

## 第 06 周作业

练习 1. 令  $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ ,  $v = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ 。证明  $Av = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \theta) \\ \sin(\alpha + \theta) \end{pmatrix}$ , 并计算  $A^n$ 。

练习 2. 求满足  $A^2 = O$  的所有  $2 \times 2$  矩阵  $A$ 。

解  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$  此处  $b$  与  $c$  任意,  $a$  满足  $a^2 = -bc$ 。

练习 3. 设  $A$  为  $n$  阶方阵, 分别解答:

1. 假设  $|A| = -2$ , 计算  $|2|A|A^T|$ 。
2. 假设  $AA^T = I_n$  且  $|A| < 0$ , 计算  $|A|$ 。

**练习 4.** 判断 2 阶方阵  $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  是否可逆, 若可逆, 求出逆矩阵。

**练习 5.** 判断 3 阶方阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$  是否可逆, 若可逆, 求出逆矩阵。

**练习 6.** 3 阶方阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & k \\ 1 & 4 & k^2 \end{pmatrix}$  可逆时,  $k$  满足什么条件?

**练习 7.** 设  $M_n$  是  $n$  阶方阵,  $n \geq 2$ , 全部元素按列次序为  $1, 2, 3, \dots, n^2$ 。例如

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}.$$

问当  $n$  为何值时,  $M_n$  可逆。

**练习 8.** 假设  $n$  阶方阵  $A$  满足  $A^2 - 3A - 5I = O$ , 证明  $A + I$  可逆, 并求  $(A + I)^{-1}$ 。

**练习 9.** 设  $A$  为 4 阶方阵, 满足  $|A| = \frac{1}{2}$ , 求  $|(3A)^{-1} - 2A^*|$  的值。

**练习 10.** 设  $A, B$  为  $n$  阶对称方阵, 证明方阵  $AB + BA$  也是对称。