第 3 章 e：函数的极值与最大值最小值

数学系　梁卓滨

2019-2020 学年 I

Outline

We are here now...

1. 函数的极值及其求法

2. 函数的最大值最小值

定义 设 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域内有定义.

- 若对 x_0 附近的点 x，都成立

$$f(x) < f(x_0)$$

定义 设 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域内有定义.

- 若对 x_0 附近的点 x，都成立

$$f(x) < f(x_0)$$

则称 x_0 为 $f(x)$ 的一个**极大值点**，$f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的一个**极大值**.

定义 设 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域内有定义.

- 若对 x_0 附近的点 x，都成立

$$f(x) < f(x_0)$$

则称 x_0 为 $f(x)$ 的一个**极大值点**，$f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的一个**极大值**.

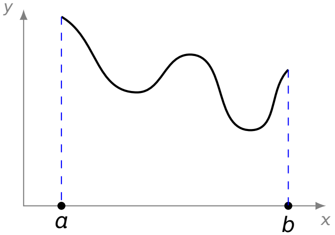
- 若对 x_0 附近的点 x，都成立

$$f(x) > f(x_0)$$

定义 设 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域内有定义.

- 若对 x_0 附近的点 x，都成立
$$f(x) < f(x_0)$$
则称 x_0 为 $f(x)$ 的一个**极大值点**，$f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的一个**极大值**.
- 若对 x_0 附近的点 x，都成立
$$f(x) > f(x_0)$$
则称 x_0 为 $f(x)$ 的一个**极小值点**，$f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的一个**极小值**.

定义 设 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域内有定义.



- 若对 x_0 附近的点 x，都成立

$$f(x) < f(x_0)$$

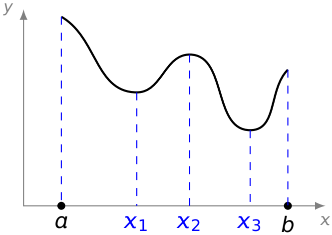
则称 x_0 为 $f(x)$ 的一个**极大值点**，$f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的一个**极大值**.

- 若对 x_0 附近的点 x，都成立

$$f(x) > f(x_0)$$

则称 x_0 为 $f(x)$ 的一个**极小值点**，$f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的一个**极小值**.

定义 设 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域内有定义.



- 若对 x_0 附近的点 x，都成立

$$f(x) < f(x_0)$$

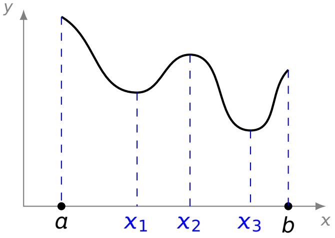
则称 x_0 为 $f(x)$ 的一个**极大值点**，$f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的一个**极大值**.

- 若对 x_0 附近的点 x，都成立

$$f(x) > f(x_0)$$

则称 x_0 为 $f(x)$ 的一个**极小值点**，$f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的一个**极小值**.

定义 设 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域内有定义.



- 若对 x_0 附近的点 x，都成立

$$f(x) < f(x_0)$$

则称 x_0 为 $f(x)$ 的一个**极大值点**，$f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的一个**极大值**.

- 若对 x_0 附近的点 x，都成立

$$f(x) > f(x_0)$$

则称 x_0 为 $f(x)$ 的一个**极小值点**，$f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的一个**极小值**.

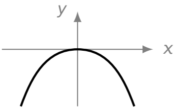
注 区间的端点排除在极值点定义之外：设 $f(x)$ 定义在闭区间 $[a, b]$ 上，在端点 $x = a$ 和 $x = b$ 的开邻域上，$f(x)$ 不是都有定义，故不是极值点.

例

- $x = 0$ 是 $y = -x^2$ 的极大值点.

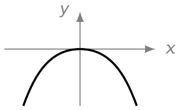
例

- $x = 0$ 是 $y = -x^2$ 的极大值点.



例

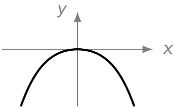
- $x = 0$ 是 $y = -x^2$ 的极大值点.



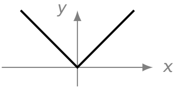
- $x = 0$ 是 $y = |x|$ 的极小值点.

例

- $x = 0$ 是 $y = -x^2$ 的极大值点.

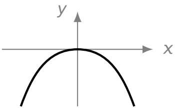


- $x = 0$ 是 $y = |x|$ 的极小值点.

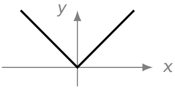


例

- $x = 0$ 是 $y = -x^2$ 的极大值点.



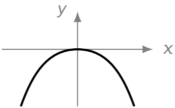
- $x = 0$ 是 $y = |x|$ 的极小值点.



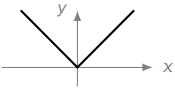
- $x = 0$ 不是 $y = x^3$ 的极值点.

例

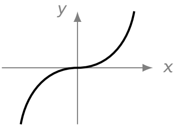
- $x = 0$ 是 $y = -x^2$ 的极大值点.



- $x = 0$ 是 $y = |x|$ 的极小值点.

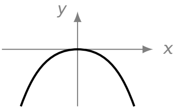


- $x = 0$ 不是 $y = x^3$ 的极值点.

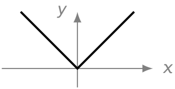


例

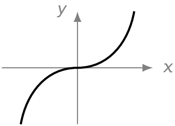
- $x = 0$ 是 $y = -x^2$ 的极大值点.



- $x = 0$ 是 $y = |x|$ 的极小值点.



- $x = 0$ 不是 $y = x^3$ 的极值点.



问题 如何求出函数 $f(x)$ 的极值点？例如

$$f(x) = (x-4)(x+1)^{\frac{2}{3}}.$$

极值点的必要条件

回忆

费马引理 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则

$$x_0\text{是极值点} \quad \Rightarrow \quad x_0 \text{ 是驻点，即 } f'(x_0) = 0.$$

极值点的必要条件

回忆

费马引理 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则

$$x_0\text{是极值点} \quad \Rightarrow \quad x_0\text{ 是驻点，即 } f'(x_0) = 0.$$

注

1. 逆命题不成立：驻点 $\not\Rightarrow$ 极值点.

极值点的必要条件

回忆

费马引理 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则

$$x_0\text{是极值点} \quad \Rightarrow \quad x_0 \text{ 是驻点，即 } f'(x_0) = 0.$$

注

1. 逆命题不成立：驻点 $\not\Rightarrow$ 极值点.
   例如 $f(x) = x^3$，$x = 0$ 是驻点，但不是极值点.

极值点的必要条件

回忆

费马引理 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则

$$x_0\text{是极值点} \quad \Rightarrow \quad x_0\text{ 是驻点，即 } f'(x_0) = 0.$$

注

1. 逆命题不成立：驻点 $\not\Rightarrow$ 极值点.
   例如 $f(x) = x^3$，$x = 0$ 是驻点，但不是极值点.
2. 极值点可以不可导；不可导的极值点不是驻点.

极值点的必要条件

回忆

费马引理 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则

$$x_0\text{是极值点} \quad \Rightarrow \quad x_0 \text{ 是驻点，即 } f'(x_0) = 0.$$

注

1. 逆命题不成立：驻点 $\not\Rightarrow$ 极值点.
   例如 $f(x) = x^3$，$x = 0$ 是驻点，但不是极值点.
2. 极值点可以不可导；不可导的极值点不是驻点.
   例如 $f(x) = |x|$，$x = 0$ 是极值点，但不是驻点，原因是 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不可导.

极值点的求解：第一判别法

(1) 求出 $f'(x)$，并求出驻点，以及不可导点.

极值点的求解：第一判别法

(1) 求出 $f'(x)$，并求出$\boxed{\text{驻点}}$，以及$\boxed{\text{不可导点}}$.

极值点的求解：第一判别法

(1) 求出 $f'(x)$，并求出驻点，以及不可导点.

(2) 设 x_0 是上述求出的点，判断 f' 在 x_0 左、右邻域的正负：

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

极值点的求解：第一判别法

(1) 求出 $f'(x)$，并求出$\boxed{\text{驻点}}$，以及$\boxed{\text{不可导点}}$.

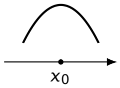
(2) 设 x_0 是上述求出的点，判断 f' 在 x_0 左、右邻域的正负：

x_0 左邻域	x_0 右邻域		
$f' > 0$	$f' < 0$		
$f' < 0$	$f' > 0$		
f' 同号			

极值点的求解：第一判别法

(1) 求出 $f'(x)$，并求出驻点，以及不可导点.

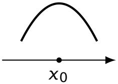
(2) 设 x_0 是上述求出的点，判断 f' 在 x_0 左、右邻域的正负：

x_0 左邻域	x_0 右邻域		
$f' > 0$	$f' < 0$		
$f' < 0$	$f' > 0$		
f' 同号			

极值点的求解：第一判别法

(1) 求出 $f'(x)$，并求出驻点，以及不可导点.

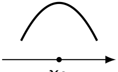
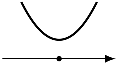
(2) 设 x_0 是上述求出的点，判断 f' 在 x_0 左、右邻域的正负：

x_0 左邻域	x_0 右邻域		
$f' > 0$	$f' < 0$		$\Rightarrow x_0$ 是极大值点
$f' < 0$	$f' > 0$		
f' 同号			

极值点的求解：第一判别法

(1) 求出 $f'(x)$，并求出驻点，以及不可导点.

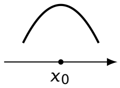
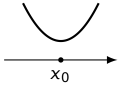
(2) 设 x_0 是上述求出的点，判断 f' 在 x_0 左、右邻域的正负：

x_0 左邻域	x_0 右邻域		
$f' > 0$	$f' < 0$		$\Rightarrow$ x_0 是极大值点
$f' < 0$	$f' > 0$		
f' 同号			

极值点的求解：第一判别法

(1) 求出 $f'(x)$，并求出驻点，以及不可导点.

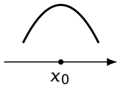
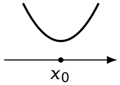
(2) 设 x_0 是上述求出的点，判断 f' 在 x_0 左、右邻域的正负：

x_0 左邻域	x_0 右邻域		
$f' > 0$	$f' < 0$		$\Rightarrow x_0$ 是极大值点
$f' < 0$	$f' > 0$		$\Rightarrow x_0$ 是极小值点
f' 同号			

极值点的求解：第一判别法

(1) 求出 $f'(x)$，并求出驻点，以及不可导点.

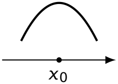
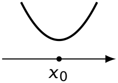
(2) 设 x_0 是上述求出的点，判断 f' 在 x_0 左、右邻域的正负：

x_0 左邻域	x_0 右邻域		
$f' > 0$	$f' < 0$		$\Rightarrow$ x_0 是极大值点
$f' < 0$	$f' > 0$		$\Rightarrow$ x_0 是极小值点
f' 同号		单调函数	

极值点的求解：第一判别法

(1) 求出 $f'(x)$，并求出驻点，以及不可导点.

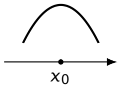
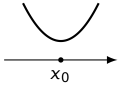
(2) 设 x_0 是上述求出的点，判断 f' 在 x_0 左、右邻域的正负：

x_0 左邻域	x_0 右邻域		
$f' > 0$	$f' < 0$		$\Rightarrow x_0$ 是极大值点
$f' < 0$	$f' > 0$		$\Rightarrow x_0$ 是极小值点
f' 同号		单调函数	$\Rightarrow x_0$ 不是极值点

极值点的求解：第一判别法

(1) 求出 $f'(x)$，并求出驻点，以及不可导点.

(2) 设 x_0 是上述求出的点，判断 f' 在 x_0 左、右邻域的正负：

x_0 左邻域	x_0 右邻域		
$f' > 0$	$f' < 0$		$\Rightarrow x_0$ 是极大值点
$f' < 0$	$f' > 0$		$\Rightarrow x_0$ 是极小值点
f' 同号		单调函数	$\Rightarrow x_0$ 不是极值点

例 1 求函数 $f(x) = (x-4)(x+1)^{\frac{2}{3}}$ 的极值.

例 1 求函数 $f(x) = (x-4)(x+1)^{\frac{2}{3}}$ 的极值.

例 1 求函数 $f(x) = (x-4)(x+1)^{\frac{2}{3}}$ 的极值.

解 1. 求导数

$$y' = (x+1)^{\frac{2}{3}} + (x-4) \cdot \frac{2}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}}$$

例 1 求函数 $f(x) = (x-4)(x+1)^{\frac{2}{3}}$ 的极值.

解 1. 求导数

$$y' = (x+1)^{\frac{2}{3}} + (x-4) \cdot \frac{2}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}} = \frac{5}{3}(x-1)(x+1)^{-\frac{1}{3}}$$

例 1 求函数 $f(x) = (x-4)(x+1)^{\frac{2}{3}}$ 的极值.

解 1. 求导数

$$y' = (x+1)^{\frac{2}{3}} + (x-4)\cdot\frac{2}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}} = \frac{5}{3}(x-1)(x+1)^{-\frac{1}{3}}$$

所以驻点 $x=1$，不可导点 $x=-1$.

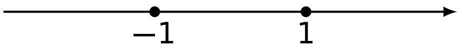
例 1 求函数 $f(x)=(x-4)(x+1)^{\frac{2}{3}}$ 的极值.

解 1. 求导数

$$y'=(x+1)^{\frac{2}{3}}+(x-4)\cdot\frac{2}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}}=\frac{5}{3}(x-1)(x+1)^{-\frac{1}{3}}$$

所以驻点 $x=1$，不可导点 $x=-1$.

2. 判定导数的正负：



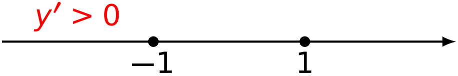
例 1 求函数 $f(x) = (x-4)(x+1)^{\frac{2}{3}}$ 的极值.

解 1. 求导数

$$y' = (x+1)^{\frac{2}{3}} + (x-4)\cdot\frac{2}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}} = \frac{5}{3}(x-1)(x+1)^{-\frac{1}{3}}$$

所以驻点 $x=1$，不可导点 $x=-1$.

2. 判定导数的正负：



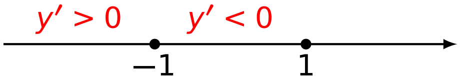
例 1 求函数 $f(x) = (x-4)(x+1)^{\frac{2}{3}}$ 的极值.

解 1. 求导数

$$y' = (x+1)^{\frac{2}{3}} + (x-4) \cdot \frac{2}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}} = \frac{5}{3}(x-1)(x+1)^{-\frac{1}{3}}$$

所以驻点 $x=1$，不可导点 $x=-1$.

2. 判定导数的正负：



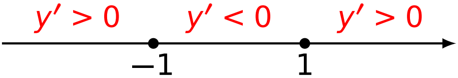
例 1 求函数 $f(x)=(x-4)(x+1)^{\frac{2}{3}}$ 的极值.

解 1. 求导数

$$y'=(x+1)^{\frac{2}{3}}+(x-4)\cdot\frac{2}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}}=\frac{5}{3}(x-1)(x+1)^{-\frac{1}{3}}$$

所以驻点 $x=1$，不可导点 $x=-1$.

2. 判定导数的正负：



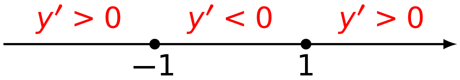
例 1 求函数 $f(x)=(x-4)(x+1)^{\frac{2}{3}}$ 的极值.

解 1. 求导数

$$y'=(x+1)^{\frac{2}{3}}+(x-4)\cdot\frac{2}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}}=\frac{5}{3}(x-1)(x+1)^{-\frac{1}{3}}$$

所以驻点 $x=1$，不可导点 $x=-1$.

2. 判定导数的正负：



所以 $x=-1$ 是极大值点，$f(-1)=0$ 是极大值；

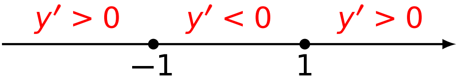
例 1 求函数 $f(x) = (x-4)(x+1)^{\frac{2}{3}}$ 的极值.

解 1. 求导数

$$y' = (x+1)^{\frac{2}{3}} + (x-4)\cdot\frac{2}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}} = \frac{5}{3}(x-1)(x+1)^{-\frac{1}{3}}$$

所以驻点 $x = 1$，不可导点 $x = -1$.

2. 判定导数的正负：



所以 $x = -1$ 是极大值点，$f(-1) = 0$ 是极大值；

$x = 1$ 是极小值点，$f(1) = -3\cdot 4^{\frac{1}{3}}$ 是极小值.

极值点的求解：第二判别法

假设 $f(x)$ 具有二阶导数，则，有以下的求解方法：

(1) 求出 $f'(x)$，并求出驻点 x_0.

(2) 判断 $f''(x_0)$ 的正负：

极值点的求解：第二判别法

假设 $f(x)$ 具有二阶导数，则，有以下的求解方法：

(1) 求出 $f'(x)$，并求出驻点 x_0.

(2) 判断 $f''(x_0)$ 的正负：

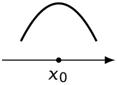
$f''(x_0) < 0$		
$f''(x_0) > 0$		
$f''(x_0) = 0$		

极值点的求解：第二判别法

假设 $f(x)$ 具有二阶导数，则，有以下的求解方法：

(1) 求出 $f'(x)$，并求出驻点 x_0.

(2) 判断 $f''(x_0)$ 的正负：

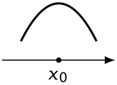
$f''(x_0) < 0$		
$f''(x_0) > 0$		
$f''(x_0) = 0$		

极值点的求解：第二判别法

假设 $f(x)$ 具有二阶导数，则，有以下的求解方法：

(1) 求出 $f'(x)$，并求出驻点 x_0.

(2) 判断 $f''(x_0)$ 的正负：

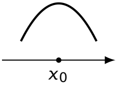
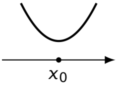
$f''(x_0) < 0$		$\Rightarrow$ x_0 是极大值点
$f''(x_0) > 0$		
$f''(x_0) = 0$		

极值点的求解：第二判别法

假设 $f(x)$ 具有二阶导数，则，有以下的求解方法：

(1) 求出 $f'(x)$，并求出驻点 x_0.

(2) 判断 $f''(x_0)$ 的正负：

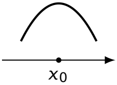
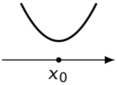
$f''(x_0) < 0$		$\Rightarrow$ x_0 是极大值点
$f''(x_0) > 0$		
$f''(x_0) = 0$		

极值点的求解：第二判别法

假设 $f(x)$ 具有二阶导数，则，有以下的求解方法：

(1) 求出 $f'(x)$，并求出驻点 x_0.

(2) 判断 $f''(x_0)$ 的正负：

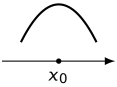
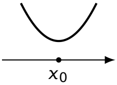
$f''(x_0) < 0$		$\Rightarrow$ x_0 是极大值点
$f''(x_0) > 0$		$\Rightarrow$ x_0 是极小值点
$f''(x_0) = 0$		

极值点的求解：第二判别法

假设 $f(x)$ 具有二阶导数，则，有以下的求解方法：

(1) 求出 $f'(x)$，并求出驻点 x_0.

(2) 判断 $f''(x_0)$ 的正负：

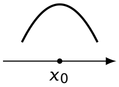
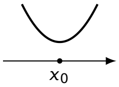
$f''(x_0) < 0$		$\Rightarrow$ x_0 是极大值点
$f''(x_0) > 0$		$\Rightarrow$ x_0 是极小值点
$f''(x_0) = 0$		结论不定

极值点的求解：第二判别法

假设 $f(x)$ 具有二阶导数，则，有以下的求解方法：

(1) 求出 $f'(x)$，并求出驻点 x_0.

(2) 判断 $f''(x_0)$ 的正负：

$f''(x_0) < 0$		$\Rightarrow x_0$ 是极大值点
$f''(x_0) > 0$		$\Rightarrow x_0$ 是极小值点
$f''(x_0) = 0$		结论不定

例 2 求 $f(x) = (x^2 - 1)^3 + 1$ 的极值.

例 2 求 $f(x)=(x^2-1)^3+1$ 的极值.

例 2 求 $f(x) = (x^2 - 1)^3 + 1$ 的极值.

解 1. 求驻点 $f' = 6x(x^2 - 1)^2$

例 2 求 $f(x) = (x^2-1)^3+1$ 的极值.

解 1. 求驻点 $f' = 6x(x^2-1)^2 = 0$

例 2 求 $f(x)=(x^2-1)^3+1$ 的极值.

解 1. 求驻点 $f'=6x(x^2-1)^2=0 \quad \Rightarrow \quad x=0,\pm 1.$

例 2 求 $f(x)=(x^2-1)^3+1$ 的极值.

解 1. 求驻点 $f'=6x(x^2-1)^2=0 \quad \Rightarrow \quad x=0,\pm 1.$

2. 利用第二判别法

驻点	f''	
$x=0$		
$x=-1$		
$x=1$		

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

例 2 求 $f(x)=(x^2-1)^3+1$ 的极值.

解 1. 求驻点 $f'=6x(x^2-1)^2=0 \quad \Rightarrow \quad x=0,\pm 1.$

2. 利用第二判别法

驻点	$f''=6(x^2-1)(5x^2-1)$	
$x=0$		
$x=-1$		
$x=1$		

例 2 求 $f(x)=(x^2-1)^3+1$ 的极值.

解 1. 求驻点 $f'=6x(x^2-1)^2=0 \quad \Rightarrow \quad x=0,\pm 1.$

2. 利用第二判别法

驻点	$f''=6(x^2-1)(5x^2-1)$	
$x=0$	$f''=6>0$	
$x=-1$		
$x=1$		

例 2 求 $f(x) = (x^2 - 1)^3 + 1$ 的极值.

解 1. 求驻点 $f' = 6x(x^2-1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0, \pm 1.$

2. 利用第二判别法

驻点	$f'' = 6(x^2-1)(5x^2-1)$	
$x=0$	$f''=6>0$	$\Rightarrow$ 极小值点
$x=-1$		
$x=1$		

例 2 求 $f(x)=(x^2-1)^3+1$ 的极值.

解 1. 求驻点 $f'=6x(x^2-1)^2=0 \quad \Rightarrow \quad x=0,\pm 1.$

2. 利用第二判别法

驻点	$f''=6(x^2-1)(5x^2-1)$	
$x=0$	$f''=6>0$	$\Rightarrow$ 极小值点
$x=-1$	$f''=0$	
$x=1$		

例 2 求 $f(x)=(x^2-1)^3+1$ 的极值.

解 1. 求驻点 $f'=6x(x^2-1)^2=0 \quad \Rightarrow \quad x=0,\pm 1.$

2. 利用第二判别法

驻点	$f''=6(x^2-1)(5x^2-1)$	
$x=0$	$f''=6>0$	$\Rightarrow$ 极小值点
$x=-1$	$f''=0$	$\Rightarrow$ 第二判别法失效
$x=1$		

例 2 求 $f(x) = (x^2-1)^3+1$ 的极值.

解 1. 求驻点 $f' = 6x(x^2-1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0, \pm 1.$

2. 利用第二判别法

驻点	$f'' = 6(x^2-1)(5x^2-1)$	
$x=0$	$f'' = 6 > 0$	$\Rightarrow$ 极小值点
$x=-1$	$f'' = 0$	$\Rightarrow$ 第二判别法失效
$x=1$	$f'' = 0$	

例 2 求 $f(x)=(x^2-1)^3+1$ 的极值.

解 1. 求驻点 $f'=6x(x^2-1)^2=0 \quad \Rightarrow \quad x=0,\pm 1.$

2. 利用第二判别法

驻点	$f''=6(x^2-1)(5x^2-1)$	
$x=0$	$f''=6>0$	$\Rightarrow$ 极小值点
$x=-1$	$f''=0$	$\Rightarrow$ 第二判别法失效
$x=1$	$f''=0$	$\Rightarrow$ 第二判别法失效

例 2 求 $f(x)=(x^2-1)^3+1$ 的极值.

解 1. 求驻点 $f'=6x(x^2-1)^2=0 \quad \Rightarrow \quad x=0,\pm 1.$

2. 利用第二判别法

驻点	$f''=6(x^2-1)(5x^2-1)$	
$x=0$	$f''=6>0$	$\Rightarrow$ 极小值点
$x=-1$	$f''=0$	$\Rightarrow$ 第二判别法失效
$x=1$	$f''=0$	$\Rightarrow$ 第二判别法失效

3. 利用第一判别法判断 $x=\pm 1$

驻点	左邻域	右邻域	
$x=-1$			
$x=1$			

例 2 求 $f(x) = (x^2 - 1)^3 + 1$ 的极值.

解 1. 求驻点 $f' = 6x(x^2 - 1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0, \pm 1.$

2. 利用第二判别法

驻点	$f'' = 6(x^2 - 1)(5x^2 - 1)$	
$x = 0$	$f'' = 6 > 0$	$\Rightarrow$ 极小值点
$x = -1$	$f'' = 0$	$\Rightarrow$ 第二判别法失效
$x = 1$	$f'' = 0$	$\Rightarrow$ 第二判别法失效

3. 利用第一判别法判断 $x = \pm 1$

驻点	左邻域	右邻域	
$x = -1$	$f' < 0$		
$x = 1$			

例 2 求 $f(x) = (x^2-1)^3+1$ 的极值.

解 1. 求驻点 $f' = 6x(x^2-1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0, \pm 1.$

2. 利用第二判别法

驻点	$f'' = 6(x^2-1)(5x^2-1)$	
$x=0$	$f''=6>0$	$\Rightarrow$ 极小值点
$x=-1$	$f''=0$	$\Rightarrow$ 第二判别法失效
$x=1$	$f''=0$	$\Rightarrow$ 第二判别法失效

3. 利用第一判别法判断 $x = \pm 1$

驻点	左邻域	右邻域	
$x=-1$	$f'<0$	$f'<0$	
$x=1$			

例 2 求 $f(x) = (x^2 - 1)^3 + 1$ 的极值.

解 1. 求驻点 $f' = 6x(x^2-1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0, \pm 1.$

2. 利用第二判别法

驻点	$f'' = 6(x^2-1)(5x^2-1)$	
$x = 0$	$f'' = 6 > 0$	$\Rightarrow$ 极小值点
$x = -1$	$f'' = 0$	$\Rightarrow$ 第二判别法失效
$x = 1$	$f'' = 0$	$\Rightarrow$ 第二判别法失效

3. 利用第一判别法判断 $x = \pm 1$

驻点	左邻域	右邻域	
$x = -1$	$f' < 0$	$f' < 0$	$\Rightarrow$ 非极值点
$x = 1$			

例 2 求 $f(x)=(x^2-1)^3+1$ 的极值.

解 1. 求驻点 $f'=6x(x^2-1)^2=0 \quad \Rightarrow \quad x=0,\pm 1.$

2. 利用第二判别法

驻点	$f''=6(x^2-1)(5x^2-1)$	
$x=0$	$f''=6>0$	$\Rightarrow$ 极小值点
$x=-1$	$f''=0$	$\Rightarrow$ 第二判别法失效
$x=1$	$f''=0$	$\Rightarrow$ 第二判别法失效

3. 利用第一判别法判断 $x=\pm 1$

驻点	左邻域	右邻域	
$x=-1$	$f'<0$	$f'<0$	$\Rightarrow$ 非极值点
$x=1$	$f'>0$		

例 2 求 $f(x)=(x^2-1)^3+1$ 的极值.

解 1. 求驻点 $f'=6x(x^2-1)^2=0 \quad \Rightarrow \quad x=0,\pm 1.$

2. 利用第二判别法

驻点	$f''=6(x^2-1)(5x^2-1)$	
$x=0$	$f''=6>0$	$\Rightarrow$ 极小值点
$x=-1$	$f''=0$	$\Rightarrow$ 第二判别法失效
$x=1$	$f''=0$	$\Rightarrow$ 第二判别法失效

3. 利用第一判别法判断 $x=\pm 1$

驻点	左邻域	右邻域	
$x=-1$	$f'<0$	$f'<0$	$\Rightarrow$ 非极值点
$x=1$	$f'>0$	$f'>0$	

例 2 求 $f(x)=(x^2-1)^3+1$ 的极值.

解 1. 求驻点 $f'=6x(x^2-1)^2=0 \quad \Rightarrow \quad x=0,\pm1.$

2. 利用第二判别法

驻点	$f''=6(x^2-1)(5x^2-1)$	
$x=0$	$f''=6>0$	$\Rightarrow$ 极小值点
$x=-1$	$f''=0$	$\Rightarrow$ 第二判别法失效
$x=1$	$f''=0$	$\Rightarrow$ 第二判别法失效

3. 利用第一判别法判断 $x=\pm1$

驻点	左邻域	右邻域	
$x=-1$	$f'<0$	$f'<0$	$\Rightarrow$ 非极值点
$x=1$	$f'>0$	$f'>0$	$\Rightarrow$ 非极值点

例 2 求 $f(x)=(x^2-1)^3+1$ 的极值.

解 1. 求驻点 $f'=6x(x^2-1)^2=0 \quad \Rightarrow \quad x=0,\pm 1.$

2. 利用第二判别法

驻点	$f''=6(x^2-1)(5x^2-1)$	
$x=0$	$f''=6>0$	$\Rightarrow$ 极小值点
$x=-1$	$f''=0$	$\Rightarrow$ 第二判别法失效
$x=1$	$f''=0$	$\Rightarrow$ 第二判别法失效

3. 利用第一判别法判断 $x=\pm 1$

驻点	左邻域	右邻域	
$x=-1$	$f'<0$	$f'<0$	$\Rightarrow$ 非极值点
$x=1$	$f'>0$	$f'>0$	$\Rightarrow$ 非极值点

所以只有 $x=0$ 是极值点，是极小值点，$f(0)=0$ 是极小值.

例 3 求 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$ 的极值.

例 3 求 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$ 的极值.

解 1. 求驻点

$$f' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x-3)(x+1)$$

例 3 求 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$ 的极值.

解 1. 求驻点

$$f' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x-3)(x+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1, 3.$$

例 3 求 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$ 的极值.

解 1. 求驻点

$$f' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x-3)(x+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1, 3.$$

2. 利用第二判别法

驻点	f''	
$x=-1$		
$x=3$		

例 3 求 $f(x)=x^3-3x^2-9x-5$ 的极值.

解 1. 求驻点

$$f'=3x^2-6x-9=3(x-3)(x+1)=0 \quad \Rightarrow \quad x=-1,3.$$

2. 利用第二判别法

驻点	$f''=6x-6$	
$x=-1$		
$x=3$		

例 3 求 $f(x)=x^3-3x^2-9x-5$ 的极值.

解 1. 求驻点

$$f'=3x^2-6x-9=3(x-3)(x+1)=0 \quad \Rightarrow \quad x=-1,3.$$

2. 利用第二判别法

驻点	$f''=6x-6$	
$x=-1$	$f''=-12<0$	
$x=3$		

例 3 求 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$ 的极值.

解 1. 求驻点

$$f' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x-3)(x+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1, 3.$$

2. 利用第二判别法

驻点	$f'' = 6x - 6$	
$x = -1$	$f'' = -12 < 0$	$\Rightarrow$ 极大值
$x = 3$		$\Rightarrow$ 极小值

例 3 求 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$ 的极值.

解 1. 求驻点

$$f' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x-3)(x+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1, 3.$$

2. 利用第二判别法

驻点	$f'' = 6x - 6$	
$x = -1$	$f'' = -12 < 0$	$\Rightarrow$ 极大值
$x = 3$	$f'' = 12 > 0$	$\Rightarrow$ 极小值

所以 $x = -1$ 是极大值点，$f(-1) = 0$ 是极大值;

例 3 求 $f(x)=x^3-3x^2-9x-5$ 的极值.

解 1. 求驻点

$$f'=3x^2-6x-9=3(x-3)(x+1)=0 \quad \Rightarrow \quad x=-1,3.$$

2. 利用第二判别法

驻点	$f''=6x-6$	
$x=-1$	$f''=-12<0$	$\Rightarrow$ 极大值
$x=3$	$f''=12>0$	$\Rightarrow$ 极小值

所以 $x=-1$ 是极大值点，$f(-1)=0$ 是极大值;

$x=3$ 是极小值点，$f(3)=-32$ 是极小值.

We are here now...

1. 函数的极值及其求法

2. 函数的最大值最小值

定义 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义. 若存在 $x_0 \in I$ 使得对 $\forall x \in I$ 成立

$$f(x) \le f(x_0)$$

则称 x_0 是**最大值点**，$f(x_0)$ 是**最大值**

定义 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义. 若存在 $x_0 \in I$ 使得对 $\forall x \in I$ 成立

$$f(x) \le f(x_0) \quad （或 f(x) \ge f(x_0)）$$

则称 x_0 是**最大值点**，$f(x_0)$ 是**最大值**

定义 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义. 若存在 $x_0 \in I$ 使得对 $\forall x \in I$ 成立

$$f(x) \leq f(x_0) \quad （或 f(x) \geq f(x_0)）$$

则称 x_0 是**最大值点**，$f(x_0)$ 是**最大值**（或 x_0 是**最小值点**，$f(x_0)$ **最小值**）.

定义 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义. 若存在 $x_0 \in I$ 使得对 $\forall x \in I$ 成立

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (\text{或} f(x) \geq f(x_0))$$

则称 x_0 是**最大值点**，$f(x_0)$ 是**最大值**（或 x_0 是**最小值点**，$f(x_0)$ **最小值**）.

回忆 定义在闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 存在最大值和最小值.

定义 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义. 若存在 $x_0 \in I$ 使得对 $\forall x \in I$ 成立

$$f(x) \le f(x_0) \quad （或 f(x) \ge f(x_0)）$$

则称 x_0 是**最大值点**，$f(x_0)$ 是**最大值**（或 x_0 是**最小值点**，$f(x_0)$ **最小值**）.

回忆 定义在闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 存在最大值和最小值.

问题 如何求出最大值点和最小值点?

定义 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义. 若存在 $x_0 \in I$ 使得对 $\forall x \in I$ 成立

$$f(x) \le f(x_0) \quad (\text{或} f(x) \ge f(x_0))$$

则称 x_0 是**最大值点**，$f(x_0)$ 是**最大值**（或 x_0 是**最小值点**，$f(x_0)$ **最小值**）.

回忆 定义在闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 存在最大值和最小值.

问题 如何求出最大值点和最小值点?

分析

- 最值点 x_0 为端点 a, b，或者在 (a, b) 内部

定义 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义. 若存在 $x_0 \in I$ 使得对 $\forall x \in I$ 成立

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (\text{或} f(x) \geq f(x_0))$$

则称 x_0 是**最大值点**，$f(x_0)$ 是**最大值**（或 x_0 是**最小值点**，$f(x_0)$ **最小值**）.

回忆 定义在闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 存在最大值和最小值.

问题 如何求出最大值点和最小值点?

分析

- 最值点 x_0 为端点 a, b，或者在 (a, b) 内部
- 若 $x_0 \in (a, b)$，则 x_0 是极值点

定义 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义. 若存在 $x_0 \in I$ 使得对 $\forall x \in I$ 成立

$$f(x) \le f(x_0) \quad (\text{或} f(x) \ge f(x_0))$$

则称 x_0 是**最大值点**，$f(x_0)$ 是**最大值**（或 x_0 是**最小值点**，$f(x_0)$ **最小值**）.

回忆 定义在闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 存在最大值和最小值.

问题 如何求出最大值点和最小值点?

分析

- 最值点 x_0 为端点 a, b，或者在 (a, b) 内部
- 若 $x_0 \in (a, b)$，则 x_0 是极值点
- 所以

$$\{\text{最值点}\} \subset \{\text{端点，极值点}\}$$

定义 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义. 若存在 $x_0 \in I$ 使得对 $\forall x \in I$ 成立

$$f(x) \le f(x_0) \quad （或 f(x) \ge f(x_0)）$$

则称 x_0 是**最大值点**，$f(x_0)$ 是**最大值**（或 x_0 是**最小值点**，$f(x_0)$ **最小值**）.

回忆 定义在闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 存在最大值和最小值.

问题 如何求出最大值点和最小值点?

分析

- 最值点 x_0 为端点 a, b，或者在 (a, b) 内部
- 若 $x_0 \in (a, b)$，则 x_0 是极值点
- 所以

$$\{最值点\} \subset \{端点，极值点\} \subset \{端点，驻点，不可导点\}$$

定义 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义. 若存在 $x_0 \in I$ 使得对 $\forall x \in I$ 成立

$$f(x) \le f(x_0) \quad (\text{或} f(x) \ge f(x_0))$$

则称 x_0 是**最大值点**，$f(x_0)$ 是**最大值**（或 x_0 是**最小值点**，$f(x_0)$ **最小值**）.

回忆 定义在闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 存在最大值和最小值.

问题 如何求出最大值点和最小值点?

分析

- 最值点 x_0 为端点 a, b，或者在 (a, b) 内部
- 若 $x_0 \in (a, b)$，则 x_0 是极值点
- 所以

$$\{\text{最值点}\} \subset \{\text{端点，极值点}\} \subset \{\text{端点，驻点，不可导点}\}$$

- 比较这些点的函数值大小，得出最值点.

函数最值的求法

设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，除有限个点外可导.

此时可按以下步骤求出最值点：

函数最值的求法

设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，除有限个点外可导.

此时可按以下步骤求出最值点：

(1) 求出函数所有驻点，不可导点，和区间端点 a, b 一起列出来最为可疑最值点.

函数最值的求法

设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，除有限个点外可导.

此时可按以下步骤求出最值点：

(1) 求出函数所有驻点，不可导点，和区间端点 a, b 一起列出来最为可疑最值点.

(2) 比较这些点的函数值，最大（小）者即为最大（小）值点.

函数最值的求法

设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，除有限个点外可导.

此时可按以下步骤求出最值点：

(1) 求出函数所有驻点，不可导点，和区间端点 a, b 一起列出来最为可疑最值点.

(2) 比较这些点的函数值，最大（小）者即为最大（小）值点.

例 1 求 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7$ 在区间 $[-2, 3]$ 上的最值.

函数最值的求法

设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，除有限个点外可导.

此时可按以下步骤求出最值点：

(1) 求出函数所有驻点，不可导点，和区间端点 a,b 一起列出来最为可疑最值点.

(2) 比较这些点的函数值，最大（小）者即为最大（小）值点.

例 1 求 $f(x)=x^3-3x^2+7$ 在区间 $[-2,3]$ 上的最值.

解 1. 求驻点：$f'(x)=3x^2-6x=0 \Rightarrow x=0,2.$

函数最值的求法

设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，除有限个点外可导.

此时可按以下步骤求出最值点：

(1) 求出函数所有驻点，不可导点，和区间端点 a,b 一起列出来最为可疑最值点.

(2) 比较这些点的函数值，最大（小）者即为最大（小）值点.

例 1 求 $f(x)=x^3-3x^2+7$ 在区间 $[-2,3]$ 上的最值.

解 1. 求驻点：$f'(x)=3x^2-6x=0 \Rightarrow x=0,2.$ （没有不可导点）

函数最值的求法

设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，除有限个点外可导.

此时可按以下步骤求出最值点：

(1) 求出函数所有驻点，不可导点，和区间端点 a, b 一起列出来最为可疑最值点.

(2) 比较这些点的函数值，最大（小）者即为最大（小）值点.

例 1 求 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7$ 在区间 $[-2, 3]$ 上的最值.

解 1. 求驻点：$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0, 2.$ （没有不可导点）

2. 比较函数值：

x	-2	0	2	3
$f(x)$				

函数最值的求法

设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，除有限个点外可导.

此时可按以下步骤求出最值点：

(1) 求出函数所有驻点，不可导点，和区间端点 a, b 一起列出来最为可疑最值点.

(2) 比较这些点的函数值，最大（小）者即为最大（小）值点.

例 1 求 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7$ 在区间 $[-2, 3]$ 上的最值.

解 1. 求驻点：$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0, 2$. （没有不可导点）

2. 比较函数值：

x	-2	0	2	3
$f(x)$	-13	7	3	7

函数最值的求法

设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，除有限个点外可导.

此时可按以下步骤求出最值点：

(1) 求出函数所有驻点，不可导点，和区间端点 a, b 一起列出来最为可疑最值点.

(2) 比较这些点的函数值，最大（小）者即为最大（小）值点.

例 1 求 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7$ 在区间 $[-2, 3]$ 上的最值.

解 1. 求驻点：$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0, 2$.（没有不可导点）

2. 比较函数值：

x	-2	0	2	3
$f(x)$	-13	7	3	7

可见最大值是 7，最小值是 -13.

函数最值的求法

设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，除有限个点外可导.

此时可按以下步骤求出最值点：

(1) 求出函数所有驻点，不可导点，和区间端点 a,b 一起列出来最为可疑最值点.

(2) 比较这些点的函数值，最大（小）者即为最大（小）值点.

例 1 求 $f(x)=x^3-3x^2+7$ 在区间 $[-2,3]$ 上的最值.

解 1. 求驻点：$f'(x)=3x^2-6x=0 \Rightarrow x=0,2$.（没有不可导点）

2. 比较函数值：

x	-2	0	2	3
$f(x)$	-13	7	3	7

可见最大值是 7，最小值是 -13.

例 2 求 $f(x)=x^4-2x^2+5$ 在区间 $[-2,3]$ 上的最值.

例 2 求 $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$ 在区间 $[-2, 3]$ 上的最值.

例 2 求 $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$ 在区间 $[-2, 3]$ 上的最值.

解 1. 求驻点：$f'(x) = 4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x = 0, \pm 1.$

例 2 求 $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$ 在区间 $[-2, 3]$ 上的最值.

解 1. 求驻点：$f'(x) = 4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x = 0, \pm 1.$ （没有不可导点）

例 2 求 $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$ 在区间 $[-2, 3]$ 上的最值.

解 1. 求驻点：$f'(x) = 4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x = 0, \pm 1$. （没有不可导点）

2. 比较函数值：

x	-2	-1	0	1	3
$f(x)$					

例 2 求 $f(x)=x^4-2x^2+5$ 在区间 $[-2,3]$ 上的最值.

解 1. 求驻点：$f'(x)=4x^3-4x=0 \Rightarrow x=0,\pm 1.$ （没有不可导点）

2. 比较函数值：

x	-2	-1	0	1	3
$f(x)$	13	4	5	4	68

例 2 求 $f(x)=x^4-2x^2+5$ 在区间 $[-2,3]$ 上的最值.

解 1. 求驻点：$f'(x)=4x^3-4x=0 \Rightarrow x=0,\pm1$. （没有不可导点）

2. 比较函数值：

x	-2	-1	0	1	3
$f(x)$	13	4	5	4	68

可见最大值是 68，最小值是 4.