第 03 周作业解答

练习 1. 设 $\vec{u}=\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$, $\vec{v}=-\vec{a}+3\vec{b}+\vec{c}$。试用 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 表示 $2\vec{u}-3\vec{v}$。

解

$$2\vec{u}-3\vec{v}=2(\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c})-3(-\vec{a}+3\vec{b}+\vec{c})=5\vec{a}-11\vec{b}+\vec{c}$$

练习 2. 把 ΔABC 的 BC 边四等分，设等分点依次为 D_1, D_2, D_3。试以 $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$ 表示向量 $\overrightarrow{D_1A}$, $\overrightarrow{D_2A}$ 和 $\overrightarrow{D_3A}$。

解

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{D_1A}&=\overrightarrow{D_1B}+\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{BD_1}-\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{4}\vec{a}-\vec{c},\\
\overrightarrow{D_2A}&=\overrightarrow{D_2B}+\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{BD_2}-\overrightarrow{AB}=-\frac{2}{4}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{c},\\
\overrightarrow{D_3A}&=\overrightarrow{D_3B}+\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{BD_3}-\overrightarrow{AB}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}=-\frac{3}{4}\vec{a}-\vec{c}.
\end{aligned}$$

练习 3. 已知两点 $A(1,-3,7)$ 和 $B(-2,5,1)$。求 $\overrightarrow{AB}$ 坐标，求模长 $|\overrightarrow{AB}|$，求 $\overrightarrow{AB}$ 的方向余弦，求出 $\overrightarrow{AB}$ 与 x, y, z 轴的夹角 α, β, γ（精确到小数点后一位）。(需要用到计算器，一些在线科学计算器，如 `http://web2.0calc.com/`，可能会帮到你)

解

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}&=(-3,\,8,\,-6)\\
|\overrightarrow{AB}|&=\sqrt{(-3)^2+8^2+(-6)^2}=\sqrt{109}\\
(\cos\alpha,\,\cos\beta,\,\cos\gamma)&=\frac{1}{|\overrightarrow{AB}|}\overrightarrow{AB}=\left(\frac{-3}{\sqrt{109}},\,\frac{8}{\sqrt{109}},\,\frac{-6}{\sqrt{109}}\right)\\
\alpha&=\cos^{-1}\left(\frac{-3}{\sqrt{109}}\right)\approx 106.7^\circ\\
\beta&=\cos^{-1}\left(\frac{8}{\sqrt{109}}\right)\approx 40.0^\circ\\
\gamma&=\cos^{-1}\left(\frac{-6}{\sqrt{109}}\right)\approx 125.1^\circ
\end{aligned}$$

练习 4. 求点 (x,y,z) 关于（1）各坐标面；（2）各坐标轴；（3）坐标原点的对称点的坐标。

解

	关于 xoy 面	关于 yoz 面	关于 zox 面	关于 x 轴	关于 y 轴	关于 z 轴	关于坐标原点
(x,y,z)	$(x,y,-z)$	$(-x,y,z)$	$(x,-y,z)$	$(x,-y,-z)$	$(-x,y,-z)$	$(-x,-y,z)$	$(-x,-y,-z)$

练习 5. 求出在 y 轴上的点 M，其到点 $A(1,-3,7)$ 和到点 $B(5,7,-5)$ 的距离相等。

解设点 M 坐标为 $(0,\, y,\, 0)$，则 $\overrightarrow{MA} = (1,\, -3-y,\, 7)$，$\overrightarrow{MB} = (5,\, 7-y,\, -5)$。所以

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}| \qquad &\Rightarrow \qquad 1 + (3+y)^2 + 7^2 = 5^2 + (7-y)^2 + 5^2 \\ &\Rightarrow \qquad y = 2 \end{aligned}$$

所以点 M 坐标为 $(0,\, 2,\, 0)$。

练习 6. 设向量 $\overrightarrow{AB}$ 在 x, y, z 轴上的投影分别是 $4,\, -4,\, 7$。假设点 B 为 $(2,\, -1,\, 7)$，求出 A 点坐标。

解设点 A 坐标为 $(x,\, y,\, z)$，则

$$\overrightarrow{AB} = (2-x,\, -1-y,\, 7-z) = (4,\, -4,\, 7),$$

所以

$$x = -2, y = 3, z = 0$$

练习 7. 设空间中三个点 $C(1,\, -1,\, 2)$，$A(3,\, 3,\, 1)$，$B(3,\, 1,\, 3)$。令 $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$，$\vec{b} = \overrightarrow{CB}$，$\theta$ 为 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夹角。求 $\vec{a} \cdot \vec{b}$，θ，$\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\vec{a}$，$\vec{a} \times \vec{b}$ 及三角形 ΔABC 的面积。

解 1. $\vec{a} = \overrightarrow{CA} = (2,\, 4,\, -1)$，$\vec{b} = \overrightarrow{CB} = (2,\, 2,\, 1)$
2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 = 11$
3. $\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{11}{3\sqrt{21}}$，所以 $\theta = \arccos\frac{11}{3\sqrt{21}} = 36.9^\circ$
4. $\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{11}{3}$
5.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\vec{k} = 6\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k} = (6,\, -4,\, -4)$$

6. ΔABC 的面积 $= \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2}\sqrt{6^2 + (-4)^2 + (-4)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{68} = \sqrt{17}$

练习 8. 设 $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$，$\vec{d} = k\vec{a} + \vec{b}$。假设 $|\vec{a}| = 1$，$|\vec{b}| = 2$，且 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 夹角 $\theta = \frac{1}{3}\pi$。试问:

1. k 为何值时，$\vec{c} \perp \vec{d}$?
2. k 为何值时，以 $\vec{c}$，$\vec{d}$ 为邻边的三角形面积为 6?

解 1. $\vec{c} \perp \vec{d}$ 当且仅当 $\vec{c} \cdot \vec{d} = 0$，而

$$\begin{aligned} \vec{c} \cdot \vec{d} &= (2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (k\vec{a} + \vec{b}) = 2k\vec{a} \cdot \vec{a} + (2+k)\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} = 2k|\vec{a}|^2 + (2+k)|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|\cos\theta + |\vec{b}|^2 \\ &= 2k + (2+k) + 4 = 3k + 6 \end{aligned}$$

所以 $3k + 6 = 0$，$k = -2$。

2. 三角形面积 $= \frac{1}{2}|\vec{c} \times \vec{d}| = 6$，所以 $|\vec{c} \times \vec{d}| = 12$。而

$$\vec{c} \times \vec{d} = (2\vec{a} + \vec{b}) \times (k\vec{a} + \vec{b}) = 2k\vec{a} \times \vec{a} + 2\vec{a} \times \vec{b} + k\vec{b} \times \vec{a} + \vec{b} \times \vec{b} = (2-k)\vec{a} \times \vec{b},$$
$$|\vec{c} \times \vec{d}| = |(2-k)\vec{a} \times \vec{b}| = |2-k| \cdot |\vec{a} \times \vec{b}| = |2-k| \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|\cos\theta = |2-k| \cdot \sqrt{3}.$$

所以 $|2-k| \cdot \sqrt{3} = 12$，$k = 2 \pm 4\sqrt{3}$。

练习 9. 设有三个向量 $\vec{a} = (2,\, -3,\, 1)$，$\vec{b} = (1,\, -2,\, 3)$ 和 $\vec{c} = (2,\, 1,\, 2)$。

1. 求向量 $\vec{a} \times \vec{b}$。

2. 假设向量 $\vec{r}$ 与 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 都垂直，且 $\mathrm{Prj}_{\vec{c}}\vec{r} = 14$。求 $\vec{r}$。

解 1.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \vec{k} = -7\vec{i} - 5\vec{j} - \vec{k} = (-7,\, -5,\, -1)$$

2. $\vec{r}$ 平行于 $\vec{a} \times \vec{b}$，可以设 $\vec{r} = (-7k,\, -5k,\, -k)$。

3.

$$14 = \mathrm{Prj}_{\vec{c}}\vec{r} = \frac{\vec{c} \cdot \vec{r}}{|\vec{c}|} = \frac{-14k - 5k - 2k}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = -7k$$

所以 $k = -2$，$\vec{r} = (14,\, 10,\, 2)$。