第 9 章 f：多元函数微分学的几何应用

数学系　　梁卓滨
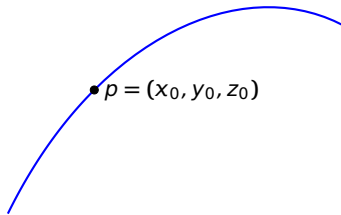
2018-2019 学年 II

1. 曲线的切线、法平面

2. 曲面的切平面、法线

曲线的切线方程、法平面方程

$p = (x_0, y_0, z_0)$

- 曲线的切线方程

曲线的切线方程、法平面方程

$p = (x_0, y_0, z_0)$

- 曲线的切线方程
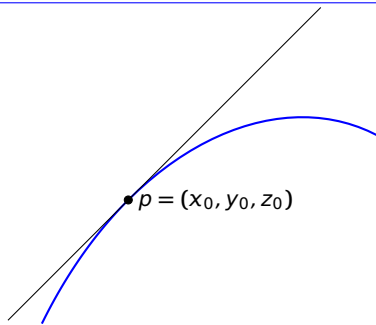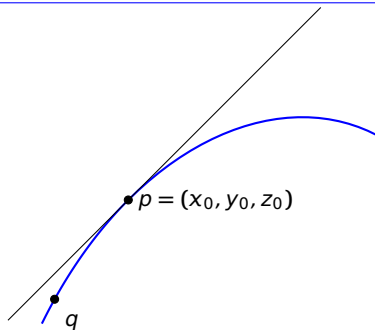
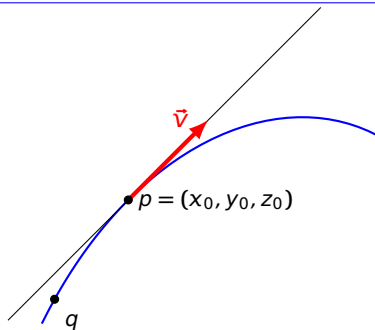# 曲线的切线方程、法平面方程

$p = (x_0, y_0, z_0)$

q

- 曲线的切线方程

曲线的切线方程、法平面方程

- 曲线的切线方程
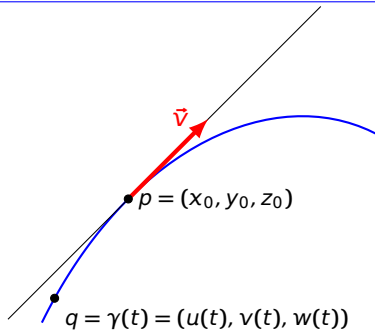
曲线的切线方程、法平面方程

- 曲线的切线方程

曲线的切线方程、法平面方程

$p = (x_0, y_0, z_0) = \gamma(t_0) = (u(t_0), v(t_0), w(t_0))$

$q = \gamma(t) = (u(t), v(t), w(t))$

- 曲线的切线方程

曲线的切线方程、法平面方程

$\gamma'(t_0) = \vec{v}$

$p = (x_0, y_0, z_0) = \gamma(t_0) = (u(t_0), v(t_0), w(t_0))$

$q = \gamma(t) = (u(t), v(t), w(t))$

- 曲线的切线方程

曲线的切线方程、法平面方程

$(u'(t_0), v'(t_0), w'(t_0)) = \gamma'(t_0) = \vec{v}$

$p = (x_0, y_0, z_0) = \gamma(t_0) = (u(t_0), v(t_0), w(t_0))$

$q = \gamma(t) = (u(t), v(t), w(t))$

- 曲线的切线方程

曲线的切线方程、法平面方程

$(u'(t_0), v'(t_0), w'(t_0)) = \gamma'(t_0) = \vec{v}$

$p = (x_0, y_0, z_0) = \gamma(t_0) = (u(t_0), v(t_0), w(t_0))$

$q = \gamma(t) = (u(t), v(t), w(t))$
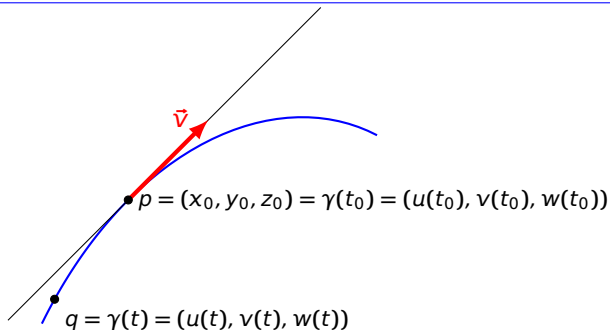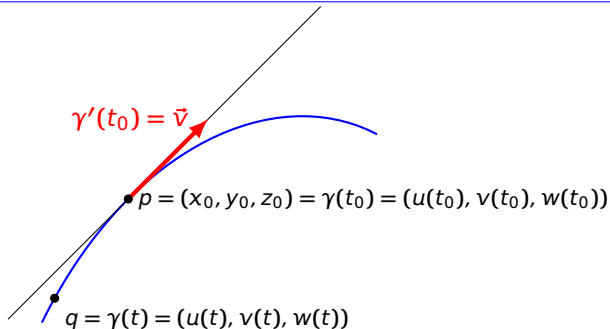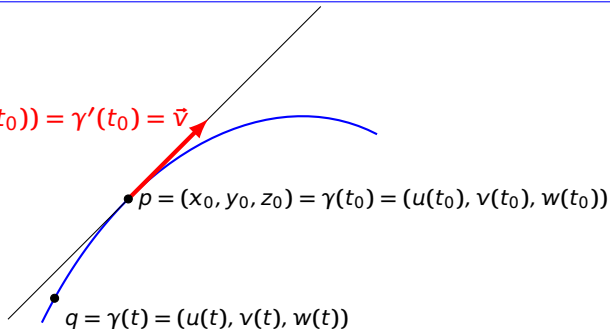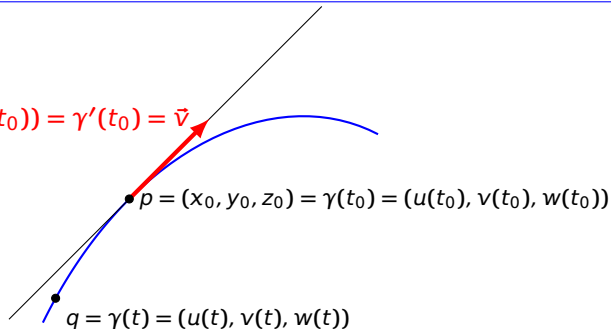
- 曲线的切线方程 $\quad \dfrac{x - x_0}{u'(t_0)} = \dfrac{y - y_0}{v'(t_0)} = \dfrac{z - z_0}{w'(t_0)}$

曲线的切线方程、法平面方程

$(u'(t_0), v'(t_0), w'(t_0)) = \gamma'(t_0) = \vec{v}$

$p = (x_0, y_0, z_0) = \gamma(t_0) = (u(t_0), v(t_0), w(t_0))$

$q = \gamma(t) = (u(t), v(t), w(t))$
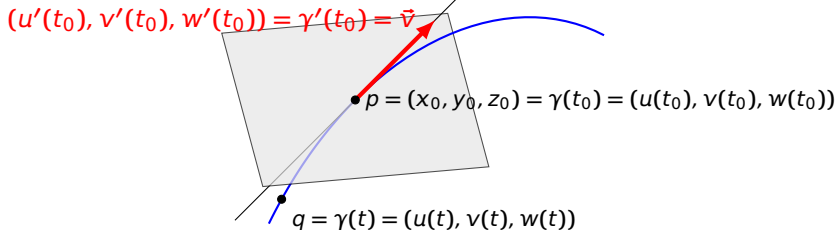
- 曲线的切线方程 $\quad \dfrac{x - x_0}{u'(t_0)} = \dfrac{y - y_0}{v'(t_0)} = \dfrac{z - z_0}{w'(t_0)}$

- 曲线的法平面方程

曲线的切线方程、法平面方程

$(u'(t_0), v'(t_0), w'(t_0)) = \gamma'(t_0) = \vec{v}$

$p = (x_0, y_0, z_0) = \gamma(t_0) = (u(t_0), v(t_0), w(t_0))$

$q = \gamma(t) = (u(t), v(t), w(t))$
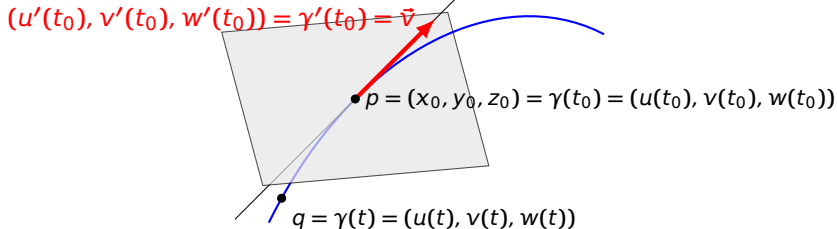
- 曲线的切线方程 $\dfrac{x - x_0}{u'(t_0)} = \dfrac{y - y_0}{v'(t_0)} = \dfrac{z - z_0}{w'(t_0)}$

- 曲线的法平面方程

$$u'(t_0)(x - x_0) + v'(t_0)(y - y_0) + w'(t_0)(z - z_0) = 0$$

例 求曲线 $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$ 在点 $(1, 1, 1)$（$t = 1$）处的切线及法平面的方程。

例 求曲线 $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$ 在点 $(1, 1, 1)$（$t = 1$）处的切线及法平面的方程。

解
$$\gamma'(t) = (\qquad\qquad)$$

例 求曲线 $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$ 在点 $(1, 1, 1)$（$t = 1$）处的切线及法平面的方程。

解
$$\gamma'(t) = (1, 2t, 3t^2)$$

例 求曲线 $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$ 在点 $(1, 1, 1)$（$t = 1$）处的切线及法平面的方程。

解

$$\gamma'(t) = (1, 2t, 3t^2)$$

$$\gamma'(1) = (1, 2, 3)$$

例 求曲线 $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$ 在点 $(1, 1, 1)$（$t = 1$）处的切线及法平面的方程。

解
$$\gamma'(t) = (1, 2t, 3t^2)$$
$$\gamma'(1) = (1, 2, 3)$$

- 线的切线方程

- 曲线的法平面方程

例 求曲线 $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$ 在点 $(1, 1, 1)$（$t = 1$）处的切线及法平面的方程。

解
$$\gamma'(t) = (1, 2t, 3t^2)$$
$$\gamma'(1) = (1, 2, 3)$$

- 线的切线方程
$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$$

- 曲线的法平面方程

例 求曲线 $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$ 在点 $(1, 1, 1)$（$t = 1$）处的切线及法平面的方程。

解
$$\gamma'(t) = (1, 2t, 3t^2)$$
$$\gamma'(1) = (1, 2, 3)$$

- 线的切线方程
$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$$

- 曲线的法平面方程
$$1 \cdot (x-1) + 2 \cdot (y-1) + 3 \cdot (z-1) = 0$$

例 求曲线 $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$ 在点 $(1, 1, 1)$（$t = 1$）处的切线及法平面的方程。

解
$$\gamma'(t) = (1, 2t, 3t^2)$$
$$\gamma'(1) = (1, 2, 3)$$

- 线的切线方程
$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$$
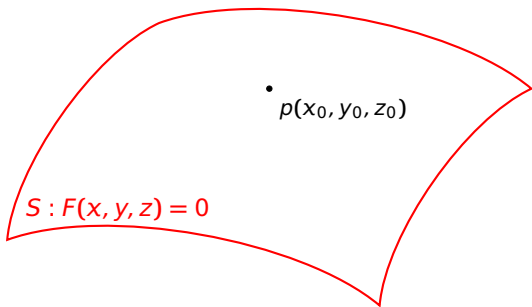
- 曲线的法平面方程
$$1 \cdot (x-1) + 2 \cdot (y-1) + 3 \cdot (z-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x + 2y + 3z - 6 = 0$$
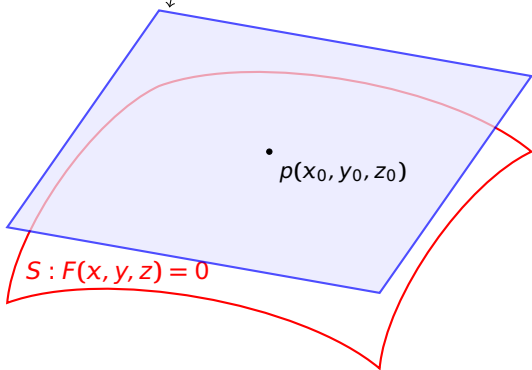
We are here now...

1. 曲线的切线、法平面

2. 曲面的切平面、法线

切平面

切平面

切平面

$p(x_0, y_0, z_0)$

$S : F(x, y, z) = 0$

切平面

切平面

法线

$p(x_0, y_0, z_0)$

$S : F(x, y, z) = 0$
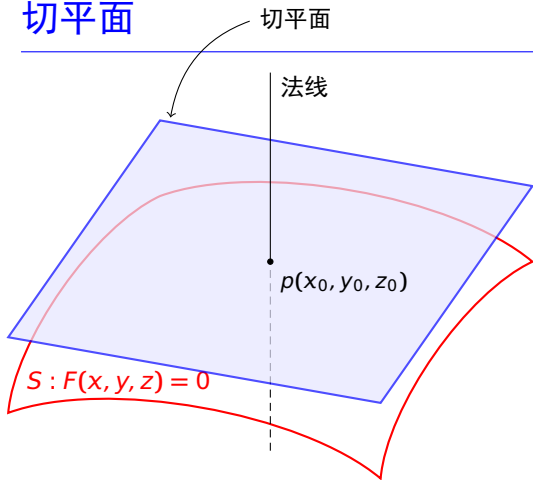
切平面
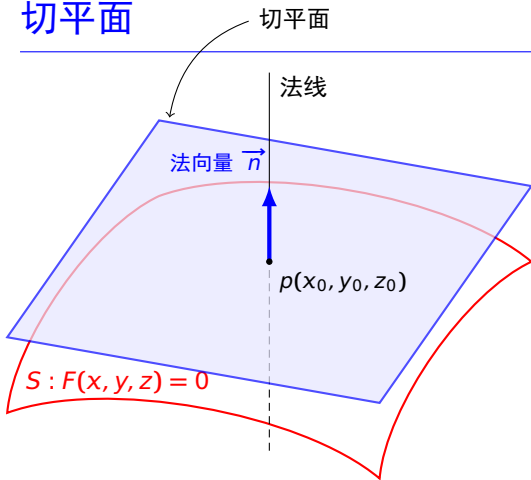
切平面
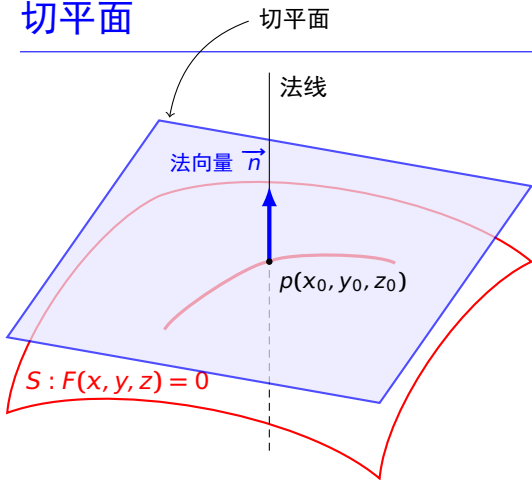
切平面

切平面

切平面
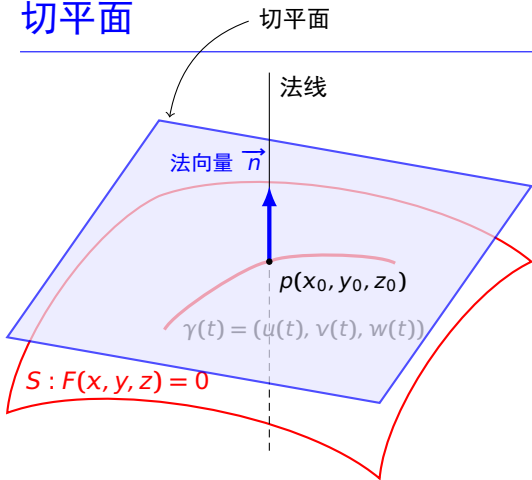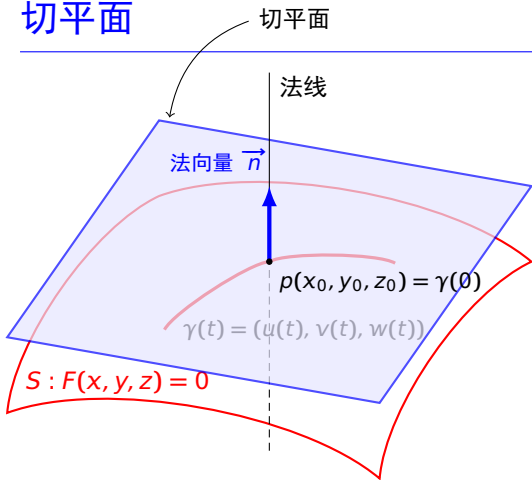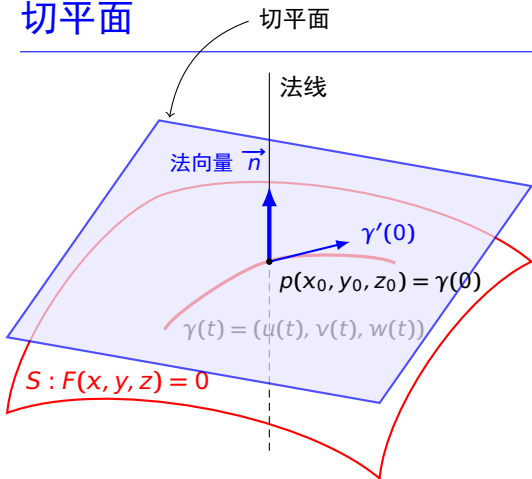
切平面
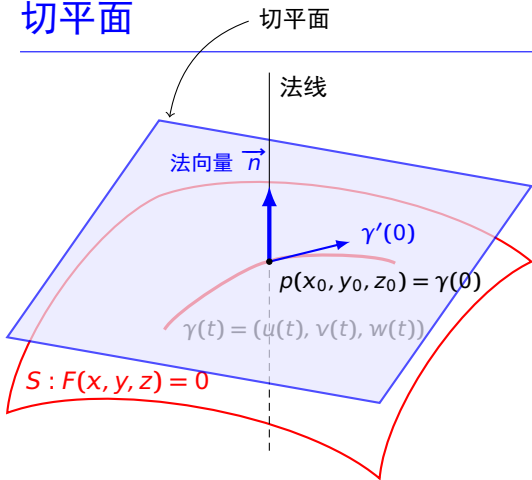
$$0 \equiv F(u(t), v(t), w(t))$$

切平面

$$0 \equiv F(u(t), v(t), w(t)) \Rightarrow 0 = \frac{d}{dt}F(u(t), v(t), w(t))\bigg|_{t=0}$$

切平面
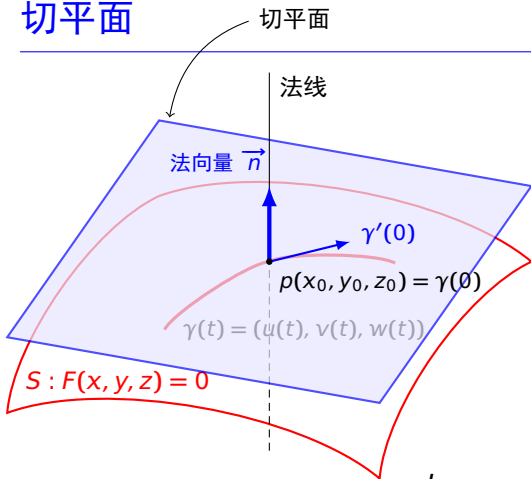
$$0 \equiv F(u(t), v(t), w(t)) \Rightarrow 0 = \frac{d}{dt}F(u(t), v(t), w(t))\Big|_{t=0}$$

$$= F_x \quad \cdot u' \quad + F_y \quad \cdot v' \quad + F_z \quad \cdot w'$$

切平面
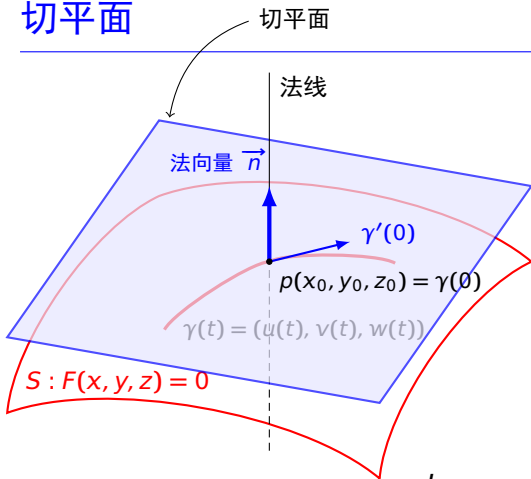
$$0 \equiv F(u(t), v(t), w(t)) \Rightarrow 0 = \frac{d}{dt}F(u(t), v(t), w(t))\Big|_{t=0}$$

$$= F_x(p) \cdot u' \quad + F_y(p) \cdot v' \quad + F_z(p) \cdot w'$$

切平面

$$0 \equiv F(u(t), v(t), w(t)) \Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} F(u(t), v(t), w(t)) \Big|_{t=0}$$

$$= F_x(p) \cdot u'(0) + F_y(p) \cdot v'(0) + F_z(p) \cdot w'(0)$$

切平面

$$0 \equiv F(u(t), v(t), w(t)) \Rightarrow 0 = \frac{d}{dt}F(u(t), v(t), w(t))\Big|_{t=0}$$

$$= F_x(p) \cdot u'(0) + F_y(p) \cdot v'(0) + F_z(p) \cdot w'(0)$$

$$= \nabla F(p) \cdot \gamma'(0)$$

切平面

$$0 \equiv F(u(t), v(t), w(t)) \Rightarrow 0 = \frac{d}{dt}F(u(t), v(t), w(t))\Big|_{t=0}$$

$$= F_x(p) \cdot u'(0) + F_y(p) \cdot v'(0) + F_z(p) \cdot w'(0)$$

$$= \nabla F(p) \cdot \gamma'(0)$$

切平面

法线

法向量 $\vec{n} = \nabla F(p)$

$\gamma'(0)$

$p(x_0, y_0, z_0) = \gamma(0)$

$\gamma(t) = (u(t), v(t), w(t))$

$S : F(x, y, z) = 0$

$$0 \equiv F(u(t), v(t), w(t)) \Rightarrow 0 = \frac{d}{dt}F(u(t), v(t), w(t))\Big|_{t=0}$$

$$= F_x(p) \cdot u'(0) + F_y(p) \cdot v'(0) + F_z(p) \cdot w'(0)$$

$$= \nabla F(p) \cdot \gamma'(0)$$

切平面

切平面 $F_x(p)(x - x_0) + F_y(p)(y - y_0) + F_z(p)(z - z_0) = 0$

法线 $\dfrac{x - x_0}{F_x(p)} = \dfrac{y - y_0}{F_y(p)} = \dfrac{z - z_0}{F_z(p)}$

法向量 $\overrightarrow{n} = \nabla F(p)$

$\gamma'(0)$

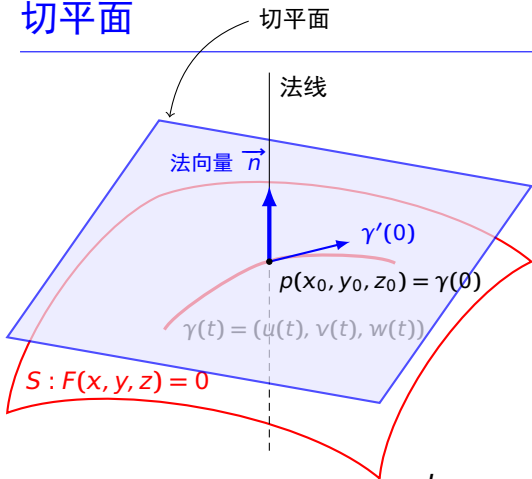$p(x_0, y_0, z_0) = \gamma(0)$
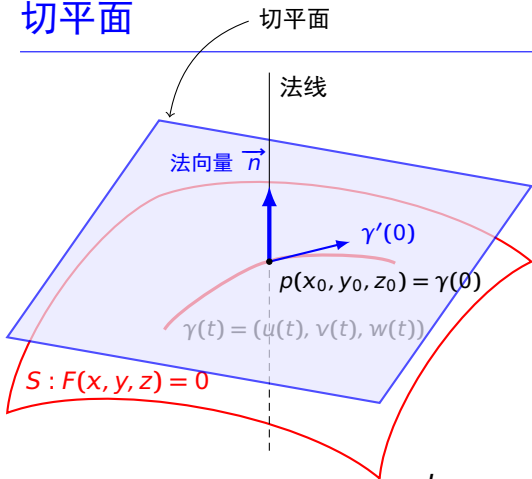
$\gamma(t) = (u(t), v(t), w(t))$

$S : F(x, y, z) = 0$

$$0 \equiv F(u(t), v(t), w(t)) \Rightarrow 0 = \left. \frac{d}{dt} F(u(t), v(t), w(t)) \right|_{t=0}$$

$$= F_x(p) \cdot u'(0) + F_y(p) \cdot v'(0) + F_z(p) \cdot w'(0)$$

$$= \nabla F(p) \cdot \gamma'(0)$$

切平面

切平面 $F_x(p)(x-x_0) + F_y(p)(y-y_0) + F_z(p)(z-z_0) = 0$

法线 $\dfrac{x-x_0}{F_x(p)} = \dfrac{y-y_0}{F_y(p)} = \dfrac{z-z_0}{F_z(p)}$

法向量 $\vec{n} = \nabla F(p)$

$\gamma'(0)$

$p(x_0, y_0, z_0) = \gamma(0)$

$\gamma(t) = (u(t), v(t), w(t))$

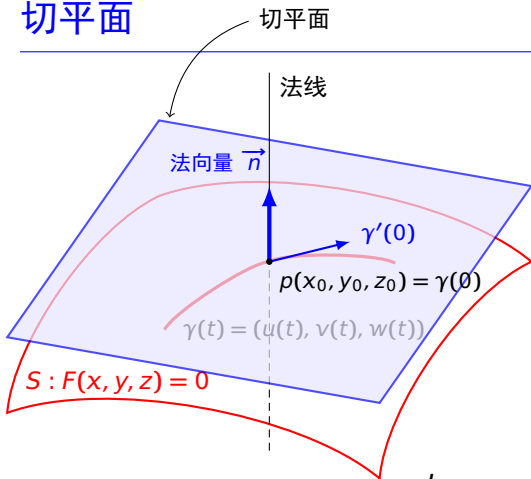$S : F(x, y, z) = 0$

例 求曲面 $3xy + z^2 = 4$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切平面及法线的方程。
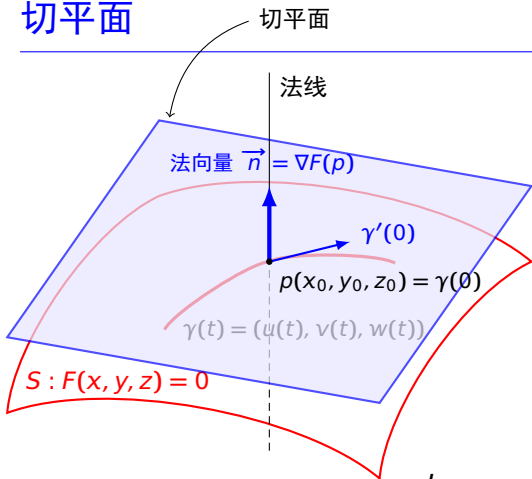
$$0 \equiv F(u(t), v(t), w(t)) \Rightarrow 0 = \left.\frac{d}{dt}F(u(t), v(t), w(t))\right|_{t=0}$$

$$= F_x(p) \cdot u'(0) + F_y(p) \cdot v'(0) + F_z(p) \cdot w'(0)$$

$$= \nabla F(p) \cdot \gamma'(0)$$

例 求曲面 $3xy + z^2 = 4$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切平面及法线的方程。

例 求曲面 $3xy + z^2 = 4$ 在点 $(1,\ 1,\ 1)$ 处的切平面及法线的方程。

解
$$F(x,\ y,\ z) = 3xy + z^2 - 4,$$

例 求曲面 $3xy + z^2 = 4$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切平面及法线的方程。

解
$$F(x, y, z) = 3xy + z^2 - 4,$$
$$\overrightarrow{n} = \nabla F = (F_x, F_y, F_z)$$

例 求曲面 $3xy + z^2 = 4$ 在点 $(1,\ 1,\ 1)$ 处的切平面及法线的方程。

解
$$F(x,\ y,\ z) = 3xy + z^2 - 4,$$
$$\vec{n} = \nabla F = (F_x,\ F_y,\ F_z) = (3y,\ 3x,\ 2z),$$

例 求曲面 $3xy + z^2 = 4$ 在点 $(1,\ 1,\ 1)$ 处的切平面及法线的方程。

解
$$F(x,\ y,\ z) = 3xy + z^2 - 4,$$

$$\overrightarrow{n} = \nabla F = (F_x,\ F_y,\ F_z) = (3y,\ 3x,\ 2z),$$

$$\overrightarrow{n}\,|_{(1,\ 1,\ 1)} = (3,\ 3,\ 2).$$

例 求曲面 $3xy + z^2 = 4$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切平面及法线的方程。

解
$$F(x, y, z) = 3xy + z^2 - 4,$$

$$\overrightarrow{n} = \nabla F = (F_x, F_y, F_z) = (3y, 3x, 2z),$$

$$\overrightarrow{n}|_{(1, 1, 1)} = (3, 3, 2).$$

所以在点处的切平面方程为

法线方程为

例 求曲面 $3xy + z^2 = 4$ 在点 $(1,\ 1,\ 1)$ 处的切平面及法线的方程。

解
$$F(x,\ y,\ z) = 3xy + z^2 - 4,$$
$$\overrightarrow{n} = \nabla F = (F_x,\ F_y,\ F_z) = (3y,\ 3x,\ 2z),$$
$$\overrightarrow{n}\big|_{(1,\ 1,\ 1)} = (3,\ 3,\ 2).$$

所以在点处的切平面方程为

$$3(x-1) + 3(y-1) + 2(z-1) = 0$$

法线方程为

例 求曲面 $3xy + z^2 = 4$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切平面及法线的方程。

解
$$F(x, y, z) = 3xy + z^2 - 4,$$

$$\vec{n} = \nabla F = (F_x, F_y, F_z) = (3y, 3x, 2z),$$

$$\vec{n}\,|_{(1, 1, 1)} = (3, 3, 2).$$

所以在点处的切平面方程为

$$3(x - 1) + 3(y - 1) + 2(z - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x + 3y + 2z - 8 = 0$$

法线方程为

例 求曲面 $3xy + z^2 = 4$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切平面及法线的方程。

解
$$F(x, y, z) = 3xy + z^2 - 4,$$
$$\vec{n} = \nabla F = (F_x, F_y, F_z) = (3y, 3x, 2z),$$
$$\vec{n}\,|_{(1,\,1,\,1)} = (3, 3, 2).$$

所以在点处的切平面方程为
$$3(x - 1) + 3(y - 1) + 2(z - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x + 3y + 2z - 8 = 0$$

法线方程为
$$\frac{x - 1}{3} = \frac{y - 1}{3} = \frac{z - 1}{2}$$

二元函数图形的切平面

$S_2 : G(x, y, z) = 0$

γ

p

$S_1 : F(x, y, z) = 0$

T

$S_2: G(x, y, z) = 0$

γ

$\nabla F(p)$

$\nabla G(p)$

p

$S_1: F(x, y, z) = 0$

切线T的方向向量可取为

$\vec{s} = \nabla F(p) \times \nabla G(p)$

T

$S_2 : G(x, y, z) = 0$

$\nabla F(p)$

γ

$\nabla G(p)$

p

$S_1 : F(x, y, z) = 0$

T

切线T的方向向量可取为

$$\vec{s} = \nabla F(p) \times \nabla G(p)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x(p) & F_y(p) & F_z(p) \\ G_x(p) & G_y(p) & G_z(p) \end{vmatrix}$$

$S_2: G(x, y, z) = 0$

γ

$\nabla F(p)$

$\nabla G(p)$

p

$S_1: F(x, y, z) = 0$

T

切线 T 的方向向量可取为

$$\vec{s} = \nabla F(p) \times \nabla G(p)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x(p) & F_y(p) & F_z(p) \\ G_x(p) & G_y(p) & G_z(p) \end{vmatrix}$$

$$= \left(\left. \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix} \right|_p, -\left. \begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix} \right|_p, \left. \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix} \right|_p \right)$$

$S_2 : G(x, y, z) = 0$

γ

$\nabla F(p)$

$\nabla G(p)$

p

$S_1 : F(x, y, z) = 0$

T

切线 T 的方向向量可取为

$$\vec{s} = \nabla F(p) \times \nabla G(p)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x(p) & F_y(p) & F_z(p) \\ G_x(p) & G_y(p) & G_z(p) \end{vmatrix}$$

$$= \left(\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_p, - \begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}_p, \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_p \right)$$

- 切线方程：

- 法平面方程：

切线T的方向向量可取为

$$\vec{s} = \nabla F(p) \times \nabla G(p)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x(p) & F_y(p) & F_z(p) \\ G_x(p) & G_y(p) & G_z(p) \end{vmatrix}$$

$$= \left(\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_p, -\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}_p, \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_p \right)$$

- 切线方程：$\dfrac{x-x_0}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_p} = \dfrac{y-y_0}{-\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}_p} = \dfrac{z-z_0}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_p}$
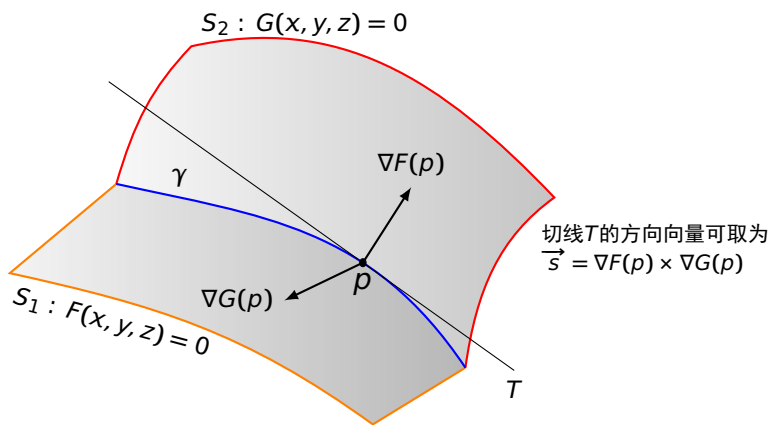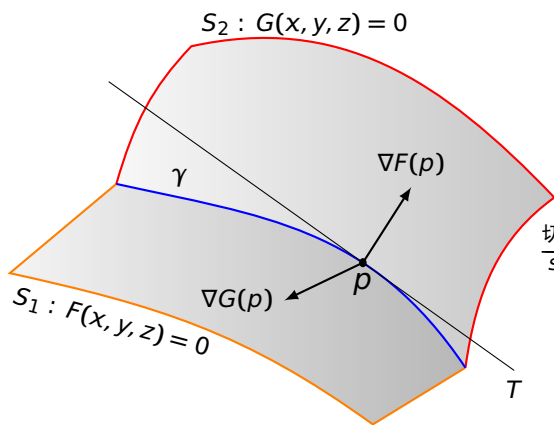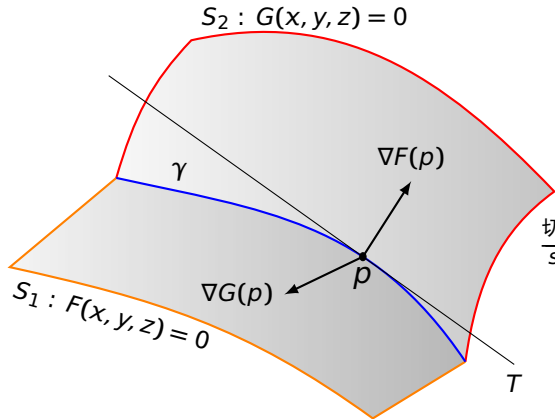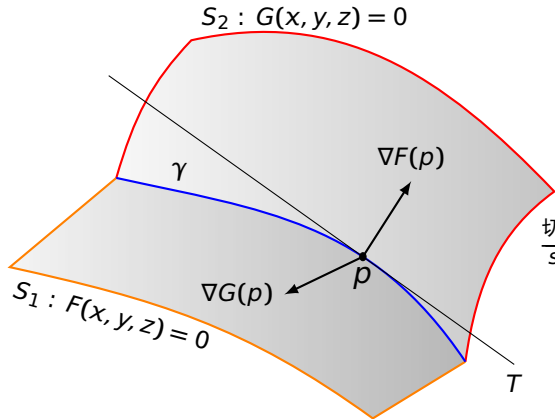
- 法平面方程：

切线 T 的方向向量可取为
$$\vec{s} = \nabla F(p) \times \nabla G(p)$$
$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x(p) & F_y(p) & F_z(p) \\ G_x(p) & G_y(p) & G_z(p) \end{vmatrix}$$
$$= \left(\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_p, -\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}_p, \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_p \right)$$

- 切线方程：
$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_p} = \frac{y-y_0}{-\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}_p} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_p}$$

- 法平面方程：
$$\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_p (x-x_0) - \begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}_p (y-y_0) + \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_p (z-z_0) = 0$$

小结 曲线 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 上一点 $p(x_0, y_0, z_0)$ 处

- 切方向可取为

$$\vec{s} = \nabla F(p) \times \nabla G(p) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}_p = \left(\left. \begin{vmatrix} F_y F_z \\ G_y G_z \end{vmatrix} \right|_p, - \left. \begin{vmatrix} F_x F_z \\ G_x G_z \end{vmatrix} \right|_p, \left. \begin{vmatrix} F_x F_y \\ G_x G_y \end{vmatrix} \right|_p \right)$$
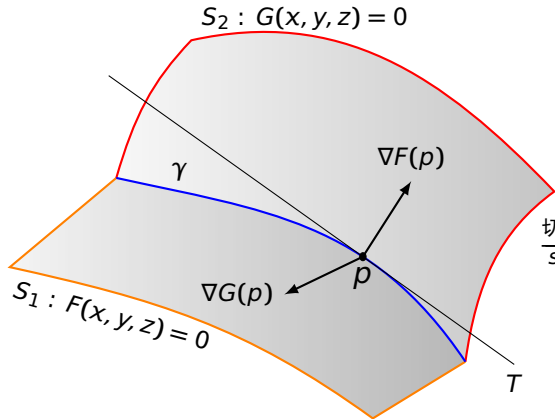
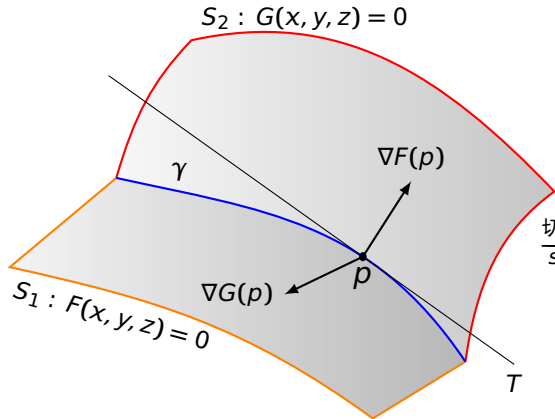- 切线方程：$\dfrac{x - x_0}{\left. \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix} \right|_p} = \dfrac{y - y_0}{- \left. \begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix} \right|_p} = \dfrac{z - z_0}{\left. \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix} \right|_p}$

- 法平面方程：

$$0 = \left. \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix} \right|_p (x - x_0) - \left. \begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix} \right|_p (y - y_0) + \left. \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix} \right|_p (z - z_0)$$

小结 曲线 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 上一点 $p(x_0,y_0,z_0)$ 处

- 切方向可取为

$$\vec{s} = \nabla F(p) \times \nabla G(p) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}_p = \left(\left.\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}\right|_p, -\left.\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}\right|_p, \left.\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}\right|_p \right)$$

- 切线方程： $\dfrac{x-x_0}{\left.\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}\right|_p} = \dfrac{y-y_0}{-\left.\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}\right|_p} = \dfrac{z-z_0}{\left.\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}\right|_p}$

- 法平面方程：

$$0 = \left.\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}\right|_p (x-x_0) - \left.\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}\right|_p (y-y_0) + \left.\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}\right|_p (z-z_0)$$

$$= \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ F_x(p) & F_y(p) & F_z(p) \\ G_x(p) & G_y(p) & G_z(p) \end{vmatrix}$$

小结 曲线 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 上一点 $p(x_0, y_0, z_0)$ 处

- 切方向可取为

$$\vec{s} = \nabla F(p) \times \nabla G(p) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}_p = \left(\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_p, \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_p, \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_p \right)$$

- 切线方程：$\dfrac{x - x_0}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_p} = \dfrac{y - y_0}{-\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}_p} = \dfrac{z - z_0}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_p}$

- 法平面方程：

$$0 = \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_p (x - x_0) - \begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}_p (y - y_0) + \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_p (z - z_0)$$

$$= \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ F_x(p) & F_y(p) & F_z(p) \\ G_x(p) & G_y(p) & G_z(p) \end{vmatrix}$$

小结 曲线 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 上一点 $p(x_0, y_0, z_0)$ 处

- 切方向可取为

$$\vec{s} = \nabla F(p) \times \nabla G(p) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}_p = \left(\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_p, \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_p, \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_p \right)$$

- 切线方程：$\dfrac{x-x_0}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_p} = \dfrac{y-y_0}{\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_p} = \dfrac{z-z_0}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_p}$

- 法平面方程：

$$0 = \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_p (x - x_0) - \begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}_p (y - y_0) + \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_p (z - z_0)$$

$$= \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ F_x(p) & F_y(p) & F_z(p) \\ G_x(p) & G_y(p) & G_z(p) \end{vmatrix}$$

例 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 在点 $(1, -2, 1)$ 处的切线与法平面方程

例 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 在点 $(1, -2, 1)$ 处的切线与法平面方程

解 曲线在该点处的切线方向可取为

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}_p$$

例 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 在点 $(1, -2, 1)$ 处的切线与法平面方程

解 曲线在该点处的切线方向可取为

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}_p = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$$

例 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 在点 $(1, -2, 1)$ 处的切线与法平面方程

解 曲线在该点处的切线方向可取为

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}_p = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x & 2y & 2z \\ & & \end{vmatrix}$$

例 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 在点 $(1, -2, 1)$ 处的切线与法平面方程

解 曲线在该点处的切线方向可取为

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}_p = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

例 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 在点 $(1, -2, 1)$ 处的切线与法平面方程

解 曲线在该点处的切线方向可取为

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}_p = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{(1,-2,1)}$$

例 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 在点 $(1, -2, 1)$ 处的切线与法平面方程

解 曲线在该点处的切线方向可取为

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}_p = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{(1,-2,1)} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

例 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 在点 $(1, -2, 1)$ 处的切线与法平面方程

解 曲线在该点处的切线方向可取为

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}_p = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{(1,-2,1)} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-3, 0, 3)$$

例 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 在点 $(1, -2, 1)$ 处的切线与法平面方程

解 曲线在该点处的切线方向可取为

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}_p = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{(1,-2,1)} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-3, 0, 3)$$

简单计，又不妨取为

$$\vec{s} = (1, 0, -1)$$

例 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 在点 $(1, -2, 1)$ 处的切线与法平面方程

解 曲线在该点处的切线方向可取为

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}_p = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{(1,-2,1)} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-3, 0, 3)$$

简单计，又不妨取为

$$\vec{s} = (1, 0, -1)$$

所以

- 切线方程：

- 法平面方程：

例 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 在点 $(1, -2, 1)$ 处的切线与法平面方程

解 曲线在该点处的切线方向可取为

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}_P = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{(1,-2,1)} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-3, 0, 3)$$

简单计，又不妨取为

$$\vec{s} = (1, 0, -1)$$

所以

- 切线方程：$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-1}{-1}$

- 法平面方程：

例 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 在点 $(1, -2, 1)$ 处的切线与法平面方程

解 曲线在该点处的切线方向可取为

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}_p = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{(1,-2,1)} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-3, 0, 3)$$

简单计，又不妨取为

$$\vec{s} = (1, 0, -1)$$

所以

- 切线方程：$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-1}{-1}$
- 法平面方程：

  $1 \cdot (x - 1) + 0 \cdot (y + 2) + (-1) \cdot (z - 1) = 0$

例 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 在点 $(1, -2, 1)$ 处的切线与法平面方程

解 曲线在该点处的切线方向可取为

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}_p = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{(1,-2,1)} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-3, 0, 3)$$

简单计，又不妨取为

$$\vec{s} = (1, 0, -1)$$

所以

- 切线方程： $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{0} = \dfrac{z-1}{-1}$
- 法平面方程：

$$1 \cdot (x - 1) + 0 \cdot (y + 2) + (-1) \cdot (z - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x - z = 0$$