第 3 章 d：函数的单调性与凹凸性

数学系　　梁卓滨

2019-2020 学年 I

Outline

We are here now...

1. 函数的单调性

2. 函数的凹凸性

定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，则

定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，则

- (a,b) 上恒成立 $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上（严格）单调增加.

定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，则

- (a,b) 上恒成立 $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上（严格）单调增加.
- (a,b) 上恒成立 $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上（严格）单调递减.

定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，则

- (a,b) 上恒成立 $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上（严格）单调增加.
- (a,b) 上恒成立 $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上（严格）单调递减.

注 将条件放宽以允许 (a,b) 上有限个点成立 $f'(x)=0$，结论仍然成立.

定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，则

- (a,b) 上恒成立 $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上（严格）单调增加.
- (a,b) 上恒成立 $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上（严格）单调递减.

注 将条件放宽以允许 (a,b) 上有限个点成立 $f'(x)=0$，结论仍然成立.

例 1 判定 $y=x-\sin x$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的单调性.

定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，则

- (a,b) 上恒成立 $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上（严格）单调增加.
- (a,b) 上恒成立 $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上（严格）单调递减.

注 将条件放宽以允许 (a,b) 上有限个点成立 $f'(x)=0$，结论仍然成立.

例 1 判定 $y=x-\sin x$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的单调性.

解 y 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续，在 $(-\pi,\pi)$ 上成立 $y'=1-\cos x$

定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，则

- (a,b) 上恒成立 $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上（严格）单调增加.
- (a,b) 上恒成立 $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上（严格）单调递减.

注 将条件放宽以允许 (a,b) 上有限个点成立 $f'(x)=0$，结论仍然成立.

例 1 判定 $y=x-\sin x$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的单调性.

解 y 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续，在 $(-\pi,\pi)$ 上成立 $y'=1-\cos x \geq 0$

定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，则

- (a,b) 上恒成立 $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上（严格）单调增加.
- (a,b) 上恒成立 $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上（严格）单调递减.

注 将条件放宽以允许 (a,b) 上有限个点成立 $f'(x)=0$，结论仍然成立.

例 1 判定 $y=x-\sin x$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的单调性.

解 y 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续，在 $(-\pi,\pi)$ 上成立 $y'=1-\cos x\geq 0$，且只有 $y'(0)=0$. 所以 y 是单调递增.

定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，则

- (a,b) 上恒成立 $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上（严格）单调增加.
- (a,b) 上恒成立 $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上（严格）单调递减.

注 将条件放宽以允许 (a,b) 上有限个点成立 $f'(x)=0$，结论仍然成立.

例 1 判定 $y = x - \sin x$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的单调性.

解 y 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续，在 $(-\pi,\pi)$ 上成立 $y' = 1-\cos x \geq 0$，且只有 $y'(0)=0$. 所以 y 是单调递增.

例 2 讨论 $y = e^x - x - 1$ 的单调性.

定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，则

- (a,b) 上恒成立 $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上（严格）单调增加.
- (a,b) 上恒成立 $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上（严格）单调递减.

注 将条件放宽以允许 (a,b) 上有限个点成立 $f'(x)=0$，结论仍然成立.

例 1 判定 $y=x-\sin x$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的单调性.

解 y 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续，在 $(-\pi,\pi)$ 上成立 $y'=1-\cos x\geq 0$，且只有 $y'(0)=0$. 所以 y 是单调递增.

例 2 讨论 $y=e^x-x-1$ 的单调性.

解

$y'=e^x-1$

定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，则

- (a,b) 上恒成立 $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上（严格）单调增加.
- (a,b) 上恒成立 $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上（严格）单调递减.

注 将条件放宽以允许 (a,b) 上有限个点成立 $f'(x)=0$，结论仍然成立.

例 1 判定 $y=x-\sin x$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的单调性.

解 y 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续，在 $(-\pi,\pi)$ 上成立 $y'=1-\cos x\geq 0$，且只有 $y'(0)=0$. 所以 y 是单调递增.

例 2 讨论 $y=e^x-x-1$ 的单调性.

解

$$y'=e^x-1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{在 } (0,+\infty) \text{ 上} y'>0 \\ \text{在 } (-\infty,0) \text{ 上} y'<0 \end{cases}$$

定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，则

- (a,b) 上恒成立 $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上（严格）单调增加.
- (a,b) 上恒成立 $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上（严格）单调递减.

注 将条件放宽以允许 (a,b) 上有限个点成立 $f'(x)=0$，结论仍然成立.

例 1 判定 $y=x-\sin x$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的单调性.

解 y 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续，在 $(-\pi,\pi)$ 上成立 $y'=1-\cos x\geq 0$，且只有 $y'(0)=0$. 所以 y 是单调递增.

例 2 讨论 $y=e^x-x-1$ 的单调性.

解

$$y'=e^x-1 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \text{在 } (0,+\infty) \text{ 上} y'>0 \;\Rightarrow\; y\text{在}[0,+\infty)\text{上单调递增} \\ \text{在 } (-\infty,0) \text{ 上} y'<0 \end{cases}$$

定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，则

- (a,b) 上恒成立 $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上（严格）单调增加.
- (a,b) 上恒成立 $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上（严格）单调递减.

注 将条件放宽以允许 (a,b) 上有限个点成立 $f'(x)=0$，结论仍然成立.

例 1 判定 $y=x-\sin x$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的单调性.

解 y 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续，在 $(-\pi,\pi)$ 上成立 $y'=1-\cos x\geq 0$，且只有 $y'(0)=0$. 所以 y 是单调递增.

例 2 讨论 $y=e^x-x-1$ 的单调性.

解

$$y'=e^x-1 \ \Rightarrow \ \begin{cases} \text{在 } (0,+\infty) \text{ 上} y'>0 & \Rightarrow \ y\text{在}[0,+\infty)\text{上单调递增} \\ \text{在 } (-\infty,0) \text{ 上} y'<0 & \Rightarrow \ y\text{在}(-\infty,0]\text{上单调递减} \end{cases}$$

例 3 讨论 $y = \sqrt[3]{x^2}$ 的单调性.

例 3 讨论 $y = \sqrt[3]{x^2}$ 的单调性.

解

$$y' = \frac{2}{3x^{1/3}}$$

例 3 讨论 $y = \sqrt[3]{x^2}$ 的单调性.

解

$$y' = \frac{2}{3x^{1/3}} \Rightarrow \begin{cases} \text{在}\,(0,+\infty)\,\text{上}\,y' > 0 \\ \text{在}\,(-\infty,0)\,\text{上}\,y' < 0 \end{cases}$$

例 3 讨论 $y = \sqrt[3]{x^2}$ 的单调性.

解

$$y' = \frac{2}{3x^{1/3}} \Rightarrow \begin{cases} \text{在}\,(0,+\infty)\,\text{上}y' > 0 \;\Rightarrow\; y\text{在}[0,+\infty)\text{上单调递增} \\ \text{在}\,(-\infty,0)\,\text{上}y' < 0 \end{cases}$$

例 3 讨论 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 的单调性.

解

$$y'=\frac{2}{3x^{1/3}} \Rightarrow \begin{cases} 在\,(0,+\infty)\,上 y'>0 \Rightarrow y 在[0,+\infty)上单调递增 \\ 在\,(-\infty,0)\,上 y'<0 \Rightarrow y 在(-\infty,0]上单调递减 \end{cases}$$

例 3 讨论 $y = \sqrt[3]{x^2}$ 的单调性.

解

$$y' = \frac{2}{3x^{1/3}} \Rightarrow \begin{cases} 在\,(0, +\infty)\,上 y' > 0 \Rightarrow y 在 [0, +\infty) 上单调递增 \\ 在\,(-\infty, 0)\,上 y' < 0 \Rightarrow y 在 (-\infty, 0] 上单调递减 \end{cases}$$

例 4 确定 $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ 的单调区间.

例 3 讨论 $y = \sqrt[3]{x^2}$ 的单调性.

解

$$y' = \frac{2}{3x^{1/3}} \Rightarrow \begin{cases} 在\,(0,+\infty)\,上 y' > 0 \;\Rightarrow\; y 在 [0,+\infty) 上单调递增 \\ 在\,(-\infty,0)\,上 y' < 0 \;\Rightarrow\; y 在 (-\infty,0] 上单调递减 \end{cases}$$

例 4 确定 $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ 的单调区间.

解

$$y' = 6x^2 - 18x + 12$$

例 3 讨论 $y = \sqrt[3]{x^2}$ 的单调性.

解

$$y' = \frac{2}{3x^{1/3}} \Rightarrow \begin{cases} 在\,(0,+\infty)\,上 y' > 0 \;\Rightarrow\; y 在 [0,+\infty) 上单调递增 \\ 在\,(-\infty,0)\,上 y' < 0 \;\Rightarrow\; y 在 (-\infty,0] 上单调递减 \end{cases}$$

例 4 确定 $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ 的单调区间.

解

$$y' = 6x^2 - 18x + 12 = 12(x-1)(x-2)$$

例 3 讨论 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 的单调性.

解

$$y'=\frac{2}{3x^{1/3}} \Rightarrow \begin{cases} 在\,(0,+\infty)\,上 y'>0 \;\Rightarrow\; y 在 [0,+\infty) 上单调递增 \\ 在\,(-\infty,0)\,上 y'<0 \;\Rightarrow\; y 在 (-\infty,0] 上单调递减 \end{cases}$$

例 4 确定 $y=2x^3-9x^2+12x-3$ 的单调区间.

解

$$y'=6x^2-18x+12=12(x-1)(x-2)=0$$

例 3 讨论 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 的单调性.

解

$$y' = \frac{2}{3x^{1/3}} \Rightarrow \begin{cases} 在\,(0,+\infty)\,上 y'>0 \;\Rightarrow\; y 在 [0,+\infty) 上单调递增 \\ 在\,(-\infty,0)\,上 y'<0 \;\Rightarrow\; y 在 (-\infty,0] 上单调递减 \end{cases}$$

例 4 确定 $y=2x^3-9x^2+12x-3$ 的单调区间.

解

$$y' = 6x^2-18x+12 = 12(x-1)(x-2) = 0 \quad\Rightarrow\quad x=1,2$$

例 3 讨论 $y = \sqrt[3]{x^2}$ 的单调性.

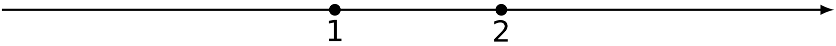
解

$$y' = \frac{2}{3x^{1/3}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{在}\,(0, +\infty)\,\text{上}\, y' > 0 \quad \Rightarrow \quad y\text{在}[0, +\infty)\text{上单调递增} \\ \text{在}\,(-\infty, 0)\,\text{上}\, y' < 0 \quad \Rightarrow \quad y\text{在}(-\infty, 0]\text{上单调递减} \end{cases}$$

例 4 确定 $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ 的单调区间.

解

$$y' = 6x^2 - 18x + 12 = 12(x-1)(x-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1, 2$$



例 3 讨论 $y = \sqrt[3]{x^2}$ 的单调性.

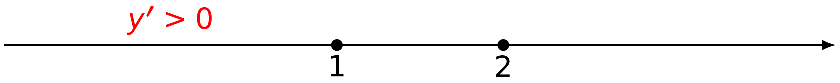
解

$$y' = \frac{2}{3x^{1/3}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{在}\,(0,+\infty)\,\text{上}y' > 0 & \Rightarrow \quad y\text{在}[0,+\infty)\text{上单调递增} \\ \text{在}\,(-\infty,0)\,\text{上}y' < 0 & \Rightarrow \quad y\text{在}(-\infty,0]\text{上单调递减} \end{cases}$$

例 4 确定 $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ 的单调区间.

解

$$y' = 6x^2 - 18x + 12 = 12(x-1)(x-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1, 2$$



例 3 讨论 $y = \sqrt[3]{x^2}$ 的单调性.

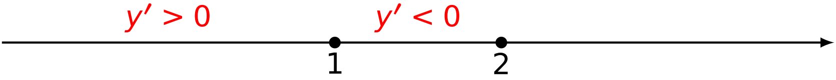
解

$$y' = \frac{2}{3x^{1/3}} \Rightarrow \begin{cases} 在 (0, +\infty) 上 y' > 0 \Rightarrow y 在 [0, +\infty) 上单调递增 \\ 在 (-\infty, 0) 上 y' < 0 \Rightarrow y 在 (-\infty, 0] 上单调递减 \end{cases}$$

例 4 确定 $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ 的单调区间.

解

$$y' = 6x^2 - 18x + 12 = 12(x-1)(x-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1, 2$$



例 3 讨论 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 的单调性.

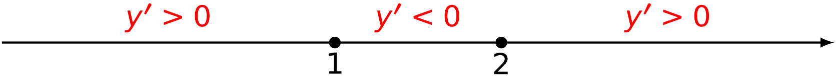
解

$$y'=\frac{2}{3x^{1/3}}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\text{在}\,(0,+\infty)\,\text{上}y'>0 & \Rightarrow\quad y\text{在}[0,+\infty)\text{上单调递增}\\ \text{在}\,(-\infty,0)\,\text{上}y'<0 & \Rightarrow\quad y\text{在}(-\infty,0]\text{上单调递减}\end{cases}$$

例 4 确定 $y=2x^3-9x^2+12x-3$ 的单调区间.

解

$$y'=6x^2-18x+12=12(x-1)(x-2)=0\quad\Rightarrow\quad x=1,2$$



例 3 讨论 $y = \sqrt[3]{x^2}$ 的单调性.

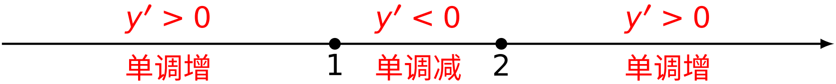
解

$$y' = \frac{2}{3x^{1/3}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 在\,(0,+\infty)\,上 y' > 0 \quad \Rightarrow \quad y 在 [0,+\infty) 上单调递增 \\ 在\,(-\infty,0)\,上 y' < 0 \quad \Rightarrow \quad y 在 (-\infty,0] 上单调递减 \end{cases}$$

例 4 确定 $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ 的单调区间.

解

$$y' = 6x^2 - 18x + 12 = 12(x-1)(x-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1, 2$$



例 3 讨论 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 的单调性.

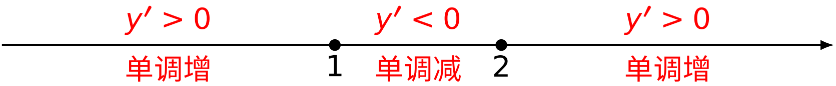
解

$$y'=\frac{2}{3x^{1/3}} \Rightarrow \begin{cases} \text{在 } (0,+\infty) \text{ 上 } y'>0 \Rightarrow y \text{ 在 } [0,+\infty) \text{ 上单调递增} \\ \text{在 } (-\infty,0) \text{ 上 } y'<0 \Rightarrow y \text{ 在 } (-\infty,0] \text{ 上单调递减} \end{cases}$$

例 4 确定 $y=2x^3-9x^2+12x-3$ 的单调区间.

解

$$y'=6x^2-18x+12=12(x-1)(x-2)=0 \quad \Rightarrow \quad x=1,2$$



例 5 证明方程 $x^5-5x+1=0$ 在 $[0,1]$ 上由唯一实根.

例 5 证明方程 $x^5 - 5x + 1 = 0$ 在 $[0, 1]$ 上由唯一实根.

例 5 证明方程 $x^5 - 5x + 1 = 0$ 在 $[0, 1]$ 上由唯一实根.

解 令 $f(x) = x^5 - 5x + 1 = 0$

例 5 证明方程 $x^5 - 5x + 1 = 0$ 在 $[0, 1]$ 上由唯一实根.

解 令 $f(x) = x^5 - 5x + 1 = 0$

1. 存在性.
2. 唯一性.

例 5 证明方程 $x^5-5x+1=0$ 在 $[0,1]$ 上由唯一实根.

解 令 $f(x)=x^5-5x+1=0$

1. 存在性. $f(0)=1$，$f(1)=-3$
2. 唯一性.

例 5 证明方程 $x^5 - 5x + 1 = 0$ 在 $[0, 1]$ 上由唯一实根.

解 令 $f(x) = x^5 - 5x + 1 = 0$

1. 存在性. $f(0) = 1$，$f(1) = -3 \xRightarrow{\text{介值定理}} \exists \xi \in (0, 1)$ 使得 $f(\xi) = 0$.

2. 唯一性.

例 5 证明方程 $x^5 - 5x + 1 = 0$ 在 $[0, 1]$ 上由唯一实根.

解 令 $f(x) = x^5 - 5x + 1 = 0$

1. 存在性. $f(0) = 1$，$f(1) = -3 \xRightarrow{\text{介值定理}} \exists \xi \in (0, 1)$ 使得 $f(\xi) = 0$.
2. 唯一性. $f'(x) = 5x^4 - 5 < 0$，$x \in (0, 1) \Rightarrow f(x)$ 单调递减

例 5 证明方程 $x^5-5x+1=0$ 在 $[0,1]$ 上由唯一实根.

解 令 $f(x)=x^5-5x+1=0$

1. 存在性. $f(0)=1$，$f(1)=-3$ $\xRightarrow{\text{介值定理}}$ $\exists\xi\in(0,1)$ 使得 $f(\xi)=0$.

2. 唯一性. $f'(x)=5x^4-5<0$，$x\in(0,1)$ $\Rightarrow$ $f(x)$ 单调递减 $\Rightarrow$ 该 ξ 是 $[0,1]$ 中满足方程 $f(x)=0$ 的解.

We are here now...

1. 函数的单调性

2. 函数的凹凸性

定义 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续.

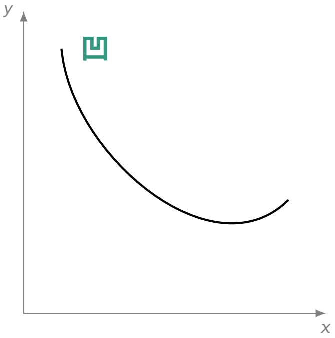
- 称 $f(x)$ 是**凹**（上凹）是指：$\forall x_1, x_2 \in I$ 均成立

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

定义 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续.

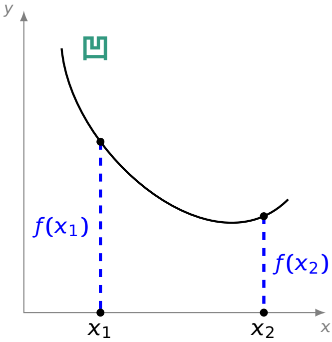
- 称 $f(x)$ 是**凹**（上凹）是指：$\forall x_1, x_2 \in I$ 均成立

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$



定义 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续.

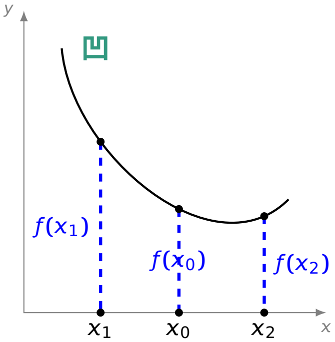
- 称 $f(x)$ 是**凹**（上凹）是指：$\forall x_1, x_2 \in I$ 均成立
$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$



定义 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续.

- 称 $f(x)$ 是**凹**（上凹）是指：$\forall x_1, x_2 \in I$ 均成立

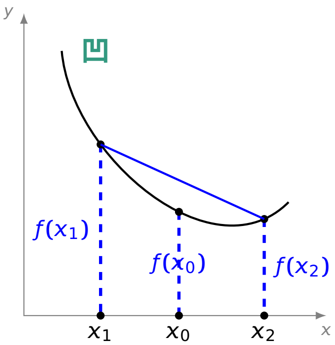
$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$



定义 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续.

- 称 $f(x)$ 是凹（上凹）是指：$\forall x_1, x_2 \in I$ 均成立

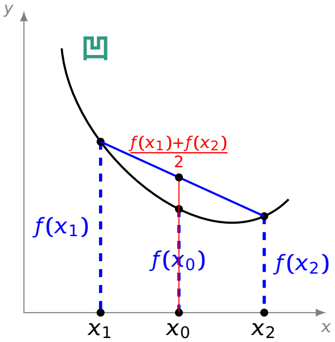
$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$



定义 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续.

- 称 $f(x)$ 是**凹**（上凹）是指：$\forall x_1, x_2 \in I$ 均成立

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$



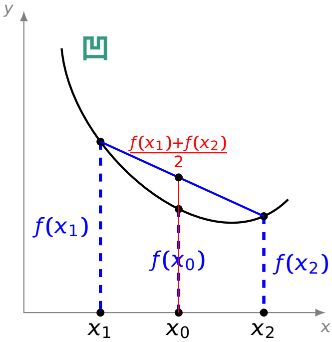
定义 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续.

- 称 $f(x)$ 是**凹**（上凹）是指：$\forall x_1, x_2 \in I$ 均成立

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

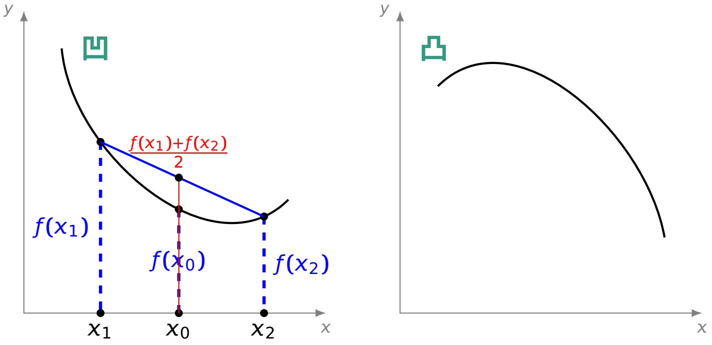
- 称 $f(x)$ 是**凸**（下凹）是指：$\forall x_1, x_2 \in I$ 均成立

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} < f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$



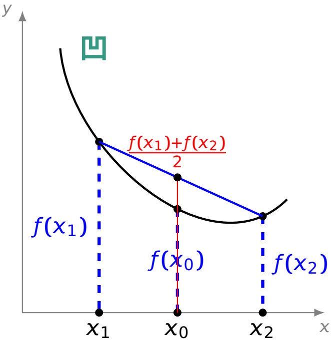
定义 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续.

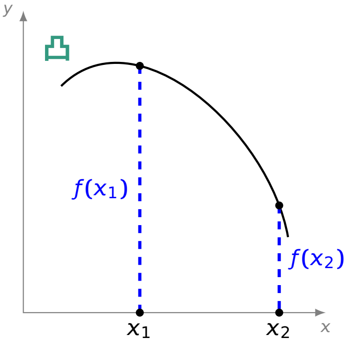
- 称 $f(x)$ 是凹（上凹）是指：$\forall x_1, x_2 \in I$ 均成立
$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$
- 称 $f(x)$ 是凸（下凹）是指：$\forall x_1, x_2 \in I$ 均成立
$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} < f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$



定义 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续.

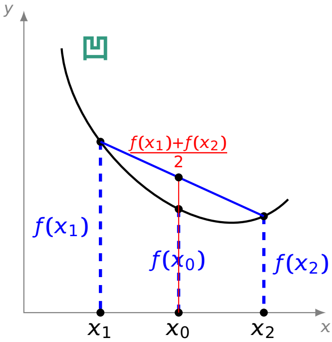
- 称 $f(x)$ 是凹（上凹）是指：$\forall x_1, x_2 \in I$ 均成立
$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$
- 称 $f(x)$ 是凸（下凹）是指：$\forall x_1, x_2 \in I$ 均成立
$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} < f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

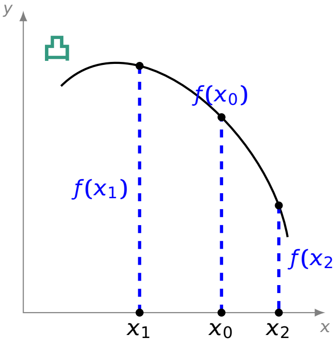




定义 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续.

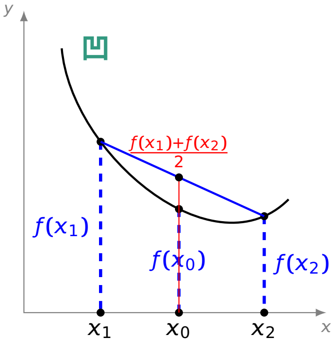
- 称 $f(x)$ 是凹（上凹）是指：$\forall x_1, x_2 \in I$ 均成立
$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$
- 称 $f(x)$ 是凸（下凹）是指：$\forall x_1, x_2 \in I$ 均成立
$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} < f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

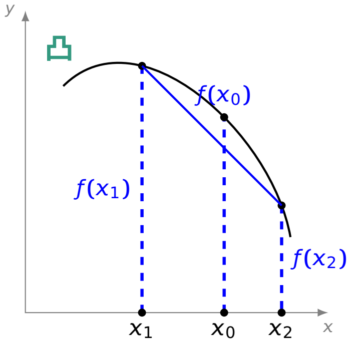




定义 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续.

- 称 $f(x)$ 是凹（上凹）是指：$\forall x_1, x_2 \in I$ 均成立
$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$
- 称 $f(x)$ 是凸（下凹）是指：$\forall x_1, x_2 \in I$ 均成立
$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} < f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$





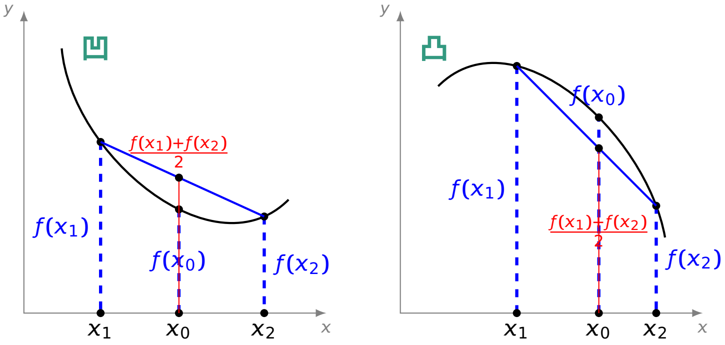
定义 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续.

- 称 $f(x)$ 是**凹**（上凹）是指：$\forall x_1, x_2 \in I$ 均成立

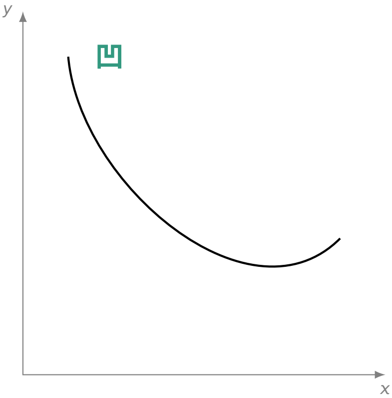
$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

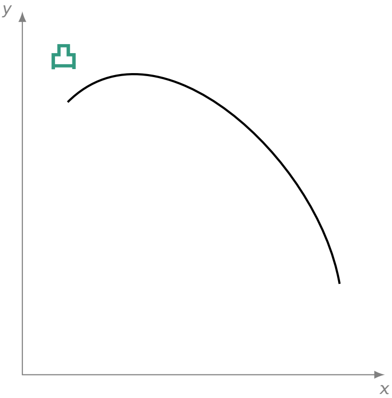
- 称 $f(x)$ 是**凸**（下凹）是指：$\forall x_1, x_2 \in I$ 均成立

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} < f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

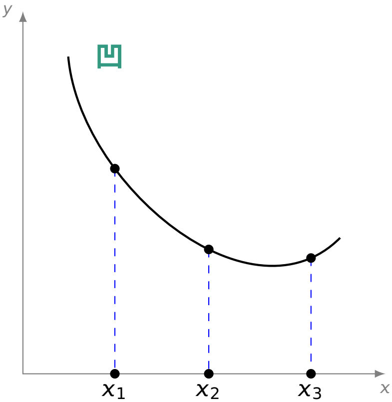


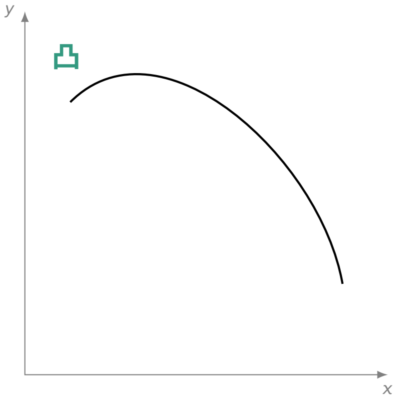
观察 凹凸性与二阶导数有关



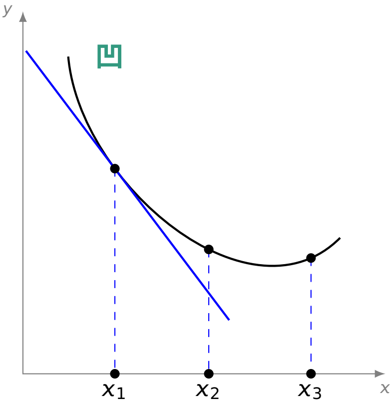


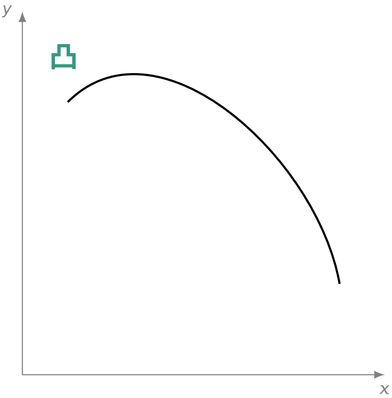
观察 凹凸性与二阶导数有关



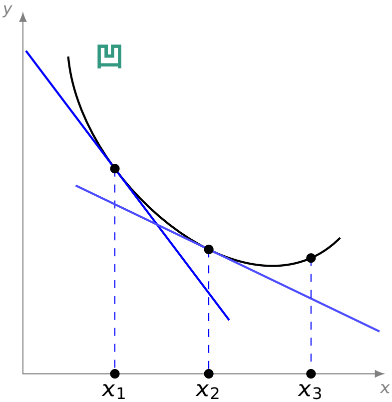


观察 凹凸性与二阶导数有关

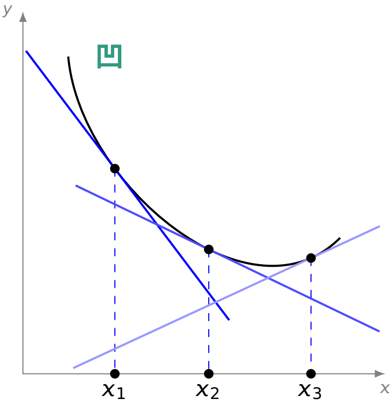


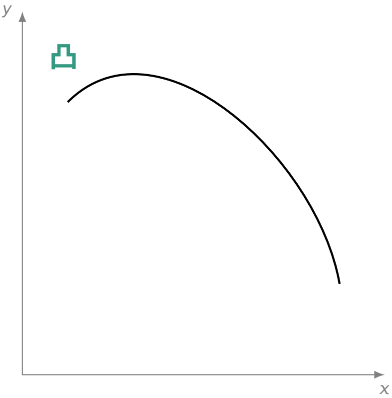


观察 凹凸性与二阶导数有关

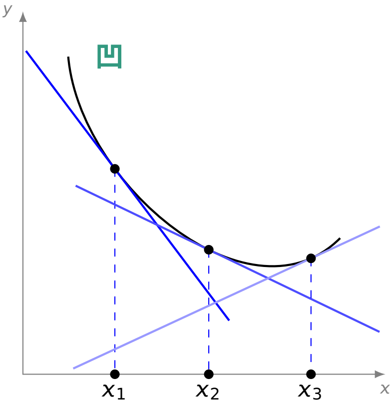


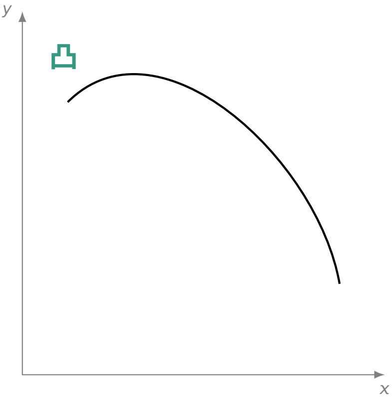
观察 凹凸性与二阶导数有关





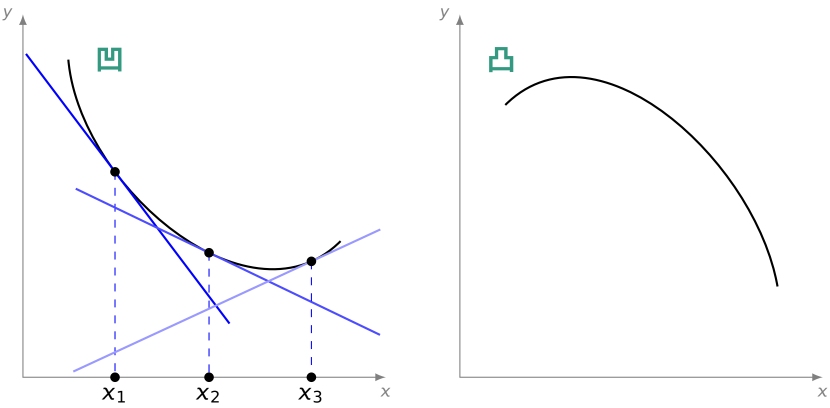
观察 凹凸性与二阶导数有关





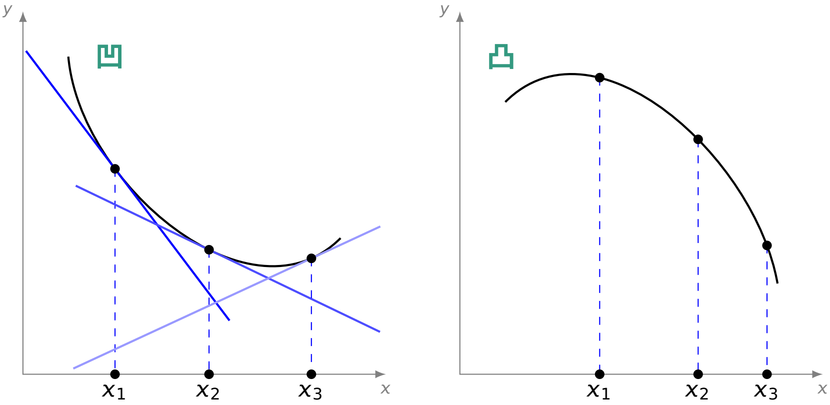
- 凹 $\longleftrightarrow f'$ 单调增

观察 凹凸性与二阶导数有关



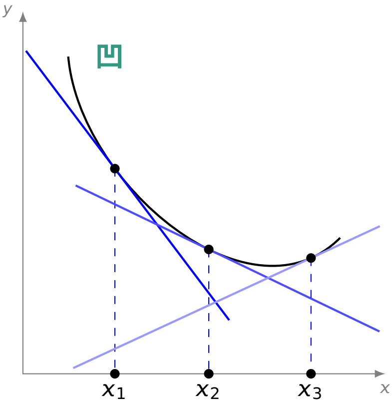
- 凹 $\longleftrightarrow f'$ 单调增 $\longleftrightarrow f'' > 0$

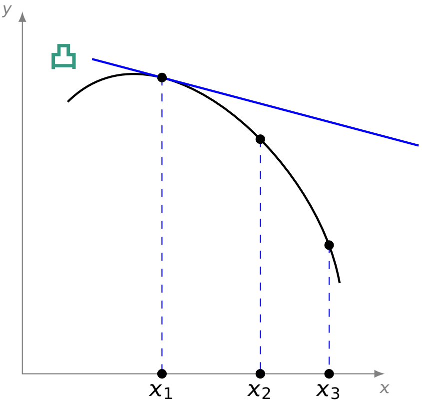
观察 凹凸性与二阶导数有关



- 凹 $\longleftrightarrow f'$ 单调增 $\longleftrightarrow f'' > 0$

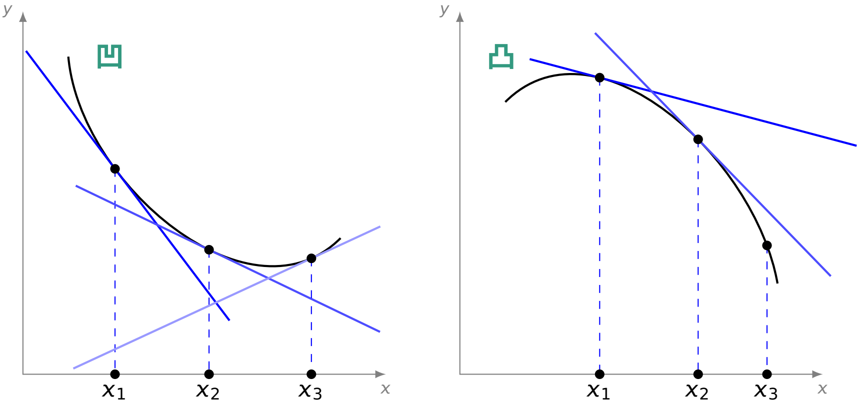
观察 凹凸性与二阶导数有关





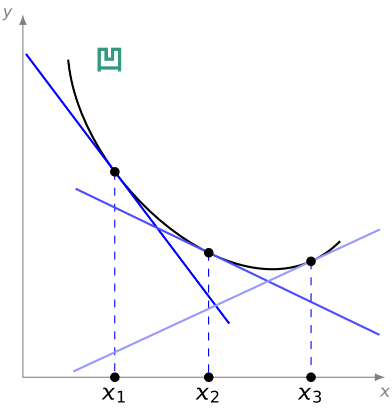
- 凹 $\longleftrightarrow f'$ 单调增 $\longleftrightarrow f'' > 0$

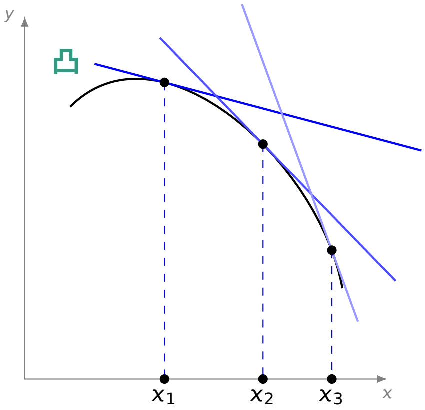
观察 凹凸性与二阶导数有关



- 凹 $\longleftrightarrow f'$ 单调增 $\longleftrightarrow f'' > 0$

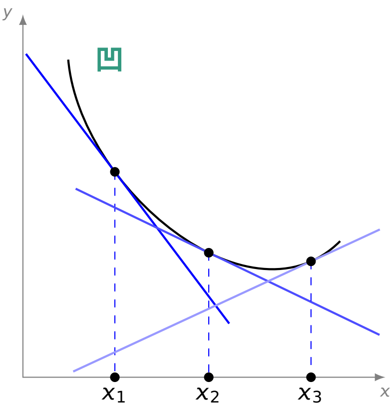
观察 凹凸性与二阶导数有关

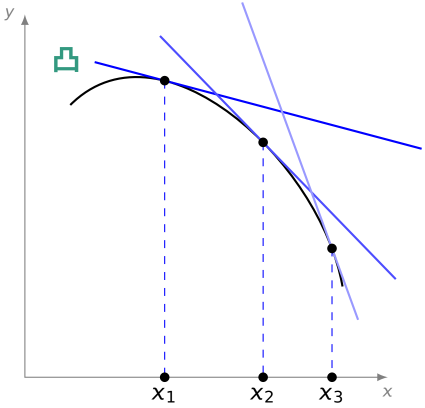




- 凹 $\longleftrightarrow f'$ 单调增 $\longleftrightarrow f'' > 0$

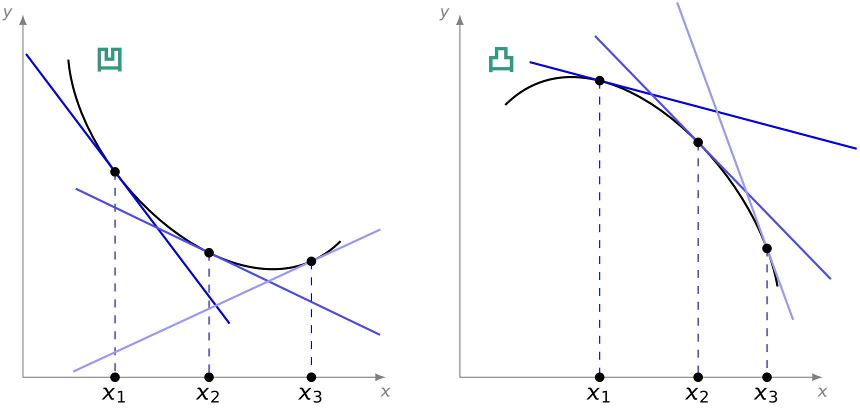
观察 凹凸性与二阶导数有关





- 凹 $\longleftrightarrow f'$ 单调增 $\longleftrightarrow f'' > 0$
- 凸 $\longleftrightarrow f'$ 单调减

观察 凹凸性与二阶导数有关



- 凹 $\longleftrightarrow f'$ 单调增 $\longleftrightarrow f'' > 0$
- 凸 $\longleftrightarrow f'$ 单调减 $\longleftrightarrow f'' < 0$

定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内有一阶和二阶导数，那么

- (a,b) 上恒成立 $f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凹的.

定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内有一阶和二阶导数，那么

- (a,b) 上恒成立 $f''(x)>0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凹的.
- (a,b) 上恒成立 $f''(x)<0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凸的.

定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内有一阶和二阶导数，那么

- (a,b) 上恒成立 $f''(x)>0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凹的.
- (a,b) 上恒成立 $f''(x)<0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凸的.

证明 设 $f''>0$

定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内有一阶和二阶导数，那么

- (a,b) 上恒成立 $f''(x)>0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凹的.
- (a,b) 上恒成立 $f''(x)<0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凸的.

证明 设 $f''>0$

$$f(x_0)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内有一阶和二阶导数，那么

- (a,b) 上恒成立 $f''(x)>0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凹的.
- (a,b) 上恒成立 $f''(x)<0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凸的.

证明 设 $f''>0$

$$f(x_0)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \Leftrightarrow [f(x_2)-f(x_0)]-[f(x_0)-f(x_1)]>0.$$

定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内有一阶和二阶导数，那么

- (a,b) 上恒成立 $f''(x)>0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凹的.
- (a,b) 上恒成立 $f''(x)<0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凸的.

证明 设 $f''>0$

$$f(x_0)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \Leftrightarrow [f(x_2)-f(x_0)]-[f(x_0)-f(x_1)]>0.$$

利用拉格朗日中值定理：

$$[f(x_2)-f(x_0)]-[f(x_0)-f(x_1)]=f'(\xi_2)(x_2-x_0)-f'(\xi_1)(x_0-x_1)$$

定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内有一阶和二阶导数，那么

- (a,b) 上恒成立 $f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凹的.
- (a,b) 上恒成立 $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凸的.

证明 设 $f'' > 0$

$$f(x_0) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \Leftrightarrow [f(x_2)-f(x_0)]-[f(x_0)-f(x_1)] > 0.$$

利用拉格朗日中值定理:

$$\begin{aligned}[f(x_2)-f(x_0)]-[f(x_0)-f(x_1)] &= f'(\xi_2)(x_2-x_0)-f'(\xi_1)(x_0-x_1) \\ &= [f'(\xi_2)-f'(\xi_1)]\cdot\frac{x_2-x_1}{2}\end{aligned}$$

定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内有一阶和二阶导数，那么

- (a,b) 上恒成立 $f''(x)>0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凹的.
- (a,b) 上恒成立 $f''(x)<0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凸的.

证明 设 $f''>0$

$$f(x_0)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \Leftrightarrow [f(x_2)-f(x_0)]-[f(x_0)-f(x_1)]>0.$$

利用拉格朗日中值定理:

$$\begin{aligned}
[f(x_2)-f(x_0)]-[f(x_0)-f(x_1)] &= f'(\xi_2)(x_2-x_0)-f'(\xi_1)(x_0-x_1) \\
&= [f'(\xi_2)-f'(\xi_1)]\cdot\frac{x_2-x_1}{2} \\
&= f''(\xi)\cdot(\xi_2-\xi_1)\cdot\frac{x_2-x_1}{2}
\end{aligned}$$

定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内有一阶和二阶导数，那么

- (a,b) 上恒成立 $f''(x)>0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凹的.
- (a,b) 上恒成立 $f''(x)<0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凸的.

证明 设 $f''>0$

$$f(x_0)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \Leftrightarrow [f(x_2)-f(x_0)]-[f(x_0)-f(x_1)]>0.$$

利用拉格朗日中值定理:

$$\begin{aligned}[f(x_2)-f(x_0)]-[f(x_0)-f(x_1)] &= f'(\xi_2)(x_2-x_0)-f'(\xi_1)(x_0-x_1)\\ &=[f'(\xi_2)-f'(\xi_1)]\cdot\frac{x_2-x_1}{2}\\ &=f''(\xi)\cdot(\xi_2-\xi_1)\cdot\frac{x_2-x_1}{2}>0\end{aligned}$$

定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内有一阶和二阶导数，那么

- (a,b) 上恒成立 $f''(x)>0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凹的.
- (a,b) 上恒成立 $f''(x)<0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凸的.

证明 设 $f''>0$

$$f(x_0)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \Leftrightarrow [f(x_2)-f(x_0)]-[f(x_0)-f(x_1)]>0.$$

利用拉格朗日中值定理:

$$\begin{aligned}[f(x_2)-f(x_0)]-[f(x_0)-f(x_1)] &= f'(\xi_2)(x_2-x_0)-f'(\xi_1)(x_0-x_1) \\ &= [f'(\xi_2)-f'(\xi_1)]\cdot\frac{x_2-x_1}{2} \\ &= f''(\xi)\cdot(\xi_2-\xi_1)\cdot\frac{x_2-x_1}{2}>0\end{aligned}$$

所以 $f''>0 \Rightarrow f$ 是凹的.

例 1 判定函数 $y = \ln x$ 的凹凸性.

例 1 判定函数 $y = \ln x$ 的凹凸性.

解 $y' = \frac{1}{x} \Rightarrow y'' = -\frac{1}{x^2}$

例 1 判定函数 $y = \ln x$ 的凹凸性.

解 $y' = \frac{1}{x} \Rightarrow y'' = -\frac{1}{x^2} < 0$

例 1 判定函数 $y = \ln x$ 的凹凸性.

解 $y' = \frac{1}{x} \Rightarrow y'' = -\frac{1}{x^2} < 0 \Rightarrow y = \ln x$ 为凸.

例 1 判定函数 $y = \ln x$ 的凹凸性.

解 $y' = \frac{1}{x} \Rightarrow y'' = -\frac{1}{x^2} < 0 \Rightarrow y = \ln x$ 为凸.

例 2 判定函数 $y = x^3$ 的凹凸性.

例 1 判定函数 $y = \ln x$ 的凹凸性.

解 $y' = \frac{1}{x} \Rightarrow y'' = -\frac{1}{x^2} < 0 \Rightarrow y = \ln x$ 为凸.

例 2 判定函数 $y = x^3$ 的凹凸性.

解

$$y' = 3x^2 \ \Rightarrow \ y'' = 6x$$

例 1 判定函数 $y = \ln x$ 的凹凸性.

解 $y' = \frac{1}{x} \Rightarrow y'' = -\frac{1}{x^2} < 0 \Rightarrow y = \ln x$ 为凸.

例 2 判定函数 $y = x^3$ 的凹凸性.

解

$$y' = 3x^2 \;\Rightarrow\; y'' = 6x \;\Rightarrow \begin{cases} \text{在}\,(0, +\infty)\,\text{上} y'' > 0 \\ \text{在}\,(-\infty, 0)\,\text{上} y'' < 0 \end{cases}$$

例 1 判定函数 $y = \ln x$ 的凹凸性.

解 $y' = \frac{1}{x} \Rightarrow y'' = -\frac{1}{x^2} < 0 \Rightarrow y = \ln x$ 为凸.

例 2 判定函数 $y = x^3$ 的凹凸性.

解

$$y' = 3x^2 \;\Rightarrow\; y'' = 6x \;\Rightarrow \begin{cases} \text{在}\,(0, +\infty)\,\text{上} y'' > 0 \\ \text{在}\,(-\infty, 0)\,\text{上} y'' < 0 \end{cases}$$

例 1 判定函数 $y = \ln x$ 的凹凸性.

解 $y' = \frac{1}{x} \Rightarrow y'' = -\frac{1}{x^2} < 0 \Rightarrow y = \ln x$ 为凸.

例 2 判定函数 $y = x^3$ 的凹凸性.

解

$$y' = 3x^2 \;\Rightarrow\; y'' = 6x \;\Rightarrow \begin{cases} \text{在 } (0, +\infty) \text{ 上} y'' > 0 \;\Rightarrow\; y \text{在} [0, +\infty) \text{是凹} \\ \text{在 } (-\infty, 0) \text{ 上} y'' < 0 \end{cases}$$

例 1 判定函数 $y=\ln x$ 的凹凸性.

解 $y'=\frac{1}{x} \Rightarrow y''=-\frac{1}{x^2}<0 \Rightarrow y=\ln x$ 为凸.

例 2 判定函数 $y=x^3$ 的凹凸性.

解

$$y'=3x^2 \ \Rightarrow \ y''=6x \ \Rightarrow \begin{cases} \text{在}\,(0,+\infty)\,\text{上} y''>0 & \Rightarrow \quad y\text{在}[0,+\infty)\text{是凹} \\ \text{在}\,(-\infty,0)\,\text{上} y''<0 & \Rightarrow \quad y\text{在}(-\infty,0]\text{是凸} \end{cases}$$

例 1 判定函数 $y = \ln x$ 的凹凸性.

解 $y' = \frac{1}{x} \Rightarrow y'' = -\frac{1}{x^2} < 0 \Rightarrow y = \ln x$ 为凸.

例 2 判定函数 $y = x^3$ 的凹凸性.

解

$$y' = 3x^2 \;\Rightarrow\; y'' = 6x \;\Rightarrow \begin{cases} \text{在}\,(0, +\infty)\,\text{上} y'' > 0 & \Rightarrow \quad y\text{在}[0, +\infty)\text{是凹} \\ \text{在}\,(-\infty, 0)\,\text{上} y'' < 0 & \Rightarrow \quad y\text{在}(-\infty, 0]\text{是凸} \end{cases}$$

($x = 0$ 称为拐点)

例 1 判定函数 $y = \ln x$ 的凹凸性.

解 $y' = \frac{1}{x} \Rightarrow y'' = -\frac{1}{x^2} < 0 \Rightarrow y = \ln x$ 为凸.

例 2 判定函数 $y = x^3$ 的凹凸性.

解

$$y' = 3x^2 \ \Rightarrow \ y'' = 6x \ \Rightarrow \begin{cases} 在(0,+\infty)上 y'' > 0 \ \Rightarrow \ y 在[0,+\infty)是凹 \\ 在(-\infty,0)上 y'' < 0 \ \Rightarrow \ y 在(-\infty,0]是凸 \end{cases}$$

($x = 0$ 称为拐点)

定义 函数凹和凸的分界点称为**拐点**.

寻找拐点步骤

(1) 求出满足 $f''(x) = 0$ 的点;

(2) 求出 $f''(x)$ 不存在的点;

寻找拐点步骤

(1) 求出满足 $f''(x) = 0$ 的点;

(2) 求出 $f''(x)$ 不存在的点;

(3) 设 x_0 是上述求出的点，若 f'' 在 x_0 两侧的符号相反，则 x_0 是拐点.

寻找拐点步骤

(1) 求出满足 $f''(x) = 0$ 的点；

(2) 求出 $f''(x)$ 不存在的点；

(3) 设 x_0 是上述求出的点，若 f'' 在 x_0 两侧的符号相反，则 x_0 是拐点.

例 1 求函数 $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 14$ 的拐点，及凹凸区间.

寻找拐点步骤

(1) 求出满足 $f''(x)=0$ 的点;

(2) 求出 $f''(x)$ 不存在的点;

(3) 设 x_0 是上述求出的点，若 f'' 在 x_0 两侧的符号相反，则 x_0 是拐点.

例 1 求函数 $y=2x^3+3x^2-12x+14$ 的拐点，及凹凸区间.

解

$$y'=6x^2+6x-12 \quad \Rightarrow \quad y''=12x+6$$

寻找拐点步骤

(1) 求出满足 $f''(x)=0$ 的点;

(2) 求出 $f''(x)$ 不存在的点;

(3) 设 x_0 是上述求出的点，若 f'' 在 x_0 两侧的符号相反，则 x_0 是拐点.

例 1 求函数 $y=2x^3+3x^2-12x+14$ 的拐点，及凹凸区间.

解

$$y'=6x^2+6x-12 \quad \Rightarrow \quad y''=12x+6=0$$

寻找拐点步骤

(1) 求出满足 $f''(x)=0$ 的点;

(2) 求出 $f''(x)$ 不存在的点;

(3) 设 x_0 是上述求出的点，若 f'' 在 x_0 两侧的符号相反，则 x_0 是拐点.

例 1 求函数 $y=2x^3+3x^2-12x+14$ 的拐点，及凹凸区间.

解

$$y'=6x^2+6x-12 \quad\Rightarrow\quad y''=12x+6=0 \quad\Rightarrow\quad x=-\frac{1}{2}$$

寻找拐点步骤

(1) 求出满足 $f''(x) = 0$ 的点;

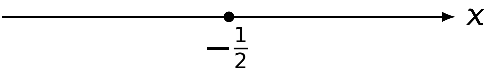
(2) 求出 $f''(x)$ 不存在的点;

(3) 设 x_0 是上述求出的点，若 f'' 在 x_0 两侧的符号相反，则 x_0 是拐点.

例 1 求函数 $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 14$ 的拐点，及凹凸区间.

解

$$y' = 6x^2 + 6x - 12 \quad \Rightarrow \quad y'' = 12x + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{2}$$



寻找拐点步骤

(1) 求出满足 $f''(x) = 0$ 的点;

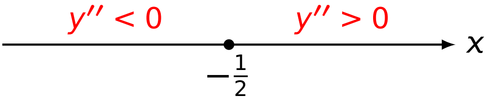
(2) 求出 $f''(x)$ 不存在的点;

(3) 设 x_0 是上述求出的点，若 f'' 在 x_0 两侧的符号相反，则 x_0 是拐点.

例 1 求函数 $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 14$ 的拐点，及凹凸区间.

解

$$y' = 6x^2 + 6x - 12 \quad \Rightarrow \quad y'' = 12x + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{2}$$



寻找拐点步骤

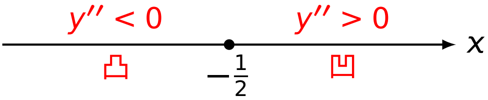
(1) 求出满足 $f''(x) = 0$ 的点;

(2) 求出 $f''(x)$ 不存在的点;

(3) 设 x_0 是上述求出的点，若 f'' 在 x_0 两侧的符号相反，则 x_0 是拐点.

例 1 求函数 $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 14$ 的拐点，及凹凸区间.

解
$$y' = 6x^2 + 6x - 12 \quad \Rightarrow \quad y'' = 12x + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{2}$$



寻找拐点步骤

(1) 求出满足 $f''(x) = 0$ 的点;

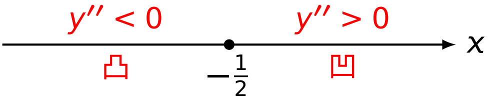
(2) 求出 $f''(x)$ 不存在的点;

(3) 设 x_0 是上述求出的点，若 f'' 在 x_0 两侧的符号相反，则 x_0 是拐点.

例 1 求函数 $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 14$ 的拐点，及凹凸区间.

解

$$y' = 6x^2 + 6x - 12 \quad \Rightarrow \quad y'' = 12x + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{2}$$



所以 $x = -\frac{1}{2}$ 为拐点，在 $(-\infty, -\frac{1}{2}]$ 上 y 是凸，在 $[-\frac{1}{2}, \infty)$ 上 y 是凹.

寻找拐点步骤

(1) 求出满足 $f''(x) = 0$ 的点；

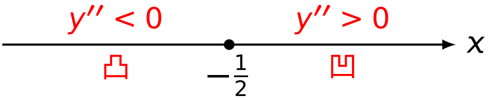
(2) 求出 $f''(x)$ 不存在的点；

(3) 设 x_0 是上述求出的点，若 f'' 在 x_0 两侧的符号相反，则 x_0 是拐点.

例 1 求函数 $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 14$ 的拐点，及凹凸区间.

解

$$y' = 6x^2 + 6x - 12 \quad \Rightarrow \quad y'' = 12x + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{2}$$



所以 $x = -\frac{1}{2}$ 为拐点，在 $(-\infty, -\frac{1}{2}]$ 上 y 是凸，在 $[-\frac{1}{2}, \infty)$ 上 y 是凹.

例 2 求函数 $y = x^{\frac{1}{3}}$ 的拐点，及凹凸区间.

例 2 求函数 $y = x^{\frac{1}{3}}$ 的拐点，及凹凸区间.

例 2 求函数 $y = x^{\frac{1}{3}}$ 的拐点，及凹凸区间.

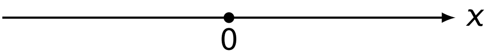
解

$$y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \quad \Rightarrow \quad y'' = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$$

例 2 求函数 $y = x^{\frac{1}{3}}$ 的拐点，及凹凸区间.

解

$$y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \quad \Rightarrow \quad y'' = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$$



例 2 求函数 $y = x^{\frac{1}{3}}$ 的拐点，及凹凸区间.

解

$$y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \quad \Rightarrow \quad y'' = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$$

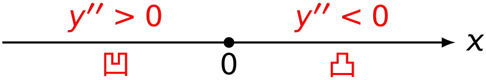
$y'' > 0$ $\qquad$ $y'' < 0$

0 $\qquad$ x

例 2 求函数 $y = x^{\frac{1}{3}}$ 的拐点，及凹凸区间.

解

$$y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \quad \Rightarrow \quad y'' = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$$



例 2 求函数 $y = x^{\frac{1}{3}}$ 的拐点，及凹凸区间.

解

$$y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \quad \Rightarrow \quad y'' = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$$

$y'' > 0$ $y'' < 0$

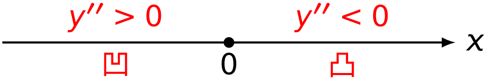
凹 0 凸 x

所以 $x = 0$ 为拐点，在 $(-\infty, 0]$ 上 y 是凹，在 $[0, \infty)$ 上 y 是凸.

例 2 求函数 $y = x^{\frac{1}{3}}$ 的拐点，及凹凸区间.

解

$$y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \quad \Rightarrow \quad y'' = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$$



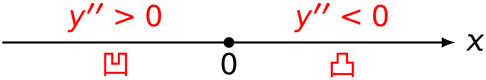
所以 $x = 0$ 为拐点，在 $(-\infty, 0]$ 上 y 是凹，在 $[0, \infty)$ 上 y 是凸.

例 3 问函数 $y = x^4$ 是否有拐点?

例 2 求函数 $y = x^{\frac{1}{3}}$ 的拐点，及凹凸区间.

解

$$y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \quad \Rightarrow \quad y'' = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$$



所以 $x = 0$ 为拐点，在 $(-\infty, 0]$ 上 y 是凹，在 $[0, \infty)$ 上 y 是凸.

例 3 问函数 $y = x^4$ 是否有拐点?

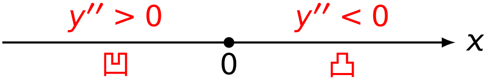
解

$$y' = 4x^3 \quad \Rightarrow \quad y'' = 12x^2 = 0$$

例 2 求函数 $y = x^{\frac{1}{3}}$ 的拐点，及凹凸区间.

解

$$y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \quad \Rightarrow \quad y'' = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$$



所以 $x = 0$ 为拐点，在 $(-\infty, 0]$ 上 y 是凹，在 $[0, \infty)$ 上 y 是凸.

例 3 问函数 $y = x^4$ 是否有拐点?

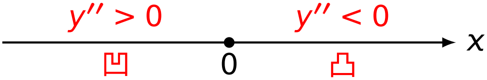
解

$$y' = 4x^3 \quad \Rightarrow \quad y'' = 12x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

例 2 求函数 $y = x^{\frac{1}{3}}$ 的拐点，及凹凸区间.

解

$$y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \quad \Rightarrow \quad y'' = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$$

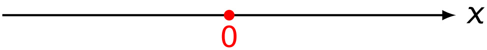


所以 $x = 0$ 为拐点，在 $(-\infty, 0]$ 上 y 是凹，在 $[0, \infty)$ 上 y 是凸.

例 3 问函数 $y = x^4$ 是否有拐点?

解

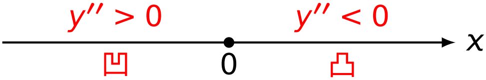
$$y' = 4x^3 \quad \Rightarrow \quad y'' = 12x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$



例 2 求函数 $y = x^{\frac{1}{3}}$ 的拐点，及凹凸区间.

解

$$y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \quad \Rightarrow \quad y'' = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$$

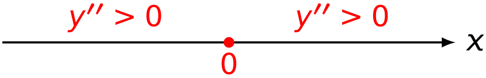


所以 $x = 0$ 为拐点，在 $(-\infty, 0]$ 上 y 是凹，在 $[0, \infty)$ 上 y 是凸.

例 3 问函数 $y = x^4$ 是否有拐点?

解

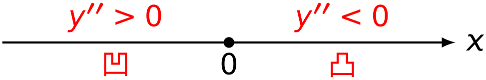
$$y' = 4x^3 \quad \Rightarrow \quad y'' = 12x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$



例 2 求函数 $y = x^{\frac{1}{3}}$ 的拐点，及凹凸区间.

解

$$y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \quad \Rightarrow \quad y'' = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$$

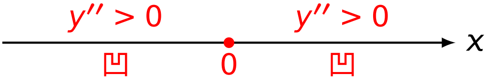


所以 $x = 0$ 为拐点，在 $(-\infty, 0]$ 上 y 是凹，在 $[0, \infty)$ 上 y 是凸.

例 3 问函数 $y = x^4$ 是否有拐点?

解

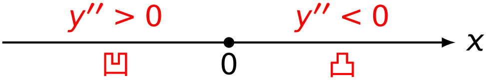
$$y' = 4x^3 \quad \Rightarrow \quad y'' = 12x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$



例 2 求函数 $y = x^{\frac{1}{3}}$ 的拐点，及凹凸区间.

解

$$y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \quad \Rightarrow \quad y'' = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$$

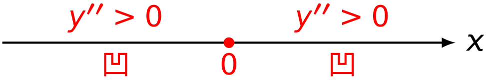


所以 $x = 0$ 为拐点，在 $(-\infty, 0]$ 上 y 是凹，在 $[0, \infty)$ 上 y 是凸.

例 3 问函数 $y = x^4$ 是否有拐点?

解

$$y' = 4x^3 \quad \Rightarrow \quad y'' = 12x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$



可见 y 在 $(-\infty, 0]$ 上 y 是凹，在 $[0, \infty)$ 上 y 是凹. 所以 $x = 0$ 不是拐点. y 没有拐点.