第 06 周作业解答

练习 1. 判断 3 阶方阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出逆矩阵。

解 1. 计算行列式：

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3 - r_2]{r_1 - 2r_2} \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 14 \neq 0$$

所以 A 可逆。

2. 计算伴随矩阵：

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 14 & 4 \\ 3 & -7 & 1 \\ 5 & -7 & -3 \end{pmatrix}$$

3. 所以逆矩阵为

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -2 & 14 & 4 \\ 3 & -7 & 1 \\ 5 & -7 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/7 & 1 & 4/14 \\ 3/14 & -1/2 & 1/14 \\ 5/14 & -1/2 & -3/14 \end{pmatrix}$$

练习 2. 判断 2 阶方阵 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出逆矩阵。

解 1. 计算行列式：$|A| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ 所以可逆。

2. 计算伴随矩阵：$A^* = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$。

3. 所以逆矩阵为：$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$。

练习 3. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ 及 $AB = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 6 & -9 & 3 \end{pmatrix}$，求出矩阵 B。

解由题意知：

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 6 & -9 & 3 \end{pmatrix}$$

所以

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 6 & -9 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 6 & -9 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 1 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

练习 4. 假设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 - 3A - 5I = O$，证明 $A + I$ 可逆，并求 $(A+I)^{-1}$。

解因为

$$A^2 - 3A - 5I = O \quad \Rightarrow \quad A^2 - 3A - 4I = I \quad \Rightarrow \quad (A+I)(A-4I) = I$$

所以 $A + I$ 可逆，且 $(A+I)^{-1} = A - 4I$。

练习 5. 假设 n 阶方阵 A, B 的乘积 AB 可逆，问能否断定 A, B 皆可逆，为什么?

解注意到

$$|A| \cdot |B| = |AB| \neq 0$$

所以 $|A| \neq 0$ 且 $|B| \neq 0$，即 A, B 皆可逆。

练习 6. 将 4 阶方阵 M 作如下分块

$$M = \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A & O \\ I & -A \end{pmatrix}$$

请按此分块方式计算 M^2。

解

$$M^2 = \begin{pmatrix} A & O \\ I & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & O \\ I & -A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA + OI & AO + O(-A) \\ IA + (-A)I & IO + (-A)(-A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^2 & O \\ O & A^2 \end{pmatrix}$$

而

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

所以

$$M = \begin{pmatrix} I & O \\ O & I \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

练习 7. 将矩阵 A, B 作如下分块

$$A = \left(\begin{array}{c:cc} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ \hdashline 3 & 1 & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_1 & 2I \\ 3 & A_2 \end{pmatrix}, \quad B = \left(\begin{array}{cc:cc} 2 & 7 & 0 & 0 \\ \hdashline -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} B_1 & O \\ -I & B_2 \end{pmatrix},$$

请按此分块方式计算乘积 AB。

解

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 & 2I \\ 3 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & O \\ -I & B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1B_1 + 2I(-I) & A_1O + 2IB_2 \\ 3B_1 + A_2(-I) & 3O + A_2B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1B_1 - 2I & 2B_2 \\ 3B_1 - A_2 & A_2B_2 \end{pmatrix}$$

其中

$$A_1B_1 - 2I = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 7 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 35 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_2B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}$$

所以

$$M = \left(\begin{array}{cc:cc} 8 & 35 & 2 & 8 \\ 0 & -2 & 4 & 10 \\ \hdashline 5 & 21 & 1 & 4 \end{array}\right)$$