§6.8 广义积分与 Γ 函数

2017-2018 学年 II

教学要求

- $\diamondsuit$
- $\clubsuit$
- $\heartsuit$
- $\spadesuit$

We are here now...

1. 广义积分

2. Γ 函数

从“正常”到“反常”

- “正常的”定积分：

$$\int_a^b f(x)dx$$

其中

1. $[a,b]$ 是有界区间；
2. $f(x)$ 是连续函数（至少是有界函数）.

从“正常”到“反常”

- “正常的”定积分：

$$\int_a^b f(x)dx$$

其中

1. $[a, b]$ 是有界区间；
2. $f(x)$ 是连续函数（至少是有界函数）.

- “反常的”定积分：
  - 积分区间是无限区间：
  - 被积函数是无界函数：

从“正常”到“反常”

- “正常的”定积分：

$$\int_a^b f(x)dx$$

其中

1. $[a, b]$ 是有界区间；
2. $f(x)$ 是连续函数（至少是有界函数）.

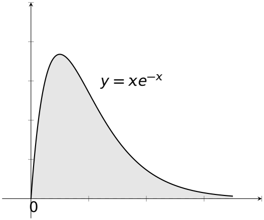
- “反常的”定积分：
  - 积分区间是无限区间：

$$\int_0^{\infty} xe^{-x}dx, \quad \int_{-\infty}^{4} e^{4x}dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$$

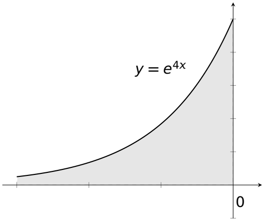
  - 被积函数是无界函数：

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}}dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad \int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}dx$$

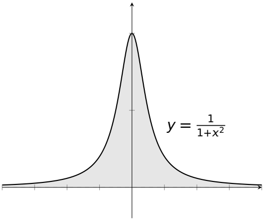
广义积分



$\int_0^{\infty} xe^{-x}dx$

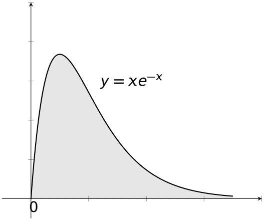


$\int_{-\infty}^{4} e^{4x}dx$

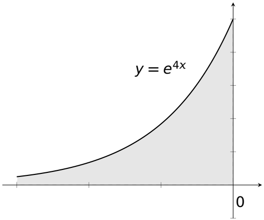


$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$

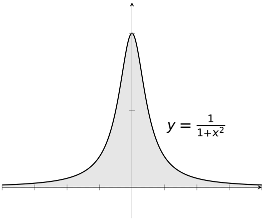
广义积分



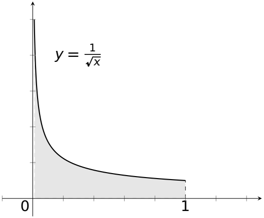
$\int_0^{\infty} xe^{-x}dx$



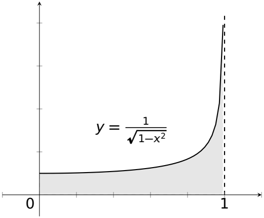
$\int_{-\infty}^{4} e^{4x}dx$



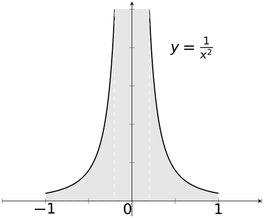
$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$



$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$



$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$



$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}dx$

无限区间的广义积分—引例 I

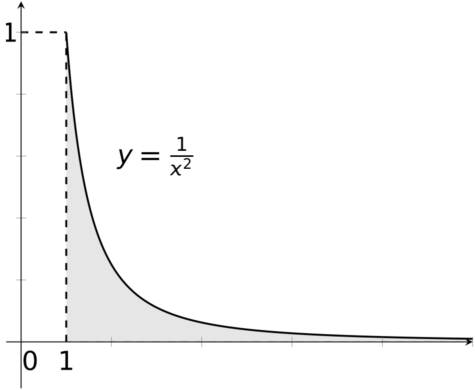
例 该如何计算 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$？

无限区间的广义积分—引例 I

例 该如何计算 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$？

合理的计算：

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx =$$

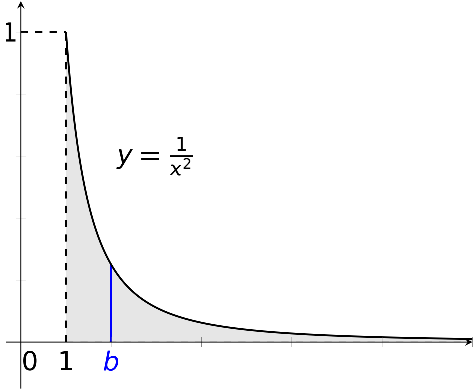


无限区间的广义积分—引例 I

例 该如何计算 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$?

合理的计算:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx =$$

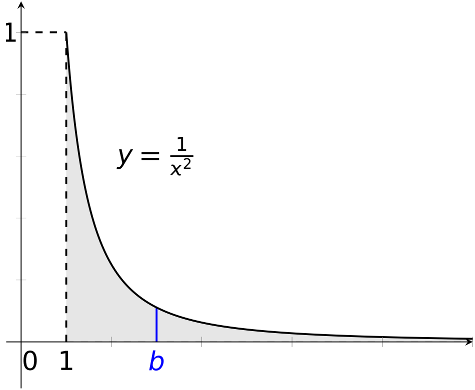


无限区间的广义积分—引例 I

例 该如何计算 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$?

合理的计算:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx =$$

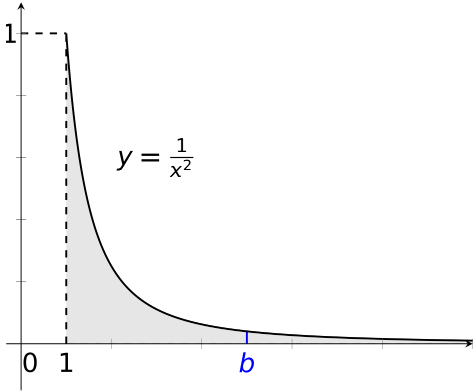


无限区间的广义积分—引例 I

例 该如何计算 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$？

合理的计算：

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx =$$

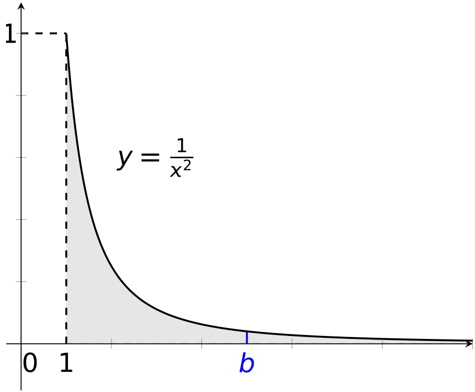


无限区间的广义积分—引例 I

例 该如何计算 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$？

合理的计算：

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \qquad \int_1^b \frac{1}{x^2} dx$$

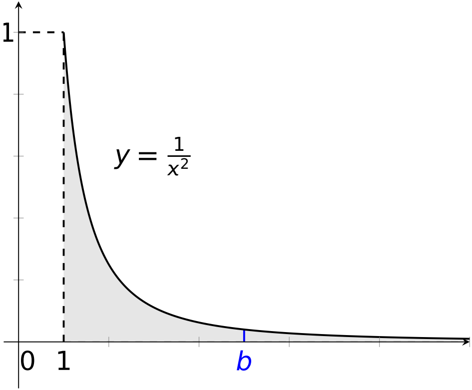


无限区间的广义积分—引例 I

例 该如何计算 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$?

合理的计算:

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^{b}\frac{1}{x^2}dx$$



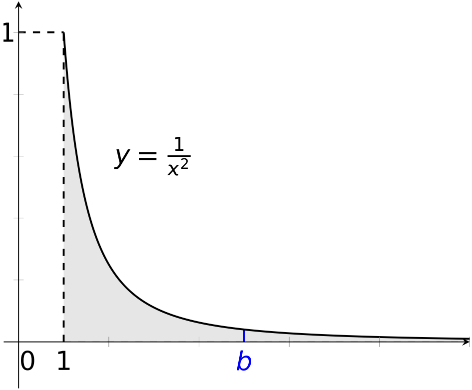
无限区间的广义积分—引例 I

例 该如何计算 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$？

合理的计算：

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x^2}dx$$

$$= \quad -\frac{1}{x}$$



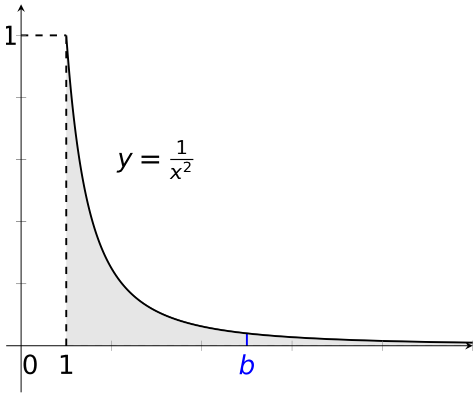
无限区间的广义积分—引例 I

例 该如何计算 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$？

合理的计算：

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^{b}\frac{1}{x^2}dx$$

$$= \quad -\frac{1}{x}\Big|_1^b$$



无限区间的广义积分—引例 I

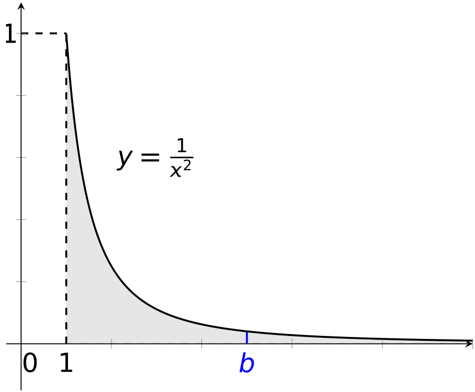
例 该如何计算 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$？

合理的计算：

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx$$

$$= -\frac{1}{x}\Big|_1^b$$

$$= -\frac{1}{b} + 1$$

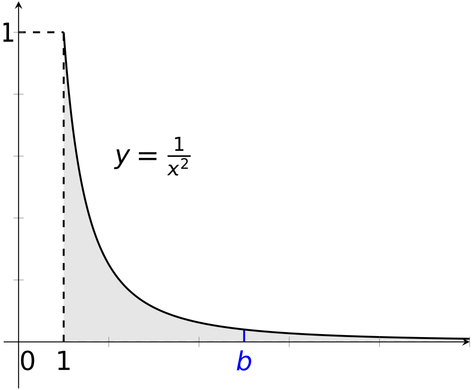


无限区间的广义积分—引例 I

例 该如何计算 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$？

合理的计算：

$$
\begin{aligned}
\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx &= \lim_{b\to+\infty}\int_1^{b}\frac{1}{x^2}dx \\
&= \lim_{b\to+\infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^b \\
&= \quad -\frac{1}{b}+1
\end{aligned}
$$

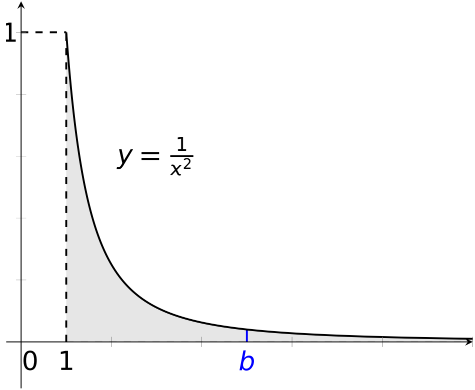


无限区间的广义积分—引例 I

例 该如何计算 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$?

合理的计算:

$$
\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx \\
&= \lim_{b\to+\infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^b \\
&= \lim_{b\to+\infty} -\frac{1}{b} + 1
\end{aligned}
$$

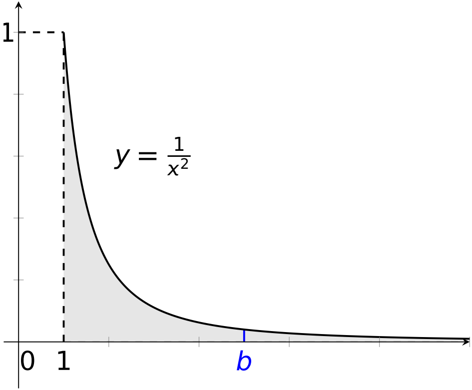


无限区间的广义积分—引例 I

例 该如何计算 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$?

合理的计算:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx$$
$$= \lim_{b\to+\infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^b$$
$$= \lim_{b\to+\infty} -\frac{1}{b} + 1 = 1$$



无限区间的广义积分—定义

定义

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

无限区间的广义积分—定义

定义 设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续，如果极限

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx \quad (a<b)$$

存在，则规定

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

无限区间的广义积分—定义

定义 设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续，如果极限

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx \quad (a<b)$$

存在，则规定

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

称作 $f(x)$ 在无限区间 $[a, \infty)$ 上的广义积分

无限区间的广义积分—定义

定义 设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续，如果极限

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx \quad (a<b)$$

存在，则规定

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

称作 $f(x)$ 在无限区间 $[a, \infty)$ 上的广义积分（或反常积分），

无限区间的广义积分—定义

定义 设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续，如果极限

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx \quad (a < b)$$

存在，则规定

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx$$

称作 $f(x)$ 在无限区间 $[a, \infty)$ 上的广义积分（或反常积分），同时称 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 存在或收敛。

无限区间的广义积分—定义

定义 设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续，如果极限

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx \quad (a<b)$$

存在，则规定

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

称作 $f(x)$ 在无限区间 $[a, \infty)$ 上的广义积分（或反常积分），同时称 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 存在或收敛。

若上述极限不存在，则称 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$不存在或发散。

无限区间的广义积分—定义

定义 设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续，如果极限

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx \quad (a<b)$$

存在，则规定

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

称作 $f(x)$ 在无限区间 $[a, \infty)$ 上的广义积分（或反常积分），同时称 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 存在或收敛。

若上述极限不存在，则称 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$不存在或发散。

例 $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx$ 收敛：

无限区间的广义积分—定义

定义 设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续，如果极限

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx \quad (a<b)$$

存在，则规定

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

称作 $f(x)$ 在无限区间 $[a, \infty)$ 上的广义积分（或反常积分），同时称 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 存在或收敛。

若上述极限不存在，则称 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$不存在或发散。

例 $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx$ 收敛： $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{1}{x^2}dx =$

无限区间的广义积分—定义

定义 设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续，如果极限

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx \quad (a<b)$$

存在，则规定

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

称作 $f(x)$ 在无限区间 $[a, \infty)$ 上的广义积分（或反常积分），同时称 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 存在或收敛。

若上述极限不存在，则称 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 不存在或发散。

例 $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx$ 收敛：$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{1}{x^2}dx = \qquad 1-\frac{1}{b}$

无限区间的广义积分—定义

定义 设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续，如果极限

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx \quad (a<b)$$

存在，则规定

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

称作 $f(x)$ 在无限区间 $[a, \infty)$ 上的广义积分（或反常积分），同时称 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 存在或收敛。

若上述极限不存在，则称 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 不存在或发散。

例 $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx$ 收敛：$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{1}{x^2}dx = \lim\limits_{b\to+\infty} 1-\frac{1}{b}$

无限区间的广义积分—定义

定义 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，如果极限

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx \quad (a<b)$$

存在，则规定

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

称作 $f(x)$ 在无限区间 $[a,\infty)$ 上的广义积分（或反常积分），同时称 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 存在或收敛。

若上述极限不存在，则称 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 不存在或发散。

例 $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx$ 收敛：$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{1}{x^2}dx=\lim\limits_{b\to+\infty}1-\frac{1}{b}=1$

记号

注

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx =$$

记号

注

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx = \qquad F(x)\Big|_a^b$$

记号

注

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} F(x)\Big|_a^b$$

记号

注

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} F(x)\Big|_a^b$$

$$= \qquad F(b) - F(a)$$

记号

注

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} F(x)\Big|_a^b$$

$$= \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a)$$

记号

注

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} F(x)\Big|_a^b \xlongequal{\text{简记为}} F(x)\Big|_a^{+\infty}$$

$$= \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a)$$

记号

注

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} F(x)\Big|_a^b \xlongequal{\text{简记为}} F(x)\Big|_a^{+\infty}$$

$$= \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a) \xlongequal{\text{简记为}} F(+\infty) - F(a)$$

记号

注

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} F(x)\Big|_a^b \overset{\text{简记为}}{=\!=\!=} F(x)\Big|_a^{+\infty}$$

$$= \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a) \overset{\text{简记为}}{=\!=\!=} F(+\infty) - F(a)$$

例

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx =$$

记号

注

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} F(x)\Big|_a^b \xlongequal{\text{简记为}} F(x)\Big|_a^{+\infty}$$

$$= \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a) \xlongequal{\text{简记为}} F(+\infty) - F(a)$$

例

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}$$

记号

注

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} F(x)\Big|_a^b \xlongequal{\text{简记为}} F(x)\Big|_a^{+\infty}$$

$$= \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a) \xlongequal{\text{简记为}} F(+\infty) - F(a)$$

例

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^{\infty}$$

记号

注

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} F(x)\Big|_a^b \xlongequal{\text{简记为}} F(x)\Big|_a^{+\infty}$$

$$= \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a) \xlongequal{\text{简记为}} F(+\infty) - F(a)$$

例

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^{\infty} = 0 - (-1)$$

记号

注

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} F(x)\Big|_a^b \xlongequal{\text{简记为}} F(x)\Big|_a^{+\infty}$$

$$= \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a) \xlongequal{\text{简记为}} F(+\infty) - F(a)$$

例

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^{\infty} = 0-(-1) = 1$$

无限区间的广义积分—例 2

例 判断广义积分 $\int_0^\infty xe^{-x}dx$ 的敛散性，若收敛，求其值

无限区间的广义积分—例 2

例 判断广义积分 $\int_0^{\infty} xe^{-x}dx$ 的敛散性，若收敛，求其值

解

$$\int_0^{\infty} xe^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} xe^{-x}dx =$$

无限区间的广义积分—例 2

例 判断广义积分 $\int_0^{\infty} xe^{-x}dx$ 的敛散性，若收敛，求其值

解

$$\int_0^{\infty} xe^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} xe^{-x}dx = \qquad -\int_0^{b} xde^{-x}$$

无限区间的广义积分—例 2

例 判断广义积分 $\int_0^{\infty} xe^{-x}dx$ 的敛散性，若收敛，求其值

解

$$\int_0^{\infty} xe^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b xe^{-x}dx = \quad -\int_0^b xde^{-x}$$

$$= \quad -\left(xe^{-x}\Big|_0^b - \int_0^b e^{-x}dx\right)$$

无限区间的广义积分—例 2

例 判断广义积分 $\int_0^{\infty} xe^{-x}dx$ 的敛散性，若收敛，求其值

解

$$\int_0^{\infty} xe^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} xe^{-x}dx = \qquad -\int_0^{b} xde^{-x}$$

$$= \qquad -\left(xe^{-x}\Big|_0^b - \int_0^b e^{-x}dx\right)$$

$$= \qquad -\left(\qquad \qquad \right)$$

无限区间的广义积分—例 2

例 判断广义积分 $\int_0^{\infty} xe^{-x}dx$ 的敛散性，若收敛，求其值

解

$$\int_0^{\infty} xe^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} xe^{-x}dx = \quad -\int_0^{b} xde^{-x}$$

$$= \quad -\left(xe^{-x}\Big|_0^b - \int_0^b e^{-x}dx\right)$$

$$= \quad -\left(be^{-b} + \qquad\right)$$

无限区间的广义积分—例 2

例 判断广义积分 $\int_0^{\infty} xe^{-x}dx$ 的敛散性，若收敛，求其值

解

$$\int_0^{\infty} xe^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} xe^{-x}dx = \quad -\int_0^{b} xde^{-x}$$

$$= \quad -\left(xe^{-x}\Big|_0^b - \int_0^b e^{-x}dx\right)$$

$$= \quad -\left(be^{-b} + e^{-x} \quad \right)$$

无限区间的广义积分—例 2

例 判断广义积分 $\int_0^{\infty} xe^{-x}dx$ 的敛散性，若收敛，求其值

解

$$\int_0^{\infty} xe^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b xe^{-x}dx = \quad -\int_0^b xde^{-x}$$

$$= \quad -\left(xe^{-x}\Big|_0^b - \int_0^b e^{-x}dx\right)$$

$$= \quad -\left(be^{-b} + e^{-x}\Big|_0^b\right)$$

无限区间的广义积分—例 2

例 判断广义积分 $\int_0^{\infty} xe^{-x}dx$ 的敛散性，若收敛，求其值

解

$$\int_0^{\infty} xe^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} xe^{-x}dx = \quad -\int_0^{b} xde^{-x}$$

$$= \quad -\left(xe^{-x}\Big|_0^b - \int_0^b e^{-x}dx\right)$$

$$= \quad -\left(be^{-b} + e^{-x}\Big|_0^b\right)$$

$$= \quad -\left(be^{-b} + e^{-b} - 1\right)$$

无限区间的广义积分—例 2

例 判断广义积分 $\int_0^{\infty} xe^{-x}dx$ 的敛散性，若收敛，求其值

解

$$\int_0^{\infty} xe^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} xe^{-x}dx = \lim_{b\to\infty} -\int_0^{b} xde^{-x}$$

$$= \quad -\left(xe^{-x}\Big|_0^b - \int_0^b e^{-x}dx\right)$$

$$= \quad -\left(be^{-b} + e^{-x}\Big|_0^b\right)$$

$$= \quad -\left(be^{-b} + e^{-b} - 1\right)$$

无限区间的广义积分—例 2

例 判断广义积分 $\int_0^\infty xe^{-x}dx$ 的敛散性，若收敛，求其值

解

$$\int_0^\infty xe^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b xe^{-x}dx = \lim_{b\to\infty} -\int_0^b xde^{-x}$$

$$= \lim_{b\to\infty} -\left(xe^{-x}\Big|_0^b - \int_0^b e^{-x}dx\right)$$

$$= \qquad -\left(be^{-b} + e^{-x}\Big|_0^b\right)$$

$$= \qquad -\left(be^{-b} + e^{-b} - 1\right)$$

无限区间的广义积分—例 2

例 判断广义积分 $\int_0^{\infty} xe^{-x}dx$ 的敛散性，若收敛，求其值

解

$$\int_0^{\infty} xe^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} xe^{-x}dx = \lim_{b\to\infty} -\int_0^{b} xde^{-x}$$

$$= \lim_{b\to\infty} -\left(xe^{-x}\Big|_0^b - \int_0^b e^{-x}dx\right)$$

$$= \lim_{b\to\infty} -\left(be^{-b} + e^{-x}\Big|_0^b\right)$$

$$= \quad -\left(be^{-b} + e^{-b} - 1\right)$$

无限区间的广义积分—例 2

例 判断广义积分 $\int_0^{\infty} xe^{-x}dx$ 的敛散性，若收敛，求其值

解

$$\int_0^{\infty} xe^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b xe^{-x}dx = \lim_{b\to\infty} -\int_0^b x de^{-x}$$

$$= \lim_{b\to\infty} -\left(xe^{-x}\Big|_0^b - \int_0^b e^{-x}dx \right)$$

$$= \lim_{b\to\infty} -\left(be^{-b} + e^{-x}\Big|_0^b \right)$$

$$= \lim_{b\to\infty} -\left(be^{-b} + e^{-b} - 1 \right)$$

无限区间的广义积分—例 2

例 判断广义积分 $\int_0^{\infty} xe^{-x}dx$ 的敛散性，若收敛，求其值

解

$$\int_0^{\infty} xe^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} xe^{-x}dx = \lim_{b\to\infty} -\int_0^{b} xde^{-x}$$

$$= \lim_{b\to\infty} -\left(xe^{-x}\Big|_0^b - \int_0^b e^{-x}dx \right)$$

$$= \lim_{b\to\infty} -\left(be^{-b} + e^{-x}\Big|_0^b \right)$$

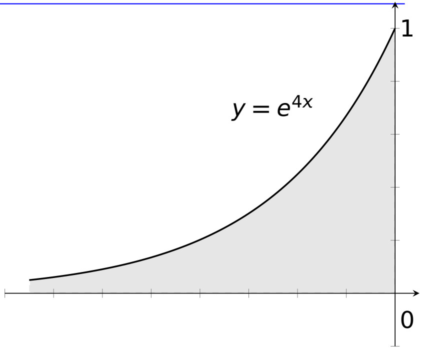
$$= \lim_{b\to\infty} -\left(be^{-b} + e^{-b} - 1 \right) = 1$$

无限区间的广义积分—引例 II

例 该如何计算 $\int_{-\infty}^{0} e^{4x} dx$？

无限区间的广义积分—引例 II

例 该如何计算 $\int_{-\infty}^{0} e^{4x} dx$？



合理的计算：

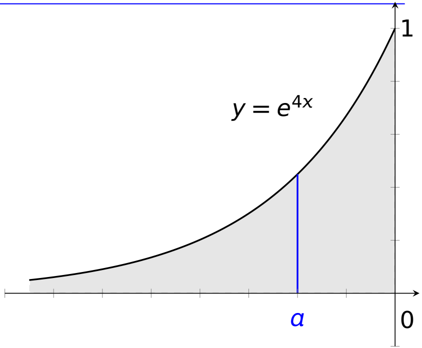
$$\int_{-\infty}^{0} e^{4x} dx =$$

无限区间的广义积分—引例 II

例 该如何计算 $\int_{-\infty}^{0} e^{4x} dx$？

合理的计算：

$$\int_{-\infty}^{0} e^{4x} dx =$$

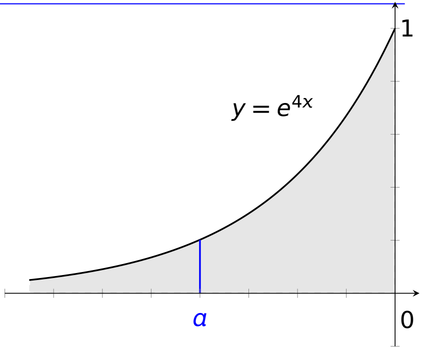


无限区间的广义积分—引例 II

例 该如何计算 $\int_{-\infty}^{0} e^{4x} dx$?

合理的计算：

$$\int_{-\infty}^{0} e^{4x} dx =$$

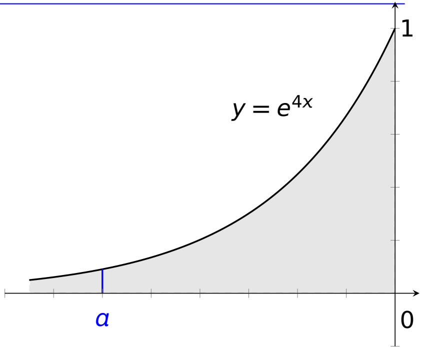


无限区间的广义积分—引例 II

例 该如何计算 $\int_{-\infty}^{0} e^{4x}dx$?

合理的计算：

$$\int_{-\infty}^{0} e^{4x}dx =$$

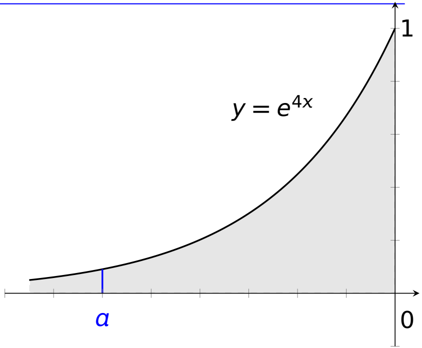


无限区间的广义积分—引例 II

例 该如何计算 $\int_{-\infty}^{0} e^{4x} dx$?

合理的计算：

$$\int_{-\infty}^{0} e^{4x} dx = \qquad \int_{a}^{0} e^{4x} dx$$

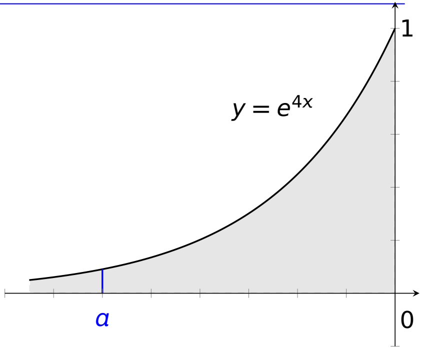


无限区间的广义积分—引例 II

例 该如何计算 $\int_{-\infty}^{0} e^{4x}dx$？

合理的计算：

$$\int_{-\infty}^{0} e^{4x}dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} e^{4x}dx$$

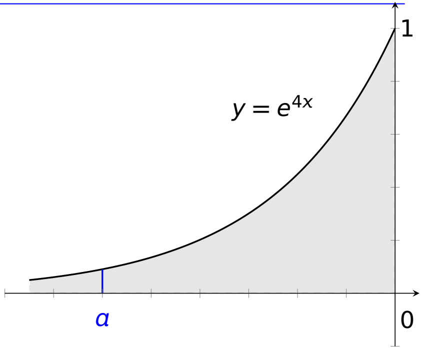


无限区间的广义积分—引例 II

例 该如何计算 $\int_{-\infty}^{0} e^{4x}dx$?

合理的计算:

$$\int_{-\infty}^{0} e^{4x}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} e^{4x}dx$$
$$= \frac{1}{4}e^{4x}$$



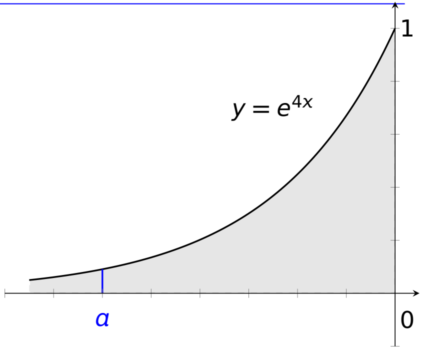
无限区间的广义积分—引例 II

例 该如何计算 $\int_{-\infty}^{0} e^{4x}dx$?

合理的计算：

$$\int_{-\infty}^{0} e^{4x}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} e^{4x}dx$$

$$= \frac{1}{4}e^{4x}\Big|_{a}^{0}$$

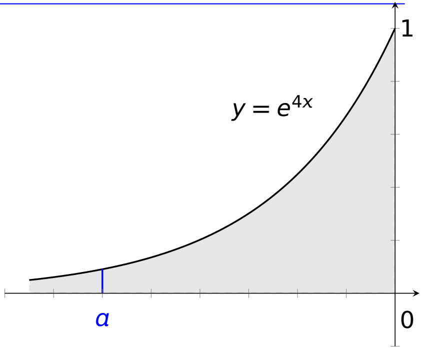


无限区间的广义积分—引例 II

例 该如何计算 $\int_{-\infty}^{0} e^{4x}dx$？

合理的计算：

$$\int_{-\infty}^{0} e^{4x}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} e^{4x}dx$$
$$= \frac{1}{4}e^{4x}\Big|_{a}^{0}$$
$$= \frac{1}{4}(1-e^{4a})$$

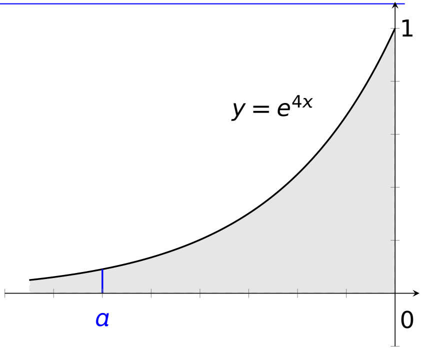


无限区间的广义积分—引例 II

例 该如何计算 $\int_{-\infty}^{0} e^{4x}dx$？

合理的计算：

$$\int_{-\infty}^{0} e^{4x}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} e^{4x}dx$$
$$= \lim_{a\to-\infty}\frac{1}{4}e^{4x}\Big|_{a}^{0}$$
$$= \frac{1}{4}(1-e^{4a})$$



无限区间的广义积分—引例 II

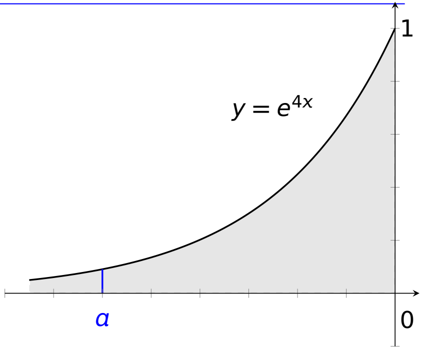
例 该如何计算 $\int_{-\infty}^{0} e^{4x}dx$？

合理的计算：

$$\int_{-\infty}^{0} e^{4x}dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} e^{4x}dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \frac{1}{4}e^{4x}\Big|_{a}^{0}$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \frac{1}{4}(1-e^{4a})$$

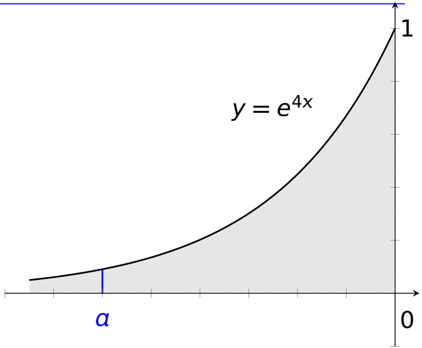


无限区间的广义积分—引例 II

例 该如何计算 $\int_{-\infty}^{0} e^{4x}dx$?

合理的计算:

$$\int_{-\infty}^{0} e^{4x}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} e^{4x}dx$$
$$= \lim_{a\to-\infty}\frac{1}{4}e^{4x}\Big|_{a}^{0}$$
$$= \lim_{a\to-\infty}\frac{1}{4}(1-e^{4a}) = \frac{1}{4}$$

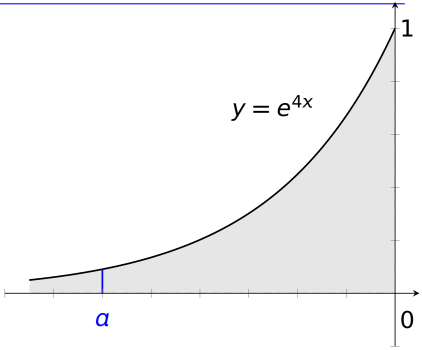


无限区间的广义积分—引例 II

例 该如何计算 $\int_{-\infty}^{0} e^{4x}dx$？

合理的计算：

$$\int_{-\infty}^{0} e^{4x}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} e^{4x}dx$$
$$= \lim_{a\to-\infty}\frac{1}{4}e^{4x}\Big|_{a}^{0}$$
$$= \lim_{a\to-\infty}\frac{1}{4}(1-e^{4a}) = \frac{1}{4}$$

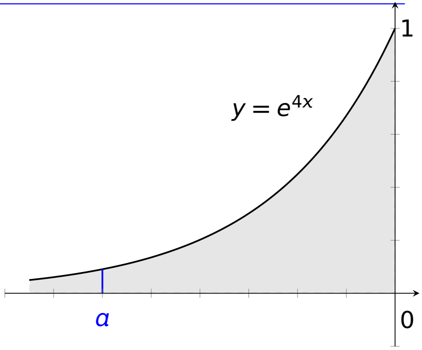


总结

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx =$$

无限区间的广义积分—引例 II

例 该如何计算 $\int_{-\infty}^{0} e^{4x}dx$？



合理的计算：

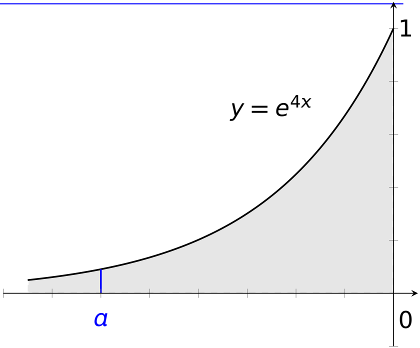
$$\int_{-\infty}^{0} e^{4x}dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} e^{4x}dx$$
$$= \lim_{a\to-\infty} \frac{1}{4}e^{4x}\Big|_{a}^{0}$$
$$= \lim_{a\to-\infty} \frac{1}{4}(1-e^{4a}) = \frac{1}{4}$$

总结

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx =$$

无限区间的广义积分—引例 II

例 该如何计算 $\int_{-\infty}^{0} e^{4x}dx$?



合理的计算:

$$\int_{-\infty}^{0} e^{4x}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} e^{4x}dx$$
$$= \lim_{a\to-\infty}\frac{1}{4}e^{4x}\Big|_{a}^{0}$$
$$= \lim_{a\to-\infty}\frac{1}{4}(1-e^{4a}) = \frac{1}{4}$$

总结

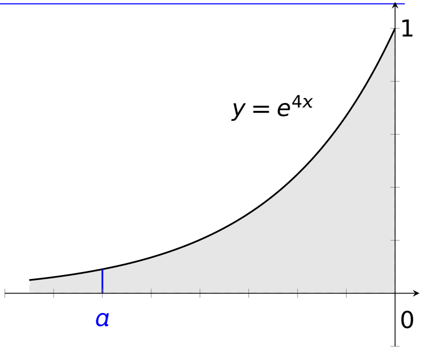
$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx = \qquad F(x)\Big|_{a}^{b}$$

无限区间的广义积分—引例 II

例 该如何计算 $\int_{-\infty}^{0} e^{4x}dx$?

合理的计算：

$$\int_{-\infty}^{0} e^{4x}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} e^{4x}dx$$
$$= \lim_{a\to-\infty}\frac{1}{4}e^{4x}\Big|_a^0$$
$$= \lim_{a\to-\infty}\frac{1}{4}(1-e^{4a}) = \frac{1}{4}$$



总结

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx = \qquad F(x)\Big|_a^b$$
$$= \qquad F(b)-F(a)$$

无限区间的广义积分—引例 II

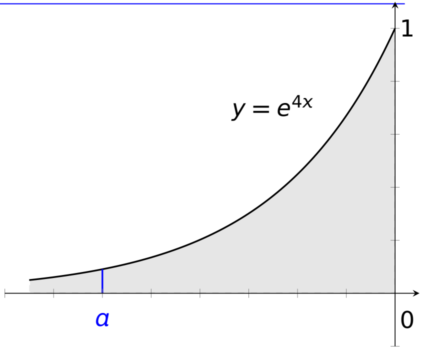
例 该如何计算 $\int_{-\infty}^{0} e^{4x} dx$?

合理的计算：

$$\int_{-\infty}^{0} e^{4x} dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} e^{4x} dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \frac{1}{4} e^{4x}\Big|_a^0$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \frac{1}{4}(1-e^{4a}) = \frac{1}{4}$$



总结

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} F(x)\Big|_a^b$$

$$= \qquad F(b)-F(a)$$

无限区间的广义积分—引例 II

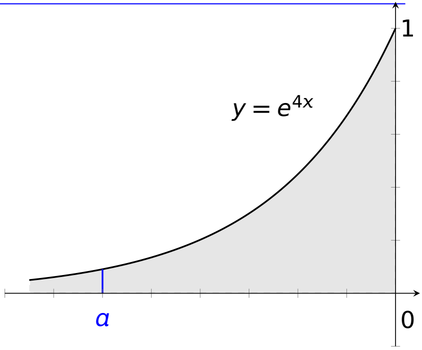
例 该如何计算 $\int_{-\infty}^{0} e^{4x}dx$?

合理的计算：

$$\int_{-\infty}^{0} e^{4x}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} e^{4x}dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\frac{1}{4}e^{4x}\Big|_a^0$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\frac{1}{4}(1-e^{4a}) = \frac{1}{4}$$



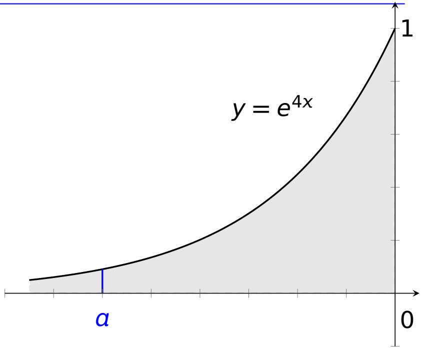
总结

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} F(x)\Big|_a^b$$

$$= \lim_{a\to-\infty} F(b)-F(a)$$

无限区间的广义积分—引例 II

例 该如何计算 $\int_{-\infty}^{0} e^{4x}dx$？



合理的计算：

$$\int_{-\infty}^{0} e^{4x}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} e^{4x}dx$$
$$= \lim_{a\to-\infty}\frac{1}{4}e^{4x}\Big|_{a}^{0}$$
$$= \lim_{a\to-\infty}\frac{1}{4}(1-e^{4a}) = \frac{1}{4}$$

总结

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}F(x)\Big|_{a}^{b}$$
$$= \lim_{a\to-\infty}F(b)-F(a) \xlongequal{\text{记为}} F(b)-F(-\infty)$$

无限区间的广义积分—定义 II

定义

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx$$

无限区间的广义积分—定义 II

定义 规定 $f(x)$ 在无限区间 $(-\infty, b]$ 上的广义积分（或反常积分）为：

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx$$

无限区间的广义积分—定义 II

定义 规定 $f(x)$ 在无限区间 $(-\infty, b]$ 上的广义积分（或反常积分）为：

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx$$

只要极限存在，则称 $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ 存在或收敛。

无限区间的广义积分—定义 II

定义 规定 $f(x)$ 在无限区间 $(-\infty, b]$ 上的广义积分（或反常积分）为：

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx$$

只要极限存在，则称 $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ 存在或收敛。

若上述极限不存在，则称 $\int_{-\infty}^{b} f(x)ddx$不存在或发散。

无限区间的广义积分—定义 II

定义 规定 $f(x)$ 在无限区间 $(-\infty, b]$ 上的广义积分（或反常积分）为：

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx$$

只要极限存在，则称 $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ 存在或收敛。

若上述极限不存在，则称 $\int_{-\infty}^{b} f(x)ddx$不存在或发散。

例 $\int_{-\infty}^{0} e^{4x}dx$ 收敛：

无限区间的广义积分—定义 II

定义 规定 $f(x)$ 在无限区间 $(-\infty, b]$ 上的广义积分（或反常积分）为：

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx$$

只要极限存在，则称 $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ 存在或收敛。

若上述极限不存在，则称 $\int_{-\infty}^{b} f(x)ddx$不存在或发散。

例 $\int_{-\infty}^{0} e^{4x}dx$ 收敛：

$$\int_{-\infty}^{0} e^{4x}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} e^{4x}dx$$

无限区间的广义积分—定义 II

定义 规定 $f(x)$ 在无限区间 $(-\infty, b]$ 上的广义积分（或反常积分）为：

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx$$

只要极限存在，则称 $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ 存在或收敛。

若上述极限不存在，则称 $\int_{-\infty}^{b} f(x)ddx$不存在或发散。

例 $\int_{-\infty}^{0} e^{4x}dx$ 收敛：

$$\int_{-\infty}^{0} e^{4x}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} e^{4x}dx = \lim_{a\to-\infty}\frac{1}{4}(1-e^{4a})$$

无限区间的广义积分—定义 II

定义 规定 $f(x)$ 在无限区间 $(-\infty, b]$ 上的广义积分（或反常积分）为：

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx$$

只要极限存在，则称 $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ 存在或收敛。

若上述极限不存在，则称 $\int_{-\infty}^{b} f(x)ddx$不存在或发散。

例 $\int_{-\infty}^{0} e^{4x}dx$ 收敛：

$$\int_{-\infty}^{0} e^{4x}dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} e^{4x}dx = \lim_{a\to-\infty} \frac{1}{4}(1-e^{4a}) = \frac{1}{4}$$

无限区间的广义积分—例 3

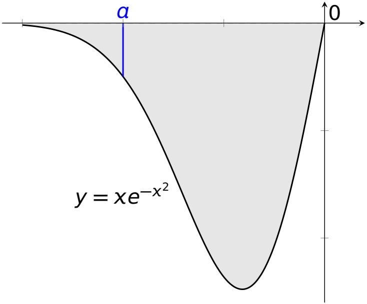
例 判断广义积分 $\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}dx$ 的敛散性，若收敛，求其值

无限区间的广义积分—例 3

例 判断广义积分 $\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}dx$ 的敛散性，若收敛，求其值

解

$$\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} xe^{-x^2}dx$$



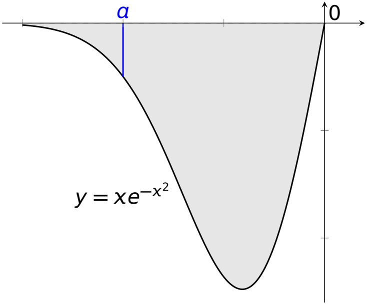
无限区间的广义积分—例 3

例 判断广义积分 $\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}dx$ 的敛散性，若收敛，求其值

解

$$\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} xe^{-x^2}dx$$

$$= \qquad \frac{1}{2}dx^2$$



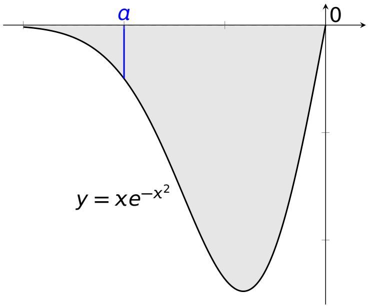
无限区间的广义积分—例 3

例 判断广义积分 $\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}dx$ 的敛散性，若收敛，求其值

解

$$\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} xe^{-x^2}dx$$

$$= \int_{a}^{0} e^{-x^2}\cdot\frac{1}{2}dx^2$$



无限区间的广义积分—例 3

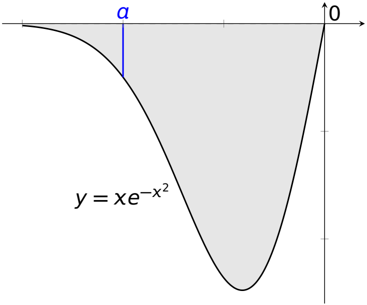
例 判断广义积分 $\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}dx$ 的敛散性，若收敛，求其值

解

$$\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} xe^{-x^2}dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} e^{-x^2}\cdot\frac{1}{2}dx^2$$

$$= \frac{1}{2}\int e^{-u}du$$

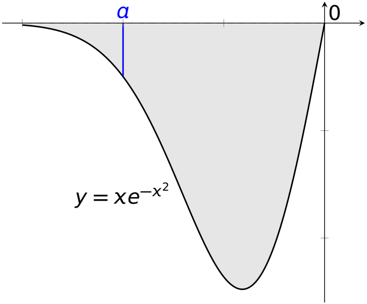


无限区间的广义积分—例 3

例 判断广义积分 $\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}dx$ 的敛散性，若收敛，求其值

解

$$\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} xe^{-x^2}dx$$
$$= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} e^{-x^2}\cdot\frac{1}{2}dx^2$$
$$= \frac{1}{2}\int_{a^2}^{0} e^{-u}du$$



无限区间的广义积分—例 3

例 判断广义积分 $\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2} dx$ 的敛散性，若收敛，求其值

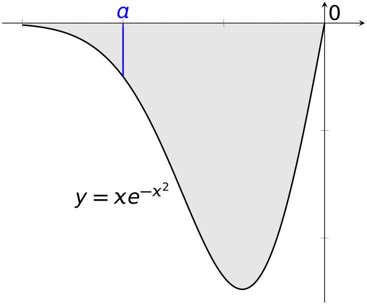
解

$$\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2} dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} xe^{-x^2} dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} e^{-x^2} \cdot \frac{1}{2} dx^2$$

$$= \frac{1}{2} \int_{a^2}^{0} e^{-u} du$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-u}$$

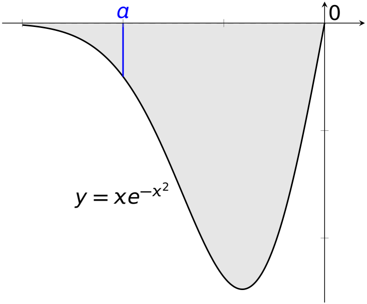


无限区间的广义积分—例 3

例 判断广义积分 $\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}dx$ 的敛散性，若收敛，求其值

解

$$\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 xe^{-x^2}dx$$
$$= \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 e^{-x^2}\cdot\frac{1}{2}dx^2$$
$$= \frac{1}{2}\int_{a^2}^{0} e^{-u}du$$
$$= -\frac{1}{2}e^{-u}\Big|_{a^2}^{0}$$



无限区间的广义积分—例 3

例 判断广义积分 $\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}dx$ 的敛散性，若收敛，求其值

解

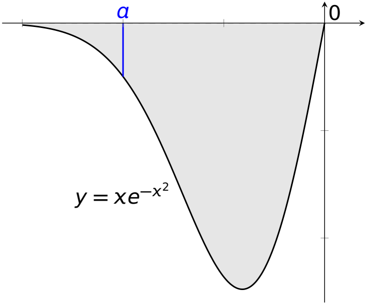
$$\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 xe^{-x^2}dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 e^{-x^2}\cdot\frac{1}{2}dx^2$$

$$= \frac{1}{2}\int_{a^2}^{0} e^{-u}du$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-u}\Big|_{a^2}^{0}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(1-e^{-a^2}\right)$$

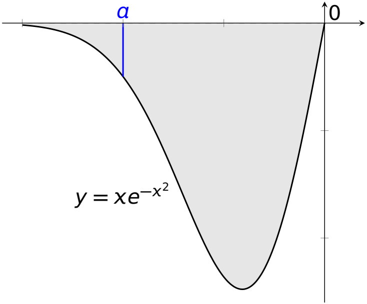


无限区间的广义积分—例 3

例 判断广义积分 $\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}dx$ 的敛散性，若收敛，求其值

解

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}dx &= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} xe^{-x^2}dx \\
&= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} e^{-x^2}\cdot\frac{1}{2}dx^2 \\
&= \lim_{a\to-\infty}\frac{1}{2}\int_{a^2}^{0} e^{-u}du \\
&= -\frac{1}{2}e^{-u}\Big|_{a^2}^{0} \\
&= -\frac{1}{2}\left(1-e^{-a^2}\right)
\end{aligned}
$$



无限区间的广义积分—例 3

例 判断广义积分 $\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}dx$ 的敛散性，若收敛，求其值

解

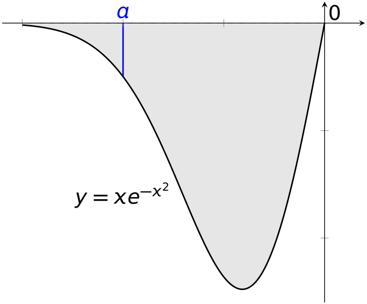
$$\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} xe^{-x^2}dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} e^{-x^2}\cdot\frac{1}{2}dx^2$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\frac{1}{2}\int_{a^2}^{0} e^{-u}du$$

$$= \lim_{a\to-\infty} -\frac{1}{2}e^{-u}\Big|_{a^2}^{0}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(1-e^{-a^2}\right)$$

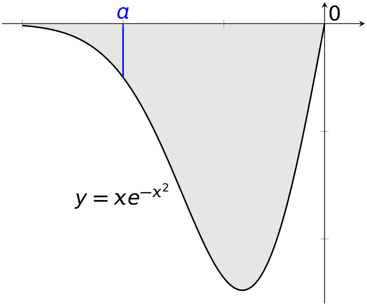


无限区间的广义积分—例 3

例 判断广义积分 $\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}dx$ 的敛散性，若收敛，求其值

解

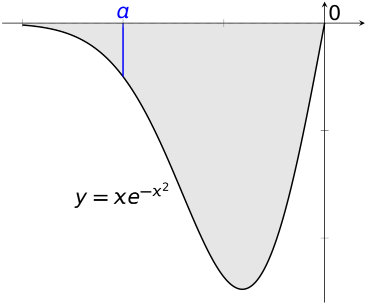
$$\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} xe^{-x^2}dx$$
$$= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} e^{-x^2}\cdot\frac{1}{2}dx^2$$
$$= \lim_{a\to-\infty}\frac{1}{2}\int_{a^2}^{0} e^{-u}du$$
$$= \lim_{a\to-\infty} -\frac{1}{2}e^{-u}\Big|_{a^2}^{0}$$
$$= \lim_{a\to-\infty} -\frac{1}{2}\left(1-e^{-a^2}\right)$$



无限区间的广义积分—例 3

例 判断广义积分 $\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}dx$ 的敛散性，若收敛，求其值

解



$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}dx &= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} xe^{-x^2}dx \\
&= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} e^{-x^2}\cdot\frac{1}{2}dx^2 \\
&= \lim_{a\to-\infty}\frac{1}{2}\int_{a^2}^{0} e^{-u}du \\
&= \lim_{a\to-\infty} -\frac{1}{2}e^{-u}\Big|_{a^2}^{0} \\
&= \lim_{a\to-\infty} -\frac{1}{2}\left(1-e^{-a^2}\right) \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

无限区间的广义积分—引例 III

例 该如何计算 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$？

无限区间的广义积分—引例 III

例 该如何计算 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$？ 合理的计算应该是：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx =$$

无限区间的广义积分—引例 III

例 该如何计算 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$？ 合理的计算应该是：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2} dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

无限区间的广义积分—引例 III

例 该如何计算 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$? 合理的计算应该是:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2} dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \int_{a}^{0} \frac{1}{1+x^2} dx$$

无限区间的广义积分—引例 III

例 该如何计算 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$？ 合理的计算应该是：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2} dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} \frac{1}{1+x^2} dx$$

无限区间的广义积分—引例 III

例 该如何计算 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$? 合理的计算应该是:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+x^2}dx+\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{1}{1+x^2}dx+\qquad\int_{0}^{b}\frac{1}{1+x^2}dx$$

无限区间的广义积分—引例 III

例 该如何计算 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$？ 合理的计算应该是：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+x^2}dx+\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{1}{1+x^2}dx+\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{1}{1+x^2}dx$$

无限区间的广义积分—引例 III

例 该如何计算 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$？ 合理的计算应该是：

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx &= \int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+x^2}dx+\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx\\ &= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{1}{1+x^2}dx+\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{1}{1+x^2}dx\\ &= \qquad \arctan x\end{aligned}$$

无限区间的广义积分—引例 III

例 该如何计算 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$？ 合理的计算应该是：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx + \lim_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \arctan x\Big|_{a}^{0}$$

无限区间的广义积分—引例 III

例 该如何计算 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$？　合理的计算应该是：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2} dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} \frac{1}{1+x^2} dx + \lim_{b \to +\infty} \int_{0}^{b} \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \arctan x \Big|_{a}^{0}$$

无限区间的广义积分—引例 III

例 该如何计算 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$? 合理的计算应该是:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2} dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{1}{1+x^2} dx + \lim_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \arctan x\Big|_{a}^{0} + \qquad \arctan x$$

无限区间的广义积分—引例 III

例 该如何计算 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$? 合理的计算应该是:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx + \lim_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \arctan x\Big|_{a}^{0} + \qquad \arctan x\Big|_{0}^{b}$$

无限区间的广义积分—引例 III

例 该如何计算 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$？ 合理的计算应该是：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+x^2}dx+\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{1}{1+x^2}dx+\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\arctan x\Big|_a^0+\lim_{b\to\infty}\arctan x\Big|_0^b$$

无限区间的广义积分—引例 III

例 该如何计算 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$? 合理的计算应该是:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+x^2}dx+\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{1}{1+x^2}dx+\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\arctan x\Big|_{a}^{0}+\lim_{b\to\infty}\arctan x\Big|_{0}^{b}$$

$$=\qquad(0-\arctan a)$$

无限区间的广义积分—引例 III

例 该如何计算 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$？ 合理的计算应该是：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+x^2}dx+\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{1}{1+x^2}dx+\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\arctan x\Big|_a^0+\lim_{b\to\infty}\arctan x\Big|_0^b$$

$$=\lim_{a\to-\infty}(0-\arctan a)$$

无限区间的广义积分—引例 III

例 该如何计算 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$？　合理的计算应该是：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+x^2}dx+\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{1}{1+x^2}dx+\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\arctan x\Big|_{a}^{0}+\lim_{b\to\infty}\arctan x\Big|_{0}^{b}$$

$$=\lim_{a\to-\infty}(0-\arctan a)+\qquad(\arctan b-0)$$

无限区间的广义积分—引例 III

例 该如何计算 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$? 合理的计算应该是:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx &= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2} dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \\
&= \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} \frac{1}{1+x^2} dx + \lim_{b \to +\infty} \int_{0}^{b} \frac{1}{1+x^2} dx \\
&= \lim_{a \to -\infty} \arctan x \Big|_{a}^{0} + \lim_{b \to \infty} \arctan x \Big|_{0}^{b} \\
&= \lim_{a \to -\infty} (0 - \arctan a) + \lim_{b \to \infty} (\arctan b - 0)
\end{aligned}
$$

无限区间的广义积分—引例 III

例 该如何计算 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$？ 合理的计算应该是：

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx &= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2} dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \\
&= \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} \frac{1}{1+x^2} dx + \lim_{b \to +\infty} \int_{0}^{b} \frac{1}{1+x^2} dx \\
&= \lim_{a \to -\infty} \arctan x \Big|_a^0 + \lim_{b \to \infty} \arctan x \Big|_0^b \\
&= \lim_{a \to -\infty} (0 - \arctan a) + \lim_{b \to \infty} (\arctan b - 0) \\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

无限区间的广义积分—引例 III

例 该如何计算 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$？ 合理的计算应该是：

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx &= \int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+x^2}dx+\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx\\
&= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{1}{1+x^2}dx+\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{1}{1+x^2}dx\\
&= \lim_{a\to-\infty}\arctan x\Big|_{a}^{0}+\lim_{b\to\infty}\arctan x\Big|_{0}^{b}\\
&= \lim_{a\to-\infty}(0-\arctan a)+\lim_{b\to\infty}(\arctan b-0)\\
&= \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi
\end{aligned}$$

无限区间的广义积分—引例 III

例 该如何计算 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$？　合理的计算应该是：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+x^2}dx+\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{1}{1+x^2}dx+\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\arctan x\Big|_a^0+\lim_{b\to\infty}\arctan x\Big|_0^b$$

$$=\lim_{a\to-\infty}(0-\arctan a)+\lim_{b\to\infty}(\arctan b-0)$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$$

总结

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=$$

无限区间的广义积分—引例 III

例 该如何计算 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$? 合理的计算应该是:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx &= \int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+x^2}dx+\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx\\ &= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{1}{1+x^2}dx+\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{1}{1+x^2}dx\\ &= \lim_{a\to-\infty}\arctan x\Big|_a^0+\lim_{b\to\infty}\arctan x\Big|_0^b\\ &= \lim_{a\to-\infty}(0-\arctan a)+\lim_{b\to\infty}(\arctan b-0)\\ &= \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi\end{aligned}$$

总结

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{c}f(x)dx+\int_{c}^{\infty}f(x)dx$$

无限区间的广义积分—引例 III

例 该如何计算 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$？ 合理的计算应该是：

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx &= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx \\
&= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx + \lim_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} \frac{1}{1+x^2}dx \\
&= \lim_{a\to-\infty} \arctan x\Big|_a^0 + \lim_{b\to\infty} \arctan x\Big|_0^b \\
&= \lim_{a\to-\infty} (0-\arctan a) + \lim_{b\to\infty} (\arctan b - 0) \\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi
\end{aligned}$$

总结

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx = \qquad \int_{a}^{c} f(x)dx$$

无限区间的广义积分—引例 III

例 该如何计算 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$? 合理的计算应该是:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx &= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx \\
&= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx + \lim_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} \frac{1}{1+x^2}dx \\
&= \lim_{a\to-\infty} \arctan x\Big|_{a}^{0} + \lim_{b\to\infty} \arctan x\Big|_{0}^{b} \\
&= \lim_{a\to-\infty} (0-\arctan a) + \lim_{b\to\infty} (\arctan b - 0) \\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi
\end{aligned}$$

总结

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{c} f(x)dx$$

无限区间的广义积分—引例 III

例 该如何计算 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$？ 合理的计算应该是：

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx &= \int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+x^2}dx+\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx\\
&= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{1}{1+x^2}dx+\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{1}{1+x^2}dx\\
&= \lim_{a\to-\infty}\arctan x\Big|_{a}^{0}+\lim_{b\to\infty}\arctan x\Big|_{0}^{b}\\
&= \lim_{a\to-\infty}(0-\arctan a)+\lim_{b\to\infty}(\arctan b-0)\\
&= \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi
\end{aligned}$$

总结

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{c}f(x)dx+\int_{c}^{\infty}f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c}f(x)dx+\qquad\int_{c}^{b}f(x)dx$$

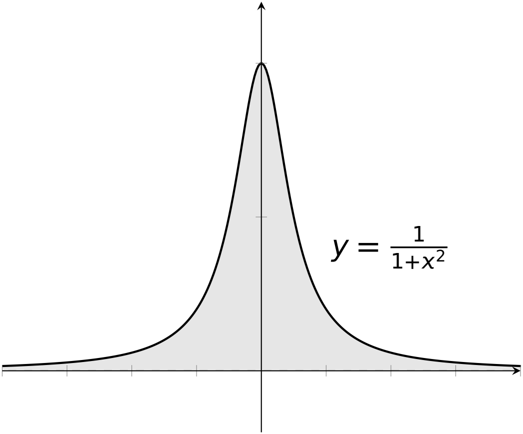
无限区间的广义积分—引例 III

例 该如何计算 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$？ 合理的计算应该是：

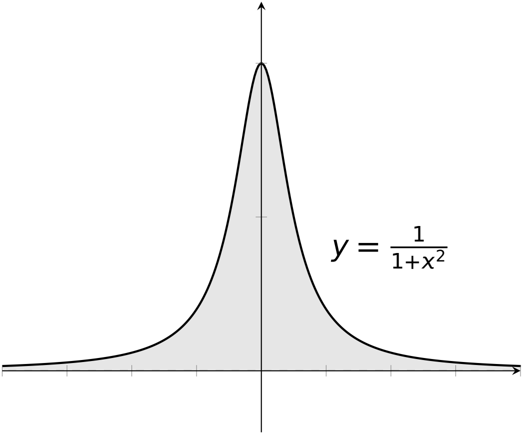
$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx &= \int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+x^2}dx+\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx \\
&= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{1}{1+x^2}dx+\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{1}{1+x^2}dx \\
&= \lim_{a\to-\infty}\arctan x\Big|_{a}^{0}+\lim_{b\to\infty}\arctan x\Big|_{0}^{b} \\
&= \lim_{a\to-\infty}(0-\arctan a)+\lim_{b\to\infty}(\arctan b-0) \\
&= \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi
\end{aligned}
$$

总结

$$
\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{c}f(x)dx+\int_{c}^{\infty}f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c}f(x)dx+\lim_{b\to\infty}\int_{c}^{b}f(x)dx
$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$$



$$\text{阴影部分面积} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$$

无限区间的广义积分—定义 III

定义

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx$$

无限区间的广义积分—定义 III

定义

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to\infty}\int_{c}^{b} f(x)dx$$

无限区间的广义积分—定义 III

定义 规定 $f(x)$ 在无限区间 $(-\infty, \infty)$ 上的广义积分（或反常积分）为：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to\infty} \int_{c}^{b} f(x)dx$$

无限区间的广义积分—定义 III

定义 规定 $f(x)$ 在无限区间 $(-\infty, \infty)$ 上的广义积分（或反常积分）为:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to\infty}\int_{c}^{b} f(x)dx$$

只要两个极限都存在，则称 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ 存在或收敛。

无限区间的广义积分—定义 III

定义 规定 $f(x)$ 在无限区间 $(-\infty, \infty)$ 上的广义积分（或反常积分）为：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to\infty} \int_{c}^{b} f(x)dx$$

只要两个极限都存在，则称 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ 存在或收敛。

否则，称 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)ddx$ 不存在或发散。

无限区间的广义积分—例 4

例 判断广义积分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$ 的敛散性，若收敛，求其值

无限区间的广义积分—例 4

例 判断广义积分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$ 的敛散性，若收敛，求其值

解 $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$$

无限区间的广义积分—例 4

例 判断广义积分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$ 的敛散性，若收敛，求其值

解
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$$
$$= \int_{-\infty}^{c} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx + \int_{c}^{\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$$

无限区间的广义积分—例 4

例 判断广义积分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$ 的敛散性，若收敛，求其值

解
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$$
$$= \int_{-\infty}^{c} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx + \int_{c}^{\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$$
$$= \int_{a}^{c} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$$

无限区间的广义积分—例 4

例 判断广义积分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$ 的敛散性，若收敛，求其值

解
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$$
$$= \int_{-\infty}^{c} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx + \int_{c}^{\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$$
$$= \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{c} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$$

无限区间的广义积分—例 4

例 判断广义积分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$ 的敛散性，若收敛，求其值

解

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{c} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx + \int_{c}^{\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{c} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx + \qquad \int_{c}^{b} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$$

无限区间的广义积分—例 4

例 判断广义积分 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx$ 的敛散性，若收敛，求其值

解

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{c}\frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx+\int_{c}^{\infty}\frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c}\frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx+\lim_{b\to\infty}\int_{c}^{b}\frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx$$

无限区间的广义积分—例 4

例 判断广义积分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$ 的敛散性，若收敛，求其值

解
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$$
$$= \int_{-\infty}^{c} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx + \int_{c}^{\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$$
$$= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{c} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx + \lim_{b\to\infty} \int_{c}^{b} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$$
$$= \qquad -\frac{1}{1+e^x}$$

无限区间的广义积分—例 4

例 判断广义积分 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx$ 的敛散性，若收敛，求其值

解

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{c}\frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx+\int_{c}^{\infty}\frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c}\frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx+\lim_{b\to\infty}\int_{c}^{b}\frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx$$

$$=\qquad -\frac{1}{1+e^x}\Big|_a^c$$

无限区间的广义积分—例 4

例 判断广义积分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$ 的敛散性，若收敛，求其值

解

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{c} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx + \int_{c}^{\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{c} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx + \lim_{b\to\infty} \int_{c}^{b} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty} -\frac{1}{1+e^x}\Big|_a^c$$

无限区间的广义积分—例 4

例 判断广义积分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$ 的敛散性，若收敛，求其值

解
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$$
$$= \int_{-\infty}^{c} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx + \int_{c}^{\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$$
$$= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{c} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx + \lim_{b\to\infty} \int_{c}^{b} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$$
$$= \lim_{a\to-\infty} -\frac{1}{1+e^x}\Big|_a^c + \qquad -\frac{1}{1+e^x}$$

无限区间的广义积分—例 4

例 判断广义积分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$ 的敛散性，若收敛，求其值

解

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{c} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx + \int_{c}^{\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{c} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx + \lim_{b\to\infty} \int_{c}^{b} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty} -\frac{1}{1+e^x}\Big|_a^c + \qquad -\frac{1}{1+e^x}\Big|_c^b$$

无限区间的广义积分—例 4

例 判断广义积分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$ 的敛散性，若收敛，求其值

解

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{c} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx + \int_{c}^{\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{c} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx + \lim_{b\to\infty} \int_{c}^{b} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty} -\frac{1}{1+e^x}\Big|_a^c + \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{1+e^x}\Big|_c^b$$

无限区间的广义积分—例 4

例 判断广义积分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$ 的敛散性，若收敛，求其值

解
$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx \\
&= \int_{-\infty}^{c} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx + \int_{c}^{\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx \\
&= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{c} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx + \lim_{b\to\infty} \int_{c}^{b} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx \\
&= \lim_{a\to-\infty} -\frac{1}{1+e^x}\Big|_a^c + \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{1+e^x}\Big|_c^b \\
&= \left(-\frac{1}{1+e^c} + \frac{1}{1+e^a}\right)
\end{aligned}
$$

无限区间的广义积分—例 4

例 判断广义积分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$ 的敛散性，若收敛，求其值

解
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$$
$$= \int_{-\infty}^{c} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx + \int_{c}^{\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$$
$$= \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{c} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx + \lim_{b \to \infty} \int_{c}^{b} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$$
$$= \lim_{a \to -\infty} -\frac{1}{1+e^x}\Big|_a^c + \lim_{b \to \infty} -\frac{1}{1+e^x}\Big|_c^b$$
$$= \lim_{a \to -\infty} \left(-\frac{1}{1+e^c} + \frac{1}{1+e^a}\right)$$

无限区间的广义积分—例 4

例 判断广义积分 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx$ 的敛散性，若收敛，求其值

解
$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx\\
&=\int_{-\infty}^{c}\frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx+\int_{c}^{\infty}\frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx\\
&=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c}\frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx+\lim_{b\to\infty}\int_{c}^{b}\frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx\\
&=\lim_{a\to-\infty}-\frac{1}{1+e^x}\Big|_a^c+\lim_{b\to\infty}-\frac{1}{1+e^x}\Big|_c^b\\
&=\lim_{a\to-\infty}\left(-\frac{1}{1+e^c}+\frac{1}{1+e^a}\right)+\qquad\left(-\frac{1}{1+e^b}+\frac{1}{1+e^c}\right)
\end{aligned}$$

无限区间的广义积分—例 4

例 判断广义积分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$ 的敛散性，若收敛，求其值

解

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{c} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx + \int_{c}^{\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{c} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx + \lim_{b\to\infty} \int_{c}^{b} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty} -\frac{1}{1+e^x}\Big|_a^c + \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{1+e^x}\Big|_c^b$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \left(-\frac{1}{1+e^c} + \frac{1}{1+e^a}\right) + \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{1+e^b} + \frac{1}{1+e^c}\right)$$

无限区间的广义积分—例 4

例 判断广义积分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$ 的敛散性，若收敛，求其值

解

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{c} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx + \int_{c}^{\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{c} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx + \lim_{b\to\infty} \int_{c}^{b} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty} -\frac{1}{1+e^x}\Big|_a^c + \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{1+e^x}\Big|_c^b$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \left(-\frac{1}{1+e^c} + \frac{1}{1+e^a}\right) + \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{1+e^b} + \frac{1}{1+e^c}\right) = 1$$

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

无界函数的广义积分—引例

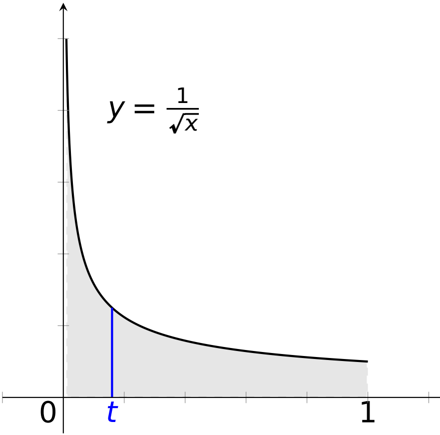
例 该如何计算 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$？

无界函数的广义积分—引例

例 该如何计算 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$?

合理的计算:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

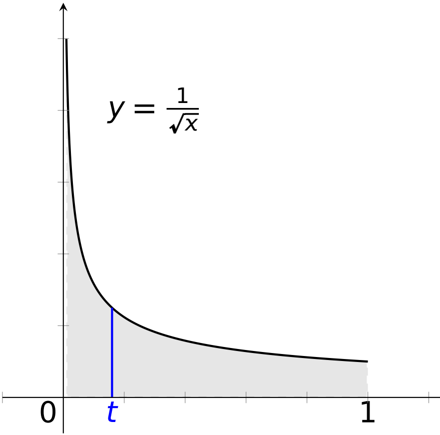


无界函数的广义积分—引例

例 该如何计算 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$？

合理的计算：

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx \qquad \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

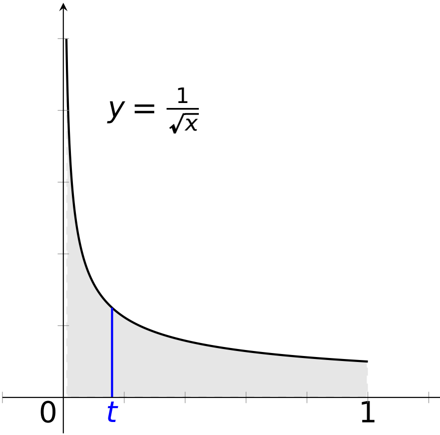


无界函数的广义积分—引例

例 该如何计算 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$?

合理的计算:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{t \to 0^+} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$



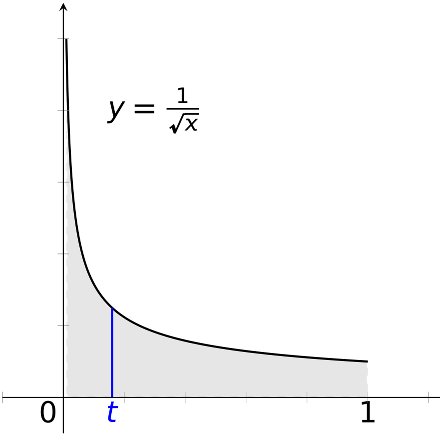
无界函数的广义积分—引例

例 该如何计算 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$?

合理的计算:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

$$= \quad 2\sqrt{x}$$

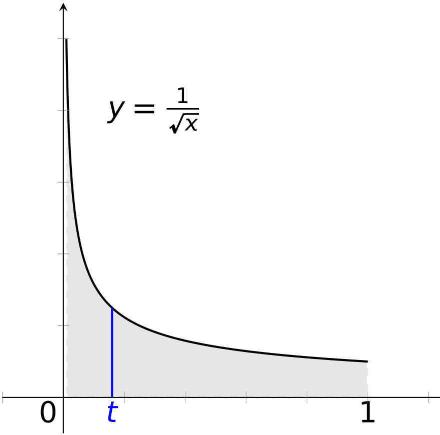


无界函数的广义积分—引例

例 该如何计算 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$？

合理的计算：

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$
$$= 2\sqrt{x}\Big|_t^1$$

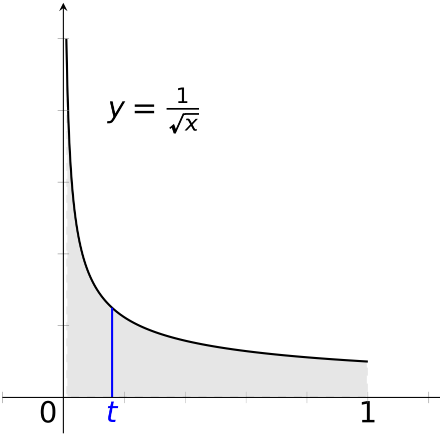


无界函数的广义积分—引例

例 该如何计算 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$？

合理的计算：

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$
$$= 2\sqrt{x}\Big|_t^1$$
$$= 2(1-\sqrt{t})$$

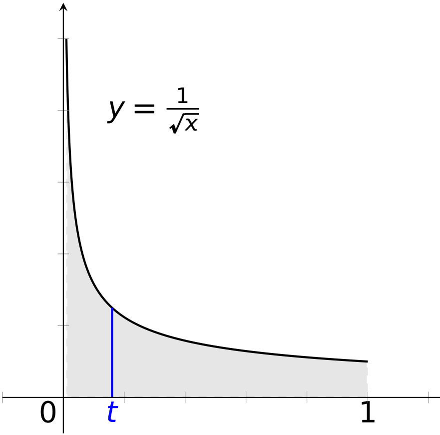


无界函数的广义积分—引例

例 该如何计算 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$?

合理的计算:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$
$$= \lim_{t\to 0^+} 2\sqrt{x}\Big|_t^1$$
$$= \lim_{t\to 0^+} 2(1-\sqrt{t})$$

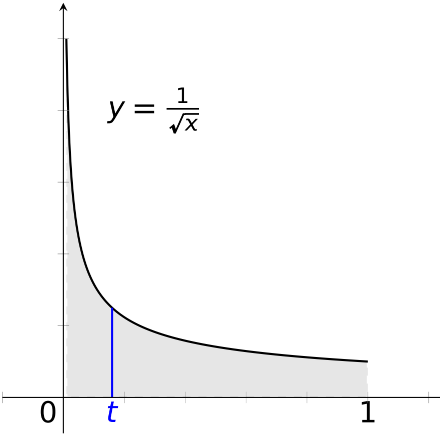


无界函数的广义积分—引例

例 该如何计算 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$？

合理的计算：

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx &= \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx \\ &= \lim_{t\to 0^+} 2\sqrt{x}\Big|_t^1 \\ &= \lim_{t\to 0^+} 2(1-\sqrt{t})\end{aligned}$$



无界函数的广义积分—引例

例 该如何计算 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$?

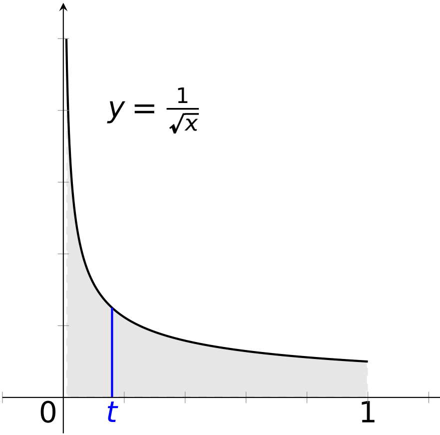
合理的计算：

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

$$= \lim_{t\to 0^+} 2\sqrt{x}\Big|_t^1$$

$$= \lim_{t\to 0^+} 2(1-\sqrt{t})$$

$$= 2$$



无界函数的广义积分—例 I

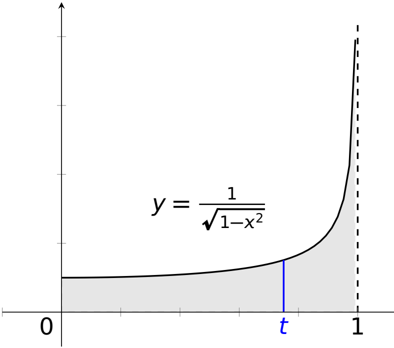
例 计算广义积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$?

无界函数的广义积分—例 I

例 计算广义积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$？

解

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

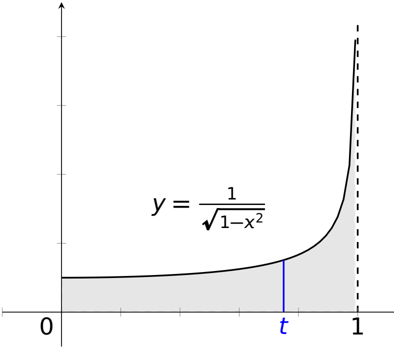


无界函数的广义积分—例 I

例 计算广义积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$？

解

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \qquad \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

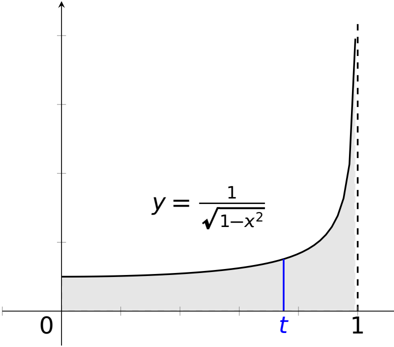


无界函数的广义积分—例 I

例 计算广义积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$？

解

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

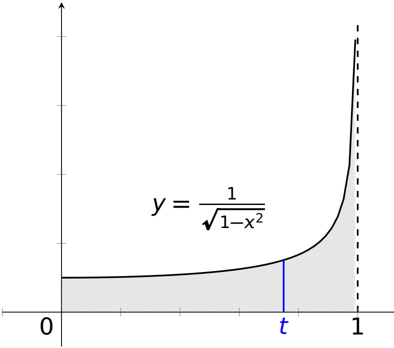


无界函数的广义积分—例 I

例 计算广义积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$?

解

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$
$$= \arcsin x$$

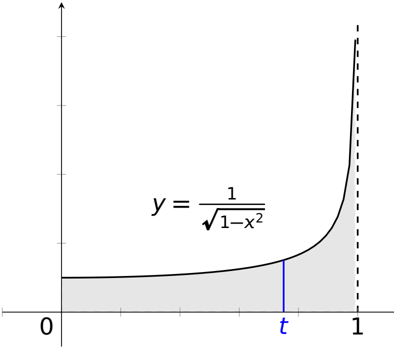


无界函数的广义积分—例 I

例 计算广义积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$?

解

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$
$$= \arcsin x\Big|_0^t$$

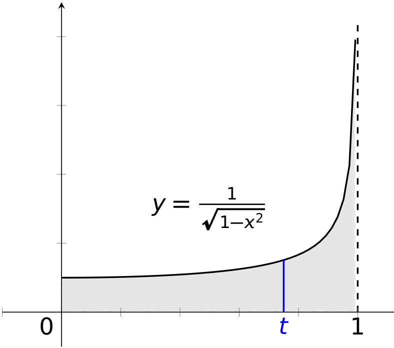


无界函数的广义积分—例 I

例 计算广义积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$?

解

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{t\to1^-}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$
$$= \arcsin x\Big|_0^t$$
$$= \arcsin t$$

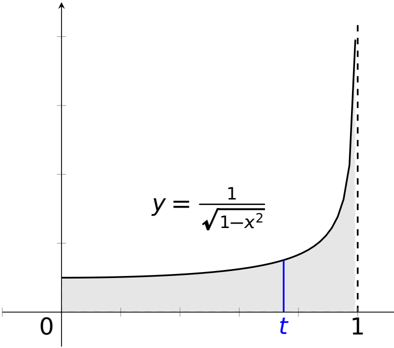


无界函数的广义积分—例 I

例 计算广义积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$?

解

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{t\to 1^-}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$
$$= \lim_{t\to 1^-} \arcsin x\Big|_0^t$$
$$= \arcsin t$$



无界函数的广义积分—例 I

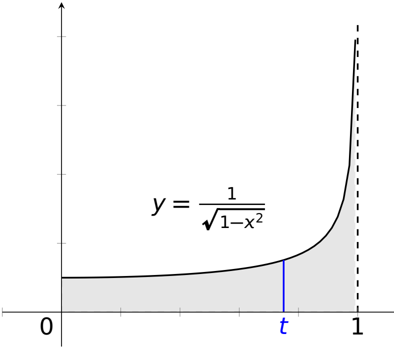
例 计算广义积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$？

解

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{t\to 1^-}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= \lim_{t\to 1^-} \arcsin x\Big|_0^t$$

$$= \lim_{t\to 1^-} \arcsin t$$

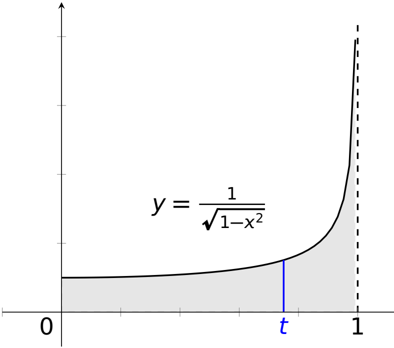


无界函数的广义积分—例 I

例 计算广义积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$？

解

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$
$$= \lim_{t\to 1^-} \arcsin x\Big|_0^t$$
$$= \lim_{t\to 1^-} \arcsin t$$
$$= \frac{\pi}{2}$$



We are here now...

1. 广义积分

2. Γ 函数

Γ 函数的定义

定义 含参变量 $r > 0$ 的广义积分

$$\Gamma(r) = \int_0^{+\infty} x^{r-1} e^{-x} dx \quad (r > 0)$$

Γ 函数的定义

定义 含参变量 $r > 0$ 的广义积分

$$\Gamma(r) = \int_0^{+\infty} x^{r-1} e^{-x} dx \quad (r > 0)$$

称为 Γ 函数（或 Gamma 函数）

Γ 函数的定义

定义 含参变量 $r > 0$ 的广义积分

$$\Gamma(r) = \int_0^{+\infty} x^{r-1} e^{-x} dx \quad (r > 0)$$

称为 Γ 函数（或 Gamma 函数）

注 1 上述广义积分对每个 $r > 0$ 都是收敛，

Γ 函数的定义

定义 含参变量 $r > 0$ 的广义积分

$$\Gamma(r) = \int_0^{+\infty} x^{r-1} e^{-x} dx \quad (r > 0)$$

称为 Γ 函数（或 Gamma 函数）

注 1 上述广义积分对每个 $r > 0$ 都是收敛，$\Gamma(r)$ 是关于 $r > 0$ 的函数

Γ 函数的定义

定义 含参变量 $r > 0$ 的广义积分

$$\Gamma(r) = \int_0^{+\infty} x^{r-1} e^{-x} dx \quad (r > 0)$$

称为 Γ 函数（或 Gamma 函数）

注 1 上述广义积分对每个 $r > 0$ 都是收敛，$\Gamma(r)$ 是关于 $r > 0$ 的函数

注 2 Γ 函数的另一种表达式：

$$\Gamma(r) = 2\int_0^{+\infty} t^{2r-1} e^{-t^2} dt \quad (r > 0)$$

Γ 函数的定义

定义 含参变量 $r>0$ 的广义积分

$$\Gamma(r)=\int_0^{+\infty} x^{r-1}e^{-x}dx \quad (r>0)$$

称为 Γ 函数（或 Gamma 函数）

注 1 上述广义积分对每个 $r>0$ 都是收敛，$\Gamma(r)$ 是关于 $r>0$ 的函数

注 2 Γ 函数的另一种表达式：

$$\Gamma(r)=2\int_0^{+\infty} t^{2r-1}e^{-t^2}dt \quad (r>0)$$

这是：令 $x=t^2$，

Γ 函数的定义

定义 含参变量 $r > 0$ 的广义积分

$$\Gamma(r) = \int_0^{+\infty} x^{r-1} e^{-x} dx \quad (r > 0)$$

称为 Γ 函数（或 Gamma 函数）

注 1 上述广义积分对每个 $r > 0$ 都是收敛，$\Gamma(r)$ 是关于 $r > 0$ 的函数

注 2 Γ 函数的另一种表达式：

$$\Gamma(r) = 2\int_0^{+\infty} t^{2r-1} e^{-t^2} dt \quad (r > 0)$$

这是：令 $x = t^2$，

$$\Gamma(r) = \int \quad t^{2(r-1)} e^{-t^2} \cdot$$

Γ 函数的定义

定义 含参变量 $r > 0$ 的广义积分

$$\Gamma(r) = \int_0^{+\infty} x^{r-1} e^{-x} dx \quad (r > 0)$$

称为 Γ 函数（或 Gamma 函数）

注 1 上述广义积分对每个 $r > 0$ 都是收敛，$\Gamma(r)$ 是关于 $r > 0$ 的函数

注 2 Γ 函数的另一种表达式：

$$\Gamma(r) = 2\int_0^{+\infty} t^{2r-1} e^{-t^2} dt \quad (r > 0)$$

这是：令 $x = t^2$，则 $dx = 2tdt$

$$\Gamma(r) = \int \qquad t^{2(r-1)} e^{-t^2} \cdot 2tdt$$

Γ 函数的定义

定义 含参变量 $r > 0$ 的广义积分

$$\Gamma(r) = \int_0^{+\infty} x^{r-1} e^{-x} dx \quad (r > 0)$$

称为 Γ 函数（或 Gamma 函数）

注 1 上述广义积分对每个 $r > 0$ 都是收敛，$\Gamma(r)$ 是关于 $r > 0$ 的函数

注 2 Γ 函数的另一种表达式：

$$\Gamma(r) = 2\int_0^{+\infty} t^{2r-1} e^{-t^2} dt \quad (r > 0)$$

这是：令 $x = t^2$，则 $dx = 2tdt$

$$\Gamma(r) = \int_0^{+\infty} t^{2(r-1)} e^{-t^2} \cdot 2tdt$$

Γ 函数的定义

定义 含参变量 $r > 0$ 的广义积分

$$\Gamma(r) = \int_0^{+\infty} x^{r-1}e^{-x}dx \quad (r > 0)$$

称为 Γ 函数（或 Gamma 函数）

注 1 上述广义积分对每个 $r > 0$ 都是收敛，$\Gamma(r)$ 是关于 $r > 0$ 的函数

注 2 Γ 函数的另一种表达式：

$$\Gamma(r) = 2\int_0^{+\infty} t^{2r-1}e^{-t^2}dt \quad (r > 0)$$

这是：令 $x = t^2$，则 $dx = 2tdt$

$$\Gamma(r) = \int_0^{+\infty} t^{2(r-1)}e^{-t^2} \cdot 2tdt = 2\int_0^{+\infty} t^{2r-1}e^{-t^2}dt$$

Γ 函数的性质

性质 1

1. $\Gamma(1) =$
2. $\Gamma(\frac{1}{2}) =$

Γ 函数的性质

性质 1

1. $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx$
2. $\Gamma(\frac{1}{2}) =$

Γ 函数的性质

性质 1

1. $\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}e^{-x}dx$
2. $\Gamma(\frac{1}{2})=\int_0^{+\infty}x^{-1/2}e^{-x}dx$

Γ 函数的性质

性质 1

1. $\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=1$
2. $\Gamma(\frac{1}{2})=\int_0^{+\infty}x^{-1/2}e^{-x}dx$

Γ 函数的性质

性质 1

1. $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$
2. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} x^{-1/2} e^{-x} dx = \sqrt{\pi}$

Γ 函数的性质

性质 1

1. $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$
2. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} x^{-1/2} e^{-x} dx = \sqrt{\pi}$

性质 2 成立递推公式：$\Gamma(r) = (r-1)\Gamma(r-1)$，$\forall r > 1$

Γ 函数的性质

性质 1

1. $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$
2. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} x^{-1/2} e^{-x} dx = \sqrt{\pi}$

性质 2 成立递推公式：$\Gamma(r) = (r-1)\Gamma(r-1)$， $\forall r > 1$

性质 3 $\Gamma(n) = (n-1)!$， $\forall n \geq 1, \in \mathbb{N}^+$

Γ 函数的性质

性质 1

1. $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$
2. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} x^{-1/2} e^{-x} dx = \sqrt{\pi}$

性质 2 成立递推公式：$\Gamma(r) = (r-1)\Gamma(r-1)$，$\forall r > 1$

性质 3 $\Gamma(n) = (n-1)!$，$\forall n \geq 1, \in \mathbb{N}^+$

这是:

$$\Gamma(n) = (n-1) \times \Gamma(n-1)$$

Γ 函数的性质

性质 1

1. $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$
2. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} x^{-1/2} e^{-x} dx = \sqrt{\pi}$

性质 2 成立递推公式：$\Gamma(r) = (r-1)\Gamma(r-1)$，$\forall r > 1$

性质 3 $\Gamma(n) = (n-1)!$，$\forall n \geq 1, \in \mathbb{N}^{+}$

这是：

$$\Gamma(n) = (n-1) \times \Gamma(n-1) = \qquad (n-2) \times \Gamma(n-2)$$

Γ 函数的性质

性质 1

1. $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$
2. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} x^{-1/2} e^{-x} dx = \sqrt{\pi}$

性质 2 成立递推公式：$\Gamma(r) = (r-1)\Gamma(r-1)$，$\forall r > 1$

性质 3 $\Gamma(n) = (n-1)!$，$\forall n \geq 1, \in \mathbb{N}^+$

这是：

$$\Gamma(n) = (n-1) \times \Gamma(n-1) = (n-1) \times (n-2) \times \Gamma(n-2)$$

Γ 函数的性质

性质 1

1. $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$
2. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} x^{-1/2} e^{-x} dx = \sqrt{\pi}$

性质 2 成立递推公式：$\Gamma(r) = (r-1)\Gamma(r-1)$，$\forall r > 1$

性质 3 $\Gamma(n) = (n-1)!$，$\forall n \geq 1, \in \mathbb{N}^+$

这是:

$$\Gamma(n) = (n-1) \times \Gamma(n-1) = (n-1) \times (n-2) \times \Gamma(n-2)$$

$$= \cdots\cdots$$

Γ 函数的性质

性质 1

1. $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1$
2. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} x^{-1/2}e^{-x}dx = \sqrt{\pi}$

性质 2 成立递推公式：$\Gamma(r) = (r-1)\Gamma(r-1)$，$\forall r > 1$

性质 3 $\Gamma(n) = (n-1)!$，$\forall n \geq 1, \in \mathbb{N}^+$

这是：

$$\Gamma(n) = (n-1)\times\Gamma(n-1) = (n-1)\times(n-2)\times\Gamma(n-2)$$

$$= \cdots\cdots = (n-1)\times(n-2)\times\cdots\times 2\times\Gamma(2)$$

Γ 函数的性质

性质 1

1. $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1$
2. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} x^{-1/2}e^{-x}dx = \sqrt{\pi}$

性质 2 成立递推公式：$\Gamma(r) = (r-1)\Gamma(r-1)$，$\forall r > 1$

性质 3 $\Gamma(n) = (n-1)!$，$\forall n \geq 1, \in \mathbb{N}^+$

这是:

$$\Gamma(n) = (n-1) \times \Gamma(n-1) = (n-1) \times (n-2) \times \Gamma(n-2)$$
$$= \cdots\cdots = (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times \Gamma(2)$$
$$= \qquad 1 \times \Gamma(1)$$

Γ 函数的性质

性质 1

1. $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$
2. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} x^{-1/2} e^{-x} dx = \sqrt{\pi}$

性质 2 成立递推公式：$\Gamma(r) = (r-1)\Gamma(r-1)$，$\forall r > 1$

性质 3 $\Gamma(n) = (n-1)!$，$\forall n \geq 1, \in \mathbb{N}^+$

这是：

$$\begin{aligned}
\Gamma(n) &= (n-1) \times \Gamma(n-1) = (n-1) \times (n-2) \times \Gamma(n-2) \\
&= \cdots\cdots = (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times \Gamma(2) \\
&= (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1 \times \Gamma(1)
\end{aligned}$$

Γ 函数的性质

性质 1

1. $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$
2. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} x^{-1/2} e^{-x} dx = \sqrt{\pi}$

性质 2 成立递推公式：$\Gamma(r) = (r-1)\Gamma(r-1)$，$\forall r > 1$

性质 3 $\Gamma(n) = (n-1)!$，$\forall n \geq 1, \in \mathbb{N}^+$

这是：

$$\begin{aligned}\Gamma(n) &= (n-1) \times \Gamma(n-1) = (n-1) \times (n-2) \times \Gamma(n-2) \\ &= \cdots\cdots = (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times \Gamma(2) \\ &= (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1 \times \Gamma(1) \\ &= (n-1)!\end{aligned}$$

关于递推公式“$\Gamma(r) = (r-1)\Gamma(r-1)$”的应用

例 计算 $\frac{\Gamma(2.2)}{\Gamma(0.2)}$，$\frac{\Gamma(3.6)}{\Gamma(1.6)}$

关于递推公式“$\Gamma(r)=(r-1)\Gamma(r-1)$”的应用

例 计算 $\frac{\Gamma(2.2)}{\Gamma(0.2)}$，$\frac{\Gamma(3.6)}{\Gamma(1.6)}$

解

$$\frac{\Gamma(2.2)}{\Gamma(0.2)} =$$

$$\frac{\Gamma(3.6)}{\Gamma(1.6)} =$$

关于递推公式“$\Gamma(r)=(r-1)\Gamma(r-1)$”的应用

例 计算 $\frac{\Gamma(2.2)}{\Gamma(0.2)}$，$\frac{\Gamma(3.6)}{\Gamma(1.6)}$

解

$$\frac{\Gamma(2.2)}{\Gamma(0.2)}=\frac{1.2\times\Gamma(1.2)}{\Gamma(0.2)}$$

$$\frac{\Gamma(3.6)}{\Gamma(1.6)}=$$

关于递推公式“$\Gamma(r)=(r-1)\Gamma(r-1)$”的应用

例 计算 $\frac{\Gamma(2.2)}{\Gamma(0.2)}$，$\frac{\Gamma(3.6)}{\Gamma(1.6)}$

解

$$\frac{\Gamma(2.2)}{\Gamma(0.2)}=\frac{1.2\times\Gamma(1.2)}{\Gamma(0.2)}=\frac{1.2\times 0.2\times\Gamma(0.2)}{\Gamma(0.2)}$$

$$\frac{\Gamma(3.6)}{\Gamma(1.6)}=$$

例 计算 $\frac{\Gamma(2.2)}{\Gamma(0.2)}$，$\frac{\Gamma(3.6)}{\Gamma(1.6)}$

解

$$\frac{\Gamma(2.2)}{\Gamma(0.2)}=\frac{1.2\times\Gamma(1.2)}{\Gamma(0.2)}=\frac{1.2\times 0.2\times\Gamma(0.2)}{\Gamma(0.2)}=0.24$$

$$\frac{\Gamma(3.6)}{\Gamma(1.6)}=$$

关于递推公式“$\Gamma(r) = (r-1)\Gamma(r-1)$”的应用

例 计算 $\frac{\Gamma(2.2)}{\Gamma(0.2)}$，$\frac{\Gamma(3.6)}{\Gamma(1.6)}$

解

$$\frac{\Gamma(2.2)}{\Gamma(0.2)} = \frac{1.2 \times \Gamma(1.2)}{\Gamma(0.2)} = \frac{1.2 \times 0.2 \times \Gamma(0.2)}{\Gamma(0.2)} = 0.24$$

$$\frac{\Gamma(3.6)}{\Gamma(1.6)} = \frac{2.6 \times \Gamma(2.6)}{\Gamma(1.6)}$$

关于递推公式"$\Gamma(r)=(r-1)\Gamma(r-1)$"的应用

例 计算 $\frac{\Gamma(2.2)}{\Gamma(0.2)}$，$\frac{\Gamma(3.6)}{\Gamma(1.6)}$

解

$$\frac{\Gamma(2.2)}{\Gamma(0.2)}=\frac{1.2\times\Gamma(1.2)}{\Gamma(0.2)}=\frac{1.2\times 0.2\times\Gamma(0.2)}{\Gamma(0.2)}=0.24$$

$$\frac{\Gamma(3.6)}{\Gamma(1.6)}=\frac{2.6\times\Gamma(2.6)}{\Gamma(1.6)}=\frac{2.6\times 1.6\times\Gamma(1.6)}{\Gamma(1.6)}$$

关于递推公式 “$\Gamma(r)=(r-1)\Gamma(r-1)$” 的应用

例 计算 $\frac{\Gamma(2.2)}{\Gamma(0.2)}$，$\frac{\Gamma(3.6)}{\Gamma(1.6)}$

解

$$\frac{\Gamma(2.2)}{\Gamma(0.2)}=\frac{1.2\times\Gamma(1.2)}{\Gamma(0.2)}=\frac{1.2\times 0.2\times\Gamma(0.2)}{\Gamma(0.2)}=0.24$$

$$\frac{\Gamma(3.6)}{\Gamma(1.6)}=\frac{2.6\times\Gamma(2.6)}{\Gamma(1.6)}=\frac{2.6\times 1.6\times\Gamma(1.6)}{\Gamma(1.6)}$$

$$=2.6\times 1.6$$

关于递推公式“$\Gamma(r)=(r-1)\Gamma(r-1)$”的应用

例 计算 $\frac{\Gamma(2.2)}{\Gamma(0.2)}$，$\frac{\Gamma(3.6)}{\Gamma(1.6)}$

解

$$\frac{\Gamma(2.2)}{\Gamma(0.2)}=\frac{1.2\times\Gamma(1.2)}{\Gamma(0.2)}=\frac{1.2\times 0.2\times\Gamma(0.2)}{\Gamma(0.2)}=0.24$$

$$\frac{\Gamma(3.6)}{\Gamma(1.6)}=\frac{2.6\times\Gamma(2.6)}{\Gamma(1.6)}=\frac{2.6\times 1.6\times\Gamma(1.6)}{\Gamma(1.6)}$$

$$=2.6\times 1.6=4.16$$

关于公式 “$\Gamma(n)=(n-1)!$，$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$” 的应用

例 计算广义积分 $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} dx$，$\int_0^{+\infty} x^{2.5} e^{-x} dx$

关于公式“$\Gamma(n)=(n-1)!$，$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$”的应用

例 计算广义积分 $\int_0^{+\infty} x^3e^{-x}dx$，$\int_0^{+\infty} x^{2.5}e^{-x}dx$

解
$$\int_0^{+\infty} x^3e^{-x}dx =$$

$$\int_0^{+\infty} x^{2.5}e^{-x}dx =$$

关于公式“$\Gamma(n)=(n-1)!$，$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$”的应用

例 计算广义积分 $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} dx$，$\int_0^{+\infty} x^{2.5} e^{-x} dx$

解

$$\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} x^{4-1} e^{-x} dx$$

$$\int_0^{+\infty} x^{2.5} e^{-x} dx =$$

例 计算广义积分 $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} dx$，$\int_0^{+\infty} x^{2.5} e^{-x} dx$

解

$$\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} x^{4-1} e^{-x} dx = \Gamma(4)$$

$$\int_0^{+\infty} x^{2.5} e^{-x} dx =$$

关于公式 “$\Gamma(n) = (n-1)!$，$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$” 的应用

例 计算广义积分 $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} dx$，$\int_0^{+\infty} x^{2.5} e^{-x} dx$

解

$$\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} x^{4-1} e^{-x} dx = \Gamma(4) = 3!$$

$$\int_0^{+\infty} x^{2.5} e^{-x} dx =$$

例 计算广义积分 $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} dx$，$\int_0^{+\infty} x^{2.5} e^{-x} dx$

解

$$\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} x^{4-1} e^{-x} dx = \Gamma(4) = 3! = 6$$

$$\int_0^{+\infty} x^{2.5} e^{-x} dx =$$

关于公式 "$\Gamma(n) = (n-1)!$，$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$" 的应用

例 计算广义积分 $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} dx$，$\int_0^{+\infty} x^{2.5} e^{-x} dx$

解

$$\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} x^{4-1} e^{-x} dx = \Gamma(4) = 3! = 6$$

$$\int_0^{+\infty} x^{2.5} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} x^{3.5-1} e^{-x} dx$$

关于公式 “$\Gamma(n)=(n-1)!$，$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$” 的应用

例 计算广义积分 $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} dx$，$\int_0^{+\infty} x^{2.5} e^{-x} dx$

解

$$\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} x^{4-1} e^{-x} dx = \Gamma(4) = 3! = 6$$

$$\int_0^{+\infty} x^{2.5} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} x^{3.5-1} e^{-x} dx$$

$$= \Gamma(3.5)$$

关于公式 “$\Gamma(n)=(n-1)!$，$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$” 的应用

例 计算广义积分 $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} dx$，$\int_0^{+\infty} x^{2.5} e^{-x} dx$

解

$$\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} x^{4-1} e^{-x} dx = \Gamma(4) = 3! = 6$$

$$\int_0^{+\infty} x^{2.5} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} x^{3.5-1} e^{-x} dx$$

$$= \Gamma(3.5) = 2.5 \times \Gamma(2.5)$$

关于公式“$\Gamma(n)=(n-1)!$，$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$”的应用

例 计算广义积分 $\int_0^{+\infty} x^3e^{-x}dx$，$\int_0^{+\infty} x^{2.5}e^{-x}dx$

解

$$\int_0^{+\infty} x^3e^{-x}dx=\int_0^{+\infty} x^{4-1}e^{-x}dx=\Gamma(4)=3!=6$$

$$\int_0^{+\infty} x^{2.5}e^{-x}dx=\int_0^{+\infty} x^{3.5-1}e^{-x}dx$$

$$=\Gamma(3.5)=2.5\times\Gamma(2.5)$$

$$=2.5\times1.5\times\Gamma(1.5)$$

关于公式“$\Gamma(n)=(n-1)!$，$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$”的应用

例 计算广义积分 $\int_0^{+\infty} x^3e^{-x}dx$，$\int_0^{+\infty} x^{2.5}e^{-x}dx$

解

$$\int_0^{+\infty} x^3e^{-x}dx=\int_0^{+\infty} x^{4-1}e^{-x}dx=\Gamma(4)=3!=6$$

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x^{2.5}e^{-x}dx&=\int_0^{+\infty} x^{3.5-1}e^{-x}dx\\&=\Gamma(3.5)=2.5\times\Gamma(2.5)\\&=2.5\times1.5\times\Gamma(1.5)\\&=2.5\times1.5\times0.5\times\Gamma(0.5)\end{aligned}$$

关于公式“$\Gamma(n) = (n-1)!$，$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$”的应用

例 计算广义积分 $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} dx$，$\int_0^{+\infty} x^{2.5} e^{-x} dx$

解

$$\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} x^{4-1} e^{-x} dx = \Gamma(4) = 3! = 6$$

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x^{2.5} e^{-x} dx &= \int_0^{+\infty} x^{3.5-1} e^{-x} dx \\ &= \Gamma(3.5) = 2.5 \times \Gamma(2.5) \\ &= 2.5 \times 1.5 \times \Gamma(1.5) \\ &= 2.5 \times 1.5 \times 0.5 \times \Gamma(0.5) \\ &= 2.5 \times 1.5 \times 0.5 \times \sqrt{\pi}\end{aligned}$$

n-维单位球体的体积

设 V_n 表示 $\mathbb{R}^n$ 中单位球体

$$\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 < 1\}$$

的体积，则

$$V_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$$

n-维单位球体的体积

设 V_n 表示 $\mathbb{R}^n$ 中单位球体

$$\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 < 1\}$$

的体积，则

$$V_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$$

- 1-维单位球体，
- 2-维单位球体，
- 3-维单位球体，

n-维单位球体的体积

设 V_n 表示 $\mathbb{R}^n$ 中单位球体

$$\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 < 1\}$$

的体积，则

$$V_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$$

- 1-维单位球体，即为直线上的区间 $(-1, 1)$，
- 2-维单位球体，
- 3-维单位球体，

n-维单位球体的体积

设 V_n 表示 $\mathbb{R}^n$ 中单位球体

$$\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 < 1\}$$

的体积，则

$$V_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$$

- 1-维单位球体，即为直线上的区间 $(-1, 1)$，$V_1 = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}+1)} =$
- 2-维单位球体，
- 3-维单位球体，

n-维单位球体的体积

设 V_n 表示 $\mathbb{R}^n$ 中单位球体

$$\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 < 1\}$$

的体积，则

$$V_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$$

- 1-维单位球体，即为直线上的区间 $(-1, 1)$，$V_1 = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}+1)} = 2$
- 2-维单位球体，
- 3-维单位球体，

n-维单位球体的体积

设 V_n 表示 $\mathbb{R}^n$ 中单位球体

$$\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 < 1\}$$

的体积，则

$$V_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$$

- 1-维单位球体，即为直线上的区间 $(-1, 1)$，$V_1 = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}+1)} = 2$
- 2-维单位球体，即为平面上的单位圆盘，
- 3-维单位球体，

n-维单位球体的体积

设 V_n 表示 $\mathbb{R}^n$ 中单位球体

$$\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 < 1\}$$

的体积，则

$$V_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$$

- 1-维单位球体，即为直线上的区间 $(-1, 1)$，$V_1 = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}+1)} = 2$
- 2-维单位球体，即为平面上的单位圆盘，$V_2 = \frac{\pi^{\frac{2}{2}}}{\Gamma(\frac{2}{2}+1)} =$
- 3-维单位球体，

n-维单位球体的体积

设 V_n 表示 $\mathbb{R}^n$ 中单位球体

$$\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 < 1\}$$

的体积，则

$$V_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$$

- 1-维单位球体，即为直线上的区间 $(-1, 1)$，$V_1 = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}+1)} = 2$
- 2-维单位球体，即为平面上的单位圆盘，$V_2 = \frac{\pi^{\frac{2}{2}}}{\Gamma(\frac{2}{2}+1)} = \pi$
- 3-维单位球体，

n-维单位球体的体积

设 V_n 表示 $\mathbb{R}^n$ 中单位球体

$$\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 < 1\}$$

的体积，则

$$V_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$$

- 1-维单位球体，即为直线上的区间 $(-1, 1)$，$V_1 = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}+1)} = 2$
- 2-维单位球体，即为平面上的单位圆盘，$V_2 = \frac{\pi^{\frac{2}{2}}}{\Gamma(\frac{2}{2}+1)} = \pi$
- 3-维单位球体，即为空间中的单位球体，

n-维单位球体的体积

设 V_n 表示 $\mathbb{R}^n$ 中单位球体

$$\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 < 1\}$$

的体积，则

$$V_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$$

- 1-维单位球体，即为直线上的区间 $(-1, 1)$，$V_1 = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}+1)} = 2$
- 2-维单位球体，即为平面上的单位圆盘，$V_2 = \frac{\pi^{\frac{2}{2}}}{\Gamma(\frac{2}{2}+1)} = \pi$
- 3-维单位球体，即为空间中的单位球体，$V_3 = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2}+1)} =$

n-维单位球体的体积

设 V_n 表示 $\mathbb{R}^n$ 中单位球体

$$\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 < 1\}$$

的体积，则

$$V_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$$

- 1-维单位球体，即为直线上的区间 $(-1, 1)$，$V_1 = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}+1)} = 2$
- 2-维单位球体，即为平面上的单位圆盘，$V_2 = \frac{\pi^{\frac{2}{2}}}{\Gamma(\frac{2}{2}+1)} = \pi$
- 3-维单位球体，即为空间中的单位球体，$V_3 = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2}+1)} = \frac{4}{3}\pi$