第 02 周作业解答

练习 1. 计算降阶法计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3+3r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 5 & -1 \\ -4 & 15 & 16 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第四列展开}} (-1)\cdot(-1)^{2+4}\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -4 & 15 & 16 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3+c_1]{c_2-2c_1} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 23 & 12 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 23 & 12 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = -83$$

练习 2. 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$，求第四列各元素的余子式之和，即 $M_{14}+M_{24}+M_{34}+M_{44}$

解

$$M_{14}+M_{24}+M_{34}+M_{44} = (-1)\cdot A_{14} + 1\cdot A_{24} + (-1)\cdot A_{34} + 1\cdot A_{44} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{r_3+r_2 \\ r_4-r_2}]{r_1+r_2} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -7 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第四列展开}} 1\cdot(-1)^{2+4}\cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & -7 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第三行展开}} 5\cdot(-1)^{3+2}\cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 45$$

练习 3. 计算行列式 $D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ 和 $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1+a \\ 1 & 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1+a & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 的值。

解

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{依次将 2, 3, 4 列加到第 1 列}} \begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{r_3-r_1 \\ r_4-r_1}]{r_2-r_1} 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 12\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3+r_1]{r_2-r_1} 12\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 96.$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&1&1&1+a\\1&1&1+a&1\\1&1+a&1&1\\1+a&1&1&1\end{vmatrix}\xlongequal{\text{依次将 2, 3, 4 列加到第 1 列}}\begin{vmatrix}4+a&1&1&1+a\\4+a&1&1+a&1\\4+a&1+a&1&1\\4+a&1&1&1\end{vmatrix}$$

$$=(4+a)\begin{vmatrix}1&1&1&1+a\\1&1&1+a&1\\1&1+a&1&1\\1&1&1&1\end{vmatrix}\xlongequal[\substack{r_3-r_1\\r_4-r_1}]{r_2-r_1}(4+a)\begin{vmatrix}1&1&1&1+a\\0&0&a&-a\\0&a&0&-a\\0&0&0&-a\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第一列展开}}(4+a)\begin{vmatrix}0&a&-a\\a&0&-a\\0&0&-a\end{vmatrix}$$

$$=-a^3(4+a)\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&1\\0&0&1\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第一列展开}}-a^3(4+a)\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=a^3(4+a).$$

练习 4. 设行列式 $D=\begin{vmatrix}2&-1&3\\0&1&1\\-1&-2&0\end{vmatrix}$，求出其所有代数余子式 A_{ij}。令行列式 $D^*=\begin{vmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{vmatrix}$，验证 $D^*=D^2$。

解

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&1\\-2&0\end{vmatrix}=2,\qquad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0&1\\-1&0\end{vmatrix}=-1,\qquad A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0&1\\-1&-2\end{vmatrix}=1$$
$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-1&3\\-2&0\end{vmatrix}=-6,\qquad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2&3\\-1&0\end{vmatrix}=3,\qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2&-1\\-1&-2\end{vmatrix}=5$$
$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-1&3\\1&1\end{vmatrix}=-4,\qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2&3\\0&1\end{vmatrix}=-2,\qquad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2&-1\\0&1\end{vmatrix}=2$$

所以

$$D^*=\begin{vmatrix}2&-6&-4\\-1&3&-2\\1&5&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&-6&-4\\0&8&0\\1&5&2\end{vmatrix}=64=D^2.$$