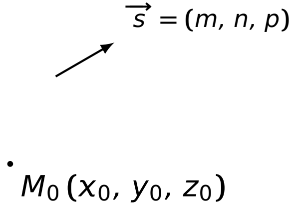
第 8 章 c：空间直线及其方程

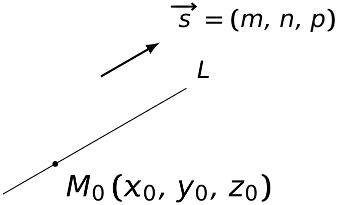
数学系　　梁卓滨

2017.07 暑期班

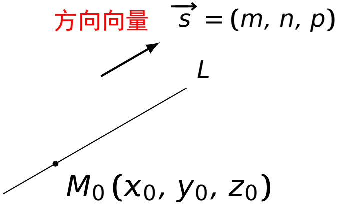
空间直线的参数方程



空间直线的参数方程



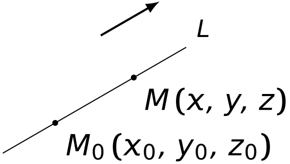
空间直线的参数方程



空间直线的参数方程

$M \in L$

方向向量 $\vec{s} = (m, n, p)$

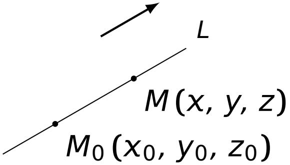


空间直线的参数方程

$$M \in L$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$$

方向向量 $\vec{s} = (m, n, p)$

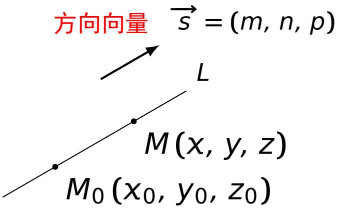


空间直线的参数方程

$$M \in L$$

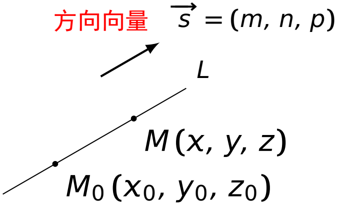
$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R}, \text{使得 } \overrightarrow{M_0M} = t\,\vec{s}$$



空间直线的参数方程

$$
\begin{aligned}
& M \in L \\
\Leftrightarrow \quad & \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s} \\
\Leftrightarrow \quad & \exists t \in \mathbb{R}, \text{使得 } \overrightarrow{M_0M} = t\,\vec{s} \\
\Leftrightarrow \quad & (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(m, n, p)
\end{aligned}
$$



空间直线的参数方程

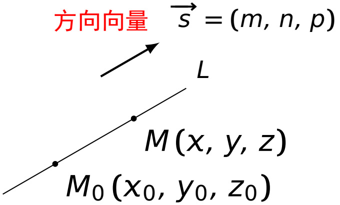
$$M \in L$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R},\ \text{使得}\ \overrightarrow{M_0M} = t\,\vec{s}$$

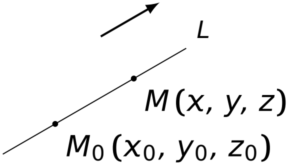
$$\Leftrightarrow \quad (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(m, n, p)$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - x_0 = tm \\ y - y_0 = tn \\ z - z_0 = tp \end{cases}$$



空间直线的参数方程

方向向量 $\vec{s} = (m, n, p)$



$$M \in L$$

$$\Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R}, \text{使得 } \overrightarrow{M_0M} = t\,\vec{s}$$

$$\Longleftrightarrow \quad (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(m, n, p)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x - x_0 = tm \\ y - y_0 = tn \\ z - z_0 = tp \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + tm \\ y = y_0 + tn \\ z = z_0 + tp \end{cases}$$

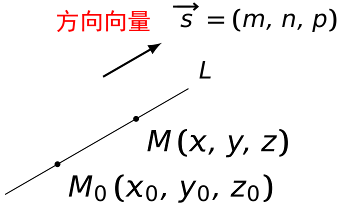
空间直线的对称式方程

$$M \in L$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{M_0M} \parallel \overrightarrow{s}$$

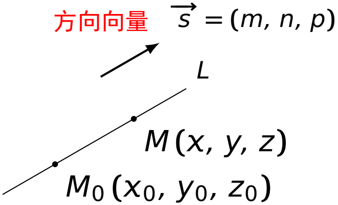
$$\Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R}, \text{使得 } \overrightarrow{M_0M} = t\,\overrightarrow{s}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(m, n, p)$$



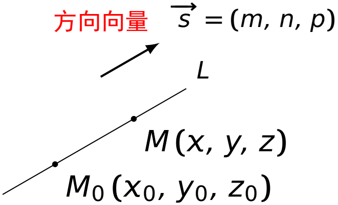
空间直线的对称式方程

$$
\begin{aligned}
& M \in L \\
\Leftrightarrow \quad & \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s} \\
\Leftrightarrow \quad & \exists t \in \mathbb{R},\ \text{使得}\ \overrightarrow{M_0M} = t\,\vec{s} \\
\Leftrightarrow \quad & (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(m, n, p) \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}
\end{aligned}
$$



空间直线的对称式方程

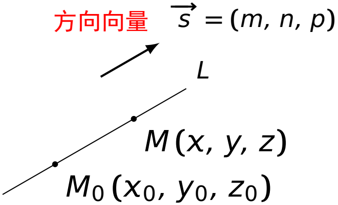
$$
\begin{aligned}
& M \in L \\
\Leftrightarrow \quad & \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s} \\
\Leftrightarrow \quad & \exists t \in \mathbb{R}, \text{使得 } \overrightarrow{M_0M} = t\,\vec{s} \\
\Leftrightarrow \quad & (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(m, n, p) \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}
\end{aligned}
$$



注 1 若 $m = 0$，则 $\frac{x-x_0}{0} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ 表示

空间直线的对称式方程

$$
\begin{aligned}
& M \in L \\
\Leftrightarrow\quad & \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s} \\
\Leftrightarrow\quad & \exists t \in \mathbb{R},\ \text{使得}\ \overrightarrow{M_0M} = t\,\vec{s} \\
\Leftrightarrow\quad & (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(m, n, p) \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}
\end{aligned}
$$

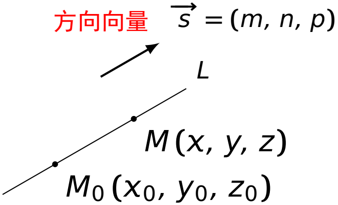


注 1 若 $m = 0$，则 $\frac{x-x_0}{0} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ 表示

$$x = x_0 \qquad \text{且}$$

空间直线的对称式方程

$$
\begin{aligned}
& M \in L \\
\Leftrightarrow\quad & \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s} \\
\Leftrightarrow\quad & \exists t \in \mathbb{R},\ \text{使得}\ \overrightarrow{M_0M} = t\,\vec{s} \\
\Leftrightarrow\quad & (x-x_0, y-y_0, z-z_0) = t(m,n,p) \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}
\end{aligned}
$$

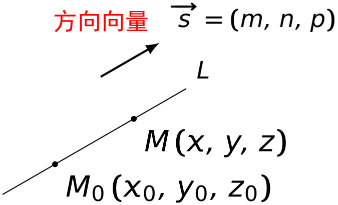


注 1 若 $m = 0$，则 $\frac{x-x_0}{0} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ 表示

$$x = x_0 \qquad \text{且} \qquad \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$$

空间直线的对称式方程

$$
\begin{aligned}
& M \in L \\
\Leftrightarrow \quad & \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s} \\
\Leftrightarrow \quad & \exists t \in \mathbb{R},\ \text{使得}\ \overrightarrow{M_0M} = t\vec{s} \\
\Leftrightarrow \quad & (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(m, n, p) \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}
\end{aligned}
$$

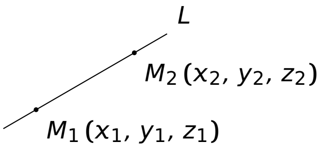


注 1 若 $m = 0$，则 $\frac{x-x_0}{0} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ 表示

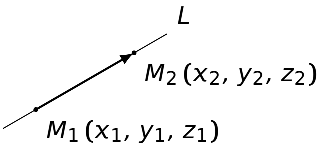
$$x = x_0 \qquad \text{且} \qquad \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

注 2 一般地，点向式用作表示，参数式用作具体计算

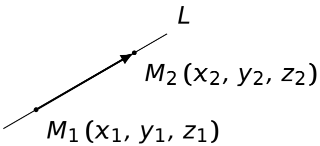
例 设直线过点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$，求直线方程。



例 设直线过点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$，求直线方程。



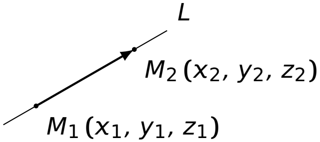
例 设直线过点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$，求直线方程。



解 取方向向量为

$$\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = (\qquad, \qquad, \qquad)$$

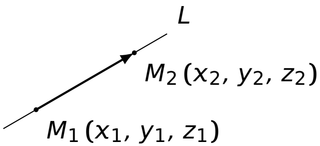
例 设直线过点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$，求直线方程。



解 取方向向量为

$$\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

例 设直线过点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$，求直线方程。



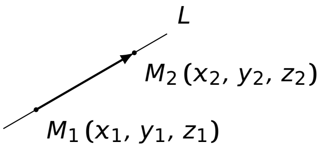
解 取方向向量为

$$\overrightarrow{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

所以直线方程为

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

例 设直线过点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$，求直线方程。



解 取方向向量为

$$\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

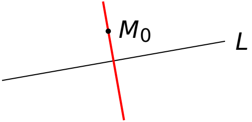
所以直线方程为

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

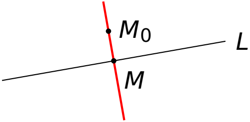
或等价地，

$$\frac{x - x_2}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_2}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_2}{z_2 - z_1}$$

例 求过点 $M_0(2, 1, 3)$ 且与直线 $L: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程。

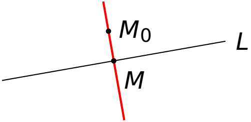


例 求过点 $M_0(2, 1, 3)$ 且与直线 $L: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程。



解 设垂足为 $M(x, y, z)$，则

例 求过点 $M_0(2, 1, 3)$ 且与直线 $L: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程。

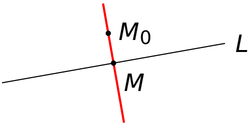


解 设垂足为 $M(x, y, z)$，则

$$M \in L \quad \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{M_0M} \perp L \quad \Rightarrow$$

例 求过点 $M_0(2, 1, 3)$ 且与直线 $L: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程。

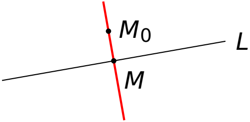


解 设垂足为 $M(x, y, z)$，则

$$M \in L \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + tm \\ y = y_0 + tn \\ z = z_0 + tp \end{cases}$$

$$\overrightarrow{M_0M} \perp L \quad \Rightarrow$$

例 求过点 $M_0(2, 1, 3)$ 且与直线 L : $\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程。

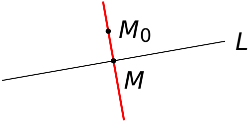


解 设垂足为 $M(x, y, z)$，则

$$M \in L \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + tm = -1 + 3t \\ y = y_0 + tn \\ z = z_0 + tp \end{cases}$$

$$\overrightarrow{M_0M} \perp L \quad \Rightarrow$$

例 求过点 $M_0(2, 1, 3)$ 且与直线 $L: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程。

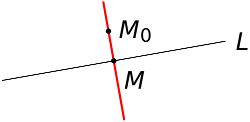


解 设垂足为 $M(x, y, z)$，则

$$M \in L \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + tm = -1 + 3t \\ y = y_0 + tn = 1 + 2t \\ z = z_0 + tp \end{cases}$$

$$\overrightarrow{M_0M} \perp L \quad \Rightarrow$$

例 求过点 $M_0(2, 1, 3)$ 且与直线 $L: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程。

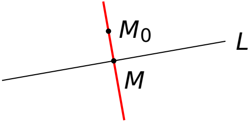


解 设垂足为 $M(x, y, z)$，则

$$M \in L \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + tm = -1 + 3t \\ y = y_0 + tn = 1 + 2t \\ z = z_0 + tp = -t \end{cases}$$

$$\overrightarrow{M_0M} \perp L \quad \Rightarrow$$

例 求过点 $M_0(2, 1, 3)$ 且与直线 $L: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程。

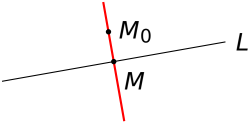


解 设垂足为 $M(x, y, z)$，则

$$M \in L \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + tm = -1 + 3t \\ y = y_0 + tn = 1 + 2t \\ z = z_0 + tp = -t \end{cases}$$

$$\overrightarrow{M_0M} \perp L \quad \Rightarrow \quad 0 = \overrightarrow{M_0M} \cdot (3, 2, -1)$$

例 求过点 $M_0(2, 1, 3)$ 且与直线 $L: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程。



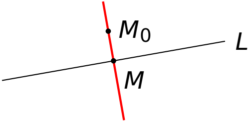
解 设垂足为 $M(x, y, z)$，则

$$M \in L \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + tm = -1 + 3t \\ y = y_0 + tn = 1 + 2t \\ z = z_0 + tp = -t \end{cases}$$

$$\overrightarrow{M_0M} \perp L \quad \Rightarrow \quad 0 = \overrightarrow{M_0M} \cdot (3, 2, -1)$$

$$= (-3 + 3t) \qquad (2t) \qquad (-t - 3)$$

例 求过点 $M_0(2, 1, 3)$ 且与直线 $L: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程。



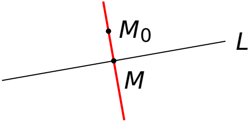
解 设垂足为 $M(x, y, z)$，则

$$M \in L \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + tm = -1 + 3t \\ y = y_0 + tn = 1 + 2t \\ z = z_0 + tp = -t \end{cases}$$

$$\overrightarrow{M_0M} \perp L \quad \Rightarrow \quad 0 = \overrightarrow{M_0M} \cdot (3, 2, -1)$$

$$= (-3 + 3t) \cdot 3 + (2t) \cdot 2 + (-t - 3) \cdot (-1)$$

例 求过点 $M_0\,(2,\,1,\,3)$ 且与直线 $L:\ \frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程。



解 设垂足为 $M\,(x,\,y,\,z)$，则

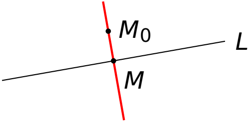
$$M\in L \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x=x_0+tm=-1+3t \\ y=y_0+tn=1+2t \\ z=z_0+tp=-t \end{cases}$$

$$\overrightarrow{M_0M}\perp L \quad\Rightarrow\quad 0=\overrightarrow{M_0M}\cdot(3,\,2,\,-1)$$

$$=(-3+3t)\cdot 3+(2t)\cdot 2+(-t-3)\cdot(-1)$$

$$\Rightarrow\quad t=3/7$$

例 求过点 $M_0(2, 1, 3)$ 且与直线 $L: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程。



解 设垂足为 $M(x, y, z)$，则

$$M \in L \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + tm = -1 + 3t \\ y = y_0 + tn = 1 + 2t \\ z = z_0 + tp = -t \end{cases}$$

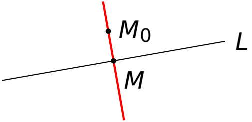
$$\overrightarrow{M_0M} \perp L \quad \Rightarrow \quad 0 = \overrightarrow{M_0M} \cdot (3, 2, -1)$$

$$= (-3 + 3t) \cdot 3 + (2t) \cdot 2 + (-t - 3) \cdot (-1)$$

$$\Rightarrow \quad t = 3/7$$

所以交点为 $\overrightarrow{M_0M} = -\frac{6}{7}(2, -1, 4)$，直线方程为

例 求过点 $M_0(2, 1, 3)$ 且与直线 $L: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程。



解 设垂足为 $M(x, y, z)$，则

$$M \in L \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + tm = -1 + 3t \\ y = y_0 + tn = 1 + 2t \\ z = z_0 + tp = -t \end{cases}$$

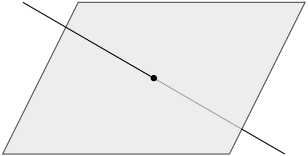
$$\overrightarrow{M_0M} \perp L \quad \Rightarrow \quad 0 = \overrightarrow{M_0M} \cdot (3, 2, -1)$$

$$= (-3 + 3t) \cdot 3 + (2t) \cdot 2 + (-t - 3) \cdot (-1)$$

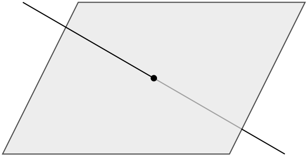
$$\Rightarrow \quad t = 3/7$$

所以交点为 $\overrightarrow{M_0M} = -\frac{6}{7}(2, -1, 4)$，直线方程为$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{4}$.

例 求直线 $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{2}$ 与平面 $2x+y+z-6=0$ 的交点。



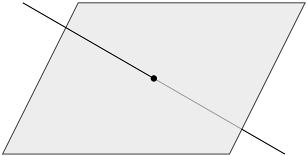
例 求直线 $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{2}$ 与平面 $2x+y+z-6=0$ 的交点。



解 直线上点的坐标为

$$\begin{cases} x = x_0 + tm \\ y = y_0 + tn \\ z = z_0 + tp \end{cases}$$

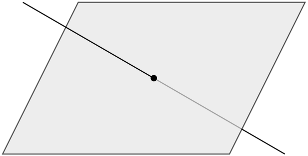
例 求直线 $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{2}$ 与平面 $2x+y+z-6=0$ 的交点。



解 直线上点的坐标为

$$\begin{cases} x = x_0 + tm = 2 + t \\ y = y_0 + tn \\ z = z_0 + tp \end{cases}$$

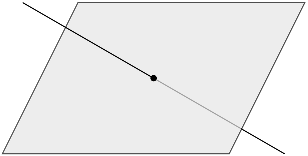
例 求直线 $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{2}$ 与平面 $2x+y+z-6=0$ 的交点。



解 直线上点的坐标为

$$\begin{cases} x = x_0 + tm = 2 + t \\ y = y_0 + tn = 3 + t \\ z = z_0 + tp \end{cases}$$

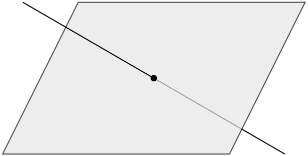
例 求直线 $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{2}$ 与平面 $2x+y+z-6=0$ 的交点。



解 直线上点的坐标为

$$\begin{cases} x=x_0+tm=2+t \\ y=y_0+tn=3+t \\ z=z_0+tp=4+2t \end{cases}$$

例 求直线 $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{2}$ 与平面 $2x + y + z - 6 = 0$ 的交点。



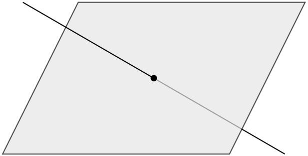
解 直线上点的坐标为

$$\begin{cases} x = x_0 + tm = 2 + t \\ y = y_0 + tn = 3 + t \\ z = z_0 + tp = 4 + 2t \end{cases}$$

代入平面方程，得：

$$2(2+t) + (3+t) + (4+2t) - 6 = 0$$

例 求直线 $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{2}$ 与平面 $2x+y+z-6=0$ 的交点。



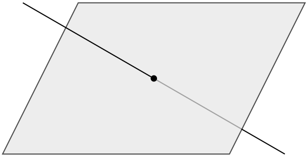
解 直线上点的坐标为

$$\begin{cases} x=x_0+tm=2+t \\ y=y_0+tn=3+t \\ z=z_0+tp=4+2t \end{cases}$$

代入平面方程，得：

$$2(2+t)+(3+t)+(4+2t)-6=0 \quad \Rightarrow \quad t=-1$$

例 求直线 $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{2}$ 与平面 $2x+y+z-6=0$ 的交点。



解 直线上点的坐标为

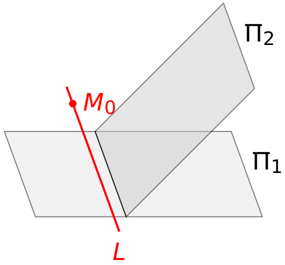
$$\begin{cases} x=x_0+tm=2+t \\ y=y_0+tn=3+t \\ z=z_0+tp=4+2t \end{cases}$$

代入平面方程，得：

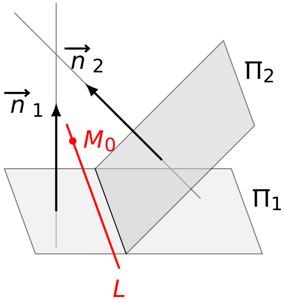
$$2(2+t)+(3+t)+(4+2t)-6=0 \quad \Rightarrow \quad t=-1$$

所以交点为 $(1, 2, 2)$。

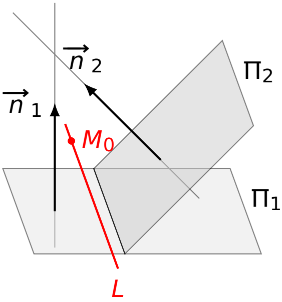
例 设直线 L 过点 $M_0(-3, 2, 5)$，且与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行，并 L 方程。



例 设直线 L 过点 $M_0(-3, 2, 5)$，且与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行，并 L 方程。

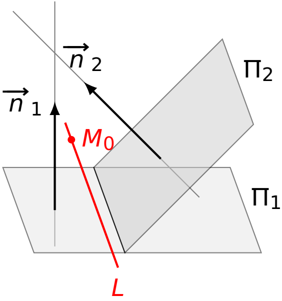


例 设直线 L 过点 $M_0(-3, 2, 5)$，且与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行，并 L 方程。



解 1. 取方向向量

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$$

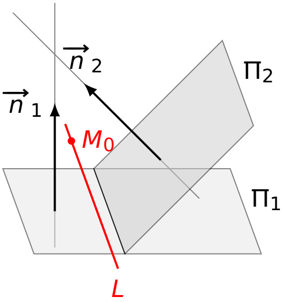


例 设直线 L 过点 $M_0(-3, 2, 5)$，且与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行，并 L 方程。

解 1. 取方向向量

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -4 \\ & & \end{vmatrix}$$

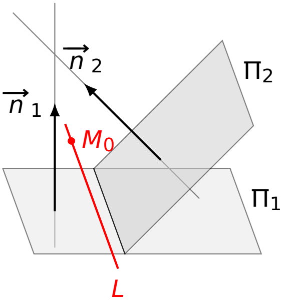
例 设直线 L 过点 $M_0(-3, 2, 5)$，且与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行，并 L 方程。



解 1. 取方向向量

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix}$$

例 设直线 L 过点 $M_0(-3, 2, 5)$，且与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行，并 L 方程。

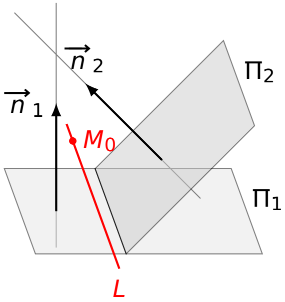


解 1. 取方向向量

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \quad \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} \quad \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} \quad \end{vmatrix} \vec{k}$$

例 设直线 L 过点 $M_0(-3, 2, 5)$，且与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行，并 L 方程。

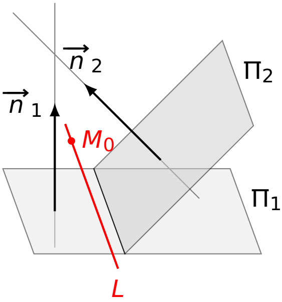


解 1. 取方向向量

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} & \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} & \end{vmatrix} \vec{k}$$

例 设直线 L 过点 $M_0(-3, 2, 5)$，且与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行，并 L 方程。

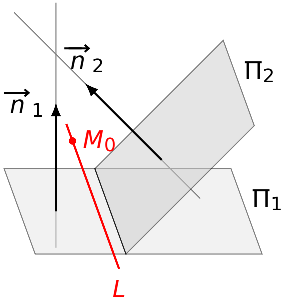


解 1. 取方向向量

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix} \vec{k}$$

例 设直线 L 过点 $M_0(-3, 2, 5)$，且与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行，并 L 方程。

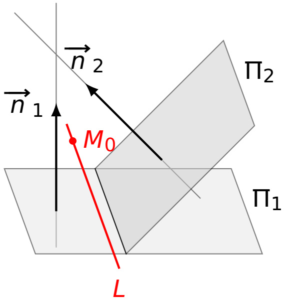


解 1. 取方向向量

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -4\\ 2 & -1 & -5\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}0 & -4\\ -1 & -5\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & -4\\ 2 & -5\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}\vec{k}$$

例 设直线 L 过点 $M_0(-3, 2, 5)$，且与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行，并 L 方程。



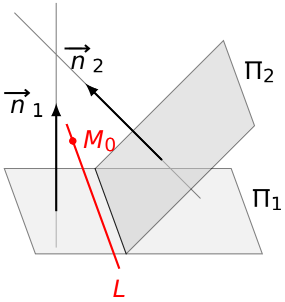
解 1. 取方向向量

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -4\\ 2 & -1 & -5\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}0 & -4\\ -1 & -5\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & -4\\ 2 & -5\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=-4\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$$

例 设直线 L 过点 $M_0(-3, 2, 5)$，且与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行，并 L 方程。



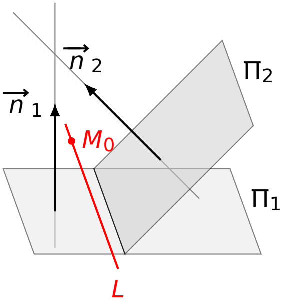
解 1. 取方向向量

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -4\\ 2 & -1 & -5\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}0 & -4\\ -1 & -5\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & -4\\ 2 & -5\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=-4\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}=(-4,-3,-1)$$

例 设直线 L 过点 $M_0(-3, 2, 5)$，且与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行，并 L 方程。



解 1. 取方向向量

$$\overrightarrow{s}=\overrightarrow{n}_1\times\overrightarrow{n}_2=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 1 & 0 & -4\\ 2 & -1 & -5\end{vmatrix}$$

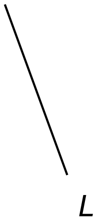
$$=\begin{vmatrix}0 & -4\\ -1 & -5\end{vmatrix}\overrightarrow{i}-\begin{vmatrix}1 & -4\\ 2 & -5\end{vmatrix}\overrightarrow{j}+\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}\overrightarrow{k}$$

$$=-4\overrightarrow{i}+3\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}=(-4,-3,-1)$$

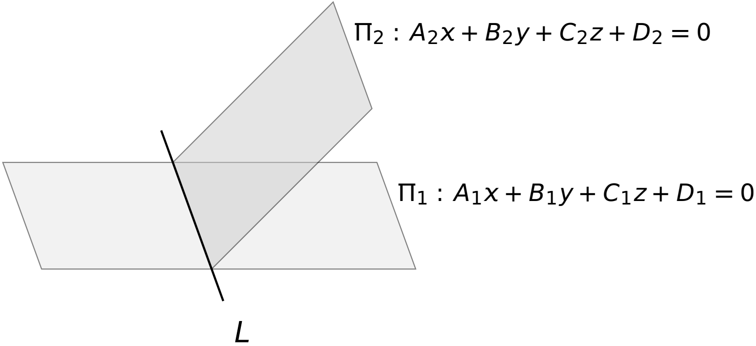
1. 点向式：

$$\frac{x+3}{-4}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-5}{-1}$$

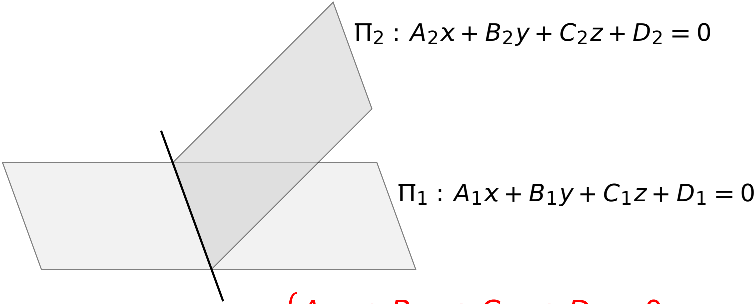
空间直线的一般方程



空间直线的一般方程

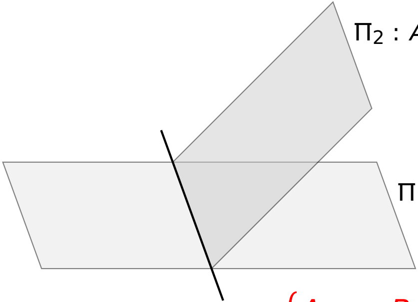


空间直线的一般方程



$$L : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

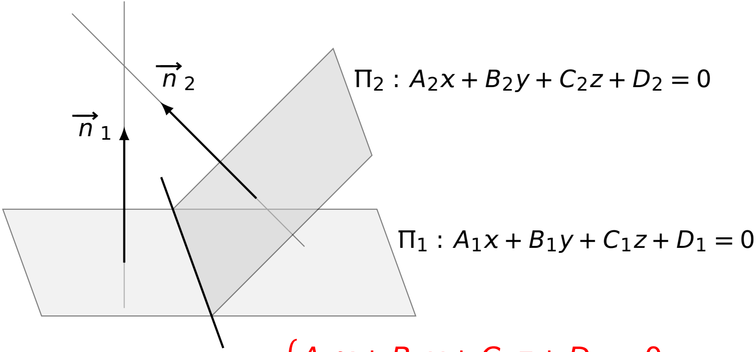
空间直线的一般方程



$$L : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

性质 L 的方向向量可取为 $\vec{s} =$

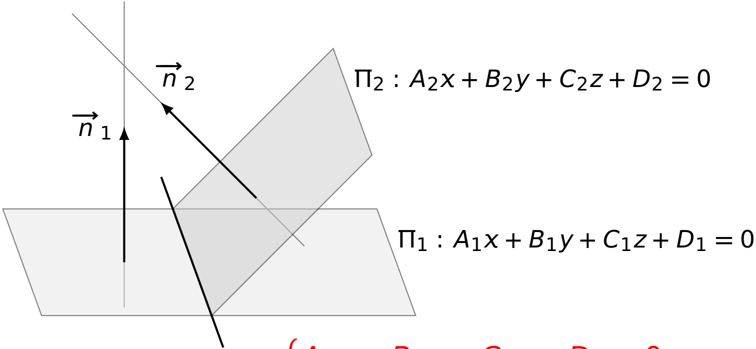
空间直线的一般方程



$$L: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

性质 L 的方向向量可取为 $\vec{s} =$

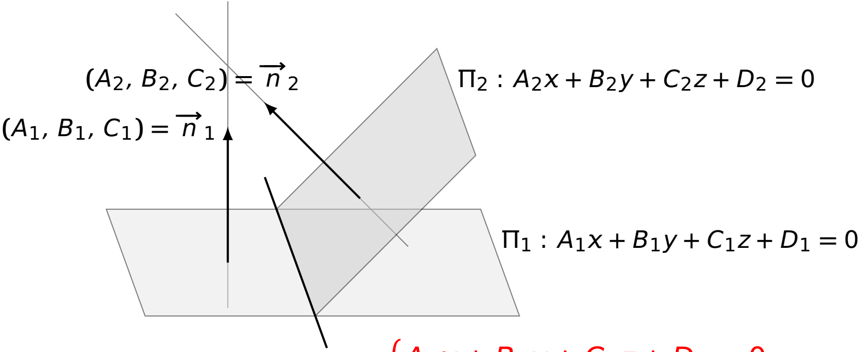
空间直线的一般方程



$$L: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

性质 L 的方向向量可取为 $\overrightarrow{s} = \overrightarrow{n}_1 \times \overrightarrow{n}_2$

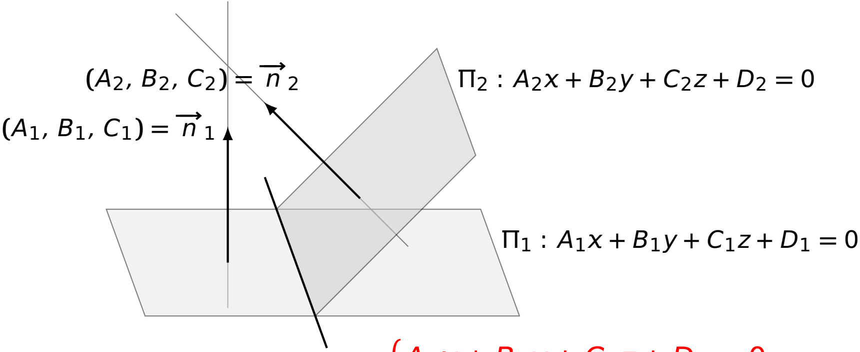
空间直线的一般方程



$$L : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

性质 L 的方向向量可取为 $\overrightarrow{s} = \overrightarrow{n}_1 \times \overrightarrow{n}_2$

空间直线的一般方程



$$L : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

性质 L 的方向向量可取为 $\overrightarrow{s} = \overrightarrow{n}_1 \times \overrightarrow{n}_2 = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$

例 求直线 $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+y+z=4 \end{cases}$ 的一个方向向量，并求出点向式方程。

例 求直线 $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+y+z=4 \end{cases}$ 的一个方向向量，并求出点向式方程。

解 1. 取方向向量

$$\overrightarrow{s} = \overrightarrow{n}_1 \times \overrightarrow{n}_2$$

2. 求直线上一点。

3. 点向式：

例 求直线 $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$ 的一个方向向量，并求出点向式方程。

解 1. 取方向向量

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$$

2. 求直线上一点。

3. 点向式：

例 求直线 $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$ 的一个方向向量，并求出点向式方程。

解 1. 取方向向量

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ & & \end{vmatrix}$$

2. 求直线上一点。

3. 点向式：

例 求直线 $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+y+z=4 \end{cases}$ 的一个方向向量，并求出点向式方程。

解 1. 取方向向量

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

2. 求直线上一点。

3. 点向式：

例 求直线 $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+y+z=4 \end{cases}$ 的一个方向向量，并求出点向式方程。

解 1. 取方向向量

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\left| \qquad \right|\vec{i}-\left| \qquad \right|\vec{j}+\left| \qquad \right|\vec{k}$$

2. 求直线上一点。

3. 点向式：

例 求直线 $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$ 的一个方向向量，并求出点向式方程。

解 1. 取方向向量

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix} \vec{k}$$

2. 求直线上一点。

3. 点向式：

例 求直线 $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$ 的一个方向向量，并求出点向式方程。

解 1. 取方向向量

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} \vec{k}$$

2. 求直线上一点。

3. 点向式：

例 求直线 $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+y+z=4 \end{cases}$ 的一个方向向量，并求出点向式方程。

解 1. 取方向向量

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}$$

2. 求直线上一点。

3. 点向式：

例 求直线 $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+y+z=4 \end{cases}$ 的一个方向向量，并求出点向式方程。

解 1. 取方向向量

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=-2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$$

2. 求直线上一点。

3. 点向式：

例 求直线 $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+y+z=4 \end{cases}$ 的一个方向向量，并求出点向式方程。

解 1. 取方向向量

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=-2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}=(-2,1,3)$$

2. 求直线上一点。

3. 点向式：

例 求直线 $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+y+z=4 \end{cases}$ 的一个方向向量，并求出点向式方程。

解 1. 取方向向量

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=-2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}=(-2,1,3)$$

2. 求直线上一点。

不妨取 $x=0 \quad \Rightarrow$

3. 点向式：

例 求直线 $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+y+z=4 \end{cases}$ 的一个方向向量，并求出点向式方程。

解 1. 取方向向量

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=-2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}=(-2,1,3)$$

2. 求直线上一点。

不妨取 $x=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -y+z=1 \\ y+z=4 \end{cases}$

3. 点向式：

例 求直线 $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+y+z=4 \end{cases}$ 的一个方向向量，并求出点向式方程。

解 1. 取方向向量

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=-2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}=(-2,1,3)$$

2. 求直线上一点。

不妨取 $x=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} -y+z=1 \\ y+z=4 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} y=\frac{3}{2} \\ z=\frac{5}{2} \end{cases}$

3. 点向式：

例 求直线 $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+y+z=4 \end{cases}$ 的一个方向向量，并求出点向式方程。

解 1. 取方向向量

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=-2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}=(-2,1,3)$$

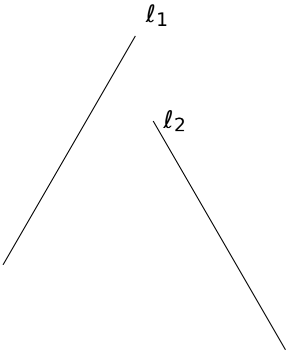
2. 求直线上一点。

不妨取 $x=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} -y+z=1 \\ y+z=4 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} y=\frac{3}{2} \\ z=\frac{5}{2} \end{cases}$

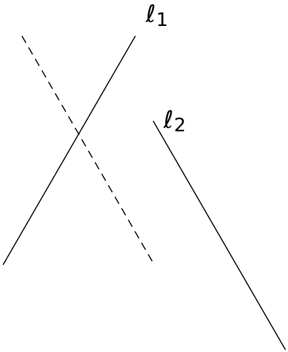
3. 点向式：

$$\frac{x}{-2}=\frac{y-\frac{3}{2}}{1}=\frac{z-\frac{5}{2}}{3}$$

直线与直线的夹角

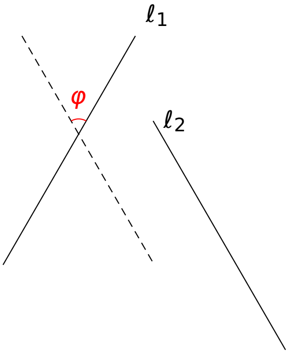


直线与直线的夹角



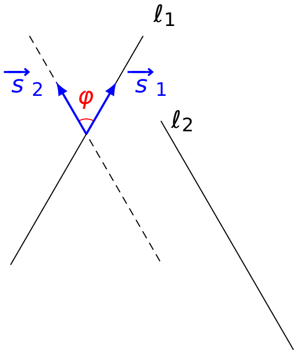
直线与直线的夹角

夹角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$，且



直线与直线的夹角

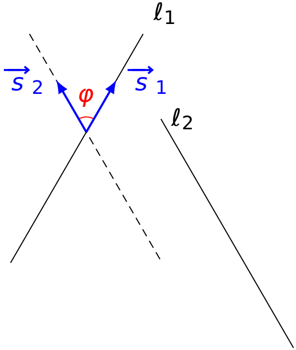
夹角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$，且



直线与直线的夹角

夹角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$，且

$$\cos\varphi = \cos(\angle(\overrightarrow{s}_1, \overrightarrow{s}_2))$$

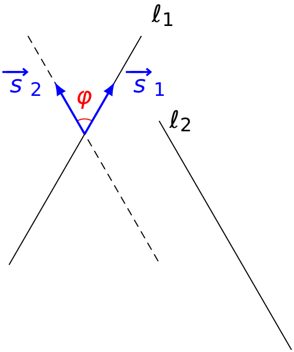


直线与直线的夹角

夹角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$，且

$$\cos\varphi = \cos(\angle(\overrightarrow{s}_1, \overrightarrow{s}_2))$$

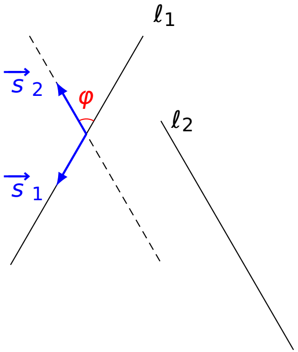
$$= \frac{\overrightarrow{s}_1 \cdot \overrightarrow{s}_2}{|\overrightarrow{s}_1| \cdot |\overrightarrow{s}_2|}$$



直线与直线的夹角

夹角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$，且

$$\cos\varphi = \cos(\angle(\overrightarrow{s}_1, \overrightarrow{s}_2)) = \frac{\overrightarrow{s}_1 \cdot \overrightarrow{s}_2}{|\overrightarrow{s}_1| \cdot |\overrightarrow{s}_2|}$$

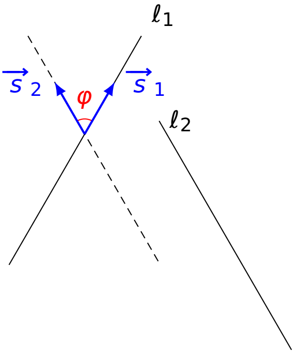


直线与直线的夹角

夹角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$，且

$$\cos\varphi = \cos(\angle(\overrightarrow{s}_1, \overrightarrow{s}_2))$$

$$= \frac{\overrightarrow{s}_1 \cdot \overrightarrow{s}_2}{|\overrightarrow{s}_1| \cdot |\overrightarrow{s}_2|}$$

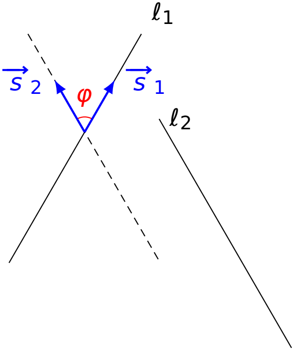


直线与直线的夹角

夹角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$，且

$$\cos\varphi = \left|\cos(\angle(\overrightarrow{s}_1, \overrightarrow{s}_2))\right|$$

$$= \frac{\overrightarrow{s}_1 \cdot \overrightarrow{s}_2}{|\overrightarrow{s}_1| \cdot |\overrightarrow{s}_2|}$$

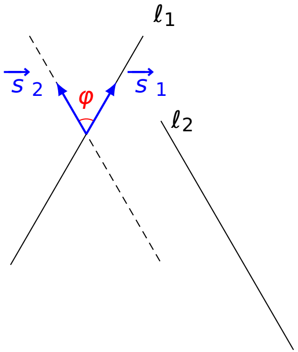


直线与直线的夹角

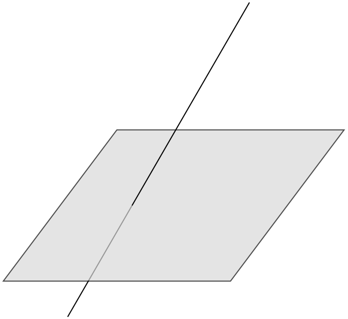
夹角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$，且

$$\cos\varphi = \left|\cos(\angle(\overrightarrow{s}_1, \overrightarrow{s}_2))\right|$$

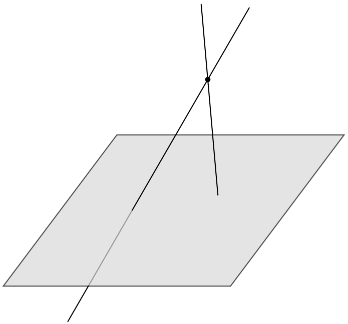
$$= \frac{|\overrightarrow{s}_1 \cdot \overrightarrow{s}_2|}{|\overrightarrow{s}_1| \cdot |\overrightarrow{s}_2|}$$



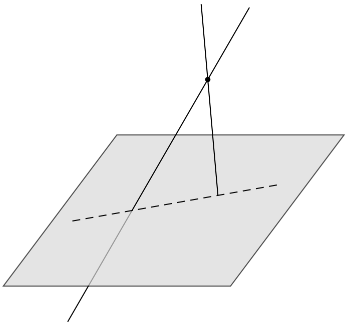
直线与平面的夹角



直线与平面的夹角

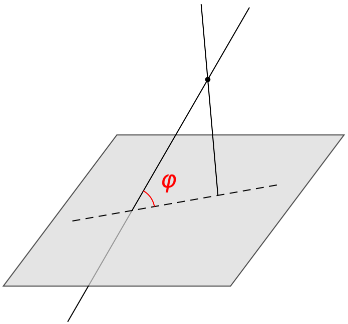


直线与平面的夹角



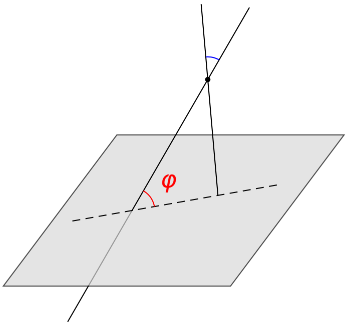
直线与平面的夹角

夹角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$，且



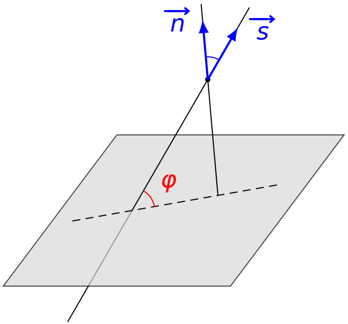
直线与平面的夹角

夹角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$，且



直线与平面的夹角

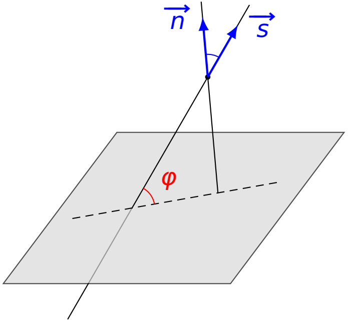
夹角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$，且



直线与平面的夹角

夹角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$，且

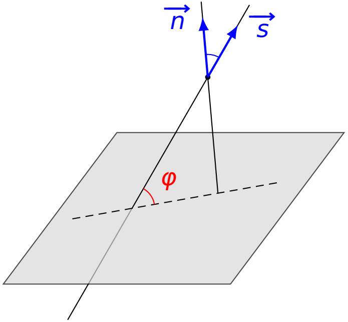
$$\cos(\angle(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{s}))$$



直线与平面的夹角

夹角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$，且

$$\sin\varphi = \cos(\angle(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{s}))$$

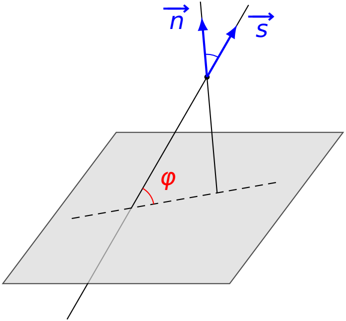


直线与平面的夹角

夹角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$，且

$$\sin\varphi = \cos(\angle(\vec{n}, \vec{s}))$$

$$= \frac{\vec{n} \cdot \vec{s}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|}$$

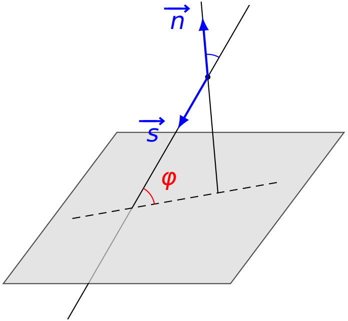


直线与平面的夹角

夹角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$，且

$$\sin\varphi = \cos(\angle(\vec{n}, \vec{s}))$$

$$= \frac{\vec{n} \cdot \vec{s}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|}$$

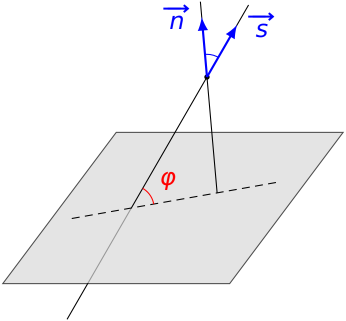


直线与平面的夹角

夹角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$，且

$$\sin\varphi = \cos(\angle(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{s}))$$

$$= \frac{\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{s}}{|\overrightarrow{n}| \cdot |\overrightarrow{s}|}$$

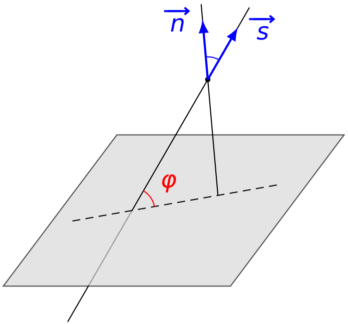


直线与平面的夹角

夹角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$，且

$$\sin\varphi = \left|\cos(\angle(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{s}))\right|$$

$$= \frac{\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{s}}{|\overrightarrow{n}| \cdot |\overrightarrow{s}|}$$

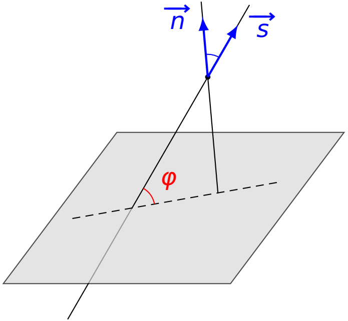


直线与平面的夹角

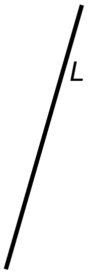
夹角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$，且

$$\sin\varphi = \left|\cos(\angle(\vec{n}, \vec{s}))\right|$$

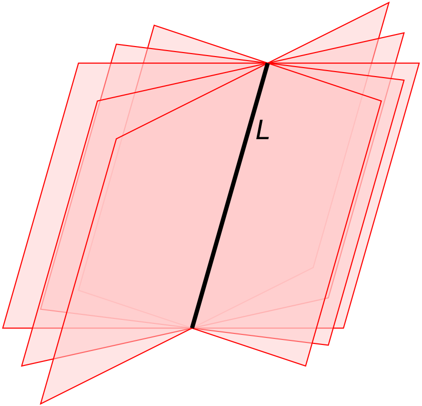
$$= \frac{|\vec{n} \cdot \vec{s}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|}$$



平面束及其方程

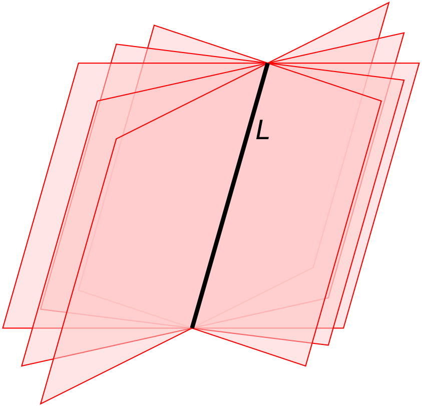


平面束及其方程



过定直线 L 的 平面束

平面束及其方程

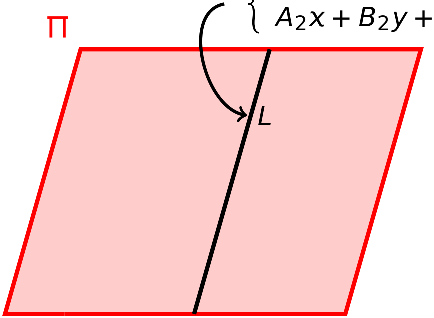


过定直线 L 的 平面束

问题　给出平面束中的平面，其方程的通式

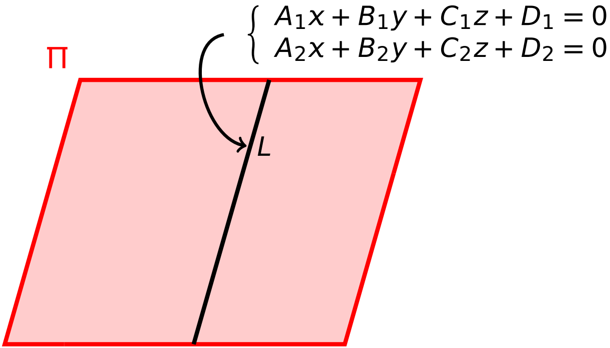
平面束及其方程

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$



过直线 L 的平面 Π 的方程是什么？

平面束及其方程

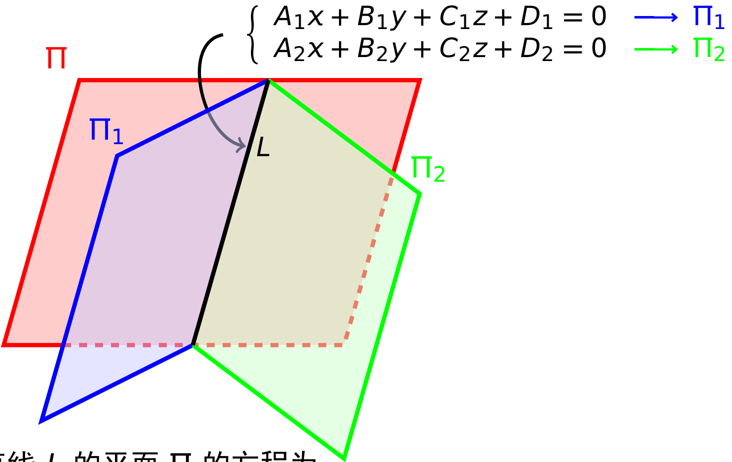


则过直线 L 的平面 Π 的方程为

$$\boxed{\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0}$$

其中 λ，μ 为（不全为零的）待定的常数。

平面束及其方程



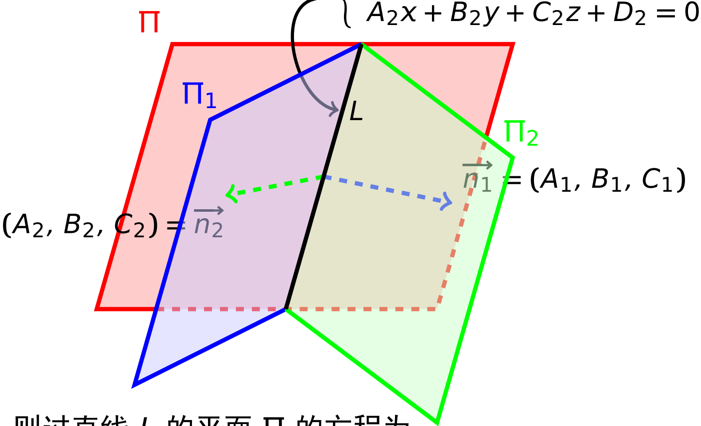
则过直线 L 的平面 Π 的方程为

$$\boxed{\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0}$$

其中 λ，μ 为（不全为零的）待定的常数。

平面束及其方程

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 & \longrightarrow \Pi_1 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 & \longrightarrow \Pi_2 \end{cases}$$



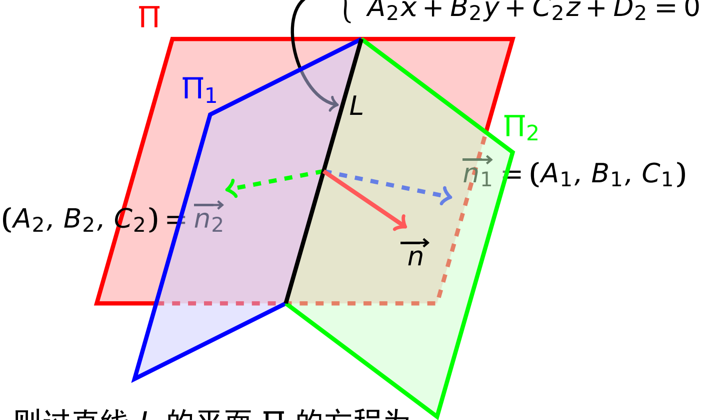
则过直线 L 的平面 Π 的方程为

$$\boxed{\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0}$$

其中 λ，μ 为（不全为零的）待定的常数。

平面束及其方程

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \longrightarrow \Pi_1 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \longrightarrow \Pi_2 \end{cases}$$

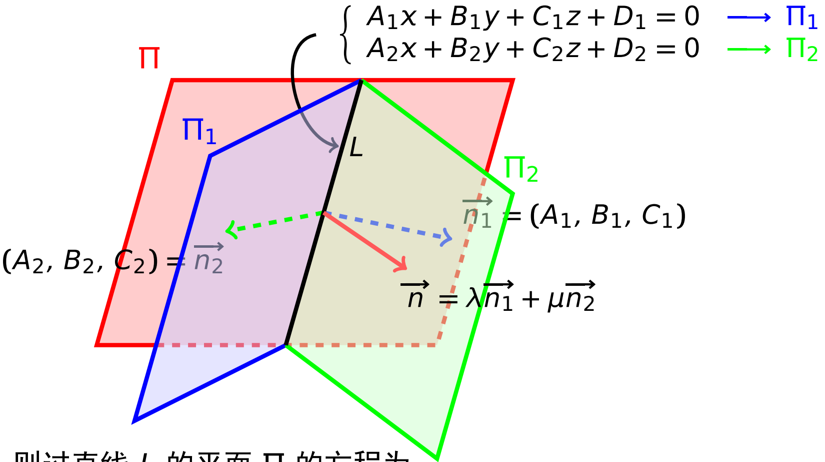


则过直线 L 的平面 Π 的方程为

$$\boxed{\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0}$$

其中 λ，μ 为（不全为零的）待定的常数。

平面束及其方程



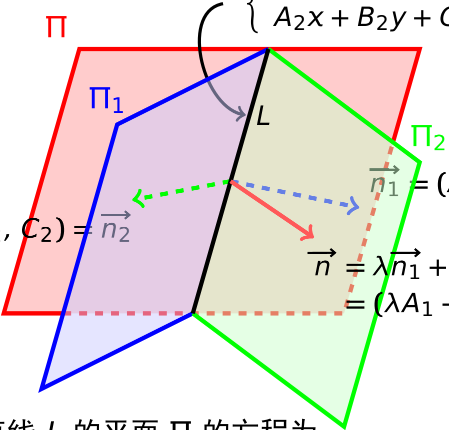
则过直线 L 的平面 Π 的方程为

$$\boxed{\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0}$$

其中 λ，μ 为（不全为零的）待定的常数。

平面束及其方程

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 & \longrightarrow \Pi_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 & \longrightarrow \Pi_2 \end{cases}$$

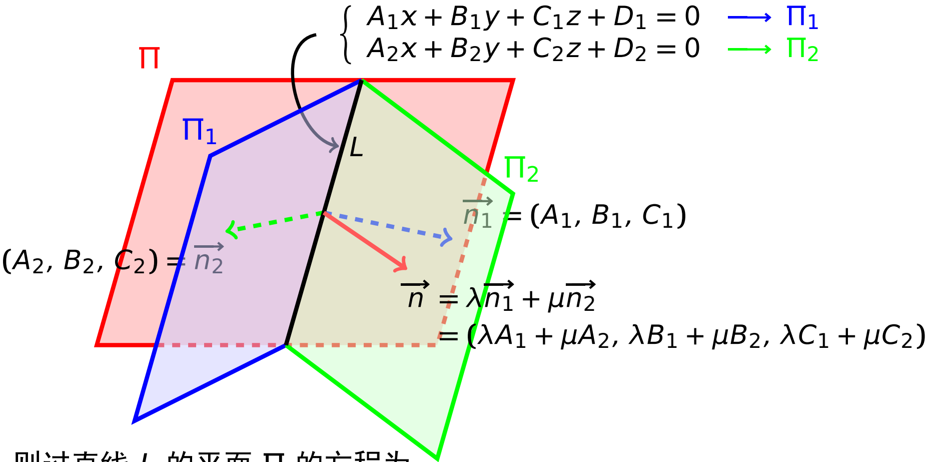


则过直线 L 的平面 Π 的方程为

$$\boxed{\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0}$$

其中 λ，μ 为（不全为零的）待定的常数。

平面束及其方程



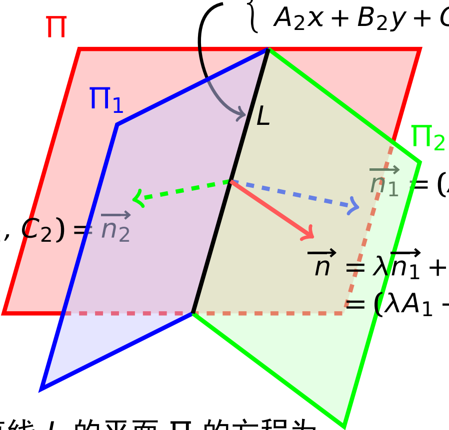
则过直线 L 的平面 Π 的方程为

$$\boxed{\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0} \quad \Pi'$$

其中 λ，μ 为（不全为零的）待定的常数。

平面束及其方程

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \longrightarrow \Pi_1 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \longrightarrow \Pi_2 \end{cases}$$



$\overrightarrow{n_1}=(A_1,B_1,C_1)$

$(A_2,B_2,C_2)=\overrightarrow{n_2}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{n}&=\lambda\overrightarrow{n_1}+\mu\overrightarrow{n_2}\\&=(\lambda A_1+\mu A_2,\lambda B_1+\mu B_2,\lambda C_1+\mu C_2)\end{aligned}$$

则过直线 L 的平面 Π 的方程为

$$\boxed{\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0}\quad \Pi'=\Pi$$

其中 λ，μ 为（不全为零的）待定的常数。

例 求过点 $M(1, 2, 3)$ 和直线 $\begin{cases} x - 4z = 3 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$ 的平面的方程。

利用平面束方程

例 求过点 $M(1, 2, 3)$ 和直线 $\begin{cases} x-4z=3 \\ 2y-z=0 \end{cases}$ 的平面的方程。

利用平面束方程

解 1. 过直线 $\begin{cases} x-4z-3=0 \\ 2y-z=0 \end{cases}$ 的平面可设为

例 求过点 $M(1, 2, 3)$ 和直线 $\begin{cases} x - 4z = 3 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$ 的平面的方程。

利用平面束方程

解 1. 过直线 $\begin{cases} x - 4z - 3 = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$ 的平面可设为

$$\lambda(x - 4z - 3) + \mu(2y - z) = 0$$

其中 λ 和 μ 是待定的常数。

例 求过点 $M(1, 2, 3)$ 和直线 $\begin{cases} x-4z=3 \\ 2y-z=0 \end{cases}$ 的平面的方程。

利用平面束方程

解 1. 过直线 $\begin{cases} x-4z-3=0 \\ 2y-z=0 \end{cases}$ 的平面可设为

$$\lambda(x-4z-3)+\mu(2y-z)=0$$

其中 λ 和 μ 是待定的常数。

2. 因为 $M(1, 2, 3)$ 在平面上，所以 $(1, 2, 3)$ 满足平面方程：

$$\lambda(1-4\cdot 3-3)+\mu(2\cdot 2-3)=0$$

例 求过点 $M(1, 2, 3)$ 和直线 $\begin{cases} x-4z=3 \\ 2y-z=0 \end{cases}$ 的平面的方程。

利用平面束方程

解 1. 过直线 $\begin{cases} x-4z-3=0 \\ 2y-z=0 \end{cases}$ 的平面可设为

$$\lambda(x-4z-3)+\mu(2y-z)=0$$

其中 λ 和 μ 是待定的常数。

2. 因为 $M(1, 2, 3)$ 在平面上，所以 $(1, 2, 3)$ 满足平面方程：

$$\lambda(1-4\cdot 3-3)+\mu(2\cdot 2-3)=0 \quad \Rightarrow \quad -14\lambda+\mu=0$$

例 求过点 $M(1, 2, 3)$ 和直线 $\begin{cases} x-4z=3 \\ 2y-z=0 \end{cases}$ 的平面的方程。

利用平面束方程

解 1. 过直线 $\begin{cases} x-4z-3=0 \\ 2y-z=0 \end{cases}$ 的平面可设为

$$\lambda(x-4z-3)+\mu(2y-z)=0$$

其中 λ 和 μ 是待定的常数。

2. 因为 $M(1, 2, 3)$ 在平面上，所以 $(1, 2, 3)$ 满足平面方程：

$$\lambda(1-4\cdot 3-3)+\mu(2\cdot 2-3)=0 \quad \Rightarrow \quad -14\lambda+\mu=0$$

不妨取 $\lambda=1$，$\mu=14$。

例 求过点 $M(1, 2, 3)$ 和直线 $\begin{cases} x-4z=3 \\ 2y-z=0 \end{cases}$ 的平面的方程。

利用平面束方程

解 1. 过直线 $\begin{cases} x-4z-3=0 \\ 2y-z=0 \end{cases}$ 的平面可设为

$$\lambda(x-4z-3)+\mu(2y-z)=0$$

其中 λ 和 μ 是待定的常数。

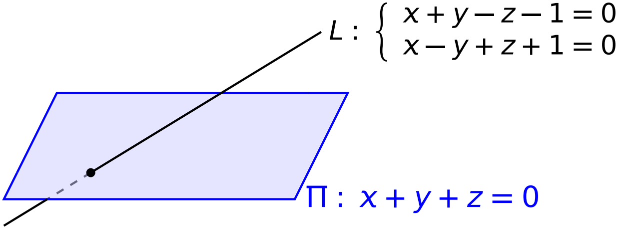
2. 因为 $M(1, 2, 3)$ 在平面上，所以 $(1, 2, 3)$ 满足平面方程：

$$\lambda(1-4\cdot 3-3)+\mu(2\cdot 2-3)=0 \quad \Rightarrow \quad -14\lambda+\mu=0$$

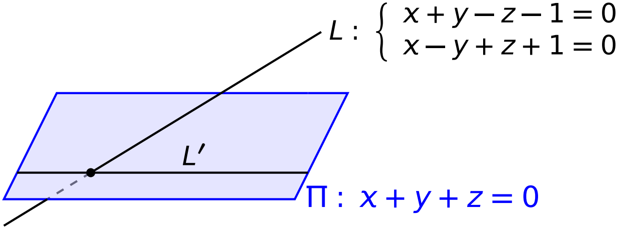
不妨取 $\lambda=1$，$\mu=14$。所以平面方程是

$$x+28y-18z-3=0.$$

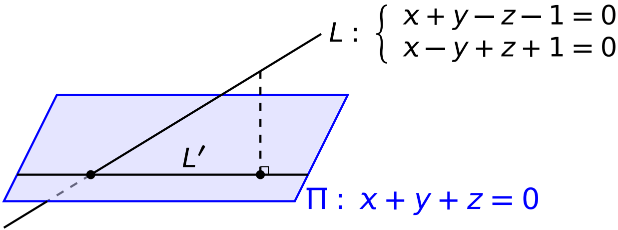
平面束方程应用：求投影直线方程



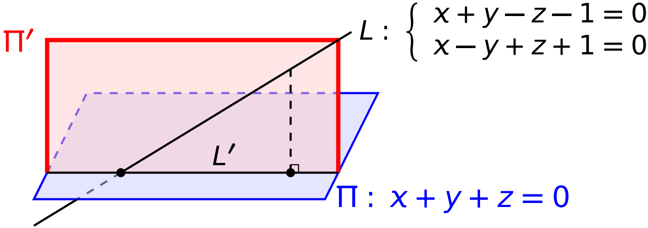
平面束方程应用：求投影直线方程



平面束方程应用：求投影直线方程



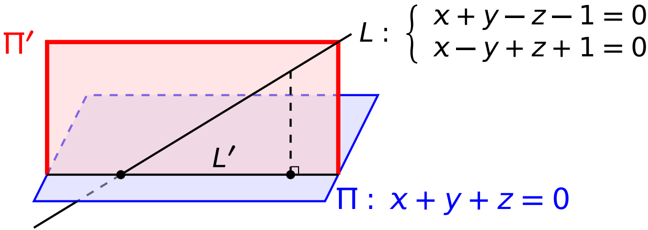
平面束方程应用：求投影直线方程



解：

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面。

平面束方程应用：求投影直线方程

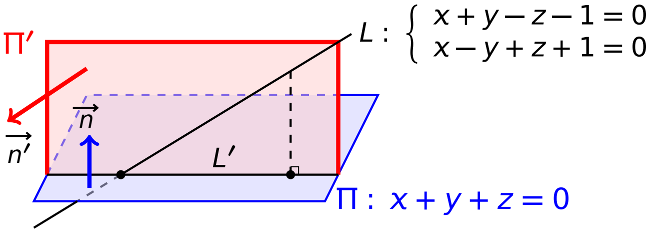


解：

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面。由于 Π' 过 L，可设 Π' 方程为

$$\lambda(x+y-z-1)+\mu(x-y+z+1)=0 \quad \text{（其中}\lambda,\mu\text{ 待定）}$$

平面束方程应用：求投影直线方程

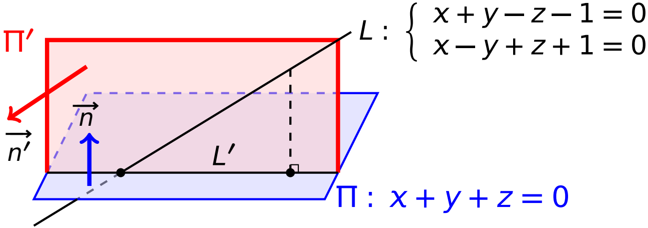


解：

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面。由于 Π' 过 L，可设 Π' 方程为

$$\lambda(x+y-z-1)+\mu(x-y+z+1)=0$$ （其中λ, μ 待定）

平面束方程应用：求投影直线方程



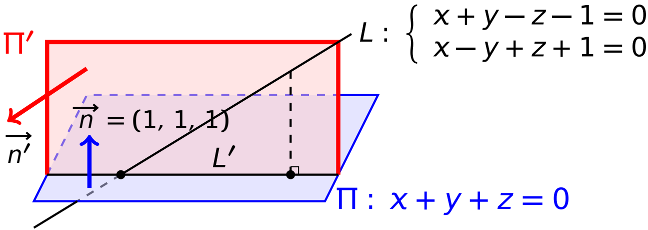
解：

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面。由于 Π' 过 L，可设 Π' 方程为

$$\lambda(x+y-z-1)+\mu(x-y+z+1)=0$$ （其中λ, μ 待定）

2. $\vec{n'} \perp \vec{n} \Rightarrow \vec{n'} \cdot \vec{n} = \qquad\qquad = 0$

平面束方程应用：求投影直线方程



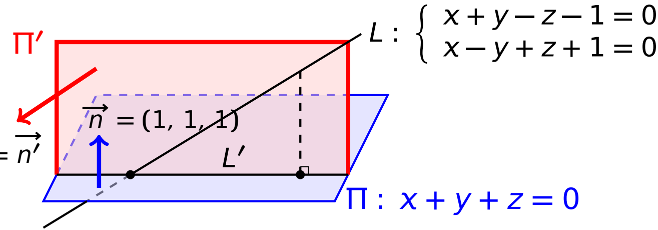
解：

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面。由于 Π' 过 L，可设 Π' 方程为

$$\lambda(x+y-z-1)+\mu(x-y+z+1)=0$$ （其中λ, μ 待定）

2. $\vec{n'} \perp \vec{n} \;\Rightarrow\; \vec{n'}\cdot\vec{n} = \qquad\qquad = 0$

平面束方程应用：求投影直线方程



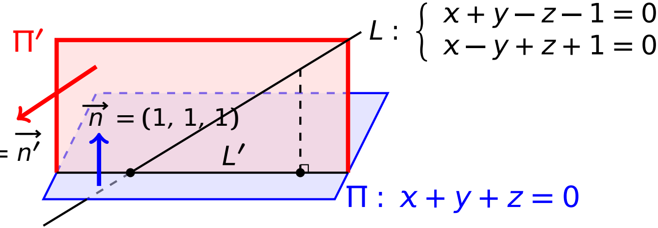
解：

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面。由于 Π' 过 L，可设 Π' 方程为

$$\lambda(x+y-z-1)+\mu(x-y+z+1)=0 \quad \text{（其中}\lambda, \mu\text{ 待定）}$$

2. $\vec{n'} \perp \vec{n} \;\Rightarrow\; \vec{n'}\cdot\vec{n} = \qquad\qquad = 0$

平面束方程应用：求投影直线方程



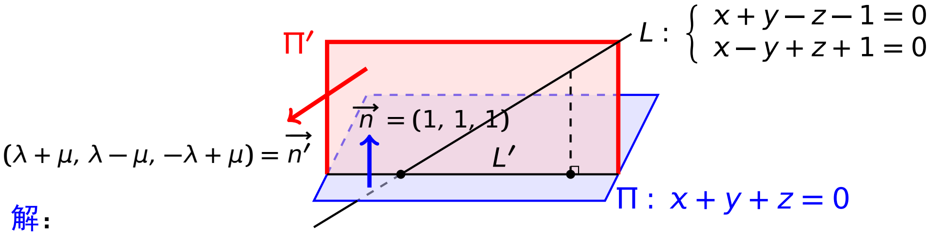
解：

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面。由于 Π' 过 L，可设 Π' 方程为

$$\lambda(x+y-z-1)+\mu(x-y+z+1)=0 \quad \text{（其中}\lambda,\mu\text{ 待定）}$$

2. $\overrightarrow{n'}\perp\vec{n} \Rightarrow \overrightarrow{n'}\cdot\vec{n}=1\cdot(\lambda+\mu)+1\cdot(\lambda-\mu)+1\cdot(-\lambda+\mu)=0$

平面束方程应用：求投影直线方程



解：

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面。由于 Π' 过 L，可设 Π' 方程为

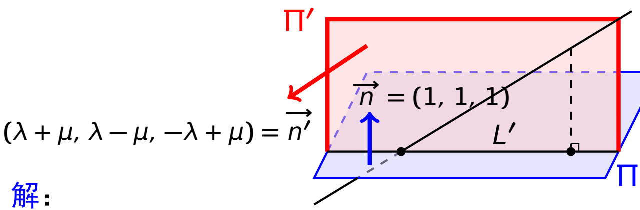
$$\lambda(x+y-z-1)+\mu(x-y+z+1)=0 \quad \text{（其中}\lambda,\mu\text{ 待定）}$$

2. $\overrightarrow{n'} \perp \overrightarrow{n} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{n'}\cdot\overrightarrow{n} = 1\cdot(\lambda+\mu)+1\cdot(\lambda-\mu)+1\cdot(-\lambda+\mu)=0$

$$\Rightarrow \lambda+\mu=0$$

平面束方程应用：求投影直线方程

$L:\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$



$\Pi: x+y+z=0$

解：

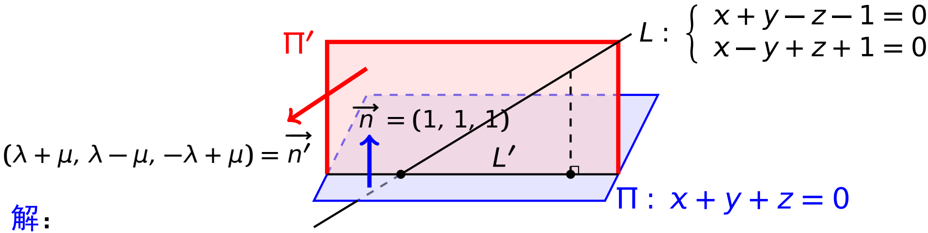
1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面。由于 Π' 过 L，可设 Π' 方程为

$$\lambda(x+y-z-1)+\mu(x-y+z+1)=0 \quad \text{（其中}\lambda,\mu\text{ 待定）}$$

2. $\overrightarrow{n'}\perp\overrightarrow{n} \Rightarrow \overrightarrow{n'}\cdot\overrightarrow{n}=1\cdot(\lambda+\mu)+1\cdot(\lambda-\mu)+1\cdot(-\lambda+\mu)=0$

$$\Rightarrow \lambda+\mu=0 \quad \text{不妨取} \quad \lambda=1,\mu=-1$$

平面束方程应用：求投影直线方程



解：

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面。由于 Π' 过 L，可设 Π' 方程为

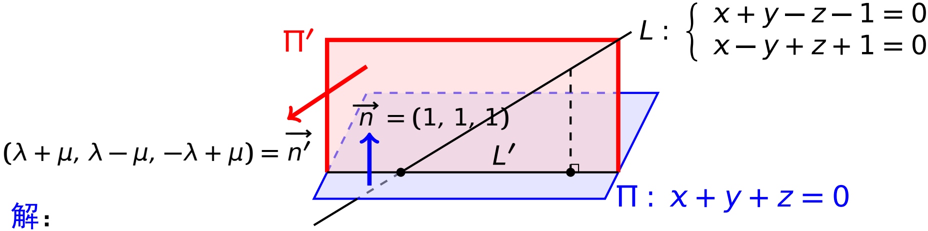
$$\lambda(x+y-z-1)+\mu(x-y+z+1)=0 \quad \text{（其中}\lambda, \mu\ \text{待定）}$$

2. $\vec{n'} \perp \vec{n} \quad \Rightarrow \quad \vec{n'}\cdot\vec{n}=1\cdot(\lambda+\mu)+1\cdot(\lambda-\mu)+1\cdot(-\lambda+\mu)=0$

$\Rightarrow \quad \lambda+\mu=0$ 不妨取 $\lambda=1, \mu=-1$

$\Rightarrow \quad \Pi'$的方程：$y-z-1=0$

平面束方程应用：求投影直线方程



解：

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面。由于 Π' 过 L，可设 Π' 方程为

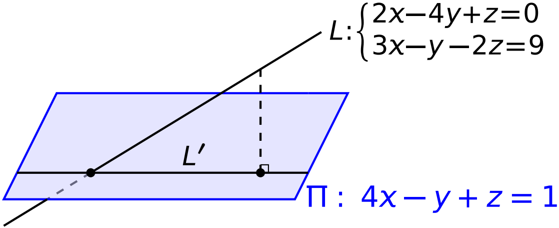
$$\lambda(x+y-z-1)+\mu(x-y+z+1)=0 \quad \text{（其中}\lambda, \mu\text{ 待定）}$$

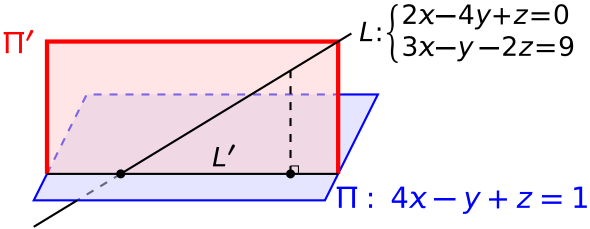
2. $\vec{n'} \perp \vec{n} \;\Rightarrow\; \vec{n'}\cdot\vec{n} = 1\cdot(\lambda+\mu)+1\cdot(\lambda-\mu)+1\cdot(-\lambda+\mu)=0$

$$\Rightarrow \lambda+\mu=0 \quad \text{不妨取} \quad \lambda=1, \mu=-1$$

$$\Rightarrow \Pi'\text{的方程：} y-z-1=0$$

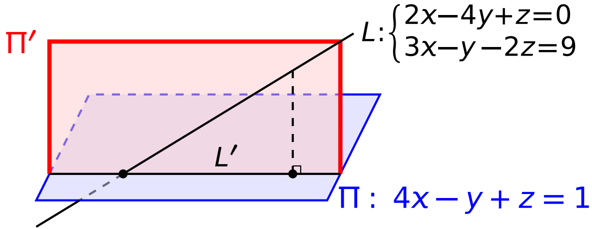
3. 投影直线 L' 的方程是 $\begin{cases} y-z-1=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$


$L: \begin{cases} 2x-4y+z=0 \\ 3x-y-2z=9 \end{cases}$
L'
$\Pi:\ 4x-y+z=1$



解：

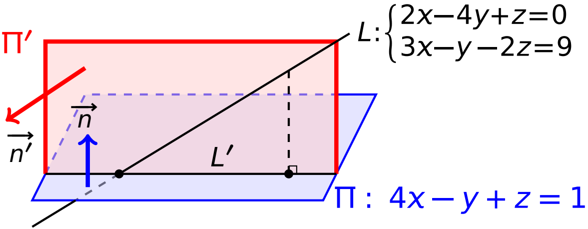
1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面。



解：

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面。由于 Π' 过 L，可设 Π' 方程为

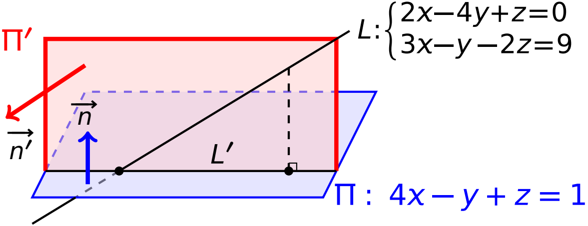
$$\lambda(2x-4y+z)+\mu(3x-y-2z-9)=0 \quad \text{（其中}\lambda, \mu\ \text{待定）}$$



解：

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面。由于 Π' 过 L，可设 Π' 方程为

$$\lambda(2x-4y+z)+\mu(3x-y-2z-9)=0 \quad (\text{其中}\lambda,\mu\text{ 待定})$$

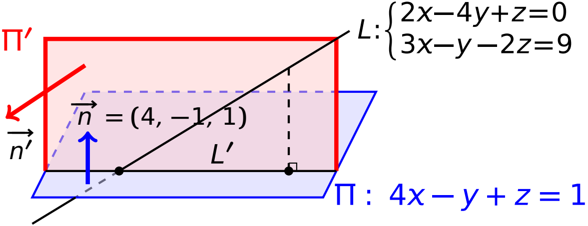


解:

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面。由于 Π' 过 L，可设 Π' 方程为

$$\lambda(2x-4y+z)+\mu(3x-y-2z-9)=0 \quad \text{（其中}\lambda,\mu\text{ 待定）}$$

2. $\vec{n'} \perp \vec{n} \ \Rightarrow 0=\vec{n'}\cdot\vec{n}$



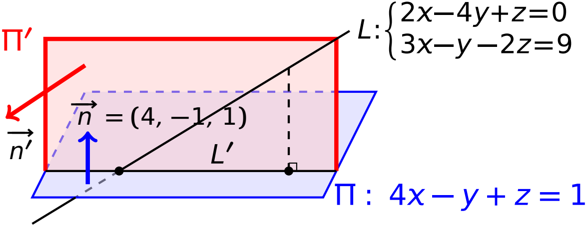
解:

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面。由于 Π' 过 L，可设 Π' 方程为

$$\lambda(2x-4y+z)+\mu(3x-y-2z-9)=0 \quad \text{（其中}\lambda,\mu\text{ 待定）}$$

2. $\overrightarrow{n'} \perp \overrightarrow{n} \Rightarrow 0=\overrightarrow{n'}\cdot\overrightarrow{n}$

$$(2\lambda+3\mu,\ -4\lambda-\mu,\ \lambda-2\mu)=\overrightarrow{n'}$$



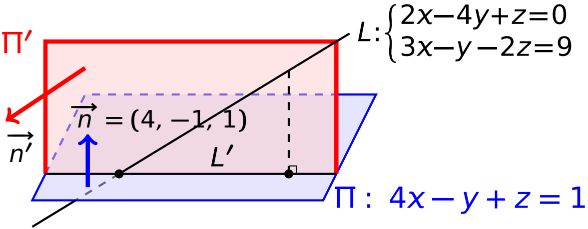
解：

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面。由于 Π' 过 L，可设 Π' 方程为

$$\lambda(2x-4y+z)+\mu(3x-y-2z-9)=0$$ （其中λ,μ 待定）

2. $\overrightarrow{n'}\perp\overrightarrow{n}\ \Rightarrow 0=\overrightarrow{n'}\cdot\overrightarrow{n}$

$(2\lambda+3\mu,\ -4\lambda-\mu,\ \lambda-2\mu)=\overrightarrow{n'}$



解：

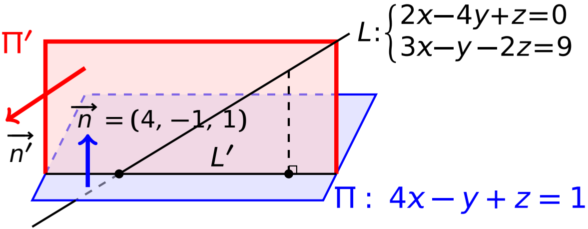
1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面。由于 Π' 过 L，可设 Π' 方程为

$$\lambda(2x-4y+z)+\mu(3x-y-2z-9)=0$$ （其中λ, μ 待定）

2. $\overrightarrow{n'}\perp\overrightarrow{n}\ \Rightarrow 0=\overrightarrow{n'}\cdot\overrightarrow{n}$

$$=4\cdot(2\lambda+3\mu)+(-1)\cdot(-4\lambda-\mu)+1\cdot(\lambda-2\mu)$$

$(2\lambda+3\mu, -4\lambda-\mu, \lambda-2\mu)=\overrightarrow{n'}$



解:

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面。由于 Π' 过 L，可设 Π' 方程为

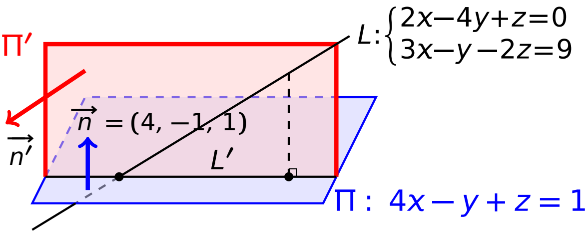
$$\lambda(2x-4y+z)+\mu(3x-y-2z-9)=0 \quad （其中\lambda, \mu \text{ 待定}）$$

2. $\overrightarrow{n'} \perp \vec{n} \quad \Rightarrow 0=\overrightarrow{n'}\cdot\vec{n}$

$$=4\cdot(2\lambda+3\mu)+(-1)\cdot(-4\lambda-\mu)+1\cdot(\lambda-2\mu)$$

$$\Rightarrow 13\lambda+11\mu=0$$

$(2\lambda+3\mu,\ -4\lambda-\mu,\ \lambda-2\mu)=\overrightarrow{n'}$



解：

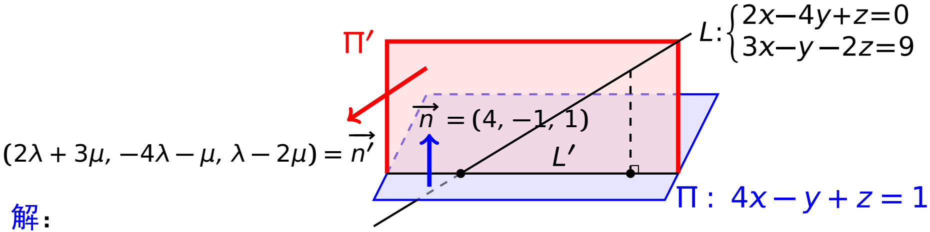
1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面。由于 Π' 过 L，可设 Π' 方程为

$$\lambda(2x-4y+z)+\mu(3x-y-2z-9)=0$$ （其中λ,μ 待定）

2. $\overrightarrow{n'}\perp\overrightarrow{n}\ \Rightarrow 0=\overrightarrow{n'}\cdot\overrightarrow{n}$

$$=4\cdot(2\lambda+3\mu)+(-1)\cdot(-4\lambda-\mu)+1\cdot(\lambda-2\mu)$$

$$\Rightarrow 13\lambda+11\mu=0$$ 不妨取 $\lambda=11,\ \mu=-13$



解:

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面。由于 Π' 过 L，可设 Π' 方程为

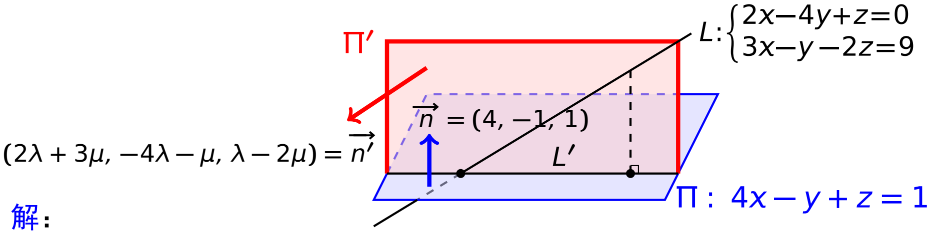
$$\lambda(2x-4y+z)+\mu(3x-y-2z-9)=0 \quad \text{（其中}\lambda,\ \mu\ \text{待定）}$$

2. $\vec{n'} \perp \vec{n} \quad \Rightarrow 0 = \vec{n'}\cdot\vec{n}$

$$= 4\cdot(2\lambda+3\mu)+(-1)\cdot(-4\lambda-\mu)+1\cdot(\lambda-2\mu)$$

$$\Rightarrow 13\lambda+11\mu=0 \quad \text{不妨取} \quad \lambda=11,\ \mu=-13$$

$$\Rightarrow \Pi'\text{的方程：}17x+31y-37z-117=0$$



解：

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面。由于 Π' 过 L，可设 Π' 方程为

$$\lambda(2x-4y+z)+\mu(3x-y-2z-9)=0 \quad \text{（其中}\lambda,\mu\text{ 待定）}$$

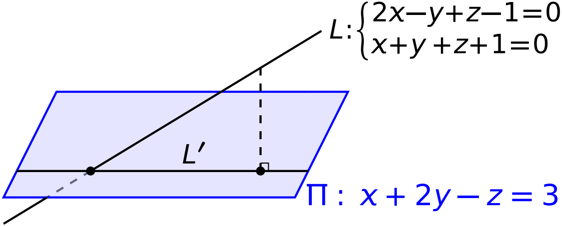
2. $\vec{n'} \perp \vec{n} \quad \Rightarrow 0=\vec{n'}\cdot\vec{n}$

$$=4\cdot(2\lambda+3\mu)+(-1)\cdot(-4\lambda-\mu)+1\cdot(\lambda-2\mu)$$

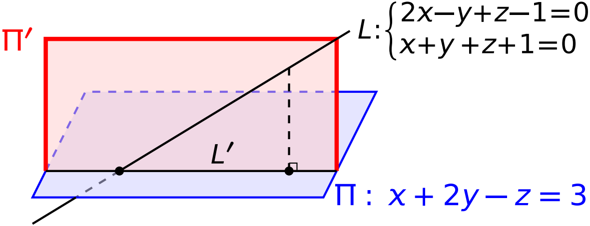
$$\Rightarrow 13\lambda+11\mu=0 \quad \text{不妨取} \quad \lambda=11,\ \mu=-13$$

$$\Rightarrow \Pi'\text{的方程：}17x+31y-37z-117=0$$

3. 投影直线 L' 的方程是 $\begin{cases}17x+31y-37z-117=0\\4x-y+z-1=0\end{cases}$

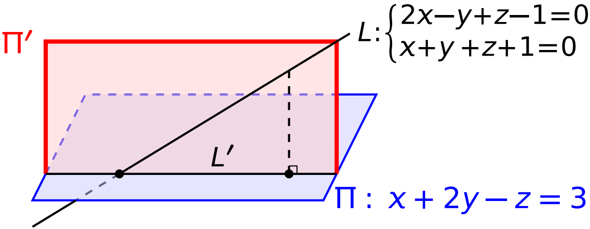


$L:\begin{cases}2x-y+z-1=0\\ x+y+z+1=0\end{cases}$
L'
$\Pi:\ x+2y-z=3$



解:

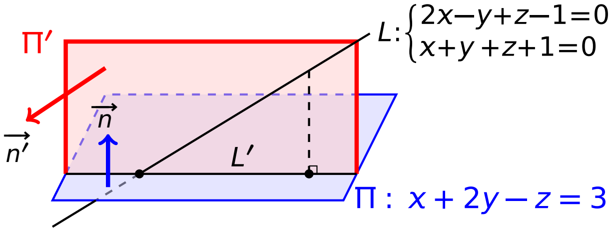
1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面。



解:

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面。由于 Π' 过 L，可设 Π' 方程为

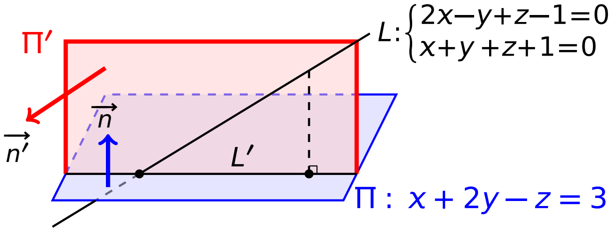
$$\lambda(2x-y+z-1)+\mu(x+y+z+1)=0 \quad \text{（其中}\lambda, \mu\ \text{待定）}$$



解:

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面。由于 Π' 过 L，可设 Π' 方程为

$$\lambda(2x-y+z-1)+\mu(x+y+z+1)=0$$ （其中λ,μ 待定）

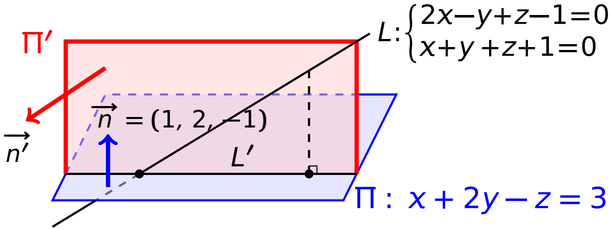


解:

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面。由于 Π' 过 L，可设 Π' 方程为

$$\lambda(2x-y+z-1)+\mu(x+y+z+1)=0 \quad \text{（其中}\lambda,\mu\text{ 待定）}$$

2. $\overrightarrow{n'}\perp\overrightarrow{n} \ \Rightarrow 0=\overrightarrow{n'}\cdot\overrightarrow{n}$

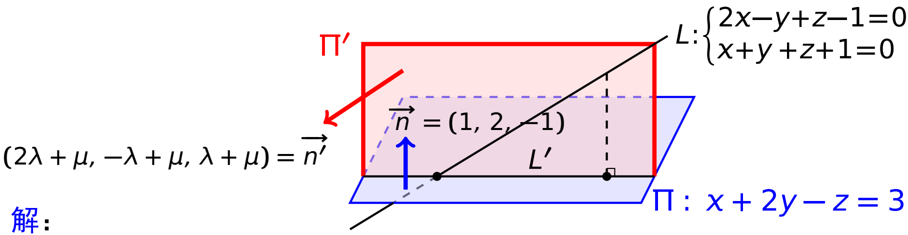


解：

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面。由于 Π' 过 L，可设 Π' 方程为

$$\lambda(2x-y+z-1)+\mu(x+y+z+1)=0 \quad （其中\lambda,\mu\ 待定）$$

2. $\overrightarrow{n'}\perp\overrightarrow{n} \Rightarrow 0=\overrightarrow{n'}\cdot\overrightarrow{n}$

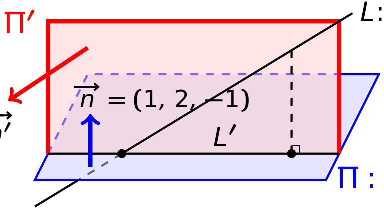


解:

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面。由于 Π' 过 L，可设 Π' 方程为

$$\lambda(2x-y+z-1)+\mu(x+y+z+1)=0 \quad \text{（其中}\lambda, \mu\text{ 待定）}$$

2. $\vec{n'} \perp \vec{n} \quad \Rightarrow 0 = \vec{n'} \cdot \vec{n}$



$L:\begin{cases}2x-y+z-1=0\\ x+y+z+1=0\end{cases}$

$(2\lambda+\mu,-\lambda+\mu,\lambda+\mu)=\overrightarrow{n'}$

$\Pi:\ x+2y-z=3$

解:

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面。由于 Π' 过 L，可设 Π' 方程为

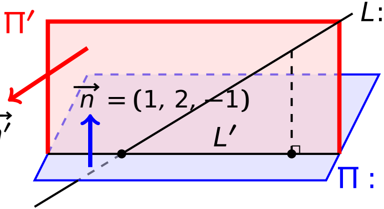
$$\lambda(2x-y+z-1)+\mu(x+y+z+1)=0\quad \text{（其中}\lambda,\mu\text{ 待定）}$$

2. $\overrightarrow{n'}\perp\overrightarrow{n}\ \Rightarrow 0=\overrightarrow{n'}\cdot\overrightarrow{n}$

$$=1\cdot(2\lambda+\mu)+2\cdot(-\lambda+\mu)+(-1)\cdot(\lambda+\mu)$$

$L: \begin{cases} 2x-y+z-1=0 \\ x+y+z+1=0 \end{cases}$

$(2\lambda+\mu, -\lambda+\mu, \lambda+\mu) = \overrightarrow{n'}$



$\Pi: x + 2y - z = 3$

解:

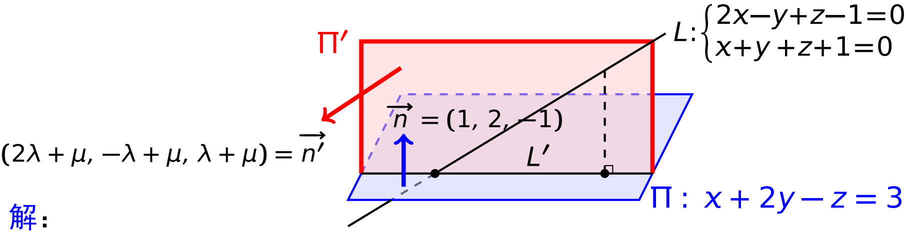
1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面。由于 Π' 过 L，可设 Π' 方程为

$$\lambda(2x-y+z-1) + \mu(x+y+z+1) = 0 \quad \text{（其中}\lambda, \mu\text{ 待定）}$$

2. $\overrightarrow{n'} \perp \overrightarrow{n} \Rightarrow 0 = \overrightarrow{n'} \cdot \overrightarrow{n}$

$$= 1\cdot(2\lambda+\mu) + 2\cdot(-\lambda+\mu) + (-1)\cdot(\lambda+\mu)$$

$$\Rightarrow -\lambda + 2\mu = 0$$



解:

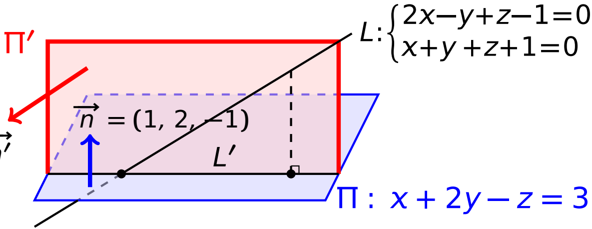
1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面。由于 Π' 过 L，可设 Π' 方程为

$$\lambda(2x - y + z - 1) + \mu(x + y + z + 1) = 0 \quad \text{（其中}\lambda, \mu \text{ 待定）}$$

2. $\overrightarrow{n'} \perp \overrightarrow{n} \Rightarrow 0 = \overrightarrow{n'} \cdot \overrightarrow{n}$

$$= 1\cdot(2\lambda + \mu) + 2\cdot(-\lambda + \mu) + (-1)\cdot(\lambda + \mu)$$

$$\Rightarrow -\lambda + 2\mu = 0 \quad \text{不妨取} \quad \lambda = 2, \mu = 1$$



解:

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面。由于 Π' 过 L，可设 Π' 方程为

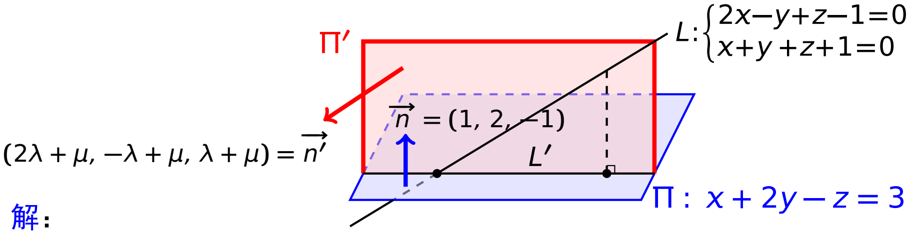
$$\lambda(2x-y+z-1)+\mu(x+y+z+1)=0 \quad \text{（其中}\lambda,\mu\text{ 待定）}$$

2. $\overrightarrow{n'} \perp \overrightarrow{n} \quad \Rightarrow 0=\overrightarrow{n'}\cdot\overrightarrow{n}$

$$=1\cdot(2\lambda+\mu)+2\cdot(-\lambda+\mu)+(-1)\cdot(\lambda+\mu)$$

$$\Rightarrow -\lambda+2\mu=0 \quad \text{不妨取} \quad \lambda=2,\mu=1$$

$$\Rightarrow \Pi'\text{的方程：} 5x-y+3z-1=0$$



解：

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面。由于 Π' 过 L，可设 Π' 方程为

$$\lambda(2x-y+z-1)+\mu(x+y+z+1)=0$$ （其中λ, μ 待定）

2. $\vec{n'} \perp \vec{n} \quad \Rightarrow 0=\vec{n'}\cdot\vec{n}$

$$=1\cdot(2\lambda+\mu)+2\cdot(-\lambda+\mu)+(-1)\cdot(\lambda+\mu)$$

$\Rightarrow -\lambda+2\mu=0$ 不妨取 $\lambda=2, \mu=1$

$\Rightarrow \Pi'$的方程：$5x-y+3z-1=0$

3. 投影直线 L' 的方程是 $\begin{cases} 5x-y+3z-1=0 \\ x+2y-z-3=0 \end{cases}$