姓名 :
专业 :
学号 :

第 03 周作业解答

练习 1. 利用降阶法计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3+3r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 5 & -1 \\ -4 & 15 & 16 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第四列展开}} (-1)\cdot(-1)^{2+4}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -4 & 15 & 16 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3+c_1]{c_2-2c_1} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 23 & 12 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 23 & 12 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = -83$$

练习 2. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{依次将 2, 3, 4 列加到第 1 列}} \begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{r_3-r_1 \\ r_4-r_1}]{r_2-r_1} 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 12\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3+r_1]{r_2-r_1} 12\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 96$$

练习 3. 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$，求第四列各元素的余子式之和，即 $M_{14}+M_{24}+M_{34}+M_{44}$

解

$$
\begin{aligned}
M_{14}+M_{24}+M_{34}+M_{44} &= (-1)\cdot A_{14}+1\cdot A_{24}+(-1)\cdot A_{34}+1\cdot A_{44} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{r_3+r_2 \\ r_4-r_2}]{r_1+r_2} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -7 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&\xlongequal{\text{按第四列展开}} 1\cdot(-1)^{2+4}\cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & -7 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} \\
&\xlongequal{\text{按第三行展开}} 5\cdot(-1)^{3+2}\cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 45
\end{aligned}
$$

练习 4. 写出 7 阶排列 3712546 的所有逆序，并判断该排列的奇偶性。

解所有逆序为

$$(3,1),(3,2),(7,1),(7,2),(7,5),(7,4),(7,6),(5,4)$$

逆序数为 8，偶排列。

练习 5. 问 i, j 为何值时，6 级排列 $3i25j4$ 为奇排列?

解 i, j 的取值只有两种情况：$i=1, j=6$ 或者 $i=6, j=1$。

当 $i=1, j=6$ 时，排列为 312564，逆序为 $(3,1),(3,2),(5,4),(6,4)$，逆序数为 4，为偶排列。

当 $i=6, j=1$ 时，排列为 362514，逆序为 $(3,2),(3,1),(6,2),(6,5),(6,1),(6,4),(2,1),(5,1),(5,4)$，逆序数为 9，为奇排列。

所以只能是 $i=6, j=1$。

注：根据对换改变排列奇偶性的性质，当知道 312564 是偶排列时，即可判断 362514 奇排列，而无需再计算时逆序数。