第 10 章 a：重积分的概念和性质

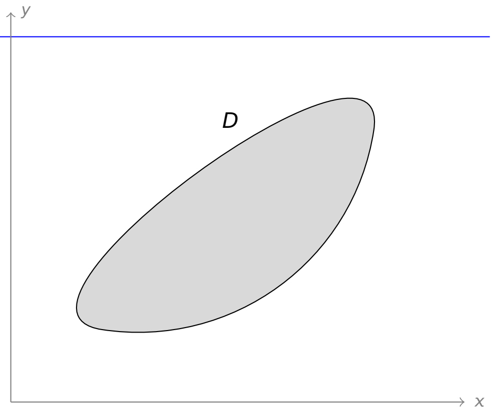
数学系　梁卓滨

2017-2018 学年 II

平面薄片的质量

假设

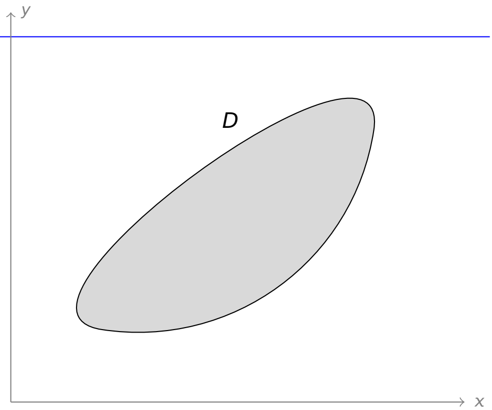
- 区域 D 为平面薄片
- 密度为 μ
- 质量为 m



平面薄片的质量

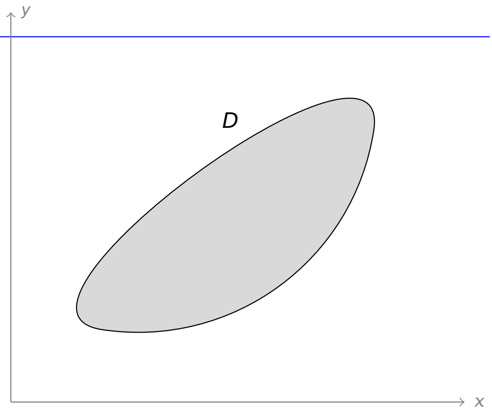
假设

- 区域 D 为平面薄片
- 密度为 μ
- 质量为 m



- 当薄片均匀时（$\mu=$ 常数），
- 当薄片非均匀时（$\mu=\mu(x,y)$ 为 D 上函数），

平面薄片的质量



假设

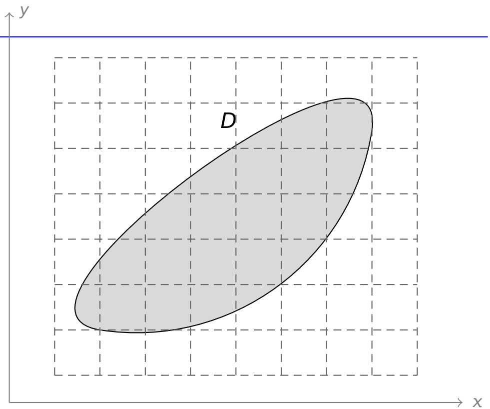
- 区域 D 为平面薄片
- 密度为 μ
- 质量为 m

- 当薄片均匀时（$\mu =$ 常数），

$$m = \mu \cdot \text{Area}(D)$$

- 当薄片非均匀时（$\mu = \mu(x, y)$ 为 D 上函数），

平面薄片的质量



假设

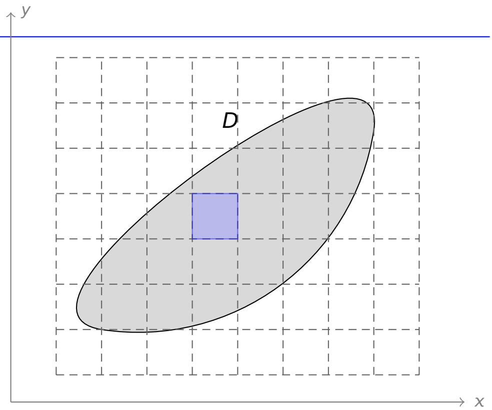
- 区域 D 为平面薄片
- 密度为 μ
- 质量为 m

- 当薄片均匀时（$\mu =$ 常数），

$$m = \mu \cdot \mathrm{Area}(D)$$

- 当薄片非均匀时（$\mu = \mu(x, y)$ 为 D 上函数），利用微元法可知

平面薄片的质量



假设

- 区域 D 为平面薄片
- 密度为 μ
- 质量为 m

- 当薄片均匀时（$\mu=$ 常数），

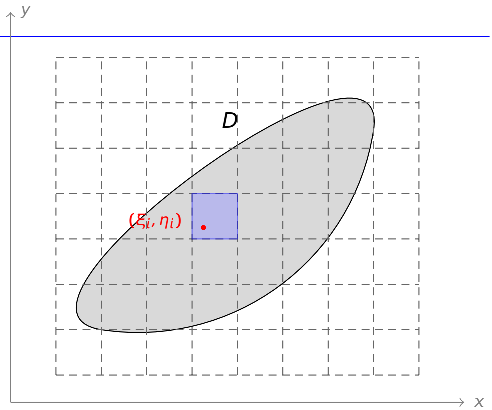
$$m=\mu\cdot\mathrm{Area}(D)$$

- 当薄片非均匀时（$\mu=\mu(x,y)$ 为 D 上函数），利用微元法可知

平面薄片的质量

假设

- 区域 D 为平面薄片
- 密度为 μ
- 质量为 m



- 当薄片均匀时（$\mu =$ 常数），

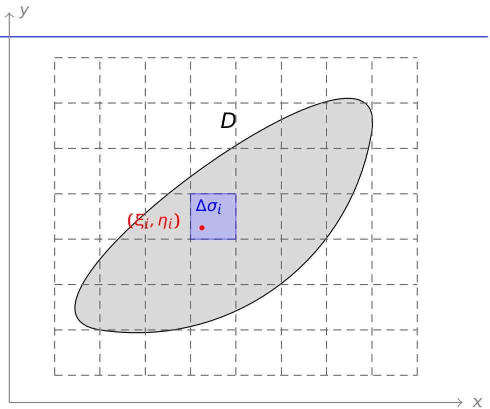
$$m = \mu \cdot \text{Area}(D)$$

- 当薄片非均匀时（$\mu = \mu(x, y)$ 为 D 上函数），利用微元法可知

平面薄片的质量

假设

- 区域 D 为平面薄片
- 密度为 μ
- 质量为 m



- 当薄片均匀时（$\mu =$ 常数），

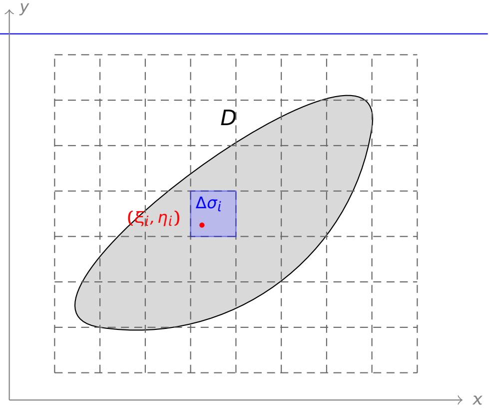
$$m = \mu \cdot \text{Area}(D)$$

- 当薄片非均匀时（$\mu = \mu(x, y)$ 为 D 上函数），利用微元法可知

平面薄片的质量

假设

- 区域 D 为平面薄片
- 密度为 μ
- 质量为 m



- 当薄片均匀时（$\mu=$ 常数），

$$m = \mu \cdot \text{Area}(D)$$

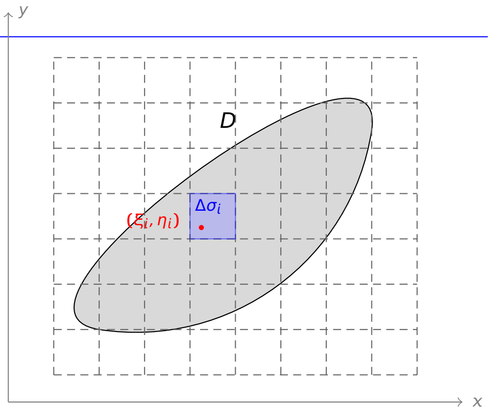
- 当薄片非均匀时（$\mu = \mu(x, y)$ 为 D 上函数），利用微元法可知

$$\mu(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

平面薄片的质量

假设

- 区域 D 为平面薄片
- 密度为 μ
- 质量为 m



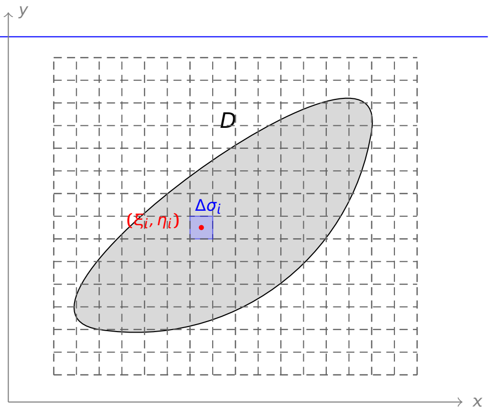
- 当薄片均匀时（$\mu =$ 常数），

$$m = \mu \cdot \text{Area}(D)$$

- 当薄片非均匀时（$\mu = \mu(x, y)$ 为 D 上函数），利用微元法可知

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

平面薄片的质量



假设

- 区域 D 为平面薄片
- 密度为 μ
- 质量为 m

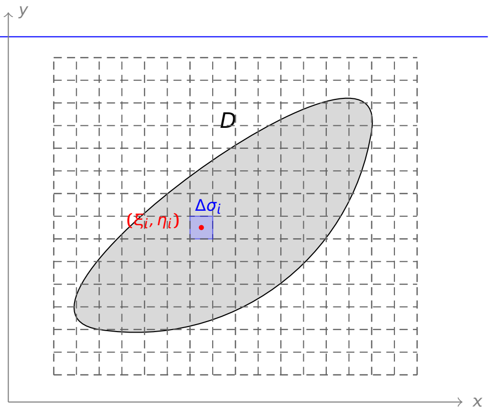
- 当薄片均匀时（$\mu =$ 常数），

$$m = \mu \cdot \mathrm{Area}(D)$$

- 当薄片非均匀时（$\mu = \mu(x, y)$ 为 D 上函数），利用微元法可知

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

平面薄片的质量



假设

- 区域 D 为平面薄片
- 密度为 μ
- 质量为 m

- 当薄片均匀时（$\mu =$ 常数），

$$m = \mu \cdot \text{Area}(D)$$

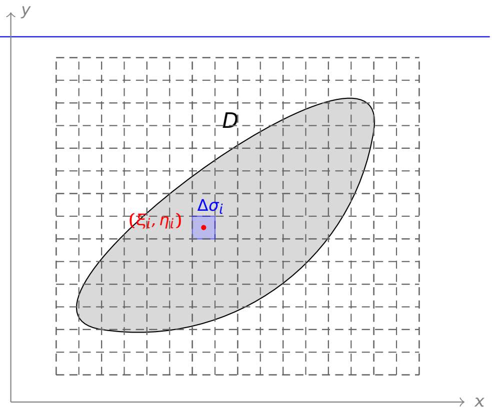
- 当薄片非均匀时（$\mu = \mu(x, y)$ 为 D 上函数），利用微元法可知

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \mu(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

平面薄片的质量

假设

- 区域 D 为平面薄片
- 密度为 μ
- 质量为 m



- 当薄片均匀时（μ = 常数），

$$m = \mu \cdot \text{Area}(D)$$

- 当薄片非均匀时（$\mu = \mu(x, y)$ 为 D 上函数），利用微元法可知

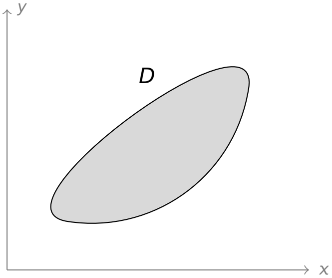
$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \mu(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

二重积分的定义

二重积分定义 设

- D 是平面上有界闭区域，
- $f(x, y)$ 是 D 上的有界函数，

若

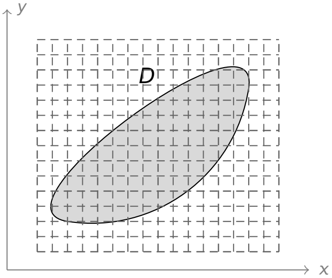


二重积分的定义

二重积分定义 设

- D 是平面上有界闭区域，
- $f(x, y)$ 是 D 上的有界函数，

若

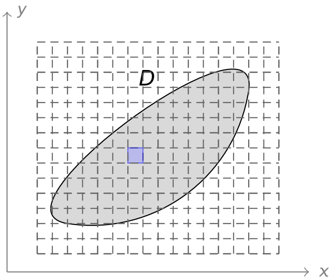


二重积分的定义

二重积分定义 设

- D 是平面上有界闭区域，
- $f(x,y)$ 是 D 上的有界函数，

若

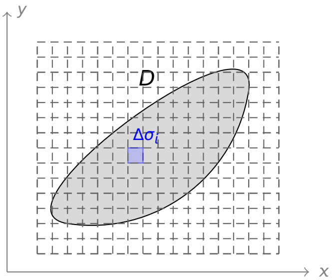


二重积分的定义

二重积分定义 设

- D 是平面上有界闭区域，
- $f(x, y)$ 是 D 上的有界函数，

若

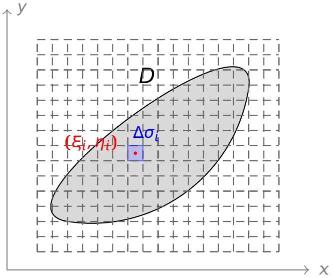


二重积分的定义

二重积分定义 设

- D 是平面上有界闭区域，
- $f(x, y)$ 是 D 上的有界函数，

若



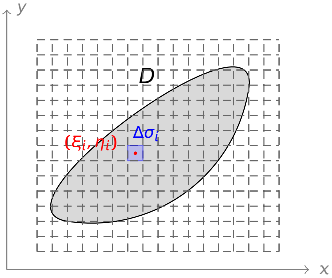
二重积分的定义

二重积分定义 设

- D 是平面上有界闭区域，
- $f(x, y)$ 是 D 上的有界函数，

若

$$f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$



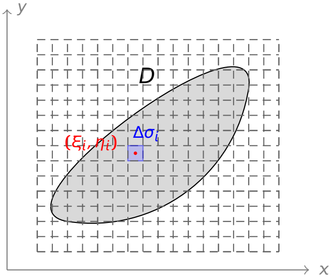
二重积分的定义

二重积分定义 设

- D 是平面上有界闭区域，
- $f(x,y)$ 是 D 上的有界函数，

若

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$



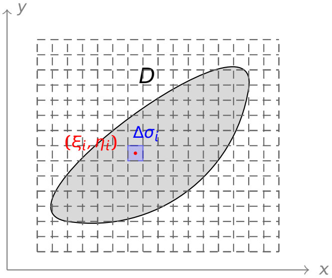
二重积分的定义

二重积分定义 设

- D 是平面上有界闭区域，
- $f(x, y)$ 是 D 上的有界函数，

若

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$



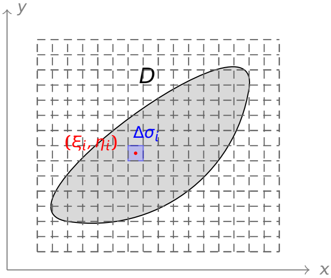
二重积分的定义

二重积分定义 设

- D 是平面上有界闭区域，
- $f(x, y)$ 是 D 上的有界函数，

若

- 极限 $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$ 存在，



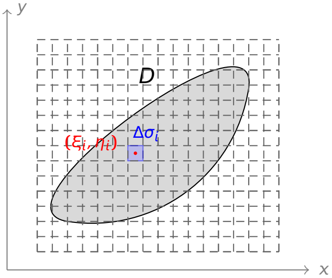
二重积分的定义

二重积分定义 设

- D 是平面上有界闭区域，
- $f(x, y)$ 是 D 上的有界函数，

若

- 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$存在，且极限
- 与上述 D 的划分、(ξ_i, η_i) 的选取无关，



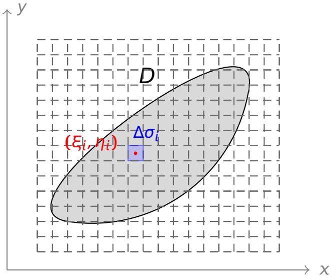
二重积分的定义

二重积分定义 设

- D 是平面上有界闭区域，
- $f(x,y)$ 是 D 上的有界函数，

若

- 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$存在，且极限
- 与上述 D 的划分、(ξ_i,η_i) 的选取无关，



则定义

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

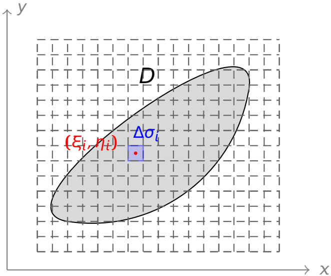
二重积分的定义

二重积分定义 设

- D 是平面上有界闭区域，
- $f(x, y)$ 是 D 上的有界函数，

若

- 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$存在，且极限
- 与上述 D 的划分、(ξ_i, η_i) 的选取无关，



则定义

$$\iint_D f(x, y)d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

称为 $f(x, y)$ 在 D 上的二重积分。

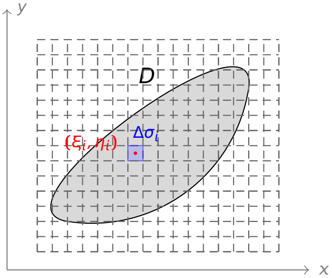
二重积分的定义

二重积分定义 设

- D 是平面上有界闭区域，
- $f(x,y)$ 是 D 上的有界函数，

若

- 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$存在，且极限
- 与上述 D 的划分、(ξ_i,η_i) 的选取无关，



则定义

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

称为 $f(x,y)$ 在 D 上的二重积分。$d\sigma$ 称为面积元素。

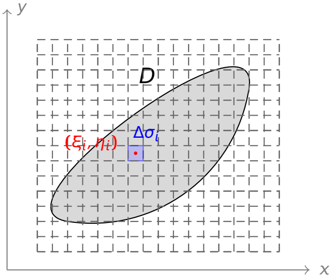
二重积分的定义

二重积分定义 设

- D 是平面上有界闭区域，
- $f(x, y)$ 是 D 上的有界函数，

若

- 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$存在，且极限
- 与上述 D 的划分、(ξ_i, η_i) 的选取无关，



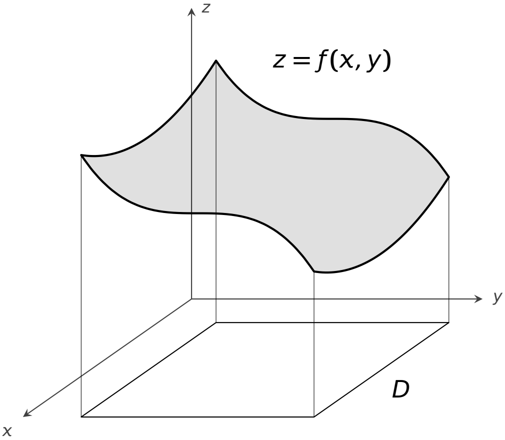
则定义

$$\iint_D f(x, y)d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

称为 $f(x, y)$ 在 D 上的二重积分。$d\sigma$ 称为面积元素。

定理 若 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则 $\iint_D f(x, y)d\sigma$ 存在。

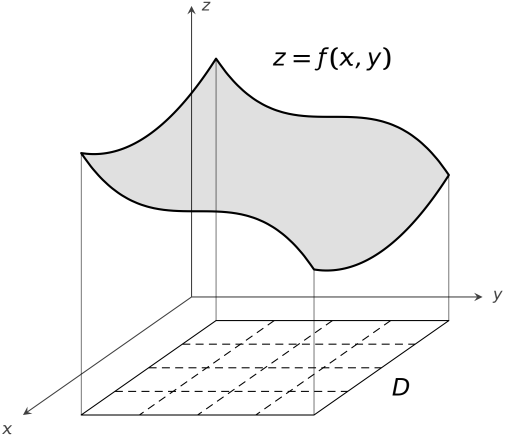
二重积分的几何意义



曲顶柱体的体积：

$$V$$

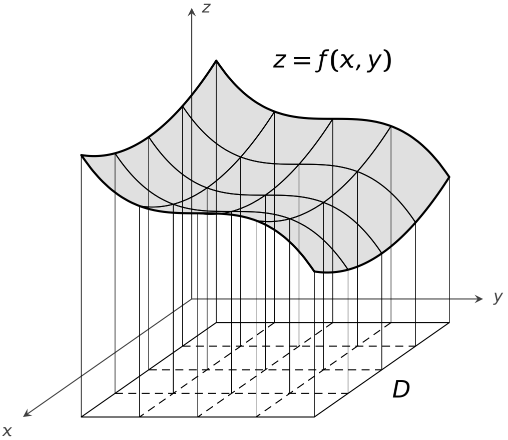
二重积分的几何意义



曲顶柱体的体积：

$$V$$

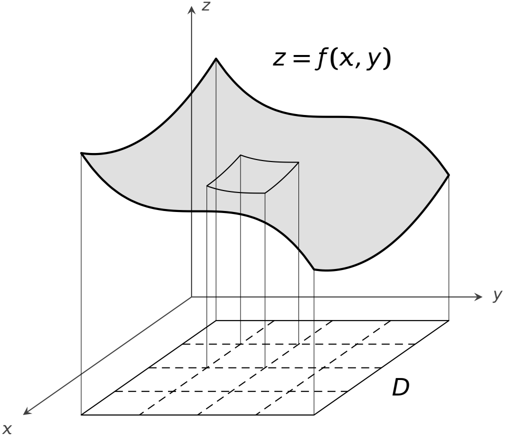
二重积分的几何意义



曲顶柱体的体积：

$$V$$

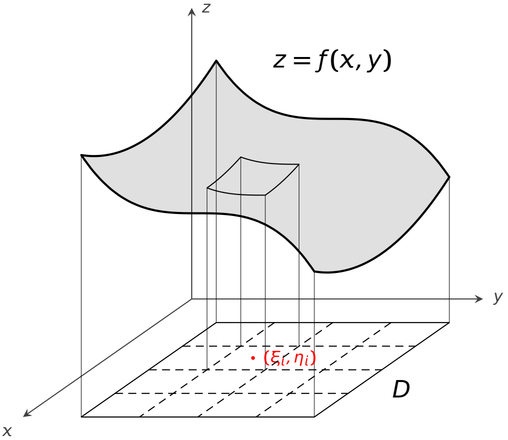
二重积分的几何意义



曲顶柱体的体积：

$$V$$

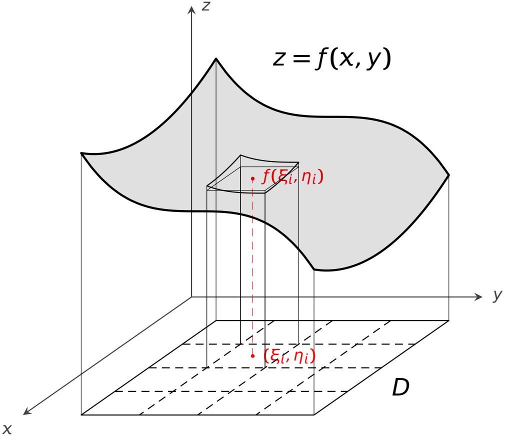
二重积分的几何意义



曲顶柱体的体积：

$$V$$

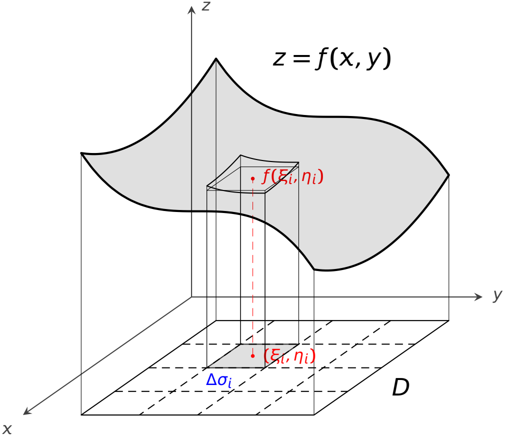
二重积分的几何意义



曲顶柱体的体积：

$$V$$

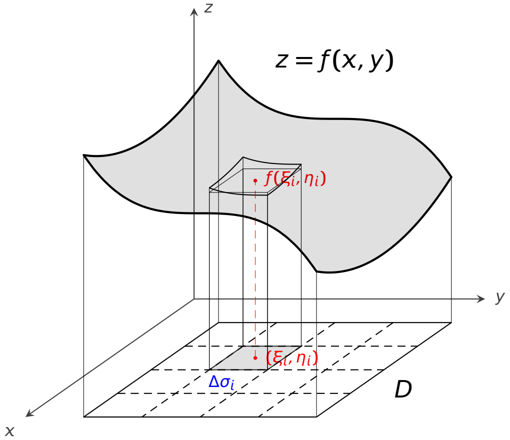
二重积分的几何意义



曲顶柱体的体积：

$$V$$

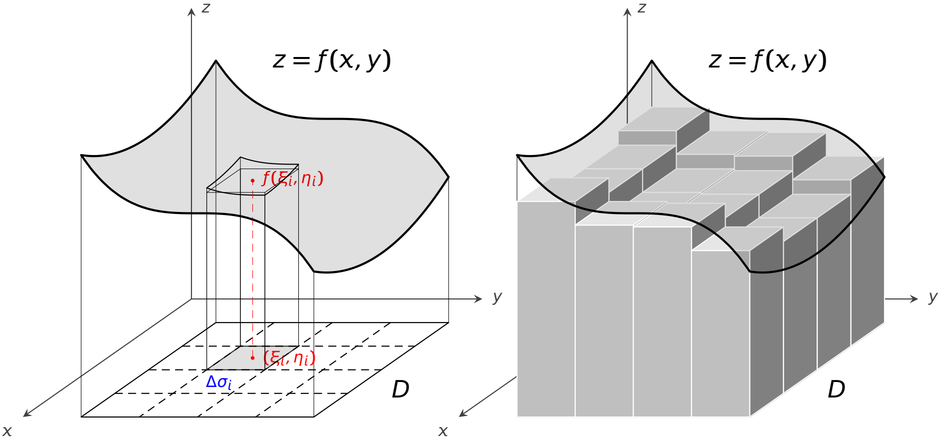
二重积分的几何意义



曲顶柱体的体积：

$$V \qquad\qquad f(\xi_i,\ \eta_i)\Delta\sigma_i$$

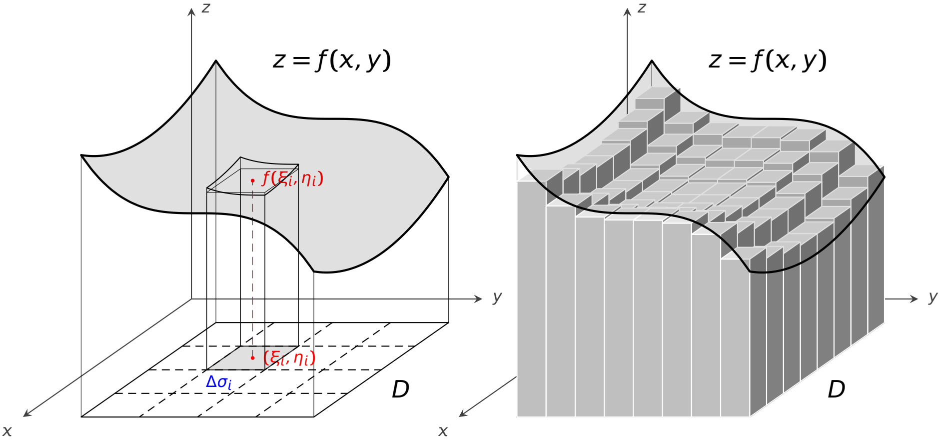
二重积分的几何意义



曲顶柱体的体积：

$$V \qquad \sum_{i=1}^{n} f(\Xi_i,\, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

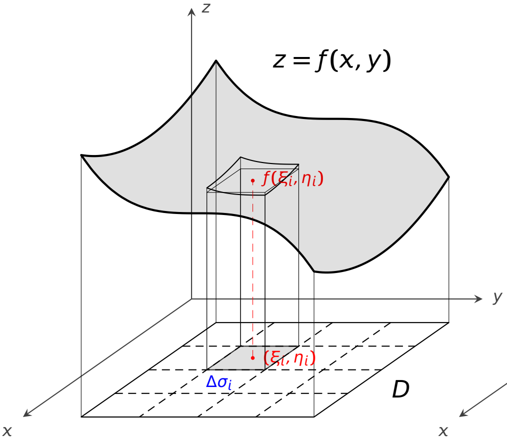
二重积分的几何意义

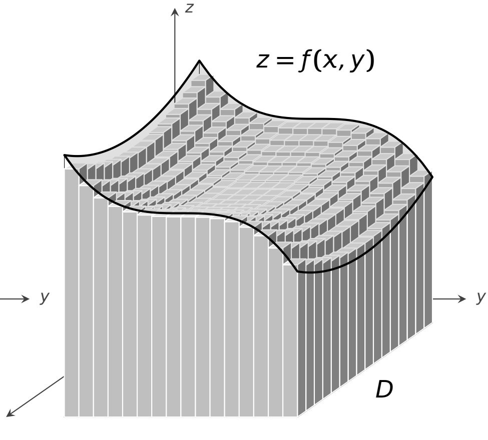


曲顶柱体的体积：

$$V \qquad \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

二重积分的几何意义

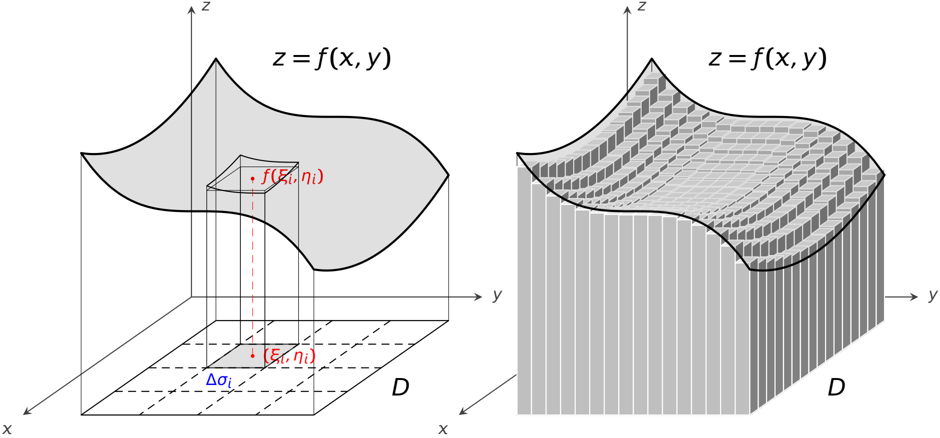




曲顶柱体的体积：

$$V \qquad \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

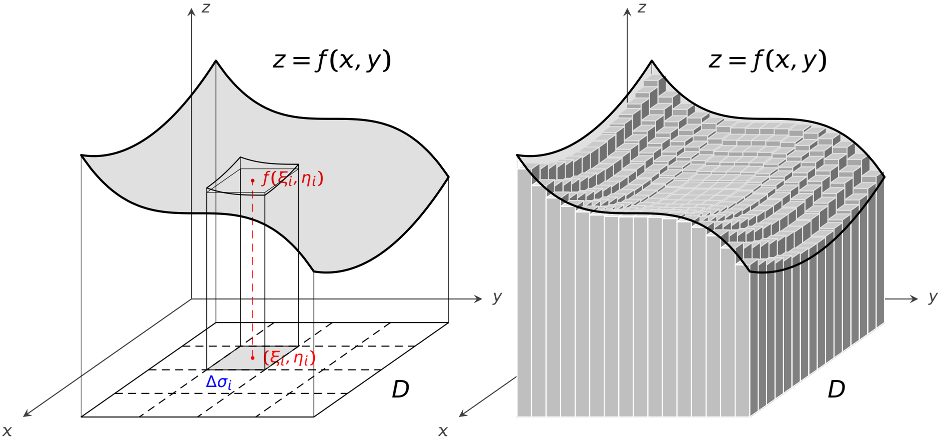
二重积分的几何意义



曲顶柱体的体积：

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

二重积分的几何意义



曲顶柱体的体积：

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i = \iint_D f(x, y)d\sigma$$

二重积分的性质

性质 1（线性性）

$$\iint_D \alpha f(x,y) + \beta g(x,y)d\sigma = \alpha\iint_D f(x,y)d\sigma + \beta\iint_D g(x,y)d\sigma,$$

其中 α, β 是常数。

二重积分的性质

性质 1（线性性）

$\iint_D \alpha f(x, y) + \beta g(x, y) d\sigma = \alpha \iint_D f(x, y) d\sigma + \beta \iint_D g(x, y) d\sigma$，其中 α, β 是常数。

证明

$$\iint_D \alpha f(x, y) + \beta g(x, y) d\sigma$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} [\alpha f(\xi_i, \eta_i) + \beta g(\xi_i, \eta_i)] \Delta\sigma_i$$

二重积分的性质

性质 1（线性性）

$\iint_D \alpha f(x,y)+\beta g(x,y)d\sigma=\alpha\iint_D f(x,y)d\sigma+\beta\iint_D g(x,y)d\sigma$,

其中 α, β 是常数。

证明

$$\begin{aligned}
&\iint_D \alpha f(x,y)+\beta g(x,y)d\sigma\\
&=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left[\alpha f(\xi_i,\eta_i)+\beta g(\xi_i,\eta_i)\right]\Delta\sigma_i\\
&=\alpha\cdot\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i+\beta\cdot\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}g(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i
\end{aligned}$$

二重积分的性质

性质 1（线性性）

$\iint_D \alpha f(x,y)+\beta g(x,y)d\sigma=\alpha\iint_D f(x,y)d\sigma+\beta\iint_D g(x,y)d\sigma$，

其中 α, β 是常数。

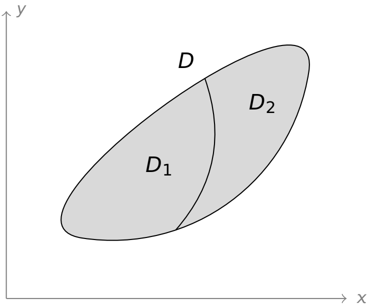
证明

$$\begin{aligned}&\iint_D \alpha f(x,y)+\beta g(x,y)d\sigma\\&=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[\alpha f(\xi_i,\eta_i)+\beta g(\xi_i,\eta_i)]\Delta\sigma_i\\&=\alpha\cdot\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i+\beta\cdot\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}g(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i\\&=\alpha\iint_D f(x,y)d\sigma+\beta\iint_D g(x,y)d\sigma\end{aligned}$$

二重积分的性质 (Cont.)

性质 2（积分可加性） 将 D 划分成两部分 D_1 和 D_2，则

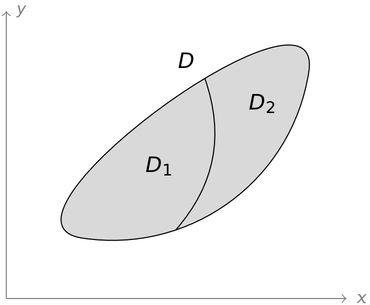
$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)d\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)d\sigma$$

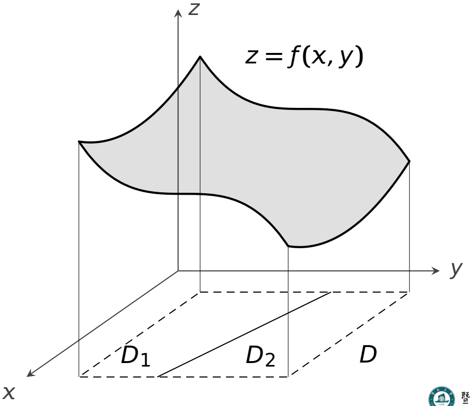


二重积分的性质 (Cont.)

性质 2（积分可加性） 将 D 划分成两部分 D_1 和 D_2，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)d\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)d\sigma$$

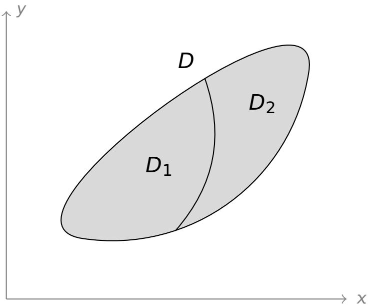


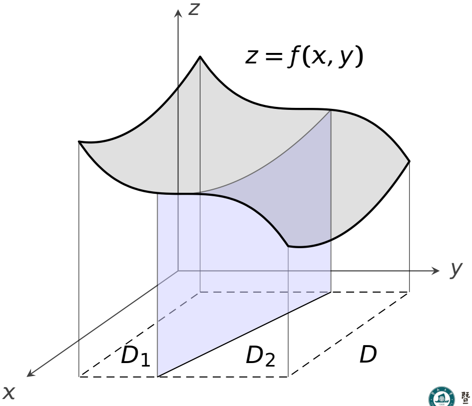


二重积分的性质 (Cont.)

性质 2（积分可加性） 将 D 划分成两部分 D_1 和 D_2，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)d\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)d\sigma$$



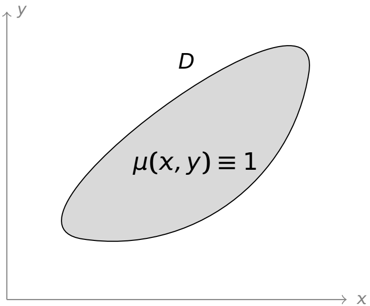


二重积分的性质 (Cont.)

性质 3 $\iint_D 1 d\sigma = |D|$（D 的面积）。

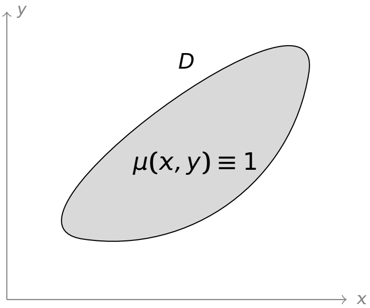
二重积分的性质 (Cont.)

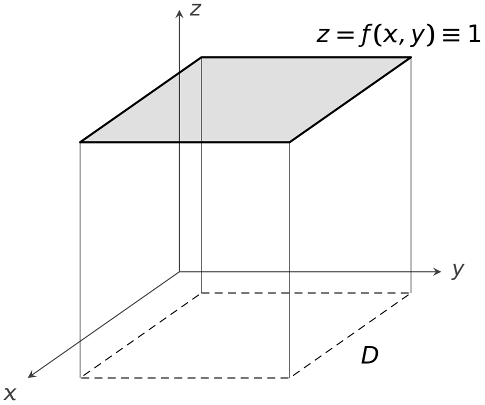
性质 3 $\iint_D 1 d\sigma = |D|$（D 的面积）。



二重积分的性质 (Cont.)

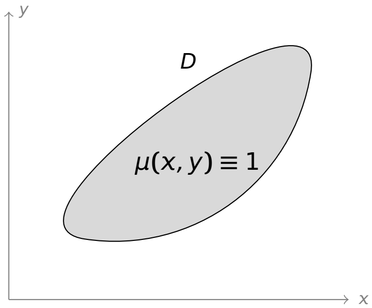
性质 3 $\iint_D 1 d\sigma = |D|$（D 的面积）。

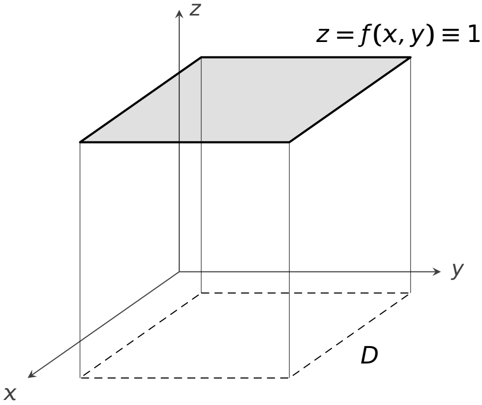




二重积分的性质 (Cont.)

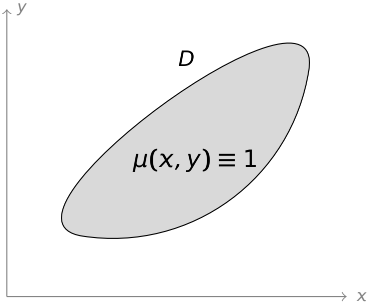
性质 3 $\iint_D 1 d\sigma = |D|$（D 的面积）。特别地，$\iint_D k d\sigma =$ 　　　。

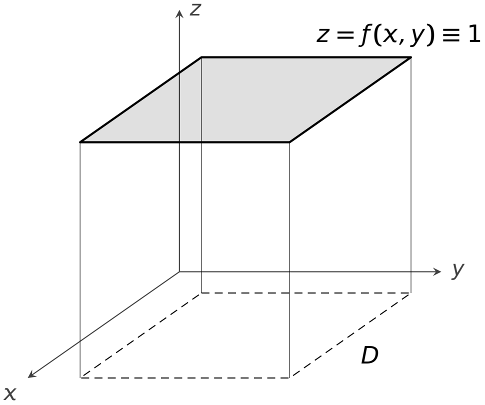




二重积分的性质 (Cont.)

性质 3 $\iint_D 1 d\sigma = |D|$（D 的面积）。特别地，$\iint_D k d\sigma = k|D|$。





二重积分的性质 (Cont.)

性质 4 如果在 D 上成立 $f(x, y) \leq g(x, y)$，则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma$$

二重积分的性质 (Cont.)

性质 4 如果在 D 上成立 $f(x, y) \le g(x, y)$，则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \le \iint_D g(x, y) d\sigma$$

性质 5 假设在 D 上成立 $m \le f(x, y) \le M$，则

$$m\sigma \le \iint_D f(x, y) d\sigma \le M\sigma,$$

二重积分的性质 (Cont.)

性质 4 如果在 D 上成立 $f(x, y) \leq g(x, y)$，则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma$$

性质 5 假设在 D 上成立 $m \leq f(x, y) \leq M$，则

$$m\sigma \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M\sigma, \qquad （\sigma为D的面积）$$

二重积分的性质 (Cont.)

性质 4 如果在 D 上成立 $f(x, y) \leq g(x, y)$，则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma$$

性质 5 假设在 D 上成立 $m \leq f(x, y) \leq M$，则

$$m\sigma \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M\sigma, \qquad (\sigma\text{为}D\text{的面积})$$

证明

$$\iint_D m d\sigma \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D M d\sigma$$

二重积分的性质 (Cont.)

性质 4 如果在 D 上成立 $f(x, y) \le g(x, y)$，则

$$\iint_D f(x, y)d\sigma \le \iint_D g(x, y)d\sigma$$

性质 5 假设在 D 上成立 $m \le f(x, y) \le M$，则

$$m\sigma \le \iint_D f(x, y)d\sigma \le M\sigma, \qquad （\sigma\text{为}D\text{的面积}）$$

证明

$$\iint_D m d\sigma \le \iint_D f(x, y)d\sigma \le \iint_D M d\sigma = M\sigma$$

二重积分的性质 (Cont.)

性质 4 如果在 D 上成立 $f(x, y) \leq g(x, y)$，则

$$\iint_D f(x, y)d\sigma \leq \iint_D g(x, y)d\sigma$$

性质 5 假设在 D 上成立 $m \leq f(x, y) \leq M$，则

$$m\sigma \leq \iint_D f(x, y)d\sigma \leq M\sigma, \qquad （\sigma\text{为}D\text{的面积}）$$

证明

$$m\sigma = \iint_D m d\sigma \leq \iint_D f(x, y)d\sigma \leq \iint_D M d\sigma = M\sigma$$

例 估计下列积分值的范围

1. $I=\iint_D (x^2+4y^2+9)d\sigma$, $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$
2. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$, $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$
3. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$, $D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 10\}$

例 估计下列积分值的范围

1. $I=\iint_D (x^2+4y^2+9)d\sigma$, $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$
2. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$, $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$
3. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$, $D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 10\}$

解

1. $$9\le x^2+4y^2+9$$

例 估计下列积分值的范围

1. $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9)d\sigma$, $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 4\}$
2. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$, $D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2\}$
3. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$, $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \le 10\}$

解

1. $$9 \le x^2 + 4y^2 + 9 = (x^2 + y^2) + 3y^2 + 9$$

例 估计下列积分值的范围

1. $I=\iint_D(x^2+4y^2+9)d\sigma$，$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leq 4\}$
2. $I=\iint_D\frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$，$D=\{(x,y)\,|\,0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 2\}$
3. $I=\iint_D\frac{d\sigma}{100+\cos^2x+\cos^2y}$，$D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\leq 10\}$

解

1. $$9\leq x^2+4y^2+9=(x^2+y^2)+3y^2+9\leq 4+3\cdot 4+9$$

例 估计下列积分值的范围

1. $I=\iint_D(x^2+4y^2+9)d\sigma$, $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leq 4\}$
2. $I=\iint_D\frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$, $D=\{(x,y)\,|\,0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 2\}$
3. $I=\iint_D\frac{d\sigma}{100+\cos^2x+\cos^2y}$, $D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\leq 10\}$

解

1. $$9\leq x^2+4y^2+9=(x^2+y^2)+3y^2+9\leq 4+3\cdot 4+9=25$$

例 估计下列积分值的范围

1. $I=\iint_D(x^2+4y^2+9)d\sigma,\ D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$
2. $I=\iint_D\frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}},\ D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$
3. $I=\iint_D\frac{d\sigma}{100+\cos^2x+\cos^2y},\ D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 10\}$

解

1. $$9\le x^2+4y^2+9=(x^2+y^2)+3y^2+9\le 4+3\cdot 4+9=25$$

$$\Rightarrow\quad 9|D|\le I\le 25|D|$$

例 估计下列积分值的范围

1. $I=\iint_D(x^2+4y^2+9)d\sigma,\ D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$
2. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}},\ D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$
3. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y},\ D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 10\}$

解

1. $$9\le x^2+4y^2+9=(x^2+y^2)+3y^2+9\le 4+3\cdot 4+9=25$$

$$\Rightarrow \quad 9|D|\le I\le 25|D| \quad \xRightarrow{|D|=4\pi}$$

例 估计下列积分值的范围

1. $I=\iint_D(x^2+4y^2+9)d\sigma$, $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$
2. $I=\iint_D \dfrac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$, $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$
3. $I=\iint_D \dfrac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$, $D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 10\}$

解

1. $$9\le x^2+4y^2+9=(x^2+y^2)+3y^2+9\le 4+3\cdot 4+9=25$$

$$\Rightarrow\quad 9|D|\le I\le 25|D| \xrightarrow{|D|=4\pi} 36\pi\le I\le 100\pi$$

例 估计下列积分值的范围

1. $I=\iint_D (x^2+4y^2+9)d\sigma$, $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$
2. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$, $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$
3. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$, $D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 10\}$

解

1. $$9\le x^2+4y^2+9=(x^2+y^2)+3y^2+9\le 4+3\cdot 4+9=25$$

$$\Rightarrow\quad 9|D|\le I\le 25|D| \xRightarrow{|D|=4\pi} 36\pi\le I\le 100\pi$$

2. $$x^2+y^2+2xy+16$$

例 估计下列积分值的范围

1. $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9)d\sigma$, $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 4\}$
2. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$, $D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2\}$
3. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$, $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \le 10\}$

解

1. $$9 \le x^2 + 4y^2 + 9 = (x^2 + y^2) + 3y^2 + 9 \le 4 + 3 \cdot 4 + 9 = 25$$

$$\Rightarrow \quad 9|D| \le I \le 25|D| \xRightarrow{|D|=4\pi} 36\pi \le I \le 100\pi$$

2. $$x^2 + y^2 + 2xy + 16 = (x + y)^2 + 16$$

例 估计下列积分值的范围

1. $I=\iint_D (x^2+4y^2+9)d\sigma$, $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$
2. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$, $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$
3. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$, $D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 10\}$

解

1. $$9\le x^2+4y^2+9=(x^2+y^2)+3y^2+9\le 4+3\cdot 4+9=25$$

$$\Rightarrow \quad 9|D|\le I\le 25|D| \quad \xRightarrow{|D|=4\pi} \quad 36\pi\le I\le 100\pi$$

2. $$16\le x^2+y^2+2xy+16=(x+y)^2+16$$

例 估计下列积分值的范围

1. $I=\iint_D(x^2+4y^2+9)d\sigma$, $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$
2. $I=\iint_D\frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$, $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$
3. $I=\iint_D\frac{d\sigma}{100+\cos^2x+\cos^2y}$, $D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 10\}$

解

1. $$9\le x^2+4y^2+9=(x^2+y^2)+3y^2+9\le 4+3\cdot 4+9=25$$

$$\Rightarrow\quad 9|D|\le I\le 25|D| \xRightarrow{|D|=4\pi} 36\pi\le I\le 100\pi$$

2. $$16\le x^2+y^2+2xy+16=(x+y)^2+16\le 3^2+16$$

例 估计下列积分值的范围

1. $I=\iint_D (x^2+4y^2+9)d\sigma$, $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$
2. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$, $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$
3. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$, $D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 10\}$

解

1. $$9\le x^2+4y^2+9=(x^2+y^2)+3y^2+9\le 4+3\cdot 4+9=25$$

$$\Rightarrow \quad 9|D|\le I\le 25|D| \quad \xRightarrow{|D|=4\pi} \quad 36\pi\le I\le 100\pi$$

2. $$16\le x^2+y^2+2xy+16=(x+y)^2+16\le 3^2+16=25$$

例 估计下列积分值的范围

1. $I=\iint_D(x^2+4y^2+9)d\sigma$, $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$
2. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$, $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$
3. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$, $D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 10\}$

解

1. $$9\le x^2+4y^2+9=(x^2+y^2)+3y^2+9\le 4+3\cdot 4+9=25$$

$$\Rightarrow\quad 9|D|\le I\le 25|D| \quad \xRightarrow{|D|=4\pi} \quad 36\pi\le I\le 100\pi$$

2. $$16\le x^2+y^2+2xy+16=(x+y)^2+16\le 3^2+16=25$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{5}\le\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}\le\frac{1}{4}$$

例 估计下列积分值的范围

1. $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9)d\sigma$, $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 4\}$
2. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$, $D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2\}$
3. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$, $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \le 10\}$

解

1. $$9 \le x^2 + 4y^2 + 9 = (x^2 + y^2)+3y^2+9 \le 4+3\cdot4+9=25$$

$$\Rightarrow \quad 9|D| \le I \le 25|D| \quad \xRightarrow{|D|=4\pi} \quad 36\pi \le I \le 100\pi$$

2. $$16 \le x^2 + y^2 + 2xy + 16 = (x + y)^2 + 16 \le 3^2 + 16 = 25$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{5} \le \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}} \le \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{5}|D| \le I \le \frac{1}{4}|D|$$

例 估计下列积分值的范围

1. $I=\iint_D (x^2+4y^2+9)d\sigma$， $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$
2. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$， $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$
3. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$， $D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 10\}$

解

1. $$9\le x^2+4y^2+9=(x^2+y^2)+3y^2+9\le 4+3\cdot 4+9=25$$

$$\Rightarrow\quad 9|D|\le I\le 25|D| \xRightarrow{|D|=4\pi} 36\pi\le I\le 100\pi$$

2. $$16\le x^2+y^2+2xy+16=(x+y)^2+16\le 3^2+16=25$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{5}\le \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}\le \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{5}|D|\le I\le \frac{1}{4}|D| \xRightarrow{|D|=2}$$

例 估计下列积分值的范围

1. $I=\iint_D(x^2+4y^2+9)d\sigma$，$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$
2. $I=\iint_D\frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$，$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$
3. $I=\iint_D\frac{d\sigma}{100+\cos^2x+\cos^2y}$，$D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 10\}$

解

1. $$9\le x^2+4y^2+9=(x^2+y^2)+3y^2+9\le 4+3\cdot 4+9=25$$

$$\Rightarrow\quad 9|D|\le I\le 25|D|\quad\xRightarrow{|D|=4\pi}\quad 36\pi\le I\le 100\pi$$

2. $$16\le x^2+y^2+2xy+16=(x+y)^2+16\le 3^2+16=25$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{5}\le\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}\le\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{5}|D|\le I\le\frac{1}{4}|D|\quad\xRightarrow{|D|=2}\quad \frac{2}{5}\le I\le\frac{1}{2}$$

例 估计下列积分值的范围

1. $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9)d\sigma,\ D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 4\}$
2. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}},\ D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2\}$
3. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y},\ D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \le 10\}$

解

3.
$$\frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$$

例 估计下列积分值的范围

1. $I=\iint_D(x^2+4y^2+9)d\sigma$, $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$
2. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$, $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$
3. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$, $D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 10\}$

解

3.
$$\frac{1}{102}\le\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$$

例 估计下列积分值的范围

1. $I=\iint_D (x^2+4y^2+9)d\sigma$, $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$
2. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$, $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$
3. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$, $D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 10\}$

解

3.
$$\frac{1}{102}\le\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\le\frac{1}{100}$$

例 估计下列积分值的范围

1. $I=\iint_D(x^2+4y^2+9)d\sigma,\ D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$
2. $I=\iint_D\frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}},\ D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$
3. $I=\iint_D\frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y},\ D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 10\}$

解

3.
$$\frac{1}{102}\le\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\le\frac{1}{100}$$
$$\Rightarrow\quad \frac{1}{102}|D|\le I\le\frac{1}{100}|D|$$

例 估计下列积分值的范围

1. $I=\iint_D (x^2+4y^2+9)d\sigma$, $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$
2. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$, $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$
3. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$, $D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 10\}$

解

3.
$$\frac{1}{102}\le \frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\le \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{102}|D|\le I\le \frac{1}{100}|D| \quad \xRightarrow{|D|=200}$$

例 估计下列积分值的范围

1. $I=\iint_D (x^2+4y^2+9)d\sigma,\ D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$
2. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}},\ \ D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$
3. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y},\ \ D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 10\}$

解

3.
$$\frac{1}{102}\le\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\le\frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{102}|D|\le I\le\frac{1}{100}|D| \xRightarrow{|D|=200} \frac{50}{51}\le I\le 2$$

例 估计下列积分值的范围

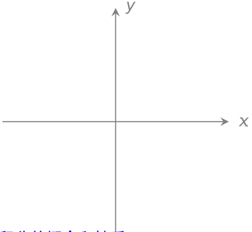
1. $I=\iint_D (x^2+4y^2+9)d\sigma$, $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$
2. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$, $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$
3. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$, $D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 10\}$

解

3.
$$\frac{1}{102}\le\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\le\frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{102}|D|\le I\le\frac{1}{100}|D| \xRightarrow{|D|=200} \frac{50}{51}\le I\le 2$$

画 $|x|+|y|=10$



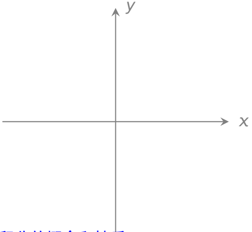
例 估计下列积分值的范围

1. $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9)d\sigma, \ D = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \le 4\}$
2. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}, \ D = \{(x, y) \,|\, 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 2\}$
3. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}, \ D = \{(x, y) \,|\, |x| + |y| \le 10\}$

解

3.
$$\frac{1}{102} \le \frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} \le \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{102}|D| \le I \le \frac{1}{100}|D| \xrightarrow{|D|=200} \frac{50}{51} \le I \le 2$$



画 $|x| + |y| = 10$

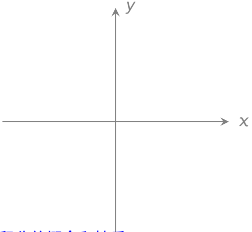
- $x \ge 0, \ y \ge 0$ 时，
- $x \ge 0, \ y \le 0$ 时，
- $x \le 0, \ y \ge 0$ 时，
- $x \le 0, \ y \le 0$ 时，

例 估计下列积分值的范围

1. $I=\iint_D(x^2+4y^2+9)d\sigma,\ D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$
2. $I=\iint_D\frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}},\ \ D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$
3. $I=\iint_D\frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y},\ \ D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 10\}$

解

3.
$$\frac{1}{102}\le\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\le\frac{1}{100}$$
$$\Rightarrow\quad \frac{1}{102}|D|\le I\le\frac{1}{100}|D|\ \xRightarrow{|D|=200}\ \frac{50}{51}\le I\le 2$$



画 $|x|+|y|=10$

- $x\ge 0,\ y\ge 0$ 时，$x+y=10$
- $x\ge 0,\ y\le 0$ 时，
- $x\le 0,\ y\ge 0$ 时，
- $x\le 0,\ y\le 0$ 时，

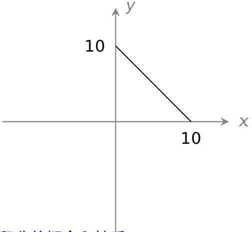
例 估计下列积分值的范围

1. $I=\iint_D (x^2+4y^2+9)d\sigma,\ D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$
2. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}},\ D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$
3. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y},\ D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 10\}$

解

3.
$$\frac{1}{102}\le\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\le\frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{102}|D|\le I\le\frac{1}{100}|D| \xrightarrow{|D|=200} \frac{50}{51}\le I\le 2$$



画 $|x|+|y|=10$

- $x\ge 0,\ y\ge 0$ 时，$x+y=10$
- $x\ge 0,\ y\le 0$ 时，
- $x\le 0,\ y\ge 0$ 时，
- $x\le 0,\ y\le 0$ 时，

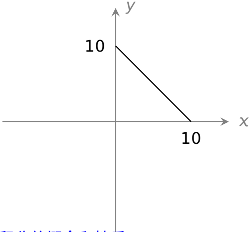
例 估计下列积分值的范围

1. $I=\iint_D(x^2+4y^2+9)d\sigma$, $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$
2. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$, $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$
3. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$, $D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 10\}$

解

3.
$$\frac{1}{102}\le\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\le\frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{102}|D|\le I\le\frac{1}{100}|D| \quad\xRightarrow{|D|=200}\quad \frac{50}{51}\le I\le 2$$



画 $|x|+|y|=10$

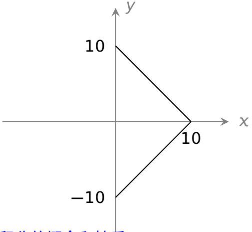
- $x\ge 0,\ y\ge 0$ 时，$x+y=10$
- $x\ge 0,\ y\le 0$ 时，$x-y=10$
- $x\le 0,\ y\ge 0$ 时，
- $x\le 0,\ y\le 0$ 时，

例 估计下列积分值的范围

1. $I=\iint_D (x^2+4y^2+9)d\sigma$, $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$
2. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$, $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$
3. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$, $D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 10\}$

解

3.
$$\frac{1}{102}\le\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\le\frac{1}{100}$$
$$\Rightarrow\quad \frac{1}{102}|D|\le I\le\frac{1}{100}|D| \xrightarrow{|D|=200} \frac{50}{51}\le I\le 2$$



画 $|x|+|y|=10$

- $x\ge 0,\ y\ge 0$ 时, $x+y=10$
- $x\ge 0,\ y\le 0$ 时, $x-y=10$
- $x\le 0,\ y\ge 0$ 时,
- $x\le 0,\ y\le 0$ 时,

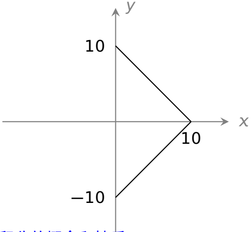
例 估计下列积分值的范围

1. $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$, $D = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \le 4\}$
2. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$, $D = \{(x, y) \,|\, 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2\}$
3. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$, $D = \{(x, y) \,|\, |x| + |y| \le 10\}$

解

3.
$$\frac{1}{102} \le \frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} \le \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{102}|D| \le I \le \frac{1}{100}|D| \xRightarrow{|D|=200} \frac{50}{51} \le I \le 2$$



画 $|x| + |y| = 10$

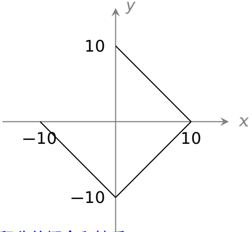
- $x \ge 0$, $y \ge 0$ 时，$x + y = 10$
- $x \ge 0$, $y \le 0$ 时，$x - y = 10$
- $x \le 0$, $y \ge 0$ 时，$-x + y = 10$
- $x \le 0$, $y \le 0$ 时，

例 估计下列积分值的范围

1. $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$, $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 4\}$
2. $I = \iint_D \dfrac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$, $D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2\}$
3. $I = \iint_D \dfrac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$, $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \le 10\}$

解

3.
$$\frac{1}{102} \le \frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} \le \frac{1}{100}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{102}|D| \le I \le \frac{1}{100}|D| \xrightarrow{|D|=200} \frac{50}{51} \le I \le 2$$



画 $|x| + |y| = 10$

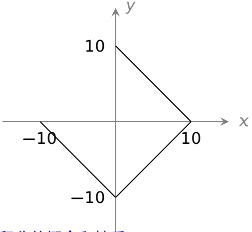
- $x \ge 0,\ y \ge 0$ 时，$x + y = 10$
- $x \ge 0,\ y \le 0$ 时，$x - y = 10$
- $x \le 0,\ y \ge 0$ 时，$-x + y = 10$
- $x \le 0,\ y \le 0$ 时，

例 估计下列积分值的范围

1. $I=\iint_D(x^2+4y^2+9)d\sigma$, $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$
2. $I=\iint_D\frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$, $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$
3. $I=\iint_D\frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$, $D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 10\}$

解

3.
$$\frac{1}{102}\le\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\le\frac{1}{100}$$
$$\Rightarrow\quad \frac{1}{102}|D|\le I\le\frac{1}{100}|D|\ \xRightarrow{|D|=200}\ \frac{50}{51}\le I\le 2$$



画 $|x|+|y|=10$

- $x\ge 0,\ y\ge 0$ 时，$x+y=10$
- $x\ge 0,\ y\le 0$ 时，$x-y=10$
- $x\le 0,\ y\ge 0$ 时，$-x+y=10$
- $x\le 0,\ y\le 0$ 时，$-x-y=10$

例 估计下列积分值的范围

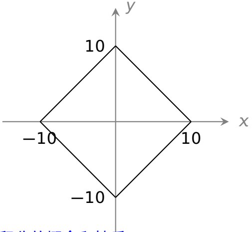
1. $I=\iint_D(x^2+4y^2+9)d\sigma,\ D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$
2. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}},\ D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$
3. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y},\ D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 10\}$

解

3.

$$\frac{1}{102}\le\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\le\frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{102}|D|\le I\le\frac{1}{100}|D|\ \xRightarrow{|D|=200}\ \frac{50}{51}\le I\le 2$$



画 $|x|+|y|=10$

- $x\ge 0,\ y\ge 0$ 时，$x+y=10$
- $x\ge 0,\ y\le 0$ 时，$x-y=10$
- $x\le 0,\ y\ge 0$ 时，$-x+y=10$
- $x\le 0,\ y\le 0$ 时，$-x-y=10$

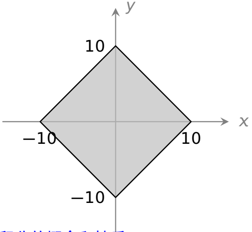
例 估计下列积分值的范围

1. $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9)d\sigma,\ D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 4\}$
2. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}},\ D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2\}$
3. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y},\ D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \le 10\}$

解

3.
$$\frac{1}{102} \le \frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} \le \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{102}|D| \le I \le \frac{1}{100}|D| \xRightarrow{|D|=200} \frac{50}{51} \le I \le 2$$



画 $|x| + |y| = 10$

- $x \ge 0,\ y \ge 0$ 时，$x + y = 10$
- $x \ge 0,\ y \le 0$ 时，$x - y = 10$
- $x \le 0,\ y \ge 0$ 时，$-x + y = 10$
- $x \le 0,\ y \le 0$ 时，$-x - y = 10$

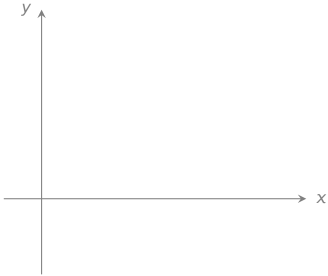
例 设 $D=\{(x,y)|(x-2)^2+(y-1)^2\le 2\}$，比较以下两个积分大小：

$$I_1=\iint_D (x+y)^2 d\sigma, \qquad I_2=\iint_D (x+y)^3 d\sigma$$

例 设 $D=\{(x,y)|(x-2)^2+(y-1)^2\le 2\}$，比较以下两个积分大小：

$$I_1=\iint_D (x+y)^2 d\sigma, \qquad I_2=\iint_D (x+y)^3 d\sigma$$

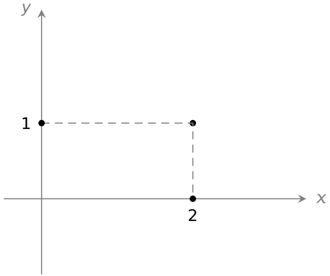
解



例 设 $D=\{(x,y)|(x-2)^2+(y-1)^2\le 2\}$，比较以下两个积分大小：

$$I_1=\iint_D (x+y)^2 d\sigma,\qquad I_2=\iint_D (x+y)^3 d\sigma$$

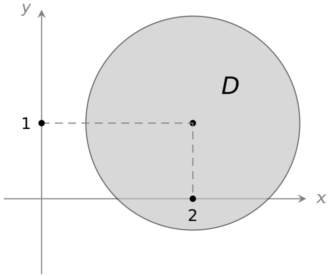
解



例 设 $D = \{(x, y) | (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 2\}$，比较以下两个积分大小：

$$I_1 = \iint_D (x+y)^2 d\sigma, \qquad I_2 = \iint_D (x+y)^3 d\sigma$$

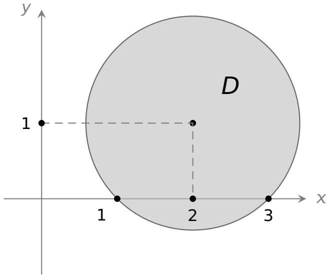
解



例 设 $D = \{(x, y) | (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 2\}$，比较以下两个积分大小：

$$I_1 = \iint_D (x+y)^2 d\sigma, \qquad I_2 = \iint_D (x+y)^3 d\sigma$$

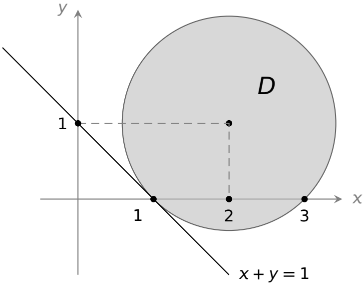
解



例 设 $D=\{(x,y)|(x-2)^2+(y-1)^2\le 2\}$，比较以下两个积分大小：

$$I_1=\iint_D (x+y)^2 d\sigma, \qquad I_2=\iint_D (x+y)^3 d\sigma$$

解

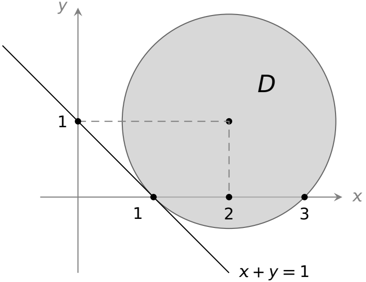


例 设 $D=\{(x,y)|\,(x-2)^2+(y-1)^2\le 2\}$，比较以下两个积分大小：

$$I_1=\iint_D (x+y)^2 d\sigma,\qquad I_2=\iint_D (x+y)^3 d\sigma$$

解 如图，在比区域 D 上成立

$$x+y\ge 1$$



例 设 $D=\{(x,y) \mid (x-2)^2+(y-1)^2 \le 2\}$，比较以下两个积分大小：

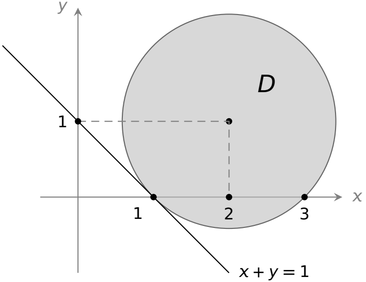
$$I_1=\iint_D (x+y)^2 d\sigma, \qquad I_2=\iint_D (x+y)^3 d\sigma$$

解 如图，在比区域 D 上成立

$$x+y \ge 1$$

所以

$$(x+y)^2 \le (x+y)^3$$



例 设 $D=\{(x,y)|(x-2)^2+(y-1)^2\le 2\}$，比较以下两个积分大小：

$$I_1=\iint_D (x+y)^2 d\sigma,\qquad I_2=\iint_D (x+y)^3 d\sigma$$

解

如图，在比区域 D 上成立

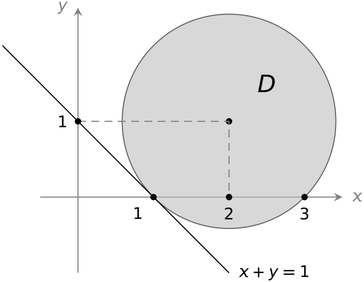
$$x+y\ge 1$$

所以

$$(x+y)^2\le (x+y)^3$$

所以

$$I_1\le I_2$$



二重积分的性质 (Cont.)

性质 6（二重积分的中值定理） 设函数 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上连续，$|D|$ 是 D 的面积，则在 D 上至少存在一点 (ξ, η)，使得

$$\iint_D f(x, y)d\sigma = f(\xi, \eta) \cdot |D|.$$

二重积分的性质 (Cont.)

性质 6（二重积分的中值定理） 设函数 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上连续，$|D|$ 是 D 的面积，则在 D 上至少存在一点 (ξ, η)，使得

$$\iint_D f(x, y)d\sigma = f(\xi, \eta) \cdot |D|.$$

证明

$$m \cdot |D| \le \iint_D f(x, y)d\sigma \le M \cdot |D|$$

二重积分的性质 (Cont.)

性质 6（二重积分的中值定理） 设函数 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上连续，$|D|$ 是 D 的面积，则在 D 上至少存在一点 (ξ, η)，使得

$$\iint_D f(x, y)d\sigma = f(\xi, \eta) \cdot |D|.$$

证明

$$m \cdot |D| \leq \iint_D f(x, y)d\sigma \leq M \cdot |D| \quad \Rightarrow \quad m \leq \frac{1}{|D|} \iint_D f(x, y)d\sigma \leq M$$

二重积分的性质 (Cont.)

性质 6（二重积分的中值定理） 设函数 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上连续，$|D|$ 是 D 的面积，则在 D 上至少存在一点 (ξ, η)，使得

$$\iint_D f(x, y)d\sigma = f(\xi, \eta) \cdot |D|.$$

证明 因为

$$m \cdot |D| \leq \iint_D f(x, y)d\sigma \leq M \cdot |D| \quad \Rightarrow \quad m \leq \frac{1}{|D|} \iint_D f(x, y)d\sigma \leq M$$

由闭区域上连续函数的中值定理可知：存在 $(\xi, \eta) \in D$，使得

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{|D|} \iint_D f(x, y)d\sigma,$$

二重积分的性质 (Cont.)

性质 6（二重积分的中值定理） 设函数 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上连续，$|D|$ 是 D 的面积，则在 D 上至少存在一点 (ξ, η)，使得

$$\iint_D f(x, y)d\sigma = f(\xi, \eta) \cdot |D|.$$

证明 因为

$$m \cdot |D| \leq \iint_D f(x, y)d\sigma \leq M \cdot |D| \quad \Rightarrow \quad m \leq \frac{1}{|D|}\iint_D f(x, y)d\sigma \leq M$$

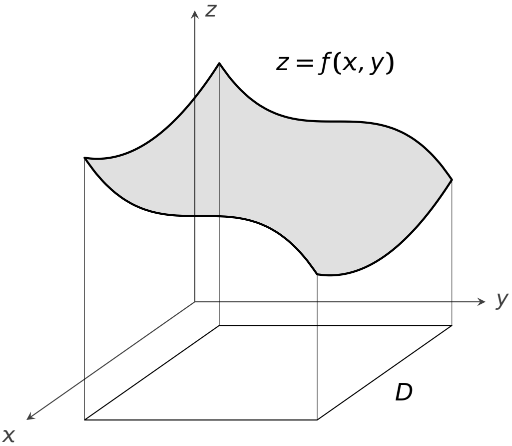
由闭区域上连续函数的中值定理可知：存在 $(\xi, \eta) \in D$，使得

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{|D|}\iint_D f(x, y)d\sigma,$$

即

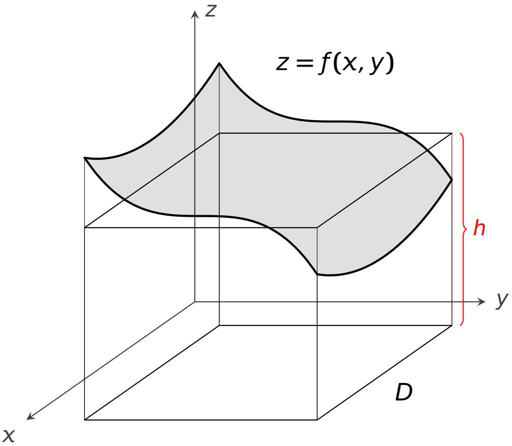
$$\iint_D f(x, y)d\sigma = f(\xi, \eta) \cdot |D|.$$

二重积分中值定理的几何直观



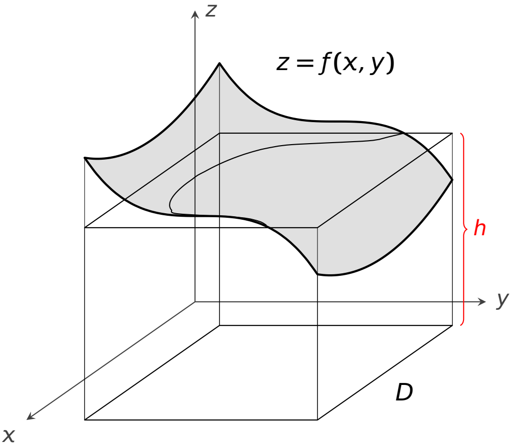
$$\iint_D f(x, y)d\sigma$$

二重积分中值定理的几何直观



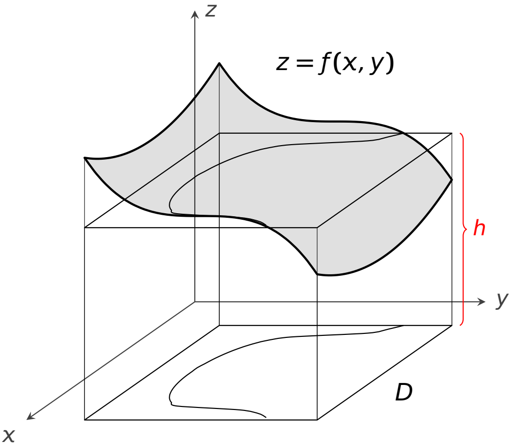
$$\iint_D f(x, y)d\sigma = h|D|$$

二重积分中值定理的几何直观



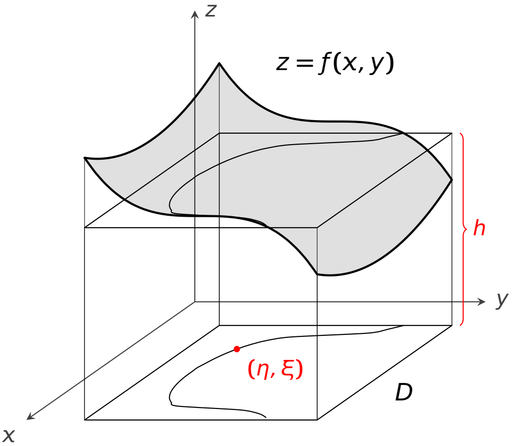
$$\iint_D f(x, y) d\sigma = h|D|$$

二重积分中值定理的几何直观



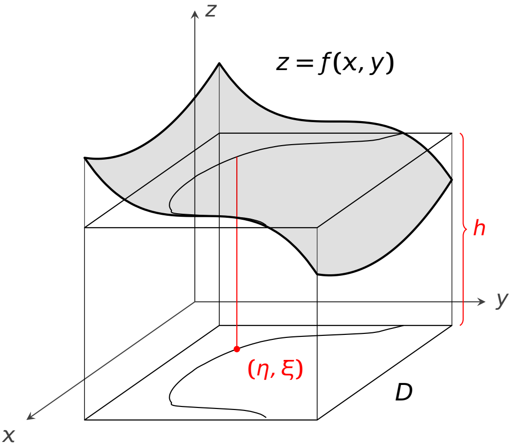
$$\iint_D f(x,y)d\sigma = h|D|$$

二重积分中值定理的几何直观



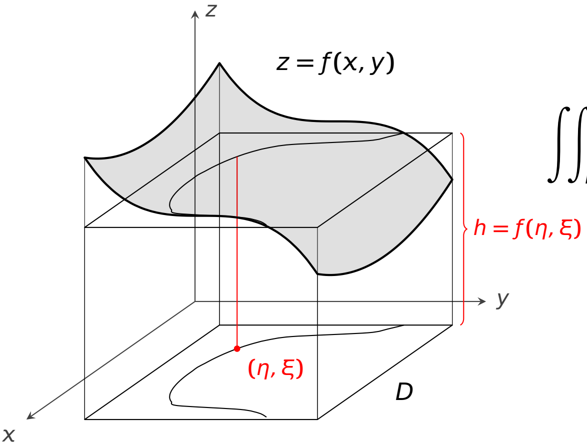
$$\iint_D f(x,y)d\sigma = h|D|$$

二重积分中值定理的几何直观



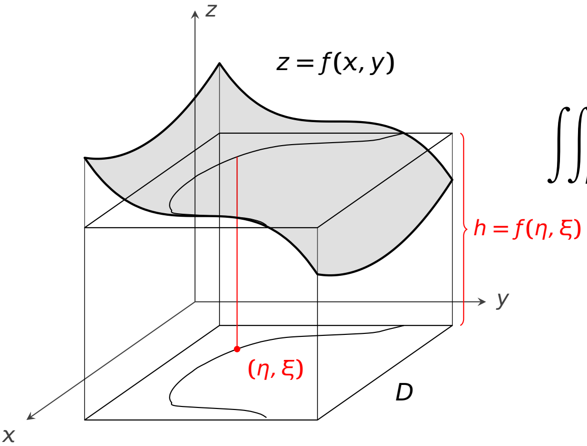
$$\iint_D f(x, y) d\sigma = h|D|$$

二重积分中值定理的几何直观



$$\iint_D f(x, y)d\sigma = h|D|$$

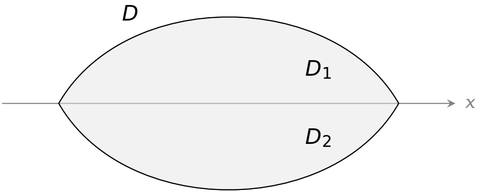
二重积分中值定理的几何直观



$$\iint_D f(x, y)d\sigma = h|D|$$
$$= f(\xi, \eta)|D|$$

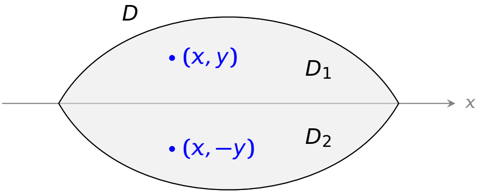
积分的对称性

性质 设闭区域 D 关于 x 轴对称，



积分的对称性

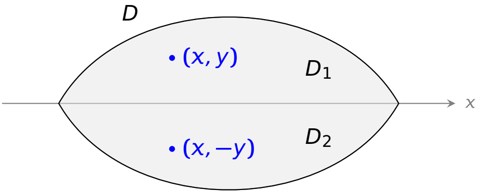
性质 设闭区域 D 关于 x 轴对称，



积分的对称性

性质 设闭区域 D 关于 x 轴对称，

- 若 $f(x, y)$ 关于 y 是奇函数（即：$f(x, -y) = -f(x, y)$），则

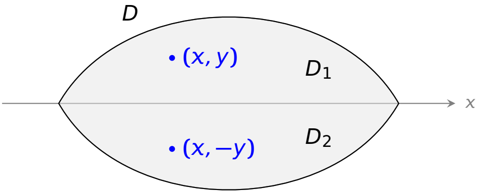


积分的对称性

性质 设闭区域 D 关于 x 轴对称，

- 若 $f(x,y)$ 关于 y 是奇函数（即：$f(x,-y)=-f(x,y)$），则

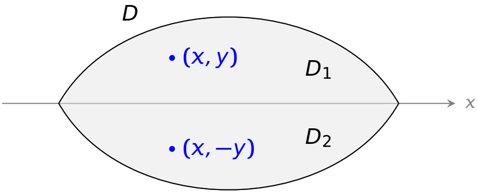
$$\iint_D f(x,y)d\sigma = 0$$



积分的对称性

性质 设闭区域 D 关于 x 轴对称，

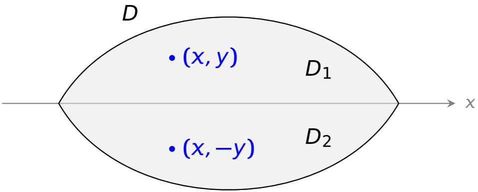
- 若 $f(x, y)$ 关于 y 是奇函数（即：$f(x, -y) = -f(x, y)$），则
$$\iint_D f(x, y) d\sigma = 0$$
- 若 $f(x, y)$ 关于 y 是偶函数（即：$f(x, -y) = f(x, y)$），则



积分的对称性

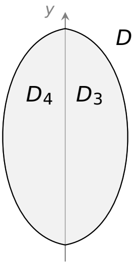
性质 设闭区域 D 关于 x 轴对称，

- 若 $f(x, y)$ 关于 y 是奇函数（即：$f(x, -y) = -f(x, y)$），则
$$\iint_D f(x, y)d\sigma = 0$$
- 若 $f(x, y)$ 关于 y 是偶函数（即：$f(x, -y) = f(x, y)$），则
$$\iint_D f(x, y)d\sigma = 2\iint_{D_1} f(x, y)d\sigma = 2\iint_{D_2} f(x, y)d\sigma$$



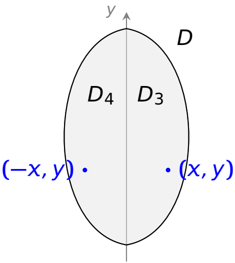
积分的对称性

性质 设闭区域 D 关于 y 轴对称，



积分的对称性

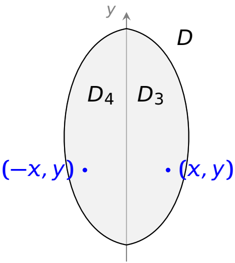
性质 设闭区域 D 关于 y 轴对称，



积分的对称性

性质 设闭区域 D 关于 y 轴对称，

- 若 $f(x, y)$ 关于 x 是奇函数（即：$f(-x, y) = -f(x, y)$），则

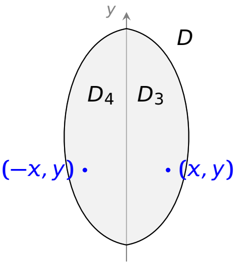


积分的对称性

性质 设闭区域 D 关于 y 轴对称，

- 若 $f(x, y)$ 关于 x 是奇函数（即：$f(-x, y) = -f(x, y)$），则

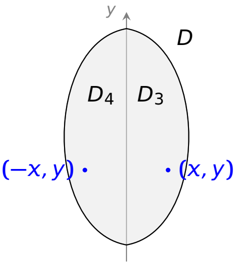
$$\iint_D f(x, y) d\sigma = 0$$



积分的对称性

性质 设闭区域 D 关于 y 轴对称，

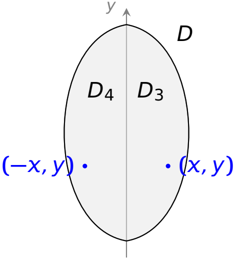
- 若 $f(x, y)$ 关于 x 是奇函数（即：$f(-x, y) = -f(x, y)$），则
$$\iint_D f(x, y)d\sigma = 0$$
- 若 $f(x, y)$ 关于 x 是偶函数（即：$f(-x, y) = f(x, y)$），则



积分的对称性

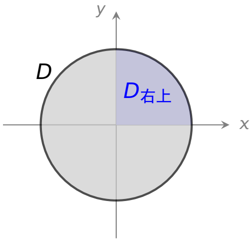
性质 设闭区域 D 关于 y 轴对称，

- 若 $f(x,y)$ 关于 x 是奇函数（即：$f(-x,y)=-f(x,y)$），则
$$\iint_D f(x,y)d\sigma = 0$$
- 若 $f(x,y)$ 关于 x 是偶函数（即：$f(-x,y)=f(x,y)$），则
$$\iint_D f(x,y)d\sigma = 2\iint_{D_3} f(x,y)d\sigma = 2\iint_{D_4} f(x,y)d\sigma$$



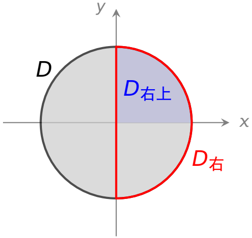
例 设 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$，则

$$\iint_D x^2+y^2 d\sigma = 4\iint_{D_{右上}} x^2+y^2 d\sigma$$



例 设 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$，则

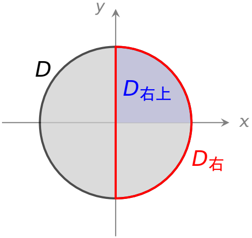
$$\iint_D x^2 + y^2 d\sigma = 4 \iint_{D_{右上}} x^2 + y^2 d\sigma$$



解 $\iint_D x^2 + y^2 d\sigma = 2 \iint_{D_{右}} x^2 + y^2 d\sigma$

例 设 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$，则

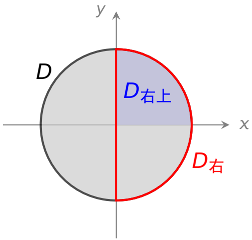
$$\iint_D x^2 + y^2 d\sigma = 4 \iint_{D_{右上}} x^2 + y^2 d\sigma$$



解 $\iint_D x^2 + y^2 d\sigma = 2 \iint_{D_{右}} x^2 + y^2 d\sigma = 2 \cdot 2 \iint_{D_{右上}} x^2 + y^2 d\sigma.$

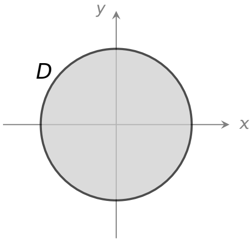
例 设 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$，则

$$\iint_D x^2+y^2 d\sigma = 4\iint_{D_{右上}} x^2+y^2 d\sigma$$



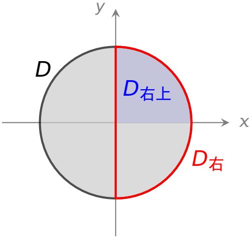
解 $\iint_D x^2+y^2 d\sigma = 2\iint_{D_{右}} x^2+y^2 d\sigma = 2\cdot 2\iint_{D_{右上}} x^2+y^2 d\sigma.$

例 计算 $\iint_D (2x+3y\sqrt{1-x^2})d\sigma$，
其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$



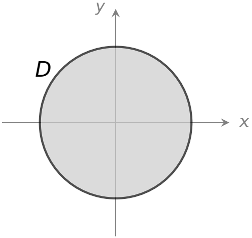
例 设 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$，则

$$\iint_D x^2+y^2 d\sigma = 4\iint_{D_{右上}} x^2+y^2 d\sigma$$



解 $\iint_D x^2+y^2 d\sigma = 2\iint_{D_右} x^2+y^2 d\sigma = 2\cdot 2\iint_{D_{右上}} x^2+y^2 d\sigma.$

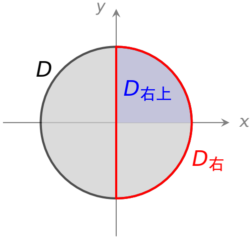
例 计算 $\iint_D (2x+3y\sqrt{1-x^2})d\sigma$，
其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$



解 原式 $=2\iint_D x d\sigma + 3\iint_D y\sqrt{1-x^2} d\sigma$

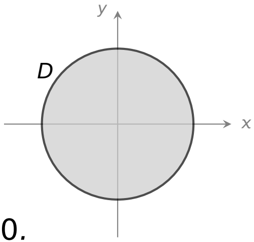
例 设 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$，则

$$\iint_D x^2+y^2 d\sigma = 4\iint_{D_{右上}} x^2+y^2 d\sigma$$



解 $\iint_D x^2+y^2 d\sigma = 2\iint_{D_{右}} x^2+y^2 d\sigma = 2\cdot 2\iint_{D_{右上}} x^2+y^2 d\sigma.$

例 计算 $\iint_D (2x+3y\sqrt{1-x^2})d\sigma$，
其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$



解 原式 $=2\iint_D x d\sigma + 3\iint_D y\sqrt{1-x^2} d\sigma = 0.$