第 11 章 c：积分路径无关；格林公式

数学系　　梁卓滨

2018-2019 学年 II

We are here now...

1. 梯度向量场，保守向量场；曲线积分与路径无关

2. 格林公式

梯度向量

设 $P(x, y)$，$Q(x, y)$ 是定义在平面区域 D 上的二元函数

$F = (P, Q)$ 为定义在 D 上的向量场

梯度向量

设 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 是定义在平面区域 D 上的二元函数

$F=(P,Q)$ 为定义在 D 上的向量场

定义 称 F 为 梯度向量场，是指在 D 上存在二元函数 $f(x,y)$，使得 $F=\nabla f$。

梯度向量

设 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 是定义在平面区域 D 上的二元函数

$F=(P,Q)$ 为定义在 D 上的向量场

定义 称 F 为 梯度向量场，是指在 D 上存在二元函数 $f(x,y)$，使得 $F=\nabla f$。也就是 $P=f_x$，$Q=f_y$。

梯度向量

设 $P(x, y)$，$Q(x, y)$ 是定义在平面区域 D 上的二元函数

$F = (P, Q)$ 为定义在 D 上的向量场

定义 称 F 为 梯度向量场，是指在 D 上存在二元函数 $f(x, y)$，使得 $F = \nabla f$。也就是 $P = f_x$，$Q = f_y$。此时，f 称为 F 的势函数。

梯度向量

设 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 是定义在平面区域 D 上的二元函数

$F=(P,Q)$ 为定义在 D 上的向量场

定义 称 F 为 梯度向量场，是指在 D 上存在二元函数 $f(x,y)$，使得 $F=\nabla f$。也就是 $P=f_x$，$Q=f_y$。此时，f 称为 F 的势函数。

性质 若 F 是梯度向量场，则 $P_y=Q_x$

梯度向量

设 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 是定义在平面区域 D 上的二元函数

$F=(P,Q)$ 为定义在 D 上的向量场

定义 称 F 为 梯度向量场，是指在 D 上存在二元函数 $f(x,y)$，使得 $F=\nabla f$。也就是 $P=f_x$，$Q=f_y$。此时，f 称为 F 的势函数。

性质 若 F 是梯度向量场，则 $P_y=Q_x$，即 $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix}=0$。

梯度向量

设 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 是定义在平面区域 D 上的二元函数

$F=(P,Q)$ 为定义在 D 上的向量场

定义 称 F 为 梯度向量场，是指在 D 上存在二元函数 $f(x,y)$，使得 $F=\nabla f$。也就是 $P=f_x$，$Q=f_y$。此时，f 称为 F 的势函数。

性质 若 F 是梯度向量场，则 $P_y=Q_x$，即 $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix}=0$。

证明 F 是梯度向量场 $\Rightarrow \begin{cases} P=f_x \\ Q=f_y \end{cases}$

梯度向量

设 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 是定义在平面区域 D 上的二元函数

$F=(P,Q)$ 为定义在 D 上的向量场

定义 称 F 为梯度向量场，是指在 D 上存在二元函数 $f(x,y)$，使得 $F=\nabla f$。也就是 $P=f_x$，$Q=f_y$。此时，f 称为 F 的势函数。

性质 若 F 是梯度向量场，则 $P_y=Q_x$，即 $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix}=0$。

证明 F 是梯度向量场 $\Rightarrow \begin{cases} P=f_x \\ Q=f_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_y= \\ Q_x= \end{cases}$

梯度向量

设 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 是定义在平面区域 D 上的二元函数

$F=(P,Q)$ 为定义在 D 上的向量场

定义 称 F 为 梯度向量场，是指在 D 上存在二元函数 $f(x,y)$，使得 $F=\nabla f$。也就是 $P=f_x$，$Q=f_y$。此时，f 称为 F 的势函数。

性质 若 F 是梯度向量场，则 $P_y=Q_x$，即 $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix}=0$。

证明 F 是梯度向量场 $\Rightarrow \begin{cases} P=f_x \\ Q=f_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_y=f_{xy} \\ Q_x= \end{cases}$

梯度向量

设 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 是定义在平面区域 D 上的二元函数

$F=(P,Q)$ 为定义在 D 上的向量场

定义 称 F 为 梯度向量场，是指在 D 上存在二元函数 $f(x,y)$，使得 $F=\nabla f$。也就是 $P=f_x$，$Q=f_y$。此时，f 称为 F 的势函数。

性质 若 F 是梯度向量场，则 $P_y=Q_x$，即 $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix}=0$。

证明 F 是梯度向量场 $\Rightarrow \begin{cases} P=f_x \\ Q=f_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_y=f_{xy} \\ Q_x=f_{yx} \end{cases}$

梯度向量

设 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 是定义在平面区域 D 上的二元函数

$F=(P,Q)$ 为定义在 D 上的向量场

定义 称 F 为梯度向量场，是指在 D 上存在二元函数 $f(x,y)$，使得 $F=\nabla f$。也就是 $P=f_x$，$Q=f_y$。此时，f 称为 F 的势函数。

性质 若 F 是梯度向量场，则 $P_y=Q_x$，即 $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix}=0$。

证明 F 是梯度向量场 $\Rightarrow \begin{cases} P=f_x \\ Q=f_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_y=f_{xy} \\ Q_x=f_{yx} \end{cases} \Rightarrow P_y=Q_x$

梯度向量

设 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 是定义在平面区域 D 上的二元函数

$F=(P,Q)$ 为定义在 D 上的向量场

定义 称 F 为 梯度向量场，是指在 D 上存在二元函数 $f(x,y)$，使得 $F=\nabla f$。也就是 $P=f_x$，$Q=f_y$。此时，f 称为 F 的势函数。

性质 若 F 是梯度向量场，则 $P_y=Q_x$，即 $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix}=0$。

证明 F 是梯度向量场 $\Rightarrow \begin{cases} P=f_x \\ Q=f_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_y=f_{xy} \\ Q_x=f_{yx} \end{cases} \Rightarrow P_y=Q_x$

注

- 如果 $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix}\neq 0$，则 F 一定不是梯度向量场

梯度向量

设 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 是定义在平面区域 D 上的二元函数

$F=(P,Q)$ 为定义在 D 上的向量场

定义 称 F 为 **梯度向量场**，是指在 D 上存在二元函数 $f(x,y)$，使得 $F=\nabla f$。也就是 $P=f_x$，$Q=f_y$。此时，f 称为 F 的**势函数**。

性质 若 F 是梯度向量场，则 $P_y=Q_x$，即 $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix}=0$。

证明 F 是梯度向量场 $\Rightarrow \begin{cases} P=f_x \\ Q=f_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_y=f_{xy} \\ Q_x=f_{yx} \end{cases} \Rightarrow P_y=Q_x$

注

- 如果 $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix}\neq 0$，则 F 一定不是梯度向量场
- $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix}=0 \quad \not\Rightarrow \quad F$ 是梯度向量场

例 判断下列向量场是否梯度向量场，若是，求出一个势函数：

$F_1=(2xy,x^3)$，$F_2=(2xy,x^2+y)$。

例 判断下列向量场是否梯度向量场，若是，求出一个势函数：

$F_1=(2xy,x^3)$，$F_2=(2xy,x^2+y)$。

解

1. $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} =$

例 判断下列向量场是否梯度向量场，若是，求出一个势函数：

$F_1 = (2xy, x^3)$，$F_2 = (2xy, x^2 + y)$。

解

1. $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ 2xy & x^3 \end{vmatrix} =$

例 判断下列向量场是否梯度向量场，若是，求出一个势函数：

$F_1 = (2xy, x^3)$，$F_2 = (2xy, x^2 + y)$。

解

1. $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ 2xy & x^3 \end{vmatrix} = 3x^2 - 2x \neq 0$

例 判断下列向量场是否梯度向量场，若是，求出一个势函数：

$F_1 = (2xy, x^3)$，$F_2 = (2xy, x^2 + y)$。

解

1. $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ 2xy & x^3 \end{vmatrix} = 3x^2 - 2x \neq 0 \Rightarrow F_1$ 不是梯度向量场

例 判断下列向量场是否梯度向量场，若是，求出一个势函数：

$F_1=(2xy,x^3)$，$F_2=(2xy,x^2+y)$。

解

1. $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ 2xy & x^3 \end{vmatrix} = 3x^2-2x \neq 0 \Rightarrow F_1$ 不是梯度向量场

2. $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ 2xy & x^2+y \end{vmatrix}$

例 判断下列向量场是否梯度向量场，若是，求出一个势函数：

$F_1 = (2xy, x^3)$，$F_2 = (2xy, x^2 + y)$。

解

1. $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ 2xy & x^3 \end{vmatrix} = 3x^2 - 2x \neq 0 \Rightarrow F_1$ 不是梯度向量场

2. $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ 2xy & x^2 + y \end{vmatrix} = 2x - 2x = 0$

例 判断下列向量场是否梯度向量场，若是，求出一个势函数：

$F_1 = (2xy, x^3)$，$F_2 = (2xy, x^2 + y)$。

解

1. $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ 2xy & x^3 \end{vmatrix} = 3x^2 - 2x \neq 0 \Rightarrow F_1$ 不是梯度向量场

2. $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ 2xy & x^2 + y \end{vmatrix} = 2x - 2x = 0$，不能判断。

例 判断下列向量场是否梯度向量场，若是，求出一个势函数：

$F_1 = (2xy, x^3)$，$F_2 = (2xy, x^2 + y)$。

解

1. $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ 2xy & x^3 \end{vmatrix} = 3x^2 - 2x \neq 0 \Rightarrow F_1$ 不是梯度向量场

2. $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ 2xy & x^2 + y \end{vmatrix} = 2x - 2x = 0$，不能判断。

   尝试直接求解 $\begin{cases} f_x = 2xy \\ f_y = x^2 + y \end{cases}$：

例 判断下列向量场是否梯度向量场，若是，求出一个势函数：

$F_1=(2xy,x^3)$，$F_2=(2xy,x^2+y)$。

解

1. $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ 2xy & x^3 \end{vmatrix} = 3x^2-2x \neq 0 \Rightarrow F_1$ 不是梯度向量场

2. $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ 2xy & x^2+y \end{vmatrix} = 2x-2x=0$，不能判断。

   尝试直接求解 $\begin{cases} f_x = 2xy \\ f_y = x^2+y \end{cases}$：

   $$f=\int f_x dx$$

例 判断下列向量场是否梯度向量场，若是，求出一个势函数：

$F_1 = (2xy, x^3)$，$F_2 = (2xy, x^2 + y)$。

解

1. $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ 2xy & x^3 \end{vmatrix} = 3x^2 - 2x \neq 0 \Rightarrow F_1$ 不是梯度向量场

2. $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ 2xy & x^2 + y \end{vmatrix} = 2x - 2x = 0$，不能判断。

   尝试直接求解 $\begin{cases} f_x = 2xy \\ f_y = x^2 + y \end{cases}$：

   $$f = \int f_x dx = \int 2xy dx$$

例 判断下列向量场是否梯度向量场，若是，求出一个势函数：

$F_1=(2xy,x^3)$，$F_2=(2xy,x^2+y)$。

解

1. $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ 2xy & x^3 \end{vmatrix} = 3x^2-2x \neq 0 \Rightarrow F_1$ 不是梯度向量场

2. $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ 2xy & x^2+y \end{vmatrix} = 2x-2x=0$，不能判断。

尝试直接求解 $\begin{cases} f_x = 2xy \\ f_y = x^2+y \end{cases}$：

$$f=\int f_x dx = \int 2xydx = x^2y+C$$

例 判断下列向量场是否梯度向量场，若是，求出一个势函数：

$F_1 = (2xy, x^3)$，$F_2 = (2xy, x^2 + y)$。

解

1. $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ 2xy & x^3 \end{vmatrix} = 3x^2 - 2x \neq 0 \Rightarrow F_1$ 不是梯度向量场

2. $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ 2xy & x^2 + y \end{vmatrix} = 2x - 2x = 0$，不能判断。

尝试直接求解 $\begin{cases} f_x = 2xy \\ f_y = x^2 + y \end{cases}$：

$$f = \int f_x dx = \int 2xy dx = x^2 y + C(y)$$

例 判断下列向量场是否梯度向量场，若是，求出一个势函数：

$F_1 = (2xy, x^3)$，$F_2 = (2xy, x^2 + y)$。

解

1. $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ 2xy & x^3 \end{vmatrix} = 3x^2 - 2x \neq 0 \Rightarrow F_1$ 不是梯度向量场

2. $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ 2xy & x^2 + y \end{vmatrix} = 2x - 2x = 0$，不能判断。

   尝试直接求解 $\begin{cases} f_x = 2xy \\ f_y = x^2 + y \end{cases}$：

   $$f = \int f_x dx = \int 2xy dx = x^2 y + C(y)$$

   $$\Rightarrow f_y = x^2 + C'(y)$$

例 判断下列向量场是否梯度向量场，若是，求出一个势函数：

$F_1=(2xy,x^3)$，$F_2=(2xy,x^2+y)$。

解

1. $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ 2xy & x^3 \end{vmatrix} = 3x^2-2x \neq 0 \Rightarrow F_1$ 不是梯度向量场

2. $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ 2xy & x^2+y \end{vmatrix} = 2x-2x=0$，不能判断。

尝试直接求解 $\begin{cases} f_x = 2xy \\ f_y = x^2+y \end{cases}$ ：

$$f=\int f_x dx = \int 2xydx = x^2y+C(y)$$

$$\Rightarrow \ f_y = x^2+C'(y) = x^2+y$$

例 判断下列向量场是否梯度向量场，若是，求出一个势函数：

$F_1=(2xy,x^3)$，$F_2=(2xy,x^2+y)$。

解

1. $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ 2xy & x^3 \end{vmatrix} = 3x^2-2x\neq 0 \Rightarrow F_1$ 不是梯度向量场

2. $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ 2xy & x^2+y \end{vmatrix} = 2x-2x=0$，不能判断。

尝试直接求解 $\begin{cases} f_x=2xy \\ f_y=x^2+y \end{cases}$：

$$f=\int f_x dx=\int 2xydx=x^2y+C(y)$$

$$\Rightarrow f_y=x^2+C'(y)=x^2+y \Rightarrow C'(y)=y$$

例 判断下列向量场是否梯度向量场，若是，求出一个势函数：
$F_1=(2xy,x^3)$，$F_2=(2xy,x^2+y)$。

解

1. $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ 2xy & x^3 \end{vmatrix} = 3x^2-2x \neq 0 \Rightarrow F_1$ 不是梯度向量场

2. $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ 2xy & x^2+y \end{vmatrix} = 2x-2x=0$，不能判断。

   尝试直接求解 $\begin{cases} f_x = 2xy \\ f_y = x^2+y \end{cases}$ ：

$$f=\int f_x dx=\int 2xydx=x^2y+C(y)$$

$$\Rightarrow\ f_y=x^2+C'(y)=x^2+y\ \Rightarrow\ C'(y)=y\ \Rightarrow\ C(y)=\frac{1}{2}y^2+c$$

例 判断下列向量场是否梯度向量场，若是，求出一个势函数：

$F_1=(2xy,x^3)$，$F_2=(2xy,x^2+y)$。

解

1. $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ 2xy & x^3 \end{vmatrix} = 3x^2-2x \neq 0 \Rightarrow F_1$ 不是梯度向量场

2. $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ 2xy & x^2+y \end{vmatrix} = 2x-2x=0$，不能判断。

   尝试直接求解 $\begin{cases} f_x = 2xy \\ f_y = x^2+y \end{cases}$ ：

   $$f=\int f_x dx=\int 2xydx=x^2y+C(y)$$

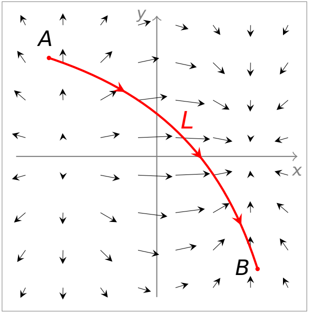
   $$\Rightarrow\ f_y=x^2+C'(y)=x^2+y\ \Rightarrow\ C'(y)=y\ \Rightarrow\ C(y)=\frac{1}{2}y^2+c$$

   所以有解，不妨取 $f(x,y)=x^2y+\frac{1}{2}y^2$，则 $F=\nabla f$

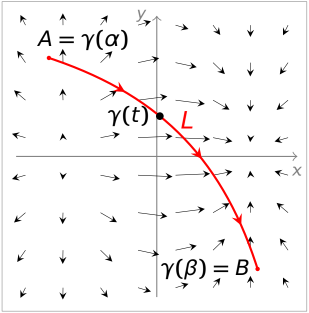
梯度向量的曲线积分

定理 假设 $F = (P, Q) = \nabla f$，则

$$\int_L P dx + Q dy = f(\text{终点}) - f(\text{起点})$$



梯度向量的曲线积分



定理 假设 $F=(P,Q)=\nabla f$，则

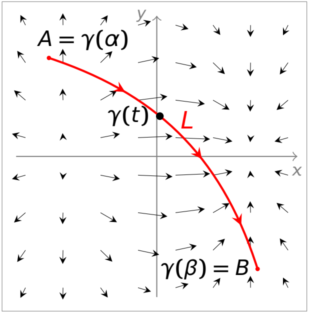
$$\int_L Pdx+Qdy=f(\text{终点})-f(\text{起点})$$

证明 设 L：$\gamma(t)=(\varphi(t),\psi(t))$，$t:\alpha\to\beta$，则

梯度向量的曲线积分

定理 假设 $F=(P,Q)=\nabla f$，则

$$\int_L Pdx+Qdy=f(\text{终点})-f(\text{起点})$$



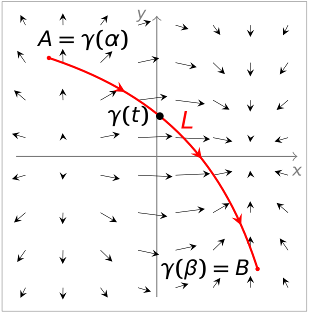
证明 设 L：$\gamma(t)=(\varphi(t),\psi(t))$，$t:\alpha\to\beta$，则

$$\int_L Pdx+Qdy \xlongequal{(P,Q)=\nabla f=(f_x,f_y)} \int_L f_x dx+f_y dy$$

梯度向量的曲线积分

定理 假设 $F=(P,Q)=\nabla f$，则

$$\int_L Pdx+Qdy=f(\text{终点})-f(\text{起点})$$



证明 设 L：$\gamma(t)=(\varphi(t),\psi(t))$，$t:\alpha\to\beta$，则

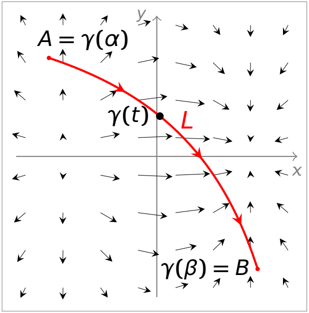
$$\int_L Pdx+Qdy \xlongequal{(P,Q)=\nabla f=(f_x,f_y)} \int_L f_x dx+f_y dy$$

$$=\int_\alpha^\beta\Big[f_x(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+f_y(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)\Big]dt$$

梯度向量的曲线积分

定理 假设 $F=(P,Q)=\nabla f$，则

$$\int_L Pdx+Qdy=f(\text{终点})-f(\text{起点})$$



证明 设 L：$\gamma(t)=(\varphi(t),\psi(t))$，$t:\alpha\to\beta$，则

$$\int_L Pdx+Qdy \xlongequal{(P,Q)=\nabla f=(f_x,f_y)} \int_L f_x dx+f_y dy$$

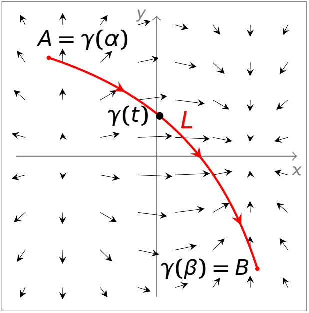
$$=\int_\alpha^\beta \Big[f_x(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+f_y(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)\Big]dt$$

$$\frac{d}{dt}f(\varphi(t),\psi(t))$$

梯度向量的曲线积分

定理 假设 $F=(P,Q)=\nabla f$，则

$$\int_L Pdx+Qdy=f(\text{终点})-f(\text{起点})$$



证明 设 L：$\gamma(t)=(\varphi(t),\psi(t))$，$t:\alpha\to\beta$，则

$$\int_L Pdx+Qdy \xlongequal{(P,Q)=\nabla f=(f_x,f_y)} \int_L f_x dx+f_y dy$$

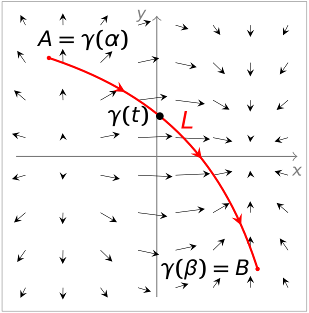
$$=\int_\alpha^\beta \Big[f_x(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+f_y(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)\Big]dt$$

$$=\int_\alpha^\beta \Big[\frac{d}{dt}f(\varphi(t),\psi(t))\Big]dt$$

梯度向量的曲线积分

定理 假设 $F=(P,Q)=\nabla f$，则

$$\int_L Pdx+Qdy=f(终点)-f(起点)$$



证明 设 L：$\gamma(t)=(\varphi(t),\,\psi(t))$，$t:\alpha\to\beta$，则

$$\int_L Pdx+Qdy \xlongequal{(P,Q)=\nabla f=(f_x,f_y)} \int_L f_x dx+f_y dy$$

$$=\int_\alpha^\beta \Big[f_x(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+f_y(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)\Big]dt$$

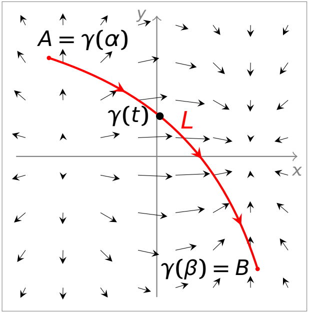
$$=\int_\alpha^\beta \Big[\frac{d}{dt}f(\varphi(t),\psi(t))\Big]dt$$

$$=f(\varphi(\beta),\psi(\beta))-f(\varphi(\alpha),\psi(\alpha))$$

梯度向量的曲线积分

定理 假设 $F=(P,Q)=\nabla f$，则

$$\int_L Pdx+Qdy=f(\text{终点})-f(\text{起点})$$



证明 设 L：$\gamma(t)=(\varphi(t),\psi(t))$，$t:\alpha\to\beta$，则

$$\int_L Pdx+Qdy \xlongequal{(P,Q)=\nabla f=(f_x,f_y)} \int_L f_x dx+f_y dy$$

$$=\int_\alpha^\beta \Big[f_x(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+f_y(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)\Big]dt$$

$$=\int_\alpha^\beta \left[\frac{d}{dt}f(\varphi(t),\psi(t))\right]dt$$

$$=f(\varphi(\beta),\psi(\beta))-f(\varphi(\alpha),\psi(\alpha))=f(B)-f(A)$$

例 计算 $\int_L y dx + x dy$，其中有向曲线 L 是：$(t^9, \sin^9(\frac{\pi}{2}t))$, $t: 0 \to 1$。

例 计算 $\int_L ydx + xdy$，其中有向曲线 L 是：$(t^9, \sin^9(\frac{\pi}{2}t))$, $t: 0 \to 1$。

解 1

$$\int_0^1 [\sin^9(\frac{\pi}{2}t)(t^9)' + t^9(\sin^9(\frac{\pi}{2}t))']dt = \ldots \quad :($$

例 计算 $\int_L y dx + x dy$，其中有向曲线 L 是：$(t^9, \sin^9(\frac{\pi}{2}t)),\ t:0 \to 1$。

解 1

$$\int_0^1 [\sin^9(\frac{\pi}{2}t)(t^9)' + t^9(\sin^9(\frac{\pi}{2}t))']dt = \ldots \qquad :($$

解 2 注意到 $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ y & x \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0,$

例 计算 $\int_L y dx + x dy$，其中有向曲线 L 是：$(t^9, \sin^9(\frac{\pi}{2}t))$, $t: 0 \to 1$。

解 1

$$\int_0^1 [\sin^9(\frac{\pi}{2}t)(t^9)' + t^9(\sin^9(\frac{\pi}{2}t))']dt = \ldots \qquad :($$

解 2 注意到 $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ y & x \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$，所以可以尝试求解 $(y, x) = \nabla f$，即 $\begin{cases} f_x = y \\ f_y = x \end{cases}$：

例 计算 $\int_L ydx + xdy$，其中有向曲线 L 是：$(t^9, \sin^9(\frac{\pi}{2}t))$, $t: 0 \to 1$。

解 1

$$\int_0^1 [\sin^9(\frac{\pi}{2}t)(t^9)' + t^9(\sin^9(\frac{\pi}{2}t))']dt = \ldots \quad :($$

解 2 注意到 $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ y & x \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$，所以可以尝试求解 $(y, x) = \nabla f$，即 $\begin{cases} f_x = y \\ f_y = x \end{cases}$:

$$f = \int ydx$$

例 计算 $\int_L ydx + xdy$，其中有向曲线 L 是：$(t^9, \sin^9(\frac{\pi}{2}t))$, $t : 0 \to 1$。

解 1

$$\int_0^1 [\sin^9(\frac{\pi}{2}t)(t^9)' + t^9(\sin^9(\frac{\pi}{2}t))']dt = \dots \quad :($$

解 2 注意到 $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ y & x \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$，所以可以尝试求解 $(y, x) = \nabla f$，即 $\begin{cases} f_x = y \\ f_y = x \end{cases}$：

$$f = \int ydx = yx + C$$

例 计算 $\int_L ydx + xdy$，其中有向曲线 L 是：$(t^9, \sin^9(\frac{\pi}{2}t))$, $t: 0 \to 1$。

解 1

$$\int_0^1 [\sin^9(\frac{\pi}{2}t)(t^9)' + t^9(\sin^9(\frac{\pi}{2}t))']dt = \ldots \quad :($$

解 2 注意到 $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ y & x \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$，所以可以尝试求解 $(y, x) = \nabla f$，即 $\begin{cases} f_x = y \\ f_y = x \end{cases}$：

$$f = \int ydx = yx + C(y)$$

例 计算 $\int_L ydx + xdy$，其中有向曲线 L 是：$(t^9, \sin^9(\frac{\pi}{2}t))$, $t: 0 \to 1$。

解 1

$$\int_0^1 [\sin^9(\frac{\pi}{2}t)(t^9)' + t^9(\sin^9(\frac{\pi}{2}t))']dt = \dots \quad :($$

解 2 注意到 $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ y & x \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$，所以可以尝试求解 $(y, x) = \nabla f$，即 $\begin{cases} f_x = y \\ f_y = x \end{cases}$：

$$f = \int ydx = yx + C(y) \;\Rightarrow\; f_y = x + C'(y)$$

例 计算 $\int_L ydx + xdy$，其中有向曲线 L 是：$(t^9, \sin^9(\frac{\pi}{2}t))$, t : $0 \to 1$。

解 1

$$\int_0^1 [\sin^9(\frac{\pi}{2}t)(t^9)' + t^9(\sin^9(\frac{\pi}{2}t))']dt = \ldots \quad :($$

解 2 注意到 $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ y & x \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$，所以可以尝试求解 $(y, x) = \nabla f$，即 $\begin{cases} f_x = y \\ f_y = x \end{cases}$:

$$f = \int ydx = yx + C(y) \Rightarrow f_y = x + C'(y) = x$$

例 计算 $\int_L ydx + xdy$，其中有向曲线 L 是：$(t^9, \sin^9(\frac{\pi}{2}t))$, $t: 0 \to 1$。

解 1

$$\int_0^1 [\sin^9(\frac{\pi}{2}t)(t^9)' + t^9(\sin^9(\frac{\pi}{2}t))']dt = \ldots \quad :($$

解 2 注意到 $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ y & x \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$，所以可以尝试求解 $(y, x) = \nabla f$，即 $\begin{cases} f_x = y \\ f_y = x \end{cases}$：

$$f = \int ydx = yx + C(y) \;\Rightarrow\; f_y = x + C'(y) = x$$

$$\Rightarrow\; C'(y) = 0$$

例 计算 $\int_L ydx + xdy$，其中有向曲线 L 是：$(t^9, \sin^9(\frac{\pi}{2}t))$, $t: 0 \to 1$。

解 1

$$\int_0^1 [\sin^9(\frac{\pi}{2}t)(t^9)' + t^9(\sin^9(\frac{\pi}{2}t))']dt = \ldots \quad :($$

解 2 注意到 $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ y & x \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$，所以可以尝试求解 $(y, x) = \nabla f$，即 $\begin{cases} f_x = y \\ f_y = x \end{cases}$：

$$f = \int ydx = yx + C(y) \Rightarrow f_y = x + C'(y) = x$$

$$\Rightarrow C'(y) = 0 \Rightarrow C(y) = c$$

例 计算 $\int_L ydx + xdy$，其中有向曲线 L 是：$(t^9, \sin^9(\frac{\pi}{2}t))$, $t: 0 \to 1$。

解 1

$$\int_0^1 [\sin^9(\frac{\pi}{2}t)(t^9)' + t^9(\sin^9(\frac{\pi}{2}t))']dt = \dots \quad :($$

解 2 注意到 $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ y & x \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$，所以可以尝试求解

$(y, x) = \nabla f$，即 $\begin{cases} f_x = y \\ f_y = x \end{cases}$：

$$f = \int ydx = yx + C(y) \;\Rightarrow\; f_y = x + C'(y) = x$$

$$\Rightarrow\; C'(y) = 0 \;\Rightarrow C(y) = c$$

所以有解，不妨取 $f(x, y) = xy$，则 $(y, x) = \nabla f$。

例 计算 $\int_L ydx + xdy$，其中有向曲线 L 是：$(t^9, \sin^9(\frac{\pi}{2}t))$, $t:0 \to 1$。

解 1

$$\int_0^1 [\sin^9(\frac{\pi}{2}t)(t^9)' + t^9(\sin^9(\frac{\pi}{2}t))']dt = \ldots \quad :($$

解 2 注意到 $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ y & x \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$，所以可以尝试求解

$(y,x) = \nabla f$，即 $\begin{cases} f_x = y \\ f_y = x \end{cases}$：

$$f = \int ydx = yx + C(y) \;\Rightarrow\; f_y = x + C'(y) = x$$

$$\Rightarrow\; C'(y) = 0 \;\Rightarrow C(y) = c$$

所以有解，不妨取 $f(x,y) = xy$，则 $(y,x) = \nabla f$。所以

$$\int_L ydx + xdy \xlongequal{(y,x)=\nabla f} f(\text{终点}) - f(\text{起点}) =$$

例 计算 $\int_L ydx + xdy$，其中有向曲线 L 是：$(t^9, \sin^9(\frac{\pi}{2}t)),\ t: 0 \to 1$。

解 1

$$\int_0^1 [\sin^9(\frac{\pi}{2}t)(t^9)' + t^9(\sin^9(\frac{\pi}{2}t))']dt = \dots \quad :($$

解 2 注意到 $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ y & x \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$，所以可以尝试求解 $(y, x) = \nabla f$，即 $\begin{cases} f_x = y \\ f_y = x \end{cases}$：

$$f = \int ydx = yx + C(y) \ \Rightarrow\ f_y = x + C'(y) = x$$

$$\Rightarrow\ C'(y) = 0\ \Rightarrow C(y) = c$$

所以有解，不妨取 $f(x, y) = xy$，则 $(y, x) = \nabla f$。所以

$$\int_L ydx + xdy \xlongequal{(y,x)=\nabla f} f(\text{终点}) - f(\text{起点}) = f(1, 1) - f(0, 0)$$

例 计算 $\int_L ydx+xdy$，其中有向曲线 L 是：$(t^9, \sin^9(\frac{\pi}{2}t)),\ t: 0\to 1$。

解 1

$$\int_0^1 [\sin^9(\frac{\pi}{2}t)(t^9)' + t^9(\sin^9(\frac{\pi}{2}t))']dt = \dots \quad :($$

解 2 注意到 $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ y & x \end{vmatrix} = 1-1=0$，所以可以尝试求解 $(y,x)=\nabla f$，即 $\begin{cases} f_x = y \\ f_y = x \end{cases}$：

$$f = \int ydx = yx + C(y) \ \Rightarrow\ f_y = x + C'(y) = x$$

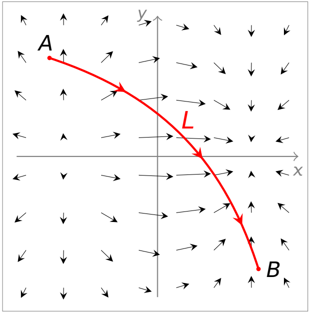
$$\Rightarrow\ C'(y)=0\ \Rightarrow C(y)=c$$

所以有解，不妨取 $f(x,y)=xy$，则 $(y,x)=\nabla f$。所以

$$\int_L ydx+xdy \xlongequal{(y,x)=\nabla f} f(\text{终点})-f(\text{起点}) = f(1,1)-f(0,0)=1$$

定理 假设 $F = (P, Q) = \nabla f$，则

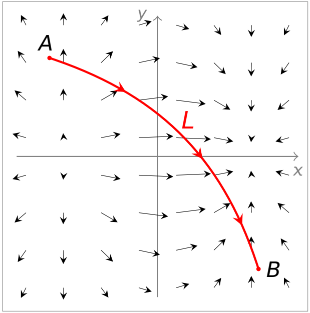
$$\int_L P dx + Q dy = f(\text{终点}) - f(\text{起点})$$



注

定理 假设 $F=(P,Q)=\nabla f$，则

$$\int_L Pdx+Qdy = f(\text{终点})-f(\text{起点})$$

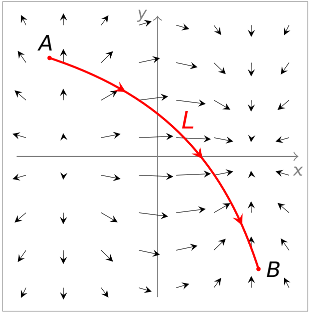


注

1. 上式为牛顿-莱布尼茨公式的推广：

定理 假设 $F = (P, Q) = \nabla f$，则

$$\int_L P dx + Q dy = f(\text{终点}) - f(\text{起点})$$

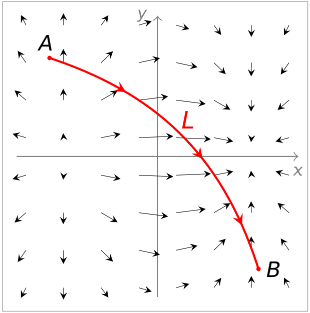


注

1. 上式为牛顿-莱布尼茨公式的推广：
   $\int_L P dx + Q dy = \int_L f_x dx + f_y dy$

定理 假设 $F = (P, Q) = \nabla f$，则

$$\int_L Pdx + Qdy = f(\text{终点}) - f(\text{起点})$$

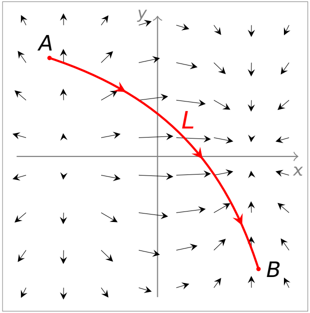


注

1. 上式为牛顿-莱布尼茨公式的推广：
$\int_L Pdx + Qdy = \int_L f_x dx + f_y dy = \int_L df$

定理 假设 $F=(P,Q)=\nabla f$，则

$$\int_L Pdx+Qdy=f(\text{终点})-f(\text{起点})$$



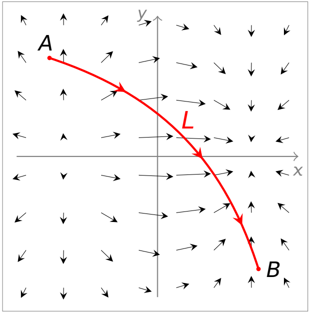
注

1. 上式为牛顿-莱布尼茨公式的推广：

$$\int_L Pdx+Qdy=\int_L f_x dx+f_y dy=\int_L df=f(\text{终点})-f(\text{起点})$$

定理 假设 $F=(P,Q)=\nabla f$，则

$$\int_L Pdx+Qdy=f(\text{终点})-f(\text{起点})$$



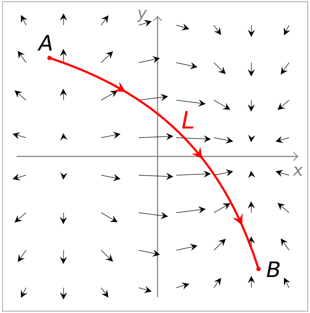
注

1. 上式为牛顿-莱布尼茨公式的推广：

$$\int_L Pdx+Qdy=\int_L f_x dx+f_y dy=\boxed{\int_L df=f(\text{终点})-f(\text{起点})}$$

定理 假设 $F = (P, Q) = \nabla f$，则

$$\int_L Pdx + Qdy = f(\text{终点}) - f(\text{起点})$$

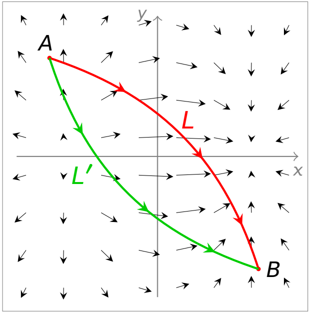


注

1. 上式为牛顿-莱布尼茨公式的推广：
$$\int_L Pdx + Qdy = \int_L f_x dx + f_y dy = \boxed{\int_L df = f(\text{终点}) - f(\text{起点})}$$
2. 梯度向量场 $F = \nabla f$ 的曲线积分与路径无关，只与终点、起点相关：

定理 假设 $F=(P,Q)=\nabla f$，则

$$\int_L Pdx+Qdy=f(\text{终点})-f(\text{起点})$$



注

1. 上式为牛顿-莱布尼茨公式的推广：

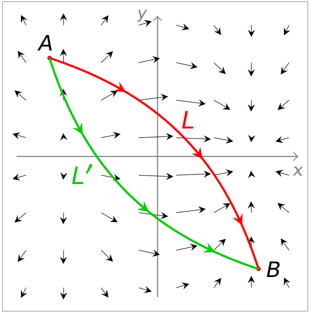
$$\int_L Pdx+Qdy=\int_L f_x dx+f_y dy=\boxed{\int_L df=f(\text{终点})-f(\text{起点})}$$

2. 梯度向量场 $F=\nabla f$ 的曲线积分与路径无关，只与终点、起点相关：若 L' 是另外一条 D 中从 A 到 B 的有向曲线，则

$$\int_{L'} Pdx+Qdy$$

定理 假设 $F = (P, Q) = \nabla f$，则

$$\int_L Pdx + Qdy = f(\text{终点}) - f(\text{起点})$$



注

1. 上式为牛顿-莱布尼茨公式的推广：

   $\int_L Pdx + Qdy = \int_L f_x dx + f_y dy = \boxed{\int_L df = f(\text{终点}) - f(\text{起点})}$

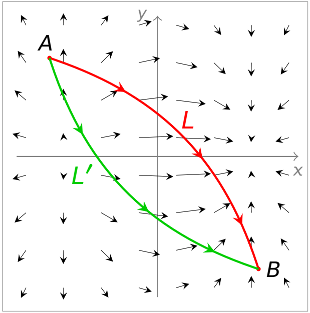
2. 梯度向量场 $F = \nabla f$ 的曲线积分与路径无关，只与终点、起点相关：

   若 L' 是另外一条 D 中从 A 到 B 的有向曲线，则

$$\int_{L'} Pdx + Qdy = \int_L Pdx + Qdy.$$

定理 假设 $F=(P,Q)=\nabla f$，则

$$\int_L Pdx+Qdy=f(\text{终点})-f(\text{起点})$$



注

1. 上式为牛顿-莱布尼茨公式的推广：

   $$\int_L Pdx+Qdy=\int_L f_x dx+f_y dy=\boxed{\int_L df=f(\text{终点})-f(\text{起点})}$$

2. 梯度向量场 $F=\nabla f$ 的曲线积分与路径无关，只与终点、起点相关：

   若 L' 是另外一条 D 中从 A 到 B 的有向曲线，则

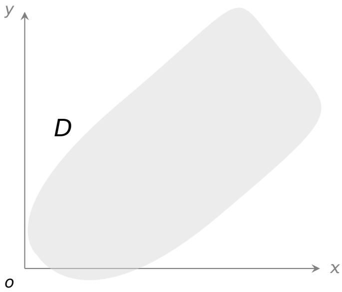
   $$\int_{L'} Pdx+Qdy=\int_L Pdx+Qdy.$$

定义 一般地，向量场 F 称为 保守场，是指对 F 的曲线积分与路径无关。

定理 $F=(P,Q)$ 是保守场 $\Leftrightarrow$ F 是梯度向量场，即 $F=\nabla f$。

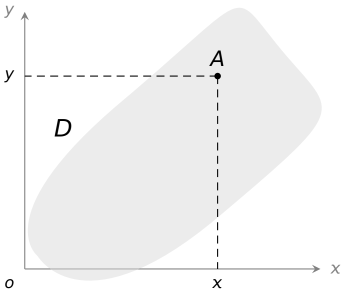
定理 $F=(P,Q)$ 是保守场 $\Longleftrightarrow$ F 是梯度向量场，即 $F=\nabla f$。

证明 “$\Rightarrow$” 关键找势函数 f，满足 $\begin{cases} f_x = P \\ f_y = Q \end{cases}$。



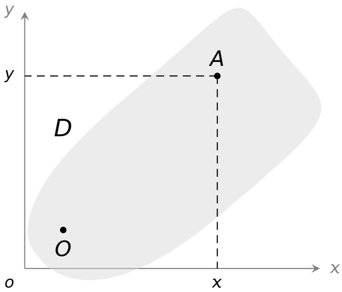
定理 $F=(P,Q)$ 是保守场 $\Leftrightarrow$ F 是梯度向量场，即 $F=\nabla f$。

证明 “$\Rightarrow$” 关键找势函数 f，满足 $\begin{cases} f_x = P \\ f_y = Q \end{cases}$。如图，$\forall(x,y)\in D$，定义



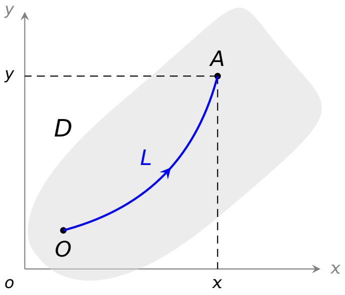
定理 $F = (P, Q)$ 是保守场 $\Leftrightarrow$ F 是梯度向量场，即 $F = \nabla f$。

证明 “$\Rightarrow$” 关键找势函数 f，满足 $\begin{cases} f_x = P \\ f_y = Q \end{cases}$。如图，$\forall (x, y) \in D$，定义



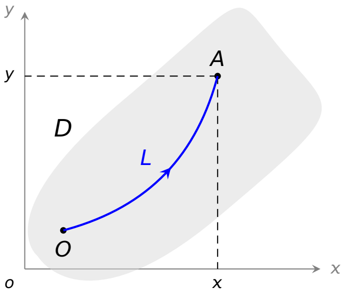
定理 $F=(P,Q)$ 是保守场 $\Leftrightarrow$ F 是梯度向量场，即 $F=\nabla f$。

证明 “$\Rightarrow$” 关键找势函数 f，满足 $\begin{cases} f_x = P \\ f_y = Q \end{cases}$。如图，$\forall (x,y)\in D$，定义



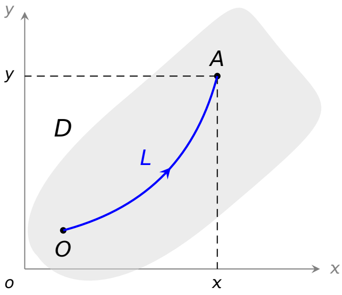
定理 $F=(P,Q)$ 是保守场 $\Longleftrightarrow$ F 是梯度向量场，即 $F=\nabla f$。

证明 “$\Rightarrow$” 关键找势函数 f，满足 $\begin{cases} f_x = P \\ f_y = Q \end{cases}$。如图，$\forall (x,y)\in D$，定义 $f(x,y)=\int_L Pdx+Qdy$。



定理 $F=(P,Q)$ 是保守场 $\Longleftrightarrow$ F 是梯度向量场，即 $F=\nabla f$。

证明 “$\Rightarrow$” 关键找势函数 f，满足 $\begin{cases} f_x = P \\ f_y = Q \end{cases}$。如图，$\forall (x,y)\in D$，定义 $f(x,y)=\int_L P dx + Q dy$。



所以

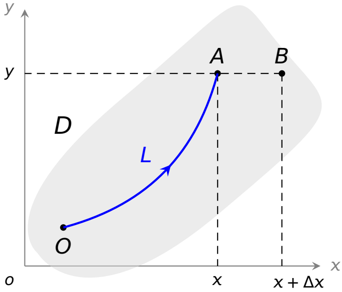
$$f_x(x,y)$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

定理 $F=(P,Q)$ 是保守场 $\Leftrightarrow F$ 是梯度向量场，即 $F=\nabla f$。

证明 “$\Rightarrow$” 关键找势函数 f，满足 $\begin{cases} f_x = P \\ f_y = Q \end{cases}$。如图，$\forall (x,y)\in D$，定义

$f(x,y)=\int_L Pdx+Qdy$。



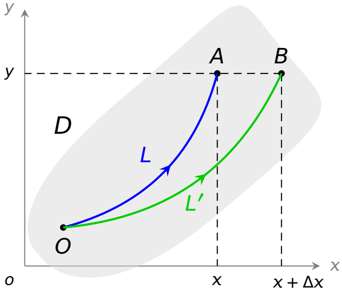
所以

$f_x(x,y)$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

定理 $F=(P,Q)$ 是保守场 $\Leftrightarrow$ F 是梯度向量场，即 $F=\nabla f$。

证明 “$\Rightarrow$” 关键找势函数 f，满足 $\begin{cases} f_x=P \\ f_y=Q \end{cases}$。如图，$\forall (x,y)\in D$，定义 $f(x,y)=\int_L Pdx+Qdy$。



所以

$$f_x(x,y)$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

定理 $F=(P,Q)$ 是保守场 $\Leftrightarrow$ F 是梯度向量场，即 $F=\nabla f$。

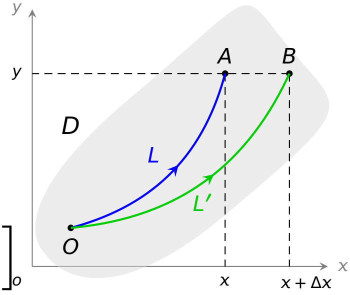
证明 “$\Rightarrow$” 关键找势函数 f，满足 $\begin{cases} f_x=P \\ f_y=Q \end{cases}$。如图，$\forall (x,y)\in D$，定义 $f(x,y)=\int_L P dx+Q dy$。

所以

$$f_x(x,y)$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

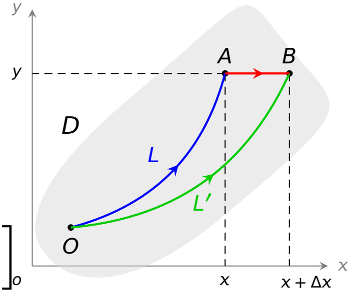
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\int_{L'} Pdx+Qdy-\int_L Pdx+Qdy\right]_o$$



定理 $F=(P,Q)$ 是保守场 $\Longleftrightarrow$ F 是梯度向量场，即 $F=\nabla f$。

证明 “$\Rightarrow$” 关键找势函数 f，满足 $\begin{cases} f_x = P \\ f_y = Q \end{cases}$。如图，$\forall (x,y)\in D$，定义

$f(x,y)=\int_L Pdx+Qdy$。



所以

$$f_x(x,y)$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\int_{L'}Pdx+Qdy-\int_L Pdx+Qdy\right]_O$$

定理 $F=(P,Q)$ 是保守场 $\Leftrightarrow$ F 是梯度向量场，即 $F=\nabla f$。

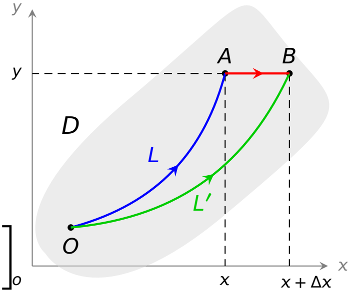
证明 “$\Rightarrow$” 关键找势函数 f，满足 $\begin{cases} f_x = P \\ f_y = Q \end{cases}$。如图，$\forall (x,y)\in D$，定义 $f(x,y)=\int_L Pdx+Qdy$。

所以

$$f_x(x,y)$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

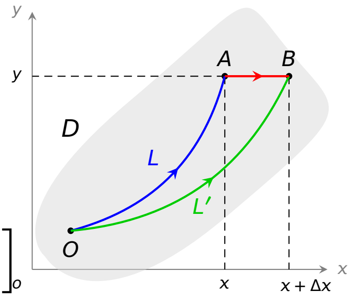
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\int_{\substack{L' \\ L\cup\overrightarrow{AB}}} Pdx+Qdy-\int_L Pdx+Qdy\right]_O$$



定理 $F=(P,Q)$ 是保守场 $\Leftrightarrow$ F 是梯度向量场，即 $F=\nabla f$。

证明 "$\Rightarrow$" 关键找势函数 f，满足 $\begin{cases} f_x = P \\ f_y = Q \end{cases}$。如图，$\forall (x,y)\in D$，定义

$f(x,y)=\int_L Pdx+Qdy$。

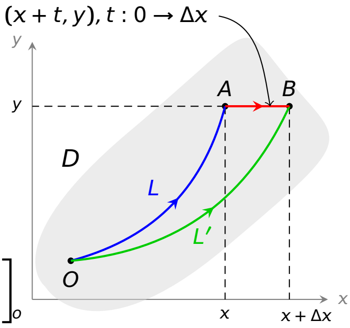


所以

$$
\begin{aligned}
& f_x(x,y) \\
=& \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x} \\
=& \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\int_{L' \; L\cup\overrightarrow{AB}} Pdx+Qdy-\int_L Pdx+Qdy\right]_o \\
=& \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_{\overrightarrow{AB}} Pdx+Qdy
\end{aligned}
$$

定理 $F=(P,Q)$ 是保守场 $\Leftrightarrow$ F 是梯度向量场，即 $F=\nabla f$。

证明 “$\Rightarrow$” 关键找势函数 f，满足 $\begin{cases} f_x = P \\ f_y = Q \end{cases}$。如图，$\forall (x,y)\in D$，定义 $f(x,y)=\int_L Pdx+Qdy$。



所以

$$f_x(x,y)$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

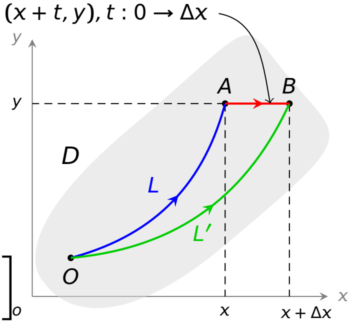
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\int_{\underset{L\cup\overrightarrow{AB}}{L'}} Pdx+Qdy-\int_L Pdx+Qdy\right]_o$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_{\overrightarrow{AB}} Pdx+Qdy$$

定理 $F=(P,Q)$ 是保守场 $\Leftrightarrow$ F 是梯度向量场，即 $F=\nabla f$。

证明 "$\Rightarrow$" 关键找势函数 f，满足 $\begin{cases} f_x = P \\ f_y = Q \end{cases}$。如图，$\forall (x,y)\in D$，定义

$f(x,y)=\int_L Pdx+Qdy$。



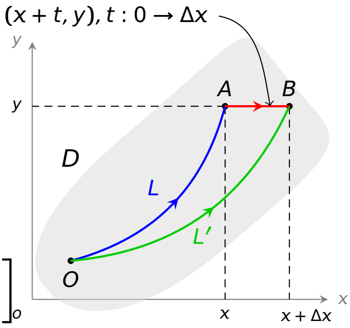
所以

$$
\begin{aligned}
&f_x(x,y)\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\int_{L'\quad L\cup\overrightarrow{AB}} Pdx+Qdy-\int_L Pdx+Qdy\right]_o\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_{\overrightarrow{AB}} Pdx+Qdy=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_0^{\Delta x} P(x+t,y)dt
\end{aligned}
$$

定理 $F=(P,Q)$ 是保守场 $\Leftrightarrow$ F 是梯度向量场，即 $F=\nabla f$。

证明 "$\Rightarrow$" 关键找势函数 f，满足 $\begin{cases} f_x=P \\ f_y=Q \end{cases}$。如图，$\forall(x,y)\in D$，定义

$$f(x,y)=\int_L Pdx+Qdy。$$



所以

$$f_x(x,y)$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

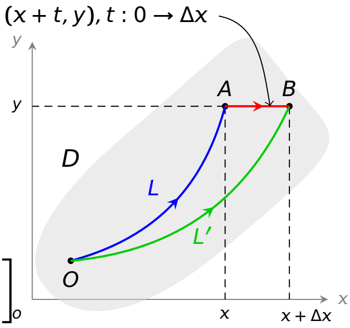
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\Big[\int_{L'\quad L\cup\overrightarrow{AB}} Pdx+Qdy-\int_L Pdx+Qdy\Big]_o$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_{\overrightarrow{AB}} Pdx+Qdy=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_0^{\Delta x}P(x+t,y)dt \xlongequal[\text{中值定理}]{\text{积分}} P(x,y)$$

定理 $F=(P,Q)$ 是保守场 $\Longleftrightarrow$ F 是梯度向量场，即 $F=\nabla f$。

证明 “$\Rightarrow$” 关键找势函数 f，满足 $\begin{cases} f_x=P \\ f_y=Q \end{cases}$。如图，$\forall(x,y)\in D$，定义

$$f(x,y)=\int_L Pdx+Qdy。$$



所以

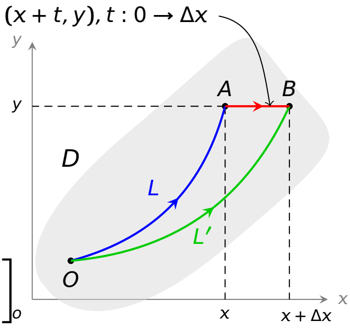
$$
\begin{aligned}
& f_x(x,y) \\
=& \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x} \\
=& \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\int_{L' \quad L\cup\overrightarrow{AB}} Pdx+Qdy-\int_L Pdx+Qdy\right]_o \\
=& \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_{\overrightarrow{AB}} Pdx+Qdy=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_0^{\Delta x}P(x+t,y)dt \xlongequal[\text{中值定理}]{\text{积分}} P(x,y)
\end{aligned}
$$

同理可证，$f_y(x,y)=Q(x,y)$。

定理 $F=(P,Q)$ 是保守场 $\Leftrightarrow$ F 是梯度向量场，即 $F=\nabla f$。

证明 “$\Rightarrow$” 关键找势函数 f，满足 $\begin{cases} f_x = P \\ f_y = Q \end{cases}$。如图，$\forall (x,y)\in D$，定义

$f(x,y)=\int_L Pdx+Qdy$。



所以

$$
\begin{aligned}
& f_x(x,y) \\
= & \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x} \\
= & \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\int_{L' \ \ L\cup\overrightarrow{AB}} Pdx+Qdy-\int_L Pdx+Qdy\right]_o \\
= & \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_{\overrightarrow{AB}} Pdx+Qdy=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_0^{\Delta x}P(x+t,y)dt \xlongequal[\text{中值定理}]{\text{积分}} P(x,y)
\end{aligned}
$$

同理可证，$f_y(x,y)=Q(x,y)$。所以 $F=(f_x,f_y)$。

性质 设 $F = (P, Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场。则以下说法等价：

(1) F 是保守场

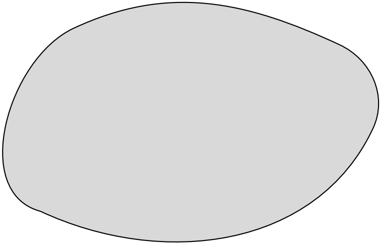
(2) F 在 D 中任意有向闭曲线 C 上的曲线积分为 0

性质 设 $F=(P,Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场。则以下说法等价：

(1) F 是保守场

(2) F 在 D 中任意有向闭曲线 C 上的曲线积分为 0

证明

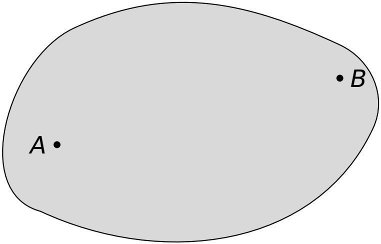


性质 设 $F = (P, Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场。则以下说法等价：

(1) F 是保守场

(2) F 在 D 中任意有向闭曲线 C 上的曲线积分为 0

证明

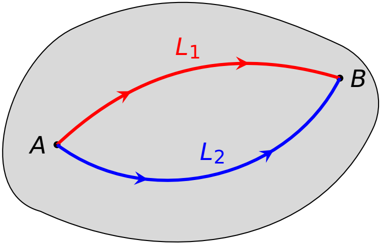


性质 设 $F = (P, Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场。则以下说法等价：

(1) F 是保守场

(2) F 在 D 中任意有向闭曲线 C 上的曲线积分为 0

证明



性质 设 $F = (P, Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场。则以下说法等价：

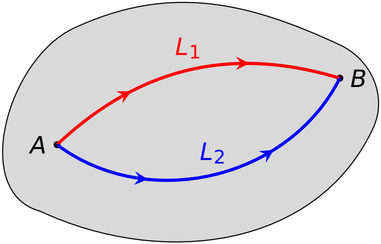
(1) F 是保守场

(2) F 在 D 中任意有向闭曲线 C 上的曲线积分为 0

证明

F是保守场

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy$$



性质 设 $F = (P, Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场。则以下说法等价：

(1) F 是保守场

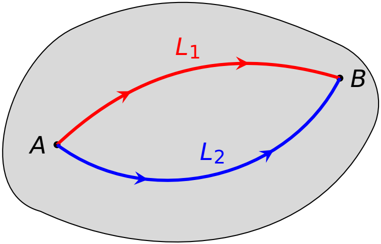
(2) F 在 D 中任意有向闭曲线 C 上的曲线积分为 0

证明

F是保守场

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy$$

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx + Qdy - \int_{L_2} Pdx + Qdy = 0$$



性质 设 $F=(P,Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场。则以下说法等价：

(1) F 是保守场

(2) F 在 D 中任意有向闭曲线 C 上的曲线积分为 0

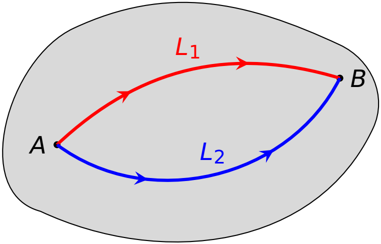
证明

F是保守场

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx+Qdy=\int_{L_2} Pdx+Qdy$$

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx+Qdy-\int_{L_2} Pdx+Qdy=0$$

$$\int_{-L_2} Pdx+Qdy$$



性质 设 $F = (P, Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场。则以下说法等价：

(1) F 是保守场

(2) F 在 D 中任意有向闭曲线 C 上的曲线积分为 0

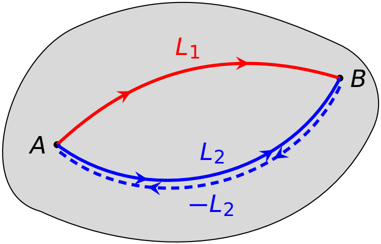
证明

F是保守场

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy$$

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx + Qdy - \int_{L_2} Pdx + Qdy = 0$$

$$\int_{-L_2} Pdx + Qdy$$



性质 设 $F=(P,Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场。则以下说法等价：

(1) F 是保守场

(2) F 在 D 中任意有向闭曲线 C 上的曲线积分为 0

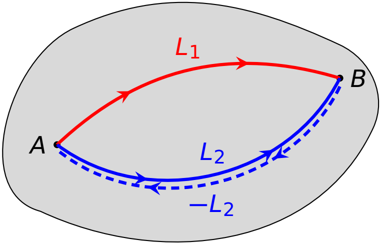
证明

F是保守场

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx+Qdy=\int_{L_2} Pdx+Qdy$$

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx+Qdy-\int_{L_2} Pdx+Qdy=0$$

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx+Qdy+\int_{-L_2} Pdx+Qdy=0$$



性质 设 $F = (P, Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场。则以下说法等价：

(1) F 是保守场

(2) F 在 D 中任意有向闭曲线 C 上的曲线积分为 0

证明

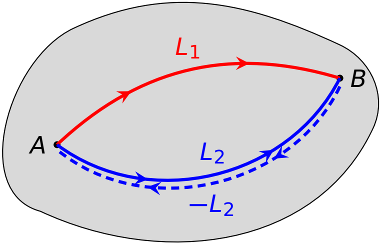
F是保守场

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy$$

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx + Qdy - \int_{L_2} Pdx + Qdy = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx + Qdy + \int_{-L_2} Pdx + Qdy = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{L_1+(-L_2)} Pdx + Qdy = 0$$



性质 设 $F = (P, Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场。则以下说法等价：

(1) F 是保守场

(2) F 在 D 中任意有向闭曲线 C 上的曲线积分为 0

证明

F是保守场

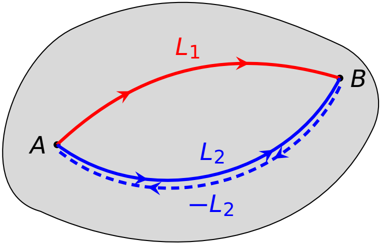
$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy$$

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx + Qdy - \int_{L_2} Pdx + Qdy = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx + Qdy + \int_{-L_2} Pdx + Qdy = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{L_1+(-L_2)} Pdx + Qdy = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{C} Pdx + Qdy = 0$$



$F = (P, Q)$ 是定义在 D 上的向量场。则

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftarrow \quad F = \nabla f \text{（等价地，}F\text{为保守向量场）}$$

定理 设平面区域 D 是单连通，$F = (P, Q)$ 是定义在 D 上的向量场。则

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad F = \nabla f\text{（等价地，}F\text{为保守向量场）}$$

定理 设平面区域 D 是单连通，$F=(P,Q)$ 是定义在 D 上的向量场。则

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad F = \nabla f \text{（等价地，}F\text{为保守向量场）}$$

定义 平面区域 D 是单连通，是指：D 中任意一条闭曲线，都能在 D 中收缩成一点

定理 设平面区域 D 是单连通，$F=(P,Q)$ 是定义在 D 上的向量场。则

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad F = \nabla f$$（等价地，F为保守向量场）

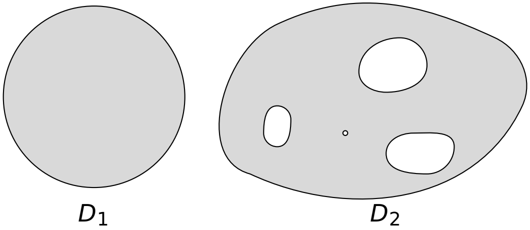
定义 平面区域 D 是单连通，是指：D 中任意一条闭曲线，都能在 D 中收缩成一点（强调：曲线在收缩过程保持在 D 中，不能离开 D）。

定理 设平面区域 D 是单连通，$F=(P,Q)$ 是定义在 D 上的向量场。则

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad F = \nabla f\text{（等价地，}F\text{为保守向量场）}$$

定义 平面区域 D 是单连通，是指：D 中任意一条闭曲线，都能在 D 中收缩成一点（强调：曲线在收缩过程保持在 D 中，不能离开 D）。

例

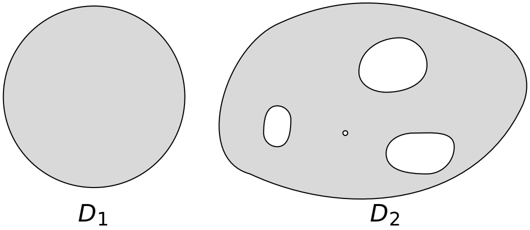


定理 设平面区域 D 是单连通，$F=(P,Q)$ 是定义在 D 上的向量场。则

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad F=\nabla f\text{（等价地，}F\text{为保守向量场）}$$

定义 平面区域 D 是单连通，是指：D 中任意一条闭曲线，都能在 D 中收缩成一点（强调：曲线在收缩过程保持在 D 中，不能离开 D）。

例 如图，D_1 是单连通，而 D_2 不是

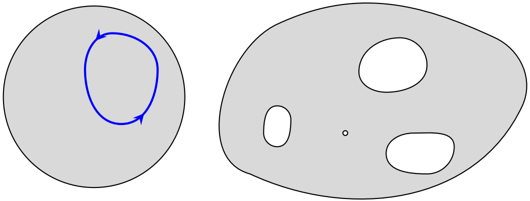


定理 设平面区域 D 是单连通，$F = (P, Q)$ 是定义在 D 上的向量场。则

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad F = \nabla f \text{（等价地，}F\text{为保守向量场）}$$

定义 平面区域 D 是单连通，是指：D 中任意一条闭曲线，都能在 D 中收缩成一点（强调：曲线在收缩过程保持在 D 中，不能离开 D）。

例 如图，D_1 是单连通，而 D_2 不是



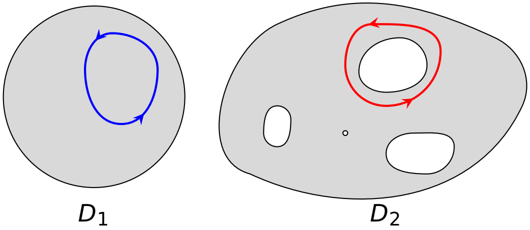
D_1 D_2

定理 设平面区域 D 是单连通，$F = (P, Q)$ 是定义在 D 上的向量场。则

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0 \iff F = \nabla f \text{（等价地，} F \text{为保守向量场）}$$

定义 平面区域 D 是单连通，是指：D 中任意一条闭曲线，都能在 D 中收缩成一点（强调：曲线在收缩过程保持在 D 中，不能离开 D）。

例 如图，D_1 是单连通，而 D_2 不是

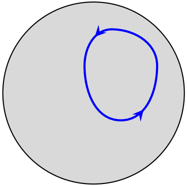


定理 设平面区域 D 是单连通，$F = (P, Q)$ 是定义在 D 上的向量场。则

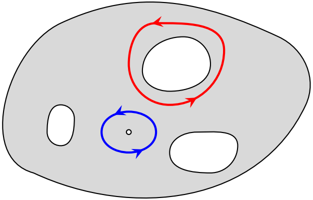
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad F = \nabla f \text{（等价地，}F\text{为保守向量场）}$$

定义 平面区域 D 是单连通，是指：D 中任意一条闭曲线，都能在 D 中收缩成一点（强调：曲线在收缩过程保持在 D 中，不能离开 D）。

例 如图，D_1 是单连通，而 D_2 不是



D_1



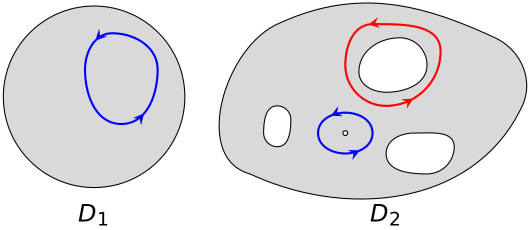
D_2

定理 设平面区域 D 是单连通，$F=(P,Q)$ 是定义在 D 上的向量场。则

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad F = \nabla f \text{（等价地，}F\text{为保守向量场）}$$

定义 平面区域 D 是单连通，是指：D 中任意一条闭曲线，都能在 D 中收缩成一点（强调：曲线在收缩过程保持在 D 中，不能离开 D）。

例 如图，D_1 是单连通，而 D_2 不是



注 直观上，单连通区域是指不含“洞”、“孔”的区域

小结

- 设 $F = (P, Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场，则

小结

- 设 $F = (P, Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场，则

$\boxed{F\text{是梯度向量场（势场），即 } F = \nabla f}$

$\boxed{F\text{是保守向量场}}$

$\boxed{F\text{在任意闭曲线上的曲线积分为}0}$

$$\boxed{\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0}$$

小结

- 设 $F = (P, Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场，则

F是梯度向量场（势场），即 $F = \nabla f$

F是保守向量场

F在任意闭曲线上的曲线积分为0

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0$$

小结

- 设 $F = (P, Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场，则

$$\boxed{F\text{是保守向量场}} \longleftrightarrow \boxed{F\text{在任意闭曲线上的曲线积分为}0}$$

$$\boxed{F\text{是保守向量场}} \longleftrightarrow \boxed{F\text{是梯度向量场（势场），即 } F = \nabla f}$$

$$\boxed{\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0}$$

小结

- 设 $F = (P, Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场，则

F是保守向量场 $\Longleftrightarrow$ F是梯度向量场（势场），即 $F = \nabla f$

F是保守向量场 $\Longleftrightarrow$ F在任意闭曲线上的曲线积分为0

F是保守向量场 $\Longrightarrow$ $\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0$

小结

- 设 $F=(P,Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场，则

F是保守向量场 $\Longleftrightarrow$ F是梯度向量场（势场），即 $F=\nabla f$

F是保守向量场 $\Longleftrightarrow$ F在任意闭曲线上的曲线积分为0

F是保守向量场 $\Longrightarrow$ $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0$

D是单连通

小结

- 设 $F = (P, Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场，则

F是保守向量场 $\Longleftrightarrow$ F是梯度向量场（势场），即 $F = \nabla f$

F是保守向量场 $\Longleftrightarrow$ F在任意闭曲线上的曲线积分为0

F是保守向量场 $\Longrightarrow$ $\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0$

D是单连通

- 当 $F = (P, Q)$ 是保守场时，成立 $F = \nabla f$，

小结

- 设 $F=(P,Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场，则

F是保守向量场 $\longleftrightarrow$ F是梯度向量场（势场），即 $F=\nabla f$

F是保守向量场 $\longleftrightarrow$ F在任意闭曲线上的曲线积分为0

F是保守向量场 $\longrightarrow$ $\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0$

D是单连通

- 当 $F=(P,Q)$ 是保守场时，成立 $F=\nabla f$，并且

$$\int_L Pdx+Qdy$$

小结

- 设 $F=(P,Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场，则

F是保守向量场 $\Longleftrightarrow$ F是梯度向量场（势场），即 $F=\nabla f$

F是保守向量场 $\Longleftrightarrow$ F在任意闭曲线上的曲线积分为0

F是保守向量场 $\Longrightarrow$ $\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix}=0$

D是单连通

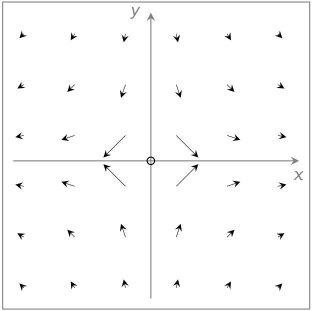
- 当 $F=(P,Q)$ 是保守场时，成立 $F=\nabla f$，并且

$$\int_L Pdx+Qdy=f(\text{终点})-f(\text{起点})$$

下面将构造例子说明：$\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = 0 \;\; \not\Rightarrow \;\; F$是保守向量场

下面将构造例子说明：$\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = 0 \not\Rightarrow$ F是保守向量场

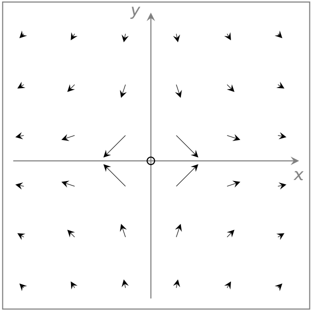
例 定义在 $D = \mathbb{R}^2 \backslash (0, 0)$ 的向量场 $F = (P, Q) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$



下面将构造例子说明：$\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = 0 \quad \not\Rightarrow \quad F$是保守向量场

例 定义在 $D = \mathbb{R}^2 \backslash (0, 0)$ 的向量场 $F = (P, Q) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$

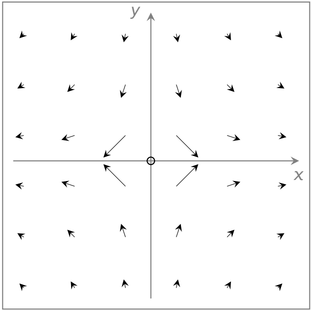
- $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} =$



下面将构造例子说明：$\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = 0 \not\Rightarrow$ F是保守向量场

例 定义在 $D = \mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$ 的向量场 $F = (P, Q) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$

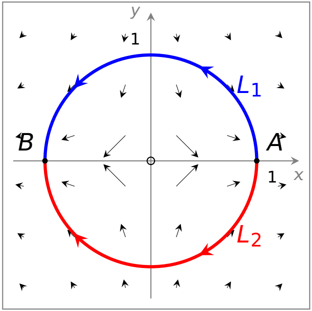
- $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} - \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} = 0$



下面将构造例子说明：$\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = 0 \quad \not\Rightarrow \quad F$是保守向量场

例 定义在 $D = \mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$ 的向量场 $F = (P, Q) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$

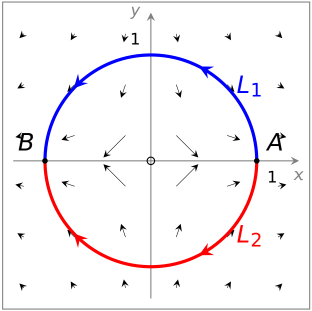
- $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} - \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} = 0$
- 曲线积分 $I_i = \int_{L_i} \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}, \quad (i = 1, 2)$



下面将构造例子说明：$\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = 0 \;\not\Rightarrow\;$ F是保守向量场

例 定义在 $D = \mathbb{R}^2 \backslash (0, 0)$ 的向量场 $F = (P, Q) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$

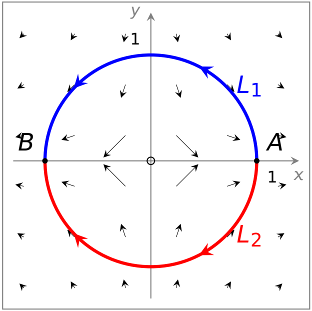
- $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} - \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} = 0$
- 曲线积分 $I_i = \int_{L_i} \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}, \quad (i = 1, 2)$
  的值：$I_1 = \pi$, $I_2 = -\pi$。



下面将构造例子说明：$\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = 0 \not\Rightarrow$ F是保守向量场

例 定义在 $D = \mathbb{R}^2 \backslash (0, 0)$ 的向量场 $F = (P, Q) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$

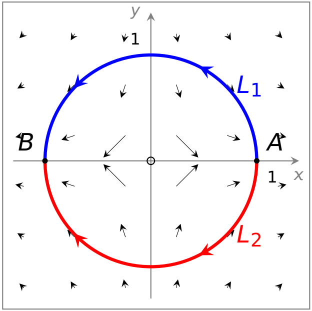
- $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} - \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} = 0$
- 曲线积分 $I_i = \int_{L_i} \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}, \quad (i = 1, 2)$ 的值：$I_1 = \pi, I_2 = -\pi$。故 F 不是保守场



下面将构造例子说明：$\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = 0 \quad \color{red}{\not\Rightarrow} \quad F$是保守向量场

例 定义在 $D = \mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$ 的向量场 $F = (P, Q) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$

- $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} - \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} = 0$
- 曲线积分 $I_i = \int_{L_i} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}, \quad (i = 1, 2)$ 的值：$I_1 = \pi$, $I_2 = -\pi$。故 F 不是保守场
- 原因：D 不是单连通

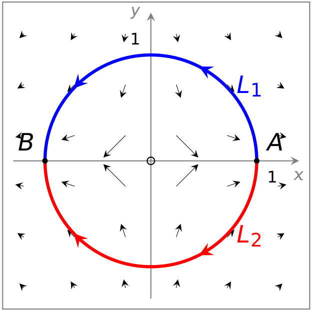


下面将构造例子说明：$\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = 0 \;\not\Rightarrow\;$ F是保守向量场

例 定义在 $D = \mathbb{R}^2 \backslash (0, 0)$ 的向量场 $F = (P, Q) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$

- $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} - \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} = 0$
- 曲线积分 $I_i = \int_{L_i} \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}, \quad (i = 1, 2)$ 的值：$I_1 = \pi, I_2 = -\pi$。故 F 不是保守场
- 原因：D 不是单连通

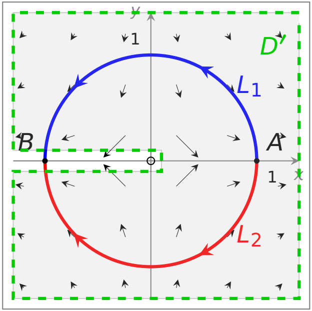
（闭曲线 $L_1 \cup (-L_2)$ 包含洞）



下面将构造例子说明：$\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = 0 \quad \not\Rightarrow \quad F$是保守向量场

例 定义在 $D = \mathbb{R}^2 \backslash (0, 0)$ 的向量场 $F = (P, Q) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$

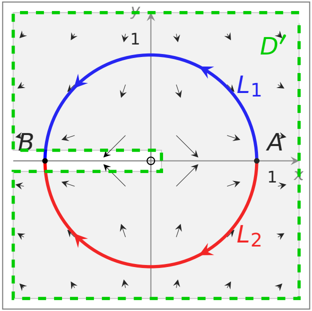
- $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} - \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} = 0$
- 曲线积分 $I_i = \int_{L_i} \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}, \quad (i = 1, 2)$ 的值：$I_1 = \pi, I_2 = -\pi$。故 F 不是保守场
- 原因：D 不是单连通（闭曲线 $L_1 \cup (-L_2)$ 包含洞）



注 如图，若考虑区域 $D' = \mathbb{R}^2 - \{(x, 0) | x \leq 0\}$，则 D' 是单连通。

下面将构造例子说明：$\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = 0 \quad \textcolor{red}{\not\Rightarrow} \quad F$是保守向量场

例 定义在 $D = \mathbb{R}^2 \backslash (0, 0)$ 的向量场 $F = (P, Q) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$



- $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} - \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} = 0$
- 曲线积分 $I_i = \int_{L_i} \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}, \quad (i = 1, 2)$
  的值：$I_1 = \pi, I_2 = -\pi$。故 F 不是保守场
- 原因：D 不是单连通
  （闭曲线 $L_1 \cup (-L_2)$ 包含洞）

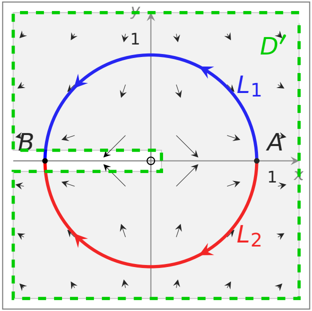
注 如图，若考虑区域 $D' = \mathbb{R}^2 - \{(x, 0) | x \le 0\}$，则 D' 是单连通。

所以 F 是 D' 中保守向量场。

下面将构造例子说明：$\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = 0 \not\Rightarrow$ F是保守向量场

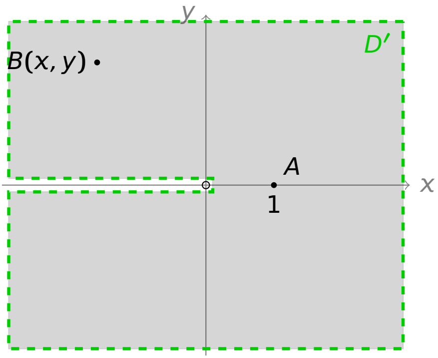
例 定义在 $D = \mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$ 的向量场 $F = (P, Q) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$

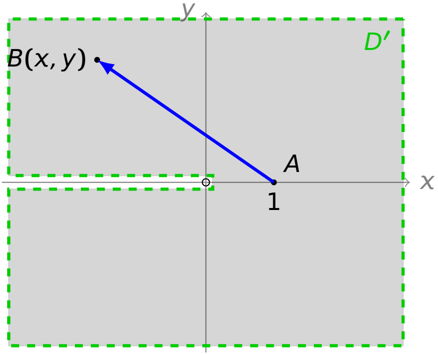
- $\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} - \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} = 0$
- 曲线积分 $I_i = \int_{L_i} \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$, $\quad (i = 1, 2)$ 的值：$I_1 = \pi$, $I_2 = -\pi$。故 F 不是保守场
- 原因：D 不是单连通（闭曲线 $L_1 \cup (-L_2)$ 包含洞）



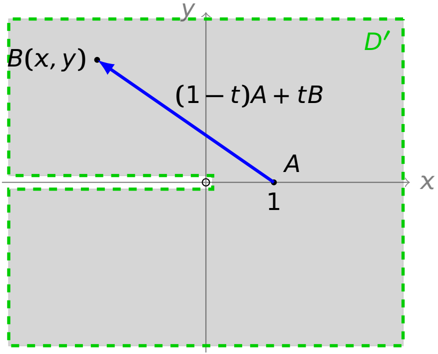
注 如图，若考虑区域 $D' = \mathbb{R}^2 - \{(x,0) | x \le 0\}$，则 D' 是单连通。

所以 F 是 D' 中保守向量场。想想势函数 $f = ?$


y
D′
B(x, y)
A
x
1

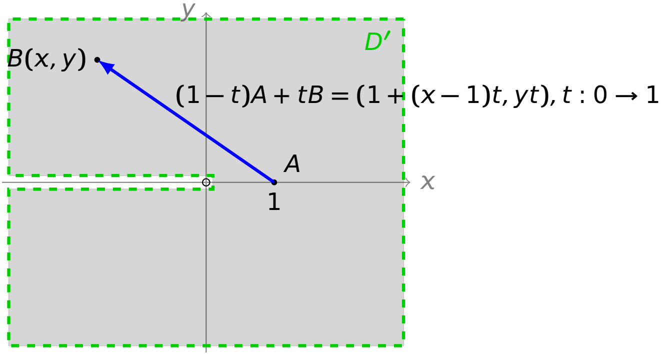


$$f(x,y)=\int_{\overrightarrow{AB}}\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}$$

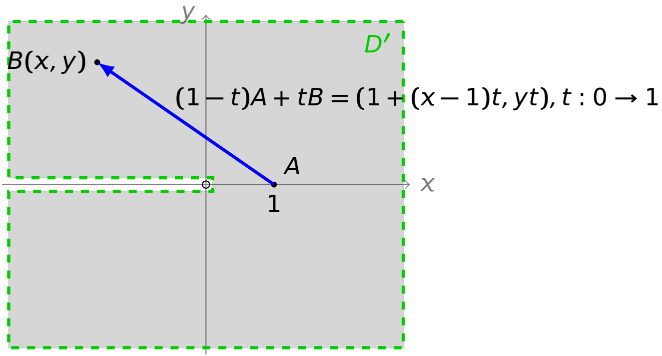


$, t : 0 \to 1$

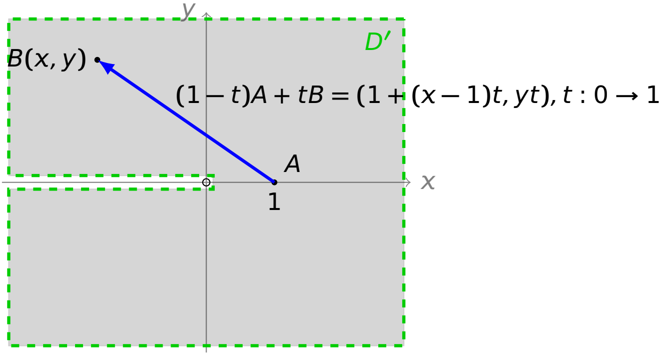
$$f(x,y) = \int_{\overrightarrow{AB}} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2}$$



$$f(x,y)=\int_{\overrightarrow{AB}}\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$$

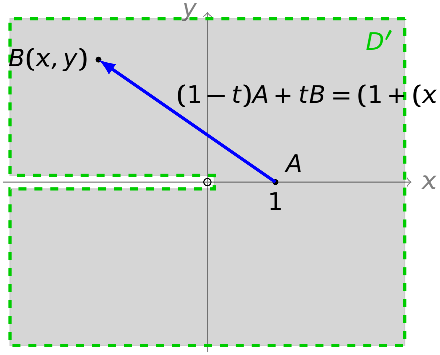


$$f(x,y) = \int_{\overrightarrow{AB}} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} = y\int_0^1 \frac{dt}{(yt)^2 + [1+(x-1)t]^2}$$



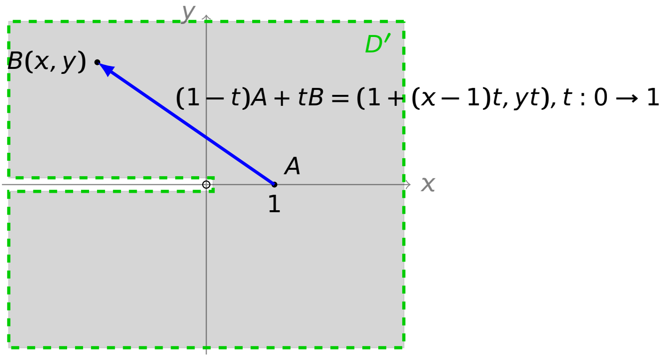
$$f(x,y)=\int_{\overrightarrow{AB}}\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}=y\int_0^1\frac{dt}{(yt)^2+[1+(x-1)t]^2}$$

$$=\begin{cases} & y>0\\ & y<0\\ & y=0\end{cases}$$



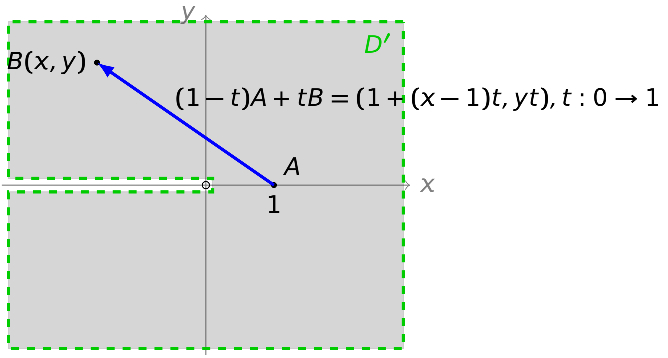
$$f(x,y) = \int_{\overrightarrow{AB}} \frac{-ydx + xdy}{x^2+y^2} = y\int_0^1 \frac{dt}{(yt)^2 + [1+(x-1)t]^2}$$

$$= \begin{cases} & y > 0 \\ & y < 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$



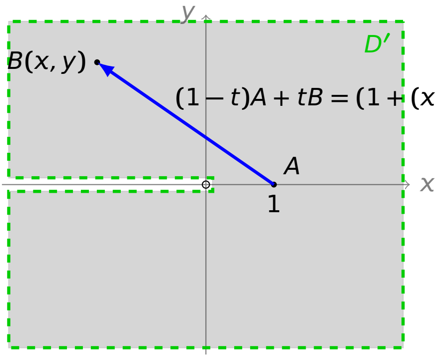
$$f(x,y)=\int_{\overrightarrow{AB}}\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}=y\int_0^1\frac{dt}{(yt)^2+[1+(x-1)t]^2}$$

$$=\begin{cases}\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{x}{y}, & y>0\\ & y<0\\ 0, & y=0\end{cases}$$



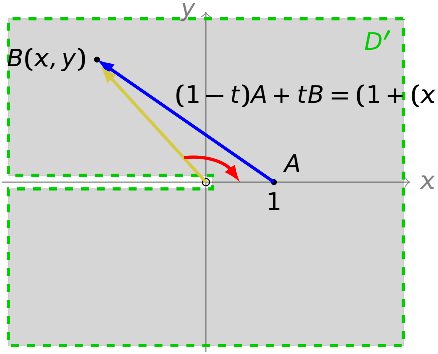
$$f(x,y)=\int_{\overrightarrow{AB}}\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}=y\int_0^1\frac{dt}{(yt)^2+[1+(x-1)t]^2}$$

$$=\begin{cases}\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{x}{y}, & y>0\\ -\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{x}{y}, & y<0\\ 0, & y=0\end{cases}$$



$$f(x,y)=\int_{\overrightarrow{AB}}\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}=y\int_0^1\frac{dt}{(yt)^2+[1+(x-1)t]^2}$$

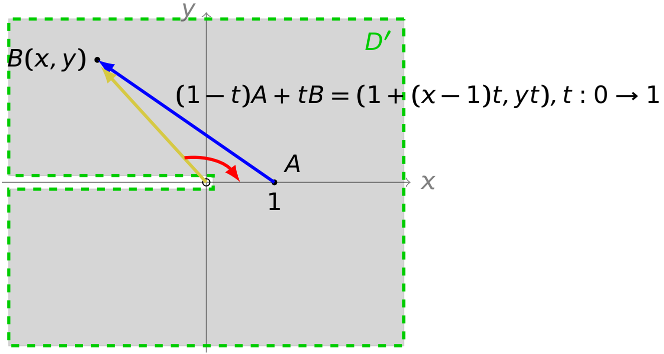
$$=\begin{cases}\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{x}{y}, & y>0\\ -\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{x}{y}, & y<0\\ 0, & y=0\end{cases}=\begin{cases}\arctan\frac{y}{x}, & x\neq 0\\ \frac{\pi}{2}, & x=0,y>0\\ -\frac{\pi}{2}, & x=0,y<0\end{cases}$$



$$f(x,y)=\int_{\overrightarrow{AB}}\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}=y\int_0^1\frac{dt}{(yt)^2+[1+(x-1)t]^2}$$

$$=\begin{cases}\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{x}{y}, & y>0\\ -\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{x}{y}, & y<0\\ 0, & y=0\end{cases}=\begin{cases}\arctan\frac{y}{x}, & x\neq 0\\ \frac{\pi}{2}, & x=0,y>0\\ -\frac{\pi}{2}, & x=0,y<0\end{cases}$$

$=\overrightarrow{OB}$与x轴正向的有向夹角



$$f(x,y)=\int_{\overrightarrow{AB}}\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}=y\int_0^1\frac{dt}{(yt)^2+[1+(x-1)t]^2}$$

$$=\begin{cases}\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{x}{y}, & y>0\\ -\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{x}{y}, & y<0\\ 0, & y=0\end{cases}=\begin{cases}\arctan\frac{y}{x}, & x\neq 0\\ \frac{\pi}{2}, & x=0,y>0\\ -\frac{\pi}{2}, & x=0,y<0\end{cases}$$

$=\overrightarrow{OB}$与x轴正向的有向夹角$\in(-\pi,\pi)$

有兴趣可以将以上的概念、性质推广到三维空间：

- 三维空间的向量场 $F = (P, Q, R)$

有兴趣可以将以上的概念、性质推广到三维空间：

- 三维空间的向量场 $F=(P,Q,R)$ 称为保守向量场，指其曲线积分与路径无关

有兴趣可以将以上的概念、性质推广到三维空间：

- 三维空间的向量场 $F=(P,\ Q,\ R)$称为保守向量场，指其曲线积分与路径无关
- $F=(P,\ Q,\ R)$ 是保守场，当且仅当 $\exists\, f(x,y,z)$ 使得 $F=\nabla f$，

有兴趣可以将以上的概念、性质推广到三维空间：

- 三维空间的向量场 $F=(P, Q, R)$称为保守向量场，指其曲线积分与路径无关
- $F=(P, Q, R)$ 是保守场，当且仅当 $\exists\, f(x,y,z)$ 使得 $F=\nabla f$，此时

$$\int_L Pdx+Qdy+Rdz=f(\text{终点})-f(\text{起点})$$

有兴趣可以将以上的概念、性质推广到三维空间：

- 三维空间的向量场 $F=(P,\,Q,\,R)$称为保守向量场，指其曲线积分与路径无关
- $F=(P,\,Q,\,R)$ 是保守场，当且仅当 $\exists\, f(x,y,z)$ 使得 $F=\nabla f$，此时
$$\int_L Pdx+Qdy+Rdz=f(\text{终点})-f(\text{起点})$$
- 如果 $F=(P,\,Q,\,R)$ 是保守向量场，则
$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=0$$

有兴趣可以将以上的概念、性质推广到三维空间：

- 三维空间的向量场 $F=(P,Q,R)$称为保守向量场，指其曲线积分与路径无关
- $F=(P,Q,R)$ 是保守场，当且仅当 $\exists f(x,y,z)$ 使得 $F=\nabla f$，此时

$$\int_L Pdx+Qdy+Rdz=f(\text{终点})-f(\text{起点})$$

- 如果 $F=(P,Q,R)$ 是保守向量场，则

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=0$$

  但反过来不一定成立

有兴趣可以将以上的概念、性质推广到三维空间：

- 三维空间的向量场 $F=(P,Q,R)$称为保守向量场，指其曲线积分与路径无关
- $F=(P,Q,R)$ 是保守场，当且仅当 $\exists\, f(x,y,z)$ 使得 $F=\nabla f$，此时

$$\int_L Pdx+Qdy+Rdz=f(\text{终点})-f(\text{起点})$$

- 如果 $F=(P,Q,R)$ 是保守向量场，则

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=0$$

  但反过来不一定成立

- 如果 F 的定义域是单连通区域，则上述命题的逆命题也成立（从而是充分必要条件）

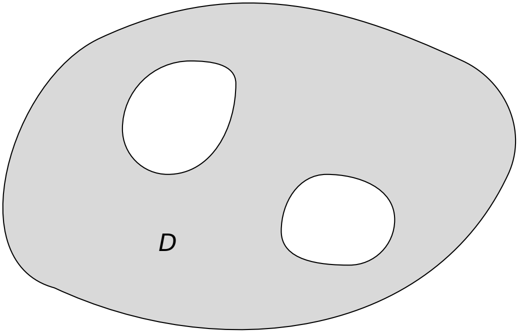
We are here now...

1. 梯度向量场，保守向量场；曲线积分与路径无关

2. 格林公式

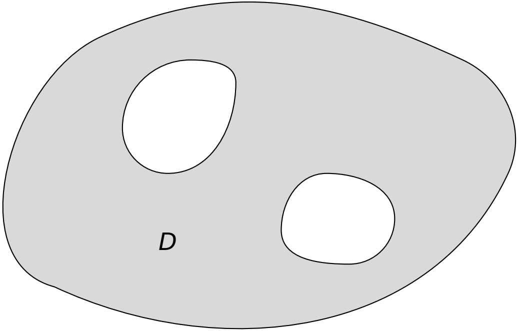
区域边界的定向

定义 假设曲线 C 是平面区域 D 的边界。



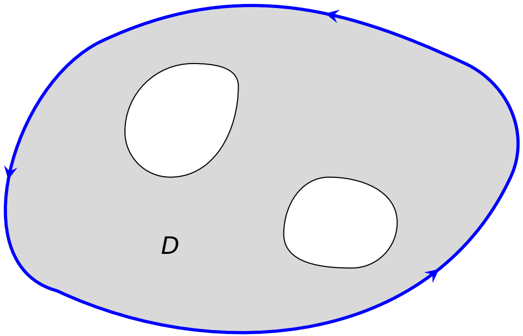
区域边界的定向

定义 假设曲线 C 是平面区域 D 的边界。规定 C 的正向如下：当观察者沿 C 的这个方向行走时，左手边在区域 D 内。



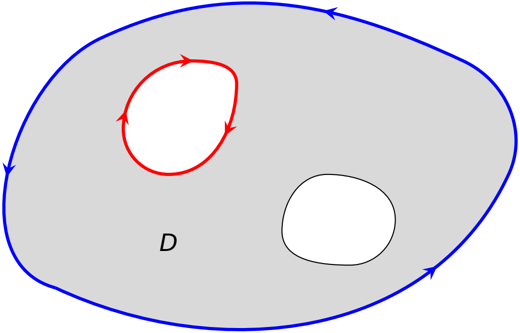
区域边界的定向

定义 假设曲线 C 是平面区域 D 的边界。规定 C 的正向如下：当观察者沿 C 的这个方向行走时，左手边在区域 D 内。



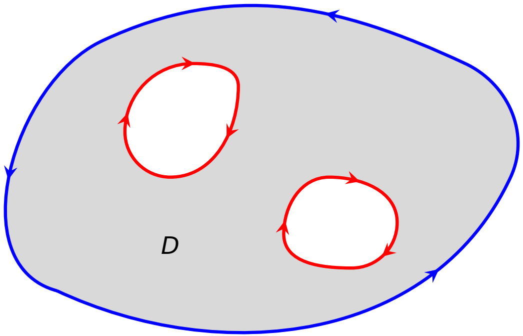
区域边界的定向

定义 假设曲线 C 是平面区域 D 的边界。规定 C 的正向如下：当观察者沿 C 的这个方向行走时，左手边在区域 D 内。



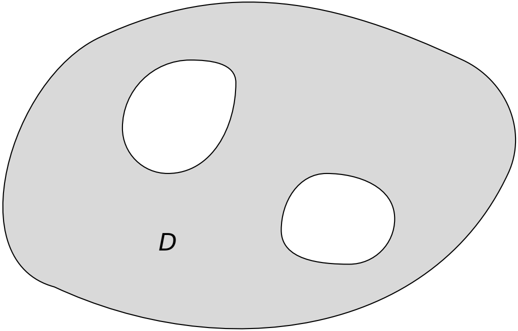
区域边界的定向

定义 假设曲线 C 是平面区域 D 的边界。规定 C 的正向如下：当观察者沿 C 的这个方向行走时，左手边在区域 D 内。



格林公式 设有界闭区域 D 是由分段光滑曲线 C 围成，若函数 $P(x, y)$ 及 $Q(x, y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数，则成立

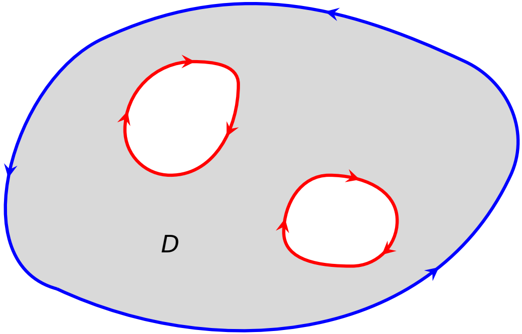
$$\iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} dxdy = \int_C Pdx + Qdy$$



格林公式 设有界闭区域 D 是由分段光滑曲线 C 围成，若函数 $P(x, y)$ 及 $Q(x, y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数，则成立

$$\iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} dxdy = \int_C Pdx + Qdy$$

其中 C 的定向取：作为区域 D 的边界的正向。



例 利用格林公式计算以下的曲线积分：

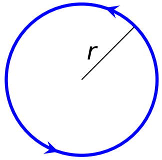
1. $\int_C y dx - x dy$，C 是半径为 r 的圆周，定向取逆时针方向
2. $\int_C (y^4 + x^3) dx + 2x^6 dy$，$C$ 是矩形 $[0,1] \times [0,1]$，逆时针方向

例 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1. $\int_C ydx - xdy$，C 是半径为 r 的圆周，定向取逆时针方向
2. $\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6 dy$，$C$ 是矩形 $[0,1] \times [0,1]$，逆时针方向

解 1.

$$\int_C ydx - xdy$$

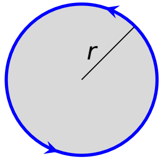


例 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1. $\int_C ydx - xdy$，C 是半径为 r 的圆周，定向取逆时针方向
2. $\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6 dy$，$C$ 是矩形 $[0,1] \times [0,1]$，逆时针方向

解 1.

$$\int_C ydx - xdy$$

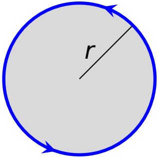


例 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1. $\int_C y dx - x dy$，C 是半径为 r 的圆周，定向取逆时针方向
2. $\int_C (y^4 + x^3) dx + 2x^6 dy$，$C$ 是矩形 $[0,1] \times [0,1]$，逆时针方向

解 1.

$$\int_C y dx - x dy = \iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ & \end{vmatrix} dx dy$$

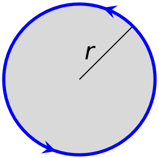


例 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1. $\int_C ydx - xdy$，C 是半径为 r 的圆周，定向取逆时针方向
2. $\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6 dy$，$C$ 是矩形 $[0,1] \times [0,1]$，逆时针方向

解 1.

$$\int_C ydx - xdy = \iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y & -x \end{vmatrix} dxdy$$



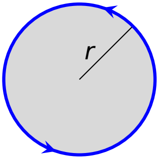
例 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1. $\int_C y dx - x dy$，C 是半径为 r 的圆周，定向取逆时针方向
2. $\int_C (y^4 + x^3) dx + 2x^6 dy$，$C$ 是矩形 $[0,1] \times [0,1]$，逆时针方向

解 1.

$$\int_C y dx - x dy = \iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y & -x \end{vmatrix} dx dy$$

$$= \iint_D -2 dx dy$$



例 利用格林公式计算以下的曲线积分：

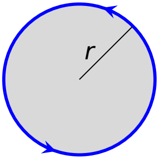
1. $\int_C ydx - xdy$，C 是半径为 r 的圆周，定向取逆时针方向
2. $\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6 dy$，$C$ 是矩形 $[0,1]\times[0,1]$，逆时针方向

解 1.

$$\int_C ydx - xdy = \iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y & -x \end{vmatrix} dxdy$$

$$= \iint_D -2dxdy$$

$$= -2|D|$$

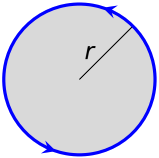


例 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1. $\int_C ydx - xdy$，C 是半径为 r 的圆周，定向取逆时针方向
2. $\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6 dy$，$C$ 是矩形 $[0,1] \times [0,1]$，逆时针方向

解 1.

$$\begin{aligned}\int_C ydx - xdy &= \iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y & -x \end{vmatrix} dxdy \\ &= \iint_D -2dxdy \\ &= -2|D| = -2\pi r^2\end{aligned}$$

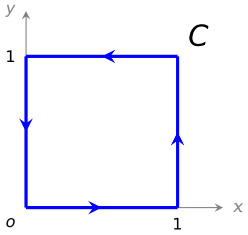


例 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1. $\int_C y dx - x dy$，C 是半径为 r 的圆周，定向取逆时针方向
2. $\int_C (y^4 + x^3) dx + 2x^6 dy$，$C$ 是矩形 $[0,1] \times [0,1]$，逆时针方向

解 2.

$$\int_C (y^4 + x^3) dx + 2x^6 dy$$

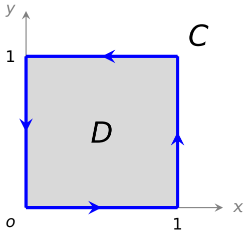


例 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1. $\int_C y\,dx - x\,dy$，C 是半径为 r 的圆周，定向取逆时针方向
2. $\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6 dy$，$C$ 是矩形 $[0,1] \times [0,1]$，逆时针方向

解 2.

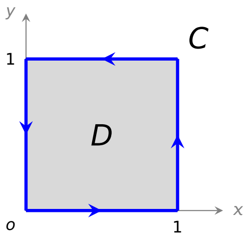
$$\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6 dy$$



例 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1. $\int_C y\,dx - x\,dy$，C 是半径为 r 的圆周，定向取逆时针方向
2. $\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6 dy$，$C$ 是矩形 $[0,1]\times[0,1]$，逆时针方向

解 2.



$$\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6 dy$$

$$= \iint_D \begin{vmatrix} \quad & \frac{\partial}{\partial x} & \quad & \frac{\partial}{\partial y} & \quad \end{vmatrix} dxdy$$

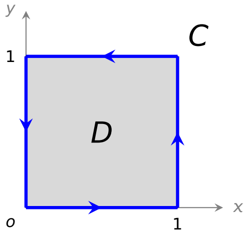
例 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1. $\int_C y dx - x dy$，C 是半径为 r 的圆周，定向取逆时针方向
2. $\int_C (y^4 + x^3) dx + 2x^6 dy$，$C$ 是矩形 $[0,1] \times [0,1]$，逆时针方向

解 2.

$$\int_C (y^4 + x^3) dx + 2x^6 dy$$

$$= \iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y^4 + x^3 & 2x^6 \end{vmatrix} dx dy$$



例 利用格林公式计算以下的曲线积分：

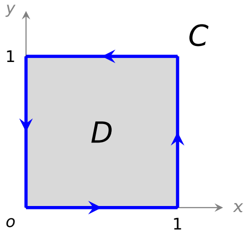
1. $\int_C ydx - xdy$，C 是半径为 r 的圆周，定向取逆时针方向
2. $\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy$，$C$ 是矩形 $[0,1]\times[0,1]$，逆时针方向

解 2.

$$\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy$$

$$= \iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y^4 + x^3 & 2x^6 \end{vmatrix} dxdy$$

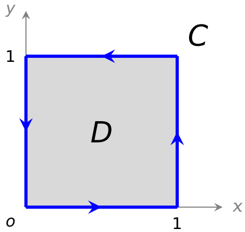
$$= \iint_D (12x^5 - 4y^3)dxdy$$



例 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1. $\int_C y dx - x dy$，C 是半径为 r 的圆周，定向取逆时针方向
2. $\int_C (y^4 + x^3) dx + 2x^6 dy$，$C$ 是矩形 $[0,1] \times [0,1]$，逆时针方向

解 2.



$$\int_C (y^4 + x^3) dx + 2x^6 dy$$

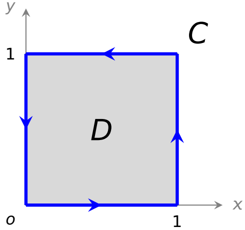
$$= \iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y^4 + x^3 & 2x^6 \end{vmatrix} dxdy$$

$$= \iint_D (12x^5 - 4y^3) dxdy = \int \left[\int (12x^5 - 4y^3) dx \right] dy$$

例 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1. $\int_C y dx - x dy$，C 是半径为 r 的圆周，定向取逆时针方向
2. $\int_C (y^4 + x^3) dx + 2x^6 dy$，$C$ 是矩形 $[0,1] \times [0,1]$，逆时针方向

解 2.



$$\int_C (y^4 + x^3) dx + 2x^6 dy$$

$$= \iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y^4 + x^3 & 2x^6 \end{vmatrix} dxdy$$

$$= \iint_D (12x^5 - 4y^3) dxdy = \int_0^1 \left[\int \quad (12x^5 - 4y^3) dx \right] dy$$

例 利用格林公式计算以下的曲线积分：

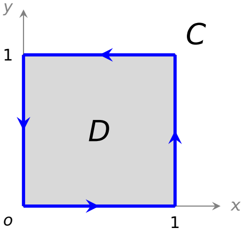
1. $\int_C y dx - x dy$，C 是半径为 r 的圆周，定向取逆时针方向
2. $\int_C (y^4 + x^3) dx + 2x^6 dy$，$C$ 是矩形 $[0,1] \times [0,1]$，逆时针方向

解 2.

$$\int_C (y^4 + x^3) dx + 2x^6 dy$$

$$= \iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y^4 + x^3 & 2x^6 \end{vmatrix} dx dy$$

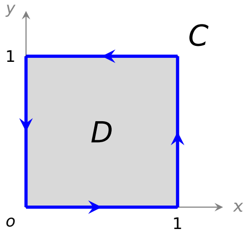
$$= \iint_D (12x^5 - 4y^3) dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^1 (12x^5 - 4y^3) dx \right] dy$$



例 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1. $\int_C y\,dx - x\,dy$，C 是半径为 r 的圆周，定向取逆时针方向
2. $\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6 dy$，$C$ 是矩形 $[0,1] \times [0,1]$，逆时针方向

解 2.



$$\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6 dy$$

$$= \iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y^4 + x^3 & 2x^6 \end{vmatrix} dxdy$$

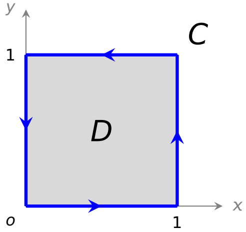
$$= \iint_D (12x^5 - 4y^3)dxdy = \int_0^1 \left[\int_0^1 (12x^5 - 4y^3)dx\right]dy$$

$$= \int_0^1 \left[2x^6 - 4y^3 x\Big|_0^1\right]dy$$

例 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1. $\int_C ydx - xdy$，C 是半径为 r 的圆周，定向取逆时针方向
2. $\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy$，$C$ 是矩形 $[0,1]\times[0,1]$，逆时针方向

解 2.



$$\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy$$

$$= \iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y^4 + x^3 & 2x^6 \end{vmatrix} dxdy$$

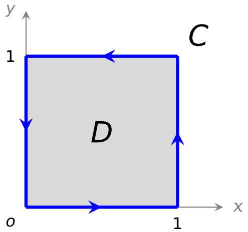
$$= \iint_D (12x^5 - 4y^3)dxdy = \int_0^1 \left[\int_0^1 (12x^5 - 4y^3)dx\right]dy$$

$$= \int_0^1 \left[2x^6 - 4y^3x\Big|_0^1\right]dy = \int_0^1 \left[2 - 4y^3\right]dy$$

例 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1. $\int_C ydx - xdy$，C 是半径为 r 的圆周，定向取逆时针方向
2. $\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6 dy$，$C$ 是矩形 $[0,1]\times[0,1]$，逆时针方向

解 2.



$$\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6 dy$$

$$= \iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y^4 + x^3 & 2x^6 \end{vmatrix} dxdy$$

$$= \iint_D (12x^5 - 4y^3)dxdy = \int_0^1 \left[\int_0^1 (12x^5 - 4y^3)dx\right]dy$$

$$= \int_0^1 \left[2x^6 - 4y^3 x\Big|_0^1\right]dy = \int_0^1 \left[2 - 4y^3\right]dy = 1$$

格林公式推论 设有界闭区域 D 是由分段光滑曲线 C 围成，则

$$D\text{的面积} = \frac{1}{2}\int_C -y dx + x dy$$

格林公式推论 设有界闭区域 D 是由分段光滑曲线 C 围成，则

$$D\text{的面积} = \frac{1}{2}\int_C -y dx + x dy$$

其中 C 的定向取：作为区域 D 的边界的正向。

格林公式推论 设有界闭区域 D 是由分段光滑曲线 C 围成，则

$$D\text{的面积} = \frac{1}{2}\int_C -ydx + xdy$$

其中 C 的定向取：作为区域 D 的边界的正向。

证明

$$\frac{1}{2}\int_C -ydx + xdy$$

格林公式推论 设有界闭区域 D 是由分段光滑曲线 C 围成，则

$$D\text{的面积} = \frac{1}{2}\int_C -y dx + x dy$$

其中 C 的定向取：作为区域 D 的边界的正向。

证明

$$\frac{1}{2}\int_C -y dx + x dy = \frac{1}{2}\iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ & \end{vmatrix} dx dy$$

格林公式推论 设有界闭区域 D 是由分段光滑曲线 C 围成，则

$$D\text{的面积} = \frac{1}{2}\int_C -y dx + x dy$$

其中 C 的定向取：作为区域 D 的边界的正向。

证明

$$\frac{1}{2}\int_C -y dx + x dy = \frac{1}{2}\iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ -y & x \end{vmatrix} dx dy$$

格林公式推论 设有界闭区域 D 是由分段光滑曲线 C 围成，则

$$D\text{的面积} = \frac{1}{2}\int_C -y dx + x dy$$

其中 C 的定向取：作为区域 D 的边界的正向。

证明

$$\frac{1}{2}\int_C -y dx + x dy = \frac{1}{2}\iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ -y & x \end{vmatrix} dx dy = \int_D 1 dx dy$$

格林公式推论 设有界闭区域 D 是由分段光滑曲线 C 围成，则

$$D\text{的面积} = \frac{1}{2}\int_C -y dx + x dy$$

其中 C 的定向取：作为区域 D 的边界的正向。

证明

$$\frac{1}{2}\int_C -y dx + x dy = \frac{1}{2}\iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ -y & x \end{vmatrix} dx dy = \int_D 1 dx dy = D\text{的面积}$$

格林公式推论 设有界闭区域 D 是由分段光滑曲线 C 围成，则

$$D\text{的面积} = \frac{1}{2}\int_C -ydx + xdy$$

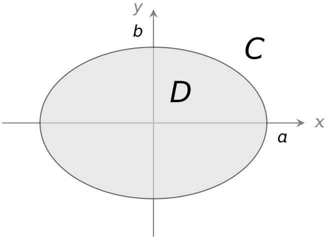
其中 C 的定向取：作为区域 D 的边界的正向。

证明

$$\frac{1}{2}\int_C -ydx + xdy = \frac{1}{2}\iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ -y & x \end{vmatrix} dxdy = \int_D 1dxdy = D\text{的面积}$$

例 利用上述公式计算椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 所围成的面积。

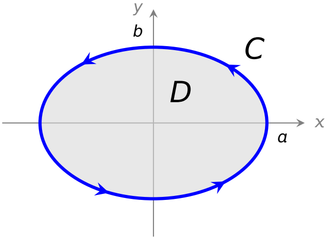
例 利用上述公式计算椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围成的面积。



解

$$D\text{的面积} = \frac{1}{2}\int_C -ydx + xdy$$

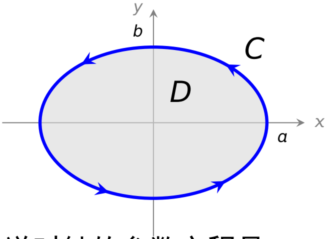
例 利用上述公式计算椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围成的面积。



解

$$D\text{的面积}=\frac{1}{2}\int_C -ydx+xdy$$

例 利用上述公式计算椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围成的面积。

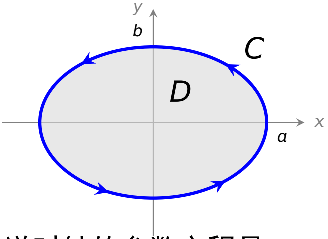


解 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 按逆时针的参数方程是

$$x=a\cos\theta,\quad y=b\sin\theta\quad(\theta:0\to 2\pi)$$

$$D\text{的面积}=\frac{1}{2}\int_C -y\,dx+x\,dy$$

例 利用上述公式计算椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围成的面积。



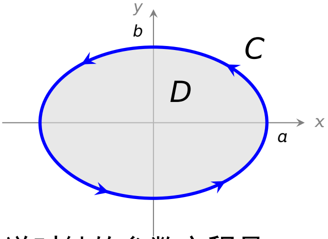
解 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 按逆时针的参数方程是

所以 $$x=a\cos\theta,\quad y=b\sin\theta\quad(\theta:0\to 2\pi)$$

$$D\text{的面积}=\frac{1}{2}\int_C -ydx+xdy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\Big[(-b\sin\theta)(a\cos\theta)'+(a\cos\theta)(b\sin\theta)'\Big]d\theta$$

例 利用上述公式计算椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围成的面积。



解 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 按逆时针的参数方程是

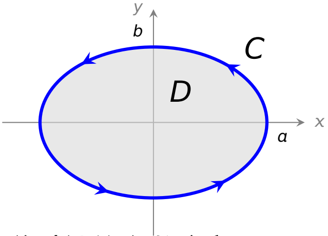
所以 $$x=a\cos\theta,\quad y=b\sin\theta\quad(\theta:0\to 2\pi)$$

$$D\text{的面积}=\frac{1}{2}\int_C -y\,dx+x\,dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\Big[(-b\sin\theta)(a\cos\theta)'+(a\cos\theta)(b\sin\theta)'\Big]d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\Big[ab\Big]d\theta$$

例 利用上述公式计算椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围成的面积。



解 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 按逆时针的参数方程是

所以 $$x=a\cos\theta,\quad y=b\sin\theta\quad(\theta:0\to 2\pi)$$

$$\begin{aligned} D\text{的面积} &= \frac{1}{2}\int_C -ydx+xdy \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\Big[(-b\sin\theta)(a\cos\theta)'+(a\cos\theta)(b\sin\theta)'\Big]d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\Big[ab\Big]d\theta = ab\pi \end{aligned}$$