第 11 章 f：高斯公式

数学系　　梁卓滨

2017.07 暑期班

向量场的散度

定义 设 $F = (P, Q, R)$ 是空间中向量场，定义

$$\mathrm{div} F := \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

称为向量场 F 的散度。

例 计算向量场 $F = (x^2 + yz, y^2 + xz, z^2 + xy)$ 的散度。

解

$$\mathrm{div} F = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + yz) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2 + xz) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2 + xy) = 2x + 2y + 2z.$$

例 计算梯度场 $\nabla\frac{1}{r}$（$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$）的散度。

解

$$r_x=\frac{x}{r},\qquad r_y=\frac{y}{r},\qquad r_z=\frac{z}{r},$$

$$\nabla\frac{1}{r}=(\frac{\partial}{\partial x}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial y}r^{-1},\ \frac{\partial}{\partial z}r^{-1})$$

$$=(-r^{-2}\cdot r_x,-r^{-2}\cdot r_y,-r^{-2}\cdot r_z)=(-\frac{x}{r^3},-\frac{y}{r^3},-\frac{z}{r^3}),$$

$$\mathrm{div}\nabla\frac{1}{r}=\frac{\partial}{\partial x}(-\frac{x}{r^3})+\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{y}{r^3})+\frac{\partial}{\partial z}(-\frac{z}{r^3})$$

$$=(-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5})+(-\frac{1}{r^3}+\frac{3y^2}{r^5})+(-\frac{1}{r^3}+\frac{3z^2}{r^5})$$

$$=-\frac{3}{r^3}+\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}=0.$$

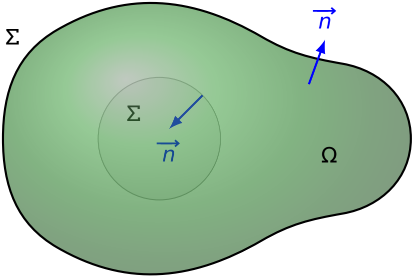
高斯公式

定理（高斯公式） 假设

- 空间闭区域 Ω 的边界是分片光滑的闭曲面 Σ，
- $\vec{n}$ 是 Σ 的单位外法向量，
- $F = (P, Q, R)$ 是 Ω 中向量场，且 P, Q, R 具有一阶连续的偏导数，

则

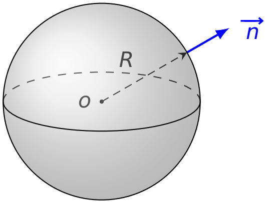
$$\iiint_{\Omega} \mathrm{div} F dv = \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} dS$$



例 计算

$$I=\iint_{\Sigma} 2x\,dy\,dz+y^2\,dz\,dx+z^2\,dx\,dy$$

其中定向曲面 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$，定向取外侧



解

$$I \xlongequal{F=(2x,y^2,z^2)} \iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div} F\,dv$$

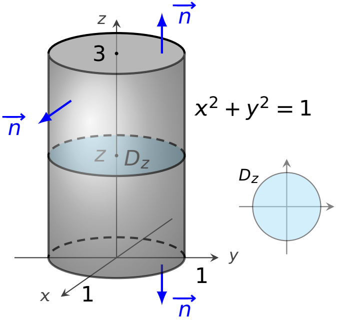
$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}(2x)+\frac{\partial}{\partial y}(y^2)+\frac{\partial}{\partial z}(z^2)\right]dv=\iiint_{\Omega}(2+2y+2z)\,dv$$

$$\xlongequal{\text{对称性}} \iiint_{\Omega} 2\,dv=2\mathrm{Vol}(\Omega)=\frac{8}{3}\pi R^3$$

例 计算

$$I=\iint_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y-z)xdydz$$

其中定向曲面 Σ 是右图柱体的边界曲面



解

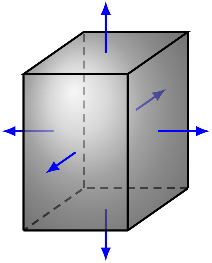
$$I \xlongequal{F=((y-z)x,0,x-y)} \iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \mathrm{div} F dv$$

$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}((y-z)x)+\frac{\partial}{\partial y}0+\frac{\partial}{\partial z}(x-y)\right]dv=\iiint_{\Omega} y-zdxdydz$$

$$\xlongequal{\text{对称性}}\iiint_{\Omega}-zdxdydz=\int_0^3\left[\iint_{D_z}-zdxdy\right]dz=\int_0^3\Big[-z|D_z|\Big]$$

$$=\int_0^3\Big[-z\pi\Big]dz=-\frac{9}{2}\pi$$

例 计算流体 $F=(x-y^2, y, z^3)$ 流向长方体 $[0,1]\times[1,2]\times[1,4]$ 外侧的通量。



解

$$\Phi=\iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS \overset{\text{高斯公式}}{=\!=\!=\!=} \iiint_{\Omega} \mathrm{div}F\,dv$$

$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-y^2)+\frac{\partial}{\partial y}(y)+\frac{\partial}{\partial z}(z^3)\right]dv$$

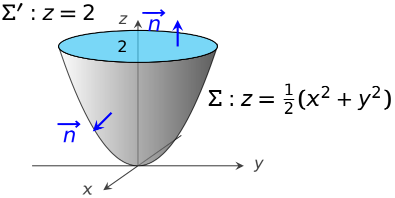
$$=\iiint_{\Omega}(2+3z^2)dxdydz=\int_0^1\left[\int_1^2\left[\int_1^4(2+3z^2)dz\right]dy\right]dx$$

$$=\int_0^1 1dx\cdot\int_1^2 1dy\cdot\int_1^4(2+3z^2)dz=1\cdot1\cdot(2z+z^3)\Big|_1^4=69$$

例 计算

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz - zdxdy$$

其中定向曲面 Σ 是抛物面的一部分，取单位外法向量，如图：



解 如图补充平面 Σ'，则 $\Sigma \cup \Sigma'$ 构成 3 维区域 Ω 边界，应用高斯公式：

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz - zdxdy = \iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS,$$

$$\iint_{\Sigma'}(z^2+x)dydz - zdxdy = \iint_{\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal[\vec{n}=(0,0,1)]{F=(z^2+x,0,-z)} \iint_{\Sigma'} -zdS$$

$$= \iint_{\Sigma'} -2dS = -2\mathrm{Area}(\Sigma') = -8\pi,$$

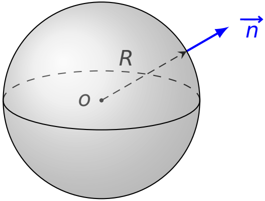
$$\iint_{\Sigma} F\cdot\vec{n}\,dS + \iint_{\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS = \iint_{\Sigma\cup\Sigma'} F\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_{\Omega} \mathrm{div}F dv \xlongequal{\mathrm{div}F=0} 0.$$

所以原积分等于 8π。

例 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS$$

其中曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$



解 球面单位外法向量 $\vec{n} = \frac{1}{R}(x, y, z)$，所以

$$\iint_{\Sigma} (x^2 + y + z) dS = \iint_{\Sigma} R(x, 1, 1) \cdot \frac{1}{R}(x, y, z) dS$$

$$= \iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} \, dS \overset{\text{高斯公式}}{=\!=\!=\!=} \iiint_{\Omega} \mathrm{div} F dv$$

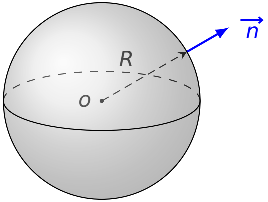
$$= \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}(Rx) + \frac{\partial}{\partial y}(R) + \frac{\partial}{\partial z}(R) \right] dv$$

$$= \iiint_{\Omega} R dx dy dz = R \mathrm{Vol}(\Omega) = \frac{4}{3}\pi R^4$$

例 计算

$$I = \iint_\Sigma (x^2 + y + z)dS$$

其中曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$



解法二 （不用高斯公式，直接计算）

$$\iint_\Sigma (x^2 + y + z)dS \xlongequal{\text{对称性}} \iint_\Sigma x^2 dS = \frac{1}{3}\iint_\Sigma (x^2 + x^2 + x^2)dS$$

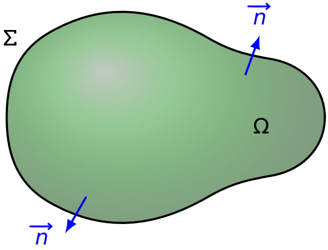
$$\xlongequal{\text{对称性}} \frac{1}{3}\iint_\Sigma (x^2 + y^2 + z^2)dS$$

$$= \frac{1}{3}\iint_\Sigma R^2 dS = \frac{1}{3}R^2 \mathrm{Area}(\Sigma) = \frac{4}{3}\pi R^4$$

散度 div$F$ 的物理解释

- 假设 $F=(P,Q,R)$ 是流体的速度向量场，则
$$\iint_\Sigma F\cdot\overrightarrow{n}\,dS$$
表示单位时间流向 Σ 外侧的通量。

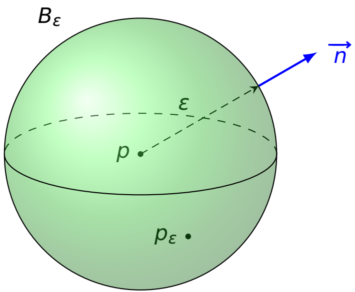
- 进一步假设流体是不可压，则
$$\iint_\Sigma F\cdot\overrightarrow{n}\,dS>0 \Rightarrow \Omega \text{ 内有 “source”}$$
$$\iint_\Sigma F\cdot\overrightarrow{n}\,dS<0 \Rightarrow \Omega \text{ 内有 “sink”}$$



注 高斯公式 $\iiint_\Omega \mathrm{div}F dv=\iint_\Sigma F\cdot\overrightarrow{n}\,dS$ 表明：div$F$ 反映这种“source”和“sink”的强度。

散度 $\mathrm{div}F$ 的物理解释 (2)

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \iint_{\partial B_\varepsilon} F\cdot \overrightarrow{n}\, dS \\
=& \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \iiint_{B_\varepsilon} \mathrm{div}F dv \\
=& \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varepsilon)} \cdot \mathrm{Vol}(B_\varepsilon)\mathrm{div}F(p_\varepsilon) \\
=& \lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathrm{div}F(p_\varepsilon) \\
=& \mathrm{div}F(p)
\end{aligned}
$$



- $\mathrm{div}F(p)>0$ 时，$\iint_{\partial B_\varepsilon} F\cdot \overrightarrow{n}\, dS>0$（$\varepsilon$ 充分小），说明 p 点是 source
- $\mathrm{div}F(p)<0$ 时，$\iint_{\partial B_\varepsilon} F\cdot \overrightarrow{n}\, dS<0$（$\varepsilon$ 充分小），说明 p 点是 sink