第 3 章 *b*：洛必达法则

数学系　　梁卓滨

2019-2020 学年 I

Outline

$\frac{0}{0}$ 型和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的未定式

考虑极限

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)}$$

对以下情况，极限的商公式 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$ 不再成立：

- $\lim f(x) = 0$ 和 $\lim g(x) = 0$ 时，
- $\lim f(x) = \infty$ 和 $\lim g(x) = \infty$ 时，

$\frac{0}{0}$ 型和 $\frac{\infty}{\infty}$型的未定式

考虑极限

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)}$$

对以下情况，极限的商公式 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$ 不再成立：

- $\lim f(x) = 0$ 和 $\lim g(x) = 0$ 时，例如：

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

- $\lim f(x) = \infty$ 和 $\lim g(x) = \infty$ 时，

$\frac{0}{0}$ 型和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的未定式

考虑极限

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)}$$

对以下情况，极限的商公式 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$ 不再成立：

- $\lim f(x) = 0$ 和 $\lim g(x) = 0$ 时，例如：

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

- $\lim f(x) = \infty$ 和 $\lim g(x) = \infty$ 时，例如：

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{e^x}$$

$\frac{0}{0}$ 型和 $\frac{\infty}{\infty}$型的未定式

考虑极限
$$\lim \frac{f(x)}{g(x)}$$

对以下情况，极限的商公式 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$ 不再成立：

- $\lim f(x) = 0$ 和 $\lim g(x) = 0$ 时，例如：
$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$
- $\lim f(x) = \infty$ 和 $\lim g(x) = \infty$ 时，例如：
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3}{e^x}$$

一般地，这样的 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 可能不存在，可能存在，存在的话，极限的值与具体问题有关，因此称为**未定式**.

$\frac{0}{0}$ 型和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的未定式

考虑极限

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)}$$

对以下情况，极限的商公式 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$ 不再成立：

- $\lim f(x) = 0$ 和 $\lim g(x) = 0$ 时，例如：

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \qquad \frac{0}{0}\text{型未定式}$$

- $\lim f(x) = \infty$ 和 $\lim g(x) = \infty$ 时，例如：

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3}{e^x} \qquad \frac{\infty}{\infty}\text{型未定式}$$

一般地，这样的 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 可能不存在，可能存在，存在的话，极限的值与具体问题有关，因此称为**未定式**.

$\frac{0}{0}$ 型和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的未定式

考虑极限

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)}$$

对以下情况，极限的商公式 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$ 不再成立：

- $\lim f(x) = 0$ 和 $\lim g(x) = 0$ 时，例如：

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \qquad \frac{0}{0}\text{型未定式}$$

- $\lim f(x) = \infty$ 和 $\lim g(x) = \infty$ 时，例如：

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{e^x} \qquad \frac{\infty}{\infty}\text{型未定式}$$

一般地，这样的 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 可能不存在，可能存在，存在的话，极限的值与具体问题有关，因此称为**未定式**.

求解这样一类问题的有力工具：**洛必达法则**

洛必达法则

定理 假设 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 是 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式，则（在一定条件下）成立：

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

洛必达法则

定理 假设 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 是 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式，则（在一定条件下）成立：

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

例 1 计算 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$

洛必达法则

定理 假设 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 是 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式，则（在一定条件下）成立：

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

例 1 计算 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$

解 分子、分母极限均为零，故为 $\frac{0}{0}$ 型未定式，利用洛必达法则：

洛必达法则

定理 假设 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 是 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式，则（在一定条件下）成立：

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

例 1 计算 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$

解 分子、分母极限均为零，故为 $\frac{0}{0}$ 型未定式，利用洛必达法则：

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^3-3x+2)'}{(x^3-x^2-x+1)'}$$

洛必达法则

定理 假设 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 是 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式，则（在一定条件下）成立：

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

例 1 计算 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$

解 分子、分母极限均为零，故为 $\frac{0}{0}$ 型未定式，利用洛必达法则：

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^3-3x+2)'}{(x^3-x^2-x+1)'} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}$$

洛必达法则

定理 假设 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 是 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式，则（在一定条件下）成立：

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

例 1 计算 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$

解 分子、分母极限均为零，故为 $\frac{0}{0}$ 型未定式，利用洛必达法则：

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^3-3x+2)'}{(x^3-x^2-x+1)'} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(3x^2-3)'}{(3x^2-2x-1)'}$$

洛必达法则

定理 假设 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 是 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式，则（在一定条件下）成立：

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

例 1 计算 $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$

解 分子、分母极限均为零，故为 $\frac{0}{0}$ 型未定式，利用洛必达法则：

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x^3-3x+2)'}{(x^3-x^2-x+1)'} = \lim_{x \to 1} \frac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(3x^2-3)'}{(3x^2-2x-1)'} = \lim_{x \to 1} \frac{6x}{6x-2}$$

洛必达法则

定理 假设 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 是 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式，则（在一定条件下）成立：

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

例 1 计算 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$

解 分子、分母极限均为零，故为 $\frac{0}{0}$ 型未定式，利用洛必达法则：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x^3-3x+2)'}{(x^3-x^2-x+1)'} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2-3}{3x^2-2x-1} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{(3x^2-3)'}{(3x^2-2x-1)'} = \lim_{x\to 1} \frac{6x}{6x-2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

例 2 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$，$(b\neq 0)$；**(2)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

例 2 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$，$(b\neq 0)$；**(2)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$

解 **(1)** 为 $\frac{0}{0}$ 型未定式，利用洛必达法则：

例 2 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$，$(b\neq 0)$；**(2)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

解 **(1)** 为 $\frac{0}{0}$ 型未定式，利用洛必达法则：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin ax)'}{(\sin bx)'}$$

例 2 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$，$(b\neq0)$；**(2)** $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

解 (1) 为 $\frac{0}{0}$ 型未定式，利用洛必达法则：

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim_{x\to0}\frac{(\sin ax)'}{(\sin bx)'}=\lim_{x\to0}\frac{a\cos ax}{b\cos bx}$$

例 2 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$，$(b\neq0)$；**(2)** $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

解 (1) 为 $\frac{0}{0}$ 型未定式，利用洛必达法则：

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim_{x\to0}\frac{(\sin ax)'}{(\sin bx)'}=\lim_{x\to0}\frac{a\cos ax}{b\cos bx}=\frac{a}{b}.$$

例 2 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$，$(b\neq 0)$；**(2)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

解 **(1)** 为 $\frac{0}{0}$ 型未定式，利用洛必达法则：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin ax)'}{(\sin bx)'}=\lim_{x\to 0}\frac{a\cos ax}{b\cos bx}=\frac{a}{b}.$$

(2) 为 $\frac{0}{0}$ 型未定式，利用洛必达法则：

例 2 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$，$(b\neq 0)$；**(2)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

解 **(1)** 为 $\frac{0}{0}$ 型未定式，利用洛必达法则：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin ax)'}{(\sin bx)'}=\lim_{x\to 0}\frac{a\cos ax}{b\cos bx}=\frac{a}{b}.$$

(2) 为 $\frac{0}{0}$ 型未定式，利用洛必达法则：

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}$$

例 2 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$，$(b\neq 0)$；**(2)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

解 **(1)** 为 $\frac{0}{0}$ 型未定式，利用洛必达法则：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin ax)'}{(\sin bx)'}=\lim_{x\to 0}\frac{a\cos ax}{b\cos bx}=\frac{a}{b}.$$

(2) 为 $\frac{0}{0}$ 型未定式，利用洛必达法则：

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$$

例 2 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$，$(b\neq 0)$；**(2)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

解 **(1)** 为 $\frac{0}{0}$ 型未定式，利用洛必达法则：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin ax)'}{(\sin bx)'}=\lim_{x\to 0}\frac{a\cos ax}{b\cos bx}=\frac{a}{b}.$$

(2) 为 $\frac{0}{0}$ 型未定式，利用洛必达法则：

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(3x^2)'}$$

例 2 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$，$(b\neq 0)$；**(2)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

解 **(1)** 为 $\frac{0}{0}$ 型未定式，利用洛必达法则：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin ax)'}{(\sin bx)'}=\lim_{x\to 0}\frac{a\cos ax}{b\cos bx}=\frac{a}{b}.$$

(2) 为 $\frac{0}{0}$ 型未定式，利用洛必达法则：

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(3x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}$$

例 2 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$，$(b\neq 0)$；**(2)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

解 **(1)** 为 $\frac{0}{0}$ 型未定式，利用洛必达法则：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin ax)'}{(\sin bx)'}=\lim_{x\to 0}\frac{a\cos ax}{b\cos bx}=\frac{a}{b}.$$

(2) 为 $\frac{0}{0}$ 型未定式，利用洛必达法则：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}&=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(3x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

例 2 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$，$(b\neq 0)$；**(2)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

解 **(1)** 为 $\frac{0}{0}$ 型未定式，利用洛必达法则：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin ax)'}{(\sin bx)'}=\lim_{x\to 0}\frac{a\cos ax}{b\cos bx}=\frac{a}{b}.$$

(2) 为 $\frac{0}{0}$ 型未定式，利用洛必达法则：

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(3x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}$$

（利用洛必达法则：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{x'}$ ）

例 2 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$，$(b\neq 0)$；**(2)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

解 **(1)** 为 $\frac{0}{0}$ 型未定式，利用洛必达法则：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin ax)'}{(\sin bx)'}=\lim_{x\to 0}\frac{a\cos ax}{b\cos bx}=\frac{a}{b}.$$

(2) 为 $\frac{0}{0}$ 型未定式，利用洛必达法则：

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(3x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}$$

(利用洛必达法则：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{x'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$)

例 3 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$; **(2)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x}$

例 3 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$; **(2)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x}$

解 **(1)** 为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式，利用洛必达法则：

例 3 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$; **(2)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x}$

解 **(1)** 为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式，利用洛必达法则：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}$$

例 3 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}$; **(2)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3}{e^x}$

解 **(1)** 为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式，利用洛必达法则：

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1}$$

例 3 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$; **(2)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x}$

解 **(1)** 为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式，利用洛必达法则：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0.$$

例 3 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$；**(2)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x}$

解 (1) 为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式，利用洛必达法则：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0.$$

(2) 为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式，利用洛必达法则：

例 3 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$; **(2)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x}$

解 **(1)** 为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式，利用洛必达法则：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0.$$

(2) 为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式，利用洛必达法则：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^3)'}{(e^x)'}$$

例 3 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$; **(2)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x}$

解 **(1)** 为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式，利用洛必达法则：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0.$$

(2) 为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式，利用洛必达法则：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^3)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{e^x}$$

例 3 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$；**(2)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x}$

解 **(1)** 为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式，利用洛必达法则：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0.$$

(2) 为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式，利用洛必达法则：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^3)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{e^x}$$

例 3 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$; **(2)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x}$

解 **(1)** 为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式，利用洛必达法则：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0.$$

(2) 为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式，利用洛必达法则：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^3)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{e^x}$$

例 3 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$; **(2)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x}$

解 **(1)** 为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式，利用洛必达法则：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0.$$

(2) 为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式，利用洛必达法则：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^3)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{e^x}=0.$$

例 3 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$; **(2)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x}$

解 **(1)** 为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式，利用洛必达法则：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0.$$

(2) 为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式，利用洛必达法则：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^3)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{e^x}=0.$$

注 1 事实上 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$.

例 3 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$; **(2)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x}$

解 **(1)** 为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式，利用洛必达法则：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0.$$

(2) 为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式，利用洛必达法则：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^3)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{e^x}=0.$$

注 1 事实上 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=0.$

注 2 尽管 x^n，$\ln x$，e^x 都是无穷大（当 $x\to+\infty$），但趋于 $+\infty$ 的速度不一样：e^x 最快，x^n 次之，$\ln x$ 最慢.

其它类型未定式

- $0 \cdot \infty$ 型未定式，
- $\infty - \infty$ 型不定式，
- 0^0 型不定式，
- ∞^0 型不定式，
- 1^∞ 等等

其它类型未定式

- $0 \cdot \infty$ 型未定式，例如
$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)x, \quad \lim_{x \to 0^+} x \ln x$$
- $\infty - \infty$ 型不定式，
- 0^0 型不定式，
- ∞^0 型不定式，
- 1^∞ 等等

其它类型未定式

- $0 \cdot \infty$ 型未定式，例如

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)x, \quad \lim_{x \to 0^+} x \ln x$$

- $\infty - \infty$ 型不定式，例如

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x), \quad \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$$

- 0^0 型不定式，

- ∞^0 型不定式，

- 1^∞ 等等

其它类型未定式

- $0 \cdot \infty$ 型未定式，例如

$$\lim_{x\to+\infty}(\frac{\pi}{2}-\arctan x)x, \quad \lim_{x\to 0^+} x\ln x$$

- $\infty-\infty$ 型不定式，例如

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x), \quad \lim_{x\to 0}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x})$$

- 0^0 型不定式，例如

$$\lim_{x\to 0^+} x^x$$

- ∞^0 型不定式，

- 1^∞ 等等

其它类型未定式

- $0\cdot\infty$ 型未定式，例如
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)x,\qquad \lim_{x\to 0^+} x\ln x$$
- $\infty-\infty$ 型不定式，例如
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x),\qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$$
- 0^0 型不定式，例如
$$\lim_{x\to 0^+} x^x$$
- ∞^0 型不定式，例如
$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$$
- 1^∞ 等等

其它类型未定式

- $0\cdot\infty$ 型未定式，例如

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)x,\qquad \lim_{x\to 0^+} x\ln x$$

- $\infty-\infty$ 型不定式，例如

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x),\qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$$

- 0^0 型不定式，例如

$$\lim_{x\to 0^+} x^x$$

- ∞^0 型不定式，例如

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$$

- 1^∞ 等等

把上述不定式转化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的未定式，再用洛必达法则计算

例 4 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{\pi}{2}-\arctan x)x$; **(2)** $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$

例 4 计算极限 **(1)** $\lim_{x\to+\infty}(\frac{\pi}{2}-\arctan x)x$; **(2)** $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$

解 (1) 为 $0\cdot\infty$ 型未定式:

例 4 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{\pi}{2}-\arctan x)x$; **(2)** $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x$

解 **(1)** 为 $0\cdot\infty$ 型未定式:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)x$$

例 4 计算极限 **(1)** $\lim_{x\to+\infty}(\frac{\pi}{2}-\arctan x)x$; **(2)** $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$

解 **(1)** 为 $0\cdot\infty$ 型未定式:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}$$

例 4 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{\pi}{2}-\arctan x)x$；**(2)** $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$

解 **(1)** 为 $0\cdot\infty$ 型未定式：

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}\qquad \frac{0}{0}\text{型未定式}$$

例 4 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{\pi}{2}-\arctan x)x$; **(2)** $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$

解 **(1)** 为 $0\cdot\infty$ 型未定式:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}\qquad \frac{0}{0}\text{型未定式}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}$$

例 4 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{\pi}{2}-\arctan x)x$; **(2)** $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$

解 **(1)** 为 $0\cdot\infty$ 型未定式:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}\qquad \frac{0}{0}\text{型未定式}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}$$

例 4 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{\pi}{2}-\arctan x)x$; **(2)** $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$

解 **(1)** 为 $0\cdot\infty$ 型未定式:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}$$

$\frac{0}{0}$型未定式

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}$$

例 4 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{\pi}{2}-\arctan x)x$; **(2)** $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$

解 **(1)** 为 $0\cdot\infty$ 型未定式:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}\qquad \frac{0}{0}\text{型未定式}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}=1.$$

例 4 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{\pi}{2}-\arctan x)x$; **(2)** $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$

解 **(1)** 为 $0\cdot\infty$ 型未定式:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}} \qquad \frac{0}{0}\text{型未定式}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}=1.$$

(2) 为 $0\cdot\infty$ 型未定式:

例 4 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{\pi}{2}-\arctan x)x$; **(2)** $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x$

解 **(1)** 为 $0\cdot\infty$ 型未定式:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}\qquad \frac{0}{0}\text{型未定式}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}=1.$$

(2) 为 $0\cdot\infty$ 型未定式:

$$\lim_{x\to0^+} x\ln x$$

例 4 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{\pi}{2}-\arctan x)x$; **(2)** $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$

解 **(1)** 为 $0\cdot\infty$ 型未定式:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}\qquad \frac{0}{0}\text{型未定式}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}=1.$$

(2) 为 $0\cdot\infty$ 型未定式:

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x}$$

例 4 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{\pi}{2}-\arctan x)x$; **(2)** $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$

解 **(1)** 为 $0\cdot\infty$ 型未定式:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}\qquad \frac{0}{0}\text{型未定式}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}=1.$$

(2) 为 $0\cdot\infty$ 型未定式:

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\frac{1}{\ln x}}$$

例 4 计算极限 **(1)** $\lim_{x\to+\infty}(\frac{\pi}{2}-\arctan x)x$; **(2)** $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$

解 **(1)** 为 $0\cdot\infty$ 型未定式:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}\qquad \frac{0}{0}\text{型未定式}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}=1.$$

(2) 为 $0\cdot\infty$ 型未定式:

$(\frac{\infty}{\infty}$型未定式$)$

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\frac{1}{\ln x}}$$

$(\frac{0}{0}$型未定式$)$

例 4 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{\pi}{2}-\arctan x)x$; **(2)** $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$

解 **(1)** 为 $0\cdot\infty$ 型未定式:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}$$

$\frac{0}{0}$型未定式

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}=1.$$

(2) 为 $0\cdot\infty$ 型未定式:

($\frac{\infty}{\infty}$型未定式)

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\frac{1}{\ln x}}$$

($\frac{0}{0}$型未定式)

例 4 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{\pi}{2}-\arctan x)x$; **(2)** $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$

解 **(1)** 为 $0\cdot\infty$ 型未定式:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}$$

$\frac{0}{0}$型未定式

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}=1.$$

(2) 为 $0\cdot\infty$ 型未定式:

($\frac{\infty}{\infty}$型未定式)

$$\lim_{x\to 0^+}x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}-x$$

$$\lim_{x\to 0^+}x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\frac{1}{\ln x}}$$

($\frac{0}{0}$型未定式)

例 4 计算极限 **(1)** $\lim_{x\to+\infty}(\frac{\pi}{2}-\arctan x)x$; **(2)** $\lim_{x\to0^+} x\ln x$

解 **(1)** 为 $0\cdot\infty$ 型未定式:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}$$

$\frac{0}{0}$型未定式

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}=1.$$

(2) 为 $0\cdot\infty$ 型未定式:

($\frac{\infty}{\infty}$型未定式)

$$\lim_{x\to0^+}x\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{1/x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}-x=0.$$

$$\lim_{x\to0^+}x\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{\frac{1}{\ln x}}$$

($\frac{0}{0}$型未定式)

例 4 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{\pi}{2}-\arctan x)x$; **(2)** $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$

解 **(1)** 为 $0\cdot\infty$ 型未定式:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}$$

$\frac{0}{0}$型未定式

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}=1.$$

(2) 为 $0\cdot\infty$ 型未定式:

$(\frac{\infty}{\infty}$型未定式$)$

$$\lim_{x\to 0^+}x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}-x=0.$$

$$\lim_{x\to 0^+}x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\frac{1}{\ln x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{-\frac{1}{\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x}}$$

$(\frac{0}{0}$型未定式$)$

例 4 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{\pi}{2}-\arctan x)x$; **(2)** $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x$

解 **(1)** 为 $0\cdot\infty$ 型未定式:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}\qquad \frac{0}{0}\text{型未定式}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}=1.$$

(2) 为 $0\cdot\infty$ 型未定式: $(\frac{\infty}{\infty}\text{型未定式})$

$$\lim_{x\to0^+}x\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{1/x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}-x=0.$$

$$\lim_{x\to0^+}x\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{\frac{1}{\ln x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{-\frac{1}{\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x}}=\cdots(\text{行不通})$$

$(\frac{0}{0}\text{型未定式})$

例 5 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$; **(2)** $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x})$

例 5 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$; **(2)** $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x})$

解 (1)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$$

例 5 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$; **(2)** $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x})$

解 **(1)** 为 $\infty-\infty$ 型未定式:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$$

例 5 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$; **(2)** $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x})$

解 (1) 为 $\infty-\infty$ 型未定式:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}$$

例 5 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$; **(2)** $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x})$

解 **(1)** 为 $\infty-\infty$ 型未定式: ($\frac{0}{0}$型未定式)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}$$

例 5 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$; **(2)** $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x})$

解 **(1)** 为 $\infty-\infty$ 型未定式: ($\frac{0}{0}$型未定式)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x}$$

例 5 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$; **(2)** $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x})$

解 **(1)** 为 $\infty-\infty$ 型未定式: ($\frac{0}{0}$型未定式)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x}=0.$$

例 5 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x - \tan x)$; **(2)** $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x})$

解 **(1)** 为 $\infty - \infty$ 型未定式: ($\frac{0}{0}$型未定式)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x - \tan x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-\sin x} = 0.$$

(2)

$$\lim_{x\to 0}(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x})$$

例 5 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$; **(2)** $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x})$

解 **(1)** 为 $\infty-\infty$ 型未定式: $(\frac{0}{0}$型未定式$)$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x}=0.$$

(2) 为 $\infty-\infty$ 型未定式:

$$\lim_{x\to 0}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x})$$

例 5 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$; **(2)** $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x})$

解 **(1)** 为 $\infty-\infty$ 型未定式: ($\frac{0}{0}$型未定式)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x}=0.$$

(2) 为 $\infty-\infty$ 型未定式:

$$\lim_{x\to 0}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x})=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}$$

例 5 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$; **(2)** $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x})$

解 (1) 为 $\infty-\infty$ 型未定式: ($\frac{0}{0}$型未定式)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x}=0.$$

(2) 为 $\infty-\infty$ 型未定式:

$$\lim_{x\to 0}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x})=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2}$$

例 5 计算极限 **(1)** $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$; **(2)** $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x})$

解 **(1)** 为 $\infty-\infty$ 型未定式: ($\frac{0}{0}$型未定式)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x}=0.$$

(2) 为 $\infty-\infty$ 型未定式: ($\frac{0}{0}$型未定式)

$$\lim_{x\to 0}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x})=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2}$$

例 5 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$; **(2)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$

解 **(1)** 为 $\infty-\infty$ 型未定式: $\left(\frac{0}{0}\text{型未定式}\right)$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x}=0.$$

(2) 为 $\infty-\infty$ 型未定式: $\left(\frac{0}{0}\text{型未定式}\right)$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x}$$

例 5 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$; **(2)** $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x})$

解 **(1)** 为 $\infty-\infty$ 型未定式: ($\frac{0}{0}$型未定式)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x}=0.$$

(2) 为 $\infty-\infty$ 型未定式: ($\frac{0}{0}$型未定式)

$$\lim_{x\to 0}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x})=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2}$$

例 5 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$; **(2)** $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x})$

解 **(1)** 为 $\infty-\infty$ 型未定式: ($\frac{0}{0}$型未定式)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x}=0.$$

(2) 为 $\infty-\infty$ 型未定式: ($\frac{0}{0}$型未定式)

$$\lim_{x\to 0}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x})=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2}=0.$$

例 5 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$; **(2)** $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x})$

解 **(1)** 为 $\infty-\infty$ 型未定式: ($\frac{0}{0}$型未定式)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x}=0.$$

(2) 为 $\infty-\infty$ 型未定式: ($\frac{0}{0}$型未定式)

$$\lim_{x\to 0}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x})=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2}=0.$$

例 6 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x$; **(2)** $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}$

例 6 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x$; **(2)** $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$

解 (1)

$$\lim_{x \to 0^+} x^x =$$

例 6 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x$; **(2)** $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$

解 **(1)** 为 0^0 型未定式:

$$\lim_{x \to 0^+} x^x =$$

例 6 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$; **(2)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$

解 **(1)** 为 0^0 型未定式:

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln x^x}$$

例 6 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$; **(2)** $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$

解 **(1)** 为 0^0 型未定式：

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln x^x} = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x}$$

例 6 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$; **(2)** $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$

解 **(1)** 为 0^0 型未定式:

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln x^x} = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x}$$

例 6 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$; **(2)** $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$

解 **(1)** 为 0^0 型未定式:

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln x^x} = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x} = e^0 = 1$$

例 6 计算极限 **(1)** $\lim_{x\to 0^+} x^x$; **(2)** $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$

解 **(1)** 为 0^0 型未定式:

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln x^x} = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x} = e^0 = 1$$

(2)

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$$

例 6 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$; **(2)** $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$

解 **(1)** 为 0^0 型未定式:

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln x^x} = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x} = e^0 = 1$$

(2) 为 ∞^0 型未定式:

$$\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$$

例 6 计算极限 **(1)** $\lim_{x\to 0^+} x^x$; **(2)** $\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$

解 **(1)** 为 0^0 型未定式:

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln x^x} = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x} = e^0 = 1$$

(2) 为 ∞^0 型未定式:

$$\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty} e^{\ln x^{\frac{1}{x}}}$$

例 6 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$; **(2)** $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$

解 **(1)** 为 0^0 型未定式:

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln x^x} = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x} = e^0 = 1$$

(2) 为 ∞^0 型未定式:

$$\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty} e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x}$$

例 6 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$; **(2)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$

解 **(1)** 为 0^0 型未定式:

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln x^x} = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x} = e^0 = 1$$

(2) 为 ∞^0 型未定式:

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\ln x}$$

例 6 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to0^+} x^x$; **(2)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$

解 **(1)** 为 0^0 型未定式:

$$\lim_{x\to0^+} x^x = \lim_{x\to0^+} e^{\ln x^x} = \lim_{x\to0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x} = e^0 = 1$$

(2) 为 ∞^0 型未定式:

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\ln x} = e^0 = 1$$

例 6 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to0^+} x^x$; **(2)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$

解 **(1)** 为 0^0 型未定式:

$$\lim_{x\to0^+} x^x = \lim_{x\to0^+} e^{\ln x^x} = \lim_{x\to0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x} = e^0 = 1$$

(2) 为 ∞^0 型未定式:

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\ln x} = e^0 = 1$$

例 7 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$

例 6 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$; **(2)** $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$

解 **(1)** 为 0^0 型未定式:

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln x^x} = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x} = e^0 = 1$$

(2) 为 ∞^0 型未定式:

$$\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty} e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{x}\ln x} = e^0 = 1$$

例 7 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$

验证 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\ln(1+\frac{1}{x})^x}$

例 6 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$; **(2)** $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$

解 **(1)** 为 0^0 型未定式:

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln x^x} = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x} = e^0 = 1$$

(2) 为 ∞^0 型未定式:

$$\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty} e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x}\ln x} = e^0 = 1$$

例 7 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$

验证 $$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim_{x\to\infty} e^{\ln(1+\frac{1}{x})^x} = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}$$

例 6 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$; **(2)** $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$

解 **(1)** 为 0^0 型未定式:

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln x^x} = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x} = e^0 = 1$$

(2) 为 ∞^0 型未定式:

$$\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty} e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x}\ln x} = e^0 = 1$$

例 7 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$

验证 $$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim_{x\to\infty} e^{\ln(1+\frac{1}{x})^x} = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln(1+\frac{1}{x})} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\ln(1+\frac{1}{x})}$$

例 6 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$; **(2)** $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$

解 **(1)** 为 0^0 型未定式:

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln x^x} = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x} = e^0 = 1$$

(2) 为 ∞^0 型未定式:

$$\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty} e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x}\ln x} = e^0 = 1$$

例 7 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$

验证 $$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim_{x\to\infty} e^{\ln(1+\frac{1}{x})^x} = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln(1+\frac{1}{x})} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\ln(1+\frac{1}{x})}$$

$$= e^{\lim\limits_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t}}$$

例 6 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$; **(2)** $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$

解 **(1)** 为 0^0 型未定式:

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln x^x} = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x} = e^0 = 1$$

(2) 为 ∞^0 型未定式:

$$\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty} e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x}\ln x} = e^0 = 1$$

例 7 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$

验证 $$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim_{x\to\infty} e^{\ln(1+\frac{1}{x})^x} = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln(1+\frac{1}{x})} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\ln(1+\frac{1}{x})}$$

$$= e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}} = e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\frac{1}{1+t}}{1}}$$

例 6 计算极限 **(1)** $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$; **(2)** $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$

解 **(1)** 为 0^0 型未定式:

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln x^x} = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x} = e^0 = 1$$

(2) 为 ∞^0 型未定式:

$$\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty} e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x}\ln x} = e^0 = 1$$

例 7 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$

验证 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\ln(1+\frac{1}{x})^x} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{x\ln(1+\frac{1}{x})} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\ln(1+\frac{1}{x})}$

$$= e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}} = e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\frac{1}{1+t}}{1}} = e$$

暨南大学 JINAN UNIVERSITY

例 8 分析下面的做法正确与否?

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} \overset{\text{洛必达法则}}{=\!=\!=\!=} \lim_{x\to\infty}\frac{(1)'}{(x)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{0}{1} = 0$$

例 8 分析下面的做法正确与否?

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} \xlongequal{\text{洛必达法则}} \lim_{x\to\infty}\frac{(1)'}{(x)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{0}{1} = 0$$

这是 **错** 的. 原因是 $\frac{1}{x}$ 不是未定式，所以不能用洛必达法则.