# 第11章 e: 对坐标的曲面积分

数学系 梁卓滨

2018-2019 学年 II





### 定义

• 一个曲面称为可定向,是指该曲面在整体上的具有两侧。

### 定义

• 一个曲面称为可定向,是指该曲面在整体上的具有两侧。

### 例

● 球面可定向,有内、外侧之分。



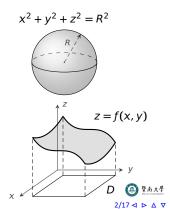
#### 定义

• 一个曲面称为可定向, 是指该曲面在整体上的具有两侧。

#### 例

• 球面可定向,有内、外侧之分。

● 二元函数图形可定向, 有上、下侧之分。



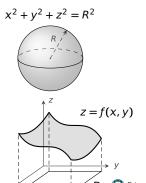
#### 定义

- 一个曲面称为可定向,是指该曲面在整体上的具有两侧。
- 指定可定向曲面的定向是指: 指定一侧为正侧, 另一侧为负侧。

### 例

• 球面可定向,有内、外侧之分。

• 二元函数图形可定向, 有上、下侧之分。



#### 定义

- 一个曲面称为可定向,是指该曲面在整体上的具有两侧。
- 指定可定向曲面的定向是指:指定一侧为正侧,另一侧为负侧。
- 指定了定向的可定向曲面, 称为定向曲面。

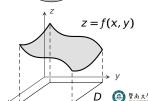
#### 例

• 球面可定向,有内、外侧之分。

R /

 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 

• 二元函数图形可定向, 有上、下侧之分。



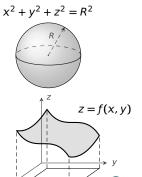
#### 定义

- 一个曲面称为可定向,是指该曲面在整体上的具有两侧。
- 指定可定向曲面的定向是指: 指定一侧为正侧, 另一侧为负侧。
- 指定了定向的可定向曲面, 称为定向曲面。

### 例

- 球面可定向,有内、外侧之分。 两种定向:
  - 以外侧为正向的定向球面

● 二元函数图形可定向, 有上、下侧之分。

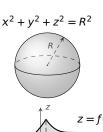


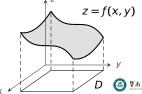
#### 定义

- 一个曲面称为可定向,是指该曲面在整体上的具有两侧。
- 指定可定向曲面的定向是指: 指定一侧为正侧, 另一侧为负侧。
- 指定了定向的可定向曲面, 称为定向曲面。

### 例

- 球面可定向,有内、外侧之分。 两种定向:
  - 以外侧为正向的定向球面
  - 以内侧为正向的定向球面
- 二元函数图形可定向, 有上、下侧之分。



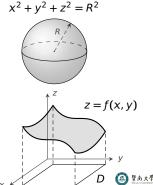


#### 定义

- 一个曲面称为可定向,是指该曲面在整体上的具有两侧。
- 指定可定向曲面的定向是指: 指定一侧为正侧, 另一侧为负侧。
- 指定了定向的可定向曲面, 称为定向曲面。

### 例

- 球面可定向,有内、外侧之分。 两种定向:
  - 以外侧为正向的定向球面
  - 以内侧为正向的定向球面
- 二元函数图形可定向,有上、下侧之分。 两种定向:
  - 以上侧为正向的定向函数图形

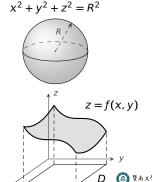


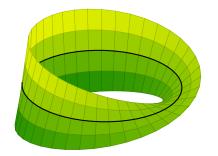
#### 定义

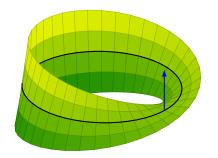
- 一个曲面称为可定向,是指该曲面在整体上的具有两侧。
- 指定可定向曲面的定向是指:指定一侧为正侧,另一侧为负侧。
- 指定了定向的可定向曲面, 称为定向曲面。

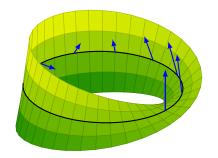
### 例

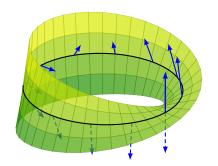
- 球面可定向,有内、外侧之分。 两种定向:
  - 以外侧为正向的定向球面
  - 以内侧为正向的定向球面
- 二元函数图形可定向,有上、下侧之分。 两种定向:
  - 以上侧为正向的定向函数图形
  - 以下侧为正向的定向函数图形

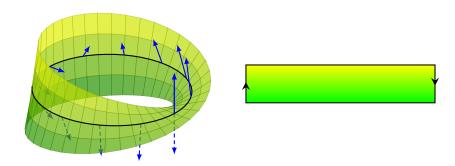




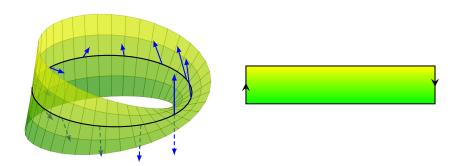








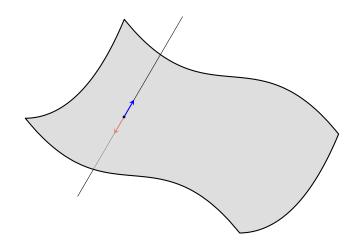
制作方法 将纸带旋转半周,再把两端粘合(如图,使得两端箭头重合)



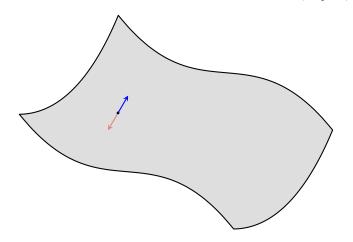
制作方法 将纸带旋转半周,再把两端粘合(如图,使得两端箭头重合)注 如无特殊说明,下面出现的曲面都是可定向的曲面



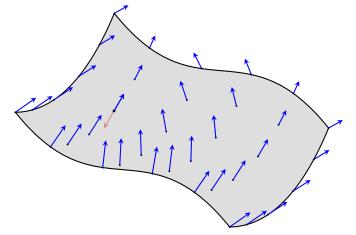
• 曲面上任一点, 有两个单位法向量(方向相反), 分别指向两侧。



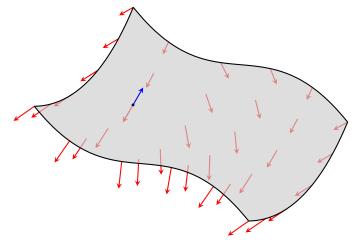
- 曲面上任一点,有两个单位法向量(方向相反),分别指向两侧。
- 给曲面定向,等价于指定其中一个单位法向量场  $\overrightarrow{n}(x,y,z)$



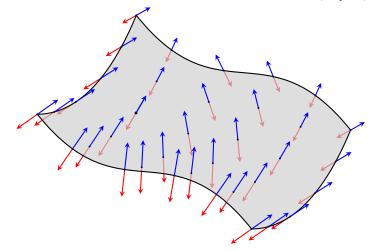
- 曲面上任一点,有两个单位法向量(方向相反),分别指向两侧。
- 给曲面定向,等价于指定其中一个单位法向量场  $\overrightarrow{n}(x,y,z)$

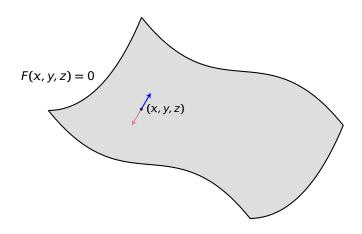


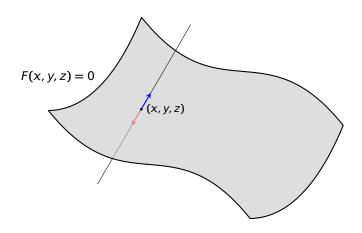
- 曲面上任一点, 有两个单位法向量(方向相反), 分别指向两侧。
- 给曲面定向,等价于指定其中一个单位法向量场  $\overrightarrow{n}(x,y,z)$

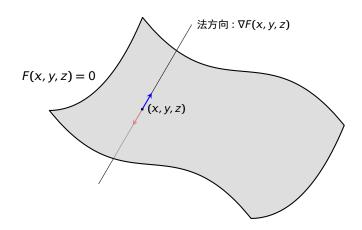


- 曲面上任一点, 有两个单位法向量(方向相反), 分别指向两侧。
- 给曲面定向,等价于指定其中一个单位法向量场  $\overrightarrow{n}(x,y,z)$

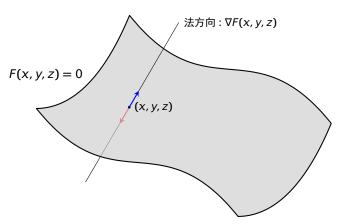




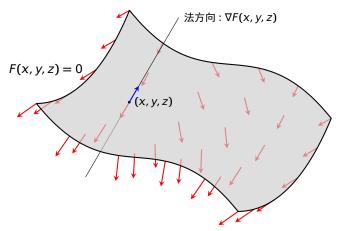




$$\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F \quad \leftrightarrows \quad -\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F.$$

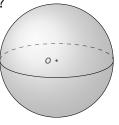


$$\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F \quad \leftrightarrows \quad -\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F.$$

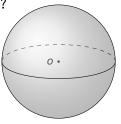


$$|\nabla F|$$
 与  $-\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F$ . 法方向:  $\nabla F(x,y,z)$ 

指向外侧,哪个指向内侧?

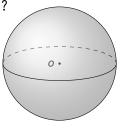


指向外侧,哪个指向内侧?



解令 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$ ,则球面方程改写为F = 0。

指向外侧,哪个指向内侧?

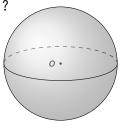


$$\mathbf{F} \Leftrightarrow F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$$
,则球面方程改写为  $F = 0$ 。计算 
$$\nabla F = |\nabla F| = |\nabla F|$$

$$\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F = -\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F =$$



指向外侧,哪个指向内侧?



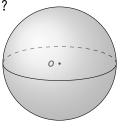
解 令 
$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$$
,则球面方程改写为  $F = 0$ 。计算

$$\nabla F = (2x, 2y, 2z), \qquad |\nabla F| =$$

$$\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F = -\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F =$$



指向外侧,哪个指向内侧?

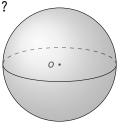


解令
$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$$
,则球面方程改写为 $F = 0$ 。计算 
$$\nabla F = (2x, 2y, 2z), \qquad |\nabla F| = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F = -\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F =$$



指向外侧,哪个指向内侧?

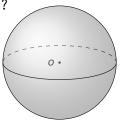


解令
$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$$
,则球面方程改写为 $F = 0$ 。计算 
$$\nabla F = (2x, 2y, 2z), \qquad |\nabla F| = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2R$$

$$\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F = -\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F =$$



指向外侧,哪个指向内侧?

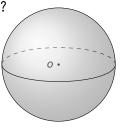


解令
$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$$
,则球面方程改写为 $F = 0$ 。计算 
$$\nabla F = (2x, 2y, 2z), \qquad |\nabla F| = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2R$$

$$\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F = \frac{1}{R}(x, y, z), \qquad -\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F =$$



指向外侧,哪个指向内侧?

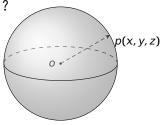


解令
$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$$
,则球面方程改写为 $F = 0$ 。计算 
$$\nabla F = (2x, 2y, 2z), \qquad |\nabla F| = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2R$$

$$\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F = \frac{1}{R}(x, y, z), \qquad -\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F = -\frac{1}{R}(x, y, z)$$



指向外侧,哪个指向内侧?

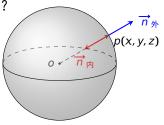


解令
$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$$
,则球面方程改写为 $F = 0$ 。计算 
$$\nabla F = (2x, 2y, 2z), \qquad |\nabla F| = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2R$$

$$\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F = \frac{1}{R}(x, y, z), \qquad -\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F = -\frac{1}{R}(x, y, z)$$



指向外侧,哪个指向内侧?

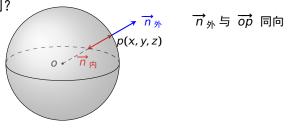


解令
$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$$
,则球面方程改写为 $F = 0$ 。计算 
$$\nabla F = (2x, 2y, 2z), \qquad |\nabla F| = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2R$$

$$\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F = \frac{1}{R}(x, y, z), \qquad -\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F = -\frac{1}{R}(x, y, z)$$



指向外侧,哪个指向内侧?

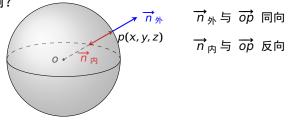


解令
$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$$
,则球面方程改写为 $F = 0$ 。计算 
$$\nabla F = (2x, 2y, 2z), \qquad |\nabla F| = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2R$$

$$\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F = \frac{1}{R}(x, y, z), \qquad -\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F = -\frac{1}{R}(x, y, z)$$



指向外侧,哪个指向内侧?



解令
$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$$
,则球面方程改写为 $F = 0$ 。计算 
$$\nabla F = (2x, 2y, 2z), \qquad |\nabla F| = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2R$$

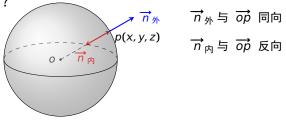
所以两个单位法向量场为

$$\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F = \frac{1}{R}(x, y, z), \qquad -\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F = -\frac{1}{R}(x, y, z)$$



第 11 章 e: 对坐标的曲面积分

指向外侧,哪个指向内侧?



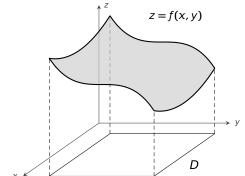
解令
$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$$
,则球面方程改写为 $F = 0$ 。计算 
$$\nabla F = (2x, 2y, 2z), \qquad |\nabla F| = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2R$$

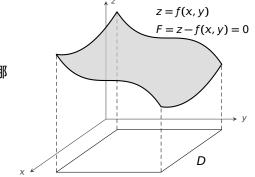
所以两个单位法向量场为

$$\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F = \frac{1}{R}(x, y, z), \qquad -\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F = -\frac{1}{R}(x, y, z)$$

前一个指向外侧,后一个指向内侧。

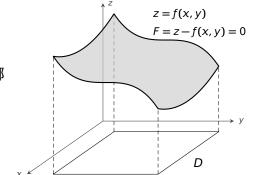






 $\mathbf{H}$  令 F(x, y, z) = z - f(x, y),则该图形方程改写为 F = 0。



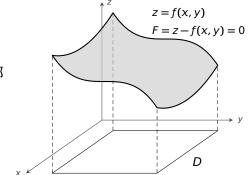


 $\mathbf{F} \Leftrightarrow F(x, y, z) = z - f(x, y)$ ,则该图形方程改写为 F = 0。计算

$$\nabla F = |\nabla F| =$$

$$\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F = -\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F =$$



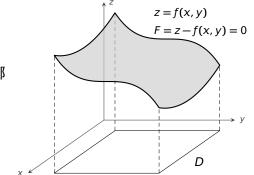


 $\mathbf{F} \Leftrightarrow F(x, y, z) = z - f(x, y)$ ,则该图形方程改写为 F = 0。计算

$$\nabla F = (-f_x, -f_y, 1), \quad |\nabla F| =$$

$$\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F = -\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F =$$



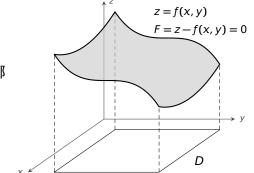


 $\mathbf{H} \diamondsuit F(x, y, z) = z - f(x, y)$ ,则该图形方程改写为 F = 0。计算

$$\nabla F = (-f_x, \, -f_y, \, 1), \qquad |\nabla F| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$$

$$\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F = -\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F =$$

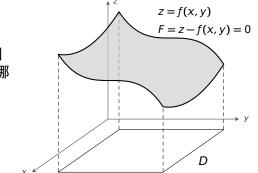




 $\mathbf{R} \diamondsuit F(x, y, z) = z - f(x, y)$ ,则该图形方程改写为 F = 0。计算

$$\nabla F = (-f_x, -f_y, 1), \qquad |\nabla F| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$$

$$\tfrac{1}{|\nabla F|}\nabla F = \tfrac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}(-f_x,\,-f_y,\,1),\quad -\tfrac{1}{|\nabla F|}\nabla F =$$



 $\mathbf{H} \diamondsuit F(x, y, z) = z - f(x, y)$ ,则该图形方程改写为 F = 0。计算

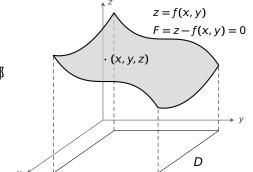
$$\nabla F = (-f_x, -f_y, 1), \qquad |\nabla F| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$$

所以两个单位法向量场为

$$\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}(-f_x, -f_y, 1), \quad -\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}(f_x, f_y, -1)$$



第 11 章 e: 对坐标的曲面积分



解 令 F(x, y, z) = z - f(x, y),则该图形方程改写为 F = 0。计算

$$\nabla F = (-f_x, -f_y, 1), \qquad |\nabla F| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$$

所以两个单位法向量场为

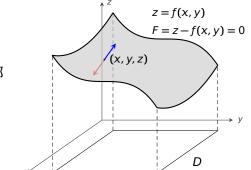
$$\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F = \frac{1}{\sqrt{1+f_{\nu}^{2}+f_{\nu}^{2}}}(-f_{x}, -f_{y}, 1), \quad -\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F = \frac{1}{\sqrt{1+f_{\nu}^{2}+f_{\nu}^{2}}}(f_{x}, f_{y}, -1)$$



第11章 e: 对坐标的曲面积分

例 2 写出二元函数 z = f(x, y) 图 形的两个单位法向量场,并指出哪

一个指向上侧,哪个指向下侧?



解 令 F(x, y, z) = z - f(x, y),则该图形方程改写为 F = 0。计算

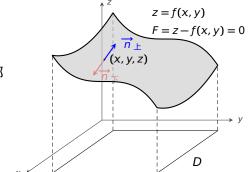
$$\nabla F = (-f_x, -f_y, 1), \qquad |\nabla F| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$$

所以两个单位法向量场为

$$\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F = \frac{1}{\sqrt{1+f_{\nu}^{2}+f_{\nu}^{2}}}(-f_{x}, -f_{y}, 1), \quad -\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F = \frac{1}{\sqrt{1+f_{\nu}^{2}+f_{\nu}^{2}}}(f_{x}, f_{y}, -1)$$



第11章 e: 对坐标的曲面积分



解 令 F(x, y, z) = z - f(x, y),则该图形方程改写为 F = 0。计算

$$\nabla F = (-f_x, -f_y, 1), \qquad |\nabla F| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$$

$$\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F = \frac{1}{\sqrt{1+f_{\nu}^2+f_{\nu}^2}}(-f_{x}, -f_{y}, 1), \quad -\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F = \frac{1}{\sqrt{1+f_{\nu}^2+f_{\nu}^2}}(f_{x}, f_{y}, -1)$$



形的两个单位法向量场,并指出哪一个指向上侧,哪个指向下侧?

$$z = f(x, y)$$

$$F = z - f(x, y) = 0$$

$$(x, y, z)$$

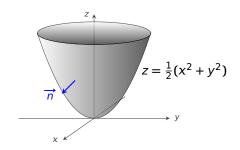
解 令 F(x, y, z) = z - f(x, y),则该图形方程改写为 F = 0。计算  $\nabla F = (-f_x, -f_y, 1), \qquad |\nabla F| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$ 

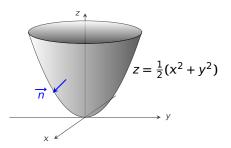
 $\frac{1}{|\nabla F|} \nabla F = \frac{1}{\sqrt{1 + f_{\nu}^2 + f_{\nu}^2}} (-f_{x}, -f_{y}, 1), \quad -\frac{1}{|\nabla F|} \nabla F = \frac{1}{\sqrt{1 + f_{\nu}^2 + f_{\nu}^2}} (f_{x}, f_{y}, -1)$ 

前一个指向上侧,后一个指向下侧。

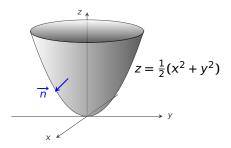
例 2 写出二元函数 z = f(x, y) 图



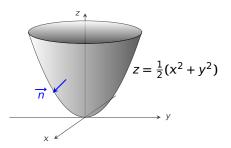




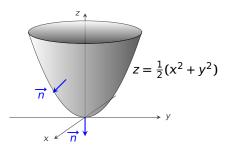
$$\overrightarrow{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} (z_x, z_y, -1) =$$



$$\overrightarrow{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} (z_x, z_y, -1) = (x, y, -1)$$



$$\overrightarrow{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} (z_x, z_y, -1) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} (x, y, -1)$$



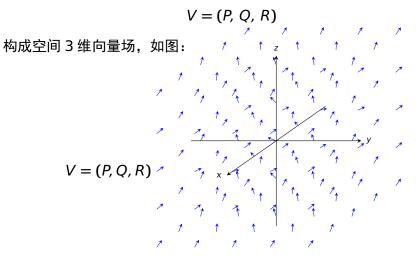
$$\overrightarrow{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} (z_x, z_y, -1) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} (x, y, -1)$$

设 P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z) 是三元函数,则

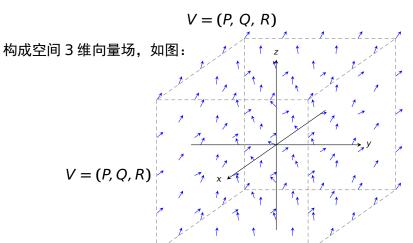
$$V = (P, Q, R)$$

构成空间3维向量场,

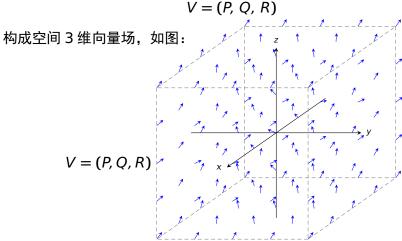
设 P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z) 是三元函数,则



设 P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z) 是三元函数,则

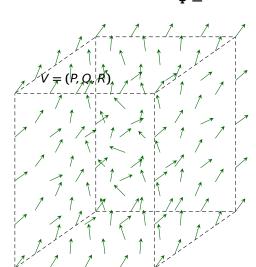


设 P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z) 是三元函数,则

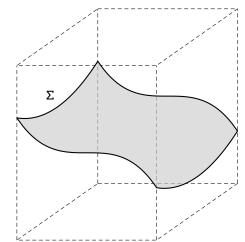


物理应用:向量场 V = (P, Q, R) 可表示流体在任一点处的速度

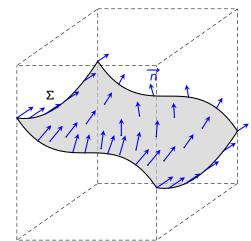


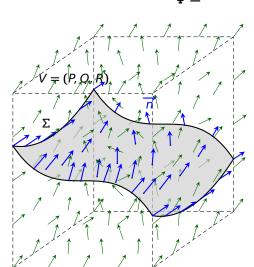


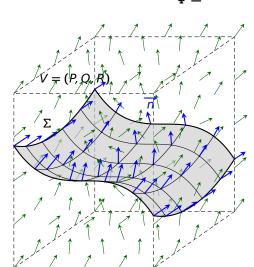


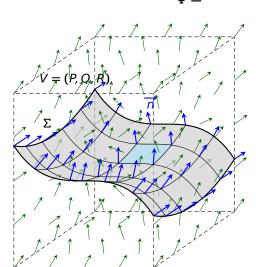


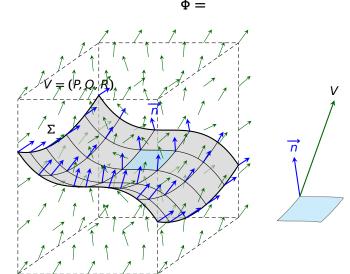


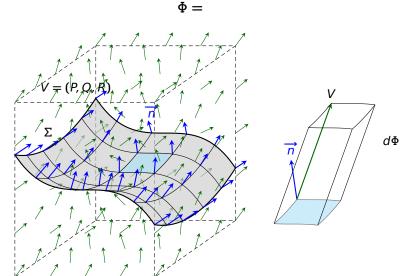


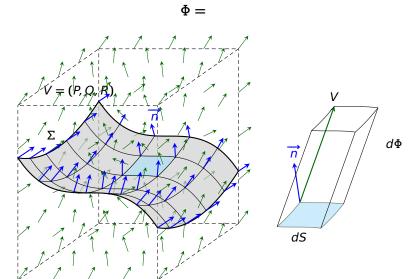


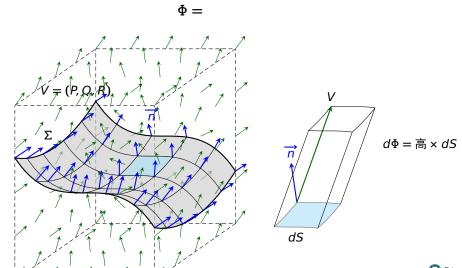


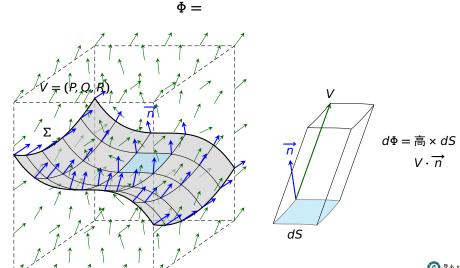




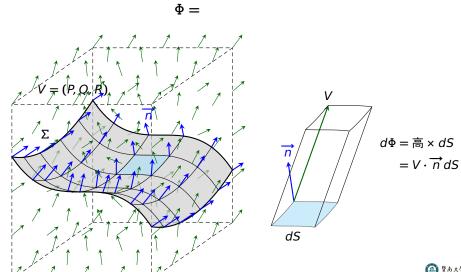




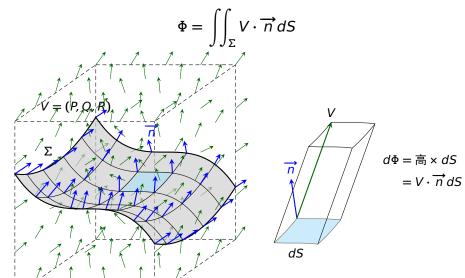




物理应用 流体 V = (P, Q, R) 在单位时间内流过曲面  $\Sigma$  一侧(单位法向  $\frac{1}{n}$  所指向的一侧)的流量是:



物理应用 流体 V = (P, Q, R) 在单位时间内流过曲面  $\Sigma$  一侧(单位法向量  $\overrightarrow{n}$  所指向的一侧)的流量是:



#### 定义 假设

- V = (P, Q, R) 是空间某区域上的向量场;
- $\Sigma$  是定向曲面, $\overrightarrow{n}$  是  $\Sigma$  上指定的单位法向量场;则称

#### 定义 假设

- V = (P, Q, R) 是空间某区域上的向量场;
- $\Sigma$  是定向曲面, $\overrightarrow{n}$  是  $\Sigma$  上指定的单位法向量场;则称

$$\iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} \, dS$$

为向量场 V 在定向曲面  $\Sigma$  上的曲面积分。

#### 定义 假设

- V = (P, Q, R) 是空间某区域上的向量场;
- $\Sigma$  是定向曲面, $\overrightarrow{n}$  是  $\Sigma$  上指定的单位法向量场;则称

$$\iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} \, dS$$

为向量场 V 在定向曲面  $\Sigma$  上的曲面积分。令  $\overrightarrow{dS} = \overrightarrow{n} dS$ ,

#### 定义 假设

- V = (P, Q, R) 是空间某区域上的向量场;
- $\Sigma$  是定向曲面, $\overrightarrow{n}$  是  $\Sigma$  上指定的单位法向量场;则称

$$\iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} \, dS$$

为向量场 V 在定向曲面  $\Sigma$  上的曲面积分。令  $\overrightarrow{dS} = \overrightarrow{n} dS$ ,则记作

$$\iint_{\Sigma} V \cdot d\overrightarrow{S}$$



#### 定义 假设

- V = (P, Q, R) 是空间某区域上的向量场;
- $\Sigma$  是定向曲面,  $\overrightarrow{n}$  是  $\Sigma$  上指定的单位法向量场; 则称

$$\iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} \, dS$$

为向量场 V 在定向曲面  $\Sigma$  上的曲面积分。 令  $\overrightarrow{dS} = \overrightarrow{n} dS$ ,则记作

$$\iint_{\Sigma} V \cdot d\overrightarrow{S}$$

也记作

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$



#### 定义 假设

- V = (P, Q, R) 是空间某区域上的向量场;
- $\Sigma$  是定向曲面,  $\overrightarrow{n}$  是  $\Sigma$  上指定的单位法向量场; 则称

$$\iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} \, dS$$

为向量场 V 在定向曲面  $\Sigma$  上的曲面积分。 令  $\overrightarrow{dS} = \overrightarrow{n} dS$ ,则记作

$$\iint_{\Sigma} V \cdot d\overrightarrow{S}$$

也记作

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

(此时也称为对坐标的曲面积分,或第二类曲面积分)



$$\iint_{-\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = -\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

$$\iint_{-\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = -\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

物理解释 流过负侧的流量 = - 流过正侧的流量

$$\iint_{-\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = -\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

物理解释 流过负侧的流量 = - 流过正侧的流量

证明 设  $\overrightarrow{n}$  是与  $\Sigma$  定向相符的单位法向量场,

$$\iint_{-\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = -\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

物理解释 流过负侧的流量 = - 流过正侧的流量

$$\iint_{-\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = -\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

物理解释 流过负侧的流量 = - 流过正侧的流量

令 
$$V = (P, Q, R)$$
。则

$$\iint_{-\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = -\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

物理解释 流过负侧的流量 = - 流过正侧的流量

令 
$$V = (P, Q, R)$$
。则
$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy =$$

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy =$$

$$\iint_{-\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = -\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

物理解释 流过负侧的流量 = - 流过正侧的流量

令 
$$V = (P, Q, R)$$
。则
$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS$$

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy =$$

$$\iint_{-\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = -\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

物理解释 流过负侧的流量 = - 流过正侧的流量

令 
$$V = (P, Q, R)$$
。则
$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS$$

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_{\Sigma} V \cdot (-\overrightarrow{n}) dS$$



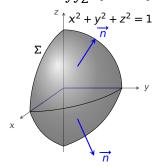
$$\iint_{-\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = -\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

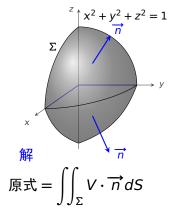
物理解释 流过负侧的流量 = - 流过正侧的流量

证明 设  $\overrightarrow{n}$  是与  $\Sigma$  定向相符的单位法向量场,则  $-\overrightarrow{n}$  是与  $-\Sigma$  定向相符的单位法向量场。

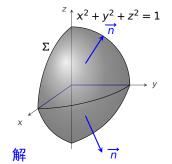
:. 二者数值互为相反数



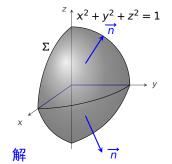




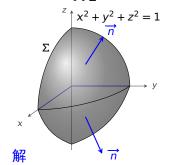
原式 = 
$$\int_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS$$



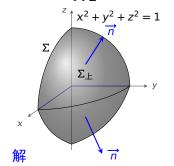
原式 = 
$$\iint_{\mathbb{R}} V \cdot \overrightarrow{n} dS = \underbrace{V = (0, 0, xyz)}_{V = (0, 0, xyz)}$$



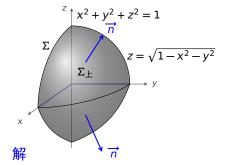
原式 = 
$$\iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS = \underbrace{V = (0, 0, xyz)}_{\overrightarrow{n} = (x, y, z)}$$



原式 = 
$$\iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS \xrightarrow{V = (0, 0, xyz)} \iint_{\Sigma} xyz^2 dS$$

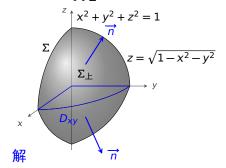


原式 = 
$$\iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS \xrightarrow{V = (0, 0, xyz)} \iint_{\Sigma} xyz^2 dS = 2 \iint_{\Sigma_{\pm}} xyz^2 dS$$

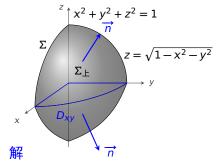


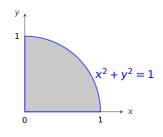
原式 = 
$$\iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS \xrightarrow{V = (0, 0, xyz)} \iint_{\Sigma} xyz^2 dS = 2 \iint_{\Sigma_{\pm}} xyz^2 dS$$



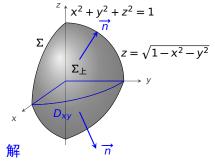


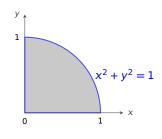
原式 = 
$$\iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS \xrightarrow{V = (0, 0, xyz)} \iint_{\Sigma} xyz^2 dS = 2 \iint_{\Sigma_{\pm}} xyz^2 dS$$





原式 = 
$$\iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS \xrightarrow{V = (0, 0, xyz)} \iint_{\Sigma} xyz^2 dS = 2 \iint_{\Sigma_{\pm}} xyz^2 dS$$

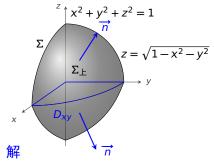


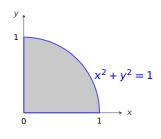


原式 = 
$$\iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS \xrightarrow{V = (0, 0, xyz)} \iint_{\Sigma} xyz^2 dS = 2 \iint_{\Sigma_{\pm}} xyz^2 dS$$

$$xv(1-x^2-v^2)$$

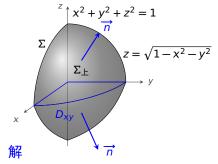


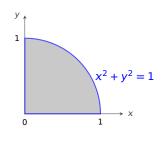




原式 = 
$$\iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS \xrightarrow{V = (0, 0, xyz)} \iint_{\Sigma} xyz^2 dS = 2 \iint_{\Sigma_{\pm}} xyz^2 dS$$

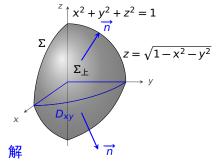
$$xy(1-x^2-y^2)\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

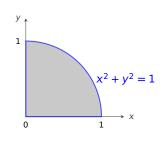




原式 = 
$$\iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS \xrightarrow{V = (0, 0, xyz)} \iint_{\Sigma} xyz^2 dS = 2 \iint_{\Sigma_{\pm}} xyz^2 dS$$
$$= \iint_{D_{XY}} xy(1 - x^2 - y^2) \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dxdy$$





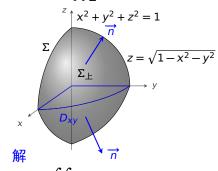


原式 = 
$$\iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS = \underbrace{V = (0, 0, xyz)}_{\overrightarrow{n} = (x, y, z)} = \iint_{\Sigma} xyz^2 dS = 2 \iint_{\Sigma_{+}} xyz^2 dS$$

$$\int J_{\Sigma} = \int \int_{D} xy(1-x^{2}-y^{2}) \cdot \sqrt{1+z_{x}^{2}+z_{y}^{2}} dxdy$$

$$\cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dx$$





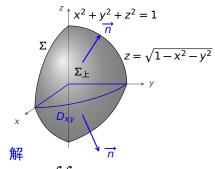
$$x^{2} + y^{2} = 1$$

$$x + y^{2} = 1$$

原式 = 
$$\iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS \xrightarrow{V = (0, 0, xyz)} \iint_{\Sigma} xyz^2 dS = 2 \iint_{\Sigma_{\pm}} xyz^2 dS$$
$$= \iint_{D_{xy}} xy(1 - x^2 - y^2) \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dxdy$$

$$=2\iint_{D_{xy}} xy(1-x^2-y^2) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dxdy$$

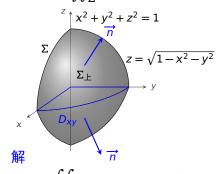




$$x^{2} + y^{2} = 1$$

$$0 \qquad 1 \qquad x$$

原式 = 
$$\iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS \xrightarrow{V = (0, 0, xyz)} \iint_{\Sigma} xyz^2 dS = 2 \iint_{\Sigma_{\pm}} xyz^2 dS$$
$$= \iint_{D_{xy}} xy(1 - x^2 - y^2) \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$$
$$= 2 \iint_{\Sigma} xy\sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy$$



$$x^{2} + y^{2} = 1$$

$$0 \qquad 1 \qquad x$$

原式 = 
$$\iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS \xrightarrow{V = (0, 0, xyz)} \iint_{\Sigma} xyz^2 dS = 2 \iint_{\Sigma_{\pm}} xyz^2 dS$$
$$= \iint_{D_{xy}} xy(1 - x^2 - y^2) \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$$
$$= 2 \iint_{D} xy\sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy \xrightarrow{x = \rho \cos \theta} \cdots$$

原式 = 
$$\iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS \xrightarrow{V = (0, 0, xyz)} \iint_{\Sigma} xyz^2 dS = 2 \iint_{\Sigma_{\pm}} xyz^2 dS$$

$$\int \int_{D_{xy}} xy(1-x^{2}-y^{2}) \cdot \sqrt{1+z_{x}^{2}+z_{y}^{2}} dx dy 
= 2 \iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^{2}-y^{2}} dx dy$$

$$\frac{x = \rho \cos \theta}{y = \rho \sin \theta} 2 \iint_{D_{xx}} \rho^2 \sin \theta \cos \theta \cdot \sqrt{1 - \rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta$$

$$\frac{x = \rho \cos \theta}{y = \rho \sin \theta} 2 \iint_{D_{xy}} \rho^2 \sin \theta \cos \theta \cdot \sqrt{1 - \rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta$$



原式 = 
$$\iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS \xrightarrow{V = (0, 0, xyz)} \iint_{\Sigma} xyz^2 dS = 2 \iint_{\Sigma_{\perp}} xyz^2 dS$$

$$= \iint_{D_{xy}} xy(1-x^2-y^2) \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dxdy$$

$$= 2 \iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2} dxdy$$

$$\frac{x=\rho\cos\theta}{y=\rho\sin\theta} 2 \iint_{D_{xy}} \rho^2\sin\theta\cos\theta \cdot \sqrt{1-\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta$$

$$= 2 \int \left[ \int \sin \theta \cos \theta \rho^3 \sqrt{1 - \rho^2} d\rho \right] d\theta$$



原式 =  $\iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS \xrightarrow{V = (0, 0, xyz)} \iint_{\Sigma} xyz^2 dS = 2 \iint_{\Sigma} xyz^2 dS$ 

$$\begin{split} &= \iint_{D_{xy}} xy(1-x^2-y^2) \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy \\ &= 2 \iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2} dx dy \\ &= \underbrace{2 \iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}}_{y=\rho \sin \theta} 2 \underbrace{\int \int_{D_{xy}} \rho^2 \sin \theta \cos \theta \cdot \sqrt{1-\rho^2}}_{z=\rho \cos \theta} \cdot \rho d\rho d\theta \end{split}$$

sin 
$$\theta$$
 cos  $\theta \rho^3 \sqrt{1-\rho^2} d\rho d\rho$ 

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int \sin\theta \cos\theta \rho^3 \sqrt{1-\rho^2} d\rho \right] d\theta$$



原式 =  $\iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS \xrightarrow{V = (0, 0, xyz)} \iint_{\Sigma} xyz^2 dS = 2 \iint_{\Sigma} xyz^2 dS$ 

$$= \iint_{D_{xy}} xy(1-x^2-y^2) \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy$$

$$= 2 \iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2} dx dy$$

$$\frac{x=\rho\cos\theta}{y=\rho\sin\theta} 2 \iint_{D_{xy}} \rho^2\sin\theta\cos\theta \cdot \sqrt{1-\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta$$

$$2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_{0}^{1} \sin\theta \cos\theta \rho^{3} \sqrt{1-\rho^{2}} d\rho \right] d\rho$$

$$=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_{0}^{1}\sin\theta\cos\theta\rho^{3}\sqrt{1-\rho^{2}}d\rho\right]d\theta$$



原式 =  $\iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS = \underbrace{V = (0, 0, xyz)}_{\overrightarrow{n} = (x, y, z)} = \iint_{\Sigma} xyz^2 dS = 2 \iint_{\Sigma_{\pm}} xyz^2 dS$ 

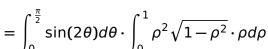
$$= \iint_{D_{xy}} xy(1-x^2-y^2) \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy$$

$$= 2 \iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2} dx dy$$

$$\frac{x=\rho\cos\theta}{y=\rho\sin\theta} 2 \iint_{D_{xy}} \rho^2 \sin\theta\cos\theta \cdot \sqrt{1-\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_0^1 \sin\theta\cos\theta \rho^3 \sqrt{1-\rho^2} d\rho \right] d\theta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{1} \sin\theta\cos\theta \rho^3 \sqrt{1-\rho^2} d\rho d\theta$$





$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_0^1 \sin\theta \cos\theta \rho^3 \sqrt{1 - \rho^2} d\rho \right] d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\theta) d\theta \cdot \int_0^1 \rho^2 \sqrt{1 - \rho^2} \cdot \rho d\rho$$

 $\frac{x = \rho \cos \theta}{y = \rho \sin \theta} 2 \iint_{\Omega} \rho^2 \sin \theta \cos \theta \cdot \sqrt{1 - \rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta$ 

原式 =  $\iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS \xrightarrow{V = (0, 0, xyz)} \iint_{\Sigma} xyz^2 dS = 2 \iint_{\Sigma} xyz^2 dS$ 

 $= \iint_{D} xy(1-x^2-y^2) \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dxdy$ 

 $=2\iint_{\mathbb{R}}xy\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$ 

$$= \int_{0}^{\infty} SI$$
$$u = \sqrt{1-\rho}$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_0^1 \sin\theta \cos\theta \rho^3 \sqrt{1 - \rho^2} d\rho \right] d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\theta) d\theta \cdot \int_0^1 \rho^2 \sqrt{1 - \rho^2} \cdot \rho d\rho$$

·(−udu)

 $\frac{x = \rho \cos \theta}{y = \rho \sin \theta} 2 \iint_{\Omega} \rho^2 \sin \theta \cos \theta \cdot \sqrt{1 - \rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta$ 

 $= \iint_{\mathbb{R}^{n}} xy(1-x^{2}-y^{2}) \cdot \sqrt{1+z_{x}^{2}+z_{y}^{2}} dxdy$ 

 $= 2 \iint_{\mathbb{R}} xy \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy$ 

原式 =  $\iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS \xrightarrow{V = (0, 0, xyz)} \iint_{\Sigma} xyz^2 dS = 2 \iint_{\Sigma} xyz^2 dS$ 

第 11 章 e:对坐标的曲面积分

 $u = \sqrt{1-\rho^2}$ 

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_0^1 \sin\theta \cos\theta \rho^3 \sqrt{1 - \rho^2} d\rho \right] d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\theta) d\theta \cdot \int_0^1 \rho^2 \sqrt{1 - \rho^2} \cdot \rho d\rho$$

 $\frac{x = \rho \cos \theta}{y = \rho \sin \theta} 2 \iint_{\Omega} \rho^2 \sin \theta \cos \theta \cdot \sqrt{1 - \rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta$ 

 $= \iiint_{S} xy(1-x^2-y^2) \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy$ 

 $= 2 \iint_{\mathbb{R}} xy \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy$ 

原式 =  $\iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS \xrightarrow{V = (0, 0, xyz)} \iint_{\Sigma} xyz^2 dS = 2 \iint_{\Sigma} xyz^2 dS$ 

 $\frac{u = \sqrt{1 - \rho^2}}{(1 - u^2)u \cdot (-udu)}$ 

$$= 2 \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy$$

$$= \frac{x = \rho \cos \theta}{y = \rho \sin \theta} 2 \iint_{D_{xy}} \rho^2 \sin \theta \cos \theta \cdot \sqrt{1 - \rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_0^1 \sin \theta \cos \theta \rho^3 \sqrt{1 - \rho^2} d\rho \right] d\theta$$

原式 =  $\iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS \xrightarrow{V = (0, 0, xyz)} \iint_{\Sigma} xyz^2 dS = 2 \iint_{\Sigma} xyz^2 dS$ 

 $= \iiint_{S} xy(1-x^2-y^2) \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy$ 

 $= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\theta) d\theta \cdot \int_{0}^{1} \rho^{2} \sqrt{1 - \rho^{2}} \cdot \rho d\rho$ 

 $\frac{u=\sqrt{1-\rho^2}}{\sqrt{1-\rho^2}} \qquad \int_{-1}^{0} (1-u^2)u \cdot (-udu)$ 

 $\frac{x = \rho \cos \theta}{y = \rho \sin \theta} 2 \iint_{D_{xy}} \rho^2 \sin \theta \cos \theta \cdot \sqrt{1 - \rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta$  $= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_0^1 \sin \theta \cos \theta \rho^3 \sqrt{1 - \rho^2} d\rho \right] d\theta$ 

原式 =  $\iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS \xrightarrow{V = (0, 0, xyz)} \iint_{\Sigma} xyz^2 dS = 2 \iint_{\Sigma} xyz^2 dS$ 

 $= \iint_{\mathbb{R}^{n}} xy(1-x^{2}-y^{2}) \cdot \sqrt{1+z_{x}^{2}+z_{y}^{2}} dxdy$ 

 $=2\iint_{\mathbb{R}}xy\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$ 

 $= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\theta) d\theta \cdot \int_{0}^{1} \rho^{2} \sqrt{1 - \rho^{2}} \cdot \rho d\rho$ 

 $\frac{u=\sqrt{1-\rho^2}}{2} \cdot 1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (1-u^2)u \cdot (-udu)$ 

$$= 2 \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy$$

$$\frac{x = \rho \cos \theta}{y = \rho \sin \theta} 2 \iint_{D_{xy}} \rho^2 \sin \theta \cos \theta \cdot \sqrt{1 - \rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta$$

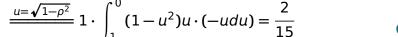
 $= \iint_{D} xy(1-x^2-y^2) \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dxdy$ 

 $=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_{0}^{1}\sin\theta\cos\theta\rho^{3}\sqrt{1-\rho^{2}}d\rho\right]d\theta$ 

 $= \int_{0}^{\frac{\alpha}{2}} \sin(2\theta) d\theta \cdot \int_{0}^{1} \rho^{2} \sqrt{1 - \rho^{2}} \cdot \rho d\rho$ 

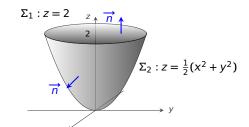
原式 =  $\iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS \xrightarrow{V = (0, 0, xyz)} \iint_{\Sigma} xyz^2 dS = 2 \iint_{\Sigma} xyz^2 dS$ 





## 例 2 计算 $\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz - z dx dy$

其中定向曲面  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$  是三维 区域的边界,如图:

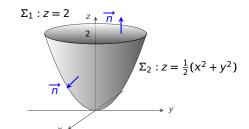


## 例2计算

$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz - z dx dy$$

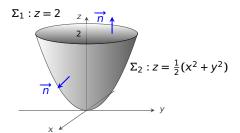
其中定向曲面  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$  是三维 区域的边界,如图:

原式 = 
$$\iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS$$



$$\int_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz - z dx dy$$

其中定向曲面  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$  是三维 区域的边界,如图:



原式 = 
$$\iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS = \iint_{\Sigma_1} V \cdot \overrightarrow{n} dS + \iint_{\Sigma_2} V \cdot \overrightarrow{n} dS$$
,



引 2 计算
$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz - z dx dy$$

其中定向曲面 
$$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$$
 是三维  
区域的边界,如图:

解

 $\Sigma_1 : z = 2$ 

$$\iint_{\Sigma_1} V \cdot \overrightarrow{n} \, dS$$

$$\iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} \, dS$$



 $^{\prime}\Sigma_{2}: z = \frac{1}{2}(x^{2} + y^{2})$ 

別 2 计算
$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz - z dx dy$$

其中定向曲面 
$$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$$
 是三维  
区域的边界,如图:



原式 = 
$$\iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS = \iint_{\Sigma_1} V \cdot \overrightarrow{n} dS + \iint_{\Sigma_2} V \cdot \overrightarrow{n} dS$$
,

 $\Sigma_1 : z = 2$ 

$$\iint_{\Sigma_1} V \cdot \overrightarrow{n} dS \stackrel{V = (z^2 + x, 0, -z)}{=}$$

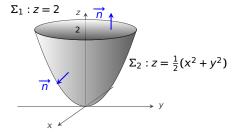
$$\iint_{-} V \cdot \overrightarrow{n} dS \stackrel{V=(z^2+x, 0, -z)}{=}$$



 $^{\prime}\Sigma_{2}: z = \frac{1}{2}(x^{2} + y^{2})$ 

引 2 计算
$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz - z dx dy$$

其中定向曲面 
$$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$$
 是三维  
区域的边界,如图:



原式 = 
$$\iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS = \iint_{\Sigma_1} V \cdot \overrightarrow{n} dS + \iint_{\Sigma_2} V \cdot \overrightarrow{n} dS$$
,

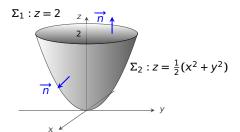
$$\iint_{\Sigma_1} V \cdot \overrightarrow{n} dS \xrightarrow{V = (z^2 + x, 0, -z)} \overrightarrow{n} = (0, 0, 1)$$

$$\iint_{\Sigma_1} V \cdot \overrightarrow{n} dS \xrightarrow{V = (z^2 + x, 0, -z)} \overrightarrow{n} = (0, 0, 1)$$



2 计算
$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz - z dx dy$$
中宝白地西  $\Sigma - \Sigma - \Sigma = 0$ 

其中定向曲面 
$$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$$
 是三维 区域的边界,如图:



原式 = 
$$\iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS = \iint_{\Sigma_1} V \cdot \overrightarrow{n} dS + \iint_{\Sigma_2} V \cdot \overrightarrow{n} dS$$
,

$$\iint_{\Sigma_1} V \cdot \overrightarrow{n} dS \xrightarrow{V = (z^2 + x, 0, -z)} \iint_{\Sigma_1} -z dS$$

$$\iint_{\Sigma_1} V \cdot \overrightarrow{n} dS \xrightarrow{V = (z^2 + x, 0, -z)} U = (z^2 + x, 0, -z)$$

$$\iint_{-} V \cdot \overrightarrow{n} dS \stackrel{V=(z^2+x,0,-z)}{=}$$

例 2 计算 
$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz - z dx dy$$
 其中定向曲面  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$  是三维

$$\Sigma_1: z = 2$$

$$Z \longrightarrow D$$

$$\Sigma_2: z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

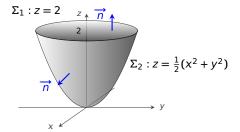
原式 = 
$$\iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS = \iint_{\Sigma_1} V \cdot \overrightarrow{n} dS + \iint_{\Sigma_2} V \cdot \overrightarrow{n} dS$$
,
$$\iint_{\Sigma_1} V \cdot \overrightarrow{n} dS = \underbrace{\frac{V = (z^2 + x, 0, -z)}{\overrightarrow{n} = (0, 0, 1)}} \iint_{\Sigma_1} -z dS = \iint_{\Sigma_1} -2 dS$$

$$\iint_{\Sigma_1} V \cdot \overrightarrow{n} dS = \underbrace{\frac{V = (z^2 + x, 0, -z)}{\overrightarrow{n} = (0, 0, 1)}}$$



2 计算
$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz - z dx dy$$

其中定向曲面 
$$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$$
 是三维  
区域的边界,如图:

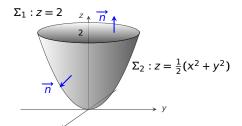


原式 = 
$$\iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS = \iint_{\Sigma_1} V \cdot \overrightarrow{n} dS + \iint_{\Sigma_2} V \cdot \overrightarrow{n} dS$$
,
$$\iint_{\Sigma_1} V \cdot \overrightarrow{n} dS = \underbrace{\frac{V = (z^2 + x, 0, -z)}{\overrightarrow{n} = (0, 0, 1)}} \iint_{\Sigma_1} -z dS = \iint_{\Sigma_1} -2 dS = -2|\Sigma_1|$$

$$\iint_{\Sigma_1} V \cdot \overrightarrow{n} dS = \underbrace{\frac{V = (z^2 + x, 0, -z)}{\overrightarrow{n} = (0, 0, 1)}}$$



例 2 计算 
$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz - z dx dy$$
 其中定向曲面  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$  是三维



解

原式 = 
$$\iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS = \iint_{\Sigma_1} V \cdot \overrightarrow{n} dS + \iint_{\Sigma_2} V \cdot \overrightarrow{n} dS,$$

$$\iint_{\Sigma_1} V \cdot \overrightarrow{n} dS = \underbrace{V = (z^2 + x, 0, -z)}_{\overrightarrow{n} = (0, 0, 1)} \iint_{\Sigma_1} -z dS = \iint_{\Sigma_1} -2 dS = -2|\Sigma_1| = -8\pi,$$

$$\iint \Sigma_1 \qquad \overrightarrow{n} = (0, 0, 1)$$

$$\iint V \cdot \overrightarrow{n} dS \stackrel{V = (z^2 + x, 0, -z)}{=}$$

区域的边界,如图:



例 2 计算 
$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz - z dx dy$$
 其中定向曲面  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$  是三维

$$\Sigma_2 : z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

解

原式 = 
$$\iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS = \iint_{\Sigma_1} V \cdot \overrightarrow{n} dS + \iint_{\Sigma_2} V \cdot \overrightarrow{n} dS$$
,

 $\Sigma_1 : z = 2$ 

$$\iint_{\Sigma_{1}} V \cdot \overrightarrow{n} dS \xrightarrow{V = (z^{2} + x, 0, -z)} \iint_{\Sigma_{1}} -z dS = \iint_{\Sigma_{1}} -2 dS = -2|\Sigma_{1}| = -8\pi,$$

$$\iint_{\Sigma_{1}} V \cdot \overrightarrow{n} dS \xrightarrow{V = (z^{2} + x, 0, -z)}$$



例 
$$2$$
 计算 
$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz - z dx dy$$
 其中定向曲面  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$  是三维

$$\Sigma_1 : z = 2$$

$$Z \mapsto D$$

$$X \vdash D$$

原式 = 
$$\iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS = \iint_{\Sigma_1} V \cdot \overrightarrow{n} dS + \iint_{\Sigma_2} V \cdot \overrightarrow{n} dS,$$

$$\iint_{\Sigma_1} V \cdot \overrightarrow{n} dS = \underbrace{\frac{V = (z^2 + x, 0, -z)}{\overrightarrow{n} = (0, 0, 1)}} \iint_{\Sigma_1} -z dS = \iint_{\Sigma_1} -2 dS = -2|\Sigma_1| = -8\pi,$$

$$\iint_{\Sigma_{1}} V \cdot \overrightarrow{n} \, dS \xrightarrow{\overrightarrow{n} = (0, 0, 1)}$$

$$\iint_{\Sigma_{2}} V \cdot \overrightarrow{n} \, dS \xrightarrow{V = (z^{2} + x, 0, -z)} \overrightarrow{\overrightarrow{n}} = \frac{(x, y, -1)}{\sqrt{x^{2} - x^{2}}}$$



例 
$$2$$
 计算 
$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz - z dx dy$$
 其中定向曲面  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$  是三维

$$\Sigma_1 : z = 2$$

$$\Sigma_2 : z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

$$D_{XY}$$

原式 = 
$$\iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS = \iint_{\Sigma_1} V \cdot \overrightarrow{n} dS + \iint_{\Sigma_2} V \cdot \overrightarrow{n} dS$$
,

原式 = 
$$\iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS = \iint_{\Sigma_{1}} V \cdot \overrightarrow{n} dS + \iint_{\Sigma_{2}} V \cdot \overrightarrow{n} dS,$$

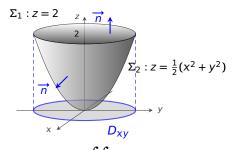
$$\iint_{\Sigma_{1}} V \cdot \overrightarrow{n} dS \xrightarrow{V = (z^{2} + x, 0, -z)} \iint_{\Sigma_{1}} -z dS = \iint_{\Sigma_{1}} -2 dS = -2|\Sigma_{1}| = -8\pi,$$

$$\iint_{\Sigma_2} V \cdot \overrightarrow{n} dS \xrightarrow{V = (z^2 + x, 0, -z)} \frac{(z^2 + x)x + z}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$$



$$\int \int (z^2 +$$

例 2 计算 
$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz - z dx dy$$
 其中定向曲面  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$  是三维



解

原式 = 
$$\iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS = \iint_{\Sigma_1} V \cdot \overrightarrow{n} dS + \iint_{\Sigma_2} V \cdot \overrightarrow{n} dS$$
,

 $\iint_{\Sigma_1} V \cdot \overrightarrow{n} \, dS = \underbrace{\frac{V = (z^2 + x, 0, -z)}{\overrightarrow{n} = (0, 0, 1)}} \iint_{\Sigma_2} -z \, dS = \iint_{\Sigma_2} -2 \, dS = -2 |\Sigma_1| = -8\pi,$ 

 $\frac{(z^2 + x)x + z}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$  $\iint_{\Sigma_2} V \cdot \overrightarrow{n} dS \xrightarrow{V = (z^2 + x, 0, -z)}$ 



$$\iint (z^2 +$$

例 2 计算 
$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz - z dx dy$$
 其中定向曲面  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$  是三维

$$\Sigma_1 : z = 2$$

$$Z \longrightarrow D$$

$$X \longrightarrow D$$

原式 = 
$$\iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS = \iint_{\Sigma_1} V \cdot \overrightarrow{n} dS + \iint_{\Sigma_2} V \cdot \overrightarrow{n} dS$$
,

$$\iint_{\Sigma_{1}} V \cdot \overrightarrow{n} \, dS \xrightarrow{V = (z^{2} + x, \, 0, -z)} \iint_{\Sigma_{1}} -z \, dS = \iint_{\Sigma_{1}} -2 \, dS = -2 |\Sigma_{1}| = -8\pi,$$

$$\iint_{\Sigma_{2}} V \cdot \overrightarrow{n} \, dS \xrightarrow{V = (z^{2} + x, \, 0, -z)} \iint_{D_{xy}} \frac{(z^{2} + x)x + z}{\sqrt{1 + x^{2} + y^{2}}} \cdot \sqrt{1 + z_{x}^{2} + z_{y}^{2}} \, dx \, dy$$



$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz - z dx dy$$
 其中定向曲面  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$  是三维 区域的边界,如图:

例2计算

$$\Sigma_2 : z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

$$\sum_{x} \sum_{y} \sum_{z} z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

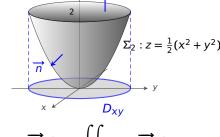
原式 = 
$$\iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS = \iint_{\Sigma_1} V \cdot \overrightarrow{n} dS + \iint_{\Sigma_2} V \cdot \overrightarrow{n} dS,$$

$$\iint_{\Sigma_1} V \cdot \overrightarrow{n} dS = \underbrace{\frac{V = (z^2 + x, 0, -z)}{\overrightarrow{n} = (0, 0, 1)}} \iint_{\Sigma_1} -z dS = \iint_{\Sigma_1} -2 dS = -2|\Sigma_1| = -8\pi,$$

 $\iint_{\Sigma_2} V \cdot \overrightarrow{n} \, dS \xrightarrow{V = (z^2 + x, \, 0, \, -z)} \iint_{D_{xy}} \frac{(z^2 + x)x + z}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \, dx \, dy$ =  $\int_{\Omega} (z^2 + x)x + z dx dy$ 



例 2 计算 
$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz - z dx dy$$
 其中定向曲面  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$  是三维 区域的边界,如图:

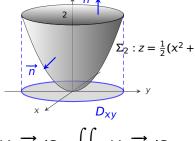


解

原式 = 
$$\iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS = \iint_{\Sigma_1} V \cdot \overrightarrow{n} dS + \iint_{\Sigma_2} V \cdot \overrightarrow{n} dS$$
,

$$\begin{split} \iint_{\Sigma_{1}} V \cdot \overrightarrow{n} \, dS & \xrightarrow{V = (z^{2} + x, \, 0, \, -z)} \iint_{\Sigma_{1}} -z dS = \iint_{\Sigma_{1}} -2 dS = -2 |\Sigma_{1}| = -8\pi, \\ \iint_{\Sigma_{2}} V \cdot \overrightarrow{n} \, dS & \xrightarrow{\overline{n} = \frac{(x, y, -1)}{\sqrt{1 + x^{2} + y^{2}}}} \iint_{D_{xy}} \frac{(z^{2} + x)x + z}{\sqrt{1 + x^{2} + y^{2}}} \cdot \sqrt{1 + z_{x}^{2} + z_{y}^{2}} dx dy \end{split}$$

例2计算  $\int \int_{-\infty}^{\infty} (z^2 + x) dy dz - z dx dy$ 其中定向曲面  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$  是三维 区域的边界,如图:



解

原式 =  $\iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS = \iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS + \iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS,$  $\iint_{\Sigma_1} V \cdot \overrightarrow{n} dS = \frac{V = (z^2 + x, 0, -z)}{\overrightarrow{n} = (0, 0, 1)} = \iint_{\Sigma_2} -z dS = \iint_{\Sigma_2} -2dS = -2|\Sigma_1| = -8\pi,$ 

$$\vec{n} dS = \frac{V = (z^2 + x, 0)}{\vec{n} = (0, 0)}$$

 $\iint_{\Sigma_2} V \cdot \overrightarrow{n} \, dS \xrightarrow{V = (z^2 + x, \, 0, \, -z)} \iint_{D_{xy}} \frac{(z^2 + x)x + z}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \, dx \, dy$ 

 $= \iint_{\Omega} (z^2 + x)x + z dx dy \xrightarrow{\text{phyt}} \iint_{\Omega} x^2 + z dx dy = \cdots$ 

原式 = 
$$\iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS = \iint_{\Sigma_1} V \cdot \overrightarrow{n} dS + \iint_{\Sigma_2} V \cdot \overrightarrow{n} dS$$
,

$$\iint_{\Sigma_1} V \cdot \overrightarrow{n} dS \xrightarrow{V = (z^2 + x, 0, -z)} \iint_{\Sigma_1} -z dS \iint_{\Sigma_1} -2 dS = -2|\Sigma_1| = -8\pi,$$

$$\iint_{\Sigma_{1}} \overrightarrow{n} = (0, 0, 1) \qquad \iint_{\Sigma_{1}} \iint_{\Sigma_{1}} \underbrace{\int \int_{\Sigma_{1}} V \cdot \overrightarrow{n} \, dS} = \underbrace{\frac{V = (z^{2} + x, 0, -z)}{\overrightarrow{n}}}_{\overrightarrow{n} = \frac{(x, y, -1)}{\sqrt{1 + x^{2} + y^{2}}}} \iint_{D_{xy}} \underbrace{\frac{(z^{2} + x)x + z}{\sqrt{1 + x^{2} + y^{2}}} \cdot \sqrt{1 + z_{x}^{2} + z_{y}^{2}} \, dx \, dy}_{= \iint_{D_{xy}} \underbrace{(z^{2} + x)x + z \, dx \, dy}_{D_{xy}} = \underbrace{\iint_{D_{xy}} x^{2} + z \, dx \, dy}_{= \frac{z - \frac{1}{2}(x^{2} + y^{2})}{2}} \underbrace{\frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} 3x^{2} + y^{2} \, dx \, dy}_{= \frac{z - \frac{1}{2}(x^{2} + y^{2})}{2}} \underbrace{\frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} 3x^{2} + y^{2} \, dx \, dy}_{= \frac{z - \frac{1}{2}(x^{2} + y^{2})}{2}} \underbrace{\frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} 3x^{2} + y^{2} \, dx \, dy}_{= \frac{z - \frac{1}{2}(x^{2} + y^{2})}{2}} \underbrace{\frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} 3x^{2} + y^{2} \, dx \, dy}_{= \frac{z - \frac{1}{2}(x^{2} + y^{2})}{2}} \underbrace{\frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} 3x^{2} + y^{2} \, dx \, dy}_{= \frac{z - \frac{1}{2}(x^{2} + y^{2})}{2}} \underbrace{\frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} 3x^{2} + y^{2} \, dx \, dy}_{= \frac{z - \frac{1}{2}(x^{2} + y^{2})}{2}} \underbrace{\frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} 3x^{2} + y^{2} \, dx \, dy}_{= \frac{z - \frac{1}{2}(x^{2} + y^{2})}{2}} \underbrace{\frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} 3x^{2} + y^{2} \, dx \, dy}_{= \frac{z - \frac{1}{2}(x^{2} + y^{2})}{2}} \underbrace{\frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} 3x^{2} + y^{2} \, dx \, dy}_{= \frac{z - \frac{1}{2}(x^{2} + y^{2})}{2}} \underbrace{\frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} 3x^{2} + y^{2} \, dx \, dy}_{= \frac{z - \frac{1}{2}(x^{2} + y^{2})}{2}} \underbrace{\frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} 3x^{2} + y^{2} \, dx \, dy}_{= \frac{z - \frac{1}{2}(x^{2} + y^{2})}{2}} \underbrace{\frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} 3x^{2} + y^{2} \, dx \, dy}_{= \frac{z - \frac{1}{2}(x^{2} + y^{2})}{2}} \underbrace{\frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} 3x^{2} + y^{2} \, dx \, dy}_{= \frac{z - \frac{1}{2}(x^{2} + y^{2})}{2}} \underbrace{\frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} 3x^{2} + y^{2} \, dx \, dy}_{= \frac{z - \frac{1}{2}(x^{2} + y^{2})}{2}} \underbrace{\frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} 3x^{2} + y^{2} \, dx \, dy}_{= \frac{z - \frac{1}{2}(x^{2} + y^{2})}{2}} \underbrace{\frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} 3x^{2} + y^{2} \, dx \, dy}_{= \frac{z - \frac{1}{2}(x^{2} + y^{2})}{2}} \underbrace{\frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} 3x^{2} + y^{2} \, dx \, dy}_{= \frac{z - \frac{1}{2}(x^{2} + y^{2})}{2}} \underbrace{\frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} 3x^{2} + y^{2} \, dx \, dy}_{= \frac{z - \frac{1}{2}(x^{2} + y^{2})}{2}} \underbrace{\frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} 3x^{2} + y^{2} \, dx \, dy}_{= \frac{z - \frac{1}{2}(x^{2} + y^{2})}{2}} \underbrace{\frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} 3x^{2} + y^{2} \, dx \, dy}_{= \frac{z - \frac{1}{2}($$

$$+ y^2 dx dy$$



原式 = 
$$\iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS = \iint_{\Sigma_1} V \cdot \overrightarrow{n} dS + \iint_{\Sigma_2} V \cdot \overrightarrow{n} dS$$
,

$$\overrightarrow{n} dS = \frac{V = (z^2 + x, 0, -z)}{\overrightarrow{n} = (0, 0, 1)} \iint_{\Sigma_1} -z dS \iint_{\Sigma_1} -2 dS = -2|\Sigma_1| = -8\pi$$

$$\iint_{\Sigma_{1}} V \cdot \overrightarrow{n} \, dS \xrightarrow{\frac{V = (z^{2} + x, 0, -z)}{\overrightarrow{n} = (0, 0, 1)}} \iint_{\Sigma_{1}} -z \, dS \iint_{\Sigma_{1}} -2 \, dS = -2|\Sigma_{1}| = -8\pi,$$

$$\iint_{\Sigma_{2}} V \cdot \overrightarrow{n} \, dS \xrightarrow{\frac{V = (z^{2} + x, 0, -z)}{\overrightarrow{n} = \frac{(x, y, -1)}{\sqrt{1 + x^{2} + y^{2}}}}} \iint_{D_{xy}} \frac{(z^{2} + x)x + z}{\sqrt{1 + x^{2} + y^{2}}} \cdot \sqrt{1 + z_{x}^{2} + z_{y}^{2}} \, dx \, dy$$

$$= \iint_{D_{xy}} (z^{2} + x)x + z \, dx \, dy \xrightarrow{\underline{\text{Minth}}} \iint_{D_{xy}} x^{2} + z \, dx \, dy$$

$$\underline{z = \frac{1}{2}(x^{2} + y^{2})} \frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} 3x^{2} + y^{2} \, dx \, dy \xrightarrow{\underline{\text{Minth}}} 2 \iint_{D_{xy}} x^{2} \, dx \, dy$$

$$\frac{z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)}{2} \frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} 3x^2 + y^2 dx dy \xrightarrow{\text{print}} 2 \iint_{D_{xy}} x^2 dx dy$$



原式 = 
$$\iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS = \iint_{\Sigma_1} V \cdot \overrightarrow{n} dS + \iint_{\Sigma_2} V \cdot \overrightarrow{n} dS$$
,

$$\iint_{\Sigma_{1}} V \cdot \overrightarrow{n} dS \xrightarrow{V = (z^{2} + x, 0, -z)} \iint_{\Sigma_{1}} -z dS \iint_{\Sigma_{1}} -2 dS = -2|\Sigma_{1}| = -8\pi,$$

$$\iint_{\Sigma_{1}} V \cdot \overrightarrow{n} dS \xrightarrow{V = (z^{2} + x, 0, -z)} \iint_{\Sigma_{1}} \frac{(z^{2} + x)x + z}{\sqrt{1 + z_{x}^{2} + z_{y}^{2}}} \cdot \sqrt{1 + z_{x}^{2} + z_{y}^{2}} dx dx$$

$$\iint_{\Sigma_{2}} V \cdot \overrightarrow{n} dS \xrightarrow{V = (z^{2} + x, 0, -z)} \iint_{D_{xy}} \frac{(z^{2} + x)x + z}{\sqrt{1 + x^{2} + y^{2}}} \cdot \sqrt{1 + z_{x}^{2} + z_{y}^{2}} dxdy$$

$$= \iint_{D_{xy}} (z^{2} + x)x + zdxdy \xrightarrow{\underline{\text{Minth}}} \iint_{D_{xy}} x^{2} + zdxdy$$

$$\underline{z = \frac{1}{2}(x^{2} + y^{2})} \frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} 3x^{2} + y^{2} dxdy \xrightarrow{\underline{\text{Minth}}} 2 \iint_{D_{xy}} x^{2} dxdy$$

$$\underline{\underline{\text{Minth}}} \iint_{D_{xy}} x^{2} + y^{2} dxdy$$



$$V \cdot \overrightarrow{n} dS \stackrel{}{=} \underbrace{}_{\Sigma_1}$$
 $V \cdot \overrightarrow{n} dS \stackrel{V=}{=} \underbrace{}_{V \cdot \overrightarrow{n}} dS \stackrel{V$ 

原式 =  $\iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS = \iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS + \iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS$ ,  $\iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS \xrightarrow{V = (z^2 + x, 0, -z)} \iint_{\Sigma} -z dS \iint_{\Sigma} -2 dS = -2|\Sigma_1| = -8\pi,$ 

 $\iint_{\Sigma_{2}} V \cdot \overrightarrow{n} \, dS = \underbrace{\frac{V = (z^{2} + x, \, 0, \, -z)}{\overrightarrow{n}}}_{\prod = \frac{(x, y, \, -1)}{\sqrt{1 + x^{2} + y^{2}}}} \iint_{D_{xy}} \frac{(z^{2} + x)x + z}{\sqrt{1 + x^{2} + y^{2}}} \cdot \sqrt{1 + z_{x}^{2} + z_{y}^{2}} dx dy$ 

 $= \iint_{D} (z^{2} + x)x + zdxdy \xrightarrow{\underline{\text{phit}}} \iint_{D} x^{2} + zdxdy$  $\frac{z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{2} \frac{1}{2} \iint_{\Omega} 3x^2 + y^2 dx dy \xrightarrow{\text{spate}} 2 \iint_{\Omega} x^2 dx dy$  $\frac{\sqrt{3}}{2} \int \partial u du du du = \int \int \int \int \int \partial u du du = \int \int \int \partial u du du = \int \int \partial u du du = \int \partial u du = \partial u du$ 



原式 = 
$$\iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS = \iint_{\Sigma_1} V \cdot \overrightarrow{n} dS + \iint_{\Sigma_2} V \cdot \overrightarrow{n} dS$$
,
$$V \cdot \overrightarrow{n} dS = \underbrace{\bigvee_{z=(z^2+x, 0, -z)}}_{\overline{z} - (0, 0, 1)} \iint_{\Sigma_2} -z dS \iint_{\Sigma_2} -2dS = -2|\Sigma_1| = -2$$

 $\iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS \xrightarrow{V = (z^2 + x, 0, -z)} \iint_{\Sigma} -z dS \iint_{\Sigma} -2 dS = -2|\Sigma_1| = -8\pi,$ 

$$\iint_{\Sigma_{1}} V \cdot \vec{n} \, dS \xrightarrow{\overrightarrow{n} = (0, 0, 1)} \iint_{\Sigma_{1}} -z dS \iint_{\Sigma_{1}} -2 dS = -2|\Sigma_{1}| = -8\pi,$$

$$\iint_{\Sigma_{2}} V \cdot \vec{n} \, dS \xrightarrow{\overrightarrow{n} = \frac{(x, y, -1)}{\sqrt{1 + x^{2} + y^{2}}}} \iint_{D_{xy}} \frac{(z^{2} + x)x + z}{\sqrt{1 + x^{2} + y^{2}}} \cdot \sqrt{1 + z_{x}^{2} + z_{y}^{2}} dx dy$$

 $= \iint_{D} (z^{2} + x)x + zdxdy \xrightarrow{\underline{\text{phit}}} \iint_{D} x^{2} + zdxdy$ 

$$\frac{z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)}{2} \frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} 3x^2 + y^2 dx dy \xrightarrow{\text{span}} 2 \iint_{D_{xy}} x^2 dx dy$$

$$\frac{\text{span}}{2} \iint_{D_{xy}} x^2 + y^2 dx dy = \int_{0}^{2\pi} \left[ \int_{0}^{2} \rho^2 \cdot \rho d\rho \right] d\theta = 8\pi$$

 $= \iint_{D} (z^{2} + x)x + zdxdy \xrightarrow{\underline{\text{phit}}} \iint_{D} x^{2} + zdxdy$  $\frac{z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{2} \frac{1}{2} \iint_{\Omega} 3x^2 + y^2 dx dy \xrightarrow{\text{spate}} 2 \iint_{\Omega} x^2 dx dy$ 

原式 =  $\iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS = \iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS + \iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS$ ,

 $\iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS \xrightarrow{V = (z^2 + x, 0, -z)} \iint_{\Sigma} -z dS \iint_{\Sigma} -2 dS = -2|\Sigma_1| = -8\pi,$ 

 $\iint_{\Sigma_{2}} V \cdot \overrightarrow{n} \, dS = \underbrace{\frac{V = (z^{2} + x, \, 0, \, -z)}{\overrightarrow{n} = \frac{(x, y, \, -1)}{\sqrt{1 + x^{2} + z^{2}}}} \iint_{D_{xy}} \frac{(z^{2} + x)x + z}{\sqrt{1 + x^{2} + y^{2}}} \cdot \sqrt{1 + z_{x}^{2} + z_{y}^{2}} \, dx \, dy$ 

原式 =  $-8\pi + 8\pi = 0$ 

法向量。则

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy.$$

法向量。则

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy.$$

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS$$

法向量。则

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy.$$

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS$$

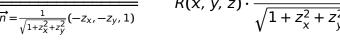
$$\frac{V=(0,0,R)}{\overrightarrow{n} = \frac{1}{\sqrt{1+z_{y}^{2}+z_{y}^{2}}}(-z_{x},-z_{y},1)}$$

法向量。则

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy.$$

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS$$

$$\frac{V = (0, 0, R)}{\overrightarrow{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + z_{x}^{2} + z_{y}^{2}}} (-z_{x}, -z_{y}, 1)} \qquad R(x, y, z) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + z_{x}^{2} + z_{y}^{2}}}$$



法向量。则

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_{D_{XY}} R(x, y, z(x, y)) dx dy.$$

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS$$

$$\frac{V = (0, 0, R)}{\overrightarrow{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + z_{x}^{2} + z_{y}^{2}}} (-z_{x}, -z_{y}, 1)} \iint_{\Sigma} R(x, y, z) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + z_{x}^{2} + z_{y}^{2}}} dS$$

法向量。则

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_{D_{XY}} R(x, y, z(x, y)) dx dy.$$

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS$$

$$\frac{V = (0, 0, R)}{\overrightarrow{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + z_{x}^{2} + z_{y}^{2}}} (-z_{x}, -z_{y}, 1)} \iint_{\Sigma} R(x, y, z) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + z_{x}^{2} + z_{y}^{2}}} dS$$

$$R(x, y, z(x, y)) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + z_{x}^{2} + z_{y}^{2}}}$$

法向量。则

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_{D_{x,y}} R(x, y, z(x, y)) dx dy.$$

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS$$

$$\frac{V = (0, 0, R)}{\overrightarrow{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + z_{x}^{2} + z_{y}^{2}}} (-z_{x}, -z_{y}, 1)} \iint_{\Sigma} R(x, y, z) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + z_{x}^{2} + z_{y}^{2}}} dS$$

$$R(x, y, z(x, y)) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + z_{x}^{2} + z_{y}^{2}}} \cdot \sqrt{1 + z_{x}^{2} + z_{y}^{2}} dx dy$$

法向量。则

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_{D_{x,y}} R(x, y, z(x, y)) dx dy.$$

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS$$

$$\frac{V = (0, 0, R)}{\overrightarrow{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + z_{x}^{2} + z_{y}^{2}}} (-z_{x}, -z_{y}, 1)} \iint_{\Sigma} R(x, y, z) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + z_{x}^{2} + z_{y}^{2}}} dS$$

$$= \iint_{D_{XY}} R(x, y, z(x, y)) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + z_{x}^{2} + z_{y}^{2}}} \cdot \sqrt{1 + z_{x}^{2} + z_{y}^{2}} dx dy$$

法向量。则 
$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy.$$

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_{\Sigma} V \cdot \overrightarrow{n} dS$$

$$\frac{V = (0, 0, R)}{\overrightarrow{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + z_{x}^{2} + z_{y}^{2}}} (-z_{x}, -z_{y}, 1)} \iint_{\Sigma} R(x, y, z) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + z_{x}^{2} + z_{y}^{2}}} dS$$

$$= \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + z_{x}^{2} + z_{y}^{2}}} \cdot \sqrt{1 + z_{x}^{2} + z_{y}^{2}} dx dy$$

$$= \iint_{D} R(x, y, z(x, y)) dx dy$$