第 03 周作业解答

练习 1.（共振问题）假设弹簧系统的固有频率是 ω，并且受到频率为 Ω 的外力 $F = F_0 \cos(\Omega t)$ 作用（ω, Ω 均为常数，F_0 是常数，$F_0 \neq 0$）。所以物体运动的方程为

$$x'' + \omega^2 x = F_0 \cos(\Omega t).$$

1. 设 $\omega \neq \Omega$，求出物体运动的通解 $x = x(t)$，并回答：当 Ω 越接近 ω 时，物体的振幅有什么变化？
2. 设 $\omega = \Omega$，求出物体运动的通解 $x = x(t)$，并回答：随时间 t 的变化，物体的振幅有什么变化？

解

1. 假设 $\omega \neq \Omega$。特征方程为 $r^2 + \omega^2 = 0$，特征值 $r_{1,2} = \pm\omega i$，齐次部分 $x'' + \omega^2 x = 0$ 的通解是

$$C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t).$$

非齐次项为 $f(t) = F_0 \cos(\Omega t)$。因为 Ωi 不是特征值，所以设特解 $x^* = a\cos(\Omega t) + b\sin(\Omega t)$（其中 a, b 为待定系数）。代入原方程得

$$x^{*\prime\prime} + \omega^2 x^* = a(\omega^2 - \Omega^2)\cos(\Omega t) + b(\omega^2 - \Omega^2)\sin(\Omega t) = F_0 \cos(\Omega t).$$

所以

$$\begin{cases} a(\omega^2 - \Omega^2) = F_0 \\ b(\omega^2 - \Omega^2) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = \frac{F_0}{\omega^2 - \Omega^2} \\ b = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x^* = \frac{F_0}{\omega^2 - \Omega^2}\cos(\Omega t).$$

所以通解是

$$x = \frac{F_0}{\omega^2 - \Omega^2}\cos(\Omega t) + C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t).$$

可见当 $\omega \to \Omega$ 时，x 振幅（主要由 $\frac{F_0}{\omega^2 - \Omega^2}$ 贡献）趋于无穷大。

2. 假设 $\omega = \Omega$。特征方程为 $r^2 + \omega^2 = 0$，特征值 $r_{1,2} = \pm\omega i$，齐次部分 $x'' + \omega^2 x = 0$ 的通解是

$$C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t).$$

非齐次项为 $f(t) = F_0 \cos(\Omega t) = F_0 \cos(\omega t)$。因为 ωi 不是特征值，所以设特解 $x^* = t\left[a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)\right]$（其中 a, b 为待定系数）。代入原方程得

$$x^{*\prime\prime} + \omega^2 x^* = 2b\omega\cos(\omega t) - 2a\omega\sin(\omega t) = F_0 \cos(\omega t).$$

所以

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{F_0}{2\omega} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x^* = \frac{F_0}{2\omega} t \sin(\omega t).$$

所以通解是

$$x = \frac{F_0}{2\omega} t \sin(\omega t) + C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t).$$

可见当 $t \to +\infty$ 时，x 振幅（主要由 $\frac{F_0}{2\omega} t$ 贡献）趋于无穷大。

练习 2. 设 $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} + 2\overrightarrow{c}$，$\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$。试用 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ 表示 $2\overrightarrow{u} - 3\overrightarrow{v}$。

解

$$2\vec{u}-3\vec{v}=2(\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c})-3(-\vec{a}+3\vec{b}+\vec{c})=5\vec{a}-11\vec{b}+\vec{c}$$

练习 3. 把 ΔABC 的 BC 边四等分，设等分点依次为 D_1, D_2, D_3。试以 $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$ 表示向量 $\overrightarrow{D_1A}$, $\overrightarrow{D_2A}$ 和 $\overrightarrow{D_3A}$。

解

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{D_1A}&=\overrightarrow{D_1B}+\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{BD_1}-\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{4}\vec{a}-\vec{c},\\
\overrightarrow{D_2A}&=\overrightarrow{D_2B}+\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{BD_2}-\overrightarrow{AB}=-\frac{2}{4}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{c},\\
\overrightarrow{D_3A}&=\overrightarrow{D_3B}+\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{BD_3}-\overrightarrow{AB}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}=-\frac{3}{4}\vec{a}-\vec{c}.
\end{aligned}$$

练习 4. 已知两点 $A(1,\,-3,\,7)$ 和 $B(-2,\,5,\,1)$。求 $\overrightarrow{AB}$ 坐标，求模长 $|\overrightarrow{AB}|$，求 $\overrightarrow{AB}$ 的方向余弦，求出 $\overrightarrow{AB}$ 与 x, y, z 轴的夹角 α, β, γ（精确到小数点后一位）。(需要用到计算器，一些在线科学计算器，如 `http://web2.0calc.com/`，可能会帮到你)

解

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}&=(-3,\,8,\,-6)\\
|\overrightarrow{AB}|&=\sqrt{(-3)^2+8^2+(-6)^2}=\sqrt{109}\\
(\cos\alpha,\,\cos\beta,\,\cos\gamma)&=\frac{1}{|\overrightarrow{AB}|}\overrightarrow{AB}=\left(\frac{-3}{\sqrt{109}},\,\frac{8}{\sqrt{109}},\,\frac{-6}{\sqrt{109}}\right)\\
\alpha&=\cos^{-1}(\frac{-3}{\sqrt{109}})\approx 106.7^\circ\\
\beta&=\cos^{-1}(\frac{8}{\sqrt{109}})\approx 40.0^\circ\\
\gamma&=\cos^{-1}(\frac{-6}{\sqrt{109}})\approx 125.1^\circ
\end{aligned}$$

练习 5. 求点 $(x,\,y,\,z)$ 关于（1）各坐标面；（2）各坐标轴；（3）坐标原点的对称点的坐标。

	关于 xoy 面	关于 yoz 面	关于 zox 面	关于 x 轴	关于 y 轴	关于 z 轴	关于坐标原点
$(x,\,y,\,z)$	$(x,\,y,\,-z)$	$(-x,\,y,\,z)$	$(x,\,-y,\,z)$	$(x,\,-y,\,-z)$	$(-x,\,y,\,-z)$	$(-x,\,-y,\,z)$	$(-x,\,-y,\,-z)$

练习 6. 求出在 y 轴上的点 M，其到点 $A(1,\,-3,\,7)$ 和到点 $B(5,\,7,\,-5)$ 的距离相等。

解设点 M 坐标为 $(0,\,y,\,0)$，则 $\overrightarrow{MA}=(1,\,-3-y,\,7)$，$\overrightarrow{MB}=(5,\,7-y,\,-5)$。所以

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{MA}|=|\overrightarrow{MB}| \qquad &\Rightarrow \qquad 1+(3+y)^2+7^2=5^2+(7-y)^2+5^2\\
&\Rightarrow \qquad y=2
\end{aligned}$$

所以点 M 坐标为 $(0,\,2,\,0)$。

练习 7. 设向量 $\overrightarrow{AB}$ 在 x, y, z 轴上的投影分别是 $4,\,-4,\,7$。假设点 B 为 $(2,\,-1,\,7)$，求出 A 点坐标。

解设点 A 坐标为 (x, y, z)，则

$$\overrightarrow{AB} = (2-x, -1-y, 7-z) = (4, -4, 7),$$

所以

$$x = -2, y = 3, z = 0$$

练习 8. 设 $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$，$\vec{d} = k\vec{a} + \vec{b}$。假设 $|\vec{a}| = 1$，$|\vec{b}| = 2$，且 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 夹角 $\theta = \frac{1}{3}\pi$。试问：

1. k 为何值时，$\vec{c} \perp \vec{d}$?
2. k 为何值时，以 $\vec{c}$，$\vec{d}$ 为邻边的三角形面积为 6?

解 1. $\vec{c} \perp \vec{d}$ 当且仅当 $\vec{c} \cdot \vec{d} = 0$，而

$$\begin{aligned}\vec{c} \cdot \vec{d} &= (2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (k\vec{a} + \vec{b}) = 2k\vec{a} \cdot \vec{a} + (2+k)\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} = 2k|\vec{a}|^2 + (2+k)|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\theta + |\vec{b}|^2 \\ &= 2k + (2+k) + 4 = 3k + 6\end{aligned}$$

所以 $3k + 6 = 0$，$k = -2$。
2. 三角形面积 $= \frac{1}{2}|\vec{c} \times \vec{d}| = 6$，所以 $|\vec{c} \times \vec{d}| = 12$。而

$$\begin{aligned}\vec{c} \times \vec{d} &= (2\vec{a} + \vec{b}) \times (k\vec{a} + \vec{b}) = 2k\vec{a} \times \vec{a} + 2\vec{a} \times \vec{b} + k\vec{b} \times \vec{a} + \vec{b} \times \vec{b} = (2-k)\vec{a} \times \vec{b}, \\ |\vec{c} \times \vec{d}| &= |(2-k)\vec{a} \times \vec{b}| = |2-k| \cdot |\vec{a} \times \vec{b}| = |2-k| \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\theta = |2-k| \cdot \sqrt{3}.\end{aligned}$$

所以 $|2-k| \cdot \sqrt{3} = 12$，$k = 2 \pm 4\sqrt{3}$。

练习 9. 设有三个向量 $\vec{a} = (2, -3, 1)$，$\vec{b} = (1, -2, 3)$ 和 $\vec{c} = (2, 1, 2)$。

1. 求向量 $\vec{a} \times \vec{b}$。
2. 假设向量 $\vec{r}$ 与 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 都垂直，且 $\mathrm{Prj}_{\vec{c}}\vec{r} = 14$。求 $\vec{r}$。

解 1.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \vec{k} = -7\vec{i} - 5\vec{j} - \vec{k} = (-7, -5, -1)$$

2. $\vec{r}$ 平行于 $\vec{a} \times \vec{b}$，可以设 $\vec{r} = (-7k, -5k, -k)$。
3.

$$14 = \mathrm{Prj}_{\vec{c}}\vec{r} = \frac{\vec{c} \cdot \vec{r}}{|\vec{c}|} = \frac{-14k - 5k - 2k}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = -7k$$

所以 $k = -2$，$\vec{r} = (14, 10, 2)$。