# 第 08 周作业解答

**练习 1.** 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\2&-2&4&2&0\\3&0&6&-1&1\\4&-1&8&4&1\end{pmatrix}$ 的秩。

**解**

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\2&-2&4&2&0\\3&0&6&-1&1\\4&-1&8&4&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-3r_1\\r_4-4r_1}]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\0&0&0&0&0\\0&3&0&-4&1\\0&3&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\0&3&0&0&1\\0&3&0&-4&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\0&3&0&0&1\\0&0&0&-4&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以 $r(A)=3$

**练习 2.** 设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&2&3\\-1&a&2&-1\\3&1&b&5\end{pmatrix}$。对参数 $(a,b)$ 的每种取值，求出相应的秩 $r(A)$。

**解**

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2&3\\-1&a&2&-1\\3&1&b&5\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&-1&2&3\\0&a-1&4&2\\0&4&b-6&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{c_2\leftrightarrow c_4}\begin{pmatrix}1&3&2&-1\\0&2&4&a-1\\0&-4&b-6&4\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{r_3+2r_2}\begin{pmatrix}1&3&2&-1\\0&2&4&a-1\\0&0&b+2&2a+2\end{pmatrix}$$

- 若 $b\neq-2$ 或 $a\neq-1$，则最终的阶梯型矩阵有 3 行非零行，此时 $r(A)=3$。
- 若 $b=-2$ 且 $a=-1$，则最终的阶梯型矩阵只有 2 行非零行，此时 $r(A)=2$。

**练习 3.** 求解线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5=1\\2x_1+4x_2+3x_3+x_4+x_5=3\\-x_1-2x_2+x_3+3x_4-3x_5=7\\2x_3+5x_4-2x_5=9\end{cases}$ 的通解。

**解**对增广矩阵作初等行变换：

$$
(A\,\vdots\,b)=\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 3 & 1 & 1 & 3\\ -1 & -2 & 1 & 3 & -3 & 7\\ 0 & 0 & 2 & 5 & -2 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 4 & -2 & 8\\ 0 & 0 & 2 & 5 & -2 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[r_4-2r_2]{r_3-2r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 7 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[\frac{1}{7}\times r_4]{\frac{1}{6}\times r_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_4-r_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_1-r_3]{r_2+r_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{r_1-r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

可见 $r(A)=r(A\,\vdots\,b)=3<5$，所以原方程组有无穷多的解，包含 $5-3=2$ 个自由变量。事实上，通过上述简化的阶梯型矩阵，可知原方程等价于

$$
\begin{cases} x_1+\ \ 2x_2 \qquad\qquad + \ 2x_5 = -2\\ \qquad\qquad x_3 \qquad - \ \ x_5 = \ \ 2\\ \qquad\qquad\qquad x_4 \qquad\ \ = \ \ 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-2-2x_2-2x_5\\ x_3=2+x_5\\ x_4=1 \end{cases}
$$

所以通解是

$$
\begin{cases} x_1=-2-2c_1-2c_2\\ x_2=c_1\\ x_3=2+c_2\\ x_4=1\\ x_5=c_2 \end{cases} \qquad (c_1,\, c_2\text{为任意常数})
$$

用向量形式表示则是

$$
\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\\ 0\\ 2\\ 1\\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -2\\ 1\\ 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2\\ 0\\ 1\\ 0\\ 1 \end{pmatrix}
$$

**练习 4.** 《九章算术》卷八为“方程”，试解其中第八题：

今有賣牛二羊五以買一十三豕有餘錢一千賣牛三豕三以買九羊錢適足賣六羊八豕以買五牛錢不足六百問牛羊豕價各幾何

**解**设牛价 $x$，羊价 $y$，豕价 $z$，则

$$\begin{cases} 2x + 5y = 13z + 1000 \\ 3x + 3z = 9y \\ 6y + 8z + 600 = 5x \end{cases}$$

求解方程如下：

$$(A\vdots b)=\left(\begin{array}{ccc|c}2&5&-13&1000\\3&-9&3&0\\-5&6&8&-600\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&1&0\\2&5&-13&1000\\-5&6&8&-600\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&1&0\\0&11&-15&1000\\0&-9&13&-600\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2+r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&1&0\\0&2&-2&400\\0&-9&13&-600\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&1&0\\0&1&-1&200\\0&-9&13&-600\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&1&0\\0&1&-1&200\\0&0&4&1200\end{array}\right)$$

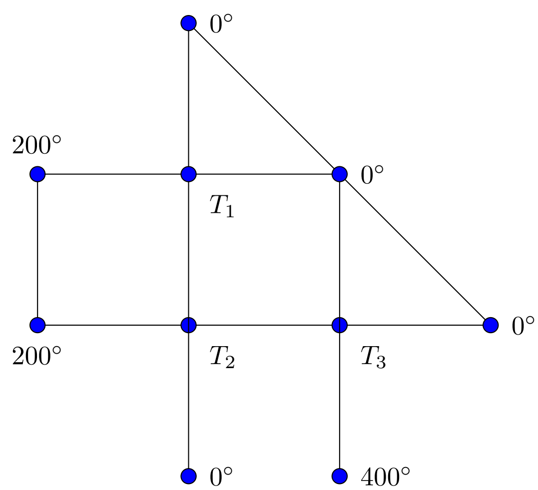
$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&1&0\\0&1&-1&200\\0&0&1&300\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&0&-300\\0&1&0&500\\0&0&1&300\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1200\\0&1&0&500\\0&0&1&300\end{array}\right)$$

所以 $x=1200, y=500, z=300$。

**练习 5.** In a grid of wires, the temperature at exterior mesh points is maintained at constant values (in $^\circ C$), as shown in the accompanying figure. When the grid is in thermal equilibrium, the temperature $T$ at each interior mesh point is the average of the temperatures at the four adjacent points. For example,

$$T_2=\frac{T_3+T_1+200+0}{4}.$$

Find the temperatures $T_1$, $T_2$ and $T_3$ when the grid is in thermal equilibrium.




**Solution.**

$$\begin{cases}4T_1=200+T_2\\4T_2=200+T_1+T_3\\4T_3=T_2+400\end{cases}$$

Then

$$(A\vdots b)=\left(\begin{array}{ccc|c}4&-1&0&200\\-1&4&-1&200\\0&-1&4&400\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-4&1&-200\\4&-1&0&200\\0&-1&4&400\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-4&1&-200\\0&15&-4&1000\\0&1&-4&-400\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-4&1&-200\\0&1&-4&-400\\0&15&-4&1000\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-4&1&-200\\0&1&-4&-400\\0&0&56&7000\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-4&1&-200\\0&1&-4&-400\\0&0&1&125\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-4&0&-325\\0&1&0&100\\0&0&1&125\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&75\\0&1&0&100\\0&0&1&125\end{array}\right)$$

So $T_1=75^\circ, T_2=100^\circ$ and $T_3=125^\circ$.