

## 第 01 周作业解答

练习 1. 1.  $y^4 + y'' + 2x = 0$  的阶是 2。

2.  $(7x - 6)dy + (x + y)dx = 0$  的阶是 1。

练习 2. 1. 假设  $y_1 = y_1(x)$ ,  $y_2 = y_2(x)$  是微分方程  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  的解, 判断  $y = C_1y_1 + C_2y_2$  (其中  $C_1, C_2$  为任意常数) 是否也是该方程的解?

2. 假设  $y_1 = y_1(x)$ ,  $y_2 = y_2(x)$  是微分方程  $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$  的解, 判断  $y = C_1y_1 + C_2y_2$  (其中  $C_1, C_2$  为任意常数) 是否也是该方程的解?

解: 1. 是的。验证如下:

$$\begin{aligned}y'' + p(x)y' + q(x)y &= [C_1y_1 + C_2y_2]'' + p(x)[C_1y_1 + C_2y_2]' + q(x)[C_1y_1 + C_2y_2] \\&= C_1[y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1] + C_2[y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2] \\&= 0 + 0 = 0\end{aligned}$$

2. 一般而言不是 (除非  $f(x) = 0$ )。这是:

$$\begin{aligned}y'' + p(x)y' + q(x)y &= [C_1y_1 + C_2y_2]'' + p(x)[C_1y_1 + C_2y_2]' + q(x)[C_1y_1 + C_2y_2] \\&= C_1[y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1] + C_2[y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2] \\&= C_1f(x) + C_2f(x) = (C_1 + C_2)f(x) \neq f(x)\end{aligned}$$

练习 3. 判断  $y = xe^x$  是否方程  $y'' - 2y' + y = 0$  的解? 并判断  $y = C_1xe^x + C_2xe^x$  是否该方程的通解? 这里  $C_1, C_2$  是任意常数。

解: 验证

$$\begin{aligned}y' &= e^x + xe^x, \\y'' &= 2e^x + xe^x, \\ \Rightarrow y'' - 2y' + y &= 2e^x + xe^x - 2(e^x + xe^x) + xe^x = 0\end{aligned}$$

所以是解。

$y = C_1xe^x + C_2xe^x = (C_1 + C_2)xe^x = Cxe^x$  实际上只有一个任意常数, 所以不通解。

练习 4. (关于半衰期) 设  $M(t)$  为某放射物质在时刻  $t$  的含量。已知任何时刻, 该物质衰变速度与剩余含量之比为  $-\lambda$  ( $\lambda$  是正常数)。问需要经过多长时间, 该物质含量减少为初始时刻  $t = 0$  时含量的一半?

这个时间与  $M(0)$  的具体数值没有关系, 称为半衰期。

解:

$$\frac{M'(t)}{M(t)} = -\lambda \Rightarrow M'(t) = -\lambda M(t) \Rightarrow M(t) = M(0)e^{-\lambda t}$$

求解  $t$  满足

$$\frac{1}{2}M(0) = M(t) = M(0)e^{-\lambda t}$$

解得

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln 2$$

注: 从半衰期的表达式可见: 半衰期与初始时刻物质的量没有关系。同一种物质, 任何量开始衰变到剩余一半量, 所需要的时间一样。

**练习 5.** 已知弹簧系统（详细见课件）满足方程

$$x'' + \frac{9}{4}x = 0$$

问该物体的运动周期是多少？假设物体的初始位置  $x(0) = 2$ ，初始速度  $x'(0) = -1$ ，求该物体的位置函数  $x(t)$ 。

**解：**通解是

$$x = C_1 \cos(\frac{3}{2}t) + C_2 \sin(\frac{3}{2}t).$$

所以运动周期是  $\frac{2\pi}{3/2} = \frac{4}{3}\pi$ 。

假设  $x(0) = 2$ ,  $x'(0) = -1$ , 则

$$\begin{aligned} 2 = x(0) &= C_1 \cos(\frac{3}{2}t) + C_2 \sin(\frac{3}{2}t)|_{t=0} = C_1 \\ -1 = x'(0) &= -C_1 \cdot \frac{3}{2} \sin(\frac{3}{2}t) + C_2 \frac{3}{2} \cdot \cos(\frac{3}{2}t)|_{t=0} = \frac{3}{2}C_2 \end{aligned}$$

所以  $C_1 = 2$ ,  $C_2 = -\frac{2}{3}$

$$x(t) = 2 \cos(\frac{3}{2}t) - \frac{2}{3} \sin(\frac{3}{2}t).$$

**注：** $x(t)$  可以进一步改写成

$$\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{2^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2} \left[ \frac{2}{\sqrt{2^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2}} \cos(\frac{3}{2}t) + \frac{-\frac{2}{3}}{\sqrt{2^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2}} \sin(\frac{3}{2}t) \right] \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{10} \left[ \sin \theta \cos(\frac{3}{2}t) + \cos \theta \sin(\frac{3}{2}t) \right] \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{10} \sin(\frac{3}{2}t + \theta) \end{aligned}$$

**练习 6.** 求出  $y' = x^2y$  的通解。

**解**这是可分离变量的微分方程。

$$\frac{dy}{dx} = x^2y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = x^2 dx$$

两边积分

$$\int \frac{dy}{y} = \int x^2 dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \frac{1}{3}x^3 + C_1 \quad \Rightarrow \quad y = \pm e^{C_1} e^{\frac{1}{3}x^3}$$

所以通解是

$$y = C e^{\frac{1}{3}x^3}.$$

**练习 7.** 求解初值问题  $\begin{cases} xydx + (x^2 + 1)dy = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ 。

**解**这是可分离变量的微分方程。先求通解。

$$xydx + (x^2 + 1)dy = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -\frac{x}{1+x^2} dx$$

两边积分

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{x}{1+x^2} dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = -\frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C_1$$

所以通解是

$$y = C(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

代入初值条件

$$1 = y(0) = C(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}|_{x=0} = C$$

得  $C = 1$ 。所以初值问题的解是

$$y = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

注. 1. 求积分  $\int \frac{x}{1+x^2} dx$  的方法:

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \int \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1}{2} d(1+x^2) \stackrel{u=1+x^2}{=} \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} \ln|u| + C = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

2. 下面这个公式直接用, 可减少计算量:

$$\ln|a| = \ln|b| + C_1 \Rightarrow a = Cb$$

其中  $C = \pm e^{C_1}$ 。

**练习 8.** 求解初值问题  $\begin{cases} \cos y dx + (1+e^{-x}) \sin y dy = 0 \\ y(0) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$ 。

解这是可分离变量的微分方程。先求通解。

$$\cos y dx + (1+e^{-x}) \sin y dy \Rightarrow \frac{\sin y}{\cos y} dy = -\frac{1}{1+e^{-x}} dx$$

两边积分

$$\int \frac{\sin y}{\cos y} dy = -\int \frac{1}{1+e^{-x}} dx \Rightarrow -\ln|\cos y| = -\ln(e^x+1) + C_1$$

所以通解是

$$\cos y = C(e^x+1).$$

代入初值条件

$$\frac{\pi}{4} = y(0) \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4} = \cos y(0) = C(e^0+1)|_{x=0} = 2C$$

得  $C = \frac{\sqrt{2}}{4}$ 。所以初值问题的解是

$$\cos y = \frac{\sqrt{2}}{4}(e^x+1).$$

注. 1. 求积分  $\int \frac{\sin y}{\cos y} dy$  的方法:

$$\int \frac{\sin y}{\cos y} dy = \int \frac{1}{\cos y} \cdot (-1) d \cos y \stackrel{u=\cos y}{=} -\int \frac{1}{u} du = -\ln|u| + C = -\ln|\cos y| + C.$$

2. 求积分  $\int \frac{1}{1+e^{-x}} dx$  的方法:

$$\int \frac{1}{1+e^{-x}} dx = \int \frac{e^x}{e^x+1} dx = \int \frac{1}{e^x+1} d(e^x+1) \stackrel{u=e^x+1}{=} \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C = \ln(e^x+1) + C.$$

**练习 9.** 求出  $(x^2+y^2)dx - xydy = 0$  的通解。

解这是齐次方程。

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

令  $u = \frac{y}{x}$ , 则  $y = xu$ ,  $y' = u + xu'$ . 代入上述方程, 得

$$u + xu' = \frac{1}{u} + u \Rightarrow u' = \frac{1}{xu} \Rightarrow udu = \frac{dx}{x}.$$

两边积分

$$\int udu = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{1}{2}u^2 = \ln|x| + C$$

将  $u = \frac{y}{x}$  回代, 得

$$\frac{y^2}{2x^2} = \ln|x| + C \Rightarrow y^2 = 2x^2(\ln|x| + C).$$

练习 10. 求出  $y' - \frac{3y}{x} + \frac{1}{2}x = 0$  的通解。

解这是一阶线性微分方程:

$$y' + \left(-\frac{3}{x}\right)y = -\frac{x}{2}.$$

1. 求解齐次方程

$$y' + \left(-\frac{3}{x}\right)y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = 3\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = 3\ln|x| + C_1 \Rightarrow y = Cx^3.$$

2. 常数变易。设  $y = u(x)x^3$ , 代入原方程得

$$u' \cdot x^3 = -\frac{x}{2} \Rightarrow u = -\int \frac{1}{2x^2} dx \Rightarrow u = \frac{1}{2x} + C.$$

3. 所以原方程通解

$$y = \left(C + \frac{1}{2x}\right)x^3 = Cx^3 + \frac{x^2}{2}.$$

练习 11. 求解微分方程  $\begin{cases} y' + y \cot x = 5e^{\cos x} \\ y(\frac{\pi}{2}) = -4 \end{cases}$ .

解这是一阶线性微分方程:

$$y' + (\cot x)y = 5e^{\cos x}.$$

1. 求解齐次方程

$$y' + (\cot x)y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{\cos x}{\sin x} dx$$

两边积分得

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{\cos x}{\sin x} dx \Rightarrow \ln|y| = -\ln|\sin x| + C_1 \Rightarrow y = \frac{C}{\sin x}$$

2. 常数变易。设  $y = \frac{u(x)}{\sin x}$ , 代入原方程

$$\frac{u'}{\sin x} = 5e^{\cos x} \Rightarrow u = 5 \int e^{\cos x} \sin x dx = -5 \int e^{\cos x} d \cos x = -5e^{\cos x} + C.$$

3. 所以原方程通解

$$y = (-5e^{\cos x} + C) \cdot \frac{1}{\sin x} = \frac{C}{\sin x} - \frac{5e^{\cos x}}{\sin x}.$$

4. 将初始条件代入, 得

$$-4 = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{C}{\sin x} - \frac{5e^{\cos x}}{\sin x} \Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = C - 5 \Rightarrow C = 1.$$

所以

$$y = \frac{1 - 5e^{\cos x}}{\sin x}.$$

**练习 12.** 求微分方程  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x-y} + 2$  的通解。

**解** 令  $u = x - y$ , 即  $y = x - u(x)$ , 代入原方程得:

$$\frac{d}{dx}(x - u) = \frac{1}{u} + 2 \Rightarrow 1 - u' = \frac{1}{u} + 2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{u} - 1 \Rightarrow \frac{u}{1+u} du = -dx$$

这是可分离变量微分方程, 两边积分得:

$$\int \frac{u}{1+u} du = -\int dx \Rightarrow u - \ln|1+u| = -x + C.$$

将  $u = x - y$  回代, 得

$$2x - y - \ln|1 + x - y| = C.$$