第 8 章 b：平面及其方程

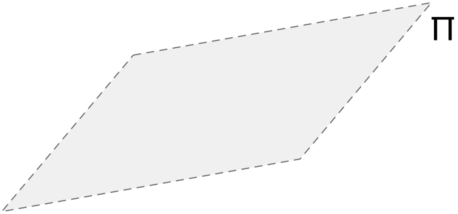
数学系　　梁卓滨

2018-2019 学年 II

提要

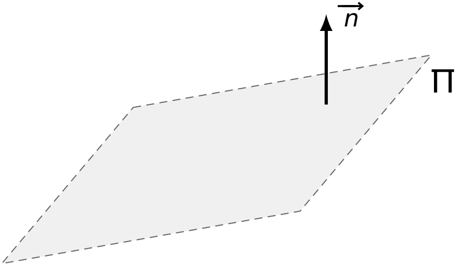
- 平面的法向量
- 平面方程
- 平面夹角
- 点到平面的距离

平面的法向量



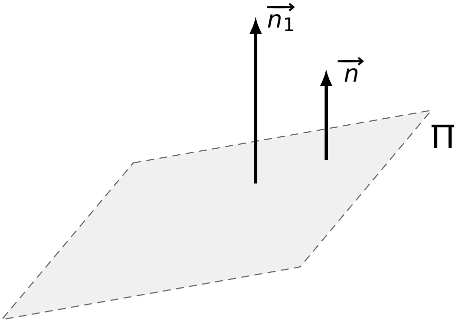
定义 垂直于平面的向量称为该平面的法向量 。

平面的法向量



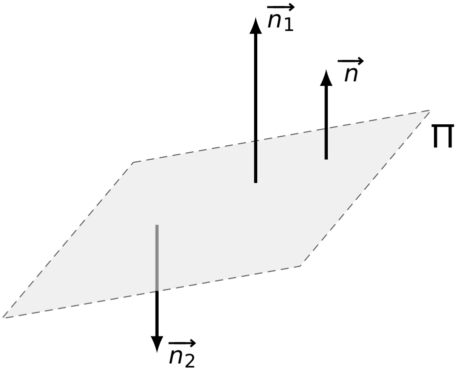
定义 垂直于平面的向量称为该平面的法向量。如：$\overrightarrow{n}$，

平面的法向量



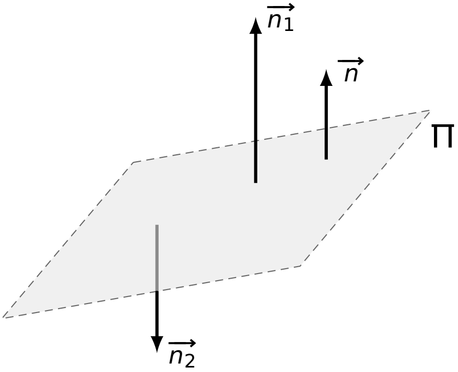
定义 垂直于平面的向量称为该平面的**法向量**。如：$\overrightarrow{n}$，$\overrightarrow{n_1}$，

平面的法向量



定义 垂直于平面的向量称为该平面的法向量。如：$\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$

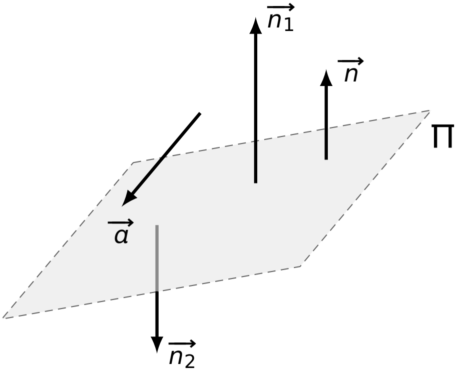
平面的法向量



定义 垂直于平面的向量称为该平面的法向量。如：$\overrightarrow{n}, \overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}$

注 1 任意两个法向量是平行的。

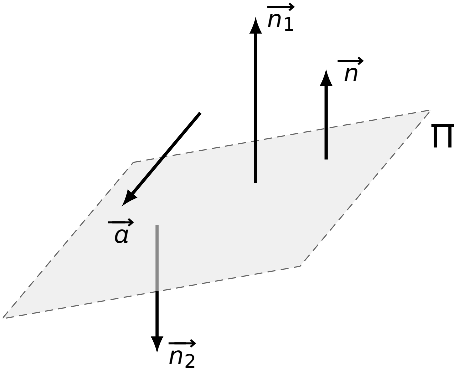
平面的法向量



定义 垂直于平面的向量称为该平面的法向量 。如：$\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$

注 1 任意两个法向量是平行的。

平面的法向量

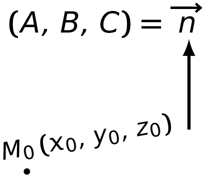


定义 垂直于平面的向量称为该平面的法向量 。如：$\vec{n}, \overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}$

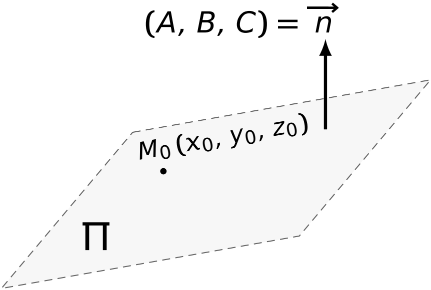
注 1 任意两个法向量是平行的。

注 2 $\vec{a} \parallel \Pi \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{n}$

平面方程

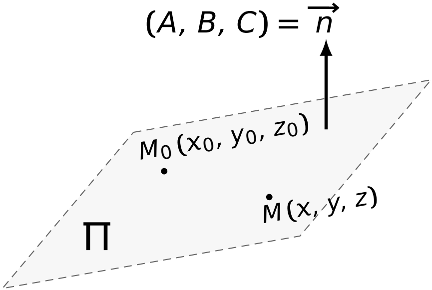


平面方程



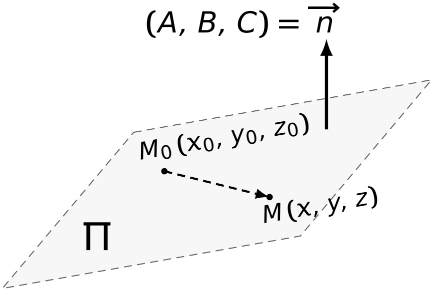
平面方程

$M \in \Pi$



平面方程

$M \in \Pi$

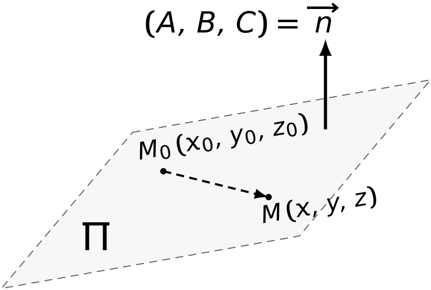


平面方程

$M \in \Pi$

$\Updownarrow$

$\overrightarrow{M_0M} \perp \overrightarrow{n}$



平面方程

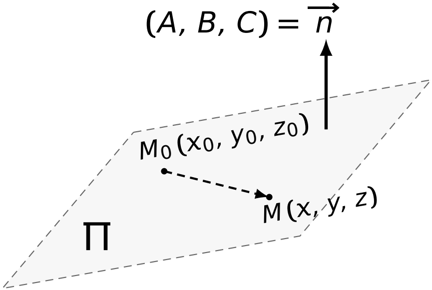
$M \in \Pi$

$\Updownarrow$

$\overrightarrow{M_0M} \perp \overrightarrow{n}$

$\Updownarrow$

$\overrightarrow{M_0M} \cdot \overrightarrow{n} = 0$



平面方程

$$M \in \Pi$$

$$\Updownarrow$$

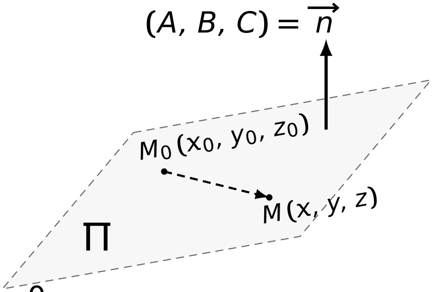
$$\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$$

$$\Updownarrow$$

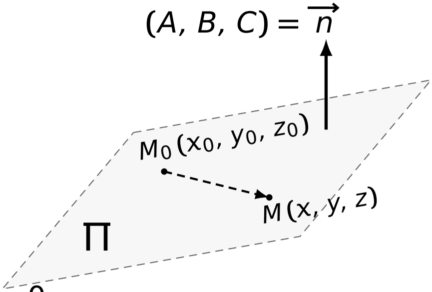
$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$



平面方程



$$M \in \Pi$$

$$\Updownarrow$$

$$\overrightarrow{M_0M} \perp \overrightarrow{n}$$

$$\Updownarrow$$

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \overrightarrow{n} = 0$$

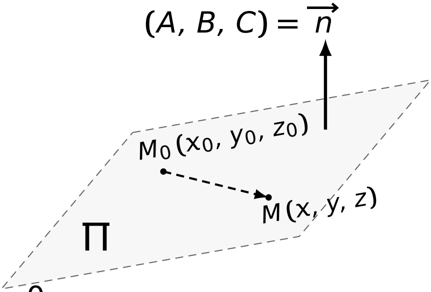
$$\Updownarrow$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$$

平面方程



$$M \in \Pi$$

$$\Updownarrow$$

$$\overrightarrow{M_0M} \perp \overrightarrow{n}$$

$$\Updownarrow$$

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \overrightarrow{n} = 0$$

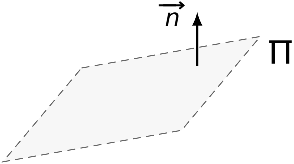
$$\Updownarrow$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$$

注 计算法向量 $\overrightarrow{n}$ 的通常方法：



平面方程

$$M \in \Pi$$

$$\Updownarrow$$

$$\overrightarrow{M_0M} \perp \overrightarrow{n}$$

$$\Updownarrow$$

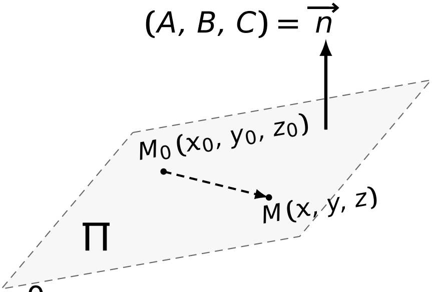
$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \overrightarrow{n} = 0$$

$$\Updownarrow$$

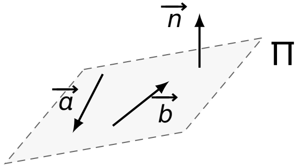
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

$$\Updownarrow$$

$$Ax+By+Cz+D=0, \qquad D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$$



注 计算法向量 $\overrightarrow{n}$ 的通常方法：



平面方程

$M \in \Pi$

$\Updownarrow$

$\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$

$\Updownarrow$

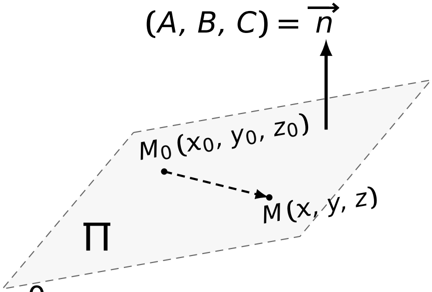
$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$

$\Updownarrow$

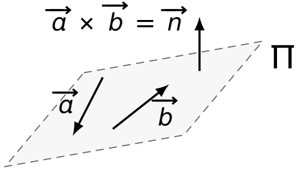
$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

$\Updownarrow$

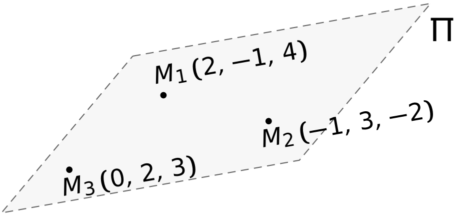
$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$



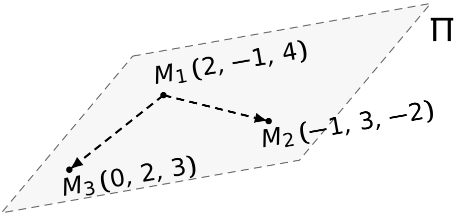
注 计算法向量 $\vec{n}$ 的通常方法：



例 1 设平面 Π 过点
$M_1(2, -1, 4)$,
$M_2(-1, 3, -2)$,
$M_3(0, 2, 3)$,
求 Π 方程。

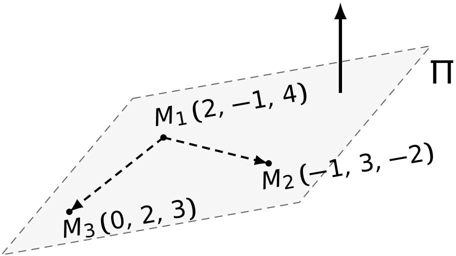


例 1 设平面 Π 过点
$M_1\,(2, -1, 4)$,
$M_2\,(-1, 3, -2)$,
$M_3\,(0, 2, 3)$,
求 Π 方程。



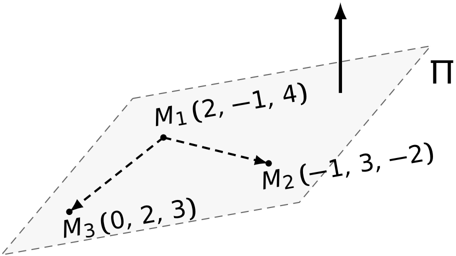
例 1 设平面 Π 过点
$M_1(2,-1,4)$,
$M_2(-1,3,-2)$,
$M_3(0,2,3)$,
求 Π 方程。

$$\vec{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}$$



$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}$

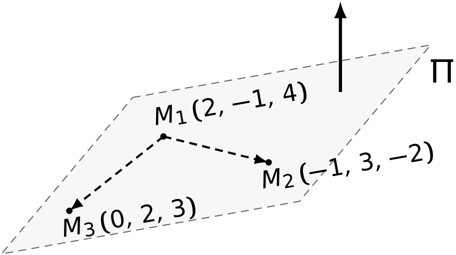
例 1 设平面 Π 过点
$M_1(2, -1, 4)$,
$M_2(-1, 3, -2)$,
$M_3(0, 2, 3)$,
求 Π 方程。



解 1. 求一个法向量：取

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$$

$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}$



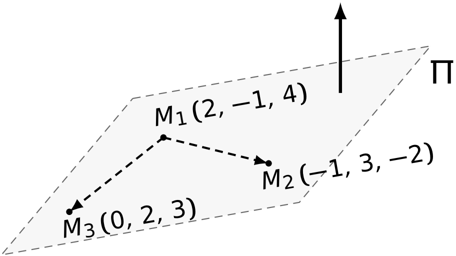
例 1 设平面 Π 过点
$M_1\,(2, -1, 4)$,
$M_2\,(-1, 3, -2)$,
$M_3\,(0, 2, 3)$,
求 Π 方程。

解 1. 求一个法向量：取

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -3 & 4 & -6 \\ & & \end{vmatrix}$$

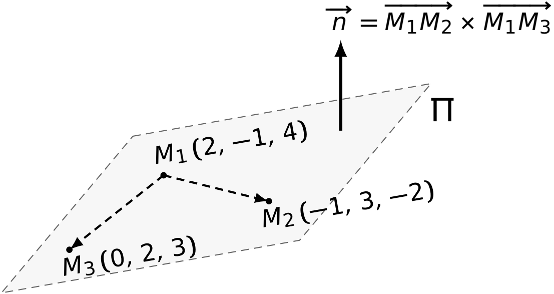
$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}$

例 1 设平面 Π 过点
$M_1(2, -1, 4)$,
$M_2(-1, 3, -2)$,
$M_3(0, 2, 3)$,
求 Π 方程。



解 1. 求一个法向量：取

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$



例 1 设平面 Π 过点
$M_1\,(2, -1, 4)$,
$M_2\,(-1, 3, -2)$,
$M_3\,(0, 2, 3)$,
求 Π 方程。

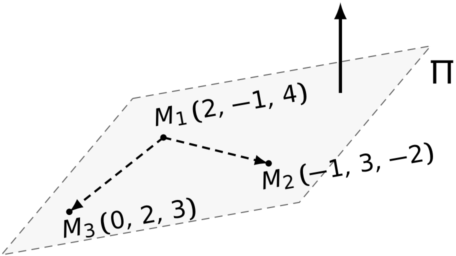
解 1. 求一个法向量：取

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \quad & \quad \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} \quad & \quad \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} \quad & \quad \end{vmatrix} \overrightarrow{k}$$

$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}$

例 1 设平面 Π 过点
$M_1(2, -1, 4)$,
$M_2(-1, 3, -2)$,
$M_3(0, 2, 3)$,
求 Π 方程。

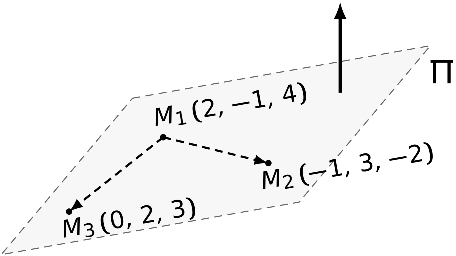


解 1. 求一个法向量：取

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix} \overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}$$



例 1 设平面 Π 过点
$M_1(2, -1, 4)$,
$M_2(-1, 3, -2)$,
$M_3(0, 2, 3)$,
求 Π 方程。

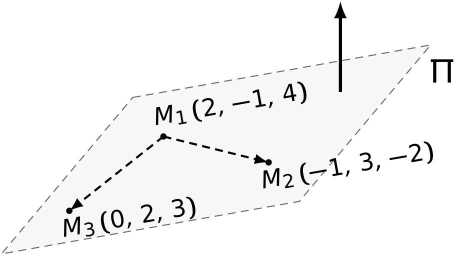
解 1. 求一个法向量：取

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix} \overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}$$

例 1 设平面 Π 过点
$M_1(2, -1, 4)$,
$M_2(-1, 3, -2)$,
$M_3(0, 2, 3)$,
求 Π 方程。



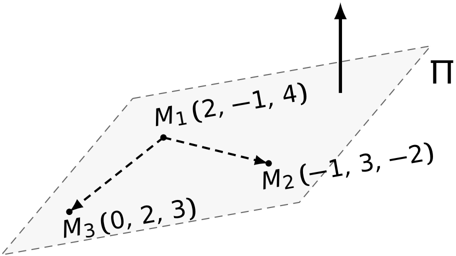
解 1. 求一个法向量：取

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}$$

例 1 设平面 Π 过点
$M_1\,(2, -1, 4)$,
$M_2\,(-1, 3, -2)$,
$M_3\,(0, 2, 3)$,
求 Π 方程。



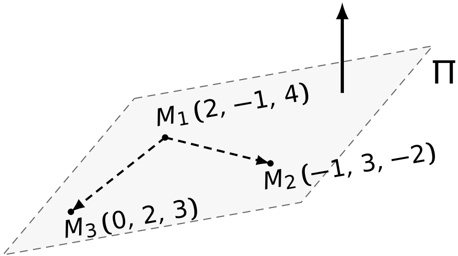
解 1. 求一个法向量：取

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \overrightarrow{k} = 14\,\overrightarrow{i} + 9\,\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}$$

例 1 设平面 Π 过点
$M_1(2, -1, 4)$,
$M_2(-1, 3, -2)$,
$M_3(0, 2, 3)$,
求 Π 方程。



解 1. 求一个法向量：取

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

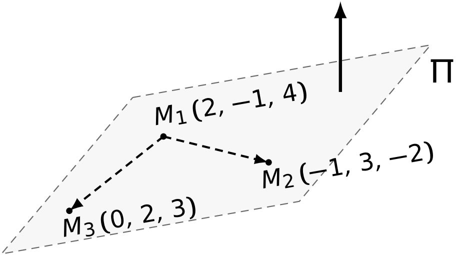
$$= \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \overrightarrow{k} = 14\overrightarrow{i} + 9\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$$

2. 平面方程：

$$14(x-0) + 9(y-2) - (z-3) = 0$$

$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}$

例 1 设平面 Π 过点
$M_1(2, -1, 4)$,
$M_2(-1, 3, -2)$,
$M_3(0, 2, 3)$,
求 Π 方程。



解 1. 求一个法向量：取

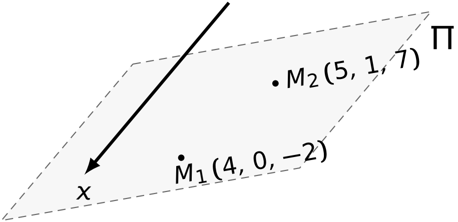
$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \overrightarrow{k} = 14\overrightarrow{i} + 9\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$$

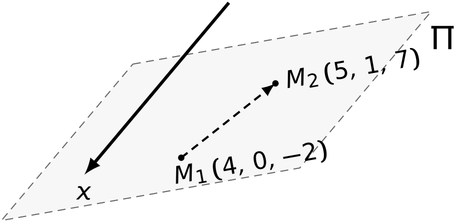
2. 平面方程：

$$14(x-0) + 9(y-2) - (z-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad 14x + 9y - z - 15 = 0$$

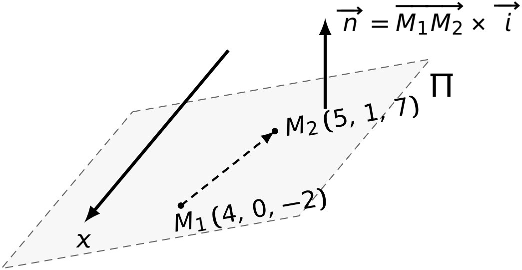
例 2 设平面 $\Pi \parallel x$ 轴，且过
$M_1(4, 0, -2)$,
$M_2(5, 1, 7)$,
求 Π 方程。



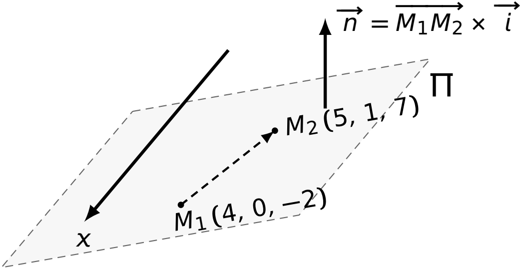
例 2 设平面 $\Pi \parallel x$ 轴，且过 $M_1(4, 0, -2)$，$M_2(5, 1, 7)$，求 Π 方程。



例 2 设平面 $\Pi \parallel x$ 轴，且过
$M_1(4, 0, -2)$,
$M_2(5, 1, 7)$,
求 Π 方程。



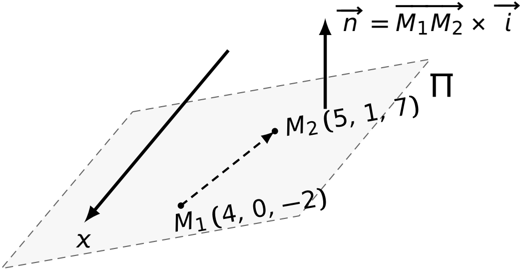
例 2 设平面 $\Pi \parallel x$ 轴，且过
$M_1(4,0,-2)$，
$M_2(5,1,7)$，
求 Π 方程。



解 1. 求一个法向量：取

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{i} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$$

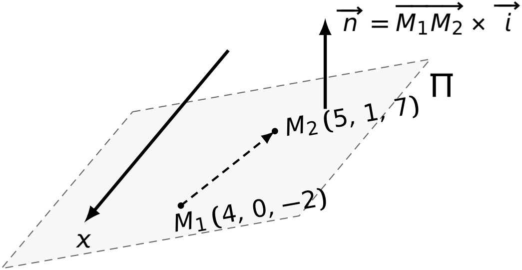
例 2 设平面 $\Pi \parallel x$ 轴，且过
$M_1(4, 0, -2)$,
$M_2(5, 1, 7)$,
求 Π 方程。



解 1. 求一个法向量：取

$$\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 9 \\ & & \end{vmatrix}$$

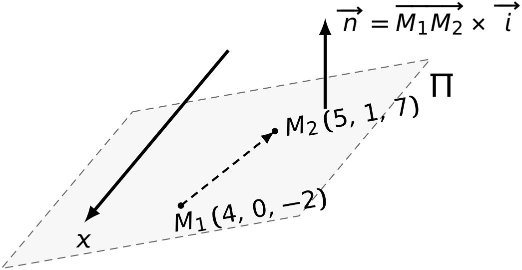
例 2 设平面 $\Pi \parallel x$ 轴，且过
$M_1(4, 0, -2)$,
$M_2(5, 1, 7)$,
求 Π 方程。



解 1. 求一个法向量：取

$$\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

例 2 设平面 $\Pi \parallel x$ 轴，且过
$M_1(4, 0, -2)$,
$M_2(5, 1, 7)$,
求 Π 方程。

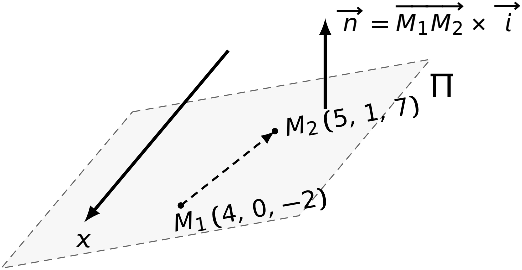


解 1. 求一个法向量：取

$$\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} \vec{k}$$

例 2 设平面 $\Pi \parallel x$ 轴，且过
$M_1(4, 0, -2)$，
$M_2(5, 1, 7)$，
求 Π 方程。

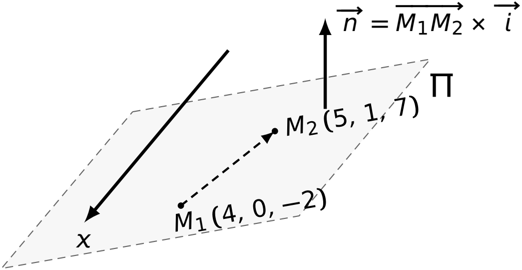


解 1. 求一个法向量：取

$$\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} \vec{k}$$

例 2 设平面 $\Pi \parallel x$ 轴，且过
$M_1(4, 0, -2)$,
$M_2(5, 1, 7)$,
求 Π 方程。

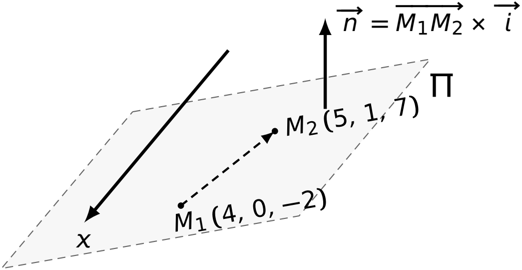


解 1. 求一个法向量：取

$$\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} \vec{k}$$

例 2 设平面 $\Pi \parallel x$ 轴，且过
$M_1(4, 0, -2)$,
$M_2(5, 1, 7)$,
求 Π 方程。

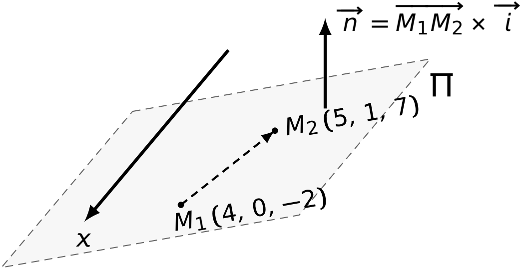


解 1. 求一个法向量：取

$$\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k}$$

例 2 设平面 $\Pi \parallel x$ 轴，且过
$M_1(4, 0, -2)$,
$M_2(5, 1, 7)$,
求 Π 方程。

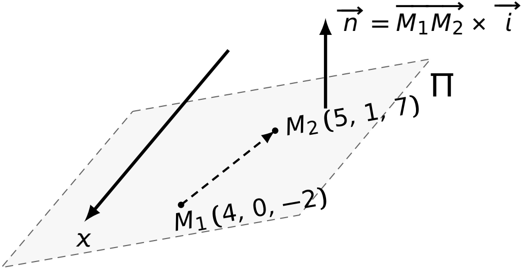


解 1. 求一个法向量：取

$$\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} = 9\vec{j} - \vec{k}$$

例 2 设平面 $\Pi \parallel x$ 轴，且过
$M_1(4, 0, -2)$,
$M_2(5, 1, 7)$,
求 Π 方程。



解 1. 求一个法向量：取

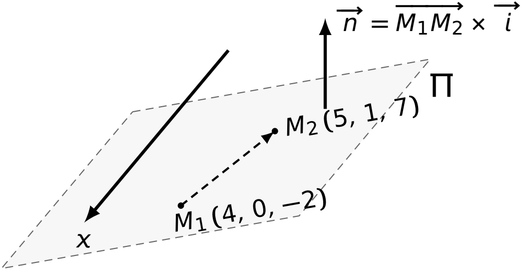
$$\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} = 9\vec{j} - \vec{k}$$

2. 平面方程：

$$0(x-4) + 9(y-0) - (z+2) = 0$$

例 2 设平面 $\Pi \parallel x$ 轴，且过
$M_1(4, 0, -2)$,
$M_2(5, 1, 7)$,
求 Π 方程。



解 1. 求一个法向量：取

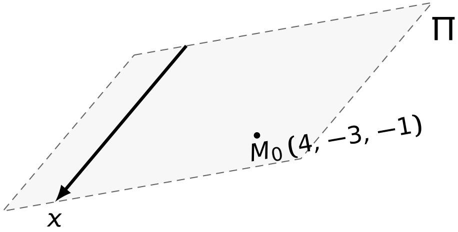
$$\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} = 9\vec{j} - \vec{k}$$

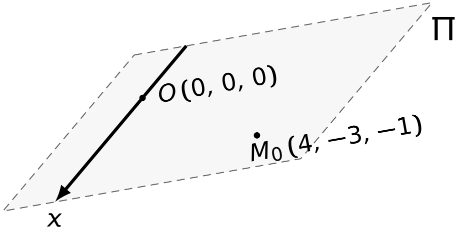
2. 平面方程：

$$0(x-4) + 9(y-0) - (z+2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 9y - z - 2 = 0$$

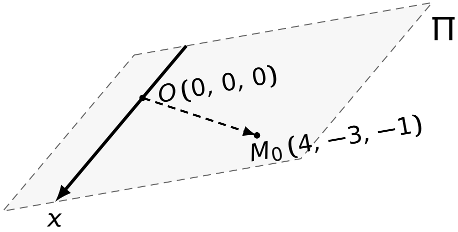
例 3 设平面 Π 包含 x 轴，且过 $M_0(4,-3,-1)$，求 Π 方程。



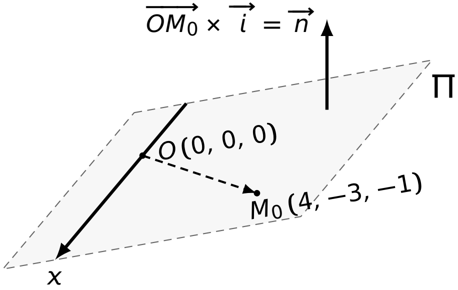
例 3 设平面 Π 包含 x 轴，且过 $M_0(4, -3, -1)$，
求 Π 方程。



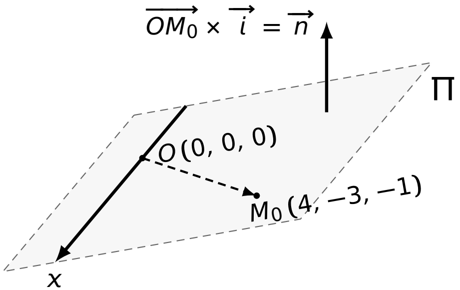
例 3 设平面 Π 包含 x 轴，且过 $M_0(4, -3, -1)$，
求 Π 方程。



例 3 设平面 Π 包含 x 轴，且过 $M_0(4,-3,-1)$，
求 Π 方程。



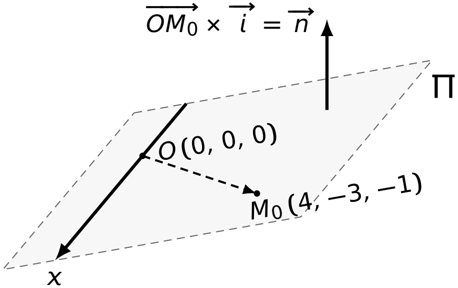
例 3 设平面 Π 包含 x 轴，且过 $M_0(4,-3,-1)$，求 Π 方程。



解 1. 求一个法向量：取

$$\vec{n} = \overrightarrow{OM_0} \times \vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$$

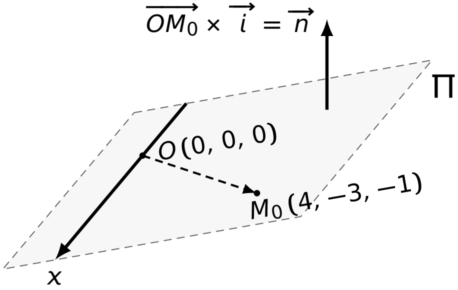
例 3 设平面 Π 包含 x 轴，且过 $M_0(4, -3, -1)$，
求 Π 方程。



解 1. 求一个法向量：取

$$\vec{n} = \overrightarrow{OM_0} \times \vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & -1 \\ & & \end{vmatrix}$$

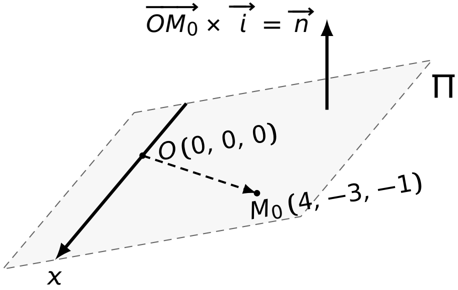
例 3 设平面 Π 包含 x 轴，且过 $M_0(4,-3,-1)$，求 Π 方程。



解 1. 求一个法向量：取

$$\vec{n}=\overrightarrow{OM_0}\times\vec{i}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & -3 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

例 3 设平面 Π 包含 x 轴，且过 $M_0(4, -3, -1)$，
求 Π 方程。

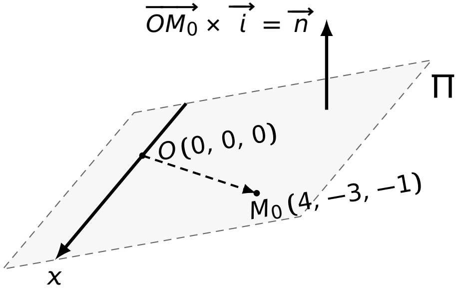


解 1. 求一个法向量：取

$$\vec{n} = \overrightarrow{OM_0} \times \vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \; \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} \; \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} \; \end{vmatrix} \vec{k}$$

例 3 设平面 Π 包含 x 轴，且过 $M_0(4,-3,-1)$，求 Π 方程。

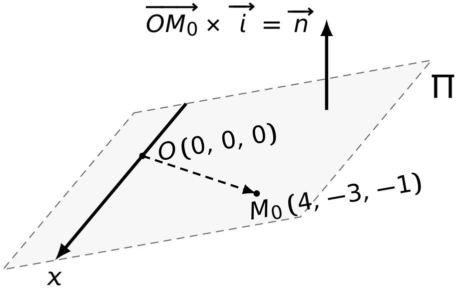


解 1. 求一个法向量：取

$$\vec{n} = \overrightarrow{OM_0} \times \vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} \vec{k}$$

例 3 设平面 Π 包含 x 轴，且过 $M_0(4,-3,-1)$，求 Π 方程。

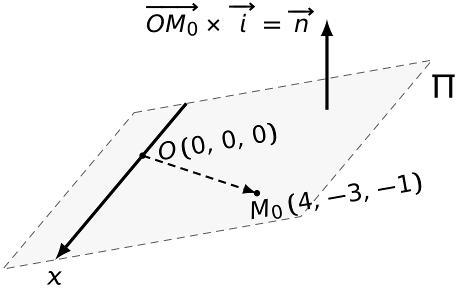


解 1. 求一个法向量：取

$$\vec{n}=\overrightarrow{OM_0}\times\vec{i}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & -3 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}-3 & -1\\ 0 & 0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}4 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}\vec{k}$$

例 3 设平面 Π 包含 x 轴，且过 $M_0(4, -3, -1)$，求 Π 方程。

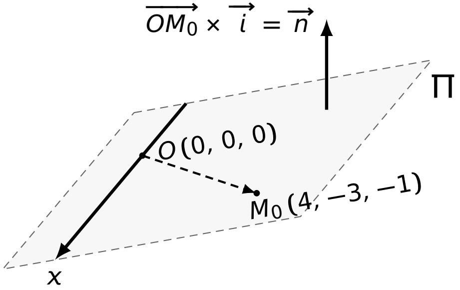


解 1. 求一个法向量：取

$$\vec{n} = \overrightarrow{OM_0} \times \vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k}$$

例 3 设平面 Π 包含 x 轴，且过 $M_0(4,-3,-1)$，求 Π 方程。

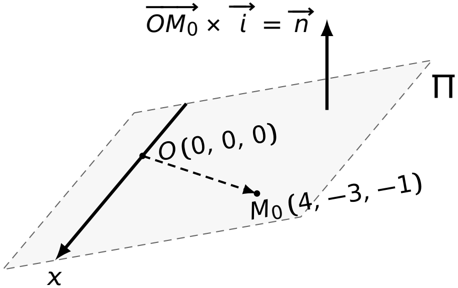


解 1. 求一个法向量：取

$$\vec{n}=\overrightarrow{OM_0}\times\vec{i}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & -3 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}-3 & -1\\ 0 & 0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}4 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}4 & -3\\ 1 & 0\end{vmatrix}\vec{k}=-\vec{j}+3\vec{k}$$

例 3 设平面 Π 包含 x 轴，且过 $M_0(4,-3,-1)$，求 Π 方程。



解 1. 求一个法向量：取

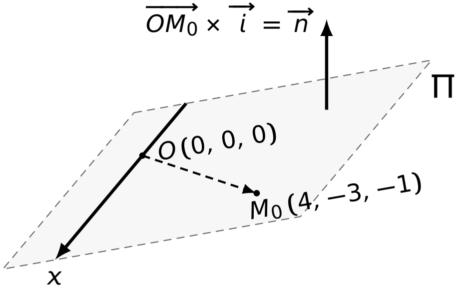
$$\overrightarrow{n}=\overrightarrow{OM_0}\times\overrightarrow{i}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 4 & -3 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}-3 & -1\\ 0 & 0\end{vmatrix}\overrightarrow{i}-\begin{vmatrix}4 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\overrightarrow{j}+\begin{vmatrix}4 & -3\\ 1 & 0\end{vmatrix}\overrightarrow{k}=-\overrightarrow{j}+3\overrightarrow{k}$$

2. 平面方程：

$$0(x-0)-1\cdot(y-0)+3(z-0)=0$$

例 3 设平面 Π 包含 x 轴，且过 $M_0(4, -3, -1)$，求 Π 方程。



解 1. 求一个法向量：取

$$\vec{n} = \overrightarrow{OM_0} \times \vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

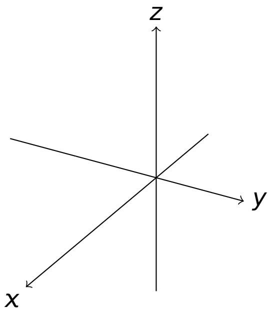
$$= \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} = -\vec{j} + 3\vec{k}$$

2. 平面方程：

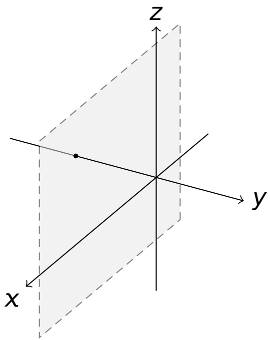
$$0(x-0) - 1\cdot(y-0) + 3(z-0) = 0 \quad \Rightarrow \quad y - 3z = 0$$

例 4 设平面 Π 平行于 xoz 坐标面，且过 $(2, -5, 3)$，求平面 Π 方程。

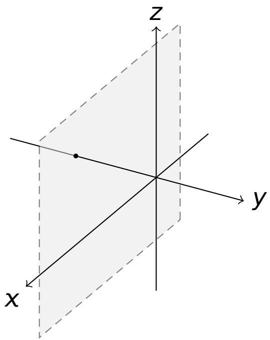
例 4 设平面 Π 平行于 xoz 坐标面，且过 $(2, -5, 3)$，求平面 Π 方程。



例 4 设平面 Π 平行于 xoz 坐标面，且过 $(2, -5, 3)$，求平面 Π 方程。

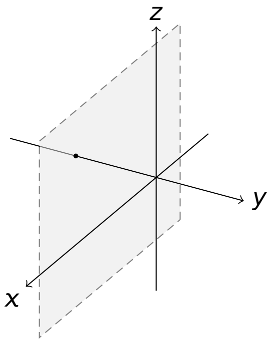


例 4 设平面 Π 平行于 xoz 坐标面，且过 $(2, -5, 3)$，求平面 Π 方程。



解 1. 求一个法向量：取 $\overrightarrow{n} = (0, 1, 0)$

例 4 设平面 Π 平行于 xoz 坐标面，且过 $(2, -5, 3)$，求平面 Π 方程。

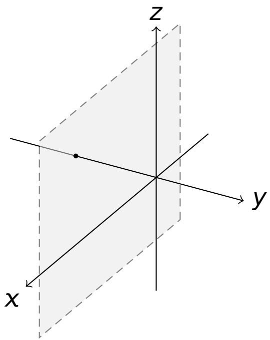


解 1. 求一个法向量：取 $\vec{n} = (0, 1, 0)$

2. 平面方程：

$$0(x-2)+1\cdot(y+5)+0(z-3)=0$$

例 4 设平面 Π 平行于 xoz 坐标面，且过 $(2, -5, 3)$，求平面 Π 方程。



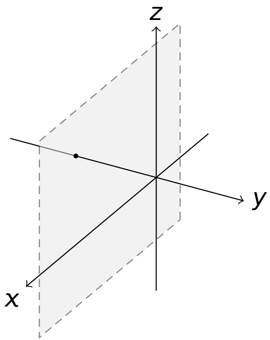
解 1. 求一个法向量：取 $\vec{n} = (0, 1, 0)$

2. 平面方程：

$$0(x-2)+1\cdot(y+5)+0(z-3)=0$$

$$\Rightarrow y+5=0$$

例 4 设平面 Π 平行于 xoz 坐标面，且过 $(2, -5, 3)$，求平面 Π 方程。



解 1. 求一个法向量：取 $\vec{n} = (0, 1, 0)$

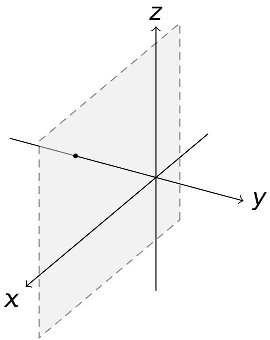
2. 平面方程：

$$0(x-2)+1\cdot(y+5)+0(z-3)=0$$

$$\Rightarrow y+5=0$$

例 5 问平面 $\Pi: Ax+By=1$ 平行于哪个坐标轴?

例 4 设平面 Π 平行于 xoz 坐标面，且过 $(2, -5, 3)$，求平面 Π 方程。



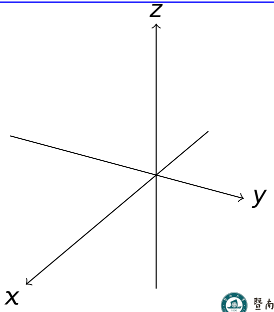
解 1. 求一个法向量：取 $\vec{n} = (0, 1, 0)$

2. 平面方程：

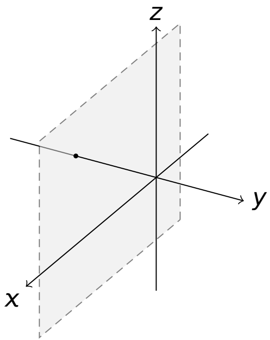
$$0(x-2)+1\cdot(y+5)+0(z-3)=0$$

$$\Rightarrow y+5=0$$

例 5 问平面 $\Pi: Ax+By=1$ 平行于哪个坐标轴？



例 4 设平面 Π 平行于 xoz 坐标面，且过 $(2, -5, 3)$，求平面 Π 方程。



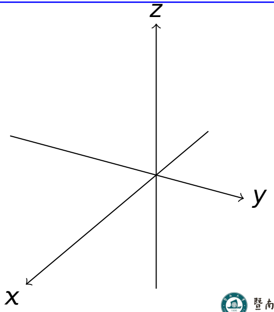
解 1. 求一个法向量：取 $\vec{n} = (0, 1, 0)$

2. 平面方程：

$$0(x-2)+1\cdot(y+5)+0(z-3)=0$$

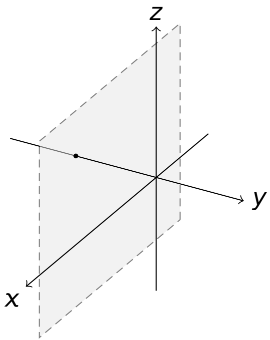
$$\Rightarrow y+5=0$$

例 5 问平面 $\Pi: Ax+By=1$ 平行于哪个坐标轴？



解 平行于 z 轴。

例 4 设平面 Π 平行于 xoz 坐标面，且过 $(2, -5, 3)$，求平面 Π 方程。

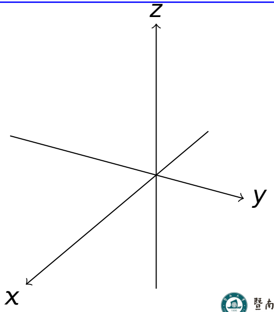


解 1. 求一个法向量：取 $\vec{n} = (0, 1, 0)$

2. 平面方程：

$$0(x-2)+1\cdot(y+5)+0(z-3)=0$$
$$\Rightarrow y+5=0$$

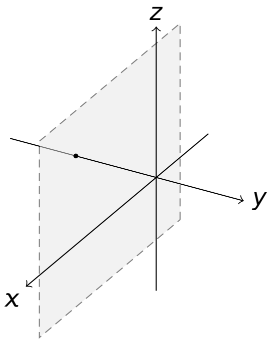
例 5 问平面 $\Pi: Ax+By=1$ 平行于哪个坐标轴？



解 平行于 z 轴。

这是因为：Π 的一个法向量为 $(A, B, 0)$，与 z 轴垂直

例 4 设平面 Π 平行于 xoz 坐标面，且过 $(2, -5, 3)$，求平面 Π 方程。

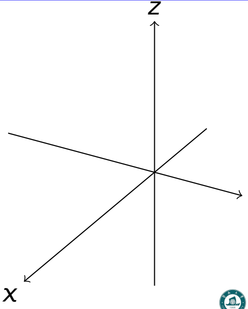


解 1. 求一个法向量：取 $\vec{n} = (0, 1, 0)$

2. 平面方程：

$$0(x-2)+1\cdot(y+5)+0(z-3)=0$$
$$\Rightarrow y+5=0$$

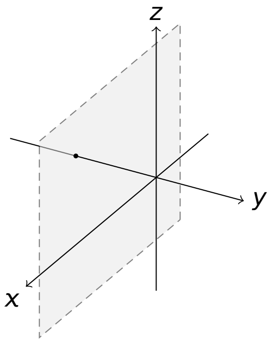
例 5 问平面 $\Pi: Ax+By=1$ 平行于哪个坐标轴？



解 平行于 z 轴。

这是因为：Π 的一个法向量为 $(A, B, 0)$，与 z 轴垂直（$(A, B, 0)\cdot(0, 0, 1)=0$）

例 4 设平面 Π 平行于 xoz 坐标面，且过 $(2, -5, 3)$，求平面 Π 方程。

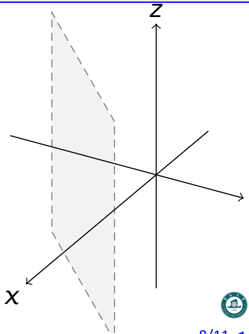


解 1. 求一个法向量：取 $\vec{n} = (0, 1, 0)$

2. 平面方程：

$$0(x-2)+1\cdot(y+5)+0(z-3)=0$$
$$\Rightarrow y+5=0$$

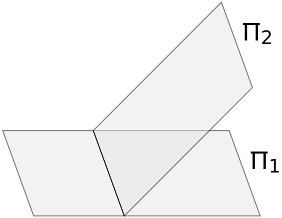
例 5 问平面 $\Pi: Ax + By = 1$ 平行于哪个坐标轴？



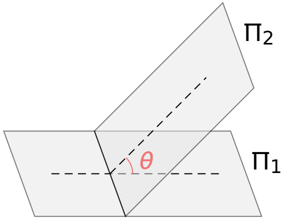
解 平行于 z 轴。

这是因为：Π 的一个法向量为 $(A, B, 0)$，与 z 轴垂直（$(A, B, 0)\cdot(0, 0, 1) = 0$）

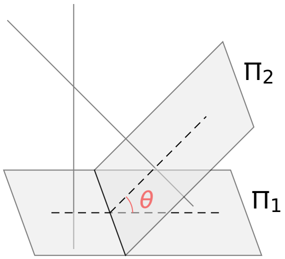
平面夹角



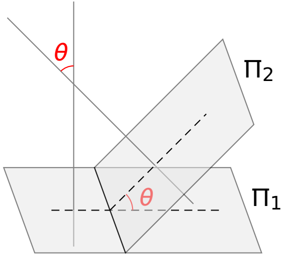
平面夹角



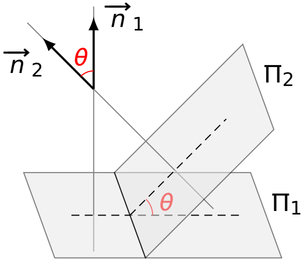
平面夹角



平面夹角

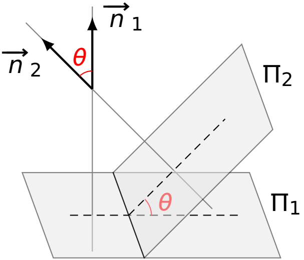


平面夹角



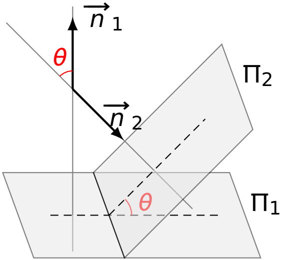
平面夹角

$$\cos\theta = \cos\left(\angle(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2})\right)$$



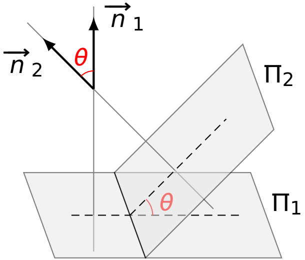
平面夹角

$$\cos\theta = \cos\left(\angle(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2})\right)$$



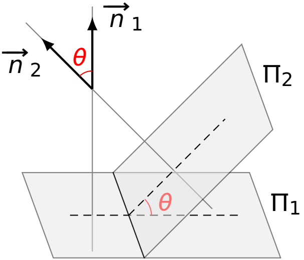
平面夹角

$$\cos\theta = \cos\left(\angle(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2})\right)$$



平面夹角

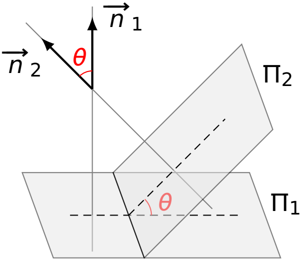
$$\cos\theta = \left|\cos\left(\angle(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2})\right)\right|$$



平面夹角

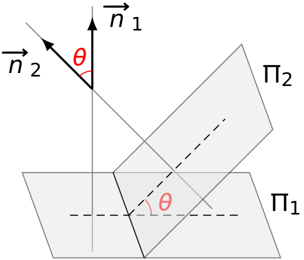
$$\cos\theta = \left|\cos\left(\angle(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2})\right)\right|$$

$$= \left|\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}\right|$$



平面夹角

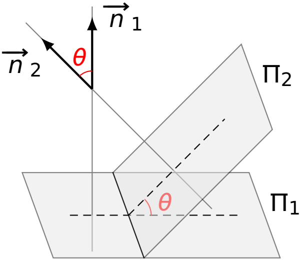
$$\cos\theta = \left|\cos\left(\angle(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2})\right)\right|$$
$$= \left|\frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|}\right|$$



例 1 求平面 $x - y + 2z - 6 = 0$ 和 $2x + y + z - 5 = 0$ 的夹角

平面夹角

$$\cos\theta = \left|\cos\left(\angle(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2})\right)\right|$$
$$= \left|\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}\right|$$



例 1 求平面 $x - y + 2z - 6 = 0$ 和 $2x + y + z - 5 = 0$ 的夹角

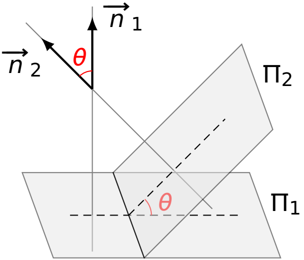
解 $\overrightarrow{n_1} = (\qquad\qquad)$, $\overrightarrow{n_2} = (\qquad\qquad)$

$$\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}$$

$$\theta =$$

平面夹角

$$\cos\theta = \left|\cos\left(\angle(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2})\right)\right|$$
$$= \left|\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}\right|$$



例 1 求平面 $x - y + 2z - 6 = 0$ 和 $2x + y + z - 5 = 0$ 的夹角

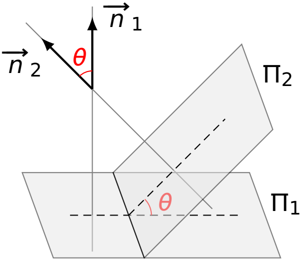
解 $\overrightarrow{n_1} = (1, -1, 2)$, $\overrightarrow{n_2} = (\qquad)$

$$\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}$$

$$\theta =$$

平面夹角

$$\cos\theta = \left|\cos\left(\angle(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2})\right)\right|$$
$$= \left|\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}\right|$$



例 1 求平面 $x-y+2z-6=0$ 和 $2x+y+z-5=0$ 的夹角

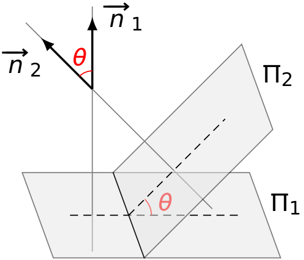
解 $\overrightarrow{n_1}=(1,-1,2)$, $\quad\overrightarrow{n_2}=(2,1,1)$

$$\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}$$

$$\theta =$$

平面夹角

$$\cos\theta = \left|\cos\left(\angle(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2})\right)\right|$$
$$= \left|\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}\right|$$



例 1 求平面 $x - y + 2z - 6 = 0$ 和 $2x + y + z - 5 = 0$ 的夹角

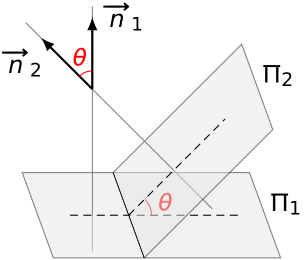
解 $\overrightarrow{n_1} = (1, -1, 2), \qquad \overrightarrow{n_2} = (2, 1, 1)$

$$\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|} = \frac{|1\cdot 2 + (-1)\cdot 1 + 2\cdot 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}\cdot\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}}$$

$$\theta =$$

平面夹角

$$\cos\theta = \left|\cos\left(\angle(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2})\right)\right|$$
$$= \left|\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}\right|$$



例 1 求平面 $x - y + 2z - 6 = 0$ 和 $2x + y + z - 5 = 0$ 的夹角

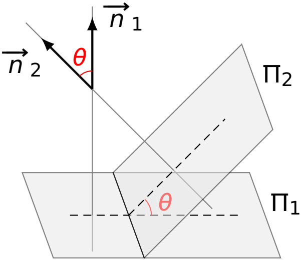
解 $\overrightarrow{n_1} = (1, -1, 2), \quad \overrightarrow{n_2} = (2, 1, 1)$

$$\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|} = \frac{|1\cdot 2 + (-1)\cdot 1 + 2\cdot 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}\cdot\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\theta =$$

平面夹角

$$\cos\theta = \left|\cos\left(\angle(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2})\right)\right|$$
$$= \left|\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}\right|$$



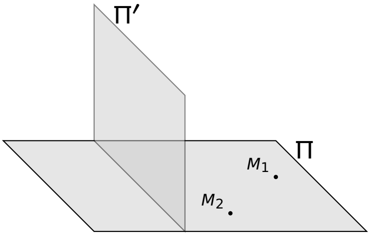
例 1 求平面 $x - y + 2z - 6 = 0$ 和 $2x + y + z - 5 = 0$ 的夹角

解 $\overrightarrow{n_1} = (1, -1, 2), \qquad \overrightarrow{n_2} = (2, 1, 1)$

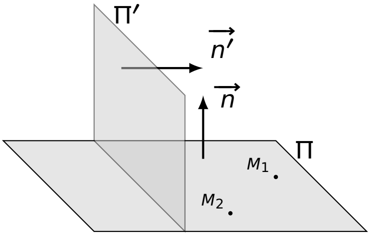
$$\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|} = \frac{|1\cdot 2 + (-1)\cdot 1 + 2\cdot 1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

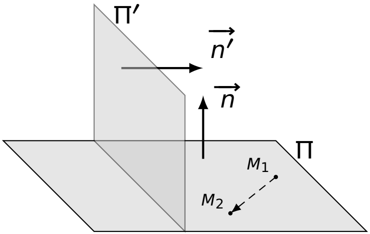
例 2 设平面 Π 过点 $M_1(1, 1, 1)$, $M_2(0, 1, -1)$，且与平面 $\Pi' : x + y + z = 0$ 垂直，求 Π 方程。



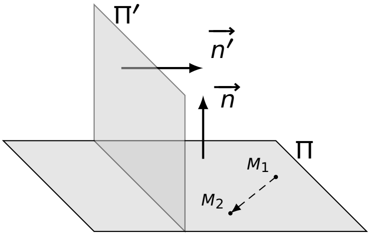
例 2 设平面 Π 过点 $M_1(1, 1, 1), M_2(0, 1, -1)$，且与平面 $\Pi' : x + y + z = 0$ 垂直，求 Π 方程。



例 2 设平面 Π 过点 $M_1(1, 1, 1)$, $M_2(0, 1, -1)$，且与平面 $\Pi' : x+y+z=0$ 垂直，求 Π 方程。



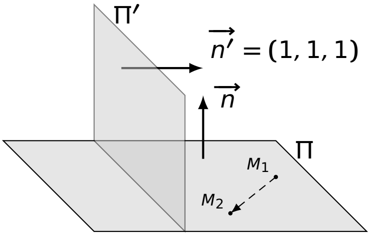
例 2 设平面 Π 过点 $M_1(1, 1, 1)$, $M_2(0, 1, -1)$，且与平面 $\Pi' : x + y + z = 0$ 垂直，求 Π 方程。



解 1. 求一个法向量：

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{n'}$$

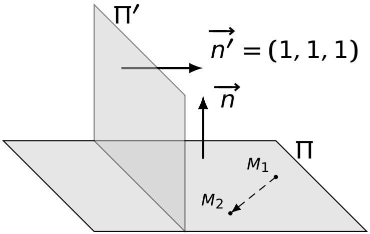
例 2 设平面 Π 过点 $M_1(1,\ 1,\ 1)$, $M_2(0,\ 1,\ -1)$，且与平面 Π' : $x+y+z=0$ 垂直，求 Π 方程。



解 1. 求一个法向量：

$$\overrightarrow{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{n'}$$

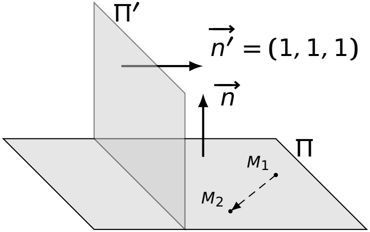
例 2 设平面 Π 过点 $M_1(1, 1, 1)$, $M_2(0, 1, -1)$，且与平面 Π' : $x+y+z=0$ 垂直，求 Π 方程。



解 1. 求一个法向量：

$$\overrightarrow{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{n'}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ -1 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

例 2 设平面 Π 过点
$M_1(1,\ 1,\ 1)$, $M_2(0,\ 1,\ -1)$，且与平面
$\Pi' : x+y+z=0$ 垂直，求 Π 方程。

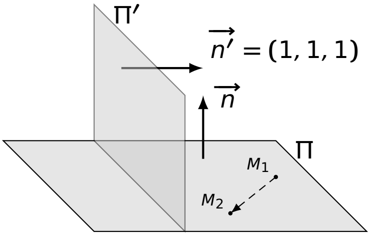


解 1. 求一个法向量：

$$\vec{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\vec{n'}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\left|\quad\quad\right|\vec{i}-\left|\quad\quad\right|\vec{j}+\left|\quad\quad\right|\vec{k}$$

例 2 设平面 Π 过点 $M_1(1,1,1)$, $M_2(0,1,-1)$，且与平面 $\Pi': x+y+z=0$ 垂直，求 Π 方程。

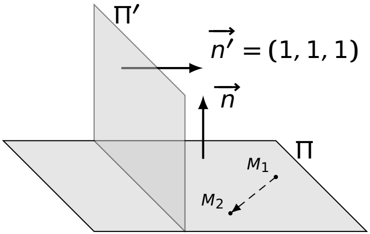


解 1. 求一个法向量：

$$\vec{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\vec{n'}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}0 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}\vec{k}$$

例 2 设平面 Π 过点 $M_1(1, 1, 1)$, $M_2(0, 1, -1)$，且与平面 $\Pi' : x+y+z=0$ 垂直，求 Π 方程。

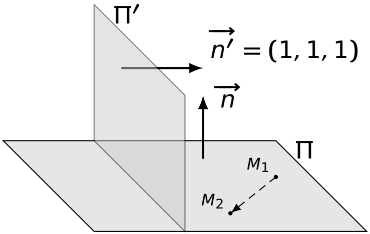


解 1. 求一个法向量：

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{n'} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} \overrightarrow{k}$$

例 2 设平面 Π 过点 $M_1(1,1,1)$, $M_2(0,1,-1)$，且与平面 $\Pi': x+y+z=0$ 垂直，求 Π 方程。

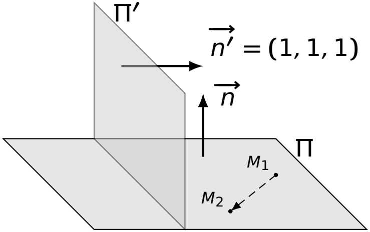


解 1. 求一个法向量：

$$\vec{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\vec{n'}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}0 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}\vec{k}$$

例 2 设平面 Π 过点 $M_1(1,1,1)$, $M_2(0,1,-1)$，且与平面 $\Pi': x+y+z=0$ 垂直，求 Π 方程。

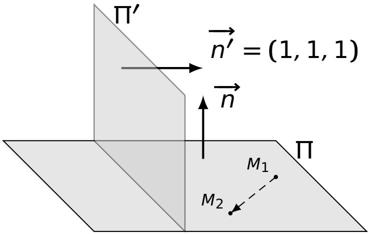


解 1. 求一个法向量：

$$\overrightarrow{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{n'}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ -1 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}0 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}\overrightarrow{i}-\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}\overrightarrow{j}+\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}\overrightarrow{k}=2\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}$$

例 2 设平面 Π 过点 $M_1(1, 1, 1)$, $M_2(0, 1, -1)$，且与平面 Π' : $x + y + z = 0$ 垂直，求 Π 方程。



解 1. 求一个法向量：

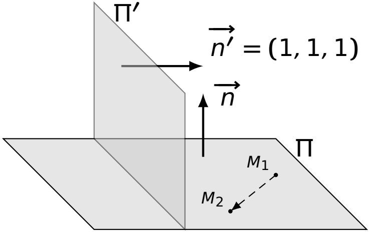
$$\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{n'} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$$

2. 平面方程：

$$2(x - 1) - 1 \cdot (y - 1) - 1 \cdot (z - 1) = 0$$

例 2 设平面 Π 过点 $M_1(1, 1, 1)$, $M_2(0, 1, -1)$，且与平面 $\Pi' : x + y + z = 0$ 垂直，求 Π 方程。



解 1. 求一个法向量：

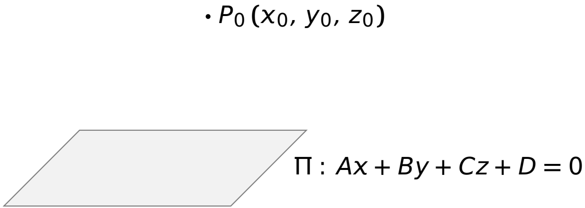
$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{n'} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{k} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$$

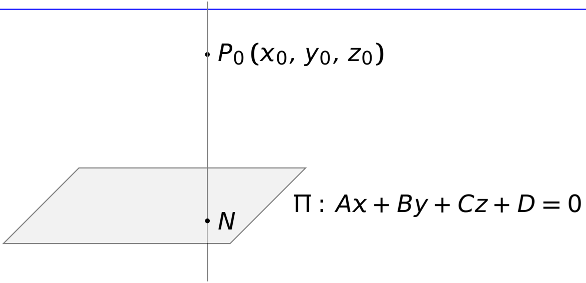
2. 平面方程：

$$2(x-1) - 1\cdot(y-1) - 1\cdot(z-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - y - z = 0$$

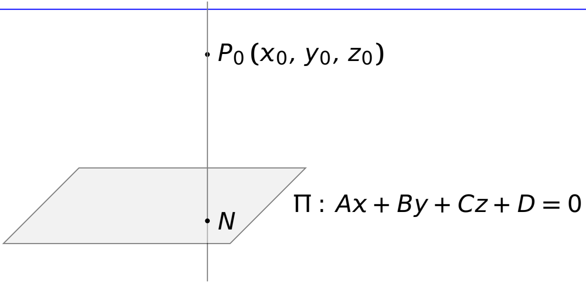
点到平面的距离



点到平面的距离

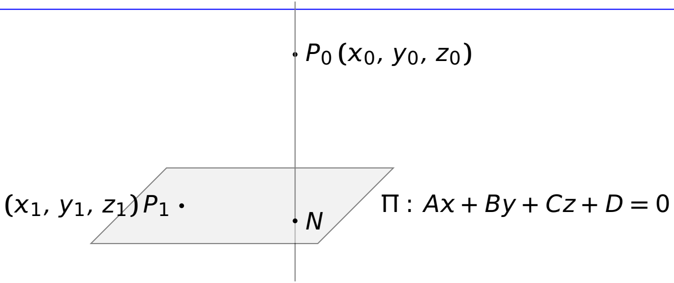


点到平面的距离



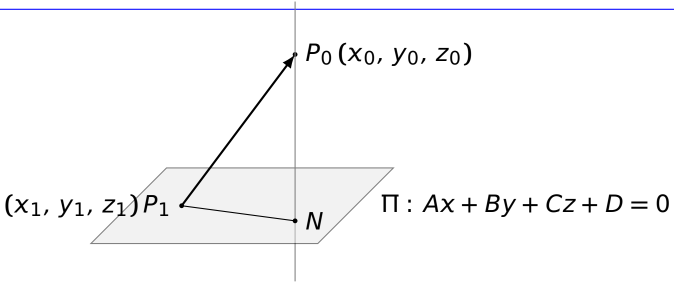
$$P_0 \text{ 到 } \Pi \text{ 的距离} = \left|\overrightarrow{NP_0}\right|$$

点到平面的距离



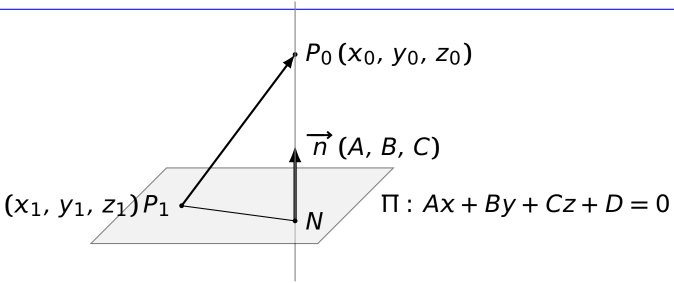
$$P_0 \text{ 到 } \Pi \text{ 的距离} = \left|\overrightarrow{NP_0}\right|$$

点到平面的距离



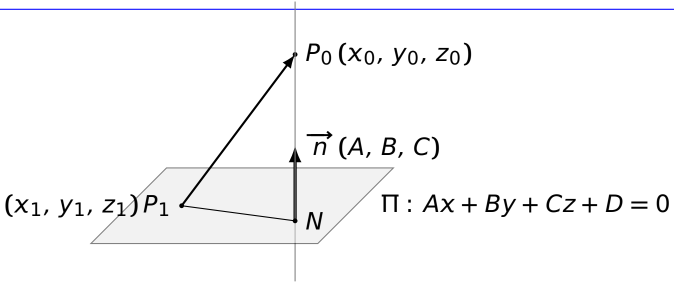
$$P_0 \text{ 到 } \Pi \text{ 的距离} = \left|\overrightarrow{NP_0}\right|$$

点到平面的距离



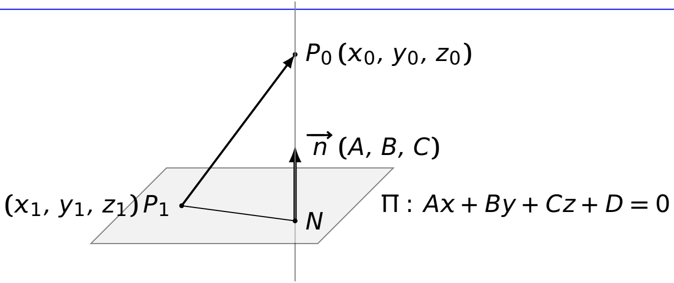
$$P_0 \text{ 到 } \Pi \text{ 的距离} = \left|\overrightarrow{NP_0}\right|$$

点到平面的距离



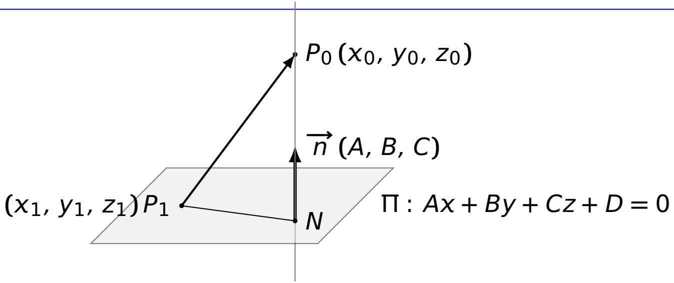
$$P_0\text{ 到 }\Pi\text{ 的距离} = \left|\overrightarrow{NP_0}\right| = \left|(\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{n}}\overrightarrow{P_1P_0})e_{\overrightarrow{n}}\right|$$

点到平面的距离



$$P_0 \text{ 到 } \Pi \text{ 的距离} = \left|\overrightarrow{NP_0}\right| = \left|(\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{n}}\overrightarrow{P_1P_0})e_{\overrightarrow{n}}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\overrightarrow{n}\right|}{|\overrightarrow{n}|}$$

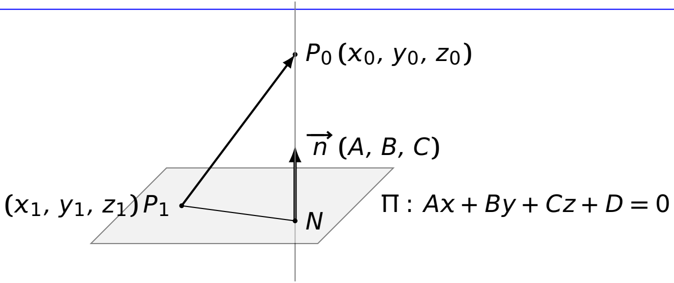
点到平面的距离



$$P_0 \text{ 到 } \Pi \text{ 的距离} = \left|\overrightarrow{NP_0}\right| = \left|(\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{n}}\overrightarrow{P_1P_0})e_{\overrightarrow{n}}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\overrightarrow{n}\right|}{|\overrightarrow{n}|}$$

例 求点 $P_0\,(2, 1, 1)$ 到平面 $\Pi: x + y - z = 1$ 的距离。

点到平面的距离

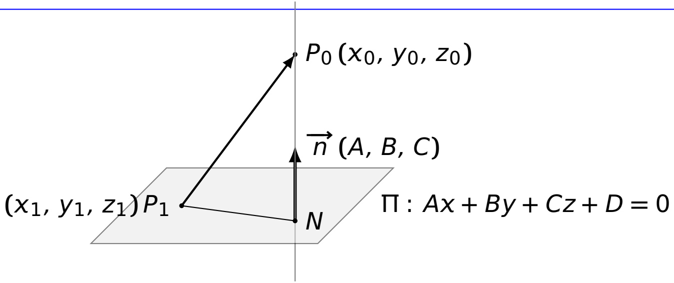


$$P_0\text{ 到 }\Pi\text{ 的距离} = \left|\overrightarrow{NP_0}\right| = \left|(\mathrm{Prj}_{\vec{n}}\overrightarrow{P_1P_0})e_{\vec{n}}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\vec{n}\right|}{|\vec{n}|}$$

例 求点 $P_0\,(2, 1, 1)$ 到平面 $\Pi: x + y - z = 1$ 的距离。

解 取 $P_1\,(1, 0, 0)$，则

点到平面的距离



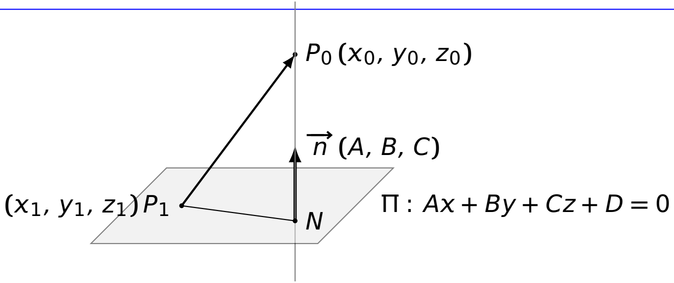
$$P_0 \text{ 到 } \Pi \text{ 的距离} = \left|\overrightarrow{NP_0}\right| = \left|(\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{n}}\overrightarrow{P_1P_0})e_{\overrightarrow{n}}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\overrightarrow{n}\right|}{|\overrightarrow{n}|}$$

例 求点 $P_0\,(2, 1, 1)$ 到平面 $\Pi: x + y - z = 1$ 的距离。

解 取 $P_1\,(1, 0, 0)$，则 $\overrightarrow{P_1P_0} = (\qquad\qquad)$， $\overrightarrow{n} = (\qquad\qquad\qquad)$

$$P_0 \text{ 到 } \Pi \text{ 的距离} = \frac{\left|\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\overrightarrow{n}\right|}{|\overrightarrow{n}|}$$

点到平面的距离



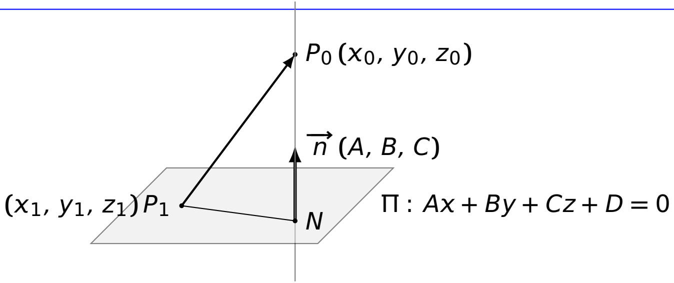
$$P_0 \text{ 到 } \Pi \text{ 的距离} = \left|\overrightarrow{NP_0}\right| = \left|(\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{n}}\overrightarrow{P_1P_0})e_{\overrightarrow{n}}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\overrightarrow{n}\right|}{|\overrightarrow{n}|}$$

例 求点 $P_0\,(2, 1, 1)$ 到平面 $\Pi: x + y - z = 1$ 的距离。

解 取 $P_1\,(1, 0, 0)$，则 $\overrightarrow{P_1P_0} = (1, 1, 1)$， $\overrightarrow{n} = ($ $)$

$$P_0 \text{ 到 } \Pi \text{ 的距离} = \frac{\left|\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\overrightarrow{n}\right|}{|\overrightarrow{n}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

点到平面的距离



$$P_0\text{ 到 }\Pi\text{ 的距离}=\left|\overrightarrow{NP_0}\right|=\left|(\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{n}}\overrightarrow{P_1P_0})e_{\overrightarrow{n}}\right|=\frac{\left|\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\overrightarrow{n}\right|}{|\overrightarrow{n}|}$$

例 求点 $P_0\,(2,\,1,\,1)$ 到平面 $\Pi:\ x+y-z=1$ 的距离。

解 取 $P_1\,(1,\,0,\,0)$，则 $\overrightarrow{P_1P_0}=(1,\,1,\,1)$， $\overrightarrow{n}=(1,\,1,\,-1)$

$$P_0\text{ 到 }\Pi\text{ 的距离}=\frac{\left|\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\overrightarrow{n}\right|}{|\overrightarrow{n}|}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$