

第 08 周作业解答

练习 1. 假设生产某产品的固定成本是 375 元, 而生产 Q 件产品时的边际成本函数是 $C'(Q) = 0.4Q + 1$ (元/件)。假定产品每件售价 21 元, 且可以全部售出。试问:

1. $C(Q)$ 是多少?
2. 产量多少时可获最大利润? 此时最大利润是多少?

解: 成本函数是

$$\begin{aligned} C(Q) &= \int_0^Q (0.4t + 1)dt + C(0) \\ &= (0.2t^2 + t) \Big|_0^Q + 375 \\ &= 0.2Q^2 + Q + 375 \end{aligned}$$

利润函数是

$$P(Q) = 21Q - C(Q) = -0.2Q^2 + 20Q - 375$$

这是“开口向下”的二次函数, 有唯一的最大值点, 且恰好为驻点:

$$P'(Q) = -0.4Q + 20 = 0 \implies Q = 50$$

所以当生产 50 件时收益最大化, 为 $P(50) = 125$ (元)。

- 练习 2.**
1. 画出由 $y = x^3$, $x = 2$, $y = 0$ 所围成图形。
 2. 再画出该图形绕 x 轴旋转所产生的旋转体, 并求出旋转体的体积。

解

$$V = \int_0^2 \pi(x^3)^2 dx = \pi \int_0^2 x^6 dx = \pi x^7 \Big|_0^2 = \frac{128}{7} \pi$$

- 练习 3.**
1. 画出由 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) 与 $y = 0$ 所围成图形。
 2. 再画出该图形绕 x 轴旋转所产生的旋转体, 并求出旋转体的体积。

解

$$V = \int_0^{\pi/2} \pi \sin^2 x dx = \pi \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} 1 - \cos 2x dx = \frac{\pi}{2} (x - \frac{1}{2} \sin 2x) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

练习 4. 计算广义积分 $\int_0^\infty e^{-2x} dx$

解

$$\int_0^\infty e^{-2x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-2x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} -\frac{1}{2} e^{-2x} \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} -\frac{1}{2} (e^{-2b} - 1) = \frac{1}{2}.$$

练习 5. 求数 p 的范围, 使得广义积分 $\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$ 收敛, 并问此时广义积分的值是多少?

解因为

$$\int \frac{1}{x^p} dx = \int x^{-p} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-p} x^{1-p} + C & p \neq 1 \\ \ln|x| + C & p = 1 \end{cases}$$

所以

- 当 $p > 1$ 时

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left. \frac{1}{1-p} x^{1-p} \right|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{1-p} (b^{1-p} - 1) = \frac{1}{p-1}$$

此时广义积分收敛

- 当 $p = 1$ 时

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^1} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln|x| \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln b - \ln 1) = \infty$$

此时广义积分发散

- 当 $p < 1$ 时

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left. \frac{1}{1-p} x^{1-p} \right|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{1-p} (b^{1-p} - 1) = \infty$$

此时广义积分收敛。

练习 6. 计算 $\frac{\Gamma(3)\Gamma(3.2)}{\Gamma(1.2)}$

解

$$\frac{\Gamma(3)\Gamma(3.2)}{\Gamma(1.2)} = 2! \cdot \frac{\Gamma(3.2)}{\Gamma(1.2)} = 2 \cdot \frac{2.2 \times \Gamma(2.2)}{\Gamma(1.2)} = 2 \cdot \frac{2.2 \times 1.2 \times \Gamma(1.2)}{\Gamma(1.2)} = 5.28$$

练习 7. 求 $\int_0^\infty \sqrt{x^3} e^{-x} dx$

解

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \sqrt{x^3} e^{-x} dx &= \int_0^\infty x^{\frac{3}{2}} e^{-x} dx = \int_0^\infty x^{\frac{5}{2}-1} e^{-x} dx \\ &= \Gamma(2.5) = 1.5 \times \Gamma(1.5) = 1.5 \times 0.5 \times \Gamma(0.5) = \frac{3}{4} \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$