第 12 章 d：函数展开成幂级数

数学系　梁卓滨

2017-2018 学年 II

Outline

问题 给定函数 $f(x)$，设 x_0 属于定义域，问 $f(x)$ 能否展成以下幂级数？

$$f(x) \stackrel{?}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

问题 给定函数 $f(x)$，设 x_0 属于定义域，问 $f(x)$ 能否展成以下幂级数？

$$f(x) \overset{?}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

性质 若 $f(x)$ 能展成上述幂级数，则

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

问题 给定函数 $f(x)$，设 x_0 属于定义域，问 $f(x)$ 能否展成以下幂级数？

$$f(x) \overset{?}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

性质 若 $f(x)$ 能展成上述幂级数，则

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

证明 逐项求 k 次导得：

$$f^{(k)}(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right]^{(k)}$$

问题 给定函数 $f(x)$，设 x_0 属于定义域，问 $f(x)$ 能否展成以下幂级数？

$$f(x) \stackrel{?}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

性质 若 $f(x)$ 能展成上述幂级数，则

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

证明 逐项求 k 次导得：

$$f^{(k)}(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right]^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n(x-x_0)^n\right]^{(k)}$$

问题 给定函数 $f(x)$，设 x_0 属于定义域，问 $f(x)$ 能否展成以下幂级数？

$$f(x) \overset{?}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

性质 若 $f(x)$ 能展成上述幂级数，则

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

证明 逐项求 k 次导得：

$$f^{(k)}(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right]^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n(x-x_0)^n\right]^{(k)}$$

$$n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)\cdot(x-x_0)^{n-k}$$

问题 给定函数 $f(x)$，设 x_0 属于定义域，问 $f(x)$ 能否展成以下幂级数？

$$f(x) \overset{?}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

性质 若 $f(x)$ 能展成上述幂级数，则

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

证明 逐项求 k 次导得：

$$f^{(k)}(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right]^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n(x-x_0)^n\right]^{(k)}$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) \cdot (x-x_0)^{n-k}$$

问题 给定函数 $f(x)$，设 x_0 属于定义域，问 $f(x)$ 能否展成以下幂级数？

$$f(x) \stackrel{?}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

性质 若 $f(x)$ 能展成上述幂级数，则

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

证明 逐项求 k 次导得：

$$f^{(k)}(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right]^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n(x-x_0)^n\right]^{(k)}$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) \cdot (x-x_0)^{n-k}$$

$$= a_k \cdot k!$$

问题 给定函数 $f(x)$，设 x_0 属于定义域，问 $f(x)$ 能否展成以下幂级数？

$$f(x) \overset{?}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

性质 若 $f(x)$ 能展成上述幂级数，则

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

证明 逐项求 k 次导得：

$$f^{(k)}(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right]^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n(x-x_0)^n\right]^{(k)}$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) \cdot (x-x_0)^{n-k}$$

$$= a_k \cdot k! + a_{k+1} \cdot (k+1) \cdots 2 \cdot (x-x_0)$$

问题 给定函数 $f(x)$，设 x_0 属于定义域，问 $f(x)$ 能否展成以下幂级数？

$$f(x) \overset{?}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

性质 若 $f(x)$ 能展成上述幂级数，则

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

证明 逐项求 k 次导得：

$$f^{(k)}(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right]^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n(x-x_0)^n\right]^{(k)}$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) \cdot (x-x_0)^{n-k}$$

$$= a_k \cdot k! + a_{k+1} \cdot (k+1) \cdots 2 \cdot (x-x_0)$$

$$+ a_{k+2} \cdot (k+2) \cdots 3 \cdot (x-x_0)^2 + \cdots$$

问题 给定函数 $f(x)$，设 x_0 属于定义域，问 $f(x)$ 能否展成以下幂级数？

$$f(x) \overset{?}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

性质 若 $f(x)$ 能展成上述幂级数，则

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

证明 逐项求 k 次导得：

$$f^{(k)}(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right]^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n(x-x_0)^n\right]^{(k)}$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) \cdot (x-x_0)^{n-k}$$

$$= a_k \cdot k! + a_{k+1} \cdot (k+1) \cdots 2 \cdot (x-x_0)$$

$$+ a_{k+2} \cdot (k+2) \cdots 3 \cdot (x-x_0)^2 + \cdots$$

取 $x = x_0$ 得 $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)$

问题 给定函数 $f(x)$，设 x_0 属于定义域，问 $f(x)$ 能否展成以下幂级数？

$$f(x) \overset{?}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

性质 若 $f(x)$ 能展成上述幂级数，则

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

注 1

问题 给定函数 $f(x)$，设 x_0 属于定义域，问 $f(x)$ 能否展成以下幂级数？

$$f(x) \overset{?}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

性质 若 $f(x)$ 能展成上述幂级数，则

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

注 1

$f(x_0)$

问题 给定函数 $f(x)$，设 x_0 属于定义域，问 $f(x)$ 能否展成以下幂级数？

$$f(x) \overset{?}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

性质 若 $f(x)$ 能展成上述幂级数，则

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

注 1

$f(x_0)$ $f'(x_0)$

问题 给定函数 $f(x)$，设 x_0 属于定义域，问 $f(x)$ 能否展成以下幂级数？

$$f(x) \overset{?}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

性质 若 $f(x)$ 能展成上述幂级数，则

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

注 1

$f(x_0)$ $f'(x_0)$ $\frac{1}{2!}f''(x_0)$

问题 给定函数 $f(x)$，设 x_0 属于定义域，问 $f(x)$ 能否展成以下幂级数？

$$f(x) \overset{?}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

性质 若 $f(x)$ 能展成上述幂级数，则

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

注 1

$$f(x_0) \quad f'(x_0) \qquad \frac{1}{2!}f''(x_0) \qquad \cdots \quad \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)$$

问题 给定函数 $f(x)$，设 x_0 属于定义域，问 $f(x)$ 能否展成以下幂级数？

$$f(x) \overset{?}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

性质 若 $f(x)$ 能展成上述幂级数，则

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

注 1 也就是，$f(x)$ 至多能展成如下形式的幂级数：

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\cdots$$

问题 给定函数 $f(x)$，设 x_0 属于定义域，问 $f(x)$ 能否展成以下幂级数？

$$f(x) \overset{?}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

性质 若 $f(x)$ 能展成上述幂级数，则

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

注 1 也就是，$f(x)$ 至多能展成如下形式的幂级数：

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\cdots$$

- 此级数称为 $f(x)$ 在 x_0 处的 泰勒级数。

问题 给定函数 $f(x)$，设 x_0 属于定义域，问 $f(x)$ 能否展成以下幂级数？

$$f(x) \overset{?}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

性质 若 $f(x)$ 能展成上述幂级数，则

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

注 1 也就是，$f(x)$ 至多能展成如下形式的幂级数：

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\cdots$$

- 此级数称为 $f(x)$ 在 x_0 处的 泰勒级数。
- 级数前 $n+1$ 项的部分和记为 p_n，称为 n 次泰勒多项式

问题 给定函数 $f(x)$，设 x_0 属于定义域，问 $f(x)$ 能否展成以下幂级数？

$$f(x) \stackrel{?}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

性质 若 $f(x)$ 能展成上述幂级数，则

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

注 1 也就是，$f(x)$ 至多能展成如下形式的幂级数：

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\cdots$$

- 此级数称为 $f(x)$ 在 x_0 处的 泰勒级数。
- 级数前 $n+1$ 项的部分和记为 p_n，称为 n 次泰勒多项式

注 2

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

问题 给定函数 $f(x)$，设 x_0 属于定义域，问 $f(x)$ 能否展成以下幂级数？

$$f(x) \overset{?}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

性质 若 $f(x)$ 能展成上述幂级数，则

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

注 1 也就是，$f(x)$ 至多能展成如下形式的幂级数：

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\cdots$$

- 此级数称为 $f(x)$ 在 x_0 处的 泰勒级数。
- 级数前 $n+1$ 项的部分和记为 p_n，称为 n 次泰勒多项式

注 2

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = \lim_{n\to\infty} p_n(x)$$

例 1 求 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数。

例 1 求 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数。

解 取 $x_0=0$ 时，泰勒级数是

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

例 1 求 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数。

解 取 $x_0=0$ 时，泰勒级数是

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

当 $f(x)=e^x$ 时，

$$f(x)=f'(x)=f''(x)=f'''(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=e^x$$

例 1 求 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数。

解 取 $x_0=0$ 时，泰勒级数是

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

当 $f(x)=e^x$ 时，

$$f(x)=f'(x)=f''(x)=f'''(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=e^x$$

$$\Rightarrow\quad f(0)=f'(0)=f''(0)=f'''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=1$$

例 1 求 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数。

解 取 $x_0=0$ 时，泰勒级数是

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

当 $f(x)=e^x$ 时，

$$f(x)=f'(x)=f''(x)=f'''(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=e^x$$

$$\Rightarrow\quad f(0)=f'(0)=f''(0)=f'''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=1$$

$$\Rightarrow\quad \text{泰勒级数：}\ 1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

例 1 求 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数。

解 取 $x_0=0$ 时，泰勒级数是

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

当 $f(x)=e^x$ 时，

$$f(x)=f'(x)=f''(x)=f'''(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=e^x$$

$$\Rightarrow \quad f(0)=f'(0)=f''(0)=f'''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=1$$

$$\Rightarrow \quad \text{泰勒级数：} 1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

注 n 次泰勒多项式是：

$$p_n(x)=$$

例 1 求 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数。

解 取 $x_0=0$ 时，泰勒级数是

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

当 $f(x)=e^x$ 时，

$$f(x)=f'(x)=f''(x)=f'''(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=e^x$$

$$\Rightarrow \quad f(0)=f'(0)=f''(0)=f'''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=1$$

$$\Rightarrow \quad \text{泰勒级数：}\ 1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

注 n 次泰勒多项式是：

$$p_n(x)=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n$$

例 2 求 $f(x) = \sin x$ 在 $x = 0$ 处的泰勒级数。

例 2 求 $f(x)=\sin x$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数。

解 取 $x_0=0$ 时，泰勒级数是

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

当 $f(x)=\sin x$ 时，

例 2 求 $f(x)=\sin x$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数。

解 取 $x_0=0$ 时，泰勒级数是

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

当 $f(x)=\sin x$ 时，

	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
$n=0,4,8\ldots$	$\sin x$	0
$n=1,5,9\ldots$	$\cos x$	1
$n=2,6,10\ldots$	$-\sin x$	0
$n=3,7,11\ldots$	$-\cos x$	-1

例 2 求 $f(x)=\sin x$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数。

解 取 $x_0=0$ 时，泰勒级数是

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

当 $f(x)=\sin x$ 时，

	$f^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n}{2}\pi)$	$f^{(n)}(0)$
$n=0,4,8\ldots$	$\sin x$	0
$n=1,5,9\ldots$	$\cos x$	1
$n=2,6,10\ldots$	$-\sin x$	0
$n=3,7,11\ldots$	$-\cos x$	-1

例 2 求 $f(x)=\sin x$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数。

解 取 $x_0=0$ 时，泰勒级数是

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

当 $f(x)=\sin x$ 时，

	$f^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n}{2}\pi)$	$f^{(n)}(0)=\sin(\frac{n}{2}\pi)$
$n=0,4,8\ldots$	$\sin x$	0
$n=1,5,9\ldots$	$\cos x$	1
$n=2,6,10\ldots$	$-\sin x$	0
$n=3,7,11\ldots$	$-\cos x$	-1

例 2 求 $f(x)=\sin x$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数。

解 取 $x_0=0$ 时，泰勒级数是

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

当 $f(x)=\sin x$ 时，

	$f^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n}{2}\pi)$	$f^{(n)}(0)=\sin(\frac{n}{2}\pi)$
$n=0,\ 4,\ 8\ldots$	$\sin x$	0
$n=1,\ 5,\ 9\ldots$	$\cos x$	1
$n=2,\ 6,\ 10\ldots$	$-\sin x$	0
$n=3,\ 7,\ 11\ldots$	$-\cos x$	-1

所以泰勒级数是

$$x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\frac{1}{9!}x^9-\frac{1}{11!}x^{11}+\cdots$$

例 2 求 $f(x)=\sin x$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数。

解 取 $x_0=0$ 时，泰勒级数是

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

当 $f(x)=\sin x$ 时，

	$f^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n}{2}\pi)$	$f^{(n)}(0)=\sin(\frac{n}{2}\pi)$
$n=0,4,8\ldots$	$\sin x$	0
$n=1,5,9\ldots$	$\cos x$	1
$n=2,6,10\ldots$	$-\sin x$	0
$n=3,7,11\ldots$	$-\cos x$	-1

所以泰勒级数是

$$x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\frac{1}{9!}x^9-\frac{1}{11!}x^{11}+\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1}+\cdots$$

- $\sin x$ 的泰勒级数是：

$$x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\frac{1}{9!}x^9-\frac{1}{11!}x^{11}+\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1}+\cdots$$

- $\sin x$ 的 n 次泰勒多项式是：

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

- $\sin x$ 的泰勒级数是：

$$x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\frac{1}{9!}x^9-\frac{1}{11!}x^{11}+\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1}+\cdots$$

- $\sin x$ 的 n 次泰勒多项式是：

$$p_1 \qquad = x;$$

- $\sin x$ 的泰勒级数是：

$$x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\frac{1}{9!}x^9-\frac{1}{11!}x^{11}+\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1}+\cdots$$

- $\sin x$ 的 n 次泰勒多项式是：

$p_1 = p_2 = x;$

- $\sin x$ 的泰勒级数是：

$$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{11!}x^{11} + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \cdots$$

- $\sin x$ 的 n 次泰勒多项式是：

$$p_1 = p_2 = x;$$

$$p_3 \qquad = x - \frac{1}{3!}x^3;$$

- $\sin x$ 的泰勒级数是：

$$x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\frac{1}{9!}x^9-\frac{1}{11!}x^{11}+\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1}+\cdots$$

- $\sin x$ 的 n 次泰勒多项式是：

$$p_1 = p_2 = x;$$

$$p_3 = p_4 = x - \frac{1}{3!}x^3;$$

- $\sin x$ 的泰勒级数是：

$$x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\frac{1}{9!}x^9-\frac{1}{11!}x^{11}+\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1}+\cdots$$

- $\sin x$ 的 n 次泰勒多项式是：

$$p_1=p_2=x;$$

$$p_3=p_4=x-\frac{1}{3!}x^3;$$

$$p_5=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5;$$

- $\sin x$ 的泰勒级数是：

$$x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\frac{1}{9!}x^9-\frac{1}{11!}x^{11}+\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1}+\cdots$$

- $\sin x$ 的 n 次泰勒多项式是：

$$p_1=p_2=x;$$

$$p_3=p_4=x-\frac{1}{3!}x^3;$$

$$p_5=p_6=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5;$$

- $\sin x$ 的泰勒级数是：

$$x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\frac{1}{9!}x^9-\frac{1}{11!}x^{11}+\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1}+\cdots$$

- $\sin x$ 的 n 次泰勒多项式是：

$$p_1=p_2=x;$$

$$p_3=p_4=x-\frac{1}{3!}x^3;$$

$$p_5=p_6=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5;$$

$$\vdots$$

p_{2m+1}

- $\sin x$ 的泰勒级数是：

$$x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\frac{1}{9!}x^9-\frac{1}{11!}x^{11}+\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1}+\cdots$$

- $\sin x$ 的 n 次泰勒多项式是：

$$p_1=p_2=x;$$

$$p_3=p_4=x-\frac{1}{3!}x^3;$$

$$p_5=p_6=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5;$$

$$\vdots$$

$$p_{2m+1}=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1}$$

- $\sin x$ 的泰勒级数是：

$$x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\frac{1}{9!}x^9-\frac{1}{11!}x^{11}+\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1}+\cdots$$

- $\sin x$ 的 n 次泰勒多项式是：

$$p_1=p_2=x;$$

$$p_3=p_4=x-\frac{1}{3!}x^3;$$

$$p_5=p_6=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5;$$

$$\vdots$$

$$p_{2m+1}=p_{2m+2}=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1}$$

例 3 求 $f(x) = \cos x$ 在 $x = 0$ 处的泰勒级数。

例 3 求 $f(x) = \cos x$ 在 $x = 0$ 处的泰勒级数。

解 取 $x_0 = 0$ 时，泰勒级数是

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

当 $f(x) = \cos x$ 时，

例 3 求 $f(x)=\cos x$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数。

解 取 $x_0=0$ 时，泰勒级数是

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

当 $f(x)=\cos x$ 时，

	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
$n=0,4,8\ldots$	$\cos x$	1
$n=1,5,9\ldots$	$-\sin x$	0
$n=2,6,10\ldots$	$-\cos x$	-1
$n=3,7,11\ldots$	$\sin x$	0

例 3 求 $f(x)=\cos x$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数。

解 取 $x_0=0$ 时，泰勒级数是

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

当 $f(x)=\cos x$ 时，

	$f^{(n)}(x)=\cos(x+\frac{n}{2}\pi)$	$f^{(n)}(0)$
$n=0,4,8\ldots$	$\cos x$	1
$n=1,5,9\ldots$	$-\sin x$	0
$n=2,6,10\ldots$	$-\cos x$	-1
$n=3,7,11\ldots$	$\sin x$	0

例 3 求 $f(x)=\cos x$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数。

解 取 $x_0=0$ 时，泰勒级数是

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

当 $f(x)=\cos x$ 时，

	$f^{(n)}(x)=\cos(x+\frac{n}{2}\pi)$	$f^{(n)}(0)=\cos(\frac{n}{2}\pi)$
$n=0,4,8\ldots$	$\cos x$	1
$n=1,5,9\ldots$	$-\sin x$	0
$n=2,6,10\ldots$	$-\cos x$	-1
$n=3,7,11\ldots$	$\sin x$	0

例 3 求 $f(x)=\cos x$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数。

解 取 $x_0=0$ 时，泰勒级数是

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

当 $f(x)=\cos x$ 时，

	$f^{(n)}(x)=\cos(x+\frac{n}{2}\pi)$	$f^{(n)}(0)=\cos(\frac{n}{2}\pi)$
$n=0,\ 4,\ 8\ldots$	$\cos x$	1
$n=1,\ 5,\ 9\ldots$	$-\sin x$	0
$n=2,\ 6,\ 10\ldots$	$-\cos x$	-1
$n=3,\ 7,\ 11\ldots$	$\sin x$	0

所以泰勒级数是

$$1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\frac{1}{8!}x^8-\frac{1}{10!}x^{10}+\cdots$$

例 3 求 $f(x)=\cos x$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数。

解 取 $x_0=0$ 时，泰勒级数是

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

当 $f(x)=\cos x$ 时，

	$f^{(n)}(x)=\cos(x+\frac{n}{2}\pi)$	$f^{(n)}(0)=\cos(\frac{n}{2}\pi)$
$n=0,4,8\ldots$	$\cos x$	1
$n=1,5,9\ldots$	$-\sin x$	0
$n=2,6,10\ldots$	$-\cos x$	-1
$n=3,7,11\ldots$	$\sin x$	0

所以泰勒级数是

$$1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\frac{1}{8!}x^8-\frac{1}{10!}x^{10}+\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m)!}x^{2m}+\cdots$$

- $\cos x$ 的泰勒级数是：

$$1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\frac{1}{8!}x^8-\frac{1}{10!}x^{10}+\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m)!}x^{2m}+\cdots$$

- $\cos x$ 的 n 次泰勒多项式是：

- $\cos x$ 的泰勒级数是：

$$1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\frac{1}{8!}x^8-\frac{1}{10!}x^{10}+\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m)!}x^{2m}+\cdots$$

- $\cos x$ 的 n 次泰勒多项式是：

$$p_0 = 1;$$

- $\cos x$ 的泰勒级数是：

$$1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\frac{1}{8!}x^8-\frac{1}{10!}x^{10}+\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m)!}x^{2m}+\cdots$$

- $\cos x$ 的 n 次泰勒多项式是：

$$p_0=p_1=1;$$

- $\cos x$ 的泰勒级数是：

$$1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\frac{1}{8!}x^8-\frac{1}{10!}x^{10}+\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m)!}x^{2m}+\cdots$$

- $\cos x$ 的 n 次泰勒多项式是：

$$p_0=p_1=1;$$

$$p_2\qquad=1-\frac{1}{2!}x^2;$$

- $\cos x$ 的泰勒级数是：

$$1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\frac{1}{8!}x^8-\frac{1}{10!}x^{10}+\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m)!}x^{2m}+\cdots$$

- $\cos x$ 的 n 次泰勒多项式是：

$$p_0=p_1=1;$$

$$p_2=p_3=1-\frac{1}{2!}x^2;$$

- $\cos x$ 的泰勒级数是：

$$1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\frac{1}{8!}x^8-\frac{1}{10!}x^{10}+\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m)!}x^{2m}+\cdots$$

- $\cos x$ 的 n 次泰勒多项式是：

$$p_0 = p_1 = 1;$$

$$p_2 = p_3 = 1-\frac{1}{2!}x^2;$$

$$p_4 \quad = 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4;$$

- $\cos x$ 的泰勒级数是：

$$1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\frac{1}{8!}x^8-\frac{1}{10!}x^{10}+\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m)!}x^{2m}+\cdots$$

- $\cos x$ 的 n 次泰勒多项式是：

$$p_0 = p_1 = 1;$$

$$p_2 = p_3 = 1 - \frac{1}{2!}x^2;$$

$$p_4 = p_5 = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4;$$

- $\cos x$ 的泰勒级数是：

$$1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\frac{1}{8!}x^8-\frac{1}{10!}x^{10}+\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m)!}x^{2m}+\cdots$$

- $\cos x$ 的 n 次泰勒多项式是：

$$p_0 = p_1 = 1;$$

$$p_2 = p_3 = 1 - \frac{1}{2!}x^2;$$

$$p_4 = p_5 = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4;$$

$$\vdots$$

$p_{2m}(x)$

- $\cos x$ 的泰勒级数是：

$$1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\frac{1}{8!}x^8-\frac{1}{10!}x^{10}+\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m)!}x^{2m}+\cdots$$

- $\cos x$ 的 n 次泰勒多项式是：

$$p_0 = p_1 = 1;$$

$$p_2 = p_3 = 1-\frac{1}{2!}x^2;$$

$$p_4 = p_5 = 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4;$$

$$\vdots$$

$$p_{2m}(x) = 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m)!}x^{2m}$$

- $\cos x$ 的泰勒级数是：

$$1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\frac{1}{8!}x^8-\frac{1}{10!}x^{10}+\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m)!}x^{2m}+\cdots$$

- $\cos x$ 的 n 次泰勒多项式是：

$$p_0=p_1=1;$$

$$p_2=p_3=1-\frac{1}{2!}x^2;$$

$$p_4=p_5=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4;$$

$$\vdots$$

$$p_{2m}(x)=p_{2m+1}(x)=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m)!}x^{2m}$$

例 4 求 $f(x) = \ln(1+x)$ 在 $x = 0$ 处泰勒级数。

例 4 求 $f(x)=\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处泰勒级数。

解 取 $x_0=0$ 时，泰勒级数是

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

当 $f(x)=\ln(1+x)$ 时,

例 4 求 $f(x)=\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处泰勒级数。

解 取 $x_0=0$ 时，泰勒级数是

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

当 $f(x)=\ln(1+x)$ 时，

$$f=\ln(1+x),\quad f'=\frac{1}{1+x},$$

例 4 求 $f(x)=\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处泰勒级数。

解 取 $x_0=0$ 时，泰勒级数是

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

当 $f(x)=\ln(1+x)$ 时,

$$f=\ln(1+x),\quad f'=\frac{1}{1+x},\quad f''=\frac{(-1)}{(1+x)^2},$$

例 4 求 $f(x)=\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处泰勒级数。

解 取 $x_0=0$ 时，泰勒级数是

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

当 $f(x)=\ln(1+x)$ 时,

$$f=\ln(1+x),\quad f'=\frac{1}{1+x},\quad f''=\frac{(-1)}{(1+x)^2},\quad f'''=\frac{2}{(1+x)^3},$$

例 4 求 $f(x)=\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处泰勒级数。

解 取 $x_0=0$ 时，泰勒级数是

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

当 $f(x)=\ln(1+x)$ 时,

$$f=\ln(1+x), \quad f'=\frac{1}{1+x}, \quad f''=\frac{(-1)}{(1+x)^2}, \quad f'''=\frac{2}{(1+x)^3},$$

$$f^{(4)}=\frac{-2\cdot 3}{(1+x)^4},$$

例 4 求 $f(x)=\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处泰勒级数。

解 取 $x_0=0$ 时，泰勒级数是

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

当 $f(x)=\ln(1+x)$ 时,

$$f=\ln(1+x),\quad f'=\frac{1}{1+x},\quad f''=\frac{(-1)}{(1+x)^2},\quad f'''=\frac{2}{(1+x)^3},$$

$$f^{(4)}=\frac{-2\cdot 3}{(1+x)^4},\quad f^{(5)}=\frac{2\cdot 3\cdot 4}{(1+x)^5},\ \cdots,$$

例 4 求 $f(x)=\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处泰勒级数。

解 取 $x_0=0$ 时，泰勒级数是

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

当 $f(x)=\ln(1+x)$ 时，

$$f=\ln(1+x),\quad f'=\frac{1}{1+x},\quad f''=\frac{(-1)}{(1+x)^2},\quad f'''=\frac{2}{(1+x)^3},$$

$$f^{(4)}=\frac{-2\cdot 3}{(1+x)^4},\quad f^{(5)}=\frac{2\cdot 3\cdot 4}{(1+x)^5},\ \ldots,\ f^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n},\ \cdots$$

例 4 求 $f(x)=\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处泰勒级数。

解 取 $x_0=0$ 时，泰勒级数是

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

当 $f(x)=\ln(1+x)$ 时，

$$f=\ln(1+x),\quad f'=\frac{1}{1+x},\quad f''=\frac{(-1)}{(1+x)^2},\quad f'''=\frac{2}{(1+x)^3},$$

$$f^{(4)}=\frac{-2\cdot 3}{(1+x)^4},\quad f^{(5)}=\frac{2\cdot 3\cdot 4}{(1+x)^5},\ \ldots,\ f^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n},\ \cdots$$

所以 $\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$，

例 4 求 $f(x)=\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处泰勒级数。

解 取 $x_0=0$ 时，泰勒级数是

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

当 $f(x)=\ln(1+x)$ 时，

$$f=\ln(1+x),\quad f'=\frac{1}{1+x},\quad f''=\frac{(-1)}{(1+x)^2},\quad f'''=\frac{2}{(1+x)^3},$$

$$f^{(4)}=\frac{-2\cdot 3}{(1+x)^4},\quad f^{(5)}=\frac{2\cdot 3\cdot 4}{(1+x)^5},\ \ldots,\ f^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n},\ \cdots$$

所以 $\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$，泰勒级数是

$$x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots$$

例 4 求 $f(x)=\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处泰勒级数。

解 取 $x_0=0$ 时，泰勒级数是

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

当 $f(x)=\ln(1+x)$ 时,

$$f=\ln(1+x),\quad f'=\frac{1}{1+x},\quad f''=\frac{(-1)}{(1+x)^2},\quad f'''=\frac{2}{(1+x)^3},$$

$$f^{(4)}=\frac{-2\cdot 3}{(1+x)^4},\quad f^{(5)}=\frac{2\cdot 3\cdot 4}{(1+x)^5},\ \ldots,\ f^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n},\ \cdots$$

所以 $\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$，泰勒级数是

$$x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+\cdots$$

例 4 求 $f(x) = \ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处泰勒级数。

解 取 $x_0 = 0$ 时，泰勒级数是

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

当 $f(x) = \ln(1+x)$ 时,

$$f = \ln(1+x), \quad f' = \frac{1}{1+x}, \quad f'' = \frac{(-1)}{(1+x)^2}, \quad f''' = \frac{2}{(1+x)^3},$$

$$f^{(4)} = \frac{-2\cdot 3}{(1+x)^4}, \quad f^{(5)} = \frac{2\cdot 3\cdot 4}{(1+x)^5}, \ \ldots, \ f^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}, \ \cdots$$

所以 $\frac{1}{n!}f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$，泰勒级数是

$$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + \cdots$$

注 n 次泰勒多项式是:

$$p_n(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n$$

例 5 求 $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ 在 $x=0$ 处的 n 次泰勒多项式 $p_n(x)$

例 5 求 $f(x)=(1+x)^\alpha$ 在 $x=0$ 处的 n 次泰勒多项式 $p_n(x)$

解 取 $x_0=0$ 时，泰勒级数是

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

当 $f(x)=(1+x)^\alpha$ 时,

例 5 求 $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ 在 $x=0$ 处的 n 次泰勒多项式 $p_n(x)$

解 取 $x_0=0$ 时，泰勒级数是

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

当 $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ 时,

$$f=(1+x)^{\alpha},\quad f'=\alpha(1+x)^{\alpha-1},$$

例 5 求 $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ 在 $x=0$ 处的 n 次泰勒多项式 $p_n(x)$

解 取 $x_0=0$ 时，泰勒级数是

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

当 $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ 时，

$$f=(1+x)^{\alpha},\quad f'=\alpha(1+x)^{\alpha-1},\quad f''=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},$$

例 5 求 $f(x)=(1+x)^\alpha$ 在 $x=0$ 处的 n 次泰勒多项式 $p_n(x)$

解 取 $x_0=0$ 时，泰勒级数是

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

当 $f(x)=(1+x)^\alpha$ 时,

$$f=(1+x)^\alpha,\quad f'=\alpha(1+x)^{\alpha-1},\quad f''=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},$$

$$\ldots,\ f^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},\ \cdots$$

例 5 求 $f(x)=(1+x)^\alpha$ 在 $x=0$ 处的 n 次泰勒多项式 $p_n(x)$

解 取 $x_0=0$ 时，泰勒级数是

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

当 $f(x)=(1+x)^\alpha$ 时,

$$f=(1+x)^\alpha,\quad f'=\alpha(1+x)^{\alpha-1},\quad f''=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},$$

$$\ldots,\ f^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},\ \cdots$$

所以 $\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$,

例 5 求 $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ 在 $x=0$ 处的 n 次泰勒多项式 $p_n(x)$

解 取 $x_0=0$ 时，泰勒级数是

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

当 $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ 时,

$$f=(1+x)^{\alpha},\quad f'=\alpha(1+x)^{\alpha-1},\quad f''=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},$$

$$\ldots,\ f^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},\ \cdots$$

所以 $\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$，泰勒级数是

$$1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots$$

例 5 求 $f(x)=(1+x)^\alpha$ 在 $x=0$ 处的 n 次泰勒多项式 $p_n(x)$

解 取 $x_0=0$ 时，泰勒级数是

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

当 $f(x)=(1+x)^\alpha$ 时，

$$f=(1+x)^\alpha,\quad f'=\alpha(1+x)^{\alpha-1},\quad f''=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},$$

$$\ldots,\ f^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},\ \cdots$$

所以 $\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$，泰勒级数是

$$1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

例 5 求 $f(x)=(1+x)^\alpha$ 在 $x=0$ 处的 n 次泰勒多项式 $p_n(x)$

解 取 $x_0=0$ 时，泰勒级数是

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

当 $f(x)=(1+x)^\alpha$ 时,

$$f=(1+x)^\alpha,\quad f'=\alpha(1+x)^{\alpha-1},\quad f''=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},$$

$$\ldots,\ f^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},\ \cdots$$

所以 $\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$，泰勒级数是

$$1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

注 n 次泰勒多项式是:

$$p_n(x)=$$

例 5 求 $f(x)=(1+x)^\alpha$ 在 $x=0$ 处的 n 次泰勒多项式 $p_n(x)$

解 取 $x_0=0$ 时，泰勒级数是

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

当 $f(x)=(1+x)^\alpha$ 时,

$$f=(1+x)^\alpha,\quad f'=\alpha(1+x)^{\alpha-1},\quad f''=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},$$

$$\ldots,\ f^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},\ \cdots$$

所以 $\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$，泰勒级数是

$$1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

注 n 次泰勒多项式是:

$$p_n(x)=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

回到问题：对哪些 x，$f(x)$ 等于其泰勒级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$？

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

回到问题：对哪些 x，$f(x)$ 等于其泰勒级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$？

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \lim_{n\to\infty} p_n(x)$$

回到问题：对哪些 x，$f(x)$ 等于其泰勒级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$？

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = \lim_{n\to\infty} p_n(x)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} [f(x) - p_n(x)] = 0$$

回到问题：对哪些 x，$f(x)$ 等于其泰勒级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$？

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n \quad \Leftrightarrow \quad f(x)=\lim_{n\to\infty} p_n(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty}[f(x)-p_n(x)]=0$$

（令$R_n(x)=f(x)-p_n(x)$）

回到问题：对哪些 x，$f(x)$ 等于其泰勒级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$？

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n \quad\Leftrightarrow\quad f(x)=\lim_{n\to\infty}p_n(x)$$

$$\Leftrightarrow\quad \lim_{n\to\infty}[f(x)-p_n(x)]=0$$

（令$R_n(x)=f(x)-p_n(x)$）

$$\Leftrightarrow\quad \lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$$

回到问题：对哪些 x，$f(x)$ 等于其泰勒级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$？

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n \quad\Leftrightarrow\quad f(x)=\lim_{n\to\infty}p_n(x)$$

$$\Leftrightarrow\quad \lim_{n\to\infty}[f(x)-p_n(x)]=0$$

（令$R_n(x)=f(x)-p_n(x)$）

$$\Leftrightarrow\quad \lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$$

注 $R_n(x)=f(x)-p_n(x)$，或者 $f(x)=p_n(x)+R_n(x)$，刻画了原函数 $f(x)$ 与其泰勒多项式 $p_n(x)$ 的差异。

回忆 泰勒中值定理 1 若 f 具有 n 阶导数，则

$$R_n(x) = o\big((x - x_0)^n\big).$$

回忆 泰勒中值定理 1 若 f 具有 n 阶导数，则

$$R_n(x) = o\big((x - x_0)^n\big).$$

特别地，

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x)$$

回忆 泰勒中值定理 1 若 f 具有 n 阶导数，则

$$R_n(x) = o\left((x-x_0)^n\right).$$

特别地，

$$\begin{aligned} f(x) &= p_n(x) + R_n(x) \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 \\ &\quad + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right) \end{aligned}$$

例

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1} + o(x^{2m+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m)!}x^{2m} + o(x^{2m+1})$$

以及

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

例 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$

例 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$$

例 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$， $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left[x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\right] - x\left[1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^3)\right]}{x^3}$$

例 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$，$\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$

解

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to0}\frac{\left[x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^4)\right]-x\left[1-\frac{1}{2!}x^2+o(x^3)\right]}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^4)}{x^3}$$

例 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$

解

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to0}\frac{\left[x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^4)\right]-x\left[1-\frac{1}{2!}x^2+o(x^3)\right]}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^4)}{x^3}=\frac{1}{3}$$

例 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$， $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left[x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^4)\right]-x\left[1-\frac{1}{2!}x^2+o(x^3)\right]}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^4)}{x^3} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left[\qquad\qquad\qquad\qquad\right]-\left[\qquad\qquad\qquad\qquad\right]}{x^2\left[x+\left(\qquad\qquad\qquad\right)\right]}$$

例 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$， $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left[x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^4)\right]-x\left[1-\frac{1}{2!}x^2+o(x^3)\right]}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^4)}{x^3} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left[1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^5)\right]-\left[\qquad\qquad\right]}{x^2\left[x+\left(\qquad\qquad\right)\right]}$$

例 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$， $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left[x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\right] - x\left[1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^3)\right]}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3 + o(x^4)}{x^3} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left[1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^5)\right] - \left[1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)\right]}{x^2\left[x + \left(\qquad\qquad\qquad\right)\right]}$$

例 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left[x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^4)\right]-x\left[1-\frac{1}{2!}x^2+o(x^3)\right]}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^4)}{x^3} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left[1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^5)\right]-\left[1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4+o(x^4)\right]}{x^2\left[x+\left(-x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)\right]}$$

例 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$， $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left[x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^4)\right]-x\left[1-\frac{1}{2!}x^2+o(x^3)\right]}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^4)}{x^3}=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left[1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^5)\right]-\left[1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4+o(x^4)\right]}{x^2\left[x+\left(-x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)\right]}$$

$$==\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}{-\frac{1}{2}x^4+o(x^4)}$$

例 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left[x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^4)\right]-x\left[1-\frac{1}{2!}x^2+o(x^3)\right]}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^4)}{x^3}=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left[1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^5)\right]-\left[1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4+o(x^4)\right]}{x^2\left[x+\left(-x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)\right]}$$

$$==\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}{-\frac{1}{2}x^4+o(x^4)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{12}+o(x^4)/x^4}{-\frac{1}{2}+o(x^4)/x^4}$$

例 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$，$\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$

解

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to0}\frac{\left[x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^4)\right]-x\left[1-\frac{1}{2!}x^2+o(x^3)\right]}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^4)}{x^3}=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2\,[x+\ln(1-x)]}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left[1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^5)\right]-\left[1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4+o(x^4)\right]}{x^2\left[x+\left(-x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)\right]}$$

$$==\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}{-\frac{1}{2}x^4+o(x^4)}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{12}+o(x^4)/x^4}{-\frac{1}{2}+o(x^4)/x^4}=\frac{1}{6}$$

泰勒中值定理 2 若 f 具有 $n+1$ 阶导数，则

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$

其中 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个值

泰勒中值定理 2 若 f 具有 $n+1$ 阶导数，则

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$

$$(1-\theta)x_0 + \theta x$$

其中 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个值，$0 < \theta < 1$。

泰勒中值定理 2 若 f 具有 $n+1$ 阶导数，则

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$

$$\overset{or}{=} \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}((1-\theta)x_0+\theta x)(x-x_0)^{n+1},$$

其中 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个值，$0<\theta<1$。

泰勒中值定理 2 若 f 具有 $n+1$ 阶导数，则

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$

$$\overset{or}{=} \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}((1-\theta)x_0+\theta x)(x-x_0)^{n+1},$$

其中 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个值，$0<\theta<1$。

注

1. ξ（以及 θ）不是固定不变的，而是随 x 和 n 的改变而变化。

泰勒中值定理 2 若 f 具有 $n+1$ 阶导数，则

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$

$$\overset{or}{=} \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}((1-\theta)x_0+\theta x)(x-x_0)^{n+1},$$

其中 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个值，$0<\theta<1$。

注

1. ξ（以及 θ）不是固定不变的，而是随 x 和 n 的改变而变化。
2. 当 $x_0=0$ 时，则余项可写成

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}, \qquad (0<\theta<1)$$

性质 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$，e^x 等于其泰勒级数。即

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, \qquad x \in (-\infty, \infty).$$

性质 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$，e^x 等于其泰勒级数。即

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, \qquad x \in (-\infty, \infty).$$

证明

1. 只需证明对任意 x，成立 $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$。

性质 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$，e^x 等于其泰勒级数。即

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, \qquad x \in (-\infty, \infty).$$

证明

1. 只需证明对任意 x，成立 $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$。
2. 由泰勒中值定理 2，

$$|R_n(x)| = \left|\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}\right|$$

性质 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$，e^x 等于其泰勒级数。即

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, \qquad x \in (-\infty, \infty).$$

证明

1. 只需证明对任意 x，成立 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$。
2. 由泰勒中值定理 2，

$$|R_n(x)| = \left|\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}\right| = \left|\frac{e^{\theta x}x^{n+1}}{(n+1)!}\right|$$

性质 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$，e^x 等于其泰勒级数。即

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, \qquad x \in (-\infty, \infty).$$

证明

1. 只需证明对任意 x，成立 $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$。
2. 由泰勒中值定理 2，

$$|R_n(x)| = \left|\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}\right| = \left|\frac{e^{\theta x}x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^{|x|}$$

性质 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$，e^x 等于其泰勒级数。即

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, \qquad x \in (-\infty, \infty).$$

证明

1. 只需证明对任意 x，成立 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$。
2. 由泰勒中值定理 2，

$$|R_n(x)| = \left|\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}\right| = \left|\frac{e^{\theta x}x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^{|x|} \to 0$$

性质 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$，e^x 等于其泰勒级数。即

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, \qquad x \in (-\infty, \infty).$$

证明

1. 只需证明对任意 x，成立 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$。
2. 由泰勒中值定理 2，

$$|R_n(x)| = \left|\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}\right| = \left|\frac{e^{\theta x}x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^{|x|} \to 0$$

（已知级数 $\sum \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ 收敛，所以一般项 $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$）

性质 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$，$\sin x$ 等于其泰勒级数。即

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \cdots$$

其中 $x \in (-\infty, \infty)$。

性质 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$，$\sin x$ 等于其泰勒级数。即

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \cdots$$

其中 $x \in (-\infty, \infty)$。

证明

1. 只需证明对任意 x，成立 $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$。

性质 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$，$\sin x$ 等于其泰勒级数。即

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \cdots$$

其中 $x \in (-\infty, \infty)$。

证明

1. 只需证明对任意 x，成立 $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$。
2. 由泰勒中值定理 2，

$$|R_n(x)| = \left|\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}\right|$$

性质 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$，$\sin x$ 等于其泰勒级数。即

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \cdots$$

其中 $x \in (-\infty, \infty)$。

证明

1. 只需证明对任意 x，成立 $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$。
2. 由泰勒中值定理 2，

$$|R_n(x)| = \left|\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}\right| = \left|\frac{\sin\left(\theta x + \frac{n+1}{2}\pi\right)x^{n+1}}{(n+1)!}\right|$$

性质 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$，$\sin x$ 等于其泰勒级数。即

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \cdots$$

其中 $x \in (-\infty, \infty)$。

证明

1. 只需证明对任意 x，成立 $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$。
2. 由泰勒中值定理 2，

$$|R_n(x)| = \left|\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}\right| = \left|\frac{\sin\left(\theta x + \frac{n+1}{2}\pi\right)x^{n+1}}{(n+1)!}\right|$$

$$\le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

性质 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$，$\sin x$ 等于其泰勒级数。即

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \cdots$$

其中 $x \in (-\infty, \infty)$。

证明

1. 只需证明对任意 x，成立 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$。
2. 由泰勒中值定理 2，

$$|R_n(x)| = \left|\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}\right| = \left|\frac{\sin\left(\theta x + \frac{n+1}{2}\pi\right)x^{n+1}}{(n+1)!}\right|$$

$$\leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$$

性质 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$，$\sin x$ 等于其泰勒级数。即

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \cdots$$

其中 $x \in (-\infty, \infty)$。

证明

1. 只需证明对任意 x，成立 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$。
2. 由泰勒中值定理 2，

$$|R_n(x)| = \left|\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}\right| = \left|\frac{\sin\left(\theta x + \frac{n+1}{2}\pi\right)x^{n+1}}{(n+1)!}\right|$$

$$\leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$$

（已知级数 $\sum \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ 收敛，所以一般项 $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$）

性质 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$，$\sin x$ 等于其泰勒级数。即

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m)!}x^{2m} + \cdots$$

其中 $x \in (-\infty, \infty)$。

性质 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$，$\sin x$ 等于其泰勒级数。即

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m)!}x^{2m} + \cdots$$

其中 $x \in (-\infty, \infty)$。

证明

1. 只需证明对任意 x，成立 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$。

性质 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$，$\sin x$ 等于其泰勒级数。即

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m)!}x^{2m} + \cdots$$

其中 $x \in (-\infty, \infty)$。

证明

1. 只需证明对任意 x，成立 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$。
2. 由泰勒中值定理 2，

$$|R_n(x)| = \left| \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) x^{n+1} \right|$$

性质 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$，$\sin x$ 等于其泰勒级数。即

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m)!}x^{2m} + \cdots$$

其中 $x \in (-\infty, \infty)$。

证明

1. 只需证明对任意 x，成立 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$。
2. 由泰勒中值定理 2，

$$|R_n(x)| = \left| \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) x^{n+1} \right| = \left| \frac{\cos\left(\theta x + \frac{n+1}{2}\pi\right) x^{n+1}}{(n+1)!} \right|$$

性质 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$，$\sin x$ 等于其泰勒级数。即

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m)!}x^{2m} + \cdots$$

其中 $x \in (-\infty, \infty)$。

证明

1. 只需证明对任意 x，成立 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$。
2. 由泰勒中值定理 2，

$$|R_n(x)| = \left|\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}\right| = \left|\frac{\cos\left(\theta x + \frac{n+1}{2}\pi\right)x^{n+1}}{(n+1)!}\right|$$

$$\le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

性质 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$，$\sin x$ 等于其泰勒级数。即

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m)!}x^{2m} + \cdots$$

其中 $x \in (-\infty, \infty)$。

证明

1. 只需证明对任意 x，成立 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$。
2. 由泰勒中值定理 2，

$$|R_n(x)| = \left|\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}\right| = \left|\frac{\cos\left(\theta x + \frac{n+1}{2}\pi\right)x^{n+1}}{(n+1)!}\right|$$

$$\leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$$

性质 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$，$\sin x$ 等于其泰勒级数。即

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m)!}x^{2m} + \cdots$$

其中 $x \in (-\infty, \infty)$。

证明

1. 只需证明对任意 x，成立 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$。
2. 由泰勒中值定理 2，

$$|R_n(x)| = \left| \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) x^{n+1} \right| = \left| \frac{\cos\left(\theta x + \frac{n+1}{2}\pi\right) x^{n+1}}{(n+1)!} \right|$$

$$\le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$$

（已知级数 $\sum \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ 收敛，所以一般项 $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$）

- 至此，我们知道 e^x，$\sin x$，$\cos x$ 以及 $\frac{1}{1+x}$ 是等于其泰勒级数，即

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots, x \in (-\infty, \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, x \in (-1, 1)$$

- 至此，我们知道 e^x，$\sin x$，$\cos x$ 以及 $\frac{1}{1+x}$ 是等于其泰勒级数，即

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots, x \in (-\infty, \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, x \in (-1, 1)$$

- 利用上述结果，及逐项积分公式，可进一步求出

$$\ln(1+x), \quad \arctan x$$

的幂级数展开。

性质 成立

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1].$$

性质 成立

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $(-1, 1]$，故上式至多对 $x \in (-1, 1]$ 成立。

性质 成立

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $(-1, 1]$，故上式至多对 $x \in (-1, 1]$ 成立。

2.

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt$$

性质 成立

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+\cdots,\quad x\in(-1,1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $(-1,1]$，故上式至多对 $x\in(-1,1]$ 成立。

2.

$$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{1}{1+t}dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n dt$$

性质 成立

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $(-1, 1]$，故上式至多对 $x \in (-1, 1]$ 成立。

2.

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^n dt$$

性质 成立

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+\cdots,\quad x\in(-1,1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $(-1, 1]$，故上式至多对 $x\in(-1, 1]$ 成立。

2.

$$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{1}{1+t}dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^n dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}x^{n+1}$$

性质 成立

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+\cdots,\quad x\in(-1,\,1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $(-1,\,1]$，故上式至多对 $x\in(-1,\,1]$ 成立。

2.

$$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{1}{1+t}dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^n dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$$

性质 成立

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+\cdots,\quad x\in(-1,1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $(-1,1]$，故上式至多对 $x\in(-1,1]$ 成立。

2. 当 $x\in(-1,1)$ 时，利用逐项积分可得

$$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{1}{1+t}dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^n dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$$

性质 成立

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+\cdots,\quad x\in(-1,1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $(-1,1]$，故上式至多对 $x\in(-1,1]$ 成立。

2. 当 $x\in(-1,1)$ 时，利用逐项积分可得

$$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{1}{1+t}dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^n dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$$

3. 注意到 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ 收敛域是 $(-1,1]$，由连续性，当 $x=1$ 时也成立

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n.$$

)

性质 成立
$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+\cdots,\quad x\in(-1,1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $(-1, 1]$，故上式至多对 $x\in(-1, 1]$ 成立。

2. 当 $x\in(-1, 1)$ 时，利用逐项积分可得
$$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{1}{1+t}dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^n dt$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$$

3. 注意到 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ 收敛域是 $(-1, 1]$，由连续性，当 $x=1$ 时也成立
$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n.$$

（这是 $f(1)=$ $=S(1)$）

性质 成立

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+\cdots,\quad x\in(-1,1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $(-1,1]$，故上式至多对 $x\in(-1,1]$ 成立。

2. 当 $x\in(-1,1)$ 时，利用逐项积分可得

$$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{1}{1+t}dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nt^ndt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^ndt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$$

3. 注意到 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ 收敛域是 $(-1,1]$，由连续性，当 $x=1$ 时也成立

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n.$$

（这是 $f(1)=\lim_{x\to1^-}\ln(1+x)$ $=S(1)$）

暨南大学 JINAN UNIVERSITY

性质 成立

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+\cdots,\quad x\in(-1,1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $(-1,1]$，故上式至多对 $x\in(-1,1]$ 成立。

2. 当 $x\in(-1,1)$ 时，利用逐项积分可得

$$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{1}{1+t}dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^n dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$$

3. 注意到 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ 收敛域是 $(-1,1]$，由连续性，当 $x=1$ 时也成立

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n.$$

（这是 $f(1)=\lim\limits_{x\to1^-}\ln(1+x)$　　$\lim\limits_{x\to1^-}S(x)=S(1)$）

性质 成立

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+\cdots,\quad x\in(-1,1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $(-1,1]$，故上式至多对 $x\in(-1,1]$ 成立。

2. 当 $x\in(-1,1)$ 时，利用逐项积分可得

$$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{1}{1+t}dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^n dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$$

3. 注意到 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ 收敛域是 $(-1,1]$，由连续性，当 $x=1$ 时也成立

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n.$$

（这是 $f(1)=\lim_{x\to1^-}\ln(1+x)\quad\lim_{x\to1^-}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=\lim_{x\to1^-}S(x)=S(1)$）

性质 成立

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+\cdots,\quad x\in(-1,1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $(-1, 1]$，故上式至多对 $x\in(-1, 1]$ 成立。

2. 当 $x\in(-1, 1)$ 时，利用逐项积分可得

$$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{1}{1+t}dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^n dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$$

3. 注意到 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ 收敛域是 $(-1, 1]$，由连续性，当 $x=1$ 时也成立

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n.$$

（这是 $f(1)=\lim_{x\to1^-}\ln(1+x)=\lim_{x\to1^-}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=\lim_{x\to1^-}S(x)=S(1)$）

性质 成立

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots, x \in [-1, 1].$$

性质 成立

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots, x \in [-1, 1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $[-1, 1]$，故上式至多对 $x \in [-1, 1]$ 成立。

性质 成立

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots, x \in [-1, 1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $[-1, 1]$，故上式至多对 $x \in [-1, 1]$ 成立。

2.

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$$

性质 成立

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} + \cdots, x \in [-1, 1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $[-1, 1]$，故上式至多对 $x \in [-1, 1]$ 成立。

2.

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt$$

性质 成立

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} + \cdots, x \in [-1, 1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $[-1, 1]$，故上式至多对 $x \in [-1, 1]$ 成立。

2.

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt$$

性质 成立

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots, x \in [-1, 1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $[-1, 1]$，故上式至多对 $x \in [-1, 1]$ 成立。

2.

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$$

性质 成立
$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots, x \in [-1, 1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $[-1, 1]$，故上式至多对 $x \in [-1, 1]$ 成立。

2. 当 $x \in (-1, 1)$ 时，利用逐项积分可得
$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^{2n} dt$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$$

性质 成立

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots, x \in [-1, 1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $[-1, 1]$，故上式至多对 $x \in [-1, 1]$ 成立。

2. 当 $x \in (-1, 1)$ 时，利用逐项积分可得

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^{2n} dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$$

3. 注意到 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ 收敛域是 $[-1, 1]$, 由连续性, 当 $x = \pm 1$ 时也有

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1}.$$

性质 成立

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots, x \in [-1, 1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $[-1, 1]$，故上式至多对 $x \in [-1, 1]$ 成立。

2. 当 $x \in (-1, 1)$ 时，利用逐项积分可得

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^{2n}dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$$

3. 注意到 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ 收敛域是 $[-1, 1]$, 由连续性, 当 $x = \pm 1$ 时也有

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1}.$$

（如$f(1) =$ $= S(1)$）

性质 成立

$$\arctan x = x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}+\cdots, x\in[-1,1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $[-1, 1]$，故上式至多对 $x\in[-1, 1]$ 成立。

2. 当 $x\in(-1, 1)$ 时，利用逐项积分可得

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^{2n}dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$$

3. 注意到 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ 收敛域是 $[-1, 1]$, 由连续性, 当 $x=\pm1$ 时也有

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}.$$

（如 $f(1)=\lim\limits_{x\to1^-}\arctan x \qquad = S(1)$）

性质 成立

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots, x \in [-1, 1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $[-1, 1]$，故上式至多对 $x \in [-1, 1]$ 成立。

2. 当 $x \in (-1, 1)$ 时，利用逐项积分可得

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$$

3. 注意到 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ 收敛域是 $[-1, 1]$, 由连续性, 当 $x = \pm 1$ 时也有

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}.$$

（如 $f(1) = \lim\limits_{x \to 1^-} \arctan x$ $\lim\limits_{x \to 1^-} S(x) = S(1)$）

性质 成立
$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots, x \in [-1, 1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $[-1, 1]$，故上式至多对 $x \in [-1, 1]$ 成立。

2. 当 $x \in (-1, 1)$ 时，利用逐项积分可得
$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^{2n}dt$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$$

3. 注意到 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ 收敛域是 $[-1, 1]$, 由连续性, 当 $x = \pm 1$ 时也有
$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1}.$$

（如 $f(1) = \lim_{x \to 1^-} \arctan x \quad \lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} = \lim_{x \to 1^-} S(x) = S(1)$）

性质 成立

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots, x \in [-1, 1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $[-1, 1]$，故上式至多对 $x \in [-1, 1]$ 成立。

2. 当 $x \in (-1, 1)$ 时，利用逐项积分可得

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^{2n}dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$$

3. 注意到 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ 收敛域是 $[-1, 1]$, 由连续性, 当 $x = \pm 1$ 时也有

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1}.$$

（如 $f(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} \arctan x = \lim\limits_{x\to 1^-} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} = \lim\limits_{x\to 1^-} S(x) = S(1)$）

性质 成立

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots, \quad x \in [-1, 1]$$

性质 成立

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} + \cdots, \quad x \in [-1, 1]$$

注 取 $x = 1$，则得到

性质 成立

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots, \quad x \in [-1, 1]$$

注 取 $x = 1$，则得到

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

- 至此，得出如下常用函数的幂级数展开式：

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots, \ x \in (-\infty, \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots, \ x \in (-\infty, \infty)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, \ x \in (-1, 1)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1]$$

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots, \ x \in [-1, 1]$$

- 至此，得出如下常用函数的幂级数展开式：

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots, \ x \in (-\infty, \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots, \ x \in (-\infty, \infty)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, \ x \in (-1, 1)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1]$$

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots, \ x \in [-1, 1]$$

- 用上述结果, 及逐项求导、积分公式, 可求更多函数的泰勒级数展开

例 1 把函数 $f(x) = (1 - x)\ln(1 + x)$ 展开成 x 的幂级数。

例 1 把函数 $f(x)=(1-x)\ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数。

解 利用

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+\cdots,\quad x\in(-1,1].$$

例 1 把函数 $f(x)=(1-x)\ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数。

解 利用

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+\cdots,\quad x\in(-1,1].$$

所以当 $x\in(-1,1]$ 时,

$$(1-x)\ln(1+x)=(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n$$

例 1 把函数 $f(x)=(1-x)\ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数。

解 利用

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+\cdots,\quad x\in(-1,1].$$

所以当 $x\in(-1,1]$ 时,

$$\begin{aligned}(1-x)\ln(1+x)&=(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^{n+1}\end{aligned}$$

例 1 把函数 $f(x)=(1-x)\ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数。

解 利用

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+\cdots,\quad x\in(-1,1].$$

所以当 $x\in(-1,1]$ 时,

$$(1-x)\ln(1+x)=(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^{n+1}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-2}\frac{1}{n-1}x^n$$

例 1 把函数 $f(x) = (1-x)\ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数。

解 利用

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1].$$

所以当 $x \in (-1, 1]$ 时,

$$(1-x)\ln(1+x) = (1-x)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^{n+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n - \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-2}\frac{1}{n-1}x^n$$

例 1 把函数 $f(x)=(1-x)\ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数。

解 利用

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+\cdots,\quad x\in(-1,1].$$

所以当 $x\in(-1,1]$ 时，

$$\begin{aligned}(1-x)\ln(1+x)&=(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^{n+1}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n-\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-2}\frac{1}{n-1}x^n\\&=x+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n\end{aligned}$$

例 1 把函数 $f(x)=(1-x)\ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数。

解 利用

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+\cdots,\quad x\in(-1,1].$$

所以当 $x\in(-1,1]$ 时,

$$\begin{aligned}(1-x)\ln(1+x)&=(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^{n+1}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n-\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-2}\frac{1}{n-1}x^n\\&=x+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n-\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-2}\frac{1}{n-1}x^n\end{aligned}$$

例 1 把函数 $f(x)=(1-x)\ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数。

解 利用

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+\cdots,\quad x\in(-1,1].$$

所以当 $x\in(-1,1]$ 时,

$$\begin{aligned}(1-x)\ln(1+x)&=(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^{n+1}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n-\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-2}\frac{1}{n-1}x^n\\&=x+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n-\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-2}\frac{1}{n-1}x^n\\&=x+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n}-\frac{(-1)^n}{n-1}\right)x^n\end{aligned}$$

例 2 把函数 $f(x)=\cos^2 x$ 展开成 x 的幂级数。

例 2 把函数 $f(x)=\cos^2 x$ 展开成 x 的幂级数。

解 利用

$$\cos t = 1-\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{4!}t^4-\frac{1}{6!}t^6+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}t^{2n}+\cdots,\ t\in(-\infty,\infty)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x$$

例 2 把函数 $f(x)=\cos^2 x$ 展开成 x 的幂级数。

解 利用

$$\cos t = 1-\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{4!}t^4-\frac{1}{6!}t^6+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}t^{2n}+\cdots,\ t\in(-\infty,\infty)$$

所以当 $x\in(-\infty,\infty)$ 时,

$$\begin{aligned}\cos^2 x &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}(2x)^{2n}\end{aligned}$$

例 2 把函数 $f(x)=\cos^2 x$ 展开成 x 的幂级数。

解 利用

$$\cos t = 1-\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{4!}t^4-\frac{1}{6!}t^6+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}t^{2n}+\cdots,\ t\in(-\infty,\infty)$$

所以当 $x\in(-\infty,\infty)$ 时，

$$\begin{aligned}\cos^2 x &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}(2x)^{2n}\\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!}x^{2n}\end{aligned}$$

例 2 把函数 $f(x)=\cos^2 x$ 展开成 x 的幂级数。

解 利用

$$\cos t = 1-\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{4!}t^4-\frac{1}{6!}t^6+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}t^{2n}+\cdots,\ t\in(-\infty,\infty)$$

所以当 $x\in(-\infty,\infty)$ 时,

$$\begin{aligned}\cos^2 x &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}(2x)^{2n}\\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!}x^{2n}\\ &= 1+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!}x^{2n}\end{aligned}$$

例 3 把函数 $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数。

例 3 把函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数。

解 1. 注意到 $\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$.

例 3 把函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数。

解 1. 注意到 $\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$.

2. 利用 $\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+t^3+\cdots+t^n+\cdots,\ t\in(-1,1)$

将 $\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x+2}$ 分别展开成 $(x+4)$ 的幂级数：

例 3 把函数 $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数。

解 1. 注意到 $\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$.

2. 利用 $\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \cdots + t^n + \cdots,\ t \in (-1, 1)$

将 $\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x+2}$ 分别展开成 $(x+4)$ 的幂级数：令 $t = x + 4$，则

* $$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{t-3}$$

例 3 把函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数。

解 1. 注意到 $\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$.

2. 利用 $\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+t^3+\cdots+t^n+\cdots,\ t\in(-1,1)$

将 $\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x+2}$ 分别展开成 $(x+4)$ 的幂级数：令 $t=x+4$，则

$$*\quad \frac{1}{x+1}=\frac{1}{t-3}=\frac{1}{-3}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{3}}$$

例 3 把函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数。

解 1. 注意到 $\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$.

2. 利用 $\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+t^3+\cdots+t^n+\cdots,\ t\in(-1,1)$

将 $\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x+2}$ 分别展开成 $(x+4)$ 的幂级数：令 $t=x+4$，则

$$* \quad \frac{1}{x+1}=\frac{1}{t-3}=\frac{1}{-3}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{3^n}$$

例 3 把函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数。

解 1. 注意到 $\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$.

2. 利用 $\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+t^3+\cdots+t^n+\cdots,\ t\in(-1,1)$

将 $\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x+2}$ 分别展开成 $(x+4)$ 的幂级数：令 $t=x+4$，则

* $$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{t-3}=\frac{1}{-3}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{3^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{3^{n+1}}$$

例 3 把函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数。

解 1. 注意到 $\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$.

2. 利用 $\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+t^3+\cdots+t^n+\cdots,\ t\in(-1,1)$

将 $\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x+2}$ 分别展开成 $(x+4)$ 的幂级数：令 $t=x+4$，则

* $$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{t-3}=\frac{1}{-3}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{3^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{3^{n+1}}$$

其中 $\left|\frac{t}{3}\right|<1$

例 3 把函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数。

解 1. 注意到 $\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$.

2. 利用 $\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+t^3+\cdots+t^n+\cdots,\ t\in(-1,1)$

将 $\frac{1}{x+1},\frac{1}{x+2}$ 分别展开成 $(x+4)$ 的幂级数：令 $t=x+4$，则

$$* \quad \frac{1}{x+1}=\frac{1}{t-3}=\frac{1}{-3}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{3^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{3^{n+1}}$$

其中 $|\frac{x+4}{3}|=|\frac{t}{3}|<1$

例 3 把函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数。

解 1. 注意到 $\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$.

2. 利用 $\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+t^3+\cdots+t^n+\cdots,\ t\in(-1,1)$

将 $\frac{1}{x+1},\frac{1}{x+2}$ 分别展开成 $(x+4)$ 的幂级数：令 $t=x+4$，则

$$* \quad \frac{1}{x+1}=\frac{1}{t-3}=\frac{1}{-3}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{3^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{3^{n+1}}$$

其中 $|\frac{x+4}{3}|=|\frac{t}{3}|<1$，即 $-7<x<-1$。

例 3 把函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数。

解 1. 注意到 $\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$.

2. 利用 $\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+t^3+\cdots+t^n+\cdots,\ t\in(-1,1)$

将 $\frac{1}{x+1}$, $\frac{1}{x+2}$ 分别展开成 $(x+4)$ 的幂级数：令 $t=x+4$，则

* $$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{t-3}=\frac{1}{-3}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{3^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{3^{n+1}}$$

其中 $|\frac{x+4}{3}|=|\frac{t}{3}|<1$，即 $-7<x<-1$。

* $$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{t-2}$$

例 3 把函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数。

解 1. 注意到 $\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$.

2. 利用 $\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+t^3+\cdots+t^n+\cdots,\ t\in(-1,1)$

将 $\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x+2}$ 分别展开成 $(x+4)$ 的幂级数：令 $t=x+4$，则

* $$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{t-3}=\frac{1}{-3}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{3^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{3^{n+1}}$$

其中 $|\frac{x+4}{3}|=|\frac{t}{3}|<1$，即 $-7<x<-1$。

* $$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{t-2}=\frac{1}{-2}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{2}}$$

例 3 把函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数。

解 1. 注意到 $\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$.

2. 利用 $\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+t^3+\cdots+t^n+\cdots,\ t\in(-1,1)$

将 $\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x+2}$ 分别展开成 $(x+4)$ 的幂级数：令 $t=x+4$，则

* $$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{t-3}=\frac{1}{-3}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{3^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{3^{n+1}}$$

其中 $|\frac{x+4}{3}|=|\frac{t}{3}|<1$，即 $-7<x<-1$。

* $$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{t-2}=\frac{1}{-2}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{2^n}$$

例 3 把函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数。

解 1. 注意到 $\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$.

2. 利用 $\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+t^3+\cdots+t^n+\cdots,\ t\in(-1,1)$

将 $\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x+2}$ 分别展开成 $(x+4)$ 的幂级数：令 $t=x+4$，则

$$* \quad \frac{1}{x+1}=\frac{1}{t-3}=\frac{1}{-3}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{3^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{3^{n+1}}$$

其中 $|\frac{x+4}{3}|=|\frac{t}{3}|<1$，即 $-7<x<-1$。

$$* \quad \frac{1}{x+2}=\frac{1}{t-2}=\frac{1}{-2}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{2^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{2^{n+1}}$$

例 3 把函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数。

解 1. 注意到 $\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$.

2. 利用 $\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+t^3+\cdots+t^n+\cdots,\ t\in(-1,1)$

将 $\frac{1}{x+1}$, $\frac{1}{x+2}$ 分别展开成 $(x+4)$ 的幂级数：令 $t=x+4$，则

* $$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{t-3}=\frac{1}{-3}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{3^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{3^{n+1}}$$

其中 $|\frac{x+4}{3}|=|\frac{t}{3}|<1$，即 $-7<x<-1$。

* $$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{t-2}=\frac{1}{-2}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{2^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{2^{n+1}}$$

其中 $|\frac{t}{2}|<1$

例 3 把函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数。

解 1. 注意到 $\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$.

2. 利用 $\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+t^3+\cdots+t^n+\cdots,\ t\in(-1,1)$

将 $\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x+2}$ 分别展开成 $(x+4)$ 的幂级数：令 $t=x+4$，则

* $$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{t-3}=\frac{1}{-3}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{3^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{3^{n+1}}$$

其中 $|\frac{x+4}{3}|=|\frac{t}{3}|<1$，即 $-7<x<-1$。

* $$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{t-2}=\frac{1}{-2}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{2^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{2^{n+1}}$$

其中$|\frac{x+4}{2}|=|\frac{t}{2}|<1$

例 3 把函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数。

解 1. 注意到 $\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$.

2. 利用 $\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+t^3+\cdots+t^n+\cdots,\ t\in(-1,1)$

将 $\frac{1}{x+1},\frac{1}{x+2}$ 分别展开成 $(x+4)$ 的幂级数：令 $t=x+4$，则

$$* \quad \frac{1}{x+1}=\frac{1}{t-3}=\frac{1}{-3}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{3^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{3^{n+1}}$$

其中 $|\frac{x+4}{3}|=|\frac{t}{3}|<1$，即 $-7<x<-1$。

$$* \quad \frac{1}{x+2}=\frac{1}{t-2}=\frac{1}{-2}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{2^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{2^{n+1}}$$

其中 $|\frac{x+4}{2}|=|\frac{t}{2}|<1$，即 $-6<x<-2$。

例 3 把函数 $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数。

解 1. 注意到 $\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$.

2. 利用 $\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \cdots + t^n + \cdots,\ t \in (-1, 1)$

将 $\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x+2}$ 分别展开成 $(x+4)$ 的幂级数：令 $t = x+4$，则

$$* \quad \frac{1}{x+1} = \frac{1}{t-3} = \frac{1}{-3} \cdot \frac{1}{1-\frac{t}{3}} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{3^n} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{3^{n+1}}$$

其中 $|\frac{x+4}{3}| = |\frac{t}{3}| < 1$，即 $-7 < x < -1$。

$$* \quad \frac{1}{x+2} = \frac{1}{t-2} = \frac{1}{-2} \cdot \frac{1}{1-\frac{t}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{2^n} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{2^{n+1}}$$

其中$|\frac{x+4}{2}| = |\frac{t}{2}| < 1$，即 $-6 < x < -2$。

3. 所以 $-6 < x < -2$ 时

例 3 把函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数。

解 1. 注意到 $\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$.

2. 利用 $\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+t^3+\cdots+t^n+\cdots,\ t\in(-1,1)$

将 $\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x+2}$ 分别展开成 $(x+4)$ 的幂级数：令 $t=x+4$，则

$$* \quad \frac{1}{x+1}=\frac{1}{t-3}=\frac{1}{-3}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{3^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{3^{n+1}}$$

其中 $|\frac{x+4}{3}|=|\frac{t}{3}|<1$，即 $-7<x<-1$。

$$* \quad \frac{1}{x+2}=\frac{1}{t-2}=\frac{1}{-2}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{2^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{2^{n+1}}$$

其中$|\frac{x+4}{2}|=|\frac{t}{2}|<1$，即 $-6<x<-2$。

3. 所以 $-6<x<-2$ 时

$$\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n.$$