高等数学 II 2018-2019 学年(下) 姓名: 专业: 学号:

第 02 周作业

练习 1. 求解微分方程
$$\begin{cases} y'' - 3y' - 4y = 0 \\ y(0) = 0, \ y'(0) = -5 \end{cases}$$
.

练习 2. 求解微分方程
$$\begin{cases} y'' - 4y' + 13y = 0 \\ y(0) = 0, \ y'(0) = 3 \end{cases}$$
.

练习 3. 求解微分方程
$$\begin{cases} 4y'' + 4y' + y = 0 \\ y(0) = 2, y'(0) = 0 \end{cases}$$
.

练习 4. 填空,写出下列方程的一个特解。(不必严格按之前求解的套路,这些题可以比较容易地猜出来的)

- 1. $y'' + 4y' y = 2e^x$
- 2. y'' 3y' + 2y = 5
- 3. y'' 4y' = 5
- 4. y'' + 5y' + 4y = 3 2x
- $5. \ 2y'' + 5y' = 5x^2 2x 2$

练习 5. 求微分方程 $y'' + 3y' + 2y = 3xe^{-x}$ 的通解

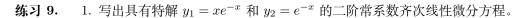
练习 6. 求微分方程 $y'' + y = 4xe^x$, y(0) = 0, y'(0) = 1 的特解

练习 7. 求微分方程 $y'' + 4y = x \cos x$ 的通解

练习 8. (共振问题)假设弹簧系统的固有频率是 ω ,并且受到频率为 Ω 的外力 $F=F_0\cos(\Omega t)$ 作用 (ω,Ω) 均为常数, F_0 是常数, $F_0\neq 0$)。所以物体运动的方程为

$$x'' + \omega^2 x = F_0 \cos(\Omega t).$$

- 1. 设 $\omega \neq \Omega$, 求出物体运动的通解 x = x(t), 并回答: 当 Ω 越接近 ω 时, 物体的振幅有什么变化?
- 2. 设 $\omega = \Omega$, 求出物体运动的通解 x = x(t), 并回答: 随时间 t 的变化, 物体的振幅有什么变化?。



2. 写出具有特解 $y_1 = e^{-x}\cos 2x$ 和 $y_2 = e^{-x}\sin 2x$ 的二阶常系数齐次线性微分方程。

解

练习 10. 求解常系数线性微分方程 y''' + 4y'' + y' - 6y = 0 的通解。(提示: 寻找形如 $y = e^{rx}$ 的特解)

下面是附加题,做出来的同学下周一交上来,可以适当加分。注意解答过程要清楚。

练习 11. (关于复数) 三次方程

$$x^3 = px + q$$

的费罗-塔尔塔利亚-卡尔达诺解为

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

当 $\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3<0$ 时,这个公式不可避免出现负数的开方。然而,这时我们不能再以无解为理由而对它不予理睬,因为一个三次方程永远至少有一个实根(尝试用微积分的理论说明这一点)。以下是一个例子:考虑一元三次方程 $x^3=15x+4$ 。

- 1. 用微积分的办法证明该方程有三个实根.
- 2. 根据费罗-塔尔塔利亚-卡尔达诺公式,该方程的一个根是:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

这时不能简单地认为公式中出现 $\sqrt{-121}$ 无意义而无解。这就需要引入复数并研究它的性质。试利用复数的性质说明上述解等于哪个实数? 并进一步求出该方程全部的根。

(关于复数更多的历史与评论,请看《数学及其历史》(John Stillwell 著,袁向东,冯绪宁译)相关章节)