§2.6 矩阵的初等变换

数学系　梁卓滨

2017 - 2018 学年 I

矩阵的初等变换

初等行变换

- 交换第 i 行和第 j 行：
- 第 i 行乘以 k 倍（$k \neq 0$）：
- 第 i 行加上第 j 行的 l 倍：

矩阵的初等变换

初等行变换

- 交换第 i 行和第 j 行：$r_i \leftrightarrow r_j$
- 第 i 行乘以 k 倍（$k \neq 0$）：
- 第 i 行加上第 j 行的 l 倍：

矩阵的初等变换

初等行变换

- 交换第 i 行和第 j 行：$r_i \leftrightarrow r_j$
- 第 i 行乘以 k 倍（$k \neq 0$）：$k \times r_i$
- 第 i 行加上第 j 行的 l 倍：

矩阵的初等变换

初等行变换

- 交换第 i 行和第 j 行：$r_i \leftrightarrow r_j$
- 第 i 行乘以 k 倍（$k \neq 0$）：$k \times r_i$
- 第 i 行加上第 j 行的 l 倍：$r_i + lr_j$

矩阵的初等变换

初等行变换

- 交换第 i 行和第 j 行：$r_i \leftrightarrow r_j$
- 第 i 行乘以 k 倍（$k \neq 0$）：$k \times r_i$
- 第 i 行加上第 j 行的 l 倍：$r_i + lr_j$

初等列变换

- 交换第 i 列和第 j 列：
- 第 i 列乘以 k 倍（$k \neq 0$）：
- 第 i 列加上第 j 列的 l 倍：

矩阵的初等变换

初等行变换

- 交换第 i 行和第 j 行：$r_i \leftrightarrow r_j$
- 第 i 行乘以 k 倍（$k \neq 0$）：$k \times r_i$
- 第 i 行加上第 j 行的 l 倍：$r_i + lr_j$

初等列变换

- 交换第 i 列和第 j 列：$c_i \leftrightarrow c_j$
- 第 i 列乘以 k 倍（$k \neq 0$）：
- 第 i 列加上第 j 列的 l 倍：

矩阵的初等变换

初等行变换

- 交换第 i 行和第 j 行：$r_i \leftrightarrow r_j$
- 第 i 行乘以 k 倍（$k \neq 0$）：$k \times r_i$
- 第 i 行加上第 j 行的 l 倍：$r_i + lr_j$

初等列变换

- 交换第 i 列和第 j 列：$c_i \leftrightarrow c_j$
- 第 i 列乘以 k 倍（$k \neq 0$）：$k \times c_i$
- 第 i 列加上第 j 列的 l 倍：

矩阵的初等变换

初等行变换

- 交换第 i 行和第 j 行：$r_i \longleftrightarrow r_j$
- 第 i 行乘以 k 倍（$k \neq 0$）：$k \times r_i$
- 第 i 行加上第 j 行的 l 倍：$r_i + lr_j$

初等列变换

- 交换第 i 列和第 j 列：$c_i \longleftrightarrow c_j$
- 第 i 列乘以 k 倍（$k \neq 0$）：$k \times c_i$
- 第 i 列加上第 j 列的 l 倍：$c_i + lc_j$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2 - c_3}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2 - c_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2 - c_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注 变换前后是两个不同的矩阵，故用“$\rightarrow$”，而不用“$=$”。

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2 - c_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注 变换前后是两个不同的矩阵，故用“$\rightarrow$”，而不用“$=$”。区别行列式的变换：

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2 - c_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注 变换前后是两个不同的矩阵，故用“→”，而不用“=”。区别行列式的变换：

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_1 \leftrightarrow r_2}{=\!=\!=}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2 - c_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注 变换前后是两个不同的矩阵，故用“→”，而不用“=”。区别行列式的变换：

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_1 \leftrightarrow r_2}{=\!=\!=} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2 - c_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注 变换前后是两个不同的矩阵，故用“→”，而不用“=”。区别行列式的变换：

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_1 \leftrightarrow r_2}{=\!=\!=} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_2 - 3r_1}{=\!=\!=}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2 - c_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注 变换前后是两个不同的矩阵，故用“→”，而不用“=”。区别行列式的变换：

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 - 3r_1} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2 - c_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注 变换前后是两个不同的矩阵，故用“→”，而不用“=”。区别行列式的变换：

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 - 3r_1} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2 - c_3}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2 - c_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注 变换前后是两个不同的矩阵，故用“→”，而不用“=”。区别行列式的变换：

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 - 3r_1} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2 - c_3} - \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2 - c_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注 变换前后是两个不同的矩阵，故用“$\rightarrow$”，而不用“$=$”。区别行列式的变换：

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 - 3r_1} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2 - c_3} - \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -8$$

初等矩阵的引入

设

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{n\times 1}, \quad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{n\times 1}, \cdots \qquad , \cdots \quad \varepsilon_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}_{n\times 1}$$

初等矩阵的引入

设

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{n\times 1}, \quad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{n\times 1}, \cdots \quad \varepsilon_i = \qquad\qquad\qquad , \cdots \quad \varepsilon_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}_{n\times 1}$$

初等矩阵的引入

设

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{n\times 1}, \quad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{n\times 1}, \cdots \quad \varepsilon_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{n\times 1} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \text{ th} \\ \\ \\ \end{array}, \cdots \quad \varepsilon_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}_{n\times 1}$$

初等矩阵的引入

设

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{n\times 1}, \quad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{n\times 1}, \cdots \quad \varepsilon_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{n\times 1} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i\ \mathrm{th} \\ \\ \\ \end{array}, \cdots \quad \varepsilon_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}_{n\times 1}$$

它们的转置是:

$$\varepsilon_1^T \qquad \varepsilon_2^T \qquad \cdots \quad \varepsilon_n^T$$

初等矩阵的引入

设

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{n\times 1}, \quad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{n\times 1}, \cdots \quad \varepsilon_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{n\times 1} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i\text{ th} \\ \\ \\ \end{array}, \cdots \quad \varepsilon_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}_{n\times 1}$$

它们的转置是:

$$\varepsilon_1^T = (1, 0, \cdots, 0), \quad \varepsilon_2^T \qquad \cdots \quad \varepsilon_n^T$$

初等矩阵的引入

设

$$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}_{n\times 1},\quad \varepsilon_2=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}_{n\times 1},\cdots\quad \varepsilon_i=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}_{n\times 1}\begin{matrix}\\\\\leftarrow i\text{ th}\\\\\\\end{matrix},\cdots\quad \varepsilon_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}_{n\times 1}$$

它们的转置是:

$$\varepsilon_1^T=(1,\,0,\,\cdots,\,0),\quad \varepsilon_2^T=(0,\,1,\,\cdots,\,0),\quad \cdots\quad \varepsilon_n^T$$

初等矩阵的引入

设

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{n\times 1}, \quad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{n\times 1}, \cdots \quad \varepsilon_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{n\times 1} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow i \text{ th} \\ \\ \\ \end{matrix}, \cdots \quad \varepsilon_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}_{n\times 1}$$

它们的转置是:

$$\varepsilon_1^T = (1,\ 0,\ \cdots,\ 0), \quad \varepsilon_2^T = (0,\ 1,\ \cdots,\ 0), \quad \cdots \quad \varepsilon_n^T = (0,\ 0,\ \cdots,\ 1)$$

初等矩阵的引入

设

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{n\times 1}, \quad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{n\times 1}, \cdots \quad \varepsilon_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{n\times 1} \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow i\,\mathrm{th} \\ \\ \\ \end{array}, \cdots \quad \varepsilon_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}_{n\times 1}$$

它们的转置是：

$$\varepsilon_1^T = (1, 0, \cdots, 0), \quad \varepsilon_2^T = (0, 1, \cdots, 0), \quad \cdots \quad \varepsilon_n^T = (0, 0, \cdots, 1)$$

注意到单位矩阵可以表示成关于 ε_i 或 ε_i^T 的分块矩阵：

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

初等矩阵的引入

设

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}_{n\times 1}, \quad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}_{n\times 1}, \cdots \quad \varepsilon_i = \begin{array}{cl}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}_{n\times 1} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i\,\text{th} \\ \\ \\ \end{array}\end{array}, \cdots \quad \varepsilon_n = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}_{n\times 1}$$

它们的转置是：

$$\varepsilon_1^T = (1, 0, \cdots, 0), \quad \varepsilon_2^T = (0, 1, \cdots, 0), \quad \cdots \quad \varepsilon_n^T = (0, 0, \cdots, 1)$$

注意到单位矩阵可以表示成关于 ε_i 或 ε_i^T 的分块矩阵：

$$I_n = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)$$

初等矩阵的引入

设

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{n\times 1}, \quad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{n\times 1}, \cdots \quad \varepsilon_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{n\times 1} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i\,\text{th} \\ \\ \\ \end{array}, \cdots \quad \varepsilon_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}_{n\times 1}$$

它们的转置是:

$$\varepsilon_1^T = (1, 0, \cdots, 0), \quad \varepsilon_2^T = (0, 1, \cdots, 0), \quad \cdots \quad \varepsilon_n^T = (0, 0, \cdots, 1)$$

注意到单位矩阵可以表示成关于 ε_i 或 ε_i^T 的分块矩阵:

$$I_n = \left(\begin{array}{c:c:c:c} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$$

初等矩阵的引入

设

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{n\times 1}, \quad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{n\times 1}, \cdots \quad \varepsilon_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{n\times 1} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow i\,\text{th} \\ \\ \\ \end{matrix}, \cdots \quad \varepsilon_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}_{n\times 1}$$

它们的转置是:

$$\varepsilon_1^T = (1, 0, \cdots, 0), \quad \varepsilon_2^T = (0, 1, \cdots, 0), \quad \cdots \quad \varepsilon_n^T = (0, 0, \cdots, 1)$$

注意到单位矩阵可以表示成关于 ε_i 或 ε_i^T 的分块矩阵:

$$I_n = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \hdashline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$$

初等矩阵的引入

设

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{n\times 1}, \quad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{n\times 1}, \cdots \quad \varepsilon_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{n\times 1} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow i\,\text{th} \\ \\ \\ \end{matrix}, \cdots \quad \varepsilon_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}_{n\times 1}$$

它们的转置是:

$$\varepsilon_1^T = (1, 0, \cdots, 0), \quad \varepsilon_2^T = (0, 1, \cdots, 0), \quad \cdots \quad \varepsilon_n^T = (0, 0, \cdots, 1)$$

注意到单位矩阵可以表示成关于 ε_i 或 ε_i^T 的分块矩阵:

$$I_n = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \hdashline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^T \\ \varepsilon_2^T \\ \vdots \\ \varepsilon_n^T \end{pmatrix}$$

初等矩阵的引入

设

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{n\times 1}, \quad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{n\times 1}, \cdots \quad \varepsilon_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{n\times 1} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow i\,\text{th} \\ \\ \\ \end{matrix}, \cdots \quad \varepsilon_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}_{n\times 1}$$

它们的转置是：

$$\varepsilon_1^T = (1, 0, \cdots, 0), \quad \varepsilon_2^T = (0, 1, \cdots, 0), \quad \cdots \quad \varepsilon_n^T = (0, 0, \cdots, 1)$$

注意到单位矩阵可以表示成关于 ε_i 或 ε_i^T 的分块矩阵：

$$I_n = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \hdashline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^T \\ \varepsilon_2^T \\ \vdots \\ \varepsilon_n^T \end{pmatrix}$$

注 下文中，ε_i 与 ε_i^T 的维数比较含糊，甚至会不相同，需根据上下文理解

计算乘积 $A\varepsilon_i$（以 3×4 矩阵 A 为例）:

计算乘积 $A\varepsilon_i$（以 3×4 矩阵 A 为例）:

$$A_{3\times 4}\varepsilon_1$$

计算乘积 $A\varepsilon_i$（以 3×4 矩阵 A 为例）：

$$A_{3\times 4}\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

计算乘积 $A\varepsilon_i$（以 3×4 矩阵 A 为例）：

$$A_{3\times 4}\varepsilon_1=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

计算乘积 $A\varepsilon_i$（以 3×4 矩阵 A 为例）：

$$A_{3\times 4}\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{21} \end{pmatrix}$$

计算乘积 $A\varepsilon_i$（以 3×4 矩阵 A 为例）:

$$A_{3\times 4}\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$$

计算乘积 $A\varepsilon_i$（以 3×4 矩阵 A 为例）：

$$A_{3\times 4}\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$$

$$A_{3\times 4}\varepsilon_2$$

计算乘积 $A\varepsilon_i$（以 3×4 矩阵 A 为例）:

$$A_{3\times 4}\varepsilon_1=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\end{pmatrix}$$

$$A_{3\times 4}\varepsilon_2=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

计算乘积 $A\varepsilon_i$（以 3×4 矩阵 A 为例）：

$$A_{3\times 4}\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$$

$$A_{3\times 4}\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

计算乘积 $A\varepsilon_i$（以 3×4 矩阵 A 为例）:

$$A_{3\times4}\varepsilon_1=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\end{pmatrix}$$

$$A_{3\times4}\varepsilon_2=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{22}\end{pmatrix}$$

计算乘积 $A\varepsilon_i$（以 3×4 矩阵 A 为例）：

$$A_{3\times 4}\varepsilon_1=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$$

$$A_{3\times 4}\varepsilon_2=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$$

计算乘积 $A\varepsilon_i$（以 3×4 矩阵 A 为例）：

$$A_{3\times 4}\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$$

$$A_{3\times 4}\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$$

$$A_{3\times 4}\varepsilon_3$$

计算乘积 $A\varepsilon_i$（以 3×4 矩阵 A 为例）：

$$A_{3\times 4}\varepsilon_1=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\end{pmatrix}$$

$$A_{3\times 4}\varepsilon_2=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{33} & a_{33} & a_{34}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\end{pmatrix}$$

$$A_{3\times 4}\varepsilon_3=\begin{pmatrix}a_{13}\\a_{23}\\a_{33}\end{pmatrix},$$

计算乘积 $A\varepsilon_i$（以 3×4 矩阵 A 为例）:

$$A_{3\times4}\varepsilon_1=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\end{pmatrix}$$

$$A_{3\times4}\varepsilon_2=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{33} & a_{33} & a_{34}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\end{pmatrix}$$

$$A_{3\times4}\varepsilon_3=\begin{pmatrix}a_{13}\\a_{23}\\a_{33}\end{pmatrix},\qquad A_{3\times4}\varepsilon_4=\begin{pmatrix}a_{14}\\a_{24}\\a_{34}\end{pmatrix}$$

计算乘积 $A\varepsilon_i$（以 3×4 矩阵 A 为例）:

$$A_{3\times 4}\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$$

$$A_{3\times 4}\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$$

$$A_{3\times 4}\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}, \qquad A_{3\times 4}\varepsilon_4 = \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{pmatrix}$$

总结

$$A_{m\times n}\varepsilon_i$$

计算乘积 $A\varepsilon_i$（以 3×4 矩阵 A 为例）：

$$A_{3\times 4}\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$$

$$A_{3\times 4}\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$$

$$A_{3\times 4}\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}, \qquad A_{3\times 4}\varepsilon_4 = \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{pmatrix}$$

总结

$$A_{m\times n}\varepsilon_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$$

计算乘积 $\varepsilon_i^T A$（仍以 3×4 矩阵 A 为例）：

计算乘积 $\varepsilon_i^T A$（仍以 3×4 矩阵 A 为例）：

$\varepsilon_2^T A_{3\times 4}$

$\varepsilon_2^T A_{3\times 4}$

$\varepsilon_2^T A_{3\times 4}$

计算乘积 $\varepsilon_i^T A$（仍以 3×4 矩阵 A 为例）：

$$\varepsilon_2^T A_{3\times 4} = (1,\ 0,\ 0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_2^T A_{3\times 4}$$

$$\varepsilon_2^T A_{3\times 4}$$

计算乘积 $\varepsilon_i^T A$（仍以 3×4 矩阵 A 为例）:

$$\varepsilon_2^T A_{3\times 4} = (1,\ 0,\ 0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = (\qquad\qquad\qquad\qquad)$$

$$\varepsilon_2^T A_{3\times 4}$$

$$\varepsilon_2^T A_{3\times 4}$$

计算乘积 $\varepsilon_i^T A$（仍以 3×4 矩阵 A 为例）：

$$\varepsilon_2^T A_{3\times 4} = (1,\ 0,\ 0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = (a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ a_{14})$$

$$\varepsilon_2^T A_{3\times 4}$$

$$\varepsilon_2^T A_{3\times 4}$$

计算乘积 $\varepsilon_i^T A$（仍以 3×4 矩阵 A 为例）：

$$\varepsilon_1^T A_{3\times4} = (1,\ 0,\ 0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = (a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ a_{14})$$

$$\varepsilon_2^T A_{3\times4}$$

$$\varepsilon_2^T A_{3\times4}$$

计算乘积 $\varepsilon_i^T A$（仍以 3×4 矩阵 A 为例）：

$$\varepsilon_1^T A_{3\times 4} = (1,\ 0,\ 0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = (a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ a_{14})$$

$$\varepsilon_2^T A_{3\times 4} = (0,\ 1,\ 0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_2^T A_{3\times 4}$$

计算乘积 $\varepsilon_i^T A$（仍以 3×4 矩阵 A 为例）:

$$\varepsilon_1^T A_{3\times 4} = (1,\ 0,\ 0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = (a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ a_{14})$$

$$\varepsilon_2^T A_{3\times 4} = (0,\ 1,\ 0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = (\qquad\qquad\qquad\qquad)$$

$$\varepsilon_2^T A_{3\times 4}$$

计算乘积 $\varepsilon_i^T A$（仍以 3×4 矩阵 A 为例）：

$$\varepsilon_1^T A_{3\times 4} = (1,\ 0,\ 0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = (a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ a_{14})$$

$$\varepsilon_2^T A_{3\times 4} = (0,\ 1,\ 0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = (a_{21},\ a_{22},\ a_{23},\ a_{24})$$

$$\varepsilon_2^T A_{3\times 4}$$

计算乘积 $\varepsilon_i^T A$（仍以 3×4 矩阵 A 为例）:

$$\varepsilon_1^T A_{3\times 4} = (1,\ 0,\ 0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = (a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ a_{14})$$

$$\varepsilon_2^T A_{3\times 4} = (0,\ 1,\ 0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = (a_{21},\ a_{22},\ a_{23},\ a_{24})$$

$$\varepsilon_2^T A_{3\times 4}$$

计算乘积 $\varepsilon_i^T A$（仍以 3×4 矩阵 A 为例）：

$$\varepsilon_1^T A_{3\times 4} = (1,\ 0,\ 0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = (a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ a_{14})$$

$$\varepsilon_2^T A_{3\times 4} = (0,\ 1,\ 0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = (a_{21},\ a_{22},\ a_{23},\ a_{24})$$

$$\varepsilon_2^T A_{3\times 4} = (0,\ 1,\ 0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

计算乘积 $\varepsilon_i^T A$（仍以 3×4 矩阵 A 为例）:

$$\varepsilon_1^T A_{3\times 4} = (1,\ 0,\ 0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = (a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ a_{14})$$

$$\varepsilon_2^T A_{3\times 4} = (0,\ 1,\ 0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = (a_{21},\ a_{22},\ a_{23},\ a_{24})$$

$$\varepsilon_2^T A_{3\times 4} = (0,\ 1,\ 0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = (\qquad\qquad\qquad\qquad)$$

计算乘积 $\varepsilon_i^T A$（仍以 3×4 矩阵 A 为例）：

$$\varepsilon_1^T A_{3\times 4} = (1,\ 0,\ 0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = (a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ a_{14})$$

$$\varepsilon_2^T A_{3\times 4} = (0,\ 1,\ 0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = (a_{21},\ a_{22},\ a_{23},\ a_{24})$$

$$\varepsilon_2^T A_{3\times 4} = (0,\ 1,\ 0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = (a_{31},\ a_{32},\ a_{33},\ a_{34})$$

计算乘积 $\varepsilon_i^T A$（仍以 3×4 矩阵 A 为例）：

$$\varepsilon_1^T A_{3\times 4} = (1,\ 0,\ 0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = (a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ a_{14})$$

$$\varepsilon_2^T A_{3\times 4} = (0,\ 1,\ 0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = (a_{21},\ a_{22},\ a_{23},\ a_{24})$$

$$\varepsilon_3^T A_{3\times 4} = (0,\ 1,\ 0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = (a_{31},\ a_{32},\ a_{33},\ a_{34})$$

计算乘积 $\varepsilon_i^T A$（仍以 3×4 矩阵 A 为例）:

$$\varepsilon_1^T A_{3\times 4} = (1,\ 0,\ 0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = (a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ a_{14})$$

$$\varepsilon_2^T A_{3\times 4} = (0,\ 1,\ 0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = (a_{21},\ a_{22},\ a_{23},\ a_{24})$$

$$\varepsilon_3^T A_{3\times 4} = (0,\ 1,\ 0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = (a_{31},\ a_{32},\ a_{33},\ a_{34})$$

总结 设 $\varepsilon_i^T = (0, \cdots, \underset{i\,\mathrm{th}}{1}, \cdots 0)_{1\times m}$，$A_{m\times n}$，则

计算乘积 $\varepsilon_i^T A$（仍以 3×4 矩阵 A 为例）:

$$\varepsilon_1^T A_{3\times 4} = (1,\ 0,\ 0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = (a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ a_{14})$$

$$\varepsilon_2^T A_{3\times 4} = (0,\ 1,\ 0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = (a_{21},\ a_{22},\ a_{23},\ a_{24})$$

$$\varepsilon_3^T A_{3\times 4} = (0,\ 1,\ 0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = (a_{31},\ a_{32},\ a_{33},\ a_{34})$$

总结 设 $\varepsilon_i^T = (0, \cdots, \underset{i\,\text{th}}{1}, \cdots 0)_{1\times m}$，$A_{m\times n}$，则

$$\varepsilon_i^T A =$$

计算乘积 $\varepsilon_i^T A$（仍以 3×4 矩阵 A 为例）:

$$\varepsilon_1^T A_{3\times 4} = (1,\ 0,\ 0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = (a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ a_{14})$$

$$\varepsilon_2^T A_{3\times 4} = (0,\ 1,\ 0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = (a_{21},\ a_{22},\ a_{23},\ a_{24})$$

$$\varepsilon_3^T A_{3\times 4} = (0,\ 1,\ 0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = (a_{31},\ a_{32},\ a_{33},\ a_{34})$$

总结 设 $\varepsilon_i^T = (0, \cdots, \underset{i\,\text{th}}{1}, \cdots 0)_{1\times m}$，$A_{m\times n}$，则

$$\varepsilon_i^T A = (a_{i1},\ a_{i2},\ \cdots,\ a_{in})$$

初等矩阵 I

定义 对单位矩阵 I 施以一次初等变换得到的矩阵，称为初等矩阵。

初等矩阵 I

定义 对单位矩阵 I 施以一次初等变换得到的矩阵，称为初等矩阵。

- 对 I 施以第一种初等行变换（$r_i \longleftrightarrow r_j$）得到的矩阵：

$$
\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{ccccccccc}
1 & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & \\
 & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & & & \ddots & & & \\
 & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & 1 & \\
 & & & & & & & & 1 \\
 & & & & & & & & & \ddots \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \leftarrow i\ \text{th} \\ \\ \\ \\ \leftarrow j\ \text{th} \\ \\ \\ \\
\end{array}
\end{array}
\xrightarrow{r_i \longleftrightarrow r_j}
$$

初等矩阵 I

定义 对单位矩阵 I 施以一次初等变换得到的矩阵，称为初等矩阵。

- 对 I 施以第一种初等行变换（$r_i \leftrightarrow r_j$）得到的矩阵：

$$
\begin{pmatrix}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& 1 &&&&&&& \\
&&&& 1 &&&&&& \\
&&&&& \ddots &&&&& \\
&&&&&& 1 &&&& \\
&&&&&&& 1 &&& \\
&&&&&&&& 1 && \\
&&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{pmatrix}
\begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i \text{ th} \\ \\ \\ \\ \leftarrow j \text{ th} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}
\xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j}
\begin{pmatrix}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 &&& \\
&&& \vdots & 1 &&& \vdots &&& \\
&&& \vdots && \ddots && \vdots &&& \\
&&& \vdots &&& 1 & \vdots &&& \\
&&& 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 &&& \\
&&&&&&&& 1 && \\
&&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{pmatrix}
$$

初等矩阵 I

定义 对单位矩阵 I 施以一次初等变换得到的矩阵，称为初等矩阵。

- 对 I 施以第一种初等行变换（$r_i \longleftrightarrow r_j$）得到的矩阵：

$$I(ij) := \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & & & \\ & & & \vdots & 1 & & & \vdots & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\ & & & \vdots & & & 1 & \vdots & & & \\ & & & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

初等矩阵 I

定义 对单位矩阵 I 施以一次初等变换得到的矩阵，称为初等矩阵。

- 对 I 施以第一种初等行变换（$r_i \leftrightarrow r_j$）得到的矩阵：

$$I(ij) := \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&&& \\ &&& 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 &&& \\ &&& \vdots & 1 &&& \vdots &&& \\ &&& \vdots && \ddots && \vdots &&& \\ &&& \vdots &&& 1 & \vdots &&& \\ &&& 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 &&& \\ &&&&&&&& 1 && \\ &&&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&&& 1 \end{pmatrix} = \begin{array}{r} \\ \\ i\text{ th}\to \\ \\ j\text{ th}\to \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} \varepsilon_1^T \\ \vdots \\ \varepsilon_j^T \\ \vdots \\ \varepsilon_i^T \\ \vdots \\ \varepsilon_n^T \end{pmatrix}$$

初等矩阵 I

定义 对单位矩阵 I 施以一次初等变换得到的矩阵，称为初等矩阵。

- 对 I 施以第一种初等行变换（$r_i \longleftrightarrow r_j$）得到的矩阵：

$$I(ij) := \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&& \\ &&& 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 && \\ &&& \vdots & 1 &&& \vdots && \\ &&& \vdots && \ddots && \vdots && \\ &&& \vdots &&& 1 & \vdots && \\ &&& 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 && \\ &&&&&&&& 1 & \\ &&&&&&&&& \ddots \\ &&&&&&&&&& 1 \end{pmatrix} = \begin{array}{r} \\ \\ i\text{ th}\rightarrow \\ \\ j\text{ th}\rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} \varepsilon_1^T \\ \vdots \\ \varepsilon_j^T \\ \vdots \\ \varepsilon_i^T \\ \vdots \\ \varepsilon_n^T \end{pmatrix}$$

注 也是对 I 施以第一种初等列变换（$c_i \longleftrightarrow c_j$）得到的矩阵。

初等矩阵 I

定义 对单位矩阵 I 施以一次初等变换得到的矩阵，称为初等矩阵。

- 对 I 施以第一种初等行变换（$r_i \longleftrightarrow r_j$）得到的矩阵：

$$I(ij) := \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&&& \\ &&& 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 &&& \\ &&& \vdots & 1 &&& \vdots &&& \\ &&& \vdots && \ddots && \vdots &&& \\ &&& \vdots &&& 1 & \vdots &&& \\ &&& 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 &&& \\ &&&&&&&& 1 && \\ &&&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&&& 1 \end{pmatrix} = \begin{array}{r} \\ \\ i\text{ th}\to \\ \\ j\text{ th}\to \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} \varepsilon_1^T \\ \vdots \\ \varepsilon_j^T \\ \vdots \\ \varepsilon_i^T \\ \vdots \\ \varepsilon_n^T \end{pmatrix} = (\varepsilon_1, \cdots, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{ th}}}{\varepsilon_j}, \cdots, \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{ th}}}{\varepsilon_i}, \cdots, \varepsilon_n)$$

注 也是对 I 施以第一种初等列变换（$c_i \longleftrightarrow c_j$）得到的矩阵。

初等矩阵 II

定义 对单位矩阵 I 施以一次初等变换得到的矩阵，称为初等矩阵。

- 对 I 施以第二种初等行变换（$k \times r_i$）得到的矩阵：

$$\begin{array}{cc}\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow i\,\text{th} \\ \\ \\ \end{array}\end{array} \xrightarrow[(k \neq 0)]{k \times r_i}$$

初等矩阵 II

定义 对单位矩阵 I 施以一次初等变换得到的矩阵，称为初等矩阵。

- 对 I 施以第二种初等行变换（$k \times r_i$）得到的矩阵：

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow i\,\text{th} \xrightarrow[(k\neq 0)]{k\times r_i} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & k & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

初等矩阵 II

定义 对单位矩阵 I 施以一次初等变换得到的矩阵，称为初等矩阵。

- 对 I 施以第二种初等行变换（$k \times r_i$）得到的矩阵：

$$
I(i(k)) := \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & k & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i\,\text{th} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}
$$

初等矩阵 II

定义 对单位矩阵 I 施以一次初等变换得到的矩阵，称为**初等矩阵**。

- 对 I 施以第二种初等行变换（$k \times r_i$）得到的矩阵：

$$I(i(k)) := \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & k & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i\,\text{th} \\ \\ \\ \end{array} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^T \\ \vdots \\ k\varepsilon_i^T \\ \vdots \\ \varepsilon_n^T \end{pmatrix}$$

初等矩阵 II

定义 对单位矩阵 I 施以一次初等变换得到的矩阵，称为初等矩阵。

- 对 I 施以第二种初等行变换（$k \times r_i$）得到的矩阵：

$$I(i(k)) := \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & k & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i\,\text{th} \\ \\ \\ \end{array} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^T \\ \vdots \\ k\varepsilon_i^T \\ \vdots \\ \varepsilon_n^T \end{pmatrix}$$

注 也是对 I 施以第一种初等列变换（$k \times c_i$）得到的矩阵。

初等矩阵 II

定义 对单位矩阵 I 施以一次初等变换得到的矩阵，称为**初等矩阵**。

- 对 I 施以第二种初等行变换（$k \times r_i$）得到的矩阵：

$$I(i(k)) := \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & k & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i\,\text{th} \\ \\ \\ \end{array} \end{array} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^T \\ \vdots \\ k\varepsilon_i^T \\ \vdots \\ \varepsilon_n^T \end{pmatrix} = (\varepsilon_1, \cdots, k\varepsilon_i, , \cdots, \varepsilon_n)$$

注 也是对 I 施以第一种初等列变换（$k \times c_i$）得到的矩阵。

初等矩阵 III

定义 对单位矩阵 I 施以一次初等变换得到的矩阵，称为初等矩阵。

- 对 I 施以第三种初等行变换（$r_i + lr_j$）得到的矩阵：

$$\begin{array}{cl} \left(\begin{array}{ccccc} 1 &&&& \\ &\ddots&&& \\ &&1&& \\ &&&\ddots& \\ &&&\ddots& \\ &&&1& \\ &&&&\ddots \\ &&&&&1 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i\text{ th} \\ \\ \\ \leftarrow j\text{ th} \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \xrightarrow{r_i+lr_j}$$

初等矩阵 III

定义 对单位矩阵 I 施以一次初等变换得到的矩阵，称为初等矩阵。

- 对 I 施以第三种初等行变换（$r_i + lr_j$）得到的矩阵：

$$\left(\begin{array}{cccccccc} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i\text{ th} \\ \\ \\ \leftarrow j\text{ th} \\ \\ \\ \end{array} \xrightarrow{r_i+lr_j} \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & \cdots & \cdots & l & & \\ & & & \ddots & & \vdots & & \\ & & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i\text{ th} \\ \\ \\ \leftarrow j\text{ th} \\ \\ \\ \end{array}$$

初等矩阵 III

定义 对单位矩阵 I 施以一次初等变换得到的矩阵，称为初等矩阵。

- 对 I 施以第三种初等行变换（$r_i + lr_j$）得到的矩阵：

$$I(ij(l)):=\left(\begin{array}{ccccccc} 1 &&&&&& \\ &\ddots&&&&& \\ &&1&\cdots&l&& \\ &&&\ddots&\vdots&& \\ &&&&1&& \\ &&&&&\ddots& \\ &&&&&&1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i\text{ th} \\ \\ \leftarrow j\text{ th} \\ \\ \\ \end{array}$$

初等矩阵 III

定义 对单位矩阵 I 施以一次初等变换得到的矩阵，称为初等矩阵。

- 对 I 施以第三种初等行变换（$r_i + lr_j$）得到的矩阵：

$$I(ij(l)) := \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots\cdots & l & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i\text{ th} \\ \\ \leftarrow j\text{ th} \\ \\ \\ \end{array} \end{array} = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} \varepsilon_1^T \\ \vdots \\ \varepsilon_i^T + l\varepsilon_j^T \\ \vdots \\ \vdots \\ \varepsilon_n^T \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i\text{ th} \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

初等矩阵 III

定义 对单位矩阵 I 施以一次初等变换得到的矩阵，称为初等矩阵。

- 对 I 施以第三种初等行变换（$r_i + lr_j$）得到的矩阵：

$$I(ij(l)):=\left(\begin{array}{ccccc}
1 & & & & \\
 & \ddots & & & \\
 & & 1 \cdots\cdots & l & \\
 & & \ddots & \vdots & \\
 & & & 1 & \\
 & & & & \ddots \\
 & & & & 1
\end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i\text{ th} \\ \\ \leftarrow j\text{ th} \\ \\ \\ \end{array} = \left(\begin{array}{c}
\varepsilon_1^T \\ \vdots \\ \varepsilon_i^T + l\varepsilon_j^T \\ \vdots \\ \vdots \\ \varepsilon_n^T
\end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i\text{ th} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

注 也是对 I 施以第一种初等列变换（$c_j + lc_i$）得到的矩阵。

初等矩阵 III

定义 对单位矩阵 I 施以一次初等变换得到的矩阵，称为初等矩阵。

- 对 I 施以第三种初等行变换（$r_i + lr_j$）得到的矩阵：

$$I(ij(l)):=\begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 & \cdots & l && \\ &&& \ddots & \vdots && \\ &&&& 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i\text{ th} \\ \\ \leftarrow j\text{ th} \\ \\ \\ \end{array} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^T \\ \vdots \\ \varepsilon_i^T + l\varepsilon_j^T \\ \vdots \\ \varepsilon_n^T \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i\text{ th} \\ \\ \\ \end{array} = (\varepsilon_1, \cdots, \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{ th}}}{\varepsilon_j + l\varepsilon_i}, \cdots, \varepsilon_n)$$

注 也是对 I 施以第一种初等列变换（$c_j + lc_i$）得到的矩阵。

性质 设 A 是 $m \times n$ 矩阵。则

$$AI(ij) = \text{交换 } A \text{ 的第 } i, j \text{ 列}$$

性质 设 A 是 $m \times n$ 矩阵。则

$$AI(ij) = \text{交换 } A \text{ 的第 } i, j \text{ 列}$$

$$AI(i(k)) = \text{将 } A \text{ 的第 } i \text{ 列乘 } k$$

性质 设 A 是 $m \times n$ 矩阵。则

$$AI(ij) = \text{交换 } A \text{ 的第 } i, j \text{ 列}$$

$$AI(i(k)) = \text{将 } A \text{ 的第 } i \text{ 列乘 } k$$

$$AI(ij(l)) = A \text{ 的第 } j \text{ 列加上第 } i \text{ 列的 } l \text{ 倍}$$

性质 设 A 是 $m \times n$ 矩阵。则

$$AI(ij) = \text{ 交换 } A \text{ 的第 } i, j \text{ 列}$$

$$AI(i(k)) = \text{ 将 } A \text{ 的第 } i \text{ 列乘 } k$$

$$AI(ij(l)) = A \text{ 的第 } j \text{ 列加上第 } i \text{ 列的 } l \text{ 倍}$$

证明 以第 3 式为例证明。

性质 设 A 是 $m \times n$ 矩阵。则

$$AI(ij) = \text{交换 } A \text{ 的第 } i, j \text{ 列}$$

$$AI(i(k)) = \text{将 } A \text{ 的第 } i \text{ 列乘 } k$$

$$AI(ij(l)) = A \text{ 的第 } j \text{ 列加上第 } i \text{ 列的 } l \text{ 倍}$$

证明 以第 3 式为例证明。

$$AI(ij(l)) = A(\varepsilon_1, \cdots, \underset{\substack{\uparrow \\ j \text{ th}}}{\varepsilon_i + l\varepsilon_j}, \cdots, \varepsilon_n)$$

性质 设 A 是 $m \times n$ 矩阵。则

$$AI(ij) = \text{交换 } A \text{ 的第 } i, j \text{ 列}$$

$$AI(i(k)) = \text{将 } A \text{ 的第 } i \text{ 列乘 } k$$

$$AI(ij(l)) = A \text{ 的第 } j \text{ 列加上第 } i \text{ 列的 } l \text{ 倍}$$

证明 以第 3 式为例证明。

$$AI(ij(l)) = A(\varepsilon_1, \cdots, \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{ th}}}{\varepsilon_i + l\varepsilon_j}, \cdots, \varepsilon_n) = (A\varepsilon_1, \cdots, \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{ th}}}{A(\varepsilon_i + l\varepsilon_j)}, \cdots, A\varepsilon_n)$$

性质 设 A 是 $m \times n$ 矩阵。则

$$AI(ij) = \text{交换 } A \text{ 的第 } i, j \text{ 列}$$

$$AI(i(k)) = \text{将 } A \text{ 的第 } i \text{ 列乘 } k$$

$$AI(ij(l)) = A \text{ 的第 } j \text{ 列加上第 } i \text{ 列的 } l \text{ 倍}$$

证明 以第 3 式为例证明。

$$AI(ij(l)) = A(\varepsilon_1, \cdots, \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{ th}}}{\varepsilon_i + l\varepsilon_j}, \cdots, \varepsilon_n) = (A\varepsilon_1, \cdots, \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{ th}}}{A(\varepsilon_i + l\varepsilon_j)}, \cdots, A\varepsilon_n)$$

$$= (A\varepsilon_1, \cdots, \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{ th}}}{A\varepsilon_i + lA\varepsilon_j}, \cdots, A\varepsilon_n)$$

性质 设 A 是 $m\times n$ 矩阵。则

$$AI(ij) = \text{ 交换 } A \text{ 的第 } i,j \text{ 列}$$

$$AI(i(k)) = \text{ 将 } A \text{ 的第 } i \text{ 列乘 } k$$

$$AI(ij(l)) = A \text{ 的第 } j \text{ 列加上第 } i \text{ 列的 } l \text{ 倍}$$

证明 以第 3 式为例证明。设

$$A=\left(\begin{array}{c:c:c:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right)=(A_1,A_2,\cdots,A_n)$$

$$AI(ij(l)) = A(\varepsilon_1,\cdots,\underset{\substack{\uparrow\\ j\,\text{th}}}{\varepsilon_i+l\varepsilon_j},\cdots,\varepsilon_n) = (A\varepsilon_1,\cdots,\underset{\substack{\uparrow\\ j\,\text{th}}}{A(\varepsilon_i+l\varepsilon_j)},\cdots,A\varepsilon_n)$$

$$=(A\varepsilon_1,\cdots,\underset{\substack{\uparrow\\ j\,\text{th}}}{A\varepsilon_i+lA\varepsilon_j},\cdots,A\varepsilon_n)$$

性质 设 A 是 $m\times n$ 矩阵。则

$$AI(ij) = \text{交换 } A \text{ 的第 } i, j \text{ 列}$$

$$AI(i(k)) = \text{将 } A \text{ 的第 } i \text{ 列乘 } k$$

$$AI(ij(l)) = A \text{ 的第 } j \text{ 列加上第 } i \text{ 列的 } l \text{ 倍}$$

证明 以第 3 式为例证明。设

$$A = \left(\begin{array}{c:c:c:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right) = (A_1, A_2, \cdots, A_n) \quad \xrightarrow{\text{回忆}} \quad A\varepsilon_i = A_i$$

所以

$$AI(ij(l)) = A(\varepsilon_1, \cdots, \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{ th}}}{\varepsilon_i + l\varepsilon_j}, \cdots, \varepsilon_n) = (A\varepsilon_1, \cdots, \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{ th}}}{A(\varepsilon_i + l\varepsilon_j)}, \cdots, A\varepsilon_n)$$

$$= (A\varepsilon_1, \cdots, \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{ th}}}{A\varepsilon_i + lA\varepsilon_j}, \cdots, A\varepsilon_n)$$

性质 设 A 是 $m\times n$ 矩阵。则

$$AI(ij)=\text{ 交换 } A \text{ 的第 } i,j \text{ 列}$$

$$AI(i(k))=\text{ 将 } A \text{ 的第 } i \text{ 列乘 } k$$

$$AI(ij(l))=A \text{ 的第 } j \text{ 列加上第 } i \text{ 列的 } l \text{ 倍}$$

证明 以第 3 式为例证明。设

$$A=\left(\begin{array}{c:c:c:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right)=(A_1,A_2,\cdots,A_n) \xrightarrow{\text{回忆}} A\varepsilon_i=A_i$$

所以

$$AI(ij(l))=A(\varepsilon_1,\cdots,\underset{\substack{\uparrow\\ j\text{ th}}}{\varepsilon_i+l\varepsilon_j},\cdots,\varepsilon_n)=(A\varepsilon_1,\cdots,\underset{\substack{\uparrow\\ j\text{ th}}}{A(\varepsilon_i+l\varepsilon_j)},\cdots,A\varepsilon_n)$$

$$=(A\varepsilon_1,\cdots,\underset{\substack{\uparrow\\ j\text{ th}}}{A\varepsilon_i+lA\varepsilon_j},\cdots,A\varepsilon_n)=(A_1,\cdots,\underset{\substack{\uparrow\\ j\text{ th}}}{A_i+lA_j},\cdots,A_n)$$

性质 设 A 是 $m \times n$ 矩阵。则

$$I(ij)A = \text{交换 } A \text{ 的第 } i, j \text{ 行}$$

性质 设 A 是 $m \times n$ 矩阵。则

$$I(ij)A = \text{交换 } A \text{ 的第 } i, j \text{ 行}$$

$$I(i(k))A = \text{将 } A \text{ 的第 } i \text{ 行乘 } k$$

性质 设 A 是 $m \times n$ 矩阵。则

$$I(ij)A = \text{交换 } A \text{ 的第 } i, j \text{ 行}$$

$$I(i(k))A = \text{将 } A \text{ 的第 } i \text{ 行乘 } k$$

$$I(ij(l))A = A \text{ 的第 } i \text{ 行加上第 } j \text{ 行的 } l \text{ 倍}$$

性质 设 A 是 $m\times n$ 矩阵。则

$$I(ij)A = \text{交换 } A \text{ 的第 } i,j \text{ 行}$$

$$I(i(k))A = \text{将 } A \text{ 的第 } i \text{ 行乘 } k$$

$$I(ij(l))A = A \text{ 的第 } i \text{ 行加上第 } j \text{ 行的 } l \text{ 倍}$$

证明

$$I(ij)A = \begin{array}{r} \\ \\ i\,\text{th}\rightarrow \\ \\ j\,\text{th}\rightarrow \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} \varepsilon_1^T \\ \vdots \\ \varepsilon_j^T \\ \vdots \\ \varepsilon_i^T \\ \vdots \\ \varepsilon_n^T \end{pmatrix} A$$

性质 设 A 是 $m\times n$ 矩阵。则

$$I(ij)A = \text{交换 } A \text{ 的第 } i, j \text{ 行}$$

$$I(i(k))A = \text{将 } A \text{ 的第 } i \text{ 行乘 } k$$

$$I(ij(l))A = A \text{ 的第 } i \text{ 行加上第 } j \text{ 行的 } l \text{ 倍}$$

证明

$$I(ij)A = \begin{array}{r} \\ \\ i\text{ th}\rightarrow \\ \\ j\text{ th}\rightarrow \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} \varepsilon_1^T \\ \vdots \\ \varepsilon_j^T \\ \vdots \\ \varepsilon_i^T \\ \vdots \\ \varepsilon_n^T \end{pmatrix} A = \begin{array}{r} \\ \\ i\text{ th}\rightarrow \\ \\ j\text{ th}\rightarrow \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} \varepsilon_1^T A \\ \vdots \\ \varepsilon_j^T A \\ \vdots \\ \varepsilon_i^T A \\ \vdots \\ \varepsilon_n^T A \end{pmatrix}$$

性质 设 A 是 $m \times n$ 矩阵。则

$$I(ij)A = \text{交换 } A \text{ 的第 } i, j \text{ 行}$$

$$I(i(k))A = \text{将 } A \text{ 的第 } i \text{ 行乘 } k$$

$$I(ij(l))A = A \text{ 的第 } i \text{ 行加上第 } j \text{ 行的 } l \text{ 倍}$$

证明

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hdashline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \hdashline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hdashline a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$$

$$I(ij)A = \begin{array}{r} \\ \\ i\text{ th}\rightarrow \\ \\ j\text{ th}\rightarrow \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} \varepsilon_1^T \\ \vdots \\ \varepsilon_j^T \\ \vdots \\ \varepsilon_i^T \\ \vdots \\ \varepsilon_n^T \end{pmatrix} A = \begin{array}{r} \\ \\ i\text{ th}\rightarrow \\ \\ j\text{ th}\rightarrow \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} \varepsilon_1^T A \\ \vdots \\ \varepsilon_j^T A \\ \vdots \\ \varepsilon_i^T A \\ \vdots \\ \varepsilon_n^T A \end{pmatrix}$$

性质 设 A 是 $m \times n$ 矩阵。则

$$I(ij)A = \text{交换 } A \text{ 的第 } i, j \text{ 行}$$

$$I(i(k))A = \text{将 } A \text{ 的第 } i \text{ 行乘 } k$$

$$I(ij(l))A = A \text{ 的第 } i \text{ 行加上第 } j \text{ 行的 } l \text{ 倍}$$

证明

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hdashline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \hdashline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hdashline a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{回忆}} \varepsilon_i^T A = A_i$$

$$I(ij)A = \begin{array}{r} \\ \\ i\text{ th}\rightarrow \\ \\ j\text{ th}\rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} \varepsilon_1^T \\ \vdots \\ \varepsilon_j^T \\ \vdots \\ \varepsilon_i^T \\ \vdots \\ \varepsilon_n^T \end{pmatrix} A = \begin{array}{r} \\ \\ i\text{ th}\rightarrow \\ \\ j\text{ th}\rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} \varepsilon_1^T A \\ \vdots \\ \varepsilon_j^T A \\ \vdots \\ \varepsilon_i^T A \\ \vdots \\ \varepsilon_n^T A \end{pmatrix}$$

性质 设 A 是 $m \times n$ 矩阵。则

$$I(ij)A = \text{交换 } A \text{ 的第 } i, j \text{ 行}$$

$$I(i(k))A = \text{将 } A \text{ 的第 } i \text{ 行乘 } k$$

$$I(ij(l))A = A \text{ 的第 } i \text{ 行加上第 } j \text{ 行的 } l \text{ 倍}$$

证明

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hdashline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \hdashline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hdashline a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{回忆}} \varepsilon_i^T A = A_i$$

所以

$$I(ij)A = \begin{array}{r} \\ \\ i\text{ th}\rightarrow \\ \\ j\text{ th}\rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} \varepsilon_1^T \\ \vdots \\ \varepsilon_j^T \\ \vdots \\ \varepsilon_i^T \\ \vdots \\ \varepsilon_n^T \end{pmatrix} A = \begin{array}{r} \\ \\ i\text{ th}\rightarrow \\ \\ j\text{ th}\rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} \varepsilon_1^T A \\ \vdots \\ \varepsilon_j^T A \\ \vdots \\ \varepsilon_i^T A \\ \vdots \\ \varepsilon_n^T A \end{pmatrix} = \begin{array}{r} \\ \\ i\text{ th}\rightarrow \\ \\ j\text{ th}\rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

初等矩阵与初等变换关系 I

用初等矩阵左乘 A $\Longleftrightarrow$ 对矩阵 A 作对应的初等行变换

初等矩阵	左乘初等矩阵对应的初等行变换

初等矩阵与初等变换关系 I

用初等矩阵左乘 A $\Longleftrightarrow$ 对矩阵 A 作对应的初等行变换

初等矩阵	左乘初等矩阵对应的初等行变换
$I(ij)$	
$I(i(k)), (k \neq 0)$	
$I(ij(l)), (i \neq j)$	

初等矩阵与初等变换关系 I

用初等矩阵左乘 A $\Longleftrightarrow$ 对矩阵 A 作对应的初等行变换

初等矩阵	左乘初等矩阵对应的初等行变换
$I(ij)$	$r_i \longleftrightarrow r_j$
$I(i(k)), (k \neq 0)$	
$I(ij(l)), (i \neq j)$	

初等矩阵与初等变换关系 I

用初等矩阵左乘 A $\Longleftrightarrow$ 对矩阵 A 作对应的初等行变换

初等矩阵	左乘初等矩阵对应的初等行变换
$I(ij)$	$r_i \longleftrightarrow r_j$
$I(i(k)), (k \neq 0)$	$k \times r_i$
$I(ij(l)), (i \neq j)$	

初等矩阵与初等变换关系 I

用初等矩阵左乘 A $\Longleftrightarrow$ 对矩阵 A 作对应的初等行变换

初等矩阵	左乘初等矩阵对应的初等行变换
$I(ij)$	$r_i \longleftrightarrow r_j$
$I(i(k)), (k \neq 0)$	$k \times r_i$
$I(ij(l)), (i \neq j)$	$r_i + lr_j$

初等矩阵与初等变换关系 II

用初等矩阵右乘 A $\Longleftrightarrow$ 对矩阵 A 作对应的初等列变换

初等矩阵	右乘初等矩阵对应的初等列变换

初等矩阵与初等变换关系 II

用初等矩阵右乘 A $\Longleftrightarrow$ 对矩阵 A 作对应的初等列变换

初等矩阵	右乘初等矩阵对应的初等列变换
$I(ij)$	
$I(i(k)), (k \neq 0)$	
$I(ij(l)), (i \neq j)$	

初等矩阵与初等变换关系 II

用初等矩阵右乘 A $\Longleftrightarrow$ 对矩阵 A 作对应的初等列变换

初等矩阵	右乘初等矩阵对应的初等列变换
$I(ij)$	$c_i \longleftrightarrow c_j$
$I(i(k)), (k \neq 0)$	
$I(ij(l)), (i \neq j)$	

初等矩阵与初等变换关系 II

用初等矩阵右乘 A $\Longleftrightarrow$ 对矩阵 A 作对应的初等列变换

初等矩阵	右乘初等矩阵对应的初等列变换
$I(ij)$	$c_i \longleftrightarrow c_j$
$I(i(k)), (k \neq 0)$	$k \times c_i$
$I(ij(l)), (i \neq j)$	

初等矩阵与初等变换关系 II

用初等矩阵右乘 A $\Longleftrightarrow$ 对矩阵 A 作对应的初等列变换

初等矩阵	右乘初等矩阵对应的初等列变换
$I(ij)$	$c_i \longleftrightarrow c_j$
$I(i(k)), (k \neq 0)$	$k \times c_i$
$I(ij(l)), (i \neq j)$	$c_j + lc_i$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$，其中（$k \neq 0$）
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$，其中（$i \neq j$）

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$，其中（$k \neq 0$）
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$，其中（$i \neq j$）

证明

- $I(ij)I(ij) =$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$，其中（$k \neq 0$）
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$，其中（$i \neq j$）

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) =$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$，其中（$k \neq 0$）
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$，其中（$i \neq j$）

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$，其中（$k \neq 0$）
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$，其中（$i \neq j$）

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$，这是利用：

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$，其中（$k \neq 0$）
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$，其中（$i \neq j$）

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{c_i \longleftrightarrow c_j} * \xrightarrow{c_i \longleftrightarrow c_j}$$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$，其中（$k \neq 0$）
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$，其中（$i \neq j$）

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} * \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} I$$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$，其中（$k \neq 0$）
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$，其中（$i \neq j$）

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} * \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} I$$

- $I(i(k))I(i(\frac{1}{k})) =$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$，其中（$k \neq 0$）
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$，其中（$i \neq j$）

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{c_i \longleftrightarrow c_j} * \xrightarrow{c_i \longleftrightarrow c_j} I$$

- $I(i(k))I(i(\frac{1}{k})) = I \cdot I(i(k)) \cdot I(i(\frac{1}{k})) =$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$，其中（$k \neq 0$）
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$，其中（$i \neq j$）

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{c_i \longleftrightarrow c_j} * \xrightarrow{c_i \longleftrightarrow c_j} I$$

- $I(i(k))I(i(\frac{1}{k})) = I \cdot I(i(k)) \cdot I(i(\frac{1}{k})) = I$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$，其中（$k \neq 0$）
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$，其中（$i \neq j$）

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} * \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} I$$

- $I(i(k))I(i(\frac{1}{k})) = I \cdot I(i(k)) \cdot I(i(\frac{1}{k})) = I$，这是利用：

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$，其中（$k \neq 0$）
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$，其中（$i \neq j$）

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{c_i \longleftrightarrow c_j} * \xrightarrow{c_i \longleftrightarrow c_j} I$$

- $I(i(k))I(i(\frac{1}{k})) = I \cdot I(i(k)) \cdot I(i(\frac{1}{k})) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{k \times c_i} * \xrightarrow{\frac{1}{k} \times c_i}$$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$，其中（$k \neq 0$）
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$，其中（$i \neq j$）

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{c_i \longleftrightarrow c_j} * \xrightarrow{c_i \longleftrightarrow c_j} I$$

- $I(i(k))I(i(\frac{1}{k})) = I \cdot I(i(k)) \cdot I(i(\frac{1}{k})) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{k \times c_i} * \xrightarrow{\frac{1}{k} \times c_i} I$$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$，其中（$k \neq 0$）
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$，其中（$i \neq j$）

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{c_i \longleftrightarrow c_j} * \xrightarrow{c_i \longleftrightarrow c_j} I$$

- $I(i(k))I(i(\frac{1}{k})) = I \cdot I(i(k)) \cdot I(i(\frac{1}{k})) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{k \times c_i} * \xrightarrow{\frac{1}{k} \times c_i} I$$

- $I(ij(l))I(ij(-l)) =$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$，其中（$k \neq 0$）
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$，其中（$i \neq j$）

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} * \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} I$$

- $I(i(k))I(i(\frac{1}{k})) = I \cdot I(i(k)) \cdot I(i(\frac{1}{k})) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{k \times c_i} * \xrightarrow{\frac{1}{k} \times c_i} I$$

- $I(ij(l))I(ij(-l)) = I \cdot I(ij(l)) \cdot I(ij(-l)) =$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$，其中（$k \neq 0$）
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$，其中（$i \neq j$）

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} * \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} I$$

- $I(i(k))I(i(\frac{1}{k})) = I \cdot I(i(k)) \cdot I(i(\frac{1}{k})) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{k \times c_i} * \xrightarrow{\frac{1}{k} \times c_i} I$$

- $I(ij(l))I(ij(-l)) = I \cdot I(ij(l)) \cdot I(ij(-l)) = I$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$，其中（$k \neq 0$）
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$，其中（$i \neq j$）

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{c_i \longleftrightarrow c_j} * \xrightarrow{c_i \longleftrightarrow c_j} I$$

- $I(i(k))I(i(\frac{1}{k})) = I \cdot I(i(k)) \cdot I(i(\frac{1}{k})) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{k \times c_i} * \xrightarrow{\frac{1}{k} \times c_i} I$$

- $I(ij(l))I(ij(-l)) = I \cdot I(ij(l)) \cdot I(ij(-l)) = I$，这是利用：

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$，其中（$k \neq 0$）
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$，其中（$i \neq j$）

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} * \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} I$$

- $I(i(k))I(i(\frac{1}{k})) = I \cdot I(i(k)) \cdot I(i(\frac{1}{k})) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{k \times c_i} * \xrightarrow{\frac{1}{k} \times c_i} I$$

- $I(ij(l))I(ij(-l)) = I \cdot I(ij(l)) \cdot I(ij(-l)) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{c_j + lc_i} * \xrightarrow{c_j - lc_i}$$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$，其中（$k \neq 0$）
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$，其中（$i \neq j$）

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} * \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} I$$

- $I(i(k))I(i(\frac{1}{k})) = I \cdot I(i(k)) \cdot I(i(\frac{1}{k})) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{k \times c_i} * \xrightarrow{\frac{1}{k} \times c_i} I$$

- $I(ij(l))I(ij(-l)) = I \cdot I(ij(l)) \cdot I(ij(-l)) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{c_j + lc_i} * \xrightarrow{c_j - lc_i} I$$

矩阵的等价标准形

定理 任何矩阵 $A_{m\times n}$，经过若干次初等变换后，总可以化为如下形式的矩阵：

$$D=\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$$

矩阵的等价标准形

定理 任何矩阵 $A_{m\times n}$，经过若干次初等变换后，总可以化为如下形式的矩阵：

$$D=\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$$

即，除左上角为 r 阶单位矩阵，其余元素均为零。

矩阵的等价标准形

定理 任何矩阵 $A_{m\times n}$，经过若干次初等变换后，总可以化为如下形式的矩阵：

$$D=\begin{pmatrix}1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0\end{pmatrix}_{m\times n}=\begin{pmatrix}I_r & O \\ O & O\end{pmatrix}$$

即，除左上角为 r 阶单位矩阵，其余元素均为零。

矩阵的等价标准形

定理 任何矩阵 $A_{m\times n}$，经过若干次初等变换后，总可以化为如下形式的矩阵：

$$D=\begin{pmatrix}1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0\end{pmatrix}_{m\times n}=\begin{pmatrix}I_r & O\\ O & O\end{pmatrix}$$

即，除左上角为 r 阶单位矩阵，其余元素均为零。该形式称为 A 的等价标准形。

矩阵的等价标准形

定理 任何矩阵 $A_{m\times n}$，经过若干次初等变换后，总可以化为如下形式的矩阵：

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{m\times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

即，除左上角为 r 阶单位矩阵，其余元素均为零。该形式称为 A 的等价标准形。

注 r 取值范围：

矩阵的等价标准形

定理 任何矩阵 $A_{m\times n}$，经过若干次初等变换后，总可以化为如下形式的矩阵：

$$D=\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

即，除左上角为 r 阶单位矩阵，其余元素均为零。该形式称为 A 的等价标准形。

注 r 取值范围：$0\le r$,

矩阵的等价标准形

定理 任何矩阵 $A_{m\times n}$，经过若干次初等变换后，总可以化为如下形式的矩阵：

$$D=\begin{pmatrix}1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0\end{pmatrix}_{m\times n}=\begin{pmatrix}I_r & O \\ O & O\end{pmatrix}$$

即，除左上角为 r 阶单位矩阵，其余元素均为零。该形式称为 A 的等价标准形。

注 r 取值范围：$0\le r$，$r\le m$

矩阵的等价标准形

定理 任何矩阵 $A_{m\times n}$，经过若干次初等变换后，总可以化为如下形式的矩阵：

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{m\times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

即，除左上角为 r 阶单位矩阵，其余元素均为零。该形式称为 A 的等价标准形。

注 r 取值范围：$0 \le r$，$r \le m$且 $r \le n$

例 4×3 矩阵 $\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ 所有可能的等价标准形是什么？

例 4×3 矩阵 $\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ 所有可能的等价标准形是什么？

4×3 矩阵等价标准形的一般形式是

$$D = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}_{4\times 3}$$

例 4×3 矩阵 $\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ 所有可能的等价标准形是什么？

4×3 矩阵等价标准形的一般形式是

$$D=\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{4\times 3}$$

例 4×3 矩阵 $\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ 所有可能的等价标准形是什么？

4×3 矩阵等价标准形的一般形式是

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{4\times 3} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

例 4×3 矩阵 $\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ 所有可能的等价标准形是什么?

4×3 矩阵等价标准形的一般形式是

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{4\times 3} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

其中 $0 \leq r \leq 3$

例 4×3 矩阵 $\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ 所有可能的等价标准形是什么？

4×3 矩阵等价标准形的一般形式是

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{4\times 3} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

其中 $0 \le r \le 3$，所以全部可能是：

例 4×3 矩阵 $\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ 所有可能的等价标准形是什么？

4×3 矩阵等价标准形的一般形式是

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{4\times 3} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

其中 $0 \le r \le 3$，所以全部可能是：

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

例 4×3 矩阵 $\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ 所有可能的等价标准形是什么?

4×3 矩阵等价标准形的一般形式是

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{4\times 3} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

其中 $0 \le r \le 3$，所以全部可能是:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

例 4×3 矩阵 $\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ 所有可能的等价标准形是什么？

4×3 矩阵等价标准形的一般形式是

$$D=\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{4\times 3} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

其中 $0\le r\le 3$，所以全部可能是：

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

例 4×3 矩阵 $\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ 所有可能的等价标准形是什么？

4×3 矩阵等价标准形的一般形式是

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{4\times 3} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

其中 $0\le r\le 3$，所以全部可能是：

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-2r_1}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ & & & \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ & & & \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-\frac{1}{2}c_1}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-\frac{1}{2}c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & & \\ 0 & -1 & & \\ 0 & -1 & & \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_3-c_1]{c_2-\frac{1}{2}c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & & \\ 0 & -1 & & \\ 0 & -1 & & \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_3-c_1]{c_2-\frac{1}{2}c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \\ 0 & -1 & -1 & \\ 0 & -1 & -1 & \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{c_3-c_1 \\ c_4-\frac{3}{2}c_1}]{c_2-\frac{1}{2}c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \\ 0 & -1 & -1 & \\ 0 & -1 & -1 & \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{c_3-c_1 \\ c_4-\frac{3}{2}c_1}]{c_2-\frac{1}{2}c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{c_3-c_1 \\ c_4-\frac{3}{2}c_1}]{c_2-\frac{1}{2}c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}\times r_1}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{c_3-c_1 \\ c_4-\frac{3}{2}c_1}]{c_2-\frac{1}{2}c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}\times r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{c_3-c_1 \\ c_4-\frac{3}{2}c_1}]{c_2-\frac{1}{2}c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}\times r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{c_3-c_1 \\ c_4-\frac{3}{2}c_1}]{c_2-\frac{1}{2}c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}\times r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{c_3-c_1 \\ c_4-\frac{3}{2}c_1}]{c_2-\frac{1}{2}c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}\times r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3-c_2}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{c_3-c_1 \\ c_4-\frac{3}{2}c_1}]{c_2-\frac{1}{2}c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}\times r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3-c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & -1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{c_3-c_1 \\ c_4-\frac{3}{2}c_1}]{c_2-\frac{1}{2}c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}\times r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_4-c_2]{c_3-c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{c_3-c_1 \\ c_4-\frac{3}{2}c_1}]{c_2-\frac{1}{2}c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}\times r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_4-c_2]{c_3-c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{c_3-c_1 \\ c_4-\frac{3}{2}c_1}]{c_2-\frac{1}{2}c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}\times r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_4-c_2]{c_3-c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)\times r_2}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{c_3-c_1 \\ c_4-\frac{3}{2}c_1}]{c_2-\frac{1}{2}c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}\times r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_4-c_2]{c_3-c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)\times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2 - 4c_1}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2 - 4c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & 2 & & \\ 0 & -2 & & \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_3 - 3c_1]{c_2 - 4c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & 2 & & \\ 0 & -2 & & \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_3 - 3c_1]{c_2 - 4c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 2 & 2 & \\ 0 & -2 & -2 & \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{c_3 - 3c_1 \\ c_4 - 5c_1}]{c_2 - 4c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 2 & 2 & \\ 0 & -2 & -2 & \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{c_3 - 3c_1 \\ c_4 - 5c_1}]{c_2 - 4c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{c_3 - 3c_1 \\ c_4 - 5c_1}]{c_2 - 4c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{c_3 - 3c_1 \\ c_4 - 5c_1}]{c_2 - 4c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{c_3 - 3c_1 \\ c_4 - 5c_1}]{c_2 - 4c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3 - c_2}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{c_3 - 3c_1 \\ c_4 - 5c_1}]{c_2 - 4c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3 - c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 2 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{c_3 - 3c_1 \\ c_4 - 5c_1}]{c_2 - 4c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_4 - \frac{3}{2}c_2]{c_3 - c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 2 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{c_3 - 3c_1 \\ c_4 - 5c_1}]{c_2 - 4c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_4 - \frac{3}{2}c_2]{c_3 - c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{c_3 - 3c_1 \\ c_4 - 5c_1}]{c_2 - 4c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_4 - \frac{3}{2}c_2]{c_3 - c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2} \times r_2}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{c_3 - 3c_1 \\ c_4 - 5c_1}]{c_2 - 4c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_4 - \frac{3}{2}c_2]{c_3 - c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2} \times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+r_1}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ & \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ & \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-3c_1}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-3c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-3c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-3c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\longleftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-3c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{5}\times r_2}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-3c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{5}\times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{m\times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D_{m\times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

$$A_{m\times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D_{m\times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

从而存在 m 阶初等矩阵 $P_1, P_2, \ldots, P_s$ 与 n 阶初等矩阵 $Q_1, Q_2, \ldots, Q_t$ 使得

$$A_{m\times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D_{m\times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

从而存在 m 阶初等矩阵 $P_1, P_2, \ldots, P_s$ 与 n 阶初等矩阵 $Q_1, Q_2, \ldots, Q_t$ 使得

$$P_s \cdots P_2 P_1 A$$

$$A_{m\times n}\xrightarrow{\text{一系列初等变换}}D_{m\times n}=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

从而存在 m 阶初等矩阵 $P_1, P_2, \ldots, P_s$ 与 n 阶初等矩阵 $Q_1, Q_2, \ldots, Q_t$ 使得

$$P_s\cdots P_2P_1AQ_1Q_2\cdots Q_t$$

$$A_{m\times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D_{m\times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

从而存在 m 阶初等矩阵 $P_1, P_2, \ldots, P_s$ 与 n 阶初等矩阵 $Q_1, Q_2, \ldots, Q_t$ 使得

$$P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = D = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

$$A_{m\times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D_{m\times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

从而存在 m 阶初等矩阵 $P_1, P_2, \ldots, P_s$ 与 n 阶初等矩阵 $Q_1, Q_2, \ldots, Q_t$ 使得

$$P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = D = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

定理 设 A 是 n 阶方阵，则

- A 可逆的充分必要条件是 A 的等价标准形是 I

$$A_{m\times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D_{m\times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

从而存在 m 阶初等矩阵 $P_1, P_2, \ldots, P_s$ 与 n 阶初等矩阵 $Q_1, Q_2, \ldots, Q_t$ 使得

$$P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = D = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

定理 设 A 是 n 阶方阵，则

- A 可逆的充分必要条件是 A 的等价标准形是 I
- A 可逆的充分必要条件是 A 可以表示成一些初等矩阵的乘积

$$A_{m\times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D_{m\times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

从而存在 m 阶初等矩阵 $P_1, P_2, \ldots, P_s$ 与 n 阶初等矩阵 $Q_1, Q_2, \ldots, Q_t$ 使得

$$P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = D = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

定理 设 A 是 n 阶方阵，则

- A 可逆的充分必要条件是 A 的等价标准形是 I
- A 可逆的充分必要条件是 A 可以表示成一些初等矩阵的乘积

$$|A| \neq 0$$

$$A_{m\times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D_{m\times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

从而存在 m 阶初等矩阵 $P_1, P_2, \ldots, P_s$ 与 n 阶初等矩阵 $Q_1, Q_2, \ldots, Q_t$ 使得

$$P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = D = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

定理 设 A 是 n 阶方阵，则

- A 可逆的充分必要条件是 A 的等价标准形是 I
- A 可逆的充分必要条件是 A 可以表示成一些初等矩阵的乘积

$$|A| \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |D| \neq 0$$

$$A_{m\times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D_{m\times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

从而存在 m 阶初等矩阵 $P_1, P_2, \ldots, P_s$ 与 n 阶初等矩阵 $Q_1, Q_2, \ldots, Q_t$ 使得

$$P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = D = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

定理 设 A 是 n 阶方阵，则

- A 可逆的充分必要条件是 A 的等价标准形是 I
- A 可逆的充分必要条件是 A 可以表示成一些初等矩阵的乘积

证明 $|A| \neq 0 \iff |D| \neq 0 \iff r = n,$

$$A_{m\times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D_{m\times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

从而存在 m 阶初等矩阵 $P_1, P_2, \ldots, P_s$ 与 n 阶初等矩阵 $Q_1, Q_2, \ldots, Q_t$ 使得

$$P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = D = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

定理 设 A 是 n 阶方阵，则

- A 可逆的充分必要条件是 A 的等价标准形是 I
- A 可逆的充分必要条件是 A 可以表示成一些初等矩阵的乘积

证明 $|A| \neq 0 \iff |D| \neq 0 \iff r = n,\ D = I_n$

$$A_{m\times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D_{m\times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

从而存在 m 阶初等矩阵 $P_1, P_2, \ldots, P_s$ 与 n 阶初等矩阵 $Q_1, Q_2, \ldots, Q_t$ 使得

$$P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = D = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

定理 设 A 是 n 阶方阵，则

- A 可逆的充分必要条件是 A 的等价标准形是 I
- A 可逆的充分必要条件是 A 可以表示成一些初等矩阵的乘积

证明 $|A| \neq 0 \iff |D| \neq 0 \iff r = n, D = I_n$

此时 $P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = D = I_n$

$$A_{m\times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D_{m\times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

从而存在 m 阶初等矩阵 $P_1, P_2, \ldots, P_s$ 与 n 阶初等矩阵

$Q_1, Q_2, \ldots, Q_t$ 使得

$$P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = D = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

定理 设 A 是 n 阶方阵，则

- A 可逆的充分必要条件是 A 的等价标准形是 I
- A 可逆的充分必要条件是 A 可以表示成一些初等矩阵的乘积

证明 $\quad |A| \neq 0 \iff |D| \neq 0 \iff r = n, D = I_n$

此时 $$P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = D = I_n$$
$$\Downarrow$$
$$A = P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_s^{-1} Q_t^{-1} \cdots Q_2^{-1} Q_1^{-1}$$

初等变换求逆矩阵——引入

假设 $A_{n\times n}$ 是可逆方阵，则

$$A_{n\times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D = I_n$$

初等变换求逆矩阵——引入

假设 $A_{n\times n}$ 是可逆方阵，则

$$A_{n\times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D = I_n$$

$$\Downarrow$$

$$P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = I_n$$

初等变换求逆矩阵——引入

假设 $A_{n\times n}$ 是可逆方阵，则

$$A_{n\times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D = I_n$$

$$\Downarrow$$

$$P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = I_n$$

$$\Downarrow$$

$$Q_1 Q_2 \cdots Q_t P_s \cdots P_2 P_1 A = I_n$$

初等变换求逆矩阵——引入

假设 $A_{n\times n}$ 是可逆方阵，则

$$A_{n\times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D = I_n$$

$$\Downarrow$$

$$P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = I_n$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{Q_1 Q_2 \cdots Q_t P_s \cdots P_2 P_1}_{A^{-1}} A = I_n$$

初等变换求逆矩阵——引入

假设 $A_{n\times n}$ 是可逆方阵，则

$$A_{n\times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D = I_n$$

$$\Downarrow$$

$$P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = I_n$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{Q_1 Q_2 \cdots Q_t P_s \cdots P_2 P_1}_{A^{-1}} A = I_n$$

启发

1. 可逆矩阵 $\xrightarrow{\text{初等行变换}}$ 单位矩阵

初等变换求逆矩阵——引入

假设 $A_{n\times n}$ 是可逆方阵，则

$$A_{n\times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D = I_n$$

$$\Downarrow$$

$$P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = I_n$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{Q_1 Q_2 \cdots Q_t P_s \cdots P_2 P_1}_{A^{-1}} A = I_n$$

启发

1. 可逆矩阵 $\xrightarrow{\text{初等行变换}}$ 单位矩阵
2. 操作"初等行变换"相对简单，但如何从这些操作得出乘积

$$Q_1 Q_2 \cdots Q_t P_s \cdots P_2 P_1 = A^{-1} ?$$

初等变换求逆矩阵——引入

示例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵。步骤如下：

初等变换求逆矩阵——引入

示例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵。步骤如下：

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

初等变换求逆矩阵——引入

示例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\2&0&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵。步骤如下：

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\2&0&1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\Downarrow_{r_3-2r_1}$$

初等变换求逆矩阵——引入

示例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\2&0&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵。步骤如下：

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\2&0&1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\Downarrow_{r_3-2r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&-2&0&1\end{array}\right)$$

初等变换求逆矩阵——引入

示例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\2&0&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵。步骤如下：

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\2&0&1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\Downarrow_{r_3-2r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\Downarrow_{r_2-r_3}$$

初等变换求逆矩阵——引入

示例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\2&0&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵。步骤如下：

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\2&0&1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\Downarrow_{r_3-2r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\Downarrow_{r_2-r_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&2&1&-1\\0&0&1&-2&0&1\end{array}\right)$$

初等变换求逆矩阵——引入

示例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\2&0&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵。步骤如下：

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\2&0&1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\Downarrow_{r_3-2r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\Downarrow_{r_2-r_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&2&1&-1\\0&0&1&-2&0&1\end{array}\right)$$

则 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&-1\\-2&0&1\end{pmatrix}$

初等变换求逆矩阵——引入

示例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\2&0&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵。步骤如下：

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\2&0&1&0&0&1\end{array}\right) \quad\Longleftarrow\quad (A \vdots I)$$

$$\Downarrow_{r_3-2r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\Downarrow_{r_2-r_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&2&1&-1\\0&0&1&-2&0&1\end{array}\right)$$

则 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&-1\\-2&0&1\end{pmatrix}$

初等变换求逆矩阵——引入

示例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵。步骤如下：

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad = \quad (A \vdots I)$$

$$\Downarrow_{r_3 - 2r_1} \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad = \quad (P_1 A \vdots P_1 I)$$

$$\Downarrow_{r_2 - r_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

则 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

初等变换求逆矩阵——引入

示例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\2&0&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵。步骤如下：

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\2&0&1&0&0&1\end{array}\right) \quad = \quad (A \vdots I)$$

$$\Downarrow_{r_3-2r_1} \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&-2&0&1\end{array}\right) \quad = \quad (P_1A \vdots P_1I)=(P_1A \vdots P_1)$$

$$\Downarrow_{r_2-r_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&2&1&-1\\0&0&1&-2&0&1\end{array}\right)$$

则 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&-1\\-2&0&1\end{pmatrix}$

初等变换求逆矩阵——引入

示例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\2&0&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵。步骤如下：

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\2&0&1&0&0&1\end{array}\right) \Longleftrightarrow (A \vdots I)$$

$$\Downarrow_{r_3-2r_1} \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&-2&0&1\end{array}\right) \Longleftrightarrow (P_1A \vdots P_1I)=(P_1A \vdots P_1)$$

$$\Downarrow_{r_2-r_3} \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&2&1&-1\\0&0&1&-2&0&1\end{array}\right) \Longleftrightarrow (P_2P_1A \vdots P_2P_1)$$

则 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&-1\\-2&0&1\end{pmatrix}$

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

初等变换求逆矩阵——引入

示例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\2&0&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵。步骤如下：

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\2&0&1&0&0&1\end{array}\right) \;=\!=\!=\; (A \vdots I)$$

$$\Downarrow_{r_3-2r_1} \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&-2&0&1\end{array}\right) \;=\!=\!=\; (P_1A \vdots P_1I)=(P_1A \vdots P_1)$$

$$\Downarrow_{r_2-r_3} \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&2&1&-1\\0&0&1&-2&0&1\end{array}\right) \;=\!=\!=\; (\underbrace{P_2P_1}_{A^{-1}}A \vdots P_2P_1)$$

则 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&-1\\-2&0&1\end{pmatrix}$

初等变换求逆矩阵——引入

示例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\2&0&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵。步骤如下：

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\2&0&1&0&0&1\end{array}\right) \;=\!=\!=\; (A \vdots I)$$

$$\Downarrow_{r_3-2r_1} \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&-2&0&1\end{array}\right) \;=\!=\!=\; (P_1A \vdots P_1I)=(P_1A \vdots P_1)$$

$$\Downarrow_{r_2-r_3} \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&2&1&-1\\0&0&1&-2&0&1\end{array}\right) \;=\!=\!=\; (\underbrace{P_2P_1}_{A^{-1}}A \vdots \underbrace{P_2P_1}_{A^{-1}})$$

则 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&-1\\-2&0&1\end{pmatrix}$

初等变换求逆矩阵——步骤

总结 求 n 阶可逆矩阵 A 的逆矩阵 A^{-1} 的步骤：

$$(A \vdots I) \xrightarrow{\text{一系列初等行变换}} (I \vdots B)$$

初等变换求逆矩阵——步骤

总结 求 n 阶可逆矩阵 A 的逆矩阵 A^{-1} 的步骤：

$$(A \vdots I) \xrightarrow{\text{一系列初等行变换}} (I \vdots B)$$

则此时 B 就是 A^{-1}

初等变换求逆矩阵——步骤

总结 求 n 阶可逆矩阵 A 的逆矩阵 A^{-1} 的步骤:

$$(A \vdots I) \xrightarrow{\text{一系列初等行变换}} (I \vdots B)$$

则此时 B 就是 A^{-1}

注 仅通过行变换将 A 化为单位矩阵的步骤:

初等变换求逆矩阵——步骤

总结 求 n 阶可逆矩阵 A 的逆矩阵 A^{-1} 的步骤：

$$(A \vdots I) \xrightarrow{\text{一系列初等行变换}} (I \vdots B)$$

则此时 B 就是 A^{-1}

注 仅通过行变换将 A 化为单位矩阵的步骤：

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

初等变换求逆矩阵——步骤

总结 求 n 阶可逆矩阵 A 的逆矩阵 A^{-1} 的步骤：

$$(A \vdots I) \xrightarrow{\text{一系列初等行变换}} (I \vdots B)$$

则此时 B 就是 A^{-1}

注 仅通过行变换将 A 化为单位矩阵的步骤：

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

初等变换求逆矩阵——步骤

总结 求 n 阶可逆矩阵 A 的逆矩阵 A^{-1} 的步骤：

$$(A \vdots I) \xrightarrow{\text{一系列初等行变换}} (I \vdots B)$$

则此时 B 就是 A^{-1}

注 仅通过行变换将 A 化为单位矩阵的步骤：

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

初等变换求逆矩阵——步骤

总结 求 n 阶可逆矩阵 A 的逆矩阵 A^{-1} 的步骤：

$$(A \vdots I) \xrightarrow{\text{一系列初等行变换}} (I \vdots B)$$

则此时 B 就是 A^{-1}

注 仅通过行变换将 A 化为单位矩阵的步骤：

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$

初等变换求逆矩阵——步骤

总结 求 n 阶可逆矩阵 A 的逆矩阵 A^{-1} 的步骤：

$$(A \vdots I) \xrightarrow{\text{一系列初等行变换}} (I \vdots B)$$

则此时 B 就是 A^{-1}

注 仅通过行变换将 A 化为单位矩阵的步骤：

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$

初等变换求逆矩阵——步骤

总结 求 n 阶可逆矩阵 A 的逆矩阵 A^{-1} 的步骤：

$$(A \vdots I) \xrightarrow{\text{一系列初等行变换}} (I \vdots B)$$

则此时 B 就是 A^{-1}

注 仅通过行变换将 A 化为单位矩阵的步骤：

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

初等变换求逆矩阵——步骤

总结 求 n 阶可逆矩阵 A 的逆矩阵 A^{-1} 的步骤：

$$(A \vdots I) \xrightarrow{\text{一系列初等行变换}} (I \vdots B)$$

则此时 B 就是 A^{-1}

注 仅通过行变换将 A 化为单位矩阵的步骤：

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

初等变换求逆矩阵——步骤

总结 求 n 阶可逆矩阵 A 的逆矩阵 A^{-1} 的步骤：

$$(A \vdots I) \xrightarrow{\text{一系列初等行变换}} (I \vdots B)$$

则此时 B 就是 A^{-1}

注 仅通过行变换将 A 化为单位矩阵的步骤：

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

初等变换求逆矩阵——步骤

总结 求 n 阶可逆矩阵 A 的逆矩阵 A^{-1} 的步骤：

$$(A \vdots I) \xrightarrow{\text{一系列初等行变换}} (I \vdots B)$$

则此时 B 就是 A^{-1}

注 仅通过行变换将 A 化为单位矩阵的步骤：

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

初等变换求逆矩阵——步骤

总结 求 n 阶可逆矩阵 A 的逆矩阵 A^{-1} 的步骤：

$$(A \vdots I) \xrightarrow{\text{一系列初等行变换}} (I \vdots B)$$

则此时 B 就是 A^{-1}

注 仅通过行变换将 A 化为单位矩阵的步骤：

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

例 求 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A \vdots I) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A \vdots I) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2 - 2r_1}$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A \vdots I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ & & & & & \end{array}\right)$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ -3 & 2 & -5\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A \vdots I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -3 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0\\ & & & & & \end{array}\right)$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A \vdots I) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\-3&2&-5\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\,\vdots\,I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&0&0\\2&1&0&0&1&0\\-3&2&-5&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&2&-2&3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-2r_2}$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\-3&2&-5\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A \vdots I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\2&1&0&0&1&0\\-3&2&-5&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&2&-2&3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-2r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&0&2&7&-2&1\end{array}\right)$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\-3&2&-5\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\vdots I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\2&1&0&0&1&0\\-3&2&-5&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&2&-2&3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-2r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&0&2&7&-2&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}r_3}$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A \vdots I) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3-2r_2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}r_3} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 & -1 & 1/2 \end{array}\right)$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\-3&2&-5\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\vdots I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&0&0\\2&1&0&0&1&0\\-3&2&-5&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&2&-2&3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-2r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&0&2&7&-2&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&0&1&7/2&-1&1/2\end{array}\right)\xrightarrow{r_2+2r_3}$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\-3&2&-5\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\vdots I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\2&1&0&0&1&0\\-3&2&-5&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&2&-2&3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-2r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&0&2&7&-2&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&0&1&7/2&-1&1/2\end{array}\right)\xrightarrow{r_2+2r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}&&&&&\\0&1&0&5&-1&1\\0&0&1&7/2&-1&1/2\end{array}\right)$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\-3&2&-5\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\vdots I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&0&0\\2&1&0&0&1&0\\-3&2&-5&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&2&-2&3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-2r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&0&2&7&-2&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&0&1&7/2&-1&1/2\end{array}\right)\xrightarrow[r_1-r_3]{r_2+2r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}&&&&&\\0&1&0&5&-1&1\\0&0&1&7/2&-1&1/2\end{array}\right)$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A \vdots I) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3-2r_2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}r_3} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 & -1 & 1/2 \end{array}\right) \xrightarrow[r_1-r_3]{r_2+2r_3} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -5/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 & -1 & 1/2 \end{array}\right)$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\-3&2&-5\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\,\vdots\,I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&0&0\\2&1&0&0&1&0\\-3&2&-5&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&2&-2&3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-2r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&0&2&7&-2&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&0&1&7/2&-1&1/2\end{array}\right)\xrightarrow[r_1-r_3]{r_2+2r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-5/2&1&-1/2\\0&1&0&5&-1&1\\0&0&1&7/2&-1&1/2\end{array}\right)$$

所以 $A^{-1}=\begin{pmatrix}-5/2&1&-1/2\\5&-1&1\\7/2&-1&1/2\end{pmatrix}$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&1\\2&0&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\vdots I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&0&0\\1&1&1&0&1&0\\2&0&3&0&0&1\end{array}\right)$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&1\\2&0&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A \vdots I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&0&0\\1&1&1&0&1&0\\2&0&3&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-r_1}$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&1\\2&0&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A \vdots I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&0&0\\1&1&1&0&1&0\\2&0&3&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\ & & & & & \end{array}\right)$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&1\\2&0&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A \vdots I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&0&0\\1&1&1&0&1&0\\2&0&3&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\ & & & & & \end{array}\right)$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&1\\2&0&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A \vdots I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&0&0\\1&1&1&0&1&0\\2&0&3&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&0&-1&-2&0&1\end{array}\right)$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&1\\2&0&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A \vdots I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&0&0\\1&1&1&0&1&0\\2&0&3&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&0&-1&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{(-1)\times r_3}$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&1\\2&0&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A \vdots I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&0&0\\1&1&1&0&1&0\\2&0&3&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&0&-1&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{(-1)\times r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&0&1&2&0&-1\end{array}\right)$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&1\\2&0&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\vdots I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&0&0\\1&1&1&0&1&0\\2&0&3&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&0&-1&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{(-1)\times r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&0&1&2&0&-1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2+r_3}$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&1\\2&0&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\,\vdots\,I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&0&0\\1&1&1&0&1&0\\2&0&3&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&0&-1&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{(-1)\times r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&0&1&2&0&-1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2+r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc} & & & & & \\0&1&0&1&1&-1\\0&0&1&2&0&-1\end{array}\right)$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&1\\2&0&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\,\vdots\,I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&0&0\\1&1&1&0&1&0\\2&0&3&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&0&-1&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{(-1)\times r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&0&1&2&0&-1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1-2r_3]{r_2+r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}&&&&&\\0&1&0&1&1&-1\\0&0&1&2&0&-1\end{array}\right)$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&1\\2&0&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\vdots I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&0&0\\1&1&1&0&1&0\\2&0&3&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&0&-1&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{(-1)\times r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&0&1&2&0&-1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1-2r_3]{r_2+r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-3&0&2\\0&1&0&1&1&-1\\0&0&1&2&0&-1\end{array}\right)$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A \vdots I) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(-1)\times r_3} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1-2r_3]{r_2+r_3} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

所以 $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A \vdots I) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A \vdots I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\2&2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-2r_1}$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\,\vdots\,I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\2&2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&-3&-2&-2&1&0\\ & & & & & \end{array}\right)$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A \vdots I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\2&2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&-3&-2&-2&1&0\\&&&&&\end{array}\right)$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\,\vdots\,I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\2&2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&-3&-2&-2&1&0\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\vdots I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\2&2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&-3&-2&-2&1&0\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-2r_3}$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A \vdots I) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-2r_3} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A \vdots I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\2&2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&-3&-2&-2&1&0\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-2r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+2r_2}$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\,\vdots\,I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\2&2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&-3&-2&-2&1&0\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-2r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+2r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&0&5&2&2&-3\end{array}\right)$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\vdots I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\2&2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&-3&-2&-2&1&0\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-2r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+2r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&0&5&2&2&-3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}\times r_3}$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\,\vdots\, I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\2&2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&-3&-2&-2&1&0\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-2r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+2r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&0&5&2&2&-3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}\times r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&0&1&2/5&2/5&-3/5\end{array}\right)$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\,\vdots\,I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\2&2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&-3&-2&-2&1&0\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-2r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+2r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&0&5&2&2&-3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}\times r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&0&1&2/5&2/5&-3/5\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-4r_3}$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\,\vdots\,I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\2&2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&-3&-2&-2&1&0\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-2r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+2r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&0&5&2&2&-3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}\times r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&0&1&2/5&2/5&-3/5\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-4r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}&&&&&\\0&1&0&2/5&-3/5&2/5\\0&0&1&2/5&2/5&-3/5\end{array}\right)$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\,\vdots\,I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\2&2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&-3&-2&-2&1&0\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-2r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+2r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&0&5&2&2&-3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}\times r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&0&1&2/5&2/5&-3/5\end{array}\right)\xrightarrow[r_1-2r_3]{r_2-4r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}&&&&&\\0&1&0&2/5&-3/5&2/5\\0&0&1&2/5&2/5&-3/5\end{array}\right)$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\,\vdots\,I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\2&2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&-3&-2&-2&1&0\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-2r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+2r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&0&5&2&2&-3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}\times r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&0&1&2/5&2/5&-3/5\end{array}\right)\xrightarrow[r_1-2r_3]{r_2-4r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&0&1/5&-4/5&6/5\\0&1&0&2/5&-3/5&2/5\\0&0&1&2/5&2/5&-3/5\end{array}\right)$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\vdots I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\2&2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&-3&-2&-2&1&0\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-2r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+2r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&0&5&2&2&-3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}\times r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&0&1&2/5&2/5&-3/5\end{array}\right)\xrightarrow[r_1-2r_3]{r_2-4r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&0&1/5&-4/5&6/5\\0&1&0&2/5&-3/5&2/5\\0&0&1&2/5&2/5&-3/5\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1-2r_2}$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A \vdots I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\2&2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&-3&-2&-2&1&0\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-2r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+2r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&0&5&2&2&-3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}\times r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&0&1&2/5&2/5&-3/5\end{array}\right)\xrightarrow[r_1-2r_3]{r_2-4r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&0&1/5&-4/5&6/5\\0&1&0&2/5&-3/5&2/5\\0&0&1&2/5&2/5&-3/5\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1-2r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-3/5&2/5&2/5\\0&1&0&2/5&-3/5&2/5\\0&0&1&2/5&2/5&-3/5\end{array}\right)$$

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\,\vdots\,I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\2&2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&-3&-2&-2&1&0\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-2r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+2r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&0&5&2&2&-3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}\times r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&0&1&2/5&2/5&-3/5\end{array}\right)\xrightarrow[r_1-2r_3]{r_2-4r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&0&1/5&-4/5&6/5\\0&1&0&2/5&-3/5&2/5\\0&0&1&2/5&2/5&-3/5\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1-2r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-3/5&2/5&2/5\\0&1&0&2/5&-3/5&2/5\\0&0&1&2/5&2/5&-3/5\end{array}\right),\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}-3/5&2/5&2/5\\2/5&-3/5&2/5\\2/5&2/5&-3/5\end{pmatrix}$$

例 求 $A=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵，其中 a_i 都不为 0。

例 求 $A=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵，其中 a_i 都不为 0。

解

$$(A \vdots I)=\left(\begin{array}{cccc:cccc} 0 & a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

例 求 $A=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵，其中 a_i 都不为 0。

解

$$(A \vdots I)=\left(\begin{array}{cccc:cccc} 0 & a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_4 \leftrightarrow r_3} * \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_2} * \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_1}$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵，其中 a_i 都不为 0。

解

$$(A \vdots I) = \left(\begin{array}{cccc:cccc} 0 & a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_4 \leftrightarrow r_3} * \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_2} * \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc} a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}0&a_1&0&0\\0&0&a_2&0\\0&0&0&a_3\\a_4&0&0&0\end{pmatrix}$ 的逆矩阵，其中 a_i 都不为 0。

解

$$(A\,\vdots\,I)=\left(\begin{array}{cccc:cccc}0&a_1&0&0&1&0&0&0\\0&0&a_2&0&0&1&0&0\\0&0&0&a_3&0&0&1&0\\a_4&0&0&0&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_4\leftrightarrow r_3} * \xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_2} * \xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc}a_4&0&0&0&0&0&0&1\\0&a_1&0&0&1&0&0&0\\0&0&a_2&0&0&1&0&0\\0&0&0&a_3&0&0&1&0\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{\frac{1}{a_1}\times r_2\\ \frac{1}{a_2}\times r_3\\ \frac{1}{a_3}\times r_4}]{\frac{1}{a_4}\times r_1}$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵，其中 a_i 都不为 0。

解

$$(A \vdots I) = \left(\begin{array}{cccc:cccc} 0 & a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_4 \leftrightarrow r_3} * \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_2} * \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc} a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\frac{1}{a_1}\times r_2 \\ \frac{1}{a_2}\times r_3 \\ \frac{1}{a_3}\times r_4}]{\frac{1}{a_4}\times r_1} \left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a_3} & 0 \end{array}\right)$$

例 求 $A=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵，其中 a_i 都不为 0。

解

$$(A \vdots I) = \left(\begin{array}{cccc:cccc} 0 & a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_4 \leftrightarrow r_3} * \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_2} * \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc} a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\frac{1}{a_1}\times r_2 \\ \frac{1}{a_2}\times r_3 \\ \frac{1}{a_3}\times r_4}]{\frac{1}{a_4}\times r_1} \left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a_3} & 0 \end{array}\right)$$

所以 $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_4} \\ \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_3} & 0 \end{pmatrix}$