

第 9 章 α : 多元函数的基本概念

数学系 梁卓滨

2019-2020 学年 II

Outline

平面点集

二元函数

We are here now...

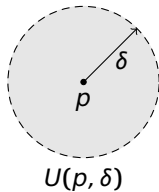
平面点集

二元函数

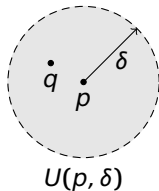
- 点 p 的 δ 邻域

\dot{p}

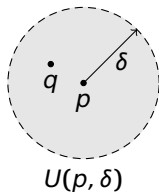
- 点 p 的 δ 邻域



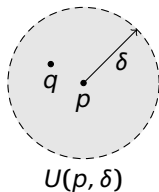
- 点 p 的 δ 邻域: $U(p, \delta) = \{q \mid |pq| < \delta\}$



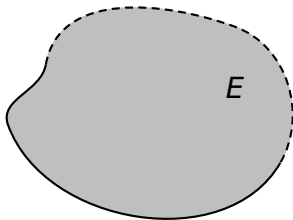
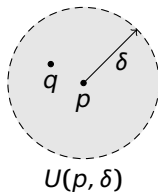
- 点 p 的 δ 邻域: $U(p, \delta) = \{q \mid |pq| < \delta\}$
- 点 p 的去心 δ 邻域: $\dot{U}(p, \delta) = U(p, \delta) - \{p\}$



- 点 p 的 δ 邻域: $U(p, \delta) = \{q \mid |pq| < \delta\}$
- 点 p 的去心 δ 邻域: $\dot{U}(p, \delta) = U(p, \delta) - \{p\} = \{q \mid 0 < |pq| < \delta\}$

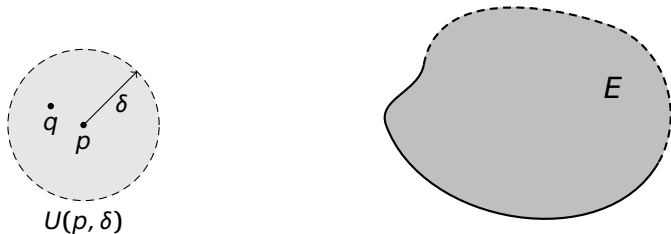


- 点 p 的 δ 邻域: $U(p, \delta) = \{q \mid |pq| < \delta\}$
- 点 p 的 δ 去心邻域: $\dot{U}(p, \delta) = U(p, \delta) - \{p\} = \{q \mid 0 < |pq| < \delta\}$



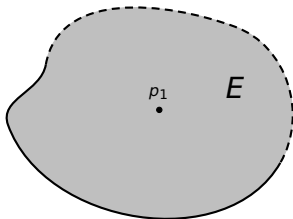
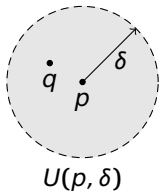
- 点 p 是 E 的内点
- 点 p 是 E 的外点
- 点 p 是 E 的边界点

- 点 p 的 δ 邻域: $U(p, \delta) = \{q \mid |pq| < \delta\}$
- 点 p 的 δ 去心邻域: $\dot{U}(p, \delta) = U(p, \delta) - \{p\} = \{q \mid 0 < |pq| < \delta\}$



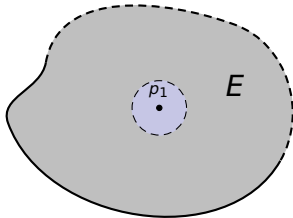
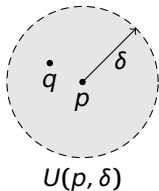
- 点 p 是 E 的内点, 指: $\exists \delta > 0$ 使得 $U(p, \delta) \subset E$;
- 点 p 是 E 的外点
- 点 p 是 E 的边界点

- 点 p 的 δ 邻域: $U(p, \delta) = \{q \mid |pq| < \delta\}$
- 点 p 的 δ 去心邻域: $\dot{U}(p, \delta) = U(p, \delta) - \{p\} = \{q \mid 0 < |pq| < \delta\}$



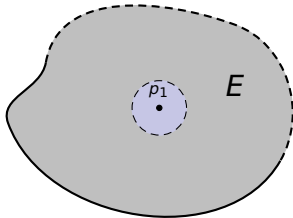
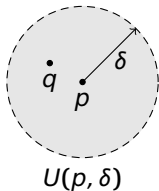
- 点 p 是 E 的内点, 指: $\exists \delta > 0$ 使得 $U(p, \delta) \subset E$;
- 点 p 是 E 的外点
- 点 p 是 E 的边界点

- 点 p 的 δ 邻域: $U(p, \delta) = \{q \mid |pq| < \delta\}$
- 点 p 的 δ 去心邻域: $\dot{U}(p, \delta) = U(p, \delta) - \{p\} = \{q \mid 0 < |pq| < \delta\}$



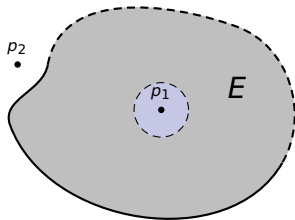
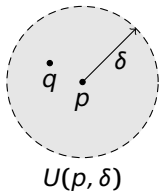
- 点 p 是 E 的 **内点**, 指: $\exists \delta > 0$ 使得 $U(p, \delta) \subset E$;
- 点 p 是 E 的 **外点**
- 点 p 是 E 的 **边界点**

- 点 p 的 **δ 邻域**: $U(p, \delta) = \{q \mid |pq| < \delta\}$
- 点 p 的 **去心 δ 邻域**: $\dot{U}(p, \delta) = U(p, \delta) - \{p\} = \{q \mid 0 < |pq| < \delta\}$



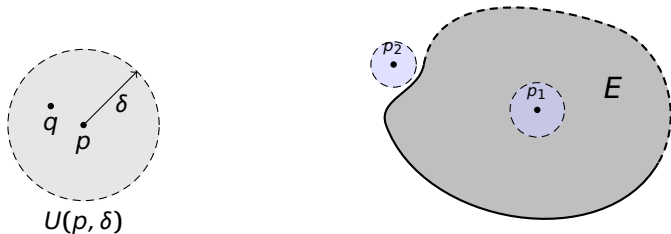
- 点 p 是 E 的 **内点**, 指: $\exists \delta > 0$ 使得 $U(p, \delta) \subset E$;
- 点 p 是 E 的 **外点**, 指: $\exists \delta > 0$ 使得 $U(p, \delta) \cap E = \emptyset$;
- 点 p 是 E 的 **边界点**

- 点 p 的 **δ 邻域**: $U(p, \delta) = \{q \mid |pq| < \delta\}$
- 点 p 的 **去心 δ 邻域**: $\dot{U}(p, \delta) = U(p, \delta) - \{p\} = \{q \mid 0 < |pq| < \delta\}$



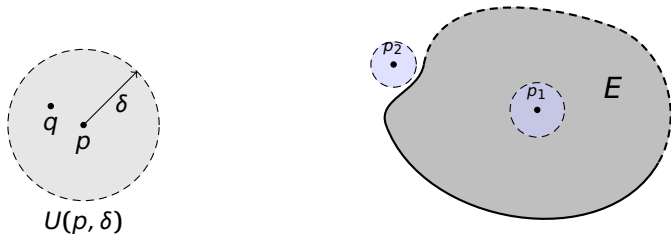
- 点 p 是 E 的 **内点**, 指: $\exists \delta > 0$ 使得 $U(p, \delta) \subset E$;
- 点 p 是 E 的 **外点**, 指: $\exists \delta > 0$ 使得 $U(p, \delta) \cap E = \emptyset$;
- 点 p 是 E 的 **边界点**

- 点 p 的 **δ 邻域**: $U(p, \delta) = \{q \mid |pq| < \delta\}$
- 点 p 的 **去心 δ 邻域**: $\dot{U}(p, \delta) = U(p, \delta) - \{p\} = \{q \mid 0 < |pq| < \delta\}$



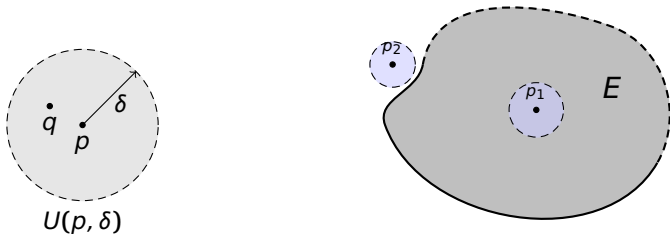
- 点 p 是 E 的 **内点**, 指: $\exists \delta > 0$ 使得 $U(p, \delta) \subset E$;
- 点 p 是 E 的 **外点**, 指: $\exists \delta > 0$ 使得 $U(p, \delta) \cap E = \emptyset$;
- 点 p 是 E 的 **边界点**

- 点 p 的 **δ 邻域**: $U(p, \delta) = \{q \mid |pq| < \delta\}$
- 点 p 的 **去心 δ 邻域**: $\dot{U}(p, \delta) = U(p, \delta) - \{p\} = \{q \mid 0 < |pq| < \delta\}$



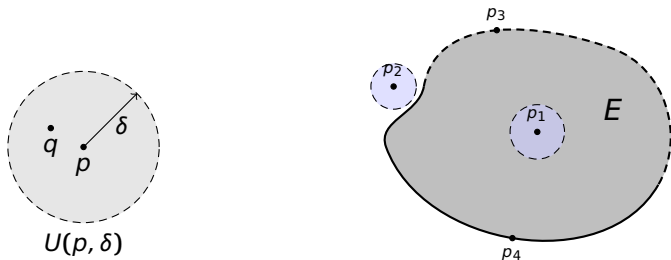
- 点 p 是 E 的 **内点**, 指: $\exists \delta > 0$ 使得 $U(p, \delta) \subset E$;
- 点 p 是 E 的 **外点**, 指: $\exists \delta > 0$ 使得 $U(p, \delta) \cap E = \emptyset$;
- 点 p 是 E 的 **边界点**, 指: 不是内点, 也不是外点;

- 点 p 的 **δ 邻域**: $U(p, \delta) = \{q \mid |pq| < \delta\}$
- 点 p 的 **去心 δ 邻域**: $\dot{U}(p, \delta) = U(p, \delta) - \{p\} = \{q \mid 0 < |pq| < \delta\}$



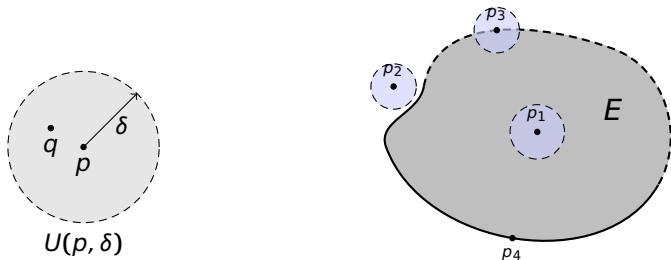
- 点 p 是 E 的 **内点**, 指: $\exists \delta > 0$ 使得 $U(p, \delta) \subset E$;
- 点 p 是 E 的 **外点**, 指: $\exists \delta > 0$ 使得 $U(p, \delta) \cap E = \emptyset$;
- 点 p 是 E 的 **边界点**, 指: 不是内点, 也不是外点; 即, $\forall \delta > 0, U(p, \delta)$ 同时包含 E 以外、以内的点.

- 点 p 的 **δ 邻域**: $U(p, \delta) = \{q \mid |pq| < \delta\}$
- 点 p 的 **去心 δ 邻域**: $\dot{U}(p, \delta) = U(p, \delta) - \{p\} = \{q \mid 0 < |pq| < \delta\}$



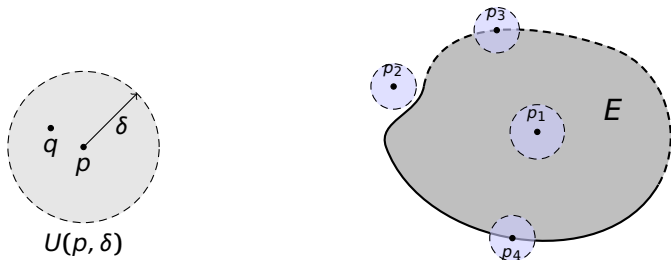
- 点 p 是 E 的 **内点**, 指: $\exists \delta > 0$ 使得 $U(p, \delta) \subset E$;
- 点 p 是 E 的 **外点**, 指: $\exists \delta > 0$ 使得 $U(p, \delta) \cap E = \emptyset$;
- 点 p 是 E 的 **边界点**, 指: 不是内点, 也不是外点; 即, $\forall \delta > 0, U(p, \delta)$ 同时包含 E 以外、以内的点.

- 点 p 的 **δ 邻域**: $U(p, \delta) = \{q \mid |pq| < \delta\}$
- 点 p 的 **去心 δ 邻域**: $\dot{U}(p, \delta) = U(p, \delta) - \{p\} = \{q \mid 0 < |pq| < \delta\}$



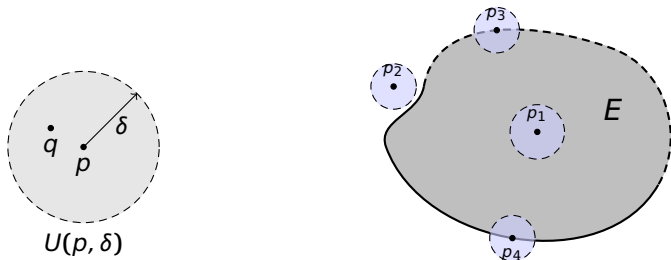
- 点 p 是 E 的 **内点**, 指: $\exists \delta > 0$ 使得 $U(p, \delta) \subset E$;
- 点 p 是 E 的 **外点**, 指: $\exists \delta > 0$ 使得 $U(p, \delta) \cap E = \emptyset$;
- 点 p 是 E 的 **边界点**, 指: 不是内点, 也不是外点; 即, $\forall \delta > 0, U(p, \delta)$ 同时包含 E 以外、以内的点.

- 点 p 的 δ 邻域: $U(p, \delta) = \{q \mid |pq| < \delta\}$
- 点 p 的 δ 去心邻域: $\dot{U}(p, \delta) = U(p, \delta) - \{p\} = \{q \mid 0 < |pq| < \delta\}$



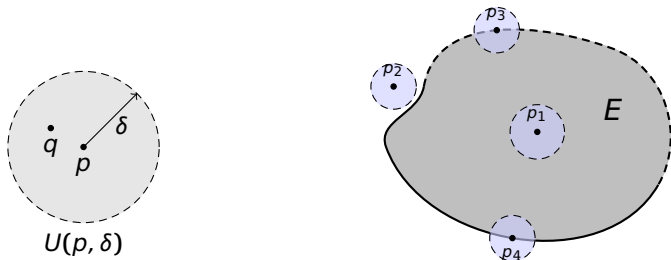
- 点 p 是 E 的内点, 指: $\exists \delta > 0$ 使得 $U(p, \delta) \subset E$;
- 点 p 是 E 的外点, 指: $\exists \delta > 0$ 使得 $U(p, \delta) \cap E = \emptyset$;
- 点 p 是 E 的边界点, 指: 不是内点, 也不是外点; 即, $\forall \delta > 0$, $U(p, \delta)$ 同时包含 E 以外、以内的点.

- 点 p 的 δ 邻域: $U(p, \delta) = \{q \mid |pq| < \delta\}$
- 点 p 的 δ 去心邻域: $\dot{U}(p, \delta) = U(p, \delta) - \{p\} = \{q \mid 0 < |pq| < \delta\}$



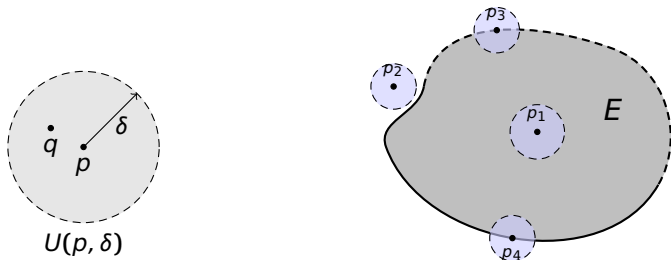
- 点 p 是 E 的 **内点**, 指: $\exists \delta > 0$ 使得 $U(p, \delta) \subset E$; (内点 $\in E$)
- 点 p 是 E 的 **外点**, 指: $\exists \delta > 0$ 使得 $U(p, \delta) \cap E = \emptyset$;
- 点 p 是 E 的 **边界点**, 指: 不是内点, 也不是外点; 即, $\forall \delta > 0, U(p, \delta)$ 同时包含 E 以外、以内的点.

- 点 p 的 **δ 邻域**: $U(p, \delta) = \{q \mid |pq| < \delta\}$
- 点 p 的 **去心 δ 邻域**: $\dot{U}(p, \delta) = U(p, \delta) - \{p\} = \{q \mid 0 < |pq| < \delta\}$



- 点 p 是 E 的 **内点**, 指: $\exists \delta > 0$ 使得 $U(p, \delta) \subset E$; (内点 $\in E$)
- 点 p 是 E 的 **外点**, 指: $\exists \delta > 0$ 使得 $U(p, \delta) \cap E = \emptyset$; (外点 $\notin E$)
- 点 p 是 E 的 **边界点**, 指: 不是内点, 也不是外点; 即, $\forall \delta > 0, U(p, \delta)$ 同时包含 E 以外、以内的点.

- 点 p 的 **δ 邻域**: $U(p, \delta) = \{q \mid |pq| < \delta\}$
- 点 p 的 **去心 δ 邻域**: $\dot{U}(p, \delta) = U(p, \delta) - \{p\} = \{q \mid 0 < |pq| < \delta\}$



- 点 p 是 E 的 **内点**, 指: $\exists \delta > 0$ 使得 $U(p, \delta) \subset E$; (内点 $\in E$)
- 点 p 是 E 的 **外点**, 指: $\exists \delta > 0$ 使得 $U(p, \delta) \cap E = \emptyset$; (外点 $\notin E$)
- 点 p 是 E 的 **边界点**, 指: 不是内点, 也不是外点; 即,
 $\forall \delta > 0, U(p, \delta)$ 同时包含 E 以外、以内的点. (边界点可能 $\in E$, 也可能 $\notin E$)

设 E 是平面上的点集，则

- E 是 开集
- E 是 闭集

- E 是 连通集
- E 是 开区域
- E 是 闭区域

设 E 是平面上的点集，则

- E 是 **开集**，指边界点都不属于 E
- E 是 **闭集**

- E 是 **连通集**
- E 是 **开区域**
- E 是 **闭区域**

设 E 是平面上的点集，则

- E 是 **开集**，指边界点都不属于 E ($E = \{E \text{ 的内点} \}$)
- E 是 **闭集**

- E 是 **连通集**
- E 是 **开区域**
- E 是 **闭区域**

设 E 是平面上的点集，则

- E 是 **开集**，指边界点都不属于 E ($E = \{E \text{ 的内点} \}$)
- E 是 **闭集**，指边界点都属于 E

- E 是 **连通集**
- E 是 **开区域**
- E 是 **闭区域**

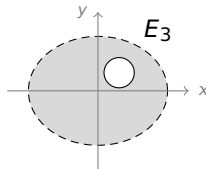
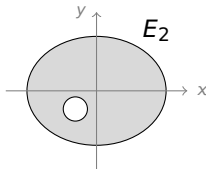
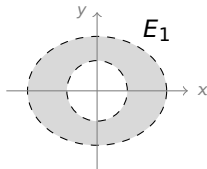
设 E 是平面上的点集，则

- E 是 **开集**，指边界点都不属于 E ($E = \{E \text{的内点}\}$)
- E 是 **闭集**，指边界点都属于 E (即, $E = \{E \text{的内点}\} \cup \{\text{边界点}\}$)

- E 是 **连通集**
- E 是 **开区域**
- E 是 **闭区域**

设 E 是平面上的点集，则

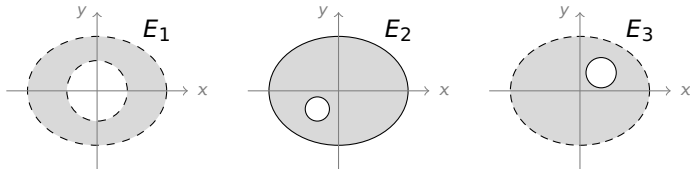
- E 是 **开集**，指边界点都不属于 E ($E = \{E \text{的内点}\}$)
- E 是 **闭集**，指边界点都属于 E (即， $E = \{E \text{的内点}\} \cup \{\text{边界点}\}$)



- E 是 **连通集**
- E 是 **开区域**
- E 是 **闭区域**

设 E 是平面上的点集，则

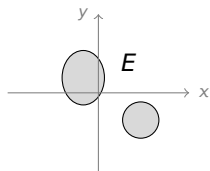
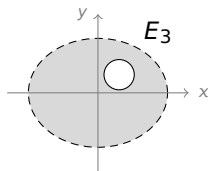
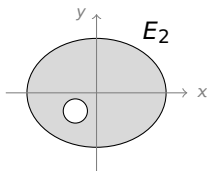
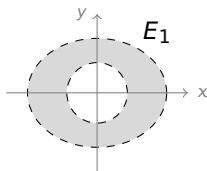
- E 是 **开集**，指边界点都不属于 E ($E = \{E \text{的内点}\}$)
- E 是 **闭集**，指边界点都属于 E (即, $E = \{E \text{的内点}\} \cup \{\text{边界点}\}$)



- E 是 **连通集**，指 E 中任两点均可用 E 中折线连起来
- E 是 **开区域**
- E 是 **闭区域**

设 E 是平面上的点集，则

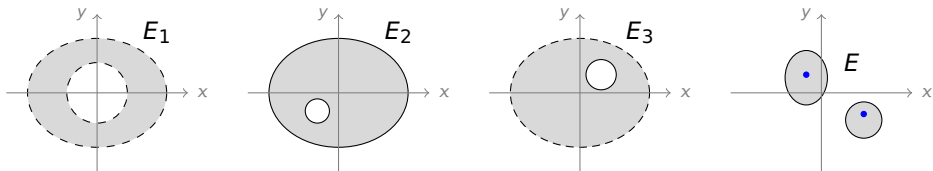
- E 是 **开集**，指边界点都不属于 E ($E = \{E \text{的内点}\}$)
- E 是 **闭集**，指边界点都属于 E (即， $E = \{E \text{的内点}\} \cup \{\text{边界点}\}$)



- E 是 **连通集**，指 E 中任两点均可用 E 中折线连起来
- E 是 **开区域**
- E 是 **闭区域**

设 E 是平面上的点集，则

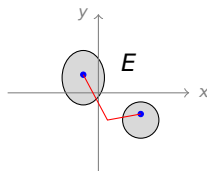
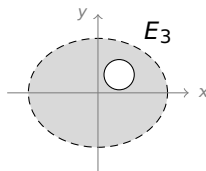
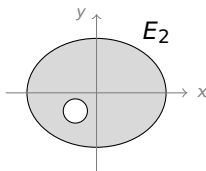
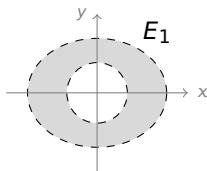
- E 是 **开集**，指边界点都不属于 E ($E = \{E \text{ 的内点} \}$)
- E 是 **闭集**，指边界点都属于 E (即, $E = \{E \text{ 的内点} \} \cup \{ \text{边界点} \}$)



- E 是 **连通集**，指 E 中任两点均可用 E 中折线连起来
- E 是 **开区域**
- E 是 **闭区域**

设 E 是平面上的点集，则

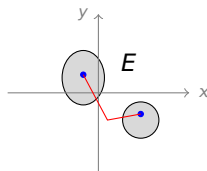
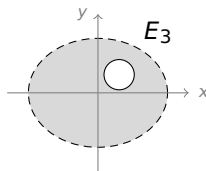
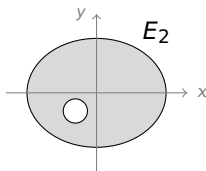
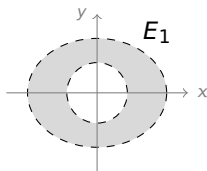
- E 是 **开集**，指边界点都不属于 E ($E = \{E \text{ 的内点} \}$)
- E 是 **闭集**，指边界点都属于 E (即， $E = \{E \text{ 的内点} \} \cup \{ \text{边界点} \}$)



- E 是 **连通集**，指 E 中任两点均可用 E 中折线连起来
- E 是 **开区域**
- E 是 **闭区域**

设 E 是平面上的点集，则

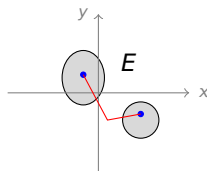
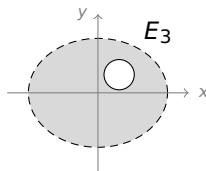
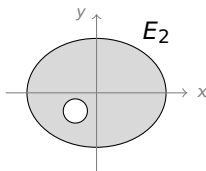
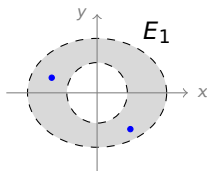
- E 是 **开集**，指边界点都不属于 E ($E = \{E \text{ 的内点} \}$)
- E 是 **闭集**，指边界点都属于 E (即, $E = \{E \text{ 的内点} \} \cup \{ \text{边界点} \}$)



- E 是 **连通集**，指 E 中任两点均可用 E 中折线连起来
- E 是 **开区域**，指 E 是连通的开集
- E 是 **闭区域**

设 E 是平面上的点集，则

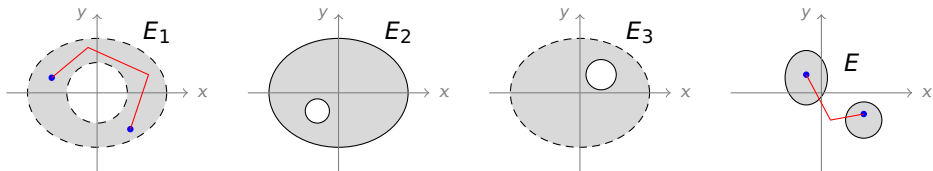
- E 是 **开集**，指边界点都不属于 E ($E = \{E \text{ 的内点} \}$)
- E 是 **闭集**，指边界点都属于 E (即, $E = \{E \text{ 的内点} \} \cup \{ \text{边界点} \}$)



- E 是 **连通集**，指 E 中任两点均可用 E 中折线连起来
- E 是 **开区域**，指 E 是连通的开集
- E 是 **闭区域**

设 E 是平面上的点集，则

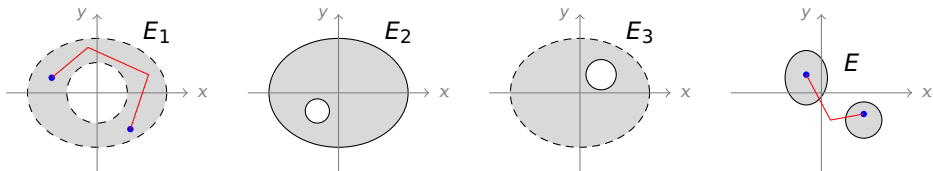
- E 是 **开集**，指边界点都不属于 E ($E = \{E \text{的内点}\}$)
- E 是 **闭集**，指边界点都属于 E (即， $E = \{E \text{的内点}\} \cup \{\text{边界点}\}$)



- E 是 **连通集**，指 E 中任两点均可用 E 中折线连起来
- E 是 **开区域**，指 E 是连通的开集
- E 是 **闭区域**

设 E 是平面上的点集，则

- E 是 **开集**，指边界点都不属于 E ($E = \{E \text{ 的内点} \}$)
- E 是 **闭集**，指边界点都属于 E (即, $E = \{E \text{ 的内点} \} \cup \{ \text{边界点} \}$)



- E 是 **连通集**，指 E 中任两点均可用 E 中折线连起来
- E 是 **开区域**，指 E 是连通的开集
- E 是 **闭区域**，指 E 是连通的闭集

设 E 是平面上的点集, 则

- E 是 有界集
- E 是 无界集

设 E 是平面上的点集，则

- E 是 **有界集**，指 $\exists r > 0$ 使得 $E \subset U(0, r)$
- E 是 **无界集**

设 E 是平面上的点集，则

- E 是 **有界集**，指 $\exists r > 0$ 使得 $E \subset U(0, r)$
- E 是 **无界集**，指 E 不是有界集

设 E 是平面上的点集, 则

- E 是 **有界集**, 指 $\exists r > 0$ 使得 $E \subset U(0, r)$
- E 是 **无界集**, 指 E 不是有界集

例

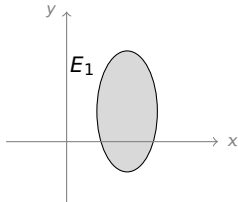
- $E_1 := \{(x-2)^2 + \frac{1}{4}(y-1)^2 \leq 1\}$ 是 有界集;
- $E_2 := \{x-y \leq 1\}$ 是 无界集;

设 E 是平面上的点集，则

- E 是 **有界集**，指 $\exists r > 0$ 使得 $E \subset U(0, r)$
- E 是 **无界集**，指 E 不是有界集

例

- $E_1 := \{(x-2)^2 + \frac{1}{4}(y-1)^2 \leq 1\}$ 是 **有** 界集；
- $E_2 := \{x-y \leq 1\}$ 是 **无** 界集；

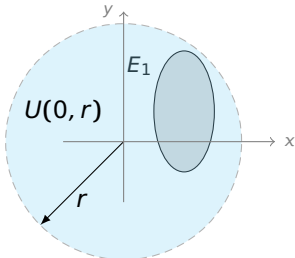


设 E 是平面上的点集，则

- E 是 **有界集**，指 $\exists r > 0$ 使得 $E \subset U(0, r)$
- E 是 **无界集**，指 E 不是有界集

例

- $E_1 := \{(x-2)^2 + \frac{1}{4}(y-1)^2 \leq 1\}$ 是 有界集；
- $E_2 := \{x-y \leq 1\}$ 是 无界集；

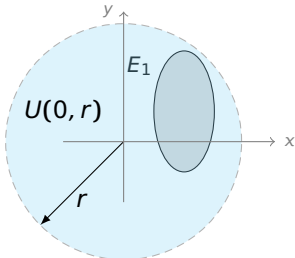


设 E 是平面上的点集，则

- E 是 **有界集**，指 $\exists r > 0$ 使得 $E \subset U(0, r)$
- E 是 **无界集**，指 E 不是有界集

例

- $E_1 := \{(x-2)^2 + \frac{1}{4}(y-1)^2 \leq 1\}$ 是 **有** 界集；
- $E_2 := \{x-y \leq 1\}$ 是 **无** 界集；

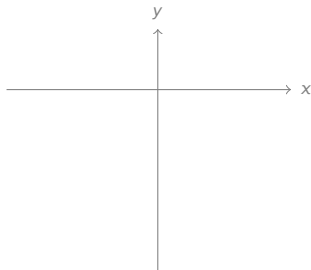
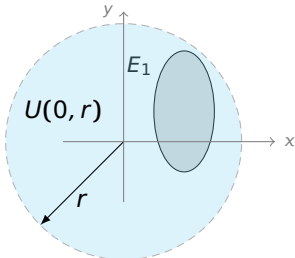


设 E 是平面上的点集，则

- E 是 **有界集**，指 $\exists r > 0$ 使得 $E \subset U(0, r)$
- E 是 **无界集**，指 E 不是有界集

例

- $E_1 := \{(x-2)^2 + \frac{1}{4}(y-1)^2 \leq 1\}$ 是 **有** 界集；
- $E_2 := \{x-y \leq 1\}$ 是 **无** 界集；

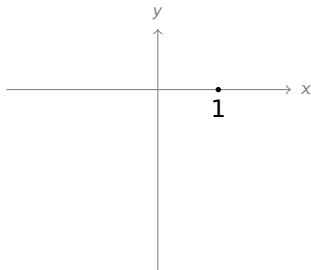
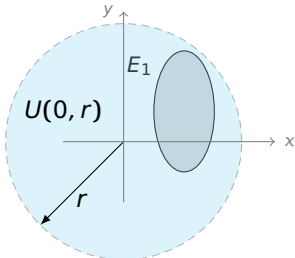


设 E 是平面上的点集，则

- E 是 **有界集**，指 $\exists r > 0$ 使得 $E \subset U(0, r)$
- E 是 **无界集**，指 E 不是有界集

例

- $E_1 := \{(x-2)^2 + \frac{1}{4}(y-1)^2 \leq 1\}$ 是 **有** 界集；
- $E_2 := \{x-y \leq 1\}$ 是 **无** 界集；

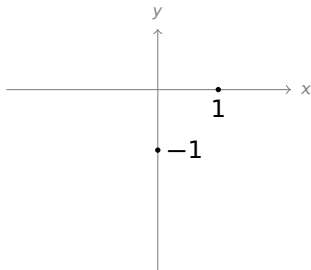
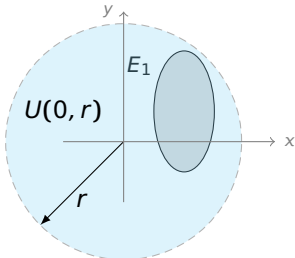


设 E 是平面上的点集，则

- E 是 **有界集**，指 $\exists r > 0$ 使得 $E \subset U(0, r)$
- E 是 **无界集**，指 E 不是有界集

例

- $E_1 := \{(x-2)^2 + \frac{1}{4}(y-1)^2 \leq 1\}$ 是 **有** 界集；
- $E_2 := \{x-y \leq 1\}$ 是 **无** 界集；

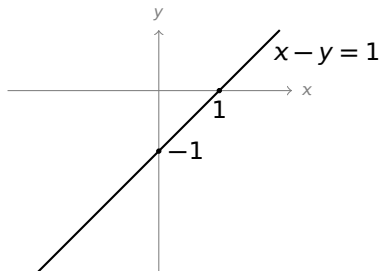
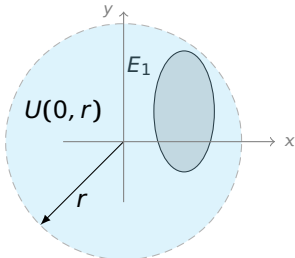


设 E 是平面上的点集，则

- E 是 **有界集**，指 $\exists r > 0$ 使得 $E \subset U(0, r)$
- E 是 **无界集**，指 E 不是有界集

例

- $E_1 := \{(x-2)^2 + \frac{1}{4}(y-1)^2 \leq 1\}$ 是 **有** 界集；
- $E_2 := \{x-y \leq 1\}$ 是 **无** 界集；

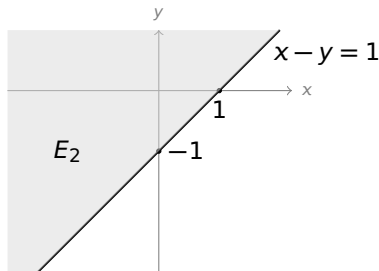
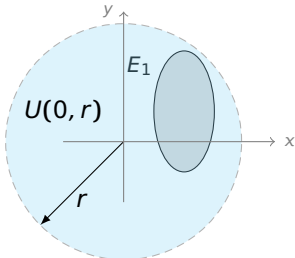


设 E 是平面上的点集，则

- E 是 **有界集**，指 $\exists r > 0$ 使得 $E \subset U(0, r)$
- E 是 **无界集**，指 E 不是有界集

例

- $E_1 := \{(x-2)^2 + \frac{1}{4}(y-1)^2 \leq 1\}$ 是 **有** 界集；
- $E_2 := \{x-y \leq 1\}$ 是 **无** 界集；

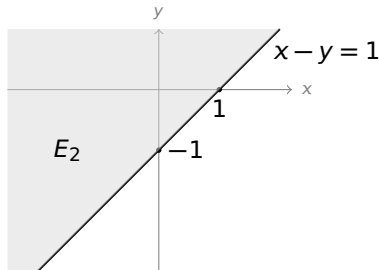
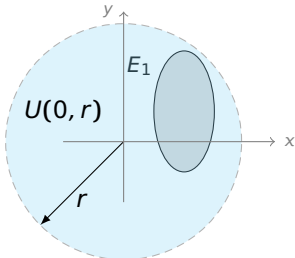


设 E 是平面上的点集，则

- E 是 **有界集**，指 $\exists r > 0$ 使得 $E \subset U(0, r)$
- E 是 **无界集**，指 E 不是有界集

例

- $E_1 := \{(x-2)^2 + \frac{1}{4}(y-1)^2 \leq 1\}$ 是 **有** 界集；
- $E_2 := \{x-y \leq 1\}$ 是 **无** 界集；



We are here now...

平面点集

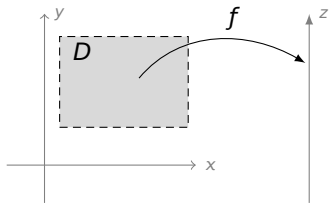
二元函数

二元函数，及其图形

定义 设 D 是 \mathbb{R}^2 的一个非空子集，称映射 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$

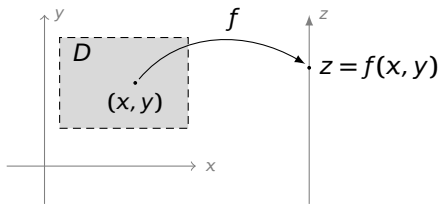
二元函数，及其图形

定义 设 D 是 \mathbb{R}^2 的一个非空子集，称映射 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$



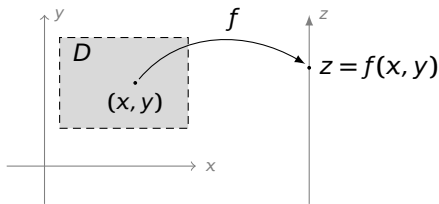
二元函数，及其图形

定义 设 D 是 \mathbb{R}^2 的一个非空子集，称映射 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$



二元函数，及其图形

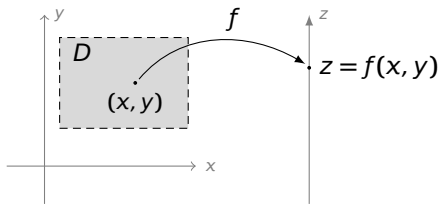
定义 设 D 是 \mathbb{R}^2 的一个非空子集，称映射 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 为定义在 D 上的 **二元函数**



二元函数，及其图形

定义 设 D 是 \mathbb{R}^2 的一个非空子集，称映射 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 为定义在 D 上的 **二元函数**，记为

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D$$



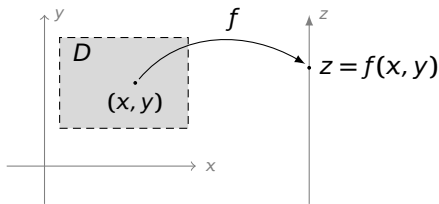
二元函数，及其图形

定义 设 D 是 \mathbb{R}^2 的一个非空子集，称映射 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 为定义在 D 上的 **二元函数**，记为

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D$$

或

$$z = f(p), \quad p \in D.$$



二元函数，及其图形

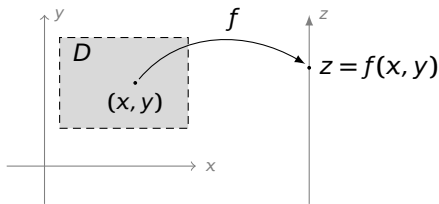
定义 设 D 是 \mathbb{R}^2 的一个非空子集，称映射 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 为定义在 D 上的 **二元函数**，记为

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D$$

或

$$z = f(p), \quad p \in D.$$

其中 D 称为 **定义域**， x 和 y 称为 **自变量**， z 称为 **因变量**。



二元函数，及其图形

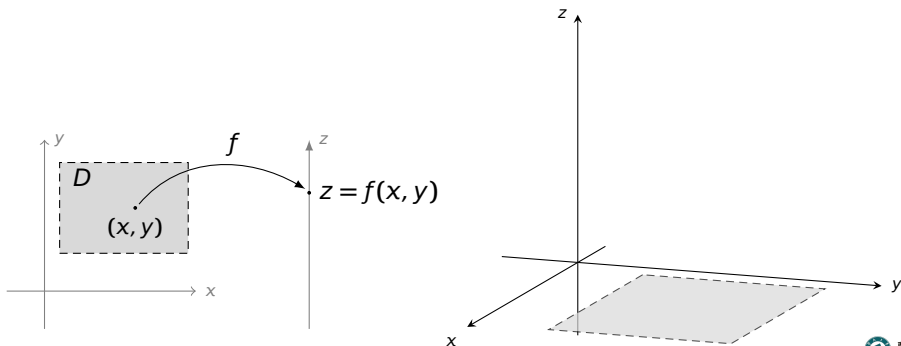
定义 设 D 是 \mathbb{R}^2 的一个非空子集，称映射 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 为定义在 D 上的 **二元函数**，记为

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D$$

或

$$z = f(p), \quad p \in D.$$

其中 D 称为 **定义域**， x 和 y 称为 **自变量**， z 称为 **因变量**。



二元函数，及其图形

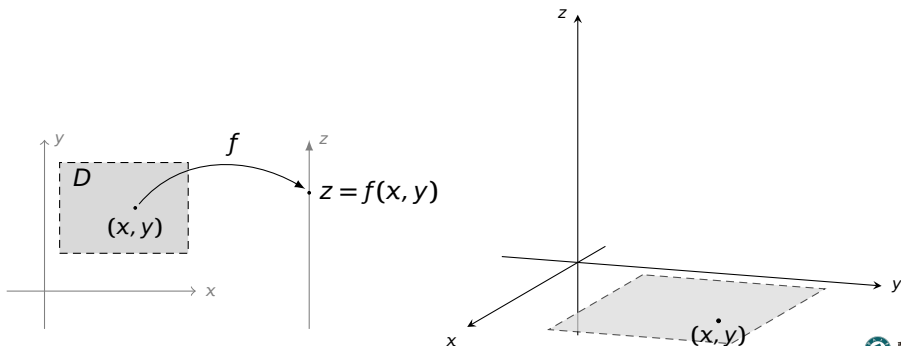
定义 设 D 是 \mathbb{R}^2 的一个非空子集，称映射 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 为定义在 D 上的 **二元函数**，记为

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D$$

或

$$z = f(p), \quad p \in D.$$

其中 D 称为 **定义域**， x 和 y 称为 **自变量**， z 称为 **因变量**。



二元函数，及其图形

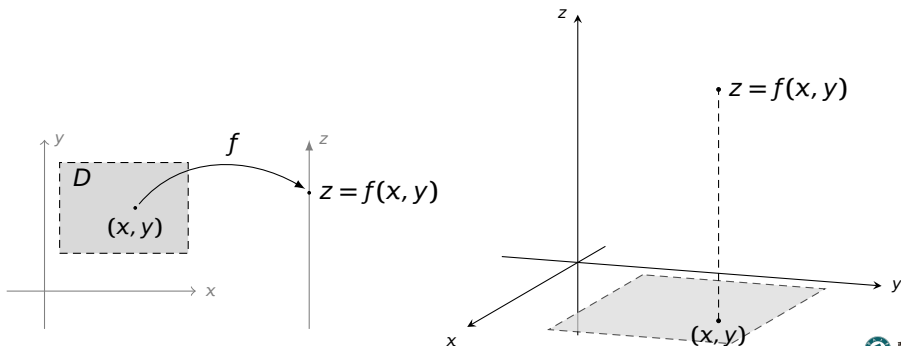
定义 设 D 是 \mathbb{R}^2 的一个非空子集，称映射 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 为定义在 D 上的 **二元函数**，记为

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D$$

或

$$z = f(p), \quad p \in D.$$

其中 D 称为 **定义域**， x 和 y 称为 **自变量**， z 称为 **因变量**。



二元函数，及其图形

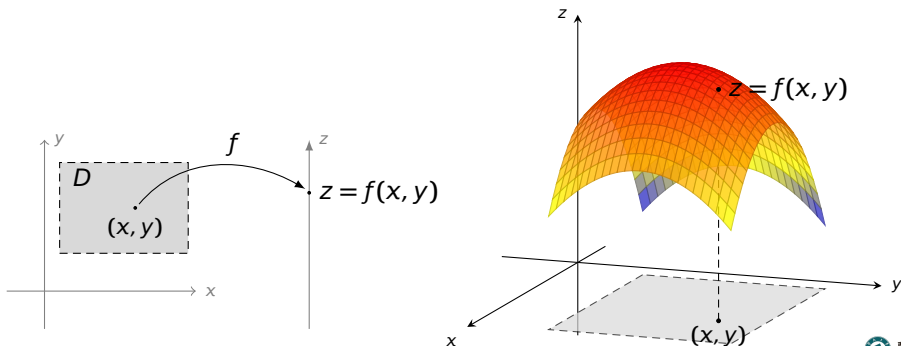
定义 设 D 是 \mathbb{R}^2 的一个非空子集，称映射 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 为定义在 D 上的 **二元函数**，记为

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D$$

或

$$z = f(p), \quad p \in D.$$

其中 D 称为 **定义域**， x 和 y 称为 **自变量**， z 称为 **因变量**。



例 1 $z = f(x, y) = \ln(1+x+y)$ 是二元函数.

例 1 $z = f(x, y) = \ln(1+x+y)$ 是二元函数.

其定义域取所谓的“自然定义域”，

例 1 $z = f(x, y) = \ln(1+x+y)$ 是二元函数.

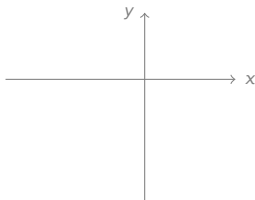
其定义域取所谓的“自然定义域”，即：

$$D := \{(x, y) \mid 1 + x + y > 0\}$$

例 1 $z = f(x, y) = \ln(1+x+y)$ 是二元函数.

其定义域取所谓的“**自然定义域**”，即：

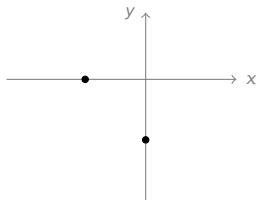
$$D := \{(x, y) \mid 1 + x + y > 0\}$$



例 1 $z = f(x, y) = \ln(1+x+y)$ 是二元函数.

其定义域取所谓的“自然定义域”，即：

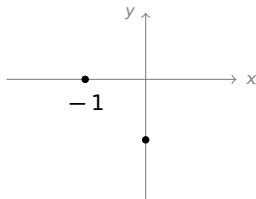
$$D := \{(x, y) \mid 1 + x + y > 0\}$$



例 1 $z = f(x, y) = \ln(1+x+y)$ 是二元函数.

其定义域取所谓的“自然定义域”，即：

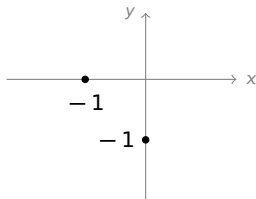
$$D := \{(x, y) \mid 1 + x + y > 0\}$$



例 1 $z = f(x, y) = \ln(1+x+y)$ 是二元函数.

其定义域取所谓的“自然定义域”，即：

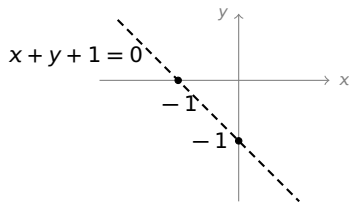
$$D := \{(x, y) \mid 1 + x + y > 0\}$$



例 1 $z = f(x, y) = \ln(1+x+y)$ 是二元函数.

其定义域取所谓的“自然定义域”，即：

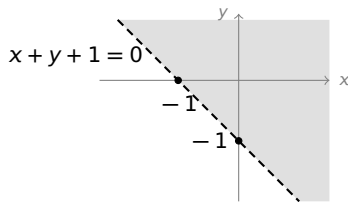
$$D := \{(x, y) | 1 + x + y > 0\}$$



例 1 $z = f(x, y) = \ln(1+x+y)$ 是二元函数.

其定义域取所谓的“自然定义域”，即：

$$D := \{(x, y) \mid 1 + x + y > 0\}$$



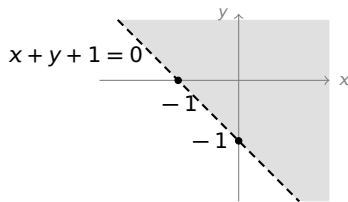
例 1 $z = f(x, y) = \ln(1+x+y)$ 是二元函数.

其定义域取所谓的“自然定义域”，即：

$$D := \{(x, y) \mid 1 + x + y > 0\}$$

计算

$$z|_{(e^8, -1)} =$$



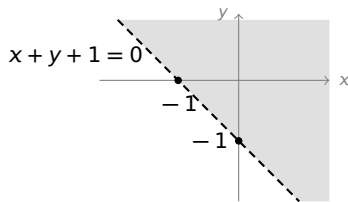
例 1 $z = f(x, y) = \ln(1+x+y)$ 是二元函数.

其定义域取所谓的“自然定义域”，即：

$$D := \{(x, y) \mid 1 + x + y > 0\}$$

计算

$$z|_{(e^8, -1)} = f(e^8, -1) =$$



注 函数 $z = f(x, y)$ 在一点 (x_0, y_0) 处的值:

$$f(x_0, y_0) \quad \text{或} \quad z|_{(x_0, y_0)}$$

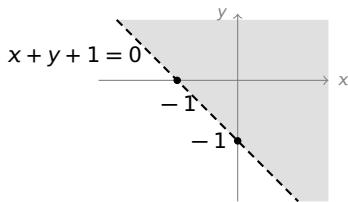
例 1 $z = f(x, y) = \ln(1+x+y)$ 是二元函数.

其定义域取所谓的“**自然定义域**”，即：

$$D := \{(x, y) | 1 + x + y > 0\}$$

计算

$$z|_{(e^8, -1)} = f(e^8, -1) =$$



注 函数 $z = f(x, y)$ 在一点 (x_0, y_0) 处的值:

$$f(x_0, y_0) \quad \text{或} \quad z|_{(x_0, y_0)}$$

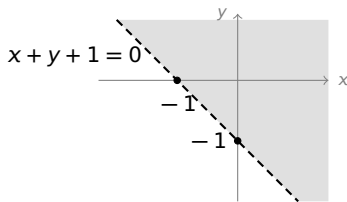
例 1 $z = f(x, y) = \ln(1+x+y)$ 是二元函数.

其定义域取所谓的“**自然定义域**”，即：

$$D := \{(x, y) | 1 + x + y > 0\}$$

计算

$$z|_{(e^8, -1)} = f(e^8, -1) = \ln(1+e^8-1) =$$



注 函数 $z = f(x, y)$ 在一点 (x_0, y_0) 处的值:

$$f(x_0, y_0) \quad \text{或} \quad z|_{(x_0, y_0)}$$

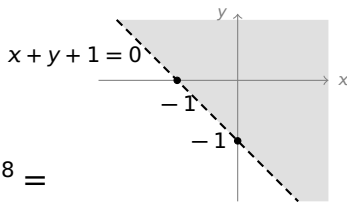
例 1 $z = f(x, y) = \ln(1+x+y)$ 是二元函数.

其定义域取所谓的“**自然定义域**”，即：

$$D := \{(x, y) | 1 + x + y > 0\}$$

计算

$$z|_{(e^8, -1)} = f(e^8, -1) = \ln(1+e^8-1) = \ln e^8 =$$



注 函数 $z = f(x, y)$ 在一点 (x_0, y_0) 处的值:

$$f(x_0, y_0) \quad \text{或} \quad z|_{(x_0, y_0)}$$

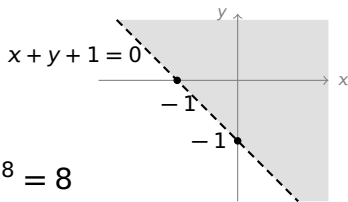
例 1 $z = f(x, y) = \ln(1+x+y)$ 是二元函数.

其定义域取所谓的“**自然定义域**”，即：

$$D := \{(x, y) | 1 + x + y > 0\}$$

计算

$$z|_{(e^8, -1)} = f(e^8, -1) = \ln(1+e^8-1) = \ln e^8 = 8$$



注 函数 $z = f(x, y)$ 在一点 (x_0, y_0) 处的值:

$$f(x_0, y_0) \quad \text{或} \quad z|_{(x_0, y_0)}$$

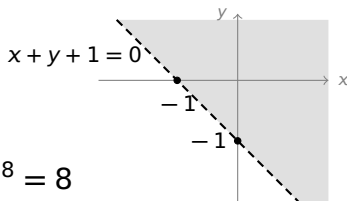
例 1 $z = f(x, y) = \ln(1+x+y)$ 是二元函数.

其定义域取所谓的“**自然定义域**”，即：

$$D := \{(x, y) | 1 + x + y > 0\}$$

计算

$$z|_{(e^8, -1)} = f(e^8, -1) = \ln(1+e^8-1) = \ln e^8 = 8$$



例 2 求 $z = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-4y^2}$ 定义域，画出图形，计算 $z(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$

例 2 求 $z = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-4y^2}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$

例 2 求 $z = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-4y^2}$ 定义域, 画出定义域, 计算 $z(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$

解 要 z 有意义, 必须

$$\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ 1-4y^2 \geq 0 \end{cases}$$

例 2 求 $z = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-4y^2}$ 定义域, 画出定义域, 计算 $z(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$

解 要 z 有意义, 必须

$$\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ 1-4y^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

例 2 求 $z = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-4y^2}$ 定义域, 画出定义域, 计算 $z(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$

解 要 z 有意义, 必须

$$\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ 1-4y^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

例 2 求 $z = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-4y^2}$ 定义域, 画出定义域, 计算 $z(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$

解 要 z 有意义, 必须

$$\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ 1-4y^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

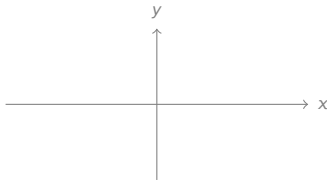
所以定义域 $D = \left\{ (x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2} \right\}$.

例 2 求 $z = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-4y^2}$ 定义域, 画出定义域, 计算 $z(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$

解 要 z 有意义, 必须

$$\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ 1-4y^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

所以定义域 $D = \left\{ (x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2} \right\}$.

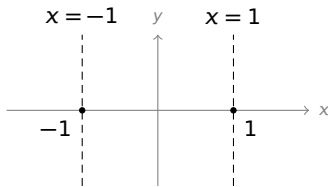


例 2 求 $z = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-4y^2}$ 定义域, 画出定义域, 计算 $z(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$

解 要 z 有意义, 必须

$$\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ 1-4y^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

所以定义域 $D = \left\{ (x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2} \right\}$.

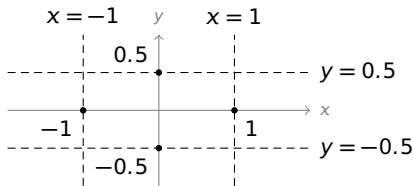


例 2 求 $z = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-4y^2}$ 定义域, 画出定义域, 计算 $z(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$

解 要 z 有意义, 必须

$$\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ 1-4y^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

所以定义域 $D = \left\{ (x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2} \right\}$.

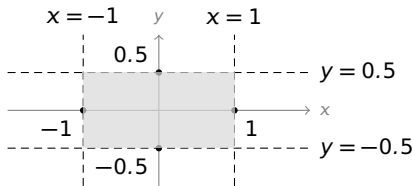


例 2 求 $z = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-4y^2}$ 定义域, 画出定义域, 计算 $z(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$

解 要 z 有意义, 必须

$$\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ 1-4y^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

所以定义域 $D = \left\{ (x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2} \right\}$.

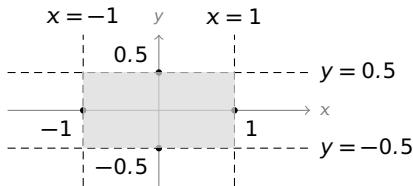


例 2 求 $z = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-4y^2}$ 定义域, 画出定义域, 计算 $z(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$

解 要 z 有意义, 必须

$$\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ 1-4y^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

所以定义域 $D = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 1, -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}\}$.



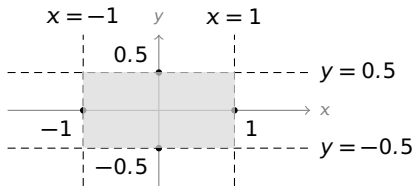
$$z\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) =$$

例 2 求 $z = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-4y^2}$ 定义域, 画出定义域, 计算 $z(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$

解 要 z 有意义, 必须

$$\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ 1-4y^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

所以定义域 $D = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 1, -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}\}$.



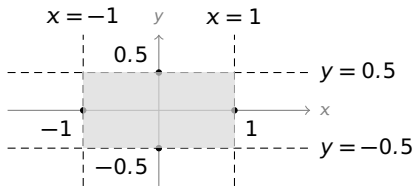
$$z\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \sqrt{1-4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2}$$

例 2 求 $z = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-4y^2}$ 定义域, 画出定义域, 计算 $z(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$

解 要 z 有意义, 必须

$$\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ 1-4y^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

所以定义域 $D = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 1, -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}\}$.



$$z\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \sqrt{1-4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{3}$$

例 3 求 $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(1, \frac{1}{4})$

例 3 求 $z = \sqrt{x} - \sqrt{y}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(1, \frac{1}{4})$

解 要 z 有意义，必须

例 3 求 $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(1, \frac{1}{4})$

解 要 z 有意义，必须

$$\begin{cases} x - \sqrt{y} \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

例 3 求 $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(1, \frac{1}{4})$

解 要 z 有意义，必须

$$\begin{cases} x - \sqrt{y} \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x^2 \geq y \\ y \geq 0 \end{cases}$$

例 3 求 $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(1, \frac{1}{4})$

解 要 z 有意义，必须

$$\begin{cases} x - \sqrt{y} \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x^2 \geq y \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 0 \leq y \leq x^2$$

例 3 求 $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(1, \frac{1}{4})$

解 要 z 有意义，必须

$$\begin{cases} x - \sqrt{y} \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x^2 \geq y, x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 0 \leq y \leq x^2, x \geq 0$$

例 3 求 $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(1, \frac{1}{4})$

解 要 z 有意义，必须

$$\begin{cases} x - \sqrt{y} \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x^2 \geq y, x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \implies 0 \leq y \leq x^2, x \geq 0$$

所以定义域

$$D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq x^2, x \geq 0\}.$$

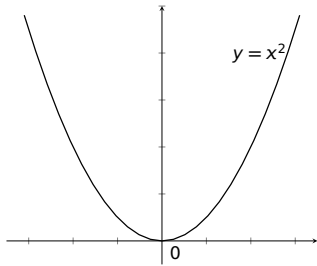
例 3 求 $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$ 定义域, 画出定义域, 计算 $z(1, \frac{1}{4})$

解 要 z 有意义, 必须

$$\begin{cases} x - \sqrt{y} \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 \geq y, x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq y \leq x^2, x \geq 0$$

所以定义域

$$D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq x^2, x \geq 0\}.$$



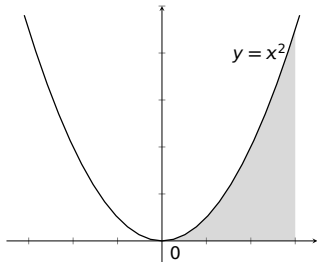
例 3 求 $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$ 定义域, 画出定义域, 计算 $z(1, \frac{1}{4})$

解 要 z 有意义, 必须

$$\begin{cases} x - \sqrt{y} \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 \geq y, x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq y \leq x^2, x \geq 0$$

所以定义域

$$D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq x^2, x \geq 0\}.$$



例 3 求 $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$ 定义域, 画出定义域, 计算 $z(1, \frac{1}{4})$

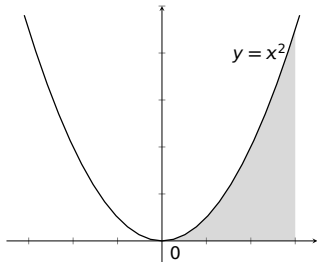
解 要 z 有意义, 必须

$$\begin{cases} x - \sqrt{y} \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 \geq y, x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq y \leq x^2, x \geq 0$$

所以定义域

$$D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq x^2, x \geq 0\}.$$

(闭区域, 无界)



例 3 求 $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(1, \frac{1}{4})$

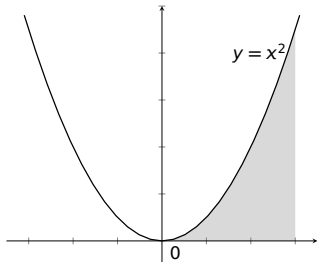
解 要 z 有意义，必须

$$\begin{cases} x - \sqrt{y} \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 \geq y, x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq y \leq x^2, x \geq 0$$

所以定义域

$$D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq x^2, x \geq 0\}.$$

(闭区域，无界)



$$z\left(1, \frac{1}{4}\right) =$$

例 3 求 $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(1, \frac{1}{4})$

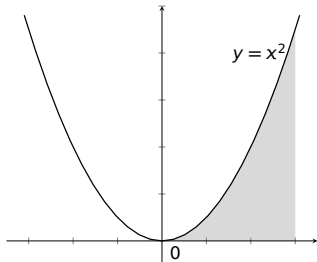
解 要 z 有意义，必须

$$\begin{cases} x - \sqrt{y} \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 \geq y, x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq y \leq x^2, x \geq 0$$

所以定义域

$$D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq x^2, x \geq 0\}.$$

(闭区域，无界)



$$z\left(1, \frac{1}{4}\right) = \sqrt{1 - \sqrt{\frac{1}{4}}} =$$

例 3 求 $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(1, \frac{1}{4})$

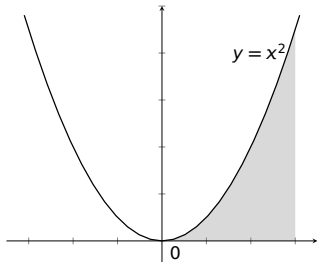
解 要 z 有意义，必须

$$\begin{cases} x - \sqrt{y} \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 \geq y, x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq y \leq x^2, x \geq 0$$

所以定义域

$$D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq x^2, x \geq 0\}.$$

(闭区域，无界)



$$z\left(1, \frac{1}{4}\right) = \sqrt{1 - \sqrt{\frac{1}{4}}} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}}$$

例 3 求 $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(1, \frac{1}{4})$

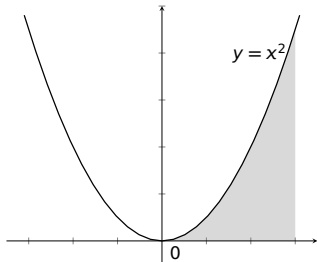
解 要 z 有意义，必须

$$\begin{cases} x - \sqrt{y} \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 \geq y, x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq y \leq x^2, x \geq 0$$

所以定义域

$$D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq x^2, x \geq 0\}.$$

(闭区域，无界)



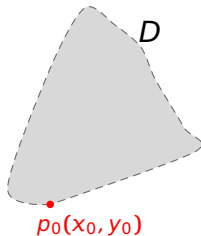
$$z\left(1, \frac{1}{4}\right) = \sqrt{1 - \sqrt{\frac{1}{4}}} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

二元函数的极限：直观

- $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A$

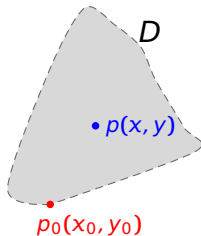
二元函数的极限：直观

- $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A$ 表示：



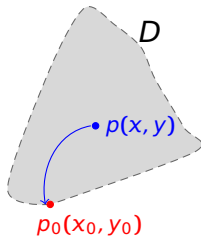
二元函数的极限：直观

- $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A$ 表示：



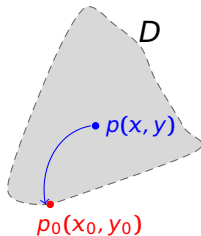
二元函数的极限：直观

- $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A$ 表示：



二元函数的极限：直观

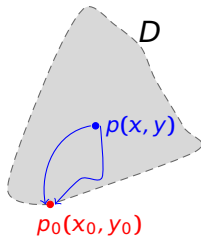
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = A$ 表示：



$$\Rightarrow f(x,y) \rightarrow A$$

二元函数的极限：直观

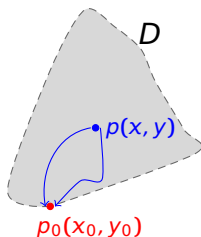
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = A$ 表示：



$$\Rightarrow f(x, y) \rightarrow A$$

二元函数的极限：直观

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = A$ 表示：



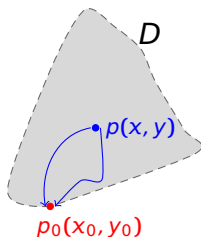
$$\Rightarrow f(x,y) \rightarrow A$$

注

- 动点 $p(x, y)$ 以任何方式趋于 p_0 ，函数值 $f(x, y)$ 均趋于同一数 A ；

二元函数的极限：直观

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = A$ 表示：



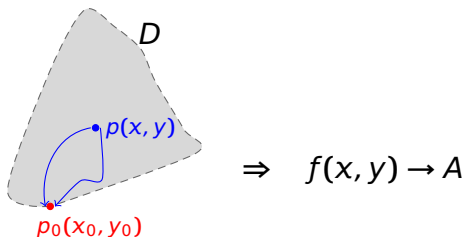
$$\Rightarrow f(x,y) \rightarrow A$$

注

- 动点 $p(x,y)$ 以任何方式趋于 p_0 ，函数值 $f(x,y)$ 均趋于同一数 A ；
- 点 $p_0(x_0, y_0)$ 不必属于定义域 D ，即 $f(x_0, y_0)$ 可能无定义；

二元函数的极限：直观

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = A$ 表示：

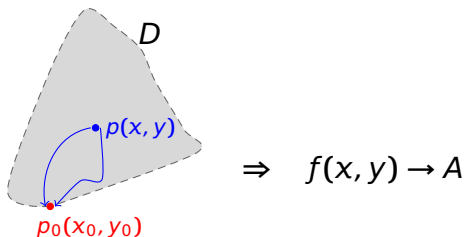


注

- 动点 $p(x, y)$ 以任何方式趋于 p_0 ，函数值 $f(x, y)$ 均趋于同一数 A ；
- 点 $p_0(x_0, y_0)$ 不必属于定义域 D ，即 $f(x_0, y_0)$ 可能无定义；
- 点 $p_0(x_0, y_0)$ 是定义域 D 的“聚点”：

二元函数的极限：直观

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = A$ 表示：

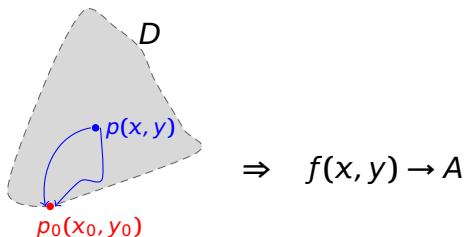


注

- 动点 $p(x, y)$ 以任何方式趋于 p_0 ，函数值 $f(x, y)$ 均趋于同一数 A ；
- 点 $p_0(x_0, y_0)$ 不必属于定义域 D ，即 $f(x_0, y_0)$ 可能无定义；
- 点 $p_0(x_0, y_0)$ 是定义域 D 的“聚点”： $\forall \delta > 0, \dot{U}(p_0, \delta) \cap D \neq \emptyset$

二元函数的极限：直观

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = A$ 表示：



注

- 动点 $p(x, y)$ 以任何方式趋于 p_0 ，函数值 $f(x, y)$ 均趋于同一数 A ；
- 点 $p_0(x_0, y_0)$ 不必属于定义域 D ，即 $f(x_0, y_0)$ 可能无定义；
- 点 $p_0(x_0, y_0)$ 是定义域 D 的“聚点”： $\forall \delta > 0, \dot{U}(p_0, \delta) \cap D \neq \emptyset$

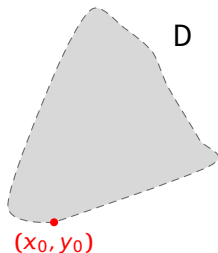
思考 聚点和边界点的关系是什么？

二元函数的极限： $\varepsilon - \delta$ 定义

极限定义 设 $f(x, y)$, $(x, y) \in D$; $p_0(x_0, y_0)$ 为 D 的聚点. 称

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A \quad (\text{或 } \lim_{p \rightarrow p_0} f(p) = A)$$

指:

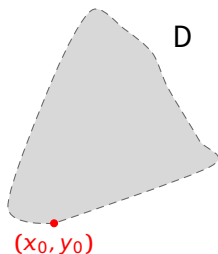


二元函数的极限： $\varepsilon - \delta$ 定义

极限定义 设 $f(x, y)$, $(x, y) \in D$; $p_0(x_0, y_0)$ 为 D 的聚点. 称

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A \quad (\text{或 } \lim_{p \rightarrow p_0} f(p) = A)$$

指: $\forall \varepsilon > 0$

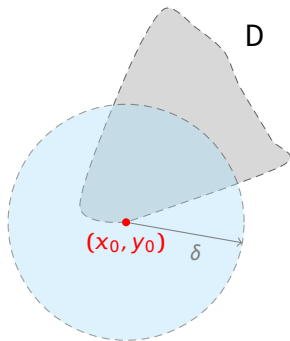


二元函数的极限： $\varepsilon - \delta$ 定义

极限定义 设 $f(x, y)$, $(x, y) \in D$; $p_0(x_0, y_0)$ 为 D 的聚点. 称

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A \quad (\text{或 } \lim_{p \rightarrow p_0} f(p) = A)$$

指: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得

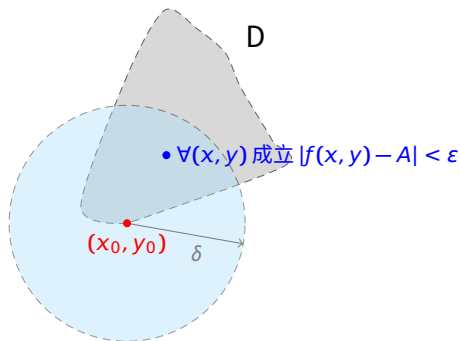


二元函数的极限： $\varepsilon - \delta$ 定义

极限定义 设 $f(x, y)$, $(x, y) \in D$; $p_0(x_0, y_0)$ 为 D 的聚点. 称

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A \quad (\text{或 } \lim_{p \rightarrow p_0} f(p) = A)$$

指: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得



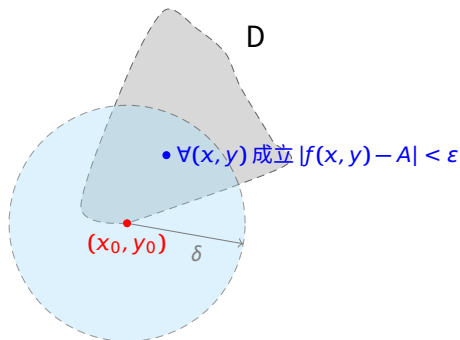
二元函数的极限： $\varepsilon - \delta$ 定义

极限定义 设 $f(x, y)$, $(x, y) \in D$; $p_0(x_0, y_0)$ 为 D 的聚点. 称

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A \quad (\text{或 } \lim_{p \rightarrow p_0} f(p) = A)$$

指: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon, \quad \forall \text{点 } p(x, y) \in D \text{ 且 } 0 < |p - p_0| < \delta$$



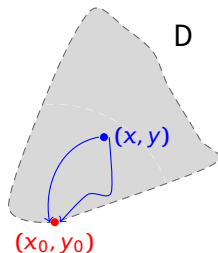
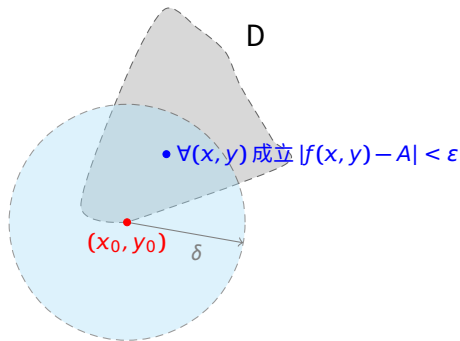
二元函数的极限： $\varepsilon - \delta$ 定义

极限定义 设 $f(x, y)$, $(x, y) \in D$; $p_0(x_0, y_0)$ 为 D 的聚点. 称

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A \quad (\text{或 } \lim_{p \rightarrow p_0} f(p) = A)$$

指: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得

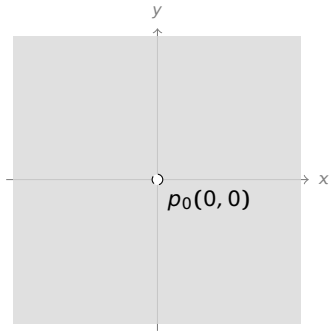
$$|f(x, y) - A| < \varepsilon, \quad \forall \text{点 } p(x, y) \in D \text{ 且 } 0 < |p - p_0| < \delta$$



例 1 设 $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$ 。证明 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$

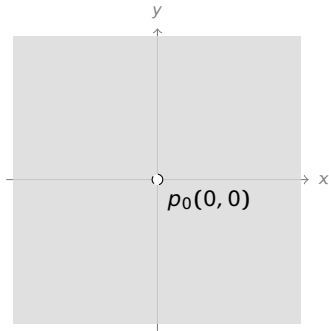
例 1 设 $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$ 。证明 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$

证明



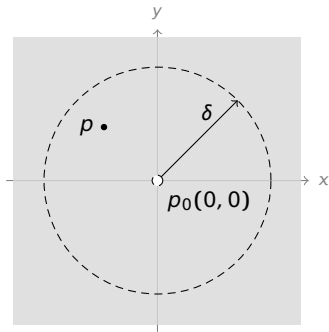
例 1 设 $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$ 。证明 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$

证明 对 $\forall \varepsilon > 0$,



例 1 设 $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$ 。证明 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$

证明 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta > 0$,

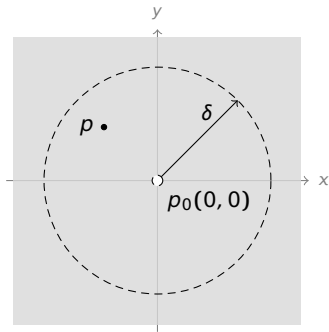


例 1 设 $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$ 。证明 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$

证明 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta > 0$, 则当 $0 < |p - p_0| < \delta$ 时, 成立

$$|f(x, y) - 0|$$

$$< \varepsilon$$

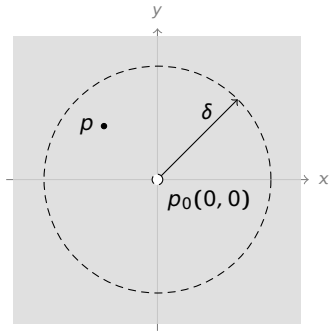


例 1 设 $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$ 。证明 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$

证明 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta > 0$, 则当 $0 < |p - p_0| < \delta$ 时, 成立

$$|f(x, y) - 0| = |f(x, y)|$$

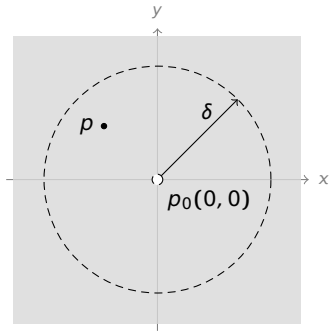
$$< \varepsilon$$



例 1 设 $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$ 。证明 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$

证明 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta > 0$, 则当 $0 < |p - p_0| < \delta$ 时, 成立

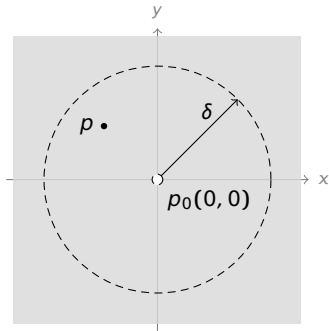
$$|f(x, y) - 0| = |f(x, y)| = \left| (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \right| < \varepsilon$$



例 1 设 $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$ 。证明 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$

证明 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta > 0$, 则当 $0 < |p - p_0| < \delta$ 时, 成立

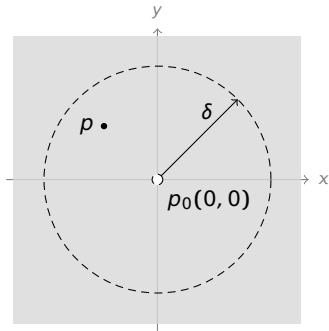
$$\begin{aligned} |f(x, y) - 0| &= |f(x, y)| = \left| (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \right| \\ &\leq |x^2 + y^2| < \varepsilon \end{aligned}$$



例 1 设 $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$ 。证明 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$

证明 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta > 0$, 则当 $0 < |p - p_0| < \delta$ 时, 成立

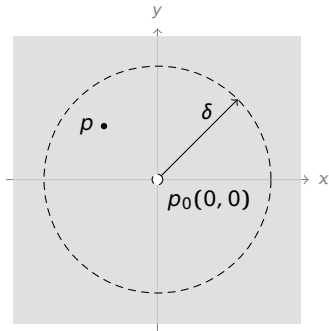
$$\begin{aligned} |f(x, y) - 0| &= |f(x, y)| = \left| (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \right| \\ &\leq |x^2 + y^2| = |p - p_0|^2 < \varepsilon \end{aligned}$$



例 1 设 $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$ 。证明 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$

证明 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta > 0$, 则当 $0 < |p - p_0| < \delta$ 时, 成立

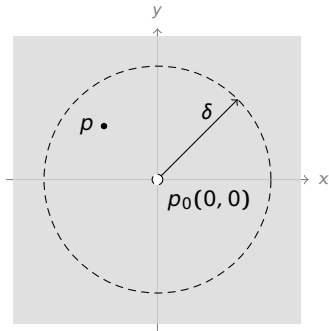
$$\begin{aligned} |f(x, y) - 0| &= |f(x, y)| = \left| (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \right| \\ &\leq |x^2 + y^2| = |p - p_0|^2 < \delta^2 < \varepsilon \end{aligned}$$



例 1 设 $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$ 。证明 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$

证明 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \sqrt{\varepsilon} > 0$, 则当 $0 < |p - p_0| < \delta$ 时, 成立

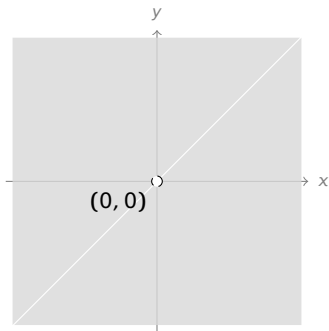
$$\begin{aligned} |f(x, y) - 0| &= |f(x, y)| = \left| (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \right| \\ &\leq |x^2 + y^2| = |p - p_0|^2 < \delta^2 < \varepsilon \end{aligned}$$



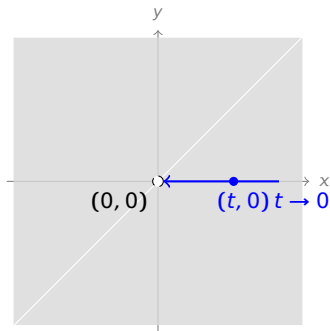
例 2 证明 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ 不存在.

例 2 证明 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ 不存在.

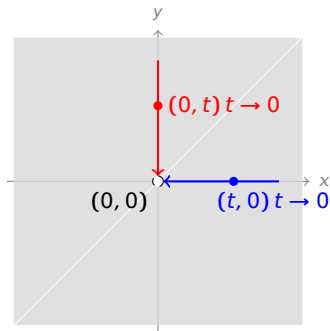
证明



例 2 证明 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ 不存在.
证明



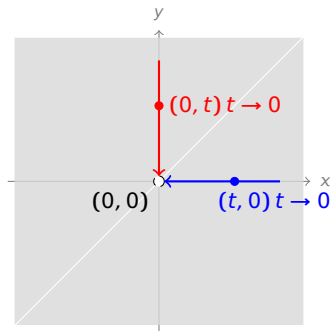
例 2 证明 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ 不存在.
证明



例 2 证明 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ 不存在.

证明

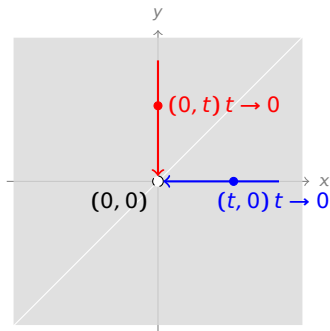
$$f(t, 0) =$$



例 2 证明 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ 不存在.

证明

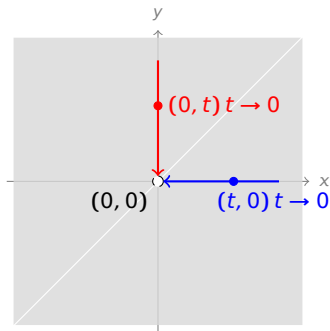
$$f(t, 0) = \frac{t+0}{t-0} =$$



例 2 证明 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ 不存在.

证明

$$f(t, 0) = \frac{t+0}{t-0} = 1$$

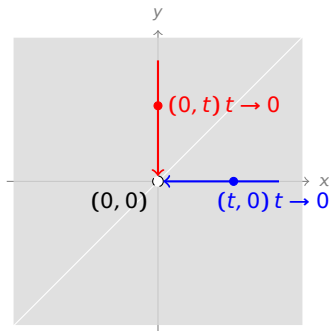


例 2 证明 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ 不存在.

证明

$$f(t, 0) = \frac{t+0}{t-0} = 1$$

$$f(0, t) =$$

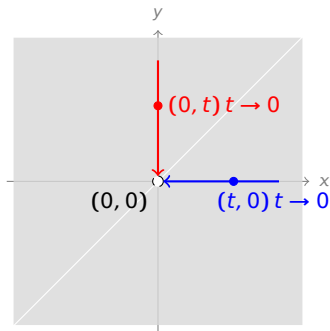


例 2 证明 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ 不存在.

证明

$$f(t, 0) = \frac{t+0}{t-0} = 1$$

$$f(0, t) = \frac{0+t}{0-t} =$$

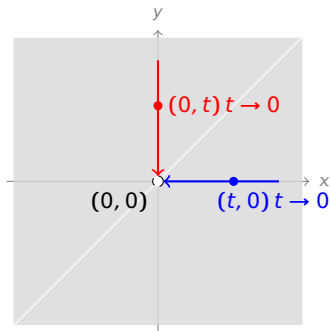


例 2 证明 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ 不存在.

证明

$$f(t, 0) = \frac{t+0}{t-0} = 1$$

$$f(0, t) = \frac{0+t}{0-t} = -1$$



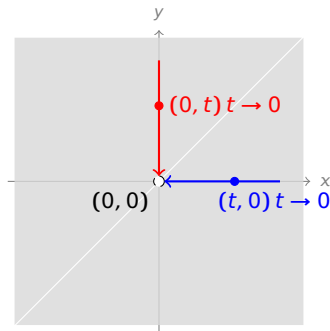
例 2 证明 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ 不存在.

证明

$$f(t, 0) = \frac{t+0}{t-0} = 1$$

$$f(0, t) = \frac{0+t}{0-t} = -1$$

可见，点按不同方式趋于 $(0, 0)$ 时，函数值趋于不同的数。故极限不存在。



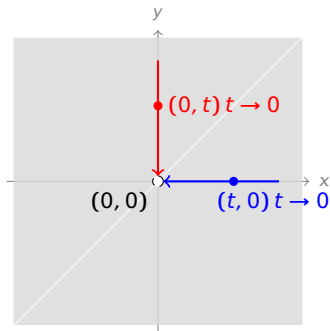
例 2 证明 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ 不存在.

证明

$$f(t, 0) = \frac{t+0}{t-0} = 1$$

$$f(0, t) = \frac{0+t}{0-t} = -1$$

可见，点按不同方式趋于 $(0, 0)$ 时，函数值趋于不同的数。故极限不存在。



例 3 证明 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在.

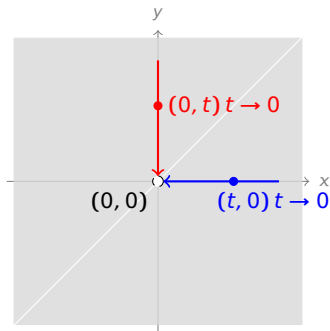
例 2 证明 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ 不存在.

证明

$$f(t, 0) = \frac{t+0}{t-0} = 1$$

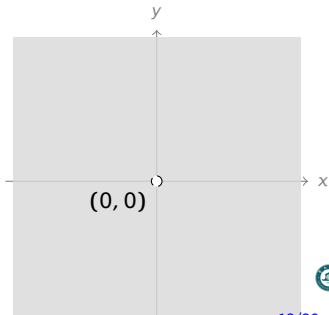
$$f(0, t) = \frac{0+t}{0-t} = -1$$

可见，点按不同方式趋于 $(0, 0)$ 时，函数值趋于不同的数。故极限不存在。



例 3 证明 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在.

证明



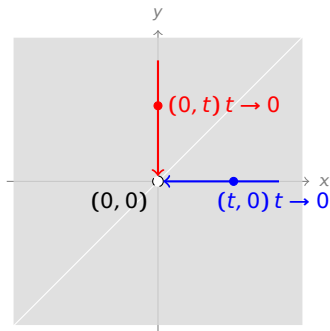
例 2 证明 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ 不存在.

证明

$$f(t, 0) = \frac{t+0}{t-0} = 1$$

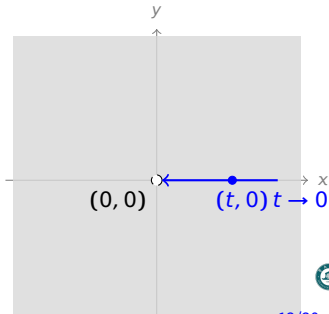
$$f(0, t) = \frac{0+t}{0-t} = -1$$

可见，点按不同方式趋于 $(0, 0)$ 时，函数值趋于不同的数。故极限不存在。



例 3 证明 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在.

证明



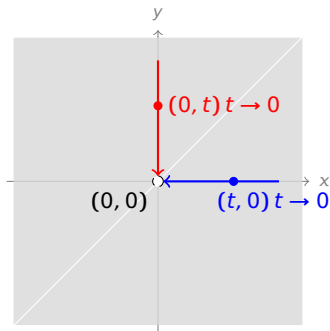
例 2 证明 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ 不存在.

证明

$$f(t, 0) = \frac{t+0}{t-0} = 1$$

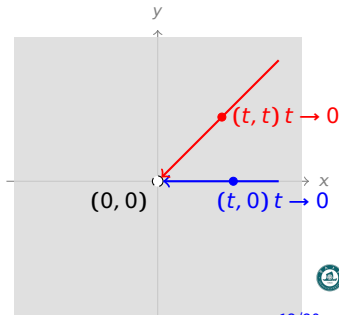
$$f(0, t) = \frac{0+t}{0-t} = -1$$

可见, 点按不同方式趋于 $(0, 0)$ 时, 函数值趋于不同的数. 故极限不存在.



例 3 证明 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在.

证明



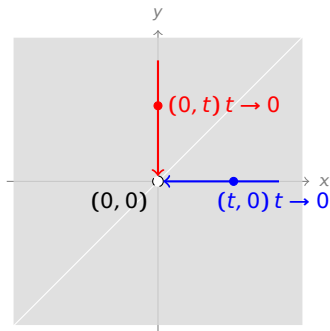
例 2 证明 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ 不存在.

证明

$$f(t, 0) = \frac{t+0}{t-0} = 1$$

$$f(0, t) = \frac{0+t}{0-t} = -1$$

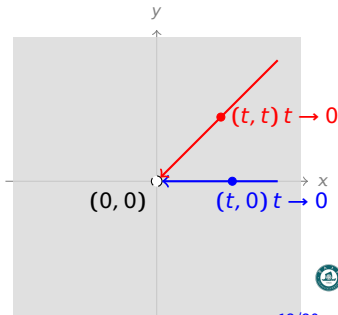
可见, 点按不同方式趋于 $(0, 0)$ 时, 函数值趋于不同的数. 故极限不存在.



例 3 证明 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在.

证明

$$f(t, 0) =$$



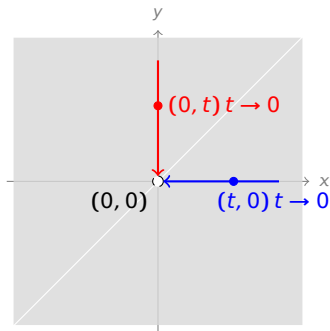
例 2 证明 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ 不存在.

证明

$$f(t, 0) = \frac{t+0}{t-0} = 1$$

$$f(0, t) = \frac{0+t}{0-t} = -1$$

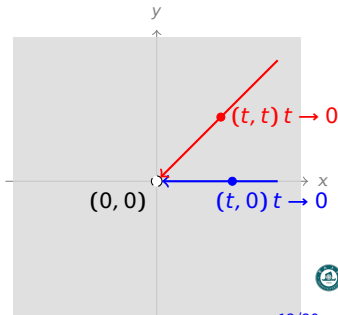
可见, 点按不同方式趋于 $(0, 0)$ 时, 函数值趋于不同的数. 故极限不存在.



例 3 证明 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在.

证明

$$f(t, 0) = \frac{t \cdot 0}{t^2 + 0^2} =$$



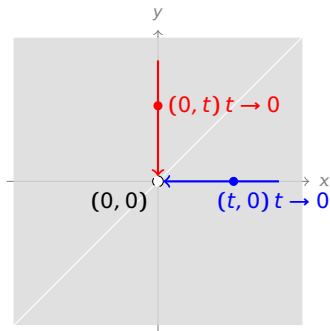
例 2 证明 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ 不存在.

证明

$$f(t, 0) = \frac{t+0}{t-0} = 1$$

$$f(0, t) = \frac{0+t}{0-t} = -1$$

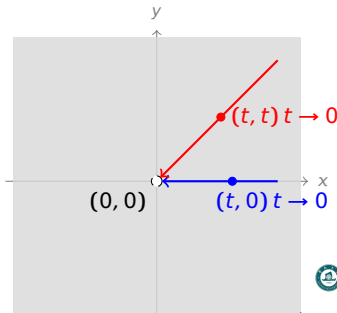
可见, 点按不同方式趋于 $(0, 0)$ 时, 函数值趋于不同的数. 故极限不存在.



例 3 证明 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在.

证明

$$f(t, 0) = \frac{t \cdot 0}{t^2 + 0^2} = 0$$



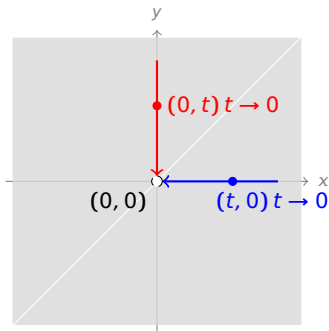
例 2 证明 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ 不存在.

证明

$$f(t, 0) = \frac{t+0}{t-0} = 1$$

$$f(0, t) = \frac{0+t}{0-t} = -1$$

可见, 点按不同方式趋于 $(0, 0)$ 时, 函数值趋于不同的数. 故极限不存在.

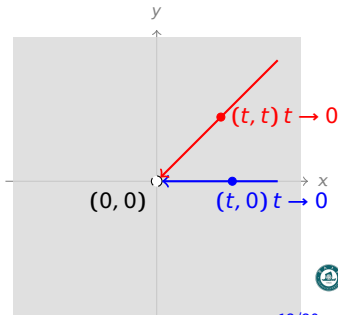


例 3 证明 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在.

证明

$$f(t, 0) = \frac{t \cdot 0}{t^2 + 0^2} = 0$$

$$f(t, t) =$$



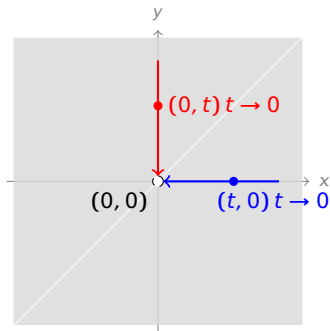
例 2 证明 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ 不存在.

证明

$$f(t, 0) = \frac{t+0}{t-0} = 1$$

$$f(0, t) = \frac{0+t}{0-t} = -1$$

可见, 点按不同方式趋于 $(0, 0)$ 时, 函数值趋于不同的数. 故极限不存在.

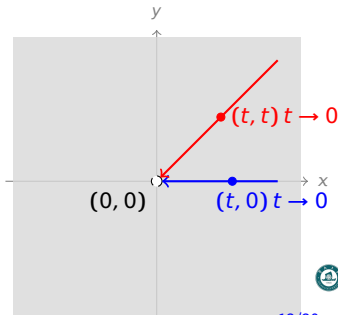


例 3 证明 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在.

证明

$$f(t, 0) = \frac{t \cdot 0}{t^2 + 0^2} = 0$$

$$f(t, t) = \frac{t \cdot t}{t^2 + t^2} =$$



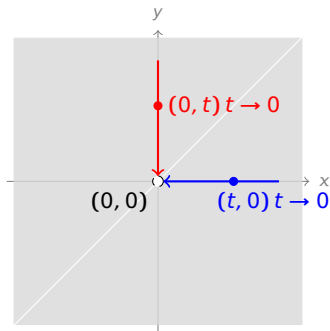
例 2 证明 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ 不存在.

证明

$$f(t, 0) = \frac{t+0}{t-0} = 1$$

$$f(0, t) = \frac{0+t}{0-t} = -1$$

可见, 点按不同方式趋于 $(0, 0)$ 时, 函数值趋于不同的数. 故极限不存在.

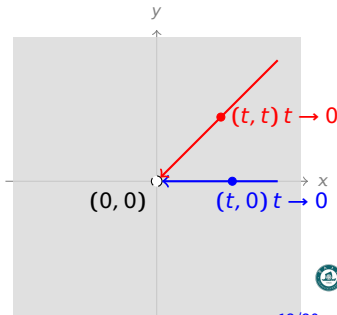


例 3 证明 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在.

证明

$$f(t, 0) = \frac{t \cdot 0}{t^2 + 0^2} = 0$$

$$f(t, t) = \frac{t \cdot t}{t^2 + t^2} = \frac{1}{2}$$



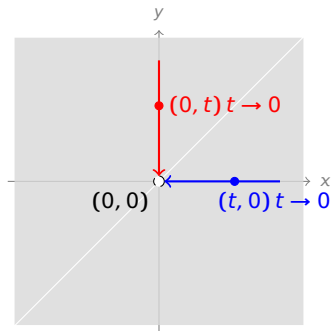
例 2 证明 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ 不存在.

证明

$$f(t, 0) = \frac{t+0}{t-0} = 1$$

$$f(0, t) = \frac{0+t}{0-t} = -1$$

可见, 点按不同方式趋于 $(0, 0)$ 时, 函数值趋于不同的数. 故极限不存在.



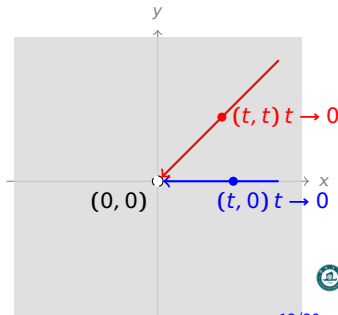
例 3 证明 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在.

证明

$$f(t, 0) = \frac{t \cdot 0}{t^2 + 0^2} = 0$$

$$f(t, t) = \frac{t \cdot t}{t^2 + t^2} = \frac{1}{2}$$

可见, 点按不同方式趋于 $(0, 0)$ 时, 函数值趋于不同的数. 故极限不存在.



计算二元函数的极限：化为单变量极限

例 1 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x}$

计算二元函数的极限：化为单变量极限

例 1 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x}$

解 原式 = $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot y$

计算二元函数的极限：化为单变量极限

例 1 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x}$

解 原式 = $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot y = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y$

计算二元函数的极限：化为单变量极限

例 1 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x}$

解 原式 = $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot y = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y$
令 $t=xy$ $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t}$

计算二元函数的极限：化为单变量极限

例 1 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x}$

解 原式 = $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot y = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y$
令 $t=xy$ $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t}$

计算二元函数的极限：化为单变量极限

例 1 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x}$

解 原式 = $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot y = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y$
令 $t=xy$ $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \cdot 0$

计算二元函数的极限：化为单变量极限

例 1 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x}$

解 原式 = $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot y = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y$
令 $t=xy$ $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \cdot 0 = 1 \cdot 0$

计算二元函数的极限：化为单变量极限

例 1 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x}$

解 原式 = $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot y = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y$
令 $t=xy$ $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0$

计算二元函数的极限：化为单变量极限

例 1 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x}$

解 原式 = $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot y = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y$

$$\stackrel{\text{令 } t=xy}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0$$

例 2 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2 - \sqrt{xy+4}}{xy}$

计算二元函数的极限：化为单变量极限

例 1 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x}$

解 原式 = $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot y = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y$
 $\xrightarrow{\text{令 } t=xy} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0$

例 2 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2 - \sqrt{xy+4}}{xy}$

解 原式 $\xrightarrow{\text{令 } u=xy}$

计算二元函数的极限：化为单变量极限

例 1 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x}$

解 原式 = $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot y = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y$
 $\xrightarrow{\text{令 } t=xy} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0$

例 2 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2 - \sqrt{xy+4}}{xy}$

解 原式 $\xrightarrow{\text{令 } u=xy} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{u+4}}{u}$

计算二元函数的极限：化为单变量极限

例 1 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x}$

解 原式 = $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot y = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y$
 $\stackrel{\text{令 } t=xy}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0$

例 2 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2 - \sqrt{xy+4}}{xy}$

解 原式 $\stackrel{\text{令 } u=xy}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{u+4}}{u}$

计算二元函数的极限：化为单变量极限

例 1 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x}$

解 原式 = $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot y = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y$
 $\xrightarrow{\text{令 } t=xy} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0$

例 2 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2 - \sqrt{xy+4}}{xy}$

解 原式 $\xrightarrow{\text{令 } u=xy} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{u+4}}{u}$ ↓ 洛必达法则
 $= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{[2 - (u+4)^{1/2}]'}{u'}$

计算二元函数的极限：化为单变量极限

例 1 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x}$

解 原式 = $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot y = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y$
 $\xrightarrow{\text{令 } t=xy} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0$

例 2 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2 - \sqrt{xy+4}}{xy}$

解 原式 $\xrightarrow{\text{令 } u=xy} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{u+4}}{u}$ \downarrow 洛必达法则
 $= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{[2 - (u+4)^{1/2}]'}{u'} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}(u+4)^{-1/2}}{1} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{-1}{2\sqrt{u+4}} = -\frac{1}{4}$

计算二元函数的极限：化为单变量极限

例 1 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x}$

解 原式 = $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot y = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y$
 $\xrightarrow{\text{令 } t=xy} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0$

例 2 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2 - \sqrt{xy+4}}{xy}$

解 原式 $\xrightarrow{\text{令 } u=xy} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{u+4}}{u}$ \downarrow 洛必达法则
 $= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{[2 - (u+4)^{1/2}]'}{u'} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\quad}{1}$

计算二元函数的极限：化为单变量极限

例 1 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x}$

解 原式 = $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot y = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y$
 $\xrightarrow{\text{令 } t=xy} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0$

例 2 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2 - \sqrt{xy+4}}{xy}$

解 原式 $\xrightarrow{\text{令 } u=xy} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{u+4}}{u}$ \downarrow 洛必达法则
 $= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{[2 - (u+4)^{1/2}]'}{u'} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}(u+4)^{-1/2}}{1}$

计算二元函数的极限：化为单变量极限

例 1 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x}$

解 原式 = $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot y = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y$
 $\xrightarrow{\text{令 } t=xy} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0$

例 2 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2 - \sqrt{xy+4}}{xy}$

解 原式 $\xrightarrow{\text{令 } u=xy} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{u+4}}{u}$ \downarrow 洛必达法则
 $= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{[2 - (u+4)^{1/2}]'}{u'} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}(u+4)^{-1/2}}{1}$
 $= \lim_{u \rightarrow 0} -\frac{1}{2(u+4)^{1/2}}$

计算二元函数的极限：化为单变量极限

例 1 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x}$

解 原式 = $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot y = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y$
 $\xrightarrow{\text{令 } t=xy} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0$

例 2 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2 - \sqrt{xy+4}}{xy}$

解 原式 $\xrightarrow{\text{令 } u=xy} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{u+4}}{u}$ \downarrow 洛必达法则
 $= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{[2 - (u+4)^{1/2}]'}{u'} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}(u+4)^{-1/2}}{1}$
 $= \lim_{u \rightarrow 0} -\frac{1}{2(u+4)^{1/2}} = -\frac{1}{4}$

例 3 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)e^{x^2 y^2}}$

例3 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)e^{x^2 y^2}}$

解

$$\text{原式} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{e^{x^2 y^2}}$$

例3 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)e^{x^2 y^2}}$

解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{e^{x^2 y^2}} \\ &\quad \underline{\underline{\begin{matrix} t := x^2 + y^2 \\ s := xy \end{matrix}}} \end{aligned}$$

例3 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)e^{x^2 y^2}}$

解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{e^{x^2 y^2}} \\ &\stackrel{\substack{t:=x^2+y^2 \\ s:=xy}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t} \cdot \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{e^{s^2}} \end{aligned}$$

例3 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)e^{x^2 y^2}}$

解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{e^{x^2 y^2}} \\ &\stackrel{\substack{t:=x^2+y^2 \\ s:=xy}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t} \cdot \lim_{s^2} \frac{1}{e^{s^2}} \end{aligned}$$

例3 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)e^{x^2 y^2}}$

解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{e^{x^2 y^2}} \\ &\stackrel{\substack{t:=x^2+y^2 \\ s:=xy}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t} \cdot \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{e^{s^2}} \end{aligned}$$

例3 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)e^{x^2 y^2}}$

解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{e^{x^2 y^2}} \\ &\stackrel{\substack{t:=x^2+y^2 \\ s:=xy}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t} \cdot \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{e^{s^2}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{1} \cdot 1 \end{aligned}$$

例3 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)e^{x^2 y^2}}$

解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{e^{x^2 y^2}} \\ &\stackrel{\substack{t:=x^2+y^2 \\ s:=xy}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t} \cdot \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{e^{s^2}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{1} \cdot 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

连续性

定义

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

则称 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续.

连续性

定义 设 $f(x, y), (x, y) \in D$; $p_0(x_0, y_0)$ 为 D 的聚点, 且 $p_0 \in D$. 若

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

则称 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处 **连续**.

连续性

定义 设 $f(x, y)$, $(x, y) \in D$; $p_0(x_0, y_0)$ 为 D 的聚点, 且 $p_0 \in D$. 若

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

则称 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处 **连续**. 若 $z = f(x, y)$ 在定义域上每一点处连续, 则称 $z = f(x, y)$ 是 **连续函数**.

连续性

定义 设 $f(x, y), (x, y) \in D$; $p_0(x_0, y_0)$ 为 D 的聚点, 且 $p_0 \in D$. 若

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

则称 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处 **连续**. 若 $z = f(x, y)$ 在定义域上每一点处连续, 则称 $z = f(x, y)$ 是 **连续函数**.

注

- 二元初等函数在其定义域内是连续函数

连续性

定义 设 $f(x, y), (x, y) \in D$; $p_0(x_0, y_0)$ 为 D 的聚点, 且 $p_0 \in D$. 若

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

则称 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处 **连续**. 若 $z = f(x, y)$ 在定义域上每一点处连续, 则称 $z = f(x, y)$ 是 **连续函数**.

注

- 二元初等函数: 由 x 和 y 的基本初等函数经有限次的四则运算、复合运算所得的表达式
- 二元初等函数在其定义域内是连续函数

连续性

定义 设 $f(x, y), (x, y) \in D$; $p_0(x_0, y_0)$ 为 D 的聚点, 且 $p_0 \in D$. 若

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

则称 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处 **连续**. 若 $z = f(x, y)$ 在定义域上每一点处连续, 则称 $z = f(x, y)$ 是 **连续函数**.

注

- 二元初等函数: 由 x 和 y 的基本初等函数经有限次的四则运算、复合运算所得的表达式
- 二元初等函数在其定义域内是连续函数
- 二元初等函数在定义域内一点 (x_0, y_0) 的极限值, 等于该点处的函数值

连续性

定义 设 $f(x, y), (x, y) \in D$; $p_0(x_0, y_0)$ 为 D 的聚点, 且 $p_0 \in D$. 若

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

则称 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处 **连续**. 若 $z = f(x, y)$ 在定义域上每一点处连续, 则称 $z = f(x, y)$ 是 **连续函数**.

注

- 二元初等函数: 由 x 和 y 的基本初等函数经有限次的四则运算、复合运算所得的表达式
- 二元初等函数在其定义域内是连续函数
- 二元初等函数在定义域内一点 (x_0, y_0) 的极限值, 等于该点处的函数值

例

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 2)} 2xy + e^{x+y}$$

连续性

定义 设 $f(x, y), (x, y) \in D$; $p_0(x_0, y_0)$ 为 D 的聚点, 且 $p_0 \in D$. 若

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

则称 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处 **连续**. 若 $z = f(x, y)$ 在定义域上每一点处连续, 则称 $z = f(x, y)$ 是 **连续函数**.

注

- 二元初等函数: 由 x 和 y 的基本初等函数经有限次的四则运算、复合运算所得的表达式
- 二元初等函数在其定义域内是连续函数
- 二元初等函数在定义域内一点 (x_0, y_0) 的极限值, 等于该点处的函数值

例

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 2)} 2xy + e^{x+y} = 2 \cdot 1 \cdot 2 + e^{1+2}$$

连续性

定义 设 $f(x, y), (x, y) \in D$; $p_0(x_0, y_0)$ 为 D 的聚点, 且 $p_0 \in D$. 若

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

则称 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处 **连续**. 若 $z = f(x, y)$ 在定义域上每一点处连续, 则称 $z = f(x, y)$ 是 **连续函数**.

注

- 二元初等函数: 由 x 和 y 的基本初等函数经有限次的四则运算、复合运算所得的表达式
- 二元初等函数在其定义域内是连续函数
- 二元初等函数在定义域内一点 (x_0, y_0) 的极限值, 等于该点处的函数值

例

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 2)} 2xy + e^{x+y} = 2 \cdot 1 \cdot 2 + e^{1+2} = 4 + e^3$$

例 1 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2}, \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

例 1 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2}$, $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

解

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{2x^2 - 3y^2}{x^2 + y^2}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

例 1 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2}$, $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

解

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2} = \frac{2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 1^2}{2^2 + 1^2}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

例 1 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2}$, $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

解

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2} = \frac{2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 1^2}{2^2 + 1^2} = 1$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

例 1 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2}$, $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

解

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2} = \frac{2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 1^2}{2^2 + 1^2} = 1$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\ln(1+e^0)}{\sqrt{1^2+0^2}}$$

例 1 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2}$, $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

解

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2} = \frac{2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 1^2}{2^2 + 1^2} = 1$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\ln(1+e^0)}{\sqrt{1^2+0^2}} = \ln 2$$

例 1 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2}$, $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

解

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2} = \frac{2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 1^2}{2^2 + 1^2} = 1$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\ln(1+e^0)}{\sqrt{1^2+0^2}} = \ln 2$$

例 2 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{x+y}{x^2-y^2}$

解

例 1 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2}$, $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

解

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2} = \frac{2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 1^2}{2^2 + 1^2} = 1$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\ln(1+e^0)}{\sqrt{1^2+0^2}} = \ln 2$$

例 2 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{x+y}{x^2-y^2}$

解

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{x+y}{x^2-y^2} =$$

例 1 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2}$, $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

解

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2} = \frac{2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 1^2}{2^2 + 1^2} = 1$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\ln(1+e^0)}{\sqrt{1^2+0^2}} = \ln 2$$

例 2 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{x+y}{x^2-y^2}$

解

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{x+y}{x^2-y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{x+y}{(x+y)(x-y)}$$

例 1 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2}$, $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

解

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2} = \frac{2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 1^2}{2^2 + 1^2} = 1$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\ln(1+e^0)}{\sqrt{1^2+0^2}} = \ln 2$$

例 2 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{x+y}{x^2-y^2}$

解

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{x+y}{x^2-y^2} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{x+y}{(x+y)(x-y)} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{1}{x-y} \end{aligned}$$

例 1 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2}$, $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

解

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2} = \frac{2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 1^2}{2^2 + 1^2} = 1$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\ln(1+e^0)}{\sqrt{1^2+0^2}} = \ln 2$$

例 2 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{x+y}{x^2-y^2}$

解

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{x+y}{x^2-y^2} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{x+y}{(x+y)(x-y)} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{1}{x-y} = \frac{1}{1-(-1)} \end{aligned}$$

例 1 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2}$, $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

解

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2} = \frac{2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 1^2}{2^2 + 1^2} = 1$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\ln(1+e^0)}{\sqrt{1^2+0^2}} = \ln 2$$

例 2 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{x+y}{x^2-y^2}$

解

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{x+y}{x^2-y^2} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{x+y}{(x+y)(x-y)} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{1}{x-y} = \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

有界性与最大值最小值定理

回忆 有界闭区间 上的 连续函数 $y = f(x)$ 有界，并且能取到最大值和最小值。

有界性与最大值最小值定理

回忆 有界闭区间 上的 连续函数 $y = f(x)$ 有界，并且能取到最大值和最小值。

定理 有界闭区域 上的 连续函数 $z = f(x, y)$ 一定有界，并且能取到最大值和最小值。

有界性与最大值最小值定理

回忆 有界闭区间 上的 连续函数 $y = f(x)$ 有界，并且能取到最大值和最小值。

定理 有界闭区域 上的 连续函数 $z = f(x, y)$ 一定有界，并且能取到最大值和最小值。

注 “有界闭区域”，“连续性”不能少，否则不一定有界，也不一定能取到最大、最小值。

有界性与最大值最小值定理

回忆 有界闭区间 上的 连续函数 $y = f(x)$ 有界，并且能取到最大值和最小值。

定理 有界闭区域 上的 连续函数 $z = f(x, y)$ 一定有界，并且能取到最大值和最小值。

注 “有界闭区域”，“连续性”不能少，否则不一定有界，也不一定能取到最大、最小值。

例 1 设 $z = f(x, y) = \frac{1}{1-x^2-y^2}$ ，则

- 在有界闭区域 $D_1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}\}$
- 在有界开区域 $D_2 = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$

有界性与最大值最小值定理

回忆 有界闭区间 上的 连续函数 $y = f(x)$ 有界，并且能取到最大值和最小值。

定理 有界闭区域 上的 连续函数 $z = f(x, y)$ 一定有界，并且能取到最大值和最小值。

注 “有界闭区域”，“连续性”不能少，否则不一定有界，也不一定能取到最大、最小值。

例 1 设 $z = f(x, y) = \frac{1}{1-x^2-y^2}$ ，则

- 在有界闭区域 $D_1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}\}$ 上取得最值
- 在有界开区域 $D_2 = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$

有界性与最大值最小值定理

回忆 有界闭区间 上的 连续函数 $y = f(x)$ 有界，并且能取到最大值和最小值。

定理 有界闭区域 上的 连续函数 $z = f(x, y)$ 一定有界，并且能取到最大值和最小值。

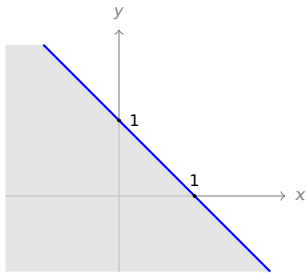
注 “有界闭区域”，“连续性”不能少，否则不一定有界，也不一定能取到最大、最小值。

例 1 设 $z = f(x, y) = \frac{1}{1-x^2-y^2}$ ，则

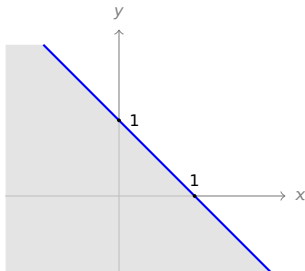
- 在有界闭区域 $D_1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}\}$ 上取得最值
- 在有界开区域 $D_2 = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$ 上取不到最大值

例 2 设 $z = f(x, y) = x^2 - y^2$, 定义在无界闭区域
 $D = \{(x, y) | x + y \leq 1\}$

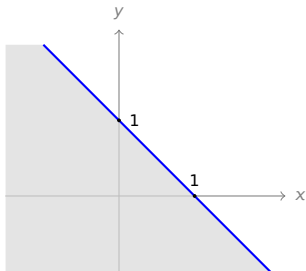
例 2 设 $z = f(x, y) = x^2 - y^2$ ，定义在无界闭区域
 $D = \{(x, y) | x + y \leq 1\}$



例 2 设 $z = f(x, y) = x^2 - y^2$ ，定义在无界闭区域 $D = \{(x, y) | x + y \leq 1\}$ ，可证明 $f(x, y)$ 既取不到最小值，也取不到最大值。

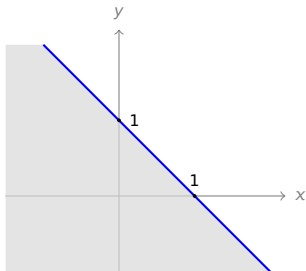


例 2 设 $z = f(x, y) = x^2 - y^2$ ，定义在无界闭区域 $D = \{(x, y) | x + y \leq 1\}$ ，可证明 $f(x, y)$ 既取不到最小值，也取不到最大值。



解 在边界 $x + y = 1$ 上， $y = 1 - x$ ，此时

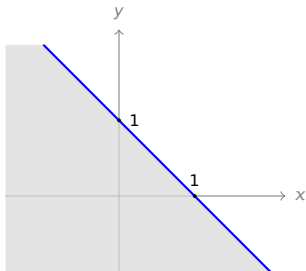
例 2 设 $z = f(x, y) = x^2 - y^2$ ，定义在无界闭区域 $D = \{(x, y) | x + y \leq 1\}$ ，可证明 $f(x, y)$ 既取不到最小值，也取不到最大值。



解 在边界 $x + y = 1$ 上， $y = 1 - x$ ，此时

$$f(x, y) = x^2 - y^2 = x^2 - (1 - x)^2$$

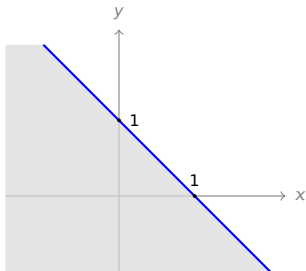
例 2 设 $z = f(x, y) = x^2 - y^2$ ，定义在无界闭区域 $D = \{(x, y) | x + y \leq 1\}$ ，可证明 $f(x, y)$ 既取不到最小值，也取不到最大值.



解 在边界 $x + y = 1$ 上, $y = 1 - x$, 此时

$$f(x, y) = x^2 - y^2 = x^2 - (1 - x)^2 = 2x - 1$$

例 2 设 $z = f(x, y) = x^2 - y^2$ ，定义在无界闭区域 $D = \{(x, y) | x + y \leq 1\}$ ，可证明 $f(x, y)$ 既取不到最小值，也取不到最大值。

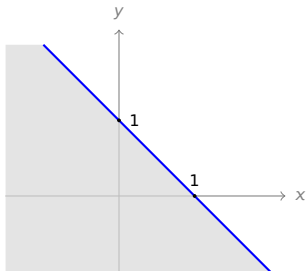


解 在边界 $x + y = 1$ 上， $y = 1 - x$ ，此时

$$f(x, y) = x^2 - y^2 = x^2 - (1 - x)^2 = 2x - 1$$

- 当 $x \rightarrow +\infty$ 时，函数值 $f \rightarrow +\infty$

例 2 设 $z = f(x, y) = x^2 - y^2$ ，定义在无界闭区域 $D = \{(x, y) | x + y \leq 1\}$ ，可证明 $f(x, y)$ 既取不到最小值，也取不到最大值。



解 在边界 $x + y = 1$ 上， $y = 1 - x$ ，此时

$$f(x, y) = x^2 - y^2 = x^2 - (1 - x)^2 = 2x - 1$$

- 当 $x \rightarrow +\infty$ 时，函数值 $f \rightarrow +\infty$
- 当 $x \rightarrow -\infty$ 时，函数值 $f \rightarrow -\infty$

介值定理

回忆 有界闭区间 上的 连续函数 的介值定理是什么说？

介值定理

回忆 有界闭区间 上的 连续函数 的介值定理是什么说？

定理 设

- $z = f(x, y)$ 是 有界闭区域 D 上的 连续函数；

介值定理

回忆 有界闭区间 上的 连续函数 的介值定理是什么说？

定理 设

- $z = f(x, y)$ 是 有界闭区域 D 上的 连续函数；
- C 是介于 $f(x, y)$ 最大值与最小值之间的任意一个数.

介值定理

回忆 有界闭区间 上的 连续函数 的介值定理是什么说？

定理 设

- $z = f(x, y)$ 是 有界闭区域 D 上的 连续函数；
- C 是介于 $f(x, y)$ 最大值与最小值之间的任意一个数.

则至少存在一点 $(\xi, \eta) \in D$ ，使得 $f(\xi, \eta) = C$.

n 元函数

- 三元函数: $u = f(x, y, z)$,

n 元函数

- 三元函数: $u = f(x, y, z)$, 如

$$f(x, y, z) = \frac{z}{x^2 + y + 1} + \sin(xyz)$$

n 元函数

- 三元函数: $u = f(x, y, z)$, 如

$$f(x, y, z) = \frac{z}{x^2 + y + 1} + \sin(xyz)$$

例 设长方体的长宽高分别为 x, y, z , 则体积为

n 元函数

- 三元函数: $u = f(x, y, z)$, 如

$$f(x, y, z) = \frac{z}{x^2 + y + 1} + \sin(xyz)$$

例 设长方体的长宽高分别为 x, y, z , 则体积为

$$V = xyz$$

n 元函数

- 三元函数: $u = f(x, y, z)$, 如

$$f(x, y, z) = \frac{z}{x^2 + y + 1} + \sin(xyz)$$

例 设长方体的长宽高分别为 x, y, z , 则体积为

$$V = xyz$$

是关于 x, y, z 的三元函数,

n 元函数

- 三元函数: $u = f(x, y, z)$, 如

$$f(x, y, z) = \frac{z}{x^2 + y + 1} + \sin(xyz)$$

例 设长方体的长宽高分别为 x, y, z , 则体积为

$$V = xyz$$

是关于 x, y, z 的三元函数, 定义域是

$$D = \{(x, y, z) | x, y, z > 0\}.$$

n 元函数

- 三元函数: $u = f(x, y, z)$, 如

$$f(x, y, z) = \frac{z}{x^2 + y + 1} + \sin(xyz)$$

例 设长方体的长宽高分别为 x, y, z , 则体积为

$$V = xyz$$

是关于 x, y, z 的三元函数, 定义域是

$$D = \{(x, y, z) | x, y, z > 0\}.$$

- n 原函数: $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$