

第 08 周作业解答

练习 1. 用初等变换将下列矩阵化为等价标准形:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

解

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \\ -4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4+4r_1]{\begin{matrix} r_2-2r_1 \\ r_3-r_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[r_4+2r_2]{r_3-3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_3+c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1) \times c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

练习 2. 用初等行变换求下列矩阵 A, B, C 的逆矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(其中 $a_i \neq 0, i = 1, 2, 3, 4$)

解

$$\begin{aligned} (A: I) &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1) \times r_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & 6 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 5 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-r_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{r_3-6r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & -6 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1) \times r_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 6 & 4 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[r_1+r_3]{r_2-r_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -7 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 6 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 6 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{所以 } A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 6 & -5 & -3 \\ -7 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} (B:I) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4+r_3]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\frac{1}{2} \times r_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1-r_4]{r_3-2r_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\frac{1}{2} \times r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1-r_3]{r_2-2r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\frac{1}{2} \times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{所以 } B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} (C:I) &= \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4 \leftrightarrow r_3} * \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_2} * \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_1} \begin{pmatrix} a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[\frac{1}{a_3} \times r_4]{\frac{1}{a_4} \times r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a_3} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{所以 } C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_4} \\ \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_3} & 0 \end{pmatrix}.$$