§6.7 定积分的应用

2017-2018 学年 II

教学要求

♢

♣

♡

♠

We are here now...

奇偶函数的定积分

定积分求平面图形面积

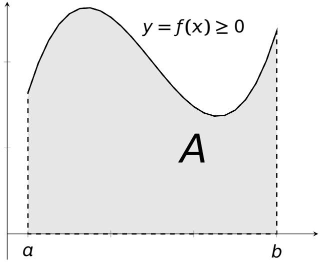
旋转体体积

在经济等方面的应用

再谈定积分的几何意义——微元法

- 当 $f \geq 0$ 时，

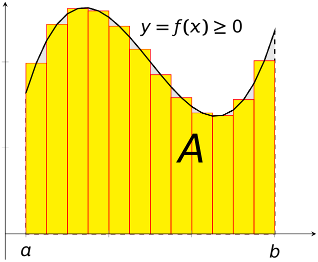
$$A = \int_a^b f(x)dx$$



再谈定积分的几何意义——微元法

- 当 $f \geq 0$ 时，

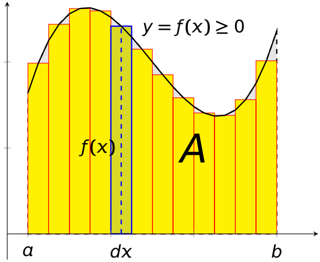
$$A = \int_a^b f(x)dx$$



再谈定积分的几何意义——微元法

- 当 $f \geq 0$ 时，

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

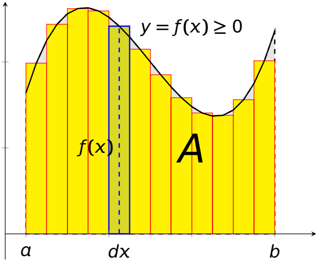


再谈定积分的几何意义——微元法

- 当 $f \geq 0$ 时，

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

注 "$f(x)dx$" 是小矩形面积

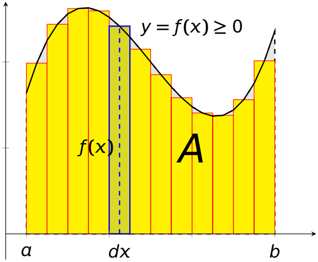


再谈定积分的几何意义——微元法

- 当$f \geq 0$时，

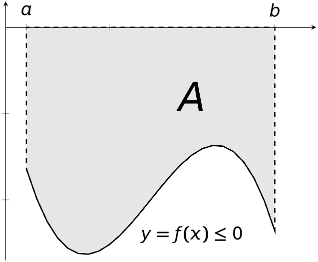
$$A = \int_a^b f(x)dx$$

注 “$f(x)dx$” 是小矩形面积



- 当$f \leq 0$时，

$$A =$$

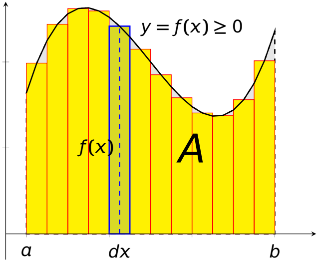


再谈定积分的几何意义——微元法

- 当 $f \geq 0$ 时，

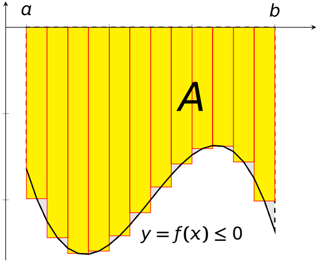
$$A = \int_a^b f(x)dx$$

注 “$f(x)dx$” 是小矩形面积



- 当 $f \leq 0$ 时，

$$A =$$

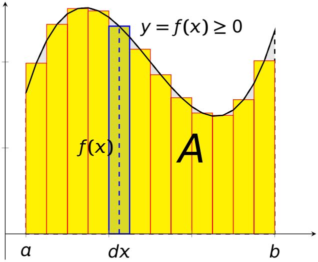


再谈定积分的几何意义——微元法

- 当 $f \geq 0$ 时，

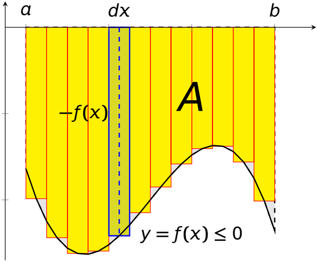
$$A = \int_a^b f(x)dx$$

注 “$f(x)dx$” 是小矩形面积



- 当 $f \leq 0$ 时，

$$A =$$

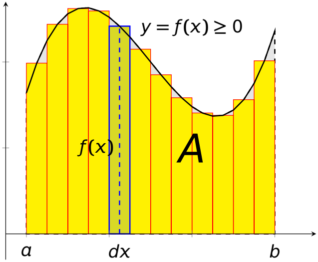


再谈定积分的几何意义——微元法

- 当$f \geq 0$时，

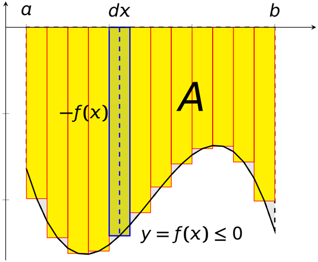
$$A = \int_a^b f(x)dx$$

注 “$f(x)dx$” 是小矩形面积



- 当$f \leq 0$时，

$$A = \quad -f(x)dx$$

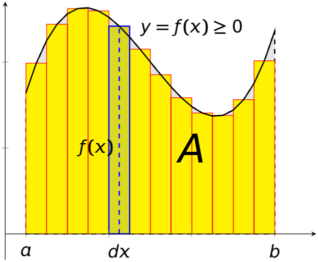


再谈定积分的几何意义——微元法

- 当 $f \geq 0$ 时，

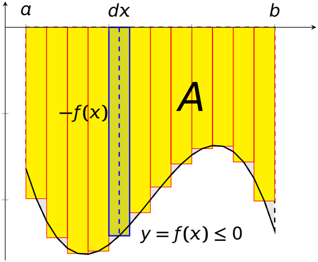
$$A = \int_a^b f(x)dx$$

注 “$f(x)dx$” 是小矩形面积



- 当 $f \leq 0$ 时，

$$A = \int_a^b -f(x)dx$$

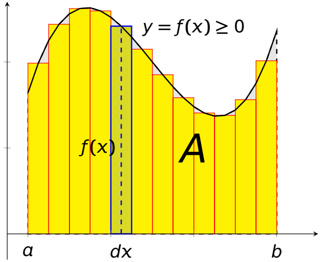


再谈定积分的几何意义——微元法

- 当 $f \geq 0$ 时，

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

注 “$f(x)dx$” 是小矩形面积

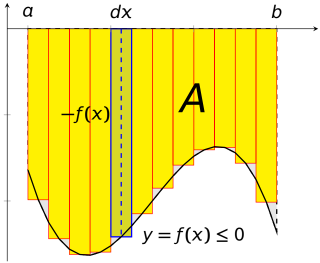


- 当 $f \leq 0$ 时，

$$A = \int_a^b -f(x)dx$$

或者

$$\int_a^b f(x)dx = -A$$

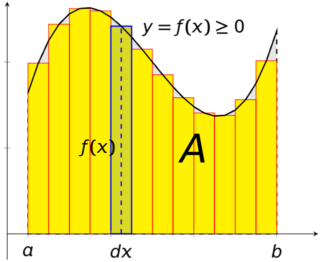


再谈定积分的几何意义——微元法

- 当 $f \geq 0$ 时,

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

注 “$f(x)dx$” 是小矩形面积



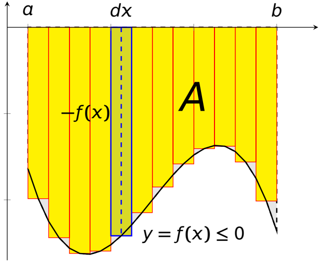
- 当 $f \leq 0$ 时,

$$A = \int_a^b -f(x)dx$$

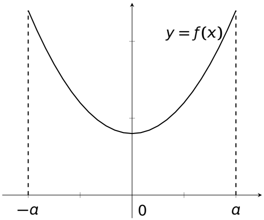
或者

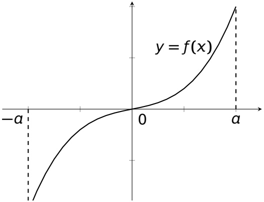
$$\int_a^b f(x)dx = -A$$

注 “$-f(x)dx$” 是小矩形面积



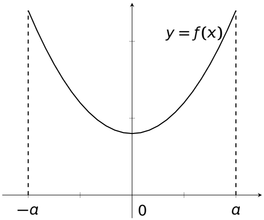
偶函数与奇函数

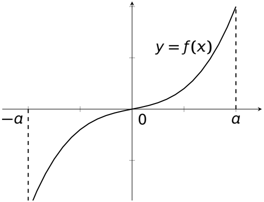




偶函数与奇函数

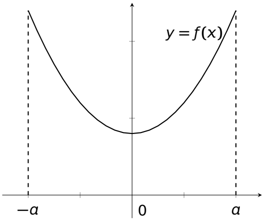
$f(x)$ 为偶函数



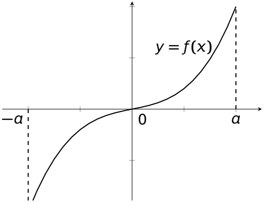


偶函数与奇函数

$f(x)$ 为偶函数



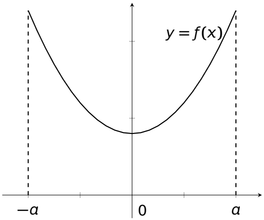
$f(x)$ 为奇函数



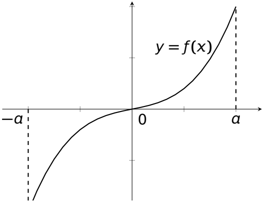
偶函数与奇函数

设函数 $f(x)$ 定义在区间 $[-a, a]$ 上,

- 若 $f(-x) = f(x)$, $x \in [-a, a]$, 则 $f(x)$ 为偶函数



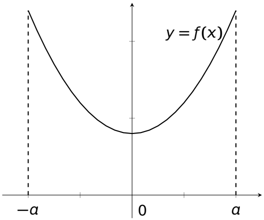
$f(x)$ 为奇函数



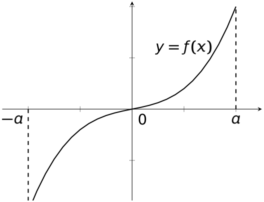
偶函数与奇函数

设函数 $f(x)$ 定义在区间 $[-a, a]$ 上,

- 若 $f(-x) = f(x)$, $x \in [-a, a]$, 则 $f(x)$ 为偶函数



- 若 $f(-x) = -f(x)$, $x \in [-a, a]$, 则 $f(x)$ 为奇函数



偶函数的定积分

性质 设 $f(x)$ 是 $[-a, a]$ 上的连续偶函数，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx \overset{\text{or}}{=} 2\int_{-a}^{0} f(x)dx.$$

,

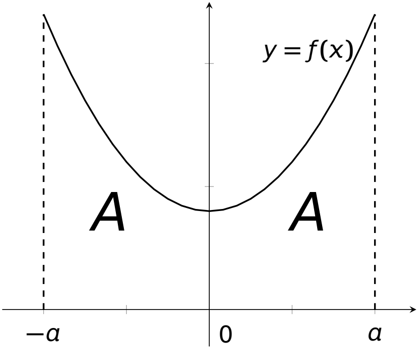
偶函数的定积分

性质 设 $f(x)$ 是 $[-a, a]$ 上的连续偶函数，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx \overset{\text{or}}{=} 2\int_{-a}^{0} f(x)dx.$$

以 "$f(x) \geq 0$" 情形为例说明：

，



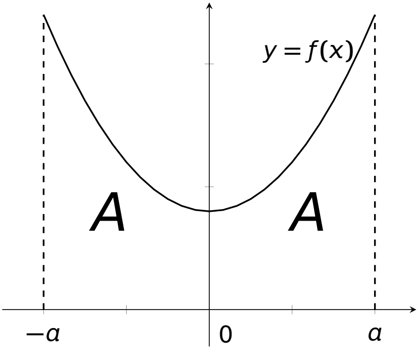
偶函数的定积分

性质 设 $f(x)$ 是 $[-a, a]$ 上的连续偶函数，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx \overset{\text{or}}{=} 2\int_{-a}^{0} f(x)dx.$$

以 “$f(x) \geq 0$” 情形为例说明：

$$\because \int_{0}^{a} f(x)dx = A,$$



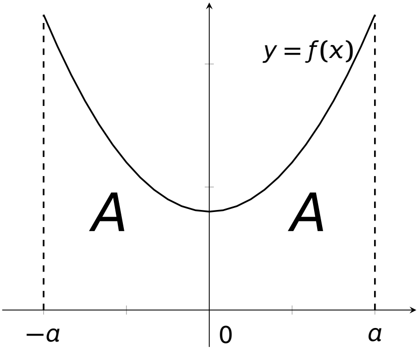
偶函数的定积分

性质 设 $f(x)$ 是 $[-a, a]$ 上的连续偶函数，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx \overset{\text{or}}{=} 2\int_{-a}^{0} f(x)dx.$$

以 “$f(x) \geq 0$” 情形为例说明：

$$\because \int_{0}^{a} f(x)dx = A, \qquad \int_{-a}^{0} f(x)dx = A$$



偶函数的定积分

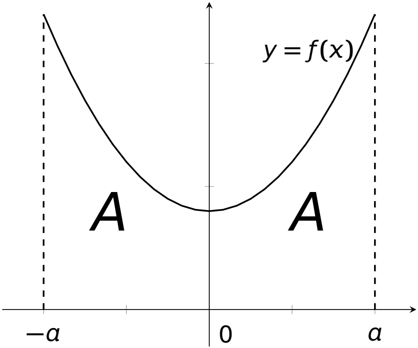
性质 设 $f(x)$ 是 $[-a, a]$ 上的连续偶函数，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx \overset{\text{or}}{=} 2\int_{-a}^{0} f(x)dx.$$

以“$f(x) \geq 0$”情形为例说明：

$$\because \int_{0}^{a} f(x)dx = A, \qquad \int_{-a}^{0} f(x)dx = A$$

$$\therefore \int_{-a}^{a} f(x)dx = \text{大曲边梯形面积}$$



偶函数的定积分

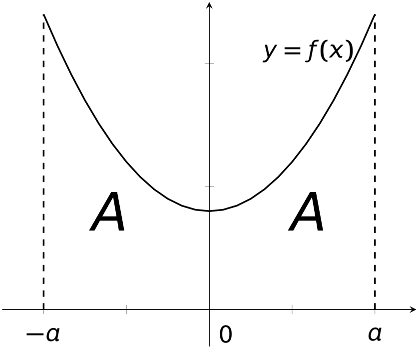
性质 设 $f(x)$ 是 $[-a, a]$ 上的连续偶函数，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx \overset{\text{or}}{=} 2\int_{-a}^{0} f(x)dx.$$

以“$f(x) \geq 0$”情形为例说明：

$$\because \int_{0}^{a} f(x)dx = A, \qquad \int_{-a}^{0} f(x)dx = A$$

$$\therefore \int_{-a}^{a} f(x)dx = \text{大曲边梯形面积} = 2A$$



偶函数的定积分

性质 设 $f(x)$ 是 $[-a, a]$ 上的连续偶函数，则

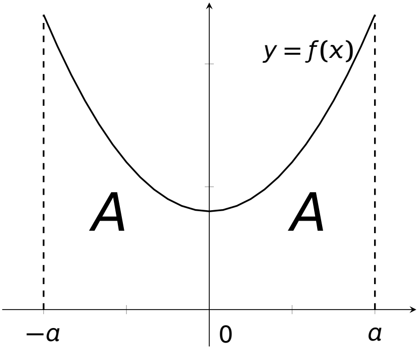
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx \overset{\text{or}}{=} 2\int_{-a}^{0} f(x)dx.$$

以“$f(x) \geq 0$”情形为例说明：

$$\because \int_{0}^{a} f(x)dx = A, \qquad \int_{-a}^{0} f(x)dx = A$$

$$\therefore \int_{-a}^{a} f(x)dx = \text{大曲边梯形面积} = 2A$$

$$= 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$



偶函数的定积分

性质 设 $f(x)$ 是 $[-a, a]$ 上的连续偶函数，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx \overset{\text{or}}{=} 2\int_{-a}^{0} f(x)dx.$$

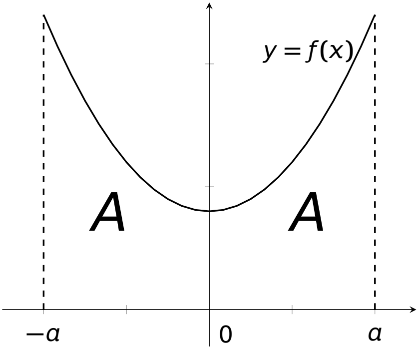
以“$f(x) \geq 0$”情形为例说明：

$$\because \int_{0}^{a} f(x)dx = A, \qquad \int_{-a}^{0} f(x)dx = A$$

$$\therefore \int_{-a}^{a} f(x)dx = \text{大曲边梯形面积} = 2A$$

$$= 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

$$\overset{\text{or}}{=} 2\int_{-a}^{0} f(x)dx$$



奇函数的定积分

性质 设 $f(x)$ 是 $[-a, a]$ 上的连续奇函数，则

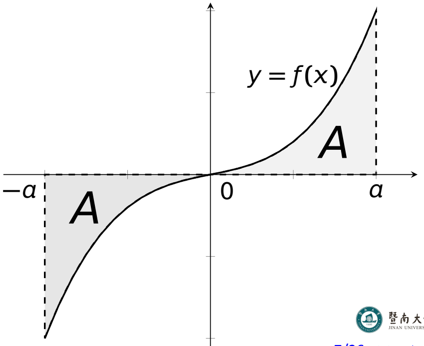
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

奇函数的定积分

性质 设 $f(x)$ 是 $[-a, a]$ 上的连续奇函数，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

以图说明：



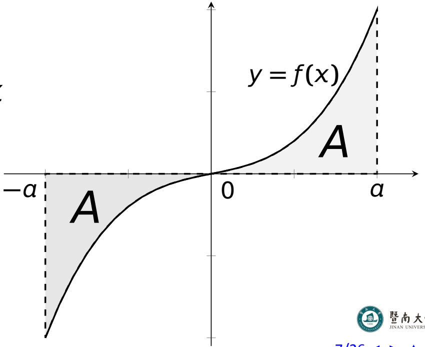
奇函数的定积分

性质 设 $f(x)$ 是 $[-a, a]$ 上的连续奇函数，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

以图说明：

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$



奇函数的定积分

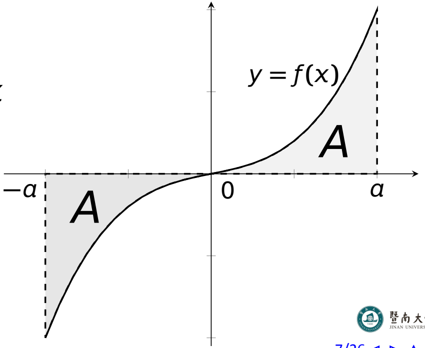
性质 设 $f(x)$ 是 $[-a, a]$ 上的连续奇函数，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

以图说明：

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

$$= -A +$$



奇函数的定积分

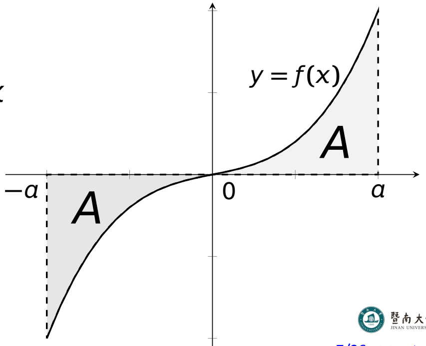
性质 设 $f(x)$ 是 $[-a, a]$ 上的连续奇函数，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

以图说明：

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

$$= -A + A$$



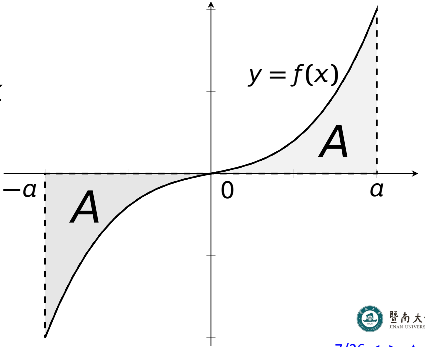
奇函数的定积分

性质 设 $f(x)$ 是 $[-a, a]$ 上的连续奇函数，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

以图说明：

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$
$$= -A + A$$
$$= 0$$



根据函数奇偶性计算定积分

例 计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+x^3}{\cos^2 x}dx$， $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^{2017}+1)\cos x dx$

解

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+x^3}{\cos^2 x}dx =$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^{2017}+1)\cos x dx =$$

根据函数奇偶性计算定积分

例 计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+x^3}{\cos^2 x} dx$， $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^{2017}+1)\cos x dx$

解

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+x^3}{\cos^2 x} dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^3}{\cos^2 x} dx$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^{2017}+1)\cos x dx =$$

根据函数奇偶性计算定积分

例 计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+x^3}{\cos^2 x} dx$，$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^{2017}+1)\cos x dx$

解

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+x^3}{\cos^2 x} dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^3}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx + 0$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^{2017}+1)\cos x dx =$$

根据函数奇偶性计算定积分

例 计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+x^3}{\cos^2 x} dx$, $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^{2017}+1)\cos x dx$

解

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+x^3}{\cos^2 x} dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^3}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx + 0 = \tan x$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^{2017}+1)\cos x dx =$$

根据函数奇偶性计算定积分

例 计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+x^3}{\cos^2 x}dx$， $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^{2017}+1)\cos x dx$

解

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+x^3}{\cos^2 x}dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}dx + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^3}{\cos^2 x}dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}dx + 0 = \tan x\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^{2017}+1)\cos x dx =$$

根据函数奇偶性计算定积分

例 计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+x^3}{\cos^2 x} dx$，$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^{2017}+1)\cos x dx$

解

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+x^3}{\cos^2 x} dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^3}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx + 0 = \tan x \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= 1 - (-1)$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^{2017}+1)\cos x dx =$$

根据函数奇偶性计算定积分

例 计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+x^3}{\cos^2 x}dx$，$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^{2017}+1)\cos x dx$

解

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+x^3}{\cos^2 x}dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}dx + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^3}{\cos^2 x}dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}dx + 0 = \tan x\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= 1-(-1) = 2$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^{2017}+1)\cos x dx =$$

根据函数奇偶性计算定积分

例 计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+x^3}{\cos^2 x}dx$，$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^{2017}+1)\cos x dx$

解

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+x^3}{\cos^2 x}dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}dx + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^3}{\cos^2 x}dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}dx + 0 = \tan x\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= 1-(-1) = 2$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^{2017}+1)\cos x dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^{2017}\cos x dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$$

根据函数奇偶性计算定积分

例 计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+x^3}{\cos^2 x} dx$，$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^{2017}+1)\cos x dx$

解

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+x^3}{\cos^2 x} dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^3}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx + 0 = \tan x \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= 1 - (-1) = 2$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^{2017}+1)\cos x dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^{2017} \cos x dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$$

$$= 0 + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$$

根据函数奇偶性计算定积分

例 计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+x^3}{\cos^2 x}dx$，$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^{2017}+1)\cos x dx$

解

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+x^3}{\cos^2 x}dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}dx + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^3}{\cos^2 x}dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}dx + 0 = \tan x\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= 1-(-1) = 2$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^{2017}+1)\cos x dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^{2017}\cos x dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$$

$$= 0 + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x$$

根据函数奇偶性计算定积分

例 计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+x^3}{\cos^2 x} dx$, $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^{2017}+1)\cos x dx$

解

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+x^3}{\cos^2 x} dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^3}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx + 0 = \tan x \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= 1 - (-1) = 2$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^{2017}+1)\cos x dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^{2017}\cos x dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$$

$$= 0 + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

根据函数奇偶性计算定积分

例 计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+x^3}{\cos^2 x}dx$， $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^{2017}+1)\cos x dx$

解

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+x^3}{\cos^2 x}dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}dx + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^3}{\cos^2 x}dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}dx + 0 = \tan x\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= 1-(-1) = 2$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^{2017}+1)\cos x dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^{2017}\cos x dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$$

$$= 0 + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 1-(-1) = 2$$

根据函数奇偶性计算定积分 II

例 计算定积分 $\int_{-1}^{1}\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx$

解

$$\int_{-1}^{1}\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx =$$

根据函数奇偶性计算定积分 II

例 计算定积分 $\int_{-1}^{1}\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx$

解

$$\int_{-1}^{1}\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx = \int_{-1}^{1} x^2 - 2x\sqrt{1-x^2} + \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx$$

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

根据函数奇偶性计算定积分 II

例 计算定积分 $\int_{-1}^{1}\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx$

解

$$\int_{-1}^{1}\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx = \int_{-1}^{1} x^2 - 2x\sqrt{1-x^2} + \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx$$

$$= \int_{-1}^{1} 1 - 2x\sqrt{1-x^2} dx$$

根据函数奇偶性计算定积分 II

例 计算定积分 $\int_{-1}^{1}\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx$

解

$$\int_{-1}^{1}\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx = \int_{-1}^{1} x^2-2x\sqrt{1-x^2}+\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx$$

$$= \int_{-1}^{1} 1-2x\sqrt{1-x^2}dx$$

$$= \int_{-1}^{1} 1dx-\int_{-1}^{1} 2x\sqrt{1-x^2}dx$$

根据函数奇偶性计算定积分 II

例 计算定积分 $\int_{-1}^{1}\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx$

解

$$\int_{-1}^{1}\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx = \int_{-1}^{1} x^2-2x\sqrt{1-x^2}+\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx$$

$$= \int_{-1}^{1} 1-2x\sqrt{1-x^2}dx$$

$$= \int_{-1}^{1} 1dx-\int_{-1}^{1} 2x\sqrt{1-x^2}dx$$

$$= x \quad -$$

根据函数奇偶性计算定积分 II

例 计算定积分 $\int_{-1}^{1}\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx$

解

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx &= \int_{-1}^{1} x^2-2x\sqrt{1-x^2}+\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx\\ &= \int_{-1}^{1} 1-2x\sqrt{1-x^2}dx\\ &= \int_{-1}^{1} 1dx-\int_{-1}^{1} 2x\sqrt{1-x^2}dx\\ &= x\Big|_{-1}^{1}-\end{aligned}$$

根据函数奇偶性计算定积分 II

例 计算定积分 $\int_{-1}^{1}\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx$

解

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx &= \int_{-1}^{1} x^2-2x\sqrt{1-x^2}+\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx\\ &= \int_{-1}^{1} 1-2x\sqrt{1-x^2}dx\\ &= \int_{-1}^{1} 1dx-\int_{-1}^{1} 2x\sqrt{1-x^2}dx\\ &= x\Big|_{-1}^{1}-0\end{aligned}$$

根据函数奇偶性计算定积分 II

例 计算定积分 $\int_{-1}^{1}\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx$

解

$$\int_{-1}^{1}\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx = \int_{-1}^{1} x^2-2x\sqrt{1-x^2}+\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx$$

$$= \int_{-1}^{1} 1-2x\sqrt{1-x^2}dx$$

$$= \int_{-1}^{1} 1dx - \int_{-1}^{1} 2x\sqrt{1-x^2}dx$$

$$= x\Big|_{-1}^{1} - 0$$

$$= 2$$

We are here now...

奇偶函数的定积分

定积分求平面图形面积

旋转体体积

在经济等方面的应用

求面积 I

例 画出曲线 $y = x^2 + 1$，直线 $x = 2$，x 轴及 y 轴所围成区域，并求面积

求面积 I

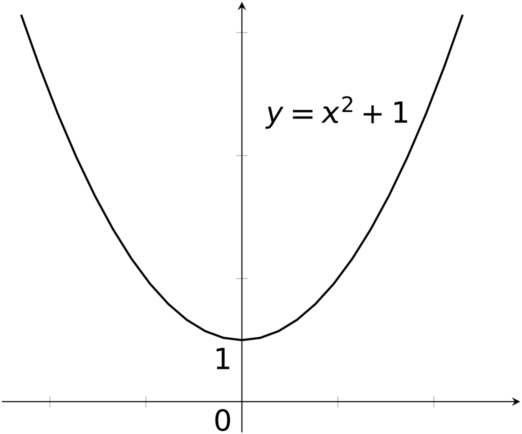
例 画出曲线 $y = x^2 + 1$，直线 $x = 2$，x 轴及 y 轴所围成区域，并求面积

解 $A =$

求面积 I

例 画出曲线 $y=x^2+1$，直线 $x=2$，x 轴及 y 轴所围成区域，并求面积

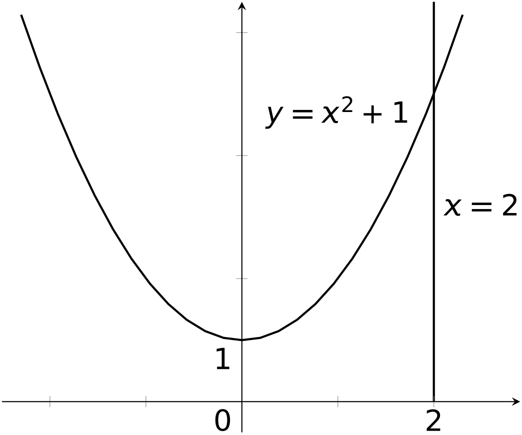
解 $A=$



求面积 I

例 画出曲线 $y = x^2 + 1$，直线 $x = 2$，x 轴及 y 轴所围成区域，并求面积

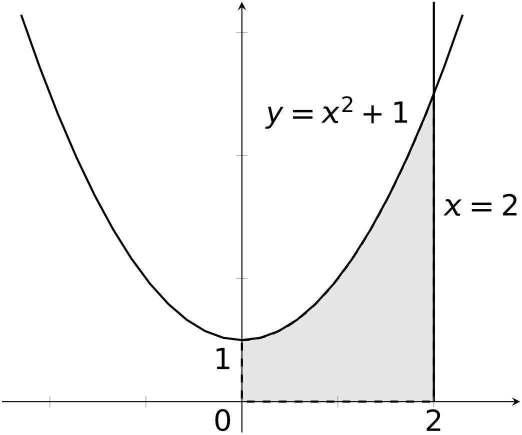
解 $A =$



求面积 I

例 画出曲线 $y=x^2+1$，直线 $x=2$，x 轴及 y 轴所围成区域，并求面积

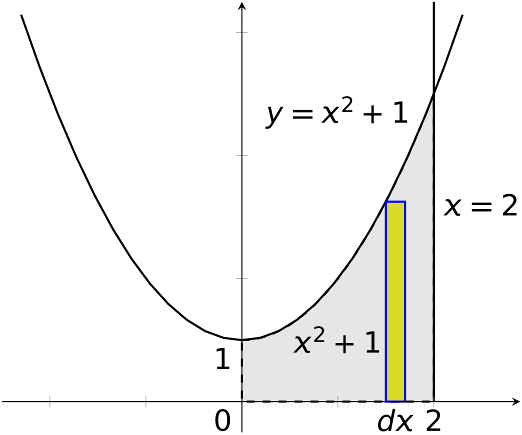
解 $A=$



求面积 I

例 画出曲线 $y = x^2 + 1$，直线 $x = 2$，x 轴及 y 轴所围成区域，并求面积

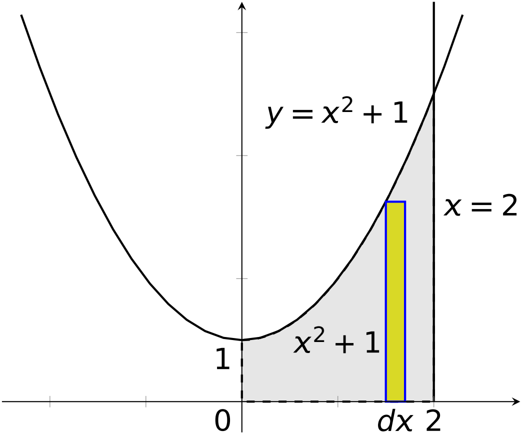
解 $A =$



求面积 I

例 画出曲线 $y = x^2 + 1$，直线 $x = 2$，x 轴及 y 轴所围成区域，并求面积

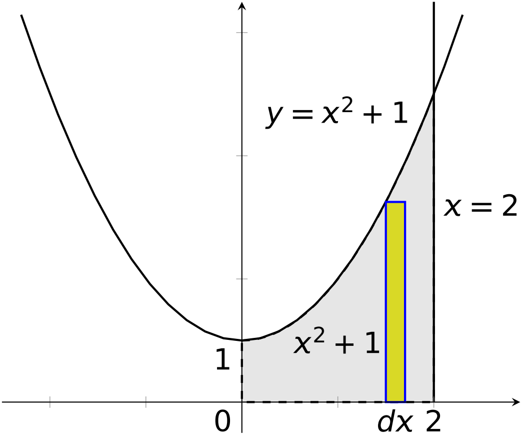
解 $A = \qquad (x^2 + 1)dx$



求面积 I

例 画出曲线 $y = x^2 + 1$，直线 $x = 2$，x 轴及 y 轴所围成区域，并求面积

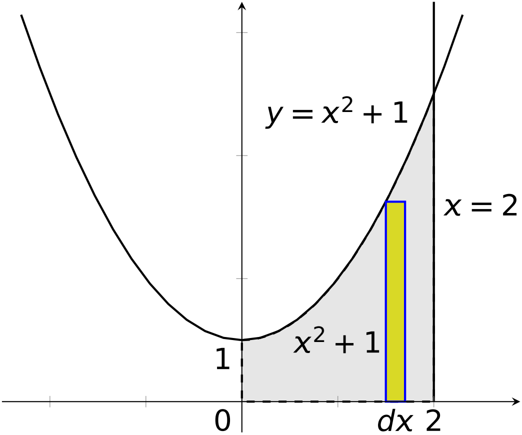
解 $$A = \int_0^2 (x^2 + 1)dx$$



求面积 I

例 画出曲线 $y = x^2 + 1$，直线 $x = 2$，x 轴及 y 轴所围成区域，并求面积

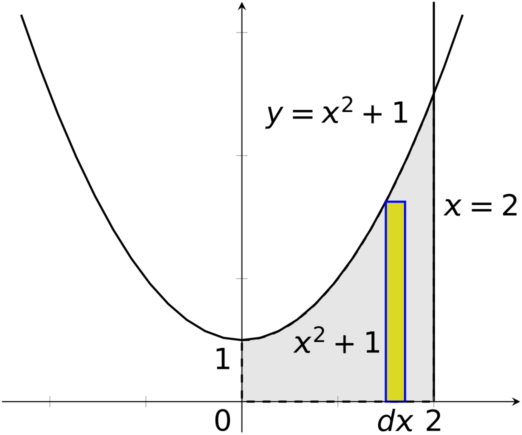
解 $$A = \int_0^2 (x^2+1)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + x\right)$$



求面积 I

例 画出曲线 $y = x^2 + 1$，直线 $x = 2$，x 轴及 y 轴所围成区域，并求面积

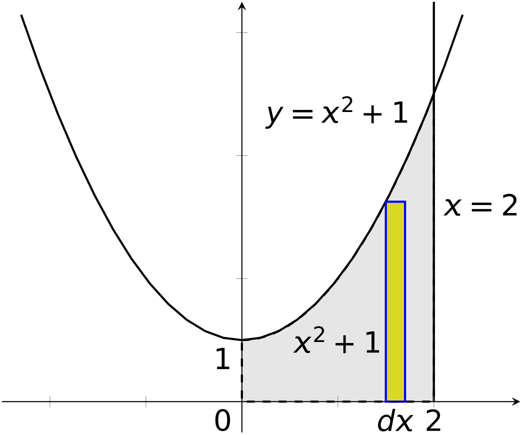
解 $$A = \int_0^2 (x^2+1)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + x\right)\Big|_0^2$$



求面积 I

例 画出曲线 $y=x^2+1$，直线 $x=2$，x 轴及 y 轴所围成区域，并求面积

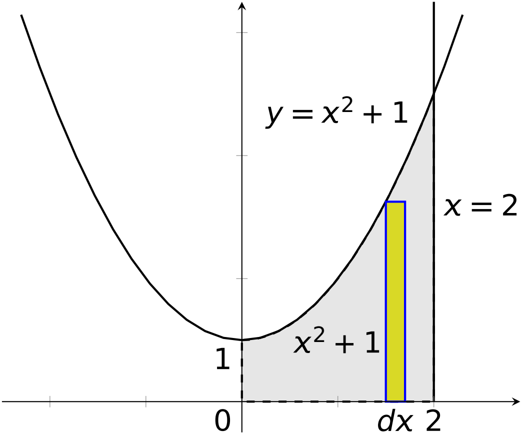
解
$$A=\int_0^2 (x^2+1)dx=\left(\frac{1}{3}x^3+x\right)\Big|_0^2=(\frac{8}{3}+2)-0$$



求面积 I

例 画出曲线 $y=x^2+1$，直线 $x=2$，x 轴及 y 轴所围成区域，并求面积

解 $$A=\int_0^2 (x^2+1)dx=\left(\frac{1}{3}x^3+x\right)\Big|_0^2=(\frac{8}{3}+2)-0=\frac{14}{3}$$



求面积 II

例 画出由曲线 $y = x^2 - 3$，直线 $x = 1$，x 轴及 y 轴所围成区域，并求面积

求面积 II

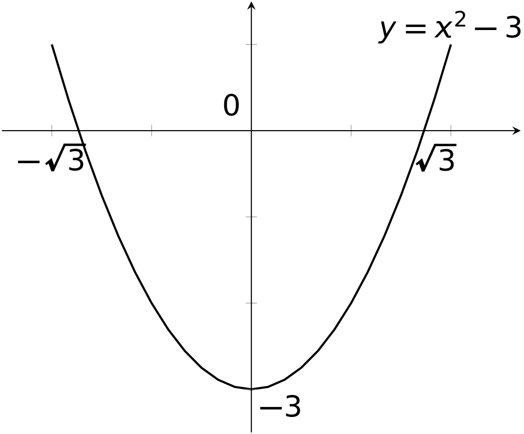
例 画出由曲线 $y = x^2 - 3$，直线 $x = 1$，x 轴及 y 轴所围成区域，并求面积

解 $A =$

求面积 II

例 画出由曲线 $y=x^2-3$，直线 $x=1$，x 轴及 y 轴所围成区域，并求面积

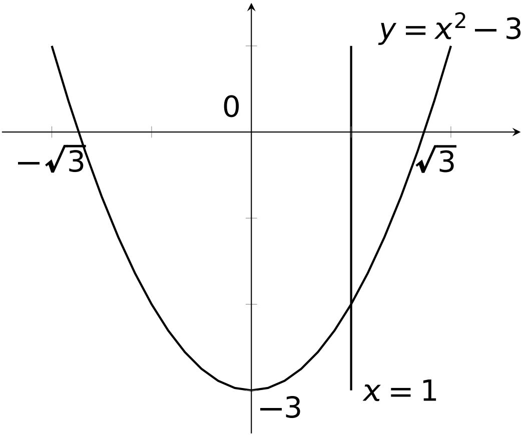
解 $A=$



求面积 II

例 画出由曲线 $y = x^2 - 3$，直线 $x = 1$，x 轴及 y 轴所围成区域，并求面积

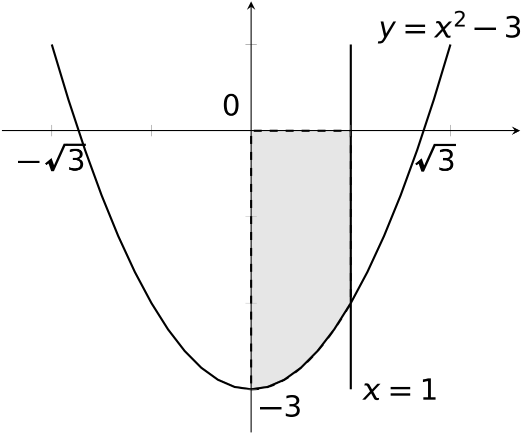
解 $A =$



求面积 II

例 画出由曲线 $y = x^2 - 3$，直线 $x = 1$，x 轴及 y 轴所围成区域，并求面积

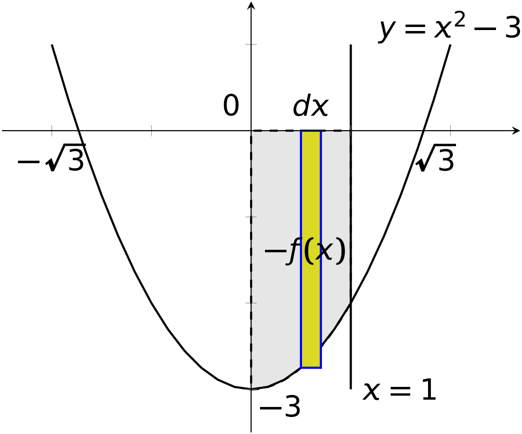
解 $A =$



求面积 II

例 画出由曲线 $y = x^2 - 3$，直线 $x = 1$，x 轴及 y 轴所围成区域，并求面积

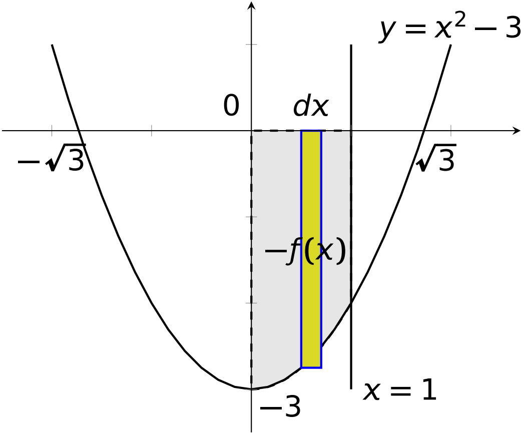
解 $A =$



求面积 II

例 画出由曲线 $y = x^2 - 3$，直线 $x = 1$，x 轴及 y 轴所围成区域，并求面积

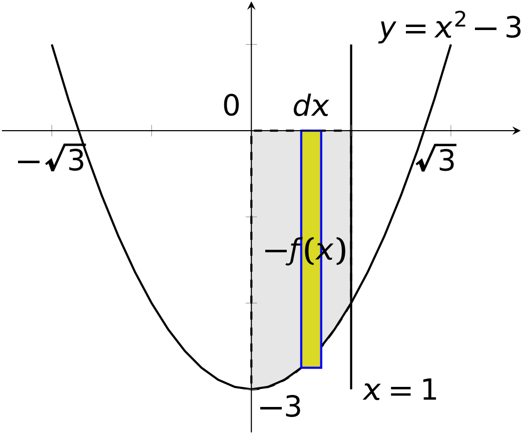
解 $A = \quad -f(x)dx$



求面积 II

例 画出由曲线 $y=x^2-3$，直线 $x=1$，x 轴及 y 轴所围成区域，并求面积

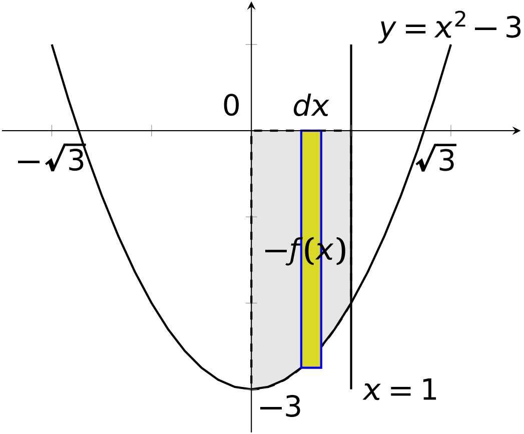
解 $A=\int_0^1 -f(x)dx$



求面积 II

例 画出由曲线 $y = x^2 - 3$，直线 $x = 1$，x 轴及 y 轴所围成区域，并求面积

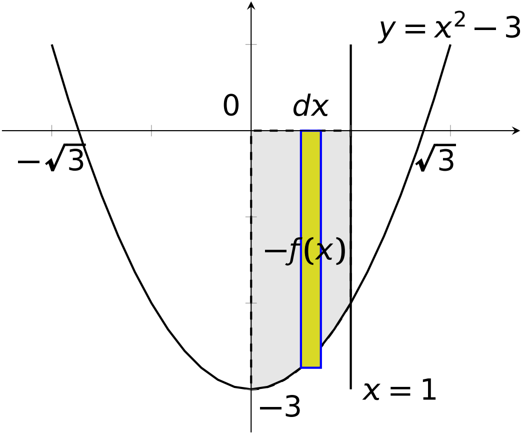
解 $A = \int_0^1 -f(x)dx = \int_0^1 (-x^2 + 3)dx$



求面积 II

例 画出由曲线 $y = x^2 - 3$，直线 $x = 1$，x 轴及 y 轴所围成区域，并求面积

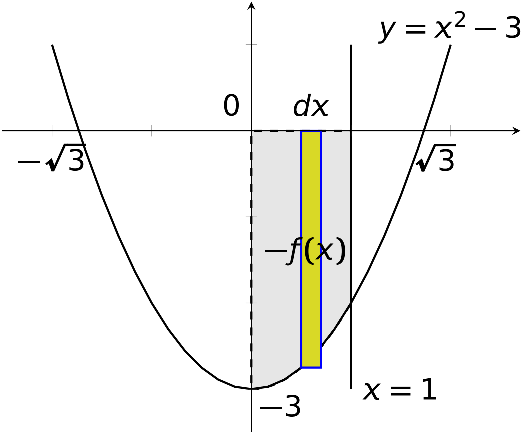
解 $A = \int_0^1 -f(x)dx = \int_0^1 (-x^2 + 3)dx = \left(-\frac{1}{3}x^3 + 3x\right)$



求面积 II

例 画出由曲线 $y = x^2 - 3$，直线 $x = 1$，x 轴及 y 轴所围成区域，并求面积

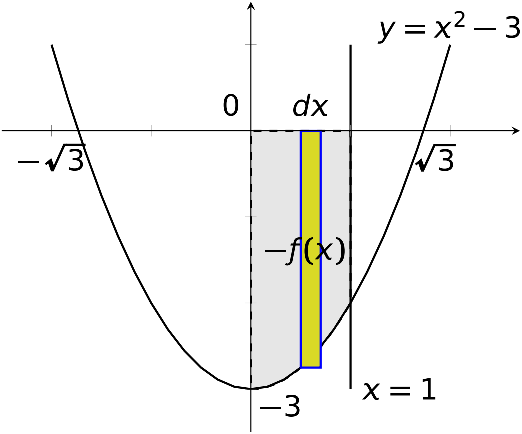
解 $A = \int_0^1 -f(x)dx = \int_0^1 (-x^2 + 3)dx = \left(-\frac{1}{3}x^3 + 3x\right)\Big|_0^1$



求面积 II

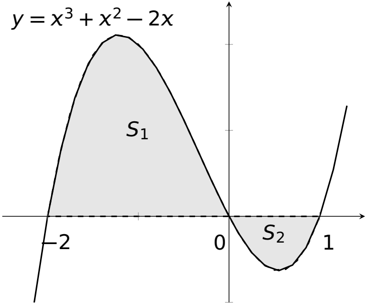
例 画出由曲线 $y=x^2-3$，直线 $x=1$，x 轴及 y 轴所围成区域，并求面积

解 $$A=\int_0^1 -f(x)dx=\int_0^1(-x^2+3)dx=\left(-\frac{1}{3}x^3+3x\right)\Big|_0^1=\frac{8}{3}$$



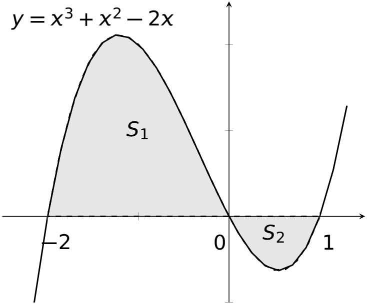
求面积 III

例 求阴影部分面积



求面积 III

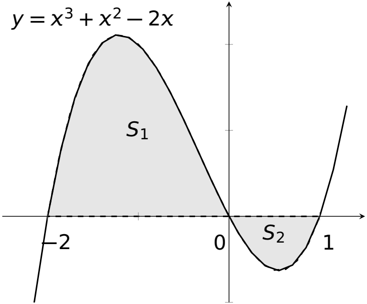
例 求阴影部分面积



解 A

求面积 III

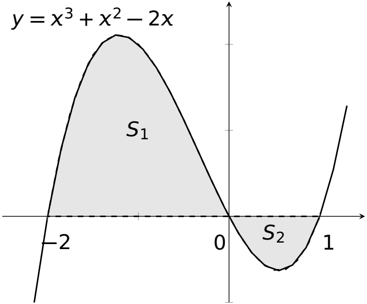
例 求阴影部分面积



解 $A = S_1 + S_2 =$

求面积 III

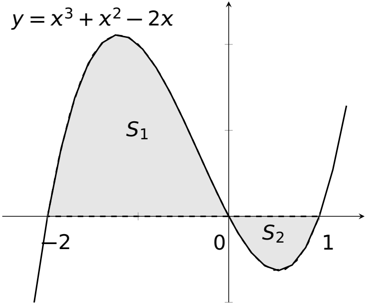
例 求阴影部分面积



解 $$A = S_1 + S_2 = \int_{-2}^{0} f(x)dx +$$

求面积 III

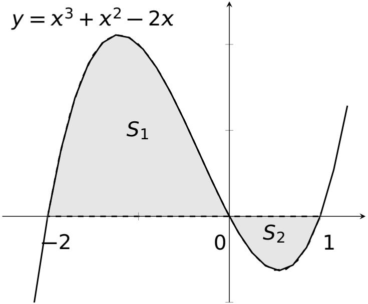
例 求阴影部分面积



解 $$A = S_1 + S_2 = \int_{-2}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} -f(x)dx$$

求面积 III

例 求阴影部分面积

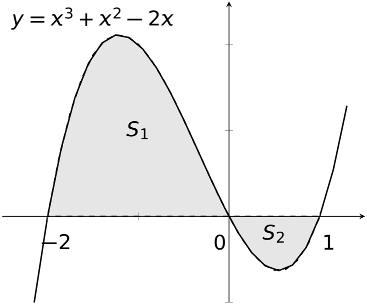


解 $$A = S_1 + S_2 = \int_{-2}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} -f(x)dx$$

$$= \int_{-2}^{0} \left(x^3 + x^2 - 2x\right) dx +$$

求面积 III

例 求阴影部分面积



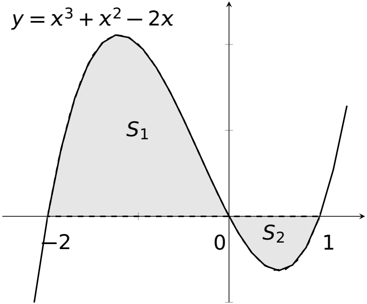
解

$$A = S_1 + S_2 = \int_{-2}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} -f(x)dx$$

$$= \int_{-2}^{0} \left(x^3 + x^2 - 2x\right) dx + \int_{0}^{1} \left(-x^3 - x^2 + 2x\right) dx$$

求面积 III

例 求阴影部分面积



解

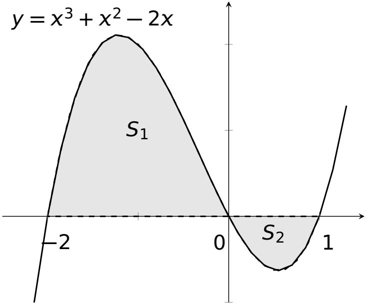
$$A = S_1 + S_2 = \int_{-2}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} -f(x)dx$$

$$= \int_{-2}^{0} \left(x^3 + x^2 - 2x\right) dx + \int_{0}^{1} \left(-x^3 - x^2 + 2x\right) dx$$

$$= \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2\right) \quad +$$

求面积 III

例 求阴影部分面积



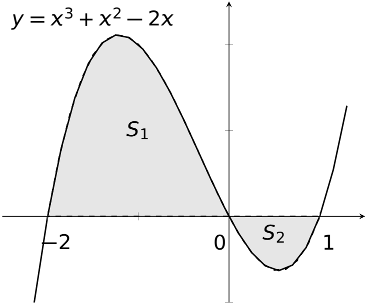
解
$$A = S_1 + S_2 = \int_{-2}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} -f(x)dx$$

$$= \int_{-2}^{0} \left(x^3 + x^2 - 2x\right) dx + \int_{0}^{1} \left(-x^3 - x^2 + 2x\right) dx$$

$$= \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2\right) \qquad + \left(-\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x^2\right)$$

求面积 III

例 求阴影部分面积



解

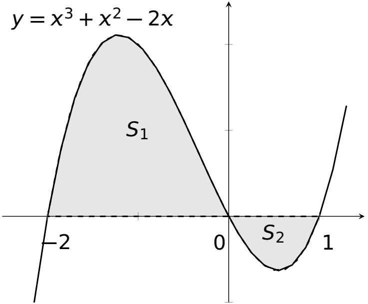
$$A = S_1 + S_2 = \int_{-2}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} -f(x)dx$$

$$= \int_{-2}^{0} \left(x^3 + x^2 - 2x\right) dx + \int_{0}^{1} \left(-x^3 - x^2 + 2x\right) dx$$

$$= \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2\right)\Big|_{-2}^{0} + \left(-\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x^2\right)$$

求面积 III

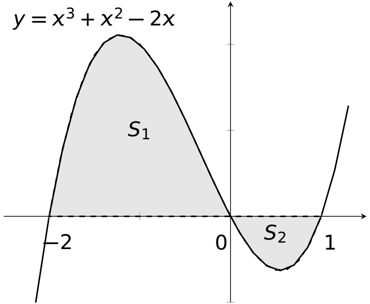
例 求阴影部分面积



解
$$A = S_1 + S_2 = \int_{-2}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} -f(x)dx$$
$$= \int_{-2}^{0} \left(x^3 + x^2 - 2x\right) dx + \int_{0}^{1} \left(-x^3 - x^2 + 2x\right) dx$$
$$= \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2\right)\Big|_{-2}^{0} + \left(-\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x^2\right)\Big|_{0}^{1}$$

求面积 III

例 求阴影部分面积



解

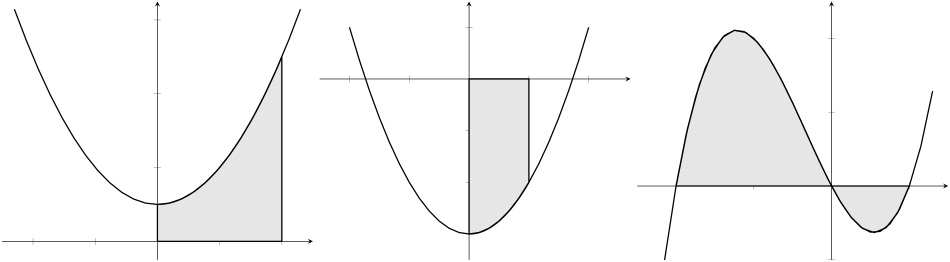
$$A = S_1 + S_2 = \int_{-2}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} -f(x)dx$$

$$= \int_{-2}^{0} \left(x^3 + x^2 - 2x\right) dx + \int_{0}^{1} \left(-x^3 - x^2 + 2x\right) dx$$

$$= \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2\right)\Big|_{-2}^{0} + \left(-\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x^2\right)\Big|_{0}^{1} = \frac{37}{12}$$

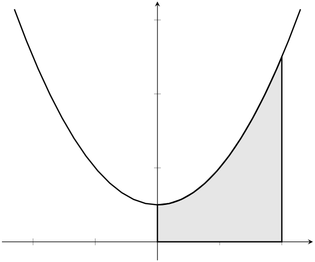
更复杂图形面积

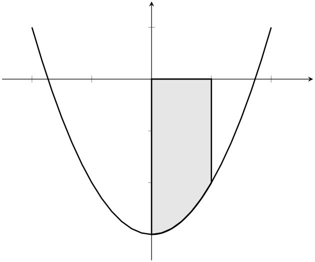
- 以上是曲线与 x 轴之间区域的面积

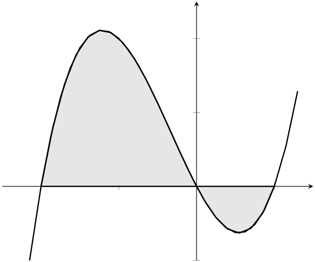


更复杂图形面积

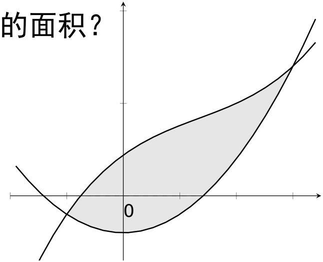
- 以上是曲线与 x 轴之间区域的面积







- 两条曲线之间区域的面积？



微元法求面积——例 I

例 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $x + y = 2$ 围成区域的面积

微元法求面积——例 I

例 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $x + y = 2$ 围成区域的面积

解

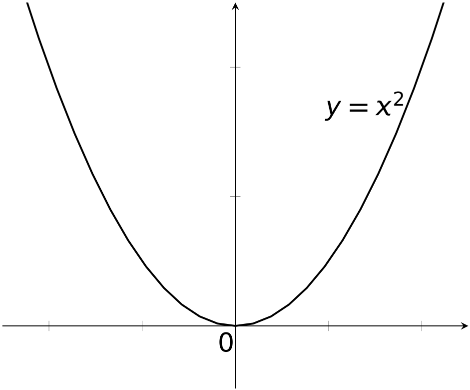
$$A =$$

微元法求面积——例 I

例 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $x + y = 2$ 围成区域的面积

解

$$A =$$

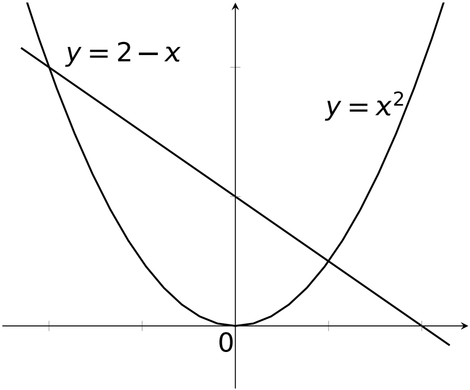


微元法求面积——例 I

例 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $x + y = 2$ 围成区域的面积

解

$$A =$$

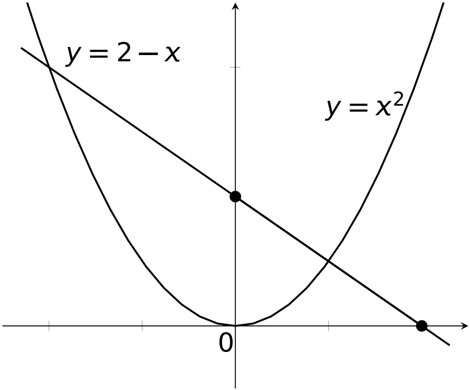


微元法求面积——例 I

例 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $x + y = 2$ 围成区域的面积

解

$$A =$$

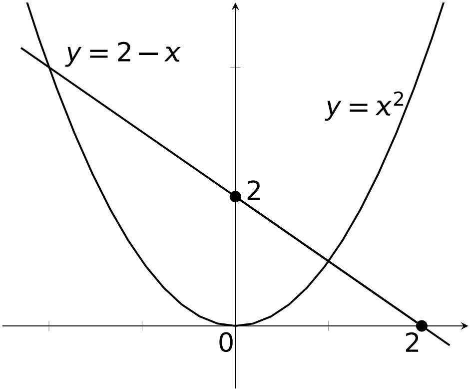


微元法求面积——例 I

例 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $x + y = 2$ 围成区域的面积

解

$$A =$$

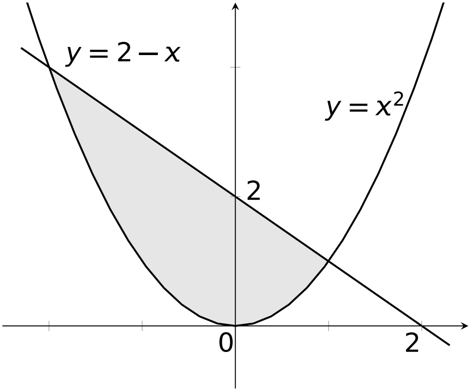


微元法求面积——例 I

例 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $x + y = 2$ 围成区域的面积

解

$$A =$$

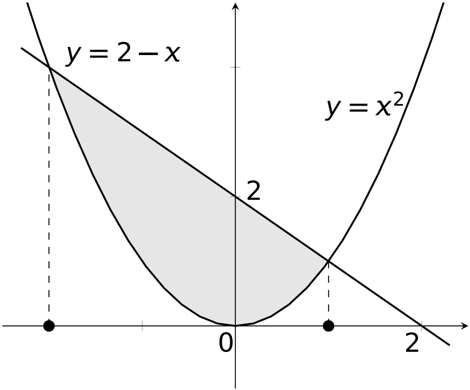


微元法求面积——例 I

例 求曲线 $y=x^2$ 与直线 $x+y=2$ 围成区域的面积

解

$$A=$$

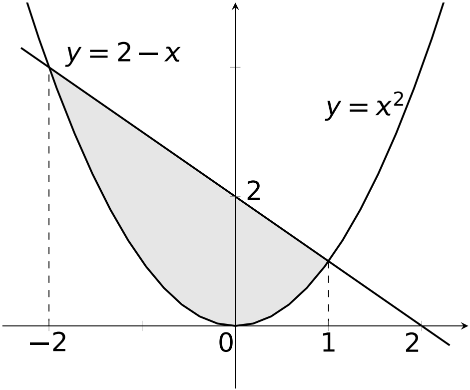


微元法求面积——例 I

例 求曲线 $y=x^2$ 与直线 $x+y=2$ 围成区域的面积

解

$$A=$$

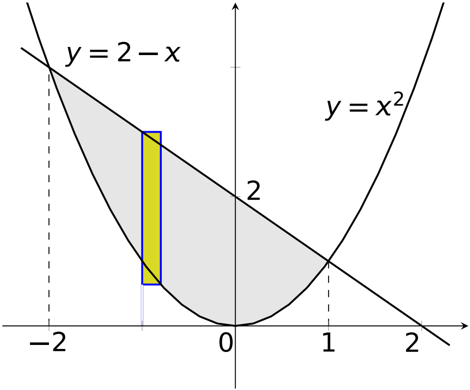


微元法求面积——例 I

例 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $x + y = 2$ 围成区域的面积

解

$$A =$$

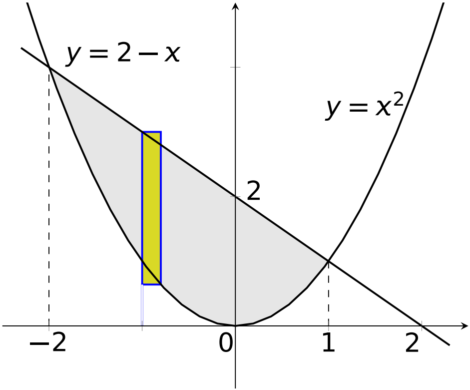


微元法求面积——例 I

例 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $x + y = 2$ 围成区域的面积

解

$$A = \qquad \left((2-x)-x^2\right)dx$$

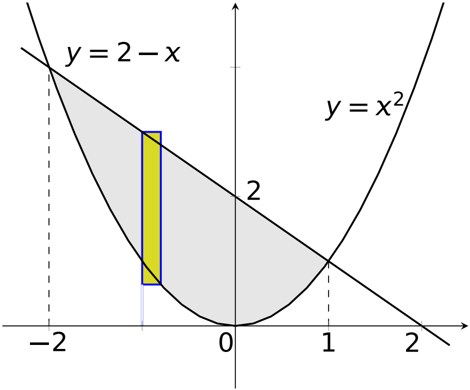


微元法求面积——例 I

例 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $x + y = 2$ 围成区域的面积

解

$$A = \int_{-2}^{1} \left((2-x) - x^2\right) dx$$

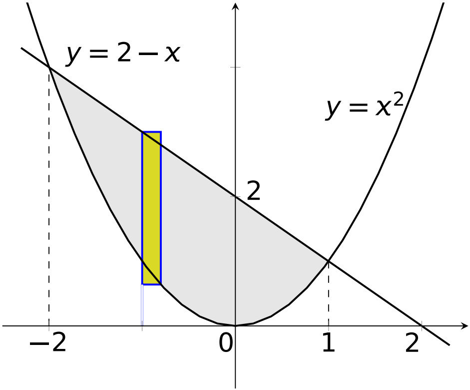


微元法求面积——例 I

例 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $x + y = 2$ 围成区域的面积

解

$$A = \int_{-2}^{1} \left((2-x) - x^2\right) dx = \left(2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)$$

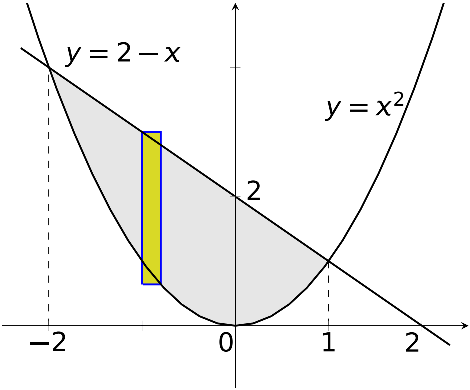


微元法求面积——例 I

例 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $x + y = 2$ 围成区域的面积

解

$$A = \int_{-2}^{1} \left((2-x) - x^2\right) dx = \left(2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-2}^{1}$$



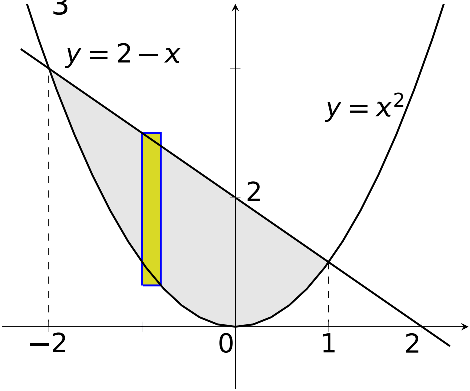
微元法求面积——例 I

例 求曲线 $y=x^2$ 与直线 $x+y=2$ 围成区域的面积

解

$$A=\int_{-2}^{1}\left((2-x)-x^2\right)dx=\left(2x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-2}^{1}$$

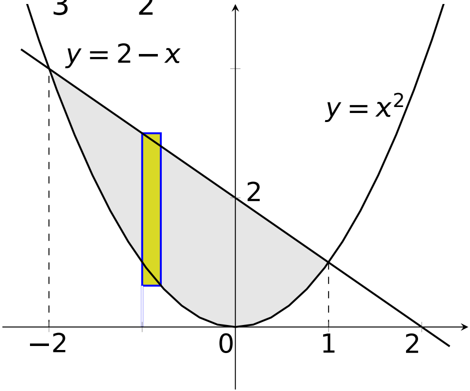
$$=\frac{7}{6}-\left(-\frac{10}{3}\right)$$



微元法求面积——例 I

例 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $x + y = 2$ 围成区域的面积

解
$$A = \int_{-2}^{1} \left((2-x) - x^2\right) dx = \left(2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-2}^{1}$$
$$= \frac{7}{6} - \left(-\frac{10}{3}\right) = \frac{9}{2}$$



微元法求面积——例 II

例 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = 2x + 3$ 围成区域的面积

微元法求面积——例 II

例 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = 2x + 3$ 围成区域的面积

解

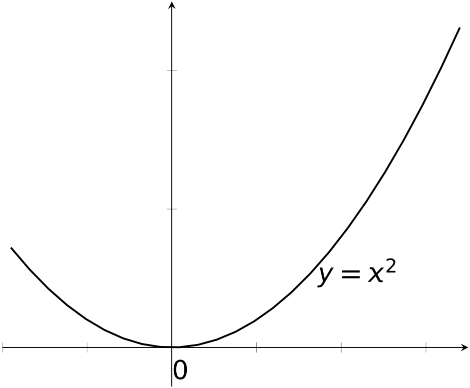
$$A =$$

微元法求面积——例 II

例 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = 2x + 3$ 围成区域的面积

解

$$A =$$

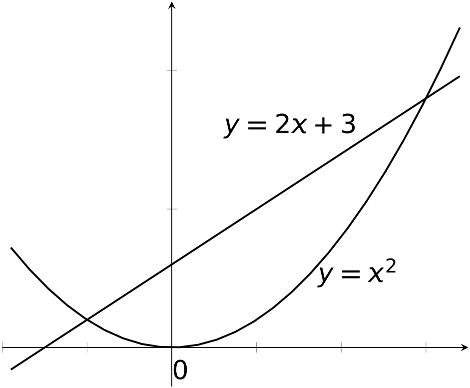


微元法求面积——例 II

例 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = 2x + 3$ 围成区域的面积

解

$$A =$$

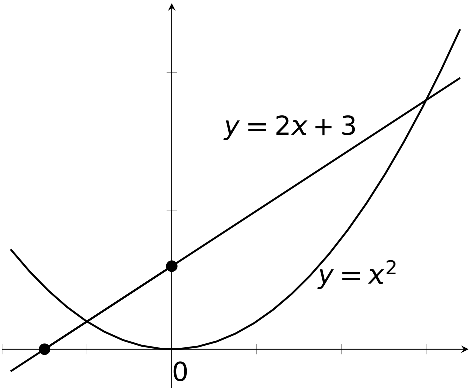


微元法求面积——例 II

例 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = 2x + 3$ 围成区域的面积

解

$$A =$$

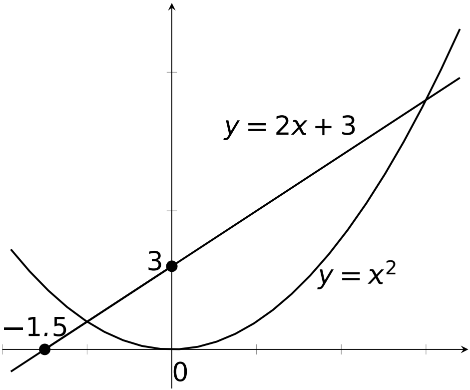


微元法求面积——例 II

例 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = 2x + 3$ 围成区域的面积

解

$$A =$$

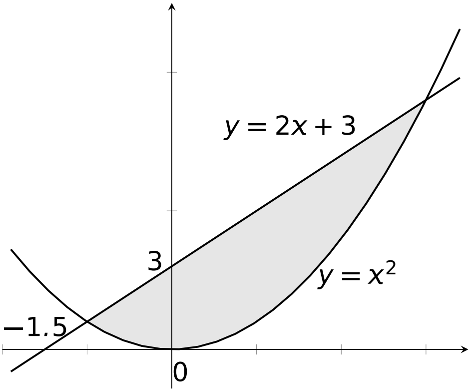


微元法求面积——例 II

例 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = 2x + 3$ 围成区域的面积

解

$$A =$$

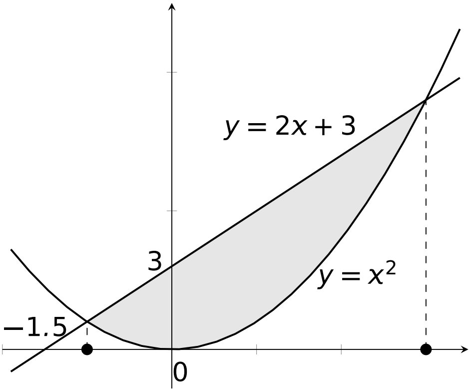


微元法求面积——例 II

例 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = 2x + 3$ 围成区域的面积

解

$$A =$$

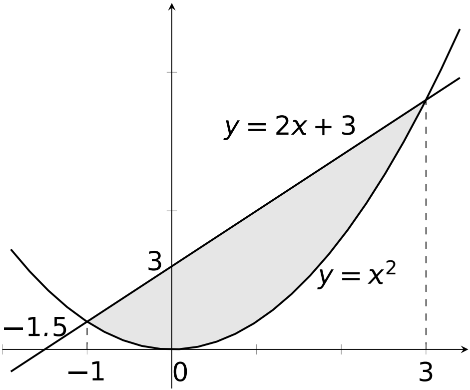


微元法求面积——例 II

例 求曲线 $y=x^2$ 与直线 $y=2x+3$ 围成区域的面积

解

$$A=$$

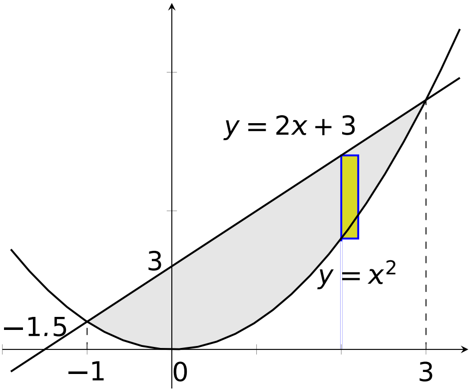


微元法求面积——例 II

例 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = 2x + 3$ 围成区域的面积

解

$$A =$$

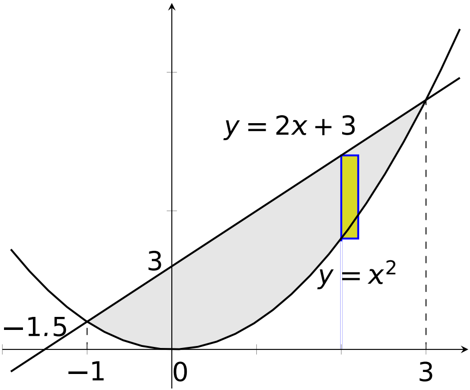


微元法求面积——例 II

例 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = 2x + 3$ 围成区域的面积

解

$$A = \quad \left((2x+3) - x^2\right) dx$$

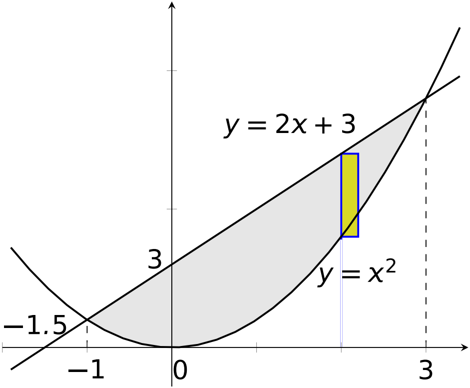


微元法求面积——例 II

例 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = 2x + 3$ 围成区域的面积

解

$$A = \int_{-1}^{3} \left((2x+3) - x^2 \right) dx$$

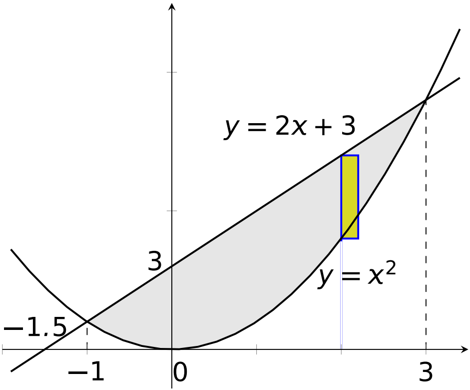


微元法求面积——例 II

例 求曲线 $y=x^2$ 与直线 $y=2x+3$ 围成区域的面积

解

$$A=\int_{-1}^{3}\left((2x+3)-x^2\right)dx=\left(x^2+3x-\frac{1}{3}x^3\right)$$

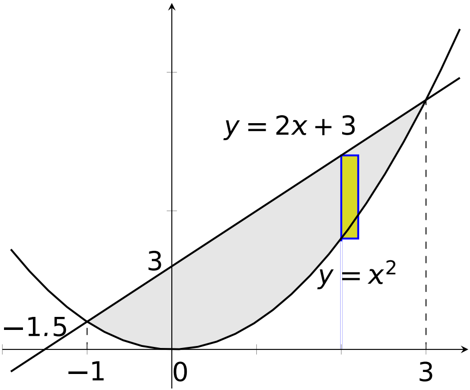


微元法求面积——例 II

例 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = 2x + 3$ 围成区域的面积

解

$$A = \int_{-1}^{3} \left((2x+3) - x^2\right) dx = \left(x^2 + 3x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^{3}$$



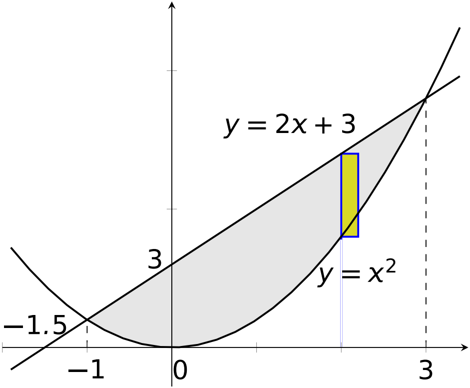
微元法求面积——例 II

例 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = 2x + 3$ 围成区域的面积

解

$$A = \int_{-1}^{3} \left((2x+3) - x^2\right) dx = \left(x^2 + 3x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^{3}$$

$$= (\qquad\qquad) - (\qquad\qquad)$$



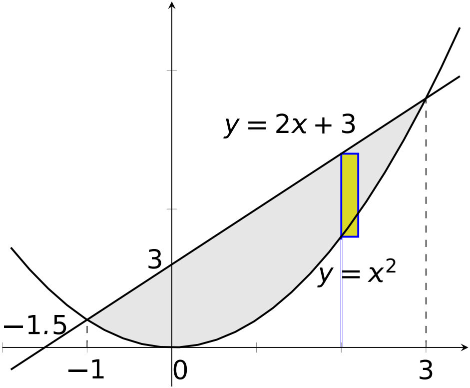
微元法求面积——例 II

例 求曲线 $y=x^2$ 与直线 $y=2x+3$ 围成区域的面积

解

$$A=\int_{-1}^{3}\left((2x+3)-x^2\right)dx=\left(x^2+3x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^{3}$$

$$=(9+9-9)-(\qquad\qquad\qquad)$$

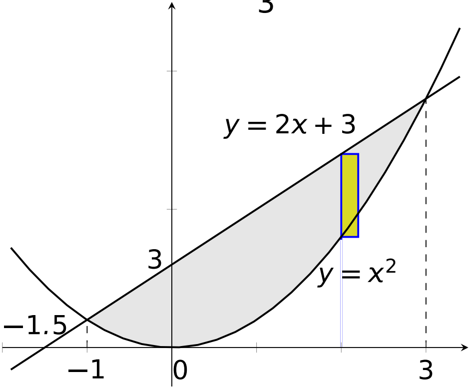


例 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = 2x + 3$ 围成区域的面积

解

$$A = \int_{-1}^{3} \left((2x+3) - x^2\right) dx = \left(x^2 + 3x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^{3}$$

$$= (9 + 9 - 9) - (1 - 3 + \frac{1}{3})$$

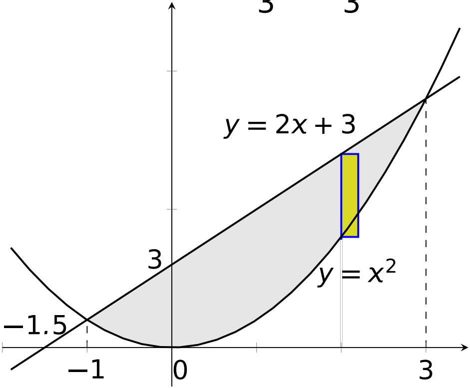


例 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = 2x + 3$ 围成区域的面积

解

$$A = \int_{-1}^{3} \left((2x+3) - x^2\right) dx = \left(x^2 + 3x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^{3}$$

$$= (9+9-9) - (1-3+\frac{1}{3}) = \frac{32}{3}$$



微元法求面积——例 III

例 求曲线 $y = \frac{1}{x}$ 与直线 $y = \frac{1}{4}x$，$x = 4$ 围成区域的面积

例 求曲线 $y = \frac{1}{x}$ 与直线 $y = \frac{1}{4}x$，$x = 4$ 围成区域的面积

解

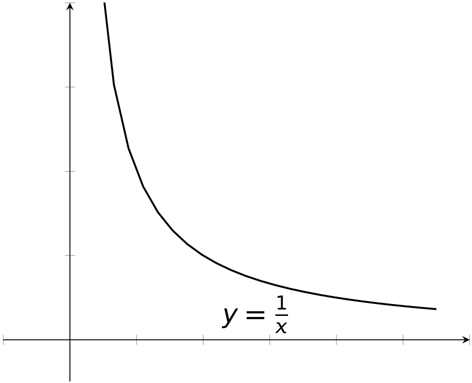
$$A =$$

微元法求面积——例 III

例 求曲线 $y = \frac{1}{x}$ 与直线 $y = \frac{1}{4}x$，$x = 4$ 围成区域的面积

解

$$A =$$

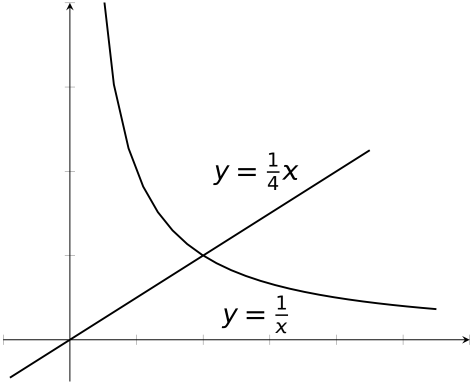


微元法求面积——例 III

例 求曲线 $y = \frac{1}{x}$ 与直线 $y = \frac{1}{4}x$，$x = 4$ 围成区域的面积

解

$$A =$$

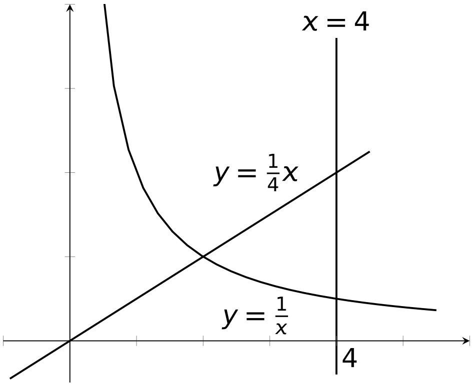


微元法求面积——例 III

例 求曲线 $y=\frac{1}{x}$ 与直线 $y=\frac{1}{4}x$，$x=4$ 围成区域的面积

解

$$A=$$

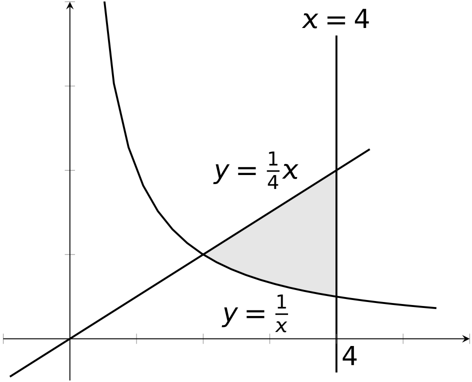


微元法求面积——例 III

例 求曲线 $y = \frac{1}{x}$ 与直线 $y = \frac{1}{4}x$，$x = 4$ 围成区域的面积

解

$$A =$$

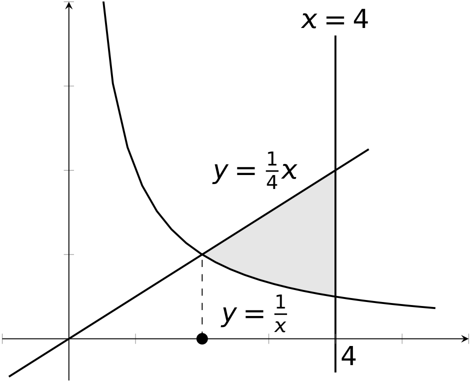


微元法求面积——例 III

例 求曲线 $y = \frac{1}{x}$ 与直线 $y = \frac{1}{4}x$，$x = 4$ 围成区域的面积

解

$$A =$$

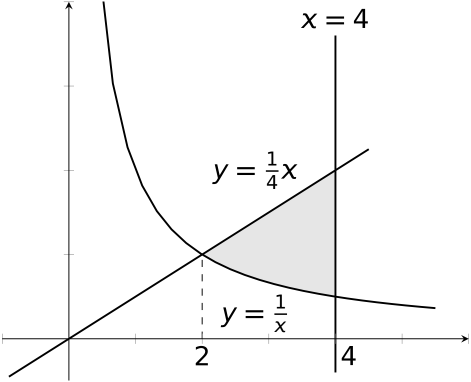


微元法求面积——例 III

例 求曲线 $y=\frac{1}{x}$ 与直线 $y=\frac{1}{4}x$，$x=4$ 围成区域的面积

解

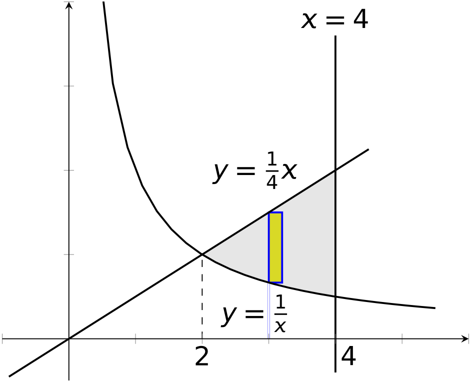
$$A=$$



例 求曲线 $y = \frac{1}{x}$ 与直线 $y = \frac{1}{4}x$，$x = 4$ 围成区域的面积

解

$$A =$$

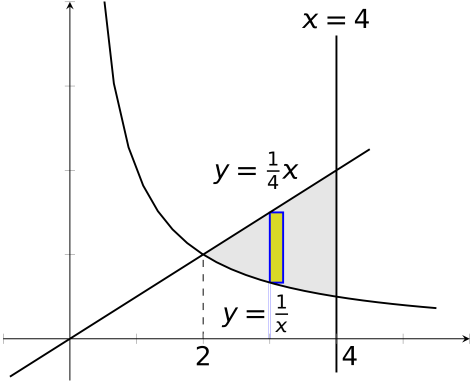


微元法求面积——例 III

例 求曲线 $y=\frac{1}{x}$ 与直线 $y=\frac{1}{4}x$，$x=4$ 围成区域的面积

解

$$A=\qquad\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{x}\right)dx$$

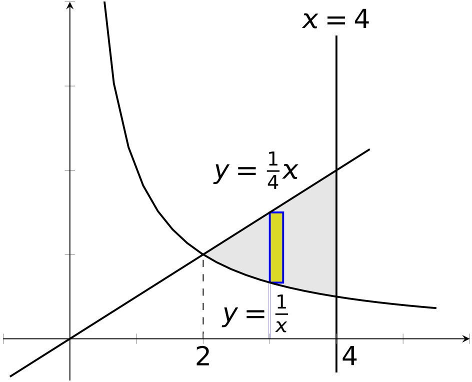


微元法求面积——例 III

例 求曲线 $y = \frac{1}{x}$ 与直线 $y = \frac{1}{4}x$，$x = 4$ 围成区域的面积

解

$$A = \int_2^4 \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{x} \right) dx$$

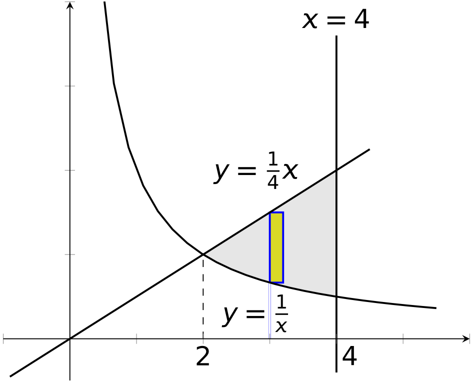


微元法求面积——例 III

例 求曲线 $y=\frac{1}{x}$ 与直线 $y=\frac{1}{4}x$，$x=4$ 围成区域的面积

解

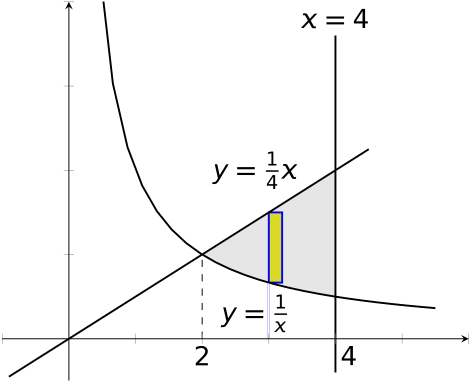
$$A=\int_2^4\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{x}\right)dx=\left(\frac{1}{8}x^2-\ln|x|\right)$$



例 求曲线 $y = \frac{1}{x}$ 与直线 $y = \frac{1}{4}x$，$x = 4$ 围成区域的面积

解

$$A = \int_2^4 \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{x}\right) dx = \left(\frac{1}{8}x^2 - \ln|x|\right)\Big|_2^4$$

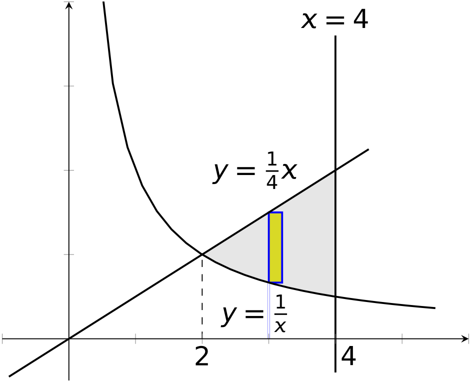


微元法求面积——例 III

例 求曲线 $y=\frac{1}{x}$ 与直线 $y=\frac{1}{4}x$，$x=4$ 围成区域的面积

解
$$A=\int_2^4\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{x}\right)dx=\left(\frac{1}{8}x^2-\ln|x|\right)\Big|_2^4$$

$$=(\qquad\qquad)-(\qquad\qquad)$$



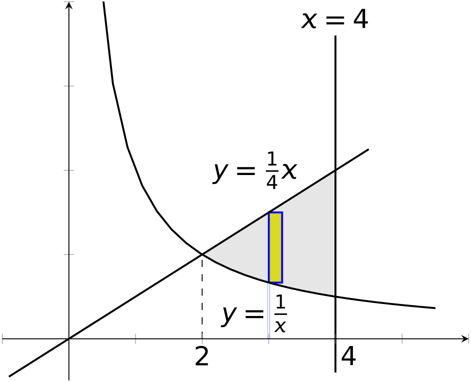
微元法求面积——例 III

例 求曲线 $y=\frac{1}{x}$ 与直线 $y=\frac{1}{4}x$，$x=4$ 围成区域的面积

解

$$A=\int_2^4\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{x}\right)dx=\left(\frac{1}{8}x^2-\ln|x|\right)\Big|_2^4$$

$$=(2-\ln 4)-(\qquad\qquad)$$



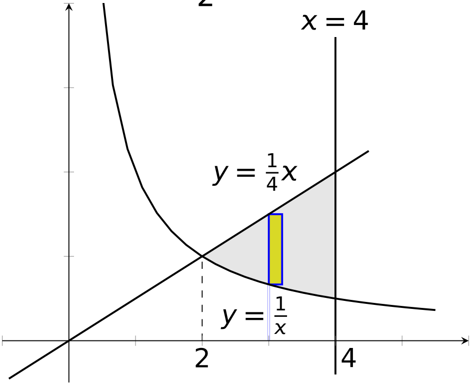
微元法求面积——例 III

例 求曲线 $y=\frac{1}{x}$ 与直线 $y=\frac{1}{4}x$，$x=4$ 围成区域的面积

解

$$A=\int_2^4\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{x}\right)dx=\left(\frac{1}{8}x^2-\ln|x|\right)\Big|_2^4$$

$$=(2-\ln 4)-(\frac{1}{2}-\ln 2)$$



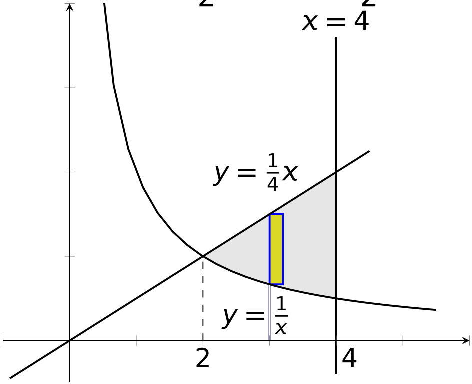
微元法求面积——例 III

例 求曲线 $y=\frac{1}{x}$ 与直线 $y=\frac{1}{4}x$，$x=4$ 围成区域的面积

解

$$A=\int_2^4\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{x}\right)dx=\left(\frac{1}{8}x^2-\ln|x|\right)\Big|_2^4$$

$$=(2-\ln 4)-(\frac{1}{2}-\ln 2)=\frac{3}{2}-\ln 2$$



微元法求面积——例 I

例 求曲线 $x=-y^2$ 与直线 $y-x=2$ 围成区域的面积

微元法求面积——例 I

例 求曲线 $x = -y^2$ 与直线 $y - x = 2$ 围成区域的面积

解

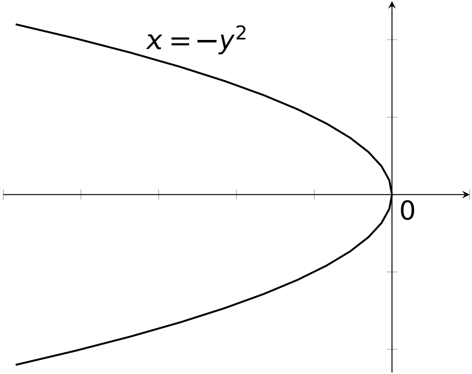
$$A =$$

微元法求面积——例 I

例 求曲线 $x = -y^2$ 与直线 $y - x = 2$ 围成区域的面积

解

$$A =$$

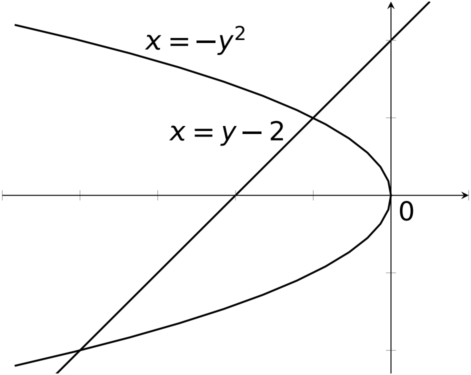


微元法求面积——例 I

例 求曲线 $x = -y^2$ 与直线 $y - x = 2$ 围成区域的面积

解

$$A =$$

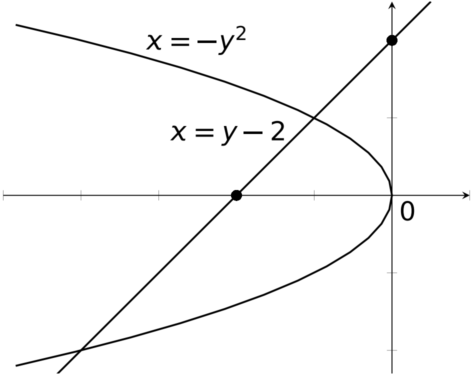


微元法求面积——例 I

例 求曲线 $x=-y^2$ 与直线 $y-x=2$ 围成区域的面积

解

$$A=$$

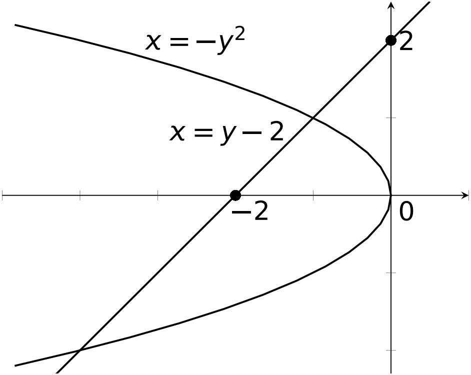


微元法求面积——例 I

例 求曲线 $x=-y^2$ 与直线 $y-x=2$ 围成区域的面积

解

$$A=$$

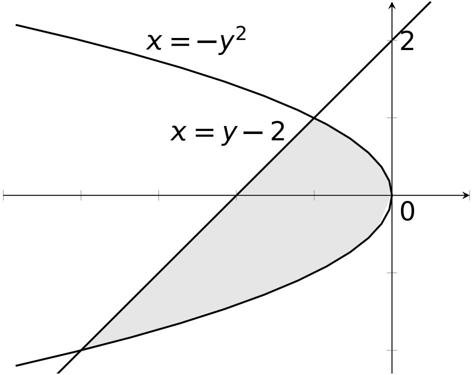


微元法求面积——例 I

例 求曲线 $x=-y^2$ 与直线 $y-x=2$ 围成区域的面积

解

$$A=$$

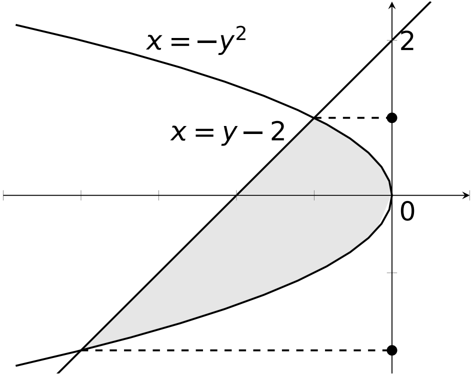


微元法求面积——例 I

例 求曲线 $x=-y^2$ 与直线 $y-x=2$ 围成区域的面积

解

$$A=$$

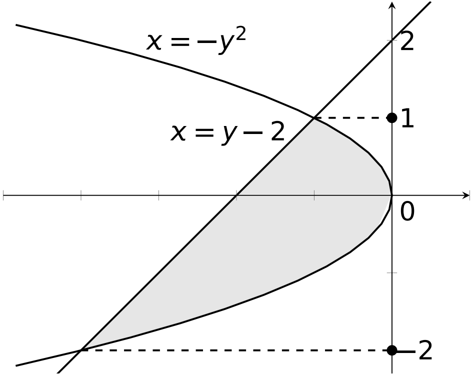


微元法求面积——例 I

例 求曲线 $x=-y^2$ 与直线 $y-x=2$ 围成区域的面积

解

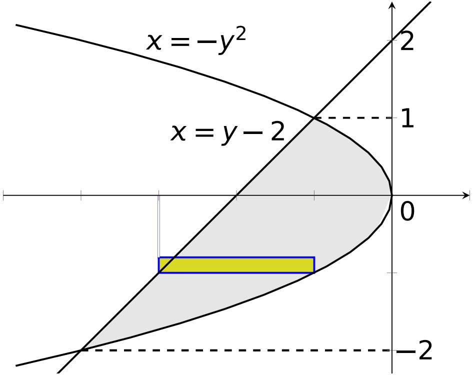
$$A=$$



例 求曲线 $x=-y^2$ 与直线 $y-x=2$ 围成区域的面积

解

$$A=$$

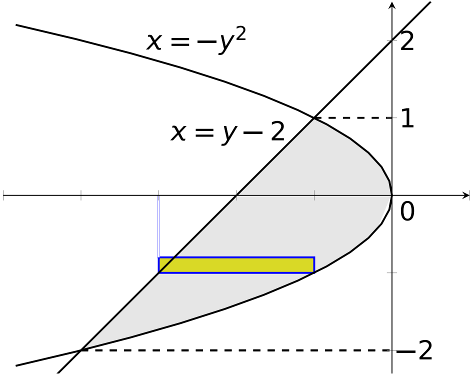


微元法求面积——例 I

例 求曲线 $x=-y^2$ 与直线 $y-x=2$ 围成区域的面积

解

$$A = \qquad [-y^2-(y-2)]dy$$

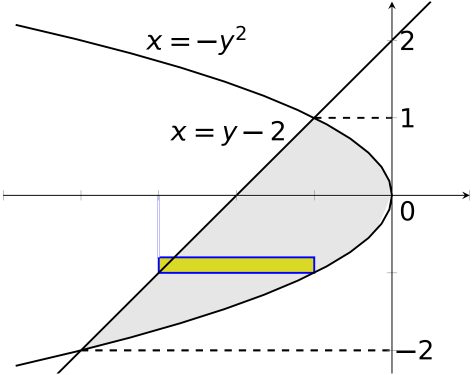


微元法求面积——例 I

例 求曲线 $x=-y^2$ 与直线 $y-x=2$ 围成区域的面积

解

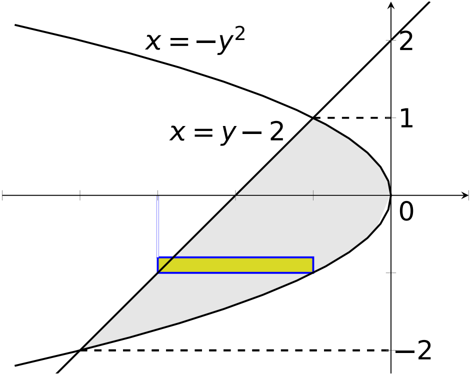
$$A=\int_{-2}^{1}[-y^2-(y-2)]dy$$



微元法求面积——例 I

例 求曲线 $x = -y^2$ 与直线 $y - x = 2$ 围成区域的面积

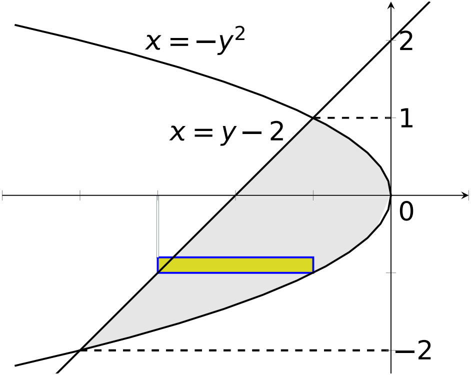
解
$$A = \int_{-2}^{1} [-y^2 - (y-2)]dy = \left(-\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^2 + 2y\right)$$



微元法求面积——例 I

例 求曲线 $x = -y^2$ 与直线 $y - x = 2$ 围成区域的面积

解
$$A = \int_{-2}^{1} [-y^2 - (y-2)]dy = \left(-\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^2 + 2y\right)\Big|_{-2}^{1}$$



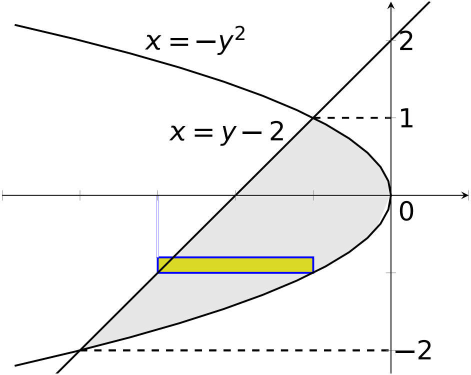
微元法求面积——例 I

例 求曲线 $x=-y^2$ 与直线 $y-x=2$ 围成区域的面积

解

$$A=\int_{-2}^{1}[-y^2-(y-2)]dy=\left(-\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{2}y^2+2y\right)\Big|_{-2}^{1}$$

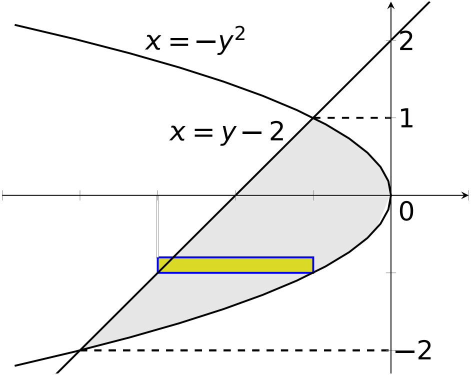
$$=(\qquad\qquad\qquad)-(\qquad\qquad\qquad)$$



微元法求面积——例 I

例 求曲线 $x=-y^2$ 与直线 $y-x=2$ 围成区域的面积

解
$$A=\int_{-2}^{1}[-y^2-(y-2)]dy=\left(-\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{2}y^2+2y\right)\Big|_{-2}^{1}$$
$$=(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2)-(\qquad\qquad)$$

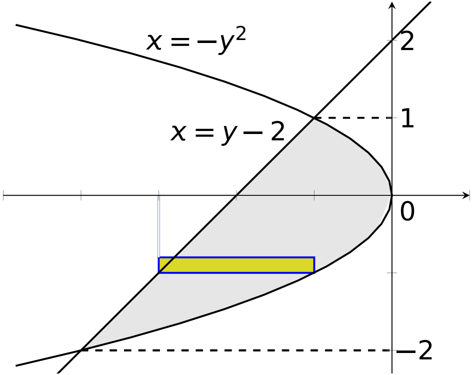


例 求曲线 $x=-y^2$ 与直线 $y-x=2$ 围成区域的面积

解

$$A=\int_{-2}^{1}[-y^2-(y-2)]dy=\left(-\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{2}y^2+2y\right)\Big|_{-2}^{1}$$

$$=(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2)-(\frac{8}{3}-2-4)$$



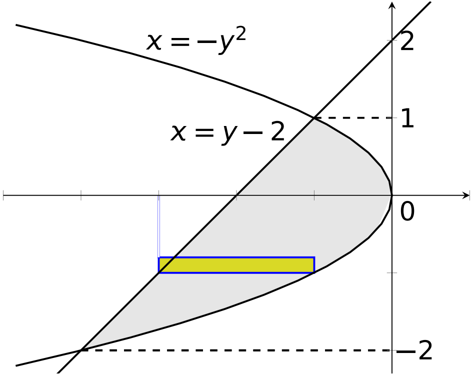
微元法求面积——例 I

例 求曲线 $x=-y^2$ 与直线 $y-x=2$ 围成区域的面积

解

$$A=\int_{-2}^{1}[-y^2-(y-2)]dy=\left(-\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{2}y^2+2y\right)\Big|_{-2}^{1}$$

$$=(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2)-(\frac{8}{3}-2-4)=\frac{9}{2}$$



例 求曲线 $x = y^2$ 与直线 $y = x - 2$ 围成区域在 x 轴上方部分的面积

例 求曲线 $x = y^2$ 与直线 $y = x - 2$ 围成区域在 x 轴上方部分的面积

解

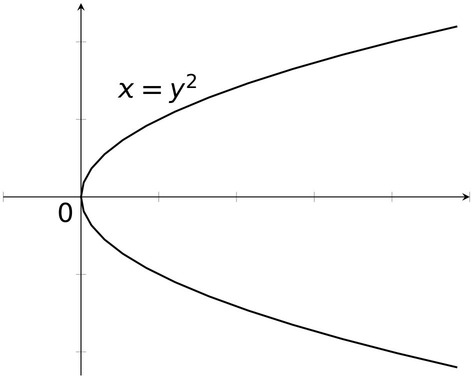
$$A =$$

微元法求面积——例 II

例 求曲线 $x = y^2$ 与直线 $y = x - 2$ 围成区域在 x 轴上方部分的面积

解

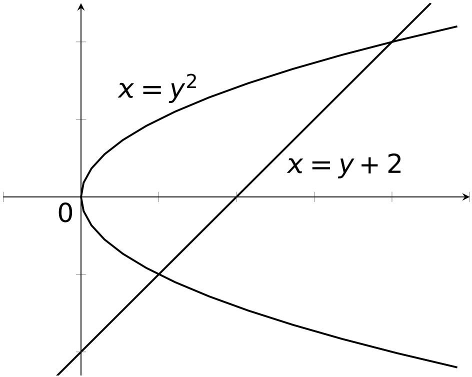
$$A =$$



例 求曲线 $x = y^2$ 与直线 $y = x - 2$ 围成区域在 x 轴上方部分的面积

解

$$A =$$

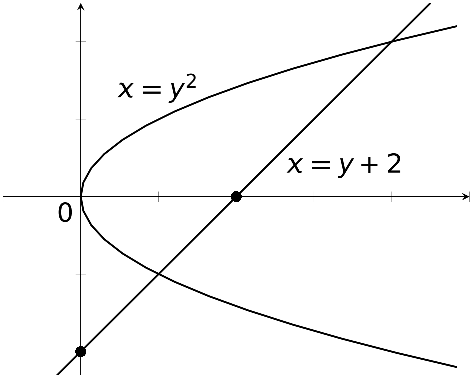


微元法求面积——例 II

例 求曲线 $x = y^2$ 与直线 $y = x - 2$ 围成区域在 x 轴上方部分的面积

解

$$A =$$

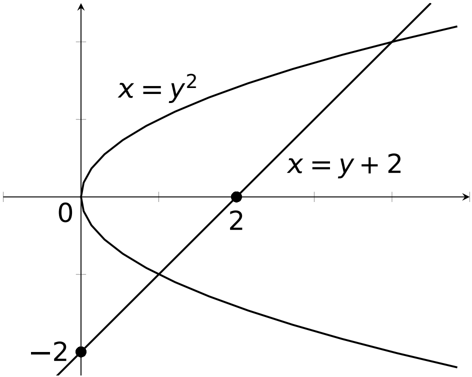


微元法求面积——例 II

例 求曲线 $x = y^2$ 与直线 $y = x - 2$ 围成区域在 x 轴上方部分的面积

解

$$A =$$

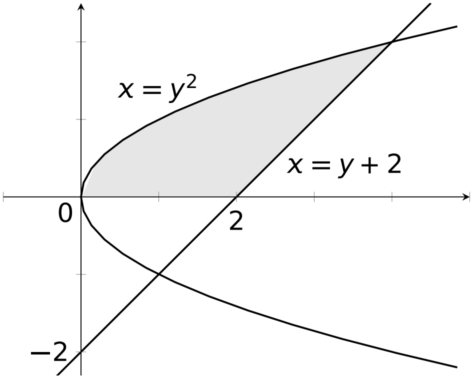


微元法求面积——例 II

例 求曲线 $x = y^2$ 与直线 $y = x - 2$ 围成区域在 x 轴上方部分的面积

解

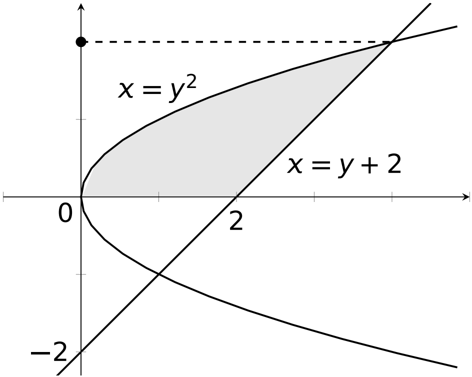
$$A =$$



例 求曲线 $x = y^2$ 与直线 $y = x - 2$ 围成区域在 x 轴上方部分的面积

解

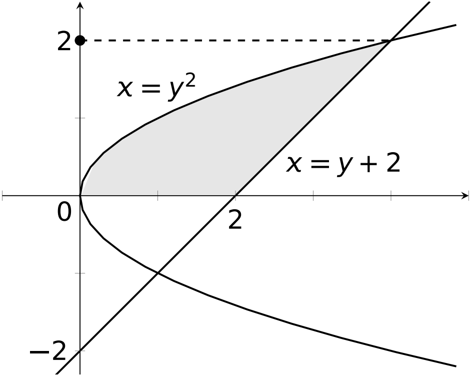
$$A =$$



例 求曲线 $x = y^2$ 与直线 $y = x - 2$ 围成区域在 x 轴上方部分的面积

解

$$A =$$

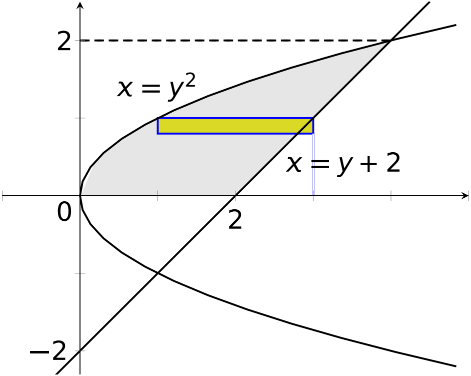


微元法求面积——例 II

例 求曲线 $x = y^2$ 与直线 $y = x - 2$ 围成区域在 x 轴上方部分的面积

解

$$A =$$

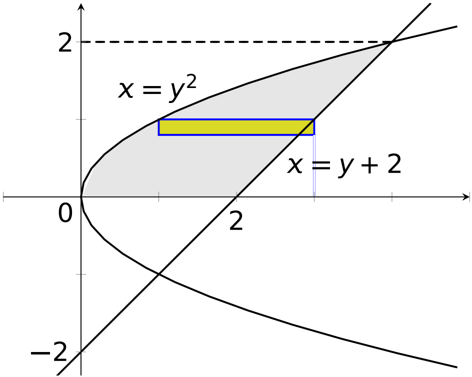


微元法求面积——例 II

例 求曲线 $x = y^2$ 与直线 $y = x - 2$ 围成区域在 x 轴上方部分的面积

解

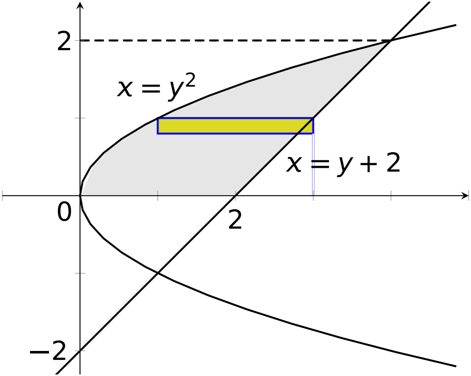
$$A = \quad [(y+2) - y^2]dy$$



例 求曲线 $x = y^2$ 与直线 $y = x - 2$ 围成区域在 x 轴上方部分的面积

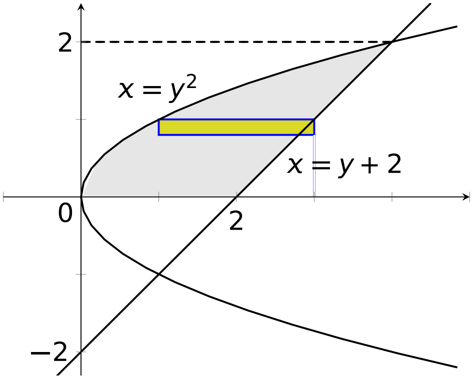
解

$$A = \int_0^2 [(y+2) - y^2]dy$$



例 求曲线 $x=y^2$ 与直线 $y=x-2$ 围成区域在 x 轴上方部分的面积

解
$$A=\int_0^2[(y+2)-y^2]dy=\left(-\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{2}y^2+2y\right)$$

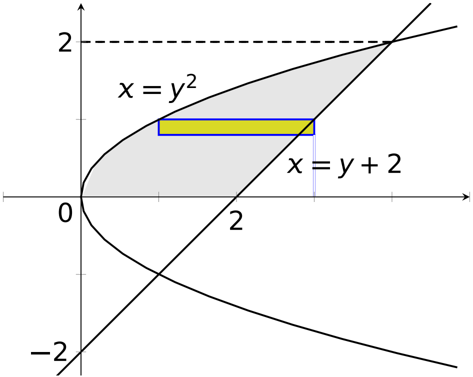


微元法求面积——例 II

例 求曲线 $x = y^2$ 与直线 $y = x - 2$ 围成区域在 x 轴上方部分的面积

解

$$A = \int_0^2 [(y+2) - y^2]dy = \left(-\frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2 + 2y\right)\Big|_0^2$$

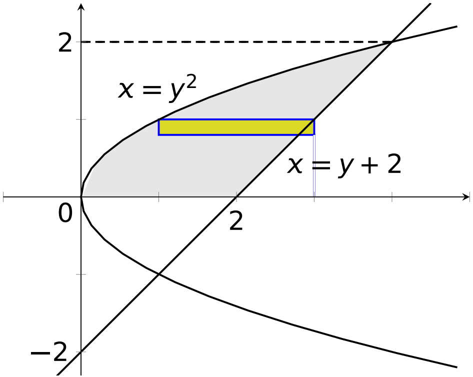


微元法求面积——例 II

例 求曲线 $x = y^2$ 与直线 $y = x - 2$ 围成区域在 x 轴上方部分的面积

解
$$A = \int_0^2 [(y+2) - y^2]dy = \left(-\frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2 + 2y\right)\Big|_0^2$$

$$= (\qquad\qquad\qquad) - (\quad)$$



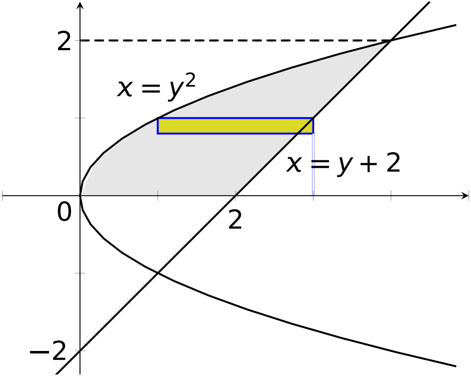
微元法求面积——例 II

例 求曲线 $x=y^2$ 与直线 $y=x-2$ 围成区域在 x 轴上方部分的面积

解

$$A=\int_0^2[(y+2)-y^2]dy=\left(-\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{2}y^2+2y\right)\Big|_0^2$$

$$=(-\frac{8}{3}+2+4)-(\quad)$$



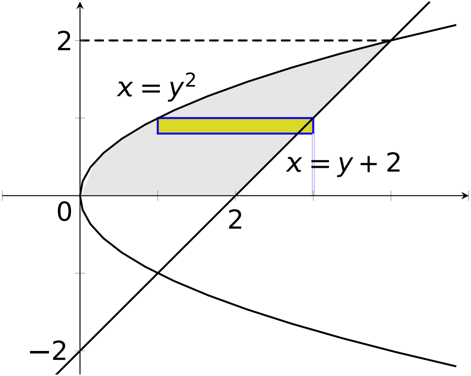
微元法求面积——例 II

例 求曲线 $x = y^2$ 与直线 $y = x - 2$ 围成区域在 x 轴上方部分的面积

解

$$A = \int_0^2 [(y+2) - y^2]dy = \left(-\frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2 + 2y\right)\Big|_0^2$$

$$= (-\frac{8}{3} + 2 + 4) - (0)$$



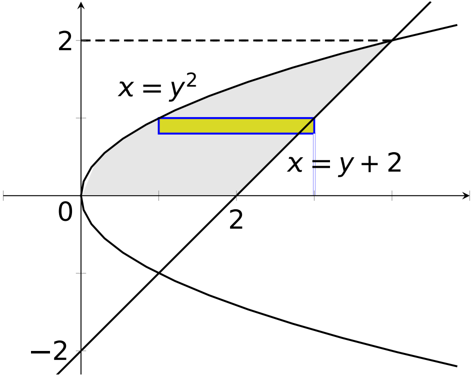
微元法求面积——例 II

例 求曲线 $x = y^2$ 与直线 $y = x - 2$ 围成区域在 x 轴上方部分的面积

解

$$A = \int_0^2 [(y+2) - y^2]dy = \left(-\frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2 + 2y\right)\Big|_0^2$$

$$= (-\frac{8}{3} + 2 + 4) - (0) = \frac{10}{3}$$



We are here now...

奇偶函数的定积分

定积分求平面图形面积

旋转体体积

在经济等方面的应用

设平面曲线是函数 $y = f(x), a \leq x \leq b$，的图像，该曲线绕 x 轴旋转一周所得的旋转体，其体积是

$$V = \int_a^b \pi f(x)^2 dx$$

We are here now...

奇偶函数的定积分

定积分求平面图形面积

旋转体体积

在经济等方面的应用

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

复习：通过积分确定原函数

问题：如何通过导数 $\Phi'(x)$，恢复原函数 $\Phi(x)$？

复习：通过积分确定原函数

问题：如何通过导数 $\Phi'(x)$，恢复原函数 $\Phi(x)$？

- 由不定积分定义：

- 根据牛顿-莱布尼茨公式：

复习：通过积分确定原函数

问题：如何通过导数 $\Phi'(x)$，恢复原函数 $\Phi(x)$？

- 由不定积分定义：

$$\Phi(x) = \int \Phi'(x)dx + C$$

- 根据牛顿-莱布尼茨公式：

复习：通过积分确定原函数

问题：如何通过导数 $\Phi'(x)$，恢复原函数 $\Phi(x)$?

- 由不定积分定义：

$$\Phi(x) = \int \Phi'(x)dx + C$$

- 根据牛顿-莱布尼茨公式：

$$\Phi(x) = \int_a^x \Phi'(t)dt + \Phi(a)$$

复习：通过积分确定原函数

问题：如何通过导数 $\Phi'(x)$，恢复原函数 $\Phi(x)$？

- 由不定积分定义：

$$\Phi(x) = \int \Phi'(x)dx + C$$

- 根据牛顿-莱布尼茨公式：

$$\Phi(x) = \int_a^x \Phi'(t)dt + \Phi(a)$$

特别地，

$$\Delta\Phi = \Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b \Phi'(t)dt$$

例 1 设生产 x 个单位产品时，边际成本函数为 $C'(x) = 2e^{0.2x}$，且固定成本 $C_0 = 9$，求：

(1) 成本函数 $C(x)$；(2) 产量 x 由 100 增至 200 时成本增加多少？

例 1 设生产 x 个单位产品时，边际成本函数为 $C'(x)=2e^{0.2x}$，且固定成本 $C_0=9$，求：

(1) 成本函数 $C(x)$；(2) 产量 x 由 100 增至 200 时成本增加多少？

解 利用定积分

$$C(x)$$

$$\Delta C = C(200) - C(100) =$$

例 1 设生产 x 个单位产品时，边际成本函数为 $C'(x)=2e^{0.2x}$，且固定成本 $C_0=9$，求：

(1) 成本函数 $C(x)$；(2) 产量 x 由 100 增至 200 时成本增加多少？

解 利用定积分

$$C(x)=\int_0^x C'(t)dt+C(0)$$

$$\Delta C=C(200)-C(100)=$$

例 1 设生产 x 个单位产品时，边际成本函数为 $C'(x)=2e^{0.2x}$，且固定成本 $C_0=9$，求：
(1) 成本函数 $C(x)$；(2) 产量 x 由 100 增至 200 时成本增加多少？

解 利用定积分

$$C(x)=\int_0^x C'(t)dt+C(0)=\int_0^x 2e^{0.2t}dt+9$$

$$\Delta C=C(200)-C(100)=$$

例 1 设生产 x 个单位产品时，边际成本函数为 $C'(x)=2e^{0.2x}$，且固定成本 $C_0=9$，求：

(1) 成本函数 $C(x)$；(2) 产量 x 由 100 增至 200 时成本增加多少？

解 利用定积分

$$C(x)=\int_0^x C'(t)dt+C(0)=\int_0^x 2e^{0.2t}dt+9$$

$$=10e^{0.2t}$$

$$\Delta C=C(200)-C(100)=$$

例 1 设生产 x 个单位产品时，边际成本函数为 $C'(x) = 2e^{0.2x}$，且固定成本 $C_0 = 9$，求：

(1) 成本函数 $C(x)$；(2) 产量 x 由 100 增至 200 时成本增加多少？

解 利用定积分

$$C(x) = \int_0^x C'(t)dt + C(0) = \int_0^x 2e^{0.2t}dt + 9$$

$$= 10e^{0.2t}\Big|_0^x +$$

$$\Delta C = C(200) - C(100) =$$

例 1 设生产 x 个单位产品时，边际成本函数为 $C'(x) = 2e^{0.2x}$，且固定成本 $C_0 = 9$，求：

(1) 成本函数 $C(x)$；(2) 产量 x 由 100 增至 200 时成本增加多少？

解 利用定积分

$$C(x) = \int_0^x C'(t)dt + C(0) = \int_0^x 2e^{0.2t}dt + 9$$

$$= 10e^{0.2t}\Big|_0^x + 9$$

$$\Delta C = C(200) - C(100) =$$

例 1 设生产 x 个单位产品时，边际成本函数为 $C'(x)=2e^{0.2x}$，且固定成本 $C_0=9$，求：
(1) 成本函数 $C(x)$；(2) 产量 x 由 100 增至 200 时成本增加多少？

解 利用定积分

$$C(x)=\int_0^x C'(t)dt+C(0)=\int_0^x 2e^{0.2t}dt+9$$
$$=10e^{0.2t}\Big|_0^x+9=10e^{0.2x}-1$$

$$\Delta C=C(200)-C(100)=$$

例 1 设生产 x 个单位产品时，边际成本函数为 $C'(x) = 2e^{0.2x}$，且固定成本 $C_0 = 9$，求：

(1) 成本函数 $C(x)$；(2) 产量 x 由 100 增至 200 时成本增加多少？

解 利用定积分

$$C(x) = \int_0^x C'(t)dt + C(0) = \int_0^x 2e^{0.2t}dt + 9$$

$$= 10e^{0.2t}\Big|_0^x + 9 = 10e^{0.2x} - 1$$

$$\Delta C = C(200) - C(100) = \int_{100}^{200} C'(t)dt =$$

例 1 设生产 x 个单位产品时，边际成本函数为 $C'(x)=2e^{0.2x}$，且固定成本 $C_0=9$，求：

(1) 成本函数 $C(x)$；(2) 产量 x 由 100 增至 200 时成本增加多少？

解 利用定积分

$$C(x)=\int_0^x C'(t)dt+C(0)=\int_0^x 2e^{0.2t}dt+9$$

$$=10e^{0.2t}\Big|_0^x+9=10e^{0.2x}-1$$

$$\Delta C=C(200)-C(100)=\int_{100}^{200} C'(t)dt=\int_{100}^{200} 2e^{0.2t}dt$$

例 1 设生产 x 个单位产品时，边际成本函数为 $C'(x) = 2e^{0.2x}$，且固定成本 $C_0 = 9$，求：

(1) 成本函数 $C(x)$；(2) 产量 x 由 100 增至 200 时成本增加多少？

解 利用定积分

$$C(x) = \int_0^x C'(t)dt + C(0) = \int_0^x 2e^{0.2t}dt + 9$$

$$= 10e^{0.2t}\Big|_0^x + 9 = 10e^{0.2x} - 1$$

$$\Delta C = C(200) - C(100) = \int_{100}^{200} C'(t)dt = \int_{100}^{200} 2e^{0.2t}dt$$

$$= 10e^{0.2t}$$

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

例 1 设生产 x 个单位产品时，边际成本函数为 $C'(x) = 2e^{0.2x}$，且固定成本 $C_0 = 9$，求：

(1) 成本函数 $C(x)$；(2) 产量 x 由 100 增至 200 时成本增加多少？

解 利用定积分

$$C(x) = \int_0^x C'(t)dt + C(0) = \int_0^x 2e^{0.2t}dt + 9$$

$$= 10e^{0.2t}\Big|_0^x + 9 = 10e^{0.2x} - 1$$

$$\Delta C = C(200) - C(100) = \int_{100}^{200} C'(t)dt = \int_{100}^{200} 2e^{0.2t}dt$$

$$= 10e^{0.2t}\Big|_{100}^{200}$$

例 1 设生产 x 个单位产品时，边际成本函数为 $C'(x) = 2e^{0.2x}$，且固定成本 $C_0 = 9$，求：
(1) 成本函数 $C(x)$；(2) 产量 x 由 100 增至 200 时成本增加多少？

解 利用定积分

$$C(x) = \int_0^x C'(t)dt + C(0) = \int_0^x 2e^{0.2t}dt + 9$$

$$= 10e^{0.2t}\Big|_0^x + 9 = 10e^{0.2x} - 1$$

$$\Delta C = C(200) - C(100) = \int_{100}^{200} C'(t)dt = \int_{100}^{200} 2e^{0.2t}dt$$

$$= 10e^{0.2t}\Big|_{100}^{200} = 10(e^{40} - e^{20})$$

例 2 设 Q：产品数量；$R'(Q)=100-\frac{Q}{20}$：收入 $R(Q)$ 的变化率。求：(1) $R(1000)$；(2) 产量从 1000 增加至 2000 时，增加多少收入？

例 2 设 Q：产品数量；$R'(Q) = 100 - \frac{Q}{20}$：收入 $R(Q)$ 的变化率。求：

(1) $R(1000)$；(2) 产量从 1000 增加至 2000 时，增加多少收入？

解 利用定积分

$$R(1000) =$$

$$\Delta R = R(2000) - R(1000) =$$

例 2 设 Q：产品数量；$R'(Q)=100-\frac{Q}{20}$：收入 $R(Q)$ 的变化率。求：(1) $R(1000)$；(2) 产量从 1000 增加至 2000 时，增加多少收入？

解 利用定积分

$$R(1000)=\int_0^{1000} R'(t)dt+R(0)$$

$$\Delta R=R(2000)-R(1000)=$$

例 2 设 Q：产品数量；$R'(Q)=100-\frac{Q}{20}$：收入 $R(Q)$ 的变化率。求：(1) $R(1000)$；(2) 产量从 1000 增加至 2000 时，增加多少收入？

解 利用定积分

$$R(1000)=\int_0^{1000}R'(t)dt+R(0)=\int_0^{1000}(100-\frac{t}{20})dt+$$

$$\Delta R=R(2000)-R(1000)=$$

例 2 设 Q：产品数量；$R'(Q) = 100 - \frac{Q}{20}$：收入 $R(Q)$ 的变化率。求：(1) $R(1000)$；(2) 产量从 1000 增加至 2000 时，增加多少收入？

解 利用定积分

$$R(1000) = \int_0^{1000} R'(t)dt + R(0) = \int_0^{1000} (100 - \frac{t}{20})dt + 0$$

$$\Delta R = R(2000) - R(1000) =$$

例 2 设 Q：产品数量；$R'(Q)=100-\frac{Q}{20}$：收入 $R(Q)$ 的变化率。求：(1) $R(1000)$；(2) 产量从 1000 增加至 2000 时，增加多少收入？

解 利用定积分

$$R(1000)=\int_0^{1000}R'(t)dt+R(0)=\int_0^{1000}(100-\frac{t}{20})dt+0$$

$$=(100t-\frac{t^2}{40})$$

$$\Delta R=R(2000)-R(1000)=$$

例 2 设 Q：产品数量；$R'(Q)=100-\frac{Q}{20}$：收入 $R(Q)$ 的变化率。求：(1) $R(1000)$；(2) 产量从 1000 增加至 2000 时，增加多少收入？

解 利用定积分

$$R(1000)=\int_0^{1000} R'(t)dt+R(0)=\int_0^{1000}(100-\frac{t}{20})dt+0$$

$$=(100t-\frac{t^2}{40})\Big|_0^{1000}$$

$$\Delta R=R(2000)-R(1000)=$$

例 2 设 Q：产品数量；$R'(Q)=100-\frac{Q}{20}$：收入 $R(Q)$ 的变化率。求：(1) $R(1000)$；(2) 产量从 1000 增加至 2000 时，增加多少收入？

解 利用定积分

$$R(1000)=\int_0^{1000} R'(t)dt+R(0)=\int_0^{1000}(100-\frac{t}{20})dt+0$$

$$=(100t-\frac{t^2}{40})\Big|_0^{1000}=7.5\times 10^4$$

$$\Delta R=R(2000)-R(1000)=$$

例 2 设 Q：产品数量；$R'(Q)=100-\frac{Q}{20}$：收入 $R(Q)$ 的变化率。求：(1) $R(1000)$；(2) 产量从 1000 增加至 2000 时，增加多少收入？

解 利用定积分

$$R(1000)=\int_0^{1000} R'(t)dt+R(0)=\int_0^{1000}(100-\frac{t}{20})dt+0$$

$$=(100t-\frac{t^2}{40})\Big|_0^{1000}=7.5\times 10^4$$

$$\Delta R=R(2000)-R(1000)=\int_{1000}^{2000} R'(t)dt$$

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

例 2 设 Q：产品数量；$R'(Q)=100-\frac{Q}{20}$：收入 $R(Q)$ 的变化率。求：(1) $R(1000)$；(2) 产量从 1000 增加至 2000 时，增加多少收入？

解 利用定积分

$$R(1000)=\int_0^{1000}R'(t)dt+R(0)=\int_0^{1000}(100-\frac{t}{20})dt+0$$

$$=(100t-\frac{t^2}{40})\Big|_0^{1000}=7.5\times10^4$$

$$\Delta R=R(2000)-R(1000)=\int_{1000}^{2000}R'(t)dt$$

$$=\int_{1000}^{2000}(100-\frac{t}{20})dt$$

例 2 设 Q：产品数量；$R'(Q)=100-\frac{Q}{20}$：收入 $R(Q)$ 的变化率。求：
(1) $R(1000)$；(2) 产量从 1000 增加至 2000 时，增加多少收入？

解 利用定积分

$$R(1000)=\int_0^{1000} R'(t)dt+R(0)=\int_0^{1000}(100-\frac{t}{20})dt+0$$

$$=(100t-\frac{t^2}{40})\Big|_0^{1000}=7.5\times 10^4$$

$$\Delta R=R(2000)-R(1000)=\int_{1000}^{2000} R'(t)dt$$

$$=\int_{1000}^{2000}(100-\frac{t}{20})dt$$

$$=(100t-\frac{t^2}{40})$$

例 2 设 Q：产品数量；$R'(Q) = 100 - \frac{Q}{20}$：收入 $R(Q)$ 的变化率。求：(1) $R(1000)$；(2) 产量从 1000 增加至 2000 时，增加多少收入？

解 利用定积分

$$R(1000) = \int_0^{1000} R'(t)dt + R(0) = \int_0^{1000} (100 - \frac{t}{20})dt + 0$$

$$= (100t - \frac{t^2}{40})\Big|_0^{1000} = 7.5 \times 10^4$$

$$\Delta R = R(2000) - R(1000) = \int_{1000}^{2000} R'(t)dt$$

$$= \int_{1000}^{2000} (100 - \frac{t}{20})dt$$

$$= (100t - \frac{t^2}{40})\Big|_{1000}^{2000}$$

例 2 设 Q：产品数量；$R'(Q) = 100 - \frac{Q}{20}$：收入 $R(Q)$ 的变化率。求：(1) $R(1000)$；(2) 产量从 1000 增加至 2000 时，增加多少收入？

解 利用定积分

$$R(1000) = \int_0^{1000} R'(t)dt + R(0) = \int_0^{1000} (100 - \frac{t}{20})dt + 0$$

$$= (100t - \frac{t^2}{40})\Big|_0^{1000} = 7.5 \times 10^4$$

$$\Delta R = R(2000) - R(1000) = \int_{1000}^{2000} R'(t)dt$$

$$= \int_{1000}^{2000} (100 - \frac{t}{20})dt$$

$$= (100t - \frac{t^2}{40})\Big|_{1000}^{2000} = 2.5 \times 10^4$$

例 3 设某产品的边际收益 $MR = 1500 - 75\sqrt{x}$，求：

该产品产量从 225 个单位增加至 400 个单位时，所增加的收益。

例 3 设某产品的边际收益 $MR = 1500 - 75\sqrt{x}$，求：
该产品产量从 225 个单位增加至 400 个单位时，所增加的收益。

解 利用定积分

$$\Delta R =$$

例 3 设某产品的边际收益 $MR = 1500 - 75\sqrt{x}$，求：

该产品产量从 225 个单位增加至 400 个单位时，所增加的收益。

解 利用定积分

$$\Delta R = \int_{225}^{400} MR(t)dt =$$

例 3 设某产品的边际收益 $MR = 1500 - 75\sqrt{x}$，求：

该产品产量从 225 个单位增加至 400 个单位时，所增加的收益。

解 利用定积分

$$\Delta R = \int_{225}^{400} MR(t)dt = \int_{225}^{400} 1500 - 75t^{\frac{1}{2}} dt$$

例 3 设某产品的边际收益 $MR = 1500 - 75\sqrt{x}$，求：

该产品产量从 225 个单位增加至 400 个单位时，所增加的收益。

解 利用定积分

$$\Delta R = \int_{225}^{400} MR(t)dt = \int_{225}^{400} 1500 - 75t^{\frac{1}{2}}dt$$

$$= \left(1500t - 50t^{\frac{3}{2}}\right)$$

例 3 设某产品的边际收益 $MR = 1500 - 75\sqrt{x}$，求：

该产品产量从 225 个单位增加至 400 个单位时，所增加的收益。

解 利用定积分

$$\Delta R = \int_{225}^{400} MR(t)dt = \int_{225}^{400} 1500 - 75t^{\frac{1}{2}}dt$$

$$= \left(1500t - 50t^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_{225}^{400}$$

例 3 设某产品的边际收益 $MR = 1500 - 75\sqrt{x}$，求：

该产品产量从 225 个单位增加至 400 个单位时，所增加的收益。

解 利用定积分

$$\Delta R = \int_{225}^{400} MR(t)dt = \int_{225}^{400} 1500 - 75t^{\frac{1}{2}}dt$$

$$= \left(1500t - 50t^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_{225}^{400}$$

$$= (\qquad\qquad\qquad\qquad) - (\qquad\qquad\qquad\qquad)$$

例 3 设某产品的边际收益 $MR = 1500 - 75\sqrt{x}$，求：

该产品产量从 225 个单位增加至 400 个单位时，所增加的收益。

解 利用定积分

$$\Delta R = \int_{225}^{400} MR(t)dt = \int_{225}^{400} 1500 - 75t^{\frac{1}{2}} dt$$

$$= \left(1500t - 50t^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_{225}^{400}$$

$$= (1500 \cdot 400 - 50 \cdot 400^{\frac{3}{2}}) - (\qquad\qquad\qquad\qquad)$$

例 3 设某产品的边际收益 $MR = 1500 - 75\sqrt{x}$，求：

该产品产量从 225 个单位增加至 400 个单位时，所增加的收益。

解 利用定积分

$$\Delta R = \int_{225}^{400} MR(t)dt = \int_{225}^{400} 1500 - 75t^{\frac{1}{2}}dt$$

$$= \left(1500t - 50t^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_{225}^{400}$$

$$= (1500 \cdot 400 - 50 \cdot 400^{\frac{3}{2}}) - (1500 \cdot 225 - 50 \cdot 225^{\frac{3}{2}})$$

例 3 设某产品的边际收益 $MR = 1500 - 75\sqrt{x}$，求：

该产品产量从 225 个单位增加至 400 个单位时，所增加的收益。

解 利用定积分

$$\Delta R = \int_{225}^{400} MR(t)dt = \int_{225}^{400} 1500 - 75t^{\frac{1}{2}} dt$$

$$= \left(1500t - 50t^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_{225}^{400}$$

$$= (1500 \cdot 400 - 50 \cdot 400^{\frac{3}{2}}) - (1500 \cdot 225 - 50 \cdot 225^{\frac{3}{2}})$$

$$= 31250$$