第 12 周作业解答

练习 1. 设 Γ 是空间中一定向闭曲线，并且正好是某可定向曲面 Σ 的边界。计算 $\int_\Gamma ye^z dx + xe^z dy + xye^z dz$.

解设向量场 $F = (ye^z, xe^z, xye^z)$。设 $\overrightarrow{n}$ 是 Σ 上的单位向量场，与 Γ 的定向符合右手规则。注意到

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ye^z & xe^z & xye^z \end{vmatrix} == \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xe^z & xye^z \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ye^z & xye^z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ ye^z & xe^z \end{vmatrix} \right) = (0,\, 0,\, 0)$$

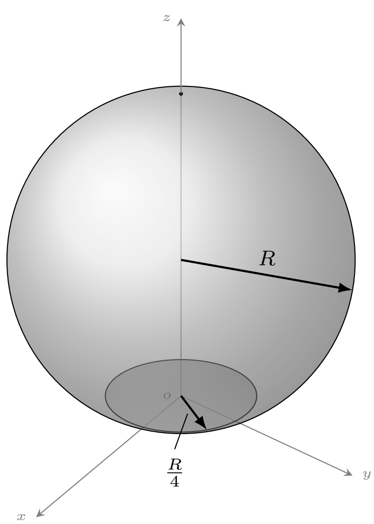
所以利用斯托克斯公式可得：

$$\int_\Gamma ye^z dx + xe^z dy + xye^z dz = \iint_\Sigma \text{rot } F \cdot \overrightarrow{n} dS = 0.$$

练习 2. 热气球的表面是半径为 R 球面的一部分，与 xoy 坐标面的交线是半径为 $\frac{R}{4}$ 的圆周，如图。假设热气的速度向量场为

$$V = \text{rot } (-y,\, x,\, 0).$$

问单位时间内有多少热气通过气球表面？



解 热气球表面 Σ 选取单位外法向量 $\overrightarrow{n}$；边界圆周 Γ 是 $\begin{cases} x^2 + y^2 = (R/4)^2 \\ z = 0 \end{cases}$，选取逆时针方向，相应的参数方程是：$x = \frac{R}{4}\cos\theta,\, y = \frac{R}{4}\sin\theta,\, \theta : 0 \to 2\pi$。应用斯托克斯公式，得：

$$\iint_\Sigma \text{rot } (-y,\, x,\, 0) \cdot \overrightarrow{n} dS = \int_\Gamma -ydx + xdy + 0dz = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{R}{4}\sin\theta \cdot (\frac{R}{4}\cos\theta)' + \frac{R}{4}\cos\theta \cdot (\frac{R}{4}\sin\theta)' \right] d\theta = \frac{1}{8}\pi R^2.$$

单位时间有 $\frac{1}{8}\pi R^2$ 单位热气通过气球表面。

练习 3. 讨论旋度 $\text{rot}F$ 的物理意义。

解.

练习 4. 判断下列级数的敛散性，并说明原因

1. $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3n}+\cdots$
2. $(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})+(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2})+(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3})+\cdots+(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n})+\cdots$
3. $\cos(\frac{\pi}{6})+\cos(\frac{2\pi}{6})+\cdots+\cos(\frac{n\pi}{6})+\cdots$

解 1. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n}$ 是发散。可以利用“比较审敛法的极限形式”，与发散的调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 比较。因为 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{3n}}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{3}$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n}$ 是发散。

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n})$ 是收敛，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n})=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$。这是因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$。

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos(\frac{n\pi}{6})$ 是发散。这是 $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos(\frac{n\pi}{6})\neq 0$（事实上 $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos(\frac{n\pi}{6})$ 不存在，这里不证明）：对任意的 $N>0$，可取 $n=12N>N$，则

$$\cos\left(\frac{(12N)\pi}{6}\right)=\cos(2N\pi)=1$$

这就说明了 $\{\cos(\frac{n\pi}{6})\}$ 不可能趋于 0。

练习 5. 判断下列级数的敛散性：

1. $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{3a+b}+\cdots+\frac{1}{na+b}+\cdots$（其中 $a>0, b>0$）
2. $\frac{1^4}{1!}+\frac{2^4}{2!}+\frac{3^4}{3!}+\cdots+\frac{n^4}{n!}+\cdots$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$

解 (1) 利用比较审敛法的极限形式，与发散的调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 作比较：因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{na+b}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{na+b}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a+\frac{b}{n}}=\frac{1}{a}<+\infty$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{na+b}$ 发散。

(2) 利用比值审敛法：因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^4}{(n+1)!}}{\frac{n^4}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^4\cdot\frac{1}{n+1}=0<1$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{n!}$ 收敛。

(3) 利用比值审敛法：因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\sin\frac{\pi}{3^{n+1}}}{2^n\sin\frac{\pi}{3^n}}\overset{x=\frac{\pi}{3^{n+1}}}{=\!=\!=\!=}2\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\sin 3x}=2\lim_{x\to0}\frac{(\sin x)'}{(\sin 3x)'}=2\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{3\cos 3x}=\frac{2}{3}<1$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$ 收敛。

练习 6. 判断下列级数是否收敛？若然，是绝对收敛还是条件收敛？

1. $\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 5}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{\ln(n+1)}+\cdots$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin\frac{\pi}{n+1}}{\pi^{n+1}}$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\ln\frac{n+1}{n}$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$

解 (1) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\ln(n+1)}$ 是交错级数，$u_n=\frac{1}{\ln(n+1)}$ 是单调减，且趋于 0，所以由莱布尼茨定理知交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\ln(n+1)}$ 收敛。

对于正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$，因为 $\frac{1}{\ln(n+1)}>\frac{1}{n}$（利用不等式 $\ln(1+x)<x$，其中 $x>0$），而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，所以有比较审敛法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$ 发散。

结论：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\ln(n+1)}$ 是条件收敛。

(2) 对于正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin\frac{\pi}{n+1}}{\pi^{n+1}}\right|$，因为 $\left|\frac{\sin\frac{\pi}{n+1}}{\pi^{n+1}}\right|<\frac{1}{\pi^n}$，而等比级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^n}$ 收敛，所以有比较审敛法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin\frac{\pi}{n+1}}{\pi^{n+1}}\right|$ 发散。

结论：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin\frac{\pi}{n+1}}{\pi^{n+1}}$ 是绝对收敛。

(3) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\ln\frac{n+1}{n}$ 是交错级数，$u_n=\ln\frac{n+1}{n}=\ln(1+\frac{1}{n})$ 是单调减，且趋于 0，所以由莱布尼茨定理知交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\ln\frac{n+1}{n}$ 收敛。

对于正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n}$，因为其部分和

$$s_n=\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}=\ln\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{n}\right)=\ln(n+1)\to+\infty$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n}$ 发散。

结论：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\ln\frac{n+1}{n}$ 是条件收敛。

(4) 对于正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$，因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+2)!}{(n+1)^{n+2}}}{\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}\cdot(\frac{n}{n+1})^{n+1}=\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1})^{n+1}$$

$$\xlongequal{x=n+1}\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{x}=\lim_{x\to\infty}e^{x\ln(1-\frac{1}{x})}\xlongequal{t=\frac{1}{x}}e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{\ln(1-t)}{t}}\xlongequal{\text{洛必达法则}}e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{-\frac{1}{1-t}}{1}}=e^{-1}<1$$

所以有比值审敛法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$ 收敛。

结论：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$ 是绝对收敛。

练习 7. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$（不一定是正项级数）收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{v_n}{u_n}=1$。问级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 是否也收敛？说明理由。

解不一定收敛。例子

$$u_n=(-1)^n\frac{1}{n},\qquad v_n=(-1)^n\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散。

下面证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散。反证法，假设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛。注意到 $v_n-u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$，则由此推出

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}[v_n-u_n]=\sum_{n=1}^{\infty}v_n-\sum_{n=1}^{\infty}u_n$$

收敛。但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 显然是发散。矛盾。所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散。