第 13 周作业解答

练习 1. 计算 $\iint_\Sigma ydydz - xdzdx + zdxdy$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 在第一卦象的部分，取单位外法向量。

解注意到 Σ 是二元函数 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的图形，定义域为 $D_{xy}=\{(x,\,y):\,x^2+y^2\le 4,\,x\ge 0,\,y\ge 0\}$。$\Sigma$ 的单位外法向量是 $\overrightarrow{n}=\frac{1}{2}(x,\,y,\,z)$。所以

$$\begin{aligned}
\iint_\Sigma ydydz - xdzdx + zdxdy &= \iint_\Sigma (y,\,-x,\,z)\cdot\overrightarrow{n}\,dS \\
&= \frac{1}{2}\iint_\Sigma z^2 dS \\
&= \frac{1}{2}\iint_{D_{xy}} (4-x^2-y^2)\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy \\
&= \iint_{D_{xy}} \sqrt{4-x^2-y^2}dxdy \\
&\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_{D_{xy}} \sqrt{4-\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^2 \sqrt{4-\rho^2}\cdot\rho d\rho\right]d\theta \\
&= \frac{1}{2}\pi\int_0^2 \sqrt{4-\rho^2}\cdot\rho d\rho \\
&\xlongequal{u=\sqrt{4-\rho^2}} \frac{1}{2}\pi\int_2^0 u\cdot(-u)du \\
&= \frac{4}{3}\pi
\end{aligned}$$

练习 2. 计算 $\iint_\Sigma xy^2dydz + x^2ydzdx + ydxdy$，其中 Σ 是柱体 $\Omega:\,x^2+y^2\le 1,\,-1\le z\le 1$ 的表面，取单位外法向量。

解利用高斯公式

$$\begin{aligned}
\iint_\Sigma xy^2dydz + x^2ydzdx + ydz &= \iiint_\Omega \text{div }(xy^2,\,x^2y,\,y)dv \\
&= \iiint_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x}(xy^2)+\frac{\partial}{\partial y}(x^2y)+\frac{\partial}{\partial z}(y)\right]dv \\
&= \iiint_\Omega (x^2+y^2)dxdydz \\
&= \int_{-1}^1\left[\iint_{\{x^2+y^2\le 1\}} x^2+y^2dxdy\right]dz \\
&= \int_{-1}^1 dz\cdot\iint_{\{x^2+y^2\le 1\}} x^2+y^2dxdy \\
&= 2\int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 \rho^2\cdot\rho d\rho\right]d\theta = \pi.
\end{aligned}$$

练习 3. 计算 $\iint_\Sigma xdydz+ydzdx+z^4dxdy$，其中 Σ 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=3^2,\ z\geq 0$，取单位外法向量。

解设 $\Sigma_0=\{(x,\,y,\,z):\ x^2+y^2\leq 3^2,\ z=0\}$，则 $\Sigma\cup\Sigma_0$ 构成一个封闭曲面。设 Ω 为 $\Sigma\cup\Sigma_0$ 所围成的立体区域。注意到

$$\iint_\Sigma xdydz+ydzdx+z^4dxdy=\iint_{\Sigma\cup\Sigma_0} xdydz+ydzdx+z^4dxdy-\iint_{\Sigma_0} xdydz+ydzdx+z^4dxdy$$

其中

$$\iint_{\Sigma_0} xdydz+ydzdx+z^4dxdy=\iint_{\Sigma_0}(x,\,y,\,z^4)\cdot\vec{n}\,dS \xlongequal{\vec{n}=(0,\,0,\,-1)} \iint_{\Sigma_0}-z^4dS \xlongequal{z=0\text{ on }\Sigma} 0$$

而利用高斯公式，成立：

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma\cup\Sigma_0} xdydz+ydzdx+z^4dxdy&=\iint_\Sigma(x,\,y,\,z^4)\cdot\vec{n}\,dS\\&=\iiint_\Omega \operatorname{div}(x,\,y,\,z^4)dv\\&=\iiint_\Omega(1+1+4z^3)dv\\&=\iiint_\Omega(2+4z^3)dv\\&=2\ \text{ Vol }\ (\Omega)+4\iiint_\Omega z^3dxdydz\\&=\frac{4}{3}\pi 3^3+4\int_0^3\left[\iint_{D_{xy}} z^3dxdy\right]dz\\&=36\pi+4\int_0^3 z^3|D_{xy}|dz\\&=36\pi+4\int_0^3 z^3\cdot\pi(9-z^2)dz\\&=279\pi.\end{aligned}$$

所以

$$\iint_\Sigma xdydz+ydzdx+z^4dxdy=\iint_{\Sigma\cup\Sigma_0} xdydz+ydzdx+z^4dxdy-\iint_{\Sigma_0} xdydz+ydzdx+z^4dxdy=279\pi.$$

练习 4. 判断下列级数的敛散性，并说明原因

1. $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3n}+\cdots$
2. $(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})+(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2})+(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3})+\cdots+(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n})+\cdots$
3. $\cos(\frac{\pi}{6})+\cos(\frac{2\pi}{6})+\cdots+\cos(\frac{n\pi}{6})+\cdots$
4. $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{3a+b}+\cdots+\frac{1}{na+b}+\cdots$ （其中 $a>0,\,b>0$）

解 1. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n}$ 是发散。可以利用“比较审敛法的极限形式”，与发散的调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 比较。因为 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{3n}}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{3}$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n}$ 是发散。

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n})$ 是收敛，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n})=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$。这是因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$。

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos(\frac{n\pi}{6})$ 是发散。这是 $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos(\frac{n\pi}{6})\neq 0$（事实上 $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos(\frac{n\pi}{6})$ 不存在，这里不证明）：对任意的 $N>0$，可取 $n=12N>N$，则

$$\cos\left(\frac{(12N)\pi}{6}\right)=\cos(2N\pi)=1$$

这就说明了 $\{\cos(\frac{n\pi}{6})\}$ 不可能趋于 0。

4. 利用比较审敛法的极限形式，与发散的调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 作比较：因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{na+b}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{na+b}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a+\frac{b}{n}}=\frac{1}{a}<+\infty$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{na+b}$ 发散。

以下是附加题，做出来的同学下周一交上来，平时成绩可适当加分。

练习 5. 假设有数量充分多的长方体积木，长宽高分别为 1, 0.1, 0.1。尝试把积木一个一个地叠高，在保证不掉下来的情况下，在叠高的同时尽量在水平方向上延伸，如图。问水平方向上最大能延伸多长？