第 11 章 e：对坐标的曲面积分

数学系　梁卓滨

2019-2020 学年 II

Outline

定向曲面

定义

- 一个曲面称为 **可定向**，是指该曲面在整体上的具有两侧.

定向曲面

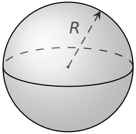
定义

- 一个曲面称为**可定向**，是指该曲面在整体上的具有两侧.

例

- 球面可定向，有内、外侧之分.

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$



定向曲面

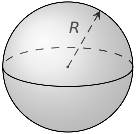
定义

- 一个曲面称为**可定向**，是指该曲面在整体上的具有两侧.

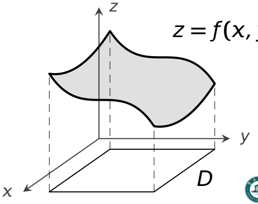
例

- 球面可定向，有内、外侧之分.

$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$



- 二元函数图形可定向，有上、下侧之分.



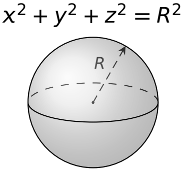
定向曲面

定义

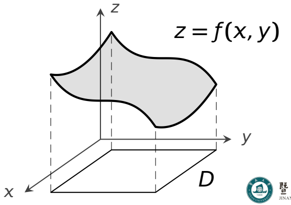
- 一个曲面称为**可定向**，是指该曲面在整体上的具有两侧.
- 指定可定向曲面的**定向**是指：指定一侧为正侧，另一侧为负侧.

例

- 球面可定向，有内、外侧之分.



- 二元函数图形可定向，有上、下侧之分.



定向曲面

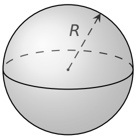
定义

- 一个曲面称为**可定向**，是指该曲面在整体上的具有两侧.
- 指定可定向曲面的**定向**是指：指定一侧为正侧，另一侧为负侧.
- 指定了定向的可定向曲面，称为**定向曲面**.

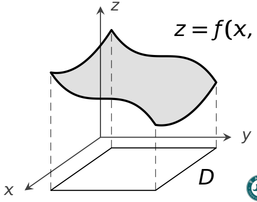
例

- 球面可定向，有内、外侧之分.

$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$



- 二元函数图形可定向，有上、下侧之分.



定向曲面

定义

- 一个曲面称为**可定向**，是指该曲面在整体上的具有两侧.
- 指定可定向曲面的**定向**是指：指定一侧为正侧，另一侧为负侧.
- 指定了定向的可定向曲面，称为**定向曲面**.

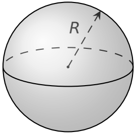
例

- 球面可定向，有内、外侧之分.

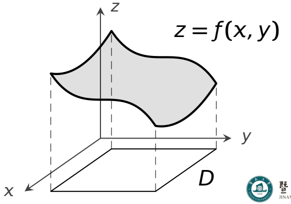
  两种定向：

  - 以外侧为正向的定向球面

$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$



- 二元函数图形可定向，有上、下侧之分.



定向曲面

定义

- 一个曲面称为**可定向**，是指该曲面在整体上的具有两侧.
- 指定可定向曲面的**定向**是指：指定一侧为正侧，另一侧为负侧.
- 指定了定向的可定向曲面，称为**定向曲面**.

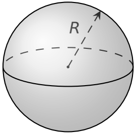
例

- 球面可定向，有内、外侧之分.

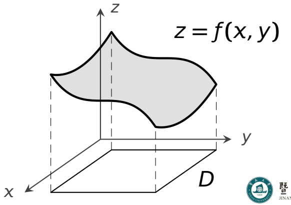
  两种定向：

  - 以外侧为正向的定向球面
  - 以内侧为正向的定向球面

$x^2+y^2+z^2=R^2$



- 二元函数图形可定向，有上、下侧之分.



定向曲面

定义

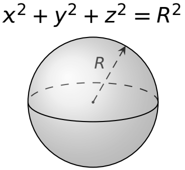
- 一个曲面称为**可定向**，是指该曲面在整体上的具有两侧.
- 指定可定向曲面的**定向**是指：指定一侧为正侧，另一侧为负侧.
- 指定了定向的可定向曲面，称为**定向曲面**.

例

- 球面可定向，有内、外侧之分.

  两种定向：

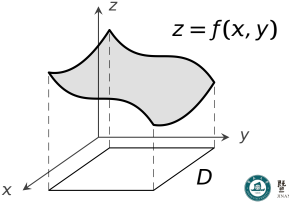
  - 以外侧为正向的定向球面
  - 以内侧为正向的定向球面



- 二元函数图形可定向，有上、下侧之分.

  两种定向：

  - 以上侧为正向的定向函数图形



定向曲面

定义

- 一个曲面称为**可定向**，是指该曲面在整体上的具有两侧.
- 指定可定向曲面的**定向**是指：指定一侧为正侧，另一侧为负侧.
- 指定了定向的可定向曲面，称为**定向曲面**.

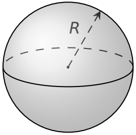
例

- 球面可定向，有内、外侧之分.

  两种定向：

  - 以外侧为正向的定向球面
  - 以内侧为正向的定向球面

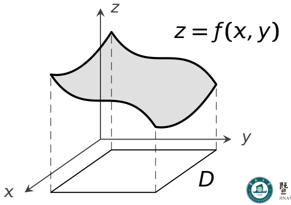
$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$



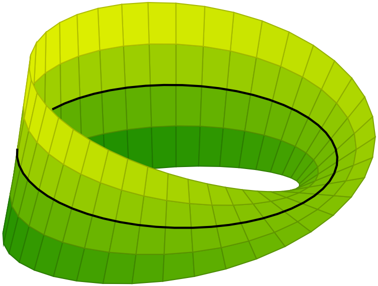
- 二元函数图形可定向，有上、下侧之分.

  两种定向：

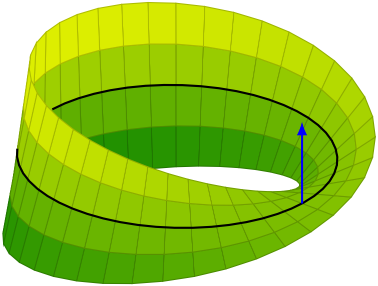
  - 以上侧为正向的定向函数图形
  - 以下侧为正向的定向函数图形



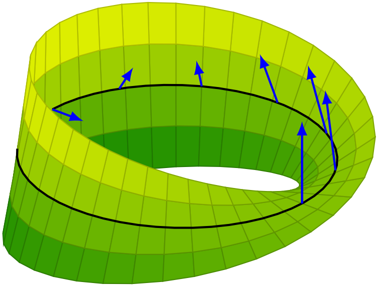
例 不可定向的曲面：莫比乌斯曲面



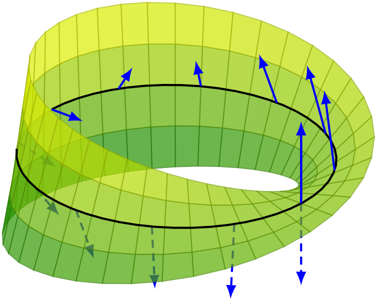
例 不可定向的曲面：莫比乌斯曲面



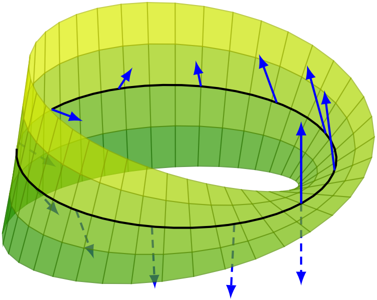
例 不可定向的曲面：莫比乌斯曲面

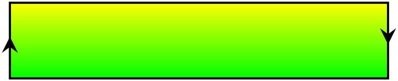


例 不可定向的曲面：莫比乌斯曲面



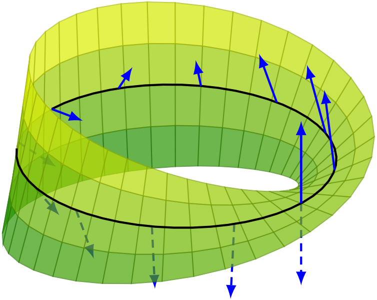
例 不可定向的曲面：莫比乌斯曲面

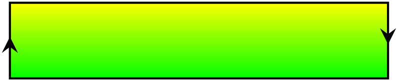




制作方法 将纸带旋转半周，再把两端粘合（如图，使得两端箭头重合）

例 不可定向的曲面：莫比乌斯曲面



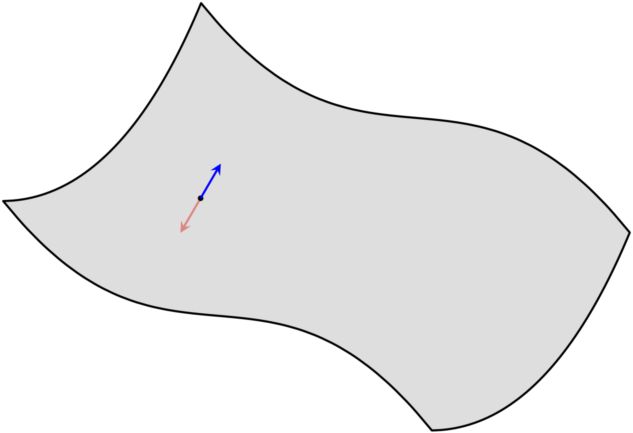


制作方法 将纸带旋转半周，再把两端粘合（如图，使得两端箭头重合）

注 如无特殊说明，下面出现的曲面都是可定向的曲面

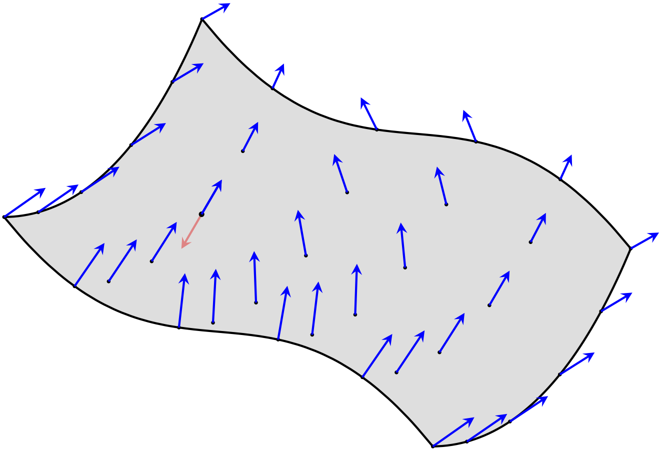
定向与单位法向量场

- 曲面上任一点，有两个单位法向量（方向相反），分别指向两侧.



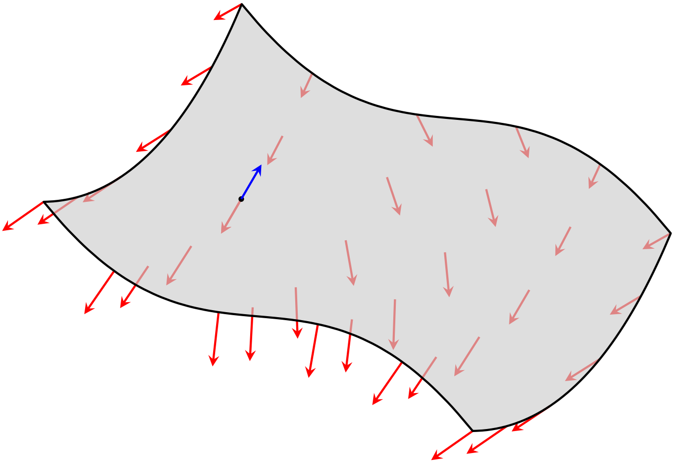
定向与单位法向量场

- 曲面上任一点，有两个单位法向量（方向相反），分别指向两侧.



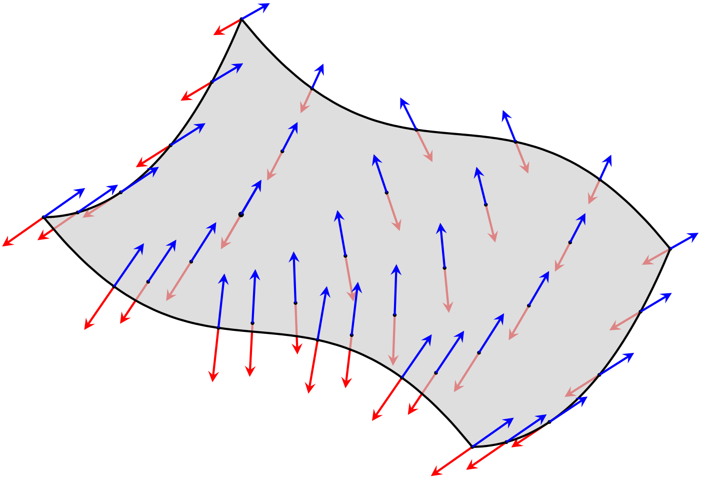
定向与单位法向量场

- 曲面上任一点，有两个单位法向量（方向相反），分别指向两侧.



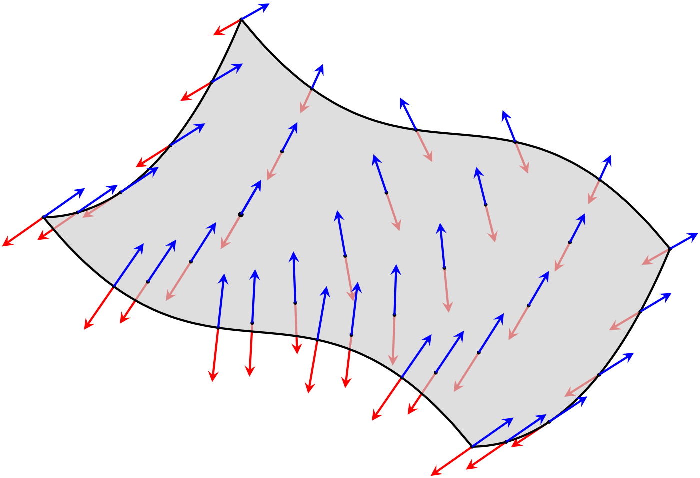
定向与单位法向量场

- 曲面上任一点，有两个单位法向量（方向相反），分别指向两侧.



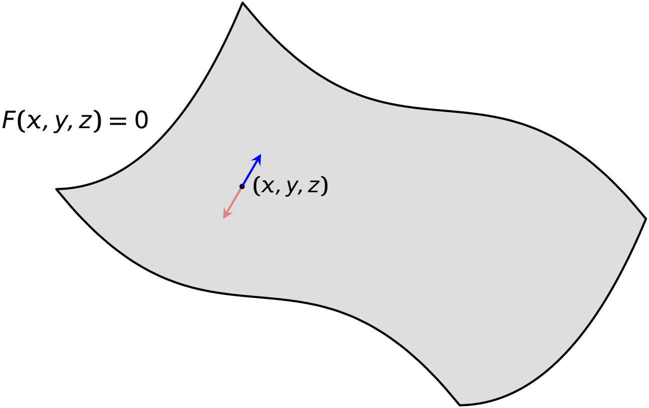
定向与单位法向量场

- 曲面上任一点，有两个单位法向量（方向相反），分别指向两侧.
- 给曲面定向，等价于指定其中一个单位法向量场 $\overrightarrow{n}(x, y, z)$.



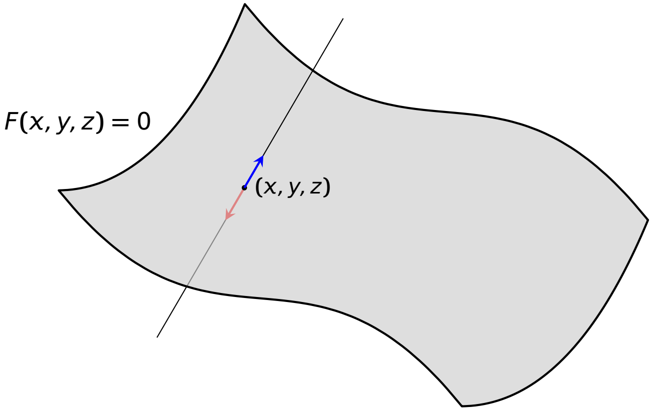
单位法向量场的计算

- 设曲面方程为 $F(x, y, z) = 0$，则两个单位法向量场为：



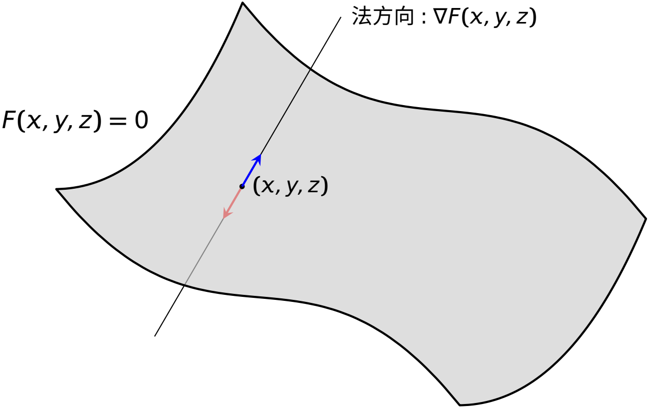
单位法向量场的计算

- 设曲面方程为 $F(x, y, z) = 0$，则两个单位法向量场为：



单位法向量场的计算

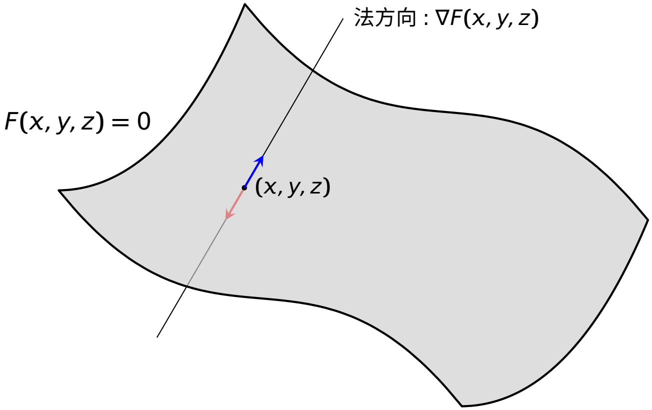
- 设曲面方程为 $F(x, y, z) = 0$，则两个单位法向量场为：



单位法向量场的计算

- 设曲面方程为 $F(x, y, z) = 0$，则两个单位法向量场为：

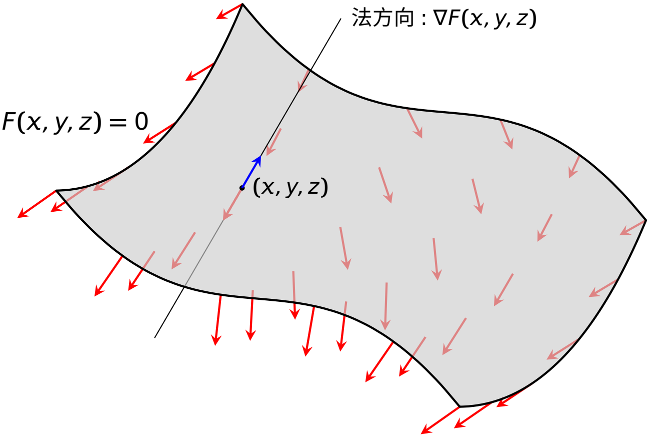
$$\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F \quad \text{与} \quad -\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F.$$



单位法向量场的计算

- 设曲面方程为 $F(x, y, z) = 0$，则两个单位法向量场为：

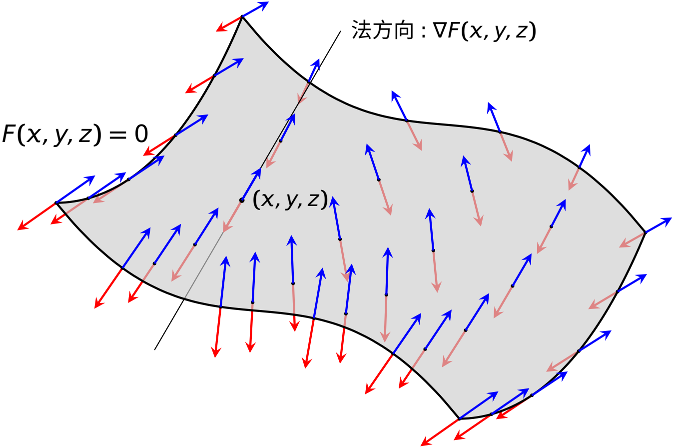
$$\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F \quad 与 \quad -\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F.$$



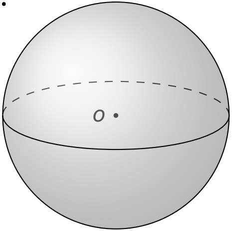
单位法向量场的计算

- 设曲面方程为 $F(x, y, z) = 0$，则两个单位法向量场为：

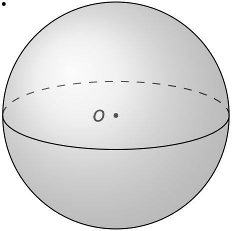
$$\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F \quad 与 \quad -\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F.$$



例 1 写出球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的两个单位法向量场，并指出哪一个指向外侧，哪个指向内侧?

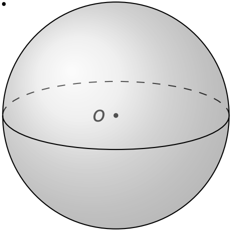


例 1 写出球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的两个单位法向量场，并指出哪一个指向外侧，哪个指向内侧?



解 令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-R^2$，则球面方程改写为 $F=0$.

例 1 写出球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的两个单位法向量场，并指出哪一个指向外侧，哪个指向内侧?



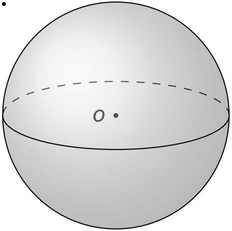
解 令 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$，则球面方程改写为 $F = 0$. 计算

$$\nabla F = \qquad\qquad |\nabla F| =$$

所以两个单位法向量场为

$$\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F = \qquad\qquad -\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F =$$

例 1 写出球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的两个单位法向量场，并指出哪一个指向外侧，哪个指向内侧?



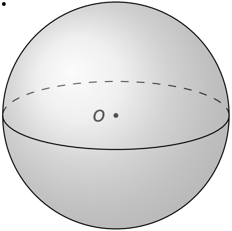
解 令 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$，则球面方程改写为 $F = 0$. 计算

$$\nabla F = (2x, 2y, 2z), \qquad |\nabla F| =$$

所以两个单位法向量场为

$$\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F = \qquad\qquad -\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F =$$

例 1 写出球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的两个单位法向量场，并指出哪一个指向外侧，哪个指向内侧？



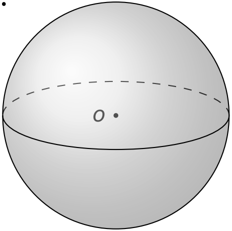
解 令 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$，则球面方程改写为 $F = 0$. 计算

$$\nabla F = (2x, 2y, 2z), \qquad |\nabla F| = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

所以两个单位法向量场为

$$\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F = \qquad\qquad -\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F =$$

例 1 写出球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的两个单位法向量场，并指出哪一个指向外侧，哪个指向内侧?



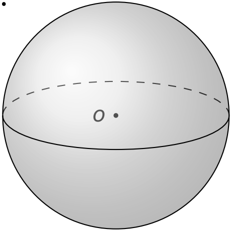
解 令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-R^2$，则球面方程改写为 $F=0$. 计算

$$\nabla F=(2x,\,2y,\,2z),\qquad |\nabla F|=2\sqrt{x^2+y^2+z^2}=2R$$

所以两个单位法向量场为

$$\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F= \qquad\qquad -\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F=$$

例 1 写出球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的两个单位法向量场，并指出哪一个指向外侧，哪个指向内侧?



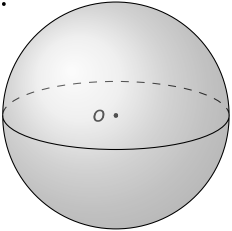
解 令 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$，则球面方程改写为 $F = 0$. 计算

$$\nabla F = (2x, 2y, 2z), \qquad |\nabla F| = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2R$$

所以两个单位法向量场为

$$\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F = \frac{1}{R}(x, y, z), \qquad -\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F =$$

例 1 写出球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的两个单位法向量场，并指出哪一个指向外侧，哪个指向内侧?



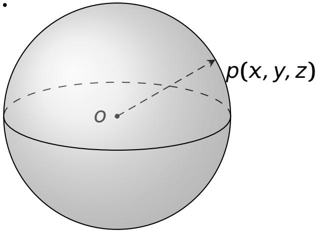
解 令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-R^2$，则球面方程改写为 $F=0$. 计算

$$\nabla F=(2x,\ 2y,\ 2z),\qquad |\nabla F|=2\sqrt{x^2+y^2+z^2}=2R$$

所以两个单位法向量场为

$$\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F=\frac{1}{R}(x,y,z),\qquad -\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F=-\frac{1}{R}(x,y,z)$$

例 1 写出球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的两个单位法向量场，并指出哪一个指向外侧，哪个指向内侧?



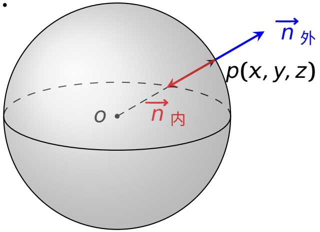
解 令 $F(x,\, y,\, z)=x^2+y^2+z^2-R^2$，则球面方程改写为 $F=0$. 计算

$$\nabla F=(2x,\, 2y,\, 2z), \qquad |\nabla F|=2\sqrt{x^2+y^2+z^2}=2R$$

所以两个单位法向量场为

$$\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F=\frac{1}{R}(x,\, y,\, z), \qquad -\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F=-\frac{1}{R}(x,\, y,\, z)$$

例 1 写出球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的两个单位法向量场，并指出哪一个指向外侧，哪个指向内侧?



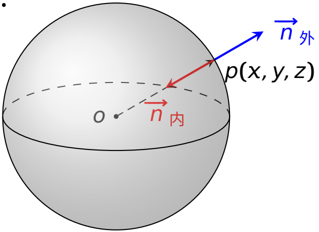
解 令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-R^2$，则球面方程改写为 $F=0$. 计算

$$\nabla F=(2x,\,2y,\,2z),\qquad |\nabla F|=2\sqrt{x^2+y^2+z^2}=2R$$

所以两个单位法向量场为

$$\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F=\frac{1}{R}(x,\,y,\,z),\qquad -\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F=-\frac{1}{R}(x,\,y,\,z)$$

例 1 写出球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的两个单位法向量场，并指出哪一个指向外侧，哪个指向内侧?



$\vec{n}_{外}$ 与 $\vec{op}$ 同向

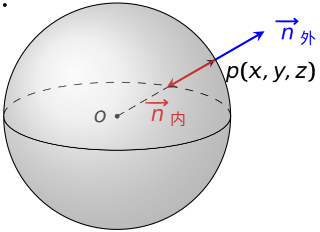
解 令 $F(x, y, z)=x^2+y^2+z^2-R^2$，则球面方程改写为 $F=0$. 计算

$$\nabla F=(2x,\ 2y,\ 2z),\qquad |\nabla F|=2\sqrt{x^2+y^2+z^2}=2R$$

所以两个单位法向量场为

$$\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F=\frac{1}{R}(x,\ y,\ z),\qquad -\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F=-\frac{1}{R}(x,\ y,\ z)$$

例 1 写出球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的两个单位法向量场，并指出哪一个指向外侧，哪个指向内侧?



$\vec{n}_{外}$ 与 $\vec{op}$ 同向

$\vec{n}_{内}$ 与 $\vec{op}$ 反向

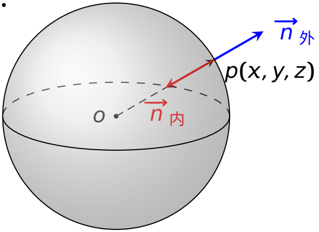
解 令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-R^2$，则球面方程改写为 $F=0$. 计算

$$\nabla F=(2x,2y,2z),\qquad |\nabla F|=2\sqrt{x^2+y^2+z^2}=2R$$

所以两个单位法向量场为

$$\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F=\frac{1}{R}(x,y,z),\qquad -\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F=-\frac{1}{R}(x,y,z)$$

例 1 写出球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的两个单位法向量场，并指出哪一个指向外侧，哪个指向内侧?



$\vec{n}_{外}$ 与 $\vec{op}$ 同向

$\vec{n}_{内}$ 与 $\vec{op}$ 反向

$\vec{op}=(x, y, z)$

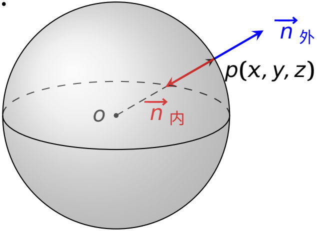
解 令 $F(x, y, z)=x^2+y^2+z^2-R^2$，则球面方程改写为 $F=0$. 计算

$$\nabla F=(2x,\ 2y,\ 2z), \qquad |\nabla F|=2\sqrt{x^2+y^2+z^2}=2R$$

所以两个单位法向量场为

$$\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F=\frac{1}{R}(x,\ y,\ z), \qquad -\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F=-\frac{1}{R}(x,\ y,\ z)$$

例 1 写出球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的两个单位法向量场，并指出哪一个指向外侧，哪个指向内侧?



$\vec{n}_{外}$ 与 $\vec{op}$ 同向

$\vec{n}_{内}$ 与 $\vec{op}$ 反向

$\vec{op}=(x,y,z)$

解 令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-R^2$，则球面方程改写为 $F=0$. 计算

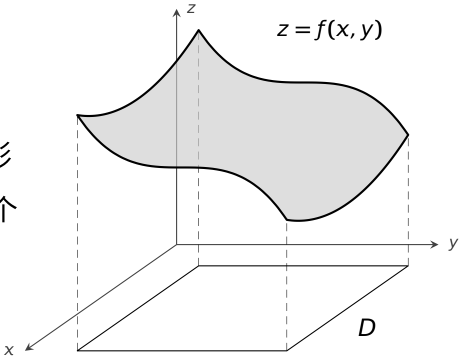
$$\nabla F=(2x,\ 2y,\ 2z),\qquad |\nabla F|=2\sqrt{x^2+y^2+z^2}=2R$$

所以两个单位法向量场为

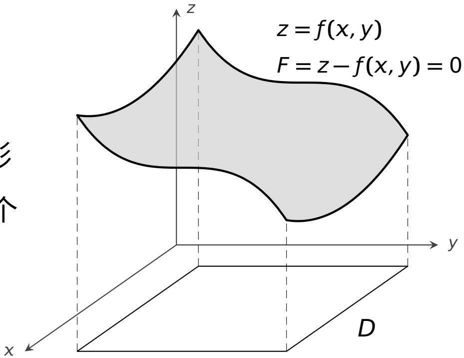
$$\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F=\frac{1}{R}(x,\ y,\ z),\qquad -\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F=-\frac{1}{R}(x,\ y,\ z)$$

前一个指向外侧，后一个指向内侧.

例 2 写出二元函数 $z = f(x, y)$ 图形的两个单位法向量场，并指出哪一个指向上侧，哪个指向下侧?

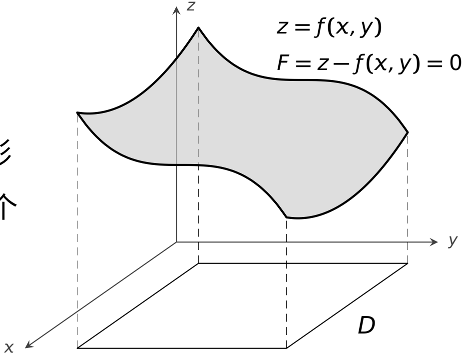


例 2 写出二元函数 $z = f(x, y)$ 图形的两个单位法向量场，并指出哪一个指向上侧，哪个指向下侧?



解 令 $F(x, y, z) = z - f(x, y)$，则该图形方程改写为 $F = 0$.

例 2 写出二元函数 $z=f(x,y)$ 图形的两个单位法向量场，并指出哪一个指向上侧，哪个指向下侧?



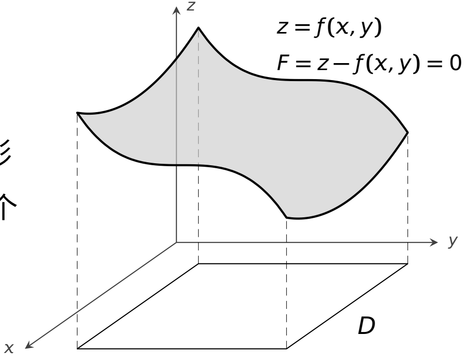
解 令 $F(x,y,z)=z-f(x,y)$，则该图形方程改写为 $F=0$. 计算

$\nabla F=$ $\qquad$ $|\nabla F|=$

所以两个单位法向量场为

$\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F=$ $\qquad$ $-\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F=$

例 2 写出二元函数 $z = f(x, y)$ 图形的两个单位法向量场，并指出哪一个指向上侧，哪个指向下侧?



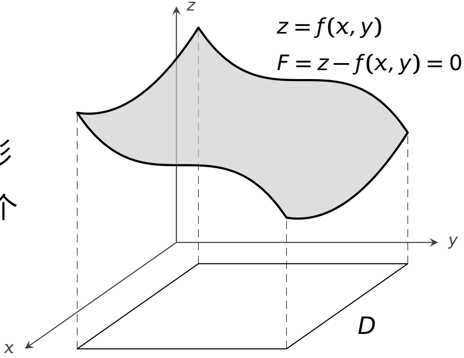
解 令 $F(x, y, z) = z - f(x, y)$，则该图形方程改写为 $F = 0$. 计算

$$\nabla F = (-f_x, -f_y, 1), \qquad |\nabla F| =$$

所以两个单位法向量场为

$$\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F = \qquad\qquad -\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F =$$

例 2 写出二元函数 $z = f(x, y)$ 图形的两个单位法向量场，并指出哪一个指向上侧，哪个指向下侧?



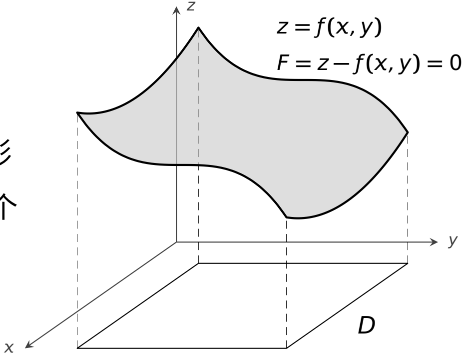
解 令 $F(x, y, z) = z - f(x, y)$，则该图形方程改写为 $F = 0$. 计算

$$\nabla F = (-f_x, -f_y, 1), \qquad |\nabla F| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$$

所以两个单位法向量场为

$$\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F = \qquad\qquad -\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F =$$

例 2 写出二元函数 $z=f(x,y)$ 图形的两个单位法向量场，并指出哪一个指向上侧，哪个指向下侧?



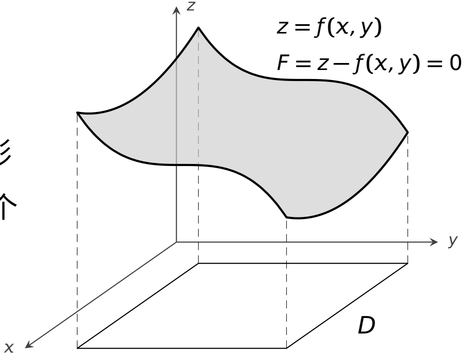
解 令 $F(x,y,z)=z-f(x,y)$，则该图形方程改写为 $F=0$. 计算

$$\nabla F=(-f_x,-f_y,1),\qquad |\nabla F|=\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}$$

所以两个单位法向量场为

$$\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}(-f_x,-f_y,1),\qquad -\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F=$$

例 2 写出二元函数 $z = f(x, y)$ 图形的两个单位法向量场，并指出哪一个指向上侧，哪个指向下侧？



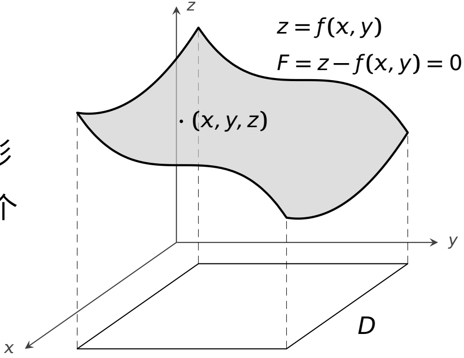
解 令 $F(x, y, z) = z - f(x, y)$，则该图形方程改写为 $F = 0$. 计算

$$\nabla F = (-f_x, -f_y, 1), \qquad |\nabla F| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$$

所以两个单位法向量场为

$$\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}(-f_x, -f_y, 1), \quad -\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}(f_x, f_y, -1)$$

例 2 写出二元函数 $z = f(x, y)$ 图形的两个单位法向量场，并指出哪一个指向上侧，哪个指向下侧?



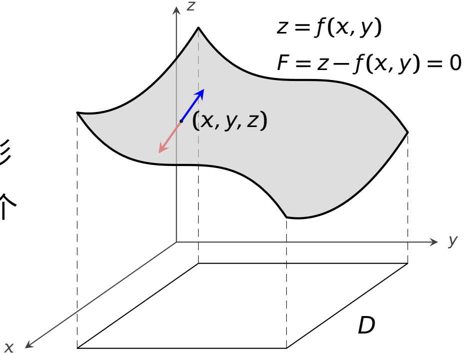
解 令 $F(x, y, z) = z - f(x, y)$，则该图形方程改写为 $F = 0$. 计算

$$\nabla F = (-f_x, -f_y, 1), \qquad |\nabla F| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$$

所以两个单位法向量场为

$$\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}(-f_x, -f_y, 1), \quad -\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}(f_x, f_y, -1)$$

例 2 写出二元函数 $z = f(x, y)$ 图形的两个单位法向量场，并指出哪一个指向上侧，哪个指向下侧?



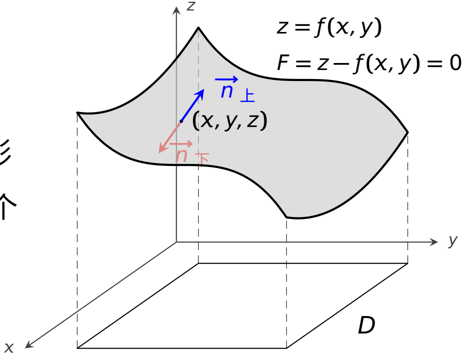
解 令 $F(x, y, z) = z - f(x, y)$，则该图形方程改写为 $F = 0$. 计算

$$\nabla F = (-f_x, -f_y, 1), \qquad |\nabla F| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$$

所以两个单位法向量场为

$$\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}(-f_x, -f_y, 1), \qquad -\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}(f_x, f_y, -1)$$

例 2 写出二元函数 $z = f(x, y)$ 图形的两个单位法向量场，并指出哪一个指向上侧，哪个指向下侧?



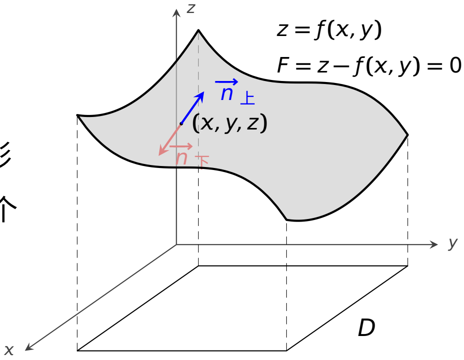
解 令 $F(x, y, z) = z - f(x, y)$，则该图形方程改写为 $F = 0$. 计算

$$\nabla F = (-f_x, -f_y, 1), \qquad |\nabla F| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$$

所以两个单位法向量场为

$$\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}(-f_x, -f_y, 1), \qquad -\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}(f_x, f_y, -1)$$

例 2 写出二元函数 $z=f(x,y)$ 图形的两个单位法向量场，并指出哪一个指向上侧，哪个指向下侧?



解 令 $F(x,y,z)=z-f(x,y)$，则该图形方程改写为 $F=0$. 计算

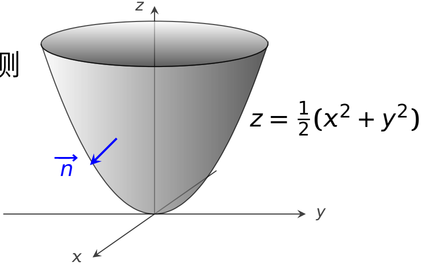
$$\nabla F=(-f_x,-f_y,1),\qquad |\nabla F|=\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}$$

所以两个单位法向量场为

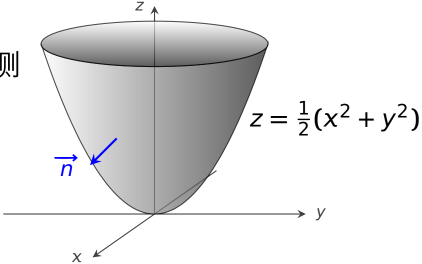
$$\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}(-f_x,-f_y,1),\qquad -\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}(f_x,f_y,-1)$$

前一个指向上侧，后一个指向下侧.

例 3 求抛物面 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 指向外侧的单位法向量场.



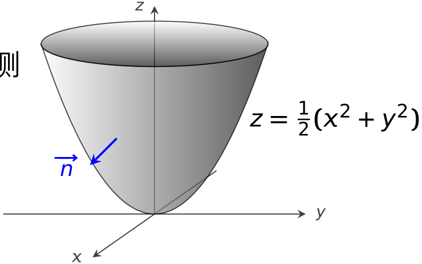
例 3 求抛物面 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 指向外侧的单位法向量场.



解 该单位法向量场应取为

$$\overrightarrow{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}(z_x, z_y, -1) =$$

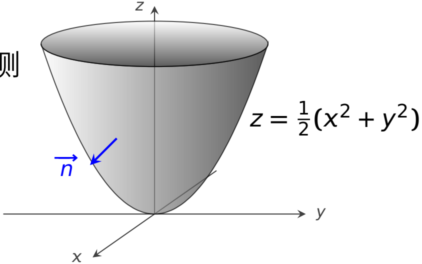
例 3 求抛物面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 指向外侧的单位法向量场.



解 该单位法向量场应取为

$$\overrightarrow{n}=\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}(z_x,z_y,-1)= \qquad (x,y,-1)$$

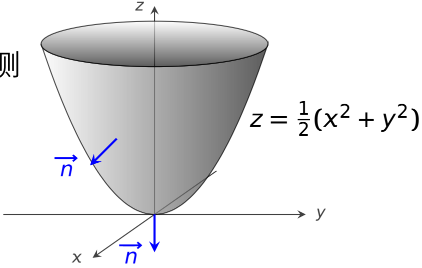
例 3 求抛物面 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 指向外侧的单位法向量场.



解 该单位法向量场应取为

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}(z_x, z_y, -1) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}(x, y, -1)$$

例 3 求抛物面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 指向外侧的单位法向量场.



解 该单位法向量场应取为

$$\overrightarrow{n}=\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}(z_x,z_y,-1)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}(x,y,-1)$$

空间中的向量场

设 $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ 是三元函数，则

$$V = (P, Q, R)$$

构成空间 3 维向量场，

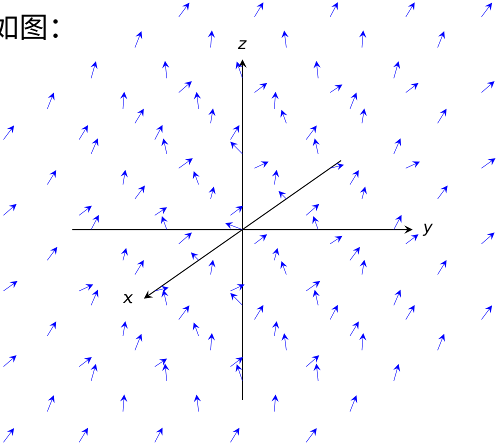
空间中的向量场

设 $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ 是三元函数，则

$$V=(P,\ Q,\ R)$$

构成空间 3 维向量场，如图：

$$V=(P,Q,R)$$

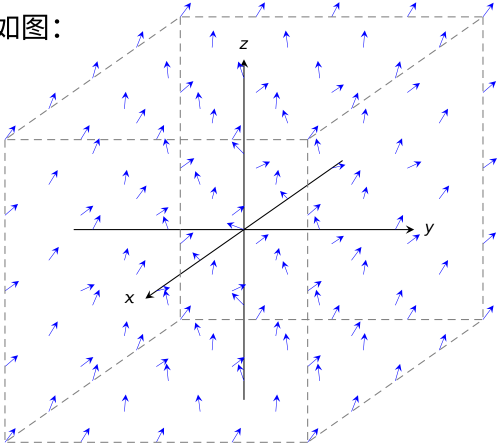


空间中的向量场

设 $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ 是三元函数，则

$$V = (P,\ Q,\ R)$$

构成空间 3 维向量场，如图：



$$V = (P, Q, R)$$

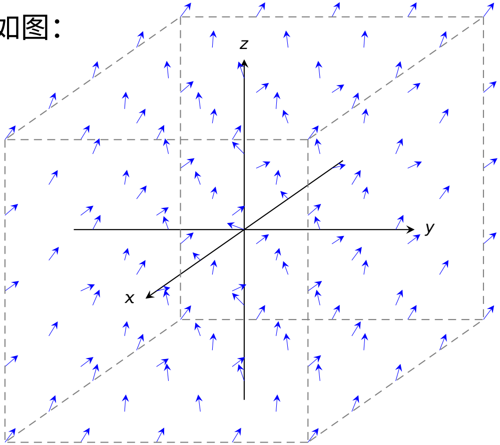
空间中的向量场

设 $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ 是三元函数，则

$$V = (P,\ Q,\ R)$$

构成空间 3 维向量场，如图：

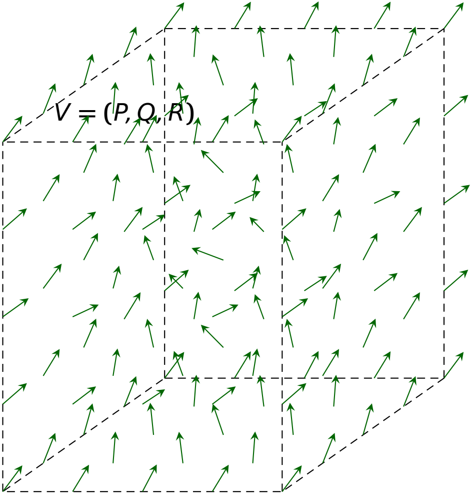
$V = (P, Q, R)$



物理应用：向量场 $V = (P,\ Q,\ R)$ 可表示流体在任一点处的速度

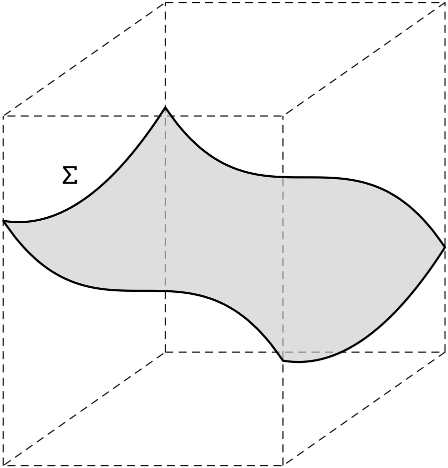
物理应用 流体 $V=(P,Q,R)$ 在单位时间内流过曲面 Σ 一侧（单位法向量 $\overrightarrow{n}$ 所指向的一侧）的流量是：

$$\Phi =$$



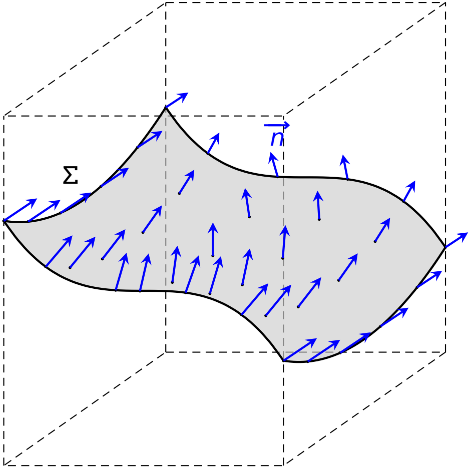
物理应用 流体 $V = (P, Q, R)$ 在单位时间内流过曲面 Σ 一侧（单位法向量 $\overrightarrow{n}$ 所指向的一侧）的流量是：

$$\Phi =$$



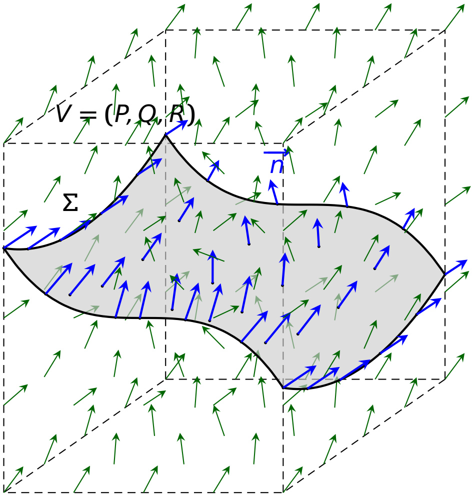
物理应用 流体 $V=(P,Q,R)$ 在单位时间内流过曲面 Σ 一侧（单位法向量 $\overrightarrow{n}$ 所指向的一侧）的流量是：

$$\Phi =$$



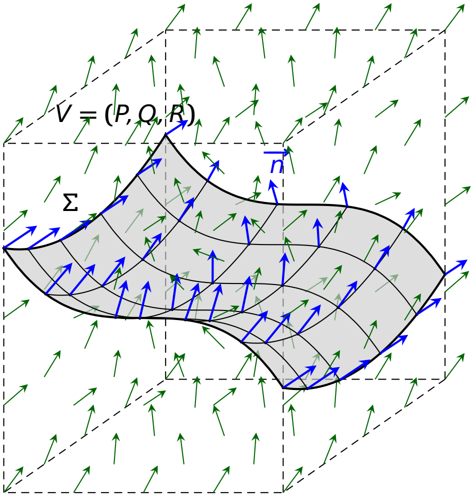
物理应用 流体 $V = (P, Q, R)$ 在单位时间内流过曲面 Σ 一侧（单位法向量 $\overrightarrow{n}$ 所指向的一侧）的流量是：

$$\Phi =$$



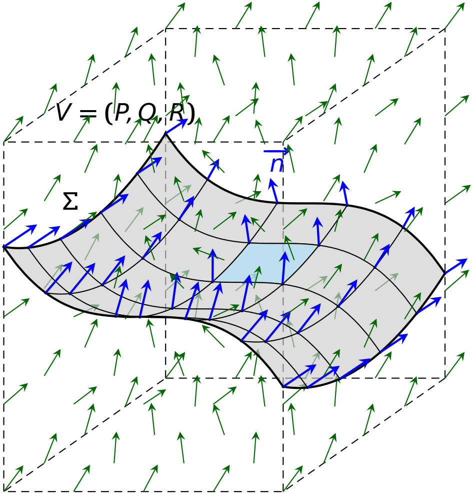
物理应用 流体 $V=(P,Q,R)$ 在单位时间内流过曲面 Σ 一侧（单位法向量 $\overrightarrow{n}$ 所指向的一侧）的流量是：

$$\Phi =$$



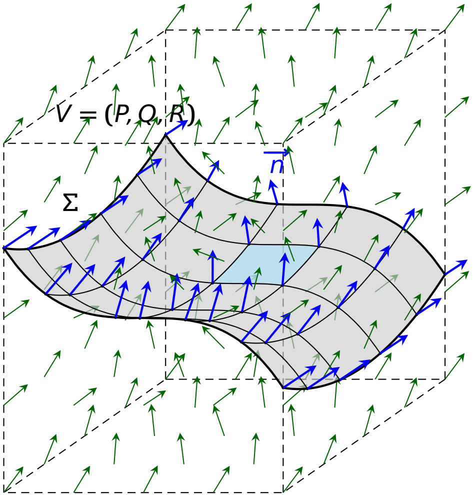
物理应用 流体 $V=(P,Q,R)$ 在单位时间内流过曲面 Σ 一侧（单位法向量 $\overrightarrow{n}$ 所指向的一侧）的流量是：

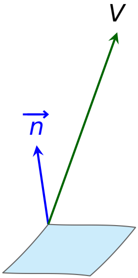
$$\Phi =$$



物理应用 流体 $V = (P, Q, R)$ 在单位时间内流过曲面 Σ 一侧（单位法向量 $\overrightarrow{n}$ 所指向的一侧）的流量是：

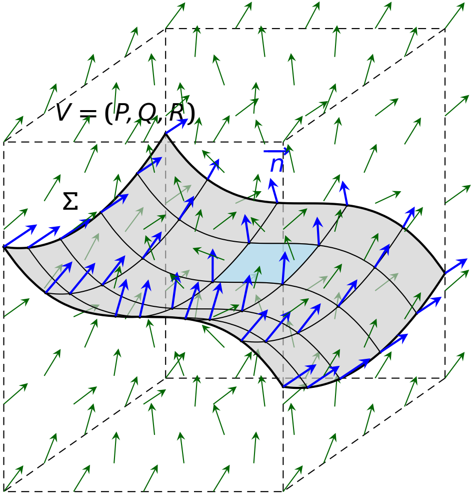
$$\Phi =$$

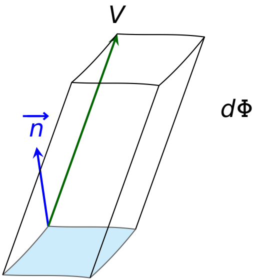




物理应用 流体 $V = (P, Q, R)$ 在单位时间内流过曲面 Σ 一侧（单位法向量 $\overrightarrow{n}$ 所指向的一侧）的流量是：

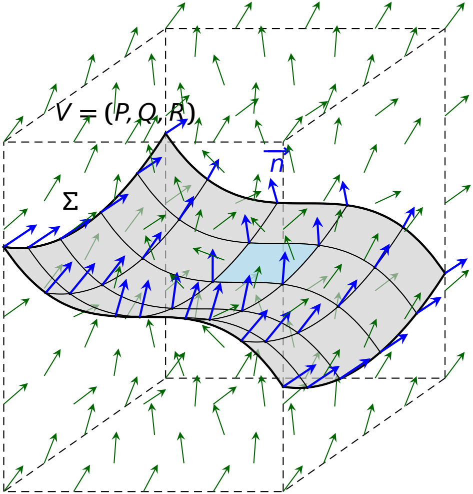
$$\Phi =$$

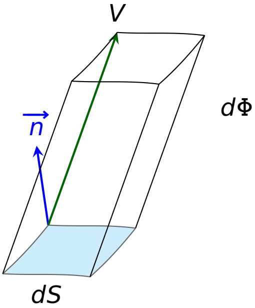




物理应用 流体 $V = (P, Q, R)$ 在单位时间内流过曲面 Σ 一侧（单位法向量 $\overrightarrow{n}$ 所指向的一侧）的流量是：

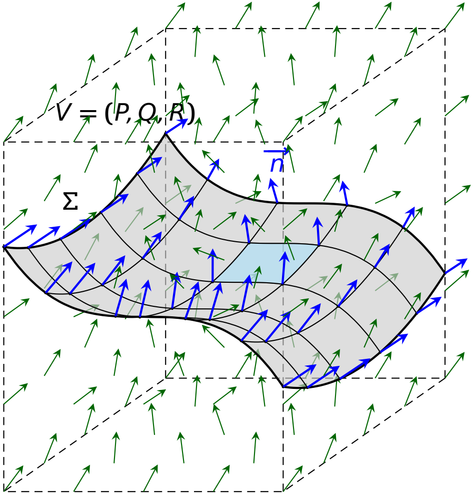
$$\Phi =$$

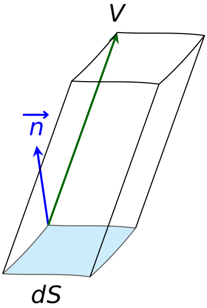




物理应用 流体 $V=(P,Q,R)$ 在单位时间内流过曲面 Σ 一侧（单位法向量 $\overrightarrow{n}$ 所指向的一侧）的流量是:

$$\Phi =$$

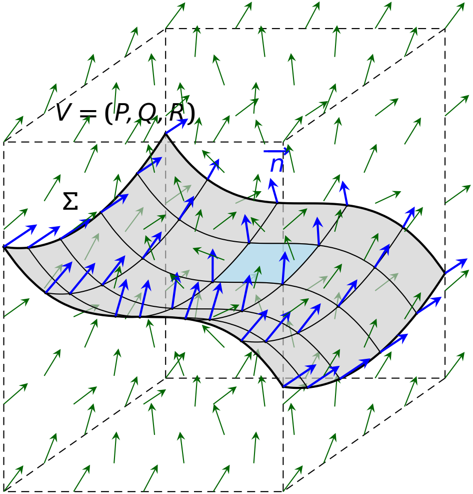


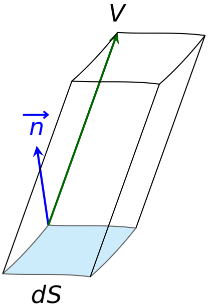


$d\Phi =$ 高 $\times\, dS$

物理应用 流体 $V=(P,Q,R)$ 在单位时间内流过曲面 Σ 一侧（单位法向量 $\overrightarrow{n}$ 所指向的一侧）的流量是：

$$\Phi =$$



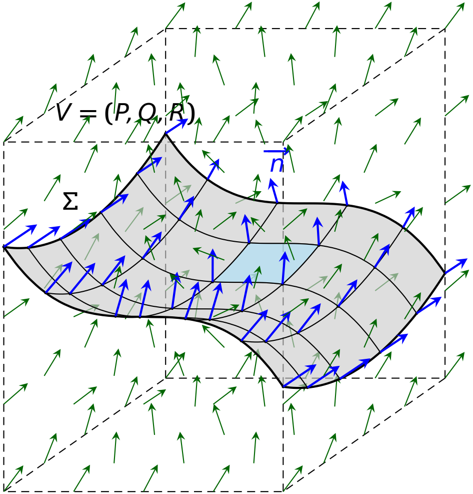


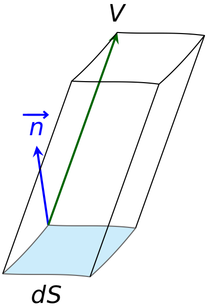
$d\Phi =$ 高 $\times\, dS$

$V\cdot\overrightarrow{n}$

物理应用 流体 $V = (P, Q, R)$ 在单位时间内流过曲面 Σ 一侧（单位法向量 $\vec{n}$ 所指向的一侧）的流量是：

$$\Phi =$$

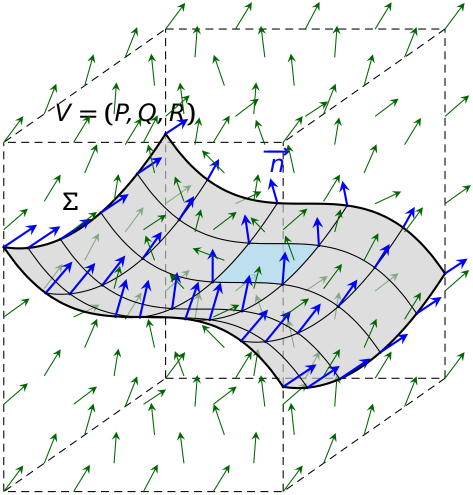


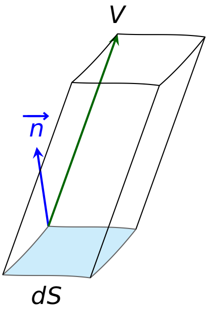


$$d\Phi = 高 \times dS$$
$$= V \cdot \vec{n}\, dS$$

物理应用 流体 $V=(P,Q,R)$ 在单位时间内流过曲面 Σ 一侧（单位法向量 $\overrightarrow{n}$ 所指向的一侧）的流量是:

$$\Phi=\iint_{\Sigma} V\cdot\overrightarrow{n}\,dS$$





$$d\Phi = 高\times dS$$
$$= V\cdot\overrightarrow{n}\,dS$$

向量场在定向曲面的曲面积分

定义 假设

- $V=(P,Q,R)$ 是空间某区域上的向量场；
- Σ 是定向曲面，$\vec{n}$ 是 Σ 上指定的单位法向量场；

则称

向量场在定向曲面的曲面积分

定义 假设

- $V = (P, Q, R)$ 是空间某区域上的向量场；
- Σ 是定向曲面，$\overrightarrow{n}$ 是 Σ 上指定的单位法向量场；

则称

$$\iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n}\, dS$$

为**向量场 V 在定向曲面 Σ 上的曲面积分**.

向量场在定向曲面的曲面积分

定义 假设

- $V = (P, Q, R)$ 是空间某区域上的向量场;
- Σ 是定向曲面，$\vec{n}$ 是 Σ 上指定的单位法向量场;

则称

$$\iint_{\Sigma} V \cdot \vec{n}\, dS$$

为**向量场** V **在定向曲面** Σ **上的曲面积分**. 令 $d\vec{S} = \vec{n}\, dS$,

向量场在定向曲面的曲面积分

定义 假设

- $V = (P, Q, R)$ 是空间某区域上的向量场;
- Σ 是定向曲面，$\vec{n}$ 是 Σ 上指定的单位法向量场;

则称

$$\iint_{\Sigma} V \cdot \vec{n}\, dS$$

为**向量场 V 在定向曲面 Σ 上的曲面积分**.令 $d\vec{S} = \vec{n}\, dS$，则记作

$$\iint_{\Sigma} V \cdot d\vec{S}$$

向量场在定向曲面的曲面积分

定义 假设

- $V=(P,Q,R)$ 是空间某区域上的向量场；
- Σ 是定向曲面，$\vec{n}$ 是 Σ 上指定的单位法向量场；

则称

$$\iint_{\Sigma} V\cdot\vec{n}\,dS$$

为**向量场 V 在定向曲面 Σ 上的曲面积分**.令 $d\vec{S}=\vec{n}\,dS$，则记作

$$\iint_{\Sigma} V\cdot d\vec{S}$$

也记作

$$\iint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

向量场在定向曲面的曲面积分

定义 假设

- $V = (P, Q, R)$ 是空间某区域上的向量场；
- Σ 是定向曲面，$\vec{n}$ 是 Σ 上指定的单位法向量场；

则称

$$\iint_{\Sigma} V \cdot \vec{n}\, dS$$

为**向量场 V 在定向曲面 Σ 上的曲面积分**. 令 $d\vec{S} = \vec{n}\, dS$，则记作

$$\iint_{\Sigma} V \cdot d\vec{S}$$

也记作

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

（此时也称为**对坐标的曲面积分**，或**第二类曲面积分**）

性质 设 Σ 是定向曲面，$-\Sigma$ 表示与取 Σ 相反侧的有向曲面，则

性质 设 Σ 是定向曲面，$-\Sigma$ 表示与取 Σ 相反侧的有向曲面，则

$$\iint_{-\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = -\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

性质 设 Σ 是定向曲面，$-\Sigma$ 表示与取 Σ 相反侧的有向曲面，则

$$\iint_{-\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = -\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

物理解释 流过负侧的流量 $=-$ 流过正侧的流量

性质 设 Σ 是定向曲面，$-\Sigma$ 表示与取 Σ 相反侧的有向曲面，则

$$\iint_{-\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = -\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

物理解释 流过负侧的流量 $=-$ 流过正侧的流量

证明 设 $\overrightarrow{n}$ 是与 Σ 定向相符的单位法向量场，

性质 设 Σ 是定向曲面，$-\Sigma$ 表示与取 Σ 相反侧的有向曲面，则

$$\iint_{-\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = -\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

物理解释 流过负侧的流量 $=-$ 流过正侧的流量

证明 设 $\overrightarrow{n}$ 是与 Σ 定向相符的单位法向量场，则 $-\overrightarrow{n}$ 是与 $-\Sigma$ 定向相符的单位法向量场.

性质 设 Σ 是定向曲面，$-\Sigma$ 表示与取 Σ 相反侧的有向曲面，则

$$\iint_{-\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = -\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

物理解释 流过负侧的流量 $= -$ 流过正侧的流量

证明 设 $\overrightarrow{n}$ 是与 Σ 定向相符的单位法向量场，则 $-\overrightarrow{n}$ 是与 $-\Sigma$ 定向相符的单位法向量场.

令 $V = (P, Q, R)$. 则

性质 设 Σ 是定向曲面，$-\Sigma$ 表示与取 Σ 相反侧的有向曲面，则

$$\iint_{-\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = -\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

物理解释 流过负侧的流量 = − 流过正侧的流量

证明 设 $\vec{n}$ 是与 Σ 定向相符的单位法向量场，则 $-\vec{n}$ 是与 $-\Sigma$ 定向相符的单位法向量场.

令 $V = (P, Q, R)$. 则

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy =$$

$$\iint_{-\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy =$$

性质 设 Σ 是定向曲面，$-\Sigma$ 表示与取 Σ 相反侧的有向曲面，则

$$\iint_{-\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = -\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

物理解释 流过负侧的流量 $=-$ 流过正侧的流量

证明 设 $\vec{n}$ 是与 Σ 定向相符的单位法向量场，则 $-\vec{n}$ 是与 $-\Sigma$ 定向相符的单位法向量场.

令 $V=(P, Q, R)$. 则

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_{\Sigma} V\cdot\vec{n}\,dS$$

$$\iint_{-\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy =$$

性质 设 Σ 是定向曲面，$-\Sigma$ 表示与取 Σ 相反侧的有向曲面，则

$$\iint_{-\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = -\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

物理解释 流过负侧的流量 $=-$ 流过正侧的流量

证明 设 $\overrightarrow{n}$ 是与 Σ 定向相符的单位法向量场，则 $-\overrightarrow{n}$ 是与 $-\Sigma$ 定向相符的单位法向量场.

令 $V=(P,Q,R)$. 则

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_{\Sigma} V\cdot\overrightarrow{n}\,dS$$

$$\iint_{-\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_{\Sigma} V\cdot(-\overrightarrow{n})dS$$

性质 设 Σ 是定向曲面，$-\Sigma$ 表示与取 Σ 相反侧的有向曲面，则

$$\iint_{-\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = -\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

物理解释 流过负侧的流量 $=-$ 流过正侧的流量

证明 设 $\overrightarrow{n}$ 是与 Σ 定向相符的单位法向量场，则 $-\overrightarrow{n}$ 是与 $-\Sigma$ 定向相符的单位法向量场.

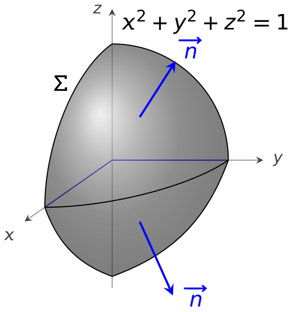
令 $V=(P,Q,R)$. 则

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_{\Sigma} V\cdot\overrightarrow{n}\,dS$$

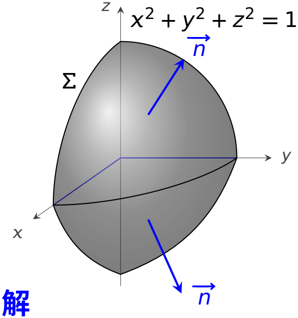
$$\iint_{-\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_{\Sigma} V\cdot(-\overrightarrow{n})dS$$

$\therefore$ 二者数值互为相反数

例 1 计算 $\iint_\Sigma xyzdxdy$，其中定向曲面 Σ 如图：



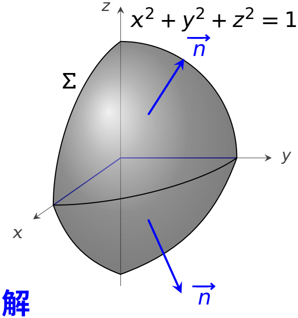
例 1 计算 $\iint_{\Sigma} xyz dxdy$，其中定向曲面 Σ 如图：



解

$$原式 = \iint_{\Sigma} V \cdot \vec{n} dS$$

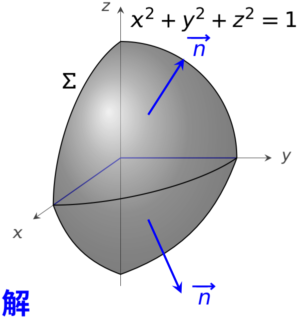
例 1 计算 $\iint_{\Sigma} xyzdxdy$，其中定向曲面 Σ 如图：



解

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma} V \cdot \vec{n}\, dS \xlongequal{V=(0,0,xyz)}$$

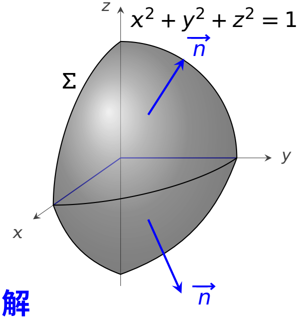
例 1 计算 $\iint_{\Sigma} xyz dx dy$，其中定向曲面 Σ 如图：



解

$$原式 = \iint_{\Sigma} V \cdot \vec{n}\, dS \xlongequal[\vec{n}=(x,y,z)]{V=(0,0,xyz)}$$

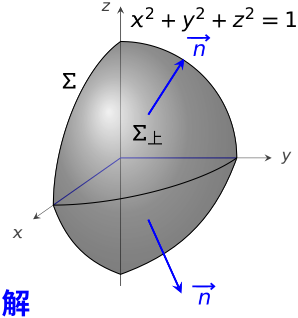
例 1 计算 $\iint_\Sigma xyzdxdy$，其中定向曲面 Σ 如图：



解

$$\text{原式} = \iint_\Sigma V\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal[\vec{n}=(x,y,z)]{V=(0,0,xyz)} \iint_\Sigma xyz^2 dS$$

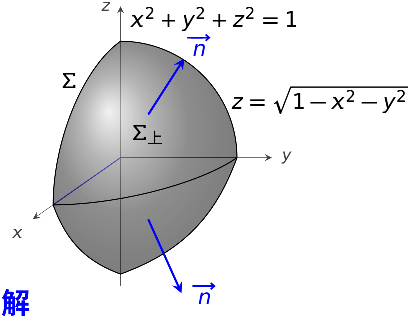
例 1 计算 $\iint_{\Sigma} xyz\,dxdy$，其中定向曲面 Σ 如图：



解

$$原式=\iint_{\Sigma} V\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal[\vec{n}=(x,y,z)]{V=(0,0,xyz)} \iint_{\Sigma} xyz^2 dS = 2\iint_{\Sigma_{上}} xyz^2 dS$$

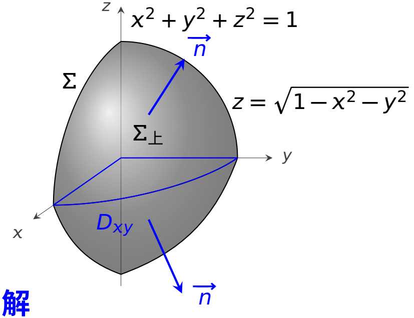
例 1 计算 $\iint_\Sigma xyzdxdy$，其中定向曲面 Σ 如图：



解

$$原式 = \iint_\Sigma V\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal[\vec{n}=(x,y,z)]{V=(0,0,xyz)} \iint_\Sigma xyz^2dS = 2\iint_{\Sigma_上} xyz^2dS$$

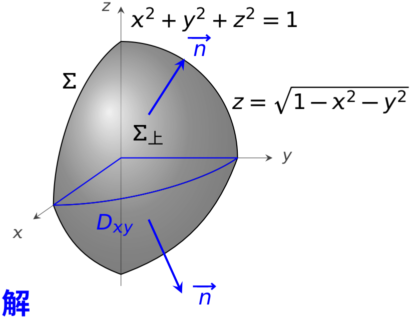
例 1 计算 $\iint_{\Sigma} xyzdxdy$，其中定向曲面 Σ 如图：

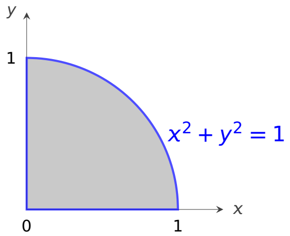


解

$$原式 = \iint_{\Sigma} V\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal[\vec{n}=(x,y,z)]{V=(0,0,xyz)} \iint_{\Sigma} xyz^2dS = 2\iint_{\Sigma_{上}} xyz^2dS$$

例 1 计算 $\iint_{\Sigma} xyzdxdy$，其中定向曲面 Σ 如图：

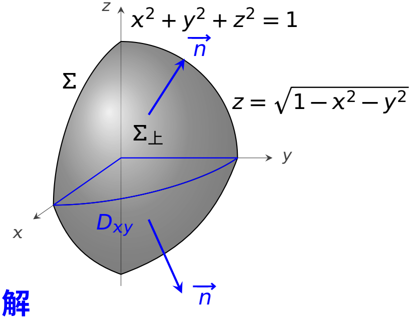


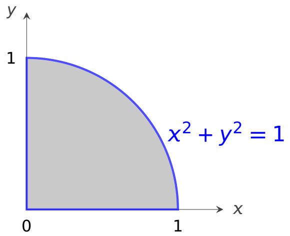


解

$$原式=\iint_{\Sigma} V\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal[\vec{n}=(x,y,z)]{V=(0,0,xyz)} \iint_{\Sigma} xyz^2dS = 2\iint_{\Sigma_上} xyz^2dS$$

例 1 计算 $\iint_\Sigma xyz\,dxdy$，其中定向曲面 Σ 如图：



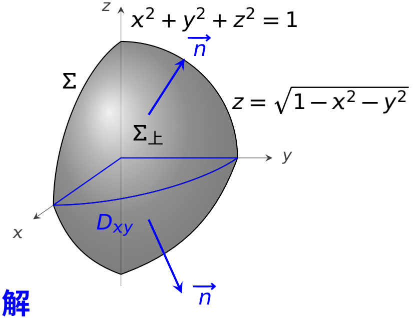


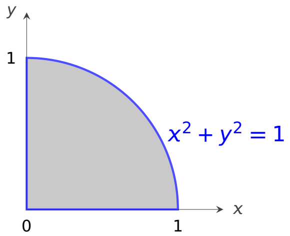
解

$$原式 = \iint_\Sigma V\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal[\vec{n}=(x,y,z)]{V=(0,0,xyz)} \iint_\Sigma xyz^2 dS = 2\iint_{\Sigma_上} xyz^2 dS$$

$$xy(1-x^2-y^2)$$

例 1 计算 $\iint_\Sigma xyz\,dxdy$，其中定向曲面 Σ 如图：



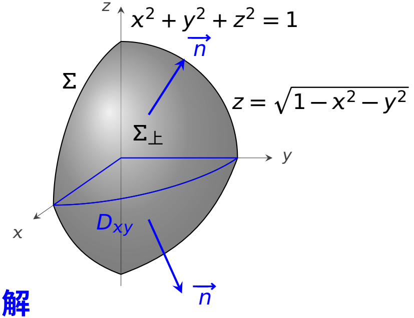


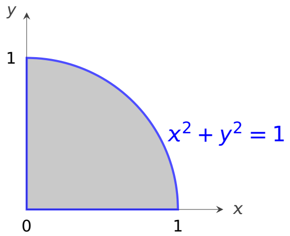
解

$$原式=\iint_\Sigma V\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal[\vec{n}=(x,y,z)]{V=(0,0,xyz)} \iint_\Sigma xyz^2dS = 2\iint_{\Sigma_上} xyz^2dS$$

$$xy(1-x^2-y^2)\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

例 1 计算 $\iint_\Sigma xyzdxdy$，其中定向曲面 Σ 如图：



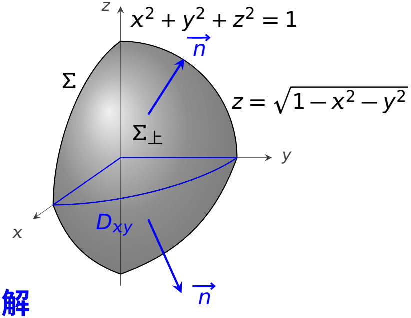


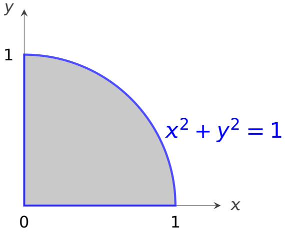
解

$$原式=\iint_\Sigma V\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal[\vec{n}=(x,y,z)]{V=(0,0,xyz)} \iint_\Sigma xyz^2dS=2\iint_{\Sigma_上} xyz^2dS$$

$$=\iint_{D_{xy}} xy(1-x^2-y^2)\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

例 1 计算 $\iint_\Sigma xyz\,dxdy$，其中定向曲面 Σ 如图：



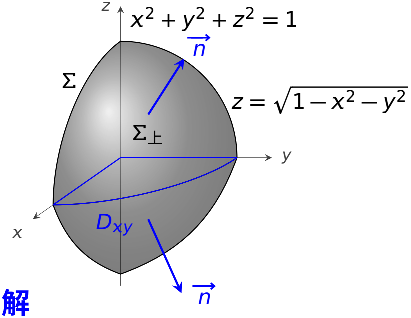


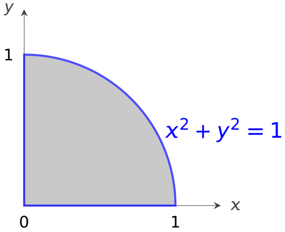
解

$$原式 = \iint_\Sigma V\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal[\vec{n}=(x,y,z)]{V=(0,0,xyz)} \iint_\Sigma xyz^2 dS = 2\iint_{\Sigma_上} xyz^2 dS$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} xy(1-x^2-y^2)\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

例 1 计算 $\iint_{\Sigma} xyz\,dxdy$，其中定向曲面 Σ 如图：





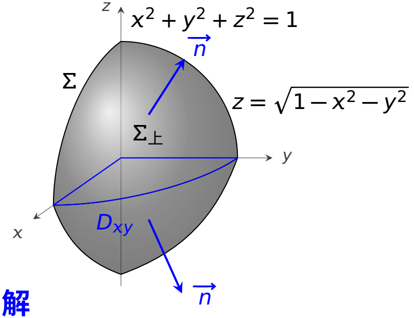
解

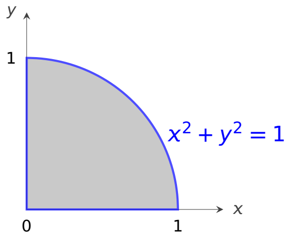
$$原式 = \iint_{\Sigma} V\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal[\vec{n}=(x,y,z)]{V=(0,0,xyz)} \iint_{\Sigma} xyz^2 dS = 2\iint_{\Sigma_{上}} xyz^2 dS$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} xy(1-x^2-y^2)\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

$$\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy$$

例 1 计算 $\iint_\Sigma xyzdxdy$，其中定向曲面 Σ 如图：





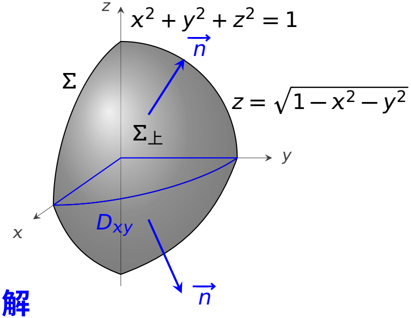
解

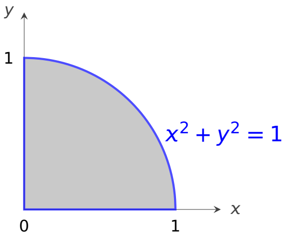
$$原式=\iint_\Sigma V\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal[\vec{n}=(x,y,z)]{V=(0,0,xyz)} \iint_\Sigma xyz^2dS=2\iint_{\Sigma_上} xyz^2dS$$

$$=2\iint_{D_{xy}} xy(1-x^2-y^2)\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

$$=2\iint_{D_{xy}} xy(1-x^2-y^2)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy$$

例 1 计算 $\iint_\Sigma xyzdxdy$，其中定向曲面 Σ 如图：





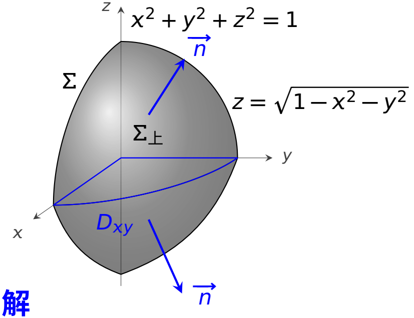
解

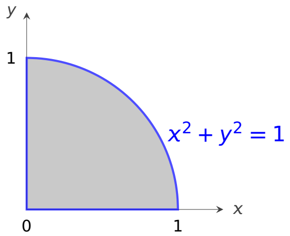
$$原式 = \iint_\Sigma V\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal[\vec{n}=(x,y,z)]{V=(0,0,xyz)} \iint_\Sigma xyz^2dS = 2\iint_{\Sigma_上} xyz^2dS$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} xy(1-x^2-y^2)\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$$

例 1 计算 $\iint_\Sigma xyz\,dxdy$，其中定向曲面 Σ 如图：





解

$$原式=\iint_\Sigma V\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal[\vec{n}=(x,y,z)]{V=(0,0,xyz)} \iint_\Sigma xyz^2dS=2\iint_{\Sigma_上}xyz^2dS$$

$$=2\iint_{D_{xy}}xy(1-x^2-y^2)\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

$$=2\iint_{D_{xy}}xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \cdots$$

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n}\, dS \xlongequal[\overrightarrow{n}=(x,y,z)]{V=(0,0,xyz)} \iint_{\Sigma} xyz^2 dS = 2\iint_{\Sigma_{\text{上}}} xyz^2 dS$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} xy(1-x^2-y^2)\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$$

$$\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} 2\iint_{D_{xy}} \rho^2\sin\theta\cos\theta\cdot\sqrt{1-\rho^2}\cdot\rho\, d\rho\, d\theta$$

$$原式 = \iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n}\, dS \xlongequal[\overrightarrow{n}=(x,y,z)]{V=(0,0,xyz)} \iint_{\Sigma} xyz^2 dS = 2\iint_{\Sigma_{上}} xyz^2 dS$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} xy(1-x^2-y^2)\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$$

$$\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} 2\iint_{D_{xy}} \rho^2\sin\theta\cos\theta\cdot\sqrt{1-\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$= 2\int \left[\int \sin\theta\cos\theta\rho^3\sqrt{1-\rho^2}d\rho\right]d\theta$$

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n}\, dS \xlongequal[\overrightarrow{n}=(x,y,z)]{V=(0,0,xyz)} \iint_{\Sigma} xyz^2 dS = 2\iint_{\Sigma_{\text{上}}} xyz^2 dS$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} xy(1-x^2-y^2)\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$$

$$\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} 2\iint_{D_{xy}} \rho^2\sin\theta\cos\theta\cdot\sqrt{1-\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int \quad \sin\theta\cos\theta\rho^3\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho\right]d\theta$$

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n}\, dS \overset{V=(0,0,xyz)}{\underset{\overrightarrow{n}=(x,y,z)}{=\!=\!=\!=\!=}} \iint_{\Sigma} xyz^2 dS = 2\iint_{\Sigma_{\text{上}}} xyz^2 dS$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} xy(1-x^2-y^2)\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$$

$$\overset{x=\rho\cos\theta}{\underset{y=\rho\sin\theta}{=\!=\!=\!=}} 2\iint_{D_{xy}} \rho^2\sin\theta\cos\theta\cdot\sqrt{1-\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^1 \sin\theta\cos\theta\rho^3\sqrt{1-\rho^2}d\rho\right]d\theta$$

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n}\, dS \xlongequal[\overrightarrow{n}=(x,y,z)]{V=(0,0,xyz)} \iint_{\Sigma} xyz^2 dS = 2\iint_{\Sigma_{\text{上}}} xyz^2 dS$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} xy(1-x^2-y^2)\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$$

$$\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} 2\iint_{D_{xy}} \rho^2\sin\theta\cos\theta\cdot\sqrt{1-\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^1 \sin\theta\cos\theta\rho^3\sqrt{1-\rho^2}d\rho\right]d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\theta)d\theta\cdot\int_0^1 \rho^2\sqrt{1-\rho^2}\cdot\rho d\rho$$

$$
\text{原式} = \iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS \xlongequal[\overrightarrow{n}=(x,y,z)]{V=(0,0,xyz)} \iint_{\Sigma} xyz^2 dS = 2\iint_{\Sigma_{\text{上}}} xyz^2 dS
$$

$$
= 2\iint_{D_{xy}} xy(1-x^2-y^2) \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy
$$

$$
= 2\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy
$$

$$
\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} 2\iint_{D_{xy}} \rho^2 \sin\theta\cos\theta \cdot \sqrt{1-\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta
$$

$$
= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^1 \sin\theta\cos\theta\rho^3\sqrt{1-\rho^2}d\rho \right] d\theta
$$

$$
= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\theta)d\theta \cdot \int_0^1 \rho^2\sqrt{1-\rho^2} \cdot \rho d\rho
$$

$$
\xlongequal{u=\sqrt{1-\rho^2}}
$$

$$原式 = \iint_{\Sigma} V\cdot\overrightarrow{n}\,dS \xlongequal[\overrightarrow{n}=(x,y,z)]{V=(0,0,xyz)} \iint_{\Sigma} xyz^2 dS = 2\iint_{\Sigma_{上}} xyz^2 dS$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} xy(1-x^2-y^2)\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$$

$$\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} 2\iint_{D_{xy}} \rho^2\sin\theta\cos\theta\cdot\sqrt{1-\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^1 \sin\theta\cos\theta\rho^3\sqrt{1-\rho^2}d\rho\right]d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2\theta)d\theta\cdot\int_0^1\rho^2\sqrt{1-\rho^2}\cdot\rho d\rho$$

$$\xlongequal{u=\sqrt{1-\rho^2}} \qquad \cdot(-udu)$$

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS \xlongequal[\overrightarrow{n}=(x,y,z)]{V=(0,0,xyz)} \iint_{\Sigma} xyz^2 dS = 2\iint_{\Sigma_{上}} xyz^2 dS$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} xy(1-x^2-y^2)\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$$

$$\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} 2\iint_{D_{xy}} \rho^2\sin\theta\cos\theta\cdot\sqrt{1-\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^1 \sin\theta\cos\theta\rho^3\sqrt{1-\rho^2}d\rho\right]d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2\theta)d\theta\cdot\int_0^1 \rho^2\sqrt{1-\rho^2}\cdot\rho d\rho$$

$$\xlongequal{u=\sqrt{1-\rho^2}} \qquad (1-u^2)u\cdot(-udu)$$

$$原式 = \iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n}\, dS \xlongequal[\overrightarrow{n}=(x,y,z)]{V=(0,0,xyz)} \iint_{\Sigma} xyz^2 dS = 2\iint_{\Sigma_{上}} xyz^2 dS$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} xy(1-x^2-y^2)\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$$

$$\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} 2\iint_{D_{xy}} \rho^2\sin\theta\cos\theta\cdot\sqrt{1-\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^1 \sin\theta\cos\theta\rho^3\sqrt{1-\rho^2}d\rho\right]d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2\theta)d\theta\cdot\int_0^1\rho^2\sqrt{1-\rho^2}\cdot\rho d\rho$$

$$\xlongequal{u=\sqrt{1-\rho^2}} \int_1^0 (1-u^2)u\cdot(-udu)$$

$$原式 = \iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n}\, dS \xlongequal[\overrightarrow{n}=(x,y,z)]{V=(0,0,xyz)} \iint_{\Sigma} xyz^2 dS = 2\iint_{\Sigma_{上}} xyz^2 dS$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} xy(1-x^2-y^2)\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$$

$$\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} 2\iint_{D_{xy}} \rho^2\sin\theta\cos\theta\cdot\sqrt{1-\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^1 \sin\theta\cos\theta\rho^3\sqrt{1-\rho^2}d\rho\right]d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2\theta)d\theta\cdot\int_0^1 \rho^2\sqrt{1-\rho^2}\cdot\rho d\rho$$

$$\xlongequal{u=\sqrt{1-\rho^2}} 1\cdot\int_1^0 (1-u^2)u\cdot(-udu)$$

$$原式 = \iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS \xlongequal[\overrightarrow{n}=(x,y,z)]{V=(0,0,xyz)} \iint_{\Sigma} xyz^2 dS = 2\iint_{\Sigma_{上}} xyz^2 dS$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} xy(1-x^2-y^2) \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dxdy$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2} dxdy$$

$$\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} 2\iint_{D_{xy}} \rho^2 \sin\theta\cos\theta \cdot \sqrt{1-\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^1 \sin\theta\cos\theta\rho^3\sqrt{1-\rho^2} d\rho\right] d\theta$$

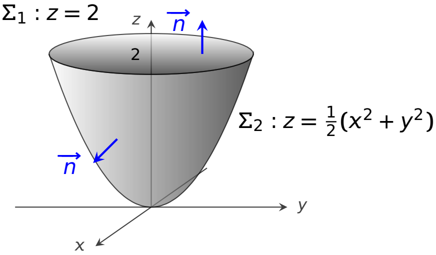
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\theta) d\theta \cdot \int_0^1 \rho^2\sqrt{1-\rho^2} \cdot \rho d\rho$$

$$\xlongequal{u=\sqrt{1-\rho^2}} 1 \cdot \int_1^0 (1-u^2)u \cdot (-udu) = \frac{2}{15}$$

例 2 计算

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz - zdxdy$$

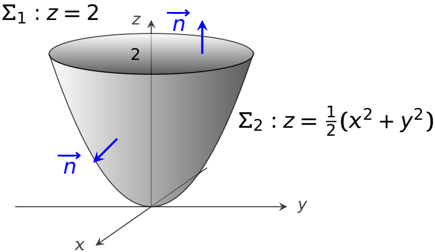
其中定向曲面 $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ 是三维区域的边界，如图：



例 2 计算

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz - zdxdy$$

其中定向曲面 $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ 是三维区域的边界，如图：

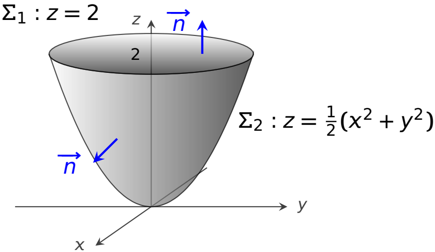


解 $\quad$ 原式 $= \iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n}\, dS$

例 2 计算

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz - zdxdy$$

其中定向曲面 $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ 是三维区域的边界，如图：

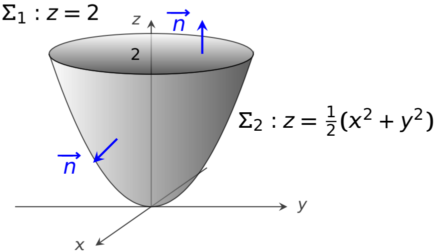


解 原式 $= \iint_{\Sigma} V \cdot \vec{n}\, dS = \iint_{\Sigma_1} V \cdot \vec{n}\, dS + \iint_{\Sigma_2} V \cdot \vec{n}\, dS,$

例 2 计算

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz-zdxdy$$

其中定向曲面 $\Sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_2$ 是三维区域的边界，如图：



解 原式 $=\iint_{\Sigma}V\cdot\vec{n}\,dS=\iint_{\Sigma_1}V\cdot\vec{n}\,dS+\iint_{\Sigma_2}V\cdot\vec{n}\,dS,$

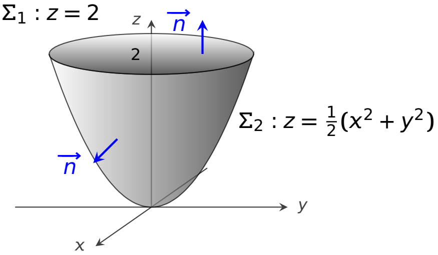
$$\iint_{\Sigma_1}V\cdot\vec{n}\,dS$$

$$\iint_{\Sigma_2}V\cdot\vec{n}\,dS$$

例 2 计算

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz - zdxdy$$

其中定向曲面 $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ 是三维区域的边界，如图：



解 原式 $= \iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n}\, dS = \iint_{\Sigma_1} V \cdot \overrightarrow{n}\, dS + \iint_{\Sigma_2} V \cdot \overrightarrow{n}\, dS,$

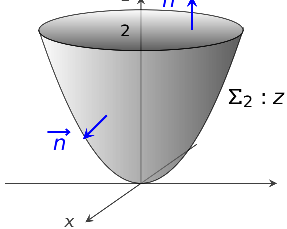
$$\iint_{\Sigma_1} V \cdot \overrightarrow{n}\, dS \xlongequal{V=(z^2+x,0,-z)}$$

$$\iint_{\Sigma_2} V \cdot \overrightarrow{n}\, dS \xlongequal{V=(z^2+x,0,-z)}$$

例 2 计算

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz - zdxdy$$

其中定向曲面 $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ 是三维区域的边界，如图：



解 原式 $= \iint_{\Sigma} V \cdot \vec{n}\, dS = \iint_{\Sigma_1} V \cdot \vec{n}\, dS + \iint_{\Sigma_2} V \cdot \vec{n}\, dS,$

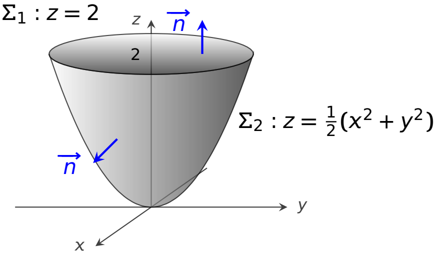
$$\iint_{\Sigma_1} V \cdot \vec{n}\, dS \xlongequal[\vec{n}=(0,0,1)]{V=(z^2+x,0,-z)}$$

$$\iint_{\Sigma_2} V \cdot \vec{n}\, dS \xlongequal{V=(z^2+x,0,-z)}$$

例 2 计算

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz - zdxdy$$

其中定向曲面 $\Sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_2$ 是三维区域的边界，如图：



解 原式 $=\iint_{\Sigma} V\cdot\vec{n}\,dS=\iint_{\Sigma_1} V\cdot\vec{n}\,dS+\iint_{\Sigma_2} V\cdot\vec{n}\,dS,$

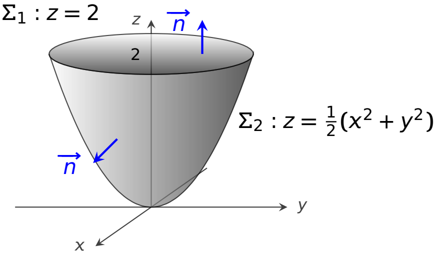
$$\iint_{\Sigma_1} V\cdot\vec{n}\,dS \overset{V=(z^2+x,0,-z)}{\underset{\vec{n}=(0,0,1)}{=\!=\!=\!=\!=}} \iint_{\Sigma_1} -zdS$$

$$\iint_{\Sigma_2} V\cdot\vec{n}\,dS \overset{V=(z^2+x,0,-z)}{=\!=\!=\!=\!=}$$

例 2 计算

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz - zdxdy$$

其中定向曲面 $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ 是三维区域的边界，如图：



解 原式 $= \iint_{\Sigma} V\cdot\vec{n}\,dS = \iint_{\Sigma_1} V\cdot\vec{n}\,dS + \iint_{\Sigma_2} V\cdot\vec{n}\,dS,$

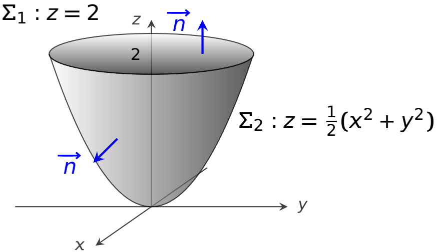
$$\iint_{\Sigma_1} V\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal[\vec{n}=(0,0,1)]{V=(z^2+x,0,-z)} \iint_{\Sigma_1} -zdS = \iint_{\Sigma_1} -2dS$$

$$\iint_{\Sigma_2} V\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{V=(z^2+x,0,-z)}$$

例 2 计算

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz-zdxdy$$

其中定向曲面 $\Sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_2$ 是三维区域的边界，如图：



解 原式 $=\iint_{\Sigma}V\cdot\vec{n}\,dS=\iint_{\Sigma_1}V\cdot\vec{n}\,dS+\iint_{\Sigma_2}V\cdot\vec{n}\,dS,$

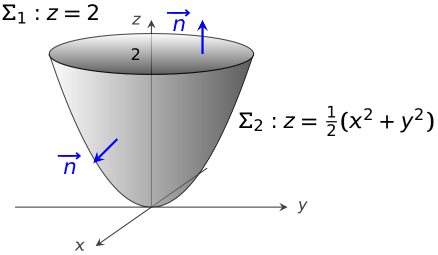
$$\iint_{\Sigma_1}V\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal[\vec{n}=(0,0,1)]{V=(z^2+x,0,-z)} \iint_{\Sigma_1}-z\,dS=\iint_{\Sigma_1}-2\,dS=-2|\Sigma_1|$$

$$\iint_{\Sigma_2}V\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{V=(z^2+x,0,-z)}$$

例 2 计算

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz-zdxdy$$

其中定向曲面 $\Sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_2$ 是三维区域的边界，如图：



解 原式 $=\iint_{\Sigma}V\cdot\vec{n}\,dS=\iint_{\Sigma_1}V\cdot\vec{n}\,dS+\iint_{\Sigma_2}V\cdot\vec{n}\,dS,$

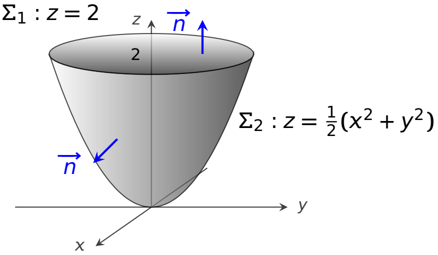
$$\iint_{\Sigma_1}V\cdot\vec{n}\,dS\ \underset{\vec{n}=(0,0,1)}{\overset{V=(z^2+x,0,-z)}{=\!=\!=\!=\!=}}\ \iint_{\Sigma_1}-z\,dS=\iint_{\Sigma_1}-2\,dS=-2|\Sigma_1|=-8\pi,$$

$$\iint_{\Sigma_2}V\cdot\vec{n}\,dS\ \overset{V=(z^2+x,0,-z)}{=\!=\!=\!=\!=}$$

例 2 计算

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz - zdxdy$$

其中定向曲面 $\Sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_2$ 是三维区域的边界，如图：



解 原式 $= \iint_{\Sigma} V\cdot\vec{n}\,dS = \iint_{\Sigma_1} V\cdot\vec{n}\,dS + \iint_{\Sigma_2} V\cdot\vec{n}\,dS,$

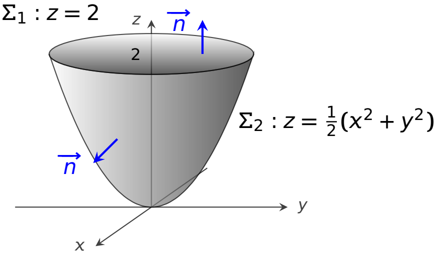
$$\iint_{\Sigma_1} V\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal[\vec{n}=(0,0,1)]{V=(z^2+x,0,-z)} \iint_{\Sigma_1} -zdS = \iint_{\Sigma_1} -2dS = -2|\Sigma_1| = -8\pi,$$

$$\iint_{\Sigma_2} V\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal[\vec{n}=\frac{(x,y,-1)}{\sqrt{1+x^2+y^2}}]{V=(z^2+x,0,-z)}$$

例 2 计算

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz-zdxdy$$

其中定向曲面 $\Sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_2$ 是三维区域的边界，如图：



解 原式 $=\iint_{\Sigma}V\cdot\vec{n}\,dS=\iint_{\Sigma_1}V\cdot\vec{n}\,dS+\iint_{\Sigma_2}V\cdot\vec{n}\,dS,$

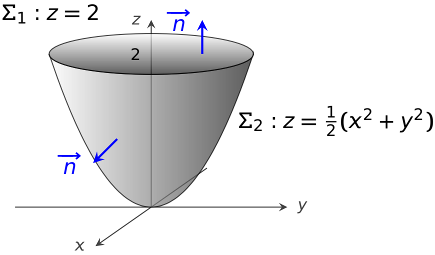
$$\iint_{\Sigma_1}V\cdot\vec{n}\,dS \overset{V=(z^2+x,0,-z)}{\underset{\vec{n}=(0,0,1)}{=\!=\!=\!=}} \iint_{\Sigma_1}-z\,dS=\iint_{\Sigma_1}-2\,dS=-2|\Sigma_1|=-8\pi,$$

$$\iint_{\Sigma_2}V\cdot\vec{n}\,dS \overset{V=(z^2+x,0,-z)}{\underset{\vec{n}=\frac{(x,y,-1)}{\sqrt{1+x^2+y^2}}}{=\!=\!=\!=}} \qquad \frac{(z^2+x)x+z}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$$

例 2 计算

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz-zdxdy$$

其中定向曲面 $\Sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_2$ 是三维区域的边界，如图：



解 原式 $=\iint_{\Sigma}V\cdot\vec{n}\,dS=\iint_{\Sigma_1}V\cdot\vec{n}\,dS+\iint_{\Sigma_2}V\cdot\vec{n}\,dS,$

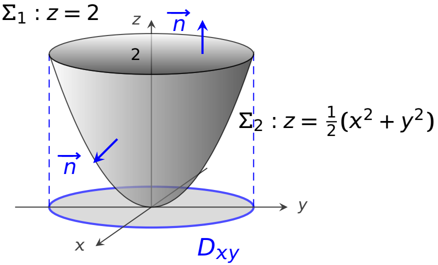
$$\iint_{\Sigma_1}V\cdot\vec{n}\,dS\ \overset{V=(z^2+x,0,-z)}{\underset{\vec{n}=(0,0,1)}{=\!=\!=\!=\!=\!=}}\ \iint_{\Sigma_1}-zdS=\iint_{\Sigma_1}-2dS=-2|\Sigma_1|=-8\pi,$$

$$\iint_{\Sigma_2}V\cdot\vec{n}\,dS\ \overset{V=(z^2+x,0,-z)}{\underset{\vec{n}=\frac{(x,y,-1)}{\sqrt{1+x^2+y^2}}}{=\!=\!=\!=\!=\!=}}\ \frac{(z^2+x)x+z}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

例 2 计算

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz - zdxdy$$

其中定向曲面 $\Sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_2$ 是三维区域的边界，如图：



解 原式 $=\iint_{\Sigma} V\cdot\overrightarrow{n}\,dS=\iint_{\Sigma_1} V\cdot\overrightarrow{n}\,dS+\iint_{\Sigma_2} V\cdot\overrightarrow{n}\,dS,$

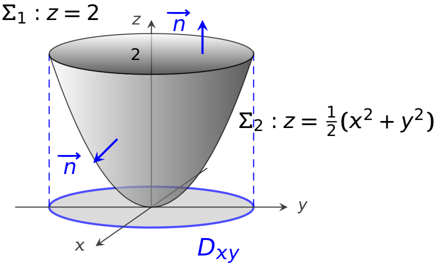
$$\iint_{\Sigma_1} V\cdot\overrightarrow{n}\,dS \xlongequal[\overrightarrow{n}=(0,0,1)]{V=(z^2+x,0,-z)} \iint_{\Sigma_1} -zdS=\iint_{\Sigma_1} -2dS=-2|\Sigma_1|=-8\pi,$$

$$\iint_{\Sigma_2} V\cdot\overrightarrow{n}\,dS \xlongequal[\overrightarrow{n}=\frac{(x,y,-1)}{\sqrt{1+x^2+y^2}}]{V=(z^2+x,0,-z)} \iint_{D_{xy}} \frac{(z^2+x)x+z}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

例 2 计算

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz - zdxdy$$

其中定向曲面 $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ 是三维区域的边界，如图：



解 原式 $= \iint_{\Sigma} V\cdot\vec{n}\,dS = \iint_{\Sigma_1} V\cdot\vec{n}\,dS + \iint_{\Sigma_2} V\cdot\vec{n}\,dS,$

$$\iint_{\Sigma_1} V\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal[\vec{n}=(0,0,1)]{V=(z^2+x,0,-z)} \iint_{\Sigma_1} -zdS = \iint_{\Sigma_1} -2dS = -2|\Sigma_1| = -8\pi,$$

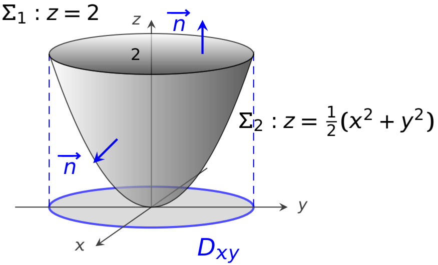
$$\iint_{\Sigma_2} V\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal[\vec{n}=\frac{(x,y,-1)}{\sqrt{1+x^2+y^2}}]{V=(z^2+x,0,-z)} \iint_{D_{xy}} \frac{(z^2+x)x+z}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

$$= \iint_{D_{xy}} (z^2+x)x+zdxdy$$

例 2 计算

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz - zdxdy$$

其中定向曲面 $\Sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_2$ 是三维区域的边界，如图：



解 原式 $=\displaystyle\iint_{\Sigma}V\cdot\vec{n}\,dS=\iint_{\Sigma_1}V\cdot\vec{n}\,dS+\iint_{\Sigma_2}V\cdot\vec{n}\,dS,$

$$\iint_{\Sigma_1}V\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal[\vec{n}=(0,0,1)]{V=(z^2+x,0,-z)} \iint_{\Sigma_1}-zdS=\iint_{\Sigma_1}-2dS=-2|\Sigma_1|=-8\pi,$$

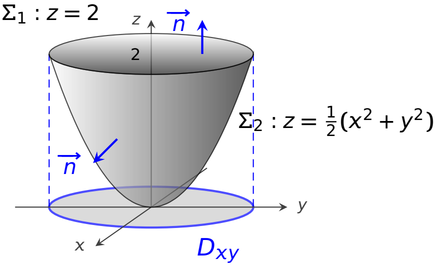
$$\iint_{\Sigma_2}V\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal[\vec{n}=\frac{(x,y,-1)}{\sqrt{1+x^2+y^2}}]{V=(z^2+x,0,-z)} \iint_{D_{xy}}\frac{(z^2+x)x+z}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}(z^2+x)x+zdxdy \xlongequal{\text{对称性}} \iint_{D_{xy}}x^2+zdxdy$$

例 2 计算

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz - zdxdy$$

其中定向曲面 $\Sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_2$ 是三维区域的边界，如图:



解 原式 $=\iint_{\Sigma} V\cdot\vec{n}\,dS=\iint_{\Sigma_1} V\cdot\vec{n}\,dS+\iint_{\Sigma_2} V\cdot\vec{n}\,dS,$

$$\iint_{\Sigma_1} V\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal[\vec{n}=(0,0,1)]{V=(z^2+x,0,-z)} \iint_{\Sigma_1} -zdS=\iint_{\Sigma_1}-2dS=-2|\Sigma_1|=-8\pi,$$

$$\iint_{\Sigma_2} V\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal[\vec{n}=\frac{(x,y,-1)}{\sqrt{1+x^2+y^2}}]{V=(z^2+x,0,-z)} \iint_{D_{xy}} \frac{(z^2+x)x+z}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}(z^2+x)x+zdxdy \xlongequal{对称性} \iint_{D_{xy}} x^2+zdxdy=\cdots$$

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma} V\cdot\overrightarrow{n}\,dS = \iint_{\Sigma_1} V\cdot\overrightarrow{n}\,dS + \iint_{\Sigma_2} V\cdot\overrightarrow{n}\,dS,$$

$$\iint_{\Sigma_1} V\cdot\overrightarrow{n}\,dS \xlongequal[\overrightarrow{n}=(0,0,1)]{V=(z^2+x,0,-z)} \iint_{\Sigma_1} -z\,dS \iint_{\Sigma_1} -2\,dS = -2|\Sigma_1| = -8\pi,$$

$$\iint_{\Sigma_2} V\cdot\overrightarrow{n}\,dS \xlongequal[\overrightarrow{n}=\frac{(x,y,-1)}{\sqrt{1+x^2+y^2}}]{V=(z^2+x,0,-z)} \iint_{D_{xy}} \frac{(z^2+x)x+z}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

$$= \iint_{D_{xy}} (z^2+x)x+z\,dxdy \xlongequal{\text{对称性}} \iint_{D_{xy}} x^2+z\,dxdy$$

$$\xlongequal{z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \frac{1}{2}\iint_{D_{xy}} 3x^2+y^2\,dxdy$$

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n}\, dS = \iint_{\Sigma_1} V \cdot \overrightarrow{n}\, dS + \iint_{\Sigma_2} V \cdot \overrightarrow{n}\, dS,$$

$$\iint_{\Sigma_1} V \cdot \overrightarrow{n}\, dS \xlongequal[\overrightarrow{n}=(0,0,1)]{V=(z^2+x,0,-z)} \iint_{\Sigma_1} -z dS \iint_{\Sigma_1} -2dS = -2|\Sigma_1| = -8\pi,$$

$$\iint_{\Sigma_2} V \cdot \overrightarrow{n}\, dS \xlongequal[\overrightarrow{n}=\frac{(x,y,-1)}{\sqrt{1+x^2+y^2}}]{V=(z^2+x,0,-z)} \iint_{D_{xy}} \frac{(z^2+x)x+z}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dxdy$$

$$= \iint_{D_{xy}} (z^2+x)x + zdxdy \xlongequal{\text{对称性}} \iint_{D_{xy}} x^2 + zdxdy$$

$$\xlongequal{z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} 3x^2 + y^2 dxdy \xlongequal{\text{对称性}} 2 \iint_{D_{xy}} x^2 dxdy$$

$$原式 = \iint_{\Sigma} V\cdot\overrightarrow{n}\,dS = \iint_{\Sigma_1} V\cdot\overrightarrow{n}\,dS + \iint_{\Sigma_2} V\cdot\overrightarrow{n}\,dS,$$

$$\iint_{\Sigma_1} V\cdot\overrightarrow{n}\,dS \xlongequal[\overrightarrow{n}=(0,0,1)]{V=(z^2+x,0,-z)} \iint_{\Sigma_1} -z\,dS \iint_{\Sigma_1} -2\,dS = -2|\Sigma_1| = -8\pi,$$

$$\iint_{\Sigma_2} V\cdot\overrightarrow{n}\,dS \xlongequal[\overrightarrow{n}=\frac{(x,y,-1)}{\sqrt{1+x^2+y^2}}]{V=(z^2+x,0,-z)} \iint_{D_{xy}} \frac{(z^2+x)x+z}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

$$= \iint_{D_{xy}} (z^2+x)x+z\,dxdy \xlongequal{对称性} \iint_{D_{xy}} x^2+z\,dxdy$$

$$\xlongequal{z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \frac{1}{2}\iint_{D_{xy}} 3x^2+y^2\,dxdy \xlongequal{对称性} 2\iint_{D_{xy}} x^2\,dxdy$$

$$\xlongequal{对称性} \iint_{D_{xy}} x^2+y^2\,dxdy$$

$$原式 = \iint_{\Sigma} V\cdot\overrightarrow{n}dS = \iint_{\Sigma_1} V\cdot\overrightarrow{n}dS + \iint_{\Sigma_2} V\cdot\overrightarrow{n}dS,$$

$$\iint_{\Sigma_1} V\cdot\overrightarrow{n}dS \xlongequal[\overrightarrow{n}=(0,0,1)]{V=(z^2+x,0,-z)} \iint_{\Sigma_1} -zdS \iint_{\Sigma_1} -2dS = -2|\Sigma_1| = -8\pi,$$

$$\iint_{\Sigma_2} V\cdot\overrightarrow{n}dS \xlongequal[\overrightarrow{n}=\frac{(x,y,-1)}{\sqrt{1+x^2+y^2}}]{V=(z^2+x,0,-z)} \iint_{D_{xy}} \frac{(z^2+x)x+z}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

$$= \iint_{D_{xy}} (z^2+x)x+zdxdy \xlongequal{对称性} \iint_{D_{xy}} x^2+zdxdy$$

$$\xlongequal{z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \frac{1}{2}\iint_{D_{xy}} 3x^2+y^2dxdy \xlongequal{对称性} 2\iint_{D_{xy}} x^2dxdy$$

$$\xlongequal{对称性} \iint_{D_{xy}} x^2+y^2dxdy = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^2 \rho^2\cdot\rho d\rho\right]d\theta$$

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma} V\cdot\overrightarrow{n}\,dS = \iint_{\Sigma_1} V\cdot\overrightarrow{n}\,dS + \iint_{\Sigma_2} V\cdot\overrightarrow{n}\,dS,$$

$$\iint_{\Sigma_1} V\cdot\overrightarrow{n}\,dS \xlongequal[\overrightarrow{n}=(0,0,1)]{V=(z^2+x,0,-z)} \iint_{\Sigma_1} -z dS \iint_{\Sigma_1} -2dS = -2|\Sigma_1| = -8\pi,$$

$$\iint_{\Sigma_2} V\cdot\overrightarrow{n}\,dS \xlongequal[\overrightarrow{n}=\frac{(x,y,-1)}{\sqrt{1+x^2+y^2}}]{V=(z^2+x,0,-z)} \iint_{D_{xy}} \frac{(z^2+x)x+z}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

$$= \iint_{D_{xy}} (z^2+x)x+zdxdy \xlongequal{\text{对称性}} \iint_{D_{xy}} x^2+zdxdy$$

$$\xlongequal{z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \frac{1}{2}\iint_{D_{xy}} 3x^2+y^2dxdy \xlongequal{\text{对称性}} 2\iint_{D_{xy}} x^2dxdy$$

$$\xlongequal{\text{对称性}} \iint_{D_{xy}} x^2+y^2dxdy = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^2 \rho^2\cdot\rho d\rho\right]d\theta = 8\pi$$

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n}\, dS = \iint_{\Sigma_1} V \cdot \overrightarrow{n}\, dS + \iint_{\Sigma_2} V \cdot \overrightarrow{n}\, dS,$$

$$\iint_{\Sigma_1} V \cdot \overrightarrow{n}\, dS \xlongequal[\overrightarrow{n}=(0,0,1)]{V=(z^2+x,0,-z)} \iint_{\Sigma_1} -z dS \iint_{\Sigma_1} -2dS = -2|\Sigma_1| = -8\pi,$$

$$\iint_{\Sigma_2} V \cdot \overrightarrow{n}\, dS \xlongequal[\overrightarrow{n}=\frac{(x,y,-1)}{\sqrt{1+x^2+y^2}}]{V=(z^2+x,0,-z)} \iint_{D_{xy}} \frac{(z^2+x)x+z}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\, dxdy$$

$$= \iint_{D_{xy}} (z^2+x)x + z dxdy \xlongequal{\text{对称性}} \iint_{D_{xy}} x^2 + z dxdy$$

$$\xlongequal{z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} 3x^2 + y^2 dxdy \xlongequal{\text{对称性}} 2 \iint_{D_{xy}} x^2 dxdy$$

$$\xlongequal{\text{对称性}} \iint_{D_{xy}} x^2 + y^2 dxdy = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^2 \rho^2 \cdot \rho d\rho \right] d\theta = 8\pi$$

$$\therefore \quad \text{原式} = -8\pi + 8\pi = 0$$

例 3 设 Σ 是二元函数 $z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$ 的图形，取朝上的单位法向量. 则

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)dxdy = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))dxdy.$$

例 3 设 Σ 是二元函数 $z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$ 的图形，取朝上的单位法向量. 则

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)dxdy = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))dxdy.$$

证明 这是:

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)dxdy = \iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n}\, dS$$

例 3 设 Σ 是二元函数 $z=z(x,y),\ (x,y)\in D_{xy}$ 的图形，取朝上的单位法向量. 则

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = \iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy.$$

证明 这是:

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = \iint_{\Sigma} V\cdot\overrightarrow{n}\,dS$$

$$\xlongequal[\overrightarrow{n}=\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}(-z_x,-z_y,1)]{V=(0,0,R)}$$

例 3 设 Σ 是二元函数 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 的图形，取朝上的单位法向量. 则

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)dxdy = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))dxdy.$$

证明 这是:

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)dxdy = \iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n}\, dS$$

$$\xlongequal[\overrightarrow{n}=\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}(-z_x, -z_y, 1)]{V=(0,0,R)} R(x, y, z) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$$

例 3 设 Σ 是二元函数 $z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$ 的图形，取朝上的单位法向量. 则

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)dxdy = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))dxdy.$$

证明 这是:

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)dxdy = \iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n}\, dS$$

$$\xlongequal[\overrightarrow{n}=\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}(-z_x,-z_y,1)]{V=(0,0,R)} \iint_{\Sigma} R(x, y, z) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} dS$$

例 3 设 Σ 是二元函数 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 的图形，取朝上的单位法向量. 则

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)dxdy = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))dxdy.$$

证明 这是:

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)dxdy = \iint_{\Sigma} V \cdot \vec{n}\, dS$$

$$\xlongequal[\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}(-z_x,-z_y,1)]{V=(0,0,R)} \iint_{\Sigma} R(x, y, z) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} dS$$

$$R(x, y, z(x, y)) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$$

例 3 设 Σ 是二元函数 $z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$ 的图形，取朝上的单位法向量. 则

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)dxdy = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))dxdy.$$

证明 这是:

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)dxdy = \iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n}\, dS$$

$$\xlongequal[\overrightarrow{n}=\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}(-z_x,-z_y,1)]{V=(0,0,R)} \iint_{\Sigma} R(x, y, z) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} dS$$

$$R(x, y, z(x, y)) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\, dxdy$$

例 3 设 Σ 是二元函数 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 的图形，取朝上的单位法向量. 则

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)dxdy = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))dxdy.$$

证明 这是:

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)dxdy = \iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n}\, dS$$

$$\xlongequal[\overrightarrow{n}=\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}(-z_x,-z_y,1)]{V=(0,0,R)} \iint_{\Sigma} R(x, y, z) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} dS$$

$$= \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\, dxdy$$

例 3 设 Σ 是二元函数 $z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$ 的图形，取朝上的单位法向量. 则

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)dxdy = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))dxdy.$$

证明 这是:

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)dxdy = \iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n}\, dS$$

$$\xlongequal[\overrightarrow{n}=\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}(-z_x,-z_y,1)]{V=(0,0,R)} \iint_{\Sigma} R(x, y, z) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} dS$$

$$= \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\, dxdy$$

$$= \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))dxdy$$