

§5.1 不定积分的概念与性质

数学系 梁卓滨

2017-2018 学年 II

教学要求

◇ “原函数” 的概念, “不定积分” 的概念

♣ 会计算简单的不定积分



We are here now...

1. “原函数”与“不定积分”的概念

2. 不定积分的性质

3. 不定积分的几何意义

回顾导数

函数的导数，即是函数的变化率：

$$F'(x) = f(x)$$

回顾导数

函数的导数，即是函数的变化率：

$$F'(x) = f(x)$$

不少概念是通过导数来定义

路程-速度 路程函数： $s = s(t)$ ，则

$$s'(t) = v(t)$$

为速度函数。

回顾导数

函数的导数，即是函数的变化率：

$$F'(x) = f(x)$$

不少概念是通过导数来定义

路程- 速度 路程函数： $s = s(t)$ ， 则

$$s'(t) = v(t)$$

为速度函数。

曲线图形- 斜率 曲线： $y = f(x)$ ， 则

$$f'(x) = k(x)$$

为曲线在点 $(x, f(x))$ 处的斜率。

回顾导数

函数的导数，即是函数的变化率：

$$F'(x) = f(x)$$

不少概念是通过导数来定义

路程- 速度 路程函数： $s = s(t)$ ， 则

$$s'(t) = v(t)$$

为速度函数。

曲线图形- 斜率 曲线： $y = f(x)$ ， 则

$$f'(x) = k(x)$$

为曲线在点 $(x, f(x))$ 处的斜率。

成本- 边际成本 成本函数： $C = C(x)$ ， 则

$$C'(x) = MC$$

为边际成本函数。

求导练习

- 求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法

求导练习

- 求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法

回顾性练习

1. $(x^3)' = \underline{\hspace{2cm}}$; $(x^{7/5})' = \underline{\hspace{2cm}}$; $(x^{-1/2})' = \underline{\hspace{2cm}}$;
2. $(x^\alpha)' = \underline{\hspace{2cm}}$;

求导练习

- 求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法

回顾性练习

1. $(x^3)' = \underline{\quad}$; $(x^{7/5})' = \underline{\quad}$; $(x^{-1/2})' = \underline{\quad}$;
2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^\alpha}$;

求导练习

- 求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法

回顾性练习

1. $(x^3)' = \underline{\quad\quad}$; $(x^{7/5})' = \underline{\quad\quad}$; $(x^{-1/2})' = \underline{\quad\quad}$;

2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$;

求导练习

- 求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法

回顾性练习

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$; $(x^{7/5})' = \underline{\quad}$; $(x^{-1/2})' = \underline{\quad}$;
2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$;

求导练习

- 求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法

回顾性练习

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$; $(x^{7/5})' = \underline{\hspace{1cm}}$; $(x^{-1/2})' = \underline{\hspace{1cm}}$;

2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$;

求导练习

- 求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法

回顾性练习

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$; $(x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^?}$; $(x^{-1/2})' = \underline{\hspace{2cm}}$;

2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$;

求导练习

- 求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法

回顾性练习

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$; $(x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}$; $(x^{-1/2})' = \underline{\hspace{2cm}}$;
2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$;

求导练习

- 求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法

回顾性练习

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$; $(x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}$; $(x^{-1/2})' = \underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}$;

2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$;

求导练习

- 求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法

回顾性练习

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$; $(x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}$; $(x^{-1/2})' = \underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}$;
2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$;

求导练习

- 求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法

回顾性练习

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$; $(x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}$; $(x^{-1/2})' = \underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}$;

2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$;

3. $(\sin x)' = \underline{\cos x}$; $(\cos x)' = \underline{-\sin x}$; $(\tan x)' = \underline{\sec^2 x}$;
 $(\cot x)' = \underline{-\csc^2 x}$;

4. $(\arcsin x)' = \underline{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$; $(\arctan x)' = \underline{\frac{1}{1+x^2}}$;

求导练习

- 求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法

回顾性练习

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$; $(x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}$; $(x^{-1/2})' = \underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}$;

2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$;

3. $(\sin x)' = \underline{\cos x}$; $(\cos x)' = \underline{\hspace{2cm}}$; $(\tan x)' = \underline{\hspace{2cm}}$;
 $(\cot x)' = \underline{\hspace{2cm}}$;

4. $(\arcsin x)' = \underline{\hspace{2cm}}$; $(\arctan x)' = \underline{\hspace{2cm}}$;

求导练习

- 求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法

回顾性练习

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$; $(x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}$; $(x^{-1/2})' = \underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}$;

2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$;

3. $(\sin x)' = \underline{\cos x}$; $(\cos x)' = \underline{-\sin x}$; $(\tan x)' = \underline{\quad}$;
 $(\cot x)' = \underline{\quad}$;

4. $(\arcsin x)' = \underline{\quad}$; $(\arctan x)' = \underline{\quad}$;

求导练习

- 求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法

回顾性练习

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$; $(x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}$; $(x^{-1/2})' = \underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}$;

2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$;

3. $(\sin x)' = \underline{\cos x}$; $(\cos x)' = \underline{-\sin x}$; $(\tan x)' = \underline{\frac{1}{\cos^2 x}}$;
 $(\cot x)' = \underline{\hspace{2cm}}$;

4. $(\arcsin x)' = \underline{\hspace{2cm}}$; $(\arctan x)' = \underline{\hspace{2cm}}$;

求导练习

- 求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法

回顾性练习

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$; $(x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}$; $(x^{-1/2})' = \underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}$;

2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$;

3. $(\sin x)' = \underline{\cos x}$; $(\cos x)' = \underline{-\sin x}$; $(\tan x)' = \underline{\frac{1}{\cos^2 x}}$;
 $(\cot x)' = \underline{-\frac{1}{\sin^2 x}}$;

4. $(\arcsin x)' = \underline{\hspace{2cm}}$; $(\arctan x)' = \underline{\hspace{2cm}}$;

求导练习

- 求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法

回顾性练习

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$; $(x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}$; $(x^{-1/2})' = \underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}$;

2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$;

3. $(\sin x)' = \underline{\cos x}$; $(\cos x)' = \underline{-\sin x}$; $(\tan x)' = \underline{\frac{1}{\cos^2 x}}$;
 $(\cot x)' = \underline{-\frac{1}{\sin^2 x}}$;

4. $(\arcsin x)' = \underline{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$; $(\arctan x)' = \underline{\hspace{2cm}}$;

求导练习

- 求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法

回顾性练习

$$1. (x^3)' = \underline{3x^2}; \quad (x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}; \quad (x^{-1/2})' = \underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}};$$

$$2. (x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}};$$

$$3. (\sin x)' = \underline{\cos x}; \quad (\cos x)' = \underline{-\sin x}; \quad (\tan x)' = \underline{\frac{1}{\cos^2 x}};$$
$$(\cot x)' = \underline{-\frac{1}{\sin^2 x}};$$

$$4. (\arcsin x)' = \underline{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}; \quad (\arctan x)' = \underline{\frac{1}{1+x^2}};$$

求导练习

- 求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法

回顾性练习

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$; $(x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}$; $(x^{-1/2})' = \underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}$;

2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$;

3. $(\sin x)' = \underline{\cos x}$; $(\cos x)' = \underline{-\sin x}$; $(\tan x)' = \underline{\frac{1}{\cos^2 x}}$;
 $(\cot x)' = \underline{-\frac{1}{\sin^2 x}}$;

4. $(\arcsin x)' = \underline{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$; $(\arctan x)' = \underline{\frac{1}{1+x^2}}$;

5. $(e^x)' = \underline{\quad}$; $(a^x)' = \underline{\quad} (a > 0)$; $(5^x)' = \underline{\quad}$;

6. $(\ln x)' = \underline{\quad} (x > 0)$; $(\ln(1+x^2))' = \underline{\quad}$.

求导练习

- 求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法

回顾性练习

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$; $(x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}$; $(x^{-1/2})' = \underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}$;

2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$;

3. $(\sin x)' = \underline{\cos x}$; $(\cos x)' = \underline{-\sin x}$; $(\tan x)' = \underline{\frac{1}{\cos^2 x}}$;
 $(\cot x)' = \underline{-\frac{1}{\sin^2 x}}$;

4. $(\arcsin x)' = \underline{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$; $(\arctan x)' = \underline{\frac{1}{1+x^2}}$;

5. $(e^x)' = \underline{e^x}$; $(a^x)' = \underline{\hspace{2cm}}$ ($a > 0$); $(5^x)' = \underline{\hspace{2cm}}$;

6. $(\ln x)' = \underline{\hspace{1cm}}$ ($x > 0$); $(\ln(1+x^2))' = \underline{\hspace{2cm}}$.

求导练习

- 求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法

回顾性练习

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$; $(x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}$; $(x^{-1/2})' = \underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}$;

2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$;

3. $(\sin x)' = \underline{\cos x}$; $(\cos x)' = \underline{-\sin x}$; $(\tan x)' = \underline{\frac{1}{\cos^2 x}}$;
 $(\cot x)' = \underline{-\frac{1}{\sin^2 x}}$;

4. $(\arcsin x)' = \underline{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$; $(\arctan x)' = \underline{\frac{1}{1+x^2}}$;

5. $(e^x)' = \underline{e^x}$; $(a^x)' = \underline{a^x \ln a}$ ($a > 0$); $(5^x)' = \underline{\hspace{2cm}}$;

6. $(\ln x)' = \underline{\hspace{1cm}}$ ($x > 0$); $(\ln(1+x^2))' = \underline{\hspace{2cm}}$.

求导练习

- 求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法

回顾性练习

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$; $(x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}$; $(x^{-1/2})' = \underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}$;

2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$;

3. $(\sin x)' = \underline{\cos x}$; $(\cos x)' = \underline{-\sin x}$; $(\tan x)' = \underline{\frac{1}{\cos^2 x}}$;
 $(\cot x)' = \underline{-\frac{1}{\sin^2 x}}$;

4. $(\arcsin x)' = \underline{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$; $(\arctan x)' = \underline{\frac{1}{1+x^2}}$;

5. $(e^x)' = \underline{e^x}$; $(a^x)' = \underline{a^x \ln a}$ ($a > 0$); $(5^x)' = \underline{5^x \ln 5}$;

6. $(\ln x)' = \underline{\quad}$ ($x > 0$); $(\ln(1+x^2))' = \underline{\quad}$.

求导练习

- 求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法

回顾性练习

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$; $(x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}$; $(x^{-1/2})' = \underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}$;

2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$;

3. $(\sin x)' = \underline{\cos x}$; $(\cos x)' = \underline{-\sin x}$; $(\tan x)' = \underline{\frac{1}{\cos^2 x}}$;
 $(\cot x)' = \underline{-\frac{1}{\sin^2 x}}$;

4. $(\arcsin x)' = \underline{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$; $(\arctan x)' = \underline{\frac{1}{1+x^2}}$;

5. $(e^x)' = \underline{e^x}$; $(a^x)' = \underline{a^x \ln a}$ ($a > 0$); $(5^x)' = \underline{5^x \ln 5}$;

6. $(\ln x)' = \underline{\frac{1}{x}}$ ($x > 0$); $(\ln(1+x^2))' = \underline{\hspace{2cm}}$.

求导练习

- 求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法

回顾性练习

$$1. (x^3)' = \underline{3x^2}; \quad (x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}; \quad (x^{-1/2})' = \underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}};$$

$$2. (x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}};$$

$$3. (\sin x)' = \underline{\cos x}; \quad (\cos x)' = \underline{-\sin x}; \quad (\tan x)' = \underline{\frac{1}{\cos^2 x}};$$
$$(\cot x)' = \underline{-\frac{1}{\sin^2 x}};$$

$$4. (\arcsin x)' = \underline{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}; \quad (\arctan x)' = \underline{\frac{1}{1+x^2}};$$

$$5. (e^x)' = \underline{e^x}; \quad (a^x)' = \underline{a^x \ln a} \quad (a > 0); \quad (5^x)' = \underline{5^x \ln 5};$$

$$6. (\ln x)' = \underline{\frac{1}{x}} \quad (x > 0); \quad (\ln(1+x^2))' = \underline{\frac{2x}{1+x^2}}.$$

回顾微分

函数 $F(x)$ 的微分是

$$dF(x) = F'(x)dx$$

回顾微分

函数 $F(x)$ 的微分是

$$dF(x) = F'(x)dx$$

例

$$d\ln(1+x^2) = \underline{\hspace{2cm}} dx$$

回顾微分

函数 $F(x)$ 的微分是

$$dF(x) = F'(x)dx$$

例

$$\underline{d \ln(1 + x^2) = (\ln(1 + x^2))' dx}$$

回顾微分

函数 $F(x)$ 的微分是

$$dF(x) = F'(x)dx$$

例

$$\underline{d \ln(1 + x^2)} = \underline{(\ln(1 + x^2))'} dx = \underline{\frac{2x}{1 + x^2}} dx$$

原函数的概念

$$F'(x) = f(x)$$

原函数的概念

$$F'(x) = f(x)$$

上学期

- 求：

$$F'(x) = ?$$

原函数的概念

$$F'(x) = f(x)$$

上学期

- 求：

$$F'(x) = ?$$

- $F(x)$ 的导数是 $f(x)$;
 $f(x)$ 是 $F(x)$ 的导数。

原函数的概念

$$F'(x) = f(x)$$

上学期

- 求：

$$F'(x) = ?$$

- $F(x)$ 的导数是 $f(x)$;
 $f(x)$ 是 $F(x)$ 的导数。

本学期

- 问：

$$(?)' = f(x)$$

原函数的概念

$$F'(x) = f(x)$$

上学期

- 求：

$$F'(x) = ?$$

- $F(x)$ 的导数是 $f(x)$;
 $f(x)$ 是 $F(x)$ 的导数。

本学期

- 问：

$$(?)' = f(x)$$

- $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数;
 $f(x)$ 的一个原函数是 $F(x)$ 。

原函数的概念

$$F'(x) = f(x)$$

上学期

- 求：

$$F'(x) = ?$$

- $F(x)$ 的导数是 $f(x)$;
 $f(x)$ 是 $F(x)$ 的导数。

本学期

- 问：

$$(?)' = f(x)$$

- $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数;
 $f(x)$ 的一个原函数是 $F(x)$ 。

例子

路程- 速度 $s'(x) = v(x)$

曲线图形- 斜率 $f'(x) = k(x)$

成本- 边际成本 $C'(x) = MC$

原函数的概念

$$F'(x) = f(x)$$

上学期

- 求：

$$F'(x) = ?$$

- $F(x)$ 的导数是 $f(x)$;
 $f(x)$ 是 $F(x)$ 的导数。

本学期

- 问：

$$(?)' = f(x)$$

- $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数;
 $f(x)$ 的一个原函数是 $F(x)$ 。

例子

路程- 速度 $s'(x) = v(x)$ 路程 $s(x)$ 是速度 $v(x)$ 的原函数;

曲线图形- 斜率 $f'(x) = k(x)$

成本- 边际成本 $C'(x) = MC$

原函数的概念

$$F'(x) = f(x)$$

上学期

- 求：

$$F'(x) = ?$$

- $F(x)$ 的导数是 $f(x)$;
 $f(x)$ 是 $F(x)$ 的导数。

本学期

- 问：

$$(?)' = f(x)$$

- $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数;
 $f(x)$ 的一个原函数是 $F(x)$ 。

例子

路程- 速度 $s'(x) = v(x)$ 路程 $s(x)$ 是速度 $v(x)$ 的原函数;

曲线图形- 斜率 $f'(x) = k(x)$ $f(x)$ 是斜率 $k(x)$ 的原函数;

成本- 边际成本 $C'(x) = MC$

原函数的概念

$$F'(x) = f(x)$$

上学期

- 求：

$$F'(x) = ?$$

- $F(x)$ 的导数是 $f(x)$;
 $f(x)$ 是 $F(x)$ 的导数。

本学期

- 问：

$$(?)' = f(x)$$

- $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数;
 $f(x)$ 的一个原函数是 $F(x)$ 。

例子

路程- 速度 $s'(x) = v(x)$ 路程 $s(x)$ 是速度 $v(x)$ 的原函数;

曲线图形- 斜率 $f'(x) = k(x)$ $f(x)$ 是斜率 $k(x)$ 的原函数;

成本- 边际成本 $C'(x) = MC$ 成本 $C(x)$ 是边际成本 MC 的原函数。

原函数的例子

上学期

1. $(x^3)' = \underline{\hspace{1cm}}$; $(x^{7/5})' = \underline{\hspace{1cm}}$; $(x^{-1/2})' = \underline{\hspace{1cm}}$;

2. $(x^\alpha)' = \underline{\hspace{1cm}}$;

3. $(\sin x)' = \underline{\hspace{1cm}}$; $(\cos x)' = \underline{\hspace{1cm}}$; ;
 $(\tan x)' = \underline{\hspace{1cm}}$; $(\cot x)' = \underline{\hspace{1cm}}$;

4. $(\arcsin x)' = \underline{\hspace{1cm}}$; $(\arctan x)' = \underline{\hspace{1cm}}$;

5. $(e^x)' = \underline{\hspace{1cm}}$; $(a^x)' = \underline{\hspace{1cm}}$ ($a > 0$); $(5^x)' = \underline{\hspace{1cm}}$;

6. $(\ln x)' = \underline{\hspace{1cm}}$ ($x > 0$); $(\ln(1+x^2))' = \underline{\hspace{1cm}}$.

原函数的例子

上学期

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$; $(x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}$; $(x^{-1/2})' = \underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}$;

2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$;

3. $(\sin x)' = \underline{\cos x}$; $(\cos x)' = \underline{-\sin x}$; ;
 $(\tan x)' = \underline{\sec^2 x}$; $(\cot x)' = \underline{-\csc^2 x}$;

4. $(\arcsin x)' = \underline{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$; $(\arctan x)' = \underline{\frac{1}{1+x^2}}$;

5. $(e^x)' = \underline{e^x}$; $(a^x)' = \underline{a^x \ln a}$ ($a > 0$); $(5^x)' = \underline{5^x \ln 5}$;

6. $(\ln x)' = \underline{\frac{1}{x}}$ ($x > 0$); $(\ln(1+x^2))' = \underline{\frac{2x}{1+x^2}}$.

原函数的例子

上学期

$$1. (x^3)' = \underline{3x^2}; \quad (x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}; \quad (x^{-1/2})' = \underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}};$$

$$2. (x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}};$$

$$3. (\sin x)' = \underline{\cos x}; \quad (\cos x)' = \underline{-\sin x}; \quad ;$$
$$(\tan x)' = \underline{\frac{1}{\cos^2 x}}; \quad (\cot x)' = \underline{-\frac{1}{\sin^2 x}};$$

$$4. (\arcsin x)' = \underline{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}; \quad (\arctan x)' = \underline{\frac{1}{1+x^2}};$$

$$5. (e^x)' = \underline{\quad}; \quad (a^x)' = \underline{\quad} (a > 0); \quad (5^x)' = \underline{\quad};$$

$$6. (\ln x)' = \underline{\quad} (x > 0); \quad (\ln(1+x^2))' = \underline{\quad}.$$

原函数的例子

上学期

$$1. (x^3)' = \underline{3x^2}; \quad (x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}; \quad (x^{-1/2})' = \underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}};$$

$$2. (x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}};$$

$$3. (\sin x)' = \underline{\cos x}; \quad (\cos x)' = \underline{-\sin x}; \quad ;$$
$$(\tan x)' = \underline{\frac{1}{\cos^2 x}}; \quad (\cot x)' = \underline{-\frac{1}{\sin^2 x}};$$

$$4. (\arcsin x)' = \underline{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}; \quad (\arctan x)' = \underline{\frac{1}{1+x^2}};$$

$$5. (e^x)' = \underline{e^x}; \quad (a^x)' = \underline{a^x \ln a} \quad (a > 0); \quad (5^x)' = \underline{5^x \ln 5};$$

$$6. (\ln x)' = \underline{\frac{1}{x}} \quad (x > 0); \quad (\ln(1+x^2))' = \underline{\frac{2x}{1+x^2}}.$$

原函数的例子

本学期

$$1. ()' = \underline{3x^2}; \quad ()' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}; \quad ()' = \underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}};$$

$$2. ()' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}};$$

$$3. (\sin x)' = \underline{\cos x}; \quad (\cos x)' = \underline{-\sin x}; \quad ;$$

$$(\tan x)' = \underline{\frac{1}{\cos^2 x}}; \quad (\cot x)' = \underline{-\frac{1}{\sin^2 x}};$$

$$4. (\arcsin x)' = \underline{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}; \quad (\arctan x)' = \underline{\frac{1}{1+x^2}};$$

$$5. (e^x)' = \underline{e^x}; \quad (a^x)' = \underline{a^x \ln a} \quad (a > 0); \quad (5^x)' = \underline{5^x \ln 5};$$

$$6. (\ln x)' = \underline{\frac{1}{x}} \quad (x > 0); \quad (\ln(1+x^2))' = \underline{\frac{2x}{1+x^2}}.$$

原函数的例子

本学期

$$1. ()' = \underline{3x^2}; \quad ()' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}; \quad ()' = \underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}};$$

$$2. ()' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}};$$

$$3. ()' = \underline{\cos x}; \quad ()' = \underline{-\sin x};$$

$$()' = \underline{\frac{1}{\cos^2 x}}; \quad ()' = \underline{-\frac{1}{\sin^2 x}};$$

$$4. ()' = \underline{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}; \quad ()' = \underline{\frac{1}{1+x^2}};$$

$$5. (e^x)' = \underline{e^x}; \quad (a^x)' = \underline{a^x \ln a} \ (a > 0); \quad (5^x)' = \underline{5^x \ln 5};$$

$$6. (\ln x)' = \underline{\frac{1}{x}} \ (x > 0); \quad (\ln(1+x^2))' = \underline{\frac{2x}{1+x^2}}.$$

原函数的例子

本学期

1. $(\quad)' = \underline{3x^2}$; $(\quad)' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}$; $(\quad)' = \underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}$;

2. $(\quad)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$;

3. $(\quad)' = \underline{\cos x}$; $(\quad)' = \underline{-\sin x}$; ;

$(\quad)' = \underline{\frac{1}{\cos^2 x}}$; $(\quad)' = \underline{-\frac{1}{\sin^2 x}}$;

4. $(\quad)' = \underline{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$; $(\quad)' = \underline{\frac{1}{1+x^2}}$;

5. $(\quad)' = \underline{e^x}$; $(\quad)' = \underline{a^x \ln a}$ ($a > 0$); $(\quad)' = \underline{5^x \ln 5}$;

6. $(\quad)' = \underline{\frac{1}{x}}$ ($x > 0$); $(\quad)' = \underline{\frac{2x}{1+x^2}}$.

原函数的准确定义

定义 设函数 $f(x)$ 定义在区间 (a, b) 上, 如果存在一个函数 $F(x)$ 满足:

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b)$$

则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在该区间上的一个**原函数**。

现阶段求原函数：猜

例 求下列函数的一个原函数：

1. $f(x) = x^2, x \in (-\infty, +\infty)$

2. $f(x) = \sin x, x \in (-\infty, +\infty)$

3. $f(x) = \frac{1}{x}, x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

现阶段求原函数：猜

例 求下列函数的一个原函数：

1. $f(x) = x^2, x \in (-\infty, +\infty)$

2. $f(x) = \sin x, x \in (-\infty, +\infty)$

3. $f(x) = \frac{1}{x}, x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

作如下“猜”

现阶段求原函数：猜

例 求下列函数的一个原函数：

1. $f(x) = x^2, x \in (-\infty, +\infty)$

2. $f(x) = \sin x, x \in (-\infty, +\infty)$

3. $f(x) = \frac{1}{x}, x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

作如下“猜”（主要是求导基本公式的运用）

现阶段求原函数：猜

例 求下列函数的一个原函数：

1. $f(x) = x^2, x \in (-\infty, +\infty)$

2. $f(x) = \sin x, x \in (-\infty, +\infty)$

3. $f(x) = \frac{1}{x}, x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

作如下“猜”（主要是求导基本公式的运用）

1. $(x^3)' = 3x^2$

现阶段求原函数：猜

例 求下列函数的一个原函数：

1. $f(x) = x^2, x \in (-\infty, +\infty)$

2. $f(x) = \sin x, x \in (-\infty, +\infty)$

3. $f(x) = \frac{1}{x}, x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

作如下“猜”（主要是求导基本公式的运用）

1. $(x^3)' = 3x^2 \Rightarrow (\frac{1}{3}x^3)' = x^2$

现阶段求原函数：猜

例 求下列函数的一个原函数：

1. $f(x) = x^2, x \in (-\infty, +\infty)$
2. $f(x) = \sin x, x \in (-\infty, +\infty)$
3. $f(x) = \frac{1}{x}, x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

作如下“猜”（主要是求导基本公式的运用）

1. $(x^3)' = 3x^2 \Rightarrow (\frac{1}{3}x^3)' = x^2$ ，所以 $\frac{1}{3}x^3$ 是 x^2 的一个原函数；

现阶段求原函数：猜

例 求下列函数的一个原函数：

1. $f(x) = x^2, x \in (-\infty, +\infty)$
2. $f(x) = \sin x, x \in (-\infty, +\infty)$
3. $f(x) = \frac{1}{x}, x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

作如下“猜”（主要是求导基本公式的运用）

1. $(x^3)' = 3x^2 \Rightarrow (\frac{1}{3}x^3)' = x^2$ ，所以 $\frac{1}{3}x^3$ 是 x^2 的一个原函数；
2. $(\cos x)' = -\sin x$

现阶段求原函数：猜

例 求下列函数的一个原函数：

1. $f(x) = x^2, x \in (-\infty, +\infty)$
2. $f(x) = \sin x, x \in (-\infty, +\infty)$
3. $f(x) = \frac{1}{x}, x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

作如下“猜”（主要是求导基本公式的运用）

1. $(x^3)' = 3x^2 \Rightarrow (\frac{1}{3}x^3)' = x^2$ ，所以 $\frac{1}{3}x^3$ 是 x^2 的一个原函数；
2. $(\cos x)' = -\sin x \Rightarrow (-\cos x)' = \sin x$

现阶段求原函数：猜

例 求下列函数的一个原函数：

1. $f(x) = x^2, x \in (-\infty, +\infty)$
2. $f(x) = \sin x, x \in (-\infty, +\infty)$
3. $f(x) = \frac{1}{x}, x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

作如下“猜”（主要是求导基本公式的运用）

1. $(x^3)' = 3x^2 \Rightarrow (\frac{1}{3}x^3)' = x^2$ ，所以 $\frac{1}{3}x^3$ 是 x^2 的一个原函数；
2. $(\cos x)' = -\sin x \Rightarrow (-\cos x)' = \sin x$ ，
所以 $-\cos x$ 是 $\sin x$ 的一个原函数；

现阶段求原函数：猜

例 求下列函数的一个原函数：

1. $f(x) = x^2, x \in (-\infty, +\infty)$
2. $f(x) = \sin x, x \in (-\infty, +\infty)$
3. $f(x) = \frac{1}{x}, x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

作如下“猜”（主要是求导基本公式的运用）

1. $(x^3)' = 3x^2 \Rightarrow (\frac{1}{3}x^3)' = x^2$ ，所以 $\frac{1}{3}x^3$ 是 x^2 的一个原函数；
2. $(\cos x)' = -\sin x \Rightarrow (-\cos x)' = \sin x$ ，
所以 $-\cos x$ 是 $\sin x$ 的一个原函数；
3. 直接验证 $\ln|x|$ 是 $\frac{1}{x}$ 的一个原函数。

验证 $\ln|x|$ 是 $\frac{1}{x}$ 的一个原函数, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

验证

验证 $\ln|x|$ 是 $\frac{1}{x}$ 的一个原函数, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

验证

- 当 $x > 0$ 时,

$$(\ln|x|)' =$$

- 当 $x < 0$ 时,

$$(\ln|x|)' =$$

验证 $\ln|x|$ 是 $\frac{1}{x}$ 的一个原函数, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

验证

- 当 $x > 0$ 时,

$$(\ln|x|)' = (\ln x)' =$$

- 当 $x < 0$ 时,

$$(\ln|x|)' =$$

验证 $\ln|x|$ 是 $\frac{1}{x}$ 的一个原函数, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

验证

- 当 $x > 0$ 时,

$$(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

- 当 $x < 0$ 时,

$$(\ln|x|)' =$$

验证 $\ln|x|$ 是 $\frac{1}{x}$ 的一个原函数, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

验证

- 当 $x > 0$ 时,

$$(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

- 当 $x < 0$ 时,

$$(\ln|x|)' = (\ln(-x))' =$$

验证 $\ln|x|$ 是 $\frac{1}{x}$ 的一个原函数, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

验证

- 当 $x > 0$ 时,

$$(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

- 当 $x < 0$ 时,

$$(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-x)' =$$

验证 $\ln|x|$ 是 $\frac{1}{x}$ 的一个原函数, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

验证

- 当 $x > 0$ 时,

$$(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

- 当 $x < 0$ 时,

$$(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-x)' = \frac{1}{-x}(-1) =$$

验证 $\ln|x|$ 是 $\frac{1}{x}$ 的一个原函数, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

验证

- 当 $x > 0$ 时,

$$(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

- 当 $x < 0$ 时,

$$(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-x)' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$$

验证 $\ln|x|$ 是 $\frac{1}{x}$ 的一个原函数, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

验证

- 当 $x > 0$ 时,

$$(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

- 当 $x < 0$ 时,

$$(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-x)' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$$

总之, $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 。

验证 $\ln|x|$ 是 $\frac{1}{x}$ 的一个原函数, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

验证

- 当 $x > 0$ 时,

$$(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

- 当 $x < 0$ 时,

$$(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-x)' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$$

总之, $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 。

所以, $\ln|x|$ 是 $\frac{1}{x}$ 的一个原函数

练习

1. 求 x^α 的一个原函数，其中 $\alpha \neq -1$ 。
2. 求 e^{2x+1} 的一个原函数？

练习

1. 求 x^α 的一个原函数, 其中 $\alpha \neq -1$ 。
2. 求 e^{2x+1} 的一个原函数?

解

练习

1. 求 x^α 的一个原函数，其中 $\alpha \neq -1$ 。
2. 求 e^{2x+1} 的一个原函数？

解

1. $(x^{\alpha+1})'$

练习

1. 求 x^α 的一个原函数, 其中 $\alpha \neq -1$ 。
2. 求 e^{2x+1} 的一个原函数?

解

1. $(x^{\alpha+1})' = (\alpha + 1)x^\alpha$

练习

1. 求 x^α 的一个原函数, 其中 $\alpha \neq -1$ 。
2. 求 e^{2x+1} 的一个原函数?

解

1. $(x^{\alpha+1})' = (\alpha+1)x^\alpha \Rightarrow \left(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right)' = x^\alpha$

练习

1. 求 x^α 的一个原函数, 其中 $\alpha \neq -1$ 。
2. 求 e^{2x+1} 的一个原函数?

解

1. $(x^{\alpha+1})' = (\alpha+1)x^\alpha \Rightarrow \left(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right)' = x^\alpha,$
所以 $\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ 是 x^α 的一个原函数

练习

1. 求 x^α 的一个原函数, 其中 $\alpha \neq -1$ 。
2. 求 e^{2x+1} 的一个原函数?

解

1. $(x^{\alpha+1})' = (\alpha+1)x^\alpha \Rightarrow \left(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right)' = x^\alpha,$
所以 $\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ 是 x^α 的一个原函数
2. $(e^{2x+1})'$

练习

1. 求 x^α 的一个原函数, 其中 $\alpha \neq -1$ 。
2. 求 e^{2x+1} 的一个原函数?

解

1. $(x^{\alpha+1})' = (\alpha+1)x^\alpha \Rightarrow \left(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right)' = x^\alpha$,
所以 $\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ 是 x^α 的一个原函数
2. $(e^{2x+1})' = 2e^{2x+1}$

练习

1. 求 x^α 的一个原函数, 其中 $\alpha \neq -1$ 。
2. 求 e^{2x+1} 的一个原函数?

解

1. $(x^{\alpha+1})' = (\alpha+1)x^\alpha \Rightarrow \left(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right)' = x^\alpha$,
所以 $\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ 是 x^α 的一个原函数
2. $(e^{2x+1})' = 2e^{2x+1} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}e^{2x+1}\right)' = e^{2x+1}$

练习

1. 求 x^α 的一个原函数, 其中 $\alpha \neq -1$.
2. 求 e^{2x+1} 的一个原函数?

解

1. $(x^{\alpha+1})' = (\alpha+1)x^\alpha \Rightarrow \left(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right)' = x^\alpha$,
所以 $\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ 是 x^α 的一个原函数
2. $(e^{2x+1})' = 2e^{2x+1} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}e^{2x+1}\right)' = e^{2x+1}$,
所以 $\frac{1}{2}e^{2x+1}$ 是 e^{2x+1} 的一个原函数

练习

1. 求 x^α 的一个原函数, 其中 $\alpha \neq -1$.
2. 求 e^{2x+1} 的一个原函数?

解

1. $(x^{\alpha+1})' = (\alpha+1)x^\alpha \Rightarrow \left(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right)' = x^\alpha$,
所以 $\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ 是 x^α 的一个原函数
2. $(e^{2x+1})' = 2e^{2x+1} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}e^{2x+1}\right)' = e^{2x+1}$,
所以 $\frac{1}{2}e^{2x+1}$ 是 e^{2x+1} 的一个原函数

练习 问 $e^{\sin x}$ 是哪个函数的原函数?

练习

1. 求 x^α 的一个原函数, 其中 $\alpha \neq -1$.
2. 求 e^{2x+1} 的一个原函数?

解

1. $(x^{\alpha+1})' = (\alpha+1)x^\alpha \Rightarrow \left(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right)' = x^\alpha$,
所以 $\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ 是 x^α 的一个原函数
2. $(e^{2x+1})' = 2e^{2x+1} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}e^{2x+1}\right)' = e^{2x+1}$,
所以 $\frac{1}{2}e^{2x+1}$ 是 e^{2x+1} 的一个原函数

练习 问 $e^{\sin x}$ 是哪个函数的原函数?

解 $e^{\sin x}$ 是 $(e^{\sin x})'$ 的原函数

练习

1. 求 x^α 的一个原函数, 其中 $\alpha \neq -1$.
2. 求 e^{2x+1} 的一个原函数?

解

1. $(x^{\alpha+1})' = (\alpha+1)x^\alpha \Rightarrow \left(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right)' = x^\alpha$,
所以 $\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ 是 x^α 的一个原函数
2. $(e^{2x+1})' = 2e^{2x+1} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}e^{2x+1}\right)' = e^{2x+1}$,
所以 $\frac{1}{2}e^{2x+1}$ 是 e^{2x+1} 的一个原函数

练习 问 $e^{\sin x}$ 是哪个函数的原函数?

解 $e^{\sin x}$ 是 $(e^{\sin x})' = e^{\sin x} \cos x$ 的原函数

注

$$\frac{1}{3}x^3$$

是 x^2 的原函数

注

$$\frac{1}{3}x^3, \quad \frac{1}{3}x^3 - 1$$

是 x^2 的原函数

注

$$\frac{1}{3}x^3, \quad \frac{1}{3}x^3 - 1, \quad \frac{1}{3}x^3 + \pi$$

是 x^2 的原函数

注

$$\frac{1}{3}x^3, \quad \frac{1}{3}x^3 - 1, \quad \frac{1}{3}x^3 + \pi, \quad \frac{1}{3}x^3 + C, \dots$$

都是 x^2 的原函数

注

$$\frac{1}{3}x^3, \quad \frac{1}{3}x^3 - 1, \quad \frac{1}{3}x^3 + \pi, \quad \frac{1}{3}x^3 + C, \dots$$

都是 x^2 的原函数

问题 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 不唯一，如何求出全部原函数？

如何求出全部原函数？

性质 设函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f(x)$ 的所有原函数是 $F(x) + C$ ， C 为任意常数

如何求出全部原函数？

性质 设函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f(x)$ 的所有原函数是 $F(x) + C$ ， C 为任意常数

证明

- 设函数 $G(x)$ 也是 $f(x)$ 的一个原函数，则

如何求出全部原函数？

性质 设函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f(x)$ 的所有原函数是 $F(x) + C$ ， C 为任意常数

证明

- 设函数 $G(x)$ 也是 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$(G(x) - F(x))' =$$

如何求出全部原函数？

性质 设函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f(x)$ 的所有原函数是 $F(x) + C$ ， C 为任意常数

证明

- 设函数 $G(x)$ 也是 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) =$$

如何求出全部原函数？

性质 设函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f(x)$ 的所有原函数是 $F(x) + C$ ， C 为任意常数

证明

- 设函数 $G(x)$ 也是 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

如何求出全部原函数？

性质 设函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f(x)$ 的所有原函数是 $F(x) + C$ ， C 为任意常数

证明

- 设函数 $G(x)$ 也是 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

- 所以利用拉格朗日中值定理的推论得到

$$G(x) - F(x) = C.$$

如何求出全部原函数？

性质 设函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f(x)$ 的所有原函数是 $F(x) + C$ ， C 为任意常数

证明

- 设函数 $G(x)$ 也是 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

- 所以利用拉格朗日中值定理的推论得到

$$G(x) - F(x) = C.$$

所以

$$G(x) = F(x) + C$$

不定积分 $\int f(x)dx$

不定积分 $\int f(x)dx$

- 符号 “ $\int f(x)dx$ ” 表示: $f(x)$ 的任意一个原函数

不定积分 $\int f(x)dx$

- 符号 “ $\int f(x)dx$ ” 表示： $f(x)$ 的任意一个原函数
读作： $f(x)$ 的不定积分

不定积分 $\int f(x)dx$

- 符号 “ $\int f(x)dx$ ” 表示： $f(x)$ 的任意一个原函数
读作： $f(x)$ 的不定积分
- “ \int ”：积分号；

不定积分 $\int f(x)dx$

- 符号 “ $\int f(x)dx$ ” 表示： $f(x)$ 的任意一个原函数
读作： $f(x)$ 的不定积分
- “ \int ”：积分号； $f(x)$ ：被积函数；

不定积分 $\int f(x)dx$

- 符号 “ $\int f(x)dx$ ” 表示： $f(x)$ 的任意一个原函数
读作： $f(x)$ 的**不定积分**
- “ \int ”：**积分号**； $f(x)$ ：**被积函数**； $f(x)dx$ ：**被积表达式**(微分形式)

不定积分 $\int f(x)dx$

- 符号 “ $\int f(x)dx$ ” 表示： $f(x)$ 的任意一个原函数
读作： $f(x)$ 的**不定积分**
- “ \int ”：**积分号**； $f(x)$ ：**被积函数**； $f(x)dx$ ：**被积表达式**(微分形式)

如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$\int f(x)dx =$$

不定积分 $\int f(x)dx$

- 符号 “ $\int f(x)dx$ ” 表示: $f(x)$ 的任意一个原函数
读作: $f(x)$ 的不定积分
- “ \int ”: 积分号; $f(x)$: 被积函数; $f(x)dx$: 被积表达式(微分形式)

如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

不定积分 $\int f(x)dx$

- 符号 “ $\int f(x)dx$ ” 表示： $f(x)$ 的任意一个原函数
读作： $f(x)$ 的不定积分
- “ \int ”：积分号； $f(x)$ ：被积函数； $f(x)dx$ ：被积表达式(微分形式)

如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

其中 C 是任意常数，称为积分常数。

不定积分 $\int f(x)dx$

- 符号 “ $\int f(x)dx$ ” 表示: $f(x)$ 的任意一个原函数
读作: $f(x)$ 的**不定积分**
- “ \int ”: **积分号**; $f(x)$: **被积函数**; $f(x)dx$: **被积表达式**(微分形式)

如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

其中 C 是任意常数, 称为**积分常数**。

总结 求不定积分 $\int f(x)dx$ 的步骤:

1. 求出一个原函数 $F(x)$;
2. $\int f(x)dx = F(x) + C$

不定积分例子

例子 求下列不定积分：

$$(1) \int x^2 dx; \quad (2) \int \sin x dx; \quad (3) \int \frac{1}{x} dx$$

不定积分例子

例子 求下列不定积分：

$$(1) \int x^2 dx; \quad (2) \int \sin x dx; \quad (3) \int \frac{1}{x} dx$$

解

1. 因为 $(\quad)' = x^2$,

不定积分例子

例子 求下列不定积分：

$$(1) \int x^2 dx; \quad (2) \int \sin x dx; \quad (3) \int \frac{1}{x} dx$$

解

1. 因为 $(\frac{1}{3}x^3)' = x^2$,

不定积分例子

例子 求下列不定积分：

$$(1) \int x^2 dx; \quad (2) \int \sin x dx; \quad (3) \int \frac{1}{x} dx$$

解

1. 因为 $(\frac{1}{3}x^3)' = x^2$ ，所以 $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$

不定积分例子

例子 求下列不定积分：

$$(1) \int x^2 dx; \quad (2) \int \sin x dx; \quad (3) \int \frac{1}{x} dx$$

解

1. 因为 $(\frac{1}{3}x^3)' = x^2$ ，所以 $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$
2. 因为 $(\quad)' = \sin x$,

不定积分例子

例子 求下列不定积分：

$$(1) \int x^2 dx; \quad (2) \int \sin x dx; \quad (3) \int \frac{1}{x} dx$$

解

1. 因为 $(\frac{1}{3}x^3)' = x^2$ ，所以 $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$
2. 因为 $(-\cos x)' = \sin x$ ，

不定积分例子

例子 求下列不定积分：

$$(1) \int x^2 dx; \quad (2) \int \sin x dx; \quad (3) \int \frac{1}{x} dx$$

解

1. 因为 $(\frac{1}{3}x^3)' = x^2$ ，所以 $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$
2. 因为 $(-\cos x)' = \sin x$ ，所以 $\int \sin x dx = -\cos x + C$

不定积分例子

例子 求下列不定积分：

$$(1) \int x^2 dx; \quad (2) \int \sin x dx; \quad (3) \int \frac{1}{x} dx$$

解

1. 因为 $(\frac{1}{3}x^3)' = x^2$ ，所以 $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$
2. 因为 $(-\cos x)' = \sin x$ ，所以 $\int \sin x dx = -\cos x + C$
3. 因为 $(\quad)' = \frac{1}{x}$ ，

不定积分例子

例子 求下列不定积分：

$$(1) \int x^2 dx; \quad (2) \int \sin x dx; \quad (3) \int \frac{1}{x} dx$$

解

1. 因为 $(\frac{1}{3}x^3)' = x^2$ ，所以 $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$
2. 因为 $(-\cos x)' = \sin x$ ，所以 $\int \sin x dx = -\cos x + C$
3. 因为 $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$ ，

不定积分例子

例子 求下列不定积分：

$$(1) \int x^2 dx; \quad (2) \int \sin x dx; \quad (3) \int \frac{1}{x} dx$$

解

1. 因为 $(\frac{1}{3}x^3)' = x^2$ ，所以 $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$
2. 因为 $(-\cos x)' = \sin x$ ，所以 $\int \sin x dx = -\cos x + C$
3. 因为 $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$ ，所以 $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$

不定积分练习

练习 求下列不定积分：

$$(1) \int x^{\alpha} dx \quad (\alpha \neq -1); \quad (2) \int e^{3x} dx; \quad (3) \int 0 dx$$

不定积分练习

练习 求下列不定积分：

$$(1) \int x^{\alpha} dx \quad (\alpha \neq -1); \quad (2) \int e^{3x} dx; \quad (3) \int 0 dx$$

解

1. 因为 ()' = x^{α} ,

不定积分练习

练习 求下列不定积分：

$$(1) \int x^{\alpha} dx \quad (\alpha \neq -1); \quad (2) \int e^{3x} dx; \quad (3) \int 0 dx$$

解

1. 因为 $(x^{\alpha+1})' = x^{\alpha},$

不定积分练习

练习 求下列不定积分：

$$(1) \int x^{\alpha} dx \quad (\alpha \neq -1); \quad (2) \int e^{3x} dx; \quad (3) \int 0 dx$$

解

1. 因为 $(\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1})' = x^{\alpha}$,

不定积分练习

练习 求下列不定积分：

$$(1) \int x^{\alpha} dx \quad (\alpha \neq -1); \quad (2) \int e^{3x} dx; \quad (3) \int 0 dx$$

解

1. 因为 $(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1})' = x^{\alpha}$, 所以 $\int x^{\alpha} dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$

不定积分练习

练习 求下列不定积分：

$$(1) \int x^{\alpha} dx \quad (\alpha \neq -1); \quad (2) \int e^{3x} dx; \quad (3) \int 0 dx$$

解

1. 因为 $(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1})' = x^{\alpha}$, 所以 $\int x^{\alpha} dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$

2. 因为 $(\quad)' = e^{3x}$,

不定积分练习

练习 求下列不定积分：

$$(1) \int x^{\alpha} dx \quad (\alpha \neq -1); \quad (2) \int e^{3x} dx; \quad (3) \int 0 dx$$

解

1. 因为 $(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1})' = x^{\alpha}$, 所以 $\int x^{\alpha} dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$
2. 因为 $(e^{3x})' = e^{3x}$,

不定积分练习

练习 求下列不定积分：

$$(1) \int x^{\alpha} dx \quad (\alpha \neq -1); \quad (2) \int e^{3x} dx; \quad (3) \int 0 dx$$

解

1. 因为 $(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1})' = x^{\alpha}$, 所以 $\int x^{\alpha} dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$
2. 因为 $(\frac{1}{3}e^{3x})' = e^{3x}$,

不定积分练习

练习 求下列不定积分：

$$(1) \int x^{\alpha} dx \quad (\alpha \neq -1); \quad (2) \int e^{3x} dx; \quad (3) \int 0 dx$$

解

1. 因为 $(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1})' = x^{\alpha}$, 所以 $\int x^{\alpha} dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$

2. 因为 $(\frac{1}{3}e^{3x})' = e^{3x}$, 所以 $\int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x} + C$

不定积分练习

练习 求下列不定积分：

$$(1) \int x^{\alpha} dx \quad (\alpha \neq -1); \quad (2) \int e^{3x} dx; \quad (3) \int 0 dx$$

解

1. 因为 $(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1})' = x^{\alpha}$, 所以 $\int x^{\alpha} dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$
2. 因为 $(\frac{1}{3}e^{3x})' = e^{3x}$, 所以 $\int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x} + C$
3. 因为 $(\quad)' = 0$,

不定积分练习

练习 求下列不定积分：

$$(1) \int x^{\alpha} dx \quad (\alpha \neq -1); \quad (2) \int e^{3x} dx; \quad (3) \int 0 dx$$

解

1. 因为 $(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1})' = x^{\alpha}$, 所以 $\int x^{\alpha} dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$
2. 因为 $(\frac{1}{3}e^{3x})' = e^{3x}$, 所以 $\int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x} + C$
3. 因为 $(0)' = 0$,

不定积分练习

练习 求下列不定积分：

$$(1) \int x^{\alpha} dx \quad (\alpha \neq -1); \quad (2) \int e^{3x} dx; \quad (3) \int 0 dx$$

解

1. 因为 $(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1})' = x^{\alpha}$, 所以 $\int x^{\alpha} dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$
2. 因为 $(\frac{1}{3}e^{3x})' = e^{3x}$, 所以 $\int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x} + C$
3. 因为 $(0)' = 0$, 所以 $\int 0 dx = 0 + C = C$

We are here now...

1. “原函数”与“不定积分”的概念

2. 不定积分的性质

3. 不定积分的几何意义

不定积分与微分/导数关系：互为逆运算

- $\int f(x)dx$ 是 $f(x)$ 的（任意一个）原函数，所以

$$\left[\int f(x)dx \right]'$$

;

;

不定积分与微分/导数关系：互为逆运算

- $\int f(x)dx$ 是 $f(x)$ 的（任意一个）原函数，所以

$$\left[\int f(x)dx \right]' = f(x)$$

;

;

不定积分与微分/导数关系：互为逆运算

- $\int f(x)dx$ 是 $f(x)$ 的（任意一个）原函数，所以

$$\left[\int f(x)dx \right]' = f(x) \quad \text{or} \quad d \left[\int f(x)dx \right] = f(x)dx$$

;

;

不定积分与微分/导数关系：互为逆运算

- $\int f(x)dx$ 是 $f(x)$ 的（任意一个）原函数，所以

$$\left[\int f(x)dx \right]' = f(x) \quad \text{or} \quad d \left[\int f(x)dx \right] = f(x)dx$$

- $F(x)$ 是 $F'(x)$ 的原函数，所以

$$\int F'(x)dx =$$

;

;

不定积分与微分/导数关系：互为逆运算

- $\int f(x)dx$ 是 $f(x)$ 的（任意一个）原函数，所以

$$\left[\int f(x)dx \right]' = f(x) \quad \text{or} \quad d \left[\int f(x)dx \right] = f(x)dx$$

- $F(x)$ 是 $F'(x)$ 的原函数，所以

$$\int F'(x)dx = F(x)$$

;

;

不定积分与微分/导数关系：互为逆运算

- $\int f(x)dx$ 是 $f(x)$ 的（任意一个）原函数，所以

$$\left[\int f(x)dx \right]' = f(x) \quad \text{or} \quad d \left[\int f(x)dx \right] = f(x)dx$$

- $F(x)$ 是 $F'(x)$ 的原函数，所以

$$\int F'(x)dx = F(x) + C$$

;

;

不定积分与微分/导数关系：互为逆运算

- $\int f(x)dx$ 是 $f(x)$ 的（任意一个）原函数，所以

$$\left[\int f(x)dx \right]' = f(x) \quad \text{or} \quad d \left[\int f(x)dx \right] = f(x)dx$$

- $F(x)$ 是 $F'(x)$ 的原函数，所以

$$\int F'(x)dx = F(x) + C \quad \text{or} \quad \int dF(x) = F(x) + C$$

;

;

不定积分与微分/导数关系：互为逆运算

- $\int f(x)dx$ 是 $f(x)$ 的（任意一个）原函数，所以

$$\left[\int f(x)dx \right]' = f(x) \quad \text{or} \quad d \left[\int f(x)dx \right] = f(x)dx$$

- $F(x)$ 是 $F'(x)$ 的原函数，所以

$$\int F'(x)dx = F(x) + C \quad \text{or} \quad \int dF(x) = F(x) + C$$

例子 (1) $(\int e^{\sin x} dx)' = \underline{\hspace{2cm}};$

(2) $\int d \arcsin(\sqrt{x}) = \underline{\hspace{2cm}};$

(3) 若 $\int f(x)dx = x^2 e^{3x} + C$, 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

不定积分与微分/导数关系：互为逆运算

- $\int f(x)dx$ 是 $f(x)$ 的（任意一个）原函数，所以

$$\left[\int f(x)dx \right]' = f(x) \quad \text{or} \quad d \left[\int f(x)dx \right] = f(x)dx$$

- $F(x)$ 是 $F'(x)$ 的原函数，所以

$$\int F'(x)dx = F(x) + C \quad \text{or} \quad \int dF(x) = F(x) + C$$

例子 (1) $\left(\int e^{\sin x} dx \right)' = \underline{e^{\sin x}};$

(2) $\int d \arcsin(\sqrt{x}) = \underline{\hspace{2cm}};$

(3) 若 $\int f(x)dx = x^2 e^{3x} + C$, 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

不定积分与微分/导数关系：互为逆运算

- $\int f(x)dx$ 是 $f(x)$ 的（任意一个）原函数，所以

$$\left[\int f(x)dx \right]' = f(x) \quad \text{or} \quad d \left[\int f(x)dx \right] = f(x)dx$$

- $F(x)$ 是 $F'(x)$ 的原函数，所以

$$\int F'(x)dx = F(x) + C \quad \text{or} \quad \int dF(x) = F(x) + C$$

例子 (1) $\left(\int e^{\sin x} dx \right)' = \underline{e^{\sin x}}$;

(2) $\int d \arcsin(\sqrt{x}) = \underline{\arcsin(\sqrt{x})}$;

(3) 若 $\int f(x)dx = x^2 e^{3x} + C$ ，则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

不定积分与微分/导数关系：互为逆运算

- $\int f(x)dx$ 是 $f(x)$ 的（任意一个）原函数，所以

$$\left[\int f(x)dx \right]' = f(x) \quad \text{or} \quad d \left[\int f(x)dx \right] = f(x)dx$$

- $F(x)$ 是 $F'(x)$ 的原函数，所以

$$\int F'(x)dx = F(x) + C \quad \text{or} \quad \int dF(x) = F(x) + C$$

例子 (1) $\left(\int e^{\sin x} dx \right)' = \underline{e^{\sin x}}$;

(2) $\int d \arcsin(\sqrt{x}) = \underline{\arcsin(\sqrt{x}) + C}$;

(3) 若 $\int f(x)dx = x^2 e^{3x} + C$, 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

不定积分与微分/导数关系：互为逆运算

- $\int f(x)dx$ 是 $f(x)$ 的（任意一个）原函数，所以

$$\left[\int f(x)dx \right]' = f(x) \quad \text{or} \quad d \left[\int f(x)dx \right] = f(x)dx$$

- $F(x)$ 是 $F'(x)$ 的原函数，所以

$$\int F'(x)dx = F(x) + C \quad \text{or} \quad \int dF(x) = F(x) + C$$

例子 (1) $\left(\int e^{\sin x} dx \right)' = \underline{e^{\sin x}}$;

(2) $\int d \arcsin(\sqrt{x}) = \underline{\arcsin(\sqrt{x}) + C}$;

(3) 若 $\int f(x)dx = x^2 e^{3x} + C$, 则 $f(x) = \underline{2xe^{3x} + 3x^2 e^{3x}}$

不定积分的线性运算性质

性质 1 $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$, $k \neq 0$ 为常数

性质 2 $\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
(对多个函数情形也成立)

不定积分的线性运算性质

性质 1 $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$, $k \neq 0$ 为常数

性质 2 $\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
(对多个函数情形也成立)

例 求不定积分 $\int \left(2 \cos x - \frac{1}{3x} + e^x \right) dx$

不定积分的线性运算性质

性质 1 $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$, $k \neq 0$ 为常数

性质 2 $\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
(对多个函数情形也成立)

例 求不定积分 $\int \left(2 \cos x - \frac{1}{3x} + e^x \right) dx$

解 $\int \left(2 \cos x - \frac{1}{3x} + e^x \right) dx$

=

不定积分的线性运算性质

性质 1 $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$, $k \neq 0$ 为常数

性质 2 $\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
(对多个函数情形也成立)

例 求不定积分 $\int \left(2 \cos x - \frac{1}{3x} + e^x \right) dx$

解
$$\int \left(2 \cos x - \frac{1}{3x} + e^x \right) dx$$
$$= \int 2 \cos x dx - \int \frac{1}{3x} dx + \int e^x dx =$$

不定积分的线性运算性质

性质 1 $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$, $k \neq 0$ 为常数

性质 2 $\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
(对多个函数情形也成立)

例 求不定积分 $\int \left(2 \cos x - \frac{1}{3x} + e^x \right) dx$

$$\begin{aligned} \text{解 } & \int \left(2 \cos x - \frac{1}{3x} + e^x \right) dx \\ &= \int 2 \cos x dx - \int \frac{1}{3x} dx + \int e^x dx = 2 \int \cos x dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x} dx + \int e^x dx \\ &= \end{aligned}$$

不定积分的线性运算性质

性质 1 $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$, $k \neq 0$ 为常数

性质 2 $\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
(对多个函数情形也成立)

例 求不定积分 $\int \left(2 \cos x - \frac{1}{3x} + e^x \right) dx$

$$\begin{aligned} \text{解 } & \int \left(2 \cos x - \frac{1}{3x} + e^x \right) dx \\ &= \int 2 \cos x dx - \int \frac{1}{3x} dx + \int e^x dx = 2 \int \cos x dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x} dx + \int e^x dx \\ &= 2(\quad) - \frac{1}{3}(\quad) + (\quad) \end{aligned}$$

不定积分的线性运算性质

性质 1 $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$, $k \neq 0$ 为常数

性质 2 $\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
(对多个函数情形也成立)

例 求不定积分 $\int \left(2 \cos x - \frac{1}{3x} + e^x \right) dx$

$$\begin{aligned} \text{解 } & \int \left(2 \cos x - \frac{1}{3x} + e^x \right) dx \\ &= \int 2 \cos x dx - \int \frac{1}{3x} dx + \int e^x dx = 2 \int \cos x dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x} dx + \int e^x dx \\ &= 2(\sin x + C_1) - \frac{1}{3} (\quad) + (\quad) \end{aligned}$$

不定积分的线性运算性质

性质 1 $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$, $k \neq 0$ 为常数

性质 2 $\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
(对多个函数情形也成立)

例 求不定积分 $\int \left(2 \cos x - \frac{1}{3x} + e^x \right) dx$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int \left(2 \cos x - \frac{1}{3x} + e^x \right) dx \\ &= \int 2 \cos x dx - \int \frac{1}{3x} dx + \int e^x dx = 2 \int \cos x dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x} dx + \int e^x dx \\ &= 2(\sin x + C_1) - \frac{1}{3}(\ln |x| + C_2) + (\quad) \end{aligned}$$

不定积分的线性运算性质

性质 1 $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$, $k \neq 0$ 为常数

性质 2 $\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
(对多个函数情形也成立)

例 求不定积分 $\int \left(2 \cos x - \frac{1}{3x} + e^x \right) dx$

解
$$\begin{aligned} & \int \left(2 \cos x - \frac{1}{3x} + e^x \right) dx \\ &= \int 2 \cos x dx - \int \frac{1}{3x} dx + \int e^x dx = 2 \int \cos x dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x} dx + \int e^x dx \\ &= 2(\sin x + C_1) - \frac{1}{3}(\ln |x| + C_2) + (e^x + C_3) \\ &= \end{aligned}$$

不定积分的线性运算性质

性质 1 $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$, $k \neq 0$ 为常数

性质 2 $\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
(对多个函数情形也成立)

例 求不定积分 $\int \left(2 \cos x - \frac{1}{3x} + e^x \right) dx$

$$\begin{aligned} \text{解 } & \int \left(2 \cos x - \frac{1}{3x} + e^x \right) dx \\ &= \int 2 \cos x dx - \int \frac{1}{3x} dx + \int e^x dx = 2 \int \cos x dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x} dx + \int e^x dx \\ &= 2(\sin x + C_1) - \frac{1}{3}(\ln |x| + C_2) + (e^x + C_3) \\ &= 2 \sin x - \frac{1}{3} \ln |x| + e^x + \left(2C_1 - \frac{1}{3}C_2 + C_3 \right) \end{aligned}$$

不定积分的线性运算性质

性质 1 $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$, $k \neq 0$ 为常数

性质 2 $\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
(对多个函数情形也成立)

例 求不定积分 $\int \left(2 \cos x - \frac{1}{3x} + e^x \right) dx$

解
$$\begin{aligned} & \int \left(2 \cos x - \frac{1}{3x} + e^x \right) dx \\ &= \int 2 \cos x dx - \int \frac{1}{3x} dx + \int e^x dx = 2 \int \cos x dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x} dx + \int e^x dx \\ &= 2(\sin x + C_1) - \frac{1}{3}(\ln |x| + C_2) + (e^x + C_3) \\ &= 2 \sin x - \frac{1}{3} \ln |x| + e^x + \left(2C_1 - \frac{1}{3}C_2 + C_3 \right) = 2 \sin x - \frac{1}{3} \ln |x| + e^x + C \end{aligned}$$

例 求不定积分 $\int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{3\cos^2 x} + \frac{6}{\sqrt{x}} \right) dx$

例 求不定积分 $\int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{3\cos^2 x} + \frac{6}{\sqrt{x}} \right) dx$

解

$$\begin{aligned} & \int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{3\cos^2 x} + \frac{6}{\sqrt{x}} \right) dx \\ &= 2 \int \frac{1}{1+x^2} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + 6 \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx \end{aligned}$$

例 求不定积分 $\int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{3\cos^2 x} + \frac{6}{\sqrt{x}} \right) dx$

解

$$\begin{aligned} & \int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{3\cos^2 x} + \frac{6}{\sqrt{x}} \right) dx \\ &= 2 \int \frac{1}{1+x^2} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + 6 \int x^{-\frac{1}{2}} dx \end{aligned}$$

例 求不定积分 $\int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{3\cos^2 x} + \frac{6}{\sqrt{x}} \right) dx$

解

$$\begin{aligned} & \int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{3\cos^2 x} + \frac{6}{\sqrt{x}} \right) dx \\ &= 2 \int \frac{1}{1+x^2} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + 6 \int x^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= \arctan x \end{aligned}$$

例 求不定积分 $\int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{3\cos^2 x} + \frac{6}{\sqrt{x}} \right) dx$

解

$$\begin{aligned} & \int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{3\cos^2 x} + \frac{6}{\sqrt{x}} \right) dx \\ &= 2 \int \frac{1}{1+x^2} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + 6 \int x^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= 2 \arctan x \end{aligned}$$

例 求不定积分 $\int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{3\cos^2 x} + \frac{6}{\sqrt{x}} \right) dx$

解

$$\begin{aligned} & \int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{3\cos^2 x} + \frac{6}{\sqrt{x}} \right) dx \\ &= 2 \int \frac{1}{1+x^2} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + 6 \int x^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= 2 \arctan x \quad \tan x \end{aligned}$$

例 求不定积分 $\int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{3\cos^2 x} + \frac{6}{\sqrt{x}} \right) dx$

解

$$\begin{aligned} & \int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{3\cos^2 x} + \frac{6}{\sqrt{x}} \right) dx \\ &= 2 \int \frac{1}{1+x^2} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + 6 \int x^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= 2 \arctan x - \frac{1}{3} \tan x \end{aligned}$$

例 求不定积分 $\int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{3\cos^2 x} + \frac{6}{\sqrt{x}} \right) dx$

解

$$\begin{aligned} & \int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{3\cos^2 x} + \frac{6}{\sqrt{x}} \right) dx \\ &= 2 \int \frac{1}{1+x^2} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + 6 \int x^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= 2 \arctan x - \frac{1}{3} \tan x \quad x^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

例 求不定积分 $\int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{3\cos^2 x} + \frac{6}{\sqrt{x}} \right) dx$

解

$$\begin{aligned} & \int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{3\cos^2 x} + \frac{6}{\sqrt{x}} \right) dx \\ &= 2 \int \frac{1}{1+x^2} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + 6 \int x^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= 2 \arctan x - \frac{1}{3} \tan x \quad 2x^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

例 求不定积分 $\int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{3\cos^2 x} + \frac{6}{\sqrt{x}} \right) dx$

解

$$\begin{aligned} & \int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{3\cos^2 x} + \frac{6}{\sqrt{x}} \right) dx \\ &= 2 \int \frac{1}{1+x^2} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + 6 \int x^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= 2 \arctan x - \frac{1}{3} \tan x + 6 \cdot 2x^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

例 求不定积分 $\int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{3\cos^2 x} + \frac{6}{\sqrt{x}} \right) dx$

解

$$\begin{aligned} & \int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{3\cos^2 x} + \frac{6}{\sqrt{x}} \right) dx \\ &= 2 \int \frac{1}{1+x^2} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + 6 \int x^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= 2 \arctan x - \frac{1}{3} \tan x + 6 \cdot 2x^{\frac{1}{2}} + C \end{aligned}$$

例 求不定积分 $\int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{3\cos^2 x} + \frac{6}{\sqrt{x}} \right) dx$

解

$$\begin{aligned} & \int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{3\cos^2 x} + \frac{6}{\sqrt{x}} \right) dx \\ &= 2 \int \frac{1}{1+x^2} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + 6 \int x^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= 2 \arctan x - \frac{1}{3} \tan x + 6 \cdot 2x^{\frac{1}{2}} + C \\ &= 2 \arctan x - \frac{1}{3} \tan x + 12x^{\frac{1}{2}} + C \end{aligned}$$

补充：不定积分的存在性

如果 $f(x)$ 是连续函数，则 $f(x)$ 一定存在原函数，从而不定积分 $\int f(x)dx$ 也一定存在

问题是 如何把 $\int f(x)dx$ 求出来？

We are here now...

1. “原函数”与“不定积分”的概念
2. 不定积分的性质
3. 不定积分的几何意义

例子 设 $y = f(x)$ 的图形经过点 $(1, 3)$ ，并且其切线的斜率为 $2x$ 。试求出 $f(x)$ 。

例子 设 $y = f(x)$ 的图形经过点 $(1, 3)$ ，并且其切线的斜率为 $2x$ 。试求出 $f(x)$ 。

解

$$f'(x) = 2x$$

例子 设 $y = f(x)$ 的图形经过点 $(1, 3)$ ，并且其切线的斜率为 $2x$ 。试求出 $f(x)$ 。

解

$$f'(x) = 2x \implies f(x) = x^2 + C$$

例子 设 $y = f(x)$ 的图形经过点 $(1, 3)$ ，并且其切线的斜率为 $2x$ 。试求出 $f(x)$ 。

解

$$f'(x) = 2x \implies f(x) = x^2 + C$$

又因为 $f(1) = 3$ ，所以

例子 设 $y = f(x)$ 的图形经过点 $(1, 3)$ ，并且其切线的斜率为 $2x$ 。试求出 $f(x)$ 。

解

$$f'(x) = 2x \implies f(x) = x^2 + C$$

又因为 $f(1) = 3$ ，所以 $3 = f(1) = 1^2 + C$ ，

例子 设 $y = f(x)$ 的图形经过点 $(1, 3)$ ，并且其切线的斜率为 $2x$ 。试求出 $f(x)$ 。

解

$$f'(x) = 2x \implies f(x) = x^2 + C$$

又因为 $f(1) = 3$ ，所以 $3 = f(1) = 1^2 + C$ ， $C = 2$ 。所以

例子 设 $y = f(x)$ 的图形经过点 $(1, 3)$ ，并且其切线的斜率为 $2x$ 。试求出 $f(x)$ 。

解

$$f'(x) = 2x \implies f(x) = x^2 + C$$

又因为 $f(1) = 3$ ，所以 $3 = f(1) = 1^2 + C$ ， $C = 2$ 。所以

$$f(x) = x^2 + 2$$