第 5 章 a：定积分的概念与性质

数学系　梁卓滨

2019-2020 学年 I

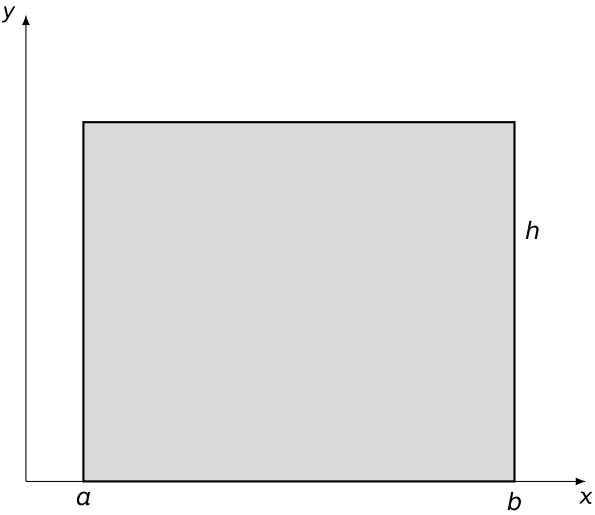
Outline

We are here now...

1. 定积分的概念

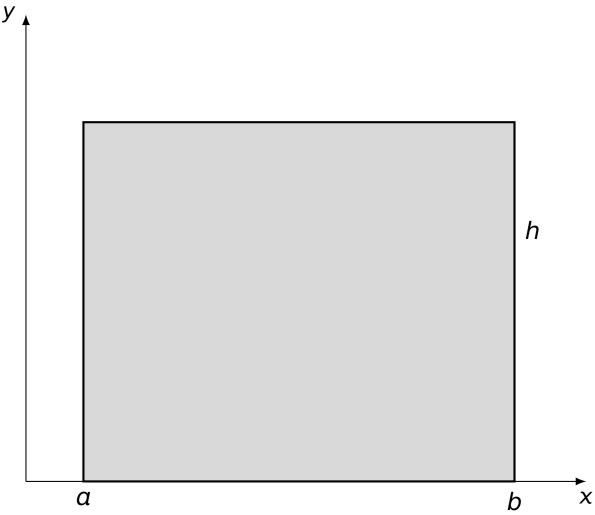
2. 定积分的性质

矩形形面积



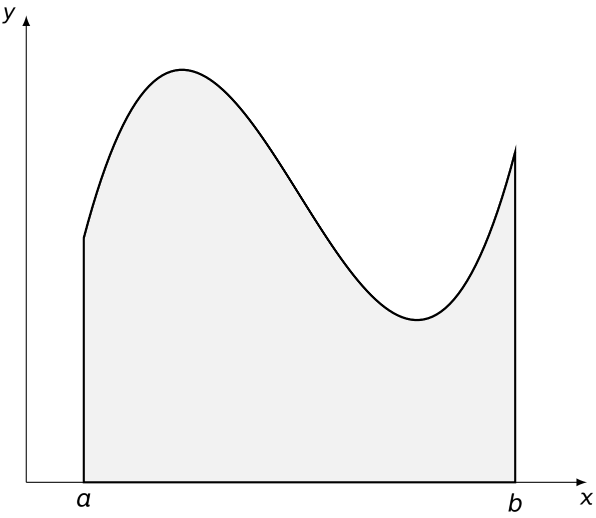
$A =$

矩形形面积



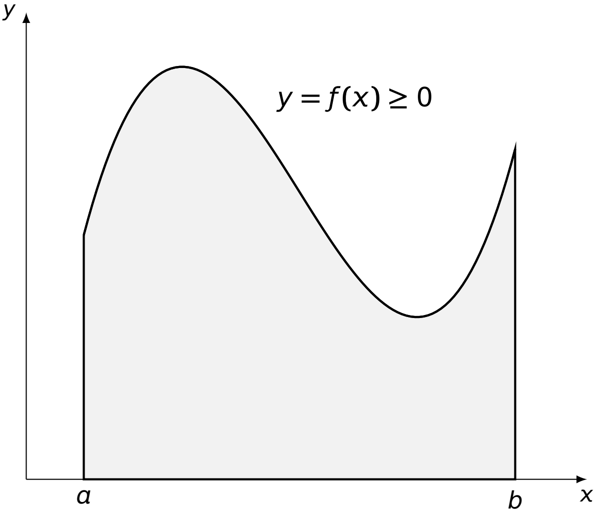
$$A = h(b-a)$$

曲边梯形面积



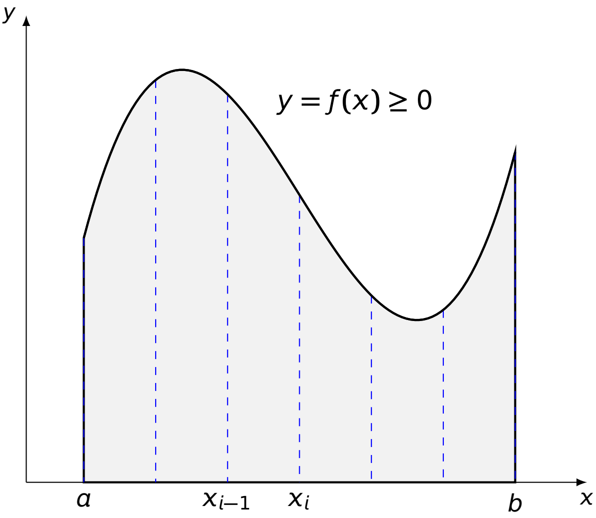
$A =$

曲边梯形面积



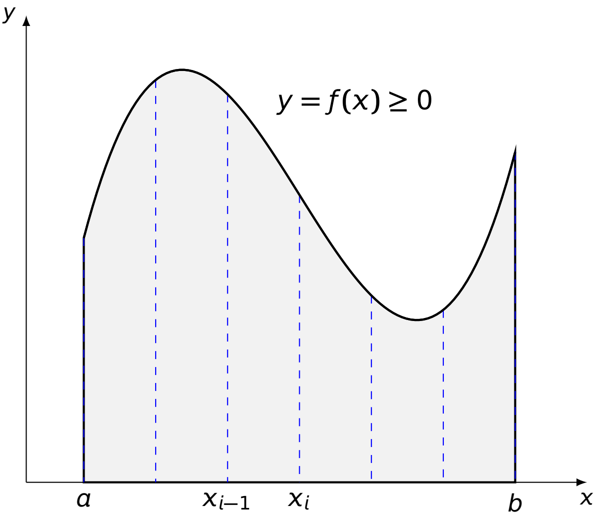
$A =$

曲边梯形面积



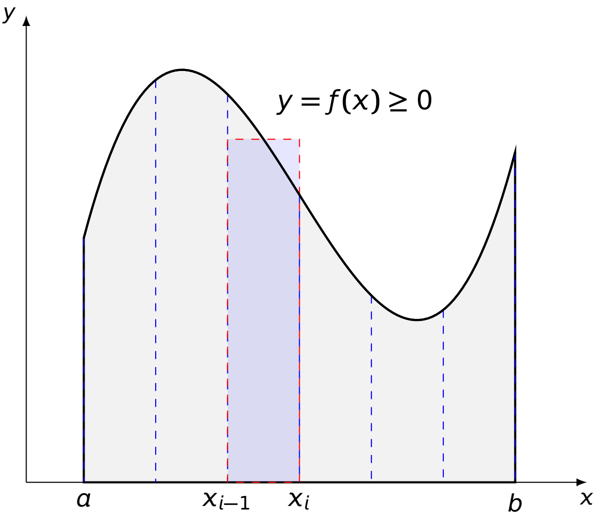
$A =$

曲边梯形面积



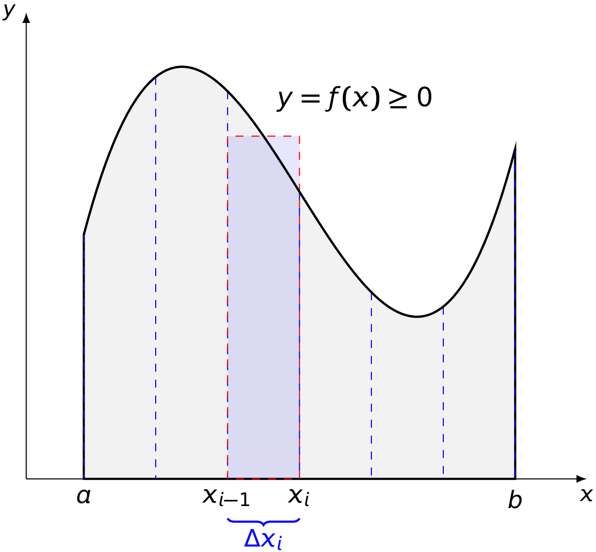
$$A = \sum \Delta A_i$$

曲边梯形面积



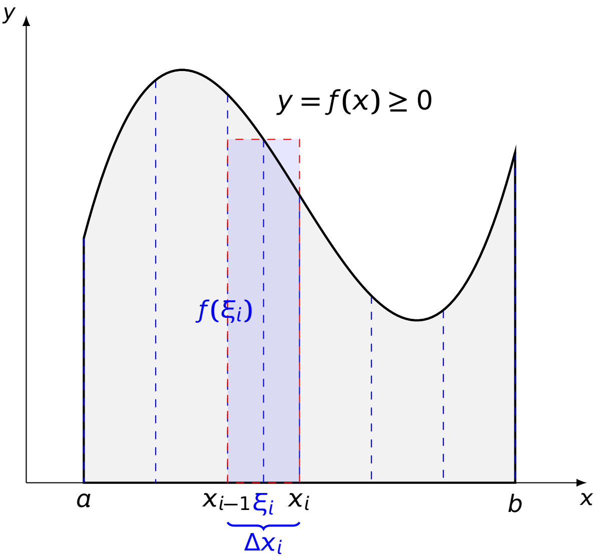
$$A = \sum \Delta A_i$$

曲边梯形面积



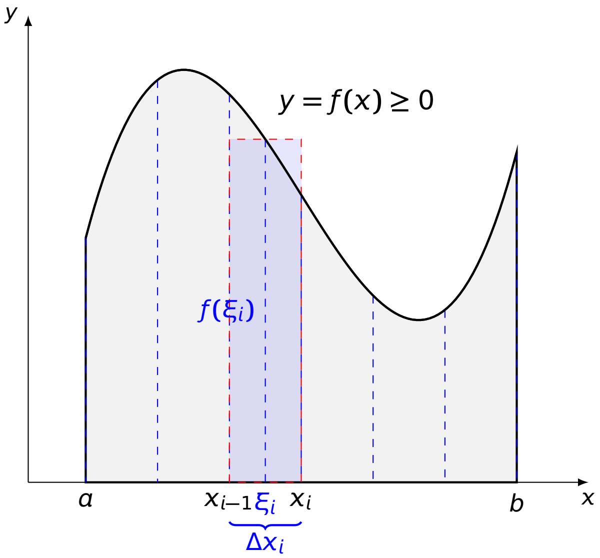
$$A = \sum \Delta A_i$$

曲边梯形面积



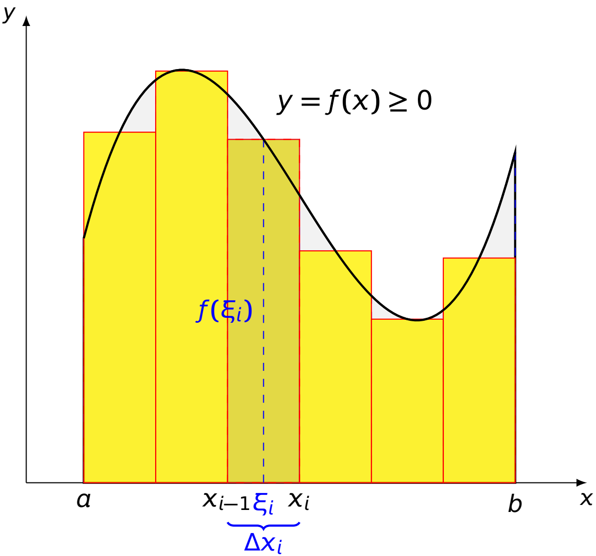
$$A = \sum \Delta A_i$$

曲边梯形面积



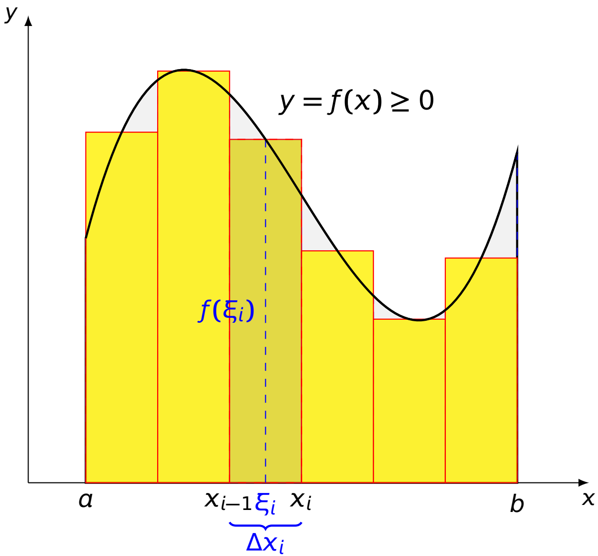
$$A = \sum \Delta A_i \qquad f(\xi_i)\Delta x_i$$

曲边梯形面积



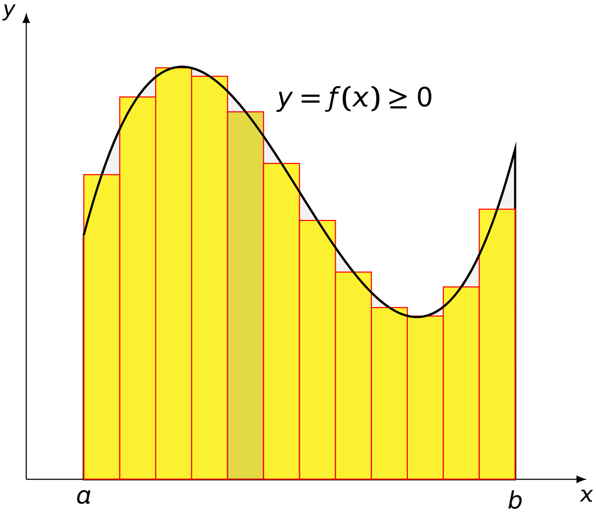
$$A = \sum \Delta A_i \qquad f(\xi_i)\Delta x_i$$

曲边梯形面积



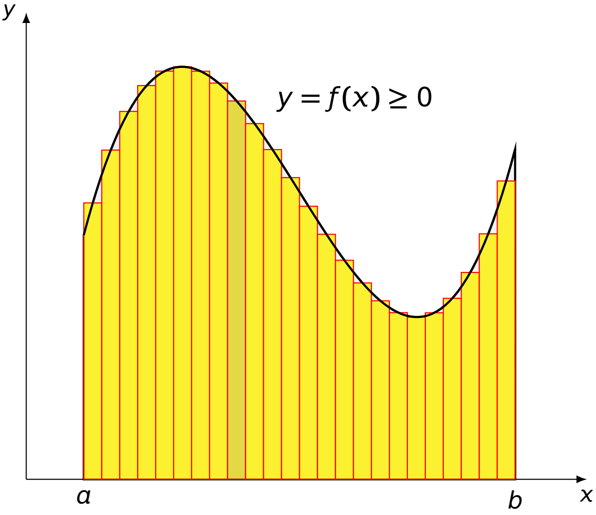
$$A = \sum \Delta A_i \approx \sum f(\xi_i)\Delta x_i$$

曲边梯形面积



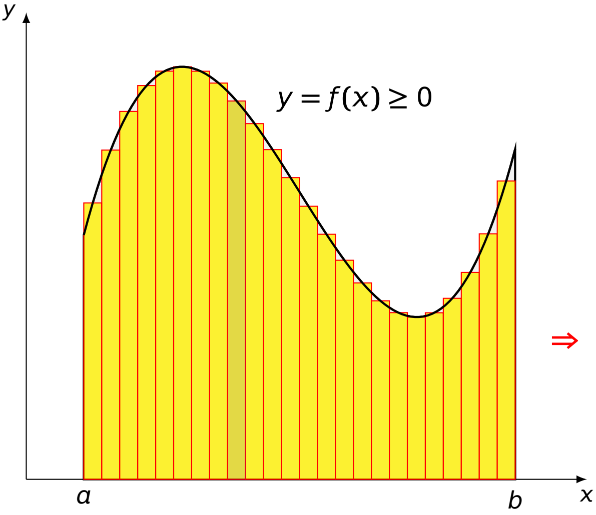
$$A = \sum \Delta A_i \approx \sum f(\xi_i)\Delta x_i$$

曲边梯形面积



$$A=\sum \Delta A_i \approx \sum f(\xi_i)\Delta x_i$$

曲边梯形面积



$$A = \sum \Delta A_i \approx \sum f(\xi_i)\Delta x_i$$

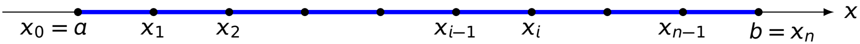
$$\Rightarrow \quad A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$$

定积分的定义

定义 设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上的函数，

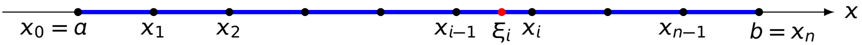
定积分的定义

定义 设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上的函数，



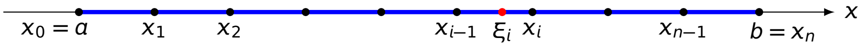
定积分的定义

定义 设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上的函数，



定积分的定义

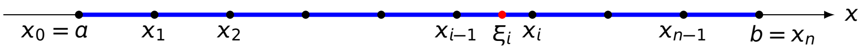
定义 设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上的函数，



$$f(\xi_i)\Delta x_i$$

定积分的定义

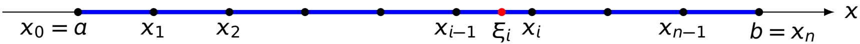
定义 设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上的函数，



$$\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$$

定积分的定义

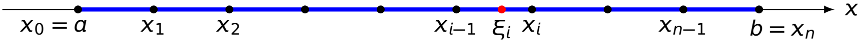
定义 设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上的函数，



$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f(\xi_i) \Delta x_i$$

定积分的定义

定义 设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上的函数，



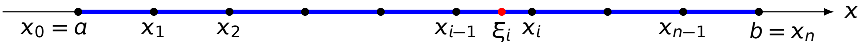
如果极限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$$

存在，

定积分的定义

定义 设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上的函数，



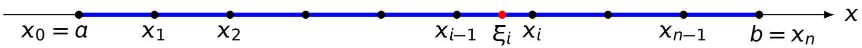
如果极限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f(\xi_i) \Delta x_i$$

存在，且与区间划分无关，也与点 ξ_i 的选取无关，

定积分的定义

定义 设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上的函数，



如果极限

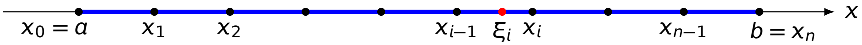
$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f(\xi_i) \Delta x_i$$

存在，且与区间划分无关，也与点 ξ_i 的选取无关， 则称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上**可积**，

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f(\xi_i) \Delta x_i$$

定积分的定义

定义 设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上的函数，



如果极限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$$

存在，且与区间划分无关，也与点 ξ_i 的选取无关， 则称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上**可积**，称上述极限为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的**积分**，记作 $\int_a^b f(x)dx$，

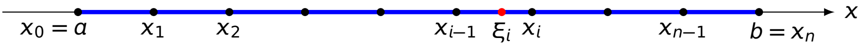
$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$$

其中

- “$\int$”：**积分号**；“$f(x)$”：**被积函数**；“$f(x)dx$ ”：**被积表达式**

定积分的定义

定义 设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上的函数，



如果极限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$$

存在，且与区间划分无关，也与点 ξ_i 的选取无关， 则称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上**可积**，称上述极限为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的**积分**，记作 $\int_a^b f(x)dx$，即

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$$

其中

- “$\int$”：**积分号**；“$f(x)$”：**被积函数**；“$f(x)dx$”：**被积表达式**
- “$[a, b]$”：**积分区间**；“a”：**积分下限**；“b”：**积分上限**；“x”：**积分变量**

关于定积分的注记

- 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 是一个数

关于定积分的注记

- 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 是一个数，所以

$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x)dx =$$

关于定积分的注记

- 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 是一个数，所以

$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x)dx = 0.$$

关于定积分的注记

- 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 是一个数，所以

$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x)dx = 0.$$

区别不定积分 $\int f(x)dx$ 的导数

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx =$$

关于定积分的注记

- 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 是一个数，所以

$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x)dx = 0.$$

区别不定积分 $\int f(x)dx$ 的导数

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x).$$

关于定积分的注记

- 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 是一个数，所以
$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x)dx = 0.$$
区别不定积分 $\int f(x)dx$ 的导数
$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x).$$
- 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 中，$a < b$.

关于定积分的注记

- 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 是一个数，所以
$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x)dx = 0.$$
区别不定积分 $\int f(x)dx$ 的导数
$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x).$$

- 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 中，$a < b$. 规定
$$\int_b^a f(x)dx =$$

关于定积分的注记

- 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 是一个数，所以
$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x)dx = 0.$$
区别不定积分 $\int f(x)dx$ 的导数
$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x).$$

- 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 中，$a < b$. 规定
$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

关于定积分的注记

- 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 是一个数，所以
$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x)dx = 0.$$
区别不定积分 $\int f(x)dx$ 的导数
$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x).$$

- 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 中，$a < b$. 规定
$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$
例如 $\int_{10}^3 f(x)dx =$

关于定积分的注记

- 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 是一个数，所以

$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x)dx = 0.$$

区别不定积分 $\int f(x)dx$ 的导数

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x).$$

- 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 中，$a < b$. 规定

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

例如 $\int_{10}^3 f(x)dx = -\int_3^{10} f(x)dx.$

关于定积分的注记

- 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 是一个数，所以

$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x)dx = 0.$$

区别不定积分 $\int f(x)dx$ 的导数

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x).$$

- 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 中，$a < b$. 规定

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

例如 $\int_{10}^3 f(x)dx = -\int_3^{10} f(x)dx.$

- 规定：$\int_a^a f(x)dx = 0$

关于定积分的注记

- 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 是一个数，所以

$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x)dx = 0.$$

区别不定积分 $\int f(x)dx$ 的导数

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x).$$

- 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 中，$a < b$. 规定

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

例如 $\int_{10}^3 f(x)dx = -\int_3^{10} f(x)dx.$

- 规定：$\int_a^a f(x)dx = 0$，例如 $\int_2^2 f(x)dx = 0$

定积分的存在性

- 若极限 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$ 不存在，则定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 也就不存在.

定积分的存在性

- 若极限 $\lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$ 不存在，则定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 也就不存在.

问题

- 何时极限存在，且与区间划分无关，也与点 ξ_i 的选取无关?

定积分的存在性

- 若极限 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$ 不存在，则定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 也就不存在.

问题

- 何时极限存在，且与区间划分无关，也与点 ξ_i 的选取无关?
- 也就是说，何时定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 存在?（$f(x)$ 何时可积?）

定积分的存在性

- 若极限 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$ 不存在，则定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 也就不存在.

问题

- 何时极限存在，且与区间划分无关，也与点 ξ_i 的选取无关?
- 也就是说，何时定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 存在?（$f(x)$ 何时可积?）

定理 如果函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则 $\int_a^b f(x)dx$ 存在.

定积分的存在性

- 若极限 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$ 不存在，则定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 也就不存在.

问题

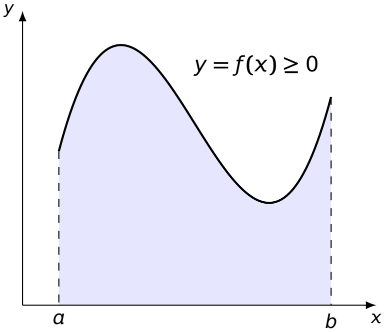
- 何时极限存在，且与区间划分无关，也与点 ξ_i 的选取无关?
- 也就是说，何时定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 存在?（$f(x)$ 何时可积?)

定理 如果函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则 $\int_a^b f(x)dx$ 存在.

定理 如果函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界，且除去有限个点外连续，则 $\int_a^b f(x)dx$ 存在.

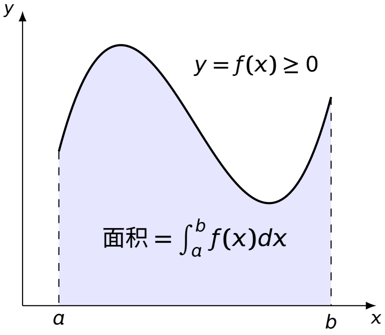
定积分几何意义：曲边梯形面积

当 $f(x) \geq 0$ 时，



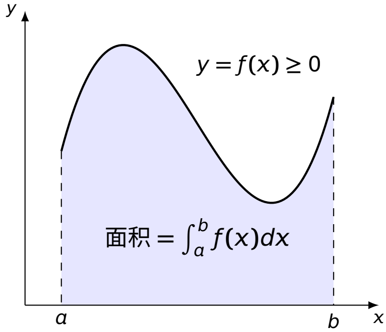
定积分几何意义：曲边梯形面积

当 $f(x) \geq 0$ 时，



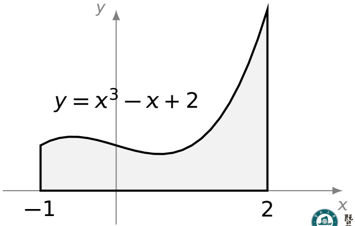
定积分几何意义：曲边梯形面积

当 $f(x) \geq 0$ 时，



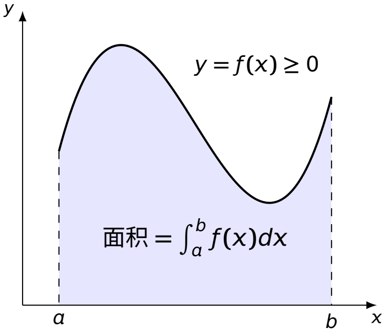
例 1 右图曲边梯形面积, 用定积分表示是

$A =$



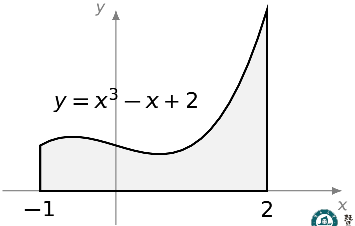
定积分几何意义：曲边梯形面积

当 $f(x) \geq 0$ 时，



例 1 右图曲边梯形面积, 用定积分表示是

$$A = \int_{-1}^{2} (x^3 - x + 2)dx$$



例 2 计算 $\int_a^b 1dx$

例 2 计算 $\int_a^b 1dx$

方法一 （定义）

$$\int_a^b 1dx$$

例 2 计算 $\int_a^b 1dx$

方法一 （定义）

$$\int_a^b 1dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$$

例 2 计算 $\int_a^b 1dx$

方法一 （定义）

$$\int_a^b 1dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$= \qquad 1 \cdot \Delta x_i$$

例 2 计算 $\int_a^b 1dx$

方法一 （定义）

$$\int_a^b 1dx = \lim_{\Delta x\to 0}\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\sum_i 1\cdot\Delta x_i =$$

例 2 计算 $\int_a^b 1dx$

方法一 （定义）

$$\int_a^b 1dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i 1 \cdot \Delta x_i = \qquad (b-a)$$

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

例 2 计算 $\int_a^b 1dx$

方法一 （定义）

$$\int_a^b 1dx = \lim_{\Delta x\to 0}\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\sum_i 1\cdot\Delta x_i = \lim_{\Delta x\to 0}(b-a) =$$

例 2 计算 $\int_a^b 1dx$

方法一 （定义）

$$\int_a^b 1dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i 1 \cdot \Delta x_i = \lim_{\Delta x \to 0} (b-a) = b-a$$

例 2 计算 $\int_a^b 1dx$

方法一 （定义）

$$\int_a^b 1dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i 1 \cdot \Delta x_i = \lim_{\Delta x \to 0} (b-a) = b-a$$

方法二 （几何）

例 2 计算 $\int_a^b 1dx$

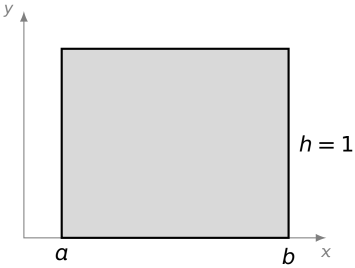
方法一（定义）

$$\int_a^b 1dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i 1 \cdot \Delta x_i = \lim_{\Delta x \to 0} (b-a) = b-a$$

方法二（几何）$\int_a^b 1dx$ 是右图矩形的面积，

所以



例 2 计算 $\int_a^b 1dx$

方法一（定义）

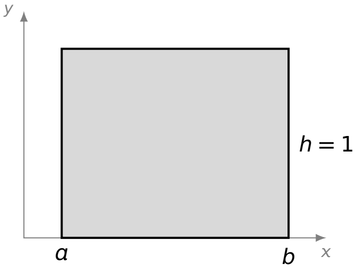
$$\int_a^b 1dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i 1 \cdot \Delta x_i = \lim_{\Delta x \to 0} (b-a) = b-a$$

方法二（几何）$\int_a^b 1dx$ 是右图矩形的面积，

所以

$$\int_a^b 1dx = b-a$$



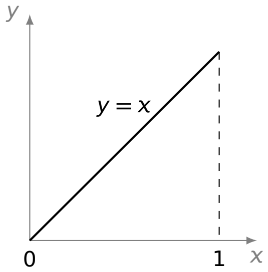
例 3 计算 $\int_0^1 x dx$

例 3 计算 $\int_0^1 x dx$

解 （利用几何意义）

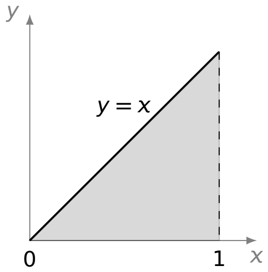
例 3 计算 $\int_0^1 x dx$

解 （利用几何意义）



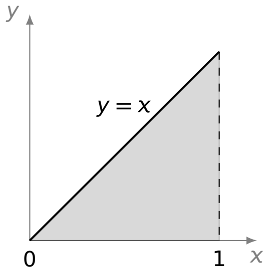
例 3 计算 $\int_0^1 x dx$

解 （利用几何意义）$\int_0^1 x dx$ 是如图三角形的面积，所以



例 3 计算 $\int_0^1 x dx$

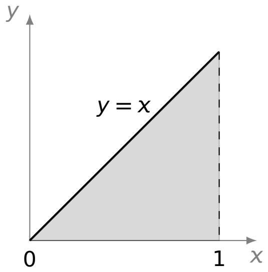
解 （利用几何意义）$\int_0^1 x dx$ 是如图三角形的面积，所以



例 3 计算 $\int_0^1 x dx$

解 （利用几何意义）$\int_0^1 x dx$ 是如图三角形的面积，所以

$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$$



We are here now...

1. 定积分的概念

2. 定积分的性质

定积分的线性性质

(1) $\int_a^b [k \cdot f(x)]dx = k\int_a^b f(x)dx$, （$\forall k \in \mathbb{R}$）

(2) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$,

定积分的线性性质

(1) $\int_a^b [k \cdot f(x)]dx = k\int_a^b f(x)dx$, $(\forall k \in \mathbb{R})$

(2) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$,

(对多个函数也成立)

定积分的线性性质

(1) $\int_a^b [k \cdot f(x)]dx = k\int_a^b f(x)dx$, （$\forall k \in \mathbb{R}$）

(2) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$,

（对多个函数也成立）

证明:

$$\int_a^b [k \cdot f(x)]dx$$

定积分的线性性质

(1) $\int_a^b [k \cdot f(x)]dx = k\int_a^b f(x)dx,\quad (\forall k \in \mathbb{R})$

(2) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx,$

（对多个函数也成立）

证明:

$$\int_a^b [k \cdot f(x)]dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} [kf(\xi_i)] \cdot \Delta x_i =$$

定积分的线性性质

(1) $\int_a^b [k \cdot f(x)]dx = k\int_a^b f(x)dx$, $(\forall k \in \mathbb{R})$

(2) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$,

(对多个函数也成立)

证明:

$$\int_a^b [k \cdot f(x)]dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} [kf(\xi_i)] \cdot \Delta x_i = \lim_{\Delta x \to 0} k \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

定积分的线性性质

(1) $\int_a^b [k \cdot f(x)]dx = k\int_a^b f(x)dx,\quad (\forall k \in \mathbb{R})$

(2) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx,$

(对多个函数也成立)

证明:

$$\int_a^b [k \cdot f(x)]dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} [kf(\xi_i)] \cdot \Delta x_i = \lim_{\Delta x \to 0} k \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

$$= k \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

定积分的线性性质

(1) $\int_a^b [k\cdot f(x)]dx = k\int_a^b f(x)dx$, （$\forall k\in\mathbb{R}$）

(2) $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$,

（对多个函数也成立）

证明:

$$\int_a^b [k\cdot f(x)]dx = \lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n}[kf(\xi_i)]\cdot\Delta x_i = \lim_{\Delta x\to 0} k\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$$

$$= k\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i = k\int_a^b f(x)dx$$

定积分的线性性质

(1) $\int_a^b [k\cdot f(x)]dx = k\int_a^b f(x)dx,\quad (\forall k\in\mathbb{R})$

(2) $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx,$

（对多个函数也成立）

证明:

$$\int_a^b [k\cdot f(x)]dx = \lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^n [kf(\xi_i)]\cdot\Delta x_i = \lim_{\Delta x\to 0} k\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$$

$$= k\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\cdot\Delta x_i = k\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^n [f(\xi_i)\pm g(\xi_i)]\cdot\Delta x_i = \cdots\cdots$$

例

$$\int_0^1 \left(3x - 10\sin x + \frac{1}{1+x^2}\right) dx$$

$$=$$

例

$$\int_0^1 \left(3x - 10\sin x + \frac{1}{1+x^2}\right) dx$$

$$= \int_0^1 3x dx - \int_0^1 10 \sin x dx + \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$=$$

例

$$\int_0^1 \left(3x - 10\sin x + \frac{1}{1+x^2}\right) dx$$

$$= \int_0^1 3x dx - \int_0^1 10\sin x dx + \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= 3\int_0^1 x dx - 10\int_0^1 \sin x dx + \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

例

$$\int_0^1 \left(3x - 10\sin x + \frac{1}{1+x^2}\right) dx$$

$$= \int_0^1 3x dx - \int_0^1 10\sin x dx + \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= 3\int_0^1 x dx - 10\int_0^1 \sin x dx + \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \cdots\cdots$$

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

定积分对积分区间的可加性

假设 a, b, c 为任意常数（不管大小关系如何），总成立

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

定积分对积分区间的可加性

假设 a, b, c 为任意常数（不管大小关系如何），总成立

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

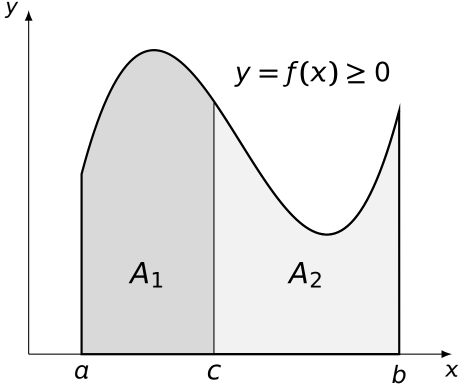
仅以“$f(x) \geq 0$，$a < c < b$”情形验证：

定积分对积分区间的可加性

假设 a, b, c 为任意常数（不管大小关系如何），总成立

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

仅以“$f(x) \geq 0$，$a < c < b$”情形验证：

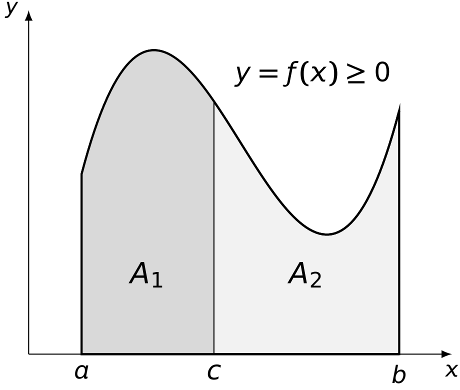


定积分对积分区间的可加性

假设 a, b, c 为任意常数（不管大小关系如何），总成立

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

仅以“$f(x) \geq 0$，$a < c < b$”情形验证：



$$\int_a^b f(x)dx$$

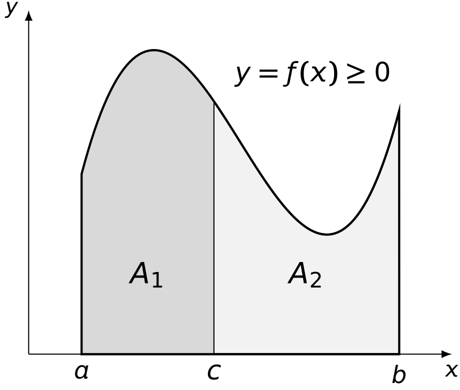
$=$ 大曲边梯形面积

定积分对积分区间的可加性

假设 a, b, c 为任意常数（不管大小关系如何），总成立

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

仅以“$f(x) \geq 0$，$a < c < b$”情形验证：



$$\int_a^b f(x)dx$$

= 大曲边梯形面积

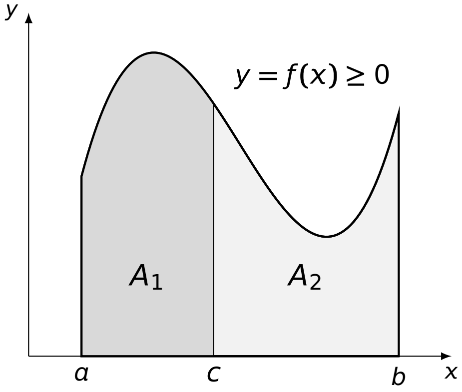
$= A_1 + A_2$

定积分对积分区间的可加性

假设 a, b, c 为任意常数（不管大小关系如何），总成立

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

仅以“$f(x) \geq 0$，$a < c < b$”情形验证：



$$\int_a^b f(x)dx$$

$=$ 大曲边梯形面积

$= A_1 + A_2$

$$= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

例 1 已知 $\int_{-12}^{-5} f(x)dx = -6$，$\int_{-5}^{1} f(x)dx = 12$，求 $\int_{-12}^{1} 3f(x)dx$

例 1 已知 $\int_{-12}^{-5} f(x)dx = -6$，$\int_{-5}^{1} f(x)dx = 12$，求 $\int_{-12}^{1} 3f(x)dx$

解

$$\int_{-12}^{1} 3f(x)dx =$$

例 1 已知 $\int_{-12}^{-5} f(x)dx = -6$，$\int_{-5}^{1} f(x)dx = 12$，求 $\int_{-12}^{1} 3f(x)dx$

解

$$\int_{-12}^{1} 3f(x)dx = 3\int_{-12}^{1} f(x)dx =$$

例 1 已知 $\int_{-12}^{-5} f(x)dx = -6$，$\int_{-5}^{1} f(x)dx = 12$，求 $\int_{-12}^{1} 3f(x)dx$

解

$$\int_{-12}^{1} 3f(x)dx = 3\int_{-12}^{1} f(x)dx = 3\left(\int_{-12}^{-5} f(x)dx + \int_{-5}^{1} f(x)dx\right)$$

例 1 已知 $\int_{-12}^{-5} f(x)dx = -6$，$\int_{-5}^{1} f(x)dx = 12$，求 $\int_{-12}^{1} 3f(x)dx$

解

$$\int_{-12}^{1} 3f(x)dx = 3\int_{-12}^{1} f(x)dx = 3\left(\int_{-12}^{-5} f(x)dx + \int_{-5}^{1} f(x)dx\right)$$
$$= 3\cdot(-6+12)$$

例 1 已知 $\int_{-12}^{-5} f(x)dx = -6$，$\int_{-5}^{1} f(x)dx = 12$，求 $\int_{-12}^{1} 3f(x)dx$

解

$$\begin{aligned}\int_{-12}^{1} 3f(x)dx &= 3\int_{-12}^{1} f(x)dx = 3\left(\int_{-12}^{-5} f(x)dx + \int_{-5}^{1} f(x)dx\right)\\ &= 3\cdot(-6+12) = 18\end{aligned}$$

例 1 已知 $\int_{-12}^{-5} f(x)dx = -6$，$\int_{-5}^{1} f(x)dx = 12$，求 $\int_{-12}^{1} 3f(x)dx$

解

$$\int_{-12}^{1} 3f(x)dx = 3\int_{-12}^{1} f(x)dx = 3\left(\int_{-12}^{-5} f(x)dx + \int_{-5}^{1} f(x)dx\right)$$
$$= 3\cdot(-6+12) = 18$$

例 2 已知 $\int_{-12}^{-5} f(x)dx = -6$，$\int_{2}^{-5} f(x)dx = -13$，求 $\int_{-12}^{2} f(x)dx$

例 1 已知 $\int_{-12}^{-5} f(x)dx = -6$，$\int_{-5}^{1} f(x)dx = 12$，求 $\int_{-12}^{1} 3f(x)dx$

解

$$\int_{-12}^{1} 3f(x)dx = 3\int_{-12}^{1} f(x)dx = 3\left(\int_{-12}^{-5} f(x)dx + \int_{-5}^{1} f(x)dx\right)$$
$$= 3\cdot(-6+12) = 18$$

例 2 已知 $\int_{-12}^{-5} f(x)dx = -6$，$\int_{2}^{-5} f(x)dx = -13$，求 $\int_{-12}^{2} f(x)dx$

解

$$\int_{-12}^{2} f(x)dx =$$

例 1 已知 $\int_{-12}^{-5} f(x)dx = -6$，$\int_{-5}^{1} f(x)dx = 12$，求 $\int_{-12}^{1} 3f(x)dx$

解

$$\int_{-12}^{1} 3f(x)dx = 3\int_{-12}^{1} f(x)dx = 3\left(\int_{-12}^{-5} f(x)dx + \int_{-5}^{1} f(x)dx\right)$$
$$= 3 \cdot (-6 + 12) = 18$$

例 2 已知 $\int_{-12}^{-5} f(x)dx = -6$，$\int_{2}^{-5} f(x)dx = -13$，求 $\int_{-12}^{2} f(x)dx$

解

$$\int_{-12}^{2} f(x)dx = \int_{-12}^{-5} f(x)dx + \int_{-5}^{2} f(x)dx$$

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

例 1 已知 $\int_{-12}^{-5} f(x)dx = -6$，$\int_{-5}^{1} f(x)dx = 12$，求 $\int_{-12}^{1} 3f(x)dx$

解

$$\int_{-12}^{1} 3f(x)dx = 3\int_{-12}^{1} f(x)dx = 3\left(\int_{-12}^{-5} f(x)dx + \int_{-5}^{1} f(x)dx\right)$$
$$= 3\cdot(-6+12) = 18$$

例 2 已知 $\int_{-12}^{-5} f(x)dx = -6$，$\int_{2}^{-5} f(x)dx = -13$，求 $\int_{-12}^{2} f(x)dx$

解

$$\int_{-12}^{2} f(x)dx = \int_{-12}^{-5} f(x)dx + \int_{-5}^{2} f(x)dx$$
$$= \int_{-12}^{-5} f(x)dx - \int_{2}^{-5} f(x)dx =$$

例 1 已知 $\int_{-12}^{-5} f(x)dx = -6$，$\int_{-5}^{1} f(x)dx = 12$，求 $\int_{-12}^{1} 3f(x)dx$

解

$$\int_{-12}^{1} 3f(x)dx = 3\int_{-12}^{1} f(x)dx = 3\left(\int_{-12}^{-5} f(x)dx + \int_{-5}^{1} f(x)dx\right)$$
$$= 3\cdot(-6+12) = 18$$

例 2 已知 $\int_{-12}^{-5} f(x)dx = -6$，$\int_{2}^{-5} f(x)dx = -13$，求 $\int_{-12}^{2} f(x)dx$

解

$$\int_{-12}^{2} f(x)dx = \int_{-12}^{-5} f(x)dx + \int_{-5}^{2} f(x)dx$$
$$= \int_{-12}^{-5} f(x)dx - \int_{2}^{-5} f(x)dx = -6-(-13)$$

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

例 1 已知 $\int_{-12}^{-5} f(x)dx = -6$，$\int_{-5}^{1} f(x)dx = 12$，求 $\int_{-12}^{1} 3f(x)dx$

解

$$\int_{-12}^{1} 3f(x)dx = 3\int_{-12}^{1} f(x)dx = 3\left(\int_{-12}^{-5} f(x)dx + \int_{-5}^{1} f(x)dx\right)$$
$$= 3\cdot(-6+12) = 18$$

例 2 已知 $\int_{-12}^{-5} f(x)dx = -6$，$\int_{2}^{-5} f(x)dx = -13$，求 $\int_{-12}^{2} f(x)dx$

解

$$\int_{-12}^{2} f(x)dx = \int_{-12}^{-5} f(x)dx + \int_{-5}^{2} f(x)dx$$
$$= \int_{-12}^{-5} f(x)dx - \int_{2}^{-5} f(x)dx = -6-(-13) = 7$$

积分的保号性质 如果在区间 $[a, b]$ 上成立 $f(x) \le g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx \qquad (a \le b)$$

积分的保号性质 如果在区间 $[a, b]$ 上成立 $f(x) \leq g(x)$，则

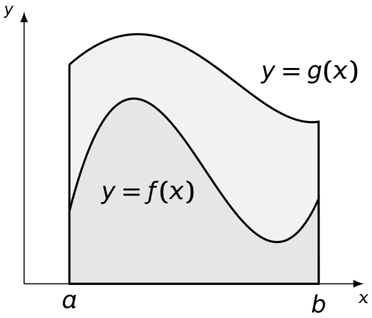
$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \qquad (a \leq b)$$

以“$0 \leq f(x) \leq g(x)$”情形为例说明：

积分的保号性质 如果在区间 $[a, b]$ 上成立 $f(x) \le g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx \qquad (a \le b)$$

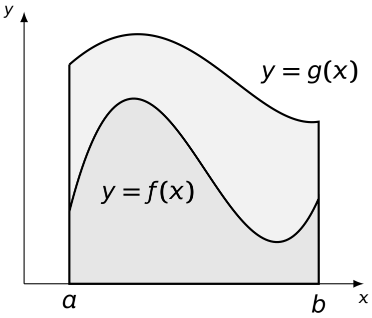
以“$0 \le f(x) \le g(x)$”情形为例说明：



积分的保号性质 如果在区间 $[a, b]$ 上成立 $f(x) \le g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx \qquad (a \le b)$$

以“$0 \le f(x) \le g(x)$”情形为例说明：

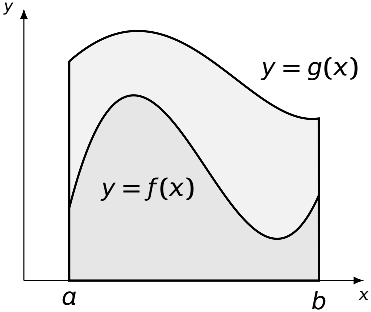


$$\int_a^b g(x)dx \ge \int_a^b f(x)dx$$

积分的保号性质 如果在区间 $[a, b]$ 上成立 $f(x) \le g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx \qquad (a \le b)$$

以“$0 \le f(x) \le g(x)$”情形为例说明：



$$\int_a^b g(x)dx \ge \int_a^b f(x)dx$$

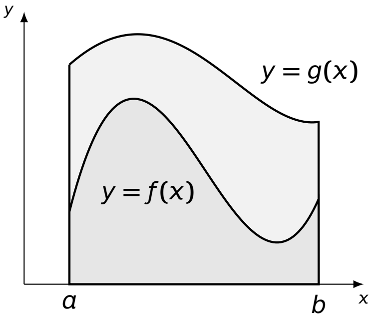
$$\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx$$

正好是 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 围成图形面积

积分的保号性质 如果在区间 $[a, b]$ 上成立 $f(x) \le g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx \qquad (a \le b)$$

以“$0 \le f(x) \le g(x)$”情形为例说明：



$$\int_a^b g(x)dx \ge \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x) - f(x)dx$$

正好是 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 围成图形面积

例 1 比较以下积分的大小

$$\int_0^1 x dx \text{ 与 } \int_0^1 x^2 dx; \quad \int_1^2 x dx \text{ 与 } \int_1^2 x^2 dx$$

例 1 比较以下积分的大小

$$\int_0^1 x dx \text{ 与 } \int_0^1 x^2 dx; \quad \int_1^2 x dx \text{ 与 } \int_1^2 x^2 dx$$

解：

$$\int_0^1 x dx \qquad \int_0^1 x^2 dx$$

$$\int_1^2 x dx \qquad \int_1^2 x^2 dx$$

例 1 比较以下积分的大小

$$\int_0^1 x dx \text{ 与 } \int_0^1 x^2 dx; \quad \int_1^2 x dx \text{ 与 } \int_1^2 x^2 dx$$

解：

$$\int_0^1 x dx > \int_0^1 x^2 dx$$

$$\int_1^2 x dx \qquad \int_1^2 x^2 dx$$

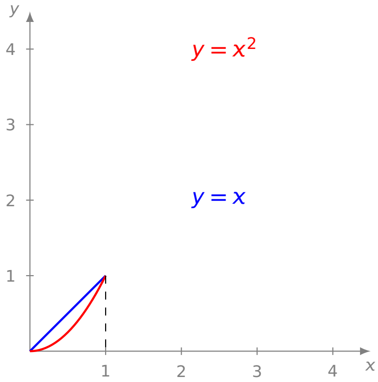
例 1 比较以下积分的大小

$$\int_0^1 x dx \text{ 与 } \int_0^1 x^2 dx; \quad \int_1^2 x dx \text{ 与 } \int_1^2 x^2 dx$$

解：

$$\int_0^1 x dx > \int_0^1 x^2 dx$$

$$\int_1^2 x dx \qquad \int_1^2 x^2 dx$$



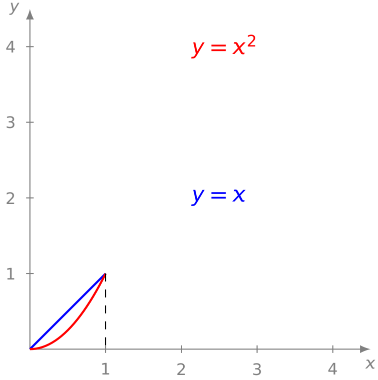
例 1 比较以下积分的大小

$$\int_0^1 x dx \text{ 与 } \int_0^1 x^2 dx; \quad \int_1^2 x dx \text{ 与 } \int_1^2 x^2 dx$$

解：

$$\int_0^1 x dx > \int_0^1 x^2 dx$$

$$\int_1^2 x dx < \int_1^2 x^2 dx$$



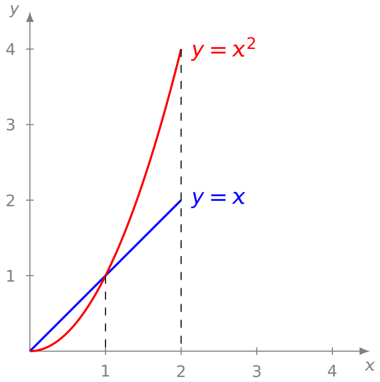
例 1 比较以下积分的大小

$$\int_0^1 x dx \text{ 与 } \int_0^1 x^2 dx; \quad \int_1^2 x dx \text{ 与 } \int_1^2 x^2 dx$$

解：

$$\int_0^1 x dx > \int_0^1 x^2 dx$$

$$\int_1^2 x dx < \int_1^2 x^2 dx$$

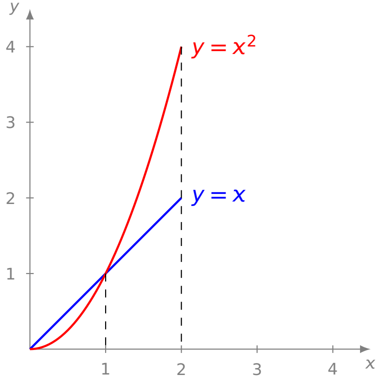


例 1 比较以下积分的大小

$$\int_0^1 x dx \text{ 与 } \int_0^1 x^2 dx; \quad \int_1^2 x dx \text{ 与 } \int_1^2 x^2 dx$$

解： 当 $0 \le x \le 1$ 时 $x \ge x^2$, 且不恒相等, 所以 $\int_0^1 x dx > \int_0^1 x^2 dx$

$$\int_1^2 x dx < \int_1^2 x^2 dx$$

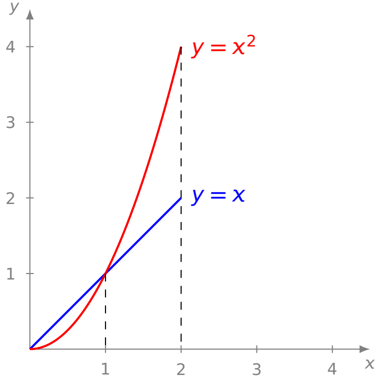


例 1 比较以下积分的大小

$$\int_0^1 x dx 与 \int_0^1 x^2 dx;\ \int_1^2 x dx 与 \int_1^2 x^2 dx$$

解： 当 $0 \le x \le 1$ 时 $x \ge x^2$, 且不恒相等, 所以 $\int_0^1 x dx > \int_0^1 x^2 dx$

当 $1 \le x \le 2$ 时 $x \le x^2$, 且不恒相等, 所以 $\int_1^2 x dx < \int_1^2 x^2 dx$

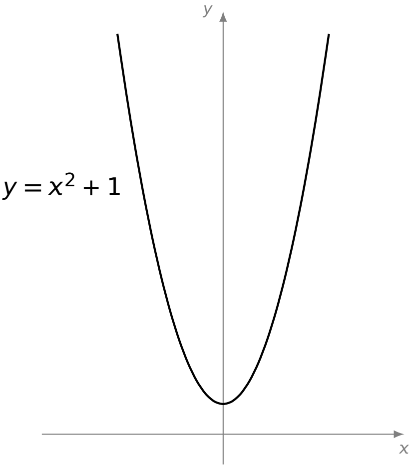


例 2 画出曲线 $y = x^2 + 1$ 与直线 $y = 2x + 4$，并比较大小：

$$\int_{-1}^{3} x^2 + 1 dx \qquad \int_{-1}^{3} 2x + 4 dx.$$

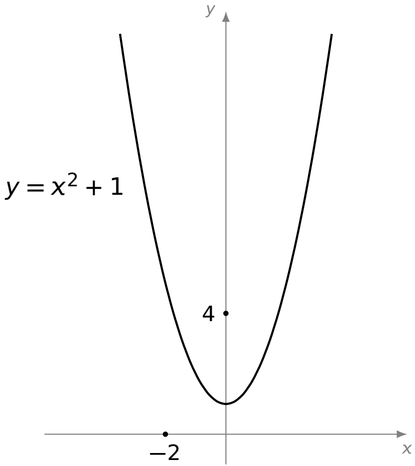
例 2 画出曲线 $y = x^2 + 1$ 与直线 $y = 2x + 4$，并比较大小：

$$\int_{-1}^{3} x^2 + 1 dx \qquad \int_{-1}^{3} 2x + 4 dx.$$



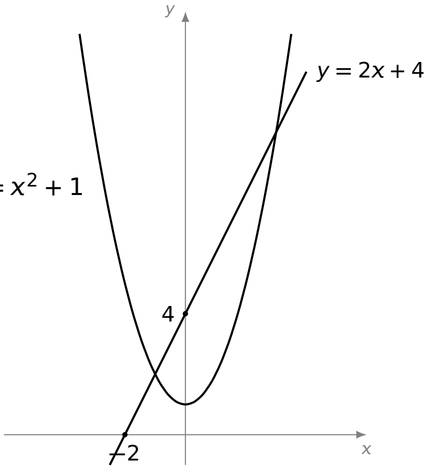
例 2 画出曲线 $y = x^2 + 1$ 与直线 $y = 2x + 4$，并比较大小：

$$\int_{-1}^{3} x^2 + 1dx \qquad \int_{-1}^{3} 2x + 4dx.$$



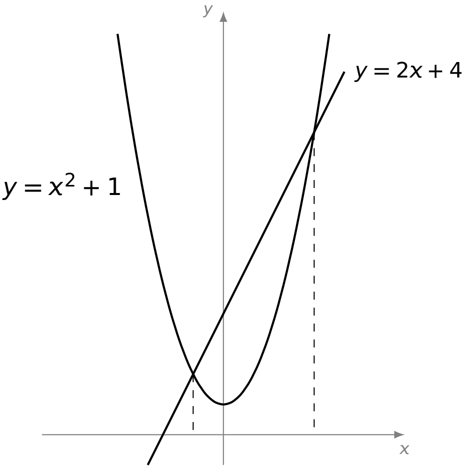
例 2 画出曲线 $y = x^2 + 1$ 与直线 $y = 2x + 4$，并比较大小：

$$\int_{-1}^{3} x^2 + 1 dx \qquad \int_{-1}^{3} 2x + 4 dx.$$



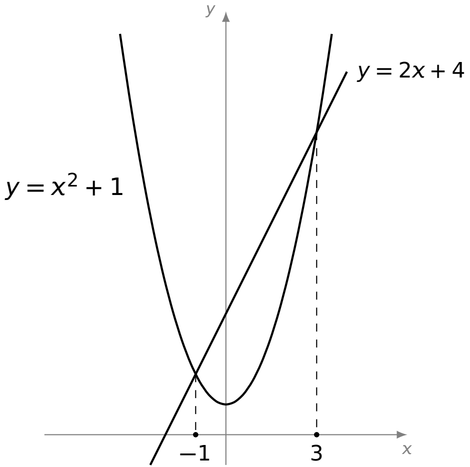
例 2 画出曲线 $y = x^2 + 1$ 与直线 $y = 2x + 4$，并比较大小：

$$\int_{-1}^{3} x^2 + 1 dx \qquad \int_{-1}^{3} 2x + 4 dx.$$



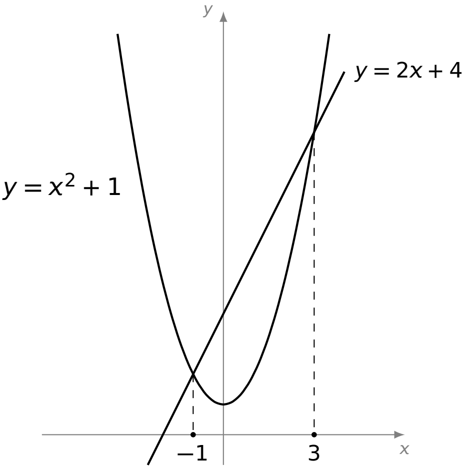
例 2 画出曲线 $y = x^2 + 1$ 与直线 $y = 2x + 4$，并比较大小：

$$\int_{-1}^{3} x^2 + 1 dx \qquad \int_{-1}^{3} 2x + 4 dx.$$



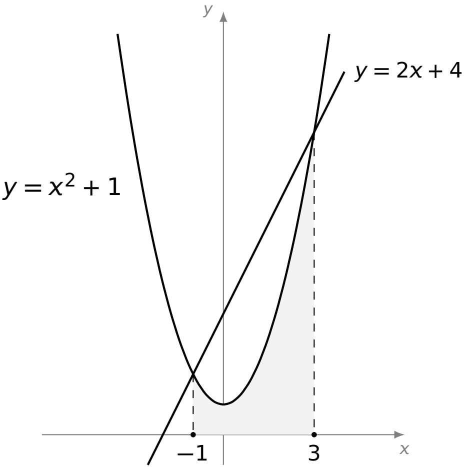
例 2 画出曲线 $y = x^2 + 1$ 与直线 $y = 2x + 4$，并比较大小：

$$\int_{-1}^{3} x^2 + 1dx \quad < \quad \int_{-1}^{3} 2x + 4dx.$$



例 2 画出曲线 $y = x^2 + 1$ 与直线 $y = 2x + 4$，并比较大小：

$$\int_{-1}^{3} x^2 + 1dx \quad < \quad \int_{-1}^{3} 2x + 4dx.$$

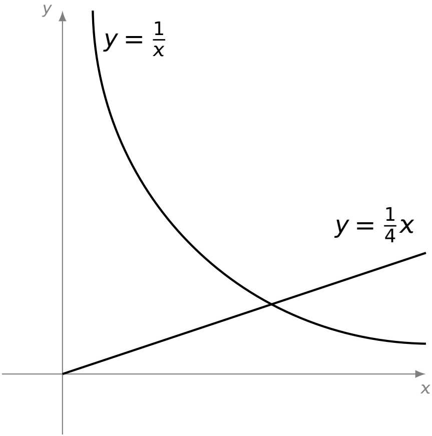


例 3 画出曲线 $y=\frac{1}{x}$ 与直线 $y=\frac{1}{4}x$，并比较大小：

$$\int_2^4 \frac{1}{x}dx \qquad \int_2^4 \frac{1}{4}x dx.$$

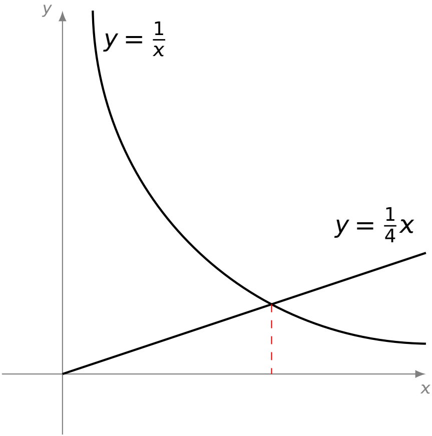
例 3 画出曲线 $y = \frac{1}{x}$ 与直线 $y = \frac{1}{4}x$，并比较大小：

$$\int_2^4 \frac{1}{x} dx \qquad \int_2^4 \frac{1}{4} x dx.$$



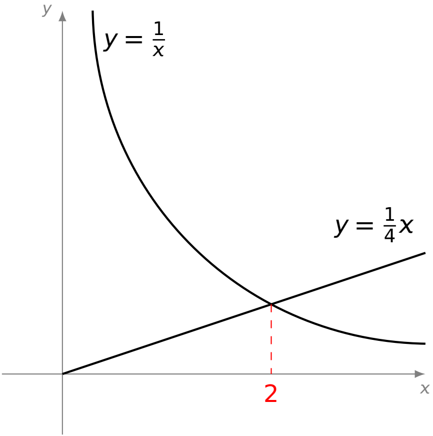
例 3 画出曲线 $y=\frac{1}{x}$ 与直线 $y=\frac{1}{4}x$，并比较大小：

$$\int_2^4 \frac{1}{x}dx \qquad \int_2^4 \frac{1}{4}xdx.$$



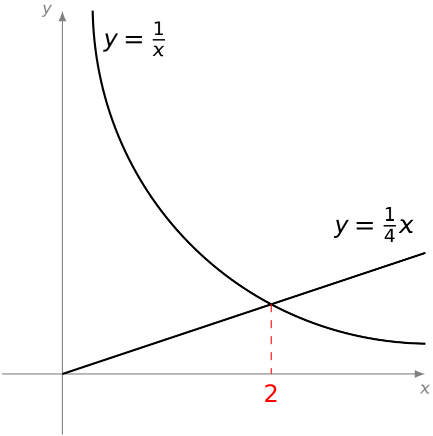
例 3 画出曲线 $y=\frac{1}{x}$ 与直线 $y=\frac{1}{4}x$，并比较大小：

$$\int_2^4 \frac{1}{x}dx \qquad \int_2^4 \frac{1}{4}x dx.$$



例 3 画出曲线 $y=\frac{1}{x}$ 与直线 $y=\frac{1}{4}x$，并比较大小：

$$\int_2^4 \frac{1}{x}dx \quad < \quad \int_2^4 \frac{1}{4}x dx.$$



例 4 比较以下积分的大小

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} e^x \sin x dx \text{ 与 } \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$$

例 4 比较以下积分的大小

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} e^x \sin x dx \text{ 与 } \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$$

解：

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} e^x \sin x dx < \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} 0 dx$$

例 4 比较以下积分的大小

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} e^x \sin x dx \text{ 与 } \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$$

解：

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} e^x \sin x dx < \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} 0 dx \qquad \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 0 dx < \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$$

例 4 比较以下积分的大小

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} e^x \sin x dx \text{ 与 } \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$$

解：

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} e^x \sin x dx < \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} 0 dx = 0 = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 0 dx < \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$$

定积分估值定理

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上最大值为 M，最小值为 m，则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

定积分估值定理

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上最大值为 M，最小值为 m，则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

证明

$$f(x) \quad \leq \quad M$$

$$f(x) \quad \geq \quad m$$

定积分估值定理

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上最大值为 M，最小值为 m，则

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

证明

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b Mdx$$

$$f(x) \quad \ge \quad m$$

定积分估值定理

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上最大值为 M，最小值为 m，则

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

证明

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b Mdx = M\int_a^b 1dx$$

$$f(x) \quad \ge \quad m$$

定积分估值定理

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上最大值为 M，最小值为 m，则

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

证明

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx = M\int_a^b 1 dx = M(b-a)$$

$$f(x) \quad \ge \quad m$$

定积分估值定理

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上最大值为 M，最小值为 m，则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

证明

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx = M\int_a^b 1dx = M(b-a)$$

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b mdx$$

定积分估值定理

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上最大值为 M，最小值为 m，则

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

证明

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b Mdx = M\int_a^b 1dx = M(b-a)$$

$$\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b mdx = m\int_a^b 1dx$$

定积分估值定理

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上最大值为 M，最小值为 m，则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

证明

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx = M\int_a^b 1dx = M(b-a)$$

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b mdx = m\int_a^b 1dx = m(b-a)$$

定积分估值定理

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上最大值为 M，最小值为 m，则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

证明

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx = M\int_a^b 1dx = M(b-a)$$

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b mdx = m\int_a^b 1dx = m(b-a)$$

定积分的中值定理 假设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则存在 $\xi \in (a, b)$，使

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

定积分估值定理

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上最大值为 M，最小值为 m，则

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

证明

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx = M\int_a^b 1dx = M(b-a)$$

$$\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b m dx = m\int_a^b 1dx = m(b-a)$$

定积分的中值定理 假设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则存在 $\xi \in (a, b)$，使

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

简证 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \in (m, M)$

定积分估值定理

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上最大值为 M，最小值为 m，则

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

证明

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx = M\int_a^b 1dx = M(b-a)$$

$$\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b m dx = m\int_a^b 1dx = m(b-a)$$

定积分的中值定理 假设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则存在 $\xi \in (a, b)$，使

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

简证 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \in (m, M) \Rightarrow$ 连续函数介值定理得证.

定积分估值定理

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上最大值为 M，最小值为 m，则

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

证明

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx = M\int_a^b 1 dx = M(b-a)$$

$$\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b m dx = m\int_a^b 1 dx = m(b-a)$$

定积分的中值定理 假设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则存在 $\xi \in (a, b)$，使

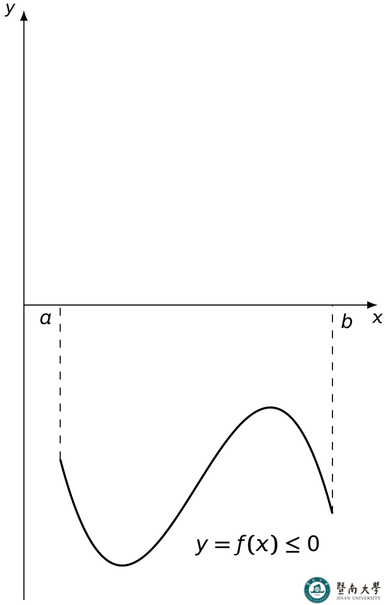
$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

简证 $\underbrace{\boxed{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}}_{}$ $\in (m, M) \Rightarrow$ 连续函数介值定理得证.

$= m$ 或 M ?

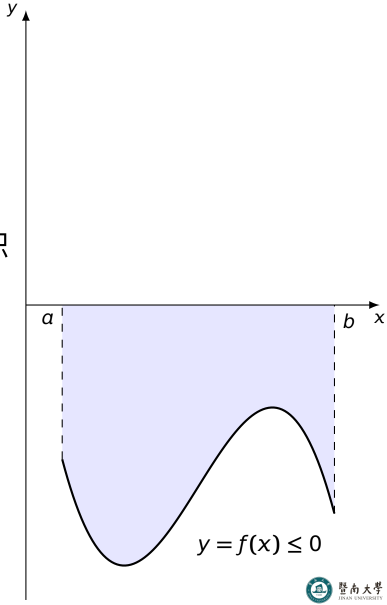
定积分几何意义 II

当 $f \le 0$ 时，$\int_a^b f(x)dx$



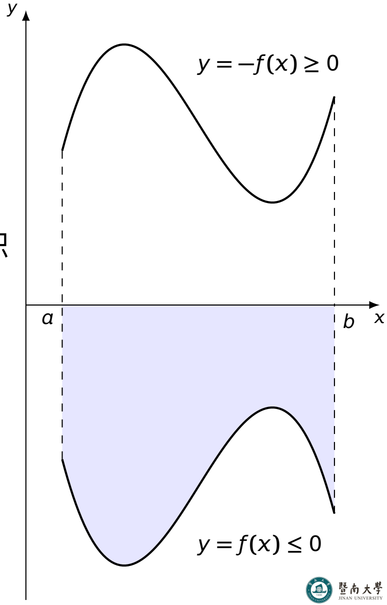
定积分几何意义 II

当 $f \le 0$ 时，$\int_a^b f(x)dx = -$ 曲边梯形面积



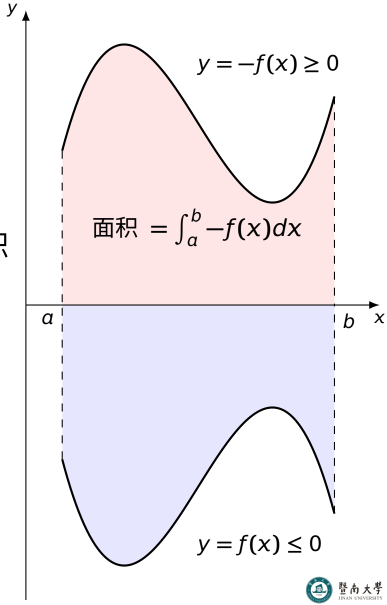
定积分几何意义 II

当 $f \le 0$ 时，$\int_a^b f(x)dx = -$ 曲边梯形面积



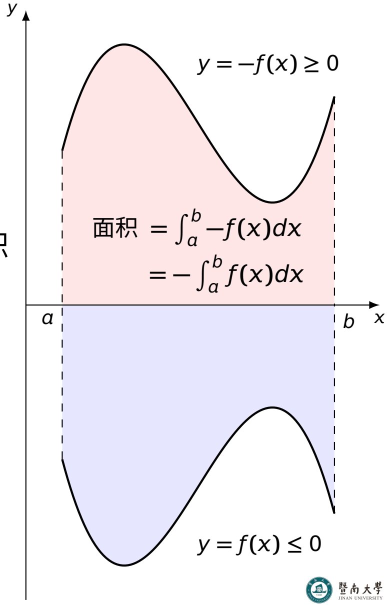
定积分几何意义 II

当 $f \le 0$ 时，$\int_a^b f(x)dx = -$ 曲边梯形面积



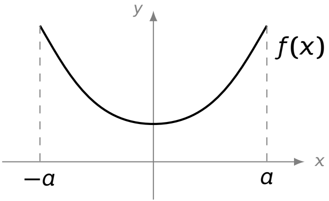
定积分几何意义 II

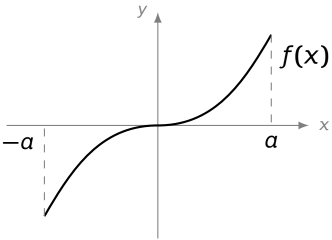
当 $f \leq 0$ 时，$\int_a^b f(x)dx = -$ 曲边梯形面积



偶函数与奇函数

设函数 $f(x)$ 定义在区间 $[-a, a]$ 上，

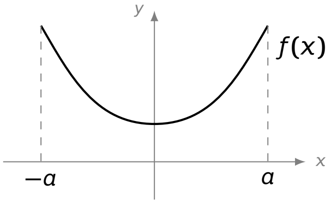


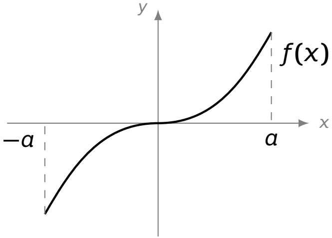


偶函数与奇函数

设函数 $f(x)$ 定义在区间 $[-a, a]$ 上，

$f(x)$ 为**偶函数**

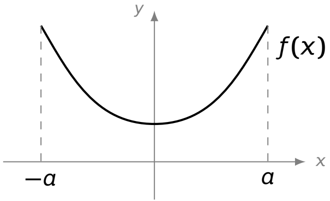




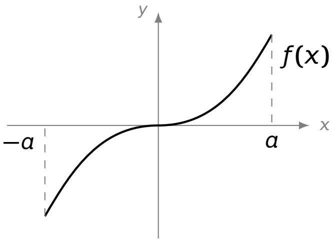
偶函数与奇函数

设函数 $f(x)$ 定义在区间 $[-a, a]$ 上，

$f(x)$ 为**偶函数**



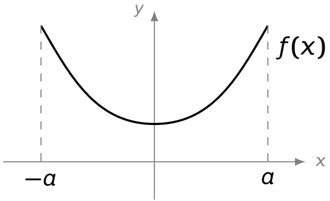
$f(x)$ 为**奇函数**



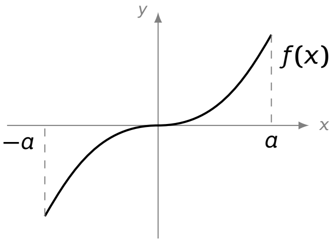
偶函数与奇函数

设函数 $f(x)$ 定义在区间 $[-a, a]$ 上，

- 若 $f(-x) = f(x)$，$x \in [-a, a]$，则 $f(x)$ 为**偶函数**



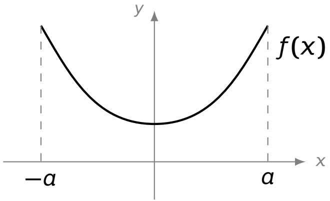
$f(x)$ 为**奇函数**



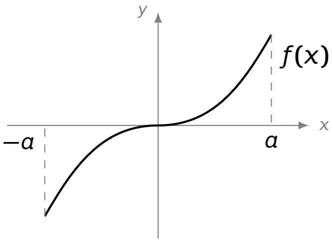
偶函数与奇函数

设函数 $f(x)$ 定义在区间 $[-a, a]$ 上，

- 若 $f(-x) = f(x)$，$x \in [-a, a]$，则 $f(x)$ 为**偶函数**



- 若 $f(-x) = -f(x)$，$x \in [-a, a]$，则 $f(x)$ 为**奇函数**



偶函数的定积分

性质 设 $f(x)$ 是 $[-a, a]$ 上的连续 **偶函数**，则

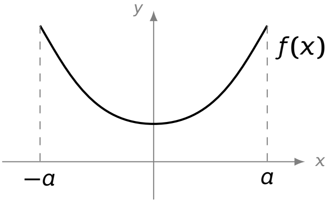
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx \overset{\text{or}}{=} 2\int_{-a}^{0} f(x)dx.$$

偶函数的定积分

性质 设 $f(x)$ 是 $[-a, a]$ 上的连续 **偶函数**，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx \overset{\text{or}}{=} 2\int_{-a}^{0} f(x)dx.$$

以“$f(x) \geq 0$”情形为例说明：



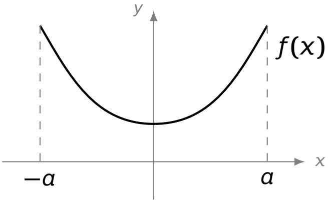
偶函数的定积分

性质 设 $f(x)$ 是 $[-a, a]$ 上的连续 **偶函数**，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx \overset{\text{or}}{=} 2\int_{-a}^{0} f(x)dx.$$

以“$f(x) \geq 0$”情形为例说明：

$$\because \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx$$



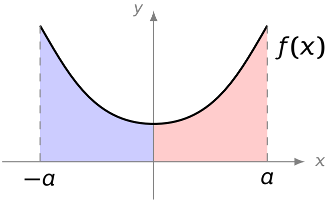
偶函数的定积分

性质 设 $f(x)$ 是 $[-a, a]$ 上的连续 **偶函数**，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx \overset{\text{or}}{=} 2\int_{-a}^{0} f(x)dx.$$

以 “$f(x) \geq 0$” 情形为例说明：

$$\because \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx$$



偶函数的定积分

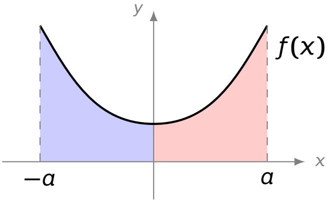
性质 设 $f(x)$ 是 $[-a, a]$ 上的连续 **偶函数**，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx \overset{\text{or}}{=} 2\int_{-a}^{0} f(x)dx.$$

以 “$f(x) \geq 0$” 情形为例说明：

$$\because \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx$$

$$\therefore \int_{-a}^{a} f(x)dx = \text{大曲边梯形面积}$$



偶函数的定积分

性质 设 $f(x)$ 是 $[-a, a]$ 上的连续 **偶函数**，则

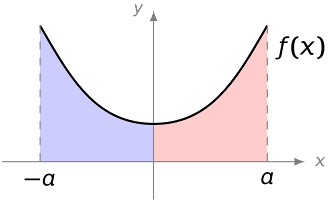
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx \overset{\text{or}}{=} 2\int_{-a}^{0} f(x)dx.$$

以 “$f(x) \geq 0$” 情形为例说明:

$$\because \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx$$

$$\therefore \int_{-a}^{a} f(x)dx = \text{大曲边梯形面积}$$

$$= 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$



偶函数的定积分

性质 设 $f(x)$ 是 $[-a, a]$ 上的连续 **偶函数**，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx \overset{\text{or}}{=} 2\int_{-a}^{0} f(x)dx.$$

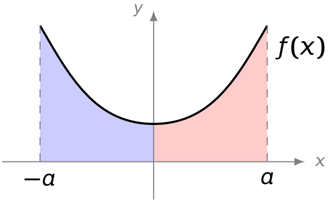
以“$f(x) \geq 0$”情形为例说明：

$$\because \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx$$

$$\therefore \int_{-a}^{a} f(x)dx = \text{大曲边梯形面积}$$

$$= 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

$$\overset{\text{or}}{=} 2\int_{-a}^{0} f(x)dx$$



奇函数的定积分

性质 设 $f(x)$ 是 $[-a, a]$ 上的连续 **奇函数**，则

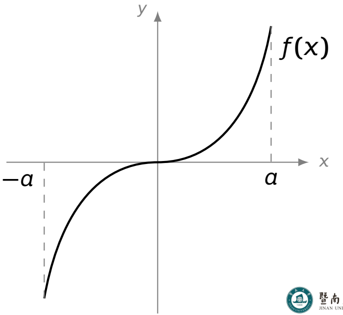
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

奇函数的定积分

性质 设 $f(x)$ 是 $[-a, a]$ 上的连续 **奇函数**，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

以图说明:



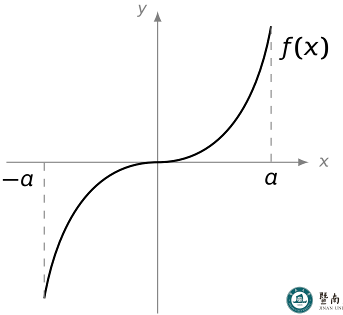
奇函数的定积分

性质 设 $f(x)$ 是 $[-a, a]$ 上的连续 **奇函数**，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

以图说明:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$



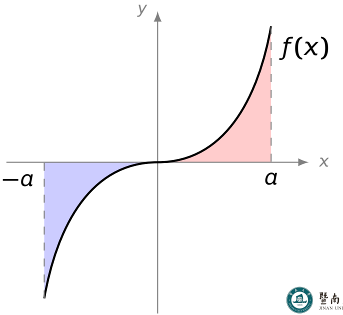
奇函数的定积分

性质 设 $f(x)$ 是 $[-a, a]$ 上的连续 **奇函数**，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

以图说明：

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$



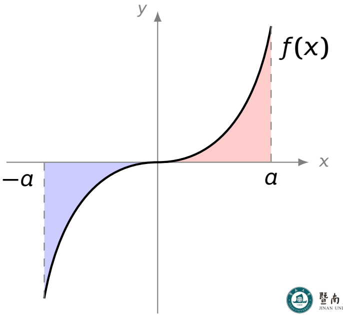
奇函数的定积分

性质 设 $f(x)$ 是 $[-a, a]$ 上的连续 **奇函数**，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

以图说明：

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)dx &= \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx \\ &= -A + A\end{aligned}$$



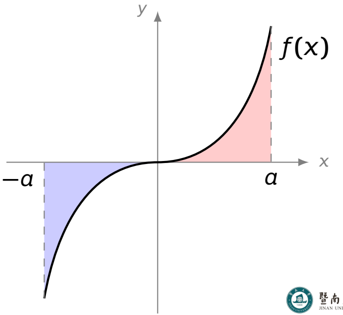
奇函数的定积分

性质 设 $f(x)$ 是 $[-a, a]$ 上的连续 **奇函数**，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

以图说明:

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)dx &= \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx \\ &= -A + A \\ &= 0\end{aligned}$$



例 1 计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^3}{\cos^2 x} dx$，$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^{2019} \ln(1+x^2) dx$

例 1 计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^3}{\cos^2 x} dx$，$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^{2019} \ln(1+x^2) dx$

解 由于被积函数是奇函数，积分区间是关于原点对称，所以积分值为零.

例 1 计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^3}{\cos^2 x} dx$，$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^{2019} \ln(1+x^2) dx$

解 由于被积函数是奇函数，积分区间是关于原点对称，所以积分值为零.

例 2 计算定积分 $\int_{-1}^{1} \left(x - \sqrt{1-x^2}\right)^2 dx$

例 1 计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^3}{\cos^2 x} dx$，$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^{2019} \ln(1+x^2) dx$

解 由于被积函数是奇函数，积分区间是关于原点对称，所以积分值为零.

例 2 计算定积分 $\int_{-1}^{1} \left(x - \sqrt{1-x^2}\right)^2 dx$

解

$$\int_{-1}^{1} \left(x - \sqrt{1-x^2}\right)^2 dx = \int_{-1}^{1} x^2 - 2x\sqrt{1-x^2} + \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx$$

例 1 计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^3}{\cos^2 x} dx$，$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^{2019} \ln(1+x^2) dx$

解 由于被积函数是奇函数，积分区间是关于原点对称，所以积分值为零.

例 2 计算定积分 $\int_{-1}^{1} \left(x-\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx$

解

$$\int_{-1}^{1} \left(x-\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx = \int_{-1}^{1} x^2 - 2x\sqrt{1-x^2} + \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx$$

$$= \int_{-1}^{1} 1 - 2x\sqrt{1-x^2} dx$$

例 1 计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^3}{\cos^2 x} dx$，$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^{2019} \ln(1+x^2) dx$

解 由于被积函数是奇函数，积分区间是关于原点对称，所以积分值为零.

例 2 计算定积分 $\int_{-1}^{1} \left(x - \sqrt{1-x^2}\right)^2 dx$

解

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \left(x - \sqrt{1-x^2}\right)^2 dx &= \int_{-1}^{1} x^2 - 2x\sqrt{1-x^2} + \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx \\
&= \int_{-1}^{1} 1 - 2x\sqrt{1-x^2} dx \\
&= \int_{-1}^{1} 1 dx - \int_{-1}^{1} 2x\sqrt{1-x^2} dx
\end{aligned}$$

例 1 计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^3}{\cos^2 x} dx$，$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^{2019} \ln(1+x^2) dx$

解 由于被积函数是奇函数，积分区间是关于原点对称，所以积分值为零.

例 2 计算定积分 $\int_{-1}^{1} \left(x-\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx$

解

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \left(x-\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx &= \int_{-1}^{1} x^2 - 2x\sqrt{1-x^2} + \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx \\
&= \int_{-1}^{1} 1 - 2x\sqrt{1-x^2} dx \\
&= \int_{-1}^{1} 1 dx - \int_{-1}^{1} 2x\sqrt{1-x^2} dx \\
&= 2 - 0
\end{aligned}$$

例 1 计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^3}{\cos^2 x} dx$，$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^{2019} \ln(1+x^2) dx$

解 由于被积函数是奇函数，积分区间是关于原点对称，所以积分值为零.

例 2 计算定积分 $\int_{-1}^{1} \left(x - \sqrt{1-x^2}\right)^2 dx$

解

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \left(x - \sqrt{1-x^2}\right)^2 dx &= \int_{-1}^{1} x^2 - 2x\sqrt{1-x^2} + \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx \\
&= \int_{-1}^{1} 1 - 2x\sqrt{1-x^2} dx \\
&= \int_{-1}^{1} 1 dx - \int_{-1}^{1} 2x\sqrt{1-x^2} dx \\
&= 2 - 0 \\
&= 2
\end{aligned}
$$