第 10 章 c：三重积分

数学系　　梁卓滨

2017.07 暑期班

Outline

1. 三重积分的概念

2. 三重积分的计算：化为累次积分

3. 球面坐标

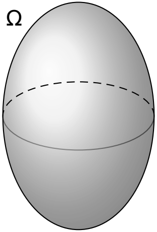
We are here now...

1. 三重积分的概念
2. 三重积分的计算：化为累次积分
3. 球面坐标

三维物体的质量

假设

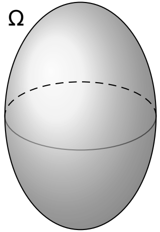
- Ω 为空间中三维闭区域
- 密度为 μ
- 质量为 m



三维物体的质量

假设

- Ω 为空间中三维闭区域
- 密度为 μ
- 质量为 m

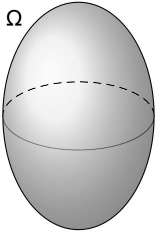


- 当材料均匀时（$\mu =$ 常数），
- 当材料非均匀时（$\mu = \mu(x, y, z)$ 为 Ω 上函数），

三维物体的质量

假设

- Ω 为空间中三维闭区域
- 密度为 μ
- 质量为 m



- 当材料均匀时（$\mu =$ 常数），

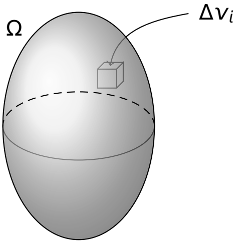
$$m = \mu \cdot \mathrm{Vol}(\Omega)$$

- 当材料非均匀时（$\mu = \mu(x, y, z)$ 为 Ω 上函数），

三维物体的质量

假设

- Ω 为空间中三维闭区域
- 密度为 μ
- 质量为 m



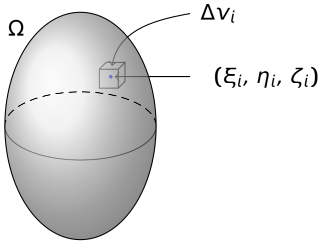
- 当材料均匀时（$\mu =$ 常数），

$$m = \mu \cdot \mathrm{Vol}(\Omega)$$

- 当材料非均匀时（$\mu = \mu(x, y, z)$ 为 Ω 上函数），利用微元法可知

三维物体的质量

假设
- Ω 为空间中三维闭区域
- 密度为 μ
- 质量为 m



- 当材料均匀时（$\mu =$ 常数），

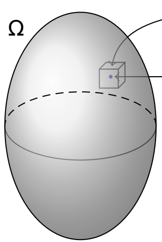
$$m = \mu \cdot \mathrm{Vol}(\Omega)$$

- 当材料非均匀时（$\mu = \mu(x, y, z)$ 为 Ω 上函数），利用微元法可知

三维物体的质量

假设

- Ω 为空间中三维闭区域
- 密度为 μ
- 质量为 m



- 当材料均匀时（$\mu =$ 常数），

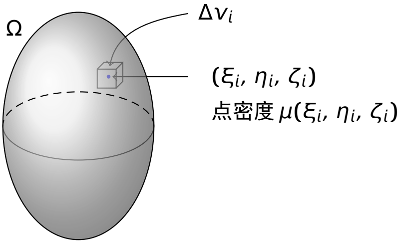
$$m = \mu \cdot \mathrm{Vol}(\Omega)$$

- 当材料非均匀时（$\mu = \mu(x, y, z)$ 为 Ω 上函数），利用微元法可知

三维物体的质量

假设

- Ω 为空间中三维闭区域
- 密度为 μ
- 质量为 m



- 当材料均匀时（μ = 常数），

$$m = \mu \cdot \mathrm{Vol}(\Omega)$$

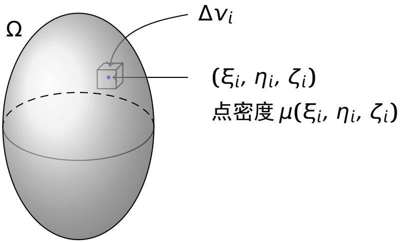
- 当材料非均匀时（$\mu = \mu(x, y, z)$ 为 Ω 上函数），利用微元法可知

$$\mu(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i$$

三维物体的质量

假设

- Ω 为空间中三维闭区域
- 密度为 μ
- 质量为 m



- 当材料均匀时（$\mu =$ 常数），

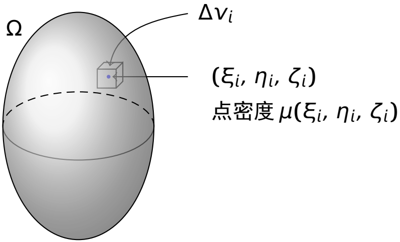
$$m = \mu \cdot \mathrm{Vol}(\Omega)$$

- 当材料非均匀时（$\mu = \mu(x, y, z)$ 为 Ω 上函数），利用微元法可知

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$$

三维物体的质量

假设
- Ω 为空间中三维闭区域
- 密度为 μ
- 质量为 m



- 当材料均匀时（$\mu =$ 常数），

$$m = \mu \cdot \mathrm{Vol}(\Omega)$$

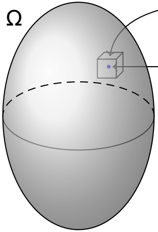
- 当材料非均匀时（$\mu = \mu(x, y, z)$ 为 Ω 上函数），利用微元法可知

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \mu(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$$

三维物体的质量

假设

- Ω 为空间中三维闭区域
- 密度为 μ
- 质量为 m



- 当材料均匀时（$\mu =$ 常数），

$$m = \mu \cdot \mathrm{Vol}(\Omega)$$

- 当材料非均匀时（$\mu = \mu(x, y, z)$ 为 Ω 上函数），利用微元法可知

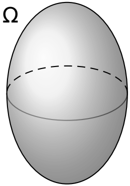
$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \mu(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$$

三重积分的定义

三重积分定义 设

- Ω 是空间中有界闭区域,
- $f(x, y, z)$ 是 Ω 上的有界函数,

若

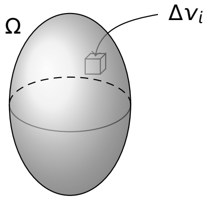


三重积分的定义

三重积分定义 设

- Ω 是空间中有界闭区域，
- $f(x, y, z)$ 是 Ω 上的有界函数，

若

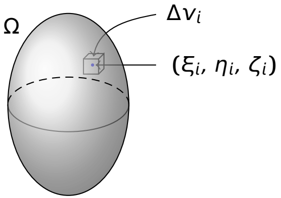


三重积分的定义

三重积分定义 设

- Ω 是空间中有界闭区域，
- $f(x, y, z)$ 是 Ω 上的有界函数，

若

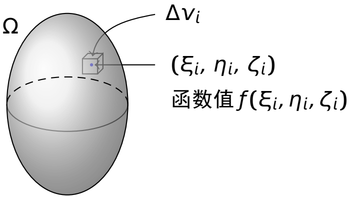


三重积分的定义

三重积分定义 设

- Ω 是空间中有界闭区域，
- $f(x, y, z)$ 是 Ω 上的有界函数，

若



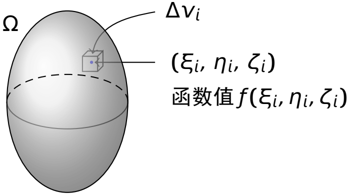
三重积分的定义

三重积分定义 设

- Ω 是空间中有界闭区域,
- $f(x, y, z)$ 是 Ω 上的有界函数,

若

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i$$



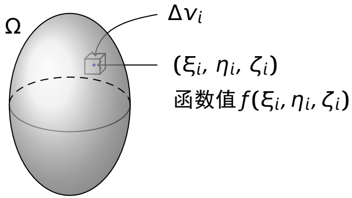
三重积分的定义

三重积分定义 设

- Ω 是空间中有界闭区域，
- $f(x, y, z)$ 是 Ω 上的有界函数，

若

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$$



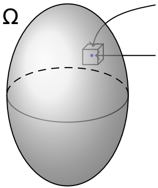
三重积分的定义

三重积分定义 设

- Ω 是空间中有界闭区域，
- $f(x, y, z)$ 是 Ω 上的有界函数，

若

- 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i$存在，



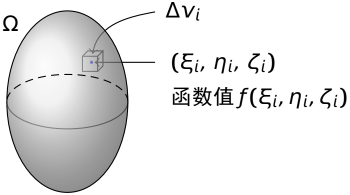
三重积分的定义

三重积分定义 设

- Ω 是空间中有界闭区域,
- $f(x, y, z)$ 是 Ω 上的有界函数,

若

- 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i$存在，且极限
- 与上述 Ω 的划分、(ξ_i, η_i, ζ_i) 的选取无关,



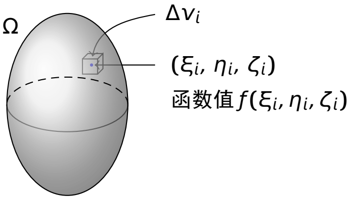
三重积分的定义

三重积分定义 设

- Ω 是空间中有界闭区域，
- $f(x, y, z)$ 是 Ω 上的有界函数，

若

- 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i$存在，且极限
- 与上述 Ω 的划分、(ξ_i, η_i, ζ_i) 的选取无关，



则定义

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)dv = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i$$

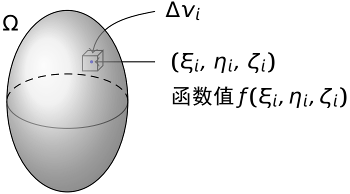
三重积分的定义

三重积分定义 设

- Ω 是空间中有界闭区域，
- $f(x, y, z)$ 是 Ω 上的有界函数，

若

- 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i$存在，且极限
- 与上述 Ω 的划分、(ξ_i, η_i, ζ_i) 的选取无关，



则定义
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)dv = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i$$

称为 $f(x, y, z)$ 在 D 上的三重积分。

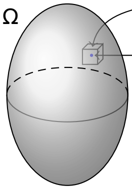
三重积分的定义

三重积分定义 设

- Ω 是空间中有界闭区域，
- $f(x, y, z)$ 是 Ω 上的有界函数，

若

- 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i$存在，且极限
- 与上述 Ω 的划分、(ξ_i, η_i, ζ_i) 的选取无关，



则定义

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)dv = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i$$

称为 $f(x, y, z)$ 在 D 上的三重积分。dv 称为体积元素。

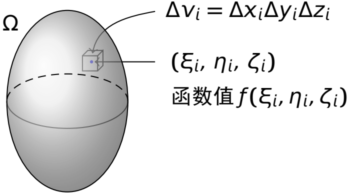
三重积分的定义

三重积分定义 设

- Ω 是空间中有界闭区域，
- $f(x, y, z)$ 是 Ω 上的有界函数，

若

- 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i$存在，且极限
- 与上述 Ω 的划分、(ξ_i, η_i, ζ_i) 的选取无关，



则定义

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)dv = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i$$

称为 $f(x, y, z)$ 在 D 上的三重积分。dv 称为体积元素。

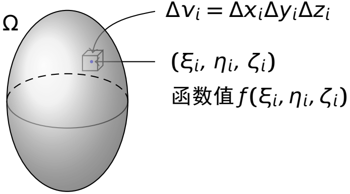
三重积分的定义

三重积分定义 设

- Ω 是空间中有界闭区域，
- $f(x, y, z)$ 是 Ω 上的有界函数，

若

- 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i$存在，且极限
- 与上述 Ω 的划分、(ξ_i, η_i, ζ_i) 的选取无关，



则定义

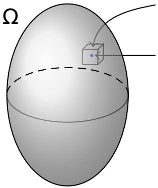
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)dv = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i$$

称为 $f(x, y, z)$ 在 D 上的三重积分。dv 称为体积元素。$dv = dxdydz$

三重积分的定义

三重积分定义 设

- Ω 是空间中有界闭区域，
- $f(x, y, z)$ 是 Ω 上的有界函数，



若

- 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i$ 存在，且极限
- 与上述 Ω 的划分、(ξ_i, η_i, ζ_i) 的选取无关，

则定义

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)dv = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i$$

称为 $f(x, y, z)$ 在 D 上的三重积分。dv 称为体积元素。$dv = dxdydz$

注 三重积分的定义式与二重积分的类似，故性质也类似

三重积分的性质

- 存在性 若 $f(x, y, z)$ 在空间有界闭区域 Ω 上连续，则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$$

存在。

三重积分的性质

- 存在性 若 $f(x, y, z)$ 在空间有界闭区域 Ω 上连续，则
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)dv$$
存在。
- 线性性 $\iiint_{\Omega}(\alpha f + \beta g)dv = \alpha \iiint_{\Omega} f dv + \beta \iiint_{\Omega} g dv$

三重积分的性质

- 存在性 若 $f(x, y, z)$ 在空间有界闭区域 Ω 上连续，则
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)dv$$
存在。
- 线性性 $\iiint_{\Omega}(\alpha f+\beta g)dv=\alpha\iiint_{\Omega}fdv+\beta\iiint_{\Omega}gdv$
- 可加性
$\iiint_{\Omega}f(x,y,z)dv=\iiint_{\Omega_1}f(x,y,z)dv+\iiint_{\Omega_2}f(x,y,z)dv$

三重积分的性质

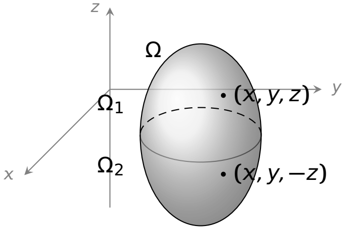
- **存在性** 若 $f(x, y, z)$ 在空间有界闭区域 Ω 上连续，则
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$$
存在。
- **线性性** $\iiint_{\Omega}(\alpha f + \beta g) dv = \alpha \iiint_{\Omega} f dv + \beta \iiint_{\Omega} g dv$
- **可加性**
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \iiint_{\Omega_1} f(x, y, z) dv + \iiint_{\Omega_2} f(x, y, z) dv$$
- $\iiint_{\Omega} 1 dv = \mathrm{Vol}(\Omega)$

三重积分的性质

- 存在性 若 $f(x, y, z)$ 在空间有界闭区域 Ω 上连续，则
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$$
存在。
- 线性性 $\iiint_{\Omega}(\alpha f + \beta g) dv = \alpha \iiint_{\Omega} f dv + \beta \iiint_{\Omega} g dv$
- 可加性
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z) dv = \iiint_{\Omega_1} f(x,y,z) dv + \iiint_{\Omega_2} f(x,y,z) dv$$
- $\iiint_{\Omega} 1 dv = \mathrm{Vol}(\Omega)$
- 若 $f(x,y,z) \le g(x,y,z)$，则
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z) dv \le \iiint_{\Omega} g(x,y,z) dv$$

积分的对称性

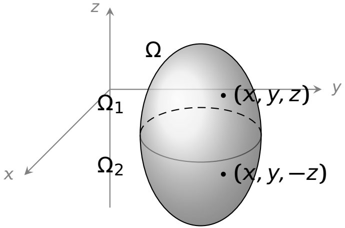
性质 设空间中三维闭区域 Ω 关于 xoy 坐标面对称，



积分的对称性

性质 设空间中三维闭区域 Ω 关于 xoy 坐标面对称，

- 若 $f(x,y,z)$ 关于 z 是奇函数（即：$f(x,y,-z)=-f(x,y,z)$），则

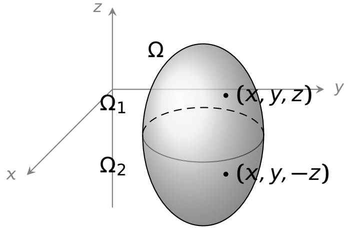


积分的对称性

性质 设空间中三维闭区域 Ω 关于 xoy 坐标面对称，

- 若 $f(x,y,z)$ 关于 z 是奇函数（即：$f(x,y,-z)=-f(x,y,z)$），则

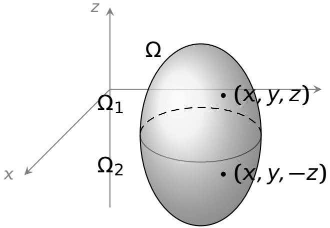
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = 0$$



积分的对称性

性质 设空间中三维闭区域 Ω 关于 xoy 坐标面对称，

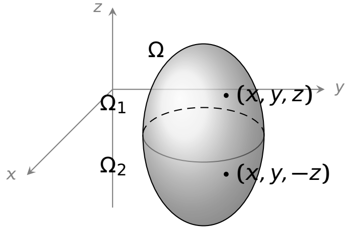
- 若 $f(x,y,z)$ 关于 z 是奇函数（即：$f(x,y,-z)=-f(x,y,z)$），则
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = 0$$
- 若 $f(x,y,z)$ 关于 z 是偶函数（即：$f(x,y,-z)=f(x,y,z)$），则



积分的对称性

性质 设空间中三维闭区域 Ω 关于 xoy 坐标面对称，

- 若 $f(x,y,z)$ 关于 z 是奇函数（即：$f(x,y,-z)=-f(x,y,z)$），则
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = 0$$
- 若 $f(x,y,z)$ 关于 z 是偶函数（即：$f(x,y,-z)=f(x,y,z)$），则
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = 2\iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)dv = 2\iiint_{\Omega_2} f(x,y,z)dv$$



例 计算 $\iiint_{\Omega} \frac{z\ln(1+x^2+y^2)}{1+x^2+y^2+z^2} dz$，其中 Ω 为球体 $x^2+y^2+z^2 \leq 1$

例 计算 $\iiint_\Omega \frac{z\ln(1+x^2+y^2)}{1+x^2+y^2+z^2}dz$，其中 Ω 为球体 $x^2+y^2+z^2\leq 1$

解 因为

1. 被积函数函数关于变量 z 是奇函数；
2. 积分区域 Ω 关于 xoy 坐标面对称，

所以积分为 0

We are here now...

1. 三重积分的概念

2. 三重积分的计算：化为累次积分

3. 球面坐标

计算三重积分的基本做法：化为累次积分

- “先一后二”

- “先二后一”

计算三重积分的基本做法：化为累次积分

- “先一后二”

  1. $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iint_* \left[\int_*^* f(x,\, y,\, z)dz \right] dxdy$

- “先二后一”

计算三重积分的基本做法：化为累次积分

- “先一后二”

1. $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iint_* \left[\int_*^* f(x,\ y,\ z)dz \right] dxdy$
2. $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iint_* \left[\int_*^* f(x,\ y,\ z)dy \right] dxdz$

- “先二后一”

计算三重积分的基本做法：化为累次积分

- “先一后二”
  1. $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{*}\left[\int_{*}^{*} f(x,\ y,\ z)dz\right]dxdy$
  2. $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{*}\left[\int_{*}^{*} f(x,\ y,\ z)dy\right]dxdz$
  3. $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{*}\left[\int_{*}^{*} f(x,\ y,\ z)dz\right]dxdy$
- “先二后一”

计算三重积分的基本做法：化为累次积分

- “先一后二”
  1. $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iint_* \left[\int_*^* f(x,\ y,\ z)dz \right] dxdy$
  2. $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iint_* \left[\int_*^* f(x,\ y,\ z)dy \right] dxdz$
  3. $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iint_* \left[\int_*^* f(x,\ y,\ z)dz \right] dxdy$
- “先二后一”
  1. $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \int_*^* \left[\iint_* f(x,\ y,\ z)dxdy \right] dz$

计算三重积分的基本做法：化为累次积分

- “先一后二”

1. $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iint_* \left[\int_*^* f(x,\, y,\, z)dz \right] dxdy$
2. $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iint_* \left[\int_*^* f(x,\, y,\, z)dy \right] dxdz$
3. $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iint_* \left[\int_*^* f(x,\, y,\, z)dz \right] dxdy$

- “先二后一”

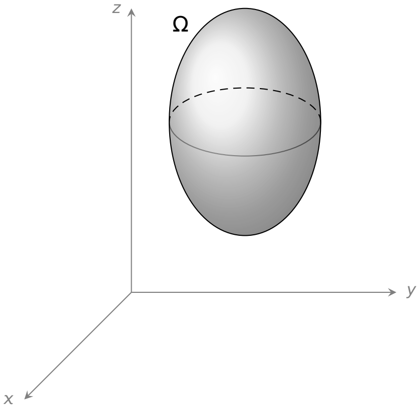
1. $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \int_*^* \left[\iint_* f(x,\, y,\, z)dxdy \right] dz$
2. $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \int_*^* \left[\iint_* f(x,\, y,\, z)dxdz \right] dy$

计算三重积分的基本做法：化为累次积分

- “先一后二”
  1. $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iint_* \left[\int_*^* f(x,\ y,\ z)dz \right] dxdy$
  2. $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iint_* \left[\int_*^* f(x,\ y,\ z)dy \right] dxdz$
  3. $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iint_* \left[\int_*^* f(x,\ y,\ z)dz \right] dxdy$
- “先二后一”
  1. $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \int_*^* \left[\iint_* f(x,\ y,\ z)dxdy \right] dz$
  2. $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \int_*^* \left[\iint_* f(x,\ y,\ z)dxdz \right] dy$
  3. $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \int_*^* \left[\iint_* f(x,\ y,\ z)dydz \right] dx$

投影法（“先一后二”）

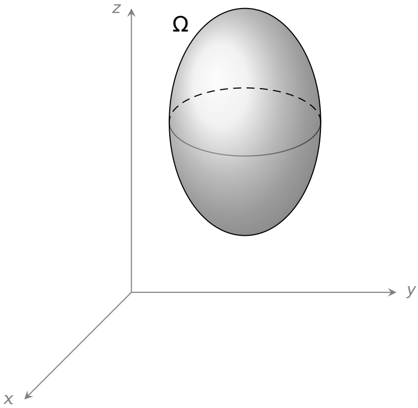
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dxdydz$$



投影法（“先一后二”）

1. 先积 z，再积 xy

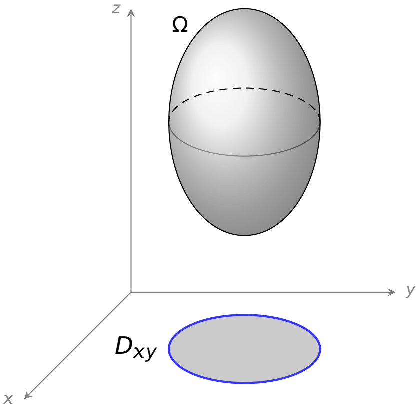
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint \left[\int \qquad f(x,y,z)dz \right] dxdy$$



投影法（“先一后二”）

1. 先积 z，再积 xy

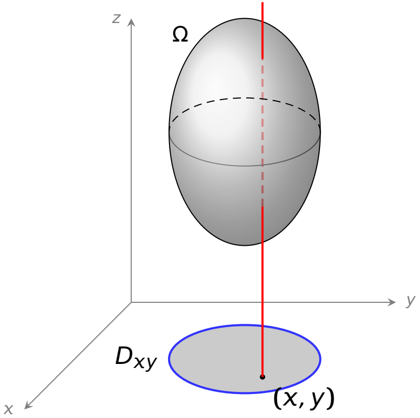
$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iint \left[\int \qquad f(x,y,z)dz \right] dxdy$$



投影法（“先一后二”）

1. 先积 z，再积 xy

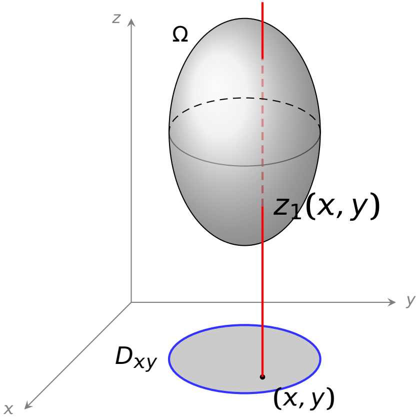
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint \left[\int f(x,y,z)dz\right]dxdy$$



投影法（“先一后二”）

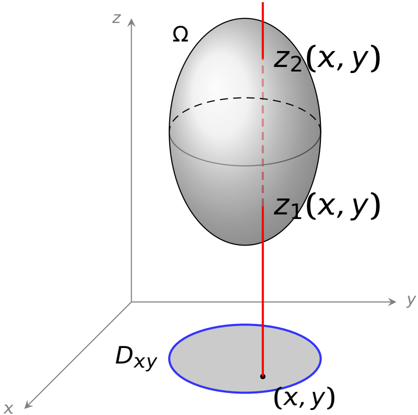
1. 先积 z，再积 xy

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iint \left[\int \qquad f(x,\, y,\, z)dz \right] dxdy$$



1. 先积 z，再积 xy

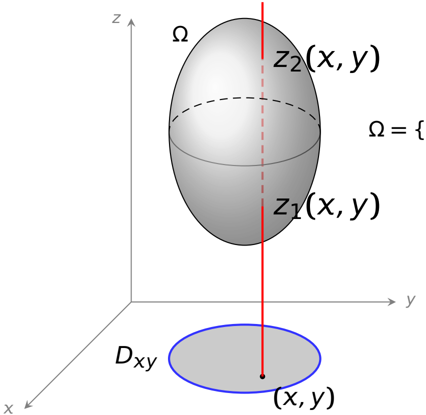
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint \left[\int \qquad f(x,y,z)dz \right] dxdy$$



投影法（“先一后二”）

1. 先积 z，再积 xy

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint \left[\int \qquad f(x,\ y,\ z)dz \right] dxdy$$

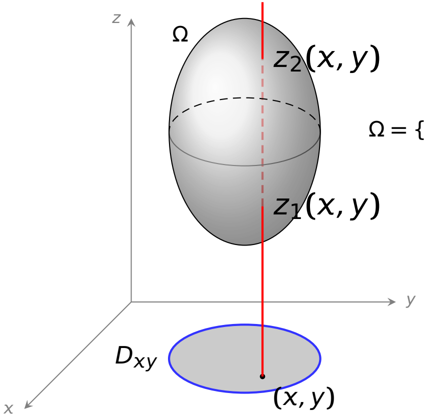


$$\Omega = \{(x,y,z) | z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y),\ (x,y) \in D_{xy}\}$$

投影法（“先一后二”）

1. 先积 z，再积 xy

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D_{xy}} \Big[\int \qquad f(x,y,z)dz \Big] dxdy$$

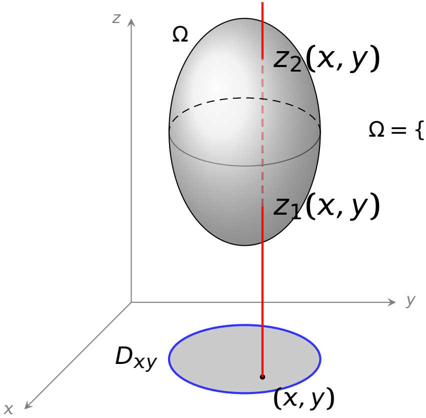


$$\Omega = \{(x,y,z) | z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y), (x,y) \in D_{xy}\}$$

投影法（“先一后二”）

1. 先积 z，再积 xy

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D_{xy}} \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,\ y,\ z)dz \right] dxdy$$



$$\Omega = \{(x,y,z) | z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y),\ (x,y) \in D_{xy}\}$$

投影法（“先一后二”）

1. 先积 z，再积 xy

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D_{xy}}\left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,\ y,\ z)dz\right]dxdy$$

投影法（“先一后二”）

1. 先积 z，再积 xy

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D_{xy}} \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,\ y,\ z)dz \right] dxdy$$

类似地

2. 先积 x，再积 yz

3. 先积 y，再积 xz

投影法（“先一后二”）

1. 先积 z，再积 xy

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D_{xy}} \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,\ y,\ z)dz \right] dxdy$$

类似地

2. 先积 x，再积 yz

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint \left[\int f(x,\ y,\ z)dx \right] dydz$$

3. 先积 y，再积 xz

投影法（“先一后二”）

1. 先积 z，再积 xy

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D_{xy}} \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,\ y,\ z)dz \right] dxdy$$

类似地

2. 先积 x，再积 yz

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D_{yz}} \left[\int \qquad f(x,\ y,\ z)dx \right] dydz$$

3. 先积 y，再积 xz

投影法（“先一后二”）

1. 先积 z，再积 xy

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz=\iint_{D_{xy}}\left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,\ y,\ z)dz\right]dxdy$$

类似地

2. 先积 x，再积 yz

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz=\iint_{D_{yz}}\left[\int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)}f(x,\ y,\ z)dx\right]dydz$$

3. 先积 y，再积 xz

投影法（“先一后二”）

1. 先积 z，再积 xy

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D_{xy}}\left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,\ y,\ z)dz\right]dxdy$$

类似地

2. 先积 x，再积 yz

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D_{yz}}\left[\int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x,\ y,\ z)dx\right]dydz$$

3. 先积 y，再积 xz

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iint\left[\int f(x,\ y,\ z)dy\right]dxdz$$

投影法（“先一后二”）

1. 先积 z，再积 xy

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D_{xy}} \Big[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,\ y,\ z)dz\Big]dxdy$$

类似地

2. 先积 x，再积 yz

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D_{yz}} \Big[\int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x,\ y,\ z)dx\Big]dydz$$

3. 先积 y，再积 xz

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D_{xz}} \Big[\int \qquad f(x,\ y,\ z)dy\Big]dxdz$$

投影法（“先一后二”）

1. 先积 z，再积 xy

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D_{xy}} \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,\ y,\ z)dz \right] dxdy$$

类似地

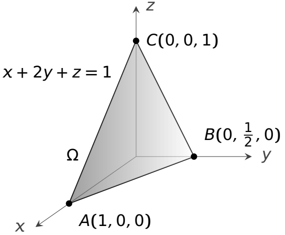
2. 先积 x，再积 yz

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D_{yz}} \left[\int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x,\ y,\ z)dx \right] dydz$$

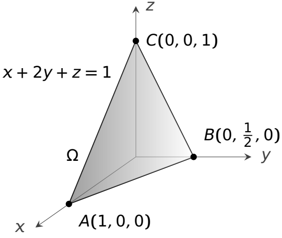
3. 先积 y，再积 xz

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D_{xz}} \left[\int_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x,\ y,\ z)dy \right] dxdz$$

例 计算 $\iiint_\Omega x\,dx\,dy\,dz$，其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域。



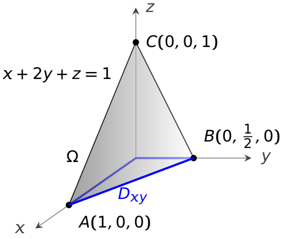
例 计算 $\iiint_\Omega x dxdydz$，其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域。



解

$$\text{原式} = \iint \left[\int \quad x dz \right] dxdy$$

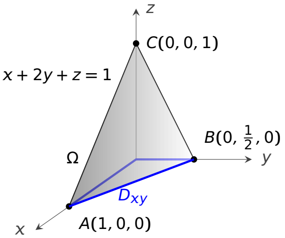
例 计算 $\iiint_\Omega x dxdydz$，其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域。

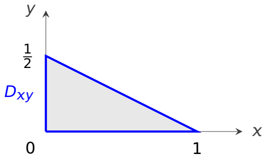


解

$$\text{原式} = \iint \Big[\int \qquad x dz \Big] dxdy$$

例 计算 $\iiint_\Omega x dxdydz$，其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域。

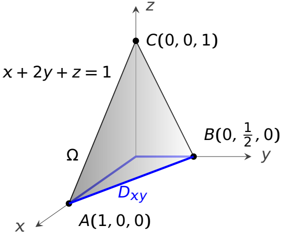


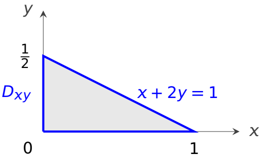


解

$$原式 = \iint \left[\int \quad x dz \right] dxdy$$

例 计算 $\iiint_\Omega x\,dxdydz$，其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域。

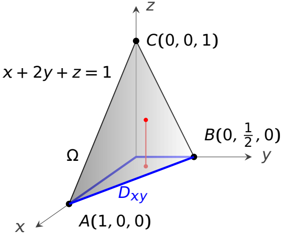


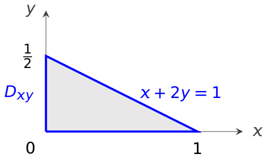


解

$$原式 = \iint \left[\int \qquad x\,dz \right] dxdy$$

例 计算 $\iiint_\Omega x\,dxdydz$，其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域。

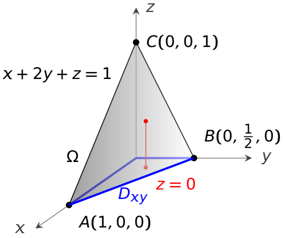


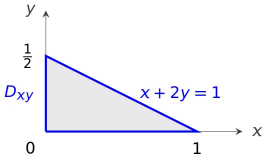


解

$$\text{原式} = \iint \left[\int \quad x dz \right] dxdy$$

例 计算 $\iiint_\Omega x\,dxdydz$，其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域。

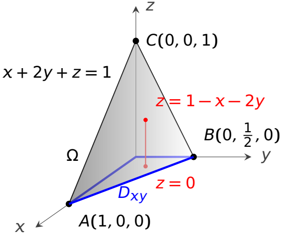


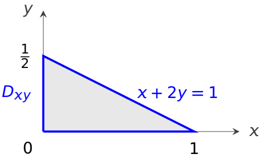


解

$$原式 = \iint \Big[\int \quad x\,dz \Big] dxdy$$

例 计算 $\iiint_\Omega x\,dxdydz$，其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域。

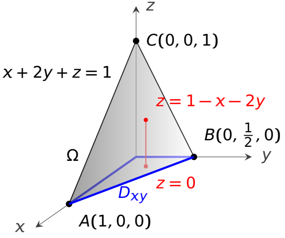


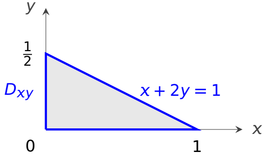


解

$$原式 = \iint \Big[\int \quad x\,dz \Big] dxdy$$

例 计算 $\iiint_\Omega xdxdydz$，其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域。

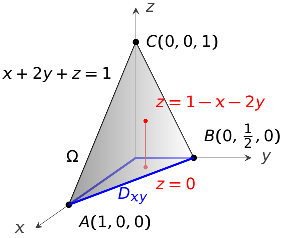


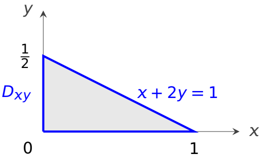


解

$$\text{原式} = \iint_{D_{xy}} \Big[\int \qquad xdz \Big] dxdy$$

例 计算 $\iiint_\Omega x dxdydz$，其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域。

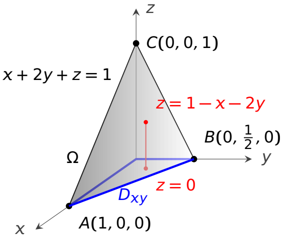


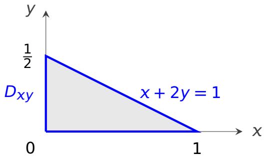


解

$$\text{原式} = \iint_{D_{xy}} \left[\int_0^{1-x-2y} x dz \right] dxdy$$

例 计算 $\iiint_\Omega x dxdydz$，其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域。

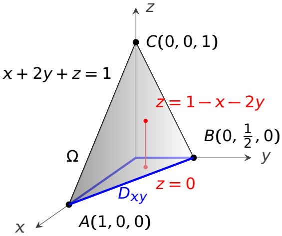


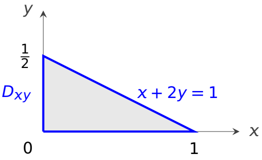


解

$$\text{原式} = \iint_{D_{xy}} \left[\int_0^{1-x-2y} x dz \right] dxdy \qquad x(1-x-2y)$$

例 计算 $\iiint_\Omega x dxdydz$，其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域。

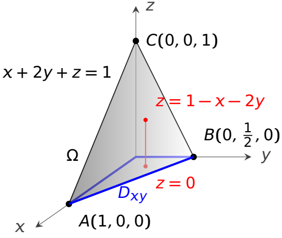


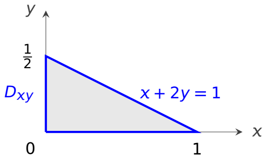


解

$$\text{原式} = \iint_{D_{xy}} \left[\int_0^{1-x-2y} x dz \right] dxdy = \iint_{D_{xy}} x(1-x-2y) dxdy$$

例 计算 $\iiint_\Omega x\,dxdydz$，其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域。



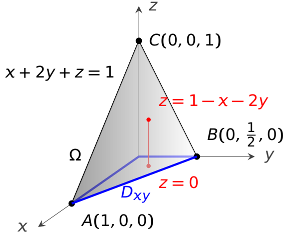


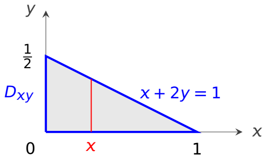
解

$$原式 = \iint_{D_{xy}}\left[\int_0^{1-x-2y} x\,dz\right]dxdy = \iint_{D_{xy}} x(1-x-2y)\,dxdy$$

$$= \int \left[\int \quad x(1-x-2y)\,dy\right]dx$$

例 计算 $\iiint_\Omega x\,dxdydz$，其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域。



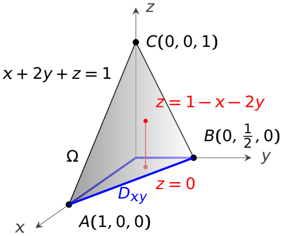


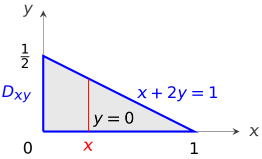
解

$$\text{原式} = \iint_{D_{xy}}\left[\int_0^{1-x-2y} x\,dz\right]dxdy = \iint_{D_{xy}} x(1-x-2y)\,dxdy$$

$$= \int \left[\int \quad x(1-x-2y)\,dy\right]dx$$

例 计算 $\iiint_\Omega x\,dxdydz$，其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域。



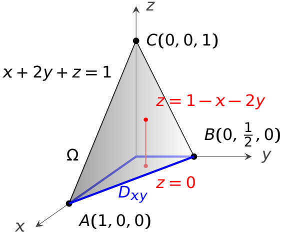


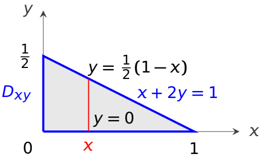
解

$$\text{原式} = \iint_{D_{xy}} \left[\int_0^{1-x-2y} x\,dz\right] dxdy = \iint_{D_{xy}} x(1-x-2y)\,dxdy$$

$$= \int \left[\int x(1-x-2y)\,dy\right] dx$$

例 计算 $\iiint_\Omega xdxdydz$，其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域。



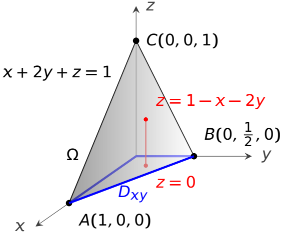


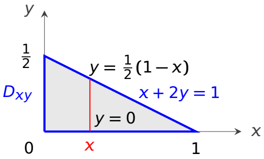
解

$$\text{原式} = \iint_{D_{xy}} \left[\int_0^{1-x-2y} xdz \right] dxdy = \iint_{D_{xy}} x(1-x-2y)dxdy$$

$$= \int \left[\int x(1-x-2y)dy \right] dx$$

例 计算 $\iiint_\Omega x\,dxdydz$，其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域。



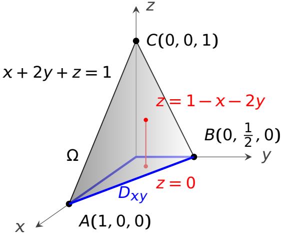


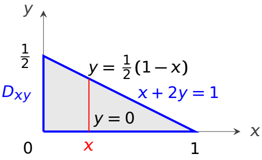
解

$$\text{原式} = \iint_{D_{xy}} \left[\int_0^{1-x-2y} x\,dz \right] dxdy = \iint_{D_{xy}} x(1-x-2y)\,dxdy$$

$$= \int_0^1 \left[\int \quad x(1-x-2y)\,dy \right] dx$$

例 计算 $\iiint_\Omega x dx dy dz$，其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域。



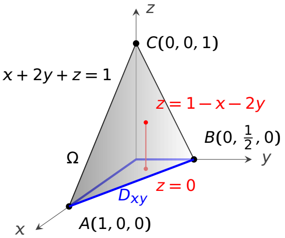


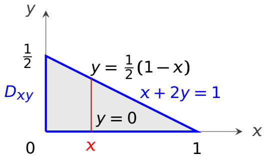
解

$$\text{原式} = \iint_{D_{xy}} \left[\int_0^{1-x-2y} x dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} x(1-x-2y) dx dy$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^{\frac{1-x}{2}} x(1-x-2y) dy \right] dx$$

例 计算 $\iiint_\Omega x\,dxdydz$，其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域。



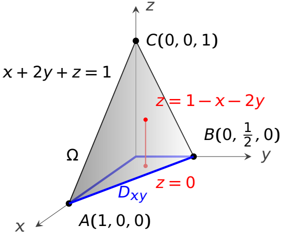


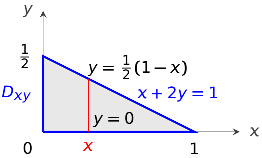
解

$$\text{原式} = \iint_{D_{xy}} \left[\int_0^{1-x-2y} x\,dz\right] dxdy = \iint_{D_{xy}} x(1-x-2y)\,dxdy$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^{\frac{1-x}{2}} x(1-x-2y)\,dy\right] dx = \int_0^1 \left[x\left[(1-x)y-y^2\right]\Big|_0^{\frac{1-x}{2}}\right] dx$$

例 计算 $\iiint_\Omega x\,dx\,dy\,dz$，其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域。





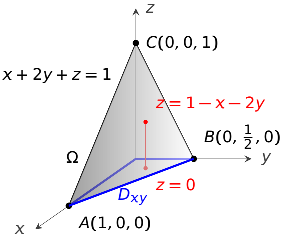
解

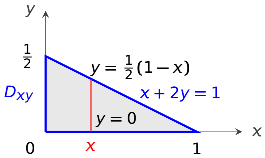
$$\text{原式} = \iint_{D_{xy}} \left[\int_0^{1-x-2y} x\,dz\right] dx\,dy = \iint_{D_{xy}} x(1-x-2y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^{\frac{1-x}{2}} x(1-x-2y)\,dy\right] dx = \int_0^1 \left[x\left[(1-x)y-y^2\right]\Big|_0^{\frac{1-x}{2}}\right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{4}x(1-x)^2\right] dx$$

例 计算 $\iiint_\Omega x\,dxdydz$，其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域。





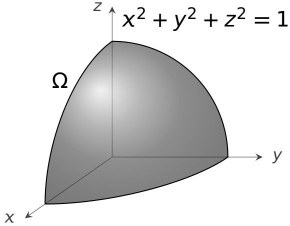
解

$$\text{原式} = \iint_{D_{xy}} \left[\int_0^{1-x-2y} x\,dz\right] dxdy = \iint_{D_{xy}} x(1-x-2y)\,dxdy$$

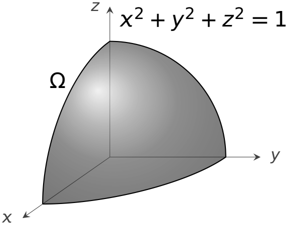
$$= \int_0^1 \left[\int_0^{\frac{1-x}{2}} x(1-x-2y)\,dy\right] dx = \int_0^1 \left[x\left[(1-x)y - y^2\right]\Big|_0^{\frac{1-x}{2}} \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{4}x(1-x)^2\right] dx = \frac{1}{48}$$

例 计算 $\iiint_\Omega xyzdxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\leq 1$ 在第一象限的部分。



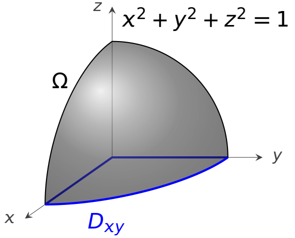
例 计算 $\iiint_\Omega xyzdxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$ 在第一象限的部分。



解

$$原式 = \iint \left[\int \qquad xyzdz\right]dxdy$$

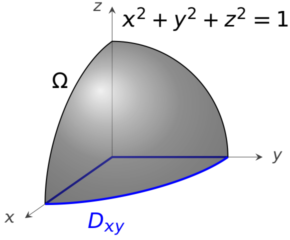
例 计算 $\iiint_\Omega xyzdxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$ 在第一象限的部分。

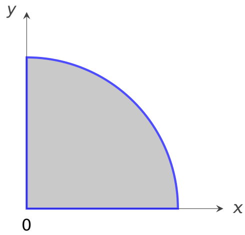


解

$$\text{原式}=\iint\Big[\int\qquad xyzdz\Big]dxdy$$

例 计算 $\iiint_\Omega xyz\,dxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$ 在第一象限的部分。

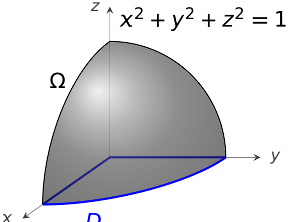


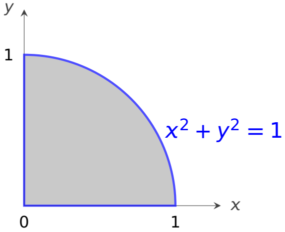


解

$$\text{原式}=\iint\Big[\int\qquad xyzdz\Big]dxdy$$

例 计算 $\iiint_\Omega xyzdxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$ 在第一象限的部分。

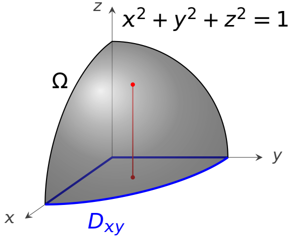


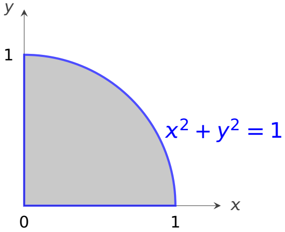


解

$$原式 = \iint \Big[\int \qquad xyzdz \Big] dxdy$$

例 计算 $\iiint_\Omega xyzdxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$ 在第一象限的部分。

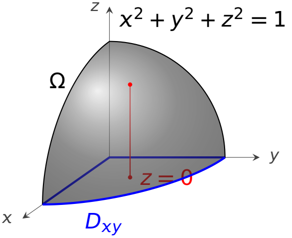


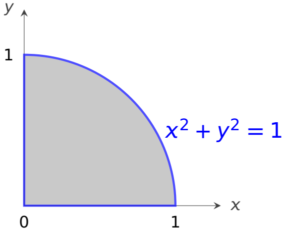


解

$$原式 = \iint \left[\int \qquad xyzdz\right]dxdy$$

例 计算 $\iiint_\Omega xyzdxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$ 在第一象限的部分。

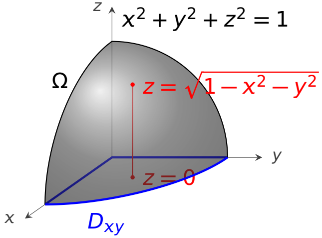


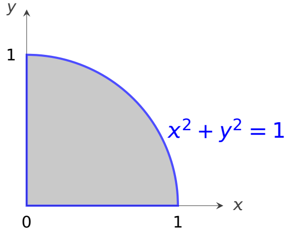


解

$$\text{原式}=\iint\left[\int\qquad xyzdz\right]dxdy$$

例 计算 $\iiint_\Omega xyzdxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$ 在第一象限的部分。

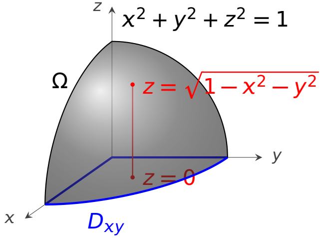


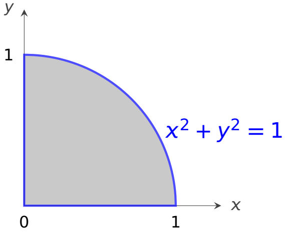


解

$$原式=\iint\left[\int\qquad xyzdz\right]dxdy$$

例 计算 $\iiint_\Omega xyz dxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$ 在第一象限的部分。

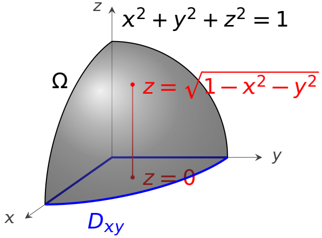


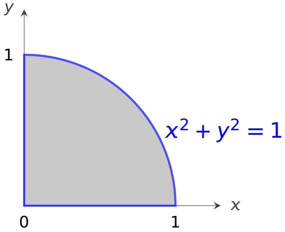


解

$$\text{原式}=\iint_{D_{xy}}\Big[\int \qquad xyz dz\Big]dxdy$$

例 计算 $\iiint_{\Omega} xyz\,dxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$ 在第一象限的部分。

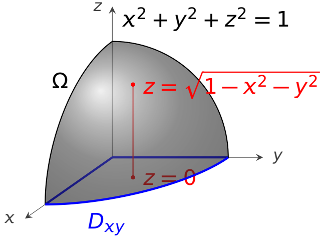


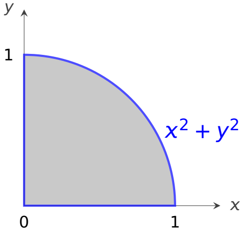


解

$$原式=\iint_{D_{xy}}\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz\,dz\right]dxdy$$

例 计算 $\iiint_\Omega xyz\,dxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$ 在第一象限的部分。

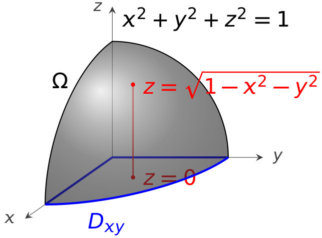


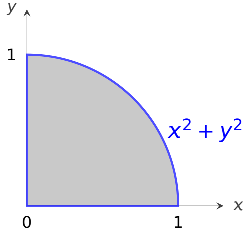


解

$$\text{原式}=\iint_{D_{xy}}\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz\,dz\right]dxdy \qquad \frac{1}{2}xy(1-x^2-y^2)$$

例 计算 $\iiint_\Omega xyz\,dxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$ 在第一象限的部分。

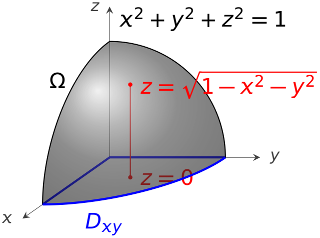


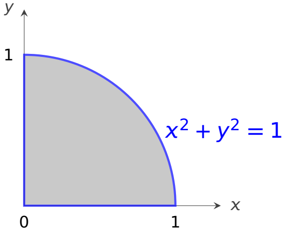


解

$$\text{原式}=\iint_{D_{xy}}\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz\,dz\right]dxdy=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{2}xy(1-x^2-y^2)\,dxdy$$

例 计算 $\iiint_\Omega xyz\,dxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$ 在第一象限的部分。



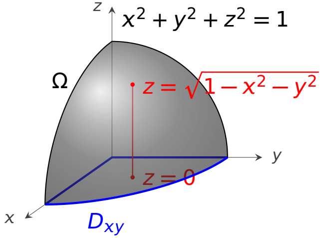


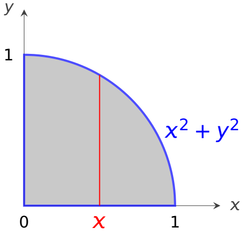
解

$$\text{原式}=\iint_{D_{xy}}\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz\,dz\right]dxdy=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{2}xy(1-x^2-y^2)\,dxdy$$

$$=\int\left[\int\qquad \frac{1}{2}xy(1-x^2-y^2)\,dy\right]dx$$

例 计算 $\iiint_\Omega xyz\,dxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$ 在第一象限的部分。



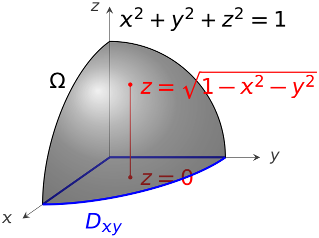


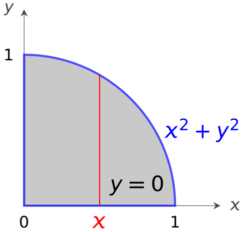
解

$$原式 = \iint_{D_{xy}}\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz\,dz\right]dxdy = \iint_{D_{xy}}\frac{1}{2}xy(1-x^2-y^2)dxdy$$

$$= \int \left[\int \qquad \frac{1}{2}xy(1-x^2-y^2)dy\right]dx$$

例 计算 $\iiint_\Omega xyz dxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2 \le 1$ 在第一象限的部分。



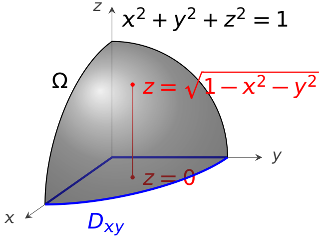


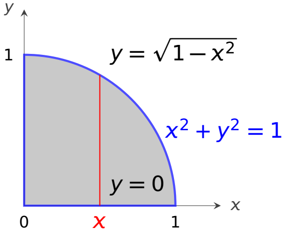
解

$$原式 = \iint_{D_{xy}} \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyzdz \right] dxdy = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} xy(1-x^2-y^2) dxdy$$

$$= \int \left[\int \qquad \frac{1}{2} xy(1-x^2-y^2) dy \right] dx$$

例 计算 $\iiint_\Omega xyzdxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$ 在第一象限的部分。



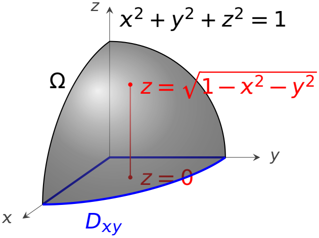


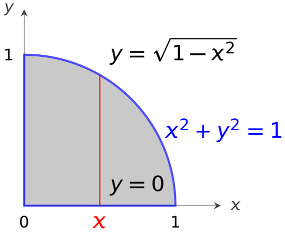
解

$$\text{原式}=\iint_{D_{xy}}\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyzdz\right]dxdy=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{2}xy(1-x^2-y^2)dxdy$$

$$=\int\left[\int \quad \frac{1}{2}xy(1-x^2-y^2)dy\right]dx$$

例 计算 $\iiint_\Omega xyzdxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$ 在第一象限的部分。



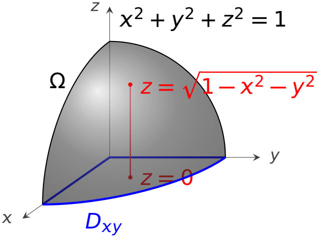


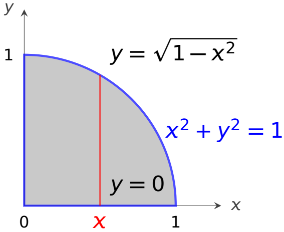
解

$$原式=\iint_{D_{xy}}\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyzdz\right]dxdy=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{2}xy(1-x^2-y^2)dxdy$$

$$=\int_0^1\left[\int \qquad \frac{1}{2}xy(1-x^2-y^2)dy\right]dx$$

例 计算 $\iiint_\Omega xyz\,dxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$ 在第一象限的部分。



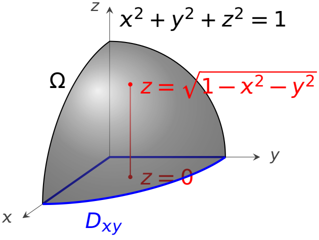


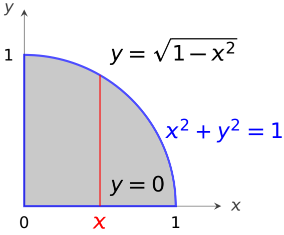
解

$$原式=\iint_{D_{xy}}\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz\,dz\right]dxdy=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{2}xy(1-x^2-y^2)\,dxdy$$

$$=\int_0^1\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{2}xy(1-x^2-y^2)\,dy\right]dx$$

例 计算 $\iiint_{\Omega} xyz dxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2 \le 1$ 在第一象限的部分。



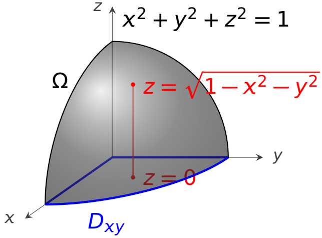


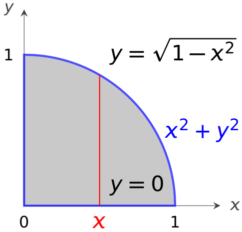
解

$$\text{原式} = \iint_{D_{xy}} \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz dz\right] dxdy = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} xy(1-x^2-y^2) dxdy$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{2} xy(1-x^2-y^2) dy\right] dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{8} x(1-x^2)^2\right] dx$$

例 计算 $\iiint_{\Omega} xyz\,dxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$ 在第一象限的部分。





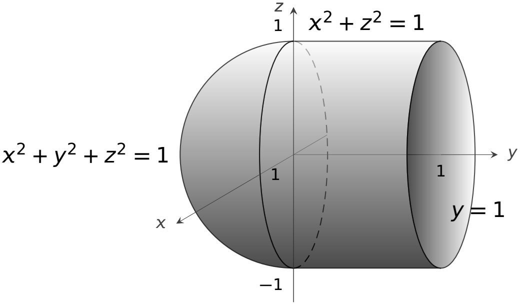
解

$$原式=\iint_{D_{xy}}\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz\,dz\right]dxdy=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{2}xy(1-x^2-y^2)dxdy$$

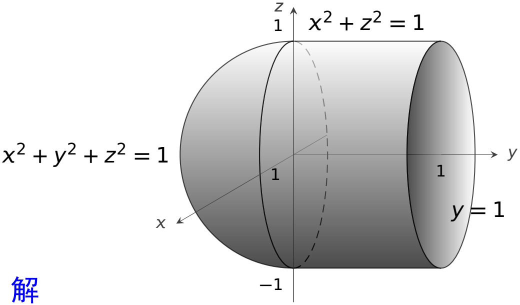
$$=\int_0^1\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{2}xy(1-x^2-y^2)dy\right]dx=\int_0^1\left[\frac{1}{8}x(1-x^2)^2\right]dx$$

$$=\frac{1}{48}$$

例 计算 $\iiint_\Omega y\sqrt{1-x^2}dxdydz$，其中 Ω 是如图的闭区域。



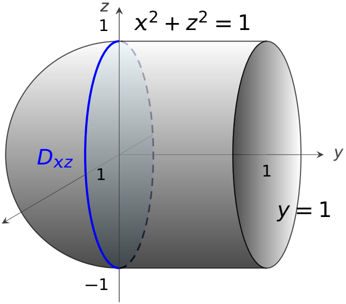
例 计算 $\iiint_\Omega y\sqrt{1-x^2}dxdydz$，其中 Ω 是如图的闭区域。



解

$$\text{原式} = \iint \left[\int \quad y\sqrt{1-x^2}dy\right]dxdz$$

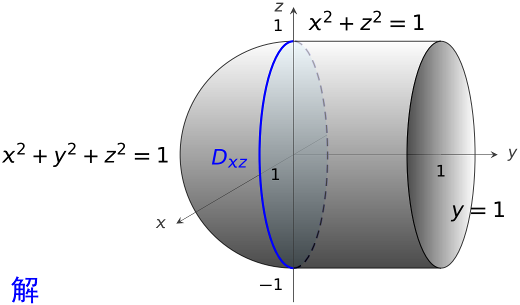
例 计算 $\iiint_\Omega y\sqrt{1-x^2}dxdydz$，其中 Ω 是如图的闭区域。

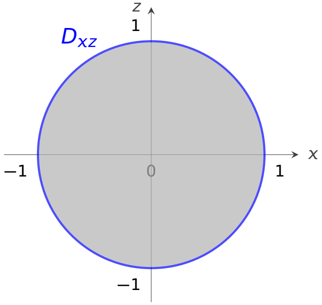


解

$$\text{原式} = \iint \left[\int \quad y\sqrt{1-x^2}dy\right]dxdz$$

例 计算 $\iiint_\Omega y\sqrt{1-x^2}dxdydz$，其中 Ω 是如图的闭区域。

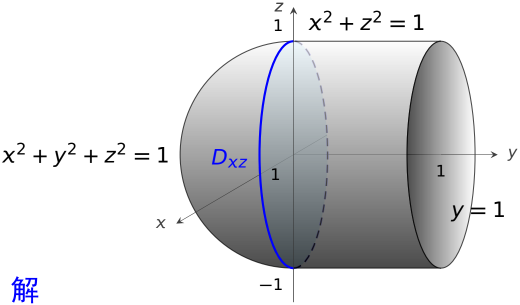


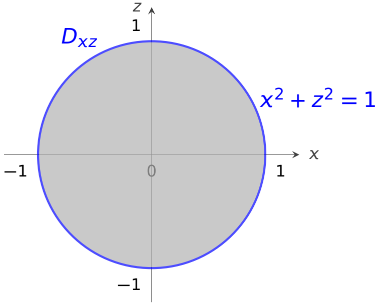


解

$$原式 = \iint \left[\int y\sqrt{1-x^2}dy\right]dxdz$$

例 计算 $\iiint_\Omega y\sqrt{1-x^2}dxdydz$，其中 Ω 是如图的闭区域。

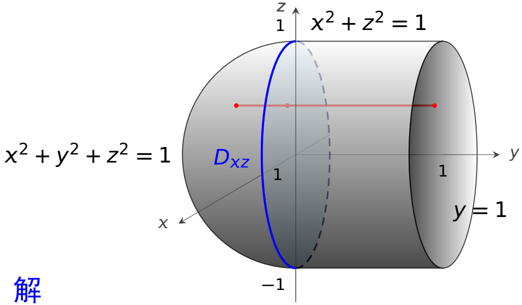


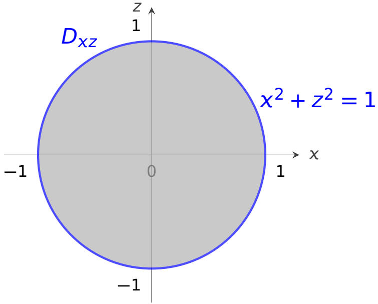


解

$$原式 = \iint \left[\int \quad y\sqrt{1-x^2}dy \right] dxdz$$

例 计算 $\iiint_\Omega y\sqrt{1-x^2}dxdydz$，其中 Ω 是如图的闭区域。

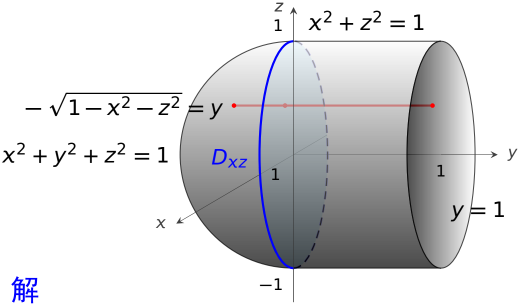


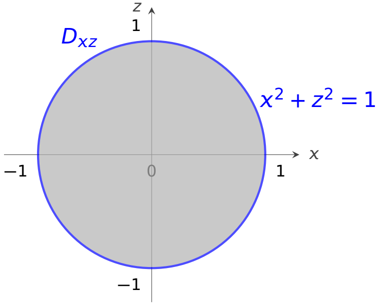


解

$$\text{原式} = \iint \left[\int \quad y\sqrt{1-x^2}dy \right] dxdz$$

例 计算 $\iiint_\Omega y\sqrt{1-x^2}dxdydz$，其中 Ω 是如图的闭区域。

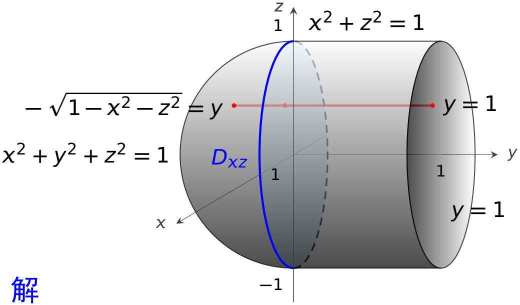


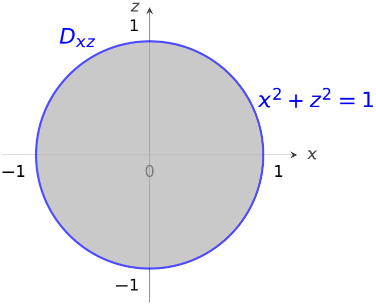


解

$$原式 = \iint \left[\int \quad y\sqrt{1-x^2}dy\right]dxdz$$

例 计算 $\iiint_\Omega y\sqrt{1-x^2}dxdydz$，其中 Ω 是如图的闭区域。

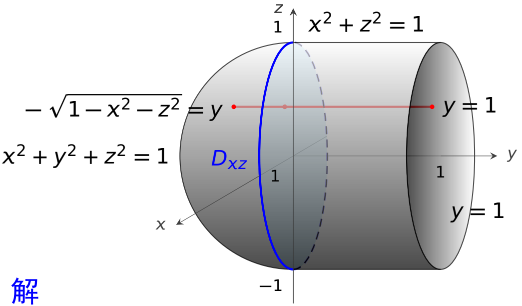


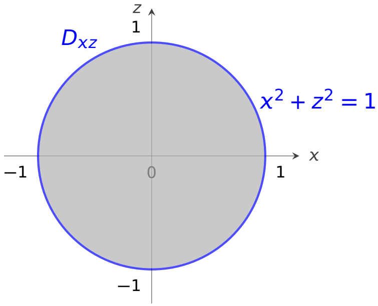


解

$$原式=\iint\left[\int y\sqrt{1-x^2}dy\right]dxdz$$

例 计算 $\iiint_\Omega y\sqrt{1-x^2}dxdydz$，其中 Ω 是如图的闭区域。

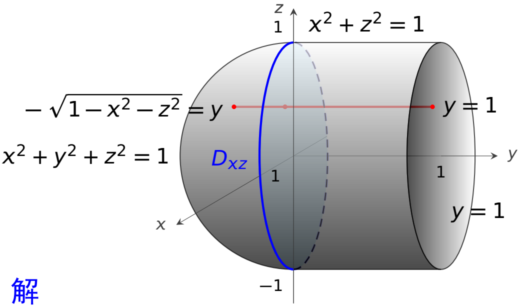


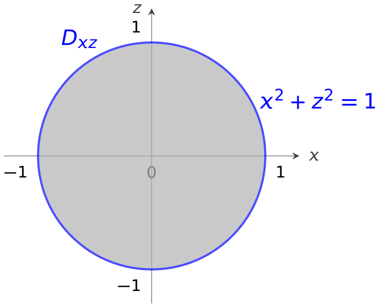


解

$$\text{原式}=\iint_{D_{xz}}\left[\int\quad y\sqrt{1-x^2}dy\right]dxdz$$

例 计算 $\iiint_\Omega y\sqrt{1-x^2}dxdydz$，其中 Ω 是如图的闭区域。

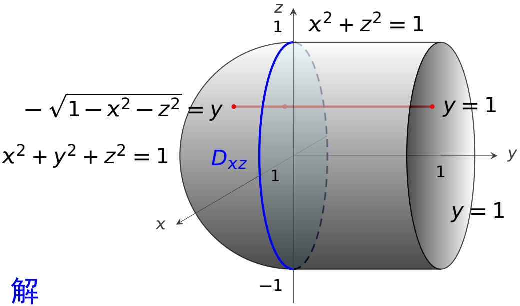


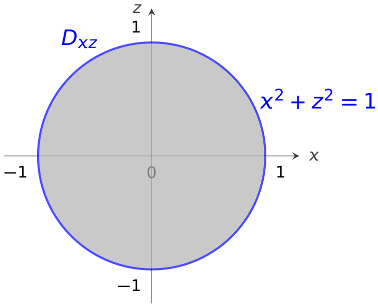


解

$$\text{原式} = \iint_{D_{xz}}\left[\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{1} y\sqrt{1-x^2}dy\right]dxdz$$

例 计算 $\iiint_\Omega y\sqrt{1-x^2}\,dxdydz$，其中 Ω 是如图的闭区域。

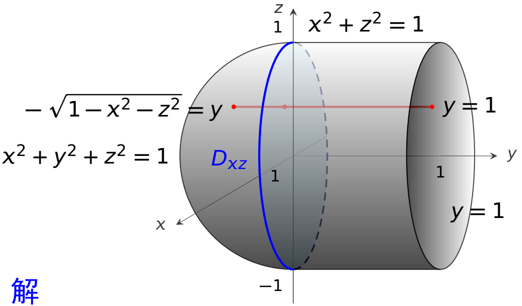


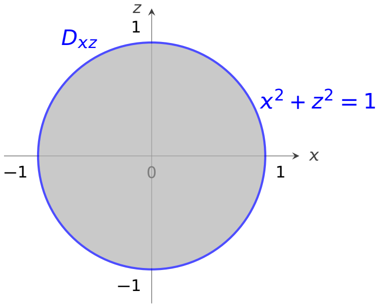


解

$$原式 = \iint_{D_{xz}}\left[\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{1} y\sqrt{1-x^2}\,dy\right]dxdz \qquad \sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{2}(x^2+z^2)$$

例 计算 $\iiint_\Omega y\sqrt{1-x^2}dxdydz$，其中 Ω 是如图的闭区域。

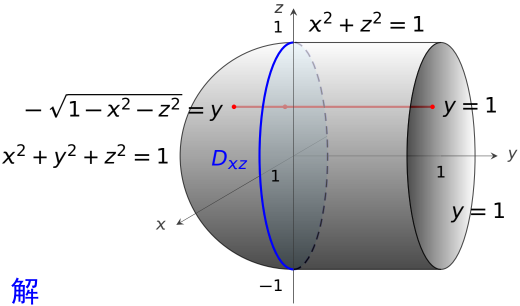


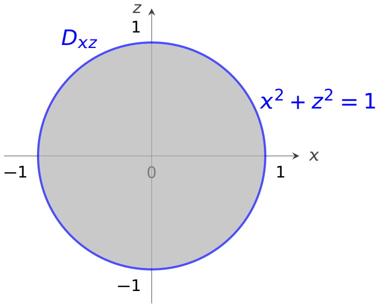


解

$$\text{原式} = \iint_{D_{xz}}\left[\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{1} y\sqrt{1-x^2}dy\right]dxdz = \iint_{D_{xz}}\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{2}(x^2+z^2)dxdz$$

例 计算 $\iiint_\Omega y\sqrt{1-x^2}dxdydz$，其中 Ω 是如图的闭区域。



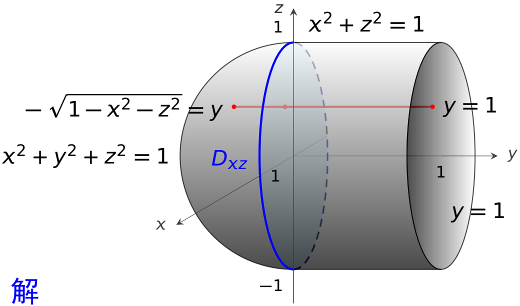


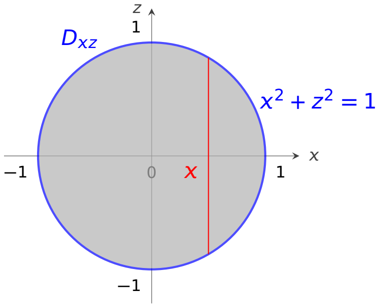
解

$$原式=\iint_{D_{xz}}\left[\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{1}y\sqrt{1-x^2}dy\right]dxdz=\iint_{D_{xz}}\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{2}(x^2+z^2)dxdz$$

$$=\int\left[\int\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{2}(x^2+z^2)dz\right]dx$$

例 计算 $\iiint_\Omega y\sqrt{1-x^2}dxdydz$，其中 Ω 是如图的闭区域。



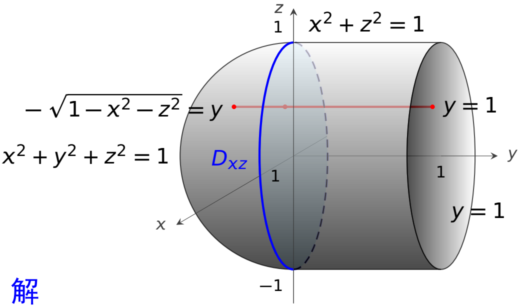


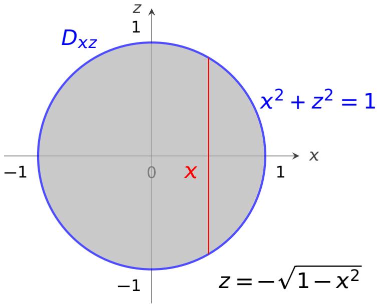
解

$$\text{原式}=\iint_{D_{xz}}\left[\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{1}y\sqrt{1-x^2}dy\right]dxdz=\iint_{D_{xz}}\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{2}(x^2+z^2)dxdz$$

$$=\int\left[\int\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{2}(x^2+z^2)dz\right]dx$$

例 计算 $\iiint_{\Omega} y\sqrt{1-x^2}dxdydz$，其中 Ω 是如图的闭区域。



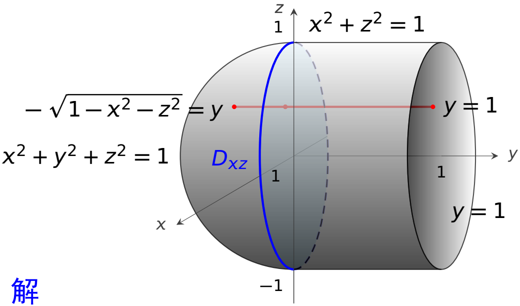


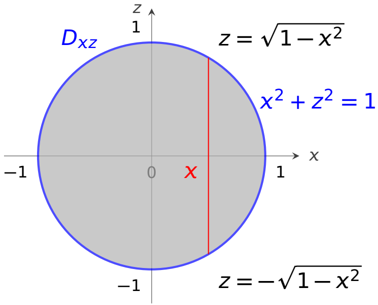
解

$$\text{原式}=\iint_{D_{xz}}\left[\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{1} y\sqrt{1-x^2}dy\right]dxdz=\iint_{D_{xz}}\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{2}(x^2+z^2)dxdz$$

$$=\int \left[\int \sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{2}(x^2+z^2)dz\right]dx$$

例 计算 $\iiint_\Omega y\sqrt{1-x^2}dxdydz$，其中 Ω 是如图的闭区域。



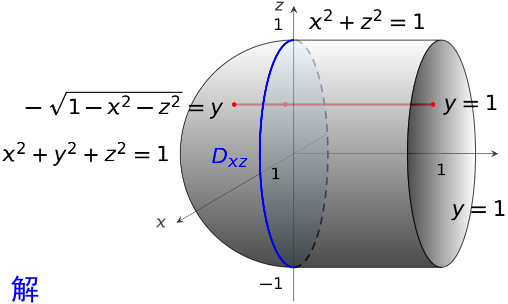


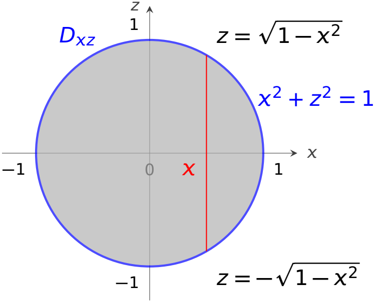
解

$$\text{原式}=\iint_{D_{xz}}\left[\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{1} y\sqrt{1-x^2}dy\right]dxdz=\iint_{D_{xz}}\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{2}(x^2+z^2)dxdz$$

$$=\int\left[\iint\quad\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{2}(x^2+z^2)dz\right]dx$$

例 计算 $\iiint_{\Omega} y\sqrt{1-x^2}dxdydz$，其中 Ω 是如图的闭区域。



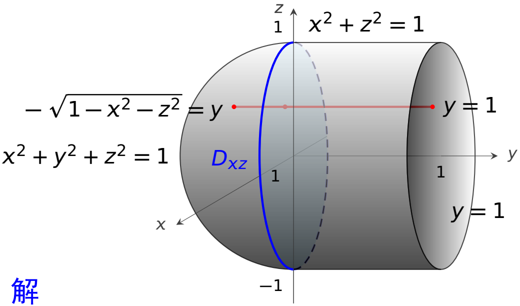


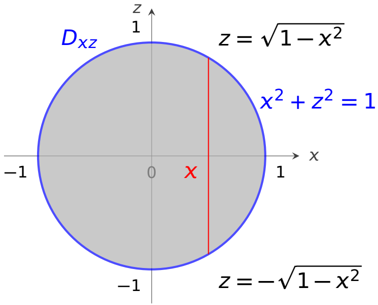
解

$$原式=\iint_{D_{xz}}\left[\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{1} y\sqrt{1-x^2}dy\right]dxdz=\iint_{D_{xz}}\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{2}(x^2+z^2)dxdz$$

$$=\int_{-1}^{1}\left[\int \qquad \sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{2}(x^2+z^2)dz\right]dx$$

例 计算 $\iiint_\Omega y\sqrt{1-x^2}dxdydz$，其中 Ω 是如图的闭区域。



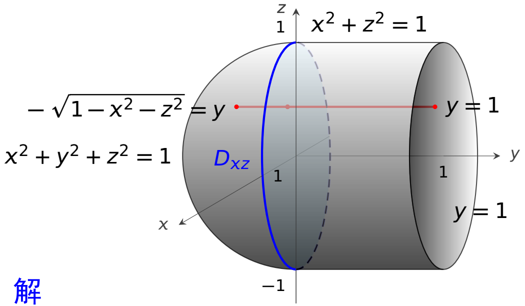


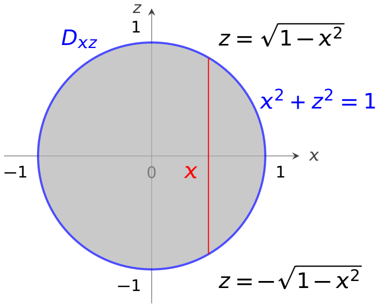
解

$$\text{原式}=\iint_{D_{xz}}\left[\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{1} y\sqrt{1-x^2}dy\right]dxdz=\iint_{D_{xz}}\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{2}(x^2+z^2)dxdz$$

$$=\int_{-1}^{1}\left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{2}(x^2+z^2)dz\right]dx$$

例 计算 $\iiint_\Omega y\sqrt{1-x^2}dxdydz$，其中 Ω 是如图的闭区域。





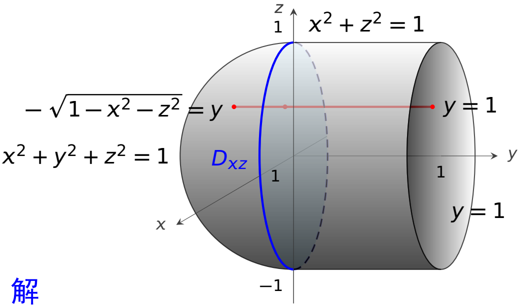
解

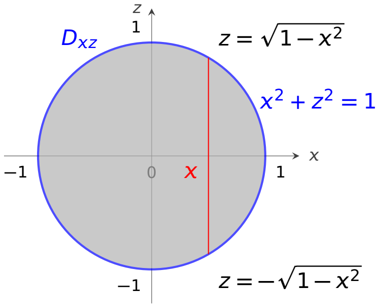
$$\text{原式}=\iint_{D_{xz}}\left[\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{1} y\sqrt{1-x^2}dy\right]dxdz=\iint_{D_{xz}}\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{2}(x^2+z^2)dxdz$$

$$=\int_{-1}^{1}\left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{2}(x^2+z^2)dz\right]dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{3}(1+x^2-2x^4)\right]dx$$

例 计算 $\iiint_\Omega y\sqrt{1-x^2}dxdydz$，其中 Ω 是如图的闭区域。





解

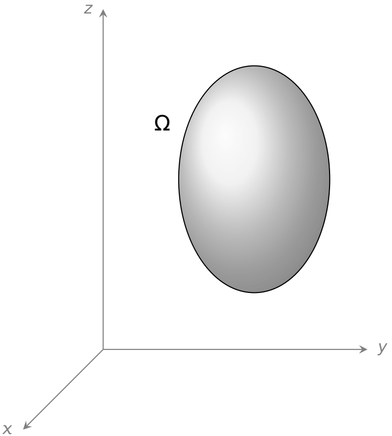
$$原式=\iint_{D_{xz}}\left[\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{1} y\sqrt{1-x^2}dy\right]dxdz=\iint_{D_{xz}}\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{2}(x^2+z^2)dxdz$$

$$=\int_{-1}^{1}\left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{2}(x^2+z^2)dz\right]dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{3}(1+x^2-2x^4)\right]dx=\frac{28}{45}$$

截面法（“先二后一”）

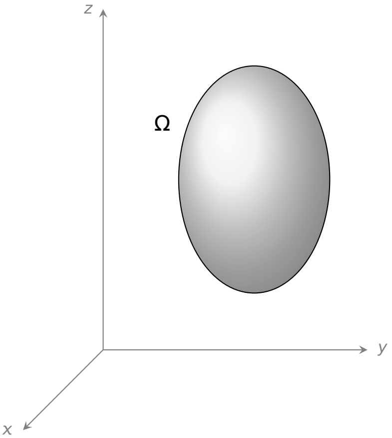
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$$



截面法（“先二后一”）

1. 先积 xy，再积 z

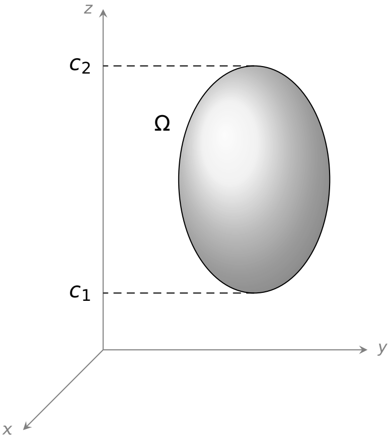
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int \left[\iint f(x,y,z)dxdy \right] dz$$



截面法（“先二后一”）

1. 先积 xy，再积 z

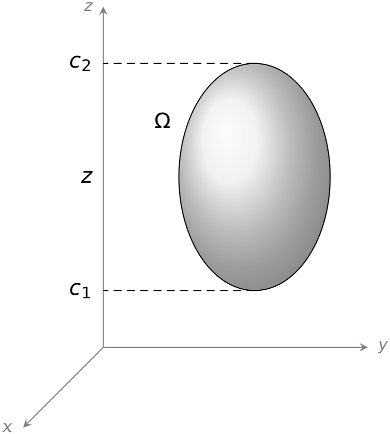
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int \left[\iint f(x,\, y,\, z)dxdy \right] dz$$



截面法（“先二后一”）

1. 先积 xy，再积 z

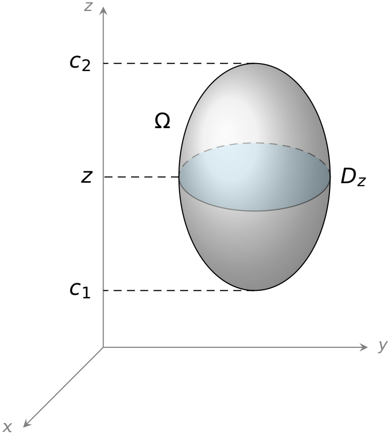
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int \Big[\iint f(x,y,z)dxdy \Big] dz$$



截面法（“先二后一”）

1. 先积 xy，再积 z

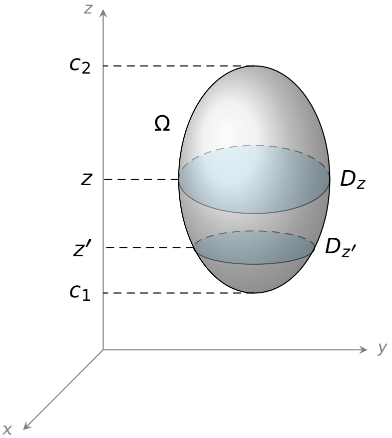
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int \left[\iint f(x,\ y,\ z)dxdy \right] dz$$



截面法（“先二后一”）

1. 先积 xy，再积 z

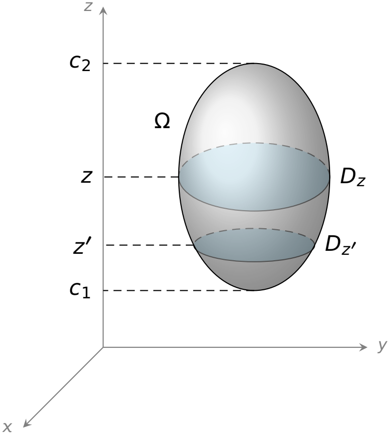
$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \int \left[\iint f(x,\ y,\ z)dxdy\right]dz$$



截面法（“先二后一”）

1. 先积 xy，再积 z

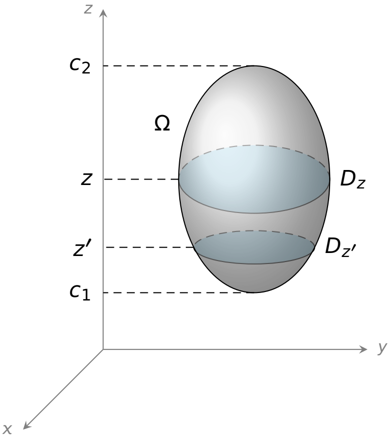
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_{c_1}^{c_2} \left[\iint_{D_z} f(x,\,y,\,z)dxdy \right] dz$$



截面法（“先二后一”）

1. 先积 xy，再积 z

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_{c_1}^{c_2}\left[\iint_{D_z} f(x,\ y,\ z)dxdy\right]dz$$



截面法（“先二后一”）

1. 先积 xy，再积 z

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_{c_1}^{c_2} \left[\iint_{D_z} f(x,\ y,\ z)dxdy \right] dz$$

截面法（“先二后一”）

1. 先积 xy，再积 z

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_{c_1}^{c_2}\left[\iint_{D_z} f(x,\, y,\, z)dxdy\right]dz$$

类似地

2. 先积 yz，再积 x

3. 先积 xz，再积 y

截面法（“先二后一”）

1. 先积 xy，再积 z

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \int_{c_1}^{c_2}\left[\iint_{D_z} f(x,\,y,\,z)dxdy\right]dz$$

类似地

2. 先积 yz，再积 x

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \int \left[\iint f(x,\,y,\,z)dydz\right]dx$$

3. 先积 xz，再积 y

截面法（“先二后一”）

1. 先积 xy，再积 z

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_{c_1}^{c_2} \left[\iint_{D_z} f(x,\ y,\ z)dxdy \right] dz$$

类似地

2. 先积 yz，再积 x

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_{d_1}^{d_2} \left[\iint \quad f(x,\ y,\ z)dydz \right] dx$$

3. 先积 xz，再积 y

截面法（“先二后一”）

1. 先积 xy，再积 z

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_{c_1}^{c_2}\left[\iint_{D_z} f(x,\ y,\ z)dxdy\right]dz$$

类似地

2. 先积 yz，再积 x

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_{d_1}^{d_2}\left[\iint_{D_x} f(x,\ y,\ z)dydz\right]dx$$

3. 先积 xz，再积 y

截面法（“先二后一”）

1. 先积 xy，再积 z

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_{c_1}^{c_2}\left[\iint_{D_z} f(x,\ y,\ z)dxdy\right]dz$$

类似地

2. 先积 yz，再积 x

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_{d_1}^{d_2}\left[\iint_{D_x} f(x,\ y,\ z)dydz\right]dx$$

3. 先积 xz，再积 y

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int \left[\iint f(x,\ y,\ z)dxdz\right]dy$$

截面法（“先二后一”）

1. 先积 xy，再积 z

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_{c_1}^{c_2}\left[\iint_{D_z} f(x,\ y,\ z)dxdy\right]dz$$

类似地

2. 先积 yz，再积 x

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_{d_1}^{d_2}\left[\iint_{D_x} f(x,\ y,\ z)dydz\right]dx$$

3. 先积 xz，再积 y

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_{e_1}^{e_2}\left[\iint f(x,\ y,\ z)dxdz\right]dy$$

截面法（“先二后一”）

1. 先积 xy，再积 z

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_{c_1}^{c_2}\left[\iint_{D_z} f(x,\ y,\ z)dxdy\right]dz$$

类似地

2. 先积 yz，再积 x

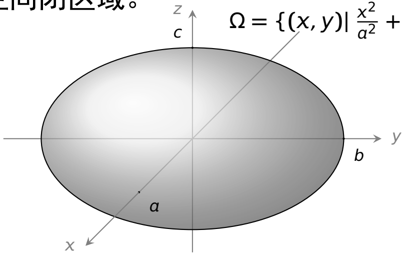
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_{d_1}^{d_2}\left[\iint_{D_x} f(x,\ y,\ z)dydz\right]dx$$

3. 先积 xz，再积 y

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_{e_1}^{e_2}\left[\iint_{D_y} f(x,\ y,\ z)dxdz\right]dy$$

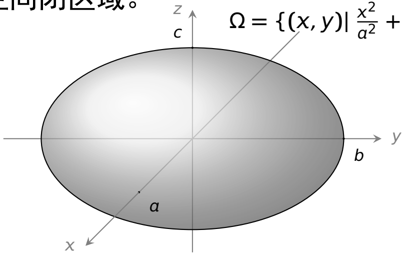
例 计算 $\iiint_\Omega z^2 dxdydz$，其中 Ω 是由椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所围成的空间闭区域。

$$\Omega=\{(x,y)|\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\}$$



例 计算 $\iiint_\Omega z^2 dxdydz$，其中 Ω 是由椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所围成的空间闭区域。

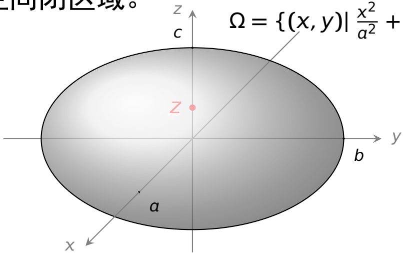
$$\Omega=\{(x,y)|\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\}$$



解

$$\text{原式}=\int \left[\iint z^2 dxdy\right]dz$$

例 计算 $\iiint_\Omega z^2 dxdydz$，其中 Ω 是由椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所围成的空间闭区域。

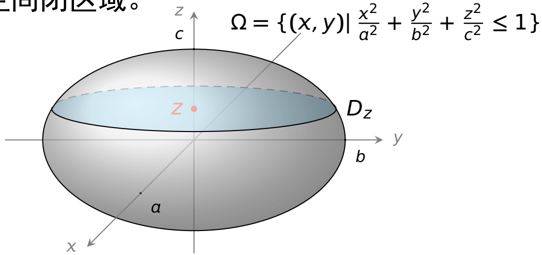


$\Omega=\{(x,y)|\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\}$

解

$$\text{原式}=\int \Big[\iint z^2 dxdy\Big]dz$$

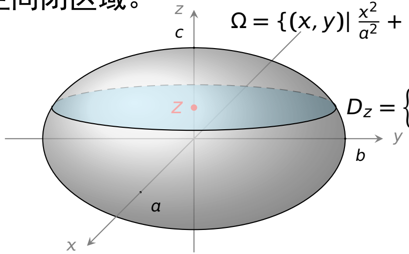
例 计算 $\iiint_\Omega z^2 dxdydz$，其中 Ω 是由椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所围成的空间闭区域。



解

$$\text{原式}=\int\Big[\iint z^2 dxdy\Big]dz$$

例 计算 $\iiint_\Omega z^2dxdydz$，其中 Ω 是由椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所围成的空间闭区域。



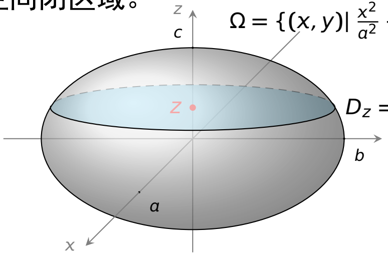
$\Omega=\{(x,y)|\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\}$

$D_z=\left\{(x,y)\middle|\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1-\frac{z^2}{c^2}\right\}$

解

$$原式=\int\left[\iint z^2dxdy\right]dz$$

例 计算 $\iiint_\Omega z^2 dxdydz$，其中 Ω 是由椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所围成的空间闭区域。



$$\Omega=\{(x,y)|\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\}$$

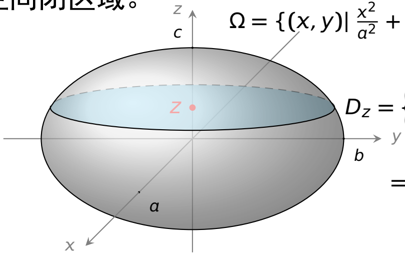
$$D_z=\left\{(x,y)\middle|\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1-\frac{z^2}{c^2}\right\}$$

$$=\left\{(x,y)\middle|\ \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2}\le 1\right\}$$

解

$$原式=\int\ \left[\iint z^2dxdy\right]dz$$

例 计算 $\iiint_\Omega z^2 dxdydz$，其中 Ω 是由椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所围成的空间闭区域。



$$\Omega=\{(x,y)|\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\}$$

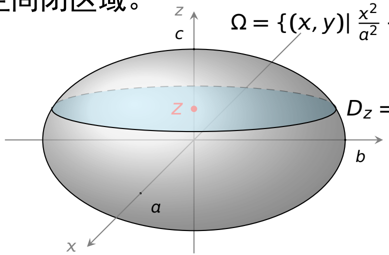
$$D_z=\left\{(x,y)\Big|\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1-\frac{z^2}{c^2}\right\}$$

$$=\left\{(x,y)\Bigg|\ \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2}\le 1\right\}$$

解

$$\text{原式}=\int_{-c}^{c}\Big[\iint z^2 dxdy\Big]dz$$

例 计算 $\iiint_\Omega z^2 dxdydz$，其中 Ω 是由椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所围成的空间闭区域。



$$\Omega = \{(x,y) | \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \le 1\}$$

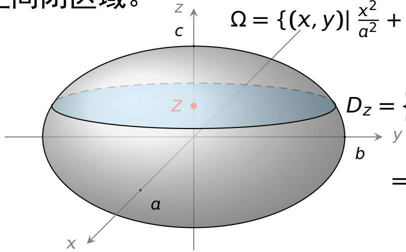
$$D_z = \left\{(x,y) \Big| \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \le 1 - \frac{z^2}{c^2}\right\}$$

$$= \left\{(x,y) \Bigg| \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2} \le 1\right\}$$

解

$$\text{原式} = \int_{-c}^{c}\left[\iint_{D_z} z^2 dxdy\right]dz$$

例 计算 $\iiint_\Omega z^2 dxdydz$，其中 Ω 是由椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所围成的空间闭区域。



$$\Omega=\{(x,y)|\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\}$$

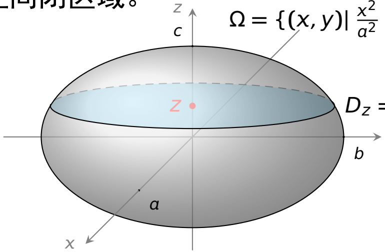
$$D_z=\left\{(x,y)\middle|\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1-\frac{z^2}{c^2}\right\}$$

$$=\left\{(x,y)\middle|\ \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2}\le 1\right\}$$

解

$$\text{原式}=\int_{-c}^{c}\left[\iint_{D_z} z^2 dxdy\right]dz=\int_{-c}^{c} z^2\left[\iint_{D_z} dxdy\right]dz$$

例 计算 $\iiint_\Omega z^2 dxdydz$，其中 Ω 是由椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所围成的空间闭区域。



$$\Omega=\{(x,y)|\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\}$$

$$D_z=\left\{(x,y)\Big|\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1-\frac{z^2}{c^2}\right\}$$

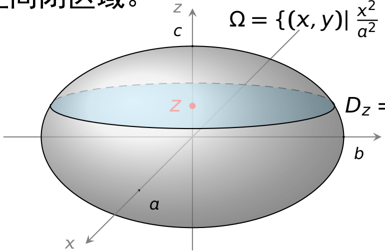
$$=\left\{(x,y)\Bigg|\ \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2}\le 1\right\}$$

解

$$\text{原式}=\int_{-c}^{c}\Big[\iint_{D_z} z^2 dxdy\Big]dz=\int_{-c}^{c} z^2\Big[\iint_{D_z} dxdy\Big]dz$$

$$\pi\cdot ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)$$

例 计算 $\iiint_\Omega z^2 dxdydz$，其中 Ω 是由椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所围成的空间闭区域。



$$\Omega=\{(x,y)|\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\}$$

$$D_z=\left\{(x,y)\middle|\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1-\frac{z^2}{c^2}\right\}$$

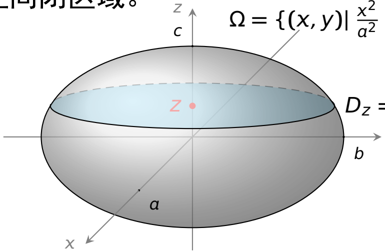
$$=\left\{(x,y)\middle|\ \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2}\le 1\right\}$$

解

$$原式=\int_{-c}^{c}\left[\iint_{D_z} z^2 dxdy\right]dz=\int_{-c}^{c} z^2\left[\iint_{D_z} dxdy\right]dz$$

$$=\int_{-c}^{c} z^2\left[\pi\cdot ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\right]dz$$

例 计算 $\iiint_{\Omega} z^2 dxdydz$，其中 Ω 是由椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所围成的空间闭区域。



$$\Omega=\{(x,y)|\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\}$$

$$D_z=\left\{(x,y)\middle|\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1-\frac{z^2}{c^2}\right\}$$

$$=\left\{(x,y)\middle|\ \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2}\le 1\right\}$$

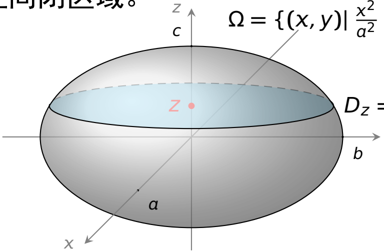
解

$$原式=\int_{-c}^{c}\left[\iint_{D_z} z^2 dxdy\right]dz=\int_{-c}^{c} z^2\left[\iint_{D_z} dxdy\right]dz$$

$$=\int_{-c}^{c} z^2\left[\pi\cdot ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\right]dz$$

$$=\pi\cdot ab\int_{1}^{4}\left(z^2-\frac{z^4}{c^2}\right)dz$$

例 计算 $\iiint_\Omega z^2 dxdydz$，其中 Ω 是由椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所围成的空间闭区域。



$$\Omega=\{(x,y)|\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\}$$

$$D_z=\left\{(x,y)\middle|\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1-\frac{z^2}{c^2}\right\}$$

$$=\left\{(x,y)\middle|\ \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2}\le 1\right\}$$

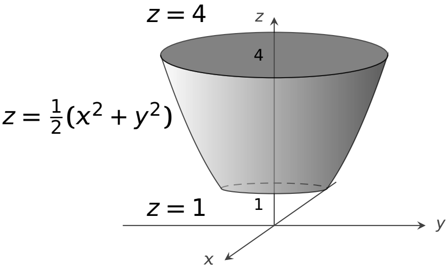
解

$$原式=\int_{-c}^{c}\left[\iint_{D_z} z^2 dxdy\right]dz=\int_{-c}^{c} z^2\left[\iint_{D_z} dxdy\right]dz$$

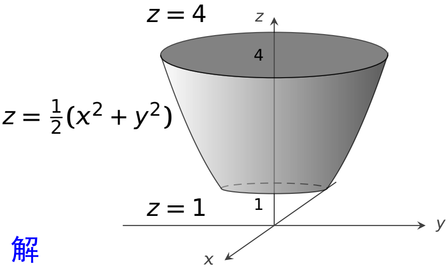
$$=\int_{-c}^{c} z^2\left[\pi\cdot ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\right]dz$$

$$=\pi\cdot ab\int_{1}^{4}\left(z^2-\frac{z^4}{c^2}\right)dz=\frac{4}{15}\pi abc^3$$

例 计算 $\iiint_\Omega (x^2+5xy^2\sin\sqrt{x^2+y^2})dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 与平面 $z=1$ 和 $z=4$ 所围成。



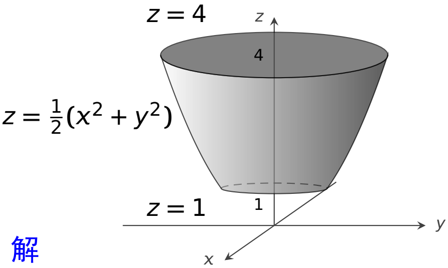
例 计算 $\iiint_\Omega (x^2 + 5xy^2 \sin\sqrt{x^2+y^2})dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 与平面 $z=1$ 和 $z=4$ 所围成。



解

$$\text{原式} \xlongequal{\text{对称性}} \iiint_\Omega x^2 dxdydz$$

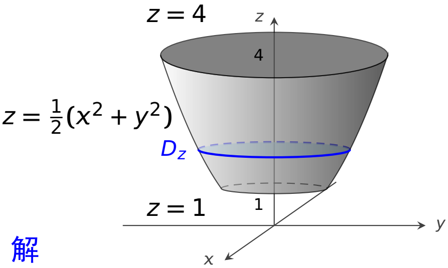
例 计算 $\iiint_\Omega (x^2 + 5xy^2 \sin\sqrt{x^2+y^2})dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 与平面 $z=1$ 和 $z=4$ 所围成。



解

$$\text{原式} \xlongequal{\text{对称性}} \iiint_\Omega x^2 dxdydz = \int \Big[\iint x^2 dxdy\Big] dz$$

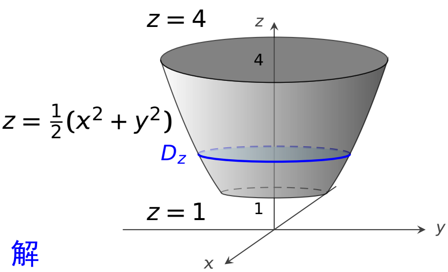
例 计算 $\iiint_\Omega (x^2 + 5xy^2 \sin\sqrt{x^2+y^2})dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 与平面 $z = 1$ 和 $z = 4$ 所围成。

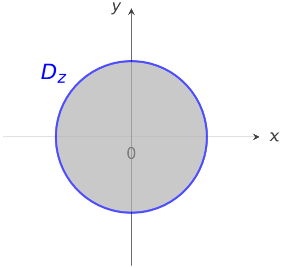


解

$$\text{原式} \xlongequal{\text{对称性}} \iiint_\Omega x^2 dxdydz = \int \left[\iint x^2 dxdy \right] dz$$

例 计算 $\iiint_\Omega (x^2 + 5xy^2 \sin\sqrt{x^2+y^2})dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 与平面 $z=1$ 和 $z=4$ 所围成。

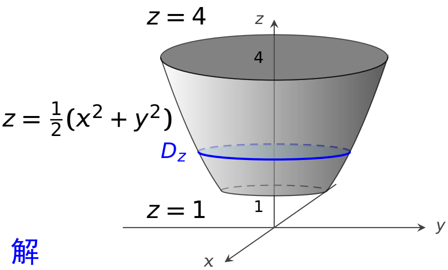


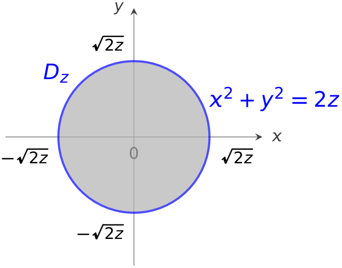


解

$$\text{原式} \xlongequal{\text{对称性}} \iiint_\Omega x^2 dxdydz = \int \Big[\iint x^2 dxdy \Big] dz$$

例 计算 $\iiint_\Omega (x^2+5xy^2\sin\sqrt{x^2+y^2})dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 与平面 $z=1$ 和 $z=4$ 所围成。

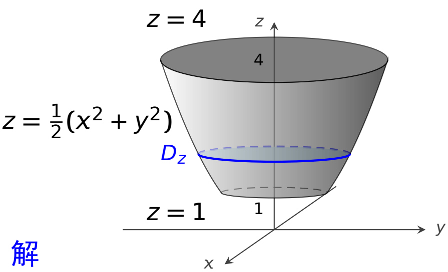


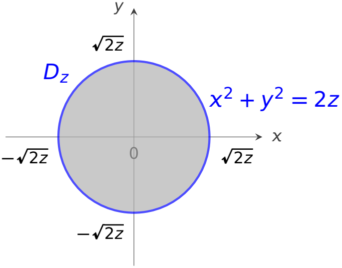


解

$$\text{原式} \xlongequal{\text{对称性}} \iiint_\Omega x^2dxdydz = \int \Big[\iint x^2dxdy\Big]dz$$

例 计算 $\iiint_\Omega (x^2 + 5xy^2 \sin\sqrt{x^2+y^2})dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 与平面 $z = 1$ 和 $z = 4$ 所围成。

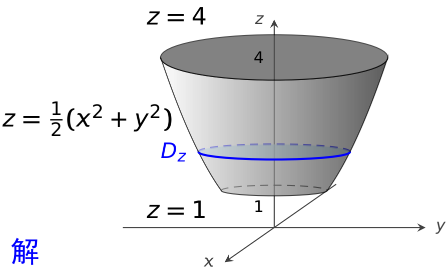


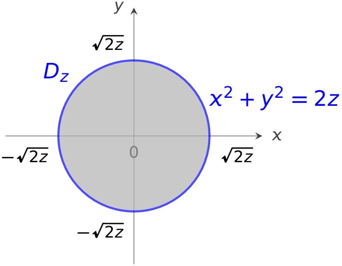


解

$$原式 \xlongequal{对称性} \iiint_\Omega x^2 dxdydz = \int_1^4 \left[\iint x^2 dxdy\right] dz$$

例 计算 $\iiint_\Omega (x^2+5xy^2\sin\sqrt{x^2+y^2})dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 与平面 $z=1$ 和 $z=4$ 所围成。

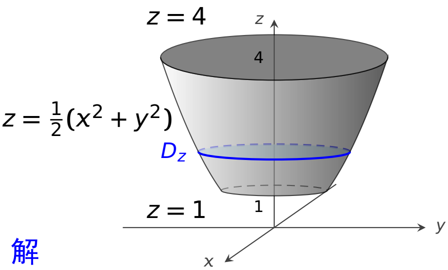


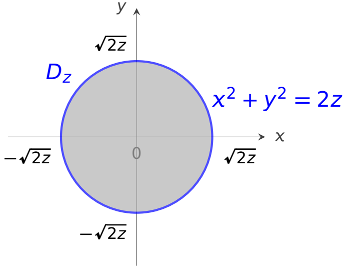


解

$$\text{原式} \xlongequal{\text{对称性}} \iiint_\Omega x^2dxdydz = \int_1^4\left[\iint_{D_z} x^2dxdy\right]dz$$

例 计算 $\iiint_\Omega (x^2 + 5xy^2 \sin\sqrt{x^2+y^2})dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 与平面 $z=1$ 和 $z=4$ 所围成。



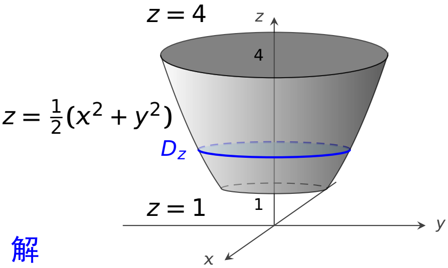


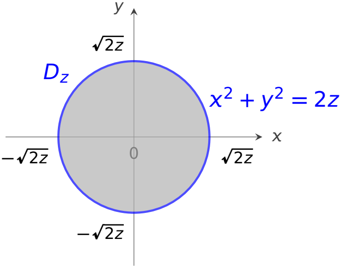
解

$$原式 \xlongequal{对称性} \iiint_\Omega x^2 dxdydz = \int_1^4 \left[\iint_{D_z} x^2 dxdy\right] dz$$

$$\iint_{D_z} \frac{1}{2}(x^2+y^2)dxdy$$

例 计算 $\iiint_\Omega (x^2+5xy^2\sin\sqrt{x^2+y^2})dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 与平面 $z=1$ 和 $z=4$ 所围成。



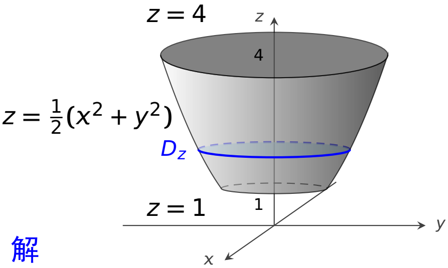


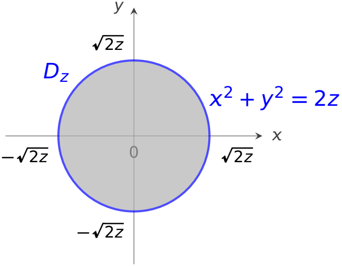
解

$$\text{原式} \xlongequal{\text{对称性}} \iiint_\Omega x^2dxdydz = \int_1^4\Big[\iint_{D_z} x^2dxdy\Big]dz$$

$$= \int_1^4\Big[\iint_{D_z} \frac{1}{2}(x^2+y^2)dxdy\Big]dz$$

例 计算 $\iiint_\Omega (x^2+5xy^2\sin\sqrt{x^2+y^2})dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 与平面 $z=1$ 和 $z=4$ 所围成。





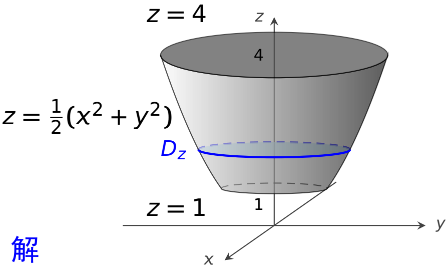
解

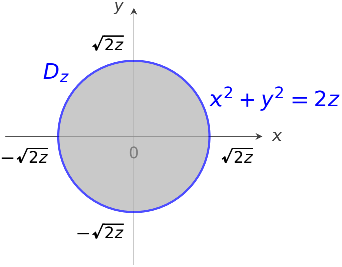
$$\text{原式} \xlongequal{\text{对称性}} \iiint_\Omega x^2dxdydz = \int_1^4\left[\iint_{D_z} x^2dxdy\right]dz$$

$$= \int_1^4\left[\iint_{D_z} \frac{1}{2}(x^2+y^2)dxdy\right]dz$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\sqrt{2z}} \rho^2\cdot\rho d\rho\right)d\theta$$

例 计算 $\iiint_\Omega (x^2+5xy^2\sin\sqrt{x^2+y^2})dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 与平面 $z=1$ 和 $z=4$ 所围成。





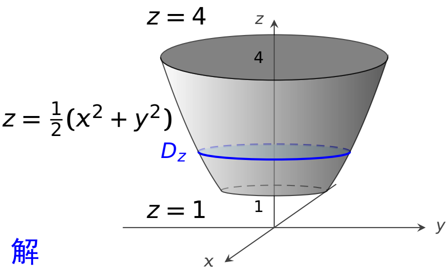
解

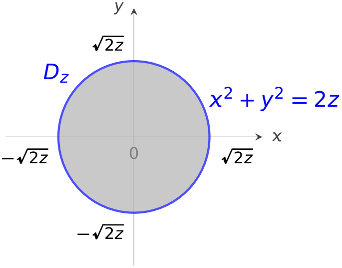
$$\text{原式} \xlongequal{\text{对称性}} \iiint_\Omega x^2 dxdydz = \int_1^4 \Big[\iint_{D_z} x^2 dxdy\Big]dz$$

$$= \int_1^4 \Big[\iint_{D_z} \frac{1}{2}(x^2+y^2)dxdy\Big]dz$$

$$= \int_1^4 \Big[\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{\sqrt{2z}} \rho^2\cdot\rho d\rho\Big)d\theta\Big]dz$$

例 计算 $\iiint_\Omega (x^2+5xy^2\sin\sqrt{x^2+y^2})dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 与平面 $z=1$ 和 $z=4$ 所围成。





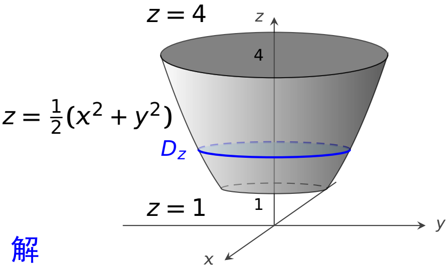
解

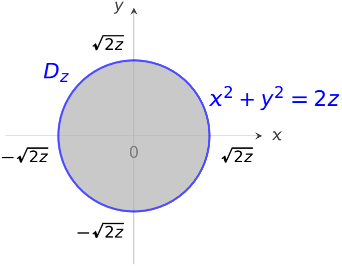
$$\text{原式} \xlongequal{\text{对称性}} \iiint_\Omega x^2dxdydz = \int_1^4\Big[\iint_{D_z} x^2dxdy\Big]dz$$

$$= \int_1^4\Big[\iint_{D_z}\frac{1}{2}(x^2+y^2)dxdy\Big]dz$$

$$= \int_1^4\Big[\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{\sqrt{2z}}\rho^2\cdot\rho d\rho\Big)d\theta\Big]dz = \pi\int_1^4 z^2dz$$

例 计算 $\iiint_\Omega (x^2+5xy^2\sin\sqrt{x^2+y^2})dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 与平面 $z=1$ 和 $z=4$ 所围成。





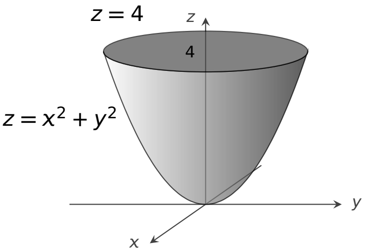
解

$$\text{原式} \xlongequal{\text{对称性}} \iiint_\Omega x^2dxdydz = \int_1^4\Big[\iint_{D_z} x^2dxdy\Big]dz$$

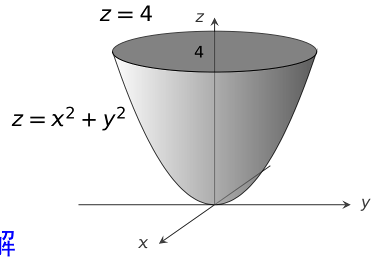
$$=\int_1^4\Big[\iint_{D_z}\frac{1}{2}(x^2+y^2)dxdy\Big]dz$$

$$=\int_1^4\Big[\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{\sqrt{2z}}\rho^2\cdot\rho d\rho\Big)d\theta\Big]dz=\pi\int_1^4 z^2dz=21\pi$$

例 计算 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$，其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成的闭区域。



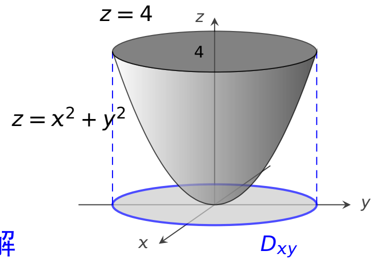
例 计算 $\iiint_\Omega zdxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成的闭区域。



解

$$原式 = \iint \left[\int \quad zdz \right] dxdy$$

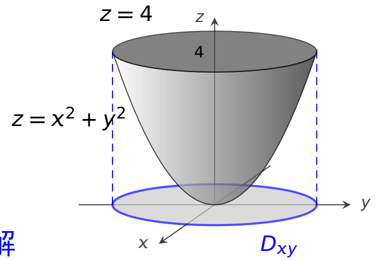
例 计算 $\iiint_{\Omega} z\,dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成的闭区域。

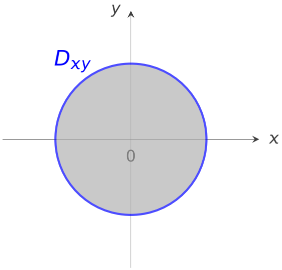


解

$$\text{原式} = \iint \left[\int \quad z\,dz \right] dxdy$$

例 计算 $\iiint_\Omega z\,dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=4$ 所围成的闭区域。

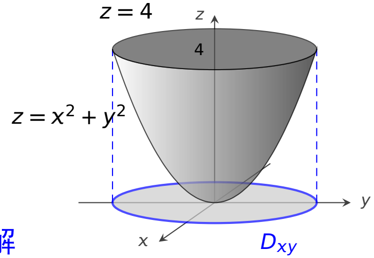


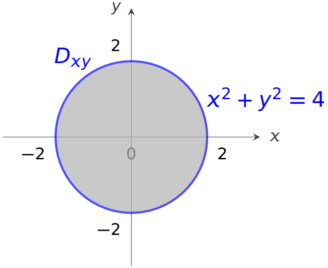


解

$$\text{原式}=\iint\Big[\int zdz\Big]dxdy$$

例 计算 $\iiint_\Omega z dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成的闭区域。

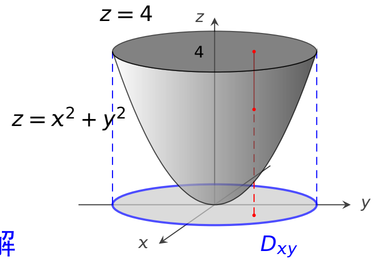


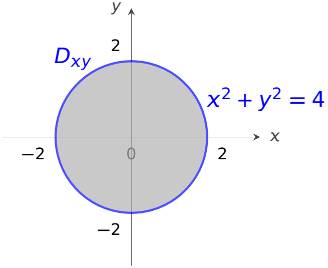


解

$$原式 = \iint \left[\int \quad z dz \right] dxdy$$

例 计算 $\iiint_\Omega z dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=4$ 所围成的闭区域。

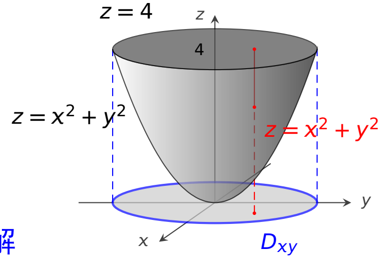


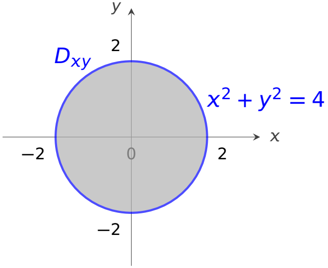


解

$$原式=\iint \left[\int zdz\right]dxdy$$

例 计算 $\iiint_\Omega z\,dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=4$ 所围成的闭区域。

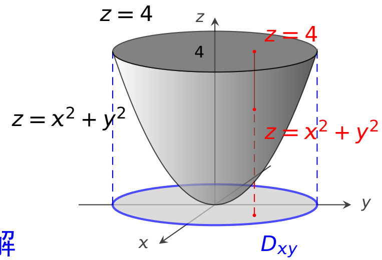


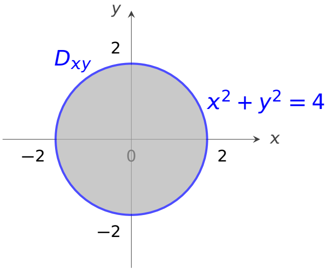


解

$$\text{原式} = \iint \left[\int \quad z\,dz \right] dxdy$$

例 计算 $\iiint_\Omega z dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=4$ 所围成的闭区域。

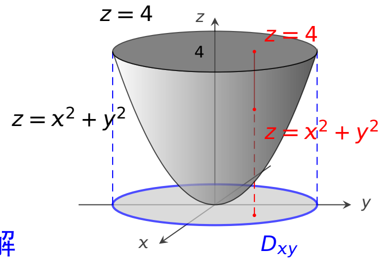


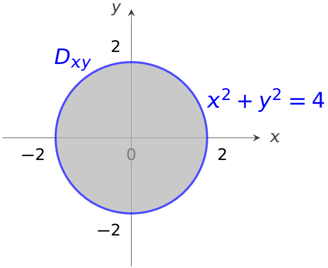


解

$$\text{原式} = \iint \Big[\int \quad z dz\Big] dxdy$$

例 计算 $\iiint_\Omega z dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=4$ 所围成的闭区域。

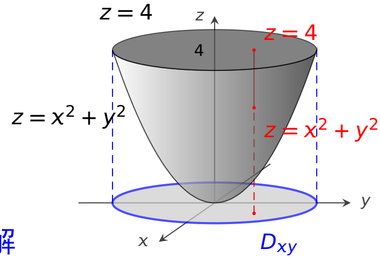


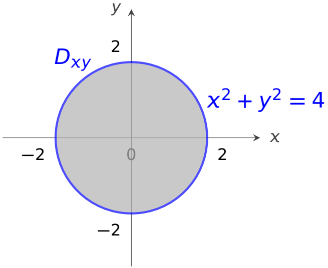


解

$$\text{原式}=\iint_{D_{xy}}\Big[\int \quad z dz\Big]dxdy$$

例 计算 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$，其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成的闭区域。

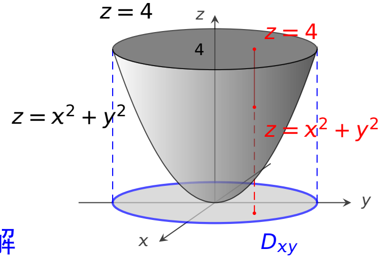


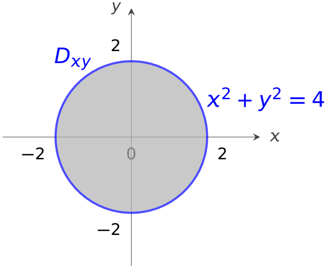


解

$$\text{原式} = \iint_{D_{xy}} \left[\int_{x^2+y^2}^{4} z dz \right] dx dy$$

例 计算 $\iiint_\Omega z dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=4$ 所围成的闭区域。



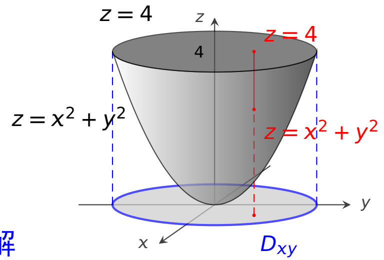


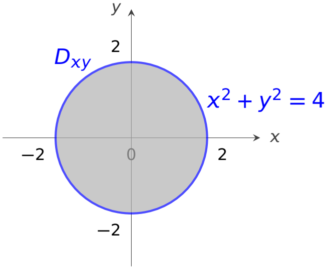
解

$$\text{原式}=\iint_{D_{xy}}\left[\int_{x^2+y^2}^{4} z dz\right]dxdy$$

$$\frac{1}{2}\left[16-(x^2+y^2)^2\right]$$

$\color{blue}{例}$ 计算 $\iiint_{\Omega} z dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成的闭区域。

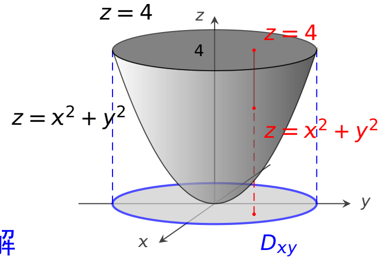


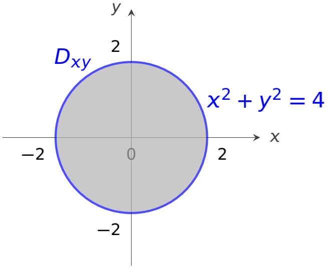


$\color{blue}{解}$

$$原式 = \iint_{D_{xy}} \left[\int_{x^2+y^2}^{4} z dz \right] dxdy = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} \left[16 - (x^2 + y^2)^2 \right] dxdy$$

例 计算 $\iiint_\Omega z\,dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=4$ 所围成的闭区域。



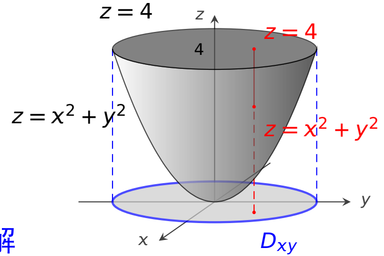


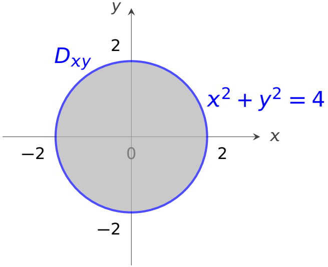
解

$$\text{原式} = \iint_{D_{xy}}\left[\int_{x^2+y^2}^{4} z\,dz\right]dxdy = \iint_{D_{xy}}\frac{1}{2}\left[16-(x^2+y^2)^2\right]dxdy$$

$$\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}$$

例 计算 $\iiint_\Omega z dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=4$ 所围成的闭区域。



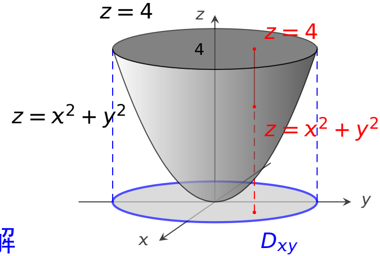


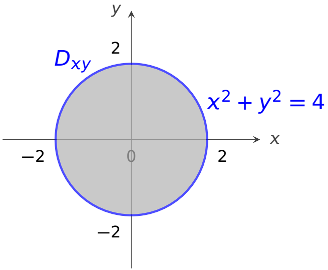
解

$$\text{原式}=\iint_{D_{xy}}\left[\int_{x^2+y^2}^{4} zdz\right]dxdy=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{2}\left[16-(x^2+y^2)^2\right]dxdy$$

$$\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}\iint_{D_{xy}}\frac{1}{2}\left[16-\rho^4\right]$$

例 计算 $\iiint_\Omega z\,dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=4$ 所围成的闭区域。



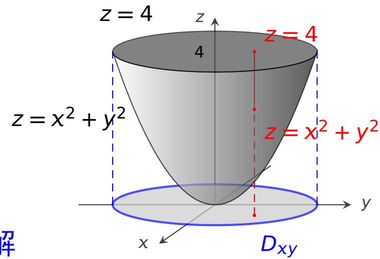


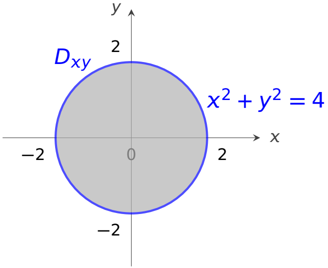
解

$$\text{原式}=\iint_{D_{xy}}\left[\int_{x^2+y^2}^{4} z\,dz\right]dxdy=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{2}\left[16-(x^2+y^2)^2\right]dxdy$$

$$\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}\iint_{D_{xy}}\frac{1}{2}\left[16-\rho^4\right]\cdot\rho\,d\rho\,d\theta$$

例 计算 $\iiint_\Omega z dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=4$ 所围成的闭区域。





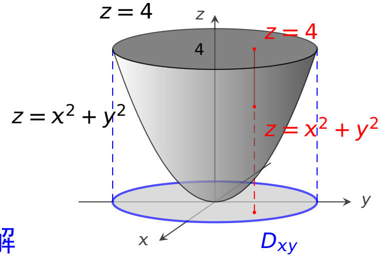
解

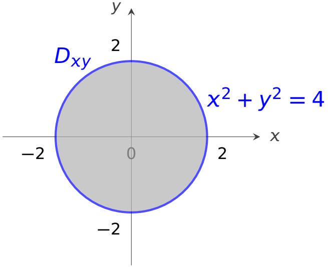
$$\text{原式} = \iint_{D_{xy}} \left[\int_{x^2+y^2}^{4} z dz\right] dxdy = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2}\left[16-(x^2+y^2)^2\right] dxdy$$

$$\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2}\left[16-\rho^4\right]\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$= \int \left[\int \frac{1}{2}\left[16-\rho^4\right]\cdot\rho d\rho\right] d\theta$$

例 计算 $\iiint_\Omega z\,dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=4$ 所围成的闭区域。





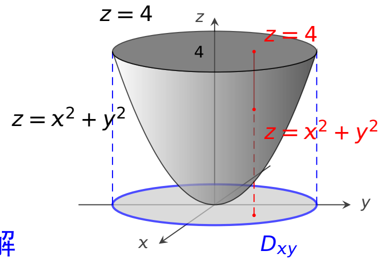
解

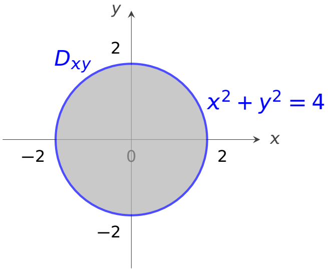
$$\text{原式}=\iint_{D_{xy}}\left[\int_{x^2+y^2}^{4} z\,dz\right]dxdy=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{2}\left[16-(x^2+y^2)^2\right]dxdy$$

$$\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}\iint_{D_{xy}}\frac{1}{2}\left[16-\rho^4\right]\cdot\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\int\ \frac{1}{2}\left[16-\rho^4\right]\cdot\rho\,d\rho\right]d\theta$$

例 计算 $\iiint_\Omega z dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=4$ 所围成的闭区域。





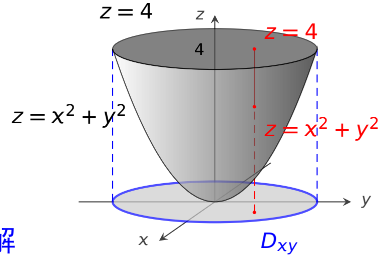
解

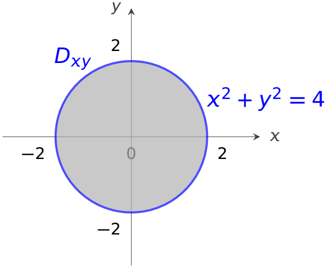
$$\text{原式}=\iint_{D_{xy}}\left[\int_{x^2+y^2}^{4} z dz\right]dxdy=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{2}\left[16-(x^2+y^2)^2\right]dxdy$$

$$\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}\iint_{D_{xy}}\frac{1}{2}\left[16-\rho^4\right]\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^2\frac{1}{2}\left[16-\rho^4\right]\cdot\rho d\rho\right]d\theta$$

例 计算 $\iiint_\Omega z\,dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=4$ 所围成的闭区域。





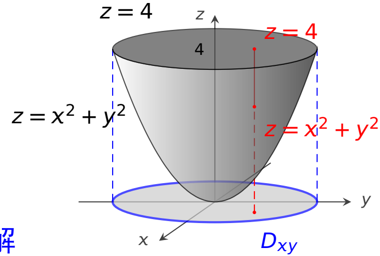
解

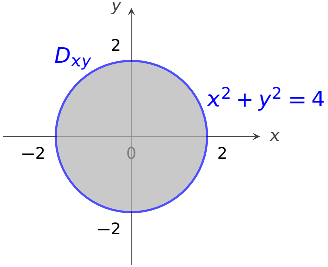
$$\text{原式} = \iint_{D_{xy}} \left[\int_{x^2+y^2}^{4} z\,dz\right] dxdy = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2}\left[16-(x^2+y^2)^2\right] dxdy$$

$$\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2}\left[16-\rho^4\right]\cdot\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^2 \frac{1}{2}\left[16-\rho^4\right]\cdot\rho\,d\rho\right]d\theta = \pi\int_0^2 (16-\rho^4)\cdot\rho\,d\rho$$

例 计算 $\iiint_\Omega z dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=4$ 所围成的闭区域。





解

$$\text{原式}=\iint_{D_{xy}}\left[\int_{x^2+y^2}^{4} z dz\right]dxdy=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{2}\left[16-(x^2+y^2)^2\right]dxdy$$

$$\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}\iint_{D_{xy}}\frac{1}{2}\left[16-\rho^4\right]\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^2\frac{1}{2}\left[16-\rho^4\right]\cdot\rho d\rho\right]d\theta=\pi\int_0^2(16-\rho^4)\cdot\rho d\rho=\frac{64}{3}\pi$$

例 计算 $\iiint_\Omega z dv$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域。（用“先一后二”及“先二后一”）

例 计算 $\iiint_\Omega z dv$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域。（用“先一后二”及“先二后一”）

解一 “先一后二”：

$$\iiint_\Omega z dv = \iint \left[\int \qquad zdz\right] dxdy$$

例 计算 $\iiint_\Omega z dv$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域。（用"先一后二"及"先二后一"）

解一 "先一后二"：Ω 在 xoy 面上投影：D_{xy}

$$\iiint_\Omega z dv = \iint_{D_{xy}} \left[\int \qquad\qquad z dz \right] dxdy$$

例 计算 $\iiint_\Omega zdv$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域。（用“先一后二”及“先二后一”）

解一 “先一后二”：Ω 在 xoy 面上投影：$D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$

$$\iiint_\Omega zdv=\iint_{D_{xy}}\left[\int \qquad zdz\right]dxdy$$

例 计算 $\iiint_\Omega zdv$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域。（用“先一后二”及“先二后一”）

解一 “先一后二”：Ω 在 xoy 面上投影：$D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$

$$\iiint_\Omega zdv=\iint_{D_{xy}}\left[\int_{x^2+y^2}\quad zdz\right]dxdy$$

例 计算 $\iiint_\Omega z dv$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域。（用“先一后二”及“先二后一”）

解一 “先一后二”：Ω 在 xoy 面上投影：$D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$

$$\iiint_\Omega z dv=\iint_{D_{xy}}\left[\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z dz\right]dxdy$$

例 计算 $\iiint_\Omega zdv$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域。（用“先一后二”及“先二后一”）

解一 “先一后二”：Ω 在 xoy 面上投影：$D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$

$$\iiint_\Omega zdv=\iint_{D_{xy}}\left[\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}zdz\right]dxdy \qquad \frac{1}{2}z^2$$

例 计算 $\iiint_\Omega zdv$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域。（用“先一后二”及“先二后一”）

解一 “先一后二”：Ω 在 xoy 面上投影：$D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$

$$\iiint_\Omega zdv=\iint_{D_{xy}}\left[\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} zdz\right]dxdy \qquad \frac{1}{2}z^2\Big|_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}$$

例 计算 $\iiint_\Omega zdv$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域。（用“先一后二”及“先二后一”）

解一 “先一后二”：Ω 在 xoy 面上投影：$D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 1\}$

$$\iiint_\Omega zdv=\iint_{D_{xy}}\left[\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} zdz\right]dxdy=\iint_{D_{xy}}\left[\frac{1}{2}z^2\Big|_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}\right]dxdy$$

例 计算 $\iiint_\Omega z dv$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域。（用“先一后二”及“先二后一”）

解一 “先一后二”：Ω 在 xoy 面上投影：$D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$

$$\iiint_\Omega z dv=\iint_{D_{xy}}\left[\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z dz\right]dxdy=\iint_{D_{xy}}\left[\frac{1}{2}z^2\Big|_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}\right]dxdy$$

$$2-x^2-y^2-(x^2+y^2)^2$$

例 计算 $\iiint_\Omega zdv$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域。（用“先一后二”及“先二后一”）

解一 “先一后二”：Ω 在 xoy 面上投影：$D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$

$$\iiint_\Omega zdv=\iint_{D_{xy}}\left[\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} zdz\right]dxdy=\iint_{D_{xy}}\left[\frac{1}{2}z^2\Big|_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}\right]dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}\left[2-x^2-y^2-(x^2+y^2)^2\right]dxdy$$

例 计算 $\iiint_\Omega z dv$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域。（用“先一后二”及“先二后一”）

解一 “先一后二”：Ω 在 xoy 面上投影：$D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$

$$\iiint_\Omega z dv=\iint_{D_{xy}}\left[\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z dz\right]dxdy=\iint_{D_{xy}}\left[\frac{1}{2}z^2\Big|_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}\right]dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}\left[2-x^2-y^2-(x^2+y^2)^2\right]dxdy$$

$$\underline{\underline{\;x=\rho\cos\theta\;}}_{\;y=\rho\sin\theta}$$

例 计算 $\iiint_\Omega z dv$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域。(用“先一后二”及“先二后一”)

解一 “先一后二”：Ω 在 xoy 面上投影：$D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$

$$\iiint_\Omega z dv=\iint_{D_{xy}}\left[\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z dz\right]dxdy=\iint_{D_{xy}}\left[\frac{1}{2}z^2\Big|_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}\right]dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}\left[2-x^2-y^2-(x^2+y^2)^2\right]dxdy$$

$$\overline{\overline{\underset{y=\rho\sin\theta}{x=\rho\cos\theta}}}\qquad\left[2-\rho^2-\rho^4\right]$$

例 计算 $\iiint_\Omega z dv$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域。（用“先一后二”及“先二后一”）

解一 “先一后二”：Ω 在 xoy 面上投影：$D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$

$$\iiint_\Omega z dv=\iint_{D_{xy}}\left[\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z dz\right]dxdy=\iint_{D_{xy}}\left[\frac{1}{2}z^2\Big|_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}\right]dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}\left[2-x^2-y^2-(x^2+y^2)^2\right]dxdy$$

$$\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}\qquad\left[2-\rho^2-\rho^4\right]\cdot\rho d\rho d\theta$$

例 计算 $\iiint_\Omega z dv$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域。（用“先一后二”及“先二后一”）

解一 “先一后二”：Ω 在 xoy 面上投影：$D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$

$$\iiint_\Omega z dv=\iint_{D_{xy}}\left[\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z dz\right]dxdy=\iint_{D_{xy}}\left[\frac{1}{2}z^2\Big|_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}\right]dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}\left[2-x^2-y^2-(x^2+y^2)^2\right]dxdy$$

$$\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}\left[2-\rho^2-\rho^4\right]\cdot\rho d\rho d\theta$$

例 计算 $\iiint_\Omega z dv$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域。（用“先一后二”及“先二后一”）

解一 “先一后二”：Ω 在 xoy 面上投影：$D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$

$$\iiint_\Omega z dv=\iint_{D_{xy}}\left[\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z dz\right]dxdy=\iint_{D_{xy}}\left[\frac{1}{2}z^2\Big|_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}\right]dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}\left[2-x^2-y^2-(x^2+y^2)^2\right]dxdy$$

$$\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}\left[2-\rho^2-\rho^4\right]\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int\left\{\int\left[2-\rho^2-\rho^4\right]\cdot\rho d\rho\right\}d\theta$$

例 计算 $\iiint_\Omega zdv$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域。（用“先一后二”及“先二后一”）

解一 “先一后二”：Ω 在 xoy 面上投影：$D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$

$$\iiint_\Omega zdv=\iint_{D_{xy}}\left[\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} zdz\right]dxdy=\iint_{D_{xy}}\left[\frac{1}{2}z^2\Big|_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}\right]dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}\left[2-x^2-y^2-(x^2+y^2)^2\right]dxdy$$

$$\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}\left[2-\rho^2-\rho^4\right]\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left\{\int\left[2-\rho^2-\rho^4\right]\cdot\rho d\rho\right\}d\theta$$

例 计算 $\iiint_\Omega z dv$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域。（用“先一后二”及“先二后一”）

解一 “先一后二”：Ω 在 xoy 面上投影：$D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$

$$\iiint_\Omega z dv=\iint_{D_{xy}}\left[\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z dz\right]dxdy=\iint_{D_{xy}}\left[\frac{1}{2}z^2\Big|_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}\right]dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}\left[2-x^2-y^2-(x^2+y^2)^2\right]dxdy$$

$$\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}\left[2-\rho^2-\rho^4\right]\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^1\left[2-\rho^2-\rho^4\right]\cdot\rho d\rho\right\}d\theta$$

例 计算 $\iiint_\Omega z dv$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域。（用“先一后二”及“先二后一”）

解一 “先一后二”：Ω 在 xoy 面上投影：$D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$

$$\iiint_\Omega z dv=\iint_{D_{xy}}\left[\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z dz\right]dxdy=\iint_{D_{xy}}\left[\frac{1}{2}z^2\Big|_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}\right]dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}\left[2-x^2-y^2-(x^2+y^2)^2\right]dxdy$$

$$\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}\left[2-\rho^2-\rho^4\right]\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^1\left[2-\rho^2-\rho^4\right]\cdot\rho d\rho\right\}d\theta=\pi\int_0^1\left[2\rho-\rho^3-\rho^5\right]d\rho$$

例 计算 $\iiint_\Omega z dv$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域。（用“先一后二”及“先二后一”）

解一 “先一后二”：Ω 在 xoy 面上投影：$D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$

$$\iiint_\Omega z dv=\iint_{D_{xy}}\left[\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z dz\right]dxdy=\iint_{D_{xy}}\left[\frac{1}{2}z^2\Big|_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}\right]dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}\left[2-x^2-y^2-(x^2+y^2)^2\right]dxdy$$

$$\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}\left[2-\rho^2-\rho^4\right]\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^1\left[2-\rho^2-\rho^4\right]\cdot\rho d\rho\right\}d\theta=\pi\int_0^1\left[2\rho-\rho^3-\rho^5\right]d\rho$$

$$=\pi\left(\rho^2-\frac{1}{4}\rho^4-\frac{1}{6}\rho^6\right)\Big|_0^1$$

例 计算 $\iiint_\Omega z dv$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域。(用 "先一后二" 及 "先二后一")

解一 "先一后二"：Ω 在 xoy 面上投影：$D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$

$$\iiint_\Omega z dv=\iint_{D_{xy}}\left[\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z dz\right]dxdy=\iint_{D_{xy}}\left[\frac{1}{2}z^2\Big|_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}\right]dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}\left[2-x^2-y^2-(x^2+y^2)^2\right]dxdy$$

$$\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}\left[2-\rho^2-\rho^4\right]\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^1\left[2-\rho^2-\rho^4\right]\cdot\rho d\rho\right\}d\theta=\pi\int_0^1\left[2\rho-\rho^3-\rho^5\right]d\rho$$

$$=\pi\left(\rho^2-\frac{1}{4}\rho^4-\frac{1}{6}\rho^6\right)\Big|_0^1=\frac{7}{12}\pi$$

例 计算 $\iiint_\Omega z dv$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域。（用“先一后二”及“先二后一”）

例 计算 $\iiint_\Omega z dv$，其中 Ω 是由曲面 $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 及 $z = x^2 + y^2$ 所围成的闭区域。（用“先一后二”及“先二后一”）

解二 “先二后一”法：

$$\iiint_\Omega z dv = \int \quad \left[\iint \quad z dx dy \right] dz$$

例 计算 $\iiint_\Omega zdv$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域。（用"先一后二"及"先二后一"）

解二 "先二后一"法：$0\le z\le\sqrt{2}$。

$$\iiint_\Omega zdv=\int_0^{\sqrt{2}}\Big[\iint\quad zdxdy\Big]dz$$

例 计算 $\iiint_\Omega z dv$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域。（用“先一后二”及“先二后一”）

解二 “先二后一”法：$0 \le z \le \sqrt{2}$。

$$\iiint_\Omega z dv = \int_0^{\sqrt{2}} \left[\iint_{D_z} z dx dy \right] dz$$

例 计算 $\iiint_\Omega z dv$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域。（用“先一后二”及“先二后一”）

解二 “先二后一”法：$0\le z\le\sqrt{2}$。

当 $0\le z\le 1$ 时，截面 D_z ；

当 $1\le z\le\sqrt{2}$ 时，截面 D_z 。

$$\iiint_\Omega z dv=\int_0^{\sqrt{2}}\left[\iint_{D_z} z dx dy\right]dz$$

例 计算 $\iiint_\Omega z dv$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域。（用“先一后二”及“先二后一”）

解二 “先二后一”法：$0 \le z \le \sqrt{2}$。

当 $0 \le z \le 1$ 时，截面 $D_z = \{(x, y) | x^2+y^2 \le z\}$；

当 $1 \le z \le \sqrt{2}$ 时，截面 D_z 。

$$\iiint_\Omega z dv = \int_0^{\sqrt{2}} \left[\iint_{D_z} z dx dy \right] dz$$

例 计算 $\iiint_\Omega z dv$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域。（用“先一后二”及“先二后一”）

解二 “先二后一”法：$0 \le z \le \sqrt{2}$。

当 $0 \le z \le 1$ 时，截面 $D_z=\{(x,y)|x^2+y^2 \le z\}$；

当 $1 \le z \le \sqrt{2}$ 时，截面 $D_z=\{(x,y)|x^2+y^2 \le 2-z^2\}$。

$$\iiint_\Omega z dv = \int_0^{\sqrt{2}} \left[\iint_{D_z} z dx dy\right] dz$$

例 计算 $\iiint_\Omega zdv$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域。（用“先一后二”及“先二后一”）

解二 “先二后一”法：$0\le z\le\sqrt{2}$。

当 $0\le z\le 1$ 时，截面 $D_z=\{(x,y)|x^2+y^2\le z\}$；

当 $1\le z\le\sqrt{2}$ 时，截面 $D_z=\{(x,y)|x^2+y^2\le 2-z^2\}$。

$$\iiint_\Omega zdv=\int_0^{\sqrt{2}}\left[\iint_{D_z} zdxdy\right]dz=\int_0^{\sqrt{2}} z\left[\iint_{D_z} dxdy\right]dz$$

例 计算 $\iiint_\Omega z dv$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域。（用“先一后二”及“先二后一”）

解二 “先二后一”法：$0 \le z \le \sqrt{2}$。

当 $0 \le z \le 1$ 时，截面 $D_z = \{(x, y) | x^2+y^2 \le z\}$；

当 $1 \le z \le \sqrt{2}$ 时，截面 $D_z = \{(x, y) | x^2+y^2 \le 2-z^2\}$。

$$\iiint_\Omega z dv = \int_0^{\sqrt{2}} \Big[\iint_{D_z} z dxdy\Big] dz = \int_0^{\sqrt{2}} z\Big[\iint_{D_z} dxdy\Big] dz$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} z |D_z| dz$$

例 计算 $\iiint_\Omega z dv$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域。（用“先一后二”及“先二后一”）

解二 “先二后一”法：$0\le z\le\sqrt{2}$。

当 $0\le z\le 1$ 时，截面 $D_z=\{(x,y)|x^2+y^2\le z\}$；

当 $1\le z\le\sqrt{2}$ 时，截面 $D_z=\{(x,y)|x^2+y^2\le 2-z^2\}$。

$$\iiint_\Omega z dv=\int_0^{\sqrt{2}}\Big[\iiint_{D_z} z dx dy\Big]dz=\int_0^{\sqrt{2}} z\Big[\iiint_{D_z} dx dy\Big]dz$$

$$=\int_0^{\sqrt{2}} z|D_z|dz=\int_0^1 z|D_z|dz+\int_1^{\sqrt{2}} z|D_z|dz$$

例 计算 $\iiint_\Omega z dv$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域。（用“先一后二”及“先二后一”）

解二 “先二后一”法：$0\le z\le\sqrt{2}$。

当 $0\le z\le 1$ 时，截面 $D_z=\{(x,y)|x^2+y^2\le z\}$；

当 $1\le z\le\sqrt{2}$ 时，截面 $D_z=\{(x,y)|x^2+y^2\le 2-z^2\}$。

$$\iiint_\Omega z dv=\int_0^{\sqrt{2}}\Big[\iint_{D_z} z dx dy\Big]dz=\int_0^{\sqrt{2}} z\Big[\iint_{D_z} dx dy\Big]dz$$

$$=\int_0^{\sqrt{2}} z|D_z|dz=\int_0^1 z|D_z|dz+\int_1^{\sqrt{2}} z|D_z|dz$$

$$=\int_0^1 z(\pi z)dz+\int_1^{\sqrt{2}} z\pi(2-z^2)dz$$

例 计算 $\iiint_\Omega z dv$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域。（用“先一后二”及“先二后一”）

解二 “先二后一”法：$0\le z\le\sqrt{2}$。

当 $0\le z\le 1$ 时，截面 $D_z=\{(x,y)|x^2+y^2\le z\}$；

当 $1\le z\le\sqrt{2}$ 时，截面 $D_z=\{(x,y)|x^2+y^2\le 2-z^2\}$。

$$\iiint_\Omega z dv=\int_0^{\sqrt{2}}\left[\iiint_{D_z} z dxdy\right]dz=\int_0^{\sqrt{2}} z\left[\iiint_{D_z} dxdy\right]dz$$

$$=\int_0^{\sqrt{2}} z|D_z|dz=\int_0^1 z|D_z|dz+\int_1^{\sqrt{2}} z|D_z|dz$$

$$=\int_0^1 z(\pi z)dz+\int_1^{\sqrt{2}} z\pi(2-z^2)dz$$

$$=\frac{1}{3}\pi z^3\Big|_0^1+\pi(z^2-\frac{1}{4}z^4)\Big|_1^{\sqrt{2}}$$

例 计算 $\iiint_\Omega z dv$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域。（用“先一后二”及“先二后一”）

解二 “先二后一”法：$0\le z\le\sqrt{2}$。

当 $0\le z\le 1$ 时，截面 $D_z=\{(x,y)|x^2+y^2\le z\}$；

当 $1\le z\le\sqrt{2}$ 时，截面 $D_z=\{(x,y)|x^2+y^2\le 2-z^2\}$。

$$\iiint_\Omega z dv=\int_0^{\sqrt{2}}\left[\iint_{D_z} z dxdy\right]dz=\int_0^{\sqrt{2}} z\left[\iint_{D_z} dxdy\right]dz$$

$$=\int_0^{\sqrt{2}} z|D_z|dz=\int_0^1 z|D_z|dz+\int_1^{\sqrt{2}} z|D_z|dz$$

$$=\int_0^1 z(\pi z)dz+\int_1^{\sqrt{2}} z\pi(2-z^2)dz$$

$$=\frac{1}{3}\pi z^3\Big|_0^1+\pi(z^2-\frac{1}{4}z^4)\Big|_1^{\sqrt{2}}=\frac{7}{12}\pi$$

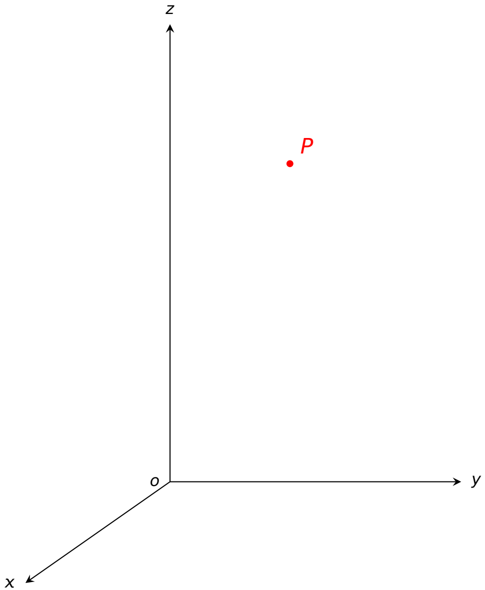
We are here now...

1. 三重积分的概念

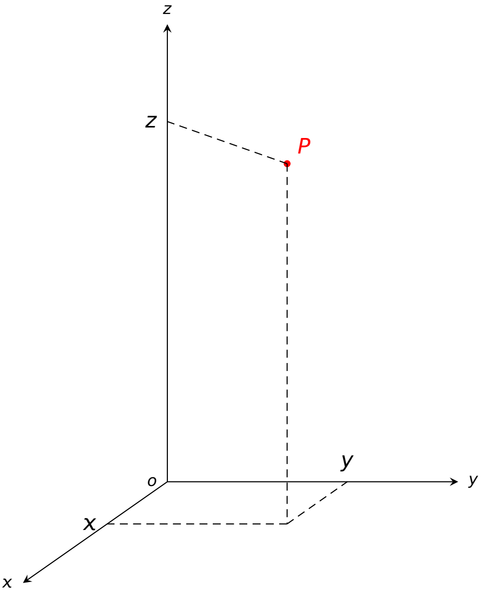
2. 三重积分的计算：化为累次积分

3. 球面坐标

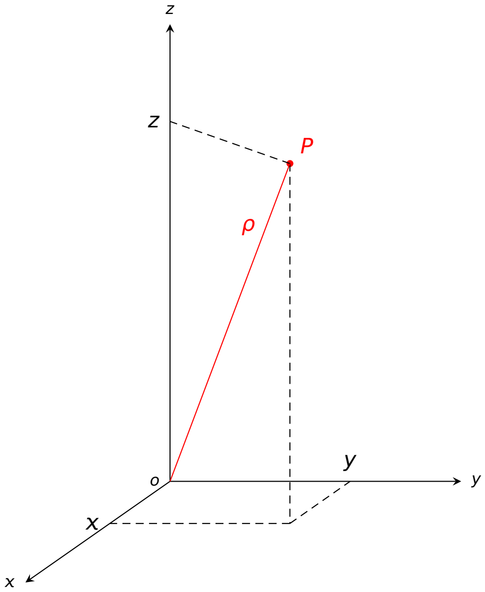
球面坐标



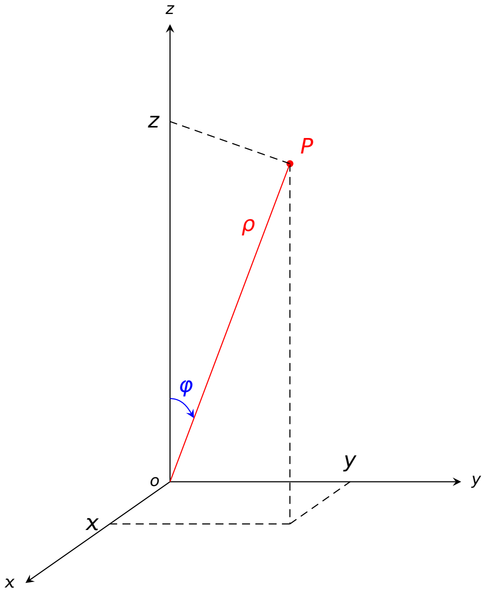
球面坐标



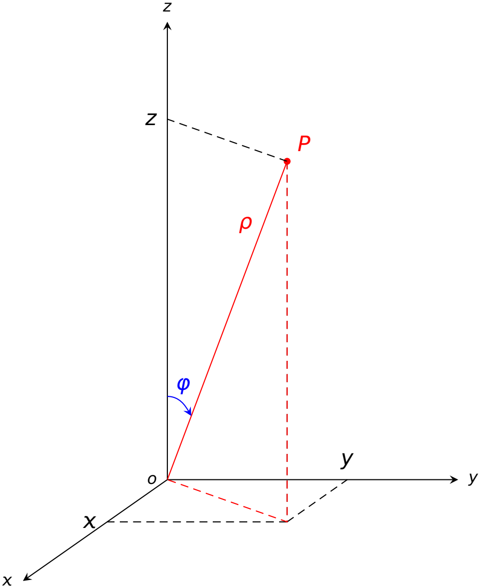
球面坐标



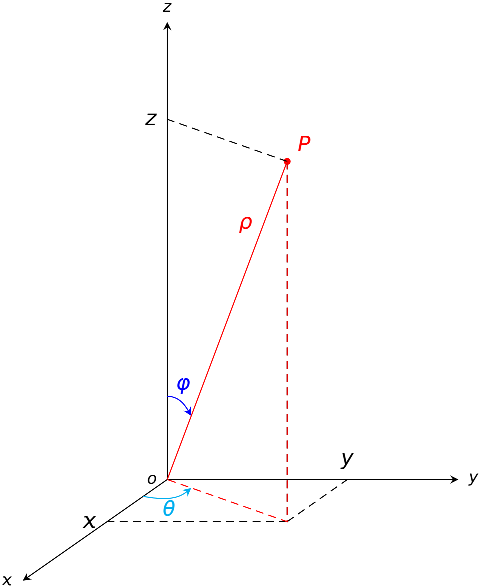
球面坐标



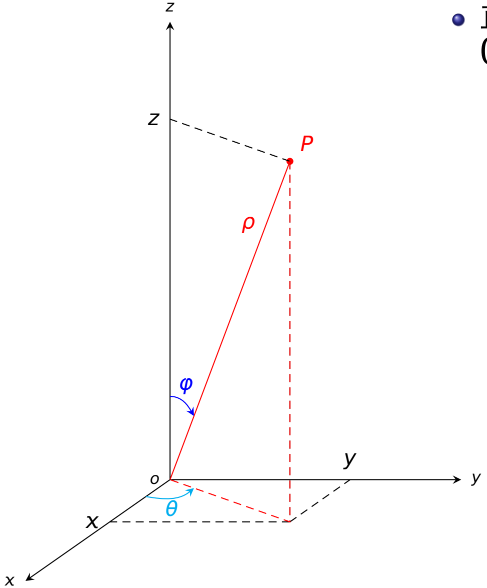
球面坐标



球面坐标

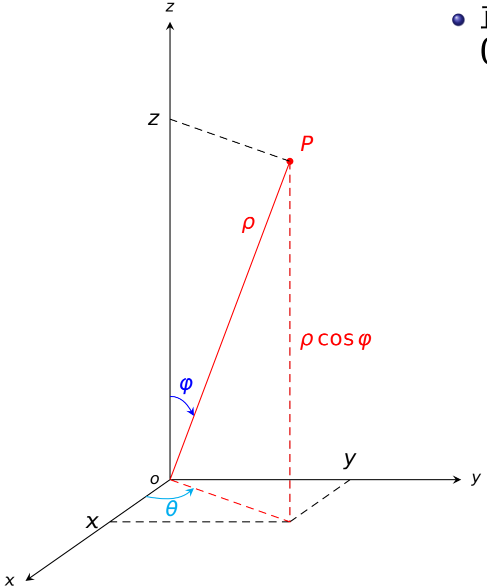


球面坐标



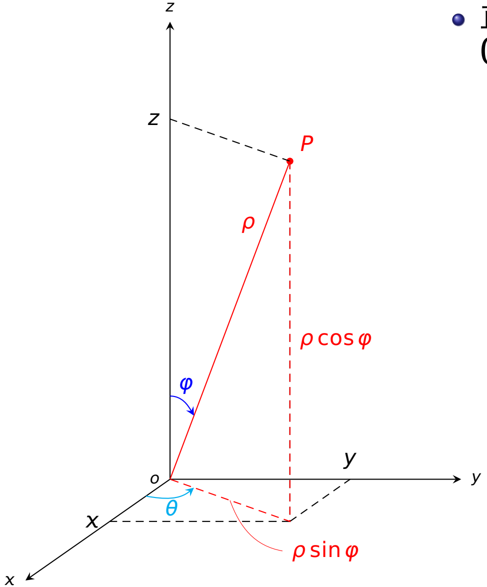
- 直角坐标 (x, y, z)，球面坐标 (ρ, φ, θ) 的转换：

球面坐标



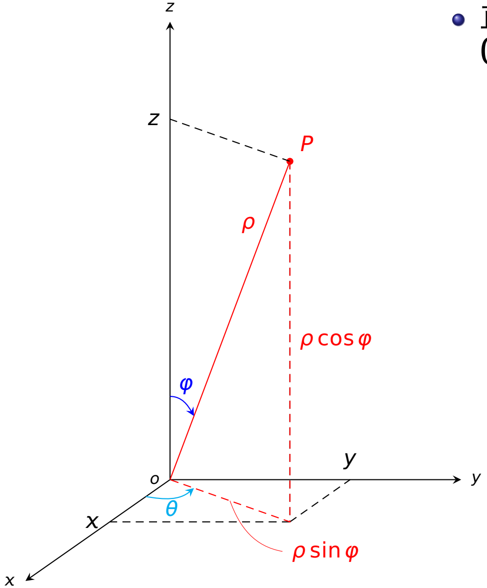
- 直角坐标 (x, y, z)，球面坐标 (ρ, φ, θ) 的转换：

球面坐标



- 直角坐标 (x, y, z)，球面坐标 (ρ, φ, θ) 的转换：

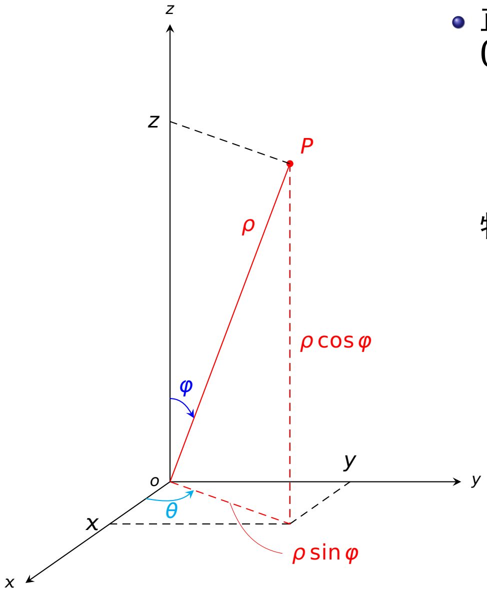
球面坐标



- 直角坐标 (x, y, z)，球面坐标 (ρ, φ, θ) 的转换：

$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

球面坐标

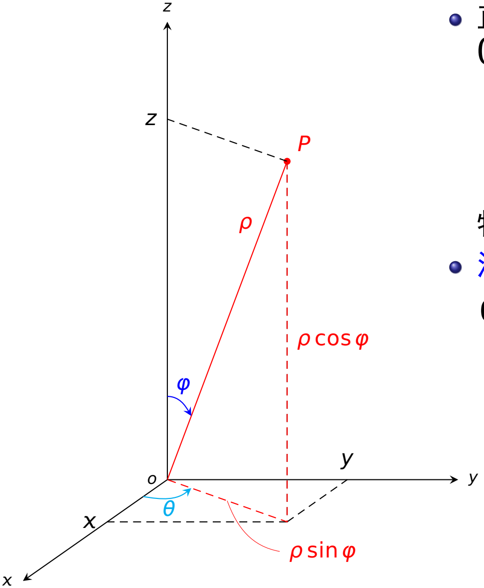


- 直角坐标 (x, y, z)，球面坐标 (ρ, φ, θ) 的转换：

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

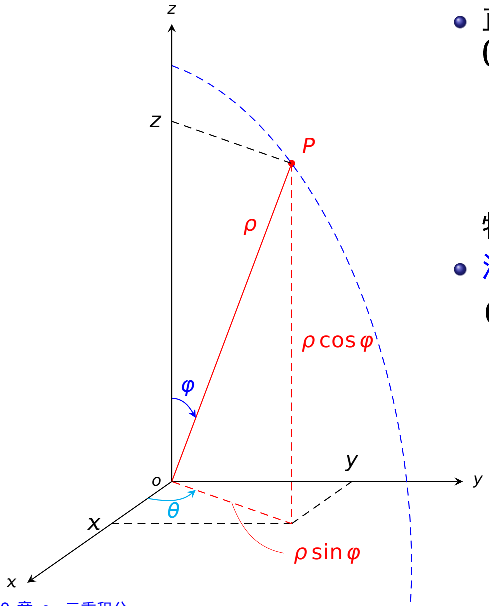
特别地，$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$

球面坐标



- 直角坐标 (x, y, z)，球面坐标 (ρ, φ, θ) 的转换：
$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$
特别地，$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$
- 注
$0 \le \rho < \infty$,

球面坐标



- 直角坐标 (x, y, z)，球面坐标 (ρ, φ, θ) 的转换：

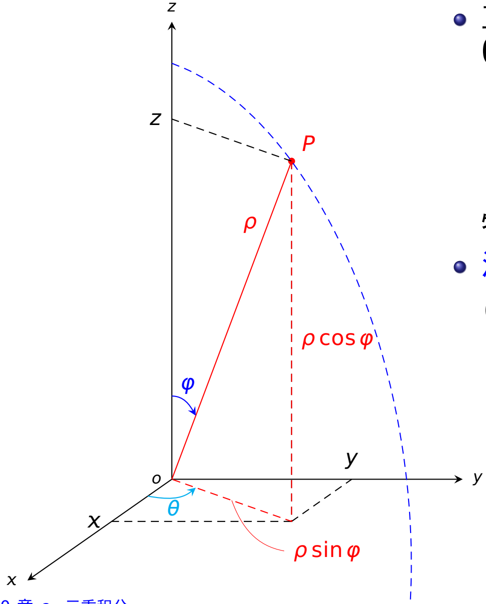
$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

特别地，$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$

- 注

$0 \le \rho < \infty,$

球面坐标



- 直角坐标 (x, y, z)，球面坐标 (ρ, φ, θ) 的转换：

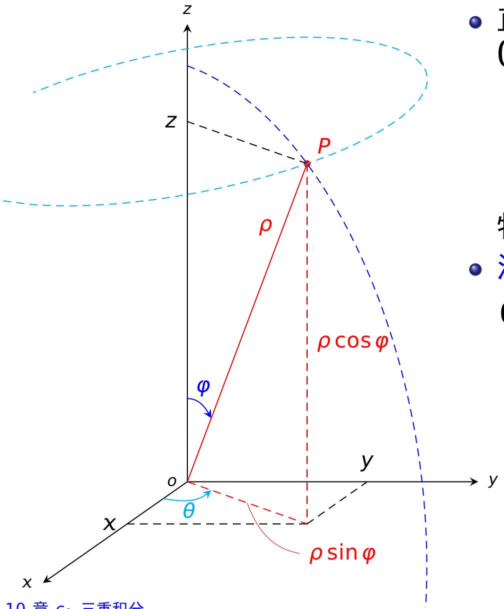
$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

特别地，$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$

- 注

$0 \le \rho < \infty,\ 0 \le \varphi \le \pi,$

球面坐标



- 直角坐标 (x, y, z)，球面坐标 (ρ, φ, θ) 的转换：

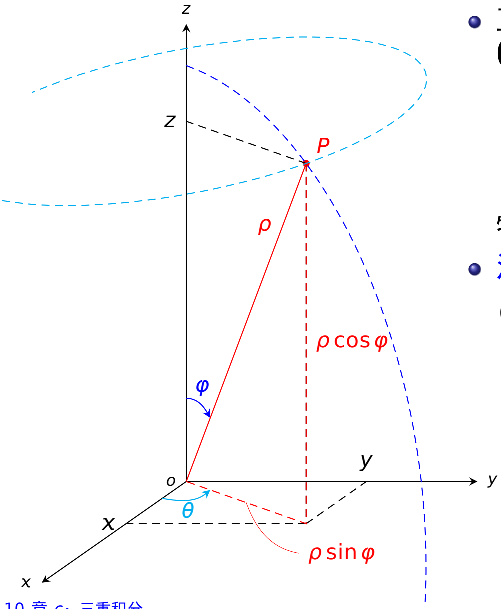
$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

特别地，$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$

- 注

$0 \le \rho < \infty,\ 0 \le \varphi \le \pi,$

球面坐标



- 直角坐标 (x, y, z)，球面坐标 (ρ, φ, θ) 的转换：

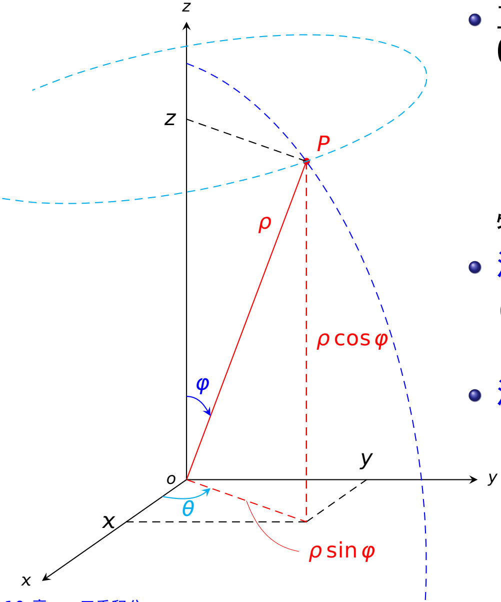
$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

特别地，$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$

- 注

$0 \le \rho < \infty,\ 0 \le \varphi \le \pi,\ 0 \le \theta \le 2\pi$

球面坐标



- 直角坐标 (x, y, z)，球面坐标 (ρ, φ, θ) 的转换：

$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

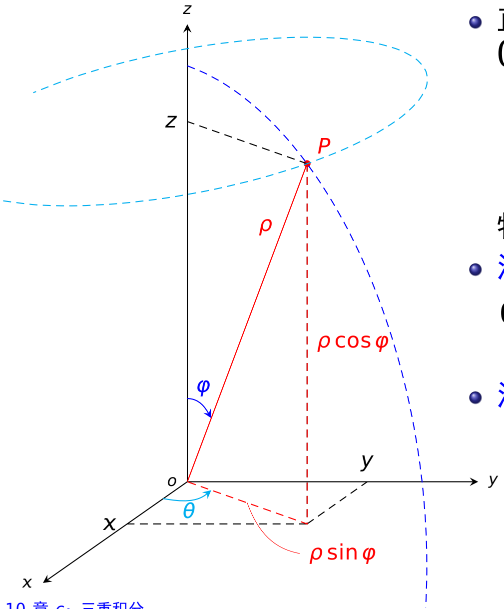
特别地，$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$

- 注

$0 \le \rho < \infty,\ 0 \le \varphi \le \pi,\ 0 \le \theta \le 2\pi$

- 注 三组坐标面
  - $\rho = \rho_0$：
  - $\varphi = \varphi_0$：
  - $\theta = \theta_0$：

球面坐标



- 直角坐标 (x, y, z)，球面坐标 (ρ, φ, θ) 的转换：

$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

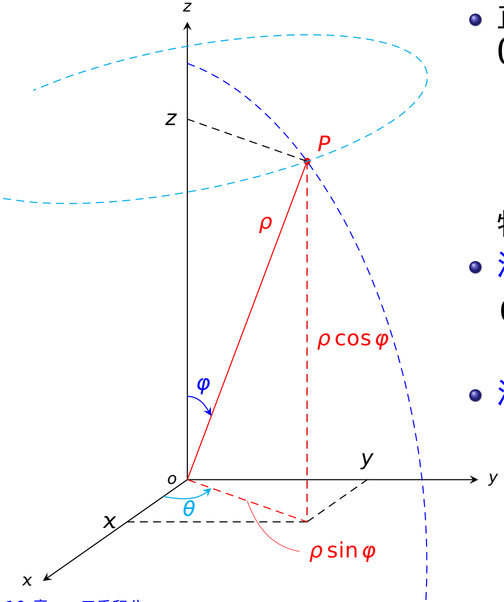
特别地，$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$

- 注

$0 \le \rho < \infty,\ 0 \le \varphi \le \pi,\ 0 \le \theta \le 2\pi$

- 注 三组坐标面
  - $\rho = \rho_0$：球面
  - $\varphi = \varphi_0$：
  - $\theta = \theta_0$：

球面坐标



- 直角坐标 (x, y, z)，球面坐标 (ρ, φ, θ) 的转换：

$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

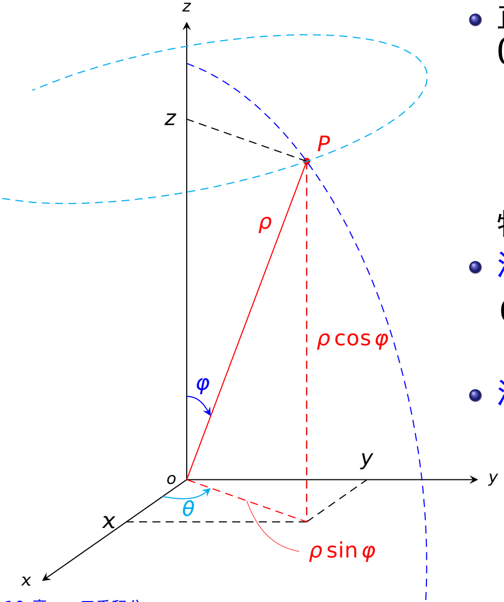
特别地，$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$

- 注

$$0 \le \rho < \infty,\ 0 \le \varphi \le \pi,\ 0 \le \theta \le 2\pi$$

- 注 三组坐标面
  - $\rho = \rho_0$：球面
  - $\varphi = \varphi_0$：以原点为顶点、z 轴为轴的圆锥面
  - $\theta = \theta_0$：

球面坐标



- 直角坐标 (x, y, z)，球面坐标 (ρ, φ, θ) 的转换：

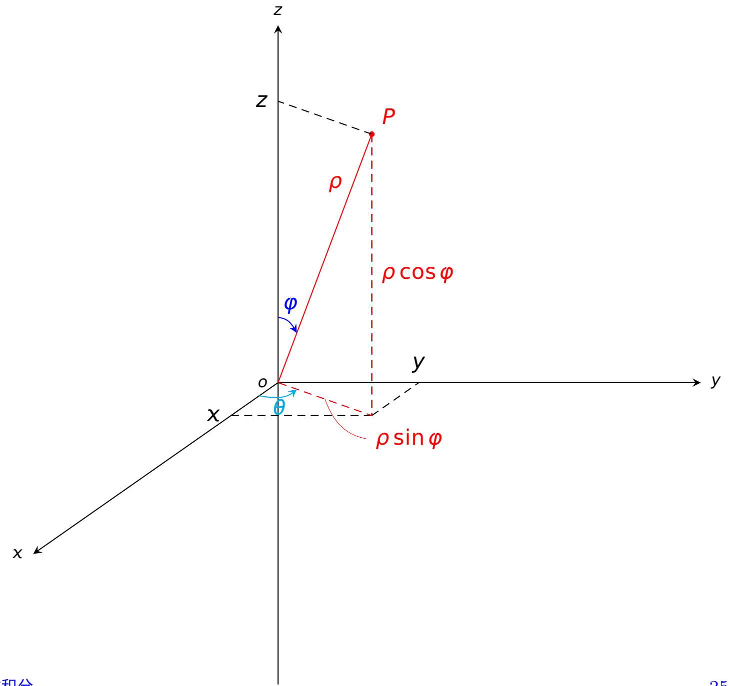
$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

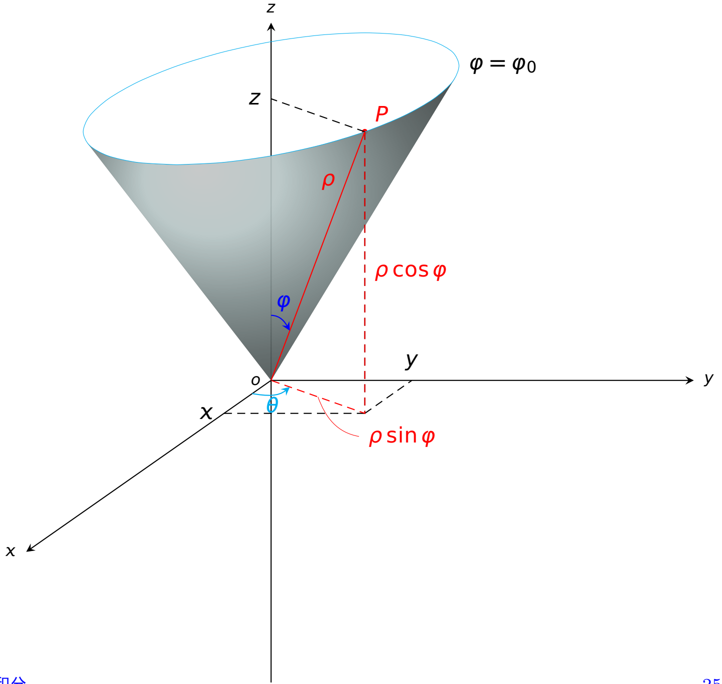
特别地，$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$

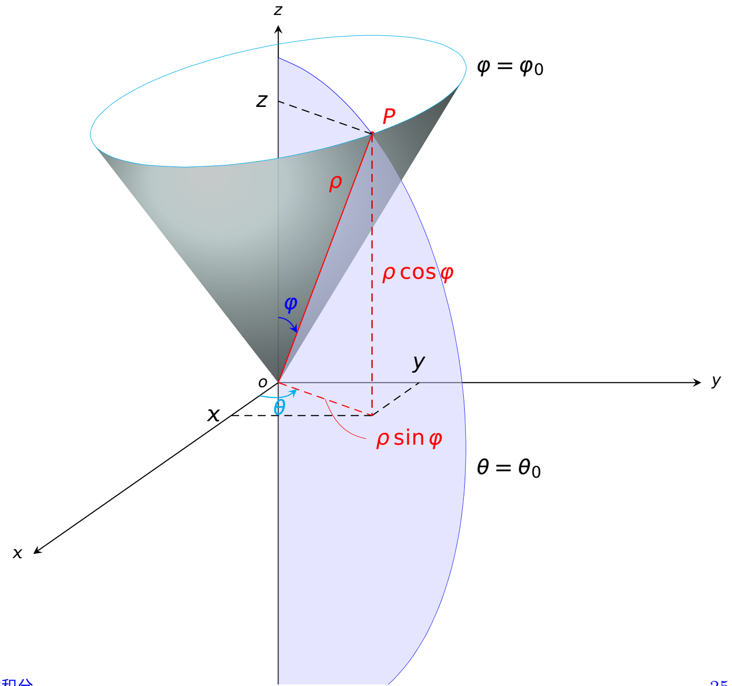
- 注

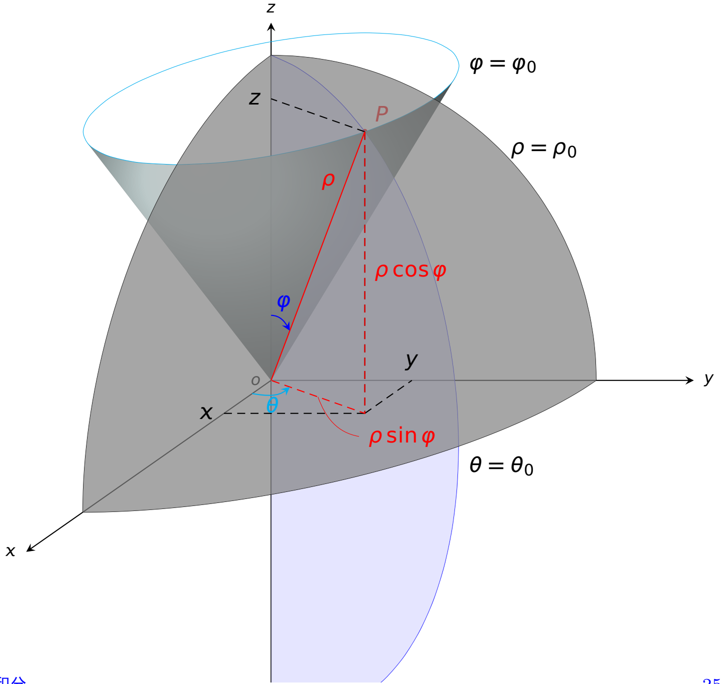
$$0 \le \rho < \infty,\ 0 \le \varphi \le \pi,\ 0 \le \theta \le 2\pi$$

- 注 三组坐标面
  - $\rho = \rho_0$：球面
  - $\varphi = \varphi_0$：以原点为顶点、z 轴为轴的圆锥面
  - $\theta = \theta_0$：过 z 轴的半平面


z
z
P
ρ
ρ cos φ
φ
y
o
y
x
θ
ρ sin φ
x


z
$\varphi = \varphi_0$
z
P
ρ
$\rho\cos\varphi$
φ
y
o
y
x
θ
$\rho\sin\varphi$
x


z
$\varphi = \varphi_0$
z
P
ρ
ρ cos φ
φ
y
o
y
x
θ
ρ sin φ
θ = θ_0
x


z
$\varphi = \varphi_0$
z
P
$\rho = \rho_0$
ρ
$\rho \cos \varphi$
φ
y
o
y
x
θ
$\rho \sin \varphi$
$\theta = \theta_0$
x

例 函数 $f(x, y, z) = e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ 在球面坐标系下的表示是什么？

例 球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ 在球面坐标下的表示是什么？

例 函数 $f(x, y, z) = e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ 在球面坐标系下的表示是什么？

解 因为 $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$，所以 $f = e^{\rho^3}$

例 球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ 在球面坐标下的表示是什么？

例 函数 $f(x, y, z) = e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ 在球面坐标系下的表示是什么？

解 因为 $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$，所以 $f = e^{\rho^3}$

例 球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ 在球面坐标下的表示是什么？

解 $\{0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$

球面坐标下计算三重积分

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv \xlongequal[\substack{y=\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=\rho\cos\varphi}]{x=\rho\sin\varphi\cos\theta}$$

球面坐标下计算三重积分

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv \xlongequal[\substack{y=\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=\rho\cos\varphi}]{x=\rho\sin\varphi\cos\theta}$$

$$\iiint_\Omega f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\varphi)$$

球面坐标下计算三重积分

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)dv \xlongequal[\substack{y=\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=\rho\cos\varphi}]{x=\rho\sin\varphi\cos\theta}$$

$$\iiint_{\Omega} f(\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi)\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

球面坐标下计算三重积分

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)dv \xlongequal[\substack{y=\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=\rho\cos\varphi}]{x=\rho\sin\varphi\cos\theta}$$

$$\iiint_\Omega f(\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi)\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$F(\rho, \varphi, \theta)$$

球面坐标下计算三重积分

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv \xlongequal[\substack{y=\rho\sin\varphi\sin\theta\\ z=\rho\cos\varphi}]{x=\rho\sin\varphi\cos\theta}$$

$$\iiint_\Omega f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\varphi)\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$=\int\left\{\int\left[\int F(\rho,\varphi,\theta)\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho\right]d\varphi\right\}d\theta$$

球面坐标下计算三重积分

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)dv \xlongequal[\substack{y=\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=\rho\cos\varphi}]{x=\rho\sin\varphi\cos\theta}$$

$$\iiint_{\Omega} f(\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi)\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$=\int \left\{\int \left[\int F(\rho, \varphi, \theta)\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho\right]d\varphi\right\}d\theta$$

- 当 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\leq a^2$ 时,

球面坐标下计算三重积分

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv \xlongequal[\substack{y=\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=\rho\cos\varphi}]{x=\rho\sin\varphi\cos\theta}$$

$$\iiint_\Omega f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\varphi)\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$=\int \left\{\int \left[\int F(\rho,\varphi,\theta)\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho\right]d\varphi\right\}d\theta$$

- 当 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le a^2$ 时,

$$\Omega=\{0\le\rho\le a,\ 0\le\varphi\le\pi,\ 0\le\theta\le 2\pi\}$$

球面坐标下计算三重积分

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv \xlongequal[\substack{y=\rho\sin\varphi\sin\theta\\ z=\rho\cos\varphi}]{x=\rho\sin\varphi\cos\theta}$$

$$\iiint_\Omega f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\varphi)\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$=\int\left\{\int\left[\int F(\rho,\varphi,\theta)\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho\right]d\varphi\right\}d\theta$$

- 当 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le a^2$ 时，

$$\Omega=\{0\le\rho\le a,\ 0\le\varphi\le\pi,\ 0\le\theta\le 2\pi\}$$

并且

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv=\int\left\{\int\left[\int F(\rho,\varphi,\theta)\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho\right]d\varphi\right\}d\theta$$

球面坐标下计算三重积分

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv \xlongequal[\substack{y=\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=\rho\cos\varphi}]{x=\rho\sin\varphi\cos\theta}$$

$$\iiint_\Omega f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\varphi)\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$=\int\left\{\int\left[\int F(\rho,\varphi,\theta)\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho\right]d\varphi\right\}d\theta$$

- 当 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le a^2$ 时，

$$\Omega=\{0\le\rho\le a,\ 0\le\varphi\le\pi,\ 0\le\theta\le 2\pi\}$$

并且

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv=\int_0^{2\pi}\left\{\int\left[\int F(\rho,\varphi,\theta)\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho\right]d\varphi\right\}d\theta$$

球面坐标下计算三重积分

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv \xlongequal[\substack{y=\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=\rho\cos\varphi}]{x=\rho\sin\varphi\cos\theta}$$

$$\iiint_\Omega f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\ \rho\sin\varphi\sin\theta,\ \rho\cos\varphi)\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$=\int\left\{\int\left[\int F(\rho,\ \varphi,\ \theta)\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho\right]d\varphi\right\}d\theta$$

- 当 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le a^2$ 时，

$$\Omega=\{0\le\rho\le a,\ 0\le\varphi\le\pi,\ 0\le\theta\le 2\pi\}$$

并且

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv=\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{\pi}\left[\int F(\rho,\ \varphi,\ \theta)\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho\right]d\varphi\right\}d\theta$$

球面坐标下计算三重积分

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv \xlongequal[\substack{y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi}]{x = \rho \sin\varphi \cos\theta}$$

$$\iiint_{\Omega} f(\rho \sin\varphi \cos\theta, \rho \sin\varphi \sin\theta, \rho \cos\varphi) \cdot \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$= \int \left\{ \int \left[\int F(\rho, \varphi, \theta) \cdot \rho^2 \sin\varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta$$

- 当 Ω 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ 时，

$$\Omega = \{0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

并且

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \left[\int_0^{a} F(\rho, \varphi, \theta) \cdot \rho^2 \sin\varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta$$

例 求 $\iiint_{\Omega} e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$。

例 求 $\iiint_\Omega e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\leq R^2$。

解 引入球面坐标

$$原式 = \iiint_\Omega e^{\rho^3}$$

例 求 $\iiint_\Omega e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2 \le R^2$。

解 引入球面坐标

$$\text{原式} = \iiint_\Omega e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

例 求 $\iiint_\Omega e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le R^2$。

解 引入球面坐标

$$\text{原式}=\iiint_\Omega e^{\rho^3}\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$=\int\left\{\int\left[\int e^{\rho^3}\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho\right]d\varphi\right\}d\theta$$

例 求 $\iiint_\Omega e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2 \le R^2$。

解 引入球面坐标

$$\text{原式} = \iiint_\Omega e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\{ \int \left[\int e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin\varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta$$

例 求 $\iiint_\Omega e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2 \le R^2$。

解 引入球面坐标

$$\text{原式} = \iiint_\Omega e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \left[\int \quad e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin\varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta$$

例 求 $\iiint_\Omega e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\leq R^2$。

解 引入球面坐标

$$\text{原式}=\iiint_\Omega e^{\rho^3}\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{\pi}\left[\int_0^R e^{\rho^3}\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho\right]d\varphi\right\}d\theta$$

例 求 $\iiint_\Omega e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le R^2$。

解 引入球面坐标

$$\text{原式}=\iiint_\Omega e^{\rho^3}\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{\pi}\left[\int_0^{R}e^{\rho^3}\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho\right]d\varphi\right\}d\theta$$

$$=2\pi\cdot$$

例 求 $\iiint_\Omega e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le R^2$。

解 引入球面坐标

$$\text{原式}=\iiint_\Omega e^{\rho^3}\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{\pi}\left[\int_0^R e^{\rho^3}\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho\right]d\varphi\right\}d\theta$$

$$=2\pi\cdot\left\{\int_0^{\pi}\left[\int_0^R e^{\rho^3}\cdot\rho^2 d\rho\right]\sin\varphi d\varphi\right\}$$

例 求 $\iiint_\Omega e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le R^2$。

解 引入球面坐标

$$\text{原式}=\iiint_\Omega e^{\rho^3}\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{\pi}\left[\int_0^R e^{\rho^3}\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho\right]d\varphi\right\}d\theta$$

$$=2\pi\cdot\left\{\int_0^{\pi}\left[\int_0^R e^{\rho^3}\cdot\rho^2 d\rho\right]\sin\varphi d\varphi\right\}$$

$$=2\pi\cdot\left[\int_0^R e^{\rho^3}\cdot\rho^2 d\rho\right]\cdot\left[\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\right]$$

例 求 $\iiint_\Omega e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le R^2$。

解 引入球面坐标

$$\text{原式}=\iiint_\Omega e^{\rho^3}\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{\pi}\left[\int_0^R e^{\rho^3}\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho\right]d\varphi\right\}d\theta$$

$$=2\pi\cdot\left\{\int_0^{\pi}\left[\int_0^R e^{\rho^3}\cdot\rho^2 d\rho\right]\sin\varphi d\varphi\right\}$$

$$=2\pi\cdot\left[\int_0^R e^{\rho^3}\cdot\rho^2 d\rho\right]\cdot\left[\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\right]$$

$$\left(\frac{1}{3}e^{\rho^3}\right)$$

例 求 $\iiint_\Omega e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\leq R^2$。

解 引入球面坐标

$$\text{原式}=\iiint_\Omega e^{\rho^3}\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{\pi}\left[\int_0^R e^{\rho^3}\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho\right]d\varphi\right\}d\theta$$

$$=2\pi\cdot\left\{\int_0^{\pi}\left[\int_0^R e^{\rho^3}\cdot\rho^2 d\rho\right]\sin\varphi d\varphi\right\}$$

$$=2\pi\cdot\left[\int_0^R e^{\rho^3}\cdot\rho^2 d\rho\right]\cdot\left[\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\right]$$

$$\left(\frac{1}{3}e^{\rho^3}\right)\Bigg|_0^R$$

例 求 $\iiint_\Omega e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le R^2$。

解 引入球面坐标

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \iiint_\Omega e^{\rho^3}\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{\pi}\left[\int_0^R e^{\rho^3}\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho\right]d\varphi\right\}d\theta \\
&= 2\pi\cdot\left\{\int_0^{\pi}\left[\int_0^R e^{\rho^3}\cdot\rho^2 d\rho\right]\sin\varphi d\varphi\right\} \\
&= 2\pi\cdot\left[\int_0^R e^{\rho^3}\cdot\rho^2 d\rho\right]\cdot\left[\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\right] \\
&= 2\pi\cdot\left(\frac{1}{3}e^{\rho^3}\right)\Big|_0^R\cdot 2
\end{aligned}
$$

例 求 $\iiint_\Omega e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\leq R^2$。

解 引入球面坐标

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \iiint_\Omega e^{\rho^3}\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{\pi}\left[\int_0^R e^{\rho^3}\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho\right]d\varphi\right\}d\theta \\
&= 2\pi\cdot\left\{\int_0^{\pi}\left[\int_0^R e^{\rho^3}\cdot\rho^2 d\rho\right]\sin\varphi d\varphi\right\} \\
&= 2\pi\cdot\left[\int_0^R e^{\rho^3}\cdot\rho^2 d\rho\right]\cdot\left[\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\right] \\
&= 2\pi\cdot\left(\frac{1}{3}e^{\rho^3}\right)\Big|_0^R\cdot 2 = \frac{4}{3}\pi(e^{R^3}-1)
\end{aligned}
$$

例 计算球体 Ω： $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$ 的体积（利用球面坐标）。

例 计算球体 Ω： $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$ 的体积（利用球面坐标）。

解

$$\text{球体体积} = \iiint_{\Omega} 1 dxdydz$$

例 计算球体 Ω： $x^2+y^2+z^2\le R^2$ 的体积（利用球面坐标）。

解

$$\text{球体体积} = \iiint_\Omega 1dxdydz = \iiint_\Omega 1\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

例 计算球体 Ω： $x^2+y^2+z^2 \le R^2$ 的体积（利用球面坐标）。

解

$$\text{球体体积} = \iiint_{\Omega} 1 dxdydz = \iiint_{\Omega} 1 \cdot \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$= \int \left\{ \int \left[\int \rho^2 \sin\varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta$$

例 计算球体 Ω： $x^2+y^2+z^2 \le R^2$ 的体积（利用球面坐标）。

解

$$\text{球体体积} = \iiint_\Omega 1 dxdydz = \iiint_\Omega 1 \cdot \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\{ \int \left[\int \rho^2 \sin\varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta$$

例 计算球体 Ω： $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$ 的体积（利用球面坐标）。

解

$$\text{球体体积} = \iiint_{\Omega} 1 dxdydz = \iiint_{\Omega} 1 \cdot \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \left[\int \quad \rho^2 \sin\varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta$$

例 计算球体 Ω： $x^2+y^2+z^2 \le R^2$ 的体积（利用球面坐标）。

解

$$\text{球体体积} = \iiint_{\Omega} 1 dxdydz = \iiint_{\Omega} 1 \cdot \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \left[\int_0^{R} \rho^2 \sin\varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta$$

例 计算球体 Ω： $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$ 的体积（利用球面坐标）。

解

$$\text{球体体积} = \iiint_\Omega 1dxdydz = \iiint_\Omega 1 \cdot \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \left[\int_0^{R} \rho^2 \sin\varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta$$

$$= 2\pi \cdot$$

例 计算球体 Ω： $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$ 的体积（利用球面坐标）。

解

$$\text{球体体积} = \iiint_\Omega 1dxdydz = \iiint_\Omega 1\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{\pi}\left[\int_0^R \rho^2\sin\varphi d\rho\right]d\varphi\right\}d\theta$$

$$= 2\pi\cdot\left\{\int_0^{\pi}\left[\int_0^R \rho^2 d\rho\right]\sin\varphi d\varphi\right\}$$

例 计算球体 Ω： $x^2+y^2+z^2\le R^2$ 的体积（利用球面坐标）。

解

$$\text{球体体积}=\iiint_{\Omega}1dxdydz=\iiint_{\Omega}1\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{\pi}\left[\int_0^{R}\rho^2\sin\varphi d\rho\right]d\varphi\right\}d\theta$$

$$=2\pi\cdot\left\{\int_0^{\pi}\left[\int_0^{R}\rho^2 d\rho\right]\sin\varphi d\varphi\right\}$$

$$=2\pi\cdot\left[\int_0^{R}\rho^2 d\rho\right]\cdot\left[\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\right]$$

例 计算球体 Ω： $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$ 的体积（利用球面坐标）。

解

$$\text{球体体积} = \iiint_\Omega 1dxdydz = \iiint_\Omega 1 \cdot \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \left[\int_0^R \rho^2 \sin\varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta$$

$$= 2\pi \cdot \left\{ \int_0^{\pi} \left[\int_0^R \rho^2 d\rho \right] \sin\varphi d\varphi \right\}$$

$$= 2\pi \cdot \left[\int_0^R \rho^2 d\rho \right] \cdot \left[\int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \right]$$

$$\left(\frac{1}{3}\rho^3 \right)$$

例 计算球体 Ω： $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$ 的体积（利用球面坐标）。

解

$$\text{球体体积} = \iiint_{\Omega} 1 dxdydz = \iiint_{\Omega} 1 \cdot \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \left[\int_0^{R} \rho^2 \sin\varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta$$

$$= 2\pi \cdot \left\{ \int_0^{\pi} \left[\int_0^{R} \rho^2 d\rho \right] \sin\varphi d\varphi \right\}$$

$$= 2\pi \cdot \left[\int_0^{R} \rho^2 d\rho \right] \cdot \left[\int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \right]$$

$$\left(\frac{1}{3} \rho^3 \right) \Big|_0^R$$

例 计算球体 Ω： $x^2+y^2+z^2\le R^2$ 的体积（利用球面坐标）。

解

$$球体体积=\iiint_{\Omega}1dxdydz=\iiint_{\Omega}1\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{\pi}\left[\int_0^{R}\rho^2\sin\varphi d\rho\right]d\varphi\right\}d\theta$$

$$=2\pi\cdot\left\{\int_0^{\pi}\left[\int_0^{R}\rho^2 d\rho\right]\sin\varphi d\varphi\right\}$$

$$=2\pi\cdot\left[\int_0^{R}\rho^2 d\rho\right]\cdot\left[\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\right]$$

$$=2\pi\cdot\left(\frac{1}{3}\rho^3\right)\Bigg|_0^R\cdot 2$$

例 计算球体 Ω： $x^2+y^2+z^2 \le R^2$ 的体积（利用球面坐标）。

解

$$\text{球体体积} = \iiint_\Omega 1dxdydz = \iiint_\Omega 1\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{\pi}\left[\int_0^R \rho^2\sin\varphi d\rho\right]d\varphi\right\}d\theta$$

$$= 2\pi\cdot\left\{\int_0^{\pi}\left[\int_0^R \rho^2 d\rho\right]\sin\varphi d\varphi\right\}$$

$$= 2\pi\cdot\left[\int_0^R \rho^2 d\rho\right]\cdot\left[\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\right]$$

$$= 2\pi\cdot\left(\frac{1}{3}\rho^3\right)\Big|_0^R\cdot 2 = \frac{4}{3}\pi R^3$$