得分	评阅人

一、填空题（7 小题，每小题 3 分，共 21 分）

1. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+kx^2-\cos x}{x^2}=1$，则常数 $k=$ ______1/2______。

2. 数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{2020}}{n!}=$ ______0______。

3. 曲线 $y=x^{\frac{3}{2}}$ 对应于 $0\le x\le 1$ 的一段弧的弧长 $s=$ ______$\dfrac{13\sqrt{13}-8}{27}$______。

4. 函数 $f(x)=2x+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{11}{3}$ 在 $(0,+\infty)$ 的零点个数为___2______。

5. 对于任意 $x\in\mathbb{R}$， $f'(x)+2f(x)=0$，且 $f(0)=1$，则 $f(x)=$ ___e^{-2x}______。

6. 反常积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{x}{1+x^4}dx=$ ______$\dfrac{\pi}{8}$______。

7. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\sin t dt}{x^4}=$ ______1/2______。

得分	评阅人

二、单选题（7 小题，每小题 2 分，共 14 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7
答案	C	B	D	D	B	D	B

1. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则 $\lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{f(h)-f(-h)}{h}=$ (　　　　)

A. 0；　　B. $f'(0)$；　　C. $2f'(0)$；　　D. $\dfrac{1}{2}f'(0)$。

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}|x|^m\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续但不可导，则 (　　　　)

A. $-1<m\le 0$；　　B. $0<m\le 1$；

C. $m\le -1$；　　D. $m>1$.

3.当 $x\to 0$ 时，双曲函数 $shx=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 与正弦函数 $\sin x$ 比较， 则（　　）

A. 前者是比后者高阶的无穷小　　B. 前者是比后者低阶的无穷小

C. 二者同阶　　D. 二者等价

4. 已知 $f(x)=1-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)\quad (x\to 0)$，则下列结论中正确的是（　　）.

A. $x=1$ 为函数 $f(x)$ 的极小值点

B. $x=1$ 为函数 $f(x)$ 的极大值点

C. $x=0$ 为函数 $f(x)$ 的极小值点

D. $x=0$ 为函数 $f(x)$ 的极大值点

5. 设 $\int f\left(lnx\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}x^2+C$， 则 $f\left(x\right)=$（　　　）。

A. x；　　B. e^x；　　C. $\ln x$；　　D. $\dfrac{1}{6}x^3$

6. 曲线 $y=\sin x$ 和直线 $y=\dfrac{2}{\pi}x$ 所围图形绕 x 轴旋转得到的几何体的体积为（　　）.

A. $\dfrac{\pi^2}{2}$　　B. $\dfrac{\pi^2}{4}$　　C. $\dfrac{\pi^2}{3}$　　D. $\dfrac{\pi^2}{6}$

7. 对于任意 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，$f(x+\frac{\pi}{2})=-f(x)$ 且 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=1$,则 $\int_0^{\pi}(\pi-x)f(x)dx=$ (　　)

A. $\frac{\pi}{4}$;　　B. $\frac{\pi}{2}$;　　C. π;　　D. 2π.

得分	评阅人

三、解答题（7 小题，每小题 7 分，共 49 分）

1. 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{e^x-e^{1/x}}$ 的间断点，并判断各间断点的类型.

解： 由 $f(x)$ 的表达式可知，其自然定义域为 $\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$，且 $f(x)$ 连续于该集合内。（2 分）

一方面，由于 $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{1}{e^x-e^{1/x}}=0$ 及 $\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{1}{e^x-e^{1/x}}=1$。因此， $x=0$ 为第一类间断点中的跳跃间断点。（5 分）

另一方面，由于 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{e^x-e^{1/x}}=\infty$，所以， $x=1$ 为第二类间断点中的无穷间断点。（6 分）类似地，$x=-1$ 为第二类间断点中的无穷间断点。（7 分）

2. 求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right)$。

解：注意到， $\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{k}{n}\right)^2}$。（3 分）

于是，由定积分之定义，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\left[\arctan x\right]_0^1=\frac{\pi}{4}.\quad（7 分）$$

3. 已知函数 $y=x^{\sin x}+(\sin x)^x$， 求 dy .

解：利用对数求导法知，幂指函数 $x^{\sin x}$ 和 $(\sin x)^x$ 的导数分别为

$\left(x^{\sin x}\right)'=x^{\sin x-1}\sin x+x^{\sin x}\cos x\ln x$ 和 $\left((\sin x)^x\right)'=x(\sin x)^{x-1}\cos x+(\sin x)^x\ln x$。（6 分）

因此， $dy=\left[x^{\sin x-1}\sin x+x(\sin x)^{x-1}\cos x+(x^{\sin x}\cos x+(\sin x)^x)\ln x\right]dx$。 (7 分)

4. 若参数方程 $\begin{cases} x=\ln(1+t) \\ y=1-t^2 \end{cases}$ 确定了 x 关于 y 的函数，求 $\dfrac{d^2x}{dy^2}$.

解：由于 $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{1+t},\dfrac{dy}{dt}=-2t,\qquad \dfrac{dy}{dt}=-2t,$ （2 分）

以及 $\dfrac{d^2x}{dt^2}=-\dfrac{1}{(1+t)^2},\dfrac{d^2y}{dt^2}=-2,$ （4 分）

所以 $\dfrac{d^2x}{dy^2}=\dfrac{\dfrac{d^2x}{dt^2}\dfrac{dy}{dt}-\dfrac{dx}{dt}\dfrac{d^2y}{dt^2}}{\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^3}=-\dfrac{2t+1}{4t^3(1+t)^2}$. （7 分）

5. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\tan x}{x^3}$

解：利用 Taylor 展开、洛必达法则等，分步酌情给分。

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\tan x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3\cos x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2))-(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3))}{x^3\cos x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{3}x^2+o(x^2)}{x^3\cos x}$$ （7 分）

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{3}x^2+o(x^2)}{x^3}\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}$$

$$=-\frac{1}{3}$$

6. 求不定积分 $\int x\operatorname{arccot}x dx$.

解：采用分部积分法 （分步酌情给分）

$$\int x\operatorname{arccot}x dx=\frac{1}{2}x^2\operatorname{arccot}x+\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\operatorname{arccot}x+\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$ **（7 分）**

$$=\frac{1}{2}x^2\operatorname{arccot}x+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\arctan x+C$$

7. 求定积分 $\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$。

解

$$\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(2x+1)}{x^2+x+1}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)\right]_0^1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^1 \frac{1}{1+\left[\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})\right]^2}\mathrm{d}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})\right)$$

$$= \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)\right]_0^1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})\right)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\ln 3 + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

（前三步，每步 2 分，最后一步 1 分，共 7 分）

得分	评阅人

四、应用题（1 小题，每小题 10 分，共 10 分）

某房产公司有 50 套公寓出租，当月租金定为 4000 元时，公寓将全部租完。当月租金每增加 200 元时，就会多出一套公寓无法出租，而租出去的公寓平均每月需要 400 元的维修费。请问房租应定为多少，该房产公司收益最大？

解：设房租为 x 元，则房产公司收益函数为 $p(x)=\left(50-\frac{x-4000}{200}\right)(x-400)$。（3 分）

由于 $p'(x)=72-\frac{x}{100}$，令 $p'(x)=0$，则 $x=7200$.（5 分）

因为 $p''(x)=-\frac{1}{100}$，收益函数 $p(x)$ 在唯一驻点 $x=7200$ 取得极大值。（7 分），

于是，由实际意义，该极大值即为最大值。（9 分）

所以，当房租 7200 元时，该房产公司的收益最大为 231200 元。（10 分）

得分	评阅人

五、证明题（1 小题，每小题 6 分，共 6 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导， 且满足 $f(0)=0$，则对于任意 $\alpha>0$，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{\alpha f(\xi)}{1-\xi}$。

证明：对于任意 $\alpha>0$，令 $g(x)=(1-x)^{\alpha} f(x)$，则

$$g'(x)=\alpha(1-x)^{\alpha-1} f(x)-(1-x)^{\alpha} f'(x)。$$

由于 $f(0)=0$，所以 $g(0)=g(1)=0$．于是，由 Rolle 定理知，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $g'(\xi)=0$。此即 $f'(\xi)=\dfrac{\alpha f(\xi)}{1-\xi}$。证毕！