

第 05 周作业

应于 12-04-2017 提交

练习 1. 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 与平面 $x + y + z = 0$ 在 xoy 坐标面上的投影曲线方程。

练习 2. 分别求母线平行于 x 轴及 y 轴, 而且通过曲线 $\begin{cases} 2x^2 + y^2 + z^2 = 16 \\ x^2 - y^2 + z^2 = 0 \end{cases}$ (1) 的柱面。
(2)

练习 3. 化曲线的一般方程 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ y = z \end{cases}$ 为参数方程。

练习 4. 填空

函数	定义域	类型（填：闭集/开集，有界集/无界集，连通/不连通）
$z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$	$D = \{(x, y) y \geq 0, x \geq 0 \text{ 且 } x^2 \geq y\}$	
$z = \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{x-y}}$	$D = \{(x, y) x + y > 0 \text{ 且 } x - y > 0\}$	

并分别画出上述两定义域 D ，在图上标示哪部分是内点，哪部分是外点，哪部分是边界。

练习 5. 画出二元函数 $z = 2 - x^2 - y^2$ 的函数图形，其中函数定义域为 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 。

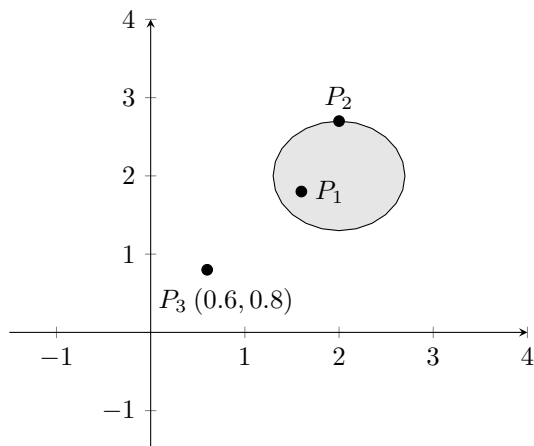
练习 6. 设 E 是平面上一个点集，则平面上任意一点 P 只能是一种：(1) E 的内点；(2) E 的外点；(3) E 的边界点。现假设点 Q 是 E 的聚点，则可以证明 Q 或者为 E 的内点，或者为 E 的边界点；也就是

$$\{\text{全体聚点}\} \subset \{\text{内点}\} \cup \{\text{边界点}\}$$

但一般而言， $\{\text{全体聚点}\}$ 未必与并集 $\{\text{内点}\} \cup \{\text{边界点}\}$ 相同。

以下是一个例子

假设点集 $E = \{(x, y) | (x - 2)^2 + (y - 2)^2 \leq 0.7^2\} \cup \{(0.6, 0.8)\}$ (如下图)。填写 (请填上 \checkmark 或 \times)



	内点	边界点	聚点
$P_1(1.6, 1.8)$			
$P_2(2, 2.7)$			
$P_3(0.6, 0.8)$			

练习 7. 证明下列极限不存在

1. $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

2. $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

练习 8. 求下列函数的偏导数

$$(1) \quad s = \frac{u^2 + v^2}{uv}; \quad (2) \quad z = \sin(xy) + \cos^2(xy); \quad (3) \quad z = (1 + xy)^y; \quad (4) \quad u = \arctan(x - y)^z.$$

练习 9. 设 $z = f(x, y)$, 计算 z 在这一点 (x_0, y_0) 处的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)$ 有两种方法:

1. 先求出偏导函数 $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ 及 $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, 再将 $(x, y) = (x_0, y_0)$ 代入偏导函数, 计算该点处的偏导数值。
2. 直接利用定义

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \frac{d}{dx} [f(x, y_0)] \Big|_{x=x_0}, \\ \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = \frac{d}{dy} [f(x_0, y)] \Big|_{y=y_0}.\end{aligned}$$

现在设 $f(x, y) = x + (y - 1) \arcsin \sqrt{\frac{x}{y}}$, 利用上述两种方法分别求 $f_x(x, 1)$ 。

练习 10. 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. 求 $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ 。