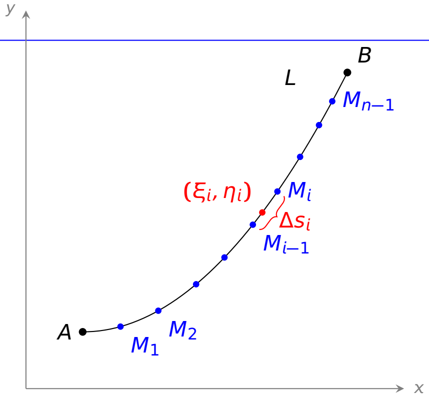
第 11 章 α：对弧长的曲线积分

数学系　　梁卓滨

2017.07 暑期班

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

平面曲线的质量



假设平面曲线 L

- 线密度为 $\mu(x, y)$
- 质量为 m

- 当曲线是均匀时（$\mu =$ 常数），

$$m = \mu \cdot \mathrm{Length}(L)$$

- 当曲线非均匀时（$\mu = \mu(x, y)$ 为 L 上函数），利用微元法可知

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \mu(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i$$

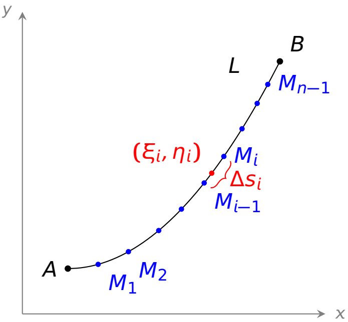
对弧长的曲线积分/第一类曲线积分

对弧长的曲线积分定义 设

- L 是平面上分段光滑曲线，
- $f(x, y)$ 是 L 上的有界函数，

若

- 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i$ 存在，且极限
- 与上述 L 的划分、(ξ_i, η_i) 的选取无关，



则定义

$$\int_L f(x, y)ds = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i$$

称为 $f(x, y)$ 在曲线 L 上的对弧长的曲线积分。ds 称为弧长元素。

注 对弧长的曲线积分的定义式与重积分的类似，故性质也类似

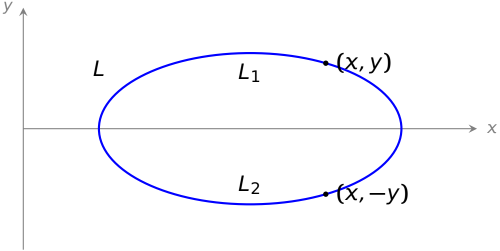
对弧长的曲线积分的性质

- 存在性 若 L 是分段光滑曲线，$f(x, y)$ 在 L 上连续，则
$$\int_L f(x, y)ds$$
存在。
- 线性性 $\int_L(\alpha f + \beta g)ds = \alpha\int_L f ds + \beta\int_L g ds$
- 可加性 $\int_L f(x, y)ds = \int_{L_1} f(x, y)ds + \int_{L_2} f(x, y)ds$
- $\int_L 1 ds = \mathrm{Length}(L)$
- 若 $f(x, y) \le g(x, y)$，则
$$\int_L f(x, y)ds \le \int_L g(x, y)ds$$

积分的对称性

性质 设平面曲线 L 关于 x 轴对称，

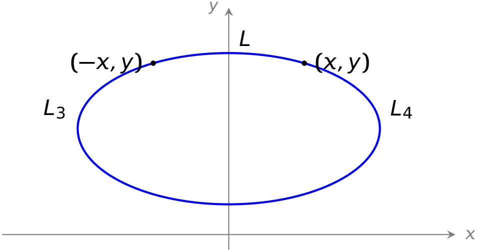
- 若 $f(x,y)$ 关于 y 是奇函数（即：$f(x,-y)=-f(x,y)$），则
$$\int_L f(x,y)ds = 0$$
- 若 $f(x,y)$ 关于 y 是偶函数（即：$f(x,-y)=f(x,y)$），则
$$\int_L f(x,y)ds = 2\int_{L_1} f(x,y)ds = 2\int_{L_2} f(x,y)ds$$



积分的对称性

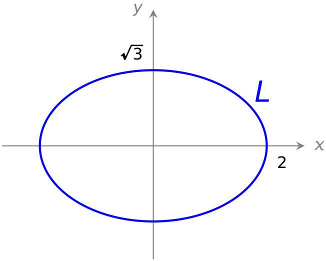
性质 设平面曲线 L 关于 y 轴对称，

- 若 $f(x,y)$ 关于 x 是奇函数（即：$f(-x,y)=-f(x,y)$），则
$$\int_L f(x,y)ds=0$$
- 若 $f(x,y)$ 关于 x 是偶函数（即：$f(-x,y)=f(x,y)$），则
$$\int_L f(x,y)ds=2\int_{L_3} f(x,y)ds=2\int_{L_4} f(x,y)ds$$



例 已知椭圆 $L:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的周长是 a，计算

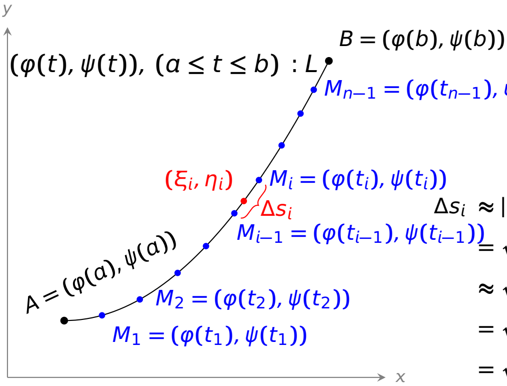
$$\int_L 2xy+3x^2+4y^2 ds$$



解

$$\text{原式}=\int_L 2xyds+\int_L 12\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}\right)ds=0+\int_L 12ds=12a$$

对弧长的曲线积分的计算法



$$
\begin{aligned}
\Delta s_i &\approx |M_{i-1}M_i| \\
&= \sqrt{(\varphi(t_{i-1})-\varphi(t_i))^2+(\psi(t_{i-1})-\psi(t_i))^2} \\
&\approx \sqrt{(\varphi'(t_i)(t_{i-1}-t_i))^2+(\psi'(t_i)(t_{i-1}-t_i))^2} \\
&= \sqrt{\varphi'(t_i)^2+\psi'(t_i)^2}(t_i-t_{i-1}) \\
&= \sqrt{\varphi'(t_i)^2+\psi'(t_i)^2}\Delta t_i
\end{aligned}
$$

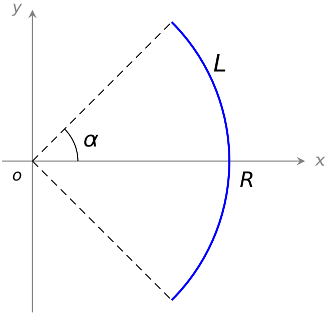
$$
\begin{aligned}
\int_L f(x,y)ds &= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i \\
&= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\varphi(t_i),\psi(t_i))\sqrt{\varphi'(t_i)^2+\psi'(t_i)^2}\Delta t_i \\
&= \int_a^b f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}dt
\end{aligned}
$$

从上述推导可知：

性质 设平面曲线 L 的参数方程为 $x = \varphi(t), y = \psi(t)$，则弧长元素

$$ds = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}dt.$$

例 计算 $\int_L y^2 ds$，其中曲线 L 如右图所示



解 曲线 L 的参数方程可取为：

$$x = R\cos\theta, \quad y = R\sin\theta \qquad (-\alpha \le \theta \le \alpha)$$

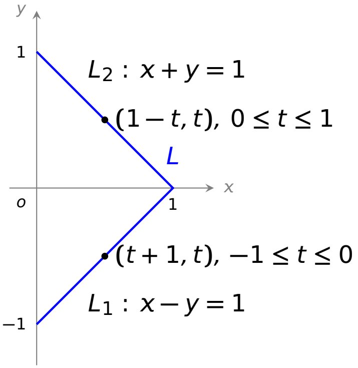
所以

$$\int_L y^2 ds = \int_{-\alpha}^{\alpha} R^2 \sin^2\theta \cdot \sqrt{[(R\cos\theta)']^2 + [(R\sin\theta)']^2} d\theta$$

$$= \int_{-\alpha}^{\alpha} R^2 \sin^2\theta \cdot R d\theta = R^3 \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} R^3 (\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta)\Big|_{-\alpha}^{\alpha} = R^3(\alpha - \frac{1}{2}\sin(2\alpha))$$

例 计算 $\int_L e^{x+y}ds$，其中 L 如右图所示



解

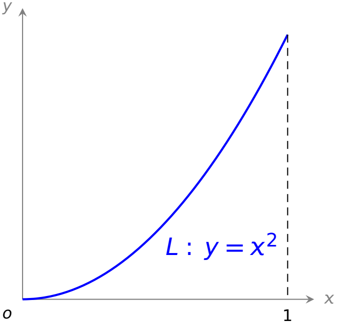
$$\int_L e^{x+y}ds = \int_{L_1} e^{x+y}ds + \int_{L_2} e^{x+y}ds$$

$$= \int_{-1}^{0} e^{2t+1}\cdot\sqrt{[(t+1)']^2+[t']^2}dt + \int_0^1 e^1\cdot\sqrt{[(1-t)']^2+[t']^2}dt$$

$$= \sqrt{2}\int_{-1}^{0} e^{2t+1}dt + \sqrt{2}\int_0^1 e^1 dt$$

$$= \sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}e^{2t+1}\Big|_{-1}^{0} + \sqrt{2}e = \frac{\sqrt{2}}{2}(3e-e^{-1})$$

例 计算 $\int_L \sqrt{y}ds$，其中 L 如右图所示



解 曲线 L 的参数方程可取为：

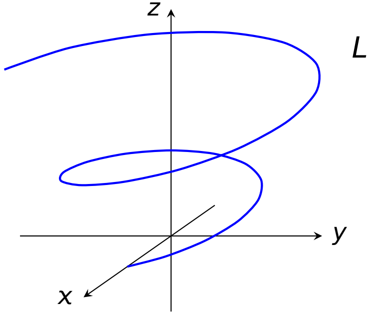
$$x = t, \quad y = t^2 \qquad (0 \le t \le 1)$$

所以

$$\int_L \sqrt{y}ds = \int_0^1 \sqrt{t^2} \cdot \sqrt{[t']^2 + \left[(t^2)'\right]^2}dt = \int_0^1 t \cdot \sqrt{1+4t^2}dt$$

$$\xlongequal{\underline{u=1+4t^2}} \int_1^5 \sqrt{u} \cdot \frac{1}{8}du = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_1^5 = \frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)$$

对弧长的曲线积分：空间曲线

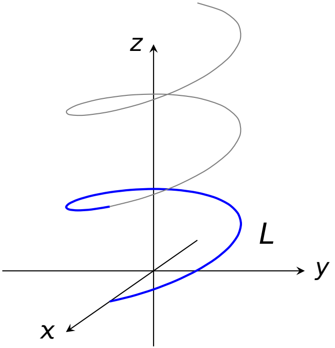


$$\int_L f(x, y, z)ds$$

- 当 $f(x, y, z)$ 是线密度时，$\int_L f(x, y, z)ds$ 表示曲线的质量
- 若曲线 L 的参数方程是 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \zeta(t) \end{cases}$，$(a \le t \le b)$，则

$$\int_L f(x, y, z)ds = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t), \zeta(t))\sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \zeta'(t)^2}dt$$

例 计算 $\int_L (x^2+y^2+z^2)ds$，其中 L 为螺旋线 $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt$（$0\le t\le 2\pi$）



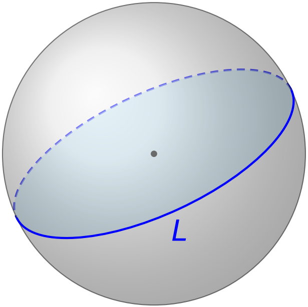
解 $\displaystyle\int_L (x^2+y^2+z^2)ds$

$$=\int_0^{2\pi}\left[(a\cos t)^2+(a\sin t)^2+(bt)^2\right]\cdot \sqrt{[(a\cos t)']^2+[(a\sin t)']^2+[(bt)']^2}dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[a^2+b^2t^2\right]\cdot\sqrt{a^2+b^2}dt=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\left(a^2t+\frac{1}{3}b^2t^3\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$=\frac{2}{3}\pi\sqrt{a^2+b^2}\cdot\left(3a^2+2b^2\pi^2\right)$$

例 计算 $\int_L x^2 ds$，其中 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线。



解 由对称性可知：

$$\int_L x^2 ds = \int_L y^2 ds = \int_L z^2 ds$$

所以

$$\int_L x^2 ds = \frac{1}{3}\int_L (x^2+y^2+z^2) ds = \frac{1}{3}\int_L 1 ds = \frac{1}{3}\mathrm{Length}(L) = \frac{1}{3}\cdot 2\pi$$