第 11 章 b：对坐标的曲线积分

数学系　　梁卓滨

2017.07 暑期班

平面有向曲线

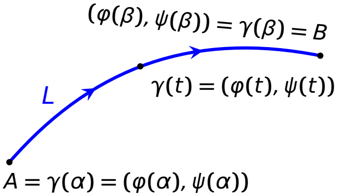
- 有向曲线 是指定起点、终点的曲线

- 有向曲线可理解成粒子运动轨迹
- 参数方程：

  $$\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t)),\ t : \alpha \to \beta$$

  或者写作

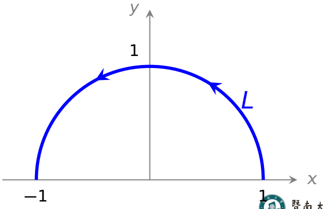
  $$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t : \alpha \to \beta$$



例 如图有向曲线 L 的参数方程是：

- $\gamma(t) = (\cos t, \sin t), \quad t : 0 \to \pi$
- $\gamma(t) = (\cos 2t, \sin 2t), \quad t : 0 \to \frac{\pi}{2}$
- $\gamma(t) = (t, \sqrt{1 - t^2}), \quad t : 1 \to -1$

等等…（参数方程不唯一）

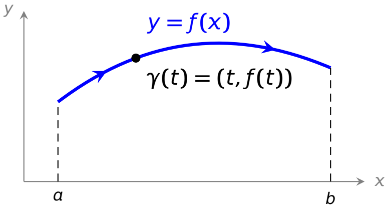


例 如图有向曲线 L 的参数方程是：

$$x = t,\ y = f(t), \quad t : a \to b$$

或者写作：

$$\gamma(t) = (t, f(t)), \quad t : a \to b$$



例 如图有向曲线 L 的参数方程是：

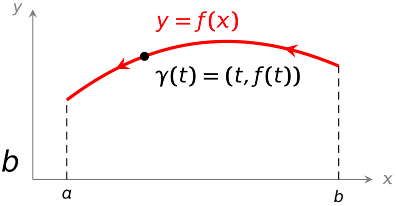
$$x = t,\ y = f(t), \quad t : b \to a$$

或者写作：

$$\gamma(t) = (t, f(t)), \quad t : b \to a$$

参数方程也可以取为：

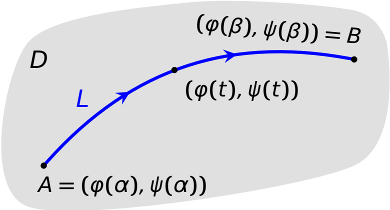
$$\gamma(t) = (a+b-t, f(a+b-t)), \quad t : a \to b$$



曲线积分

假设

- $P(x,y), Q(x,y)$ 定义在区域 D 上
- L 是 D 中从点 A 到 B 的有向曲线



所谓有向曲线 L 上的曲线积分（或者“第二类曲线积分”）指：

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

计算方法：设 $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ 是 L 的参数方程，t 从 α 到 β，则

$$\int_L Pdx + Qdy := \int_\alpha^\beta \Big[P(\varphi(t), \psi(t))d\varphi(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))d\psi(t)\Big]$$

$$= \int_\alpha^\beta \Big[P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)\Big]dt$$

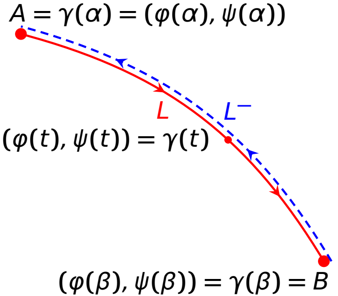
性质 曲线积分的计算方法

$$\int_L Pdx + Qdy := \int_\alpha^\beta \Big[P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) \Big] dt$$

不依赖于参数方程的选取。也就是：

若 $x = \tilde{\varphi}(t)$, $y = \tilde{\psi}(t)$, $t : \tilde{\alpha} \to \tilde{\beta}$, 是有向曲线 L 的另外一组参数方程，则

$$\begin{aligned} &\int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} \Big[P(\tilde{\varphi}(t), \tilde{\psi}(t))\tilde{\varphi}'(t) + Q(\tilde{\varphi}(t), \tilde{\psi}(t))\tilde{\psi}'(t) \Big] dt \\ = &\int_\alpha^\beta \Big[P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) \Big] dt \end{aligned}$$



性质 设

- L 是有向曲线，
- L^- 是 L 的反向曲线，

则

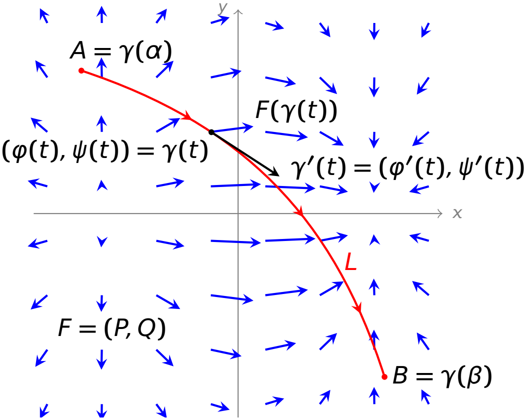
$$\int_{L^-} Pdx+Qdy=-\int_L Pdx+Qdy$$

证明 设 L 的参数方程是 $\gamma(t)=(\varphi(t),\,\psi(t)),\ t:\alpha\to\beta$，则 L^- 的参数方程是 $\gamma(t)=(\varphi(t),\,\psi(t)),\ t:\beta\to\alpha$。所以

$$\begin{aligned}\int_{L^-} Pdx+Qdy &= \int_\beta^\alpha \Big[P(\varphi(t),\,\psi(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\,\psi(t))\psi'(t)\Big]dt\\ &= -\int_\alpha^\beta \Big[P(\varphi(t),\,\psi(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\,\psi(t))\psi'(t)\Big]dt\\ &= -\int_L Pdx+Qdy\end{aligned}$$

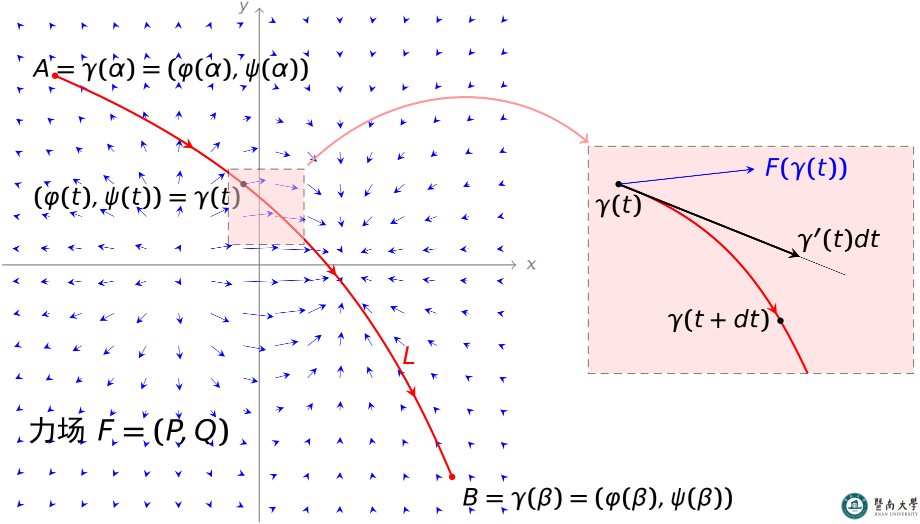
曲线积分的其他表达式

$$
\begin{aligned}
\int_L Pdx + Qdy &= \int_\alpha^\beta \Big[P(\varphi(t),\, \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\, \psi(t))\psi'(t) \Big] dt \\
&= \int_\alpha^\beta \Big[\big(P(\gamma(t)),\, Q(\gamma(t)) \big) \cdot \big(\varphi'(t),\, \psi'(t) \big) \Big] dt \\
&= \int_\alpha^\beta \Big[F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \Big] dt
\end{aligned}
$$



对坐标的曲线积分的物理应用：做功

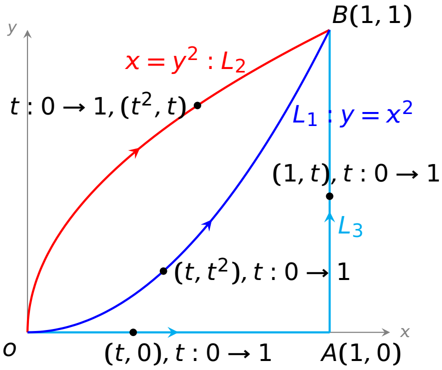
$$W=\int_{\alpha}^{\beta}F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt=\int_{L}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$



例 计算

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy$$

（$i = 1, 2, 3$），其中 L_i 如右图所示



解

$$I_1 = \int_0^1 \left[2t \cdot t^2 \cdot t' + t^2 \cdot (t^2)'\right]dt = 4\int_0^1 t^3 dt = 1,$$

$$I_2 = \int_0^1 \left[2t^2 \cdot t \cdot (t^2)' + (t^2)^2 \cdot t'\right]dt = 5\int_0^1 t^4 dt = 1,$$

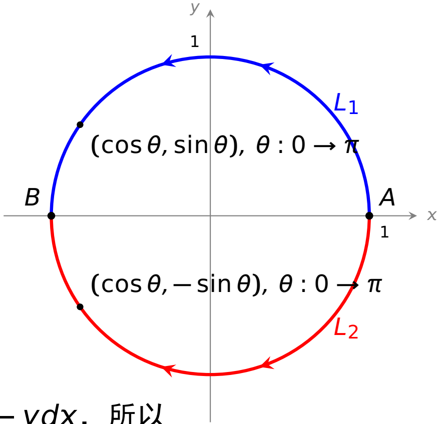
$$I_3 = \int_{OA}(2xydx + x^2dy) + \int_{AB}(2xydx + x^2dy)$$

$$= \int_0^1 \left[2t \cdot 0 \cdot t' + t^2 \cdot 0'\right]dt + \int_0^1 \left[2 \cdot 1 \cdot t \cdot 1' + 1^2 \cdot t'\right]dt = 1.$$

例 计算

$$I_i = \int_{L_i} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

（$i = 1, 2$），其中 L_i 如右图所示



解 注意在单位圆周上，$I_i = \int_{L_i} xdy - ydx$，所以

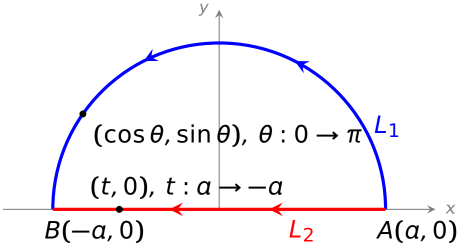
$$I_1 = \int_0^\pi \Big[\cos\theta \cdot (\sin\theta)' - \sin\theta \cdot (\cos\theta)'\Big] d\theta = \int_0^\pi 1 d\theta = \pi,$$

$$I_2 = \int_0^\pi \Big[\cos\theta \cdot (-\sin\theta)' - (-\sin\theta) \cdot (\cos\theta)'\Big] d\theta = \int_0^\pi -1 d\theta = -\pi.$$

例 计算

$$I_i = \int_{L_i} (x+y+1)dx + ydy$$

（$i=1,2$），其中 L_i 如右图所示



解

$$I_1 = \int_0^{\pi} \Big[(a\cos\theta + a\sin\theta + 1)\cdot(a\cos t)' + a\sin\theta\cdot(a\sin\theta)'\Big]d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\Big[-a^2\sin^2\theta - a\sin\theta\Big]d\theta$$

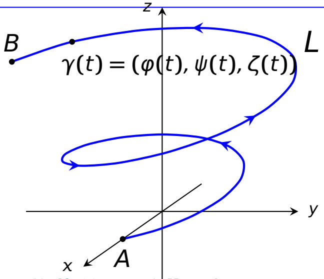
$$= -a^2\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta - a\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta \quad = -\frac{1}{2}\pi a^2 - 2a,$$

$$I_2 = \int_a^{-a}\Big[(t+0+1)\cdot(t)' + 0\cdot(0)'\Big]dt = \int_a^{-a}(t+1)dt = -2a.$$

空间曲线的曲线积分

假设

- D 是空间中三维有界闭区域
- $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ 定义在 D 上
- L 是 D 中从点 A 到 B 的有向曲线



所谓有向曲线 L 上的曲线积分（或者“第二类曲线积分”）指：

$$\int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

计算方法：设 $\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t), \xi(t))$ 是 L 参数方程，$t : \alpha \to \beta$，则

$$\int_L Pdx+Qdy+Rdz := \int_\alpha^\beta \Big[P(\gamma(t))d\varphi(t)+Q(\gamma(t))d\psi(t)+R(\gamma(t))d\zeta(t) \Big]$$

$$= \int_\alpha^\beta \Big[P(\gamma(t))\varphi'(t)+Q(\gamma(t))\psi'(t)+R(\gamma(t))\zeta'(t) \Big] dt$$

例 计算 $\int_L \cos z dx + e^x dy + e^y dz$，其中 L 是有向曲线 $\gamma(t) = (1, t, e^t)$, $t : 0 \to 2$

解

$$原式 = \int_0^2 \Big[\cos(e^t)\cdot(1)' + e^1\cdot(t)' + e^t\cdot(e^t)'\Big]dt$$

$$= \int_0^2 \Big[e + e^{2t}\Big]dt = et + \frac{1}{2}e^{2t}\Big|_0^2 = \frac{1}{2}e^4 + 2e - \frac{1}{2}$$

假设

- $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 是定义在平面区域 D 上二元函数，
- $X=(P,Q)$ 是 D 上向量场，
- 平面曲线 L 的参数方程为 $\gamma(t)=(\varphi(t),\psi(t))$, $t:\alpha\to\beta$，

则

$$\begin{aligned}\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy &= \int_\alpha^\beta X(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt \\ &= \int_\alpha^\beta X(\gamma(t))\cdot\frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}\cdot|\gamma'(t)|dt \\ &= \int_\alpha^\beta X(\gamma(t))\cdot\frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}\cdot\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}dt \\ &= \int_L X(\gamma(t))\cdot\frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}ds\end{aligned}$$