

第 8 章 b : 平面及其方程

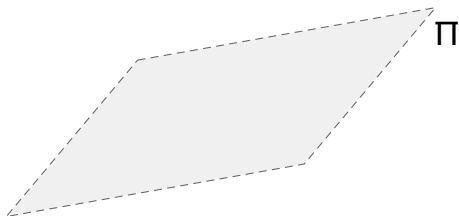
数学系 梁卓滨

2016-2017 学年 II

提要

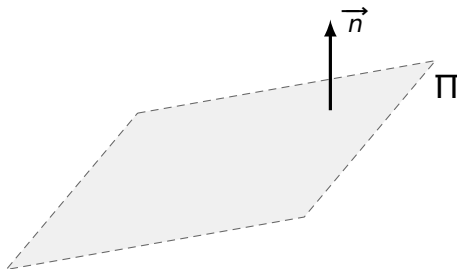
- 平面的法向量
- 平面方程
- 平面夹角
- 点到平面的距离

平面的法向量



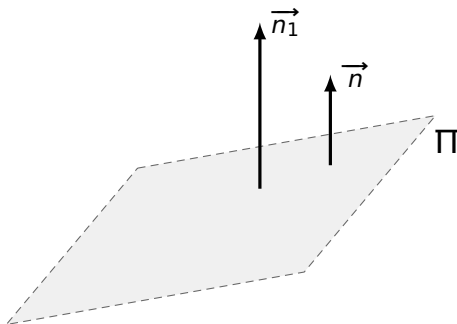
定义 垂直于平面的向量称为该平面的**法向量**。

平面的法向量



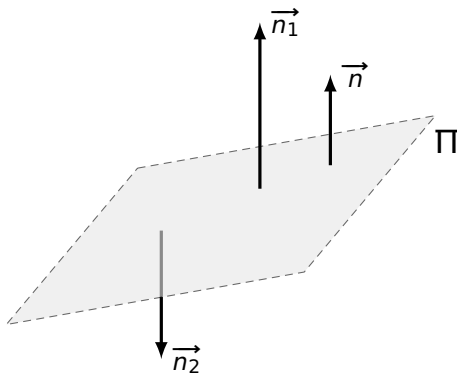
定义 垂直于平面的向量称为该平面的**法向量**。如： \vec{n} ,

平面的法向量



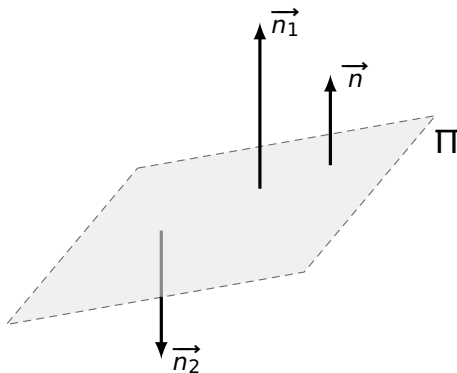
定义 垂直于平面的向量称为该平面的**法向量**。如： \vec{n}, \vec{n}_1 ,

平面的法向量



定义 垂直于平面的向量称为该平面的**法向量**。如: $\vec{n}, \vec{n}_1, \vec{n}_2$

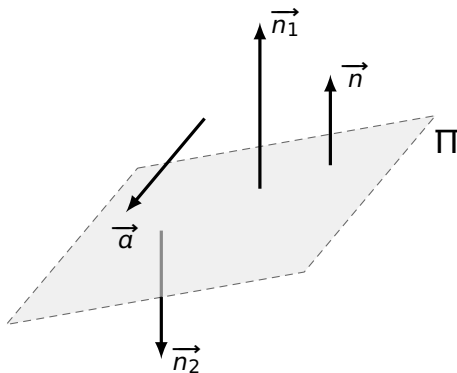
平面的法向量



定义 垂直于平面的向量称为该平面的**法向量**。如： $\vec{n}, \vec{n}_1, \vec{n}_2$

注 1 任意两个法向量是平行的。

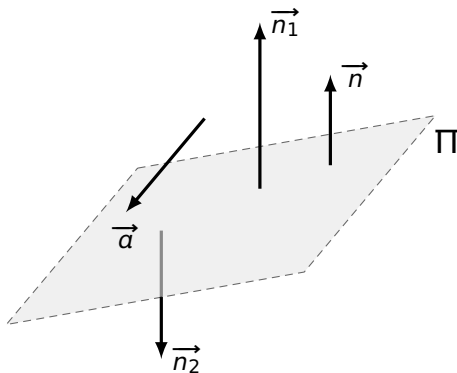
平面的法向量



定义 垂直于平面的向量称为该平面的**法向量**。如： $\vec{n}, \vec{n}_1, \vec{n}_2$

注 1 任意两个法向量是平行的。

平面的法向量

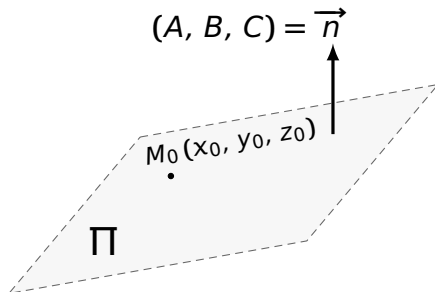


定义 垂直于平面的向量称为该平面的**法向量**。如： $\vec{n}, \vec{n}_1, \vec{n}_2$

注 1 任意两个法向量是平行的。

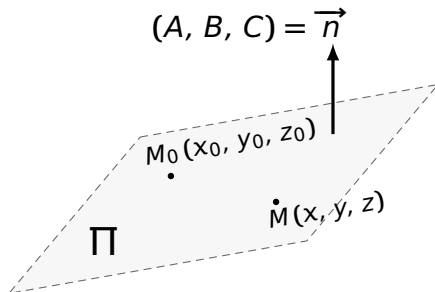
注 2 $\vec{a} \parallel \Pi \iff \vec{a} \perp \vec{n}$

平面方程



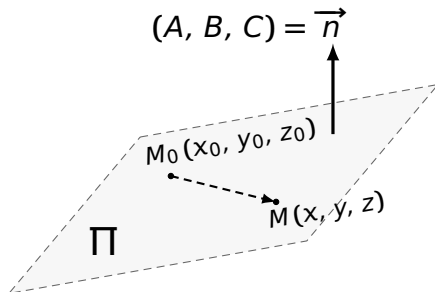
平面方程

$$M \in \Pi$$



平面方程

$$M \in \Pi$$

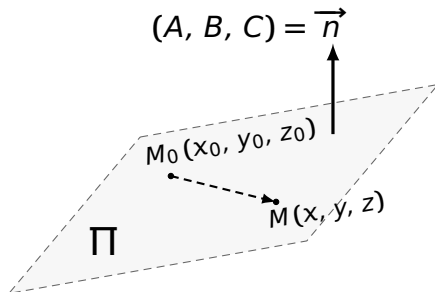


平面方程

$$M \in \Pi$$



$$\overrightarrow{M_0M} \perp \overrightarrow{n}$$



平面方程

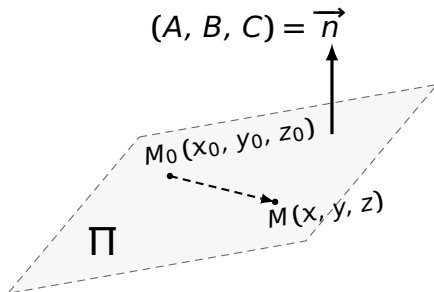
$$M \in \Pi$$



$$\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$$



$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$$



平面方程

$$M \in \Pi$$



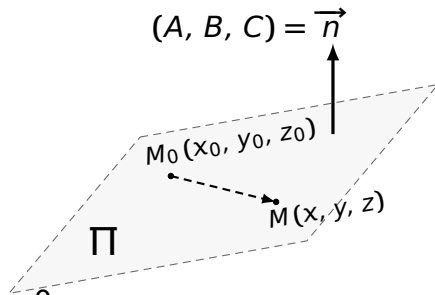
$$\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$$



$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$$



$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$



平面方程

$$M \in \Pi$$



$$\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$$



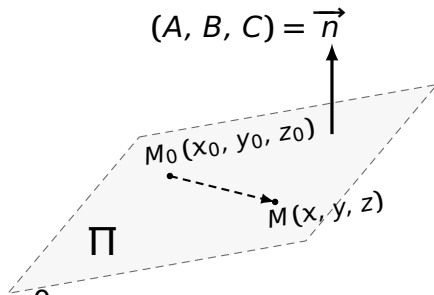
$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$$



$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$



$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$$



平面方程

$$M \in \Pi$$

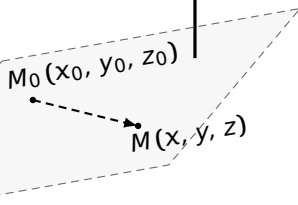
$$\begin{array}{c} \Updownarrow \\ \overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \Updownarrow \\ \overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0 \end{array}$$

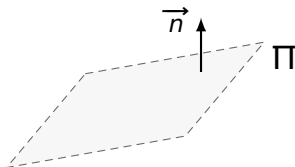
$$\begin{array}{c} \Updownarrow \\ A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \Updownarrow \\ Ax + By + Cz + D = 0, \quad D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0) \end{array}$$

$$(A, B, C) = \vec{n}$$



注 计算法向量 \vec{n} 的通常方法:



平面方程

$$M \in \Pi$$

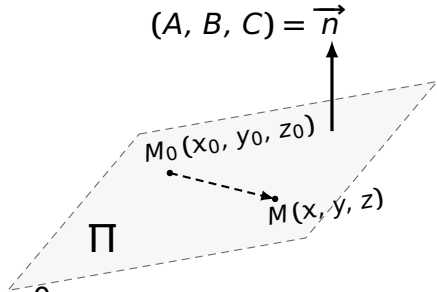
$$\Updownarrow$$
$$\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$$

$$\Updownarrow$$
$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\Updownarrow$$
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

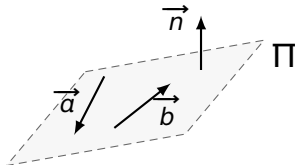
$$\Updownarrow$$
$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$$

$$(A, B, C) = \vec{n}$$



The diagram shows a shaded parallelogram representing a plane Π . A point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ is marked on the plane. A vector \vec{n} is shown as an arrow pointing upwards from the plane, perpendicular to it. Another point $M(x, y, z)$ is shown on the plane, with a dashed line segment connecting it to M_0 .

注 计算法向量 \vec{n} 的通常方法:



平面方程

$$M \in \Pi$$

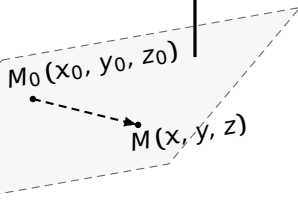
$$\Downarrow$$
$$\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$$

$$\Downarrow$$
$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$$

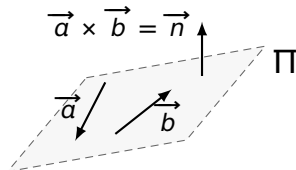
$$\Downarrow$$
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$\Downarrow$$
$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$$

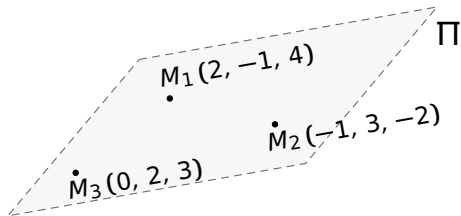
$$(A, B, C) = \vec{n}$$



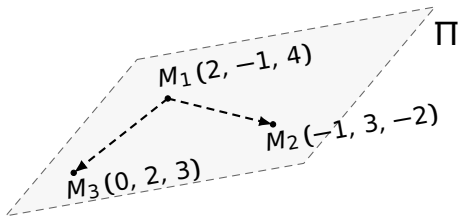
注 计算法向量 \vec{n} 的通常方法:



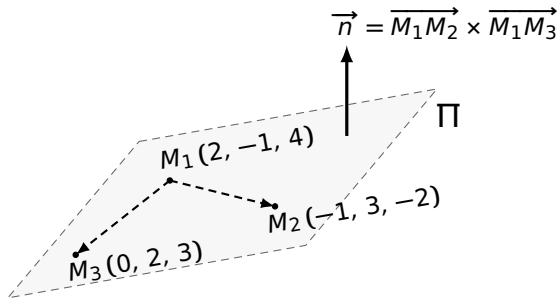
例 设平面 Π 过点
 $M_1(2, -1, 4)$,
 $M_2(-1, 3, -2)$,
 $M_3(0, 2, 3)$,
求 Π 方程。



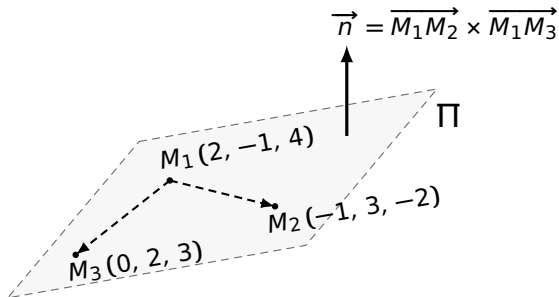
例 设平面 Π 过点
 $M_1(2, -1, 4)$,
 $M_2(-1, 3, -2)$,
 $M_3(0, 2, 3)$,
求 Π 方程。



例 设平面 Π 过点
 $M_1(2, -1, 4)$,
 $M_2(-1, 3, -2)$,
 $M_3(0, 2, 3)$,
求 Π 方程。



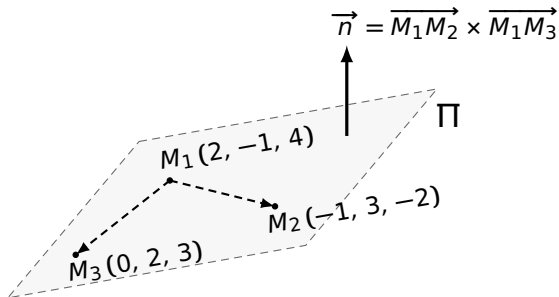
例 设平面 Π 过点
 $M_1(2, -1, 4)$,
 $M_2(-1, 3, -2)$,
 $M_3(0, 2, 3)$,
求 Π 方程。



解 1. 求一个法向量：取

$$\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \end{vmatrix}$$

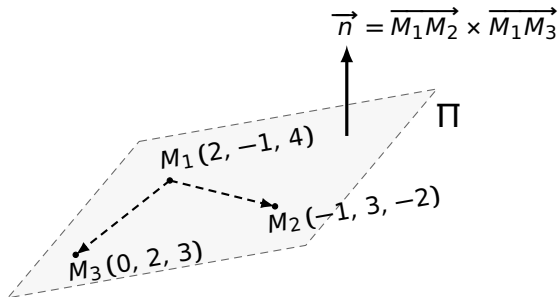
例 设平面 Π 过点
 $M_1(2, -1, 4)$,
 $M_2(-1, 3, -2)$,
 $M_3(0, 2, 3)$,
求 Π 方程。



解 1. 求一个法向量：取

$$\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 4 & -6 \end{vmatrix}$$

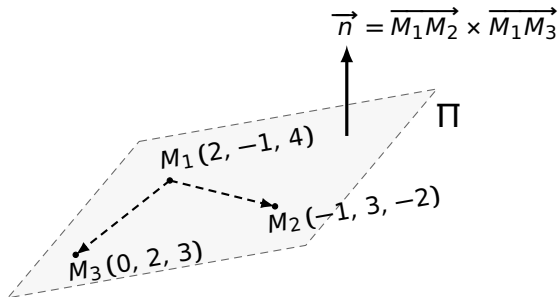
例 设平面 Π 过点
 $M_1(2, -1, 4)$,
 $M_2(-1, 3, -2)$,
 $M_3(0, 2, 3)$,
求 Π 方程。



解 1. 求一个法向量：取

$$\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

例 设平面 Π 过点
 $M_1(2, -1, 4)$,
 $M_2(-1, 3, -2)$,
 $M_3(0, 2, 3)$,
 求 Π 方程。



解 1. 求一个法向量：取

$$\begin{aligned} \vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

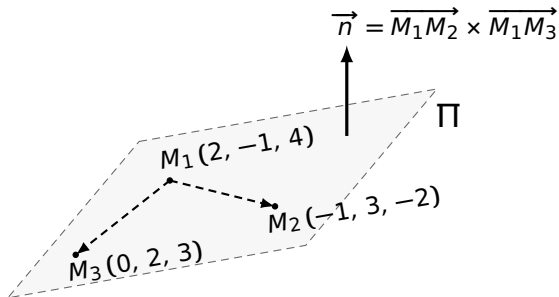
例 设平面 Π 过点

$M_1(2, -1, 4)$,

$M_2(-1, 3, -2)$,

$M_3(0, 2, 3)$,

求 Π 方程。



解 1. 求一个法向量：取

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \vec{k}\end{aligned}$$

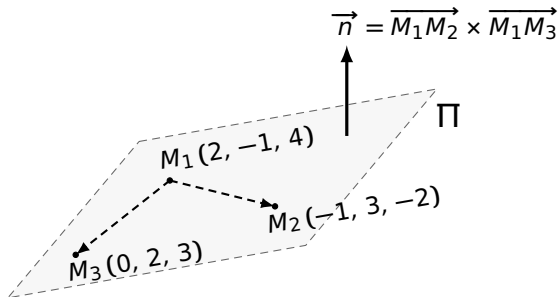
例 设平面 Π 过点

$M_1(2, -1, 4)$,

$M_2(-1, 3, -2)$,

$M_3(0, 2, 3)$,

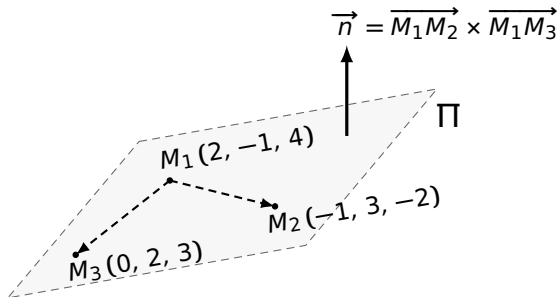
求 Π 方程。



解 1. 求一个法向量：取

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \vec{k}\end{aligned}$$

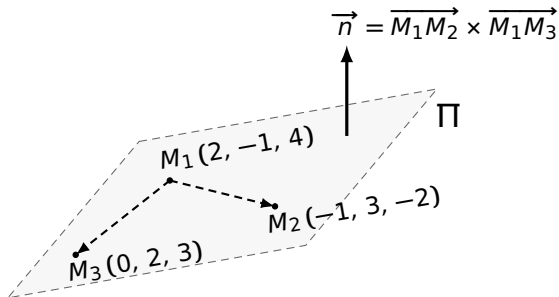
例 设平面 Π 过点
 $M_1(2, -1, 4)$,
 $M_2(-1, 3, -2)$,
 $M_3(0, 2, 3)$,
求 Π 方程。



解 1. 求一个法向量：取

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \vec{k}\end{aligned}$$

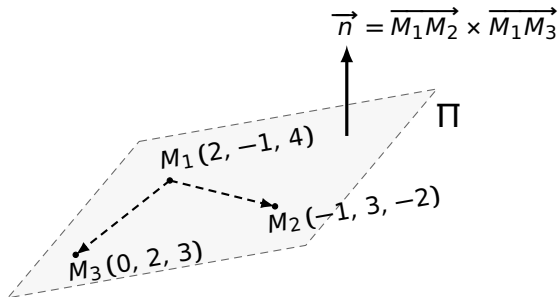
例 设平面 Π 过点
 $M_1(2, -1, 4)$,
 $M_2(-1, 3, -2)$,
 $M_3(0, 2, 3)$,
求 Π 方程。



解 1. 求一个法向量：取

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \vec{k} = 14\vec{i} + 9\vec{j} - \vec{k}\end{aligned}$$

例 设平面 Π 过点
 $M_1(2, -1, 4)$,
 $M_2(-1, 3, -2)$,
 $M_3(0, 2, 3)$,
 求 Π 方程。



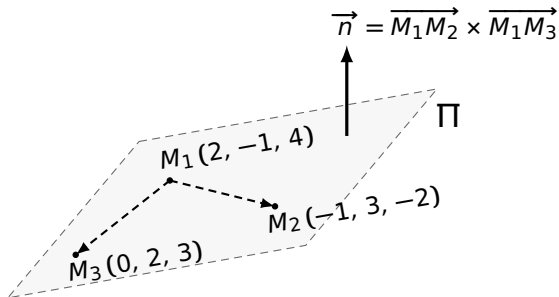
解 1. 求一个法向量: 取

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \vec{k} = 14\vec{i} + 9\vec{j} - \vec{k}\end{aligned}$$

2. 平面方程:

$$14(x - 0) + 9(y - 2) - (z - 3) = 0$$

例 设平面 Π 过点
 $M_1(2, -1, 4)$,
 $M_2(-1, 3, -2)$,
 $M_3(0, 2, 3)$,
求 Π 方程。



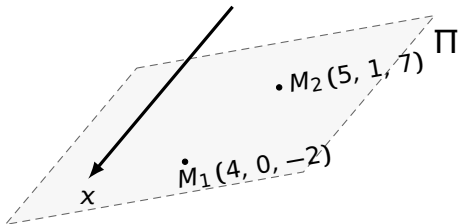
解 1. 求一个法向量: 取

$$\begin{aligned}\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \vec{k} = 14\vec{i} + 9\vec{j} - \vec{k}\end{aligned}$$

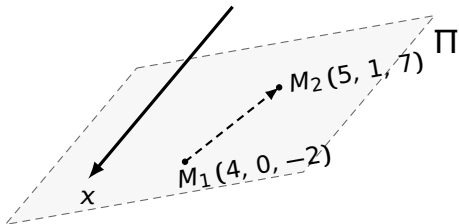
2. 平面方程:

$$14(x - 0) + 9(y - 2) - (z - 3) = 0 \Rightarrow 14x + 9y - z - 15 = 0$$

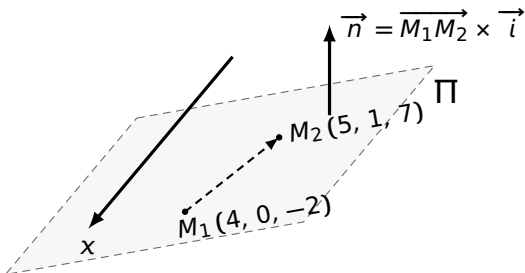
例 设平面 $\Pi \parallel x$ 轴, 且过
 $M_1(4, 0, -2)$,
 $M_2(5, 1, 7)$,
求 Π 方程。



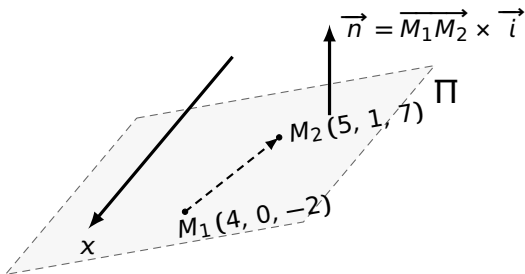
例 设平面 $\Pi \parallel x$ 轴, 且过
 $M_1(4, 0, -2)$,
 $M_2(5, 1, 7)$,
求 Π 方程。



例 设平面 $\Pi \parallel x$ 轴, 且过
 $M_1(4, 0, -2)$,
 $M_2(5, 1, 7)$,
求 Π 方程。



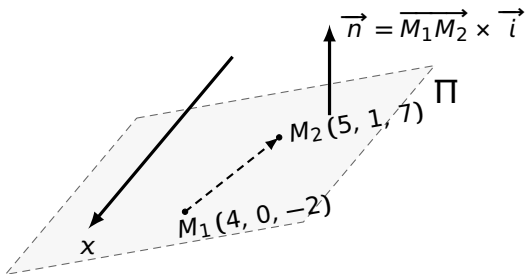
例 设平面 $\Pi \parallel x$ 轴, 且过
 $M_1(4, 0, -2)$,
 $M_2(5, 1, 7)$,
求 Π 方程。



解 1. 求一个法向量: 取

$$\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \end{vmatrix}$$

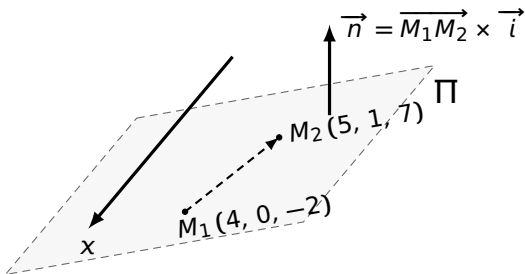
例 设平面 $\Pi \parallel x$ 轴, 且过
 $M_1(4, 0, -2)$,
 $M_2(5, 1, 7)$,
求 Π 方程。



解 1. 求一个法向量: 取

$$\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix}$$

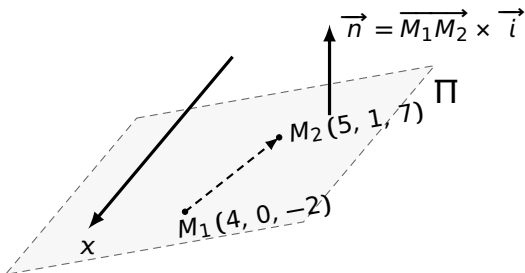
例 设平面 $\Pi \parallel x$ 轴, 且过
 $M_1(4, 0, -2)$,
 $M_2(5, 1, 7)$,
求 Π 方程。



解 1. 求一个法向量: 取

$$\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

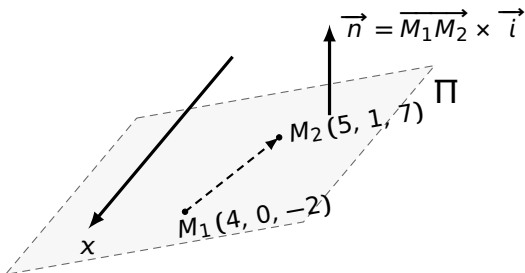
例 设平面 $\Pi \parallel x$ 轴, 且过 $M_1(4, 0, -2)$, $M_2(5, 1, 7)$, 求 Π 方程。



解 1. 求一个法向量: 取

$$\begin{aligned} \vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{i} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

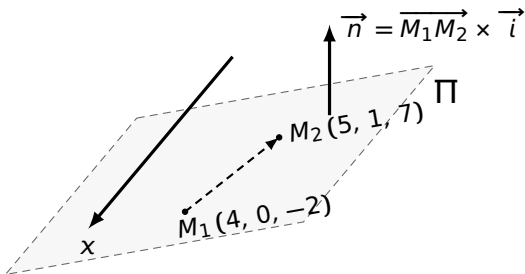
例 设平面 $\Pi \parallel x$ 轴, 且过
 $M_1(4, 0, -2)$,
 $M_2(5, 1, 7)$,
 求 Π 方程。



解 1. 求一个法向量: 取

$$\begin{aligned}\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{i} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \vec{j} & + \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix} \vec{k}\end{aligned}$$

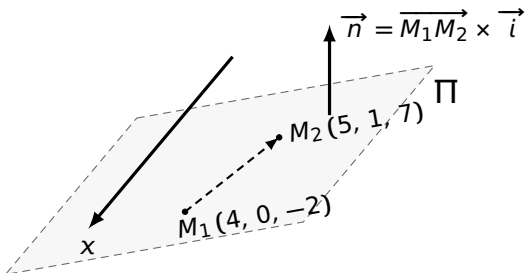
例 设平面 $\Pi \parallel x$ 轴, 且过 $M_1(4, 0, -2)$, $M_2(5, 1, 7)$, 求 Π 方程。



解 1. 求一个法向量: 取

$$\begin{aligned}\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{i} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} \end{vmatrix} \vec{k}\end{aligned}$$

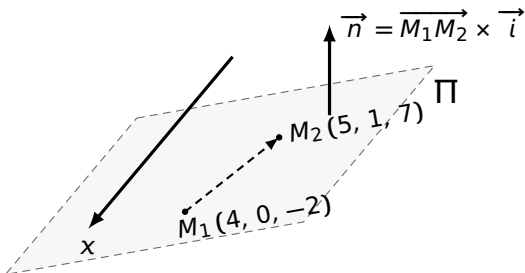
例 设平面 $\Pi \parallel x$ 轴, 且过 $M_1(4, 0, -2)$, $M_2(5, 1, 7)$, 求 Π 方程。



解 1. 求一个法向量: 取

$$\begin{aligned}\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{i} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k}\end{aligned}$$

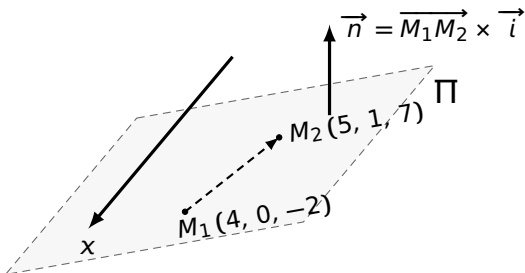
例 设平面 $\Pi \parallel x$ 轴, 且过
 $M_1(4, 0, -2)$,
 $M_2(5, 1, 7)$,
求 Π 方程。



解 1. 求一个法向量: 取

$$\begin{aligned}\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{i} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} = 9\vec{j} - \vec{k}\end{aligned}$$

例 设平面 $\Pi \parallel x$ 轴, 且过
 $M_1(4, 0, -2)$,
 $M_2(5, 1, 7)$,
求 Π 方程。



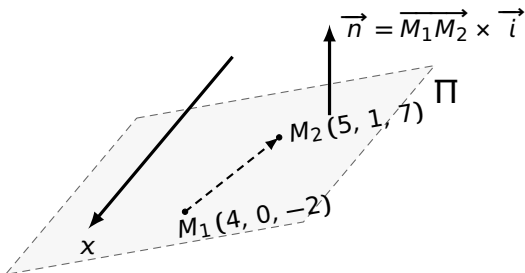
解 1. 求一个法向量: 取

$$\begin{aligned}\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{i} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} = 9\vec{j} - \vec{k}\end{aligned}$$

2. 平面方程:

$$0(x-4) + 9(y-0) - (z+2) = 0$$

例 设平面 $\Pi \parallel x$ 轴, 且过
 $M_1(4, 0, -2)$,
 $M_2(5, 1, 7)$,
 求 Π 方程。



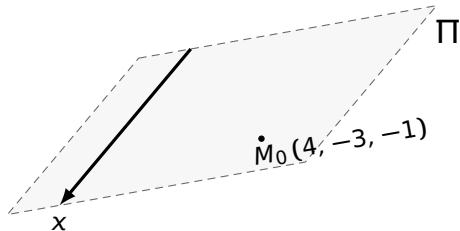
解 1. 求一个法向量: 取

$$\begin{aligned}\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{i} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} = 9\vec{j} - \vec{k}\end{aligned}$$

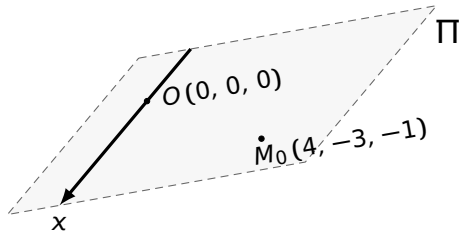
2. 平面方程:

$$0(x-4) + 9(y-0) - (z+2) = 0 \Rightarrow 9y - z - 2 = 0$$

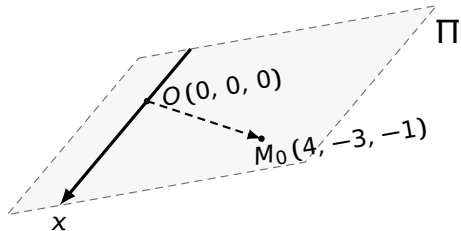
例 设平面 Π 包含 x 轴, 且过 $M_0(4, -3, -1)$, 求 Π 方程。



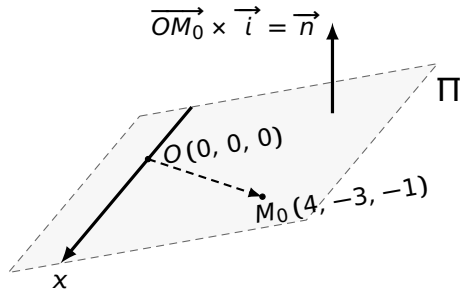
例 设平面 Π 包含 x 轴, 且过 $M_0(4, -3, -1)$,
求 Π 方程。



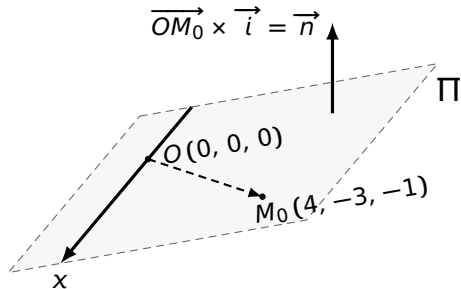
例 设平面 Π 包含 x 轴, 且过 $M_0(4, -3, -1)$, 求 Π 方程。



例 设平面 Π 包含 x 轴, 且过 $M_0(4, -3, -1)$,
求 Π 方程。



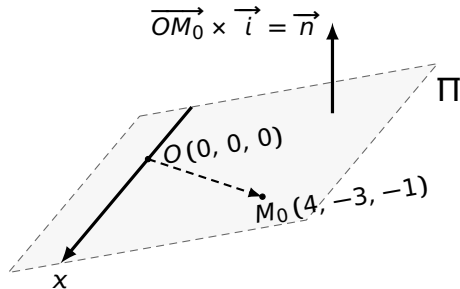
例 设平面 Π 包含 x 轴, 且过 $M_0(4, -3, -1)$, 求 Π 方程。



解 1. 求一个法向量: 取

$$\vec{n} = \overrightarrow{OM_0} \times \vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

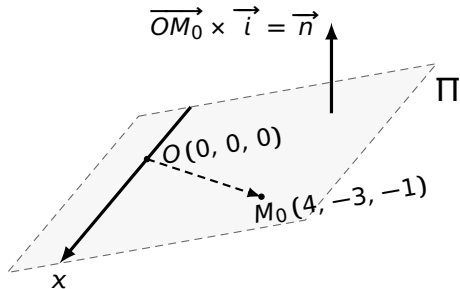
例 设平面 Π 包含 x 轴, 且过 $M_0(4, -3, -1)$, 求 Π 方程。



解 1. 求一个法向量: 取

$$\vec{n} = \vec{OM_0} \times \vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & -1 \end{vmatrix}$$

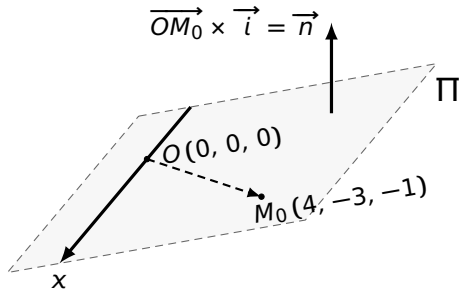
例 设平面 Π 包含 x 轴, 且过 $M_0(4, -3, -1)$, 求 Π 方程。



解 1. 求一个法向量: 取

$$\vec{n} = \overrightarrow{OM_0} \times \vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

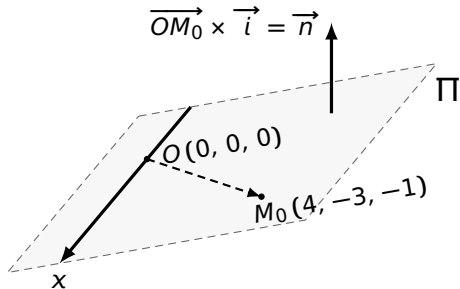
例 设平面 Π 包含 x 轴, 且过 $M_0(4, -3, -1)$, 求 Π 方程。



解 1. 求一个法向量: 取

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \overrightarrow{OM_0} \times \vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{k} \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 4 & -3 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

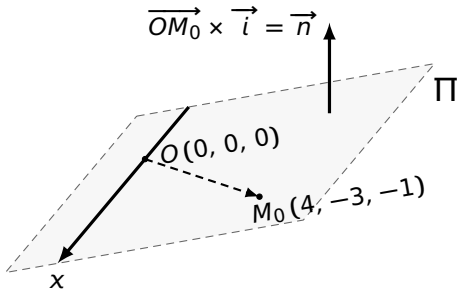
例 设平面 Π 包含 x 轴, 且过 $M_0(4, -3, -1)$, 求 Π 方程。



解 1. 求一个法向量: 取

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \overrightarrow{OM_0} \times \vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k}\end{aligned}$$

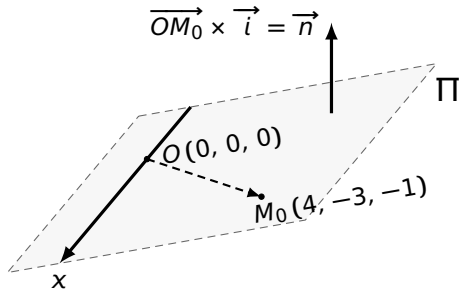
例 设平面 Π 包含 x 轴, 且过 $M_0(4, -3, -1)$, 求 Π 方程。



解 1. 求一个法向量: 取

$$\begin{aligned}\vec{n} = \overrightarrow{OM_0} \times \vec{i} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix} \vec{k}\end{aligned}$$

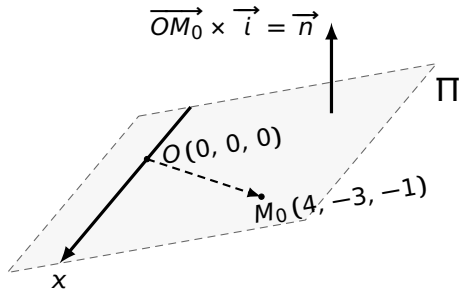
例 设平面 Π 包含 x 轴, 且过 $M_0(4, -3, -1)$,
求 Π 方程。



解 1. 求一个法向量: 取

$$\begin{aligned}\vec{n} = \overrightarrow{OM}_0 \times \vec{i} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k}\end{aligned}$$

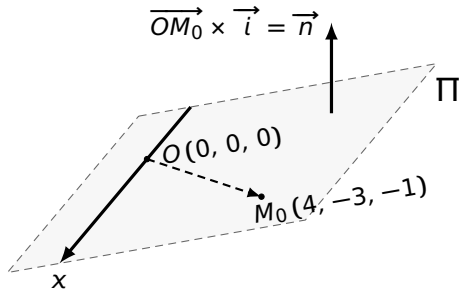
例 设平面 Π 包含 x 轴, 且过 $M_0(4, -3, -1)$, 求 Π 方程。



解 1. 求一个法向量: 取

$$\begin{aligned}\vec{n} = \overrightarrow{OM_0} \times \vec{i} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} = -\vec{j} + 3\vec{k}\end{aligned}$$

例 设平面 Π 包含 x 轴, 且过 $M_0(4, -3, -1)$, 求 Π 方程。



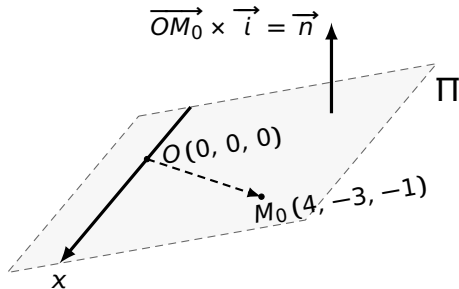
解 1. 求一个法向量: 取

$$\begin{aligned}\vec{n} = \overrightarrow{OM_0} \times \vec{i} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} = -\vec{j} + 3\vec{k}\end{aligned}$$

2. 平面方程:

$$0(x-0) - 1 \cdot (y-0) + 3(z-0) = 0$$

例 设平面 Π 包含 x 轴, 且过 $M_0(4, -3, -1)$, 求 Π 方程。



解 1. 求一个法向量: 取

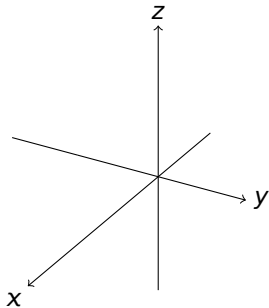
$$\begin{aligned}\vec{n} = \overrightarrow{OM_0} \times \vec{i} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} = -\vec{j} + 3\vec{k}\end{aligned}$$

2. 平面方程:

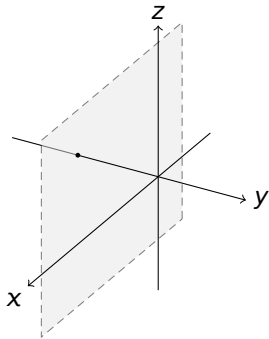
$$0(x-0) - 1 \cdot (y-0) + 3(z-0) = 0 \Rightarrow y - 3z = 0$$

例 设平面 Π 平行于 xOz 坐标面，且过 $(2, -5, 3)$ ，求平面 Π 方程。

例 设平面 Π 平行于 xOz 坐标面，且过 $(2, -5, 3)$ ，求平面 Π 方程。

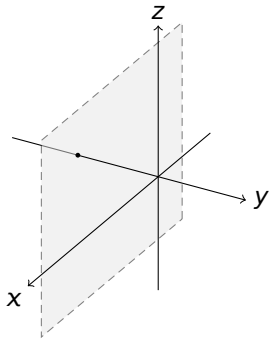


例 设平面 Π 平行于 xOz 坐标面，且过 $(2, -5, 3)$ ，求平面 Π 方程。



例 设平面 Π 平行于 xOz 坐标面，且过 $(2, -5, 3)$ ，求平面 Π 方程。

解 1. 求一个法向量：取 $\vec{n} = (0, 1, 0)$

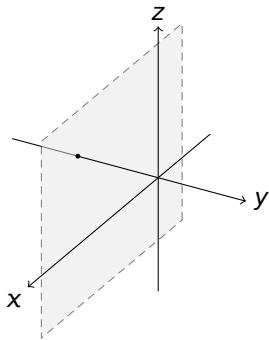


例 设平面 Π 平行于 xOz 坐标面，且过 $(2, -5, 3)$ ，求平面 Π 方程。

解 1. 求一个法向量：取 $\vec{n} = (0, 1, 0)$

2. 平面方程：

$$0(x - 2) + 1 \cdot (y + 5) + 0(z - 3) = 0$$

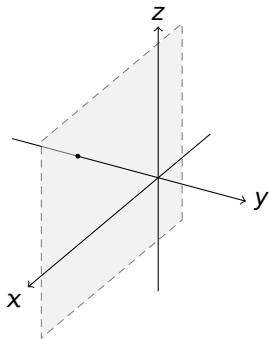


例 设平面 Π 平行于 xOz 坐标面，且过 $(2, -5, 3)$ ，求平面 Π 方程。

解 1. 求一个法向量：取 $\vec{n} = (0, 1, 0)$

2. 平面方程：

$$\begin{aligned} 0(x-2) + 1 \cdot (y+5) + 0(z-3) &= 0 \\ \Rightarrow y + 5 &= 0 \end{aligned}$$

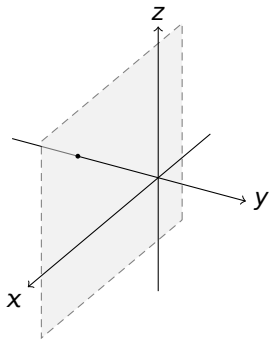


例 设平面 Π 平行于 xOz 坐标面，且过 $(2, -5, 3)$ ，求平面 Π 方程。

解 1. 求一个法向量：取 $\vec{n} = (0, 1, 0)$

2. 平面方程：

$$\begin{aligned} 0(x-2) + 1 \cdot (y+5) + 0(z-3) &= 0 \\ \Rightarrow y + 5 &= 0 \end{aligned}$$



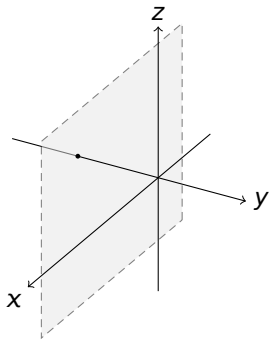
例 问平面 $\Pi: Ax + By = 1$ 平行于哪个坐标轴？

例 设平面 Π 平行于 xOz 坐标面，且过 $(2, -5, 3)$ ，求平面 Π 方程。

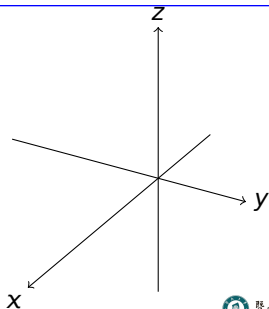
解 1. 求一个法向量：取 $\vec{n} = (0, 1, 0)$

2. 平面方程：

$$0(x-2) + 1 \cdot (y+5) + 0(z-3) = 0 \\ \Rightarrow y + 5 = 0$$



例 问平面 $\Pi: Ax + By = 1$ 平行于哪个坐标轴？

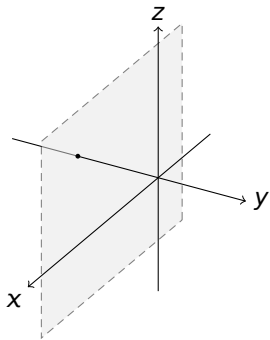


例 设平面 Π 平行于 xOz 坐标面，且过 $(2, -5, 3)$ ，求平面 Π 方程。

解 1. 求一个法向量：取 $\vec{n} = (0, 1, 0)$

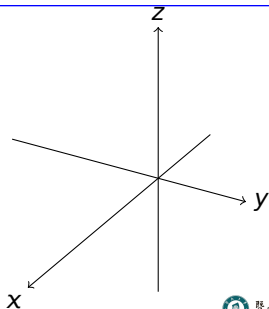
2. 平面方程：

$$0(x-2) + 1 \cdot (y+5) + 0(z-3) = 0 \\ \Rightarrow y + 5 = 0$$



例 问平面 $\Pi: Ax + By = 1$ 平行于哪个坐标轴？

解 平行于 z 轴。

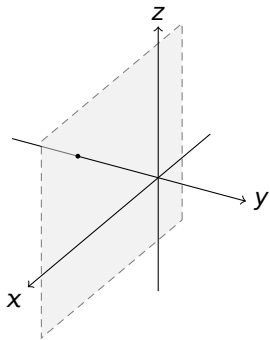


例 设平面 Π 平行于 xOz 坐标面，且过 $(2, -5, 3)$ ，求平面 Π 方程。

解 1. 求一个法向量：取 $\vec{n} = (0, 1, 0)$

2. 平面方程：

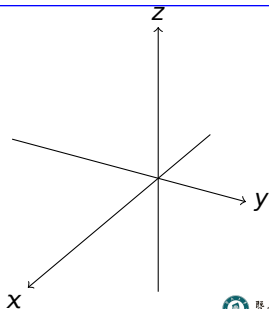
$$0(x-2) + 1 \cdot (y+5) + 0(z-3) = 0 \\ \Rightarrow y + 5 = 0$$



例 问平面 $\Pi: Ax + By = 1$ 平行于哪个坐标轴？

解 平行于 z 轴。

这是因为： Π 的一个法向量为 $(A, B, 0)$ ，与 z 轴垂直

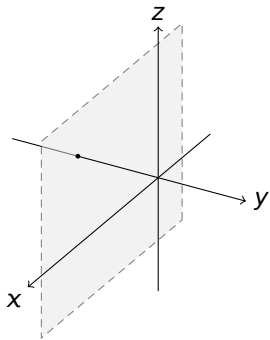


例 设平面 Π 平行于 xOz 坐标面，且过 $(2, -5, 3)$ ，求平面 Π 方程。

解 1. 求一个法向量：取 $\vec{n} = (0, 1, 0)$

2. 平面方程：

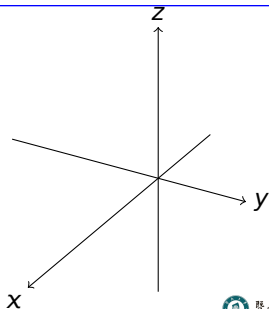
$$\begin{aligned} 0(x-2) + 1 \cdot (y+5) + 0(z-3) &= 0 \\ \Rightarrow y + 5 &= 0 \end{aligned}$$



例 问平面 $\Pi: Ax + By = 1$ 平行于哪个坐标轴？

解 平行于 z 轴。

这是因为： Π 的一个法向量为 $(A, B, 0)$ ，与 z 轴垂直 $((A, B, 0) \cdot (0, 0, 1) = 0)$

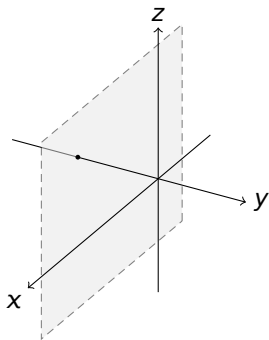


例 设平面 Π 平行于 xOz 坐标面，且过 $(2, -5, 3)$ ，求平面 Π 方程。

解 1. 求一个法向量：取 $\vec{n} = (0, 1, 0)$

2. 平面方程：

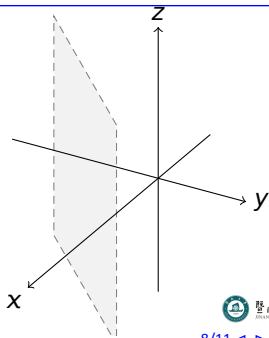
$$0(x-2) + 1 \cdot (y+5) + 0(z-3) = 0 \\ \Rightarrow y + 5 = 0$$



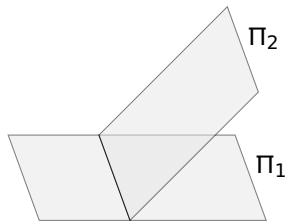
例 问平面 $\Pi: Ax + By = 1$ 平行于哪个坐标轴？

解 平行于 z 轴。

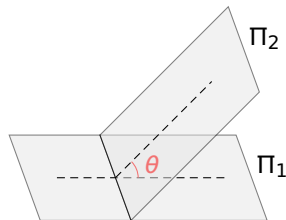
这是因为： Π 的一个法向量为 $(A, B, 0)$ ，与 z 轴垂直 $((A, B, 0) \cdot (0, 0, 1) = 0)$



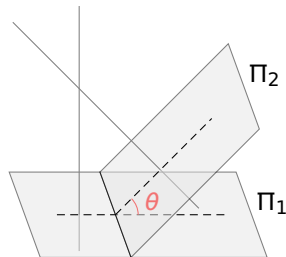
平面夹角



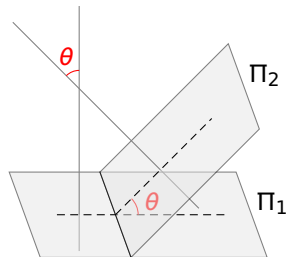
平面夹角



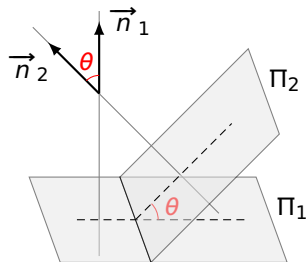
平面夹角



平面夹角

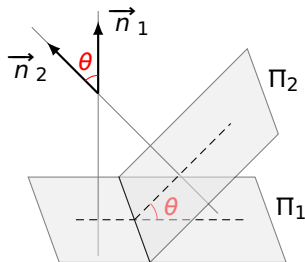


平面夹角



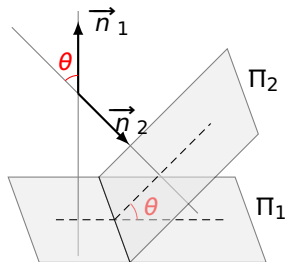
平面夹角

$$\cos \theta = \cos(\angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2))$$



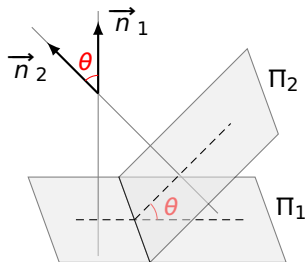
平面夹角

$$\cos \theta = \cos(\angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2))$$



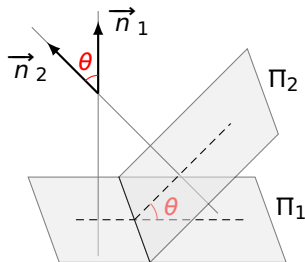
平面夹角

$$\cos \theta = \cos(\angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2))$$



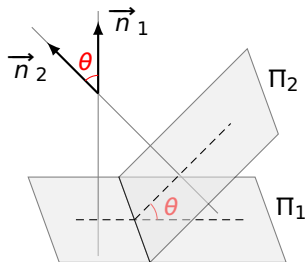
平面夹角

$$\cos \theta = \left| \cos(\angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2)) \right|$$



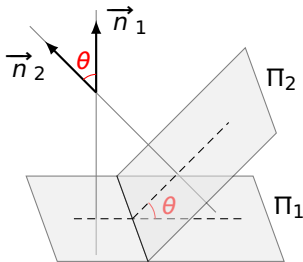
平面夹角

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \left| \cos \left(\angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right) \right| \\ &= \left| \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \right|\end{aligned}$$



平面夹角

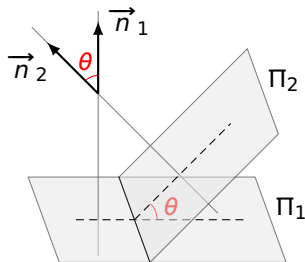
$$\begin{aligned}\cos \theta &= \left| \cos \left(\angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right) \right| \\ &= \left| \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \right|\end{aligned}$$



例 求平面 $x - y + 2z - 6 = 0$ 和 $2x + y + z - 5 = 0$ 的夹角

平面夹角

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \left| \cos \left(\angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right) \right| \\ &= \left| \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \right|\end{aligned}$$



例 求平面 $x - y + 2z - 6 = 0$ 和 $2x + y + z - 5 = 0$ 的夹角

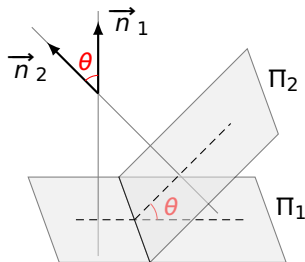
解 $\vec{n}_1 = (\quad), \quad \vec{n}_2 = (\quad)$

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

$$\theta =$$

平面夹角

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \left| \cos \left(\angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right) \right| \\ &= \left| \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \right|\end{aligned}$$



例 求平面 $x - y + 2z - 6 = 0$ 和 $2x + y + z - 5 = 0$ 的夹角

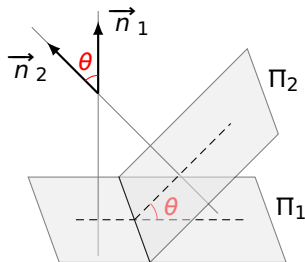
解 $\vec{n}_1 = (1, -1, 2), \quad \vec{n}_2 = (\quad)$

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

$$\theta =$$

平面夹角

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \left| \cos \left(\angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right) \right| \\ &= \left| \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \right|\end{aligned}$$



例 求平面 $x - y + 2z - 6 = 0$ 和 $2x + y + z - 5 = 0$ 的夹角

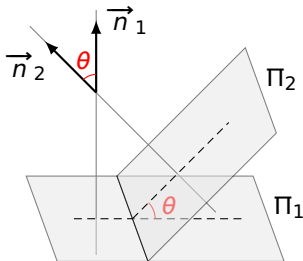
解 $\vec{n}_1 = (1, -1, 2), \quad \vec{n}_2 = (2, 1, 1)$

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

$$\theta =$$

平面夹角

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \left| \cos \left(\angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right) \right| \\ &= \left| \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \right|\end{aligned}$$



例 求平面 $x - y + 2z - 6 = 0$ 和 $2x + y + z - 5 = 0$ 的夹角

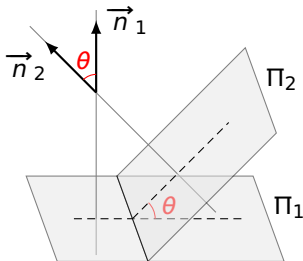
解 $\vec{n}_1 = (1, -1, 2), \quad \vec{n}_2 = (2, 1, 1)$

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}}$$

$$\theta =$$

平面夹角

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \left| \cos \left(\angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right) \right| \\ &= \left| \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \right|\end{aligned}$$



例 求平面 $x - y + 2z - 6 = 0$ 和 $2x + y + z - 5 = 0$ 的夹角

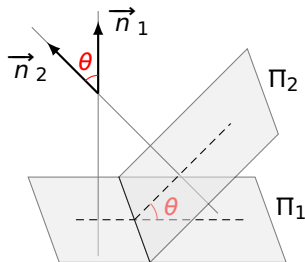
解 $\vec{n}_1 = (1, -1, 2), \quad \vec{n}_2 = (2, 1, 1)$

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\theta =$$

平面夹角

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \left| \cos \left(\angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right) \right| \\ &= \left| \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \right|\end{aligned}$$



例 求平面 $x - y + 2z - 6 = 0$ 和 $2x + y + z - 5 = 0$ 的夹角

解 $\vec{n}_1 = (1, -1, 2), \quad \vec{n}_2 = (2, 1, 1)$

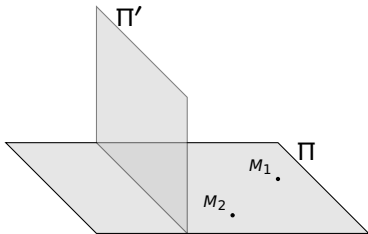
$$\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

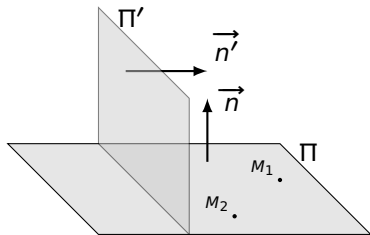
例 设平面 Π 过点

$M_1(1, 1, 1)$, $M_2(0, 1, -1)$, 且与平面

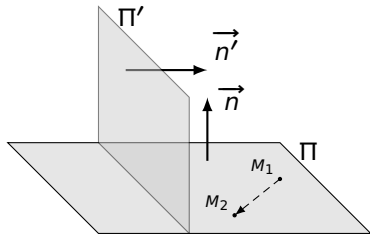
$\Pi': x + y + z = 0$ 垂直, 求 Π 方程。



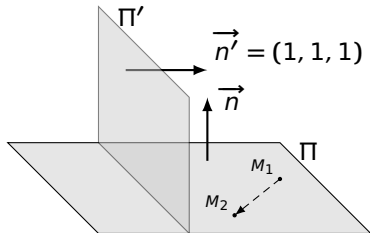
例 设平面 Π 过点 $M_1(1, 1, 1), M_2(0, 1, -1)$, 且与平面 $\Pi': x + y + z = 0$ 垂直, 求 Π 方程。



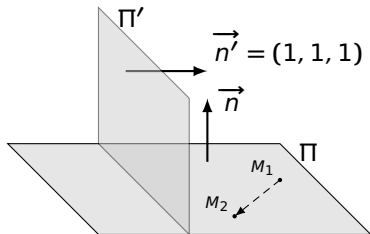
例 设平面 Π 过点 $M_1(1, 1, 1)$, $M_2(0, 1, -1)$, 且与平面 $\Pi': x + y + z = 0$ 垂直, 求 Π 方程。



例 设平面 Π 过点 $M_1(1, 1, 1)$, $M_2(0, 1, -1)$, 且与平面 $\Pi': x + y + z = 0$ 垂直, 求 Π 方程。



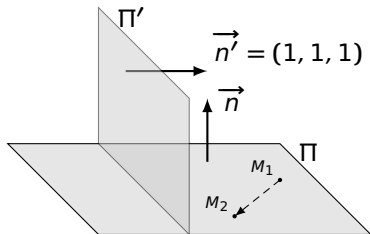
例 设平面 Π 过点 $M_1(1, 1, 1), M_2(0, 1, -1)$, 且与平面 $\Pi': x + y + z = 0$ 垂直, 求 Π 方程。



解 1. 求一个法向量:

$$\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{n}' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

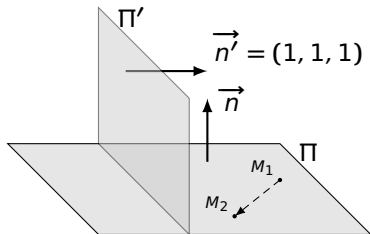
$M_1(1, 1, 1), M_2(0, 1, -1)$, 且与平面 $\Pi': x + y + z = 0$ 垂直, 求 Π 方程。


$$\vec{n} = \vec{M_1 M_2} \times \vec{n'} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \left| \begin{array}{c} \vec{i} \\ - \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \vec{j} \\ + \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \vec{k} \\ \end{array} \right|$$

例 设平面 Π 过点

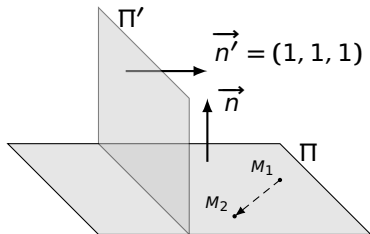
$M_1(1, 1, 1), M_2(0, 1, -1)$, 且与平面
 $\Pi': x + y + z = 0$ 垂直, 求 Π 方程。



解 1. 求一个法向量:

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{n}' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}\end{aligned}$$

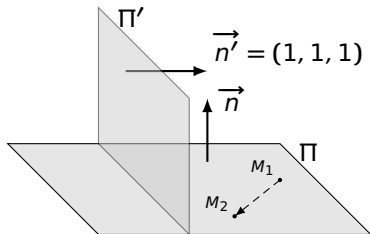
例 设平面 Π 过点 $M_1(1, 1, 1), M_2(0, 1, -1)$, 且与平面 $\Pi': x + y + z = 0$ 垂直, 求 Π 方程。



解 1. 求一个法向量:

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{n}' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}\end{aligned}$$

例 设平面 Π 过点 $M_1(1, 1, 1), M_2(0, 1, -1)$, 且与平面 $\Pi': x + y + z = 0$ 垂直, 求 Π 方程。

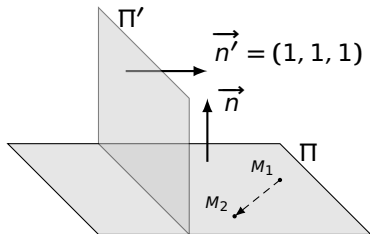


解 1. 求一个法向量:

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{n}' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}\end{aligned}$$

例 设平面 Π 过点

$M_1(1, 1, 1), M_2(0, 1, -1)$, 且与平面
 $\Pi': x + y + z = 0$ 垂直, 求 Π 方程。

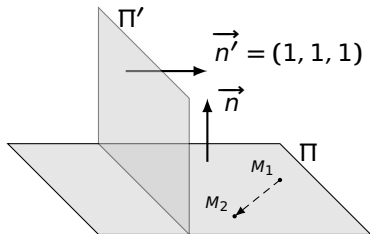


解 1. 求一个法向量:

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{n}' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}\end{aligned}$$

例 设平面 Π 过点

$M_1(1, 1, 1), M_2(0, 1, -1)$, 且与平面
 $\Pi': x + y + z = 0$ 垂直, 求 Π 方程。



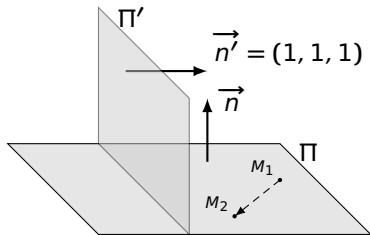
解 1. 求一个法向量:

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{n}' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}\end{aligned}$$

2. 平面方程:

$$2(x-1) - 1 \cdot (y-1) - 1 \cdot (z-1) = 0$$

例 设平面 Π 过点 $M_1(1, 1, 1), M_2(0, 1, -1)$, 且与平面 $\Pi': x + y + z = 0$ 垂直, 求 Π 方程。



解 1. 求一个法向量:

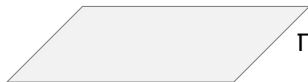
$$\begin{aligned}\vec{n} &= \overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{n}' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}\end{aligned}$$

2. 平面方程:

$$2(x-1) - 1 \cdot (y-1) - 1 \cdot (z-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - y - z = 0$$

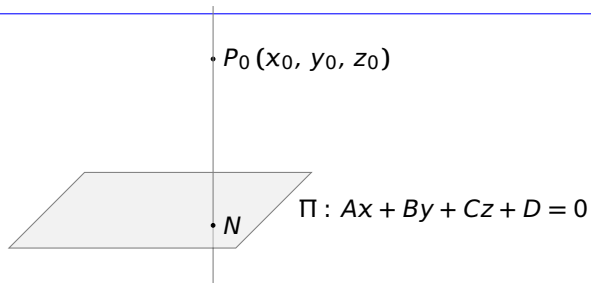
点到平面的距离

$$\cdot P_0(x_0, y_0, z_0)$$

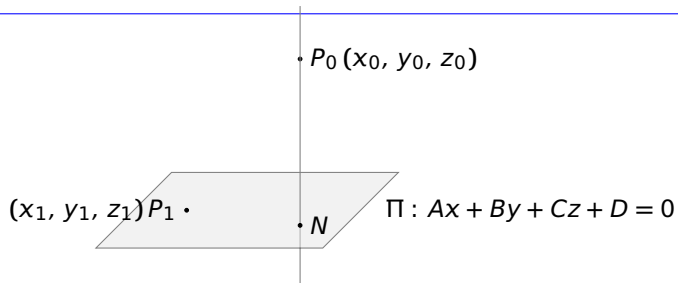


$$\Pi: Ax + By + Cz + D = 0$$

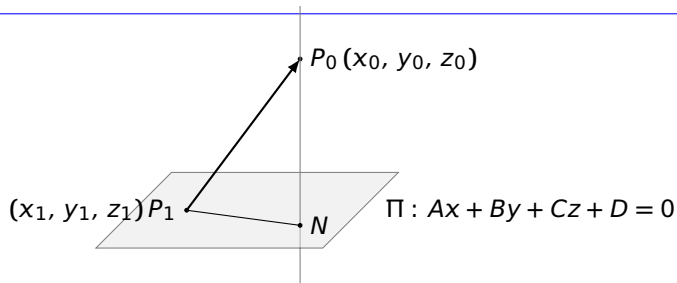
点到平面的距离



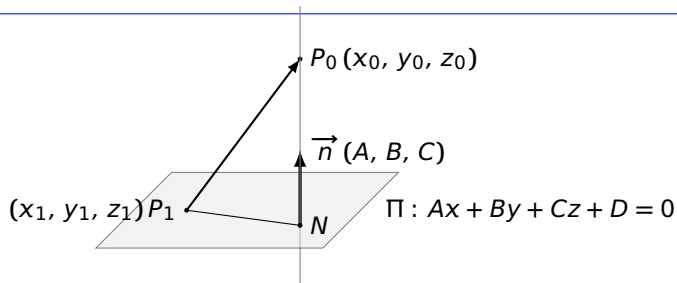
点到平面的距离



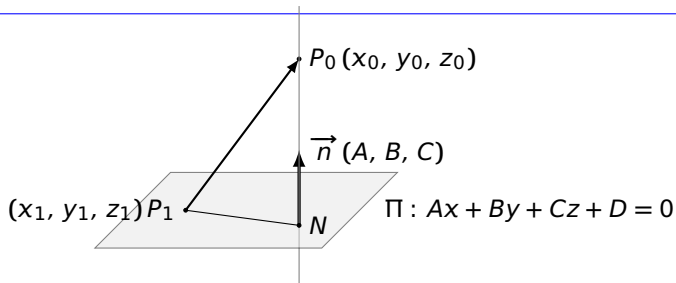
点到平面的距离



点到平面的距离

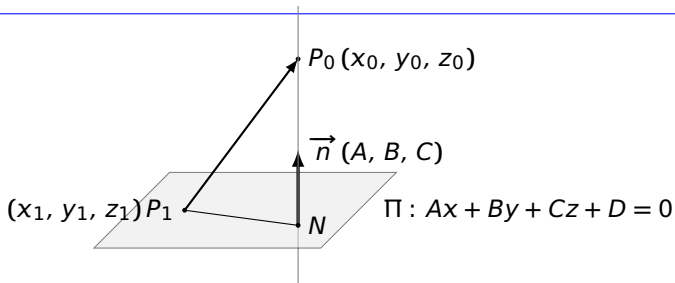


点到平面的距离



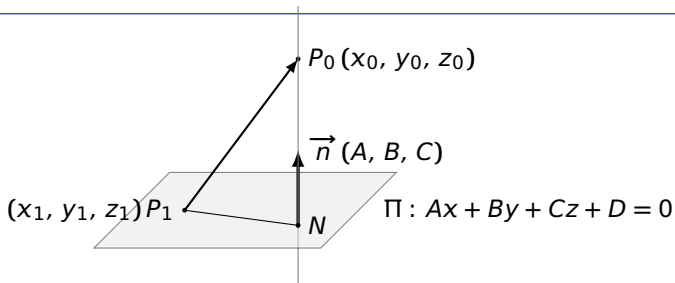
$$P_0 \text{ 到 } \Pi \text{ 的距离} = \left| \text{Prj}_{\vec{n}} \overrightarrow{P_1P_0} \right|$$

点到平面的距离



$$P_0 \text{ 到 } \Pi \text{ 的距离} = \left| \text{Prj}_{\vec{n}} \overrightarrow{P_1 P_0} \right| = \frac{\left| \overrightarrow{P_1 P_0} \cdot \vec{n} \right|}{|\vec{n}|}$$

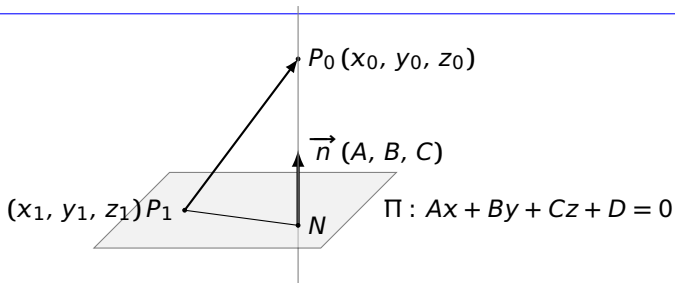
点到平面的距离



$$P_0 \text{ 到 } \Pi \text{ 的距离} = \left| \text{Prj}_{\vec{n}} \overrightarrow{P_1P_0} \right| = \frac{|\overrightarrow{P_1P_0} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

例 求点 $P_0(2, 1, 1)$ 到平面 $\Pi: x + y - z = 1$ 的距离。

点到平面的距离

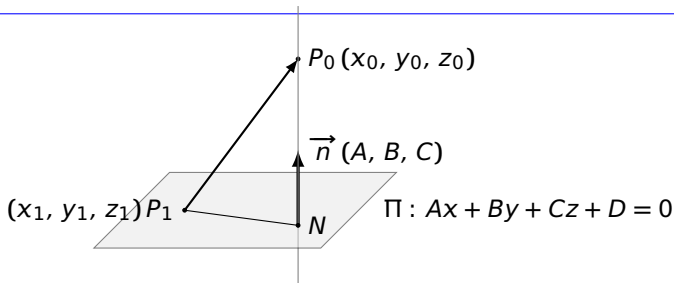


$$P_0 \text{ 到 } \Pi \text{ 的距离} = \left| \text{Prj}_{\vec{n}} \overrightarrow{P_1P_0} \right| = \frac{|\overrightarrow{P_1P_0} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

例 求点 $P_0(2, 1, 1)$ 到平面 $\Pi: x + y - z = 1$ 的距离。

解 取 $P_1(1, 0, 0)$, 则

点到平面的距离



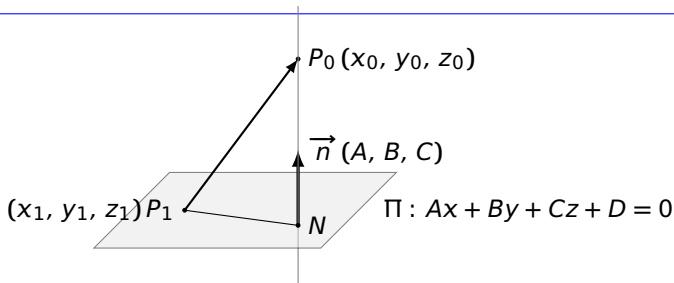
$$P_0 \text{ 到 } \Pi \text{ 的距离} = \left| \text{Prj}_{\vec{n}} \overrightarrow{P_1P_0} \right| = \frac{|\overrightarrow{P_1P_0} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

例 求点 $P_0(2, 1, 1)$ 到平面 $\Pi: x + y - z = 1$ 的距离。

解 取 $P_1(1, 0, 0)$, 则 $\overrightarrow{P_1P_0} = (\quad), \quad \vec{n} = (\quad)$

$$P_0 \text{ 到 } \Pi \text{ 的距离} = \frac{|\overrightarrow{P_1P_0} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

点到平面的距离



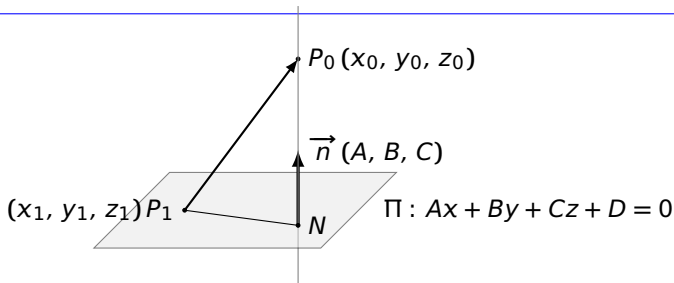
$$P_0 \text{ 到 } \Pi \text{ 的距离} = \left| \text{Prj}_{\vec{n}} \overrightarrow{P_1P_0} \right| = \frac{|\overrightarrow{P_1P_0} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

例 求点 $P_0(2, 1, 1)$ 到平面 $\Pi: x + y - z = 1$ 的距离。

解 取 $P_1(1, 0, 0)$, 则 $\overrightarrow{P_1P_0} = (1, 1, 1)$, $\vec{n} = (\quad)$

$$P_0 \text{ 到 } \Pi \text{ 的距离} = \frac{|\overrightarrow{P_1P_0} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

点到平面的距离



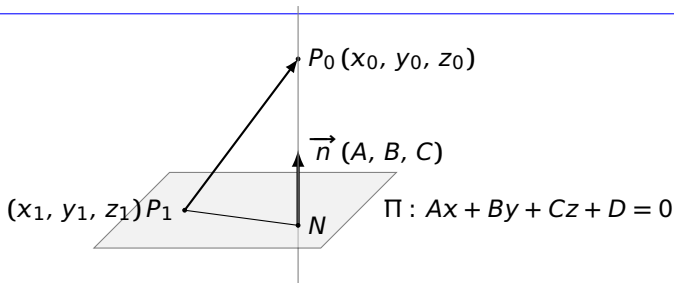
$$P_0 \text{ 到 } \Pi \text{ 的距离} = \left| \text{Prj}_{\vec{n}} \overrightarrow{P_1P_0} \right| = \frac{|\overrightarrow{P_1P_0} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

例 求点 $P_0(2, 1, 1)$ 到平面 $\Pi: x + y - z = 1$ 的距离。

解 取 $P_1(1, 0, 0)$, 则 $\overrightarrow{P_1P_0} = (1, 1, 1)$, $\vec{n} = (1, 1, -1)$

$$P_0 \text{ 到 } \Pi \text{ 的距离} = \frac{|\overrightarrow{P_1P_0} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

点到平面的距离



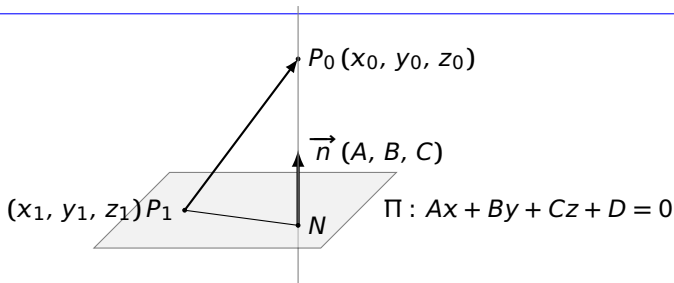
$$P_0 \text{ 到 } \Pi \text{ 的距离} = \left| \text{Prj}_{\vec{n}} \overrightarrow{P_1 P_0} \right| = \frac{|\overrightarrow{P_1 P_0} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

例 求点 $P_0(2, 1, 1)$ 到平面 $\Pi: x + y - z = 1$ 的距离。

解 取 $P_1(1, 0, 0)$, 则 $\overrightarrow{P_1 P_0} = (1, 1, 1)$, $\vec{n} = (1, 1, -1)$

$$P_0 \text{ 到 } \Pi \text{ 的距离} = \frac{|\overrightarrow{P_1 P_0} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

点到平面的距离



$$P_0 \text{ 到 } \Pi \text{ 的距离} = \left| \text{Prj}_{\vec{n}} \overrightarrow{P_1P_0} \right| = \frac{|\overrightarrow{P_1P_0} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

例 求点 $P_0(2, 1, 1)$ 到平面 $\Pi: x + y - z = 1$ 的距离。

解 取 $P_1(1, 0, 0)$, 则 $\overrightarrow{P_1P_0} = (1, 1, 1)$, $\vec{n} = (1, 1, -1)$

$$P_0 \text{ 到 } \Pi \text{ 的距离} = \frac{|\overrightarrow{P_1P_0} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$