第 15 周作业解答

练习 1. 求下列微分方程的通解，或在给定初始条件下的特解：

1. $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \quad y|_{x=0} = 2$
2. $x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0$

解 (1) 这是可分离变量的微分方程：

$$ydy = -xdx$$

两边积分得

$$\int ydy = \int -xdx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C_1$$

所以通解是

$$x^2 + y^2 = C$$

（其中 $C = 2C_1$）。将 $x = 0, y = 2$ 代入通解，可知 $C = 0^2 + 2^2 = 4$。所以特解是

$$x^2 + y^2 = 4$$

(2) 这是可分离变量的微分方程：

$$\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy = -\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

两边积分得

$$\begin{aligned}
&\int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy = -\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx \\
\Rightarrow &\frac{1}{2}\int (1-y^2)^{-\frac{1}{2}}dy^2 = -\frac{1}{2}\int (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}dx^2 \\
\Rightarrow &\frac{1}{2}\int (1-y^2)^{-\frac{1}{2}}d(1-y^2) = \frac{1}{2}\int (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}d(1+x^2) \\
\Rightarrow &(1-y^2)^{\frac{1}{2}} = (1+x^2)^{\frac{1}{2}} + C
\end{aligned}$$

即通解为

$$\sqrt{1-y^2} = \sqrt{1+x^2} + C$$

练习 2. 求下列微分方程的通解，或在给定初始条件下的特解：

1. $xy' + y = 3$
2. $y' + y = e^{-x}$
3. $y' + 2xy = x$ 在初始条件 $y(0) = -\frac{1}{2}$ 下的特解

解：(1) 1. 这是一阶线性微分方程，标准形式为：

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=\frac{3}{x}$$

2. 先求解齐次部分：

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=0$$

分离变量得：

$$\frac{1}{y}dy=-\frac{1}{x}dx$$

两边积分：

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{y}dy=-\int\frac{1}{x}dx\quad&\Rightarrow\quad \ln|y|=-\ln|x|+C_1\\&\Rightarrow\quad \ln|xy|=C_1\\&\Rightarrow\quad xy=\pm e^{C_1}=C\end{aligned}$$

即齐次部分的通解是

$$y=\frac{C}{x}$$

3. 常数变易法：假设 $y=\frac{u(x)}{x}$，代入原方程得：

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=\frac{3}{x}\quad&\Rightarrow\quad \left(\frac{u}{x}\right)'+\frac{1}{x}\cdot\frac{u}{x}=\frac{3}{x}\\&\Rightarrow\quad \frac{u'}{x}=\frac{3}{x}\\&\Rightarrow\quad u'=3\\&\Rightarrow\quad u=3x+C\end{aligned}$$

所以

$$y=\frac{u(x)}{x}=\frac{3x+C}{x}=3+\frac{C}{x}$$

(2)1. 先求解齐次部分：

$$\frac{dy}{dx}+y=0$$

分离变量得：

$$\frac{1}{y}dy=-dx$$

两边积分：

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{y}dy=-\int dx\quad&\Rightarrow\quad \ln|y|=-x+C_1\\&\Rightarrow\quad |y|=e^{-x+C_1}\\&\Rightarrow\quad y=\pm e^{C_1}\cdot e^{-x}=Ce^{-x}\end{aligned}$$

即齐次部分的通解是

$$y=Ce^{-x}$$

2. 常数变易法：假设 $y = u(x)e^{-x}$，代入原方程得：

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} + y = e^{-x} \quad &\Rightarrow \quad \left(ue^{-x}\right)' + ue^{-x} = e^{-x} \\ &\Rightarrow \quad u'e^{-x} = e^{-x} \\ &\Rightarrow \quad u' = 1 \\ &\Rightarrow \quad u = x + C \end{aligned}$$

所以

$$y = u(x)e^{-x} = (x + C)e^{-x}$$

(3)1. 先求解齐次部分：

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 0$$

分离变量得：

$$\frac{1}{y}dy = -2xdx$$

两边积分：

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y}dy = -\int 2xdx \quad &\Rightarrow \quad \ln|y| = -x^2 + C_1 \\ &\Rightarrow \quad |y| = e^{-x^2 + C_1} \\ &\Rightarrow \quad y = \pm e^{C_1} \cdot e^{-x^2} = Ce^{-x^2} \end{aligned}$$

即齐次部分的通解是

$$y = Ce^{-x^2}$$

2. 常数变易法：假设 $y = u(x)e^{-x^2}$，代入原方程得：

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} + 2xy = x \quad &\Rightarrow \quad \left(ue^{-x^2}\right)' + 2x \cdot ue^{-x^2} = x \\ &\Rightarrow \quad u'e^{-x^2} = x \\ &\Rightarrow \quad u' = xe^{x^2} \\ &\Rightarrow \quad u = \int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}dx^2 = \frac{1}{2}e^{x^2} + C \end{aligned}$$

所以通解为

$$y = u(x)e^{-x^2} = (\frac{1}{2}e^{x^2} + C)e^{-x^2} = Ce^{-x^2} + \frac{1}{2}$$

先将 $x = 0, y = -\frac{1}{2}$ 代入通解，得：

$$-\frac{1}{2} = Ce^0 + \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad C = -1$$

所以特解是：

$$y = -e^{-x^2} + \frac{1}{2}$$