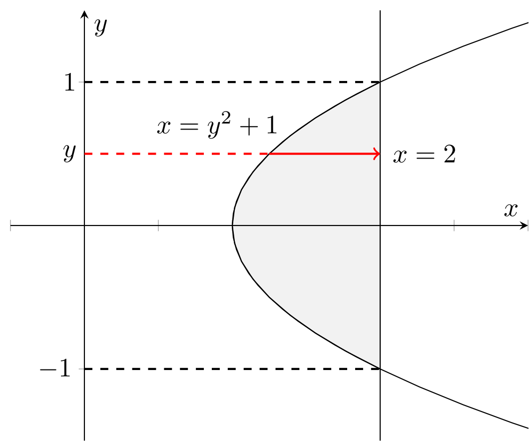
第 14 周作业解答

练习 1. 先画出区域 D，再求二重积分：

1. $\iint_D ydxdy$，其中 D 是由曲线 $x=y^2+1$ 及直线 $x=2$ 所围成的区域
2. $\iint_D y^2e^{xy}dxdy$，其中 D 是由直线 $x=0$，$y=x$ 及 $y=1$ 所围成的区域
3. $\iint_D e^{-x^2}dxdy$，其中 D 是由直线 $y=0$，$y=x$ 及 $x=1$ 所围成的区域

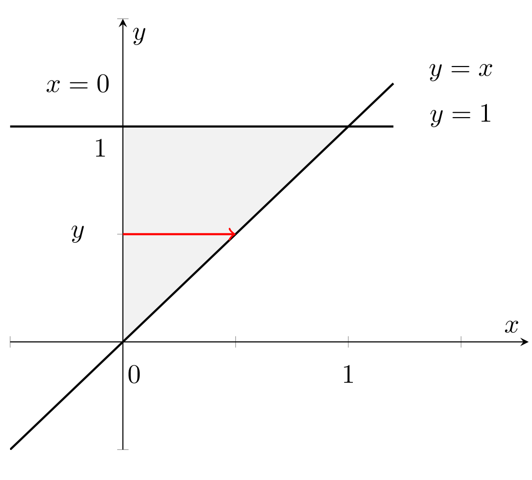
解 1. 采取先 x 后 y 的积分次序，故将 D 为 Y-型区域计算该二重积分。如图



$D=\{(x,y)|-1\le y\le 1,\, y^2+1\le x\le 2\}$。所以

$$\iint_D ydxdy=\int_{-1}^{1}\left[\int_{y^2+1}^{2}ydx\right]dy=\int_{-1}^{1}\left[xy\Big|_{y^2+1}^{2}\right]dy=\int_{-1}^{1}\left[2y-(y^2+1)y\right]dy$$
$$=\int_{-1}^{1}-y^3+ydy=(-\frac{3}{4}y^4+\frac{1}{2}y^2)\Big|_{-1}^{1}=0$$

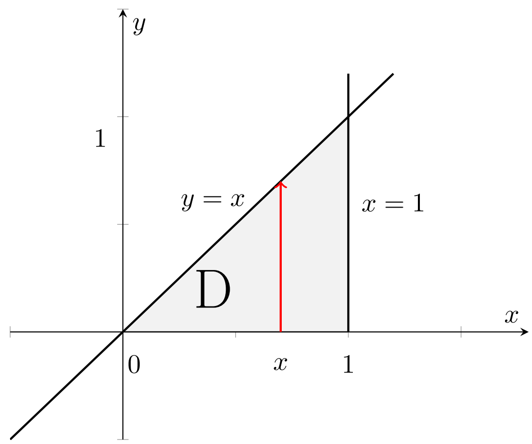
2. 采取先 x 后 y 的积分次序，故将 D 视为 Y-型区域计算该二重积分。如图



$D=\{(x,\,y)|\,0\le y\le 1,\,0\le x\le y\}$。所以

$$\iint_D y^2e^{xy}dxdy=\int_0^1\left[\int_0^y y^2e^{xy}dx\right]dy=\int_0^1\left[ye^{xy}\big|_0^y\right]dy=\int_0^1\left[ye^{y^2}-y\right]dy$$
$$=(\frac{1}{2}e^{y^2}-\frac{1}{2}y^2)\big|_0^1=\frac{1}{2}e-1$$

3. 采取先 y 后 x 的积分次序能够积出来，故将 D 视为 X-型区域计算该二重积分。如图



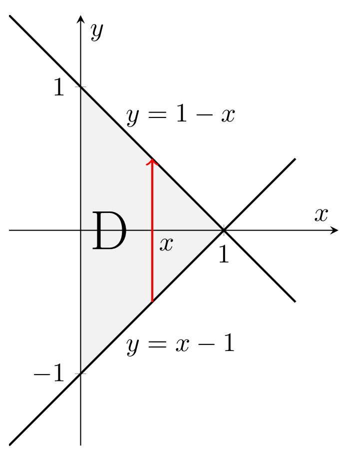
$D=\{(x,\,y)|\,0\le x\le 1,\,0\le y\le x\}$。所以

$$\iint_D e^{-x^2}dxdy=\int_0^1\left[\int_0^x e^{-x^2}dy\right]dx=\int_0^1\left[e^{-x^2}y\big|_0^x\right]dx=\int_0^1\left[xe^{-x^2}\right]dx$$
$$=(-\frac{1}{2}e^{-x^2})\big|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2e}$$

练习 2. 将下列积分化为不同积分次序的二次积分

1. $I=\iint_D f(x,\,y)dxdy$，其中 D 是由 $x+y=1$，$x-y=1$，$x=0$ 所围成的区域

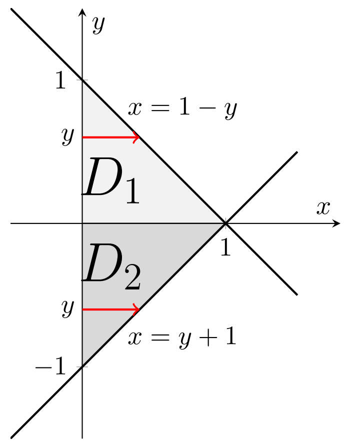
解 (a) 若要先 y 后 x 积分，则应将 D 视为 X-型区域。如图



可见 $D=\{(x,\,y)|\,0\le x\le 1,\,x-1\le y\le 1-x\}$，从而

$$\iint_D f(x,\,y)dxdy=\int_0^1\left[\int_{x-1}^{1-x}f(x,\,y)dy\right]dx$$

(b) 若要先 x 后 y 积分，则应将 D 视为 Y-型区域。实际上 D 为两个 Y-型区域 D_1 与 D_2 的并，如图



其中

$$\begin{aligned}D_1&=\{(x,\,y)|\,0\le y\le 1,\,0\le x\le 1-y\}\\D_2&=\{(x,\,y)|-1\le y\le 0,\,0\le x\le y+1\}\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,\,y)dxdy&=\iint_{D_1}f(x,\,y)dxdy+\iint_{D_2}f(x,\,y)dxdy\\&=\int_0^1\left[\int_0^{1-y}f(x,\,y)dx\right]dy+\int_{-1}^0\left[\int_0^{y+1}f(x,\,y)dx\right]dy\end{aligned}$$