线性代数（外招）　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**姓名**：
2018-2019 学年（上）　　　　　　　　　　　　　　　　　　**专业**：
　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　学号：

第 08 周作业解答

练习 1. 用初等变换将下列矩阵化为等价标准形：

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&-1&2\\3&-3&1\\-2&2&-4\end{pmatrix}$$

解

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&-1&2\\3&-3&1\\-2&2&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&1\\1&-3&3\\-4&2&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-r_1\\ r_4+4r_1}]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&-3&3\\0&2&-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+2r_2]{r_3-3r_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{c_3+c_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{(-1)\times c_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

练习 2. 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\2&-2&4&2&0\\3&0&6&-1&1\\4&-1&8&4&1\end{pmatrix}$ 的秩。

解

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\2&-2&4&2&0\\3&0&6&-1&1\\4&-1&8&4&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-3r_1\\ r_4-4r_1}]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\0&0&0&0&0\\0&3&0&-4&1\\0&3&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\0&3&0&0&1\\0&3&0&-4&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\0&3&0&0&1\\0&0&0&-4&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以 $r(A)=3$

练习 3. 设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&2&3\\-1&a&2&-1\\3&1&b&5\end{pmatrix}$。对参数 (a,b) 的每种取值，求出相应的秩 $r(A)$。

解

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2&3\\-1&a&2&-1\\3&1&b&5\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&-1&2&3\\0&a-1&4&2\\0&4&b-6&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{c_2\leftrightarrow c_4}\begin{pmatrix}1&3&2&-1\\0&2&4&a-1\\0&-4&b-6&4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+2r_2}\begin{pmatrix}1&3&2&-1\\0&2&4&a-1\\0&0&b+2&2a+2\end{pmatrix}$$

- 若 $b \neq -2$ 或 $a \neq -1$，则最终的阶梯型矩阵有 3 行非零行，此时 $r(A) = 3$。
- 若 $b = -2$ 且 $a = -1$，则最终的阶梯型矩阵只有 2 行非零行，此时 $r(A) = 2$。

练习 4. 用初等行变换求下列矩阵 A, B, C 的逆矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

（其中 $a_i \neq 0$, $i = 1, 2, 3, 4$）

$$\begin{aligned}
(A \vdots I) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(-1)\times r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-3r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & 6 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 5 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2-r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{r_3-6r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & -6 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{(-1)\times r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 6 & 4 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow[r_1+r_3]{r_2-r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -7 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 6 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1+2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 6 & 4 \end{array}\right)
\end{aligned}$$

所以 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 6 & -5 & -3 \\ -7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$。

$$\begin{aligned}
(B \vdots I) &= \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3+r_2 \\ r_4+r_3}]{r_2+r_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{\frac{1}{2}\times r_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_2-2r_4 \\ r_1-r_4}]{r_3-2r_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{\frac{1}{2}\times r_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[r_1-r_3]{r_2-2r_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{\frac{1}{2}\times r_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{r_1-r_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)
\end{aligned}$$

所以 $B^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$。

$$(C\vdots I)=\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_4\leftrightarrow r_3} * \xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_2} * \xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{\frac{1}{a_1}\times r_2 \\ \frac{1}{a_2}\times r_3 \\ \frac{1}{a_3}\times r_4}]{\frac{1}{a_4}\times r_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a_3} & 0 \end{array}\right)$$

所以 $C^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_4} \\ \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_3} & 0 \end{pmatrix}$。

$$(D\vdots I)=\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_2-3\times r_4 \\ r_3-2\times r_4}]{r_1-4\times r_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2-2\times r_3]{r_1-3\times r_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1-2\times r_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

所以 $D^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$。