第 03 周作业解答

练习 1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{依次将 2, 3, 4 列加到第 1 列}} \begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{r_3 - r_1 \\ r_4 - r_1}]{r_2 - r_1} 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 12 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3 + r_1]{r_2 - r_1} 12 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 96$$

练习 2. 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$，求第四列各元素的余子式之和，即 $M_{14} + M_{24} + M_{34} + M_{44}$

解

$$\begin{aligned} M_{14} + M_{24} + M_{34} + M_{44} &= (-1) \cdot A_{14} + 1 \cdot A_{24} + (-1) \cdot A_{34} + 1 \cdot A_{44} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{r_3 + r_2 \\ r_4 - r_2}]{r_1 + r_2} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -7 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &\xlongequal{\text{按第四列展开}} 1 \cdot (-1)^{2+4} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & -7 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} \\ &\xlongequal{\text{按第三行展开}} 5 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 45 \end{aligned}$$

练习 3. 写出 7 阶排列 3712546 的所有逆序，并判断该排列的奇偶性。

解所有逆序为

$$(3, 1), (3, 2), (7, 1), (7, 2), (7, 5), (7, 4), (7, 6), (5, 4)$$

逆序数为 8，偶排列。

练习 4. 问 i, j 为何值时，6 级排列 $3i25j4$ 为奇排列？

解 i, j 的取值只有两种情况：$i=1, j=6$ 或者 $i=6, j=1$。

当 $i=1, j=6$ 时，排列为 312564，逆序为 (3, 1), (3, 2), (5, 4), (6, 4)，逆序数为 4，为偶排列。

当 $i=6, j=1$ 时，排列为 362514，逆序为 (3, 2), (3, 1), (6, 2), (6, 5), (6, 1), (6, 4), (2, 1), (5, 1), (5, 4)，逆序数为 9，为奇排列。

所以只能是 $i=6, j=1$。

注：根据对换改变排列奇偶性的性质，当知道 312564 是偶排列时，即可判断 362514 奇排列，而无需再计算时逆序数。

练习 5. 判断行列式

$$A=\begin{vmatrix} 1 & 1000 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 1000 & 7 & 8 \\ 1000 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1000 \\ 1 & 2 & 3 & 1000 & 4 \end{vmatrix}$$

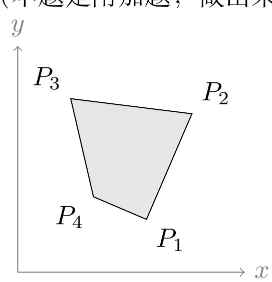
的值是正数还是负数？说明你的理由。

解由行列式的公式 $|A|=\sum(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，可见 $(-1)^{N(23154)}a_{12}a_{23}a_{31}a_{45}a_{54}=(-1)^{N(23154)}1000^4$ 远远超过其他项，所行列式的正负由该项的正负决定。因为 $N(23154)=3$，该项为负，所以行列式为负数。

练习 6. * 如图，假设平面上四边形的四个顶点为 $P_i(x_i, y_i)$，$i=1,2,3,4$。证明该四边形的面积为

$$\frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_3 & x_4 \\ y_3 & y_4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_4 & x_1 \\ y_4 & y_1 \end{vmatrix}\right).$$

（本题是附加题，做出来的同学下周交上来，可以加分）



解略

练习 7. 假设为 n 阶行列式 D 的对角线元素为奇数（$0, \pm2, \pm4, \cdots$），而其余元素为偶数（$\pm1, \pm3, \cdots$）。证明 $D \neq 0$。

解利用行列式的公式 $|D|=\sum(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 可知，只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 一项是奇数，其余项都是偶数，所以合起来不可能为零。