

第 14 周作业解答

练习 1. 利用逐项求导或逐项积分, 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2(n-1)}$ 的和函数。

解 (1) 1. 先求收敛域。直接计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{4(n+1)+1}}{4(n+1)+1}}{\frac{x^{4n+1}}{4n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+1}{4n+5} \cdot x^4 = x^4$$

所以当 $|x| < 1$ 时收敛; 当 $|x| > 1$ 时发散。收敛区间是 $(-1, 1)$ 。

讨论 $x = \pm 1$ 时的敛散性。

当 $x = 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+1}$, 利用比较审敛法的极限形式, 与发散调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 作比较, 可知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+1}$ 发散, 所以 $x = 1$ 是发散点;

当 $x = -1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{4n+1} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+1}$, 也是发散, 所以 $x = -1$ 是发散点;

结论: 收敛域是 $(-1, 1)$ 。

2. 设

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}, \quad x \in (-1, 1).$$

在任意 $x \in (-1, 1)$ 处, 逐项求导可得

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^{4n+1}}{4n+1} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{4n} = x^4 + x^8 + x^{12} + \cdots + x^{4n} + \cdots = \frac{1}{1-x^4} - 1.$$

注意

$$\frac{1}{1-x^4} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1+x^2} \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right) + \frac{1}{1+x^2} \right] = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-x} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2}.$$

所以

$$\begin{aligned} S(x) &= \int \left(\frac{1}{1-x^4} - 1 \right) dx = \int \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-x} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} - 1 \right) dx \\ &= \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \arctan x - x + C. \end{aligned}$$

显然 $S(0) = 0$, 所以 $C = 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \arctan x - x, \quad x \in (-1, 1).$$

(2) 先求收敛域。直接计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{2(n+1)-1}{2^{n+1}} x^{2(n+1-1)}}{\frac{2n-1}{2^n} x^{2(n-1)}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2(2n-1)} \cdot x^2 = \frac{1}{2} x^2 \quad \begin{cases} < 1 & \text{收敛} \\ > 1 & \text{发散} \end{cases}$$

所以当 $|x| < \sqrt{2}$ 时收敛; 当 $|x| > \sqrt{2}$ 时发散。收敛区间是 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 。

讨论 $x = \pm\sqrt{2}$ 时的敛散性。

当 $x = \pm\sqrt{2}$ 时, $\frac{2n-1}{2^n}x^{2(n-1)} = \frac{2n-1}{2} \nrightarrow 0$, 所以 $x = \pm\sqrt{2}$ 是发散点。

结论: 收敛域是 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 。

2. 设

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2(n-1)} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2}x^2 + \frac{5}{2^3}x^4 + \frac{7}{2^4}x^6 + \cdots, \quad x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

在任意 $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 且 $x \neq 0$ 处, 利用逐项求导公式可得

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)x^{2n-2}}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^{2n-1}}{2^n} \right)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2^n} \right)' = \left(\frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n} \right)' \\ &= \left\{ \frac{1}{x} \left[\frac{x^2}{2} + \left(\frac{x^2}{2} \right)^2 + \left(\frac{x^2}{2} \right)^3 + \left(\frac{x^2}{2} \right)^4 + \cdots + \left(\frac{x^2}{2} \right)^n + \cdots \right] \right\}' \\ &= \left\{ \frac{1}{x} \left[\frac{1}{1 - \frac{x^2}{2}} - 1 \right] \right\}' = \left(\frac{2}{x(2-x^2)} - \frac{1}{x} \right)' \\ &= \frac{-2(2-3x^2)}{x^2(2-x^2)^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{(2-x^2)^2 - 2(2-3x^2)}{x^2(2-x^2)^2} = \frac{x^2+2}{(2-x^2)^2}. \end{aligned}$$

另外, 显然 $S(0) = \frac{1}{2}$, 所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2(n-1)} = \frac{x^2+2}{(2-x^2)^2}$$

对任何 $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 都成立。

练习 2. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ 的值。

提示 构造幂级数 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 使得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = S(1)$; 求解 $S(x)$; 利用逐步求导公式, 将 $S(x)$ 化为幂级数 $1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots = e^x$ 。

解 (1) 先求出级数级数 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^{n-1}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = S(1)$ 。

(2) 先求收敛域。直接计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!} x^{n+1-1}}{\frac{n^2}{n!} x^{n-1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2} \cdot |x| = 0$$

所以对任意 $x \in (-\infty, \infty)$, 级数都是收敛, 收敛域是 $(-\infty, \infty)$ 。

(3) 利用逐项求导公式, 可得:

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^n)'}{(n-1)!} = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} \right]' \\ &= \left[x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \right]' = \left[x \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots \right) \right]' \\ &= [xe^x]' = (1+x)e^x. \end{aligned}$$

(4) 所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = S(1) = 2e.$$

练习 3. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

画出 $f(x)$ 的图形, 求解 $f(x)$ 的傅里叶级数, 并且问傅里叶级数在各点 x 的取值.

解略

练习 4. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x < -\pi/2, \\ 1, & -\pi/2 \leq x < 0, \\ 0, & 0 \leq x < \pi, \end{cases}$$

画出 $f(x)$ 的图形, 求解 $f(x)$ 的傅里叶级数, 并且问傅里叶级数在各点 x 的取值. 尝试利用软件画出该傅里叶级数的取 $n \leq 9$ 的部分和, 并和 $f(x)$ 的图形做比较.

解

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{-\pi/2} -\cos nxdx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^0 \cos nxdx \\ &= \frac{1}{n\pi} \left[-\sin n\pi \Big|_{-\pi}^{-\pi/2} + \sin n\pi \Big|_{-\pi/2}^0 \right] = \frac{2}{n\pi} \sin \frac{\pi}{2} n \\ &= \begin{cases} \frac{2}{n\pi}, & n = 1, 5, 9, 13, \dots \\ -\frac{2}{n\pi}, & n = 3, 7, 11, 15, \dots \\ 0, & n \text{ 为偶数} \end{cases} \end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{-\pi/2} -1 dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^0 1 dx = 0,$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{-\pi/2} -\sin nxdx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^0 \sin nxdx \\ &= \frac{1}{n\pi} \left[\cos n\pi \Big|_{-\pi}^{-\pi/2} - \cos n\pi \Big|_{-\pi/2}^0 \right] = \frac{1}{n\pi} \left[2 \cos \frac{n}{2} \pi - \cos n\pi - 1 \right] \\ &= \begin{cases} -\frac{4}{n\pi}, & n = 2, 6, 10, 14, \dots \\ 0, & n = 4, 8, 12, 16, \dots \\ 0, & n \text{ 为奇数} \end{cases} \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 的傅里叶级数是

$$\frac{2}{\pi} \left[\cos x - \sin 2x - \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{5} \cos 5x - \frac{1}{3} \sin 6x - \frac{1}{7} \cos 7x + \frac{1}{9} \cos 9x - \frac{1}{5} \sin 10x - \frac{1}{11} \cos 11x + \dots \right]$$