

第 05 周作业

练习 1. 填空

函数	定义域	类型 (填: 闭集/开集, 有界集/无界集, 连通/不连通)
$z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$	$D = \{(x, y) y \geq 0, x \geq 0 \text{ 且 } x^2 \geq y\}$	闭集, 无界集, 连通
$z = \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{x-y}}$	$D = \{(x, y) x + y > 0 \text{ 且 } x - y > 0\}$	开集, 无界集, 连通

并分别画出上述两定义域 D , 在图上标示哪部分是内点, 哪部分是外点, 哪部分是边界。

练习 2. 画出二元函数 $z = 2 - x^2 - y^2$ 的函数图形, 其中函数定义域为 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 。

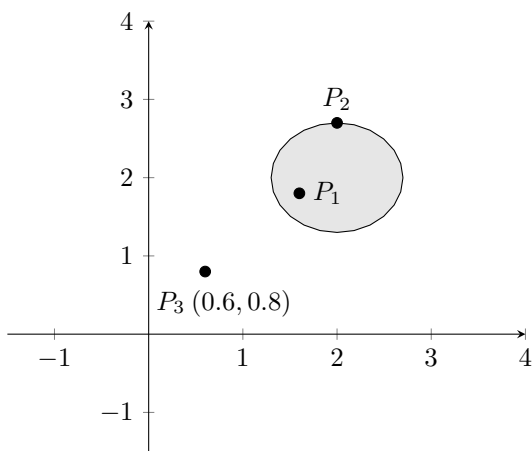
练习 3. 设 E 是平面上一个点集, 则平面上任意一点 P 只能是一下三种的一种: (1) E 的内点; (2) E 的外点; (3) E 的边界点。现假设点 Q 是 E 的聚点, 则可以证明 Q 或者为 E 的内点, 或者为 E 的边界点; 也就是

$$\{\text{全体聚点}\} \subset \{\text{内点}\} \cup \{\text{边界点}\}$$

但一般而言, $\{\text{全体聚点}\}$ 未必与并集 $\{\text{内点}\} \cup \{\text{边界点}\}$ 相同。

以下是一个例子

假设点集 $E = \{(x, y) | (x - 2)^2 + (y - 2)^2 \leq 0.7^2\} \cup \{(0.6, 0.8)\}$ (如下图)。填写 (请填上 \checkmark 或 \times)



	内点	边界点	聚点
$P_1(1.6, 1.8)$			
$P_2(2, 2.7)$			
$P_3(0.6, 0.8)$			

练习 4. 证明下列极限不存在

1. $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

2. $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

练习 5. 求下列函数的偏导数

(1) $s = \frac{u^2 + v^2}{uv}$; (2) $z = \sin(xy) + \cos^2(xy)$; (3) $z = (1 + xy)^y$; (4) $u = \arctan(x - y)^z$.

练习 6. 现在设 $f(x, y) = x + (y - 1) \arcsin \sqrt{\frac{x}{y}}$, 计算 $f_x(x, 1)$ 。

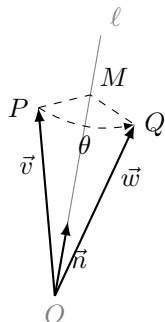
练习 7. 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. 求 $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ 。

练习 8. 求下列函数的所有二阶偏导数

$$(1) \quad z = \arctan \frac{y}{x}; \quad (2) \quad z = y^x.$$

下面是附加题，关于空间中的旋转，试利用前一章的知识求解。做出来的同学下周请交上来。

练习 9. 如图，设 \vec{n} 是空间中一单位向量，求向量 \vec{v} 绕 \vec{n} 转 θ 角度（按右手法则方向）角度所得的向量 \vec{w} 。



提示：1. 求 \vec{v} 在 ℓ 上的投影向量 \overrightarrow{OM} ，然后求出 \overrightarrow{MP} 。2. 要求 \vec{w} ，只需求出 \overrightarrow{MQ} 。3. 设 \vec{e}_1, \vec{e}_2 为单位向量， \vec{e}_1 与 \overrightarrow{MP} 同向， $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{n}$ 两两垂直且符合右手法则，求出 \vec{e}_2 。4. \vec{e}_1 绕 \vec{n} 转 θ 角度所得向量是 \vec{e}_1, \vec{e}_2 的线性组合，求出此向量。