设曲面 Σ 关于 xoy 坐标面对称，

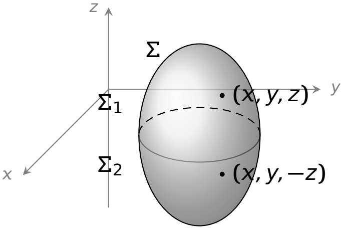
- 若 $f(x,y,z)$ 关于 z 是奇函数（即：$f(x,y,-z)=-f(x,y,z)$），则
$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = 0$$



积分的对称性

性质 设曲面 Σ 关于 xoy 坐标面对称，

- 若 $f(x,y,z)$ 关于 z 是奇函数（即：$f(x,y,-z)=-f(x,y,z)$），则
$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = 0$$
- 若 $f(x,y,z)$ 关于 z 是偶函数（即：$f(x,y,-z)=f(x,y,z)$），则



积分的对称性

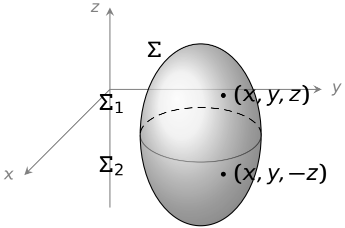
性质 设曲面 Σ 关于 xoy 坐标面对称，

- 若 $f(x,y,z)$ 关于 z 是奇函数（即：$f(x,y,-z)=-f(x,y,z)$），则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = 0$$

- 若 $f(x,y,z)$ 关于 z 是偶函数（即：$f(x,y,-z)=f(x,y,z)$），则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = 2\iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)dS = 2\iint_{\Sigma_2} f(x,y,z)dS$$



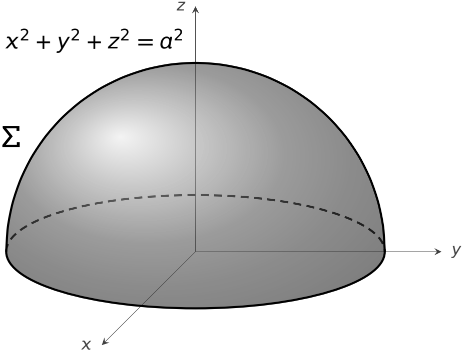
例 设曲面 Σ 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2\ (z\geq 0)$；$\Sigma_1$ 为 Σ 在第一卦限的部分。则有 (   )

(A) $\iint_{\Sigma} x dS = 4\iint_{\Sigma_1} x dS$

(B) $\iint_{\Sigma} y dS = 4\iint_{\Sigma_1} y dS$

(C) $\iint_{\Sigma} z dS = 4\iint_{\Sigma_1} z dS$

(D) $\iint_{\Sigma} xyz dS = 4\iint_{\Sigma_1} xyz dS$



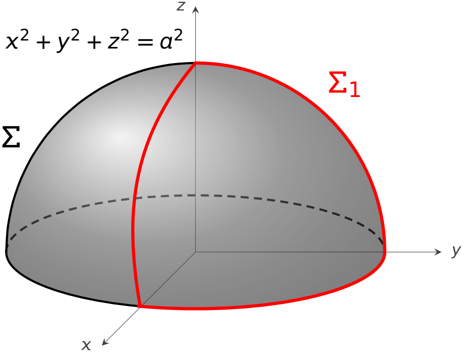
例 设曲面 Σ 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2\ (z\geq 0)$；$\Sigma_1$ 为 Σ 在第一卦限的部分。则有 (　　)

(A) $\iint_\Sigma x dS = 4\iint_{\Sigma_1} x dS$

(B) $\iint_\Sigma y dS = 4\iint_{\Sigma_1} y dS$

(C) $\iint_\Sigma z dS = 4\iint_{\Sigma_1} z dS$

(D) $\iint_\Sigma xyz dS = 4\iint_{\Sigma_1} xyz dS$



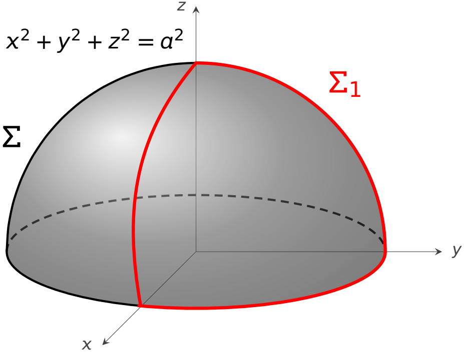
例 设曲面 Σ 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2\ (z\geq 0)$；$\Sigma_1$ 为 Σ 在第一卦限的部分。则有 (C)

(A) $\iint_\Sigma x dS = 4\iint_{\Sigma_1} x dS$

(B) $\iint_\Sigma y dS = 4\iint_{\Sigma_1} y dS$

(C) $\iint_\Sigma z dS = 4\iint_{\Sigma_1} z dS$

(D) $\iint_\Sigma xyz dS = 4\iint_{\Sigma_1} xyz dS$



例 计算 $\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)dS$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$。

例 计算 $\iint_\Sigma (x^2+y^2)dS$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$。

解 由对称性：

$$\iint_\Sigma x^2 dS = \iint_\Sigma y^2 dS = \iint_\Sigma z^2 dS$$

例 计算 $\iint_\Sigma (x^2+y^2)dS$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$。

解 由对称性：

$$\iint_\Sigma x^2 dS = \iint_\Sigma y^2 dS = \iint_\Sigma z^2 dS$$

所以

$$\iint_\Sigma (x^2+y^2)dS = 2\iint_\Sigma x^2 dS$$

例 计算 $\iint_\Sigma (x^2+y^2)dS$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$。

解 由对称性：

$$\iint_\Sigma x^2 dS = \iint_\Sigma y^2 dS = \iint_\Sigma z^2 dS$$

所以

$$\iint_\Sigma (x^2+y^2)dS = 2\iint_\Sigma x^2 dS$$

$$= \frac{2}{3}\left[\iint_\Sigma x^2 dS + \iint_\Sigma y^2 dS + \iint_\Sigma z^2 dS\right]$$

例 计算 $\iint_\Sigma (x^2+y^2)dS$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$。

解 由对称性：

$$\iint_\Sigma x^2 dS = \iint_\Sigma y^2 dS = \iint_\Sigma z^2 dS$$

所以

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma (x^2+y^2)dS &= 2\iint_\Sigma x^2 dS \\ &= \frac{2}{3}\left[\iint_\Sigma x^2 dS + \iint_\Sigma y^2 dS + \iint_\Sigma z^2 dS\right] \\ &= \frac{2}{3}\iint_\Sigma x^2+y^2+z^2 dS\end{aligned}$$

例 计算 $\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)dS$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$。

解 由对称性：

$$\iint_{\Sigma} x^2 dS = \iint_{\Sigma} y^2 dS = \iint_{\Sigma} z^2 dS$$

所以

$$\begin{aligned}
\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)dS &= 2\iint_{\Sigma} x^2 dS \\
&= \frac{2}{3}\left[\iint_{\Sigma} x^2 dS + \iint_{\Sigma} y^2 dS + \iint_{\Sigma} z^2 dS\right] \\
&= \frac{2}{3}\iint_{\Sigma} x^2+y^2+z^2 dS \\
&= \frac{2}{3}\iint_{\Sigma} R^2 dS
\end{aligned}$$

例 计算 $\iint_\Sigma (x^2+y^2)dS$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$。

解 由对称性：

$$\iint_\Sigma x^2 dS = \iint_\Sigma y^2 dS = \iint_\Sigma z^2 dS$$

所以

$$\begin{aligned}
\iint_\Sigma (x^2+y^2)dS &= 2\iint_\Sigma x^2 dS \\
&= \frac{2}{3}\left[\iint_\Sigma x^2 dS + \iint_\Sigma y^2 dS + \iint_\Sigma z^2 dS\right] \\
&= \frac{2}{3}\iint_\Sigma x^2+y^2+z^2 dS \\
&= \frac{2}{3}\iint_\Sigma R^2 dS = \frac{2}{3}R^2 \mathrm{Area}(\Sigma)
\end{aligned}$$

例 计算 $\iint_\Sigma (x^2+y^2)dS$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$。

解 由对称性：

$$\iint_\Sigma x^2 dS = \iint_\Sigma y^2 dS = \iint_\Sigma z^2 dS$$

所以

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma (x^2+y^2)dS &= 2\iint_\Sigma x^2 dS \\ &= \frac{2}{3}\left[\iint_\Sigma x^2 dS + \iint_\Sigma y^2 dS + \iint_\Sigma z^2 dS\right] \\ &= \frac{2}{3}\iint_\Sigma x^2+y^2+z^2 dS \\ &= \frac{2}{3}\iint_\Sigma R^2 dS = \frac{2}{3}R^2 \mathrm{Area}(\Sigma) = \frac{2}{3}R^2\cdot 4\pi R^2\end{aligned}$$

例 计算 $\iint_\Sigma (x^2+y^2)dS$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$。

解 由对称性：

$$\iint_\Sigma x^2 dS = \iint_\Sigma y^2 dS = \iint_\Sigma z^2 dS$$

所以

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma (x^2+y^2)dS &= 2\iint_\Sigma x^2 dS \\ &= \frac{2}{3}\left[\iint_\Sigma x^2 dS + \iint_\Sigma y^2 dS + \iint_\Sigma z^2 dS\right] \\ &= \frac{2}{3}\iint_\Sigma x^2+y^2+z^2 dS \\ &= \frac{2}{3}\iint_\Sigma R^2 dS = \frac{2}{3}R^2 \mathrm{Area}(\Sigma) = \frac{2}{3}R^2 \cdot 4\pi R^2 = \frac{8}{3}\pi R^4\end{aligned}$$

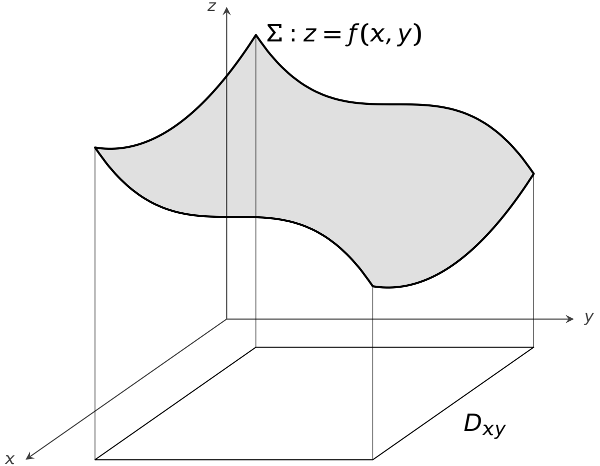
对面积曲面积分的计算

- 假设 Σ 是二元函数 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 的图形，则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS =$$

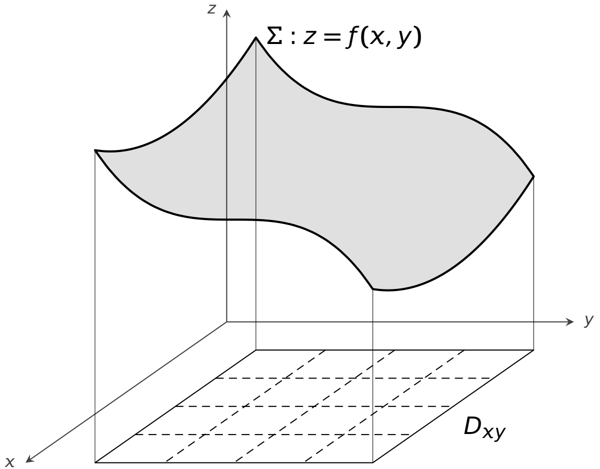
对面积曲面积分的计算

- 假设 Σ 是二元函数 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 的图形，则
$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS =$$



对面积曲面积分的计算

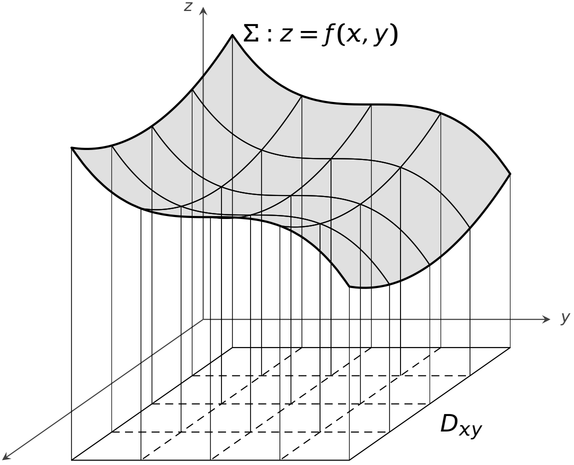
- 假设 Σ 是二元函数 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 的图形，则
  $$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)dS =$$



对面积曲面积分的计算

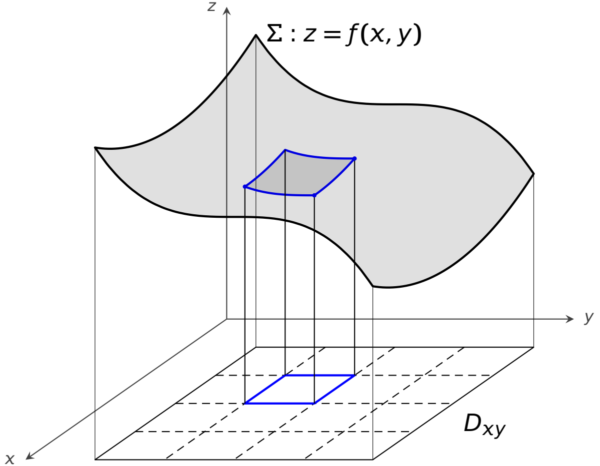
- 假设 Σ 是二元函数 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 的图形，则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS =$$



对面积曲面积分的计算

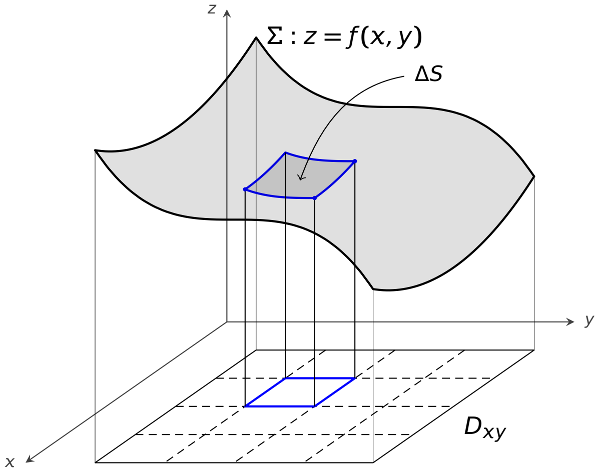
- 假设 Σ 是二元函数 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 的图形，则
  $$\iint_\Sigma f(x, y, z)dS =$$



对面积曲面积分的计算

- 假设 Σ 是二元函数 $z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$ 的图形，则

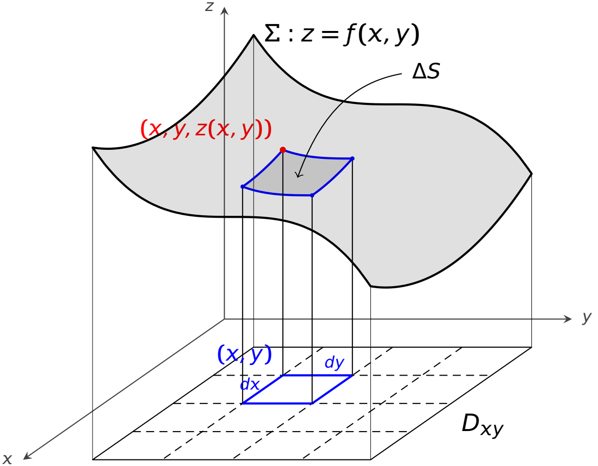
$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS =$$



对面积曲面积分的计算

- 假设 Σ 是二元函数 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 的图形，则

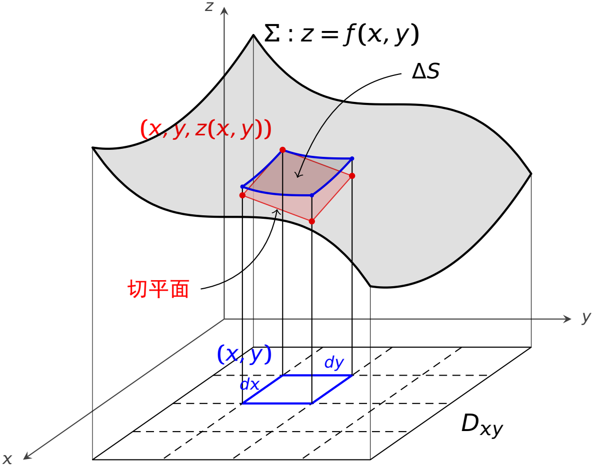
$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS =$$



对面积曲面积分的计算

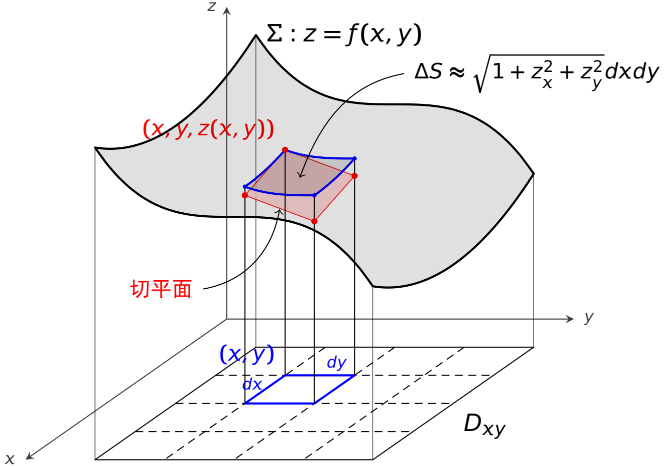
- 假设 Σ 是二元函数 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 的图形，则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)dS =$$



对面积曲面积分的计算

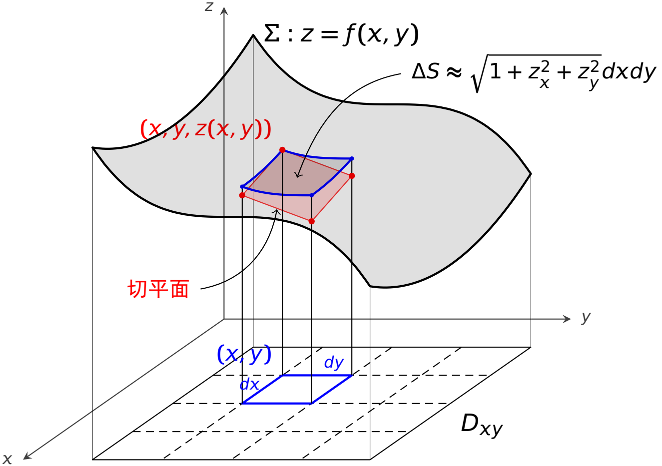
- 假设 Σ 是二元函数 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 的图形，则
$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS =$$



对面积曲面积分的计算

- 假设 Σ 是二元函数 $z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$ 的图形，则

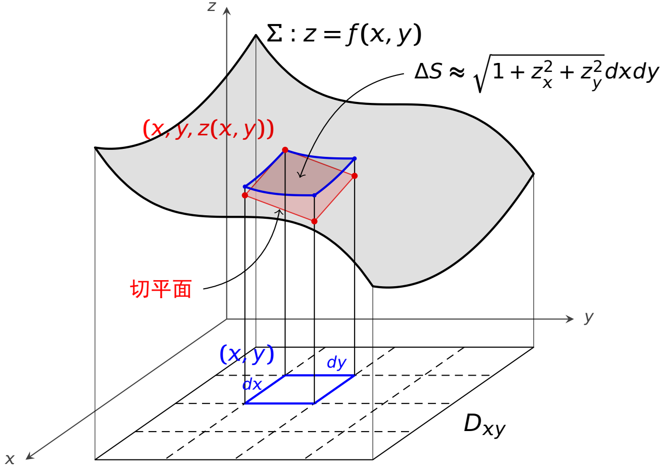
$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \qquad f(x,y,z(x,y)) \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$



对面积曲面积分的计算

- 假设 Σ 是二元函数 $z=z(x,y)$, $(x,y)\in D_{xy}$ 的图形，则

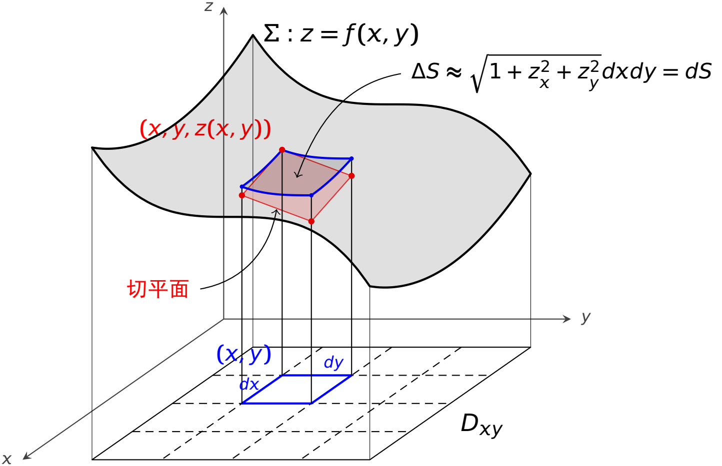
$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$



对面积曲面积分的计算

- 假设 Σ 是二元函数 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 的图形，则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$$



对面积曲面积分的计算

- 假设 Σ 是二元函数 $z=z(x,y)$, $(x,y)\in D_{xy}$ 的图形，则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

对面积曲面积分的计算

- 假设 Σ 是二元函数 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 的图形，则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dxdy$$

- 假设 Σ 是二元函数 $y = y(x, z)$, $(x, z) \in D_{xz}$ 的图形，则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS =$$

- 假设 Σ 是二元函数 $x = x(y, z)$, $(y, z) \in D_{yz}$ 的图形，则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS =$$

对面积曲面积分的计算

- 假设 Σ 是二元函数 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 的图形，则
$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dxdy$$
- 假设 Σ 是二元函数 $y = y(x, z)$, $(x, z) \in D_{xz}$ 的图形，则
$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \qquad f(x, y(x, z), z)$$
- 假设 Σ 是二元函数 $x = x(y, z)$, $(y, z) \in D_{yz}$ 的图形，则
$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS =$$

对面积曲面积分的计算

- 假设 Σ 是二元函数 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 的图形，则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dxdy$$

- 假设 Σ 是二元函数 $y = y(x, z)$, $(x, z) \in D_{xz}$ 的图形，则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \qquad f(x, y(x, z), z) \cdot \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} dxdz$$

- 假设 Σ 是二元函数 $x = x(y, z)$, $(y, z) \in D_{yz}$ 的图形，则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS =$$

对面积曲面积分的计算

- 假设 Σ 是二元函数 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 的图形，则
$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y)) \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

- 假设 Σ 是二元函数 $y = y(x, z)$, $(x, z) \in D_{xz}$ 的图形，则
$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \iint_{D_{xz}} f(x,y(x,z),z) \cdot \sqrt{1+y_x^2+y_z^2}\,dxdz$$

- 假设 Σ 是二元函数 $x = x(y, z)$, $(y, z) \in D_{yz}$ 的图形，则
$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS =$$

对面积曲面积分的计算

- 假设 Σ 是二元函数 $z = z(x,y)$, $(x,y) \in D_{xy}$ 的图形，则
$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y)) \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$
- 假设 Σ 是二元函数 $y = y(x,z)$, $(x,z) \in D_{xz}$ 的图形，则
$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \iint_{D_{xz}} f(x,y(x,z),z) \cdot \sqrt{1+y_x^2+y_z^2}dxdz$$
- 假设 Σ 是二元函数 $x = x(y,z)$, $(y,z) \in D_{yz}$ 的图形，则
$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \qquad f(x(y,z),y,z)$$

对面积曲面积分的计算

- 假设 Σ 是二元函数 $z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$ 的图形，则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dxdy$$

- 假设 Σ 是二元函数 $y = y(x, z), (x, z) \in D_{xz}$ 的图形，则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xz}} f(x, y(x, z), z) \cdot \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} dxdz$$

- 假设 Σ 是二元函数 $x = x(y, z), (y, z) \in D_{yz}$ 的图形，则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \qquad f(x(y, z), y, z) \cdot \sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2} dydz$$

对面积曲面积分的计算

- 假设 Σ 是二元函数 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 的图形，则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dxdy$$

- 假设 Σ 是二元函数 $y = y(x, z)$, $(x, z) \in D_{xz}$ 的图形，则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xz}} f(x, y(x, z), z) \cdot \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} dxdz$$

- 假设 Σ 是二元函数 $x = x(y, z)$, $(y, z) \in D_{yz}$ 的图形，则

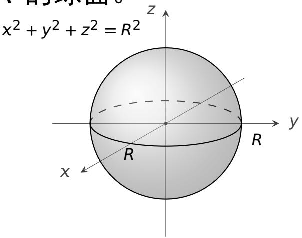
$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z) \cdot \sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2} dydz$$

对面积曲面积分的计算

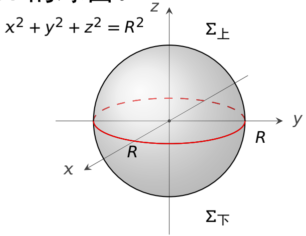
- 假设 Σ 是二元函数 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 的图形，则
$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y)) \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$
- 假设 Σ 是二元函数 $y = y(x, z)$, $(x, z) \in D_{xz}$ 的图形，则
$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \iint_{D_{xz}} f(x,y(x,z),z) \cdot \sqrt{1+y_x^2+y_z^2}dxdz$$
- 假设 Σ 是二元函数 $x = x(y, z)$, $(y, z) \in D_{yz}$ 的图形，则
$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \iint_{D_{yz}} f(x(y,z),y,z) \cdot \sqrt{1+x_y^2+x_z^2}dydz$$

注 对于复杂的曲面 Σ，尝试将其分解成若干部分 $\Sigma_1, \cdots, \Sigma_n$，每一部分 Σ_k 都分别是某个二元函数的图形

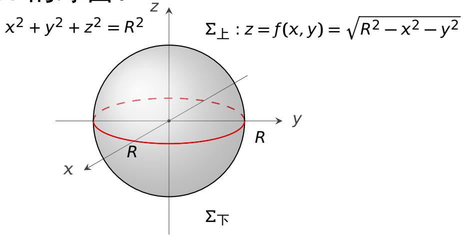
例 将对面积的曲面积分 $\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS$ 转换为重积分，其中 Σ 是球心在原点，半径为 R 的球面。



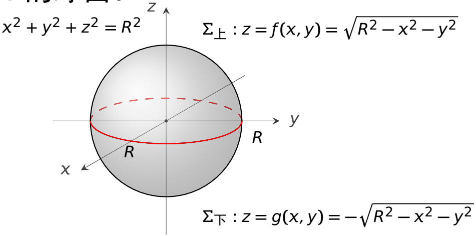
例 将对面积的曲面积分 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$ 转换为重积分，其中 Σ 是球心在原点，半径为 R 的球面。



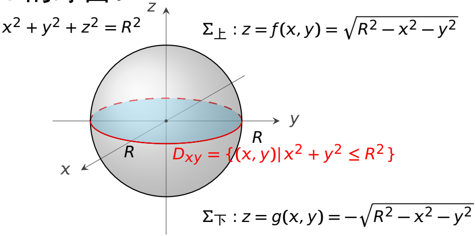
例 将对面积的曲面积分 $\iint_\Sigma f(x,y,z)dS$ 转换为重积分，其中 Σ 是球心在原点，半径为 R 的球面。



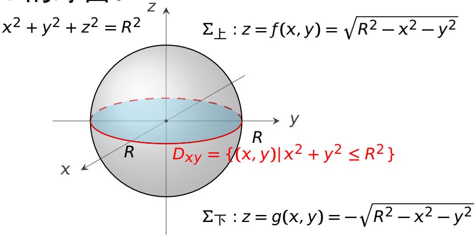
例 将对面积的曲面积分 $\iint_\Sigma f(x, y, z)dS$ 转换为重积分，其中 Σ 是球心在原点，半径为 R 的球面。



例 将对面积的曲面积分 $\iint_\Sigma f(x,y,z)dS$ 转换为重积分，其中 Σ 是球心在原点，半径为 R 的球面。

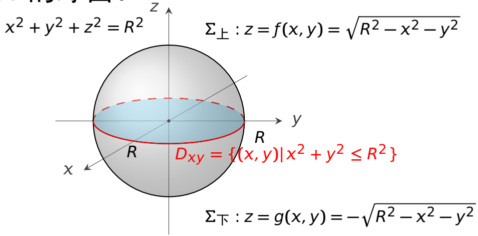


例 将对面积的曲面积分 $\iint_\Sigma f(x,y,z)dS$ 转换为重积分，其中 Σ 是球心在原点，半径为 R 的球面。



$$\iint_\Sigma f(x,y,z)dS=\iint_{\Sigma_上} f(x,y,z)dS+\iint_{\Sigma_下} f(x,y,z)dS$$

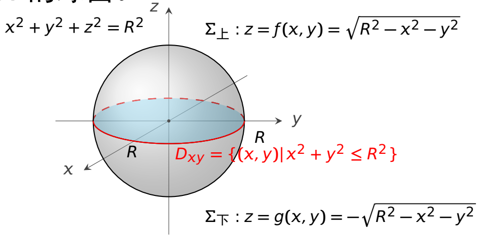
例 将对面积的曲面积分 $\iint_\Sigma f(x,y,z)dS$ 转换为重积分，其中 Σ 是球心在原点，半径为 R 的球面。



$$\iint_\Sigma f(x,y,z)dS=\iint_{\Sigma_{上}} f(x,y,z)dS+\iint_{\Sigma_{下}} f(x,y,z)dS$$

$$=\iint_{D_{xy}} f(x,y,\sqrt{a^2-x^2-y^2})\cdot\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}dxdy$$

例 将对面积的曲面积分 $\iint_\Sigma f(x,y,z)dS$ 转换为重积分，其中 Σ 是球心在原点，半径为 R 的球面。

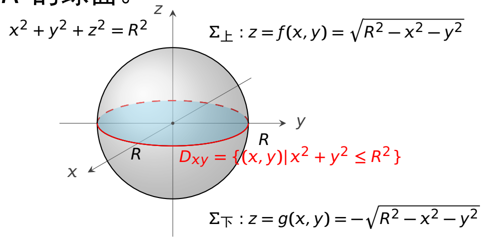


$$\iint_\Sigma f(x,y,z)dS=\iint_{\Sigma_上} f(x,y,z)dS+\iint_{\Sigma_下} f(x,y,z)dS$$

$$=\iint_{D_{xy}} f(x,y,\sqrt{a^2-x^2-y^2})\cdot\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}dxdy$$

$$+\iint_{D_{xy}} f(x,y,-\sqrt{a^2-x^2-y^2})\cdot\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}dxdy$$

例 将对面积的曲面积分 $\iint_\Sigma f(x,y,z)dS$ 转换为重积分，其中 Σ 是球心在原点，半径为 R 的球面。

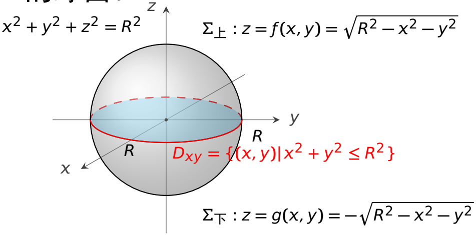


$$\iint_\Sigma f(x,y,z)dS=\iint_{\Sigma_{上}} f(x,y,z)dS+\iint_{\Sigma_{下}} f(x,y,z)dS$$

$$=\iint_{D_{xy}} f(x,y,\sqrt{a^2-x^2-y^2})\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$+\iint_{D_{xy}} f(x,y,-\sqrt{a^2-x^2-y^2})\cdot\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}dxdy$$

例 将对面积的曲面积分 $\iint_\Sigma f(x,y,z)dS$ 转换为重积分，其中 Σ 是球心在原点，半径为 R 的球面。

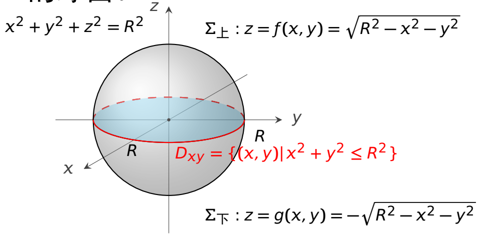


$$\iint_\Sigma f(x,y,z)dS=\iint_{\Sigma_{上}} f(x,y,z)dS+\iint_{\Sigma_{下}} f(x,y,z)dS$$

$$=\iint_{D_{xy}} f(x,y,\sqrt{a^2-x^2-y^2})\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$+\iint_{D_{xy}} f(x,y,-\sqrt{a^2-x^2-y^2})\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$

例 将对面积的曲面积分 $\iint_\Sigma f(x,y,z)dS$ 转换为重积分，其中 Σ 是球心在原点，半径为 R 的球面。



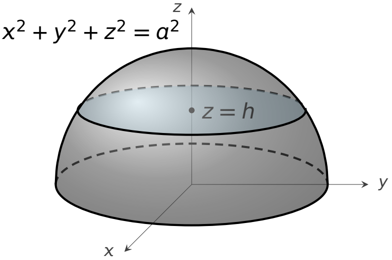
$$\iint_\Sigma f(x,y,z)dS=\iint_{\Sigma_上} f(x,y,z)dS+\iint_{\Sigma_下} f(x,y,z)dS$$

$$=\iint_{D_{xy}} f(x,y,\sqrt{a^2-x^2-y^2})\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$

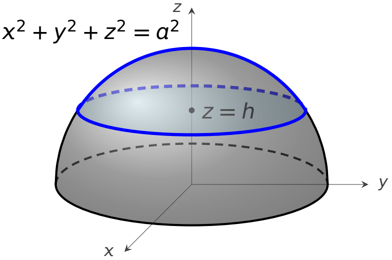
$$+\iint_{D_{xy}} f(x,y,-\sqrt{a^2-x^2-y^2})\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}\left[f(x,y,\sqrt{a^2-x^2-y^2})+f(x,y,-\sqrt{a^2-x^2-y^2})\right]\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$

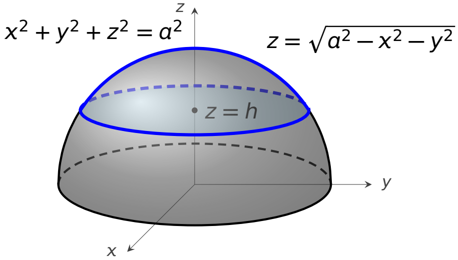
例 计算 $\iint_\Sigma \frac{1}{z} dS$，其中曲面 Σ 如图所示。



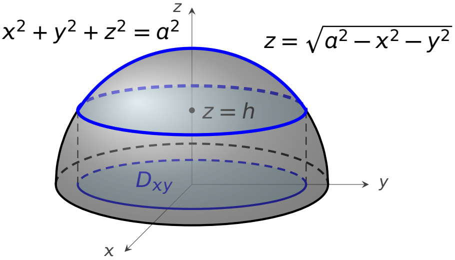
例 计算 $\iint_{\Sigma}\frac{1}{z}dS$，其中曲面 Σ 如图所示。



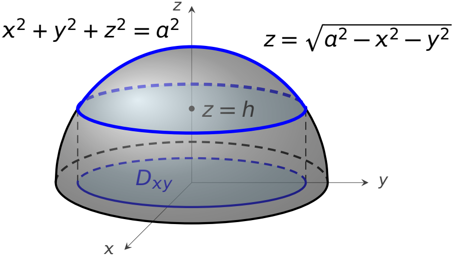
例 计算 $\iint_\Sigma \frac{1}{z} dS$，其中曲面 Σ 如图所示。

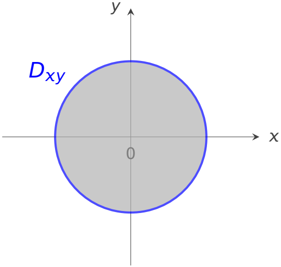


例 计算 $\iint_\Sigma \frac{1}{z} dS$，其中曲面 Σ 如图所示。

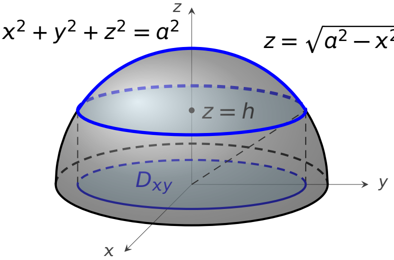


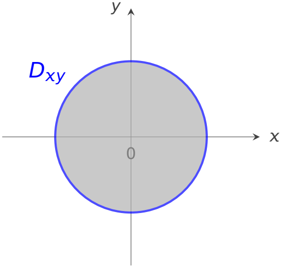
例 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$，其中曲面 Σ 如图所示。



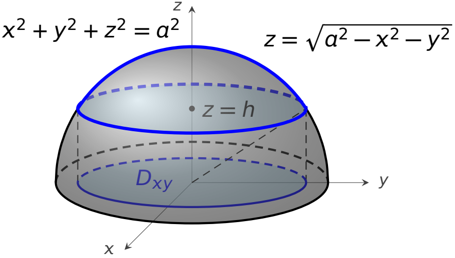


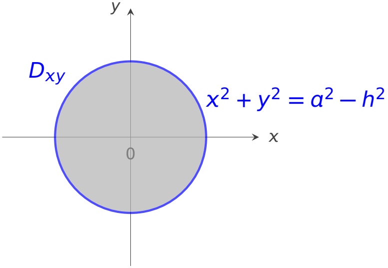
例 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$，其中曲面 Σ 如图所示。



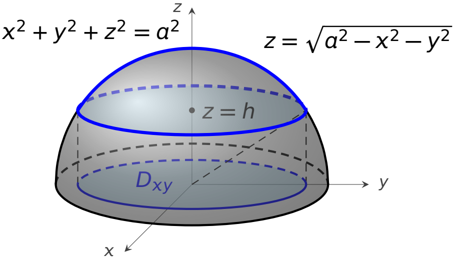


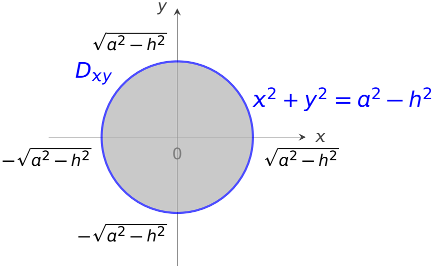
例 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$，其中曲面 Σ 如图所示。



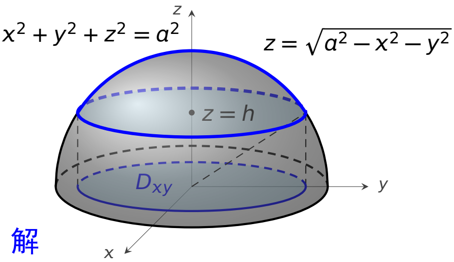


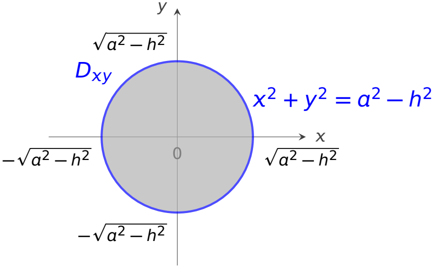
例 计算 $\iint_\Sigma \frac{1}{z}dS$，其中曲面 Σ 如图所示。





例 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$，其中曲面 Σ 如图所示。

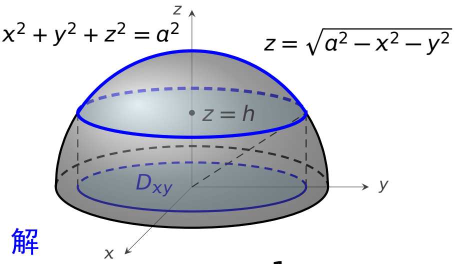


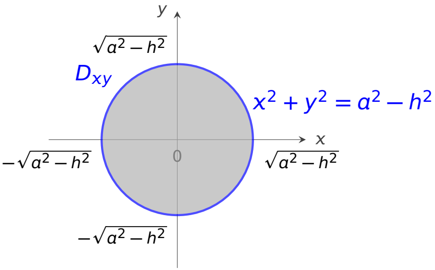


解

原式 =

例 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$，其中曲面 Σ 如图所示。

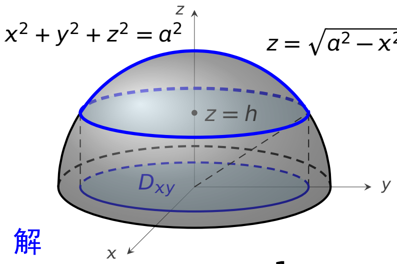


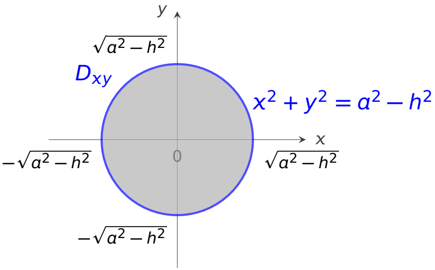


解

$$\text{原式} = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

例 计算 $\iint_\Sigma \frac{1}{z} dS$，其中曲面 Σ 如图所示。

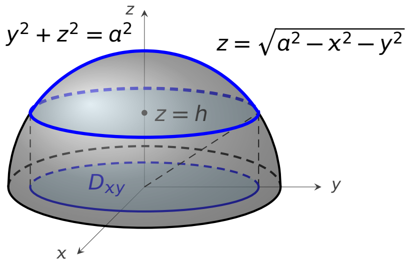


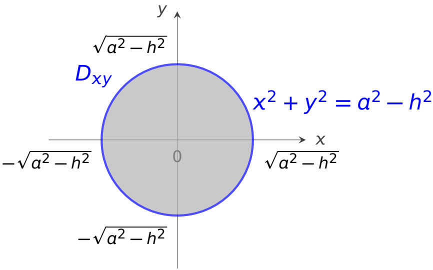


解

$$\text{原式} = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

例 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$，其中曲面 Σ 如图所示。

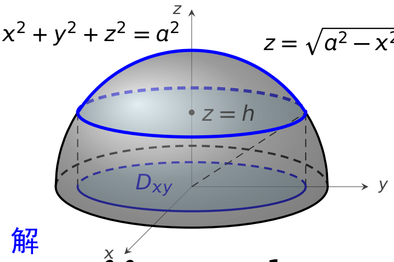


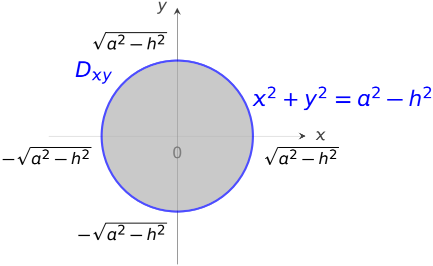


解

$$\text{原式} = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

例 计算 $\iint_\Sigma \frac{1}{z} dS$，其中曲面 Σ 如图所示。



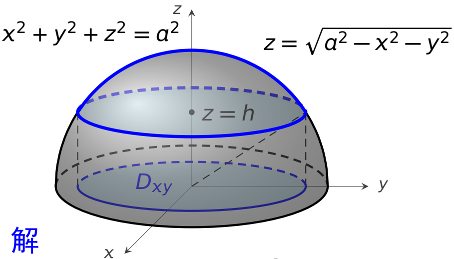


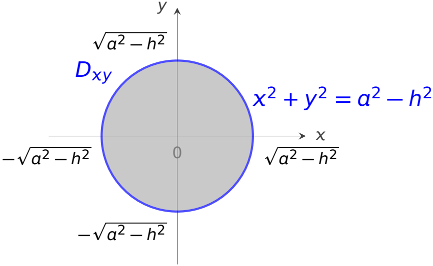
解

$$原式 = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

$$\cdot \sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2-y^2}}$$

例 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$，其中曲面 Σ 如图所示。



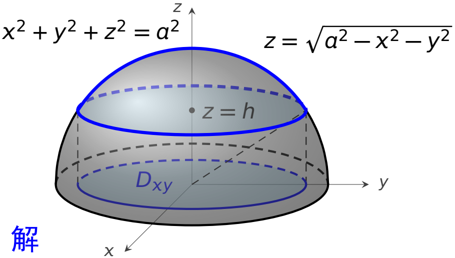


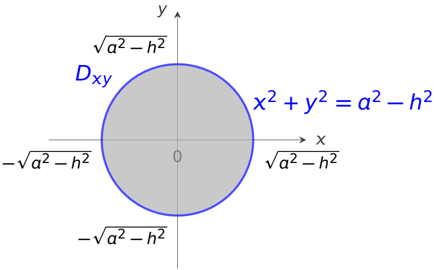
解

$$\text{原式} = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

$$= \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \cdot \sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2-y^2}}\,dxdy$$

例 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$，其中曲面 Σ 如图所示。



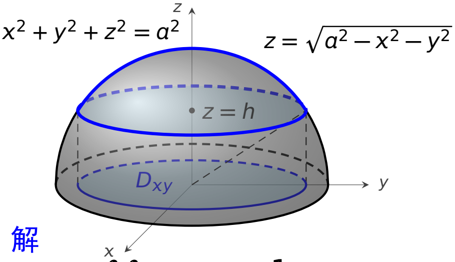


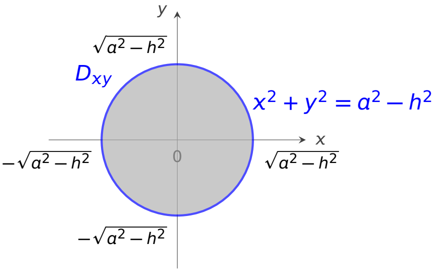
解

$$\text{原式} = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

$$= \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2-x^2-y^2}\,dxdy$$

例 计算 $\iint_\Sigma \frac{1}{z} dS$，其中曲面 Σ 如图所示。



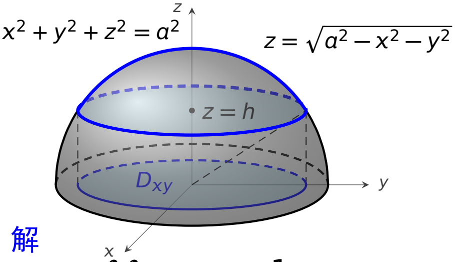


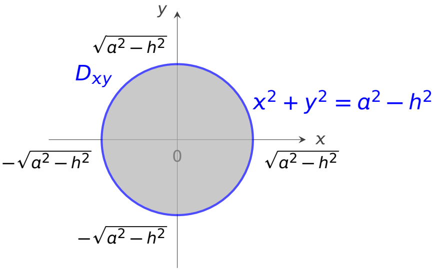
解

$$\text{原式} = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

$$= \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2-x^2-y^2}\,dxdy \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}$$

例 计算 $\iint_\Sigma \frac{1}{z}dS$，其中曲面 Σ 如图所示。



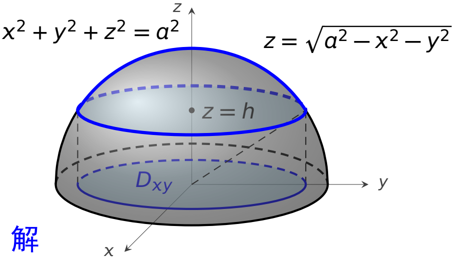


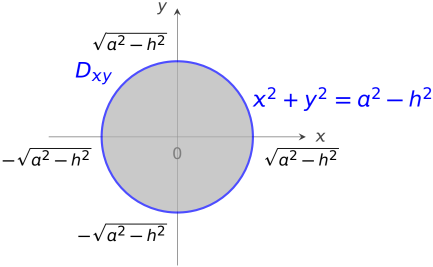
解

$$原式=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}\frac{a}{a^2-x^2-y^2}dxdy\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}\iint_{D_{xy}}\frac{a}{a^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta$$

例 计算 $\iint_\Sigma \frac{1}{z} dS$，其中曲面 Σ 如图所示。





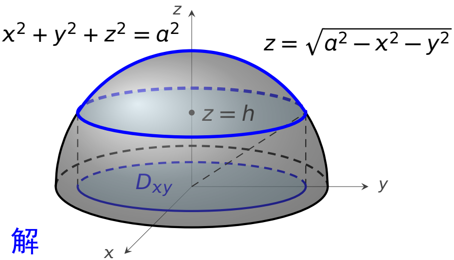
解

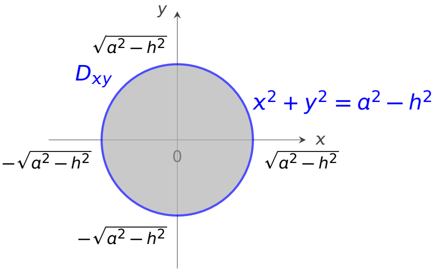
$$\text{原式} = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

$$= \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2-x^2-y^2} dxdy \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2-\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta$$

$$= \int \left[\int \frac{a}{a^2-\rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta$$

例 计算 $\iint_\Sigma \frac{1}{z}dS$，其中曲面 Σ 如图所示。





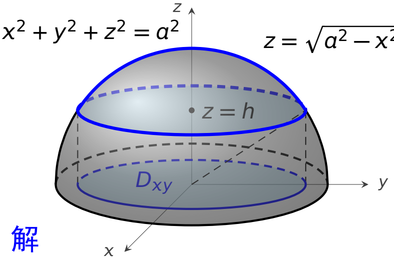
解

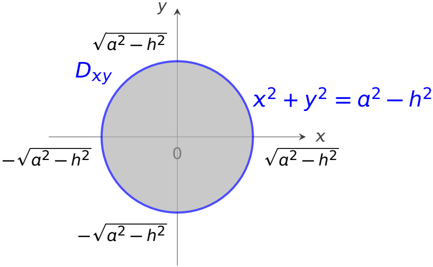
$$原式=\iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2-x^2-y^2}dxdy \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\int \quad \frac{a}{a^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho\right]d\theta$$

例 计算 $\iint_\Sigma \frac{1}{z}dS$，其中曲面 Σ 如图所示。





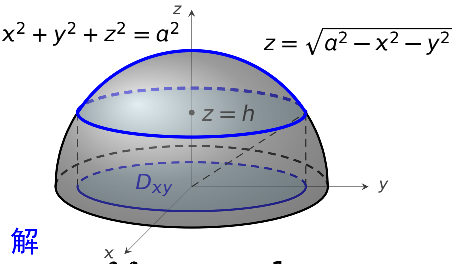
解

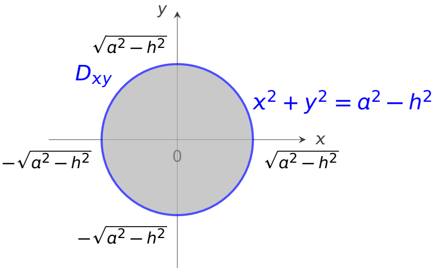
$$原式 = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

$$= \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2-x^2-y^2}dxdy \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}} \frac{a}{a^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho\right]d\theta$$

例 计算 $\iint_\Sigma \frac{1}{z} dS$，其中曲面 Σ 如图所示。





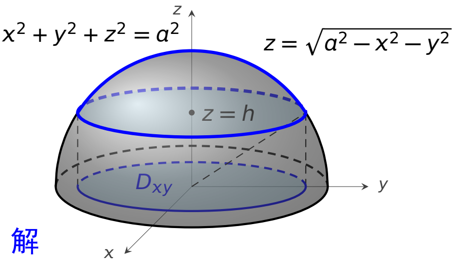
解

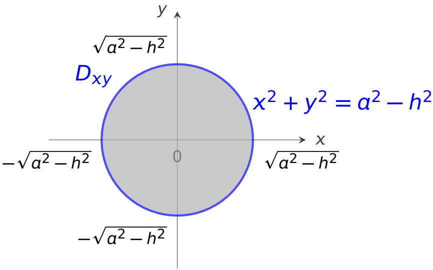
$$\text{原式} = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

$$= \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2-x^2-y^2} dxdy \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2-\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}} \frac{a}{a^2-\rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta \xlongequal{\quad\quad} 2\pi \cdot$$

例 计算 $\iint_\Sigma \frac{1}{z} dS$，其中曲面 Σ 如图所示。





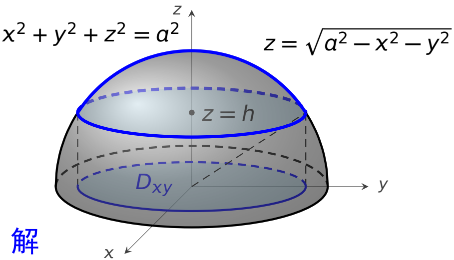
解

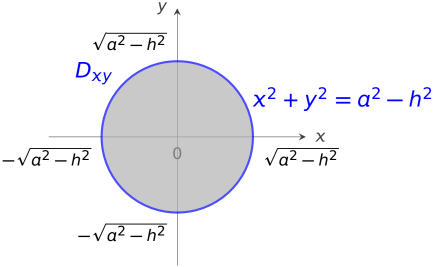
$$\text{原式} = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

$$= \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2-x^2-y^2} dxdy \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2-\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}} \frac{a}{a^2-\rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta \xlongequal{u=a^2-\rho^2} 2\pi \cdot$$

例 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$，其中曲面 Σ 如图所示。





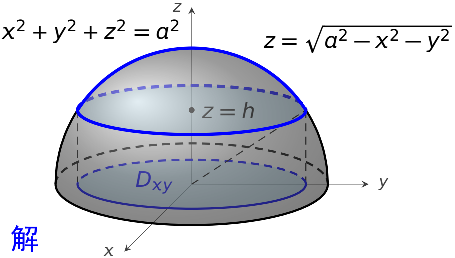
解

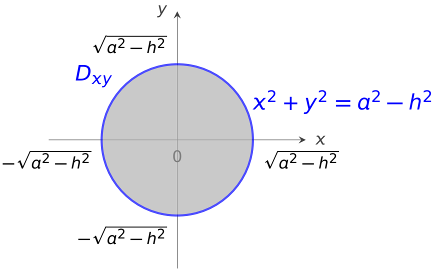
$$原式 = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

$$= \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2-x^2-y^2}dxdy \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2-\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}} \frac{a}{a^2-\rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta \xlongequal{u=a^2-\rho^2} 2\pi \cdot \qquad \frac{a}{u}$$

例 计算 $\iint_\Sigma \frac{1}{z}dS$，其中曲面 Σ 如图所示。





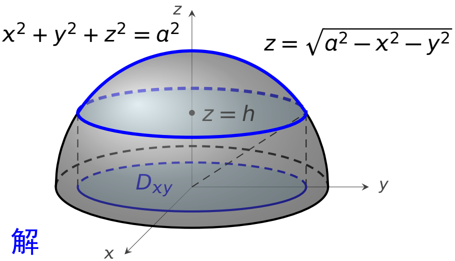
解

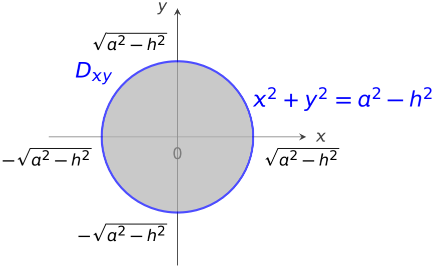
$$\text{原式}=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}\frac{a}{a^2-x^2-y^2}dxdy \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_{D_{xy}}\frac{a}{a^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}}\frac{a}{a^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho\right]d\theta \xlongequal{u=a^2-\rho^2} 2\pi\cdot \quad \frac{a}{u}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)du$$

例 计算 $\iint_{\Sigma}\frac{1}{z}dS$，其中曲面 Σ 如图所示。





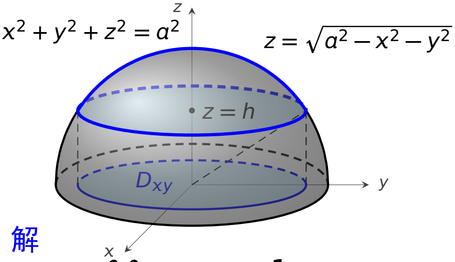
解

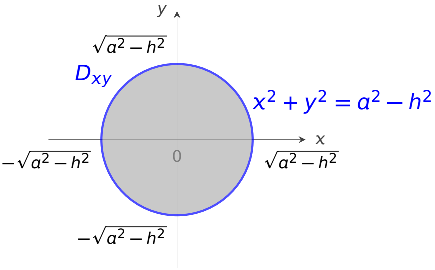
$$原式=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}\frac{a}{a^2-x^2-y^2}dxdy \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_{D_{xy}}\frac{a}{a^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}}\frac{a}{a^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho\right]d\theta \xlongequal{u=a^2-\rho^2} 2\pi\cdot\int_{a^2}^{h^2}\frac{a}{u}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)du$$

例 计算 $\iint_{\Sigma}\frac{1}{z}dS$，其中曲面 Σ 如图所示。





解

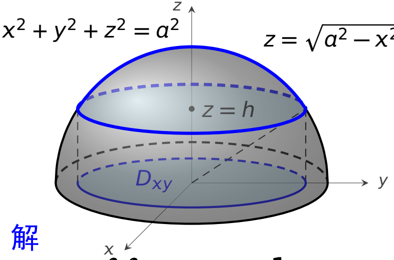
$$\text{原式}=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

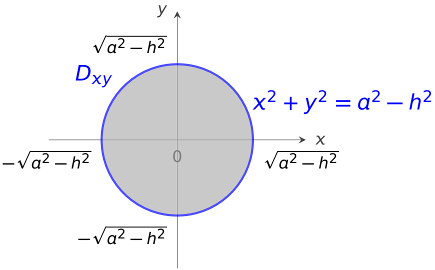
$$=\iint_{D_{xy}}\frac{a}{a^2-x^2-y^2}dxdy\ \overset{x=\rho\cos\theta}{\underset{y=\rho\sin\theta}{=\!=\!=\!=}}\ \iint_{D_{xy}}\frac{a}{a^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}}\frac{a}{a^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho\right]d\theta\ \overset{u=a^2-\rho^2}{=\!=\!=\!=}\ 2\pi\cdot\int_{a^2}^{h^2}\frac{a}{u}\cdot(-\frac{1}{2})du$$

$$=-\pi a\ln u\Big|_{a^2}^{h^2}$$

例 计算 $\iint_\Sigma \frac{1}{z}dS$，其中曲面 Σ 如图所示。





解

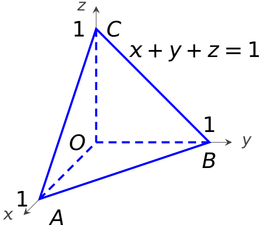
$$原式=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}\frac{a}{a^2-x^2-y^2}dxdy \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_{D_{xy}}\frac{a}{a^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta$$

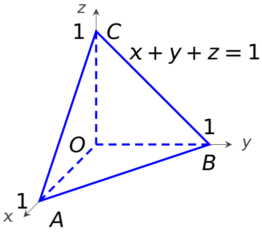
$$=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}}\frac{a}{a^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho\right]d\theta \xlongequal{u=a^2-\rho^2} 2\pi\cdot\int_{a^2}^{h^2}\frac{a}{u}\cdot(-\frac{1}{2})du$$

$$=-\pi a\ln u\Big|_{a^2}^{h^2}=2\pi a\ln\frac{a}{h}$$

例 计算 $\iint_{\Sigma} xyz dS$，其中曲面 Σ 如图所示。



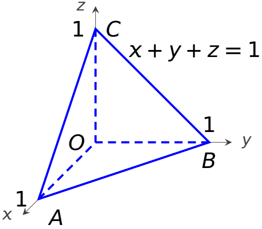
例 计算 $\iint_{\Sigma} xyzdS$，其中曲面 Σ 如图所示。



解

$$原式 = \left(\iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC} \right) xyzdS$$

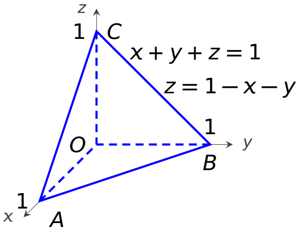
例 计算 $\iint_{\Sigma} xyzdS$，其中曲面 Σ 如图所示。



解

$$\text{原式} = \left(\iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC}\right) xyzdS = \iint_{\Delta ABC} xyzdS$$

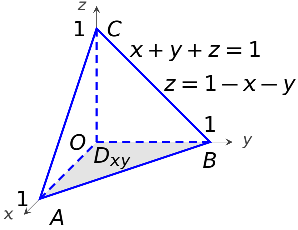
例 计算 $\iint_\Sigma xyzdS$，其中曲面 Σ 如图所示。



解

$$\text{原式} = \left(\iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC}\right) xyzdS = \iint_{\Delta ABC} xyzdS$$

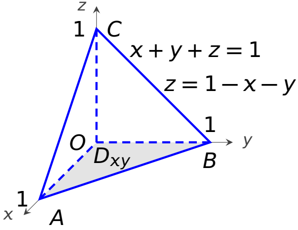
例 计算 $\iint_{\Sigma} xyzdS$，其中曲面 Σ 如图所示。

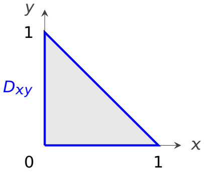


解

$$\text{原式} = \left(\iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC}\right) xyzdS = \iint_{\Delta ABC} xyzdS$$

例 计算 $\iint_\Sigma xyzdS$，其中曲面 Σ 如图所示。

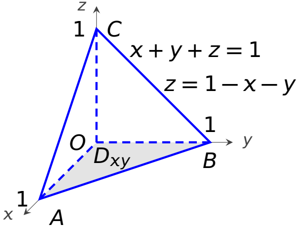


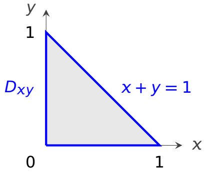


解

$$\text{原式}=\left(\iint_{\Delta OAB}+\iint_{\Delta OAC}+\iint_{\Delta OBC}+\iint_{\Delta ABC}\right)xyzdS=\iint_{\Delta ABC}xyzdS$$

例 计算 $\iint_{\Sigma} xyzdS$，其中曲面 Σ 如图所示。

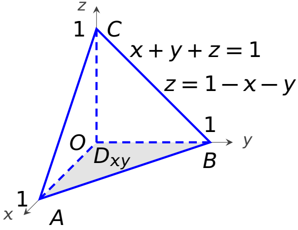


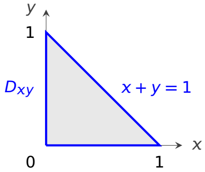


解

$$原式 = \left(\iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC}\right) xyzdS = \iint_{\Delta ABC} xyzdS$$

例 计算 $\iint_\Sigma xyzdS$，其中曲面 Σ 如图所示。



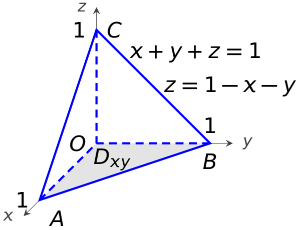


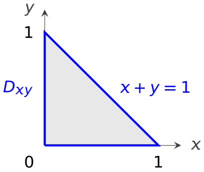
解

$$\text{原式} = \left(\iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC}\right) xyzdS = \iint_{\Delta ABC} xyzdS$$

$$xy(1-x-y)$$

例 计算 $\iint_{\Sigma} xyz dS$，其中曲面 Σ 如图所示。



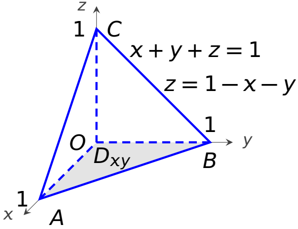


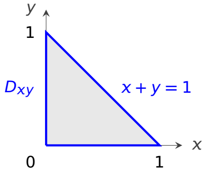
解

$$\text{原式} = \left(\iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC} \right) xyz dS = \iint_{\Delta ABC} xyz dS$$

$$xy(1-x-y) \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy$$

例 计算 $\iint_\Sigma xyzdS$，其中曲面 Σ 如图所示。



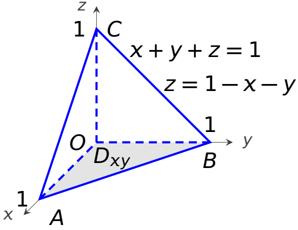


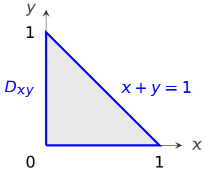
解

$$原式 = \left(\iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC}\right) xyzdS = \iint_{\Delta ABC} xyzdS$$

$$= \iint_{D_{xy}} xy(1-x-y)\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

例 计算 $\iint_{\Sigma} xyz dS$，其中曲面 Σ 如图所示。





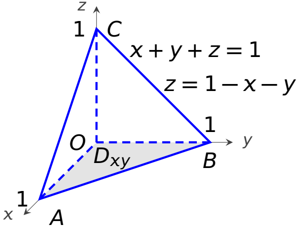
解

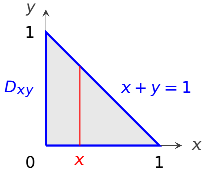
$$\text{原式} = \left(\iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC}\right) xyz dS = \iint_{\Delta ABC} xyz dS$$

$$= \iint_{D_{xy}} xy(1-x-y)\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

$$= \int \left[\int \quad xy(1-x-y)\cdot\sqrt{3}dy \right] dx$$

例 计算 $\iint_\Sigma xyzdS$，其中曲面 Σ 如图所示。





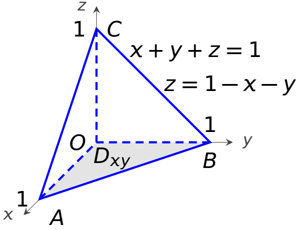
解

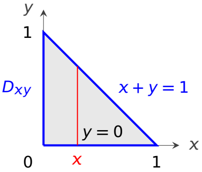
$$\text{原式} = \left(\iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC}\right) xyzdS = \iint_{\Delta ABC} xyzdS$$

$$= \iint_{D_{xy}} xy(1-x-y)\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

$$= \int \left[\int \quad xy(1-x-y)\cdot\sqrt{3}dy\right]dx$$

例 计算 $\iint_{\Sigma} xyz\,dS$，其中曲面 Σ 如图所示。





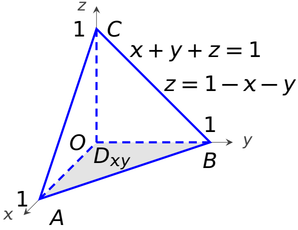
解

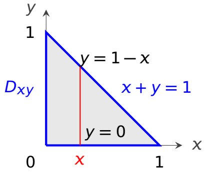
$$\text{原式} = \left(\iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC}\right) xyz\,dS = \iint_{\Delta ABC} xyz\,dS$$

$$= \iint_{D_{xy}} xy(1-x-y)\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

$$= \int \left[\int \quad xy(1-x-y)\cdot\sqrt{3}\,dy\right]dx$$

例 计算 $\iint_{\Sigma} xyz dS$，其中曲面 Σ 如图所示。





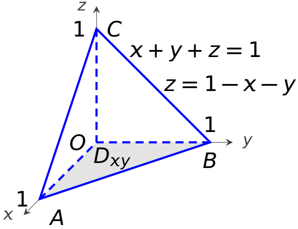
解

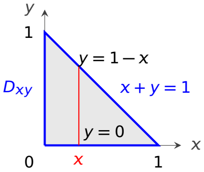
$$\text{原式} = \left(\iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC}\right) xyz dS = \iint_{\Delta ABC} xyz dS$$

$$= \iint_{D_{xy}} xy(1-x-y)\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

$$= \int \left[\int \quad xy(1-x-y)\cdot\sqrt{3}dy\right]dx$$

例 计算 $\iint_{\Sigma} xyzdS$，其中曲面 Σ 如图所示。





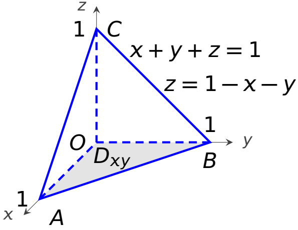
解

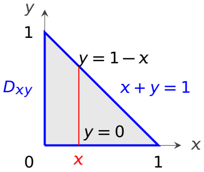
$$原式 = \left(\iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC}\right) xyzdS = \iint_{\Delta ABC} xyzdS$$

$$= \iint_{D_{xy}} xy(1-x-y)\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

$$= \int_0^1 \left[\int \quad xy(1-x-y)\cdot\sqrt{3}dy\right]dx$$

例 计算 $\iint_\Sigma xyzdS$，其中曲面 Σ 如图所示。





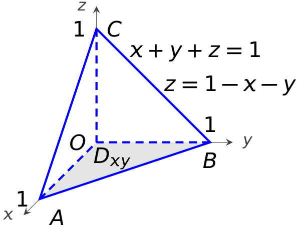
解

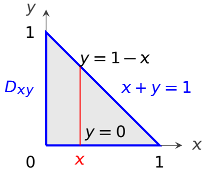
$$原式=\left(\iint_{\Delta OAB}+\iint_{\Delta OAC}+\iint_{\Delta OBC}+\iint_{\Delta ABC}\right)xyzdS=\iint_{\Delta ABC}xyzdS$$

$$=\iint_{D_{xy}}xy(1-x-y)\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

$$=\int_0^1\left[\int_0^{1-x}xy(1-x-y)\cdot\sqrt{3}dy\right]dx$$

例 计算 $\iint_\Sigma xyzdS$，其中曲面 Σ 如图所示。





解

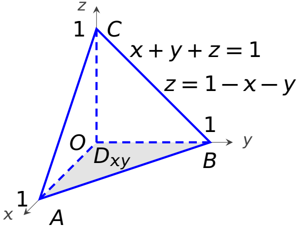
$$\text{原式} = \left(\iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC}\right) xyzdS = \iint_{\Delta ABC} xyzdS$$

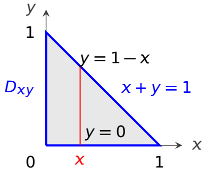
$$= \iint_{D_{xy}} xy(1-x-y)\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} xy(1-x-y)\cdot\sqrt{3}dy\right]dx$$

$$= \qquad x\left[(1-x)\frac{y^2}{2} - \frac{1}{3}y^3\right]$$

例 计算 $\iint_\Sigma xyz dS$，其中曲面 Σ 如图所示。





解

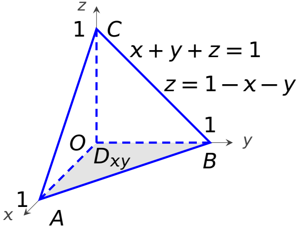
$$原式 = \left(\iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC}\right) xyz dS = \iint_{\Delta ABC} xyz dS$$

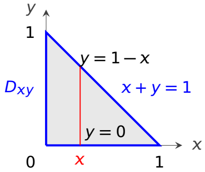
$$= \iint_{D_{xy}} xy(1-x-y)\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} xy(1-x-y)\cdot\sqrt{3}dy\right]dx$$

$$= \quad x\left[(1-x)\frac{y^2}{2}-\frac{1}{3}y^3\right]\Big|_0^{1-x}$$

例 计算 $\iint_{\Sigma} xyzdS$，其中曲面 Σ 如图所示。





解

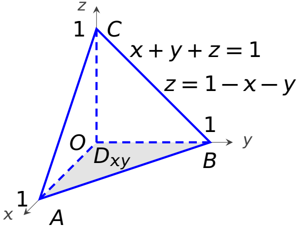
$$\text{原式} = \left(\iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC}\right) xyzdS = \iint_{\Delta ABC} xyzdS$$

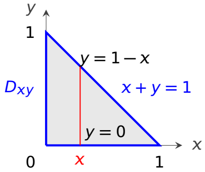
$$= \iint_{D_{xy}} xy(1-x-y)\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} xy(1-x-y)\cdot\sqrt{3}dy\right]dx$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 x\left[(1-x)\frac{y^2}{2} - \frac{1}{3}y^3\right]\Bigg|_0^{1-x} dx$$

例 计算 $\iint_{\Sigma} xyz dS$，其中曲面 Σ 如图所示。





解

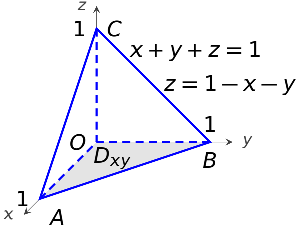
$$原式 = \left(\iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC}\right) xyz dS = \iint_{\Delta ABC} xyz dS$$

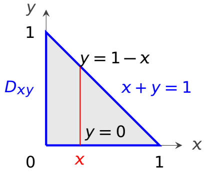
$$= \iint_{D_{xy}} xy(1-x-y) \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} xy(1-x-y) \cdot \sqrt{3} dy\right] dx$$

$$= \sqrt{3} \int_0^1 x \left[(1-x)\frac{y^2}{2} - \frac{1}{3}y^3\right]\Bigg|_0^{1-x} dx = \sqrt{3} \int_0^1 \frac{1}{6} x(1-x)^3 dx$$

例 计算 $\iint_{\Sigma} xyzdS$，其中曲面 Σ 如图所示。





解

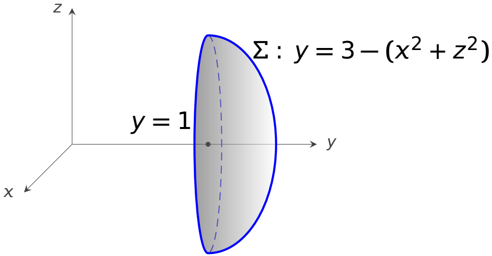
$$\text{原式} = \left(\iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC}\right) xyzdS = \iint_{\Delta ABC} xyzdS$$

$$= \iint_{D_{xy}} xy(1-x-y)\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

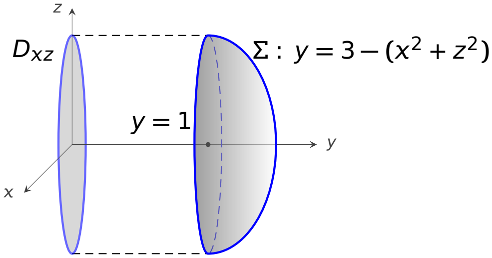
$$= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} xy(1-x-y)\cdot\sqrt{3}dy\right]dx$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 x\left[(1-x)\frac{y^2}{2} - \frac{1}{3}y^3\right]\Big|_0^{1-x} dx = \sqrt{3}\int_0^1 \frac{1}{6}x(1-x)^3dx = \frac{\sqrt{3}}{120}$$

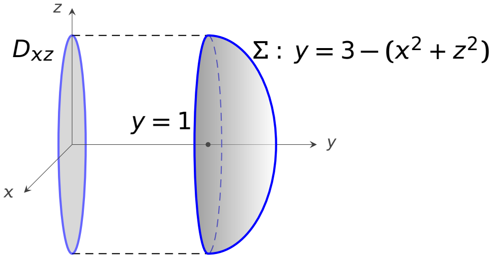
例 计算 $I = \iint_\Sigma (x^2 + z^2 + y) dS$，其中 Σ 是曲面 $y = 3 - (x^2 + z^2)$ 在 $y \geq 1$ 的部分。

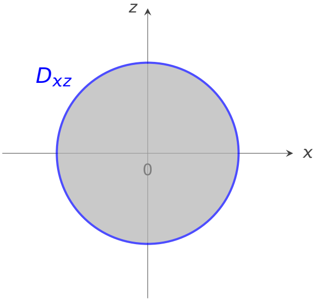


例 计算 $I=\iint_{\Sigma}(x^2+z^2+y)dS$，其中 Σ 是曲面 $y=3-(x^2+z^2)$ 在 $y\geq 1$ 的部分。

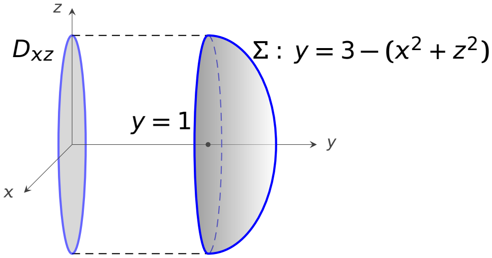


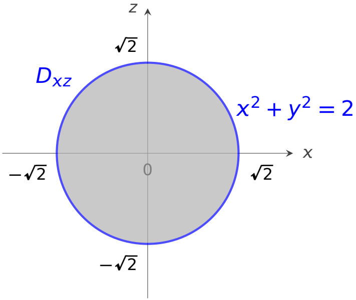
例 计算 $I=\iint_\Sigma (x^2+z^2+y)dS$，其中 Σ 是曲面 $y=3-(x^2+z^2)$ 在 $y\geq 1$ 的部分。



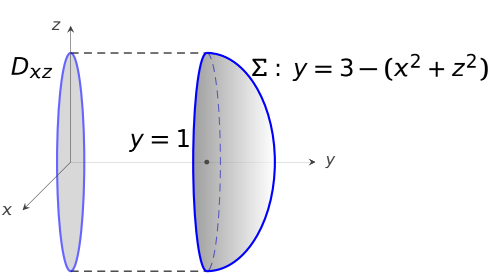


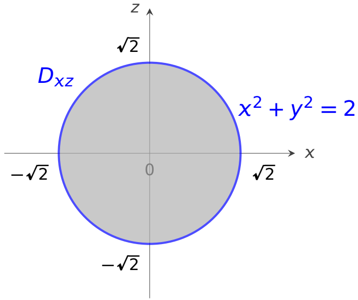
例 计算 $I = \iint_\Sigma (x^2+z^2+y)dS$，其中 Σ 是曲面 $y = 3-(x^2+z^2)$ 在 $y \geq 1$ 的部分。





例 计算 $I=\iint_{\Sigma}(x^2+z^2+y)dS$，其中 Σ 是曲面 $y=3-(x^2+z^2)$ 在 $y\geq 1$ 的部分。

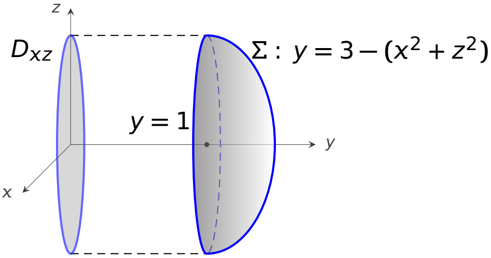


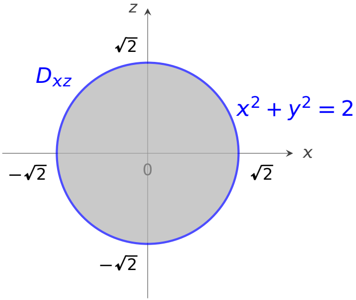


解

$I=\qquad 3$

例 计算 $I=\iint_\Sigma (x^2+z^2+y)dS$，其中 Σ 是曲面 $y=3-(x^2+z^2)$ 在 $y\geq 1$ 的部分。

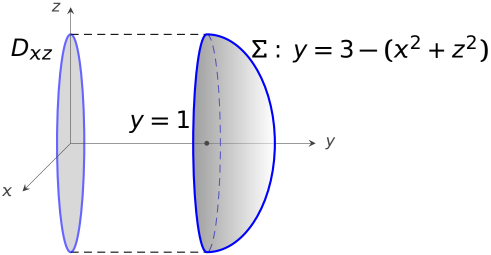


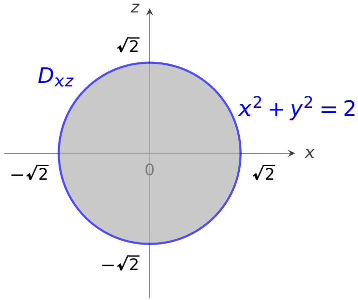


解

$$I=\qquad 3\cdot\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}dxdz$$

例 计算 $I=\iint_{\Sigma}(x^2+z^2+y)dS$，其中 Σ 是曲面 $y=3-(x^2+z^2)$ 在 $y\geq 1$ 的部分。

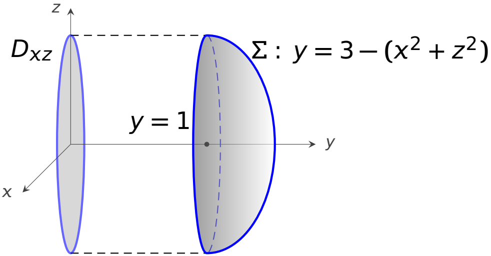


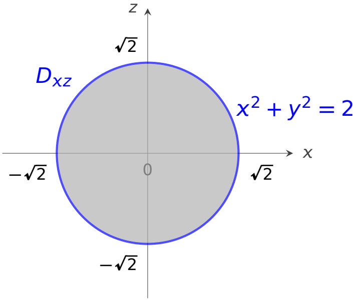


解

$$I=\iint_{D_{xz}} 3\cdot\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}dxdz$$

例 计算 $I=\iint_{\Sigma}(x^2+z^2+y)dS$，其中 Σ 是曲面 $y=3-(x^2+z^2)$ 在 $y\geq 1$ 的部分。

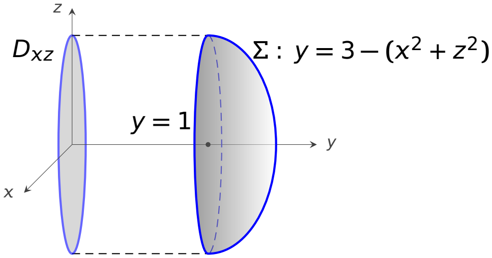


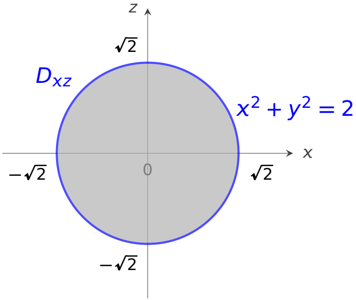


解

$$I=\iint_{D_{xz}}3\cdot\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}dxdz=\iint_{D_{xz}}3\cdot\sqrt{1+4x^2+4z^2}dxdz$$

例 计算 $I=\iint_{\Sigma}(x^2+z^2+y)dS$，其中 Σ 是曲面 $y=3-(x^2+z^2)$ 在 $y\geq 1$ 的部分。



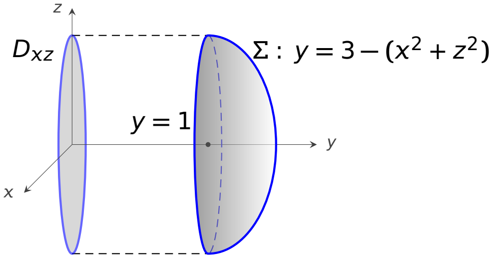


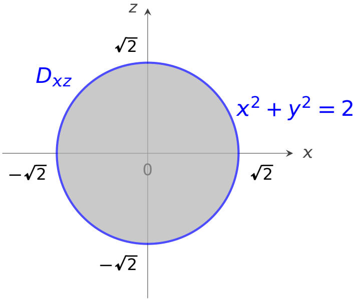
解

$$I=\iint_{D_{xz}}3\cdot\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}\,dxdz=\iint_{D_{xz}}3\cdot\sqrt{1+4x^2+4z^2}\,dxdz$$

$$\xlongequal[z=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}$$

例 计算 $I=\iint_\Sigma (x^2+z^2+y)dS$，其中 Σ 是曲面 $y=3-(x^2+z^2)$ 在 $y\geq 1$ 的部分。



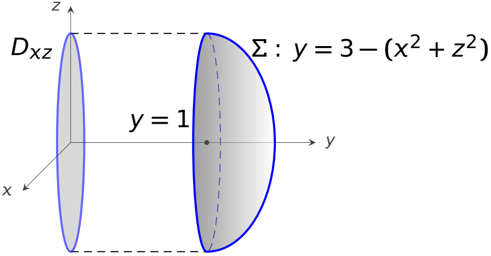


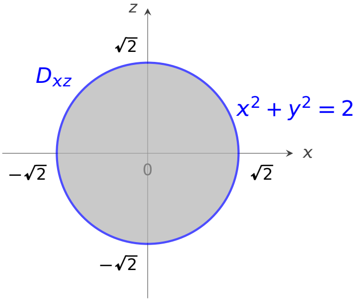
解

$$I=\iint_{D_{xz}} 3\cdot\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}dxdz=\iint_{D_{xz}} 3\cdot\sqrt{1+4x^2+4z^2}dxdz$$

$$\xlongequal[z=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_{D_{xz}} 3\sqrt{1+4\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta$$

例 计算 $I=\iint_{\Sigma}(x^2+z^2+y)dS$，其中 Σ 是曲面 $y=3-(x^2+z^2)$ 在 $y\geq 1$ 的部分。



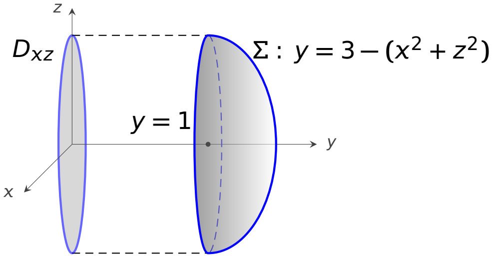


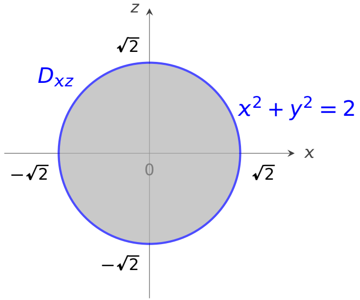
解

$$I=\iint_{D_{xz}} 3\cdot\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}\,dxdz=\iint_{D_{xz}} 3\cdot\sqrt{1+4x^2+4z^2}\,dxdz$$

$$\xlongequal[z=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}\iint_{D_{xz}} 3\sqrt{1+4\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta=\int\left[\int 3\sqrt{1+4\rho^2}\cdot\rho d\rho\right]d\theta$$

例 计算 $I=\iint_{\Sigma}(x^2+z^2+y)dS$，其中 Σ 是曲面 $y=3-(x^2+z^2)$ 在 $y\geq 1$ 的部分。



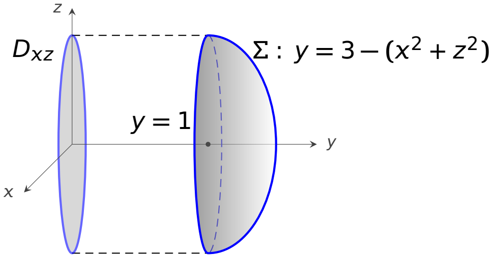


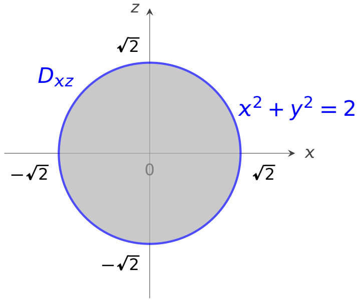
解

$$I=\iint_{D_{xz}}3\cdot\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}dxdz=\iint_{D_{xz}}3\cdot\sqrt{1+4x^2+4z^2}dxdz$$

$$\xlongequal[z=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}\iint_{D_{xz}}3\sqrt{1+4\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta=\int_0^{2\pi}\left[\int 3\sqrt{1+4\rho^2}\cdot\rho d\rho\right]d\theta$$

例 计算 $I=\iint_{\Sigma}(x^2+z^2+y)dS$，其中 Σ 是曲面 $y=3-(x^2+z^2)$ 在 $y\geq 1$ 的部分。



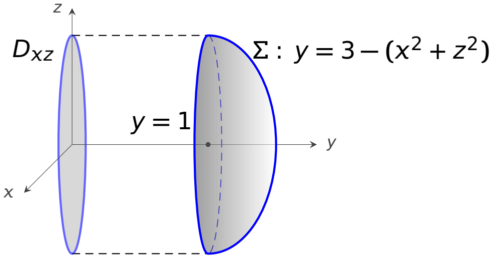


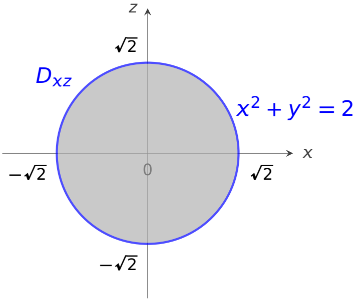
解

$$I=\iint_{D_{xz}}3\cdot\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}\,dxdz=\iint_{D_{xz}}3\cdot\sqrt{1+4x^2+4z^2}\,dxdz$$

$$\xlongequal[z=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}\iint_{D_{xz}}3\sqrt{1+4\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\sqrt{2}}3\sqrt{1+4\rho^2}\cdot\rho d\rho\right]d\theta$$

例 计算 $I=\iint_{\Sigma}(x^2+z^2+y)dS$，其中 Σ 是曲面 $y=3-(x^2+z^2)$ 在 $y\geq 1$ 的部分。





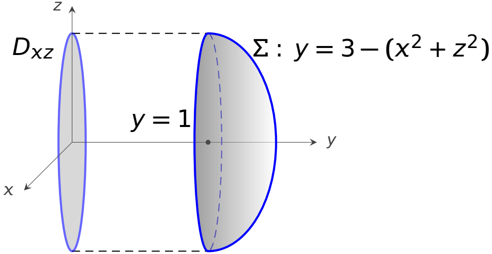
解

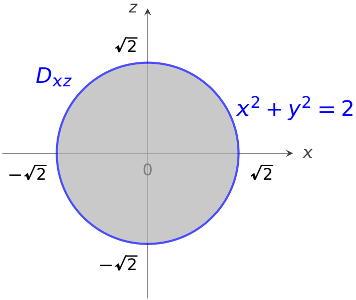
$$I=\iint_{D_{xz}}3\cdot\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}dxdz=\iint_{D_{xz}}3\cdot\sqrt{1+4x^2+4z^2}dxdz$$

$$\xlongequal[z=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}\iint_{D_{xz}}3\sqrt{1+4\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\sqrt{2}}3\sqrt{1+4\rho^2}\cdot\rho d\rho\right]d\theta$$

$$=\!=\!=\!=\ 2\pi\cdot$$

例 计算 $I=\iint_{\Sigma}(x^2+z^2+y)dS$，其中 Σ 是曲面 $y=3-(x^2+z^2)$ 在 $y\geq 1$ 的部分。





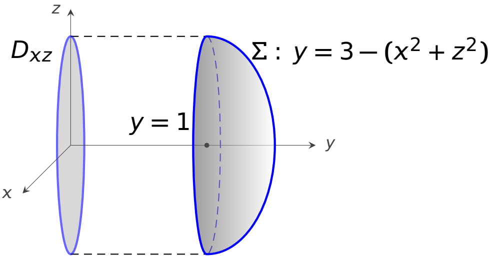
解

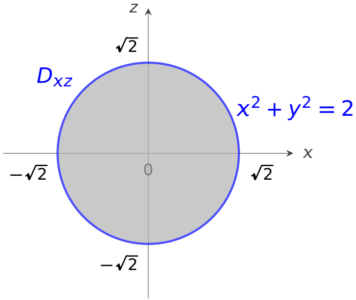
$$I=\iint_{D_{xz}}3\cdot\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}dxdz=\iint_{D_{xz}}3\cdot\sqrt{1+4x^2+4z^2}dxdz$$

$$\xlongequal[z=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}\iint_{D_{xz}}3\sqrt{1+4\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\sqrt{2}}3\sqrt{1+4\rho^2}\cdot\rho d\rho\right]d\theta$$

$$\xlongequal{u=1+4\rho^2}2\pi\cdot$$

例 计算 $I=\iint_{\Sigma}(x^2+z^2+y)dS$，其中 Σ 是曲面 $y=3-(x^2+z^2)$ 在 $y\geq 1$ 的部分。





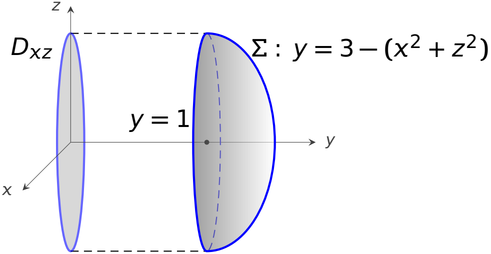
解

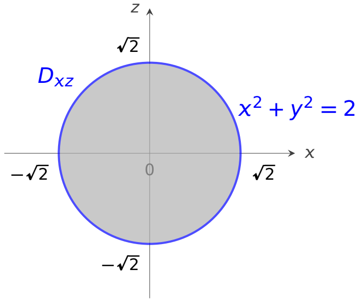
$$I=\iint_{D_{xz}}3\cdot\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}\,dxdz=\iint_{D_{xz}}3\cdot\sqrt{1+4x^2+4z^2}\,dxdz$$

$$\xlongequal[z=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}\iint_{D_{xz}}3\sqrt{1+4\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\sqrt{2}}3\sqrt{1+4\rho^2}\cdot\rho d\rho\right]d\theta$$

$$\xlongequal{u=1+4\rho^2}2\pi\cdot\qquad 3\sqrt{u}$$

例 计算 $I=\iint_\Sigma (x^2+z^2+y)dS$，其中 Σ 是曲面 $y=3-(x^2+z^2)$ 在 $y\ge 1$ 的部分。





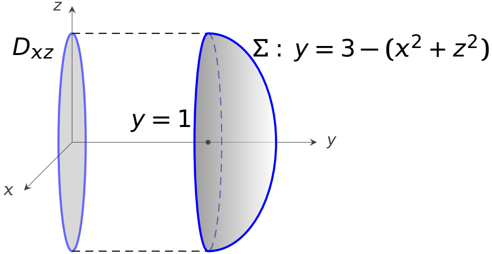
解

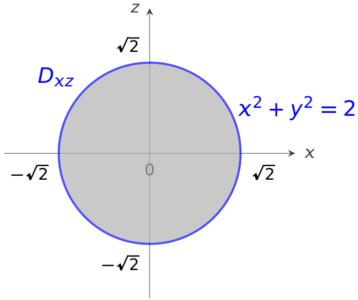
$$I=\iint_{D_{xz}} 3\cdot\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}dxdz=\iint_{D_{xz}} 3\cdot\sqrt{1+4x^2+4z^2}dxdz$$

$$\xlongequal[z=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}\iint_{D_{xz}} 3\sqrt{1+4\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\sqrt{2}} 3\sqrt{1+4\rho^2}\cdot\rho d\rho\right]d\theta$$

$$\xlongequal{u=1+4\rho^2} 2\pi\cdot \qquad 3\sqrt{u}\cdot\frac{1}{8}du$$

例 计算 $I=\iint_\Sigma (x^2+z^2+y)dS$，其中 Σ 是曲面 $y=3-(x^2+z^2)$ 在 $y\ge 1$ 的部分。





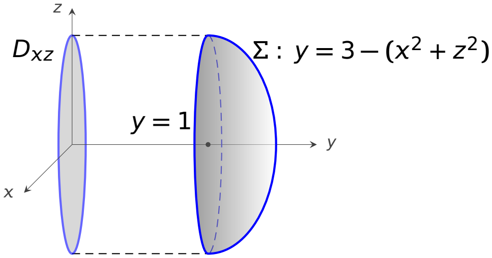
解

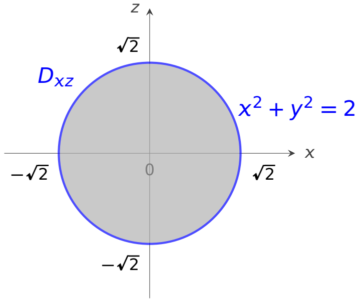
$$I=\iint_{D_{xz}} 3\cdot\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}\,dxdz=\iint_{D_{xz}} 3\cdot\sqrt{1+4x^2+4z^2}\,dxdz$$

$$\xlongequal[z=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}\iint_{D_{xz}} 3\sqrt{1+4\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\sqrt{2}} 3\sqrt{1+4\rho^2}\cdot\rho d\rho\right]d\theta$$

$$\xlongequal{u=1+4\rho^2} 2\pi\cdot\int_1^9 3\sqrt{u}\cdot\frac{1}{8}du$$

例 计算 $I=\iint_\Sigma (x^2+z^2+y)dS$，其中 Σ 是曲面 $y=3-(x^2+z^2)$ 在 $y\geq 1$ 的部分。





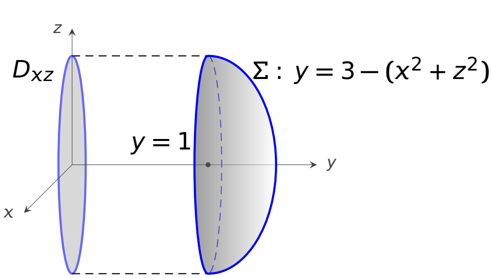
解

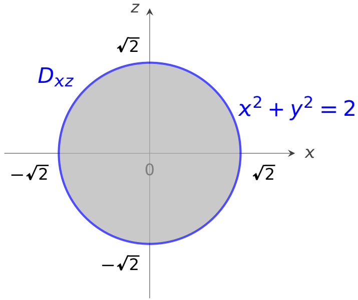
$$I=\iint_{D_{xz}} 3\cdot\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}dxdz=\iint_{D_{xz}} 3\cdot\sqrt{1+4x^2+4z^2}dxdz$$

$$\xlongequal[z=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}\iint_{D_{xz}} 3\sqrt{1+4\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\sqrt{2}} 3\sqrt{1+4\rho^2}\cdot\rho d\rho\right]d\theta$$

$$\xlongequal{u=1+4\rho^2} 2\pi\cdot\int_1^9 3\sqrt{u}\cdot\frac{1}{8}du=\frac{1}{2}\pi u^{\frac{3}{2}}\Big|_1^9$$

例 计算 $I=\iint_{\Sigma}(x^2+z^2+y)dS$，其中 Σ 是曲面 $y=3-(x^2+z^2)$ 在 $y\geq 1$ 的部分。





解

$$I=\iint_{D_{xz}}3\cdot\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}\,dxdz=\iint_{D_{xz}}3\cdot\sqrt{1+4x^2+4z^2}\,dxdz$$

$$\overset{x=\rho\cos\theta}{\underset{z=\rho\sin\theta}{=\!=\!=\!=}}\iint_{D_{xz}}3\sqrt{1+4\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\sqrt{2}}3\sqrt{1+4\rho^2}\cdot\rho d\rho\right]d\theta$$

$$\overset{u=1+4\rho^2}{=\!=\!=\!=}2\pi\cdot\int_1^9 3\sqrt{u}\cdot\frac{1}{8}du=\frac{1}{2}\pi u^{\frac{3}{2}}\Big|_1^9=13\pi$$