

第 10 章 c: 三重积分

数学系 梁卓滨

2018-2019 学年 II

We are here now...

1. 三重积分的概念

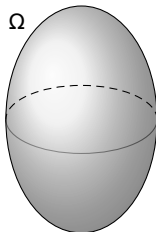
2. 三重积分的计算：化为累次积分

3. 球面坐标

三维物体的质量

假设

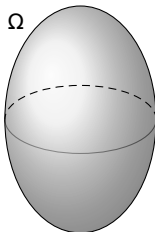
- Ω 为空间中三维闭区域
- 密度为 μ
- 质量为 m



三维物体的质量

假设

- Ω 为空间中三维闭区域
- 密度为 μ
- 质量为 m

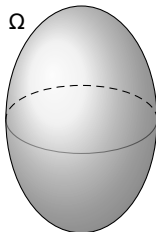


- 当材料均匀时 ($\mu = \text{常数}$),
- 当材料非均匀时 ($\mu = \mu(x, y, z)$ 为 Ω 上函数),

三维物体的质量

假设

- Ω 为空间中三维闭区域
- 密度为 μ
- 质量为 m



- 当材料均匀时 ($\mu = \text{常数}$),

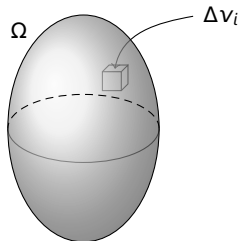
$$m = \mu \cdot \text{Vol}(\Omega)$$

- 当材料非均匀时 ($\mu = \mu(x, y, z)$ 为 Ω 上函数),

三维物体的质量

假设

- Ω 为空间中三维闭区域
- 密度为 μ
- 质量为 m



- 当材料均匀时 ($\mu = \text{常数}$),

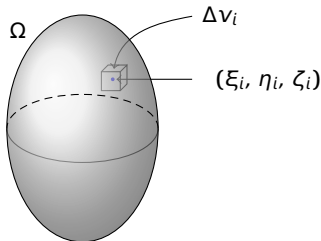
$$m = \mu \cdot \text{Vol}(\Omega)$$

- 当材料非均匀时 ($\mu = \mu(x, y, z)$ 为 Ω 上函数), 利用微元法可知

三维物体的质量

假设

- Ω 为空间中三维闭区域
- 密度为 μ
- 质量为 m



- 当材料均匀时 ($\mu = \text{常数}$),

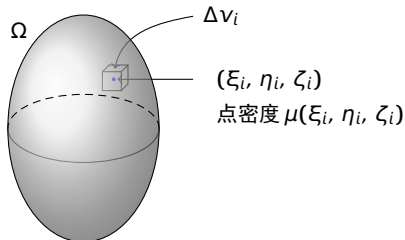
$$m = \mu \cdot \text{Vol}(\Omega)$$

- 当材料非均匀时 ($\mu = \mu(x, y, z)$ 为 Ω 上函数), 利用微元法可知

三维物体的质量

假设

- Ω 为空间中三维闭区域
- 密度为 μ
- 质量为 m



- 当材料均匀时 ($\mu = \text{常数}$),

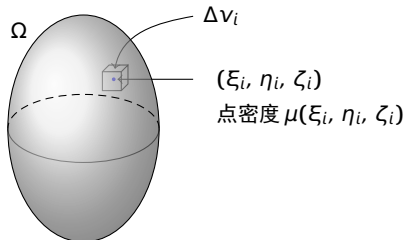
$$m = \mu \cdot \text{Vol}(\Omega)$$

- 当材料非均匀时 ($\mu = \mu(x, y, z)$ 为 Ω 上函数), 利用微元法可知

三维物体的质量

假设

- Ω 为空间中三维闭区域
- 密度为 μ
- 质量为 m



- 当材料均匀时 ($\mu = \text{常数}$),

$$m = \mu \cdot \text{Vol}(\Omega)$$

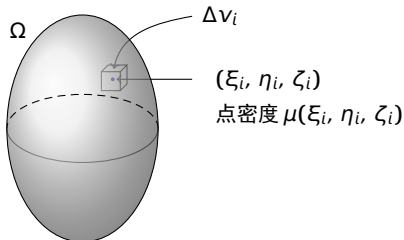
- 当材料非均匀时 ($\mu = \mu(x, y, z)$ 为 Ω 上函数), 利用微元法可知

$$\mu(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$$

三维物体的质量

假设

- Ω 为空间中三维闭区域
- 密度为 μ
- 质量为 m



- 当材料均匀时 ($\mu = \text{常数}$),

$$m = \mu \cdot \text{Vol}(\Omega)$$

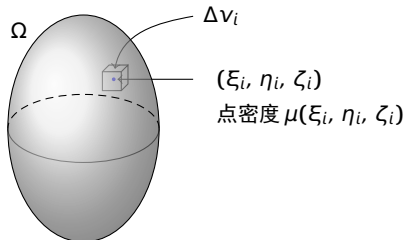
- 当材料非均匀时 ($\mu = \mu(x, y, z)$ 为 Ω 上函数), 利用微元法可知

$$\sum_{i=1}^n \mu(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$$

三维物体的质量

假设

- Ω 为空间中三维闭区域
- 密度为 μ
- 质量为 m



- 当材料均匀时 ($\mu = \text{常数}$),

$$m = \mu \cdot \text{Vol}(\Omega)$$

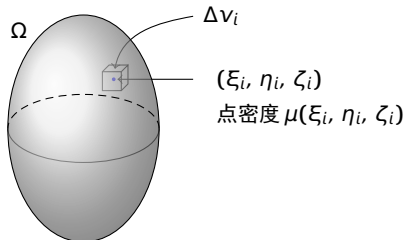
- 当材料非均匀时 ($\mu = \mu(x, y, z)$ 为 Ω 上函数), 利用微元法可知

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mu(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$$

三维物体的质量

假设

- Ω 为空间中三维闭区域
- 密度为 μ
- 质量为 m



- 当材料均匀时 ($\mu = \text{常数}$),

$$m = \mu \cdot \text{Vol}(\Omega)$$

- 当材料非均匀时 ($\mu = \mu(x, y, z)$ 为 Ω 上函数), 利用微元法可知

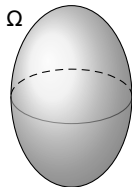
$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mu(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$$

三重积分的定义

三重积分定义 设

- Ω 是空间中有界闭区域,
- $f(x, y, z)$ 是 Ω 上的有界函数,

若

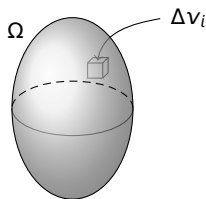


三重积分的定义

三重积分定义 设

- Ω 是空间中有界闭区域,
- $f(x, y, z)$ 是 Ω 上的有界函数,

若

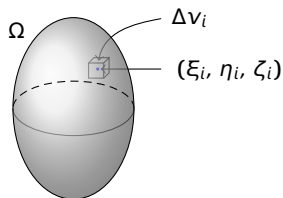


三重积分的定义

三重积分定义 设

- Ω 是空间中有界闭区域,
- $f(x, y, z)$ 是 Ω 上的有界函数,

若

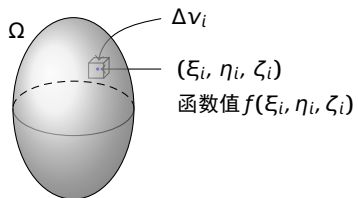


三重积分的定义

三重积分定义 设

- Ω 是空间中有界闭区域,
- $f(x, y, z)$ 是 Ω 上的有界函数,

若



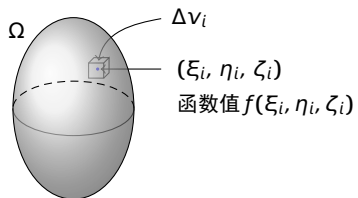
三重积分的定义

三重积分定义 设

- Ω 是空间中有界闭区域,
- $f(x, y, z)$ 是 Ω 上的有界函数,

若

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$$



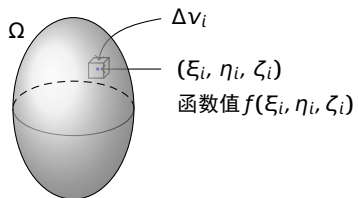
三重积分的定义

三重积分定义 设

- Ω 是空间中有界闭区域,
- $f(x, y, z)$ 是 Ω 上的有界函数,

若

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$$



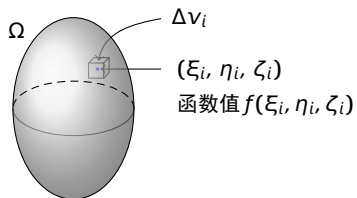
三重积分的定义

三重积分定义 设

- Ω 是空间中有界闭区域,
- $f(x, y, z)$ 是 Ω 上的有界函数,

若

- 极限 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$ 存在,



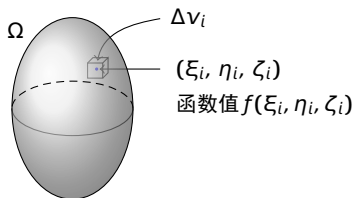
三重积分的定义

三重积分定义 设

- Ω 是空间中有界闭区域,
- $f(x, y, z)$ 是 Ω 上的有界函数,

若

- 极限 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$ 存在, 且
极限
- 与上述 Ω 的划分、 (ξ_i, η_i, ζ_i) 的选取无关,



三重积分的定义

三重积分定义 设

- Ω 是空间中有界闭区域,
- $f(x, y, z)$ 是 Ω 上的有界函数,

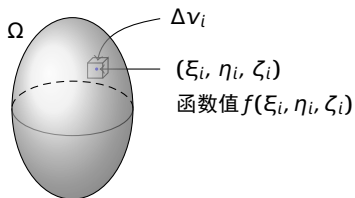
若

- 极限 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$ 存在, 且
极限

- 与上述 Ω 的划分、 (ξ_i, η_i, ζ_i) 的选取无
关,

则定义

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$$



三重积分的定义

三重积分定义 设

- Ω 是空间中有界闭区域,
- $f(x, y, z)$ 是 Ω 上的有界函数,

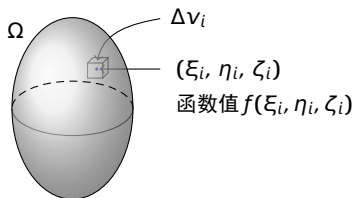
若

- 极限 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$ 存在, 且
极限

- 与上述 Ω 的划分、 (ξ_i, η_i, ζ_i) 的选取无
关,

则定义
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$$

称为 $f(x, y, z)$ 在 D 上的三重积分。



三重积分的定义

三重积分定义 设

- Ω 是空间中有界闭区域,
- $f(x, y, z)$ 是 Ω 上的有界函数,

若

- 极限 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$ 存在, 且

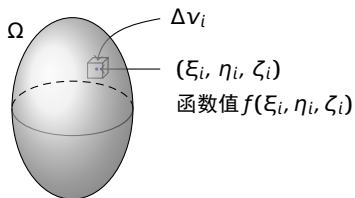
极限

- 与上述 Ω 的划分、 (ξ_i, η_i, ζ_i) 的选取无关,

则定义

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$$

称为 $f(x, y, z)$ 在 D 上的三重积分。 dv 称为体积元素。



三重积分的定义

三重积分定义 设

- Ω 是空间中有界闭区域,
- $f(x, y, z)$ 是 Ω 上的有界函数,

若

- 极限 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$ 存在, 且

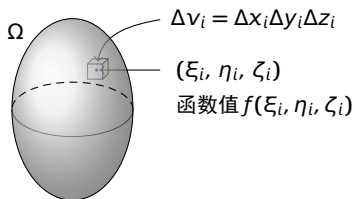
极限

- 与上述 Ω 的划分、 (ξ_i, η_i, ζ_i) 的选取无关,

则定义

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$$

称为 $f(x, y, z)$ 在 D 上的三重积分。 dv 称为体积元素。



三重积分的定义

三重积分定义 设

- Ω 是空间中有界闭区域,
- $f(x, y, z)$ 是 Ω 上的有界函数,

若

- 极限 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$ 存在, 且

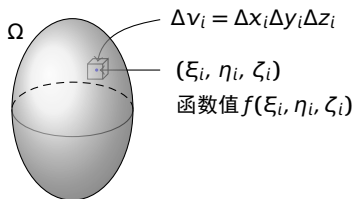
极限

- 与上述 Ω 的划分、 (ξ_i, η_i, ζ_i) 的选取无关,

则定义

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$$

称为 $f(x, y, z)$ 在 D 上的三重积分。 dv 称为体积元素。 $dv = dx dy dz$



三重积分的定义

三重积分定义 设

- Ω 是空间中有界闭区域,
- $f(x, y, z)$ 是 Ω 上的有界函数,

若

- 极限 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$ 存在, 且

极限

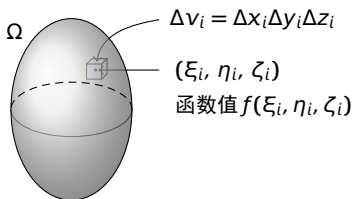
- 与上述 Ω 的划分、 (ξ_i, η_i, ζ_i) 的选取无

关,

则定义

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$$

称为 $f(x, y, z)$ 在 D 上的三重积分。 dv 称为体积元素。 $dv = dx dy dz$



注 三重积分的定义式与二重积分的类似, 故性质也类似

三重积分的性质

- 存在性 若 $f(x, y, z)$ 在空间有界闭区域 Ω 上连续, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$$

存在。

三重积分的性质

- **存在性** 若 $f(x, y, z)$ 在空间有界闭区域 Ω 上连续, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$$

存在。

- **线性性** $\iiint_{\Omega} (\alpha f + \beta g) dv = \alpha \iiint_{\Omega} f dv + \beta \iiint_{\Omega} g dv$

三重积分的性质

- **存在性** 若 $f(x, y, z)$ 在空间有界闭区域 Ω 上连续, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$$

存在。

- **线性性** $\iiint_{\Omega} (\alpha f + \beta g) dv = \alpha \iiint_{\Omega} f dv + \beta \iiint_{\Omega} g dv$

- **可加性**

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \iiint_{\Omega_1} f(x, y, z) dv + \iiint_{\Omega_2} f(x, y, z) dv$$

三重积分的性质

- **存在性** 若 $f(x, y, z)$ 在空间有界闭区域 Ω 上连续, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$$

存在。

- **线性性** $\iiint_{\Omega} (\alpha f + \beta g) dv = \alpha \iiint_{\Omega} f dv + \beta \iiint_{\Omega} g dv$

- **可加性**

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \iiint_{\Omega_1} f(x, y, z) dv + \iiint_{\Omega_2} f(x, y, z) dv$$

- $\iiint_{\Omega} 1 dv = \text{Vol}(\Omega)$

三重积分的性质

- **存在性** 若 $f(x, y, z)$ 在空间有界闭区域 Ω 上连续, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$$

存在。

- **线性性** $\iiint_{\Omega} (\alpha f + \beta g) dv = \alpha \iiint_{\Omega} f dv + \beta \iiint_{\Omega} g dv$

- **可加性**

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \iiint_{\Omega_1} f(x, y, z) dv + \iiint_{\Omega_2} f(x, y, z) dv$$

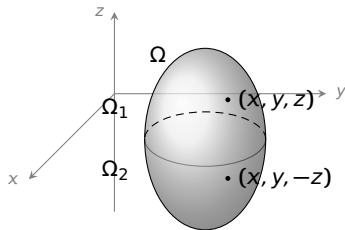
- $\iiint_{\Omega} 1 dv = \text{Vol}(\Omega)$

- 若 $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv \leq \iiint_{\Omega} g(x, y, z) dv$$

积分的对称性

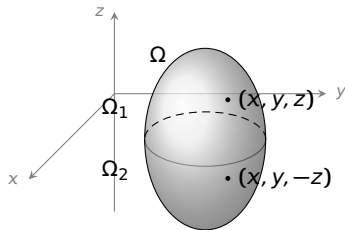
性质 设空间中三维闭区域 Ω 关于 xoy 坐标面对称,



积分的对称性

性质 设空间中三维闭区域 Ω 关于 xoy 坐标面对称,

- 若 $f(x, y, z)$ 关于 z 是奇函数 (即: $f(x, y, -z) = -f(x, y, z)$), 则

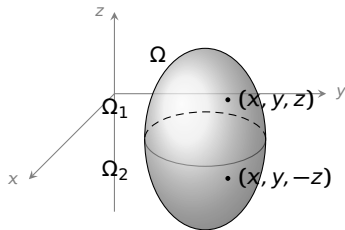


积分的对称性

性质 设空间中三维闭区域 Ω 关于 xoy 坐标面对称,

- 若 $f(x, y, z)$ 关于 z 是奇函数 (即: $f(x, y, -z) = -f(x, y, z)$), 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = 0$$



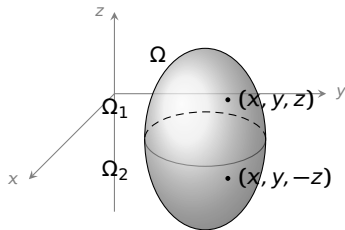
积分的对称性

性质 设空间中三维闭区域 Ω 关于 xoy 坐标面对称,

- 若 $f(x, y, z)$ 关于 z 是奇函数 (即: $f(x, y, -z) = -f(x, y, z)$), 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = 0$$

- 若 $f(x, y, z)$ 关于 z 是偶函数 (即: $f(x, y, -z) = f(x, y, z)$), 则



积分的对称性

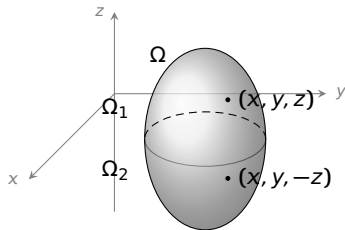
性质 设空间中三维闭区域 Ω 关于 xoy 坐标面对称,

- 若 $f(x, y, z)$ 关于 z 是奇函数 (即: $f(x, y, -z) = -f(x, y, z)$), 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = 0$$

- 若 $f(x, y, z)$ 关于 z 是偶函数 (即: $f(x, y, -z) = f(x, y, z)$), 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = 2 \iiint_{\Omega_1} f(x, y, z) dv = 2 \iiint_{\Omega_2} f(x, y, z) dv$$



例 计算 $\iiint_{\Omega} \frac{z \ln(1+x^2+y^2)}{1+x^2+y^2+z^2} dz$, 其中 Ω 为球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

例 计算 $\iiint_{\Omega} \frac{z \ln(1+x^2+y^2)}{1+x^2+y^2+z^2} dz$, 其中 Ω 为球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

解 因为

1. 被积函数关于变量 z 是奇函数;
2. 积分区域 Ω 关于 xoy 坐标面对称,

所以积分为 0

We are here now...

1. 三重积分的概念

2. 三重积分的计算：化为累次积分

3. 球面坐标

计算三重积分的基本做法：化为累次积分

- “先一后二”

- “先二后一”

计算三重积分的基本做法：化为累次积分

- “先一后二”

1.
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{*} \left[\int_{*}^{*} f(x, y, z) dz \right] dx dy$$

- “先二后一”

计算三重积分的基本做法：化为累次积分

- “先一后二”

1.
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{*} \left[\int_{*}^{*} f(x, y, z) dz \right] dx dy$$

2.
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{*} \left[\int_{*}^{*} f(x, y, z) dy \right] dx dz$$

- “先二后一”

计算三重积分的基本做法：化为累次积分

- “先一后二”

1.
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{*} \left[\int_{*}^{*} f(x, y, z) dz \right] dx dy$$

2.
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{*} \left[\int_{*}^{*} f(x, y, z) dy \right] dx dz$$

3.
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{*} \left[\int_{*}^{*} f(x, y, z) dx \right] dy dz$$

- “先二后一”

计算三重积分的基本做法：化为累次积分

- “先一后二”

1.
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{*} \left[\int_{*}^{*} f(x, y, z) dz \right] dx dy$$

2.
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{*} \left[\int_{*}^{*} f(x, y, z) dy \right] dx dz$$

3.
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{*} \left[\int_{*}^{*} f(x, y, z) dx \right] dy dz$$

- “先二后一”

1.
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{*}^{*} \left[\iint_{*} f(x, y, z) dx dy \right] dz$$

计算三重积分的基本做法：化为累次积分

- “先一后二”

1.
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{*} \left[\int_{*}^{*} f(x, y, z) dz \right] dx dy$$

2.
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{*} \left[\int_{*}^{*} f(x, y, z) dy \right] dx dz$$

3.
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{*} \left[\int_{*}^{*} f(x, y, z) dz \right] dx dy$$

- “先二后一”

1.
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{*}^{*} \left[\iint_{*} f(x, y, z) dx dy \right] dz$$

2.
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{*}^{*} \left[\iint_{*} f(x, y, z) dx dz \right] dy$$

计算三重积分的基本做法：化为累次积分

● “先一后二”

$$1. \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{*} \left[\int_{*}^{*} f(x, y, z) dz \right] dx dy$$

$$2. \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{*} \left[\int_{*}^{*} f(x, y, z) dy \right] dx dz$$

$$3. \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{*} \left[\int_{*}^{*} f(x, y, z) dx \right] dy dz$$

● “先二后一”

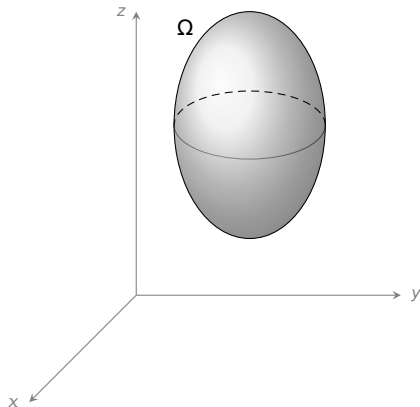
$$1. \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{*}^{*} \left[\iint_{*} f(x, y, z) dx dy \right] dz$$

$$2. \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{*}^{*} \left[\iint_{*} f(x, y, z) dx dz \right] dy$$

$$3. \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{*}^{*} \left[\iint_{*} f(x, y, z) dy dz \right] dx$$

投影法（“先一后二”）

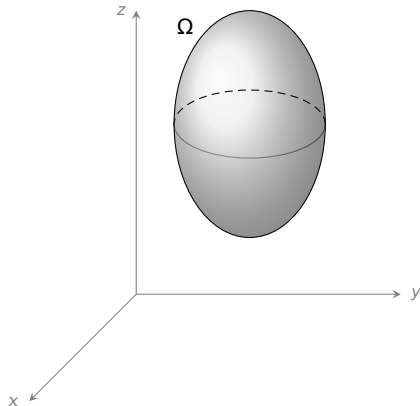
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$$



投影法 (“先后二”)

1. 先积 z , 再积 xy

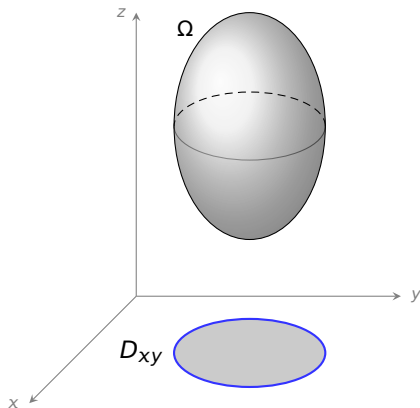
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint \left[\int f(x, y, z) dz \right] dx dy$$



投影法 (“先后二”)

1. 先积 z , 再积 xy

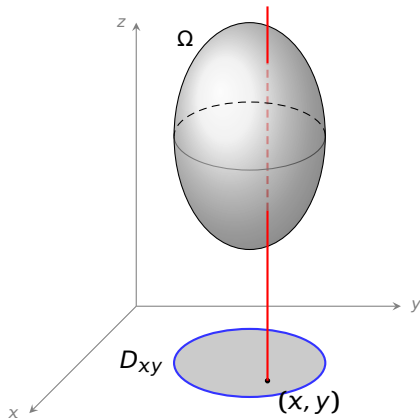
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint \left[\int f(x, y, z) dz \right] dx dy$$



投影法 (“先一后二”)

1. 先积 z , 再积 xy

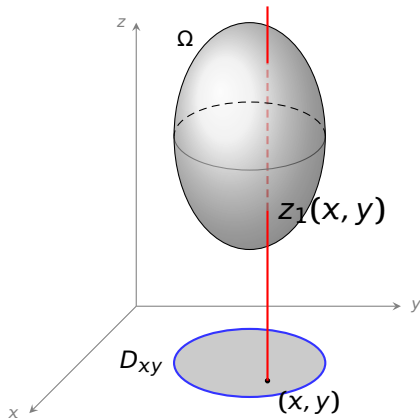
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint \left[\int f(x, y, z) dz \right] dx dy$$



投影法 (“先后二”)

1. 先积 z , 再积 xy

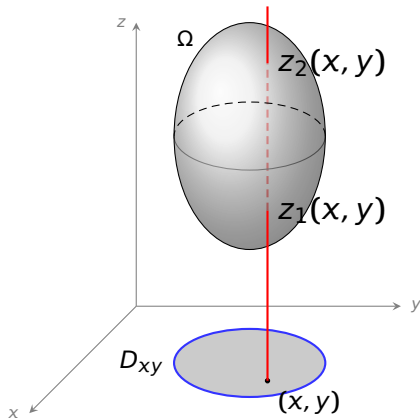
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint \left[\int f(x, y, z) dz \right] dx dy$$



投影法 (“先后二”)

1. 先积 z , 再积 xy

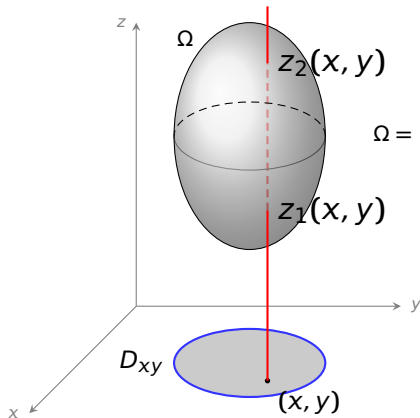
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint \left[\int f(x, y, z) dz \right] dx dy$$



投影法 (“先后二”)

1. 先积 z , 再积 xy

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint \left[\int f(x, y, z) dz \right] dx dy$$

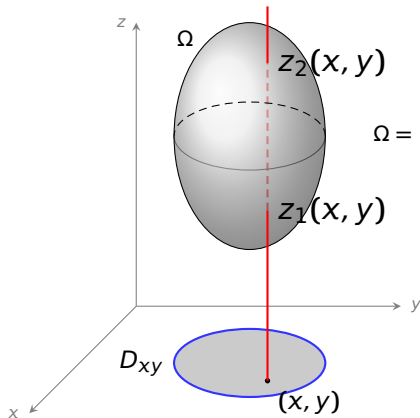


$$\Omega = \{(x, y, z) | z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), (x, y) \in D_{xy}\}$$

投影法 (“先一后二”)

1. 先积 z , 再积 xy

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{xy}} \left[\int f(x, y, z) dz \right] dx dy$$

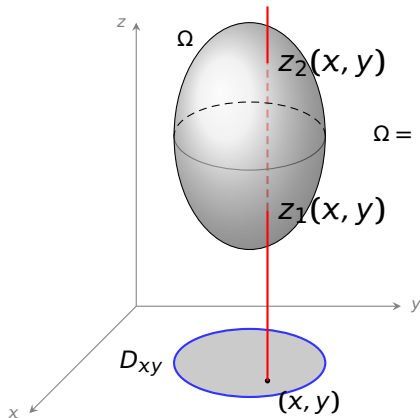


$$\Omega = \{(x, y, z) | z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), (x, y) \in D_{xy}\}$$

投影法 (“先一后二”)

1. 先积 z , 再积 xy

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{xy}} \left[\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy$$



$$\Omega = \{(x, y, z) | z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), (x, y) \in D_{xy}\}$$

投影法（“先一后二”）

1. 先积 z ，再积 xy

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{xy}} \left[\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy$$

投影法 (“先一后二”)

1. 先积 z , 再积 xy

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{xy}} \left[\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy$$

类似地

2. 先积 x , 再积 yz

3. 先积 y , 再积 xz

投影法 (“先一后二”)

1. 先积 z , 再积 xy

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{xy}} \left[\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy$$

类似地

2. 先积 x , 再积 yz

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint \left[\int f(x, y, z) dx \right] dy dz$$

3. 先积 y , 再积 xz

投影法 (“先一后二”)

1. 先积 z , 再积 xy

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{xy}} \left[\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy$$

类似地

2. 先积 x , 再积 yz

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{yz}} \left[\int f(x, y, z) dx \right] dy dz$$

3. 先积 y , 再积 xz

投影法 (“先一后二”)

1. 先积 z , 再积 xy

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{xy}} \left[\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy$$

类似地

2. 先积 x , 再积 yz

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{yz}} \left[\int_{x_1(y, z)}^{x_2(y, z)} f(x, y, z) dx \right] dy dz$$

3. 先积 y , 再积 xz

投影法 (“先一后二”)

1. 先积 z , 再积 xy

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{xy}} \left[\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy$$

类似地

2. 先积 x , 再积 yz

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{yz}} \left[\int_{x_1(y, z)}^{x_2(y, z)} f(x, y, z) dx \right] dy dz$$

3. 先积 y , 再积 xz

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint \left[\int f(x, y, z) dy \right] dx dz$$

投影法 (“先一后二”)

1. 先积 z , 再积 xy

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{xy}} \left[\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy$$

类似地

2. 先积 x , 再积 yz

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{yz}} \left[\int_{x_1(y, z)}^{x_2(y, z)} f(x, y, z) dx \right] dy dz$$

3. 先积 y , 再积 xz

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{xz}} \left[\int f(x, y, z) dy \right] dx dz$$

投影法 (“先一后二”)

1. 先积 z , 再积 xy

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{xy}} \left[\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy$$

类似地

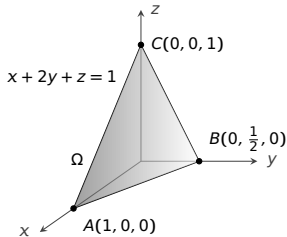
2. 先积 x , 再积 yz

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{yz}} \left[\int_{x_1(y, z)}^{x_2(y, z)} f(x, y, z) dx \right] dy dz$$

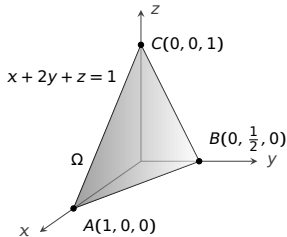
3. 先积 y , 再积 xz

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{xz}} \left[\int_{y_1(x, z)}^{y_2(x, z)} f(x, y, z) dy \right] dx dz$$

例 1 计算 $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$, 其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x + 2y + z = 1$ 所围成的闭区域。



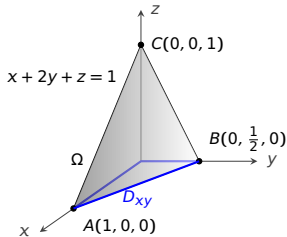
例 1 计算 $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$, 其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x + 2y + z = 1$ 所围成的闭区域。



解

$$\text{原式} = \iiint \left[\int x dz \right] dx dy$$

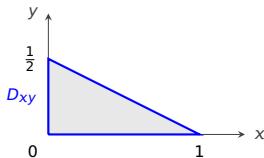
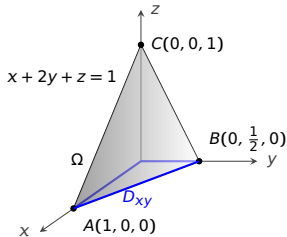
例 1 计算 $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$, 其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x + 2y + z = 1$ 所围成的闭区域。



解

$$\text{原式} = \iiint \left[\int x dz \right] dx dy$$

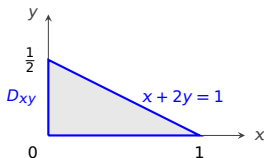
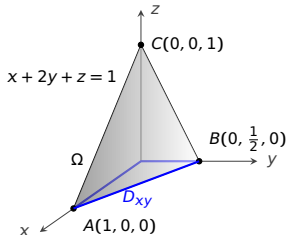
例 1 计算 $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$, 其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x + 2y + z = 1$ 所围成的闭区域。



解

$$\text{原式} = \iiint \left[\int x dz \right] dx dy$$

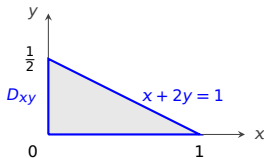
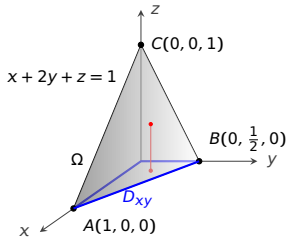
例 1 计算 $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$, 其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x + 2y + z = 1$ 所围成的闭区域。



解

$$\text{原式} = \iint \left[\int x dz \right] dx dy$$

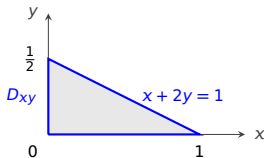
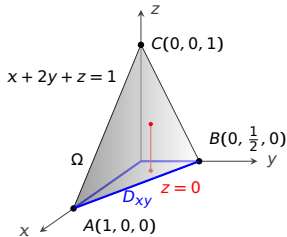
例 1 计算 $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$, 其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x + 2y + z = 1$ 所围成的闭区域。



解

$$\text{原式} = \iiint \left[\int x dz \right] dx dy$$

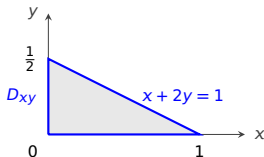
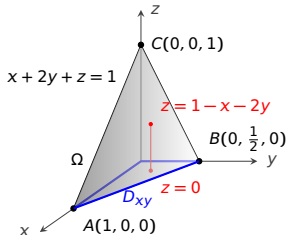
例 1 计算 $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$, 其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x + 2y + z = 1$ 所围成的闭区域。



解

$$\text{原式} = \iiint \left[\int x dz \right] dx dy$$

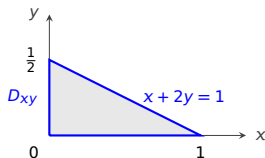
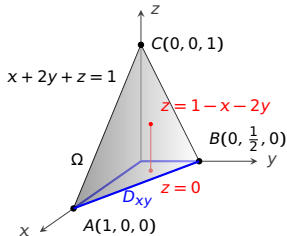
例 1 计算 $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$, 其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x + 2y + z = 1$ 所围成的闭区域。



解

$$\text{原式} = \iint \left[\int x dz \right] dx dy$$

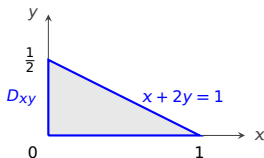
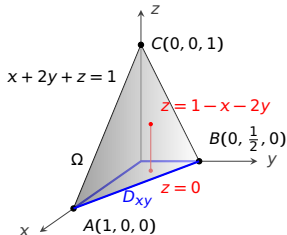
例 1 计算 $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$, 其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x + 2y + z = 1$ 所围成的闭区域。



解

$$\text{原式} = \iiint_{D_{xy}} \left[\int x dz \right] dx dy$$

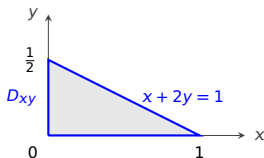
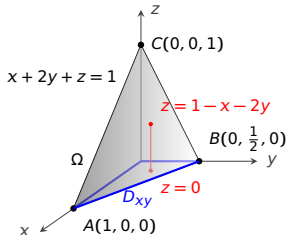
例 1 计算 $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$, 其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x + 2y + z = 1$ 所围成的闭区域。



解

$$\text{原式} = \iiint_{D_{xy}} \left[\int_0^{1-x-2y} x dz \right] dx dy$$

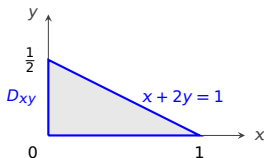
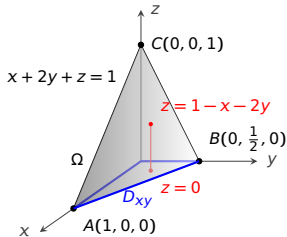
例 1 计算 $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$, 其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x + 2y + z = 1$ 所围成的闭区域。



解

$$\text{原式} = \iint_{D_{xy}} \left[\int_0^{1-x-2y} x dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} x(1-x-2y) dx dy$$

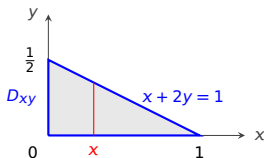
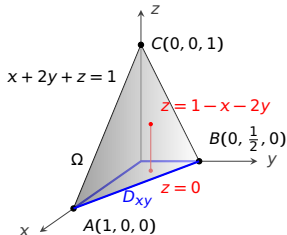
例 1 计算 $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$, 其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x + 2y + z = 1$ 所围成的闭区域。



解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint_{D_{xy}} \left[\int_0^{1-x-2y} x dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} x(1-x-2y) dx dy \\ &= \int \left[\int x(1-x-2y) dy \right] dx \end{aligned}$$

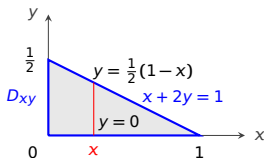
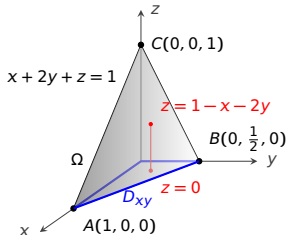
例 1 计算 $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$, 其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x + 2y + z = 1$ 所围成的闭区域。



解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint_{D_{xy}} \left[\int_0^{1-x-2y} x dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} x(1-x-2y) dx dy \\ &= \int \left[\int x(1-x-2y) dy \right] dx \end{aligned}$$

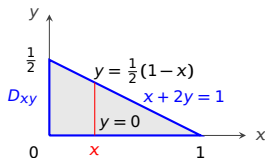
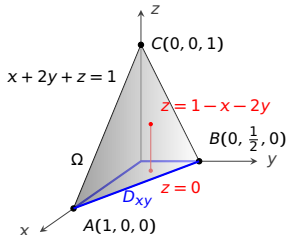
例 1 计算 $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$, 其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x + 2y + z = 1$ 所围成的闭区域。



解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint_{D_{xy}} \left[\int_0^{1-x-2y} x dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} x(1-x-2y) dx dy \\ &= \int \left[\int x(1-x-2y) dy \right] dx \end{aligned}$$

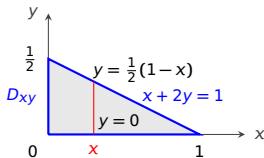
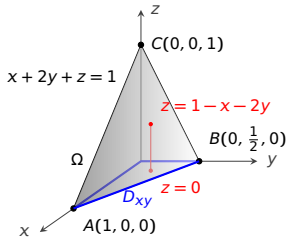
例 1 计算 $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$, 其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x + 2y + z = 1$ 所围成的闭区域。



解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iiint_{D_{xy}} \left[\int_0^{1-x-2y} x dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} x(1-x-2y) dx dy \\
 &= \int_0^1 \left[\int_0^{\frac{1-x}{2}} x(1-x-2y) dy \right] dx
 \end{aligned}$$

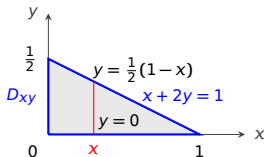
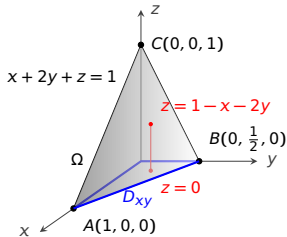
例 1 计算 $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$, 其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x + 2y + z = 1$ 所围成的闭区域。



解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iiint_{D_{xy}} \left[\int_0^{1-x-2y} x dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} x(1-x-2y) dx dy \\
 &= \int_0^1 \left[\int_0^{\frac{1-x}{2}} x(1-x-2y) dy \right] dx = \int_0^1 \left[x \left[(1-x)y - y^2 \right] \Big|_0^{\frac{1-x}{2}} \right] dx
 \end{aligned}$$

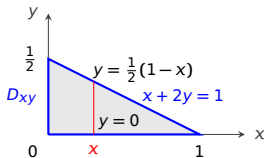
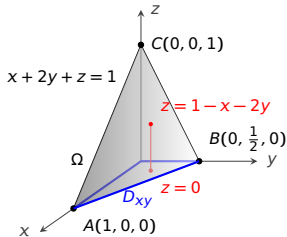
例 1 计算 $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$, 其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x + 2y + z = 1$ 所围成的闭区域。



解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iiint_{D_{xy}} \left[\int_0^{1-x-2y} x dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} x(1-x-2y) dx dy \\
 &= \int_0^1 \left[\int_0^{\frac{1-x}{2}} x(1-x-2y) dy \right] dx = \int_0^1 \left[x \left[(1-x)y - y^2 \right] \Big|_0^{\frac{1-x}{2}} \right] dx \\
 &= \int_0^1 \left[\frac{1}{4} x(1-x)^2 \right] dx
 \end{aligned}$$

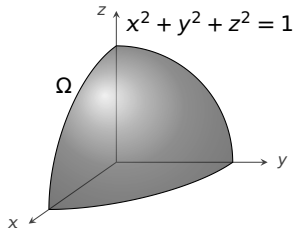
例 1 计算 $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$, 其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x + 2y + z = 1$ 所围成的闭区域。



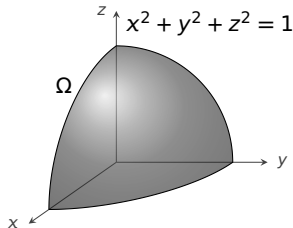
解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iiint_{D_{xy}} \left[\int_0^{1-x-2y} x dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} x(1-x-2y) dx dy \\
 &= \int_0^1 \left[\int_0^{\frac{1-x}{2}} x(1-x-2y) dy \right] dx = \int_0^1 \left[x \left[(1-x)y - y^2 \right] \Big|_0^{\frac{1-x}{2}} \right] dx \\
 &= \int_0^1 \left[\frac{1}{4} x(1-x)^2 \right] dx = \frac{1}{48}
 \end{aligned}$$

例 2 计算 $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$, 其中 Ω 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 在第一象限的部分。



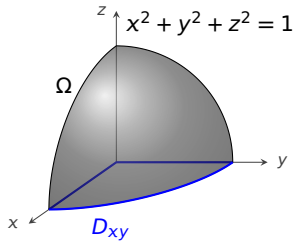
例 2 计算 $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$, 其中 Ω 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 在第一象限的部分。



解

$$\text{原式} = \iiint \left[\int xyz dz \right] dx dy$$

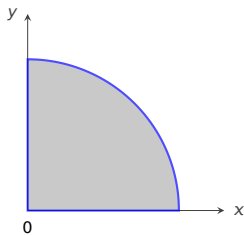
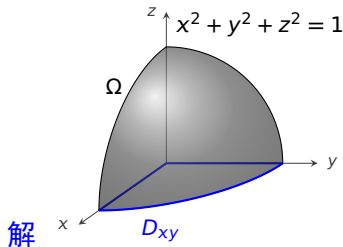
例 2 计算 $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$, 其中 Ω 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 在第一象限的部分。



解

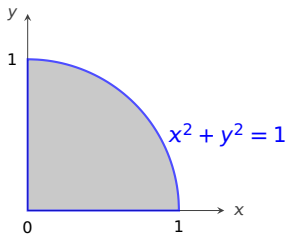
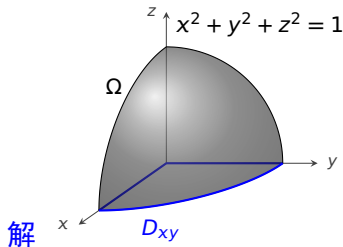
$$\text{原式} = \iiint \left[\int xyz dz \right] dx dy$$

例 2 计算 $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$, 其中 Ω 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 在第一象限的部分。



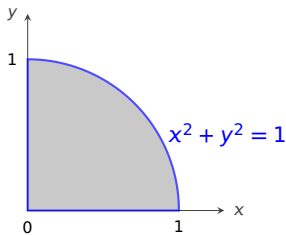
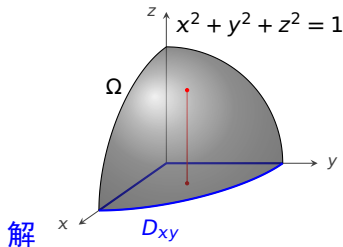
$$\text{原式} = \iiint \left[\int xyz dz \right] dx dy$$

例 2 计算 $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$, 其中 Ω 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 在第一象限的部分。



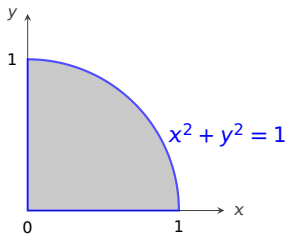
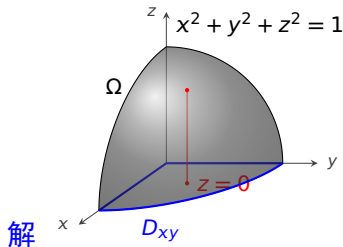
$$\text{原式} = \iiint \left[\int xyz dz \right] dx dy$$

例 2 计算 $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$, 其中 Ω 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 在第一象限的部分。



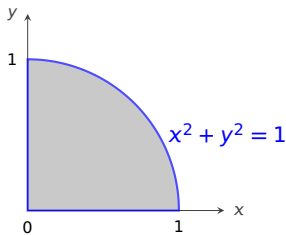
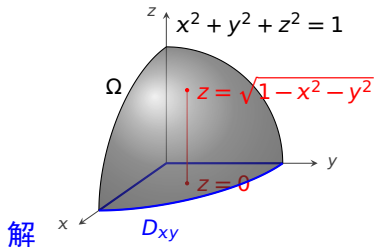
$$\text{原式} = \iiint \left[\int \quad \quad \quad xyz dz \right] dx dy$$

例 2 计算 $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$, 其中 Ω 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 在第一象限的部分。



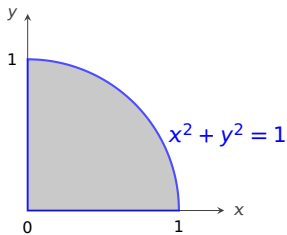
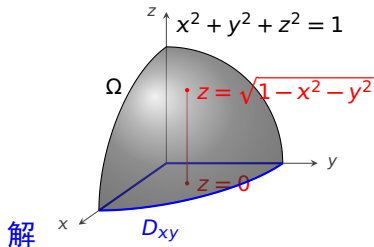
$$\text{原式} = \iiint \left[\int \quad xyz dz \right] dx dy$$

例 2 计算 $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$, 其中 Ω 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 在第一象限的部分。



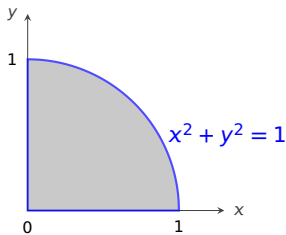
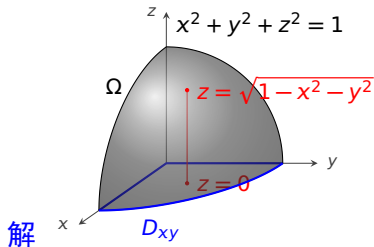
$$\text{原式} = \iiint \left[\int \right] xyz dz \Big] dx dy$$

例 2 计算 $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$, 其中 Ω 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 在第一象限的部分。



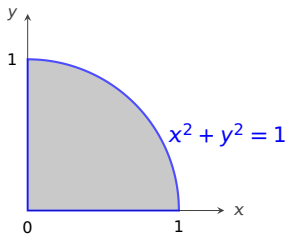
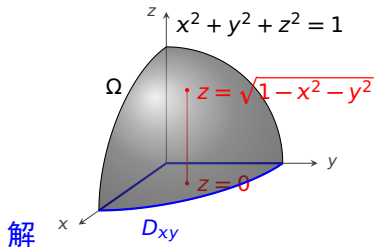
$$\text{原式} = \iiint_{D_{xy}} \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz dz \right] dx dy$$

例 2 计算 $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$, 其中 Ω 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 在第一象限的部分。



$$\text{原式} = \iiint_{D_{xy}} \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz dz \right] dx dy$$

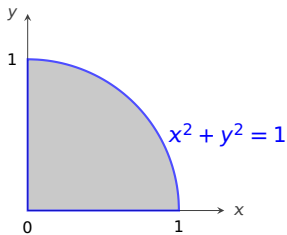
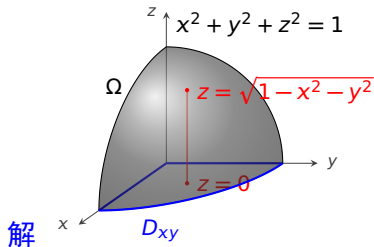
例 2 计算 $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$, 其中 Ω 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 在第一象限的部分。



$$\text{原式} = \iint_{D_{xy}} \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz dz \right] dx dy$$

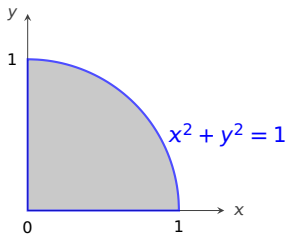
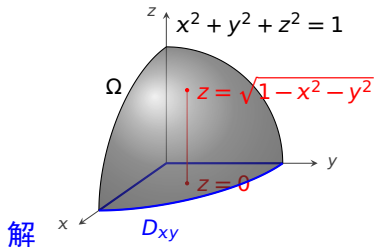
$$\frac{1}{2} xy(1-x^2-y^2)$$

例 2 计算 $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$, 其中 Ω 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 在第一象限的部分。



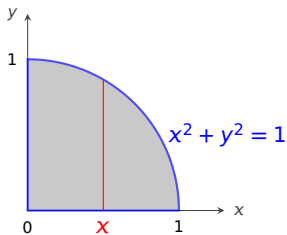
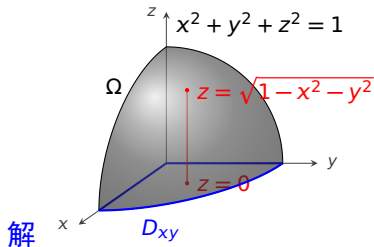
$$\text{原式} = \iint_{D_{xy}} \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} xy (1 - x^2 - y^2) dx dy$$

例 2 计算 $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$, 其中 Ω 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 在第一象限的部分。



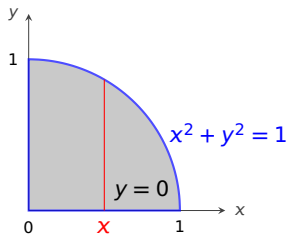
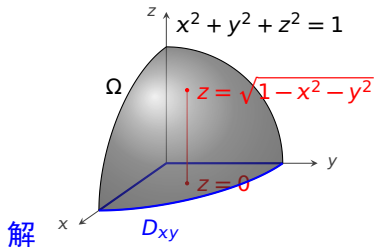
$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint_{D_{xy}} \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} xy (1 - x^2 - y^2) dx dy \\ &= \int \left[\int \frac{1}{2} xy (1 - x^2 - y^2) dy \right] dx \end{aligned}$$

例 2 计算 $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$, 其中 Ω 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 在第一象限的部分。



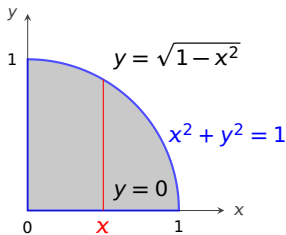
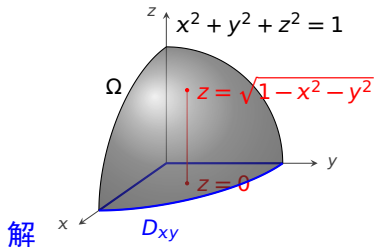
$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint_{D_{xy}} \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} xy (1 - x^2 - y^2) dx dy \\ &= \int \left[\int \frac{1}{2} xy (1 - x^2 - y^2) dy \right] dx \end{aligned}$$

例 2 计算 $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$, 其中 Ω 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 在第一象限的部分。



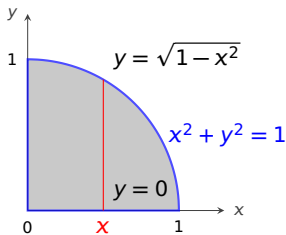
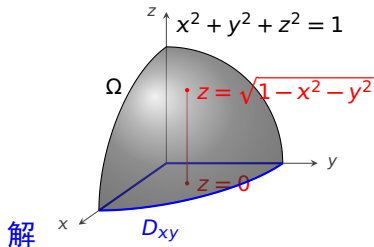
$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iiint_{D_{xy}} \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} xy (1 - x^2 - y^2) dx dy \\
 &= \int \left[\int \frac{1}{2} xy (1 - x^2 - y^2) dy \right] dx
 \end{aligned}$$

例 2 计算 $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$, 其中 Ω 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 在第一象限的部分。



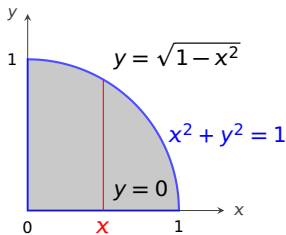
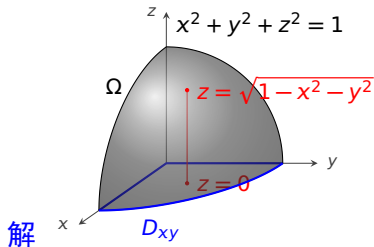
$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iiint_{D_{xy}} \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} xy (1 - x^2 - y^2) dx dy \\
 &= \int \left[\int \frac{1}{2} xy (1 - x^2 - y^2) dy \right] dx
 \end{aligned}$$

例 2 计算 $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$, 其中 Ω 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 在第一象限的部分。



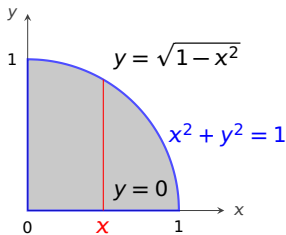
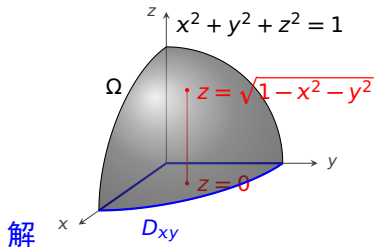
$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iiint_{D_{xy}} \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} xy (1 - x^2 - y^2) dx dy \\
 &= \int_0^1 \left[\int \frac{1}{2} xy (1 - x^2 - y^2) dy \right] dx
 \end{aligned}$$

例 2 计算 $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$, 其中 Ω 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 在第一象限的部分。



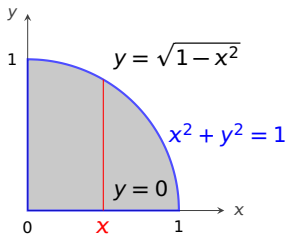
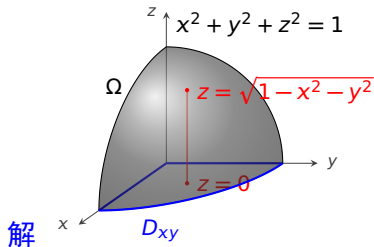
$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iiint_{D_{xy}} \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} xy (1 - x^2 - y^2) dx dy \\
 &= \int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{2} xy (1 - x^2 - y^2) dy \right] dx
 \end{aligned}$$

例 2 计算 $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$, 其中 Ω 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 在第一象限的部分。



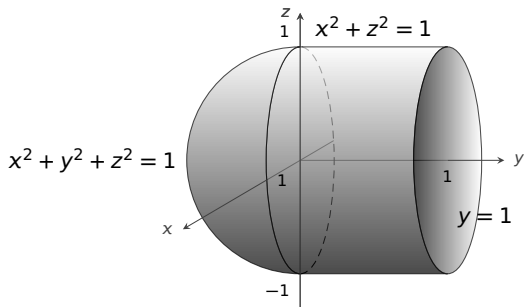
$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iiint_{D_{xy}} \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} xy (1 - x^2 - y^2) dx dy \\
 &= \int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{2} xy (1 - x^2 - y^2) dy \right] dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{8} x (1 - x^2)^2 \right] dx
 \end{aligned}$$

例 2 计算 $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$, 其中 Ω 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 在第一象限的部分。

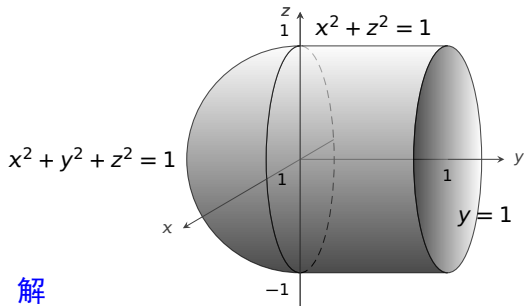


$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iiint_{D_{xy}} \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} xy (1 - x^2 - y^2) dx dy \\
 &= \int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{2} xy (1 - x^2 - y^2) dy \right] dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{8} x (1 - x^2)^2 \right] dx \\
 &= \frac{1}{48}
 \end{aligned}$$

例 3 计算 $\iiint_{\Omega} y\sqrt{1-x^2}dx dy dz$, 其中 Ω 是如图的闭区域。



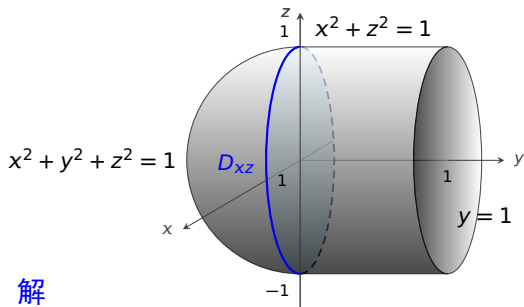
例 3 计算 $\iiint_{\Omega} y\sqrt{1-x^2}dxdydz$, 其中 Ω 是如图的闭区域。



解

$$\text{原式} = \iiint \left[\int y\sqrt{1-x^2}dy \right] dxdz$$

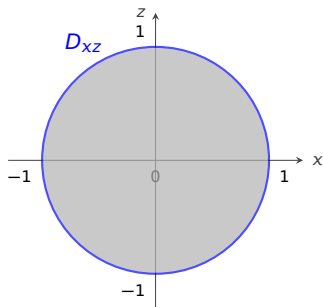
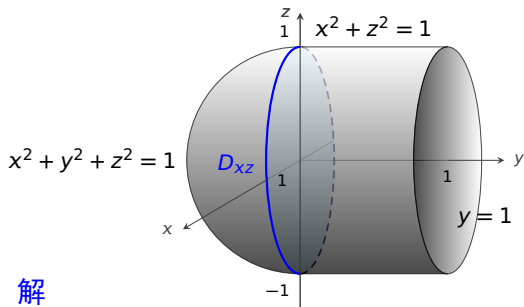
例 3 计算 $\iiint_{\Omega} y\sqrt{1-x^2}dxdydz$, 其中 Ω 是如图的闭区域。



解

$$\text{原式} = \iiint \left[\int y\sqrt{1-x^2}dy \right] dxdz$$

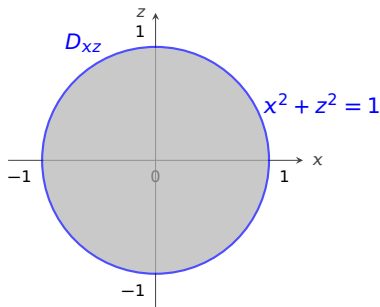
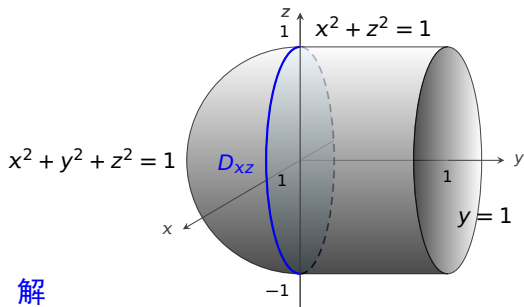
例 3 计算 $\iiint_{\Omega} y\sqrt{1-x^2}dxdydz$, 其中 Ω 是如图的闭区域。



解

$$\text{原式} = \iint \left[\int y\sqrt{1-x^2}dy \right] dx dz$$

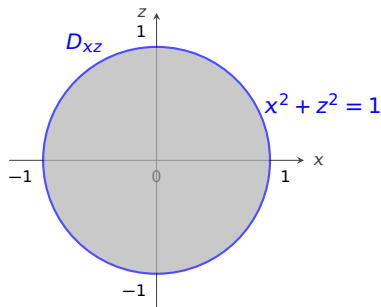
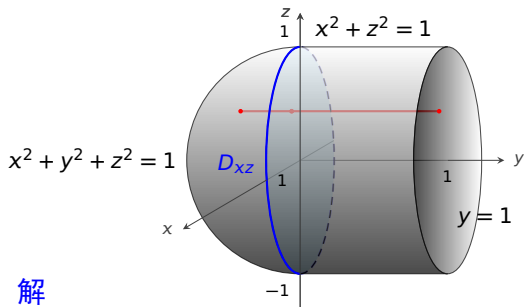
例 3 计算 $\iiint_{\Omega} y\sqrt{1-x^2}dxdydz$, 其中 Ω 是如图的闭区域。



解

$$\text{原式} = \iint \left[\int y\sqrt{1-x^2}dy \right] dx dz$$

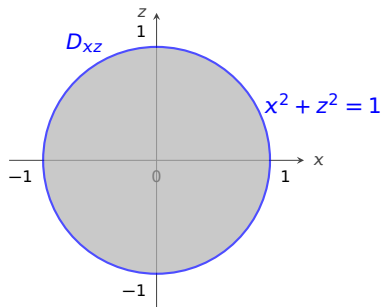
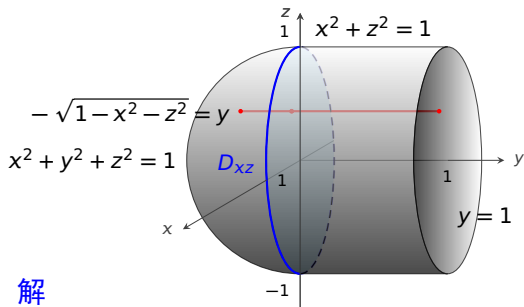
例3 计算 $\iiint_{\Omega} y\sqrt{1-x^2}dxdydz$, 其中 Ω 是如图的闭区域。



解

$$\text{原式} = \iiint \left[\int y\sqrt{1-x^2}dy \right] dxdz$$

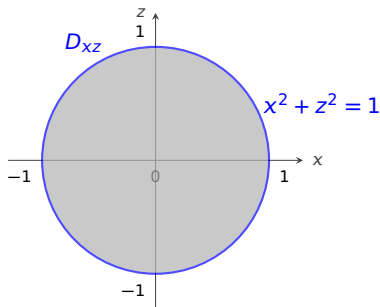
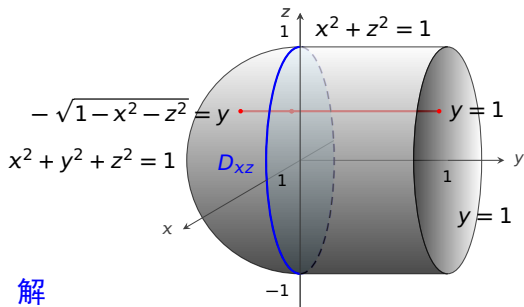
例 3 计算 $\iiint_{\Omega} y\sqrt{1-x^2}dx dy dz$, 其中 Ω 是如图的闭区域。



解

$$\text{原式} = \iiint \left[\int y\sqrt{1-x^2} dy \right] dx dz$$

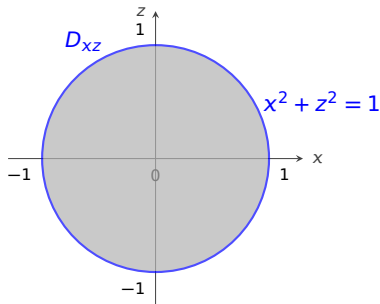
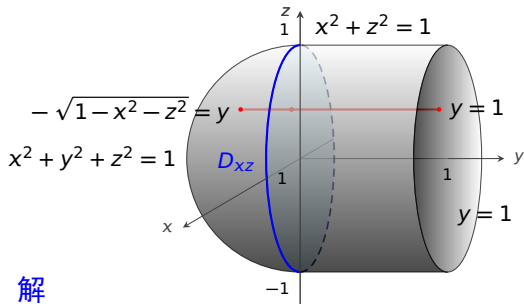
例3 计算 $\iiint_{\Omega} y\sqrt{1-x^2}dx dy dz$, 其中 Ω 是如图的闭区域。



解

$$\text{原式} = \iint \left[\int y\sqrt{1-x^2} dy \right] dx dz$$

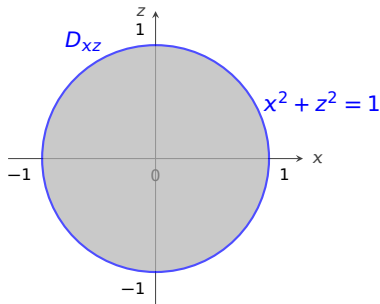
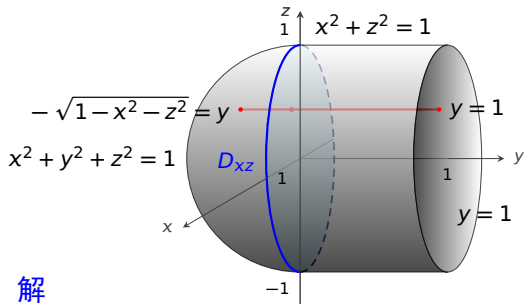
例3 计算 $\iiint_{\Omega} y\sqrt{1-x^2}dxdydz$, 其中 Ω 是如图的闭区域。



解

$$\text{原式} = \iint_{D_{xz}} \left[\int y\sqrt{1-x^2}dy \right] dx dz$$

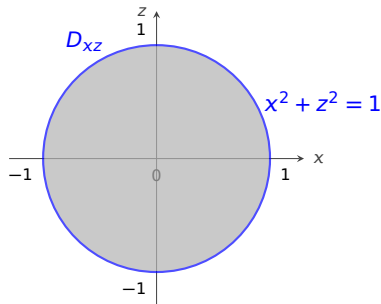
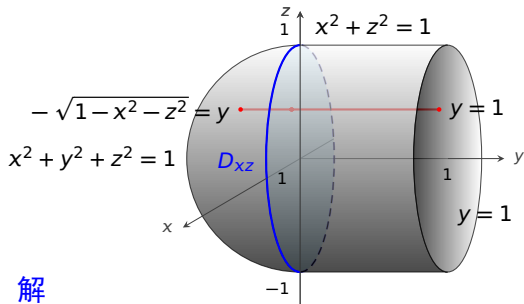
例3 计算 $\iiint_{\Omega} y\sqrt{1-x^2}dx dy dz$, 其中 Ω 是如图的闭区域。



解

$$\text{原式} = \iint_{D_{xz}} \left[\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^1 y\sqrt{1-x^2} dy \right] dx dz$$

例3 计算 $\iiint_{\Omega} y\sqrt{1-x^2}dx dy dz$, 其中 Ω 是如图的闭区域。

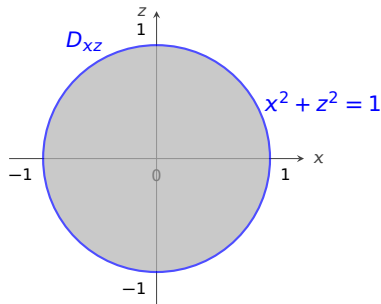
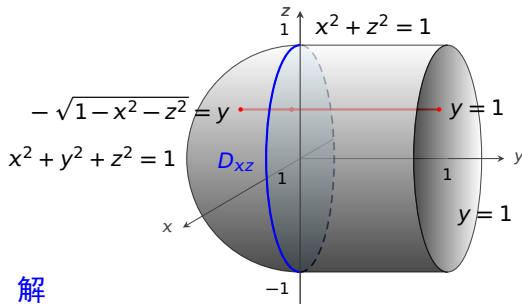


解

$$\text{原式} = \iint_{D_{xz}} \left[\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^1 y\sqrt{1-x^2} dy \right] dx dz$$

$$\sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{2}(x^2 + z^2)$$

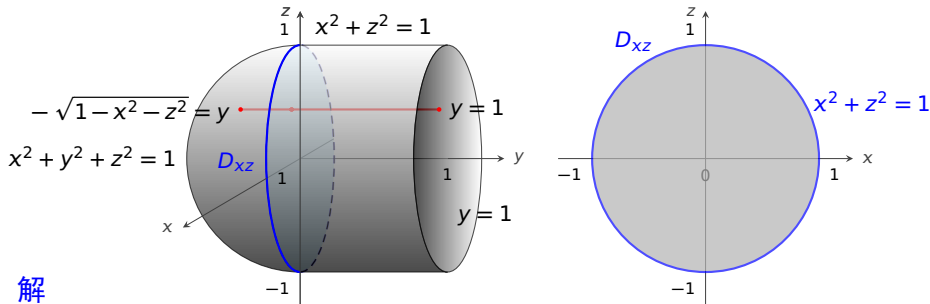
例3 计算 $\iiint_{\Omega} y\sqrt{1-x^2}dx dy dz$, 其中 Ω 是如图的闭区域。



解

$$\text{原式} = \iiint_{D_{xz}} \left[\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^1 y\sqrt{1-x^2} dy \right] dx dz = \iint_{D_{xz}} \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{2}(x^2 + z^2) dx dz$$

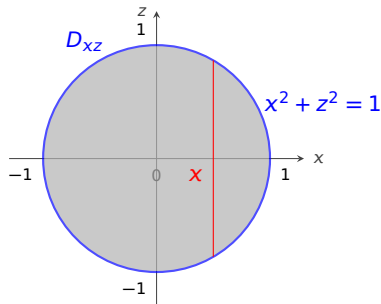
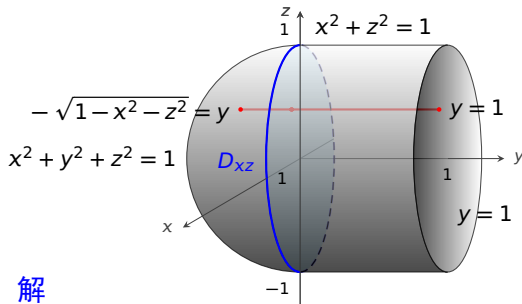
例3 计算 $\iiint_{\Omega} y\sqrt{1-x^2}dxdydz$, 其中 Ω 是如图的闭区域。



解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iiint_{D_{xz}} \left[\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^1 y\sqrt{1-x^2} dy \right] dx dz = \iint_{D_{xz}} \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{2} (x^2 + z^2) dx dz \\
 &= \int \left[\int \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{2} (x^2 + z^2) dz \right] dx
 \end{aligned}$$

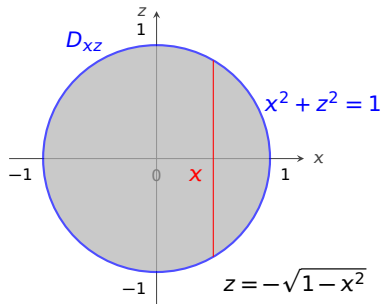
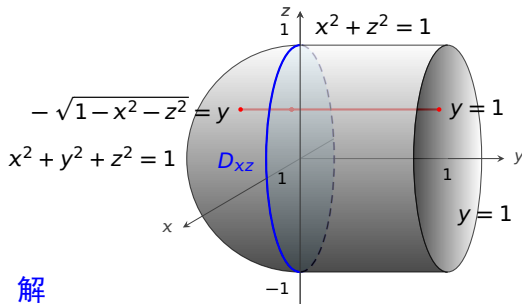
例3 计算 $\iiint_{\Omega} y\sqrt{1-x^2}dxdydz$, 其中 Ω 是如图的闭区域。



解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iiint_{D_{xz}} \left[\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^1 y\sqrt{1-x^2}dy \right] dx dz = \iint_{D_{xz}} \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{2}(x^2+z^2) dx dz \\
 &= \int \left[\int \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{2}(x^2+z^2) dz \right] dx
 \end{aligned}$$

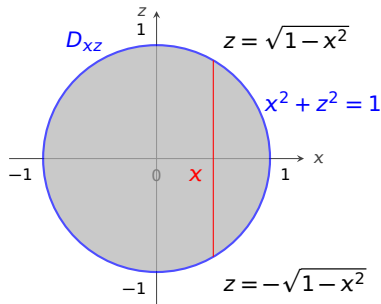
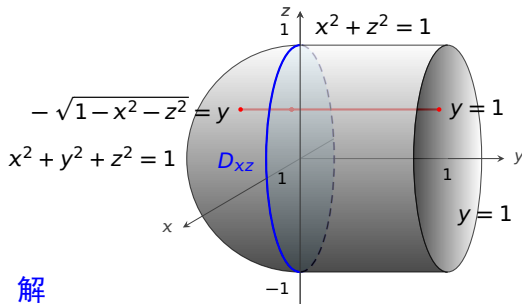
例3 计算 $\iiint_{\Omega} y\sqrt{1-x^2}dxdydz$, 其中 Ω 是如图的闭区域。



解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint_{D_{xz}} \left[\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^1 y\sqrt{1-x^2}dy \right] dx dz = \iint_{D_{xz}} \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{2}(x^2 + z^2) dx dz \\ &= \int \left[\int \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{2}(x^2 + z^2) dz \right] dx \end{aligned}$$

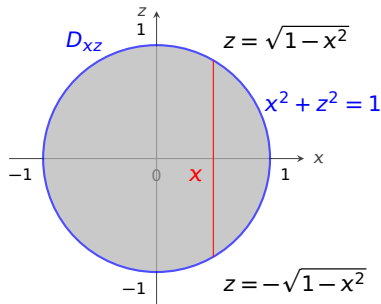
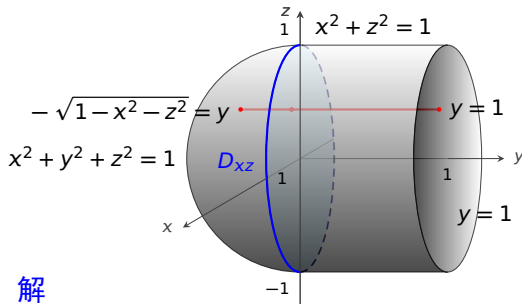
例3 计算 $\iiint_{\Omega} y\sqrt{1-x^2}dxdydz$, 其中 Ω 是如图的闭区域。



解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iiint_{D_{xz}} \left[\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^1 y\sqrt{1-x^2}dy \right] dx dz = \iint_{D_{xz}} \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{2}(x^2+z^2) dx dz \\
 &= \int \left[\int \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{2}(x^2+z^2) dz \right] dx
 \end{aligned}$$

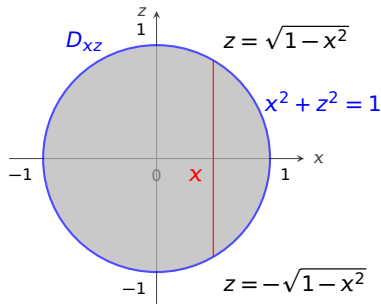
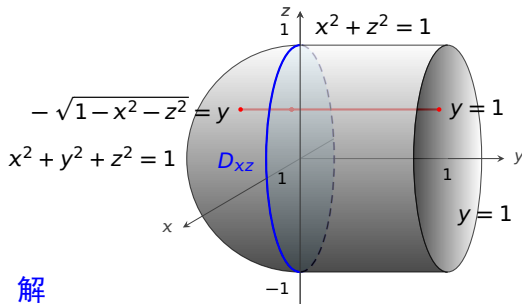
例3 计算 $\iiint_{\Omega} y\sqrt{1-x^2}dxdydz$, 其中 Ω 是如图的闭区域。



解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iiint_{D_{xz}} \left[\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^1 y\sqrt{1-x^2}dy \right] dx dz = \iint_{D_{xz}} \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{2}(x^2+z^2) dx dz \\
 &= \int_{-1}^1 \left[\int \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{2}(x^2+z^2) dz \right] dx
 \end{aligned}$$

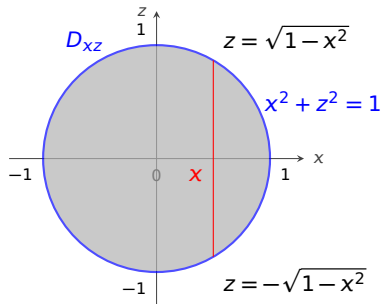
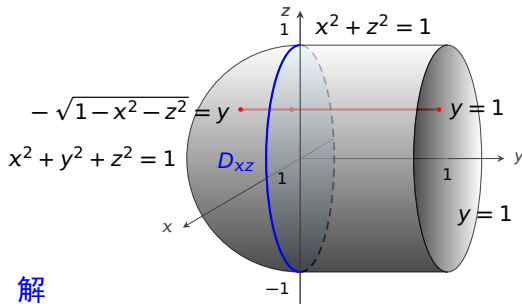
例3 计算 $\iiint_{\Omega} y\sqrt{1-x^2}dxdydz$, 其中 Ω 是如图的闭区域。



解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iiint_{D_{xz}} \left[\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^1 y\sqrt{1-x^2}dy \right] dx dz = \iint_{D_{xz}} \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{2}(x^2+z^2) dx dz \\
 &= \int_{-1}^1 \left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{2}(x^2+z^2) dz \right] dx
 \end{aligned}$$

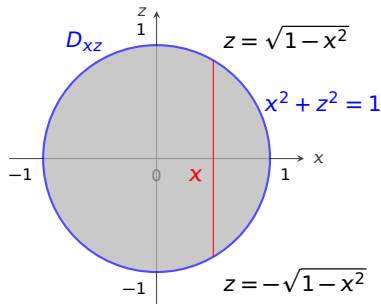
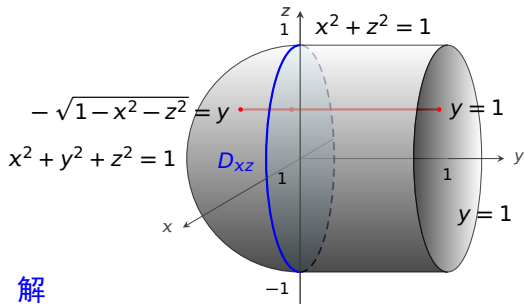
例3 计算 $\iiint_{\Omega} y\sqrt{1-x^2}dxdydz$, 其中 Ω 是如图的闭区域。



解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iint_{D_{xz}} \left[\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^1 y\sqrt{1-x^2} dy \right] dx dz = \iint_{D_{xz}} \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{2} (x^2 + z^2) dx dz \\
 &= \int_{-1}^1 \left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{2} (x^2 + z^2) dz \right] dx \\
 &= \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{3} (1 + x^2 - 2x^4) \right] dx
 \end{aligned}$$

例3 计算 $\iiint_{\Omega} y\sqrt{1-x^2}dxdydz$, 其中 Ω 是如图的闭区域。

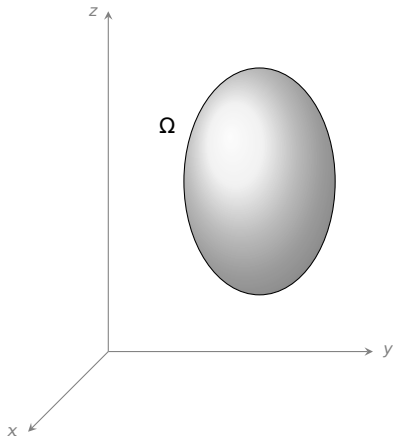


解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iiint_{D_{xz}} \left[\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^1 y\sqrt{1-x^2}dy \right] dx dz = \iint_{D_{xz}} \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{2}(x^2+z^2) dx dz \\
 &= \int_{-1}^1 \left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{2}(x^2+z^2) dz \right] dx \\
 &= \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{3}(1+x^2-2x^4) \right] dx = \frac{28}{45}
 \end{aligned}$$

截面法（“先二后一”）

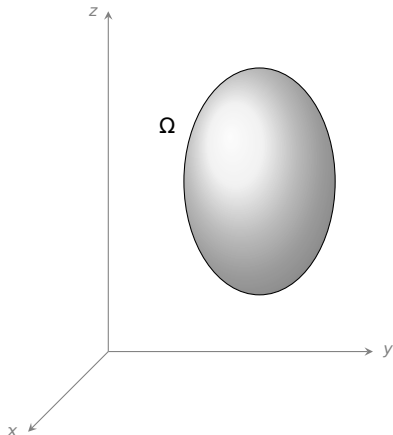
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$$



截面法 (“先二后一”)

1. 先积 xy , 再积 z

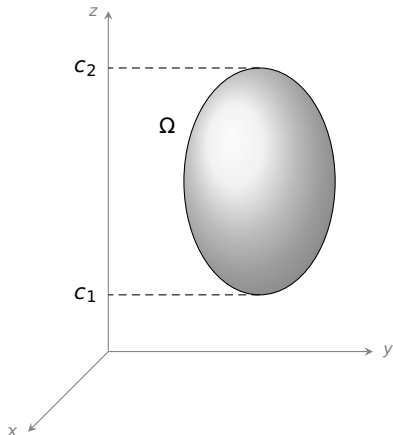
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int \left[\iint f(x, y, z) dx dy \right] dz$$



截面法 (“先二后一”)

1. 先积 xy , 再积 z

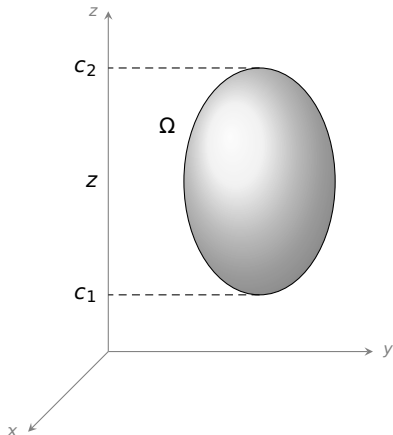
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int \left[\iint f(x, y, z) dx dy \right] dz$$



截面法 (“先二后一”)

1. 先积 xy , 再积 z

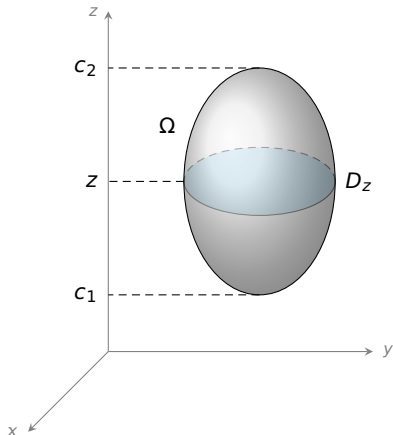
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int \left[\iint f(x, y, z) dx dy \right] dz$$



截面法 (“先二后一”)

1. 先积 xy , 再积 z

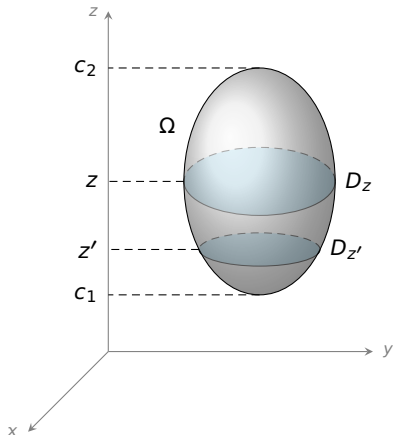
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int \left[\iint f(x, y, z) dx dy \right] dz$$



截面法 (“先二后一”)

1. 先积 xy , 再积 z

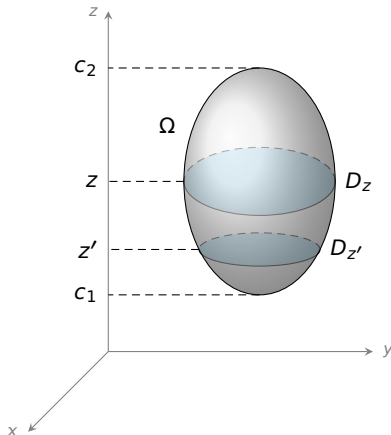
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int \left[\iint f(x, y, z) dx dy \right] dz$$



截面法 (“先二后一”)

1. 先积 xy , 再积 z

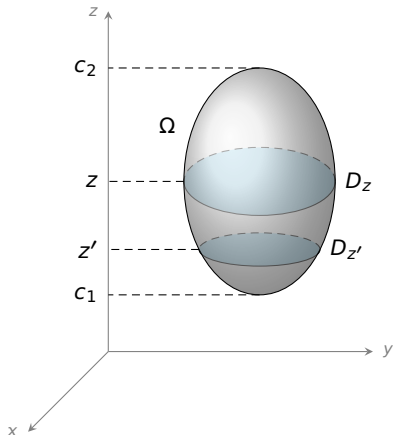
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{c_1}^{c_2} \left[\iint f(x, y, z) dx dy \right] dz$$



截面法 (“先二后一”)

1. 先积 xy , 再积 z

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{c_1}^{c_2} \left[\iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right] dz$$



截面法（“先二后一”）

1. 先积 xy ，再积 z

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{c_1}^{c_2} \left[\iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right] dz$$

截面法 (“先二后一”)

1. 先积 xy , 再积 z

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{c_1}^{c_2} \left[\iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right] dz$$

类似地

2. 先积 yz , 再积 x

3. 先积 xz , 再积 y

截面法 (“先二后一”)

1. 先积 xy , 再积 z

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{c_1}^{c_2} \left[\iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right] dz$$

类似地

2. 先积 yz , 再积 x

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int \left[\iint f(x, y, z) dy dz \right] dx$$

3. 先积 xz , 再积 y

截面法 (“先二后一”)

1. 先积 xy , 再积 z

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{c_1}^{c_2} \left[\iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right] dz$$

类似地

2. 先积 yz , 再积 x

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{d_1}^{d_2} \left[\iint f(x, y, z) dy dz \right] dx$$

3. 先积 xz , 再积 y

截面法 (“先二后一”)

1. 先积 xy , 再积 z

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{c_1}^{c_2} \left[\iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right] dz$$

类似地

2. 先积 yz , 再积 x

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{d_1}^{d_2} \left[\iint_{D_x} f(x, y, z) dy dz \right] dx$$

3. 先积 xz , 再积 y

截面法 (“先二后一”)

1. 先积 xy , 再积 z

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{c_1}^{c_2} \left[\iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right] dz$$

类似地

2. 先积 yz , 再积 x

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{d_1}^{d_2} \left[\iint_{D_x} f(x, y, z) dy dz \right] dx$$

3. 先积 xz , 再积 y

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int \left[\iint f(x, y, z) dx dz \right] dy$$

截面法 (“先二后一”)

1. 先积 xy , 再积 z

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{c_1}^{c_2} \left[\iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right] dz$$

类似地

2. 先积 yz , 再积 x

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{d_1}^{d_2} \left[\iint_{D_x} f(x, y, z) dy dz \right] dx$$

3. 先积 xz , 再积 y

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{e_1}^{e_2} \left[\iint f(x, y, z) dx dz \right] dy$$

截面法 (“先二后一”)

1. 先积 xy , 再积 z

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{c_1}^{c_2} \left[\iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right] dz$$

类似地

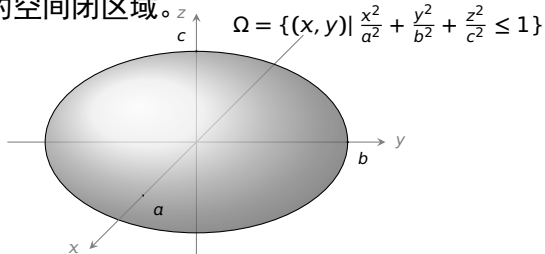
2. 先积 yz , 再积 x

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{d_1}^{d_2} \left[\iint_{D_x} f(x, y, z) dy dz \right] dx$$

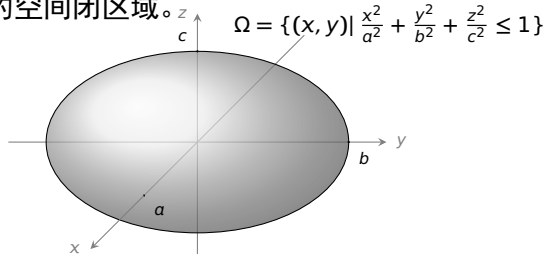
3. 先积 xz , 再积 y

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{e_1}^{e_2} \left[\iint_{D_y} f(x, y, z) dx dz \right] dy$$

例 1 计算 $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$, 其中 Ω 是由椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 所围成的空间闭区域。



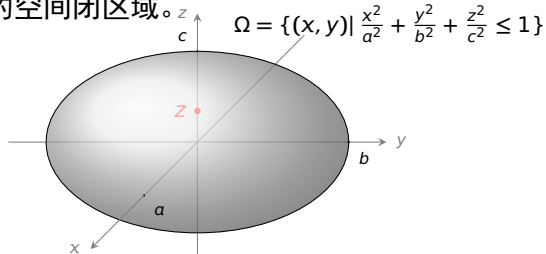
例 1 计算 $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$, 其中 Ω 是由椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 所围成的空间闭区域。



解

$$\text{原式} = \int \left[\iint z^2 dx dy \right] dz$$

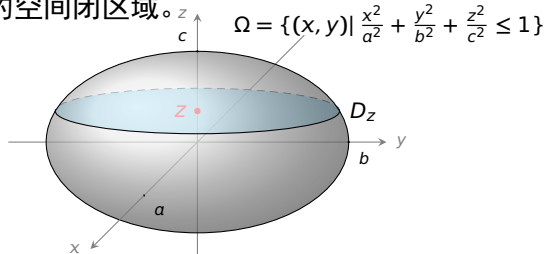
例 1 计算 $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$, 其中 Ω 是由椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 所围成的空间闭区域。



解

$$\text{原式} = \int \left[\iint z^2 dx dy \right] dz$$

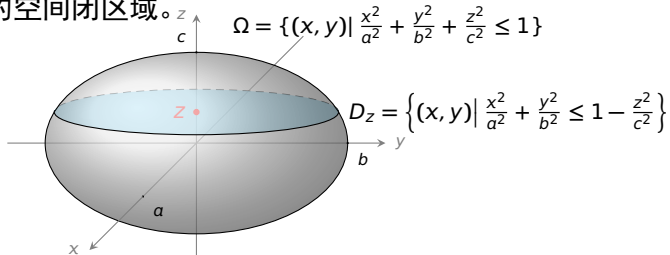
例 1 计算 $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$, 其中 Ω 是由椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 所围成的空间闭区域。



解

$$\text{原式} = \int \left[\iint z^2 dx dy \right] dz$$

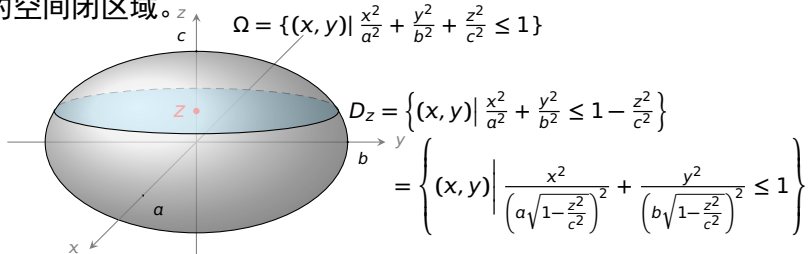
例 1 计算 $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$, 其中 Ω 是由椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 所围成的空间闭区域。



解

$$\text{原式} = \int \left[\iint z^2 dx dy \right] dz$$

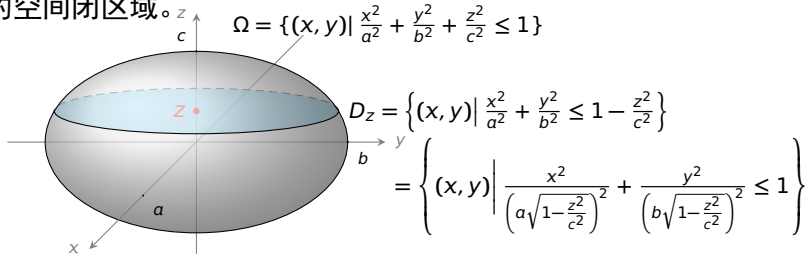
例 1 计算 $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$, 其中 Ω 是由椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 所围成的空间闭区域。



解

$$\text{原式} = \int \left[\iint z^2 dx dy \right] dz$$

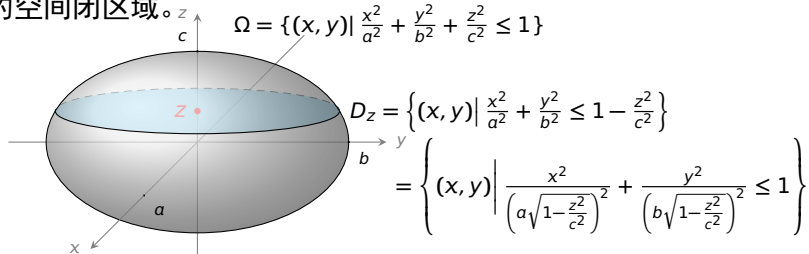
例 1 计算 $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$, 其中 Ω 是由椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 所围成的空间闭区域。



解

$$\text{原式} = \int_{-c}^c \left[\iint z^2 dx dy \right] dz$$

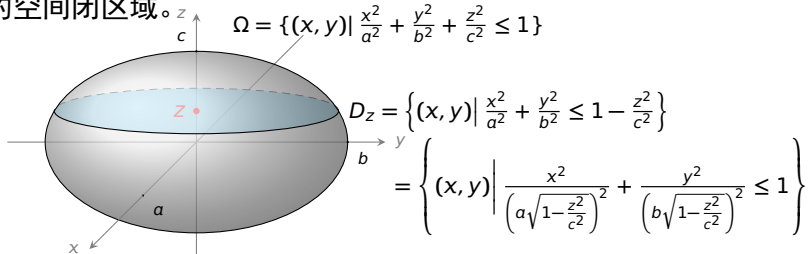
例 1 计算 $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$, 其中 Ω 是由椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 所围成的空间闭区域。



解

$$\text{原式} = \int_{-c}^c \left[\iint_{D_z} z^2 dx dy \right] dz$$

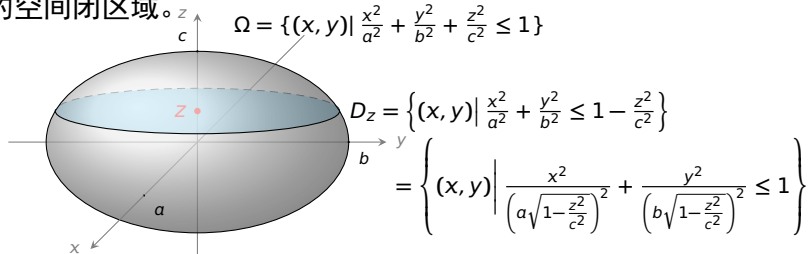
例 1 计算 $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$, 其中 Ω 是由椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 所围成的空间闭区域。



解

$$\text{原式} = \int_{-c}^c \left[\iint_{D_z} z^2 dx dy \right] dz = \int_{-c}^c z^2 \left[\iint_{D_z} dx dy \right] dz$$

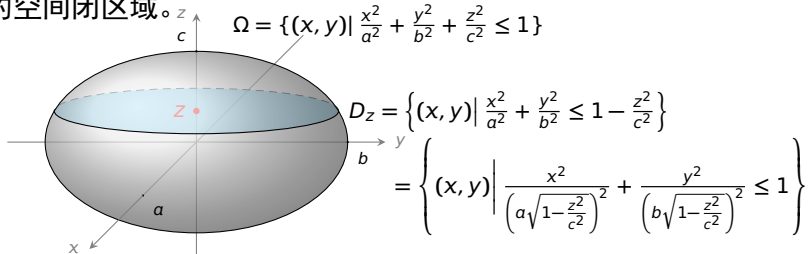
例 1 计算 $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$, 其中 Ω 是由椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 所围成的空间闭区域。



解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_{-c}^c \left[\iint_{D_z} z^2 dx dy \right] dz = \int_{-c}^c z^2 \left[\iint_{D_z} dx dy \right] dz \\ &\quad \pi \cdot ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2} \right) \end{aligned}$$

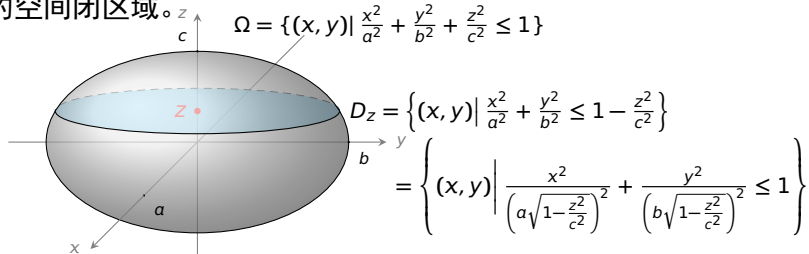
例 1 计算 $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$, 其中 Ω 是由椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 所围成的空间闭区域。



解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_{-c}^c \left[\iint_{D_z} z^2 dx dy \right] dz = \int_{-c}^c z^2 \left[\iint_{D_z} dx dy \right] dz \\ &= \int_{-c}^c z^2 \left[\pi \cdot ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2} \right) \right] dz \end{aligned}$$

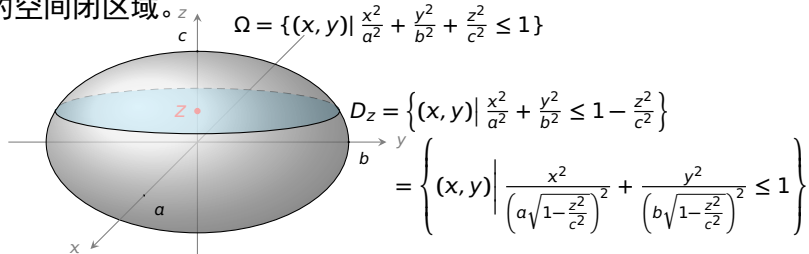
例 1 计算 $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$, 其中 Ω 是由椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 所围成的空间闭区域。



解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int_{-c}^c \left[\iint_{D_z} z^2 dx dy \right] dz = \int_{-c}^c z^2 \left[\iint_{D_z} dx dy \right] dz \\
 &= \int_{-c}^c z^2 \left[\pi \cdot ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2} \right) \right] dz \\
 &= \pi \cdot ab \int_{-c}^c \left(z^2 - \frac{z^4}{c^2} \right) dz
 \end{aligned}$$

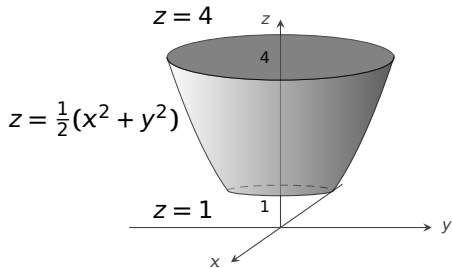
例 1 计算 $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$, 其中 Ω 是由椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 所围成的空间闭区域。



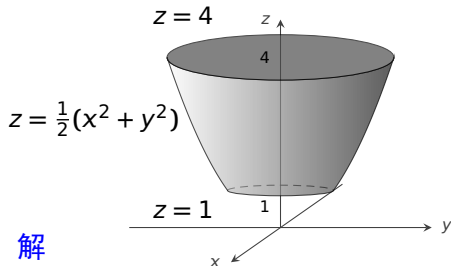
解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int_{-c}^c \left[\iint_{D_z} z^2 dx dy \right] dz = \int_{-c}^c z^2 \left[\iint_{D_z} dx dy \right] dz \\
 &= \int_{-c}^c z^2 \left[\pi \cdot ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2} \right) \right] dz \\
 &= \pi \cdot ab \int_{-c}^c \left(z^2 - \frac{z^4}{c^2} \right) dz = \frac{4}{15} \pi abc^3
 \end{aligned}$$

例 2 计算 $\iiint_{\Omega} (x^2 + 5xy^2 \sin \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 与平面 $z = 1$ 和 $z = 4$ 所围成。



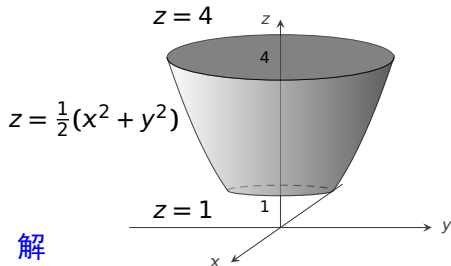
例 2 计算 $\iiint_{\Omega} (x^2 + 5xy^2 \sin \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 与平面 $z = 1$ 和 $z = 4$ 所围成。



解

原式 $\xrightarrow{\text{对称性}} \iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz$

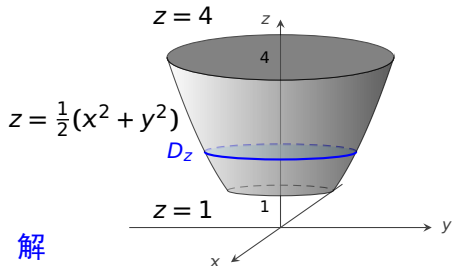
例 2 计算 $\iiint_{\Omega} (x^2 + 5xy^2 \sin \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 与平面 $z = 1$ 和 $z = 4$ 所围成。



解

$$\text{原式} \stackrel{\text{对称性}}{=} \iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz = \int \left[\iint x^2 dx dy \right] dz$$

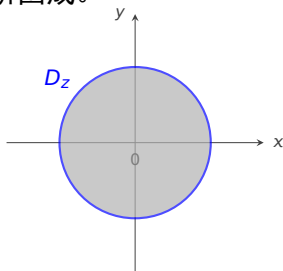
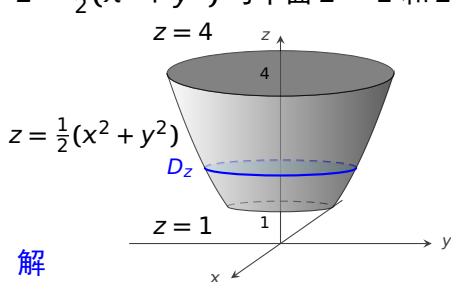
例 2 计算 $\iiint_{\Omega} (x^2 + 5xy^2 \sin \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 与平面 $z = 1$ 和 $z = 4$ 所围成。



解

$$\text{原式} \stackrel{\text{对称性}}{=} \iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz = \int \left[\iint x^2 dx dy \right] dz$$

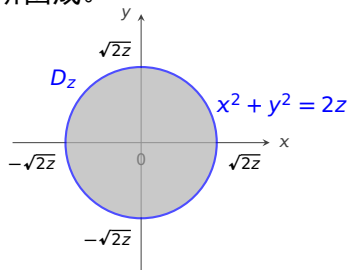
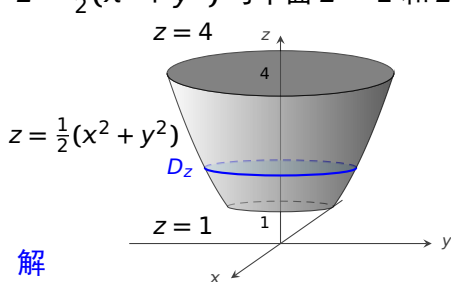
例 2 计算 $\iiint_{\Omega} (x^2 + 5xy^2 \sin \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 与平面 $z = 1$ 和 $z = 4$ 所围成。



解

$$\text{原式} \stackrel{\text{对称性}}{=} \iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz = \int \left[\iint x^2 dx dy \right] dz$$

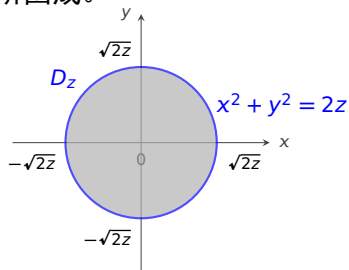
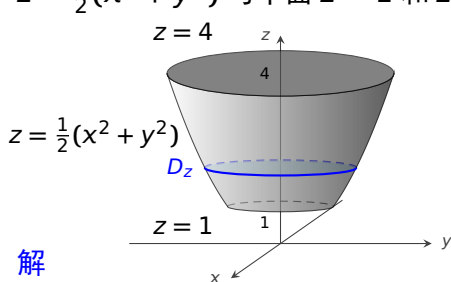
例 2 计算 $\iiint_{\Omega} (x^2 + 5xy^2 \sin \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 与平面 $z = 1$ 和 $z = 4$ 所围成。



解

$$\text{原式} \stackrel{\text{对称性}}{=} \iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz = \int \left[\iint x^2 dx dy \right] dz$$

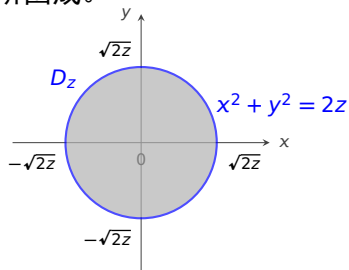
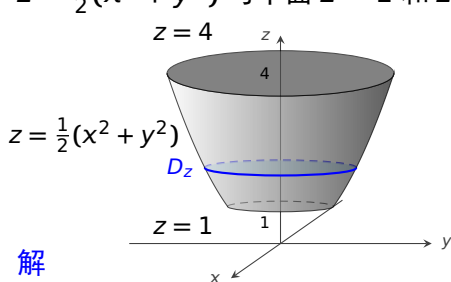
例 2 计算 $\iiint_{\Omega} (x^2 + 5xy^2 \sin \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 与平面 $z = 1$ 和 $z = 4$ 所围成。



解

$$\text{原式} \stackrel{\text{对称性}}{=} \iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz = \int_1^4 \left[\iint_{D_z} x^2 dx dy \right] dz$$

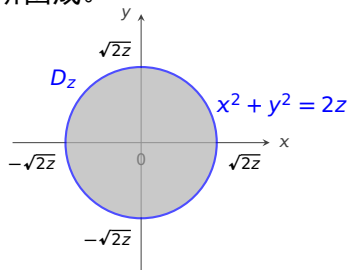
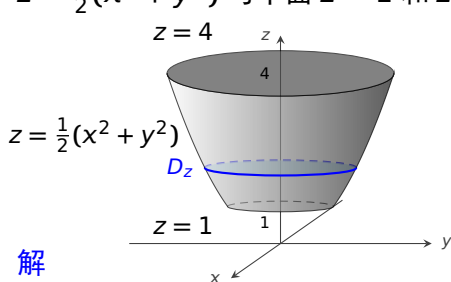
例 2 计算 $\iiint_{\Omega} (x^2 + 5xy^2 \sin \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 与平面 $z = 1$ 和 $z = 4$ 所围成。



解

$$\text{原式} \stackrel{\text{对称性}}{=} \iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz = \int_1^4 \left[\iint_{D_z} x^2 dx dy \right] dz$$

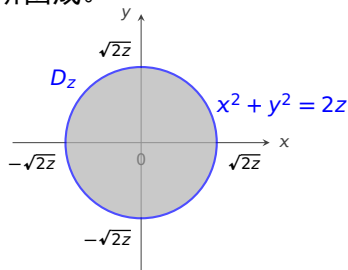
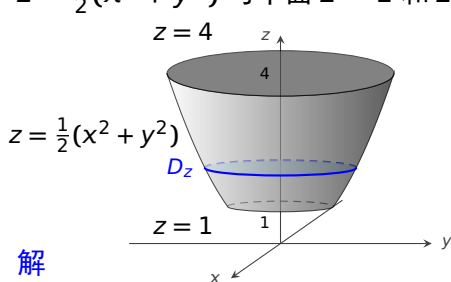
例 2 计算 $\iiint_{\Omega} (x^2 + 5xy^2 \sin \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 与平面 $z = 1$ 和 $z = 4$ 所围成。



解

$$\begin{aligned} \text{原式} &\stackrel{\text{对称性}}{=} \iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz = \int_1^4 \left[\iint_{D_z} x^2 dx dy \right] dz \\ &\quad \iint_{D_z} \frac{1}{2}(x^2 + y^2) dx dy \end{aligned}$$

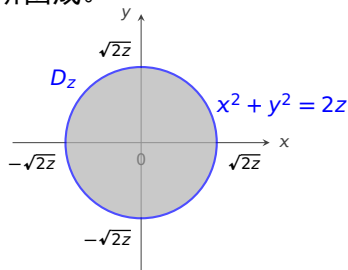
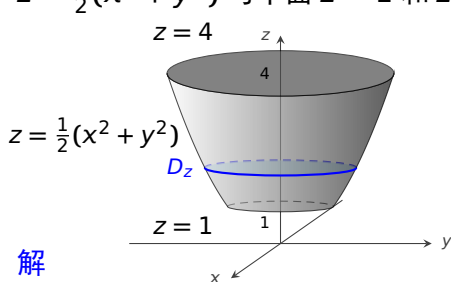
例 2 计算 $\iiint_{\Omega} (x^2 + 5xy^2 \sin \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 与平面 $z = 1$ 和 $z = 4$ 所围成。



解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &\stackrel{\text{对称性}}{=} \iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz = \int_1^4 \left[\iint_{D_z} x^2 dx dy \right] dz \\
 &= \int_1^4 \left[\iint_{D_z} \frac{1}{2}(x^2 + y^2) dx dy \right] dz
 \end{aligned}$$

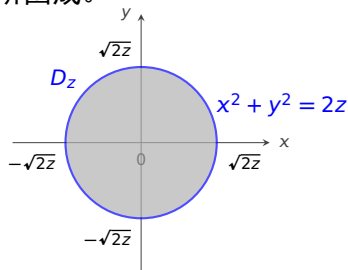
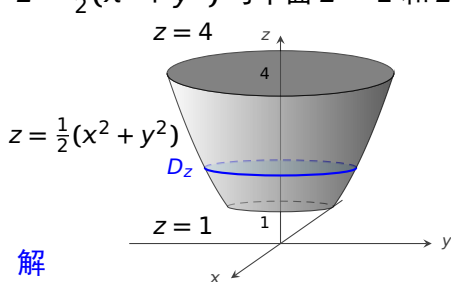
例 2 计算 $\iiint_{\Omega} (x^2 + 5xy^2 \sin \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 与平面 $z = 1$ 和 $z = 4$ 所围成。



解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &\stackrel{\text{对称性}}{=} \iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz = \int_1^4 \left[\iint_{D_z} x^2 dx dy \right] dz \\
 &= \int_1^4 \left[\iint_{D_z} \frac{1}{2}(x^2 + y^2) dx dy \right] dz \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{2z}} \rho^2 \cdot \rho d\rho \right) d\theta
 \end{aligned}$$

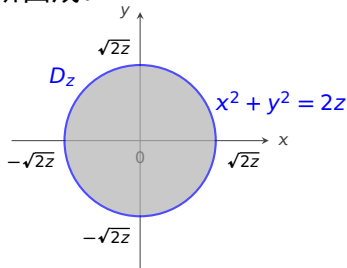
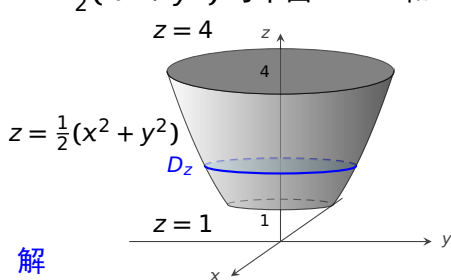
例 2 计算 $\iiint_{\Omega} (x^2 + 5xy^2 \sin \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 与平面 $z = 1$ 和 $z = 4$ 所围成。



解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &\stackrel{\text{对称性}}{=} \iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz = \int_1^4 \left[\iint_{D_z} x^2 dx dy \right] dz \\
 &= \int_1^4 \left[\iint_{D_z} \frac{1}{2}(x^2 + y^2) dx dy \right] dz \\
 &= \int_1^4 \left[\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{2z}} \rho^2 \cdot \rho d\rho \right) d\theta \right] dz
 \end{aligned}$$

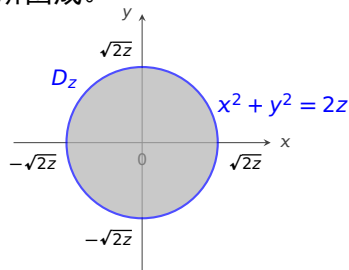
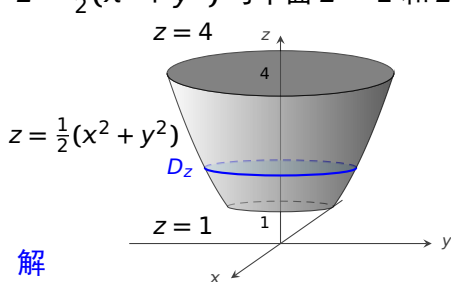
例 2 计算 $\iiint_{\Omega} (x^2 + 5xy^2 \sin \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 与平面 $z = 1$ 和 $z = 4$ 所围成。



解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &\stackrel{\text{对称性}}{=} \iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz = \int_1^4 \left[\iint_{D_z} x^2 dx dy \right] dz \\
 &= \int_1^4 \left[\iint_{D_z} \frac{1}{2}(x^2 + y^2) dx dy \right] dz \\
 &= \int_1^4 \left[\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{2z}} \rho^2 \cdot \rho d\rho \right) d\theta \right] dz = \pi \int_1^4 z^2 dz
 \end{aligned}$$

例 2 计算 $\iiint_{\Omega} (x^2 + 5xy^2 \sin \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 与平面 $z = 1$ 和 $z = 4$ 所围成。



解

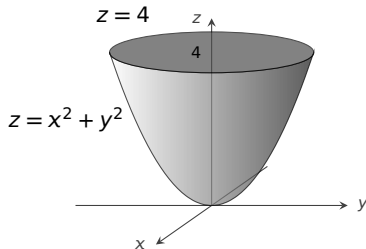
$$\begin{aligned}
 \text{原式} &\stackrel{\text{对称性}}{=} \iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz = \int_1^4 \left[\iint_{D_z} x^2 dx dy \right] dz \\
 &= \int_1^4 \left[\iint_{D_z} \frac{1}{2}(x^2 + y^2) dx dy \right] dz \\
 &= \int_1^4 \left[\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{2z}} \rho^2 \cdot \rho d\rho \right) d\theta \right] dz = \pi \int_1^4 z^2 dz = 21\pi
 \end{aligned}$$

- 上述坐标 (ρ, θ, z) 称为柱面坐标
- 变换

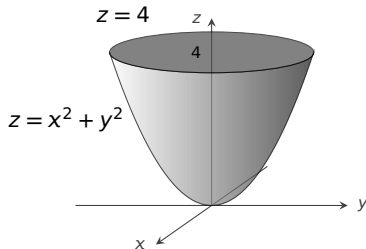
$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

柱面坐标变换

例 3 计算 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成的闭区域。



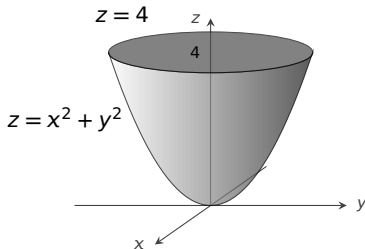
例 3 计算 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成的闭区域。



解 1

$$\text{原式} = \int \left[\iint z dx dy \right] dz$$

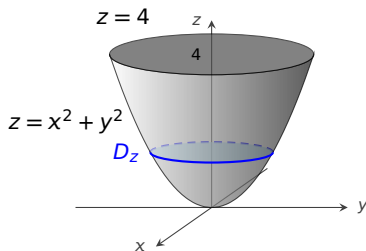
例 3 计算 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成的闭区域。



解 1

$$\text{原式} = \int_0^4 \left[\iint z dx dy \right] dz$$

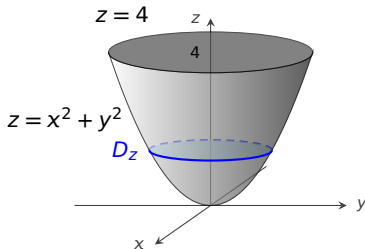
例 3 计算 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成的闭区域。



解 1

$$\text{原式} = \int_0^4 \left[\iint_{D_z} z dx dy \right] dz$$

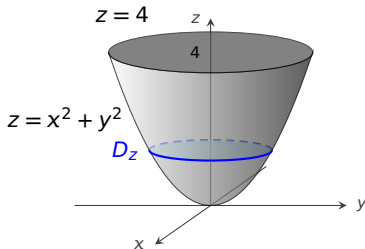
例 3 计算 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成的闭区域。



解 1

$$\text{原式} = \int_0^4 \left[\iint_{D_z} z dx dy \right] dz = \quad z |D_z|$$

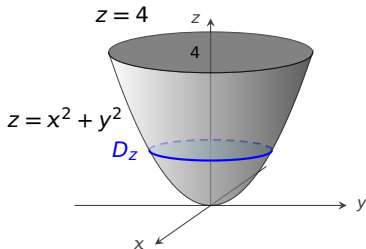
例 3 计算 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成的闭区域。



解 1

$$\text{原式} = \int_0^4 \left[\iint_{D_z} z dx dy \right] dz = \int_0^4 z |D_z| dz$$

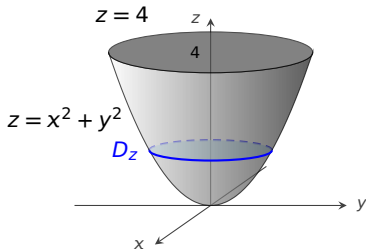
例 3 计算 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成的闭区域。



解 1

$$\text{原式} = \int_0^4 \left[\iint_{D_z} z dx dy \right] dz = \int_0^4 z |D_z| dz = \int_0^4 z \cdot \pi z dz$$

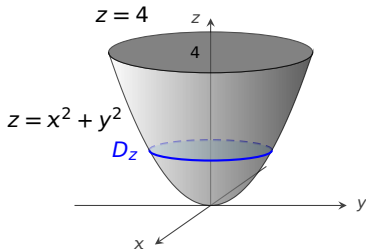
例 3 计算 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成的闭区域。



解 1

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_0^4 \left[\iint_{D_z} z dx dy \right] dz = \int_0^4 z |D_z| dz = \int_0^4 z \cdot \pi z dz \\ &= \pi \frac{1}{3} z^3 \Big|_0^4 \end{aligned}$$

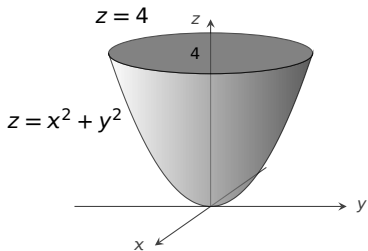
例 3 计算 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成的闭区域。



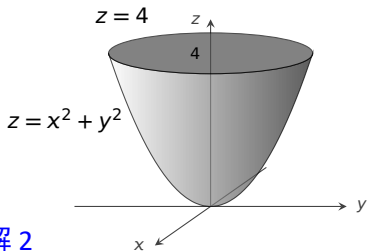
解 1

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int_0^4 \left[\iint_{D_z} z dx dy \right] dz = \int_0^4 z |D_z| dz = \int_0^4 z \cdot \pi z dz \\ &= \pi \frac{1}{3} z^3 \Big|_0^4 = \frac{64}{3} \pi.\end{aligned}$$

例 3 计算 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成的闭区域。



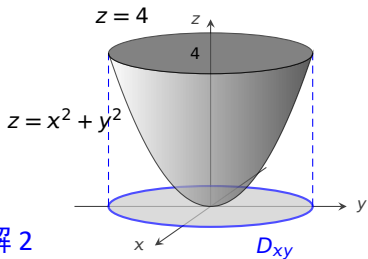
例 3 计算 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成的闭区域。



解 2

$$\text{原式} = \iiint \left[\int z dz \right] dx dy$$

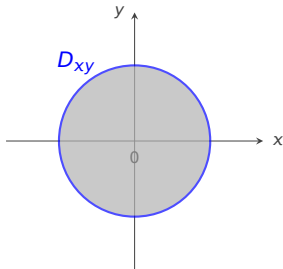
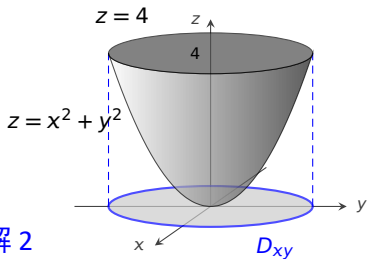
例 3 计算 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成的闭区域。



解 2

$$\text{原式} = \iint \left[\int z dz \right] dx dy$$

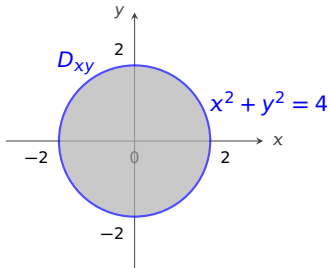
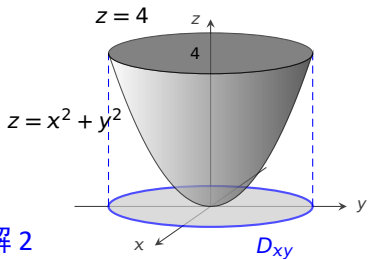
例 3 计算 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成的闭区域。



解 2

$$\text{原式} = \iiint \left[\int z dz \right] dx dy$$

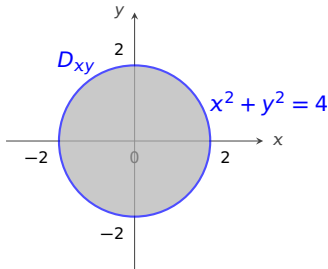
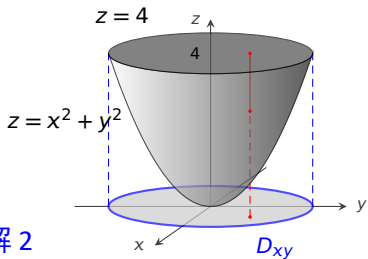
例 3 计算 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成的闭区域。



解 2

$$\text{原式} = \iiint \left[\int z dz \right] dx dy$$

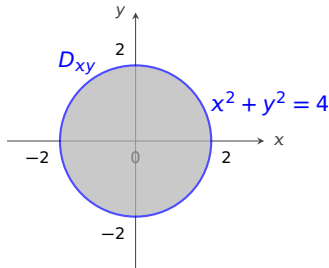
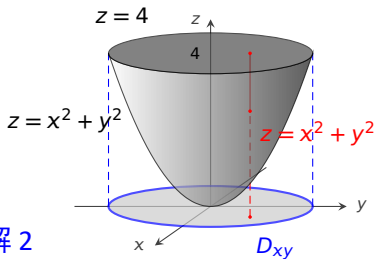
例 3 计算 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成的闭区域。



解 2

$$\text{原式} = \iiint_{\Omega} z dx dy dz = \iint_{D_{xy}} \left[\int_{x^2+y^2}^4 z dz \right] dx dy$$

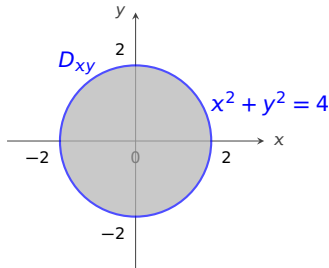
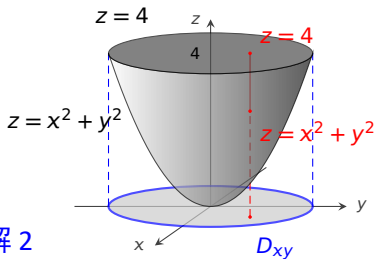
例 3 计算 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成的闭区域。



解 2

$$\text{原式} = \iiint \left[\int z dz \right] dx dy$$

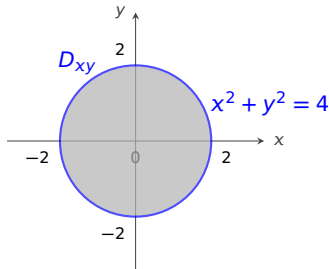
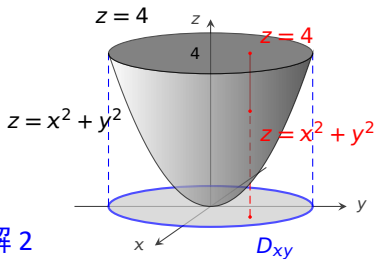
例 3 计算 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成的闭区域。



解 2

$$\text{原式} = \iiint \left[\int z dz \right] dx dy$$

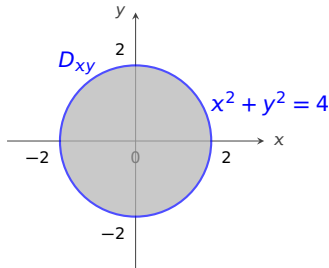
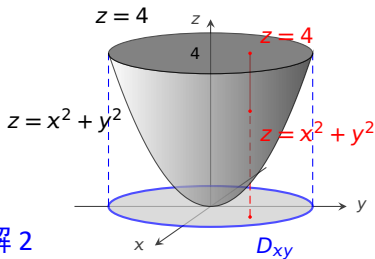
例 3 计算 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成的闭区域。



解 2

$$\text{原式} = \iiint_{D_{xy}} \left[\int z dz \right] dx dy$$

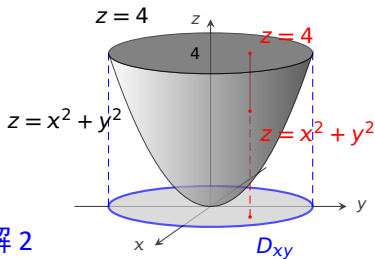
例 3 计算 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成的闭区域。



解 2

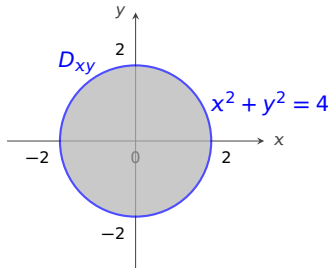
$$\text{原式} = \iiint_{D_{xy}} \left[\int_{x^2+y^2}^4 z dz \right] dx dy$$

例 3 计算 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成的闭区域。



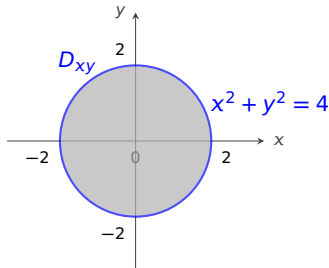
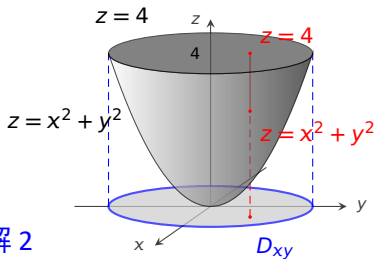
解 2

$$\text{原式} = \iiint_{D_{xy}} \left[\int_{x^2+y^2}^4 z dz \right] dx dy$$



$$\frac{1}{2} [16 - (x^2 + y^2)^2]$$

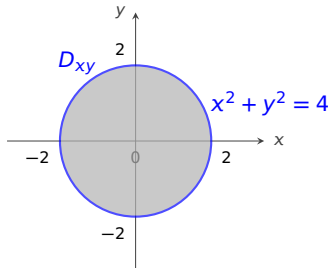
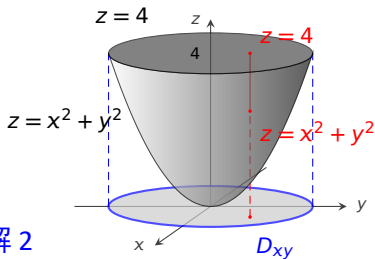
例 3 计算 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成的闭区域。



解 2

$$\text{原式} = \iiint_{D_{xy}} \left[\int_{x^2+y^2}^4 z dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} [16 - (x^2 + y^2)^2] dx dy$$

例 3 计算 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成的闭区域。

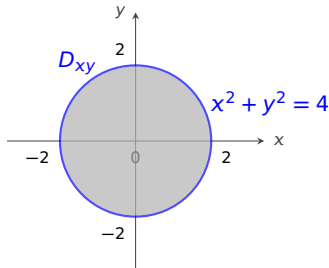
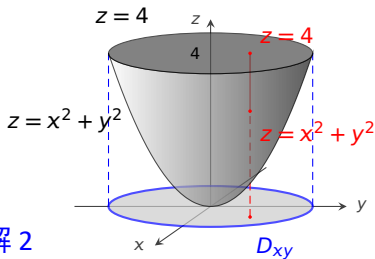


解 2

$$\text{原式} = \iiint_{D_{xy}} \left[\int_{x^2+y^2}^4 z dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} [16 - (x^2 + y^2)^2] dx dy$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{x &= \rho \cos \theta}} \\ \underline{\underline{y &= \rho \sin \theta}} \end{aligned}$$

例 3 计算 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成的闭区域。

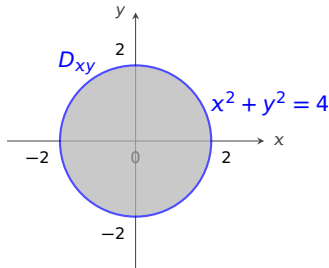
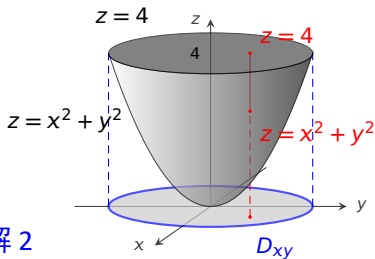


解 2

$$\text{原式} = \iiint_{D_{xy}} \left[\int_{x^2+y^2}^4 z dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} [16 - (x^2 + y^2)^2] dx dy$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow[y=\rho \sin \theta]{x=\rho \cos \theta} \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} [16 - \rho^4] \end{aligned}$$

例 3 计算 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成的闭区域。

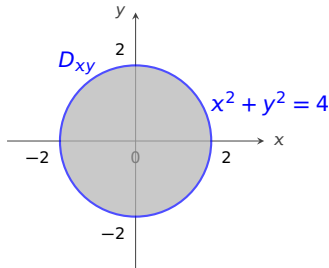
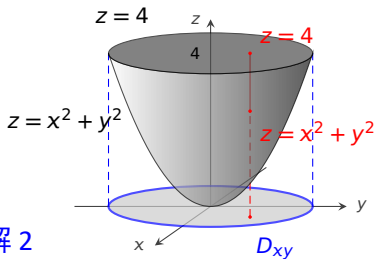


解 2

$$\text{原式} = \iiint_{D_{xy}} \left[\int_{x^2+y^2}^4 z dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} [16 - (x^2 + y^2)^2] dx dy$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow[y=\rho \sin \theta]{x=\rho \cos \theta} \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} [16 - \rho^4] \cdot \rho d\rho d\theta \end{aligned}$$

例 3 计算 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成的闭区域。



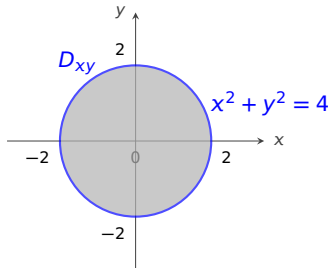
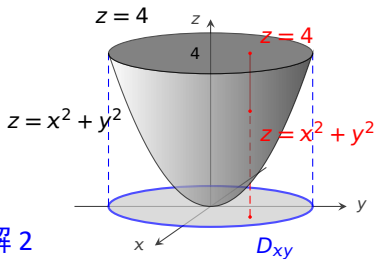
解 2

$$\text{原式} = \iiint_{D_{xy}} \left[\int_{x^2+y^2}^4 z dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} [16 - (x^2 + y^2)^2] dx dy$$

$$\begin{aligned} \frac{x=\rho \cos \theta}{y=\rho \sin \theta} \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} [16 - \rho^4] \cdot \rho d\rho d\theta \end{aligned}$$

$$= \int \left[\int \frac{1}{2} [16 - \rho^4] \cdot \rho d\rho \right] d\theta$$

例 3 计算 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成的闭区域。



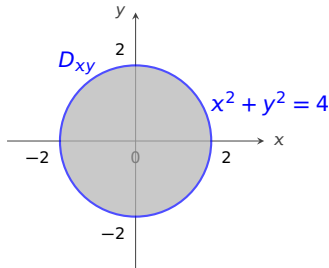
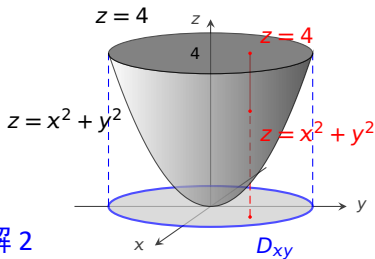
解 2

$$\text{原式} = \iiint_{D_{xy}} \left[\int_{x^2+y^2}^4 z dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} [16 - (x^2 + y^2)^2] dx dy$$

$$\begin{aligned} \frac{x=\rho \cos \theta}{y=\rho \sin \theta} \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} [16 - \rho^4] \cdot \rho d\rho d\theta \end{aligned}$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\int \frac{1}{2} [16 - \rho^4] \cdot \rho d\rho \right] d\theta$$

例 3 计算 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成的闭区域。



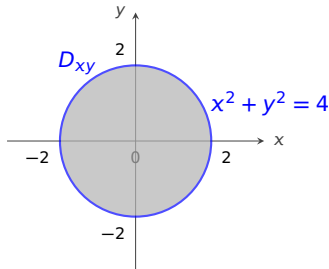
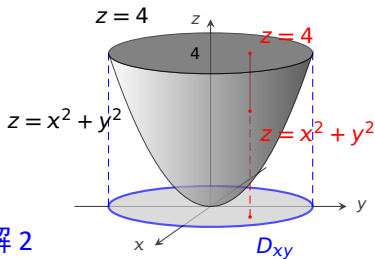
解 2

$$\text{原式} = \iiint_{D_{xy}} \left[\int_{x^2+y^2}^4 z dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} [16 - (x^2 + y^2)^2] dx dy$$

$$\begin{aligned} \frac{x=\rho \cos \theta}{y=\rho \sin \theta} \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} [16 - \rho^4] \cdot \rho d\rho d\theta \end{aligned}$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^2 \frac{1}{2} [16 - \rho^4] \cdot \rho d\rho \right] d\theta$$

例 3 计算 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成的闭区域。



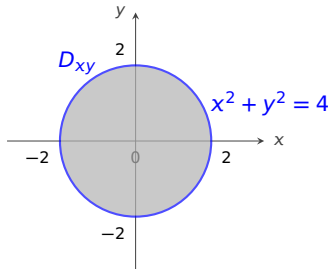
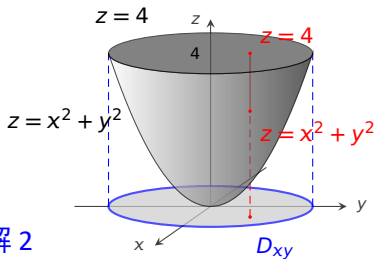
解 2

$$\text{原式} = \iiint_{D_{xy}} \left[\int_{x^2+y^2}^4 z dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} [16 - (x^2 + y^2)^2] dx dy$$

$$\begin{matrix} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{matrix} \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} [16 - \rho^4] \cdot \rho d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^2 \frac{1}{2} [16 - \rho^4] \cdot \rho d\rho \right] d\theta = \pi \int_0^2 (16 - \rho^4) \cdot \rho d\rho$$

例 3 计算 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成的闭区域。



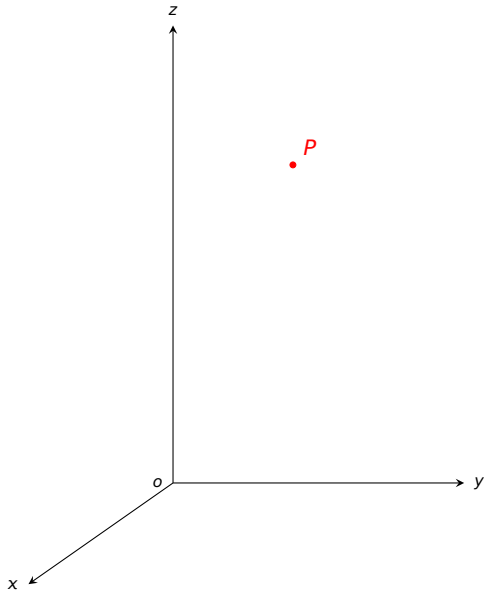
解 2

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iiint_{D_{xy}} \left[\int_{x^2+y^2}^4 z dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} [16 - (x^2 + y^2)^2] dx dy \\
 &\stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} [16 - \rho^4] \cdot \rho d\rho d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^2 \frac{1}{2} [16 - \rho^4] \cdot \rho d\rho \right] d\theta = \pi \int_0^2 (16 - \rho^4) \cdot \rho d\rho = \frac{64}{3} \pi
 \end{aligned}$$

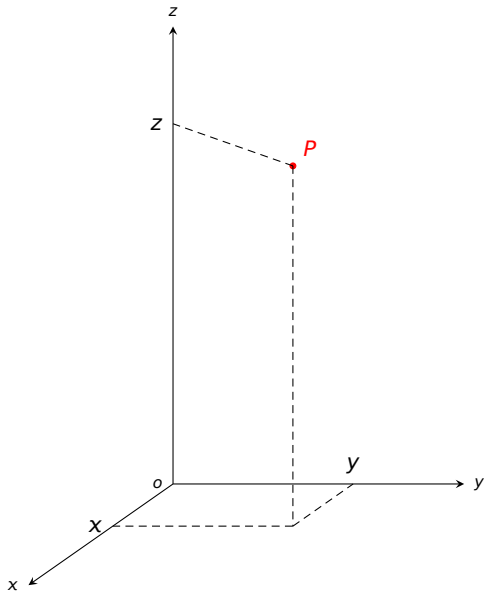
We are here now...

1. 三重积分的概念
2. 三重积分的计算：化为累次积分
3. 球面坐标

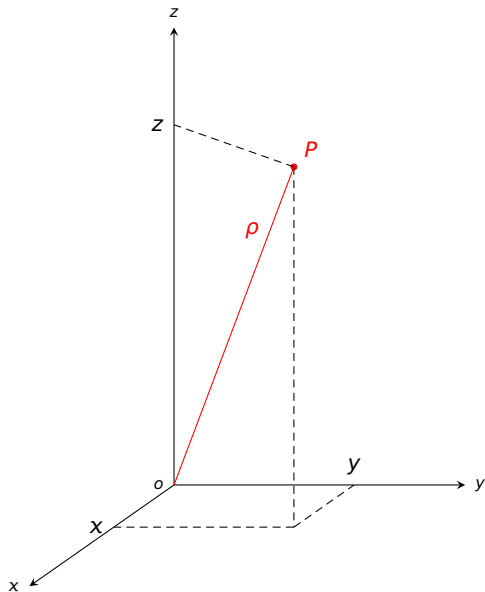
球面坐标



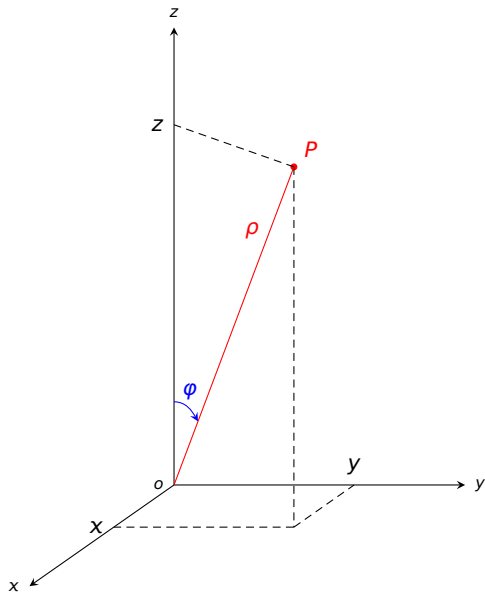
球面坐标



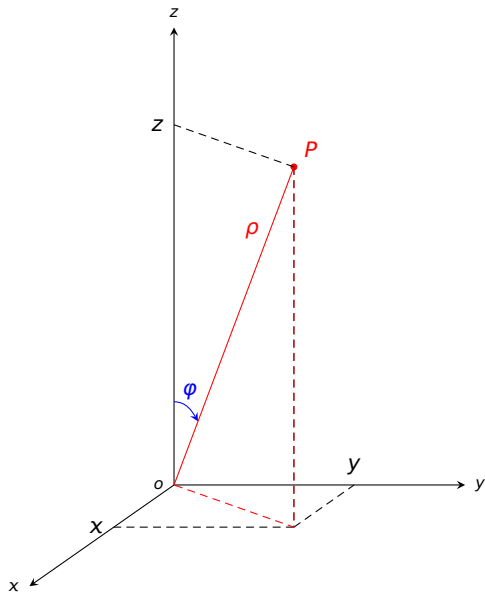
球面坐标



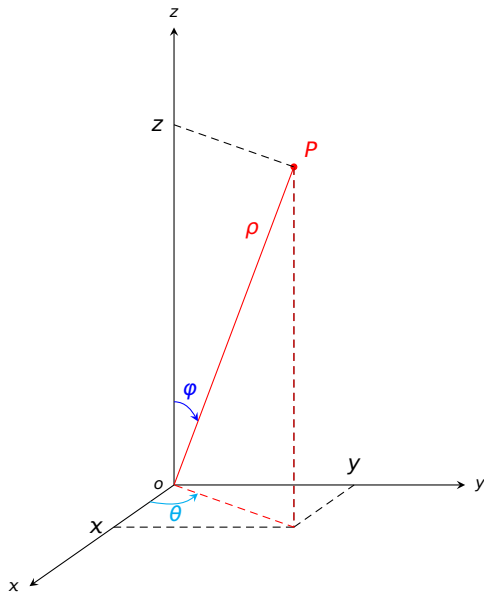
球面坐标



球面坐标

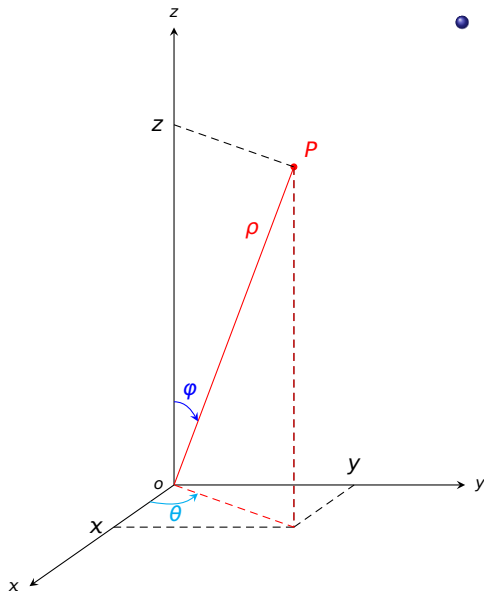


球面坐标



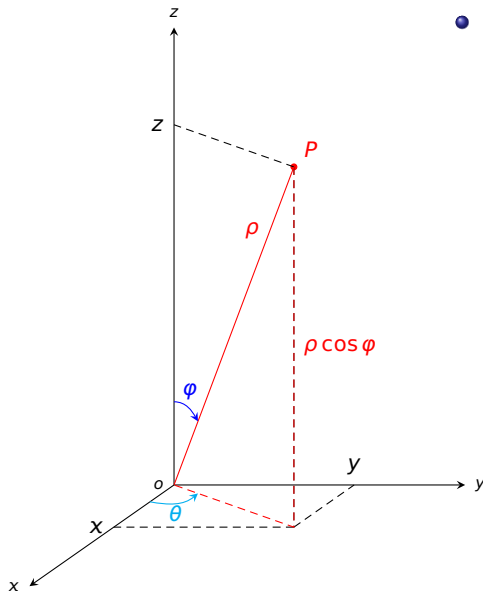
球面坐标

- 直角坐标 (x, y, z) , 球面坐标 (ρ, φ, θ) 的转换:



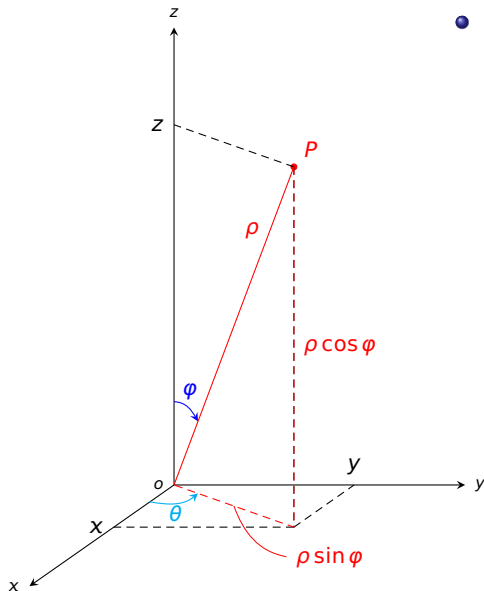
球面坐标

- 直角坐标 (x, y, z) , 球面坐标 (ρ, φ, θ) 的转换:

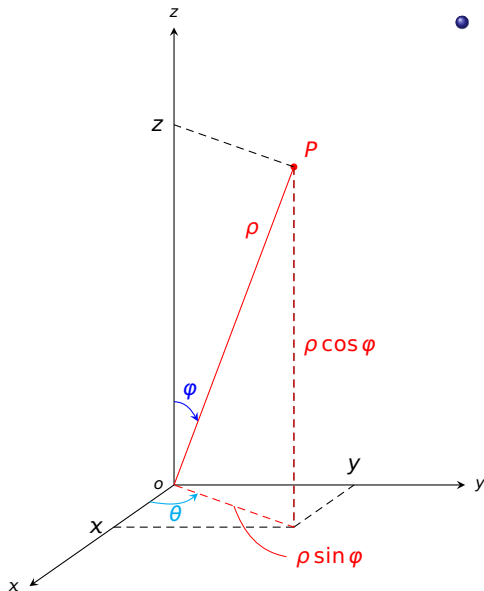


球面坐标

- 直角坐标 (x, y, z) , 球面坐标 (ρ, φ, θ) 的转换:



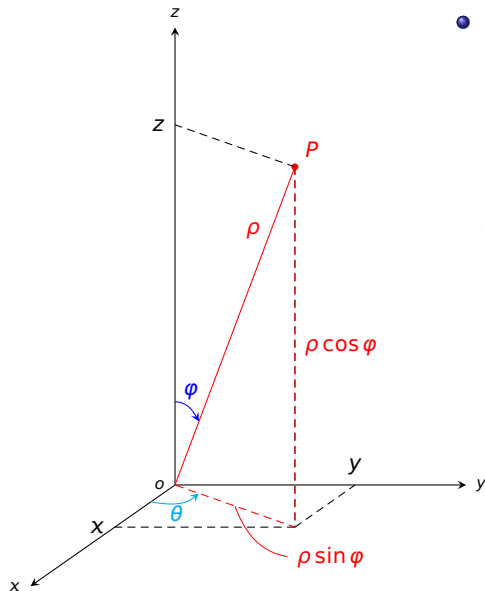
球面坐标



- 直角坐标 (x, y, z) , 球面坐标 (ρ, φ, θ) 的转换:

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

球面坐标

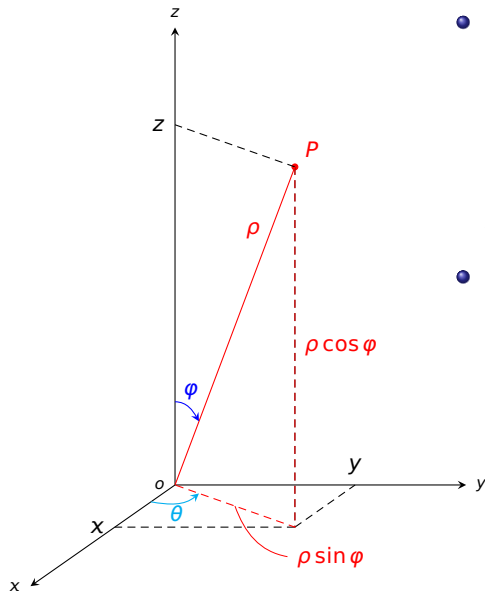


- 直角坐标 (x, y, z) , 球面坐标 (ρ, φ, θ) 的转换:

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

特别地, $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$

球面坐标



- 直角坐标 (x, y, z) , 球面坐标 (ρ, φ, θ) 的转换:

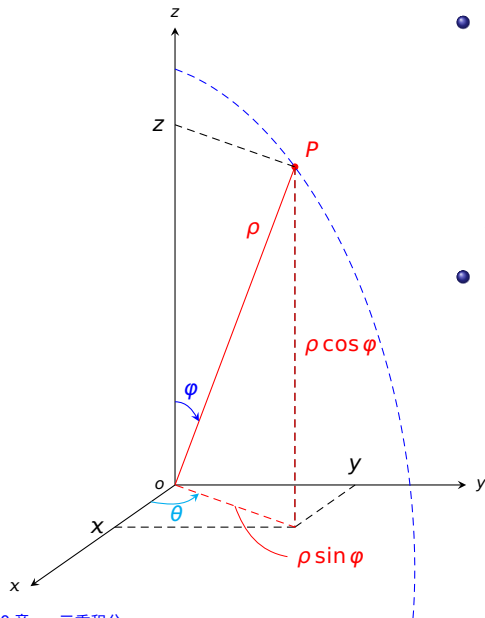
$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

特别地, $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$

- 注

$$0 \leq \rho < \infty,$$

球面坐标



- 直角坐标 (x, y, z) , 球面坐标 (ρ, φ, θ) 的转换:

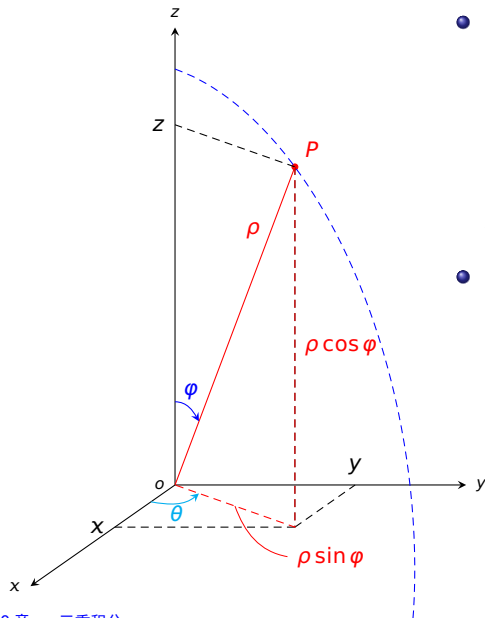
$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

特别地, $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$

- 注

$$0 \leq \rho < \infty,$$

球面坐标



- 直角坐标 (x, y, z) , 球面坐标 (ρ, φ, θ) 的转换:

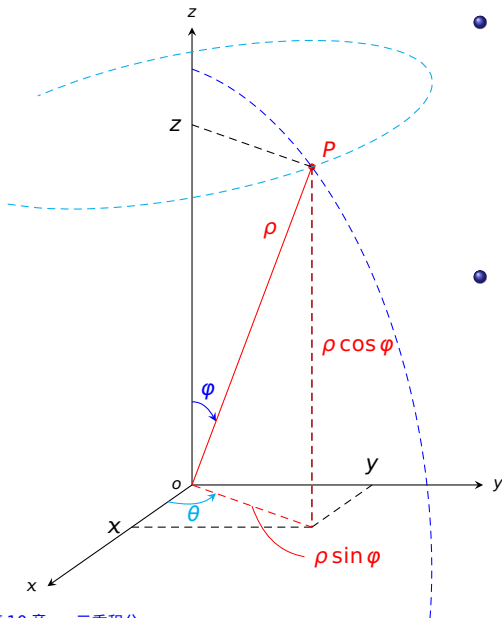
$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

特别地, $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$

- 注

$$0 \leq \rho < \infty, 0 \leq \varphi \leq \pi,$$

球面坐标



- 直角坐标 (x, y, z) , 球面坐标 (ρ, φ, θ) 的转换:

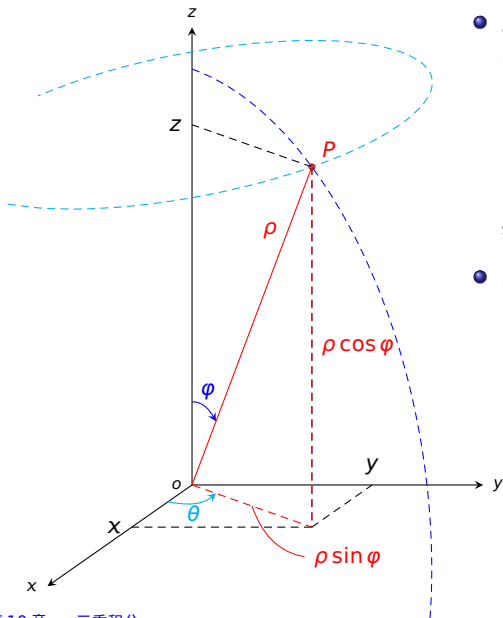
$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

特别地, $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$

- 注

$$0 \leq \rho < \infty, 0 \leq \varphi \leq \pi,$$

球面坐标



- 直角坐标 (x, y, z) , 球面坐标 (ρ, φ, θ) 的转换:

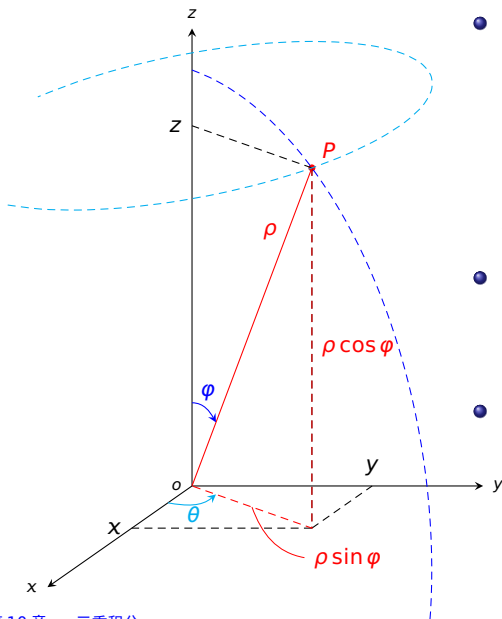
$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

特别地, $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$

- 注

$$0 \leq \rho < \infty, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

球面坐标



- 直角坐标 (x, y, z) , 球面坐标 (ρ, φ, θ) 的转换:

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

特别地, $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$

- 注

$$0 \leq \rho < \infty, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

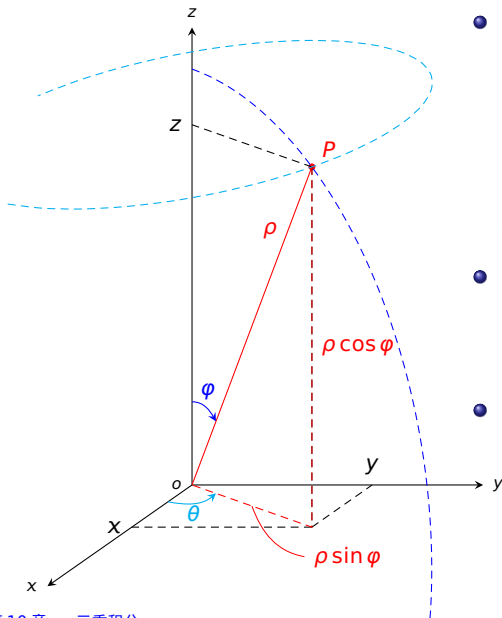
- 注 三组坐标面

- $\rho = \rho_0$:

- $\varphi = \varphi_0$:

- $\theta = \theta_0$:

球面坐标



- 直角坐标 (x, y, z) , 球面坐标 (ρ, φ, θ) 的转换:

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

特别地, $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$

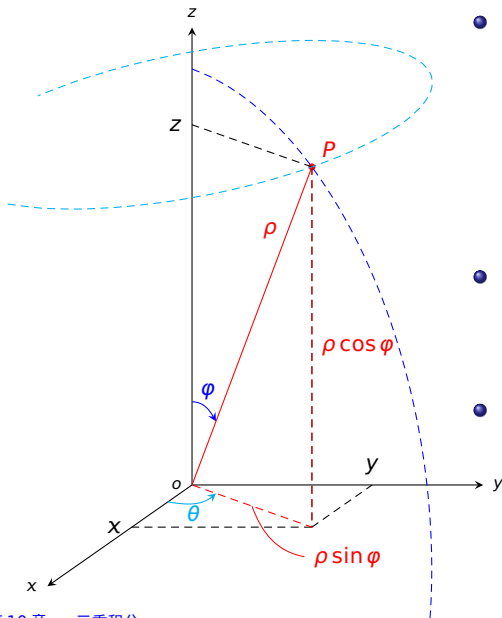
- 注

$$0 \leq \rho < \infty, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

- 注 三组坐标面

- $\rho = \rho_0$: 球面
- $\varphi = \varphi_0$:
- $\theta = \theta_0$:

球面坐标



- 直角坐标 (x, y, z) , 球面坐标 (ρ, φ, θ) 的转换:

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

特别地, $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$

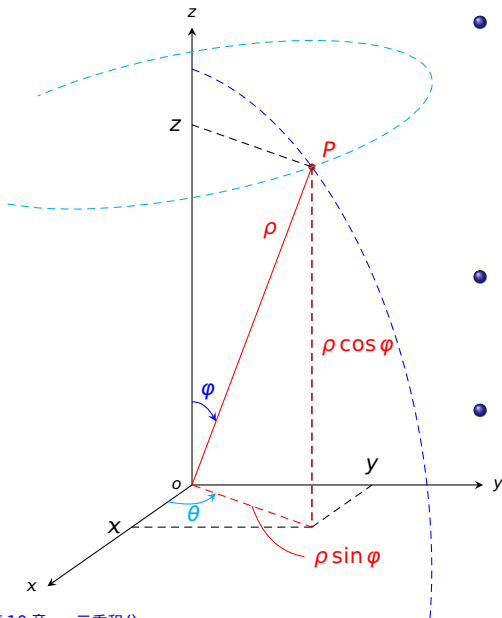
- 注

$$0 \leq \rho < \infty, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

- 注 三组坐标面

- $\rho = \rho_0$: 球面
- $\varphi = \varphi_0$: 以原点为顶点、 z 轴为轴的圆锥面
- $\theta = \theta_0$:

球面坐标



- 直角坐标 (x, y, z) ，球面坐标 (ρ, φ, θ) 的转换：

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

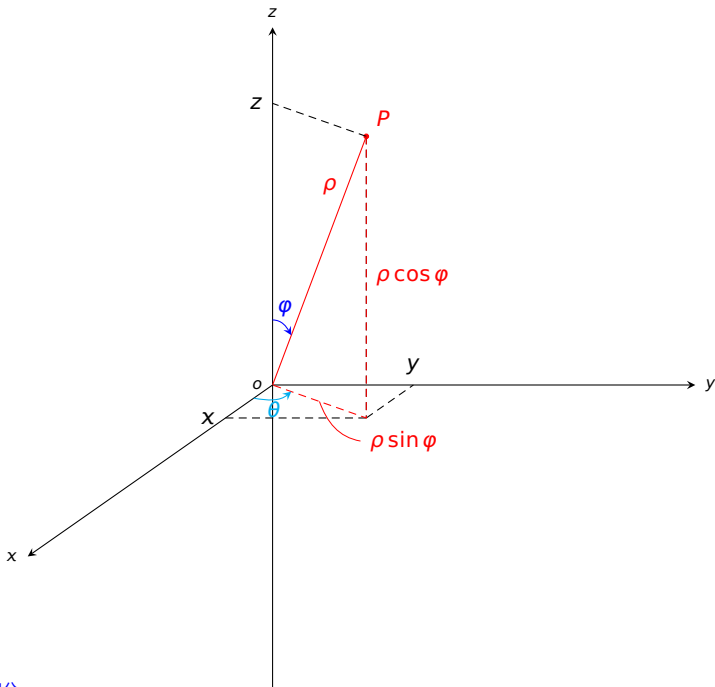
特别地， $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$

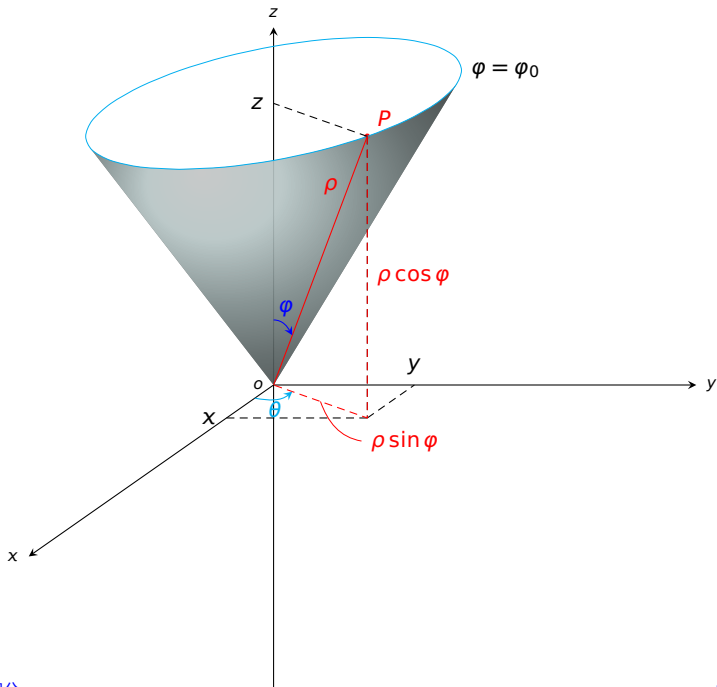
- 注

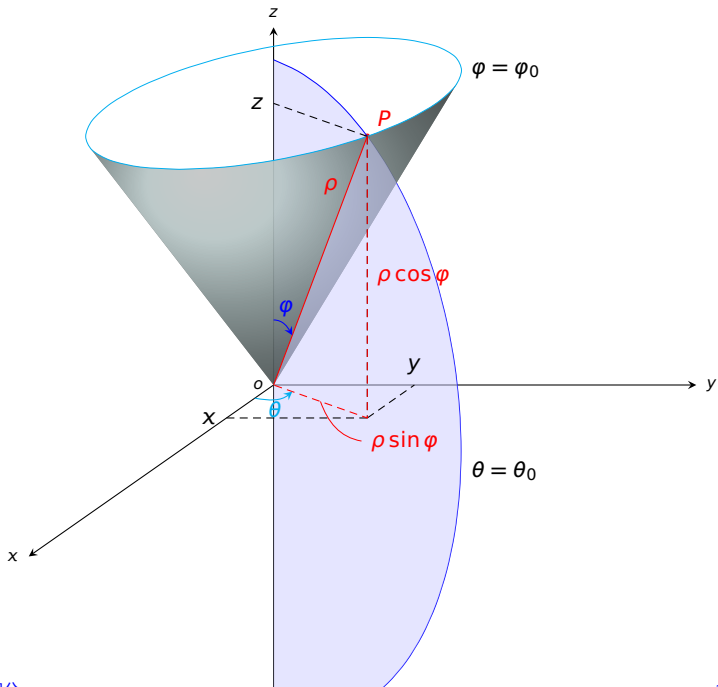
$$0 \leq \rho < \infty, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

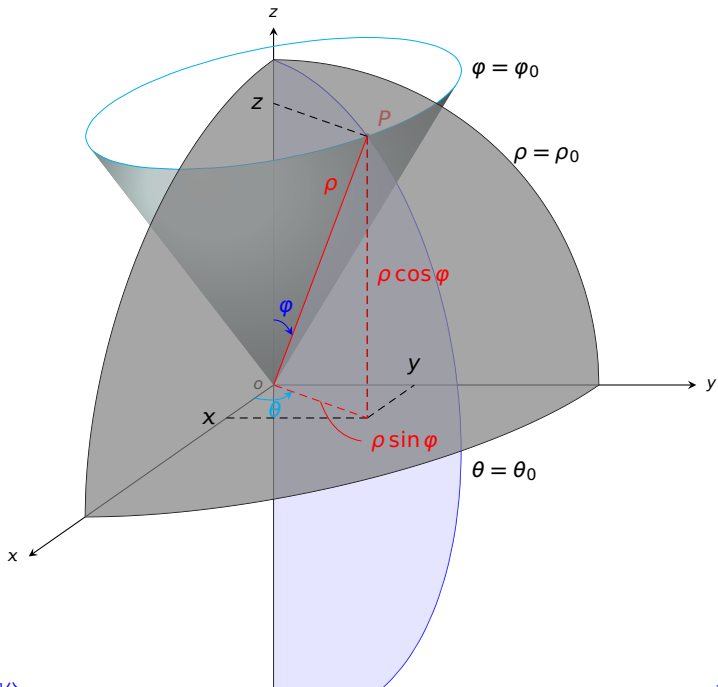
- 注 三组坐标面

- $\rho = \rho_0$ ：球面
- $\varphi = \varphi_0$ ：以原点为顶点、 z 轴为轴的圆锥面
- $\theta = \theta_0$ ：过 z 轴的半平面









例 函数 $f(x, y, z) = e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ 在球面坐标系下的表示是什么？

例 球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ 在球面坐标下的表示是什么？

例 函数 $f(x, y, z) = e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ 在球面坐标系下的表示是什么？

解 因为 $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$ ，所以 $f = e^{\rho^3}$

例 球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ 在球面坐标下的表示是什么？

例 函数 $f(x, y, z) = e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ 在球面坐标系下的表示是什么？

解 因为 $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$ ，所以 $f = e^{\rho^3}$

例 球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ 在球面坐标下的表示是什么？

解 $\{0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$

球面坐标下计算三重积分

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv \quad \begin{array}{l} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{array}$$

球面坐标下计算三重积分

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv \quad \begin{array}{l} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{array}$$

$$\iiint_{\Omega} f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi)$$

球面坐标下计算三重积分

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv \quad \begin{array}{l} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{array}$$

$$\iiint_{\Omega} f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta$$

球面坐标下计算三重积分

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv \quad \begin{array}{l} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{array}$$

$$\iiint_{\Omega} f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$F(\rho, \varphi, \theta)$$

球面坐标下计算三重积分

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv \quad \begin{array}{l} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{array}$$

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int \left\{ \int \left[\int F(\rho, \varphi, \theta) \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta \end{aligned}$$

球面坐标下计算三重积分

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv \quad \begin{array}{l} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{array}$$

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int \left\{ \int \left[\int F(\rho, \varphi, \theta) \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta \end{aligned}$$

- 当 Ω 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ 时,

球面坐标下计算三重积分

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv \quad \begin{array}{l} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{array}$$

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int \left\{ \int \left[\int F(\rho, \varphi, \theta) \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta \end{aligned}$$

- 当 Ω 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ 时,

$$\Omega = \{0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

球面坐标下计算三重积分

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv \quad \begin{array}{l} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{array}$$

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int \left\{ \int \left[\int F(\rho, \varphi, \theta) \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta \end{aligned}$$

- 当 Ω 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ 时,

$$\Omega = \{0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

并且

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \int \left\{ \int \left[\int F(\rho, \varphi, \theta) \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta$$

球面坐标下计算三重积分

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv \quad \begin{array}{l} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{array}$$

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int \left\{ \int \left[\int F(\rho, \varphi, \theta) \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta \end{aligned}$$

- 当 Ω 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ 时,

$$\Omega = \{0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

并且

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \int_0^{2\pi} \left\{ \int \left[\int F(\rho, \varphi, \theta) \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta$$

球面坐标下计算三重积分

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv \quad \begin{array}{l} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{array}$$

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int \left\{ \int \left[\int F(\rho, \varphi, \theta) \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta \end{aligned}$$

- 当 Ω 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ 时,

$$\Omega = \{0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

并且

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \left[\int_0^a F(\rho, \varphi, \theta) \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta$$

球面坐标下计算三重积分

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv \quad \begin{array}{l} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{array}$$

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int \left\{ \int \left[\int F(\rho, \varphi, \theta) \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta \end{aligned}$$

- 当 Ω 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ 时,

$$\Omega = \{0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

并且

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \left[\int_0^a F(\rho, \varphi, \theta) \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta$$

例 求 $\iiint_{\Omega} e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy dz$, 其中 Ω 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 。

例 求 $\iiint_{\Omega} e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy dz$, 其中 Ω 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 。

解 引入球面坐标

$$\text{原式} = \iiint_{\Omega} e^{\rho^3}$$

例 求 $\iiint_{\Omega} e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy dz$, 其中 Ω 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 。

解 引入球面坐标

$$\text{原式} = \iiint_{\Omega} e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta$$

例 求 $\iiint_{\Omega} e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy dz$, 其中 Ω 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 。

解 引入球面坐标

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint_{\Omega} e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int \left\{ \int \left[\int e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta \end{aligned}$$

例 求 $\iiint_{\Omega} e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy dz$, 其中 Ω 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 。

解 引入球面坐标

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint_{\Omega} e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{ \int \left[\int e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta \end{aligned}$$

例 求 $\iiint_{\Omega} e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy dz$, 其中 Ω 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 。

解 引入球面坐标

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint_{\Omega} e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \left[\int e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta \end{aligned}$$

例 求 $\iiint_{\Omega} e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy dz$, 其中 Ω 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 。

解 引入球面坐标

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint_{\Omega} e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \left[\int_0^R e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta \end{aligned}$$

例 求 $\iiint_{\Omega} e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy dz$, 其中 Ω 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 。

解 引入球面坐标

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint_{\Omega} e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \left[\int_0^R e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta \\ &= 2\pi \cdot \end{aligned}$$

例 求 $\iiint_{\Omega} e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy dz$, 其中 Ω 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 。

解 引入球面坐标

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint_{\Omega} e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \left[\int_0^R e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta \\ &= 2\pi \cdot \left\{ \int_0^{\pi} \left[\int_0^R e^{\rho^3} \cdot \rho^2 d\rho \right] \sin \varphi d\varphi \right\} \end{aligned}$$

例 求 $\iiint_{\Omega} e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy dz$, 其中 Ω 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 。

解 引入球面坐标

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint_{\Omega} e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \left[\int_0^R e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta \\ &= 2\pi \cdot \left\{ \int_0^{\pi} \left[\int_0^R e^{\rho^3} \cdot \rho^2 d\rho \right] \sin \varphi d\varphi \right\} \\ &= 2\pi \cdot \left[\int_0^R e^{\rho^3} \cdot \rho^2 d\rho \right] \cdot \left[\int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \right] \end{aligned}$$

例 求 $\iiint_{\Omega} e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy dz$, 其中 Ω 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 。

解 引入球面坐标

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint_{\Omega} e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \left[\int_0^R e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta \\ &= 2\pi \cdot \left\{ \int_0^{\pi} \left[\int_0^R e^{\rho^3} \cdot \rho^2 d\rho \right] \sin \varphi d\varphi \right\} \\ &= 2\pi \cdot \left[\int_0^R e^{\rho^3} \cdot \rho^2 d\rho \right] \cdot \left[\int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \right] \\ &\quad \left(\frac{1}{3} e^{\rho^3} \right) \end{aligned}$$

例 求 $\iiint_{\Omega} e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy dz$, 其中 Ω 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 。

解 引入球面坐标

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint_{\Omega} e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \left[\int_0^R e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta \\ &= 2\pi \cdot \left\{ \int_0^{\pi} \left[\int_0^R e^{\rho^3} \cdot \rho^2 d\rho \right] \sin \varphi d\varphi \right\} \\ &= 2\pi \cdot \left[\int_0^R e^{\rho^3} \cdot \rho^2 d\rho \right] \cdot \left[\int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \right] \\ &\quad \left(\frac{1}{3} e^{\rho^3} \right) \Big|_0^R \end{aligned}$$

例 求 $\iiint_{\Omega} e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy dz$, 其中 Ω 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 。

解 引入球面坐标

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint_{\Omega} e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \left[\int_0^R e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta \\ &= 2\pi \cdot \left\{ \int_0^{\pi} \left[\int_0^R e^{\rho^3} \cdot \rho^2 d\rho \right] \sin \varphi d\varphi \right\} \\ &= 2\pi \cdot \left[\int_0^R e^{\rho^3} \cdot \rho^2 d\rho \right] \cdot \left[\int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \right] \\ &= 2\pi \cdot \left(\frac{1}{3} e^{\rho^3} \right) \Big|_0^R \cdot 2 \end{aligned}$$

例 求 $\iiint_{\Omega} e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy dz$, 其中 Ω 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 。

解 引入球面坐标

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint_{\Omega} e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \left[\int_0^R e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta \\ &= 2\pi \cdot \left\{ \int_0^{\pi} \left[\int_0^R e^{\rho^3} \cdot \rho^2 d\rho \right] \sin \varphi d\varphi \right\} \\ &= 2\pi \cdot \left[\int_0^R e^{\rho^3} \cdot \rho^2 d\rho \right] \cdot \left[\int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \right] \\ &= 2\pi \cdot \left(\frac{1}{3} e^{\rho^3} \right) \Big|_0^R \cdot 2 = \frac{4}{3} \pi (e^{R^3} - 1) \end{aligned}$$

例 计算球体 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 的体积 (利用球面坐标)。

例 计算球体 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 的体积 (利用球面坐标)。

解

$$\text{球体体积} = \iiint_{\Omega} 1 dx dy dz$$

例 计算球体 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 的体积 (利用球面坐标)。

解

$$\text{球体体积} = \iiint_{\Omega} 1 dx dy dz = \iiint_{\Omega} 1 \cdot \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

例 计算球体 Ω : $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 的体积 (利用球面坐标)。

解

$$\begin{aligned}\text{球体体积} &= \iiint_{\Omega} 1 dx dy dz = \iiint_{\Omega} 1 \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int \left\{ \int \left[\int \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta\end{aligned}$$

例 计算球体 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 的体积 (利用球面坐标)。

解

$$\begin{aligned}\text{球体体积} &= \iiint_{\Omega} 1 dx dy dz = \iiint_{\Omega} 1 \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{ \int \left[\int \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta\end{aligned}$$

例 计算球体 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 的体积 (利用球面坐标)。

解

$$\begin{aligned}\text{球体体积} &= \iiint_{\Omega} 1 dx dy dz = \iiint_{\Omega} 1 \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \left[\int \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta\end{aligned}$$

例 计算球体 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 的体积 (利用球面坐标)。

解

$$\begin{aligned}\text{球体体积} &= \iiint_{\Omega} 1 dx dy dz = \iiint_{\Omega} 1 \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \left[\int_0^R \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta\end{aligned}$$

例 计算球体 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 的体积 (利用球面坐标)。

解

$$\begin{aligned}\text{球体体积} &= \iiint_{\Omega} 1 dx dy dz = \iiint_{\Omega} 1 \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \left[\int_0^R \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta \\ &= 2\pi \cdot\end{aligned}$$

例 计算球体 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 的体积 (利用球面坐标)。

解

$$\begin{aligned}\text{球体体积} &= \iiint_{\Omega} 1 dx dy dz = \iiint_{\Omega} 1 \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \left[\int_0^R \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta \\ &= 2\pi \cdot \left\{ \int_0^{\pi} \left[\int_0^R \rho^2 d\rho \right] \sin \varphi d\varphi \right\}\end{aligned}$$

例 计算球体 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 的体积 (利用球面坐标)。

解

$$\begin{aligned}\text{球体体积} &= \iiint_{\Omega} 1 dx dy dz = \iiint_{\Omega} 1 \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\&= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \left[\int_0^R \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta \\&= 2\pi \cdot \left\{ \int_0^{\pi} \left[\int_0^R \rho^2 d\rho \right] \sin \varphi d\varphi \right\} \\&= 2\pi \cdot \left[\int_0^R \rho^2 d\rho \right] \cdot \left[\int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \right]\end{aligned}$$

例 计算球体 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 的体积 (利用球面坐标)。

解

$$\begin{aligned}\text{球体体积} &= \iiint_{\Omega} 1 dx dy dz = \iiint_{\Omega} 1 \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\&= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \left[\int_0^R \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta \\&= 2\pi \cdot \left\{ \int_0^{\pi} \left[\int_0^R \rho^2 d\rho \right] \sin \varphi d\varphi \right\} \\&= 2\pi \cdot \left[\int_0^R \rho^2 d\rho \right] \cdot \left[\int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \right] \\&\quad \left(\frac{1}{3} \rho^3 \right)\end{aligned}$$

例 计算球体 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 的体积 (利用球面坐标)。

解

$$\begin{aligned}\text{球体体积} &= \iiint_{\Omega} 1 dx dy dz = \iiint_{\Omega} 1 \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\&= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \left[\int_0^R \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta \\&= 2\pi \cdot \left\{ \int_0^{\pi} \left[\int_0^R \rho^2 d\rho \right] \sin \varphi d\varphi \right\} \\&= 2\pi \cdot \left[\int_0^R \rho^2 d\rho \right] \cdot \left[\int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \right] \\&\quad \left(\frac{1}{3} \rho^3 \right) \Big|_0^R\end{aligned}$$

例 计算球体 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 的体积 (利用球面坐标)。

解

$$\begin{aligned}\text{球体体积} &= \iiint_{\Omega} 1 dx dy dz = \iiint_{\Omega} 1 \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\&= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \left[\int_0^R \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta \\&= 2\pi \cdot \left\{ \int_0^{\pi} \left[\int_0^R \rho^2 d\rho \right] \sin \varphi d\varphi \right\} \\&= 2\pi \cdot \left[\int_0^R \rho^2 d\rho \right] \cdot \left[\int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \right] \\&= 2\pi \cdot \left(\frac{1}{3} \rho^3 \right) \Big|_0^R \cdot 2\end{aligned}$$

例 计算球体 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 的体积 (利用球面坐标)。

解

$$\begin{aligned}\text{球体体积} &= \iiint_{\Omega} 1 dx dy dz = \iiint_{\Omega} 1 \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\&= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \left[\int_0^R \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta \\&= 2\pi \cdot \left\{ \int_0^{\pi} \left[\int_0^R \rho^2 d\rho \right] \sin \varphi d\varphi \right\} \\&= 2\pi \cdot \left[\int_0^R \rho^2 d\rho \right] \cdot \left[\int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \right] \\&= 2\pi \cdot \left(\frac{1}{3} \rho^3 \right) \Big|_0^R \cdot 2 = \frac{4}{3} \pi R^3\end{aligned}$$