第 07 周作业解答

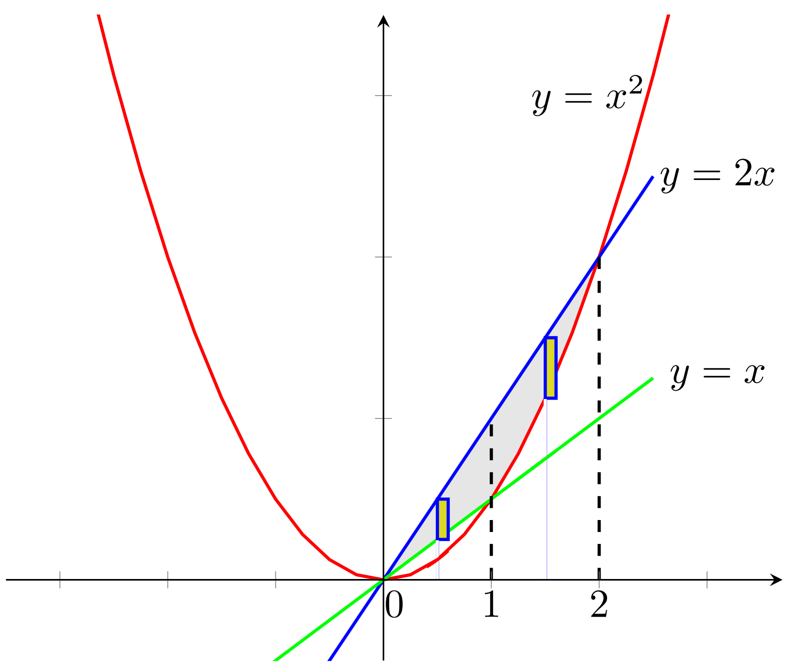
练习 1. 画出曲线 $y=x^2$ 与 $y=2-x^2$ 所围成的区域，并求面积。

解：$A=\int_{-1}^{1}(2-x^2-x^2)dx=\left(2x-\frac{2}{3}x^3\right)\big|_{-1}^{1}=(2-\frac{2}{3})-(-2+\frac{2}{3})=\frac{8}{3}$

练习 2. 画出曲线 $y=x^2$ 与直线 $y=x$，$y=2x$ 围成的区域，并求面积。
提示：可能需要将区域划分成两部分，分别求面积。

解：

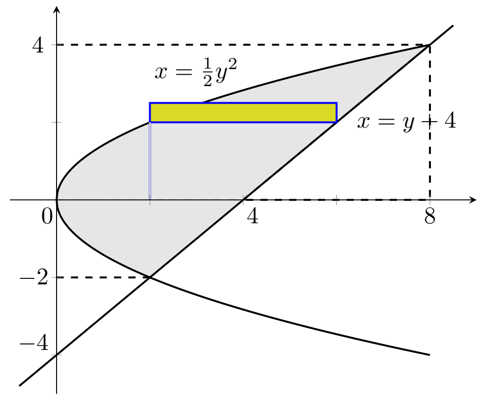
$$
\begin{aligned}
A&=\int_0^1(2x-x)dx+\int_1^2(2x-x^2)dx\\
&=\frac{1}{2}x^2\big|_0^1+\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2\right)\big|_1^2\\
&=\frac{7}{6}
\end{aligned}
$$



练习 3. 画出曲线 $y^2=2x$ 与直线 $y=x-4$ 围成的区域，并求面积。

解：

$$A=\int_{-2}^{4}[y+4-\frac{1}{2}y^2]dy=\left(-\frac{1}{6}y^3+\frac{1}{2}y^2+4y\right)\big|_{-2}^{4}=(-\frac{32}{3}+8+16)-(\frac{4}{3}+2-8)=18$$



练习 4. 设 $f(x) = \int_1^x e^{-t^2} dt$，试利用分部积分公式计算 $\int_0^1 f(x)dx$。

解：

$$\int_0^1 f(x)dx = f(x)x\big|_0^1 - \int_0^1 xdf(x) = [f(1) - 0] - \int_0^1 xf'(x)dx$$

注意到

$$f(1) = \int_1^1 e^{-t^2} dt = 0, \qquad f'(x) = e^{-x^2}$$

所以

$$\int_0^1 f(x)dx = -\int_0^1 xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-x^2} dx^2 \xlongequal{u=x^2} -\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-u} du = \frac{1}{2}e^{-u}\big|_0^1 = \frac{1}{2}(\frac{1}{e} - 1).$$

练习 5. 假设生产某产品的固定成本是 375 元，而生产 Q 件产品时的边际成本函数是 $C'(Q) = 0.4Q + 1$（元/件）。假定产品每件售价 21 元，且可以全部售出。试问：

1. $C(Q)$ 是多少？

2. 产量多少时可获最大利润？此时最大利润是多少？

解：成本函数是

$$\begin{aligned} C(Q) &= \int_0^Q (0.4t + 1)dt + C(0) \\ &= \left(0.2t^2 + t\right)\big|_0^Q + 375 \\ &= 0.2Q^2 + Q + 375 \end{aligned}$$

利润函数是

$$P(Q) = 21Q - C(Q) = -0.2Q^2 + 20Q - 375$$

这是“开口向下”的二次函数，有唯一的最大值点，且恰好为驻点：

$$P'(Q) = -0.4Q + 20 = 0 \quad \Longrightarrow \quad Q = 50$$

所以当生产 50 件时收益最大化，为 $P(50) = 125$（元）。

练习 6. 1. 画出由 $y = x^3$，$x = 2$，$y = 0$ 所围成图形。

2. 再画出该图形绕 x 轴旋转所产生的旋转体，并求出旋转体的体积。

解

$$V=\int_0^2\pi(x^3)^2dx=\pi\int_0^2x^6dx=\frac{\pi}{7}x^7\Big|_0^2=\frac{128}{7}\pi$$

练习 7. 1. 画出由 $y=\sin x$（$0\le x\le\frac{\pi}{2}$）与 $y=0$ 所围成图形。

2. 再画出该图形绕 x 轴旋转所产生的旋转体，并求出旋转体的体积。

解

$$V=\int_0^{\pi/2}\pi\sin^2xdx=\pi\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2}1-\cos 2xdx=\frac{\pi}{2}(x-\frac{1}{2}\sin 2x)\big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi^2}{4}.$$

练习 8. 计算广义积分 $\int_0^\infty e^{-2x}dx$

解

$$\int_0^\infty e^{-2x}dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-2x}dx=\lim_{b\to\infty}-\frac{1}{2}e^{-2x}\big|_0^b=\lim_{b\to\infty}-\frac{1}{2}(e^{-2b}-1)=\frac{1}{2}.$$

练习 9. 计算 $\frac{\Gamma(3)\Gamma(3.2)}{\Gamma(1.2)}$

解

$$\frac{\Gamma(3)\Gamma(3.2)}{\Gamma(1.2)}=2!\cdot\frac{\Gamma(3.2)}{\Gamma(1.2)}=2\cdot\frac{2.2\times\Gamma(2.2)}{\Gamma(1.2)}=2\cdot\frac{2.2\times 1.2\times\Gamma(1.2)}{\Gamma(1.2)}=5.28$$

练习 10. 求 $\int_0^\infty\sqrt{x^3}e^{-x}dx$

解

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\sqrt{x^3}e^{-x}dx&=\int_0^\infty x^{\frac{3}{2}}e^{-x}dx=\int_0^\infty x^{\frac{5}{2}-1}e^{-x}dx\\&=\Gamma(2.5)=1.5\times\Gamma(1.5)=1.5\times 0.5\times\Gamma(0.5)=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}.\end{aligned}$$