# 第 11 章 *b*：对坐标的曲线积分

数学系　梁卓滨

2017-2018 学年 II

# Outline

1. 对坐标的曲线积分：平面有向曲线

2. 对坐标的曲线积分：空间有向曲线

3. 两类曲线积分的联系

# We are here now...

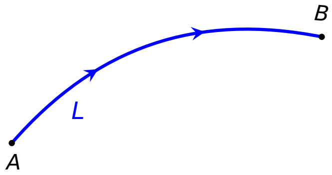
1. 对坐标的曲线积分：平面有向曲线

2. 对坐标的曲线积分：空间有向曲线

3. 两类曲线积分的联系

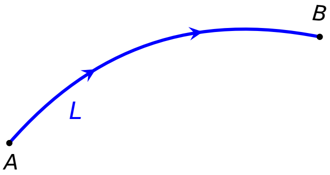
# 平面有向曲线

- 有向曲线 $L$ 是指定方向的曲线



# 平面有向曲线

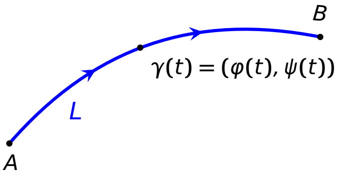
- 有向曲线 $L$ 是指定方向的曲线
- 有向曲线具有起点、终点；
  可理解成粒子运动



# 平面有向曲线

- 有向曲线 $L$ 是指定方向的曲线
- 有向曲线具有起点、终点；
  可理解成粒子运动
- $L$ 的参数方程：

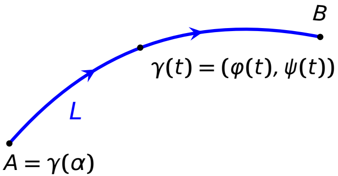
$$\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t)),\ t : \alpha \to \beta$$



# 平面有向曲线

- 有向曲线 $L$ 是指定方向的曲线
- 有向曲线具有起点、终点；
  可理解成粒子运动
- $L$ 的参数方程：

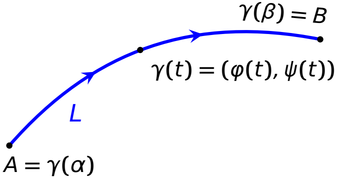
$$\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t)),\ t : \alpha \to \beta$$



# 平面有向曲线

- 有向曲线 $L$ 是指定方向的曲线
- 有向曲线具有起点、终点；
  可理解成粒子运动
- $L$ 的参数方程：

$$\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t)), \ t : \alpha \to \beta$$



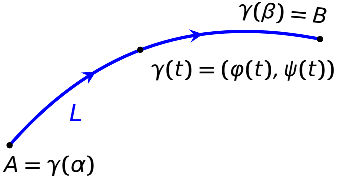
# 平面有向曲线

- 有向曲线 $L$ 是指定方向的曲线
- 有向曲线具有起点、终点;
  可理解成粒子运动
- $L$ 的参数方程:

  $$\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t)),\ t : \alpha \to \beta$$

  或者写作

  $$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t : \alpha \to \beta$$



# 平面有向曲线

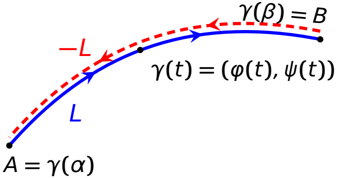
- 有向曲线 $L$ 是指定方向的曲线
- 有向曲线具有起点、终点；
  可理解成粒子运动
- $L$ 的参数方程：

  $$\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t)),\ t : \alpha \to \beta$$

  或者写作

  $$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t : \alpha \to \beta$$

- 反向曲线 $-L$：方向与 $L$ 相反的有向曲线



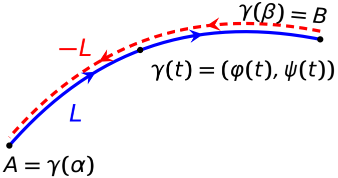
# 平面有向曲线

- 有向曲线 $L$ 是指定方向的曲线
- 有向曲线具有起点、终点；
  可理解成粒子运动
- $L$ 的参数方程：

  $$\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t)),\ t : \alpha \to \beta$$

  或者写作

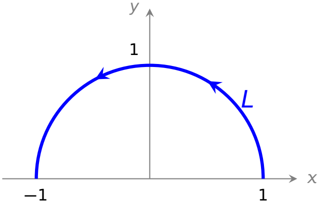
  $$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t : \alpha \to \beta$$




- 反向曲线 $-L$：方向与 $L$ 相反的有向曲线
- $-L$ 的参数方程：

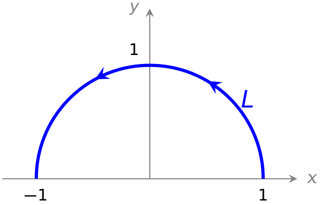
  $$\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t)),\ t : \beta \to \alpha$$

例 如图有向曲线 $L$ 的参数方程是：



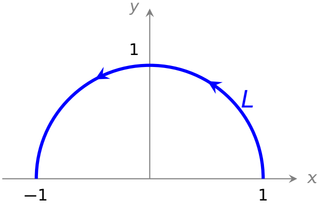
例 如图有向曲线 $L$ 的参数方程是：

- $\gamma(t) = (\cos t, \sin t), \quad t : 0 \to \pi$



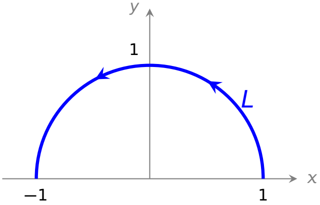
例 如图有向曲线 $L$ 的参数方程是：

- $\gamma(t) = (\cos t, \sin t), \quad t : 0 \to \pi$
- $\gamma(t) = (\cos 2t, \sin 2t),$



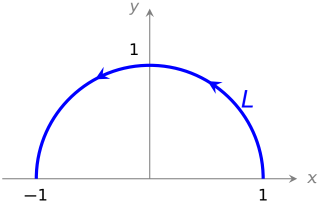
例 如图有向曲线 $L$ 的参数方程是：

- $\gamma(t) = (\cos t, \sin t), \quad t : 0 \to \pi$
- $\gamma(t) = (\cos 2t, \sin 2t), \quad t : 0 \to \frac{\pi}{2}$



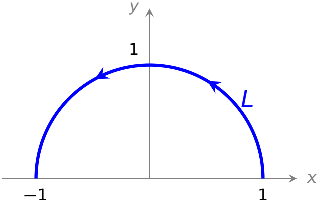
**例** 如图有向曲线 $L$ 的参数方程是：

- $\gamma(t) = (\cos t, \sin t), \quad t : 0 \to \pi$
- $\gamma(t) = (\cos 2t, \sin 2t), \quad t : 0 \to \frac{\pi}{2}$
- $\gamma(t) = (t, \sqrt{1-t^2}),$



例 如图有向曲线 $L$ 的参数方程是：

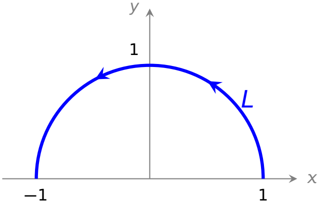
- $\gamma(t)=(\cos t,\sin t),\quad t:0\to\pi$
- $\gamma(t)=(\cos 2t,\sin 2t),\quad t:0\to\frac{\pi}{2}$
- $\gamma(t)=(t,\sqrt{1-t^2}),\quad t:1\to -1$



例 如图有向曲线 $L$ 的参数方程是：

- $\gamma(t) = (\cos t, \sin t), \quad t : 0 \to \pi$
- $\gamma(t) = (\cos 2t, \sin 2t), \quad t : 0 \to \frac{\pi}{2}$
- $\gamma(t) = (t, \sqrt{1-t^2}), \quad t : 1 \to -1$

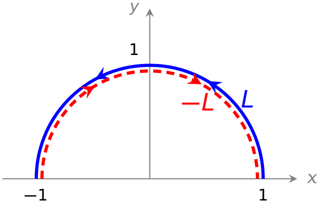
等等…（参数方程不唯一）



例 如图有向曲线 $L$ 的参数方程是：

- $\gamma(t) = (\cos t, \sin t), \quad t: 0 \to \pi$
- $\gamma(t) = (\cos 2t, \sin 2t), \quad t: 0 \to \frac{\pi}{2}$
- $\gamma(t) = (t, \sqrt{1-t^2}), \quad t: 1 \to -1$

等等...（参数方程不唯一）




$-L$ 的参数方程可以是：

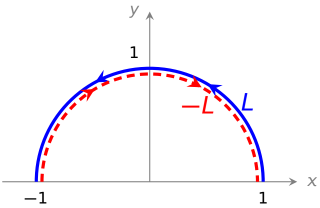
例 如图有向曲线 $L$ 的参数方程是：

- $\gamma(t) = (\cos t, \sin t), \quad t : 0 \to \pi$
- $\gamma(t) = (\cos 2t, \sin 2t), \quad t : 0 \to \frac{\pi}{2}$
- $\gamma(t) = (t, \sqrt{1-t^2}), \quad t : 1 \to -1$

等等...（参数方程不唯一）

$-L$ 的参数方程可以是：

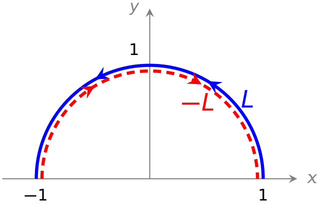
- $\gamma(t) = (\cos t, \sin t), \quad t : \pi \to 0$



**例** 如图有向曲线 $L$ 的参数方程是：

- $\gamma(t) = (\cos t, \sin t), \quad t: 0 \to \pi$
- $\gamma(t) = (\cos 2t, \sin 2t), \quad t: 0 \to \frac{\pi}{2}$
- $\gamma(t) = (t, \sqrt{1-t^2}), \quad t: 1 \to -1$

等等...（参数方程不唯一）




$-L$ 的参数方程可以是：

- $\gamma(t) = (\cos t, \sin t), \quad t: \pi \to 0$
- $\gamma(t) = (\cos 2t, \sin 2t), \quad t: \frac{\pi}{2} \to 0$

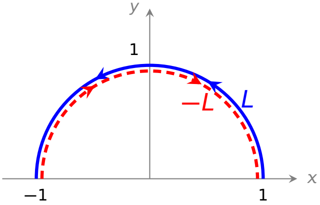
例 如图有向曲线 $L$ 的参数方程是：

- $\gamma(t) = (\cos t, \sin t), \quad t: 0 \to \pi$
- $\gamma(t) = (\cos 2t, \sin 2t), \quad t: 0 \to \frac{\pi}{2}$
- $\gamma(t) = (t, \sqrt{1-t^2}), \quad t: 1 \to -1$

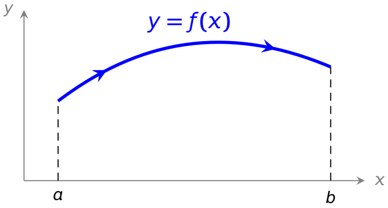
等等...（参数方程不唯一）

$-L$ 的参数方程可以是：

- $\gamma(t) = (\cos t, \sin t), \quad t: \pi \to 0$
- $\gamma(t) = (\cos 2t, \sin 2t), \quad t: \frac{\pi}{2} \to 0$
- $\gamma(t) = (t, \sqrt{1-t^2}), \quad t: -1 \to 1$

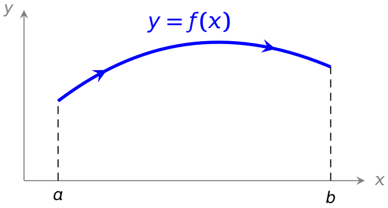


例 如图有向曲线 $L$ 的参数方程是：



例 如图有向曲线 $L$ 的参数方程是：

$$x = t,\ y = f(t), \quad t : a \to b$$

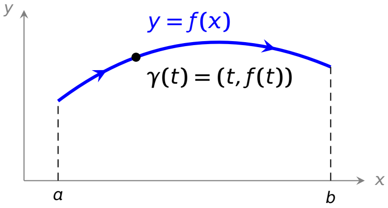


例 如图有向曲线 $L$ 的参数方程是：

$$x = t,\ y = f(t), \quad t : a \to b$$

或者写作：

$$\gamma(t) = (t, f(t)), \quad t : a \to b$$

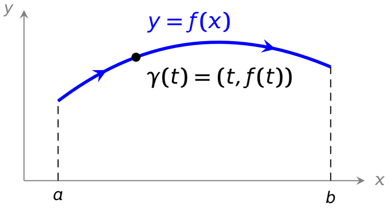


例 如图有向曲线 $L$ 的参数方程是：

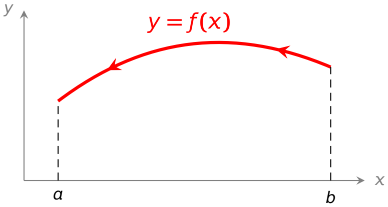
$$x = t,\ y = f(t), \quad t : a \to b$$

或者写作：

$$\gamma(t) = (t, f(t)), \quad t : a \to b$$




例 如图有向曲线 $L$ 的参数方程是：

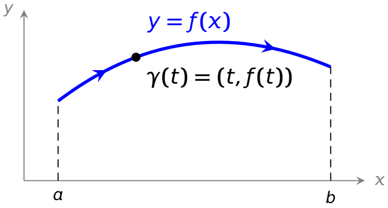


**例** 如图有向曲线 $L$ 的参数方程是：

$$x = t,\ y = f(t),\quad t : a \to b$$

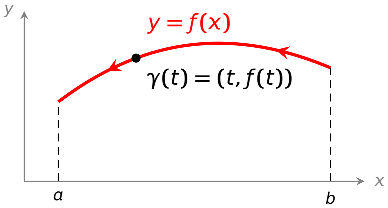
或者写作：

$$\gamma(t) = (t, f(t)),\quad t : a \to b$$




**例** 如图有向曲线 $L$ 的参数方程是：

$$x = t,\ y = f(t),$$

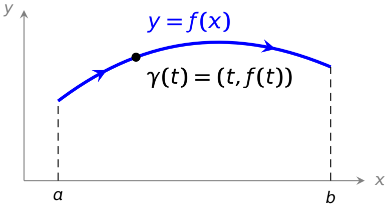


例 如图有向曲线 $L$ 的参数方程是:

$$x=t,\ y=f(t),\quad t:a\to b$$

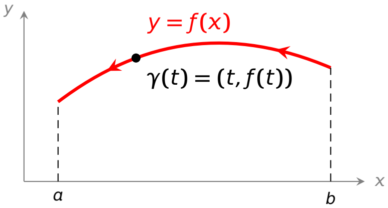
或者写作:

$$\gamma(t)=(t,f(t)),\quad t:a\to b$$




例 如图有向曲线 $L$ 的参数方程是:

$$x=t,\ y=f(t),\quad t:b\to a$$

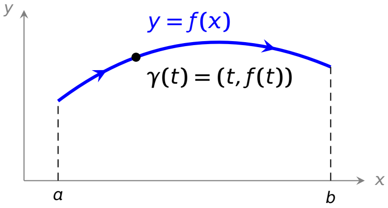


**例** 如图有向曲线 $L$ 的参数方程是：

$$x = t,\ y = f(t), \quad t : a \to b$$

或者写作：

$$\gamma(t) = (t, f(t)), \quad t : a \to b$$

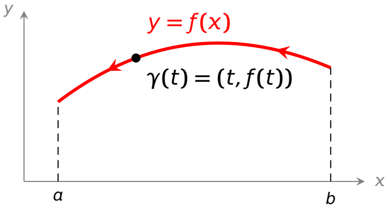



**例** 如图有向曲线 $L$ 的参数方程是：

$$x = t,\ y = f(t), \quad t : b \to a$$

或者写作：

$$\gamma(t) = (t, f(t)), \quad t : b \to a$$

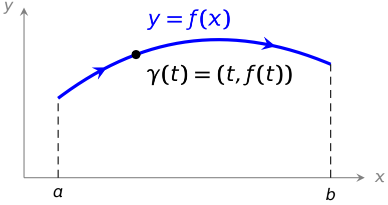


**例** 如图有向曲线 $L$ 的参数方程是：

$$x = t,\ y = f(t), \quad t : a \to b$$

或者写作：

$$\gamma(t) = (t, f(t)), \quad t : a \to b$$




**例** 如图有向曲线 $L$ 的参数方程是：

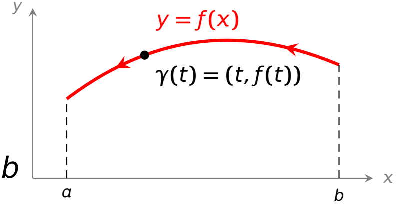
$$x = t,\ y = f(t), \quad t : b \to a$$

或者写作：

$$\gamma(t) = (t, f(t)), \quad t : b \to a$$

参数方程也可以取为：

$$t : a \to b$$

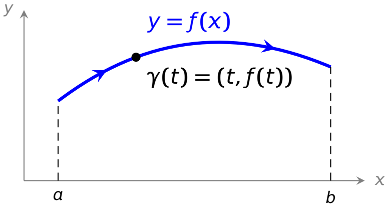


例 如图有向曲线 $L$ 的参数方程是：

$$x = t,\ y = f(t), \quad t : a \to b$$

或者写作：

$$\gamma(t) = (t, f(t)), \quad t : a \to b$$




例 如图有向曲线 $L$ 的参数方程是：

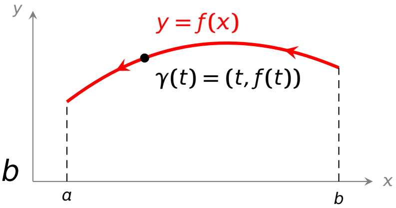
$$x = t,\ y = f(t), \quad t : b \to a$$

或者写作：

$$\gamma(t) = (t, f(t)), \quad t : b \to a$$

参数方程也可以取为：

$$\gamma(t) = (a+b-t, f(a+b-t)), \quad t : a \to b$$



# 曲线积分

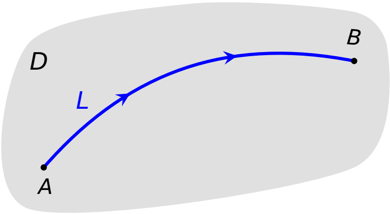
假设

- $P(x,y), Q(x,y)$ 定义在区域 $D$ 上

# 曲线积分

假设

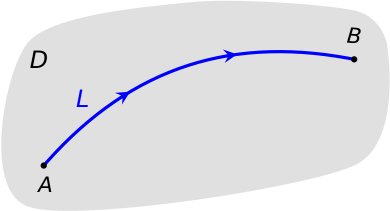
- $P(x, y), Q(x, y)$ 定义在区域 $D$ 上
- $L$ 是 $D$ 中从点 $A$ 到 $B$ 的有向曲线



# 曲线积分

假设

- $P(x,y), Q(x,y)$ 定义在区域 $D$ 上
- $L$ 是 $D$ 中从点 $A$ 到 $B$ 的有向曲线



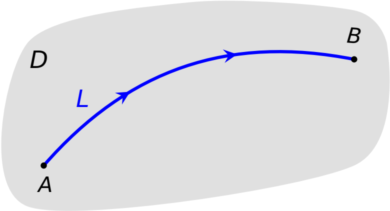

所谓有向曲线 $L$ 上的曲线积分（或者“第二类曲线积分”）指：

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

# 曲线积分

假设

- $P(x, y), Q(x, y)$ 定义在区域 $D$ 上
- $L$ 是 $D$ 中从点 $A$ 到 $B$ 的有向曲线




所谓有向曲线 $L$ 上的曲线积分（或者"第二类曲线积分"）指：

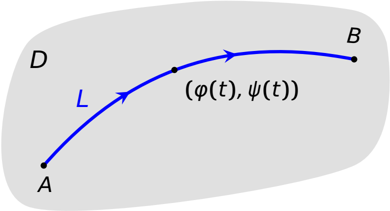
$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

计算方法：设 $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ 是 $L$ 的参数方程，$t$ 从 $\alpha$ 到 $\beta$，则

# 曲线积分

假设

- $P(x,y), Q(x,y)$ 定义在区域 $D$ 上
- $L$ 是 $D$ 中从点 $A$ 到 $B$ 的有向曲线

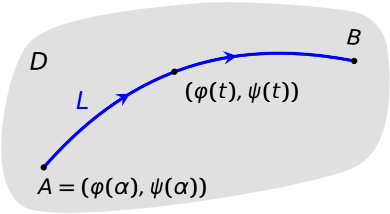



所谓有向曲线 $L$ 上的曲线积分（或者“第二类曲线积分”）指：

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

计算方法：设 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ 是 $L$ 的参数方程，$t$ 从 $\alpha$ 到 $\beta$，则

# 曲线积分




假设

- $P(x, y), Q(x, y)$ 定义在区域 $D$ 上
- $L$ 是 $D$ 中从点 $A$ 到 $B$ 的有向曲线

所谓有向曲线 $L$ 上的曲线积分（或者“第二类曲线积分”）指：

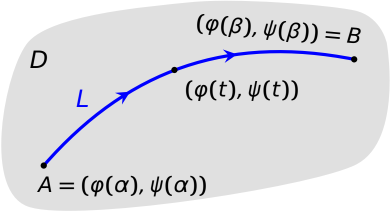
$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

计算方法：设 $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ 是 $L$ 的参数方程，$t$ 从 $\alpha$ 到 $\beta$，则

# 曲线积分

假设

- $P(x,y), Q(x,y)$ 定义在区域 $D$ 上
- $L$ 是 $D$ 中从点 $A$ 到 $B$ 的有向曲线




所谓有向曲线 $L$ 上的曲线积分（或者"第二类曲线积分"）指：

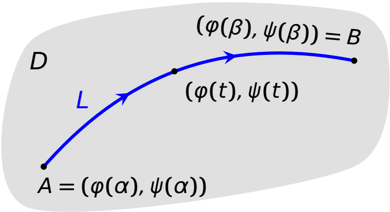
$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

计算方法：设 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ 是 $L$ 的参数方程，$t$ 从 $\alpha$ 到 $\beta$，则

# 曲线积分

假设

- $P(x, y), Q(x, y)$ 定义在区域 $D$ 上
- $L$ 是 $D$ 中从点 $A$ 到 $B$ 的有向曲线




所谓有向曲线 $L$ 上的曲线积分（或者“第二类曲线积分”）指：

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

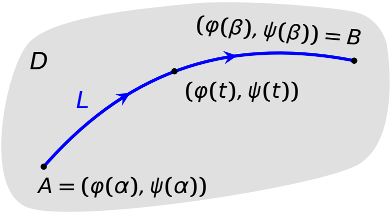
计算方法：设 $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ 是 $L$ 的参数方程，$t$ 从 $\alpha$ 到 $\beta$，则

$$\int_L Pdx + Qdy := \int_\alpha^\beta \Big[P(\varphi(t), \psi(t))d\varphi(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))d\psi(t)\Big]$$

# 曲线积分

假设

- $P(x,y), Q(x,y)$ 定义在区域 $D$ 上
- $L$ 是 $D$ 中从点 $A$ 到 $B$ 的有向曲线




所谓有向曲线 $L$ 上的曲线积分（或者"第二类曲线积分"）指：

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

计算方法：设 $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ 是 $L$ 的参数方程，$t$ 从 $\alpha$ 到 $\beta$，则

$$\begin{aligned}\int_L Pdx + Qdy := &\int_\alpha^\beta \Big[P(\varphi(t), \psi(t))d\varphi(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))d\psi(t)\Big] \\ = &\int_\alpha^\beta \Big[P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)\Big]dt\end{aligned}$$

**性质** 曲线积分的计算方法

$$\int_L Pdx + Qdy := \int_\alpha^\beta \Big[P(\varphi(t),\ \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\ \psi(t))\psi'(t)\Big]dt$$

**性质** 曲线积分的计算方法

$$\int_L Pdx + Qdy := \int_\alpha^\beta \Big[ P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) \Big] dt$$

不依赖于参数方程的选取。

**性质** 曲线积分的计算方法

$$\int_L P dx + Q dy := \int_\alpha^\beta \Big[ P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) \Big] dt$$

不依赖于参数方程的选取。也就是:

若 $x = \tilde{\varphi}(t)$, $y = \tilde{\psi}(t)$, $t : \tilde{\alpha} \to \tilde{\beta}$, 是有向曲线 $L$ 的另外一组参数方程,

性质 曲线积分的计算方法

$$\int_L Pdx + Qdy := \int_\alpha^\beta \Big[P(\varphi(t),\ \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\ \psi(t))\psi'(t)\Big]dt$$

不依赖于参数方程的选取。也就是：

若 $x = \tilde{\varphi}(t),\ y = \tilde{\psi}(t),\ t : \tilde{\alpha} \to \tilde{\beta}$, 是有向曲线 $L$ 的另外一组参数方程，则

$$\int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} \Big[P(\tilde{\varphi}(t),\ \tilde{\psi}(t))\tilde{\varphi}'(t) + Q(\tilde{\varphi}(t),\ \tilde{\psi}(t))\tilde{\psi}'(t)\Big]dt$$

**性质** 曲线积分的计算方法

$$\int_L Pdx + Qdy := \int_\alpha^\beta \Big[P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)\Big]dt$$

不依赖于参数方程的选取。也就是：

若 $x = \widetilde{\varphi}(t), y = \widetilde{\psi}(t), t : \widetilde{\alpha} \to \widetilde{\beta}$, 是有向曲线 $L$ 的另外一组参数方程，则

$$\int_{\widetilde{\alpha}}^{\widetilde{\beta}} \Big[P(\widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\psi}(t))\widetilde{\varphi}'(t) + Q(\widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\psi}(t))\widetilde{\psi}'(t)\Big]dt$$

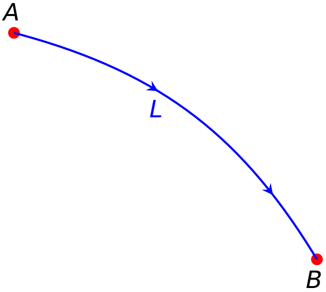
$$= \int_\alpha^\beta \Big[P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)\Big]dt$$

**性质** 设

- $L$ 是有向曲线，
- $-L$ 是 $L$ 的反向曲线，

则

$$\int_{-L} Pdx + Qdy = -\int_{L} Pdx + Qdy$$

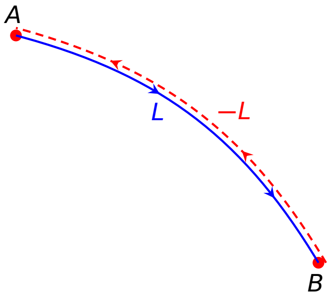


**性质** 设

- $L$ 是有向曲线，
- $-L$ 是 $L$ 的反向曲线，

则

$$\int_{-L} Pdx + Qdy = -\int_{L} Pdx + Qdy$$

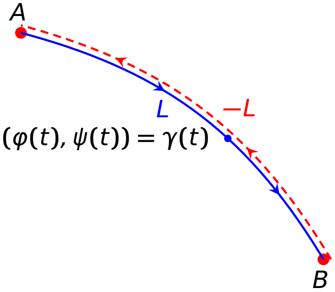


**性质** 设

- $L$ 是有向曲线,
- $-L$ 是 $L$ 的反向曲线,

则

$$\int_{-L} Pdx + Qdy = -\int_L Pdx + Qdy$$



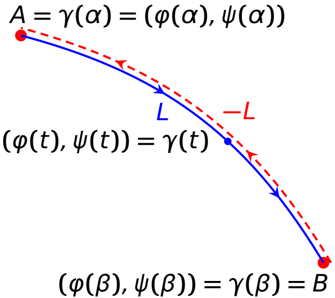

**证明** 设 $L$ 的参数方程是 $\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$, $t : \alpha \to \beta$,

**性质** 设

- $L$ 是有向曲线,
- $-L$ 是 $L$ 的反向曲线,

则

$$\int_{-L} Pdx + Qdy = -\int_{L} Pdx + Qdy$$



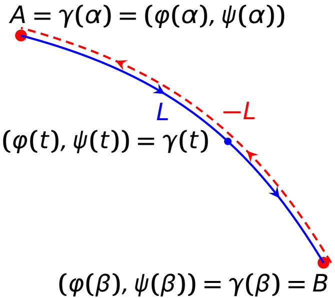

**证明** 设 $L$ 的参数方程是 $\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$, $t: \alpha \to \beta$,

**性质** 设

- $L$ 是有向曲线，
- $-L$ 是 $L$ 的反向曲线，

则

$$\int_{-L} P dx + Q dy = -\int_{L} P dx + Q dy$$



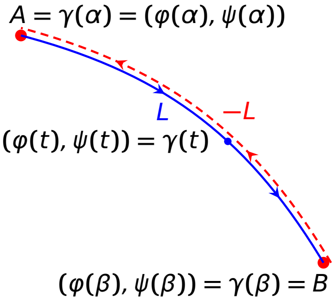

**证明** 设 $L$ 的参数方程是 $\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$, $t : \alpha \to \beta$，则 $-L$ 的参数方程是 $\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$, $t : \beta \to \alpha$。

**性质** 设

- $L$ 是有向曲线，
- $-L$ 是 $L$ 的反向曲线，

则

$$\int_{-L} Pdx + Qdy = -\int_{L} Pdx + Qdy$$




**证明** 设 $L$ 的参数方程是 $\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$, $t : \alpha \to \beta$，则 $-L$ 的参数方程是 $\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$, $t : \beta \to \alpha$。所以

$$\int_{L} Pdx + Qdy$$

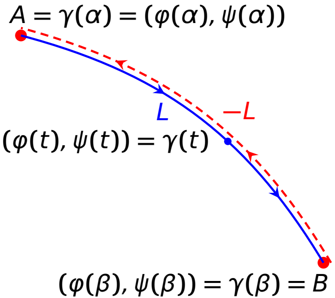
$$\int_{-L} Pdx + Qdy$$

**性质** 设

- $L$ 是有向曲线，
- $-L$ 是 $L$ 的反向曲线，

则

$$\int_{-L} Pdx + Qdy = -\int_{L} Pdx + Qdy$$




**证明** 设 $L$ 的参数方程是 $\gamma(t)=(\varphi(t),\ \psi(t)),\ t:\alpha\to\beta$，则 $-L$ 的参数方程是 $\gamma(t)=(\varphi(t),\ \psi(t)),\ t:\beta\to\alpha$。所以

$$\int_{L} Pdx + Qdy = \int_{\alpha}^{\beta}\Big[P(\varphi(t),\ \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\ \psi(t))\psi'(t)\Big]dt$$

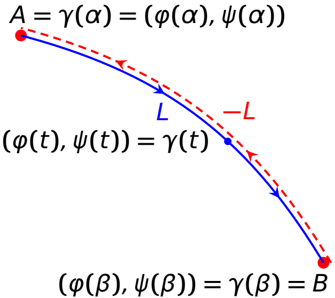
$$\int_{-L} Pdx + Qdy$$

**性质** 设

- $L$ 是有向曲线，
- $-L$ 是 $L$ 的反向曲线，

则

$$\int_{-L} Pdx + Qdy = -\int_{L} Pdx + Qdy$$




**证明** 设 $L$ 的参数方程是 $\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$, $t : \alpha \to \beta$，则 $-L$ 的参数方程是 $\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$, $t : \beta \to \alpha$。所以

$$\int_{L} Pdx + Qdy = \int_{\alpha}^{\beta} \Big[ P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) \Big] dt$$

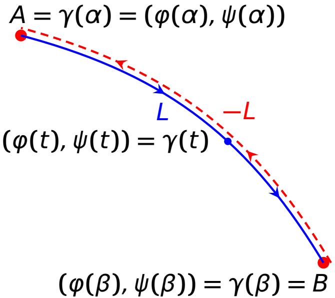
$$\int_{-L} Pdx + Qdy = \int_{\beta}^{\alpha} \Big[ P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) \Big] dt$$

**性质** 设

- $L$ 是有向曲线，
- $-L$ 是 $L$ 的反向曲线，

则

$$\int_{-L} Pdx + Qdy = -\int_L Pdx + Qdy$$




**证明** 设 $L$ 的参数方程是 $\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t)), t : \alpha \to \beta$，则 $-L$ 的参数方程是 $\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t)), t : \beta \to \alpha$。所以

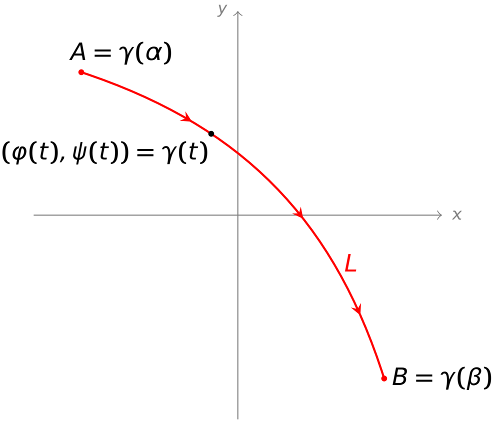
$$\int_L Pdx + Qdy = \int_\alpha^\beta \Big[P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)\Big]dt$$

$$\int_{-L} Pdx + Qdy = \int_\beta^\alpha \Big[P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)\Big]dt$$

$$\Rightarrow \int_{-L} Pdx + Qdy = -\int_L Pdx + Qdy$$

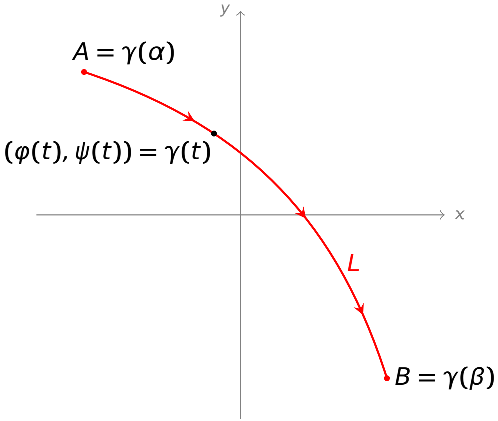
# 曲线积分的其他表达式

$$\int_L Pdx + Qdy \quad = \int_\alpha^\beta \Big[ P(\varphi(t),\ \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\ \psi(t))\psi'(t) \Big] dt$$



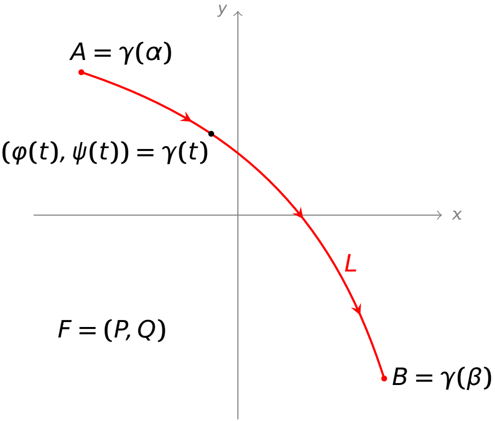
# 曲线积分的其他表达式

$$\begin{aligned}\int_L Pdx + Qdy &= \int_\alpha^\beta \Big[P(\varphi(t),\ \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\ \psi(t))\psi'(t)\Big]dt \\ &= \int_\alpha^\beta \Big[\big(P(\gamma(t)),\ Q(\gamma(t))\big)\cdot\big(\varphi'(t),\ \psi'(t)\big)\Big]dt\end{aligned}$$



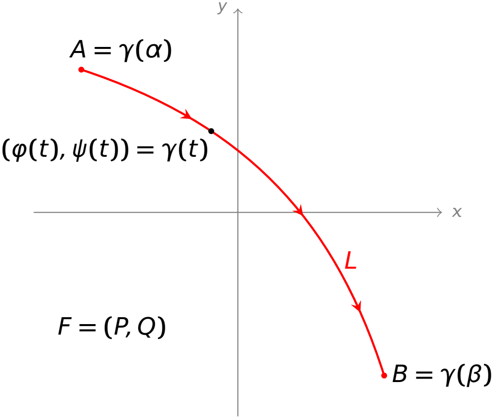
# 曲线积分的其他表达式

$$\begin{aligned}\int_L Pdx+Qdy &= \int_\alpha^\beta \Big[P(\varphi(t),\,\psi(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\,\psi(t))\psi'(t)\Big]dt\\ &= \int_\alpha^\beta \Big[\big(P(\gamma(t)),\,Q(\gamma(t))\big)\cdot\big(\varphi'(t),\,\psi'(t)\big)\Big]dt\end{aligned}$$



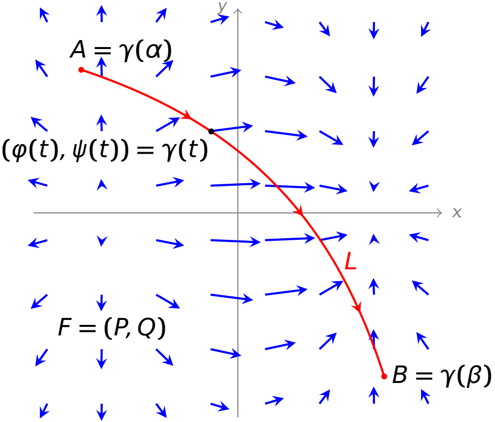
# 曲线积分的其他表达式

$$\begin{aligned}\int_L Pdx+Qdy &= \int_\alpha^\beta \Big[P(\varphi(t),\,\psi(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\,\psi(t))\psi'(t)\Big]dt\\ &= \int_\alpha^\beta \Big[\big(P(\gamma(t)),\,Q(\gamma(t))\big)\cdot\big(\varphi'(t),\,\psi'(t)\big)\Big]dt\\ &= \int_\alpha^\beta \Big[F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\Big]dt\end{aligned}$$



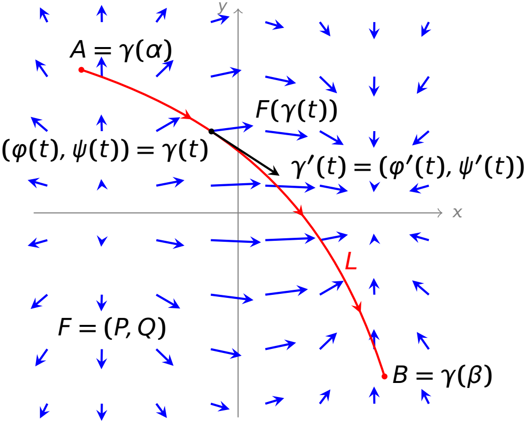
# 曲线积分的其他表达式

$$\begin{aligned}\int_L Pdx+Qdy &= \int_\alpha^\beta \Big[P(\varphi(t),\,\psi(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\,\psi(t))\psi'(t)\Big]dt\\ &= \int_\alpha^\beta \Big[\big(P(\gamma(t)),\,Q(\gamma(t))\big)\cdot\big(\varphi'(t),\,\psi'(t)\big)\Big]dt\\ &= \int_\alpha^\beta \Big[F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\Big]dt\end{aligned}$$

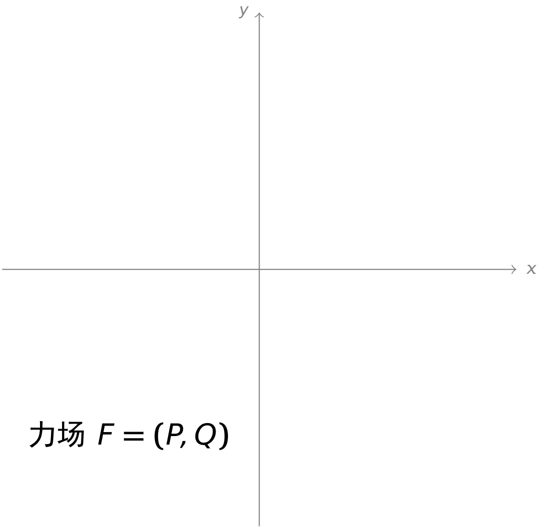


# 曲线积分的其他表达式

$$
\begin{aligned}
\int_L Pdx + Qdy &= \int_\alpha^\beta \Big[ P(\varphi(t),\, \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\, \psi(t))\psi'(t) \Big] dt \\
&= \int_\alpha^\beta \Big[ \big(P(\gamma(t)),\, Q(\gamma(t))\big) \cdot \big(\varphi'(t),\, \psi'(t)\big) \Big] dt \\
&= \int_\alpha^\beta \Big[ F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \Big] dt
\end{aligned}
$$

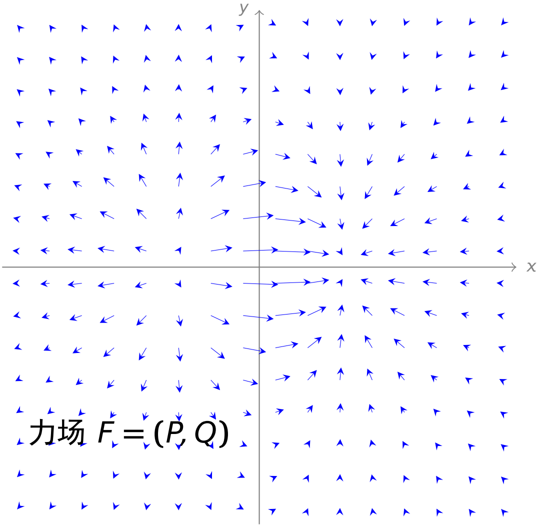


# 对坐标的曲线积分的物理应用：做功




力场 $F = (P, Q)$

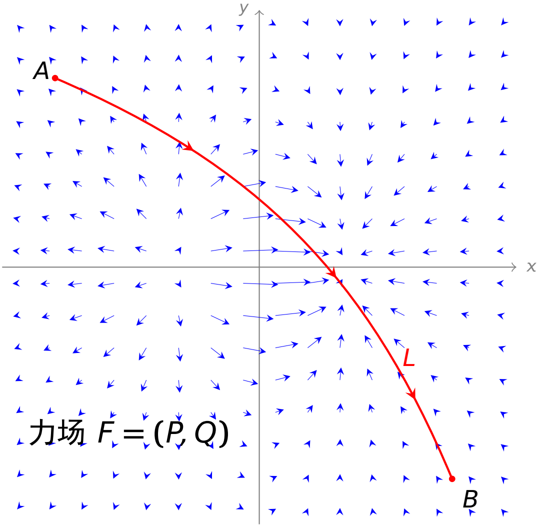
# 对坐标的曲线积分的物理应用：做功




力场 $F = (P, Q)$

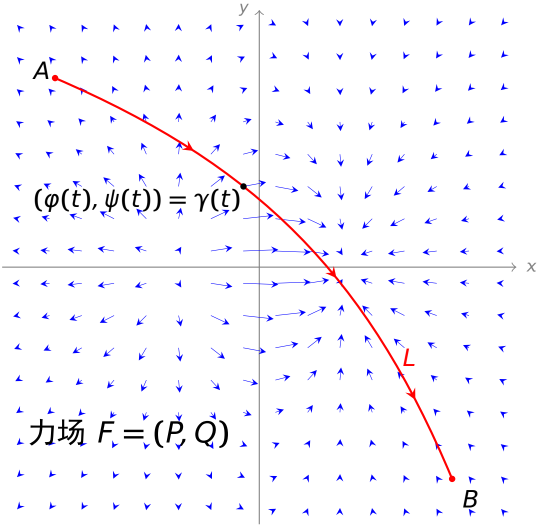
# 对坐标的曲线积分的物理应用：做功

$$W =$$



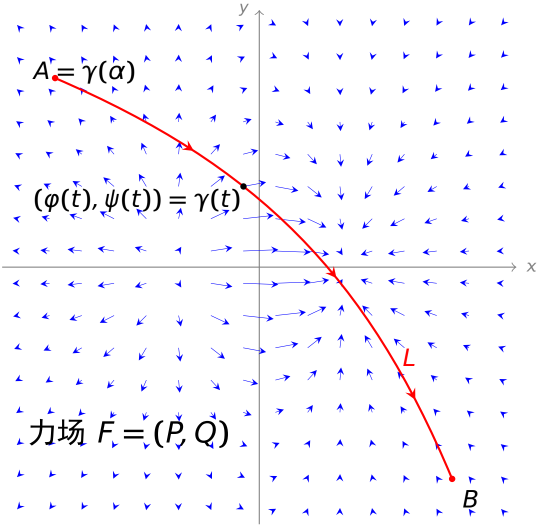
# 对坐标的曲线积分的物理应用：做功

$$W =$$



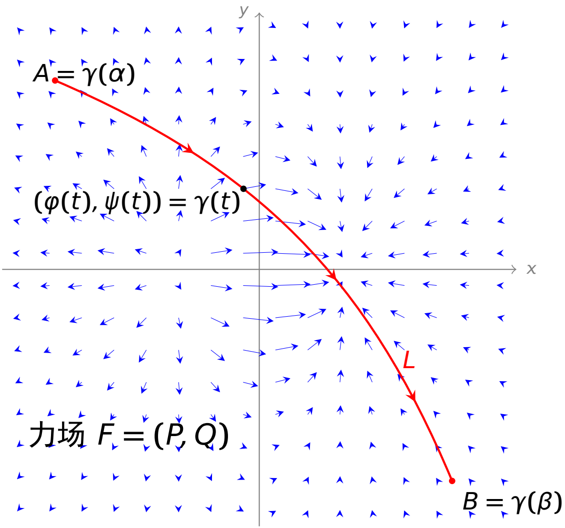
# 对坐标的曲线积分的物理应用：做功

$$W =$$



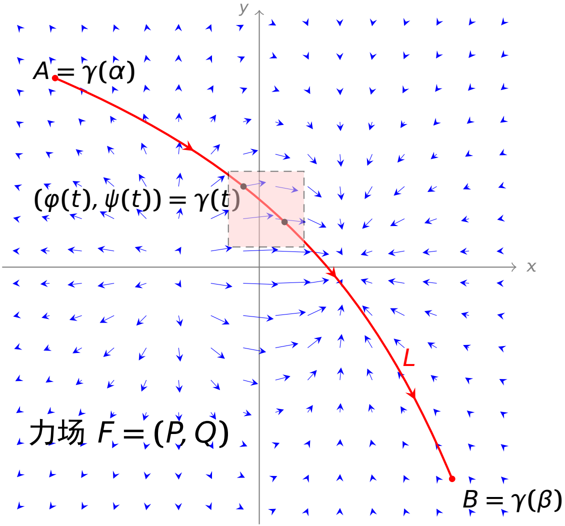
# 对坐标的曲线积分的物理应用：做功

$$W =$$



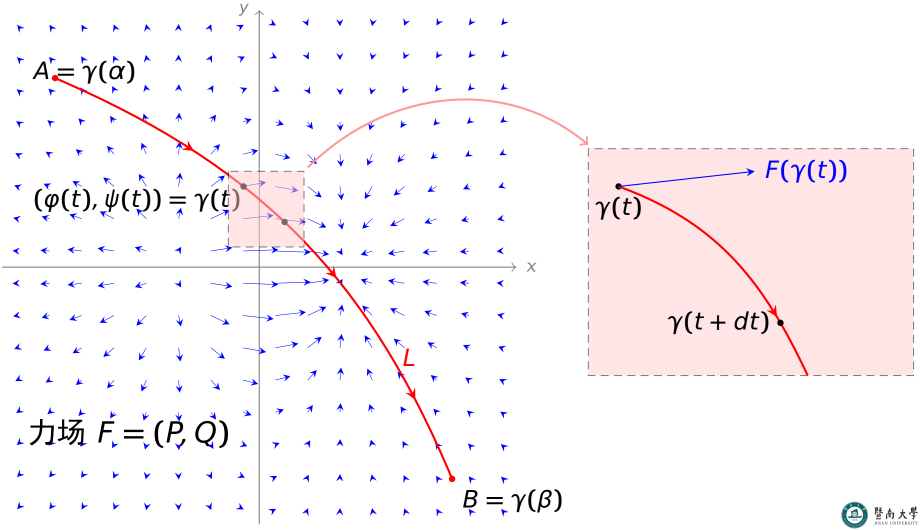
# 对坐标的曲线积分的物理应用：做功

$$W =$$



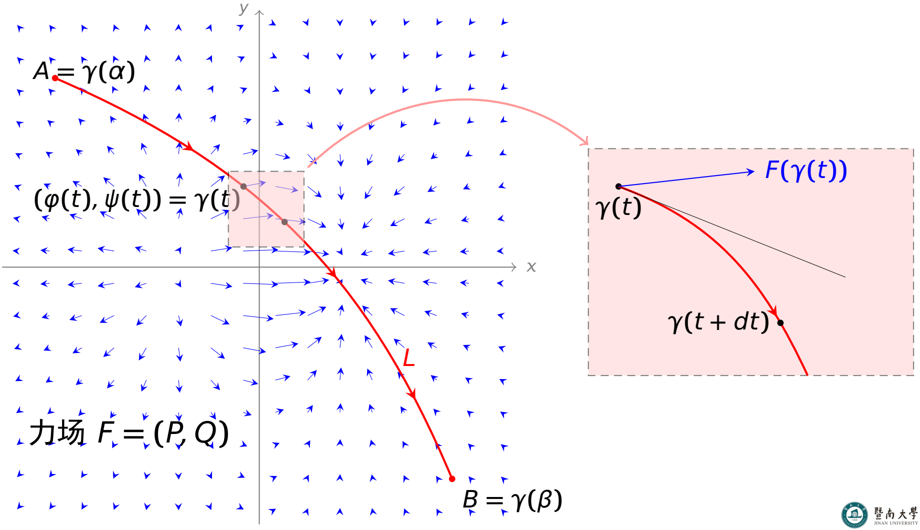
# 对坐标的曲线积分的物理应用：做功

$W =$



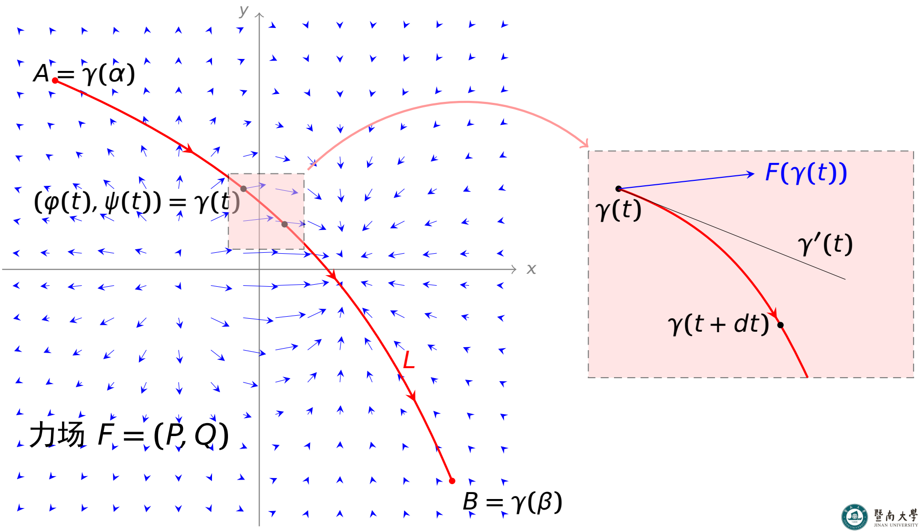
# 对坐标的曲线积分的物理应用：做功

$W =$



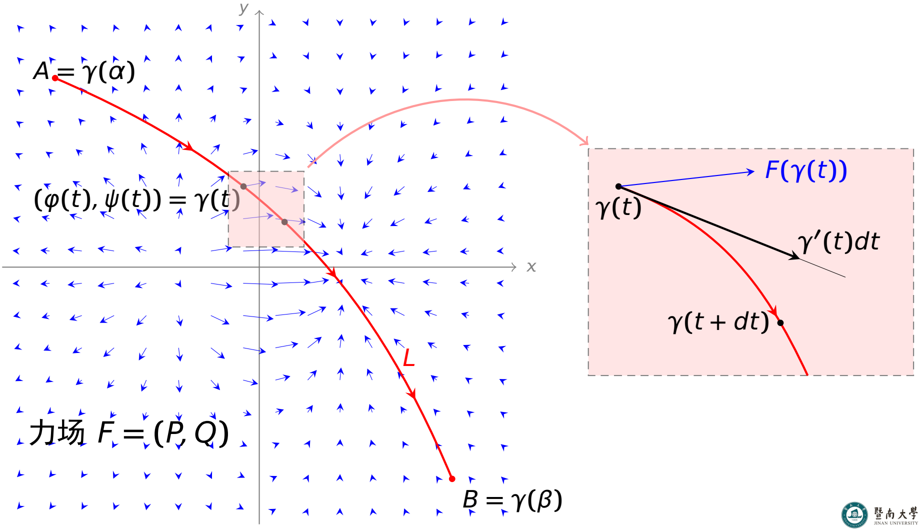
# 对坐标的曲线积分的物理应用：做功

$W =$



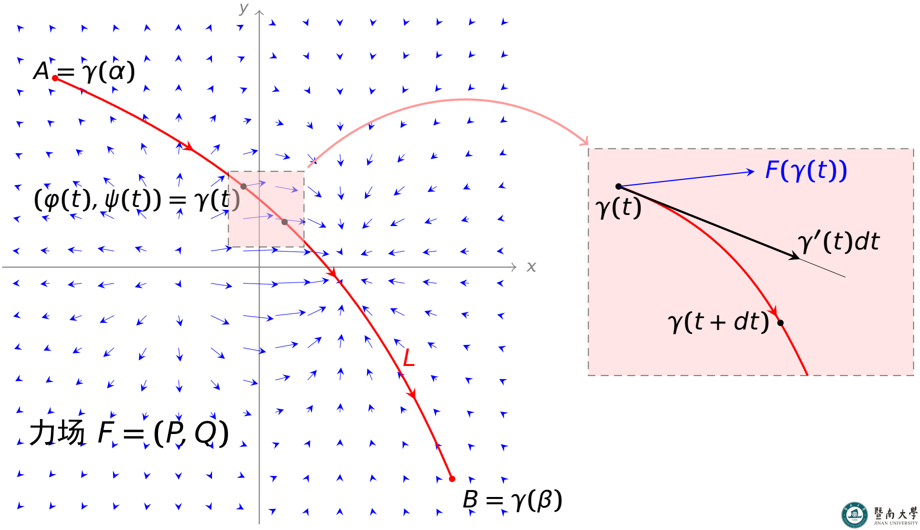
# 对坐标的曲线积分的物理应用：做功

$$W =$$



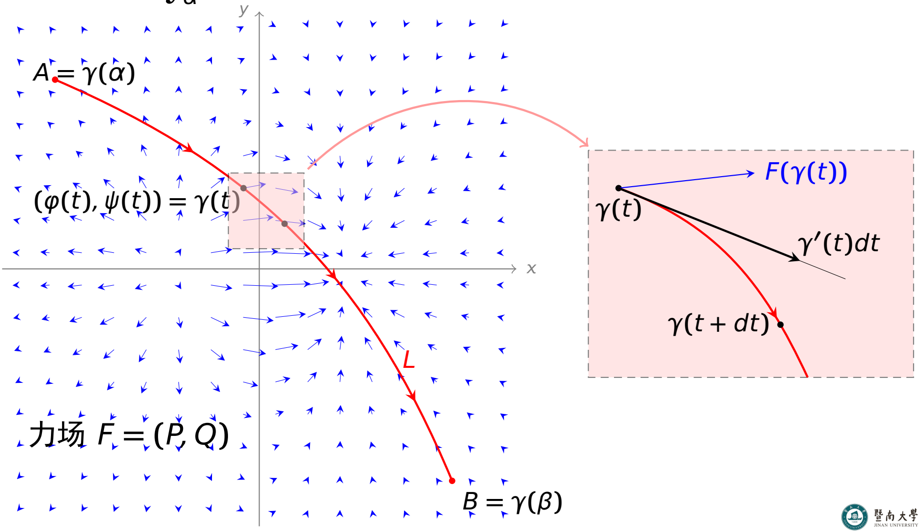
# 对坐标的曲线积分的物理应用：做功

$$W = \quad F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt$$



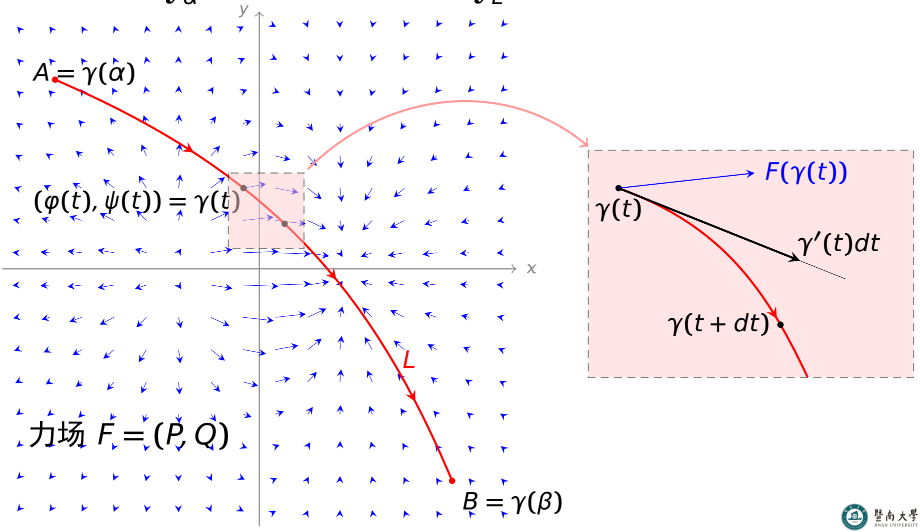
# 对坐标的曲线积分的物理应用：做功

$$W = \int_{\alpha}^{\beta} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$



# 对坐标的曲线积分的物理应用：做功

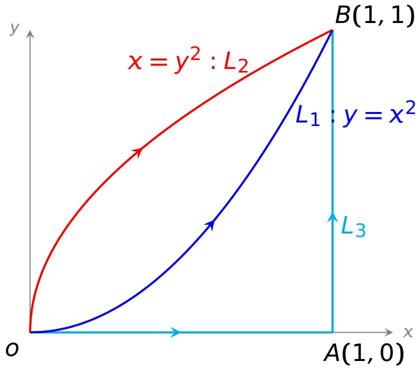
$$W=\int_{\alpha}^{\beta}F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt=\int_{L}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$



**例 1** 计算

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy$$

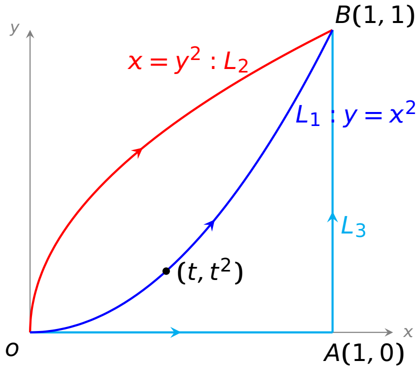
（$i = 1, 2, 3$），其中 $L_i$ 如右图所示



**例 1** 计算

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy$$

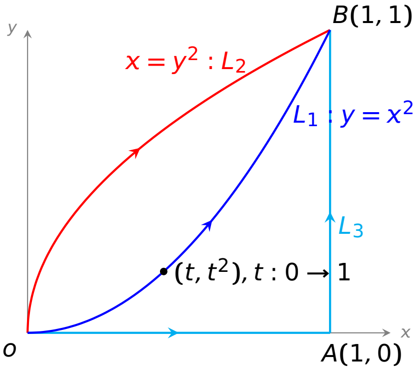
（$i = 1, 2, 3$），其中 $L_i$ 如右图所示



**例 1** 计算

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy$$

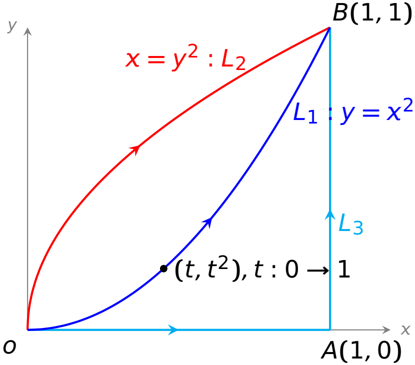
（$i = 1, 2, 3$），其中 $L_i$ 如右图所示



**例 1** 计算

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy$$

（$i = 1, 2, 3$），其中 $L_i$ 如右图所示



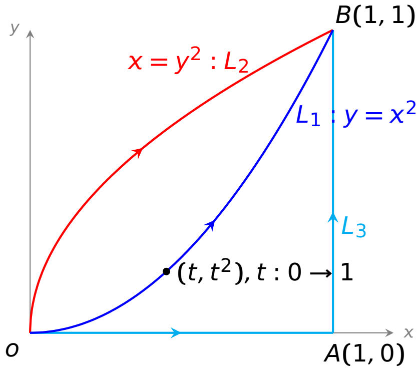

**解**

$$I_1 = \int_0^1 \left[2t \cdot t^2 \cdot t' + t^2 \cdot (t^2)'\right] dt$$

**例 1** 计算

$$I_i = \int_{L_i} 2xy dx + x^2 dy$$

（$i = 1, 2, 3$），其中 $L_i$ 如右图所示



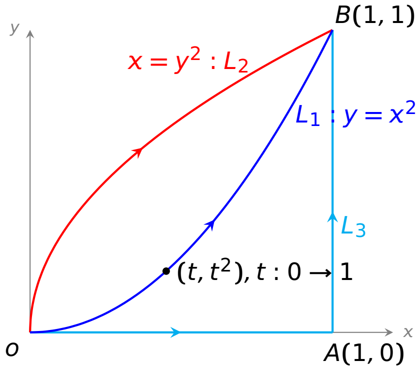

**解**

$$I_1 = \int_0^1 \left[ 2t \cdot t^2 \cdot t' + t^2 \cdot (t^2)' \right] dt = 4 \int_0^1 t^3 dt$$

**例 1** 计算

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy$$

（$i = 1, 2, 3$），其中 $L_i$ 如右图所示



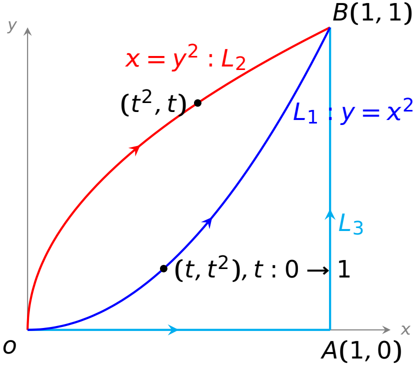

**解**

$$I_1 = \int_0^1 \left[2t \cdot t^2 \cdot t' + t^2 \cdot (t^2)'\right]dt = 4\int_0^1 t^3 dt = 1,$$

**例 1** 计算

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy$$

（$i = 1, 2, 3$），其中 $L_i$ 如右图所示



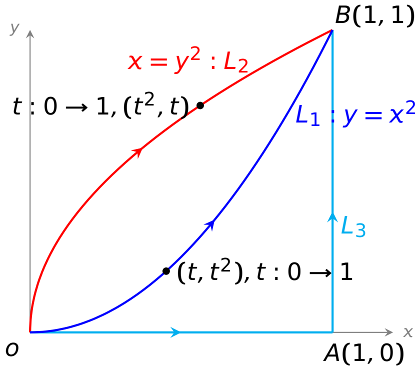

**解**

$$I_1 = \int_0^1 \left[2t \cdot t^2 \cdot t' + t^2 \cdot (t^2)'\right]dt = 4\int_0^1 t^3dt = 1,$$

例 1 计算

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy$$

$(i = 1, 2, 3)$，其中 $L_i$ 如右图所示



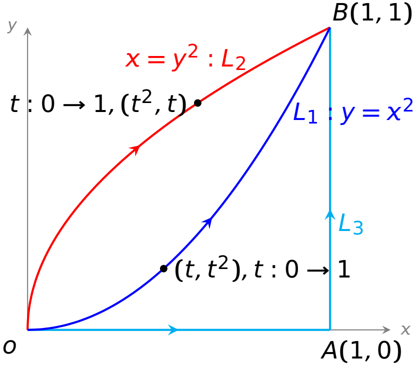

解

$$I_1 = \int_0^1 \left[2t \cdot t^2 \cdot t' + t^2 \cdot (t^2)'\right]dt = 4\int_0^1 t^3 dt = 1,$$

**例 1** 计算

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy$$

（$i = 1, 2, 3$），其中 $L_i$ 如右图所示




**解**

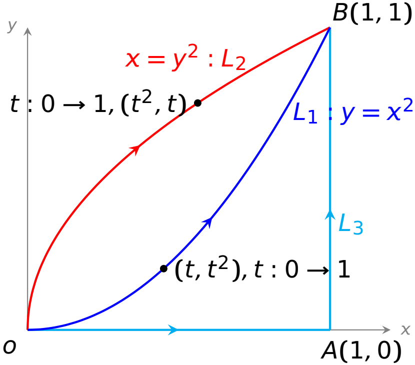
$$I_1 = \int_0^1 \left[ 2t \cdot t^2 \cdot t' + t^2 \cdot (t^2)' \right] dt = 4 \int_0^1 t^3 dt = 1,$$

$$I_2 = \int_0^1 \left[ 2t^2 \cdot t \cdot (t^2)' + (t^2)^2 \cdot t' \right] dt$$

**例 1** 计算

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy$$

($i = 1, 2, 3$)，其中 $L_i$ 如右图所示




**解**

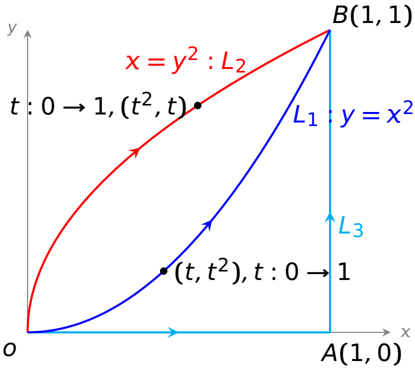
$$I_1 = \int_0^1 \left[ 2t \cdot t^2 \cdot t' + t^2 \cdot (t^2)' \right] dt = 4 \int_0^1 t^3 dt = 1,$$

$$I_2 = \int_0^1 \left[ 2t^2 \cdot t \cdot (t^2)' + (t^2)^2 \cdot t' \right] dt = 5 \int_0^1 t^4 dt$$

**例 1** 计算

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy$$

($i = 1, 2, 3$)，其中 $L_i$ 如右图所示




**解**

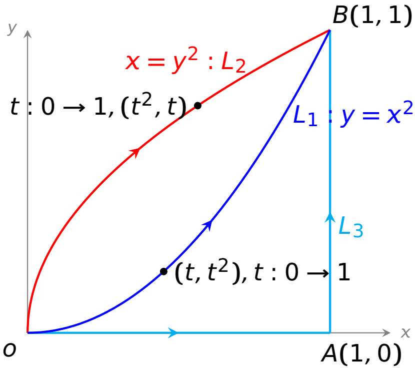
$$I_1 = \int_0^1 \left[2t \cdot t^2 \cdot t' + t^2 \cdot (t^2)'\right]dt = 4\int_0^1 t^3 dt = 1,$$

$$I_2 = \int_0^1 \left[2t^2 \cdot t \cdot (t^2)' + (t^2)^2 \cdot t'\right]dt = 5\int_0^1 t^4 dt = 1,$$

例 1 计算

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy$$

（$i = 1, 2, 3$），其中 $L_i$ 如右图所示




解

$$I_1 = \int_0^1 \left[2t \cdot t^2 \cdot t' + t^2 \cdot (t^2)'\right]dt = 4\int_0^1 t^3 dt = 1,$$

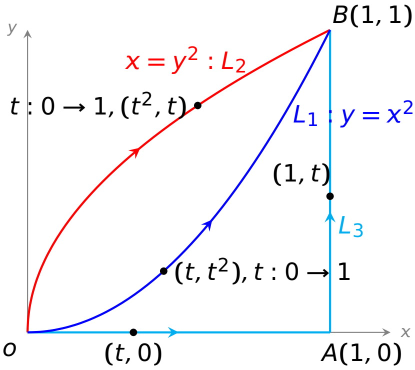
$$I_2 = \int_0^1 \left[2t^2 \cdot t \cdot (t^2)' + (t^2)^2 \cdot t'\right]dt = 5\int_0^1 t^4 dt = 1,$$

$$I_3 = \int_{OA}(2xydx + x^2dy) + \int_{AB}(2xydx + x^2dy)$$

**例 1** 计算

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy$$

（$i = 1, 2, 3$），其中 $L_i$ 如右图所示




**解**

$$I_1 = \int_0^1 \left[2t \cdot t^2 \cdot t' + t^2 \cdot (t^2)'\right]dt = 4\int_0^1 t^3dt = 1,$$

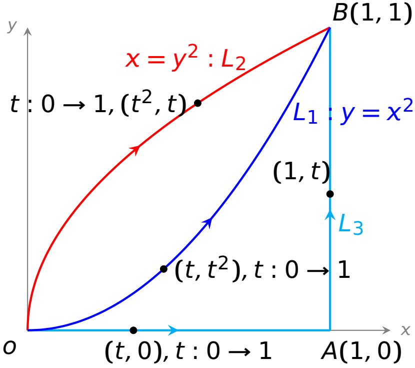
$$I_2 = \int_0^1 \left[2t^2 \cdot t \cdot (t^2)' + (t^2)^2 \cdot t'\right]dt = 5\int_0^1 t^4dt = 1,$$

$$I_3 = \int_{OA}(2xydx + x^2dy) + \int_{AB}(2xydx + x^2dy)$$

**例 1** 计算

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy$$

（$i = 1, 2, 3$），其中 $L_i$ 如右图所示




**解**

$$I_1 = \int_0^1 \left[2t \cdot t^2 \cdot t' + t^2 \cdot (t^2)'\right]dt = 4\int_0^1 t^3 dt = 1,$$

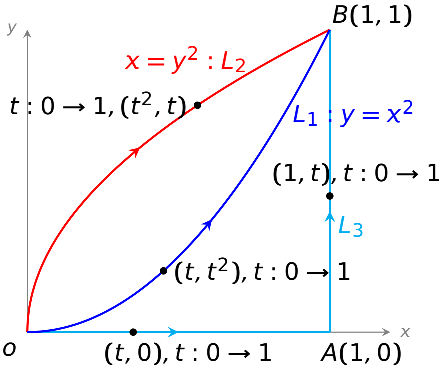
$$I_2 = \int_0^1 \left[2t^2 \cdot t \cdot (t^2)' + (t^2)^2 \cdot t'\right]dt = 5\int_0^1 t^4 dt = 1,$$

$$I_3 = \int_{OA}(2xydx + x^2dy) + \int_{AB}(2xydx + x^2dy)$$

**例 1** 计算

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy$$

（$i = 1, 2, 3$），其中 $L_i$ 如右图所示




**解**

$$I_1 = \int_0^1 \left[ 2t \cdot t^2 \cdot t' + t^2 \cdot (t^2)' \right] dt = 4 \int_0^1 t^3 dt = 1,$$

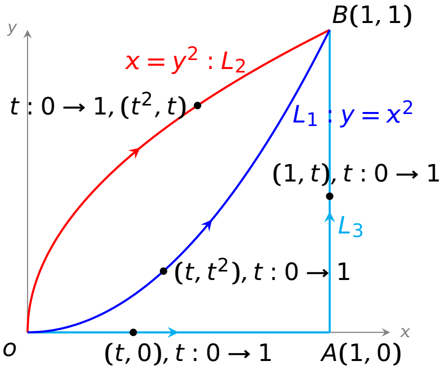
$$I_2 = \int_0^1 \left[ 2t^2 \cdot t \cdot (t^2)' + (t^2)^2 \cdot t' \right] dt = 5 \int_0^1 t^4 dt = 1,$$

$$I_3 = \int_{OA} (2xydx + x^2dy) + \int_{AB} (2xydx + x^2dy)$$

例 1 计算

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy$$

（$i = 1, 2, 3$），其中 $L_i$ 如右图所示




解

$$I_1 = \int_0^1 \left[ 2t \cdot t^2 \cdot t' + t^2 \cdot (t^2)' \right] dt = 4 \int_0^1 t^3 dt = 1,$$

$$I_2 = \int_0^1 \left[ 2t^2 \cdot t \cdot (t^2)' + (t^2)^2 \cdot t' \right] dt = 5 \int_0^1 t^4 dt = 1,$$

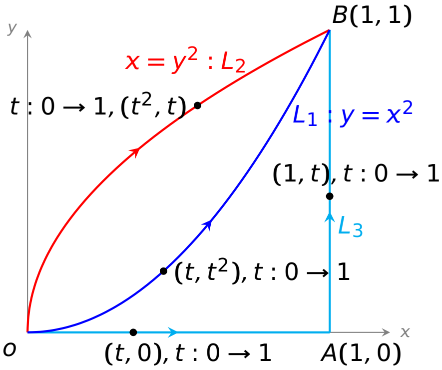
$$I_3 = \int_{OA} (2xydx + x^2dy) + \int_{AB} (2xydx + x^2dy)$$

$$= \int_0^1 \left[ 2t \cdot 0 \cdot t' + t^2 \cdot 0' \right] dt +$$

**例 1** 计算

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy$$

（$i = 1, 2, 3$），其中 $L_i$ 如右图所示




**解**

$$I_1 = \int_0^1 \left[2t \cdot t^2 \cdot t' + t^2 \cdot (t^2)'\right]dt = 4\int_0^1 t^3 dt = 1,$$

$$I_2 = \int_0^1 \left[2t^2 \cdot t \cdot (t^2)' + (t^2)^2 \cdot t'\right]dt = 5\int_0^1 t^4 dt = 1,$$

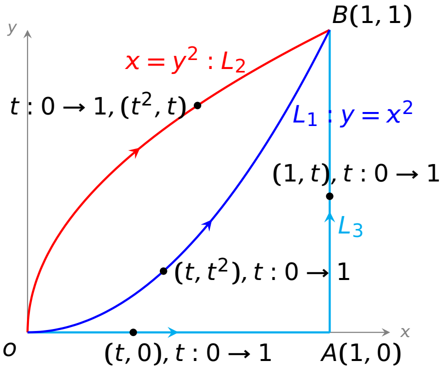
$$I_3 = \int_{OA}(2xydx + x^2dy) + \int_{AB}(2xydx + x^2dy)$$

$$= \int_0^1 \left[2t \cdot 0 \cdot t' + t^2 \cdot 0'\right]dt + \int_0^1 \left[2 \cdot 1 \cdot t \cdot 1' + 1^2 \cdot t'\right]dt$$

**例 1** 计算

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy$$

($i = 1, 2, 3$)，其中 $L_i$ 如右图所示




**解**

$$I_1 = \int_0^1 \left[2t \cdot t^2 \cdot t' + t^2 \cdot (t^2)'\right]dt = 4\int_0^1 t^3 dt = 1,$$

$$I_2 = \int_0^1 \left[2t^2 \cdot t \cdot (t^2)' + (t^2)^2 \cdot t'\right]dt = 5\int_0^1 t^4 dt = 1,$$

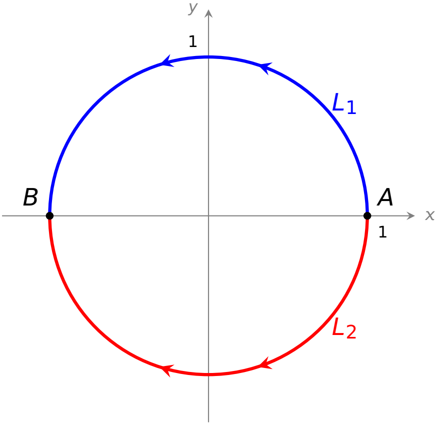
$$I_3 = \int_{OA}(2xydx + x^2dy) + \int_{AB}(2xydx + x^2dy)$$

$$= \int_0^1 \left[2t \cdot 0 \cdot t' + t^2 \cdot 0'\right]dt + \int_0^1 \left[2 \cdot 1 \cdot t \cdot 1' + 1^2 \cdot t'\right]dt = 1.$$

**例 2** 计算

$$I_i = \int_{L_i} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$$

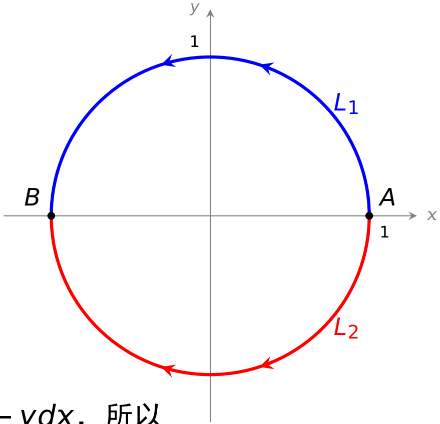
（$i = 1, 2$），其中 $L_i$ 如右图所示



**例 2** 计算

$$I_i = \int_{L_i} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

（$i = 1, 2$），其中 $L_i$ 如右图所示

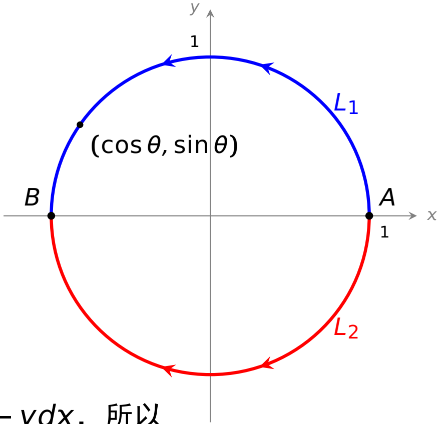



**解** 注意在单位圆周上，$I_i = \int_{L_i} xdy - ydx$，所以

**例 2** 计算

$$I_i = \int_{L_i} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$$

（$i = 1, 2$），其中 $L_i$ 如右图所示

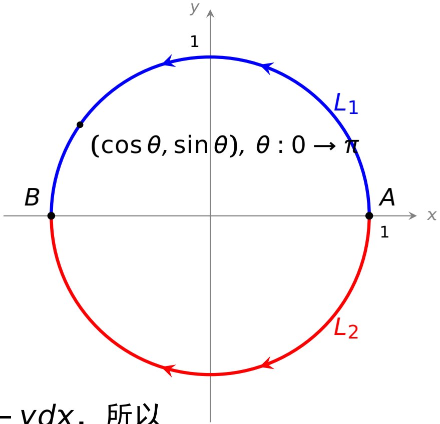



**解** 注意在单位圆周上，$I_i = \int_{L_i} x dy - y dx$，所以

**例 2** 计算

$$I_i = \int_{L_i} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

（$i = 1, 2$），其中 $L_i$ 如右图所示

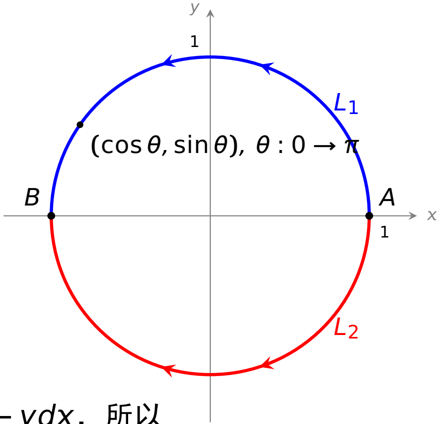



**解** 注意在单位圆周上，$I_i = \int_{L_i} xdy - ydx$，所以

**例 2** 计算

$$I_i = \int_{L_i} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

（$i = 1, 2$），其中 $L_i$ 如右图所示



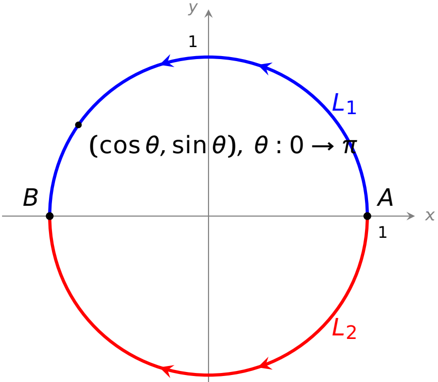

**解** 注意在单位圆周上，$I_i = \int_{L_i} xdy - ydx$，所以

$$I_1 = \int_0^{\pi} \Big[\cos\theta \cdot (\sin\theta)' - \sin\theta \cdot (\cos\theta)'\Big] d\theta$$

例 2 计算

$$I_i = \int_{L_i} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

（$i = 1, 2$），其中 $L_i$ 如右图所示



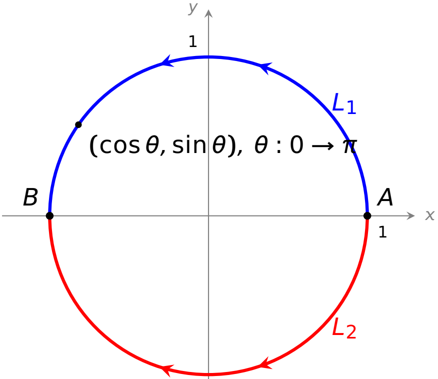

解 注意在单位圆周上，$I_i = \int_{L_i} xdy - ydx$，所以

$$I_1 = \int_0^{\pi} \left[\cos\theta \cdot (\sin\theta)' - \sin\theta \cdot (\cos\theta)'\right] d\theta = \int_0^{\pi} 1 d\theta$$

**例 2** 计算

$$I_i = \int_{L_i} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

（$i = 1, 2$），其中 $L_i$ 如右图所示



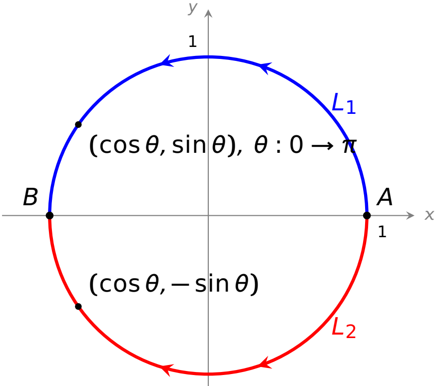

**解** 注意在单位圆周上，$I_i = \int_{L_i} xdy - ydx$，所以

$$I_1 = \int_0^{\pi} \Big[\cos\theta \cdot (\sin\theta)' - \sin\theta \cdot (\cos\theta)'\Big] d\theta = \int_0^{\pi} 1 d\theta = \pi,$$

**例 2** 计算

$$I_i = \int_{L_i} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

（$i = 1, 2$），其中 $L_i$ 如右图所示



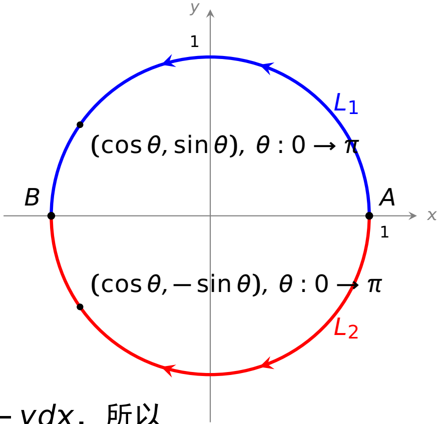

**解** 注意在单位圆周上，$I_i = \int_{L_i} xdy - ydx$，所以

$$I_1 = \int_0^{\pi} \Big[\cos\theta \cdot (\sin\theta)' - \sin\theta \cdot (\cos\theta)'\Big] d\theta = \int_0^{\pi} 1 d\theta = \pi,$$

例 2 计算

$$I_i = \int_{L_i} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

（$i = 1, 2$），其中 $L_i$ 如右图所示



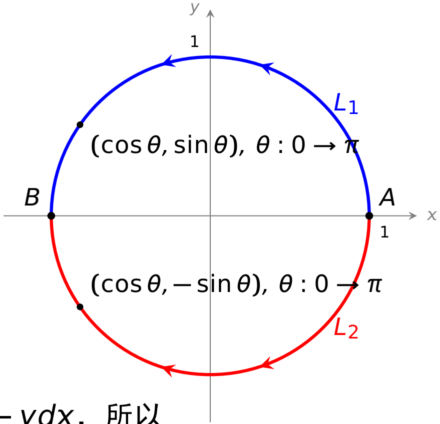

解 注意在单位圆周上，$I_i = \int_{L_i} xdy - ydx$，所以

$$I_1 = \int_0^{\pi} \Big[\cos\theta \cdot (\sin\theta)' - \sin\theta \cdot (\cos\theta)'\Big] d\theta = \int_0^{\pi} 1 d\theta = \pi,$$

例 2 计算

$$I_i = \int_{L_i} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

($i = 1, 2$)，其中 $L_i$ 如右图所示




解 注意在单位圆周上，$I_i = \int_{L_i} xdy - ydx$，所以

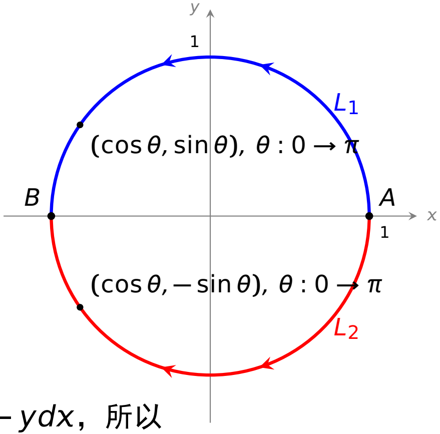
$$I_1 = \int_0^{\pi} \Big[\cos\theta \cdot (\sin\theta)' - \sin\theta \cdot (\cos\theta)'\Big] d\theta = \int_0^{\pi} 1 d\theta = \pi,$$

$$I_2 = \int_0^{\pi} \Big[\cos\theta \cdot (-\sin\theta)' - (-\sin\theta) \cdot (\cos\theta)'\Big] d\theta$$

**例 2** 计算

$$I_i=\int_{L_i}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$

$(i=1,2)$，其中 $L_i$ 如右图所示




**解** 注意在单位圆周上，$I_i=\int_{L_i}xdy-ydx$，所以

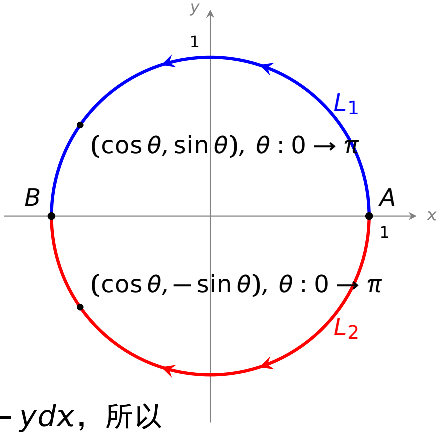
$$I_1=\int_0^{\pi}\Big[\cos\theta\cdot(\sin\theta)'-\sin\theta\cdot(\cos\theta)'\Big]d\theta=\int_0^{\pi}1d\theta=\pi,$$

$$I_2=\int_0^{\pi}\Big[\cos\theta\cdot(-\sin\theta)'-(-\sin\theta)\cdot(\cos\theta)'\Big]d\theta=\int_0^{\pi}-1d\theta$$

**例 2** 计算

$$I_i = \int_{L_i} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

（$i = 1, 2$），其中 $L_i$ 如右图所示




**解** 注意在单位圆周上，$I_i = \int_{L_i} xdy - ydx$，所以

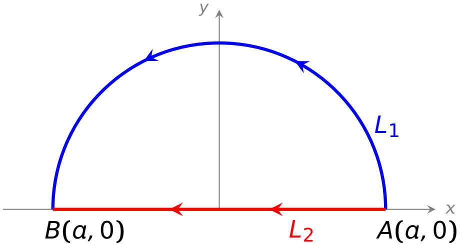
$$I_1 = \int_0^\pi \Big[\cos\theta \cdot (\sin\theta)' - \sin\theta \cdot (\cos\theta)'\Big] d\theta = \int_0^\pi 1 d\theta = \pi,$$

$$I_2 = \int_0^\pi \Big[\cos\theta \cdot (-\sin\theta)' - (-\sin\theta) \cdot (\cos\theta)'\Big] d\theta = \int_0^\pi -1 d\theta = -\pi.$$

例 3 计算

$$I_i = \int_{L_i} (x+y+1)dx + ydy$$

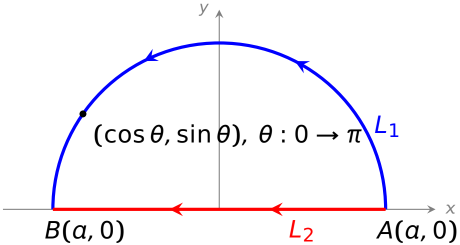
（$i=1,2$），其中 $L_i$ 如右图所示



**例 3** 计算

$$I_i = \int_{L_i} (x+y+1)dx + ydy$$

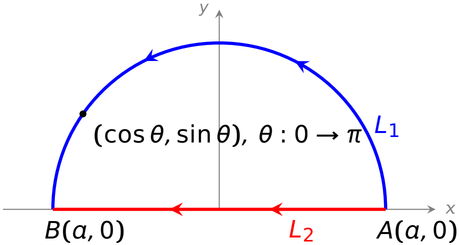
（$i = 1, 2$），其中 $L_i$ 如右图所示



例 3 计算

$$I_i = \int_{L_i} (x+y+1)dx + ydy$$

（$i = 1, 2$），其中 $L_i$ 如右图所示



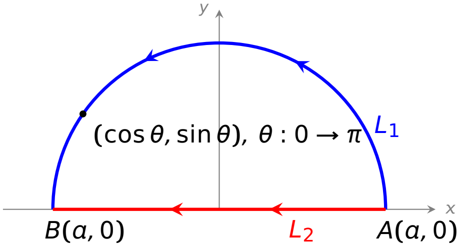

解

$$I_1 = \int_0^{\pi} \Big[(a\cos\theta + a\sin\theta + 1)\cdot(a\cos t)' + a\sin\theta\cdot(a\sin\theta)'\Big]d\theta$$

**例 3** 计算

$$I_i = \int_{L_i} (x+y+1)dx + ydy$$

（$i = 1, 2$），其中 $L_i$ 如右图所示




**解**

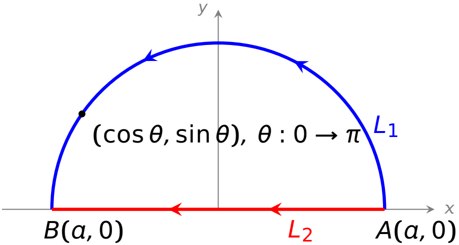
$$I_1 = \int_0^{\pi} \Big[ (a\cos\theta + a\sin\theta + 1)\cdot(a\cos t)' + a\sin\theta\cdot(a\sin\theta)' \Big] d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \Big[ -a^2\sin^2\theta - a\sin\theta \Big] d\theta$$

**例 3** 计算

$$I_i = \int_{L_i} (x+y+1)dx + ydy$$

（$i=1,2$），其中 $L_i$ 如右图所示




**解**

$$I_1 = \int_0^{\pi} \Big[ (a\cos\theta + a\sin\theta + 1)\cdot(a\cos t)' + a\sin\theta\cdot(a\sin\theta)' \Big] d\theta$$

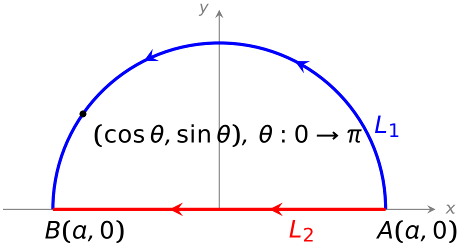
$$= \int_0^{\pi} \Big[ -a^2\sin^2\theta - a\sin\theta \Big] d\theta$$

$$= -a^2 \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta - a\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta$$

**例 3** 计算

$$I_i=\int_{L_i}(x+y+1)dx+ydy$$

（$i=1,2$），其中 $L_i$ 如右图所示




**解**

$$I_1=\int_0^{\pi}\Big[(a\cos\theta+a\sin\theta+1)\cdot(a\cos t)'+a\sin\theta\cdot(a\sin\theta)'\Big]d\theta$$

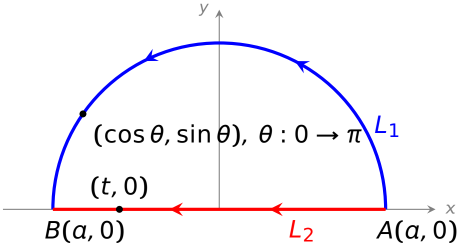
$$=\int_0^{\pi}\Big[-a^2\sin^2\theta-a\sin\theta\Big]d\theta$$

$$=-a^2\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta-a\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta \quad =-\frac{1}{2}\pi a^2-2a,$$

**例 3** 计算

$$I_i = \int_{L_i} (x+y+1)dx + ydy$$

（$i=1,2$），其中 $L_i$ 如右图所示




**解**

$$I_1 = \int_0^{\pi} \Big[(a\cos\theta + a\sin\theta + 1)\cdot(a\cos t)' + a\sin\theta\cdot(a\sin\theta)'\Big]d\theta$$

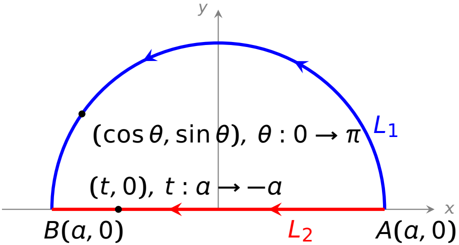
$$= \int_0^{\pi} \Big[-a^2\sin^2\theta - a\sin\theta\Big]d\theta$$

$$= -a^2\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta - a\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta \quad = -\frac{1}{2}\pi a^2 - 2a,$$

**例 3** 计算

$$I_i = \int_{L_i} (x+y+1)dx + ydy$$

（$i = 1, 2$），其中 $L_i$ 如右图所示




**解**

$$I_1 = \int_0^{\pi} \Big[(a\cos\theta + a\sin\theta + 1)\cdot(a\cos t)' + a\sin\theta\cdot(a\sin\theta)'\Big]d\theta$$

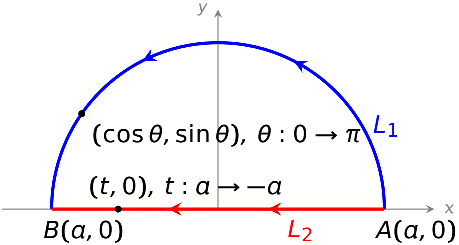
$$= \int_0^{\pi} \Big[-a^2\sin^2\theta - a\sin\theta\Big]d\theta$$

$$= -a^2\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta - a\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta \quad = -\frac{1}{2}\pi a^2 - 2a,$$

**例 3** 计算

$$I_i = \int_{L_i} (x+y+1)dx + ydy$$

（$i=1,2$），其中 $L_i$ 如右图所示




**解**

$$I_1 = \int_0^\pi \Big[(a\cos\theta + a\sin\theta + 1)\cdot(a\cos t)' + a\sin\theta\cdot(a\sin\theta)'\Big]d\theta$$

$$= \int_0^\pi \Big[-a^2\sin^2\theta - a\sin\theta\Big]d\theta$$

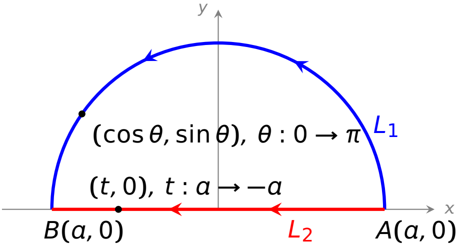
$$= -a^2\int_0^\pi \frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta - a\int_0^\pi \sin\theta d\theta \quad = -\frac{1}{2}\pi a^2 - 2a,$$

$$I_2 = \int_a^{-a} \Big[(\theta+0+1)\cdot(\theta)' + 0\cdot(0)'\Big]d\theta$$

**例 3** 计算

$$I_i = \int_{L_i} (x+y+1)dx + ydy$$

（$i = 1, 2$），其中 $L_i$ 如右图所示




**解**

$$I_1 = \int_0^{\pi} \Big[(a\cos\theta + a\sin\theta + 1)\cdot(a\cos t)' + a\sin\theta\cdot(a\sin\theta)'\Big]d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \Big[-a^2\sin^2\theta - a\sin\theta\Big]d\theta$$

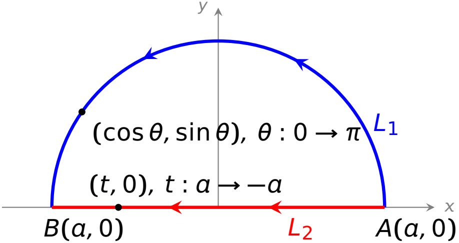
$$= -a^2\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta - a\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta \quad = -\frac{1}{2}\pi a^2 - 2a,$$

$$I_2 = \int_a^{-a}\Big[(\theta+0+1)\cdot(\theta)' + 0\cdot(0)'\Big]d\theta = \int_a^{-a}(\theta+1)d\theta$$

**例 3** 计算

$$I_i = \int_{L_i} (x+y+1)dx + ydy$$

（$i = 1, 2$），其中 $L_i$ 如右图所示




**解**

$$I_1 = \int_0^{\pi} \Big[(a\cos\theta + a\sin\theta + 1)\cdot(a\cos t)' + a\sin\theta\cdot(a\sin\theta)'\Big]d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \Big[-a^2\sin^2\theta - a\sin\theta\Big]d\theta$$

$$= -a^2\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta - a\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta \quad = -\frac{1}{2}\pi a^2 - 2a,$$

$$I_2 = \int_a^{-a}\Big[(\theta+0+1)\cdot(\theta)' + 0\cdot(0)'\Big]d\theta = \int_a^{-a}(\theta+1)d\theta = -2a.$$

# We are here now...

1. 对坐标的曲线积分：平面有向曲线

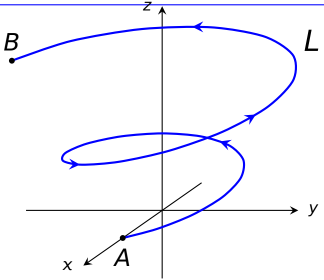
2. 对坐标的曲线积分：空间有向曲线

3. 两类曲线积分的联系

# 空间曲线的曲线积分

假设

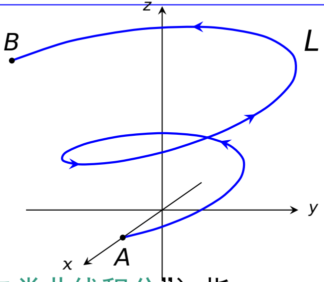
- $D$ 是空间中三维有界闭区域
- $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ 定义在 $D$ 上
- $L$ 是 $D$ 中从点 $A$ 到 $B$ 的有向曲线



# 空间曲线的曲线积分

假设

- $D$ 是空间中三维有界闭区域
- $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ 定义在 $D$ 上
- $L$ 是 $D$ 中从点 $A$ 到 $B$ 的有向曲线



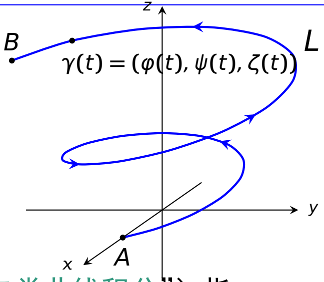

所谓有向曲线 $L$ 上的曲线积分（或者“第二类曲线积分”）指：

$$\int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

# 空间曲线的曲线积分

假设

- $D$ 是空间中三维有界闭区域
- $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ 定义在 $D$ 上
- $L$ 是 $D$ 中从点 $A$ 到 $B$ 的有向曲线




所谓有向曲线 $L$ 上的曲线积分（或者“第二类曲线积分”）指：

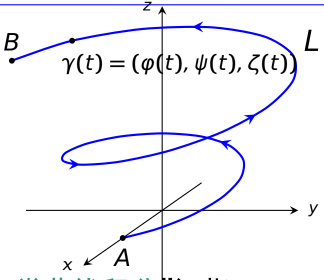
$$\int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

计算方法：设 $\gamma(t)=(\varphi(t),\psi(t),\xi(t))$ 是 $L$ 参数方程，$t:\alpha\to\beta$，则

# 空间曲线的曲线积分

假设

- $D$ 是空间中三维有界闭区域
- $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ 定义在 $D$ 上
- $L$ 是 $D$ 中从点 $A$ 到 $B$ 的有向曲线




所谓有向曲线 $L$ 上的曲线积分（或者“第二类曲线积分”）指：

$$\int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

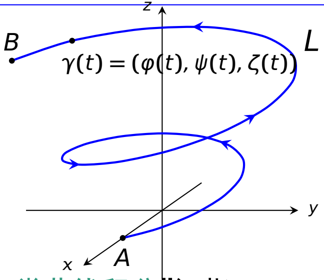
计算方法：设 $\gamma(t)=(\varphi(t),\psi(t),\xi(t))$ 是 $L$ 参数方程，$t:\alpha\to\beta$，则

$$\int_L Pdx+Qdy+Rdz := \int_\alpha^\beta \Big[P(\gamma(t))d\varphi(t)+Q(\gamma(t))d\psi(t)+R(\gamma(t))d\zeta(t)\Big]$$

# 空间曲线的曲线积分

假设

- $D$ 是空间中三维有界闭区域
- $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ 定义在 $D$ 上
- $L$ 是 $D$ 中从点 $A$ 到 $B$ 的有向曲线




所谓有向曲线 $L$ 上的曲线积分（或者“第二类曲线积分”）指：

$$\int_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$

计算方法：设 $\gamma(t)=(\varphi(t),\psi(t),\xi(t))$ 是 $L$ 参数方程，$t:\alpha\to\beta$，则

$$\int_L Pdx+Qdy+Rdz:=\int_\alpha^\beta\left[P(\gamma(t))d\varphi(t)+Q(\gamma(t))d\psi(t)+R(\gamma(t))d\zeta(t)\right]$$

$$=\int_\alpha^\beta\left[P(\gamma(t))\varphi'(t)+Q(\gamma(t))\psi'(t)+R(\gamma(t))\zeta'(t)\right]dt$$

例 计算 $\int_L \cos z dx + e^x dy + e^y dz$，其中 $L$ 是有向曲线 $\gamma(t) = (1, t, e^t),\ t : 0 \to 2$

**例** 计算 $\int_L \cos z dx + e^x dy + e^y dz$，其中 $L$ 是有向曲线 $\gamma(t) = (1, t, e^t),\ t : 0 \to 2$

**解**

$$原式 = \int_0^2 \Big[\cos(e^t)\cdot(1)' + e^1\cdot(t)' + e^t\cdot(e^t)'\Big]dt$$

**例** 计算 $\int_L \cos z dx + e^x dy + e^y dz$，其中 $L$ 是有向曲线 $\gamma(t) = (1, t, e^t)$, $t : 0 \to 2$

**解**

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int_0^2 \Big[\cos(e^t) \cdot (1)' + e^1 \cdot (t)' + e^t \cdot (e^t)'\Big] dt \\
&= \int_0^2 \Big[e + e^{2t}\Big] dt
\end{aligned}
$$

**例** 计算 $\int_L \cos z dx + e^x dy + e^y dz$，其中 $L$ 是有向曲线 $\gamma(t) = (1, t, e^t)$, $t : 0 \to 2$

**解**

$$原式 = \int_0^2 \Big[\cos(e^t)\cdot(1)' + e^1\cdot(t)' + e^t\cdot(e^t)'\Big]dt$$

$$= \int_0^2 \Big[e + e^{2t}\Big]dt = et + \frac{1}{2}e^{2t}\Big|_0^2$$

例 计算 $\int_L \cos z dx + e^x dy + e^y dz$，其中 $L$ 是有向曲线 $\gamma(t) = (1, t, e^t)$, $t : 0 \to 2$

解

$$\text{原式} = \int_0^2 \Big[\cos(e^t)\cdot(1)' + e^1\cdot(t)' + e^t\cdot(e^t)'\Big]dt$$

$$= \int_0^2 \Big[e + e^{2t}\Big]dt = et + \frac{1}{2}e^{2t}\Big|_0^2 = \frac{1}{2}e^4 + 2e - \frac{1}{2}$$

# We are here now...

1. 对坐标的曲线积分：平面有向曲线

2. 对坐标的曲线积分：空间有向曲线

3. 两类曲线积分的联系

假设

- $P(x, y)$, $Q(x, y)$ 是定义在平面区域 $D$ 上二元函数,
- $X = (P, Q)$ 是 $D$ 上向量场,
- 平面曲线 $L$ 的参数方程为 $\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$, $t : \alpha \to \beta$,

则

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy =$$

假设

- $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 是定义在平面区域 $D$ 上二元函数，
- $X=(P,Q)$ 是 $D$ 上向量场，
- 平面曲线 $L$ 的参数方程为 $\gamma(t)=(\varphi(t),\psi(t))$, $t:\alpha\to\beta$，

则

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_L X(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt$$

假设

- $P(x, y)$, $Q(x, y)$ 是定义在平面区域 $D$ 上二元函数，
- $X = (P, Q)$ 是 $D$ 上向量场，
- 平面曲线 $L$ 的参数方程为 $\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$, $t : \alpha \to \beta$,

则

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_L X(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt$$

$$= \int_L X(\gamma(t)) \cdot \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} \cdot |\gamma'(t)|dt$$

假设

- $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 是定义在平面区域 $D$ 上二元函数，
- $X=(P,Q)$ 是 $D$ 上向量场，
- 平面曲线 $L$ 的参数方程为 $\gamma(t)=(\varphi(t),\psi(t))$, $t:\alpha\to\beta$,

则

$$\begin{aligned}\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy &= \int_L X(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt\\ &= \int_L X(\gamma(t))\cdot\frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}\cdot|\gamma'(t)|dt\\ &= \int_L X(\gamma(t))\cdot\frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}\cdot\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}dt\end{aligned}$$

假设

- $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 是定义在平面区域 $D$ 上二元函数，
- $X=(P,Q)$ 是 $D$ 上向量场，
- 平面曲线 $L$ 的参数方程为 $\gamma(t)=(\varphi(t),\psi(t))$, $t:\alpha\to\beta$,

则

$$\begin{aligned}
\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy &= \int_L X(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt \\
&= \int_L X(\gamma(t))\cdot\frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}\cdot|\gamma'(t)|dt \\
&= \int_L X(\gamma(t))\cdot\frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}\cdot\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}dt \\
&= \int_L X(\gamma(t))\cdot\frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}ds
\end{aligned}$$