第 13 周作业解答

练习 1. 判断下列级数的敛散性，并说明原因

1. $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3n}+\cdots$
2. $(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})+(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2})+(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3})+\cdots+(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n})+\cdots$
3. $\cos(\frac{\pi}{6})+\cos(\frac{2\pi}{6})+\cdots+\cos(\frac{n\pi}{6})+\cdots$

解 1. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n}$ 是发散。可以利用“比较审敛法的极限形式”，与发散的调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 比较。因为 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{3n}}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{3}$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n}$ 是发散。

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n})$ 是收敛，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n})=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$。这是因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$。

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos(\frac{n\pi}{6})$ 是发散。这是 $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos(\frac{n\pi}{6})\neq 0$（事实上 $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos(\frac{n\pi}{6})$ 不存在，这里不证明）：对任意的 $N>0$，可取 $n=12N>N$，则

$$\cos\left(\frac{(12N)\pi}{6}\right)=\cos(2N\pi)=1$$

这就说明了 $\{\cos(\frac{n\pi}{6})\}$ 不可能趋于 0。

练习 2. 判断下列级数的敛散性：

1. $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{3a+b}+\cdots+\frac{1}{na+b}+\cdots$（其中 $a>0, b>0$）
2. $\frac{1^4}{1!}+\frac{2^4}{2!}+\frac{3^4}{3!}+\cdots+\frac{n^4}{n!}+\cdots$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$

解 (1) 利用比较审敛法的极限形式，与发散的调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 作比较：因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{na+b}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{na+b}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a+\frac{b}{n}}=\frac{1}{a}<+\infty$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{na+b}$ 发散。

(2) 利用比值审敛法：因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^4}{(n+1)!}}{\frac{n^4}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^4\cdot\frac{1}{n+1}=0<1$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{n!}$ 收敛。

(3) 利用比值审敛法：因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\sin\frac{\pi}{3^{n+1}}}{2^n\sin\frac{\pi}{3^n}}\xlongequal{x=\frac{\pi}{3^{n+1}}}2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin 3x}=2\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(\sin 3x)'}=2\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{3\cos 3x}=\frac{2}{3}<1$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$ 收敛。

练习 3. 判断下列级数是否收敛？若然，是绝对收敛还是条件收敛？

1. $\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 5}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{\ln(n+1)}+\cdots$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin\frac{\pi}{n+1}}{\pi^{n+1}}$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$

解 (1) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\ln(n+1)}$ 是交错级数，$u_n=\frac{1}{\ln(n+1)}$ 是单调减，且趋于 0，所以由莱布尼茨定理知交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\ln(n+1)}$ 收敛。

对于正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$，因为 $\frac{1}{\ln(n+1)}>\frac{1}{n}$（利用不等式 $\ln(1+x)<x$，其中 $x>0$），而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，所以有比较审敛法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$ 发散。

结论：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\ln(n+1)}$ 是条件收敛。

(2) 对于正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin\frac{\pi}{n+1}}{\pi^{n+1}}\right|$，因为 $\left|\frac{\sin\frac{\pi}{n+1}}{\pi^{n+1}}\right|<\frac{1}{\pi^n}$，而等比级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^n}$ 收敛，所以有比较审敛法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin\frac{\pi}{n+1}}{\pi^{n+1}}\right|$ 发散。

结论：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin\frac{\pi}{n+1}}{\pi^{n+1}}$ 是绝对收敛。

(3) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}$ 是交错级数，$u_n=\ln\frac{n+1}{n}=\ln(1+\frac{1}{n})$ 是单调减，且趋于 0，所以由莱布尼茨定理知交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}$ 收敛。

对于正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n}$，因为其部分和

$$s_n=\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}=\ln\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{n}\right)=\ln(n+1)\to+\infty$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n}$ 发散。

结论：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}$ 是条件收敛。

(4) 对于正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$，因为

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+2)!}{(n+1)^{n+2}}}{\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} \cdot (\frac{n}{n+1})^{n+1} = \lim_{n\to\infty} (\frac{n}{n+1})^{n+1}$$

$$\xlongequal{x=n+1} \lim_{x\to\infty} (1-\frac{1}{x})^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln(1-\frac{1}{x})} \xlongequal{t=\frac{1}{x}} e^{\lim\limits_{t\to 0} \frac{\ln(1-t)}{t}} \xlongequal{\text{洛必达法则}} e^{\lim\limits_{t\to 0} \frac{-\frac{1}{1-t}}{1}} = e^{-1} < 1$$

所以有比值审敛法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$ 收敛。

结论：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$ 是绝对收敛。

练习 4. 求下列级数的收敛域：

1. $1 - x + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^3}{3^2} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n^2} + \cdots$
2. $\frac{x}{1\cdot 4} + \frac{x^2}{2\cdot 4^2} + \frac{x^3}{3\cdot 4^3} + \cdots + \frac{x^n}{n\cdot 4^n} + \cdots$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^{3n-1}}{\sqrt{n}}$

解 (1) a. 确定收敛半径：

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)^2}}{(-1)^n \frac{1}{n^2}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 = 1$$

所以收敛半径 $R = \frac{1}{\rho} = 1$，收敛区间 $(-1, 1)$。

b. 讨论 $x = \pm 1$ 时的敛散性。此时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{(\pm 1)^n}{n^2} \right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 是收敛，所以 $x = \pm 1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n^2}$ 是绝对收敛。

c. 结论：收敛域是 $[-1, 1]$。

(2) a. 确定收敛半径：

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)\cdot 4^{n+1}}}{\frac{1}{n\cdot 4^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{4(n+1)} = \frac{1}{4}$$

所以收敛半径 $R = \frac{1}{\rho} = 4$，收敛区间 $(-4, 4)$。

b. 讨论 $x = \pm 4$ 时的敛散性。

当 $x = 4$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\cdot 4^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散；

当 $x = -4$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\cdot 4^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^4}{n}$ 收敛（交错级数，同时满足莱布尼茨定理的条件）；

c. 结论：收敛域是 $[-4, 4)$。

(3) a. 直接计算

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \frac{x^{2(n+1)+1}}{2(n+1)+1}}{(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+3} \cdot x^2 = x^2$$

所以当 $|x| < 1$ 时收敛；当 $|x| > 1$ 时发散。

b. 讨论 $x=\pm1$ 时的敛散性。

当 $x=1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}$，这是交错级数，且满足莱布尼茨定理的条件，所以收敛；

当 $x=-1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$，这是交错级数，且满足莱布尼茨定理的条件，所以收敛；

c. 结论：收敛域是 $[-1, 1]$。

(4) a. 直接计算

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(x-5)^{3(n+1)-1}}{\sqrt{n+1}}}{\frac{(x-5)^{3n-1}}{\sqrt{n}}}\right|=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}}\cdot|x-5|^3=|x-5|^3$$

所以当 $|x-5|<1$ 时收敛；当 $|x-5|>1$ 时发散。

b. 讨论 $|x-5|=1$ 时的敛散性。

当 $x=6$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^{3n-1}}{\sqrt{n}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$，这是 $p-$ 级数，$p=\frac{1}{2}$，所以发散；

当 $x=4$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^{3n-1}}{\sqrt{n}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$，这是交错级数，且满足莱布尼茨定理的条件，所以收敛；

c. 结论：收敛域是 $[4, 6)$。

练习 5. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$（不一定是正项级数）收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{v_n}{u_n}=1$。问级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 是否也收敛？说明理由。

解不一定收敛。例子

$$u_n=(-1)^n\frac{1}{n},\qquad v_n=(-1)^n\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散。

下面证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散。反证法，假设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛。注意到 $v_n-u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$，则由此推出

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}[v_n-u_n]=\sum_{n=1}^{\infty}v_n-\sum_{n=1}^{\infty}u_n$$

收敛。但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 显然是发散。矛盾。所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散。