第 05 周作业解答

练习 1. 填空

函数	定义域	类型（填：闭集/开集，有界集/无界集，连通/不连通）
$z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$	$D=\{(x,y)\,\vert\, y\geq 0,\, x\geq 0\text{且}x^2\geq y\}$	闭集，无界集，连通
$z=\frac{1}{\sqrt{x+y}}+\frac{1}{\sqrt{x-y}}$	$D=\{(x,y)\,\vert\, x+y>0\text{且}x-y>0\}$	开集，无界集，连通

并分别画出上述两定义域 D，在图上标示哪部分是内点，哪部分是外点，哪部分是边界。

（图省略）

练习 2. 画出二元函数 $z=2-x^2-y^2$ 的函数图形，其中函数定义域为 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leq 1\}$。

解这是旋转面，由 xoz 面上的抛物线 $z=2-x^2$（$-1\leq x\leq 1$）绕 z 轴旋转一周得到。(图形省略，可利用在线画图器)

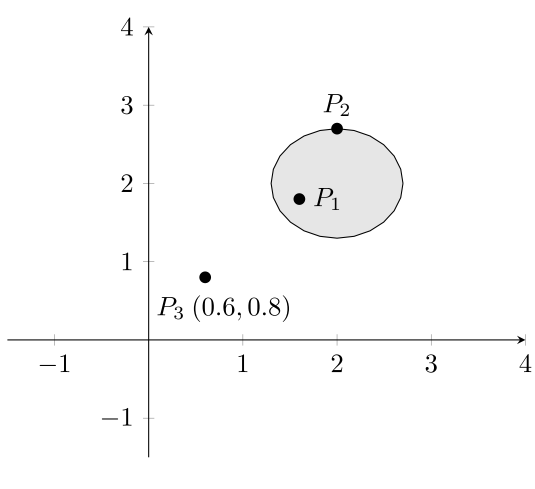
练习 3. 设 E 是平面上一个点集，则平面上任意一点 P 只能是一下三种的一种：(1) E 的内点；(2) E 的外点；(3) E 的边界点。现假设点 Q 是 E 的聚点，则可以证明 Q 或者为 E 的内点，或者为 E 的边界点；也就是

$$\{\text{全体聚点}\}\subset\{\text{内点}\}\cup\{\text{边界点}\}$$

但一般而言，$\{$全体聚点$\}$ 未必与并集 $\{$内点$\}\cup\{$边界点$\}$ 相同。

以下是一个例子

假设点集 $E=\{(x,y)\,|\,(x-2)^2+(y-2)^2\leq 0.7^2\}\cup\{(0.6,0.8)\}$（如下图）。填写（请填上 ✓ 或 ×）



	内点	边界点	聚点
$P_1(1.6\,1.8)$	✓	×	✓
$P_2(2,\,2.7)$	×	✓	✓
$P_3(0.6,\,0.8)$	×	✓	×

练习 4. 证明下列极限不存在

1. $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

2. $\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^4}$

解 (1) 设 $\delta>0$，取点 $P(0,\,\frac{\delta}{2})$，$Q(\frac{\delta}{2},\,\frac{\delta}{2})$。则点 P,Q 都在原点 $(0,\,0)$ 去心 δ 邻域中，且

$$f(P)=f(0,\,\frac{\delta}{2})=\frac{0-\frac{\delta}{2}}{\sqrt{0^2+(\frac{\delta}{2})^2}}=-1,\qquad f(Q)=f(\frac{\delta}{2},\,\frac{\delta}{2})=\frac{\frac{\delta}{2}-\frac{\delta}{2}}{\sqrt{(\frac{\delta}{2})^2+(\frac{\delta}{2})^2}}=0$$

这说明：即便令 $\delta\to0$，点 $(0,\,0)$ 去心 δ 邻域中的点的函数值也并不会趋于相同，可知极限一定不存在。

(1) 设 $\delta\in(0,\,1)$，取点 $P(0,\,\frac{\delta}{2})$，$Q(\frac{\delta^2}{4},\,\frac{\delta}{2})$。则点 P,Q 都在原点 $(0,\,0)$ 去心 δ 邻域中，且

$$f(P)=f(0,\,\frac{\delta}{2})=0,\qquad f(Q)=f(\frac{\delta^2}{2},\,\frac{\delta}{2})=\frac{\frac{\delta^2}{4}\cdot(\frac{\delta}{2})^2}{\sqrt{(\frac{\delta^2}{4})^2+(\frac{\delta}{2})^4}}=\frac{1}{2}$$

这说明：即便令 $\delta\to0$，点 $(0,\,0)$ 去心 δ 邻域中的点的函数值也并不会趋于相同，可知极限一定不存在。

练习 5. 求下列函数的偏导数

$$(1)\quad s=\frac{u^2+v^2}{uv};\qquad(2)\quad z=\sin(xy)+\cos^2(xy);\qquad(3)\quad z=(1+xy)^y;\qquad(4)\quad u=\arctan(x-y)^z.$$

解 (1)

$$\begin{aligned}\frac{\partial s}{\partial u}&=\left(\frac{u^2+v^2}{uv}\right)_u=\frac{(u^2+v^2)_u\cdot uv-(u^2+v^2)\cdot(uv)_u}{(uv)^2}=\frac{2u\cdot uv-(u^2+v^2)\cdot v}{u^2v^2}=\frac{u^2v-v^3}{u^2v^2},\\ \frac{\partial s}{\partial v}&=\left(\frac{u^2+v^2}{uv}\right)_v=\frac{(u^2+v^2)_v\cdot uv-(u^2+v^2)\cdot(uv)_v}{(uv)^2}=\frac{2v\cdot uv-(u^2+v^2)\cdot u}{u^2v^2}=\frac{uv^2-u^3}{u^2v^2}.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=y\cos(xy)+2\cos(xy)\cdot(-\sin(xy))\cdot y=y\cos(xy)-2y\cos(xy)\sin(xy),\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=x\cos(xy)+2\cos(xy)\cdot(-\sin(xy))\cdot x=x\cos(xy)-2x\cos(xy)\sin(xy).\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=[(1+xy)^y]_x=y(1+xy)^{y-1}\cdot y=y^2(1+xy)^{y-1},\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=[(1+xy)^y]_y=\ln(1+xy)\cdot(1+xy)^y+y(1+xy)^{y-1}\cdot x=(1+xy)^y\left[\ln(1+xy)+\frac{xy}{1+xy}\right]\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=\frac{1}{1+(x-y)^{2z}}\cdot[(x-y)^z]_x=\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}},\\ \frac{\partial u}{\partial y}&=\frac{1}{1+(x-y)^{2z}}\cdot[(x-y)^z]_y=\frac{-z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}},\\ \frac{\partial u}{\partial z}&=\frac{1}{1+(x-y)^{2z}}\cdot[(x-y)^z]_z=\frac{(x-y)^z\ln(x-y)}{1+(x-y)^{2z}}.\end{aligned}$$

练习 6. 现在设 $f(x,\,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$，计算 $f_x(x,\,1)$。

解

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,\,1)=\frac{d}{dx}\left[z(x,\,1)\right]=\frac{d}{dx}\left[x\right]=1.$$

练习 7. 设 $f(x,\,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,\,y)\neq(0,\,0)\\ 0, & (x,\,y)=(0,\,0)\end{cases}$. 求 $\frac{\partial f}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial y}$。

解当 $(x,\,y)\neq(0,\,0)$ 时,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=\left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right)_x=\frac{2xy(x^2+y^2)-x^2y\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2},\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=\left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right)_y=\frac{x^2(x^2+y^2)-x^2y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}.\end{aligned}$$

当 $(x,\,y)=(0,\,0)$ 时,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,\,0)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,\,0)-f(0,\,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{(\Delta x)^2\cdot 0}{(\Delta x)^2+0^2}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0,\\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,\,0)&=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\,\Delta y)-f(0,\,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\frac{0\cdot(\Delta y)^2}{0^2+(\Delta y)^2}-0}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y}=0.\end{aligned}$$

所以

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{cases}\frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}, & (x,\,y)\neq(0,\,0)\\ 0, & (x,\,y)=(0,\,0)\end{cases},\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\begin{cases}\frac{x^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}, & (x,\,y)\neq(0,\,0)\\ 0, & (x,\,y)=(0,\,0)\end{cases}.$$

练习 8. 求下列函数的所有二阶偏导数

$$(1)\quad z=\arctan\frac{y}{x};\qquad (2)\quad z=y^x.$$

解 (1)

$$\begin{aligned}z_x&=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)_x=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2},\\ z_y&=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)_y=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2},\end{aligned}$$

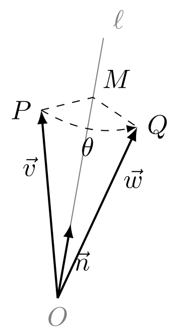
$$\begin{aligned}z_{xx}&=\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)_x=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\\ z_{xy}&=\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)_y=-\frac{(x^2+y^2)-2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2},\\ z_{yx}&=\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)_x=\frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2},\\ z_{yy}&=\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)_y=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.\end{aligned}$$

(2)

$$
\begin{aligned}
z_x &= (y^x)_x = y^x \ln y, \\
z_y &= (y^x)_y = xy^{x-1}, \\
z_{xx} &= (y^x \ln y)_x = y^x (\ln y)^2, \\
z_{xy} &= (y^x \ln y)_y = xy^{x-1} \ln y + y^{x-1} = y^{x-1}(1 + x \ln y), \\
z_{yx} &= (xy^{x-1})_x = y^{x-1} + xy^{x-1} \ln y = y^{x-1}(1 + x \ln y), \\
z_{yy} &= (xy^{x-1})_y = x(x-1)y^{x-2}.
\end{aligned}
$$

下面是附加题，关于空间中的旋转，试利用前一章的知识求解。做出来的同学下周请交上来。

练习 9. 如图，设 $\vec{n}$ 是空间中一单位向量，求向量 $\vec{v}$ 绕 $\vec{n}$ 转 θ 角度（按右手法则方向）角度所得的向量 $\vec{w}$。



提示：1. 求 $\vec{v}$ 在 ℓ 上的投影向量 $\overrightarrow{OM}$，然后求出 $\overrightarrow{MP}$。2. 要求 $\vec{w}$，只需求出 $\overrightarrow{MQ}$。3. 设 $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ 为单位向量，$\overrightarrow{e_1}$ 与 $\overrightarrow{MP}$ 同向，$\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \vec{n}$ 两两垂直且符合右手法则，求出 $\overrightarrow{e_2}$。4. $\overrightarrow{e_1}$ 绕 $\vec{n}$ 转 θ 角度所得向量是 $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ 的线性组合，求出此向量。

解 $\overrightarrow{OM} = (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n})\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{v} - (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n})\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{e_1} = \frac{\overrightarrow{MP}}{|\overrightarrow{MP}|} = \frac{\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n})\overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{MP}|}$, $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{n} \times \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{n} \times \frac{\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n})\overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{MP}|} = \frac{\overrightarrow{n} \times \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{MP}|}$，$\overrightarrow{MQ} = |\overrightarrow{MP}|(\cos\theta \overrightarrow{e_1} + \sin\theta \overrightarrow{e_2}) = \cos\theta(\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n})\overrightarrow{n}) + \sin\theta \overrightarrow{n} \times \overrightarrow{v}$，所以

$$
\overrightarrow{w} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MQ} = \cos\theta \overrightarrow{v} + (1 - \cos\theta)(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n})\overrightarrow{n} + \sin\theta \overrightarrow{n} \times \overrightarrow{v}.
$$