§6.3 定积分的性质

2016-2017 学年 II

教学要求

♢

♣

♡

♠

Outline of §6.3

定积分的线性性质

$$(1)\ \int_a^b [k \cdot f(x)]dx = k\int_a^b f(x)dx, \qquad k \in \mathbb{R}$$

$$(2)\ \int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

定积分的线性性质

$$(1)\ \int_a^b [k\cdot f(x)]dx = k\int_a^b f(x)dx, \qquad k\in\mathbb{R}$$

$$(2)\ \int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

（对多个函数也成立）

定积分的线性性质

$$(1) \int_a^b [k \cdot f(x)]dx = k \int_a^b f(x)dx, \qquad k \in \mathbb{R}$$

$$(2) \int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

（对多个函数也成立）

证明:

$$\int_a^b [k \cdot f(x)]dx$$

定积分的线性性质

$$(1)\ \int_a^b [k\cdot f(x)]dx = k\int_a^b f(x)dx, \qquad k\in\mathbb{R}$$

$$(2)\ \int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

（对多个函数也成立）

证明:

$$\int_a^b [k\cdot f(x)]dx = \lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n}[kf(\xi_i)]\cdot\Delta x_i =$$

定积分的线性性质

$$(1)\ \int_a^b [k\cdot f(x)]dx = k\int_a^b f(x)dx, \qquad k\in\mathbb{R}$$

$$(2)\ \int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

（对多个函数也成立）

证明:

$$\int_a^b [k\cdot f(x)]dx = \lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n}[kf(\xi_i)]\cdot\Delta x_i = \lim_{\Delta x\to 0} k\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$$

定积分的线性性质

$$(1)\ \int_a^b [k\cdot f(x)]dx = k\int_a^b f(x)dx, \qquad k\in\mathbb{R}$$

$$(2)\ \int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

（对多个函数也成立）

证明:

$$\int_a^b [k\cdot f(x)]dx = \lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^n [kf(\xi_i)]\cdot\Delta x_i = \lim_{\Delta x\to 0} k\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$$

$$= k\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$$

定积分的线性性质

$$(1)\int_a^b [k\cdot f(x)]dx = k\int_a^b f(x)dx, \qquad k\in\mathbb{R}$$

$$(2)\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

（对多个函数也成立）

证明:

$$\int_a^b [k\cdot f(x)]dx = \lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^n [kf(\xi_i)]\cdot\Delta x_i = \lim_{\Delta x\to 0} k\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$$

$$= k\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\cdot\Delta x_i = k\int_a^b f(x)dx$$

定积分的线性性质

$$(1)\ \int_a^b [k\cdot f(x)]dx = k\int_a^b f(x)dx, \qquad k\in\mathbb{R}$$

$$(2)\ \int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

（对多个函数也成立）

证明:

$$\int_a^b [k\cdot f(x)]dx = \lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n}[kf(\xi_i)]\cdot\Delta x_i = \lim_{\Delta x\to 0} k\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$$

$$= k\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i = k\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n}[f(\xi_i)\pm g(\xi_i)]\cdot\Delta x_i = \cdots\cdots$$

定积分线性性质：例子

例

$$\int_0^1 \left(3x - 10\sin x + \frac{1}{1+x^2}\right) dx$$

$$=$$

定积分线性性质：例子

例

$$\int_0^1 \left(3x - 10\sin x + \frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$= \int_0^1 3x dx - \int_0^1 10\sin x dx + \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$=$$

定积分线性性质：例子

例

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \left(3x - 10\sin x + \frac{1}{1+x^2}\right) dx \\
=&\int_0^1 3x dx - \int_0^1 10\sin x dx + \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \\
=&\,3\int_0^1 x dx - 10\int_0^1 \sin x dx + \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx
\end{aligned}
$$

定积分线性性质：例子

例

$$\int_0^1 \left(3x - 10\sin x + \frac{1}{1+x^2}\right) dx$$

$$= \int_0^1 3x dx - \int_0^1 10\sin x dx + \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= 3\int_0^1 x dx - 10\int_0^1 \sin x dx + \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \cdots\cdots$$

定积分对积分区间的可加性

假设 a, b, c 为任意常数（不管大小关系如何），总成立

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

定积分对积分区间的可加性

假设 a, b, c 为任意常数（不管大小关系如何），总成立

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

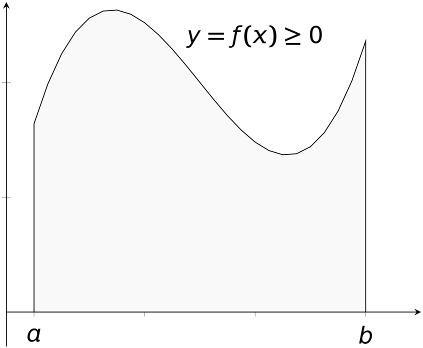
仅以“$f(x) \geq 0$，$a < c < b$”情形验证：

定积分对积分区间的可加性

假设 a, b, c 为任意常数（不管大小关系如何），总成立

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

仅以“$f(x) \geq 0$，$a < c < b$”情形验证：

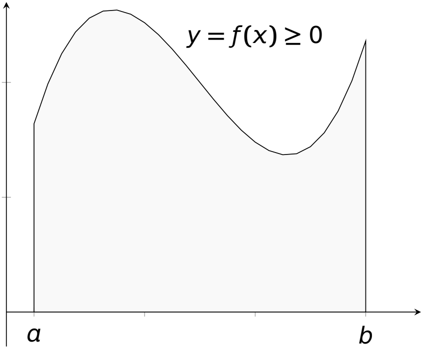


定积分对积分区间的可加性

假设 a, b, c 为任意常数（不管大小关系如何），总成立

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

仅以“$f(x) \geq 0$，$a < c < b$”情形验证：



$$\int_a^b f(x)dx$$

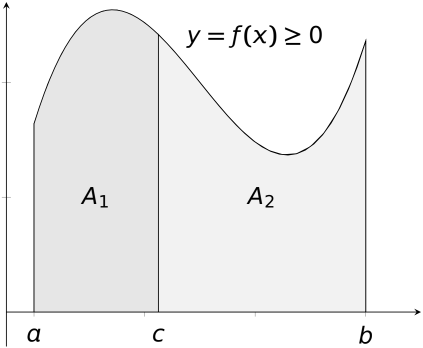
$= $ 大曲边梯形面积

定积分对积分区间的可加性

假设 a, b, c 为任意常数（不管大小关系如何），总成立

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

仅以“$f(x) \geq 0$，$a < c < b$”情形验证：



$$\int_a^b f(x)dx$$

$=$ 大曲边梯形面积

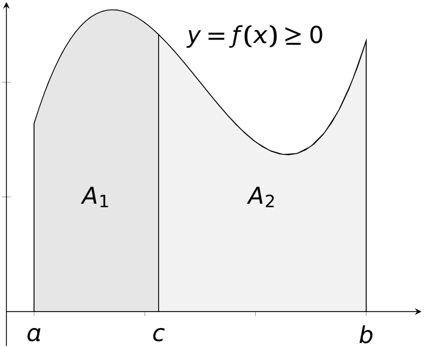
$= A_1 + A_2$

定积分对积分区间的可加性

假设 a, b, c 为任意常数（不管大小关系如何），总成立

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

仅以"$f(x) \geq 0$，$a < c < b$"情形验证：



$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(x)dx \\
&= \text{大曲边梯形面积} \\
&= A_1 + A_2 \\
&= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx
\end{aligned}$$

定积分对积分区间的可加性：例子

例：已知 $\int_{-12}^{-5} f(x)dx = -6$，$\int_{-5}^{1} f(x)dx = 12$，求 $\int_{-12}^{1} 3f(x)dx$

定积分对积分区间的可加性：例子

例：已知 $\int_{-12}^{-5} f(x)dx = -6$，$\int_{-5}^{1} f(x)dx = 12$，求 $\int_{-12}^{1} 3f(x)dx$

解

$$\int_{-12}^{1} 3f(x)dx =$$

定积分对积分区间的可加性：例子

例：已知 $\int_{-12}^{-5} f(x)dx = -6$，$\int_{-5}^{1} f(x)dx = 12$，求 $\int_{-12}^{1} 3f(x)dx$

解

$$\int_{-12}^{1} 3f(x)dx = 3\int_{-12}^{1} f(x)dx =$$

定积分对积分区间的可加性：例子

例：已知 $\int_{-12}^{-5} f(x)dx = -6$，$\int_{-5}^{1} f(x)dx = 12$，求 $\int_{-12}^{1} 3f(x)dx$

解

$$\int_{-12}^{1} 3f(x)dx = 3\int_{-12}^{1} f(x)dx = 3\left(\int_{-12}^{-5} f(x)dx + \int_{-5}^{1} f(x)dx\right)$$

定积分对积分区间的可加性：例子

例：已知 $\int_{-12}^{-5} f(x)dx = -6$，$\int_{-5}^{1} f(x)dx = 12$，求 $\int_{-12}^{1} 3f(x)dx$

解

$$\int_{-12}^{1} 3f(x)dx = 3\int_{-12}^{1} f(x)dx = 3\left(\int_{-12}^{-5} f(x)dx + \int_{-5}^{1} f(x)dx\right)$$

$$= 3\cdot(-6+12)$$

定积分对积分区间的可加性：例子

例：已知 $\int_{-12}^{-5} f(x)dx = -6$，$\int_{-5}^{1} f(x)dx = 12$，求 $\int_{-12}^{1} 3f(x)dx$

解

$$\int_{-12}^{1} 3f(x)dx = 3\int_{-12}^{1} f(x)dx = 3\left(\int_{-12}^{-5} f(x)dx + \int_{-5}^{1} f(x)dx\right)$$

$$= 3\cdot(-6+12) = 18$$

定积分对积分区间的可加性：例子

例：已知 $\int_{-12}^{-5} f(x)dx = -6$，$\int_{-5}^{1} f(x)dx = 12$，求 $\int_{-12}^{1} 3f(x)dx$

解

$$\int_{-12}^{1} 3f(x)dx = 3\int_{-12}^{1} f(x)dx = 3\left(\int_{-12}^{-5} f(x)dx + \int_{-5}^{1} f(x)dx\right)$$
$$= 3\cdot(-6+12) = 18$$

例：已知 $\int_{-12}^{-5} f(x)dx = -6$，$\int_{2}^{-5} f(x)dx = -13$，求 $\int_{-12}^{2} f(x)dx$

定积分对积分区间的可加性：例子

例：已知 $\int_{-12}^{-5} f(x)dx = -6$，$\int_{-5}^{1} f(x)dx = 12$，求 $\int_{-12}^{1} 3f(x)dx$

解

$$\int_{-12}^{1} 3f(x)dx = 3\int_{-12}^{1} f(x)dx = 3\left(\int_{-12}^{-5} f(x)dx + \int_{-5}^{1} f(x)dx\right)$$
$$= 3 \cdot (-6 + 12) = 18$$

例：已知 $\int_{-12}^{-5} f(x)dx = -6$，$\int_{2}^{-5} f(x)dx = -13$，求 $\int_{-12}^{2} f(x)dx$

解

$$\int_{-12}^{2} f(x)dx =$$

定积分对积分区间的可加性：例子

例：已知 $\int_{-12}^{-5} f(x)dx = -6$，$\int_{-5}^{1} f(x)dx = 12$，求 $\int_{-12}^{1} 3f(x)dx$

解

$$\int_{-12}^{1} 3f(x)dx = 3\int_{-12}^{1} f(x)dx = 3\left(\int_{-12}^{-5} f(x)dx + \int_{-5}^{1} f(x)dx\right)$$
$$= 3\cdot(-6+12) = 18$$

例：已知 $\int_{-12}^{-5} f(x)dx = -6$，$\int_{2}^{-5} f(x)dx = -13$，求 $\int_{-12}^{2} f(x)dx$

解

$$\int_{-12}^{2} f(x)dx = \int_{-12}^{-5} f(x)dx + \int_{-5}^{2} f(x)dx$$

定积分对积分区间的可加性：例子

例：已知 $\int_{-12}^{-5} f(x)dx = -6$，$\int_{-5}^{1} f(x)dx = 12$，求 $\int_{-12}^{1} 3f(x)dx$

解

$$\int_{-12}^{1} 3f(x)dx = 3\int_{-12}^{1} f(x)dx = 3\left(\int_{-12}^{-5} f(x)dx + \int_{-5}^{1} f(x)dx\right)$$
$$= 3\cdot(-6+12) = 18$$

例：已知 $\int_{-12}^{-5} f(x)dx = -6$，$\int_{2}^{-5} f(x)dx = -13$，求 $\int_{-12}^{2} f(x)dx$

解

$$\int_{-12}^{2} f(x)dx = \int_{-12}^{-5} f(x)dx + \int_{-5}^{2} f(x)dx$$
$$= \int_{-12}^{-5} f(x)dx - \int_{2}^{-5} f(x)dx =$$

定积分对积分区间的可加性：例子

例：已知 $\int_{-12}^{-5} f(x)dx = -6$，$\int_{-5}^{1} f(x)dx = 12$，求 $\int_{-12}^{1} 3f(x)dx$

解

$$\int_{-12}^{1} 3f(x)dx = 3\int_{-12}^{1} f(x)dx = 3\left(\int_{-12}^{-5} f(x)dx + \int_{-5}^{1} f(x)dx\right)$$
$$= 3\cdot(-6+12) = 18$$

例：已知 $\int_{-12}^{-5} f(x)dx = -6$，$\int_{2}^{-5} f(x)dx = -13$，求 $\int_{-12}^{2} f(x)dx$

解

$$\int_{-12}^{2} f(x)dx = \int_{-12}^{-5} f(x)dx + \int_{-5}^{2} f(x)dx$$
$$= \int_{-12}^{-5} f(x)dx - \int_{2}^{-5} f(x)dx = -6-(-13)$$

定积分对积分区间的可加性：例子

例：已知 $\int_{-12}^{-5} f(x)dx = -6$，$\int_{-5}^{1} f(x)dx = 12$，求 $\int_{-12}^{1} 3f(x)dx$

解

$$\int_{-12}^{1} 3f(x)dx = 3\int_{-12}^{1} f(x)dx = 3\left(\int_{-12}^{-5} f(x)dx + \int_{-5}^{1} f(x)dx\right)$$
$$= 3\cdot(-6+12) = 18$$

例：已知 $\int_{-12}^{-5} f(x)dx = -6$，$\int_{2}^{-5} f(x)dx = -13$，求 $\int_{-12}^{2} f(x)dx$

解

$$\int_{-12}^{2} f(x)dx = \int_{-12}^{-5} f(x)dx + \int_{-5}^{2} f(x)dx$$
$$= \int_{-12}^{-5} f(x)dx - \int_{2}^{-5} f(x)dx = -6-(-13) = 7$$

积分的保号性质 如果在区间 $[a, b]$ 上成立 $f(x) \le g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx \qquad (a \le b)$$

积分的保号性质 如果在区间 $[a, b]$ 上成立 $f(x) \le g(x)$，则

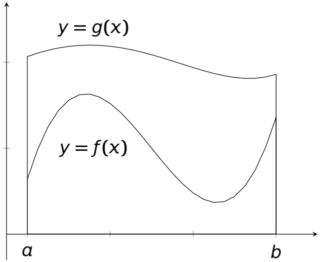
$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx \qquad (a \le b)$$

以 “$0 \le f(x) \le g(x)$” 情形为例说明：

积分的保号性质 如果在区间 $[a, b]$ 上成立 $f(x) \leq g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \qquad (a \leq b)$$

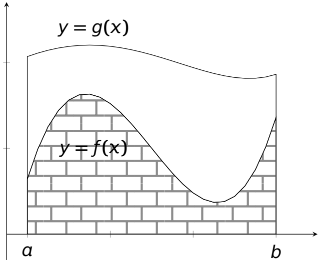
以“$0 \leq f(x) \leq g(x)$”情形为例说明：



积分的保号性质 如果在区间 $[a,b]$ 上成立 $f(x) \le g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx \qquad (a \le b)$$

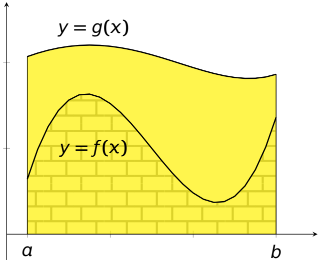
以"$0 \le f(x) \le g(x)$"情形为例说明：



积分的保号性质 如果在区间 $[a, b]$ 上成立 $f(x) \le g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx \qquad (a \le b)$$

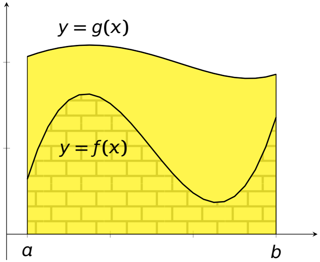
以"$0 \le f(x) \le g(x)$"情形为例说明：



积分的保号性质 如果在区间 $[a, b]$ 上成立 $f(x) \leq g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \qquad (a \leq b)$$

以 "$0 \leq f(x) \leq g(x)$" 情形为例说明：

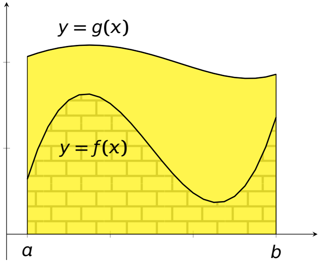


$$\int_a^b g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx$$

积分的保号性质 如果在区间 $[a, b]$ 上成立 $f(x) \le g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx \qquad (a \le b)$$

以"$0 \le f(x) \le g(x)$"情形为例说明：



$$\int_a^b g(x)dx \ge \int_a^b f(x)dx$$

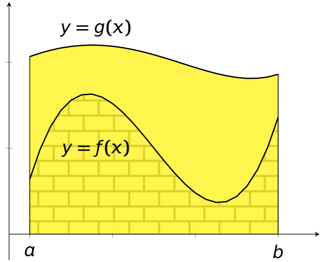
$$\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx$$

正好是 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 围成图形面积

积分的保号性质 如果在区间 $[a, b]$ 上成立 $f(x) \le g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx \qquad (a \le b)$$

以 “$0 \le f(x) \le g(x)$” 情形为例说明：



$$\int_a^b g(x)dx \ge \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x) - f(x)dx$$

正好是 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 围成图形面积

积分的保号性质：例子

例 比较以下积分的大小

$$\int_0^1 x dx \text{ 与 } \int_0^1 x^2 dx\text{；} \int_1^2 x dx \text{ 与 } \int_1^2 x^2 dx$$

积分的保号性质：例子

例 比较以下积分的大小

$$\int_0^1 x dx \text{ 与 } \int_0^1 x^2 dx; \int_1^2 x dx \text{ 与 } \int_1^2 x^2 dx$$

解：

$$\int_0^1 x dx \qquad \int_0^1 x^2 dx$$

$$\int_1^2 x dx \qquad \int_1^2 x^2 dx$$

积分的保号性质：例子

例 比较以下积分的大小

$$\int_0^1 x dx \text{ 与 } \int_0^1 x^2 dx; \quad \int_1^2 x dx \text{ 与 } \int_1^2 x^2 dx$$

解：

$$\int_0^1 x dx > \int_0^1 x^2 dx$$

$$\int_1^2 x dx \qquad \int_1^2 x^2 dx$$

积分的保号性质：例子

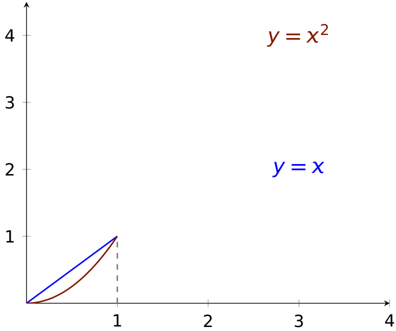
例 比较以下积分的大小

$$\int_0^1 x dx \text{ 与 } \int_0^1 x^2 dx;\quad \int_1^2 x dx \text{ 与 } \int_1^2 x^2 dx$$

解：

$$\int_0^1 x dx > \int_0^1 x^2 dx$$

$$\int_1^2 x dx \qquad \int_1^2 x^2 dx$$



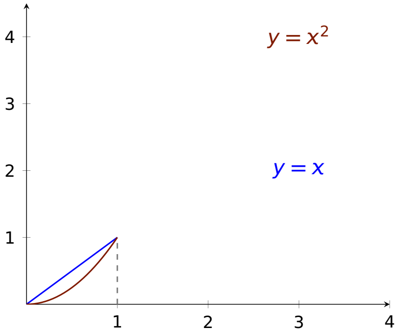
例 比较以下积分的大小

$$\int_0^1 x dx \text{ 与 } \int_0^1 x^2 dx; \quad \int_1^2 x dx \text{ 与 } \int_1^2 x^2 dx$$

解：

$$\int_0^1 x dx > \int_0^1 x^2 dx$$

$$\int_1^2 x dx < \int_1^2 x^2 dx$$



积分的保号性质：例子

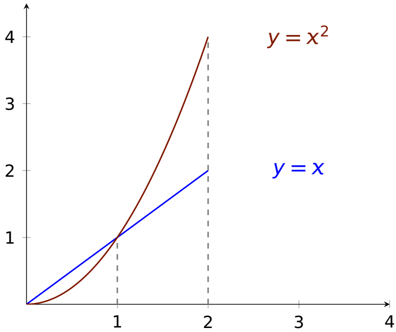
例 比较以下积分的大小

$$\int_0^1 x dx \text{ 与 } \int_0^1 x^2 dx；\int_1^2 x dx \text{ 与 } \int_1^2 x^2 dx$$

解：

$$\int_0^1 x dx > \int_0^1 x^2 dx$$

$$\int_1^2 x dx < \int_1^2 x^2 dx$$



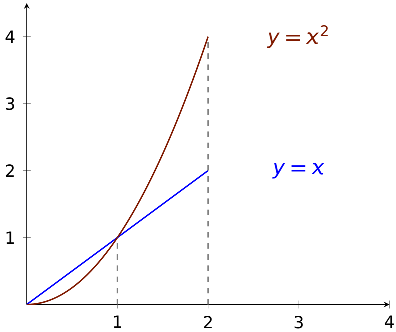
积分的保号性质：例子

例 比较以下积分的大小

$$\int_0^1 x dx \text{ 与 } \int_0^1 x^2 dx;\quad \int_1^2 x dx \text{ 与 } \int_1^2 x^2 dx$$

解： 当 $0 \le x \le 1$ 时 $x \ge x^2$, 且不恒相等, 所以 $\int_0^1 x dx > \int_0^1 x^2 dx$

$$\int_1^2 x dx < \int_1^2 x^2 dx$$



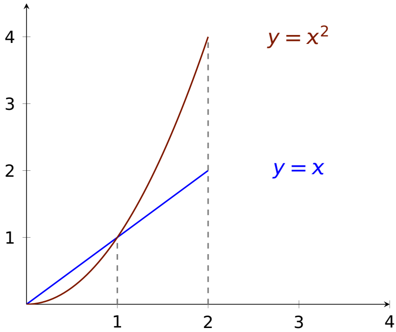
积分的保号性质：例子

例 比较以下积分的大小

$$\int_0^1 x dx \text{ 与 } \int_0^1 x^2 dx;\quad \int_1^2 x dx \text{ 与 } \int_1^2 x^2 dx$$

解： 当 $0 \le x \le 1$ 时 $x \ge x^2$, 且不恒相等, 所以 $\int_0^1 x dx > \int_0^1 x^2 dx$

当 $0 \le x \le 1$ 时 $x \le x^2$, 且不恒相等, 所以 $\int_1^2 x dx < \int_1^2 x^2 dx$



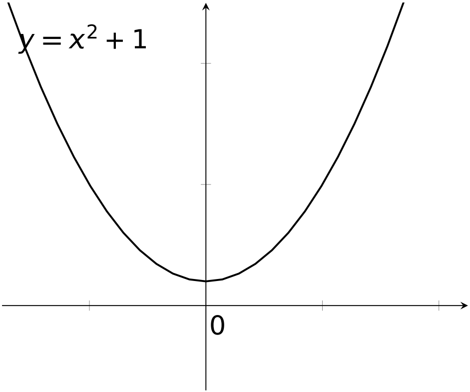
积分的保号性质：例子 II

例 画出曲线 $y = x^2 + 1$ 与直线 $y = 2x + 4$，并比较大小：

$$\int_{-1}^{3} x^2 + 1 dx \qquad \int_{-1}^{3} 2x + 4 dx.$$

例 画出曲线 $y=x^2+1$ 与直线 $y=2x+4$，并比较大小：

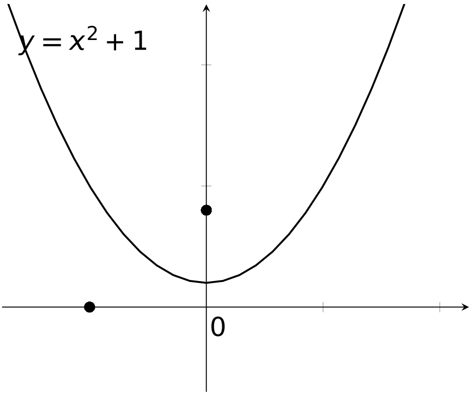
$$\int_{-1}^{3} x^2+1dx \qquad \int_{-1}^{3} 2x+4dx.$$



积分的保号性质：例子 II

例 画出曲线 $y = x^2 + 1$ 与直线 $y = 2x + 4$，并比较大小：

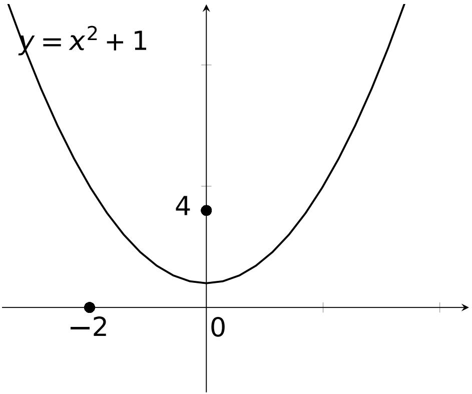
$$\int_{-1}^{3} x^2 + 1 dx \qquad \int_{-1}^{3} 2x + 4 dx.$$



积分的保号性质：例子 II

例 画出曲线 $y = x^2 + 1$ 与直线 $y = 2x + 4$，并比较大小：

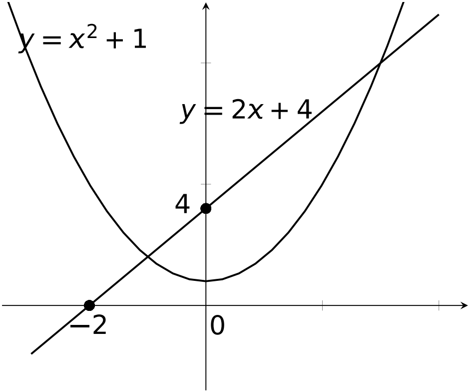
$$\int_{-1}^{3} x^2 + 1dx \qquad \int_{-1}^{3} 2x + 4dx.$$



积分的保号性质：例子 II

例 画出曲线 $y = x^2 + 1$ 与直线 $y = 2x + 4$，并比较大小：

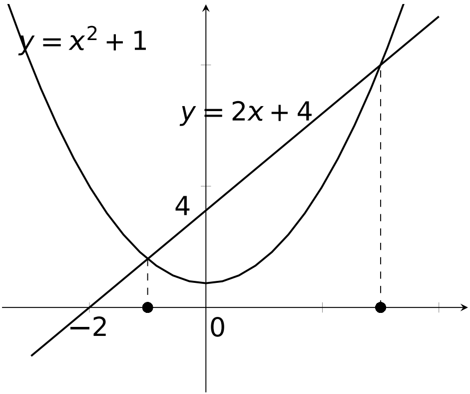
$$\int_{-1}^{3} x^2 + 1 dx \qquad \int_{-1}^{3} 2x + 4 dx.$$



积分的保号性质：例子 II

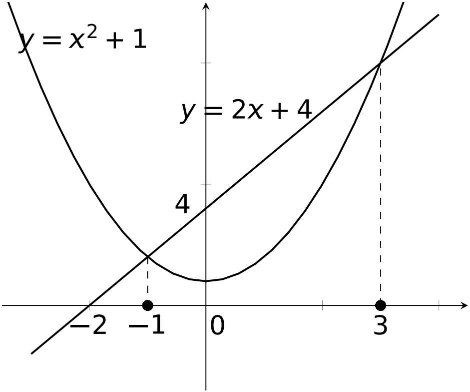
例 画出曲线 $y = x^2 + 1$ 与直线 $y = 2x + 4$，并比较大小：

$$\int_{-1}^{3} x^2 + 1 dx \qquad \int_{-1}^{3} 2x + 4 dx.$$



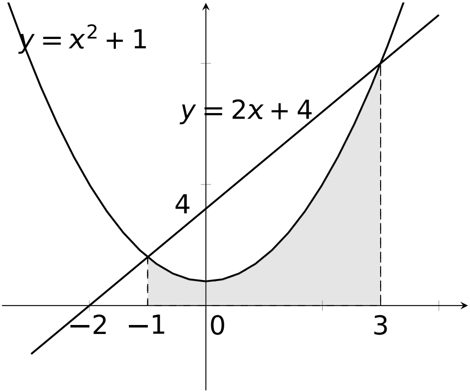
例 画出曲线 $y = x^2 + 1$ 与直线 $y = 2x + 4$，并比较大小：

$$\int_{-1}^{3} x^2 + 1 dx \qquad \int_{-1}^{3} 2x + 4 dx.$$



例 画出曲线 $y=x^2+1$ 与直线 $y=2x+4$，并比较大小：

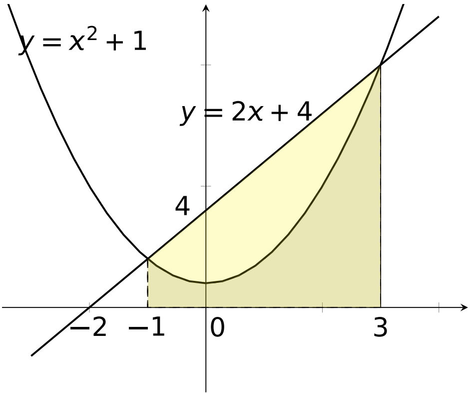
$$\int_{-1}^{3} x^2+1dx \qquad \int_{-1}^{3} 2x+4dx.$$



积分的保号性质：例子 II

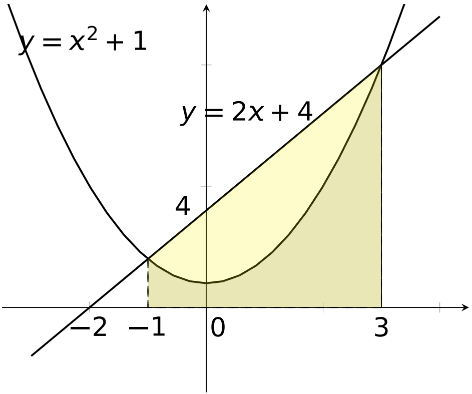
例 画出曲线 $y=x^2+1$ 与直线 $y=2x+4$，并比较大小：

$$\int_{-1}^{3} x^2+1dx \qquad \int_{-1}^{3} 2x+4dx.$$



例 画出曲线 $y = x^2 + 1$ 与直线 $y = 2x + 4$，并比较大小：

$$\int_{-1}^{3} x^2 + 1 dx \quad < \quad \int_{-1}^{3} 2x + 4 dx.$$



积分的保号性质：例子 III

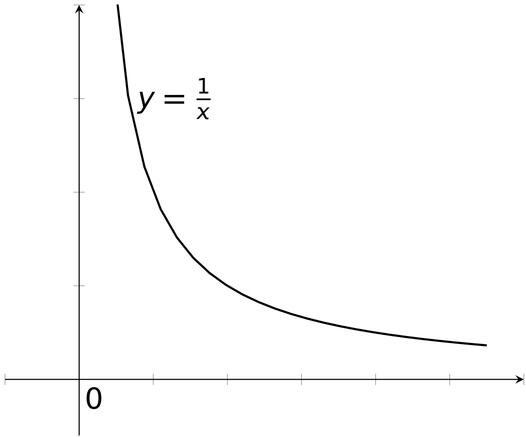
例 画出曲线 $y = \frac{1}{x}$ 与直线 $y = \frac{1}{4}x$，并比较大小：

$$\int_2^4 \frac{1}{x} dx \qquad \int_2^4 \frac{1}{4} x dx.$$

积分的保号性质：例子 III

例 画出曲线 $y=\frac{1}{x}$ 与直线 $y=\frac{1}{4}x$，并比较大小：

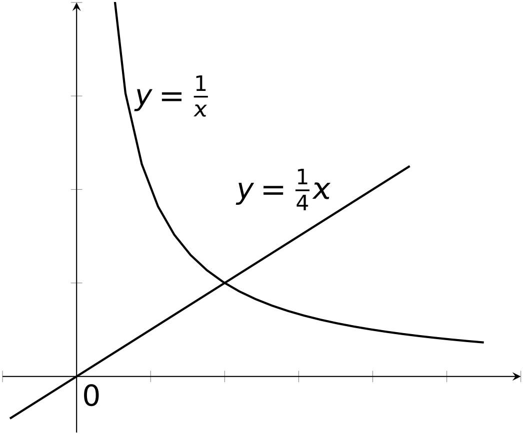
$$\int_2^4 \frac{1}{x}dx \qquad \int_2^4 \frac{1}{4}xdx.$$



积分的保号性质：例子 III

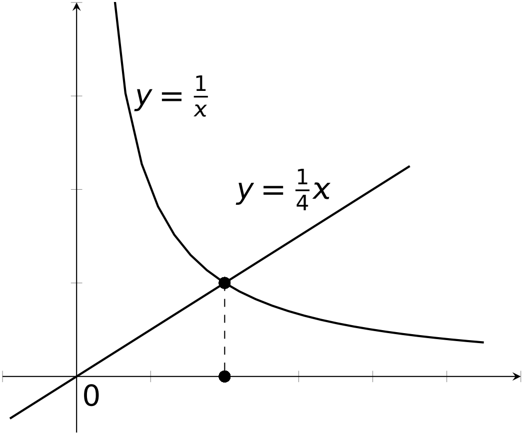
例 画出曲线 $y=\frac{1}{x}$ 与直线 $y=\frac{1}{4}x$，并比较大小：

$$\int_2^4 \frac{1}{x}dx \qquad \int_2^4 \frac{1}{4}x dx.$$



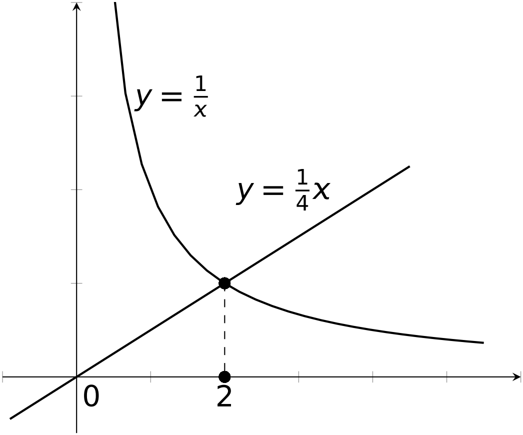
例 画出曲线 $y=\frac{1}{x}$ 与直线 $y=\frac{1}{4}x$，并比较大小：

$$\int_2^4 \frac{1}{x}dx \qquad \int_2^4 \frac{1}{4}xdx.$$



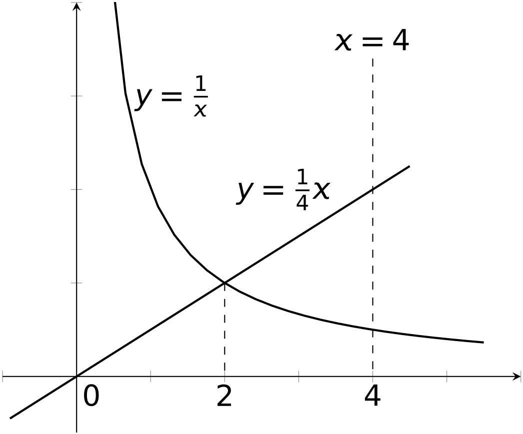
例 画出曲线 $y=\frac{1}{x}$ 与直线 $y=\frac{1}{4}x$，并比较大小：

$$\int_2^4 \frac{1}{x}dx \qquad \int_2^4 \frac{1}{4}x dx.$$



例 画出曲线 $y=\frac{1}{x}$ 与直线 $y=\frac{1}{4}x$，并比较大小：

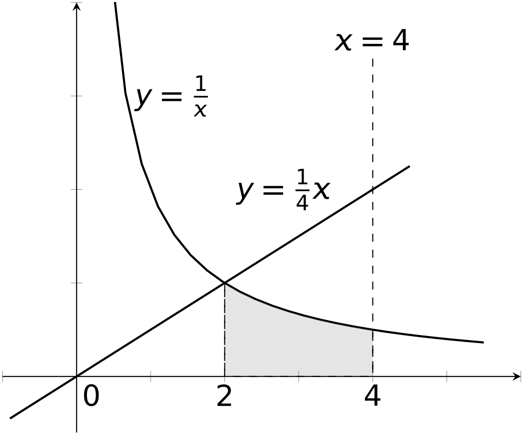
$$\int_2^4 \frac{1}{x}dx \qquad \int_2^4 \frac{1}{4}xdx.$$



积分的保号性质：例子 III

例 画出曲线 $y = \frac{1}{x}$ 与直线 $y = \frac{1}{4}x$，并比较大小：

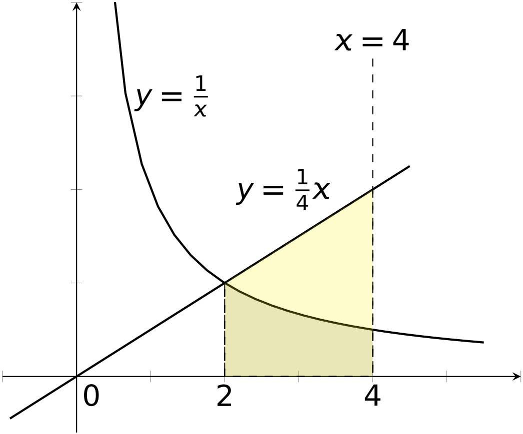
$$\int_2^4 \frac{1}{x}dx \qquad \int_2^4 \frac{1}{4}xdx.$$



积分的保号性质：例子 III

例 画出曲线 $y=\frac{1}{x}$ 与直线 $y=\frac{1}{4}x$，并比较大小：

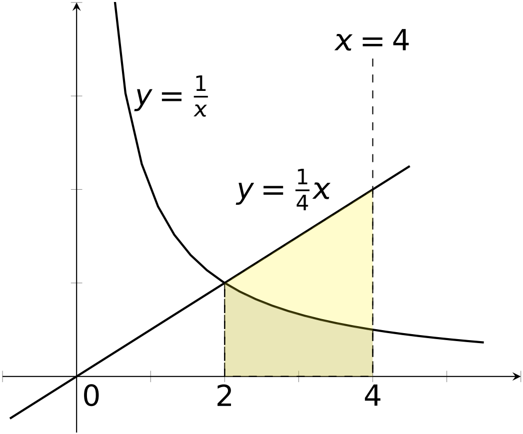
$$\int_2^4 \frac{1}{x}dx \qquad \int_2^4 \frac{1}{4}x dx.$$



积分的保号性质：例子 III

例 画出曲线 $y=\frac{1}{x}$ 与直线 $y=\frac{1}{4}x$，并比较大小：

$$\int_2^4 \frac{1}{x}dx \quad < \quad \int_2^4 \frac{1}{4}xdx.$$



例 比较以下积分的大小

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} e^x \sin x dx \text{ 与 } \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$$

积分的保号性质：例子 IV

例 比较以下积分的大小

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} e^x \sin x dx \text{ 与 } \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$$

解：

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} e^x \sin x dx < \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} 0 dx$$

积分的保号性质：例子 IV

例 比较以下积分的大小

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} e^x \sin x dx \text{ 与 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$$

解：

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} e^x \sin x dx < \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} 0 dx \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$$

积分的保号性质：例子 IV

例 比较以下积分的大小

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} e^x \sin x dx \text{ 与 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$$

解：

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} e^x \sin x dx < \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} 0 dx = 0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$$

定积分估值定理

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上最大值为 M，最小值为 m，则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

定积分估值定理

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上最大值为 M，最小值为 m，则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

证明

一方面 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq$

另一方面 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq$

定积分估值定理

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上最大值为 M，最小值为 m，则

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

证明

一方面 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx =$

另一方面 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \ge$

定积分估值定理

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上最大值为 M，最小值为 m，则

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

证明

一方面 $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx = M \int_a^b 1 dx =$

另一方面 $\int_a^b f(x)dx \ge$

定积分估值定理

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上最大值为 M，最小值为 m，则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

证明

一方面 $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx = M\int_a^b 1dx = M(b-a)$

另一方面 $\int_a^b f(x)dx \geq$

定积分估值定理

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上最大值为 M，最小值为 m，则

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

证明

一方面 $$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b Mdx = M\int_a^b 1dx = M(b-a)$$

另一方面 $$\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b mdx =$$

定积分估值定理

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上最大值为 M，最小值为 m，则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

证明

一方面 $\displaystyle \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx = M \int_a^b 1 dx = M(b-a)$

另一方面 $\displaystyle \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b m dx = m \int_a^b 1 dx =$

定积分估值定理

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上最大值为 M，最小值为 m，则

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

证明

一方面 $$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx = M\int_a^b 1 dx = M(b-a)$$

另一方面 $$\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b m dx = m\int_a^b 1 dx = m(b-a)$$

定积分估值定理

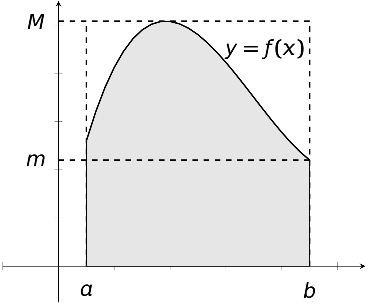
设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上最大值为 M，最小值为 m，则

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

证明

一方面 $$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx = M\int_a^b 1 dx = M(b-a)$$

另一方面 $$\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b m dx = m\int_a^b 1 dx = m(b-a)$$



定积分的中值定理

假设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则存在 $\xi \in (a, b)$，使

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

定积分的中值定理

假设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则存在 $\xi \in (a, b)$，使

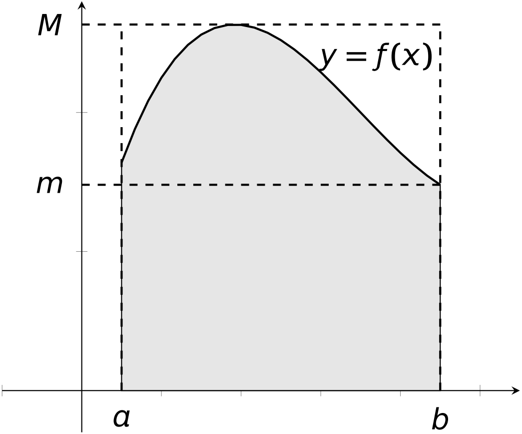
$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

以“$f(x) \geq 0$”情况说明：

定积分的中值定理

假设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则存在 $\xi \in (a, b)$，使
$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

以“$f(x) \geq 0$”情况说明：

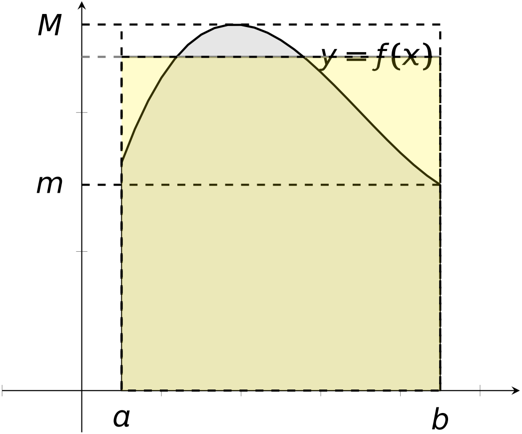


定积分的中值定理

假设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则存在 $\xi \in (a, b)$，使

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

以“$f(x) \geq 0$”情况说明：

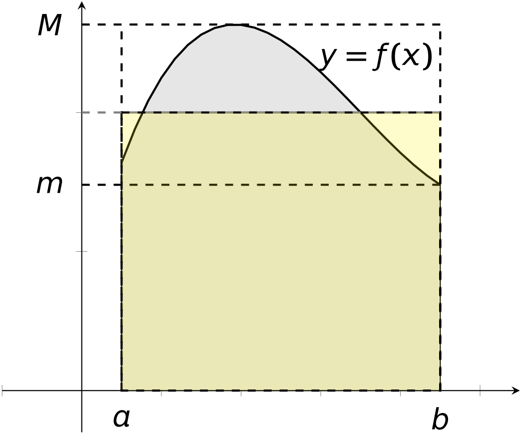


定积分的中值定理

假设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则存在 $\xi \in (a, b)$，使

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

以"$f(x) \geq 0$"情况说明：

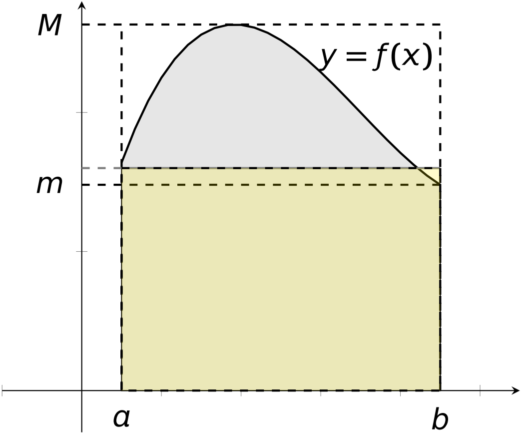


定积分的中值定理

假设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则存在 $\xi \in (a, b)$，使

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

以“$f(x) \geq 0$”情况说明：

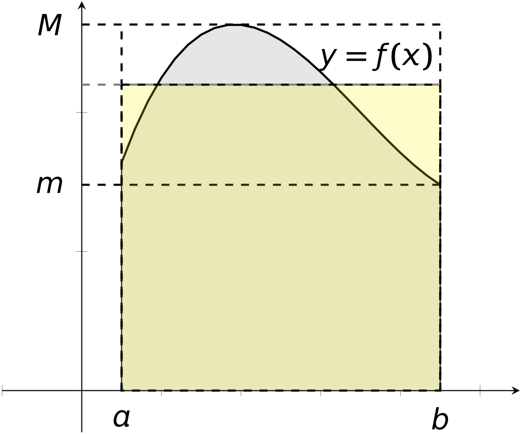


定积分的中值定理

假设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则存在 $\xi \in (a, b)$，使

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

以“$f(x) \geq 0$”情况说明：



定积分的中值定理

假设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则存在 $\xi \in (a, b)$，使

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

以"$f(x) \geq 0$"情况说明：