第 06 周作业解答

练习 1. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$，计算 $B+C$，AB，BA，AC，CA 和 $A(2B-3C)$。

解

$$B+C=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \\ 6 & -5 \end{pmatrix},\qquad AB=\begin{pmatrix} 15 & -14 \\ -15 & 14 \end{pmatrix},\qquad BA=\begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -4 & 16 & -8 \\ 7 & -28 & 14 \end{pmatrix}$$
$$AC=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\qquad CA=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -8 & 4 \\ 4 & -16 & 8 \end{pmatrix},\qquad A(2B-3C)=\begin{pmatrix} 30 & -28 \\ -30 & 28 \end{pmatrix}$$

练习 2. 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，计算 AA^T 及 A^TA。

解

$$AA^T=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 21 & 2 \\ 2 & 13 \end{pmatrix}$$
$$A^TA=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 13 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 20 \end{pmatrix}$$

练习 3. 设 A, B 为 n 阶方阵，证明 $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ 的充分必要条件是 $AB=BA$。

解 $(A+B)(A-B)=(A+B)A-(A+B)B=A^2+BA-AB-B^2$，可见 $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ 的充分必要条件是 $BA-AB=0$（零矩阵）。

练习 4. 设 n 阶方阵 A 满足 $AA^T=I_n$ 且 $|A|<0$，计算 $|A|$。

解计算等式 $AA^T=I_n$ 两边的行列式：

$$1=|I_n|=|AA^T|=|A|\cdot|A^T|=|A|\cdot|A|$$

所以 $|A|=\pm1$。又因为 $|A|<0$，所以 $|A|=-1$。

练习 5. 设 n 阶方阵 A 满足 $|A|=-2$，计算 $\left|2|A|A^T\right|$。

解 $\left|2|A|A^T\right|=(2|A|)^n|A^T|=(2|A|)^n|A|=2^n|A|^{n+1}=2^n(-2)^{n+1}=(-1)^{n+1}2^{2n+1}$。