

# 第 11 章 c: 积分路径无关; 格林公式

数学系 梁卓滨

2019-2020 学年 I

# Outline

1. 保守向量场；积分路径无关性

2. 格林公式

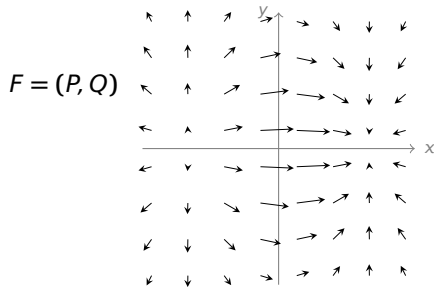
# We are here now...

1. 保守向量场；积分路径无关性

2. 格林公式

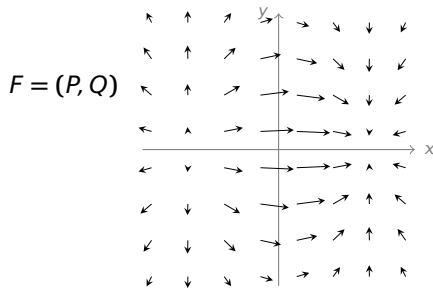
# 保守场

**定义** 设向量场  $F = (P, Q)$  定义在平面区域  $D$  上.



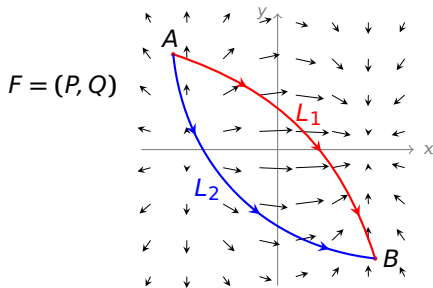
# 保守场

**定义** 设向量场  $F = (P, Q)$  定义在平面区域  $D$  上. 称  $F$  为 **保守场**, 是指对  $F$  的曲线积分是与路径无关.



# 保守场

**定义** 设向量场  $F = (P, Q)$  定义在平面区域  $D$  上. 称  $F$  为 **保守场**, 是指对  $F$  的曲线积分是与路径无关. 即:  $D$  内的任意两条有向曲线  $L_1, L_2$ , 只要具有相同的起点, 和相同的终点, 则

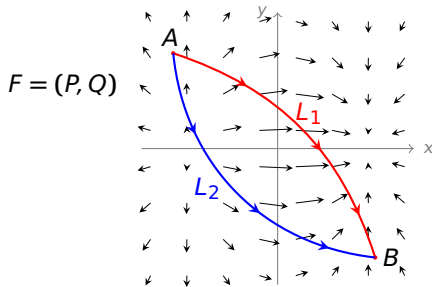


# 保守场

**定义** 设向量场  $F = (P, Q)$  定义在平面区域  $D$  上. 称  $F$  为 **保守场**, 是指对  $F$  的曲线积分是与路径无关. 即:  $D$  内的任意两条有向曲线  $L_1, L_2$ , 只要具有相同的起点, 和相同的终点, 则

都成立

$$\int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy.$$

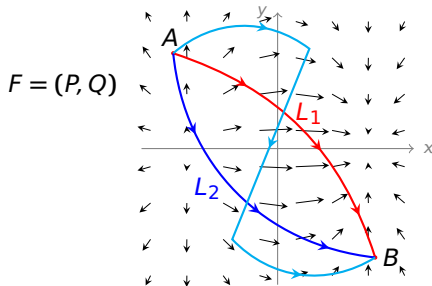


# 保守场

**定义** 设向量场  $F = (P, Q)$  定义在平面区域  $D$  上. 称  $F$  为 **保守场**, 是指对  $F$  的曲线积分是与路径无关. 即:  $D$  内的任意两条有向曲线  $L_1, L_2$ , 只要具有相同的起点, 和相同的终点, 则

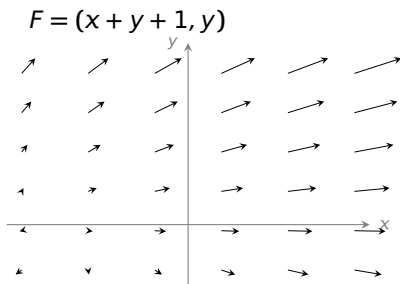
都成立

$$\int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy.$$

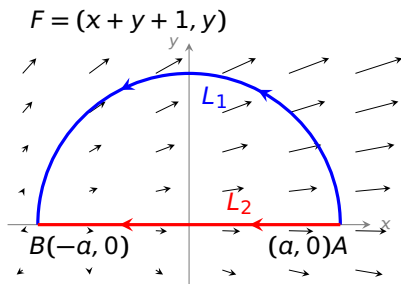




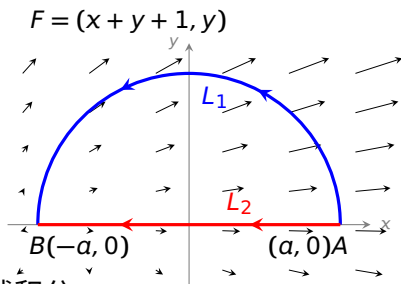
**例** 设  $F = (x + y + 1, y)$  是平面上向量场，如图



**例** 设  $F = (x + y + 1, y)$  是平面上向量场, 如图



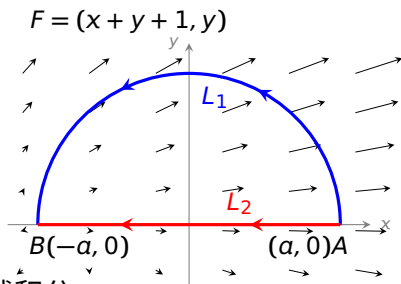
**例** 设  $F = (x + y + 1, y)$  是平面上向量场, 如图



考虑对向量场  $F$  的曲线积分

$$I_i = \int_{L_i} (x + y + 1)dx + ydy, \quad (i = 1, 2)$$

**例** 设  $F = (x + y + 1, y)$  是平面上向量场, 如图



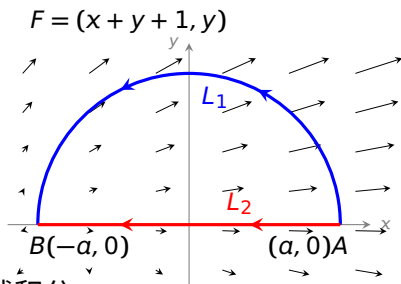
考虑对向量场  $F$  的曲线积分

$$I_i = \int_{L_i} (x + y + 1)dx + ydy, \quad (i = 1, 2)$$

计算知

$$I_1 = -\frac{1}{2}\pi a^2 - 2a, \quad I_2 = -2a$$

**例** 设  $F = (x + y + 1, y)$  是平面上向量场, 如图



考虑对向量场  $F$  的曲线积分

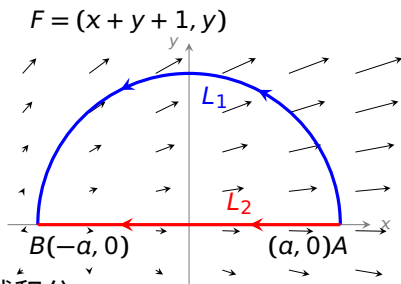
$$I_i = \int_{L_i} (x + y + 1)dx + ydy, \quad (i = 1, 2)$$

计算知

$$I_1 = -\frac{1}{2}\pi a^2 - 2a, \quad I_2 = -2a$$

可见  $I_1 \neq I_2$ .

**例** 设  $F = (x + y + 1, y)$  是平面上向量场, 如图



考虑对向量场  $F$  的曲线积分

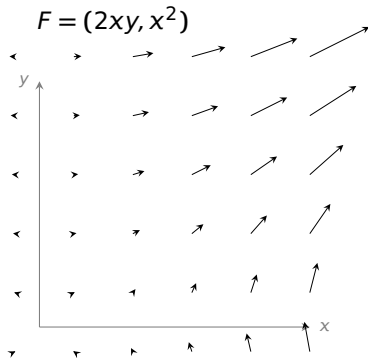
$$I_i = \int_{L_i} (x + y + 1)dx + ydy, \quad (i = 1, 2)$$

计算知

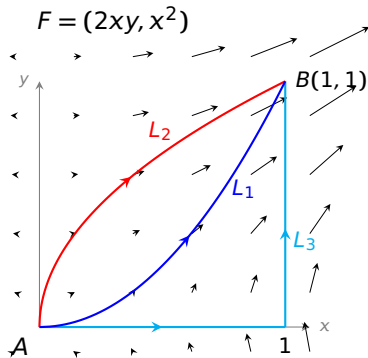
$$I_1 = -\frac{1}{2}\pi a^2 - 2a, \quad I_2 = -2a$$

可见  $I_1 \neq I_2$ . 所以  $F$  不是保守场

**例** 设  $F = (2xy, x^2)$  是平面上向量场，  
如图



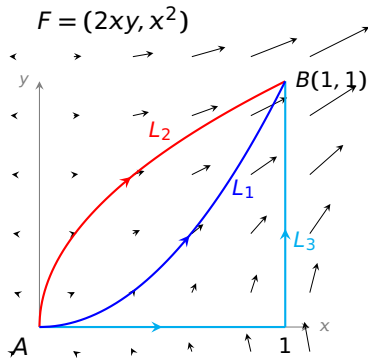
**例** 设  $F = (2xy, x^2)$  是平面上向量场，  
如图





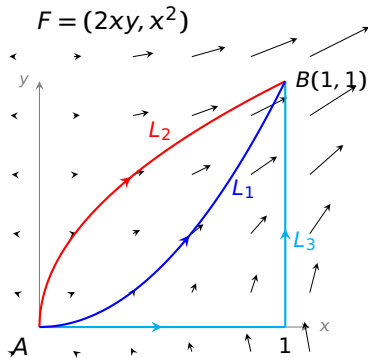
**例** 设  $F = (2xy, x^2)$  是平面上向量场，  
如图

考虑对向量场  $F$  的曲线积分



$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy, \quad (i = 1, 2, 3)$$

**例** 设  $F = (2xy, x^2)$  是平面上向量场，  
如图



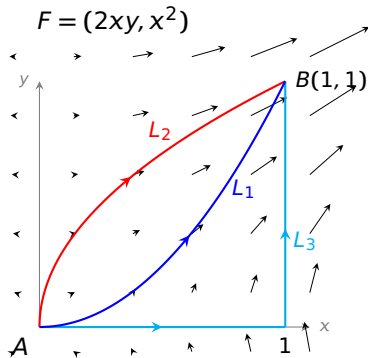
考虑对向量场  $F$  的曲线积分

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy, \quad (i = 1, 2, 3)$$

计算知

$$I_1 = I_2 = I_3 = 1$$

**例** 设  $F = (2xy, x^2)$  是平面上向量场，  
如图



考虑对向量场  $F$  的曲线积分

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy, \quad (i = 1, 2, 3)$$

计算知

$$I_1 = I_2 = I_3 = 1$$

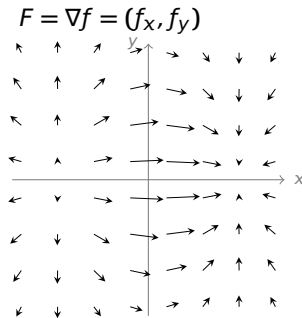
**问题**  $F$  是不是保守场？

**定理** 设  $f(x, y)$  是定义在区域  $D$  上的可微函数,  $F = \nabla f = (f_x, f_y)$

则梯度向量场

$$F = \nabla f = (f_x, f_y)$$

是保守场.



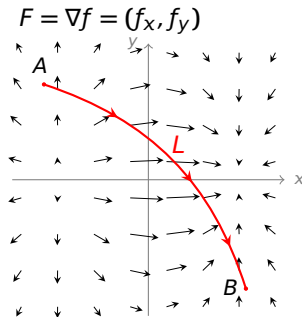
**定理** 设  $f(x, y)$  是定义在区域  $D$  上的可微函数，  
则梯度向量场

$$F = \nabla f = (f_x, f_y)$$

是保守场.

**证明** 设  $A, B$  是  $D$  中任意两点，

$L$  是  $D$  中从  $A$  到  $B$  的任一条有向曲线，



**定理** 设  $f(x, y)$  是定义在区域  $D$  上的可微函数，  
则梯度向量场

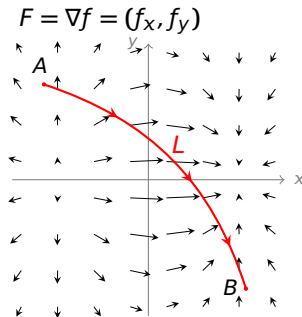
$$F = \nabla f = (f_x, f_y)$$

是保守场.

**证明** 设  $A, B$  是  $D$  中任意两点，

$L$  是  $D$  中从  $A$  到  $B$  的任一条有向曲线，

$$\int_L f_x dx + f_y dy$$



**定理** 设  $f(x, y)$  是定义在区域  $D$  上的可微函数，  
则梯度向量场

$$F = \nabla f = (f_x, f_y)$$

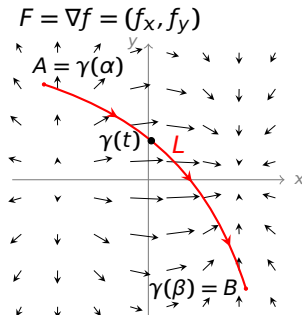
是保守场。

**证明** 设  $A, B$  是  $D$  中任意两点，

$L$  是  $D$  中从  $A$  到  $B$  的任一条有向曲线，

$\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ ,  $t: \alpha \rightarrow \beta$  是  $L$  的参数方程，

$$\int_L f_x dx + f_y dy$$



**定理** 设  $f(x, y)$  是定义在区域  $D$  上的可微函数，  
则梯度向量场

$$F = \nabla f = (f_x, f_y)$$

是保守场.

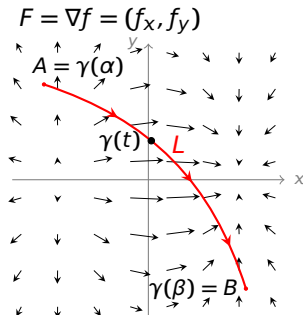
**证明** 设  $A, B$  是  $D$  中任意两点，

$L$  是  $D$  中从  $A$  到  $B$  的任一条有向曲线，

$\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ ,  $t: \alpha \rightarrow \beta$  是  $L$  的参数方程，

则

$$\int_L f_x dx + f_y dy = \int_{\alpha}^{\beta} \left[ f_x(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + f_y(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) \right] dt$$





**定理** 设  $f(x, y)$  是定义在区域  $D$  上的可微函数，  
则梯度向量场

$$F = \nabla f = (f_x, f_y)$$

是保守场.

**证明** 设  $A, B$  是  $D$  中任意两点，

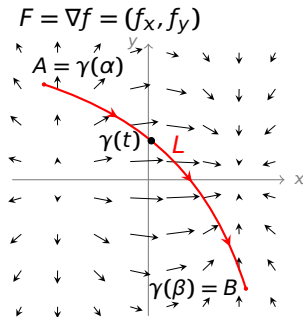
$L$  是  $D$  中从  $A$  到  $B$  的任一条有向曲线，

$\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ ,  $t: \alpha \rightarrow \beta$  是  $L$  的参数方程，

则

$$\int_L f_x dx + f_y dy = \int_{\alpha}^{\beta} \left[ f_x(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) + f_y(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t) \right] dt$$

$$\frac{d}{dt} f(\varphi(t), \psi(t))$$



**定理** 设  $f(x, y)$  是定义在区域  $D$  上的可微函数，  
则梯度向量场

$$F = \nabla f = (f_x, f_y)$$

是保守场.

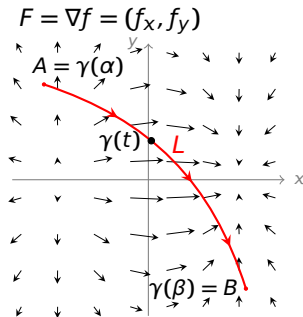
**证明** 设  $A, B$  是  $D$  中任意两点，

$L$  是  $D$  中从  $A$  到  $B$  的任一条有向曲线，

$\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ ,  $t: \alpha \rightarrow \beta$  是  $L$  的参数方程，

则

$$\begin{aligned} \int_L f_x dx + f_y dy &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[ f_x(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) + f_y(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t) \right] dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[ \frac{d}{dt} f(\varphi(t), \psi(t)) \right] dt \end{aligned}$$



**定理** 设  $f(x, y)$  是定义在区域  $D$  上的可微函数，  
则梯度向量场

$$F = \nabla f = (f_x, f_y)$$

是保守场.

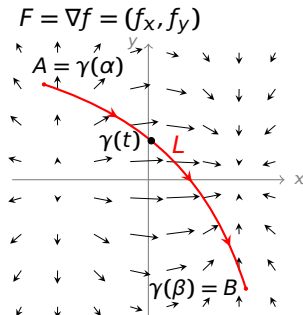
**证明** 设  $A, B$  是  $D$  中任意两点，

$L$  是  $D$  中从  $A$  到  $B$  的任一条有向曲线，

$\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ ,  $t: \alpha \rightarrow \beta$  是  $L$  的参数方程，

则

$$\begin{aligned}\int_L f_x dx + f_y dy &= \int_\alpha^\beta \left[ f_x(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + f_y(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) \right] dt \\ &= \int_\alpha^\beta \left[ \frac{d}{dt} f(\varphi(t), \psi(t)) \right] dt \\ &= f(\varphi(\beta), \psi(\beta)) - f(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))\end{aligned}$$



**定理** 设  $f(x, y)$  是定义在区域  $D$  上的可微函数，  
则梯度向量场

$$F = \nabla f = (f_x, f_y)$$

是保守场.

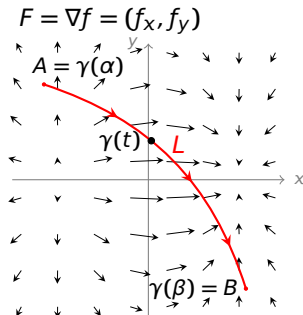
**证明** 设  $A, B$  是  $D$  中任意两点，

$L$  是  $D$  中从  $A$  到  $B$  的任一条有向曲线，

$\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ ,  $t: \alpha \rightarrow \beta$  是  $L$  的参数方程，

则

$$\begin{aligned}\int_L f_x dx + f_y dy &= \int_\alpha^\beta \left[ f_x(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + f_y(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) \right] dt \\ &= \int_\alpha^\beta \left[ \frac{d}{dt} f(\varphi(t), \psi(t)) \right] dt \\ &= f(\varphi(\beta), \psi(\beta)) - f(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)) = f(B) - f(A)\end{aligned}$$



**定理** 设  $f(x, y)$  是定义在区域  $D$  上的可微函数，  
则梯度向量场

$$F = \nabla f = (f_x, f_y)$$

是保守场.

**证明** 设  $A, B$  是  $D$  中任意两点，

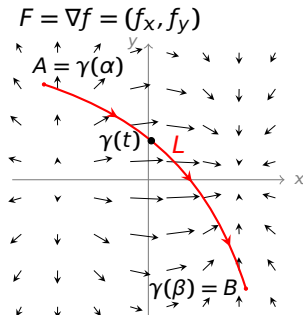
$L$  是  $D$  中从  $A$  到  $B$  的任一条有向曲线，

$\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ ,  $t: \alpha \rightarrow \beta$  是  $L$  的参数方程，

则

$$\begin{aligned}\int_L f_x dx + f_y dy &= \int_\alpha^\beta \left[ f_x(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + f_y(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) \right] dt \\ &= \int_\alpha^\beta \left[ \frac{d}{dt} f(\varphi(t), \psi(t)) \right] dt \\ &= f(\varphi(\beta), \psi(\beta)) - f(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)) = f(B) - f(A)\end{aligned}$$

可见曲线积分与路径无关，所以  $\nabla f$  是保守场.



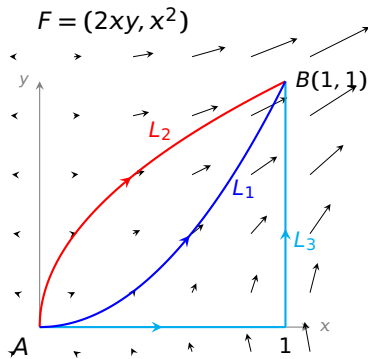
**例** 设  $F = (2xy, x^2)$  是平面上向量场，  
如图

向量场  $F$  的曲线积分

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy, (i = 1, 2, 3)$$

成立  $I_1 = I_2 = I_3 = 1$

**问题**  $F$  是不是保守场？



**例** 设  $F = (2xy, x^2)$  是平面上向量场，  
如图

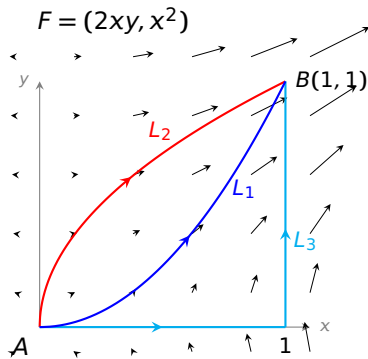
向量场  $F$  的曲线积分

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy, (i = 1, 2, 3)$$

成立  $I_1 = I_2 = I_3 = 1$

**问题**  $F$  是不是保守场？

**回答** 事实上， $F$  是保守场，证明如下：



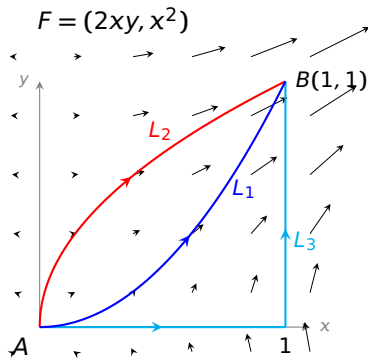
**例** 设  $F = (2xy, x^2)$  是平面上向量场，  
如图

向量场  $F$  的曲线积分

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy, (i = 1, 2, 3)$$

成立  $I_1 = I_2 = I_3 = 1$

**问题**  $F$  是不是保守场？



**回答** 事实上， $F$  是保守场，证明如下：令  $f(x, y) =$  ，则

$$\nabla f = (2xy, x^2) = F$$



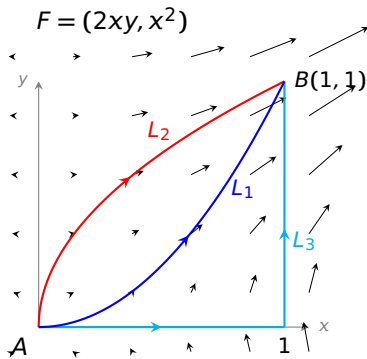
**例** 设  $F = (2xy, x^2)$  是平面上向量场，  
如图

向量场  $F$  的曲线积分

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy, (i = 1, 2, 3)$$

成立  $I_1 = I_2 = I_3 = 1$

**问题**  $F$  是不是保守场？



**回答** 事实上， $F$  是保守场，证明如下：令  $f(x, y) = x^2y$ ，则

$$\nabla f = (2xy, x^2) = F$$

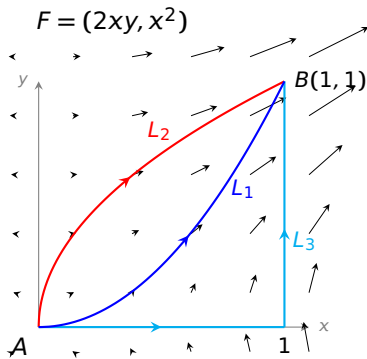
**例** 设  $F = (2xy, x^2)$  是平面上向量场，  
如图

向量场  $F$  的曲线积分

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy, (i = 1, 2, 3)$$

成立  $I_1 = I_2 = I_3 = 1$

**问题**  $F$  是不是保守场？



**回答** 事实上， $F$  是保守场，证明如下：令  $f(x, y) = x^2y$ ，则

$$\nabla f = (2xy, x^2) = F$$

所以  $F$  是梯度向量场，从而是保守场。

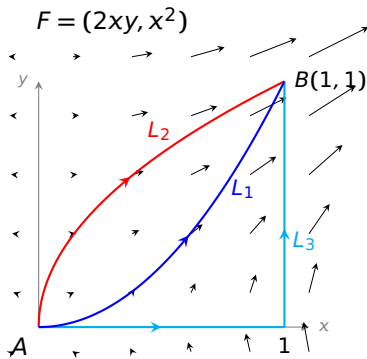
**例** 设  $F = (2xy, x^2)$  是平面上向量场，  
如图

向量场  $F$  的曲线积分

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy, (i = 1, 2, 3)$$

成立  $I_1 = I_2 = I_3 = 1$

**问题**  $F$  是不是保守场？



**回答** 事实上， $F$  是保守场，证明如下：令  $f(x, y) = x^2y$ ，则

$$\nabla f = (2xy, x^2) = F$$

所以  $F$  是梯度向量场，从而是保守场。

**注** 由于  $F = \nabla f$ ，所以

$$\int_{\cdot} 2xydx + x^2dy$$

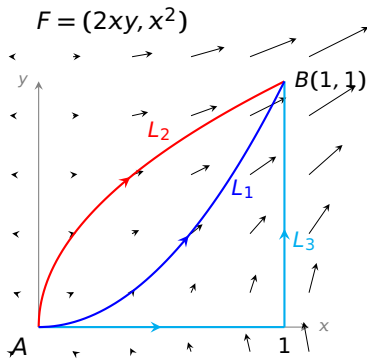
**例** 设  $F = (2xy, x^2)$  是平面上向量场，  
如图

向量场  $F$  的曲线积分

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy, (i = 1, 2, 3)$$

成立  $I_1 = I_2 = I_3 = 1$

**问题**  $F$  是不是保守场？



**回答** 事实上， $F$  是保守场，证明如下：令  $f(x, y) = x^2y$ ，则

$$\nabla f = (2xy, x^2) = F$$

所以  $F$  是梯度向量场，从而是保守场。

**注** 由于  $F = \nabla f$ ，所以

$$\int_{\cdot} 2xydx + x^2dy = f(B) - f(A)$$

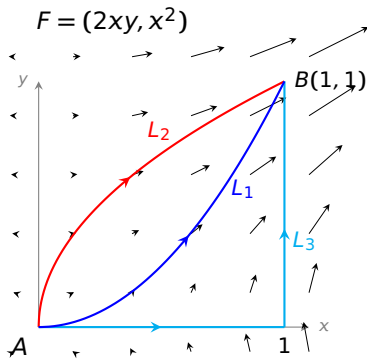
**例** 设  $F = (2xy, x^2)$  是平面上向量场，  
如图

向量场  $F$  的曲线积分

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy, (i = 1, 2, 3)$$

成立  $I_1 = I_2 = I_3 = 1$

**问题**  $F$  是不是保守场？



**回答** 事实上， $F$  是保守场，证明如下：令  $f(x, y) = x^2y$ ，则

$$\nabla f = (2xy, x^2) = F$$

所以  $F$  是梯度向量场，从而是保守场。

**注** 由于  $F = \nabla f$ ，所以

$$\int_{\cdot} 2xydx + x^2dy = f(B) - f(A) = f(1, 1) - f(0, 0)$$

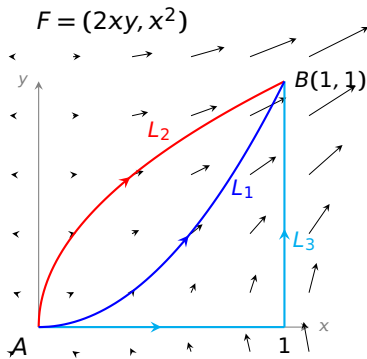
**例** 设  $F = (2xy, x^2)$  是平面上向量场，  
如图

向量场  $F$  的曲线积分

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy, (i = 1, 2, 3)$$

成立  $I_1 = I_2 = I_3 = 1$

**问题**  $F$  是不是保守场？



**回答** 事实上， $F$  是保守场，证明如下：令  $f(x, y) = x^2y$ ，则

$$\nabla f = (2xy, x^2) = F$$

所以  $F$  是梯度向量场，从而是保守场。

**注** 由于  $F = \nabla f$ ，所以

$$\int_{\cdot} 2xydx + x^2dy = f(B) - f(A) = f(1, 1) - f(0, 0) = 1$$

**例** 计算  $\int_L ydx + xdy$ , 其中有向曲线  $L$  的参数方程是:  
 $(t^9, \sin^9(\frac{\pi}{2}t)), t: 0 \rightarrow 1$ .

**例** 计算  $\int_L ydx + xdy$ , 其中有向曲线  $L$  的参数方程是:  
 $(t^9, \sin^9(\frac{\pi}{2}t)), t: 0 \rightarrow 1$ .

**解** 注意到向量场  $F = (y, x)$



**例** 计算  $\int_L ydx + xdy$ , 其中有向曲线  $L$  的参数方程是:  
 $(t^9, \sin^9(\frac{\pi}{2}t)), t: 0 \rightarrow 1$ .

**解** 注意到向量场  $F = (y, x)$  是  $f(x, y) =$  梯度向量:

$$F = (y, x) = \nabla f$$

**例** 计算  $\int_L ydx + xdy$ , 其中有向曲线  $L$  的参数方程是:  
 $(t^9, \sin^9(\frac{\pi}{2}t)), t: 0 \rightarrow 1$ .

**解** 注意到向量场  $F = (y, x)$  是  $f(x, y) =$  梯度向量:

$$F = (y, x) = \nabla f$$

$$\int_L ydx + xdy = f(\quad) - f(\quad)$$

**例** 计算  $\int_L ydx + xdy$ , 其中有向曲线  $L$  的参数方程是:  
 $(t^9, \sin^9(\frac{\pi}{2}t)), t: 0 \rightarrow 1$ .

**解** 注意到向量场  $F = (y, x)$  是  $f(x, y) = xy$  梯度向量:

$$F = (y, x) = \nabla f$$

$$\int_L ydx + xdy = f(\quad) - f(\quad)$$

**例** 计算  $\int_L ydx + xdy$ , 其中有向曲线  $L$  的参数方程是:  
 $(t^9, \sin^9(\frac{\pi}{2}t)), t: 0 \rightarrow 1$ .

**解** 注意到向量场  $F = (y, x)$  是  $f(x, y) = xy$  梯度向量:

$$F = (y, x) = \nabla f$$

而  $L$  是从点  $(0, 0)$  到点  $(1, 1)$  的曲线, 所以

$$\int_L ydx + xdy = f(\quad) - f(\quad)$$

**例** 计算  $\int_L ydx + xdy$ , 其中有向曲线  $L$  的参数方程是:  
 $(t^9, \sin^9(\frac{\pi}{2}t)), t: 0 \rightarrow 1$ .

**解** 注意到向量场  $F = (y, x)$  是  $f(x, y) = xy$  梯度向量:

$$F = (y, x) = \nabla f$$

而  $L$  是从点  $(0, 0)$  到点  $(1, 1)$  的曲线, 所以

$$\int_L ydx + xdy = f(1, 1) - f(0, 0)$$

**例** 计算  $\int_L ydx + xdy$ , 其中有向曲线  $L$  的参数方程是:  
 $(t^9, \sin^9(\frac{\pi}{2}t)), t: 0 \rightarrow 1$ .

**解** 注意到向量场  $F = (y, x)$  是  $f(x, y) = xy$  梯度向量:

$$F = (y, x) = \nabla f$$

而  $L$  是从点  $(0, 0)$  到点  $(1, 1)$  的曲线, 所以

$$\int_L ydx + xdy = f(1, 1) - f(0, 0) = 1.$$

**例** 计算  $\int_L ydx + xdy$ , 其中有向曲线  $L$  的参数方程是:  
 $(t^9, \sin^9(\frac{\pi}{2}t)), t: 0 \rightarrow 1$ .

**解** 注意到向量场  $F = (y, x)$  是  $f(x, y) = xy$  梯度向量:

$$F = (y, x) = \nabla f$$

而  $L$  是从点  $(0, 0)$  到点  $(1, 1)$  的曲线, 所以

$$\int_L ydx + xdy = f(1, 1) - f(0, 0) = 1.$$

---

**定义** 给定向量场  $F$ , 如果函数  $f(x, y)$  满足  $F = \nabla f$ , 则称  $f$  为向量场  $F$  的一个 **势函数**.

**定理** 设  $F = (P, Q)$  是定义在区域  $D$  上的向量场，则以下等价：

- (1)  $F$  是保守场，
- (2)  $F$  是梯度向量场，即存在势函数  $f(x, y)$  使得  $F = \nabla f$ .



**定理** 设  $F = (P, Q)$  是定义在区域  $D$  上的向量场，则以下等价：

- (1)  $F$  是保守场，
- (2)  $F$  是梯度向量场，即存在势函数  $f(x, y)$  使得  $F = \nabla f$ .

**证明** “(2)  $\Rightarrow$  (1)” 已证，只需再证 “(1)  $\Rightarrow$  (2)” ...

**定理** 设  $F = (P, Q)$  是定义在区域  $D$  上的向量场，则以下等价：

- (1)  $F$  是保守场，
- (2)  $F$  是梯度向量场，即存在势函数  $f(x, y)$  使得  $F = \nabla f$ .

**证明** “(2)  $\Rightarrow$  (1)” 已证，只需再证 “(1)  $\Rightarrow$  (2)” ...

---

**推论** 设  $F = (P, Q)$  是保守场，则  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ，

**定理** 设  $F = (P, Q)$  是定义在区域  $D$  上的向量场，则以下等价：

- (1)  $F$  是保守场，
- (2)  $F$  是梯度向量场，即存在势函数  $f(x, y)$  使得  $F = \nabla f$ .

**证明** “(2)  $\Rightarrow$  (1)” 已证，只需再证 “(1)  $\Rightarrow$  (2)” ...

---

**推论** 设  $F = (P, Q)$  是保守场，则  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ，等价地， $\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0$

**定理** 设  $F = (P, Q)$  是定义在区域  $D$  上的向量场, 则以下等价:

- (1)  $F$  是保守场,
- (2)  $F$  是梯度向量场, 即存在势函数  $f(x, y)$  使得  $F = \nabla f$ .

**证明** “(2)  $\Rightarrow$  (1)” 已证, 只需再证 “(1)  $\Rightarrow$  (2)” ...

---

**推论** 设  $F = (P, Q)$  是保守场, 则  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , 等价地,  $\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0$

**证明** 由定理, 存在势函数  $f(x, y)$  使得  $F = \nabla f$ , 所以

**定理** 设  $F = (P, Q)$  是定义在区域  $D$  上的向量场, 则以下等价:

- (1)  $F$  是保守场,
- (2)  $F$  是梯度向量场, 即存在势函数  $f(x, y)$  使得  $F = \nabla f$ .

**证明** “(2)  $\Rightarrow$  (1)” 已证, 只需再证 “(1)  $\Rightarrow$  (2)” ...

---

**推论** 设  $F = (P, Q)$  是保守场, 则  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , 等价地,  $\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0$

**证明** 由定理, 存在势函数  $f(x, y)$  使得  $F = \nabla f$ , 所以

$$P = f_x, \quad Q = f_y$$

**定理** 设  $F = (P, Q)$  是定义在区域  $D$  上的向量场, 则以下等价:

- (1)  $F$  是保守场,
- (2)  $F$  是梯度向量场, 即存在势函数  $f(x, y)$  使得  $F = \nabla f$ .

**证明** “(2)  $\Rightarrow$  (1)” 已证, 只需再证 “(1)  $\Rightarrow$  (2)” ...

---

**推论** 设  $F = (P, Q)$  是保守场, 则  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , 等价地,  $\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0$

**证明** 由定理, 存在势函数  $f(x, y)$  使得  $F = \nabla f$ , 所以

$$P = f_x, Q = f_y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \quad, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} =$$

**定理** 设  $F = (P, Q)$  是定义在区域  $D$  上的向量场, 则以下等价:

- (1)  $F$  是保守场,
- (2)  $F$  是梯度向量场, 即存在势函数  $f(x, y)$  使得  $F = \nabla f$ .

**证明** “(2)  $\Rightarrow$  (1)” 已证, 只需再证 “(1)  $\Rightarrow$  (2)” ...

---

**推论** 设  $F = (P, Q)$  是保守场, 则  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , 等价地,  $\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0$

**证明** 由定理, 存在势函数  $f(x, y)$  使得  $F = \nabla f$ , 所以

$$P = f_x, Q = f_y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y} = f_{xy}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} =$$

**定理** 设  $F = (P, Q)$  是定义在区域  $D$  上的向量场, 则以下等价:

- (1)  $F$  是保守场,
- (2)  $F$  是梯度向量场, 即存在势函数  $f(x, y)$  使得  $F = \nabla f$ .

**证明** “(2)  $\Rightarrow$  (1)” 已证, 只需再证 “(1)  $\Rightarrow$  (2)” ...

---

**推论** 设  $F = (P, Q)$  是保守场, 则  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , 等价地,  $\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0$

**证明** 由定理, 存在势函数  $f(x, y)$  使得  $F = \nabla f$ , 所以

$$P = f_x, Q = f_y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y} = f_{xy}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = f_{yx}$$



**定理** 设  $F = (P, Q)$  是定义在区域  $D$  上的向量场, 则以下等价:

- (1)  $F$  是保守场,
- (2)  $F$  是梯度向量场, 即存在势函数  $f(x, y)$  使得  $F = \nabla f$ .

**证明** “(2)  $\Rightarrow$  (1)” 已证, 只需再证 “(1)  $\Rightarrow$  (2)” ...

---

**推论** 设  $F = (P, Q)$  是保守场, 则  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , 等价地,  $\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0$

**证明** 由定理, 存在势函数  $f(x, y)$  使得  $F = \nabla f$ , 所以

$$P = f_x, Q = f_y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y} = f_{xy}, \frac{\partial Q}{\partial x} = f_{yx} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

**定理** 设  $F = (P, Q)$  是定义在区域  $D$  上的向量场, 则以下等价:

- (1)  $F$  是保守场,
- (2)  $F$  是梯度向量场, 即存在势函数  $f(x, y)$  使得  $F = \nabla f$ .

**证明** “(2)  $\Rightarrow$  (1)” 已证, 只需再证 “(1)  $\Rightarrow$  (2)” ...

---

**推论** 设  $F = (P, Q)$  是保守场, 则  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , 等价地,  $\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0$

**证明** 由定理, 存在势函数  $f(x, y)$  使得  $F = \nabla f$ , 所以

$$P = f_x, Q = f_y \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = f_{xy}, \frac{\partial Q}{\partial x} = f_{yx} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

---

**例**  $F = (x + y + 1, y)$  不是保守场.

**定理** 设  $F = (P, Q)$  是定义在区域  $D$  上的向量场, 则以下等价:

- (1)  $F$  是保守场,
- (2)  $F$  是梯度向量场, 即存在势函数  $f(x, y)$  使得  $F = \nabla f$ .

**证明** “(2)  $\Rightarrow$  (1)” 已证, 只需再证 “(1)  $\Rightarrow$  (2)” ...

---

**推论** 设  $F = (P, Q)$  是保守场, 则  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , 等价地,  $\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0$

**证明** 由定理, 存在势函数  $f(x, y)$  使得  $F = \nabla f$ , 所以

$$P = f_x, Q = f_y \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = f_{xy}, \frac{\partial Q}{\partial x} = f_{yx} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

---

**例**  $F = (x + y + 1, y)$  不是保守场. 这是  $\frac{\partial}{\partial y}(x + y + 1) \neq \frac{\partial}{\partial x}(y)$

**定理** 设  $F = (P, Q)$  是定义在区域  $D$  上的向量场, 则以下等价:

- (1)  $F$  是保守场,
- (2)  $F$  是梯度向量场, 即存在势函数  $f(x, y)$  使得  $F = \nabla f$ .

**证明** “(2)  $\Rightarrow$  (1)” 已证, 只需再证 “(1)  $\Rightarrow$  (2)” ...

---

**推论** 设  $F = (P, Q)$  是保守场, 则  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , 等价地,  $\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0$

**证明** 由定理, 存在势函数  $f(x, y)$  使得  $F = \nabla f$ , 所以

$$P = f_x, Q = f_y \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = f_{xy}, \frac{\partial Q}{\partial x} = f_{yx} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

---

**例**  $F = (x + y + 1, y)$  不是保守场. 这是  $\frac{\partial}{\partial y}(x + y + 1) \neq \frac{\partial}{\partial x}(y)$

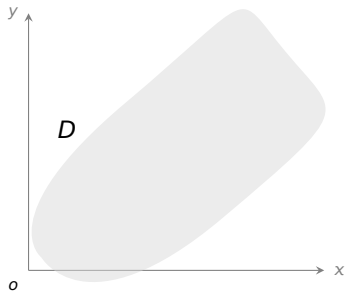
**定理** 设  $F = (P, Q)$  是定义在区域  $D$  上的向量场，则以下等价：

- (1)  $F$  是保守场，
- (2)  $F$  是梯度向量场，即存在势函数  $f(x, y)$  使得  $F = \nabla f$ .

**定理** 设  $F = (P, Q)$  是定义在区域  $D$  上的向量场，则以下等价：

- (1)  $F$  是保守场，
- (2)  $F$  是梯度向量场，即存在势函数  $f(x, y)$  使得  $F = \nabla f$ .

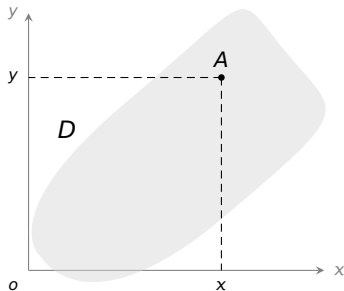
**证明** 下面证 “(1)  $\Rightarrow$  (2)”：



**定理** 设  $F = (P, Q)$  是定义在区域  $D$  上的向量场，则以下等价：

- (1)  $F$  是保守场，
- (2)  $F$  是梯度向量场，即存在势函数  $f(x, y)$  使得  $F = \nabla f$ .

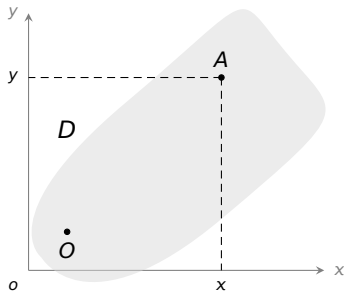
**证明** 下面证 “(1)  $\Rightarrow$  (2)”：如图，定义  $D$  中任意点  $P(x, y)$  的函数值为



**定理** 设  $F = (P, Q)$  是定义在区域  $D$  上的向量场，则以下等价：

- (1)  $F$  是保守场，
- (2)  $F$  是梯度向量场，即存在势函数  $f(x, y)$  使得  $F = \nabla f$ .

**证明** 下面证 “(1)  $\Rightarrow$  (2)”：如图，定义  $D$  中任意点  $P(x, y)$  的函数值为

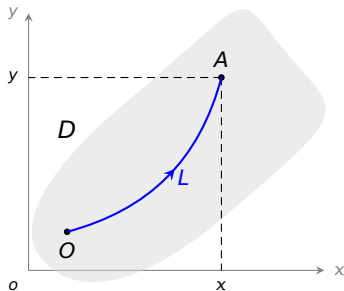




**定理** 设  $F = (P, Q)$  是定义在区域  $D$  上的向量场，则以下等价：

- (1)  $F$  是保守场，
- (2)  $F$  是梯度向量场，即存在势函数  $f(x, y)$  使得  $F = \nabla f$ .

**证明** 下面证 “(1)  $\Rightarrow$  (2)”：如图，定义  $D$  中任意点  $P(x, y)$  的函数值为

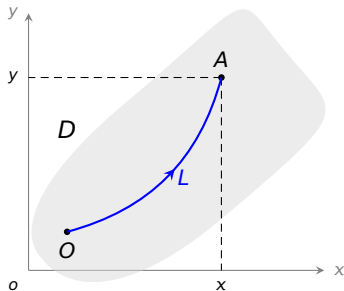


**定理** 设  $F = (P, Q)$  是定义在区域  $D$  上的向量场，则以下等价：

- (1)  $F$  是保守场，
- (2)  $F$  是梯度向量场，即存在势函数  $f(x, y)$  使得  $F = \nabla f$ .

**证明** 下面证 “(1)  $\Rightarrow$  (2)”：如图，定义  $D$  中任意点  $P(x, y)$  的函数值为

$$f(x, y) = \int_L Pdx + Qdy$$



**定理** 设  $F = (P, Q)$  是定义在区域  $D$  上的向量场，则以下等价：

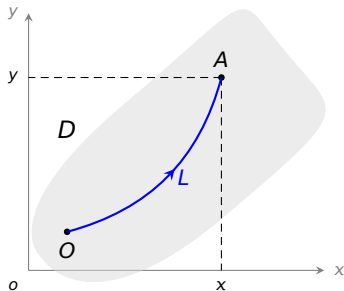
- (1)  $F$  是保守场，
- (2)  $F$  是梯度向量场，即存在势函数  $f(x, y)$  使得  $F = \nabla f$ .

**证明** 下面证 “(1)  $\Rightarrow$  (2)”：如图，定义  $D$  中任意点  $P(x, y)$  的函数值为

$$f(x, y) = \int_L Pdx + Qdy$$

所以

$$f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$



**定理** 设  $F = (P, Q)$  是定义在区域  $D$  上的向量场，则以下等价：

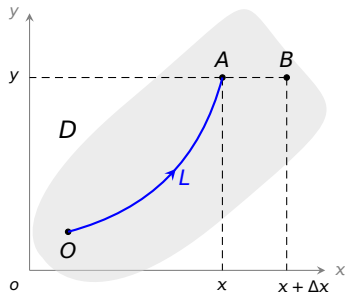
- (1)  $F$  是保守场，
- (2)  $F$  是梯度向量场，即存在势函数  $f(x, y)$  使得  $F = \nabla f$ .

**证明** 下面证 “(1)  $\Rightarrow$  (2)”：如图，定义  $D$  中任意点  $P(x, y)$  的函数值为

$$f(x, y) = \int_L Pdx + Qdy$$

所以

$$f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$



**定理** 设  $F = (P, Q)$  是定义在区域  $D$  上的向量场, 则以下等价:

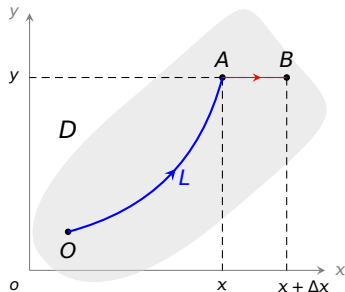
- (1)  $F$  是保守场,
- (2)  $F$  是梯度向量场, 即存在势函数  $f(x, y)$  使得  $F = \nabla f$ .

**证明** 下面证 “(1)  $\Rightarrow$  (2)” : 如图, 定义  $D$  中任意点  $P(x, y)$  的函数值为

$$f(x, y) = \int_L Pdx + Qdy$$

所以

$$f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$



**定理** 设  $F = (P, Q)$  是定义在区域  $D$  上的向量场, 则以下等价:

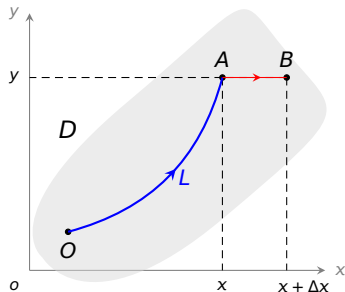
- (1)  $F$  是保守场,
- (2)  $F$  是梯度向量场, 即存在势函数  $f(x, y)$  使得  $F = \nabla f$ .

**证明** 下面证 “(1)  $\Rightarrow$  (2)” : 如图, 定义  $D$  中任意点  $P(x, y)$  的函数值为

$$f(x, y) = \int_L Pdx + Qdy$$

所以

$$f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$
$$\int_{\overrightarrow{AB}} Pdx + Qdy$$



**定理** 设  $F = (P, Q)$  是定义在区域  $D$  上的向量场, 则以下等价:

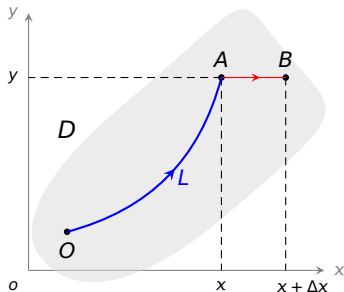
- (1)  $F$  是保守场,
- (2)  $F$  是梯度向量场, 即存在势函数  $f(x, y)$  使得  $F = \nabla f$ .

**证明** 下面证 “(1)  $\Rightarrow$  (2)” : 如图, 定义  $D$  中任意点  $P(x, y)$  的函数值为

$$f(x, y) = \int_L Pdx + Qdy$$

所以

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{\overrightarrow{AB}} Pdx + Qdy \end{aligned}$$



**定理** 设  $F = (P, Q)$  是定义在区域  $D$  上的向量场，则以下等价：

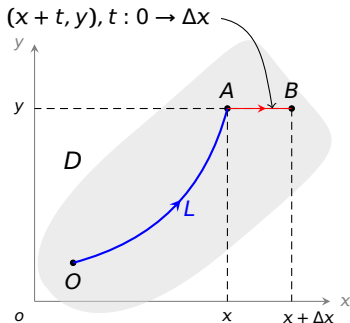
- (1)  $F$  是保守场，
- (2)  $F$  是梯度向量场，即存在势函数  $f(x, y)$  使得  $F = \nabla f$ .

**证明** 下面证 “(1)  $\Rightarrow$  (2)”：如图，定义  $D$  中任意点  $P(x, y)$  的函数值为

$$f(x, y) = \int_L Pdx + Qdy$$

所以

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{\overrightarrow{AB}} Pdx + Qdy \end{aligned}$$





**定理** 设  $F = (P, Q)$  是定义在区域  $D$  上的向量场, 则以下等价:

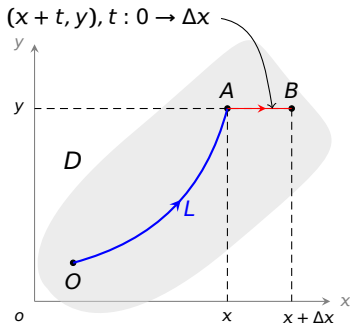
- (1)  $F$  是保守场,
- (2)  $F$  是梯度向量场, 即存在势函数  $f(x, y)$  使得  $F = \nabla f$ .

**证明** 下面证 “(1)  $\Rightarrow$  (2)” : 如图, 定义  $D$  中任意点  $P(x, y)$  的函数值为

$$f(x, y) = \int_L Pdx + Qdy$$

所以

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{\overrightarrow{AB}} Pdx + Qdy \\ &\quad \int_0^{\Delta x} P(x + t, y) dt \end{aligned}$$



**定理** 设  $F = (P, Q)$  是定义在区域  $D$  上的向量场, 则以下等价:

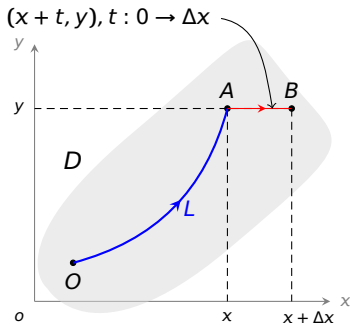
- (1)  $F$  是保守场,
- (2)  $F$  是梯度向量场, 即存在势函数  $f(x, y)$  使得  $F = \nabla f$ .

**证明** 下面证 “(1)  $\Rightarrow$  (2)” : 如图, 定义  $D$  中任意点  $P(x, y)$  的函数值为

$$f(x, y) = \int_L Pdx + Qdy$$

所以

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{\overrightarrow{AB}} Pdx + Qdy \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x} P(x + t, y) dt \end{aligned}$$



**定理** 设  $F = (P, Q)$  是定义在区域  $D$  上的向量场, 则以下等价:

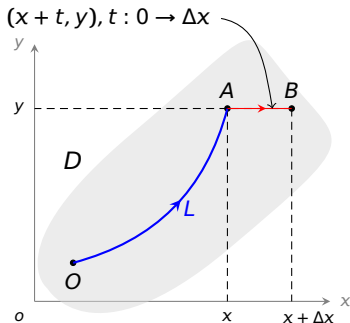
- (1)  $F$  是保守场,
- (2)  $F$  是梯度向量场, 即存在势函数  $f(x, y)$  使得  $F = \nabla f$ .

**证明** 下面证 “(1)  $\Rightarrow$  (2)” : 如图, 定义  $D$  中任意点  $P(x, y)$  的函数值为

$$f(x, y) = \int_L Pdx + Qdy$$

所以

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{\overrightarrow{AB}} Pdx + Qdy \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x} P(x + t, y) dt \\ &= P(x, y) \end{aligned}$$



**定理** 设  $F = (P, Q)$  是定义在区域  $D$  上的向量场, 则以下等价:

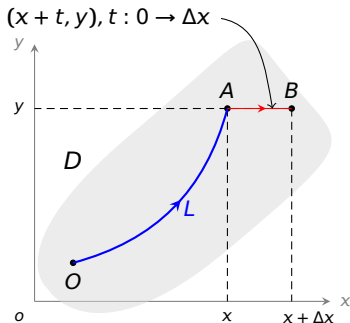
- (1)  $F$  是保守场,
- (2)  $F$  是梯度向量场, 即存在势函数  $f(x, y)$  使得  $F = \nabla f$ .

**证明** 下面证 “(1)  $\Rightarrow$  (2)” : 如图, 定义  $D$  中任意点  $P(x, y)$  的函数值为

$$f(x, y) = \int_L Pdx + Qdy$$

所以

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{\overrightarrow{AB}} Pdx + Qdy \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x} P(x + t, y) dt \\ &= P(x, y) \end{aligned}$$



同理可证,  $f_y(x, y) = Q(x, y)$ . 所以  $F = (f_x, f_y)$ .

**注** 设  $F = (P, Q)$  是向量场, 则

$$F \text{ 是保守向量场} \Rightarrow \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0$$

**注** 设  $F = (P, Q)$  是向量场, 则

$$F \text{ 是保守向量场} \Rightarrow \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0$$

但反过来不成立:

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0 \not\Rightarrow F \text{ 是保守向量场}$$

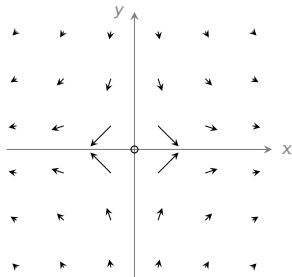
**注** 设  $F = (P, Q)$  是向量场, 则

$$F \text{ 是保守向量场} \Rightarrow \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0$$

但反过来不成立:

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0 \not\Rightarrow F \text{ 是保守向量场}$$

**例** 设向量场  $F = (P, G) = \left( \frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right)$



**注** 设  $F = (P, Q)$  是向量场, 则

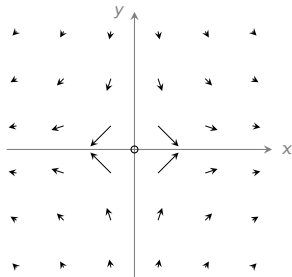
$$F \text{ 是保守向量场} \Rightarrow \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0$$

但反过来不成立:

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0 \not\Rightarrow F \text{ 是保守向量场}$$

**例** 设向量场  $F = (P, G) = \left( \frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right)$

- 定义域  $D = \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$





**注** 设  $F = (P, Q)$  是向量场, 则

$$F \text{ 是保守向量场} \Rightarrow \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0$$

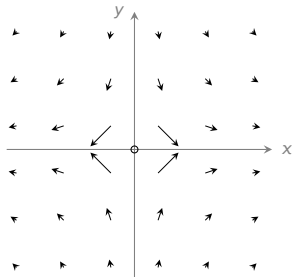
但反过来不成立:

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0 \not\Rightarrow F \text{ 是保守向量场}$$

**例** 设向量场  $F = (P, G) = \left( \frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right)$

- 定义域  $D = \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$

- $\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} =$



**注** 设  $F = (P, Q)$  是向量场, 则

$$F \text{ 是保守向量场} \Rightarrow \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0$$

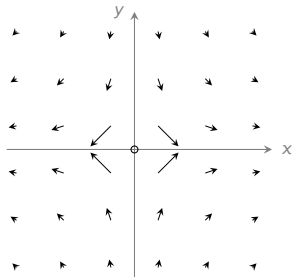
但反过来不成立:

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0 \not\Rightarrow F \text{ 是保守向量场}$$

**例** 设向量场  $F = (P, G) = \left( \frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right)$

• 定义域  $D = \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$

$$\bullet \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} - \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} =$$



**注** 设  $F = (P, Q)$  是向量场, 则

$$F \text{ 是保守向量场} \Rightarrow \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0$$

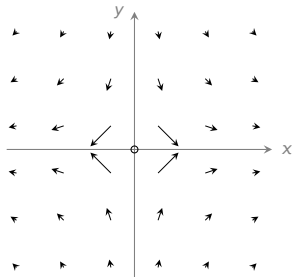
但反过来不成立:

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0 \not\Rightarrow F \text{ 是保守向量场}$$

**例** 设向量场  $F = (P, G) = \left( \frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right)$

• 定义域  $D = \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$

•  $\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} - \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} = 0$



**注** 设  $F = (P, Q)$  是向量场, 则

$$F \text{ 是保守向量场} \Rightarrow \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0$$

但反过来不成立:

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0 \not\Rightarrow F \text{ 是保守向量场}$$

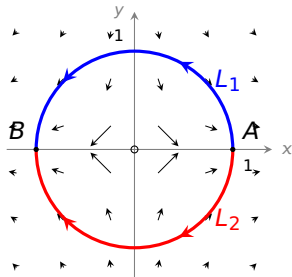
**例** 设向量场  $F = (P, G) = \left( \frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right)$

- 定义域  $D = \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$

- $\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} - \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} = 0$

- 曲线积分

$$I_i = \int_{L_i} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}, \quad (i = 1, 2)$$



**注** 设  $F = (P, Q)$  是向量场, 则

$$F \text{ 是保守向量场} \Rightarrow \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0$$

但反过来不成立:

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0 \not\Rightarrow F \text{ 是保守向量场}$$

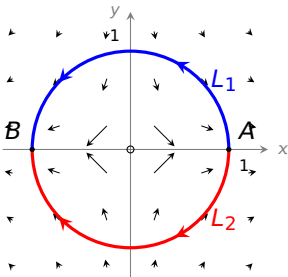
**例** 设向量场  $F = (P, G) = \left( \frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right)$

- 定义域  $D = \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$

- $\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} - \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} = 0$

- 曲线积分

$$I_i = \int_{L_i} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}, \quad (i = 1, 2)$$



的值是:  $I_1 = \pi, I_2 = -\pi$ .

**注** 设  $F = (P, Q)$  是向量场, 则

$$F \text{ 是保守向量场} \Rightarrow \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0$$

但反过来不成立:

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0 \not\Rightarrow F \text{ 是保守向量场}$$

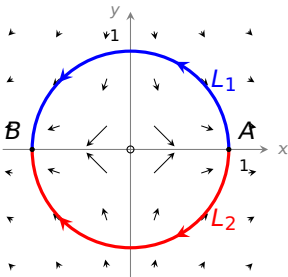
**例** 设向量场  $F = (P, G) = \left( \frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right)$

- 定义域  $D = \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$

- $\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} - \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} = 0$

- 曲线积分

$$I_i = \int_{L_i} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}, \quad (i = 1, 2)$$



的值是:  $I_1 = \pi, I_2 = -\pi$ . 故  $F$  不是保守场.

**定理** 设平面区域  $D$  是单连通,  $F = (P, Q)$  是定义在  $D$  上的向量场. 则

$$\left| \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \\ P \end{array} \quad \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial y} \\ Q \end{array} \right| = 0 \quad \Rightarrow \quad F \text{ 是保守向量场}$$

**定理** 设平面区域  $D$  是 **单连通** ,  $F = (P, Q)$  是定义在  $D$  上的向量场. 。则

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0 \quad \Rightarrow \quad F \text{ 是保守向量场}$$

(即此时存在  $D$  上二元函数  $f(x, y)$  使得  $F = \nabla f$ )



**定理** 设平面区域  $D$  是 **单连通**， $F = (P, Q)$  是定义在  $D$  上的向量场。则

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0 \Rightarrow F \text{ 是保守向量场}$$

(即此时存在  $D$  上二元函数  $f(x, y)$  使得  $F = \nabla f$ )

---

**定义** 平面区域  $D$  是 **单连通**，是指： $D$  中任意一条闭曲线，都能在  $D$  中收缩成一点

**定理** 设平面区域  $D$  是 **单连通**， $F = (P, Q)$  是定义在  $D$  上的向量场。则

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0 \Rightarrow F \text{ 是保守向量场}$$

(即此时存在  $D$  上二元函数  $f(x, y)$  使得  $F = \nabla f$ )

---

**定义** 平面区域  $D$  是 **单连通**，是指： $D$  中任意一条闭曲线，都能在  $D$  中收缩成一点（也就是，曲线在收缩过程保持在  $D$  中）。

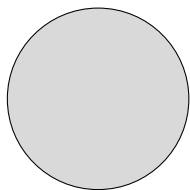
**定理** 设平面区域  $D$  是 **单连通**， $F = (P, Q)$  是定义在  $D$  上的向量场。则

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0 \Rightarrow F \text{ 是保守向量场}$$

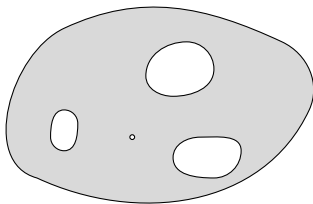
(即此时存在  $D$  上二元函数  $f(x, y)$  使得  $F = \nabla f$ )

**定义** 平面区域  $D$  是 **单连通**，是指： $D$  中任意一条闭曲线，都能在  $D$  中收缩成一点（也就是，曲线在收缩过程保持在  $D$  中）。

**例**



$D_1$



$D_2$

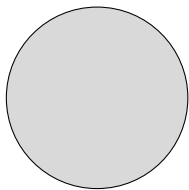
**定理** 设平面区域  $D$  是**单连通**， $F = (P, Q)$  是定义在  $D$  上的向量场。则

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0 \Rightarrow F \text{ 是保守向量场}$$

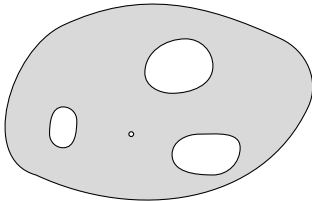
(即此时存在  $D$  上二元函数  $f(x, y)$  使得  $F = \nabla f$ )

**定义** 平面区域  $D$  是**单连通**，是指： $D$  中任意一条闭曲线，都能在  $D$  中收缩成一点（也就是，曲线在收缩过程保持在  $D$  中）。

**例** 如图， $D_1$  是单连通，而  $D_2$  不是



$D_1$



$D_2$

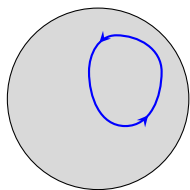
**定理** 设平面区域  $D$  是**单连通**， $F = (P, Q)$  是定义在  $D$  上的向量场。则

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0 \Rightarrow F \text{ 是保守向量场}$$

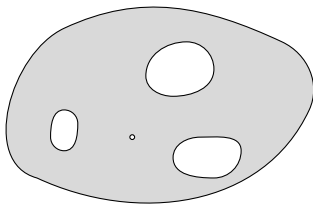
(即此时存在  $D$  上二元函数  $f(x, y)$  使得  $F = \nabla f$ )

**定义** 平面区域  $D$  是**单连通**，是指： $D$  中任意一条闭曲线，都能在  $D$  中收缩成一点（也就是，曲线在收缩过程保持在  $D$  中）。

**例** 如图， $D_1$  是单连通，而  $D_2$  不是



$D_1$



$D_2$

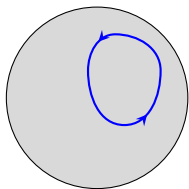
**定理** 设平面区域  $D$  是**单连通**， $F = (P, Q)$  是定义在  $D$  上的向量场。则

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0 \Rightarrow F \text{ 是保守向量场}$$

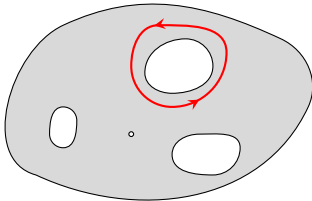
(即此时存在  $D$  上二元函数  $f(x, y)$  使得  $F = \nabla f$ )

**定义** 平面区域  $D$  是**单连通**，是指： $D$  中任意一条闭曲线，都能在  $D$  中收缩成一点（也就是，曲线在收缩过程保持在  $D$  中）。

**例** 如图， $D_1$  是单连通，而  $D_2$  不是



$D_1$



$D_2$

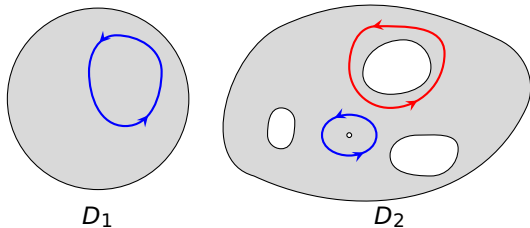
**定理** 设平面区域  $D$  是**单连通**， $F = (P, Q)$  是定义在  $D$  上的向量场。则

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0 \Rightarrow F \text{ 是保守向量场}$$

(即此时存在  $D$  上二元函数  $f(x, y)$  使得  $F = \nabla f$ )

**定义** 平面区域  $D$  是**单连通**，是指： $D$  中任意一条闭曲线，都能在  $D$  中收缩成一点（也就是，曲线在收缩过程保持在  $D$  中）。

**例** 如图， $D_1$  是单连通，而  $D_2$  不是



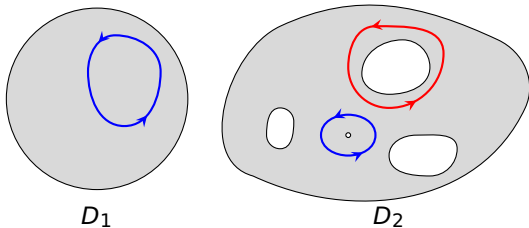
**定理** 设平面区域  $D$  是**单连通**， $F = (P, Q)$  是定义在  $D$  上的向量场。则

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0 \Rightarrow F \text{ 是保守向量场}$$

(即此时存在  $D$  上二元函数  $f(x, y)$  使得  $F = \nabla f$ )

**定义** 平面区域  $D$  是**单连通**，是指： $D$  中任意一条闭曲线，都能在  $D$  中收缩成一点（也就是，曲线在收缩过程保持在  $D$  中）。

**例** 如图， $D_1$  是单连通，而  $D_2$  不是



**注** 直观上，单连通区域是指不含“洞”、“孔”的区域



**定理** 设平面区域  $D$  是 **单连通** ,  $F = (P, Q)$  是定义在  $D$  上的向量场。则

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0 \quad \Rightarrow \quad F \text{ 是保守向量场}$$

(即此时存在  $D$  上势函数  $f(x, y)$  使得  $F = \nabla f$ )

---

**注** 上述定理中条件 “ $D$  是单连通” 是必须的.

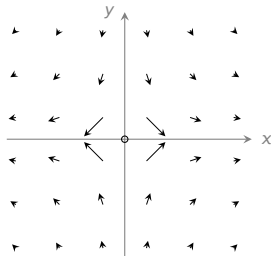
**定理** 设平面区域  $D$  是 **单连通** ,  $F = (P, Q)$  是定义在  $D$  上的向量场。则

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0 \Rightarrow F \text{ 是保守向量场}$$

(即此时存在  $D$  上势函数  $f(x, y)$  使得  $F = \nabla f$ )

**注** 上述定理中条件 “ $D$  是单连通” 是必须的.

**例** 设向量场  $F = (P, G) = \left( \frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right)$ .



**定理** 设平面区域  $D$  是 **单连通** ,  $F = (P, Q)$  是定义在  $D$  上的向量场。则

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0 \Rightarrow F \text{ 是保守向量场}$$

(即此时存在  $D$  上势函数  $f(x, y)$  使得  $F = \nabla f$ )

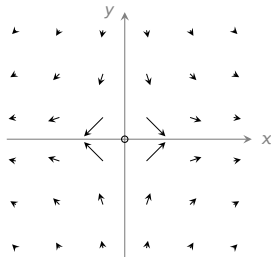
**注** 上述定理中条件 “ $D$  是单连通” 是必须的.

**例** 设向量场  $F = (P, G) = \left( \frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right)$ .

- 定义域  $D = \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$

- $$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} - \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} = 0$$

- 但  $F$  不是保守场:



**定理** 设平面区域  $D$  是**单连通**， $F = (P, Q)$  是定义在  $D$  上的向量场。则

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0 \Rightarrow F \text{ 是保守向量场}$$

(即此时存在  $D$  上势函数  $f(x, y)$  使得  $F = \nabla f$ )

**注** 上述定理中条件“ $D$  是单连通”是必须的。

**例** 设向量场  $F = (P, G) = \left( \frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right)$ .

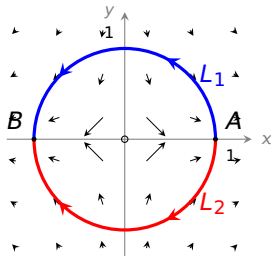
- 定义域  $D = \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$

- $$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} - \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} = 0$$

- 但  $F$  不是保守场:

$$I_i = \int_{L_i} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}, \quad (i = 1, 2)$$

的值是:  $I_1 = \pi, I_2 = -\pi$ .



**定理** 设平面区域  $D$  是**单连通**， $F = (P, Q)$  是定义在  $D$  上的向量场。则

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0 \Rightarrow F \text{ 是保守向量场}$$

(即此时存在  $D$  上势函数  $f(x, y)$  使得  $F = \nabla f$ )

**注** 上述定理中条件“ $D$  是单连通”是必须的。

**例** 设向量场  $F = (P, G) = \left( \frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right)$ .

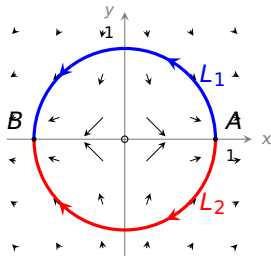
- 定义域  $D = \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$  (并不是单连通)

- $\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} - \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} = 0$

- 但  $F$  不是保守场:

$$I_i = \int_{L_i} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}, \quad (i = 1, 2)$$

的值是:  $I_1 = \pi, I_2 = -\pi$ .



## 补充

**性质** 设  $F = (P, Q)$  是定义在平面区域  $D$  上的向量场. 则以下说法等价:

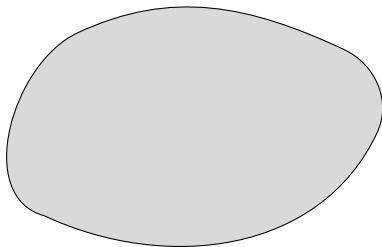
- (1)  $F$  是保守场
- (2)  $F$  在  $D$  中任意有向闭曲线  $C$  上的曲线积分为 0

补充

**性质** 设  $F = (P, Q)$  是定义在平面区域  $D$  上的向量场. 则以下说法等价:

- (1)  $F$  是保守场
- (2)  $F$  在  $D$  中任意有向闭曲线  $C$  上的曲线积分为 0

**证明**

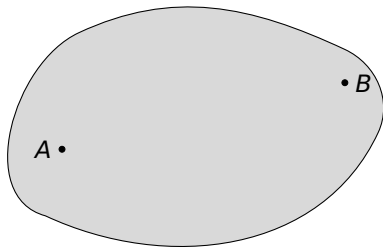


## 补充

**性质** 设  $F = (P, Q)$  是定义在平面区域  $D$  上的向量场. 则以下说法等价:

- (1)  $F$  是保守场
- (2)  $F$  在  $D$  中任意有向闭曲线  $C$  上的曲线积分为 0

## 证明



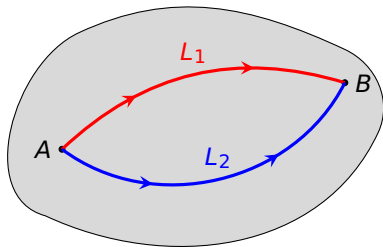


## 补充

**性质** 设  $F = (P, Q)$  是定义在平面区域  $D$  上的向量场. 则以下说法等价:

- (1)  $F$  是保守场
- (2)  $F$  在  $D$  中任意有向闭曲线  $C$  上的曲线积分为 0

## 证明



补充

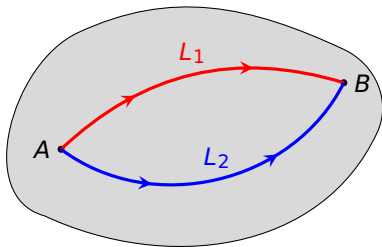
**性质** 设  $F = (P, Q)$  是定义在平面区域  $D$  上的向量场. 则以下说法等价:

- (1)  $F$  是保守场
- (2)  $F$  在  $D$  中任意有向闭曲线  $C$  上的曲线积分为 0

**证明**

$F$  是保守场

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy$$



补充

**性质** 设  $F = (P, Q)$  是定义在平面区域  $D$  上的向量场. 则以下说法等价:

(1)  $F$  是保守场

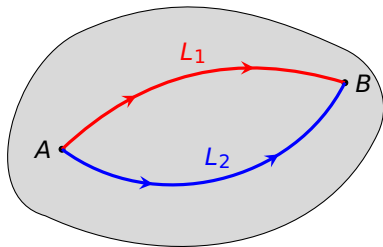
(2)  $F$  在  $D$  中任意有向闭曲线  $C$  上的曲线积分为 0

**证明**

$F$  是保守场

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy$$

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx + Qdy - \int_{L_2} Pdx + Qdy = 0$$



## 补充

**性质** 设  $F = (P, Q)$  是定义在平面区域  $D$  上的向量场. 则以下说法等价:

(1)  $F$  是保守场

(2)  $F$  在  $D$  中任意有向闭曲线  $C$  上的曲线积分为 0

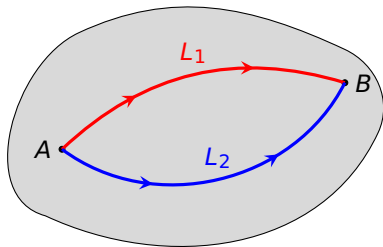
## 证明

$F$  是保守场

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy$$

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx + Qdy - \int_{L_2} Pdx + Qdy = 0$$

$$\int_{-L_2} Pdx + Qdy$$



## 补充

**性质** 设  $F = (P, Q)$  是定义在平面区域  $D$  上的向量场. 则以下说法等价:

(1)  $F$  是保守场

(2)  $F$  在  $D$  中任意有向闭曲线  $C$  上的曲线积分为 0

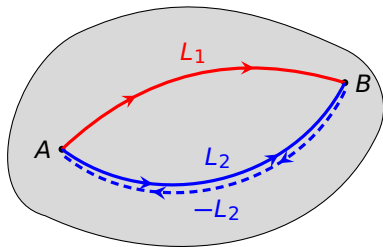
## 证明

$F$  是保守场

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy$$

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx + Qdy - \int_{L_2} Pdx + Qdy = 0$$

$$\int_{-L_2} Pdx + Qdy$$



## 补充

**性质** 设  $F = (P, Q)$  是定义在平面区域  $D$  上的向量场. 则以下说法等价:

- (1)  $F$  是保守场
- (2)  $F$  在  $D$  中任意有向闭曲线  $C$  上的曲线积分为 0

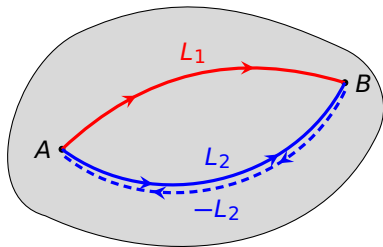
## 证明

$F$  是保守场

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy$$

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx + Qdy - \int_{L_2} Pdx + Qdy = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx + Qdy + \int_{-L_2} Pdx + Qdy = 0$$



补充

**性质** 设  $F = (P, Q)$  是定义在平面区域  $D$  上的向量场. 则以下说法等价:

(1)  $F$  是保守场

(2)  $F$  在  $D$  中任意有向闭曲线  $C$  上的曲线积分为 0

**证明**

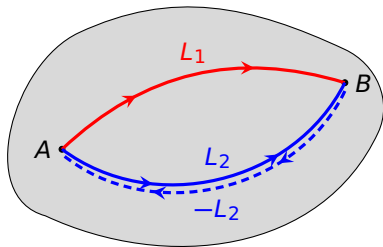
$F$  是保守场

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy$$

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx + Qdy - \int_{L_2} Pdx + Qdy = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx + Qdy + \int_{-L_2} Pdx + Qdy = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{L_1 + (-L_2)} Pdx + Qdy = 0$$



补充

**性质** 设  $F = (P, Q)$  是定义在平面区域  $D$  上的向量场. 则以下说法等价:

(1)  $F$  是保守场

(2)  $F$  在  $D$  中任意有向闭曲线  $C$  上的曲线积分为 0

**证明**

$F$  是保守场

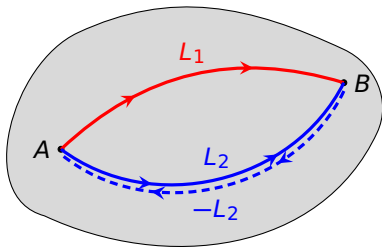
$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy$$

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx + Qdy - \int_{L_2} Pdx + Qdy = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx + Qdy + \int_{-L_2} Pdx + Qdy = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{L_1 + (-L_2)} Pdx + Qdy = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_C Pdx + Qdy = 0$$





## 小结

- 设  $F = (P, Q)$  是定义在平面区域  $D$  上的向量场, 则

# 小结

- 设  $F = (P, Q)$  是定义在平面区域  $D$  上的向量场, 则

$F$  是梯度向量场 (势场), 即  $F = \nabla f$

$F$  是保守向量场

$F$  在任意闭曲线上的曲线积分为 0

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0$$

# 小结

- 设  $F = (P, Q)$  是定义在平面区域  $D$  上的向量场，则

$F$  是保守向量场

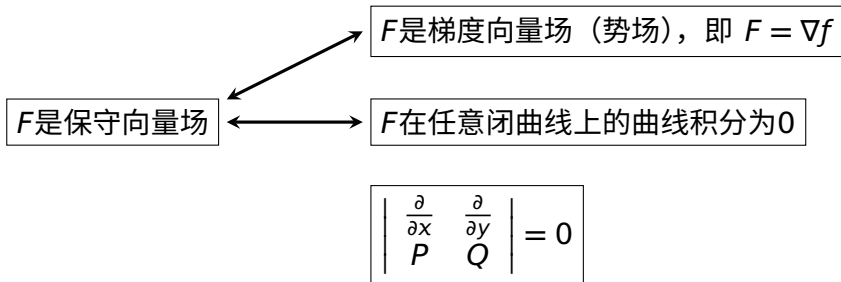
$F$  是梯度向量场（势场），即  $F = \nabla f$

$F$  在任意闭曲线上的曲线积分为 0

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0$$

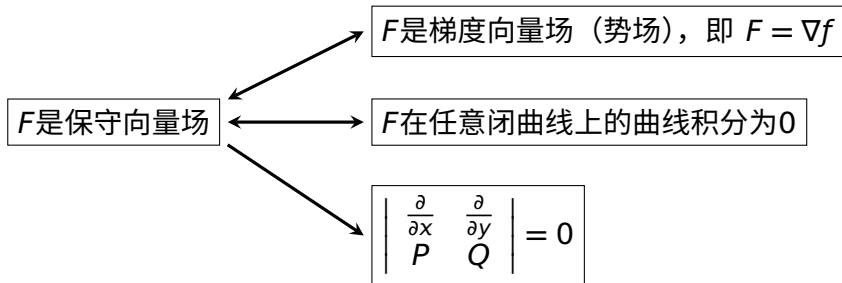
# 小结

- 设  $F = (P, Q)$  是定义在平面区域  $D$  上的向量场，则



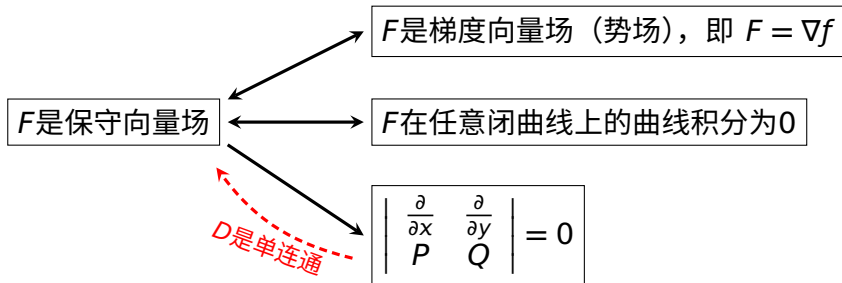
# 小结

- 设  $F = (P, Q)$  是定义在平面区域  $D$  上的向量场，则



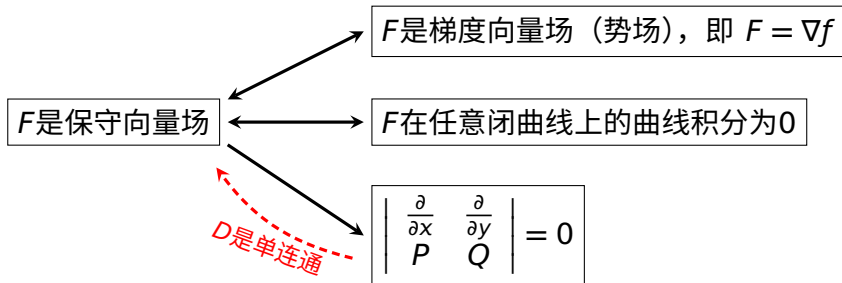
# 小结

- 设  $F = (P, Q)$  是定义在平面区域  $D$  上的向量场，则



# 小结

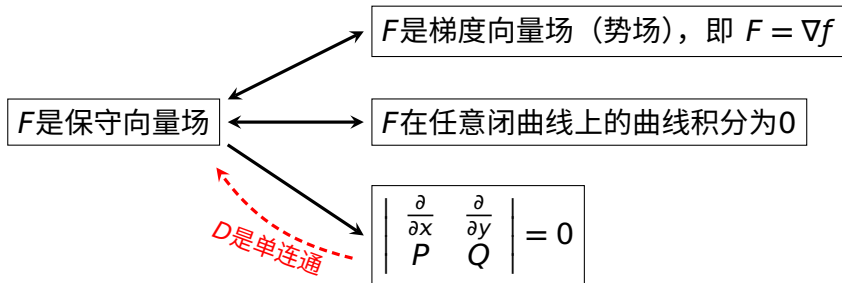
- 设  $F = (P, Q)$  是定义在平面区域  $D$  上的向量场，则



- 当  $F = (P, Q)$  是保守场时，成立  $F = \nabla f$ ,

# 小结

- 设  $F = (P, Q)$  是定义在平面区域  $D$  上的向量场，则



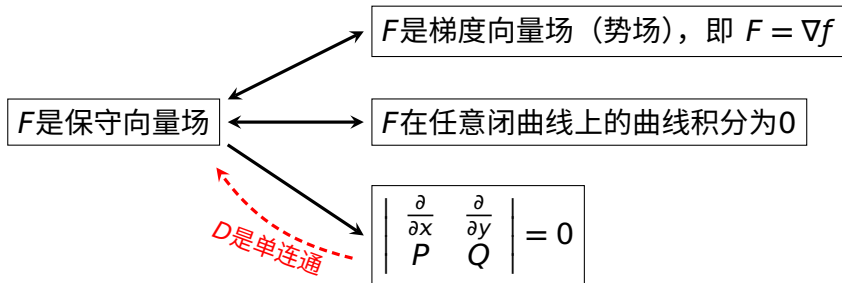
- 当  $F = (P, Q)$  是保守场时，成立  $F = \nabla f$ ，并且

$$\int_L Pdx + Qdy$$



# 小结

- 设  $F = (P, Q)$  是定义在平面区域  $D$  上的向量场，则

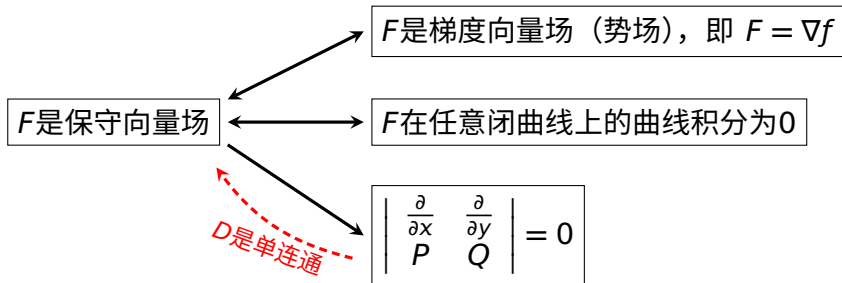


- 当  $F = (P, Q)$  是保守场时，成立  $F = \nabla f$ ，并且

$$\int_L P dx + Q dy = f(B) - f(A)$$

# 小结

- 设  $F = (P, Q)$  是定义在平面区域  $D$  上的向量场，则



- 当  $F = (P, Q)$  是保守场时，成立  $F = \nabla f$ ，并且

$$\int_L Pdx + Qdy = f(B) - f(A)$$

这里  $B$  是有向曲线  $L$  的终点， $A$  是起点

有兴趣可以将以上的概念、性质推广到三维空间：

- 三维空间的向量场  $F = (P, Q, R)$

有兴趣可以将以上的概念、性质推广到三维空间：

- 三维空间的向量场  $F = (P, Q, R)$  称为保守向量场，指其曲线积分与路径无关

有兴趣可以将以上的概念、性质推广到三维空间：

- 三维空间的向量场  $F = (P, Q, R)$  称为保守向量场，指其曲线积分与路径无关
- $F = (P, Q, R)$  是保守场，当且仅当  $\exists f(x, y, z)$  使得  $F = \nabla f$ ,

有兴趣可以将以上的概念、性质推广到三维空间：

- 三维空间的向量场  $F = (P, Q, R)$  称为保守向量场，指其曲线积分与路径无关
- $F = (P, Q, R)$  是保守场，当且仅当  $\exists f(x, y, z)$  使得  $F = \nabla f$ ，此时

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz = f(\text{终点}) - f(\text{起点})$$

有兴趣可以将以上的概念、性质推广到三维空间：

- 三维空间的向量场  $F = (P, Q, R)$  称为保守向量场，指其曲线积分与路径无关
- $F = (P, Q, R)$  是保守场，当且仅当  $\exists f(x, y, z)$  使得  $F = \nabla f$ ，此时

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz = f(\text{终点}) - f(\text{起点})$$

- 如果  $F = (P, Q, R)$  是保守向量场，则

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = 0$$

有兴趣可以将以上的概念、性质推广到三维空间：

- 三维空间的向量场  $F = (P, Q, R)$  称为保守向量场，指其曲线积分与路径无关
- $F = (P, Q, R)$  是保守场，当且仅当  $\exists f(x, y, z)$  使得  $F = \nabla f$ ，此时

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz = f(\text{终点}) - f(\text{起点})$$

- 如果  $F = (P, Q, R)$  是保守向量场，则

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = 0$$

但反过来不一定成立



有兴趣可以将以上的概念、性质推广到三维空间：

- 三维空间的向量场  $F = (P, Q, R)$  称为保守向量场，指其曲线积分与路径无关
- $F = (P, Q, R)$  是保守场，当且仅当  $\exists f(x, y, z)$  使得  $F = \nabla f$ ，此时

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz = f(\text{终点}) - f(\text{起点})$$

- 如果  $F = (P, Q, R)$  是保守向量场，则

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = 0$$

但反过来不一定成立

- 如果  $F$  的定义域是单连通区域，则上述命题的逆命题也成立（从而充分必要条件）

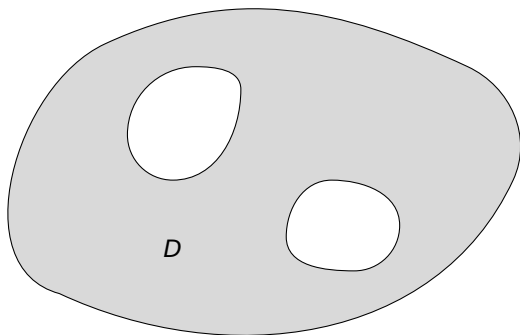
# We are here now...

1. 保守向量场；积分路径无关性

2. 格林公式

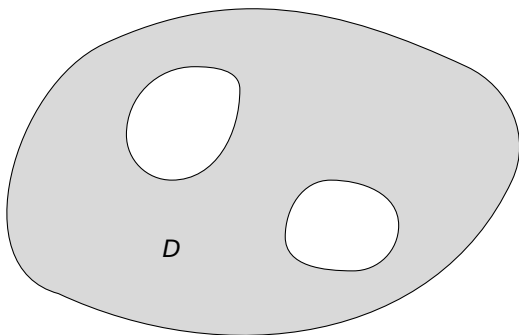
# 区域边界的定向

**定义** 假设曲线  $C$  是平面区域  $D$  的边界.



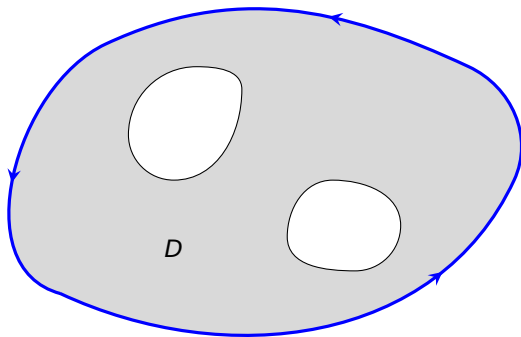
# 区域边界的定向

**定义** 假设曲线  $C$  是平面区域  $D$  的边界. 规定  $C$  的**正向**如下: 当观察者沿  $C$  的这个方向行走时, 左手边在区域  $D$  内.



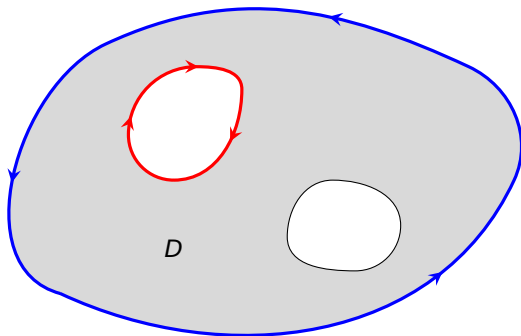
# 区域边界的定向

**定义** 假设曲线  $C$  是平面区域  $D$  的边界. 规定  $C$  的**正向**如下: 当观察者沿  $C$  的这个方向行走时, 左手边在区域  $D$  内.



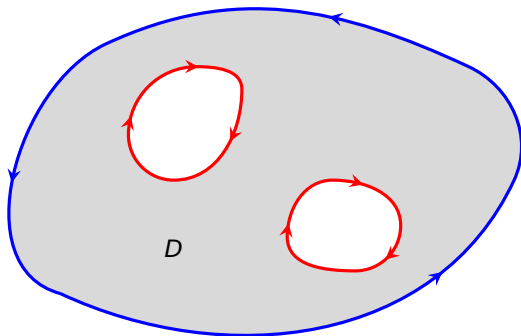
# 区域边界的定向

**定义** 假设曲线  $C$  是平面区域  $D$  的边界. 规定  $C$  的**正向**如下: 当观察者沿  $C$  的这个方向行走时, 左手边在区域  $D$  内.



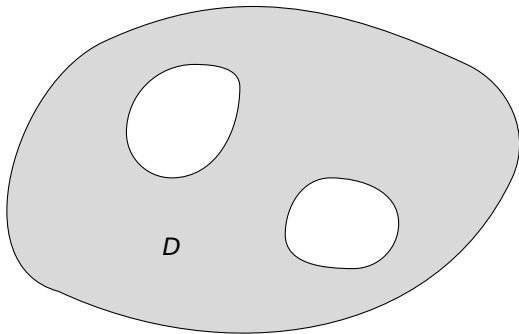
# 区域边界的定向

**定义** 假设曲线  $C$  是平面区域  $D$  的边界. 规定  $C$  的**正向**如下: 当观察者沿  $C$  的这个方向行走时, 左手边在区域  $D$  内.



**格林公式** 设有界闭区域  $D$  是由分段光滑曲线  $C$  围成, 若函数  $P(x, y)$  及  $Q(x, y)$  在  $D$  上具有一阶连续偏导数, 则成立

$$\iint_D \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| dx dy = \int_C P dx + Q dy$$

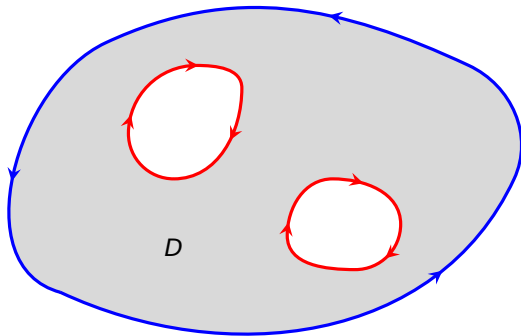




**格林公式** 设有界闭区域  $D$  是由分段光滑曲线  $C$  围成，若函数  $P(x, y)$  及  $Q(x, y)$  在  $D$  上具有一阶连续偏导数，则成立

$$\iint_D \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| dx dy = \int_C P dx + Q dy$$

其中  $C$  的定向取：作为区域  $D$  的边界的正向。



**例** 利用格林公式计算以下的曲线积分：

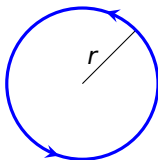
1.  $\int_C ydx - xdy$ ,  $C$  是半径为  $r$  的圆周, 定向取逆时针方向
2.  $\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy$ ,  $C$  是矩形  $[0, 1] \times [0, 1]$ , 逆时针方向

**例** 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1.  $\int_C ydx - xdy$ ,  $C$  是半径为  $r$  的圆周，定向取逆时针方向
2.  $\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy$ ,  $C$  是矩形  $[0, 1] \times [0, 1]$ ，逆时针方向

**解 1.**

$$\int_C ydx - xdy$$

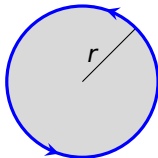


**例** 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1.  $\int_C ydx - xdy$ ,  $C$  是半径为  $r$  的圆周，定向取逆时针方向
2.  $\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy$ ,  $C$  是矩形  $[0, 1] \times [0, 1]$ ，逆时针方向

**解 1.**

$$\int_C ydx - xdy$$

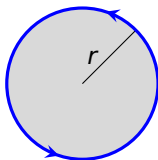


**例** 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1.  $\int_C ydx - xdy$ ,  $C$  是半径为  $r$  的圆周，定向取逆时针方向
2.  $\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy$ ,  $C$  是矩形  $[0, 1] \times [0, 1]$ ，逆时针方向

**解 1.**

$$\int_C ydx - xdy = \iint_D \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{array} \right| dxdy$$

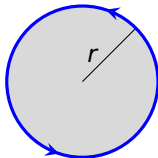


**例** 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1.  $\int_C ydx - xdy$ ,  $C$  是半径为  $r$  的圆周，定向取逆时针方向
2.  $\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy$ ,  $C$  是矩形  $[0, 1] \times [0, 1]$ ，逆时针方向

**解 1.**

$$\int_C ydx - xdy = \iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y & -x \end{vmatrix} dxdy$$

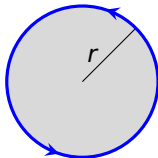


**例** 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1.  $\int_C ydx - xdy$ ,  $C$  是半径为  $r$  的圆周，定向取逆时针方向
2.  $\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy$ ,  $C$  是矩形  $[0, 1] \times [0, 1]$ ，逆时针方向

**解 1.**

$$\begin{aligned}\int_C ydx - xdy &= \iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y & -x \end{vmatrix} dxdy \\ &= \iint_D -2dxdy\end{aligned}$$

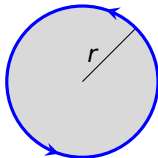


**例** 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1.  $\int_C ydx - xdy$ ,  $C$  是半径为  $r$  的圆周，定向取逆时针方向
2.  $\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy$ ,  $C$  是矩形  $[0, 1] \times [0, 1]$ ，逆时针方向

**解 1.**

$$\begin{aligned}\int_C ydx - xdy &= \iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y & -x \end{vmatrix} dxdy \\ &= \iint_D -2dxdy \\ &= -2|D|\end{aligned}$$



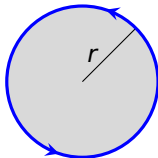


**例** 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1.  $\int_C ydx - xdy$ ,  $C$  是半径为  $r$  的圆周，定向取逆时针方向
2.  $\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy$ ,  $C$  是矩形  $[0, 1] \times [0, 1]$ ，逆时针方向

**解 1.**

$$\begin{aligned}\int_C ydx - xdy &= \iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y & -x \end{vmatrix} dxdy \\ &= \iint_D -2dxdy \\ &= -2|D| = -2\pi r^2\end{aligned}$$

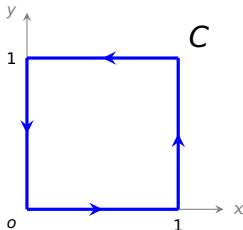


**例** 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1.  $\int_C ydx - xdy$ ,  $C$  是半径为  $r$  的圆周, 定向取逆时针方向
2.  $\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy$ ,  $C$  是矩形  $[0, 1] \times [0, 1]$ , 逆时针方向

**解 2.**

$$\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy$$

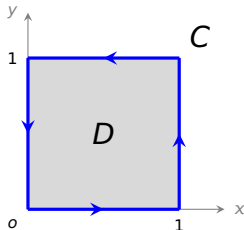


**例** 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1.  $\int_C ydx - xdy$ ,  $C$  是半径为  $r$  的圆周，定向取逆时针方向
2.  $\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy$ ,  $C$  是矩形  $[0, 1] \times [0, 1]$ ，逆时针方向

**解 2.**

$$\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy$$

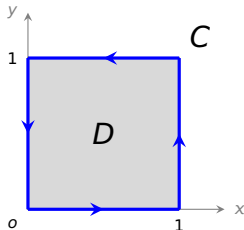


**例** 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1.  $\int_C ydx - xdy$ ,  $C$  是半径为  $r$  的圆周, 定向取逆时针方向
2.  $\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy$ ,  $C$  是矩形  $[0, 1] \times [0, 1]$ , 逆时针方向

**解 2.**

$$\begin{aligned} & \int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy \\ &= \iint_D \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{array} \right| dx dy \end{aligned}$$

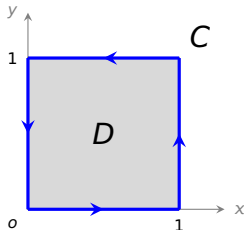


**例** 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1.  $\int_C ydx - xdy$ ,  $C$  是半径为  $r$  的圆周, 定向取逆时针方向
2.  $\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy$ ,  $C$  是矩形  $[0, 1] \times [0, 1]$ , 逆时针方向

**解 2.**

$$\begin{aligned} & \int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy \\ &= \iint_D \begin{vmatrix} y^4 + x^3 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 2x^6 & \frac{\partial}{\partial y} \end{vmatrix} dx dy \end{aligned}$$

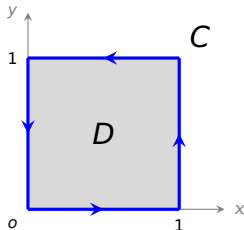


**例** 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1.  $\int_C ydx - xdy$ ,  $C$  是半径为  $r$  的圆周, 定向取逆时针方向
2.  $\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy$ ,  $C$  是矩形  $[0, 1] \times [0, 1]$ , 逆时针方向

**解 2.**

$$\begin{aligned} & \int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy \\ &= \iint_D \begin{vmatrix} y^4 + x^3 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 2x^6 & \frac{\partial}{\partial y} \end{vmatrix} dx dy \\ &= \iint_D (12x^5 - 4y^3) dx dy \end{aligned}$$

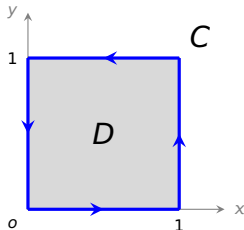


**例** 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1.  $\int_C ydx - xdy$ ,  $C$  是半径为  $r$  的圆周, 定向取逆时针方向
2.  $\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy$ ,  $C$  是矩形  $[0, 1] \times [0, 1]$ , 逆时针方向

**解 2.**

$$\begin{aligned} & \int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy \\ &= \iint_D \begin{vmatrix} y^4 + x^3 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 2x^6 & \frac{\partial}{\partial y} \end{vmatrix} dx dy \\ &= \iint_D (12x^5 - 4y^3) dx dy = \int \left[ \int (12x^5 - 4y^3) dx \right] dy \end{aligned}$$

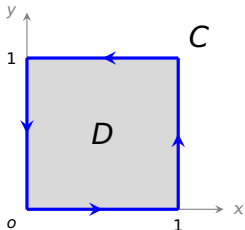


**例** 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1.  $\int_C ydx - xdy$ ,  $C$  是半径为  $r$  的圆周, 定向取逆时针方向
2.  $\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy$ ,  $C$  是矩形  $[0, 1] \times [0, 1]$ , 逆时针方向

**解 2.**

$$\begin{aligned} & \int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy \\ &= \iint_D \begin{vmatrix} y^4 + x^3 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 2x^6 & \frac{\partial}{\partial y} \end{vmatrix} dx dy \\ &= \iint_D (12x^5 - 4y^3) dx dy = \int_0^1 \left[ \int (12x^5 - 4y^3) dx \right] dy \end{aligned}$$



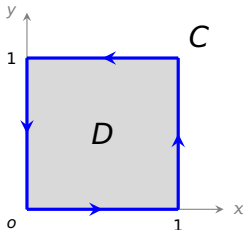


**例** 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1.  $\int_C ydx - xdy$ ,  $C$  是半径为  $r$  的圆周, 定向取逆时针方向
2.  $\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy$ ,  $C$  是矩形  $[0, 1] \times [0, 1]$ , 逆时针方向

**解 2.**

$$\begin{aligned} & \int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy \\ &= \iint_D \begin{vmatrix} y^4 + x^3 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 2x^6 & \frac{\partial}{\partial y} \end{vmatrix} dx dy \\ &= \iint_D (12x^5 - 4y^3) dx dy = \int_0^1 \left[ \int_0^1 (12x^5 - 4y^3) dx \right] dy \end{aligned}$$

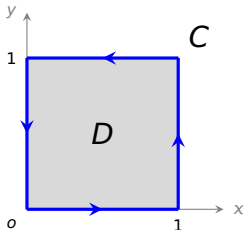


**例** 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1.  $\int_C ydx - xdy$ ,  $C$  是半径为  $r$  的圆周, 定向取逆时针方向
2.  $\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy$ ,  $C$  是矩形  $[0, 1] \times [0, 1]$ , 逆时针方向

**解 2.**

$$\begin{aligned} & \int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy \\ &= \iint_D \begin{vmatrix} y^4 + x^3 & 2x^6 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{vmatrix} dx dy \\ &= \iint_D (12x^5 - 4y^3)dx dy = \int_0^1 \left[ \int_0^1 (12x^5 - 4y^3)dx \right] dy \\ &= \int_0^1 \left[ 2x^6 - 4y^3x \Big|_0^1 \right] dy \end{aligned}$$

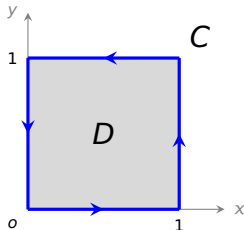


**例** 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1.  $\int_C ydx - xdy$ ,  $C$  是半径为  $r$  的圆周, 定向取逆时针方向
2.  $\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy$ ,  $C$  是矩形  $[0, 1] \times [0, 1]$ , 逆时针方向

**解 2.**

$$\begin{aligned} & \int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy \\ &= \iint_D \begin{vmatrix} y^4 + x^3 & 2x^6 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{vmatrix} dx dy \\ &= \iint_D (12x^5 - 4y^3)dx dy = \int_0^1 \left[ \int_0^1 (12x^5 - 4y^3)dx \right] dy \\ &= \int_0^1 \left[ 2x^6 - 4y^3x \Big|_0^1 \right] dy = \int_0^1 [2 - 4y^3] dy \end{aligned}$$

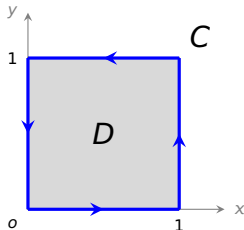


**例** 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1.  $\int_C ydx - xdy$ ,  $C$  是半径为  $r$  的圆周, 定向取逆时针方向
2.  $\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy$ ,  $C$  是矩形  $[0, 1] \times [0, 1]$ , 逆时针方向

**解 2.**

$$\begin{aligned} & \int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy \\ &= \iint_D \begin{vmatrix} y^4 + x^3 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 2x^6 & \frac{\partial}{\partial y} \end{vmatrix} dx dy \\ &= \iint_D (12x^5 - 4y^3)dx dy = \int_0^1 \left[ \int_0^1 (12x^5 - 4y^3)dx \right] dy \\ &= \int_0^1 \left[ 2x^6 - 4y^3x \Big|_0^1 \right] dy = \int_0^1 [2 - 4y^3] dy = 1 \end{aligned}$$



**格林公式推论** 设有界闭区域  $D$  是由分段光滑曲线  $C$  围成, 则

$$D \text{ 的面积} = \frac{1}{2} \int_C -ydx + xdy$$

**格林公式推论** 设有界闭区域  $D$  是由分段光滑曲线  $C$  围成, 则

$$D \text{ 的面积} = \frac{1}{2} \int_C -ydx + xdy$$

其中  $C$  的定向取: 作为区域  $D$  的边界的正向.

**格林公式推论** 设有界闭区域  $D$  是由分段光滑曲线  $C$  围成, 则

$$D \text{ 的面积} = \frac{1}{2} \int_C -ydx + xdy$$

其中  $C$  的定向取: 作为区域  $D$  的边界的正向.

**证明**

$$\frac{1}{2} \int_C -ydx + xdy$$

**格林公式推论** 设有界闭区域  $D$  是由分段光滑曲线  $C$  围成, 则

$$D \text{ 的面积} = \frac{1}{2} \int_C -ydx + xdy$$

其中  $C$  的定向取: 作为区域  $D$  的边界的正向.

**证明**

$$\frac{1}{2} \int_C -ydx + xdy = \frac{1}{2} \iint_D \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{array} \right| dx dy$$



**格林公式推论** 设有界闭区域  $D$  是由分段光滑曲线  $C$  围成, 则

$$D \text{ 的面积} = \frac{1}{2} \int_C -y dx + x dy$$

其中  $C$  的定向取: 作为区域  $D$  的边界的正向.

**证明**

$$\frac{1}{2} \int_C -y dx + x dy = \frac{1}{2} \iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ -y & x \end{vmatrix} dx dy$$

**格林公式推论** 设有界闭区域  $D$  是由分段光滑曲线  $C$  围成, 则

$$D \text{ 的面积} = \frac{1}{2} \int_C -y dx + x dy$$

其中  $C$  的定向取: 作为区域  $D$  的边界的正向.

**证明**

$$\frac{1}{2} \int_C -y dx + x dy = \frac{1}{2} \iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ -y & x \end{vmatrix} dx dy = \int_D 1 dx dy$$

**格林公式推论** 设有界闭区域  $D$  是由分段光滑曲线  $C$  围成, 则

$$D \text{ 的面积} = \frac{1}{2} \int_C -y dx + x dy$$

其中  $C$  的定向取: 作为区域  $D$  的边界的正向.

**证明**

$$\frac{1}{2} \int_C -y dx + x dy = \frac{1}{2} \iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ -y & x \end{vmatrix} dx dy = \int_D 1 dx dy = D \text{ 的面积}$$

**格林公式推论** 设有界闭区域  $D$  是由分段光滑曲线  $C$  围成, 则

$$D \text{ 的面积} = \frac{1}{2} \int_C -y dx + x dy$$

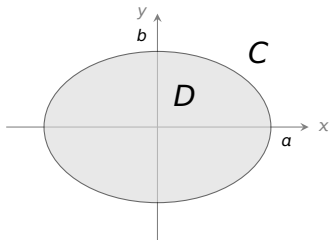
其中  $C$  的定向取: 作为区域  $D$  的边界的正向.

**证明**

$$\frac{1}{2} \int_C -y dx + x dy = \frac{1}{2} \iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ -y & x \end{vmatrix} dx dy = \int_D 1 dx dy = D \text{ 的面积}$$

**例** 利用上述公式计算椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  所围成的面积.

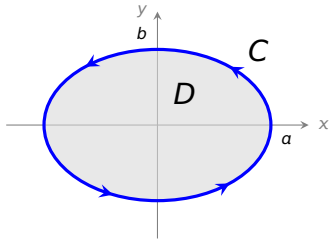
**例** 利用上述公式计算椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  所围成的面积.



**解**

$$D \text{ 的面积} = \frac{1}{2} \int_C -y dx + x dy$$

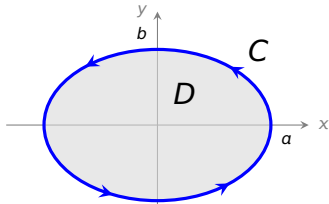
**例** 利用上述公式计算椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  所围成的面积.



**解**

$$D \text{ 的面积} = \frac{1}{2} \int_C -y dx + x dy$$

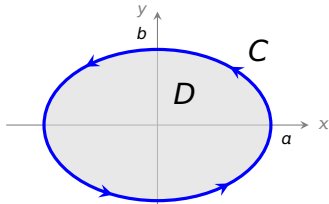
**例** 利用上述公式计算椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  所围成的面积.



**解** 椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  按逆时针的参数方程是

$$\begin{aligned} x &= a \cos \theta, \quad y = b \sin \theta \quad (\theta: 0 \rightarrow 2\pi) \\ D \text{ 的面积} &= \frac{1}{2} \int_C -y dx + x dy \end{aligned}$$

**例** 利用上述公式计算椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  所围成的面积.



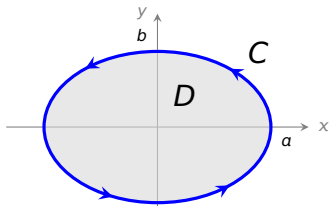
**解** 椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  按逆时针的参数方程是

所以

$$\begin{aligned} x &= a \cos \theta, \quad y = b \sin \theta \quad (\theta: 0 \rightarrow 2\pi) \\ D \text{ 的面积} &= \frac{1}{2} \int_C -y dx + x dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[ (-b \sin \theta)(a \cos \theta)' + (a \cos \theta)(b \sin \theta)' \right] d\theta \end{aligned}$$



**例** 利用上述公式计算椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  所围成的面积.

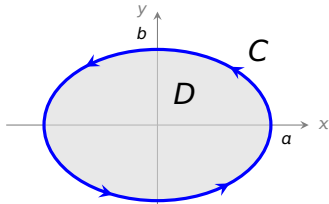


**解** 椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  按逆时针的参数方程是

所以

$$\begin{aligned} x &= a \cos \theta, \quad y = b \sin \theta \quad (\theta: 0 \rightarrow 2\pi) \\ D \text{ 的面积} &= \frac{1}{2} \int_C -y dx + x dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[ (-b \sin \theta)(a \cos \theta)' + (a \cos \theta)(b \sin \theta)' \right] d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [ab] d\theta \end{aligned}$$

**例** 利用上述公式计算椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  所围成的面积.



**解** 椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  按逆时针的参数方程是

所以

$$\begin{aligned} x &= a \cos \theta, \quad y = b \sin \theta \quad (\theta: 0 \rightarrow 2\pi) \\ D \text{ 的面积} &= \frac{1}{2} \int_C -y dx + x dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[ (-b \sin \theta)(a \cos \theta)' + (a \cos \theta)(b \sin \theta)' \right] d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [ab] d\theta = ab\pi \end{aligned}$$