第 04 周作业解答

练习 1. 设平面 Σ 过直线 ℓ_1：$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{-1}$，且平行于直线 ℓ_2：$\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$，求出 Σ 的点法式方程。

解 1. 设平面的法向量 $\vec{n}=(A,\,B,\,C)$。ℓ_1 的方向向量为 $\vec{s}_1=(1,\,0,\,-1)$，ℓ_2 的方向向量为 $\vec{s}_2=(2,\,1,\,1)$。因为 $\vec{n}\perp\vec{s}_1$ 且 $\vec{n}\perp\vec{s}_2$，所以不妨取

$$\vec{n}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}\vec{k}=(1,\,-3,\,1)$$

2. $M_0(1,\,2,\,3)\in\ell_1\subset\Sigma$。所以 Σ 的点法式方程为

$$(x-1)-3(y-2)+(z-3)=0\qquad\Rightarrow\qquad x-3y+z+2=0$$

练习 2. 与平面 Σ_1：$4x-y+2z-8=0$ 垂直且过原点及点 $M_0(6,\,-3,\,2)$ 的平面方程是什么?

解 1. 设平面的法向量 $\vec{n}=(A,\,B,\,C)$。Σ_1 的法向量为 $\vec{n}_1=(4,\,-1,\,2)$。因为 $\vec{n}\perp\vec{n}_1$ 且 $\vec{n}\perp\overrightarrow{OM_0}$，所以不妨取

$$\vec{n}=\vec{n}_1\times\overrightarrow{OM_0}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & -1 & 2\\ 6 & -3 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -3 & 2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}4 & 2\\ 6 & 2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}4 & -1\\ 6 & -3\end{vmatrix}\vec{k}=(4,\,4,\,-6)$$

2. 又因为过原点 $(0,\,0,\,0)$，所以点法式方程为

$$4x+4y-6z=0\qquad\Rightarrow\qquad 2x+2y-3z=0$$

练习 3. 过原点且与直线 ℓ_1：$\begin{cases}x=1\\ y=-1+t\\ z=2+t\end{cases}$ 与 ℓ_2：$\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{1}$ 都平行的平面方程是什么?

解 1. 设平面的法向量 $\vec{n}=(A,\,B,\,C)$。ℓ_1 的方向向量为 $\vec{s}_1=(0,\,1,\,1)$，ℓ_2 的方向向量为 $\vec{s}_2=(1,\,2,\,1)$。因为 $\vec{n}\perp\vec{s}_1$ 且 $\vec{n}\perp\vec{s}_2$，所以不妨取

$$\vec{n}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\vec{k}=(-1,\,1,\,-1)$$

2. 又因为过原点 $(0,\,0,\,0)$，所以点法式方程为

$$-x+y-z=0$$

练习 4. 设直线 ℓ 过点 $M_0(-1,\,2,\,3)$，且垂直于直线 ℓ_1：$\frac{x}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z}{6}$、平行于平面 Σ：$7x+8y+9z+10=0$。求直线 ℓ 的点向式方程。

解 1. ℓ_1 的方向向量是 $\vec{s}_1 = (4,\, 5,\, 6)$，$\Sigma$ 的法向量为 $\vec{n} = (7,\, 8,\, 9)$。设 ℓ 的方向向量为 $\vec{s}$，则 $\vec{s} \perp \vec{s}_1$ 及 $\vec{s} \perp \vec{n}$。故不妨取

$$\vec{s} = \vec{s}_1 \times \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \vec{k} = (-3,\, 6,\, -3)$$

2. 所以点法式为

$$\frac{x+1}{-3} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-3}{-3} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{1}$$

练习 5. 设有两直线 ℓ_1：$\frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z+8}{1}$ 及 ℓ_2：$\begin{cases} x - y - 6 = 0 \\ 2y + z - 3 = 0 \end{cases}$。求 ℓ_2 的一个方向向量，及求 ℓ_1 与 ℓ_2 的夹角。

解 1. 设 ℓ_2 的方向向量为 $\vec{s}_2$，则

$$\vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} = (-1,\, -1,\, 2)$$

2. ℓ_1 的方向向量 $\vec{s}_1 = (1,\, -2,\, 1)$。$\ell_1$ 与 ℓ_2 的夹角 θ（$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$）满足

$$\cos\theta = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{|(-1) \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) + 2 \cdot 1|}{\sqrt{1+1+4} \cdot \sqrt{1+4+1}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

所以 $\theta = \frac{\pi}{3}$

练习 6. 求直线 ℓ_1：$\begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$ 在平面 Σ_1：$x + y + z = 0$ 上的投影直线 ℓ 的方程。

解 1. 设 Σ 为 ℓ 与 ℓ_1 张成的平面，则 ℓ 是 Σ 与 Σ_1 的交线，且 Σ 与 Σ_1 垂直。

2. 先求 Σ 的方程。由于 Σ 是过直线 ℓ_1 的平面，故可设 Σ 的方程为

$$(x + y - z - 1) + \lambda\,(x - y + z + 1) = 0$$

其中 λ 待定。其法向量为 $\vec{n} = (1+\lambda,\, 1-\lambda,\, -1+\lambda)$。

又因为 Σ 与 Σ_1 垂直，所以 $\vec{n} \perp \vec{n}_1 = 0$，其中 $\vec{n}_1 = (1,\, 1,\, 1)$ 为 Σ_1 的法向量。所以

$$0 = \vec{n} \cdot \vec{n}_1 = 1 + \lambda + 1 - \lambda + -1 + \lambda = 1 + \lambda \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = -1$$

所以 Σ 的方程为

$$2y - 2z - 2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y - z - 1 = 0$$

3. 因为 ℓ 是 Σ 与 Σ_1 的交线，所以 ℓ 的一般方程为

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

练习 7. 1. 建立以点 $(1,\, 3,\, -2)$ 为球心，且通过坐标原点的球面方程。

2. 方程 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z = 0$ 表示什么曲面。

解 1. 球面半径是 $(1,\,3,\,-2)$ 到原点的距离，所以是 $\sqrt{1+9+4}=\sqrt{14}$。球面方程是

$$(x-1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=14$$

2. 方程 $x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z=0$ 可以改写成

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=6$$

所以这是一个以 $(1,\,-2,\,-1)$ 为球心，$R=\sqrt{6}$ 为半径的球面。

练习 8. 将 xoy 坐标面上的抛物线 $y=5x^2$ 绕 y 轴旋转一周，求所生成的旋转面的方程。

解 y 保持不变，将 x 换成 $\pm\sqrt{x^2+z^2}$，所以方程是

$$y=5\left(\pm\sqrt{x^2+z^2}\right)^2=5(x^2+z^2).$$

练习 9. 将 xoz 坐标面上的圆周 $x^2+(z-2)^2=1$ 绕 x 轴旋转一周，所生成的旋转面是一个环面，求该环面的方程。

解方程是

$$x^2+(\pm\sqrt{y^2+z^2}-2)^2=1$$

可进一步整理如下

$$\begin{aligned} x^2+(\pm\sqrt{y^2+z^2}-2)^2=1 \quad &\Rightarrow \quad x^2+y^2+z^2+3=\pm4\sqrt{y^2+z^2} \\ &\Rightarrow \quad (x^2+y^2+z^2+3)^2=16(y^2+z^2) \end{aligned}$$

练习 10. 写出下列旋转曲面的旋转轴：

曲面	$z=2(x^2+y^2)$	$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{36}=1$	$z^2=3(x^2+y^2)$	$x^2-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{4}=1$
旋转轴	z 轴	y 轴	z 轴	x 轴