§3.3　向量组的线性相关性

数学系　梁卓滨

2018 - 2019 学年上学期

向量组的线性相关性

$$\alpha_1 \qquad \alpha_2 \quad \cdots \qquad \alpha_n$$

向量组的线性相关性

定义 如果存在不全为零的一组数 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 使得：

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$$

向量组的线性相关性

定义 如果存在不全为零的一组数 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 使得：

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$$

则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性相关性

向量组的线性相关性

定义 如果存在不全为零的一组数 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 使得：

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$$

则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性相关性；否则，称为线性无关。

向量组的线性相关性

定义 如果存在不全为零的一组数 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 使得:

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$$

则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性相关性；否则，称为线性无关。

注 “$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性无关”，等价于:

$$"\, k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0\, ".$$

向量组的线性相关性

定义 如果存在不全为零的一组数 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 使得:

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$$

则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性相关性;否则,称为线性无关。

注 “$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性无关”,等价于:

$$"\, k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0\, ".$$

例

- $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ 与 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ 是线性相关:

向量组的线性相关性

定义 如果存在不全为零的一组数 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 使得：

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$$

则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性相关性；否则，称为线性无关。

注 “$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性无关”，等价于：

$$''\, k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0\, ''.$$

例

- $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ 与 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ 是线性相关：$2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0$

向量组的线性相关性

定义 如果存在不全为零的一组数 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 使得：

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$$

则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性相关性；否则，称为线性无关。

注 “$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性无关”，等价于：

$$''\, k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0\, ''.$$

例

- $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ 与 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ 是线性相关：$2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0$
- $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 与 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是

向量组的线性相关性

定义 如果存在不全为零的一组数 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 使得：

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$$

则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性相关性；否则，称为线性无关。

注 "$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性无关"，等价于：

$$"\, k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0\,".$$

例

- $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ 与 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ 是线性相关：$2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0$
- $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 与 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是线性无关：

向量组的线性相关性

定义 如果存在不全为零的一组数 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 使得：

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$$

则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性相关性；否则，称为线性无关。

注 “$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性无关”，等价于：

$$''\, k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0\,''.$$

例

- $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ 与 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ 是线性相关：$2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0$
- $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 与 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是线性无关：

$$0 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 =$$

向量组的线性相关性

定义 如果存在不全为零的一组数 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 使得：

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$$

则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性相关性；否则，称为线性无关。

注 “$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性无关”，等价于：

$$\text{”}\, k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0\, \text{”}.$$

例

- $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ 与 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ 是线性相关：$2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0$
- $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 与 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是线性无关：

$$0 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = k_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

向量组的线性相关性

定义 如果存在不全为零的一组数 $k_1, k_2, \dots, k_n$ 使得：

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$$

则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关性；否则，称为线性无关。

注 “$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关”，等价于：

$$''\, k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0\,''.$$

例

- $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ 与 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ 是线性相关：$2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0$
- $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 与 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是线性无关：

$$0 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = k_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ 2k_1 + k_2 \end{pmatrix}$$

向量组的线性相关性

定义 如果存在不全为零的一组数 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 使得：

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$$

则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性相关性；否则，称为线性无关。

注 “$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性无关”，等价于：

$$''\, k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0\, ''.$$

例

- $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ 与 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ 是线性相关：$2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0$
- $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 与 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是线性无关：

$$0 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = k_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ 2k_1 + k_2 \end{pmatrix} \Rightarrow k_1 = k_2 = 0$$

$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ 线性无关

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性无关

$$\overset{\alpha_1}{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}} \qquad \overset{\alpha_2}{\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}} \qquad \cdots \qquad \overset{\alpha_n}{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性无关

$$k_1 \overset{\alpha_1}{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}} + k_2 \overset{\alpha_2}{\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}} + \cdots + k_n \overset{\alpha_n}{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}} = 0$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关

$$\Leftrightarrow k_1 \overset{\alpha_1}{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}} + k_2 \overset{\alpha_2}{\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}} + \cdots + k_n \overset{\alpha_n}{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}} = 0 \text{ 只有解} k_1 = \cdots = k_n = 0$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性无关

$$\Leftrightarrow k_1 \overset{\alpha_1}{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}} + k_2 \overset{\alpha_2}{\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}} + \cdots + k_n \overset{\alpha_n}{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}} = 0 \text{ 只有解} k_1 = \cdots = k_n = 0$$

$$\begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_n \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关

$$\Leftrightarrow k_1 \overset{\alpha_1}{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}} + k_2 \overset{\alpha_2}{\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}} + \cdots + k_n \overset{\alpha_n}{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}} = 0 \text{ 只有解} k_1 = \cdots = k_n = 0$$

$$\left(\begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_n \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \overset{\beta}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关

$$\Leftrightarrow k_1 \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \end{array} + k_2 \begin{array}{c} \alpha_2 \\ \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \end{array} + \cdots + k_n \begin{array}{c} \alpha_n \\ \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \end{array} = 0 \text{ 只有解} k_1 = \cdots = k_n = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_n \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \beta \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \text{ 只有解} k_1 = \cdots = k_n = 0$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性无关

$$\Longleftrightarrow k_1 \overset{\alpha_1}{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}} + k_2 \overset{\alpha_2}{\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}} + \cdots + k_n \overset{\alpha_n}{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}} = 0 \text{ 只有解} k_1 = \cdots = k_n = 0$$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}}_{x} = \overset{\beta}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}} \text{ 只有解} k_1 = \cdots = k_n = 0$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性无关

$$\Leftrightarrow k_1 \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \end{array} + k_2 \begin{array}{c} \alpha_2 \\ \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \end{array} + \cdots + k_n \begin{array}{c} \alpha_n \\ \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \end{array} = 0 \text{ 只有解} k_1 = \cdots = k_n = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_n \\ \end{array} \atop \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}}_{x} = \begin{array}{c} \beta \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \text{ 只有解} k_1 = \cdots = k_n = 0$$

$\Leftrightarrow$ 方程 $Ax = 0$ 只有零解

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性无关

$$\Leftrightarrow k_1 \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \end{array} + k_2 \begin{array}{c} \alpha_2 \\ \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \end{array} + \cdots + k_n \begin{array}{c} \alpha_n \\ \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \end{array} = 0 \text{ 只有解} k_1 = \cdots = k_n = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}}_{x} = \begin{array}{c} \beta \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \text{ 只有解} k_1 = \cdots = k_n = 0$$

$\Leftrightarrow$ 方程 $Ax = 0$ 只有零解

$\Leftrightarrow r(A) = n$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性无关

$$\Leftrightarrow k_1 \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \end{array} + k_2 \begin{array}{c} \alpha_2 \\ \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \end{array} + \cdots + k_n \begin{array}{c} \alpha_n \\ \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \end{array} = 0 \text{ 只有解} k_1 = \cdots = k_n = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_n \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}}_{x} = \begin{array}{c} \beta \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \text{ 只有解} k_1 = \cdots = k_n = 0$$

$\Leftrightarrow$ 方程 $Ax = 0$ 只有零解

$\Leftrightarrow r(A) = n$

定理 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ $r(A) = n$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关

$$\Leftrightarrow k_1 \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \end{array} + k_2 \begin{array}{c} \alpha_2 \\ \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \end{array} + \cdots + k_n \begin{array}{c} \alpha_n \\ \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \end{array} = 0 \text{ 只有解} k_1 = \cdots = k_n = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_n \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}}_{x} = \begin{array}{c} \beta \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{只有解} k_1 = \cdots = k_n = 0$$

$\Leftrightarrow$ 方程 $Ax = 0$ 只有零解

$\Leftrightarrow r(A) = n$

定理 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ $r(A) = n$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性无关

$$\Leftrightarrow k_1 \overset{\alpha_1}{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}} + k_2 \overset{\alpha_2}{\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}} + \cdots + k_n \overset{\alpha_n}{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}} = 0 \text{ 只有解} k_1 = \cdots = k_n = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\overset{\begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_n \end{array}}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}}_{x} = \overset{\beta}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}} \text{ 只有解} k_1 = \cdots = k_n = 0$$

$\Leftrightarrow$ 方程 $Ax = 0$ 只有零解

$\Leftrightarrow r(A) = n$

定理 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ $r(A) = n$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ $r(A) < n$

线性相关性的判别法则

定理 设

$$\underbrace{\begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_n \\ \multicolumn{4}{c}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}} \end{array}}_{A}$$

则

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \text{ 线性相关} \quad \Leftrightarrow \quad r(A) < n$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \text{ 线性无关} \quad \Leftrightarrow \quad r(A) = n$$

线性相关性的判别法则

定理 设

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_n \end{array} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \end{array}$$

则

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \text{ 线性相关} \quad \Leftrightarrow \quad r(A) < n$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \text{ 线性无关} \quad \Leftrightarrow \quad r(A) = n$$

推论 1 如果 $m = n$（向量维数 = 向量个数），则

线性相关性的判别法则

定理 设

$$\underbrace{\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}}_{A}$$

则

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \text{ 线性相关} \quad \Leftrightarrow \quad r(A) < n$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \text{ 线性无关} \quad \Leftrightarrow \quad r(A) = n$$

推论 1 如果 $m = n$（向量维数 = 向量个数），则

$$\text{线性相关} \quad \Leftrightarrow \quad |A| = 0, \qquad \text{线性无关} \quad \Leftrightarrow \quad |A| \neq 0$$

线性相关性的判别法则

定理 设

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_n \end{array} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \end{array}$$

则

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \text{ 线性相关} \quad \Leftrightarrow \quad r(A) < n$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \text{ 线性无关} \quad \Leftrightarrow \quad r(A) = n$$

推论 1 如果 $m = n$（向量维数 $=$ 向量个数），则

$$\text{线性相关} \quad \Leftrightarrow \quad |A| = 0, \qquad \text{线性无关} \quad \Leftrightarrow \quad |A| \neq 0$$

推论 2 如果 $m < n$（向量维数 $<$ 向量个数），则一定线性相关。

线性相关性的判别法则

定理 设

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_n \end{array} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \end{array}$$

则

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \text{ 线性相关} \quad \Leftrightarrow \quad r(A) < n$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \text{ 线性无关} \quad \Leftrightarrow \quad r(A) = n$$

推论 1 如果 $m = n$（向量维数 $=$ 向量个数），则

$$\text{线性相关} \quad \Leftrightarrow \quad |A| = 0, \qquad \text{线性无关} \quad \Leftrightarrow \quad |A| \neq 0$$

推论 2 如果 $m < n$（向量维数 $<$ 向量个数），则一定线性相关。这是：

$$r(A) \leq m < n.$$

例 1 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}$ 是否线性相关性？如果是，求出一个“线性相关性表达式”

例 1 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}$ 是否线性相关性？如果是，求出一个“线性相关性表达式”

解

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 11 \end{pmatrix} \end{array}$$

例 1 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}$ 是否线性相关性？如果是，求出一个“线性相关性表达式”

解

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 11 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow[\substack{r_3+r_1 \\ r_4-5r_1}]{r_2-2r_1}$$

例 1 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}$ 是否线性相关性？如果是，求出一个“线性相关性表达式”

解

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 11 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow[\substack{r_3+r_1 \\ r_4-5r_1}]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

例 1 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\5\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}4\\3\\-1\\11\end{pmatrix}$ 是否线性相关性？ 如果是，求出一个“线性相关性表达式”

解

$$\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{array}\\ \begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & -1 & 3\\ -1 & 1 & -1\\ 5 & 1 & 11\end{pmatrix}\end{array} \xrightarrow[\substack{r_3+r_1\\ r_4-5r_1}]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & -5 & -5\\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

例 1 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}$ 是否线性相关性？如果是，求出一个“线性相关性表达式”

解

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 11 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow[\substack{r_3+r_1 \\ r_4-5r_1}]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$$

例 1 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}$ 是否线性相关性？如果是，求出一个“线性相关性表达式”

解

$$\left(\begin{array}{ccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3+r_1 \\ r_4-5r_1}]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -9 & -9 \end{pmatrix}$$

例 1 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\5\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}4\\3\\-1\\11\end{pmatrix}$ 是否线性相关性？如果是，求出一个“线性相关性表达式”

解

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 11 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow[\substack{r_3+r_1\\ r_4-5r_1}]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -9 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\frac{1}{3}\times r_3\\ -\frac{1}{9}\times r_4}]{-\frac{1}{5}\times r_2}$$

例 1 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\5\end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\1\end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix}4\\3\\-1\\11\end{pmatrix}$ 是否线性相关性？如果是，求出一个“线性相关性表达式”

解

$$\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{array}\\ \begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\2 & -1 & 3\\-1 & 1 & -1\\5 & 1 & 11\end{pmatrix}\end{array} \xrightarrow[\substack{r_3+r_1\\ r_4-5r_1}]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\0 & -5 & -5\\0 & 3 & 3\\0 & -9 & -9\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\frac{1}{3}\times r_3\\ -\frac{1}{9}\times r_4}]{-\frac{1}{5}\times r_2} \begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\0 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

例 1 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}$ 是否线性相关性？如果是，求出一个“线性相关性表达式”

解

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 11 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow[\substack{r_3+r_1 \\ r_4-5r_1}]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -9 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\frac{1}{3}\times r_3 \\ -\frac{1}{9}\times r_4}]{-\frac{1}{5}\times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-r_2]{r_3-r_2}$$

例 1 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}$ 是否线性相关性？如果是，求出一个“线性相关性表达式”

解

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 11 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow[\substack{r_3+r_1 \\ r_4-5r_1}]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -9 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\frac{1}{3}\times r_3 \\ -\frac{1}{9}\times r_4}]{-\frac{1}{5}\times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-r_2]{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 1 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}$ 是否线性相关性？如果是，求出一个“线性相关性表达式”

解

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 11 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow[\substack{r_3+r_1 \\ r_4-5r_1}]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -9 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\frac{1}{3}\times r_3 \\ -\frac{1}{9}\times r_4}]{-\frac{1}{5}\times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-r_2]{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-2r_2}$$

例 1 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\5\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}4\\3\\-1\\11\end{pmatrix}$ 是否线性相关性？如果是，求出一个“线性相关性表达式”

解

$$\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{array}\\ \begin{pmatrix}1&2&4\\2&-1&3\\-1&1&-1\\5&1&11\end{pmatrix}\end{array} \xrightarrow[\substack{r_3+r_1\\ r_4-5r_1}]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix}1&2&4\\0&-5&-5\\0&3&3\\0&-9&-9\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\frac{1}{3}\times r_3\\ -\frac{1}{9}\times r_4}]{-\frac{1}{5}\times r_2} \begin{pmatrix}1&2&4\\0&1&1\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-r_2]{r_3-r_2} \begin{pmatrix}1&2&4\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-2r_2} \begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

例 1 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\5\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}4\\3\\-1\\11\end{pmatrix}$ 是否线性相关性？如果是，求出一个“线性相关性表达式”

解

$$\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{array}\\ \begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & -1 & 3\\ -1 & 1 & -1\\ 5 & 1 & 11\end{pmatrix}\end{array} \xrightarrow[\substack{r_3+r_1\\ r_4-5r_1}]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & -5 & -5\\ 0 & 3 & 3\\ 0 & -9 & -9\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\frac{1}{3}\times r_3\\ -\frac{1}{9}\times r_4}]{-\frac{1}{5}\times r_2} \begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-r_2]{r_3-r_2} \begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-2r_2} \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

例 1 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\5\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}4\\3\\-1\\11\end{pmatrix}$ 是否线性相关性？如果是，求出一个“线性相关性表达式”

解

$$\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{array}\\ \begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & -1 & 3\\ -1 & 1 & -1\\ 5 & 1 & 11\end{pmatrix}\end{array} \xrightarrow[\substack{r_3+r_1\\ r_4-5r_1}]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & -5 & -5\\ 0 & 3 & 3\\ 0 & -9 & -9\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\frac{1}{3}\times r_3\\ -\frac{1}{9}\times r_4}]{-\frac{1}{5}\times r_2} \begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-r_2]{r_3-r_2} \begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-2r_2} \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

可见 $r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)=2<3$，线性相关性；

例 1 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\5\end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\1\end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix}4\\3\\-1\\11\end{pmatrix}$ 是否线性相关性？如果是，求出一个“线性相关性表达式”

解

$$\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{array}\\ \begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & -1 & 3\\ -1 & 1 & -1\\ 5 & 1 & 11\end{pmatrix}\end{array} \xrightarrow[\substack{r_3+r_1\\ r_4-5r_1}]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & -5 & -5\\ 0 & 3 & 3\\ 0 & -9 & -9\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\frac{1}{3}\times r_3\\ -\frac{1}{9}\times r_4}]{-\frac{1}{5}\times r_2} \begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-r_2]{r_3-r_2} \begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-2r_2} \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

可见 $r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)=2<3$，线性相关性；且

$$\alpha_3=2\alpha_1+\alpha_2$$

例 1 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\5\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}4\\3\\-1\\11\end{pmatrix}$ 是否线性相关性？如果是，求出一个“线性相关性表达式”

解

$$\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\end{array}\\ \begin{pmatrix}1&2&4\\2&-1&3\\-1&1&-1\\5&1&11\end{pmatrix}\end{array}\xrightarrow[\substack{r_3+r_1\\ r_4-5r_1}]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&4\\0&-5&-5\\0&3&3\\0&-9&-9\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{\frac{1}{3}\times r_3\\ -\frac{1}{9}\times r_4}]{-\frac{1}{5}\times r_2}\begin{pmatrix}1&2&4\\0&1&1\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-r_2]{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&2&4\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-2r_2}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

可见 $r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)=2<3$，线性相关性；且

$$\alpha_3=2\alpha_1+\alpha_2 \quad\Rightarrow\quad 2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=0$$

例 2 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是否线性相关性？如果是，求出一个“线性相关性表达式”

例 2 $\alpha_1 = \begin{pmatrix}0\\4\\0\\2\end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix}6\\0\\4\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix}3\\-1\\2\\0\end{pmatrix}$ 是否线性相关性？如果是，求出一个“线性相关性表达式”

解

$$\begin{array}{c} \begin{matrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{matrix} \\ \begin{pmatrix}0 & 6 & 3\\4 & 0 & -1\\0 & 4 & 2\\2 & 1 & 0\end{pmatrix}\end{array}$$

例 2 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是否线性相关性？如果是，求出一个“线性相关性表达式”

解

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4}$$

例 2 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是否线性相关性？如果是，求出一个“线性相关性表达式”

解

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

例 2 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是否线性相关性？如果是，求出一个“线性相关性表达式”

解

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1}$$

例 2 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\4\\0\\2\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}6\\0\\4\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\0\end{pmatrix}$ 是否线性相关性？如果是，求出一个“线性相关性表达式”

解
$$\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{array}\\ \begin{pmatrix}0 & 6 & 3\\4 & 0 & -1\\0 & 4 & 2\\2 & 1 & 0\end{pmatrix}\end{array} \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\4 & 0 & -1\\0 & 4 & 2\\0 & 6 & 3\end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-2r_1} \begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\0 & -2 & -1\\0 & 4 & 2\\0 & 6 & 3\end{pmatrix}$$

例 2 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是否线性相关性？如果是，求出一个“线性相关性表达式”

解

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4 + 3r_2]{r_3 + 2r_2}$$

例 2 $\alpha_1 = \begin{pmatrix}0\\4\\0\\2\end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix}6\\0\\4\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix}3\\-1\\2\\0\end{pmatrix}$ 是否线性相关性？如果是，求出一个“线性相关性表达式”

解

$$\begin{array}{c} \begin{matrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{matrix} \\ \begin{pmatrix}0 & 6 & 3\\4 & 0 & -1\\0 & 4 & 2\\2 & 1 & 0\end{pmatrix}\end{array} \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\4 & 0 & -1\\0 & 4 & 2\\0 & 6 & 3\end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-2r_1} \begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\0 & -2 & -1\\0 & 4 & 2\\0 & 6 & 3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+3r_2]{r_3+2r_2} \begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\0 & -2 & -1\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

例 2 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\4\\0\\2\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}6\\0\\4\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\0\end{pmatrix}$ 是否线性相关性？如果是，求出一个“线性相关性表达式”

解

$$\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{array}\\ \begin{pmatrix}0&6&3\\4&0&-1\\0&4&2\\2&1&0\end{pmatrix}\end{array}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}2&1&0\\4&0&-1\\0&4&2\\0&6&3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}2&1&0\\0&-2&-1\\0&4&2\\0&6&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+3r_2]{r_3+2r_2}\begin{pmatrix}2&1&0\\0&-2&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{2}\times r_2]{\frac{1}{2}\times r_1}$$

例 2 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\4\\0\\2\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}6\\0\\4\\1\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\0\end{pmatrix}$ 是否线性相关性？如果是，求出一个“线性相关性表达式”

解

$$\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{array}\\ \begin{pmatrix}0&6&3\\4&0&-1\\0&4&2\\2&1&0\end{pmatrix}\end{array} \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix}2&1&0\\4&0&-1\\0&4&2\\0&6&3\end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-2r_1} \begin{pmatrix}2&1&0\\0&-2&-1\\0&4&2\\0&6&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+3r_2]{r_3+2r_2} \begin{pmatrix}2&1&0\\0&-2&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{2}\times r_2]{\frac{1}{2}\times r_1} \begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

例 2 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\4\\0\\2\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}6\\0\\4\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\0\end{pmatrix}$ 是否线性相关性？如果是，求出一个“线性相关性表达式”

解

$$\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{array}\\ \begin{pmatrix}0 & 6 & 3\\ 4 & 0 & -1\\ 0 & 4 & 2\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}\end{array} \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 4 & 0 & -1\\ 0 & 4 & 2\\ 0 & 6 & 3\end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-2r_1} \begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -1\\ 0 & 4 & 2\\ 0 & 6 & 3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+3r_2]{r_3+2r_2} \begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{2}\times r_2]{\frac{1}{2}\times r_1} \begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-\frac{1}{2}r_2}$$

例 2 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是否线性相关性？如果是，求出一个“线性相关性表达式”

解

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+3r_2]{r_3+2r_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{2}\times r_2]{\frac{1}{2}\times r_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - \frac{1}{2} r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 2 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\4\\0\\2\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}6\\0\\4\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\0\end{pmatrix}$ 是否线性相关性？如果是，求出一个“线性相关性表达式”

解

$$\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\end{array}\\ \begin{pmatrix}0&6&3\\4&0&-1\\0&4&2\\2&1&0\end{pmatrix}\end{array}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}2&1&0\\4&0&-1\\0&4&2\\0&6&3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}2&1&0\\0&-2&-1\\0&4&2\\0&6&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+3r_2]{r_3+2r_2}\begin{pmatrix}2&1&0\\0&-2&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{2}\times r_2]{\frac{1}{2}\times r_1}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-\frac{1}{2}r_2}\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{4}\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

例 2 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\4\\0\\2\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}6\\0\\4\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\0\end{pmatrix}$ 是否线性相关性？如果是，求出一个“线性相关性表达式”

解

$$\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{array}\\ \begin{pmatrix}0&6&3\\4&0&-1\\0&4&2\\2&1&0\end{pmatrix}\end{array}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}2&1&0\\4&0&-1\\0&4&2\\0&6&3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}2&1&0\\0&-2&-1\\0&4&2\\0&6&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+3r_2]{r_3+2r_2}\begin{pmatrix}2&1&0\\0&-2&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{2}\times r_2]{\frac{1}{2}\times r_1}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-\frac{1}{2}r_2}\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{4}\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

可见 $r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)=2<3$，线性相关性；

例 2 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\4\\0\\2\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}6\\0\\4\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\0\end{pmatrix}$ 是否线性相关性？如果是，求出一个“线性相关性表达式”

解

$$\begin{array}{c}\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3\\ \begin{pmatrix}0&6&3\\4&0&-1\\0&4&2\\2&1&0\end{pmatrix}\end{array}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}2&1&0\\4&0&-1\\0&4&2\\0&6&3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}2&1&0\\0&-2&-1\\0&4&2\\0&6&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+3r_2]{r_3+2r_2}\begin{pmatrix}2&1&0\\0&-2&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{2}\times r_2]{\frac{1}{2}\times r_1}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-\frac{1}{2}r_2}\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{4}\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

可见 $r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)=2<3$，线性相关性；

例 2 $\alpha_1 = \begin{pmatrix}0\\4\\0\\2\end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix}6\\0\\4\\1\end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix}3\\-1\\2\\0\end{pmatrix}$ 是否线性相关性？如果是，求出一个“线性相关性表达式”

解

$$\begin{array}{c}\begin{matrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}0 & 6 & 3\\ 4 & 0 & -1\\ 0 & 4 & 2\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}\end{array} \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 4 & 0 & -1\\ 0 & 4 & 2\\ 0 & 6 & 3\end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-2r_1} \begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -1\\ 0 & 4 & 2\\ 0 & 6 & 3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+3r_2]{r_3+2r_2} \begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{2}\times r_2]{\frac{1}{2}\times r_1} \begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-\frac{1}{2}r_2} \begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{4}\\ 0 & 1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

可见 $r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = 2 < 3$，线性相关性；且

$$\alpha_3 = -\frac{1}{4}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2$$

例 2 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\4\\0\\2\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}6\\0\\4\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\0\end{pmatrix}$ 是否线性相关性？如果是，求出一个“线性相关性表达式”

解

$$\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{array}\\ \begin{pmatrix}0&6&3\\4&0&-1\\0&4&2\\2&1&0\end{pmatrix}\end{array}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}2&1&0\\4&0&-1\\0&4&2\\0&6&3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}2&1&0\\0&-2&-1\\0&4&2\\0&6&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+3r_2]{r_3+2r_2}\begin{pmatrix}2&1&0\\0&-2&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{2}\times r_2]{\frac{1}{2}\times r_1}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-\frac{1}{2}r_2}\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{4}\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

可见 $r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)=2<3$，线性相关性；且

$$\alpha_3=-\frac{1}{4}\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_2 \quad\Rightarrow\quad -\frac{1}{4}\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_2-\alpha_3=0$$

例 设向量组 α, β, γ 线性无关，证明 $\alpha+\beta, \beta+\gamma, \gamma+\alpha$ 也是线性无关。

例 设向量组 α, β, γ 线性无关，证明 $\alpha+\beta, \beta+\gamma, \gamma+\alpha$ 也是线性无关。

证明 设

$$0 = k_1(\alpha+\beta) + k_2(\beta+\gamma) + k_3(\gamma+\alpha)$$

例 设向量组 α, β, γ 线性无关，证明 $\alpha+\beta, \beta+\gamma, \gamma+\alpha$ 也是线性无关。

证明 设

$$
\begin{aligned}
0 &= k_1(\alpha+\beta)+k_2(\beta+\gamma)+k_3(\gamma+\alpha) \\
&= (\qquad\qquad)\alpha+(\qquad\qquad)\beta+(\qquad\qquad)\gamma
\end{aligned}
$$

例 设向量组 α, β, γ 线性无关，证明 $\alpha+\beta, \beta+\gamma, \gamma+\alpha$ 也是线性无关。

证明 设

$$
\begin{aligned}
0 &= k_1(\alpha+\beta)+k_2(\beta+\gamma)+k_3(\gamma+\alpha) \\
&= (k_1+k_3)\alpha+(\qquad\qquad)\beta+(\qquad\qquad)\gamma
\end{aligned}
$$

例 设向量组 α, β, γ 线性无关，证明 $\alpha+\beta, \beta+\gamma, \gamma+\alpha$ 也是线性无关。

证明 设

$$\begin{aligned} 0 &= k_1(\alpha+\beta)+k_2(\beta+\gamma)+k_3(\gamma+\alpha) \\ &= (k_1+k_3)\alpha+(k_1+k_2)\beta+(\qquad\qquad)\gamma \end{aligned}$$

例 设向量组 α, β, γ 线性无关，证明 $\alpha+\beta, \beta+\gamma, \gamma+\alpha$ 也是线性无关。

证明 设

$$\begin{aligned} 0 &= k_1(\alpha+\beta)+k_2(\beta+\gamma)+k_3(\gamma+\alpha) \\ &= (k_1+k_3)\alpha+(k_1+k_2)\beta+(k_2+k_3)\gamma \end{aligned}$$

例 设向量组 α, β, γ 线性无关，证明 $\alpha+\beta, \beta+\gamma, \gamma+\alpha$ 也是线性无关。

证明 设

$$
\begin{aligned}
0 &= k_1(\alpha+\beta)+k_2(\beta+\gamma)+k_3(\gamma+\alpha) \\
&= (k_1+k_3)\alpha+(k_1+k_2)\beta+(k_2+k_3)\gamma
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{cases}
k_1 \qquad\; + k_3 = 0 \\
k_1 + k_2 \qquad\; = 0 \\
\qquad\; k_2 + k_3 = 0
\end{cases}
$$

例 设向量组 α, β, γ 线性无关，证明 $\alpha+\beta, \beta+\gamma, \gamma+\alpha$ 也是线性无关。

证明 设

$$\begin{aligned} 0 &= k_1(\alpha+\beta)+k_2(\beta+\gamma)+k_3(\gamma+\alpha) \\ &= (k_1+k_3)\alpha+(k_1+k_2)\beta+(k_2+k_3)\gamma \end{aligned}$$

所以

$$\begin{cases} k_1 \qquad\quad + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 \qquad\quad = 0 \\ \qquad\quad k_2 + k_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

例 设向量组 α, β, γ 线性无关，证明 $\alpha+\beta, \beta+\gamma, \gamma+\alpha$ 也是线性无关。

证明 设

$$\begin{aligned} 0 &= k_1(\alpha+\beta)+k_2(\beta+\gamma)+k_3(\gamma+\alpha) \\ &= (k_1+k_3)\alpha+(k_1+k_2)\beta+(k_2+k_3)\gamma \end{aligned}$$

所以

$$\begin{cases} k_1 \qquad\quad + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 \qquad\quad = 0 \\ \qquad\quad k_2 + k_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

例 设向量组 α, β, γ 线性无关，证明 $\alpha+\beta, \beta+\gamma, \gamma+\alpha$ 也是线性无关。

证明 设

$$\begin{aligned} 0 &= k_1(\alpha+\beta)+k_2(\beta+\gamma)+k_3(\gamma+\alpha) \\ &= (k_1+k_3)\alpha+(k_1+k_2)\beta+(k_2+k_3)\gamma \end{aligned}$$

所以

$$\begin{cases} k_1 \quad\quad + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 \quad\quad = 0 \\ \quad\quad k_2 + k_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow Ax = 0$$

例 设向量组 α, β, γ 线性无关，证明 $\alpha+\beta, \beta+\gamma, \gamma+\alpha$ 也是线性无关。

证明 设

$$\begin{aligned} 0 &= k_1(\alpha+\beta)+k_2(\beta+\gamma)+k_3(\gamma+\alpha) \\ &= (k_1+k_3)\alpha+(k_1+k_2)\beta+(k_2+k_3)\gamma \end{aligned}$$

所以

$$\begin{cases} k_1 \qquad + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 \qquad = 0 \\ \qquad k_2 + k_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow Ax = 0$$

而 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

例 设向量组 α, β, γ 线性无关，证明 $\alpha+\beta, \beta+\gamma, \gamma+\alpha$ 也是线性无关。

证明 设

$$
\begin{aligned}
0 &= k_1(\alpha+\beta)+k_2(\beta+\gamma)+k_3(\gamma+\alpha) \\
&= (k_1+k_3)\alpha+(k_1+k_2)\beta+(k_2+k_3)\gamma
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{cases} k_1 \qquad\quad + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 \qquad\quad = 0 \\ \qquad\quad k_2 + k_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow Ax = 0
$$

而 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_2-r_1}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

例 设向量组 α, β, γ 线性无关，证明 $\alpha+\beta, \beta+\gamma, \gamma+\alpha$ 也是线性无关。

证明 设

$$\begin{aligned} 0 &= k_1(\alpha+\beta)+k_2(\beta+\gamma)+k_3(\gamma+\alpha) \\ &= (k_1+k_3)\alpha+(k_1+k_2)\beta+(k_2+k_3)\gamma \end{aligned}$$

所以

$$\begin{cases} k_1 \qquad\quad + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 \qquad\quad = 0 \\ \qquad\quad k_2 + k_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow Ax = 0$$

而 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_2-r_1}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

例 设向量组 α, β, γ 线性无关，证明 $\alpha+\beta, \beta+\gamma, \gamma+\alpha$ 也是线性无关。

证明 设

$$\begin{aligned} 0 &= k_1(\alpha+\beta)+k_2(\beta+\gamma)+k_3(\gamma+\alpha) \\ &= (k_1+k_3)\alpha+(k_1+k_2)\beta+(k_2+k_3)\gamma \end{aligned}$$

所以

$$\begin{cases} k_1 \qquad\;\; + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 \qquad\;\; = 0 \\ \qquad\; k_2 + k_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow Ax = 0$$

而 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_2-r_1}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

所以只有零解：$k_1 = k_2 = k_3 = 0$，

例 设向量组 α, β, γ 线性无关，证明 $\alpha+\beta, \beta+\gamma, \gamma+\alpha$ 也是线性无关。

证明 设

$$0 = k_1(\alpha+\beta) + k_2(\beta+\gamma) + k_3(\gamma+\alpha)$$
$$= (k_1+k_3)\alpha + (k_1+k_2)\beta + (k_2+k_3)\gamma$$

所以

$$\begin{cases} k_1 \qquad + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 \qquad = 0 \\ \qquad k_2 + k_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow Ax = 0$$

$$\text{而 } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 - r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

所以只有零解：$k_1 = k_2 = k_3 = 0$，所以线性无关

例 设向量组 α, β, γ 线性无关，证明 $\alpha+\beta, \beta+\gamma, \gamma+\alpha$ 也是线性无关。

例 设向量组 α, β, γ 线性无关，证明 $\alpha+\beta, \beta+\gamma, \gamma+\alpha$ 也是线性无关。

另证 注意到

$$\begin{pmatrix} \alpha+\beta & \beta+\gamma & \gamma+\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

例 设向量组 α, β, γ 线性无关，证明 $\alpha+\beta, \beta+\gamma, \gamma+\alpha$ 也是线性无关。

另证 注意到

$$\begin{pmatrix}\alpha+\beta & \beta+\gamma & \gamma+\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & \\ 1 & & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

例 设向量组 α, β, γ 线性无关，证明 $\alpha+\beta, \beta+\gamma, \gamma+\alpha$ 也是线性无关。

另证 注意到

$$(\alpha+\beta \quad \beta+\gamma \quad \gamma+\alpha) = (\alpha \quad \beta \quad \gamma)\begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 1 & 1 & \\ 0 & 1 & \end{pmatrix}$$

例 设向量组 α, β, γ 线性无关，证明 $\alpha+\beta, \beta+\gamma, \gamma+\alpha$ 也是线性无关。

另证 注意到

$$\begin{pmatrix} \alpha+\beta & \beta+\gamma & \gamma+\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

例 设向量组 α, β, γ 线性无关，证明 $\alpha+\beta, \beta+\gamma, \gamma+\alpha$ 也是线性无关。

另证 注意到

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\alpha+\beta & \beta+\gamma & \gamma+\alpha\end{pmatrix}}_{Q} = \underbrace{\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma\end{pmatrix}}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}}_{A}$$

例 设向量组 α, β, γ 线性无关，证明 $\alpha+\beta, \beta+\gamma, \gamma+\alpha$ 也是线性无关。

另证 注意到

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\alpha+\beta & \beta+\gamma & \gamma+\alpha\end{pmatrix}}_{Q} = \underbrace{\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma\end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}}_{A} \quad \Rightarrow \quad Q = PA$$

例 设向量组 α, β, γ 线性无关，证明 $\alpha+\beta, \beta+\gamma, \gamma+\alpha$ 也是线性无关。

另证 注意到

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\alpha+\beta & \beta+\gamma & \gamma+\alpha\end{pmatrix}}_{Q} = \underbrace{\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma\end{pmatrix}}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}}_{A} \quad \Rightarrow \quad Q = PA$$

$$r(Q) = r(PA)$$

例 设向量组 α, β, γ 线性无关，证明 $\alpha+\beta, \beta+\gamma, \gamma+\alpha$ 也是线性无关。

另证 注意到

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\alpha+\beta & \beta+\gamma & \gamma+\alpha\end{pmatrix}}_{Q} = \underbrace{\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma\end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}}_{A} \quad \Rightarrow \quad Q = PA$$

而 $|A| = \begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix} \xlongequal{r_2-r_1} \begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix} = 2 \neq 0$，所以 A 可逆，

$$r(Q) = r(PA)$$

例 设向量组 α, β, γ 线性无关，证明 $\alpha+\beta, \beta+\gamma, \gamma+\alpha$ 也是线性无关。

另证 注意到

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\alpha+\beta & \beta+\gamma & \gamma+\alpha\end{pmatrix}}_{Q} = \underbrace{\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma\end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}}_{A} \quad \Rightarrow \quad Q = PA$$

而 $|A| = \begin{vmatrix}1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix} \xlongequal{r_2 - r_1} \begin{vmatrix}1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix} = 2 \neq 0$，所以 A 可逆，从而

$$r(Q) = r(PA) = r(P)$$

例 设向量组 α, β, γ 线性无关，证明 $\alpha+\beta, \beta+\gamma, \gamma+\alpha$ 也是线性无关。

另证 注意到

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\alpha+\beta & \beta+\gamma & \gamma+\alpha\end{pmatrix}}_{Q} = \underbrace{\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma\end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}}_{A} \quad \Rightarrow \quad Q = PA$$

而 $|A| = \begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix} \xlongequal{r_2 - r_1} \begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix} = 2 \neq 0$，所以 A 可逆，从而

$$r(Q) = r(PA) = r(P) = 3$$

例 设向量组 α, β, γ 线性无关，证明 $\alpha+\beta, \beta+\gamma, \gamma+\alpha$ 也是线性无关。

另证 注意到

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\alpha+\beta & \beta+\gamma & \gamma+\alpha\end{pmatrix}}_{Q} = \underbrace{\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma\end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}}_{A} \quad \Rightarrow \quad Q = PA$$

而 $|A| = \begin{vmatrix}1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix} \xlongequal{r_2 - r_1} \begin{vmatrix}1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix} = 2 \neq 0$，所以 A 可逆，从而

$$r(Q) = r(PA) = r(P) = 3$$

所以 $\alpha+\beta, \beta+\gamma, \gamma+\alpha$ 线性无关。

例 1 一个向量 α 线性相关当且仅当 $\alpha = 0$。

例 1 一个向量 α 线性相关当且仅当 $\alpha = 0$。这是：

$$\text{线性相关} \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \neq 0 \text{ 使得 } k\alpha = 0$$

例 1 一个向量 α 线性相关当且仅当 $\alpha = 0$。这是：

$$\text{线性相关} \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \neq 0 \text{ 使得 } k\alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0$$

例 1 一个向量 α 线性相关当且仅当 $\alpha = 0$。这是：

$$\text{线性相关} \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \neq 0 \text{ 使得 } k\alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0$$

例 2 两个向量 α, β 线性相关当且仅当它们成比例。

例 1 一个向量 α 线性相关当且仅当 $\alpha = 0$。这是：

$$\text{线性相关} \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \neq 0 \text{ 使得 } k\alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0$$

例 2 两个向量 α, β 线性相关当且仅当它们成比例。

证明

1. 设 α, β 线性相关：

2. 设 α, β 成比例：

例 1 一个向量 α 线性相关当且仅当 $\alpha = 0$。这是：

$$\text{线性相关} \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \neq 0 \text{ 使得 } k\alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0$$

例 2 两个向量 α, β 线性相关当且仅当它们成比例。

证明

1. 设 α, β 线性相关：存在不全为零的 k_1, k_2 使 $k_1\alpha + k_2\beta = 0$。

2. 设 α, β 成比例：

例 1 一个向量 α 线性相关当且仅当 $\alpha = 0$。这是：

$$\text{线性相关} \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \neq 0 \text{ 使得 } k\alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0$$

例 2 两个向量 α, β 线性相关当且仅当它们成比例。

证明

1. 设 α, β 线性相关：存在不全为零的 k_1, k_2 使 $k_1\alpha + k_2\beta = 0$。不妨设 $k_1 \neq 0$，则

$$\alpha = -\frac{k_2}{k_1}\beta$$

2. 设 α, β 成比例：

例 1 一个向量 α 线性相关当且仅当 $\alpha = 0$。这是：

$$\text{线性相关} \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \neq 0 \text{ 使得 } k\alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0$$

例 2 两个向量 α, β 线性相关当且仅当它们成比例。

证明

1. 设 α, β 线性相关：存在不全为零的 k_1, k_2 使 $k_1\alpha + k_2\beta = 0$。不妨设 $k_1 \neq 0$，则

$$\alpha = -\frac{k_2}{k_1}\beta$$

   所以 α, β 成比例

2. 设 α, β 成比例：

例 1 一个向量 α 线性相关当且仅当 $\alpha = 0$。这是：

$$\text{线性相关} \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \neq 0 \text{ 使得 } k\alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0$$

例 2 两个向量 α, β 线性相关当且仅当它们成比例。

证明

1. 设 α, β 线性相关：存在不全为零的 k_1, k_2 使 $k_1\alpha + k_2\beta = 0$。不妨设 $k_1 \neq 0$，则
$$\alpha = -\frac{k_2}{k_1}\beta$$
所以 α, β 成比例
2. 设 α, β 成比例：不妨设 $\alpha = k\beta$

例 1 一个向量 α 线性相关当且仅当 $\alpha = 0$。这是：

$$\text{线性相关} \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \neq 0 \text{ 使得 } k\alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0$$

例 2 两个向量 α, β 线性相关当且仅当它们成比例。

证明

1. 设 α, β 线性相关：存在不全为零的 k_1, k_2 使 $k_1\alpha + k_2\beta = 0$。不妨设 $k_1 \neq 0$，则

$$\alpha = -\frac{k_2}{k_1}\beta$$

   所以 α, β 成比例

2. 设 α, β 成比例：不妨设 $\alpha = k\beta$，则

$$1 \cdot \alpha - k\beta = 0$$

例 1 一个向量 α 线性相关当且仅当 $\alpha = 0$。这是：

$$\text{线性相关} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists k \neq 0 \text{ 使得 } k\alpha = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = 0$$

例 2 两个向量 α, β 线性相关当且仅当它们成比例。

证明

1. 设 α, β 线性相关：存在不全为零的 k_1, k_2 使 $k_1\alpha + k_2\beta = 0$。不妨设 $k_1 \neq 0$，则

   $$\alpha = -\frac{k_2}{k_1}\beta$$

   所以 α, β 成比例

2. 设 α, β 成比例：不妨设 $\alpha = k\beta$，则

   $$1 \cdot \alpha - k\beta = 0$$

   所以 α, β 线性相关

例 3 $\mathbb{R}^3$ 中三个向量 α, β, γ 线性相关当且仅当它们共面。

例 3 $\mathbb{R}^3$ 中三个向量 α, β, γ 线性相关当且仅当它们共面。

证明 不妨设

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

例 3 $\mathbb{R}^3$ 中三个向量 α, β, γ 线性相关当且仅当它们共面。

证明 不妨设

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

则

$$\alpha, \beta, \gamma\text{线性相关} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \gamma \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \end{array} \text{秩小于}3$$

例 3 $\mathbb{R}^3$ 中三个向量 α, β, γ 线性相关当且仅当它们共面。

证明 不妨设

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

则

$$\alpha, \beta, \gamma\text{线性相关} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \gamma \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \end{array} \text{秩小于}3$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

例 3 $\mathbb{R}^3$ 中三个向量 α, β, γ 线性相关当且仅当它们共面。

证明 不妨设

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

则

$$\alpha, \beta, \gamma\text{线性相关} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \gamma \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \end{array}\text{秩小于3}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha, \beta, \gamma\text{共面}$$

定理 1 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 中有一部分向量线性相关性，则 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 线性相关。

定理 1 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 中有一部分向量线性相关性，则 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性相关。

证明 设

$$\underbrace{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r,}_{\text{线性相关}} \alpha_{r+1}, \ldots \alpha_s$$

定理 1 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 中有一部分向量线性相关性，则 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性相关。

证明 设

$$\underbrace{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r}_{\text{线性相关}}, \alpha_{r+1}, \ldots \alpha_s$$

则存在不全为零的数 $k_1, k_2, \ldots, k_r$ 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r = 0$$

定理 1 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 中有一部分向量线性相关性，则 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性相关。

证明 设

$$\underbrace{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r}_{\text{线性相关}}, \alpha_{r+1}, \ldots \alpha_s$$

则存在不全为零的数 $k_1, k_2, \ldots, k_r$ 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r = 0$$

所以

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r + 0\alpha_{r+1} + \cdots + 0\alpha_s = 0$$

定理 1 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 中有一部分向量线性相关性，则 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性相关。

证明 设

$$\underbrace{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r}_{\text{线性相关}}, \alpha_{r+1}, \ldots \alpha_s$$

则存在不全为零的数 $k_1, k_2, \ldots, k_r$ 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r = 0$$

所以

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r + 0\alpha_{r+1} + \cdots + 0\alpha_s = 0$$

其中系数不全为零，

定理 1 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 中有一部分向量线性相关性，则 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性相关。

证明 设

$$\underbrace{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r}_{\text{线性相关}}, \alpha_{r+1}, \ldots \alpha_s$$

则存在不全为零的数 $k_1, k_2, \ldots, k_r$ 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r = 0$$

所以

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r + 0\alpha_{r+1} + \cdots + 0\alpha_s = 0$$

其中系数不全为零，所以 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性相关。

定理 2 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 某一向量是其余向量线性组合。

定理 2 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 某一向量是其余向量线性组合。

证明

1. “$\Rightarrow$”

2. “$\Leftarrow$”

定理 2 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 某一向量是其余向量线性组合。

证明

1. “$\Rightarrow$” 设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性相关，

2. “$\Leftarrow$”

定理 2 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 某一向量是其余向量线性组合。

证明

1. “$\Rightarrow$” 设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性相关，存在不全为零 $k_1, k_2, \ldots, k_s$ 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$

2. “$\Leftarrow$”

定理 2 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 某一向量是其余向量线性组合。

证明

1. “$\Rightarrow$” 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关，存在不全为零 $k_1, k_2, \dots, k_s$ 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$

   不妨设 $k_1 \neq 0$，

2. “$\Leftarrow$”

定理 2 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 某一向量是其余向量线性组合。

证明

1. “$\Rightarrow$” 设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性相关，存在不全为零 $k_1, k_2, \ldots, k_s$ 使

   $$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$

   不妨设 $k_1 \neq 0$，则

   $$\alpha_1 = -\frac{k_2}{k_1}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_s}{k_1}\alpha_s$$

2. “$\Leftarrow$”

定理 2 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 某一向量是其余向量线性组合。

证明

1. "$\Rightarrow$" 设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性相关，存在不全为零 $k_1, k_2, \ldots, k_s$ 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$

不妨设 $k_1 \neq 0$，则
$$\alpha_1 = -\frac{k_2}{k_1}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_s}{k_1}\alpha_s$$

所以 α_1 为 $\alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 的线性组合

2. "$\Leftarrow$"

定理 2 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 某一向量是其余向量线性组合。

证明

1. “$\Rightarrow$” 设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性相关，存在不全为零 $k_1, k_2, \ldots, k_s$ 使

   $$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$

   不妨设 $k_1 \neq 0$，则
   $$\alpha_1 = -\frac{k_2}{k_1}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_s}{k_1}\alpha_s$$

   所以 α_1 为 $\alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 的线性组合

2. “$\Leftarrow$” 假设 α_1 为 $\alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 的线性组合，

定理 2 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 某一向量是其余向量线性组合。

证明

1. “$\Rightarrow$” 设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性相关，存在不全为零 $k_1, k_2, \ldots, k_s$ 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$

不妨设 $k_1 \neq 0$，则

$$\alpha_1 = -\frac{k_2}{k_1}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_s}{k_1}\alpha_s$$

所以 α_1 为 $\alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 的线性组合

2. “$\Leftarrow$” 假设 α_1 为 $\alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 的线性组合，

$$\alpha_1 = k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s$$

定理 2 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 某一向量是其余向量线性组合。

证明

1. "$\Rightarrow$" 设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性相关，存在不全为零 $k_1, k_2, \ldots, k_s$ 使
$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$
不妨设 $k_1 \neq 0$，则
$$\alpha_1 = -\frac{k_2}{k_1}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_s}{k_1}\alpha_s$$
所以 α_1 为 $\alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 的线性组合

2. "$\Leftarrow$" 假设 α_1 为 $\alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 的线性组合，
$$\alpha_1 = k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s$$
所以
$$-\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$

定理 2 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 某一向量是其余向量线性组合。

证明

1. “$\Rightarrow$” 设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性相关，存在不全为零 $k_1, k_2, \ldots, k_s$ 使
$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$
不妨设 $k_1 \neq 0$，则
$$\alpha_1 = -\frac{k_2}{k_1}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_s}{k_1}\alpha_s$$
所以 α_1 为 $\alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 的线性组合
2. “$\Leftarrow$” 假设 α_1 为 $\alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 的线性组合，
$$\alpha_1 = k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s$$
所以
$$-\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$
且系数不全为零，所以 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性相关。

定理 3 设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性无关，但 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s, \beta$ 线性相关，则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性表示，且表示法唯一。

定理 3 设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性无关，但 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s, \beta$ 线性相关，则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性表示，且表示法唯一。

证明

1. 存在不全为零的 $k_1, k_2, \ldots, k_s, k$ 使

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s + k\beta = 0$$

定理 3 设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性无关，但 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s, \beta$ 线性相关，则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性表示，且表示法唯一。

证明

1. 存在不全为零的 $k_1, k_2, \ldots, k_s, k$ 使

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s + k\beta = 0 \xrightarrow{\text{可证}k\neq 0}$$

定理 3 设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性无关，但 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s, \beta$ 线性相关，则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性表示，且表示法唯一。

证明

1. 存在不全为零的 $k_1, k_2, \ldots, k_s, k$ 使

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s + k\beta = 0 \xrightarrow{\text{可证}k\neq 0} \beta = -\frac{k_1}{k}\alpha_1 - \cdots - \frac{k_s}{k}\alpha_s$$

定理 3 设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性无关，但 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s, \beta$ 线性相关，则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性表示，且表示法唯一。

证明

1. 存在不全为零的 $k_1, k_2, \ldots, k_s, k$ 使

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s + k\beta = 0 \xrightarrow{\text{可证}k\neq 0} \beta = -\frac{k_1}{k}\alpha_1 - \cdots - \frac{k_s}{k}\alpha_s$$

（证明 $k \neq 0$：

定理 3 设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性无关，但 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s, \beta$ 线性相关，则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性表示，且表示法唯一。

证明

1. 存在不全为零的 $k_1, k_2, \ldots, k_s, k$ 使

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s + k\beta = 0 \xrightarrow{\text{可证}k\neq 0} \beta = -\frac{k_1}{k}\alpha_1 - \cdots - \frac{k_s}{k}\alpha_s$$

（证明 $k \neq 0$：否则（$k = 0$）

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$

定理 3 设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性无关，但 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s, \beta$ 线性相关，则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性表示，且表示法唯一。

证明

1. 存在不全为零的 $k_1, k_2, \ldots, k_s, k$ 使

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s + k\beta = 0 \xrightarrow{\text{可证}k\neq 0} \beta = -\frac{k_1}{k}\alpha_1 - \cdots - \frac{k_s}{k}\alpha_s$$

（证明 $k \neq 0$：否则（$k = 0$），$k_1, k_2, \ldots, k_s$ 不全为零，且

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$

定理 3 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关，但 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 线性相关，则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示，且表示法唯一。

证明

1. 存在不全为零的 $k_1, k_2, \dots, k_s, k$ 使

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s + k\beta = 0 \xrightarrow{\text{可证}k\neq 0} \beta = -\frac{k_1}{k}\alpha_1 - \cdots - \frac{k_s}{k}\alpha_s$$

（证明 $k \neq 0$：否则（$k = 0$），$k_1, k_2, \dots, k_s$ 不全为零，且

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$

推出 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关，矛盾。）

定理 3 设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性无关，但 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s, \beta$ 线性相关，则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性表示，且表示法唯一。

证明

1. 存在不全为零的 $k_1, k_2, \ldots, k_s, k$ 使

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s + k\beta = 0 \xrightarrow{\text{可证}k\neq 0} \beta = -\frac{k_1}{k}\alpha_1 - \cdots - \frac{k_s}{k}\alpha_s$$

（证明 $k \neq 0$：否则（$k = 0$），$k_1, k_2, \ldots, k_s$ 不全为零，且

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$

推出 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性相关，矛盾。）

2. 设

$$\beta = h_1\alpha_1 + \cdots + h_s\alpha_s$$
$$\beta = l_1\alpha_1 + \cdots + l_s\alpha_s$$

定理 3 设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性无关，但 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s, \beta$ 线性相关，则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性表示，且表示法唯一。

证明

1. 存在不全为零的 $k_1, k_2, \ldots, k_s, k$ 使

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s + k\beta = 0 \xrightarrow{\text{可证}k\neq 0} \beta = -\frac{k_1}{k}\alpha_1 - \cdots - \frac{k_s}{k}\alpha_s$$

（证明 $k \neq 0$：否则（$k = 0$），$k_1, k_2, \ldots, k_s$ 不全为零，且

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$

推出 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性相关，矛盾。）

2. 设

$$\begin{matrix} \beta = h_1\alpha_1 + \cdots + h_s\alpha_s \\ \beta = l_1\alpha_1 + \cdots + l_s\alpha_s \end{matrix} \xrightarrow{\text{相减}} (h_1-l_1)\alpha_1+\cdots+(h_s-l_s)\alpha_s = 0$$

定理 3 设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性无关，但 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s, \beta$ 线性相关，则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性表示，且表示法唯一。

证明

1. 存在不全为零的 $k_1, k_2, \ldots, k_s, k$ 使

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s + k\beta = 0 \xrightarrow{\text{可证}k\neq 0} \beta = -\frac{k_1}{k}\alpha_1 - \cdots - \frac{k_s}{k}\alpha_s$$

（证明 $k \neq 0$：否则（$k = 0$），$k_1, k_2, \ldots, k_s$ 不全为零，且

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$

推出 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性相关，矛盾。）

2. 设

$$\begin{array}{l} \beta = h_1\alpha_1 + \cdots + h_s\alpha_s \\ \beta = l_1\alpha_1 + \cdots + l_s\alpha_s \end{array} \quad \xrightarrow{\text{相减}} \quad (h_1 - l_1)\alpha_1 + \cdots + (h_s - l_s)\alpha_s = 0$$

由线性无关性，$h_1 = l_1, \ldots, h_s = l_s$。

定理 4 两个向量组

$$(A):\quad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$$

$$(B):\quad \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$$

定理 4 两个向量组 $(A): \quad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$

$$(B): \quad \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$$

若 (B) 可由 (A) 线性表示，且 $t > s$，

定理 4 两个向量组

$$(A):\quad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$$

$$(B):\quad \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$$

若 (B) 可由 (A) 线性表示，且 $t > s$，则向量组 (B) 线性相关。

定理 4 两个向量组 $(A):\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$

$(B):\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$

若 (B) 可由 (A) 线性表示，且 $t > s$，则向量组 (B) 线性相关。

证明 要找不全为零的 $k_1, \cdots, k_t$ 使下式为零：

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_t\beta_t$$

定理 4 两个向量组 $(A):\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$

$(B):\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$

若 (B) 可由 (A) 线性表示，且 $t > s$，则向量组 (B) 线性相关。

证明 要找不全为零的 $k_1, \cdots, k_t$ 使下式为零：

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_t\beta_t = (\beta_1\,\beta_2\,\cdots\,\beta_t)\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_t \end{pmatrix}$$

定理 4 两个向量组

$$(A):\quad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$$

$$(B):\quad \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$$

若 (B) 可由 (A) 线性表示，且 $t > s$，则向量组 (B) 线性相关。

证明 要找不全为零的 $k_1, \cdots, k_t$ 使下式为零：

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_t\beta_t = (\beta_1\, \beta_2\, \cdots\, \beta_t) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_t \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha_1\, \alpha_2\, \cdots\, \alpha_s) \begin{pmatrix} \qquad\qquad\qquad\qquad \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_t \end{pmatrix}$$

定理 4 两个向量组 $(A):\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$

$(B):\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$

若 (B) 可由 (A) 线性表示，且 $t > s$，则向量组 (B) 线性相关。

证明 要找不全为零的 $k_1, \cdots, k_t$ 使下式为零：

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_t\beta_t = (\beta_1\,\beta_2\,\cdots\,\beta_t)\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_t \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha_1\,\alpha_2\,\cdots\,\alpha_s)\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{s1} & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_t \end{pmatrix}$$

定理 4 两个向量组 $(A): \quad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$

$(B): \quad \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$

若 (B) 可由 (A) 线性表示，且 $t > s$，则向量组 (B) 线性相关。

证明 要找不全为零的 $k_1, \cdots, k_t$ 使下式为零：

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_t\beta_t = (\beta_1\, \beta_2 \cdots \beta_t)\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_t \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha_1\, \alpha_2 \cdots \alpha_s)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{s1} & a_{s2} & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_t \end{pmatrix}$$

定理 4 两个向量组 $(A):\quad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$

$(B):\quad \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$

若 (B) 可由 (A) 线性表示，且 $t > s$，则向量组 (B) 线性相关。

证明 要找不全为零的 $k_1, \cdots, k_t$ 使下式为零：

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_t\beta_t = (\beta_1\,\beta_2\,\cdots\,\beta_t)\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_t \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha_1\,\alpha_2\,\cdots\,\alpha_s)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1t} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{st} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_t \end{pmatrix}$$

定理 4 两个向量组 $(A):\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$

$(B):\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$

若 (B) 可由 (A) 线性表示，且 $t > s$，则向量组 (B) 线性相关。

证明 要找不全为零的 $k_1, \cdots, k_t$ 使下式为零：

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_t\beta_t = (\beta_1\, \beta_2\, \cdots\, \beta_t)\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_t \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha_1\, \alpha_2\, \cdots\, \alpha_s)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1t} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{st} \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_t \end{pmatrix}}_{k}$$

定理 4 两个向量组 $(A):\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$

$(B):\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$

若 (B) 可由 (A) 线性表示，且 $t > s$，则向量组 (B) 线性相关。

证明 要找不全为零的 $k_1, \cdots, k_t$ 使下式为零：

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_t\beta_t = (\beta_1\,\beta_2\,\cdots\,\beta_t)\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_t \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha_1\,\alpha_2\,\cdots\,\alpha_s)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1t} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{st} \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_t \end{pmatrix}}_{k}$$

$\because r(A) \le s < t$

$\therefore$

定理 4 两个向量组 $(A):\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$

$(B):\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$

若 (B) 可由 (A) 线性表示，且 $t > s$，则向量组 (B) 线性相关。

证明 要找不全为零的 $k_1, \cdots, k_t$ 使下式为零：

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_t\beta_t = (\beta_1\,\beta_2\,\cdots\,\beta_t)\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_t \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha_1\,\alpha_2\,\cdots\,\alpha_s)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1t} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{st} \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_t \end{pmatrix}}_{k}$$

$\because r(A) \leq s < t$

$\therefore$ 存在 $k \neq 0$

使得 $Ak = 0$

定理 4 两个向量组　$(A):\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$

$(B):\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$

若 (B) 可由 (A) 线性表示，且 $t > s$，则向量组 (B) 线性相关。

证明 要找不全为零的 $k_1, \cdots, k_t$ 使下式为零：

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_t\beta_t = (\beta_1\, \beta_2 \cdots \beta_t)\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_t \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha_1\, \alpha_2 \cdots \alpha_s)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1t} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{st} \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_t \end{pmatrix}}_{k}$$

$\because r(A) \le s < t$

$\therefore$ 存在 $k \neq 0$

使得 $Ak = 0$

$$= 0$$

所以向量组 (B) 线性相关。

定理 4” 两个向量组

$$(A): \quad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$$

$$(B): \quad \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$$

假设向量组 (B) 可由 (A) 线性表示，结论：

1. 若 $t > s$，则向量组 (B) 线性相关。

定理 4” 两个向量组 $(A): \quad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$

$$(B): \quad \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$$

假设向量组 (B) 可由 (A) 线性表示，结论：

1. 若 $t > s$，则向量组 (B) 线性相关。
2. 若向量组 (B) 线性无关，则 $t \leq s$。

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$$

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$$

定理 4” 两个向量组

$$(A): \quad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$$

$$(B): \quad \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$$

假设向量组 (B) 可由 (A) 线性表示，结论：

1. 若 $t > s$，则向量组 (B) 线性相关。
2. 若向量组 (B) 线性无关，则 $t \leq s$。

推论 两个向量组

$$(A): \quad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$$

$$(B): \quad \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$$

定理 4” 两个向量组 $(A):\quad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$

$(B):\quad \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$

假设向量组 (B) 可由 (A) 线性表示，结论：

1. 若 $t > s$，则向量组 (B) 线性相关。
2. 若向量组 (B) 线性无关，则 $t \leq s$。

推论 两个向量组 $(A):\quad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$

$(B):\quad \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$

如果向量组 (A) 与 (B) 等价，且均线性无关，

定理 4” 两个向量组

$$(A):\quad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$$

$$(B):\quad \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$$

假设向量组 (B) 可由 (A) 线性表示，结论：

1. 若 $t > s$，则向量组 (B) 线性相关。
2. 若向量组 (B) 线性无关，则 $t \leq s$。

推论 两个向量组

$$(A):\quad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$$

$$(B):\quad \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$$

如果向量组 (A) 与 (B) 等价，且均线性无关，则 $s = t$。

定理 4” 两个向量组 $(A):\quad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$

$(B):\quad \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$

假设向量组 (B) 可由 (A) 线性表示，结论：

1. 若 $t > s$，则向量组 (B) 线性相关。
2. 若向量组 (B) 线性无关，则 $t \leq s$。

推论 两个向量组 $(A):\quad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$

$(B):\quad \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$

如果向量组 (A) 与 (B) 等价，且均线性无关，则 $s = t$。

证明

- (B) 由 (A) 线性表示，且 (B) 线性无关

定理 4” 两个向量组 $(A): \quad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$

$(B): \quad \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$

假设向量组 (B) 可由 (A) 线性表示，结论：

1. 若 $t > s$，则向量组 (B) 线性相关。
2. 若向量组 (B) 线性无关，则 $t \leq s$。

推论 两个向量组 $(A): \quad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$

$(B): \quad \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$

如果向量组 (A) 与 (B) 等价，且均线性无关，则 $s = t$。

证明

- (B) 由 (A) 线性表示，且 (B) 线性无关 $\Rightarrow t \leq s$

定理 4” 两个向量组

$$(A):\quad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$$

$$(B):\quad \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$$

假设向量组 (B) 可由 (A) 线性表示，结论：

1. 若 $t > s$，则向量组 (B) 线性相关。
2. 若向量组 (B) 线性无关，则 $t \leq s$。

推论 两个向量组

$$(A):\quad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$$

$$(B):\quad \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$$

如果向量组 (A) 与 (B) 等价，且均线性无关，则 $s = t$。

证明

- (B) 由 (A) 线性表示，且 (B) 线性无关 $\Rightarrow t \leq s$
- (A) 由 (B) 线性表示，且 (A) 线性无关

定理 4” 两个向量组 $(A):\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$

$(B):\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$

假设向量组 (B) 可由 (A) 线性表示，结论：

1. 若 $t > s$，则向量组 (B) 线性相关。
2. 若向量组 (B) 线性无关，则 $t \le s$。

推论 两个向量组 $(A):\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$

$(B):\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$

如果向量组 (A) 与 (B) 等价，且均线性无关，则 $s = t$。

证明

- (B) 由 (A) 线性表示，且 (B) 线性无关 $\Rightarrow t \le s$
- (A) 由 (B) 线性表示，且 (A) 线性无关 $\Rightarrow s \le t$

定理 4” 两个向量组

$$(A):\quad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$$

$$(B):\quad \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$$

假设向量组 (B) 可由 (A) 线性表示，结论：

1. 若 $t > s$，则向量组 (B) 线性相关。
2. 若向量组 (B) 线性无关，则 $t \leq s$。

推论 两个向量组

$$(A):\quad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$$

$$(B):\quad \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$$

如果向量组 (A) 与 (B) 等价，且均线性无关，则 $s = t$。

证明

- (B) 由 (A) 线性表示，且 (B) 线性无关 $\Rightarrow t \leq s$
- (A) 由 (B) 线性表示，且 (A) 线性无关 $\Rightarrow s \leq t$

所以 $s = t$