§2.4 逆矩阵

数学系　梁卓滨

2018 - 2019 学年暑修班

逆矩阵引入

- 一元线性方程：$ax = b \quad \xRightarrow{a\neq 0}$

逆矩阵引入

- 一元线性方程：$ax = b \quad \xRightarrow{a \neq 0} \quad x = b/a$

逆矩阵引入

- 一元线性方程：$ax = b \xRightarrow{a \neq 0} x = b/a$

- 二元线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \xRightarrow{\text{写成}} Ax = b$$

逆矩阵引入

- 一元线性方程：$ax = b \xRightarrow{a \neq 0} x = b/a$

- 二元线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \xRightarrow{\text{写成}} Ax = b \xRightarrow{A \neq 0} x = b/A\,?$$

逆矩阵引入

- 一元线性方程：$ax = b \xrightarrow{a \neq 0} x = b/a$

◇ 可避免除法，$ax = \quad b \Longrightarrow$

- 二元线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{写成}} Ax = b \xrightarrow{A \neq 0} x = b/A\ ?$$

逆矩阵引入

- 一元线性方程：$ax = b \xrightarrow{a\neq 0} x = b/a$

◇ 可避免除法，$a^{-1}ax = a^{-1}b \Longrightarrow$

- 二元线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{写成}} Ax = b \xrightarrow{A\neq 0} x = b/A\ ?$$

逆矩阵引入

- 一元线性方程：$ax = b \xRightarrow{a\neq 0} x = b/a$

◇ 可避免除法，$a^{-1}ax = a^{-1}b \Longrightarrow x = a^{-1}b$

- 二元线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \xRightarrow{\text{写成}} Ax = b \xRightarrow{A\neq 0} x = b/A\,?$$

逆矩阵引入

- 一元线性方程：$ax = b \quad \overset{a\neq 0}{\Longrightarrow} \quad x = b/a$

◇ 可避免除法，$a^{-1}ax = a^{-1}b \quad \Longrightarrow \quad x = a^{-1}b$

- 二元线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad \overset{\text{写成}}{\Longrightarrow} \quad Ax = b \quad \overset{A\neq 0}{\Longrightarrow} \quad x = b/A\,?$$

◇ 可避免除法，寻找一个 2 阶方阵 B 使得：$BA = I_2$。

逆矩阵引入

- 一元线性方程：$ax = b \xRightarrow{a\neq 0} x = b/a$

◇ 可避免除法，$a^{-1}ax = a^{-1}b \Longrightarrow x = a^{-1}b$

- 二元线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \xRightarrow{\text{写成}} Ax = b \xRightarrow{A\neq 0} x = b/A\,?$$

◇ 可避免除法，寻找一个 2 阶方阵 B 使得：$BA = I_2$。这样

$$Ax = \quad b$$

逆矩阵引入

- 一元线性方程：$ax = b \xRightarrow{a\neq 0} x = b/a$

◇ 可避免除法，$a^{-1}ax = a^{-1}b \Longrightarrow x = a^{-1}b$

- 二元线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \xRightarrow{\text{写成}} Ax = b \xRightarrow{A\neq 0} x = b/A\ ?$$

◇ 可避免除法，寻找一个 2 阶方阵 B 使得：$BA = I_2$。这样

$$BAx = Bb$$

逆矩阵引入

- 一元线性方程：$ax = b \xrightarrow{a\neq 0} x = b/a$

◇ 可避免除法，$a^{-1}ax = a^{-1}b \Longrightarrow x = a^{-1}b$

- 二元线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{写成}} Ax = b \xrightarrow{A\neq 0} x = b/A\,?$$

◇ 可避免除法，寻找一个 2 阶方阵 B 使得：$BA = I_2$。这样

$$BAx = Bb \Longrightarrow I_2x = Bb$$

逆矩阵引入

- 一元线性方程：$ax = b \xRightarrow{a\neq 0} x = b/a$

◇ 可避免除法，$a^{-1}ax = a^{-1}b \Longrightarrow x = a^{-1}b$

- 二元线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \xRightarrow{\text{写成}} Ax = b \xRightarrow{A\neq 0} x = b/A\ ?$$

◇ 可避免除法，寻找一个 2 阶方阵 B 使得：$BA = I_2$。这样

$$BAx = Bb \Longrightarrow I_2x = Bb \Longrightarrow x = Bb$$

逆矩阵引入

- 一元线性方程：$ax = b \xRightarrow{a\neq 0} x = b/a$

◇ 可避免除法，$a^{-1}ax = a^{-1}b \Longrightarrow x = a^{-1}b$

- 二元线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \xRightarrow{\text{写成}} Ax = b \xRightarrow{A\neq 0} x = b/A\,?$$

◇ 可避免除法，寻找一个 2 阶方阵 B 使得：$BA = I_2$。这样

$$BAx = Bb \Longrightarrow I_2x = Bb \Longrightarrow x = Bb$$

问题 这样的 B 是否存在；

逆矩阵引入

- 一元线性方程：$ax = b \xRightarrow{a \neq 0} x = b/a$

◇ 可避免除法，$a^{-1}ax = a^{-1}b \Longrightarrow x = a^{-1}b$

- 二元线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \xRightarrow{\text{写成}} Ax = b \xRightarrow{A \neq 0} x = b/A\ ?$$

◇ 可避免除法，寻找一个 2 阶方阵 B 使得：$BA = I_2$。这样

$$BAx = Bb \Longrightarrow I_2x = Bb \Longrightarrow x = Bb$$

问题 这样的 B 是否存在；存在的话如何找出来？

例 求解方程组 $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = -1 \\ x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$

求解思路：

例 求解方程组 $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = -1 \\ x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$

求解思路:

$$Ax = b$$

$$\Downarrow$$

例 求解方程组 $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = -1 \\ x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$

求解思路：

$$Ax = b$$

$$\Downarrow$$

$$BAx = Bb$$

$$\Downarrow$$

例 求解方程组 $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = -1 \\ x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$

求解思路:

$$Ax = b$$

$$\Downarrow^{BA=I_2}$$

$$BAx = Bb$$

$$\Downarrow$$

例 求解方程组 $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = -1 \\ x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$

求解思路：

$$Ax = b$$

$$\Downarrow {\scriptstyle BA=I_2}$$

$$BAx = Bb$$

$$\Downarrow$$

$$I_2 x = Bb$$

$$\Downarrow$$

例 求解方程组 $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = -1 \\ x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$

求解思路：

$$Ax = b$$

$$\Downarrow^{BA=I_2}$$

$$BAx = Bb$$

$$\Downarrow$$

$$I_2 x = Bb$$

$$\Downarrow$$

$$x = Bb$$

$\color{blue}{例}$ 求解方程组 $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = -1 \\ x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$

求解思路:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$Ax = b$$

$$\Downarrow {\scriptstyle BA=I_2}$$

$$BAx = Bb$$

$$\Downarrow$$

$$I_2 x = Bb$$

$$\Downarrow$$

$$x = Bb$$

例 求解方程组 $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = -1 \\ x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$

求解思路：

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$Ax = b$$

$$\Downarrow^{BA=I_2}$$

$$BAx = Bb$$

$$\Downarrow$$

$$I_2 x = Bb$$

$$\Downarrow$$

$$x = Bb$$

例 求解方程组 $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = -1 \\ x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$

求解思路：

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$Ax = b$$

$$\Downarrow {\scriptstyle BA = I_2}$$

$$BAx = Bb$$

$$\Downarrow$$

$$I_2 x = Bb$$

$$\Downarrow$$

$$x = Bb$$

例 求解方程组 $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = -1 \\ x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$

求解思路：

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad Ax = b$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow^{BA=I_2}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad BAx = Bb$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ \ \end{pmatrix} \qquad I_2 x = Bb$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$x = Bb$$

例 求解方程组 $\begin{cases} 2x_1+5x_2=-1 \\ x_1+3x_2=3 \end{cases}$

求解思路:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$Ax=b$$

$$\Downarrow {\scriptstyle BA=I_2}$$

$$BAx=Bb$$

$$\Downarrow$$

$$I_2x=Bb$$

$$\Downarrow$$

$$x=Bb$$

例 求解方程组 $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = -1 \\ x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$

求解思路：

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad Ax = b$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow^{BA=I_2}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad BAx = Bb$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad I_2x = Bb$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad x = Bb$$

逆矩阵引入

n 元线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

逆矩阵引入

n 元线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

改写成矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

逆矩阵引入

n 元线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

改写成矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Ax = b$$

逆矩阵引入

n 元线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

改写成矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Ax = b$$

问题 寻找 n 阶方阵 B 使得：$BA = I_n$。

逆矩阵引入

n 元线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

改写成矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Ax = b$$

问题 寻找 n 阶方阵 B 使得：$BA = I_n$。这样

$$Ax = \quad b$$

逆矩阵引入

n 元线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

改写成矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Ax = b$$

问题 寻找 n 阶方阵 B 使得：$BA = I_n$。这样

$$BAx = Bb$$

逆矩阵引入

n 元线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

改写成矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Ax = b$$

问题 寻找 n 阶方阵 B 使得：$BA = I_n$。这样

$$BAx = Bb \quad \Longrightarrow \quad I_n x = Bb$$

逆矩阵引入

n 元线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

改写成矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Ax = b$$

问题 寻找 n 阶方阵 B 使得：$BA = I_n$。这样

$$BAx = Bb \quad \Longrightarrow \quad I_n x = Bb \quad \Longrightarrow \quad x = Bb$$

逆矩阵

定义 对于 n 阶矩阵 A，如果存在 n 阶矩阵 B，使得 $BA = I_n$ 并且 $AB = I_n$，

逆矩阵

定义 对于 n 阶矩阵 A，如果存在 n 阶矩阵 B，使得 $BA = I_n$ 并且 $AB = I_n$，则称矩阵 A 为可逆矩阵，

逆矩阵

定义 对于 n 阶矩阵 A，如果存在 n 阶矩阵 B，使得 $BA = I_n$ 并且 $AB = I_n$，则称矩阵 A 为可逆矩阵，同时称 B 为 A 的逆矩阵。

逆矩阵

定义 对于 n 阶矩阵 A，如果存在 n 阶矩阵 B，使得 $BA = I_n$ 并且 $AB = I_n$，则称矩阵 A 为可逆矩阵，同时称 B 为 A 的逆矩阵。

性质 如果 A 可逆，那么逆矩阵是唯一的。

逆矩阵

定义 对于 n 阶矩阵 A，如果存在 n 阶矩阵 B，使得 $BA = I_n$ 并且 $AB = I_n$，则称矩阵 A 为可逆矩阵，同时称 B 为 A 的逆矩阵。

性质 如果 A 可逆，那么逆矩阵是唯一的。

证明 设 B_1 和 B_2 都是 A 的逆矩阵，要证明 $B_1 = B_2$。

逆矩阵

定义 对于 n 阶矩阵 A，如果存在 n 阶矩阵 B，使得 $BA = I_n$ 并且 $AB = I_n$，则称矩阵 A 为可逆矩阵，同时称 B 为 A 的逆矩阵。

性质 如果 A 可逆，那么逆矩阵是唯一的。

证明 设 B_1 和 B_2 都是 A 的逆矩阵，要证明 $B_1 = B_2$。

$$B_1AB_2$$

逆矩阵

定义 对于 n 阶矩阵 A，如果存在 n 阶矩阵 B，使得 $BA = I_n$ 并且 $AB = I_n$，则称矩阵 A 为可逆矩阵，同时称 B 为 A 的逆矩阵。

性质 如果 A 可逆，那么逆矩阵是唯一的。

证明 设 B_1 和 B_2 都是 A 的逆矩阵，要证明 $B_1 = B_2$。

$$= B_1 A B_2 =$$

逆矩阵

定义 对于 n 阶矩阵 A，如果存在 n 阶矩阵 B，使得 $BA = I_n$ 并且 $AB = I_n$ ，则称矩阵 A 为可逆矩阵，同时称 B 为 A 的逆矩阵。

性质 如果 A 可逆，那么逆矩阵是唯一的。

证明 设 B_1 和 B_2 都是 A 的逆矩阵，要证明 $B_1 = B_2$。

$$= B_1AB_2 = (B_1A)B_2$$

逆矩阵

定义 对于 n 阶矩阵 A，如果存在 n 阶矩阵 B，使得 $BA = I_n$ 并且 $AB = I_n$，则称矩阵 A 为可逆矩阵，同时称 B 为 A 的逆矩阵。

性质 如果 A 可逆，那么逆矩阵是唯一的。

证明 设 B_1 和 B_2 都是 A 的逆矩阵，要证明 $B_1 = B_2$。

$$= B_1AB_2 = (B_1A)B_2 = I_nB_2$$

逆矩阵

定义 对于 n 阶矩阵 A，如果存在 n 阶矩阵 B，使得 $BA = I_n$ 并且 $AB = I_n$，则称矩阵 A 为可逆矩阵，同时称 B 为 A 的逆矩阵。

性质 如果 A 可逆，那么逆矩阵是唯一的。

证明 设 B_1 和 B_2 都是 A 的逆矩阵，要证明 $B_1 = B_2$。

$$= B_1AB_2 = (B_1A)B_2 = I_nB_2 = B_2$$

逆矩阵

定义 对于 n 阶矩阵 A，如果存在 n 阶矩阵 B，使得 $BA = I_n$ 并且 $AB = I_n$，则称矩阵 A 为可逆矩阵，同时称 B 为 A 的逆矩阵。

性质 如果 A 可逆，那么逆矩阵是唯一的。

证明 设 B_1 和 B_2 都是 A 的逆矩阵，要证明 $B_1 = B_2$。

$$B_1(AB_2) = B_1AB_2 = (B_1A)B_2 = I_nB_2 = B_2$$

逆矩阵

定义 对于 n 阶矩阵 A，如果存在 n 阶矩阵 B，使得 $BA = I_n$ 并且 $AB = I_n$，则称矩阵 A 为可逆矩阵，同时称 B 为 A 的逆矩阵。

性质 如果 A 可逆，那么逆矩阵是唯一的。

证明 设 B_1 和 B_2 都是 A 的逆矩阵，要证明 $B_1 = B_2$。

$$B_1 I_n = B_1(AB_2) = B_1AB_2 = (B_1A)B_2 = I_nB_2 = B_2$$

逆矩阵

定义 对于 n 阶矩阵 A，如果存在 n 阶矩阵 B，使得 $BA = I_n$ 并且 $AB = I_n$，则称矩阵 A 为可逆矩阵，同时称 B 为 A 的逆矩阵。

性质 如果 A 可逆，那么逆矩阵是唯一的。

证明 设 B_1 和 B_2 都是 A 的逆矩阵，要证明 $B_1 = B_2$。

$$B_1 = B_1 I_n = B_1(AB_2) = B_1AB_2 = (B_1A)B_2 = I_nB_2 = B_2$$

逆矩阵

定义 对于 n 阶矩阵 A，如果存在 n 阶矩阵 B，使得 $BA = I_n$ 并且 $AB = I_n$，则称矩阵 A 为可逆矩阵，同时称 B 为 A 的逆矩阵。

性质 如果 A 可逆，那么逆矩阵是唯一的。

证明 设 B_1 和 B_2 都是 A 的逆矩阵，要证明 $B_1 = B_2$。

$$B_1 = B_1 I_n = B_1(AB_2) = B_1 AB_2 = (B_1 A)B_2 = I_n B_2 = B_2$$

注 由于 A 的逆矩阵是唯一的，我们就把它记为 A^{-1}。

逆矩阵

定义 对于 n 阶矩阵 A，如果存在 n 阶矩阵 B，使得 $BA = I_n$ 并且 $AB = I_n$，则称矩阵 A 为可逆矩阵，同时称 B 为 A 的逆矩阵。

性质 如果 A 可逆，那么逆矩阵是唯一的。

证明 设 B_1 和 B_2 都是 A 的逆矩阵，要证明 $B_1 = B_2$。

$$B_1 = B_1 I_n = B_1(AB_2) = B_1 AB_2 = (B_1 A)B_2 = I_n B_2 = B_2$$

注 由于 A 的逆矩阵是唯一的，我们就把它记为 A^{-1}。

性质 如果 A 可逆，则 $|A| \neq 0$。

逆矩阵

定义 对于 n 阶矩阵 A，如果存在 n 阶矩阵 B，使得 $BA = I_n$ 并且 $AB = I_n$，则称矩阵 A 为可逆矩阵，同时称 B 为 A 的逆矩阵。

性质 如果 A 可逆，那么逆矩阵是唯一的。

证明 设 B_1 和 B_2 都是 A 的逆矩阵，要证明 $B_1 = B_2$。

$$B_1 = B_1 I_n = B_1(AB_2) = B_1AB_2 = (B_1A)B_2 = I_nB_2 = B_2$$

注 由于 A 的逆矩阵是唯一的，我们就把它记为 A^{-1}。

性质 如果 A 可逆，则 $|A| \neq 0$。

证明 $AA^{-1} = I_n$

逆矩阵

定义 对于 n 阶矩阵 A，如果存在 n 阶矩阵 B，使得 $BA = I_n$ 并且 $AB = I_n$，则称矩阵 A 为可逆矩阵，同时称 B 为 A 的逆矩阵。

性质 如果 A 可逆，那么逆矩阵是唯一的。

证明 设 B_1 和 B_2 都是 A 的逆矩阵，要证明 $B_1 = B_2$。

$$B_1 = B_1 I_n = B_1(AB_2) = B_1AB_2 = (B_1A)B_2 = I_nB_2 = B_2$$

注 由于 A 的逆矩阵是唯一的，我们就把它记为 A^{-1}。

性质 如果 A 可逆，则 $|A| \neq 0$。

证明 $AA^{-1} = I_n \Rightarrow |AA^{-1}| = |I_n|$

逆矩阵

定义 对于 n 阶矩阵 A，如果存在 n 阶矩阵 B，使得 $BA = I_n$ 并且 $AB = I_n$，则称矩阵 A 为可逆矩阵，同时称 B 为 A 的逆矩阵。

性质 如果 A 可逆，那么逆矩阵是唯一的。

证明 设 B_1 和 B_2 都是 A 的逆矩阵，要证明 $B_1 = B_2$。

$$B_1 = B_1 I_n = B_1(AB_2) = B_1AB_2 = (B_1A)B_2 = I_nB_2 = B_2$$

注 由于 A 的逆矩阵是唯一的，我们就把它记为 A^{-1}。

性质 如果 A 可逆，则 $|A| \neq 0$。

证明 $AA^{-1} = I_n \;\Rightarrow\; |AA^{-1}| = |I_n| = 1$

逆矩阵

定义 对于 n 阶矩阵 A，如果存在 n 阶矩阵 B，使得 $BA = I_n$ 并且 $AB = I_n$，则称矩阵 A 为可逆矩阵，同时称 B 为 A 的逆矩阵。

性质 如果 A 可逆，那么逆矩阵是唯一的。

证明 设 B_1 和 B_2 都是 A 的逆矩阵，要证明 $B_1 = B_2$。

$$B_1 = B_1 I_n = B_1(AB_2) = B_1AB_2 = (B_1A)B_2 = I_nB_2 = B_2$$

注 由于 A 的逆矩阵是唯一的，我们就把它记为 A^{-1}。

性质 如果 A 可逆，则 $|A| \neq 0$。

证明 $AA^{-1} = I_n \;\Rightarrow\; |AA^{-1}| = |I_n| = 1 \;\Rightarrow\; |A| \cdot |A^{-1}| = 1$

逆矩阵

定义 对于 n 阶矩阵 A，如果存在 n 阶矩阵 B，使得 $BA = I_n$ 并且 $AB = I_n$，则称矩阵 A 为可逆矩阵，同时称 B 为 A 的逆矩阵。

性质 如果 A 可逆，那么逆矩阵是唯一的。

证明 设 B_1 和 B_2 都是 A 的逆矩阵，要证明 $B_1 = B_2$。

$$B_1 = B_1 I_n = B_1(AB_2) = B_1AB_2 = (B_1A)B_2 = I_nB_2 = B_2$$

注 由于 A 的逆矩阵是唯一的，我们就把它记为 A^{-1}。

性质 如果 A 可逆，则 $|A| \neq 0$。

证明 $AA^{-1} = I_n \Rightarrow |AA^{-1}| = |I_n| = 1 \Rightarrow |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \therefore |A| \neq 0$

逆矩阵

定义 对于 n 阶矩阵 A，如果存在 n 阶矩阵 B，使得 $BA = I_n$ 并且 $AB = I_n$，则称矩阵 A 为可逆矩阵，同时称 B 为 A 的逆矩阵。

性质 如果 A 可逆，那么逆矩阵是唯一的。

证明 设 B_1 和 B_2 都是 A 的逆矩阵，要证明 $B_1 = B_2$。

$$B_1 = B_1 I_n = B_1(AB_2) = B_1AB_2 = (B_1A)B_2 = I_nB_2 = B_2$$

注 由于 A 的逆矩阵是唯一的，我们就把它记为 A^{-1}。

性质 如果 A 可逆，则 $|A| \neq 0$。并且 $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$。

证明 $AA^{-1} = I_n \Rightarrow |AA^{-1}| = |I_n| = 1 \Rightarrow |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \therefore |A| \neq 0$

逆矩阵

定义 一般地，对任意 n 阶方阵 A，

2. 如果 $|A| \neq 0$，则称 A 为非奇异矩阵；

逆矩阵

定义 一般地，对任意 n 阶方阵 A，

1. 如果 $|A| = 0$，则称 A 为奇异矩阵；
2. 如果 $|A| \neq 0$，则称 A 为非奇异矩阵；

逆矩阵

例

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$$

逆矩阵

例

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix} \xRightarrow[(i=1,2,\ldots,n)]{\text{假设}a_i\neq 0}$$

逆矩阵

例

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix} \xRightarrow[(i=1,2,\dots,n)]{\text{假设}a_i\neq 0} A^{-1}=$$

逆矩阵

例

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix} \xrightarrow[(i=1,2,\ldots,n)]{\text{假设}a_i\neq 0} A^{-1}=\begin{pmatrix} a_1^{-1} & & & \\ & a_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^{-1} \end{pmatrix}$$

逆矩阵

例

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix} \xRightarrow[(i=1,2,\ldots,n)]{\text{假设}a_i\neq 0} A^{-1} = \begin{pmatrix} a_1^{-1} & & & \\ & a_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^{-1} \end{pmatrix}$$

这是

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^{-1} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} =$$

逆矩阵

例

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix} \xRightarrow[(i=1,2,\ldots,n)]{\text{假设}a_i\neq 0} A^{-1}=\begin{pmatrix} a_1^{-1} & & & \\ & a_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^{-1} \end{pmatrix}$$

这是

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1a_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_na_n^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^{-1} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}=$$

逆矩阵

例

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix} \xRightarrow[(i=1,2,\dots,n)]{\text{假设}a_i\neq 0} A^{-1}=\begin{pmatrix} a_1^{-1} & & & \\ & a_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^{-1} \end{pmatrix}$$

这是

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1a_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_na_n^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^{-1} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}=$$

逆矩阵

例

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix} \xRightarrow[(i=1,2,\ldots,n)]{\text{假设}a_i\neq 0} A^{-1}=\begin{pmatrix} a_1^{-1} & & & \\ & a_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^{-1} \end{pmatrix}$$

这是

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_n a_n^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^{-1} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^{-1} a_n \end{pmatrix}$$

逆矩阵

例

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix} \xRightarrow[(i=1,2,\dots,n)]{\text{假设}a_i\neq 0} A^{-1}=\begin{pmatrix} a_1^{-1} & & & \\ & a_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^{-1} \end{pmatrix}$$

这是

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1a_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_na_n^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^{-1} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1^{-1}a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^{-1}a_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

逆矩阵的判断与计算

定理 设 A 为 n 阶方阵，则：

逆矩阵的判断与计算

定理 设 A 为 n 阶方阵，则：

1. A 可逆 $\Rightarrow$ $|A| \neq 0$；

逆矩阵的判断与计算

定理 设 A 为 n 阶方阵，则：

1. A 可逆 $\quad \Leftrightarrow \quad |A| \neq 0$；

逆矩阵的判断与计算

定理 设 A 为 n 阶方阵，则：

1. A 可逆 $\quad \Leftrightarrow \quad |A| \neq 0$；
2. 若 A 可逆，则 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$，

逆矩阵的判断与计算

定理 设 A 为 n 阶方阵，则：

1. A 可逆 $\quad\Leftrightarrow\quad |A| \neq 0$；
2. 若 A 可逆，则 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$，其中

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

逆矩阵的判断与计算

定理 设 A 为 n 阶方阵，则：

1. A 可逆 $\quad\Longleftrightarrow\quad |A| \neq 0$；
2. 若 A 可逆，则 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$，其中

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

A_{ij} 是行列式 $|A|$ 中 a_{ij} 的代数余子式。

逆矩阵的判断与计算

定理 设 A 为 n 阶方阵，则：

1. A 可逆 $\quad\Leftrightarrow\quad |A| \neq 0$；
2. 若 A 可逆，则 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$，其中

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

A_{ij} 是行列式 $|A|$ 中 a_{ij} 的代数余子式。

注 1 $\quad A^*$ 的 (i, j) 位置的元素是

逆矩阵的判断与计算

定理 设 A 为 n 阶方阵，则：

1. A 可逆 $\Leftrightarrow$ $|A| \neq 0$；
2. 若 A 可逆，则 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$，其中

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

A_{ij} 是行列式 $|A|$ 中 a_{ij} 的代数余子式。

注 1 A^* 的 (i, j) 位置的元素是 A_{ji}

逆矩阵的判断与计算

定理 设 A 为 n 阶方阵，则：

1. A 可逆 $\quad\Leftrightarrow\quad |A|\neq 0$；
2. 若 A 可逆，则 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$，其中

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

A_{ij} 是行列式 $|A|$ 中 a_{ij} 的代数余子式。

注 1 $\quad A^*$ 的 (i,j) 位置的元素是 A_{ji}

注 2 $\quad$ 一般地，对任意方阵 A，称上述定义之 A^* 为 A 的伴随矩阵

证明

$$A \cdot A^* =$$

证明

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

证明

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

证明

$$A\cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

证明

$$A\cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & * & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

证明

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

证明

$$A\cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & & * \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

证明

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

证明

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & & & \\ * & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

证明

$$A\cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

证明

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & & & \\ & * & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

证明

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

证明

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & * \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

证明

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

证明

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

证明

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A| \end{pmatrix}$$

证明

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A| \end{pmatrix}$$

$$= |A| \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

证明

$$A\cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A| \end{pmatrix}$$

$$= |A| \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = |A| I_n$$

证明

$$A\cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A| \end{pmatrix}$$

$$= |A| \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = |A| I_n$$

注 对任意 n 阶方阵 A，都成立：

$$AA^* = |A| I_n$$

证明

$$A\cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A| \end{pmatrix}$$

$$= |A| \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = |A| I_n$$

- 当 $|A| \neq 0$ 时，$A\cdot\left(\frac{1}{|A|}A^*\right) = I_n$。

注 对任意 n 阶方阵 A，都成立：

$$AA^* = |A| I_n$$

证明

$$A\cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A| \end{pmatrix}$$

$$= |A| \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = |A| I_n$$

- 当 $|A| \neq 0$ 时，$A \cdot \left(\frac{1}{|A|} A^*\right) = I_n$。

注 对任意 n 阶方阵 A，都成立：

$$A^* A = AA^* = |A| I_n$$

证明

$$A\cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A| \end{pmatrix}$$

$$= |A| \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = |A| I_n$$

- 当 $|A| \neq 0$ 时，$A \cdot \left(\frac{1}{|A|}A^*\right) = I_n$。同理，$\left(\frac{1}{|A|}A^*\right) \cdot A = I_n$。

注 对任意 n 阶方阵 A，都成立：

$$A^*A = AA^* = |A| I_n$$

证明

$$A\cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A| \end{pmatrix}$$

$$= |A| \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = |A| I_n$$

- 当 $|A| \neq 0$ 时，$A\cdot\left(\frac{1}{|A|}A^*\right) = I_n$。同理，$\left(\frac{1}{|A|}A^*\right)\cdot A = I_n$。所以此时 A 可逆

注 对任意 n 阶方阵 A，都成立：

$$A^*A = AA^* = |A| I_n$$

证明

$$A\cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A| \end{pmatrix}$$

$$= |A| \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = |A| I_n$$

- 当 $|A| \neq 0$ 时，$A\cdot\left(\frac{1}{|A|}A^*\right) = I_n$。同理，$\left(\frac{1}{|A|}A^*\right)\cdot A = I_n$。所以此时 A 可逆，且 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$。

注 对任意 n 阶方阵 A，都成立：

$$A^*A = AA^* = |A| I_n$$

例 1 判断 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

例 1 判断 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

2. 求出伴随矩阵 A^*：

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

例 1 判断 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & -4\\ -3 & 2 & 1\end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & -4\\ -3 & 2 & 1\end{vmatrix}$$

2. 求出伴随矩阵 A^*：

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

例 1 判断 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & -4\\ -3 & 2 & 1\end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & -4\\ -3 & 2 & 1\end{vmatrix} \xlongequal{c_3+c_1}$$

2. 求出伴随矩阵 A^*：

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

例 1 判断 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3+c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

2. 求出伴随矩阵 A^*：

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 1 判断 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3+c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$$

2. 求出伴随矩阵 A^*：

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

例 1 判断 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & -4\\ -3 & 2 & 1\end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & -4\\ -3 & 2 & 1\end{vmatrix} \xlongequal{c_3+c_1} \begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -2\\ -3 & 2 & -2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & -2\end{vmatrix} = 2$$

2. 求出伴随矩阵 A^*：

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

例 1 判断 $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&1&-4\\-3&2&1\end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix}1&0&-1\\2&1&-4\\-3&2&1\end{vmatrix}\xlongequal{c_3+c_1}\begin{vmatrix}1&0&0\\2&1&-2\\-3&2&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2\\2&-2\end{vmatrix}=2$$

可见 $|A|\neq 0$，所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

例 1 判断 $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&1&-4\\-3&2&1\end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix}1&0&-1\\2&1&-4\\-3&2&1\end{vmatrix}\xlongequal{c_3+c_1}\begin{vmatrix}1&0&0\\2&1&-2\\-3&2&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2\\2&-2\end{vmatrix}=2$$

可见 $|A|\neq 0$，所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

例 1 判断 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & -4\\ -3 & 2 & 1\end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & -4\\ -3 & 2 & 1\end{vmatrix}\xlongequal{c_3+c_1}\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -2\\ -3 & 2 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & -2\end{vmatrix}=2$$

可见 $|A|\neq 0$，所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

例 1 判断 $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&1&-4\\-3&2&1\end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix}1&0&-1\\2&1&-4\\-3&2&1\end{vmatrix}\xlongequal{c_3+c_1}\begin{vmatrix}1&0&0\\2&1&-2\\-3&2&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2\\2&-2\end{vmatrix}=2$$

可见 $|A|\neq 0$，所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}*&&\\&&\\&&\end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

例 1 判断 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & -4\\ -3 & 2 & 1\end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & -4\\ -3 & 2 & 1\end{vmatrix}\xlongequal{c_3+c_1}\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -2\\ -3 & 2 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & -2\end{vmatrix}=2$$

可见 $|A|\neq 0$，所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

例 1 判断 $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&1&-4\\-3&2&1\end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix}1&0&-1\\2&1&-4\\-3&2&1\end{vmatrix}\xlongequal{c_3+c_1}\begin{vmatrix}1&0&0\\2&1&-2\\-3&2&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2\\2&-2\end{vmatrix}=2$$

可见 $|A|\neq 0$，所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&&\\ *&&\\ &&\end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

例 1 判断 $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&1&-4\\-3&2&1\end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix}1&0&-1\\2&1&-4\\-3&2&1\end{vmatrix}\xlongequal{c_3+c_1}\begin{vmatrix}1&0&0\\2&1&-2\\-3&2&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2\\2&-2\end{vmatrix}=2$$

可见 $|A|\neq 0$，所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&&\\10&&\\&&\end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

例 1 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{c_3+c_1}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

可见 $|A| \neq 0$，所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & & \\ 10 & & \\ * & & \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 1 判断 $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&1&-4\\-3&2&1\end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix}1&0&-1\\2&1&-4\\-3&2&1\end{vmatrix}\xlongequal{c_3+c_1}\begin{vmatrix}1&0&0\\2&1&-2\\-3&2&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2\\2&-2\end{vmatrix}=2$$

可见 $|A|\neq 0$，所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&&\\10&&\\7&&\end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

例 1 判断 $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&1&-4\\-3&2&1\end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix}1&0&-1\\2&1&-4\\-3&2&1\end{vmatrix}\xlongequal{c_3+c_1}\begin{vmatrix}1&0&0\\2&1&-2\\-3&2&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2\\2&-2\end{vmatrix}=2$$

可见 $|A|\neq 0$，所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&*&\\10&&\\7&&\end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

例 1 判断 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & -4\\ -3 & 2 & 1\end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & -4\\ -3 & 2 & 1\end{vmatrix}\xlongequal{c_3+c_1}\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -2\\ -3 & 2 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & -2\end{vmatrix}=2$$

可见 $|A|\neq 0$，所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & -2 & \\ 10 & & \\ 7 & & \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

例 1 判断 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & -4\\ -3 & 2 & 1\end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & -4\\ -3 & 2 & 1\end{vmatrix}\xlongequal{c_3+c_1}\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -2\\ -3 & 2 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & -2\end{vmatrix}=2$$

可见 $|A|\neq 0$，所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & -2 & \\ 10 & * & \\ 7 & & \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

例 1 判断 $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&1&-4\\-3&2&1\end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix}1&0&-1\\2&1&-4\\-3&2&1\end{vmatrix}\overset{c_3+c_1}{=\!=}\begin{vmatrix}1&0&0\\2&1&-2\\-3&2&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2\\2&-2\end{vmatrix}=2$$

可见 $|A|\neq 0$，所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&-2&\\10&-2&\\7&&\end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

例 1 判断 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3+c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

可见 $|A| \neq 0$，所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 & \\ 10 & -2 & \\ 7 & * & \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 1 判断 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3+c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

可见 $|A|\neq 0$，所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 & \\ 10 & -2 & \\ 7 & -2 & \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

例 1 判断 $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&1&-4\\-3&2&1\end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix}1&0&-1\\2&1&-4\\-3&2&1\end{vmatrix}\xlongequal{c_3+c_1}\begin{vmatrix}1&0&0\\2&1&-2\\-3&2&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2\\2&-2\end{vmatrix}=2$$

可见 $|A|\neq 0$，所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&-2&*\\10&-2&\\7&-2&\end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

例 1 判断 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & -4\\ -3 & 2 & 1\end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & -4\\ -3 & 2 & 1\end{vmatrix}\xlongequal{c_3+c_1}\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -2\\ -3 & 2 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & -2\end{vmatrix}=2$$

可见 $|A|\neq 0$，所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & -2 & 1\\ 10 & -2 & \\ 7 & -2 & \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

例 1 判断 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & -4\\ -3 & 2 & 1\end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & -4\\ -3 & 2 & 1\end{vmatrix}\xlongequal{c_3+c_1}\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -2\\ -3 & 2 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & -2\end{vmatrix}=2$$

可见 $|A|\neq 0$，所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & -2 & 1\\ 10 & -2 & *\\ 7 & -2 & \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

例 1 判断 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & -4\\ -3 & 2 & 1\end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & -4\\ -3 & 2 & 1\end{vmatrix}\xlongequal{c_3+c_1}\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -2\\ -3 & 2 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & -2\end{vmatrix}=2$$

可见 $|A|\neq 0$，所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & -2 & 1\\ 10 & -2 & 2\\ 7 & -2 & \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

例 1 判断 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3+c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

可见 $|A| \neq 0$，所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 1 \\ 10 & -2 & 2 \\ 7 & -2 & * \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 1 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3+c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

可见 $|A| \neq 0$，所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 1 \\ 10 & -2 & 2 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 1 判断 $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&1&-4\\-3&2&1\end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix}1&0&-1\\2&1&-4\\-3&2&1\end{vmatrix}\xlongequal{c_3+c_1}\begin{vmatrix}1&0&0\\2&1&-2\\-3&2&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2\\2&-2\end{vmatrix}=2$$

可见 $|A|\neq 0$，所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&-2&1\\10&-2&2\\7&-2&1\end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}9&-2&1\\10&-2&2\\7&-2&1\end{pmatrix}$$

例 1 判断 $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&1&-4\\-3&2&1\end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix}1&0&-1\\2&1&-4\\-3&2&1\end{vmatrix}\xlongequal{c_3+c_1}\begin{vmatrix}1&0&0\\2&1&-2\\-3&2&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2\\2&-2\end{vmatrix}=2$$

可见 $|A|\neq 0$，所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&-2&1\\10&-2&2\\7&-2&1\end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}9&-2&1\\10&-2&2\\7&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9/2&-1&1/2\\5&-1&1\\7/2&-1&1/2\end{pmatrix}$$

例 2 判断 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

例 2 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

2. 求出伴随矩阵 A^*：

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$$

例 2 判断 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{vmatrix}$$

2. 求出伴随矩阵 A^*：

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

例 2 判断 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1}$$

2. 求出伴随矩阵 A^*：

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

例 2 判断 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&2&8\end{vmatrix}$$

2. 求出伴随矩阵 A^*：

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

例 2 判断 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&2&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3\\2&8\end{vmatrix}$$

2. 求出伴随矩阵 A^*：

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

例 2 判断 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&2&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3\\2&8\end{vmatrix}=2$$

2. 求出伴随矩阵 A^*：

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

例 2 判断 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&2&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3\\2&8\end{vmatrix}=2$$

可见 $|A|\neq 0$，所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

例 2 判断 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{vmatrix}\overset{r_2-r_1}{\underset{r_3-r_1}{=\!=\!=}}\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&2&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3\\2&8\end{vmatrix}=2$$

可见 $|A|\neq 0$，所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

例 2 判断 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&2&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3\\2&8\end{vmatrix}=2$$

可见 $|A|\neq 0$，所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}&&\\&&\\&&\end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

例 2 判断 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&2&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3\\2&8\end{vmatrix}=2$$

可见 $|A|\neq 0$，所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}*&&\\&&\\&&\end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

例 2 判断 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&2&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3\\2&8\end{vmatrix}=2$$

可见 $|A|\neq 0$，所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&&\\&&\\&&\end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

例 2 判断 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&2&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3\\2&8\end{vmatrix}=2$$

可见 $|A|\neq 0$，所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&&\\ *&&\\ &&\end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

例 2 判断 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&2&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3\\2&8\end{vmatrix}=2$$

可见 $|A|\neq 0$，所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&&\\-5&&\\&&\end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

例 2 判断 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&2&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3\\2&8\end{vmatrix}=2$$

可见 $|A|\neq 0$，所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&&\\-5&&\\ *&&\end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

例 2 判断 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&2&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3\\2&8\end{vmatrix}=2$$

可见 $|A|\neq 0$，所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&&\\-5&&\\1&&\end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

例 2 判断 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&2&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3\\2&8\end{vmatrix}=2$$

可见 $|A|\neq 0$，所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&*&\\-5&&\\1&&\end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

例 2 判断 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&2&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3\\2&8\end{vmatrix}=2$$

可见 $|A|\neq 0$，所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-6&\\-5&&\\1&&\end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

例 2 判断 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{vmatrix}\overset{r_2-r_1}{\underset{r_3-r_1}{=\!=\!=}}\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&2&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3\\2&8\end{vmatrix}=2$$

可见 $|A|\neq 0$，所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-6&\\-5&*&\\1&&\end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

例 2 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3 - r_1]{r_2 - r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 2$$

可见 $|A| \neq 0$，所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -6 & \\ -5 & 8 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 2 判断 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&2&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3\\2&8\end{vmatrix}=2$$

可见 $|A|\neq 0$，所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-6&\\-5&8&\\1&*&\end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

例 2 判断 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&2&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3\\2&8\end{vmatrix}=2$$

可见 $|A|\neq 0$，所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^*:

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-6&\\-5&8&\\1&-2&\end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

例 2 判断 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&2&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3\\2&8\end{vmatrix}=2$$

可见 $|A|\neq 0$，所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-6&*\\-5&8&\\1&-2&\end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

例 2 判断 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&2&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3\\2&8\end{vmatrix}=2$$

可见 $|A|\neq 0$，所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-6&2\\-5&8&\\1&-2&\end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

例 2 判断 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&2&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3\\2&8\end{vmatrix}=2$$

可见 $|A|\neq 0$，所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-6&2\\-5&8&*\\1&-2&\end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

例 2 判断 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&2&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3\\2&8\end{vmatrix}=2$$

可见 $|A|\neq 0$，所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-6&2\\-5&8&-3\\1&-2&\end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

例 2 判断 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&2&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3\\2&8\end{vmatrix}=2$$

可见 $|A|\neq 0$，所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-6&2\\-5&8&-3\\1&-2&*\end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

例 2 判断 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&2&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3\\2&8\end{vmatrix}=2$$

可见 $|A|\neq 0$，所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-6&2\\-5&8&-3\\1&-2&1\end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

例 2 判断 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&2&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3\\2&8\end{vmatrix}=2$$

可见 $|A|\neq 0$，所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-6&2\\-5&8&-3\\1&-2&1\end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}6&-6&2\\-5&8&-3\\1&-2&1\end{pmatrix}$$

例 2 判断 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&2&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3\\2&8\end{vmatrix}=2$$

可见 $|A|\neq 0$，所以 A 可逆。

2. 求出伴随矩阵 A^*:

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-6&2\\-5&8&-3\\1&-2&1\end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}6&-6&2\\-5&8&-3\\1&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-3&1\\-5/2&4&-3/2\\1/2&-1&1/2\end{pmatrix}$$

例 3 假设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的行列式不为零，求 A^{-1}。

例 3 假设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的行列式不为零，求 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

2. 求出伴随矩阵 A^*：

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 3 假设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的行列式不为零，求 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

2. 求出伴随矩阵 A^*：

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

例 3 假设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的行列式不为零，求 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

2. 求出伴随矩阵 A^*：

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 3 假设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的行列式不为零，求 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

由假设 $|A| \neq 0$。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 3 假设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的行列式不为零，求 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

由假设 $|A|\neq 0$。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

例 3 假设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的行列式不为零，求 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

由假设 $|A|\neq 0$。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

例 3 假设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的行列式不为零，求 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

由假设 $|A|\neq 0$。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} * & \\ & \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

例 3 假设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的行列式不为零，求 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

由假设 $|A| \neq 0$。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & \\ & \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 3 假设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的行列式不为零，求 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

由假设 $|A|\neq 0$。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d & \\ * & \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

例 3 假设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的行列式不为零，求 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

由假设 $|A| \neq 0$。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & \\ -c & \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 3 假设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的行列式不为零，求 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

由假设 $|A| \neq 0$。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & * \\ -c & \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

例 3 假设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的行列式不为零，求 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

由假设 $|A|\neq 0$。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

例 3 假设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的行列式不为零，求 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

由假设 $|A|\neq 0$。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & * \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

例 3 假设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的行列式不为零，求 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

由假设 $|A|\neq 0$。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

例 3 假设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的行列式不为零，求 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

由假设 $|A|\neq 0$。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

例 3 假设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的行列式不为零，求 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

由假设 $|A| \neq 0$。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

例如 $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$

例 3 假设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的行列式不为零，求 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

由假设 $|A|\neq 0$。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

例如 $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{\ }\begin{pmatrix} \quad & \quad \end{pmatrix}$

例 3 假设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的行列式不为零，求 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$:

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

由假设 $|A|\neq 0$。

2. 求出伴随矩阵 A^*:

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

例如 $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

例 3 假设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的行列式不为零，求 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

由假设 $|A|\neq 0$。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

例如 $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & \\ & 6 \end{pmatrix}$

例 3 假设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的行列式不为零，求 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

由假设 $|A| \neq 0$。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

例如 $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$

例 3 假设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的行列式不为零，求 A^{-1}。

解 1. 先求出 $|A|$：

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

由假设 $|A|\neq 0$。

2. 求出伴随矩阵 A^*：

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

3. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

例如 $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

例 3 判断 $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

例 3 判断 $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{pmatrix}$$

例 3 判断 $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{pmatrix}$$

- 计算量很大...

例 3 判断 $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出 A^{-1}。

解

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{pmatrix}$$

- 计算量很大...
- 后面还会介绍其他计算方法...

可逆矩阵性质

性质 对于 n 阶矩阵 A，如果 $AB = I_n$，则 B 为 A 的逆矩阵

可逆矩阵性质

性质 对于 n 阶矩阵 A，如果 $AB = I_n$，则 B 为 A 的逆矩阵（也就是此时自动成立 $BA = I_n$）。

可逆矩阵性质

性质 对于 n 阶矩阵 A，如果 $AB = I_n$，则 B 为 A 的逆矩阵（也就是此时自动成立 $BA = I_n$）。

证明 1. 先说明 $|A| \neq 0$：

可逆矩阵性质

性质 对于 n 阶矩阵 A，如果 $AB = I_n$，则 B 为 A 的逆矩阵（也就是此时自动成立 $BA = I_n$）。

证明 1. 先说明 $|A| \neq 0$：

$$|AB| = |I_n|$$

可逆矩阵性质

性质 对于 n 阶矩阵 A，如果 $AB = I_n$，则 B 为 A 的逆矩阵（也就是此时自动成立 $BA = I_n$）。

证明 1. 先说明 $|A| \neq 0$：

$$|AB| = |I_n| = 1$$

可逆矩阵性质

性质 对于 n 阶矩阵 A，如果 $AB = I_n$，则 B 为 A 的逆矩阵（也就是此时自动成立 $BA = I_n$）。

证明 1. 先说明 $|A| \neq 0$：

$$|AB| = |I_n| = 1 \quad \Rightarrow \quad |A| \cdot |B| = 1$$

可逆矩阵性质

性质 对于 n 阶矩阵 A，如果 $AB = I_n$，则 B 为 A 的逆矩阵（也就是此时自动成立 $BA = I_n$）。

证明 1. 先说明 $|A| \neq 0$：

$$|AB| = |I_n| = 1 \quad \Rightarrow \quad |A| \cdot |B| = 1 \quad \Rightarrow \quad |A| \neq 0$$

可逆矩阵性质

性质 对于 n 阶矩阵 A，如果 $AB = I_n$，则 B 为 A 的逆矩阵（也就是此时自动成立 $BA = I_n$）。

证明 1. 先说明 $|A| \neq 0$：

$$|AB| = |I_n| = 1 \quad \Rightarrow \quad |A| \cdot |B| = 1 \quad \Rightarrow \quad |A| \neq 0$$

2. 由于 $|A| \neq 0$，故 A 可逆，存在 A^{-1}。

可逆矩阵性质

性质 对于 n 阶矩阵 A，如果 $AB = I_n$，则 B 为 A 的逆矩阵（也就是此时自动成立 $BA = I_n$）。

证明 1. 先说明 $|A| \neq 0$：

$$|AB| = |I_n| = 1 \quad \Rightarrow \quad |A| \cdot |B| = 1 \quad \Rightarrow \quad |A| \neq 0$$

2. 由于 $|A| \neq 0$，故 A 可逆，存在 A^{-1}。所以

$$A^{-1}AB$$

可逆矩阵性质

性质 对于 n 阶矩阵 A，如果 $AB = I_n$，则 B 为 A 的逆矩阵（也就是此时自动成立 $BA = I_n$）。

证明 1. 先说明 $|A| \neq 0$：

$$|AB| = |I_n| = 1 \quad \Rightarrow \quad |A| \cdot |B| = 1 \quad \Rightarrow \quad |A| \neq 0$$

2. 由于 $|A| \neq 0$，故 A 可逆，存在 A^{-1}。所以

$$= A^{-1}AB =$$

可逆矩阵性质

性质 对于 n 阶矩阵 A，如果 $AB = I_n$，则 B 为 A 的逆矩阵（也就是此时自动成立 $BA = I_n$）。

证明 1. 先说明 $|A| \neq 0$：

$$|AB| = |I_n| = 1 \quad \Rightarrow \quad |A| \cdot |B| = 1 \quad \Rightarrow \quad |A| \neq 0$$

2. 由于 $|A| \neq 0$，故 A 可逆，存在 A^{-1}。所以

$$= A^{-1}AB = I_nB =$$

可逆矩阵性质

性质 对于 n 阶矩阵 A，如果 $AB = I_n$，则 B 为 A 的逆矩阵（也就是此时自动成立 $BA = I_n$）。

证明 1. 先说明 $|A| \neq 0$：

$$|AB| = |I_n| = 1 \quad \Rightarrow \quad |A| \cdot |B| = 1 \quad \Rightarrow \quad |A| \neq 0$$

2. 由于 $|A| \neq 0$，故 A 可逆，存在 A^{-1}。所以

$$= A^{-1}AB = I_nB = B$$

可逆矩阵性质

性质 对于 n 阶矩阵 A，如果 $AB = I_n$，则 B 为 A 的逆矩阵（也就是此时自动成立 $BA = I_n$）。

证明 1. 先说明 $|A| \neq 0$：

$$|AB| = |I_n| = 1 \quad \Rightarrow \quad |A| \cdot |B| = 1 \quad \Rightarrow \quad |A| \neq 0$$

2. 由于 $|A| \neq 0$，故 A 可逆，存在 A^{-1}。所以

$$= A^{-1} I_n = A^{-1} AB = I_n B = B$$

可逆矩阵性质

性质 对于 n 阶矩阵 A，如果 $AB = I_n$，则 B 为 A 的逆矩阵（也就是此时自动成立 $BA = I_n$）。

证明 1. 先说明 $|A| \neq 0$：

$$|AB| = |I_n| = 1 \quad \Rightarrow \quad |A| \cdot |B| = 1 \quad \Rightarrow \quad |A| \neq 0$$

2. 由于 $|A| \neq 0$，故 A 可逆，存在 A^{-1}。所以

$$A^{-1} = A^{-1}I_n = A^{-1}AB = I_nB = B$$

可逆矩阵性质

性质 对于 n 阶矩阵 A，如果 $AB = I_n$，则 B 为 A 的逆矩阵（也就是此时自动成立 $BA = I_n$）。

证明 1. 先说明 $|A| \neq 0$：

$$|AB| = |I_n| = 1 \quad \Rightarrow \quad |A| \cdot |B| = 1 \quad \Rightarrow \quad |A| \neq 0$$

2. 由于 $|A| \neq 0$，故 A 可逆，存在 A^{-1}。所以

$$A^{-1} = A^{-1} I_n = A^{-1} AB = I_n B = B$$

例 1 假设方阵 A 满足 $2A^2 - 3A + 4I = O$，证明 A 可逆，并求出 A^{-1}

可逆矩阵性质

性质 对于 n 阶矩阵 A，如果 $AB = I_n$，则 B 为 A 的逆矩阵（也就是此时自动成立 $BA = I_n$）。

证明 1. 先说明 $|A| \neq 0$：

$$|AB| = |I_n| = 1 \quad \Rightarrow \quad |A| \cdot |B| = 1 \quad \Rightarrow \quad |A| \neq 0$$

2. 由于 $|A| \neq 0$，故 A 可逆，存在 A^{-1}。所以

$$A^{-1} = A^{-1} I_n = A^{-1} AB = I_n B = B$$

例 1 假设方阵 A 满足 $2A^2 - 3A + 4I = O$，证明 A 可逆，并求出 A^{-1}

解

可逆矩阵性质

性质 对于 n 阶矩阵 A，如果 $AB=I_n$，则 B 为 A 的逆矩阵（也就是此时自动成立 $BA=I_n$）。

证明 1. 先说明 $|A|\neq 0$：

$$|AB|=|I_n|=1 \quad \Rightarrow \quad |A|\cdot|B|=1 \quad \Rightarrow \quad |A|\neq 0$$

2. 由于 $|A|\neq 0$，故 A 可逆，存在 A^{-1}。所以

$$A^{-1}=A^{-1}I_n=A^{-1}AB=I_nB=B$$

例 1 假设方阵 A 满足 $2A^2-3A+4I=O$，证明 A 可逆，并求出 A^{-1}

解 $2A^2-3A=-4I$

可逆矩阵性质

性质 对于 n 阶矩阵 A，如果 $AB = I_n$，则 B 为 A 的逆矩阵（也就是此时自动成立 $BA = I_n$）。

证明 1. 先说明 $|A| \neq 0$：

$$|AB| = |I_n| = 1 \quad \Rightarrow \quad |A| \cdot |B| = 1 \quad \Rightarrow \quad |A| \neq 0$$

2. 由于 $|A| \neq 0$，故 A 可逆，存在 A^{-1}。所以

$$A^{-1} = A^{-1} I_n = A^{-1} AB = I_n B = B$$

例 1 假设方阵 A 满足 $2A^2 - 3A + 4I = O$，证明 A 可逆，并求出 A^{-1}

解 $2A^2 - 3A = -4I \ \Rightarrow \ A(2A - 3I) = -4I$

可逆矩阵性质

性质 对于 n 阶矩阵 A，如果 $AB = I_n$，则 B 为 A 的逆矩阵（也就是此时自动成立 $BA = I_n$）。

证明 1. 先说明 $|A| \neq 0$：

$$|AB| = |I_n| = 1 \quad \Rightarrow \quad |A| \cdot |B| = 1 \quad \Rightarrow \quad |A| \neq 0$$

2. 由于 $|A| \neq 0$，故 A 可逆，存在 A^{-1}。所以

$$A^{-1} = A^{-1} I_n = A^{-1} AB = I_n B = B$$

例 1 假设方阵 A 满足 $2A^2 - 3A + 4I = O$，证明 A 可逆，并求出 A^{-1}

解 $2A^2 - 3A = -4I \Rightarrow A(2A - 3I) = -4I \Rightarrow A\left(-\frac{1}{2}A + \frac{3}{4}I\right) = I$

可逆矩阵性质

性质 对于 n 阶矩阵 A，如果 $AB = I_n$，则 B 为 A 的逆矩阵（也就是此时自动成立 $BA = I_n$）。

证明 1. 先说明 $|A| \neq 0$：

$$|AB| = |I_n| = 1 \quad \Rightarrow \quad |A| \cdot |B| = 1 \quad \Rightarrow \quad |A| \neq 0$$

2. 由于 $|A| \neq 0$，故 A 可逆，存在 A^{-1}。所以

$$A^{-1} = A^{-1} I_n = A^{-1} AB = I_n B = B$$

例 1 假设方阵 A 满足 $2A^2 - 3A + 4I = O$，证明 A 可逆，并求出 A^{-1}

解 $2A^2 - 3A = -4I \Rightarrow A(2A - 3I) = -4I \Rightarrow A\left(-\frac{1}{2}A + \frac{3}{4}I\right) = I$

所以 A 可逆

可逆矩阵性质

性质 对于 n 阶矩阵 A，如果 $AB = I_n$，则 B 为 A 的逆矩阵（也就是此时自动成立 $BA = I_n$）。

证明 1. 先说明 $|A| \neq 0$：

$$|AB| = |I_n| = 1 \quad \Rightarrow \quad |A| \cdot |B| = 1 \quad \Rightarrow \quad |A| \neq 0$$

2. 由于 $|A| \neq 0$，故 A 可逆，存在 A^{-1}。所以

$$A^{-1} = A^{-1}I_n = A^{-1}AB = I_nB = B$$

例 1 假设方阵 A 满足 $2A^2 - 3A + 4I = O$，证明 A 可逆，并求出 A^{-1}

解 $2A^2 - 3A = -4I \;\Rightarrow\; A(2A - 3I) = -4I \;\Rightarrow\; A\left(-\frac{1}{2}A + \frac{3}{4}I\right) = I$

所以 A 可逆，并且 $A^{-1} = -\frac{1}{2}A + \frac{3}{4}I$

可逆矩阵性质

例 2 假设方阵 A 满足 $2A^2 + 5A - I = O$，证明 A 可逆，并求出 A^{-1}

可逆矩阵性质

例 2 假设方阵 A 满足 $2A^2+5A-I=O$，证明 A 可逆，并求出 A^{-1}

解

$$2A^2+5A=I$$

可逆矩阵性质

例 2 假设方阵 A 满足 $2A^2+5A-I=O$，证明 A 可逆，并求出 A^{-1}

解

$$2A^2+5A=I \;\Rightarrow\; A(2A+5I)=I$$

可逆矩阵性质

例 2 假设方阵 A 满足 $2A^2+5A-I=O$，证明 A 可逆，并求出 A^{-1}

解

$$2A^2+5A=I \Rightarrow A(2A+5I)=I$$

所以 A 可逆

可逆矩阵性质

例 2 假设方阵 A 满足 $2A^2+5A-I=O$，证明 A 可逆，并求出 A^{-1}

解

$$2A^2+5A=I \Rightarrow A(2A+5I)=I$$

所以 A 可逆，并且 $A^{-1}=2A+5I$

可逆矩阵性质

1. 若 A 可逆，则 A^{-1} 也可逆

可逆矩阵性质

1. 若 A 可逆，则 A^{-1} 也可逆，而且 $(A^{-1})^{-1} = A$；

可逆矩阵性质

1. 若 A 可逆，则 A^{-1} 也可逆，而且 $(A^{-1})^{-1} = A$；

证明

1. 这是：$AA^{-1} = I_n$

可逆矩阵性质

1. 若 A 可逆，则 A^{-1} 也可逆，而且 $(A^{-1})^{-1} = A$；
2. 若 A 可逆且 $k \neq 0$，则 kA 也可逆

证明

1. 这是：$AA^{-1} = I_n$

可逆矩阵性质

1. 若 A 可逆，则 A^{-1} 也可逆，而且 $(A^{-1})^{-1} = A$；
2. 若 A 可逆且 $k \neq 0$，则 kA 也可逆，而且 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$；

证明

1. 这是：$AA^{-1} = I_n$

可逆矩阵性质

1. 若 A 可逆，则 A^{-1} 也可逆，而且 $(A^{-1})^{-1} = A$；
2. 若 A 可逆且 $k \neq 0$，则 kA 也可逆，而且 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$；

证明

1. 这是：$AA^{-1} = I_n$
2. 这是：$(kA)\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right) =$

可逆矩阵性质

1. 若 A 可逆，则 A^{-1} 也可逆，而且 $(A^{-1})^{-1} = A$；
2. 若 A 可逆且 $k \neq 0$，则 kA 也可逆，而且 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$；

证明

1. 这是：$AA^{-1} = I_n$
2. 这是：$(kA)\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right) = (k\frac{1}{k})(AA^{-1}) =$

可逆矩阵性质

1. 若 A 可逆，则 A^{-1} 也可逆，而且 $(A^{-1})^{-1} = A$；
2. 若 A 可逆且 $k \neq 0$，则 kA 也可逆，而且 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$；

证明

1. 这是：$AA^{-1} = I_n$
2. 这是：$(kA)\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right) = (k\frac{1}{k})(AA^{-1}) = I_n$

可逆矩阵性质

1. 若 A 可逆，则 A^{-1} 也可逆，而且 $(A^{-1})^{-1} = A$；
2. 若 A 可逆且 $k \neq 0$，则 kA 也可逆，而且 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$；
3. 若 A, B 为同阶可逆矩阵，则 AB 也可逆

证明

1. 这是：$AA^{-1} = I_n$
2. 这是：$(kA)\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right) = (k\frac{1}{k})(AA^{-1}) = I_n$

可逆矩阵性质

1. 若 A 可逆，则 A^{-1} 也可逆，而且 $(A^{-1})^{-1} = A$；
2. 若 A 可逆且 $k \neq 0$，则 kA 也可逆，而且 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$；
3. 若 A, B 为同阶可逆矩阵，则 AB 也可逆，而且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$；

证明

1. 这是：$AA^{-1} = I_n$
2. 这是：$(kA)\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right) = (k\frac{1}{k})(AA^{-1}) = I_n$

可逆矩阵性质

1. 若 A 可逆，则 A^{-1} 也可逆，而且 $(A^{-1})^{-1} = A$；
2. 若 A 可逆且 $k \neq 0$，则 kA 也可逆，而且 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$；
3. 若 A, B 为同阶可逆矩阵，则 AB 也可逆，而且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$；

证明

1. 这是：$AA^{-1} = I_n$
2. 这是：$(kA)\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right) = (k\frac{1}{k})(AA^{-1}) = I_n$
3. 这是：$(AB)(B^{-1}A^{-1}) =$

可逆矩阵性质

1. 若 A 可逆，则 A^{-1} 也可逆，而且 $(A^{-1})^{-1} = A$；
2. 若 A 可逆且 $k \neq 0$，则 kA 也可逆，而且 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$；
3. 若 A, B 为同阶可逆矩阵，则 AB 也可逆，而且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$；

证明

1. 这是：$AA^{-1} = I_n$
2. 这是：$(kA)\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right) = (k\frac{1}{k})(AA^{-1}) = I_n$
3. 这是：$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} =$

可逆矩阵性质

1. 若 A 可逆，则 A^{-1} 也可逆，而且 $(A^{-1})^{-1} = A$；
2. 若 A 可逆且 $k \neq 0$，则 kA 也可逆，而且 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$；
3. 若 A, B 为同阶可逆矩阵，则 AB 也可逆，而且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$；

证明

1. 这是：$AA^{-1} = I_n$
2. 这是：$(kA)\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right) = (k\frac{1}{k})(AA^{-1}) = I_n$
3. 这是：$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = AI_nA^{-1} =$

可逆矩阵性质

1. 若 A 可逆，则 A^{-1} 也可逆，而且 $(A^{-1})^{-1}=A$；
2. 若 A 可逆且 $k\neq 0$，则 kA 也可逆，而且 $(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$；
3. 若 A, B 为同阶可逆矩阵，则 AB 也可逆，而且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$；

证明

1. 这是：$AA^{-1}=I_n$
2. 这是：$(kA)\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right)=(k\frac{1}{k})(AA^{-1})=I_n$
3. 这是：$(AB)(B^{-1}A^{-1})=ABB^{-1}A^{-1}=AI_nA^{-1}=AA^{-1}=$

可逆矩阵性质

1. 若 A 可逆，则 A^{-1} 也可逆，而且 $(A^{-1})^{-1} = A$；
2. 若 A 可逆且 $k \neq 0$，则 kA 也可逆，而且 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$；
3. 若 A, B 为同阶可逆矩阵，则 AB 也可逆，而且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$；

证明

1. 这是：$AA^{-1} = I_n$
2. 这是：$(kA)\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right) = (k\frac{1}{k})(AA^{-1}) = I_n$
3. 这是：$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$

可逆矩阵性质

1. 若 A 可逆，则 A^{-1} 也可逆，而且 $(A^{-1})^{-1} = A$；
2. 若 A 可逆且 $k \neq 0$，则 kA 也可逆，而且 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$；
3. 若 A, B 为同阶可逆矩阵，则 AB 也可逆，而且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$；
4. 若 A 可逆，则 $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

证明

1. 这是：$AA^{-1} = I_n$
2. 这是：$(kA)\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right) = (k\frac{1}{k})(AA^{-1}) = I_n$
3. 这是：$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$

可逆矩阵性质

1. 若 A 可逆，则 A^{-1} 也可逆，而且 $(A^{-1})^{-1} = A$；
2. 若 A 可逆且 $k \neq 0$，则 kA 也可逆，而且 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$；
3. 若 A, B 为同阶可逆矩阵，则 AB 也可逆，而且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$；
4. 若 A 可逆，则 $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

证明

1. 这是：$AA^{-1} = I_n$
2. 这是：$(kA)\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right) = (k\frac{1}{k})(AA^{-1}) = I_n$
3. 这是：$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$
4. 这是：$$|AA^{-1}| = |I_n|$$

可逆矩阵性质

1. 若 A 可逆，则 A^{-1} 也可逆，而且 $(A^{-1})^{-1} = A$；
2. 若 A 可逆且 $k \neq 0$，则 kA 也可逆，而且 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$；
3. 若 A, B 为同阶可逆矩阵，则 AB 也可逆，而且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$；
4. 若 A 可逆，则 $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

证明

1. 这是：$AA^{-1} = I_n$
2. 这是：$(kA)\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right) = (k\frac{1}{k})(AA^{-1}) = I_n$
3. 这是：$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$
4. 这是：$$|AA^{-1}| = |I_n| = 1$$

可逆矩阵性质

1. 若 A 可逆，则 A^{-1} 也可逆，而且 $(A^{-1})^{-1} = A$；
2. 若 A 可逆且 $k \neq 0$，则 kA 也可逆，而且 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$；
3. 若 A, B 为同阶可逆矩阵，则 AB 也可逆，而且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$；
4. 若 A 可逆，则 $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

证明

1. 这是：$AA^{-1} = I_n$
2. 这是：$(kA)\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right) = (k\frac{1}{k})(AA^{-1}) = I_n$
3. 这是：$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$
4. 这是：$|A| \cdot |A^{-1}| = |AA^{-1}| = |I_n| = 1$

例 1 由于矩阵的乘法是不满足交换律的，因此求解矩阵方程时要注意逆矩阵的摆放位置。例如

1. $AX = C \quad \Longrightarrow \quad X = ?$

例 1 由于矩阵的乘法是不满足交换律的，因此求解矩阵方程时要注意逆矩阵的摆放位置。例如

1. $AX = C \xrightarrow{AX = \quad C} X = ?$

例 1 由于矩阵的乘法是不满足交换律的，因此求解矩阵方程时要注意逆矩阵的摆放位置。例如

1. $AX = C \quad \xRightarrow{A^{-1}AX=A^{-1}C} \quad X = ?$

例 1 由于矩阵的乘法是不满足交换律的，因此求解矩阵方程时要注意逆矩阵的摆放位置。例如

1. $AX = C \xrightarrow{A^{-1}AX=A^{-1}C} X = A^{-1}C$

例 1 由于矩阵的乘法是不满足交换律的，因此求解矩阵方程时要注意逆矩阵的摆放位置。例如

1. $AX = C \xRightarrow{A^{-1}AX=A^{-1}C} X = A^{-1}C$
2. $XA = C \Longrightarrow X = ?$

例 1 由于矩阵的乘法是不满足交换律的，因此求解矩阵方程时要注意逆矩阵的摆放位置。例如

1. $AX = C \xRightarrow{A^{-1}AX=A^{-1}C} X = A^{-1}C$
2. $XA = C \xRightarrow{XA\qquad=C} X = ?$

例 1 由于矩阵的乘法是不满足交换律的，因此求解矩阵方程时要注意逆矩阵的摆放位置。例如

1. $AX = C \xRightarrow{A^{-1}AX=A^{-1}C} X = A^{-1}C$
2. $XA = C \xRightarrow{XAA^{-1}=CA^{-1}} X = ?$

例 1 由于矩阵的乘法是不满足交换律的，因此求解矩阵方程时要注意逆矩阵的摆放位置。例如

1. $AX = C \xRightarrow{A^{-1}AX=A^{-1}C} X = A^{-1}C$
2. $XA = C \xRightarrow{XAA^{-1}=CA^{-1}} X = CA^{-1}$

例 1 由于矩阵的乘法是不满足交换律的，因此求解矩阵方程时要注意逆矩阵的摆放位置。例如

1. $AX = C \xRightarrow{A^{-1}AX=A^{-1}C} X = A^{-1}C$
2. $XA = C \xRightarrow{XAA^{-1}=CA^{-1}} X = CA^{-1}$
3. $AXB = C \Longrightarrow X = ?$
4. $XAB = C \Longrightarrow X = ?$
5. $ABX = C \Longrightarrow X = ?$

例 1 由于矩阵的乘法是不满足交换律的，因此求解矩阵方程时要注意逆矩阵的摆放位置。例如

1. $AX = C \xRightarrow{A^{-1}AX=A^{-1}C} X = A^{-1}C$
2. $XA = C \xRightarrow{XAA^{-1}=CA^{-1}} X = CA^{-1}$
3. $AXB = C \xRightarrow{AXB \quad = \quad C} X = ?$
4. $XAB = C \Longrightarrow X = ?$
5. $ABX = C \Longrightarrow X = ?$

例 1 由于矩阵的乘法是不满足交换律的，因此求解矩阵方程时要注意逆矩阵的摆放位置。例如

1. $AX = C \xRightarrow{A^{-1}AX=A^{-1}C} X = A^{-1}C$
2. $XA = C \xRightarrow{XAA^{-1}=CA^{-1}} X = CA^{-1}$
3. $AXB = C \xRightarrow{A^{-1}AXB \qquad =A^{-1}C} X = ?$
4. $XAB = C \Longrightarrow X = ?$
5. $ABX = C \Longrightarrow X = ?$

例 1 由于矩阵的乘法是不满足交换律的，因此求解矩阵方程时要注意逆矩阵的摆放位置。例如

1. $AX = C \xrightarrow{A^{-1}AX=A^{-1}C} X = A^{-1}C$
2. $XA = C \xrightarrow{XAA^{-1}=CA^{-1}} X = CA^{-1}$
3. $AXB = C \xrightarrow{A^{-1}AXBB^{-1}=A^{-1}CB^{-1}} X = ?$
4. $XAB = C \Longrightarrow X = ?$
5. $ABX = C \Longrightarrow X = ?$

例 1 由于矩阵的乘法是不满足交换律的，因此求解矩阵方程时要注意逆矩阵的摆放位置。例如

1. $AX = C \xRightarrow{A^{-1}AX=A^{-1}C} X = A^{-1}C$
2. $XA = C \xRightarrow{XAA^{-1}=CA^{-1}} X = CA^{-1}$
3. $AXB = C \xRightarrow{A^{-1}AXBB^{-1}=A^{-1}CB^{-1}} X = A^{-1}CB^{-1}$
4. $XAB = C \Longrightarrow X = ?$
5. $ABX = C \Longrightarrow X = ?$

例 1 由于矩阵的乘法是不满足交换律的，因此求解矩阵方程时要注意逆矩阵的摆放位置。例如

1. $AX = C \xRightarrow{A^{-1}AX=A^{-1}C} X = A^{-1}C$
2. $XA = C \xRightarrow{XAA^{-1}=CA^{-1}} X = CA^{-1}$
3. $AXB = C \xRightarrow{A^{-1}AXBB^{-1}=A^{-1}CB^{-1}} X = A^{-1}CB^{-1}$
4. $XAB = C \xRightarrow{XAB\qquad\qquad=C} X = ?$
5. $ABX = C \xRightarrow{\qquad\qquad\qquad} X = ?$

例 1 由于矩阵的乘法是不满足交换律的，因此求解矩阵方程时要注意逆矩阵的摆放位置。例如

1. $AX = C \xrightarrow{A^{-1}AX=A^{-1}C} X = A^{-1}C$
2. $XA = C \xrightarrow{XAA^{-1}=CA^{-1}} X = CA^{-1}$
3. $AXB = C \xrightarrow{A^{-1}AXBB^{-1}=A^{-1}CB^{-1}} X = A^{-1}CB^{-1}$
4. $XAB = C \xrightarrow{XABB^{-1}\qquad =CB^{-1}} X = ?$
5. $ABX = C \Longrightarrow X = ?$

例 1 由于矩阵的乘法是不满足交换律的，因此求解矩阵方程时要注意逆矩阵的摆放位置。例如

1. $AX = C \xRightarrow{A^{-1}AX=A^{-1}C} X = A^{-1}C$
2. $XA = C \xRightarrow{XAA^{-1}=CA^{-1}} X = CA^{-1}$
3. $AXB = C \xRightarrow{A^{-1}AXBB^{-1}=A^{-1}CB^{-1}} X = A^{-1}CB^{-1}$
4. $XAB = C \xRightarrow{XABB^{-1}A^{-1}=CB^{-1}A^{-1}} X = ?$
5. $ABX = C \Longrightarrow X = ?$

例 1 由于矩阵的乘法是不满足交换律的，因此求解矩阵方程时要注意逆矩阵的摆放位置。例如

1. $AX = C \xRightarrow{A^{-1}AX=A^{-1}C} X = A^{-1}C$
2. $XA = C \xRightarrow{XAA^{-1}=CA^{-1}} X = CA^{-1}$
3. $AXB = C \xRightarrow{A^{-1}AXBB^{-1}=A^{-1}CB^{-1}} X = A^{-1}CB^{-1}$
4. $XAB = C \xRightarrow{XABB^{-1}A^{-1}=CB^{-1}A^{-1}} X = CB^{-1}A^{-1}$
5. $ABX = C \Longrightarrow X = ?$

例 1 由于矩阵的乘法是不满足交换律的，因此求解矩阵方程时要注意逆矩阵的摆放位置。例如

1. $AX = C \xRightarrow{A^{-1}AX=A^{-1}C} X = A^{-1}C$
2. $XA = C \xRightarrow{XAA^{-1}=CA^{-1}} X = CA^{-1}$
3. $AXB = C \xRightarrow{A^{-1}AXBB^{-1}=A^{-1}CB^{-1}} X = A^{-1}CB^{-1}$
4. $XAB = C \xRightarrow{XABB^{-1}A^{-1}=CB^{-1}A^{-1}} X = CB^{-1}A^{-1}$
5. $ABX = C \xRightarrow{ABX= \qquad C} X = ?$

例 1 由于矩阵的乘法是不满足交换律的，因此求解矩阵方程时要注意逆矩阵的摆放位置。例如

1. $AX = C \xrightarrow{A^{-1}AX=A^{-1}C} X = A^{-1}C$
2. $XA = C \xrightarrow{XAA^{-1}=CA^{-1}} X = CA^{-1}$
3. $AXB = C \xrightarrow{A^{-1}AXBB^{-1}=A^{-1}CB^{-1}} X = A^{-1}CB^{-1}$
4. $XAB = C \xrightarrow{XABB^{-1}A^{-1}=CB^{-1}A^{-1}} X = CB^{-1}A^{-1}$
5. $ABX = C \xrightarrow{A^{-1}ABX=\qquad A^{-1}C} X = ?$

例 1 由于矩阵的乘法是不满足交换律的，因此求解矩阵方程时要注意逆矩阵的摆放位置。例如

1. $AX = C \xRightarrow{A^{-1}AX=A^{-1}C} X = A^{-1}C$
2. $XA = C \xRightarrow{XAA^{-1}=CA^{-1}} X = CA^{-1}$
3. $AXB = C \xRightarrow{A^{-1}AXBB^{-1}=A^{-1}CB^{-1}} X = A^{-1}CB^{-1}$
4. $XAB = C \xRightarrow{XABB^{-1}A^{-1}=CB^{-1}A^{-1}} X = CB^{-1}A^{-1}$
5. $ABX = C \xRightarrow{B^{-1}A^{-1}ABX=B^{-1}A^{-1}C} X = ?$

例 1 由于矩阵的乘法是不满足交换律的，因此求解矩阵方程时要注意逆矩阵的摆放位置。例如

1. $AX = C \xRightarrow{A^{-1}AX=A^{-1}C} X = A^{-1}C$
2. $XA = C \xRightarrow{XAA^{-1}=CA^{-1}} X = CA^{-1}$
3. $AXB = C \xRightarrow{A^{-1}AXBB^{-1}=A^{-1}CB^{-1}} X = A^{-1}CB^{-1}$
4. $XAB = C \xRightarrow{XABB^{-1}A^{-1}=CB^{-1}A^{-1}} X = CB^{-1}A^{-1}$
5. $ABX = C \xRightarrow{B^{-1}A^{-1}ABX=B^{-1}A^{-1}C} X = B^{-1}A^{-1}C$

例 2 假设 2 阶方阵 X 满足：$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$，求 X。

例 2 假设 2 阶方阵 X 满足：$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$，求 X。

解

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

例 2 假设 2 阶方阵 X 满足：$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$，求 X。

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

例 2 假设 2 阶方阵 X 满足：$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$，求 X。

解 $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

例 2 假设 2 阶方阵 X 满足：$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$，求 X。

解 $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$，所以 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 可逆，且

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

例 2 假设 2 阶方阵 X 满足：$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$，求 X。

解 $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$，所以 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 可逆，且

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\quad} \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

例 2 假设 2 阶方阵 X 满足：$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$，求 X。

解 $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$，所以 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 可逆，且

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

例 2 假设 2 阶方阵 X 满足：$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$，求 X。

解 $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$，所以 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 可逆，且

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & \\ & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

例 2 假设 2 阶方阵 X 满足：$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$，求 X。

解 $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$，所以 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 可逆，且

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

例 2 假设 2 阶方阵 X 满足：$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$，求 X。

解 $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$，所以 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 可逆，且

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

所以

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$=$$

例 2 假设 2 阶方阵 X 满足：$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$，求 X。

解 $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$，所以 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 可逆，且

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

所以

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} =$$

例 2 假设 2 阶方阵 X 满足：$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$，求 X。

解 $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$，所以 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 可逆，且

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

所以

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

例 2 假设 2 阶方阵 X 满足：$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$，求 X。

解 $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$，所以 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 可逆，且

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

所以

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

例 3 假设 2 阶方阵 X 满足：$X\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，求 X。

例 3 假设 2 阶方阵 X 满足：$X\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，求 X。

例 3 假设 2 阶方阵 X 满足：$X\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，求 X。

解

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$$

例 3 假设 2 阶方阵 X 满足：$X\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，求 X。

解

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$$

例 3 假设 2 阶方阵 X 满足：$X\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，求 X。

解 $\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 8$

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$$

例 3 假设 2 阶方阵 X 满足：$X\begin{pmatrix}6&8\\2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}$，求 X。

解 $\begin{vmatrix}6&8\\2&4\end{vmatrix}=8$，所以 $\begin{pmatrix}6&8\\2&4\end{pmatrix}$ 可逆，且

$$\begin{pmatrix}6&8\\2&4\end{pmatrix}^{-1}=$$

$$X=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&8\\2&4\end{pmatrix}^{-1}$$

例 3 假设 2 阶方阵 X 满足：$X\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，求 X。

解 $\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 8$，所以 $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ 可逆，且

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{}\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$$

例 3 假设 2 阶方阵 X 满足：$X\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，求 X。

解 $\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 8$，所以 $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ 可逆，且

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$$

例 3 假设 2 阶方阵 X 满足：$X\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，求 X。

解 $\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 8$，所以 $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ 可逆，且

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & \\ & 6 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$$

例 3 假设 2 阶方阵 X 满足：$X\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，求 X。

解 $\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 8$，所以 $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ 可逆，且

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$$

例 3 假设 2 阶方阵 X 满足：$X\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，求 X。

解 $\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 8$，所以 $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ 可逆，且

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

所以

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$=$$

例 3 假设 2 阶方阵 X 满足：$X\begin{pmatrix}6 & 8\\ 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$，求 X。

解 $\begin{vmatrix}6 & 8\\ 2 & 4\end{vmatrix}=8$，所以 $\begin{pmatrix}6 & 8\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ 可逆，且

$$\begin{pmatrix}6 & 8\\ 2 & 4\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}4 & -8\\ -2 & 6\end{pmatrix}$$

所以

$$X=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & 8\\ 2 & 4\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -8\\ -2 & 6\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}4 & -8\\ 0 & 4\end{pmatrix}=$$

例 3 假设 2 阶方阵 X 满足：$X\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，求 X。

解 $\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 8$，所以 $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ 可逆，且

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

所以

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$