

第 11 章 α : 对弧长的曲线积分

数学系 梁卓滨

2016-2017 学年 II

1. 对弧长的曲线积分：概念与性质
2. 对弧长的曲线积分：计算法
3. 对弧长的曲线积分：空间曲线

We are here now...

1. 对弧长的曲线积分：概念与性质

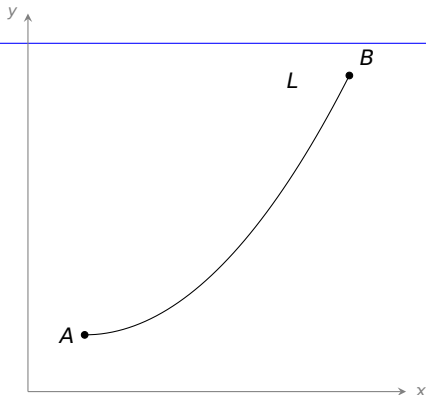
2. 对弧长的曲线积分：计算法

3. 对弧长的曲线积分：空间曲线

平面曲线的质量

假设平面曲线 L

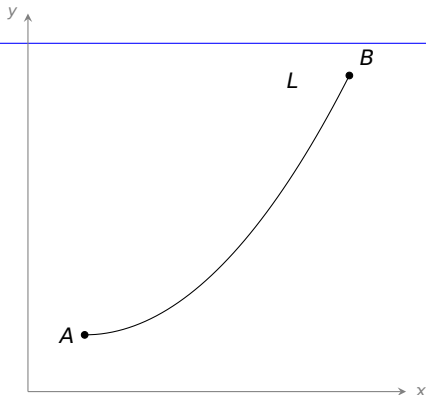
- 线密度为 $\mu(x, y)$
- 质量为 m



平面曲线的质量

假设平面曲线 L

- 线密度为 $\mu(x, y)$
- 质量为 m

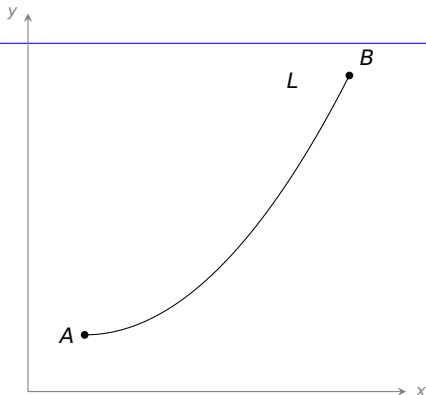


- 当曲线是均匀时 ($\mu = \text{常数}$),
- 当曲线非均匀时 ($\mu = \mu(x, y)$ 为 L 上函数)

平面曲线的质量

假设平面曲线 L

- 线密度为 $\mu(x, y)$
- 质量为 m



- 当曲线是均匀时 ($\mu = \text{常数}$),

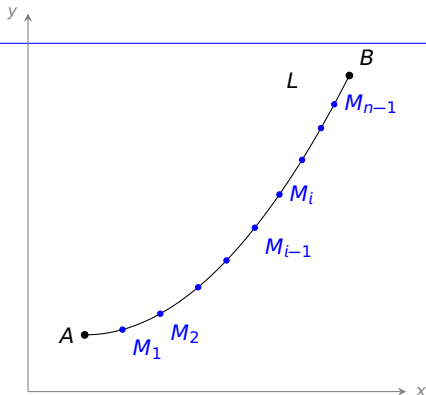
$$m = \mu \cdot \text{Length}(L)$$

- 当曲线非均匀时 ($\mu = \mu(x, y)$ 为 L 上函数)

平面曲线的质量

假设平面曲线 L

- 线密度为 $\mu(x, y)$
- 质量为 m



- 当曲线是均匀时 ($\mu = \text{常数}$),

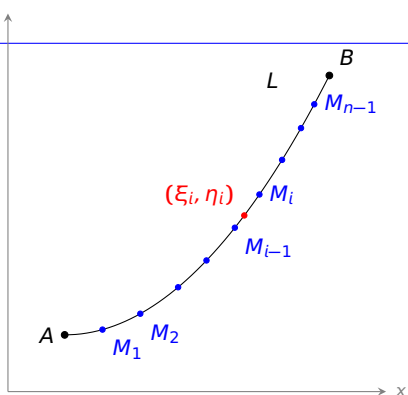
$$m = \mu \cdot \text{Length}(L)$$

- 当曲线非均匀时 ($\mu = \mu(x, y)$ 为 L 上函数), 利用微元法可知

平面曲线的质量

假设平面曲线 L

- 线密度为 $\mu(x, y)$
- 质量为 m



- 当曲线是均匀时 ($\mu = \text{常数}$),

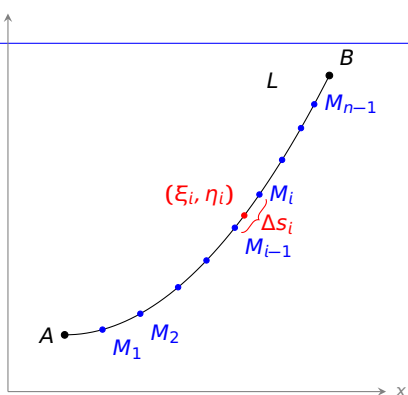
$$m = \mu \cdot \text{Length}(L)$$

- 当曲线非均匀时 ($\mu = \mu(x, y)$ 为 L 上函数), 利用微元法可知

平面曲线的质量

假设平面曲线 L

- 线密度为 $\mu(x, y)$
- 质量为 m



- 当曲线是均匀时 ($\mu = \text{常数}$),

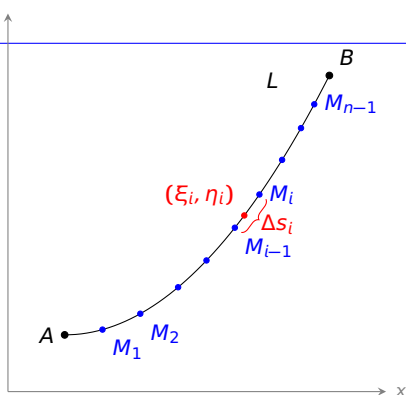
$$m = \mu \cdot \text{Length}(L)$$

- 当曲线非均匀时 ($\mu = \mu(x, y)$ 为 L 上函数), 利用微元法可知

平面曲线的质量

假设平面曲线 L

- 线密度为 $\mu(x, y)$
- 质量为 m



- 当曲线是均匀时 ($\mu = \text{常数}$),

$$m = \mu \cdot \text{Length}(L)$$

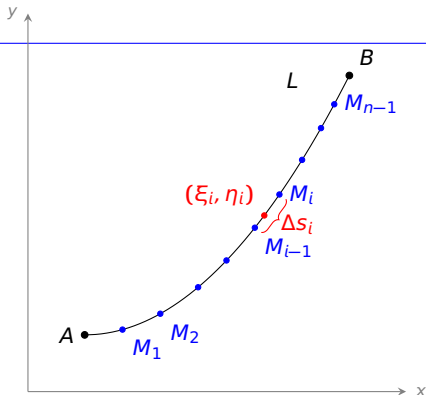
- 当曲线非均匀时 ($\mu = \mu(x, y)$ 为 L 上函数), 利用微元法可知

$$\mu(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$$

平面曲线的质量

假设平面曲线 L

- 线密度为 $\mu(x, y)$
- 质量为 m



- 当曲线是均匀时 ($\mu = \text{常数}$),

$$m = \mu \cdot \text{Length}(L)$$

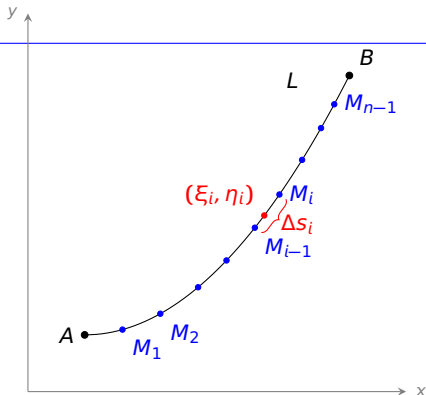
- 当曲线非均匀时 ($\mu = \mu(x, y)$ 为 L 上函数), 利用微元法可知

$$\sum_{i=1}^n \mu(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$$

平面曲线的质量

假设平面曲线 L

- 线密度为 $\mu(x, y)$
- 质量为 m



- 当曲线是均匀时 ($\mu = \text{常数}$),

$$m = \mu \cdot \text{Length}(L)$$

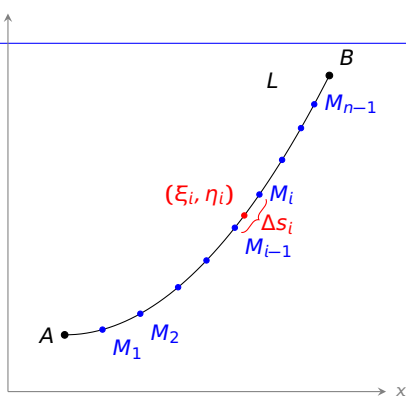
- 当曲线非均匀时 ($\mu = \mu(x, y)$ 为 L 上函数), 利用微元法可知

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mu(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$$

平面曲线的质量

假设平面曲线 L

- 线密度为 $\mu(x, y)$
- 质量为 m



- 当曲线是均匀时 ($\mu = \text{常数}$),

$$m = \mu \cdot \text{Length}(L)$$

- 当曲线非均匀时 ($\mu = \mu(x, y)$ 为 L 上函数), 利用微元法可知

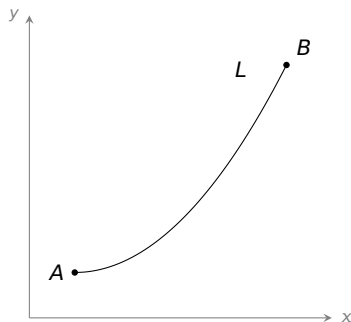
$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mu(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$$

对弧长的曲线积分/第一类曲线积分

对弧长的曲线积分定义 设

- L 是平面上分段光滑曲线,
- $f(x, y)$ 是 L 上的有界函数,

若

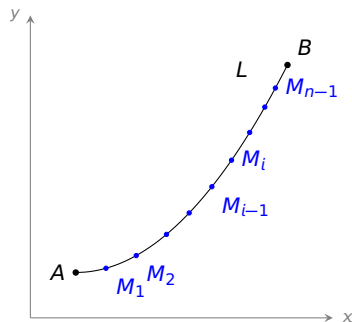


对弧长的曲线积分/第一类曲线积分

对弧长的曲线积分定义 设

- L 是平面上分段光滑曲线,
- $f(x, y)$ 是 L 上的有界函数,

若

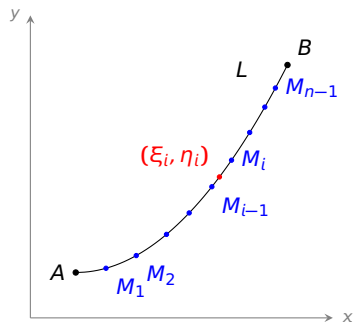


对弧长的曲线积分/第一类曲线积分

对弧长的曲线积分定义 设

- L 是平面上分段光滑曲线,
- $f(x, y)$ 是 L 上的有界函数,

若

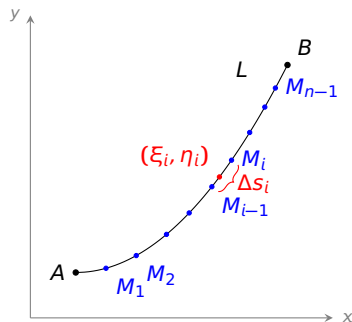


对弧长的曲线积分/第一类曲线积分

对弧长的曲线积分定义 设

- L 是平面上分段光滑曲线,
- $f(x, y)$ 是 L 上的有界函数,

若



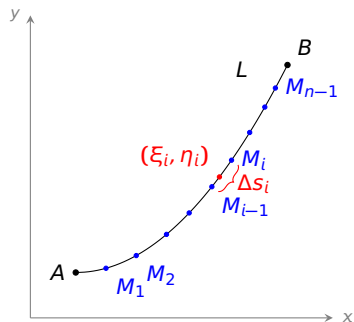
对弧长的曲线积分/第一类曲线积分

对弧长的曲线积分定义 设

- L 是平面上分段光滑曲线,
- $f(x, y)$ 是 L 上的有界函数,

若

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$$



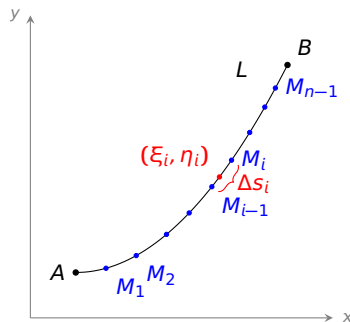
对弧长的曲线积分/第一类曲线积分

对弧长的曲线积分定义 设

- L 是平面上分段光滑曲线,
- $f(x, y)$ 是 L 上的有界函数,

若

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$$



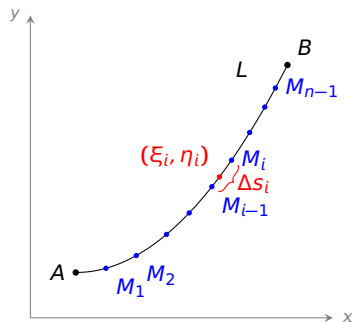
对弧长的曲线积分/第一类曲线积分

对弧长的曲线积分定义 设

- L 是平面上分段光滑曲线,
- $f(x, y)$ 是 L 上的有界函数,

若

- 极限 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$ 存在,



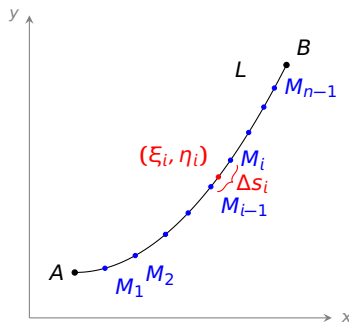
对弧长的曲线积分/第一类曲线积分

对弧长的曲线积分定义 设

- L 是平面上分段光滑曲线,
- $f(x, y)$ 是 L 上的有界函数,

若

- 极限 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$ 存在, 且极限
- 与上述 L 的划分、 (ξ_i, η_i) 的选取无关,



对弧长的曲线积分/第一类曲线积分

对弧长的曲线积分定义 设

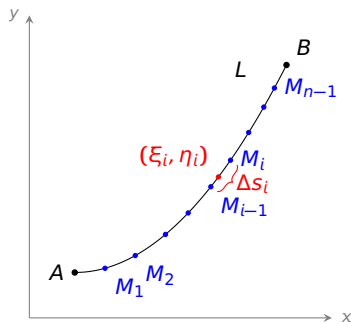
- L 是平面上分段光滑曲线,
- $f(x, y)$ 是 L 上的有界函数,

若

- 极限 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$ 存在, 且极限
- 与上述 L 的划分、 (ξ_i, η_i) 的选取无关,

则定义

$$\int_L f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$$



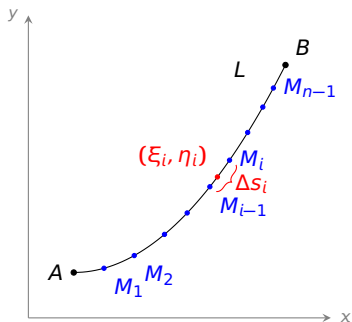
对弧长的曲线积分/第一类曲线积分

对弧长的曲线积分定义 设

- L 是平面上分段光滑曲线,
- $f(x, y)$ 是 L 上的有界函数,

若

- 极限 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$ 存在, 且极限
- 与上述 L 的划分、 (ξ_i, η_i) 的选取无关,



则定义

$$\int_L f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$$

称为 $f(x, y)$ 在曲线 L 上的对弧长的曲线积分。

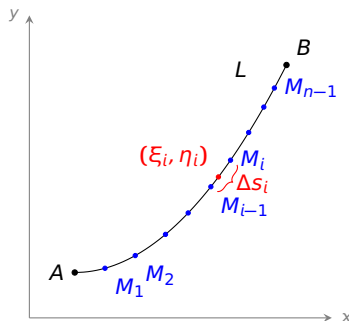
对弧长的曲线积分/第一类曲线积分

对弧长的曲线积分定义 设

- L 是平面上分段光滑曲线,
- $f(x, y)$ 是 L 上的有界函数,

若

- 极限 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$ 存在, 且极限
- 与上述 L 的划分、 (ξ_i, η_i) 的选取无关,



则定义

$$\int_L f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$$

称为 $f(x, y)$ 在曲线 L 上的对弧长的曲线积分。 ds 称为弧长元素。

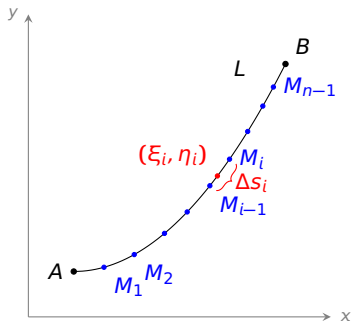
对弧长的曲线积分/第一类曲线积分

对弧长的曲线积分定义 设

- L 是平面上分段光滑曲线,
- $f(x, y)$ 是 L 上的有界函数,

若

- 极限 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$ 存在, 且极限
- 与上述 L 的划分、 (ξ_i, η_i) 的选取无关,



则定义

$$\int_L f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$$

称为 $f(x, y)$ 在曲线 L 上的对弧长的曲线积分。 ds 称为弧长元素。

注 对弧长的曲线积分的定义式与重积分的类似, 故性质也类似

对弧长的曲线积分的性质

- 存在性 若 L 是分段光滑曲线, $f(x, y)$ 在 L 上连续, 则

$$\int_L f(x, y) ds$$

存在。

对弧长的曲线积分的性质

- 存在性 若 L 是分段光滑曲线, $f(x, y)$ 在 L 上连续, 则

$$\int_L f(x, y) ds$$

存在。

- 线性性 $\int_L (\alpha f + \beta g) ds = \alpha \int_L f ds + \beta \int_L g ds$

对弧长的曲线积分的性质

- **存在性** 若 L 是分段光滑曲线, $f(x, y)$ 在 L 上连续, 则

$$\int_L f(x, y) ds$$

存在。

- **线性性** $\int_L (\alpha f + \beta g) ds = \alpha \int_L f ds + \beta \int_L g ds$
- **可加性** $\int_L f(x, y) ds = \int_{L_1} f(x, y) ds + \int_{L_2} f(x, y) ds$

对弧长的曲线积分的性质

- **存在性** 若 L 是分段光滑曲线, $f(x, y)$ 在 L 上连续, 则

$$\int_L f(x, y) ds$$

存在。

- **线性性** $\int_L (\alpha f + \beta g) ds = \alpha \int_L f ds + \beta \int_L g ds$
- **可加性** $\int_L f(x, y) ds = \int_{L_1} f(x, y) ds + \int_{L_2} f(x, y) ds$
- $\int_L 1 ds = \text{Length}(L)$

对弧长的曲线积分的性质

- **存在性** 若 L 是分段光滑曲线, $f(x, y)$ 在 L 上连续, 则

$$\int_L f(x, y) ds$$

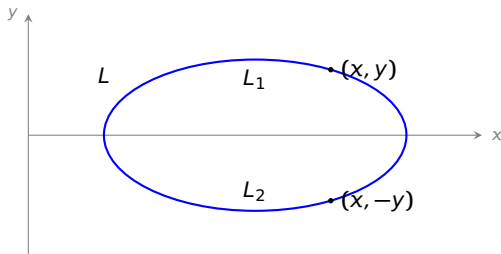
存在。

- **线性性** $\int_L (\alpha f + \beta g) ds = \alpha \int_L f ds + \beta \int_L g ds$
- **可加性** $\int_L f(x, y) ds = \int_{L_1} f(x, y) ds + \int_{L_2} f(x, y) ds$
- $\int_L 1 ds = \text{Length}(L)$
- 若 $f(x, y) \leq g(x, y)$, 则

$$\int_L f(x, y) ds \leq \int_L g(x, y) ds$$

积分的对称性

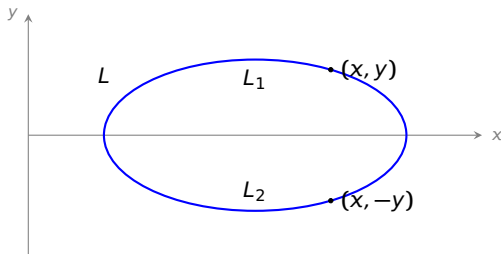
性质 设平面曲线 L 关于 x 轴对称,



积分的对称性

性质 设平面曲线 L 关于 x 轴对称,

- 若 $f(x, y)$ 关于 y 是奇函数 (即: $f(x, -y) = -f(x, y)$), 则

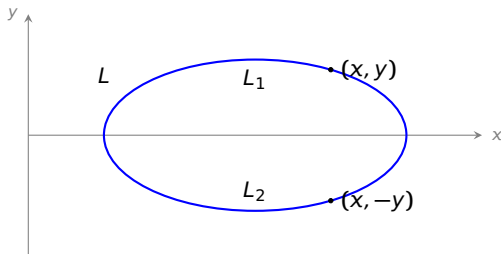


积分的对称性

性质 设平面曲线 L 关于 x 轴对称,

- 若 $f(x, y)$ 关于 y 是奇函数 (即: $f(x, -y) = -f(x, y)$), 则

$$\int_L f(x, y) ds = 0$$



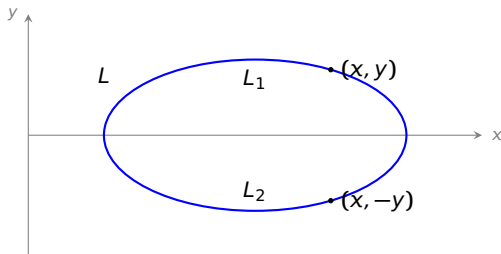
积分的对称性

性质 设平面曲线 L 关于 x 轴对称,

- 若 $f(x, y)$ 关于 y 是奇函数 (即: $f(x, -y) = -f(x, y)$), 则

$$\int_L f(x, y) ds = 0$$

- 若 $f(x, y)$ 关于 y 是偶函数 (即: $f(x, -y) = f(x, y)$), 则



积分的对称性

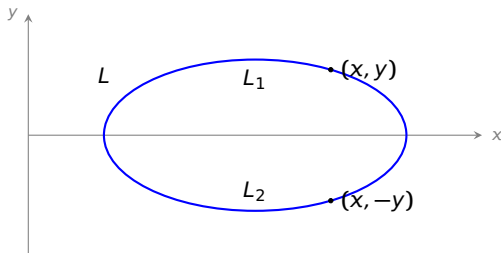
性质 设平面曲线 L 关于 x 轴对称,

- 若 $f(x, y)$ 关于 y 是奇函数 (即: $f(x, -y) = -f(x, y)$), 则

$$\int_L f(x, y) ds = 0$$

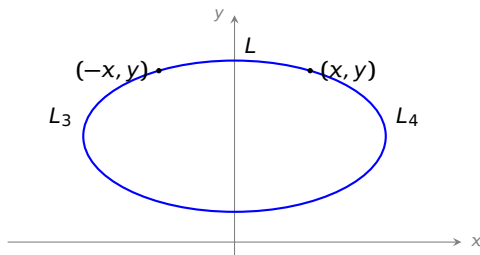
- 若 $f(x, y)$ 关于 y 是偶函数 (即: $f(x, -y) = f(x, y)$), 则

$$\int_L f(x, y) ds = 2 \int_{L_1} f(x, y) ds = 2 \int_{L_2} f(x, y) ds$$



积分的对称性

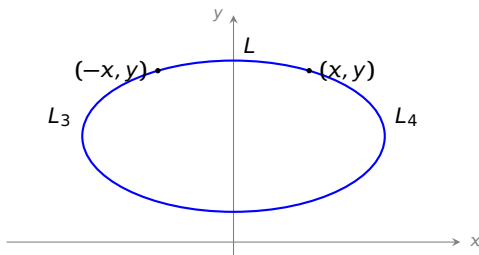
性质 设平面曲线 L 关于 y 轴对称,



积分的对称性

性质 设平面曲线 L 关于 y 轴对称,

- 若 $f(x, y)$ 关于 x 是奇函数 (即: $f(-x, y) = -f(x, y)$), 则

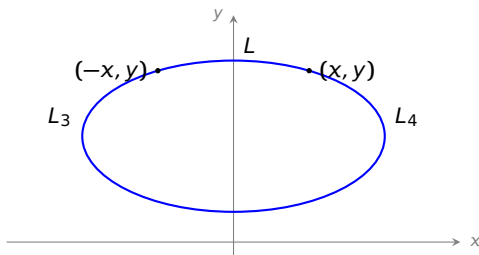


积分的对称性

性质 设平面曲线 L 关于 y 轴对称,

- 若 $f(x, y)$ 关于 x 是奇函数 (即: $f(-x, y) = -f(x, y)$), 则

$$\int_L f(x, y) ds = 0$$



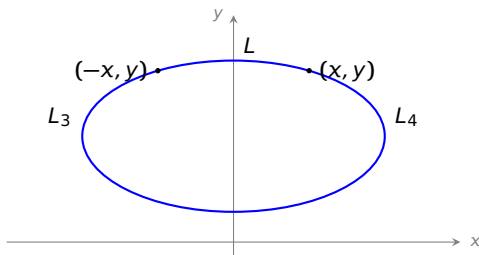
积分的对称性

性质 设平面曲线 L 关于 y 轴对称,

- 若 $f(x, y)$ 关于 x 是奇函数 (即: $f(-x, y) = -f(x, y)$), 则

$$\int_L f(x, y) ds = 0$$

- 若 $f(x, y)$ 关于 x 是偶函数 (即: $f(-x, y) = f(x, y)$), 则



积分的对称性

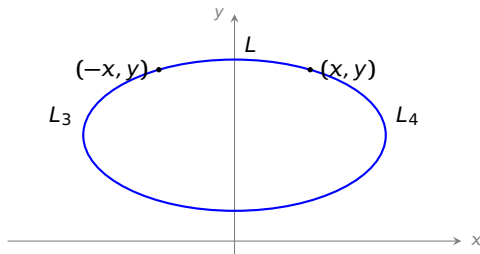
性质 设平面曲线 L 关于 y 轴对称,

- 若 $f(x, y)$ 关于 x 是奇函数 (即: $f(-x, y) = -f(x, y)$), 则

$$\int_L f(x, y) ds = 0$$

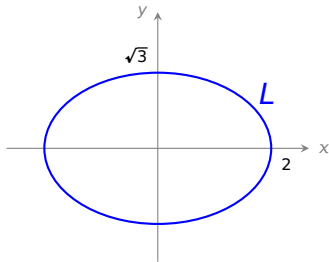
- 若 $f(x, y)$ 关于 x 是偶函数 (即: $f(-x, y) = f(x, y)$), 则

$$\int_L f(x, y) ds = 2 \int_{L_3} f(x, y) ds = 2 \int_{L_4} f(x, y) ds$$



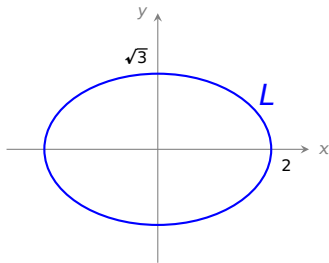
例 已知椭圆 $L : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的周长是 a ,
计算

$$\int_L 2xy + 3x^2 + 4y^2 ds$$



例 已知椭圆 $L : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的周长是 a ,
计算

$$\int_L 2xy + 3x^2 + 4y^2 ds$$

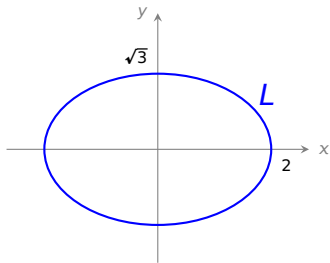


解

$$\text{原式} = \int_L 2xy ds + \int_L 12\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3}\right) ds$$

例 已知椭圆 $L : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的周长是 a ,
计算

$$\int_L 2xy + 3x^2 + 4y^2 ds$$

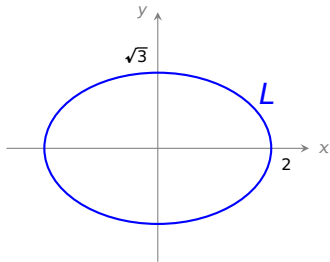


解

$$\text{原式} = \int_L 2xy ds + \int_L 12\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3}\right) ds = 0 +$$

例 已知椭圆 $L : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的周长是 a ,
计算

$$\int_L 2xy + 3x^2 + 4y^2 ds$$

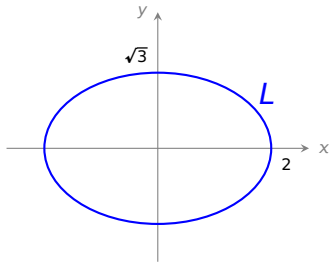


解

$$\text{原式} = \int_L 2xy ds + \int_L 12\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3}\right) ds = 0 + \int_L 12 ds$$

例 已知椭圆 $L : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的周长是 α ,
计算

$$\int_L 2xy + 3x^2 + 4y^2 ds$$



解

$$\text{原式} = \int_L 2xy ds + \int_L 12\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3}\right) ds = 0 + \int_L 12 ds = 12\alpha$$

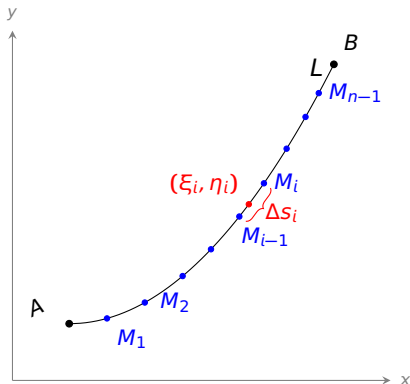
We are here now...

1. 对弧长的曲线积分：概念与性质

2. 对弧长的曲线积分：计算法

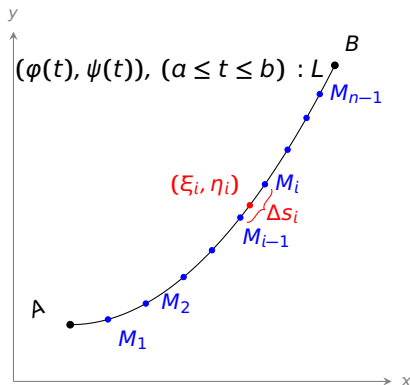
3. 对弧长的曲线积分：空间曲线

对弧长的曲线积分的计算法



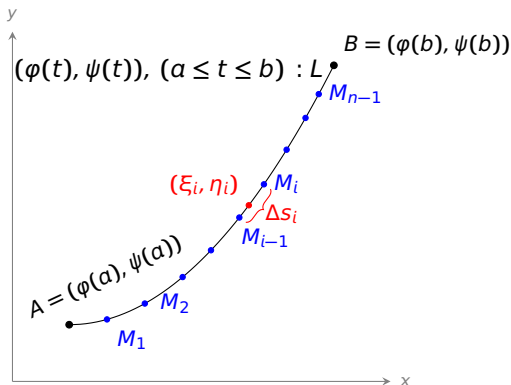
$$\int_L f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$$

对弧长的曲线积分的计算法



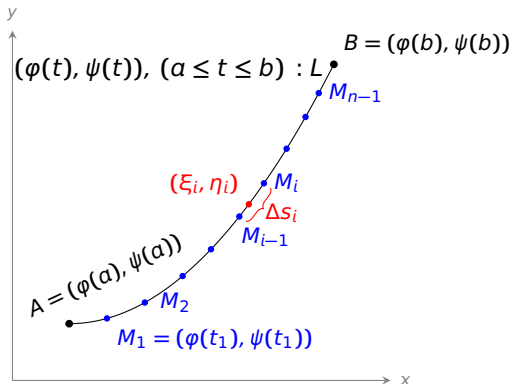
$$\int_L f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$$

对弧长的曲线积分的计算法



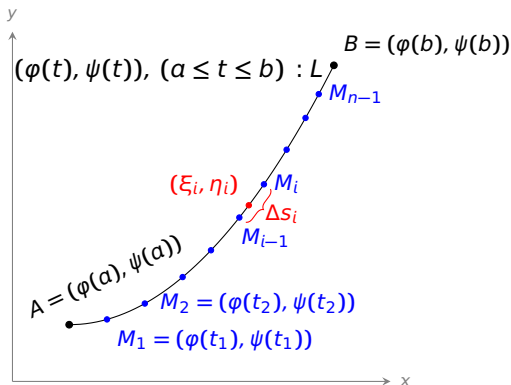
$$\int_L f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$$

对弧长的曲线积分的计算法



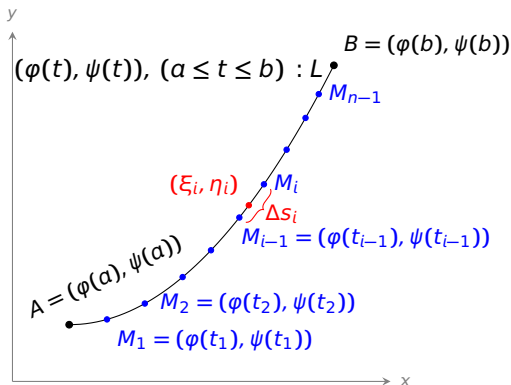
$$\int_L f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$$

对弧长的曲线积分的计算法



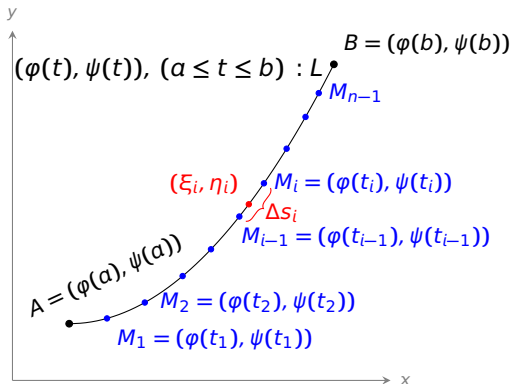
$$\int_L f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$$

对弧长的曲线积分的计算法



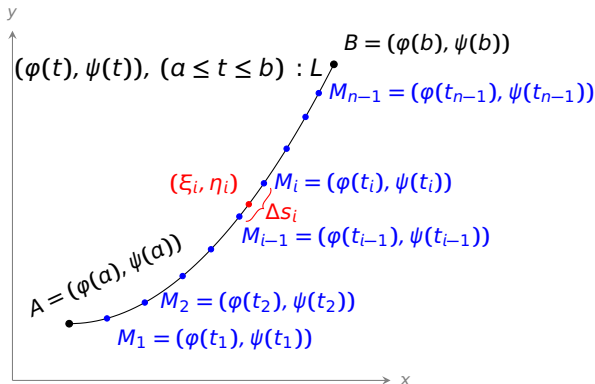
$$\int_L f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$$

对弧长的曲线积分的计算法



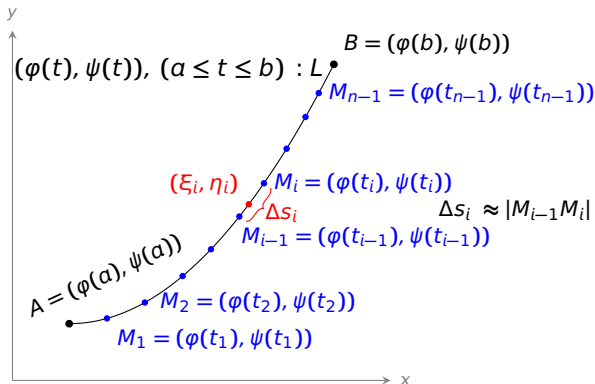
$$\int_L f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$$

对弧长的曲线积分的计算法



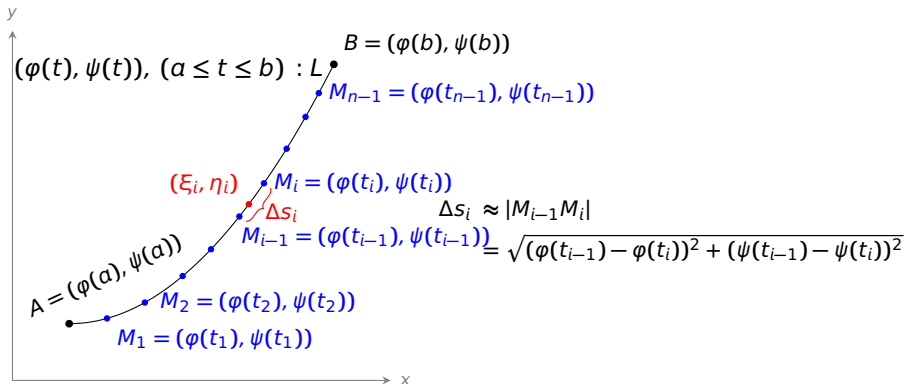
$$\int_L f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$$

对弧长的曲线积分的计算法



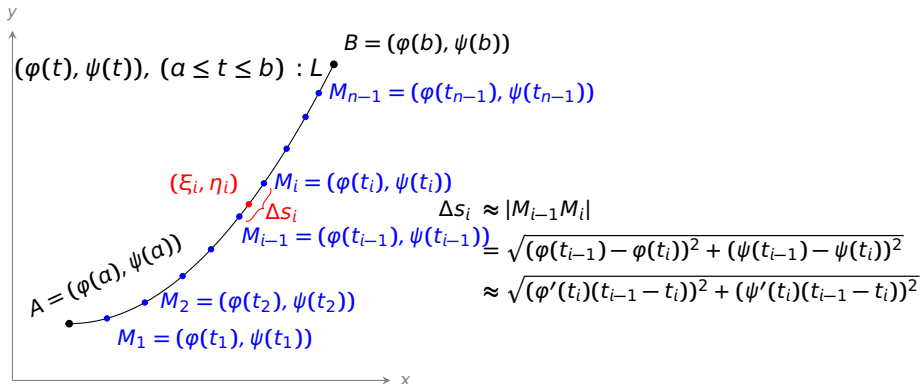
$$\int_L f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$$

对弧长的曲线积分的计算法



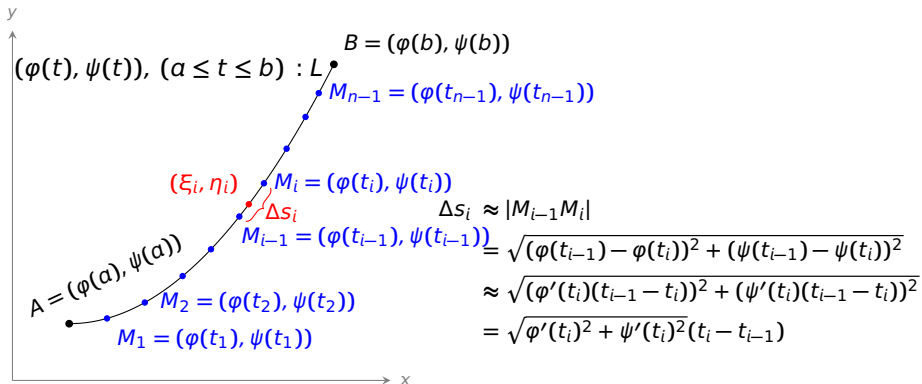
$$\int_L f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$$

对弧长的曲线积分的计算法



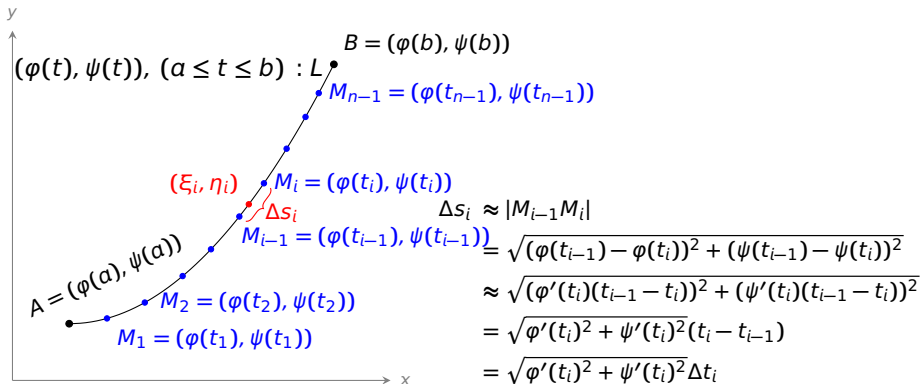
$$\int_L f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$$

对弧长的曲线积分的计算法



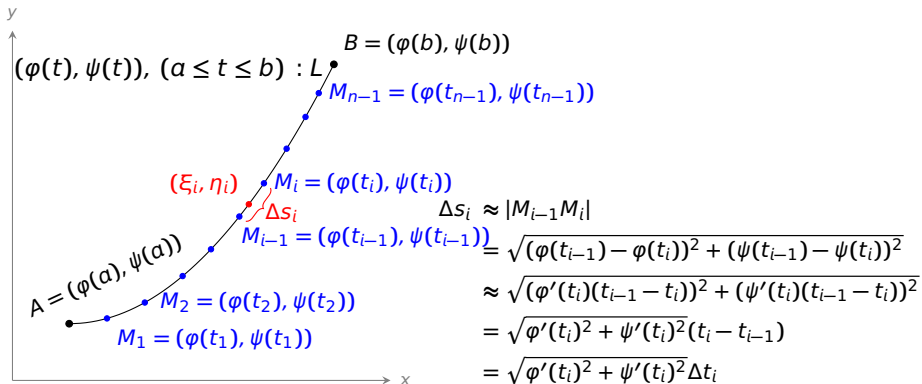
$$\int_L f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$$

对弧长的曲线积分的计算法



$$\int_L f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$$

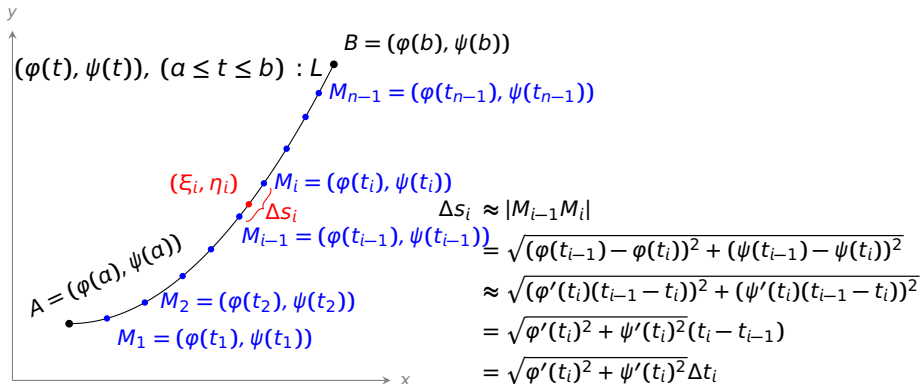
对弧长的曲线积分的计算法



$$\int_L f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$$

$$\sqrt{\varphi'(t_i)^2 + \psi'(t_i)^2} \Delta t_i$$

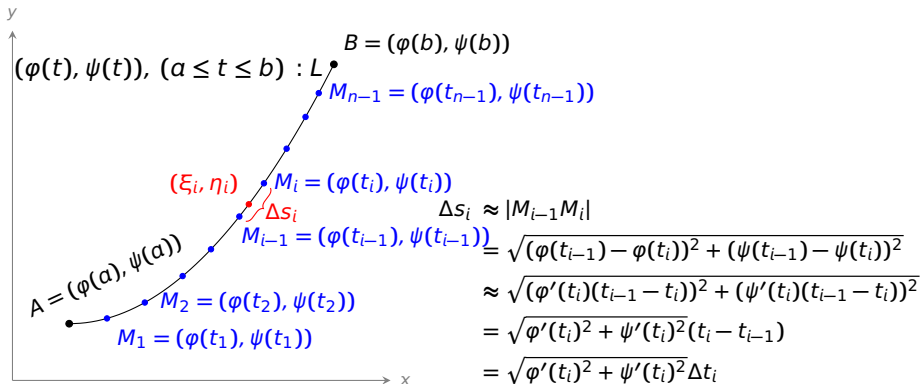
对弧长的曲线积分的计算法



$$\int_L f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$$

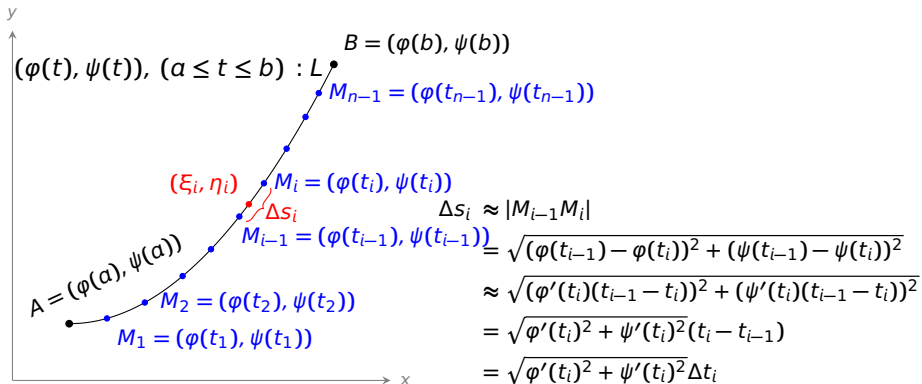
$$f(\varphi(t_i), \psi(t_i)) \sqrt{\varphi'(t_i)^2 + \psi'(t_i)^2} \Delta t_i$$

对弧长的曲线积分的计算法



$$\begin{aligned} \int_L f(x, y) ds &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\varphi(t_i), \psi(t_i)) \sqrt{\varphi'(t_i)^2 + \psi'(t_i)^2} \Delta t_i \end{aligned}$$

对弧长的曲线积分的计算法



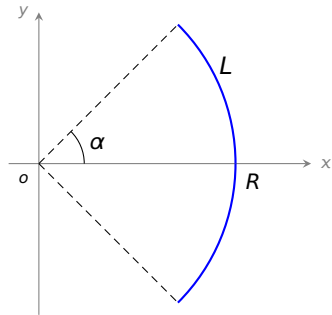
$$\begin{aligned}\int_L f(x, y) ds &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i \\&= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\varphi(t_i), \psi(t_i)) \sqrt{\varphi'(t_i)^2 + \psi'(t_i)^2} \Delta t_i \\&= \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt\end{aligned}$$

从上述推导可知:

性质 设平面曲线 L 的参数方程为 $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, 则弧长元素

$$ds = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt.$$

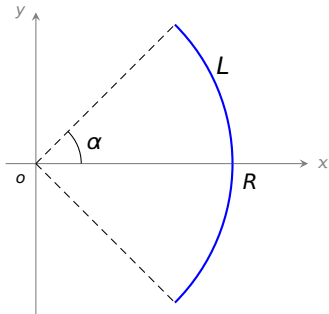
例 计算 $\int_L y^2 ds$, 其中曲线 L 如右图所示



例 计算 $\int_L y^2 ds$, 其中曲线 L 如右图所示

解 曲线 L 的参数方程可取为:

$$x = R \cos \theta, \quad y = R \sin \theta \quad (-\alpha \leq \theta \leq \alpha)$$



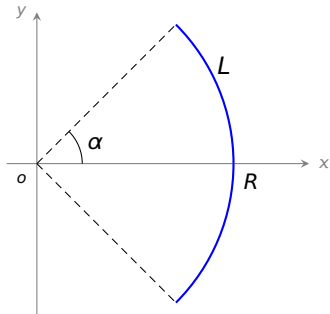
例 计算 $\int_L y^2 ds$, 其中曲线 L 如右图所示

解 曲线 L 的参数方程可取为:

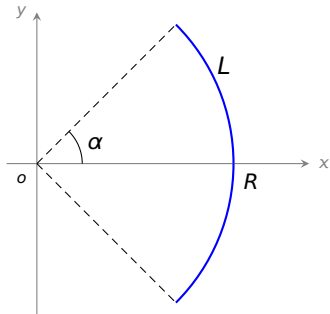
$$x = R \cos \theta, \quad y = R \sin \theta \quad (-\alpha \leq \theta \leq \alpha)$$

所以

$$\int_L y^2 ds = \int_{-\alpha}^{\alpha} R^2 \sin^2 \theta \cdot R d\theta.$$



例 计算 $\int_L y^2 ds$, 其中曲线 L 如右图所示



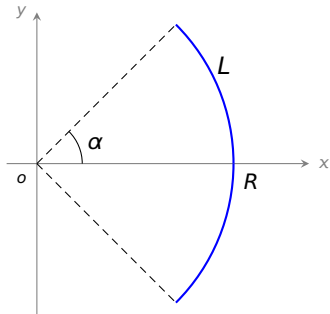
解 曲线 L 的参数方程可取为:

$$x = R \cos \theta, \quad y = R \sin \theta \quad (-\alpha \leq \theta \leq \alpha)$$

所以

$$\int_L y^2 ds = \int_{-\alpha}^{\alpha} R^2 \sin^2 \theta \cdot \sqrt{[(R \cos \theta)']^2 + [(R \sin \theta)']^2} d\theta$$

例 计算 $\int_L y^2 ds$, 其中曲线 L 如右图所示



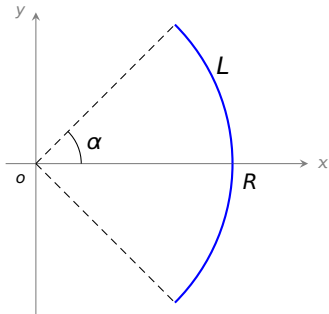
解 曲线 L 的参数方程可取为:

$$x = R \cos \theta, \quad y = R \sin \theta \quad (-\alpha \leq \theta \leq \alpha)$$

所以

$$\begin{aligned} \int_L y^2 ds &= \int_{-\alpha}^{\alpha} R^2 \sin^2 \theta \cdot \sqrt{[(R \cos \theta)']^2 + [(R \sin \theta)']^2} d\theta \\ &= \int_{-\alpha}^{\alpha} R^2 \sin^2 \theta \cdot R d\theta \end{aligned}$$

例 计算 $\int_L y^2 ds$, 其中曲线 L 如右图所示



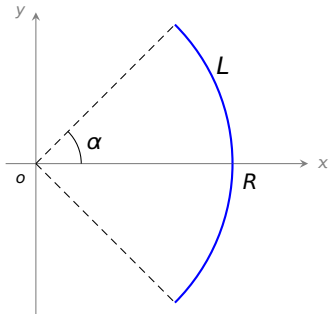
解 曲线 L 的参数方程可取为:

$$x = R \cos \theta, \quad y = R \sin \theta \quad (-\alpha \leq \theta \leq \alpha)$$

所以

$$\begin{aligned} \int_L y^2 ds &= \int_{-\alpha}^{\alpha} R^2 \sin^2 \theta \cdot \sqrt{[(R \cos \theta)']^2 + [(R \sin \theta)']^2} d\theta \\ &= \int_{-\alpha}^{\alpha} R^2 \sin^2 \theta \cdot R d\theta = R^3 \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta) d\theta \end{aligned}$$

例 计算 $\int_L y^2 ds$, 其中曲线 L 如右图所示



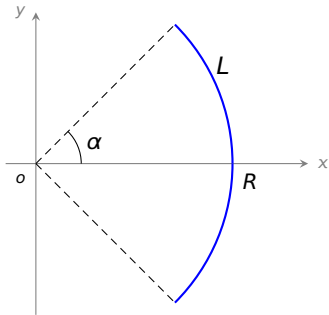
解 曲线 L 的参数方程可取为:

$$x = R \cos \theta, \quad y = R \sin \theta \quad (-\alpha \leq \theta \leq \alpha)$$

所以

$$\begin{aligned} \int_L y^2 ds &= \int_{-\alpha}^{\alpha} R^2 \sin^2 \theta \cdot \sqrt{[(R \cos \theta)']^2 + [(R \sin \theta)']^2} d\theta \\ &= \int_{-\alpha}^{\alpha} R^2 \sin^2 \theta \cdot R d\theta = R^3 \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} R^3 \left(\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \end{aligned}$$

例 计算 $\int_L y^2 ds$, 其中曲线 L 如右图所示



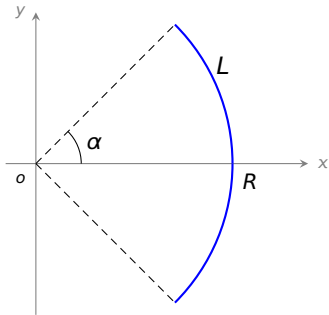
解 曲线 L 的参数方程可取为:

$$x = R \cos \theta, \quad y = R \sin \theta \quad (-\alpha \leq \theta \leq \alpha)$$

所以

$$\begin{aligned} \int_L y^2 ds &= \int_{-\alpha}^{\alpha} R^2 \sin^2 \theta \cdot \sqrt{[(R \cos \theta)']^2 + [(R \sin \theta)']^2} d\theta \\ &= \int_{-\alpha}^{\alpha} R^2 \sin^2 \theta \cdot R d\theta = R^3 \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} R^3 \left(\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \Big|_{-\alpha}^{\alpha} \end{aligned}$$

例 计算 $\int_L y^2 ds$, 其中曲线 L 如右图所示



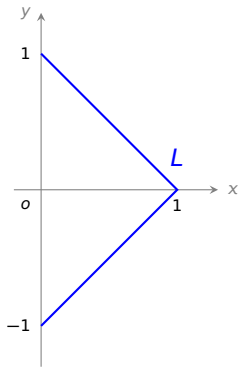
解 曲线 L 的参数方程可取为:

$$x = R \cos \theta, \quad y = R \sin \theta \quad (-\alpha \leq \theta \leq \alpha)$$

所以

$$\begin{aligned} \int_L y^2 ds &= \int_{-\alpha}^{\alpha} R^2 \sin^2 \theta \cdot \sqrt{[(R \cos \theta)']^2 + [(R \sin \theta)']^2} d\theta \\ &= \int_{-\alpha}^{\alpha} R^2 \sin^2 \theta \cdot R d\theta = R^3 \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} R^3 \left(\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \Big|_{-\alpha}^{\alpha} = R^3 \left(\alpha - \frac{1}{2} \sin(2\alpha) \right) \end{aligned}$$

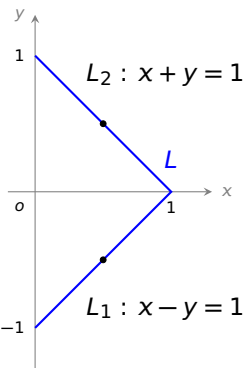
例 计算 $\int_L e^{x+y} ds$, 其中 L 如右图所示



例 计算 $\int_L e^{x+y} ds$, 其中 L 如右图所示

解

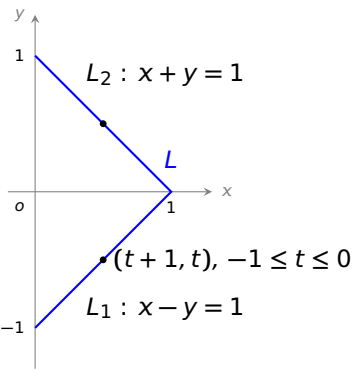
$$\int_L e^{x+y} ds = \int_{L_1} e^{x+y} ds + \int_{L_2} e^{x+y} ds$$



例 计算 $\int_L e^{x+y} ds$, 其中 L 如右图所示

解

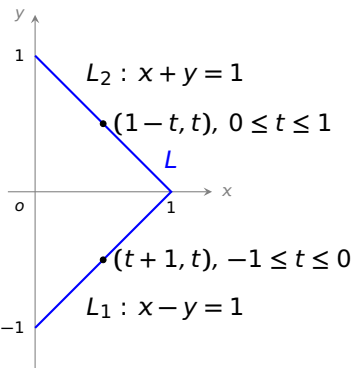
$$\int_L e^{x+y} ds = \int_{L_1} e^{x+y} ds + \int_{L_2} e^{x+y} ds$$



例 计算 $\int_L e^{x+y} ds$, 其中 L 如右图所示

解

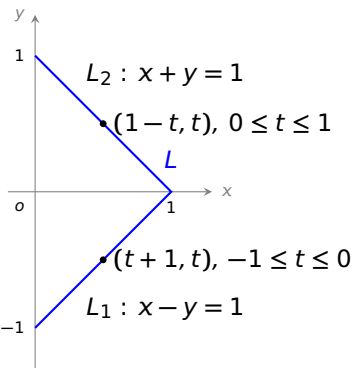
$$\int_L e^{x+y} ds = \int_{L_1} e^{x+y} ds + \int_{L_2} e^{x+y} ds$$



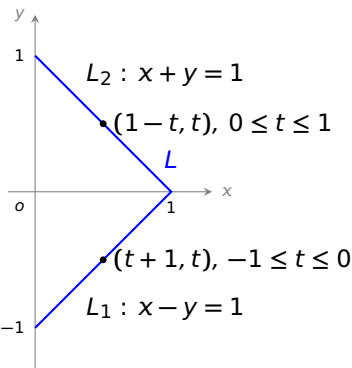
例 计算 $\int_L e^{x+y} ds$, 其中 L 如右图所示

解

$$\begin{aligned}\int_L e^{x+y} ds &= \int_{L_1} e^{x+y} ds + \int_{L_2} e^{x+y} ds \\ &= \int_{-1}^0 e^{2t+1} \cdot \sqrt{[(t+1)']^2 + [t']^2} dt\end{aligned}$$



例 计算 $\int_L e^{x+y} ds$, 其中 L 如右图所示



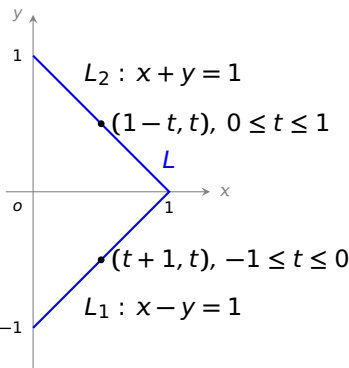
解

$$\begin{aligned}\int_L e^{x+y} ds &= \int_{L_1} e^{x+y} ds + \int_{L_2} e^{x+y} ds \\ &= \int_{-1}^0 e^{2t+1} \cdot \sqrt{[(t+1)']^2 + [t']^2} dt + \int_0^1 e^1 \cdot \sqrt{[(1-t)']^2 + [t']^2} dt\end{aligned}$$

例 计算 $\int_L e^{x+y} ds$, 其中 L 如右图所示

解

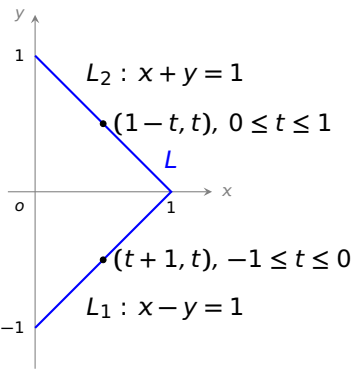
$$\begin{aligned}\int_L e^{x+y} ds &= \int_{L_1} e^{x+y} ds + \int_{L_2} e^{x+y} ds \\&= \int_{-1}^0 e^{2t+1} \cdot \sqrt{[(t+1)']^2 + [t']^2} dt + \int_0^1 e^1 \cdot \sqrt{[(1-t)']^2 + [t']^2} dt \\&= \sqrt{2} \int_{-1}^0 e^{2t+1} dt + \sqrt{2} \int_0^1 e^1 dt\end{aligned}$$



例 计算 $\int_L e^{x+y} ds$, 其中 L 如右图所示

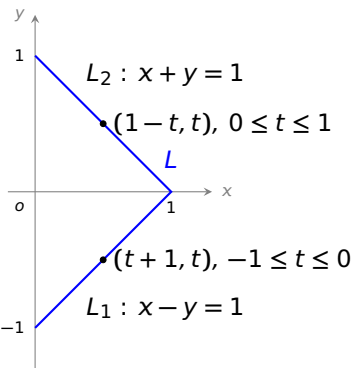
解

$$\begin{aligned}\int_L e^{x+y} ds &= \int_{L_1} e^{x+y} ds + \int_{L_2} e^{x+y} ds \\&= \int_{-1}^0 e^{2t+1} \cdot \sqrt{[(t+1)']^2 + [t']^2} dt + \int_0^1 e^1 \cdot \sqrt{[(1-t)']^2 + [t']^2} dt \\&= \sqrt{2} \int_{-1}^0 e^{2t+1} dt + \sqrt{2} \int_0^1 e^1 dt \\&= \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} e^{2t+1}\end{aligned}$$



例 计算 $\int_L e^{x+y} ds$, 其中 L 如右图所示

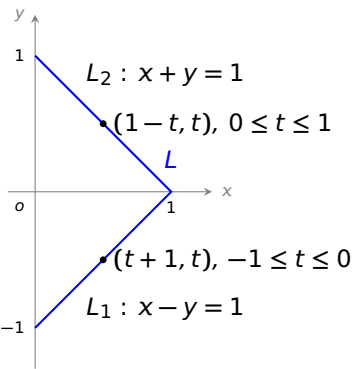
解



$$\begin{aligned}\int_L e^{x+y} ds &= \int_{L_1} e^{x+y} ds + \int_{L_2} e^{x+y} ds \\&= \int_{-1}^0 e^{2t+1} \cdot \sqrt{[(t+1)']^2 + [t']^2} dt + \int_0^1 e^1 \cdot \sqrt{[(1-t)']^2 + [t']^2} dt \\&= \sqrt{2} \int_{-1}^0 e^{2t+1} dt + \sqrt{2} \int_0^1 e^1 dt \\&= \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} e^{2t+1} \Big|_{-1}^0\end{aligned}$$

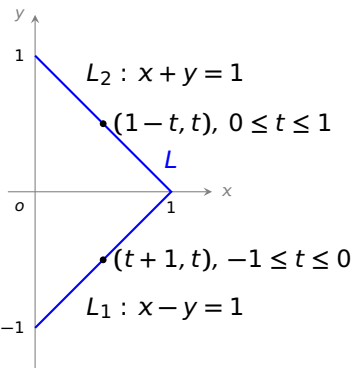
例 计算 $\int_L e^{x+y} ds$, 其中 L 如右图所示

解



$$\begin{aligned}\int_L e^{x+y} ds &= \int_{L_1} e^{x+y} ds + \int_{L_2} e^{x+y} ds \\&= \int_{-1}^0 e^{2t+1} \cdot \sqrt{[(t+1)']^2 + [t']^2} dt + \int_0^1 e^1 \cdot \sqrt{[(1-t)']^2 + [t']^2} dt \\&= \sqrt{2} \int_{-1}^0 e^{2t+1} dt + \sqrt{2} \int_0^1 e^1 dt \\&= \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} e^{2t+1} \Big|_{-1}^0 + \sqrt{2} e\end{aligned}$$

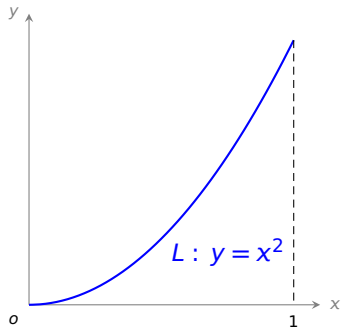
例 计算 $\int_L e^{x+y} ds$, 其中 L 如右图所示



解

$$\begin{aligned}\int_L e^{x+y} ds &= \int_{L_1} e^{x+y} ds + \int_{L_2} e^{x+y} ds \\&= \int_{-1}^0 e^{2t+1} \cdot \sqrt{[(t+1)']^2 + [t']^2} dt + \int_0^1 e^1 \cdot \sqrt{[(1-t)']^2 + [t']^2} dt \\&= \sqrt{2} \int_{-1}^0 e^{2t+1} dt + \sqrt{2} \int_0^1 e^1 dt \\&= \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} e^{2t+1} \Big|_{-1}^0 + \sqrt{2} e = \frac{\sqrt{2}}{2} (3e - e^{-1})\end{aligned}$$

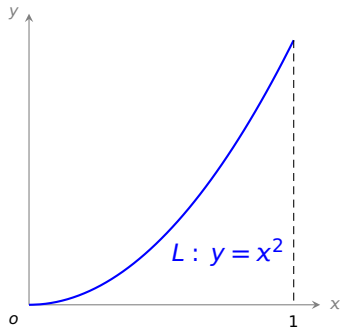
例 计算 $\int_L \sqrt{y} ds$, 其中 L 如右图所示



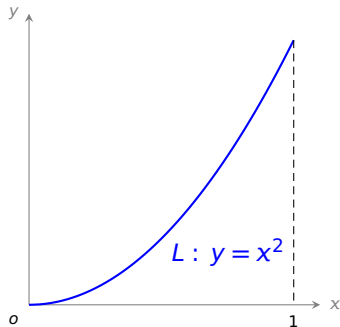
例 计算 $\int_L \sqrt{y} ds$, 其中 L 如右图所示

解 曲线 L 的参数方程可取为:

$$x = t, \quad y = t^2 \quad (0 \leq t \leq 1)$$



例 计算 $\int_L \sqrt{y} ds$, 其中 L 如右图所示



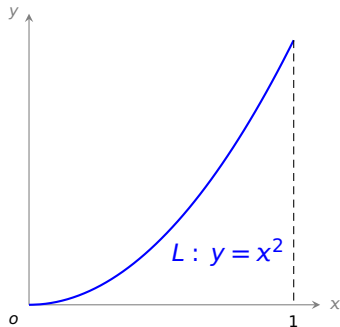
解 曲线 L 的参数方程可取为:

$$x = t, \quad y = t^2 \quad (0 \leq t \leq 1)$$

所以

$$\int_L \sqrt{y} ds = \int_0^1 \sqrt{t^2} dt.$$

例 计算 $\int_L \sqrt{y} ds$, 其中 L 如右图所示



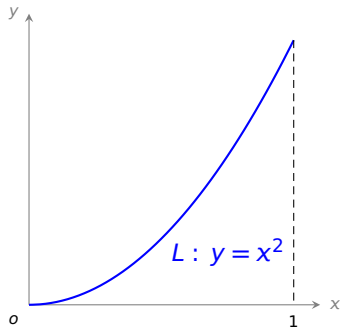
解 曲线 L 的参数方程可取为:

$$x = t, \quad y = t^2 \quad (0 \leq t \leq 1)$$

所以

$$\int_L \sqrt{y} ds = \int_0^1 \sqrt{t^2} \cdot \sqrt{[t']^2 + [(t^2)']^2} dt$$

例 计算 $\int_L \sqrt{y} ds$, 其中 L 如右图所示



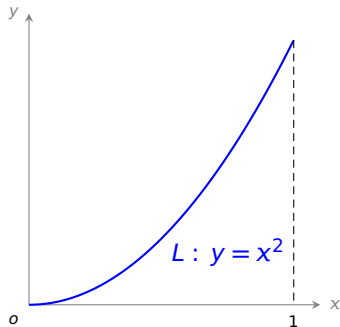
解 曲线 L 的参数方程可取为:

$$x = t, \quad y = t^2 \quad (0 \leq t \leq 1)$$

所以

$$\int_L \sqrt{y} ds = \int_0^1 \sqrt{t^2} \cdot \sqrt{[t']^2 + [(t^2)']^2} dt = \int_0^1 t \cdot \sqrt{1 + 4t^2} dt$$

例 计算 $\int_L \sqrt{y} ds$, 其中 L 如右图所示



解 曲线 L 的参数方程可取为:

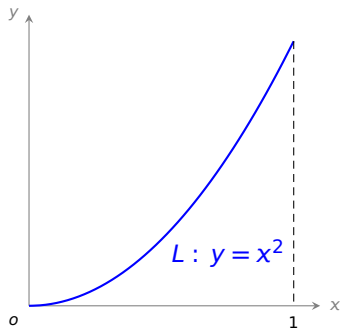
$$x = t, \quad y = t^2 \quad (0 \leq t \leq 1)$$

所以

$$\int_L \sqrt{y} ds = \int_0^1 \sqrt{t^2} \cdot \sqrt{[t']^2 + [(t^2)']^2} dt = \int_0^1 t \cdot \sqrt{1 + 4t^2} dt$$

$u=1+4t^2$

例 计算 $\int_L \sqrt{y} ds$, 其中 L 如右图所示



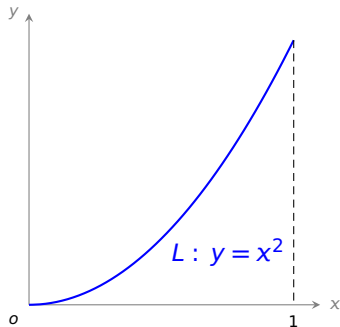
解 曲线 L 的参数方程可取为:

$$x = t, \quad y = t^2 \quad (0 \leq t \leq 1)$$

所以

$$\begin{aligned} \int_L \sqrt{y} ds &= \int_0^1 \sqrt{t^2} \cdot \sqrt{[t']^2 + [(t^2)']^2} dt = \int_0^1 t \cdot \sqrt{1 + 4t^2} dt \\ &\stackrel{\underline{\underline{u=1+4t^2}}}{=} \int_1^5 \sqrt{u} \cdot \end{aligned}$$

例 计算 $\int_L \sqrt{y} ds$, 其中 L 如右图所示



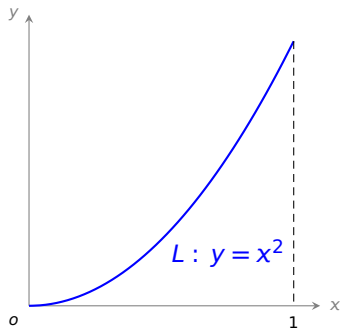
解 曲线 L 的参数方程可取为:

$$x = t, \quad y = t^2 \quad (0 \leq t \leq 1)$$

所以

$$\begin{aligned} \int_L \sqrt{y} ds &= \int_0^1 \sqrt{t^2} \cdot \sqrt{[t']^2 + [(t^2)']^2} dt = \int_0^1 t \cdot \sqrt{1 + 4t^2} dt \\ &\stackrel{\underline{\underline{u=1+4t^2}}}{=} \int_1^5 \sqrt{u} \cdot \frac{1}{8} du \end{aligned}$$

例 计算 $\int_L \sqrt{y} ds$, 其中 L 如右图所示



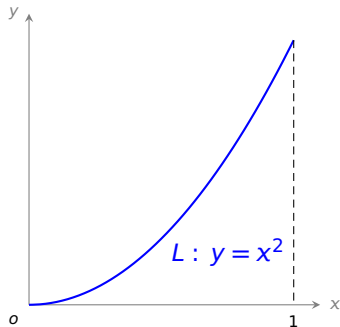
解 曲线 L 的参数方程可取为:

$$x = t, \quad y = t^2 \quad (0 \leq t \leq 1)$$

所以

$$\begin{aligned} \int_L \sqrt{y} ds &= \int_0^1 \sqrt{t^2} \cdot \sqrt{[t']^2 + [(t^2)']^2} dt = \int_0^1 t \cdot \sqrt{1 + 4t^2} dt \\ &\stackrel{\underline{\underline{u=1+4t^2}}}{=} \int_1^5 \sqrt{u} \cdot \frac{1}{8} du = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

例 计算 $\int_L \sqrt{y} ds$, 其中 L 如右图所示



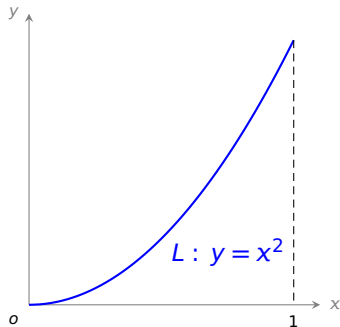
解 曲线 L 的参数方程可取为:

$$x = t, \quad y = t^2 \quad (0 \leq t \leq 1)$$

所以

$$\begin{aligned} \int_L \sqrt{y} ds &= \int_0^1 \sqrt{t^2} \cdot \sqrt{[t']^2 + [(t^2)']^2} dt = \int_0^1 t \cdot \sqrt{1 + 4t^2} dt \\ &\stackrel{\underline{\underline{u=1+4t^2}}}{=} \int_1^5 \sqrt{u} \cdot \frac{1}{8} du = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_1^5 \end{aligned}$$

例 计算 $\int_L \sqrt{y} ds$, 其中 L 如右图所示



解 曲线 L 的参数方程可取为:

$$x = t, \quad y = t^2 \quad (0 \leq t \leq 1)$$

所以

$$\begin{aligned} \int_L \sqrt{y} ds &= \int_0^1 \sqrt{t^2} \cdot \sqrt{[t']^2 + [(t^2)']^2} dt = \int_0^1 t \cdot \sqrt{1 + 4t^2} dt \\ &\stackrel{\underline{\underline{u=1+4t^2}}}{=} \int_1^5 \sqrt{u} \cdot \frac{1}{8} du = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_1^5 = \frac{1}{12} (5\sqrt{5} - 1) \end{aligned}$$

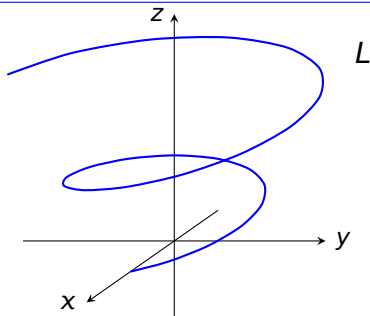
We are here now...

1. 对弧长的曲线积分：概念与性质

2. 对弧长的曲线积分：计算法

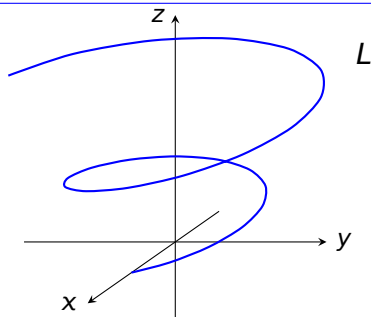
3. 对弧长的曲线积分：空间曲线

对弧长的曲线积分：空间曲线



$$\int_L f(x, y, z) ds$$

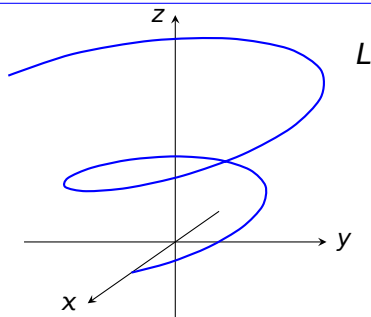
对弧长的曲线积分：空间曲线



$$\int_L f(x, y, z) ds$$

- 当 $f(x, y, z)$ 是线密度时, $\int_L f(x, y, z) ds$ 表示曲线的质量

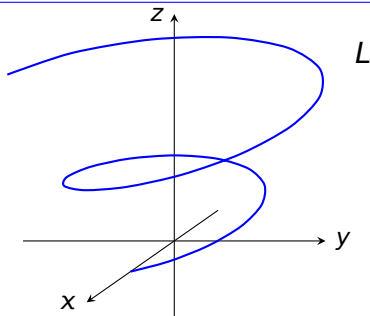
对弧长的曲线积分：空间曲线



$$\int_L f(x, y, z) ds$$

- 当 $f(x, y, z)$ 是线密度时, $\int_L f(x, y, z) ds$ 表示曲线的质量
- 若曲线 L 的参数方程是
$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \zeta(t) \end{cases}, \quad (a \leq t \leq b),$$
 则

对弧长的曲线积分：空间曲线

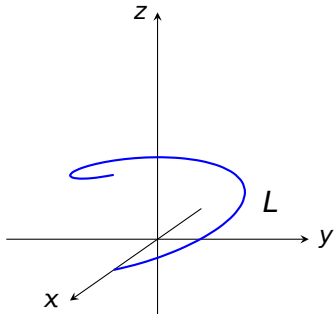


$$\int_L f(x, y, z) ds$$

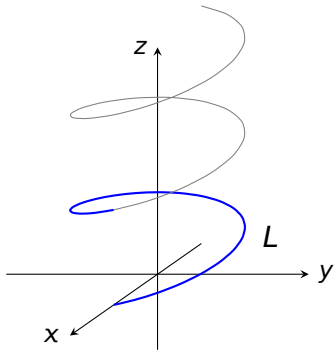
- 当 $f(x, y, z)$ 是线密度时, $\int_L f(x, y, z) ds$ 表示曲线的质量
- 若曲线 L 的参数方程是
$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \zeta(t) \end{cases}, \quad (a \leq t \leq b),$$
 则

$$\int_L f(x, y, z) ds = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t), \zeta(t)) \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \zeta'(t)^2} dt$$

例 计算 $\int_L (x^2 + y^2 + z^2) ds$, 其中 L 为螺旋线 $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$ ($0 \leq t \leq 2\pi$)



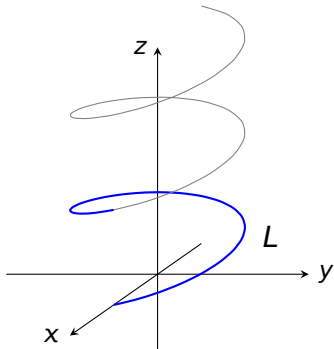
例 计算 $\int_L (x^2 + y^2 + z^2) ds$, 其中 L 为螺旋线 $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$ ($0 \leq t \leq 2\pi$)



例 计算 $\int_L (x^2 + y^2 + z^2) ds$, 其中 L 为螺旋线 $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$ ($0 \leq t \leq 2\pi$)

解

$$\begin{aligned} & \int_L (x^2 + y^2 + z^2) ds \\ &= \int_0^{2\pi} [(a \cos t)^2 + (a \sin t)^2 + (bt)^2] \cdot \end{aligned}$$

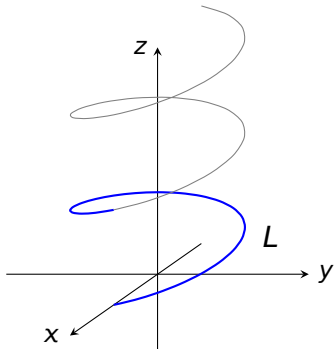


例 计算 $\int_L (x^2 + y^2 + z^2) ds$, 其中 L 为螺旋线 $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$ ($0 \leq t \leq 2\pi$)

解

$$\int_L (x^2 + y^2 + z^2) ds$$
$$= \int_0^{2\pi} [(a \cos t)^2 + (a \sin t)^2 + (bt)^2] \cdot$$

$$\sqrt{[(a \cos t)']^2 + [(a \sin t)']^2 + [(bt)']^2} dt$$



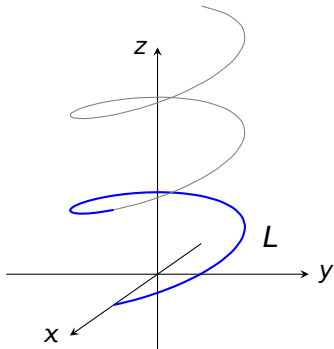
例 计算 $\int_L (x^2 + y^2 + z^2) ds$, 其中 L 为螺旋线 $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$ ($0 \leq t \leq 2\pi$)

解
$$\int_L (x^2 + y^2 + z^2) ds$$

$$= \int_0^{2\pi} [(a \cos t)^2 + (a \sin t)^2 + (bt)^2] \cdot$$

$$\sqrt{[(a \cos t)']^2 + [(a \sin t)']^2 + [(bt)']^2} dt$$

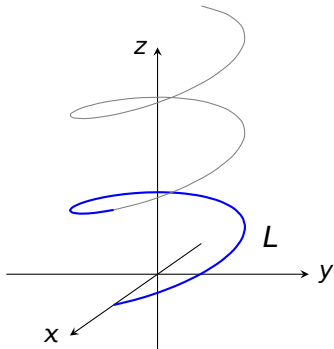
$$= \int_0^{2\pi} [a^2 + b^2 t^2] \cdot \sqrt{a^2 + b^2} dt$$



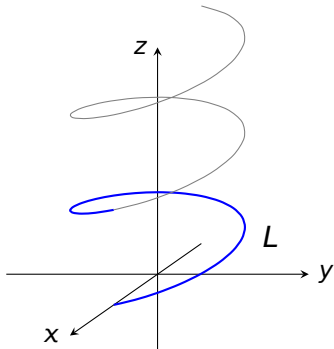
例 计算 $\int_L (x^2 + y^2 + z^2) ds$, 其中 L 为螺旋线 $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$ ($0 \leq t \leq 2\pi$)

解
$$\int_L (x^2 + y^2 + z^2) ds$$
$$= \int_0^{2\pi} [(a \cos t)^2 + (a \sin t)^2 + (bt)^2] \cdot$$

$$\sqrt{[(a \cos t)']^2 + [(a \sin t)']^2 + [(bt)']^2} dt$$
$$= \int_0^{2\pi} [a^2 + b^2 t^2] \cdot \sqrt{a^2 + b^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \left(a^2 t + \frac{1}{3} b^2 t^3 \right) \Big|_0^{2\pi}$$



例 计算 $\int_L (x^2 + y^2 + z^2) ds$, 其中 L 为螺旋线 $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$ ($0 \leq t \leq 2\pi$)



解

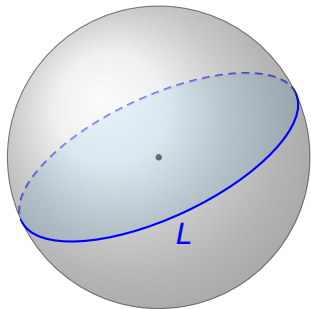
$$\int_L (x^2 + y^2 + z^2) ds$$
$$= \int_0^{2\pi} [(a \cos t)^2 + (a \sin t)^2 + (bt)^2] \cdot$$

$$\sqrt{[(a \cos t)']^2 + [(a \sin t)']^2 + [(bt)']^2} dt$$

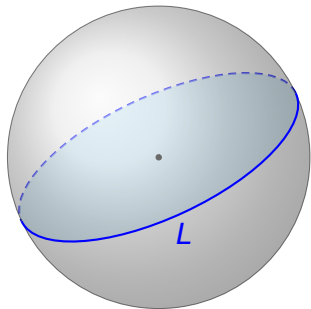
$$= \int_0^{2\pi} [a^2 + b^2 t^2] \cdot \sqrt{a^2 + b^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \left(a^2 t + \frac{1}{3} b^2 t^3 \right) \Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{2}{3} \pi \sqrt{a^2 + b^2} \cdot (3a^2 + 2b^2 \pi^2)$$

例 计算 $\int_L x^2 ds$, 其中 L 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线。



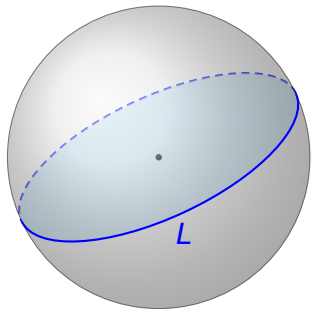
例 计算 $\int_L x^2 ds$, 其中 L 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线。



解 由对称性可知:

$$\int_L x^2 ds = \int_L y^2 ds = \int_L z^2 ds$$

例 计算 $\int_L x^2 ds$, 其中 L 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线。



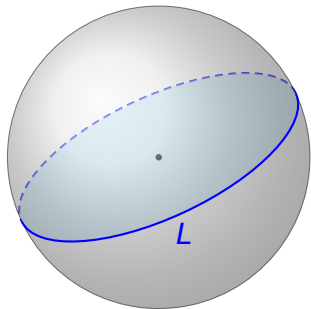
解 由对称性可知:

$$\int_L x^2 ds = \int_L y^2 ds = \int_L z^2 ds$$

所以

$$\int_L x^2 ds = \frac{1}{3} \int_L (x^2 + y^2 + z^2) ds$$

例 计算 $\int_L x^2 ds$, 其中 L 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线。



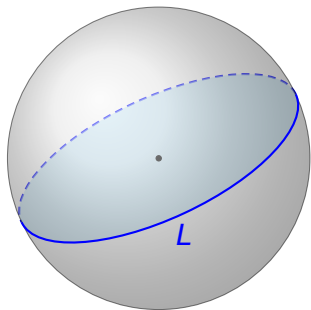
解 由对称性可知:

$$\int_L x^2 ds = \int_L y^2 ds = \int_L z^2 ds$$

所以

$$\int_L x^2 ds = \frac{1}{3} \int_L (x^2 + y^2 + z^2) ds = \frac{1}{3} \int_L 1 ds$$

例 计算 $\int_L x^2 ds$, 其中 L 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线。



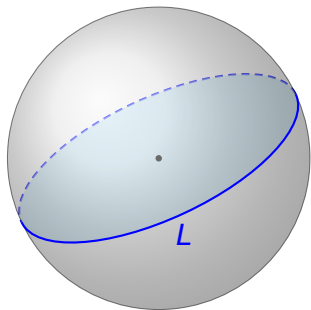
解 由对称性可知:

$$\int_L x^2 ds = \int_L y^2 ds = \int_L z^2 ds$$

所以

$$\int_L x^2 ds = \frac{1}{3} \int_L (x^2 + y^2 + z^2) ds = \frac{1}{3} \int_L 1 ds = \frac{1}{3} \text{Length}(L)$$

例 计算 $\int_L x^2 ds$, 其中 L 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线。



解 由对称性可知:

$$\int_L x^2 ds = \int_L y^2 ds = \int_L z^2 ds$$

所以

$$\int_L x^2 ds = \frac{1}{3} \int_L (x^2 + y^2 + z^2) ds = \frac{1}{3} \int_L 1 ds = \frac{1}{3} \text{Length}(L) = \frac{1}{3} \cdot 2\pi$$