第 03 周作业解答

练习 1. 假设齐次线性方程组 $\begin{cases} kx+4y=0 \\ x+ky=0 \end{cases}$ 有非零解，求 k。

解齐次线性方程组的系数行列式为 $D=\begin{vmatrix} k & 4 \\ 1 & k \end{vmatrix}=k^2-4$。有非零解当且仅当 $D=0$，从而 $k=\pm 2$。

练习 2. 如果齐次线性方程组 $\begin{cases} kx & +y & +z & =0 \\ x & +ky & -z & =0 \\ 2x & -y & +z & =0 \end{cases}$ 有非零解，k 应取什么值?

解系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-r_1]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ k+1 & k+1 & 0 \\ 2-k & -2 & 0 \end{vmatrix} = (k+1)\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2-k & -2 & 0 \end{vmatrix} = (k+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2-k & -2 \end{vmatrix} = (k+1)(k-4)$$

齐次线性方程组有非零解当且仅当 $D=0$，所以 $k=-1$ 或 $k=4$。

练习 3. 写出 7 阶排列 3712546 的所有逆序，并判断该排列的奇偶性。

解所有逆序为

$$(3,1),(3,2),(7,1),(7,2),(7,5),(7,4),(7,6),(5,4)$$

逆序数为 8，偶排列。

练习 4. 问 i,j 为何值时，6 级排列 $3i25j4$ 为奇排列?

解 i,j 的取值只有两种情况：$i=1, j=6$ 或者 $i=6, j=1$。

当 $i=1, j=6$ 时，排列为 312564，逆序为 $(3,1),(3,2),(5,4),(6,4)$，逆序数为 4，为偶排列。

当 $i=6, j=1$ 时，排列为 362514，逆序为 $(3,2),(3,1),(6,2),(6,5),(6,1),(6,4),(2,1),(5,1),(5,4)$，逆序数为 9，为奇排列。

所以只能是 $i=6, j=1$。

注：根据对换改变排列奇偶性的性质，当知道 312564 是偶排列时，即可判断 362514 奇排列，而无需再计算时逆序数。

练习 5. 在 6 阶行列式中，乘积 $a_{51}a_{32}a_{13}a_{44}a_{65}a_{26}$ 前应冠以正号还是负号，以构成一般项?

解先将行标按顺序排列：

$$a_{51}a_{32}a_{13}a_{44}a_{65}a_{26}=a_{13}a_{26}a_{32}a_{44}a_{51}a_{65}$$

此时列标的排列是 362415，逆序数是 8，为偶排列，所以乘积前应冠以正号 $+$。

思考题：假设 $a_{ij}(x)$ 是一元可微函数（$1\le i,j\le 4$），证明

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & a_{13}(x) & a_{14}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & a_{23}(x) & a_{24}(x) \\ a_{31}(x) & a_{32}(x) & a_{33}(x) & a_{34}(x) \\ a_{41}(x) & a_{42}(x) & a_{43}(x) & a_{44}(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11}(x) & a'_{12}(x) & a'_{13}(x) & a'_{14}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & a_{23}(x) & a_{24}(x) \\ a_{31}(x) & a_{32}(x) & a_{33}(x) & a_{34}(x) \\ a_{41}(x) & a_{42}(x) & a_{43}(x) & a_{44}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & a_{13}(x) & a_{14}(x) \\ a'_{21}(x) & a'_{22}(x) & a'_{23}(x) & a'_{24}(x) \\ a_{31}(x) & a_{32}(x) & a_{33}(x) & a_{34}(x) \\ a_{41}(x) & a_{42}(x) & a_{43}(x) & a_{44}(x) \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & a_{13}(x) & a_{14}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & a_{23}(x) & a_{24}(x) \\ a'_{31}(x) & a'_{32}(x) & a'_{33}(x) & a'_{34}(x) \\ a_{41}(x) & a_{42}(x) & a_{43}(x) & a_{44}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & a_{13}(x) & a_{14}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & a_{23}(x) & a_{24}(x) \\ a_{31}(x) & a_{32}(x) & a_{33}(x) & a_{34}(x) \\ a'_{41}(x) & a'_{42}(x) & a'_{43}(x) & a'_{44}(x) \end{vmatrix}.$$

(提示：利用行列式的公式表示。利用这个方法，也能证明对其他阶数的行列式也有类似的公式。可以试试二、三阶行列式。)

证明先将

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & a_{13}(x) & a_{14}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & a_{23}(x) & a_{24}(x) \\ a_{31}(x) & a_{32}(x) & a_{33}(x) & a_{34}(x) \\ a_{41}(x) & a_{42}(x) & a_{43}(x) & a_{44}(x) \end{vmatrix} \\
=&\frac{d}{dx}\left[\sum(-1)^{N(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}(x)a_{2j_2}(x)a_{3j_3}(x)a_{4j_4}(x)\right] \\
=&\sum(-1)^{N(j_1j_2j_3j_4)}a'_{1j_1}(x)a_{2j_2}(x)a_{3j_3}(x)a_{4j_4}(x)+\sum(-1)^{N(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}(x)a'_{2j_2}(x)a_{3j_3}(x)a_{4j_4}(x) \\
&+\sum(-1)^{N(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}(x)a_{2j_2}(x)a'_{3j_3}(x)a_{4j_4}(x)+\sum(-1)^{N(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}(x)a_{2j_2}(x)a_{3j_3}(x)a'_{4j_4}(x) \\
=&\begin{vmatrix} a'_{11}(x) & a'_{12}(x) & a'_{13}(x) & a'_{14}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & a_{23}(x) & a_{24}(x) \\ a_{31}(x) & a_{32}(x) & a_{33}(x) & a_{34}(x) \\ a_{41}(x) & a_{42}(x) & a_{43}(x) & a_{44}(x) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & a_{13}(x) & a_{14}(x) \\ a'_{21}(x) & a'_{22}(x) & a'_{23}(x) & a'_{24}(x) \\ a_{31}(x) & a_{32}(x) & a_{33}(x) & a_{34}(x) \\ a_{41}(x) & a_{42}(x) & a_{43}(x) & a_{44}(x) \end{vmatrix} \\
&+\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & a_{13}(x) & a_{14}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & a_{23}(x) & a_{24}(x) \\ a'_{31}(x) & a'_{32}(x) & a'_{33}(x) & a'_{34}(x) \\ a_{41}(x) & a_{42}(x) & a_{43}(x) & a_{44}(x) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & a_{13}(x) & a_{14}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & a_{23}(x) & a_{24}(x) \\ a_{31}(x) & a_{32}(x) & a_{33}(x) & a_{34}(x) \\ a'_{41}(x) & a'_{42}(x) & a'_{43}(x) & a'_{44}(x) \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$