第 9 章 f：多元函数微分学的几何应用

数学系　梁卓滨

2016-2017 学年 II

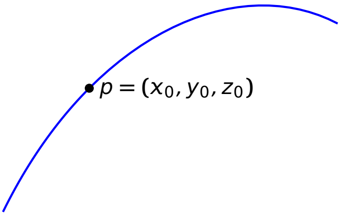
Outline

We are here now...

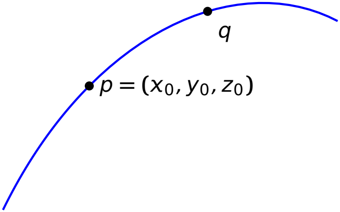
1. 曲线的切线、法平面

2. 曲面的切平面、法线

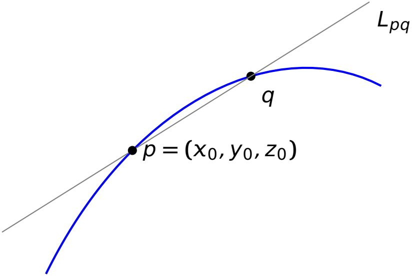
曲线的切线方程、法平面方程



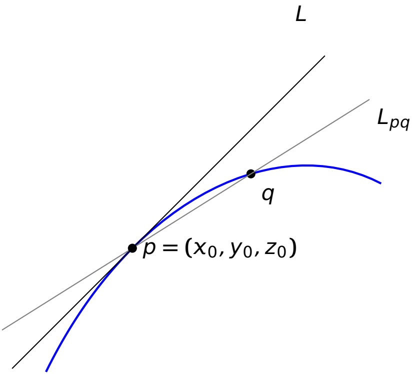
曲线的切线方程、法平面方程



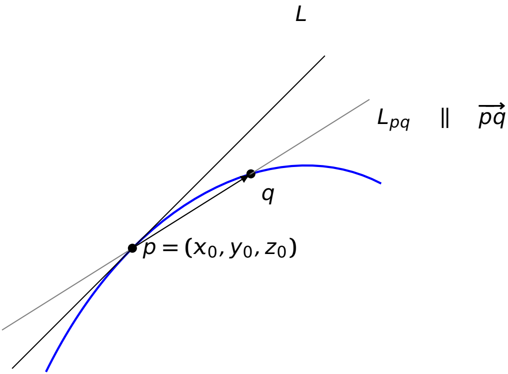
曲线的切线方程、法平面方程



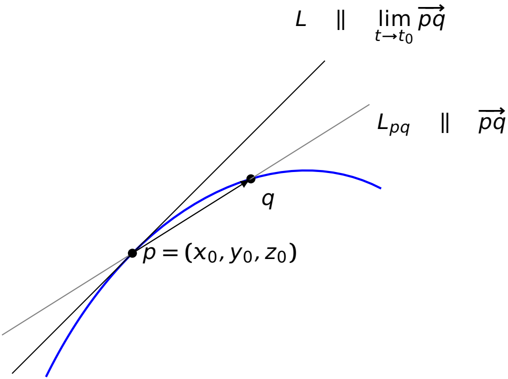
曲线的切线方程、法平面方程



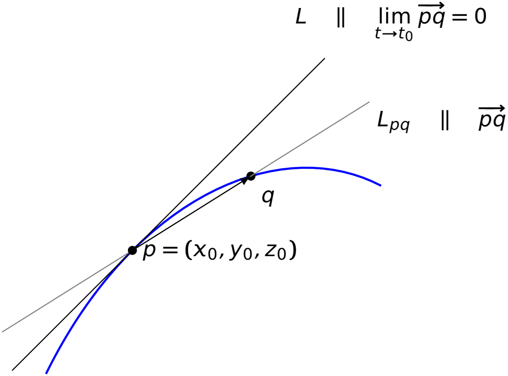
曲线的切线方程、法平面方程



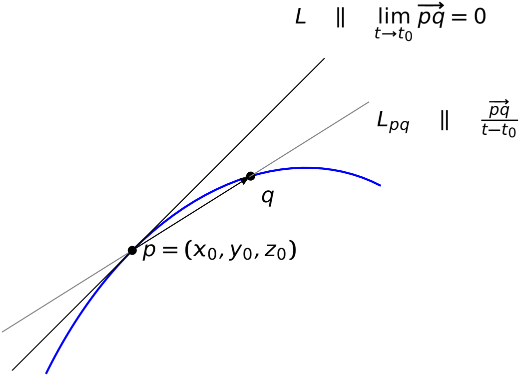
曲线的切线方程、法平面方程



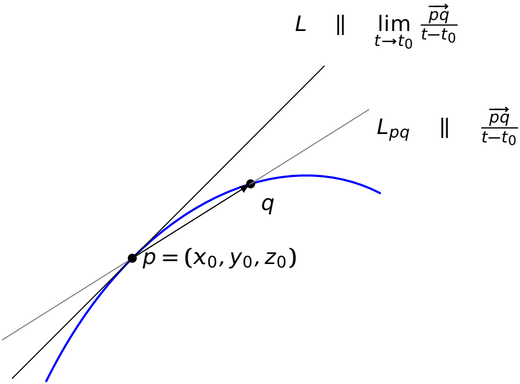
曲线的切线方程、法平面方程



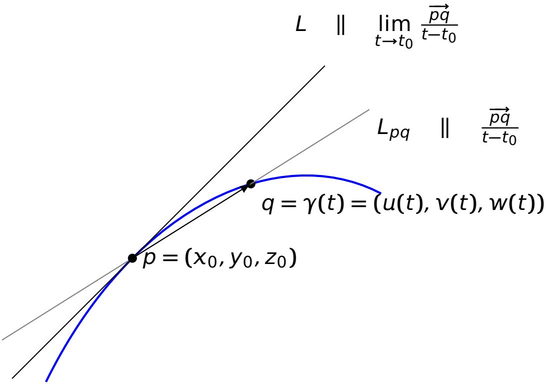
曲线的切线方程、法平面方程



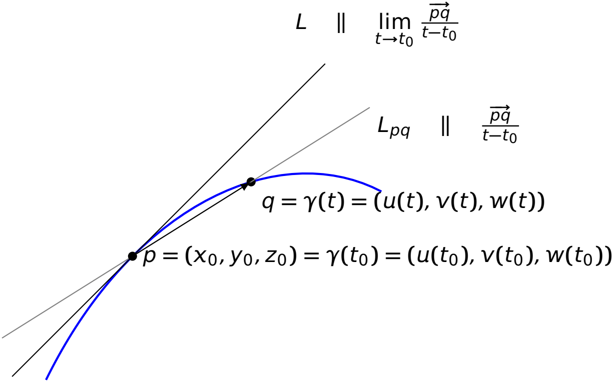
曲线的切线方程、法平面方程



曲线的切线方程、法平面方程



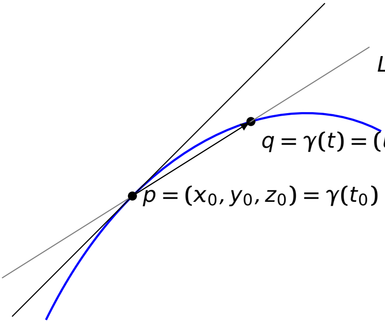
曲线的切线方程、法平面方程



曲线的切线方程、法平面方程

$$L \quad \parallel \quad \lim_{t\to t_0} \frac{\overrightarrow{pq}}{t-t_0}$$

$$L_{pq} \quad \parallel \quad \frac{\overrightarrow{pq}}{t-t_0} = \left(\frac{u(t)-u(0)}{t-t_0}, \frac{v(t)-v(0)}{t-t_0}, \frac{w(t)-w(0)}{t-t_0}\right)$$



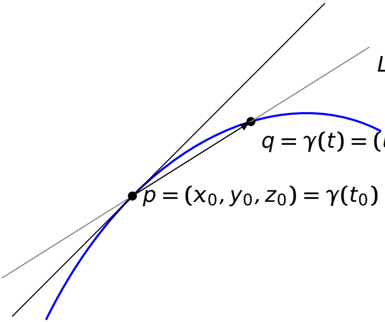
$$q = \gamma(t) = (u(t), v(t), w(t))$$

$$p = (x_0, y_0, z_0) = \gamma(t_0) = (u(t_0), v(t_0), w(t_0))$$

曲线的切线方程、法平面方程

$$L \quad \parallel \quad \lim_{t\to t_0} \frac{\overrightarrow{pq}}{t-t_0} = \left(\lim_{t\to t_0} \frac{u(t)-u(0)}{t-t_0}, \lim_{t\to 0} \frac{v(t)-v(0)}{t-t_0}, \lim_{t\to 0} \frac{w(t)-w(0)}{t-t_0} \right)$$

$$L_{pq} \quad \parallel \quad \frac{\overrightarrow{pq}}{t-t_0} = \left(\frac{u(t)-u(0)}{t-t_0}, \frac{v(t)-v(0)}{t-t_0}, \frac{w(t)-w(0)}{t-t_0} \right)$$



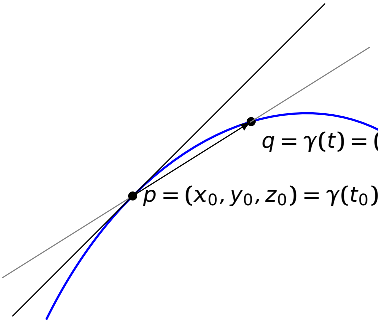
$$q = \gamma(t) = (u(t), v(t), w(t))$$

$$p = (x_0, y_0, z_0) = \gamma(t_0) = (u(t_0), v(t_0), w(t_0))$$

曲线的切线方程、法平面方程

$$L \quad \parallel \quad \lim_{t\to t_0} \frac{\overrightarrow{pq}}{t-t_0} = \left(\lim_{t\to t_0} \frac{u(t)-u(0)}{t-t_0}, \lim_{t\to 0} \frac{v(t)-v(0)}{t-t_0}, \lim_{t\to 0} \frac{w(t)-w(0)}{t-t_0}\right)$$
$$= (u'(t_0),\ v'(t_0),\ w'(t_0))$$

$$L_{pq} \quad \parallel \quad \frac{\overrightarrow{pq}}{t-t_0} = \left(\frac{u(t)-u(0)}{t-t_0}, \frac{v(t)-v(0)}{t-t_0}, \frac{w(t)-w(0)}{t-t_0}\right)$$

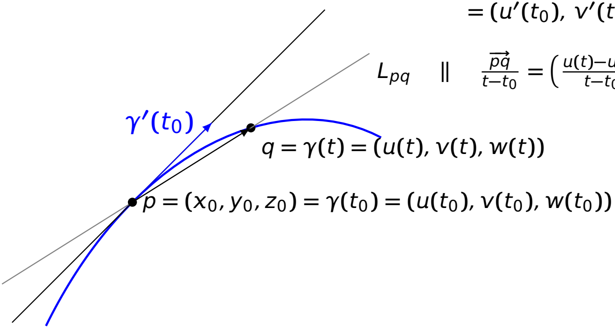


曲线的切线方程、法平面方程

$$L \parallel \lim_{t\to t_0}\frac{\overrightarrow{pq}}{t-t_0}=\left(\lim_{t\to t_0}\frac{u(t)-u(0)}{t-t_0},\lim_{t\to 0}\frac{v(t)-v(0)}{t-t_0},\lim_{t\to 0}\frac{w(t)-w(0)}{t-t_0}\right)$$

$$=(u'(t_0),\ v'(t_0),\ w'(t_0))=\gamma'(t_0)$$

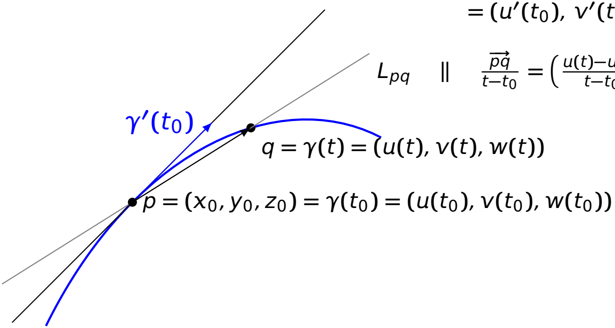
$$L_{pq} \parallel \frac{\overrightarrow{pq}}{t-t_0}=\left(\frac{u(t)-u(0)}{t-t_0},\frac{v(t)-v(0)}{t-t_0},\frac{w(t)-w(0)}{t-t_0}\right)$$



曲线的切线方程、法平面方程

$$L \quad \parallel \quad \lim_{t\to t_0} \frac{\overrightarrow{pq}}{t-t_0} = \left(\lim_{t\to t_0} \frac{u(t)-u(0)}{t-t_0}, \lim_{t\to 0} \frac{v(t)-v(0)}{t-t_0}, \lim_{t\to 0} \frac{w(t)-w(0)}{t-t_0} \right)$$
$$= (u'(t_0),\ v'(t_0), w'(t_0)) = \gamma'(t_0)$$

$$L_{pq} \quad \parallel \quad \frac{\overrightarrow{pq}}{t-t_0} = \left(\frac{u(t)-u(0)}{t-t_0}, \frac{v(t)-v(0)}{t-t_0}, \frac{w(t)-w(0)}{t-t_0} \right)$$

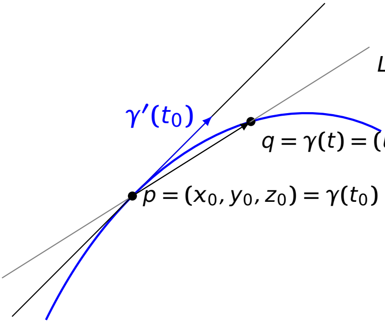


- 曲线的切线方程

曲线的切线方程、法平面方程

$$L \quad \parallel \quad \lim_{t\to t_0}\frac{\overrightarrow{pq}}{t-t_0} = \left(\lim_{t\to t_0}\frac{u(t)-u(0)}{t-t_0}, \lim_{t\to 0}\frac{v(t)-v(0)}{t-t_0}, \lim_{t\to 0}\frac{w(t)-w(0)}{t-t_0}\right)$$
$$= (u'(t_0),\ v'(t_0),\ w'(t_0)) = \gamma'(t_0)$$

$$L_{pq} \quad \parallel \quad \frac{\overrightarrow{pq}}{t-t_0} = \left(\frac{u(t)-u(0)}{t-t_0}, \frac{v(t)-v(0)}{t-t_0}, \frac{w(t)-w(0)}{t-t_0}\right)$$



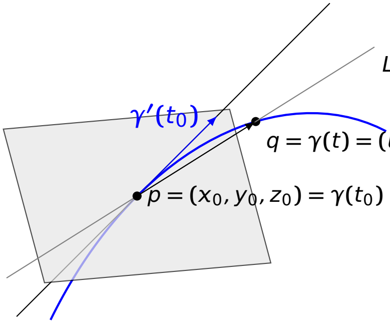
- 曲线的切线方程

$$\frac{x-x_0}{u'(t_0)} = \frac{y-y_0}{v'(t_0)} = \frac{z-z_0}{w'(t_0)}$$

曲线的切线方程、法平面方程

$$L \parallel \lim_{t\to t_0}\frac{\overrightarrow{pq}}{t-t_0} = \left(\lim_{t\to t_0}\frac{u(t)-u(0)}{t-t_0}, \lim_{t\to 0}\frac{v(t)-v(0)}{t-t_0}, \lim_{t\to 0}\frac{w(t)-w(0)}{t-t_0}\right)$$
$$= (u'(t_0),\ v'(t_0),\ w'(t_0)) = \gamma'(t_0)$$

$$L_{pq} \parallel \frac{\overrightarrow{pq}}{t-t_0} = \left(\frac{u(t)-u(0)}{t-t_0}, \frac{v(t)-v(0)}{t-t_0}, \frac{w(t)-w(0)}{t-t_0}\right)$$



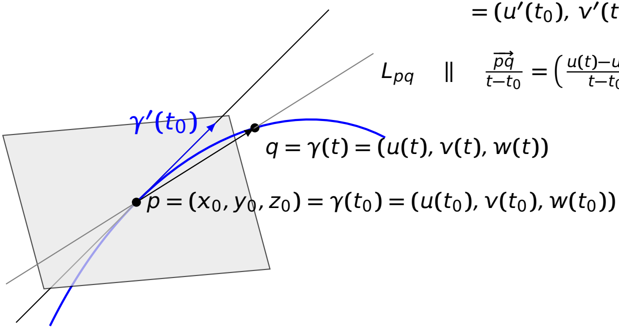
- 曲线的切线方程

$$\frac{x-x_0}{u'(t_0)} = \frac{y-y_0}{v'(t_0)} = \frac{z-z_0}{w'(t_0)}$$

曲线的切线方程、法平面方程

$$L \parallel \lim_{t\to t_0}\frac{\overrightarrow{pq}}{t-t_0} = \left(\lim_{t\to t_0}\frac{u(t)-u(0)}{t-t_0}, \lim_{t\to 0}\frac{v(t)-v(0)}{t-t_0}, \lim_{t\to 0}\frac{w(t)-w(0)}{t-t_0}\right)$$
$$= (u'(t_0),\ v'(t_0),\ w'(t_0)) = \gamma'(t_0)$$

$$L_{pq} \parallel \frac{\overrightarrow{pq}}{t-t_0} = \left(\frac{u(t)-u(0)}{t-t_0}, \frac{v(t)-v(0)}{t-t_0}, \frac{w(t)-w(0)}{t-t_0}\right)$$



- 曲线的切线方程

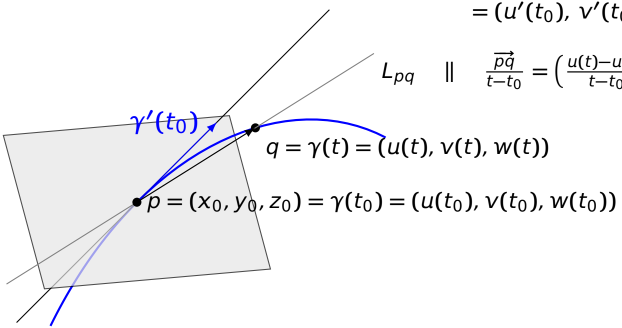
$$\frac{x-x_0}{u'(t_0)} = \frac{y-y_0}{v'(t_0)} = \frac{z-z_0}{w'(t_0)}$$

- 曲线的法平面方程

曲线的切线方程、法平面方程

$$L \parallel \lim_{t\to t_0} \frac{\overrightarrow{pq}}{t-t_0} = \left(\lim_{t\to t_0} \frac{u(t)-u(0)}{t-t_0}, \lim_{t\to 0} \frac{v(t)-v(0)}{t-t_0}, \lim_{t\to 0} \frac{w(t)-w(0)}{t-t_0}\right)$$
$$= (u'(t_0),\ v'(t_0),\ w'(t_0)) = \gamma'(t_0)$$

$$L_{pq} \parallel \frac{\overrightarrow{pq}}{t-t_0} = \left(\frac{u(t)-u(0)}{t-t_0}, \frac{v(t)-v(0)}{t-t_0}, \frac{w(t)-w(0)}{t-t_0}\right)$$



- 曲线的切线方程

$$\frac{x-x_0}{u'(t_0)} = \frac{y-y_0}{v'(t_0)} = \frac{z-z_0}{w'(t_0)}$$

- 曲线的法平面方程

$$u'(t_0)(x-x_0) + v'(t_0)(y-y_0) + w'(t_0)(z-z_0) = 0$$

例 求曲线 $\gamma(t)=(t,\ t^2,\ t^3)$ 在点 $(1,\ 1,\ 1)$（$t=1$）处的切线及法平面的方程。

例 求曲线 $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$ 在点 $(1, 1, 1)$（$t = 1$）处的切线及法平面的方程。

解

$$\gamma'(t) = (\qquad\qquad\qquad)$$

例 求曲线 $\gamma(t) = (t,\ t^2,\ t^3)$ 在点 $(1,\ 1,\ 1)$（$t = 1$）处的切线及法平面的方程。

解
$$\gamma'(t) = (1,\ 2t,\ 3t^2)$$

例 求曲线 $\gamma(t)=(t,\ t^2,\ t^3)$ 在点 $(1,\ 1,\ 1)$（$t=1$）处的切线及法平面的方程。

解

$$\gamma'(t)=(1,\ 2t,\ 3t^2)$$

$$\gamma'(0)=(1,\ 2,\ 3)$$

例 求曲线 $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$ 在点 $(1, 1, 1)$（$t = 1$）处的切线及法平面的方程。

解

$$\gamma'(t) = (1, 2t, 3t^2)$$

$$\gamma'(0) = (1, 2, 3)$$

- 线的切线方程

- 曲线的法平面方程

例 求曲线 $\gamma(t)=(t,\ t^2,\ t^3)$ 在点 $(1,\ 1,\ 1)$（$t=1$）处的切线及法平面的方程。

解

$$\gamma'(t)=(1,\ 2t,\ 3t^2)$$

$$\gamma'(0)=(1,\ 2,\ 3)$$

- 线的切线方程

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$$

- 曲线的法平面方程

例 求曲线 $\gamma(t)=(t,\, t^2,\, t^3)$ 在点 $(1,\, 1,\, 1)$（$t=1$）处的切线及法平面的方程。

解

$$\gamma'(t)=(1,\, 2t,\, 3t^2)$$

$$\gamma'(0)=(1,\, 2,\, 3)$$

- 线的切线方程

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$$

- 曲线的法平面方程

$$1\cdot(x-1)+2\cdot(y-1)+3\cdot(z-1)=0$$

例 求曲线 $\gamma(t)=(t,\, t^2,\, t^3)$ 在点 $(1,\,1,\,1)$（$t=1$）处的切线及法平面的方程。

解

$$\gamma'(t)=(1,\,2t,\,3t^2)$$

$$\gamma'(0)=(1,\,2,\,3)$$

- 线的切线方程

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$$

- 曲线的法平面方程

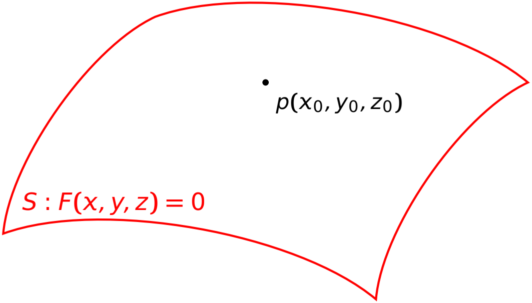
$$1\cdot(x-1)+2\cdot(y-1)+3\cdot(z-1)=0 \quad\Rightarrow\quad x+2y+3z-6=0$$

We are here now...

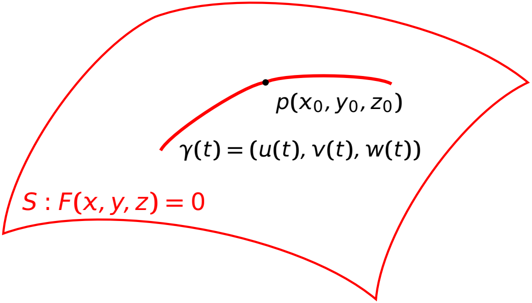
1. 曲线的切线、法平面

2. 曲面的切平面、法线

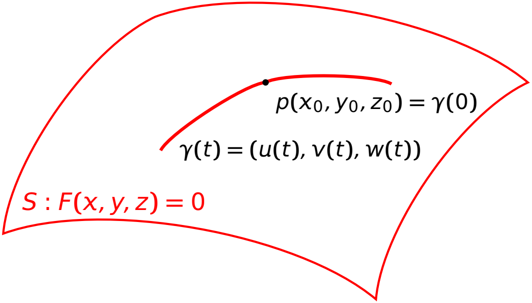
切平面



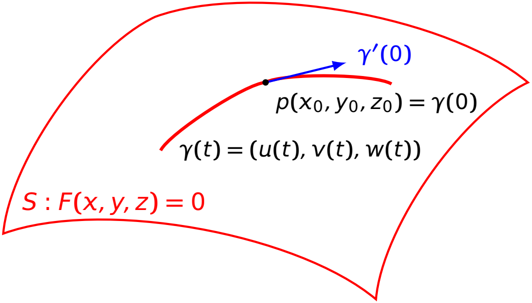
切平面



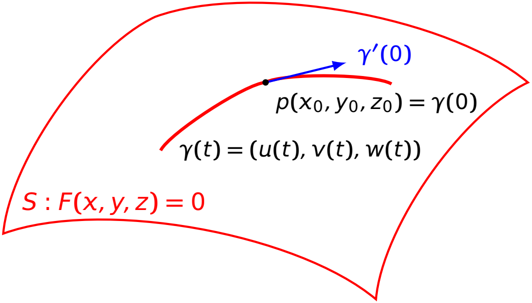
切平面



切平面

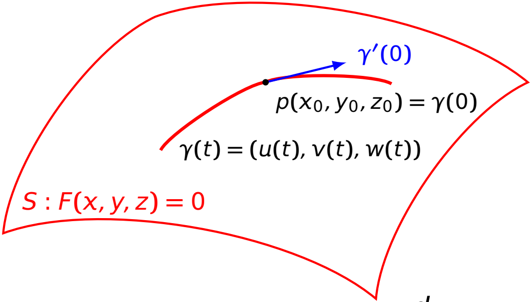


切平面



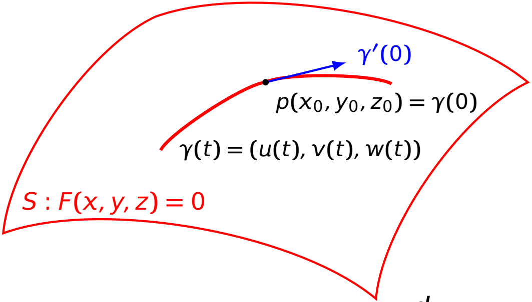
$$0 \equiv F(u(t), v(t), w(t))$$

切平面



$$0 \equiv F(u(t), v(t), w(t)) \Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} F(u(t), v(t), w(t))\Big|_{t=0}$$

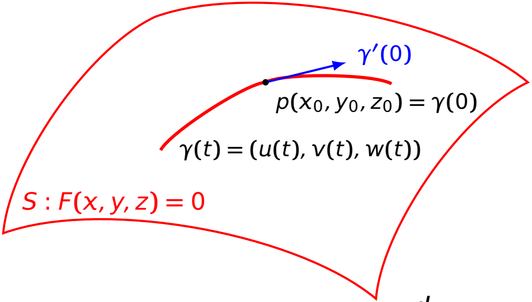
切平面



$$0 \equiv F(u(t), v(t), w(t)) \Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} F(u(t), v(t), w(t))\Big|_{t=0}$$

$$= F_x \quad \cdot u' \quad + F_y \quad \cdot v' \quad + F_z \quad \cdot w'$$

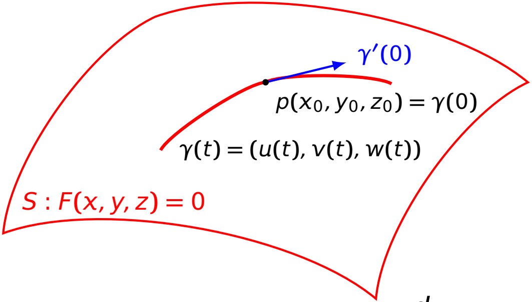
切平面



$$0 \equiv F(u(t), v(t), w(t)) \Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} F(u(t), v(t), w(t))\Big|_{t=0}$$

$$= F_x(p) \cdot u' \quad + F_y(p) \cdot v' \quad + F_z(p) \cdot w'$$

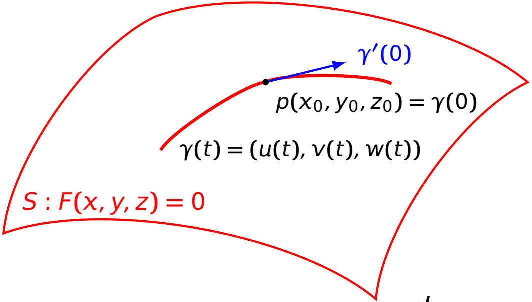
切平面



$$0 \equiv F(u(t), v(t), w(t)) \Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} F(u(t), v(t), w(t))\Big|_{t=0}$$

$$= F_x(p) \cdot u'(0) + F_y(p) \cdot v'(0) + F_z(p) \cdot w'(0)$$

切平面

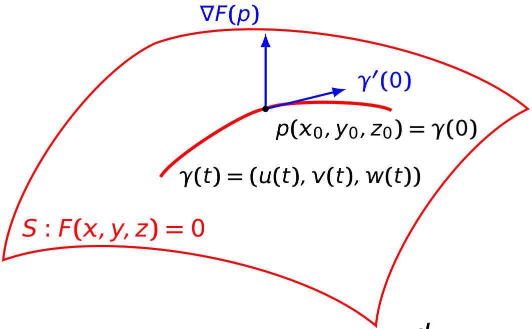


$$0 \equiv F(u(t), v(t), w(t)) \Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} F(u(t), v(t), w(t)) \Big|_{t=0}$$

$$= F_x(p) \cdot u'(0) + F_y(p) \cdot v'(0) + F_z(p) \cdot w'(0)$$

$$= \nabla F(p) \cdot \gamma'(0)$$

切平面

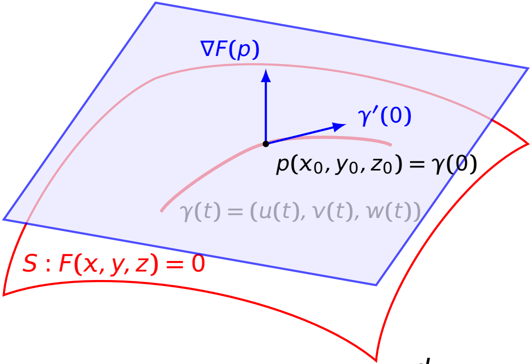


$$0 \equiv F(u(t), v(t), w(t)) \Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} F(u(t), v(t), w(t))\Big|_{t=0}$$

$$= F_x(p) \cdot u'(0) + F_y(p) \cdot v'(0) + F_z(p) \cdot w'(0)$$

$$= \nabla F(p) \cdot \gamma'(0)$$

切平面

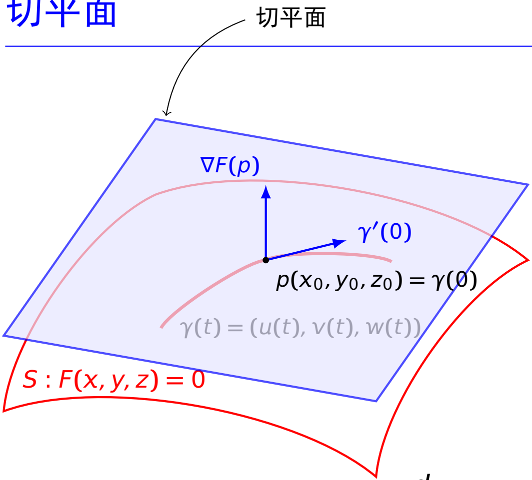


$$0 \equiv F(u(t), v(t), w(t)) \Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} F(u(t), v(t), w(t))\Big|_{t=0}$$

$$= F_x(p) \cdot u'(0) + F_y(p) \cdot v'(0) + F_z(p) \cdot w'(0)$$

$$= \nabla F(p) \cdot \gamma'(0)$$

切平面



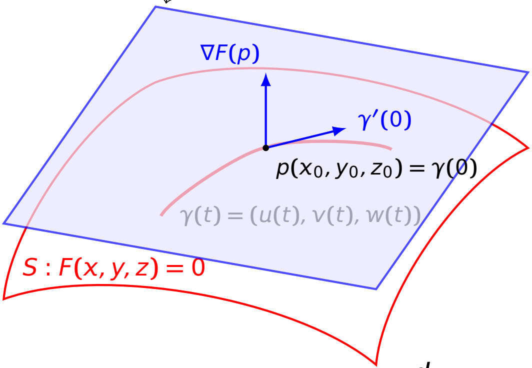
$$0 \equiv F(u(t), v(t), w(t)) \Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} F(u(t), v(t), w(t)) \bigg|_{t=0}$$

$$= F_x(p) \cdot u'(0) + F_y(p) \cdot v'(0) + F_z(p) \cdot w'(0)$$

$$= \nabla F(p) \cdot \gamma'(0)$$

切平面

切平面 $F_x(p)(x-x_0)+F_y(p)(y-y_0)+F_z(p)(z-z_0)=0$



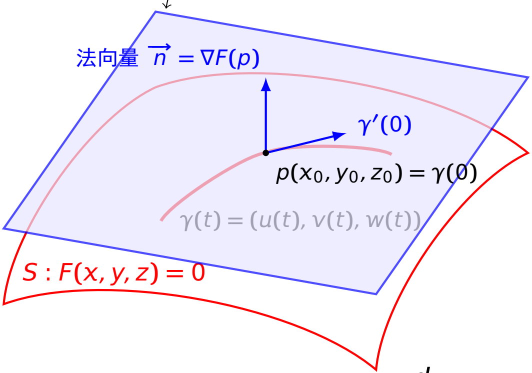
$$0\equiv F(u(t),v(t),w(t))\Rightarrow 0=\frac{d}{dt}F(u(t),v(t),w(t))\Big|_{t=0}$$

$$=F_x(p)\cdot u'(0)+F_y(p)\cdot v'(0)+F_z(p)\cdot w'(0)$$

$$=\nabla F(p)\cdot\gamma'(0)$$

切平面

切平面 $F_x(p)(x-x_0)+F_y(p)(y-y_0)+F_z(p)(z-z_0)=0$



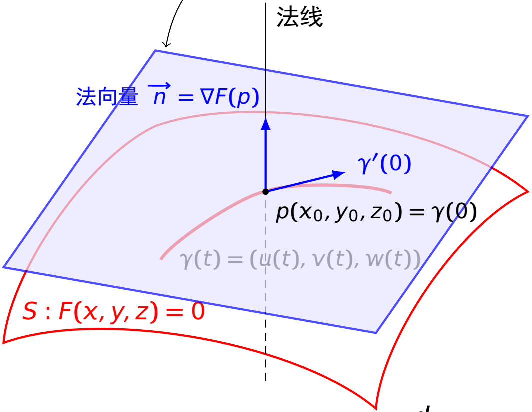
$$0\equiv F(u(t),v(t),w(t))\Rightarrow 0=\frac{d}{dt}F(u(t),v(t),w(t))\Big|_{t=0}$$

$$=F_x(p)\cdot u'(0)+F_y(p)\cdot v'(0)+F_z(p)\cdot w'(0)$$

$$=\nabla F(p)\cdot\gamma'(0)$$

切平面

切平面 $F_x(p)(x-x_0)+F_y(p)(y-y_0)+F_z(p)(z-z_0)=0$



$$0\equiv F(u(t),v(t),w(t)) \Rightarrow 0=\frac{d}{dt}F(u(t),v(t),w(t))\Big|_{t=0}$$

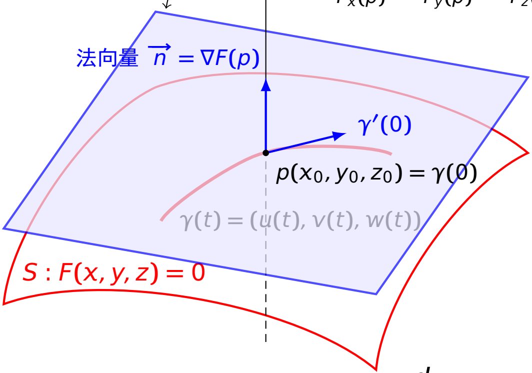
$$=F_x(p)\cdot u'(0)+F_y(p)\cdot v'(0)+F_z(p)\cdot w'(0)$$

$$=\nabla F(p)\cdot\gamma'(0)$$

切平面

切平面 $F_x(p)(x-x_0)+F_y(p)(y-y_0)+F_z(p)(z-z_0)=0$

法线 $\dfrac{x-x_0}{F_x(p)}=\dfrac{y-y_0}{F_y(p)}=\dfrac{z-z_0}{F_z(p)}$



$$0\equiv F(u(t),v(t),w(t)) \Rightarrow 0=\frac{d}{dt}F(u(t),v(t),w(t))\Big|_{t=0}$$

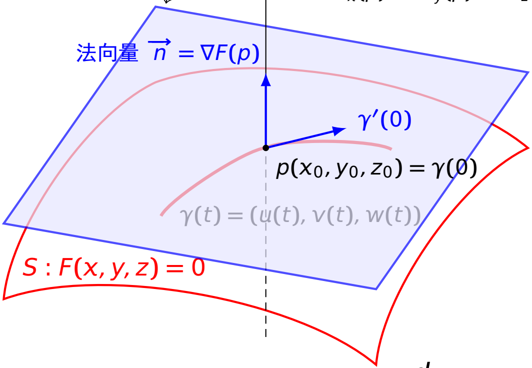
$$=F_x(p)\cdot u'(0)+F_y(p)\cdot v'(0)+F_z(p)\cdot w'(0)$$

$$=\nabla F(p)\cdot\gamma'(0)$$

切平面

切平面 $F_x(p)(x-x_0)+F_y(p)(y-y_0)+F_z(p)(z-z_0)=0$

法线 $\dfrac{x-x_0}{F_x(p)}=\dfrac{y-y_0}{F_y(p)}=\dfrac{z-z_0}{F_z(p)}$



例 求曲面 $3xy+z^2=4$ 在点 (1, 1, 1) 处的切平面及法线的方程。

$$0\equiv F(u(t),v(t),w(t))\Rightarrow 0=\frac{d}{dt}F(u(t),v(t),w(t))\Big|_{t=0}$$
$$=F_x(p)\cdot u'(0)+F_y(p)\cdot v'(0)+F_z(p)\cdot w'(0)$$
$$=\nabla F(p)\cdot\gamma'(0)$$

例 求曲面 $3xy + z^2 = 4$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切平面及法线的方程。

例 求曲面 $3xy + z^2 = 4$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切平面及法线的方程。

解

$$F(x, y, z) = 3xy + z^2 - 4,$$

例 求曲面 $3xy + z^2 = 4$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切平面及法线的方程。

解

$$F(x, y, z) = 3xy + z^2 - 4,$$

$$\overrightarrow{n} = \nabla F = (F_x, F_y, F_z)$$

例 求曲面 $3xy + z^2 = 4$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切平面及法线的方程。

解

$$F(x, y, z) = 3xy + z^2 - 4,$$

$$\overrightarrow{n} = \nabla F = (F_x, F_y, F_z) = (3y, 3x, 2z),$$

例 求曲面 $3xy + z^2 = 4$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切平面及法线的方程。

解

$$F(x, y, z) = 3xy + z^2 - 4,$$

$$\overrightarrow{n} = \nabla F = (F_x, F_y, F_z) = (3y, 3x, 2z),$$

$$\overrightarrow{n}|_{(1,1,1)} = (3, 3, 2).$$

例 求曲面 $3xy+z^2=4$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切平面及法线的方程。

解
$$F(x,y,z)=3xy+z^2-4,$$
$$\overrightarrow{n}=\nabla F=(F_x,F_y,F_z)=(3y,3x,2z),$$
$$\overrightarrow{n}|_{(1,1,1)}=(3,3,2).$$

所以在点处的切平面方程为

法线方程为

例 求曲面 $3xy+z^2=4$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切平面及法线的方程。

解

$$F(x, y, z)=3xy+z^2-4,$$

$$\overrightarrow{n}=\nabla F=(F_x, F_y, F_z)=(3y, 3x, 2z),$$

$$\overrightarrow{n}|_{(1,1,1)}=(3, 3, 2).$$

所以在点处的切平面方程为

$$3(x-1)+3(y-1)+2(z-1)=0$$

法线方程为

例 求曲面 $3xy+z^2=4$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切平面及法线的方程。

解
$$F(x, y, z)=3xy+z^2-4,$$
$$\overrightarrow{n}=\nabla F=(F_x, F_y, F_z)=(3y, 3x, 2z),$$
$$\overrightarrow{n}|_{(1,1,1)}=(3, 3, 2).$$

所以在点处的切平面方程为

$$3(x-1)+3(y-1)+2(z-1)=0 \quad\Rightarrow\quad 3x+3y+2z-8=0$$

法线方程为

例 求曲面 $3xy + z^2 = 4$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切平面及法线的方程。

解

$$F(x, y, z) = 3xy + z^2 - 4,$$

$$\overrightarrow{n} = \nabla F = (F_x, F_y, F_z) = (3y, 3x, 2z),$$

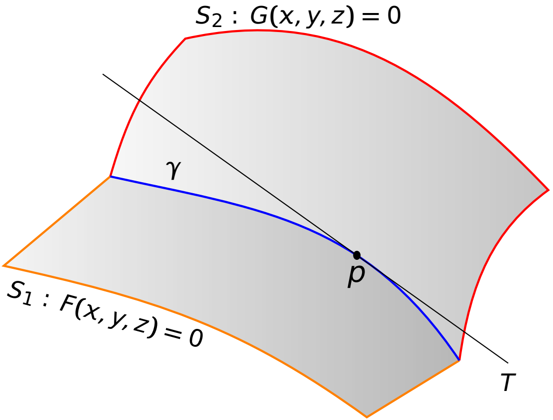
$$\overrightarrow{n}|_{(1,1,1)} = (3, 3, 2).$$

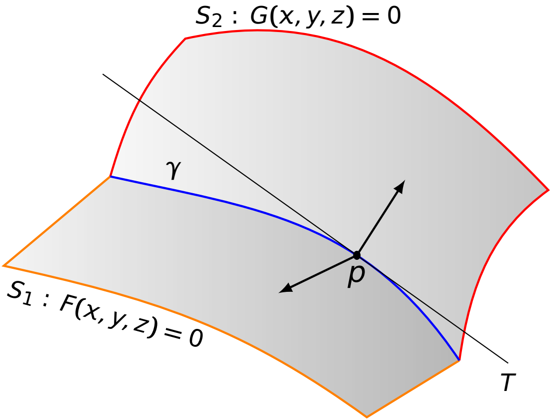
所以在点处的切平面方程为

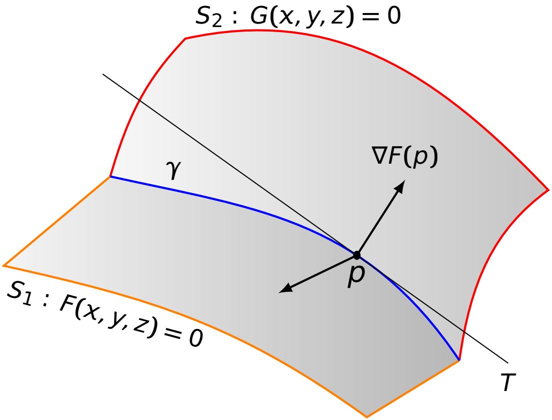
$$3(x-1) + 3(y-1) + 2(z-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x + 3y + 2z - 8 = 0$$

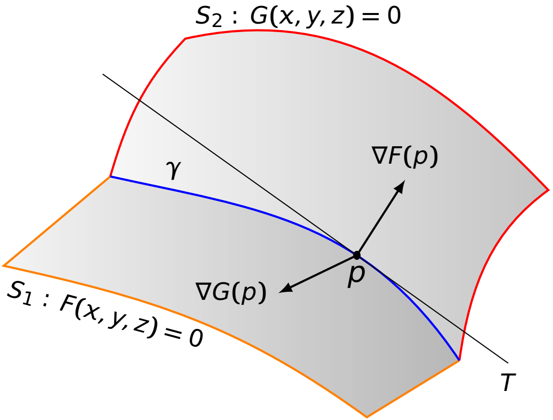
法线方程为

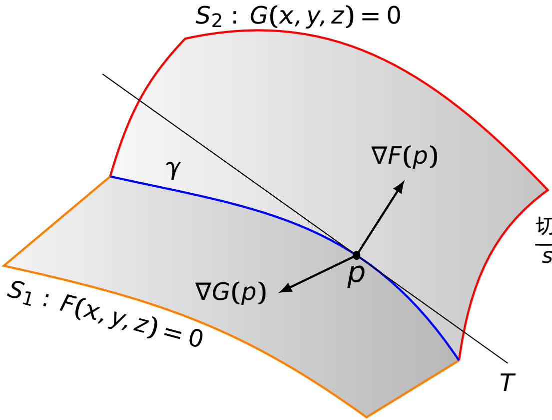
$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{2}$$


$S_2: G(x,y,z)=0$
γ
p
$S_1: F(x,y,z)=0$
T

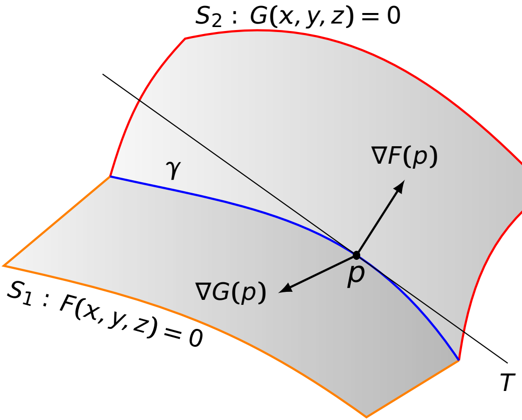

$S_2 : G(x, y, z) = 0$
γ
p
$S_1 : F(x, y, z) = 0$
T


$S_2 : G(x, y, z) = 0$
γ
$\nabla F(p)$
p
$S_1 : F(x, y, z) = 0$
T


$S_2 : G(x, y, z) = 0$
γ
$\nabla F(p)$
p
$\nabla G(p)$
$S_1 : F(x, y, z) = 0$
T



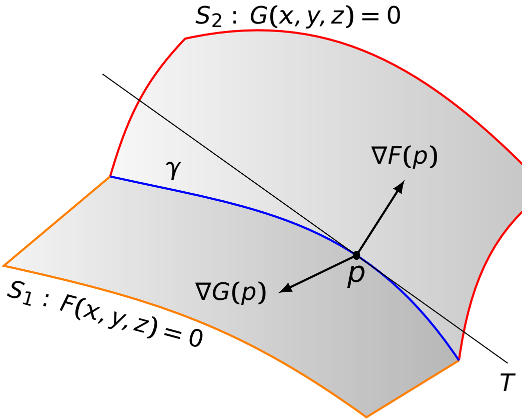
切线T的方向向量可取为
$\overrightarrow{s} = \nabla F(p) \times \nabla G(p)$



切线T的方向向量可取为

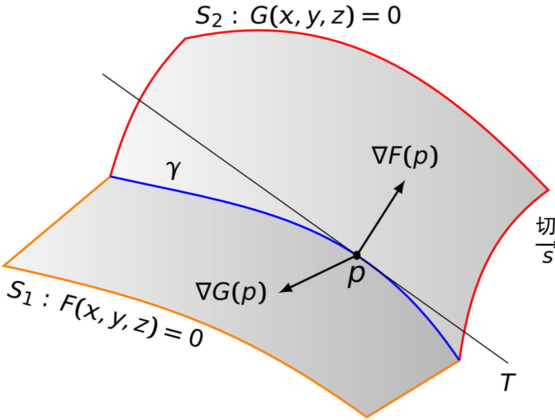
$$\vec{s} = \nabla F(p) \times \nabla G(p)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x(p) & F_y(p) & F_z(p) \\ G_x(p) & G_y(p) & G_z(p) \end{vmatrix}$$



切线T的方向向量可取为

$$\overrightarrow{s}=\nabla F(p)\times\nabla G(p)$$
$$=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ F_x(p) & F_y(p) & F_z(p)\\ G_x(p) & G_y(p) & G_z(p)\end{vmatrix}$$
$$=\left(\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}_p, -\begin{vmatrix}F_x & F_z\\ G_x & G_z\end{vmatrix}_p, \begin{vmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{vmatrix}_p\right)$$



切线T的方向向量可取为

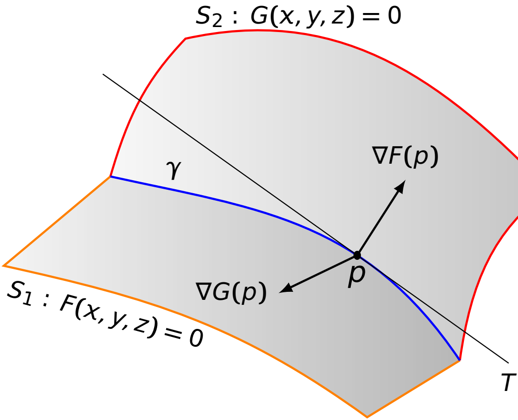
$$\overrightarrow{s} = \nabla F(p)\times\nabla G(p)$$

$$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ F_x(p) & F_y(p) & F_z(p) \\ G_x(p) & G_y(p) & G_z(p) \end{vmatrix}$$

$$= \left(\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_p, -\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}_p, \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_p \right)$$

- 切线方程:

- 法平面方程:



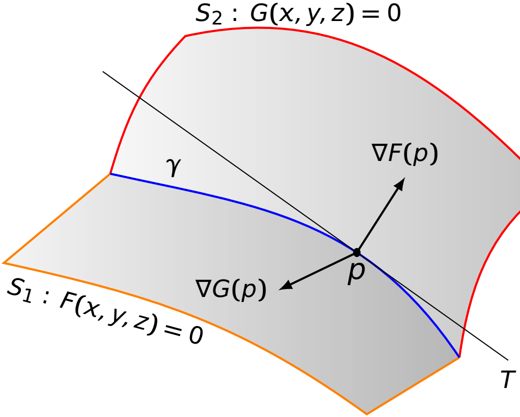
切线T的方向向量可取为

$$\vec{s} = \nabla F(p) \times \nabla G(p)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x(p) & F_y(p) & F_z(p) \\ G_x(p) & G_y(p) & G_z(p) \end{vmatrix}$$

$$= \left(\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_p, -\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}_p, \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_p \right)$$

- 切线方程： $\dfrac{x-x_0}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_p} = \dfrac{y-y_0}{-\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}_p} = \dfrac{z-z_0}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_p}$
- 法平面方程：



切线T的方向向量可取为

$$\vec{s} = \nabla F(p)\times\nabla G(p)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x(p) & F_y(p) & F_z(p) \\ G_x(p) & G_y(p) & G_z(p) \end{vmatrix}$$

$$= \left(\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_p, -\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}_p, \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_p \right)$$

- 切线方程：$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_p} = \frac{y-y_0}{-\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}_p} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_p}$$
- 法平面方程：

$$\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_p (x-x_0) - \begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}_p (y-y_0) + \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_p (z-z_0) = 0$$

小结 曲线 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 上一点 $p(x_0,y_0,z_0)$ 处

- 切方向可取为

$$\vec{s}=\nabla F(p)\times\nabla G(p)=\left.\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}\right|_p=\left(\left.\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}\right|_p,-\left.\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}\right|_p,\left.\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}\right|_p\right)$$

- 切线方程: $\dfrac{x-x_0}{\left.\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}\right|_p}=\dfrac{y-y_0}{-\left.\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}\right|_p}=\dfrac{z-z_0}{\left.\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}\right|_p}$

- 法平面方程:

$$0=\left.\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}\right|_p(x-x_0)-\left.\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}\right|_p(y-y_0)+\left.\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}\right|_p(z-z_0)$$

小结 曲线 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 上一点 $p(x_0,y_0,z_0)$ 处

- 切方向可取为

$$\vec{s}=\nabla F(p)\times\nabla G(p)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}_p=\left(\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_p, -\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}_p, \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_p\right)$$

- 切线方程: $\dfrac{x-x_0}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_p}=\dfrac{y-y_0}{-\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}_p}=\dfrac{z-z_0}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_p}$

- 法平面方程:

$$0=\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_p(x-x_0)-\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}_p(y-y_0)+\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_p(z-z_0)$$

$$=\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ F_x(p) & F_y(p) & F_z(p) \\ G_x(p) & G_y(p) & G_z(p) \end{vmatrix}$$

小结 曲线 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 上一点 $p(x_0,y_0,z_0)$ 处

- 切方向可取为

$$\vec{s}=\nabla F(p)\times\nabla G(p)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}_p=\left(\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_p,\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_p,\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_p\right)$$

- 切线方程：$\dfrac{x-x_0}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_p}=\dfrac{y-y_0}{-\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}_p}=\dfrac{z-z_0}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_p}$

- 法平面方程：

$$0=\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_p(x-x_0)-\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}_p(y-y_0)+\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_p(z-z_0)$$

$$=\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ F_x(p) & F_y(p) & F_z(p) \\ G_x(p) & G_y(p) & G_z(p) \end{vmatrix}$$

小结 曲线 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 上一点 $p(x_0,y_0,z_0)$ 处

- 切方向可取为

$$\vec{s}=\nabla F(p)\times\nabla G(p)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}_p=\left(\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_p,\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_p,\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_p\right)$$

- 切线方程: $\dfrac{x-x_0}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_p}=\dfrac{y-y_0}{\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_p}=\dfrac{z-z_0}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_p}$

- 法平面方程:

$$0=\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_p(x-x_0)-\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}_p(y-y_0)+\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_p(z-z_0)$$

$$=\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ F_x(p) & F_y(p) & F_z(p) \\ G_x(p) & G_y(p) & G_z(p) \end{vmatrix}$$

例 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线与法平面方程

例 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线与法平面方程

解 曲线在该点处的切线方向可取为

$$\left| \begin{matrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{matrix} \right|_p$$

例 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线与法平面方程

解 曲线在该点处的切线方向可取为

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}_p = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$$

例 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线与法平面方程

解 曲线在该点处的切线方向可取为

$$\left|\begin{matrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{matrix}\right|_p = \left|\begin{matrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2x & 2y & 2z \\ & & \end{matrix}\right|$$

例 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线与法平面方程

解 曲线在该点处的切线方向可取为

$$\left.\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}\right|_p = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

例 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线与法平面方程

解 曲线在该点处的切线方向可取为

$$\left|\begin{matrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{matrix}\right|_p = \left|\begin{matrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right|_{(1,-2,1)}$$

例 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线与法平面方程

解 曲线在该点处的切线方向可取为

$$\left|\begin{matrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{matrix}\right|_p = \left|\begin{matrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right|_{(1,-2,1)} = \left|\begin{matrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right|$$

例 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线与法平面方程

解 曲线在该点处的切线方向可取为

$$\left|\begin{matrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{matrix}\right|_p = \left|\begin{matrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right|_{(1,-2,1)} = \left|\begin{matrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right| = (-3,0,3)$$

例 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线与法平面方程

解 曲线在该点处的切线方向可取为

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}_p = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{(1,-2,1)} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-3,0,3)$$

简单计，又不妨取为

$$\overrightarrow{s} = (1,0,-1)$$

例 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线与法平面方程

解 曲线在该点处的切线方向可取为

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}_p = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{(1,-2,1)} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-3,0,3)$$

简单计，又不妨取为

$$\overrightarrow{s} = (1,0,-1)$$

所以

- 切线方程：
- 法平面方程：

例 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线与法平面方程

解 曲线在该点处的切线方向可取为

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}_p = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{(1,-2,1)} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-3,0,3)$$

简单计，又不妨取为

$$\overrightarrow{s} = (1,0,-1)$$

所以

- 切线方程：$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-1}{-1}$
- 法平面方程：

例 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线与法平面方程

解 曲线在该点处的切线方向可取为

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}_p = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{(1,-2,1)} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-3,0,3)$$

简单计，又不妨取为

$$\vec{s} = (1,0,-1)$$

所以

- 切线方程：$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-1}{-1}$
- 法平面方程：

  $$1\cdot(x-1)+0\cdot(y+2)+(-1)\cdot(z-1)=0$$

例 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线与法平面方程

解 曲线在该点处的切线方向可取为

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}_p = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{(1,-2,1)} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-3,0,3)$$

简单计，又不妨取为

$$\overrightarrow{s} = (1,0,-1)$$

所以

- 切线方程：$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-1}{-1}$
- 法平面方程：

  $$1\cdot(x-1)+0\cdot(y+2)+(-1)\cdot(z-1)=0 \quad \Rightarrow \quad x-z=0$$