第 7 章 c：可降阶微分方程

数学系　　梁卓滨

2017.07 暑期班

提要

假设 $y = y(x)$ 为未知函数，探讨如何求解以下三种类型的可降阶微分方程：

- $y^{(n)} = f(x)$
- $y'' = f(x, y')$
- $y'' = f(y, y')$

$y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程

计算通解的方法：连续n次积分

$$y^{(n)} = f(x)$$

$$\xRightarrow{\text{两边积分}} \quad y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1$$

$$\xRightarrow{\text{两边积分}} \quad y^{(n-2)} = \int \left[\int f(x)dx + C_1 \right] dx + C_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\xRightarrow{\text{两边积分}} \quad y = \int \left\{ \cdots \int \left[\int f(x)dx + C_1 \right] dx + C_2 \cdots \right\} dx + C_n$$

例 求 $y''' = e^{2x} - \cos x$ 的通解

解 连续两边积分

$$y''' = e^{2x} - \cos x \quad \Rightarrow \quad y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1 x + C_2$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

例 求 $y''' = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 的通解

解 连续两边积分

$$y''' = x^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad y'' = 2x^{\frac{1}{2}} + C_1 \quad \Rightarrow \quad y' = 2 \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C_1 x + C_2$$

$$\Rightarrow \quad y = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

$y'' = f(x, y')$ 型的微分方程

将 $y'' = f(x, y')$ 看成关于 y' 的一阶微分方程。

计算通解的方法：

1. 作变量代换 $p = y'$，得
$$p' = f(x, p)$$
（降阶得到关于 p 的一阶微分方程）
2. 利用求解一阶微分方程的方法，假设可求出通解
$$p = \varphi(x, C_1)$$
3. 代回变量 $p = y'$ 得：
$$y' = \varphi(x, C_1)$$
所以
$$y = \int \varphi(x, C_1)dx + C_2$$

例 求 $(1+x^2)y''=2xy'$ 的通解

解 1. 作变量代换 $p=y'$，得

$$p'=\frac{2x}{1+x^2}p$$

2. 这是可分离变量微分方程

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}dp=\frac{2x}{1+x^2}dx \quad &\Rightarrow \quad \int\frac{1}{p}dp=\int\frac{2x}{1+x^2}dx\\ &\Rightarrow \quad \ln|p|=\ln(1+x^2)+C_1'\\ &\Rightarrow \quad p=C_1(1+x^2)\end{aligned}$$

3. 还原变量，并两边积分

$$y'=C_1(1+x^2) \quad \Rightarrow \quad y=C_1\int(1+x^2)dx=C_1\left(\frac{1}{3}x^3+x+C_2\right)$$

思考 求在初始条件 $y|_{x=0}=1$, $y'|_{x=0}=3$ 的特解

例 求 $y'' = y' + x$ 的通解

解 1. 作变量代换 $p = y'$，得

$$p' = p + x \quad \Rightarrow \quad p' - p = x$$

2. 这是一阶线性微分方程

2.1 齐次部分 $p' - p = 0 \quad \Rightarrow \quad p = Ce^x$

2.2 常数变易 $p = u(x)e^x \quad \Rightarrow \quad u'e^x = x \quad \Rightarrow \quad u' = xe^{-x}$

$$\Rightarrow \quad u = \int xe^{-x}dx = -(1+x)e^{-x} + C_1$$

$$\Rightarrow \quad p = -(1+x) + C_1e^x$$

3. 还原变量，并两边积分

$$y' = -(1+x) + C_1e^x \quad \Rightarrow \quad y = -x - \frac{1}{2}x^2 + C_1e^x + C_2$$

$y'' = f(y, y')$ 型的微分方程

计算通解的方法：

1. 作变量代换 $p = y'$，得：
$$\frac{dp}{dx} = f(y, p)$$
2. 改写：$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$。代入上式得：
$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p)$$
（至此，降阶得到关于 p 的一阶微分方程，自变量为 y）
3. 假设可解得：
$$y' = p = \varphi(y, C_1) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1)$$
所以
$$x = \int \frac{1}{\varphi(y, C_1)} dy + C_2$$

例 求微分方程 $yy'' - y'^2 = 0$ 的通解

解 1. 作变量代换 $p = y'$：

$$y\frac{dp}{dx} - p^2 = 0$$

2. 改写：$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$。代入上式得：

$$\Rightarrow \quad yp\frac{dp}{dy} - p^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{p}dp = \frac{1}{y}dy$$

3. 这是分离变量方程，两边积分：

$$\int \frac{1}{p}dp = \int \frac{1}{y}dy \quad \Rightarrow \quad \ln|p| = \ln|y| + C_1' \quad \Rightarrow \quad p = C_1 y$$

4. 还原变量：

$$\frac{dy}{dx} = C_1 y \quad \Rightarrow \quad y = C_2 e^{C_1 x}.$$

例 求 $y^3y''+1=0$ 在初始条件 $y|_{x=1}=1,\ y'|_{x=1}=0$ 下的特解

解 作变量代换 $p=y'$：

$$y^3p\frac{dp}{dy}+1=y^3\frac{dp}{dx}+1=0$$

$$\Rightarrow\quad pdp=-y^{-3}dy \quad\Rightarrow\quad \int pdp=-\int y^{-3}dy$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{2}p^2=\frac{1}{2}y^{-2}+C_1 \quad \xRightarrow[y=1,\,p=0]{x=1\text{时}} \quad C_1=-\frac{1}{2},\ p^2=y^{-2}-1$$

$$\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=p=\pm\sqrt{y^{-2}-1}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}}=\pm dx \quad\Rightarrow\quad -\sqrt{1-y^2}=\pm x+C_2$$

$$\Rightarrow\quad \xRightarrow[y=1]{x=1\text{时}} \quad C_2=\mp1,\ -\sqrt{1-y^2}=\pm x\mp1=\pm(x-1)$$

$$\Rightarrow\quad 1-y^2=(x-1)^2 \quad\Rightarrow\quad y^2=2x-x^2$$