§5.1　二次型与对称矩阵

数学系　梁卓滨

2018 - 2019 学年上学期

本节内容

- ◇ 二次型，二次型与对称矩阵一一对应
- ♣ 二次型的标准型、规范型
- ♡ 矩阵的合同关系

二次型：引例

二元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2$$

二次型：引例

二元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

二元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

一般地，

$$f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

二次型：引例

二元二次齐次多项式

$$f(x_1,x_2)=6x_1^2+4x_1x_2-2x_2^2=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}6&2\\2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

一般地，

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2)&=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2\\&=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}\quad&\quad\\\quad&\quad\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

二次型：引例

二元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

一般地，

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \\ &= (x_1, x_2)\begin{pmatrix} a_{11} & \\ & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

二次型：引例

二元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

一般地，

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \\ &= (x_1, x_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

二次型：引例

二元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

一般地，

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \\ &= \underbrace{(x_1, x_2)}_{x^T}\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{x} \end{aligned}$$

二次型：引例

二元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

一般地，

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \\ &= \underbrace{(x_1, x_2)}_{x^T}\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{x} = x^TAx \end{aligned}$$

二次型：引例

二元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

一般地，

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \\ &= \underbrace{(x_1, x_2)}_{x^T}\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{x} = x^TAx \end{aligned}$$

例

$$f(x_1, x_2) = -3x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 =$$

二次型：引例

二元二次齐次多项式

$$f(x_1,x_2)=6x_1^2+4x_1x_2-2x_2^2=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}6 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

一般地，

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2)&=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2\\ &=\underbrace{(x_1,x_2)}_{x^T}\underbrace{\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}}_{x}=x^TAx\end{aligned}$$

例

$$f(x_1,x_2)=-3x_1^2+2x_1x_2+5x_2^2=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}\quad & \quad\\ \quad & \quad\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

二次型：引例

二元二次齐次多项式

$$f(x_1,x_2)=6x_1^2+4x_1x_2-2x_2^2=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}6 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

一般地，

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2)&=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2\\ &=\underbrace{(x_1,x_2)}_{x^T}\underbrace{\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}}_{x}=x^TAx\end{aligned}$$

例

$$f(x_1,x_2)=-3x_1^2+2x_1x_2+5x_2^2=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}-3 & \\ & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

二次型：引例

二元二次齐次多项式

$$f(x_1,x_2)=6x_1^2+4x_1x_2-2x_2^2=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}6&2\\2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

一般地，

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2)&=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2\\&=\underbrace{(x_1,x_2)}_{x^T}\underbrace{\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{12}&a_{22}\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}}_{x}=x^TAx\end{aligned}$$

例

$$f(x_1,x_2)=-3x_1^2+2x_1x_2+5x_2^2=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}-3&1\\1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$$

$$= (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$f(x_1,x_2,x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$$

$$= (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$f(x_1,x_2,x_3)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2$$

$$+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3$$

$$=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \\ & a_{22} & \\ & & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$f(x_1,x_2,x_3)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2$$
$$+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3$$

$$=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{22} & \\ & & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2$$
$$+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$$

$$= (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{22} & a_{23} \\ & & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 \\
+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3
\end{aligned}
$$

$$
= (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}
$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) = {} & a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 \\
& + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3
\end{aligned}
$$

$$
= \underbrace{(x_1, x_2, x_3)}_{x^T} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x}
$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 \\
&\quad + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3
\end{aligned}
$$

$$
= \underbrace{(x_1, x_2, x_3)}_{x^T} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x} = x^T A x
$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$f(x_1,x_2,x_3)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2$$
$$+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3$$

$$=\underbrace{(x_1,x_2,x_3)}_{x^T}\underbrace{\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}}_{x}=x^TAx$$

例　$f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3+2x_3^2-2x_2x_3$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$f(x_1,x_2,x_3)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2$$
$$+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3$$

$$=\underbrace{(x_1,x_2,x_3)}_{x^T}\underbrace{\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}}_{x}=x^TAx$$

例 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3+2x_3^2-2x_2x_3$

$$=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}&&\\&&\\&&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 \\
&\quad + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 \\
&= \underbrace{(x_1, x_2, x_3)}_{x^T} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x} = x^T A x
\end{aligned}
$$

例 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_3^2 - 2x_2x_3$

$$
= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 0 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}
$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$f(x_1,x_2,x_3)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2$$
$$+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3$$

$$=\underbrace{(x_1,x_2,x_3)}_{x^T}\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x}=x^TAx$$

例 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3+2x_3^2-2x_2x_3$

$$=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$f(x_1,x_2,x_3)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2$$
$$+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3$$

$$=\underbrace{(x_1,x_2,x_3)}_{x^T}\underbrace{\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}}_{x}=x^TAx$$

例 $\quad f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3+2x_3^2-2x_2x_3$

$$=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$f(x_1,x_2,x_3)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2$$
$$+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3$$

$$=\underbrace{(x_1,x_2,x_3)}_{x^T}\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}}_{x}=x^TAx$$

例 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3+2x_3^2-2x_2x_3$

$$=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \\ & 0 & \\ & & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$f(x_1,x_2,x_3)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2$$
$$+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3$$

$$=\underbrace{(x_1,x_2,x_3)}_{x^T}\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x}=x^TAx$$

例 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3+2x_3^2-2x_2x_3$

$$=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ & 0 & \\ & & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$f(x_1,x_2,x_3)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2$$
$$+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3$$

$$=\underbrace{(x_1,x_2,x_3)}_{x^T}\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x}=x^TAx$$

例 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3+2x_3^2-2x_2x_3$

$$=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ & 0 & -1 \\ & & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$f(x_1,x_2,x_3)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2$$
$$+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3$$

$$=\underbrace{(x_1,x_2,x_3)}_{x^T}\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x}=x^TAx$$

例 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3+2x_3^2-2x_2x_3$

$$=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

例 1 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

二次型：引例

例 1 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

例 2 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$f(x_1,x_2,x_3) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$=$$

二次型：引例

例 1 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_1x_2+3x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$$

$$=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

例 2 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2}\\ 1 & 2 & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

$$=$$

二次型：引例

例 1 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

例 2 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$=$$

二次型：引例

例 1 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

例 2 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$=$$

二次型：引例

例 1 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

例 2 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$=$$

二次型：引例

例 1 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

例 2 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$=$$

二次型：引例

例 1 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_1x_2+3x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$$

$$=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\ &2&\\ &&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

例 2 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}-1&1&\frac{1}{2}\\1&2&0\\\frac{1}{2}&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$=$$

二次型：引例

例 1 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ & 2 & 2 \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

例 2 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$=$$

二次型：引例

例 1 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_1x_2+3x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$$

$$=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2}&2&2\\ \frac{3}{2}&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

例 2 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}-1&1&\frac{1}{2}\\ 1&2&0\\ \frac{1}{2}&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

$$=$$

二次型：引例

例 1 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

例 2 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \_\_\_\_ x_1^2 + \_\_ x_2^2 + \_\_ x_3^2 + 2\_\_\_\_ x_1x_2 + 2\_\_\_\_ x_1x_3 + 2\_\_\_\_ x_2x_3$$

二次型：引例

例 1 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

例 2 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{-1}x_1^2 + \underline{\quad}x_2^2 + \underline{\quad}x_3^2 + 2\underline{\qquad}x_1x_2 + 2\underline{\qquad}x_1x_3 + 2\underline{\qquad}x_2x_3$$

二次型：引例

例 1 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

例 2 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{-1}x_1^2 + \underline{2}x_2^2 + \underline{\quad}x_3^2 + 2\underline{\qquad}x_1x_2 + 2\underline{\qquad}x_1x_3 + 2\underline{\qquad}x_2x_3$$

二次型：引例

例 1 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

例 2 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{-1}x_1^2 + \underline{2}x_2^2 + \underline{0}x_3^2 + 2\underline{\qquad}x_1x_2 + 2\underline{\qquad}x_1x_3 + 2\underline{\qquad}x_2x_3$$

二次型：引例

例 1 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_1x_2+3x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$$

$$=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2}&2&2\\ \frac{3}{2}&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

例 2 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}-1&1&\frac{1}{2}\\ 1&2&0\\ \frac{1}{2}&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$=\underline{-1}x_1^2+\underline{2}x_2^2+\underline{0}x_3^2+2\underline{\cdot 1\cdot}x_1x_2+2\underline{\qquad}x_1x_3+2\underline{\qquad}x_2x_3$$

二次型：引例

例 1 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

例 2 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{-1}x_1^2 + \underline{2}x_2^2 + \underline{0}x_3^2 + 2\underline{\cdot 1 \cdot}x_1x_2 + 2\underline{\cdot \tfrac{1}{2} \cdot}x_1x_3 + 2\underline{\qquad}x_2x_3$$

二次型：引例

例 1 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

例 2 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{-1}x_1^2 + \underline{2}x_2^2 + \underline{0}x_3^2 + 2\underline{\cdot 1 \cdot}x_1x_2 + 2\underline{\cdot \frac{1}{2} \cdot}x_1x_3 + 2\underline{\cdot 0 \cdot}x_2x_3$$

二次型：引例

例 1 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

例 2 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{-1}x_1^2 + \underline{2}x_2^2 + \underline{0}x_3^2 + 2\underline{\cdot 1 \cdot}x_1x_2 + 2\underline{\cdot \frac{1}{2} \cdot}x_1x_3 + 2\underline{\cdot 0 \cdot}x_2x_3$$

$$= -x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_3 + x_1x_3$$

二次型

定义 n 元二次型

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 \qquad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
& + \cdots\cdots \\
& \qquad\qquad\qquad + a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

二次型

定义 n 元二次型

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 \qquad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
& + \cdots\cdots \\
& \qquad\qquad + a_{nn}x_n^2 \\
= & (x_1, x_2, \ldots, x_n)\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

二次型

定义 n 元二次型

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 \qquad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
& + \cdots\cdots \\
& \qquad\qquad + a_{nn}x_n^2 \\
= & (x_1, x_2, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

二次型

定义 n 元二次型

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 \qquad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
& + \cdots\cdots \\
& \qquad\qquad + a_{nn}x_n^2 \\
= & (x_1, x_2, \ldots, x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

二次型

定义 n 元二次型

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 \qquad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
& + \cdots\cdots \\
& \qquad\qquad + a_{nn}x_n^2 \\
= & (x_1, x_2, \ldots, x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

二次型

定义 n 元二次型

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 \qquad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
& + \cdots\cdots \\
& \qquad\qquad + a_{nn}x_n^2 \\
= & (x_1, x_2, \dots, x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

二次型

定义 n 元二次型

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 \qquad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
& + \cdots\cdots \\
& \qquad\qquad + a_{nn}x_n^2 \\
= & (x_1, x_2, \ldots, x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

二次型

定义 n 元二次型

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 \qquad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
& + \cdots\cdots \\
& \qquad\qquad + a_{nn}x_n^2 \\
= & \underbrace{(x_1, x_2, \ldots, x_n)}_{x^T} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x}
\end{aligned}
$$

二次型

定义 n 元二次型

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 \qquad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
& + \cdots\cdots \\
& \qquad\qquad + a_{nn}x_n^2 \\
= & \underbrace{(x_1, x_2, \dots, x_n)}_{x^T} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x} \\
= & x^T A x
\end{aligned}
$$

二次型

定义 n 元二次型

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 \qquad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
& + \cdots\cdots \\
& \qquad\qquad + a_{nn}x_n^2 \\
= & \underbrace{(x_1, x_2, \ldots, x_n)}_{x^T} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x} \\
= & x^T A x
\end{aligned}
$$

注 n 元二次型与对称矩阵，是一一对应

给定二次型

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 \qquad\quad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
& + \cdots\cdots \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\quad + a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

给定二次型

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 \qquad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & + \cdots\cdots \\ & \qquad\qquad\qquad + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

作线性变量代换：

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + \cdots + c_{1n}y_n \\ \vdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

给定二次型

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 \qquad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
& + \cdots\cdots \\
& \qquad\qquad + a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

作线性变量代换：

$$
\begin{cases}
x_1 = c_{11}y_1 + \cdots + c_{1n}y_n \\
\vdots \\
x_n = c_{n1}y_1 + \cdots + c_{nn}y_n
\end{cases}
$$

代入二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 得

$$
f = b_{11}y_1^2 + 2b_{12}y_1y_2 + \cdots \qquad (\text{关于} y_1, \cdots, y_n \text{ 的二次型})
$$

给定二次型

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 \qquad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
& + \cdots\cdots \\
& \qquad\qquad\qquad + a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

作线性变量代换：

$$
\begin{cases}
x_1 = c_{11}y_1 + \cdots + c_{1n}y_n \\
\vdots \\
x_n = c_{n1}y_1 + \cdots + c_{nn}y_n
\end{cases}
$$

代入二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 得

$$
f = b_{11}y_1^2 + 2b_{12}y_1y_2 + \cdots \qquad (\text{关于} y_1, \cdots, y_n \text{ 的二次型})
$$

问题：如何选择适当的变量代换 $y_1, y_2, \cdots, y_n$，把 f 化简？

给定二次型

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 \qquad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
& + \cdots\cdots \\
& \qquad\qquad\qquad + a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

作线性变量代换：（要求 $C = (c_{ij})$ 可逆矩阵，这样可以反解出 y ）

$$
\begin{cases}
x_1 = c_{11}y_1 + \cdots + c_{1n}y_n \\
\vdots \\
x_n = c_{n1}y_1 + \cdots + c_{nn}y_n
\end{cases}
$$

代入二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 得

$$f = b_{11}y_1^2 + 2b_{12}y_1y_2 + \cdots \qquad (\text{关于} y_1, \cdots, y_n \text{ 的二次型})$$

问题：如何选择适当的变量代换 $y_1, y_2, \cdots, y_n$，把 f 化简？

给定二次型

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 \quad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & + \cdots\cdots \\ & \qquad\qquad + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

作线性变量代换：（要求 $C = (c_{ij})$ 可逆矩阵，这样可以反解出 y ）

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + \cdots + c_{1n}y_n \\ \vdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

代入二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 得

$$f = b_{11}y_1^2 + 2b_{12}y_1y_2 + \cdots \qquad (\text{关于} y_1, \cdots, y_n \text{ 的二次型})$$

问题：如何选择适当的变量代换 $y_1, y_2, \cdots, y_n$，把 f 化简？

给定二次型

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 \qquad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
& + \cdots\cdots \\
& \qquad\qquad\qquad + a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

作线性变量代换：（要求 $C = (c_{ij})$ 可逆矩阵，这样可以反解出 y ）

$$
\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + \cdots + c_{1n}y_n \\ \vdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}
$$

$$
\Leftrightarrow x = Cy
$$

代入二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 得

$$
f = b_{11}y_1^2 + 2b_{12}y_1y_2 + \cdots \qquad (\text{关于} y_1, \cdots, y_n \text{ 的二次型})
$$

问题：如何选择适当的变量代换 $y_1, y_2, \cdots, y_n$，把 f 化简？

给定二次型

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 \qquad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
& + \cdots\cdots \\
& \qquad\qquad\qquad + a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

作线性变量代换：（要求 $C = (c_{ij})$ 可逆矩阵，这样可以反解出 $y = C^{-1}x$）

$$
\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + \cdots + c_{1n}y_n \\ \vdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}
$$

$$
\Leftrightarrow x = Cy
$$

代入二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 得

$$
f = b_{11}y_1^2 + 2b_{12}y_1y_2 + \cdots \qquad (\text{关于} y_1, \cdots, y_n \text{ 的二次型})
$$

问题：如何选择适当的变量代换 $y_1, y_2, \cdots, y_n$，把 f 化简？

问题：如何选择适当的变量代换 $y_1, y_2, \cdots, y_n$（$x = Cy$），把 f 化简？

问题：如何选择适当的变量代换 $y_1, y_2, \cdots, y_n$（$x = Cy$），把 f 化简？

注意到：

$$f = x^T A x \xlongequal{x=Cy}$$

问题：如何选择适当的变量代换 $y_1, y_2, \cdots, y_n$（$x = Cy$），把 f 化简？

注意到：

$$f = x^T A x \xlongequal{x=Cy} (Cy)^T A (Cy)$$

问题：如何选择适当的变量代换 $y_1, y_2, \cdots, y_n$（$x = Cy$），把 f 化简？

注意到：

$$f = x^TAx \xlongequal{x=Cy} (Cy)^TA(Cy) = y^TC^T$$

问题：如何选择适当的变量代换 $y_1, y_2, \cdots, y_n$（$x = Cy$），把 f 化简？

注意到：

$$f = x^T A x \xlongequal{x=Cy} (Cy)^T A (Cy) = y^T C^T A C y$$

问题：如何选择适当的变量代换 $y_1, y_2, \cdots, y_n$（$x = Cy$），把 f 化简？

注意到：

$$f = x^T A x \xlongequal{x=Cy} (Cy)^T A (Cy) = y^T C^T A C y$$

所以上述问题等价于以下问题：

问题′：给定对称矩阵 A，尝试找出可逆矩阵 C 使得

$$C^T A C$$

尽可能简单？

问题：如何选择适当的变量代换 $y_1, y_2, \cdots, y_n$（$x = Cy$），把 f 化简？

注意到：

$$f = x^T A x \xlongequal{x=Cy} (Cy)^T A (Cy) = y^T C^T A C y$$

所以上述问题等价于以下问题：

问题′：给定对称矩阵 A，尝试找出可逆矩阵 C 使得

$$C^T A C$$

尽可能简单？

定理 任意对称矩阵 A，都存在可逆矩阵 C，使得 $C^T A C = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$.

问题：如何选择适当的变量代换 $y_1, y_2, \cdots, y_n$（$x = Cy$），把 f 化简？

注意到：

$$f = x^T A x \xlongequal{x=Cy} (Cy)^T A (Cy) = y^T C^T A C y$$

所以上述问题等价于以下问题：

问题′：给定对称矩阵 A，尝试找出可逆矩阵 C 使得

$$C^T A C$$

尽可能简单？

定理 任意对称矩阵 A，都存在可逆矩阵 C，使得 $C^T A C = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$.

所以，任意二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，都存在可逆线性变换 $x = Cy$，使得

问题：如何选择适当的变量代换 $y_1, y_2, \cdots, y_n$（$x = Cy$），把 f 化简？

注意到：

$$f = x^TAx \overset{x=Cy}{=\!=\!=} (Cy)^TA(Cy) = y^TC^TACy$$

所以上述问题等价于以下问题：

问题′：给定对称矩阵 A，尝试找出可逆矩阵 C 使得

$$C^TAC$$

尽可能简单？

定理 任意对称矩阵 A，都存在可逆矩阵 C，使得 $C^TAC = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$.

所以，任意二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，都存在可逆线性变换 $x = Cy$，使得

$$f = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ny_n^2$$

定理 任意对称矩阵 A，都存在可逆矩阵 C，使得 $C^TAC = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$.

所以, 任意二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 都存在可逆线性变换 $x = Cy$, 使得

$$f = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ny_n^2$$

定理 任意对称矩阵 A，都存在可逆矩阵 C，使得 $C^TAC = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$.

所以, 任意二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 都存在可逆线性变换 $x = Cy$, 使得

$$f = \boxed{d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ny_n^2}$$

定理 任意对称矩阵 A，都存在可逆矩阵 C，使得 $C^TAC = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$.

所以，任意二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，都存在可逆线性变换 $x = Cy$，使得

$$f = \boxed{d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ny_n^2}$$

标准型

定理 任意对称矩阵 A，都存在可逆矩阵 C，使得 $C^TAC = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$.

所以，任意二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，都存在可逆线性变换 $x = Cy$，使得

$$f = \boxed{d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2}$$

标准型

在标准型的系数 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 中

- 非零数的个数 r，称为二次型的秩

定理 任意对称矩阵 A，都存在可逆矩阵 C，使得 $C^TAC = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$.

所以, 任意二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 都存在可逆线性变换 $x = Cy$, 使得

$$f = \boxed{d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ny_n^2}$$

标准型

在标准型的系数 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 中

- 非零数的个数 r，称为二次型的秩
- 正数的个数 p，称为正惯性指标；负数的个数 q，称为负惯性指标

定理 任意对称矩阵 A，都存在可逆矩阵 C，使得 $C^TAC = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$.

所以，任意二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，都存在可逆线性变换 $x = Cy$，使得

$$f = \boxed{d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2}$$

标准型

在标准型的系数 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 中

- 非零数的个数 r，称为二次型的秩
- 正数的个数 p，称为正惯性指标；负数的个数 q，称为负惯性指标

性质 1. $r = p + q$； 2. $r = r(A)$.

定理 任意对称矩阵 A，都存在可逆矩阵 C，使得 $C^TAC = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$.

所以，任意二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，都存在可逆线性变换 $x = Cy$，使得

$$f = \boxed{d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ny_n^2}$$

标准型

在标准型的系数 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 中

- 非零数的个数 r，称为二次型的秩
- 正数的个数 p，称为正惯性指标；负数的个数 q，称为负惯性指标

性质 1. $r = p + q$； 2. $r = r(A)$.

证明 $r = p + q$ 是显然的。

定理 任意对称矩阵 A，都存在可逆矩阵 C，使得 $C^TAC = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$.

所以，任意二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，都存在可逆线性变换 $x = Cy$，使得

$$f = \boxed{d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ny_n^2}$$

标准型

在标准型的系数 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 中

- 非零数的个数 r，称为二次型的秩
- 正数的个数 p，称为正惯性指标；负数的个数 q，称为负惯性指标

性质 1. $r = p + q$； 2. $r = r(A)$.

证明 $r = p + q$ 是显然的。$r = r\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$

定理 任意对称矩阵 A，都存在可逆矩阵 C，使得 $C^TAC = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$.

所以，任意二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，都存在可逆线性变换 $x = Cy$，使得

$$f = \boxed{d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ny_n^2}$$

标准型

在标准型的系数 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 中

- 非零数的个数 r，称为二次型的秩
- 正数的个数 p，称为正惯性指标；负数的个数 q，称为负惯性指标

性质 1. $r = p + q$； 2. $r = r(A)$.

证明 $r = p + q$ 是显然的。$r = r\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix} = r(C^TAC)$

定理 任意对称矩阵 A，都存在可逆矩阵 C，使得 $C^TAC = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$.

所以，任意二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，都存在可逆线性变换 $x = Cy$，使得

$$f = \boxed{d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ny_n^2}$$

标准型

在标准型的系数 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 中

- 非零数的个数 r，称为二次型的秩
- 正数的个数 p，称为正惯性指标；负数的个数 q，称为负惯性指标

性质 1. $r = p + q$；2. $r = r(A)$.

证明 $r = p + q$ 是显然的。$r = r\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix} = r(C^TAC) = r(A)$。

定理 任意对称矩阵 A，都存在可逆矩阵 C，使得 $C^TAC = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$.

所以，任意二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，都存在可逆线性变换 $x = Cy$，使得

$$f = \boxed{d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ny_n^2}$$

标准型

问题 如何找出可逆矩阵 C，以及标准型 $d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ny_n^2$?

定理 任意对称矩阵 A，都存在可逆矩阵 C，使得 $C^TAC = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$.

所以，任意二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，都存在可逆线性变换 $x = Cy$，使得

$$f = \boxed{d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ny_n^2}$$

标准型

问题 如何找出可逆矩阵 C，以及标准型 $d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ny_n^2$？

三种方法　正交变换法　配方法　初等变换法

定理 任意对称矩阵 A，都存在可逆矩阵 C，使得 $C^TAC = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$.

所以，任意二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，都存在可逆线性变换 $x = Cy$，使得

$$f = \boxed{d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2}$$

标准型

问题 如何找出可逆矩阵 C，以及标准型 $d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2$？

三种方法　正交变换法　配方法　初等变换法

注

- 用不同的方法，可能得到不同的标准型。
- 但是可以证明，二次型的秩，正、负惯性指标是恒定不变的。

正交变换法化二次型为标准型

由上一章，我们知道

定理 任意对称矩阵 A, 都存在正交矩阵 Q, 使得 $Q^TAQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

正交变换法化二次型为标准型

由上一章，我们知道

定理 任意对称矩阵 A, 都存在正交矩阵 Q, 使得 $Q^TAQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

设二次型 $f(x) = x^TAx$，作可逆线性变换 $x = Qy$，则

正交变换法化二次型为标准型

由上一章，我们知道

定理 任意对称矩阵 A, 都存在正交矩阵 Q, 使得 $Q^TAQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

设二次型 $f(x) = x^TAx$，作可逆线性变换 $x = Qy$，则

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

正交变换法化二次型为标准型

由上一章，我们知道

定理 任意对称矩阵 A, 都存在正交矩阵 Q, 使得 $Q^TAQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

设二次型 $f(x) = x^TAx$，作可逆线性变换 $x = Qy$，则

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

特别地，

- 二次型的秩 =
- 正惯性指标 = ；负惯性指标 =

正交变换法化二次型为标准型

由上一章，我们知道

定理 任意对称矩阵 A, 都存在正交矩阵 Q, 使得 $Q^TAQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

设二次型 $f(x) = x^TAx$，作可逆线性变换 $x = Qy$，则

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

特别地，

- 二次型的秩 = 非零特征值的个数；
- 正惯性指标 = ；负惯性指标 =

正交变换法化二次型为标准型

由上一章，我们知道

定理 任意对称矩阵 A, 都存在正交矩阵 Q, 使得 $Q^TAQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

设二次型 $f(x) = x^TAx$，作可逆线性变换 $x = Qy$，则

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

特别地，

- 二次型的秩 = 非零特征值的个数；
- 正惯性指标 = 正特征值的个数；负惯性指标 =

正交变换法化二次型为标准型

由上一章，我们知道

定理 任意对称矩阵 A, 都存在正交矩阵 Q, 使得 $Q^TAQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

设二次型 $f(x) = x^TAx$，作可逆线性变换 $x = Qy$，则

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

特别地，

- 二次型的秩 = 非零特征值的个数；
- 正惯性指标 = 正特征值的个数；负惯性指标 = 负特征值的个数

正交变换法化二次型为标准型

由上一章，我们知道

定理 任意对称矩阵 A, 都存在正交矩阵 Q, 使得 $Q^TAQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

设二次型 $f(x) = x^TAx$，作可逆线性变换 $x = Qy$，则

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

特别地，

- 二次型的秩 = 非零特征值的个数；
- 正惯性指标 = 正特征值的个数；负惯性指标 = 负特征值的个数

注 Q 为正交矩阵，称线性变换 $x = Qy$ 为正交变换

例 1 用正交变换化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x = Qy$

例 1 用正交变换化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x = Qy$

解 • f 系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

例 1 用正交变换化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x = Qy$

解 • f 系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

例 1 用正交变换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x=Qy$

解 • f 系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$

例 1 用正交变换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x=Qy$

解 • f 系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$

例 1 用正交变换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x=Qy$

解 • f 系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\ &1&2\\ & &1\end{pmatrix}$

例 1 用正交变换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x=Qy$

解 • f 系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$

例 1 用正交变换化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x = Qy$

解 • f 系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，特征方程：$0 = |\lambda I - A|$

例 1 用正交变换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x=Qy$

解 • f 系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-5)(\lambda+1)^2$

例 1 用正交变换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x=Qy$

解
- f 系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-5)(\lambda+1)^2$
- $\lambda_1=5$
- $\lambda_2=-1$（二重）

例 1 用正交变换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x=Qy$

解
- f 系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-5)(\lambda+1)^2$
- $\lambda_1=5$
- $\lambda_2=-1$（二重）
- $f=5y_1^2-y_2^2-y_3^2$

例 1 用正交变换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x=Qy$

解

- f 系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-5)(\lambda+1)^2$
- $\lambda_1=5$，特征向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$
- $\lambda_2=-1$（二重），特征向量

$$\begin{cases}\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\\ \alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\end{cases}$$

- $$f=5y_1^2-y_2^2-y_3^2$$

例 1 用正交变换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x=Qy$

解
- f 系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-5)(\lambda+1)^2$
- $\lambda_1=5$，特征向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{单位化}}\gamma_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$
- $\lambda_2=-1$（二重），特征向量

$$\begin{cases}\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\\[2ex]\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\end{cases}$$

- $f=5y_1^2-y_2^2-y_3^2$

例 1 用正交变换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x=Qy$

解 • f 系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-5)(\lambda+1)^2$

• $\lambda_1=5$，特征向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\xrightarrow{\text{单位化}}$ $\gamma_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$

• $\lambda_2=-1$（二重），特征向量

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\\ \alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\end{array}\right. \xrightarrow{\text{正交化}} \left\{\begin{array}{l}\beta_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\\ \beta_3=\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1\end{pmatrix}\end{array}\right.$$

• $$f=5y_1^2-y_2^2-y_3^2$$

例 1 用正交变换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x=Qy$

解
- f 系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-5)(\lambda+1)^2$
- $\lambda_1=5$，特征向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{单位化}} \gamma_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$
- $\lambda_2=-1$（二重），特征向量

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\\ \alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\end{array}\right. \xrightarrow{\text{正交化}} \left\{\begin{array}{l}\beta_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\\ \beta_3=\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1\end{pmatrix}\end{array}\right. \xrightarrow{\text{单位化}} \left\{\begin{array}{l}\gamma_2=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}\\ \gamma_3=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\end{pmatrix}\end{array}\right.$$

- $f=5y_1^2-y_2^2-y_3^2$

例 1 用正交变换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x=Qy$

解

- f 系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-5)(\lambda+1)^2$
- $\lambda_1=5$，特征向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{单位化}}\gamma_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$
- $\lambda_2=-1$（二重），特征向量

$$\left\{\begin{aligned}\alpha_1&=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\\ \alpha_2&=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\end{aligned}\right.\xrightarrow{\text{正交化}}\left\{\begin{aligned}\beta_2&=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\\ \beta_3&=\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1\end{pmatrix}\end{aligned}\right.\xrightarrow{\text{单位化}}\left\{\begin{aligned}\gamma_2&=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}\\ \gamma_3&=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\end{pmatrix}\end{aligned}\right.$$

- 令 $Q=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}&-1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3}&1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3}&0&2/\sqrt{6}\end{pmatrix}$， $f=5y_1^2-y_2^2-y_3^2$

例 1 用正交变换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x=Qy$

解
- f 系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-5)(\lambda+1)^2$
- $\lambda_1=5$，特征向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{单位化}}\gamma_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$
- $\lambda_2=-1$（二重），特征向量

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\\ \alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\end{array}\right.\xrightarrow{\text{正交化}}\left\{\begin{array}{l}\beta_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\\ \beta_3=\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1\end{pmatrix}\end{array}\right.\xrightarrow{\text{单位化}}\left\{\begin{array}{l}\gamma_2=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}\\ \gamma_3=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\end{pmatrix}\end{array}\right.$$

- 令 $Q=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}&-1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3}&1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3}&0&2/\sqrt{6}\end{pmatrix}$，$x=Qy$，则 $f=5y_1^2-y_2^2-y_3^2$

例 2 用正交变换化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x = Qy$

例 2 用正交变换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x=Qy$

解 • $A=\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

例 2 用正交变换化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x = Qy$

解 • $A = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 5 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$

例 2 用正交变换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x=Qy$

解 • $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & \\ & 5 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$

例 2 用正交变换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x=Qy$

解 • $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ & 5 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$

例 2 用正交变换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x=Qy$

解 • $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ & 5 & -4 \\ & & 5 \end{pmatrix}$

例 2 用正交变换化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x = Qy$

解 • $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

例 2 用正交变换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x=Qy$

解 • $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$，特征方程：$0=|\lambda I-A|$

例 2 用正交变换化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x = Qy$

解 • $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$，特征方程：$0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 1)^2(\lambda - 10)$

例 2 用正交变换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x=Qy$

解
- $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$，特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$
- $\lambda_1=1$（二重）
- $\lambda_3=10$

例 2 用正交变换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x=Qy$

解
- $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$，特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$
- $\lambda_1=1$（二重）
- $\lambda_3=10$
- 则 $f=y_1^2+y_2^2+10y_3^2$

例 2 用正交变换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x=Qy$

解
- $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$，特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$
- $\lambda_1=1$（二重），特征向量

$$\begin{cases} \alpha_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \alpha_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- $\lambda_3=10$，特征向量$\alpha_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$
- 则 $f=y_1^2+y_2^2+10y_3^2$

例 2 用正交变换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x=Qy$

解
- $A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$，特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$
- $\lambda_1=1$（二重），特征向量

$$\begin{cases}\alpha_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\\ \alpha_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\end{cases}\xrightarrow{\text{正交化}}\begin{cases}\beta_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\\ \beta_2=\begin{pmatrix}2/5\\4/5\\1\end{pmatrix}\end{cases}$$

- $\lambda_3=10$，特征向量$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$
- 则 $f=y_1^2+y_2^2+10y_3^2$

例 2 用正交变换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x=Qy$

解 • $A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$，特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$

• $\lambda_1=1$（二重），特征向量

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\\ \alpha_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\end{array}\right.\xrightarrow{\text{正交化}}\left\{\begin{array}{l}\beta_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\\ \beta_2=\begin{pmatrix}2/5\\4/5\\1\end{pmatrix}\end{array}\right.\xrightarrow{\text{单位化}}\left\{\begin{array}{l}\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\\ \gamma_2=\frac{5}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2/5\\4/5\\1\end{pmatrix}\end{array}\right.$$

• $\lambda_3=10$，特征向量$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$

• 则 $f=y_1^2+y_2^2+10y_3^2$

例 2 用正交变换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x=Qy$

解

- $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$，特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$
- $\lambda_1=1$（二重），特征向量

$$\begin{cases} \alpha_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} \\ \alpha_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \end{cases} \xrightarrow{\text{正交化}} \begin{cases} \beta_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} \\ \beta_2=\begin{pmatrix}2/5\\4/5\\1\end{pmatrix} \end{cases} \xrightarrow{\text{单位化}} \begin{cases} \gamma_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} \\ \gamma_2=\frac{5}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2/5\\4/5\\1\end{pmatrix} \end{cases}$$

- $\lambda_3=10$，特征向量$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{单位化}} \gamma_3=\begin{pmatrix}1/3\\2/3\\-2/3\end{pmatrix}$
- 则 $f=y_1^2+y_2^2+10y_3^2$

例 2 用正交变换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x=Qy$

解 • $A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$，特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$

• $\lambda_1=1$（二重），特征向量

$$\begin{cases}\alpha_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\\ \alpha_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\end{cases}\xrightarrow{\text{正交化}}\begin{cases}\beta_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\\ \beta_2=\begin{pmatrix}2/5\\4/5\\1\end{pmatrix}\end{cases}\xrightarrow{\text{单位化}}\begin{cases}\gamma_1=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\\ \gamma_2=\frac{5}{3\sqrt5}\begin{pmatrix}2/5\\4/5\\1\end{pmatrix}\end{cases}$$

• $\lambda_3=10$，特征向量$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{单位化}}\gamma_3=\begin{pmatrix}1/3\\2/3\\-2/3\end{pmatrix}$

• 令 $Q=\begin{pmatrix}-2/\sqrt5&2/3\sqrt5&1/3\\1/\sqrt5&4/3\sqrt5&2/3\\0&\sqrt5/3&-2/3\end{pmatrix}$， 则 $f=y_1^2+y_2^2+10y_3^2$

例 2 用正交变换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x=Qy$

解 • $A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$，特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$

• $\lambda_1=1$（二重），特征向量

$$\begin{cases}\alpha_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\\ \alpha_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\end{cases}\xrightarrow{\text{正交化}}\begin{cases}\beta_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\\ \beta_2=\begin{pmatrix}2/5\\4/5\\1\end{pmatrix}\end{cases}\xrightarrow{\text{单位化}}\begin{cases}\gamma_1=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\\ \gamma_2=\frac{5}{3\sqrt5}\begin{pmatrix}2/5\\4/5\\1\end{pmatrix}\end{cases}$$

• $\lambda_3=10$，特征向量$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{单位化}}\gamma_3=\begin{pmatrix}1/3\\2/3\\-2/3\end{pmatrix}$

• 令 $Q=\begin{pmatrix}-2/\sqrt5&2/3\sqrt5&1/3\\1/\sqrt5&4/3\sqrt5&2/3\\0&\sqrt5/3&-2/3\end{pmatrix}$，$x=Qy$，则 $f=y_1^2+y_2^2+10y_3^2$

例 3 用正交变换化二次型

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x = Qy$

例 4 用正交变换化二次型

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2$$

为标准型，写出所用的正交变换 $x = Qy$

配方法化二次型为标准型

例 1 配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

配方法化二次型为标准型

例 1 配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2$$

配方法化二次型为标准型

- 想法：　　$a^2 + 2ab =$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

配方法化二次型为标准型

- 想法： $a^2 + 2ab = a^2 + 2ab + b^2 - b^2 =$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

配方法化二次型为标准型

- 想法： $a^2+2ab=a^2+2ab+b^2-b^2=(a+b)^2-b^2$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$f=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$$

配方法化二次型为标准型

- 想法： $a^2+2ab=a^2+2ab+b^2-b^2=(a+b)^2-b^2$

$$a^2+2ab+2ac=$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$f=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$$

配方法化二次型为标准型

- 想法： $a^2+2ab=a^2+2ab+b^2-b^2=(a+b)^2-b^2$

$$a^2+2ab+2ac=a^2+2a(b+c)$$

$$=$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$f=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$$

配方法化二次型为标准型

- 想法： $a^2+2ab=a^2+2ab+b^2-b^2=(a+b)^2-b^2$

$$
\begin{aligned}
a^2+2ab+2ac &= a^2+2a(b+c)\\
&= a^2+2a(b+c)+(b+c)^2-(b+c)^2\\
&=
\end{aligned}
$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$f=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$$

配方法化二次型为标准型

- 想法： $a^2+2ab=a^2+2ab+b^2-b^2=(a+b)^2-b^2$

$$
\begin{aligned}
a^2+2ab+2ac &= a^2+2a(b+c) \\
&= a^2+2a(b+c)+(b+c)^2-(b+c)^2 \\
&= (a+b+c)^2-(b+c)^2
\end{aligned}
$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$f=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$$

配方法化二次型为标准型

- 想法： $a^2+2ab=a^2+2ab+b^2-b^2=(a+b)^2-b^2$

$$
\begin{aligned}
a^2+2ab+2ac &= a^2+2a(b+c) \\
&= a^2+2a(b+c)+(b+c)^2-(b+c)^2 \\
&= (a+b+c)^2-(b+c)^2
\end{aligned}
$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f &= x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2 \\
&= x_1^2+2x_1(x_2+x_3)
\end{aligned}
$$

配方法化二次型为标准型

- 想法： $a^2+2ab=a^2+2ab+b^2-b^2=(a+b)^2-b^2$

$$
\begin{aligned}
a^2+2ab+2ac &= a^2+2a(b+c)\\
&= a^2+2a(b+c)+(b+c)^2-(b+c)^2\\
&= (a+b+c)^2-(b+c)^2
\end{aligned}
$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f &= x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2\\
&= x_1^2+2x_1(x_2+x_3)+(x_2+x_3)^2-(x_2+x_3)^2
\end{aligned}
$$

配方法化二次型为标准型

- 想法：$a^2+2ab=a^2+2ab+b^2-b^2=(a+b)^2-b^2$

$$\begin{aligned}a^2+2ab+2ac&=a^2+2a(b+c)\\&=a^2+2a(b+c)+(b+c)^2-(b+c)^2\\&=(a+b+c)^2-(b+c)^2\end{aligned}$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned}f&=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2\\&=x_1^2+2x_1(x_2+x_3)+(x_2+x_3)^2-(x_2+x_3)^2+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2\end{aligned}$$

配方法化二次型为标准型

- 想法：

$$a^2+2ab=a^2+2ab+b^2-b^2=(a+b)^2-b^2$$

$$\begin{aligned} a^2+2ab+2ac &= a^2+2a(b+c) \\ &= a^2+2a(b+c)+(b+c)^2-(b+c)^2 \\ &= (a+b+c)^2-(b+c)^2 \end{aligned}$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned} f &= x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2 \\ &= x_1^2+2x_1(x_2+x_3)+(x_2+x_3)^2-(x_2+x_3)^2+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2 \\ &= (x_1+x_2+x_3)^2+ \end{aligned}$$

配方法化二次型为标准型

- 想法： $a^2+2ab=a^2+2ab+b^2-b^2=(a+b)^2-b^2$

$$
\begin{aligned}
a^2+2ab+2ac &= a^2+2a(b+c) \\
&= a^2+2a(b+c)+(b+c)^2-(b+c)^2 \\
&= (a+b+c)^2-(b+c)^2
\end{aligned}
$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f &= x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2 \\
&= x_1^2+2x_1(x_2+x_3)+(x_2+x_3)^2-(x_2+x_3)^2+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2 \\
&= (x_1+x_2+x_3)^2+x_2^2+2x_2x_3
\end{aligned}
$$

配方法化二次型为标准型

- 想法：$$a^2+2ab=a^2+2ab+b^2-b^2=(a+b)^2-b^2$$

$$\begin{aligned}a^2+2ab+2ac&=a^2+2a(b+c)\\&=a^2+2a(b+c)+(b+c)^2-(b+c)^2\\&=(a+b+c)^2-(b+c)^2\end{aligned}$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned}f&=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2\\&=x_1^2+2x_1(x_2+x_3)+(x_2+x_3)^2-(x_2+x_3)^2+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2\\&=(x_1+x_2+x_3)^2+x_2^2+2x_2x_3\\&=(x_1+x_2+x_3)^2+x_2^2+2x_2x_3+x_3^2-x_3^2\end{aligned}$$

配方法化二次型为标准型

- 想法： $a^2+2ab=a^2+2ab+b^2-b^2=(a+b)^2-b^2$

$$
\begin{aligned}
a^2+2ab+2ac &= a^2+2a(b+c)\\
&= a^2+2a(b+c)+(b+c)^2-(b+c)^2\\
&= (a+b+c)^2-(b+c)^2
\end{aligned}
$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f &= x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2\\
&= x_1^2+2x_1(x_2+x_3)+(x_2+x_3)^2-(x_2+x_3)^2+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2\\
&= (x_1+x_2+x_3)^2+x_2^2+2x_2x_3\\
&= (x_1+x_2+x_3)^2+x_2^2+2x_2x_3+x_3^2-x_3^2\\
&= (x_1+x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2-x_3^2
\end{aligned}
$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f =& x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\
=& x_1^2+2x_1(x_2+x_3)+(x_2+x_3)^2-(x_2+x_3)^2+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2
\end{aligned}
$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\
&= x_1^2 + 2x_1(x_2+x_3) + (x_2+x_3)^2 - (x_2+x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\
&= (x_1+x_2+x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 \\
&= (x_1+x_2+x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2 \\
&= (x_1+x_2+x_3)^2 + (x_2+x_3)^2 - x_3^2
\end{aligned}
$$

作线性变量代换

$$
\begin{cases}
y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\
y_2 = \qquad\; x_2 + x_3 \\
y_3 = \qquad\qquad\;\; x_3
\end{cases}
$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f =& x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\
=& x_1^2+2x_1(x_2+x_3)+(x_2+x_3)^2-(x_2+x_3)^2+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2
\end{aligned}
$$

作线性变量代换

$$
\begin{cases}
y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\
y_2 = \qquad x_2 + x_3 \\
y_3 = \qquad\qquad x_3
\end{cases}
$$

则

$$f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f =& x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\
=& x_1^2+2x_1(x_2+x_3)+(x_2+x_3)^2-(x_2+x_3)^2+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2
\end{aligned}
$$

作线性变量代换

$$
\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = \qquad x_2 + x_3 \\ y_3 = \qquad\qquad x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \\ x_2 = \\ x_3 = \end{cases}
$$

则

$$
f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2
$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned} f &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\ &= x_1^2 + 2x_1(x_2+x_3) + (x_2+x_3)^2 - (x_2+x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\ &= (x_1+x_2+x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 \\ &= (x_1+x_2+x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2 \\ &= (x_1+x_2+x_3)^2 + (x_2+x_3)^2 - x_3^2 \end{aligned}$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = \quad\quad x_2 + x_3 \\ y_3 = \quad\quad\quad\quad x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \\ x_2 = \\ x_3 = \quad\quad\quad\quad y_3 \end{cases}$$

则

$$f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f =& x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\
=& x_1^2+2x_1(x_2+x_3)+(x_2+x_3)^2-(x_2+x_3)^2+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2
\end{aligned}
$$

作线性变量代换

$$
\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = \quad\quad x_2 + x_3 \\ y_3 = \quad\quad\quad\quad x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \\ x_2 = \quad\quad y_2 - y_3 \\ x_3 = \quad\quad\quad\quad y_3 \end{cases}
$$

则

$$f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\
&= x_1^2 + 2x_1(x_2+x_3) + (x_2+x_3)^2 - (x_2+x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\
&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 \\
&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2 \\
&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2
\end{aligned}
$$

作线性变量代换

$$
\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 + x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_2 - y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}
$$

则

$$
f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2
$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f =& x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\
=& x_1^2 + 2x_1(x_2+x_3) + (x_2+x_3)^2 - (x_2+x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2
\end{aligned}
$$

作线性变量代换

$$
\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = \quad\quad x_2 + x_3 \\ y_3 = \quad\quad\quad\quad x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = \quad\quad y_2 - y_3 \\ x_3 = \quad\quad\quad\quad y_3 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} \quad\quad\quad\quad \end{pmatrix} y
$$

则

$$f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f =& x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\
=& x_1^2 + 2x_1(x_2+x_3) + (x_2+x_3)^2 - (x_2+x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2
\end{aligned}
$$

作线性变量代换

$$
\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = \qquad x_2 + x_3 \\ y_3 = \qquad\qquad x_3 \end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = \qquad y_2 - y_3 \\ x_3 = \qquad\qquad y_3 \end{cases}
\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ & & \\ & & \end{pmatrix} y
$$

则

$$
f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2
$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f =& x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\
=& x_1^2+2x_1(x_2+x_3)+(x_2+x_3)^2-(x_2+x_3)^2+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2
\end{aligned}
$$

作线性变量代换

$$
\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = \qquad x_2 + x_3 \\ y_3 = \qquad\qquad x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = \qquad y_2 - y_3 \\ x_3 = \qquad\qquad y_3 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} y
$$

则

$$f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f =& x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\
=& x_1^2+2x_1(x_2+x_3)+(x_2+x_3)^2-(x_2+x_3)^2+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2
\end{aligned}
$$

作线性变量代换

$$
\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = \quad\quad x_2 + x_3 \\ y_3 = \quad\quad\quad\quad x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = \quad\quad y_2 - y_3 \\ x_3 = \quad\quad\quad\quad y_3 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y
$$

则

$$
f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2
$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f =& x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\
=& x_1^2+2x_1(x_2+x_3)+(x_2+x_3)^2-(x_2+x_3)^2+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2 \\
=& (x_1+x_2+x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 \\
=& (x_1+x_2+x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2 \\
=& (x_1+x_2+x_3)^2 + (x_2+x_3)^2 - x_3^2
\end{aligned}
$$

作线性变量代换

$$
\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = \quad\quad\; x_2 + x_3 \\ y_3 = \quad\quad\quad\quad\; x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = \quad\quad\; y_2 - y_3 \\ x_3 = \quad\quad\quad\quad\; y_3 \end{cases} \Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C\text{：可逆}} y
$$

则

$$
f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2
$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f =& x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\
=& x_1^2 + 2x_1(x_2+x_3) + (x_2+x_3)^2 - (x_2+x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2
\end{aligned}
$$

作线性变量代换

$$
\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = \qquad\; x_2 + x_3 \\ y_3 = \qquad\qquad\;\; x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = \qquad\; y_2 - y_3 \\ x_3 = \qquad\qquad\;\; y_3 \end{cases} \Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C\text{：可逆}} y
$$

则

$$
f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2
$$

例 2 配方法化 $f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$ 为标准型

例 2 配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

$$=$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f =& x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\
=& x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3)
\end{aligned}
$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f &= x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\
&= x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2
\end{aligned}
$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f =&x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\
=&x_1^2+2x_1\cdot(2x_2+2x_3)+(2x_2+2x_3)^2-(2x_2+2x_3)^2 \\
&+2x_2^2+8x_2x_3+4x_3^2
\end{aligned}
$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f =& x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\
=& x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2 \\
& + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\
=& (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2
\end{aligned}
$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f &= x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\
&= x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2 \\
&\quad + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\
&= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2
\end{aligned}
$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f =& x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\
=& x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2 \\
& + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\
=& (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2
\end{aligned}
$$

作线性变量代换

$$
\begin{cases}
y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\
y_2 = \qquad\quad x_2
\end{cases}
$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f &= x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\
&= x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2 \\
&\quad + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\
&= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2
\end{aligned}
$$

作线性变量代换

$$
\begin{cases}
y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\
y_2 = \qquad\quad x_2 \\
\end{cases}
$$

则

$$f = y_1^2 - 2y_2^2$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f =& x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\
&= x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2 \\
&\quad + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\
&= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2
\end{aligned}
$$

作线性变量代换

$$
\begin{cases}
y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\
y_2 = \qquad\quad x_2 \\
y_3 = \qquad\qquad\quad x_3
\end{cases}
$$

则

$$
f = y_1^2 - 2y_2^2
$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f =& x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\
=& x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2 \\
& + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\
=& (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2
\end{aligned}
$$

作线性变量代换

$$
\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \\ \\ \\ \end{cases}
$$

则

$$
f = y_1^2 - 2y_2^2
$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f &= x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\
&= x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2 \\
&\quad + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\
&= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2
\end{aligned}
$$

作线性变量代换

$$
\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \\ \\ x_3 = y_3 \end{cases}
$$

则

$$
f = y_1^2 - 2y_2^2
$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f &= x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\
&= x_1^2 + 2x_1\cdot(2x_2+2x_3) + (2x_2+2x_3)^2 - (2x_2+2x_3)^2 \\
&\quad + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\
&= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2
\end{aligned}
$$

作线性变量代换

$$
\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}
$$

则

$$
f = y_1^2 - 2y_2^2
$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f =&x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\
&=x_1^2+2x_1\cdot(2x_2+2x_3)+(2x_2+2x_3)^2-(2x_2+2x_3)^2 \\
&\quad +2x_2^2+8x_2x_3+4x_3^2 \\
&= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2
\end{aligned}
$$

作线性变量代换

$$
\begin{cases} y_1 = x_1+2x_2+2x_3 \\ y_2 = \qquad\quad x_2 \\ y_3 = \qquad\qquad\quad x_3 \end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases} x_1 = y_1-2y_2-2y_3 \\ x_2 = \qquad\quad y_2 \\ x_3 = \qquad\qquad\quad y_3 \end{cases}
$$

则

$$f = y_1^2 - 2y_2^2$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f =& x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\
=& x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2 \\
& + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\
=& (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2
\end{aligned}
$$

作线性变量代换

$$
\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 - 2y_3 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C\text{：可逆}} y
$$

则

$$
f = y_1^2 - 2y_2^2
$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

$$= x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2$$

$$+ 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ y_2 = \quad\quad x_2 \\ y_3 = \quad\quad\quad\quad x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 - 2y_3 \\ x_2 = \quad\quad y_2 \\ x_3 = \quad\quad\quad\quad y_3 \end{cases} \Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C:\text{ 可逆}} y$$

则

$$f = y_1^2 - 2y_2^2$$

例 3 配方法化 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 为标准型

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

$$=$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$=$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) \qquad\qquad\qquad\qquad \right]$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right]$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1\cdot(x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$+ 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$+ 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$+ 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$+ 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$+ 3\left[x_2^2 - 2x_2 \cdot \frac{2}{3}x_3 \qquad\qquad \right]$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$+ 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$+ 3\left[x_2^2 - 2x_2 \cdot \frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2\right]$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$+ 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$+ 3\left[x_2^2 - 2x_2 \cdot \frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2\right] - 3(\frac{2}{3}x_3)^2$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$+ 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$+ 3\left[x_2^2 - 2x_2 \cdot \frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2\right] - 3(\frac{2}{3}x_3)^2 + 3x_3^2$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$+ 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left[x_2^2 - 2x_2 \cdot \frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2\right] - 3(\frac{2}{3}x_3)^2 + 3x_3^2$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1\cdot(x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$+ 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left[x_2^2 - 2x_2\cdot\frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2\right] - 3(\frac{2}{3}x_3)^2 + 3x_3^2$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$+ 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left[x_2^2 - 2x_2 \cdot \frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2\right] - 3(\frac{2}{3}x_3)^2 + 3x_3^2$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left(x_2 - \frac{2}{3}x_3\right)^2$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1\cdot(x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$+ 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left[x_2^2 - 2x_2\cdot\frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2\right] - 3(\frac{2}{3}x_3)^2 + 3x_3^2$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left(x_2 - \frac{2}{3}x_3\right)^2 + \frac{5}{3}x_3^2$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$+ 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left[x_2^2 - 2x_2 \cdot \frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2\right] - 3(\frac{2}{3}x_3)^2 + 3x_3^2$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left(x_2 - \frac{2}{3}x_3\right)^2 + \frac{5}{3}x_3^2$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = \qquad x_2 - \frac{2}{3}x_3 \\ y_3 = \qquad\qquad x_3 \end{cases}$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$=2\left[x_1^2 + 2x_1\cdot(x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$+ 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left[x_2^2 - 2x_2\cdot\frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2\right] - 3(\frac{2}{3}x_3)^2 + 3x_3^2$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left(x_2 - \frac{2}{3}x_3\right)^2 + \frac{5}{3}x_3^2$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = \qquad x_2 - \frac{2}{3}x_3 \\ y_3 = \qquad\qquad x_3 \end{cases}$$

则 $f = 2y_1^2 + 3y_2^2 + \frac{5}{3}y_3^2$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1\cdot(x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$+ 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left[x_2^2 - 2x_2\cdot\frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2\right] - 3(\frac{2}{3}x_3)^2 + 3x_3^2$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left(x_2 - \frac{2}{3}x_3\right)^2 + \frac{5}{3}x_3^2$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = \quad\quad x_2 - \frac{2}{3}x_3 \\ y_3 = \quad\quad\quad\quad x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \\ \\ x_3 = \quad\quad\quad y_3 \end{cases}$$

则 $f = 2y_1^2 + 3y_2^2 + \frac{5}{3}y_3^2$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$+ 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left[x_2^2 - 2x_2 \cdot \frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2\right] - 3(\frac{2}{3}x_3)^2 + 3x_3^2$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left(x_2 - \frac{2}{3}x_3\right)^2 + \frac{5}{3}x_3^2$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = \qquad x_2 - \frac{2}{3}x_3 \\ y_3 = \qquad\qquad x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \\ x_2 = \qquad y_2 + \frac{2}{3}y_3 \\ x_3 = \qquad\qquad y_3 \end{cases}$$

则 $f = 2y_1^2 + 3y_2^2 + \frac{5}{3}y_3^2$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1\cdot(x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$+ 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left[x_2^2 - 2x_2\cdot\frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2\right] - 3(\frac{2}{3}x_3)^2 + 3x_3^2$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left(x_2 - \frac{2}{3}x_3\right)^2 + \frac{5}{3}x_3^2$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = x_2 - \frac{2}{3}x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + \frac{1}{3}y_3 \\ x_2 = y_2 + \frac{2}{3}y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

则 $f = 2y_1^2 + 3y_2^2 + \frac{5}{3}y_3^2$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1\cdot(x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$+ 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left[x_2^2 - 2x_2\cdot\frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2\right] - 3(\frac{2}{3}x_3)^2 + 3x_3^2$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left(x_2 - \frac{2}{3}x_3\right)^2 + \frac{5}{3}x_3^2$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = \qquad\; x_2 - \frac{2}{3}x_3 \\ y_3 = \qquad\qquad\quad x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + \frac{1}{3}y_3 \\ x_2 = \qquad\; y_2 + \frac{2}{3}y_3 \\ x_3 = \qquad\qquad\quad y_3 \end{cases} \Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C:\text{可逆}} y$$

则 $f = 2y_1^2 + 3y_2^2 + \frac{5}{3}y_3^2$

初等变换法化二次型为标准型

设 A 是对称矩阵，则存在可逆矩阵 C，满足

$$C^TAC = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix} =: D$$

初等变换法求解 C：

初等变换法化二次型为标准型

设 A 是对称矩阵，则存在可逆矩阵 C，满足

$$C^TAC = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix} =: D$$

初等变换法求解 C：

$$\begin{pmatrix} A \\ \hline I \end{pmatrix}$$

初等变换法化二次型为标准型

设 A 是对称矩阵，则存在可逆矩阵 C，满足

$$C^TAC = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix} =: D$$

初等变换法求解 C：

$$\begin{pmatrix} A \\ \hline I \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{2.对}A\text{作同一类型行变换}]{\text{1. 整体做列变换}}$$

初等变换法化二次型为标准型

设 A 是对称矩阵，则存在可逆矩阵 C，满足

$$C^TAC = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix} =: D$$

初等变换法求解 C：

$$\begin{pmatrix} A \\ \hline I \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{2.对}A\text{作同一类型行变换}]{\text{1. 整体做列变换}} \cdots \xrightarrow{\text{重复直至}} \begin{pmatrix} D \\ \hline C \end{pmatrix}$$

初等变换法化二次型为标准型

设 A 是对称矩阵，则存在可逆矩阵 C，满足

$$C^TAC = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix} =: D$$

初等变换法求解 C：

$$\begin{pmatrix} A \\ \hline I \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{2.对}A\text{作同一类型行变换}]{\text{1. 整体做列变换}} \cdots \xrightarrow{\text{重复直至}} \begin{pmatrix} D \\ \hline C \end{pmatrix}$$

例 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，求可逆矩阵 C，使得 C^TAC 为对角阵。

初等变换法化二次型为标准型

设 A 是对称矩阵，则存在可逆矩阵 C，满足

$$C^TAC = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix} =: D$$

初等变换法求解 C：

$$\begin{pmatrix} A \\ \hline I \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{2.对}A\text{作同一类型行变换}]{\text{1. 整体做列变换}} \cdots \xrightarrow{\text{重复直至}} \begin{pmatrix} D \\ \hline C \end{pmatrix}$$

例 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，求可逆矩阵 C，使得 C^TAC 为对角阵。

解

$$\begin{pmatrix} A \\ \hline I \end{pmatrix} =$$

初等变换法化二次型为标准型

设 A 是对称矩阵，则存在可逆矩阵 C，满足

$$C^TAC = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix} =: D$$

初等变换法求解 C：

$$\begin{pmatrix} A \\ \hline I \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{2.对}A\text{作同一类型行变换}]{\text{1. 整体做列变换}} \cdots \xrightarrow{\text{重复直至}} \begin{pmatrix} D \\ \hline C \end{pmatrix}$$

例 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，求可逆矩阵 C，使得 C^TAC 为对角阵。

解

$$\begin{pmatrix} A \\ \hline I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

初等变换法化二次型为标准型

设 A 是对称矩阵，则存在可逆矩阵 C，满足

$$C^TAC = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix} =: D$$

初等变换法求解 C：

$$\begin{pmatrix} A \\ \hline I \end{pmatrix} \xrightarrow[2.\text{对}A\text{作同一类型行变换}]{1.\text{ 整体做列变换}} \cdots \xrightarrow{\text{重复直至}} \begin{pmatrix} D \\ \hline C \end{pmatrix}$$

例 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，求可逆矩阵 C，使得 C^TAC 为对角阵。

解

$$\begin{pmatrix} A \\ \hline I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2 - 2c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

初等变换法化二次型为标准型

设 A 是对称矩阵，则存在可逆矩阵 C，满足

$$C^TAC = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix} =: D$$

初等变换法求解 C：

$$\begin{pmatrix} A \\ \hline I \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{2.对}A\text{作同一类型行变换}]{\text{1. 整体做列变换}} \cdots \xrightarrow{\text{重复直至}} \begin{pmatrix} D \\ \hline C \end{pmatrix}$$

例 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，求可逆矩阵 C，使得 C^TAC 为对角阵。

解

$$\begin{pmatrix} A \\ \hline I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-2c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A \\ \hline I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-2c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A \\ \hline I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-2c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3-2c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -3 \\ \hline 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A \\ \hline I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2 - 2c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3 - 2c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -3 \\ \hline 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \\ \hline 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A \\ \hline I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-2c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3-2c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -3 \\ \hline 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \\ \hline 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3-\frac{2}{3}c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -\frac{5}{3} \\ \hline 1 & -2 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A \\ \hline I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-2c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3-2c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -3 \\ \hline 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \\ \hline 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3-\frac{2}{3}c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -\frac{5}{3} \\ \hline 1 & -2 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-\frac{2}{3}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} \\ \hline 1 & -2 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A \\ \hline I \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{c_2-2c_1} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{c_3-2c_1} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -3 \\ \hline 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3-2r_1} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \\ \hline 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{c_3-\frac{2}{3}c_2} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -\frac{5}{3} \\ \hline 1 & -2 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3-\frac{2}{3}r_2} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} \\ \hline 1 & -2 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \therefore C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A \\ \hline I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-2c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3-2c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -3 \\ \hline 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \\ \hline 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3-\frac{2}{3}c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -\frac{5}{3} \\ \hline 1 & -2 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-\frac{2}{3}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} \\ \hline 1 & -2 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \therefore C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注 A 对应的二次型，其标准型为 $y_1^2 - 3y_2^2 - \frac{5}{3}y_3^2$，

$$\begin{pmatrix} A \\ \hline I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-2c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3-2c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -3 \\ \hline 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \\ \hline 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3-\frac{2}{3}c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -\frac{5}{3} \\ \hline 1 & -2 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-\frac{2}{3}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} \\ \hline 1 & -2 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \therefore C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注 A 对应的二次型，其标准型为 $y_1^2-3y_2^2-\frac{5}{3}y_3^2$，秩为 3，正惯性指标为 1，负惯性指标为 2

例 设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$，求可逆矩阵 C，使得 C^TAC 为对角阵。

对 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 采取两种方法化为标准型：

对 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 采取两种方法化为标准型：

- **方法一**：求系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值（$\lambda = 1, 1, 10$）、

  特征向量

对 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 采取两种方法化为标准型：

- 方法一：求系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值（$\lambda = 1, 1, 10$）、特征向量 $\xrightarrow{\text{单位正交化}}$

对 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 采取两种方法化为标准型：

- 方法一：求系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值（$\lambda = 1, 1, 10$）、

  特征向量 $\xrightarrow{\text{单位正交化}}$ 得到正交矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & 1/3 \\ 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & 2/3 \\ 0 & \sqrt{5}/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

对 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 采取两种方法化为标准型：

- 方法一：求系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值（$\lambda = 1, 1, 10$）、

  特征向量 $\xrightarrow{\text{单位正交化}}$ 得到正交矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & 1/3 \\ 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & 2/3 \\ 0 & \sqrt{5}/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

  令 $x = Qy$，则

对 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 采取两种方法化为标准型：

- 方法一：求系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值（$\lambda = 1, 1, 10$）、

  特征向量 $\xrightarrow{\text{单位正交化}}$ 得到正交矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & 1/3 \\ 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & 2/3 \\ 0 & \sqrt{5}/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

  令 $x = Qy$，则

$$f = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2$$

对 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 采取两种方法化为标准型：

- 方法一：求系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值（$\lambda = 1, 1, 10$）、

  特征向量 $\xrightarrow{\text{单位正交化}}$ 得到正交矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & 1/3 \\ 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & 2/3 \\ 0 & \sqrt{5}/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

  令 $x = Qy$，则

$$f = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2$$

- 方法二：配方法

对 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 采取两种方法化为标准型：

- 方法一：求系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值（$\lambda = 1, 1, 10$）、

  特征向量 $\xrightarrow{\text{单位正交化}}$ 得到正交矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & 1/3 \\ 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & 2/3 \\ 0 & \sqrt{5}/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

  令 $x = Qy$，则

$$f = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2$$

- 方法二：配方法

$$f = 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left(x_2 - \frac{2}{3}x_3\right)^2 + \frac{5}{3}x_3^2$$

对 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 采取两种方法化为标准型：

- 方法一：求系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值（$\lambda = 1, 1, 10$）、特征向量 $\xrightarrow{\text{单位正交化}}$ 得到正交矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & 1/3 \\ 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & 2/3 \\ 0 & \sqrt{5}/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

令 $x = Qy$，则

$$f = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2$$

- 方法二：配方法

$$f = 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left(x_2 - \frac{2}{3}x_3\right)^2 + \frac{5}{3}x_3^2 = 2y_1^2 + 3y_2^2 + \frac{5}{3}y_3^2$$

对 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 采取两种方法化为标准型：

- 方法一：求系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值（$\lambda = 1, 1, 10$）、特征向量 $\xrightarrow{\text{单位正交化}}$ 得到正交矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & 1/3 \\ 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & 2/3 \\ 0 & \sqrt{5}/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

令 $x = Qy$，则

$$f = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2$$

- 方法二：配方法

$$f = 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left(x_2 - \frac{2}{3}x_3\right)^2 + \frac{5}{3}x_3^2 = 2y_1^2 + 3y_2^2 + \frac{5}{3}y_3^2$$

注 标准型不唯一

二次型的规范型

定理 任意二次型 $f(x_1, ..., x_n)$ 都可以通过非退化线性变换

$$x = Cy$$

化为

$$f = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ry_r^2$$

二次型的规范型

定理 任意二次型 $f(x_1, \ldots, x_n)$ 都可以通过非退化线性变换

$$x = Cy$$

化为

$$f = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2$$

二次型的规范型

定理 任意二次型 $f(x_1, \ldots, x_n)$ 都可以通过非退化线性变换

$$x = Cy$$

化为

$$f = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2 \qquad \text{(规范型)}$$

二次型的规范型

定理 任意二次型 $f(x_1, \ldots, x_n)$ 都可以通过非退化线性变换

$$x = Cy$$

化为

$$f = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2 \qquad \text{(规范型)}$$

$$\begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$$

二次型的规范型

定理 任意二次型 $f(x_1, ..., x_n)$ 都可以通过非退化线性变换

$$x = Cy$$

化为

$$f = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2 \qquad \text{(规范型)}$$

$$A \qquad \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$$

二次型的规范型

定理 任意二次型 $f(x_1, \ldots, x_n)$ 都可以通过非退化线性变换

$$x = Cy$$

化为

$$f = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2 \qquad \text{(规范型)}$$

也就是，任意对称矩阵 A，都存在可逆矩阵 C，使得

$$C^T A C = \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$$

二次型的规范型

定理 任意二次型 $f(x_1, ..., x_n)$ 都可以通过非退化线性变换

$$x = Cy$$

化为

$$f = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2 \qquad \text{(规范型)}$$

也就是，任意对称矩阵 A，都存在可逆矩阵 C，使得

$$C^T A C = \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$$

注 $r = r(A)$，$p =$ 正惯性指标，$r - p =$ 负惯性指标

二次型的规范型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

配方法

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

二次型的规范型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

配方法

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

$$(\sqrt{2}x_2)^2$$

二次型的规范型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

配方法

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - (\sqrt{2}x_2)^2$$

二次型的规范型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

配方法

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - (\sqrt{2}x_2)^2$$

$$= y_1^2 - y_2^2$$

二次型的规范型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

配方法

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - (\sqrt{2}x_2)^2$$

变量代换 $y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x$

$$= y_1^2 - y_2^2$$

二次型的规范型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

配方法

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - (\sqrt{2}x_2)^2$$

变量代换 $y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -2 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y$

$$= y_1^2 - y_2^2$$

二次型的规范型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

配方法

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - (\sqrt{2}x_2)^2$$

变量代换 $y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x \Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -2 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C} y$

$$= y_1^2 - y_2^2$$

二次型的规范型

$$f = x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$$

配方法

$$= \frac{3}{4}x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 + (-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3)^2$$

二次型的规范型

$$f = x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$$

配方法

$$= \frac{3}{4}x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 + (-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3)^2$$

$$= (\frac{\sqrt{3}}{2}x_1)^2$$

二次型的规范型

$$f = x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$$

配方法

$$= \frac{3}{4}x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 + (-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3)^2$$

$$= (\frac{\sqrt{3}}{2}x_1)^2 + (-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3)^2$$

二次型的规范型

$$f = x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$$

配方法

$$= \frac{3}{4}x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 + (-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3)^2$$

$$= (\frac{\sqrt{3}}{2}x_1)^2 + (-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_1 - x_2)^2$$

二次型的规范型

$$f = x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$$

配方法

$$= \frac{3}{4}x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 + (-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3)^2$$

$$= (\frac{\sqrt{3}}{2}x_1)^2 + (-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_1 - x_2)^2 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

二次型的规范型

$$f = x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$$

配方法

$$= \frac{3}{4}x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 + (-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3)^2$$

$$= (\frac{\sqrt{3}}{2}x_1)^2 + (-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_1 - x_2)^2 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

变量代换 $y = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x$

二次型的规范型

$$f = x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$$

配方法

$$= \frac{3}{4}x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 + (-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3)^2$$

$$= (\frac{\sqrt{3}}{2}x_1)^2 + (-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_1 - x_2)^2 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

变量代换 $y = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 2/\sqrt{3} & 0 & -1 \\ -1/\sqrt{3} & 1 & 1 \end{pmatrix} y$

二次型的规范型

$$f = x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$$

配方法

$$= \frac{3}{4}x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 + (-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3)^2$$

$$= (\frac{\sqrt{3}}{2}x_1)^2 + (-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_1 - x_2)^2 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

变量代换 $y = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x \Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} 2/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 2/\sqrt{3} & 0 & -1 \\ -1/\sqrt{3} & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{C} y$

合同，合同的等价条件

定义 设 A, B 为两个 n 阶方阵，若存在可逆 n 阶方阵 C，使得

$$C^T AC = B$$

则称 A合同于B，记为 $A \simeq B$

合同，合同的等价条件

定义 设 A, B 为两个 n 阶方阵，若存在可逆 n 阶方阵 C，使得

$$C^T AC = B$$

则称 A合同于B，记为 $A \simeq B$

定理 任意对称矩阵 A，都成立

$$A \simeq \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$$

合同，合同的等价条件

定义 设 A, B 为两个 n 阶方阵，若存在可逆 n 阶方阵 C，使得

$$C^T A C = B$$

则称 A合同于B，记为 $A \simeq B$

定理 任意对称矩阵 A，都成立

$$A \simeq \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$$

定理 设 A, B 为对称矩阵，则 $A \simeq B$ 的充分必要条件是 A, B 具有相同的规范形（也就是，秩、正惯性指标都相等）