

§6.3 定积分的性质

2014-2015 学年 II

教学要求



Outline of §6.3

定积分的线性性质

$$(1) \int_a^b [k \cdot f(x)] dx = k \int_a^b f(x) dx, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$(2) \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

定积分的线性性质

$$(1) \int_a^b [k \cdot f(x)] dx = k \int_a^b f(x) dx, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$(2) \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

(对多个函数也成立)

定积分的线性性质

$$(1) \int_a^b [k \cdot f(x)] dx = k \int_a^b f(x) dx, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$(2) \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

(对多个函数也成立)

证明:

$$\int_a^b [k \cdot f(x)] dx$$

定积分的线性性质

$$(1) \int_a^b [k \cdot f(x)] dx = k \int_a^b f(x) dx, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$(2) \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

(对多个函数也成立)

证明:

$$\int_a^b [k \cdot f(x)] dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [kf(\xi_i)] \cdot \Delta x_i =$$

定积分的线性性质

$$(1) \int_a^b [k \cdot f(x)] dx = k \int_a^b f(x) dx, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$(2) \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

(对多个函数也成立)

证明:

$$\int_a^b [k \cdot f(x)] dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [kf(\xi_i)] \cdot \Delta x_i = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

定积分的线性性质

$$(1) \int_a^b [k \cdot f(x)] dx = k \int_a^b f(x) dx, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$(2) \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

(对多个函数也成立)

证明:

$$\begin{aligned} \int_a^b [k \cdot f(x)] dx &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [kf(\xi_i)] \cdot \Delta x_i = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \\ &= k \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \end{aligned}$$

定积分的线性性质

$$(1) \int_a^b [k \cdot f(x)] dx = k \int_a^b f(x) dx, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$(2) \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

(对多个函数也成立)

证明:

$$\begin{aligned} \int_a^b [k \cdot f(x)] dx &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [kf(\xi_i)] \cdot \Delta x_i = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \\ &= k \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = k \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

定积分的线性性质

$$(1) \int_a^b [k \cdot f(x)] dx = k \int_a^b f(x) dx, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$(2) \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

(对多个函数也成立)

证明:

$$\int_a^b [k \cdot f(x)] dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [kf(\xi_i)] \cdot \Delta x_i = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

$$= k \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = k \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)] \cdot \Delta x_i = \dots\dots$$

定积分线性性质：例子

例

$$\int_0^1 \left(3x - 10 \sin x + \frac{1}{1+x^2} \right) dx$$

=

定积分线性性质：例子

例

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left(3x - 10 \sin x + \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\ &= \int_0^1 3x dx - \int_0^1 10 \sin x dx + \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \end{aligned}$$

例

$$\begin{aligned}& \int_0^1 \left(3x - 10 \sin x + \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\&= \int_0^1 3x dx - \int_0^1 10 \sin x dx + \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \\&= 3 \int_0^1 x dx - 10 \int_0^1 \sin x dx + \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx\end{aligned}$$

例

$$\begin{aligned}& \int_0^1 \left(3x - 10 \sin x + \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\&= \int_0^1 3x dx - \int_0^1 10 \sin x dx + \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \\&= 3 \int_0^1 x dx - 10 \int_0^1 \sin x dx + \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \dots\dots\end{aligned}$$

定积分对积分区间的可加性

假设 a, b, c 为任意常数（不管大小关系如何），总成立

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

定积分对积分区间的可加性

假设 a, b, c 为任意常数（不管大小关系如何），总成立

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

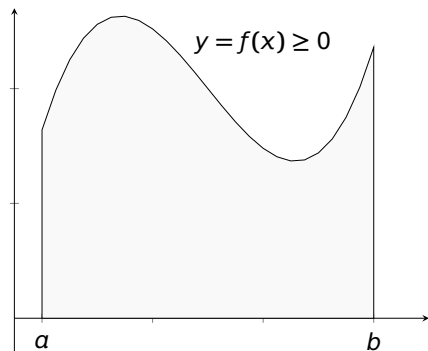
仅以 “ $f(x) \geq 0, a < c < b$ ” 情形验证：

定积分对积分区间的可加性

假设 a, b, c 为任意常数（不管大小关系如何），总成立

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

仅以 “ $f(x) \geq 0, a < c < b$ ” 情形验证：

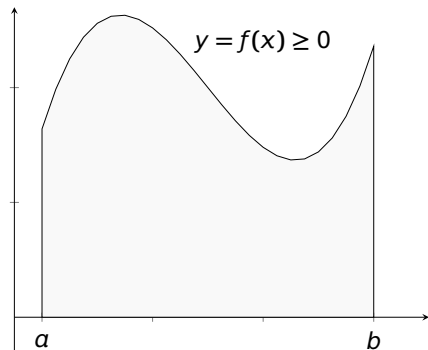


定积分对积分区间的可加性

假设 a, b, c 为任意常数（不管大小关系如何），总成立

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

仅以 “ $f(x) \geq 0, a < c < b$ ” 情形验证：



$$\int_a^b f(x)dx$$

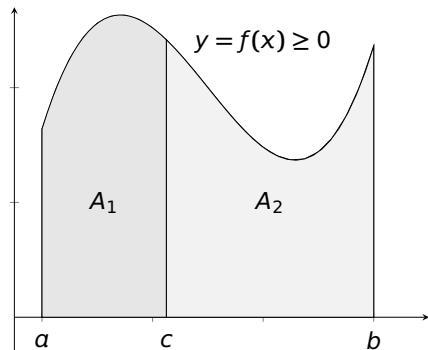
= 大曲边梯形面积

定积分对积分区间的可加性

假设 a, b, c 为任意常数（不管大小关系如何），总成立

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

仅以 “ $f(x) \geq 0, a < c < b$ ” 情形验证：



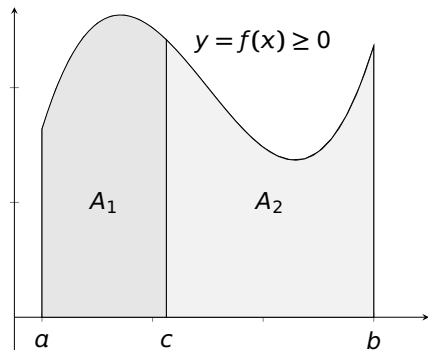
$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx \\ &= \text{大曲边梯形面积} \\ &= A_1 + A_2 \end{aligned}$$

定积分对积分区间的可加性

假设 a, b, c 为任意常数（不管大小关系如何），总成立

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

仅以 “ $f(x) \geq 0, a < c < b$ ” 情形验证：



$$\begin{aligned} & \int_a^b f(x)dx \\ &= \text{大曲边梯形面积} \\ &= A_1 + A_2 \\ &= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \end{aligned}$$

定积分对积分区间的可加性：例子

例：已知 $\int_{-12}^{-5} f(x) dx = -6$, $\int_{-5}^1 f(x) dx = 12$, 求 $\int_{-12}^1 3f(x) dx$

定积分对积分区间的可加性：例子

例：已知 $\int_{-12}^{-5} f(x)dx = -6$, $\int_{-5}^1 f(x)dx = 12$, 求 $\int_{-12}^1 3f(x)dx$

解

$$\int_{-12}^1 3f(x)dx =$$

定积分对积分区间的可加性：例子

例：已知 $\int_{-12}^{-5} f(x)dx = -6$, $\int_{-5}^1 f(x)dx = 12$, 求 $\int_{-12}^1 3f(x)dx$

解

$$\int_{-12}^1 3f(x)dx = 3 \int_{-12}^1 f(x)dx =$$

定积分对积分区间的可加性：例子

例：已知 $\int_{-12}^{-5} f(x)dx = -6$, $\int_{-5}^1 f(x)dx = 12$, 求 $\int_{-12}^1 3f(x)dx$

解

$$\int_{-12}^1 3f(x)dx = 3 \int_{-12}^1 f(x)dx = 3 \left(\int_{-12}^{-5} f(x)dx + \int_{-5}^1 f(x)dx \right)$$

定积分对积分区间的可加性：例子

例：已知 $\int_{-12}^{-5} f(x)dx = -6$, $\int_{-5}^1 f(x)dx = 12$, 求 $\int_{-12}^1 3f(x)dx$

解

$$\begin{aligned}\int_{-12}^1 3f(x)dx &= 3 \int_{-12}^1 f(x)dx = 3 \left(\int_{-12}^{-5} f(x)dx + \int_{-5}^1 f(x)dx \right) \\ &= 3 \cdot (-6 + 12)\end{aligned}$$

定积分对积分区间的可加性：例子

例：已知 $\int_{-12}^{-5} f(x)dx = -6$, $\int_{-5}^1 f(x)dx = 12$, 求 $\int_{-12}^1 3f(x)dx$

解

$$\begin{aligned}\int_{-12}^1 3f(x)dx &= 3 \int_{-12}^1 f(x)dx = 3 \left(\int_{-12}^{-5} f(x)dx + \int_{-5}^1 f(x)dx \right) \\ &= 3 \cdot (-6 + 12) = 18\end{aligned}$$

定积分对积分区间的可加性：例子

例：已知 $\int_{-12}^{-5} f(x)dx = -6$, $\int_{-5}^1 f(x)dx = 12$, 求 $\int_{-12}^1 3f(x)dx$

解

$$\begin{aligned}\int_{-12}^1 3f(x)dx &= 3 \int_{-12}^1 f(x)dx = 3 \left(\int_{-12}^{-5} f(x)dx + \int_{-5}^1 f(x)dx \right) \\ &= 3 \cdot (-6 + 12) = 18\end{aligned}$$

例：已知 $\int_{-12}^{-5} f(x)dx = -6$, $\int_2^{-5} f(x)dx = -13$, 求 $\int_{-12}^2 f(x)dx$

定积分对积分区间的可加性：例子

例：已知 $\int_{-12}^{-5} f(x)dx = -6$, $\int_{-5}^1 f(x)dx = 12$, 求 $\int_{-12}^1 3f(x)dx$

解

$$\begin{aligned}\int_{-12}^1 3f(x)dx &= 3 \int_{-12}^1 f(x)dx = 3 \left(\int_{-12}^{-5} f(x)dx + \int_{-5}^1 f(x)dx \right) \\ &= 3 \cdot (-6 + 12) = 18\end{aligned}$$

例：已知 $\int_{-12}^{-5} f(x)dx = -6$, $\int_2^{-5} f(x)dx = -13$, 求 $\int_{-12}^2 f(x)dx$

解

$$\int_{-12}^2 f(x)dx =$$

定积分对积分区间的可加性：例子

例：已知 $\int_{-12}^{-5} f(x)dx = -6$, $\int_{-5}^1 f(x)dx = 12$, 求 $\int_{-12}^1 3f(x)dx$

解

$$\begin{aligned}\int_{-12}^1 3f(x)dx &= 3 \int_{-12}^1 f(x)dx = 3 \left(\int_{-12}^{-5} f(x)dx + \int_{-5}^1 f(x)dx \right) \\ &= 3 \cdot (-6 + 12) = 18\end{aligned}$$

例：已知 $\int_{-12}^{-5} f(x)dx = -6$, $\int_2^{-5} f(x)dx = -13$, 求 $\int_{-12}^2 f(x)dx$

解

$$\int_{-12}^2 f(x)dx = \int_{-12}^{-5} f(x)dx + \int_2^{-5} f(x)dx$$

定积分对积分区间的可加性：例子

例：已知 $\int_{-12}^{-5} f(x)dx = -6$, $\int_{-5}^1 f(x)dx = 12$, 求 $\int_{-12}^1 3f(x)dx$

解

$$\begin{aligned}\int_{-12}^1 3f(x)dx &= 3 \int_{-12}^1 f(x)dx = 3 \left(\int_{-12}^{-5} f(x)dx + \int_{-5}^1 f(x)dx \right) \\ &= 3 \cdot (-6 + 12) = 18\end{aligned}$$

例：已知 $\int_{-12}^{-5} f(x)dx = -6$, $\int_2^{-5} f(x)dx = -13$, 求 $\int_{-12}^2 f(x)dx$

解

$$\begin{aligned}\int_{-12}^2 f(x)dx &= \int_{-12}^{-5} f(x)dx + \int_{-5}^2 f(x)dx \\ &= \int_{-12}^{-5} f(x)dx - \int_2^{-5} f(x)dx =\end{aligned}$$

定积分对积分区间的可加性：例子

例：已知 $\int_{-12}^{-5} f(x)dx = -6$, $\int_{-5}^1 f(x)dx = 12$, 求 $\int_{-12}^1 3f(x)dx$

解

$$\begin{aligned}\int_{-12}^1 3f(x)dx &= 3 \int_{-12}^1 f(x)dx = 3 \left(\int_{-12}^{-5} f(x)dx + \int_{-5}^1 f(x)dx \right) \\ &= 3 \cdot (-6 + 12) = 18\end{aligned}$$

例：已知 $\int_{-12}^{-5} f(x)dx = -6$, $\int_2^{-5} f(x)dx = -13$, 求 $\int_{-12}^2 f(x)dx$

解

$$\begin{aligned}\int_{-12}^2 f(x)dx &= \int_{-12}^{-5} f(x)dx + \int_{-5}^2 f(x)dx \\ &= \int_{-12}^{-5} f(x)dx - \int_2^{-5} f(x)dx = -6 - (-13)\end{aligned}$$

定积分对积分区间的可加性：例子

例：已知 $\int_{-12}^{-5} f(x)dx = -6$, $\int_{-5}^1 f(x)dx = 12$, 求 $\int_{-12}^1 3f(x)dx$

解

$$\begin{aligned}\int_{-12}^1 3f(x)dx &= 3 \int_{-12}^1 f(x)dx = 3 \left(\int_{-12}^{-5} f(x)dx + \int_{-5}^1 f(x)dx \right) \\ &= 3 \cdot (-6 + 12) = 18\end{aligned}$$

例：已知 $\int_{-12}^{-5} f(x)dx = -6$, $\int_2^{-5} f(x)dx = -13$, 求 $\int_{-12}^2 f(x)dx$

解

$$\begin{aligned}\int_{-12}^2 f(x)dx &= \int_{-12}^{-5} f(x)dx + \int_{-5}^2 f(x)dx \\ &= \int_{-12}^{-5} f(x)dx - \int_2^{-5} f(x)dx = -6 - (-13) = 7\end{aligned}$$

积分的保号性质 如果在区间 $[a, b]$ 上成立 $f(x) \leq g(x)$, 则

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \quad (a \leq b)$$

积分的保号性质 如果在区间 $[a, b]$ 上成立 $f(x) \leq g(x)$, 则

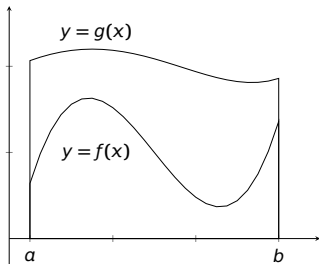
$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \quad (a \leq b)$$

以 “ $0 \leq f(x) \leq g(x)$ ” 情形为例说明:

积分的保号性质 如果在区间 $[a, b]$ 上成立 $f(x) \leq g(x)$, 则

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \quad (a \leq b)$$

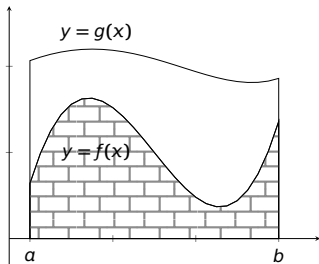
以 “ $0 \leq f(x) \leq g(x)$ ” 情形为例说明:



积分的保号性质 如果在区间 $[a, b]$ 上成立 $f(x) \leq g(x)$, 则

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \quad (a \leq b)$$

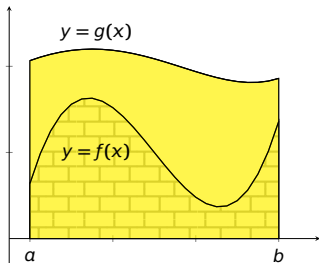
以 “ $0 \leq f(x) \leq g(x)$ ” 情形为例说明:



积分的保号性质 如果在区间 $[a, b]$ 上成立 $f(x) \leq g(x)$, 则

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \quad (a \leq b)$$

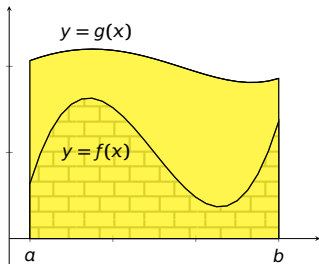
以 “ $0 \leq f(x) \leq g(x)$ ” 情形为例说明:



积分的保号性质 如果在区间 $[a, b]$ 上成立 $f(x) \leq g(x)$, 则

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \quad (a \leq b)$$

以 “ $0 \leq f(x) \leq g(x)$ ” 情形为例说明:

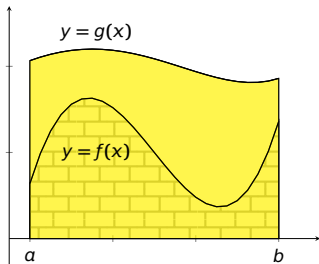


$$\int_a^b g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx$$

积分的保号性质 如果在区间 $[a, b]$ 上成立 $f(x) \leq g(x)$, 则

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \quad (a \leq b)$$

以 “ $0 \leq f(x) \leq g(x)$ ” 情形为例说明:



$$\int_a^b g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx$$

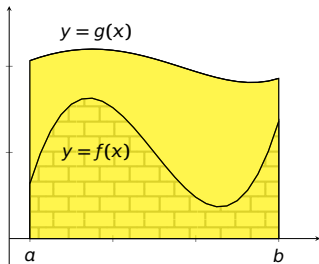
$$\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx$$

正好是 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 围成图形面积

积分的保号性质 如果在区间 $[a, b]$ 上成立 $f(x) \leq g(x)$, 则

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \quad (a \leq b)$$

以 “ $0 \leq f(x) \leq g(x)$ ” 情形为例说明:



$$\int_a^b g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x) - f(x)dx$$

正好是 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 围成图形面积

积分的保号性质：例子

例 比较以下积分的大小

$$\int_0^1 x dx \text{ 与 } \int_0^1 x^2 dx; \int_1^2 x dx \text{ 与 } \int_1^2 x^2 dx$$

积分的保号性质：例子

例 比较以下积分的大小

$$\int_0^1 x dx \text{ 与 } \int_0^1 x^2 dx; \int_1^2 x dx \text{ 与 } \int_1^2 x^2 dx$$

解：

$$\int_0^1 x dx \quad \int_0^1 x^2 dx$$

$$\int_1^2 x dx \quad \int_1^2 x^2 dx$$

积分的保号性质：例子

例 比较以下积分的大小

$$\int_0^1 x dx \text{ 与 } \int_0^1 x^2 dx; \int_1^2 x dx \text{ 与 } \int_1^2 x^2 dx$$

解：

$$\int_0^1 x dx > \int_0^1 x^2 dx$$

$$\int_1^2 x dx < \int_1^2 x^2 dx$$

积分的保号性质：例子

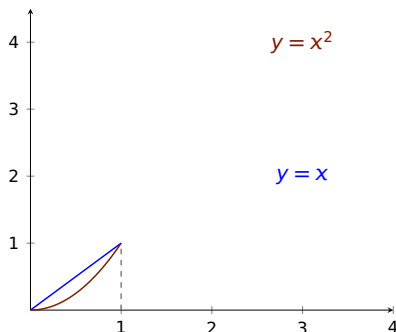
例 比较以下积分的大小

$$\int_0^1 x dx \text{ 与 } \int_0^1 x^2 dx; \int_1^2 x dx \text{ 与 } \int_1^2 x^2 dx$$

解：

$$\int_0^1 x dx > \int_0^1 x^2 dx$$

$$\int_1^2 x dx < \int_1^2 x^2 dx$$



积分的保号性质：例子

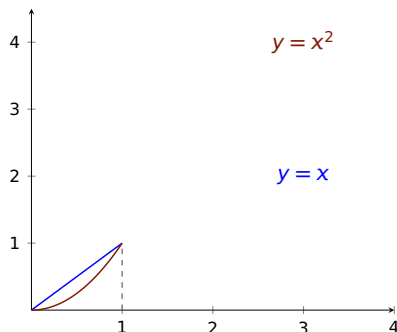
例 比较以下积分的大小

$$\int_0^1 x dx \text{ 与 } \int_0^1 x^2 dx; \int_1^2 x dx \text{ 与 } \int_1^2 x^2 dx$$

解：

$$\int_0^1 x dx > \int_0^1 x^2 dx$$

$$\int_1^2 x dx < \int_1^2 x^2 dx$$



积分的保号性质：例子

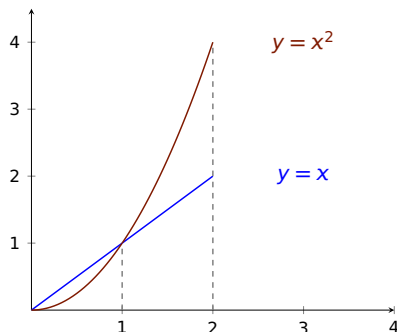
例 比较以下积分的大小

$$\int_0^1 x dx \text{ 与 } \int_0^1 x^2 dx; \int_1^2 x dx \text{ 与 } \int_1^2 x^2 dx$$

解：

$$\int_0^1 x dx > \int_0^1 x^2 dx$$

$$\int_1^2 x dx < \int_1^2 x^2 dx$$



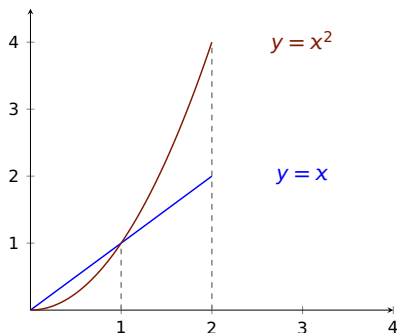
积分的保号性质：例子

例 比较以下积分的大小

$$\int_0^1 x dx \text{ 与 } \int_0^1 x^2 dx; \int_1^2 x dx \text{ 与 } \int_1^2 x^2 dx$$

解：当 $0 \leq x \leq 1$ 时 $x \geq x^2$ ，且不恒相等，所以 $\int_0^1 x dx > \int_0^1 x^2 dx$

$$\int_1^2 x dx < \int_1^2 x^2 dx$$



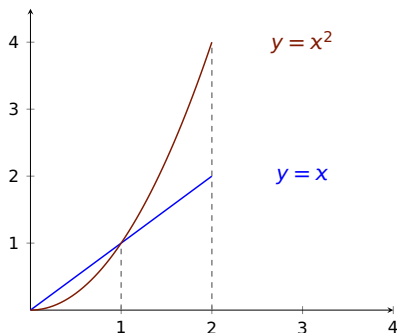
积分的保号性质：例子

例 比较以下积分的大小

$$\int_0^1 x dx \text{ 与 } \int_0^1 x^2 dx; \int_1^2 x dx \text{ 与 } \int_1^2 x^2 dx$$

解： 当 $0 \leq x \leq 1$ 时 $x \geq x^2$ ，且不恒相等，所以 $\int_0^1 x dx > \int_0^1 x^2 dx$

当 $1 \leq x \leq 2$ 时 $x \leq x^2$ ，且不恒相等，所以 $\int_1^2 x dx < \int_1^2 x^2 dx$



积分的保号性质：例子 II

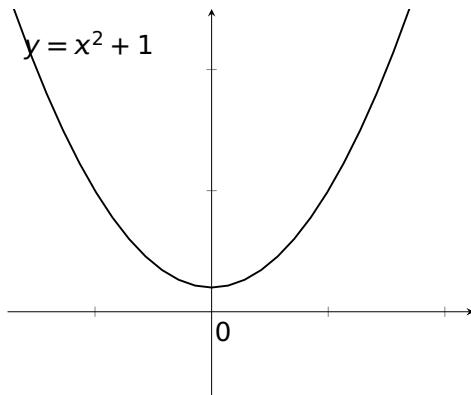
例 画出曲线 $y = x^2 + 1$ 与直线 $y = 2x + 4$ ，并比较大小：

$$\int_{-1}^3 x^2 + 1 dx \qquad \int_{-1}^3 2x + 4 dx.$$

积分的保号性质：例子 II

例 画出曲线 $y = x^2 + 1$ 与直线 $y = 2x + 4$ ，并比较大小：

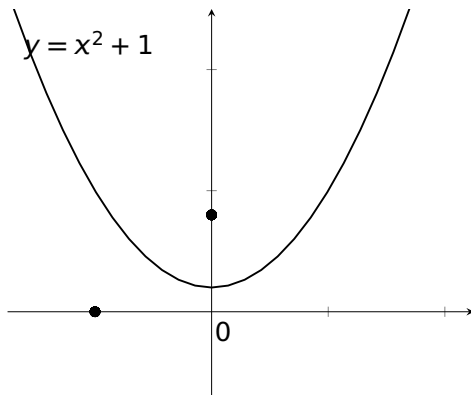
$$\int_{-1}^3 x^2 + 1 dx \qquad \int_{-1}^3 2x + 4 dx.$$



积分的保号性质：例子 II

例 画出曲线 $y = x^2 + 1$ 与直线 $y = 2x + 4$ ，并比较大小：

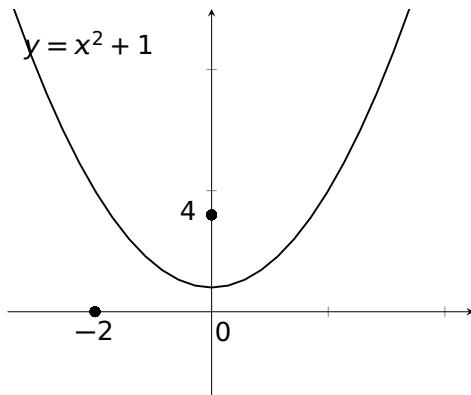
$$\int_{-1}^3 x^2 + 1 dx \qquad \int_{-1}^3 2x + 4 dx.$$



积分的保号性质：例子 II

例 画出曲线 $y = x^2 + 1$ 与直线 $y = 2x + 4$ ，并比较大小：

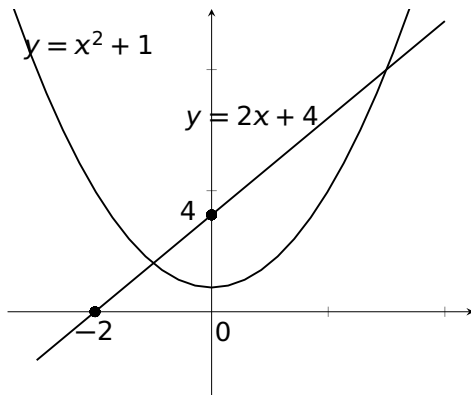
$$\int_{-1}^3 x^2 + 1 dx \qquad \int_{-1}^3 2x + 4 dx.$$



积分的保号性质：例子 II

例 画出曲线 $y = x^2 + 1$ 与直线 $y = 2x + 4$ ，并比较大小：

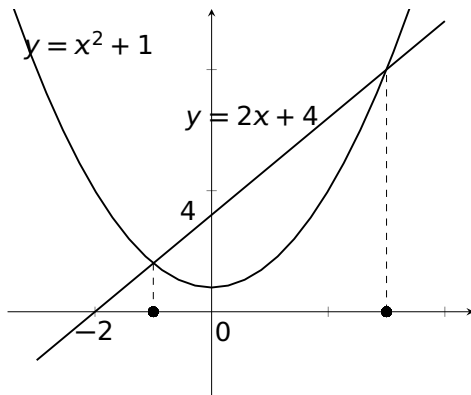
$$\int_{-1}^3 x^2 + 1 dx \qquad \int_{-1}^3 2x + 4 dx.$$



积分的保号性质：例子 II

例 画出曲线 $y = x^2 + 1$ 与直线 $y = 2x + 4$ ，并比较大小：

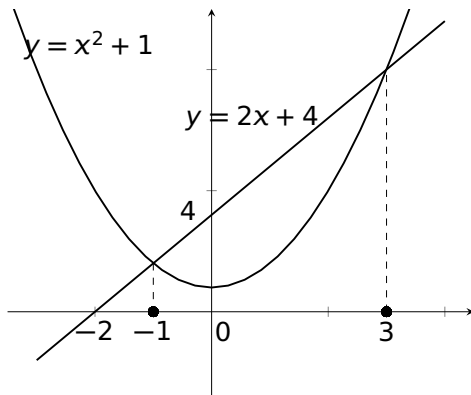
$$\int_{-1}^3 x^2 + 1 dx \qquad \int_{-1}^3 2x + 4 dx.$$



积分的保号性质：例子 II

例 画出曲线 $y = x^2 + 1$ 与直线 $y = 2x + 4$ ，并比较大小：

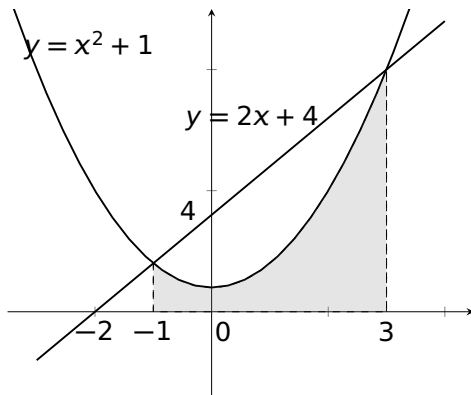
$$\int_{-1}^3 x^2 + 1 dx \qquad \int_{-1}^3 2x + 4 dx.$$



积分的保号性质：例子 II

例 画出曲线 $y = x^2 + 1$ 与直线 $y = 2x + 4$ ，并比较大小：

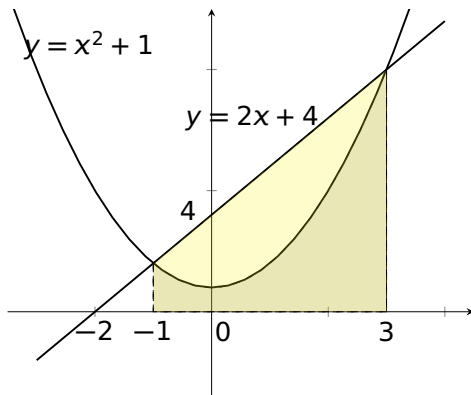
$$\int_{-1}^3 x^2 + 1 dx \qquad \int_{-1}^3 2x + 4 dx.$$



积分的保号性质：例子 II

例 画出曲线 $y = x^2 + 1$ 与直线 $y = 2x + 4$ ，并比较大小：

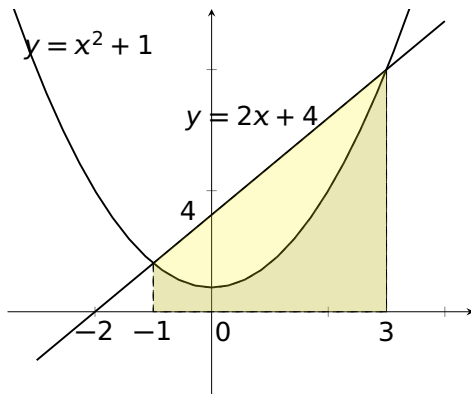
$$\int_{-1}^3 x^2 + 1 dx \qquad \int_{-1}^3 2x + 4 dx.$$



积分的保号性质：例子 II

例 画出曲线 $y = x^2 + 1$ 与直线 $y = 2x + 4$ ，并比较大小：

$$\int_{-1}^3 x^2 + 1 dx < \int_{-1}^3 2x + 4 dx.$$



积分的保号性质：例子 III

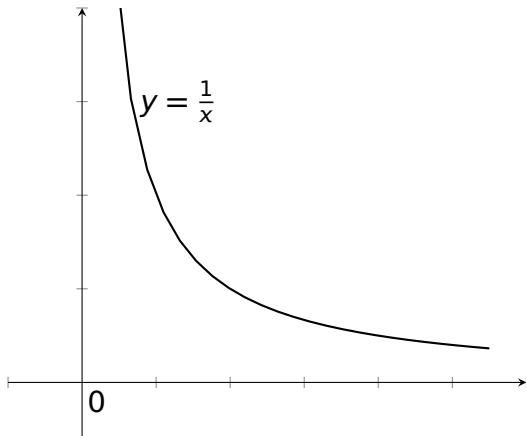
例 画出曲线 $y = \frac{1}{x}$ 与直线 $y = \frac{1}{4}x$ ，并比较大小：

$$\int_2^4 \frac{1}{x} dx \quad \int_2^4 \frac{1}{4} x dx.$$

积分的保号性质：例子 III

例 画出曲线 $y = \frac{1}{x}$ 与直线 $y = \frac{1}{4}x$ ，并比较大小：

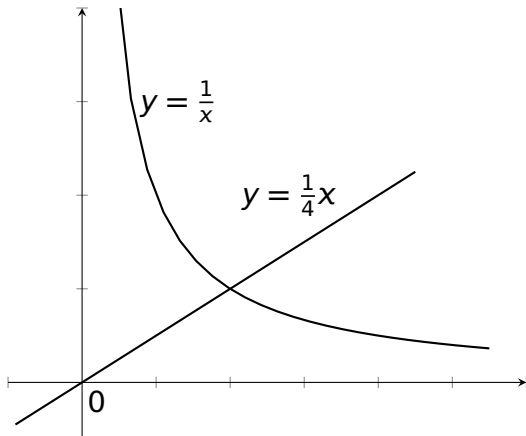
$$\int_2^4 \frac{1}{x} dx \quad \int_2^4 \frac{1}{4} x dx.$$



积分的保号性质：例子 III

例 画出曲线 $y = \frac{1}{x}$ 与直线 $y = \frac{1}{4}x$ ，并比较大小：

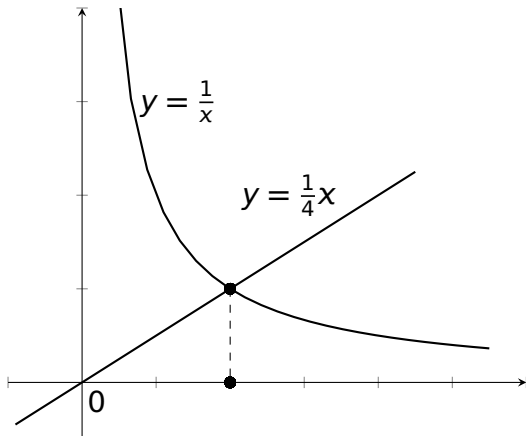
$$\int_2^4 \frac{1}{x} dx \quad \int_2^4 \frac{1}{4} x dx.$$



积分的保号性质：例子 III

例 画出曲线 $y = \frac{1}{x}$ 与直线 $y = \frac{1}{4}x$ ，并比较大小：

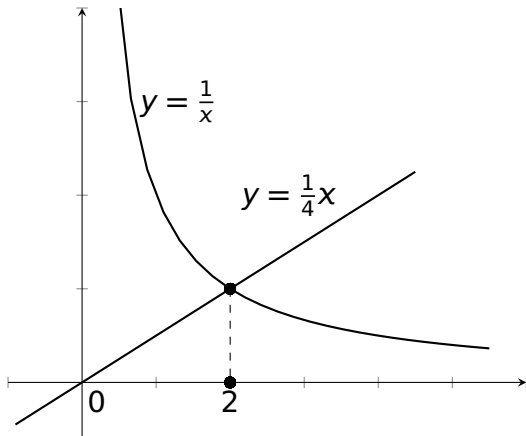
$$\int_2^4 \frac{1}{x} dx \quad \int_2^4 \frac{1}{4} x dx.$$



积分的保号性质：例子 III

例 画出曲线 $y = \frac{1}{x}$ 与直线 $y = \frac{1}{4}x$ ，并比较大小：

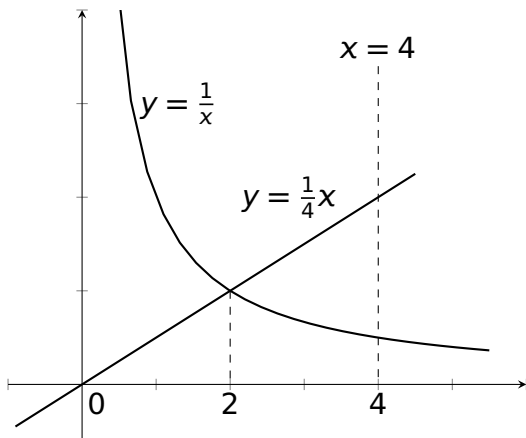
$$\int_2^4 \frac{1}{x} dx \quad \int_2^4 \frac{1}{4} x dx.$$



积分的保号性质：例子 III

例 画出曲线 $y = \frac{1}{x}$ 与直线 $y = \frac{1}{4}x$ ，并比较大小：

$$\int_2^4 \frac{1}{x} dx \quad \int_2^4 \frac{1}{4} x dx.$$

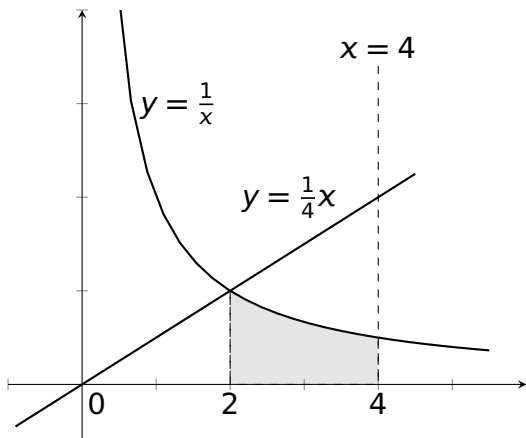


积分的保号性质：例子 III

例 画出曲线 $y = \frac{1}{x}$ 与直线 $y = \frac{1}{4}x$ ，并比较大小：

$$\int_2^4 \frac{1}{x} dx$$

$$\int_2^4 \frac{1}{4} x dx.$$

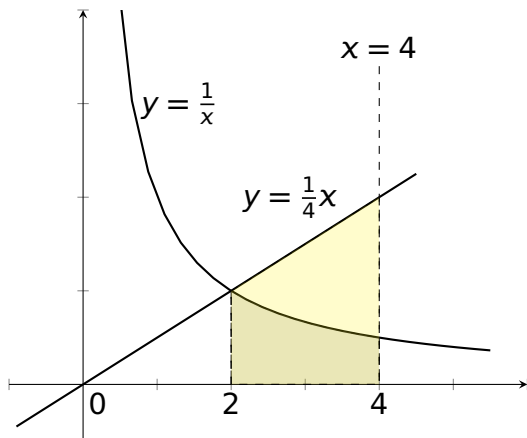


积分的保号性质：例子 III

例 画出曲线 $y = \frac{1}{x}$ 与直线 $y = \frac{1}{4}x$ ，并比较大小：

$$\int_2^4 \frac{1}{x} dx$$

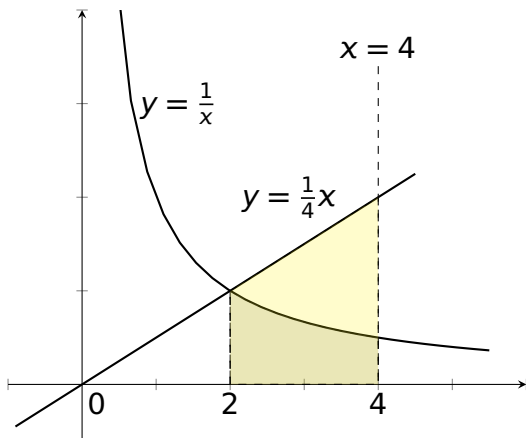
$$\int_2^4 \frac{1}{4} x dx.$$



积分的保号性质：例子 III

例 画出曲线 $y = \frac{1}{x}$ 与直线 $y = \frac{1}{4}x$ ，并比较大小：

$$\int_2^4 \frac{1}{x} dx < \int_2^4 \frac{1}{4} x dx.$$



例 比较以下积分的大小

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 e^x \sin x dx \text{ 与 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$$

积分的保号性质：例子 IV

例 比较以下积分的大小

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 e^x \sin x dx \text{ 与 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$$

解：

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 e^x \sin x dx < \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 0 dx$$

积分的保号性质：例子 IV

例 比较以下积分的大小

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 e^x \sin x dx \text{ 与 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$$

解：

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 e^x \sin x dx < \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 0 dx \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$$

例 比较以下积分的大小

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 e^x \sin x dx \text{ 与 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$$

解：

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 e^x \sin x dx < \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 0 dx = 0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$$

定积分估值定理

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上最大值为 M , 最小值为 m , 则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

定积分估值定理

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上最大值为 M , 最小值为 m , 则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

证明

一方面 $\int_a^b f(x)dx \leq$

另一方面 $\int_a^b f(x)dx \geq$

定积分估值定理

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上最大值为 M , 最小值为 m , 则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

证明

一方面 $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx =$

另一方面 $\int_a^b f(x)dx \geq$

定积分估值定理

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上最大值为 M , 最小值为 m , 则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

证明

一方面 $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx = M \int_a^b 1dx =$

另一方面 $\int_a^b f(x)dx \geq$

定积分估值定理

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上最大值为 M , 最小值为 m , 则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

证明

一方面
$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx = M \int_a^b 1dx = M(b-a)$$

另一方面
$$\int_a^b f(x)dx \geq$$

定积分估值定理

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上最大值为 M , 最小值为 m , 则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

证明

一方面
$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx = M \int_a^b 1dx = M(b-a)$$

另一方面
$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b mdx =$$

定积分估值定理

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上最大值为 M , 最小值为 m , 则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

证明

一方面 $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx = M \int_a^b 1dx = M(b-a)$

另一方面 $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b mdx = m \int_a^b 1dx =$

定积分估值定理

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上最大值为 M , 最小值为 m , 则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

证明

一方面 $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx = M \int_a^b 1dx = M(b-a)$

另一方面 $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b mdx = m \int_a^b 1dx = m(b-a)$

定积分估值定理

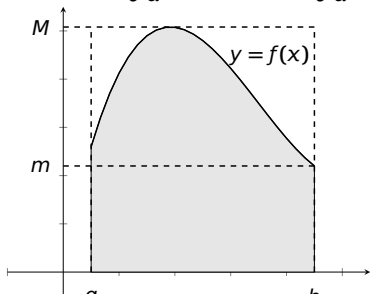
设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上最大值为 M , 最小值为 m , 则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

证明

一方面 $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx = M \int_a^b 1dx = M(b-a)$

另一方面 $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b mdx = m \int_a^b 1dx = m(b-a)$



定积分的中值定理

假设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

定积分的中值定理

假设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

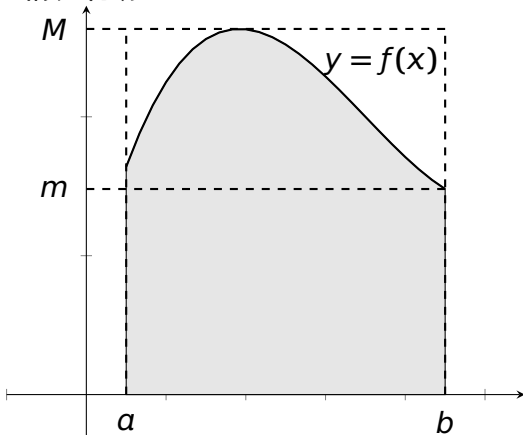
以 “ $f(x) \geq 0$ ” 情况说明:

定积分的中值定理

假设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

以 “ $f(x) \geq 0$ ” 情况说明:

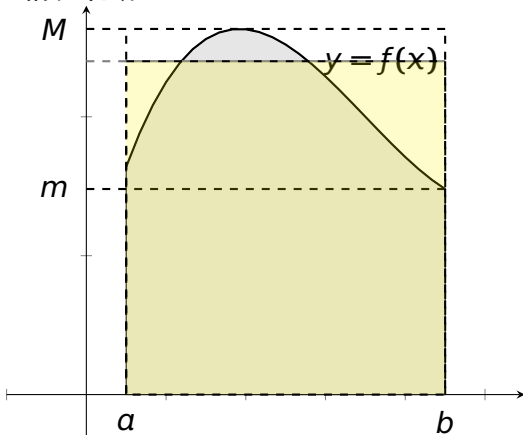


定积分的中值定理

假设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

以 “ $f(x) \geq 0$ ” 情况说明:

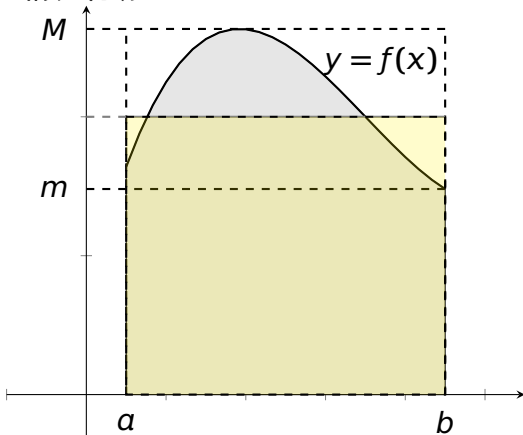


定积分的中值定理

假设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

以 “ $f(x) \geq 0$ ” 情况说明:

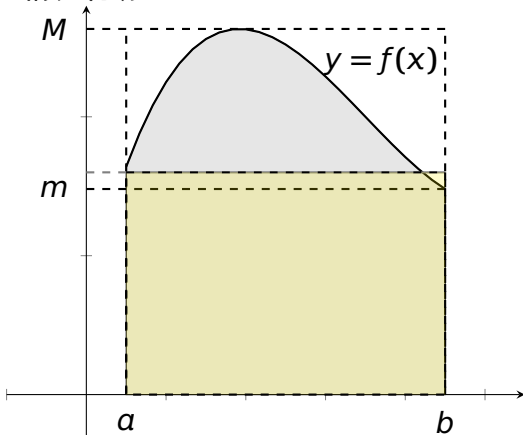


定积分的中值定理

假设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

以 “ $f(x) \geq 0$ ” 情况说明:

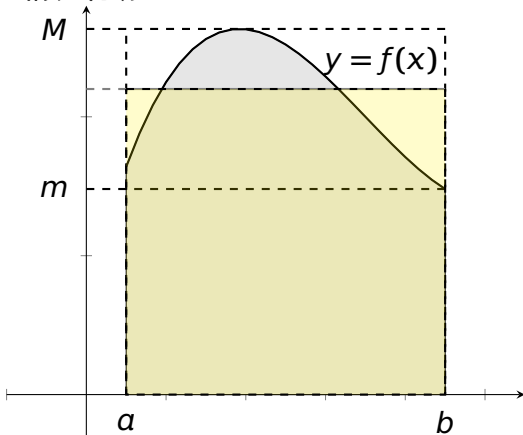


定积分的中值定理

假设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

以 “ $f(x) \geq 0$ ” 情况说明:



定积分的中值定理

假设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

以 “ $f(x) \geq 0$ ” 情况说明:

