§1.6　行列式的公式表示

数学系　梁卓滨

2017 - 2018 学年 I

Outline of §1.6

回顾二三阶行列式的公式

- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{matrix}$

回顾二三阶行列式的公式

- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{matrix}$

问：对 4 阶行列式是否也有类似的公式？

回顾二三阶行列式的公式

- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{matrix}$

问：对 4 阶行列式是否也有类似的公式？

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = ?$$

回顾二三阶行列式的公式

- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$

问：对 4 阶行列式是否也有类似的公式？

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = ?$$

猜：4 阶行列式应该有 $4! = 24$ 项；

回顾二三阶行列式的公式

- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$

问：对 4 阶行列式是否也有类似的公式？

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = ?$$

猜：4 阶行列式应该有 $4! = 24$ 项；每一项是不同行不同列的 4 个元素的乘积；

回顾二三阶行列式的公式

- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$

问：对 4 阶行列式是否也有类似的公式？

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = ?$$

猜：4 阶行列式应该有 $4! = 24$ 项；每一项是不同行不同列的 4 个元素的乘积；其中一半取正号，一半取负号。

更一般地，n 阶行列式的公式表达式是什么？

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = ?$$

更一般地，n 阶行列式的公式表达式是什么？

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = ?$$

猜

1. n 阶行列式应该有 $n!$ 项；

更一般地，n 阶行列式的公式表达式是什么？

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = ?$$

猜

1. n 阶行列式应该有 $n!$ 项；
2. 每一项是不同行不同列的 n 个元素的乘积；

更一般地，n 阶行列式的公式表达式是什么？

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = ?$$

猜

1. n 阶行列式应该有 $n!$ 项；
2. 每一项是不同行不同列的 n 个元素的乘积；
3. 其中一半取正号，一半取负号。

排列、逆序

定义 由 n 个不同的数 1，2，$\cdots$，n 组成的有序数组 $i_1 i_2 \cdots i_n$，称为一个n 级排列。

排列、逆序

定义 由 n 个不同的数 1，2，$\cdots$，n 组成的有序数组 $i_1 i_2 \cdots i_n$，称为一个n 级排列。

例 41253 是一个 5 级排列。

排列、逆序

定义 由 n 个不同的数 1，2，$\cdots$，n 组成的有序数组 $i_1 i_2 \cdots i_n$，称为一个 n 级排列。

例 41253 是一个 5 级排列。还有 23514, 43152... 都是 5 级排列。

排列、逆序

定义 由 n 个不同的数 1，2，$\cdots$，n 组成的有序数组 $i_1 i_2 \cdots i_n$，称为一个n 级排列。

例 41253 是一个 5 级排列。还有 23514, 43152... 都是 5 级排列。5 级排列一共有 ________ 个。

排列、逆序

定义 由 n 个不同的数 1，2，$\cdots$，n 组成的有序数组 $i_1 i_2 \cdots i_n$，称为一个n 级排列。

例 41253 是一个 5 级排列。还有 23514, 43152... 都是 5 级排列。5 级排列一共有 5!_______ 个。

排列、逆序

定义 由 n 个不同的数 1，2，⋯，n 组成的有序数组 $i_1 i_2 \cdots i_n$，称为一个 n 级排列。

例 41253 是一个 5 级排列。还有 23514, 43152... 都是 5 级排列。5 级排列一共有 $\underline{5! = 120}$ 个。

排列、逆序

定义 由 n 个不同的数 1，2，$\cdots$，n 组成的有序数组 $i_1 i_2 \cdots i_n$，称为一个n 级排列。

例 41253 是一个 5 级排列。还有 23514, 43152... 都是 5 级排列。5 级排列一共有 $\underline{5! = 120}$ 个。

注 n 级排列一共有 $n!$ 种。

排列、逆序

定义 由 n 个不同的数 1，2，$\cdots$，n 组成的有序数组 $i_1 i_2 \cdots i_n$，称为一个n 级排列。

例 41253 是一个 5 级排列。还有 23514, 43152... 都是 5 级排列。5 级排列一共有 $\underline{5! = 120}$ 个。

注 n 级排列一共有 $n!$ 种。

定义 在一个 n 级排列中，如果有较大的数 i_t 排在较小的数 i_s 前面（$i_s < i_t$），则称 i_t 和 i_s 组成一个逆序。

排列、逆序

定义 由 n 个不同的数 1，2，$\cdots$，n 组成的有序数组 $i_1 i_2 \cdots i_n$，称为一个 n 级排列。

例 41253 是一个 5 级排列。还有 23514, 43152... 都是 5 级排列。5 级排列一共有 $\underline{5! = 120}$ 个。

注 n 级排列一共有 $n!$ 种。

定义 在一个 n 级排列中，如果有较大的数 i_t 排在较小的数 i_s 前面（$i_s < i_t$），则称 i_t 和 i_s 组成一个逆序。

例 (4, 1)，(4, 2) 是排列 41253 的逆序

排列、逆序

定义 由 n 个不同的数 1，2，$\cdots$，n 组成的有序数组 $i_1 i_2 \cdots i_n$，称为一个n 级排列。

例 41253 是一个 5 级排列。还有 23514, 43152... 都是 5 级排列。5 级排列一共有 $\underline{5! = 120}$ 个。

注 n 级排列一共有 $n!$ 种。

定义 在一个 n 级排列中，如果有较大的数 i_t 排在较小的数 i_s 前面（$i_s < i_t$）, 则称 i_t 和 i_s 组成一个逆序。

例 (4, 1)，(4, 2) 是排列 41253 的逆序，其余的逆序还有：

排列、逆序

定义 由 n 个不同的数 1，2，$\cdots$，n 组成的有序数组 $i_1 i_2 \cdots i_n$，称为一个 n 级排列。

例 41253 是一个 5 级排列。还有 23514, 43152... 都是 5 级排列。5 级排列一共有 $\underline{5! = 120}$ 个。

注 n 级排列一共有 $n!$ 种。

定义 在一个 n 级排列中，如果有较大的数 i_t 排在较小的数 i_s 前面（$i_s < i_t$），则称 i_t 和 i_s 组成一个逆序。

例 (4, 1)，(4, 2) 是排列 41253 的逆序，其余的逆序还有：

(4, 3),

排列、逆序

定义 由 n 个不同的数 1，2，$\cdots$，n 组成的有序数组 $i_1 i_2 \cdots i_n$，称为一个 n 级排列。

例 41253 是一个 5 级排列。还有 23514, 43152... 都是 5 级排列。5 级排列一共有 $\underline{5! = 120}$ 个。

注 n 级排列一共有 $n!$ 种。

定义 在一个 n 级排列中，如果有较大的数 i_t 排在较小的数 i_s 前面（$i_s < i_t$），则称 i_t 和 i_s 组成一个逆序。

例 (4, 1)，(4, 2) 是排列 41253 的逆序，其余的逆序还有：(4, 3), (5, 3)。

排列、逆序

练习 写出以下 6 阶排列的所有逆序

- 243165:
- 213465:

排列、逆序

练习 写出以下 6 阶排列的所有逆序

- 243165：(2, 1),
- 213465：

排列、逆序

练习 写出以下 6 阶排列的所有逆序

- 243165：(2, 1), (4, 3),
- 213465：

排列、逆序

练习 写出以下 6 阶排列的所有逆序

- 243165：(2, 1), (4, 3), (4, 1),
- 213465：

排列、逆序

练习 写出以下 6 阶排列的所有逆序

- 243165：(2, 1), (4, 3), (4, 1), (3, 1),
- 213465：

排列、逆序

练习 写出以下 6 阶排列的所有逆序

- 243165：(2, 1), (4, 3), (4, 1), (3, 1), (6, 5)
- 213465：

排列、逆序

练习 写出以下 6 阶排列的所有逆序

- 243165：(2, 1), (4, 3), (4, 1), (3, 1), (6, 5)
- 213465：(2, 1),

排列、逆序

练习 写出以下 6 阶排列的所有逆序

- 243165：(2, 1), (4, 3), (4, 1), (3, 1), (6, 5)
- 213465：(2, 1), (6, 5)

排列、逆序

练习 写出以下 6 阶排列的所有逆序

- 243165：(2, 1), (4, 3), (4, 1), (3, 1), (6, 5)
- 213465：(2, 1), (6, 5)

定义 一个 n 级排列 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 的全部的逆序的总数，称为它的逆序数，记为 $N(i_1 i_2 \cdots i_n)$。

排列、逆序

练习 写出以下 6 阶排列的所有逆序

- 243165：(2, 1), (4, 3), (4, 1), (3, 1), (6, 5)
- 213465：(2, 1), (6, 5)

定义 一个 n 级排列 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 的全部的逆序的总数，称为它的逆序数，记为 $N(i_1 i_2 \cdots i_n)$。

例 $N(243165) =$ ，$N(213465) =$

排列、逆序

练习 写出以下 6 阶排列的所有逆序

- 243165：(2, 1), (4, 3), (4, 1), (3, 1), (6, 5)
- 213465：(2, 1), (6, 5)

定义 一个 n 级排列 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 的全部的逆序的总数，称为它的逆序数，记为 $N(i_1 i_2 \cdots i_n)$。

例 $N(243165) = 5$，$N(213465) =$

排列、逆序

练习 写出以下 6 阶排列的所有逆序

- 243165：(2, 1), (4, 3), (4, 1), (3, 1), (6, 5)
- 213465：(2, 1), (6, 5)

定义 一个 n 级排列 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 的全部的逆序的总数，称为它的逆序数，记为 $N(i_1 i_2 \cdots i_n)$。

例 $N(243165) = 5$，$N(213465) = 2$

排列、逆序

练习 写出以下 6 阶排列的所有逆序

- 243165：(2, 1), (4, 3), (4, 1), (3, 1), (6, 5)
- 213465：(2, 1), (6, 5)

定义 一个 n 级排列 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 的全部的逆序的总数，称为它的逆序数，记为 $N(i_1 i_2 \cdots i_n)$。

例 $N(243165) = 5$，$N(213465) = 2$

定义 若一个排列的逆序数为奇数 (偶数)，则称它为奇排列(偶排列)。

排列、逆序

练习 写出以下 6 阶排列的所有逆序

- 243165：(2, 1), (4, 3), (4, 1), (3, 1), (6, 5)
- 213465：(2, 1), (6, 5)

定义 一个 n 级排列 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 的全部的逆序的总数，称为它的逆序数，记为 $N(i_1 i_2 \cdots i_n)$。

例 $N(243165) = 5$，$N(213465) = 2$

定义 若一个排列的逆序数为奇数 (偶数)，则称它为奇排列(偶排列)。

例 243165 　　　　，213465 　　　　。

排列、逆序

练习 写出以下 6 阶排列的所有逆序

- 243165：(2, 1), (4, 3), (4, 1), (3, 1), (6, 5)
- 213465：(2, 1), (6, 5)

定义 一个 n 级排列 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 的全部的逆序的总数，称为它的逆序数，记为 $N(i_1 i_2 \cdots i_n)$。

例 $N(243165) = 5$，$N(213465) = 2$

定义 若一个排列的逆序数为奇数 (偶数)，则称它为奇排列(偶排列)。

例 243165是奇排列，213465 。

排列、逆序

练习 写出以下 6 阶排列的所有逆序

- 243165：(2, 1), (4, 3), (4, 1), (3, 1), (6, 5)
- 213465：(2, 1), (6, 5)

定义 一个 n 级排列 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 的全部的逆序的总数，称为它的逆序数，记为 $N(i_1 i_2 \cdots i_n)$。

例 $N(243165) = 5$，$N(213465) = 2$

定义 若一个排列的逆序数为奇数 (偶数)，则称它为奇排列(偶排列)。

例 243165是奇排列，213465是偶排列。

对换

定义 交换排列中其中两个数的位置，而保持其他数的位置不变，就得到一个新排列。这个新排列称为原来排列的一个对换

对换

定义 交换排列中其中两个数的位置，而保持其他数的位置不变，就得到一个新排列。这个新排列称为原来排列的一个对换

例 排列 243165 施以对换 (1, 4) 后得到排列 213465

对换

定义 交换排列中其中两个数的位置，而保持其他数的位置不变，就得到一个新排列。这个新排列称为原来排列的一个对换

例 排列 243165 施以对换 $(1, 4)$ 后得到排列 213465（奇排列 $\Rightarrow$ 偶排列）

对换

定义 交换排列中其中两个数的位置，而保持其他数的位置不变，就得到一个新排列。这个新排列称为原来排列的一个对换

例 排列 243165 施以对换 $(1, 4)$ 后得到排列 213465（奇排列 $\Rightarrow$ 偶排列）

定理 1.1 任何排列经过一个对换之后奇偶性改变

对换

定义 交换排列中其中两个数的位置，而保持其他数的位置不变，就得到一个新排列。这个新排列称为原来排列的一个对换

例 排列 243165 施以对换 $(1, 4)$ 后得到排列 213465（奇排列 $\Rightarrow$ 偶排列）

定理 1.1 任何排列经过一个对换之后奇偶性改变

注 因为排列经过对换之后奇偶性改变，所以在所有 n 级排列中，奇排列和偶排列各占一半

再看三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$

再看三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{c} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$

- 出现所有不同行不同列的三个元素的乘积

再看三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{c} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$

- 出现所有不同行不同列的三个元素的乘积
- 乘积中三个元素行标总是按 $(1, 2, 3)$ 顺序

再看三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$

- 出现所有不同行不同列的三个元素的乘积
- 乘积中三个元素行标总是按 (1, 2, 3) 顺序
- 正负号

再看三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$

- 出现所有不同行不同列的三个元素的乘积
- 乘积中三个元素行标总是按 (1, 2, 3) 顺序
- 正负号
  - 取正号：列标顺序是 (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)

再看三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{c} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$

- 出现所有不同行不同列的三个元素的乘积
- 乘积中三个元素行标总是按 (1, 2, 3) 顺序
- 正负号
  - 取正号：列标顺序是 (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)
  - 取负号：列标顺序是 (1, 3, 2), (2, 1, 3), (3, 2, 1)

再看三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{c} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$

- 出现所有不同行不同列的三个元素的乘积
- 乘积中三个元素行标总是按 (1, 2, 3) 顺序
- 正负号
  - 取正号：列标顺序是 (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)：偶排列
  - 取负号：列标顺序是 (1, 3, 2), (2, 1, 3), (3, 2, 1)

再看三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{c} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$

- 出现所有不同行不同列的三个元素的乘积
- 乘积中三个元素行标总是按 (1, 2, 3) 顺序
- 正负号
  - 取正号：列标顺序是 (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)：偶排列
  - 取负号：列标顺序是 (1, 3, 2), (2, 1, 3), (3, 2, 1)：奇排列

再看三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$

- 出现所有不同行不同列的三个元素的乘积
- 乘积中三个元素行标总是按 (1, 2, 3) 顺序
- 正负号
  - 取正号：列标顺序是 (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)：偶排列
  - 取负号：列标顺序是 (1, 3, 2), (2, 1, 3), (3, 2, 1)：奇排列
- 三阶行列式中中每一项形如

$$(-1)^{N(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$$

其中 $(j_1 j_2 j_3)$ 是 (1, 2, 3) 的所有排列

n 阶行列式的公式表示

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

n 阶行列式的公式表示

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

n 阶行列式的公式表示

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (-1)^{N(j_1 j_2 \ldots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

n 阶行列式的公式表示

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{N(j_1 j_2 \ldots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

n 阶行列式的公式表示

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{N(j_1 j_2 \ldots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

其中 $(j_1 j_2 \ldots, j_n)$ 是 $(1, 2, \ldots, n)$ 的所有排列。

n 阶行列式的公式表示

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{N(j_1 j_2 \ldots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

其中 $(j_1 j_2 \ldots, j_n)$ 是 $(1, 2, \ldots, n)$ 的所有排列。

总结

- 和式中每一项

$$(-1)^{N(j_1 j_2 \ldots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

称为行列式的一般项。列标排列 $j_1 j_2 \ldots, j_n$ 为奇排列时，取负号；偶排列时，取正号。

n 阶行列式的公式表示

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{N(j_1 j_2 \ldots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

其中 $(j_1 j_2 \ldots, j_n)$ 是 $(1, 2, \ldots, n)$ 的所有排列。

总结

- 和式中每一项

$$(-1)^{N(j_1 j_2 \ldots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

  称为行列式的一般项。列标排列 $j_1 j_2 \ldots, j_n$ 为奇排列时，取负号；偶排列时，取正号。

- 共 $n!$ 个一般项，一半取正号，一半取负号

n 阶行列式的公式表示

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{N(j_1 j_2 \ldots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

其中 $(j_1 j_2 \ldots, j_n)$ 是 $(1, 2, \ldots, n)$ 的所有排列。

总结

- 和式中每一项

$$(-1)^{N(j_1 j_2 \ldots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

  称为行列式的一般项。列标排列 $j_1 j_2 \ldots, j_n$ 为奇排列时，取负号；偶排列时，取正号。

- 共 $n!$ 个一般项，一半取正号，一半取负号
- 不同行不同列的元素乘积的代数和

例 四阶行列式 $|a_{ij}|$ 中 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 前应冠以正号还是负号？

例 四阶行列式 $|a_{ij}|$ 中 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 前应冠以正号还是负号？

解 该项在 4 阶行列式中为

$$(-1)^{N(4312)}a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$$

例 四阶行列式 $|a_{ij}|$ 中 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 前应冠以正号还是负号？

解 该项在 4 阶行列式中为

$$(-1)^{N(4312)}a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$$

因为 $N(4312)=5$,

例 四阶行列式 $|a_{ij}|$ 中 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 前应冠以正号还是负号？

解 该项在 4 阶行列式中为

$$(-1)^{N(4312)}a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$$

因为 $N(4312)=5$，所以 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 前应冠以负号。

例 四阶行列式 $|a_{ij}|$ 中 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 前应冠以正号还是负号？

解 该项在 4 阶行列式中为

$$(-1)^{N(4312)}a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$$

因为 $N(4312)=5$，所以 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 前应冠以负号。

练习 六阶行列式 $|a_{ij}|$ 中 $a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$ 前应冠以正号还是负号？

例 四阶行列式 $|a_{ij}|$ 中 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 前应冠以正号还是负号？

解 该项在 4 阶行列式中为

$$(-1)^{N(4312)}a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$$

因为 $N(4312)=5$，所以 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 前应冠以负号。

练习 六阶行列式 $|a_{ij}|$ 中 $a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$ 前应冠以正号还是负号？

解 现将行标按次序排好：

$$a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}=a_{16}a_{21}a_{34}a_{42}a_{53}a_{65}$$

例 四阶行列式 $|a_{ij}|$ 中 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 前应冠以正号还是负号？

解 该项在 4 阶行列式中为

$$(-1)^{N(4312)}a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$$

因为 $N(4312)=5$，所以 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 前应冠以负号。

练习 六阶行列式 $|a_{ij}|$ 中 $a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$ 前应冠以正号还是负号？

解 现将行标按次序排好：

$$a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}=a_{16}a_{21}a_{34}a_{42}a_{53}a_{65}$$

该项在 6 阶行列式中为

$$(-1)^{N(614235)}a_{16}a_{21}a_{34}a_{42}a_{53}a_{65}$$

例 四阶行列式 $|a_{ij}|$ 中 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 前应冠以正号还是负号？

解 该项在 4 阶行列式中为

$$(-1)^{N(4312)}a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$$

因为 $N(4312)=5$，所以 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 前应冠以负号。

练习 六阶行列式 $|a_{ij}|$ 中 $a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$ 前应冠以正号还是负号？

解 现将行标按次序排好：

$$a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}=a_{16}a_{21}a_{34}a_{42}a_{53}a_{65}$$

该项在 6 阶行列式中为

$$(-1)^{N(614235)}a_{16}a_{21}a_{34}a_{42}a_{53}a_{65}$$

因为 $N(614235)=7$，

例 四阶行列式 $|a_{ij}|$ 中 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 前应冠以正号还是负号？

解 该项在 4 阶行列式中为

$$(-1)^{N(4312)}a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$$

因为 $N(4312)=5$，所以 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 前应冠以负号。

练习 六阶行列式 $|a_{ij}|$ 中 $a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$ 前应冠以正号还是负号？

解 现将行标按次序排好：

$$a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}=a_{16}a_{21}a_{34}a_{42}a_{53}a_{65}$$

该项在 6 阶行列式中为

$$(-1)^{N(614235)}a_{16}a_{21}a_{34}a_{42}a_{53}a_{65}$$

因为 $N(614235)=7$，所以 $a_{16}a_{21}a_{34}a_{42}a_{53}a_{65}$ 前应冠以负号。

例 用行列式的公式计算

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

例 用行列式的公式计算

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \sum (-1)^{N(j_1 j_2 j_3 j_4)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}$$

$$=$$

例 用行列式的公式计算

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \sum (-1)^{N(j_1 j_2 j_3 j_4)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}$$

$$= \qquad a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4$$

例 用行列式的公式计算

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \sum (-1)^{N(j_1 j_2 j_3 j_4)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}$$

$$= \qquad a_1 \;\; a_2 \;\; a_{32} a_4$$

例 用行列式的公式计算

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \sum (-1)^{N(j_1 j_2 j_3 j_4)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}$$

$$= \qquad a_{14} a_{2} \quad a_{32} a_{4}$$

例 用行列式的公式计算

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \sum (-1)^{N(j_1 j_2 j_3 j_4)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}$$

$$= \qquad a_{14} a_{2}\ \ a_{32} a_{43}$$

例 用行列式的公式计算

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \sum (-1)^{N(j_1 j_2 j_3 j_4)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}$$

$$= \qquad a_{14} a_{21} a_{32} a_{43}$$

例 用行列式的公式计算

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= \sum (-1)^{N(j_1 j_2 j_3 j_4)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4} \\ &= (-1)^{N(4123)} a_{14} a_{21} a_{32} a_{43} \\ &= \end{aligned}$$

例 用行列式的公式计算

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \sum (-1)^{N(j_1 j_2 j_3 j_4)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}$$

$$= (-1)^{N(4123)} a_{14} a_{21} a_{32} a_{43}$$

$$= (-1)^3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 =$$

例 用行列式的公式计算

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \sum (-1)^{N(j_1 j_2 j_3 j_4)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}$$

$$= (-1)^{N(4123)} a_{14} a_{21} a_{32} a_{43}$$

$$= (-1)^3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = -1$$