

# 第 10 章 $b$ : 二重积分的计算

数学系 梁卓滨

2016-2017 学年 II

# Outline

---

1. 如何计算二重积分?
2. 固定  $x$ , 先对  $y$  积分
3. 固定  $y$ , 先对  $x$  积分
4. 交换二重积分的积分次序
5. 极坐标下计算二重积分
6. 二重积分的应用

# We are here now...

---

1. 如何计算二重积分?
2. 固定  $x$ , 先对  $y$  积分
3. 固定  $y$ , 先对  $x$  积分
4. 交换二重积分的积分次序
5. 极坐标下计算二重积分
6. 二重积分的应用

# 如何计算二重积分：

---

- 一般方法 化二重积分为“累次积分”：

$$\iint_D f(x, y) d\sigma =$$

# 如何计算二重积分：

---

- 一般方法 化二重积分为“累次积分”：

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(x, y) dx dy$$

# 如何计算二重积分：

---

- 一般方法 化二重积分为“累次积分”：

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(x, y) dx dy = \int \int f(x, y) dx dy$$

# 如何计算二重积分：

---

- 一般方法 化二重积分为“累次积分”：

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(x, y) dx dy = \int \left[ \int f(x, y) dx \right] dy$$

# 如何计算二重积分：

---

- 一般方法 化二重积分为“累次积分”：

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(x, y) dx dy = \int \left[ \int_*^* f(x, y) dx \right] dy$$



# 如何计算二重积分：

---

- 一般方法 化二重积分为“累次积分”：

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dx \right] dy$$

# 如何计算二重积分：

- 一般方法 化二重积分为“累次积分”：

$$\begin{aligned}\iint_D f(x, y) d\sigma &= \iint_D f(x, y) dx dy = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dx \right] dy \\ &= \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dy \right] dx\end{aligned}$$

# 如何计算二重积分：

- 一般方法 化二重积分为“累次积分”：

$$\begin{aligned}\iint_D f(x, y) d\sigma &= \iint_D f(x, y) dx dy = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dx \right] dy \\ &= \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dy \right] dx\end{aligned}$$

- 问题：如何确定积分上下限？

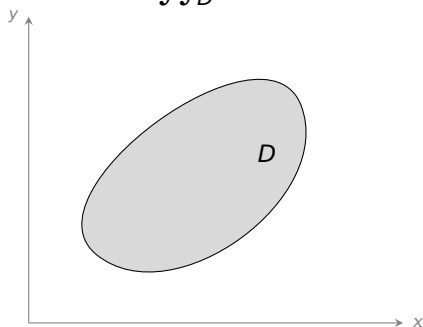
# We are here now...

---

1. 如何计算二重积分?
2. 固定  $x$ , 先对  $y$  积分
3. 固定  $y$ , 先对  $x$  积分
4. 交换二重积分的积分次序
5. 极坐标下计算二重积分
6. 二重积分的应用

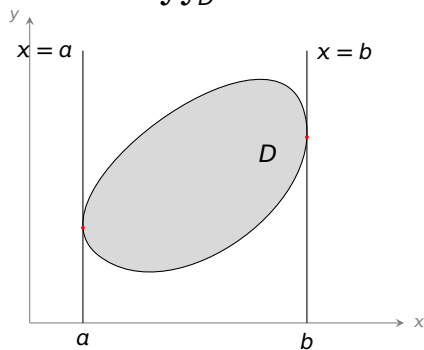
## 固定 $x$ , 先对 $y$ 积分

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int \left[ \int f(x, y) dy \right] dx$$



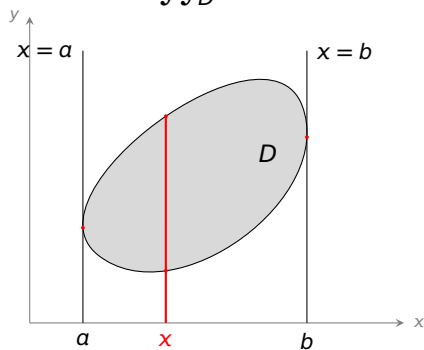
## 固定 $x$ , 先对 $y$ 积分

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int \left[ \int f(x, y) dy \right] dx$$



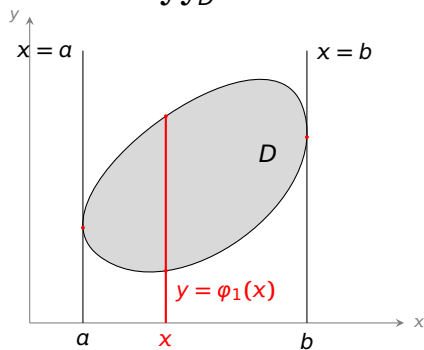
## 固定 $x$ , 先对 $y$ 积分

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int \left[ \int f(x, y) dy \right] dx$$



## 固定 $x$ , 先对 $y$ 积分

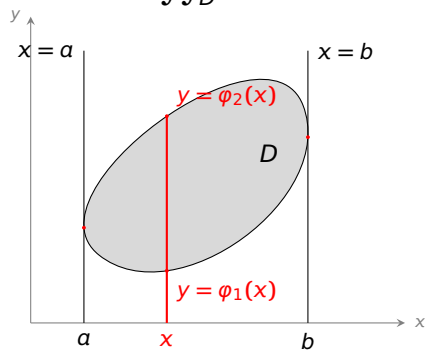
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int \left[ \int f(x, y) dy \right] dx$$





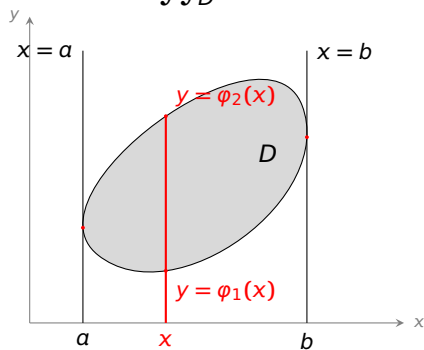
## 固定 $x$ , 先对 $y$ 积分

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int \left[ \int f(x, y) dy \right] dx$$



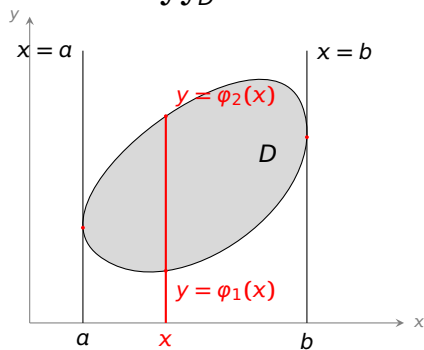
## 固定 $x$ , 先对 $y$ 积分

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[ \int_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$



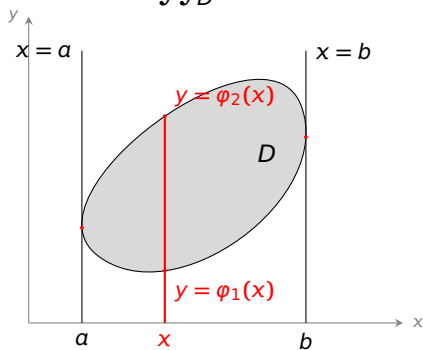
## 固定 $x$ , 先对 $y$ 积分

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$



## 固定 $x$ , 先对 $y$ 积分

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$



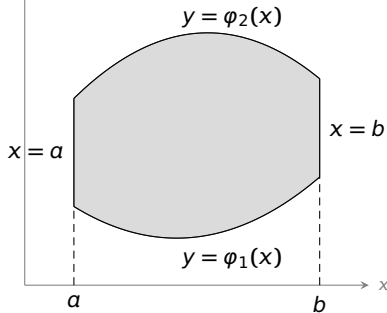
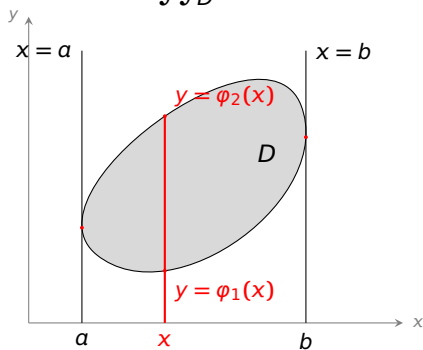
注 上述区域  $D$  可以表示成

$$D = \{(x, y) | \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b\}$$

称为  $X$ -型区域。

## 固定 $x$ , 先对 $y$ 积分

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$



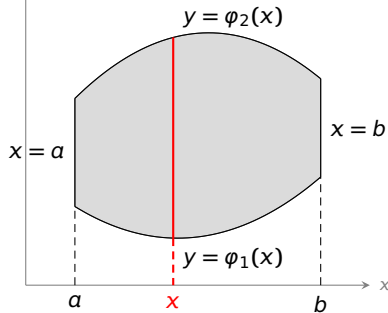
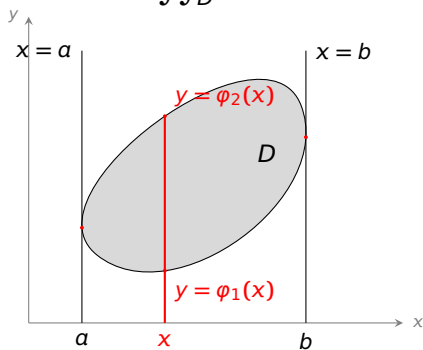
注 上述区域  $D$  可以表示成

$$D = \{(x, y) | \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b\}$$

称为  $X$ -型区域。

## 固定 $x$ , 先对 $y$ 积分

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$



注 上述区域  $D$  可以表示成

$$D = \{(x, y) | \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b\}$$

称为  $X$ -型区域。

## 二次积分化为累次积分：几何解释

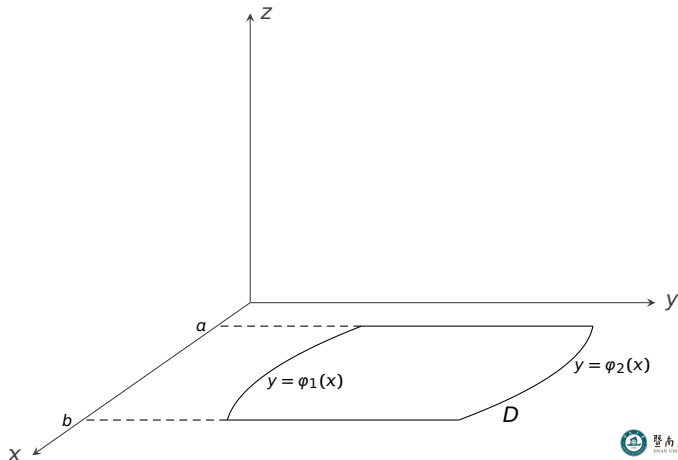
- 设  $D = \{(x, y) | \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b\}$ , 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b \left[ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

## 二次积分化为累次积分：几何解释

- 设  $D = \{(x, y) | \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b\}$ , 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b \left[ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

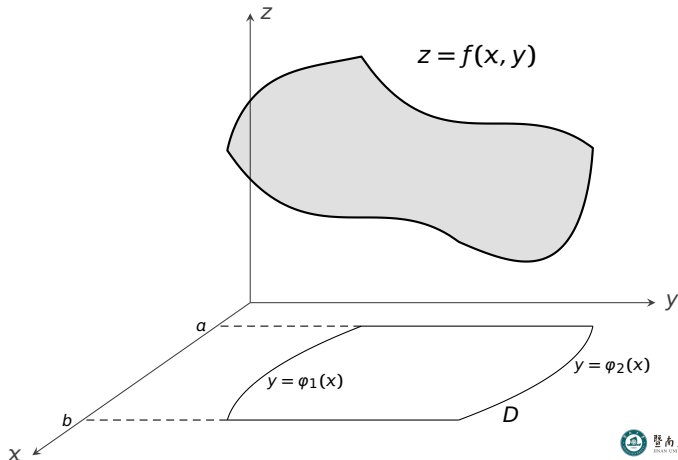




## 二次积分化为累次积分：几何解释

- 设  $D = \{(x, y) | \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b\}$ , 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b \left[ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

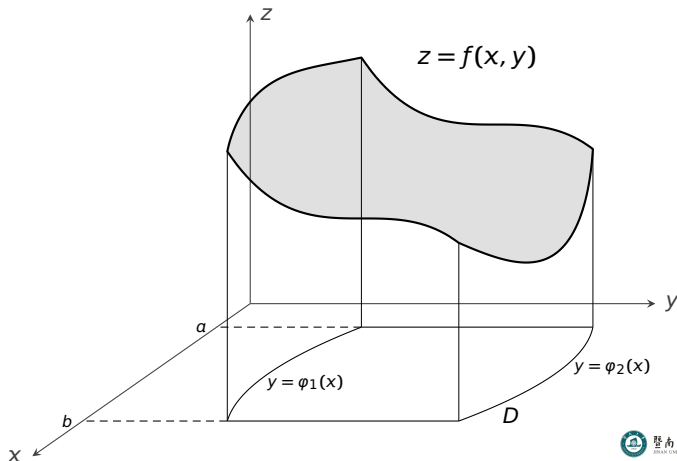


## 二次积分化为累次积分：几何解释

- 设  $D = \{(x, y) | \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b\}$ , 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = V$$

$$\int_a^b \left[ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

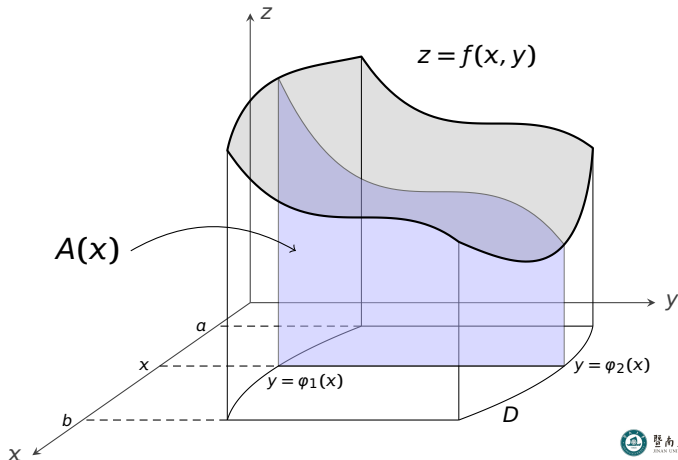


## 二次积分化为累次积分：几何解释

- 设  $D = \{(x, y) | \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b\}$ , 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = V$$

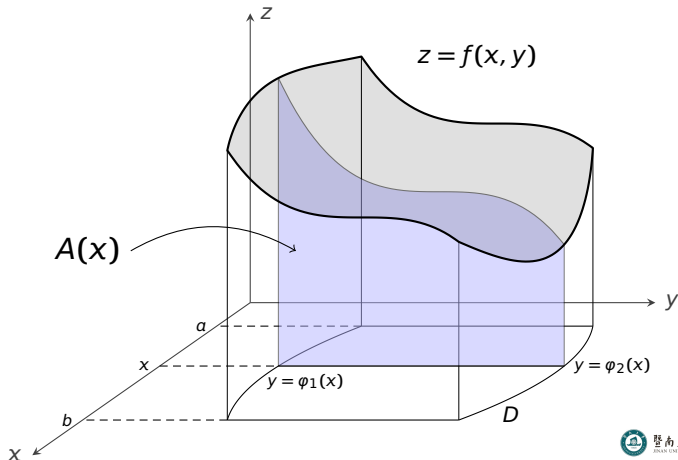
$$\int_a^b \left[ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$



## 二次积分化为累次积分：几何解释

- 设  $D = \{(x, y) | \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b\}$ , 则

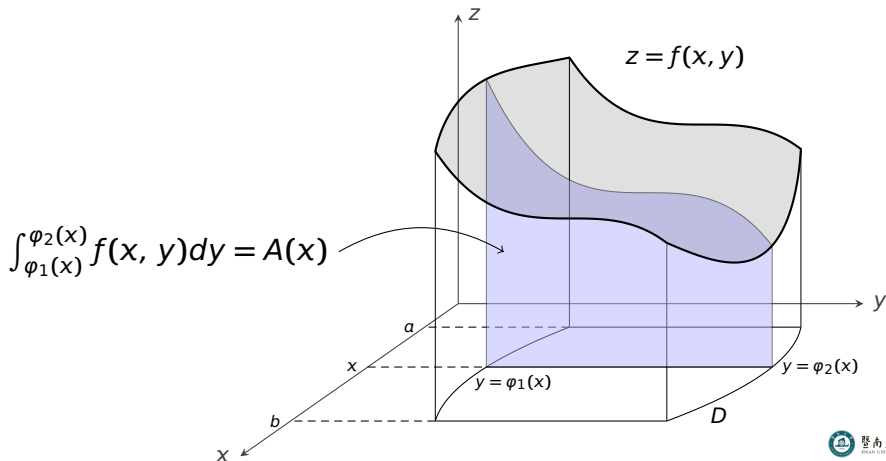
$$\iint_D f(x, y) d\sigma = V = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left[ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$



## 二次积分化为累次积分：几何解释

- 设  $D = \{(x, y) | \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b\}$ , 则

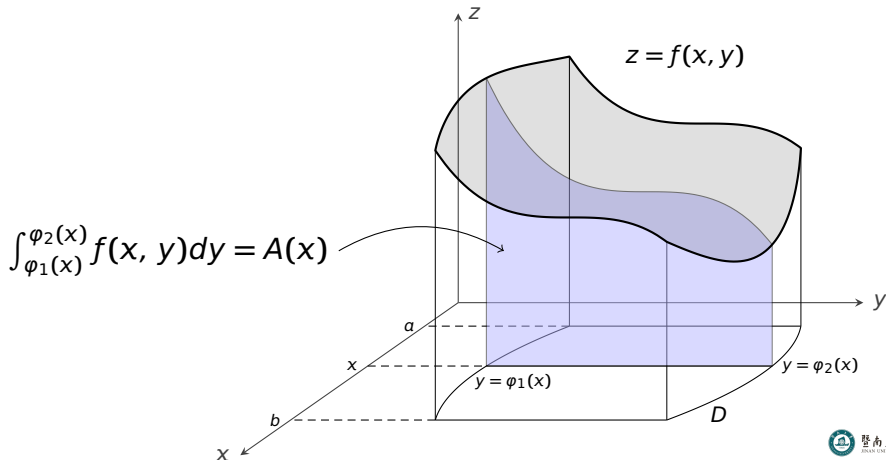
$$\iint_D f(x, y) d\sigma = V = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left[ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$



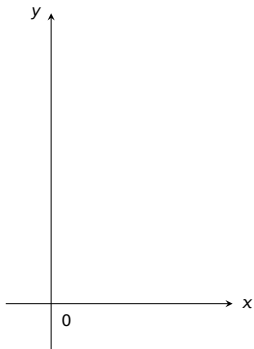
## 二次积分化为累次积分：几何解释

- 设  $D = \{(x, y) | \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b\}$ , 则

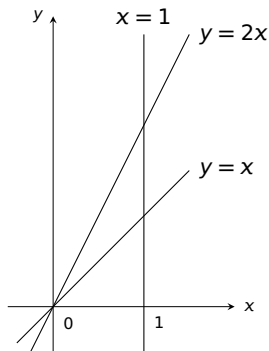
$$\iint_D f(x, y) d\sigma = V = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left[ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$



例 计算  $\iint_D xy dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $y = 2x$ ,  $y = x$  和  $x = 1$  所围成区域。

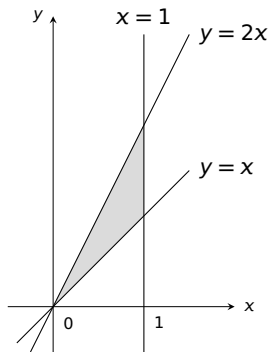


例 计算  $\iint_D xy dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $y = 2x$ ,  $y = x$  和  $x = 1$  所围成区域。





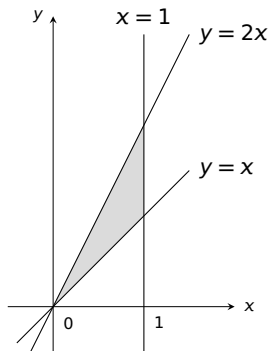
例 计算  $\iint_D xy dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $y = 2x$ ,  $y = x$  和  $x = 1$  所围成区域。



**例** 计算  $\iint_D xy dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $y = 2x$ ,  $y = x$  和  $x = 1$  所围成区域。

**解**

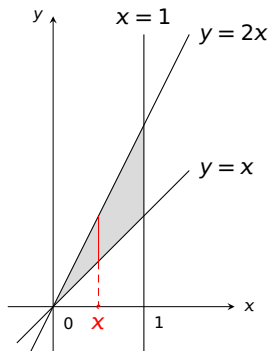
$$\iint_D xy dx dy = \int \left[ \int xy dy \right] dx$$



**例** 计算  $\iint_D xy dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $y = 2x$ ,  $y = x$  和  $x = 1$  所围成区域。

**解**

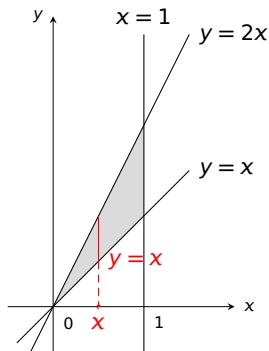
$$\iint_D xy dx dy = \int \left[ \int xy dy \right] dx$$



**例** 计算  $\iint_D xy dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $y = 2x$ ,  $y = x$  和  $x = 1$  所围成区域。

**解**

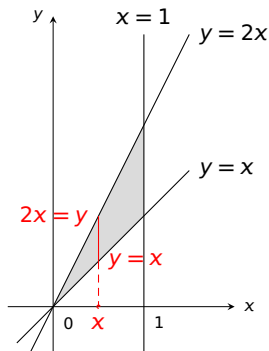
$$\iint_D xy dx dy = \int \left[ \int xy dy \right] dx$$



**例** 计算  $\iint_D xy dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $y = 2x$ ,  $y = x$  和  $x = 1$  所围成区域。

**解**

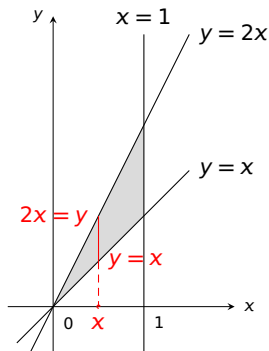
$$\iint_D xy dx dy = \int \left[ \int xy dy \right] dx$$



**例** 计算  $\iint_D xy dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $y = 2x$ ,  $y = x$  和  $x = 1$  所围成区域。

**解**

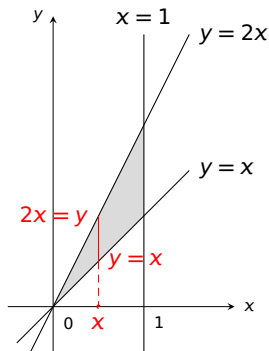
$$\iint_D xy dx dy = \int_0^1 \left[ \int_{y=x}^{y=2x} xy dy \right] dx$$



**例** 计算  $\iint_D xy dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $y = 2x$ ,  $y = x$  和  $x = 1$  所围成区域。

**解**

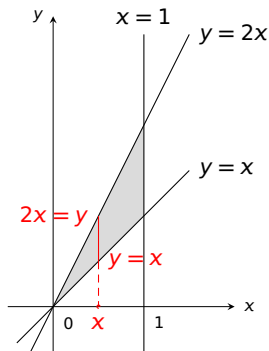
$$\iint_D xy dx dy = \int_0^1 \left[ \int_x^{2x} xy dy \right] dx$$



**例** 计算  $\iint_D xy dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $y = 2x$ ,  $y = x$  和  $x = 1$  所围成区域。

**解**

$$\iint_D xy dx dy = \int_0^1 \left[ \int_x^{2x} xy dy \right] dx$$
$$\frac{1}{2} xy^2$$

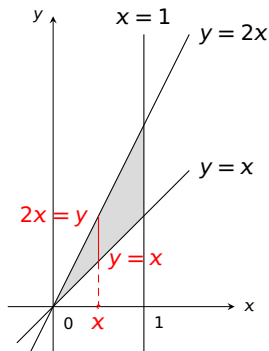




**例** 计算  $\iint_D xy dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $y = 2x$ ,  $y = x$  和  $x = 1$  所围成区域。

**解**

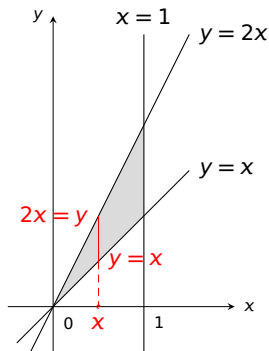
$$\iint_D xy dx dy = \int_0^1 \left[ \int_x^{2x} xy dy \right] dx$$
$$\frac{1}{2} xy^2 \Big|_x^{2x}$$



**例** 计算  $\iint_D xy dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $y = 2x$ ,  $y = x$  和  $x = 1$  所围成区域。

**解**

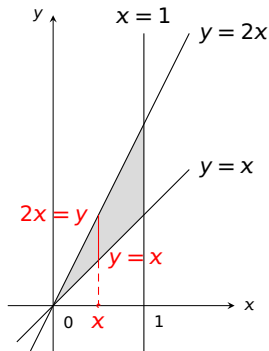
$$\begin{aligned}\iint_D xy dx dy &= \int_0^1 \left[ \int_x^{2x} xy dy \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} xy^2 \Big|_x^{2x} \right] dx\end{aligned}$$



**例** 计算  $\iint_D xy dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $y = 2x$ ,  $y = x$  和  $x = 1$  所围成区域。

**解**

$$\begin{aligned}\iint_D xy dx dy &= \int_0^1 \left[ \int_x^{2x} xy dy \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} xy^2 \Big|_x^{2x} \right] dx\end{aligned}$$

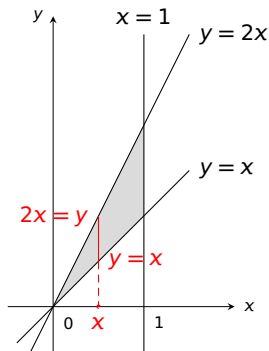


$$\frac{3}{2}x^3$$

**例** 计算  $\iint_D xy dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $y = 2x$ ,  $y = x$  和  $x = 1$  所围成区域。

**解**

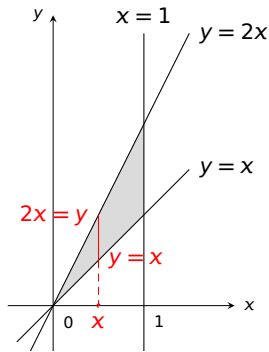
$$\begin{aligned}\iint_D xy dx dy &= \int_0^1 \left[ \int_x^{2x} xy dy \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} xy^2 \Big|_x^{2x} \right] dx = \int_0^1 \frac{3}{2} x^3 dx\end{aligned}$$



**例** 计算  $\iint_D xy dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $y = 2x$ ,  $y = x$  和  $x = 1$  所围成区域。

**解**

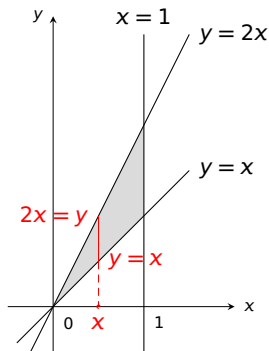
$$\begin{aligned}\iint_D xy dx dy &= \int_0^1 \left[ \int_x^{2x} xy dy \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} xy^2 \Big|_x^{2x} \right] dx = \int_0^1 \frac{3}{2} x^3 dx = \frac{3}{8} x^4\end{aligned}$$



**例** 计算  $\iint_D xy dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $y = 2x$ ,  $y = x$  和  $x = 1$  所围成区域。

**解**

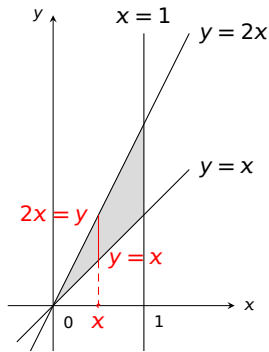
$$\begin{aligned}\iint_D xy dx dy &= \int_0^1 \left[ \int_x^{2x} xy dy \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} xy^2 \Big|_x^{2x} \right] dx = \int_0^1 \frac{3}{2} x^3 dx = \frac{3}{8} x^4 \Big|_0^1\end{aligned}$$



**例** 计算  $\iint_D xy dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $y = 2x$ ,  $y = x$  和  $x = 1$  所围成区域。

**解**

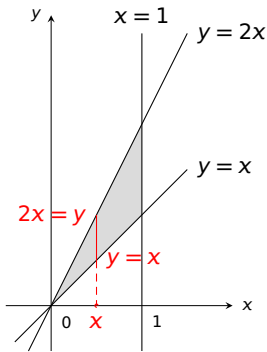
$$\begin{aligned}\iint_D xy dx dy &= \int_0^1 \left[ \int_x^{2x} xy dy \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} xy^2 \Big|_x^{2x} \right] dx = \int_0^1 \frac{3}{2} x^3 dx = \frac{3}{8} x^4 \Big|_0^1 = \frac{3}{8}\end{aligned}$$



例 计算  $\iint_D xy dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $y = 2x$ ,  $y = x$  和  $x = 1$  所围成区域。

解

$$\begin{aligned}\iint_D xy dx dy &= \int_0^1 \left[ \int_x^{2x} xy dy \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} xy^2 \Big|_x^{2x} \right] dx = \int_0^1 \frac{3}{2} x^3 dx = \frac{3}{8} x^4 \Big|_0^1 = \frac{3}{8}\end{aligned}$$



注  $D$  是  $X$ -型区域, 可以表示为

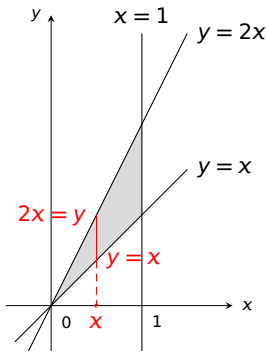
$$D = \{(x, y) | \quad \quad \quad \}$$



例 计算  $\iint_D xy dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $y = 2x$ ,  $y = x$  和  $x = 1$  所围成区域。

解

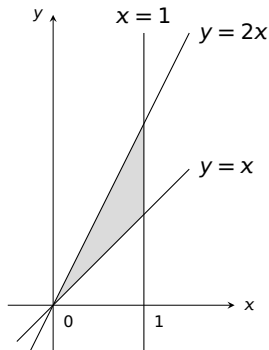
$$\begin{aligned}\iint_D xy dx dy &= \int_0^1 \left[ \int_x^{2x} xy dy \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} xy^2 \Big|_x^{2x} \right] dx = \int_0^1 \frac{3}{2} x^3 dx = \frac{3}{8} x^4 \Big|_0^1 = \frac{3}{8}\end{aligned}$$



注  $D$  是  $X$ -型区域, 可以表示为

$$D = \{(x, y) | x \leq y \leq 2x, 0 \leq x \leq 1\}$$

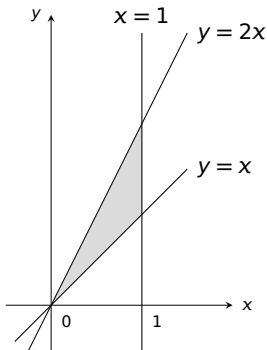
例 计算  $\iint_D e^{x+y} dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $y = 2x$ ,  $y = x$  和  $x = 1$  所围成区域。



例 计算  $\iint_D e^{x+y} dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $y = 2x$ ,  $y = x$  和  $x = 1$  所围成区域。

解

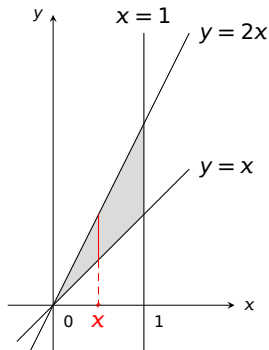
$$\iint_D e^{x+y} dx dy = \int \left[ \int e^{x+y} dy \right] dx$$



例 计算  $\iint_D e^{x+y} dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $y = 2x$ ,  $y = x$  和  $x = 1$  所围成区域。

解

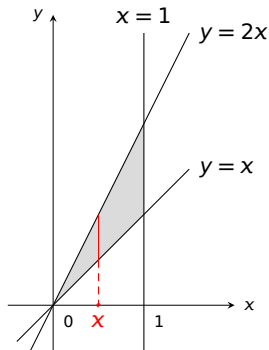
$$\iint_D e^{x+y} dx dy = \int \left[ \int e^{x+y} dy \right] dx$$



例 计算  $\iint_D e^{x+y} dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $y = 2x$ ,  $y = x$  和  $x = 1$  所围成区域。

解

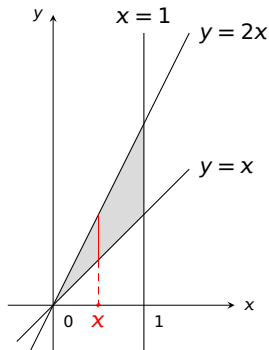
$$\iint_D e^{x+y} dx dy = \int_0^1 \left[ \int e^{x+y} dy \right] dx$$



例 计算  $\iint_D e^{x+y} dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $y = 2x$ ,  $y = x$  和  $x = 1$  所围成区域。

解

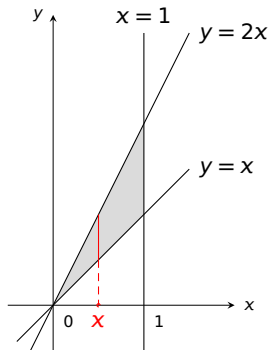
$$\iint_D e^{x+y} dx dy = \int_0^1 \left[ \int_x^{2x} e^{x+y} dy \right] dx$$



例 计算  $\iint_D e^{x+y} dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $y = 2x$ ,  $y = x$  和  $x = 1$  所围成区域。

解

$$\iint_D e^{x+y} dx dy = \int_0^1 \left[ \int_x^{2x} e^{x+y} dy \right] dx$$

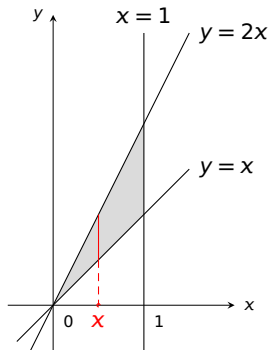


$e^{x+y}$

例 计算  $\iint_D e^{x+y} dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $y = 2x$ ,  $y = x$  和  $x = 1$  所围成区域。

解

$$\iint_D e^{x+y} dx dy = \int_0^1 \left[ \int_x^{2x} e^{x+y} dy \right] dx$$

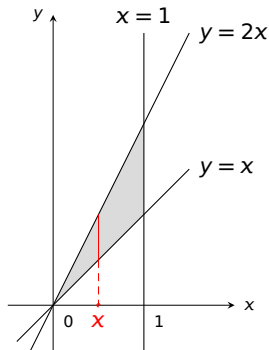


$$e^{x+y} \Big|_x^{2x}$$



**例** 计算  $\iint_D e^{x+y} dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $y = 2x$ ,  $y = x$  和  $x = 1$  所围成区域。

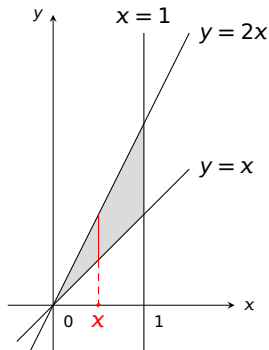
**解**



$$\iint_D e^{x+y} dx dy = \int_0^1 \left[ \int_x^{2x} e^{x+y} dy \right] dx = \int_0^1 \left[ e^{x+y} \Big|_x^{2x} \right] dx$$

例 计算  $\iint_D e^{x+y} dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $y = 2x$ ,  $y = x$  和  $x = 1$  所围成区域。

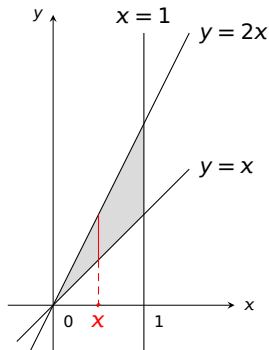
解



$$\begin{aligned}\iint_D e^{x+y} dx dy &= \int_0^1 \left[ \int_x^{2x} e^{x+y} dy \right] dx = \int_0^1 \left[ e^{x+y} \Big|_x^{2x} \right] dx \\ &= \int_0^1 (e^{3x} - e^{2x}) dx\end{aligned}$$

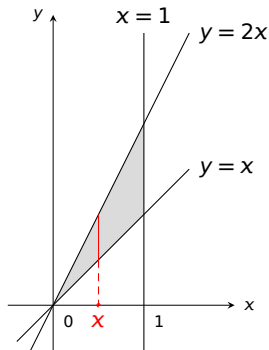
例 计算  $\iint_D e^{x+y} dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $y = 2x$ ,  $y = x$  和  $x = 1$  所围成区域。

解



$$\begin{aligned}\iint_D e^{x+y} dx dy &= \int_0^1 \left[ \int_x^{2x} e^{x+y} dy \right] dx = \int_0^1 \left[ e^{x+y} \Big|_x^{2x} \right] dx \\ &= \int_0^1 e^{3x} - e^{2x} dx\end{aligned}$$

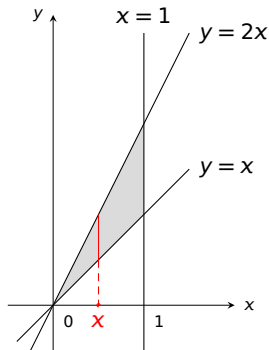
例 计算  $\iint_D e^{x+y} dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $y = 2x$ ,  $y = x$  和  $x = 1$  所围成区域。



解

$$\begin{aligned}\iint_D e^{x+y} dx dy &= \int_0^1 \left[ \int_x^{2x} e^{x+y} dy \right] dx = \int_0^1 \left[ e^{x+y} \Big|_x^{2x} \right] dx \\ &= \int_0^1 e^{3x} - e^{2x} dx = \frac{1}{3} e^{3x} - \frac{1}{2} e^{2x}\end{aligned}$$

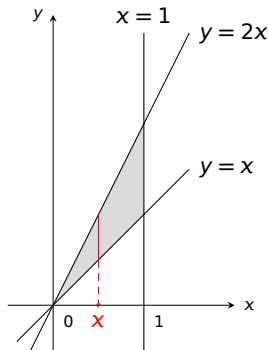
例 计算  $\iint_D e^{x+y} dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $y = 2x$ ,  $y = x$  和  $x = 1$  所围成区域。



解

$$\begin{aligned}\iint_D e^{x+y} dx dy &= \int_0^1 \left[ \int_x^{2x} e^{x+y} dy \right] dx = \int_0^1 \left[ e^{x+y} \Big|_x^{2x} \right] dx \\ &= \int_0^1 e^{3x} - e^{2x} dx = \frac{1}{3} e^{3x} - \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_0^1\end{aligned}$$

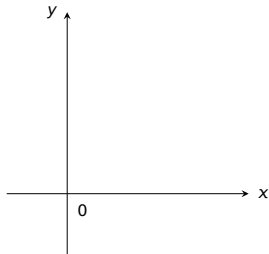
例 计算  $\iint_D e^{x+y} dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $y = 2x$ ,  $y = x$  和  $x = 1$  所围成区域。



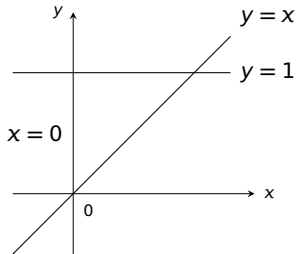
解

$$\begin{aligned}\iint_D e^{x+y} dx dy &= \int_0^1 \left[ \int_x^{2x} e^{x+y} dy \right] dx = \int_0^1 \left[ e^{x+y} \Big|_x^{2x} \right] dx \\ &= \int_0^1 e^{3x} - e^{2x} dx = \frac{1}{3} e^{3x} - \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} e^3 - \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{6}\end{aligned}$$

例 计算  $\iint_D (2x + 6y) dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $x = 0$ ,  $y = 1$  和  $y = x$  所围成区域。

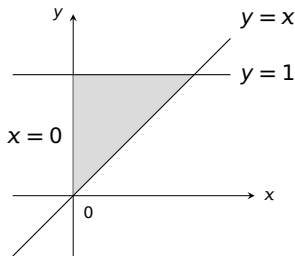


例 计算  $\iint_D (2x + 6y) dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $x = 0$ ,  $y = 1$  和  $y = x$  所围成区域。





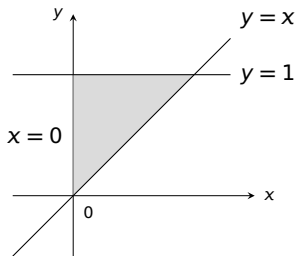
例 计算  $\iint_D (2x + 6y) dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $x = 0$ ,  $y = 1$  和  $y = x$  所围成区域。



**例** 计算  $\iint_D (2x + 6y) dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $x = 0$ ,  $y = 1$  和  $y = x$  所围成区域。

**解**

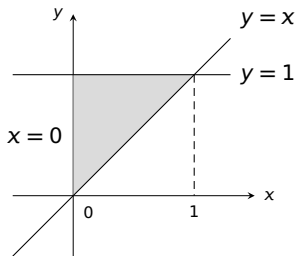
$$\iint_D (2x + 6y) dx dy = \int \left[ \int (2x + 6y) dy \right] dx$$



**例** 计算  $\iint_D (2x + 6y) dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $x = 0$ ,  $y = 1$  和  $y = x$  所围成区域。

**解**

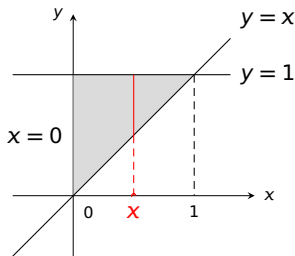
$$\iint_D (2x + 6y) dx dy = \int \left[ \int (2x + 6y) dy \right] dx$$



**例** 计算  $\iint_D (2x + 6y) dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $x = 0$ ,  $y = 1$  和  $y = x$  所围成区域。

**解**

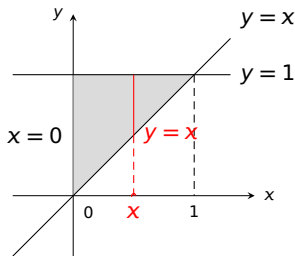
$$\iint_D (2x + 6y) dx dy = \int \left[ \int (2x + 6y) dy \right] dx$$



**例** 计算  $\iint_D (2x + 6y) dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $x = 0$ ,  $y = 1$  和  $y = x$  所围成区域。

**解**

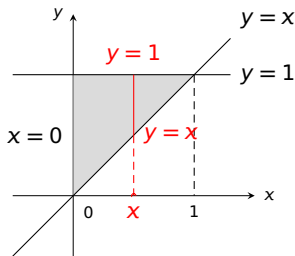
$$\iint_D (2x + 6y) dx dy = \int \left[ \int (2x + 6y) dy \right] dx$$



例 计算  $\iint_D (2x + 6y) dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $x = 0$ ,  $y = 1$  和  $y = x$  所围成区域。

解

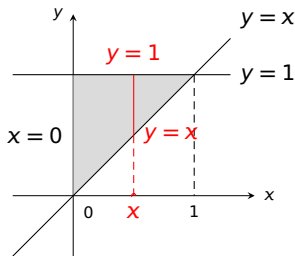
$$\iint_D (2x + 6y) dx dy = \int \left[ \int (2x + 6y) dy \right] dx$$



**例** 计算  $\iint_D (2x + 6y) dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $x = 0$ ,  $y = 1$  和  $y = x$  所围成区域。

**解**

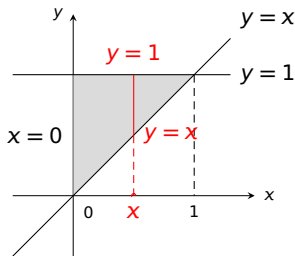
$$\iint_D (2x + 6y) dx dy = \int_0^1 \left[ \int (2x + 6y) dy \right] dx$$



**例** 计算  $\iint_D (2x + 6y) dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $x = 0$ ,  $y = 1$  和  $y = x$  所围成区域。

**解**

$$\iint_D (2x + 6y) dx dy = \int_0^1 \left[ \int_x^1 (2x + 6y) dy \right] dx$$

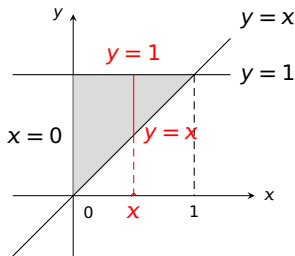




例 计算  $\iint_D (2x + 6y) dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $x = 0$ ,  $y = 1$  和  $y = x$  所围成区域。

解

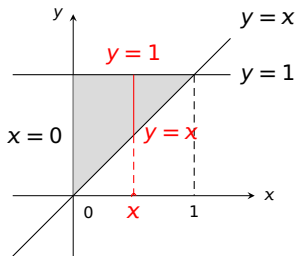
$$\iint_D (2x + 6y) dx dy = \int_0^1 \left[ \int_x^1 (2x + 6y) dy \right] dx$$
$$2xy + 3y^2$$



例 计算  $\iint_D (2x + 6y) dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $x = 0$ ,  $y = 1$  和  $y = x$  所围成区域。

解

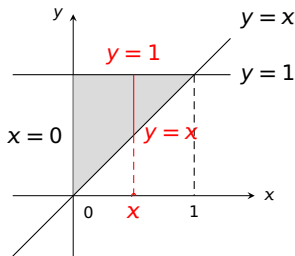
$$\begin{aligned}\iint_D (2x + 6y) dx dy &= \int_0^1 \left[ \int_x^1 (2x + 6y) dy \right] dx \\ &\quad 2xy + 3y^2 \Big|_x^1\end{aligned}$$



**例** 计算  $\iint_D (2x + 6y) dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $x = 0$ ,  $y = 1$  和  $y = x$  所围成区域。

**解**

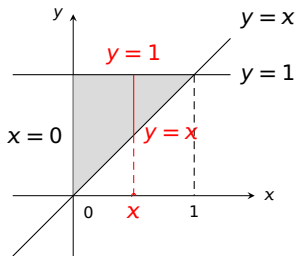
$$\begin{aligned}\iint_D (2x + 6y) dx dy &= \int_0^1 \left[ \int_x^1 (2x + 6y) dy \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[ 2xy + 3y^2 \Big|_x^1 \right] dx\end{aligned}$$



例 计算  $\iint_D (2x + 6y) dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $x = 0$ ,  $y = 1$  和  $y = x$  所围成区域。

解

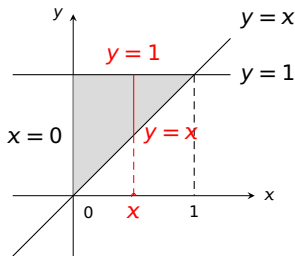
$$\begin{aligned}\iint_D (2x + 6y) dx dy &= \int_0^1 \left[ \int_x^1 (2x + 6y) dy \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[ 2xy + 3y^2 \Big|_x^1 \right] dx \quad -5x^2 + 2x + 3\end{aligned}$$



**例** 计算  $\iint_D (2x + 6y) dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $x = 0$ ,  $y = 1$  和  $y = x$  所围成区域。

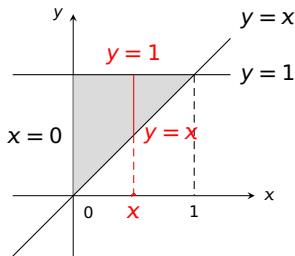
**解**

$$\begin{aligned}\iint_D (2x + 6y) dx dy &= \int_0^1 \left[ \int_x^1 (2x + 6y) dy \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[ 2xy + 3y^2 \Big|_x^1 \right] dx = \int_0^1 -5x^2 + 2x + 3 dx\end{aligned}$$



例 计算  $\iint_D (2x + 6y) dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $x = 0$ ,  $y = 1$  和  $y = x$  所围成区域。

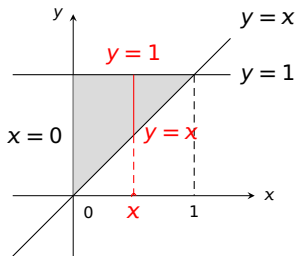
解



$$\begin{aligned}\iint_D (2x + 6y) dx dy &= \int_0^1 \left[ \int_x^1 (2x + 6y) dy \right] dx \\&= \int_0^1 \left[ 2xy + 3y^2 \Big|_x^1 \right] dx = \int_0^1 -5x^2 + 2x + 3 dx \\&= -\frac{5}{3}x^3 + x^2 + 3x\end{aligned}$$

例 计算  $\iint_D (2x + 6y) dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $x = 0$ ,  $y = 1$  和  $y = x$  所围成区域。

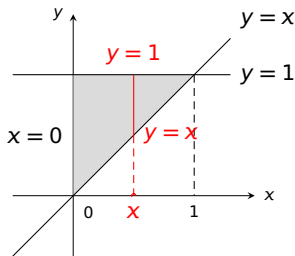
解



$$\begin{aligned}\iint_D (2x + 6y) dx dy &= \int_0^1 \left[ \int_x^1 (2x + 6y) dy \right] dx \\&= \int_0^1 \left[ 2xy + 3y^2 \Big|_x^1 \right] dx = \int_0^1 -5x^2 + 2x + 3 dx \\&= -\frac{5}{3}x^3 + x^2 + 3x \Big|_0^1\end{aligned}$$

例 计算  $\iint_D (2x + 6y) dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $x = 0$ ,  $y = 1$  和  $y = x$  所围成区域。

解

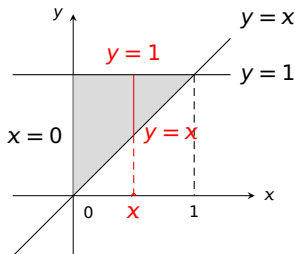


$$\begin{aligned}\iint_D (2x + 6y) dx dy &= \int_0^1 \left[ \int_x^1 (2x + 6y) dy \right] dx \\&= \int_0^1 \left[ 2xy + 3y^2 \Big|_x^1 \right] dx = \int_0^1 -5x^2 + 2x + 3 dx \\&= -\frac{5}{3}x^3 + x^2 + 3x \Big|_0^1 = \frac{7}{3}\end{aligned}$$



例 计算  $\iint_D (2x + 6y) dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $x = 0$ ,  $y = 1$  和  $y = x$  所围成区域。

解

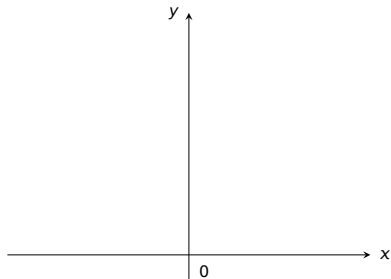


$$\begin{aligned}\iint_D (2x + 6y) dx dy &= \int_0^1 \left[ \int_x^1 (2x + 6y) dy \right] dx \\&= \int_0^1 \left[ 2xy + 3y^2 \Big|_x^1 \right] dx = \int_0^1 -5x^2 + 2x + 3 dx \\&= -\frac{5}{3}x^3 + x^2 + 3x \Big|_0^1 = \frac{7}{3}\end{aligned}$$

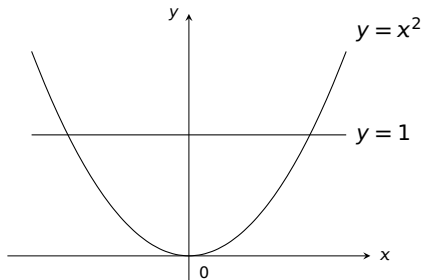
注  $D$  是 X-型区域, 可以表示为

$$D = \{(x, y) | x \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}$$

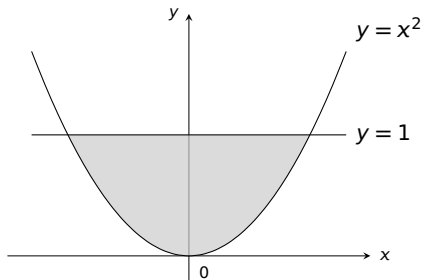
例 计算  $\iint_D x^2 y dx dy$ , 其中  $D$  是由曲线  $y = x^2$  和直线  $y = 1$  所围成区域。



例 计算  $\iint_D x^2 y dx dy$ , 其中  $D$  是由曲线  $y = x^2$  和直线  $y = 1$  所围成区域。

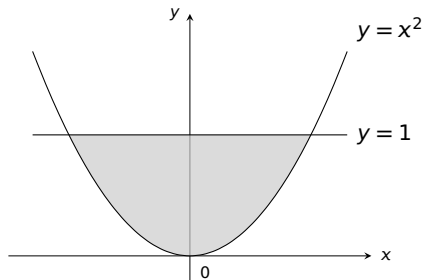


例 计算  $\iint_D x^2 y dx dy$ , 其中  $D$  是由曲线  $y = x^2$  和直线  $y = 1$  所围成区域。



例 计算  $\iint_D x^2 y dx dy$ , 其中  $D$  是由曲线  $y = x^2$  和直线  $y = 1$  所围成区域。

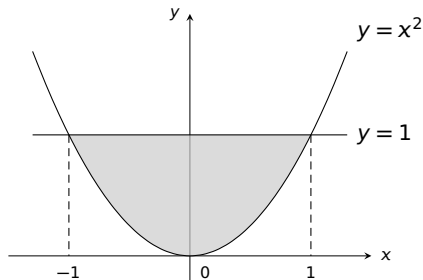
解



$$\iint_D x^2 y dx dy = \int \left[ \int x^2 y dy \right] dx$$

**例** 计算  $\iint_D x^2 y dx dy$ , 其中  $D$  是由曲线  $y = x^2$  和直线  $y = 1$  所围成区域。

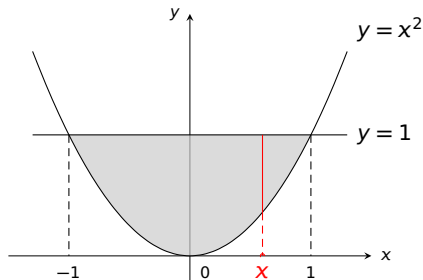
**解**



$$\iint_D x^2 y dx dy = \int \left[ \int x^2 y dy \right] dx$$

**例** 计算  $\iint_D x^2 y dx dy$ , 其中  $D$  是由曲线  $y = x^2$  和直线  $y = 1$  所围成区域。

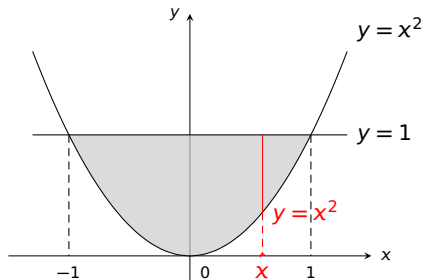
**解**



$$\iint_D x^2 y dx dy = \int \left[ \int x^2 y dy \right] dx$$

**例** 计算  $\iint_D x^2 y dx dy$ , 其中  $D$  是由曲线  $y = x^2$  和直线  $y = 1$  所围成区域。

**解**

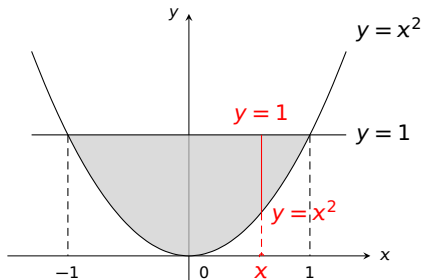


$$\iint_D x^2 y dx dy = \int \left[ \int x^2 y dy \right] dx$$



**例** 计算  $\iint_D x^2 y dx dy$ , 其中  $D$  是由曲线  $y = x^2$  和直线  $y = 1$  所围成区域。

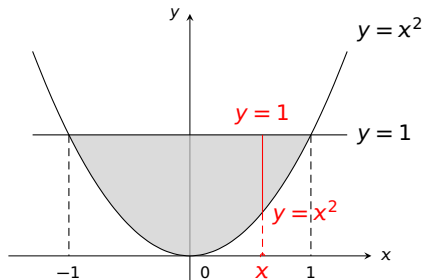
**解**



$$\iint_D x^2 y dx dy = \int \left[ \int x^2 y dy \right] dx$$

**例** 计算  $\iint_D x^2 y dx dy$ , 其中  $D$  是由曲线  $y = x^2$  和直线  $y = 1$  所围成区域。

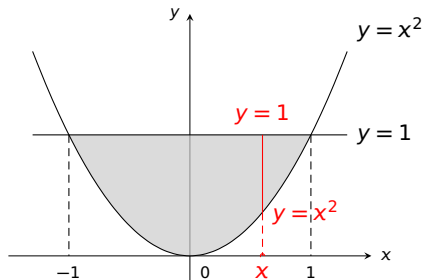
**解**



$$\iint_D x^2 y dx dy = \int_{-1}^1 \left[ \int x^2 y dy \right] dx$$

**例** 计算  $\iint_D x^2 y dx dy$ , 其中  $D$  是由曲线  $y = x^2$  和直线  $y = 1$  所围成区域。

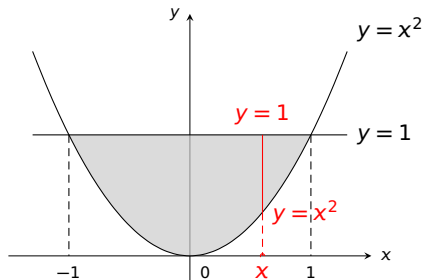
**解**



$$\iint_D x^2 y dx dy = \int_{-1}^1 \left[ \int_{x^2}^1 x^2 y dy \right] dx$$

**例** 计算  $\iint_D x^2 y dx dy$ , 其中  $D$  是由曲线  $y = x^2$  和直线  $y = 1$  所围成区域。

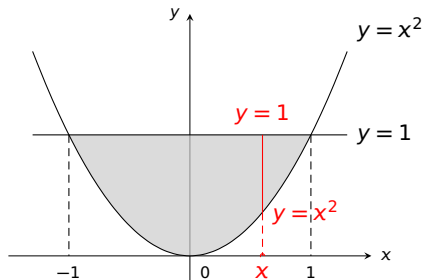
**解**



$$\iint_D x^2 y dx dy = \int_{-1}^1 \left[ \int_{x^2}^1 x^2 y dy \right] dx \quad \frac{1}{2} x^2 y^2$$

**例** 计算  $\iint_D x^2 y dx dy$ , 其中  $D$  是由曲线  $y = x^2$  和直线  $y = 1$  所围成区域。

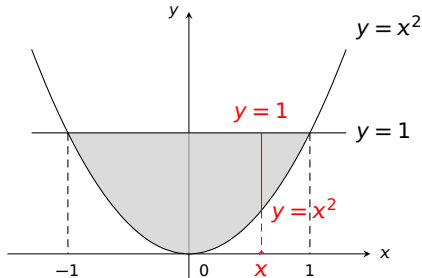
**解**



$$\iint_D x^2 y dx dy = \int_{-1}^1 \left[ \int_{x^2}^1 x^2 y dy \right] dx \qquad \frac{1}{2} x^2 y^2 \Big|_{x^2}^1$$

**例** 计算  $\iint_D x^2 y dx dy$ , 其中  $D$  是由曲线  $y = x^2$  和直线  $y = 1$  所围成区域。

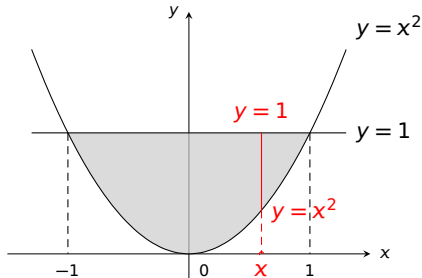
**解**



$$\iint_D x^2 y dx dy = \int_{-1}^1 \left[ \int_{x^2}^1 x^2 y dy \right] dx = \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{2} x^2 y^2 \Big|_{x^2}^1 \right] dx$$

**例** 计算  $\iint_D x^2 y dx dy$ , 其中  $D$  是由曲线  $y = x^2$  和直线  $y = 1$  所围成区域。

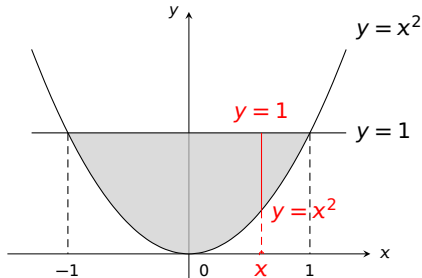
**解**



$$\begin{aligned}\iint_D x^2 y dx dy &= \int_{-1}^1 \left[ \int_{x^2}^1 x^2 y dy \right] dx = \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{2} x^2 y^2 \Big|_{x^2}^1 \right] dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 (1 - x^4)\end{aligned}$$

**例** 计算  $\iint_D x^2 y dx dy$ , 其中  $D$  是由曲线  $y = x^2$  和直线  $y = 1$  所围成区域。

**解**

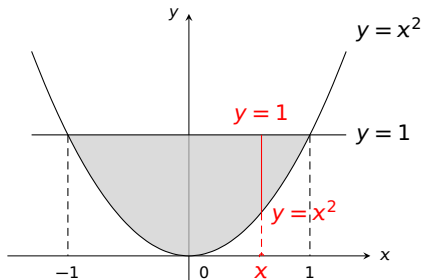


$$\begin{aligned}\iint_D x^2 y dx dy &= \int_{-1}^1 \left[ \int_{x^2}^1 x^2 y dy \right] dx = \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{2} x^2 y^2 \Big|_{x^2}^1 \right] dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2} x^2 (1 - x^4) dx\end{aligned}$$



**例** 计算  $\iint_D x^2 y dx dy$ , 其中  $D$  是由曲线  $y = x^2$  和直线  $y = 1$  所围成区域。

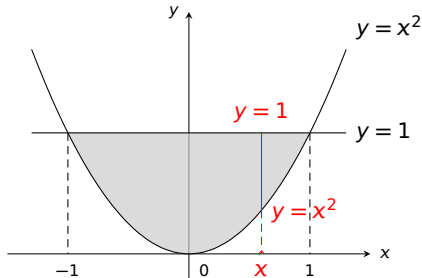
**解**



$$\begin{aligned}\iint_D x^2 y dx dy &= \int_{-1}^1 \left[ \int_{x^2}^1 x^2 y dy \right] dx = \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{2} x^2 y^2 \Big|_{x^2}^1 \right] dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2} x^2 (1 - x^4) dx = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{7} x^7 \right)\end{aligned}$$

例 计算  $\iint_D x^2 y dx dy$ , 其中  $D$  是由曲线  $y = x^2$  和直线  $y = 1$  所围成区域。

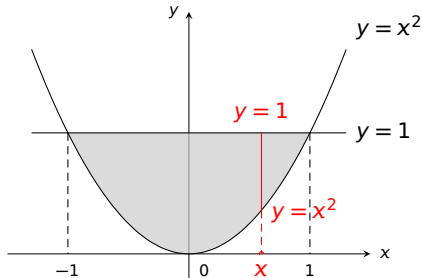
解



$$\begin{aligned}\iint_D x^2 y dx dy &= \int_{-1}^1 \left[ \int_{x^2}^1 x^2 y dy \right] dx = \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{2} x^2 y^2 \Big|_{x^2}^1 \right] dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2} x^2 (1 - x^4) dx = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{7} x^7 \right) \Big|_{-1}^1\end{aligned}$$

**例** 计算  $\iint_D x^2 y dx dy$ , 其中  $D$  是由曲线  $y = x^2$  和直线  $y = 1$  所围成区域。

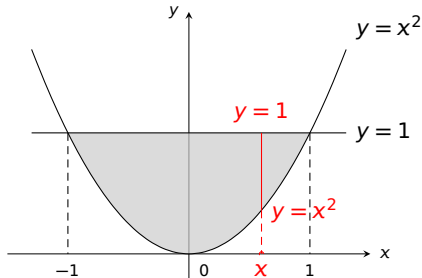
**解**



$$\begin{aligned}\iint_D x^2 y dx dy &= \int_{-1}^1 \left[ \int_{x^2}^1 x^2 y dy \right] dx = \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{2} x^2 y^2 \Big|_{x^2}^1 \right] dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2} x^2 (1 - x^4) dx = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{7} x^7 \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{4}{21}\end{aligned}$$

**例** 计算  $\iint_D x^2 y dx dy$ , 其中  $D$  是由曲线  $y = x^2$  和直线  $y = 1$  所围成区域。

**解**



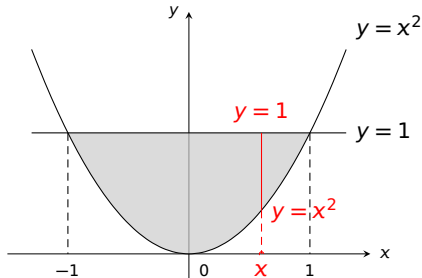
$$\begin{aligned}\iint_D x^2 y dx dy &= \int_{-1}^1 \left[ \int_{x^2}^1 x^2 y dy \right] dx = \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{2} x^2 y^2 \Big|_{x^2}^1 \right] dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2} x^2 (1 - x^4) dx = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{7} x^7 \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{4}{21}\end{aligned}$$

**注**  $D$  是 X-型区域, 可以表示为

$$D = \{(x, y) | \quad \quad \quad \}$$

**例** 计算  $\iint_D x^2 y dx dy$ , 其中  $D$  是由曲线  $y = x^2$  和直线  $y = 1$  所围成区域。

**解**



$$\begin{aligned}\iint_D x^2 y dx dy &= \int_{-1}^1 \left[ \int_{x^2}^1 x^2 y dy \right] dx = \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{2} x^2 y^2 \Big|_{x^2}^1 \right] dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2} x^2 (1 - x^4) dx = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{7} x^7 \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{4}{21}\end{aligned}$$

**注**  $D$  是  $X$ -型区域, 可以表示为

$$D = \{(x, y) | x^2 \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 1\}$$

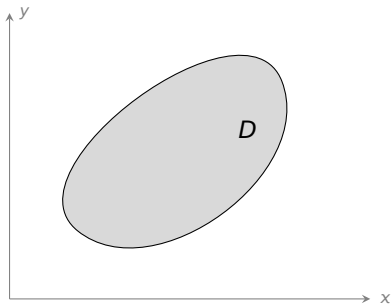
# We are here now...

---

1. 如何计算二重积分?
2. 固定  $x$ , 先对  $y$  积分
3. 固定  $y$ , 先对  $x$  积分
4. 交换二重积分的积分次序
5. 极坐标下计算二重积分
6. 二重积分的应用

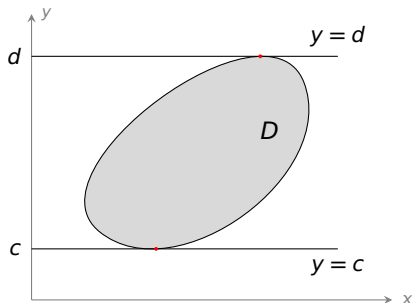
## 固定 $y$ , 先对 $x$ 积分

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int \left[ \int f(x, y) dx \right] dy$$



## 固定 $y$ , 先对 $x$ 积分

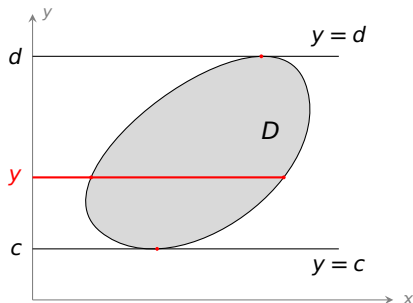
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int \left[ \int f(x, y) dx \right] dy$$





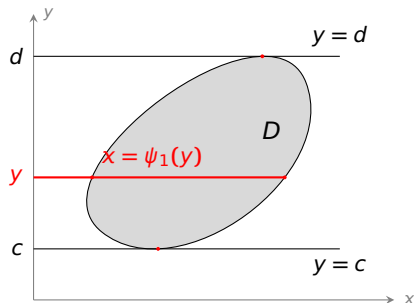
## 固定 $y$ , 先对 $x$ 积分

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int \left[ \int f(x, y) dx \right] dy$$



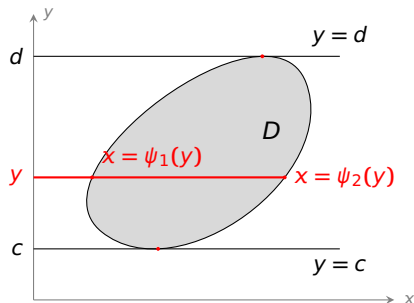
## 固定 $y$ , 先对 $x$ 积分

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int \left[ \int f(x, y) dx \right] dy$$



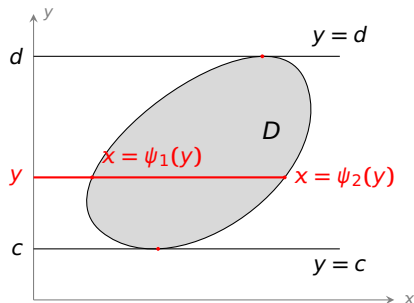
## 固定 $y$ , 先对 $x$ 积分

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int \left[ \int f(x, y) dx \right] dy$$



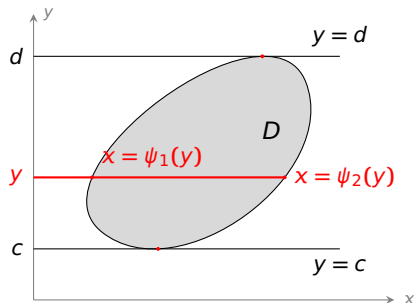
## 固定 $y$ , 先对 $x$ 积分

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[ \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right] dy$$



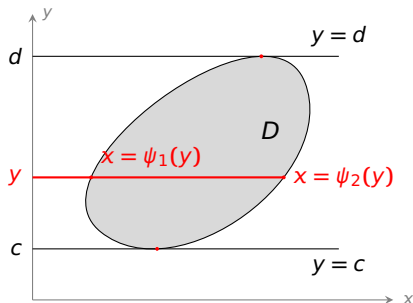
## 固定 $y$ , 先对 $x$ 积分

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[ \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right] dy$$



## 固定 $y$ , 先对 $x$ 积分

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[ \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right] dy$$



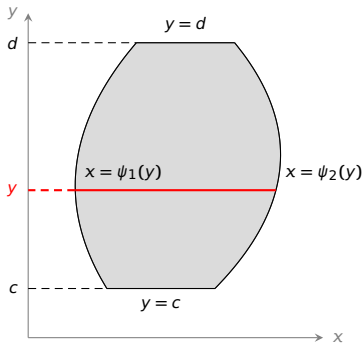
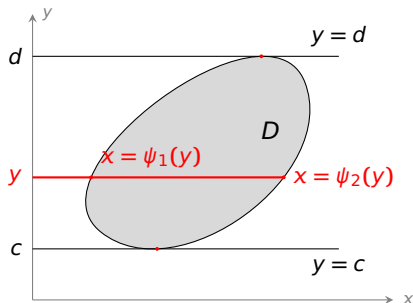
**注** 上述区域  $D$  可以表示成

$$D = \{(x, y) | \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), c \leq y \leq d\}$$

称为 **Y-型区域**。

## 固定 $y$ , 先对 $x$ 积分

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[ \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right] dy$$

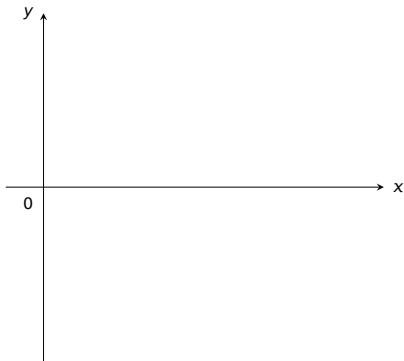


注 上述区域  $D$  可以表示成

$$D = \{(x, y) | \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), c \leq y \leq d\}$$

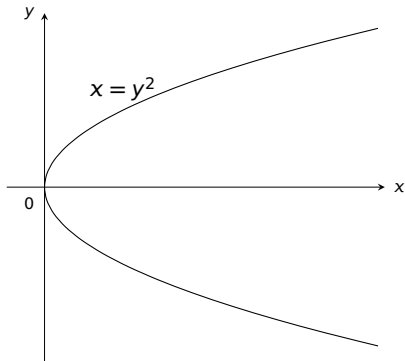
称为 **Y-型区域**。

例 计算  $\iint_D xy dx dy$ , 其中是由抛物线  $x = y^2$  和直线  $y = x - 2$  所围成区域。

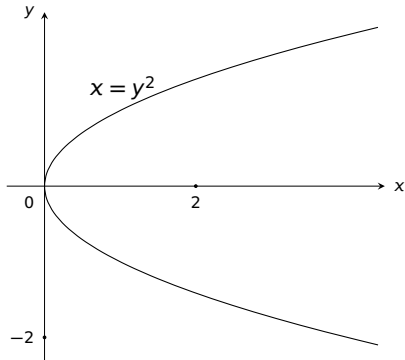




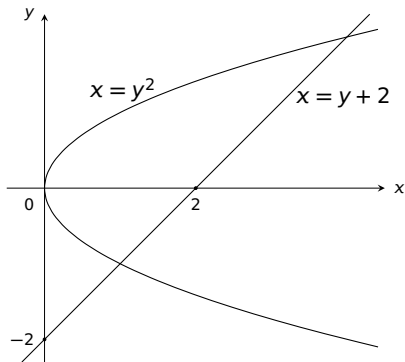
例 计算  $\iint_D xy dx dy$ , 其中是由抛物线  $x = y^2$  和直线  $y = x - 2$  所围成区域。



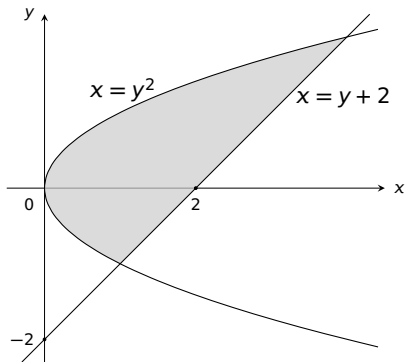
例 计算  $\iint_D xy dx dy$ , 其中是由抛物线  $x = y^2$  和直线  $y = x - 2$  所围成区域。



例 计算  $\iint_D xy dx dy$ , 其中是由抛物线  $x = y^2$  和直线  $y = x - 2$  所围成区域。



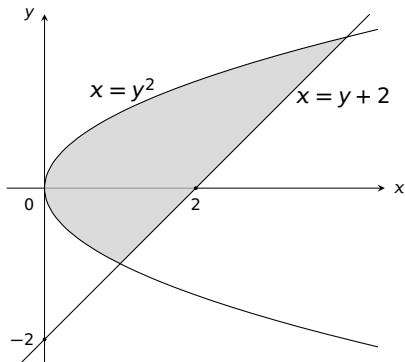
例 计算  $\iint_D xy dx dy$ , 其中是由抛物线  $x = y^2$  和直线  $y = x - 2$  所围成区域。



例 计算  $\iint_D xy dx dy$ , 其中是由抛物线  $x = y^2$  和直线  $y = x - 2$  所围成区域。

解

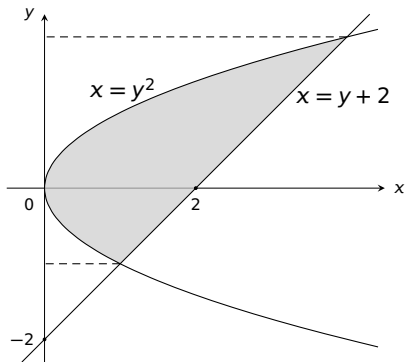
$$\text{原式} = \int \left[ \int xy dx \right] dy$$



例 计算  $\iint_D xy dx dy$ , 其中是由抛物线  $x = y^2$  和直线  $y = x - 2$  所围成区域。

解

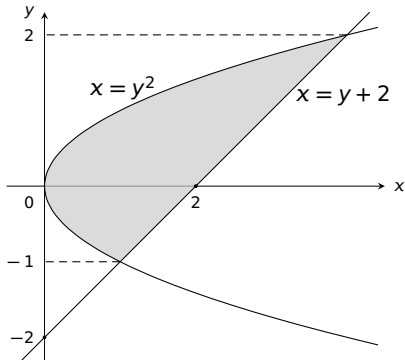
$$\text{原式} = \int \left[ \int xy dx \right] dy$$



例 计算  $\iint_D xy dx dy$ , 其中是由抛物线  $x = y^2$  和直线  $y = x - 2$  所围成区域。

解

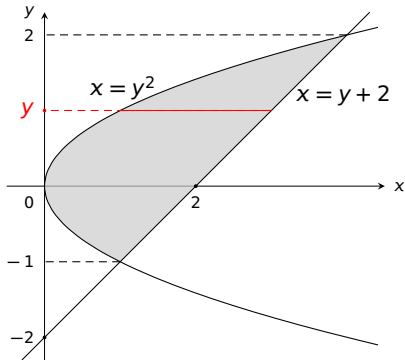
$$\text{原式} = \int \left[ \int xy dx \right] dy$$



例 计算  $\iint_D xy dx dy$ , 其中是由抛物线  $x = y^2$  和直线  $y = x - 2$  所围成区域。

解

$$\text{原式} = \int \left[ \int xy dx \right] dy$$

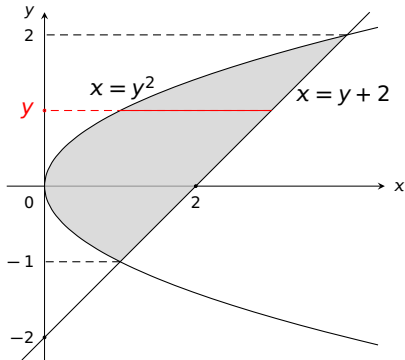




例 计算  $\iint_D xy dx dy$ , 其中是由抛物线  $x = y^2$  和直线  $y = x - 2$  所围成区域。

解

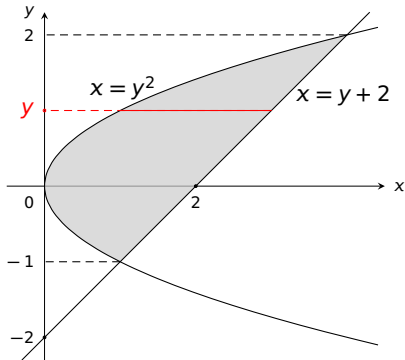
$$\text{原式} = \int_{-1}^2 \left[ \int \quad xy dx \right] dy$$



例 计算  $\iint_D xy dx dy$ , 其中是由抛物线  $x = y^2$  和直线  $y = x - 2$  所围成区域。

解

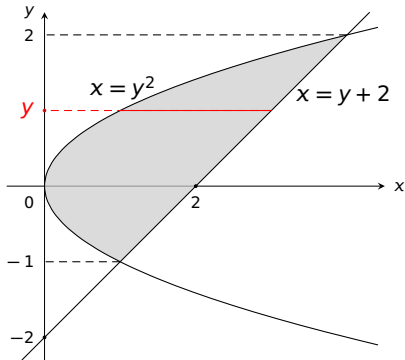
$$\text{原式} = \int_{-1}^2 \left[ \int_{y^2}^{y+2} xy dx \right] dy$$



例 计算  $\iint_D xy dx dy$ , 其中是由抛物线  $x = y^2$  和直线  $y = x - 2$  所围成区域。

解

$$\text{原式} = \int_{-1}^2 \left[ \int_{y^2}^{y+2} xy dx \right] dy$$

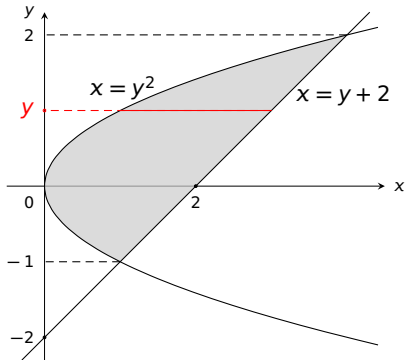


$$\frac{1}{2}x^2y$$

例 计算  $\iint_D xy dx dy$ , 其中是由抛物线  $x = y^2$  和直线  $y = x - 2$  所围成区域。

解

$$\text{原式} = \int_{-1}^2 \left[ \int_{y^2}^{y+2} xy dx \right] dy$$

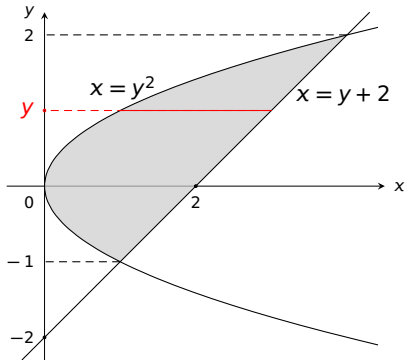


$$\frac{1}{2} x^2 y \Big|_{y^2}^{y+2}$$

例 计算  $\iint_D xy dx dy$ , 其中是由抛物线  $x = y^2$  和直线  $y = x - 2$  所围成区域。

解

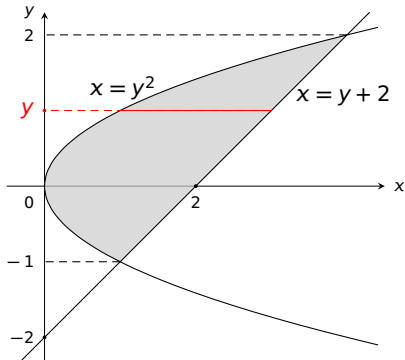
$$\text{原式} = \int_{-1}^2 \left[ \int_{y^2}^{y+2} xy dx \right] dy = \int_{-1}^2 \left[ \frac{1}{2} x^2 y \Big|_{y^2}^{y+2} \right] dy$$



例 计算  $\iint_D xy dx dy$ , 其中是由抛物线  $x = y^2$  和直线  $y = x - 2$  所围成区域。

解

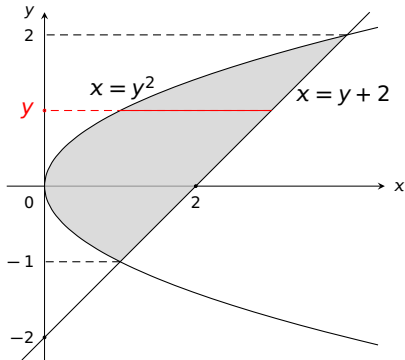
$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_{-1}^2 \left[ \int_{y^2}^{y+2} xy dx \right] dy = \int_{-1}^2 \left[ \frac{1}{2} x^2 y \Big|_{y^2}^{y+2} \right] dy \\ &\quad y[(y+2)^2 - y^4] \end{aligned}$$



例 计算  $\iint_D xy dx dy$ , 其中是由抛物线  $x = y^2$  和直线  $y = x - 2$  所围成区域。

解

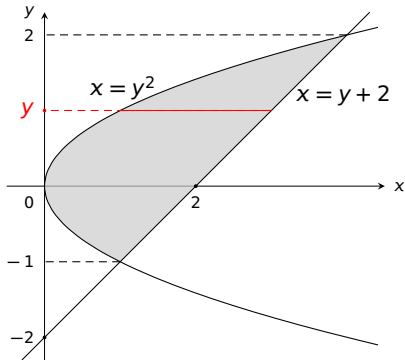
$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int_{-1}^2 \left[ \int_{y^2}^{y+2} xy dx \right] dy = \int_{-1}^2 \left[ \frac{1}{2} x^2 y \Big|_{y^2}^{y+2} \right] dy \\ &= \int_{-1}^2 y [(y+2)^2 - y^4] dy\end{aligned}$$



例 计算  $\iint_D xy dx dy$ , 其中是由抛物线  $x = y^2$  和直线  $y = x - 2$  所围成区域。

解

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int_{-1}^2 \left[ \int_{y^2}^{y+2} xy dx \right] dy = \int_{-1}^2 \left[ \frac{1}{2} x^2 y \Big|_{y^2}^{y+2} \right] dy \\ &= \int_{-1}^2 y [(y+2)^2 - y^4] dy = \frac{1}{2} \int_{-1}^2 -y^5 + y^3 + 4y^2 + 4y dy\end{aligned}$$

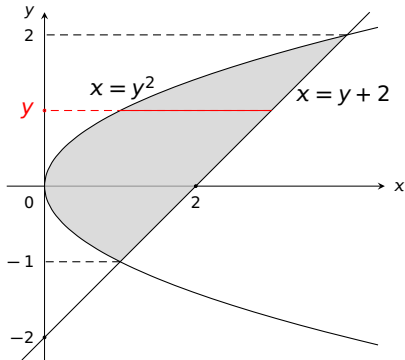




例 计算  $\iint_D xy dx dy$ , 其中是由抛物线  $x = y^2$  和直线  $y = x - 2$  所围成区域。

解

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int_{-1}^2 \left[ \int_{y^2}^{y+2} xy dx \right] dy = \int_{-1}^2 \left[ \frac{1}{2} x^2 y \Big|_{y^2}^{y+2} \right] dy \\ &= \int_{-1}^2 y [(y+2)^2 - y^4] dy = \frac{1}{2} \int_{-1}^2 -y^5 + y^3 + 4y^2 + 4y dy = \frac{45}{8}\end{aligned}$$



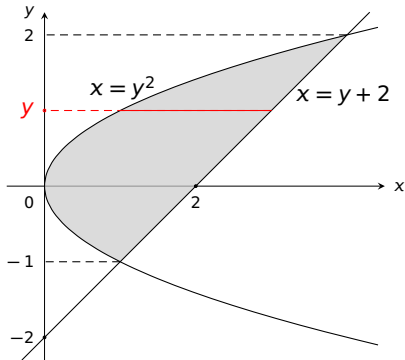
**例** 计算  $\iint_D xy dx dy$ , 其中是由抛物线  $x = y^2$  和直线  $y = x - 2$  所围成区域。

**解**

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_{-1}^2 \left[ \int_{y^2}^{y+2} xy dx \right] dy = \int_{-1}^2 \left[ \frac{1}{2} x^2 y \Big|_{y^2}^{y+2} \right] dy \\ &= \int_{-1}^2 y [(y+2)^2 - y^4] dy = \frac{1}{2} \int_{-1}^2 -y^5 + y^3 + 4y^2 + 4y dy = \frac{45}{8} \end{aligned}$$

**注**  $D$  是  $X$ -型区域, 可以表示为

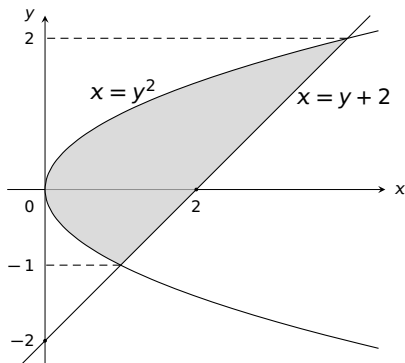
$$D = \{(x, y) | x^2 \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 1\}$$



例 计算  $\iint_D xy dx dy$ , 其中是由抛物线  $x = y^2$  和直线  $y = x - 2$  所围成区域。

解

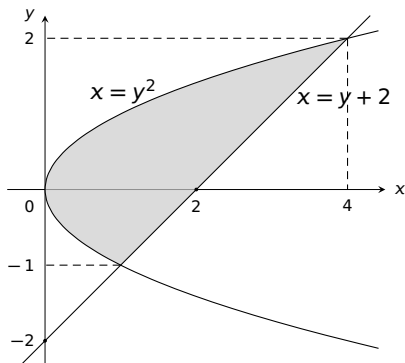
$$\text{原式} = \int \left[ \int xy dy \right] dx$$



例 计算  $\iint_D xy dx dy$ , 其中是由抛物线  $x = y^2$  和直线  $y = x - 2$  所围成区域。

解

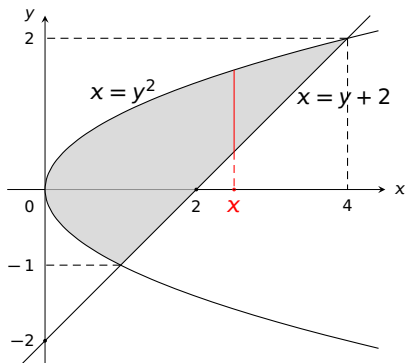
$$\text{原式} = \int \left[ \int xy dy \right] dx$$



例 计算  $\iint_D xy dx dy$ , 其中是由抛物线  $x = y^2$  和直线  $y = x - 2$  所围成区域。

解

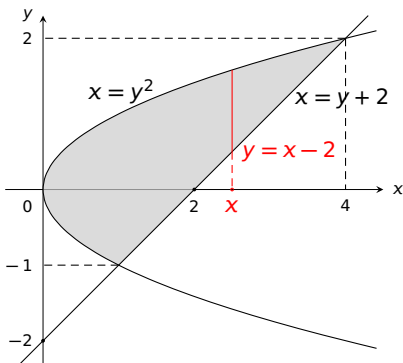
$$\text{原式} = \int \left[ \int xy dy \right] dx$$



例 计算  $\iint_D xy dx dy$ , 其中是由抛物线  $x = y^2$  和直线  $y = x - 2$  所围成区域。

解

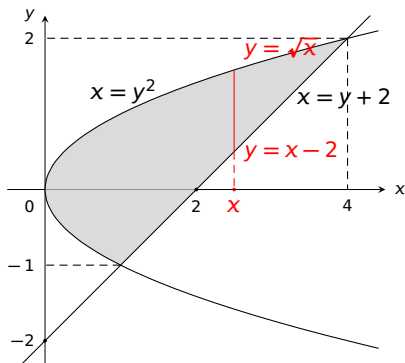
$$\text{原式} = \int \left[ \int xy dy \right] dx$$



例 计算  $\iint_D xy dx dy$ , 其中是由抛物线  $x = y^2$  和直线  $y = x - 2$  所围成区域。

解

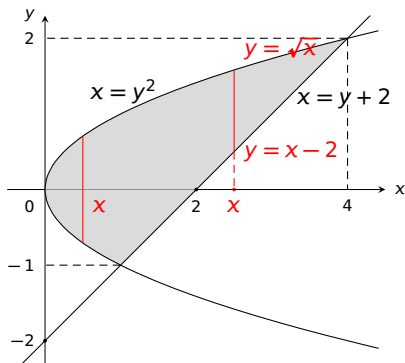
$$\text{原式} = \int \left[ \int xy dy \right] dx$$



**例** 计算  $\iint_D xy dx dy$ , 其中是由抛物线  $x = y^2$  和直线  $y = x - 2$  所围成区域。

**解**

$$\text{原式} = \int \left[ \int xy dy \right] dx$$

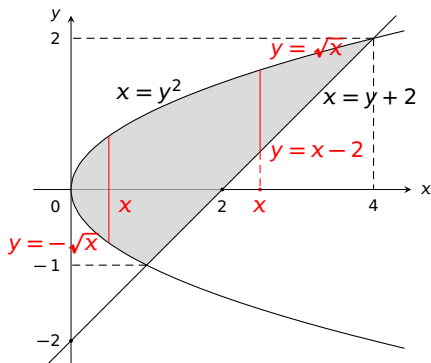




例 计算  $\iint_D xy dx dy$ , 其中是由抛物线  $x = y^2$  和直线  $y = x - 2$  所围成区域。

解

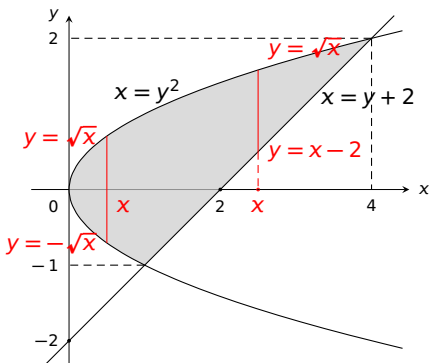
$$\text{原式} = \int \left[ \int xy dy \right] dx$$



例 计算  $\iint_D xy dx dy$ , 其中是由抛物线  $x = y^2$  和直线  $y = x - 2$  所围成区域。

解

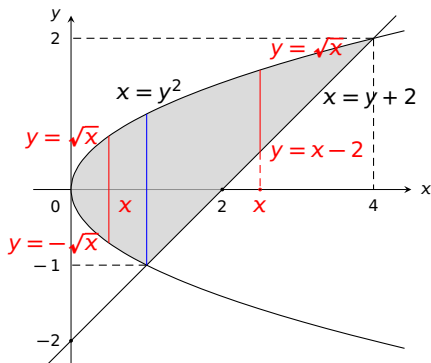
$$\text{原式} = \int \left[ \int xy dy \right] dx$$



例 计算  $\iint_D xy dx dy$ , 其中是由抛物线  $x = y^2$  和直线  $y = x - 2$  所围成区域。

解

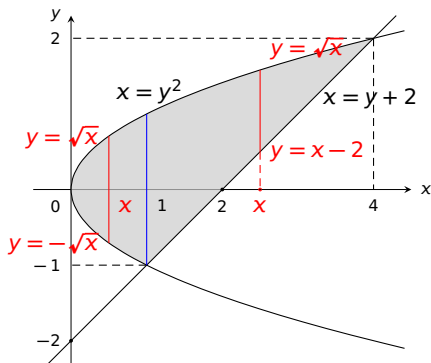
$$\text{原式} = \int \left[ \int xy dy \right] dx$$



例 计算  $\iint_D xy dx dy$ , 其中是由抛物线  $x = y^2$  和直线  $y = x - 2$  所围成区域。

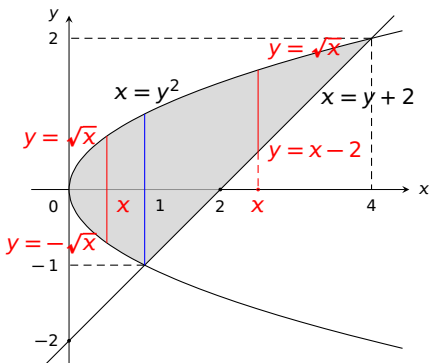
解

$$\text{原式} = \int \left[ \int xy dy \right] dx$$



例 计算  $\iint_D xy dx dy$ , 其中是由抛物线  $x = y^2$  和直线  $y = x - 2$  所围成区域。

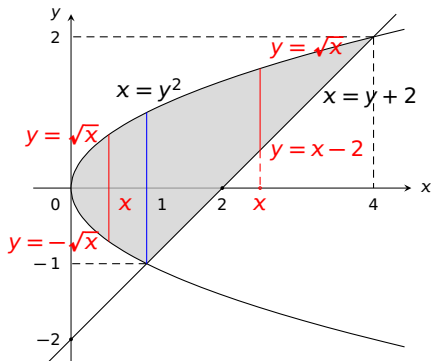
解



$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \left[ \int xy dy \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[ \int xy dy \right] dx + \int_1^4 \left[ \int xy dy \right] dx \end{aligned}$$

**例** 计算  $\iint_D xy dx dy$ , 其中是由抛物线  $x = y^2$  和直线  $y = x - 2$  所围成区域。

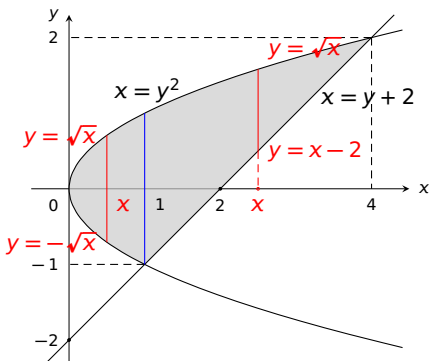
**解**



$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int \left[ \int xy dy \right] dx \\
 &= \int_0^1 \left[ \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} xy dy \right] dx + \int_1^4 \left[ \int_{y=x-2}^{\sqrt{x}} xy dy \right] dx
 \end{aligned}$$

例 计算  $\iint_D xy dx dy$ , 其中是由抛物线  $x = y^2$  和直线  $y = x - 2$  所围成区域。

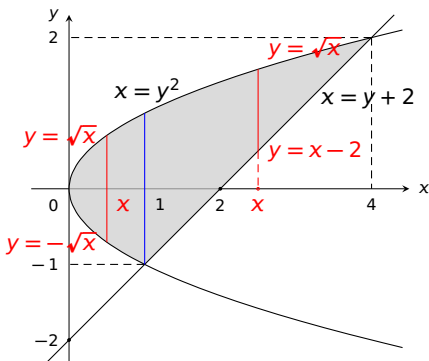
解



$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int \left[ \int xy dy \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[ \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} xy dy \right] dx + \int_1^4 \left[ \int_{x-2}^{\sqrt{x}} xy dy \right] dx\end{aligned}$$

**例** 计算  $\iint_D xy dx dy$ , 其中是由抛物线  $x = y^2$  和直线  $y = x - 2$  所围成区域。

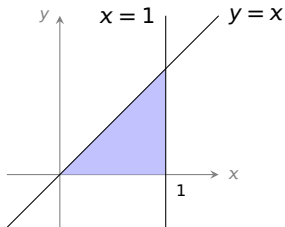
**解**



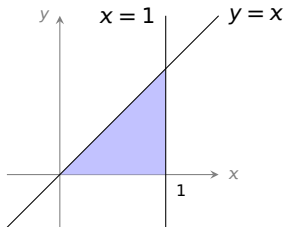
$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int \left[ \int xy dy \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[ \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} xy dy \right] dx + \int_1^4 \left[ \int_{x-2}^{\sqrt{x}} xy dy \right] dx = \dots\end{aligned}$$



例 计算  $\iint_D e^{x^2} dx dy$ , 其中  $D$  是由  $y = x$ ,  $x = 1$ ,  $x$  轴所围成的区域



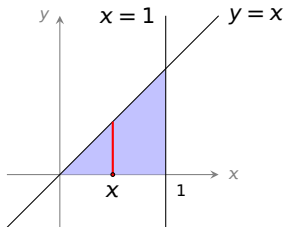
例 计算  $\iint_D e^{x^2} dx dy$ , 其中  $D$  是由  $y = x$ ,  $x = 1$ ,  $x$  轴所围成的区域



解法一 固定  $x$ , 先对  $y$  积分:

$$\iint_D e^{x^2} dx dy = \int \left[ \int e^{x^2} dy \right] dx$$

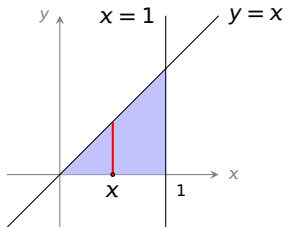
例 计算  $\iint_D e^{x^2} dx dy$ , 其中  $D$  是由  $y = x$ ,  $x = 1$ ,  $x$  轴所围成的区域



解法一 固定  $x$ , 先对  $y$  积分:

$$\iint_D e^{x^2} dx dy = \int \left[ \int e^{x^2} dy \right] dx$$

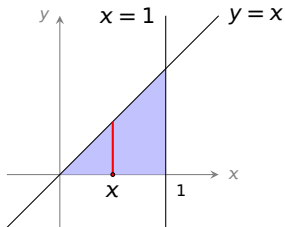
例 计算  $\iint_D e^{x^2} dx dy$ , 其中  $D$  是由  $y = x$ ,  $x = 1$ ,  $x$  轴所围成的区域



解法一 固定  $x$ , 先对  $y$  积分:

$$\iint_D e^{x^2} dx dy = \int_0^1 \left[ \int e^{x^2} dy \right] dx$$

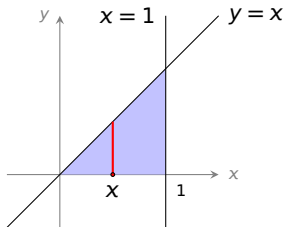
例 计算  $\iint_D e^{x^2} dx dy$ , 其中  $D$  是由  $y = x$ ,  $x = 1$ ,  $x$  轴所围成的区域



解法一 固定  $x$ , 先对  $y$  积分:

$$\iint_D e^{x^2} dx dy = \int_0^1 \left[ \int_0^x e^{x^2} dy \right] dx$$

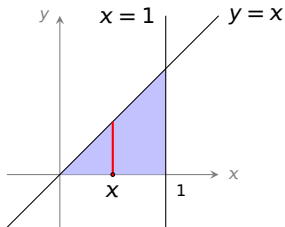
例 计算  $\iint_D e^{x^2} dx dy$ , 其中  $D$  是由  $y = x$ ,  $x = 1$ ,  $x$  轴所围成的区域



解法一 固定  $x$ , 先对  $y$  积分:

$$\iint_D e^{x^2} dx dy = \int_0^1 \left[ \int_0^x e^{x^2} dy \right] dx \quad e^{x^2} y \Big|_0^x$$

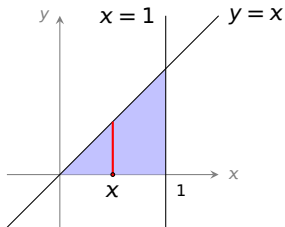
例 计算  $\iint_D e^{x^2} dx dy$ , 其中  $D$  是由  $y = x$ ,  $x = 1$ ,  $x$  轴所围成的区域



解法一 固定  $x$ , 先对  $y$  积分:

$$\iint_D e^{x^2} dx dy = \int_0^1 \left[ \int_0^x e^{x^2} dy \right] dx = \int_0^1 \left[ e^{x^2} y \Big|_0^x \right] dx$$

例 计算  $\iint_D e^{x^2} dx dy$ , 其中  $D$  是由  $y = x$ ,  $x = 1$ ,  $x$  轴所围成的区域

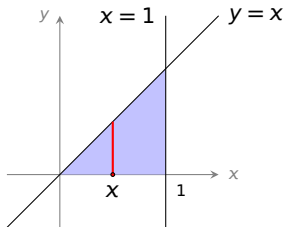


解法一 固定  $x$ , 先对  $y$  积分:

$$\begin{aligned}\iint_D e^{x^2} dx dy &= \int_0^1 \left[ \int_0^x e^{x^2} dy \right] dx = \int_0^1 \left[ e^{x^2} y \Big|_0^x \right] dx \\ &= x e^{x^2}\end{aligned}$$



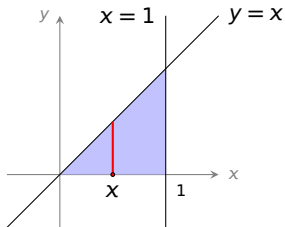
例 计算  $\iint_D e^{x^2} dx dy$ , 其中  $D$  是由  $y = x$ ,  $x = 1$ ,  $x$  轴所围成的区域



解法一 固定  $x$ , 先对  $y$  积分:

$$\begin{aligned}\iint_D e^{x^2} dx dy &= \int_0^1 \left[ \int_0^x e^{x^2} dy \right] dx = \int_0^1 \left[ e^{x^2} y \Big|_0^x \right] dx \\ &= \int_0^1 x e^{x^2} dx\end{aligned}$$

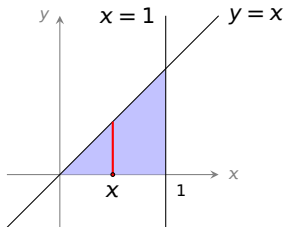
例 计算  $\iint_D e^{x^2} dx dy$ , 其中  $D$  是由  $y = x$ ,  $x = 1$ ,  $x$  轴所围成的区域



解法一 固定  $x$ , 先对  $y$  积分:

$$\begin{aligned}\iint_D e^{x^2} dx dy &= \int_0^1 \left[ \int_0^x e^{x^2} dy \right] dx = \int_0^1 \left[ e^{x^2} y \Big|_0^x \right] dx \\ &= \int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_0^1\end{aligned}$$

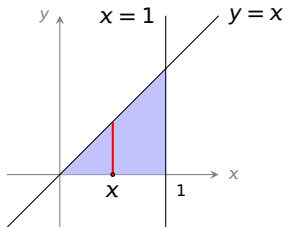
例 计算  $\iint_D e^{x^2} dx dy$ , 其中  $D$  是由  $y = x$ ,  $x = 1$ ,  $x$  轴所围成的区域



解法一 固定  $x$ , 先对  $y$  积分:

$$\begin{aligned}\iint_D e^{x^2} dx dy &= \int_0^1 \left[ \int_0^x e^{x^2} dy \right] dx = \int_0^1 \left[ e^{x^2} y \Big|_0^x \right] dx \\ &= \int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} e - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

例 计算  $\iint_D e^{x^2} dx dy$ , 其中  $D$  是由  $y = x$ ,  $x = 1$ ,  $x$  轴所围成的区域



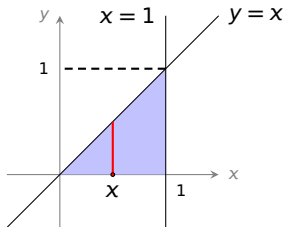
解法一 固定  $x$ , 先对  $y$  积分:

$$\begin{aligned}\iint_D e^{x^2} dx dy &= \int_0^1 \left[ \int_0^x e^{x^2} dy \right] dx = \int_0^1 \left[ e^{x^2} y \Big|_0^x \right] dx \\ &= \int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} e - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

解法二 固定  $y$ , 先对  $x$  积分:

$$\iint_D e^{x^2} dx dy = \int \left[ \int e^{x^2} dx \right] dy$$

例 计算  $\iint_D e^{x^2} dx dy$ , 其中  $D$  是由  $y = x$ ,  $x = 1$ ,  $x$  轴所围成的区域



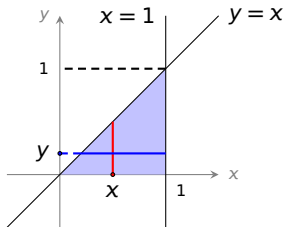
解法一 固定  $x$ , 先对  $y$  积分:

$$\begin{aligned}\iint_D e^{x^2} dx dy &= \int_0^1 \left[ \int_0^x e^{x^2} dy \right] dx = \int_0^1 \left[ e^{x^2} y \Big|_0^x \right] dx \\ &= \int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} e - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

解法二 固定  $y$ , 先对  $x$  积分:

$$\iint_D e^{x^2} dx dy = \int \left[ \int e^{x^2} dx \right] dy$$

例 计算  $\iint_D e^{x^2} dx dy$ , 其中  $D$  是由  $y = x$ ,  $x = 1$ ,  $x$  轴所围成的区域



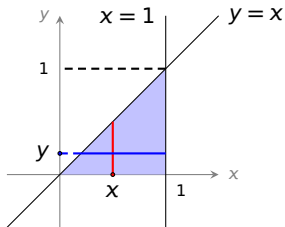
解法一 固定  $x$ , 先对  $y$  积分:

$$\begin{aligned}\iint_D e^{x^2} dx dy &= \int_0^1 \left[ \int_0^x e^{x^2} dy \right] dx = \int_0^1 \left[ e^{x^2} y \Big|_0^x \right] dx \\ &= \int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} e - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

解法二 固定  $y$ , 先对  $x$  积分:

$$\iint_D e^{x^2} dx dy = \int \left[ \int e^{x^2} dx \right] dy$$

例 计算  $\iint_D e^{x^2} dx dy$ , 其中  $D$  是由  $y = x$ ,  $x = 1$ ,  $x$  轴所围成的区域



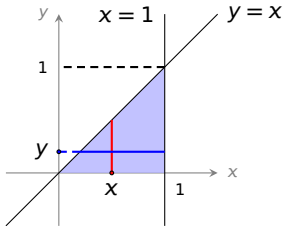
解法一 固定  $x$ , 先对  $y$  积分:

$$\begin{aligned}\iint_D e^{x^2} dx dy &= \int_0^1 \left[ \int_0^x e^{x^2} dy \right] dx = \int_0^1 \left[ e^{x^2} y \Big|_0^x \right] dx \\ &= \int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} e - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

解法二 固定  $y$ , 先对  $x$  积分:

$$\iint_D e^{x^2} dx dy = \int_0^1 \left[ \int_0^y e^{x^2} dx \right] dy$$

例 计算  $\iint_D e^{x^2} dx dy$ , 其中  $D$  是由  $y = x$ ,  $x = 1$ ,  $x$  轴所围成的区域



解法一 固定  $x$ , 先对  $y$  积分:

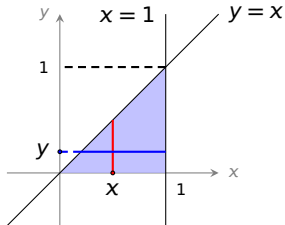
$$\begin{aligned}\iint_D e^{x^2} dx dy &= \int_0^1 \left[ \int_0^x e^{x^2} dy \right] dx = \int_0^1 \left[ e^{x^2} y \Big|_0^x \right] dx \\ &= \int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} e - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

解法二 固定  $y$ , 先对  $x$  积分:

$$\iint_D e^{x^2} dx dy = \int_0^1 \left[ \int_y^1 e^{x^2} dx \right] dy$$



例 计算  $\iint_D e^{x^2} dx dy$ , 其中  $D$  是由  $y = x$ ,  $x = 1$ ,  $x$  轴所围成的区域



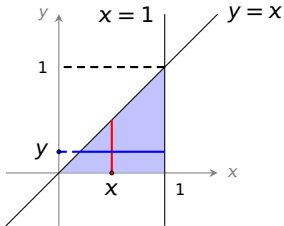
解法一 固定  $x$ , 先对  $y$  积分:

$$\begin{aligned}\iint_D e^{x^2} dx dy &= \int_0^1 \left[ \int_0^x e^{x^2} dy \right] dx = \int_0^1 \left[ e^{x^2} y \Big|_0^x \right] dx \\ &= \int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} e - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

解法二 固定  $y$ , 先对  $x$  积分:

$$\iint_D e^{x^2} dx dy = \int_0^1 \left[ \int_y^1 e^{x^2} dx \right] dy = \dots\dots \text{积不出}$$

**例** 计算  $\iint_D e^{x^2} dx dy$ , 其中  $D$  是由  $y = x$ ,  $x = 1$ ,  $x$  轴所围成的区域



**解法一** 固定  $x$ , 先对  $y$  积分:

$$\begin{aligned}\iint_D e^{x^2} dx dy &= \int_0^1 \left[ \int_0^x e^{x^2} dy \right] dx = \int_0^1 \left[ e^{x^2} y \Big|_0^x \right] dx \\ &= \int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} e - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

**解法二** 固定  $y$ , 先对  $x$  积分:

$$\iint_D e^{x^2} dx dy = \int_0^1 \left[ \int_y^1 e^{x^2} dx \right] dy = \dots\dots \text{积不出}$$

**注** 选择恰当的积分次序, 才能算出二重积分!

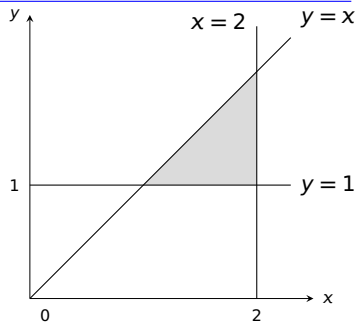
# We are here now...

---

1. 如何计算二重积分?
2. 固定  $x$ , 先对  $y$  积分
3. 固定  $y$ , 先对  $x$  积分
4. 交换二重积分的积分次序
5. 极坐标下计算二重积分
6. 二重积分的应用

# 交换积分次序

$$\iint_D f(x, y) dx =$$

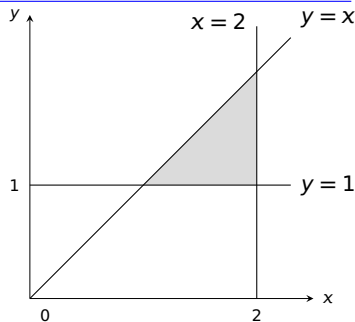


# 交换积分次序

区域  $D$  同时是

- $X$ -型区域:
- $Y$ -型区域:

$$\iint_D f(x, y) dx =$$

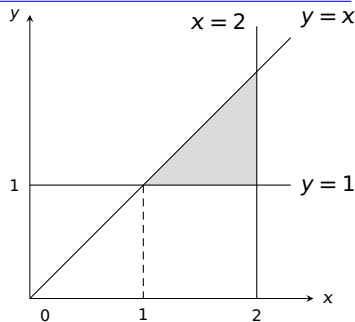


# 交换积分次序

区域  $D$  同时是

- $X$ -型区域:
- $Y$ -型区域:

$$\iint_D f(x, y) dx =$$

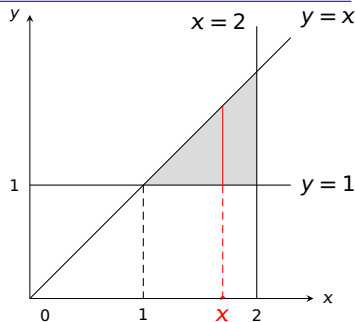


# 交换积分次序

区域  $D$  同时是

- $X$ -型区域:
- $Y$ -型区域:

$$\iint_D f(x, y) dx =$$

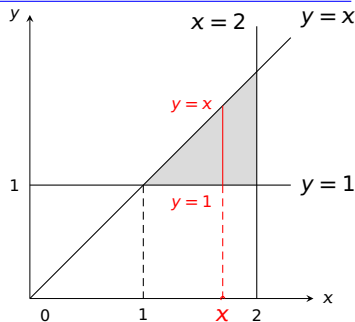


# 交换积分次序

区域  $D$  同时是

- $X$ -型区域:
- $Y$ -型区域:

$$\iint_D f(x, y) dx =$$





# 交换积分次序

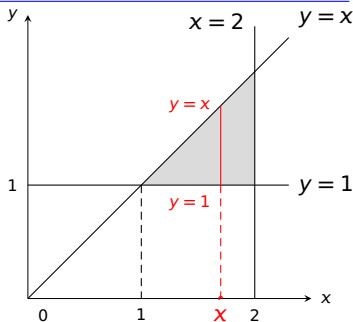
区域  $D$  同时是

- $X$ -型区域:

$$D = \{(x, y) | 1 \leq y \leq x, 1 \leq x \leq 2\}$$

- $Y$ -型区域:

$$\iint_D f(x, y) dx =$$



# 交换积分次序

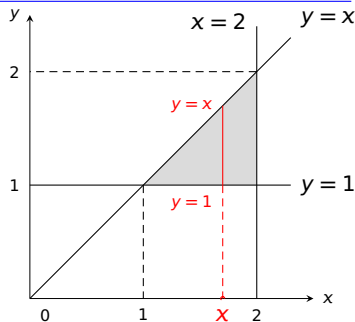
区域  $D$  同时是

- $X$ -型区域:

$$D = \{(x, y) | 1 \leq y \leq x, 1 \leq x \leq 2\}$$

- $Y$ -型区域:

$$\iint_D f(x, y) dx =$$



# 交换积分次序

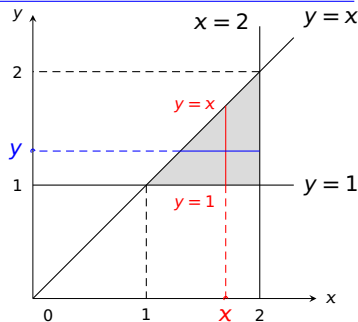
区域  $D$  同时是

- $X$ -型区域:

$$D = \{(x, y) | 1 \leq y \leq x, 1 \leq x \leq 2\}$$

- $Y$ -型区域:

$$\iint_D f(x, y) dx =$$



# 交换积分次序

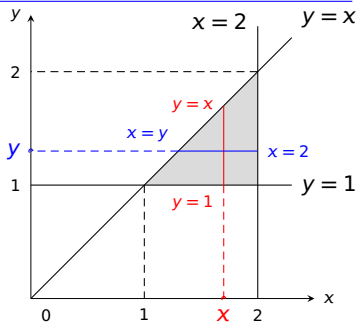
区域  $D$  同时是

- $X$ -型区域:

$$D = \{(x, y) | 1 \leq y \leq x, 1 \leq x \leq 2\}$$

- $Y$ -型区域:

$$\iint_D f(x, y) dx =$$



# 交换积分次序

区域  $D$  同时是

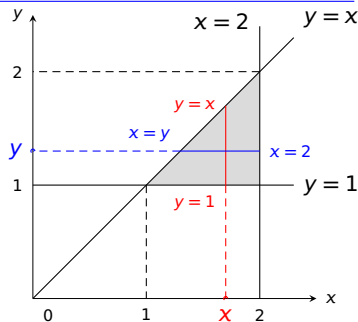
- $X$ -型区域:

$$D = \{(x, y) | 1 \leq y \leq x, 1 \leq x \leq 2\}$$

- $Y$ -型区域:

$$D = \{(x, y) | y \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$$

$$\iint_D f(x, y) dx =$$



# 交换积分次序

区域  $D$  同时是

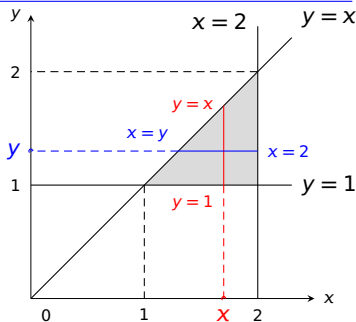
- $X$ -型区域:

$$D = \{(x, y) | 1 \leq y \leq x, 1 \leq x \leq 2\}$$

- $Y$ -型区域:

$$D = \{(x, y) | y \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$$

$$\iint_D f(x, y) dx = \int \left[ \int f(x, y) dy \right] dx$$



# 交换积分次序

区域  $D$  同时是

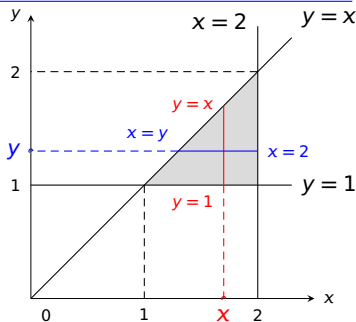
- $X$ -型区域:

$$D = \{(x, y) | 1 \leq y \leq x, 1 \leq x \leq 2\}$$

- $Y$ -型区域:

$$D = \{(x, y) | y \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$$

$$\iint_D f(x, y) dx = \int_1^2 \left[ \int_{y=x}^2 f(x, y) dy \right] dx$$



# 交换积分次序

区域  $D$  同时是

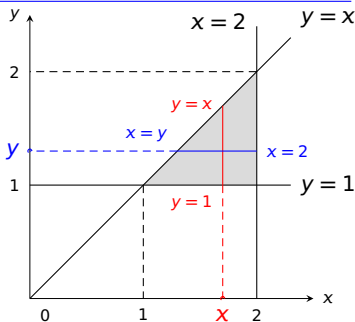
- $X$ -型区域:

$$D = \{(x, y) | 1 \leq y \leq x, 1 \leq x \leq 2\}$$

- $Y$ -型区域:

$$D = \{(x, y) | y \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$$

$$\iint_D f(x, y) dx = \int_1^2 \left[ \int_1^x f(x, y) dy \right] dx$$





# 交换积分次序

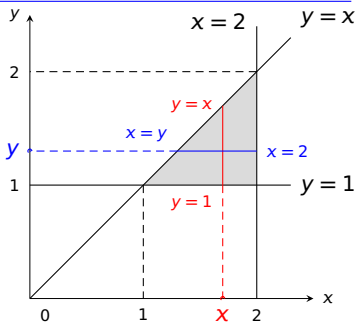
区域  $D$  同时是

- $X$ -型区域:

$$D = \{(x, y) | 1 \leq y \leq x, 1 \leq x \leq 2\}$$

- $Y$ -型区域:

$$D = \{(x, y) | y \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$$



$$\iint_D f(x, y) dx = \int_1^2 \left[ \int_1^x f(x, y) dy \right] dx = \int \left[ \int f(x, y) dx \right] dy$$

# 交换积分次序

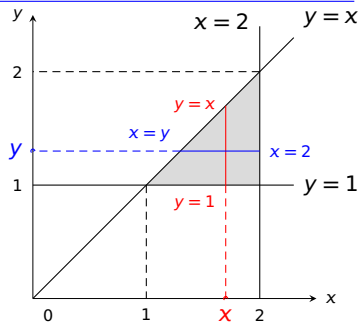
区域  $D$  同时是

- $X$ -型区域:

$$D = \{(x, y) | 1 \leq y \leq x, 1 \leq x \leq 2\}$$

- $Y$ -型区域:

$$D = \{(x, y) | y \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$$



$$\iint_D f(x, y) dx = \int_1^2 \left[ \int_1^x f(x, y) dy \right] dx = \int_0^1 \left[ \int f(x, y) dx \right] dy$$

# 交换积分次序

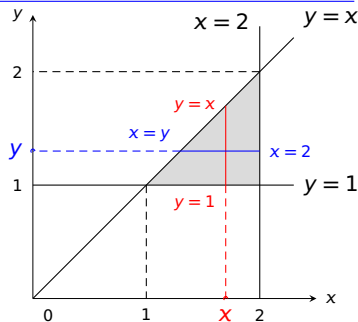
区域  $D$  同时是

- $X$ -型区域:

$$D = \{(x, y) | 1 \leq y \leq x, 1 \leq x \leq 2\}$$

- $Y$ -型区域:

$$D = \{(x, y) | y \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$$



$$\iint_D f(x, y) dx = \int_1^2 \left[ \int_1^x f(x, y) dy \right] dx = \int_0^1 \left[ \int_0^y f(x, y) dx \right] dy$$

# 交换积分次序

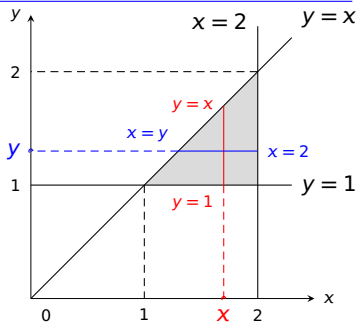
区域  $D$  同时是

- X-型区域:

$$D = \{(x, y) | 1 \leq y \leq x, 1 \leq x \leq 2\}$$

- Y-型区域:

$$D = \{(x, y) | y \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$$



$$\iint_D f(x, y) dx = \int_1^2 \left[ \int_1^x f(x, y) dy \right] dx = \int_0^1 \left[ \int_0^y f(x, y) dx \right] dy$$

问题 1.  $\int_0^1 \left[ \int_0^y f(x, y) dx \right] dy$

# 交换积分次序

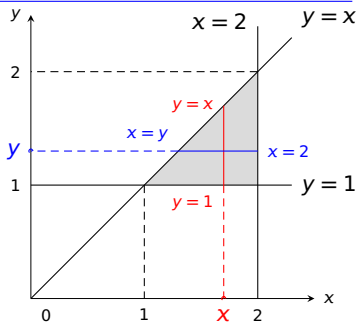
区域  $D$  同时是

- X-型区域:

$$D = \{(x, y) | 1 \leq y \leq x, 1 \leq x \leq 2\}$$

- Y-型区域:

$$D = \{(x, y) | y \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$$



$$\iint_D f(x, y) dx = \int_1^2 \left[ \int_1^x f(x, y) dy \right] dx = \int_0^1 \left[ \int_0^y f(x, y) dx \right] dy$$

问题 1.  $\int_0^1 \left[ \int_0^y f(x, y) dx \right] dy = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dy \right] dx,$

# 交换积分次序

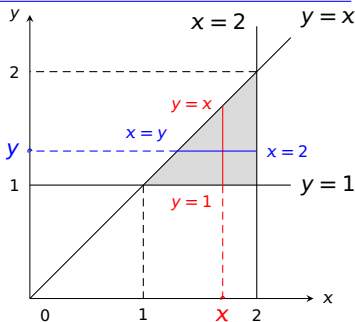
区域  $D$  同时是

- X-型区域:

$$D = \{(x, y) | 1 \leq y \leq x, 1 \leq x \leq 2\}$$

- Y-型区域:

$$D = \{(x, y) | y \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$$



$$\iint_D f(x, y) dx = \int_1^2 \left[ \int_1^x f(x, y) dy \right] dx = \int_0^1 \left[ \int_0^y f(x, y) dx \right] dy$$

问题 1.  $\int_0^1 \left[ \int_0^y f(x, y) dx \right] dy = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dy \right] dx,$

$$2. \int_1^2 \left[ \int_1^x f(x, y) dy \right] dx$$

# 交换积分次序

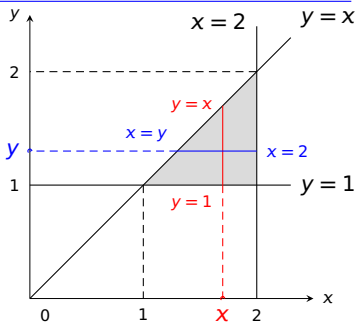
区域  $D$  同时是

- X-型区域:

$$D = \{(x, y) | 1 \leq y \leq x, 1 \leq x \leq 2\}$$

- Y-型区域:

$$D = \{(x, y) | y \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$$



$$\iint_D f(x, y) dx = \int_1^2 \left[ \int_1^x f(x, y) dy \right] dx = \int_0^1 \left[ \int_0^y f(x, y) dx \right] dy$$

问题 1.  $\int_0^1 \left[ \int_0^y f(x, y) dx \right] dy = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dy \right] dx,$

$$2. \int_1^2 \left[ \int_1^x f(x, y) dy \right] dx = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dx \right] dy.$$

- 例 补充积分限
1.  $\int_1^e \left[ \int_0^{\ln x} f(x, y) dy \right] dx = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dx \right] dy,$
  2.  $\int_{-1}^1 \left[ \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \right] dx = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dx \right] dy.$



例 补充积分限

1.  $\int_1^e \left[ \int_0^{\ln x} f(x, y) dy \right] dx = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dx \right] dy,$
2.  $\int_{-1}^1 \left[ \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \right] dx = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dx \right] dy.$

解 1. 因为

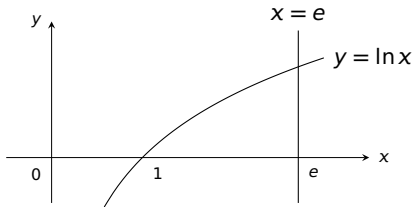
$$D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq \ln x, 1 \leq x \leq e\}$$

例 补充积分限 1.  $\int_1^e \left[ \int_0^{\ln x} f(x, y) dy \right] dx = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dx \right] dy,$

2.  $\int_{-1}^1 \left[ \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \right] dx = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dx \right] dy.$

解 1. 因为

$$D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq \ln x, 1 \leq x \leq e\}$$

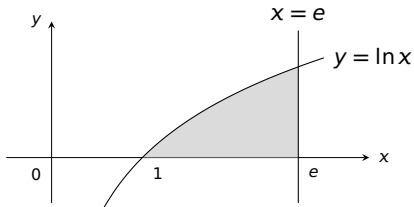


例 补充积分限

1.  $\int_1^e \left[ \int_0^{\ln x} f(x, y) dy \right] dx = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dx \right] dy,$
2.  $\int_{-1}^1 \left[ \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \right] dx = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dx \right] dy.$

解 1. 因为

$$D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq \ln x, 1 \leq x \leq e\}$$



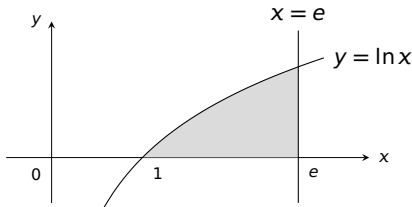
例 补充积分限

1.  $\int_1^e \left[ \int_0^{\ln x} f(x, y) dy \right] dx = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dx \right] dy,$
2.  $\int_{-1}^1 \left[ \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \right] dx = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dx \right] dy.$

解 1. 因为

$$D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq \ln x, 1 \leq x \leq e\}$$

$$\begin{aligned} & \int_1^e \left[ \int_0^{\ln x} f(x, y) dy \right] dx \\ &= \int \left[ \int f(x, y) dx \right] dy \end{aligned}$$



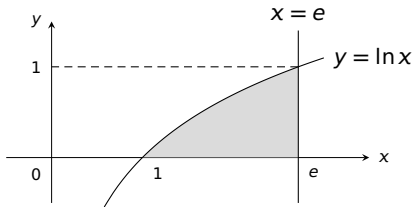
例 补充积分限

1.  $\int_1^e \left[ \int_0^{\ln x} f(x, y) dy \right] dx = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dx \right] dy,$
2.  $\int_{-1}^1 \left[ \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \right] dx = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dx \right] dy.$

解 1. 因为

$$D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq \ln x, 1 \leq x \leq e\}$$

$$\begin{aligned} & \int_1^e \left[ \int_0^{\ln x} f(x, y) dy \right] dx \\ &= \int \left[ \int f(x, y) dx \right] dy \end{aligned}$$



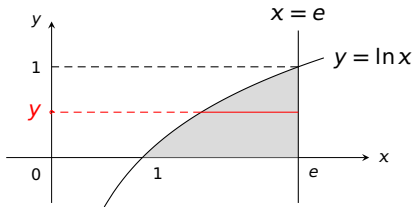
例 补充积分限 1.  $\int_1^e \left[ \int_0^{\ln x} f(x, y) dy \right] dx = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dx \right] dy,$

2.  $\int_{-1}^1 \left[ \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \right] dx = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dx \right] dy.$

解 1. 因为

$$D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq \ln x, 1 \leq x \leq e\}$$

$$\begin{aligned} & \int_1^e \left[ \int_0^{\ln x} f(x, y) dy \right] dx \\ &= \int \left[ \int f(x, y) dx \right] dy \end{aligned}$$



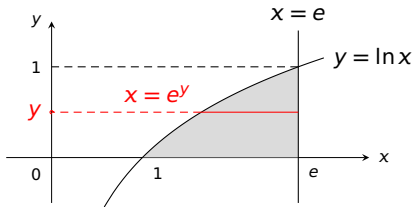
例 补充积分限

1.  $\int_1^e \left[ \int_0^{\ln x} f(x, y) dy \right] dx = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dx \right] dy,$
2.  $\int_{-1}^1 \left[ \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \right] dx = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dx \right] dy.$

解 1. 因为

$$D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq \ln x, 1 \leq x \leq e\}$$

$$\begin{aligned} & \int_1^e \left[ \int_0^{\ln x} f(x, y) dy \right] dx \\ &= \int \left[ \int f(x, y) dx \right] dy \end{aligned}$$



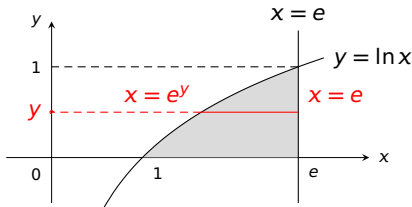
例 补充积分限

1.  $\int_1^e \left[ \int_0^{\ln x} f(x, y) dy \right] dx = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dx \right] dy,$
2.  $\int_{-1}^1 \left[ \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \right] dx = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dx \right] dy.$

解 1. 因为

$$D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq \ln x, 1 \leq x \leq e\}$$

$$\begin{aligned} & \int_1^e \left[ \int_0^{\ln x} f(x, y) dy \right] dx \\ &= \int \left[ \int f(x, y) dx \right] dy \end{aligned}$$





例 补充积分限

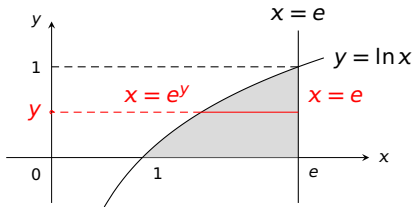
1.  $\int_1^e \left[ \int_0^{\ln x} f(x, y) dy \right] dx = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dx \right] dy,$
2.  $\int_{-1}^1 \left[ \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \right] dx = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dx \right] dy.$

解 1. 因为

$$D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq \ln x, 1 \leq x \leq e\}$$

所以

$$\begin{aligned} & \int_1^e \left[ \int_0^{\ln x} f(x, y) dy \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[ \int f(x, y) dx \right] dy \end{aligned}$$



例 补充积分限

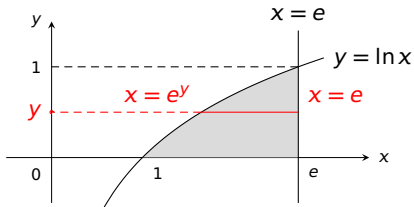
1.  $\int_1^e \left[ \int_0^{\ln x} f(x, y) dy \right] dx = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dx \right] dy,$
2.  $\int_{-1}^1 \left[ \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \right] dx = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dx \right] dy.$

解 1. 因为

$$D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq \ln x, 1 \leq x \leq e\}$$

所以

$$\begin{aligned} & \int_1^e \left[ \int_0^{\ln x} f(x, y) dy \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[ \int_{e^y}^e f(x, y) dx \right] dy \end{aligned}$$



例 补充积分限

1.  $\int_1^e \left[ \int_0^{\ln x} f(x, y) dy \right] dx = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dx \right] dy,$
2.  $\int_{-1}^1 \left[ \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \right] dx = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dx \right] dy.$

例 补充积分限

$$1. \int_1^e \left[ \int_0^{\ln x} f(x, y) dy \right] dx = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dx \right] dy,$$

$$2. \int_{-1}^1 \left[ \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \right] dx = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dx \right] dy.$$

解 2. 因为

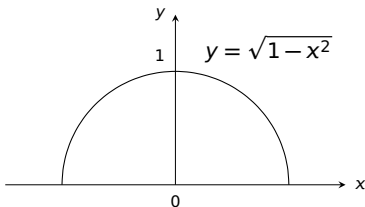
$$D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 1\}$$

例 补充积分限 1.  $\int_1^e \left[ \int_0^{\ln x} f(x, y) dy \right] dx = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dx \right] dy,$

2.  $\int_{-1}^1 \left[ \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \right] dx = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dx \right] dy.$

解 2. 因为

$$D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 1\}$$

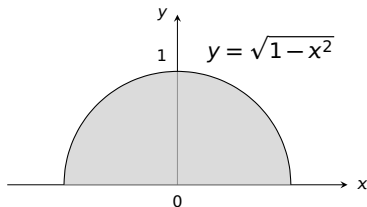


例 补充积分限 1.  $\int_1^e \left[ \int_0^{\ln x} f(x, y) dy \right] dx = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dx \right] dy,$

2.  $\int_{-1}^1 \left[ \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \right] dx = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dx \right] dy.$

解 2. 因为

$$D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 1\}$$



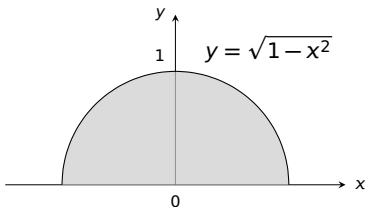
例 补充积分限 1.  $\int_1^e \left[ \int_0^{\ln x} f(x, y) dy \right] dx = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dx \right] dy,$

2.  $\int_{-1}^1 \left[ \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \right] dx = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dx \right] dy.$

解 2. 因为

$$D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 1\}$$

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \left[ \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \right] dx \\ &= \int \left[ \int f(x, y) dx \right] dy \end{aligned}$$



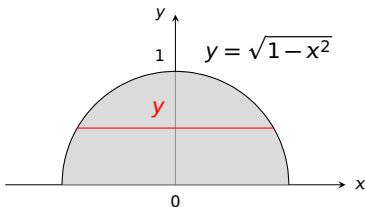
例 补充积分限 1.  $\int_1^e \left[ \int_0^{\ln x} f(x, y) dy \right] dx = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dx \right] dy,$

2.  $\int_{-1}^1 \left[ \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \right] dx = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dx \right] dy.$

解 2. 因为

$$D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 1\}$$

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \left[ \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \right] dx \\ &= \int \left[ \int f(x, y) dx \right] dy \end{aligned}$$





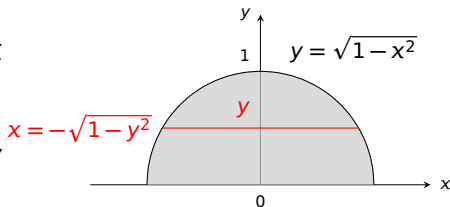
例 补充积分限 1.  $\int_1^e \left[ \int_0^{\ln x} f(x, y) dy \right] dx = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dx \right] dy,$

2.  $\int_{-1}^1 \left[ \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \right] dx = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dx \right] dy.$

解 2. 因为

$$D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 1\}$$

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \left[ \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \right] dx \\ &= \int \left[ \int f(x, y) dx \right] dy \end{aligned}$$

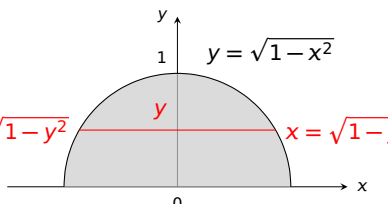


例 补充积分限 1.  $\int_1^e \left[ \int_0^{\ln x} f(x, y) dy \right] dx = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dx \right] dy,$

2.  $\int_{-1}^1 \left[ \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \right] dx = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dx \right] dy.$

解 2. 因为

$$D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 1\}$$

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \left[ \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \right] dx \\ &= \int \left[ \int f(x, y) dx \right] dy \end{aligned}$$


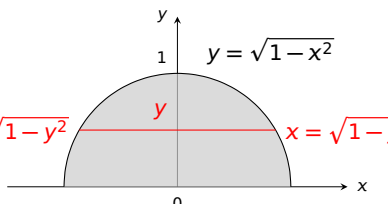
例 补充积分限 1.  $\int_1^e \left[ \int_0^{\ln x} f(x, y) dy \right] dx = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dx \right] dy,$

2.  $\int_{-1}^1 \left[ \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \right] dx = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dx \right] dy.$

解 2. 因为

$$D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 1\}$$

所以

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \left[ \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[ \int_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{x=\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx \right] dy \end{aligned}$$


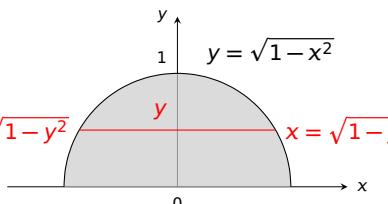
例 补充积分限 1.  $\int_1^e \left[ \int_0^{\ln x} f(x, y) dy \right] dx = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dx \right] dy,$

2.  $\int_{-1}^1 \left[ \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \right] dx = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dx \right] dy.$

解 2. 因为

$$D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 1\}$$

所以

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \left[ \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[ \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx \right] dy \end{aligned}$$


例 补充积分限  $\int_0^2 \left[ \int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx \right] dy = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dy \right] dx.$

例 补充积分限  $\int_0^2 \left[ \int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx \right] dy = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dy \right] dx.$

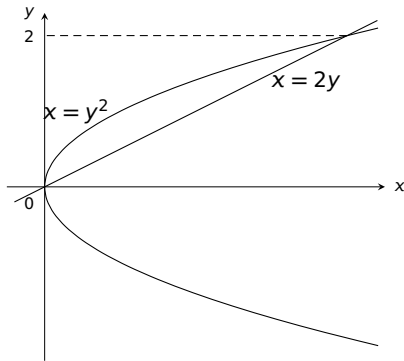
解 因为

$$D = \{(x, y) | y^2 \leq x \leq 2y, 0 \leq y \leq 2\}$$

例 补充积分限  $\int_0^2 \left[ \int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx \right] dy = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dy \right] dx.$

解 因为

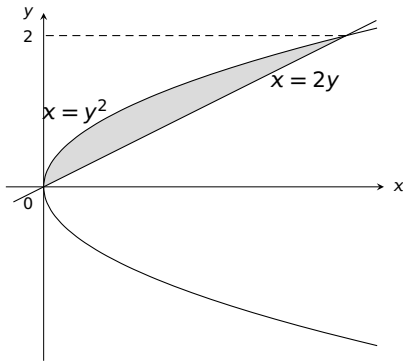
$$D = \{(x, y) | y^2 \leq x \leq 2y, 0 \leq y \leq 2\}$$



例 补充积分限  $\int_0^2 \left[ \int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx \right] dy = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dy \right] dx.$

解 因为

$$D = \{(x, y) | y^2 \leq x \leq 2y, 0 \leq y \leq 2\}$$



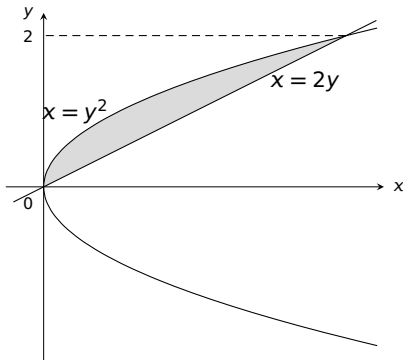


例 补充积分限  $\int_0^2 \left[ \int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx \right] dy = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dy \right] dx.$

解 因为

$$D = \{(x, y) | y^2 \leq x \leq 2y, 0 \leq y \leq 2\}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^2 \left[ \int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx \right] dy \\ &= \int \left[ \int f(x, y) dy \right] dx \end{aligned}$$

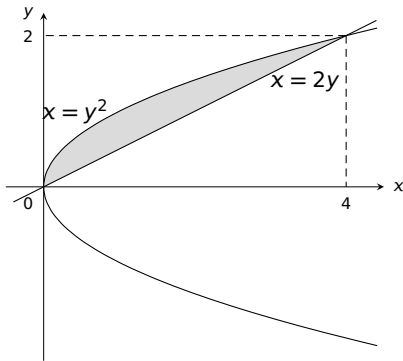


例 补充积分限  $\int_0^2 \left[ \int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx \right] dy = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dy \right] dx.$

解 因为

$$D = \{(x, y) | y^2 \leq x \leq 2y, 0 \leq y \leq 2\}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^2 \left[ \int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx \right] dy \\ &= \int \left[ \int f(x, y) dy \right] dx \end{aligned}$$

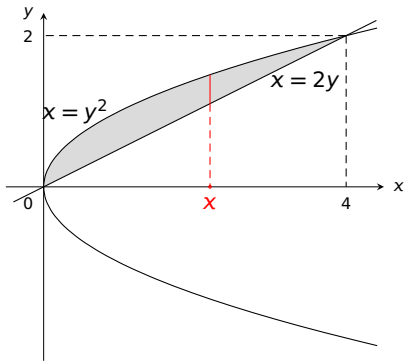


例 补充积分限  $\int_0^2 \left[ \int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx \right] dy = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dy \right] dx.$

解 因为

$$D = \{(x, y) | y^2 \leq x \leq 2y, 0 \leq y \leq 2\}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^2 \left[ \int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx \right] dy \\ &= \int \left[ \int f(x, y) dy \right] dx \end{aligned}$$

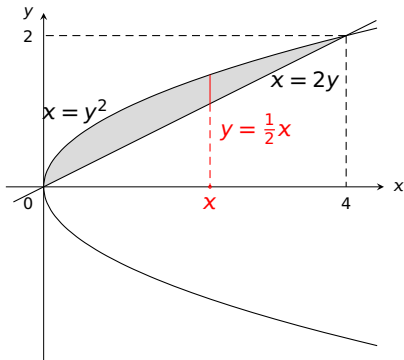


例 补充积分限  $\int_0^2 \left[ \int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx \right] dy = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dy \right] dx.$

解 因为

$$D = \{(x, y) | y^2 \leq x \leq 2y, 0 \leq y \leq 2\}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^2 \left[ \int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx \right] dy \\ &= \int \left[ \int f(x, y) dy \right] dx \end{aligned}$$

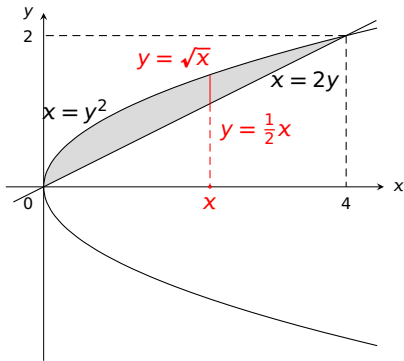


例 补充积分限  $\int_0^2 \left[ \int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx \right] dy = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dy \right] dx.$

解 因为

$$D = \{(x, y) | y^2 \leq x \leq 2y, 0 \leq y \leq 2\}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^2 \left[ \int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx \right] dy \\ &= \int \left[ \int f(x, y) dy \right] dx \end{aligned}$$



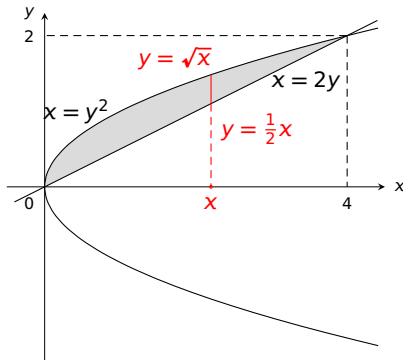
例 补充积分限  $\int_0^2 \left[ \int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx \right] dy = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dy \right] dx.$

解 因为

$$D = \{(x, y) | y^2 \leq x \leq 2y, 0 \leq y \leq 2\}$$

所以

$$\begin{aligned} & \int_0^2 \left[ \int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx \right] dy \\ &= \int_0^4 \left[ \int_{\frac{1}{2}x}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy \right] dx \end{aligned}$$



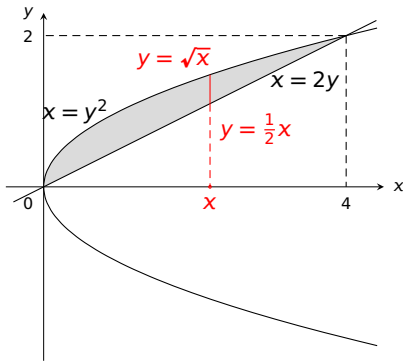
例 补充积分限  $\int_0^2 \left[ \int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx \right] dy = \int_*^* \left[ \int_*^* f(x, y) dy \right] dx.$

解 因为

$$D = \{(x, y) | y^2 \leq x \leq 2y, 0 \leq y \leq 2\}$$

所以

$$\begin{aligned} & \int_0^2 \left[ \int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx \right] dy \\ &= \int_0^4 \left[ \int_{\frac{1}{2}x}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy \right] dx \end{aligned}$$



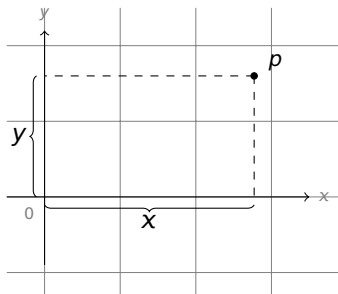
# We are here now...

---

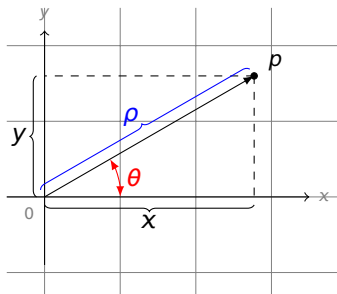
1. 如何计算二重积分?
2. 固定  $x$ , 先对  $y$  积分
3. 固定  $y$ , 先对  $x$  积分
4. 交换二重积分的积分次序
5. 极坐标下计算二重积分
6. 二重积分的应用



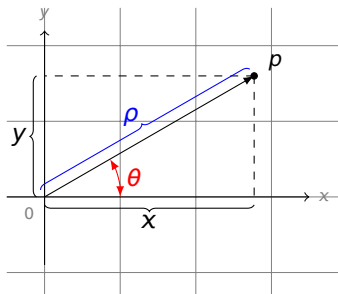
# 回顾极坐标



# 回顾极坐标



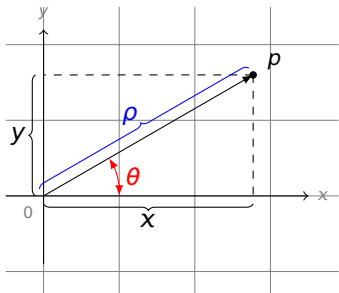
# 回顾极坐标



- 直角坐标  $(x, y)$ , 极坐标  $(\rho, \theta)$  的转换:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

# 回顾极坐标



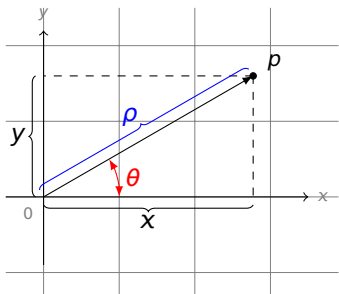
- 直角坐标  $(x, y)$ , 极坐标  $(\rho, \theta)$  的转换:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

- 注

- 圆周的方程是  $\rho = \rho_0$
- 射线的方程是  $\theta = \theta_0$

# 回顾极坐标



- 直角坐标  $(x, y)$ , 极坐标  $(\rho, \theta)$  的转换:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

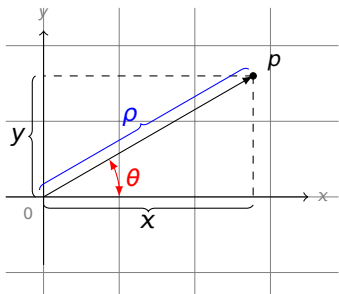
- 注

- 圆周的方程是  $\rho = \rho_0$
- 射线的方程是  $\theta = \theta_0$

如下情形, 不妨引入极坐标:

- 函数  $f(x, y)$  在极坐标下, 能够简化
- 点集  $D$  在极坐标下的表示, 显得简单

## 回顾极坐标



- 直角坐标  $(x, y)$ , 极坐标  $(\rho, \theta)$  的转换:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

- 注

- 圆周的方程是  $\rho = \rho_0$
- 射线的方程是  $\theta = \theta_0$

如下情形, 不妨引入极坐标:

- 函数  $f(x, y)$  在极坐标下, 能够简化, 如

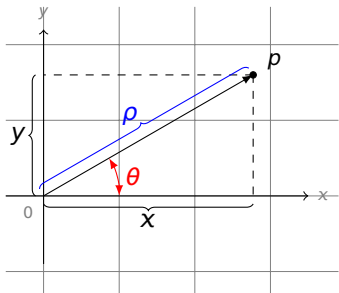
$$f_1(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$$

$$f_2(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$$

$$f_3(x, y) = \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}$$

- 点集  $D$  在极坐标下的表示, 显得简单

## 回顾极坐标



- 直角坐标  $(x, y)$ , 极坐标  $(\rho, \theta)$  的转换:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

- 注

- 圆周的方程是  $\rho = \rho_0$
- 射线的方程是  $\theta = \theta_0$

如下情形, 不妨引入极坐标:

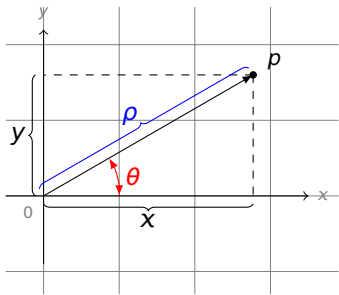
- 函数  $f(x, y)$  在极坐标下, 能够简化, 如

$$f_1(x, y) = e^{-x^2-y^2} = e^{-\rho^2}; \quad f_2(x, y) = \ln(1+x^2+y^2)$$

$$f_3(x, y) = \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}$$

- 点集  $D$  在极坐标下的表示, 显得简单

## 回顾极坐标



- 直角坐标  $(x, y)$ , 极坐标  $(\rho, \theta)$  的转换:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

- 注

- 圆周的方程是  $\rho = \rho_0$
- 射线的方程是  $\theta = \theta_0$

如下情形, 不妨引入极坐标:

- 函数  $f(x, y)$  在极坐标下, 能够简化, 如

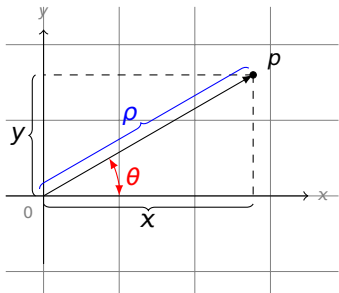
$$f_1(x, y) = e^{-x^2-y^2} = e^{-\rho^2}; \quad f_2(x, y) = \ln(1+x^2+y^2) = \ln(1+\rho^2)$$

$$f_3(x, y) = \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}$$

- 点集  $D$  在极坐标下的表示, 显得简单



## 回顾极坐标



- 直角坐标  $(x, y)$ ，极坐标  $(\rho, \theta)$  的转换：

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

- 注

- 圆周的方程是  $\rho = \rho_0$
- 射线的方程是  $\theta = \theta_0$

如下情形，不妨引入极坐标：

- 函数  $f(x, y)$  在极坐标下，能够简化，如

$$f_1(x, y) = e^{-x^2 - y^2} = e^{-\rho^2}; \quad f_2(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2) = \ln(1 + \rho^2)$$

$$f_3(x, y) = \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{4a^2 - \rho^2}$$

- 点集  $D$  在极坐标下的表示，显得简单

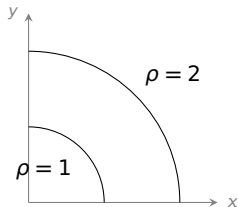
例 用极坐标表示以下的闭区域：

1.  $D_1$  是由圆周  $x^2 + y^2 = 1$  和  $x^2 + y^2 = 4$  在第一象限围成的区域
2.  $D_2$  是由圆周  $x^2 + y^2 = 1$  在第一象限所围成的闭区域
3.  $D_3$  是由圆周  $x^2 + y^2 = 1$  所围成的闭区域

例 用极坐标表示以下的闭区域：

1.  $D_1$  是由圆周  $x^2 + y^2 = 1$  和  $x^2 + y^2 = 4$  在第一象限围成的区域
2.  $D_2$  是由圆周  $x^2 + y^2 = 1$  在第一象限所围成的闭区域
3.  $D_3$  是由圆周  $x^2 + y^2 = 1$  所围成的闭区域

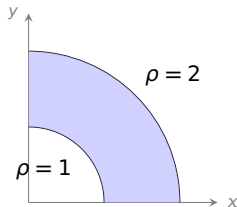
解



例 用极坐标表示以下的闭区域：

1.  $D_1$  是由圆周  $x^2 + y^2 = 1$  和  $x^2 + y^2 = 4$  在第一象限围成的区域
2.  $D_2$  是由圆周  $x^2 + y^2 = 1$  在第一象限所围成的闭区域
3.  $D_3$  是由圆周  $x^2 + y^2 = 1$  所围成的闭区域

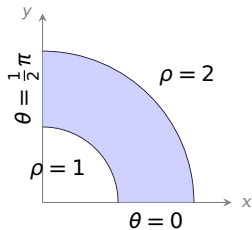
解



例 用极坐标表示以下的闭区域：

1.  $D_1$  是由圆周  $x^2 + y^2 = 1$  和  $x^2 + y^2 = 4$  在第一象限围成的区域
2.  $D_2$  是由圆周  $x^2 + y^2 = 1$  在第一象限所围成的闭区域
3.  $D_3$  是由圆周  $x^2 + y^2 = 1$  所围成的闭区域

解

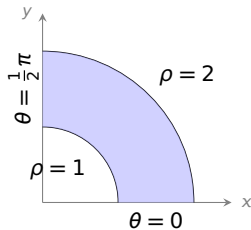


例 用极坐标表示以下的闭区域：

1.  $D_1$  是由圆周  $x^2 + y^2 = 1$  和  $x^2 + y^2 = 4$  在第一象限围成的区域
2.  $D_2$  是由圆周  $x^2 + y^2 = 1$  在第一象限所围成的闭区域
3.  $D_3$  是由圆周  $x^2 + y^2 = 1$  所围成的闭区域

解

1.  $D_1 = \{(\rho, \theta) | 1 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}.$

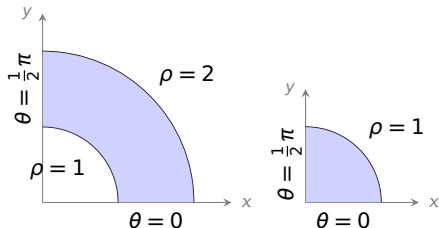


例 用极坐标表示以下的闭区域：

1.  $D_1$  是由圆周  $x^2 + y^2 = 1$  和  $x^2 + y^2 = 4$  在第一象限围成的区域
2.  $D_2$  是由圆周  $x^2 + y^2 = 1$  在第一象限所围成的闭区域
3.  $D_3$  是由圆周  $x^2 + y^2 = 1$  所围成的闭区域

解

1.  $D_1 = \{(\rho, \theta) | 1 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}.$

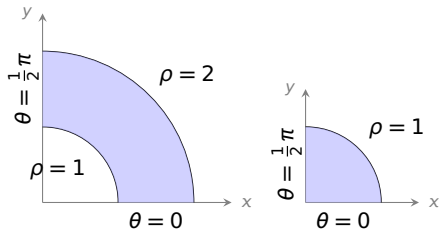


例 用极坐标表示以下的闭区域：

1.  $D_1$  是由圆周  $x^2 + y^2 = 1$  和  $x^2 + y^2 = 4$  在第一象限围成的区域
2.  $D_2$  是由圆周  $x^2 + y^2 = 1$  在第一象限所围成的闭区域
3.  $D_3$  是由圆周  $x^2 + y^2 = 1$  所围成的闭区域

解

1.  $D_1 = \{(\rho, \theta) | 1 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}.$
2.  $D_2 = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}.$



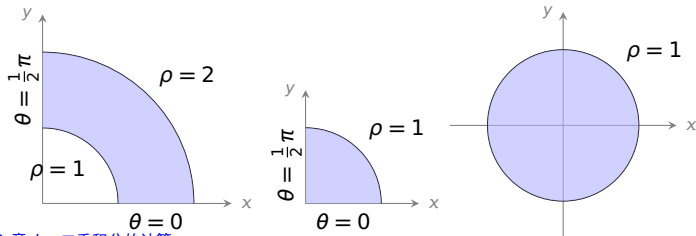


例 用极坐标表示以下的闭区域：

1.  $D_1$  是由圆周  $x^2 + y^2 = 1$  和  $x^2 + y^2 = 4$  在第一象限围成的区域
2.  $D_2$  是由圆周  $x^2 + y^2 = 1$  在第一象限所围成的闭区域
3.  $D_3$  是由圆周  $x^2 + y^2 = 1$  所围成的闭区域

解

1.  $D_1 = \{(\rho, \theta) | 1 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$ .
2.  $D_2 = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$ .

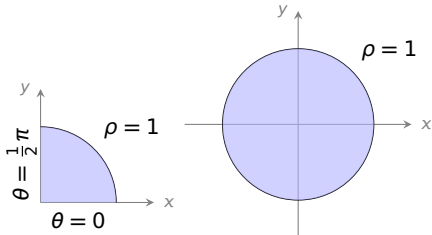
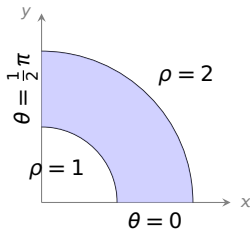


例 用极坐标表示以下的闭区域：

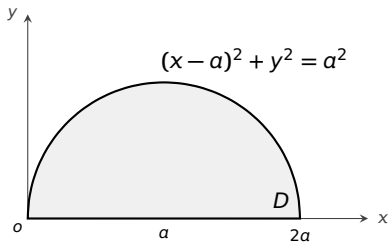
1.  $D_1$  是由圆周  $x^2 + y^2 = 1$  和  $x^2 + y^2 = 4$  在第一象限围成的区域
2.  $D_2$  是由圆周  $x^2 + y^2 = 1$  在第一象限所围成的闭区域
3.  $D_3$  是由圆周  $x^2 + y^2 = 1$  所围成的闭区域

解

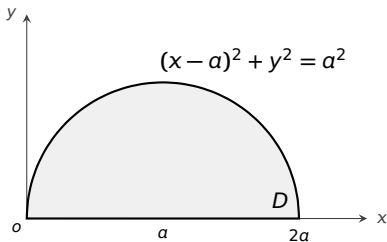
1.  $D_1 = \{(\rho, \theta) | 1 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}.$
2.  $D_2 = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}.$
3.  $D_3 = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$



例 用极坐标表示右图区域  $D$



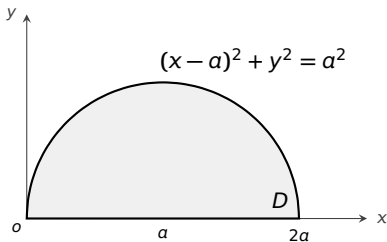
例 用极坐标表示右图区域  $D$



解 1. 先把圆弧的方程用极坐标改写：

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2$$

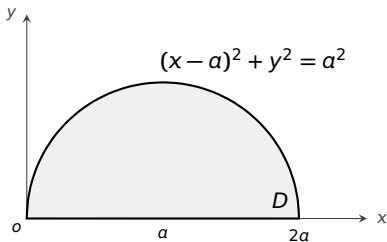
例 用极坐标表示右图区域  $D$



解 1. 先把圆弧的方程用极坐标改写：

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow x^2 - 2ax + y^2 = 0$$

例 用极坐标表示右图区域  $D$

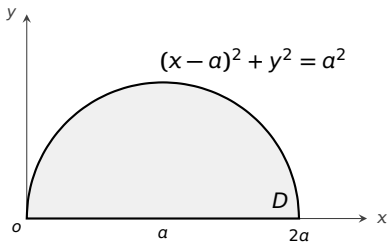


解 1. 先把圆弧的方程用极坐标改写:

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow x^2 - 2ax + y^2 = 0$$

$$\begin{array}{c} x = \rho \cos \theta \\ \xrightarrow{\hspace{1cm}} \\ y = \rho \sin \theta \end{array}$$

例 用极坐标表示右图区域  $D$

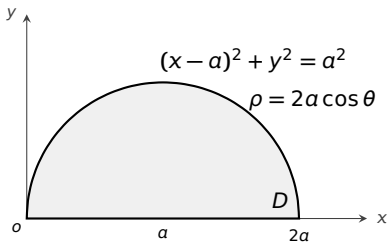


解 1. 先把圆弧的方程用极坐标改写:

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow x^2 - 2ax + y^2 = 0$$

$$\begin{array}{c} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{array} \Rightarrow \rho^2 - 2a\rho \cos \theta = 0$$

例 用极坐标表示右图区域  $D$



解 1. 先把圆弧的方程用极坐标改写:

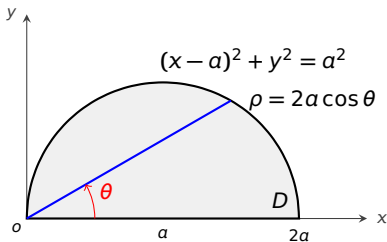
$$(x-a)^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow x^2 - 2ax + y^2 = 0$$

$$\begin{array}{c} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{array} \Rightarrow \rho^2 - 2a\rho \cos \theta = 0$$

$$\Rightarrow \rho = 2a \cos \theta$$



例 用极坐标表示右图区域  $D$



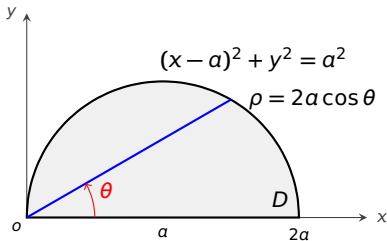
解 1. 先把圆弧的方程用极坐标改写:

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow x^2 - 2ax + y^2 = 0$$

$$\begin{array}{c} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{array} \Rightarrow \rho^2 - 2a\rho \cos \theta = 0$$

$$\Rightarrow \rho = 2a \cos \theta$$

例 用极坐标表示右图区域  $D$



解 1. 先把圆弧的方程用极坐标改写:

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow x^2 - 2ax + y^2 = 0$$

$$\begin{array}{c} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{array} \Rightarrow \rho^2 - 2a\rho \cos \theta = 0$$

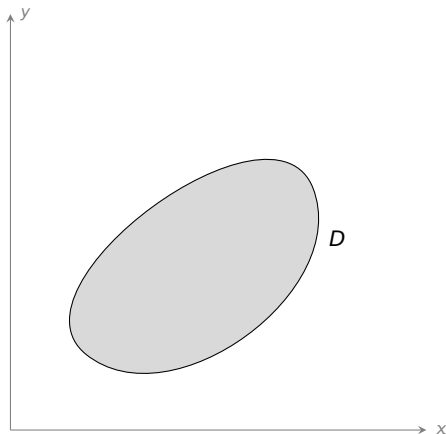
$$\Rightarrow \rho = 2a \cos \theta$$

2. 所以

$$D = \{(\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq 2a \cos \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

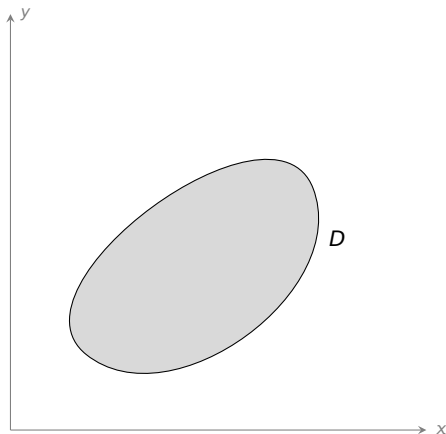
# 极坐标下计算二重积分

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \quad \begin{array}{l} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{array}$$



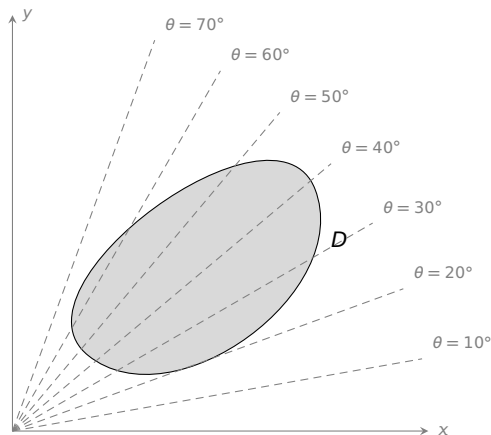
# 极坐标下计算二重积分

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{\quad} \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$$



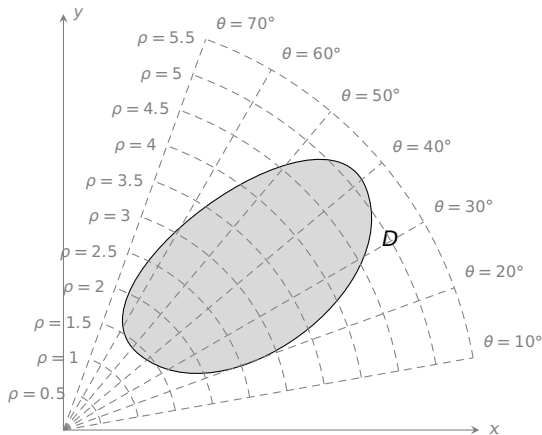
# 极坐标下计算二重积分

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$$



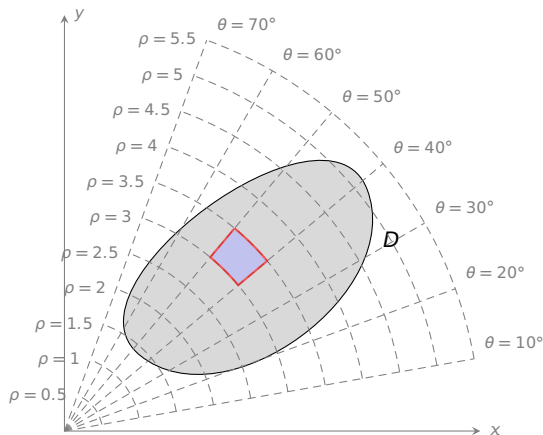
# 极坐标下计算二重积分

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$$



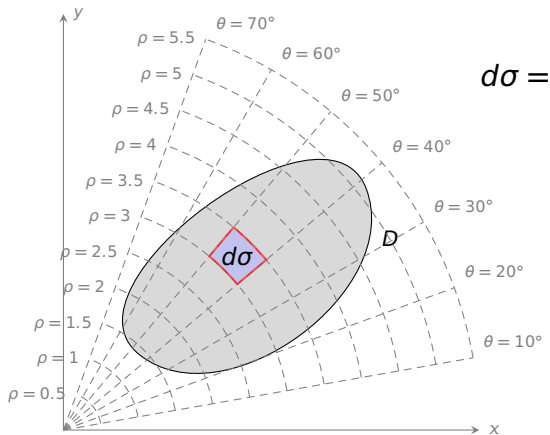
# 极坐标下计算二重积分

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$$



# 极坐标下计算二重积分

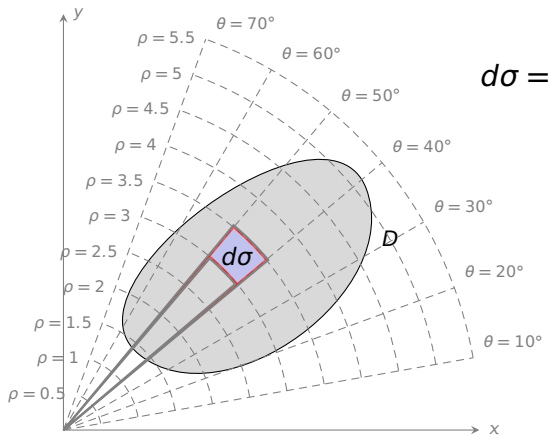
$$\iint_D f(x, y) d\sigma \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$$





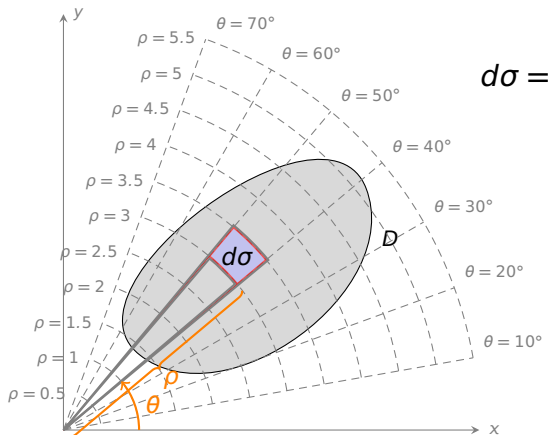
# 极坐标下计算二重积分

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$$



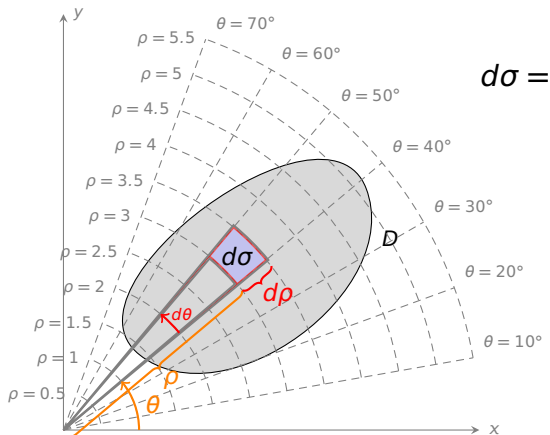
# 极坐标下计算二重积分

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$$



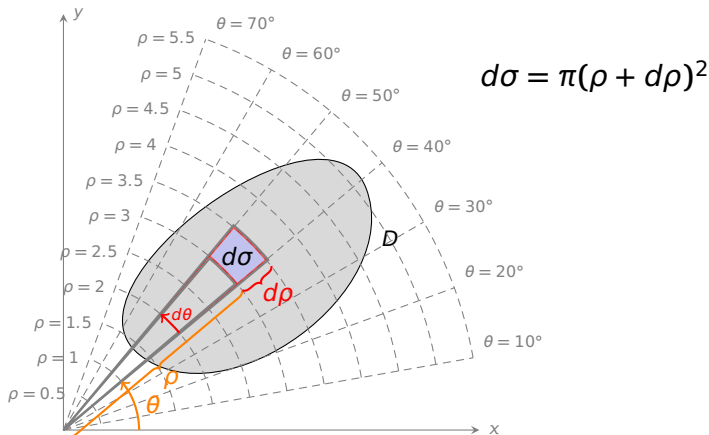
# 极坐标下计算二重积分

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$$



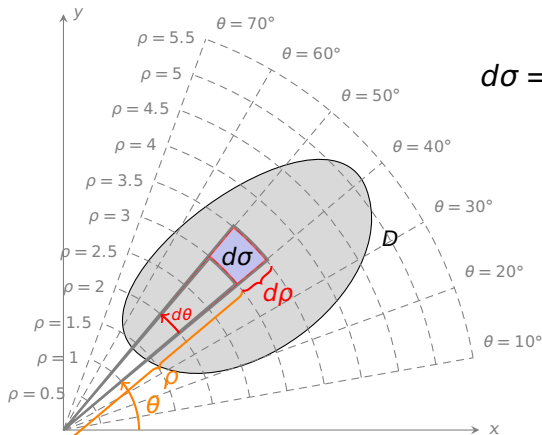
# 极坐标下计算二重积分

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$$



# 极坐标下计算二重积分

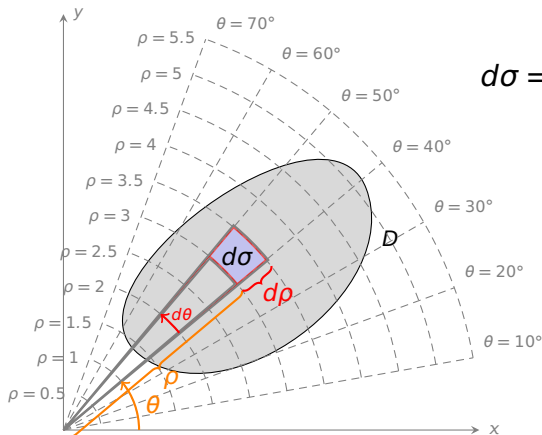
$$\iint_D f(x, y) d\sigma \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$$



$$d\sigma = \pi(\rho + d\rho)^2 \cdot \frac{d\theta}{2\pi}$$

# 极坐标下计算二重积分

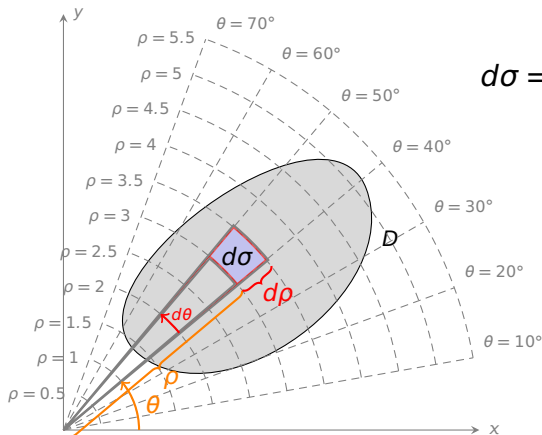
$$\iint_D f(x, y) d\sigma \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$$



$$d\sigma = \pi(\rho + d\rho)^2 \cdot \frac{d\theta}{2\pi} - \pi\rho^2$$

# 极坐标下计算二重积分

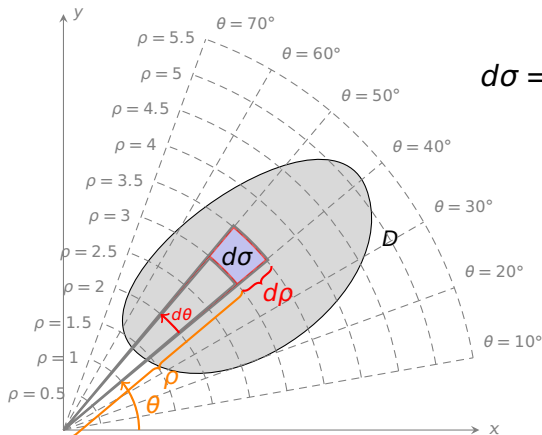
$$\iint_D f(x, y) d\sigma \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$$



$$d\sigma = \pi(\rho + d\rho)^2 \cdot \frac{d\theta}{2\pi} - \pi\rho^2 \cdot \frac{d\theta}{2\pi}$$

# 极坐标下计算二重积分

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$$

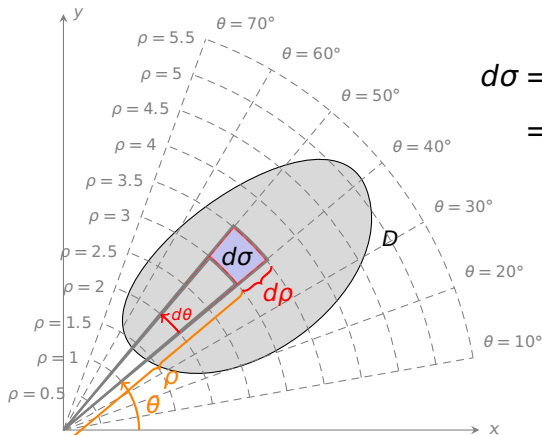


$$d\sigma = \pi(\rho + d\rho)^2 \cdot \frac{d\theta}{2\pi} - \pi\rho^2 \cdot \frac{d\theta}{2\pi}$$



# 极坐标下计算二重积分

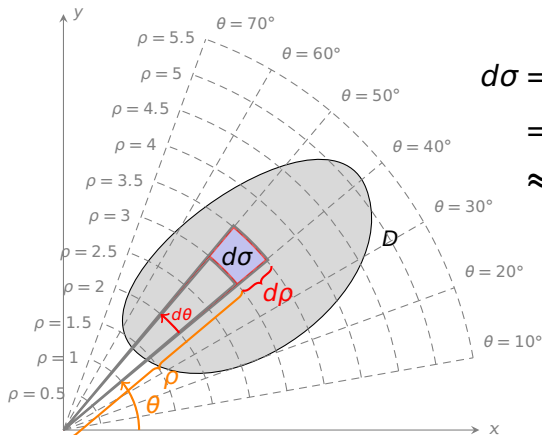
$$\iint_D f(x, y) d\sigma \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$$



$$\begin{aligned} d\sigma &= \pi(\rho + d\rho)^2 \cdot \frac{d\theta}{2\pi} - \pi\rho^2 \cdot \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \rho d\rho d\theta + \frac{1}{2} d\rho^2 d\theta \end{aligned}$$

# 极坐标下计算二重积分

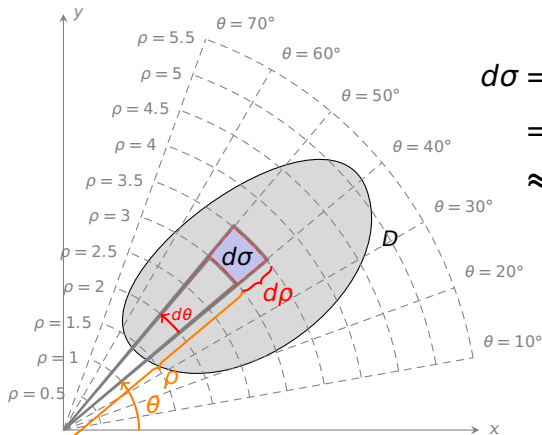
$$\iint_D f(x, y) d\sigma \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$$



$$\begin{aligned} d\sigma &= \pi(\rho + d\rho)^2 \cdot \frac{d\theta}{2\pi} - \pi\rho^2 \cdot \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \rho d\rho d\theta + \frac{1}{2} d\rho^2 d\theta \\ &\approx \rho d\rho d\theta \end{aligned}$$

# 极坐标下计算二重积分

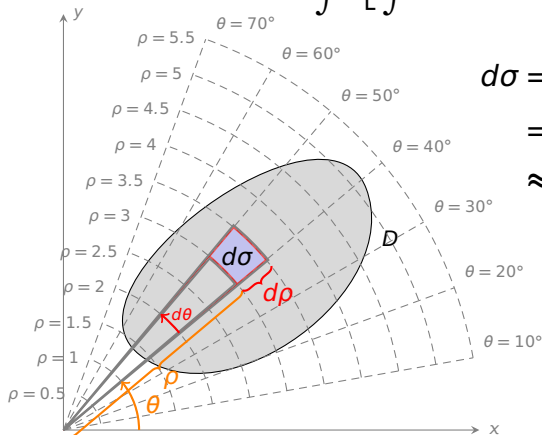
$$\iint_D f(x, y) d\sigma \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta$$



$$\begin{aligned} d\sigma &= \pi(\rho + d\rho)^2 \cdot \frac{d\theta}{2\pi} - \pi\rho^2 \cdot \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \rho d\rho d\theta + \frac{1}{2} d\rho^2 d\theta \\ &\approx \rho d\rho d\theta \end{aligned}$$

# 极坐标下计算二重积分

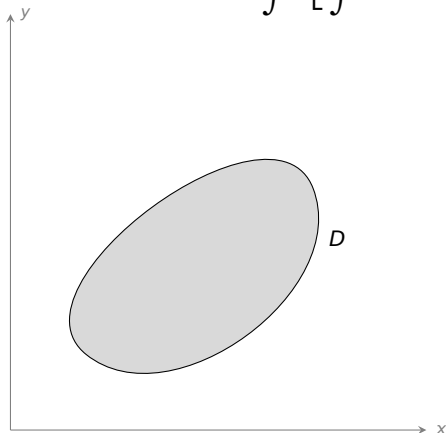
$$\iint_D f(x, y) d\sigma \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta$$
$$= \int \left[ \int f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho \right] d\theta$$



$$d\sigma = \pi(\rho + d\rho)^2 \cdot \frac{d\theta}{2\pi} - \pi\rho^2 \cdot \frac{d\theta}{2\pi}$$
$$= \rho d\rho d\theta + \frac{1}{2} d\rho^2 d\theta$$
$$\approx \rho d\rho d\theta$$

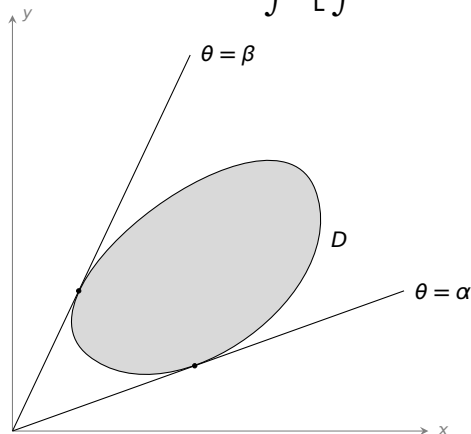
# 极坐标下计算二重积分

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) d\sigma & \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta \\ & = \int \left[ \int f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho \right] d\theta \end{aligned}$$



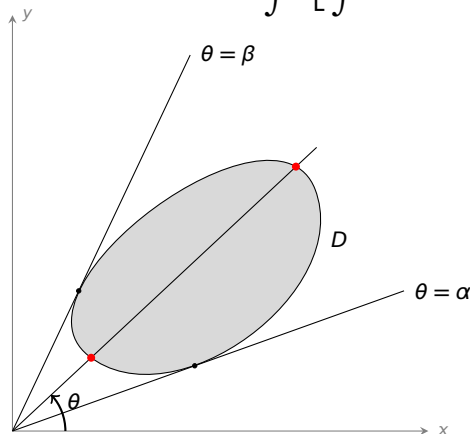
# 极坐标下计算二重积分

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) d\sigma & \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta \\ & = \int \left[ \int f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho \right] d\theta \end{aligned}$$



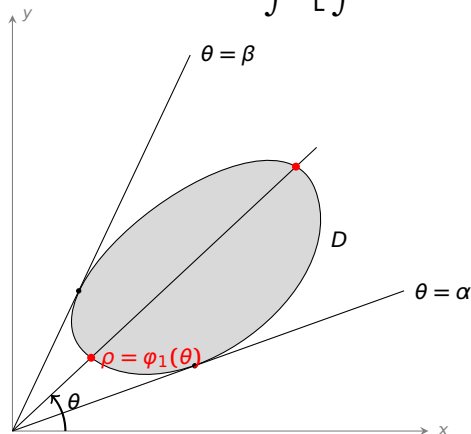
# 极坐标下计算二重积分

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) d\sigma & \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta \\ & = \int \left[ \int f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho \right] d\theta \end{aligned}$$



# 极坐标下计算二重积分

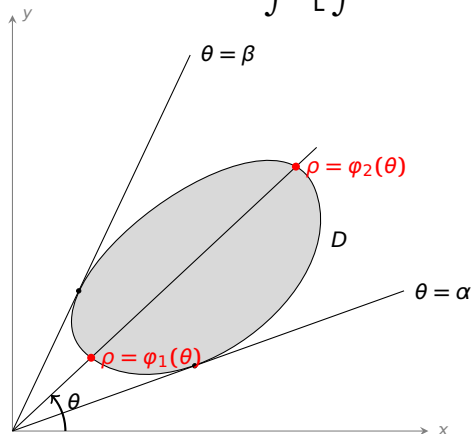
$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) d\sigma & \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta \\ & = \int \left[ \int f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho \right] d\theta \end{aligned}$$





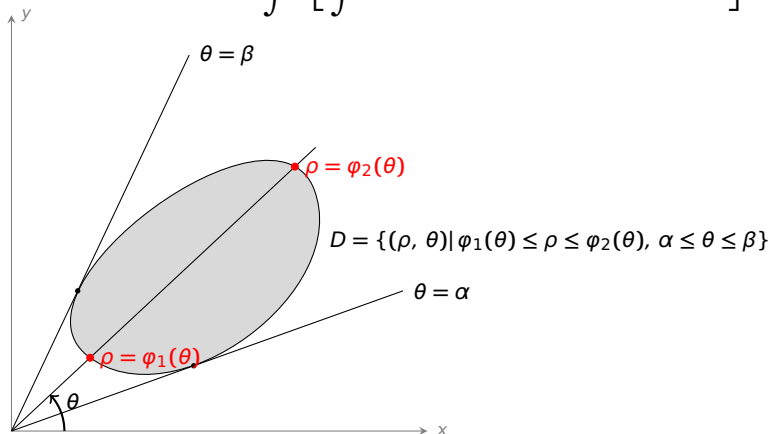
# 极坐标下计算二重积分

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) d\sigma & \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta \\ & = \int \left[ \int f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho \right] d\theta \end{aligned}$$



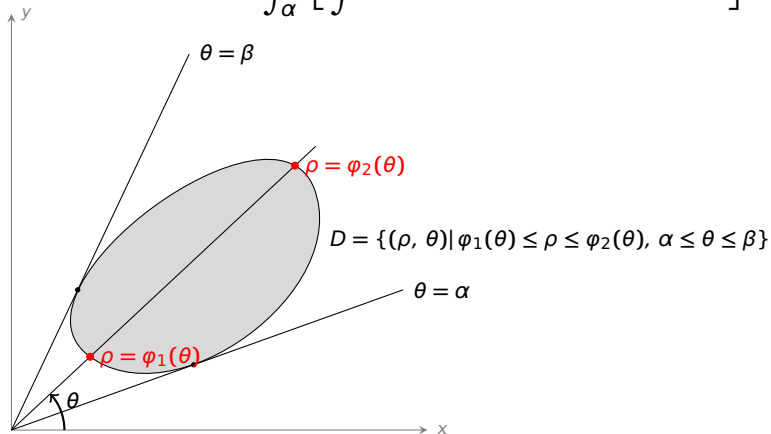
# 极坐标下计算二重积分

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) d\sigma &\stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta \\ &= \int \left[ \int f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho \right] d\theta \end{aligned}$$



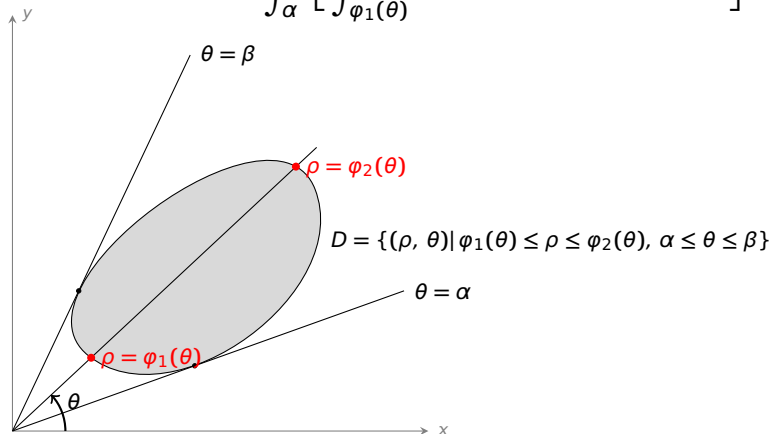
# 极坐标下计算二重积分

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) d\sigma &\stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[ \int f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho \right] d\theta \end{aligned}$$

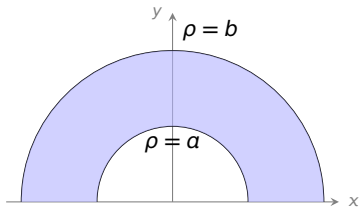


# 极坐标下计算二重积分

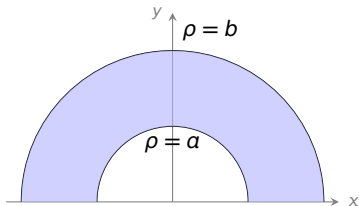
$$\begin{aligned}\iint_D f(x, y) d\sigma &\stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[ \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho \right] d\theta\end{aligned}$$



例 计算  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , 其中区域  $D$  如右图所示

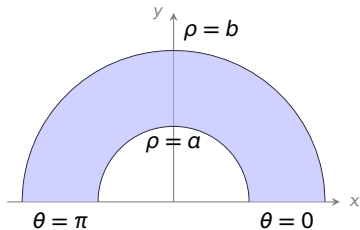


**例** 计算  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , 其中区域  $D$  如右图所示



**解** 区域  $D$  用极坐标表示是:

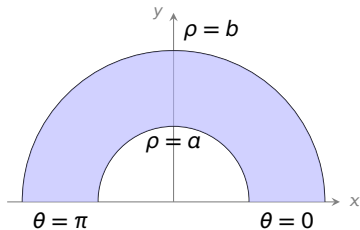
例 计算  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , 其中区域  $D$  如右图所示



解 区域  $D$  用极坐标表示是:

$$D = \{(\rho, \theta) | a \leq \rho \leq b, 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

例 计算  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , 其中区域  $D$  如右图所示



解 区域  $D$  用极坐标表示是:

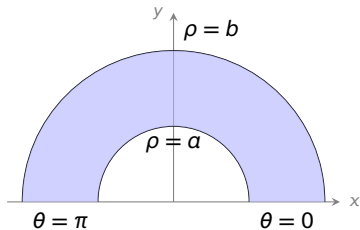
$$D = \{(\rho, \theta) | a \leq \rho \leq b, 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

所以

$$\text{原式} \frac{x=\rho \cos \theta}{y=\rho \sin \theta}$$



例 计算  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , 其中区域  $D$  如右图所示



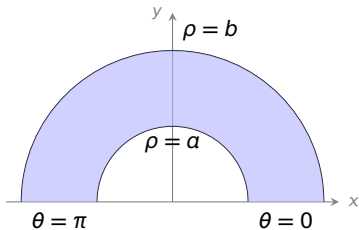
解 区域  $D$  用极坐标表示是:

$$D = \{(\rho, \theta) | a \leq \rho \leq b, 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

所以

$$\text{原式} \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D \rho$$

例 计算  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , 其中区域  $D$  如右图所示



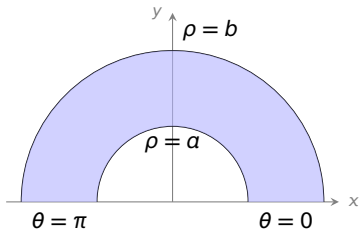
解 区域  $D$  用极坐标表示是:

$$D = \{(\rho, \theta) | a \leq \rho \leq b, 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

所以

$$\text{原式} \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D \rho \cdot \rho d\rho d\theta$$

例 计算  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , 其中区域  $D$  如右图所示



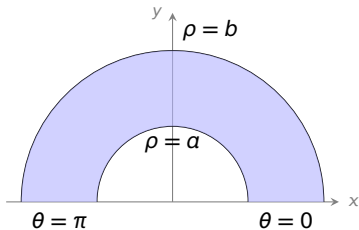
解 区域  $D$  用极坐标表示是:

$$D = \{(\rho, \theta) | a \leq \rho \leq b, 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

所以

$$\text{原式} \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D \rho \cdot \rho d\rho d\theta = \int \left[ \int \rho^2 d\rho \right] d\theta$$

例 计算  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , 其中区域  $D$  如右图所示



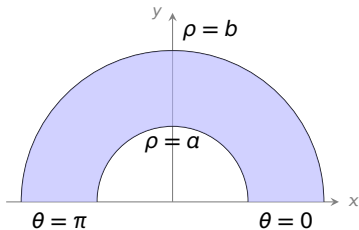
解 区域  $D$  用极坐标表示是:

$$D = \{(\rho, \theta) | a \leq \rho \leq b, 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

所以

$$\text{原式} \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D \rho \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^\pi \left[ \int \rho^2 d\rho \right] d\theta$$

例 计算  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , 其中区域  $D$  如右图所示



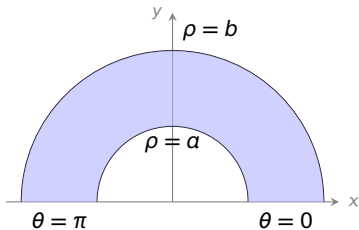
解 区域  $D$  用极坐标表示是:

$$D = \{(\rho, \theta) | a \leq \rho \leq b, 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

所以

$$\text{原式} \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D \rho \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^\pi \left[ \int_a^b \rho^2 d\rho \right] d\theta$$

例 计算  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , 其中区域  $D$  如右图所示



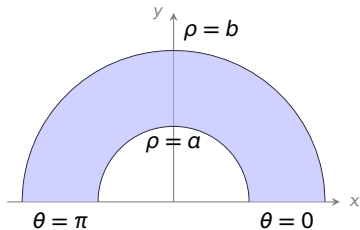
解 区域  $D$  用极坐标表示是:

$$D = \{(\rho, \theta) | a \leq \rho \leq b, 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

所以

$$\begin{aligned} \text{原式} & \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D \rho \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^\pi \left[ \int_a^b \rho^2 d\rho \right] d\theta \\ & = \pi \left( \quad \quad \right) \end{aligned}$$

例 计算  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , 其中区域  $D$  如右图所示



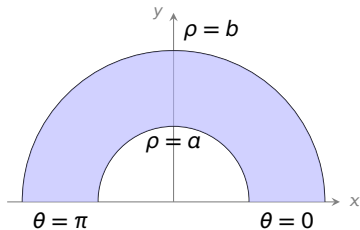
解 区域  $D$  用极坐标表示是:

$$D = \{(\rho, \theta) | a \leq \rho \leq b, 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

所以

$$\begin{aligned} \text{原式} & \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D \rho \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^\pi \left[ \int_a^b \rho^2 d\rho \right] d\theta \\ & = \pi \left( \frac{1}{3} \rho^3 \Big|_a^b \right) \end{aligned}$$

例 计算  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , 其中区域  $D$  如右图所示



解 区域  $D$  用极坐标表示是:

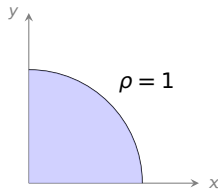
$$D = \{(\rho, \theta) | a \leq \rho \leq b, 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

所以

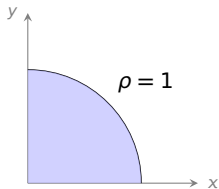
$$\begin{aligned} \text{原式} & \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D \rho \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^\pi \left[ \int_a^b \rho^2 d\rho \right] d\theta \\ & = \pi \left( \frac{1}{3} \rho^3 \Big|_a^b \right) = \frac{\pi}{3} (b^3 - a^3) \end{aligned}$$



例 计算  $\iint_D \ln(1+x^2+y^2)dx dy$ , 其中区域  $D$  如右图所示

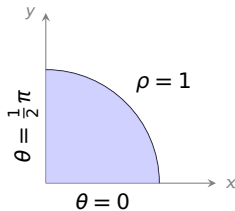


**例** 计算  $\iint_D \ln(1+x^2+y^2)dx dy$ , 其中区域  $D$  如右图所示



**解** 区域  $D$  用极坐标表示是:

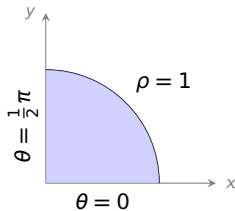
**例** 计算  $\iint_D \ln(1+x^2+y^2)dx dy$ , 其中区域  $D$  如右图所示



**解** 区域  $D$  用极坐标表示是:

$$D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi\}$$

**例** 计算  $\iint_D \ln(1+x^2+y^2)dx dy$ , 其中区域  $D$  如右图所示



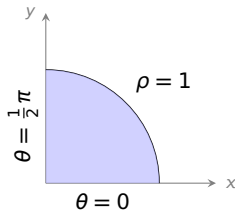
**解** 区域  $D$  用极坐标表示是:

$$D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi\}$$

所以

$$\text{原式} \frac{x=\rho \cos \theta}{y=\rho \sin \theta}$$

**例** 计算  $\iint_D \ln(1+x^2+y^2)dx dy$ , 其中区域  $D$  如右图所示



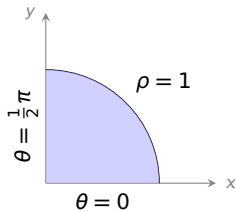
**解** 区域  $D$  用极坐标表示是:

$$D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi\}$$

所以

$$\text{原式} \xrightarrow[y=\rho \sin \theta]{x=\rho \cos \theta} \iint_D \ln(1+\rho^2)$$

**例** 计算  $\iint_D \ln(1+x^2+y^2)dx dy$ , 其中区域  $D$  如右图所示



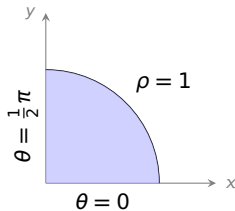
**解** 区域  $D$  用极坐标表示是:

$$D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi\}$$

所以

$$\text{原式} \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D \ln(1+\rho^2) \cdot \rho d\rho d\theta$$

**例** 计算  $\iint_D \ln(1+x^2+y^2)dx dy$ , 其中区域  $D$  如右图所示



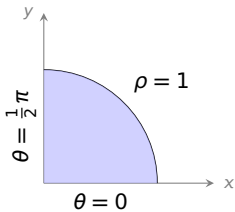
**解** 区域  $D$  用极坐标表示是:

$$D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi\}$$

所以

$$\begin{aligned} \text{原式} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \ln(1+\rho^2) \cdot \rho d\rho d\theta \\ & = \int \left[ \int \ln(1+\rho^2) \cdot \rho d\rho \right] d\theta \end{aligned}$$

例 计算  $\iint_D \ln(1+x^2+y^2)dx dy$ , 其中区域  $D$  如右图所示



解 区域  $D$  用极坐标表示是:

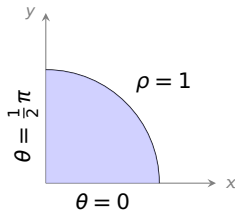
$$D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi\}$$

所以

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^1 \ln(1+\rho^2) \cdot \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left[ \int_0^1 \ln(1+\rho^2) \cdot \rho d\rho \right] d\theta \end{aligned}$$



**例** 计算  $\iint_D \ln(1+x^2+y^2)dx dy$ , 其中区域  $D$  如右图所示



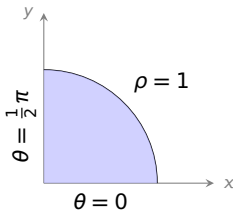
**解** 区域  $D$  用极坐标表示是:

$$D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi\}$$

所以

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^1 \ln(1+\rho^2) \cdot \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left[ \int_0^1 \ln(1+\rho^2) \cdot \rho d\rho \right] d\theta \end{aligned}$$

**例** 计算  $\iint_D \ln(1+x^2+y^2)dx dy$ , 其中区域  $D$  如右图所示



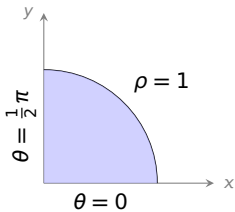
**解** 区域  $D$  用极坐标表示是:

$$D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi\}$$

所以

$$\begin{aligned} \text{原式} & \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^1 \ln(1+\rho^2) \cdot \rho d\rho d\theta \\ & = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left[ \int_0^1 \ln(1+\rho^2) \cdot \rho d\rho \right] d\theta \stackrel{u=1+\rho^2}{=} \end{aligned}$$

例 计算  $\iint_D \ln(1+x^2+y^2)dx dy$ , 其中区域  $D$  如右图所示



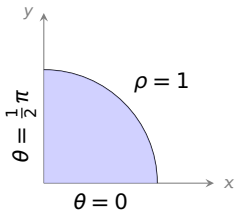
解 区域  $D$  用极坐标表示是:

$$D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi\}$$

所以

$$\begin{aligned} \text{原式} & \int_{y=\rho \sin \theta}^{x=\rho \cos \theta} \iint_D \ln(1+\rho^2) \cdot \rho d\rho d\theta \\ & = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left[ \int_0^1 \ln(1+\rho^2) \cdot \rho d\rho \right] d\theta \stackrel{u=1+\rho^2}{=} \ln u \end{aligned}$$

例 计算  $\iint_D \ln(1+x^2+y^2)dx dy$ , 其中区域  $D$  如右图所示



解 区域  $D$  用极坐标表示是:

$$D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi\}$$

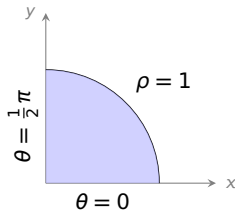
所以

$$\text{原式} \xrightarrow[y=\rho \sin \theta]{x=\rho \cos \theta} \iint_D \ln(1+\rho^2) \cdot \rho d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left[ \int_0^1 \ln(1+\rho^2) \cdot \rho d\rho \right] d\theta \xrightarrow{u=1+\rho^2}$$

$$\ln u \cdot \frac{1}{2} du$$

例 计算  $\iint_D \ln(1+x^2+y^2)dx dy$ , 其中区域  $D$  如右图所示



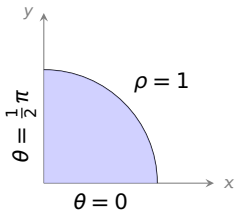
解 区域  $D$  用极坐标表示是:

$$D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi\}$$

所以

$$\begin{aligned} \text{原式} & \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^1 \ln(1+\rho^2) \cdot \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left[ \int_0^1 \ln(1+\rho^2) \cdot \rho d\rho \right] d\theta \stackrel{u=1+\rho^2}{=} \int_1^2 \ln u \cdot \frac{1}{2} du \end{aligned}$$

例 计算  $\iint_D \ln(1+x^2+y^2)dx dy$ , 其中区域  $D$  如右图所示



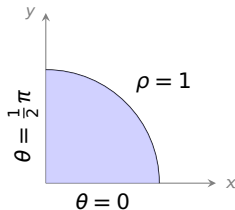
解 区域  $D$  用极坐标表示是:

$$D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi\}$$

所以

$$\begin{aligned} \text{原式} & \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D \ln(1+\rho^2) \cdot \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left[ \int_0^1 \ln(1+\rho^2) \cdot \rho d\rho \right] d\theta \stackrel{u=1+\rho^2}{=} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left[ \int_1^2 \ln u \cdot \frac{1}{2} du \right] d\theta \end{aligned}$$

例 计算  $\iint_D \ln(1+x^2+y^2)dx dy$ , 其中区域  $D$  如右图所示



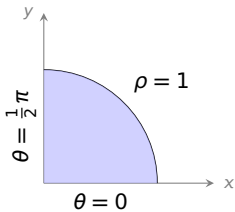
解 区域  $D$  用极坐标表示是:

$$D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi\}$$

所以

$$\begin{aligned} \text{原式} & \xrightarrow[y=\rho \sin \theta]{x=\rho \cos \theta} \iint_D \ln(1+\rho^2) \cdot \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left[ \int_0^1 \ln(1+\rho^2) \cdot \rho d\rho \right] d\theta \xrightarrow{u=1+\rho^2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left[ \int_1^2 \ln u \cdot \frac{1}{2} du \right] d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \end{aligned}$$

例 计算  $\iint_D \ln(1+x^2+y^2)dx dy$ , 其中区域  $D$  如右图所示



解 区域  $D$  用极坐标表示是:

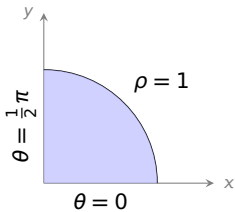
$$D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi\}$$

所以

$$\begin{aligned} \text{原式} & \frac{x=\rho \cos \theta}{y=\rho \sin \theta} \iint_D \ln(1+\rho^2) \cdot \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left[ \int_0^1 \ln(1+\rho^2) \cdot \rho d\rho \right] d\theta \stackrel{u=1+\rho^2}{=} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left[ \int_1^2 \ln u \cdot \frac{1}{2} du \right] d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \left[ u \ln u \Big|_1^2 - \int_1^2 u d \ln u \right] \end{aligned}$$



**例** 计算  $\iint_D \ln(1+x^2+y^2)dx dy$ , 其中区域  $D$  如右图所示



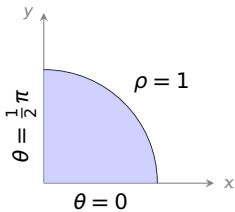
**解** 区域  $D$  用极坐标表示是:

$$D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi\}$$

所以

$$\begin{aligned} \text{原式} & \frac{x=\rho \cos \theta}{y=\rho \sin \theta} \iint_D \ln(1+\rho^2) \cdot \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left[ \int_0^1 \ln(1+\rho^2) \cdot \rho d\rho \right] d\theta \stackrel{u=1+\rho^2}{=} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left[ \int_1^2 \ln u \cdot \frac{1}{2} du \right] d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \left[ u \ln u \Big|_1^2 - \int_1^2 u d \ln u \right] = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} [2 \ln 2 - 1] \end{aligned}$$

例 计算  $\iint_D \ln(1+x^2+y^2)dx dy$ , 其中区域  $D$  如右图所示



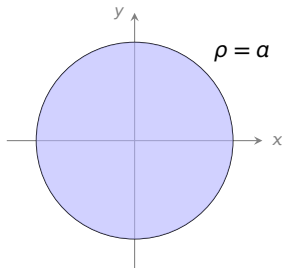
解 区域  $D$  用极坐标表示是:

$$D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi\}$$

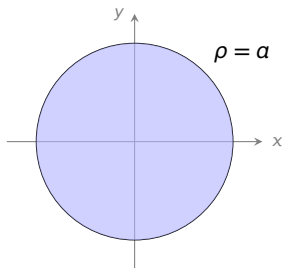
所以

$$\begin{aligned} \text{原式} & \frac{x=\rho \cos \theta}{y=\rho \sin \theta} \iint_D \ln(1+\rho^2) \cdot \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left[ \int_0^1 \ln(1+\rho^2) \cdot \rho d\rho \right] d\theta \stackrel{u=1+\rho^2}{=} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left[ \int_1^2 \ln u \cdot \frac{1}{2} du \right] d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \left[ u \ln u \Big|_1^2 - \int_1^2 u d \ln u \right] = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} [2 \ln 2 - 1] = \frac{\pi}{4} (2 \ln 2 - 1) \end{aligned}$$

例 计算  $\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy$ , 其中区域  $D$  如右图所示

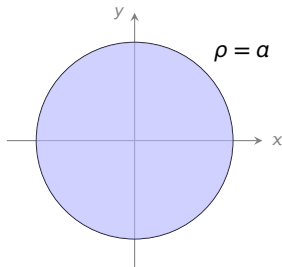


**例** 计算  $\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy$ , 其中区域  $D$  如右图所示



**解** 区域  $D$  用极坐标表示是:

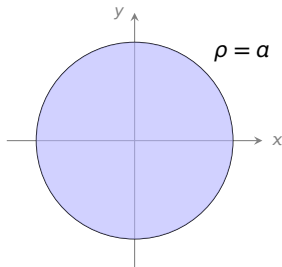
**例** 计算  $\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy$ , 其中区域  $D$  如右图所示



**解** 区域  $D$  用极坐标表示是:

$$D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

例 计算  $\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy$ , 其中区域  $D$  如右图所示



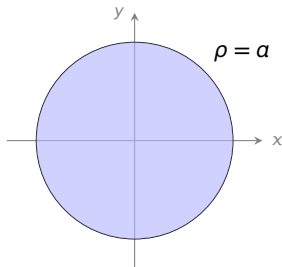
解 区域  $D$  用极坐标表示是:

$$D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

所以

$$\text{原式} \frac{x=\rho \cos \theta}{y=\rho \sin \theta}$$

例 计算  $\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy$ , 其中区域  $D$  如右图所示



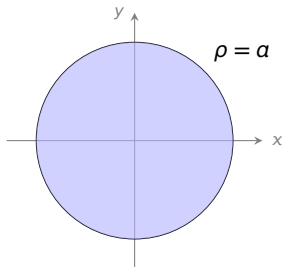
解 区域  $D$  用极坐标表示是:

$$D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

所以

$$\text{原式} \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D e^{-\rho^2}$$

例 计算  $\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy$ , 其中区域  $D$  如右图所示



解 区域  $D$  用极坐标表示是:

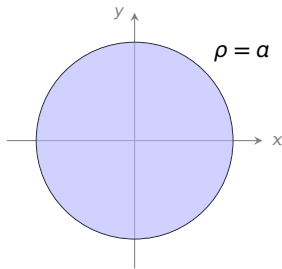
$$D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

所以

$$\text{原式} \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D e^{-\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta$$



例 计算  $\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy$ , 其中区域  $D$  如右图所示



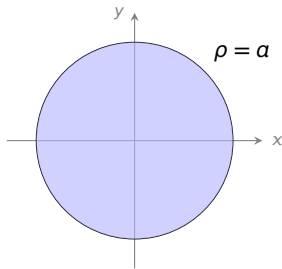
解 区域  $D$  用极坐标表示是:

$$D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

所以

$$\text{原式} \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D e^{-\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta = \int \left[ \int e^{-\rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta$$

例 计算  $\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy$ , 其中区域  $D$  如右图所示



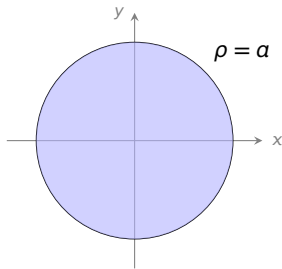
解 区域  $D$  用极坐标表示是:

$$D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

所以

$$\text{原式} \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D e^{-\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ \int e^{-\rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta$$

例 计算  $\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy$ , 其中区域  $D$  如右图所示



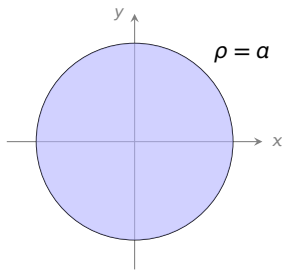
解 区域  $D$  用极坐标表示是:

$$D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

所以

$$\text{原式} \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D e^{-\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^a e^{-\rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta$$

**例** 计算  $\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy$ , 其中区域  $D$  如右图所示



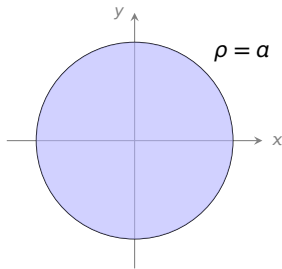
**解** 区域  $D$  用极坐标表示是:

$$D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

所以

$$\begin{aligned} \text{原式} & \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D e^{-\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^a e^{-\rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta \\ & = 2\pi \left[ \right] \end{aligned}$$

**例** 计算  $\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy$ , 其中区域  $D$  如右图所示



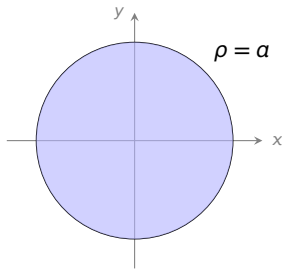
**解** 区域  $D$  用极坐标表示是:

$$D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

所以

$$\begin{aligned} \text{原式} & \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D e^{-\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^a e^{-\rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta \\ & \stackrel{u=\rho^2}{=} 2\pi \left[ \right] \end{aligned}$$

**例** 计算  $\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy$ , 其中区域  $D$  如右图所示



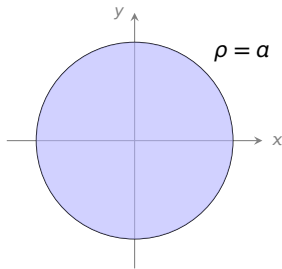
**解** 区域  $D$  用极坐标表示是:

$$D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

所以

$$\begin{aligned} \text{原式} & \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D e^{-\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^a e^{-\rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta \\ & \stackrel{\substack{u=\rho^2}}{=} 2\pi \left[ \begin{array}{c} e^{-u} \end{array} \right] \end{aligned}$$

**例** 计算  $\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy$ , 其中区域  $D$  如右图所示



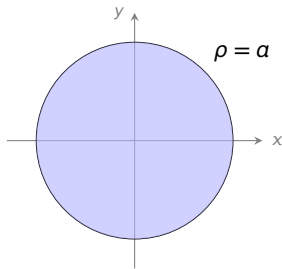
**解** 区域  $D$  用极坐标表示是:

$$D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

所以

$$\begin{aligned} \text{原式} & \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D e^{-\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^a e^{-\rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta \\ & \stackrel{u=\rho^2}{=} 2\pi \left[ e^{-u} \cdot \frac{1}{2} du \right] \end{aligned}$$

**例** 计算  $\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy$ , 其中区域  $D$  如右图所示



**解** 区域  $D$  用极坐标表示是:

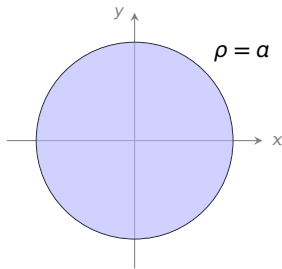
$$D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

所以

$$\begin{aligned} \text{原式} & \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D e^{-\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^a e^{-\rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta \\ & \stackrel{u=\rho^2}{=} 2\pi \left[ \int_0^{a^2} e^{-u} \cdot \frac{1}{2} du \right] \end{aligned}$$



**例** 计算  $\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy$ , 其中区域  $D$  如右图所示



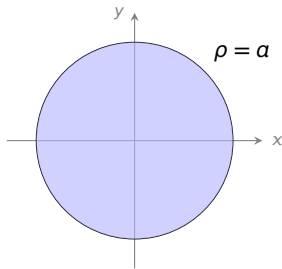
**解** 区域  $D$  用极坐标表示是:

$$D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

所以

$$\begin{aligned} \text{原式} & \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D e^{-\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^a e^{-\rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta \\ & \stackrel{u=\rho^2}{=} 2\pi \left[ \int_0^{a^2} e^{-u} \cdot \frac{1}{2} du \right] = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \left[ -e^{-u} \Big|_0^{a^2} \right] \end{aligned}$$

**例** 计算  $\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy$ , 其中区域  $D$  如右图所示



**解** 区域  $D$  用极坐标表示是:

$$D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

所以

$$\begin{aligned} \text{原式} & \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D e^{-\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^a e^{-\rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta \\ & \stackrel{u=\rho^2}{=} 2\pi \left[ \int_0^{a^2} e^{-u} \cdot \frac{1}{2} du \right] = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \left[ -e^{-u} \Big|_0^{a^2} \right] = (1 - e^{-a^2})\pi \end{aligned}$$

例 计算  $\iint_D x^2 dx dy$ , 其中区域  $D$  为圆域  $x^2 + y^2 \leq 1$

例 计算  $\iint_D x^2 dx dy$ , 其中区域  $D$  为圆域  $x^2 + y^2 \leq 1$

解法一

$$\text{原式} \begin{array}{c} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{array}$$

例 计算  $\iint_D x^2 dx dy$ , 其中区域  $D$  为圆域  $x^2 + y^2 \leq 1$

解法一

$$\text{原式} \begin{array}{c} x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta \end{array} \iint_D \rho^2 \cos^2 \theta$$

例 计算  $\iint_D x^2 dx dy$ , 其中区域  $D$  为圆域  $x^2 + y^2 \leq 1$

解法一

$$\text{原式} \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D \rho^2 \cos^2 \theta \cdot \rho d\rho d\theta$$

例 计算  $\iint_D x^2 dx dy$ , 其中区域  $D$  为圆域  $x^2 + y^2 \leq 1$

解法一

$$\text{原式} \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D \rho^2 \cos^2 \theta \cdot \rho d\rho d\theta = \int \left[ \int \rho^3 \cos^2 \theta d\rho \right] d\theta$$

例 计算  $\iint_D x^2 dx dy$ , 其中区域  $D$  为圆域  $x^2 + y^2 \leq 1$

解法一

$$\text{原式} \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D \rho^2 \cos^2 \theta \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ \int \rho^3 \cos^2 \theta d\rho \right] d\theta$$



例 计算  $\iint_D x^2 dx dy$ , 其中区域  $D$  为圆域  $x^2 + y^2 \leq 1$

解法一

$$\text{原式} \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D \rho^2 \cos^2 \theta \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^1 \rho^3 \cos^2 \theta d\rho \right] d\theta$$

例 计算  $\iint_D x^2 dx dy$ , 其中区域  $D$  为圆域  $x^2 + y^2 \leq 1$

解法一

$$\begin{aligned} \text{原式} & \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D \rho^2 \cos^2 \theta \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^1 \rho^3 \cos^2 \theta d\rho \right] d\theta \\ & = \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \left[ \int_0^1 \rho^3 d\rho \right] d\theta \end{aligned}$$

例 计算  $\iint_D x^2 dx dy$ , 其中区域  $D$  为圆域  $x^2 + y^2 \leq 1$

解法一

$$\begin{aligned} \text{原式} & \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D \rho^2 \cos^2 \theta \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^1 \rho^3 \cos^2 \theta d\rho \right] d\theta \\ & = \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \left[ \int_0^1 \rho^3 d\rho \right] d\theta = \left[ \int_0^1 \rho^3 d\rho \right] \cdot \left[ \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \right] \end{aligned}$$

例 计算  $\iint_D x^2 dx dy$ , 其中区域  $D$  为圆域  $x^2 + y^2 \leq 1$

解法一

$$\begin{aligned} \text{原式} & \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D \rho^2 \cos^2 \theta \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^1 \rho^3 \cos^2 \theta d\rho \right] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \left[ \int_0^1 \rho^3 d\rho \right] d\theta = \left[ \int_0^1 \rho^3 d\rho \right] \cdot \left[ \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \right] \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

例 计算  $\iint_D x^2 dx dy$ , 其中区域  $D$  为圆域  $x^2 + y^2 \leq 1$

解法一

$$\begin{aligned} \text{原式} & \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D \rho^2 \cos^2 \theta \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^1 \rho^3 \cos^2 \theta d\rho \right] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \left[ \int_0^1 \rho^3 d\rho \right] d\theta = \left[ \int_0^1 \rho^3 d\rho \right] \cdot \left[ \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \right] \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left[ \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (\cos 2\theta + 1) d\theta \right] \end{aligned}$$

例 计算  $\iint_D x^2 dx dy$ , 其中区域  $D$  为圆域  $x^2 + y^2 \leq 1$

解法一

$$\begin{aligned} \text{原式} & \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D \rho^2 \cos^2 \theta \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^1 \rho^3 \cos^2 \theta d\rho \right] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \left[ \int_0^1 \rho^3 d\rho \right] d\theta = \left[ \int_0^1 \rho^3 d\rho \right] \cdot \left[ \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \right] \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left[ \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (\cos 2\theta + 1) d\theta \right] = \frac{1}{4} \pi \end{aligned}$$

例 计算  $\iint_D x^2 dx dy$ , 其中区域  $D$  为圆域  $x^2 + y^2 \leq 1$

解法一

$$\begin{aligned} \text{原式} & \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D \rho^2 \cos^2 \theta \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^1 \rho^3 \cos^2 \theta d\rho \right] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \left[ \int_0^1 \rho^3 d\rho \right] d\theta = \left[ \int_0^1 \rho^3 d\rho \right] \cdot \left[ \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \right] \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left[ \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (\cos 2\theta + 1) d\theta \right] = \frac{1}{4} \pi \end{aligned}$$

解法二 由对称性,  $\iint_D x^2 dx dy = \iint_D y^2 dx dy$ , 所以

例 计算  $\iint_D x^2 dx dy$ , 其中区域  $D$  为圆域  $x^2 + y^2 \leq 1$

解法一

$$\begin{aligned} \text{原式} & \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D \rho^2 \cos^2 \theta \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^1 \rho^3 \cos^2 \theta d\rho \right] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \left[ \int_0^1 \rho^3 d\rho \right] d\theta = \left[ \int_0^1 \rho^3 d\rho \right] \cdot \left[ \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \right] \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left[ \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (\cos 2\theta + 1) d\theta \right] = \frac{1}{4} \pi \end{aligned}$$

解法二 由对称性,  $\iint_D x^2 dx dy = \iint_D y^2 dx dy$ , 所以

$$\iint_D x^2 dx dy = \frac{1}{2} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$$



例 计算  $\iint_D x^2 dx dy$ , 其中区域  $D$  为圆域  $x^2 + y^2 \leq 1$

解法一

$$\begin{aligned} \text{原式} & \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D \rho^2 \cos^2 \theta \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^1 \rho^3 \cos^2 \theta d\rho \right] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \left[ \int_0^1 \rho^3 d\rho \right] d\theta = \left[ \int_0^1 \rho^3 d\rho \right] \cdot \left[ \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \right] \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left[ \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (\cos 2\theta + 1) d\theta \right] = \frac{1}{4} \pi \end{aligned}$$

解法二 由对称性,  $\iint_D x^2 dx dy = \iint_D y^2 dx dy$ , 所以

$$\iint_D x^2 dx dy = \frac{1}{2} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=}$$

例 计算  $\iint_D x^2 dx dy$ , 其中区域  $D$  为圆域  $x^2 + y^2 \leq 1$

解法一

$$\begin{aligned} \text{原式} & \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D \rho^2 \cos^2 \theta \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^1 \rho^3 \cos^2 \theta d\rho \right] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \left[ \int_0^1 \rho^3 d\rho \right] d\theta = \left[ \int_0^1 \rho^3 d\rho \right] \cdot \left[ \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \right] \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left[ \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (\cos 2\theta + 1) d\theta \right] = \frac{1}{4} \pi \end{aligned}$$

解法二 由对称性,  $\iint_D x^2 dx dy = \iint_D y^2 dx dy$ , 所以

$$\iint_D x^2 dx dy = \frac{1}{2} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \frac{1}{2} \iint_D \rho^2 \cdot$$

例 计算  $\iint_D x^2 dx dy$ , 其中区域  $D$  为圆域  $x^2 + y^2 \leq 1$

解法一

$$\begin{aligned} \text{原式} & \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D \rho^2 \cos^2 \theta \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^1 \rho^3 \cos^2 \theta d\rho \right] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \left[ \int_0^1 \rho^3 d\rho \right] d\theta = \left[ \int_0^1 \rho^3 d\rho \right] \cdot \left[ \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \right] \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left[ \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (\cos 2\theta + 1) d\theta \right] = \frac{1}{4} \pi \end{aligned}$$

解法二 由对称性,  $\iint_D x^2 dx dy = \iint_D y^2 dx dy$ , 所以

$$\iint_D x^2 dx dy = \frac{1}{2} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \frac{1}{2} \iint_D \rho^2 \cdot \rho d\rho d\theta$$

例 计算  $\iint_D x^2 dx dy$ , 其中区域  $D$  为圆域  $x^2 + y^2 \leq 1$

解法一

$$\begin{aligned} \text{原式} & \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D \rho^2 \cos^2 \theta \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^1 \rho^3 \cos^2 \theta d\rho \right] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \left[ \int_0^1 \rho^3 d\rho \right] d\theta = \left[ \int_0^1 \rho^3 d\rho \right] \cdot \left[ \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \right] \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left[ \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (\cos 2\theta + 1) d\theta \right] = \frac{1}{4} \pi \end{aligned}$$

解法二 由对称性,  $\iint_D x^2 dx dy = \iint_D y^2 dx dy$ , 所以

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 dx dy &= \frac{1}{2} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \frac{1}{2} \iint_D \rho^2 \cdot \rho d\rho d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^1 \rho^3 d\rho \right] d\theta \end{aligned}$$

例 计算  $\iint_D x^2 dx dy$ , 其中区域  $D$  为圆域  $x^2 + y^2 \leq 1$

解法一

$$\begin{aligned} \text{原式} & \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D \rho^2 \cos^2 \theta \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^1 \rho^3 \cos^2 \theta d\rho \right] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \left[ \int_0^1 \rho^3 d\rho \right] d\theta = \left[ \int_0^1 \rho^3 d\rho \right] \cdot \left[ \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \right] \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left[ \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (\cos 2\theta + 1) d\theta \right] = \frac{1}{4} \pi \end{aligned}$$

解法二 由对称性,  $\iint_D x^2 dx dy = \iint_D y^2 dx dy$ , 所以

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 dx dy &= \frac{1}{2} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \frac{1}{2} \iint_D \rho^2 \cdot \rho d\rho d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^1 \rho^3 d\rho \right] d\theta = \pi. \end{aligned}$$

例 计算  $\iint_D x^2 dx dy$ , 其中区域  $D$  为圆域  $x^2 + y^2 \leq 1$

解法一

$$\begin{aligned} \text{原式} & \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D \rho^2 \cos^2 \theta \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^1 \rho^3 \cos^2 \theta d\rho \right] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \left[ \int_0^1 \rho^3 d\rho \right] d\theta = \left[ \int_0^1 \rho^3 d\rho \right] \cdot \left[ \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \right] \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left[ \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (\cos 2\theta + 1) d\theta \right] = \frac{1}{4} \pi \end{aligned}$$

解法二 由对称性,  $\iint_D x^2 dx dy = \iint_D y^2 dx dy$ , 所以

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 dx dy &= \frac{1}{2} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \frac{1}{2} \iint_D \rho^2 \cdot \rho d\rho d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^1 \rho^3 d\rho \right] d\theta = \pi \cdot \int_0^1 \rho^3 d\rho \end{aligned}$$

例 计算  $\iint_D x^2 dx dy$ , 其中区域  $D$  为圆域  $x^2 + y^2 \leq 1$

解法一

$$\begin{aligned} \text{原式} & \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_D \rho^2 \cos^2 \theta \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^1 \rho^3 \cos^2 \theta d\rho \right] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \left[ \int_0^1 \rho^3 d\rho \right] d\theta = \left[ \int_0^1 \rho^3 d\rho \right] \cdot \left[ \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \right] \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left[ \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (\cos 2\theta + 1) d\theta \right] = \frac{1}{4} \pi \end{aligned}$$

解法二 由对称性,  $\iint_D x^2 dx dy = \iint_D y^2 dx dy$ , 所以

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 dx dy &= \frac{1}{2} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \frac{1}{2} \iint_D \rho^2 \cdot \rho d\rho d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^1 \rho^3 d\rho \right] d\theta = \pi \cdot \int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

注 如何根据对称性说明  $\iint_D x^2 dx dy = \iint_D y^2 dx dy$ ?



注 如何根据对称性说明  $\iint_D x^2 dx dy = \iint_D y^2 dx dy$ ?

这是:

$$\iint_D x^2 dx dy = \iint_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} x^2 dx dy$$

注 如何根据对称性说明  $\iint_D x^2 dx dy = \iint_D y^2 dx dy$ ?

这是:

$$\begin{aligned}\iint_D x^2 dx dy &= \iint_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} x^2 dx dy \\ &= \iint_{\{y^2+x^2 \leq 1\}} y^2 dy dx\end{aligned}$$

注 如何根据对称性说明  $\iint_D x^2 dx dy = \iint_D y^2 dx dy$ ?

这是:

$$\begin{aligned}\iint_D x^2 dx dy &= \iint_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} x^2 dx dy \\ &= \iint_{\{y^2+x^2 \leq 1\}} y^2 dy dx = \iint_D y^2 dx dy\end{aligned}$$

# We are here now...

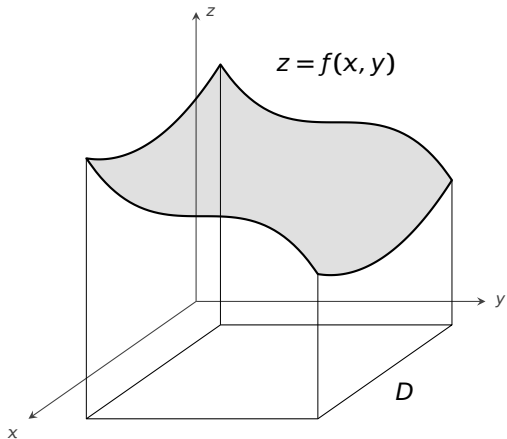
---

1. 如何计算二重积分?
2. 固定  $x$ , 先对  $y$  积分
3. 固定  $y$ , 先对  $x$  积分
4. 交换二重积分的积分次序
5. 极坐标下计算二重积分
6. 二重积分的应用

# 曲顶柱体体积

曲顶柱体的体积：

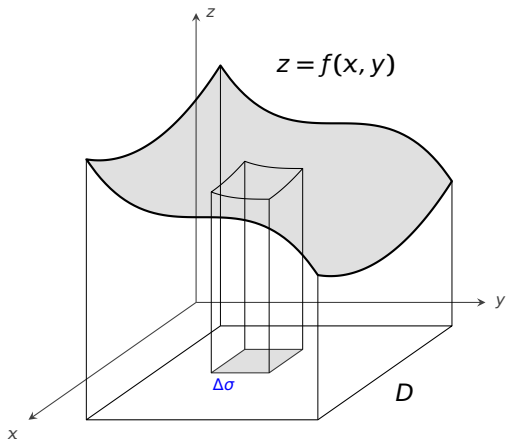
$$V = \iint_D f(x, y) d\sigma$$



# 曲顶柱体体积

曲顶柱体的体积：

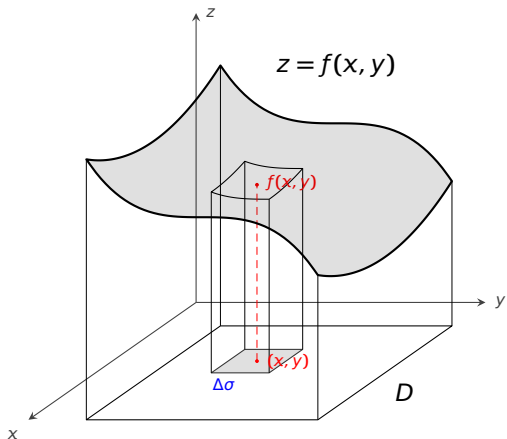
$$V = \iint_D f(x, y) d\sigma$$



# 曲顶柱体体积

曲顶柱体的体积：

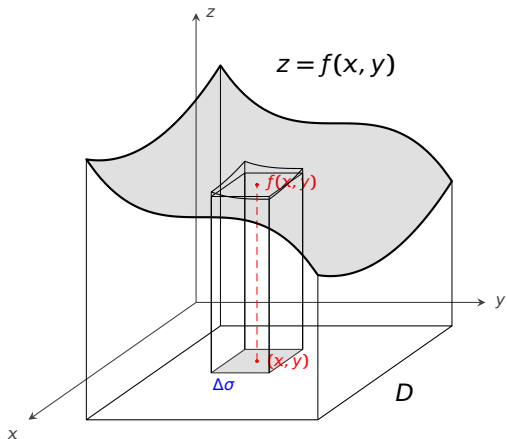
$$V = \iint_D f(x, y) d\sigma$$



# 曲顶柱体体积

曲顶柱体的体积：

$$V = \iint_D f(x, y) d\sigma$$

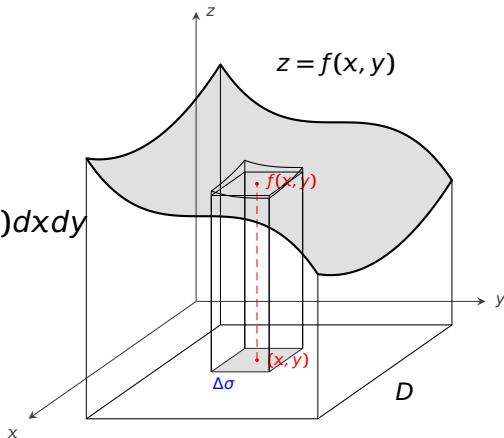




# 曲顶柱体体积

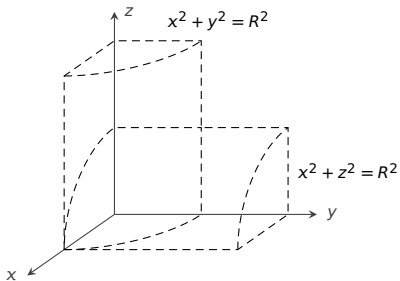
曲顶柱体的体积：

$$V = \iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(x, y) dx dy$$

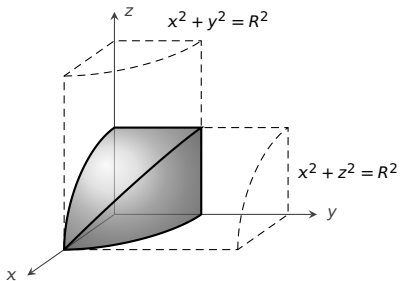


**例** 求两个底圆半径均为  $R$  的直交圆柱面所围成的立体体积。

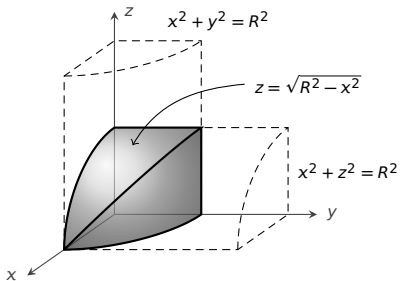
例 求两个底圆半径均为  $R$  的直交圆柱面所围成的立体体积。



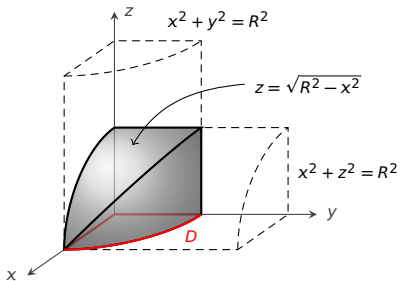
例 求两个底圆半径均为  $R$  的直交圆柱面所围成的立体体积。



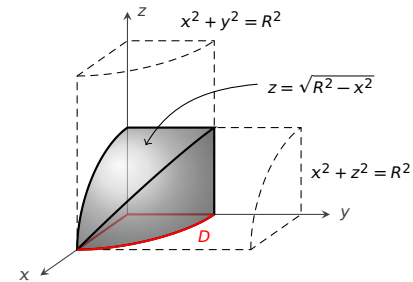
**例** 求两个底圆半径均为  $R$  的直交圆柱面所围成的立体体积。



例 求两个底圆半径均为  $R$  的直交圆柱面所围成的立体体积。



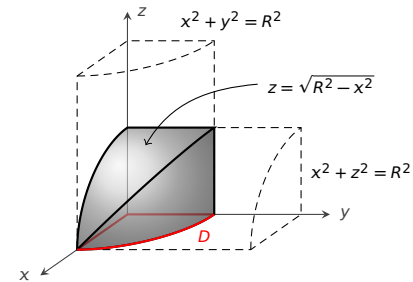
**例** 求两个底圆半径均为  $R$  的直交圆柱面所围成的立体体积。



**解**

$$\iint_D \sqrt{R^2 - x^2} dx dy$$

例 求两个底圆半径均为  $R$  的直交圆柱面所围成的立体体积。

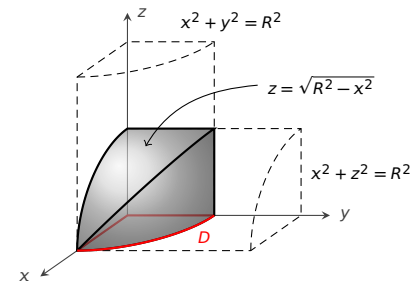


解

$$V = 8 \iint_D \sqrt{R^2 - x^2} dx dy$$



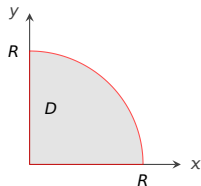
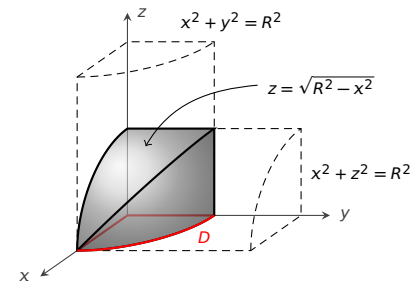
**例** 求两个底圆半径均为  $R$  的直交圆柱面所围成的立体体积。



**解**

$$V = 8 \iint_D \sqrt{R^2 - x^2} dx dy = 8 \int \left[ \int \sqrt{R^2 - x^2} dy \right] dx$$

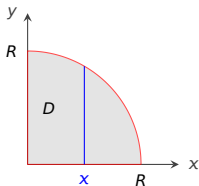
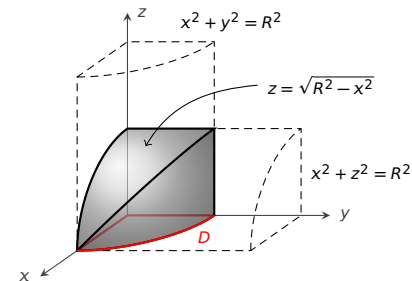
**例** 求两个底圆半径均为  $R$  的直交圆柱面所围成的立体体积。



**解**

$$V = 8 \iint_D \sqrt{R^2 - x^2} dx dy = 8 \int \left[ \int \sqrt{R^2 - x^2} dy \right] dx$$

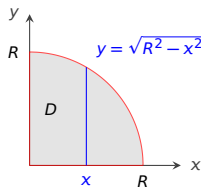
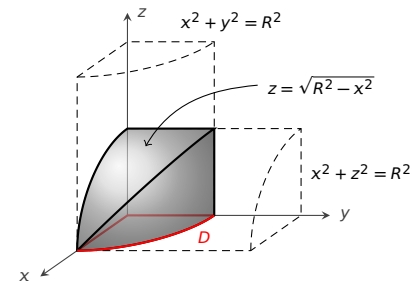
**例** 求两个底圆半径均为  $R$  的直交圆柱面所围成的立体体积。



**解**

$$V = 8 \iint_D \sqrt{R^2 - x^2} dx dy = 8 \int \left[ \int \sqrt{R^2 - x^2} dy \right] dx$$

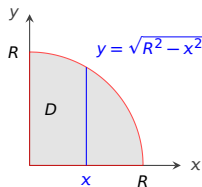
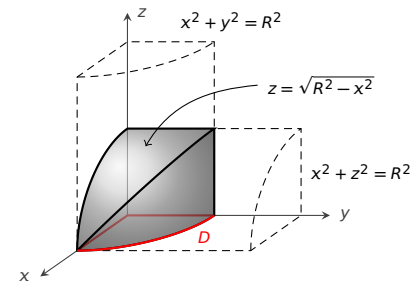
**例** 求两个底圆半径均为  $R$  的直交圆柱面所围成的立体体积。



**解**

$$V = 8 \iint_D \sqrt{R^2 - x^2} dx dy = 8 \int \left[ \int \sqrt{R^2 - x^2} dy \right] dx$$

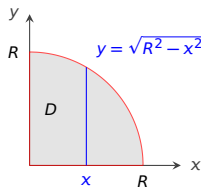
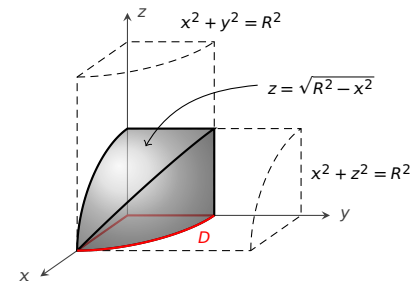
**例** 求两个底圆半径均为  $R$  的直交圆柱面所围成的立体体积。



**解**

$$V = 8 \iint_D \sqrt{R^2 - x^2} dx dy = 8 \int_0^R \left[ \int \sqrt{R^2 - x^2} dy \right] dx$$

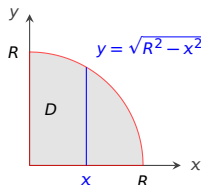
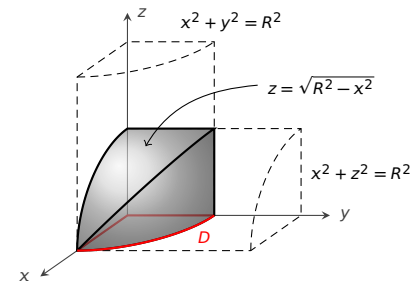
**例** 求两个底圆半径均为  $R$  的直交圆柱面所围成的立体体积。



**解**

$$V = 8 \iint_D \sqrt{R^2 - x^2} dx dy = 8 \int_0^R \left[ \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \sqrt{R^2 - x^2} dy \right] dx$$

**例** 求两个底圆半径均为  $R$  的直交圆柱面所围成的立体体积。

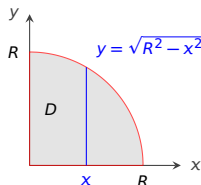
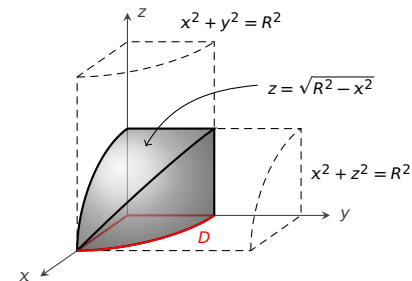


**解**

$$V = 8 \iint_D \sqrt{R^2 - x^2} dx dy = 8 \int_0^R \left[ \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \sqrt{R^2 - x^2} dy \right] dx$$

$$\left[ R^2 - x^2 \right]$$

**例** 求两个底圆半径均为  $R$  的直交圆柱面所围成的立体体积。

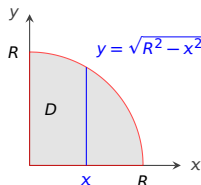
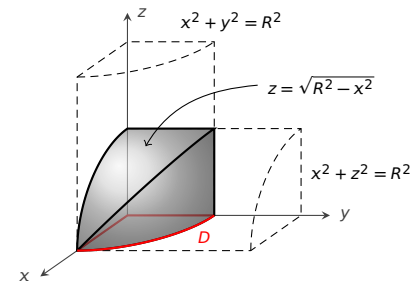


**解**

$$\begin{aligned}
 V &= 8 \iint_D \sqrt{R^2 - x^2} dx dy = 8 \int_0^R \left[ \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \sqrt{R^2 - x^2} dy \right] dx \\
 &= 8 \int_0^R [R^2 - x^2] dx
 \end{aligned}$$



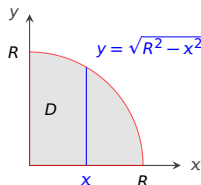
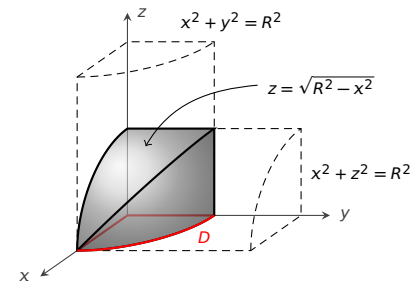
**例** 求两个底圆半径均为  $R$  的直交圆柱面所围成的立体体积。



**解**

$$\begin{aligned}
 V &= 8 \iint_D \sqrt{R^2 - x^2} dx dy = 8 \int_0^R \left[ \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \sqrt{R^2 - x^2} dy \right] dx \\
 &= 8 \int_0^R \left[ R^2 - x^2 \right] dx = 8 \left( R^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^R
 \end{aligned}$$

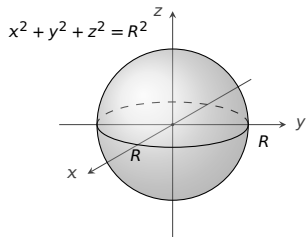
**例** 求两个底圆半径均为  $R$  的直交圆柱面所围成的立体体积。



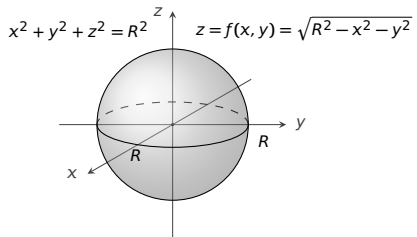
**解**

$$\begin{aligned}
 V &= 8 \iint_D \sqrt{R^2 - x^2} dx dy = 8 \int_0^R \left[ \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \sqrt{R^2 - x^2} dy \right] dx \\
 &= 8 \int_0^R \left[ R^2 - x^2 \right] dx = 8 \left( R^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^R = \frac{16}{3} R^3
 \end{aligned}$$

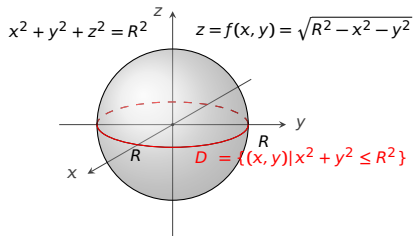
例 求半径为  $R$  的球的体积。



例 求半径为  $R$  的球的体积。



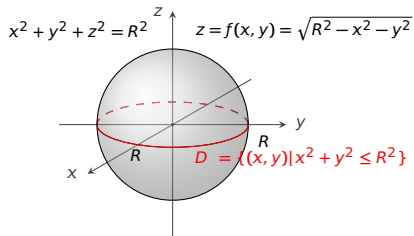
例 求半径为  $R$  的球的体积。



例 求半径为  $R$  的球的体积。

解

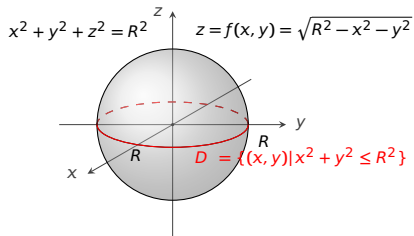
$$\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy$$



例 求半径为  $R$  的球的体积。

解

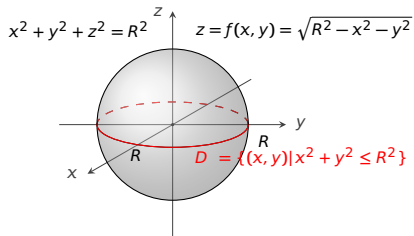
$$V = 2 \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy$$



例 求半径为  $R$  的球的体积。

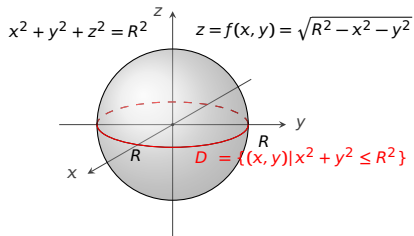
解

$$V = 2 \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy \quad \begin{array}{l} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{array}$$





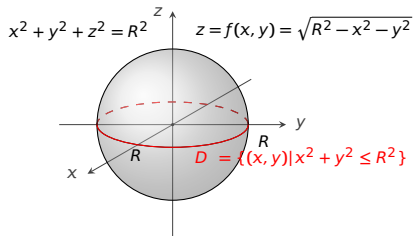
例 求半径为  $R$  的球的体积。



解

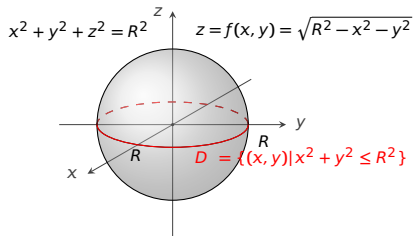
$$V = 2 \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} 2 \iint_D \sqrt{R^2 - \rho^2}$$

例 求半径为  $R$  的球的体积。



解

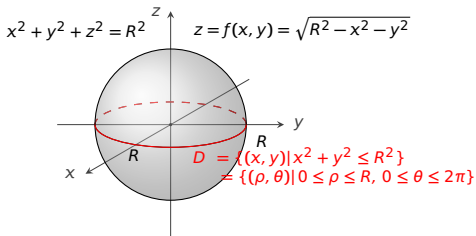
$$V = 2 \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} 2 \iint_D \sqrt{R^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta$$



**例** 求半径为  $R$  的球的体积。

**解**

$$\begin{aligned}
 V &= 2 \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} 2 \iint_D \sqrt{R^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta \\
 &= 2 \int \left[ \int \sqrt{R^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta
 \end{aligned}$$

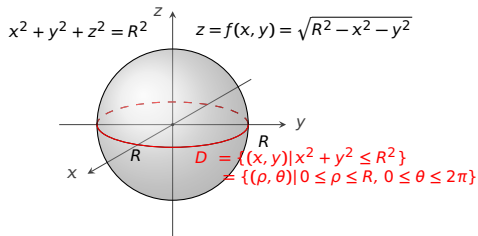


**例** 求半径为  $R$  的球的体积。

**解**

$$\begin{aligned}
 V &= 2 \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} 2 \iint_D \sqrt{R^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta \\
 &= 2 \int \left[ \int \sqrt{R^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta
 \end{aligned}$$

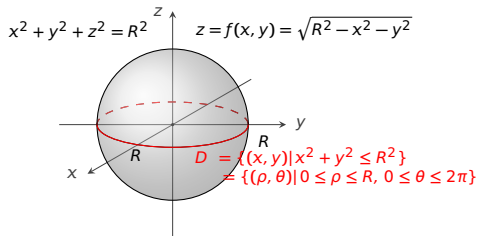
例 求半径为  $R$  的球的体积。



解

$$\begin{aligned} V &= 2 \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} 2 \iint_D \sqrt{R^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \left[ \int \sqrt{R^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta \end{aligned}$$

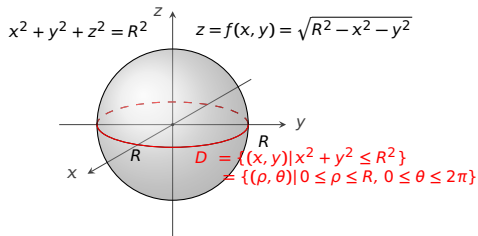
例 求半径为  $R$  的球的体积。



解

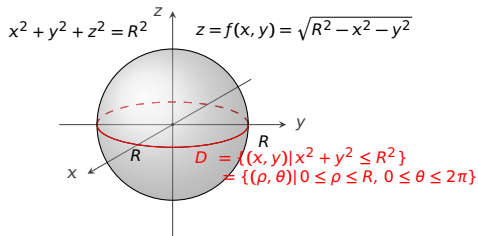
$$\begin{aligned} V &= 2 \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} 2 \iint_D \sqrt{R^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^R \sqrt{R^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta \end{aligned}$$

例 求半径为  $R$  的球的体积。



解

$$\begin{aligned} V &= 2 \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} 2 \iint_D \sqrt{R^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^R \sqrt{R^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta = 4\pi \int_0^R \sqrt{R^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho \end{aligned}$$

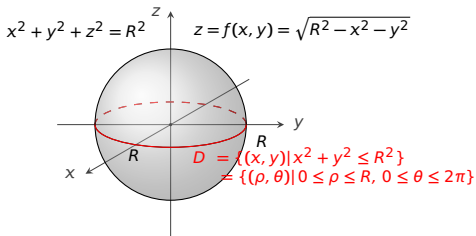


**例** 求半径为  $R$  的球的体积。

**解**

$$\begin{aligned}
 V &= 2 \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} 2 \iint_D \sqrt{R^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta \\
 &= 2 \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^R \sqrt{R^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta = 4\pi \int_0^R \sqrt{R^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho \\
 &\quad \underline{\underline{u=R^2-\rho^2}}
 \end{aligned}$$

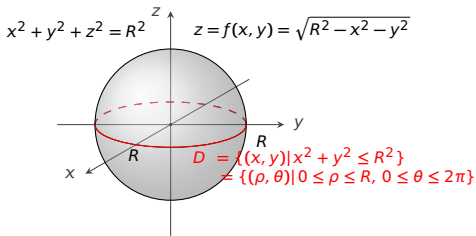




**例** 求半径为  $R$  的球的体积。

**解**

$$\begin{aligned}
 V &= 2 \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} 2 \iint_D \sqrt{R^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta \\
 &= 2 \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^R \sqrt{R^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta = 4\pi \int_0^R \sqrt{R^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho \\
 &\stackrel{u=R^2-\rho^2}{=} 4\pi \int u^{\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du
 \end{aligned}$$

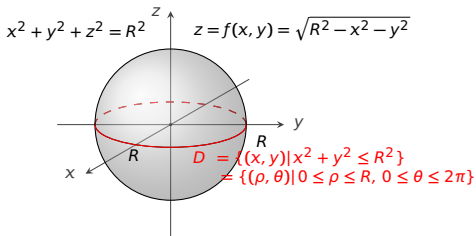


**例** 求半径为  $R$  的球的体积。

**解**

$$\begin{aligned}
 V &= 2 \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} 2 \iint_D \sqrt{R^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta \\
 &= 2 \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^R \sqrt{R^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta = 4\pi \int_0^R \sqrt{R^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho \\
 &\stackrel{u=R^2-\rho^2}{=} 4\pi \int_{R^2}^0 u^{\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du
 \end{aligned}$$

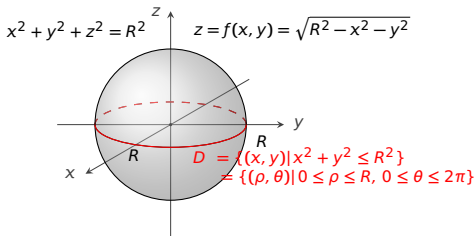
例 求半径为  $R$  的球的体积。



解

$$\begin{aligned} V &= 2 \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} 2 \iint_D \sqrt{R^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^R \sqrt{R^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta = 4\pi \int_0^R \sqrt{R^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho \\ &\stackrel{u=R^2-\rho^2}{=} 4\pi \int_{R^2}^0 u^{\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du = 2\pi \int_0^{R^2} u^{\frac{1}{2}} du \end{aligned}$$

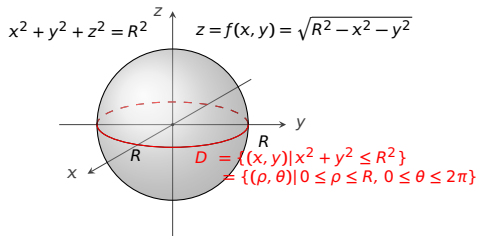
**例** 求半径为  $R$  的球的体积。



**解**

$$\begin{aligned}
 V &= 2 \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} 2 \iint_D \sqrt{R^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta \\
 &= 2 \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^R \sqrt{R^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta = 4\pi \int_0^R \sqrt{R^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho \\
 &\stackrel{u=R^2-\rho^2}{=} 4\pi \int_{R^2}^0 u^{\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du = 2\pi \int_0^{R^2} u^{\frac{1}{2}} du = 2\pi \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{R^2}
 \end{aligned}$$

例 求半径为  $R$  的球的体积。

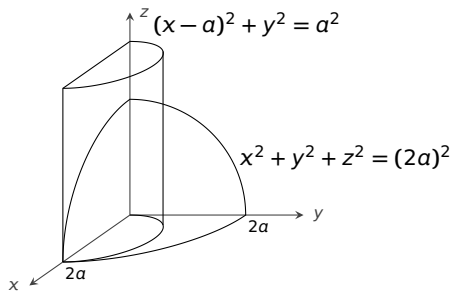


解

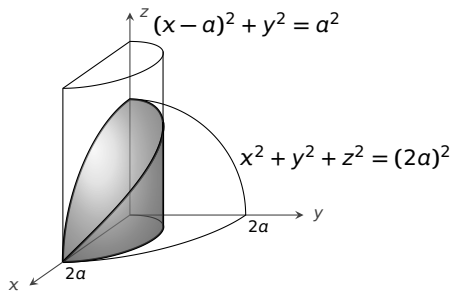
$$\begin{aligned} V &= 2 \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} 2 \iint_D \sqrt{R^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^R \sqrt{R^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta = 4\pi \int_0^R \sqrt{R^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho \\ &\stackrel{u=R^2-\rho^2}{=} 4\pi \int_{R^2}^0 u^{\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du = 2\pi \int_0^{R^2} u^{\frac{1}{2}} du = 2\pi \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{R^2} = \frac{4}{3} \pi R^3 \end{aligned}$$

例 求球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq (2a)^2$  被圆柱  $(x-a)^2 + y^2 = a^2$  ( $a > 0$ ) 所截得的立体的体积。

**例** 求球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq (2a)^2$  被圆柱  $(x-a)^2 + y^2 = a^2$  ( $a > 0$ ) 所截得的立体的体积。

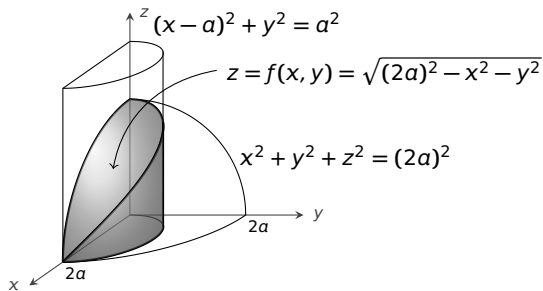


**例** 求球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq (2a)^2$  被圆柱  $(x-a)^2 + y^2 = a^2$  ( $a > 0$ ) 所截得的立体的体积。

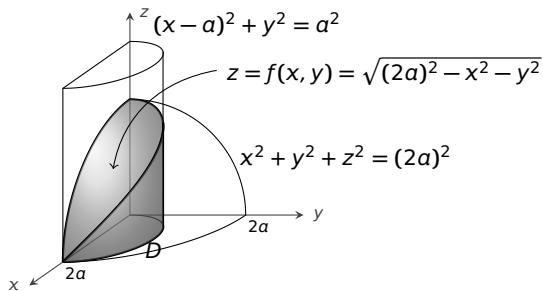




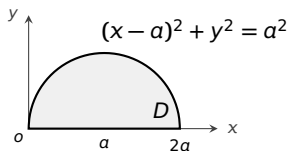
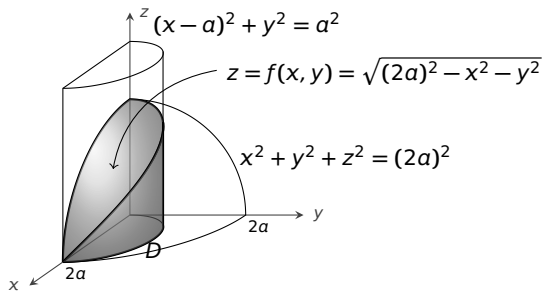
**例** 求球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq (2a)^2$  被圆柱  $(x-a)^2 + y^2 = a^2$  ( $a > 0$ ) 所截得的立体的体积。



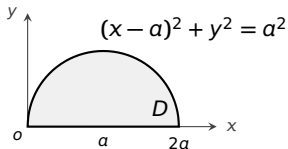
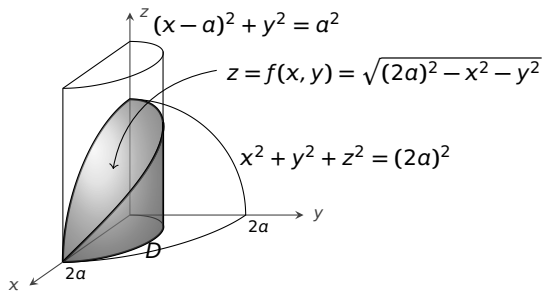
**例** 求球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq (2a)^2$  被圆柱  $(x-a)^2 + y^2 = a^2$  ( $a > 0$ ) 所截得的立体的体积。



**例** 求球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq (2a)^2$  被圆柱  $(x-a)^2 + y^2 = a^2$  ( $a > 0$ ) 所截得的立体的体积。



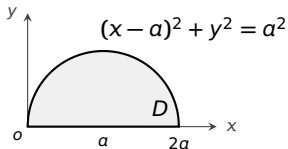
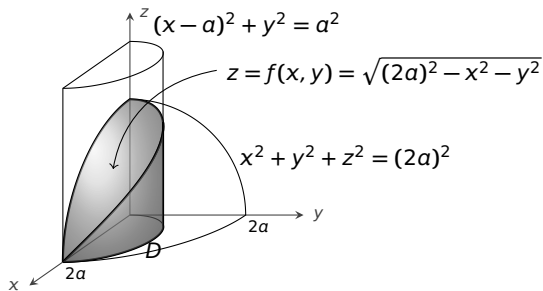
**例** 求球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq (2a)^2$  被圆柱  $(x-a)^2 + y^2 = a^2$  ( $a > 0$ ) 所截得的立体的体积。



**解**

$$\iint_D \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2} dx dy$$

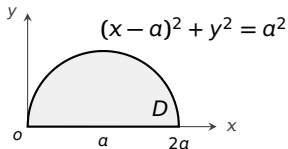
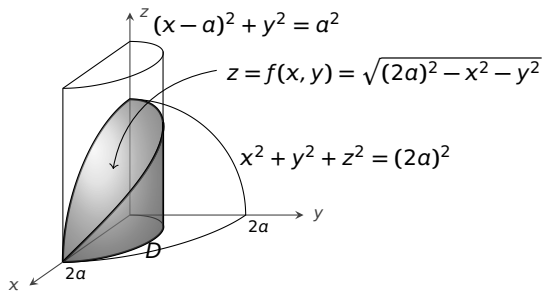
**例** 求球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq (2a)^2$  被圆柱  $(x-a)^2 + y^2 = a^2$  ( $a > 0$ ) 所截得的立体的体积。



**解**

$$V = 4 \iint_D \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2} dx dy$$

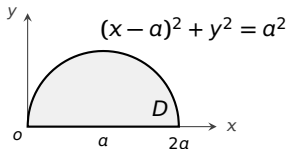
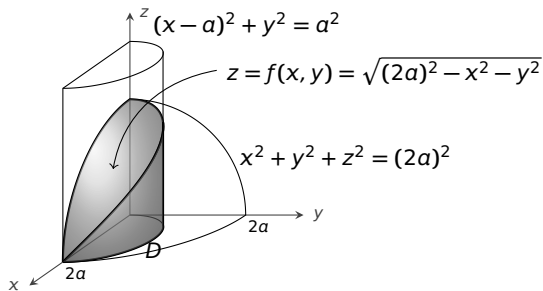
**例** 求球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq (2a)^2$  被圆柱  $(x-a)^2 + y^2 = a^2$  ( $a > 0$ ) 所截得的立体的体积。



**解**

$$V = 4 \iint_D \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2} dx dy \quad \begin{matrix} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{matrix}$$

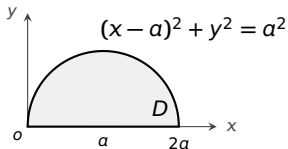
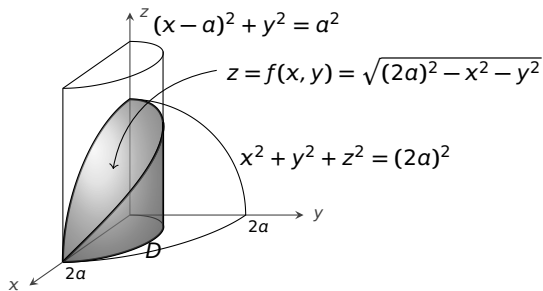
**例** 求球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq (2a)^2$  被圆柱  $(x-a)^2 + y^2 = a^2$  ( $a > 0$ ) 所截得的立体的体积。



**解**

$$V = 4 \iint_D \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2} dx dy \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} 4 \iint_D \sqrt{4a^2 - \rho^2}$$

**例** 求球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq (2a)^2$  被圆柱  $(x-a)^2 + y^2 = a^2$  ( $a > 0$ ) 所截得的立体的体积。

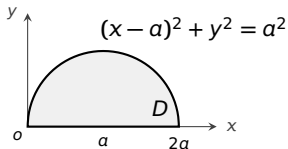
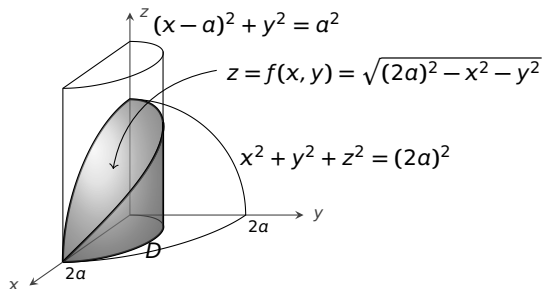


**解**

$$V = 4 \iint_D \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2} dx dy \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} 4 \iint_D \sqrt{4a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta$$



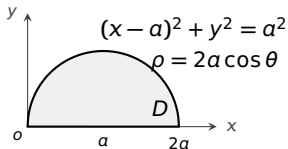
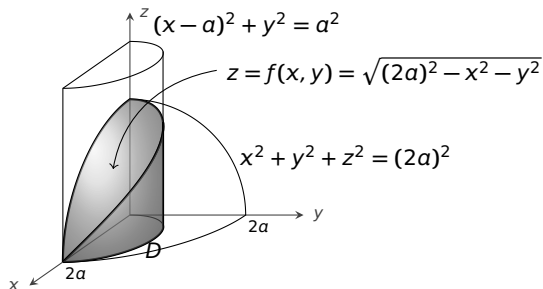
**例** 求球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq (2a)^2$  被圆柱  $(x-a)^2 + y^2 = a^2$  ( $a > 0$ ) 所截得的立体的体积。



**解**

$$\begin{aligned}
 V &= 4 \iint_D \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2} dx dy \xrightarrow[y=\rho \sin \theta]{x=\rho \cos \theta} 4 \iint_D \sqrt{4a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta \\
 &= 4 \int \left[ \int \sqrt{4a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta
 \end{aligned}$$

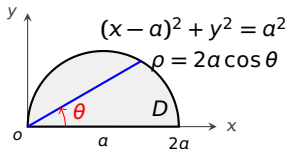
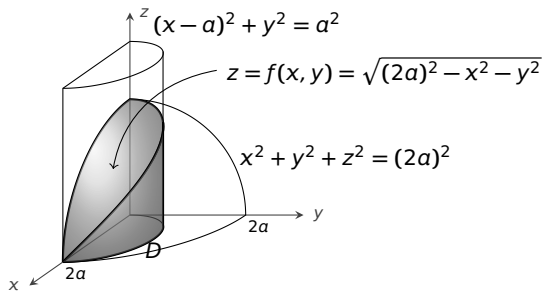
**例** 求球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq (2a)^2$  被圆柱  $(x-a)^2 + y^2 = a^2$  ( $a > 0$ ) 所截得的立体的体积。



**解**

$$\begin{aligned}
 V &= 4 \iint_D \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2} dx dy \xrightarrow[y=\rho \sin \theta]{x=\rho \cos \theta} 4 \iint_D \sqrt{4a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta \\
 &= 4 \int \left[ \int \sqrt{4a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta
 \end{aligned}$$

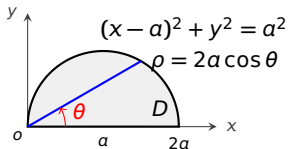
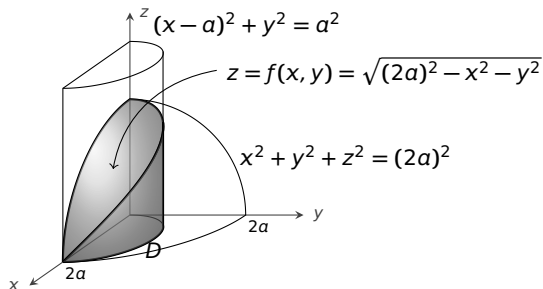
**例** 求球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq (2a)^2$  被圆柱  $(x-a)^2 + y^2 = a^2$  ( $a > 0$ ) 所截得的立体的体积。



**解**

$$\begin{aligned}
 V &= 4 \iint_D \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2} dx dy \xrightarrow[y=\rho \sin \theta]{x=\rho \cos \theta} 4 \iint_D \sqrt{4a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta \\
 &= 4 \int \left[ \int \sqrt{4a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta
 \end{aligned}$$

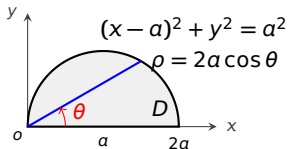
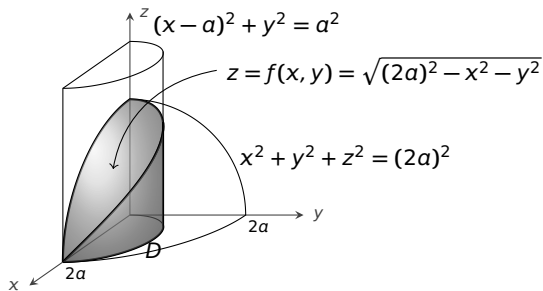
**例** 求球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq (2a)^2$  被圆柱  $(x-a)^2 + y^2 = a^2$  ( $a > 0$ ) 所截得的立体的体积。



**解**

$$\begin{aligned}
 V &= 4 \iint_D \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2} dx dy \xrightarrow[y=\rho \sin \theta]{x=\rho \cos \theta} 4 \iint_D \sqrt{4a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta \\
 &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int \sqrt{4a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta
 \end{aligned}$$

**例** 求球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq (2a)^2$  被圆柱  $(x-a)^2 + y^2 = a^2$  ( $a > 0$ ) 所截得的立体的体积。



**解**

$$\begin{aligned}
 V &= 4 \iint_D \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2} dx dy \xrightarrow[y=\rho \sin \theta]{x=\rho \cos \theta} 4 \iint_D \sqrt{4a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta \\
 &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_0^{2a \cos \theta} \sqrt{4a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta
 \end{aligned}$$

$$V = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_0^{2a \cos \theta} \sqrt{4a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta$$

$$V = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_0^{2a \cos \theta} \sqrt{4a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta$$

$$\underline{\underline{u=4a^2-\rho^2}}$$

$$V = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_0^{2a \cos \theta} \sqrt{4a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta$$

$$\underline{\underline{u=4a^2-\rho^2}} \quad 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_{4a^2}^{4a^2 \sin^2 \theta} u^{\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du \right] d\theta$$



$$\begin{aligned}
 V &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_0^{2a \cos \theta} \sqrt{4a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta \\
 &\quad \underline{\underline{u=4a^2-\rho^2}} \quad 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_{4a^2}^{4a^2 \sin^2 \theta} u^{\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du \right] d\theta \\
 &= \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ u^{\frac{3}{2}} \Big|_{4a^2 \sin^2 \theta}^{4a^2} \right] d\theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_0^{2a \cos \theta} \sqrt{4a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta \\
 &\quad \underline{\underline{u=4a^2-\rho^2}} \quad 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_{4a^2}^{4a^2 \sin^2 \theta} u^{\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du \right] d\theta \\
 &= \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ u^{\frac{3}{2}} \Big|_{4a^2 \sin^2 \theta}^{4a^2} \right] d\theta = \frac{4}{3} \cdot 8a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \theta) d\theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_0^{2a \cos \theta} \sqrt{4a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta \\
 &\quad \underline{\underline{u=4a^2-\rho^2}} \quad 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_{4a^2}^{4a^2 \sin^2 \theta} u^{\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du \right] d\theta \\
 &= \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ u^{\frac{3}{2}} \Big|_{4a^2 \sin^2 \theta}^{4a^2} \right] d\theta = \frac{4}{3} \cdot 8a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \theta) d\theta
 \end{aligned}$$

其中

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d\theta$$

$$\begin{aligned}
 V &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_0^{2a \cos \theta} \sqrt{4a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta \\
 &\quad \underline{\underline{u=4a^2-\rho^2}} \quad 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_{4a^2}^{4a^2 \sin^2 \theta} u^{\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du \right] d\theta \\
 &= \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ u^{\frac{3}{2}} \Big|_{4a^2 \sin^2 \theta}^{4a^2} \right] d\theta = \frac{4}{3} \cdot 8a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \theta) d\theta
 \end{aligned}$$

其中

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cdot \sin \theta d\theta$$

$$\begin{aligned}
 V &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_0^{2a \cos \theta} \sqrt{4a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta \\
 &\quad \underline{\underline{u=4a^2-\rho^2}} \quad 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_{4a^2}^{4a^2 \sin^2 \theta} u^{\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du \right] d\theta \\
 &= \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ u^{\frac{3}{2}} \Big|_{4a^2 \sin^2 \theta}^{4a^2} \right] d\theta = \frac{4}{3} \cdot 8a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \theta) d\theta
 \end{aligned}$$

其中

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cdot \sin \theta d\theta = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 \theta) d \cos \theta$$

$$\begin{aligned}
 V &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_0^{2a \cos \theta} \sqrt{4a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta \\
 &\stackrel{u=4a^2-\rho^2}{=} 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_{4a^2}^{4a^2 \sin^2 \theta} u^{\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du \right] d\theta \\
 &= \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ u^{\frac{3}{2}} \Big|_{4a^2 \sin^2 \theta}^{4a^2} \right] d\theta = \frac{4}{3} \cdot 8a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \theta) d\theta
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cdot \sin \theta d\theta = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 \theta) d\cos \theta \\
 &\stackrel{u=\cos \theta}{=} - \int_1^0 (1 - u^2) du
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_0^{2a \cos \theta} \sqrt{4a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta \\
 &\stackrel{u=4a^2-\rho^2}{=} 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_{4a^2}^{4a^2 \sin^2 \theta} u^{\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du \right] d\theta \\
 &= \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ u^{\frac{3}{2}} \Big|_{4a^2 \sin^2 \theta}^{4a^2} \right] d\theta = \frac{4}{3} \cdot 8a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \theta) d\theta
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cdot \sin \theta d\theta = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 \theta) d\cos \theta \\
 &\stackrel{u=\cos \theta}{=} - \int_1^0 (1 - u^2) du = - \left( u - \frac{1}{3} u^3 \right) \Big|_1^0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_0^{2a \cos \theta} \sqrt{4a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta \\
 &\stackrel{u=4a^2-\rho^2}{=} 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_{4a^2}^{4a^2 \sin^2 \theta} u^{\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du \right] d\theta \\
 &= \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ u^{\frac{3}{2}} \Big|_{4a^2 \sin^2 \theta}^{4a^2} \right] d\theta = \frac{4}{3} \cdot 8a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \theta) d\theta
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cdot \sin \theta d\theta = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 \theta) d\cos \theta \\
 &\stackrel{u=\cos \theta}{=} - \int_1^0 (1 - u^2) du = - \left( u - \frac{1}{3} u^3 \right) \Big|_1^0 = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 V &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_0^{2a \cos \theta} \sqrt{4a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta \\
 &\stackrel{u=4a^2-\rho^2}{=} 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_{4a^2}^{4a^2 \sin^2 \theta} u^{\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du \right] d\theta \\
 &= \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ u^{\frac{3}{2}} \Big|_{4a^2 \sin^2 \theta}^{4a^2} \right] d\theta = \frac{4}{3} \cdot 8a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \theta) d\theta
 \end{aligned}$$

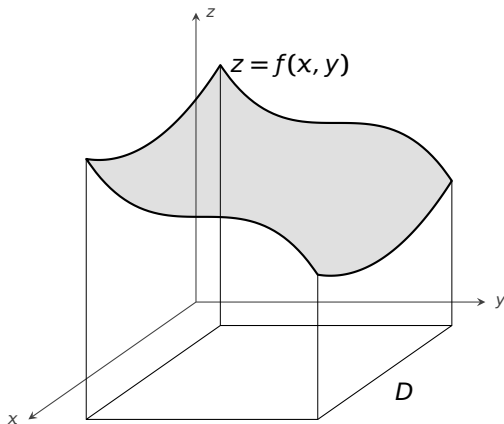
其中

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cdot \sin \theta d\theta = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 \theta) d\cos \theta \\
 &\stackrel{u=\cos \theta}{=} - \int_1^0 (1 - u^2) du = - \left( u - \frac{1}{3} u^3 \right) \Big|_1^0 = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

$$\text{所以 } V = \frac{32}{3} a^3 \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right]$$

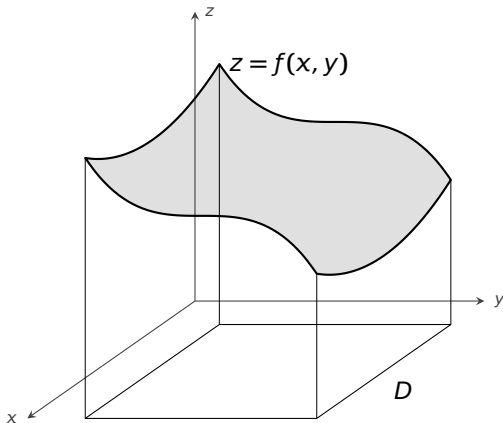
# 曲面的面积

$$A =$$



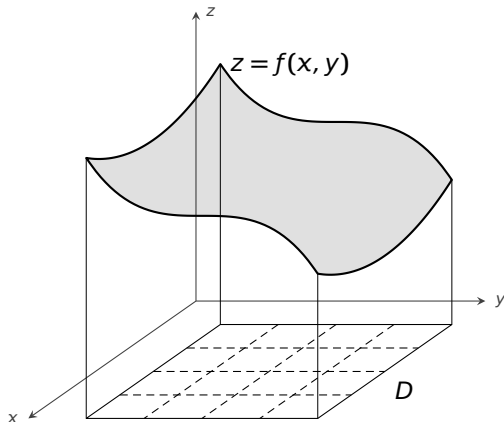
# 曲面的面积

$$A = \iint_D \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2} dx dy$$



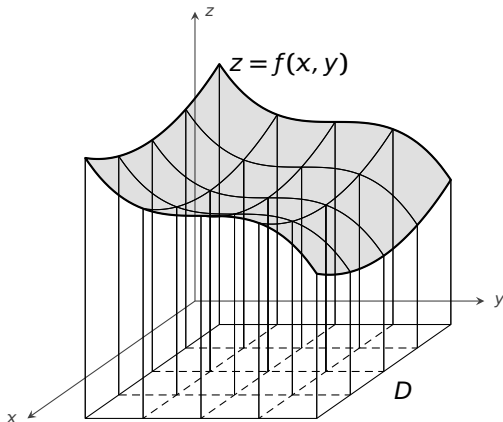
# 曲面的面积

$$A = \iint_D \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2} dx dy$$



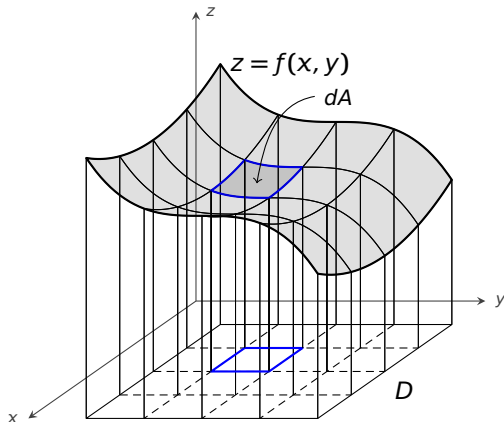
# 曲面的面积

$$A = \iint_D \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2} dx dy$$



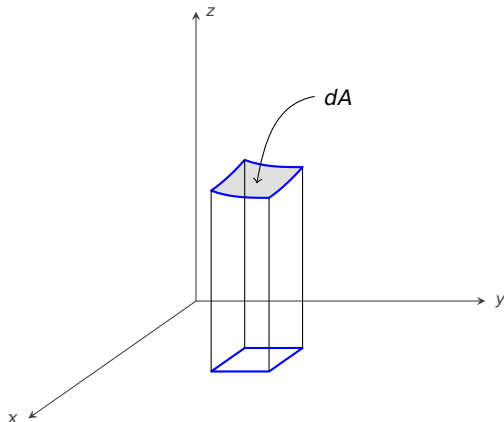
# 曲面的面积

$$A = \iint_D \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2} dx dy$$



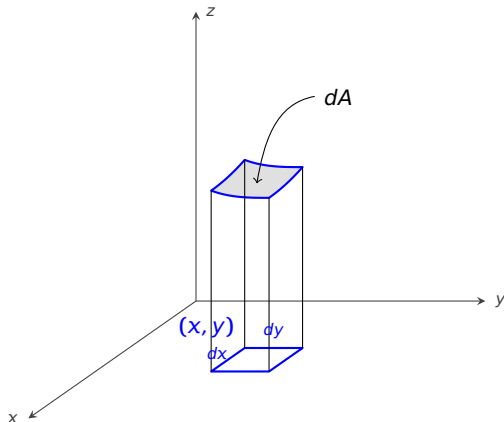
# 曲面的面积

$$A = \iint_D \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2} dx dy$$



# 曲面的面积

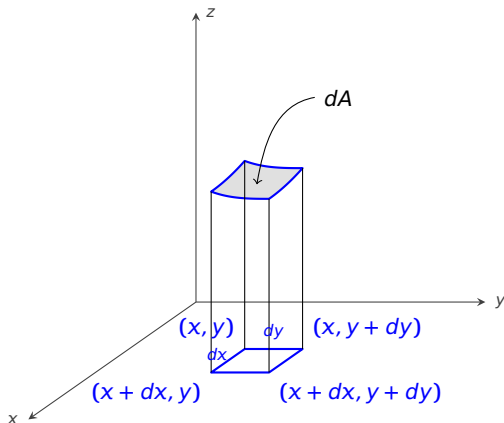
$$A = \iint_D \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2} dx dy$$





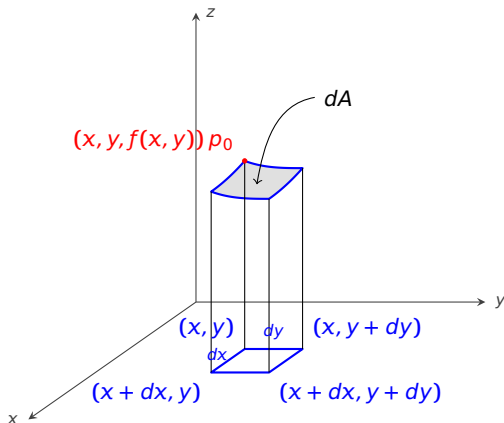
# 曲面的面积

$$A = \iint_D \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2} dx dy$$



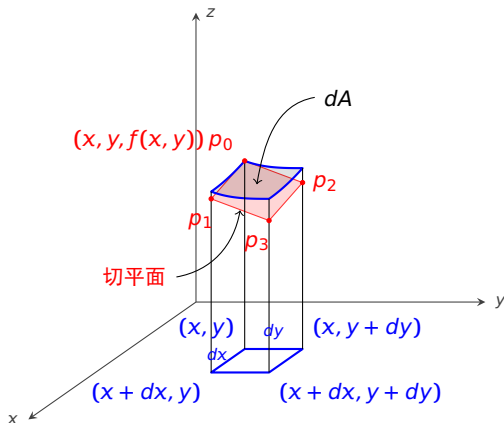
# 曲面的面积

$$A = \iint_D \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2} dx dy$$



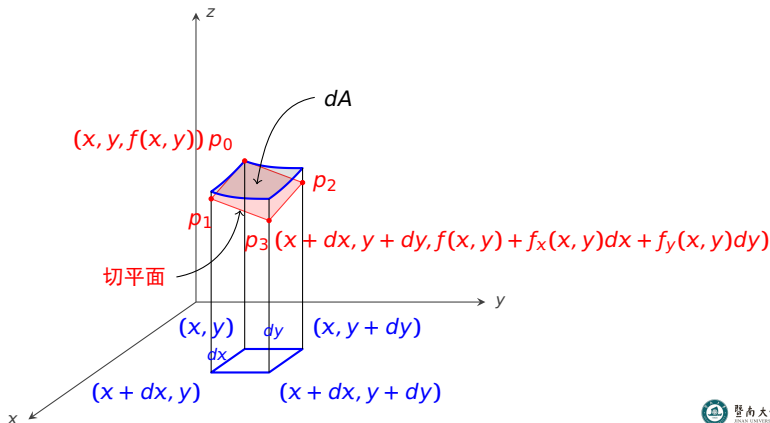
# 曲面的面积

$$A = \iint_D \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2} dx dy$$



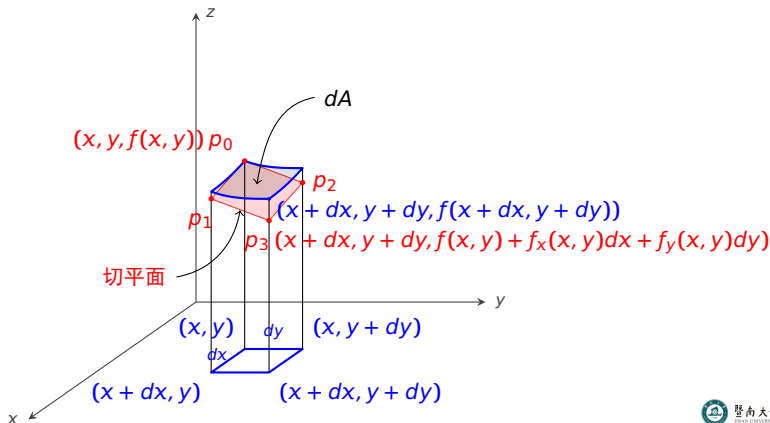
# 曲面的面积

$$A = \iint_D \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2} dx dy$$



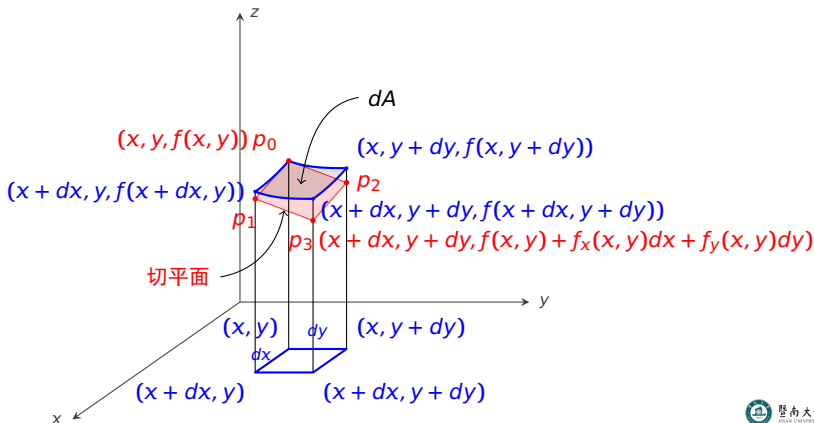
# 曲面的面积

$$A = \iint_D \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2} dx dy$$



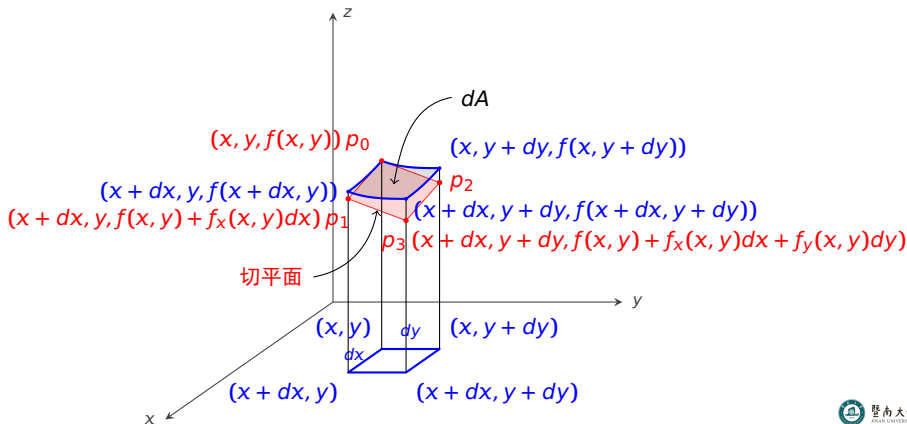
# 曲面的面积

$$A = \iint_D \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2} dx dy$$



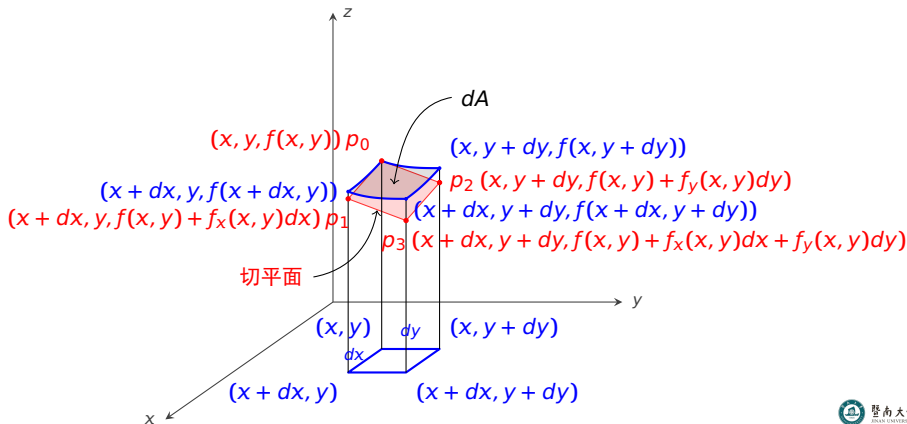
# 曲面的面积

$$A = \iint_D \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2} dx dy$$



# 曲面的面积

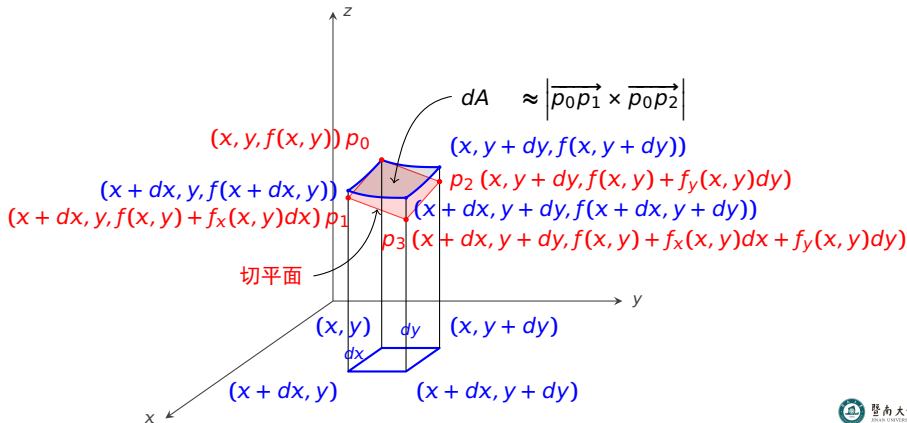
$$A = \iint_D \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2} dx dy$$





# 曲面的面积

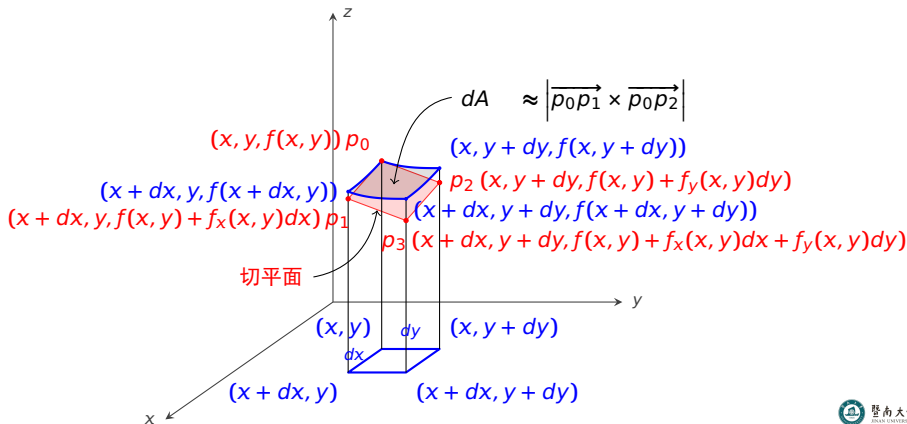
$$A = \iint_D \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2} dx dy$$



# 曲面的面积

$$A = \iint_D \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2} dx dy$$

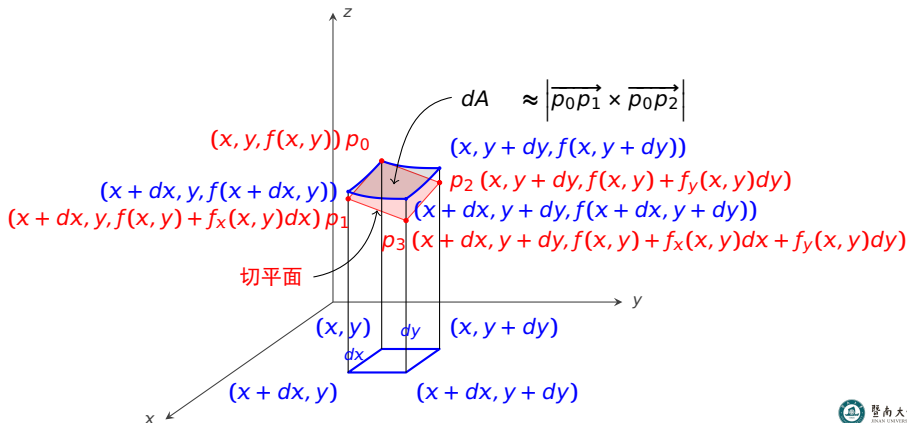
$$\overrightarrow{p_0 p_1} \times \overrightarrow{p_0 p_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$



# 曲面的面积

$$A = \iint_D \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2} dx dy$$

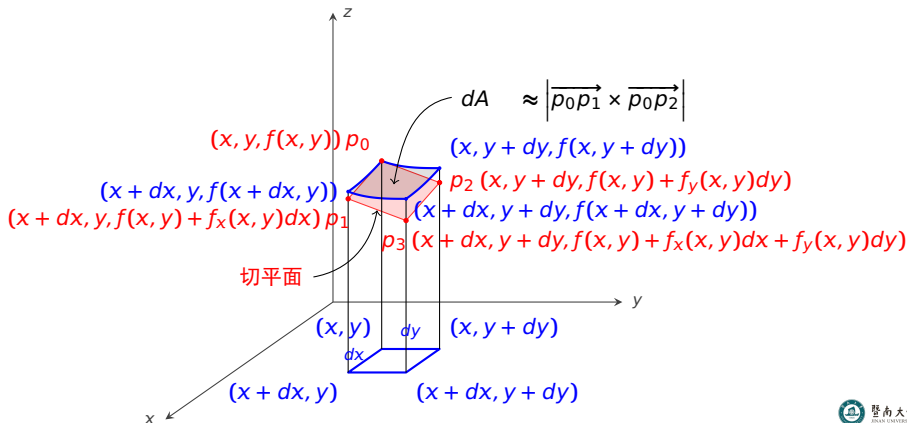
$$\overrightarrow{p_0 p_1} \times \overrightarrow{p_0 p_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ dx & 0 & f_x dx \\ 0 & dy & f_y dy \end{vmatrix}$$



# 曲面的面积

$$A = \iint_D \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2} dx dy$$

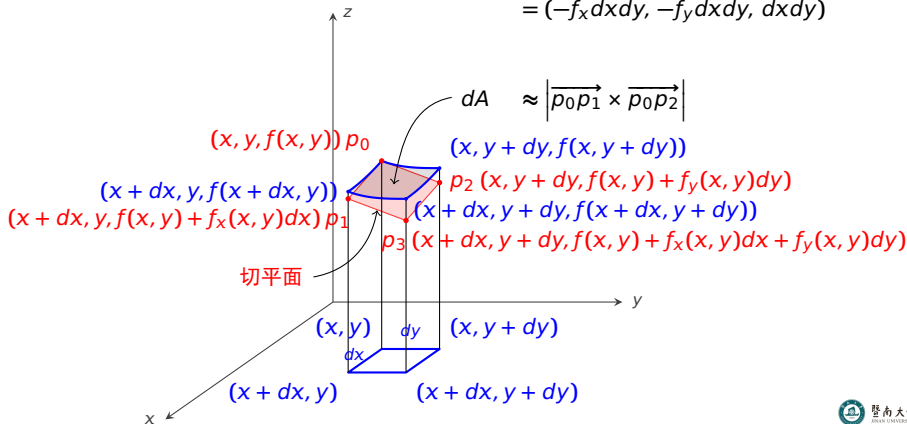
$$\overrightarrow{p_0 p_1} \times \overrightarrow{p_0 p_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ dx & 0 & f_x dx \\ 0 & dy & f_y dy \end{vmatrix}$$



# 曲面的面积

$$A = \iint_D \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2} dx dy$$

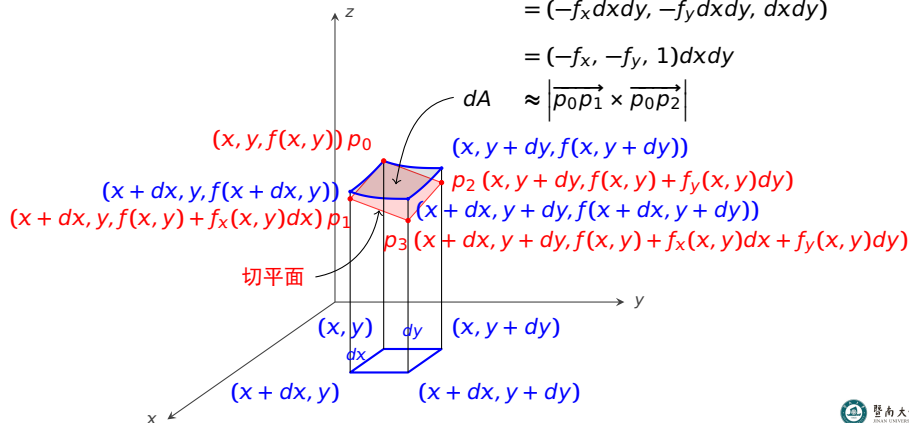
$$\begin{aligned} \overrightarrow{p_0 p_1} \times \overrightarrow{p_0 p_2} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ dx & 0 & f_x dx \\ 0 & dy & f_y dy \end{vmatrix} \\ &= (-f_x dx dy, -f_y dx dy, dx dy) \end{aligned}$$



# 曲面的面积

$$A = \iint_D \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2} dx dy$$

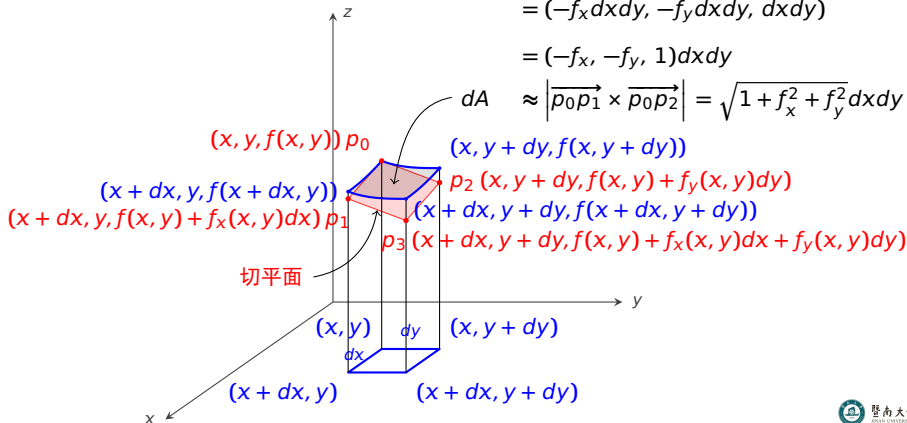
$$\begin{aligned} \overrightarrow{p_0 p_1} \times \overrightarrow{p_0 p_2} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ dx & 0 & f_x dx \\ 0 & dy & f_y dy \end{vmatrix} \\ &= (-f_x dx dy, -f_y dx dy, dx dy) \\ &= (-f_x, -f_y, 1) dx dy \end{aligned}$$



# 曲面的面积

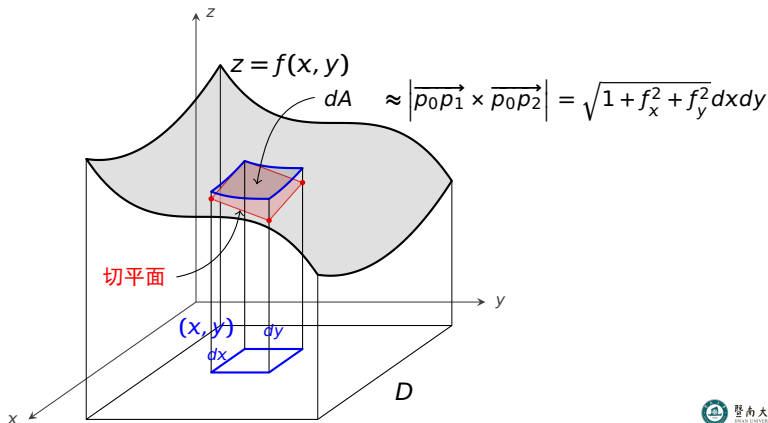
$$A = \iint_D \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2} dx dy$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{p_0 p_1} \times \overrightarrow{p_0 p_2} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ dx & 0 & f_x dx \\ 0 & dy & f_y dy \end{vmatrix} \\ &= (-f_x dx dy, -f_y dx dy, dx dy) \\ &= (-f_x, -f_y, 1) dx dy \end{aligned}$$



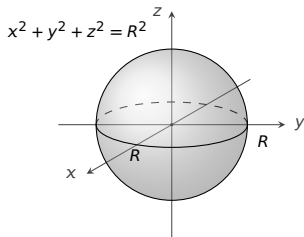
# 曲面的面积

$$A = \iint_D \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2} dx dy$$

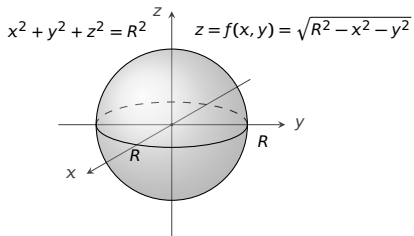




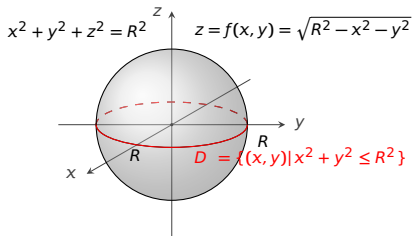
例 求半径为  $R$  的球面的表面积。



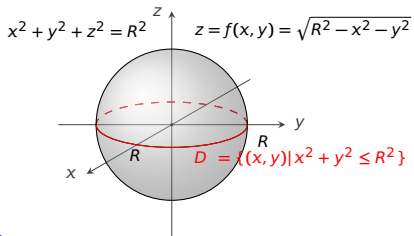
例 求半径为  $R$  的球面的表面积。



例 求半径为  $R$  的球面的表面积。



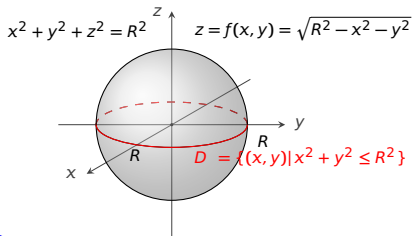
例 求半径为  $R$  的球面的表面积。



解

$$\iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy$$

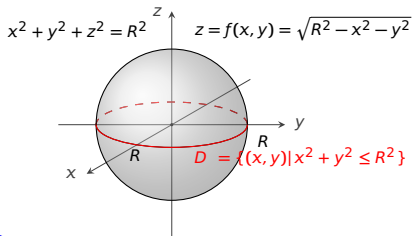
例 求半径为  $R$  的球面的表面积。



解

$$A = 2 \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy$$

**例** 求半径为  $R$  的球面的表面积。

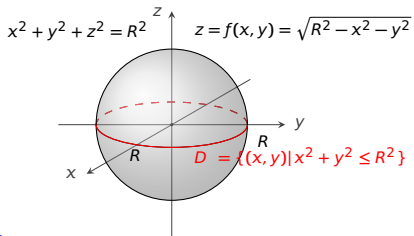


$$f_x = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$
$$f_y = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

**解**

$$A = 2 \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy$$

例 求半径为  $R$  的球面的表面积。

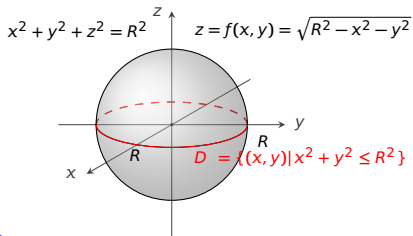


$$\begin{aligned} f_x &= \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \\ f_y &= \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \end{aligned} \Rightarrow 1 + f_x^2 + f_y^2 = \frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}$$

解

$$A = 2 \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy$$

例 求半径为  $R$  的球面的表面积。



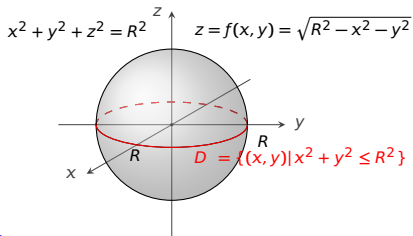
$$\begin{aligned} f_x &= \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \\ f_y &= \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \end{aligned} \Rightarrow 1 + f_x^2 + f_y^2 = \frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}$$

解

$$A = 2 \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy = 2 \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy$$



例 求半径为  $R$  的球面的表面积。



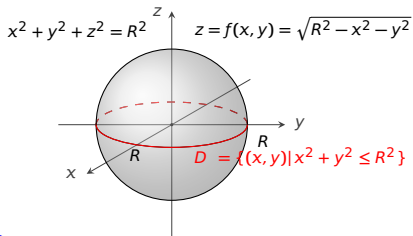
$$\begin{aligned} f_x &= \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \\ f_y &= \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \end{aligned} \Rightarrow 1 + f_x^2 + f_y^2 = \frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}$$

解

$$A = 2 \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy = 2 \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy$$

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta \\ y &= \rho \sin \theta \end{aligned}$$

例 求半径为  $R$  的球面的表面积。



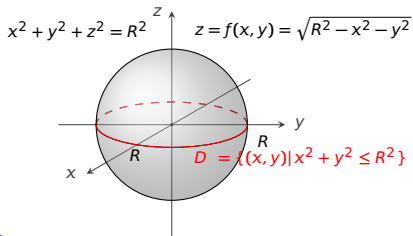
$$\begin{aligned} f_x &= \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \\ f_y &= \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \end{aligned} \Rightarrow 1 + f_x^2 + f_y^2 = \frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}$$

解

$$A = 2 \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy = 2 \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy$$

$$\begin{aligned} \frac{x = \rho \cos \theta}{y = \rho \sin \theta} & 2 \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \end{aligned}$$

例 求半径为  $R$  的球面的表面积。



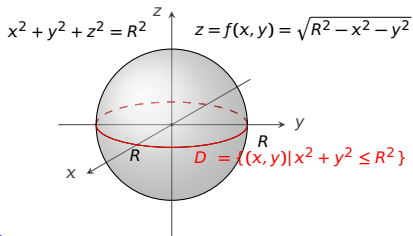
$$\begin{aligned} f_x &= \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \\ f_y &= \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \end{aligned} \Rightarrow 1 + f_x^2 + f_y^2 = \frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}$$

解

$$A = 2 \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy = 2 \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy$$

$$\begin{aligned} \frac{x = \rho \cos \theta}{y = \rho \sin \theta} \quad & 2 \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \cdot \rho d\rho d\theta \end{aligned}$$

例 求半径为  $R$  的球面的表面积。



$$\begin{aligned} f_x &= \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \\ f_y &= \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \end{aligned} \Rightarrow 1 + f_x^2 + f_y^2 = \frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}$$

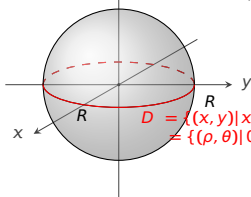
解

$$A = 2 \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy = 2 \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy$$

$$\begin{aligned} \frac{x = \rho \cos \theta}{y = \rho \sin \theta} \quad 2 \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \cdot \rho d\rho d\theta &= 2 \int \left[ \int \frac{R}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \cdot \rho d\rho \right] d\theta \end{aligned}$$

例 求半径为  $R$  的球面的表面积。

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad z = f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$



$$D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2\} \\ = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

$$f_x = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \quad f_y = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \Rightarrow 1 + f_x^2 + f_y^2 = \frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}$$

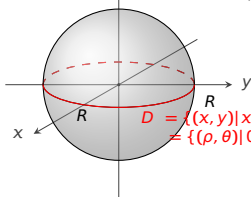
解

$$A = 2 \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy = 2 \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy$$

$$\begin{matrix} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{matrix} \quad 2 \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \cdot \rho d\rho d\theta = 2 \int \left[ \int \frac{R}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \cdot \rho d\rho \right] d\theta$$

例 求半径为  $R$  的球面的表面积。

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad z = f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$



$$D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2\} \\ = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

$$f_x = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \\ f_y = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \Rightarrow 1 + f_x^2 + f_y^2 = \frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}$$

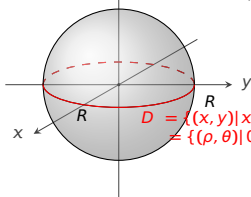
解

$$A = 2 \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy = 2 \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy$$

$$\begin{matrix} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{matrix} \quad 2 \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \cdot \rho d\rho d\theta = 2 \int_0^{2\pi} \left[ \int \frac{R}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \cdot \rho d\rho \right] d\theta$$

例 求半径为  $R$  的球面的表面积。

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad z = f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$



$$D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2\} \\ = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

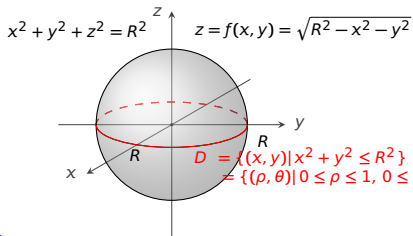
$$f_x = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \quad f_y = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \Rightarrow 1 + f_x^2 + f_y^2 = \frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}$$

解

$$A = 2 \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy = 2 \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy$$

$$\begin{matrix} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{matrix} \quad 2 \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \cdot \rho d\rho d\theta = 2 \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \cdot \rho d\rho \right] d\theta$$

例 求半径为  $R$  的球面的表面积。



$$\begin{aligned} f_x &= \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \\ f_y &= \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \end{aligned} \Rightarrow 1 + f_x^2 + f_y^2 = \frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}$$

解

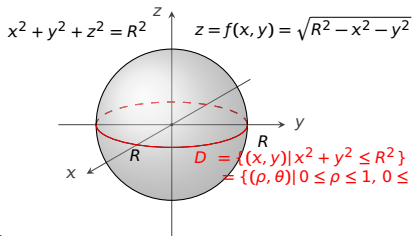
$$A = 2 \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy = 2 \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy$$

$$\begin{aligned} \frac{x=\rho \cos \theta}{y=\rho \sin \theta} \quad & 2 \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \cdot \rho d\rho d\theta = 2 \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \cdot \rho d\rho \right] d\theta \end{aligned}$$

$$= 4\pi R \int_0^R \frac{\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} d\rho$$



例 求半径为  $R$  的球面的表面积。



$$\begin{aligned} f_x &= \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \\ f_y &= \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \end{aligned} \Rightarrow 1 + f_x^2 + f_y^2 = \frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}$$

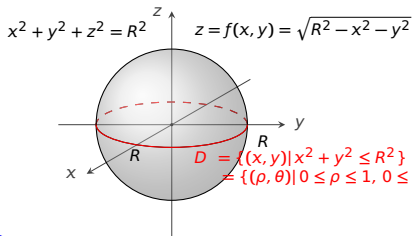
解

$$A = 2 \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy = 2 \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy$$

$$\begin{aligned} \frac{x=\rho \cos \theta}{y=\rho \sin \theta} \quad & 2 \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \cdot \rho d\rho d\theta = 2 \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \cdot \rho d\rho \right] d\theta \end{aligned}$$

$$= 4\pi R \int_0^R \frac{\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} d\rho \stackrel{u=R^2-\rho^2}{=}$$

**例** 求半径为  $R$  的球面的表面积。



$$\begin{aligned} f_x &= \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \\ f_y &= \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \end{aligned} \Rightarrow 1 + f_x^2 + f_y^2 = \frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}$$

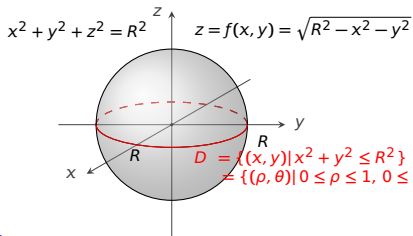
**解**

$$A = 2 \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy = 2 \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy$$

$$\begin{aligned} \frac{x=\rho \cos \theta}{y=\rho \sin \theta} \quad 2 \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \cdot \rho d\rho d\theta &= 2 \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \cdot \rho d\rho \right] d\theta \end{aligned}$$

$$= 4\pi R \int_0^R \frac{\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} d\rho \xrightarrow{u=R^2-\rho^2} 4\pi R \int u^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du$$

**例** 求半径为  $R$  的球面的表面积。



$$\begin{aligned} f_x &= \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \\ f_y &= \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \end{aligned} \Rightarrow 1 + f_x^2 + f_y^2 = \frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}$$

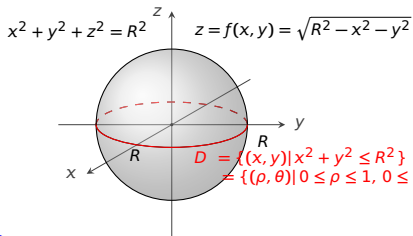
**解**

$$A = 2 \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy = 2 \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy$$

$$\begin{aligned} \frac{x=\rho \cos \theta}{y=\rho \sin \theta} \quad & 2 \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \cdot \rho d\rho d\theta = 2 \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \cdot \rho d\rho \right] d\theta \end{aligned}$$

$$= 4\pi R \int_0^R \frac{\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} d\rho \stackrel{u=R^2-\rho^2}{=} 4\pi R \int_{R^2}^0 u^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du$$

**例** 求半径为  $R$  的球面的表面积。



$$\begin{aligned} f_x &= \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \\ f_y &= \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \end{aligned} \Rightarrow 1 + f_x^2 + f_y^2 = \frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}$$

**解**

$$A = 2 \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy = 2 \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy$$

$$\begin{aligned} \frac{x = \rho \cos \theta}{y = \rho \sin \theta} \quad 2 \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \cdot \rho d\rho d\theta &= 2 \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \cdot \rho d\rho \right] d\theta \end{aligned}$$

$$= 4\pi R \int_0^R \frac{\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} d\rho \xrightarrow{u=R^2-\rho^2} 4\pi R \int_{R^2}^0 u^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du = 4\pi R^2$$