§1.2　行列式的定义与性质

数学系　梁卓滨

2018 - 2019 学年上学期

Outline of §1.2

1. 行列式的基本性质——从二三阶行列式讲起

2. n 阶行列式的公理化定义

3. 四阶行列式的计算（初步）

4. 转置行列式

We are here now...

1. 行列式的基本性质——从二三阶行列式讲起

2. n 阶行列式的公理化定义

3. 四阶行列式的计算（初步）

4. 转置行列式

行列式的规范性

主对角线：从左上角到右下角的对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

副对角线：从右上角到左下角的对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

行列式的规范性

主对角线：从左上角到右下角的对角线

$$\begin{vmatrix} \color{red}{a_{11}} & a_{12} \\ a_{21} & \color{red}{a_{22}} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

副对角线：从右上角到左下角的对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

行列式的规范性

主对角线：从左上角到右下角的对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

副对角线：从右上角到左下角的对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

行列式的规范性

主对角线：从左上角到右下角的对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

副对角线：从右上角到左下角的对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

行列式的规范性

主对角线：从左上角到右下角的对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

副对角线：从右上角到左下角的对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

行列式的规范性

主对角线：从左上角到右下角的对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

副对角线：从右上角到左下角的对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

单位行列式：主对角线上元素为 1 其他元素为 0 的行列式

行列式的规范性

主对角线：从左上角到右下角的对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

副对角线：从右上角到左下角的对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

单位行列式：主对角线上元素为 1 其他元素为 0 的行列式

例 二阶单位行列式：　　；三阶单位行列式：

行列式的规范性

主对角线：从左上角到右下角的对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

副对角线：从右上角到左下角的对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

单位行列式：主对角线上元素为 1 其他元素为 0 的行列式

例 二阶单位行列式：$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$； 三阶单位行列式：

行列式的规范性

主对角线：从左上角到右下角的对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

副对角线：从右上角到左下角的对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

单位行列式：主对角线上元素为 1 其他元素为 0 的行列式

例 二阶单位行列式：$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$； 三阶单位行列式：$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

行列式的规范性

主对角线：从左上角到右下角的对角线

$$\begin{vmatrix} \color{red}{a_{11}} & a_{12} \\ a_{21} & \color{red}{a_{22}} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \color{red}{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \color{red}{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \color{red}{a_{33}} \end{vmatrix}$$

副对角线：从右上角到左下角的对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \color{blue}{a_{12}} \\ \color{blue}{a_{21}} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \color{blue}{a_{13}} \\ a_{21} & \color{blue}{a_{22}} & a_{23} \\ \color{blue}{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

单位行列式：主对角线上元素为 1 其他元素为 0 的行列式

例 二阶单位行列式：$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$； 三阶单位行列式：$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

性质 1（规范性） 单位行列式的值为 1。

行列式的反称性

性质 2（反称性） 行列式交换两行（列）后，它的值变号。

行列式的反称性

性质 2（反称性） 行列式交换两行（列）后，它的值变号。

例

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

行列式的反称性

性质 2（反称性） 行列式交换两行（列）后，它的值变号。

例

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

行列式的反称性

性质 2（反称性） 行列式交换两行（列）后，它的值变号。

例

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

行列式的反称性

性质 2（反称性） 行列式交换两行（列）后，它的值变号。

例

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

行列式的反称性

性质 2（反称性） 行列式交换两行（列）后，它的值变号。

例

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

行列式的反称性

性质 2（反称性） 行列式交换两行（列）后，它的值变号。

例

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

行列式的反称性

性质 2（反称性） 行列式交换两行（列）后，它的值变号。

例

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

例 已知行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 7$，则 $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = \_\_\_\_$

行列式的反称性

性质 2（反称性） 行列式交换两行（列）后，它的值变号。

例

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

例 已知行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 7$，则 $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = \underline{-7}$

行列式的数乘性

性质 3（数乘性） 行列式任一行（列）可以把公倍数 k “提”出行列式。

行列式的数乘性

性质 3（数乘性） 行列式任一行（列）可以把公倍数 k “提”出行列式。

例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

行列式的数乘性

性质 3（数乘性） 行列式任一行（列）可以把公倍数 k “提”出行列式。

例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

行列式的数乘性

性质 3（数乘性） 行列式任一行（列）可以把公倍数 k “提”出行列式。

例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

行列式的数乘性

性质 3（数乘性） 行列式任一行（列）可以把公倍数 k “提”出行列式。

例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

例 已知 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -28$, 则 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3k \\ 0 & 5 & 4k \\ 1 & 6 & 3k \end{vmatrix} =$

行列式的数乘性

性质 3（数乘性） 行列式任一行（列）可以把公倍数 k “提”出行列式。

例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

例 已知 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -28$, 则 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3k \\ 0 & 5 & 4k \\ 1 & 6 & 3k \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} =$

行列式的数乘性

性质 3（数乘性） 行列式任一行（列）可以把公倍数 k “提”出行列式。

例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

例 已知 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -28$, 则 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3k \\ 0 & 5 & 4k \\ 1 & 6 & 3k \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -28k$

行列式的数乘性

性质 3（数乘性） 行列式任一行（列）可以把公倍数 k “提”出行列式。

例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

例 已知 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -28$, 则 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3k \\ 0 & 5 & 4k \\ 1 & 6 & 3k \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -28k$

例 已知 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -58$, 则 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -3 & 0 & 18 \end{vmatrix} =$

行列式的数乘性

性质 3（数乘性） 行列式任一行（列）可以把公倍数 k “提”出行列式。

例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

例 已知 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -28$, 则 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3k \\ 0 & 5 & 4k \\ 1 & 6 & 3k \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -28k$

例 已知 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -58$, 则 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -3 & 0 & 18 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} =$

行列式的数乘性

性质 3（数乘性） 行列式任一行（列）可以把公倍数 k “提”出行列式。

例
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

例 已知 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -28$, 则 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3k \\ 0 & 5 & 4k \\ 1 & 6 & 3k \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -28k$

例 已知 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -58$, 则 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -3 & 0 & 18 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -174$

例 已知 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -58$，求 $\begin{vmatrix} k & 2k & 3k \\ 4k & 0 & 5k \\ -k & 0 & 6k \end{vmatrix}$。

例 已知 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -58$，求 $\begin{vmatrix} k & 2k & 3k \\ 4k & 0 & 5k \\ -k & 0 & 6k \end{vmatrix}$。

解

$$\begin{vmatrix} k & 2k & 3k \\ 4k & 0 & 5k \\ -k & 0 & 6k \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 1 & 2k & 3k \\ 4 & 0 & 5k \\ -1 & 0 & 6k \end{vmatrix}$$

例 已知 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -58$，求 $\begin{vmatrix} k & 2k & 3k \\ 4k & 0 & 5k \\ -k & 0 & 6k \end{vmatrix}$。

解

$$\begin{vmatrix} k & 2k & 3k \\ 4k & 0 & 5k \\ -k & 0 & 6k \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 1 & 2k & 3k \\ 4 & 0 & 5k \\ -1 & 0 & 6k \end{vmatrix} = k \cdot k \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3k \\ 4 & 0 & 5k \\ -1 & 0 & 6k \end{vmatrix}$$

例 已知 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -58$，求 $\begin{vmatrix} k & 2k & 3k \\ 4k & 0 & 5k \\ -k & 0 & 6k \end{vmatrix}$。

解

$$\begin{vmatrix} k & 2k & 3k \\ 4k & 0 & 5k \\ -k & 0 & 6k \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 1 & 2k & 3k \\ 4 & 0 & 5k \\ -1 & 0 & 6k \end{vmatrix} = k \cdot k \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3k \\ 4 & 0 & 5k \\ -1 & 0 & 6k \end{vmatrix}$$

$$= k \cdot k \cdot k \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

例 已知 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -58$，求 $\begin{vmatrix} k & 2k & 3k \\ 4k & 0 & 5k \\ -k & 0 & 6k \end{vmatrix}$。

解

$$\begin{vmatrix} k & 2k & 3k \\ 4k & 0 & 5k \\ -k & 0 & 6k \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} 1 & 2k & 3k \\ 4 & 0 & 5k \\ -1 & 0 & 6k \end{vmatrix} = k\cdot k\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3k \\ 4 & 0 & 5k \\ -1 & 0 & 6k \end{vmatrix}$$

$$= k\cdot k\cdot k\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -58k^3$$

行列式的可加性

性质 4（可加性） 行列式可沿一行（列）拆分成两个行列式之和。

行列式的可加性

性质 4（可加性） 行列式可沿一行（列）拆分成两个行列式之和。

例

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 7 & 9 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ & & \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ & & \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

行列式的可加性

性质 4（可加性） 行列式可沿一行（列）拆分成两个行列式之和。

例

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 7 & 9 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ & & \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

行列式的可加性

性质 4（可加性） 行列式可沿一行（列）拆分成两个行列式之和。

例

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 7 & 9 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & \quad 0 \quad & \quad 5 \\ 4 & & \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

行列式的可加性

性质 4（可加性） 行列式可沿一行（列）拆分成两个行列式之和。

例

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 7 & 9 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & 7 & \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

行列式的可加性

性质 4（可加性） 行列式可沿一行（列）拆分成两个行列式之和。

例
$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 7 & 9 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & 7 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

行列式的可加性

性质 4（可加性） 行列式可沿一行（列）拆分成两个行列式之和。

例

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 7 & 9 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & 7 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

例

$$\begin{vmatrix} 13 & 3 & 20 \\ -2 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

行列式的可加性

性质 4（可加性） 行列式可沿一行（列）拆分成两个行列式之和。

例

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 7 & 9 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & 7 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

例

$$\begin{vmatrix} 13 & 3 & 20 \\ -2 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 3 & \\ -2 & 8 & \\ 4 & 7 & \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 13 & 3 & \\ -2 & 8 & \\ 4 & 7 & \end{vmatrix}$$

行列式的可加性

性质 4（可加性） 行列式可沿一行（列）拆分成两个行列式之和。

例

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 7 & 9 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & 7 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

例

$$\begin{vmatrix} 13 & 3 & 20 \\ -2 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 3 & -1 \\ -2 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 13 & 3 & \\ -2 & 8 & \\ 4 & 7 & \end{vmatrix}$$

行列式的可加性

性质 4（可加性） 行列式可沿一行（列）拆分成两个行列式之和。

例

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 7 & 9 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & 7 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

例

$$\begin{vmatrix} 13 & 3 & 20 \\ -2 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 3 & -1 \\ -2 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 13 & 3 & -21 \\ -2 & 8 & \\ 4 & 7 & \end{vmatrix}$$

行列式的可加性

性质 4（可加性） 行列式可沿一行（列）拆分成两个行列式之和。

例
$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 7 & 9 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & 7 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

例
$$\begin{vmatrix} 13 & 3 & 20 \\ -2 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 3 & -1 \\ -2 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 13 & 3 & -21 \\ -2 & 8 & -9 \\ 4 & 7 & \end{vmatrix}$$

行列式的可加性

性质 4（可加性） 行列式可沿一行（列）拆分成两个行列式之和。

例

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 7 & 9 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & 7 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

例

$$\begin{vmatrix} 13 & 3 & 20 \\ -2 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 3 & -1 \\ -2 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 13 & 3 & -21 \\ -2 & 8 & -9 \\ 4 & 7 & -2 \end{vmatrix}$$

行列式的可加性

性质 4（可加性） 行列式可沿一行（列）拆分成两个行列式之和。

例
$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 7 & 9 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & 7 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

例
$$\begin{vmatrix} 13 & 3 & 20 \\ -2 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 3 & -1 \\ -2 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 13 & 3 & -21 \\ -2 & 8 & -9 \\ 4 & 7 & -2 \end{vmatrix}$$

例
$$\begin{vmatrix} a_1+x_1 & a_2+x_2 & a_3+x_3 \\ b_1+y_1 & b_2+y_2 & b_3+y_3 \\ c_1+z_1 & c_2+z_2 & c_3+z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

行列式的可加性

性质 4（可加性） 行列式可沿一行（列）拆分成两个行列式之和。

例
$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 7 & 9 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & 7 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

例
$$\begin{vmatrix} 13 & 3 & 20 \\ -2 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 3 & -1 \\ -2 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 13 & 3 & -21 \\ -2 & 8 & -9 \\ 4 & 7 & -2 \end{vmatrix}$$

例 但以下的拆分是错误：
$$\begin{vmatrix} a_1+x_1 & a_2+x_2 & a_3+x_3 \\ b_1+y_1 & b_2+y_2 & b_3+y_3 \\ c_1+z_1 & c_2+z_2 & c_3+z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

行列式的可加性

性质 4（可加性） 行列式可沿一行（列）拆分成两个行列式之和。

例
$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 7 & 9 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & 7 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

例
$$\begin{vmatrix} 13 & 3 & 20 \\ -2 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 3 & -1 \\ -2 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 13 & 3 & -21 \\ -2 & 8 & -9 \\ 4 & 7 & -2 \end{vmatrix}$$

例 但以下的拆分是错误：
$$\begin{vmatrix} a_1+x_1 & a_2+x_2 & a_3+x_3 \\ b_1+y_1 & b_2+y_2 & b_3+y_3 \\ c_1+z_1 & c_2+z_2 & c_3+z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

每次拆分只能针对一行或一列！

反过来，“可加性”可理解成“两式仅一行 (列) 不同可相加”。

反过来，“可加性”可理解成“两式仅一行 (列) 不同可相加”。

例

$$\begin{vmatrix} 13 & 3 & -1 \\ -2 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 13 & 3 & 21 \\ -2 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix} =$$

反过来，“可加性”可理解成“两式仅一行 (列) 不同可相加”。

例

$$\begin{vmatrix} 13 & 3 & -1 \\ -2 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 13 & 3 & 21 \\ -2 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix} =$$

反过来，“可加性”可理解成“两式仅一行 (列) 不同可相加”。

例

$$\begin{vmatrix} 13 & 3 & -1 \\ -2 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 13 & 3 & 21 \\ -2 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 3 & 20 \\ -2 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

反过来，“可加性”可理解成“两式仅一行 (列) 不同可相加”。

例

$$\begin{vmatrix} 13 & 3 & -1 \\ -2 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 13 & 3 & 21 \\ -2 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 3 & 20 \\ -2 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 7 & 6 \\ 8 & -2 & 9 \end{vmatrix} =$$

反过来，“可加性”可理解成“两式仅一行 (列) 不同可相加”。

例

$$\begin{vmatrix} 13 & 3 & -1 \\ -2 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 13 & 3 & 21 \\ -2 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 3 & 20 \\ -2 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 7 & 6 \\ 8 & -2 & 9 \end{vmatrix} =$$

反过来，“可加性”可理解成“两式仅一行 (列) 不同可相加”。

例

$$\begin{vmatrix} 13 & 3 & -1 \\ -2 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 13 & 3 & 21 \\ -2 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 3 & 20 \\ -2 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 7 & 6 \\ 8 & -2 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 6 \\ -2 & 8 & 9 \end{vmatrix} =$$

反过来，“可加性”可理解成“两式仅一行 (列) 不同可相加”。

例

$$\begin{vmatrix} 13 & 3 & -1 \\ -2 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 13 & 3 & 21 \\ -2 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 3 & 20 \\ -2 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 7 & 6 \\ 8 & -2 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 6 \\ -2 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -3 & 5 & 6 \\ 9 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

行列式基本性质总结

规范性	单位行列式的值为 1
反称性	交换两行 (列) 后，值变号
数乘性	某行 (列) 乘 k 倍，值变 k 倍
可加性	两式仅一行 (列) 不同可相加

行列式基本性质总结

规范性	单位行列式的值为 1
反称性	交换两行 (列) 后，值变号
数乘性	某行 (列) 乘 k 倍，值变 k 倍
可加性	两式仅一行 (列) 不同可相加

利用上述 4 个性质，可以推导出行列式的其他性质。

而在这些推导中，2 阶 3 阶行列式的具体表达式不起作用。

行列式基本性质的推论

推论 若行列式其中某行（列）所有元素都为零，则它的值为零

行列式基本性质的推论

推论 若行列式其中某行（列）所有元素都为零，则它的值为零

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

行列式基本性质的推论

推论 若行列式其中某行（列）所有元素都为零，则它的值为零

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

行列式基本性质的推论

推论 若行列式其中某行（列）所有元素都为零，则它的值为零

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

行列式基本性质的推论

推论 若行列式其中某行（列）所有元素都为零，则它的值为零

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

例如，$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 7 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \_$

行列式基本性质的推论

推论 若行列式其中某行（列）所有元素都为零，则它的值为零

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

例如，$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 7 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \underline{0}$

行列式基本性质的推论

推论 若行列式其中两行（列）对应元素相同，则它的值为零

行列式基本性质的推论

推论 若行列式其中两行（列）对应元素相同，则它的值为零

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

行列式基本性质的推论

推论 若行列式其中两行（列）对应元素相同，则它的值为零

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix} \xlongequal{\text{交换 2,3 行}}$$

行列式基本性质的推论

推论 若行列式其中两行（列）对应元素相同，则它的值为零

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix} \xlongequal{\text{交换 2,3 行}} \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix},$$

行列式基本性质的推论

推论 若行列式其中两行（列）对应元素相同，则它的值为零

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix} \xlongequal{\text{交换 2,3 行}} -\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix},$$

行列式基本性质的推论

推论 若行列式其中两行（列）对应元素相同，则它的值为零

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix} \xlongequal{\text{交换 2,3 行}} -\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix}, \quad \therefore \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0$$

行列式基本性质的推论

推论 若行列式其中两行（列）对应元素相同，则它的值为零

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix} \xlongequal{\text{交换 2,3 行}} -\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix}, \quad \therefore \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0$$

例如，$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 9 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$

行列式基本性质的推论

推论 若行列式其中两行（列）对应元素相同，则它的值为零

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix} \xlongequal{\text{交换 2,3 行}} -\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix}, \quad \therefore \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0$$

例如，$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 9 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$

行列式基本性质的推论

推论 若行列式其中两行（列）对应元素相同，则它的值为零

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix} \xlongequal{\text{交换 2,3 行}} -\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix}, \quad \therefore \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0$$

例如，$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 9 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$

推论 若行列式其中两行（列）对应元素成比例，则它的值为零

行列式基本性质的推论

推论 若行列式其中两行（列）对应元素相同，则它的值为零

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix} \xlongequal{\text{交换 2,3 行}} -\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix}, \quad \therefore \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0$$

例如，$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 9 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$

推论 若行列式其中两行（列）对应元素成比例，则它的值为零

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ ku & kv & kw \end{vmatrix} =$$

行列式基本性质的推论

推论 若行列式其中两行（列）对应元素相同，则它的值为零

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix} \xlongequal{\text{交换 } 2,3 \text{ 行}} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix}, \quad \therefore \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0$$

例如，$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 9 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$

推论 若行列式其中两行（列）对应元素成比例，则它的值为零

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ ku & kv & kw \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix} =$$

行列式基本性质的推论

推论 若行列式其中两行（列）对应元素相同，则它的值为零

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix} \xlongequal{\text{交换 2,3 行}} -\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix}, \quad \therefore \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0$$

例如，$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 9 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$

推论 若行列式其中两行（列）对应元素成比例，则它的值为零

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ ku & kv & kw \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0$$

行列式基本性质的推论

推论 若行列式其中两行（列）对应元素相同，则它的值为零

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix} \xlongequal{\text{交换 2,3 行}} -\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix}, \quad \therefore \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0$$

例如，$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 9 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$

推论 若行列式其中两行（列）对应元素成比例，则它的值为零

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ ku & kv & kw \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0$$

例如，$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 7 & 9 & 21 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$

行列式基本性质的推论

推论 若行列式其中两行（列）对应元素相同，则它的值为零

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix} \xlongequal{\text{交换 2,3 行}} -\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix}, \quad \therefore \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0$$

例如，$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 9 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$

推论 若行列式其中两行（列）对应元素成比例，则它的值为零

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ ku & kv & kw \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0$$

例如，$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 7 & 9 & 21 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$

行列式基本性质的推论

推论！ 行列式的某行（列）加上另一行（列）的 k 倍，它的值不变。

行列式基本性质的推论

推论! 行列式的某行（列）加上另一行（列）的 k 倍，它的值不变。例如：

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

行列式基本性质的推论

推论！ 行列式的某行（列）加上另一行（列）的 k 倍，它的值不变。例如：

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x+ku & y+kv & z+kw \end{vmatrix}$$

行列式基本性质的推论

推论！ 行列式的某行（列）加上另一行（列）的 k 倍，它的值不变。例如：

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x+ku & y+kv & z+kw \end{vmatrix}$$

行列式基本性质的推论

推论! 行列式的某行（列）加上另一行（列）的 k 倍，它的值不变。例如：

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x+ku & y+kv & z+kw \end{vmatrix}$$

这是因为：

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x+ku & y+kv & z+kw \end{vmatrix} =$$

行列式基本性质的推论

推论！ 行列式的某行（列）加上另一行（列）的 k 倍，它的值不变。例如：

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x+ku & y+kv & z+kw \end{vmatrix}$$

这是因为：

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x+ku & y+kv & z+kw \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ ku & kv & kw \end{vmatrix} =$$

行列式基本性质的推论

推论！ 行列式的某行（列）加上另一行（列）的 k 倍，它的值不变。例如：

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x+ku & y+kv & z+kw \end{vmatrix}$$

这是因为：

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x+ku & y+kv & z+kw \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ ku & kv & kw \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

例 利用行列式的性质说明 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$

例 利用行列式的性质说明 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$

这是:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} =$$

例 利用行列式的性质说明 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$

这是:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} =$$

例 利用行列式的性质说明 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$

这是:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

符号说明

行（row）变换记号

- $r_i \times k$ 表示第 i 行乘以 k 倍
- $r_i \leftrightarrow r_j$ 表示交换第 i 行和第 j 行
- $r_i + kr_j$ 表示第 i 行加上第 j 行的 k 倍

符号说明

行（row）变换记号

- $r_i \times k$ 表示第 i 行乘以 k 倍
- $r_i \leftrightarrow r_j$ 表示交换第 i 行和第 j 行
- $r_i + kr_j$ 表示第 i 行加上第 j 行的 k 倍

列（column）变换记号

- $c_i \times k$ 表示第 i 列乘以 k 倍
- $c_i \leftrightarrow c_j$ 表示交换第 i 列和第 j 列
- $c_i + kc_j$ 表示第 i 列加上第 j 列的 k 倍

符号说明

行（row）变换记号

- $r_i \times k$ 表示第 i 行乘以 k 倍
- $r_i \leftrightarrow r_j$ 表示交换第 i 行和第 j 行
- $r_i + kr_j$ 表示第 i 行加上第 j 行的 k 倍

列（column）变换记号

- $c_i \times k$ 表示第 i 列乘以 k 倍
- $c_i \leftrightarrow c_j$ 表示交换第 i 列和第 j 列
- $c_i + kc_j$ 表示第 i 列加上第 j 列的 k 倍

例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

符号说明

行（row）变换记号

- $r_i \times k$ 表示第 i 行乘以 k 倍
- $r_i \leftrightarrow r_j$ 表示交换第 i 行和第 j 行
- $r_i + kr_j$ 表示第 i 行加上第 j 行的 k 倍

列（column）变换记号

- $c_i \times k$ 表示第 i 列乘以 k 倍
- $c_i \leftrightarrow c_j$ 表示交换第 i 列和第 j 列
- $c_i + kc_j$ 表示第 i 列加上第 j 列的 k 倍

例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_2}$$

符号说明

行（row）变换记号

- $r_i \times k$ 表示第 i 行乘以 k 倍
- $r_i \leftrightarrow r_j$ 表示交换第 i 行和第 j 行
- $r_i + kr_j$ 表示第 i 行加上第 j 行的 k 倍

列（column）变换记号

- $c_i \times k$ 表示第 i 列乘以 k 倍
- $c_i \leftrightarrow c_j$ 表示交换第 i 列和第 j 列
- $c_i + kc_j$ 表示第 i 列加上第 j 列的 k 倍

例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

符号说明

行（row）变换记号

- $r_i \times k$ 表示第 i 行乘以 k 倍
- $r_i \leftrightarrow r_j$ 表示交换第 i 行和第 j 行
- $r_i + kr_j$ 表示第 i 行加上第 j 行的 k 倍

列（column）变换记号

- $c_i \times k$ 表示第 i 列乘以 k 倍
- $c_i \leftrightarrow c_j$ 表示交换第 i 列和第 j 列
- $c_i + kc_j$ 表示第 i 列加上第 j 列的 k 倍

例
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3-2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

符号说明

行（row）变换记号

- $r_i \times k$ 表示第 i 行乘以 k 倍
- $r_i \leftrightarrow r_j$ 表示交换第 i 行和第 j 行
- $r_i + kr_j$ 表示第 i 行加上第 j 行的 k 倍

列（column）变换记号

- $c_i \times k$ 表示第 i 列乘以 k 倍
- $c_i \leftrightarrow c_j$ 表示交换第 i 列和第 j 列
- $c_i + kc_j$ 表示第 i 列加上第 j 列的 k 倍

例
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3-2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_3}$$

符号说明

行（row）变换记号

- $r_i \times k$ 表示第 i 行乘以 k 倍
- $r_i \leftrightarrow r_j$ 表示交换第 i 行和第 j 行
- $r_i + kr_j$ 表示第 i 行加上第 j 行的 k 倍

列（column）变换记号

- $c_i \times k$ 表示第 i 列乘以 k 倍
- $c_i \leftrightarrow c_j$ 表示交换第 i 列和第 j 列
- $c_i + kc_j$ 表示第 i 列加上第 j 列的 k 倍

例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \overset{r_3-2r_2}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

符号说明

行（row）变换记号

- $r_i \times k$ 表示第 i 行乘以 k 倍
- $r_i \leftrightarrow r_j$ 表示交换第 i 行和第 j 行
- $r_i + kr_j$ 表示第 i 行加上第 j 行的 k 倍

列（column）变换记号

- $c_i \times k$ 表示第 i 列乘以 k 倍
- $c_i \leftrightarrow c_j$ 表示交换第 i 列和第 j 列
- $c_i + kc_j$ 表示第 i 列加上第 j 列的 k 倍

例
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3-2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 \leftrightarrow c_3} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

符号说明

行（row）变换记号

- $r_i \times k$ 表示第 i 行乘以 k 倍
- $r_i \leftrightarrow r_j$ 表示交换第 i 行和第 j 行
- $r_i + kr_j$ 表示第 i 行加上第 j 行的 k 倍

列（column）变换记号

- $c_i \times k$ 表示第 i 列乘以 k 倍
- $c_i \leftrightarrow c_j$ 表示交换第 i 列和第 j 列
- $c_i + kc_j$ 表示第 i 列加上第 j 列的 k 倍

例
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3-2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 \leftrightarrow c_3} -\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

练习 用行列式的性质证明 $\begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1+c_1 & c_1 \\ a_2+kb_2 & b_2+c_2 & c_2 \\ a_3+kb_3 & b_3+c_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

练习 用行列式的性质证明 $\begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1+c_1 & c_1 \\ a_2+kb_2 & b_2+c_2 & c_2 \\ a_3+kb_3 & b_3+c_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

证明

$$\begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1+c_1 & c_1 \\ a_2+kb_2 & b_2+c_2 & c_2 \\ a_3+kb_3 & b_3+c_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

练习 用行列式的性质证明 $\begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1+c_1 & c_1 \\ a_2+kb_2 & b_2+c_2 & c_2 \\ a_3+kb_3 & b_3+c_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

证明

$$\begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1+c_1 & c_1 \\ a_2+kb_2 & b_2+c_2 & c_2 \\ a_3+kb_3 & b_3+c_3 & c_3 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2-c_3}$$

练习 用行列式的性质证明 $\begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1+c_1 & c_1 \\ a_2+kb_2 & b_2+c_2 & c_2 \\ a_3+kb_3 & b_3+c_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

证明

$$\begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1+c_1 & c_1 \\ a_2+kb_2 & b_2+c_2 & c_2 \\ a_3+kb_3 & b_3+c_3 & c_3 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2-c_3} \begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+kb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

练习 用行列式的性质证明 $\begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1+c_1 & c_1 \\ a_2+kb_2 & b_2+c_2 & c_2 \\ a_3+kb_3 & b_3+c_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

证明

$$\begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1+c_1 & c_1 \\ a_2+kb_2 & b_2+c_2 & c_2 \\ a_3+kb_3 & b_3+c_3 & c_3 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2-c_3} \begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+kb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1-kc_2}$$

练习 用行列式的性质证明
$$\begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1+c_1 & c_1 \\ a_2+kb_2 & b_2+c_2 & c_2 \\ a_3+kb_3 & b_3+c_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

证明

$$\begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1+c_1 & c_1 \\ a_2+kb_2 & b_2+c_2 & c_2 \\ a_3+kb_3 & b_3+c_3 & c_3 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2-c_3} \begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+kb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1-kc_2} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

练习 用行列式的性质证明 $\begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1+c_1 & c_1 \\ a_2+kb_2 & b_2+c_2 & c_2 \\ a_3+kb_3 & b_3+c_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

证明

$$\begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1+c_1 & c_1 \\ a_2+kb_2 & b_2+c_2 & c_2 \\ a_3+kb_3 & b_3+c_3 & c_3 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2-c_3} \begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+kb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1-kc_2} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

练习 用行列式的性质证明

$$\begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix}$$

$$=$$

$$= 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$
\begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & \end{vmatrix}
$$

$$
= 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}
$$

$$\begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$=$$

$$= 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1 & a_1 \\ b_2+c_2 & c_2 & a_2 \\ b_3+c_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix} +$$

$$= 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1 & a_1 \\ b_2+c_2 & c_2 & a_2 \\ b_3+c_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & c_1+a_1 & b_1 \\ c_2 & c_2+a_2 & b_2 \\ c_3 & c_3+a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$=$$

$$= 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1 & a_1 \\ b_2+c_2 & c_2 & a_2 \\ b_3+c_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & c_1+a_1 & b_1 \\ c_2 & c_2+a_2 & b_2 \\ c_3 & c_3+a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix} +$$

$$= 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1 & a_1 \\ b_2+c_2 & c_2 & a_2 \\ b_3+c_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & c_1+a_1 & b_1 \\ c_2 & c_2+a_2 & b_2 \\ c_3 & c_3+a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1 & a_1 \\ b_2+c_2 & c_2 & a_2 \\ b_3+c_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & c_1+a_1 & b_1 \\ c_2 & c_2+a_2 & b_2 \\ c_3 & c_3+a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1 & a_1 \\ b_2+c_2 & c_2 & a_2 \\ b_3+c_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & c_1+a_1 & b_1 \\ c_2 & c_2+a_2 & b_2 \\ c_3 & c_3+a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \qquad\qquad = 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1 & a_1 \\ b_2+c_2 & c_2 & a_2 \\ b_3+c_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & c_1+a_1 & b_1 \\ c_2 & c_2+a_2 & b_2 \\ c_3 & c_3+a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \qquad\qquad = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1 & a_1 \\ b_2+c_2 & c_2 & a_2 \\ b_3+c_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & c_1+a_1 & b_1 \\ c_2 & c_2+a_2 & b_2 \\ c_3 & c_3+a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

We are here now...

1. 行列式的基本性质——从二三阶行列式讲起

2. n 阶行列式的公理化定义

3. 四阶行列式的计算（初步）

4. 转置行列式

2 阶 3 阶行列式回顾

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{c} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$

2 阶 3 阶行列式回顾

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{matrix}$$

$\Rightarrow$

规范性

反称性

数乘性

可加性

2 阶 3 阶行列式回顾

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{matrix}$$

$\Rightarrow$

规范性

反称性

数乘性

可加性

$\Rightarrow$ 其它性质 $\cdots$

2 阶 3 阶行列式回顾

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ $\Leftarrow$

规范性
反称性
数乘性
可加性

$\Rightarrow$ 其它性质 $\cdots$

2 阶 3 阶行列式回顾

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ $\Leftarrow$

规范性
反称性
数乘性
可加性

$\Rightarrow$ 其它性质 $\cdots$

注 2 阶 3 阶行列式的展开表达式，与“四个基本性质”，是相互等价的。

2 阶 3 阶行列式回顾

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ / $\Leftarrow$

规范性

反称性

数乘性

可加性

$\Rightarrow$ 其它性质 $\cdots$

注 2 阶 3 阶行列式的展开表达式，与"四个基本性质"，是相互等价的。

例 假设忘记二阶行列式的定义。利用"四个基本性质"，推导

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 的展开表达式。

例 利用“四个基本性质”，推导 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 的展开表达式。

例 利用“四个基本性质”，推导 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 的展开表达式。

解

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{可加性}} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

例 利用“四个基本性质”，推导 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 的展开表达式。

解

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{可加性}} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{可加性}} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} +$$

例 利用“四个基本性质”，推导 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 的展开表达式。

解

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{可加性}} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{可加性}} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix}$$

例 利用“四个基本性质”，推导 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 的展开表达式。

解

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{可加性}} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{可加性}} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} + \cancel{\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix}} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} + \cancel{\begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix}}$$

例 利用“四个基本性质”，推导 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 的展开表达式。

解

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{可加性}} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{可加性}} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} + \cancel{\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix}} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} + \cancel{\begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix}}$$

$$\xlongequal{\text{数乘性}} a_{11} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} + a_{12} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix}$$

例 利用“四个基本性质”，推导 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 的展开表达式。

解

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &\xlongequal{\text{可加性}} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\
&\xlongequal{\text{可加性}} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} + \cancel{\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix}} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} + \cancel{\begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix}} \\
&\xlongequal{\text{数乘性}} a_{11}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} \\
&\xlongequal{\text{数乘性}} a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + a_{12}a_{21}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

例 利用“四个基本性质”，推导 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 的展开表达式。

解

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{可加性}} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{可加性}} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} + \cancel{\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix}} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} + \cancel{\begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix}}$$

$$\xlongequal{\text{数乘性}} a_{11} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} + a_{12} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{数乘性}} a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + a_{12}a_{21} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{反称性}} a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - a_{12}a_{21} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

例 利用"四个基本性质"，推导 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 的展开表达式。

解

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \overset{\text{可加性}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{可加性}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} + \cancel{\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix}} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} + \cancel{\begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix}}$$

$$\overset{\text{数乘性}}{=\!=\!=} a_{11} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} + a_{12} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{数乘性}}{=\!=\!=} a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + a_{12}a_{21} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{反称性}}{=\!=\!=} a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - a_{12}a_{21} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{规范性}}{=\!=\!=} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

例 利用“四个基本性质”，推导 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 的展开表达式。

例 利用“四个基本性质”，推导 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 的展开表达式。

（证明与 2 阶时类似，略去）

从 2 阶 3 阶行列式到 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} = ?$$

从 2 阶 3 阶行列式到 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{c} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$

$\Rightarrow$
$\Leftarrow$

规范性

反称性

数乘性

可加性

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} = ?$$

从 2 阶 3 阶行列式到 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{c} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} = ?$$

$\Rightarrow$ $\Leftarrow$

规范性

反称性

数乘性

可加性

从 2 阶 3 阶行列式到 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} = ?$$

$\Rightarrow$ $\Leftarrow$

规范性

反称性

数乘性

可加性

注 可以利用“四个基本性质”，来定义一般的 n 阶行列式。

从 2 阶 3 阶行列式到 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} = ?$$

$\Rightarrow$ $\Leftarrow$

规范性
反称性
数乘性
可加性

$\Rightarrow$ 其它性质 $\cdots$

注 可以利用“四个基本性质”，来定义一般的 n 阶行列式。

n 阶行列式的定义

定义 记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示对其中的 n 行 n 列的共 n^2 个元素 a_{ij}（$i, j = 1, \cdots, n$），进行运算得到一个数值。

n 阶行列式的定义

定义 记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示对其中的 n 行 n 列的共 n^2 个元素 a_{ij}（$i, j = 1, \cdots, n$），进行运算得到一个数值。并且要求这种运算满足四个基本性质：

规范性、反称性、数乘性、可加性

n 阶行列式的定义

定义 记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示对其中的 n 行 n 列的共 n^2 个元素 a_{ij}（$i, j = 1, \cdots, n$），进行运算得到一个数值。并且要求这种运算满足四个基本性质：

规范性、反称性、数乘性、可加性

则称上述记号为n 阶行列式。

n 阶行列式的定义

定义 记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示对其中的 n 行 n 列的共 n^2 个元素 a_{ij}（$i, j = 1, \cdots, n$），进行运算得到一个数值。并且要求这种运算满足四个基本性质：

规范性、反称性、数乘性、可加性

则称上述记号为n 阶行列式。

定理 满足 4 个基本性质的运算是存在、唯一！

n 阶行列式的定义

定义 记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示对其中的 n 行 n 列的共 n^2 个元素 a_{ij}（$i, j = 1, \cdots, n$），进行运算得到一个数值。并且要求这种运算满足四个基本性质：

规范性、反称性、数乘性、可加性

则称上述记号为n 阶行列式。

定理 满足 4 个基本性质的运算是存在、唯一！

注 任意一个行列式的值均可通过以上四个基本性质算出。

n 阶行列式的规范性、反称性

规范性是指，n 阶单位行列式的值应为 1。

n 阶行列式的规范性、反称性

规范性是指，n 阶单位行列式的值应为 1。即

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

n 阶行列式的规范性、反称性

规范性是指，n 阶单位行列式的值应为 1。即

$$\begin{vmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{vmatrix} = 1$$

n 阶行列式的规范性、反称性

规范性是指，n 阶单位行列式的值应为 1。即

$$\begin{vmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{vmatrix} = 1$$

反称性 是指，交换行列式两行（列）后，行列式的值变号

n 阶行列式的规范性、反称性

规范性是指，n 阶单位行列式的值应为 1。即

$$\begin{vmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{vmatrix} = 1$$

反称性 是指，交换行列式两行（列）后，行列式的值变号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1t} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2t} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nt} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

n 阶行列式的规范性、反称性

规范性是指，n 阶单位行列式的值应为 1。即

$$\begin{vmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{vmatrix} = 1$$

反称性 是指，交换行列式两行（列）后，行列式的值变号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1t} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2t} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nt} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xrightarrow{c_s \longleftrightarrow c_t}$$

n 阶行列式的规范性、反称性

规范性是指，n 阶单位行列式的值应为 1。即

$$\begin{vmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{vmatrix} = 1$$

反称性 是指，交换行列式两行（列）后，行列式的值变号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1t} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2t} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nt} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xrightarrow{c_s \leftrightarrow c_t} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1t} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2t} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nt} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

n 阶行列式的规范性、反称性

规范性是指，n 阶单位行列式的值应为 1。即

$$\begin{vmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{vmatrix} = 1$$

反称性 是指，交换行列式两行（列）后，行列式的值变号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1t} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2t} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nt} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{c_s \leftrightarrow c_t} - \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1t} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2t} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nt} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

n 阶行列式的可加性

可加性，譬如（以行为例）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{s1} & c_{s2} & \cdots & c_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

n 阶行列式的可加性

可加性，譬如（以行为例）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{s1} & c_{s2} & \cdots & c_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

n 阶行列式的可加性

可加性，譬如（以行为例）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{s1} & c_{s2} & \cdots & c_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1}+c_{s1} & b_{s2}+c_{s2} & \cdots & b_{sn}+c_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

n 阶行列式的可加性

可加性，譬如（以行为例）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{s1} & c_{s2} & \cdots & c_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1}+c_{s1} & b_{s2}+c_{s2} & \cdots & b_{sn}+c_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

注 对列也有类似可加性

n 阶行列式的可加性

可加性，譬如（以行为例）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{s1} & c_{s2} & \cdots & c_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1}+c_{s1} & b_{s2}+c_{s2} & \cdots & b_{sn}+c_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

注 对列也有类似可加性

注 可加性也可以理解成把行列式拆分

n 阶行列式的数乘性

数乘性 一行（列）元素的公倍数可以提出来。

n 阶行列式的数乘性

数乘性 一行（列）元素的公倍数可以提出来。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & ka_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & ka_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & ka_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

n 阶行列式的数乘性

数乘性 一行（列）元素的公倍数可以提出来。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & ka_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & ka_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & ka_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

n 阶行列式的数乘性

数乘性 一行（列）元素的公倍数可以提出来。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & ka_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & ka_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & ka_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

注 2 若行列式某行（列）全为零，则值为零。

n 阶行列式的数乘性

数乘性 一行（列）元素的公倍数可以提出来。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & ka_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & ka_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & ka_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

注 2 若行列式某行（列）全为零，则值为零。

如

$$\begin{vmatrix} 2 & 54 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 2 & -7 & 30 \\ 1 & -8 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

n 阶行列式的数乘性

数乘性 一行（列）元素的公倍数可以提出来。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & ka_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & ka_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & ka_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

注 2 若行列式某行（列）全为零，则值为零。

如

$$\begin{vmatrix} 2 & 54 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 2 & -7 & 30 \\ 1 & -8 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 54 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 2 & -7 & 30 \\ 1 & -8 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

n 阶行列式的数乘性

数乘性 一行（列）元素的公倍数可以提出来。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & ka_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & ka_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & ka_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

注 2 若行列式某行（列）全为零，则值为零。

如

$$\begin{vmatrix} 2 & 54 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 2 & -7 & 30 \\ 1 & -8 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 54 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 2 & -7 & 30 \\ 1 & -8 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

原则上，由“四个基本性质”

规范性、反称性、数乘性、可加性

可以推出 n 阶行列式完整的展开表达式，例如：

原则上，由“四个基本性质”

规范性、反称性、数乘性、可加性

可以推出 n 阶行列式完整的展开表达式，例如：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} =$$

原则上，由“四个基本性质”

规范性、反称性、数乘性、可加性

可以推出 n 阶行列式完整的展开表达式，例如：

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} =
\begin{aligned}
&\ a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} \\
&+a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} \\
&+a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} \\
&+a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} \\
&-a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} \\
&-a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} \\
&-a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} \\
&-a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}
\end{aligned}
$$

原则上，由“四个基本性质”

规范性、反称性、数乘性、可加性

可以推出 n 阶行列式完整的展开表达式，例如：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} \\ +a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} \\ +a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} \\ +a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} \\ -a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} \\ -a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} \\ -a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} \\ -a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} \end{array}$$

- 但 $n \geq 4$ 时，这些公式过于复杂，难以直接用来计算行列式。

原则上，由“四个基本性质”

规范性、反称性、数乘性、可加性

可以推出 n 阶行列式完整的展开表达式，例如：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} \\ +a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} \\ +a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} \\ +a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} \\ -a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} \\ -a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} \\ -a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} \\ -a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} \end{array}$$

- 但 $n \geq 4$ 时，这些公式过于复杂，难以直接用来计算行列式。
- 后面学习“排列”、“逆序数”后，将给出上式的“简化形式表示”。

原则上，由“四个基本性质”

规范性、反称性、数乘性、可加性

可以推出 n 阶行列式完整的展开表达式，例如：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} \\ +a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} \\ +a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} \\ +a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} \\ -a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} \\ -a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} \\ -a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} \\ -a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} \end{array}$$

- 但 $n \geq 4$ 时，这些公式过于复杂，难以直接用来计算行列式。
- 后面学习“排列”、“逆序数”后，将给出上式的“简化形式表示”。
- 行列式的具体计算，关键是灵活运用“四个基本性质”。

例 计算四阶 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

例 计算四阶 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad\qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

例 计算四阶 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

例 计算四阶 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_2 \leftrightarrow r_3}{=\!=\!=} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

例 计算四阶 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

例 计算四阶 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

对角行列式

主对角线之外都为零的行列式称为对角行列式。

对角行列式

主对角线之外都为零的行列式称为对角行列式。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

对角行列式

主对角线之外都为零的行列式称为对角行列式。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & & \\ & & a_{33} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

对角行列式

主对角线之外都为零的行列式称为对角行列式。由数乘性，它的值为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & & \\ & & a_{33} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

这是因为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

这是因为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=$$

$$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

这是因为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

这是因为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots$$

$$=$$

$$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

这是因为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots$$

$$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

例 计算四阶行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

（想法：利用行列式的性质，将其化为对角行列式）

例 计算四阶行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

（想法：利用行列式的性质，将其化为对角行列式）

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

例 计算四阶行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

（想法：利用行列式的性质，将其化为对角行列式）

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

例 计算四阶行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

（想法：利用行列式的性质，将其化为对角行列式）

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \cancel{\begin{vmatrix} 0 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}}$$

例 计算四阶行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

（想法：利用行列式的性质，将其化为对角行列式）

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

例 计算四阶行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

（想法：利用行列式的性质，将其化为对角行列式）

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

例 计算四阶行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

（想法：利用行列式的性质，将其化为对角行列式）

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

例 计算四阶行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

（想法：利用行列式的性质，将其化为对角行列式）

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

例 计算四阶行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

（想法：利用行列式的性质，将其化为对角行列式）

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \cancel{\begin{vmatrix} 0 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \cancel{\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \cancel{\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}} = 3\cdot(-1)\cdot 1\cdot 2 =$$

例 计算四阶行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

（想法：利用行列式的性质，将其化为对角行列式）

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)\cdot 1\cdot 2 = -6$$

三角行列式

一般地，上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

三角行列式

一般地，上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

三角行列式

一般地，上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

同理，下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

三角行列式

一般地，上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

同理，下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

We are here now...

1. 行列式的基本性质——从二三阶行列式讲起
2. n 阶行列式的公理化定义
3. 四阶行列式的计算（初步）
4. 转置行列式

重要的行列式变换

利用行列式的性质，可以知道：

推论 行列式的某行（列）加上另一行的 k 倍，它的值不变

重要的行列式变换

利用行列式的性质，可以知道：

推论 行列式的某行（列）加上另一行的 k 倍，它的值不变

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

重要的行列式变换

利用行列式的性质，可以知道：

推论 行列式的某行（列）加上另一行的 k 倍，它的值不变

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xrightarrow{r_i + kr_j}$$

重要的行列式变换

利用行列式的性质，可以知道：

推论 行列式的某行（列）加上另一行的 k 倍，它的值不变

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xrightarrow{r_i+kr_j} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

重要的行列式变换

利用行列式的性质，可以知道：

推论 行列式的某行（列）加上另一行的 k 倍，它的值不变

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{r_i+kr_j} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

化一般行列式为三角行列式

- 计算一般行列式的想法：利用变换

$$r_i \longleftrightarrow r_j, \quad r_i + kr_j, \quad c_s \longleftrightarrow c_t, \quad c_s + kc_t$$

化行列式为三角形行列式，从而算出行列式

化一般行列式为三角行列式

- 计算一般行列式的想法：利用变换

$$r_i \leftrightarrow r_j, \quad r_i + kr_j, \quad c_s \leftrightarrow c_t, \quad c_s + kc_t$$

化行列式为三角形行列式，从而算出行列式，图示：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

化一般行列式为三角行列式

- 计算一般行列式的想法：利用变换

$$r_i \longleftrightarrow r_j, \quad r_i + kr_j, \quad c_s \longleftrightarrow c_t, \quad c_s + kc_t$$

化行列式为三角形行列式，从而算出行列式，图示：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{\text{（一系列变换）}}{=\!=\cdots=\!=\cdots=\!=}$$

化一般行列式为三角行列式

- 计算一般行列式的想法：利用变换

$$r_i \leftrightarrow r_j, \quad r_i + kr_j, \quad c_s \leftrightarrow c_t, \quad c_s + kc_t$$

化行列式为三角形行列式，从而算出行列式，图示：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{\text{（一系列变换）}}{=\cdots=\cdots=} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & 0 & b_{33} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

化一般行列式为三角行列式

- 计算一般行列式的想法：利用变换

$$r_i \longleftrightarrow r_j, \quad r_i + kr_j, \quad c_s \longleftrightarrow c_t, \quad c_s + kc_t$$

化行列式为三角形行列式，从而算出行列式，图示：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{\text{（一系列变换）}}{=\cdots=\cdots=} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & 0 & b_{33} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= b_{11}b_{22}b_{33}\cdots b_{nn}$$

化一般行列式为三角行列式

- 计算一般行列式的想法：利用变换

$$r_i \longleftrightarrow r_j, \quad r_i + kr_j, \quad c_s \longleftrightarrow c_t, \quad c_s + kc_t$$

化行列式为三角形行列式，从而算出行列式，图示：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{（一系列变换）}{=\!=\cdots=\!=\cdots=\!=} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & 0 & b_{33} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= b_{11}b_{22}b_{33}\cdots b_{nn}$$

例 1 通过化为三角形行列式，计算 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \qquad\qquad = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \qquad\qquad = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{\quad\quad} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix}$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix}$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_2+r_1}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & & & \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix}$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & & \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix}$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_2+r_1}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix}$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix}$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-2r_1]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix}$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-2r_1]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & & & \\ & & & \end{vmatrix}$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-2r_1]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & & \\ & & & \end{vmatrix}$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-2r_1]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & \\ & & & \end{vmatrix}$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-2r_1]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ & & & \end{vmatrix}$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{r_3-2r_1 \\ r_4-2r_1}]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ & & & \end{vmatrix}$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{r_3-2r_1 \\ r_4-2r_1}]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & & & \end{vmatrix}$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{r_3-2r_1 \\ r_4-2r_1}]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & & \end{vmatrix}$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_2+r_1}{\underset{\substack{r_3-2r_1 \\ r_4-2r_1}}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & \end{vmatrix}$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_2+r_1}{\underset{\substack{r_3-2r_1 \\ r_4-2r_1}}{=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{r_3-2r_1 \\ r_4-2r_1}]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal{\quad} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix}$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{r_3-2r_1 \\ r_4-2r_1}]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3-2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix}$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{r_3-2r_1 \\ r_4-2r_1}]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3-2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & & & \\ & & & \end{vmatrix}$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_2+r_1}{\underset{\substack{r_3-2r_1 \\ r_4-2r_1}}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \overset{r_3-2r_2}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & & \\ & & & \end{vmatrix}$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{r_3-2r_1 \\ r_4-2r_1}]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3-2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & \\ & & & \end{vmatrix}$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_2+r_1}{\underset{\substack{r_3-2r_1 \\ r_4-2r_1}}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \overset{r_3-2r_2}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -9 \\ & & & \end{vmatrix}$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{r_3-2r_1 \\ r_4-2r_1}]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_2]{r_3-2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -9 \\ & & & \end{vmatrix}$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_2+r_1}{\underset{\substack{r_3-2r_1 \\ r_4-2r_1}}{=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \overset{r_3-2r_2}{\underset{r_4-r_2}{=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -9 \\ 0 & & & \end{vmatrix}$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{r_3-2r_1 \\ r_4-2r_1}]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_2]{r_3-2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & & \end{vmatrix}$$

想法

$$
\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}
$$

具体做法

$$
\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{r_3-2r_1 \\ r_4-2r_1}]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_2]{r_3-2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & \end{vmatrix}
$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{r_3-2r_1 \\ r_4-2r_1}]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_2]{r_3-2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{vmatrix}$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{r_3-2r_1 \\ r_4-2r_1}]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_2]{r_3-2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\quad} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -9 \\ & & & \end{vmatrix} =$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_2+r_1}{\underset{\substack{r_3-2r_1 \\ r_4-2r_1}}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \overset{r_3-2r_2}{\underset{r_4-r_2}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_4-\frac{2}{5}r_3}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -9 \\ & & & \end{vmatrix} =$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{r_3-2r_1 \\ r_4-2r_1}]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_2]{r_3-2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-\frac{2}{5}r_3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & & \end{vmatrix} =$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{r_3-2r_1 \\ r_4-2r_1}]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_2]{r_3-2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-\frac{2}{5}r_3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & \end{vmatrix} =$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_2+r_1}{\underset{\substack{r_3-2r_1 \\ r_4-2r_1}}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \overset{r_3-2r_2}{\underset{r_4-r_2}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_4-\frac{2}{5}r_3}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{12}{5} \end{vmatrix} =$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{r_3-2r_1 \\ r_4-2r_1}]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_2]{r_3-2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-\frac{2}{5}r_3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{12}{5} \end{vmatrix} = 1\times 1\times 5\times\left(-\frac{12}{5}\right) =$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{r_3-2r_1 \\ r_4-2r_1}]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_2]{r_3-2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-\frac{2}{5}r_3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{12}{5} \end{vmatrix} = 1\times 1\times 5\times\left(-\frac{12}{5}\right) = -12$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{r_3-2r_1 \\ r_4-2r_1}]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_2]{r_3-2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-\frac{2}{5}r_3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{12}{5} \end{vmatrix} = 1\times1\times5\times(-\frac{12}{5}) = -12$$

例 2 通过化为三角形行列式，计算 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

例 2 通过化为三角形行列式，计算 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

解

例 2 通过化为三角形行列式，计算 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

解

目标：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{（一系列变换）}}{=\cdots=\cdots=} \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$

例 2 通过化为三角形行列式，计算 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix}$$

目标：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{（一系列变换）}}{=\cdots=\cdots=} \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

例 2 通过化为三角形行列式，计算 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_2+r_1}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix}$$

目标：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{（一系列变换）}}{=\cdots=\cdots=} \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

例 2 通过化为三角形行列式，计算 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix}$$

目标：
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{（一系列变换）}}{= \cdots = \cdots =} \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

例 2 通过化为三角形行列式，计算 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_2+r_1}{\underset{r_3+r_1}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix}$$

目标：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{（一系列变换）}}{=\cdots=\cdots=} \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$

例 2 通过化为三角形行列式，计算 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3+r_1]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ & & & \end{vmatrix}$$

目标：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{（一系列变换）}} \cdots = \cdots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$

例 2 通过化为三角形行列式，计算 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_2+r_1}{\underset{\substack{r_3+r_1 \\ r_4+r_1}}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ & & & \end{vmatrix}$$

目标：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \cdots \overset{\text{（一系列变换）}}{=} \cdots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$

例 2 通过化为三角形行列式，计算 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_2+r_1}{\underset{\substack{r_3+r_1 \\ r_4+r_1}}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

目标：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{（一系列变换）}}{= \cdots = \cdots =} \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$

例 2 通过化为三角形行列式，计算 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_2+r_1}{\underset{\substack{r_3+r_1 \\ r_4+r_1}}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times 2 \times 2$$

目标：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{（一系列变换）}}{= \cdots = \cdots =} \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$

例 2 通过化为三角形行列式，计算 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_2+r_1}{\underset{\substack{r_3+r_1 \\ r_4+r_1}}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times 2 \times 2 = 8$$

目标：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \cdots \overset{\text{（一系列变换）}}{=} \cdots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$

例 2 通过化为三角形行列式，计算 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{r_3+r_1 \\ r_4+r_1}]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times 2 \times 2 = 8$$

例 3 计算 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

目标：
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \overset{\text{（一系列变换）}}{=\cdots=\cdots=} \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2}$$

目标：

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{（一系列变换）}} \cdots = \cdots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix}$$

目标：$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{（一系列变换）}} \cdots = \cdots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

目标：$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \cdots \xlongequal{\text{（一系列变换）}} \cdots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{\quad} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix}$$

目标: $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{（一系列变换）}} \cdots = \cdots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3 - 5r_1} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix}$$

目标: $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \cdots \xlongequal{\text{(一系列变换)}} \cdots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3 - 5r_1} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & & & \\ & & & \end{vmatrix}$$

目标: $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{（一系列变换）} \cdots = \cdots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3 - 5r_1} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & & \\ & & & \end{vmatrix}$$

目标: $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \cdots \xlongequal{\text{(一系列变换)}} \cdots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3 - 5r_1} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & \\ & & & \end{vmatrix}$$

目标: $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{（一系列变换）}} \cdots = \cdots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3 - 5r_1} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & -9 \\ & & & \end{vmatrix}$$

目标：$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \cdots \xlongequal{\text{（一系列变换）}} \cdots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-5r_1]{r_3-5r_1} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & -9 \\ & & & \end{vmatrix}$$

目标: $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{(一系列变换)}} \cdots = \cdots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 - 5r_1]{r_3 - 5r_1} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & -9 \\ 0 & & & \end{vmatrix}$$

目标：

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{（一系列变换）}} \cdots = \cdots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

解

$$
\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}
\xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} -
\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}
\xlongequal[r_4 - 5r_1]{r_3 - 5r_1} -
\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & -9 \\ 0 & 3 & & \end{vmatrix}
$$

目标：
$$
\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}
= \cdots \xlongequal{\text{（一系列变换）}} \cdots =
\begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}
$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 - 5r_1]{r_3 - 5r_1} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & -9 \\ 0 & 3 & -6 & \end{vmatrix}$$

目标：$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{（一系列变换）}} \cdots = \cdots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 - 5r_1]{r_3 - 5r_1} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & -9 \\ 0 & 3 & -6 & -11 \end{vmatrix}$$

目标：$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{（一系列变换）}} \cdots = \cdots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 - 5r_1]{r_3 - 5r_1} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & -9 \\ 0 & 3 & -6 & -11 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\quad} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix}$$

目标：$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{（一系列变换）}} \cdots = \cdots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 - 5r_1]{r_3 - 5r_1} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & -9 \\ 0 & 3 & -6 & -11 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3 + 2r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix}$$

目标: $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \overset{\text{(一系列变换)}}{= \cdots = \cdots =} \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \overset{r_1\leftrightarrow r_2}{=\!=\!=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \underset{r_4-5r_1}{\overset{r_3-5r_1}{=\!=\!=}} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & -9 \\ 0 & 3 & -6 & -11 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_3+2r_2}{=\!=\!=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & & & \\ & & & \end{vmatrix}$$

目标: $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \overset{\text{(一系列变换)}}{= \cdots = \cdots =} \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 - 5r_1]{r_3 - 5r_1} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & -9 \\ 0 & 3 & -6 & -11 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3 + 2r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & & \\ & & & \end{vmatrix}$$

目标：

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \cdots \xlongequal{\text{(一系列变换)}} \cdots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-5r_1]{r_3-5r_1} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & -9 \\ 0 & 3 & -6 & -11 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3+2r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & \\ & & & \end{vmatrix}$$

目标：$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{（一系列变换）}} \cdots = \cdots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \overset{r_1 \leftrightarrow r_2}{=\!=\!=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \overset{r_3 - 5r_1}{\underset{r_4 - 5r_1}{=\!=\!=}} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & -9 \\ 0 & 3 & -6 & -11 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_3 + 2r_2}{=\!=\!=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -13 \\ & & & \end{vmatrix}$$

目标：

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \overset{\text{（一系列变换）}}{=\cdots=\cdots=} \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 - 5r_1]{r_3 - 5r_1} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & -9 \\ 0 & 3 & -6 & -11 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4 - 3r_2]{r_3 + 2r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -13 \\ & & & \end{vmatrix}$$

目标: $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{（一系列变换）}} \cdots = \cdots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 - 5r_1]{r_3 - 5r_1} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & -9 \\ 0 & 3 & -6 & -11 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4 - 3r_2]{r_3 + 2r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -13 \\ 0 & & & \end{vmatrix}$$

目标:
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{（一系列变换）}} \cdots = \cdots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-5r_1]{r_3-5r_1} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & -9 \\ 0 & 3 & -6 & -11 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-3r_2]{r_3+2r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & & \end{vmatrix}$$

目标：$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{（一系列变换）}} \cdots = \cdots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-5r_1]{r_3-5r_1} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & -9 \\ 0 & 3 & -6 & -11 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-3r_2]{r_3+2r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & -12 & \end{vmatrix}$$

目标:
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{(一系列变换)}} \cdots = \cdots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 - 5r_1]{r_3 - 5r_1} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & -9 \\ 0 & 3 & -6 & -11 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4 - 3r_2]{r_3 + 2r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & -12 & -5 \end{vmatrix}$$

目标：$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \cdots \overset{（一系列变换）}{=} \cdots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-5r_1]{r_3-5r_1} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & -9 \\ 0 & 3 & -6 & -11 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-3r_2]{r_3+2r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & -12 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal{\quad} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -13 \\ & & & \end{vmatrix}$$

目标:
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{（一系列变换）}} \cdots = \cdots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-5r_1]{r_3-5r_1} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & -9 \\ 0 & 3 & -6 & -11 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-3r_2]{r_3+2r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & -12 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4-4r_3} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -13 \\ & & & \end{vmatrix}$$

目标: $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{（一系列变换）}} \cdots = \cdots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

暨南大学 JINAN UNIVERSITY

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 - 5r_1]{r_3 - 5r_1} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & -9 \\ 0 & 3 & -6 & -11 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4 - 3r_2]{r_3 + 2r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & -12 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4 - 4r_3} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & & \end{vmatrix}$$

目标：$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{（一系列变换）}} \cdots = \cdots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$

解

$$
\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}
\xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}
\xlongequal[r_4-5r_1]{r_3-5r_1} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & -9 \\ 0 & 3 & -6 & -11 \end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal[r_4-3r_2]{r_3+2r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & -12 & -5 \end{vmatrix}
\xlongequal{r_4-4r_3} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & \end{vmatrix}
$$

目标：
$$
\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}
\xlongequal{（一系列变换）} \cdots = \cdots =
\begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}
$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-5r_1]{r_3-5r_1} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & -9 \\ 0 & 3 & -6 & -11 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-3r_2]{r_3+2r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & -12 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4-4r_3} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 47 \end{vmatrix}$$

目标: $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{(一系列变换)} \cdots = \cdots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-5r_1]{r_3-5r_1} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & -9 \\ 0 & 3 & -6 & -11 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-3r_2]{r_3+2r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & -12 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4-4r_3} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 47 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \times 1 \times 1 \times (-3) \times 47 =$$

目标：$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \overset{\text{（一系列变换）}}{= \cdots = \cdots =} \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-5r_1]{r_3-5r_1} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & -9 \\ 0 & 3 & -6 & -11 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-3r_2]{r_3+2r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & -12 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4-4r_3} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 47 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \times 1 \times 1 \times (-3) \times 47 = 141$$

目标: $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{（一系列变换）}} \cdots = \cdots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$

例 4 通过化为三角形行列式，计算 $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

例 4 通过化为三角形行列式，计算 $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2}$$

例 4 通过化为三角形行列式，计算 $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

例 4 通过化为三角形行列式，计算 $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3 - 2r_1]{r_2 + 3r_1}$$

例 4 通过化为三角形行列式，计算 $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3 - 2r_1]{r_2 + 3r_1} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

例 4 通过化为三角形行列式，计算 $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3-2r_1]{r_2+3r_1} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+2r_2]{r_3-r_2}$$

例 4 通过化为三角形行列式，计算 $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{r_1 \leftrightarrow r_2}{=\!=\!=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\underset{r_3 - 2r_1}{\overset{r_2 + 3r_1}{=\!=\!=}} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{r_4 + 2r_2}{\overset{r_3 - r_2}{=\!=\!=}} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

例 4 通过化为三角形行列式，计算 $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3-2r_1]{r_2+3r_1} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+2r_2]{r_3-r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-3r_3}$$

例 4 通过化为三角形行列式，计算 $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3 - 2r_1]{r_2 + 3r_1} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 + 2r_2]{r_3 - r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4 - 3r_3} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 22 \end{vmatrix}$$

例 4 通过化为三角形行列式，计算 $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{r_1 \leftrightarrow r_2}{=\!=\!=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\underset{r_3-2r_1}{\overset{r_2+3r_1}{=\!=\!=}} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{r_4+2r_2}{\overset{r_3-r_2}{=\!=\!=}} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_4-3r_3}{=\!=\!=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 22 \end{vmatrix} = -22$$

例 5 通过化为三角形行列式，计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

例 5 通过化为三角形行列式，计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}$$

例 5 通过化为三角形行列式，计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

例 5 通过化为三角形行列式，计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+r_2]{r_3-6r_2}$$

例 5 通过化为三角形行列式，计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+r_2]{r_3-6r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 28 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{vmatrix}$$

例 5 通过化为三角形行列式，计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+r_2]{r_3-6r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 28 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \times 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

例 5 通过化为三角形行列式，计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+r_2]{r_3-6r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 28 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \times 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3 \leftrightarrow r_4}$$

例 5 通过化为三角形行列式，计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+r_2]{r_3-6r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 28 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \times 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3 \longleftrightarrow r_4} -16 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \end{vmatrix}$$

例 5 通过化为三角形行列式，计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{r_2-2r_1}{\underset{r_3-3r_1}{=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{r_3-6r_2}{\underset{r_4+r_2}{=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 28 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \times 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3 \leftrightarrow r_4} -16 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+7r_3}$$

例 5 通过化为三角形行列式，计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+r_2]{r_3-6r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 28 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \times 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3 \leftrightarrow r_4} -16 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+7r_3} -16 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

例 5 通过化为三角形行列式，计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+r_2]{r_3-6r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 28 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 4\times 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3\leftrightarrow r_4} -16 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+7r_3} -16 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -96$$

例 6 判断下面做法是否正确？

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \cdots = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 28 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{vmatrix}$$

例 6 判断下面做法是否正确？

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \cdots = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 28 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{7r_4+r_3}$$

例 6 判断下面做法是否正确?

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \cdots = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 28 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\overset{7r_4+r_3}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 28 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{vmatrix}$$

例 6 判断下面做法是否正确?

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \cdots = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 28 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\overset{7r_4+r_3}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 28 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times (-1) \times 28 \times 24$$

例 6 判断下面做法是否正确？

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \cdots = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 28 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{7r_4+r_3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 28 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times (-1) \times 28 \times 24$$

这是错的！

We are here now...

1. 行列式的基本性质——从二三阶行列式讲起

2. n 阶行列式的公理化定义

3. 四阶行列式的计算（初步）

4. 转置行列式

转置行列式

定义 将行列式 D 的行和列互换，所得的新的行列式称为 D 的转置行列式，记为 D^T

转置行列式

定义 将行列式 D 的行和列互换，所得的新的行列式称为 D 的转置行列式，记为 D^T

例 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}$，则转置行列式为 $D^T =$

转置行列式

定义 将行列式 D 的行和列互换，所得的新的行列式称为 D 的转置行列式，记为 D^T

例 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}$，则转置行列式为 $D^T = \begin{vmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$

转置行列式

定义 将行列式 D 的行和列互换，所得的新的行列式称为 D 的转置行列式，记为 D^T

例 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}$，则转置行列式为 $D^T = \begin{vmatrix} 1 & & \\ -4 & & \\ 3 & & \end{vmatrix}$

转置行列式

定义 将行列式 D 的行和列互换，所得的新的行列式称为 D 的转置行列式，记为 D^T

例 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}$，则转置行列式为 $D^T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \\ -4 & 5 & \\ 3 & 4 & \end{vmatrix}$

转置行列式

定义 将行列式 D 的行和列互换，所得的新的行列式称为 D 的转置行列式，记为 D^T

例 设 $D=\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}$，则转置行列式为 $D^T=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

转置行列式

定义 将行列式 D 的行和列互换，所得的新的行列式称为 D 的转置行列式，记为 D^T

例 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}$，则转置行列式为 $D^T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

练习 分别计算上述的 D，及转置 D^T：

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = \underline{\qquad\quad}, \qquad D^T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \underline{\qquad\quad}$$

转置行列式

定义 将行列式 D 的行和列互换，所得的新的行列式称为 D 的转置行列式，记为 D^T

例 设 $D=\begin{vmatrix}1 & -4 & 3\\0 & 5 & 4\\1 & 6 & 3\end{vmatrix}$，则转置行列式为 $D^T=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\-4 & 5 & 6\\3 & 4 & 3\end{vmatrix}$

练习 分别计算上述的 D，及转置 D^T：

$$D=\begin{vmatrix}1 & -4 & 3\\0 & 5 & 4\\1 & 6 & 3\end{vmatrix}=\underline{-40}, \qquad D^T=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\-4 & 5 & 6\\3 & 4 & 3\end{vmatrix}=\underline{\qquad}$$

转置行列式

定义 将行列式 D 的行和列互换，所得的新的行列式称为 D 的转置行列式，记为 D^T

例 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}$，则转置行列式为 $D^T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

练习 分别计算上述的 D，及转置 D^T：

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = \underline{-40}, \qquad D^T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \underline{-40}$$

转置行列式

定义 将行列式 D 的行和列互换，所得的新的行列式称为 D 的**转置行列式**，记为 D^T

例 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}$，则转置行列式为 $D^T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

练习 分别计算上述的 D，及转置 D^T：

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = \underline{-40}, \qquad D^T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \underline{-40}$$

性质 对任何 n 阶行列式，其转置之后的值不变，即 $D = D^T$