姓名:
专业:
学号:

第 09 周作业

练习 1. 根据参数 a 的取值，讨论向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$ 何时线性相关，何时线性无关。

练习 2. 设 α, β, γ 线性无关，证明：$\alpha, \alpha + \beta, \alpha + \beta + \gamma$ 也是线性无关。

练习 3. 求向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 7 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ 的一组极大无关组，并将其余向量表示成极大无关组的线性组合。

下一题是附加题，做出来的同学下周交上来，可以加分

练习 4. 先介绍“幂零”的概念：一个方阵 A 称为幂零是指存在正整数 m 使得 $A^m = O$。要注意的是幂零矩阵不一定是零矩阵。例如 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 不是零矩阵，但满足 $A^2 = O$。

现假设 n 阶方阵 A 是幂零，并假设 m 是最小的正整数满足 $A^m = O$。设 v 是 $\mathbb{R}^n$ 的向量，并且满足 $A^{m-1}v \neq 0$。证明：向量组 $v, Av, A^2v, \cdots, A^{m-1}v$ 是线性无关。

利用上述结论证明：如果 n 阶方阵 A 是幂零，则 $A^n = O$。