线性代数（内外招） **姓名**:
2019-2020 学年（上） **专业**:
学号:

第 02 周作业解答

练习 1. 通过化为三角化行列式，计算 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$，以及 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$。

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{r_3-2r_1 \\ r_4-2r_1}]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_2]{r_3-2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -11 \\ 0 & 0 & 2 & -7 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4-\frac{2}{5}r_3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{13}{5} \end{vmatrix} = -13.$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} &\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-2r_1]{r_2+3r_1} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &\xlongequal[r_4+2r_2]{r_3-r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4-3r_3} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 22 \end{vmatrix} = -22. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} &\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-4r_1]{r_3-2r_1} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{vmatrix} \\ &\xlongequal[r_4+6r_2]{r_3+r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4+r_3} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{vmatrix} = 96. \end{aligned}$$

练习 2. 把行列式 $\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -7 & -3 & -1 \end{vmatrix}$ 按第 3 列展开，从而算出行列式的值。

解

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -7 & -3 & -1 \end{vmatrix} &= 1\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -7 & -3 \end{vmatrix} + (-1)\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -7 & -3 \end{vmatrix} + (-1)\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 8 - 11 - 10 = -13. \end{aligned}$$

练习 3. 计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \iddots & & \\ 1 & & & \end{vmatrix}$。

解 $\begin{vmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \iddots & & \\ 1 & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)n}.$

这是：令该 n 阶行列式为 D_n。将 D_n 按第一行展开，可得 $D_n = (-1)^{n-1}D_{n-1}$。重复上述过程可得：$D_n = (-1)^{n-1}(-1)^{n-2}\cdots(-1)^2 D_2$。因为 $D_2 = \begin{vmatrix} & 1 \\ 1 & \end{vmatrix} = -1$，所以 $D_n = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)n}$。

练习 4. * 计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} x & & & & -a_0 \\ -1 & x & & & -a_1 \\ & -1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & x & -a_{n-2} \\ & & & -1 & x-a_{n-1} \end{vmatrix}$。

解行列式的值为 $x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \cdots - a_1 x - a_0$。（提示：归纳法，按第一行展开）

练习 5. 利用降阶法计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3+3r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 5 & -1 \\ -4 & 15 & 16 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第四列展开}} (-1)\cdot(-1)^{2+4}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -4 & 15 & 16 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3+c_1]{c_2-2c_1} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 23 & 12 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 23 & 12 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = -83$$

以下是附加题，做出来的同学可以下次课交上来。

练习 6. 设 $A = \begin{vmatrix} a_{11} & 1 & a_{13} \\ a_{21} & 1 & a_{23} \\ a_{31} & 1 & a_{33} \end{vmatrix} = 2$，计算 $A_{11}A_{23} - A_{21}A_{13}$ 的值。

解

$$\begin{aligned} A_{11}A_{23} - A_{21}A_{13} &= (a_{33}-a_{23})(-1)(a_{11}-a_{31}) - (-1)(a_{33}-a_{13})(a_{21}-a_{31}) \\ &= -a_{33}a_{11} + a_{33}a_{31} + a_{23}a_{11} - a_{23}a_{31} + a_{33}a_{21} - a_{33}a_{31} - a_{13}a_{21} + a_{13}a_{31} \\ &= (a_{33}a_{21} - a_{23}a_{31}) + (a_{13}a_{31} - a_{33}a_{11}) + (a_{23}a_{11} - a_{13}a_{21}) \\ &= -A_{12} - A_{22} - A_{32} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & -1 & a_{13} \\ a_{21} & -1 & a_{23} \\ a_{31} & -1 & a_{33} \end{vmatrix} = -2 \end{aligned}$$