§3.5 线性方程组解的结构

数学系 梁卓滨

2017 - 2018 学年 I



例解齐次线性方程组:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

例解齐次线性方程组:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

例 解齐次线性方程组:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

⇒
$$(A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta g}}$$

例 解齐次线性方程组:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{inspan}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\text{righ}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow (A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\text{frey}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ings}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$(x_1 \qquad 2x_3 - 3x_4 = 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - & x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta} \not \oplus} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - & x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

例 解齐次线性方程组:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

⇒
$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\text{figh}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$
 $r(A) = 2$
⇒ $\begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$ ⇒ $\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$ $= \frac{1}{2}$ $= \frac$

$$\Rightarrow (A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\text{tigh}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \qquad \text{althous}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = x_3 - 2x_4 \\ x_3 = x_4 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \qquad x_3, x_4 = x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \\ x_2 = \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$

⇒
$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\text{treph}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

⇒ $\begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$ ⇒ $\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$ \text{\text{eline \text{deg}}} \text{\text{2}} \text{\text{3}}, \text{\text{3}}

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$



$$\Rightarrow (A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\eta \neq \varphi} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \qquad \text{althous}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$



$$\Rightarrow (A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta} \not \oplus} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \qquad \text{althous}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\text{trey}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 & \text{in the entropy} \\ x_2 = x_3 - 2x_4 & x_3, x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c_1 \\ c_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3c_2 \\ -2c_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c_1 \\ c_1 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3c_2 \\ -2c_2 \\ 0 \\ c_2 \end{pmatrix}$$



$$\Rightarrow (A : 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{iffigh}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \xrightarrow{\text{fighting fighting f$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$\Rightarrow (A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta} \neq +} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \qquad \text{alimost}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$



⇒
$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\text{tigh}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$
 $r(A) = 2$

$$\begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 & \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 & \text{自由变量} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 & \text{ altered} \\ x_2 = x_3 - 2x_4 & x_3, x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$$



例 解齐次线性方程组: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\text{freph}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

⇒
$$\begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - & x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$
 ⇒ $\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$ \text{\text{\text{eligible}}} \text{\text{\text{\$\chi_3\$}}} \text{\text{\$\chi_3\$}}

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

 $\Rightarrow x = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$



例 解齐次线性方程组:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta} \not \oplus} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - & x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{自由变量} \\ x_3, x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

 $\Rightarrow x = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$

例 解齐次线性方程组: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\text{freph}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

⇒
$$\begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - & x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$
 ⇒ $\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$ \text{\text{\text{\text{along}}}} \text{\text{\text{\text{\$\

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

 $\Rightarrow x = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$

例 解齐次线性方程组:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta \oplus \phi}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow (A : 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\text{freph}}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 & + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta} \not \oplus} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$(x_1 + 2x_2 + x_4 = 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

例 解齐次线性方程组:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\text{figh}}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases}$$

例 解齐次线性方程组:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

⇒
$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta} \not\equiv} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 & + x_4 = 0 \\ - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \qquad \text{自由变量}$$

$$\Rightarrow (A : 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{ngg}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 & + x_4 = 0 \\ - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \qquad \text{althous}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = C_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A : 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta} \not \oplus} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 & + x_4 = 0 \\ - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \qquad \text{althous}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta} \not \oplus} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 & + x_4 = 0 \\ - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \qquad \text{althous}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_1 + 2c_2 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$



$$\Rightarrow (A : 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\text{trgh}}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 & + x_4 = 0 \\ - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \qquad \text{align}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_1 + 2c_2 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$



$$\Rightarrow (A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\eta \neq} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 & + x_4 = 0 \\ - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \qquad \text{lenge}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_1 + 2c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 = c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c_1 \\ c_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c_2 \\ 0 \\ 2c_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_1 + 2c_2 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c_1 \\ c_1 \\ c_1 \\ 0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c_2 \\ 0 \\ 2c_2 \\ c_2 \\ \xi_2 \end{cases}$$



例解齐次线性方程组:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\eta \neq} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 & + x_4 = 0 \\ - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \qquad \text{althous}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_1 + 2c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_1 + 2c_2 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$\Rightarrow (A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta} \not \oplus} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 & + x_4 = 0 \\ - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \qquad \text{althous}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_1 + 2c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_1 + 2c_2 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$



$$\Rightarrow (A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{iffigh}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases}$$
 \text{\text{\text{bin \text{\$\sigma_2\$}}}} \text{\text{\text{\$\sigma_2\$}}}

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_1 + 2c_2 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$$



例 解齐次线性方程组: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta} \not \oplus} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases}$$
 \text{\text{\text{bin \text{\$\sigma_2\$}}} \text{\text{\$\sigma_2\$}}, \text{\$\chi_4\$}

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_1 + 2c_2 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ \xi_2 \end{cases}$$

 $\Rightarrow x = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$

例解齐次线性方程组: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta} \not \oplus} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases}$$
 \text{\text{\text{\text{bigs}}}} \text{\text{\text{\$\ctil\exititt{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\exititt{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\tex{\$\$\text{\$\text{\$\tex{\$\$\text{\$\text{\$\tex{\$\$\}\$}\text{\$\tex

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_1 + 2c_2 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

 $\Rightarrow x = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$

引入

例解齐次线性方程组:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta g}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases}$$
 \text{\text{\text{\text{bigs}}}} \text{\text{\text{\$\$\text{\$\exititt{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\tex{\$\$\text{\$\text{\$\tex{\$\$\text{\$\text{\$\tex{\$\$\}\$\$}\text{\$\te

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_1 + 2c_2 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$$

 ξ_1 , ξ_2 基础解系

定义 如果 ξ_1 , ξ_2 , ..., ξ_s 是齐次线性方程组

Ax = 0

的解向量组的一个极大无关组,则称

 $\xi_1,\,\xi_2,\,\ldots,\,\xi_s$

是齐次方程组的一个基础解系。

定义 如果 ξ_1 , ξ_2 , ..., ξ_s 是齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

的解向量组的一个极大无关组,则称

$$\xi_1, \, \xi_2, \, \ldots, \, \xi_s$$

是齐次方程组的一个基础解系。

定理 若齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

满足

$$r(A) = r < n$$

则方程组的基础解系存在,且每个基础解系恰恰有 n-r 个向量组成:

$$\xi_1, \, \xi_2, \, \ldots, \, \xi_s, \, (s = n - r)$$

定义 如果 ξ_1 , ξ_2 , ..., ξ_s 是齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

的解向量组的一个极大无关组,则称

$$\xi_1,\,\xi_2,\,\ldots,\,\xi_s$$

是齐次方程组的一个基础解系。

定理 若齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

满足

$$r(A) = r < n$$

则方程组的基础解系存在,且每个基础解系恰恰有 n-r 个向量组成:

$$\xi_1, \, \xi_2, \, \ldots, \, \xi_s, \qquad (s=n-r)$$

并且,方程组的任意解x,均可由基础解系线性表示:

$$x = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_s \xi_s$$



定义 如果 ξ_1 , ξ_2 , ..., ξ_s 是齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

的解向量组的一个极大无关组,则称

$$\xi_1, \, \xi_2, \, \ldots, \, \xi_s$$

是齐次方程组的一个基础解系。

定理 若齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

满足

$$r(A) = r < n$$

则方程组的基础解系存在,且每个基础解系恰恰有n-r个向量组成:

$$\xi_1, \, \xi_2, \, \ldots, \, \xi_s, \qquad (s=n-r)$$

并且,方程组的任意解x,均可由基础解系线性表示:

$$x = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_s \xi_s$$



定义 如果 ξ_1 , ξ_2 , ..., ξ_s 是齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

的解向量组的一个极大无关组,则称

$$\xi_1, \, \xi_2, \, \ldots, \, \xi_s$$

是齐次方程组的一个基础解系。

定理 若齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

满足

$$r(A) = r < n$$

也是自由变量个数 加一r个向量组成:

$$\xi_1, \, \xi_2, \, \ldots, \, \xi_s, \qquad (s=n-r)$$

并且,方程组的任意解x,均可由基础解系线性表示:

$$x = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_s \xi_s$$



- 1. (A:0) ^{初等行变换} 简化的阶梯型矩阵,写出同解的方程组;
- 2. 确定自由未知变量;

- 1. (A:0) ^{初等行变换} 简化的阶梯型矩阵,写出同解的方程组;
- 2. 确定自由未知变量;
- 3. 求基础解系:

- 1. (A:0) ^{初等行变换} 简化的阶梯型矩阵,写出同解的方程组;
- 2. 确定自由未知变量;
- 3. 求基础解系:
 - 将一个自由变量取值为 1, 其余取 0, 得到一个解向量;
 - 对所有 n − r(A) 个自由变量作类似操作,便得 n − r(A) 个解向量,构成基础解系

- 1. (A:0) ^{初等行变换} 简化的阶梯型矩阵,写出同解的方程组;
- 2. 确定自由未知变量;
- 3. 求基础解系:
 - 将一个自由变量取值为 1, 其余取 0, 得到一个解向量;
 - 对所有 n-r(A) 个自由变量作类似操作,便得 n-r(A) 个解向量,构成基础解系
- 4. 通解就是: 基础解系的线性组合



- 1. (A:0) ^{初等行变换} 简化的阶梯型矩阵,写出同解的方程组;
- 2. 确定自由未知变量;
- 3. 求基础解系:
 - 将一个自由变量取值为 1, 其余取 0, 得到一个解向量;
 - 对所有 n-r(A) 个自由变量作类似操作,便得 n-r(A) 个解向量,构成基础解系
- 4. 通解就是:基础解系的线性组合

例

1. 假设求得同解方程组为 $\begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$



- 1. (A:0) ^{初等行变换} 简化的阶梯型矩阵,写出同解的方程组;
- 2. 确定自由未知变量;
- 3. 求基础解系:
 - 将一个自由变量取值为 1, 其余取 0, 得到一个解向量;
 - 对所有 n-r(A) 个自由变量作类似操作,便得 n-r(A) 个解向量,构成基础解系
- 4. 通解就是:基础解系的线性组合

例

1. 假设求得同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$



- 1. (A:0) ^{初等行变换} 简化的阶梯型矩阵,写出同解的方程组;
- 2. 确定自由未知变量;
- 3. 求基础解系:
 - 将一个自由变量取值为 1, 其余取 0, 得到一个解向量;
 - 对所有 n-r(A) 个自由变量作类似操作,便得 n-r(A) 个解向量,构成基础解系
- 4. 通解就是:基础解系的线性组合

- 1. 假设求得同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 2x_4 \end{cases}$
- 2. 自由变量为 x₃, x₄



- 1. (A:0) ^{初等行变换} 简化的阶梯型矩阵,写出同解的方程组;
- 2. 确定自由未知变量;
- 3. 求基础解系:
 - 将一个自由变量取值为 1, 其余取 0, 得到一个解向量;
 - 对所有 n-r(A) 个自由变量作类似操作,便得 n-r(A) 个解向量,构成基础解系
- 4. 通解就是:基础解系的线性组合

- 1. 假设求得同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 2x_4 \end{cases}$
- 2. 自由变量为 X₃, X₄
- 3. 基础解系 ξ₁, ξ₂:



- 1. $(A:0) \xrightarrow{M \oplus f \cap g \not =}$ 简化的阶梯型矩阵,写出同解的方程组;
- 2. 确定自由未知变量;
- 3. 求基础解系:
 - 将一个自由变量取值为 1, 其余取 0, 得到一个解向量;
 - 对所有 n-r(A) 个自由变量作类似操作,便得 n-r(A) 个解向量,构成基础解系
- 4. 通解就是:基础解系的线性组合

- 1. 假设求得同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 2x_4 \end{cases}$
- 2. 自由变量为 x₃, x₄

3. 基础解系
$$\xi_1$$
, ξ_2 : $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} =$



- 1. (A:0) ^{初等行变换} 简化的阶梯型矩阵,写出同解的方程组;
- 2. 确定自由未知变量;
- 3. 求基础解系:
 - 将一个自由变量取值为 1, 其余取 0, 得到一个解向量;
 - 对所有 n-r(A) 个自由变量作类似操作,便得 n-r(A) 个解向量,构成基础解系
- 4. 通解就是:基础解系的线性组合

- 1. 假设求得同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 2x_4 \end{cases}$
- 2. 自由变量为 X₃, X₄

3. 基础解系
$$\xi_1$$
, ξ_2 : $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



- 1. (A:0) ^{初等行变换} 简化的阶梯型矩阵,写出同解的方程组;
- 2. 确定自由未知变量;
- 3. 求基础解系:
 - 将一个自由变量取值为 1, 其余取 0, 得到一个解向量;
 - 对所有 n-r(A) 个自由变量作类似操作,便得 n-r(A) 个解向量,构成基础解系
- 4. 通解就是:基础解系的线性组合

- 1. 假设求得同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 2x_4 \end{cases}$
- 2. 自由变量为 x₃, x₄

3. 基础解系
$$\xi_1$$
, ξ_2 : $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$



- 1. (A:0) ^{初等行变换} 简化的阶梯型矩阵,写出同解的方程组;
- 2. 确定自由未知变量;
- 3. 求基础解系:
 - 将一个自由变量取值为 1, 其余取 0, 得到一个解向量;
 - 对所有 n-r(A) 个自由变量作类似操作,便得 n-r(A) 个解向量,构成基础解系
- 4. 通解就是:基础解系的线性组合

- 1. 假设求得同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 2x_4 \end{cases}$
- 2. 自由变量为 X₃, X₄

3. 基础解系
$$\xi_1$$
, ξ_2 : $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



- 1. (A:0) ^{初等行变换} 简化的阶梯型矩阵,写出同解的方程组;
- 2. 确定自由未知变量;
- 3. 求基础解系:
 - 将一个自由变量取值为 1, 其余取 0, 得到一个解向量;
 - 对所有 n-r(A) 个自由变量作类似操作,便得 n-r(A) 个解向量,构成基础解系
- 4. 通解就是:基础解系的线性组合

- 1. 假设求得同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 2x_4 \end{cases}$
- 2. 自由变量为 x₃, x₄

3. 基础解系
$$\xi_1$$
, ξ_2 : $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



- 1. (A:0) ^{初等行变换} 简化的阶梯型矩阵,写出同解的方程组;
- 2. 确定自由未知变量;
- 3. 求基础解系:
 - 将一个自由变量取值为 1, 其余取 0, 得到一个解向量;
 - 对所有 n-r(A) 个自由变量作类似操作,便得 n-r(A) 个解向量,构成基础解系
- 4. 通解就是:基础解系的线性组合

- 1. 假设求得同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 2x_4 \end{cases}$
- 2. 自由变量为 x₃, x₄

3. 基础解系
$$\xi_1$$
, ξ_2 : $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



- 1. (A:0) ^{初等行变换} 简化的阶梯型矩阵,写出同解的方程组;
- 2. 确定自由未知变量;
- 3. 求基础解系:
 - 将一个自由变量取值为 1, 其余取 0, 得到一个解向量;
 - 对所有 n − r(A) 个自由变量作类似操作,便得 n − r(A) 个解向量,构成基础解系
- 4. 通解就是:基础解系的线性组合

例

- 1. 假设求得同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 2x_4 \end{cases}$
- 2. 自由变量为 x₃, x₄

3. 基础解系
$$\xi_1$$
, ξ_2 : $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. 通解: $X = C_1 \xi_1 + C_2 \xi_2$



例用基础解系表示 $\begin{cases} x_1+&x_3+&4x_3-&3x_4=0\\ 2x_1+&3x_3+&5x_3-&5x_4=0\\ 3x_1+&5x_3+&6x_3-&7x_4=0 \end{cases}$ 的通解

$$(A:0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_3 - 3r_1}$$

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

例用基础解系表示
$$\begin{cases} x_1 + x_3 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$
的通解
$$3x_1 + 5x_3 + 6x_3 - 7x_4 = 0$$

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$r_1 - r_2$$

例用基础解系表示
$$\begin{cases} x_1 + x_3 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$
的通解
$$3x_1 + 5x_3 + 6x_3 - 7x_4 = 0$$

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例用基础解系表示
$$\begin{cases} x_1 + x_3 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$
的通解
$$3x_1 + 5x_3 + 6x_3 - 7x_4 = 0$$

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + & 7x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$$

例用基础解系表示
$$\begin{cases} x_1 + x_3 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$
的通解
$$3x_1 + 5x_3 + 6x_3 - 7x_4 = 0$$

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[r_3 - 2r_2]{r_3 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + & 7x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$



解

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + & 7x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -7x_3 + 4x_4 \\ x_2 = 3x_3 - x_4 \end{cases}$$



$$(A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. 同解方程组
$$\begin{cases} x_1 = -7x_3 + 4x_4 \\ x_2 = 3x_3 - x_4 \end{cases}$$

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 1. 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -7x_3 + 4x_4 \\ x_2 = 3x_3 x_4 \end{cases}$
- 2. 自由变量 x₃, x₄

$$(A:0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- 1. 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -7x_3 + 4x_4 \\ x_2 = 3x_3 x_4 \end{cases}$
- 2. 自由变量 x₃, x₄
- 3. 基础解系 ξ1, ξ2:

例用基础解系表示 $\begin{cases} x_1+&x_3+&4x_3-&3x_4=0\\ 2x_1+&3x_3+&5x_3-&5x_4=0\\ 3x_1+&5x_3+&6x_3-&7x_4=0 \end{cases}$

$$(A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 1. 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -7x_3 + 4x_4 \\ x_2 = 3x_3 x_4 \end{cases}$
- 2. 自由变量 X₃, X₄

3. 基础解系
$$\xi_1$$
, ξ_2 : $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 1. 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -7x_3 + 4x_4 \\ x_2 = 3x_3 x_4 \end{cases}$
- 2. 自由变量 X₃, X₄

3. 基础解系
$$\xi_1$$
, ξ_2 : $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 1. 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -7x_3 + 4x_4 \\ x_2 = 3x_3 x_4 \end{cases}$
- 2. 自由变量 X₃, X₄

3. 基础解系
$$\xi_1$$
, ξ_2 : $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

例用基础解系表示 $\begin{cases} x_1 + x_3 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$ 的通解 $3x_1 + 5x_3 + 6x_3 - 7x_4 = 0$

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 1. 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -7x_3 + 4x_4 \\ x_2 = 3x_3 x_4 \end{cases}$
- 2. 自由变量 X₃, X₄
- 3. 基础解系 ξ_1 , ξ_2 : $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

例用基础解系表示 $\begin{cases} x_1 + x_3 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$ 的通解 $3x_1 + 5x_3 + 6x_3 - 7x_4 = 0$

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 1. 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -7x_3 + 4x_4 \\ x_2 = 3x_3 x_4 \end{cases}$
- 2. 自由变量 X₃, X₄

3. 基础解系
$$\xi_1$$
, ξ_2 : $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

例用基础解系表示 $\begin{cases} x_1 + x_3 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$ 的通解 $3x_1 + 5x_3 + 6x_3 - 7x_4 = 0$

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 1. 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -7x_3 + 4x_4 \\ x_2 = 3x_3 x_4 \end{cases}$
- 2. 自由变量 X₃, X₄

3. 基础解系
$$\xi_1$$
, ξ_2 : $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. 通解: $X = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$



$$(A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{array}\right)$$

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \xrightarrow{r_3 - 3r_1}$$



$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{r_1+3r_2}{r_2-2r_2}$$

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_2]{r_1+3r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

例用基础解系表示
$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_3 - x_3 - 7x_4 = 0 \text{ 的通解} \\ 3x_1 + 6x_3 - x_3 - 11x_4 = 0 \end{cases}$$

解

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_2]{r_1+3r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

所以同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_4 = 0 \end{cases}$$



例用基础解系表示
$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_3 - x_3 - 7x_4 = 0 \text{ 的通解} \\ 3x_1 + 6x_3 - x_3 - 11x_4 = 0 \end{cases}$$

解

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_2]{r_1+3r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

所以同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$



解

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_2]{r_1+3r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

所以同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 & -4x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$$



$$(A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. 同解方程组
$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$$



$$(A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 1. 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$
- 2. 自由变量 X₂, X₄

解

$$(A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 1. 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$
- 2. 自由变量 X₂, X₄

3. 基础解系 ξ1, ξ2:

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 1. 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$
- 2. 自由变量 X₂, X₄

3. 基础解系
$$\xi_1$$
, ξ_2 : $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$



$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 1. 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$
- 2. 自由变量 X₂, X₄
- 3. 基础解系 ξ_1 , ξ_2 : $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$(A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 1. 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$
- 2. 自由变量 X₂, X₄
- 3. 基础解系 ξ_1 , ξ_2 : $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$(A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 1. 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$
- 2. 自由变量 X₂, X₄

3. 基础解系
$$\xi_1$$
, ξ_2 : $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$(A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 1. 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$
- 2. 自由变量 X₂, X₄

3. 基础解系
$$\xi_1$$
, ξ_2 : $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$(A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 1. 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$
- 2. 自由变量 X₂, X₄
- 3. 基础解系 ξ_1 , ξ_2 : $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- 4. 通解: $X = C_1 \xi_1 + C_2 \xi_2$



$$Ax = 0$$

的解有下列性质:

1. 若 ξ_1 , ξ_2 是解, 则 $\xi_1 + \xi_2$ 也是解

$$Ax = 0$$

的解有下列性质:

- 1. 若 ξ_1 , ξ_2 是解, 则 $\xi_1 + \xi_2$ 也是解
- 2. 若 ξ 是解,则对 $\forall c \in \mathbb{R}$, cξ 也是解

$$Ax = 0$$

的解有下列性质:

- 1. 若 ξ_1 , ξ_2 是解, 则 $\xi_1 + \xi_2$ 也是解
- 2. 若 ξ 是解,则对 $\forall c \in \mathbb{R}$, cξ 也是解
- 3. 更一般地,若 ξ_1 , ξ_2 , ..., ξ_s 是解, c_1 , c_2 , ..., c_s 是任意常数,则解的线性组合

也是解
$$\xi = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_s \xi_s$$

$$Ax = 0$$

的解有下列性质:

- 1. 若 ξ_1 , ξ_2 是解, 则 $\xi_1 + \xi_2$ 也是解
- 2. 若 ξ 是解,则对 $\forall c \in \mathbb{R}$, cξ 也是解
- 3. 更一般地,若 ξ_1 , ξ_2 , ..., ξ_s 是解, c_1 , c_2 , ..., c_s 是任意常数,则解的线性组合

$$\xi = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_s \xi_s$$

证明

Αξ

$$Ax = 0$$

的解有下列性质:

- 1. 若 ξ_1 , ξ_2 是解, 则 $\xi_1 + \xi_2$ 也是解
- 2. 若 ξ 是解,则对 $\forall c \in \mathbb{R}$, cξ 也是解
- 3. 更一般地,若 ξ_1 , ξ_2 , ..., ξ_s 是解, c_1 , c_2 , ..., c_s 是任意常数, 则解的线性组合

也是解
$$\xi = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_s \xi_s$$
$$A\xi = A(c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_s \xi_s)$$

证明

$$Ax = 0$$

的解有下列性质:

- 1. 若 ξ_1 , ξ_2 是解, 则 $\xi_1 + \xi_2$ 也是解
- 2. 若 ξ 是解,则对 $\forall c \in \mathbb{R}$, cξ 也是解
- 3. 更一般地,若 ξ_1 , ξ_2 , ..., ξ_s 是解, c_1 , c_2 , ..., c_s 是任意常数,则解的线性组合

$$\xi = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_s \xi_s$$

证明

$$A\xi = A(c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \dots + c_s\xi_s)$$

= $c_1A\xi_1 + c_2A\xi_2 + \dots + c_sA\xi_s$

$$Ax = 0$$

的解有下列性质:

- 1. 若 ξ_1 , ξ_2 是解, 则 $\xi_1 + \xi_2$ 也是解
- 2. 若 ξ 是解,则对 $\forall c \in \mathbb{R}$, cξ 也是解
- 3. 更一般地,若 ξ_1 , ξ_2 , ..., ξ_s 是解, c_1 , c_2 , ..., c_s 是任意常数,则解的线性组合

$$\xi = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_s \xi_s$$

$$A\xi = A(c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \dots + c_s\xi_s)$$

$$= c_1A\xi_1 + c_2A\xi_2 + \dots + c_sA\xi_s$$

$$= c_10 + c_20 + \dots + c_s0$$

$$Ax = 0$$

的解有下列性质:

- 1. 若 ξ_1 , ξ_2 是解, 则 $\xi_1 + \xi_2$ 也是解
- 2. 若 ξ 是解,则对 $\forall c \in \mathbb{R}$, cξ 也是解
- 3. 更一般地,若 ξ_1 , ξ_2 , ..., ξ_s 是解, c_1 , c_2 , ..., c_s 是任意常数,则解的线性组合

$$\xi = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_s \xi_s$$

$$A\xi = A(c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \dots + c_s\xi_s)$$

$$= c_1A\xi_1 + c_2A\xi_2 + \dots + c_sA\xi_s$$

$$= c_10 + c_20 + \dots + c_s0 = 0$$

- 1. ξ_1 , $\xi_2 + \xi_3$
- 2. ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 , $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3$
- 3. $\xi_1 \xi_2$, $\xi_2 \xi_3$, $\xi_1 \xi_3$
- 4. $\xi_1 + \xi_2$, $\xi_2 + \xi_3$, $\xi_3 + \xi_1$

- 1. ξ_1 , $\xi_2 + \xi_3$
- 2. ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 , $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3$
- 3. $\xi_1 \xi_2$, $\xi_2 \xi_3$, $\xi_1 \xi_3$
- 4. $\xi_1 + \xi_2$, $\xi_2 + \xi_3$, $\xi_3 + \xi_1$

提示 判断

1. 是否为解

- 1. ξ_1 , $\xi_2 + \xi_3$
- 2. ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 , $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3$
- 3. $\xi_1 \xi_2$, $\xi_2 \xi_3$, $\xi_1 \xi_3$
- 4. $\xi_1 + \xi_2$, $\xi_2 + \xi_3$, $\xi_3 + \xi_1$

提示判断

- 1. 是否为解
- 2. 是否包含 3 个解(基础解系包含向量的个数是定值)

- 1. ξ_1 , $\xi_2 + \xi_3$
- 2. ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 , $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3$
- 3. $\xi_1 \xi_2$, $\xi_2 \xi_3$, $\xi_1 \xi_3$
- 4. $\xi_1 + \xi_2$, $\xi_2 + \xi_3$, $\xi_3 + \xi_1$

提示判断

- 1. 是否为解
- 2. 是否包含 3 个解(基础解系包含向量的个数是定值)
- 3. 是否为线性无关



例 解非齐次线性方程组: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2\\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1\\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = -4 \end{cases}$

例 解非齐次线性方程组: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2\\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1\\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = -4 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A : b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

例 解非齐次线性方程组: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = -4 \end{cases}$

⇒
$$(A : b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{iff}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (A:b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta \oplus}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} r(A) = r(A:b)$$

⇒
$$(A : b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta \oplus}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r(A) = r(A : b)} = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta} \neq +} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r(A) = r(A:b)} = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_2 - & x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A : b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta g}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} r(A) = r(A : b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_2 - & x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A : b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{iff}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} r(A) = r(A : b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_2 - & x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 3x_4 & \text{自由变量} \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 & x_3, x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{infer}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} r(A) = r(A:b)$$

⇒
$$\begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_2 - & x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases}$$
 ⇒
$$\begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 3x_4 & \text{自由变量} \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 & x_3, x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$



$$\Rightarrow (A \vdots b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\text{freph}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} r(A) = r(A \vdots b)$$

⇒
$$\begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_2 - & x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases}$$
 ⇒
$$\begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 3x_4 & \text{自由变量} \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 & x_3, x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$



$$\Rightarrow (A \vdots b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{figs}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r(A) = r(A \vdots b)} = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_2 - & x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 3x_4 & \text{自由变量} \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 & x_3, x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 + 3x_4 = -5 \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = -5 + c_1 - 2c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 \\ x_3 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 \\ x_3 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 \\ x_3 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 \\ x_3 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = -5 + c_1 - 2c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = -5 + c_1 - 2c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = -5 + c_1 - 2c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = -5 + c_1 - 2c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = -5 + c_1 - 2c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = -5 + c_1 - 2c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = -5 + c_1 - 2c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = -5 + c_1 - 2c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = -5 + c_1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 & 3x_4 - 2 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2 & 2x_3 + 3x_4 & \text{find } 2 \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 & x_3, x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2c_1 \\ c_1 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3c_2 \\ -2c_2 \\ 0 \\ c_2 \end{pmatrix}$$



$$\Rightarrow (A \vdots b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{figs}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} r(A) = r(A \vdots b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_2 - & x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 3x_4 & \text{自由变量} \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 & x_3, x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$\Rightarrow (A \vdots b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{figh}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} r(A) = r(A \vdots b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_2 - & x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 3x_4 & \text{自由变量} \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 & x_3, x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$



⇒
$$(A : b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{fire}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} r(A) = r(A : b)$$

$$= 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_2 - & x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 3x_4 & \text{自由变量} \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 & x_3, x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow x = \eta + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$$

$$\Rightarrow (A \vdots b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{figh}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} r(A) = r(A \vdots b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_2 - & x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 3x_4 & \text{自由变量} \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 & x_3, x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow x = \eta + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$$

 $\Rightarrow x = \eta + c_1 c_1 + c_2 c_2$ $\eta : Ax = b - \uparrow x$



$$\Rightarrow (A:b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta} \neq +} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} r(A) = r(A:b)$$

$$= 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_2 - & x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 3x_4 & \text{自由变量} \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 & x_3, x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = \eta + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$$

$$\eta : Ax = b$$
一个解
 $\xi_1, \, \xi_2 : Ax = 0$ 基础解系



$$\Rightarrow (A:b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{iff}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} r(A) = r(A:b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_2 - & x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 3x_4 & \text{自由变量} \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 & x_3, x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ \eta \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow x = \eta + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$$

 η : AX = D 下解 ξ_1 , ξ_2 : AX = 0基础解系

定义 在非齐次线性方程组

$$Ax = b$$

中,用0代替b,所得到的齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

称为原方程组 Ax = b 的导出组。

定义 在非齐次线性方程组

$$Ax = b$$

中,用0代替b,所得到的齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

称为原方程组 Ax = b 的导出组。

如
$$\begin{cases} x_1 -2x_2 +4x_3 -7x_4 = 1 \\ 2x_1 +x_2 -2x_3 +x_4 = 4 & \text{的导出组是} \\ 3x_1 -x_2 +2x_3 -6x_4 = -9 \end{cases}$$

定义 在非齐次线性方程组

$$Ax = b$$

中,用0代替b,所得到的齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

称为原方程组 Ax = b 的导出组。

如
$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & +4x_3 & -7x_4 & = 1 \\ 2x_1 & +x_2 & -2x_3 & +x_4 & = 4 & \text{的导出组是} \\ 3x_1 & -x_2 & +2x_3 & -6x_4 & = -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & +4x_3 & -7x_4 & = 0 \\ 2x_1 & +x_2 & -2x_3 & +x_4 & = 0 \\ 3x_1 & -x_2 & +2x_3 & -6x_4 & = 0 \end{cases}$$

定理 如果 η 是非齐次线性方程组

$$Ax = b$$

的一个解,则原方程组的任意解 x 可以表示成

$$x = \eta + \xi$$

其中 ξ 是导出组 Ax = 0 的解。

$$Ax = b$$

的一个解,则原方程组的任意解 x 可以表示成

$$x = \eta + \xi$$

其中 ξ 是导出组 Ax = 0 的解。

进一步,设导出组Ax = 0的基础解系是

$$\xi_1,\,\xi_2,\,\ldots,\,\xi_s$$

$$Ax = b$$

的一个解,则原方程组的任意解 x 可以表示成

$$x = \eta + \xi$$

其中 ξ 是导出组 Ax = 0 的解。

进一步,设导出组Ax = 0的基础解系是

$$\xi_1,\,\xi_2,\,\ldots,\,\xi_s$$

$$\underline{\varsigma}_1 \xi_1 + \varsigma_2 \xi_2 + \cdots + \varsigma_s \xi_s$$

$$Ax = b$$

的一个解,则原方程组的任意解 x 可以表示成

$$x = \eta + \xi$$

其中 ξ 是导出组 Ax = 0 的解。

进一步,设导出组Ax = 0的基础解系是

$$\xi_1,\,\xi_2,\,\ldots,\,\xi_s$$

则原方程组的任意解 x 可以表示成

$$x = \eta + \underline{\xi} = \eta + \underline{c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_s \xi_s}$$

$$Ax = b$$

的一个解,则原方程组的任意解 x 可以表示成

$$x = \eta + \xi$$

其中 ξ 是导出组 Ax = 0 的解。

进一步,设导出组 Ax = 0 的基础解系是

$$\xi_1,\,\xi_2,\,\ldots,\,\xi_s$$

则原方程组的任意解 x 可以表示成

$$x = \eta + \underline{\xi} = \eta + \underline{c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_s \xi_s}$$

证明 因为 Ax = b, $A\eta = b$

$$Ax = b$$

的一个解,则原方程组的任意解 x 可以表示成

$$x = \eta + \xi$$

其中 ξ 是导出组 Ax = 0 的解。

进一步,设导出组 Ax = 0 的基础解系是

$$\xi_1, \, \xi_2, \, \ldots, \, \xi_s$$

则原方程组的任意解 x 可以表示成

$$x = \eta + \underline{\xi} = \eta + \underline{c_1}\xi_1 + \underline{c_2}\xi_2 + \dots + \underline{c_s}\xi_s$$

证明 因为

$$Ax = b$$
, $An = b$

所以 $A(x-\eta) = Ax - A\eta = b - b = 0$

$$Ax = b$$

的一个解,则原方程组的任意解x可以表示成

$$x = \eta + \xi$$

其中 ξ 是导出组 Ax = 0 的解。

进一步,设导出组 Ax = 0 的基础解系是

$$\xi_1, \, \xi_2, \, \ldots, \, \xi_s$$

则原方程组的任意解x可以表示成

$$x = \eta + \underline{\xi} = \eta + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_s \xi_s$$

证明 因为

$$Ax = b$$
, $A\eta = b$

所以 $A(x-\eta) = Ax - A\eta = b - b = 0$,说明 $x - \eta$ 是导出组 Ax = 0

$$Ax = b$$

的一个解,则原方程组的任意解x可以表示成

$$x = \eta + \xi$$

其中 ξ 是导出组 Ax = 0 的解。

进一步,设导出组 Ax = 0 的基础解系是

的解。所以 $x - \eta = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_s\xi_s$.

$$\xi_1, \, \xi_2, \, \ldots, \, \xi_s$$

则原方程组的任意解求可以表示成

$$x = \eta + \xi = \eta + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_s \xi_s$$

证明因为

$$Ax = b$$
, $An = b$

所以 $A(x-\eta) = Ax - A\eta = b - b = 0$,说明 $x - \eta$ 是导出组 Ax = 0

用基础解系表示 Ax = b 通解

先是

- 将增广矩阵 (A, b) 化为简化的阶梯形矩阵, 写出同解方程组;
- 确定自由未知变量;

然后

- 求出一个特解 η:
- 求出导出组 Ax = 0 的基础解系: $ξ_1, ξ_2, ..., ξ_s$

则 Ax = b 的通解是



用基础解系表示 Ax = b 通解

先是

- 将增广矩阵 (A, b) 化为简化的阶梯形矩阵, 写出同解方程组;
- 确定自由未知变量;

然后

- 求出一个特解 η:
- 求出导出组 Ax = 0 的基础解系: $ξ_1, ξ_2, ..., ξ_s$

则 Ax = b 的通解是

$$x = \eta + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \cdots + c_s \xi_s$$



用基础解系表示 Ax = b 通解

先是

- 将增广矩阵 (A, b) 化为简化的阶梯形矩阵, 写出同解方程组;
- 确定自由未知变量;

然后

- 求出一个特解 η: 可取自由未知量全为 0 得到
- 求出导出组 Ax = 0 的基础解系: $ξ_1, ξ_2, ..., ξ_s$

则 Ax = b 的通解是

$$x = \eta + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_s \xi_s$$



例用"特解+基础解系的线性组合"的形式,求出 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$ 的通解。 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 3 \end{cases}$

$$(A \mid b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \mid 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \mid 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 \mid 3 \end{pmatrix}$$

$$(A \mid b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \mid 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \mid 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 \mid 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_1}$$

$$(A \mid b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \mid 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \mid 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 \mid 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \mid 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \mid 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \mid 1 \end{pmatrix}$$

例用"特解+基础解系的线性组合"的形式,求出 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$ 的通解。 $2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 3$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} A \mid b\end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 & 3\end{array}\right) \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)$$

$$r_3 + r_2$$



$$(A \mid b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \mid 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \mid 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 \mid 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \mid 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \mid 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \mid 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$(A \mid b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \mid 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \mid 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 \mid 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \mid 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \mid 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \mid 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2-r_3} \xrightarrow{r_1-r_3}$$

$$(A \mid b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \mid 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \mid 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 \mid 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \mid 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \mid 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \mid 1 \end{pmatrix}$$



$$(A \mid b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \mid 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \mid 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 \mid 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \mid 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \mid 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \mid 1 \end{pmatrix}$$

$$r_1$$
-2 r_1



$$(A \mid b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \mid 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \mid 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 \mid 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \mid 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \mid 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \mid 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$



$$(A \mid b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$



例用"特解+基础解系的线性组合"的形式,求出 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 \text{ 的通解}. \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 3 \end{cases}$

$$(A \mid b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. 同解于:
$$\begin{cases} x_1 & -x_3 & = 1 \\ x_2 & +x_3 & -x_5 & = -1 \\ x_4 & +x_5 & = 2 \end{cases}$$

例用"特解+基础解系的线性组合"的形式,求出 $\begin{cases} x_1 + & 2x_2 + & x_3 + & x_4 - & x_5 = 1 \\ & x_2 + & x_3 + & x_4 & = 1 \text{ bi} \text{im} \\ 2x_1 + & 3x_2 + & x_3 + & 2x_4 - & x_5 = 3 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix}
A \mid b
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
1 & 2 & 1 & 1 & -1 \mid 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 \mid 1 \\
2 & 3 & 1 & 2 & -1 \mid 3
\end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix}
1 & 2 & 1 & 1 & -1 \mid 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 \mid 1 \\
0 & -1 & -1 & 0 & 1 \mid 1
\end{pmatrix}$$

$$\frac{r_3 + r_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2
\end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_3} \begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{pmatrix}$$

$$\frac{r_1 - 2r_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix}
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1
\end{pmatrix}$$

 $\xrightarrow{r_1-2r_2} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$

1. 同解于: $\begin{cases} x_1 & -x_3 & = 1 \\ x_2 + x_3 & -x_5 = -1 \\ x_4 + x_5 & = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 + x_5 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 & -x_3 & = 1 \\ x_2 & +x_3 & -x_5 & = -1 \\ x_4 & +x_5 & = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 + x_5 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 & -x_3 & = 1 \\ x_2 & +x_3 & -x_5 & = -1 \\ x_4 & +x_5 & = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 + x_5 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$$

2. 自由变量: *X*₃, *X*₅

$$\begin{cases} x_1 & -x_3 & = 1 \\ x_2 & +x_3 & -x_5 & = -1 \\ x_4 & +x_5 & = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 + x_5 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$$

- 2. 自由变量: *X*₃, *X*₅
- 3. 原方程组特解: 取自由变量 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

1. 原方程组同解干:

$$\begin{cases} x_1 & -x_3 & = 1 \\ x_2 & +x_3 & -x_5 & = -1 \\ x_4 & +x_5 & = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 + x_5 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$$

- 2. 自由变量: x_3 , x_5 3. 原方程组特解: 取自由变量 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 得特解 $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1. 原方程组同解干:

$$\begin{cases} x_1 & -x_3 & = 1 \\ x_2 & +x_3 & -x_5 & = -1 \\ x_4 & +x_5 & = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 + x_5 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$$

- 2. 自由变量: X3, X5
- 2. 自由变量: x_3, x_5 3. 原方程组特解: 取自由变量 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 得特解 $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. 导出组 Ax = 0



1. 原方程组同解干:

$$\begin{cases} x_1 & -x_3 & = 1 \\ x_2 & +x_3 & -x_5 & = -1 \\ x_4 & +x_5 & = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 + x_5 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$$

2. 自由变量:
$$x_3, x_5$$
3. 原方程组特解: 取自由变量 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 得特解 $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. 导出组
$$Ax = 0$$
同解于
$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_3 + x_5 \\ x_4 = -x_5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 & -x_3 & = 1 \\ x_2 & +x_3 & -x_5 & = -1 \\ x_4 & +x_5 & = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 + x_5 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$$

2. 自由变量: X₃, X₅

2. 自由变量:
$$x_3, x_5$$
3. 原方程组特解: 取自由变量 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 得特解 $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. 导出组
$$Ax = 0$$
同解于
$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_3 + x_5 \\ x_4 = -x_5 \end{cases}$$
 .分别取
$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
 和

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, 得基础解系 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$$

$$\begin{cases} x_1 & -x_3 & = 1 \\ x_2 & +x_3 & -x_5 & = -1 \\ x_4 & +x_5 & = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 + x_5 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$$

2. 自由变量: *x*₃, *x*₅

1. 原方程组同解干:

2. 自由变量:
$$x_3, x_5$$
3. 原方程组特解: 取自由变量 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 得特解 $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. 导出组
$$Ax = 0$$
同解于 $\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_3 + x_5 \end{cases}$.分别取 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,得基础解系 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

5. 通解: $X = \eta + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$ 其中 c_1, c_2 为任意常数。

