§8.6 多元函数的极值

2016-2017 学年 II

Outline

1. 多元函数的极值点

2. 条件极值及拉格朗日乘数法

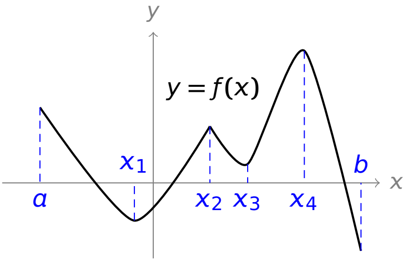
We are here now...

1. 多元函数的极值点

2. 条件极值及拉格朗日乘数法

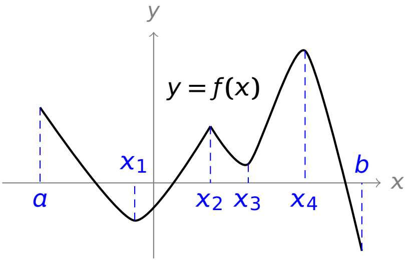
回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

假设 $y = f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上，如图



回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

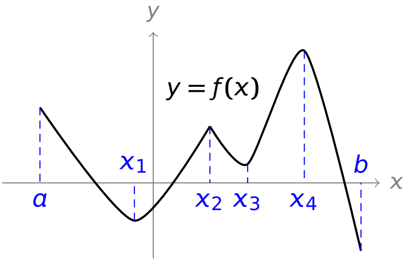
假设 $y = f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上，如图



	极值点	驻点	最值点
a			
x_1			
x_2			
x_3			
x_4			
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

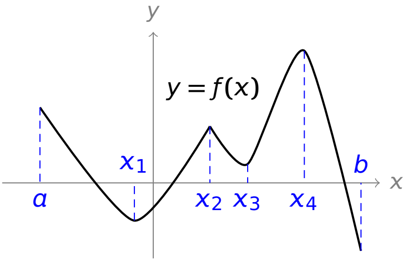
假设 $y = f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上，如图



	极值点	驻点	最值点
a			
x_1	极小值点		
x_2			
x_3			
x_4			
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

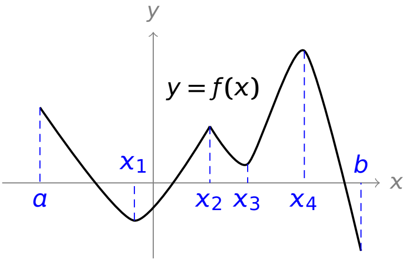
假设 $y=f(x)$ 定义在区间 $[a,b]$ 上，如图



	极值点	驻点	最值点
a			
x_1	极小值点		
x_2	极大值点		
x_3			
x_4			
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

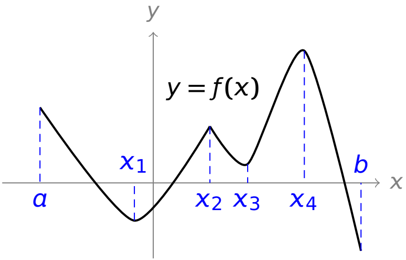
假设 $y=f(x)$ 定义在区间 $[a,b]$ 上，如图



	极值点	驻点	最值点
a			
x_1	极小值点		
x_2	极大值点		
x_3	极小值点		
x_4			
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

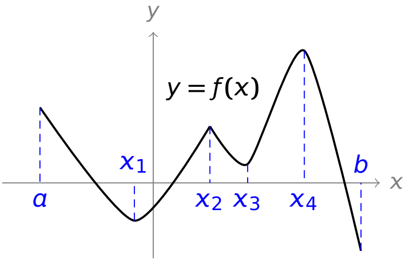
假设 $y = f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上，如图



	极值点	驻点	最值点
a			
x_1	极小值点		
x_2	极大值点		
x_3	极小值点		
x_4	极大值点		
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

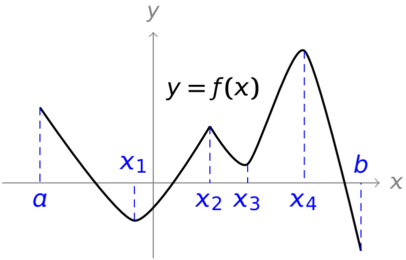
假设 $y = f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上，如图



	极值点	驻点	最值点
a			
x_1	极小值点	✓	
x_2	极大值点		
x_3	极小值点		
x_4	极大值点		
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

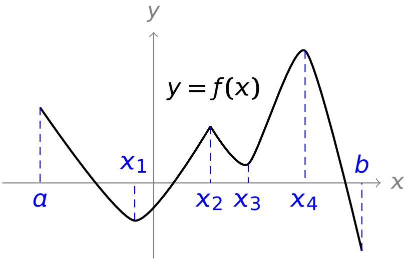
假设 $y=f(x)$ 定义在区间 $[a,b]$ 上，如图



	极值点	驻点	最值点
a			
x_1	极小值点	$\checkmark$	
x_2	极大值点	$\times$(不可导)	
x_3	极小值点		
x_4	极大值点		
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

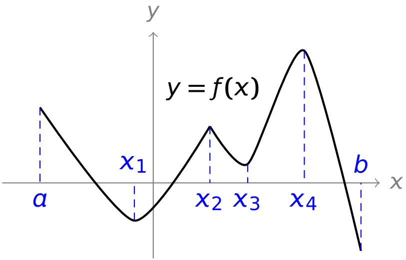
假设 $y = f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上，如图



	极值点	驻点	最值点
a			
x_1	极小值点	√	
x_2	极大值点	×(不可导)	
x_3	极小值点	√	
x_4	极大值点		
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

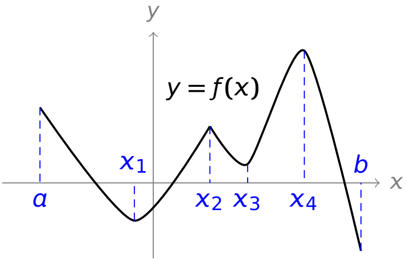
假设 $y=f(x)$ 定义在区间 $[a,b]$ 上，如图



	极值点	驻点	最值点
a			
x_1	极小值点	$\checkmark$	
x_2	极大值点	$\times$(不可导)	
x_3	极小值点	$\checkmark$	
x_4	极大值点	$\checkmark$	
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

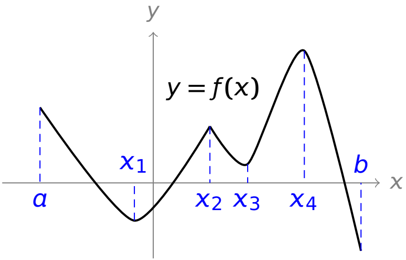
假设 $y=f(x)$ 定义在区间 $[a,b]$ 上，如图



	极值点	驻点	最值点
a			×
x_1	极小值点	√	
x_2	极大值点	×(不可导)	
x_3	极小值点	√	
x_4	极大值点	√	
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

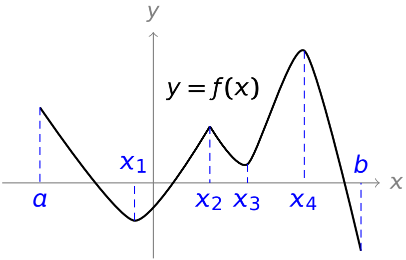
假设 $y = f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上，如图



	极值点	驻点	最值点
a			×
x_1	极小值点	√	×
x_2	极大值点	×(不可导)	
x_3	极小值点	√	
x_4	极大值点	√	
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

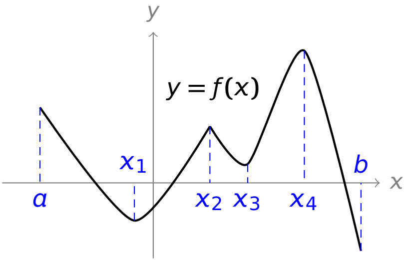
假设 $y=f(x)$ 定义在区间 $[a,b]$ 上，如图



	极值点	驻点	最值点
a			×
x_1	极小值点	√	×
x_2	极大值点	×(不可导)	×
x_3	极小值点	√	
x_4	极大值点	√	
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

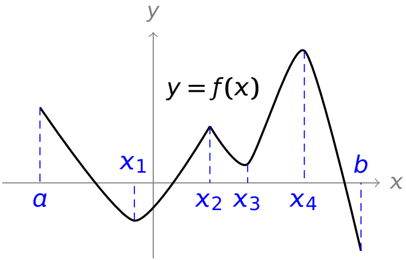
假设 $y=f(x)$ 定义在区间 $[a,b]$ 上，如图



	极值点	驻点	最值点
a			×
x_1	极小值点	√	×
x_2	极大值点	×(不可导)	×
x_3	极小值点	√	×
x_4	极大值点	√	
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

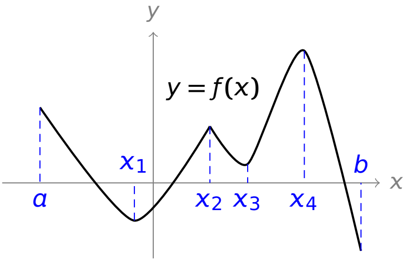
假设 $y=f(x)$ 定义在区间 $[a,b]$ 上，如图



	极值点	驻点	最值点
a			$\times$
x_1	极小值点	$\checkmark$	$\times$
x_2	极大值点	$\times$(不可导)	$\times$
x_3	极小值点	$\checkmark$	$\times$
x_4	极大值点	$\checkmark$	最大值点
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

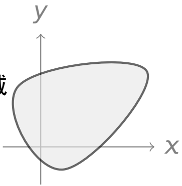
假设 $y=f(x)$ 定义在区间 $[a,b]$ 上，如图



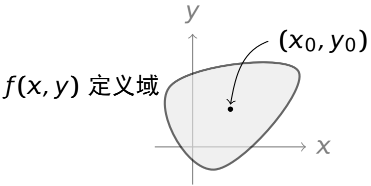
	极值点	驻点	最值点
a			×
x_1	极小值点	√	×
x_2	极大值点	×(不可导)	×
x_3	极小值点	√	×
x_4	极大值点	√	最大值点
b			最小值点

多元函数的极值、极值点

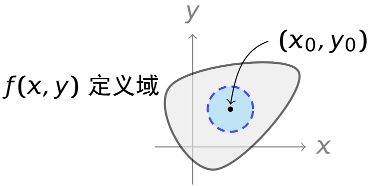
$f(x, y)$ 定义域



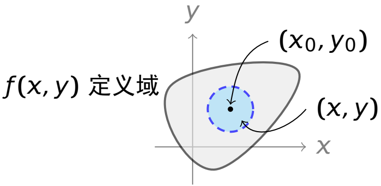
多元函数的极值、极值点



多元函数的极值、极值点



多元函数的极值、极值点

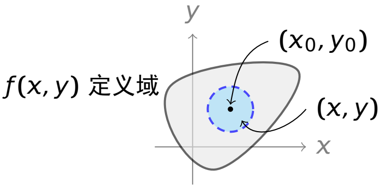


定义 在点 (x_0, y_0) 的某个邻域内

- 如果总是成立

$$f(x, y) \le f(x_0, y_0), \quad \text{其中}(x, y) \ne (x_0, y_0)$$

多元函数的极值、极值点



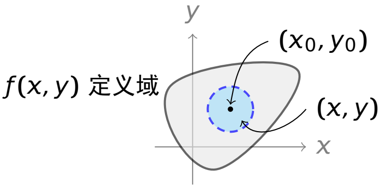
定义 在点 (x_0, y_0) 的某个邻域内

- 如果总是成立

$$f(x, y) \le f(x_0, y_0), \quad \text{其中}(x, y) \neq (x_0, y_0)$$

则称点 (x_0, y_0) 是函数 $f(x, y)$ 极大值点,

多元函数的极值、极值点



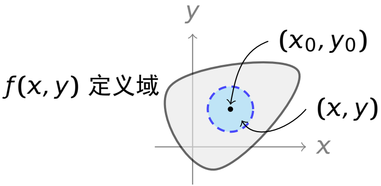
定义 在点 (x_0, y_0) 的某个邻域内

- 如果总是成立

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0), \quad \text{其中}(x, y) \neq (x_0, y_0)$$

则称点 (x_0, y_0) 是函数 $f(x, y)$ 极大值点，$f(x_0, y_0)$ 是极大值

多元函数的极值、极值点



定义 在点 (x_0, y_0) 的某个邻域内

- 如果总是成立

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0), \quad \text{其中}(x, y) \neq (x_0, y_0)$$

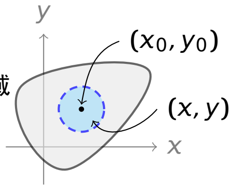
则称点 (x_0, y_0) 是函数 $f(x, y)$ 极大值点，$f(x_0, y_0)$ 是极大值

- 如果总是成立

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0), \quad \text{其中}(x, y) \neq (x_0, y_0)$$

多元函数的极值、极值点

定义 在点 (x_0, y_0) 的某个邻域内



- 如果总是成立

$$f(x, y) \le f(x_0, y_0), \quad \text{其中}(x, y) \ne (x_0, y_0)$$

则称点 (x_0, y_0) 是函数 $f(x, y)$ 极大值点，$f(x_0, y_0)$ 是极大值

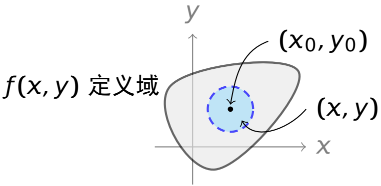
- 如果总是成立

$$f(x, y) \ge f(x_0, y_0), \quad \text{其中}(x, y) \ne (x_0, y_0)$$

则称点 (x_0, y_0) 是函数 $f(x, y)$ 极小值点，

多元函数的极值、极值点

定义 在点 (x_0, y_0) 的某个邻域内



- 如果总是成立

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0), \quad \text{其中}(x, y) \neq (x_0, y_0)$$

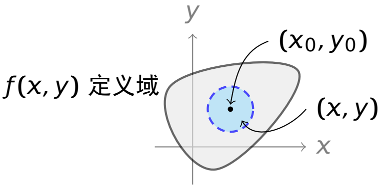
则称点 (x_0, y_0) 是函数 $f(x, y)$ 极大值点，$f(x_0, y_0)$ 是极大值

- 如果总是成立

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0), \quad \text{其中}(x, y) \neq (x_0, y_0)$$

则称点 (x_0, y_0) 是函数 $f(x, y)$ 极小值点，$f(x_0, y_0)$ 是极小值

多元函数的极值、极值点



定义 在点 (x_0, y_0) 的某个邻域内

- 如果总是成立

$$f(x, y) \le f(x_0, y_0), \quad \text{其中}(x, y) \ne (x_0, y_0)$$

则称点 (x_0, y_0) 是函数 $f(x, y)$ 极大值点，$f(x_0, y_0)$ 是极大值

- 如果总是成立

$$f(x, y) \ge f(x_0, y_0), \quad \text{其中}(x, y) \ne (x_0, y_0)$$

则称点 (x_0, y_0) 是函数 $f(x, y)$ 极小值点，$f(x_0, y_0)$ 是极小值

- 极大、极小值点统称极值点；极大、极小值统称极值。

例

- $z = x^2 + y^2$

  点 $p_0(0, 0)$ 是

- $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$

  点 $p_0(0, 0)$ 是

- $z = xy$

  点 $p_0(0, 0)$ 是

例

- $z = x^2 + y^2$

  点 $p_0(0, 0)$ 是极小值点;

- $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$

  点 $p_0(0, 0)$ 是

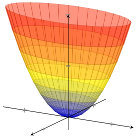
- $z = xy$

  点 $p_0(0, 0)$ 是

例

- $z = x^2 + y^2$

  点 $p_0(0, 0)$ 是极小值点;



- $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$

  点 $p_0(0, 0)$ 是

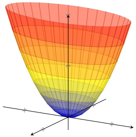
- $z = xy$

  点 $p_0(0, 0)$ 是

例

- $z = x^2 + y^2$

  点 $p_0(0, 0)$ 是极小值点；



- $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$

  点 $p_0(0, 0)$ 是极大值点；

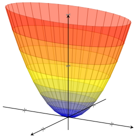
- $z = xy$

  点 $p_0(0, 0)$ 是

例

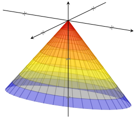
- $z = x^2 + y^2$

  点 $p_0(0, 0)$ 是极小值点；



- $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$

  点 $p_0(0, 0)$ 是极大值点；



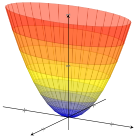
- $z = xy$

  点 $p_0(0, 0)$ 是

例

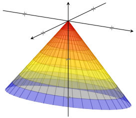
- $z = x^2 + y^2$

  点 $p_0(0, 0)$ 是极小值点；



- $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$

  点 $p_0(0, 0)$ 是极大值点；



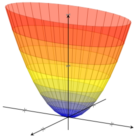
- $z = xy$

  点 $p_0(0, 0)$ 不是极值点。

例

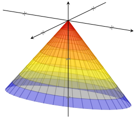
- $z = x^2 + y^2$

  点 $p_0(0, 0)$ 是极小值点;



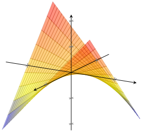
- $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$

  点 $p_0(0, 0)$ 是极大值点;



- $z = xy$

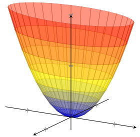
  点 $p_0(0, 0)$ 不是极值点。



例

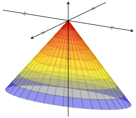
- $z = x^2 + y^2$

  点 $p_0(0, 0)$ 是极小值点；



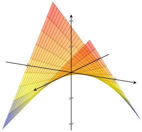
- $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$

  点 $p_0(0, 0)$ 是极大值点；



- $z = xy$

  点 $p_0(0, 0)$ 不是极值点。



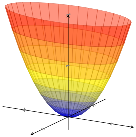
问题

- $z = xy$ 是否有极值点？

例

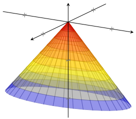
- $z = x^2 + y^2$

  点 $p_0(0, 0)$ 是极小值点；



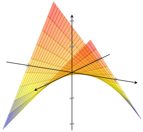
- $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$

  点 $p_0(0, 0)$ 是极大值点；



- $z = xy$

  点 $p_0(0, 0)$ 不是极值点。



问题

- $z = xy$ 是否有极值点？
- 是否有一般方法求出函数的极值点？如：

$$z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$$

定理 设 $z = f(x, y)$ 在内点 (x_0, y_0) 处存在偏导数，则 (x_0, y_0) 是极值点的必要条件是

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

定理 设 $z=f(x,y)$ 在内点 (x_0,y_0) 处存在偏导数，则 (x_0,y_0) 是极值点的必要条件是

$$f_x(x_0,y_0)=0,\quad f_y(x_0,y_0)=0.$$

证明

1. 一元函数 $x\mapsto f(x,y_0)$

定理 设 $z = f(x, y)$ 在内点 (x_0, y_0) 处存在偏导数，则 (x_0, y_0) 是极值点的必要条件是

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

证明

1. 一元函数 $x \mapsto f(x, y_0)$具有极值点 $x = x_0$，

定理 设 $z=f(x,y)$ 在内点 (x_0,y_0) 处存在偏导数，则 (x_0,y_0) 是极值点的必要条件是

$$f_x(x_0,y_0)=0,\quad f_y(x_0,y_0)=0.$$

证明

1. 一元函数 $x\mapsto f(x,y_0)$具有极值点 $x=x_0$，所以

$$\frac{d}{dx}[f(x,y_0)]\Big|_{x=x_0}=0$$

定理 设 $z=f(x,y)$ 在内点 (x_0,y_0) 处存在偏导数，则 (x_0,y_0) 是极值点的必要条件是

$$f_x(x_0,y_0)=0,\quad f_y(x_0,y_0)=0.$$

证明

1. 一元函数 $x\mapsto f(x,y_0)$具有极值点 $x=x_0$，所以

$$f_x(x_0,y_0)=\frac{d}{dx}[f(x,y_0)]\Big|_{x=x_0}=0$$

定理 设 $z=f(x,y)$ 在内点 (x_0,y_0) 处存在偏导数，则 (x_0,y_0) 是极值点的必要条件是

$$f_x(x_0,y_0)=0,\quad f_y(x_0,y_0)=0.$$

证明

1. 一元函数 $x\mapsto f(x,y_0)$具有极值点 $x=x_0$，所以
$$f_x(x_0,y_0)=\frac{d}{dx}[f(x,y_0)]\Big|_{x=x_0}=0$$
2. 一元函数 $y\mapsto f(x_0,y)$ 具有极值点 $y=y_0$，

定理 设 $z=f(x,y)$ 在内点 (x_0,y_0) 处存在偏导数，则 (x_0,y_0) 是极值点的必要条件是

$$f_x(x_0,y_0)=0,\quad f_y(x_0,y_0)=0.$$

证明

1. 一元函数 $x\mapsto f(x,y_0)$具有极值点 $x=x_0$，所以

$$f_x(x_0,y_0)=\frac{d}{dx}[f(x,y_0)]\Big|_{x=x_0}=0$$

2. 一元函数 $y\mapsto f(x_0,y)$ 具有极值点 $y=y_0$，所以

$$\frac{d}{dy}[f(x_0,y)]\Big|_{y=y_0}=0$$

定理 设 $z = f(x, y)$ 在内点 (x_0, y_0) 处存在偏导数，则 (x_0, y_0) 是极值点的必要条件是

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

证明

1. 一元函数 $x \mapsto f(x, y_0)$具有极值点 $x = x_0$，所以

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{d}{dx}[f(x, y_0)]\Big|_{x=x_0} = 0$$

2. 一元函数 $y \mapsto f(x_0, y)$ 具有极值点 $y = y_0$，所以

$$f_y(x_0, y_0) = \frac{d}{dy}[f(x_0, y)]\Big|_{y=y_0} = 0$$

定理 设 $z=f(x,y)$ 在内点 (x_0,y_0) 处存在偏导数，则 (x_0,y_0) 是极值点的必要条件是

$$f_x(x_0,y_0)=0,\quad f_y(x_0,y_0)=0.$$

证明

1. 一元函数 $x\mapsto f(x,y_0)$具有极值点 $x=x_0$，所以
$$f_x(x_0,y_0)=\frac{d}{dx}[f(x,y_0)]\Big|_{x=x_0}=0$$
2. 一元函数 $y\mapsto f(x_0,y)$ 具有极值点 $y=y_0$，所以
$$f_y(x_0,y_0)=\frac{d}{dy}[f(x_0,y)]\Big|_{y=y_0}=0$$

定义 使偏导数为零的点，称为驻点

定理 设 $z = f(x, y)$ 在内点 (x_0, y_0) 处存在偏导数，则 (x_0, y_0) 是极值点的必要条件是

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

证明

1. 一元函数 $x \mapsto f(x, y_0)$具有极值点 $x = x_0$，所以
$$f_x(x_0, y_0) = \frac{d}{dx}[f(x, y_0)]\Big|_{x=x_0} = 0$$
2. 一元函数 $y \mapsto f(x_0, y)$ 具有极值点 $y = y_0$，所以
$$f_y(x_0, y_0) = \frac{d}{dy}[f(x_0, y)]\Big|_{y=y_0} = 0$$

定义 使偏导数为零的点，称为驻点

注 如果函数存在偏导数，则 $\{\text{极值点}\} \subset \{\text{驻点}\}$

例 1 点 (0, 0) 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点，从而也是驻点。

例 1 点 (0, 0) 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点，从而也是驻点。直接验证 (0, 0) 是驻点，则如下：

$$\begin{cases} z_x = \\ z_y = \end{cases}$$

例 1 点 (0, 0) 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点，从而也是驻点。直接验证 (0, 0) 是驻点，则如下：

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases}$$

例 1 点 $(0,0)$ 是 $z=x^2+y^2$ 的极小值点，从而也是驻点。直接验证 $(0,0)$ 是驻点，则如下：

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_x(0,0) = 0 \\ z_y(0,0) = 0 \end{cases}$$

例 1 点 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点，从而也是驻点。直接验证 $(0, 0)$ 是驻点，则如下：

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \implies \begin{cases} z_x(0, 0) = 0 \\ z_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

例 2 点 $(0, 0)$ 是 $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ 的极大值点，但不是驻点：

例 1 点 (0, 0) 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点，从而也是驻点。直接验证 (0, 0) 是驻点，则如下：

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_x(0, 0) = 0 \\ z_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

例 2 点 (0, 0) 是 $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ 的极大值点，但不是驻点：一阶偏导

$$z_x(0, 0), \quad z_y(0, 0)$$

不存在。

例 1 点 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点，从而也是驻点。直接验证 $(0, 0)$ 是驻点，则如下：

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_x(0, 0) = 0 \\ z_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

例 2 点 $(0, 0)$ 是 $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ 的极大值点，但不是驻点：一阶偏导

$$z_x(0, 0), \quad z_y(0, 0)$$

不存在。

例 3（驻点不一定是极值点） 设 $z = xy$。

例 1 点 (0, 0) 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点，从而也是驻点。直接验证 (0, 0) 是驻点，则如下：

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_x(0, 0) = 0 \\ z_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

例 2 点 (0, 0) 是 $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ 的极大值点，但不是驻点：一阶偏导

$$z_x(0, 0), \quad z_y(0, 0)$$

不存在。

例 3（驻点不一定是极值点） 设 $z = xy$。点 (0, 0) 是驻点：

例 1 点 $(0, 0)$ 是 $z=x^2+y^2$ 的极小值点，从而也是驻点。直接验证 $(0, 0)$ 是驻点，则如下：

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_x(0, 0) = 0 \\ z_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

例 2 点 $(0, 0)$ 是 $z=-\sqrt{x^2+y^2}$ 的极大值点，但不是驻点：一阶偏导

$$z_x(0, 0), \quad z_y(0, 0)$$

不存在。

例 3（驻点不一定是极值点） 设 $z=xy$。点 $(0, 0)$ 是驻点：

$$\begin{cases} z_x = y \\ z_y = x \end{cases}$$

例 1 点 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点，从而也是驻点。直接验证 $(0, 0)$ 是驻点，则如下：

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_x(0, 0) = 0 \\ z_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

例 2 点 $(0, 0)$ 是 $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ 的极大值点，但不是驻点：一阶偏导

$$z_x(0, 0), \quad z_y(0, 0)$$

不存在。

例 3（驻点不一定是极值点） 设 $z = xy$。点 $(0, 0)$ 是驻点：

$$\begin{cases} z_x = y \\ z_y = x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_x(0, 0) = 0 \\ z_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

例 1 点 $(0,0)$ 是 $z=x^2+y^2$ 的极小值点，从而也是驻点。直接验证 $(0,0)$ 是驻点，则如下：

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_x(0,0) = 0 \\ z_y(0,0) = 0 \end{cases}$$

例 2 点 $(0,0)$ 是 $z=-\sqrt{x^2+y^2}$ 的极大值点，但不是驻点：一阶偏导

$$z_x(0,0), \quad z_y(0,0)$$

不存在。

例 3（驻点不一定是极值点） 设 $z=xy$。点 $(0,0)$ 是驻点：

$$\begin{cases} z_x = y \\ z_y = x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_x(0,0) = 0 \\ z_y(0,0) = 0 \end{cases}$$

但点 $(0,0)$ 不是极值点。

例 设 $z=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$，求驻点。

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = \\ z_y = \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \\ \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3(x+3)(x-1) = 0 \\ \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3(x+3)(x-1) = 0 \\ -3y(y-2) = 0 \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3(x+3)(x-1) = 0 \\ -3y(y-2) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \\ y = \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3(x+3)(x-1) = 0 \\ -3y(y-2) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -3,\ 1 \\ y = \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3(x+3)(x-1) = 0 \\ -3y(y-2) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -3,\ 1 \\ y = 0,\ 2 \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3(x+3)(x-1) = 0 \\ -3y(y-2) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -3,\ 1 \\ y = 0,\ 2 \end{cases}$$

所以驻点为

$y = 2$		
$y = 0$		
	$x = -3$	$x = 1$

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3(x+3)(x-1) = 0 \\ -3y(y-2) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -3,\ 1 \\ y = 0,\ 2 \end{cases}$$

所以驻点为

$y = 2$		
$y = 0$	$(-3, 0)$	
	$x = -3$	$x = 1$

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3(x+3)(x-1) = 0 \\ -3y(y-2) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -3,\ 1 \\ y = 0,\ 2 \end{cases}$$

所以驻点为

$y = 2$	$(-3, 2)$	
$y = 0$	$(-3, 0)$	
	$x = -3$	$x = 1$

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3(x+3)(x-1) = 0 \\ -3y(y-2) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -3,\ 1 \\ y = 0,\ 2 \end{cases}$$

所以驻点为

$y = 2$	$(-3,\ 2)$	
$y = 0$	$(-3,\ 0)$	$(1,\ 0)$
	$x = -3$	$x = 1$

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3(x+3)(x-1) = 0 \\ -3y(y-2) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -3,\ 1 \\ y = 0,\ 2 \end{cases}$$

所以驻点为

$y = 2$	$(-3, 2)$	$(1, 2)$
$y = 0$	$(-3, 0)$	$(1, 0)$
	$x = -3$	$x = 1$

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

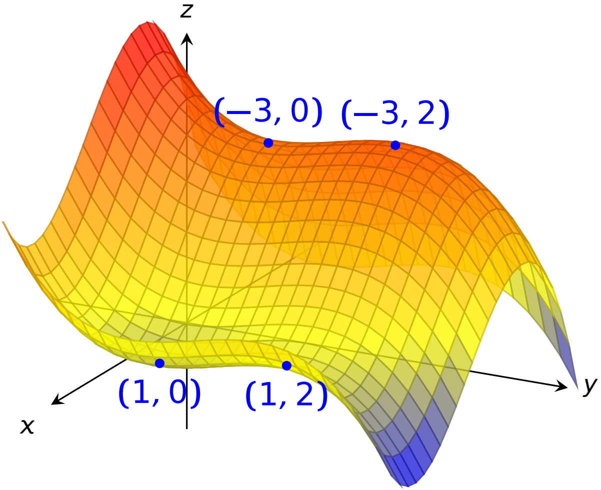
$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3(x+3)(x-1) = 0 \\ -3y(y-2) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -3, 1 \\ y = 0, 2 \end{cases}$$

所以驻点为

$y = 2$	$(-3, 2)$	$(1, 2)$
$y = 0$	$(-3, 0)$	$(1, 0)$
	$x = -3$	$x = 1$

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$，求驻点。

$$z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$$



例 设 $z = x^3 + y^3 - 3xy$，求驻点。

例 设 $z=x^3+y^3-3xy$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = \\ z_y = \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 + y^3 - 3xy$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y \\ z_y = \end{cases}$$

例 设 $z=x^3+y^3-3xy$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y \\ z_y = 3y^2 - 3x \end{cases}$$

例 设 $z=x^3+y^3-3xy$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2-3y \\ z_y = 3y^2-3x \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2-3y=0 \\ z_y = 3y^2-3x=0 \end{cases}$$

例 设 $z=x^3+y^3-3xy$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y \\ z_y = 3y^2 - 3x \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ z_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \\ \end{cases}$$

例 设 $z=x^3+y^3-3xy$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y \\ z_y = 3y^2 - 3x \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ z_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ \end{cases}$$

例 设 $z=x^3+y^3-3xy$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y \\ z_y = 3y^2 - 3x \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ z_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 + y^3 - 3xy$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y \\ z_y = 3y^2 - 3x \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ z_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases} \Longrightarrow x^4 = x$$

例 设 $z = x^3 + y^3 - 3xy$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y \\ z_y = 3y^2 - 3x \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ z_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases} \Longrightarrow x^4 = x \quad \Longrightarrow x = 0, 1$$

例 设 $z=x^3+y^3-3xy$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2-3y \\ z_y = 3y^2-3x \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2-3y=0 \\ z_y = 3y^2-3x=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2=y \\ y^2=x \end{cases} \Longrightarrow x^4=x \quad \Longrightarrow x=0,\ 1$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

例 设 $z=x^3+y^3-3xy$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2-3y \\ z_y = 3y^2-3x \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2-3y=0 \\ z_y = 3y^2-3x=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2=y \\ y^2=x \end{cases} \Longrightarrow x^4=x \Longrightarrow x=0,\ 1$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 + y^3 - 3xy$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y \\ z_y = 3y^2 - 3x \end{cases}$$

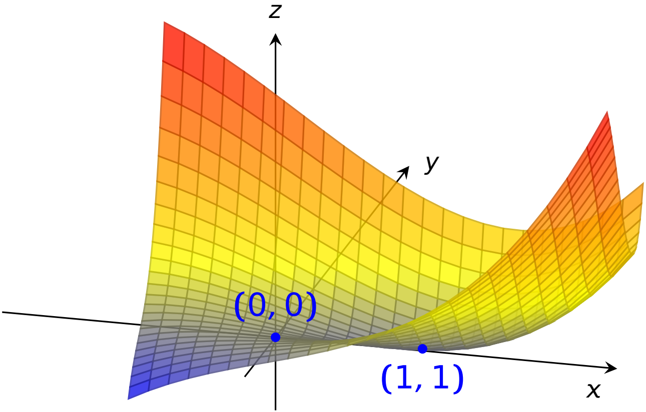
求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ z_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases} \Longrightarrow x^4 = x \Longrightarrow x = 0,\ 1$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

所以驻点为 $(1, 1)$，$(0, 0)$

$$z = x^3 + y^3 - 3xy$$



- 问题 如何从驻点中判别哪些是极值点？

- 问题 如何从驻点中判别哪些是极值点？

定理（极值的充分条件） 设 $z = f(x, y)$ 具有直到二阶的连续偏导数，(x_0, y_0) 是驻点。

- 问题 如何从驻点中判别哪些是极值点？

定理（极值的充分条件） 设 $z = f(x, y)$ 具有直到二阶的连续偏导数，(x_0, y_0) 是驻点。定义判别式

$$P(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$$

结论是：

- 问题 如何从驻点中判别哪些是极值点？

定理（极值的充分条件） 设 $z=f(x,y)$ 具有直到二阶的连续偏导数，(x_0,y_0) 是驻点。定义判别式

$$P(x,y)=f_{xx}(x,y)\cdot f_{yy}(x,y)-f_{xy}(x,y)^2$$

结论是：

3. 若 $P(x_0,y_0)<0$，则 (x_0,y_0) 一定不是极值点；

- 问题 如何从驻点中判别哪些是极值点？

定理（极值的充分条件） 设 $z = f(x, y)$ 具有直到二阶的连续偏导数，(x_0, y_0) 是驻点。定义判别式

$$P(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$$

结论是：

3. 若 $P(x_0, y_0) < 0$，则 (x_0, y_0) 一定不是极值点；
4. 若 $P(x_0, y_0) = 0$，则此判定法失效，结论不确定。

- 问题 如何从驻点中判别哪些是极值点？

定理（极值的充分条件） 设 $z=f(x, y)$ 具有直到二阶的连续偏导数，(x_0, y_0) 是驻点。定义判别式

$$P(x, y)=f_{xx}(x, y)\cdot f_{yy}(x, y)-f_{xy}(x, y)^2$$

结论是：

1. 若 $P(x_0, y_0)>0$，
2. 若 $P(x_0, y_0)>0$，
3. 若 $P(x_0, y_0)<0$，则 (x_0, y_0) 一定不是极值点；
4. 若 $P(x_0, y_0)=0$，则此判定法失效，结论不确定。

- 问题 如何从驻点中判别哪些是极值点？

定理（极值的充分条件） 设 $z = f(x, y)$ 具有直到二阶的连续偏导数，(x_0, y_0) 是驻点。定义判别式

$$P(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$$

结论是：

1. 若 $P(x_0, y_0) > 0$，且 $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$，则 (x_0, y_0) 是极大值点；
2. 若 $P(x_0, y_0) > 0$，
3. 若 $P(x_0, y_0) < 0$，则 (x_0, y_0) 一定不是极值点；
4. 若 $P(x_0, y_0) = 0$，则此判定法失效，结论不确定。

- 问题 如何从驻点中判别哪些是极值点？

定理（极值的充分条件） 设 $z = f(x, y)$ 具有直到二阶的连续偏导数，(x_0, y_0) 是驻点。定义判别式

$$P(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$$

结论是：

1. 若 $P(x_0, y_0) > 0$，且 $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$，则 (x_0, y_0) 是极大值点；
2. 若 $P(x_0, y_0) > 0$，且 $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$，则 (x_0, y_0) 是极小值点；
3. 若 $P(x_0, y_0) < 0$，则 (x_0, y_0) 一定不是极值点；
4. 若 $P(x_0, y_0) = 0$，则此判定法失效，结论不确定。

- 问题 如何从驻点中判别哪些是极值点？

定理（极值的充分条件） 设 $z = f(x, y)$ 具有直到二阶的连续偏导数，(x_0, y_0) 是驻点。定义判别式

$$P(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$$

结论是：

1. 若 $P(x_0, y_0) > 0$，且 $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$，则 (x_0, y_0) 是极大值点；
2. 若 $P(x_0, y_0) > 0$，且 $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$，则 (x_0, y_0) 是极小值点；
3. 若 $P(x_0, y_0) < 0$，则 (x_0, y_0) 一定不是极值点；
4. 若 $P(x_0, y_0) = 0$，则此判定法失效，结论不确定。

- 总结 求 $z = f(x, y)$ 极值点的步骤：

    1. 求驻点：

- **问题** 如何从驻点中判别哪些是极值点？

定理（极值的充分条件） 设 $z=f(x,y)$ 具有直到二阶的连续偏导数，(x_0,y_0) 是驻点。定义判别式

$$P(x,y)=f_{xx}(x,y)\cdot f_{yy}(x,y)-f_{xy}(x,y)^2$$

结论是：

1. 若 $P(x_0,y_0)>0$，且 $f_{xx}(x_0,y_0)<0$，则 (x_0,y_0) 是极大值点；
2. 若 $P(x_0,y_0)>0$，且 $f_{xx}(x_0,y_0)>0$，则 (x_0,y_0) 是极小值点；
3. 若 $P(x_0,y_0)<0$，则 (x_0,y_0) 一定不是极值点；
4. 若 $P(x_0,y_0)=0$，则此判定法失效，结论不确定。

- **总结** 求 $z=f(x,y)$ 极值点的步骤：

1. 求驻点：解方程 $\begin{cases} z_x(x,y)=0 \\ z_y(x,y)=0 \end{cases}$，设解为 (x_0,y_0)

- 问题 如何从驻点中判别哪些是极值点？

定理（极值的充分条件） 设 $z=f(x,y)$ 具有直到二阶的连续偏导数，(x_0,y_0) 是驻点。定义判别式

$$P(x,y)=f_{xx}(x,y)\cdot f_{yy}(x,y)-f_{xy}(x,y)^2$$

结论是：

1. 若 $P(x_0,y_0)>0$，且 $f_{xx}(x_0,y_0)<0$，则 (x_0,y_0) 是极大值点；
2. 若 $P(x_0,y_0)>0$，且 $f_{xx}(x_0,y_0)>0$，则 (x_0,y_0) 是极小值点；
3. 若 $P(x_0,y_0)<0$，则 (x_0,y_0) 一定不是极值点；
4. 若 $P(x_0,y_0)=0$，则此判定法失效，结论不确定。

- 总结 求 $z=f(x,y)$ 极值点的步骤：
  1. 求驻点：解方程 $\begin{cases} z_x(x,y)=0 \\ z_y(x,y)=0 \end{cases}$，设解为 (x_0,y_0)
  2. 通过 $P(x_0,y_0)$ 辨别驻点 (x_0,y_0) 是否极值点

- 判别式：$P(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$

例 通过判别式 $P(x, y)$，验证 (0, 0) 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点

例 通过判别式 $P(x, y)$，验证 (0, 0) 不是 $z = xy$ 的极值点

- 判别式：$P(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$

例 通过判别式 $P(x, y)$，验证 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点

解

$$P(x, y) =$$

例 通过判别式 $P(x, y)$，验证 $(0, 0)$ 不是 $z = xy$ 的极值点

- 判别式：$P(x,y)=f_{xx}(x,y)\cdot f_{yy}(x,y)-f_{xy}(x,y)^2$

例 通过判别式 $P(x,y)$，验证 $(0,0)$ 是 $z=x^2+y^2$ 的极小值点

解

$$\begin{cases} z_{xx}= \\ z_{xy}= \\ z_{yy}= \end{cases} \Longrightarrow P(x,y)=$$

例 通过判别式 $P(x,y)$，验证 $(0,0)$ 不是 $z=xy$ 的极值点

- 判别式：$P(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$

例 通过判别式 $P(x, y)$，验证 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点

解

$$\begin{cases} z_x = \\ z_y = \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_{xx} = \\ z_{xy} = \\ z_{yy} = \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) =$$

例 通过判别式 $P(x, y)$，验证 $(0, 0)$ 不是 $z = xy$ 的极值点

- 判别式：$P(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$

例 通过判别式 $P(x, y)$，验证 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点

解

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_{xx} = \\ z_{xy} = \\ z_{yy} = \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) =$$

例 通过判别式 $P(x, y)$，验证 $(0, 0)$ 不是 $z = xy$ 的极值点

- 判别式：$P(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$

例 通过判别式 $P(x, y)$，验证 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点

解

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_{xx} = \\ z_{xy} = \\ z_{yy} = \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) =$$

例 通过判别式 $P(x, y)$，验证 $(0, 0)$ 不是 $z = xy$ 的极值点

- 判别式：$P(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$

例 通过判别式 $P(x, y)$，验证 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点

解

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_{xx} = 2 \\ z_{xy} = \\ z_{yy} = \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) =$$

例 通过判别式 $P(x, y)$，验证 $(0, 0)$ 不是 $z = xy$ 的极值点

- 判别式：$P(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$

例 通过判别式 $P(x, y)$，验证 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点

解

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \implies \begin{cases} z_{xx} = 2 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = \end{cases} \implies P(x, y) =$$

例 通过判别式 $P(x, y)$，验证 $(0, 0)$ 不是 $z = xy$ 的极值点

- 判别式：$P(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$

例 通过判别式 $P(x, y)$，验证 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点

解

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \implies \begin{cases} z_{xx} = 2 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = 2 \end{cases} \implies P(x, y) =$$

例 通过判别式 $P(x, y)$，验证 $(0, 0)$ 不是 $z = xy$ 的极值点

- 判别式：$P(x,y)=f_{xx}(x,y)\cdot f_{yy}(x,y)-f_{xy}(x,y)^2$

例 通过判别式 $P(x,y)$，验证 $(0,0)$ 是 $z=x^2+y^2$ 的极小值点

解

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_{xx} = 2 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = 2 \end{cases} \Longrightarrow P(x,y) = 4$$

例 通过判别式 $P(x,y)$，验证 $(0,0)$ 不是 $z=xy$ 的极值点

- 判别式：$P(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$

例 通过判别式 $P(x, y)$，验证 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点

解

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_{xx} = 2 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = 2 \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = 4$$

所以 $P(0, 0) = 4 > 0$

例 通过判别式 $P(x, y)$，验证 $(0, 0)$ 不是 $z = xy$ 的极值点

- 判别式：$P(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$

例 通过判别式 $P(x, y)$，验证 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点

解

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_{xx} = 2 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = 2 \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = 4$$

所以 $P(0, 0) = 4 > 0$且 $z_{xx}(0, 0) >$ ，

例 通过判别式 $P(x, y)$，验证 $(0, 0)$ 不是 $z = xy$ 的极值点

- 判别式：$P(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$

例 通过判别式 $P(x, y)$，验证 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点

解

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_{xx} = 2 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = 2 \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = 4$$

所以 $P(0, 0) = 4 > 0$且 $z_{xx}(0, 0) > 0$，

例 通过判别式 $P(x, y)$，验证 $(0, 0)$ 不是 $z = xy$ 的极值点

- 判别式：$P(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$

例 通过判别式 $P(x, y)$，验证 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点

解

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_{xx} = 2 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = 2 \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = 4$$

所以 $P(0, 0) = 4 > 0$且 $z_{xx}(0, 0) > 0$，$(0, 0)$ 是极小值点。

例 通过判别式 $P(x, y)$，验证 $(0, 0)$ 不是 $z = xy$ 的极值点

- 判别式：$P(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$

例 通过判别式 $P(x, y)$，验证 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点

解

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_{xx} = 2 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = 2 \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = 4$$

所以 $P(0, 0) = 4 > 0$且 $z_{xx}(0, 0) > 0$，$(0, 0)$ 是极小值点。

例 通过判别式 $P(x, y)$，验证 $(0, 0)$ 不是 $z = xy$ 的极值点

解

$$P(x, y) =$$

- 判别式：$P(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$

例 通过判别式 $P(x, y)$，验证 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点

解

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_{xx} = 2 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = 2 \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = 4$$

所以 $P(0, 0) = 4 > 0$且 $z_{xx}(0, 0) > 0$，$(0, 0)$ 是极小值点。

例 通过判别式 $P(x, y)$，验证 $(0, 0)$ 不是 $z = xy$ 的极值点

解

$$\begin{cases} z_{xx} = \\ z_{xy} = \\ z_{yy} = \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) =$$

- 判别式：$P(x,y) = f_{xx}(x,y) \cdot f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)^2$

例 通过判别式 $P(x,y)$，验证 $(0,0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点

解

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_{xx} = 2 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = 2 \end{cases} \Longrightarrow P(x,y) = 4$$

所以 $P(0,0) = 4 > 0$且 $z_{xx}(0,0) > 0$，$(0,0)$ 是极小值点。

例 通过判别式 $P(x,y)$，验证 $(0,0)$ 不是 $z = xy$ 的极值点

解

$$\begin{cases} z_x = \\ z_y = \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_{xx} = \\ z_{xy} = \\ z_{yy} = \end{cases} \Longrightarrow P(x,y) =$$

- 判别式：$P(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$

例 通过判别式 $P(x, y)$，验证 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点

解

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_{xx} = 2 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = 2 \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = 4$$

所以 $P(0, 0) = 4 > 0$且 $z_{xx}(0, 0) > 0$，$(0, 0)$ 是极小值点。

例 通过判别式 $P(x, y)$，验证 $(0, 0)$ 不是 $z = xy$ 的极值点

解

$$\begin{cases} z_x = y \\ z_y = \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_{xx} = \\ z_{xy} = \\ z_{yy} = \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) =$$

- 判别式：$P(x,y) = f_{xx}(x,y)\cdot f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)^2$

例 通过判别式 $P(x,y)$，验证 $(0,0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点

解

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_{xx} = 2 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = 2 \end{cases} \Longrightarrow P(x,y) = 4$$

所以 $P(0,0) = 4 > 0$且 $z_{xx}(0,0) > 0$，$(0,0)$ 是极小值点。

例 通过判别式 $P(x,y)$，验证 $(0,0)$ 不是 $z = xy$ 的极值点

解

$$\begin{cases} z_x = y \\ z_y = x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_{xx} = \\ z_{xy} = \\ z_{yy} = \end{cases} \Longrightarrow P(x,y) =$$

- 判别式：$P(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$

例 通过判别式 $P(x, y)$，验证 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点

解

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_{xx} = 2 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = 2 \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = 4$$

所以 $P(0, 0) = 4 > 0$且 $z_{xx}(0, 0) > 0$，$(0, 0)$ 是极小值点。

例 通过判别式 $P(x, y)$，验证 $(0, 0)$ 不是 $z = xy$ 的极值点

解

$$\begin{cases} z_x = y \\ z_y = x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_{xx} = 0 \\ z_{xy} = \\ z_{yy} = \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) =$$

- 判别式：$P(x,y)=f_{xx}(x,y)\cdot f_{yy}(x,y)-f_{xy}(x,y)^2$

例 通过判别式 $P(x,y)$，验证 $(0,0)$ 是 $z=x^2+y^2$ 的极小值点

解

$$\begin{cases} z_x=2x \\ z_y=2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_{xx}=2 \\ z_{xy}=0 \\ z_{yy}=2 \end{cases} \Longrightarrow P(x,y)=4$$

所以 $P(0,0)=4>0$且 $z_{xx}(0,0)>0$，$(0,0)$ 是极小值点。

例 通过判别式 $P(x,y)$，验证 $(0,0)$ 不是 $z=xy$ 的极值点

解

$$\begin{cases} z_x=y \\ z_y=x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_{xx}=0 \\ z_{xy}=1 \\ z_{yy}= \end{cases} \Longrightarrow P(x,y)=$$

- 判别式：$P(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$

例 通过判别式 $P(x, y)$，验证 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点

解

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_{xx} = 2 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = 2 \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = 4$$

所以 $P(0, 0) = 4 > 0$且 $z_{xx}(0, 0) > 0$，$(0, 0)$ 是极小值点。

例 通过判别式 $P(x, y)$，验证 $(0, 0)$ 不是 $z = xy$ 的极值点

解

$$\begin{cases} z_x = y \\ z_y = x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_{xx} = 0 \\ z_{xy} = 1 \\ z_{yy} = 0 \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) =$$

- 判别式：$P(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$

例 通过判别式 $P(x, y)$，验证 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点

解

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_{xx} = 2 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = 2 \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = 4$$

所以 $P(0, 0) = 4 > 0$且 $z_{xx}(0, 0) > 0$，$(0, 0)$ 是极小值点。

例 通过判别式 $P(x, y)$，验证 $(0, 0)$ 不是 $z = xy$ 的极值点

解

$$\begin{cases} z_x = y \\ z_y = x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_{xx} = 0 \\ z_{xy} = 1 \\ z_{yy} = 0 \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = -1$$

- 判别式：$P(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$

例 通过判别式 $P(x, y)$，验证 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点

解

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_{xx} = 2 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = 2 \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = 4$$

所以 $P(0, 0) = 4 > 0$且 $z_{xx}(0, 0) > 0$，$(0, 0)$ 是极小值点。

例 通过判别式 $P(x, y)$，验证 $(0, 0)$ 不是 $z = xy$ 的极值点

解

$$\begin{cases} z_x = y \\ z_y = x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_{xx} = 0 \\ z_{xy} = 1 \\ z_{yy} = 0 \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = -1$$

所以 $P(0, 0) = -1 < 0$，

- 判别式：$P(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$

例 通过判别式 $P(x, y)$，验证 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点

解

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_{xx} = 2 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = 2 \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = 4$$

所以 $P(0, 0) = 4 > 0$且 $z_{xx}(0, 0) > 0$，$(0, 0)$ 是极小值点。

例 通过判别式 $P(x, y)$，验证 $(0, 0)$ 不是 $z = xy$ 的极值点

解

$$\begin{cases} z_x = y \\ z_y = x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_{xx} = 0 \\ z_{xy} = 1 \\ z_{yy} = 0 \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = -1$$

所以 $P(0, 0) = -1 < 0$，$(0, 0)$ 不是极值点。

例 求 $z=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值点。

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = \qquad\qquad\qquad\qquad, \qquad z_y =$$

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \qquad z_y =$$

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \qquad z_y = -3y^2 + 6y$$

例 求 $z=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x=3x^2+6x-9, \qquad z_y=-3y^2+6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x,y)=0 \\ z_y(x,y)=0 \end{cases}$

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \qquad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(-3, 0)$, $(-3, 2)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \qquad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(-3, 0)$, $(-3, 2)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$P(x, y) =$$

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \qquad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = \\ z_{xy} = \\ z_{yy} = \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) =$$

例 求 $z=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x=3x^2+6x-9, \qquad z_y=-3y^2+6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x,y)=0 \\ z_y(x,y)=0 \end{cases}$ 得：$(-3,0)$, $(-3,2)$, $(1,0)$, $(1,2)$

2. 再求判别式 $P(x,y)$

$$\begin{cases} z_{xx}=6x+6 \\ z_{xy}= \\ z_{yy}= \end{cases} \Longrightarrow P(x,y)=$$

例 求 $z=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x=3x^2+6x-9, \qquad z_y=-3y^2+6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x,y)=0 \\ z_y(x,y)=0 \end{cases}$ 得：$(-3,0), (-3,2), (1,0), (1,2)$

2. 再求判别式 $P(x,y)$

$$\begin{cases} z_{xx}=6x+6 \\ z_{xy}=0 \\ z_{yy}= \end{cases} \Longrightarrow P(x,y)=$$

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \qquad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = -6y + 6 \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) =$$

例 求 $z=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x=3x^2+6x-9, \qquad z_y=-3y^2+6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x,y)=0 \\ z_y(x,y)=0 \end{cases}$ 得：$(-3,0)$, $(-3,2)$, $(1,0)$, $(1,2)$

2. 再求判别式 $P(x,y)$

$$\begin{cases} z_{xx}=6x+6 \\ z_{xy}=0 \\ z_{yy}=-6y+6 \end{cases} \Longrightarrow P(x,y)=-36(x+1)(y-1)$$

例 求 $z=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x=3x^2+6x-9, \qquad z_y=-3y^2+6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x,y)=0 \\ z_y(x,y)=0 \end{cases}$ 得：$(-3,0)$, $(-3,2)$, $(1,0)$, $(1,2)$

2. 再求判别式 $P(x,y)$

$$\begin{cases} z_{xx}=6x+6 \\ z_{xy}=0 \\ z_{yy}=-6y+6 \end{cases} \Longrightarrow P(x,y)=-36(x+1)(y-1)$$

3. 结论

	$(-3,0)$	$(-3,2)$	$(1,0)$	$(1,2)$
$P(x_0,y_0)$				
$z_{xx}(x_0,y_0)$				
是否极值点				

例 求 $z=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x=3x^2+6x-9, \qquad z_y=-3y^2+6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x,y)=0 \\ z_y(x,y)=0 \end{cases}$ 得：$(-3,0)$, $(-3,2)$, $(1,0)$, $(1,2)$

2. 再求判别式 $P(x,y)$

$$\begin{cases} z_{xx}=6x+6 \\ z_{xy}=0 \\ z_{yy}=-6y+6 \end{cases} \Longrightarrow P(x,y)=-36(x+1)(y-1)$$

3. 结论

	$(-3,0)$	$(-3,2)$	$(1,0)$	$(1,2)$
$P(x_0,y_0)$	$-72<0$			
$z_{xx}(x_0,y_0)$				
是否极值点				

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \qquad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = -6y + 6 \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = -36(x+1)(y-1)$$

3. 结论

	$(-3, 0)$	$(-3, 2)$	$(1, 0)$	$(1, 2)$
$P(x_0, y_0)$	$-72 < 0$			
$z_{xx}(x_0, y_0)$				
是否极值点	×			

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \qquad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(-3, 0)$, $(-3, 2)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = -6y + 6 \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = -36(x+1)(y-1)$$

3. 结论

	$(-3, 0)$	$(-3, 2)$	$(1, 0)$	$(1, 2)$
$P(x_0, y_0)$	$-72 < 0$	$72 > 0$		
$z_{xx}(x_0, y_0)$				
是否极值点	×			

例 求 $z=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x=3x^2+6x-9, \qquad z_y=-3y^2+6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x,y)=0 \\ z_y(x,y)=0 \end{cases}$ 得：$(-3,0)$, $(-3,2)$, $(1,0)$, $(1,2)$

2. 再求判别式 $P(x,y)$

$$\begin{cases} z_{xx}=6x+6 \\ z_{xy}=0 \\ z_{yy}=-6y+6 \end{cases} \Longrightarrow P(x,y)=-36(x+1)(y-1)$$

3. 结论

	$(-3,0)$	$(-3,2)$	$(1,0)$	$(1,2)$
$P(x_0,y_0)$	$-72<0$	$72>0$		
$z_{xx}(x_0,y_0)$		$-12<0$		
是否极值点	×			

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \qquad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = -6y + 6 \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = -36(x+1)(y-1)$$

3. 结论

	$(-3, 0)$	$(-3, 2)$	$(1, 0)$	$(1, 2)$
$P(x_0, y_0)$	$-72 < 0$	$72 > 0$		
$z_{xx}(x_0, y_0)$		$-12 < 0$		
是否极值点	×	极大值点		

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \qquad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = -6y + 6 \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = -36(x+1)(y-1)$$

3. 结论

	$(-3, 0)$	$(-3, 2)$	$(1, 0)$	$(1, 2)$
$P(x_0, y_0)$	$-72 < 0$	$72 > 0$	$72 > 0$	
$z_{xx}(x_0, y_0)$		$-12 < 0$		
是否极值点	×	极大值点		

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \qquad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = -6y + 6 \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = -36(x+1)(y-1)$$

3. 结论

	$(-3, 0)$	$(-3, 2)$	$(1, 0)$	$(1, 2)$
$P(x_0, y_0)$	$-72 < 0$	$72 > 0$	$72 > 0$	
$z_{xx}(x_0, y_0)$		$-12 < 0$	$12 > 0$	
是否极值点	×	极大值点		

例 求 $z=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x=3x^2+6x-9, \qquad z_y=-3y^2+6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x,y)=0 \\ z_y(x,y)=0 \end{cases}$ 得：$(-3,0)$, $(-3,2)$, $(1,0)$, $(1,2)$

2. 再求判别式 $P(x,y)$

$$\begin{cases} z_{xx}=6x+6 \\ z_{xy}=0 \\ z_{yy}=-6y+6 \end{cases} \Longrightarrow P(x,y)=-36(x+1)(y-1)$$

3. 结论

	$(-3,0)$	$(-3,2)$	$(1,0)$	$(1,2)$
$P(x_0,y_0)$	$-72<0$	$72>0$	$72>0$	
$z_{xx}(x_0,y_0)$		$-12<0$	$12>0$	
是否极值点	$\times$	极大值点	极小值点	

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \qquad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(-3, 0)$, $(-3, 2)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = -6y + 6 \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = -36(x+1)(y-1)$$

3. 结论

	$(-3, 0)$	$(-3, 2)$	$(1, 0)$	$(1, 2)$
$P(x_0, y_0)$	$-72 < 0$	$72 > 0$	$72 > 0$	$-72 < 0$
$z_{xx}(x_0, y_0)$		$-12 < 0$	$12 > 0$	
是否极值点	×	极大值点	极小值点	

例 求 $z=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x=3x^2+6x-9, \qquad z_y=-3y^2+6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x,y)=0 \\ z_y(x,y)=0 \end{cases}$ 得：$(-3,0)$, $(-3,2)$, $(1,0)$, $(1,2)$

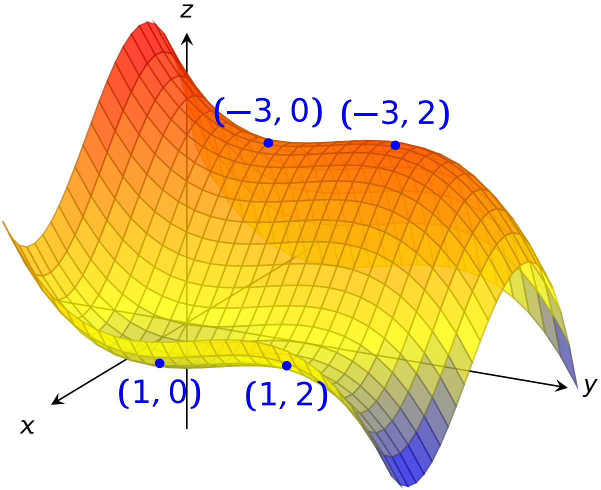
2. 再求判别式 $P(x,y)$

$$\begin{cases} z_{xx}=6x+6 \\ z_{xy}=0 \\ z_{yy}=-6y+6 \end{cases} \Longrightarrow P(x,y)=-36(x+1)(y-1)$$

3. 结论

	$(-3,0)$	$(-3,2)$	$(1,0)$	$(1,2)$
$P(x_0,y_0)$	$-72<0$	$72>0$	$72>0$	$-72<0$
$z_{xx}(x_0,y_0)$		$-12<0$	$12>0$	
是否极值点	×	极大值点	极小值点	×

$$z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$$



例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = \qquad\qquad , \qquad z_y =$$

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \qquad z_y =$$

例 求 $z=x^3+y^3-3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x=3x^2-3y, \qquad z_y=3y^2-3x$$

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \qquad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \qquad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(1, 1)$，$(0, 0)$

例 求 $z=x^3+y^3-3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x=3x^2-3y,\qquad z_y=3y^2-3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x,y)=0 \\ z_y(x,y)=0 \end{cases}$ 得：$(1,1)$，$(0,0)$

2. 再求判别式 $P(x,y)$

$$P(x,y)=$$

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \qquad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(1, 1)$，$(0, 0)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = \\ z_{xy} = \\ z_{yy} = \end{cases} \qquad \Longrightarrow P(x, y) =$$

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \qquad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：(1, 1)，(0, 0)

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x \\ z_{xy} = \\ z_{yy} = \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) =$$

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \qquad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(1, 1)$，$(0, 0)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x \\ z_{xy} = -3 \\ z_{yy} = \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) =$$

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \qquad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(1, 1)$，$(0, 0)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x \\ z_{xy} = -3 \\ z_{yy} = 6y \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) =$$

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \qquad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(1, 1)$，$(0, 0)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x \\ z_{xy} = -3 \\ z_{yy} = 6y \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = 36xy - 9$$

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \qquad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(1, 1)$，$(0, 0)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x \\ z_{xy} = -3 \\ z_{yy} = 6y \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = 36xy - 9$$

3. 结论

	$(1, 1)$	$(0, 0)$
$P(x_0, y_0)$		
$z_{xx}(x_0, y_0)$		
是否极值点		

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \qquad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(1, 1)$，$(0, 0)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x \\ z_{xy} = -3 \\ z_{yy} = 6y \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = 36xy - 9$$

3. 结论

	$(1, 1)$	$(0, 0)$
$P(x_0, y_0)$	$27 > 0$	
$z_{xx}(x_0, y_0)$		
是否极值点		

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \qquad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(1, 1)$，$(0, 0)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x \\ z_{xy} = -3 \\ z_{yy} = 6y \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = 36xy - 9$$

3. 结论

	$(1, 1)$	$(0, 0)$
$P(x_0, y_0)$	$27 > 0$	
$z_{xx}(x_0, y_0)$	$6 > 0$	
是否极值点		

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \qquad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(1, 1)$，$(0, 0)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x \\ z_{xy} = -3 \\ z_{yy} = 6y \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = 36xy - 9$$

3. 结论

	$(1, 1)$	$(0, 0)$
$P(x_0, y_0)$	$27 > 0$	
$z_{xx}(x_0, y_0)$	$6 > 0$	
是否极值点	极小值点	

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \qquad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：(1, 1)，(0, 0)

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x \\ z_{xy} = -3 \\ z_{yy} = 6y \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = 36xy - 9$$

3. 结论

	(1, 1)	(0, 0)
$P(x_0, y_0)$	$27 > 0$	$-9 < 0$
$z_{xx}(x_0, y_0)$	$6 > 0$	
是否极值点	极小值点	

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \qquad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(1, 1)$，$(0, 0)$

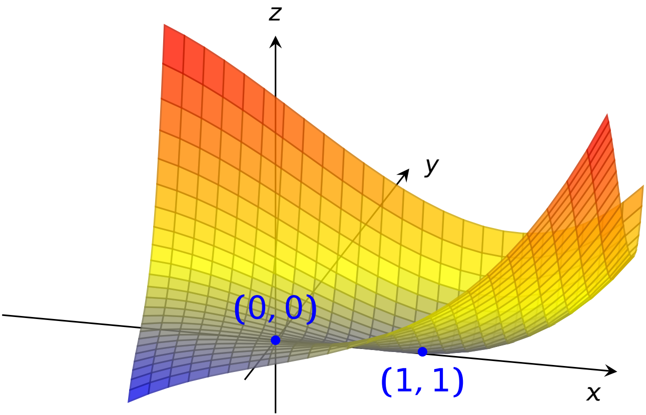
2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x \\ z_{xy} = -3 \\ z_{yy} = 6y \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = 36xy - 9$$

3. 结论

	$(1, 1)$	$(0, 0)$
$P(x_0, y_0)$	$27 > 0$	$-9 < 0$
$z_{xx}(x_0, y_0)$	$6 > 0$	
是否极值点	极小值点	×

$$z = x^3 + y^3 - 3xy$$



三元函数的极值点

- 设 $u = f(x, y, z)$。
- (x_0, y_0, z_0) 是驻点指在该点处偏导数全为零：

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f_z(x_0, y_0, z_0) = 0$$

三元函数的极值点

- 设 $u = f(x, y, z)$。
- (x_0, y_0, z_0) 是驻点指在该点处偏导数全为零：

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f_z(x_0, y_0, z_0) = 0$$

- 设 (x_0, y_0, z_0) 是 $u = f(x, y, z)$ 的极值点，则 (x_0, y_0, z_0) 一定是驻点

三元函数的极值点

- 设 $u = f(x, y, z)$。
- (x_0, y_0, z_0) 是驻点指在该点处偏导数全为零：

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f_z(x_0, y_0, z_0) = 0$$

- 设 (x_0, y_0, z_0) 是 $u = f(x, y, z)$ 的极值点，则 (x_0, y_0, z_0) 一定是驻点
- 如何进一步判别哪些驻点为极值点？

三元函数的极值点

- 设 $u = f(x, y, z)$。
- (x_0, y_0, z_0) 是**驻点**指在该点处偏导数全为零：

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f_z(x_0, y_0, z_0) = 0$$

- 设 (x_0, y_0, z_0) 是 $u = f(x, y, z)$ 的**极值点**，则 (x_0, y_0, z_0) 一定是驻点
- 如何进一步判别哪些驻点为极值点？考虑矩阵

$$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}_{(x_0, y_0, z_0)}$$

三元函数的极值点

- 设 $u = f(x, y, z)$。
- (x_0, y_0, z_0) 是驻点指在该点处偏导数全为零：

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f_z(x_0, y_0, z_0) = 0$$

- 设 (x_0, y_0, z_0) 是 $u = f(x, y, z)$ 的极值点，则 (x_0, y_0, z_0) 一定是驻点
- 如何进一步判别哪些驻点为极值点？考虑矩阵

$$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}_{(x_0, y_0, z_0)}$$

  - 如果是正定矩阵，则 (x_0, y_0, z_0) 是极小值点
  - 如果是负定矩阵，则 (x_0, y_0, z_0) 是极大值点

二元函数的最大值和最小值

- 设二元函数 $z = f(x, y)$ 在有界闭区域 $\overline{D}$ 上连续，则 $z = f(x, y)$ 在 $\overline{D}$ 上取到最大值和最小值。

二元函数的最大值和最小值

- 设二元函数 $z=f(x,y)$ 在有界闭区域 $\overline{D}$ 上连续，则 $z=f(x,y)$ 在 $\overline{D}$ 上取到最大值和最小值。
- 最大值点 $(x_{\max}, y_{\max})$，最小值点 $(x_{\min}, y_{\min})$ 或者出现在：
  - 区域的内部。

  或者出现在：
  - 区域的边界。

二元函数的最大值和最小值

- 设二元函数 $z = f(x, y)$ 在有界闭区域 $\overline{D}$ 上连续，则 $z = f(x, y)$ 在 $\overline{D}$ 上取到最大值和最小值。
- 最大值点 $(x_{\max}, y_{\max})$，最小值点 $(x_{\min}, y_{\min})$ 或者出现在：
  - 区域的内部。此时可通过找极值点，从而找出最值点

或者出现在：

  - 区域的边界。

二元函数的最大值和最小值

\

- 设二元函数 $z = f(x, y)$ 在有界闭区域 $\overline{D}$ 上连续，则 $z = f(x, y)$ 在 $\overline{D}$ 上取到最大值和最小值。
- 最大值点 $(x_{\max}, y_{\max})$，最小值点 $(x_{\min}, y_{\min})$ 或者出现在：
  - 区域的内部。此时可通过找极值点，从而找出最值点

或者出现在：
  - 区域的边界。

- 在实际中，往往根据问题背景判断目标函数 $z = f(x, y)$ 是有最值。

二元函数的最大值和最小值

\

- 设二元函数 $z=f(x,y)$ 在有界闭区域 $\overline{D}$ 上连续，则 $z=f(x,y)$ 在 $\overline{D}$ 上取到最大值和最小值。
- 最大值点 $(x_{\max}, y_{\max})$，最小值点 $(x_{\min}, y_{\min})$ 或者出现在：
  - 区域的内部。此时可通过找极值点，从而找出最值点

或者出现在：
  - 区域的边界。

- 在实际中，往往根据问题背景判断目标函数 $z=f(x,y)$ 是有最值。若此时计算发现 $z=f(x,y)$ 只有一个极大（小）值点，那么就是最大（小）值点。

例 设生产甲产品 x 单位，乙产品 y 单位时，公司利润为

$$L(x, y) = x + 2y - 0.01(x^2 + xy + y^2) - 10$$

问两种产品各生产多少时，利润最大？

解

例 设生产甲产品 x 单位，乙产品 y 单位时，公司利润为

$$L(x,y)=x+2y-0.01(x^2+xy+y^2)-10$$

问两种产品各生产多少时，利润最大？

解 1. 求解驻点（一阶偏导数为零）：

2. 计算判别式 $P(x,y)$

3.

例 设生产甲产品 x 单位，乙产品 y 单位时，公司利润为

$$L(x, y) = x + 2y - 0.01(x^2 + xy + y^2) - 10$$

问两种产品各生产多少时，利润最大？

解 1. 求解驻点（一阶偏导数为零）：

$$\begin{cases} L_x = \\ L_y = \end{cases}$$

2. 计算判别式 $P(x, y)$

3.

例 设生产甲产品 x 单位，乙产品 y 单位时，公司利润为

$$L(x, y) = x + 2y - 0.01(x^2 + xy + y^2) - 10$$

问两种产品各生产多少时，利润最大？

解 1. 求解驻点（一阶偏导数为零）:

$$\begin{cases} L_x = 1 - 0.02x - 0.01y \\ L_y = \end{cases}$$

2. 计算判别式 $P(x, y)$

3.

例 设生产甲产品 x 单位，乙产品 y 单位时，公司利润为

$$L(x, y) = x + 2y - 0.01(x^2 + xy + y^2) - 10$$

问两种产品各生产多少时，利润最大？

解 1. 求解驻点（一阶偏导数为零）：

$$\begin{cases} L_x = 1 - 0.02x - 0.01y = 0 \\ L_y = \end{cases}$$

2. 计算判别式 $P(x, y)$

3.

例 设生产甲产品 x 单位，乙产品 y 单位时，公司利润为

$$L(x, y) = x + 2y - 0.01(x^2 + xy + y^2) - 10$$

问两种产品各生产多少时，利润最大？

解 1. 求解驻点（一阶偏导数为零）：

$$\begin{cases} L_x = 1 - 0.02x - 0.01y = 0 \\ L_y = 2 - 0.01x - 0.02y \end{cases}$$

2. 计算判别式 $P(x, y)$

3.

例 设生产甲产品 x 单位，乙产品 y 单位时，公司利润为

$$L(x, y) = x + 2y - 0.01(x^2 + xy + y^2) - 10$$

问两种产品各生产多少时，利润最大？

解 1. 求解驻点（一阶偏导数为零）：

$$\begin{cases} L_x = 1 - 0.02x - 0.01y = 0 \\ L_y = 2 - 0.01x - 0.02y = 0 \end{cases}$$

2. 计算判别式 $P(x, y)$

3.

例 设生产甲产品 x 单位，乙产品 y 单位时，公司利润为

$$L(x,y) = x + 2y - 0.01(x^2 + xy + y^2) - 10$$

问两种产品各生产多少时，利润最大？

解 1. 求解驻点（一阶偏导数为零）：

$$\begin{cases} L_x = 1 - 0.02x - 0.01y = 0 \\ L_y = 2 - 0.01x - 0.02y = 0 \end{cases} \Longrightarrow (x,y) =$$

2. 计算判别式 $P(x,y)$

3.

例 设生产甲产品 x 单位，乙产品 y 单位时，公司利润为

$$L(x, y) = x + 2y - 0.01(x^2 + xy + y^2) - 10$$

问两种产品各生产多少时，利润最大？

解 1. 求解驻点（一阶偏导数为零）：

$$\begin{cases} L_x = 1 - 0.02x - 0.01y = 0 \\ L_y = 2 - 0.01x - 0.02y = 0 \end{cases} \Longrightarrow (x, y) = (0, 100)$$

2. 计算判别式 $P(x, y)$

3.

例 设生产甲产品 x 单位，乙产品 y 单位时，公司利润为

$$L(x, y) = x + 2y - 0.01(x^2 + xy + y^2) - 10$$

问两种产品各生产多少时，利润最大？

解 1. 求解驻点（一阶偏导数为零）：

$$\begin{cases} L_x = 1 - 0.02x - 0.01y = 0 \\ L_y = 2 - 0.01x - 0.02y = 0 \end{cases} \Longrightarrow (x, y) = (0, 100)$$

2. 计算判别式 $P(x, y)$

$$P(x, y) =$$

3.

例 设生产甲产品 x 单位，乙产品 y 单位时，公司利润为

$$L(x, y) = x + 2y - 0.01(x^2 + xy + y^2) - 10$$

问两种产品各生产多少时，利润最大？

解 1. 求解驻点（一阶偏导数为零）：

$$\begin{cases} L_x = 1 - 0.02x - 0.01y = 0 \\ L_y = 2 - 0.01x - 0.02y = 0 \end{cases} \Longrightarrow (x, y) = (0, 100)$$

2. 计算判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} L_{xx} = \\ L_{xy} = \\ L_{yy} = \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) =$$

3.

例 设生产甲产品 x 单位，乙产品 y 单位时，公司利润为

$$L(x, y) = x + 2y - 0.01(x^2 + xy + y^2) - 10$$

问两种产品各生产多少时，利润最大？

解 1. 求解驻点（一阶偏导数为零）：

$$\begin{cases} L_x = 1 - 0.02x - 0.01y = 0 \\ L_y = 2 - 0.01x - 0.02y = 0 \end{cases} \implies (x, y) = (0, 100)$$

2. 计算判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} L_{xx} = -0.02 \\ L_{xy} = \\ L_{yy} = \end{cases} \implies P(x, y) =$$

3.

例 设生产甲产品 x 单位，乙产品 y 单位时，公司利润为

$$L(x, y) = x + 2y - 0.01(x^2 + xy + y^2) - 10$$

问两种产品各生产多少时，利润最大？

解 1. 求解驻点（一阶偏导数为零）：

$$\begin{cases} L_x = 1 - 0.02x - 0.01y = 0 \\ L_y = 2 - 0.01x - 0.02y = 0 \end{cases} \Longrightarrow (x, y) = (0, 100)$$

2. 计算判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} L_{xx} = -0.02 \\ L_{xy} = -0.01 \\ L_{yy} = \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) =$$

3.

例 设生产甲产品 x 单位，乙产品 y 单位时，公司利润为

$$L(x, y) = x + 2y - 0.01(x^2 + xy + y^2) - 10$$

问两种产品各生产多少时，利润最大？

解 1. 求解驻点（一阶偏导数为零）：

$$\begin{cases} L_x = 1 - 0.02x - 0.01y = 0 \\ L_y = 2 - 0.01x - 0.02y = 0 \end{cases} \Longrightarrow (x, y) = (0, 100)$$

2. 计算判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} L_{xx} = -0.02 \\ L_{xy} = -0.01 \\ L_{yy} = -0.02 \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) =$$

3.

例 设生产甲产品 x 单位，乙产品 y 单位时，公司利润为

$$L(x, y) = x + 2y - 0.01(x^2 + xy + y^2) - 10$$

问两种产品各生产多少时，利润最大？

解 1. 求解驻点（一阶偏导数为零）：

$$\begin{cases} L_x = 1 - 0.02x - 0.01y = 0 \\ L_y = 2 - 0.01x - 0.02y = 0 \end{cases} \Longrightarrow (x, y) = (0, 100)$$

2. 计算判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} L_{xx} = -0.02 \\ L_{xy} = -0.01 \\ L_{yy} = -0.02 \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = 3 \times 10^{-4}$$

3.

例 设生产甲产品 x 单位，乙产品 y 单位时，公司利润为

$$L(x, y) = x + 2y - 0.01(x^2 + xy + y^2) - 10$$

问两种产品各生产多少时，利润最大？

解 1. 求解驻点（一阶偏导数为零）：

$$\begin{cases} L_x = 1 - 0.02x - 0.01y = 0 \\ L_y = 2 - 0.01x - 0.02y = 0 \end{cases} \Longrightarrow (x, y) = (0, 100)$$

2. 计算判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} L_{xx} = -0.02 \\ L_{xy} = -0.01 \\ L_{yy} = -0.02 \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = 3 \times 10^{-4}$$

3. $P(0, 100) > 0$,

例 设生产甲产品 x 单位，乙产品 y 单位时，公司利润为

$$L(x,y)=x+2y-0.01(x^2+xy+y^2)-10$$

问两种产品各生产多少时，利润最大？

解 1. 求解驻点（一阶偏导数为零）：

$$\begin{cases} L_x=1-0.02x-0.01y=0 \\ L_y=2-0.01x-0.02y=0 \end{cases} \Longrightarrow (x,y)=(0,100)$$

2. 计算判别式 $P(x,y)$

$$\begin{cases} L_{xx}=-0.02 \\ L_{xy}=-0.01 \\ L_{yy}=-0.02 \end{cases} \Longrightarrow P(x,y)=3\times 10^{-4}$$

3. $P(0,100)>0$, $L_{xx}(0,100)<0$,

例 设生产甲产品 x 单位，乙产品 y 单位时，公司利润为

$$L(x,y)=x+2y-0.01(x^2+xy+y^2)-10$$

问两种产品各生产多少时，利润最大？

解 1. 求解驻点（一阶偏导数为零）：

$$\begin{cases} L_x=1-0.02x-0.01y=0 \\ L_y=2-0.01x-0.02y=0 \end{cases} \implies (x,y)=(0,100)$$

2. 计算判别式 $P(x,y)$

$$\begin{cases} L_{xx}=-0.02 \\ L_{xy}=-0.01 \\ L_{yy}=-0.02 \end{cases} \implies P(x,y)=3\times 10^{-4}$$

3. $P(0,100)>0$，$L_{xx}(0,100)<0$，$(0,100)$ 为极大值点。

例 设生产甲产品 x 单位，乙产品 y 单位时，公司利润为

$$L(x,y)=x+2y-0.01(x^2+xy+y^2)-10$$

问两种产品各生产多少时，利润最大？

解 1. 求解驻点（一阶偏导数为零）：

$$\begin{cases} L_x=1-0.02x-0.01y=0 \\ L_y=2-0.01x-0.02y=0 \end{cases} \Longrightarrow (x,y)=(0,100)$$

2. 计算判别式 $P(x,y)$

$$\begin{cases} L_{xx}=-0.02 \\ L_{xy}=-0.01 \\ L_{yy}=-0.02 \end{cases} \Longrightarrow P(x,y)=3\times 10^{-4}$$

3. $P(0,100)>0$，$L_{xx}(0,100)<0$，$(0,100)$ 为极大值点。由唯一性，$(0,100)$ 也是最大值点，最大利润为 $L(0,100)=90$

例 设生产甲产品 x 单位，乙产品 y 单位时，公司利润为

$$L(x, y) = -0.1x^2 - 0.1y^2 + 60x + 50y$$

问两种产品各生产多少时，利润最大？

解

例 设生产甲产品 x 单位，乙产品 y 单位时，公司利润为

$$L(x, y) = -0.1x^2 - 0.1y^2 + 60x + 50y$$

问两种产品各生产多少时，利润最大？

解 1. 求解驻点（一阶偏导数为零）：

2. 计算判别式 $P(x, y)$

3.

例 设生产甲产品 x 单位，乙产品 y 单位时，公司利润为

$$L(x, y) = -0.1x^2 - 0.1y^2 + 60x + 50y$$

问两种产品各生产多少时，利润最大？

解 1. 求解驻点（一阶偏导数为零）：

$$\begin{cases} L_x = \\ L_y = \end{cases}$$

2. 计算判别式 $P(x, y)$

3.

例 设生产甲产品 x 单位，乙产品 y 单位时，公司利润为

$$L(x,y)=-0.1x^2-0.1y^2+60x+50y$$

问两种产品各生产多少时，利润最大？

解 1. 求解驻点（一阶偏导数为零）：

$$\begin{cases} L_x = -0.2x+60 \\ L_y = \end{cases}$$

2. 计算判别式 $P(x,y)$

3.

例 设生产甲产品 x 单位，乙产品 y 单位时，公司利润为

$$L(x, y) = -0.1x^2 - 0.1y^2 + 60x + 50y$$

问两种产品各生产多少时，利润最大？

解 1. 求解驻点（一阶偏导数为零）：

$$\begin{cases} L_x = -0.2x + 60 = 0 \\ L_y = \end{cases}$$

2. 计算判别式 $P(x, y)$

3.

例 设生产甲产品 x 单位，乙产品 y 单位时，公司利润为

$$L(x, y) = -0.1x^2 - 0.1y^2 + 60x + 50y$$

问两种产品各生产多少时，利润最大？

解 1. 求解驻点（一阶偏导数为零）：

$$\begin{cases} L_x = -0.2x + 60 = 0 \\ L_y = -0.2y + 50 \end{cases}$$

2. 计算判别式 $P(x, y)$

3.

例 设生产甲产品 x 单位，乙产品 y 单位时，公司利润为

$$L(x,y) = -0.1x^2 - 0.1y^2 + 60x + 50y$$

问两种产品各生产多少时，利润最大？

解 1. 求解驻点（一阶偏导数为零）：

$$\begin{cases} L_x = -0.2x + 60 = 0 \\ L_y = -0.2y + 50 = 0 \end{cases}$$

2. 计算判别式 $P(x,y)$

3.

例 设生产甲产品 x 单位，乙产品 y 单位时，公司利润为

$$L(x, y) = -0.1x^2 - 0.1y^2 + 60x + 50y$$

问两种产品各生产多少时，利润最大？

解 1. 求解驻点（一阶偏导数为零）：

$$\begin{cases} L_x = -0.2x + 60 = 0 \\ L_y = -0.2y + 50 = 0 \end{cases} \Longrightarrow (x, y) =$$

2. 计算判别式 $P(x, y)$

3.

例 设生产甲产品 x 单位，乙产品 y 单位时，公司利润为

$$L(x, y) = -0.1x^2 - 0.1y^2 + 60x + 50y$$

问两种产品各生产多少时，利润最大？

解 1. 求解驻点（一阶偏导数为零）：

$$\begin{cases} L_x = -0.2x + 60 = 0 \\ L_y = -0.2y + 50 = 0 \end{cases} \implies (x, y) = (300, 250)$$

2. 计算判别式 $P(x, y)$

3.

例 设生产甲产品 x 单位，乙产品 y 单位时，公司利润为

$$L(x, y) = -0.1x^2 - 0.1y^2 + 60x + 50y$$

问两种产品各生产多少时，利润最大？

解 1. 求解驻点（一阶偏导数为零）：

$$\begin{cases} L_x = -0.2x + 60 = 0 \\ L_y = -0.2y + 50 = 0 \end{cases} \Longrightarrow (x, y) = (300, 250)$$

2. 计算判别式 $P(x, y)$

$$P(x, y) =$$

3.

例 设生产甲产品 x 单位，乙产品 y 单位时，公司利润为

$$L(x,y)=-0.1x^2-0.1y^2+60x+50y$$

问两种产品各生产多少时，利润最大？

解 1. 求解驻点（一阶偏导数为零）：

$$\begin{cases} L_x=-0.2x+60=0 \\ L_y=-0.2y+50=0 \end{cases} \Longrightarrow (x,y)=(300,250)$$

2. 计算判别式 $P(x,y)$

$$\begin{cases} L_{xx}= \\ L_{xy}= \\ L_{yy}= \end{cases} \Longrightarrow P(x,y)=$$

3.

例 设生产甲产品 x 单位，乙产品 y 单位时，公司利润为

$$L(x,y) = -0.1x^2 - 0.1y^2 + 60x + 50y$$

问两种产品各生产多少时，利润最大？

解 1. 求解驻点（一阶偏导数为零）:

$$\begin{cases} L_x = -0.2x + 60 = 0 \\ L_y = -0.2y + 50 = 0 \end{cases} \Longrightarrow (x,y) = (300, 250)$$

2. 计算判别式 $P(x,y)$

$$\begin{cases} L_{xx} = -0.2 \\ L_{xy} = \\ L_{yy} = \end{cases} \Longrightarrow P(x,y) =$$

3.

例 设生产甲产品 x 单位，乙产品 y 单位时，公司利润为

$$L(x,y) = -0.1x^2 - 0.1y^2 + 60x + 50y$$

问两种产品各生产多少时，利润最大？

解 1. 求解驻点（一阶偏导数为零）：

$$\begin{cases} L_x = -0.2x + 60 = 0 \\ L_y = -0.2y + 50 = 0 \end{cases} \Longrightarrow (x,y) = (300, 250)$$

2. 计算判别式 $P(x,y)$

$$\begin{cases} L_{xx} = -0.2 \\ L_{xy} = 0 \\ L_{yy} = \end{cases} \Longrightarrow P(x,y) =$$

3.

例 设生产甲产品 x 单位，乙产品 y 单位时，公司利润为

$$L(x,y) = -0.1x^2 - 0.1y^2 + 60x + 50y$$

问两种产品各生产多少时，利润最大？

解 1. 求解驻点（一阶偏导数为零）：

$$\begin{cases} L_x = -0.2x + 60 = 0 \\ L_y = -0.2y + 50 = 0 \end{cases} \Longrightarrow (x,y) = (300, 250)$$

2. 计算判别式 $P(x,y)$

$$\begin{cases} L_{xx} = -0.2 \\ L_{xy} = 0 \\ L_{yy} = -0.2 \end{cases} \Longrightarrow P(x,y) =$$

3.

例 设生产甲产品 x 单位，乙产品 y 单位时，公司利润为

$$L(x, y) = -0.1x^2 - 0.1y^2 + 60x + 50y$$

问两种产品各生产多少时，利润最大？

解 1. 求解驻点（一阶偏导数为零）：

$$\begin{cases} L_x = -0.2x + 60 = 0 \\ L_y = -0.2y + 50 = 0 \end{cases} \Longrightarrow (x, y) = (300, 250)$$

2. 计算判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} L_{xx} = -0.2 \\ L_{xy} = 0 \\ L_{yy} = -0.2 \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = (-0.2) \times (-0.2) - 0^2 = 0.04$$

3.

例 设生产甲产品 x 单位，乙产品 y 单位时，公司利润为

$$L(x, y) = -0.1x^2 - 0.1y^2 + 60x + 50y$$

问两种产品各生产多少时，利润最大？

解 1. 求解驻点（一阶偏导数为零）：

$$\begin{cases} L_x = -0.2x + 60 = 0 \\ L_y = -0.2y + 50 = 0 \end{cases} \Longrightarrow (x, y) = (300, 250)$$

2. 计算判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} L_{xx} = -0.2 \\ L_{xy} = 0 \\ L_{yy} = -0.2 \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = (-0.2) \times (-0.2) - 0^2 = 0.04$$

3. $P(300, 250) > 0$,

例 设生产甲产品 x 单位，乙产品 y 单位时，公司利润为

$$L(x, y) = -0.1x^2 - 0.1y^2 + 60x + 50y$$

问两种产品各生产多少时，利润最大？

解 1. 求解驻点（一阶偏导数为零）：

$$\begin{cases} L_x = -0.2x + 60 = 0 \\ L_y = -0.2y + 50 = 0 \end{cases} \Longrightarrow (x, y) = (300, 250)$$

2. 计算判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} L_{xx} = -0.2 \\ L_{xy} = 0 \\ L_{yy} = -0.2 \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = (-0.2) \times (-0.2) - 0^2 = 0.04$$

3. $P(300, 250) > 0$，$L_{xx}(300, 250) < 0$，

例 设生产甲产品 x 单位，乙产品 y 单位时，公司利润为

$$L(x, y) = -0.1x^2 - 0.1y^2 + 60x + 50y$$

问两种产品各生产多少时，利润最大？

解 1. 求解驻点（一阶偏导数为零）：

$$\begin{cases} L_x = -0.2x + 60 = 0 \\ L_y = -0.2y + 50 = 0 \end{cases} \Longrightarrow (x, y) = (300, 250)$$

2. 计算判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} L_{xx} = -0.2 \\ L_{xy} = 0 \\ L_{yy} = -0.2 \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = (-0.2) \times (-0.2) - 0^2 = 0.04$$

3. $P(300, 250) > 0$，$L_{xx}(300, 250) < 0$，$(300, 250)$ 为极大值点。

例 设生产甲产品 x 单位，乙产品 y 单位时，公司利润为

$$L(x,y) = -0.1x^2 - 0.1y^2 + 60x + 50y$$

问两种产品各生产多少时，利润最大？

解 1. 求解驻点（一阶偏导数为零）：

$$\begin{cases} L_x = -0.2x + 60 = 0 \\ L_y = -0.2y + 50 = 0 \end{cases} \Longrightarrow (x,y) = (300, 250)$$

2. 计算判别式 $P(x,y)$

$$\begin{cases} L_{xx} = -0.2 \\ L_{xy} = 0 \\ L_{yy} = -0.2 \end{cases} \Longrightarrow P(x,y) = (-0.2) \times (-0.2) - 0^2 = 0.04$$

3. $P(300,250) > 0$，$L_{xx}(300,250) < 0$，$(300,250)$ 为极大值点。由唯一性，$(300,250)$ 也是最大值点，此时达到最大利润。

We are here now...

1. 多元函数的极值点

2. 条件极值及拉格朗日乘数法

条件极值问题：引入

例

工厂	产量	总成本	总生产任务
A	x	$f(x,y)=x^2+2y^2+5xy+700$	500
B	y		

如何分配工厂生产任务，使总成本最少？

条件极值问题：引入

例

工厂	产量	总成本	总生产任务
A	x	$f(x,y)=x^2+2y^2+5xy+700$	500
B	y		
如何分配工厂生产任务，使总成本最少？			

即：求 $f(x,y)=x^2+2y^2+5xy+700$ 最小值。

条件极值问题：引入

例

<table>
<tr><th>工厂</th><th>产量</th><th>总成本</th><th>总生产任务</th></tr>
<tr><td>A</td><td>x</td><td rowspan="2">$f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$</td><td rowspan="2">500</td></tr>
<tr><td>B</td><td>y</td></tr>
<tr><td colspan="4">如何分配工厂生产任务，使总成本最少？</td></tr>
</table>

即：求 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$在条件 $x + y = 500$ 下的最小值。

条件极值问题：引入

例

工厂	产量	总成本	总生产任务
A	x	$f(x,y)=x^2+2y^2+5xy+700$	500
B	y		
如何分配工厂生产任务，使总成本最少？			

即：求 $f(x,y)=x^2+2y^2+5xy+700$在条件 $x+y=500$ 下的最小值。

解法一 将 $y=500-x$ 代入 f 表达式，减少未知数：

$$f=$$

条件极值问题：引入

例

工厂	产量	总成本	总生产任务
A	x	$f(x,y)=x^2+2y^2+5xy+700$	500
B	y		
如何分配工厂生产任务，使总成本最少？			

即：求 $f(x,y)=x^2+2y^2+5xy+700$在条件 $x+y=500$ 下的最小值。

解法一 将 $y=500-x$ 代入 f 表达式，减少未知数：

$$f=x^2+2(500-x)^2+5x(500-x)+700$$

条件极值问题：引入

例

工厂	产量	总成本	总生产任务
A	x	$f(x,y)=x^2+2y^2+5xy+700$	500
B	y		
如何分配工厂生产任务，使总成本最少？			

即：求 $f(x,y)=x^2+2y^2+5xy+700$在条件 $x+y=500$ 下的最小值。

解法一 将 $y=500-x$ 代入 f 表达式，减少未知数：

$$f=x^2+2(500-x)^2+5x(500-x)+700$$

所以

$$\frac{df}{dx}=$$

条件极值问题：引入

例

工厂	产量	总成本	总生产任务
A	x	$f(x,y)=x^2+2y^2+5xy+700$	500
B	y		
如何分配工厂生产任务，使总成本最少？			

即：求 $f(x,y)=x^2+2y^2+5xy+700$在条件 $x+y=500$ 下的最小值。

解法一 将 $y=500-x$ 代入 f 表达式，减少未知数：

$$f=x^2+2(500-x)^2+5x(500-x)+700$$

所以

$$\frac{df}{dx}=500-4x$$

条件极值问题：引入

例

工厂	产量	总成本	总生产任务
A	x	$f(x,y)=x^2+2y^2+5xy+700$	500
B	y		
如何分配工厂生产任务，使总成本最少？			

即：求 $f(x,y)=x^2+2y^2+5xy+700$在条件 $x+y=500$ 下的最小值。

解法一 将 $y=500-x$ 代入 f 表达式，减少未知数：

$$f=x^2+2(500-x)^2+5x(500-x)+700$$

所以

$$\frac{df}{dx}=500-4x$$

解 $\frac{df}{dx}=0$ 可得：$x=$ ，

条件极值问题：引入

例

工厂	产量	总成本	总生产任务
A	x	$f(x,y)=x^2+2y^2+5xy+700$	500
B	y		
如何分配工厂生产任务，使总成本最少？			

即：求 $f(x,y)=x^2+2y^2+5xy+700$在条件 $x+y=500$ 下的最小值。

解法一 将 $y=500-x$ 代入 f 表达式，减少未知数：

$$f=x^2+2(500-x)^2+5x(500-x)+700$$

所以

$$\frac{df}{dx}=500-4x$$

解 $\frac{df}{dx}=0$ 可得：$x=125$，

条件极值问题：引入

例

工厂	产量	总成本	总生产任务
A	x	$f(x,y)=x^2+2y^2+5xy+700$	500
B	y		
如何分配工厂生产任务，使总成本最少？			

即：求 $f(x,y)=x^2+2y^2+5xy+700$在条件 $x+y=500$ 下的最小值。

解法一 将 $y=500-x$ 代入 f 表达式，减少未知数：

$$f=x^2+2(500-x)^2+5x(500-x)+700$$

所以

$$\frac{df}{dx}=500-4x$$

解 $\frac{df}{dx}=0$ 可得：$x=125$，此时生产成本最小，

条件极值问题：引入

例

工厂	产量	总成本	总生产任务
A	x	$f(x,y)=x^2+2y^2+5xy+700$	500
B	y		
如何分配工厂生产任务，使总成本最少？			

即：求 $f(x,y)=x^2+2y^2+5xy+700$在条件 $x+y=500$ 下的最小值。

解法一 将 $y=500-x$ 代入 f 表达式，减少未知数：

$$f=x^2+2(500-x)^2+5x(500-x)+700$$

所以

$$\frac{df}{dx}=500-4x$$

解 $\frac{df}{dx}=0$ 可得：$x=125$，此时生产成本最小，$y=500-x=$ 。

条件极值问题：引入

例

<table>
<tr><td>工厂</td><td>产量</td><td>总成本</td><td>总生产任务</td></tr>
<tr><td>A</td><td>x</td><td rowspan="2">$f(x,y)=x^2+2y^2+5xy+700$</td><td rowspan="2">500</td></tr>
<tr><td>B</td><td>y</td></tr>
<tr><td colspan="4">如何分配工厂生产任务，使总成本最少？</td></tr>
</table>

即：求 $f(x,y)=x^2+2y^2+5xy+700$在条件 $x+y=500$ 下的最小值。

解法一 将 $y=500-x$ 代入 f 表达式，减少未知数：

$$f=x^2+2(500-x)^2+5x(500-x)+700$$

所以

$$\frac{df}{dx}=500-4x$$

解 $\frac{df}{dx}=0$ 可得：$x=125$，此时生产成本最小，$y=500-x=375$。

条件极值及拉格朗日乘数法

- 问题 求 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$ 在条件 $x + y - 500 = 0$ 下最小值

条件极值及拉格朗日乘数法

- 问题 求 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$ 在条件 $x + y - 500 = 0$ 下最小值
- 更一般问题 求 $f(x, y)$ 在条件 $g(x, y) = 0$ 下的最值（最优解）

条件极值及拉格朗日乘数法

- 问题 求 $f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$ 在条件 $x + y - 500 = 0$ 下最小值
- 更一般问题 求 $f(x,y)$ 在条件 $g(x,y) = 0$ 下的最值（最优解）
- 拉格朗日乘数法 求解：
  1. 构造辅助函数（称为拉格朗日函数）：
  2. 求解方程组：

条件极值及拉格朗日乘数法

- 问题 求 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$ 在条件 $x + y - 500 = 0$ 下最小值
- 更一般问题 求 $f(x, y)$ 在条件 $g(x, y) = 0$ 下的最值（最优解）
- 拉格朗日乘数法 求解：
  1. 构造辅助函数（称为拉格朗日函数）：

$$F(x, y, \lambda)$$

  2. 求解方程组：

条件极值及拉格朗日乘数法

- 问题 求 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$ 在条件 $x + y - 500 = 0$ 下最小值
- 更一般问题 求 $f(x, y)$ 在条件 $g(x, y) = 0$ 下的最值（最优解）
- 拉格朗日乘数法 求解：
  1. 构造辅助函数（称为拉格朗日函数）：
  $$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$
  2. 求解方程组：

条件极值及拉格朗日乘数法

- 问题 求 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$ 在条件 $x + y - 500 = 0$ 下最小值
- 更一般问题 求 $f(x, y)$ 在条件 $g(x, y) = 0$ 下的最值（最优解）
- 拉格朗日乘数法 求解：
  1. 构造辅助函数（称为拉格朗日函数）：
  $$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$
  其中 λ 是待定常数，称为拉格朗日乘数
  2. 求解方程组：

条件极值及拉格朗日乘数法

- 问题 求 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$ 在条件 $x + y - 500 = 0$ 下最小值
- 更一般问题 求 $f(x, y)$ 在条件 $g(x, y) = 0$ 下的最值（最优解）
- 拉格朗日乘数法 求解：
  1. 构造辅助函数（称为拉格朗日函数）：
  $$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$
  其中 λ 是待定常数，称为拉格朗日乘数
  2. 求解方程组：
  $$\begin{cases} F_x(x, y, \lambda) & = 0 \\ F_y(x, y, \lambda) & = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

条件极值及拉格朗日乘数法

- 问题 求 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$ 在条件 $x + y - 500 = 0$ 下最小值
- 更一般问题 求 $f(x, y)$ 在条件 $g(x, y) = 0$ 下的最值（最优解）
- 拉格朗日乘数法 求解：
  1. 构造辅助函数（称为拉格朗日函数）：
  $$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$
  其中 λ 是待定常数，称为拉格朗日乘数
  2. 求解方程组：
  $$\begin{cases} F_x(x, y, \lambda) = f_x(x, y) + \lambda g_x(x, y) = 0 \\ F_y(x, y, \lambda) \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

条件极值及拉格朗日乘数法

- 问题 求 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$ 在条件 $x + y - 500 = 0$ 下最小值
- 更一般问题 求 $f(x, y)$ 在条件 $g(x, y) = 0$ 下的最值（最优解）
- 拉格朗日乘数法 求解：
  1. 构造辅助函数（称为拉格朗日函数）：
  $$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$
  其中 λ 是待定常数，称为拉格朗日乘数
  2. 求解方程组：
  $$\begin{cases} F_x(x, y, \lambda) = f_x(x, y) + \lambda g_x(x, y) = 0 \\ F_y(x, y, \lambda) = f_y(x, y) + \lambda g_y(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

条件极值及拉格朗日乘数法

- 问题 求 $f(x,y)=x^2+2y^2+5xy+700$ 在条件 $x+y-500=0$ 下最小值
- 更一般问题 求 $f(x,y)$ 在条件 $g(x,y)=0$ 下的最值（最优解）
- 拉格朗日乘数法 求解：
  1. 构造辅助函数（称为拉格朗日函数）：
  $$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$$
  其中 λ 是待定常数，称为拉格朗日乘数
  2. 求解方程组：
  $$\begin{cases} F_x(x,y,\lambda)=f_x(x,y)+\lambda g_x(x,y)=0 \\ F_y(x,y,\lambda)=f_y(x,y)+\lambda g_y(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$$
  条件极值点（甚至问题的最优解）一般就蕴含在上述方程组的全部解 $\{(x_0,y_0)\}$ 中

用拉格朗日乘数法求解 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$ 在条件 $x + y - 500 = 0$ 下最小值

解

用拉格朗日乘数法求解 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$ 在条件 $x + y - 500 = 0$ 下最小值

解

1. 构造拉格朗日函数：

2. 求解方程组：

用拉格朗日乘数法求解 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$ 在条件 $x + y - 500 = 0$ 下最小值

解

1. 构造拉格朗日函数：

$$F(x, y, \lambda) =$$

2. 求解方程组：

用拉格朗日乘数法求解 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$ 在条件 $x + y - 500 = 0$ 下最小值

解

1. 构造拉格朗日函数：

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

$$=$$

2. 求解方程组：

用拉格朗日乘数法求解 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$ 在条件 $x + y - 500 = 0$ 下最小值

解

1. 构造拉格朗日函数：

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$
$$= x^2 + 2y^2 + 5xy + 700 +$$

2. 求解方程组：

用拉格朗日乘数法求解 $f(x,y)=x^2+2y^2+5xy+700$ 在条件 $x+y-500=0$ 下最小值

解

1. 构造拉格朗日函数:

$$
\begin{aligned}
F(x,y,\lambda) &= f(x,y)+\lambda g(x,y) \\
&= x^2+2y^2+5xy+700+\lambda(x+y-500)
\end{aligned}
$$

2. 求解方程组:

用拉格朗日乘数法求解 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$ 在条件 $x + y - 500 = 0$ 下最小值

解

1. 构造拉格朗日函数：

$$
\begin{aligned}
F(x, y, \lambda) &= f(x, y) + \lambda g(x, y) \\
&= x^2 + 2y^2 + 5xy + 700 + \lambda(x + y - 500)
\end{aligned}
$$

2. 求解方程组：

$$
\begin{cases}
F_x(x, y, \lambda) = 0 \\
F_y(x, y, \lambda) = 0 \\
g(x, y) = x + y - 500 = 0
\end{cases}
$$

用拉格朗日乘数法求解 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$ 在条件 $x + y - 500 = 0$ 下最小值

解

1. 构造拉格朗日函数：

$$\begin{aligned} F(x, y, \lambda) &= f(x, y) + \lambda g(x, y) \\ &= x^2 + 2y^2 + 5xy + 700 + \lambda(x + y - 500) \end{aligned}$$

2. 求解方程组：

$$\begin{cases} F_x(x, y, \lambda) = 2x + 5y + \lambda = 0 \\ F_y(x, y, \lambda) \qquad\qquad\qquad\quad = 0 \\ g(x, y) = x + y - 500 = 0 \end{cases}$$

用拉格朗日乘数法求解 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$ 在条件 $x + y - 500 = 0$ 下最小值

解

1. 构造拉格朗日函数：

$$\begin{aligned} F(x, y, \lambda) &= f(x, y) + \lambda g(x, y) \\ &= x^2 + 2y^2 + 5xy + 700 + \lambda(x + y - 500) \end{aligned}$$

2. 求解方程组：

$$\begin{cases} F_x(x, y, \lambda) = 2x + 5y + \lambda = 0 \\ F_y(x, y, \lambda) = 4y + 5x + \lambda = 0 \\ g(x, y) = x + y - 500 = 0 \end{cases}$$

用拉格朗日乘数法求解 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$ 在条件 $x + y - 500 = 0$ 下最小值

解

1. 构造拉格朗日函数：

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$
$$= x^2 + 2y^2 + 5xy + 700 + \lambda(x + y - 500)$$

2. 求解方程组：

$$\begin{cases} F_x(x, y, \lambda) = 2x + 5y + \lambda = 0 \\ F_y(x, y, \lambda) = 4y + 5x + \lambda = 0 \\ g(x, y) = x + y - 500 = 0 \end{cases}$$

方程组的解是 $\begin{cases} x = \\ y = \end{cases}$ 。

用拉格朗日乘数法求解 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$ 在条件 $x + y - 500 = 0$ 下最小值

解

1. 构造拉格朗日函数：

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$
$$= x^2 + 2y^2 + 5xy + 700 + \lambda(x + y - 500)$$

2. 求解方程组：

$$\begin{cases} F_x(x, y, \lambda) = 2x + 5y + \lambda = 0 \\ F_y(x, y, \lambda) = 4y + 5x + \lambda = 0 \\ g(x, y) = x + y - 500 = 0 \end{cases}$$

方程组的解是 $\begin{cases} x = 125 \\ y = \end{cases}$ 。

用拉格朗日乘数法求解 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$ 在条件 $x + y - 500 = 0$ 下最小值

解

1. 构造拉格朗日函数：

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$
$$= x^2 + 2y^2 + 5xy + 700 + \lambda(x + y - 500)$$

2. 求解方程组：

$$\begin{cases} F_x(x, y, \lambda) = 2x + 5y + \lambda = 0 \\ F_y(x, y, \lambda) = 4y + 5x + \lambda = 0 \\ g(x, y) = x + y - 500 = 0 \end{cases}$$

方程组的解是 $\begin{cases} x = 125 \\ y = 375 \end{cases}$ 。

用拉格朗日乘数法求解 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$ 在条件 $x + y - 500 = 0$ 下最小值

解

1. 构造拉格朗日函数：

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$
$$= x^2 + 2y^2 + 5xy + 700 + \lambda(x + y - 500)$$

2. 求解方程组：

$$\begin{cases} F_x(x, y, \lambda) = 2x + 5y + \lambda = 0 \\ F_y(x, y, \lambda) = 4y + 5x + \lambda = 0 \\ g(x, y) = x + y - 500 = 0 \end{cases}$$

方程组的解是 $\begin{cases} x = 125 \\ y = 375 \end{cases}$ 。

3. 由问题的实际背景，本条件极值问题有最小值。

用拉格朗日乘数法求解 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$ 在条件 $x + y - 500 = 0$ 下最小值

解

1. 构造拉格朗日函数:

$$\begin{aligned} F(x, y, \lambda) &= f(x, y) + \lambda g(x, y) \\ &= x^2 + 2y^2 + 5xy + 700 + \lambda(x + y - 500) \end{aligned}$$

2. 求解方程组:

$$\begin{cases} F_x(x, y, \lambda) = 2x + 5y + \lambda = 0 \\ F_y(x, y, \lambda) = 4y + 5x + \lambda = 0 \\ g(x, y) = x + y - 500 = 0 \end{cases}$$

方程组的解是 $\begin{cases} x = 125 \\ y = 375 \end{cases}$ 。

3. 由问题的实际背景，本条件极值问题有最小值。从而 $\begin{cases} x = 125 \\ y = 375 \end{cases}$ 是最优解。

例

<table>
<tr><th>原料</th><th>单价</th><th>数量</th><th>预算</th><th>生产产品数量</th></tr>
<tr><td>A</td><td>1</td><td>x</td><td rowspan="2">120</td><td rowspan="2">$f(x, y) = x^2 y$</td></tr>
<tr><td>B</td><td>2</td><td>y</td></tr>
<tr><td colspan="5">如何采购原料，使生产量最大？</td></tr>
</table>

例

原料	单价	数量	预算	生产产品数量
A	1	x	120	$f(x, y) = x^2y$
B	2	y		

如何采购原料，使生产量最大？

即：求 $f(x, y) = x^2y$ 最大值。

例

原料	单价	数量	预算	生产产品数量
A	1	x	120	$f(x,y)=x^2y$
B	2	y		

如何采购原料，使生产量最大？

即：求 $f(x,y)=x^2y$在条件 $x+2y=120$ 下的最大值。

例

原料	单价	数量	预算	生产产品数量
A	1	x	120	$f(x,y)=x^2y$
B	2	y		

如何采购原料，使生产量最大？

即：求 $f(x,y)=x^2y$在条件 $x+2y=120$ 下的最大值。

拉格朗日乘数法求解法

1. 构造拉格朗日函数：

2. 求解方程组：

,

例

原料	单价	数量	预算	生产产品数量
A	1	x	120	$f(x,y)=x^2y$
B	2	y		

如何采购原料，使生产量最大？

即：求 $f(x,y)=x^2y$在条件 $x+2y=120$ 下的最大值。

拉格朗日乘数法求解法

1. 构造拉格朗日函数：

$$F(x,y,\lambda)=$$

2. 求解方程组：

,

例

原料	单价	数量	预算	生产产品数量
A	1	x	120	$f(x,y)=x^2y$
B	2	y		

如何采购原料，使生产量最大？

即：求 $f(x,y)=x^2y$ 在条件 $x+2y=120$ 下的最大值。

拉格朗日乘数法求解法

1. 构造拉格朗日函数：

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)=$$

2. 求解方程组：

,

例

原料	单价	数量	预算	生产产品数量
A	1	x	120	$f(x, y) = x^2y$
B	2	y		

如何采购原料，使生产量最大？

即：求 $f(x, y) = x^2y$在条件 $x + 2y = 120$ 下的最大值。

拉格朗日乘数法求解法

1. 构造拉格朗日函数：

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = x^2y +$$

2. 求解方程组：

$,$

例

原料	单价	数量	预算	生产产品数量
A	1	x	120	$f(x, y) = x^2 y$
B	2	y		

如何采购原料，使生产量最大？

即：求 $f(x, y) = x^2 y$在条件 $x + 2y = 120$ 下的最大值。

拉格朗日乘数法求解法

1. 构造拉格朗日函数：

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = x^2 y + \lambda(x + 2y - 120)$$

2. 求解方程组：

,

例

<table>
<tr><td>原料</td><td>单价</td><td>数量</td><td>预算</td><td>生产产品数量</td></tr>
<tr><td>A</td><td>1</td><td>x</td><td rowspan="2">120</td><td rowspan="2">$f(x, y) = x^2 y$</td></tr>
<tr><td>B</td><td>2</td><td>y</td></tr>
<tr><td colspan="5">如何采购原料，使生产量最大？</td></tr>
</table>

即：求 $f(x, y) = x^2 y$在条件 $x + 2y = 120$ 下的最大值。

拉格朗日乘数法求解法

1. 构造拉格朗日函数：

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = x^2 y + \lambda(x + 2y - 120)$$

2. 求解方程组：

$$\begin{cases} F_x(x, y, \lambda) = 0 \\ F_y(x, y, \lambda) = 0 \\ g(x, y) = x + 2y - 120 = 0 \end{cases},$$

例	原料	单价	数量	预算	生产产品数量
	A	1	x	120	$f(x, y) = x^2 y$
	B	2	y		

如何采购原料，使生产量最大？

即：求 $f(x, y) = x^2 y$在条件 $x + 2y = 120$ 下的最大值。

拉格朗日乘数法求解法

1. 构造拉格朗日函数：

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = x^2 y + \lambda(x + 2y - 120)$$

2. 求解方程组：

$$\begin{cases} F_x(x, y, \lambda) = 2xy + \lambda = 0 \\ F_y(x, y, \lambda) \qquad\qquad = 0 \\ g(x, y) = x + 2y - 120 = 0 \end{cases},$$

例

原料	单价	数量	预算	生产产品数量
A	1	x	120	$f(x,y)=x^2y$
B	2	y		

如何采购原料，使生产量最大？

即：求 $f(x,y)=x^2y$在条件 $x+2y=120$ 下的最大值。

拉格朗日乘数法求解法

1. 构造拉格朗日函数：

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)=x^2y+\lambda(x+2y-120)$$

2. 求解方程组：

$$\begin{cases} F_x(x,y,\lambda)=2xy+\lambda=0 \\ F_y(x,y,\lambda)=x^2+2\lambda=0 \\ g(x,y)=x+2y-120=0 \end{cases},$$

例

原料	单价	数量	预算	生产产品数量
A	1	x	120	$f(x,y)=x^2y$
B	2	y		

如何采购原料，使生产量最大？

即：求 $f(x,y)=x^2y$在条件 $x+2y=120$ 下的最大值。

拉格朗日乘数法求解法

1. 构造拉格朗日函数：

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)=x^2y+\lambda(x+2y-120)$$

2. 求解方程组：

$$\begin{cases} F_x(x,y,\lambda)=2xy+\lambda=0 \\ F_y(x,y,\lambda)=x^2+2\lambda=0 \\ g(x,y)=x+2y-120=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x= \\ y= \end{cases} ,$$

	原料	单价	数量	预算	生产产品数量
例	A	1	x	120	$f(x, y) = x^2 y$
	B	2	y		

如何采购原料，使生产量最大？

即：求 $f(x, y) = x^2 y$在条件 $x + 2y = 120$ 下的最大值。

拉格朗日乘数法求解法

1. 构造拉格朗日函数：

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = x^2 y + \lambda(x + 2y - 120)$$

2. 求解方程组：

$$\begin{cases} F_x(x, y, \lambda) = 2xy + \lambda = 0 \\ F_y(x, y, \lambda) = x^2 + 2\lambda = 0 \\ g(x, y) = x + 2y - 120 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \\ y = 60 \end{cases} ,$$

例

<table>
<tr><th>原料</th><th>单价</th><th>数量</th><th>预算</th><th>生产产品数量</th></tr>
<tr><td>A</td><td>1</td><td>x</td><td rowspan="2">120</td><td rowspan="2">$f(x, y) = x^2 y$</td></tr>
<tr><td>B</td><td>2</td><td>y</td></tr>
<tr><td colspan="5">如何采购原料，使生产量最大?</td></tr>
</table>

即：求 $f(x, y) = x^2 y$在条件 $x + 2y = 120$ 下的最大值。

拉格朗日乘数法求解法

1. 构造拉格朗日函数：

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = x^2 y + \lambda(x + 2y - 120)$$

2. 求解方程组：

$$\begin{cases} F_x(x, y, \lambda) = 2xy + \lambda = 0 \\ F_y(x, y, \lambda) = x^2 + 2\lambda = 0 \\ g(x, y) = x + 2y - 120 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \\ y = 60 \end{cases}, \begin{cases} x = 80 \\ y = 20 \end{cases}$$

例

<table>
<tr><th>原料</th><th>单价</th><th>数量</th><th>预算</th><th>生产产品数量</th></tr>
<tr><td>A</td><td>1</td><td>x</td><td rowspan="2">120</td><td rowspan="2">$f(x,y)=x^2y$</td></tr>
<tr><td>B</td><td>2</td><td>y</td></tr>
<tr><td colspan="5">如何采购原料，使生产量最大？</td></tr>
</table>

即：求 $f(x,y)=x^2y$在条件 $x+2y=120$ 下的最大值。

拉格朗日乘数法求解法

1. 构造拉格朗日函数：

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)=x^2y+\lambda(x+2y-120)$$

2. 求解方程组：

$$\begin{cases} F_x(x,y,\lambda)=2xy+\lambda=0 \\ F_y(x,y,\lambda)=x^2+2\lambda=0 \\ g(x,y)=x+2y-120=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=60 \end{cases},\ \begin{cases} x=80 \\ y=20 \end{cases}$$

3. 由问题的实际背景，本条件极值问题有最大值。

例

<table>
<tr><th>原料</th><th>单价</th><th>数量</th><th>预算</th><th>生产产品数量</th></tr>
<tr><td>A</td><td>1</td><td>x</td><td rowspan="2">120</td><td rowspan="2">$f(x, y) = x^2y$</td></tr>
<tr><td>B</td><td>2</td><td>y</td></tr>
<tr><td colspan="5">如何采购原料，使生产量最大？</td></tr>
</table>

即：求 $f(x, y) = x^2y$在条件 $x + 2y = 120$ 下的最大值。

拉格朗日乘数法求解法

1. 构造拉格朗日函数：

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = x^2y + \lambda(x + 2y - 120)$$

2. 求解方程组：

$$\begin{cases} F_x(x, y, \lambda) = 2xy + \lambda = 0 \\ F_y(x, y, \lambda) = x^2 + 2\lambda = 0 \\ g(x, y) = x + 2y - 120 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 60 \end{cases}, \begin{cases} x = 80 \\ y = 20 \end{cases}$$

3. 由问题的实际背景，本条件极值问题有最大值。而

$$f(0, 60) \qquad f(80, 20),$$

例

原料	单价	数量	预算	生产产品数量
A	1	x	120	$f(x,y)=x^2y$
B	2	y		

如何采购原料，使生产量最大？

即：求 $f(x,y)=x^2y$在条件 $x+2y=120$ 下的最大值。

拉格朗日乘数法求解法

1. 构造拉格朗日函数：

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)=x^2y+\lambda(x+2y-120)$$

2. 求解方程组：

$$\begin{cases} F_x(x,y,\lambda)=2xy+\lambda=0 \\ F_y(x,y,\lambda)=x^2+2\lambda=0 \\ g(x,y)=x+2y-120=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=60 \end{cases}, \begin{cases} x=80 \\ y=20 \end{cases}$$

3. 由问题的实际背景，本条件极值问题有最大值。而

$$f(0,60)=0<f(80,20),$$

例

<table>
<tr><td>原料</td><td>单价</td><td>数量</td><td>预算</td><td>生产产品数量</td></tr>
<tr><td>A</td><td>1</td><td>x</td><td rowspan="2">120</td><td rowspan="2">$f(x,y)=x^2y$</td></tr>
<tr><td>B</td><td>2</td><td>y</td></tr>
<tr><td colspan="5">如何采购原料，使生产量最大？</td></tr>
</table>

即：求 $f(x,y)=x^2y$在条件 $x+2y=120$ 下的最大值。

拉格朗日乘数法求解法

1. 构造拉格朗日函数：

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)=x^2y+\lambda(x+2y-120)$$

2. 求解方程组：

$$\begin{cases} F_x(x,y,\lambda)=2xy+\lambda=0 \\ F_y(x,y,\lambda)=x^2+2\lambda=0 \\ g(x,y)=x+2y-120=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=60 \end{cases},\ \begin{cases} x=80 \\ y=20 \end{cases}$$

3. 由问题的实际背景，本条件极值问题有最大值。而

$$f(0,60)=0<f(80,20)，\text{从而} \begin{cases} x=80 \\ y=20 \end{cases} \text{是最优解。}$$

例

原料	单价	数量	预算	生产产品数量
A	1	x	120	$f(x, y) = x^2 y$
B	2	y		

如何采购原料，使生产量最大？

即：求 $f(x, y) = x^2 y$ 在条件 $x + 2y = 120$ 下的最大值。

另解

例

原料	单价	数量	预算	生产产品数量
A	1	x	120	$f(x,y)=x^2y$
B	2	y		

如何采购原料，使生产量最大？

即：求 $f(x,y)=x^2y$ 在条件 $x+2y=120$ 下的最大值。

另解 将 $y=60-\frac{1}{2}x$ 代入 f 表达式，减少未知数：

$$f=x^2y=$$

例

原料	单价	数量	预算	生产产品数量
A	1	x	120	$f(x, y) = x^2 y$
B	2	y		

如何采购原料，使生产量最大？

即：求 $f(x, y) = x^2 y$ 在条件 $x + 2y = 120$ 下的最大值。

另解 将 $y = 60 - \frac{1}{2}x$ 代入 f 表达式，减少未知数：

$$f = x^2 y = x^2(60 - \frac{1}{2}x)$$

例	原料	单价	数量	预算	生产产品数量
	A	1	x	120	$f(x,y)=x^2y$
	B	2	y		

如何采购原料，使生产量最大？

即：求 $f(x,y)=x^2y$ 在条件 $x+2y=120$ 下的最大值。

另解 将 $y=60-\frac{1}{2}x$ 代入 f 表达式，减少未知数：

$$f=x^2y=x^2(60-\frac{1}{2}x)=-\frac{1}{2}x^3+60x^2$$

例

原料	单价	数量	预算	生产产品数量
A	1	x	120	$f(x,y)=x^2y$
B	2	y		

如何采购原料，使生产量最大？

即：求 $f(x,y)=x^2y$ 在条件 $x+2y=120$ 下的最大值。

另解 将 $y=60-\frac{1}{2}x$ 代入 f 表达式，减少未知数：

$$f=x^2y=x^2(60-\frac{1}{2}x)=-\frac{1}{2}x^3+60x^2$$

$\frac{df}{dx}=-\frac{3}{2}x^2+120x=0$		

例

原料	单价	数量	预算	生产产品数量
A	1	x	120	$f(x, y) = x^2 y$
B	2	y		

如何采购原料，使生产量最大？

即：求 $f(x, y) = x^2 y$ 在条件 $x + 2y = 120$ 下的最大值。

另解 将 $y = 60 - \frac{1}{2}x$ 代入 f 表达式，减少未知数：

$$f = x^2 y = x^2(60 - \frac{1}{2}x) = -\frac{1}{2}x^3 + 60x^2$$

$\frac{df}{dx} = -\frac{3}{2}x^2 + 120x = 0$		
$x = 0$		

例

原料	单价	数量	预算	生产产品数量
A	1	x	120	$f(x,y)=x^2y$
B	2	y		

如何采购原料，使生产量最大？

即：求 $f(x,y)=x^2y$ 在条件 $x+2y=120$ 下的最大值。

另解 将 $y=60-\frac{1}{2}x$ 代入 f 表达式，减少未知数：

$$f=x^2y=x^2(60-\frac{1}{2}x)=-\frac{1}{2}x^3+60x^2$$

$\frac{df}{dx}=-\frac{3}{2}x^2+120x=0$		
$x=0$		
$x=80$		

例

原料	单价	数量	预算	生产产品数量
A	1	x	120	$f(x, y) = x^2y$
B	2	y		

如何采购原料，使生产量最大？

即：求 $f(x, y) = x^2y$ 在条件 $x + 2y = 120$ 下的最大值。

另解 将 $y = 60 - \frac{1}{2}x$ 代入 f 表达式，减少未知数：

$$f = x^2y = x^2(60 - \frac{1}{2}x) = -\frac{1}{2}x^3 + 60x^2$$

$\frac{df}{dx} = -\frac{3}{2}x^2 + 120x = 0$	$\frac{d^2f}{dx^2} = -3x + 120$	
$x = 0$		
$x = 80$		

例

原料	单价	数量	预算	生产产品数量
A	1	x	120	$f(x,y)=x^2y$
B	2	y		

如何采购原料，使生产量最大？

即：求 $f(x,y)=x^2y$ 在条件 $x+2y=120$ 下的最大值。

另解 将 $y=60-\frac{1}{2}x$ 代入 f 表达式，减少未知数：

$$f=x^2y=x^2(60-\frac{1}{2}x)=-\frac{1}{2}x^3+60x^2$$

$\frac{df}{dx}=-\frac{3}{2}x^2+120x=0$	$\frac{d^2f}{dx^2}=-3x+120$	
$x=0$	>0	
$x=80$		

例

原料	单价	数量	预算	生产产品数量
A	1	x	120	$f(x, y) = x^2 y$
B	2	y		

如何采购原料，使生产量最大？

即：求 $f(x, y) = x^2 y$ 在条件 $x + 2y = 120$ 下的最大值。

另解 将 $y = 60 - \frac{1}{2}x$ 代入 f 表达式，减少未知数：

$$f = x^2 y = x^2(60 - \frac{1}{2}x) = -\frac{1}{2}x^3 + 60x^2$$

$\frac{df}{dx} = -\frac{3}{2}x^2 + 120x = 0$	$\frac{d^2 f}{dx^2} = -3x + 120$	
$x = 0$	> 0	
$x = 80$	< 0	

例

原料	单价	数量	预算	生产产品数量
A	1	x	120	$f(x,y)=x^2y$
B	2	y		

如何采购原料，使生产量最大？

即：求 $f(x,y)=x^2y$ 在条件 $x+2y=120$ 下的最大值。

另解 将 $y=60-\frac{1}{2}x$ 代入 f 表达式，减少未知数：

$$f=x^2y=x^2(60-\frac{1}{2}x)=-\frac{1}{2}x^3+60x^2$$

$\frac{df}{dx}=-\frac{3}{2}x^2+120x=0$	$\frac{d^2f}{dx^2}=-3x+120$	
$x=0$	>0	极小值
$x=80$	<0	

	原料	单价	数量	预算	生产产品数量
例	A	1	x	120	$f(x,y)=x^2y$
	B	2	y		

如何采购原料，使生产量最大?

即：求 $f(x,y)=x^2y$ 在条件 $x+2y=120$ 下的最大值。

另解 将 $y=60-\frac{1}{2}x$ 代入 f 表达式，减少未知数：

$$f=x^2y=x^2(60-\frac{1}{2}x)=-\frac{1}{2}x^3+60x^2$$

$\frac{df}{dx}=-\frac{3}{2}x^2+120x=0$	$\frac{d^2f}{dx^2}=-3x+120$	
$x=0$	>0	极小值
$x=80$	<0	极大值

例

原料	单价	数量	预算	生产产品数量
A	1	x	120	$f(x,y)=x^2y$
B	2	y		

如何采购原料，使生产量最大？

即：求 $f(x,y)=x^2y$ 在条件 $x+2y=120$ 下的最大值。

另解 将 $y=60-\frac{1}{2}x$ 代入 f 表达式，减少未知数：

$$f=x^2y=x^2(60-\frac{1}{2}x)=-\frac{1}{2}x^3+60x^2$$

$\frac{df}{dx}=-\frac{3}{2}x^2+120x=0$	$\frac{d^2f}{dx^2}=-3x+120$	
$x=0$	>0	极小值
$x=80$	<0	极大值

$\begin{cases} x=80 \\ y= \end{cases}$ 时，产量最大。

	原料	单价	数量	预算	生产产品数量
例	A	1	x	120	$f(x,y)=x^2y$
	B	2	y		
	如何采购原料，使生产量最大？				

即：求 $f(x,y)=x^2y$ 在条件 $x+2y=120$ 下的最大值。

另解 将 $y=60-\frac{1}{2}x$ 代入 f 表达式，减少未知数：

$$f=x^2y=x^2(60-\frac{1}{2}x)=-\frac{1}{2}x^3+60x^2$$

$\frac{df}{dx}=-\frac{3}{2}x^2+120x=0$	$\frac{d^2f}{dx^2}=-3x+120$	
$x=0$	>0	极小值
$x=80$	<0	极大值

$\begin{cases} x=80 \\ y=20 \end{cases}$ 时，产量最大。

条件极值（二元函数 + 一个附加条件）

问题 求解二元函数 $u = f(x, y)$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的极值点。

求解步骤（拉格朗日乘数法）

1. 构造拉格朗日函数 $L = f + \lambda\varphi$，其中 λ 是待定常数。
2. 求解方程组

$$\begin{cases} L_x = f_x + \lambda\varphi_x = 0 \\ L_y = f_y + \lambda\varphi_y = 0 \\ \varphi = 0 \end{cases}$$

3. 条件极值点（如果存在的话）包含在上述解 $\{(x, y)\}$ 中。

（至于如何判断解是否条件极值点，需具体问题具体分析。）

条件极值（三元函数 + 一个附加条件）

问题 求解三元函数 $u=f(x,y,z)$ 在附加条件 $\varphi(x,y,z)=0$ 下的极值点。

求解步骤（拉格朗日乘数法）

1. 构造拉格朗日函数 $L=f+\lambda\varphi$，其中 λ 是待定常数。
2. 求解方程组

$$\begin{cases} L_x=f_x+\lambda\varphi_x=0 \\ L_y=f_y+\lambda\varphi_y=0 \\ L_z=f_z+\lambda\varphi_z=0 \\ \varphi=0 \end{cases}$$

3. 条件极值点（如果存在的话）包含在上述解 $\{(x,y,z)\}$ 中。

（至于如何判断解是否条件极值点，需具体问题具体分析。）

条件极值（三元函数 + 两个附加条件）

问题 求解三元函数 $u = f(x, y, z)$ 在附加条件 $\begin{cases} \varphi(x, y, z) = 0 \\ \psi(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 下的极值点。

求解步骤（拉格朗日乘数法）

1. 构造拉格朗日函数 $L = f + \lambda\varphi + \mu\psi$，其中 λ, μ 是待定常数。
2. 求解方程组
$$\begin{cases} L_x = f_x + \lambda\varphi_x + \mu\psi_x = 0 \\ L_y = f_y + \lambda\varphi_y + \mu\psi_y = 0 \\ L_z = f_z + \lambda\varphi_z + \mu\psi_z = 0 \\ \varphi = 0 \\ \psi = 0 \end{cases}$$
3. 条件极值点（如果存在的话）包含在上述解 $\{(x, y, z)\}$ 中。

（至于如何判断解是否条件极值点，需具体问题具体分析。）