线性代数（内招）
2019-2020 学年（上）

姓名：
专业：
学号：

第 10 周作业解答

练习 1. 用基础解系表示齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+ & x_2+ & x_3+ & 4x_4- & 3x_5=0 \\ 2x_1+ & x_2+ & 3x_3+ & 5x_4- & 5x_5=0 \\ x_1- & x_2+ & 3x_3- & 2x_4- & x_5=0 \\ 3x_1+ & x_2+ & 5x_3+ & 6x_4- & 7x_5=0 \end{cases}$ 的通解。

解

$$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-r_1 \\ r_4-3r_1}]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{r_4-2r_2 \\ r_1+r_2}]{r_3-2r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(-1)\times r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

1. 从最后简化的阶梯型矩阵看出，原方程组同解于：

$$\begin{cases} x_1 & & +2x_3+ & x_4- & 2x_5=0 \\ & x_2 & -x_3+ & 3x_4- & x_5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-2x_3-x_4+2x_5 \\ x_2=x_3-3x_4+x_5 \end{cases}$$

2. 自由变量：x_3, x_4, x_5

3. 基础解系：

$$\xi_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2=\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_3=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. 通解：

$$x=c_1\xi_1+c_2\xi_2+c_3\xi_3$$

其中 c_1, c_2, c_3 为任意常数。

练习 2. 设 A, B 均为 $m\times n$ 矩阵，证明：$r(A+B)\le r(A)+r(B)$。

证明设矩阵 A 的 n 列依次为：$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$；矩阵 B 的 n 列依次为：$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$，则矩阵 $A+B$ 的 n 列依次为：$\alpha_1+\beta_1, \alpha_1+\beta_2, \dots, \alpha_1+\beta_n$。

设 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)=r_1$，向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的极大无关组包含 r_1 个向量，设 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_{r_1}}$ 是其中一个极大无关组。另外，成立 $r(A)=r_1$。同样，设 $r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)=r_2$，假设 $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_{r_2}}$ 是列向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 的一个极大无关组。此外，成立 $r(B)=r_2$。

显然列向量组

$$\alpha_1+\beta_1, \alpha_1+\beta_2, \dots, \alpha_1+\beta_n$$

能由向量组

$$\alpha_1,\,\alpha_2,\,\ldots,\,\alpha_n,\,\beta_1,\,\beta_2,\,\ldots,\,\beta_n$$

线性表示，继而也能由向量组

$$\alpha_{i_1},\,\alpha_{i_2},\,\ldots,\,\alpha_{i_{r_1}},\,\beta_{j_1},\,\beta_{j_2},\,\ldots,\,\beta_{j_{r_2}}$$

线性表示。所以

$$r(\alpha_1+\beta_1,\,\alpha_1+\beta_2,\,\ldots,\,\alpha_1+\beta_n) \le r(\alpha_{i_1},\,\alpha_{i_2},\,\ldots,\,\alpha_{i_{r_1}},\,\beta_{j_1},\,\beta_{j_2},\,\ldots,\,\beta_{j_{r_2}}),$$

进而

$$r(A+B) = r(\alpha_1+\beta_1,\,\alpha_1+\beta_2,\,\ldots,\,\alpha_1+\beta_n) \le r(\alpha_{i_1},\,\alpha_{i_2},\,\ldots,\,\alpha_{i_{r_1}},\,\beta_{j_1},\,\beta_{j_2},\,\ldots,\,\beta_{j_{r_2}}) \le r_1+r_2 = r(A)+r(B).$$

练习 3. 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times s}$，假设 $AB=O_{m\times s}$。证明：$r(A)+r(B)\le n$。

矩阵 B 的 s 列依次为：$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s$，则向量组 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s$ 的秩等于 B 的秩，即：

$$r(\beta_1,\,\beta_2,\,\ldots,\,\beta_s) = r(B).$$

齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系应包含 $n-r(A)$ 个向量。假设

$$\xi_1,\,\xi_2,\,\ldots,\,\xi_t$$

是 $Ax=0$ 的一组基础解，其中 $t=n-r(A)$。

由于 $AB=O$，所以

$$O = AB = A(\beta_1,\,\beta_2,\,\ldots,\,\beta_s) = (A\beta_1,\,A\beta_2,\,\ldots,\,A\beta_s) \quad\Rightarrow\quad A\beta_i = 0\;\forall i=1,\,2,\,\ldots,\,s$$

说明矩阵 B 的每一列 β_i 都是 $Ax=0$ 的解。所以 β_i 是基础解系 $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_t$ 的线性组合。

上述说明向量组 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s$ 能由向量组 $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_t$ 线性表示，所以

$$r(\beta_1,\,\beta_2,\,\ldots,\,\beta_s) \le r(\xi_1,\,\xi_2,\,\ldots,\,\xi_t) = t = n - r(A),$$

进而

$$r(B) \le n - r(A).$$

下一题是附加题，做出来的同学下周交上来，可以加分

练习 4. 设 A 是 n 阶方阵，证明：存在不全为零的数 $c_0,c_1,\cdots,c_n$ 使得 $c_0I_n+c_1A+\cdots+c_nA^n$ 为奇异矩阵。(事实上，可以证明 $c_0I_n+c_1A+\cdots+c_nA^n=0$，但我们不证明这个。)(提示：任取一个非零的列向量 $v\in\mathbb{R}^n$，说明 $v,Av,\cdots,A^nv$ 是线性相关。)

证明设 $v\in\mathbb{R}^n$ 为非零列向量。因为向量组 $v,Av,\cdots,A^nv$ 包含向量个数 $n+1$ 比向量维数 n 大，所以线性相关。存在不全为零的数 $c_0,c_1,\cdots,c_n$ 使得 $c_0v+c_1Av+\cdots+c_nA^nv=0$，也就是

$$(c_0I_n+c_1A+\cdots+c_nA^n)v=0.$$

如果 $c_0I_n+c_1A+\cdots+c_nA^n$ 是非奇异（可逆），则上式推出 $v=0$，矛盾。所以方阵 $c_0I_n+c_1A+\cdots+c_nA^n$ 是奇异（不可逆）。

练习 5. 用 "特解 + 基础解系的线性组合" 的形式，表示线性方程组 $\left\{\begin{array}{rrrrrl} x_1+ & 2x_2+ & x_3+ & x_4- & x_5 & =1 \\ & x_2+ & x_3+ & x_4 & & =1 \\ 2x_1+ & 3x_2+ & x_3+ & 2x_4- & x_5 & =3 \end{array}\right.$ 的通解。

解

$$
\left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3-2r_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{r_3+r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[r_1-r_3]{r_2-r_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{r_1-2r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)
$$

1. 从最后简化的阶梯型矩阵看出，原方程组同解于：

$$
\left\{\begin{array}{rrrrrl} x_1 & & -x_3 & & & = 1 \\ & x_2 & +x_3 & & -x_5 & = -1 \\ & & & x_4 & +x_5 & = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 + x_5 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{array}\right.
$$

2. 自由变量：x_3, x_5

3. 原方程组特解：取自由变量 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，得特解 $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$。

4. 导出组 $Ax = 0$ 同解于

$$
\left\{\begin{array}{l} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_3 + x_5 \\ x_4 = -x_5 \end{array}\right. .
$$

分别取 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，得基础解系

$$
\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.
$$

5. 通解：

$$
x = \eta + c_1\xi_1 + c_2\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

其中 c_1, c_2 为任意常数。

练习 6. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a & -b & -c \end{pmatrix}$ 的特征多项式。

解

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ a & b & \lambda + c \end{vmatrix} = \lambda^3 + c\lambda^2 + b\lambda + a$$

练习 7. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} -1 & k \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ 的一个特征值是 5，求 k 的值。

解 $0 = |5I - A| = \begin{vmatrix} 5+1 & -k \\ -4 & 5-3 \end{vmatrix} = 12 - 4k$，所以 $k = 3$。

练习 8. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量。

解

- 解特征方程 $|\lambda I - A| = 0$。

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 2 \\ 2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)^2 - 2^2 = (\lambda - 1)(\lambda - 5)$$

  所以特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5$。

- 关于特征值 $\lambda_1 = 1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$。

$$(\lambda_1 I - A \,\vdots\, 0) = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  同解方程组为

$$x_1 - x_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = x_2$$

  自由变量取为 x_2。取 $x_2 = 1$，得基础解系

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

  所以对应于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的所有特征向量为:

$$c_1\alpha_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  其中 c_1 是任意非零常数。

- 关于特征值 $\lambda_2 = 5$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$。

$$(\lambda_1 I - A \,\vdots\, 0) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  同解方程组为

$$x_1 + x_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = -x_2$$

  自由变量取为 x_2。取 $x_2 = 1$，得基础解系

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

  所以对应于特征值 $\lambda_2 = 5$ 的所有特征向量为:

$$c_2\alpha_2 = c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  其中 c_2 是任意非零常数。

练习 9. 设 λ_1, λ_2 是方阵 A 的特征值，α_1, α_2 分别为 λ_1, λ_2 的特征向量。证明：如果 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，则 $\alpha_1 + \alpha_2$ 一定不是 A 的特征向量。

证明反证法，假设 $\alpha_1 + \alpha_2$ 是 A 的特征向量，相应特征向值为 λ。则

$$A(\alpha_1 + \alpha_2) = \lambda(\alpha_1 + \alpha_2).$$

另一方面

$$A(\alpha_1 + \alpha_2) = A\alpha_1 + A\alpha_2 = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2.$$

综合上述两式，得

$$\lambda(\alpha_1 + \alpha_2) = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2.$$

所以

$$(\lambda - \lambda_1)\alpha_1 + (\lambda - \lambda_2)\alpha_2 = 0.$$

注意到对应不同特征值的特征向量线性无关，从而上式意味

$$\lambda = \lambda_1, \quad \lambda = \lambda_2.$$

这与 λ_1, λ_2 不等矛盾。矛盾在于假设了 $\alpha_1 + \alpha_2$ 是 A 的特征向量。所以 $\alpha_1 + \alpha_2$ 一定不是 A 的特征向量。