

§2.6 矩阵的初等变换

数学系 梁卓滨

2017 - 2018 学年 I

矩阵的初等变换

初等行变换

初等列变换

矩阵的初等变换

初等行变换

- 交换第 i 行和第 j 行:
- 第 i 行乘以 k 倍 ($k \neq 0$):
- 第 i 行加上第 j 行的 l 倍:

初等列变换

矩阵的初等变换

初等行变换

- 交换第 i 行和第 j 行:
- 第 i 行乘以 k 倍 ($k \neq 0$):
- 第 i 行加上第 j 行的 l 倍:

初等列变换

- 交换第 i 列和第 j 列:
- 第 i 列乘以 k 倍 ($k \neq 0$):
- 第 i 列加上第 j 列的 l 倍:

矩阵的初等变换

初等行变换

- 交换第 i 行和第 j 行: $r_i \leftrightarrow r_j$
- 第 i 行乘以 k 倍 ($k \neq 0$):
- 第 i 行加上第 j 行的 l 倍:

初等列变换

- 交换第 i 列和第 j 列:
- 第 i 列乘以 k 倍 ($k \neq 0$):
- 第 i 列加上第 j 列的 l 倍:

矩阵的初等变换

初等行变换

- 交换第 i 行和第 j 行: $r_i \leftrightarrow r_j$
- 第 i 行乘以 k 倍 ($k \neq 0$): $k \times r_i$
- 第 i 行加上第 j 行的 l 倍:

初等列变换

- 交换第 i 列和第 j 列:
- 第 i 列乘以 k 倍 ($k \neq 0$):
- 第 i 列加上第 j 列的 l 倍:

矩阵的初等变换

初等行变换

- 交换第 i 行和第 j 行: $r_i \leftrightarrow r_j$
- 第 i 行乘以 k 倍 ($k \neq 0$): $k \times r_i$
- 第 i 行加上第 j 行的 l 倍: $r_i + lr_j$

初等列变换

- 交换第 i 列和第 j 列:
- 第 i 列乘以 k 倍 ($k \neq 0$):
- 第 i 列加上第 j 列的 l 倍:

矩阵的初等变换

初等行变换

- 交换第 i 行和第 j 行: $r_i \leftrightarrow r_j$
- 第 i 行乘以 k 倍 ($k \neq 0$): $k \times r_i$
- 第 i 行加上第 j 行的 l 倍: $r_i + lr_j$

初等列变换

- 交换第 i 列和第 j 列: $c_i \leftrightarrow c_j$
- 第 i 列乘以 k 倍 ($k \neq 0$):
- 第 i 列加上第 j 列的 l 倍:

矩阵的初等变换

初等行变换

- 交换第 i 行和第 j 行: $r_i \leftrightarrow r_j$
- 第 i 行乘以 k 倍 ($k \neq 0$): $k \times r_i$
- 第 i 行加上第 j 行的 l 倍: $r_i + lr_j$

初等列变换

- 交换第 i 列和第 j 列: $c_i \leftrightarrow c_j$
- 第 i 列乘以 k 倍 ($k \neq 0$): $k \times c_i$
- 第 i 列加上第 j 列的 l 倍:

矩阵的初等变换

初等行变换

- 交换第 i 行和第 j 行: $r_i \leftrightarrow r_j$
- 第 i 行乘以 k 倍 ($k \neq 0$): $k \times r_i$
- 第 i 行加上第 j 行的 l 倍: $r_i + lr_j$

初等列变换

- 交换第 i 列和第 j 列: $c_i \leftrightarrow c_j$
- 第 i 列乘以 k 倍 ($k \neq 0$): $k \times c_i$
- 第 i 列加上第 j 列的 l 倍: $c_i + lc_j$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{c_2 - c_3}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{c_2 - c_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{c_2 - c_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注 变换前后是两个不同的矩阵，故用 “ \rightarrow ”，而不用 “ $=$ ”。

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{c_2 - c_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注 变换前后是两个不同的矩阵，故用“ \rightarrow ”，而不用“ $=$ ”。区别行列式的变换：

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{c_2 - c_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注 变换前后是两个不同的矩阵，故用“ \rightarrow ”，而不用“ $=$ ”。区别行列式的变换：

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{r_1 \leftrightarrow r_2}}}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{c_2 - c_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注 变换前后是两个不同的矩阵，故用 “ \rightarrow ”，而不用 “ $=$ ”。区别行列式的变换：

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{c_2 - c_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注 变换前后是两个不同的矩阵，故用 “ \rightarrow ”，而不用 “ $=$ ”。区别行列式的变换：

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{r_1 \leftrightarrow r_2}}} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{r_2 - 3r_1}}}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{c_2 - c_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注 变换前后是两个不同的矩阵，故用 “ \rightarrow ”，而不用 “ $=$ ”。区别行列式的变换：

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{c_2 - c_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注 变换前后是两个不同的矩阵，故用 “ \rightarrow ”，而不用 “ $=$ ”。区别行列式的变换：

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \xrightarrow{c_2 - c_3}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{c_2 - c_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注 变换前后是两个不同的矩阵，故用 “ \rightarrow ”，而不用 “ $=$ ”。区别行列式的变换：

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \xrightarrow{c_2 - c_3} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{c_2 - c_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注 变换前后是两个不同的矩阵，故用 “ \rightarrow ”，而不用 “ $=$ ”。区别行列式的变换：

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{r_1 \leftrightarrow r_2}}} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{r_2 - 3r_1}}} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \xrightarrow{\underline{\underline{c_2 - c_3}}} - \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -8$$

初等矩阵 I

定义 对单位矩阵 I 施以一次初等变换得到的矩阵，称为**初等矩阵**。

初等矩阵 I

定义 对单位矩阵 I 施以一次初等变换得到的矩阵，称为**初等矩阵**。

- 对 I 施以第一种初等行变换 ($r_i \leftrightarrow r_j$) 得到的矩阵：

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} \leftarrow i^{\text{th}} \\ \leftarrow j^{\text{th}} \end{matrix}$ $\xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j}$

初等矩阵 I

定义 对单位矩阵 I 施以一次初等变换得到的矩阵，称为**初等矩阵**。

- 对 I 施以第一种初等行变换 ($r_i \leftrightarrow r_j$) 得到的矩阵：

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Diagram illustrating the transformation of the identity matrix I into a permutation matrix by swapping rows i and j ($r_i \leftrightarrow r_j$). The left matrix is the identity matrix with 1s on the diagonal. The right matrix is the resulting permutation matrix, where the diagonal elements are 1s, except for positions i and j , which are 0. The rows i and j are swapped, resulting in 1s at positions (i, j) and (j, i) .

初等矩阵 I

定义 对单位矩阵 I 施以一次初等变换得到的矩阵，称为**初等矩阵**。

- 对 I 施以第一种初等行变换 ($r_i \leftrightarrow r_j$) 得到的矩阵：

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \cdots \cdots 1 \\ & & & \vdots & 1 & \vdots \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & 1 & \vdots \\ & & & & & & 0 & \vdots \\ & & & & & & & 1 & \vdots \\ & & & & & & & & 1 & \ddots \end{pmatrix} =: I(ij)$$

$\leftarrow i^{\text{th}}$
 $\leftarrow j^{\text{th}}$

初等矩阵 I

定义 对单位矩阵 I 施以一次初等变换得到的矩阵，称为**初等矩阵**。

- 对 I 施以第一种初等行变换 ($r_i \leftrightarrow r_j$) 得到的矩阵：

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 \\ & & \vdots & 1 & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 & \vdots \\ & & & & & 0 & \vdots \\ & & & & & & 1 & \ddots \end{pmatrix} =: I(ij)$$

$\leftarrow i^{\text{th}}$
 $\leftarrow j^{\text{th}}$

注 $I(ij)$ 也是对 I 施以第一种初等列变换 ($c_i \leftrightarrow c_j$) 得到的矩阵。

初等矩阵 II

定义 对单位矩阵 I 施以一次初等变换得到的矩阵，称为**初等矩阵**。

- 对 I 施以第二种初等行变换 ($k \times r_i$) 得到的矩阵：

$$\left(\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{array} \right) \xleftarrow{i\text{行}} \xrightarrow[k \neq 0]{k \times r_i}$$

初等矩阵 II

定义 对单位矩阵 I 施以一次初等变换得到的矩阵，称为**初等矩阵**。

- 对 I 施以第二种初等行变换 ($k \times r_i$) 得到的矩阵：

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \xleftarrow{i \text{ 行}} \xrightarrow[k \neq 0]{k \times r_i} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & k & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \xleftarrow{i \text{ 行}}$$

初等矩阵 II

定义 对单位矩阵 I 施以一次初等变换得到的矩阵，称为**初等矩阵**。

- 对 I 施以第二种初等行变换 ($k \times r_i$) 得到的矩阵：

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \xleftarrow{i\text{行}} \xrightarrow[k \neq 0]{k \times r_i} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & k & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \xleftarrow{i\text{行}} =: I(i(k))$$

初等矩阵 II

定义 对单位矩阵 I 施以一次初等变换得到的矩阵，称为**初等矩阵**。

- 对 I 施以第二种初等行变换 ($k \times r_i$) 得到的矩阵：

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \xleftarrow{i\text{行}} \xrightarrow[k \neq 0]{k \times r_i} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & k & \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \xleftarrow{i\text{行}} =: I(i(k))$$

注 $I(i(k))$ 也是对 I 施以第二种初等列变换 ($k \times c_i$) 得到的矩阵。

初等矩阵 III

定义 对单位矩阵 I 施以一次初等变换得到的矩阵，称为**初等矩阵**。

- 对 I 施以第三种初等行变换 $(r_i + lr_j)$ 得到的矩阵：

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i \text{ 行} \\ \leftarrow j \text{ 行} \end{matrix} \xrightarrow{r_i + lr_j}$$

初等矩阵 III

定义 对单位矩阵 I 施以一次初等变换得到的矩阵，称为**初等矩阵**。

- 对 I 施以第三种初等行变换 ($r_i + lr_j$) 得到的矩阵：

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i \text{ 行} \\ \leftarrow j \text{ 行} \end{matrix} \xrightarrow{r_i + lr_j} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & l \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i \text{ 行} \\ \leftarrow j \text{ 行} \end{matrix}$$

初等矩阵 III

定义 对单位矩阵 I 施以一次初等变换得到的矩阵，称为**初等矩阵**。

- 对 I 施以第三种初等行变换 ($r_i + lr_j$) 得到的矩阵：

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_i + lr_j} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & \\ & & & & 1 & \cdots \cdots l & & & \\ & & & & & \vdots & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i \text{ 行} \\ \leftarrow j \text{ 行} \end{matrix} =: I(ij(l))$$

初等矩阵 III

定义 对单位矩阵 I 施以一次初等变换得到的矩阵，称为**初等矩阵**。

- 对 I 施以第三种初等行变换 ($r_i + lr_j$) 得到的矩阵：

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_i + lr_j} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \cdots \cdots l \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & 1 \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i \text{ 行} \\ \leftarrow j \text{ 行} \end{matrix} =: I(ij(l))$$

注 $I(ij(l))$ 也是对 I 施以第三种初等列变换 ($c_j + lc_i$) 得到的矩阵。

例

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } c_1 \leftrightarrow c_2]{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } c_1 \leftrightarrow c_2]{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } c_1 \leftrightarrow c_2]{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{k \times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } c_1 \leftrightarrow c_2]{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{k \times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } c_1 \leftrightarrow c_2]{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{k \times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + lr_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } c_1 \leftrightarrow c_2]{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{k \times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } c_3 + lc_1]{r_1 + lr_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } c_1 \leftrightarrow c_2]{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I(12)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{k \times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } c_3 + lc_1]{r_1 + lr_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } c_1 \leftrightarrow c_2]{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I(12)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{k \times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I(2(k))$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } c_3 + lc_1]{r_1 + lr_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } c_1 \leftrightarrow c_2]{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I(12)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{k \times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I(2(k))$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } c_3 + lc_1]{r_1 + lr_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I(13(l))$$

设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, 计算以下矩阵的乘积:

- $I(12)A$

- $I(2(k))A$

- $I(13(l))A$

设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, 计算以下矩阵的乘积:

- $I(12)A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

- $I(2(k))A$

- $I(13(l))A$

设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, 计算以下矩阵的乘积:

- $I(12)A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

- $I(2(k))A$

- $I(13(l))A$

设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, 计算以下矩阵的乘积:

- $I(12)A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

- $I(2(k))A$

- $I(13(l))A$

设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, 计算以下矩阵的乘积:

- $I(12)A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

- $I(2(k))A$

- $I(13(l))A$

设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, 计算以下矩阵的乘积:

- $I(12)A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

- $I(2(k))A$

- $I(13(l))A$

设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, 计算以下矩阵的乘积:

$$\bullet I(12)A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

结果将 A 作变换 $r_1 \leftrightarrow r_2$

$$\bullet I(2(k))A$$

$$\bullet I(13(l))A$$

设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, 计算以下矩阵的乘积:

$$\bullet I(12)A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

结果将 A 作变换 $r_1 \leftrightarrow r_2$

$$\bullet I(2(k))A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\bullet I(13(l))A$$

设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, 计算以下矩阵的乘积:

$$\bullet I(12)A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

结果将 A 作变换 $r_1 \leftrightarrow r_2$

$$\bullet I(2(k))A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$\bullet I(13(l))A$$

设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, 计算以下矩阵的乘积:

$$\bullet I(12)A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

结果将 A 作变换 $r_1 \leftrightarrow r_2$

$$\bullet I(2(k))A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & & \end{pmatrix}$$

$$\bullet I(13(l))A$$

设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, 计算以下矩阵的乘积:

$$\bullet I(12)A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

结果将 A 作变换 $r_1 \leftrightarrow r_2$

$$\bullet I(2(k))A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\bullet I(13(l))A$$

设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, 计算以下矩阵的乘积:

$$\bullet I(12)A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

结果将 A 作变换 $r_1 \leftrightarrow r_2$

$$\bullet I(2(k))A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\bullet I(13(l))A$$

设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, 计算以下矩阵的乘积:

$$\bullet I(12)A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

结果将 A 作变换 $r_1 \leftrightarrow r_2$

$$\bullet I(2(k))A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

结果将 A 作变换 $k \times r_2$

$$\bullet I(13(l))A$$

设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, 计算以下矩阵的乘积:

$$\bullet I(12)A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

结果将 A 作变换 $r_1 \leftrightarrow r_2$

$$\bullet I(2(k))A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

结果将 A 作变换 $k \times r_2$

$$\bullet I(13(l))A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, 计算以下矩阵的乘积:

$$\bullet I(12)A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

结果将 A 作变换 $r_1 \leftrightarrow r_2$

$$\bullet I(2(k))A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

结果将 A 作变换 $k \times r_2$

$$\bullet I(13(l))A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + la_{21} & a_{12} + la_{22} & a_{13} + la_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, 计算以下矩阵的乘积:

$$\bullet I(12)A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

结果将 A 作变换 $r_1 \leftrightarrow r_2$

$$\bullet I(2(k))A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

结果将 A 作变换 $k \times r_2$

$$\bullet I(13(l))A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + la_{31} & a_{12} + la_{32} & a_{13} + la_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, 计算以下矩阵的乘积:

$$\bullet I(12)A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

结果将 A 作变换 $r_1 \leftrightarrow r_2$

$$\bullet I(2(k))A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

结果将 A 作变换 $k \times r_2$

$$\bullet I(13(l))A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + la_{31} & a_{12} + la_{32} & a_{13} + la_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, 计算以下矩阵的乘积:

$$\bullet I(12)A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

结果将 A 作变换 $r_1 \leftrightarrow r_2$

$$\bullet I(2(k))A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

结果将 A 作变换 $k \times r_2$

$$\bullet I(13(l))A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + la_{31} & a_{12} + la_{32} & a_{13} + la_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, 计算以下矩阵的乘积:

$$\bullet I(12)A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

结果将 A 作变换 $r_1 \leftrightarrow r_2$

$$\bullet I(2(k))A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

结果将 A 作变换 $k \times r_2$

$$\bullet I(13(l))A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + la_{31} & a_{12} + la_{32} & a_{13} + la_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

结果将 A 作变换 $r_1 + lr_3$

设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, 计算以下矩阵的乘积:

- $AI(12)$

- $AI(2(k))$

- $AI(31(l))$

设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, 计算以下矩阵的乘积:

- $AI(12) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $AI(2(k))$

- $AI(31(l))$

设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, 计算以下矩阵的乘积:

$$\bullet AI(12) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$\bullet AI(2(k))$$

$$\bullet AI(31(l))$$

设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, 计算以下矩阵的乘积:

- $AI(12) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$

- $AI(2(k))$

- $AI(31(l))$

设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, 计算以下矩阵的乘积:

$$\bullet AI(12) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & \\ a_{22} & a_{21} & \\ a_{32} & a_{31} & \end{pmatrix}$$

$$\bullet AI(2(k))$$

$$\bullet AI(31(l))$$

设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, 计算以下矩阵的乘积:

- $AI(12) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$

- $AI(2(k))$

- $AI(31(l))$

设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, 计算以下矩阵的乘积:

$$\bullet AI(12) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

结果将 A 作变换 $c_1 \leftrightarrow c_2$

$$\bullet AI(2(k))$$

$$\bullet AI(31(l))$$

设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, 计算以下矩阵的乘积:

$$\bullet AI(12) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

结果将 A 作变换 $c_1 \leftrightarrow c_2$

$$\bullet AI(2(k)) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet AI(31(l))$$

设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, 计算以下矩阵的乘积:

$$\bullet AI(12) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

结果将 A 作变换 $c_1 \leftrightarrow c_2$

$$\bullet AI(2(k)) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$\bullet AI(31(l))$$

设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, 计算以下矩阵的乘积:

$$\bullet AI(12) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

结果将 A 作变换 $c_1 \leftrightarrow c_2$

$$\bullet AI(2(k)) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ a_{21} & & \\ a_{31} & & \end{pmatrix}$$

$$\bullet AI(31(l))$$

设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, 计算以下矩阵的乘积:

$$\bullet AI(12) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

结果将 A 作变换 $c_1 \leftrightarrow c_2$

$$\bullet AI(2(k)) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\bullet AI(31(l))$$

设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, 计算以下矩阵的乘积:

$$\bullet AI(12) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

结果将 A 作变换 $c_1 \leftrightarrow c_2$

$$\bullet AI(2(k)) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\bullet AI(31(l))$$

设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, 计算以下矩阵的乘积:

$$\bullet AI(12) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

结果将 A 作变换 $c_1 \leftrightarrow c_2$

$$\bullet AI(2(k)) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

结果将 A 作变换 $k \times c_2$

$$\bullet AI(31(l))$$

设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, 计算以下矩阵的乘积:

$$\bullet AI(12) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

结果将 A 作变换 $c_1 \leftrightarrow c_2$

$$\bullet AI(2(k)) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

结果将 A 作变换 $k \times c_2$

$$\bullet AI(31(l)) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, 计算以下矩阵的乘积:

$$\bullet AI(12) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

结果将 A 作变换 $c_1 \leftrightarrow c_2$

$$\bullet AI(2(k)) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

结果将 A 作变换 $k \times c_2$

$$\bullet AI(31(l)) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, 计算以下矩阵的乘积:

$$\bullet AI(12) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

结果将 A 作变换 $c_1 \leftrightarrow c_2$

$$\bullet AI(2(k)) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

结果将 A 作变换 $k \times c_2$

$$\bullet AI(31(l)) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & la_{13} + a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, 计算以下矩阵的乘积:

$$\bullet AI(12) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

结果将 A 作变换 $c_1 \leftrightarrow c_2$

$$\bullet AI(2(k)) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

结果将 A 作变换 $k \times c_2$

$$\bullet AI(31(l)) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & la_{13} \\ a_{21} & a_{22} & la_{23} \\ a_{31} & a_{32} & la_{33} \end{pmatrix}$$

设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, 计算以下矩阵的乘积:

$$\bullet AI(12) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

结果将 A 作变换 $c_1 \leftrightarrow c_2$

$$\bullet AI(2(k)) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

结果将 A 作变换 $k \times c_2$

$$\bullet AI(31(l)) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + la_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + la_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + la_{31} \end{pmatrix}$$

设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, 计算以下矩阵的乘积:

$$\bullet AI(12) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

结果将 A 作变换 $c_1 \leftrightarrow c_2$

$$\bullet AI(2(k)) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

结果将 A 作变换 $k \times c_2$

$$\bullet AI(31(l)) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + la_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + la_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + la_{31} \end{pmatrix}$$

结果将 A 作变换 $c_1 + lc_3$

初等矩阵与初等变换关系

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 则

初等矩阵与初等变换关系

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 则

性质 1 对 A 作初等 行 变换等价于对 A 左乘 相应种类的初等矩阵

性质 2 对 A 作初等 列 变换等价于对 A 右乘 相应种类的初等矩阵

初等矩阵与初等变换关系

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 则

性质 1 对 A 作初等 **行** 变换等价于对 A **左乘** 相应种类的初等矩阵:

$$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j}, \quad A \xrightarrow{k \times r_i}, \quad A \xrightarrow{r_i + l r_j}$$

性质 2 对 A 作初等 **列** 变换等价于对 A **右乘** 相应种类的初等矩阵

初等矩阵与初等变换关系

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 则

性质 1 对 A 作初等 **行** 变换等价于对 A **左乘** 相应种类的初等矩阵:

$$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} I(ij)A, \quad A \xrightarrow{k \times r_i} \quad, \quad A \xrightarrow{r_i + lr_j}$$

性质 2 对 A 作初等 **列** 变换等价于对 A **右乘** 相应种类的初等矩阵

初等矩阵与初等变换关系

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 则

性质 1 对 A 作初等 **行** 变换等价于对 A **左乘** 相应种类的初等矩阵:

$$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} I(ij)A, \quad A \xrightarrow{k \times r_i} I(i(k))A, \quad A \xrightarrow{r_i + lr_j}$$

性质 2 对 A 作初等 **列** 变换等价于对 A **右乘** 相应种类的初等矩阵

初等矩阵与初等变换关系

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 则

性质 1 对 A 作初等 **行** 变换等价于对 A **左乘** 相应种类的初等矩阵:

$$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} I(ij)A, \quad A \xrightarrow{k \times r_i} I(i(k))A, \quad A \xrightarrow{r_i + lr_j} I(ij(l))A$$

性质 2 对 A 作初等 **列** 变换等价于对 A **右乘** 相应种类的初等矩阵

初等矩阵与初等变换关系

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 则

性质 1 对 A 作初等 **行** 变换等价于对 A **左乘** 相应种类的初等矩阵:

$$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} I(ij)A, \quad A \xrightarrow{k \times r_i} I(i(k))A, \quad A \xrightarrow{r_i + lr_j} I(ij(l))A$$

性质 2 对 A 作初等 **列** 变换等价于对 A **右乘** 相应种类的初等矩阵:

$$A \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j}, \quad A \xrightarrow{k \times c_i}, \quad A \xrightarrow{c_j + lc_i}$$

初等矩阵与初等变换关系

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 则

性质 1 对 A 作初等 **行** 变换等价于对 A **左乘** 相应种类的初等矩阵:

$$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} I(ij)A, \quad A \xrightarrow{k \times r_i} I(i(k))A, \quad A \xrightarrow{r_i + lr_j} I(ij(l))A$$

性质 2 对 A 作初等 **列** 变换等价于对 A **右乘** 相应种类的初等矩阵:

$$A \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} AI(ij), \quad A \xrightarrow{k \times c_i} A, \quad A \xrightarrow{c_j + lc_i} A$$

初等矩阵与初等变换关系

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 则

性质 1 对 A 作初等 **行** 变换等价于对 A **左乘** 相应种类的初等矩阵:

$$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} I(ij)A, \quad A \xrightarrow{k \times r_i} I(i(k))A, \quad A \xrightarrow{r_i + lr_j} I(ij(l))A$$

性质 2 对 A 作初等 **列** 变换等价于对 A **右乘** 相应种类的初等矩阵:

$$A \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} AI(ij), \quad A \xrightarrow{k \times c_i} AI(i(k)), \quad A \xrightarrow{c_j + lc_i}$$

初等矩阵与初等变换关系

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 则

性质 1 对 A 作初等 **行** 变换等价于对 A **左乘** 相应种类的初等矩阵:

$$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} I(ij)A, \quad A \xrightarrow{k \times r_i} I(i(k))A, \quad A \xrightarrow{r_i + lr_j} I(ij(l))A$$

性质 2 对 A 作初等 **列** 变换等价于对 A **右乘** 相应种类的初等矩阵:

$$A \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} AI(ij), \quad A \xrightarrow{k \times c_i} AI(i(k)), \quad A \xrightarrow{c_j + lc_i} AI(ij(l))$$

初等矩阵与初等变换关系

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 则

性质 1 对 A 作初等 **行** 变换等价于对 A **左乘** 相应种类的初等矩阵:

$$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} I(ij)A, \quad A \xrightarrow{k \times r_i} I(i(k))A, \quad A \xrightarrow{r_i + lr_j} I(ij(l))A$$

性质 2 对 A 作初等 **列** 变换等价于对 A **右乘** 相应种类的初等矩阵:

$$A \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} AI(ij), \quad A \xrightarrow{k \times c_i} AI(i(k)), \quad A \xrightarrow{c_j + lc_i} AI(ij(l))$$

注 性质 1 中的初等矩阵是 $n \times n$, 而性质 2 中的初等矩阵是 $m \times m$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$, 其中 $(k \neq 0)$
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$, 其中 $(i \neq j)$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$, 其中 $(k \neq 0)$
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$, 其中 $(i \neq j)$

证明

- $I(ij)I(ij) =$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$, 其中 $(k \neq 0)$
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$, 其中 $(i \neq j)$

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) =$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$, 其中 $(k \neq 0)$
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$, 其中 $(i \neq j)$

证明

$$\bullet I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$, 其中 $(k \neq 0)$
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$, 其中 $(i \neq j)$

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$, 这是利用：

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$, 其中 $(k \neq 0)$
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$, 其中 $(i \neq j)$

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$, 这是利用：

$$I \xrightarrow{C_i \leftrightarrow C_j} * \xrightarrow{C_i \leftrightarrow C_j}$$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$, 其中 $(k \neq 0)$
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$, 其中 $(i \neq j)$

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$, 这是利用：

$$I \xrightarrow{C_i \leftrightarrow C_j} * \xrightarrow{C_i \leftrightarrow C_j} I$$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$, 其中 $(k \neq 0)$
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$, 其中 $(i \neq j)$

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$, 这是利用：

$$I \xrightarrow{C_i \leftrightarrow C_j} * \xrightarrow{C_i \leftrightarrow C_j} I$$

- $I(i(k))I(i(\frac{1}{k})) =$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$, 其中 $(k \neq 0)$
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$, 其中 $(i \neq j)$

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$, 这是利用：

$$I \xrightarrow{C_i \leftrightarrow C_j} * \xrightarrow{C_i \leftrightarrow C_j} I$$

- $I(i(k))I(i(\frac{1}{k})) = I \cdot I(i(k)) \cdot I(i(\frac{1}{k})) =$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$, 其中 $(k \neq 0)$
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$, 其中 $(i \neq j)$

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$, 这是利用：

$$I \xrightarrow{C_i \leftrightarrow C_j} * \xrightarrow{C_i \leftrightarrow C_j} I$$

- $I(i(k))I(i(\frac{1}{k})) = I \cdot I(i(k)) \cdot I(i(\frac{1}{k})) = I$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$, 其中 $(k \neq 0)$
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$, 其中 $(i \neq j)$

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$, 这是利用：

$$I \xrightarrow{C_i \leftrightarrow C_j} * \xrightarrow{C_i \leftrightarrow C_j} I$$

- $I(i(k))I(i(\frac{1}{k})) = I \cdot I(i(k)) \cdot I(i(\frac{1}{k})) = I$, 这是利用：

$$I \xrightarrow{k \times C_i} * \xrightarrow{\frac{1}{k} \times C_i}$$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$, 其中 $(k \neq 0)$
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$, 其中 $(i \neq j)$

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$, 这是利用：

$$I \xrightarrow{C_i \leftrightarrow C_j} * \xrightarrow{C_i \leftrightarrow C_j} I$$

- $I(i(k))I(i(\frac{1}{k})) = I \cdot I(i(k)) \cdot I(i(\frac{1}{k})) = I$, 这是利用：

$$I \xrightarrow{k \times C_i} * \xrightarrow{\frac{1}{k} \times C_i} I$$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$, 其中 $(k \neq 0)$
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$, 其中 $(i \neq j)$

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$, 这是利用：

$$I \xrightarrow{C_i \leftrightarrow C_j} * \xrightarrow{C_i \leftrightarrow C_j} I$$

- $I(i(k))I(i(\frac{1}{k})) = I \cdot I(i(k)) \cdot I(i(\frac{1}{k})) = I$, 这是利用：

$$I \xrightarrow{k \times C_i} * \xrightarrow{\frac{1}{k} \times C_i} I$$

- $I(ij(l))I(ij(-l)) =$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$, 其中 $(k \neq 0)$
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$, 其中 $(i \neq j)$

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$, 这是利用：

$$I \xrightarrow{C_i \leftrightarrow C_j} * \xrightarrow{C_i \leftrightarrow C_j} I$$

- $I(i(k))I(i(\frac{1}{k})) = I \cdot I(i(k)) \cdot I(i(\frac{1}{k})) = I$, 这是利用：

$$I \xrightarrow{k \times C_i} * \xrightarrow{\frac{1}{k} \times C_i} I$$

- $I(ij(l))I(ij(-l)) = I \cdot I(ij(l)) \cdot I(ij(-l)) =$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$, 其中 $(k \neq 0)$
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$, 其中 $(i \neq j)$

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$, 这是利用：

$$I \xrightarrow{C_i \leftrightarrow C_j} * \xrightarrow{C_i \leftrightarrow C_j} I$$

- $I(i(k))I(i(\frac{1}{k})) = I \cdot I(i(k)) \cdot I(i(\frac{1}{k})) = I$, 这是利用：

$$I \xrightarrow{k \times C_i} * \xrightarrow{\frac{1}{k} \times C_i} I$$

- $I(ij(l))I(ij(-l)) = I \cdot I(ij(l)) \cdot I(ij(-l)) = I$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$, 其中 $(k \neq 0)$
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$, 其中 $(i \neq j)$

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$, 这是利用：

$$I \xrightarrow{C_i \leftrightarrow C_j} * \xrightarrow{C_i \leftrightarrow C_j} I$$

- $I(i(k))I(i(\frac{1}{k})) = I \cdot I(i(k)) \cdot I(i(\frac{1}{k})) = I$, 这是利用：

$$I \xrightarrow{k \times C_i} * \xrightarrow{\frac{1}{k} \times C_i} I$$

- $I(ij(l))I(ij(-l)) = I \cdot I(ij(l)) \cdot I(ij(-l)) = I$, 这是利用：

$$I \xrightarrow{C_j + lC_i} * \xrightarrow{C_j - lC_i}$$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$, 其中 $(k \neq 0)$
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$, 其中 $(i \neq j)$

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$, 这是利用：

$$I \xrightarrow{C_i \leftrightarrow C_j} * \xrightarrow{C_i \leftrightarrow C_j} I$$

- $I(i(k))I(i(\frac{1}{k})) = I \cdot I(i(k)) \cdot I(i(\frac{1}{k})) = I$, 这是利用：

$$I \xrightarrow{k \times C_i} * \xrightarrow{\frac{1}{k} \times C_i} I$$

- $I(ij(l))I(ij(-l)) = I \cdot I(ij(l)) \cdot I(ij(-l)) = I$, 这是利用：

$$I \xrightarrow{C_j + lC_i} * \xrightarrow{C_j - lC_i} I$$

矩阵的等价标准形

定理 任何矩阵 $A_{m \times n}$, 经过有限次初等变换后, 总可以化为如下形式的矩阵:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{m \times n}$$

矩阵的等价标准形

定理 任何矩阵 $A_{m \times n}$ ，经过有限次初等变换后，总可以化为如下形式的矩阵：

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{m \times n}$$

即，除左上角为 r 阶单位矩阵，其余元素均为零。

矩阵的等价标准形

定理 任何矩阵 $A_{m \times n}$, 经过有限次初等变换后, 总可以化为如下形式的矩阵:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{m \times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

即, 除左上角为 r 阶单位矩阵, 其余元素均为零。

矩阵的等价标准形

定理 任何矩阵 $A_{m \times n}$ ，经过有限次初等变换后，总可以化为如下形式的矩阵：

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{m \times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

即，除左上角为 r 阶单位矩阵，其余元素均为零。该形式称为 A 的**等价标准形**。

矩阵的等价标准形

定理 任何矩阵 $A_{m \times n}$ ，经过有限次初等变换后，总可以化为如下形式的矩阵：

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{m \times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

即，除左上角为 r 阶单位矩阵，其余元素均为零。该形式称为 A 的**等价标准形**。

注 r 取值范围：

矩阵的等价标准形

定理 任何矩阵 $A_{m \times n}$, 经过有限次初等变换后, 总可以化为如下形式的矩阵:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{m \times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

即, 除左上角为 r 阶单位矩阵, 其余元素均为零。该形式称为 A 的**等价标准形**。

注 r 取值范围: $0 \leq r$,

矩阵的等价标准形

定理 任何矩阵 $A_{m \times n}$, 经过有限次初等变换后, 总可以化为如下形式的矩阵:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{m \times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

即, 除左上角为 r 阶单位矩阵, 其余元素均为零。该形式称为 A 的**等价标准形**。

注 r 取值范围: $0 \leq r, r \leq m$

矩阵的等价标准形

定理 任何矩阵 $A_{m \times n}$, 经过有限次初等变换后, 总可以化为如下形式的矩阵:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{m \times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

即, 除左上角为 r 阶单位矩阵, 其余元素均为零。该形式称为 A 的**等价标准形**。

注 r 取值范围: $0 \leq r, r \leq m$ 且 $r \leq n$

例 4×3 矩阵 $\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ 所有可能的等价标准形是什么?

例 4×3 矩阵 $\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ 所有可能的等价标准形是什么?

4×3 矩阵等价标准形的一般形式是

$$D = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}_{4 \times 3}$$

例 4×3 矩阵 $\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ 所有可能的等价标准形是什么?

4×3 矩阵等价标准形的一般形式是

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{4 \times 3}$$

例 4×3 矩阵 $\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ 所有可能的等价标准形是什么?

4×3 矩阵等价标准形的一般形式是

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{4 \times 3} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

例 4×3 矩阵 $\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ 所有可能的等价标准形是什么?

4×3 矩阵等价标准形的一般形式是

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{4 \times 3} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

其中 $0 \leq r \leq 3$

例 4×3 矩阵 $\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ 所有可能的等价标准形是什么?

4×3 矩阵等价标准形的一般形式是

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{4 \times 3} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

其中 $0 \leq r \leq 3$, 所以全部可能是:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

例 4×3 矩阵 $\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ 所有可能的等价标准形是什么?

4×3 矩阵等价标准形的一般形式是

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{4 \times 3} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

其中 $0 \leq r \leq 3$, 所以全部可能是:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

例 4×3 矩阵 $\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ 所有可能的等价标准形是什么?

4×3 矩阵等价标准形的一般形式是

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{4 \times 3} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

其中 $0 \leq r \leq 3$, 所以全部可能是:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

例 4×3 矩阵 $\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ 所有可能的等价标准形是什么?

4×3 矩阵等价标准形的一般形式是

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{4 \times 3} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

其中 $0 \leq r \leq 3$, 所以全部可能是:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换, 求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2 - \frac{1}{2}c_1}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2 - \frac{1}{2}c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换, 求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_3 - c_1]{c_2 - \frac{1}{2}c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & & \\ 0 & -1 & & \\ 0 & -1 & & \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_3 - c_1]{c_2 - \frac{1}{2}c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换, 求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_4-\frac{3}{2}c_1]{c_2-\frac{1}{2}c_1, c_3-c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_4 - \frac{3}{2}c_1]{c_2 - \frac{1}{2}c_1, c_3 - c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_4 - \frac{3}{2}c_1]{c_2 - \frac{1}{2}c_1, c_3 - c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{\frac{1}{2} \times r_1}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_4 - \frac{3}{2}c_1]{c_2 - \frac{1}{2}c_1, c_3 - c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{\frac{1}{2} \times r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_4-\frac{3}{2}c_1]{c_2-\frac{1}{2}c_1, c_3-c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{\frac{1}{2} \times r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_4-\frac{3}{2}c_1]{c_2-\frac{1}{2}c_1, c_3-c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{\frac{1}{2} \times r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_4-\frac{3}{2}c_1]{c_2-\frac{1}{2}c_1, c_3-c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{\frac{1}{2} \times r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{c_3-c_2}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_4-\frac{3}{2}c_1]{c_2-\frac{1}{2}c_1, c_3-c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{\frac{1}{2} \times r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{c_3-c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_4-\frac{3}{2}c_1]{c_2-\frac{1}{2}c_1, c_3-c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{\frac{1}{2} \times r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[c_4-c_2]{c_3-c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_4-\frac{3}{2}c_1]{c_2-\frac{1}{2}c_1, c_3-c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{\frac{1}{2} \times r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[c_4-c_2]{c_3-c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_4-\frac{3}{2}c_1]{c_2-\frac{1}{2}c_1, c_3-c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{\frac{1}{2} \times r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[c_4-c_2]{c_3-c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1) \times r_2}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_4-\frac{3}{2}c_1]{c_2-\frac{1}{2}c_1, c_3-c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{\frac{1}{2} \times r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[c_4-c_2]{c_3-c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1) \times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换, 求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1}$$

例 通过初等变换, 求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换, 求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{c_2 - 4c_1}$$

例 通过初等变换, 求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{c_2 - 4c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -10 & -17 \\ 0 & 2 & -10 & -17 \\ 0 & -2 & -10 & -17 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换, 求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{\substack{c_2 - 4c_1 \\ c_3 - 3c_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -10 & -17 \\ 0 & 2 & -10 & -17 \\ 0 & -2 & -10 & -17 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换, 求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{\substack{c_2 - 4c_1 \\ c_3 - 3c_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换, 求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{\begin{matrix} c_2 - 4c_1 \\ c_3 - 3c_1 \\ c_4 - 5c_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换, 求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{\begin{matrix} c_2 - 4c_1 \\ c_3 - 3c_1 \\ c_4 - 5c_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换, 求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{\begin{matrix} c_2 - 4c_1 \\ c_3 - 3c_1 \\ c_4 - 5c_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2}$$

例 通过初等变换, 求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{\begin{matrix} c_2 - 4c_1 \\ c_3 - 3c_1 \\ c_4 - 5c_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换, 求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{\begin{matrix} c_2 - 4c_1 \\ c_3 - 3c_1 \\ c_4 - 5c_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{c_3 - c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换, 求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} &\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\substack{c_2 - 4c_1 \\ c_3 - 3c_1 \\ c_4 - 5c_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{c_3 - c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例 通过初等变换, 求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} &\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\substack{c_2 - 4c_1 \\ c_3 - 3c_1 \\ c_4 - 5c_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\substack{c_3 - c_2 \\ c_4 - \frac{3}{2}c_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例 通过初等变换, 求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} &\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\substack{c_2 - 4c_1 \\ c_3 - 3c_1 \\ c_4 - 5c_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\substack{c_3 - c_2 \\ c_4 - \frac{3}{2}c_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例 通过初等变换, 求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} &\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\substack{c_2 - 4c_1 \\ c_3 - 3c_1 \\ c_4 - 5c_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\substack{c_3 - c_2 \\ c_4 - \frac{3}{2}c_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2} \times r_2} \end{aligned}$$

例 通过初等变换, 求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} &\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\substack{c_2 - 4c_1 \\ c_3 - 3c_1 \\ c_4 - 5c_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\substack{c_3 - c_2 \\ c_4 - \frac{3}{2}c_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2} \times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+r_1}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-3c_1}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-3c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-3c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-3c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-3c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{5} \times r_2}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-3c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{5} \times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$A_{m \times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D_{m \times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

$$A_{m \times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D_{m \times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

从而存在 m 阶初等矩阵 P_1, P_2, \dots, P_s 与 n 阶初等矩阵 Q_1, Q_2, \dots, Q_t 使得

$$A_{m \times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D_{m \times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

从而存在 m 阶初等矩阵 P_1, P_2, \dots, P_s 与 n 阶初等矩阵 Q_1, Q_2, \dots, Q_t 使得

$$P_s \cdots P_2 P_1 A$$

$$A_{m \times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D_{m \times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

从而存在 m 阶初等矩阵 P_1, P_2, \dots, P_s 与 n 阶初等矩阵 Q_1, Q_2, \dots, Q_t 使得

$$P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t$$

$$A_{m \times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D_{m \times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

从而存在 m 阶初等矩阵 P_1, P_2, \dots, P_s 与 n 阶初等矩阵 Q_1, Q_2, \dots, Q_t 使得

$$P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = D = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

$$A_{m \times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D_{m \times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

从而存在 m 阶初等矩阵 P_1, P_2, \dots, P_s 与 n 阶初等矩阵 Q_1, Q_2, \dots, Q_t 使得

$$P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = D = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

定理 设 A 是 n 阶方阵, 则

- A 可逆的充分必要条件是 A 的等价标准形是 I

$$A_{m \times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D_{m \times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

从而存在 m 阶初等矩阵 P_1, P_2, \dots, P_s 与 n 阶初等矩阵 Q_1, Q_2, \dots, Q_t 使得

$$P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = D = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

定理 设 A 是 n 阶方阵，则

- A 可逆的充分必要条件是 A 的等价标准形是 I
- A 可逆的充分必要条件是 A 可以表示成一些初等矩阵的乘积

$$A_{m \times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D_{m \times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

从而存在 m 阶初等矩阵 P_1, P_2, \dots, P_s 与 n 阶初等矩阵 Q_1, Q_2, \dots, Q_t 使得

$$P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = D = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

定理 设 A 是 n 阶方阵，则

- A 可逆的充分必要条件是 A 的等价标准形是 I
- A 可逆的充分必要条件是 A 可以表示成一些初等矩阵的乘积

$$|A| \neq 0$$

$$A_{m \times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D_{m \times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

从而存在 m 阶初等矩阵 P_1, P_2, \dots, P_s 与 n 阶初等矩阵 Q_1, Q_2, \dots, Q_t 使得

$$P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = D = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

定理 设 A 是 n 阶方阵, 则

- A 可逆的充分必要条件是 A 的等价标准形是 I
- A 可逆的充分必要条件是 A 可以表示成一些初等矩阵的乘积

$$|A| \neq 0 \iff |D| \neq 0$$

$$A_{m \times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D_{m \times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

从而存在 m 阶初等矩阵 P_1, P_2, \dots, P_s 与 n 阶初等矩阵 Q_1, Q_2, \dots, Q_t 使得

$$P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = D = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

定理 设 A 是 n 阶方阵，则

- A 可逆的充分必要条件是 A 的等价标准形是 I
- A 可逆的充分必要条件是 A 可以表示成一些初等矩阵的乘积

证明 $|A| \neq 0 \iff |D| \neq 0 \iff r = n,$

$$A_{m \times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D_{m \times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

从而存在 m 阶初等矩阵 P_1, P_2, \dots, P_s 与 n 阶初等矩阵 Q_1, Q_2, \dots, Q_t 使得

$$P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = D = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

定理 设 A 是 n 阶方阵, 则

- A 可逆的充分必要条件是 A 的等价标准形是 I
- A 可逆的充分必要条件是 A 可以表示成一些初等矩阵的乘积

证明 $|A| \neq 0 \iff |D| \neq 0 \iff r = n, D = I_n$

$$A_{m \times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D_{m \times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

从而存在 m 阶初等矩阵 P_1, P_2, \dots, P_s 与 n 阶初等矩阵 Q_1, Q_2, \dots, Q_t 使得

$$P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = D = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

定理 设 A 是 n 阶方阵, 则

- A 可逆的充分必要条件是 A 的等价标准形是 I
- A 可逆的充分必要条件是 A 可以表示成一些初等矩阵的乘积

证明 $|A| \neq 0 \iff |D| \neq 0 \iff r = n, D = I_n$

此时 $P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = D = I_n$

$$A_{m \times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D_{m \times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

从而存在 m 阶初等矩阵 P_1, P_2, \dots, P_s 与 n 阶初等矩阵 Q_1, Q_2, \dots, Q_t 使得

$$P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = D = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

定理 设 A 是 n 阶方阵，则

- A 可逆的充分必要条件是 A 的等价标准形是 I
- A 可逆的充分必要条件是 A 可以表示成一些初等矩阵的乘积

证明 $|A| \neq 0 \iff |D| \neq 0 \iff r = n, D = I_n$

此时

$$\begin{aligned} P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t &= D = I_n \\ \Downarrow \\ A &= P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_s^{-1} Q_t^{-1} \cdots Q_2^{-1} Q_1^{-1} \end{aligned}$$

初等变换求逆矩阵——引入

假设 $A_{n \times n}$ 是可逆方阵，则

$$A_{n \times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D = I_n$$

初等变换求逆矩阵——引入

假设 $A_{n \times n}$ 是可逆方阵，则

$$A_{n \times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D = I_n$$

\Downarrow

$$P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = I_n$$

初等变换求逆矩阵——引入

假设 $A_{n \times n}$ 是可逆方阵，则

$$A_{n \times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D = I_n$$

\Downarrow

$$\underline{P_s \cdots P_2 P_1 A} \quad \underline{Q_1 Q_2 \cdots Q_t} = I_n$$

初等变换求逆矩阵——引入

假设 $A_{n \times n}$ 是可逆方阵，则

$$A_{n \times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D = I_n$$

\Downarrow

$$\underline{P_s \cdots P_2 P_1 A} \quad \underline{Q_1 Q_2 \cdots Q_t} = I_n$$

\Downarrow

$$\underline{Q_1 Q_2 \cdots Q_t} \quad \underline{P_s \cdots P_2 P_1 A} = I_n$$

初等变换求逆矩阵——引入

假设 $A_{n \times n}$ 是可逆方阵，则

$$A_{n \times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D = I_n$$

\Downarrow

$$\underline{P_s \cdots P_2 P_1 A} \quad \underline{Q_1 Q_2 \cdots Q_t} = I_n$$

\Downarrow

$$Q_1 Q_2 \cdots Q_t P_s \cdots P_2 P_1 A = I_n$$

初等变换求逆矩阵——引入

假设 $A_{n \times n}$ 是可逆方阵，则

$$A_{n \times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D = I_n$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{P_s \cdots P_2 P_1 A} \quad \underline{\underline{Q_1 Q_2 \cdots Q_t}} = I_n$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{Q_1 Q_2 \cdots Q_t P_s \cdots P_2 P_1 A}_{A^{-1}} = I_n$$

初等变换求逆矩阵——引入

假设 $A_{n \times n}$ 是可逆方阵，则

$$A_{n \times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D = I_n$$

\Downarrow

$$\underline{P_s \cdots P_2 P_1 A} \quad \underline{Q_1 Q_2 \cdots Q_t} = I_n$$

\Downarrow

$$\underbrace{Q_1 Q_2 \cdots Q_t P_s \cdots P_2 P_1 A}_{A^{-1}} = I_n$$

启发

1. 可逆矩阵 $\xrightarrow{\text{初等行变换}}$ 单位矩阵

初等变换求逆矩阵——引入

假设 $A_{n \times n}$ 是可逆方阵，则

$$A_{n \times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D = I_n$$

\Downarrow

$$\underline{P_s \cdots P_2 P_1 A} \quad \underline{Q_1 Q_2 \cdots Q_t} = I_n$$

\Downarrow

$$\underbrace{Q_1 Q_2 \cdots Q_t P_s \cdots P_2 P_1 A}_{A^{-1}} = I_n$$

启发

1. 可逆矩阵 $\xrightarrow{\text{初等行变换}}$ 单位矩阵

2. 记录下把 A 变成单位阵这一过程中，所用到过“初等行变换”，就可算出逆矩阵：

$$Q_1 Q_2 \cdots Q_t P_s \cdots P_2 P_1 = A^{-1}$$

初等变换求逆矩阵——引入

示例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵。步骤如下：

初等变换求逆矩阵——引入

示例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵。步骤如下：

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

初等变换求逆矩阵——引入

示例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵。步骤如下：

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\Downarrow r_3 - 2r_1$$

初等变换求逆矩阵——引入

示例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵。步骤如下：

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$\Downarrow r_3 - 2r_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

初等变换求逆矩阵——引入

示例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵。步骤如下：

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$\Downarrow r_3 - 2r_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$\Downarrow r_2 - r_3$

初等变换求逆矩阵——引入

示例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵。步骤如下：

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$\Downarrow r_3 - 2r_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$\Downarrow r_2 - r_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

初等变换求逆矩阵——引入

示例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵。步骤如下：

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$\Downarrow r_3 - 2r_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$\Downarrow r_2 - r_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

则 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

初等变换求逆矩阵——引入

示例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵。步骤如下：

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \Longrightarrow \quad (A : I)$$

$$\Downarrow r_3 - 2r_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\Downarrow r_2 - r_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\text{则 } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

初等变换求逆矩阵——引入

示例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵。步骤如下：

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \Longrightarrow \quad (A : I)$$

$\Downarrow r_3 - 2r_1$

\Downarrow

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \Longrightarrow \quad (P_1 A : P_1 I)$$

$\Downarrow r_2 - r_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

则 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

初等变换求逆矩阵——引入

示例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵。步骤如下：

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \Longrightarrow \quad (A : I)$$

$\Downarrow r_3 - 2r_1$

\Downarrow

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \Longrightarrow \quad (P_1 A : P_1 I) = (P_1 A : P_1)$$

$\Downarrow r_2 - r_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

则 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

初等变换求逆矩阵——引入

示例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵。步骤如下：

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \Longrightarrow \quad (A : I)$$

$\Downarrow_{r_3-2r_1}$

\Downarrow

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \Longrightarrow \quad (P_1 A : P_1 I) = (P_1 A : P_1)$$

$\Downarrow_{r_2-r_3}$

\Downarrow

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \Longrightarrow \quad (P_2 P_1 A : P_2 P_1 I)$$

则 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

初等变换求逆矩阵——引入

示例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵。步骤如下：

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \Longrightarrow \quad (A : I)$$

$\Downarrow_{r_3-2r_1}$

\Downarrow

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \Longrightarrow \quad (P_1 A : P_1 I) = (P_1 A : P_1)$$

$\Downarrow_{r_2-r_3}$

\Downarrow

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \Longrightarrow \quad (P_2 P_1 A : P_2 P_1 I) = (I : P_2 P_1)$$

则 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

初等变换求逆矩阵——引入

示例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵。步骤如下：

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \Longrightarrow \quad (A : I)$$

$\Downarrow r_3 - 2r_1$

\Downarrow

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \Longrightarrow \quad (P_1 A : P_1 I) = (P_1 A : P_1)$$

$\Downarrow r_2 - r_3$

\Downarrow

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \Longrightarrow \quad (\underbrace{P_2 P_1 A}_{A^{-1}} : P_2 P_1 I) = (I : P_2 P_1)$$

则 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

初等变换求逆矩阵——引入

示例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵。步骤如下：

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \Longrightarrow \quad (A : I)$$

$\Downarrow r_3 - 2r_1$

\Downarrow

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \Longrightarrow \quad (P_1 A : P_1 I) = (P_1 A : P_1)$$

$\Downarrow r_2 - r_3$

\Downarrow

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \Longrightarrow \quad (\underbrace{P_2 P_1 A}_{A^{-1}} : \underbrace{P_2 P_1 I}_{A^{-1}}) = (I : P_2 P_1)$$

则 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

初等变换求逆矩阵——步骤

总结 求 n 阶可逆矩阵 A 的逆矩阵 A^{-1} 的步骤:

$$(A : I) \xrightarrow{\text{一系列初等行变换}} (I : B)$$

初等变换求逆矩阵——步骤

总结 求 n 阶可逆矩阵 A 的逆矩阵 A^{-1} 的步骤:

$$(A : I) \xrightarrow{\text{一系列初等行变换}} (I : B)$$

则此时 B 就是 A^{-1}

初等变换求逆矩阵——步骤

总结 求 n 阶可逆矩阵 A 的逆矩阵 A^{-1} 的步骤:

$$(A : I) \xrightarrow{\text{一系列初等行变换}} (I : B)$$

则此时 B 就是 A^{-1}

注 仅通过行变换将 A 化为单位矩阵的步骤:

初等变换求逆矩阵——步骤

总结 求 n 阶可逆矩阵 A 的逆矩阵 A^{-1} 的步骤:

$$(A : I) \xrightarrow{\text{一系列初等行变换}} (I : B)$$

则此时 B 就是 A^{-1}

注 仅通过行变换将 A 化为单位矩阵的步骤:

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

初等变换求逆矩阵——步骤

总结 求 n 阶可逆矩阵 A 的逆矩阵 A^{-1} 的步骤:

$$(A : I) \xrightarrow{\text{一系列初等行变换}} (I : B)$$

则此时 B 就是 A^{-1}

注 仅通过行变换将 A 化为单位矩阵的步骤:

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

初等变换求逆矩阵——步骤

总结 求 n 阶可逆矩阵 A 的逆矩阵 A^{-1} 的步骤:

$$(A : I) \xrightarrow{\text{一系列初等行变换}} (I : B)$$

则此时 B 就是 A^{-1}

注 仅通过行变换将 A 化为单位矩阵的步骤:

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

初等变换求逆矩阵——步骤

总结 求 n 阶可逆矩阵 A 的逆矩阵 A^{-1} 的步骤:

$$(A : I) \xrightarrow{\text{一系列初等行变换}} (I : B)$$

则此时 B 就是 A^{-1}

注 仅通过行变换将 A 化为单位矩阵的步骤:

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$

初等变换求逆矩阵——步骤

总结 求 n 阶可逆矩阵 A 的逆矩阵 A^{-1} 的步骤:

$$(A : I) \xrightarrow{\text{一系列初等行变换}} (I : B)$$

则此时 B 就是 A^{-1}

注 仅通过行变换将 A 化为单位矩阵的步骤:

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$

初等变换求逆矩阵——步骤

总结 求 n 阶可逆矩阵 A 的逆矩阵 A^{-1} 的步骤:

$$(A : I) \xrightarrow{\text{一系列初等行变换}} (I : B)$$

则此时 B 就是 A^{-1}

注 仅通过行变换将 A 化为单位矩阵的步骤:

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

初等变换求逆矩阵——步骤

总结 求 n 阶可逆矩阵 A 的逆矩阵 A^{-1} 的步骤:

$$(A : I) \xrightarrow{\text{一系列初等行变换}} (I : B)$$

则此时 B 就是 A^{-1}

注 仅通过行变换将 A 化为单位矩阵的步骤:

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

初等变换求逆矩阵——步骤

总结 求 n 阶可逆矩阵 A 的逆矩阵 A^{-1} 的步骤:

$$(A : I) \xrightarrow{\text{一系列初等行变换}} (I : B)$$

则此时 B 就是 A^{-1}

注 仅通过行变换将 A 化为单位矩阵的步骤:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

初等变换求逆矩阵——步骤

总结 求 n 阶可逆矩阵 A 的逆矩阵 A^{-1} 的步骤:

$$(A : I) \xrightarrow{\text{一系列初等行变换}} (I : B)$$

则此时 B 就是 A^{-1}

注 仅通过行变换将 A 化为单位矩阵的步骤:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

初等变换求逆矩阵——步骤

总结 求 n 阶可逆矩阵 A 的逆矩阵 A^{-1} 的步骤:

$$(A : I) \xrightarrow{\text{一系列初等行变换}} (I : B)$$

则此时 B 就是 A^{-1}

注 仅通过行变换将 A 化为单位矩阵的步骤:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_2 - 2r_1}$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ & & & & & \end{array} \right)$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ & & & & & \end{array} \right)$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3-2r_2}$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} r_2 - 2r_1 \\ r_3 + 3r_1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 - 2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} r_2 - 2r_1 \\ r_3 + 3r_1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 - 2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}r_3}$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} r_2 - 2r_1 \\ r_3 + 3r_1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 - 2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 & -1 & 1/2 \end{array} \right)$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & -2 & 1 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 & -1 & 1/2 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2+2r_3}$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} r_2 - 2r_1 \\ r_3 + 3r_1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 - 2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 & -1 & 1/2 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 + 2r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 & -1 & 1/2 \end{array} \right)$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} r_2 - 2r_1 \\ r_3 + 3r_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 - 2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 & -1 & 1/2 \end{array} \right) \begin{array}{l} r_2 + 2r_3 \\ r_1 - r_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 & -1 & 1/2 \end{array} \right)$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} r_2 - 2r_1 \\ r_3 + 3r_1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 - 2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 & -1 & 1/2 \end{array} \right) \begin{array}{l} r_2 + 2r_3 \\ r_1 - r_3 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 & -1 & 1/2 \end{array} \right)$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 & -1 & 1/2 \end{array} \right) \xrightarrow[r_1-r_3]{r_2+2r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 & -1 & 1/2 \end{array} \right)$$

$$\text{所以 } A^{-1} = \begin{pmatrix} -5/2 & 1 & -1/2 \\ 5 & -1 & 1 \\ 7/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_2 - r_1}$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ & & & & & \end{array} \right)$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1) \times r_3}$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1) \times r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1) \times r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_2 + r_3}$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1) \times r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\xrightarrow{r_2 + r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1) \times r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_1 - 2r_3]{r_2 + r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1) \times r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_1 - 2r_3]{r_2 + r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1) \times r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_1 - 2r_3]{r_2 + r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

$$\text{所以 } A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A \vdots I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 - 2r_1}$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_2 - 2r_3}$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$
$$\xrightarrow{r_2 - 2r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$\begin{aligned} (A : I) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{r_2 - 2r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 + 2r_2} \end{aligned}$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$\begin{aligned} (A : I) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{r_2 - 2r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 + 2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 2 & -3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$\begin{aligned}(A : I) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{r_2 - 2r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 + 2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 2 & -3 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\frac{1}{5} \times r_3} \end{aligned}$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$\begin{aligned}(A : I) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\&\xrightarrow{r_2 - 2r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \\&\xrightarrow{\frac{1}{5} \times r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 2/5 & -3/5 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$\begin{aligned}(A : I) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \\&\xrightarrow{r_2 - 2r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 + 2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 2 & -3 \end{array} \right) \\&\xrightarrow{\frac{1}{5} \times r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 2/5 & -3/5 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 - 4r_3}\end{aligned}$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$\begin{aligned}(A : I) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \\&\xrightarrow{r_2 - 2r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 + 2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 2 & -3 \end{array} \right) \\&\xrightarrow{\frac{1}{5} \times r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 2/5 & -3/5 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 - 4r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & -3/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 2/5 & -3/5 \end{array} \right)\end{aligned}$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$\begin{aligned}(A : I) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \\&\xrightarrow{r_2 - 2r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 + 2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 2 & -3 \end{array} \right) \\&\xrightarrow{\frac{1}{5} \times r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 2/5 & -3/5 \end{array} \right) \xrightarrow[r_1 - 2r_3]{r_2 - 4r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 2/5 & -3/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 2/5 & -3/5 \end{array} \right)\end{aligned}$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_2 - 2r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 + 2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 2 & -3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5} \times r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 2/5 & -3/5 \end{array} \right) \xrightarrow[r_1 - 2r_3]{r_2 - 4r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1/5 & -4/5 & 6/5 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & -3/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 2/5 & -3/5 \end{array} \right)$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$\begin{aligned}(A : I) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \\&\xrightarrow{r_2 - 2r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 + 2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 2 & -3 \end{array} \right) \\&\xrightarrow{\frac{1}{5} \times r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 2/5 & -3/5 \end{array} \right) \xrightarrow[r_1 - 2r_3]{r_2 - 4r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1/5 & -4/5 & 6/5 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & -3/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 2/5 & -3/5 \end{array} \right) \\&\xrightarrow{r_1 - 2r_2}\end{aligned}$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_2-2r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3+2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 2 & -3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5} \times r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 2/5 & -3/5 \end{array} \right) \xrightarrow[r_1-2r_3]{r_2-4r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1/5 & -4/5 & 6/5 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & -3/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 2/5 & -3/5 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_1-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3/5 & 2/5 & 2/5 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & -3/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 2/5 & -3/5 \end{array} \right)$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$\begin{aligned}(A : I) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \\&\xrightarrow{r_2 - 2r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 + 2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 2 & -3 \end{array} \right) \\&\xrightarrow{\frac{1}{5} \times r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 2/5 & -3/5 \end{array} \right) \xrightarrow[r_1 - 2r_3]{r_2 - 4r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1/5 & -4/5 & 6/5 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & -3/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 2/5 & -3/5 \end{array} \right) \\&\xrightarrow{r_1 - 2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3/5 & 2/5 & 2/5 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & -3/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 2/5 & -3/5 \end{array} \right), \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -3/5 & 2/5 & 2/5 \\ 2/5 & -3/5 & 2/5 \\ 2/5 & 2/5 & -3/5 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵, 其中 a_i 都不为 0。

例 求 $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵, 其中 a_i 都不为 0。

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵, 其中 a_i 都不为 0。

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_4 \leftrightarrow r_3} * \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_2} * \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_1}$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵, 其中 a_i 都不为 0。

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_4 \leftrightarrow r_3} * \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_2} * \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_1}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵, 其中 a_i 都不为 0。

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_4 \leftrightarrow r_3} * \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_2} * \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} \frac{1}{a_4} \times r_1 \\ \frac{1}{a_1} \times r_2 \\ \frac{1}{a_2} \times r_3 \\ \frac{1}{a_3} \times r_4 \end{array}}$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵, 其中 a_i 都不为 0。

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_4 \leftrightarrow r_3} * \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_2} * \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} \frac{1}{a_4} \times r_1 \\ \frac{1}{a_1} \times r_2 \\ \frac{1}{a_2} \times r_3 \\ \frac{1}{a_3} \times r_4 \end{array}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a_3} & 0 \end{array} \right)$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵, 其中 a_i 都不为 0。

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_4 \leftrightarrow r_3} * \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_2} * \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_1}$$

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} \frac{1}{a_4} \times r_1 \\ \frac{1}{a_1} \times r_2 \\ \frac{1}{a_2} \times r_3 \\ \frac{1}{a_3} \times r_4 \end{array}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a_3} & 0 \end{array} \right) \\ \text{所以 } A^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_4} \\ \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_3} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$