第 01 周作业

应于 *20-09-2017* 提交

练习 1. 利用公式

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

求解二元线性方程

$$\begin{cases} 2x & +5y & = 1 \\ 3x & +7y & = 2 \end{cases}$$

练习 2. 行列式 $\begin{vmatrix} k-1 & 2 \\ 2 & k-1 \end{vmatrix} \neq 0$ 的充分必要条件是 k 满足什么条件?

练习 3. 按下列步骤求解三元线性方程组

$$\begin{cases} x & +y & +z & = 6 & \qquad (1) \\ x & +2y & -z & = 2 & \qquad (2) \\ 2x & -3y & -z & = -7 & \qquad (3) \end{cases}$$

1. 计算三阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix}$ 及 $D_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -7 & -3 & -1 \end{vmatrix}$，再利用 $x = \frac{D_1}{D}$ 求出 x。

2. 将第一步求解出的 x，代入方程 (1)、(2)，得到关于 y, z 的二元线性方程组。此时利用**练习 1** 的公式，求解 y 和 z。

练习 4. 设三阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 6$。利用行列式的性质计算：以下两个行列式分别是多少？

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} - 2a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} - 2a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} - 2a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{12} & a_{13} \\ 3a_{21} & 6a_{22} & 3a_{23} \\ a_{31} & 2a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

练习 5. 化行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ 为三角行列式，从而算出行列式的值。

练习 6. 思考题

利用定理“满足规范性、反称性、数乘性、可加性的对 n 行 n 列数的运算是唯一”证明:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

再利用这一结论证明

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

(这些等式，以及不难想到的其他类似的等式，表明行列式是可以**降阶**的。这是化简行列式的一种重要方法。后面学习行列式展开式时会再详讲。)