

第 8 章 α : 向量的基本概念

数学系 梁卓滨

2016-2017 学年 II

- 向量的基本概念
 - 向量的线性运算
 - 向量的长度
 - 向量间的夹角
 - 向量的投影
- 向量的坐标表示、计算
 - 计算向量的线性运算、长度、夹角、投影
- 向量的数量积
- 向量的向量积

We are here now...

◆ 向量的基本概念

♣ 向量的坐标表示

♥ 向量的数量积

♠ 向量的向量积

- 具有长度（大小）及方向的物理量

- 具有长度（大小）及方向的物理量：如力、速度等等

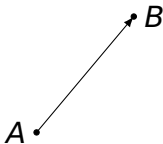
- 具有长度（大小）及方向的物理量：如力、速度等等
- 能够转化成什么数学量，从而进行运算推演？

- 具有长度（大小）及方向的物理量：如力、速度等等
- 能够转化成什么数学量，从而进行运算推演？

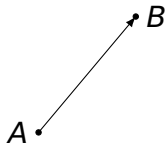
• B

$A \cdot$

- 具有长度（大小）及方向的物理量：如力、速度等等
- 能够转化成什么数学量，从而进行运算推演？

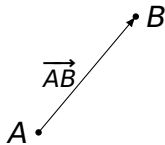


- 具有长度（大小）及方向的物理量：如力、速度等等
- 能够转化成什么数学量，从而进行运算推演？



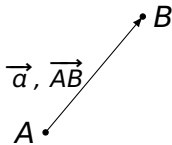
- 向量的定义：“箭头”。

- 具有长度（大小）及方向的物理量：如力、速度等等
- 能够转化成什么数学量，从而进行运算推演？



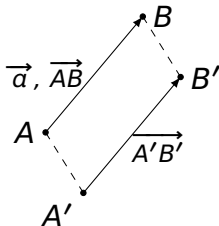
- 向量的定义：“箭头”。向量的表示： \overrightarrow{AB}

- 具有长度（大小）及方向的物理量：如力、速度等等
- 能够转化成什么数学量，从而进行运算推演？



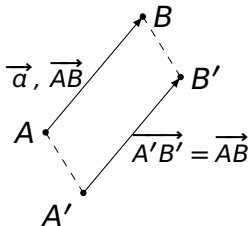
- 向量的定义：“箭头”。向量的表示： \overrightarrow{AB} , \vec{a}

- 具有**长度**（**大小**）及**方向**的物理量：如力、速度等等
- 能够转化成什么数学量，从而进行运算推演？



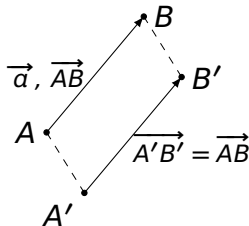
- **向量**的定义：“箭头”。向量的表示： \overrightarrow{AB} , \vec{a}

- 具有**长度**（**大小**）及**方向**的物理量：如力、速度等等
- 能够转化成什么数学量，从而进行运算推演？



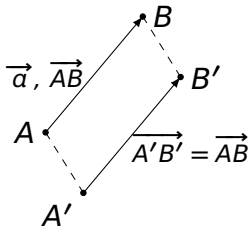
- **向量**的定义：“箭头”。向量的表示： \overrightarrow{AB} , \vec{a}
- **注** 向量与位置无关：通过平移能够重合的“箭头”，视为同一向量。

- 具有**长度**（**大小**）及**方向**的物理量：如力、速度等等
- 能够转化成什么数学量，从而进行运算推演？



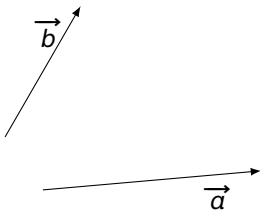
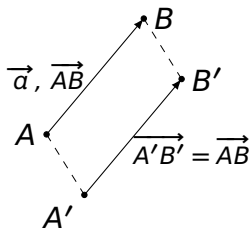
- **向量**的定义：“箭头”。向量的表示： \overrightarrow{AB} , \vec{a}
- **注** 向量与位置无关：通过平移能够重合的“箭头”，视为同一向量。
- **零向量**： $\vec{0}$ 。

- 具有**长度**（**大小**）及**方向**的物理量：如力、速度等等
- 能够转化成什么数学量，从而进行运算推演？



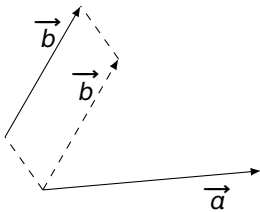
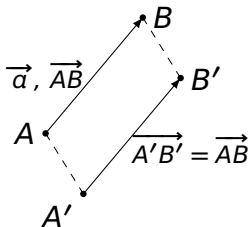
- **向量**的定义：“箭头”。向量的表示： \overrightarrow{AB} , \vec{a}
- **注** 向量与位置无关：通过平移能够重合的“箭头”，视为同一向量。
- **零向量**： $\vec{0}$ 。**单位向量** \vec{a} ： $|\vec{a}| = 1$ 。

- 具有**长度**（大小）及**方向**的物理量：如力、速度等等
- 能够转化成什么数学量，从而进行运算推演？



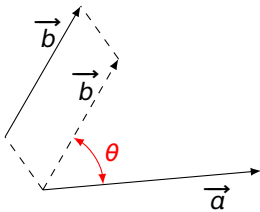
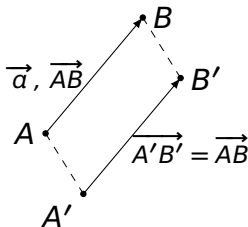
- **向量**的定义：“箭头”。向量的表示： \overrightarrow{AB} , \vec{a}
- **注** 向量与位置无关：通过平移能够重合的“箭头”，视为同一向量。
- **零向量**： $\vec{0}$ 。**单位向量** \vec{a} ： $|\vec{a}| = 1$ 。
- 向量的**夹角** θ ：

- 具有**长度**（大小）及**方向**的物理量：如力、速度等等
- 能够转化成什么数学量，从而进行运算推演？



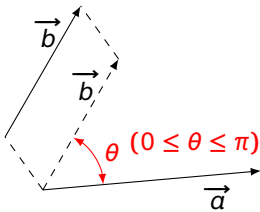
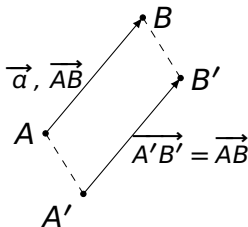
- **向量**的定义：“箭头”。向量的表示： \overrightarrow{AB} , \vec{a}
- **注** 向量与位置无关：通过平移能够重合的“箭头”，视为同一向量。
- **零向量**： $\vec{0}$ 。**单位向量** \vec{a} ： $|\vec{a}| = 1$ 。
- 向量的**夹角** θ ：

- 具有**长度**（**大小**）及**方向**的物理量：如力、速度等等
- 能够转化成什么数学量，从而进行运算推演？



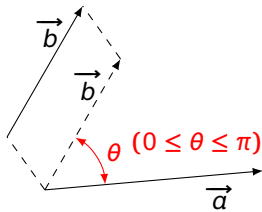
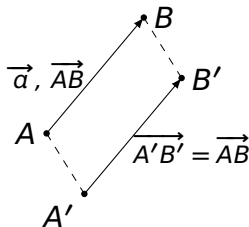
- **向量**的定义：“箭头”。向量的表示： \overrightarrow{AB} , \vec{a}
- **注** 向量与位置无关：通过平移能够重合的“箭头”，视为同一向量。
- **零向量**： $\vec{0}$ 。**单位向量** \vec{a} ： $|\vec{a}| = 1$ 。
- 向量的**夹角** θ ：

- 具有**长度**（**大小**）及**方向**的物理量：如力、速度等等
- 能够转化成什么数学量，从而进行运算推演？



- **向量**的定义：“箭头”。向量的表示： \overrightarrow{AB} , \vec{a}
- **注** 向量与位置无关：通过平移能够重合的“箭头”，视为同一向量。
- **零向量**： $\vec{0}$ 。**单位向量** \vec{a} ： $|\vec{a}| = 1$ 。
- 向量的**夹角** θ ：

- 具有**长度**（**大小**）及**方向**的物理量：如力、速度等等
- 能够转化成什么数学量，从而进行运算推演？



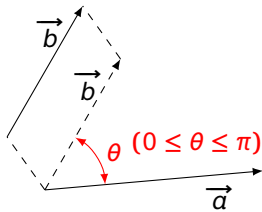
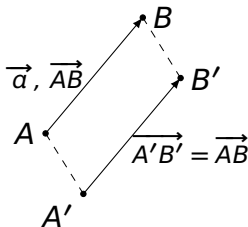
- **向量**的定义：“箭头”。向量的表示： \overrightarrow{AB} , \vec{a}
- **注** 向量与位置无关：通过平移能够重合的“箭头”，视为同一向量。
- **零向量**： $\vec{0}$ 。**单位向量** \vec{a} ： $|\vec{a}| = 1$ 。

- 向量的**夹角** θ : $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\theta = 0$$

$$\theta = \pi$$

- 具有**长度**（**大小**）及**方向**的物理量：如力、速度等等
- 能够转化成什么数学量，从而进行运算推演？

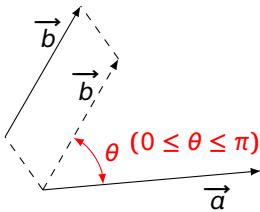
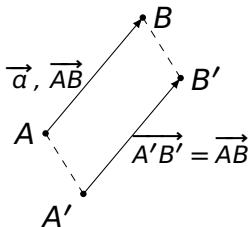


- **向量**的定义：“箭头”。向量的表示： \overrightarrow{AB} , \vec{a}
- **注** 向量与位置无关：通过平移能够重合的“箭头”，视为同一向量。
- **零向量**： $\vec{0}$ 。**单位向量** \vec{a} ： $|\vec{a}| = 1$ 。
- 向量的**夹角** θ ： $\theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

$$\theta = 0$$

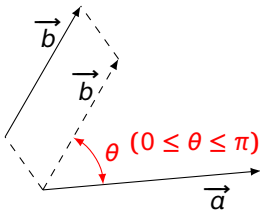
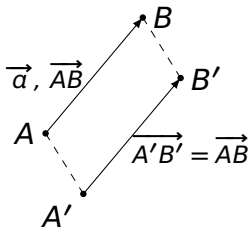
$$\theta = \pi$$

- 具有**长度**（**大小**）及**方向**的物理量：如力、速度等等
- 能够转化成什么数学量，从而进行运算推演？



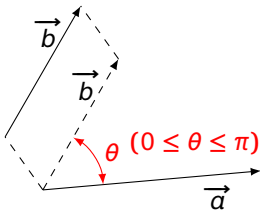
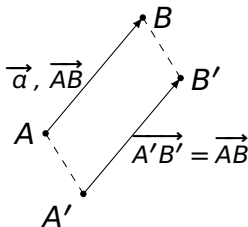
- **向量**的定义：“箭头”。向量的表示： \overrightarrow{AB} , \vec{a}
- **注** 向量与位置无关：通过平移能够重合的“箭头”，视为同一向量。
- **零向量**： $\vec{0}$ 。**单位向量** \vec{a} ： $|\vec{a}| = 1$ 。
- 向量的**夹角** θ ： $\theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$
 $\theta = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ 同向
 $\theta = \pi$

- 具有**长度**（**大小**）及**方向**的物理量：如力、速度等等
- 能够转化成什么数学量，从而进行运算推演？



- **向量**的定义：“箭头”。向量的表示： \overrightarrow{AB} , \vec{a}
- **注** 向量与位置无关：通过平移能够重合的“箭头”，视为同一向量。
- **零向量**： $\vec{0}$ 。**单位向量** \vec{a} ： $|\vec{a}| = 1$ 。
- 向量的**夹角** θ ： $\theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$
 $\theta = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ 同向
 $\theta = \pi \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ 反向

- 具有**长度**（**大小**）及**方向**的物理量：如力、速度等等
- 能够转化成什么数学量，从而进行运算推演？



- **向量**的定义：“箭头”。向量的表示： \overrightarrow{AB} , \vec{a}
- **注** 向量与位置无关：通过平移能够重合的“箭头”，视为同一向量。
- **零向量**： $\vec{0}$ 。**单位向量** \vec{a} ： $|\vec{a}| = 1$ 。
- 向量的**夹角** θ ： $\theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

$$\left. \begin{array}{l} \theta = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b} \text{ 同向} \\ \theta = \pi \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b} \text{ 反向} \end{array} \right\} \vec{a} \parallel \vec{b}$$

向量的线性运算：加法、数乘

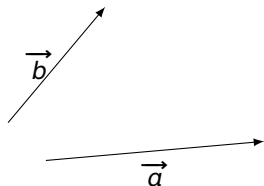
加法： $\vec{a} + \vec{b}$

数乘： $\lambda \vec{a}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)

向量的线性运算：加法、数乘

加法： $\vec{a} + \vec{b}$

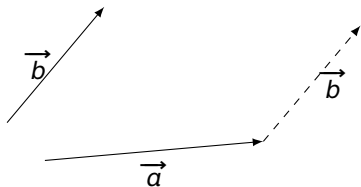
数乘： $\lambda \vec{a}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)



向量的线性运算：加法、数乘

加法： $\vec{a} + \vec{b}$

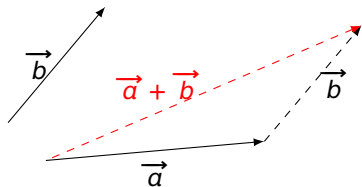
数乘： $\lambda \vec{a}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)



向量的线性运算：加法、数乘

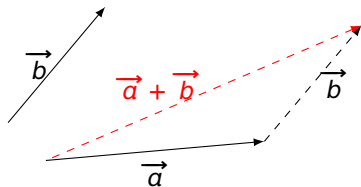
加法： $\vec{a} + \vec{b}$

数乘： $\lambda \vec{a}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)



向量的线性运算：加法、数乘

加法： $\vec{a} + \vec{b}$



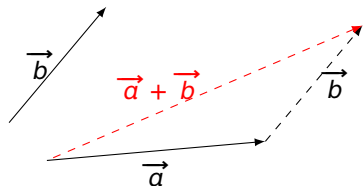
数乘： $\lambda \vec{a}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)

- $\lambda \vec{a}$ 的方向：

- $\lambda \vec{a}$ 的长度：

向量的线性运算：加法、数乘

加法： $\vec{a} + \vec{b}$



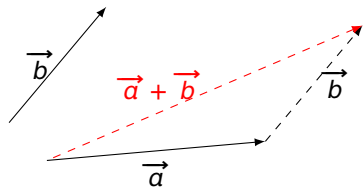
数乘： $\lambda \vec{a}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)

- $\lambda \vec{a}$ 的方向：

- $\lambda \vec{a}$ 的长度： $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$

向量的线性运算：加法、数乘

加法： $\vec{a} + \vec{b}$



数乘： $\lambda \vec{a}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)

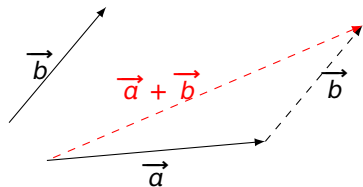
- $\lambda \vec{a}$ 的方向：

$$\begin{cases} \lambda \geq 0, \\ \lambda < 0, \end{cases}$$

- $\lambda \vec{a}$ 的长度： $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$

向量的线性运算：加法、数乘

加法： $\vec{a} + \vec{b}$

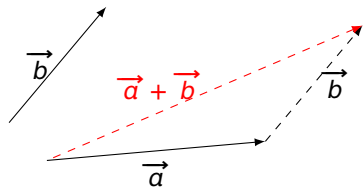


数乘： $\lambda \vec{a}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)

- $\lambda \vec{a}$ 的方向：
$$\begin{cases} \lambda \geq 0, & \lambda \vec{a} \text{ 与 } \vec{a} \text{ 同向} \\ \lambda < 0, & \end{cases}$$
- $\lambda \vec{a}$ 的长度： $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$

向量的线性运算：加法、数乘

加法： $\vec{a} + \vec{b}$



数乘： $\lambda \vec{a}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)

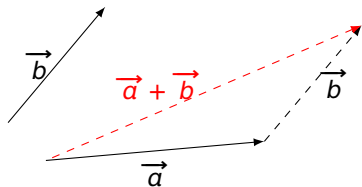
- $\lambda \vec{a}$ 的方向：

$$\begin{cases} \lambda \geq 0, & \lambda \vec{a} \text{ 与 } \vec{a} \text{ 同向} \\ \lambda < 0, & \lambda \vec{a} \text{ 与 } \vec{a} \text{ 反向} \end{cases}$$

- $\lambda \vec{a}$ 的长度： $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$

向量的线性运算：加法、数乘

加法： $\vec{a} + \vec{b}$

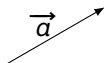


数乘： $\lambda \vec{a}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)

• $\lambda \vec{a}$ 的方向：

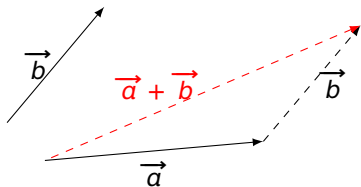
$$\begin{cases} \lambda \geq 0, & \lambda \vec{a} \text{ 与 } \vec{a} \text{ 同向} \\ \lambda < 0, & \lambda \vec{a} \text{ 与 } \vec{a} \text{ 反向} \end{cases}$$

• $\lambda \vec{a}$ 的长度： $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$



向量的线性运算：加法、数乘

加法： $\vec{a} + \vec{b}$

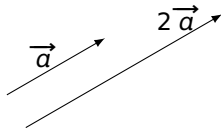


数乘： $\lambda \vec{a}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)

• $\lambda \vec{a}$ 的方向：

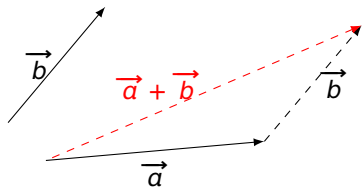
$$\begin{cases} \lambda \geq 0, & \lambda \vec{a} \text{ 与 } \vec{a} \text{ 同向} \\ \lambda < 0, & \lambda \vec{a} \text{ 与 } \vec{a} \text{ 反向} \end{cases}$$

• $\lambda \vec{a}$ 的长度： $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$



向量的线性运算：加法、数乘

加法： $\vec{a} + \vec{b}$

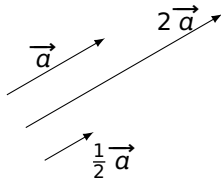


数乘： $\lambda \vec{a}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)

• $\lambda \vec{a}$ 的方向：

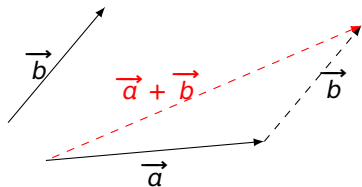
$$\begin{cases} \lambda \geq 0, & \lambda \vec{a} \text{ 与 } \vec{a} \text{ 同向} \\ \lambda < 0, & \lambda \vec{a} \text{ 与 } \vec{a} \text{ 反向} \end{cases}$$

• $\lambda \vec{a}$ 的长度： $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$



向量的线性运算：加法、数乘

加法： $\vec{a} + \vec{b}$

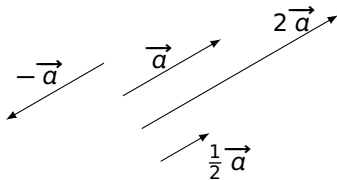


数乘： $\lambda \vec{a}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)

• $\lambda \vec{a}$ 的方向：

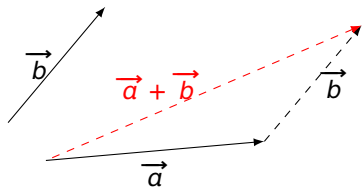
$$\begin{cases} \lambda \geq 0, & \lambda \vec{a} \text{ 与 } \vec{a} \text{ 同向} \\ \lambda < 0, & \lambda \vec{a} \text{ 与 } \vec{a} \text{ 反向} \end{cases}$$

• $\lambda \vec{a}$ 的长度： $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$



向量的线性运算：加法、数乘

加法： $\vec{a} + \vec{b}$

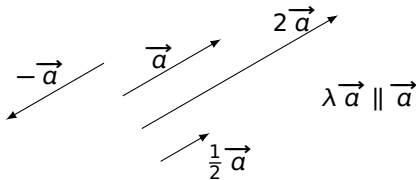


数乘： $\lambda \vec{a}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)

• $\lambda \vec{a}$ 的方向：

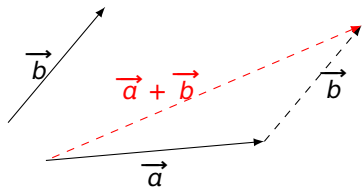
$$\begin{cases} \lambda \geq 0, & \lambda \vec{a} \text{ 与 } \vec{a} \text{ 同向} \\ \lambda < 0, & \lambda \vec{a} \text{ 与 } \vec{a} \text{ 反向} \end{cases}$$

• $\lambda \vec{a}$ 的长度： $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$



向量的线性运算：加法、数乘

加法： $\vec{a} + \vec{b}$



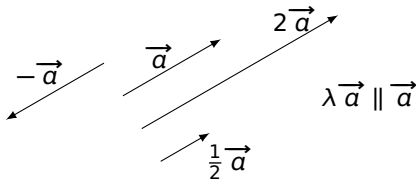
运算律 设为 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 为向量,
 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, 则

数乘： $\lambda \vec{a}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)

• $\lambda \vec{a}$ 的方向：

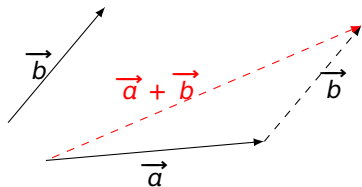
$$\begin{cases} \lambda \geq 0, & \lambda \vec{a} \text{ 与 } \vec{a} \text{ 同向} \\ \lambda < 0, & \lambda \vec{a} \text{ 与 } \vec{a} \text{ 反向} \end{cases}$$

• $\lambda \vec{a}$ 的长度： $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$



向量的线性运算：加法、数乘

加法： $\vec{a} + \vec{b}$



运算律 设为 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 为向量,
 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, 则

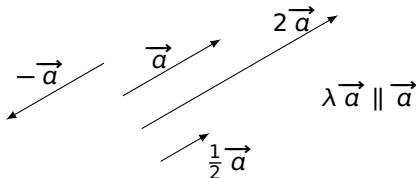
- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a};$

数乘： $\lambda \vec{a}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)

- $\lambda \vec{a}$ 的方向:

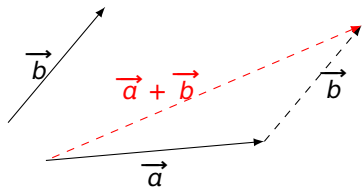
$$\begin{cases} \lambda \geq 0, & \lambda \vec{a} \text{ 与 } \vec{a} \text{ 同向} \\ \lambda < 0, & \lambda \vec{a} \text{ 与 } \vec{a} \text{ 反向} \end{cases}$$

- $\lambda \vec{a}$ 的长度: $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$



向量的线性运算：加法、数乘

加法： $\vec{a} + \vec{b}$



数乘： $\lambda \vec{a}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)

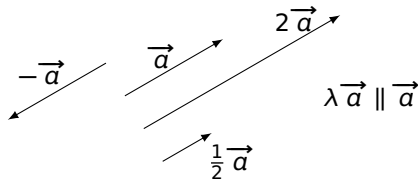
• $\lambda \vec{a}$ 的方向：

$$\begin{cases} \lambda \geq 0, & \lambda \vec{a} \text{ 与 } \vec{a} \text{ 同向} \\ \lambda < 0, & \lambda \vec{a} \text{ 与 } \vec{a} \text{ 反向} \end{cases}$$

• $\lambda \vec{a}$ 的长度： $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$

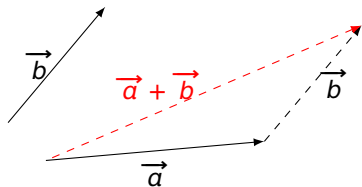
运算律 设为 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 为向量，
 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ，则

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;



向量的线性运算：加法、数乘

加法： $\vec{a} + \vec{b}$



数乘： $\lambda \vec{a}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)

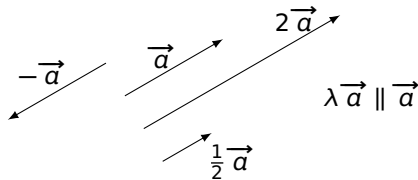
• $\lambda \vec{a}$ 的方向：

$$\begin{cases} \lambda \geq 0, & \lambda \vec{a} \text{ 与 } \vec{a} \text{ 同向} \\ \lambda < 0, & \lambda \vec{a} \text{ 与 } \vec{a} \text{ 反向} \end{cases}$$

• $\lambda \vec{a}$ 的长度： $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$

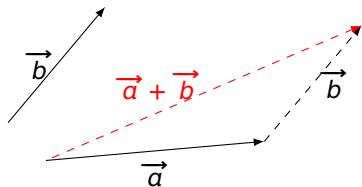
运算律 设为 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 为向量,
 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, 则

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;
- $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$;



向量的线性运算：加法、数乘

加法： $\vec{a} + \vec{b}$



数乘： $\lambda \vec{a}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)

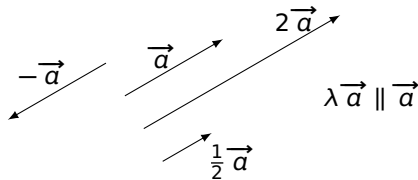
• $\lambda \vec{a}$ 的方向：

$$\begin{cases} \lambda \geq 0, & \lambda \vec{a} \text{ 与 } \vec{a} \text{ 同向} \\ \lambda < 0, & \lambda \vec{a} \text{ 与 } \vec{a} \text{ 反向} \end{cases}$$

• $\lambda \vec{a}$ 的长度： $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$

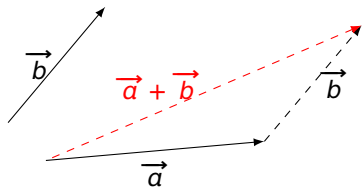
运算律 设为 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 为向量,
 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, 则

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;
- $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$;
- $\mu(\lambda \vec{a}) = (\mu\lambda) \vec{a}$;



向量的线性运算：加法、数乘

加法： $\vec{a} + \vec{b}$



数乘： $\lambda \vec{a}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)

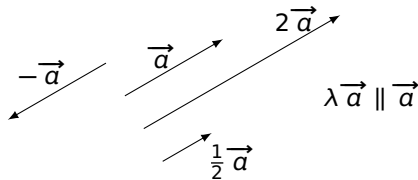
• $\lambda \vec{a}$ 的方向：

$$\begin{cases} \lambda \geq 0, & \lambda \vec{a} \text{ 与 } \vec{a} \text{ 同向} \\ \lambda < 0, & \lambda \vec{a} \text{ 与 } \vec{a} \text{ 反向} \end{cases}$$

• $\lambda \vec{a}$ 的长度： $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$

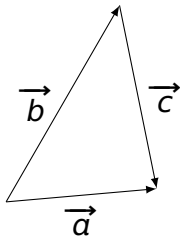
运算律 设为 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 为向量,
 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, 则

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;
- $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$;
- $\mu(\lambda \vec{a}) = (\mu\lambda) \vec{a}$;
- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$; $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$.



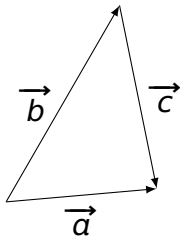
例 如图，用另外两向量表示第三个向量：

- $\vec{a} =$
- $\vec{b} =$
- $\vec{c} =$



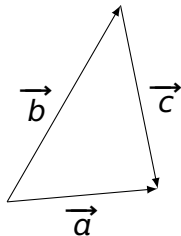
例 如图，用另外两向量表示第三个向量：

- $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$
- $\vec{b} =$
- $\vec{c} =$



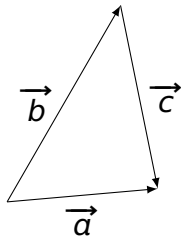
例 如图，用另外两向量表示第三个向量：

- $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$
- $\vec{b} = \vec{a} - \vec{c}$
- $\vec{c} =$



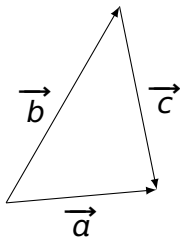
例 如图，用另外两向量表示第三个向量：

- $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$
- $\vec{b} = \vec{a} - \vec{c}$
- $\vec{c} = -\vec{b} + \vec{a}$



例 如图，用另外两向量表示第三个向量：

- $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$
- $\vec{b} = \vec{a} - \vec{c}$
- $\vec{c} = -\vec{b} + \vec{a}$

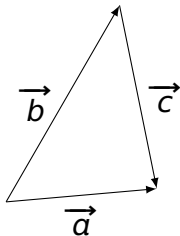


例 验证对任何三点 A, B, C ，总成立

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}, \quad \vec{BA} = -\vec{AB}$$

例 如图，用另外两向量表示第三个向量：

- $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$
- $\vec{b} = \vec{a} - \vec{c}$
- $\vec{c} = -\vec{b} + \vec{a}$



例 验证对任何三点 A, B, C ，总成立

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}, \quad \vec{BA} = -\vec{AB}$$

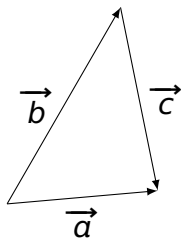
B
•

• C

A •

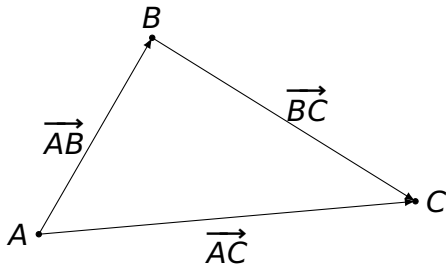
例 如图，用另外两向量表示第三个向量：

- $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$
- $\vec{b} = \vec{a} - \vec{c}$
- $\vec{c} = -\vec{b} + \vec{a}$



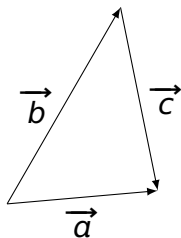
例 验证对任何三点 A, B, C ，总成立

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}, \quad \vec{BA} = -\vec{AB}$$



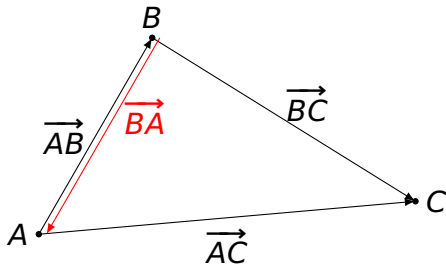
例 如图，用另外两向量表示第三个向量：

- $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$
- $\vec{b} = \vec{a} - \vec{c}$
- $\vec{c} = -\vec{b} + \vec{a}$

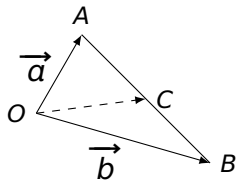


例 验证对任何三点 A, B, C ，总成立

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}, \quad \vec{BA} = -\vec{AB}$$



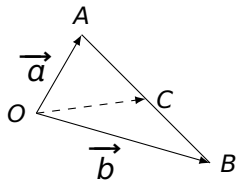
例 如图，设 C 是线段 \overline{AB} 的二等分点，试用 \vec{a}, \vec{b} 表示 \vec{OC}



例 如图, 设 C 是线段 \overline{AB} 的二等分点, 试用 \vec{a}, \vec{b} 表示 \vec{OC}

解

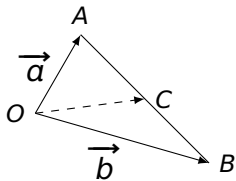
$$\vec{OC} =$$



例 如图, 设 C 是线段 \overline{AB} 的二等分点, 试用 \vec{a}, \vec{b} 表示 \vec{OC}

解

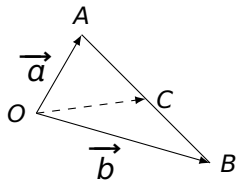
$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC}$$



例 如图, 设 C 是线段 \overline{AB} 的二等分点, 试用 \vec{a}, \vec{b} 表示 \vec{OC}

解

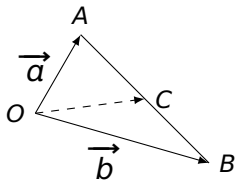
$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{a} +$$



例 如图, 设 C 是线段 \overline{AB} 的二等分点, 试用 \vec{a}, \vec{b} 表示 \vec{OC}

解

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{AB}$$

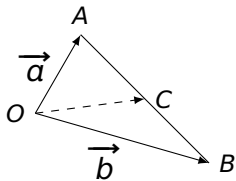


例 如图, 设 C 是线段 \overline{AB} 的二等分点, 试用 \vec{a}, \vec{b} 表示 \vec{OC}

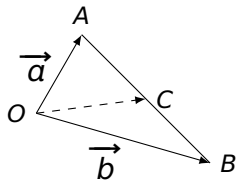
解

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{AB}$$

$$\frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b})$$



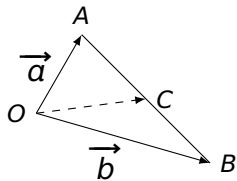
例 如图, 设 C 是线段 \overline{AB} 的二等分点, 试用 \vec{a}, \vec{b} 表示 \vec{OC}



解

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \vec{a} + \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b})$$

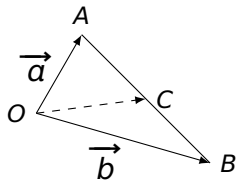
例 如图, 设 C 是线段 \overline{AB} 的二等分点, 试用 \vec{a}, \vec{b} 表示 \vec{OC}



解

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \vec{a} + \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

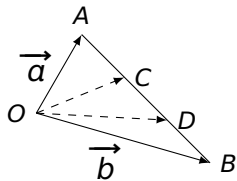
例 如图, 设 C 是线段 \overline{AB} 的二等分点, 试用 \vec{a}, \vec{b} 表示 \vec{OC}



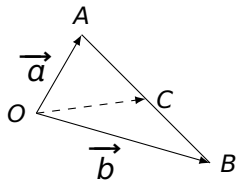
解

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \vec{a} + \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

例 如图, 设 C, D 是线段 \overline{AB} 的三等分点, 试用 \vec{a}, \vec{b} 表示 \vec{OC}, \vec{OD}



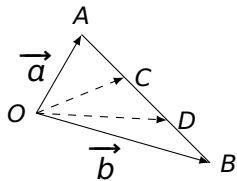
例 如图, 设 C 是线段 \overline{AB} 的二等分点, 试用 \overrightarrow{a} , \overrightarrow{b} 表示 \overrightarrow{OC}



解

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a} + \frac{1}{2}(-\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b}$$

例 如图, 设 C, D 是线段 \overline{AB} 的三等分点, 试用 \overrightarrow{a} , \overrightarrow{b} 表示 \overrightarrow{OC} , \overrightarrow{OD}

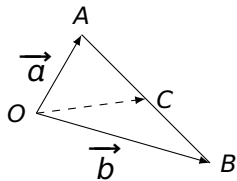


解

$$\overrightarrow{OC} =$$

$$\overrightarrow{OD} =$$

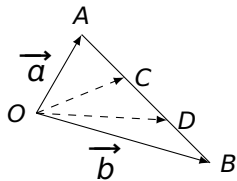
例 如图, 设 C 是线段 \overline{AB} 的二等分点, 试用 \vec{a}, \vec{b} 表示 \vec{OC}



解

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \vec{a} + \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

例 如图, 设 C, D 是线段 \overline{AB} 的三等分点, 试用 \vec{a}, \vec{b} 表示 \vec{OC}, \vec{OD}

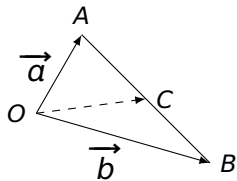


解

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC}$$

$$\vec{OD} =$$

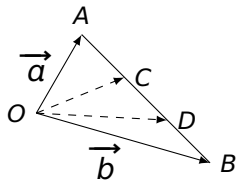
例 如图, 设 C 是线段 \overline{AB} 的二等分点, 试用 \vec{a}, \vec{b} 表示 \vec{OC}



解

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \vec{a} + \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

例 如图, 设 C, D 是线段 \overline{AB} 的三等分点, 试用 \vec{a}, \vec{b} 表示 \vec{OC}, \vec{OD}

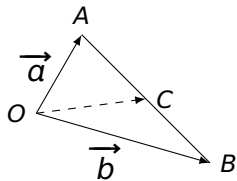


解

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{a} +$$

$$\vec{OD} =$$

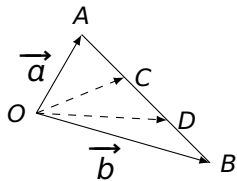
例 如图, 设 C 是线段 \overline{AB} 的二等分点, 试用 \vec{a} , \vec{b} 表示 \vec{OC}



解

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \vec{a} + \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

例 如图, 设 C, D 是线段 \overline{AB} 的三等分点, 试用 \vec{a} , \vec{b} 表示 \vec{OC} , \vec{OD}

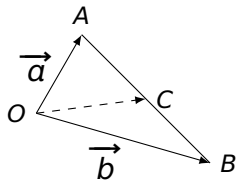


解

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{a} + \frac{1}{3}\vec{AB}$$

$$\vec{OD} =$$

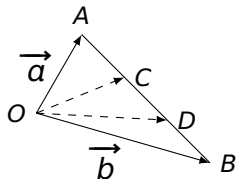
例 如图, 设 C 是线段 \overline{AB} 的二等分点, 试用 \vec{a}, \vec{b} 表示 \vec{OC}



解

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \vec{a} + \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

例 如图, 设 C, D 是线段 \overline{AB} 的三等分点, 试用 \vec{a}, \vec{b} 表示 \vec{OC}, \vec{OD}

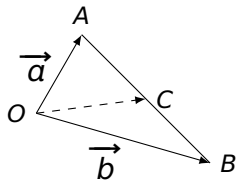


解

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{a} + \frac{1}{3}\vec{AB} \qquad \frac{1}{3}(-\vec{a} + \vec{b})$$

$$\vec{OD} =$$

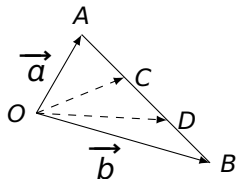
例 如图, 设 C 是线段 \overline{AB} 的二等分点, 试用 \vec{a} , \vec{b} 表示 \vec{OC}



解

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \vec{a} + \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

例 如图, 设 C, D 是线段 \overline{AB} 的三等分点, 试用 \vec{a} , \vec{b} 表示 \vec{OC} , \vec{OD}

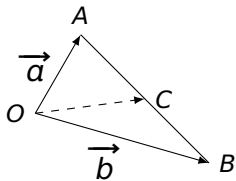


解

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{a} + \frac{1}{3}\vec{AB} = \vec{a} + \frac{1}{3}(-\vec{a} + \vec{b})$$

$$\vec{OD} =$$

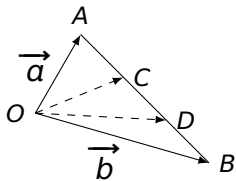
例 如图, 设 C 是线段 \overline{AB} 的二等分点, 试用 \vec{a} , \vec{b} 表示 \vec{OC}



解

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \vec{a} + \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

例 如图, 设 C, D 是线段 \overline{AB} 的三等分点, 试用 \vec{a} , \vec{b} 表示 \vec{OC} , \vec{OD}

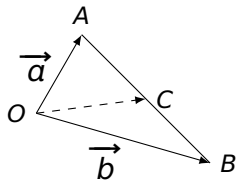


解

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{a} + \frac{1}{3}\vec{AB} = \vec{a} + \frac{1}{3}(-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$$

$$\vec{OD} =$$

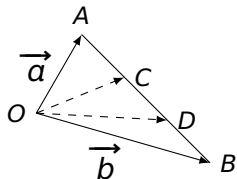
例 如图, 设 C 是线段 \overline{AB} 的二等分点, 试用 \vec{a}, \vec{b} 表示 \vec{OC}



解

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \vec{a} + \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

例 如图, 设 C, D 是线段 \overline{AB} 的三等分点, 试用 \vec{a}, \vec{b} 表示 \vec{OC}, \vec{OD}

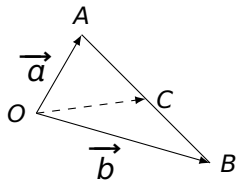


解

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{a} + \frac{1}{3}\vec{AB} = \vec{a} + \frac{1}{3}(-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$$

$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{AD}$$

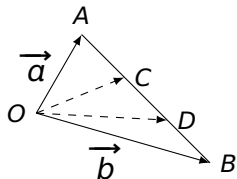
例 如图, 设 C 是线段 \overline{AB} 的二等分点, 试用 \vec{a} , \vec{b} 表示 \vec{OC}



解

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \vec{a} + \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

例 如图, 设 C, D 是线段 \overline{AB} 的三等分点, 试用 \vec{a} , \vec{b} 表示 \vec{OC} , \vec{OD}

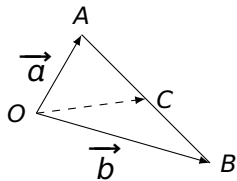


解

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{a} + \frac{1}{3}\vec{AB} = \vec{a} + \frac{1}{3}(-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$$

$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{AD} = \vec{a} +$$

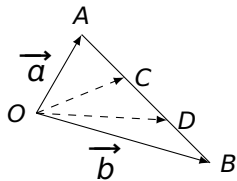
例 如图, 设 C 是线段 \overline{AB} 的二等分点, 试用 \vec{a} , \vec{b} 表示 \vec{OC}



解

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \vec{a} + \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

例 如图, 设 C, D 是线段 \overline{AB} 的三等分点, 试用 \vec{a} , \vec{b} 表示 \vec{OC} , \vec{OD}

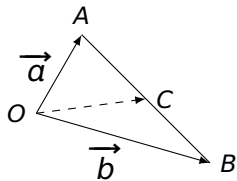


解

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{a} + \frac{1}{3}\vec{AB} = \vec{a} + \frac{1}{3}(-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$$

$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{AD} = \vec{a} + \frac{2}{3}\vec{AB}$$

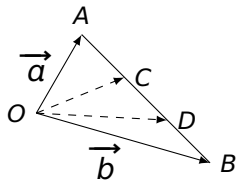
例 如图, 设 C 是线段 \overline{AB} 的二等分点, 试用 \vec{a} , \vec{b} 表示 \vec{OC}



解

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \vec{a} + \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

例 如图, 设 C, D 是线段 \overline{AB} 的三等分点, 试用 \vec{a} , \vec{b} 表示 \vec{OC} , \vec{OD}

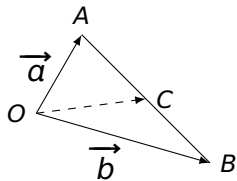


解

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{a} + \frac{1}{3}\vec{AB} = \vec{a} + \frac{1}{3}(-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$$

$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{AD} = \vec{a} + \frac{2}{3}\vec{AB} = \vec{a} + \frac{2}{3}(-\vec{a} + \vec{b})$$

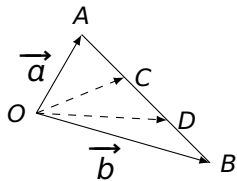
例 如图, 设 C 是线段 \overline{AB} 的二等分点, 试用 \vec{a}, \vec{b} 表示 \vec{OC}



解

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \vec{a} + \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

例 如图, 设 C, D 是线段 \overline{AB} 的三等分点, 试用 \vec{a}, \vec{b} 表示 \vec{OC}, \vec{OD}

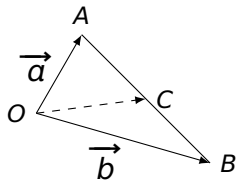


解

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{a} + \frac{1}{3}\vec{AB} = \vec{a} + \frac{1}{3}(-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$$

$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{AD} = \vec{a} + \frac{2}{3}\vec{AB} = \vec{a} + \frac{2}{3}(-\vec{a} + \vec{b})$$

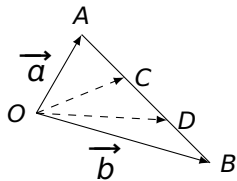
例 如图, 设 C 是线段 \overline{AB} 的二等分点, 试用 \vec{a}, \vec{b} 表示 \vec{OC}



解

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \vec{a} + \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

例 如图, 设 C, D 是线段 \overline{AB} 的三等分点, 试用 \vec{a}, \vec{b} 表示 \vec{OC}, \vec{OD}

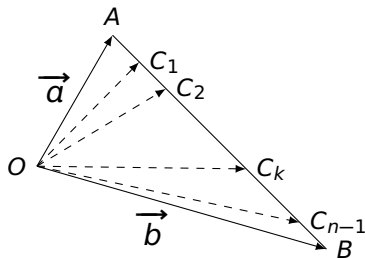


解

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{a} + \frac{1}{3}\vec{AB} = \vec{a} + \frac{1}{3}(-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$$

$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{AD} = \vec{a} + \frac{2}{3}\vec{AB} = \vec{a} + \frac{2}{3}(-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$$

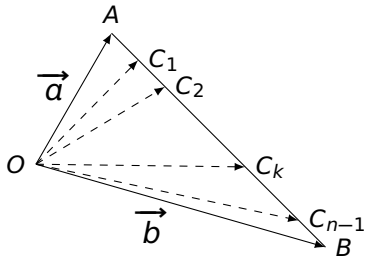
如图, 设 C_1, C_2, \dots, C_{n-1} 是线段 \overline{AB} 的 n 等分点, 试用 \vec{a}, \vec{b} 表示其中任意等分点 C_k



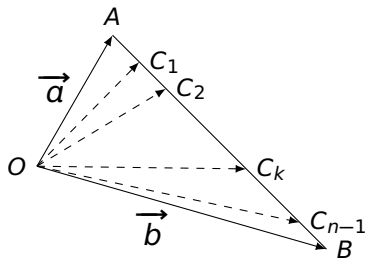
如图, 设 C_1, C_2, \dots, C_{n-1} 是线段 \overline{AB} 的 n 等分点, 试用 \vec{a}, \vec{b} 表示其中任意等分点 C_k

解

$$\overrightarrow{OC_k} =$$



如图, 设 C_1, C_2, \dots, C_{n-1} 是线段 \overline{AB} 的 n 等分点, 试用 \vec{a}, \vec{b} 表示其中任意等分点 C_k

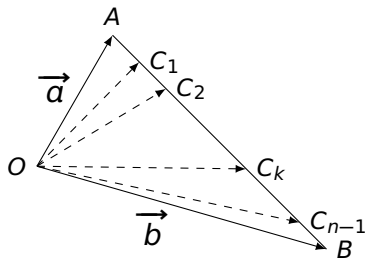


解

$$\overrightarrow{OC_k} = \vec{a} + \vec{b}$$

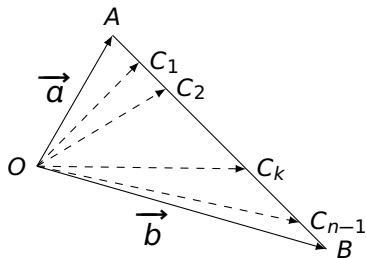
如图, 设 C_1, C_2, \dots, C_{n-1} 是线段 \overline{AB} 的 n 等分点, 试用 \vec{a}, \vec{b} 表示其中任意等分点 C_k

解



$$\overrightarrow{OC_k} = \frac{k}{n} \vec{a} + \frac{n-k}{n} \vec{b}$$

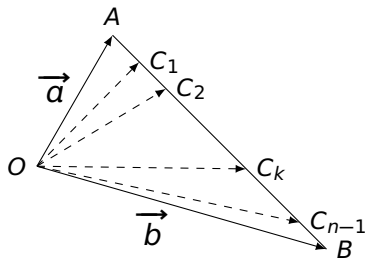
如图, 设 C_1, C_2, \dots, C_{n-1} 是线段 \overline{AB} 的 n 等分点, 试用 \vec{a}, \vec{b} 表示其中任意等分点 C_k



解

$$\overrightarrow{OC_k} = \frac{n-k}{n} \vec{a} + \frac{k}{n} \vec{b}$$

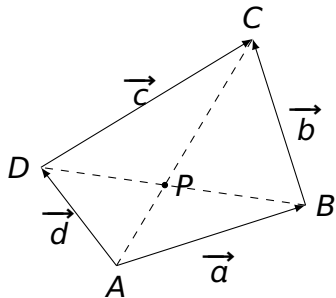
如图, 设 C_1, C_2, \dots, C_{n-1} 是线段 \overline{AB} 的 n 等分点, 试用 \vec{a}, \vec{b} 表示其中任意等分点 C_k



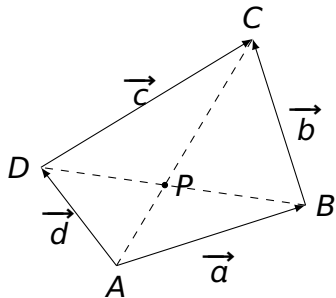
解

$$\overrightarrow{OC_k} = \frac{n-k}{n} \vec{a} + \frac{k}{n} \vec{b}$$

例 如图，设该四边形对角线互相平分，证明该四边形为平行四边形。

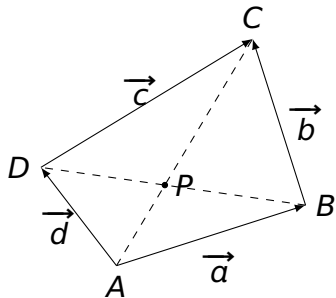


例 如图，设该四边形对角线互相平分，证明该四边形为平行四边形。



证明 往证： $\vec{a} = \vec{c}$ 。

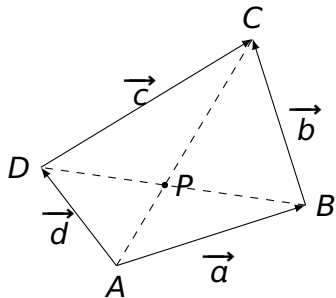
例 如图，设该四边形对角线互相平分，证明该四边形为平行四边形。



证明 往证： $\vec{a} = \vec{c}$ 。这是：

$$\vec{a} = \vec{AP} + \vec{PB}$$

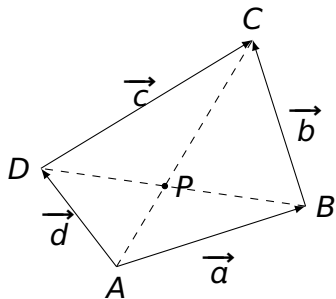
例 如图，设该四边形对角线互相平分，证明该四边形为平行四边形。



证明 往证： $\vec{a} = \vec{c}$ 。这是：

$$\vec{a} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{DP}$$

例 如图，设该四边形对角线互相平分，证明该四边形为平行四边形。



证明 往证： $\vec{a} = \vec{c}$ 。这是：

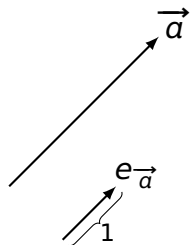
$$\vec{a} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{DP} = \vec{c}.$$

方向向量

性质 设 $\vec{a} \neq 0$, 定义

$$e_{\vec{a}} := \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}.$$

则 $e_{\vec{a}}$ 是与 \vec{a} 同向的单位向量。

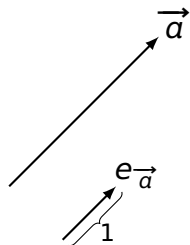


方向向量

性质 设 $\vec{a} \neq 0$, 定义

$$e_{\vec{a}} := \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}.$$

则 $e_{\vec{a}}$ 是与 \vec{a} 同向的单位向量。



证明

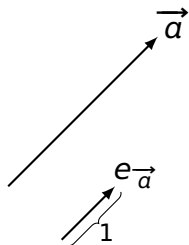
- 因为 $\frac{1}{|\vec{a}|} > 0$, 所以 $e_{\vec{a}}$ 与 \vec{a} 同向。

方向向量

性质 设 $\vec{a} \neq 0$, 定义

$$e_{\vec{a}} := \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}.$$

则 $e_{\vec{a}}$ 是与 \vec{a} 同向的单位向量。



证明

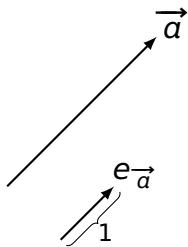
- 因为 $\frac{1}{|\vec{a}|} > 0$, 所以 $e_{\vec{a}}$ 与 \vec{a} 同向。
- $|e_{\vec{a}}| =$

方向向量

性质 设 $\vec{a} \neq 0$, 定义

$$e_{\vec{a}} := \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}.$$

则 $e_{\vec{a}}$ 是与 \vec{a} 同向的单位向量。



证明

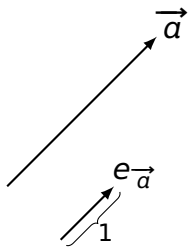
- 因为 $\frac{1}{|\vec{a}|} > 0$, 所以 $e_{\vec{a}}$ 与 \vec{a} 同向。
- $|e_{\vec{a}}| = \left| \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} \right| =$

方向向量

性质 设 $\vec{a} \neq 0$, 定义

$$e_{\vec{a}} := \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}.$$

则 $e_{\vec{a}}$ 是与 \vec{a} 同向的单位向量。



证明

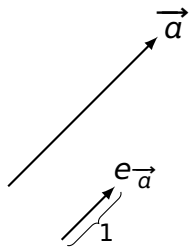
- 因为 $\frac{1}{|\vec{a}|} > 0$, 所以 $e_{\vec{a}}$ 与 \vec{a} 同向。
- $|e_{\vec{a}}| = \left| \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} \right| = \left| \frac{1}{|\vec{a}|} \right| \cdot |\vec{a}| =$

方向向量

性质 设 $\vec{a} \neq 0$, 定义

$$e_{\vec{a}} := \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}.$$

则 $e_{\vec{a}}$ 是与 \vec{a} 同向的单位向量。



证明

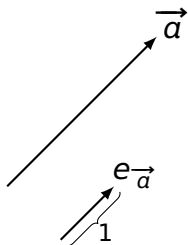
- 因为 $\frac{1}{|\vec{a}|} > 0$, 所以 $e_{\vec{a}}$ 与 \vec{a} 同向。
- $|e_{\vec{a}}| = \left| \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} \right| = \left| \frac{1}{|\vec{a}|} \right| \cdot |\vec{a}| = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| =$

方向向量

性质 设 $\vec{a} \neq 0$, 定义

$$e_{\vec{a}} := \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}.$$

则 $e_{\vec{a}}$ 是与 \vec{a} 同向的单位向量。



证明

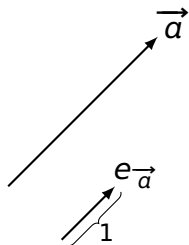
- 因为 $\frac{1}{|\vec{a}|} > 0$, 所以 $e_{\vec{a}}$ 与 \vec{a} 同向。
- $|e_{\vec{a}}| = \left| \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} \right| = \left| \frac{1}{|\vec{a}|} \right| \cdot |\vec{a}| = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| = 1.$

方向向量

性质 设 $\vec{a} \neq 0$, 定义

$$e_{\vec{a}} := \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}.$$

则 $e_{\vec{a}}$ 是与 \vec{a} 同向的单位向量。



证明

- 因为 $\frac{1}{|\vec{a}|} > 0$, 所以 $e_{\vec{a}}$ 与 \vec{a} 同向。
- $|e_{\vec{a}}| = \left| \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} \right| = \left| \frac{1}{|\vec{a}|} \right| \cdot |\vec{a}| = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| = 1.$

注 $e_{\vec{a}}$ 也称为 \vec{a} 的 **单位化向量**, 或 **方向向量**。

平行向量

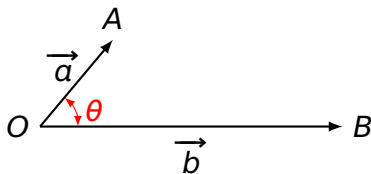
性质 设有两向量 $\vec{a} \neq 0$ 及 \vec{b} , 则

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \text{存在 } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ 使得 } \vec{b} = \lambda \vec{a}$$

向量夹角

性质 设 θ 是向量 \vec{a} 和 \vec{b} 夹角, 则

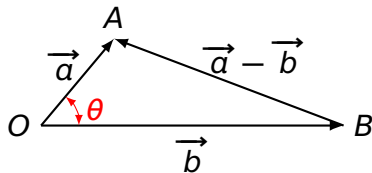
$$\cos \theta$$



向量夹角

性质 设 θ 是向量 \vec{a} 和 \vec{b} 夹角, 则

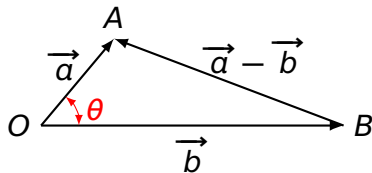
$$\cos \theta$$



向量夹角

性质 设 θ 是向量 \vec{a} 和 \vec{b} 夹角, 则

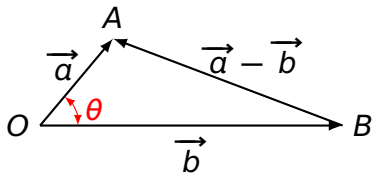
$$\cos \theta = \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2}{2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$



向量夹角

性质 设 θ 是向量 \vec{a} 和 \vec{b} 夹角, 则

$$\cos \theta = \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2}{2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$



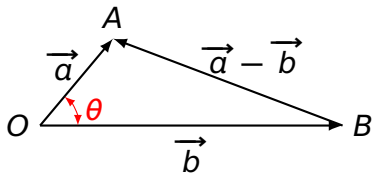
证明 这是由三角形的余弦定理:

$$|BA|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 - 2|OA| \cdot |OB| \cdot \cos \theta$$

向量夹角

性质 设 θ 是向量 \vec{a} 和 \vec{b} 夹角, 则

$$\cos \theta = \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2}{2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

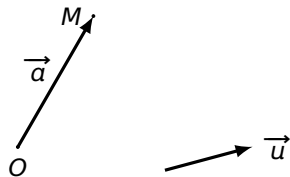


证明 这是由三角形的余弦定理:

$$\begin{aligned} |BA|^2 &= |OA|^2 + |OB|^2 - 2|OA| \cdot |OB| \cdot \cos \theta \\ \Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \theta \end{aligned}$$

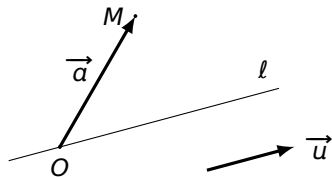
向量的投影

如图,



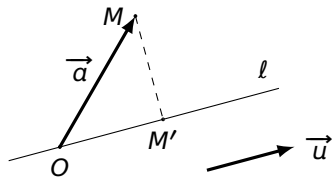
向量的投影

如图,



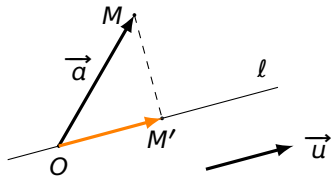
向量的投影

如图,



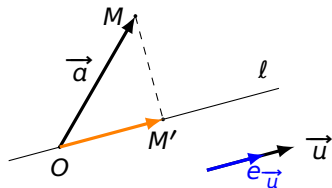
向量的投影

如图,



向量的投影

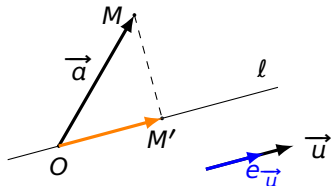
如图,



向量的投影

如图，存在唯一的数 λ ，使得：

$$\overrightarrow{OM'} = \lambda \mathbf{e}_{\vec{u}}$$

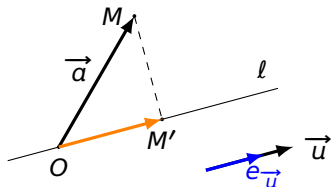


向量的投影

如图，存在唯一的数 λ ，使得：

$$\overrightarrow{OM'} = \lambda \mathbf{e}_{\vec{u}}$$

该 λ 称为 \vec{a} 在 \vec{u} 方向上的投影，记为：



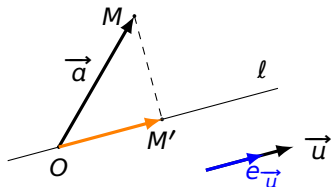
向量的投影

如图，存在唯一的数 λ ，使得：

$$\overrightarrow{OM'} = \lambda \mathbf{e}_{\vec{u}}$$

该 λ 称为 \vec{a} 在 \vec{u} 方向上的投影，记为：

$$\lambda = \text{Prj}_{\vec{u}} \vec{a}$$



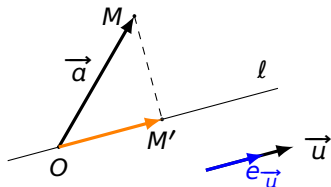
向量的投影

如图，存在唯一的数 λ ，使得：

$$\overrightarrow{OM'} = \lambda \mathbf{e}_{\vec{u}}$$

该 λ 称为 \vec{a} 在 \vec{u} 方向上的**投影**，记为：

$$\lambda = \text{Prj}_{\vec{u}} \vec{a}$$



性质 设 θ 为 \vec{a} 和 \vec{u} 的夹角，则成立

$$\text{Prj}_{\vec{u}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \theta,$$

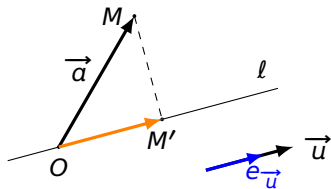
向量的投影

如图，存在唯一的数 λ ，使得：

$$\overrightarrow{OM'} = \lambda \mathbf{e}_{\vec{u}}$$

该 λ 称为 \vec{a} 在 \vec{u} 方向上的**投影**，记为：

$$\lambda = \text{Prj}_{\vec{u}} \vec{a}$$



性质 设 θ 为 \vec{a} 和 \vec{u} 的夹角，则成立

$$\text{Prj}_{\vec{u}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \theta, \quad \overrightarrow{OM'} = (|\vec{a}| \cos \theta) \mathbf{e}_{\vec{u}}.$$

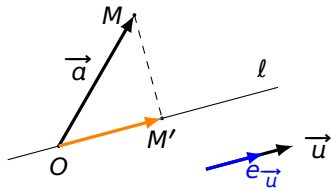
向量的投影

如图，存在唯一的数 λ ，使得：

$$\overrightarrow{OM'} = \lambda \mathbf{e}_{\vec{u}}$$

该 λ 称为 \vec{a} 在 \vec{u} 方向上的**投影**，记为：

$$\lambda = \text{Prj}_{\vec{u}} \vec{a}$$



性质 设 θ 为 \vec{a} 和 \vec{u} 的夹角，则成立

$$\text{Prj}_{\vec{u}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \theta, \quad \overrightarrow{OM'} = (|\vec{a}| \cos \theta) \mathbf{e}_{\vec{u}}.$$

证明 只需证 $\overrightarrow{OM'}$ 和 $(|\vec{a}| \cos \theta) \mathbf{e}_{\vec{u}}$ 既同向，也同长度。

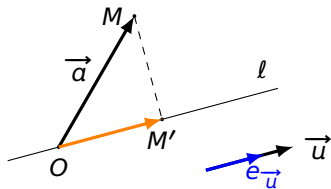
向量的投影

如图，存在唯一的数 λ ，使得：

$$\overrightarrow{OM'} = \lambda \mathbf{e}_{\vec{u}}$$

该 λ 称为 \vec{a} 在 \vec{u} 方向上的**投影**，记为：

$$\lambda = \text{Prj}_{\vec{u}} \vec{a}$$



性质 设 θ 为 \vec{a} 和 \vec{u} 的夹角，则成立

$$\text{Prj}_{\vec{u}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \theta, \quad \overrightarrow{OM'} = (|\vec{a}| \cos \theta) \mathbf{e}_{\vec{u}}.$$

证明 只需证 $\overrightarrow{OM'}$ 和 $(|\vec{a}| \cos \theta) \mathbf{e}_{\vec{u}}$

既同向，也同长度。分情况：

- $\theta \leq \frac{\pi}{2}$
- $\theta \geq \frac{\pi}{2}$

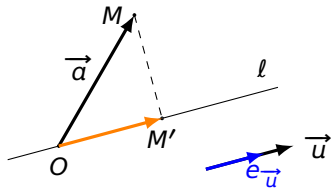
向量的投影

如图，存在唯一的数 λ ，使得：

$$\overrightarrow{OM'} = \lambda \mathbf{e}_{\vec{u}}$$

该 λ 称为 \vec{a} 在 \vec{u} 方向上的**投影**，记为：

$$\lambda = \text{Prj}_{\vec{u}} \vec{a}$$

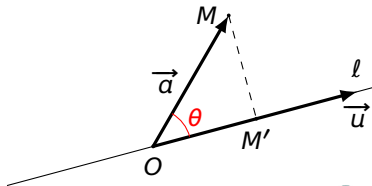


性质 设 θ 为 \vec{a} 和 \vec{u} 的夹角，则成立

$$\text{Prj}_{\vec{u}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \theta, \quad \overrightarrow{OM'} = (|\vec{a}| \cos \theta) \mathbf{e}_{\vec{u}}.$$

证明 只需证 $\overrightarrow{OM'}$ 和 $(|\vec{a}| \cos \theta) \mathbf{e}_{\vec{u}}$ 既同向，也同长度。分情况：

- $\theta \leq \frac{\pi}{2}$
- $\theta \geq \frac{\pi}{2}$



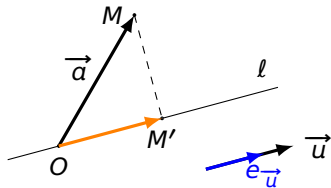
向量的投影

如图，存在唯一的数 λ ，使得：

$$\overrightarrow{OM'} = \lambda \mathbf{e}_{\vec{u}}$$

该 λ 称为 \vec{a} 在 \vec{u} 方向上的**投影**，记为：

$$\lambda = \text{Prj}_{\vec{u}} \vec{a}$$

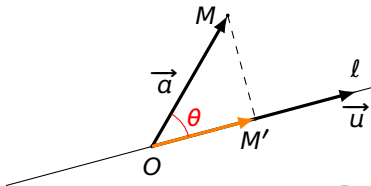


性质 设 θ 为 \vec{a} 和 \vec{u} 的夹角，则成立

$$\text{Prj}_{\vec{u}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \theta, \quad \overrightarrow{OM'} = (|\vec{a}| \cos \theta) \mathbf{e}_{\vec{u}}.$$

证明 只需证 $\overrightarrow{OM'}$ 和 $(|\vec{a}| \cos \theta) \mathbf{e}_{\vec{u}}$ 既同向，也同长度。分情况：

- $\theta \leq \frac{\pi}{2}$
- $\theta \geq \frac{\pi}{2}$



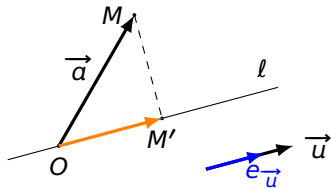
向量的投影

如图，存在唯一的数 λ ，使得：

$$\overrightarrow{OM'} = \lambda \mathbf{e}_{\vec{u}}$$

该 λ 称为 \vec{a} 在 \vec{u} 方向上的**投影**，记为：

$$\lambda = \text{Prj}_{\vec{u}} \vec{a}$$

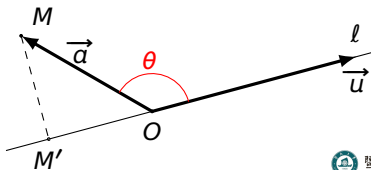


性质 设 θ 为 \vec{a} 和 \vec{u} 的夹角，则成立

$$\text{Prj}_{\vec{u}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \theta, \quad \overrightarrow{OM'} = (|\vec{a}| \cos \theta) \mathbf{e}_{\vec{u}}.$$

证明 只需证 $\overrightarrow{OM'}$ 和 $(|\vec{a}| \cos \theta) \mathbf{e}_{\vec{u}}$ 既同向，也同长度。分情况：

- $\theta \leq \frac{\pi}{2}$
- $\theta \geq \frac{\pi}{2}$



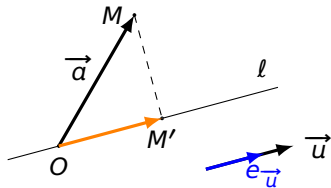
向量的投影

如图，存在唯一的数 λ ，使得：

$$\overrightarrow{OM'} = \lambda \mathbf{e}_{\vec{u}}$$

该 λ 称为 \vec{a} 在 \vec{u} 方向上的**投影**，记为：

$$\lambda = \text{Prj}_{\vec{u}} \vec{a}$$

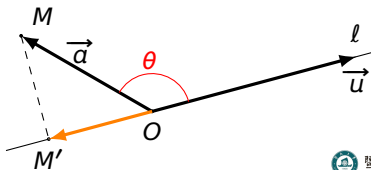


性质 设 θ 为 \vec{a} 和 \vec{u} 的夹角，则成立

$$\text{Prj}_{\vec{u}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \theta, \quad \overrightarrow{OM'} = (|\vec{a}| \cos \theta) \mathbf{e}_{\vec{u}}.$$

证明 只需证 $\overrightarrow{OM'}$ 和 $(|\vec{a}| \cos \theta) \mathbf{e}_{\vec{u}}$ 既同向，也同长度。分情况：

- $\theta \leq \frac{\pi}{2}$
- $\theta \geq \frac{\pi}{2}$



We are here now...

◆ 向量的基本概念

♣ 向量的坐标表示

♥ 向量的数量积

♠ 向量的向量积

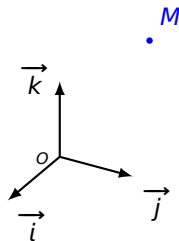
点、向量的坐标表示

M



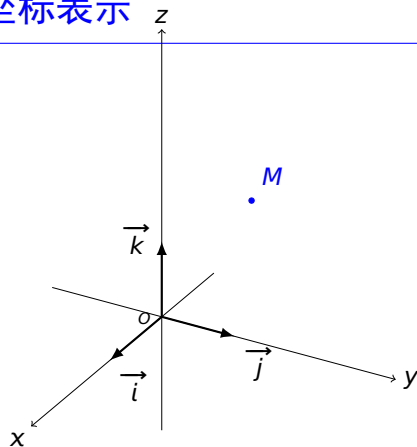
- 点 $M \longleftrightarrow$ 三元数组 (x, y, z) : 以 (x, y, z) 作为点 M 的坐标

点、向量的坐标表示



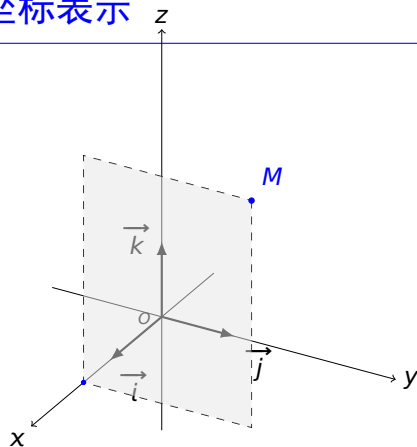
- 点 $M \longleftrightarrow$ 三元数组 (x, y, z) : 以 (x, y, z) 作为点 M 的坐标

点、向量的坐标表示



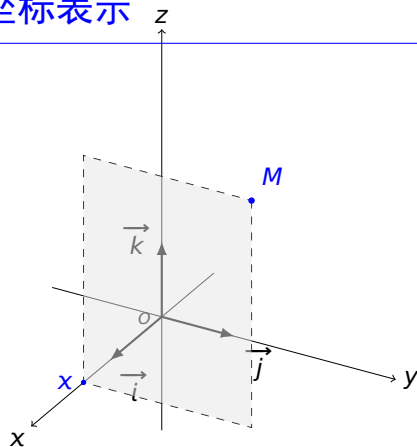
- 点 $M \longleftrightarrow$ 三元数组 (x, y, z) : 以 (x, y, z) 作为点 M 的坐标

点、向量的坐标表示



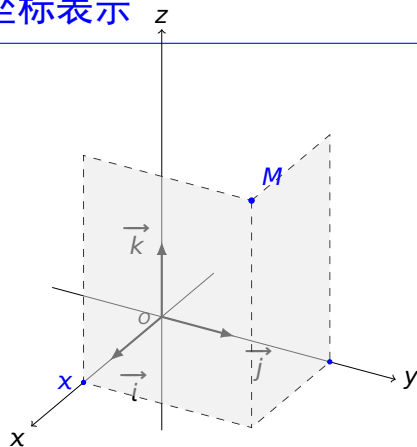
- 点 $M \longleftrightarrow$ 三元数组 (x, y, z) : 以 (x, y, z) 作为点 M 的坐标

点、向量的坐标表示



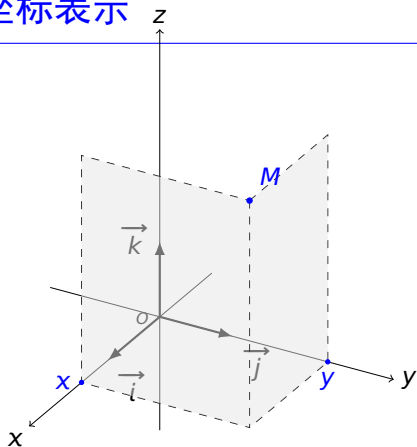
- 点 $M \longleftrightarrow$ 三元数组 (x, y, z) : 以 (x, y, z) 作为点 M 的坐标

点、向量的坐标表示



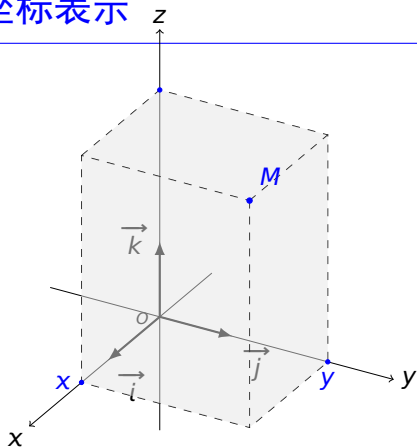
- 点 $M \longleftrightarrow$ 三元数组 (x, y, z) : 以 (x, y, z) 作为点 M 的坐标

点、向量的坐标表示



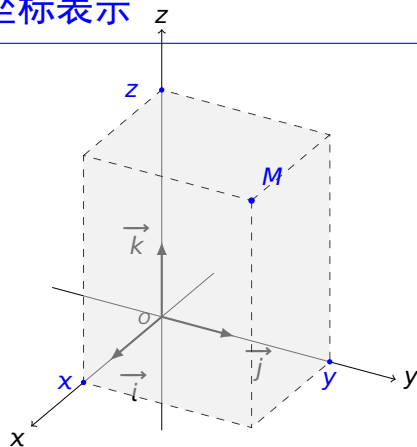
- 点 $M \longleftrightarrow$ 三元数组 (x, y, z) : 以 (x, y, z) 作为点 M 的坐标

点、向量的坐标表示



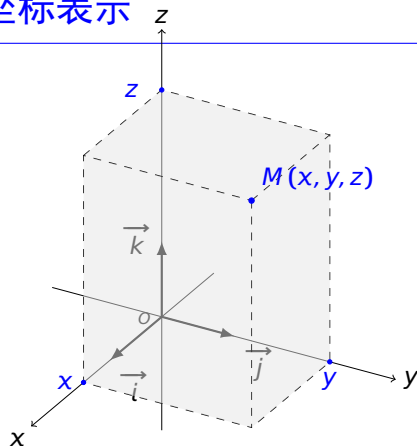
- 点 $M \longleftrightarrow$ 三元数组 (x, y, z) : 以 (x, y, z) 作为点 M 的坐标

点、向量的坐标表示



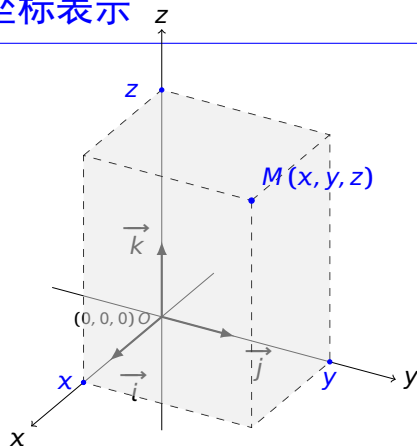
- 点 $M \longleftrightarrow$ 三元数组 (x, y, z) : 以 (x, y, z) 作为点 M 的坐标

点、向量的坐标表示



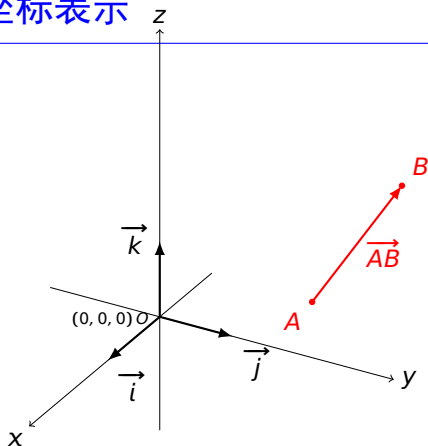
- 点 $M \longleftrightarrow$ 三元数组 (x, y, z) : 以 (x, y, z) 作为点 M 的坐标

点、向量的坐标表示



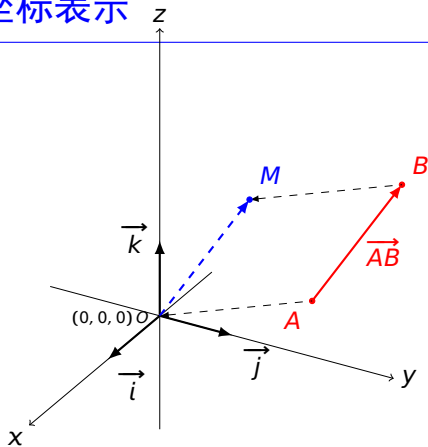
- 点 $M \longleftrightarrow$ 三元数组 (x, y, z) : 以 (x, y, z) 作为点 M 的坐标

点、向量的坐标表示



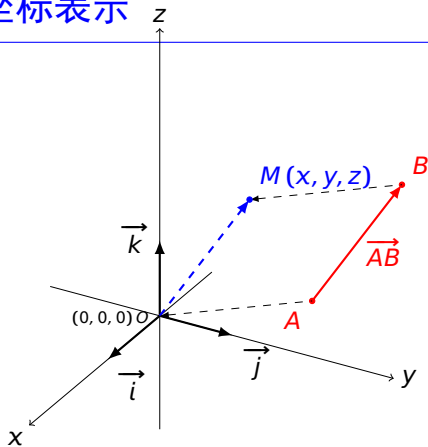
- 点 $M \longleftrightarrow$ 三元数组 (x, y, z) : 以 (x, y, z) 作为点 M 的坐标
- \vec{AB}

点、向量的坐标表示



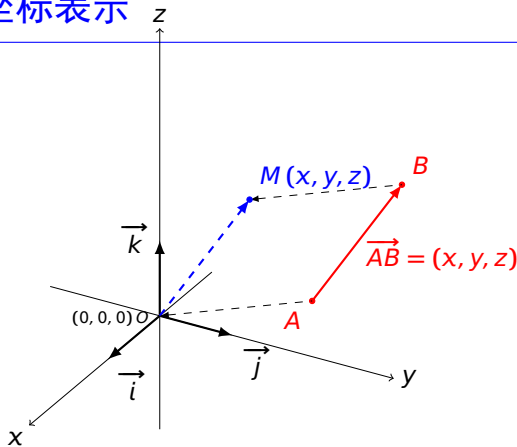
- 点 $M \longleftrightarrow$ 三元数组 (x, y, z) : 以 (x, y, z) 作为点 M 的坐标
- $\vec{AB} \xrightarrow{\text{平移}} \vec{OM}$

点、向量的坐标表示



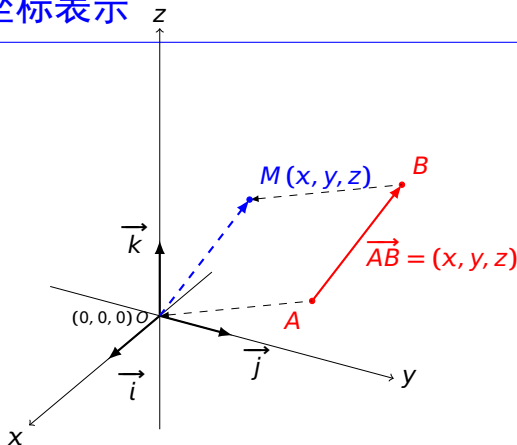
- 点 $M \longleftrightarrow$ 三元数组 (x, y, z) : 以 (x, y, z) 作为点 M 的坐标
- $\vec{AB} \xrightarrow{\text{平移}} \vec{OM}$

点、向量的坐标表示



- 点 $M \longleftrightarrow$ 三元数组 (x, y, z) : 以 (x, y, z) 作为点 M 的坐标
- $\overrightarrow{AB} \xrightarrow{\text{平移}} \overrightarrow{OM}$: 以 (x, y, z) 作为向量 \overrightarrow{AB} 的坐标

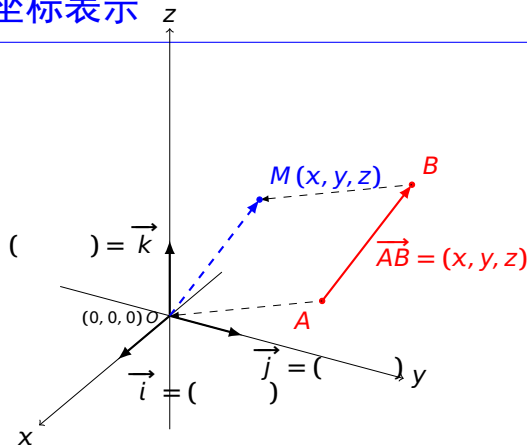
点、向量的坐标表示



- 点 $M \longleftrightarrow$ 三元数组 (x, y, z) : 以 (x, y, z) 作为点 M 的坐标
- $\overrightarrow{AB} \xrightarrow{\text{平移}} \overrightarrow{OM}$: 以 (x, y, z) 作为向量 \overrightarrow{AB} 的坐标

注 三元数组 (x, y, z) 同时作为点 M 和向量 \overrightarrow{AB} 的坐标

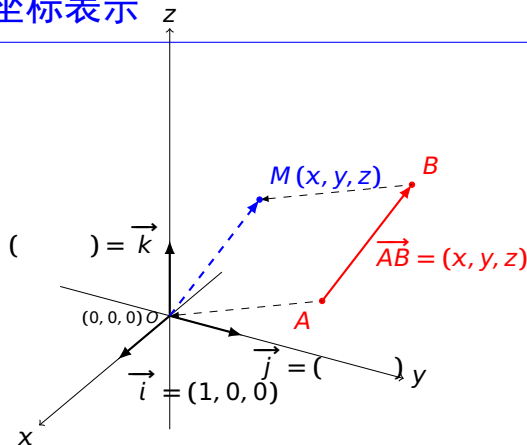
点、向量的坐标表示



- 点 $M \longleftrightarrow$ 三元数组 (x, y, z) : 以 (x, y, z) 作为点 M 的坐标
- $\overrightarrow{AB} \xrightarrow{\text{平移}} \overrightarrow{OM}$: 以 (x, y, z) 作为向量 \overrightarrow{AB} 的坐标

注 三元数组 (x, y, z) 同时作为点 M 和向量 \overrightarrow{AB} 的坐标

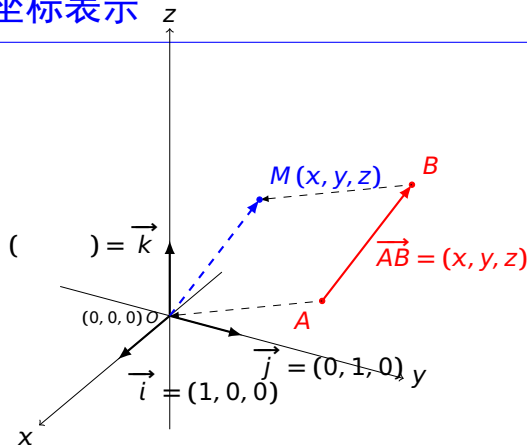
点、向量的坐标表示



- 点 $M \longleftrightarrow$ 三元数组 (x, y, z) : 以 (x, y, z) 作为点 M 的坐标
- $\overrightarrow{AB} \xrightarrow{\text{平移}} \overrightarrow{OM}$: 以 (x, y, z) 作为向量 \overrightarrow{AB} 的坐标

注 三元数组 (x, y, z) 同时作为点 M 和向量 \overrightarrow{AB} 的坐标

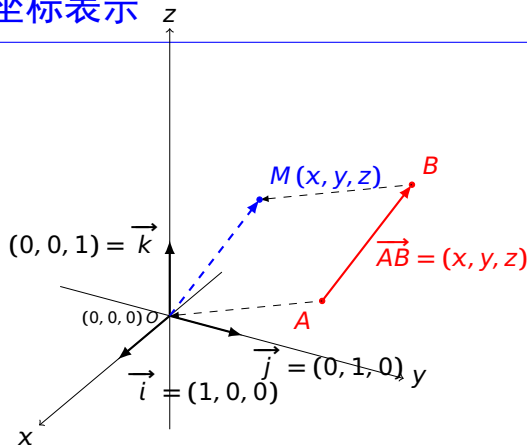
点、向量的坐标表示



- 点 $M \longleftrightarrow$ 三元数组 (x, y, z) : 以 (x, y, z) 作为点 M 的坐标
- $\overrightarrow{AB} \xrightarrow{\text{平移}} \overrightarrow{OM}$: 以 (x, y, z) 作为向量 \overrightarrow{AB} 的坐标

注 三元数组 (x, y, z) 同时作为点 M 和向量 \overrightarrow{AB} 的坐标

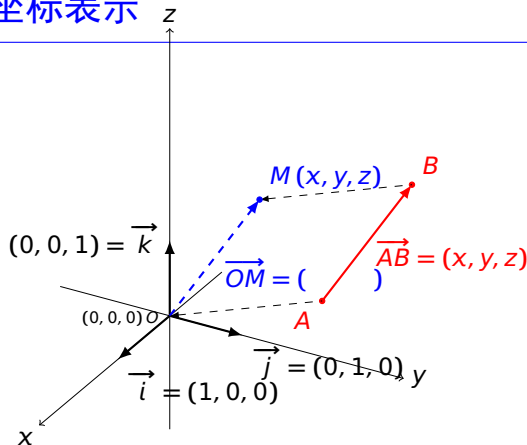
点、向量的坐标表示



- 点 $M \longleftrightarrow$ 三元数组 (x, y, z) : 以 (x, y, z) 作为点 M 的坐标
- $\vec{AB} \xrightarrow{\text{平移}} \vec{OM}$: 以 (x, y, z) 作为向量 \vec{AB} 的坐标

注 三元数组 (x, y, z) 同时作为点 M 和向量 \vec{AB} 的坐标

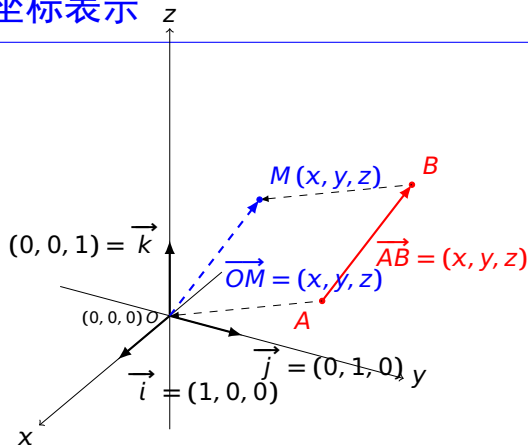
点、向量的坐标表示



- 点 $M \longleftrightarrow$ 三元数组 (x, y, z) : 以 (x, y, z) 作为点 M 的坐标
- $\overrightarrow{AB} \xrightarrow{\text{平移}} \overrightarrow{OM}$: 以 (x, y, z) 作为向量 \overrightarrow{AB} 的坐标

注 三元数组 (x, y, z) 同时作为点 M 和向量 \overrightarrow{AB} 的坐标

点、向量的坐标表示



- 点 $M \longleftrightarrow$ 三元数组 (x, y, z) : 以 (x, y, z) 作为点 M 的坐标
- $\vec{AB} \xrightarrow{\text{平移}} \vec{OM}$: 以 (x, y, z) 作为向量 \vec{AB} 的坐标

注 三元数组 (x, y, z) 同时作为点 M 和向量 \vec{AB} 的坐标

性质 向量 \overrightarrow{AB} 的坐标为 (x, y, z) 当且仅当 $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ 。

性质 向量 \overrightarrow{AB} 的坐标为 (x, y, z) 当且仅当 $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ 。即

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) \iff \overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$

性质 向量 \overrightarrow{AB} 的坐标为 (x, y, z) 当且仅当 $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ 。即

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$

证明

- 必要性

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$

性质 向量 \overrightarrow{AB} 的坐标为 (x, y, z) 当且仅当 $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ 。即

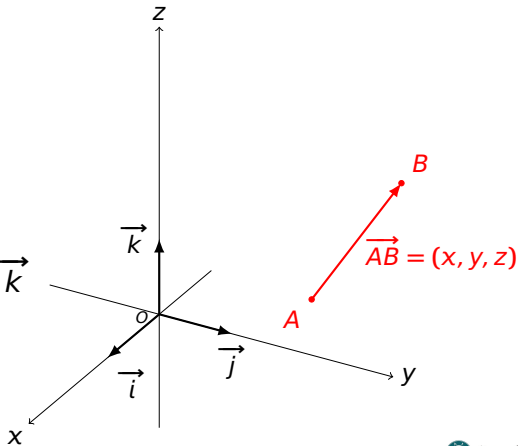
$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$

证明

- 必要性

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$



性质 向量 \overrightarrow{AB} 的坐标为 (x, y, z) 当且仅当 $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ 。即

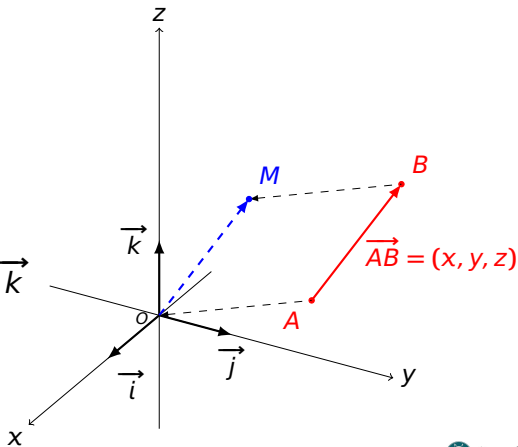
$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$

证明

• 必要性

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$



性质 向量 \overrightarrow{AB} 的坐标为 (x, y, z) 当且仅当 $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ 。即

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$

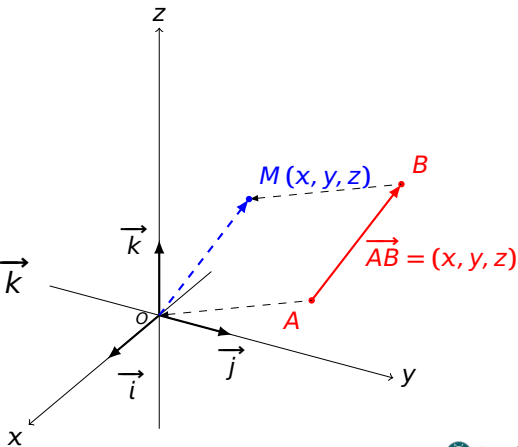
证明

• 必要性

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$$

\Rightarrow 点 M 坐标为 (x, y, z)

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$



性质 向量 \overrightarrow{AB} 的坐标为 (x, y, z) 当且仅当 $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ 。即

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$

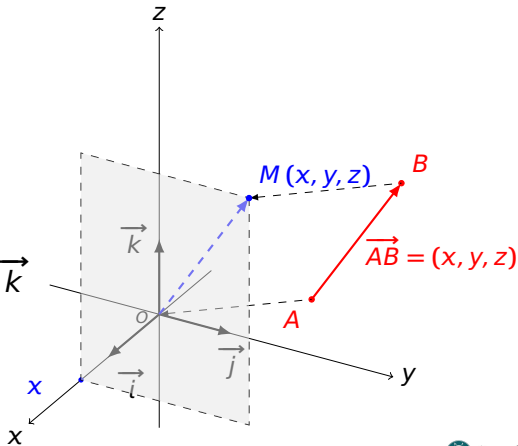
证明

• 必要性

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$$

\Rightarrow 点 M 坐标为 (x, y, z)

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$



性质 向量 \overrightarrow{AB} 的坐标为 (x, y, z) 当且仅当 $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ 。即

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$

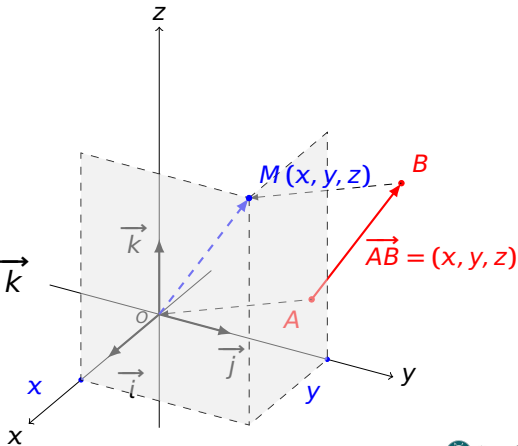
证明

• 必要性

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$$

\Rightarrow 点 M 坐标为 (x, y, z)

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$



性质 向量 \overrightarrow{AB} 的坐标为 (x, y, z) 当且仅当 $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ 。即

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$

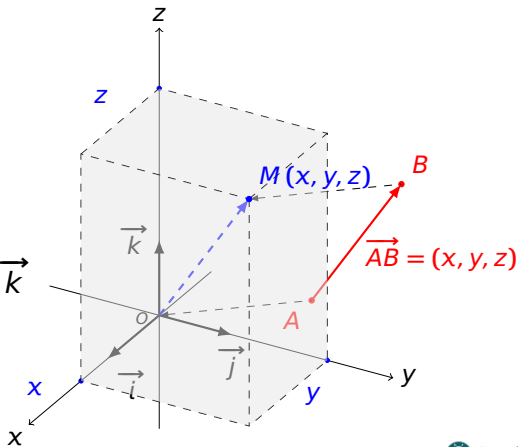
证明

• 必要性

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$$

\Rightarrow 点 M 坐标为 (x, y, z)

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$



性质 向量 \overrightarrow{AB} 的坐标为 (x, y, z) 当且仅当 $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ 。即

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$

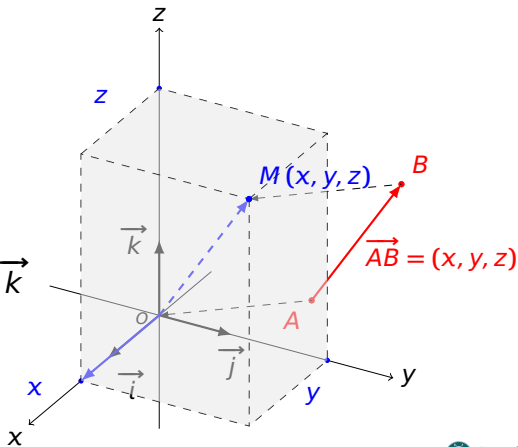
证明

• 必要性

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$$

\Rightarrow 点 M 坐标为 (x, y, z)

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$



性质 向量 \overrightarrow{AB} 的坐标为 (x, y, z) 当且仅当 $\overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ 。即

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

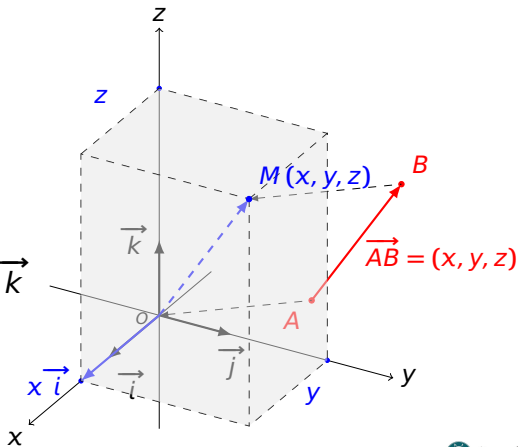
证明

• 必要性

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$$

\Rightarrow 点 M 坐标为 (x, y, z)

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$



性质 向量 \overrightarrow{AB} 的坐标为 (x, y, z) 当且仅当 $\overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ 。即

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

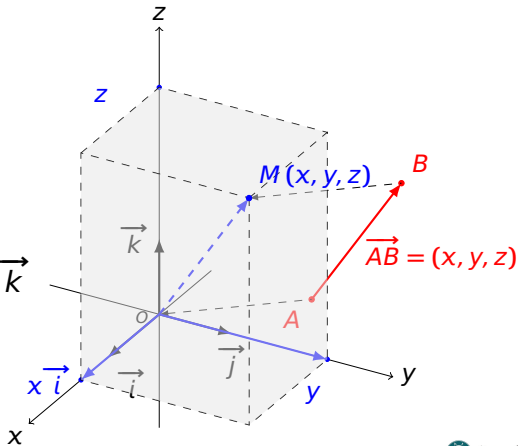
证明

• 必要性

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$$

\Rightarrow 点 M 坐标为 (x, y, z)

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$



性质 向量 \overrightarrow{AB} 的坐标为 (x, y, z) 当且仅当 $\overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ 。即

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

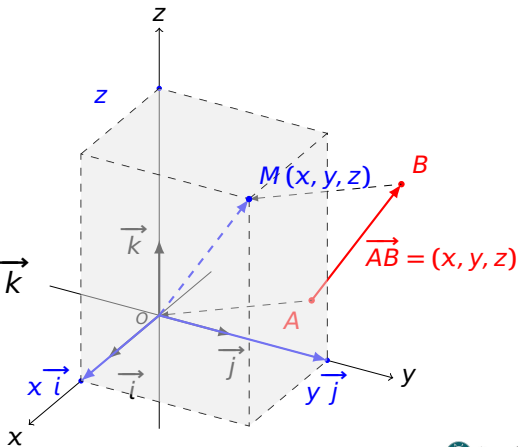
证明

• 必要性

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$$

\Rightarrow 点 M 坐标为 (x, y, z)

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$



性质 向量 \overrightarrow{AB} 的坐标为 (x, y, z) 当且仅当 $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ 。即

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$

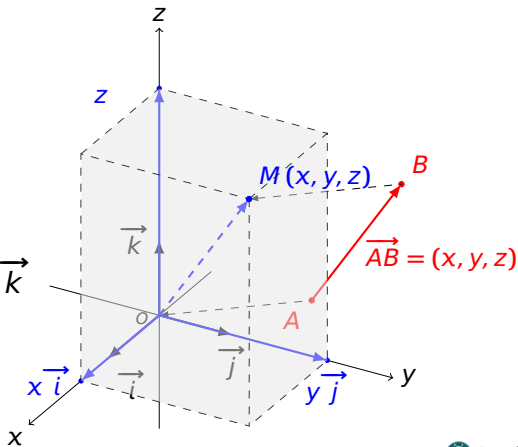
证明

• 必要性

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$$

\Rightarrow 点 M 坐标为 (x, y, z)

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$



性质 向量 \overrightarrow{AB} 的坐标为 (x, y, z) 当且仅当 $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ 。即

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$

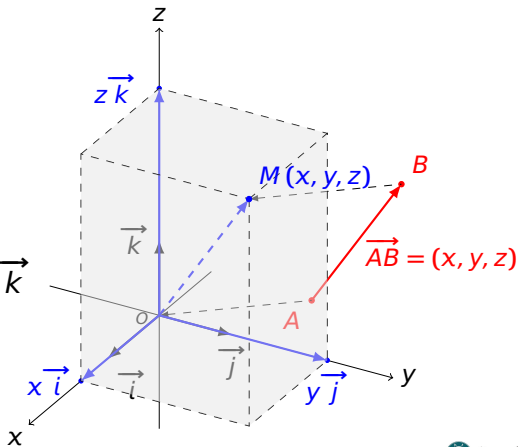
证明

• 必要性

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$$

\Rightarrow 点 M 坐标为 (x, y, z)

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$



性质 向量 \overrightarrow{AB} 的坐标为 (x, y, z) 当且仅当 $\overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ 。即

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

证明

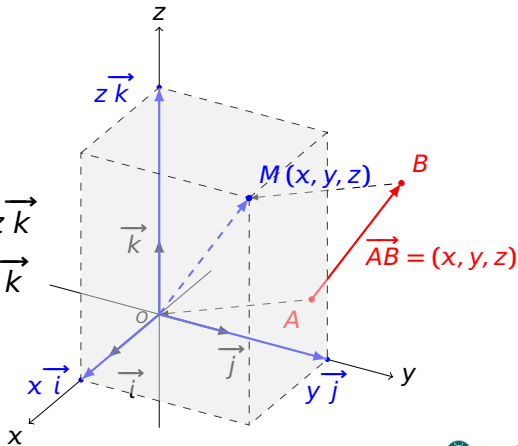
• 必要性

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$$

$$\Rightarrow \text{点 } M \text{ 坐标为 } (x, y, z)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$



性质 向量 \overrightarrow{AB} 的坐标为 (x, y, z) 当且仅当 $\overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ 。即

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

证明

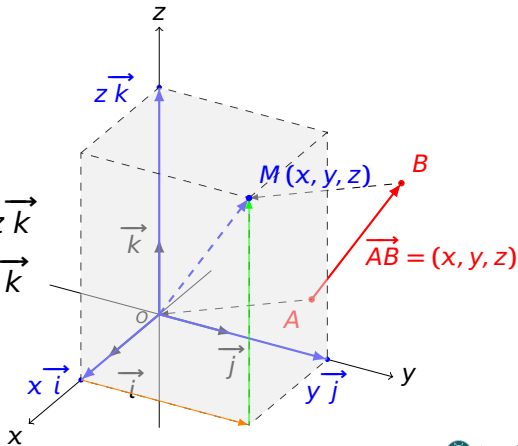
• 必要性

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$$

$$\Rightarrow \text{点 } M \text{ 坐标为 } (x, y, z)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$



性质 向量 \overrightarrow{AB} 的坐标为 (x, y, z) 当且仅当 $\overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ 。即

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

证明

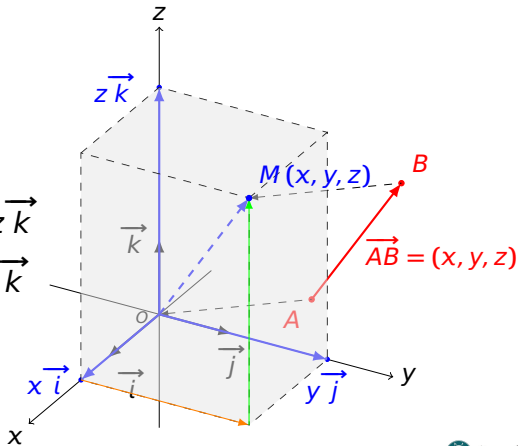
• 必要性

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$$

$$\Rightarrow \text{点 } M \text{ 坐标为 } (x, y, z)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$



性质 向量 \overrightarrow{AB} 的坐标为 (x, y, z) 当且仅当 $\overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ 。即

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

证明

• 必要性

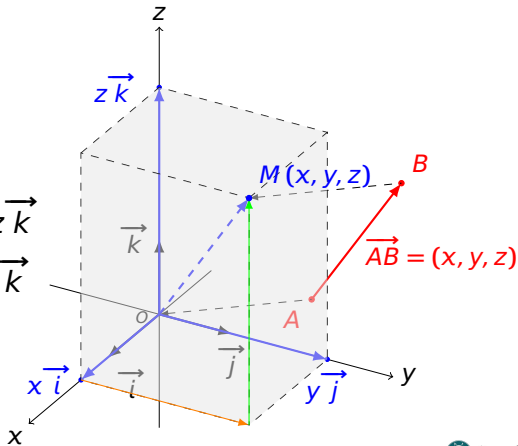
$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$$

$$\Rightarrow \text{点 } M \text{ 坐标为 } (x, y, z)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

• 充分性：略



性质 向量 \overrightarrow{AB} 的坐标为 (x, y, z) 当且仅当 $\overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ 。即

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

注 以后直接写: $\overrightarrow{AB} = (x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

证明

• 必要性

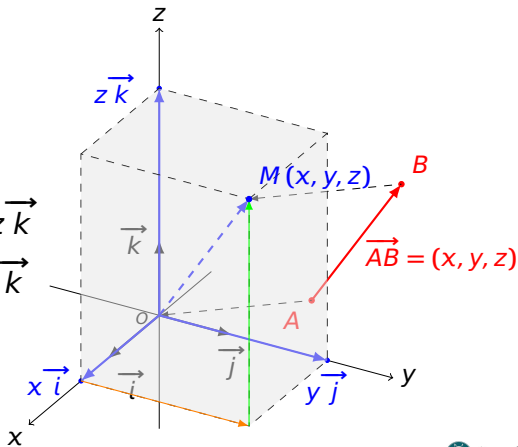
$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$$

\Rightarrow 点 M 坐标为 (x, y, z)

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

• 充分性: 略



例 设有两点 $A = (x_1, y_1, z_1)$ 和 $B = (x_2, y_2, z_2)$, 则

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

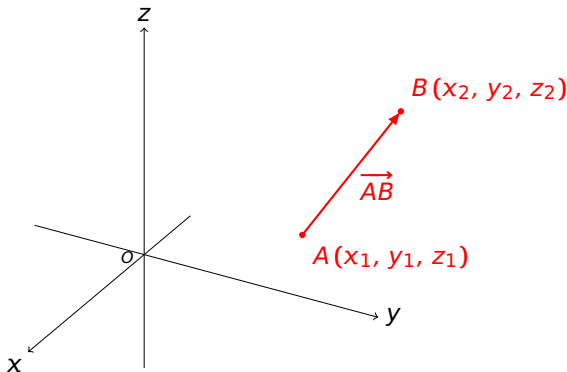
O

例 设有两点 $A = (x_1, y_1, z_1)$ 和 $B = (x_2, y_2, z_2)$, 则

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

证明 这是

$$\overrightarrow{AB} =$$

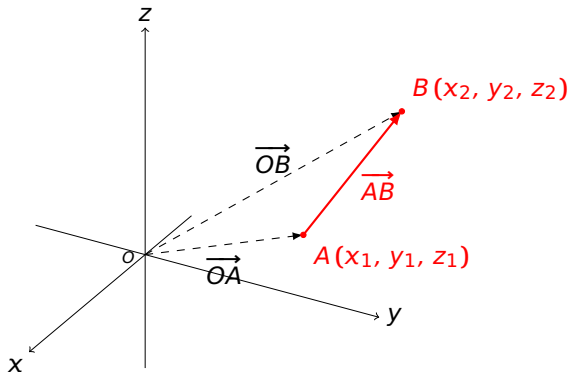


例 设有两点 $A = (x_1, y_1, z_1)$ 和 $B = (x_2, y_2, z_2)$, 则

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

证明 这是

$$\overrightarrow{AB} =$$

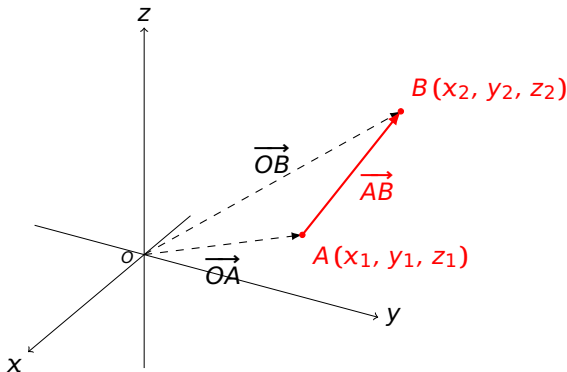


例 设有两点 $A = (x_1, y_1, z_1)$ 和 $B = (x_2, y_2, z_2)$, 则

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

证明 这是

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

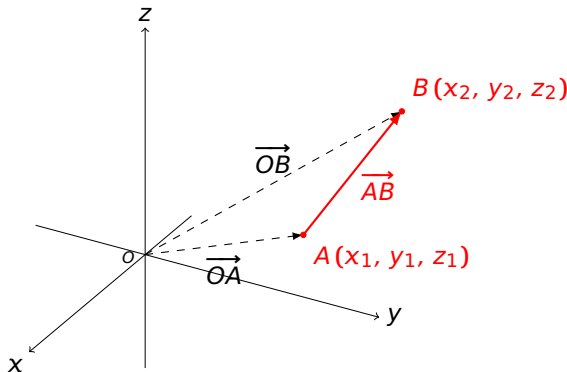


例 设有两点 $A = (x_1, y_1, z_1)$ 和 $B = (x_2, y_2, z_2)$, 则

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

证明 这是

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) - (\quad)$$

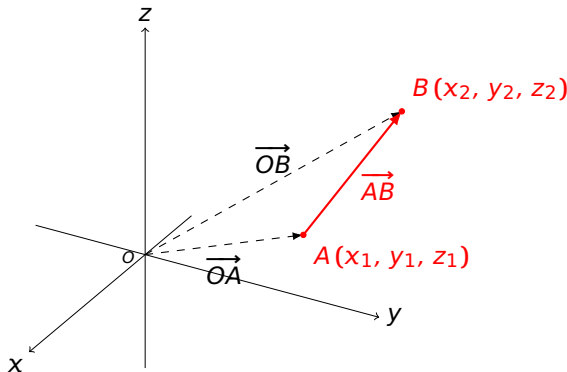


例 设有两点 $A = (x_1, y_1, z_1)$ 和 $B = (x_2, y_2, z_2)$, 则

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

证明 这是

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) - (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k})$$

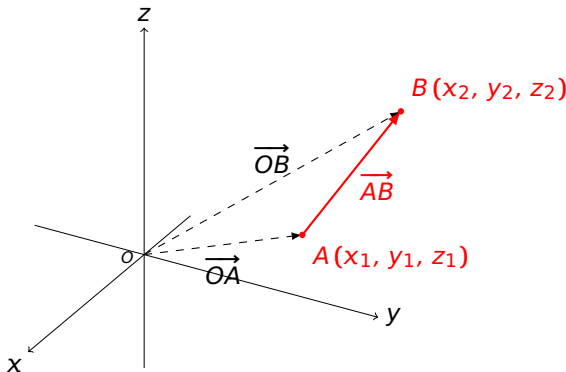


例 设有两点 $A = (x_1, y_1, z_1)$ 和 $B = (x_2, y_2, z_2)$, 则

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

证明 这是

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) - (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) \\ &= (x_2 - x_1) \vec{i} + (y_2 - y_1) \vec{j} + (z_2 - z_1) \vec{k}\end{aligned}$$



利用坐标值，可以方便地计算：

- 向量的线性运算
- 向量的长度
- 向量间的夹角
- 向量的投影

利用坐标值计算向量的线性运算

性质 设向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 设 $\lambda \in \mathbb{R}$, 则

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

利用坐标值计算向量的线性运算

性质 设向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 设 $\lambda \in \mathbb{R}$, 则

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

证明 这是

$$\vec{a} + \vec{b} =$$

$$\lambda \vec{a} =$$

利用坐标值计算向量的线性运算

性质 设向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 设 $\lambda \in \mathbb{R}$, 则

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

证明 这是

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x, a_y, a_z) + (b_x, b_y, b_z)$$

$$\lambda \vec{a} =$$

利用坐标值计算向量的线性运算

性质 设向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 设 $\lambda \in \mathbb{R}$, 则

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

证明 这是

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= (a_x, a_y, a_z) + (b_x, b_y, b_z) \\ &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) + (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k})\end{aligned}$$

$$\lambda \vec{a} =$$

利用坐标值计算向量的线性运算

性质 设向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 设 $\lambda \in \mathbb{R}$, 则

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

证明 这是

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= (a_x, a_y, a_z) + (b_x, b_y, b_z) \\ &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) + (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) \\ &= (a_x + b_x) \vec{i} + (a_y + b_y) \vec{j} + (a_z + b_z) \vec{k}\end{aligned}$$

$$\lambda \vec{a} =$$

利用坐标值计算向量的线性运算

性质 设向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 设 $\lambda \in \mathbb{R}$, 则

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

证明 这是

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= (a_x, a_y, a_z) + (b_x, b_y, b_z) \\ &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) + (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) \\ &= (a_x + b_x) \vec{i} + (a_y + b_y) \vec{j} + (a_z + b_z) \vec{k} \\ &= (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)\end{aligned}$$

$$\lambda \vec{a} =$$

利用坐标值计算向量的线性运算

性质 设向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 设 $\lambda \in \mathbb{R}$, 则

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

证明 这是

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= (a_x, a_y, a_z) + (b_x, b_y, b_z) \\&= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) + (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) \\&= (a_x + b_x) \vec{i} + (a_y + b_y) \vec{j} + (a_z + b_z) \vec{k} \\&= (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)\end{aligned}$$

$$\lambda \vec{a} = \lambda(a_x, a_y, a_z)$$

利用坐标值计算向量的线性运算

性质 设向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 设 $\lambda \in \mathbb{R}$, 则

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

证明 这是

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= (a_x, a_y, a_z) + (b_x, b_y, b_z) \\&= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) + (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) \\&= (a_x + b_x) \vec{i} + (a_y + b_y) \vec{j} + (a_z + b_z) \vec{k} \\&= (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)\end{aligned}$$

$$\lambda \vec{a} = \lambda(a_x, a_y, a_z) = \lambda(a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k})$$

利用坐标值计算向量的线性运算

性质 设向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 设 $\lambda \in \mathbb{R}$, 则

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

证明 这是

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= (a_x, a_y, a_z) + (b_x, b_y, b_z) \\&= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) + (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) \\&= (a_x + b_x) \vec{i} + (a_y + b_y) \vec{j} + (a_z + b_z) \vec{k} \\&= (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda \vec{a} &= \lambda(a_x, a_y, a_z) = \lambda(a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \\&= \lambda a_x \vec{i} + \lambda a_y \vec{j} + \lambda a_z \vec{k}\end{aligned}$$

利用坐标值计算向量的线性运算

性质 设向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 设 $\lambda \in \mathbb{R}$, 则

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

证明 这是

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= (a_x, a_y, a_z) + (b_x, b_y, b_z) \\&= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) + (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) \\&= (a_x + b_x) \vec{i} + (a_y + b_y) \vec{j} + (a_z + b_z) \vec{k} \\&= (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda \vec{a} &= \lambda(a_x, a_y, a_z) = \lambda(a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \\&= \lambda a_x \vec{i} + \lambda a_y \vec{j} + \lambda a_z \vec{k} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)\end{aligned}$$

例 设向量 $\vec{a} = (7, -1, 10)$, $\vec{b} = (2, 1, 2)$, 向量 \vec{x} 满足 $\vec{a} = 2\vec{b} - 3\vec{x}$ 。求 \vec{x}

例 设向量 $\vec{a} = (7, -1, 10)$, $\vec{b} = (2, 1, 2)$, 向量 \vec{x} 满足 $\vec{a} = 2\vec{b} - 3\vec{x}$ 。求 \vec{x}

解

$$\vec{x} = \frac{1}{3}(2\vec{b} - \vec{a})$$

例 设向量 $\vec{a} = (7, -1, 10)$, $\vec{b} = (2, 1, 2)$, 向量 \vec{x} 满足 $\vec{a} = 2\vec{b} - 3\vec{x}$ 。求 \vec{x}

解

$$\vec{x} = \frac{1}{3}(2\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{3}[(4, 2, 4) - (7, -1, 10)]$$

例 设向量 $\vec{a} = (7, -1, 10)$, $\vec{b} = (2, 1, 2)$, 向量 \vec{x} 满足 $\vec{a} = 2\vec{b} - 3\vec{x}$ 。求 \vec{x}

解

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \frac{1}{3}(2\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{3}[(4, 2, 4) - (7, -1, 10)] \\ &= \frac{1}{3}(-3, 3, -6)\end{aligned}$$

例 设向量 $\vec{a} = (7, -1, 10)$, $\vec{b} = (2, 1, 2)$, 向量 \vec{x} 满足 $\vec{a} = 2\vec{b} - 3\vec{x}$ 。求 \vec{x}

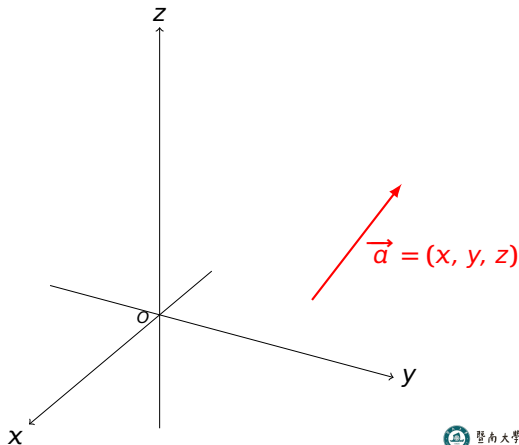
解

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \frac{1}{3}(2\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{3}[(4, 2, 4) - (7, -1, 10)] \\ &= \frac{1}{3}(-3, 3, -6) = (-1, 1, -2)\end{aligned}$$

利用坐标值计算向量的长度

性质 向量 $\vec{a} = (x, y, z)$ 的长度是

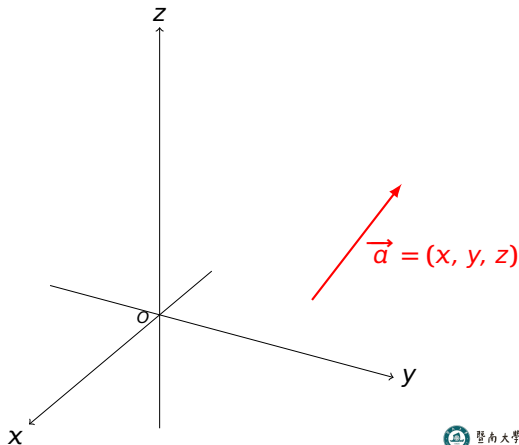
$$|\vec{a}| =$$



利用坐标值计算向量的长度

性质 向量 $\vec{a} = (x, y, z)$ 的长度是

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

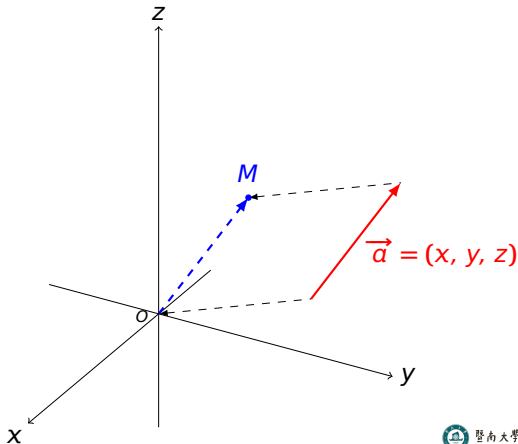


利用坐标值计算向量的长度

性质 向量 $\vec{a} = (x, y, z)$ 的长度是

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

证明 如图, 平移 \vec{a} 得 \overrightarrow{OM} ,



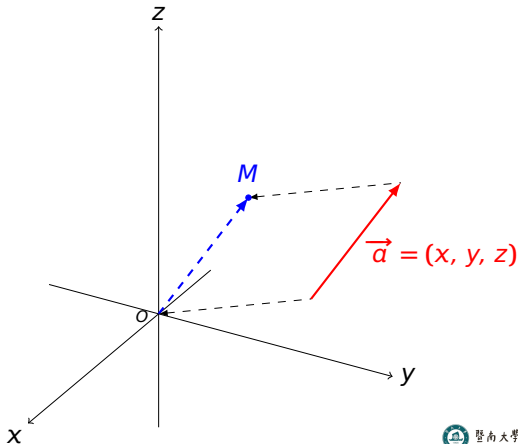
利用坐标值计算向量的长度

性质 向量 $\vec{a} = (x, y, z)$ 的长度是

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

证明 如图, 平移 \vec{a} 得 \overrightarrow{OM} , 则

$$|\vec{a}|^2 = |\overrightarrow{OM}|^2$$



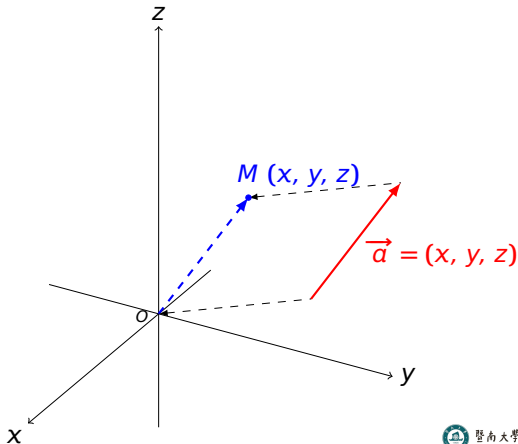
利用坐标值计算向量的长度

性质 向量 $\vec{a} = (x, y, z)$ 的长度是

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

证明 如图, 平移 \vec{a} 得 \overrightarrow{OM} , 则

$$|\vec{a}|^2 = |\overrightarrow{OM}|^2$$



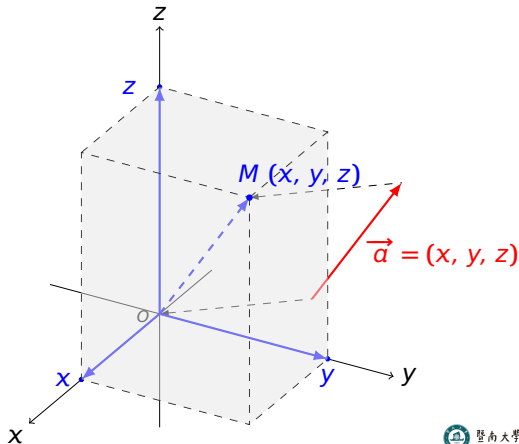
利用坐标值计算向量的长度

性质 向量 $\vec{a} = (x, y, z)$ 的长度是

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

证明 如图, 平移 \vec{a} 得 \overrightarrow{OM} , 则

$$|\vec{a}|^2 = |\overrightarrow{OM}|^2$$



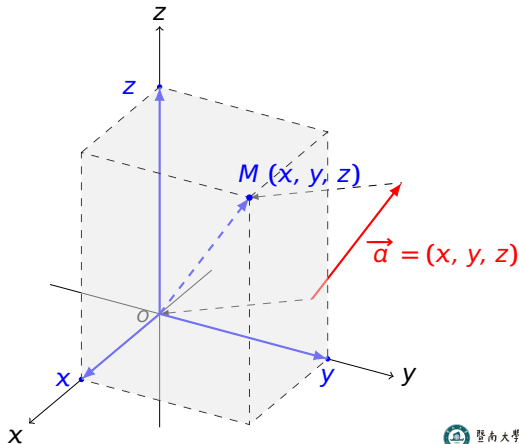
利用坐标值计算向量的长度

性质 向量 $\vec{a} = (x, y, z)$ 的长度是

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

证明 如图, 平移 \vec{a} 得 \overrightarrow{OM} , 则

$$|\vec{a}|^2 = |\overrightarrow{OM}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$$



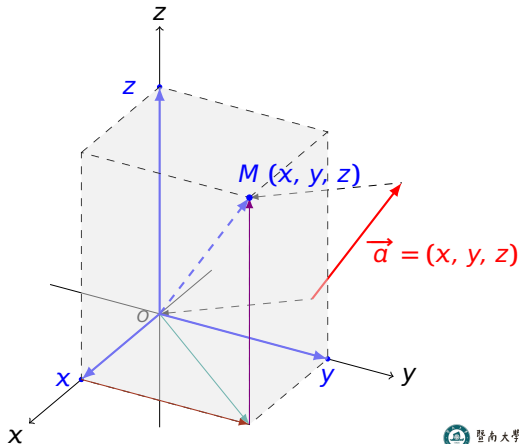
利用坐标值计算向量的长度

性质 向量 $\vec{a} = (x, y, z)$ 的长度是

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

证明 如图, 平移 \vec{a} 得 \overrightarrow{OM} , 则

$$|\vec{a}|^2 = |\overrightarrow{OM}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$$



性质 设点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$, 则

$$|\overrightarrow{AB}| =$$

性质 设点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$, 则

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

性质 设点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$, 则

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

证明 这是

$$\overrightarrow{AB} =$$

性质 设点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$, 则

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

证明 这是

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

性质 设点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$, 则

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

证明 这是

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

性质 设点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$, 则

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

证明 这是

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

例 设点 $A(4, 0, 5)$ 和 $B(7, 1, 3)$, 求 $|\overrightarrow{AB}|$ 及 $e_{\overrightarrow{AB}}$ 。

性质 设点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$, 则

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

证明 这是

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

例 设点 $A(4, 0, 5)$ 和 $B(7, 1, 3)$, 求 $|\overrightarrow{AB}|$ 及 $e_{\overrightarrow{AB}}$ 。

解

$$\overrightarrow{AB} =$$

$$|\overrightarrow{AB}| =$$

$$e_{\overrightarrow{AB}} =$$

性质 设点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$, 则

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

证明 这是

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

例 设点 $A(4, 0, 5)$ 和 $B(7, 1, 3)$, 求 $|\overrightarrow{AB}|$ 及 $e_{\overrightarrow{AB}}$ 。

解

$$\overrightarrow{AB} = (7 - 4, 1 - 0, 3 - 5)$$

$$|\overrightarrow{AB}| =$$

$$e_{\overrightarrow{AB}} =$$

性质 设点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$, 则

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

证明 这是

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

例 设点 $A(4, 0, 5)$ 和 $B(7, 1, 3)$, 求 $|\overrightarrow{AB}|$ 及 $e_{\overrightarrow{AB}}$ 。

解

$$\overrightarrow{AB} = (7 - 4, 1 - 0, 3 - 5) = (3, 1, -2)$$

$$|\overrightarrow{AB}| =$$

$$e_{\overrightarrow{AB}} =$$

性质 设点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$, 则

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

证明 这是

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

例 设点 $A(4, 0, 5)$ 和 $B(7, 1, 3)$, 求 $|\overrightarrow{AB}|$ 及 $e_{\overrightarrow{AB}}$ 。

解

$$\overrightarrow{AB} = (7 - 4, 1 - 0, 3 - 5) = (3, 1, -2)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2}$$

$$e_{\overrightarrow{AB}} =$$

性质 设点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$, 则

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

证明 这是

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

例 设点 $A(4, 0, 5)$ 和 $B(7, 1, 3)$, 求 $|\overrightarrow{AB}|$ 及 $e_{\overrightarrow{AB}}$ 。

解

$$\overrightarrow{AB} = (7 - 4, 1 - 0, 3 - 5) = (3, 1, -2)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$$

$$e_{\overrightarrow{AB}} =$$

性质 设点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$, 则

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

证明 这是

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

例 设点 $A(4, 0, 5)$ 和 $B(7, 1, 3)$, 求 $|\overrightarrow{AB}|$ 及 $e_{\overrightarrow{AB}}$ 。

解

$$\overrightarrow{AB} = (7 - 4, 1 - 0, 3 - 5) = (3, 1, -2)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$$

$$e_{\overrightarrow{AB}} = \frac{1}{|\overrightarrow{AB}|} \overrightarrow{AB}$$

性质 设点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$, 则

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

证明 这是

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

例 设点 $A(4, 0, 5)$ 和 $B(7, 1, 3)$, 求 $|\overrightarrow{AB}|$ 及 $e_{\overrightarrow{AB}}$ 。

解

$$\overrightarrow{AB} = (7 - 4, 1 - 0, 3 - 5) = (3, 1, -2)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$$

$$e_{\overrightarrow{AB}} = \frac{1}{|\overrightarrow{AB}|} \overrightarrow{AB} = \frac{1}{\sqrt{14}} (3, 1, -2)$$

性质 设点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$, 则

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

证明 这是

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

例 设点 $A(4, 0, 5)$ 和 $B(7, 1, 3)$, 求 $|\overrightarrow{AB}|$ 及 $e_{\overrightarrow{AB}}$ 。

解

$$\overrightarrow{AB} = (7 - 4, 1 - 0, 3 - 5) = (3, 1, -2)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$$

$$e_{\overrightarrow{AB}} = \frac{1}{|\overrightarrow{AB}|} \overrightarrow{AB} = \frac{1}{\sqrt{14}} (3, 1, -2) = \left(\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}} \right)$$

利用坐标值计算向量的夹角

性质 设 θ 为向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ 的夹角, 则

$$\cos \theta =$$

利用坐标值计算向量的夹角

性质 设 θ 为向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ 的夹角, 则

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

利用坐标值计算向量的夹角

性质 设 θ 为向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ 的夹角, 则

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

证明 由三角形余弦定理, 成立

$$\cos \theta = \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2}{2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

利用坐标值计算向量的夹角

性质 设 θ 为向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ 的夹角, 则

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

证明 由三角形余弦定理, 成立

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2}{2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \\ &= \frac{\left(\quad \right) + \left(\quad \right) - \left[\quad \right]}{2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \end{aligned}$$

利用坐标值计算向量的夹角

性质 设 θ 为向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ 的夹角, 则

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

证明 由三角形余弦定理, 成立

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2}{2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \\ &= \frac{(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2) + (b_x^2 + b_y^2 + b_z^2) - [(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 + (a_z - b_z)^2]}{2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \end{aligned}$$

利用坐标值计算向量的夹角

性质 设 θ 为向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ 的夹角, 则

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

证明 由三角形余弦定理, 成立

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2}{2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \\ &= \frac{(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2) + (b_x^2 + b_y^2 + b_z^2) - \left[\right]}{2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \end{aligned}$$

利用坐标值计算向量的夹角

性质 设 θ 为向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ 的夹角, 则

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

证明 由三角形余弦定理, 成立

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2}{2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \\ &= \frac{(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2) + (b_x^2 + b_y^2 + b_z^2) - [(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 + (a_z - b_z)^2]}{2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \end{aligned}$$

利用坐标值计算向量的夹角

性质 设 θ 为向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ 的夹角, 则

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

证明 由三角形余弦定理, 成立

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2}{2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \\ &= \frac{(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2) + (b_x^2 + b_y^2 + b_z^2) - [(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 + (a_z - b_z)^2]}{2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \\ &= \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \end{aligned}$$

利用坐标值计算向量的夹角

性质 设 θ 为向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ 的夹角, 则

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

证明 由三角形余弦定理, 成立

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2}{2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \\&= \frac{(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2) + (b_x^2 + b_y^2 + b_z^2) - [(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 + (a_z - b_z)^2]}{2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \\&= \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\end{aligned}$$

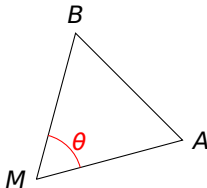
例 设有三点 $M(1, 1, 1)$, $A(2, 2, 1)$, $B(2, 1, 2)$, 计算角 $\theta = \angle AMB$ 。

利用坐标值计算向量的夹角

性质 设 θ 为向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ 的夹角, 则

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

例 设有三点 $M(1, 1, 1)$, $A(2, 2, 1)$, $B(2, 1, 2)$, 计算角 $\theta = \angle AMB$ 。

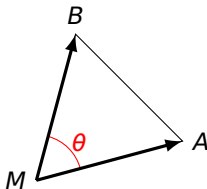


利用坐标值计算向量的夹角

性质 设 θ 为向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ 的夹角, 则

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

例 设有三点 $M(1, 1, 1)$, $A(2, 2, 1)$, $B(2, 1, 2)$, 计算角 $\theta = \angle AMB$ 。

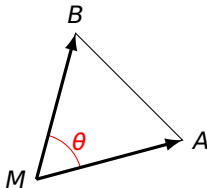


利用坐标值计算向量的夹角

性质 设 θ 为向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ 的夹角, 则

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

例 设有三点 $M(1, 1, 1)$, $A(2, 2, 1)$, $B(2, 1, 2)$, 计算角 $\theta = \angle AMB$ 。



解

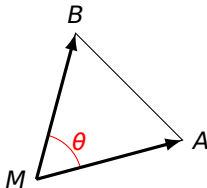
$$\vec{MA} = (\quad), \quad \vec{MB} = (\quad)$$

利用坐标值计算向量的夹角

性质 设 θ 为向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ 的夹角, 则

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

例 设有三点 $M(1, 1, 1)$, $A(2, 2, 1)$, $B(2, 1, 2)$, 计算角 $\theta = \angle AMB$ 。



解

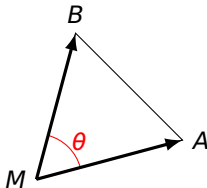
$$\vec{MA} = (1, 1, 0), \quad \vec{MB} = (\quad \quad)$$

利用坐标值计算向量的夹角

性质 设 θ 为向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ 的夹角, 则

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

例 设有三点 $M(1, 1, 1)$, $A(2, 2, 1)$, $B(2, 1, 2)$, 计算角 $\theta = \angle AMB$.



解

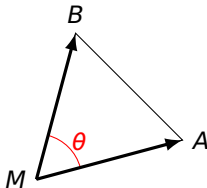
$$\vec{MA} = (1, 1, 0), \quad \vec{MB} = (1, 0, 1)$$

利用坐标值计算向量的夹角

性质 设 θ 为向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ 的夹角, 则

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

例 设有三点 $M(1, 1, 1)$, $A(2, 2, 1)$, $B(2, 1, 2)$, 计算角 $\theta = \angle AMB$.



解

$$\vec{MA} = (1, 1, 0), \quad \vec{MB} = (1, 0, 1)$$

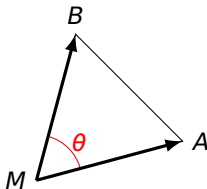
$$\Rightarrow \cos \theta = \underline{\hspace{2cm}}$$

利用坐标值计算向量的夹角

性质 设 θ 为向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ 的夹角, 则

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

例 设有三点 $M(1, 1, 1)$, $A(2, 2, 1)$, $B(2, 1, 2)$, 计算角 $\theta = \angle AMB$.



解

$$\vec{MA} = (1, 1, 0), \quad \vec{MB} = (1, 0, 1)$$

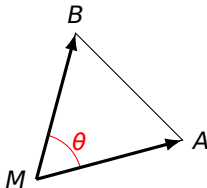
$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1}{}$$

利用坐标值计算向量的夹角

性质 设 θ 为向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ 的夹角, 则

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

例 设有三点 $M(1, 1, 1)$, $A(2, 2, 1)$, $B(2, 1, 2)$, 计算角 $\theta = \angle AMB$.



解

$$\vec{MA} = (1, 1, 0), \quad \vec{MB} = (1, 0, 1)$$

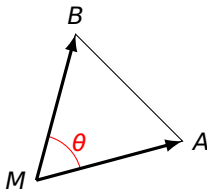
$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}}.$$

利用坐标值计算向量的夹角

性质 设 θ 为向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ 的夹角, 则

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

例 设有三点 $M(1, 1, 1)$, $A(2, 2, 1)$, $B(2, 1, 2)$, 计算角 $\theta = \angle AMB$.



解

$$\vec{MA} = (1, 1, 0), \quad \vec{MB} = (1, 0, 1)$$

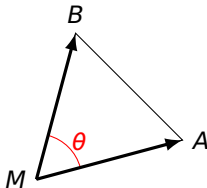
$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}}$$

利用坐标值计算向量的夹角

性质 设 θ 为向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ 的夹角, 则

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

例 设有三点 $M(1, 1, 1)$, $A(2, 2, 1)$, $B(2, 1, 2)$, 计算角 $\theta = \angle AMB$.



解

$$\vec{MA} = (1, 1, 0), \quad \vec{MB} = (1, 0, 1)$$

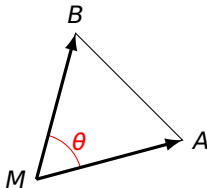
$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{2}$$

利用坐标值计算向量的夹角

性质 设 θ 为向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ 的夹角, 则

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

例 设有三点 $M(1, 1, 1)$, $A(2, 2, 1)$, $B(2, 1, 2)$, 计算角 $\theta = \angle AMB$ 。



解

$$\vec{MA} = (1, 1, 0), \quad \vec{MB} = (1, 0, 1)$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

利用坐标值计算向量的投影

性质 设向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 则

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} =$$

利用坐标值计算向量的投影

性质 设向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 则

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{b}|}.$$

利用坐标值计算向量的投影

性质 设向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 则

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{b}|}.$$

证明 这是

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \theta$$

利用坐标值计算向量的投影

性质 设向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 则

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{b}|}.$$

证明 这是

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \theta = |\vec{a}| \cdot \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

利用坐标值计算向量的投影

性质 设向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 则

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{b}|}.$$

证明 这是

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \theta = |\vec{a}| \cdot \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{b}|}.$$

利用坐标值计算向量的投影

性质 设向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 则

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{b}|}.$$

证明 这是

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \theta = |\vec{a}| \cdot \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{b}|}.$$

例 设 $\vec{a} = (1, -3, 2)$, $\vec{b} = (-2, 0, 3)$, 计算角 $\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a}$ 。

利用坐标值计算向量的投影

性质 设向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 则

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{b}|}.$$

证明 这是

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \theta = |\vec{a}| \cdot \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{b}|}.$$

例 设 $\vec{a} = (1, -3, 2)$, $\vec{b} = (-2, 0, 3)$, 计算角 $\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a}$ 。

解

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \underline{\hspace{2cm}}$$

利用坐标值计算向量的投影

性质 设向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 则

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{b}|}.$$

证明 这是

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \theta = |\vec{a}| \cdot \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{b}|}.$$

例 设 $\vec{a} = (1, -3, 2)$, $\vec{b} = (-2, 0, 3)$, 计算角 $\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a}$ 。

解

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{1 \cdot (-2) + (-3) \cdot 0 + 2 \cdot 3}{|\vec{b}|}$$

利用坐标值计算向量的投影

性质 设向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 则

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{b}|}.$$

证明 这是

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \theta = |\vec{a}| \cdot \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{b}|}.$$

例 设 $\vec{a} = (1, -3, 2)$, $\vec{b} = (-2, 0, 3)$, 计算角 $\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a}$ 。

解

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{1 \cdot (-2) + (-3) \cdot 0 + 2 \cdot 3}{\sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 3^2}}$$

利用坐标值计算向量的投影

性质 设向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 则

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{b}|}.$$

证明 这是

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \theta = |\vec{a}| \cdot \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{b}|}.$$

例 设 $\vec{a} = (1, -3, 2)$, $\vec{b} = (-2, 0, 3)$, 计算角 $\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a}$ 。

解

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{1 \cdot (-2) + (-3) \cdot 0 + 2 \cdot 3}{\sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 3^2}} = \frac{4}{\sqrt{13}}.$$

We are here now...

◆ 向量的基本概念

♣ 向量的坐标表示

♥ 向量的数量积

♠ 向量的向量积

向量的数量积

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{b}|}$$

向量的数量积

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{b}|}$$

向量的数量积

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

注 求夹角、投影的公式可以改写为

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{b}|}$$

向量的数量积

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

注 求夹角、投影的公式可以改写为

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$$

向量的数量积

定义 设向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 定义 \vec{a} 和 \vec{b} 数量积为:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

注 求夹角、投影的公式可以改写为

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$$

向量的数量积

定义 设向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 定义 \vec{a} 和 \vec{b} 数量积为:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

注 求夹角、投影的公式可以改写为

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$$

性质 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \theta$

向量的数量积

定义 设向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 定义 \vec{a} 和 \vec{b} 数量积为:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

注 求夹角、投影的公式可以改写为

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$$

性质 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \theta$, 特别地

$$\vec{a} \cdot \vec{a} =$$

向量的数量积

定义 设向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 定义 \vec{a} 和 \vec{b} 数量积为:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

注 求夹角、投影的公式可以改写为

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$$

性质 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \theta$, 特别地

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

向量的数量积

定义 设向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 定义 \vec{a} 和 \vec{b} 数量积为:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

注 求夹角、投影的公式可以改写为

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$
$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$$

性质 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \theta$, 特别地

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

向量的数量积

定义 设向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 定义 \vec{a} 和 \vec{b} 数量积为:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

注 求夹角、投影的公式可以改写为

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$$

性质 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \theta$, 特别地

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2, \quad \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

例 设空间中三个点 $C(1, -1, 2)$, $A(3, 3, 1)$, $B(3, 1, 3)$ 。令 $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$, $\theta = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ 。求 $\vec{a} \cdot \vec{b}$, θ , $\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a}$ 。

例 设空间中三个点 $C(1, -1, 2)$, $A(3, 3, 1)$, $B(3, 1, 3)$ 。令 $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$, $\theta = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ 。求 $\vec{a} \cdot \vec{b}$, θ , $\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a}$ 。

解 1. $\vec{a} = \overrightarrow{CA} = (2, 4, -1)$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB} = (2, 2, 1)$

例 设空间中三个点 $C(1, -1, 2)$, $A(3, 3, 1)$, $B(3, 1, 3)$ 。令 $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$, $\theta = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ 。求 $\vec{a} \cdot \vec{b}$, θ , $\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a}$ 。

解 1. $\vec{a} = \overrightarrow{CA} = (2, 4, -1)$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB} = (2, 2, 1)$

2. $\vec{a} \cdot \vec{b} =$

3. $\cos \theta =$

4. $\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} =$

例 设空间中三个点 $C(1, -1, 2)$, $A(3, 3, 1)$, $B(3, 1, 3)$ 。令 $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$, $\theta = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ 。求 $\vec{a} \cdot \vec{b}$, θ , $\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a}$ 。

解 1. $\vec{a} = \overrightarrow{CA} = (2, 4, -1)$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB} = (2, 2, 1)$

2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 = 11$

3. $\cos \theta =$

4. $\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} =$

例 设空间中三个点 $C(1, -1, 2)$, $A(3, 3, 1)$, $B(3, 1, 3)$ 。令 $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$, $\theta = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ 。求 $\vec{a} \cdot \vec{b}$, θ , $\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a}$ 。

解 1. $\vec{a} = \overrightarrow{CA} = (2, 4, -1)$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB} = (2, 2, 1)$

2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 = 11$

3. $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

4. $\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$

例 设空间中三个点 $C(1, -1, 2)$, $A(3, 3, 1)$, $B(3, 1, 3)$ 。令 $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$, $\theta = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ 。求 $\vec{a} \cdot \vec{b}$, θ , $\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a}$ 。

解 1. $\vec{a} = \overrightarrow{CA} = (2, 4, -1)$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB} = (2, 2, 1)$

2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 = 11$

3. $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{11}{3\sqrt{21}}$

4. $\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$

例 设空间中三个点 $C(1, -1, 2)$, $A(3, 3, 1)$, $B(3, 1, 3)$ 。令 $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$, $\theta = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ 。求 $\vec{a} \cdot \vec{b}$, θ , $\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a}$ 。

解 1. $\vec{a} = \overrightarrow{CA} = (2, 4, -1)$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB} = (2, 2, 1)$

2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 = 11$

3. $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{11}{3\sqrt{21}}$

4. $\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{11}{3}$

例 设空间中三个点 $C(1, -1, 2)$, $A(3, 3, 1)$, $B(3, 1, 3)$ 。令 $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$, $\theta = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ 。求 $\vec{a} \cdot \vec{b}$, θ , $\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a}$ 。

解 1. $\vec{a} = \overrightarrow{CA} = (2, 4, -1)$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB} = (2, 2, 1)$

2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 = 11$

3. $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{11}{3\sqrt{21}}$, 所以 $\theta = \arccos \frac{11}{3\sqrt{21}} \approx 36.9^\circ$

4. $\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{11}{3}$

数量积的运算律

交换律 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

分配律 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

结合律 $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$

数量积的运算律

交换律 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

分配律 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

结合律 $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$

证明 设 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$, 则

数量积的运算律

交换律 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

分配律 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

结合律 $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$

证明 设 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$, 则

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = b_x a_x + b_y a_y + b_z a_z = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

数量积的运算律

交换律 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

分配律 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

结合律 $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$

证明 设 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$, 则

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \qquad \vec{b} \cdot \vec{a}$$

数量积的运算律

交换律 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

分配律 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

结合律 $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$

证明 设 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$, 则

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad b_x a_x + b_y a_y + b_z a_z = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

数量积的运算律

交换律 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

分配律 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

结合律 $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$

证明 设 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$, 则

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = b_x a_x + b_y a_y + b_z a_z = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

数量积的运算律

交换律 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

分配律 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

结合律 $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$

证明 设 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$, 则

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = b_x a_x + b_y a_y + b_z a_z = \vec{b} \cdot \vec{a}$$
$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

数量积的运算律

交换律 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

分配律 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

结合律 $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$

证明 设 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$, 则

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = b_x a_x + b_y a_y + b_z a_z = \vec{b} \cdot \vec{a}$$
$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

$$\begin{aligned} & a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z + b_x c_x + b_y c_y + b_z c_z \\ &= \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} \end{aligned}$$

数量积的运算律

交换律 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

分配律 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

结合律 $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$

证明 设 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$, 则

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = b_x a_x + b_y a_y + b_z a_z = \vec{b} \cdot \vec{a}$$
$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z) \cdot (c_x, c_y, c_z)$$

$$\begin{aligned} & a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z + b_x c_x + b_y c_y + b_z c_z \\ &= \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} \end{aligned}$$

数量积的运算律

交换律 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

分配律 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

结合律 $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$

证明 设 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$, 则

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = b_x a_x + b_y a_y + b_z a_z = \vec{b} \cdot \vec{a} \\ (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} &= (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z) \cdot (c_x, c_y, c_z) \\ &= (a_x + b_x)c_x + (a_y + b_y)c_y + (a_z + b_z)c_z \\ &\quad a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z + b_x c_x + b_y c_y + b_z c_z \\ &= \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}\end{aligned}$$

数量积的运算律

交换律 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

分配律 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

结合律 $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$

证明 设 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$, 则

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = b_x a_x + b_y a_y + b_z a_z = \vec{b} \cdot \vec{a} \\ (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} &= (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z) \cdot (c_x, c_y, c_z) \\ &= (a_x + b_x)c_x + (a_y + b_y)c_y + (a_z + b_z)c_z \\ &= a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z + b_x c_x + b_y c_y + b_z c_z \\ &= \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}\end{aligned}$$

例 已知 $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$, 若 $\vec{a} + \lambda \vec{b}$ 与 $\vec{a} - \lambda \vec{b}$ 互相垂直, 则 $\lambda =$ _____。

例 已知 $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$, 若 $\vec{a} + \lambda \vec{b}$ 与 $\vec{a} - \lambda \vec{b}$ 互相垂直, 则 $\lambda =$ _____。

解

$$0 = (\vec{a} + \lambda \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \lambda \vec{b})$$

例 已知 $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$, 若 $\vec{a} + \lambda \vec{b}$ 与 $\vec{a} - \lambda \vec{b}$ 互相垂直, 则 $\lambda =$ _____。

解

$$\begin{aligned} 0 &= (\vec{a} + \lambda \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \lambda \vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot (-\lambda \vec{b}) + (\lambda \vec{b}) \cdot \vec{a} + (\lambda \vec{b}) \cdot (-\lambda \vec{b}) \end{aligned}$$

例 已知 $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$, 若 $\vec{a} + \lambda \vec{b}$ 与 $\vec{a} - \lambda \vec{b}$ 互相垂直, 则 $\lambda =$ _____。

解

$$\begin{aligned} 0 &= (\vec{a} + \lambda \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \lambda \vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot (-\lambda \vec{b}) + (\lambda \vec{b}) \cdot \vec{a} + (\lambda \vec{b}) \cdot (-\lambda \vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} - \lambda \vec{a} \cdot \vec{b} + \lambda \vec{b} \cdot \vec{a} - \lambda^2 \vec{b} \cdot \vec{b} \end{aligned}$$

例 已知 $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$, 若 $\vec{a} + \lambda \vec{b}$ 与 $\vec{a} - \lambda \vec{b}$ 互相垂直, 则 $\lambda =$ _____。

解

$$\begin{aligned} 0 &= (\vec{a} + \lambda \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \lambda \vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot (-\lambda \vec{b}) + (\lambda \vec{b}) \cdot \vec{a} + (\lambda \vec{b}) \cdot (-\lambda \vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} - \lambda \vec{a} \cdot \vec{b} + \lambda \vec{b} \cdot \vec{a} - \lambda^2 \vec{b} \cdot \vec{b} \\ &= |\vec{a}|^2 - \lambda^2 |\vec{b}|^2 \end{aligned}$$

例 已知 $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$, 若 $\vec{a} + \lambda \vec{b}$ 与 $\vec{a} - \lambda \vec{b}$ 互相垂直, 则 $\lambda =$ _____。

解

$$\begin{aligned} 0 &= (\vec{a} + \lambda \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \lambda \vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot (-\lambda \vec{b}) + (\lambda \vec{b}) \cdot \vec{a} + (\lambda \vec{b}) \cdot (-\lambda \vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} - \lambda \vec{a} \cdot \vec{b} + \lambda \vec{b} \cdot \vec{a} - \lambda^2 \vec{b} \cdot \vec{b} \\ &= |\vec{a}|^2 - \lambda^2 |\vec{b}|^2 \end{aligned}$$

所以

$$\lambda^2 = \frac{|\vec{a}|^2}{|\vec{b}|^2}$$

例 已知 $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$, 若 $\vec{a} + \lambda \vec{b}$ 与 $\vec{a} - \lambda \vec{b}$ 互相垂直, 则 $\lambda =$ _____。

解

$$\begin{aligned} 0 &= (\vec{a} + \lambda \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \lambda \vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot (-\lambda \vec{b}) + (\lambda \vec{b}) \cdot \vec{a} + (\lambda \vec{b}) \cdot (-\lambda \vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} - \lambda \vec{a} \cdot \vec{b} + \lambda \vec{b} \cdot \vec{a} - \lambda^2 \vec{b} \cdot \vec{b} \\ &= |\vec{a}|^2 - \lambda^2 |\vec{b}|^2 \end{aligned}$$

所以

$$\lambda^2 = \frac{|\vec{a}|^2}{|\vec{b}|^2} = \frac{2^2}{4^2} = \frac{1}{4}$$

例 已知 $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$, 若 $\vec{a} + \lambda \vec{b}$ 与 $\vec{a} - \lambda \vec{b}$ 互相垂直, 则 $\lambda =$ _____。

解

$$\begin{aligned} 0 &= (\vec{a} + \lambda \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \lambda \vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot (-\lambda \vec{b}) + (\lambda \vec{b}) \cdot \vec{a} + (\lambda \vec{b}) \cdot (-\lambda \vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} - \lambda \vec{a} \cdot \vec{b} + \lambda \vec{b} \cdot \vec{a} - \lambda^2 \vec{b} \cdot \vec{b} \\ &= |\vec{a}|^2 - \lambda^2 |\vec{b}|^2 \end{aligned}$$

所以

$$\lambda^2 = \frac{|\vec{a}|^2}{|\vec{b}|^2} = \frac{2^2}{4^2} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm \frac{1}{2}.$$

方向角

定义 向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 的三个方向角:

α :

β :

γ :

方向角

定义 向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 的三个方向角:

α : \vec{a} 与 x 轴正向的夹角,

β :

γ :

方向角

定义 向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 的三个方向角:

α : \vec{a} 与 x 轴正向的夹角,

β : \vec{a} 与 y 轴正向的夹角,

γ :

方向角

定义 向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 的三个方向角:

α : \vec{a} 与 x 轴正向的夹角,

β : \vec{a} 与 y 轴正向的夹角,

γ : \vec{a} 与 z 轴正向的夹角,

方向角

定义 向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 的三个方向角:

α : \vec{a} 与 x 轴正向的夹角, 即 $\alpha = \angle(\vec{a}, \vec{i})$

β : \vec{a} 与 y 轴正向的夹角, 即 $\beta = \angle(\vec{a}, \vec{j})$

γ : \vec{a} 与 z 轴正向的夹角, 即 $\gamma = \angle(\vec{a}, \vec{k})$

方向角

定义 向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 的三个方向角:

α : \vec{a} 与 x 轴正向的夹角, 即 $\alpha = \angle(\vec{a}, \vec{i})$

β : \vec{a} 与 y 轴正向的夹角, 即 $\beta = \angle(\vec{a}, \vec{j})$

γ : \vec{a} 与 z 轴正向的夹角, 即 $\gamma = \angle(\vec{a}, \vec{k})$

方向角的计算

$$\cos \alpha =$$

$$\cos \beta =$$

$$\cos \gamma =$$

方向角

定义 向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 的三个方向角:

α : \vec{a} 与 x 轴正向的夹角, 即 $\alpha = \angle(\vec{a}, \vec{i})$

β : \vec{a} 与 y 轴正向的夹角, 即 $\beta = \angle(\vec{a}, \vec{j})$

γ : \vec{a} 与 z 轴正向的夹角, 即 $\gamma = \angle(\vec{a}, \vec{k})$

方向角的计算

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{i}|}$$

$$\cos \beta =$$

$$\cos \gamma =$$

方向角

定义 向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 的三个方向角:

α : \vec{a} 与 x 轴正向的夹角, 即 $\alpha = \angle(\vec{a}, \vec{i})$

β : \vec{a} 与 y 轴正向的夹角, 即 $\beta = \angle(\vec{a}, \vec{j})$

γ : \vec{a} 与 z 轴正向的夹角, 即 $\gamma = \angle(\vec{a}, \vec{k})$

方向角的计算

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{i}|}$$

$$\cos \beta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{j}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{j}|}$$

$$\cos \gamma =$$

方向角

定义 向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 的三个方向角:

α : \vec{a} 与 x 轴正向的夹角, 即 $\alpha = \angle(\vec{a}, \vec{i})$

β : \vec{a} 与 y 轴正向的夹角, 即 $\beta = \angle(\vec{a}, \vec{j})$

γ : \vec{a} 与 z 轴正向的夹角, 即 $\gamma = \angle(\vec{a}, \vec{k})$

方向角的计算

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{i}|}$$

$$\cos \beta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{j}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{j}|}$$

$$\cos \gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{k}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{k}|}$$

方向角

定义 向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 的三个方向角:

α : \vec{a} 与 x 轴正向的夹角, 即 $\alpha = \angle(\vec{a}, \vec{i})$

β : \vec{a} 与 y 轴正向的夹角, 即 $\beta = \angle(\vec{a}, \vec{j})$

γ : \vec{a} 与 z 轴正向的夹角, 即 $\gamma = \angle(\vec{a}, \vec{k})$

方向角的计算

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{i}|} = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{j}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{j}|}$$

$$\cos \gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{k}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{k}|}$$

方向角

定义 向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 的三个方向角:

α : \vec{a} 与 x 轴正向的夹角, 即 $\alpha = \angle(\vec{a}, \vec{i})$

β : \vec{a} 与 y 轴正向的夹角, 即 $\beta = \angle(\vec{a}, \vec{j})$

γ : \vec{a} 与 z 轴正向的夹角, 即 $\gamma = \angle(\vec{a}, \vec{k})$

方向角的计算

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{i}|} = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{j}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{j}|} = \frac{a_y}{|\vec{a}|},$$

$$\cos \gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{k}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{k}|}$$

方向角

定义 向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 的三个方向角:

α : \vec{a} 与 x 轴正向的夹角, 即 $\alpha = \angle(\vec{a}, \vec{i})$

β : \vec{a} 与 y 轴正向的夹角, 即 $\beta = \angle(\vec{a}, \vec{j})$

γ : \vec{a} 与 z 轴正向的夹角, 即 $\gamma = \angle(\vec{a}, \vec{k})$

方向角的计算

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{i}|} = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{j}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{j}|} = \frac{a_y}{|\vec{a}|},$$

$$\cos \gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{k}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{k}|} = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

方向角

定义 向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 的三个方向角:

α : \vec{a} 与 x 轴正向的夹角, 即 $\alpha = \angle(\vec{a}, \vec{i})$

β : \vec{a} 与 y 轴正向的夹角, 即 $\beta = \angle(\vec{a}, \vec{j})$

γ : \vec{a} 与 z 轴正向的夹角, 即 $\gamma = \angle(\vec{a}, \vec{k})$

方向角的计算

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{i}|} = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{j}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{j}|} = \frac{a_y}{|\vec{a}|},$$

$$\cos \gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{k}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{k}|} = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

可见

$$\vec{e}_a = \frac{1}{|\vec{a}|} (a_x, a_y, a_z)$$

方向角

定义 向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 的三个方向角:

α : \vec{a} 与 x 轴正向的夹角, 即 $\alpha = \angle(\vec{a}, \vec{i})$

β : \vec{a} 与 y 轴正向的夹角, 即 $\beta = \angle(\vec{a}, \vec{j})$

γ : \vec{a} 与 z 轴正向的夹角, 即 $\gamma = \angle(\vec{a}, \vec{k})$

方向角的计算

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{i}|} = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{j}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{j}|} = \frac{a_y}{|\vec{a}|},$$

$$\cos \gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{k}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{k}|} = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

可见

$$\vec{e}_a = \frac{1}{|\vec{a}|}(a_x, a_y, a_z) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

We are here now...

◆ 向量的基本概念

♣ 向量的坐标表示

♥ 向量的数量积

♠ 向量的向量积

二阶行列式

- 定义 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$, 称为 二阶行列式

二阶行列式

- 定义 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, 称为 二阶行列式

二阶行列式

- 定义 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, 称为 二阶行列式
- 例 $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$

二阶行列式

- 定义 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, 称为 二阶行列式
- 例 $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 - 2 \cdot 3$

二阶行列式

- 定义 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, 称为 二阶行列式
- 例 $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -7$

二阶行列式

- 定义 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, 称为 二阶行列式
- 例 $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -7$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

二阶行列式

- 定义 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, 称为 二阶行列式
- 例 $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -7$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

二阶行列式

- 定义 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, 称为 二阶行列式

- 例 $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -7$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

- 反称性

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}$$

二阶行列式

- 定义 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, 称为 二阶行列式

- 例 $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -7$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

- 反称性

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}$$

二阶行列式

- 定义 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, 称为 二阶行列式

- 例 $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -7$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

- 反称性

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

二阶行列式

- 定义 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, 称为 二阶行列式

- 例 $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -7$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

- 反称性

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

- 几何意义 平面向量 $\vec{a} = (a_x, a_y)$, $\vec{b} = (b_x, b_y)$ 所张成平行四边形面积为 $\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$ 绝对值。

二阶行列式

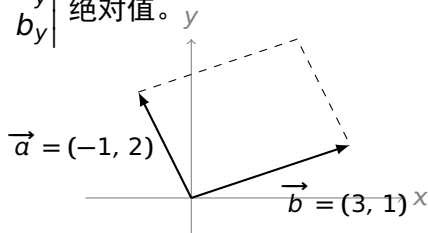
- 定义 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, 称为 **二阶行列式**

- 例 $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -7$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

- 反称性

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

- 几何意义 平面向量 $\vec{a} = (a_x, a_y)$, $\vec{b} = (b_x, b_y)$ 所张成平行四边形面积为 $\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$ 绝对值。



三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \quad -a_{12} \quad +a_{13}$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \cancel{a_{33}} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix}$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix}$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix}$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix}$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} \quad \quad \quad \\ \quad \quad \quad \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} \quad \quad \quad \\ \quad \quad \quad \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix}$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix}$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix}$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix}$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$
$$= 4 \cdot \quad - 3 \cdot \quad + 2 \cdot$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix}$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$
$$= 4 \cdot (-5) - 3 \cdot \quad + 2 \cdot$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix}$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$$= 4 \cdot (-5) - 3 \cdot 5 + 2 \cdot$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix}$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$
$$= 4 \cdot (-5) - 3 \cdot 5 + 2 \cdot 5$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix}$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$$= 4 \cdot (-5) - 3 \cdot 5 + 2 \cdot 5 = -25$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix}$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$
$$= 4 \cdot (-5) - 3 \cdot 5 + 2 \cdot 5 = -25$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -9 & 16 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -9 \end{vmatrix}$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$$= 4 \cdot (-5) - 3 \cdot 5 + 2 \cdot 5 = -25$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -9 & 16 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -9 \end{vmatrix}$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$$= 4 \cdot (-5) - 3 \cdot 5 + 2 \cdot 5 = -25$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -9 & 16 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -9 \end{vmatrix}$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$$= 4 \cdot (-5) - 3 \cdot 5 + 2 \cdot 5 = -25$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -9 & 16 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$$= 4 \cdot (-5) - 3 \cdot 5 + 2 \cdot 5 = -25$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -9 & 16 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \cdot \quad + 1 \cdot \quad + 2 \cdot$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$
$$= 4 \cdot (-5) - 3 \cdot 5 + 2 \cdot 5 = -25$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -9 & 16 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \cdot (-12) + 1 \cdot \quad + 2 \cdot$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$$= 4 \cdot (-5) - 3 \cdot 5 + 2 \cdot 5 = -25$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -9 & 16 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \cdot (-12) + 1 \cdot 16 + 2 \cdot$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$$= 4 \cdot (-5) - 3 \cdot 5 + 2 \cdot 5 = -25$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -9 & 16 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \cdot (-12) + 1 \cdot 16 + 2 \cdot (-6)$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$$= 4 \cdot (-5) - 3 \cdot 5 + 2 \cdot 5 = -25$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -9 & 16 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \cdot (-12) + 1 \cdot 16 + 2 \cdot (-6) = -2$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$$= 4 \cdot (-5) - 3 \cdot 5 + 2 \cdot 5 = -25$$

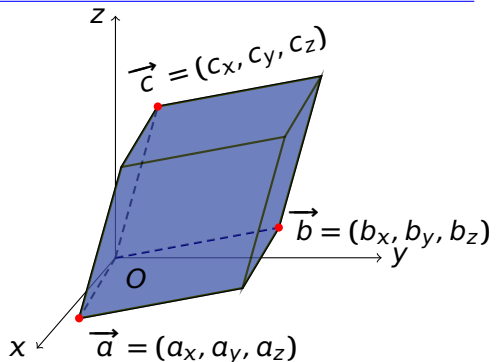
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -9 & 16 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \cdot (-12) + 1 \cdot 16 + 2 \cdot (-6) = -2$$

性质 交换行列式的两行、或两列，行列式的值变号。

三阶行列式的几何意义

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 张成平行六面体的体积

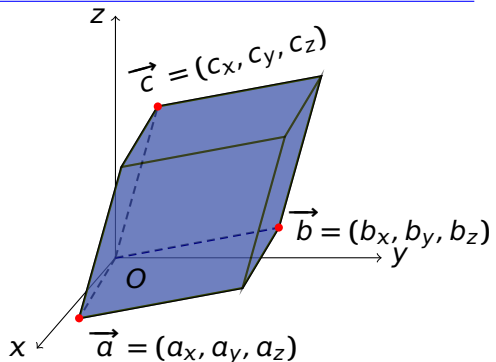
=



三阶行列式的几何意义

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 张成平行六面体的体积

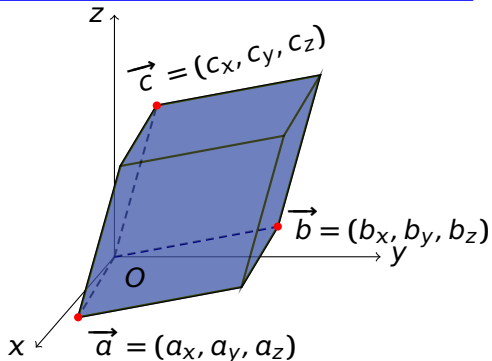
$$= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \text{ 的绝对值}$$



三阶行列式的几何意义

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 张成平行六面体的体积

$$= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \text{ 的绝对值}$$

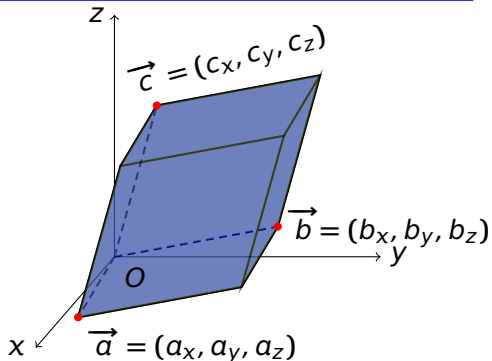


性质 向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$ 不共面的充分必要条件是：

三阶行列式的几何意义

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 张成平行六面体的体积

$$= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \text{ 的绝对值}$$



性质 向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$ 不共面的充分必要条件是：

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \neq 0$$

右手规则

定义 假设 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$ 不共面, 若

$$\bullet \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} > 0,$$

$$\bullet \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} < 0,$$

右手规则

定义 假设 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$ 不共面, 若

- $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} > 0$, 则称有序向量组 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 符合右手规则;
- $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} < 0$,

右手规则

定义 假设 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$ 不共面, 若

- $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} > 0$, 则称有序向量组 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 符合右手规则;
- $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} < 0$, 则称有序向量组 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 符合左手规则;

例

1. $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$ 符合 手规则;
2. $\vec{a} = (1, 1, 1)$, $\vec{b} = (2, 3, 4)$, $\vec{c} = (4, 9, 16)$ 符合 手规则;

例

1. $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$ 符合 手规则;
2. $\vec{a} = (1, 1, 1)$, $\vec{b} = (2, 3, 4)$, $\vec{c} = (4, 9, 16)$ 符合 手规则;

解 这是因为 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = 2 > 0$

例

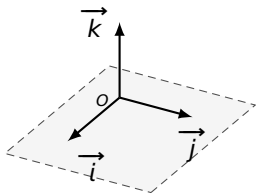
1. $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$ 符合右手规则;
2. $\vec{a} = (1, 1, 1)$, $\vec{b} = (2, 3, 4)$, $\vec{c} = (4, 9, 16)$ 符合右手规则;

解 这是因为 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = 2 > 0$

例

1. $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$ 符合右手规则;
2. $\vec{a} = (1, 1, 1)$, $\vec{b} = (2, 3, 4)$, $\vec{c} = (4, 9, 16)$ 符合右手规则;

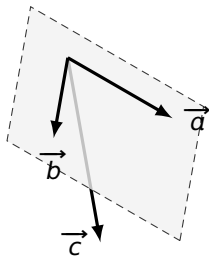
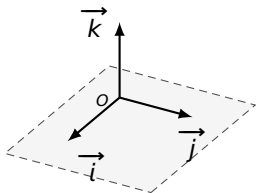
解 这是因为 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = 2 > 0$



例

1. $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$ 符合右手规则;
2. $\vec{a} = (1, 1, 1)$, $\vec{b} = (2, 3, 4)$, $\vec{c} = (4, 9, 16)$ 符合右手规则;

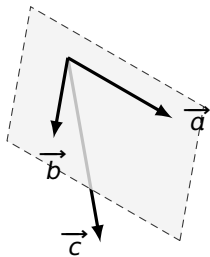
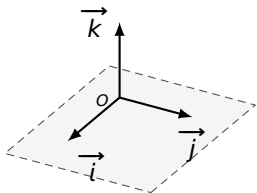
解 这是因为 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = 2 > 0$



例

1. $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$ 符合右手规则;
2. $\vec{a} = (1, 1, 1)$, $\vec{b} = (2, 3, 4)$, $\vec{c} = (4, 9, 16)$ 符合右手规则;

解 这是因为 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = 2 > 0$



注 若 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} 符合右手规则, 则张开的右手手指可做如下指向:

食指 $\rightarrow \vec{a}$; 中指 $\rightarrow \vec{b}$; 拇指 $\rightarrow \vec{c}$

性质 假设 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 符合右手规则, 则有序向量组

$\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}$ 及 $\vec{a}, \vec{b}, -\vec{c}$ 符合左手规则

性质 假设 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 符合右手规则，则有序向量组

$\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}$ 及 $\vec{a}, \vec{b}, -\vec{c}$ 符合左手规则

证明 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 符合右手规则 $\Rightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} > 0$ ，所以

性质 假设 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 符合右手规则, 则有序向量组

$\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}$ 及 $\vec{a}, \vec{b}, -\vec{c}$ 符合左手规则

证明 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 符合右手规则 $\Rightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} > 0$, 所以

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ -c_x & -c_y & -c_z \end{vmatrix}$$

性质 假设 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 符合右手规则, 则有序向量组

$\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}$ 及 $\vec{a}, \vec{b}, -\vec{c}$ 符合左手规则

证明 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 符合右手规则 $\Rightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} > 0$, 所以

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} < 0$$

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ -c_x & -c_y & -c_z \end{vmatrix}$$

性质 假设 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 符合右手规则, 则有序向量组

$\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}$ 及 $\vec{a}, \vec{b}, -\vec{c}$ 符合左手规则

证明 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 符合右手规则 $\Rightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} > 0$, 所以

$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} < 0 \Rightarrow \vec{a}, \vec{c}, \vec{b}$ 符合左手规则

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ -c_x & -c_y & -c_z \end{vmatrix}$$

性质 假设 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 符合右手规则, 则有序向量组

$\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}$ 及 $\vec{a}, \vec{b}, -\vec{c}$ 符合左手规则

证明 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 符合右手规则 $\Rightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} > 0$, 所以

$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} < 0 \Rightarrow \vec{a}, \vec{c}, \vec{b}$ 符合左手规则

$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ -c_x & -c_y & -c_z \end{vmatrix} < 0$

性质 假设 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 符合右手规则, 则有序向量组

$\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}$ 及 $\vec{a}, \vec{b}, -\vec{c}$ 符合左手规则

证明 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 符合右手规则 $\Rightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} > 0$, 所以

$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} < 0 \Rightarrow \vec{a}, \vec{c}, \vec{b}$ 符合左手规则

$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ -c_x & -c_y & -c_z \end{vmatrix} < 0 \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, -\vec{c}$ 符合左手规则

性质 假设 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 符合右手规则, 则有序向量组

$\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}$ 及 $\vec{a}, \vec{b}, -\vec{c}$ 符合左手规则

证明 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 符合右手规则 $\Rightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} > 0$, 所以

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} < 0 \Rightarrow \vec{a}, \vec{c}, \vec{b} \text{ 符合左手规则}$$

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ -c_x & -c_y & -c_z \end{vmatrix} < 0 \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, -\vec{c} \text{ 符合左手规则}$$

注 假设 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 不共面, 则任意交换两个向量的次序, 或者对任一个向量添加负号,

性质 假设 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 符合右手规则, 则有序向量组

$\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}$ 及 $\vec{a}, \vec{b}, -\vec{c}$ 符合左手规则

证明 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 符合右手规则 $\Rightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} > 0$, 所以

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} < 0 \Rightarrow \vec{a}, \vec{c}, \vec{b} \text{ 符合左手规则}$$

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ -c_x & -c_y & -c_z \end{vmatrix} < 0 \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, -\vec{c} \text{ 符合左手规则}$$

注 假设 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 不共面, 则任意交换两个向量的次序, 或者对任一个向量添加负号, 新的有序向量组“手性”相反。

向量积

定义 设有向量 \vec{a} , \vec{b} , 现按如下方式定义第三个向量 \vec{c} :

方向

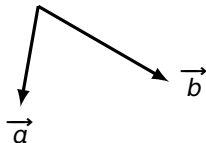
长度

向量积

定义 设有向量 \vec{a} , \vec{b} , 现按如下方式定义第三个向量 \vec{c} :

方向

长度

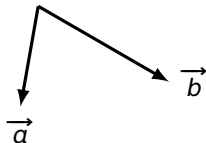


向量积

定义 设有向量 \vec{a} , \vec{b} , 现按如下方式定义第三个向量 \vec{c} :

方向 \vec{c} 与 \vec{a} , \vec{b} 均垂直,

长度

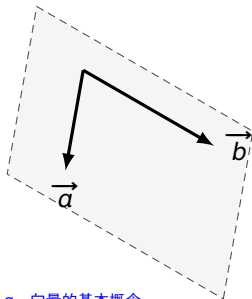


向量积

定义 设有向量 \vec{a} , \vec{b} , 现按如下方式定义第三个向量 \vec{c} :

方向 \vec{c} 与 \vec{a} , \vec{b} 均垂直,

长度

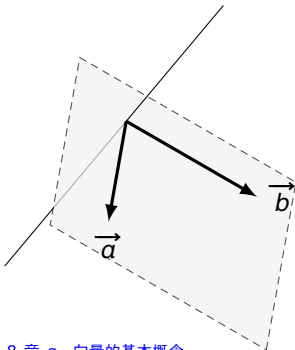


向量积

定义 设有向量 \vec{a} , \vec{b} , 现按如下方式定义第三个向量 \vec{c} :

方向 \vec{c} 与 \vec{a} , \vec{b} 均垂直,

长度

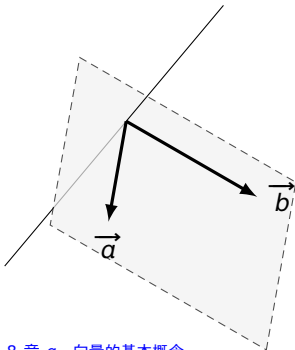


向量积

定义 设有向量 \vec{a} , \vec{b} , 现按如下方式定义第三个向量 \vec{c} :

方向 \vec{c} 与 \vec{a} , \vec{b} 均垂直, 且 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} 满足右手规则

长度

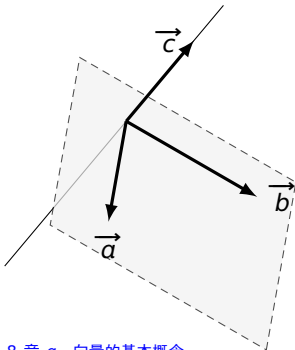


向量积

定义 设有向量 \vec{a} , \vec{b} , 现按如下方式定义第三个向量 \vec{c} :

方向 \vec{c} 与 \vec{a} , \vec{b} 均垂直, 且 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} 满足右手规则

长度

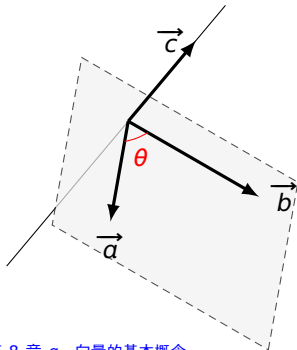


向量积

定义 设有向量 \vec{a} , \vec{b} , 现按如下方式定义第三个向量 \vec{c} :

方向 \vec{c} 与 \vec{a} , \vec{b} 均垂直, 且 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} 满足右手规则

长度 $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \theta$, 其中 $\theta = \angle(\vec{a}, \vec{b})$



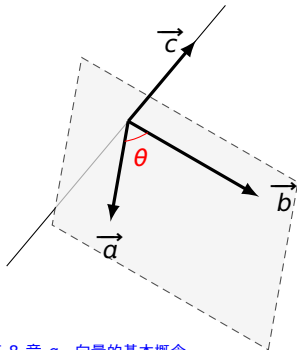
向量积

定义 设有向量 \vec{a} , \vec{b} , 现按如下方式定义第三个向量 \vec{c} :

方向 \vec{c} 与 \vec{a} , \vec{b} 均垂直, 且 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} 满足右手规则

长度 $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \theta$, 其中 $\theta = \angle(\vec{a}, \vec{b})$

称 \vec{c} 为 \vec{a} , \vec{b} 的**向量积**, 记作 $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ 。



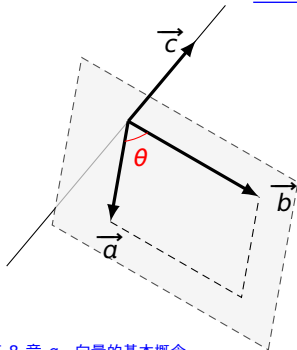
向量积

定义 设有向量 \vec{a} , \vec{b} , 现按如下方式定义第三个向量 \vec{c} :

方向 \vec{c} 与 \vec{a} , \vec{b} 均垂直, 且 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} 满足右手规则

长度 $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \theta$, 其中 $\theta = \angle(\vec{a}, \vec{b})$

称 \vec{c} 为 \vec{a} , \vec{b} 的**向量积**, 记作 $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ 。



向量积

定义 设有向量 \vec{a} , \vec{b} , 现按如下方式定义第三个向量 \vec{c} :

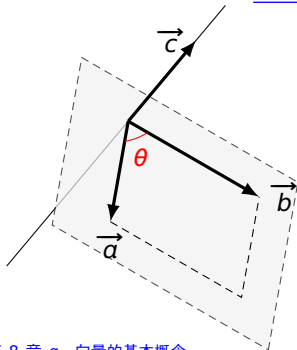
方向 \vec{c} 与 \vec{a} , \vec{b} 均垂直, 且 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} 满足右手规则

长度 $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \theta$, 其中 $\theta = \angle(\vec{a}, \vec{b})$

称 \vec{c} 为 \vec{a} , \vec{b} 的**向量积**, 记作 $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ 。

注 1

$|\vec{a} \times \vec{b}| = \vec{a}, \vec{b}$ 张成平行四边形面积



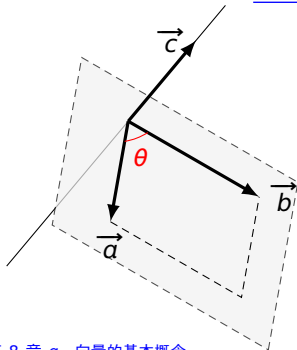
向量积

定义 设有向量 \vec{a} , \vec{b} , 现按如下方式定义第三个向量 \vec{c} :

方向 \vec{c} 与 \vec{a} , \vec{b} 均垂直, 且 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} 满足右手规则

长度 $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \theta$, 其中 $\theta = \angle(\vec{a}, \vec{b})$

称 \vec{c} 为 \vec{a} , \vec{b} 的**向量积**, 记作 $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ 。



注 1

$|\vec{a} \times \vec{b}| = \vec{a}, \vec{b}$ 张成平行四边形面积

注 2

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow$$

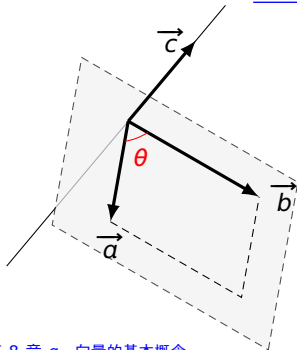
向量积

定义 设有向量 \vec{a} , \vec{b} , 现按如下方式定义第三个向量 \vec{c} :

方向 \vec{c} 与 \vec{a} , \vec{b} 均垂直, 且 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} 满足右手规则

长度 $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \theta$, 其中 $\theta = \angle(\vec{a}, \vec{b})$

称 \vec{c} 为 \vec{a} , \vec{b} 的**向量积**, 记作 $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ 。



注 1

$|\vec{a} \times \vec{b}| = \vec{a}, \vec{b}$ 张成平行四边形面积

注 2

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \iff \vec{a} \parallel \vec{b}$$

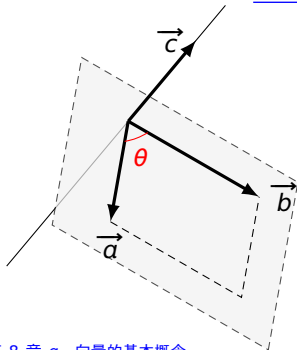
向量积

定义 设有向量 \vec{a} , \vec{b} , 现按如下方式定义第三个向量 \vec{c} :

方向 \vec{c} 与 \vec{a} , \vec{b} 均垂直, 且 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} 满足右手规则

长度 $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \theta$, 其中 $\theta = \angle(\vec{a}, \vec{b})$

称 \vec{c} 为 \vec{a} , \vec{b} 的**向量积**, 记作 $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ 。



注 1

$|\vec{a} \times \vec{b}| = \vec{a}, \vec{b}$ 张成平行四边形面积

注 2

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \iff \vec{a} \parallel \vec{b}$$

特别地, $\vec{a} \times \vec{a} =$

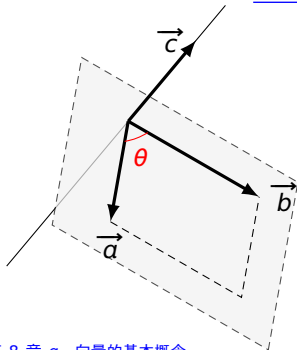
向量积

定义 设有向量 \vec{a} , \vec{b} , 现按如下方式定义第三个向量 \vec{c} :

方向 \vec{c} 与 \vec{a} , \vec{b} 均垂直, 且 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} 满足右手规则

长度 $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \theta$, 其中 $\theta = \angle(\vec{a}, \vec{b})$

称 \vec{c} 为 \vec{a} , \vec{b} 的**向量积**, 记作 $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ 。



注 1

$|\vec{a} \times \vec{b}| = \vec{a}, \vec{b}$ 张成平行四边形面积

注 2

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \iff \vec{a} \parallel \vec{b}$$

特别地, $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

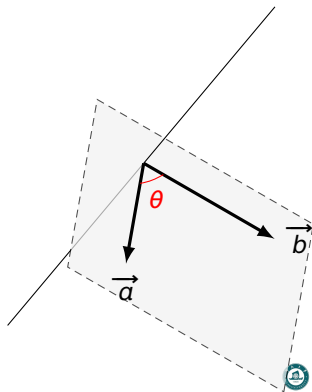
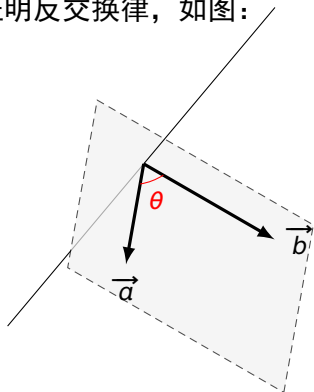
向量积的运算律

反交换 $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

向量积的运算律

$$\text{反交换 } \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

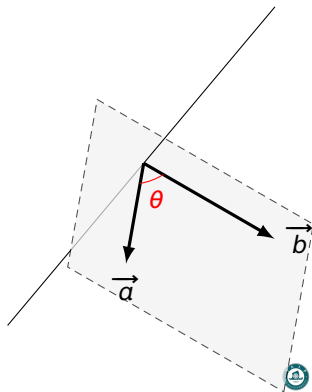
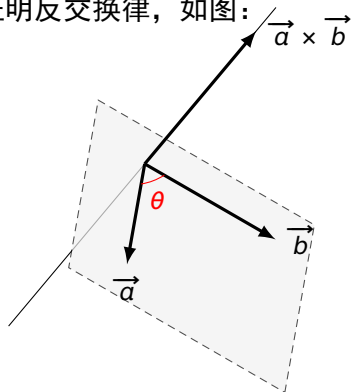
证明反交换律，如图：



向量积的运算律

反交换 $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

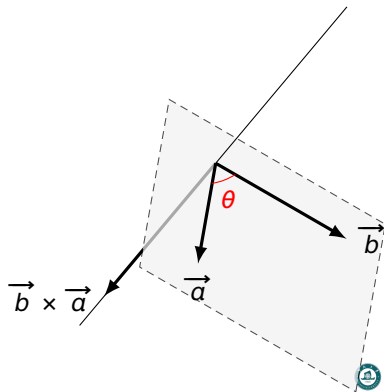
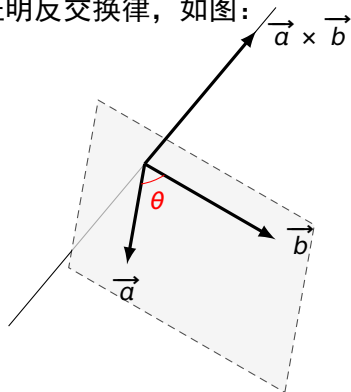
证明反交换律，如图：



向量积的运算律

反交换 $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

证明反交换律，如图：

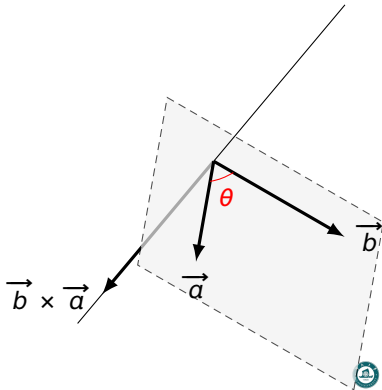
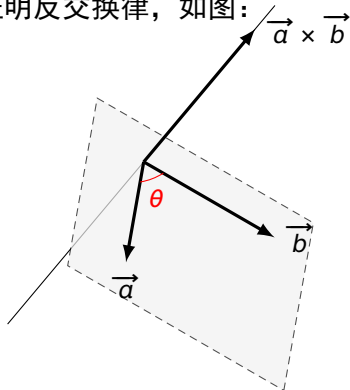


向量积的运算律

反交换 $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

分配律 $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

证明反交换律，如图：



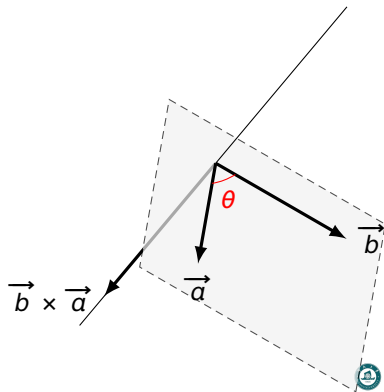
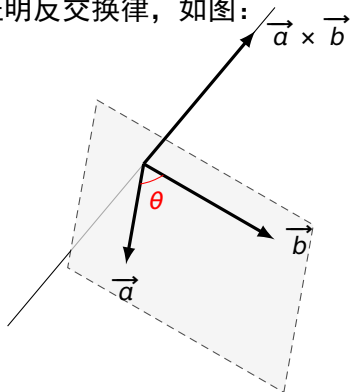
向量积的运算律

反交换 $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

分配律 $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

结合律 $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$

证明反交换律，如图：



性质 对于 $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$, 成立

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \\ \end{array} \right.$$

性质 对于 $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$, 成立

$$\begin{cases} \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, & \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, & \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \\ \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, & \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, & \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \end{cases}$$

性质 对于 $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$, 成立

$$\begin{cases} \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, & \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, & \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \\ \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, & \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, & \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \\ \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0. \end{cases}$$

性质 对于 $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$, 成立

$$\begin{cases} \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, & \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, & \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \\ \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, & \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, & \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \\ \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0. \end{cases}$$

证明 以为 $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ 例证明:

$$|\vec{i} \times \vec{j}| =$$

性质 对于 $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$, 成立

$$\begin{cases} \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, & \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, & \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \\ \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, & \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, & \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \\ \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0. \end{cases}$$

证明 以为 $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ 例证明:

$$|\vec{i} \times \vec{j}| = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot \sin \frac{\pi}{2}$$

性质 对于 $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$, 成立

$$\begin{cases} \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, & \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, & \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \\ \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, & \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, & \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \\ \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0. \end{cases}$$

证明 以为 $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ 例证明:

$$|\vec{i} \times \vec{j}| = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

性质 对于 $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$, 成立

$$\begin{cases} \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, & \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, & \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \\ \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, & \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, & \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \\ \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0. \end{cases}$$

证明 以为 $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ 例证明:

$$|\vec{i} \times \vec{j}| = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 1 = |\vec{k}|$$

性质 对于 $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$, 成立

$$\begin{cases} \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, & \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, & \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \\ \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, & \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, & \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \\ \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0. \end{cases}$$

证明 以为 $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ 例证明:

$$|\vec{i} \times \vec{j}| = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 1 = |\vec{k}|$$

$\vec{i} \times \vec{j}, \vec{k}$ 均垂直于 \vec{i} 和 $\vec{j} \Rightarrow$

性质 对于 $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$, 成立

$$\begin{cases} \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, & \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, & \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \\ \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, & \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, & \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \\ \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0. \end{cases}$$

证明 以为 $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ 例证明:

$$|\vec{i} \times \vec{j}| = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 1 = |\vec{k}|$$

$$\vec{i} \times \vec{j}, \vec{k} \text{ 均垂直于 } \vec{i} \text{ 和 } \vec{j} \Rightarrow \vec{i} \times \vec{j} \parallel \vec{k}$$

性质 对于 $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$, 成立

$$\begin{cases} \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, & \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, & \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \\ \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, & \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, & \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \\ \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0. \end{cases}$$

证明 以为 $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ 例证明:

$$\left. \begin{aligned} & |\vec{i} \times \vec{j}| = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 1 = |\vec{k}| \\ & \vec{i} \times \vec{j}, \vec{k} \text{ 均垂直于 } \vec{i} \text{ 和 } \vec{j} \Rightarrow \vec{i} \times \vec{j} \parallel \vec{k} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

性质 对于 $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$, 成立

$$\begin{cases} \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, & \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, & \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \\ \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, & \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, & \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \\ \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0. \end{cases}$$

证明 以为 $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ 例证明:

$$\left. \begin{array}{l} |\vec{i} \times \vec{j}| = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 1 = |\vec{k}| \\ \vec{i} \times \vec{j}, \vec{k} \text{ 均垂直于 } \vec{i} \text{ 和 } \vec{j} \Rightarrow \vec{i} \times \vec{j} \parallel \vec{k} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{i} \times \vec{j} = \pm \vec{k}$$

性质 对于 $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$, 成立

$$\begin{cases} \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, & \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, & \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \\ \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, & \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, & \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \\ \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0. \end{cases}$$

证明 以为 $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ 例证明:

$$\left. \begin{array}{l} |\vec{i} \times \vec{j}| = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 1 = |\vec{k}| \\ \vec{i} \times \vec{j}, \vec{k} \text{ 均垂直于 } \vec{i} \text{ 和 } \vec{j} \Rightarrow \vec{i} \times \vec{j} \parallel \vec{k} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{i} \times \vec{j} = \pm \vec{k}$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{i} \times \vec{j}$ 符合右手规则

性质 对于 $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$, 成立

$$\begin{cases} \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, & \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, & \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \\ \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, & \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, & \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \\ \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0. \end{cases}$$

证明 以为 $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ 例证明:

$$\left. \begin{array}{l} |\vec{i} \times \vec{j}| = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 1 = |\vec{k}| \\ \vec{i} \times \vec{j}, \vec{k} \text{ 均垂直于 } \vec{i} \text{ 和 } \vec{j} \Rightarrow \vec{i} \times \vec{j} \parallel \vec{k} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{i} \times \vec{j} = \pm \vec{k}$$

$$\xrightarrow{\vec{i}, \vec{j}, \vec{i} \times \vec{j} \text{ 符合右手规则}} \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$$

性质 设 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 则

$$\vec{a} \times \vec{b} = (\quad , \quad , \quad)$$

性质 设 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 则

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, \quad , \quad)$$

性质 设 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 则

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, \quad)$$

性质 设 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 则

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

性质 设 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 则

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

证明

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k})$$

性质 设 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 则

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

证明

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) \\ &= a_x b_x (\vec{i} \times \vec{i}) + a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x b_z (\vec{i} \times \vec{k}) + \\ &\quad a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j} \times \vec{j}) + a_y b_z (\vec{j} \times \vec{k}) + \\ &\quad a_z b_x (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z b_z (\vec{k} \times \vec{k})\end{aligned}$$

性质 设 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 则

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

证明

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) \\&= a_x b_x (\vec{i} \times \vec{i}) + a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x b_z (\vec{i} \times \vec{k}) + \\&\quad a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j} \times \vec{j}) + a_y b_z (\vec{j} \times \vec{k}) + \\&\quad a_z b_x (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z b_z (\vec{k} \times \vec{k})\end{aligned}$$

性质 设 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 则

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

证明

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) \\&= a_x b_x (\vec{i} \times \vec{i}) + a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x b_z (\vec{i} \times \vec{k}) + \\&\quad a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j} \times \vec{j}) + a_y b_z (\vec{j} \times \vec{k}) + \\&\quad a_z b_x (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z b_z (\vec{k} \times \vec{k}) \\&= (\quad) \vec{i} + (\quad) \vec{j} + (\quad) \vec{k}\end{aligned}$$

性质 设 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 则

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

证明

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) \\&= a_x b_x (\vec{i} \times \vec{i}) + a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x b_z (\vec{i} \times \vec{k}) + \\&\quad a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j} \times \vec{j}) + a_y b_z (\vec{j} \times \vec{k}) + \\&\quad a_z b_x (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z b_z (\vec{k} \times \vec{k}) \\&= (\quad) \vec{i} + (\quad) \vec{j} + (\quad) \vec{k}\end{aligned}$$

性质 设 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 则

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

证明

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) \\&= a_x b_x (\vec{i} \times \vec{i}) + a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x b_z (\vec{i} \times \vec{k}) + \\&\quad a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j} \times \vec{j}) + a_y b_z (\vec{j} \times \vec{k}) + \\&\quad a_z b_x (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z b_z (\vec{k} \times \vec{k}) \\&= (\quad) \vec{i} + (\quad) \vec{j} + (\quad) \vec{k}\end{aligned}$$

性质 设 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 则

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

证明

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) \\&= a_x b_x (\vec{i} \times \vec{i}) + a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x b_z (\vec{i} \times \vec{k}) + \\&\quad a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j} \times \vec{j}) + a_y b_z (\vec{j} \times \vec{k}) + \\&\quad a_z b_x (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z b_z (\vec{k} \times \vec{k}) \\&= (\quad) \vec{i} + (\quad) \vec{j} + (\quad) \vec{k}\end{aligned}$$

性质 设 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 则

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

证明

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) \\&= a_x b_x (\vec{i} \times \vec{i}) + a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x b_z (\vec{i} \times \vec{k}) + \\&\quad a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j} \times \vec{j}) + a_y b_z (\vec{j} \times \vec{k}) + \\&\quad a_z b_x (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z b_z (\vec{k} \times \vec{k}) \\&= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}\end{aligned}$$

性质 设 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 则

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

证明

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) \\&= a_x b_x (\vec{i} \times \vec{i}) + a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x b_z (\vec{i} \times \vec{k}) + \\&\quad a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j} \times \vec{j}) + a_y b_z (\vec{j} \times \vec{k}) + \\&\quad a_z b_x (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z b_z (\vec{k} \times \vec{k}) \\&= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}\end{aligned}$$

性质 设 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 则

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

证明

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) \\&= a_x b_x (\vec{i} \times \vec{i}) + a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x b_z (\vec{i} \times \vec{k}) + \\&\quad a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j} \times \vec{j}) + a_y b_z (\vec{j} \times \vec{k}) + \\&\quad a_z b_x (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z b_z (\vec{k} \times \vec{k}) \\&= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}\end{aligned}$$

性质 设 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 则

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

证明

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) \\&= a_x b_x (\vec{i} \times \vec{i}) + a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x b_z (\vec{i} \times \vec{k}) + \\&\quad a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j} \times \vec{j}) + a_y b_z (\vec{j} \times \vec{k}) + \\&\quad a_z b_x (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z b_z (\vec{k} \times \vec{k}) \\&= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}\end{aligned}$$

注

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

性质 设 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 则

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

证明

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) \\&= a_x b_x (\vec{i} \times \vec{i}) + a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x b_z (\vec{i} \times \vec{k}) + \\&\quad a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j} \times \vec{j}) + a_y b_z (\vec{j} \times \vec{k}) + \\&\quad a_z b_x (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z b_z (\vec{k} \times \vec{k}) \\&= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}\end{aligned}$$

注

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}$$

性质 设 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 则

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

证明

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) \\&= a_x b_x (\vec{i} \times \vec{i}) + a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x b_z (\vec{i} \times \vec{k}) + \\&\quad a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j} \times \vec{j}) + a_y b_z (\vec{j} \times \vec{k}) + \\&\quad a_z b_x (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z b_z (\vec{k} \times \vec{k}) \\&= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}\end{aligned}$$

注

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}$$

性质 设 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 则

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

证明

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) \\&= a_x b_x (\vec{i} \times \vec{i}) + a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x b_z (\vec{i} \times \vec{k}) + \\&\quad a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j} \times \vec{j}) + a_y b_z (\vec{j} \times \vec{k}) + \\&\quad a_z b_x (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z b_z (\vec{k} \times \vec{k}) \\&= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}\end{aligned}$$

注

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}$$

性质 设 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 则

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

证明

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) \\&= a_x b_x (\vec{i} \times \vec{i}) + a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x b_z (\vec{i} \times \vec{k}) + \\&\quad a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j} \times \vec{j}) + a_y b_z (\vec{j} \times \vec{k}) + \\&\quad a_z b_x (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z b_z (\vec{k} \times \vec{k}) \\&= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}\end{aligned}$$

注

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

例 设 $\vec{a} = (2, 1, -1)$, $\vec{b} = (1, -1, 2)$, 计算 $\vec{a} \times \vec{b}$

例 设 $\vec{a} = (2, 1, -1)$, $\vec{b} = (1, -1, 2)$, 计算 $\vec{a} \times \vec{b}$

解

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

例 设 $\vec{a} = (2, 1, -1)$, $\vec{b} = (1, -1, 2)$, 计算 $\vec{a} \times \vec{b}$

解

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

例 设 $\vec{a} = (2, 1, -1)$, $\vec{b} = (1, -1, 2)$, 计算 $\vec{a} \times \vec{b}$

解

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

例 设 $\vec{a} = (2, 1, -1)$, $\vec{b} = (1, -1, 2)$, 计算 $\vec{a} \times \vec{b}$

解

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

例 设 $\vec{a} = (2, 1, -1)$, $\vec{b} = (1, -1, 2)$, 计算 $\vec{a} \times \vec{b}$

解

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{k}\end{aligned}$$

例 设 $\vec{a} = (2, 1, -1)$, $\vec{b} = (1, -1, 2)$, 计算 $\vec{a} \times \vec{b}$

解

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{k}\end{aligned}$$

例 设 $\vec{a} = (2, 1, -1)$, $\vec{b} = (1, -1, 2)$, 计算 $\vec{a} \times \vec{b}$

解

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= 6\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k}\end{aligned}$$

例 设 $\vec{a} = (2, 1, -1)$, $\vec{b} = (1, -1, 2)$, 计算 $\vec{a} \times \vec{b}$

解

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= 6\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k} = (6, -4, -4)\end{aligned}$$

例 设空间中三个点 $C(1, -1, 2)$, $A(3, 3, 1)$, $B(3, 1, 3)$ 。令 $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$ 。求 $\vec{a} \times \vec{b}$ 及三角形 $\triangle ABC$ 面积。

例 设空间中三个点 $C(1, -1, 2)$, $A(3, 3, 1)$, $B(3, 1, 3)$ 。令 $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$ 。求 $\vec{a} \times \vec{b}$ 及三角形 $\triangle ABC$ 面积。

解 $\vec{a} = \overrightarrow{CA} = (\quad),$

$$\vec{b} = \overrightarrow{CB} = (\quad),$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{vmatrix}$$

$$\triangle ABC \text{ 面积} =$$

例 设空间中三个点 $C(1, -1, 2)$, $A(3, 3, 1)$, $B(3, 1, 3)$ 。令 $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$ 。求 $\vec{a} \times \vec{b}$ 及三角形 $\triangle ABC$ 面积。

解 $\vec{a} = \overrightarrow{CA} = (\quad),$

$$\vec{b} = \overrightarrow{CB} = (\quad),$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{vmatrix}$$

$$\triangle ABC \text{ 面积} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

例 设空间中三个点 $C(1, -1, 2)$, $A(3, 3, 1)$, $B(3, 1, 3)$ 。令 $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$ 。求 $\vec{a} \times \vec{b}$ 及三角形 $\triangle ABC$ 面积。

解 $\vec{a} = \overrightarrow{CA} = (2, 4, -1),$

$$\vec{b} = \overrightarrow{CB} = (\quad),$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \end{vmatrix}$$

$$\triangle ABC \text{面积} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

例 设空间中三个点 $C(1, -1, 2)$, $A(3, 3, 1)$, $B(3, 1, 3)$ 。令 $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$ 。求 $\vec{a} \times \vec{b}$ 及三角形 $\triangle ABC$ 面积。

解 $\vec{a} = \overrightarrow{CA} = (2, 4, -1),$

$$\vec{b} = \overrightarrow{CB} = (2, 2, 1),$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\triangle ABC \text{ 面积} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

例 设空间中三个点 $C(1, -1, 2)$, $A(3, 3, 1)$, $B(3, 1, 3)$ 。令 $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$ 。求 $\vec{a} \times \vec{b}$ 及三角形 $\triangle ABC$ 面积。

解 $\vec{a} = \overrightarrow{CA} = (2, 4, -1),$

$$\vec{b} = \overrightarrow{CB} = (2, 2, 1),$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\triangle ABC \text{ 面积} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

例 设空间中三个点 $C(1, -1, 2)$, $A(3, 3, 1)$, $B(3, 1, 3)$ 。令 $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$ 。求 $\vec{a} \times \vec{b}$ 及三角形 $\triangle ABC$ 面积。

解 $\vec{a} = \overrightarrow{CA} = (2, 4, -1),$

$$\vec{b} = \overrightarrow{CB} = (2, 2, 1),$$

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{k}\end{aligned}$$

$$\triangle ABC \text{ 面积} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

例 设空间中三个点 $C(1, -1, 2)$, $A(3, 3, 1)$, $B(3, 1, 3)$ 。令 $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$ 。求 $\vec{a} \times \vec{b}$ 及三角形 $\triangle ABC$ 面积。

解 $\vec{a} = \overrightarrow{CA} = (2, 4, -1),$

$$\vec{b} = \overrightarrow{CB} = (2, 2, 1),$$

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= 6\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k}\end{aligned}$$

$$\triangle ABC \text{ 面积} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

例 设空间中三个点 $C(1, -1, 2)$, $A(3, 3, 1)$, $B(3, 1, 3)$ 。令 $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$ 。求 $\vec{a} \times \vec{b}$ 及三角形 $\triangle ABC$ 面积。

解 $\vec{a} = \overrightarrow{CA} = (2, 4, -1),$

$$\vec{b} = \overrightarrow{CB} = (2, 2, 1),$$

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= 6\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k} = (6, -4, -4)\end{aligned}$$

$$\triangle ABC \text{ 面积} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

例 设空间中三个点 $C(1, -1, 2)$, $A(3, 3, 1)$, $B(3, 1, 3)$ 。令 $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$ 。求 $\vec{a} \times \vec{b}$ 及三角形 $\triangle ABC$ 面积。

解 $\vec{a} = \overrightarrow{CA} = (2, 4, -1),$

$$\vec{b} = \overrightarrow{CB} = (2, 2, 1),$$

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= 6\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k} = (6, -4, -4)\end{aligned}$$

$$\triangle ABC \text{ 面积} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} \sqrt{6^2 + (-4)^2 + (-4)^2}$$

例 设空间中三个点 $C(1, -1, 2)$, $A(3, 3, 1)$, $B(3, 1, 3)$ 。令 $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$ 。求 $\vec{a} \times \vec{b}$ 及三角形 $\triangle ABC$ 面积。

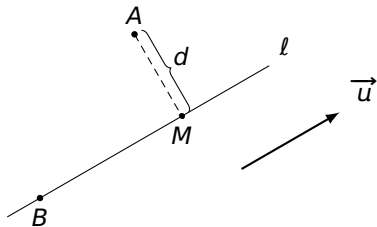
解 $\vec{a} = \overrightarrow{CA} = (2, 4, -1),$

$$\vec{b} = \overrightarrow{CB} = (2, 2, 1),$$

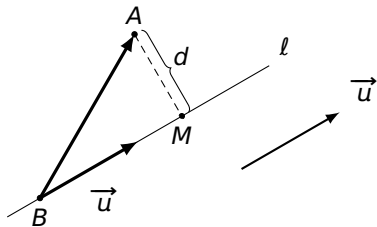
$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= 6\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k} = (6, -4, -4)\end{aligned}$$

$$\triangle ABC \text{ 面积} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} \sqrt{6^2 + (-4)^2 + (-4)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{68} = \sqrt{17}$$

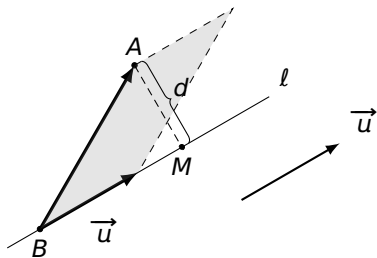
例 设 l 是过点 $B(-1, 2, -1)$ 的直线，
且与 $\vec{u} = (1, 1, 1)$ 平行。
求点 $A(2, 3, 1)$ 到直线 l 的距离 d 。



例 设 l 是过点 $B(-1, 2, -1)$ 的直线，
且与 $\vec{u} = (1, 1, 1)$ 平行。
求点 $A(2, 3, 1)$ 到直线 l 的距离 d 。

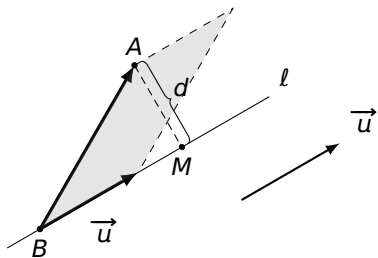


例 设 l 是过点 $B(-1, 2, -1)$ 的直线，
且与 $\vec{u} = (1, 1, 1)$ 平行。
求点 $A(2, 3, 1)$ 到直线 l 的距离 d 。



例 设 l 是过点 $B(-1, 2, -1)$ 的直线，
且与 $\vec{u} = (1, 1, 1)$ 平行。
求点 $A(2, 3, 1)$ 到直线 l 的距离 d 。

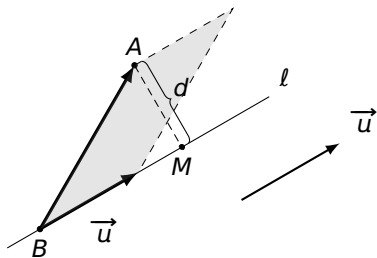
解



$$d = \frac{|\vec{BA} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

例 设 l 是过点 $B(-1, 2, -1)$ 的直线，
且与 $\vec{u} = (1, 1, 1)$ 平行。
求点 $A(2, 3, 1)$ 到直线 l 的距离 d 。

解

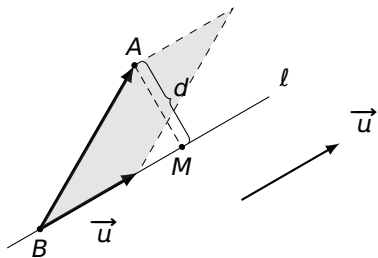


$$d = \frac{|\vec{BA}, \vec{u} \text{ 张成平行四边形面积}|}{|\vec{u}|} = \frac{|\vec{BA} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

例 设 l 是过点 $B(-1, 2, -1)$ 的直线，
且与 $\vec{u} = (1, 1, 1)$ 平行。
求点 $A(2, 3, 1)$ 到直线 l 的距离 d 。

解 $\vec{BA} =$

$$\vec{BA} \times \vec{u} =$$

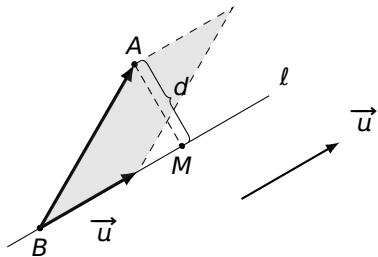


$$d = \frac{|\vec{BA}, \vec{u} \text{ 张成平行四边形面积}|}{|\vec{u}|} = \frac{|\vec{BA} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

例 设 l 是过点 $B(-1, 2, -1)$ 的直线，
且与 $\vec{u} = (1, 1, 1)$ 平行。
求点 $A(2, 3, 1)$ 到直线 l 的距离 d 。

解 $\vec{BA} = (3, 1, 2)$

$$\vec{BA} \times \vec{u} =$$

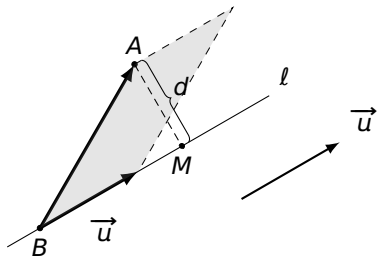


$$d = \frac{|\vec{BA}, \vec{u} \text{ 张成平行四边形面积}|}{|\vec{u}|} = \frac{|\vec{BA} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

例 设 l 是过点 $B(-1, 2, -1)$ 的直线，
且与 $\vec{u} = (1, 1, 1)$ 平行。
求点 $A(2, 3, 1)$ 到直线 l 的距离 d 。

解 $\vec{BA} = (3, 1, 2)$

$$\vec{BA} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

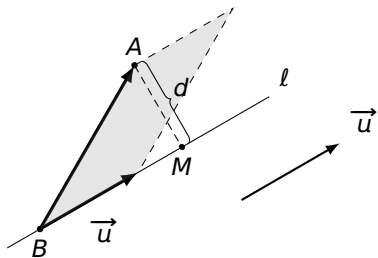


$$d = \frac{|\vec{BA}, \vec{u} \text{ 张成平行四边形面积}|}{|\vec{u}|} = \frac{|\vec{BA} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

例 设 l 是过点 $B(-1, 2, -1)$ 的直线，
且与 $\vec{u} = (1, 1, 1)$ 平行。
求点 $A(2, 3, 1)$ 到直线 l 的距离 d 。

解 $\vec{BA} = (3, 1, 2)$

$$\begin{aligned}\vec{BA} \times \vec{u} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) \\ d &= \frac{|\vec{BA}, \vec{u} \text{ 张成平行四边形面积}|}{|\vec{u}|} = \frac{|\vec{BA} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}\end{aligned}$$

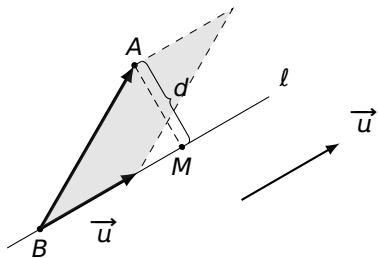


例 设 l 是过点 $B(-1, 2, -1)$ 的直线，
且与 $\vec{u} = (1, 1, 1)$ 平行。
求点 $A(2, 3, 1)$ 到直线 l 的距离 d 。

解 $\vec{BA} = (3, 1, 2)$

$$\begin{aligned}\vec{BA} \times \vec{u} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-1, -1, 2)\end{aligned}$$

$$d = \frac{|\vec{BA}, \vec{u} \text{ 张成平行四边形面积}|}{|\vec{u}|} = \frac{|\vec{BA} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

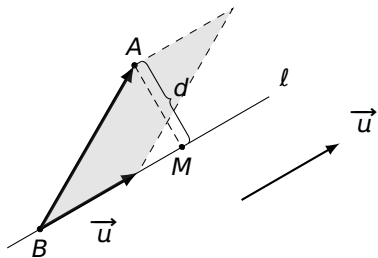


例 设 l 是过点 $B(-1, 2, -1)$ 的直线，
且与 $\vec{u} = (1, 1, 1)$ 平行。
求点 $A(2, 3, 1)$ 到直线 l 的距离 d 。

解 $\vec{BA} = (3, 1, 2)$

$$\begin{aligned}\vec{BA} \times \vec{u} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-1, -1, 2)\end{aligned}$$

$$d = \frac{|\vec{BA}, \vec{u} \text{ 张成平行四边形面积}|}{|\vec{u}|} = \frac{|\vec{BA} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$$



例 设 l 是过点 $B(-1, 2, -1)$ 的直线，
且与 $\vec{u} = (1, 1, 1)$ 平行。
求点 $A(2, 3, 1)$ 到直线 l 的距离 d 。

解 $\vec{BA} = (3, 1, 2)$

$$\begin{aligned}\vec{BA} \times \vec{u} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-1, -1, 2)\end{aligned}$$

$$d = \frac{|\vec{BA}, \vec{u} \text{ 张成平行四边形面积}|}{|\vec{u}|} = \frac{|\vec{BA} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$$

