第 07 周作业解答

练习 1. 靠近太阳的一艘飞船，船身正要融化。假设飞船坐标为 $(1,\,1,\,1)$，周围的温度分布函数为 $T = e^{-x^2-2y^2-3z^2}$。此时船长问应该转向哪一个方向，使得温度可以尽快降下来？写出该方向的单位方向向量。

解 1. 求梯度

$$\nabla T = (T_x,\, T_y,\, T_z) = (-2xe^{-x^2-2y^2-3z^2},\, -4ye^{-x^2-2y^2-3z^2},\, -6ze^{-x^2-2y^2-3z^2}).$$

所以

$$\nabla T(1,\,1,\,1) = (-2e^{-6},\, -4e^{-6},\, -6e^{-6}), \quad |\nabla T(1,\,1,\,1)| = 2e^{-6}\sqrt{14}.$$

2. 沿方向

$$\vec{s} = -\frac{\nabla T(1,\,1,\,1)}{|\nabla T(1,\,1,\,1)|} = (\frac{1}{\sqrt{14}},\, \frac{2}{\sqrt{14}},\, \frac{3}{\sqrt{14}})$$

温度下降最快。

练习 2. 计算曲面 $3xy + z^2 = 4$ 在点 $(1,\,1,\,1)$ 处的切平面、法线的方程。

解 1. 令 $F(x,\,y,\,z) = 3xy + z^2 - 4$，则曲面方程为 $F(x,\,y,\,z) = 0$。曲面在点 $(1,\,1,\,1)$ 处的一个法向量可以取为:

$$\nabla F(1,\,1,\,1) = (3y,\, 3x,\, 2z)\Big|_{(1,\,1,\,1)} = (3,\, 3,\, 2).$$

2. 切平面方程:

$$3(x-1) + 3(y-1) + 2(z-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x + 3y + 2z - 8 = 0$$

3. 法线方程:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{2}$$

练习 3. 计算二元函数 $z = xy$ 的图形在点 $(1,\,1,\,1)$ 处的切平面、法线的方程。

解 1. 令 $F(x,\,y,\,z) = z - xy$，则曲面方程为 $F(x,\,y,\,z) = 0$。曲面在点 $(1,\,1,\,1)$ 处的一个法向量可以取为:

$$\nabla F(1,\,1,\,1) = (-y,\, -x,\, 1)\Big|_{(1,\,1,\,1)} = (-1,\, -1,\, 1).$$

2. 切平面方程:

$$-(x-1) - (y-1) + (z-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x + y - z - 1 = 0$$

3. 法线方程:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$$

练习 4. 计算螺旋线 $x = \cos\theta,\, y = \sin\theta,\, z = 3\theta$ 在点 $(\frac{\sqrt{3}}{2},\, \frac{1}{2},\, \frac{\pi}{2})$ 处的切线、法平面的方程。

解 1. 该点对应参数 $\theta = \frac{\pi}{6}$，可取方向向量为

$$((\cos\theta)',\, (\sin\theta)',\, (3\theta)')\Big|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = (-\sin\theta,\, \cos\theta,\, 3)\Big|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = (-\frac{1}{2},\, \frac{\sqrt{3}}{2},\, 3).$$

2. 切线方程:

$$\frac{x-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{y-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{z-\frac{\pi}{2}}{3}$$

3. 法平面方程:

$$-\frac{1}{2}(x-\frac{\sqrt{3}}{2}) + \frac{\sqrt{3}}{2}(y-\frac{1}{2}) + 3(z-\frac{\pi}{2}) = 0 \quad\Rightarrow\quad x-\sqrt{3}y-6z+3\pi = 0$$

练习 5. 计算曲线 $\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2-3x=0 \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{array}\right.$ 在点 $(1,\,1,\,1)$ 处的切线、法平面的方程。

解 1. 令 $F(x,\,y,\,z) = x^2+y^2+z^2-3x$, $G(x,\,y,\,z) = 2x-3y+5z-4$，则该点处的一个方向向量可取为

$$\nabla F(1,\,1,\,1)\times\nabla G(1,\,1,\,1) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}_{(1,\,1,\,1)} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2x-3 & 2y & 2z \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix}_{(1,\,1,\,1)} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = (16,\,9,\,-1)$$

2. 切线方程:

$$\frac{x-1}{16} = \frac{y-1}{9} = \frac{z-1}{-1}$$

3. 法平面的方程:

$$16(x-1)+9(y-1)-(z-1) = 0 \quad\Rightarrow\quad 16x+9y-z-24 = 0$$

练习 6. 计算函数 $f(x,\,y) = x^3+3xy^2-15x-12y$ 的极值点。

解 1. 求驻点。求解方程组

$$\begin{cases} f_x = 3x^2+3y^2-15 = 0 \\ f_y = 6xy-12 = 0 \end{cases}$$

得 $(x,\,y) = (-2,\,-1),\, (-1,\,-2),\, (1,\,2),\, (2,\,1)$。

2. 判断驻点是否极值点。计算二阶偏导数

$$f_{xx} = 6x, \quad f_{xy} = 6y, \quad f_{yy} = 6x$$

可求出判别式 $P(x,\,y) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 36x^2 - 36y^2$。

	$(-2,\,-1)$	$(-1,\,-2)$	$(1,\,2)$	$(2,\,1)$
$P(x,\,y)$	$108>0$	$-108<0$	$-108<0$	$108>0$
f_{xx}	$-12<0$			$12>0$
是否极值点	极大值点	☹	☹	极小值点
极值 $f(x,\,y)$	28			-28

练习 7. 计算函数 $f(x,\,y) = e^{2x}(x+y^2+2y)$ 的极值点。

解 1. 求驻点。

$$z_x = e^{2x}(2x + 2y^2 + 4y + 1), \quad z_y = e^{2x}(x + 2y + 2).$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = e^{2x}(2x + 2y^2 + 4y + 1) = 0 \\ z_y = e^{2x}(2y + 2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y^2 + 4y + 1 = 0 & (1) \\ 2y + 2 = 0 & (2) \end{cases}$$

由 (2) 的 $y = -1$，再代入 (1) 得到 $x = \frac{1}{2}$。所以驻点只有一个：$(\frac{1}{2}, -1)$。

2. 判断驻点是否极值点。

$$z_{xx} = 4e^{2x}(x + y^2 + 2y + 1), \quad z_{xy} = 4e^{2x}(y + 1), \quad z_{yy} = 2e^{2x}$$

所以

$$P(x, y) = z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = 8e^{4x}(x + y^2 + 2y + 1) - 16e^{4x}(y + 1)^2 = 8e^{4x}(x - y^2 - 2y - 1).$$

驻点	$(\frac{1}{2}, -1)$
$P(x, y)$	$4e^2 > 0$
$z_{xx}(x, y)$	$2e > 0$
是否极值点	极小值点

3. 结论：只有一个极值点 $(\frac{1}{2}, -1)$，且为极小值点。

练习 8. 求函数 $f(x, y) = x + y$ 在条件 $x^2 + y^2 = 1$ 下的最大、最小值，并求出对应的最值点。(利用拉格朗日乘子法求解)。

解 1. 方程 $x^2 + y^2 = 1$ 表示平面上的圆周，是有界闭集。有连续函数的最值定理，f 在该圆周上一定能取得最值。对应的最值点是极值点。

2. 令 $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1$。构造拉格朗日函数 $L = f + \lambda\varphi = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$，求解方程组：

$$\begin{cases} L_x = 1 + 2\lambda x = 0 \\ L_y = 1 + 2\lambda y = 0 \\ \varphi = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

显然 $\lambda \neq 0$，所以从第 1，2 条方程可知 $x = y$。再结合第 3 条方程，得

$$(x, y) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \quad \text{或} \quad (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$$

3. 比较函数值。$f(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}$，$f(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\sqrt{2}$。说明 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 是最小值点，最小值是 $f(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}$；$(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ 是最小值点，最小值是 $f(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\sqrt{2}$。

练习 9. 假设矩形的边长分别为 x 和 y，周长为定值 $2p$。将矩形绕长为 x 的边旋转一周而构成一个圆柱体。问 x, y 各为多少时，圆柱体的体积最大？(利用拉格朗日乘子法求解)

解 1. 求二元函数 $z = \pi xy^2$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = x + y - p = 0$ 下的极值。

构造拉格朗日函数

$$L = z + \lambda\varphi$$

其中 λ 为待定的参数。求解方程组

$$\begin{cases} L_x = \pi y^2 + \lambda = 0 & (1) \\ L_y = 2\pi xy + \lambda = 0 & (2) \\ \varphi = x + y - p = 0 & (3) \end{cases}$$

$(1) - (2)$ 得 $y^2 - 2xy = 0$。因为边长 $y > 0$，所以 $y - 2x = 0$。再结合方程 (3)，可解出 $x = \frac{1}{3}p$，$y = \frac{2}{3}p$。

2. 由于函数 z 在附加条件 $\varphi = 0$ 下的可能的极值点只有唯一的一个 $(\frac{1}{3}p, \frac{2}{3}p)$，而问题存在最大值。所以此可能的唯一极值点 $(\frac{1}{3}p, \frac{2}{3}p)$ 就是问题的最大值点。

结论：当 $x = \frac{1}{3}p$，$y = \frac{2}{3}p$ 时，圆柱体的体积最大，为 $\pi xy^2 = \frac{4\pi}{27}p^3$。