

第 11 章 e: 对坐标的曲面积分

数学系 梁卓滨

2016-2017 学年 II

定向曲面

定义

- 一个曲面称为可定向，是指该曲面在整体上的具有两侧。

定向曲面

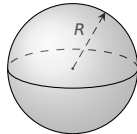
定义

- 一个曲面称为可定向，是指该曲面在整体上的具有两侧。

例

- 球面可定向，有内、外侧之分。

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$



定向曲面

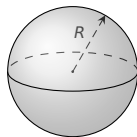
定义

- 一个曲面称为可定向，是指该曲面在整体上的具有两侧。

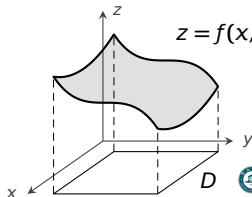
例

- 球面可定向，有内、外侧之分。
- 二元函数图形可定向，有上、下侧之分。

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$



$$z = f(x, y)$$



定向曲面

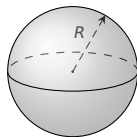
定义

- 一个曲面称为可定向，是指该曲面在整体上的具有两侧。
- 指定可定向曲面的定向是指：指定一侧为正侧，另一侧为负侧。

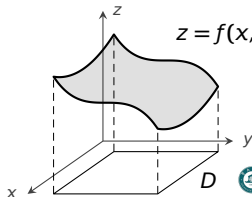
例

- 球面可定向，有内、外侧之分。
- 二元函数图形可定向，有上、下侧之分。

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$



$$z = f(x, y)$$



定向曲面

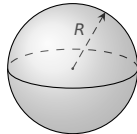
定义

- 一个曲面称为可定向，是指该曲面在整体上的具有两侧。
- 指定可定向曲面的定向是指：指定一侧为正侧，另一侧为负侧。
- 指定了定向的可定向曲面，称为定向曲面。

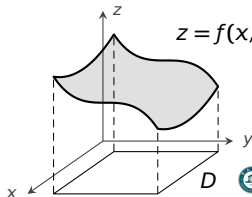
例

- 球面可定向，有内、外侧之分。
- 二元函数图形可定向，有上、下侧之分。

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$



$$z = f(x, y)$$



定向曲面

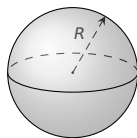
定义

- 一个曲面称为可定向，是指该曲面在整体上的具有两侧。
- 指定可定向曲面的定向是指：指定一侧为正侧，另一侧为负侧。
- 指定了定向的可定向曲面，称为定向曲面。

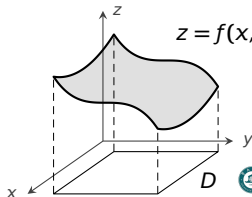
例

- 球面可定向，有内、外侧之分。
两种定向：
 - 以外侧为正向的定向球面
- 二元函数图形可定向，有上、下侧之分。

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$



$$z = f(x, y)$$



定向曲面

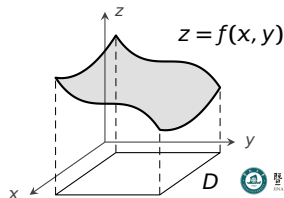
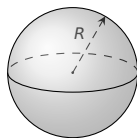
定义

- 一个曲面称为可定向，是指该曲面在整体上的具有两侧。
- 指定可定向曲面的定向是指：指定一侧为正侧，另一侧为负侧。
- 指定了定向的可定向曲面，称为定向曲面。

例

- 球面可定向，有内、外侧之分。
两种定向：
 - 以外侧为正向的定向球面
 - 以内侧为正向的定向球面
- 二元函数图形可定向，有上、下侧之分。

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$



定向曲面

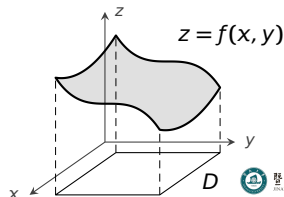
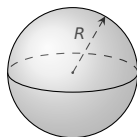
定义

- 一个曲面称为可定向，是指该曲面在整体上的具有两侧。
- 指定可定向曲面的定向是指：指定一侧为正侧，另一侧为负侧。
- 指定了定向的可定向曲面，称为定向曲面。

例

- 球面可定向，有内、外侧之分。
两种定向：
 - 以外侧为正向的定向球面
 - 以内侧为正向的定向球面
- 二元函数图形可定向，有上、下侧之分。
两种定向：
 - 以上侧为正向的定向函数图形

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$



定向曲面

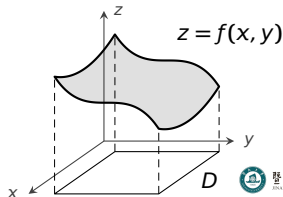
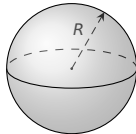
定义

- 一个曲面称为可定向，是指该曲面在整体上的具有两侧。
- 指定可定向曲面的定向是指：指定一侧为正侧，另一侧为负侧。
- 指定了定向的可定向曲面，称为定向曲面。

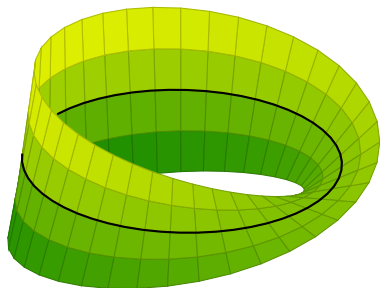
例

- 球面可定向，有内、外侧之分。
两种定向：
 - 以外侧为正向的定向球面
 - 以内侧为正向的定向球面
- 二元函数图形可定向，有上、下侧之分。
两种定向：
 - 以上侧为正向的定向函数图形
 - 以下侧为正向的定向函数图形

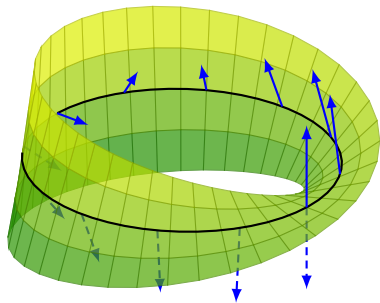
$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$



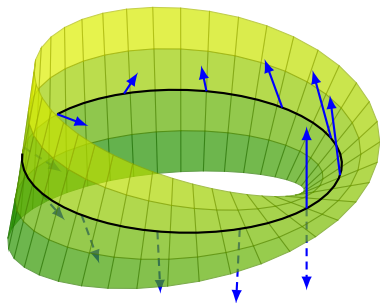
例 不可定向的曲面：莫比乌斯曲面



例 不可定向的曲面：莫比乌斯曲面

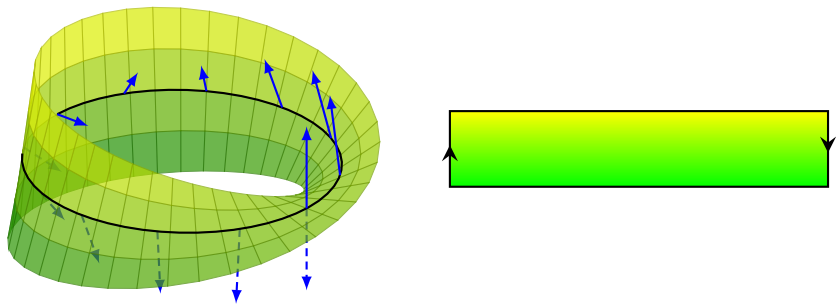


例 不可定向的曲面：莫比乌斯曲面



制作方法 将纸带旋转半周，再把两端粘合（如图，使得两端箭头重合）

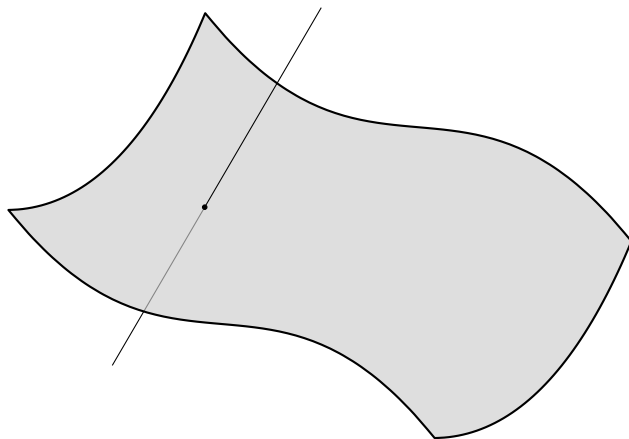
例 不可定向的曲面：莫比乌斯曲面



制作方法 将纸带旋转半周，再把两端粘合（如图，使得两端箭头重合）

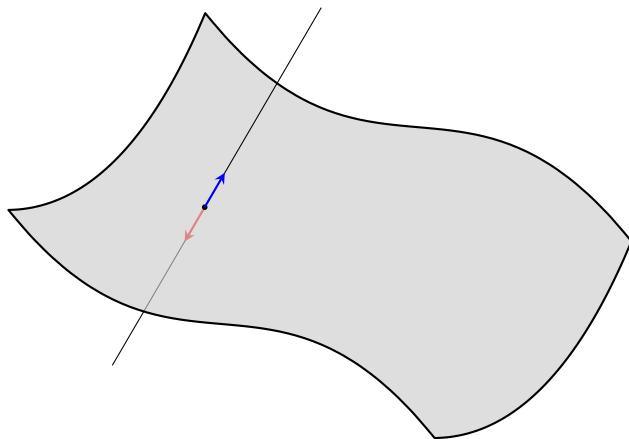
注 如无特殊说明，下面出现的曲面都是可定向的曲面

定向与单位法向量场



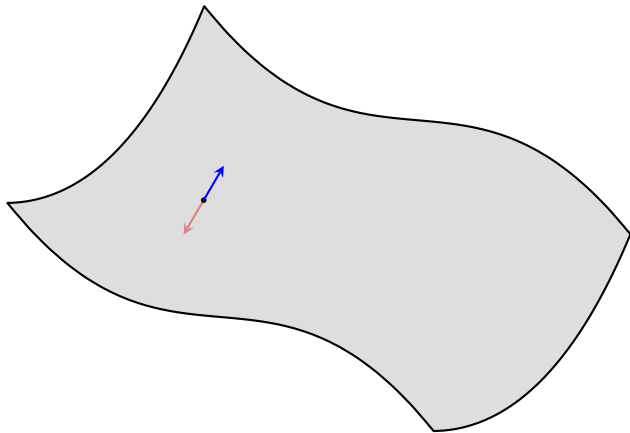
定向与单位法向量场

- 曲面上任一点，有两个单位法向量（方向相反），分别指向两侧。



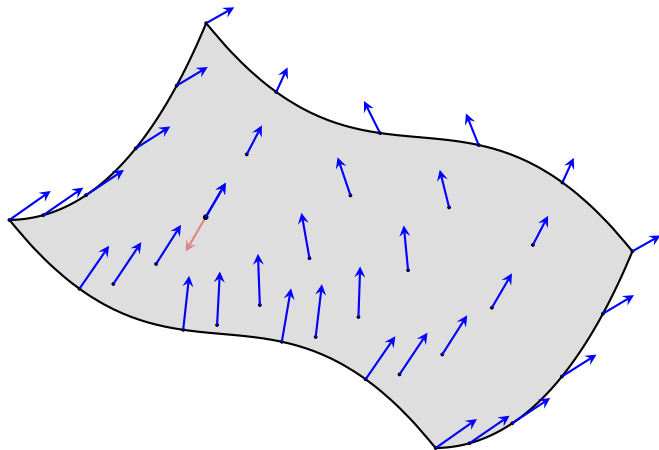
定向与单位法向量场

- 曲面上任一点，有两个单位法向量（方向相反），分别指向两侧。
- 给曲面定向，等价于指定其中一个单位法向量场 $\vec{n}(x, y, z)$



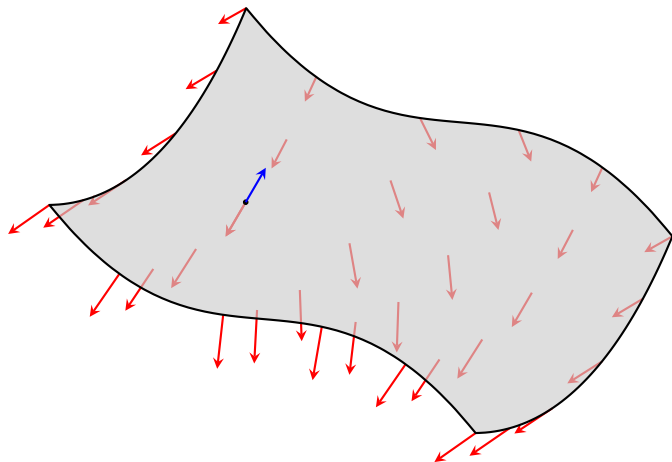
定向与单位法向量场

- 曲面上任一点，有两个单位法向量（方向相反），分别指向两侧。
- 给曲面定向，等价于指定其中一个单位法向量场 $\vec{n}(x, y, z)$



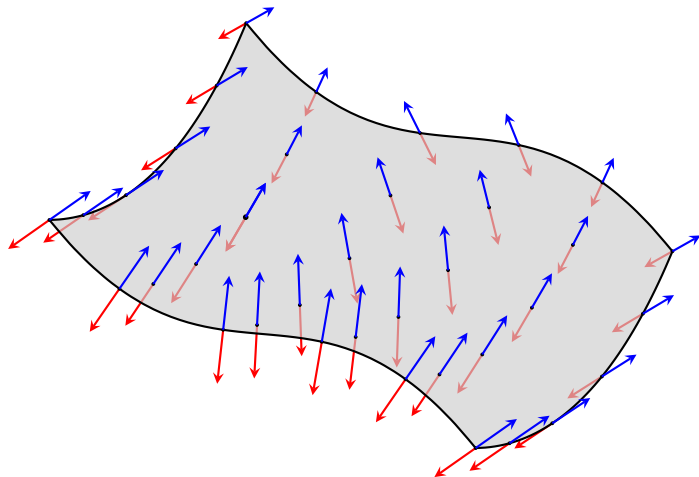
定向与单位法向量场

- 曲面上任一点，有两个单位法向量（方向相反），分别指向两侧。
- 给曲面定向，等价于指定其中一个单位法向量场 $\vec{n}(x, y, z)$



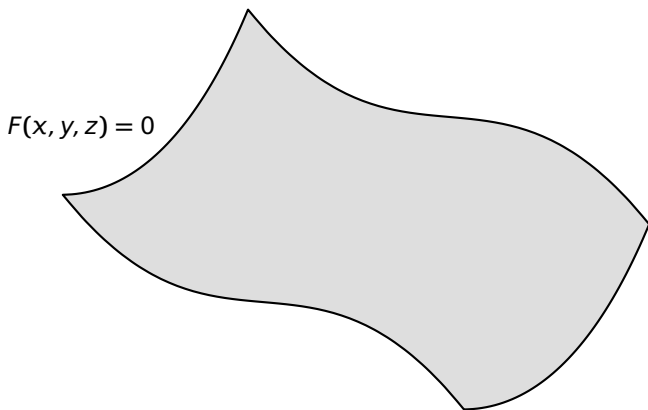
定向与单位法向量场

- 曲面上任一点，有两个单位法向量（方向相反），分别指向两侧。
- 给曲面定向，等价于指定其中一个单位法向量场 $\vec{n}(x, y, z)$



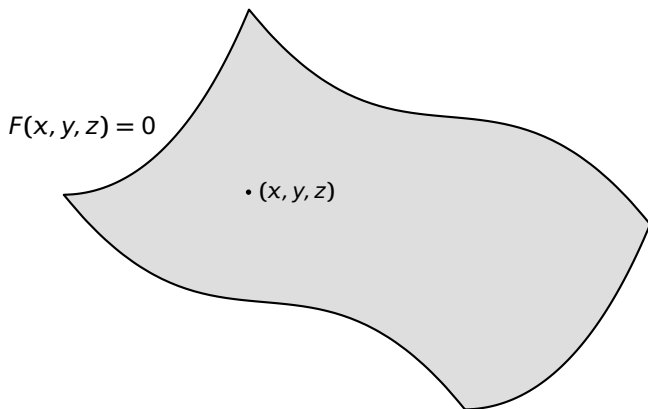
单位法向量场的计算

- 设曲面方程为 $F(x, y, z) = 0$ ，则两个单位法向量场为：



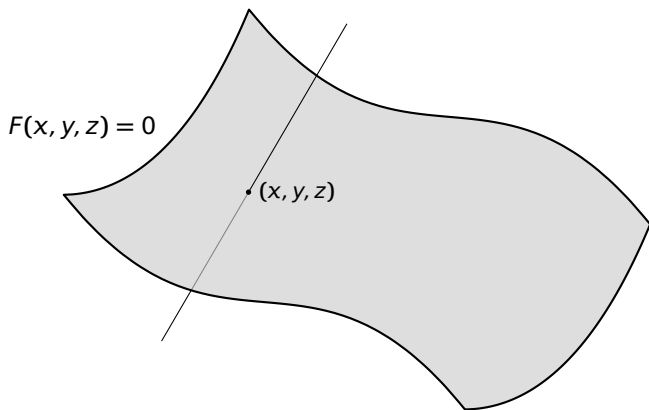
单位法向量场的计算

- 设曲面方程为 $F(x, y, z) = 0$ ，则两个单位法向量场为：



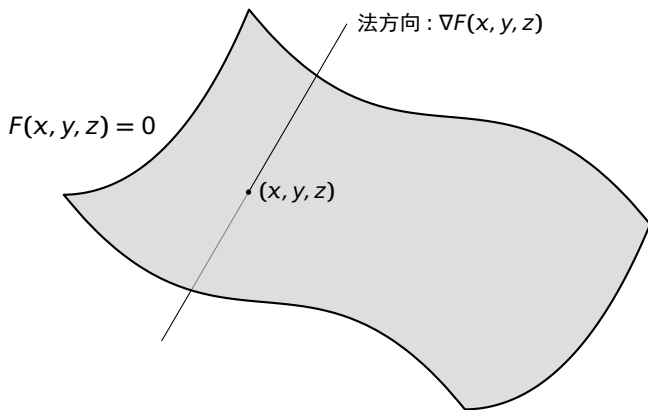
单位法向量场的计算

- 设曲面方程为 $F(x, y, z) = 0$ ，则两个单位法向量场为：



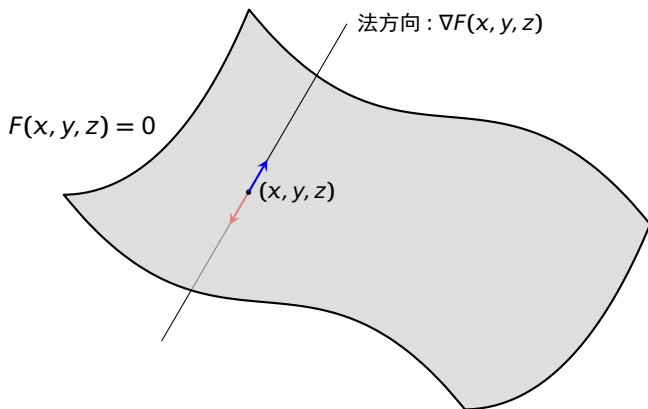
单位法向量场的计算

- 设曲面方程为 $F(x, y, z) = 0$ ，则两个单位法向量场为：



单位法向量场的计算

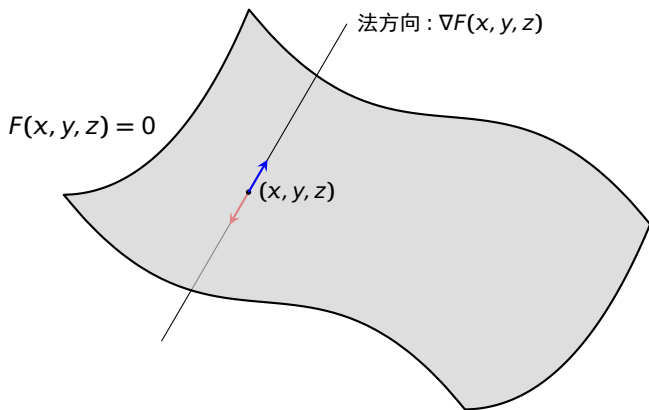
- 设曲面方程为 $F(x, y, z) = 0$ ，则两个单位法向量场为：



单位法向量场的计算

- 设曲面方程为 $F(x, y, z) = 0$ ，则两个单位法向量场为：

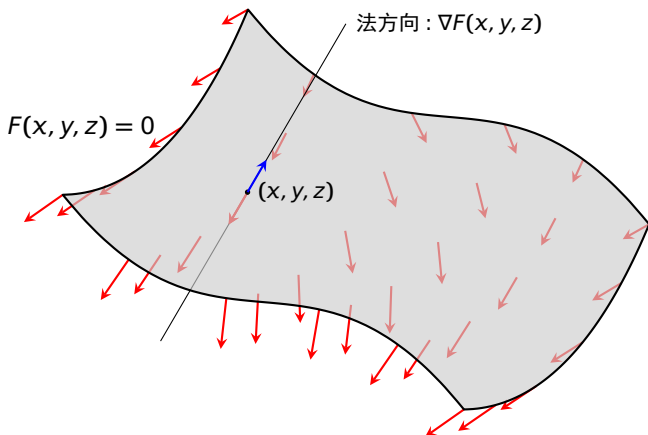
$$\frac{1}{|\nabla F|} \nabla F \quad \text{与} \quad -\frac{1}{|\nabla F|} \nabla F.$$



单位法向量场的计算

- 设曲面方程为 $F(x, y, z) = 0$ ，则两个单位法向量场为：

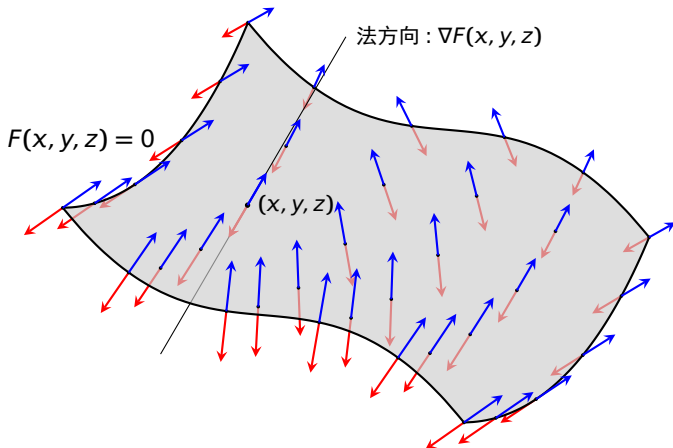
$$\frac{1}{|\nabla F|} \nabla F \quad \text{与} \quad -\frac{1}{|\nabla F|} \nabla F.$$



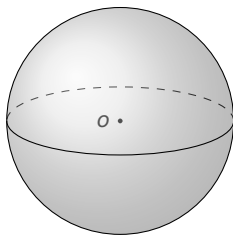
单位法向量场的计算

- 设曲面方程为 $F(x, y, z) = 0$ ，则两个单位法向量场为：

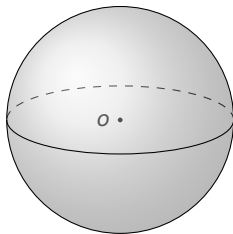
$$\frac{1}{|\nabla F|} \nabla F \quad \text{与} \quad -\frac{1}{|\nabla F|} \nabla F.$$



例 写出球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的两个单位法向量场，并指出哪一个指向外侧，哪一个指向内侧？

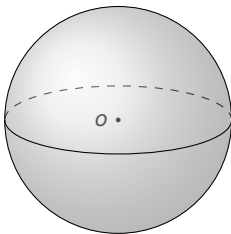


例 写出球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的两个单位法向量场，并指出哪一个指向外侧，哪个指向内侧？



解 令 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$ ，则球面方程改写为 $F = 0$ 。

例 写出球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的两个单位法向量场，并指出哪一个指向外侧，哪一个指向内侧？



解 令 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$ ，则球面方程改写为 $F = 0$ 。计算

$$\nabla F =$$

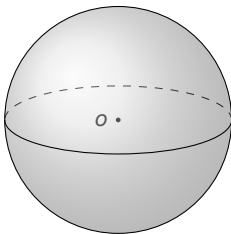
$$|\nabla F| =$$

所以两个单位法向量场为

$$\frac{1}{|\nabla F|} \nabla F =$$

$$-\frac{1}{|\nabla F|} \nabla F =$$

例 写出球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的两个单位法向量场，并指出哪一个指向外侧，哪一个指向内侧？



解 令 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$ ，则球面方程改写为 $F = 0$ 。计算

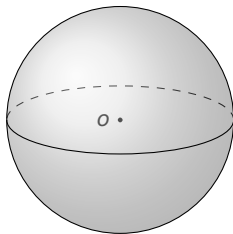
$$\nabla F = (2x, 2y, 2z), \quad |\nabla F| =$$

所以两个单位法向量场为

$$\frac{1}{|\nabla F|} \nabla F =$$

$$-\frac{1}{|\nabla F|} \nabla F =$$

例 写出球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的两个单位法向量场，并指出哪一个指向外侧，哪一个指向内侧？



解 令 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$ ，则球面方程改写为 $F = 0$ 。计算

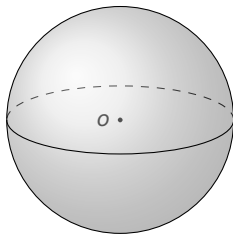
$$\nabla F = (2x, 2y, 2z), \quad |\nabla F| = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

所以两个单位法向量场为

$$\frac{1}{|\nabla F|} \nabla F =$$

$$-\frac{1}{|\nabla F|} \nabla F =$$

例 写出球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的两个单位法向量场，并指出哪一个指向外侧，哪一个指向内侧？



解 令 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$ ，则球面方程改写为 $F = 0$ 。计算

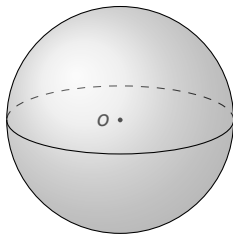
$$\nabla F = (2x, 2y, 2z), \quad |\nabla F| = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2R$$

所以两个单位法向量场为

$$\frac{1}{|\nabla F|} \nabla F =$$

$$-\frac{1}{|\nabla F|} \nabla F =$$

例 写出球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的两个单位法向量场, 并指出哪一个指向外侧, 哪一个指向内侧?



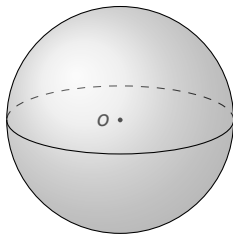
解 令 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$, 则球面方程改写为 $F = 0$ 。计算

$$\nabla F = (2x, 2y, 2z), \quad |\nabla F| = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2R$$

所以两个单位法向量场为

$$\frac{1}{|\nabla F|} \nabla F = \frac{1}{R}(x, y, z), \quad -\frac{1}{|\nabla F|} \nabla F =$$

例 写出球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的两个单位法向量场, 并指出哪一个指向外侧, 哪个指向内侧?



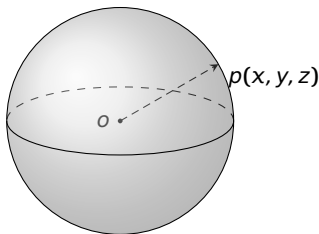
解 令 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$, 则球面方程改写为 $F = 0$ 。计算

$$\nabla F = (2x, 2y, 2z), \quad |\nabla F| = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2R$$

所以两个单位法向量场为

$$\frac{1}{|\nabla F|} \nabla F = \frac{1}{R}(x, y, z), \quad -\frac{1}{|\nabla F|} \nabla F = -\frac{1}{R}(x, y, z)$$

例 写出球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的两个单位法向量场, 并指出哪一个指向外侧, 哪一个指向内侧?



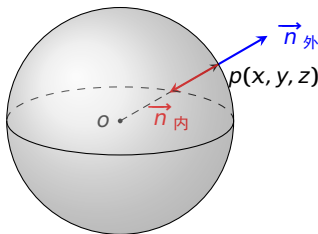
解 令 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$, 则球面方程改写为 $F = 0$ 。计算

$$\nabla F = (2x, 2y, 2z), \quad |\nabla F| = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2R$$

所以两个单位法向量场为

$$\frac{1}{|\nabla F|} \nabla F = \frac{1}{R} (x, y, z), \quad -\frac{1}{|\nabla F|} \nabla F = -\frac{1}{R} (x, y, z)$$

例 写出球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的两个单位法向量场，并指出哪一个指向外侧，哪一个指向内侧？



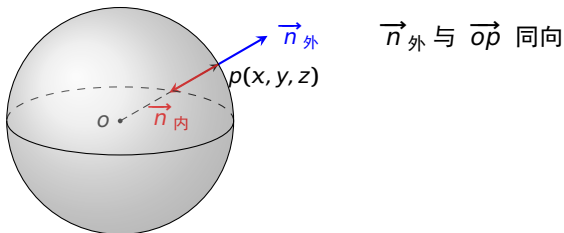
解 令 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$ ，则球面方程改写为 $F = 0$ 。计算

$$\nabla F = (2x, 2y, 2z), \quad |\nabla F| = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2R$$

所以两个单位法向量场为

$$\frac{1}{|\nabla F|} \nabla F = \frac{1}{R}(x, y, z), \quad -\frac{1}{|\nabla F|} \nabla F = -\frac{1}{R}(x, y, z)$$

例 写出球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的两个单位法向量场，并指出哪一个指向外侧，哪一个指向内侧？



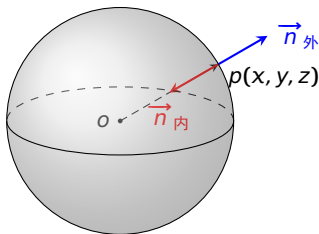
解 令 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$ ，则球面方程改写为 $F = 0$ 。计算

$$\nabla F = (2x, 2y, 2z), \quad |\nabla F| = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2R$$

所以两个单位法向量场为

$$\frac{1}{|\nabla F|} \nabla F = \frac{1}{R}(x, y, z), \quad -\frac{1}{|\nabla F|} \nabla F = -\frac{1}{R}(x, y, z)$$

例 写出球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的两个单位法向量场，并指出哪一个指向外侧，哪个指向内侧？



$\vec{n}_{\text{外}}$ 与 \vec{op} 同向

$\vec{n}_{\text{内}}$ 与 \vec{op} 反向

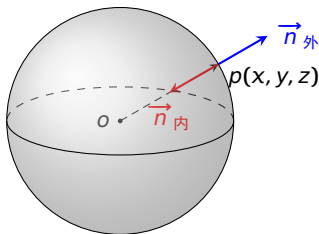
解 令 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$ ，则球面方程改写为 $F = 0$ 。计算

$$\nabla F = (2x, 2y, 2z), \quad |\nabla F| = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2R$$

所以两个单位法向量场为

$$\frac{1}{|\nabla F|} \nabla F = \frac{1}{R}(x, y, z), \quad -\frac{1}{|\nabla F|} \nabla F = -\frac{1}{R}(x, y, z)$$

例 写出球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的两个单位法向量场，并指出哪一个指向外侧，哪个指向内侧？



$\vec{n}_{\text{外}}$ 与 \vec{op} 同向

$\vec{n}_{\text{内}}$ 与 \vec{op} 反向

解 令 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$ ，则球面方程改写为 $F = 0$ 。计算

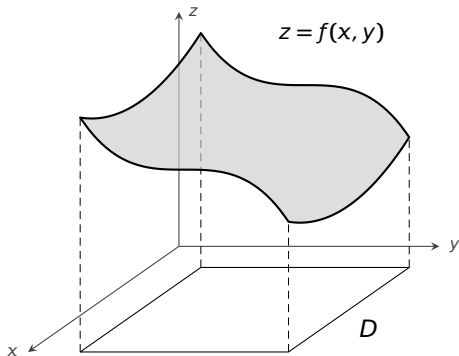
$$\nabla F = (2x, 2y, 2z), \quad |\nabla F| = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2R$$

所以两个单位法向量场为

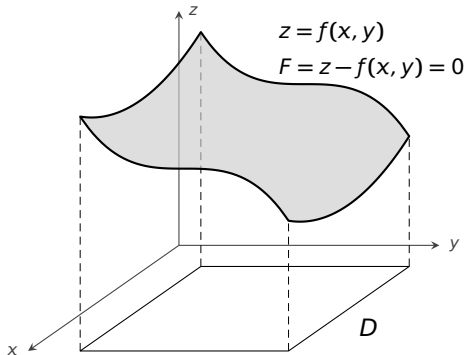
$$\frac{1}{|\nabla F|} \nabla F = \frac{1}{R}(x, y, z), \quad -\frac{1}{|\nabla F|} \nabla F = -\frac{1}{R}(x, y, z)$$

前一个指向外侧，后一个指向内侧。

例 写出二元函数 $z = f(x, y)$ 图形的两个单位法向量场，并指出哪一个指向上侧，哪个指向下侧？

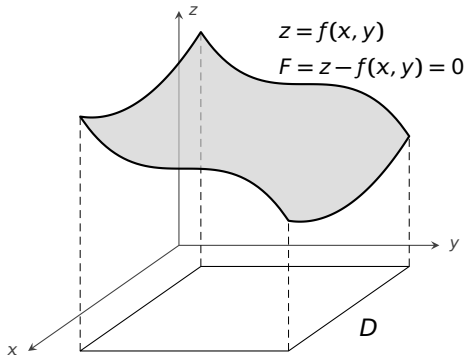


例 写出二元函数 $z = f(x, y)$ 图形的两个单位法向量场，并指出哪一个指向上侧，哪个指向下侧？



解 令 $F(x, y, z) = z - f(x, y)$ ，则该图形方程改写为 $F = 0$ 。

例 写出二元函数 $z = f(x, y)$ 图形的两个单位法向量场，并指出哪一个指向上侧，哪个指向下侧？



解 令 $F(x, y, z) = z - f(x, y)$ ，则该图形方程改写为 $F = 0$ 。计算

$$\nabla F =$$

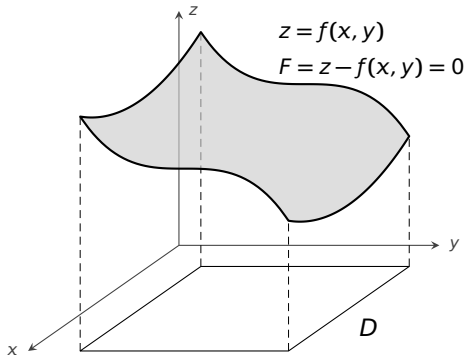
$$|\nabla F| =$$

所以两个单位法向量场为

$$\frac{1}{|\nabla F|} \nabla F =$$

$$-\frac{1}{|\nabla F|} \nabla F =$$

例 写出二元函数 $z = f(x, y)$ 图形的两个单位法向量场，并指出哪一个指向上侧，哪个指向下侧？



解 令 $F(x, y, z) = z - f(x, y)$ ，则该图形方程改写为 $F = 0$ 。计算

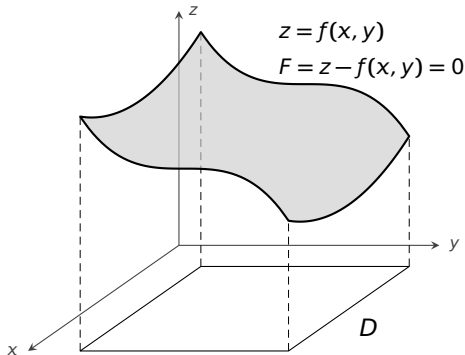
$$\nabla F = (-f_x, -f_y, 1), \quad |\nabla F| =$$

所以两个单位法向量场为

$$\frac{1}{|\nabla F|} \nabla F =$$

$$-\frac{1}{|\nabla F|} \nabla F =$$

例 写出二元函数 $z = f(x, y)$ 图形的两个单位法向量场，并指出哪一个指向上侧，哪个指向下侧？



解 令 $F(x, y, z) = z - f(x, y)$ ，则该图形方程改写为 $F = 0$ 。计算

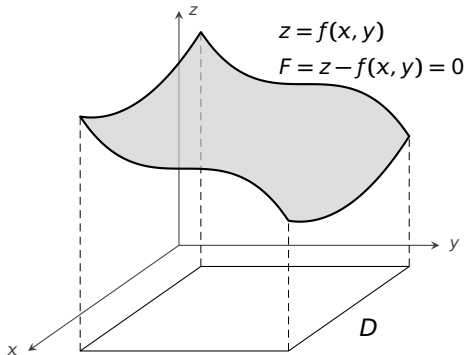
$$\nabla F = (-f_x, -f_y, 1), \quad |\nabla F| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$$

所以两个单位法向量场为

$$\frac{1}{|\nabla F|} \nabla F =$$

$$-\frac{1}{|\nabla F|} \nabla F =$$

例 写出二元函数 $z = f(x, y)$ 图形的两个单位法向量场，并指出哪一个指向上侧，哪个指向下侧？



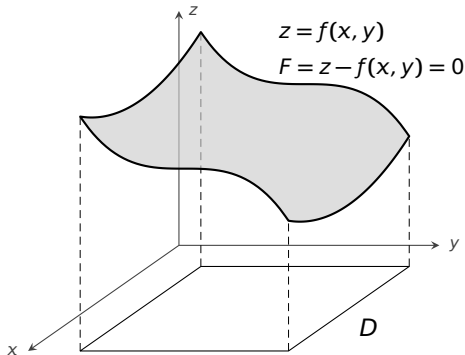
解 令 $F(x, y, z) = z - f(x, y)$ ，则该图形方程改写为 $F = 0$ 。计算

$$\nabla F = (-f_x, -f_y, 1), \quad |\nabla F| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$$

所以两个单位法向量场为

$$\frac{1}{|\nabla F|} \nabla F = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} (-f_x, -f_y, 1), \quad -\frac{1}{|\nabla F|} \nabla F =$$

例 写出二元函数 $z = f(x, y)$ 图形的两个单位法向量场，并指出哪一个指向上侧，哪个指向下侧？



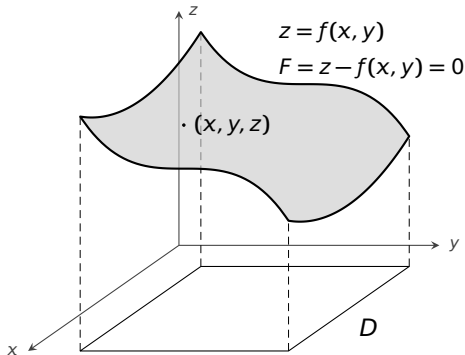
解 令 $F(x, y, z) = z - f(x, y)$ ，则该图形方程改写为 $F = 0$ 。计算

$$\nabla F = (-f_x, -f_y, 1), \quad |\nabla F| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$$

所以两个单位法向量场为

$$\frac{1}{|\nabla F|} \nabla F = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} (-f_x, -f_y, 1), \quad -\frac{1}{|\nabla F|} \nabla F = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} (f_x, f_y, -1)$$

例 写出二元函数 $z = f(x, y)$ 图形的两个单位法向量场，并指出哪一个指向上侧，哪个指向下侧？



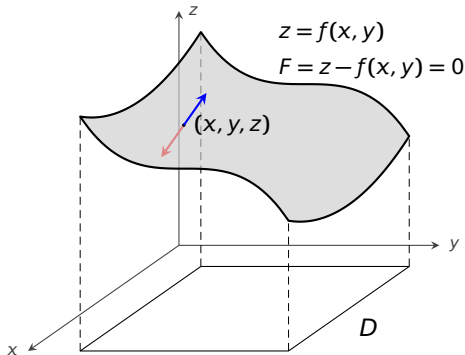
解 令 $F(x, y, z) = z - f(x, y)$ ，则该图形方程改写为 $F = 0$ 。计算

$$\nabla F = (-f_x, -f_y, 1), \quad |\nabla F| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$$

所以两个单位法向量场为

$$\frac{1}{|\nabla F|} \nabla F = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} (-f_x, -f_y, 1), \quad -\frac{1}{|\nabla F|} \nabla F = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} (f_x, f_y, -1)$$

例 写出二元函数 $z = f(x, y)$ 图形的两个单位法向量场，并指出哪一个指向上侧，哪个指向下侧？



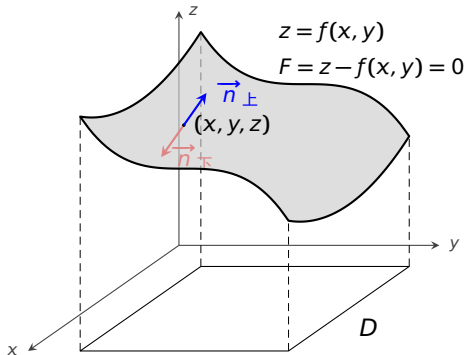
解 令 $F(x, y, z) = z - f(x, y)$ ，则该图形方程改写为 $F = 0$ 。计算

$$\nabla F = (-f_x, -f_y, 1), \quad |\nabla F| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$$

所以两个单位法向量场为

$$\frac{1}{|\nabla F|} \nabla F = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} (-f_x, -f_y, 1), \quad -\frac{1}{|\nabla F|} \nabla F = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} (f_x, f_y, -1)$$

例 写出二元函数 $z = f(x, y)$ 图形的两个单位法向量场，并指出哪一个指向上侧，哪个指向下侧？



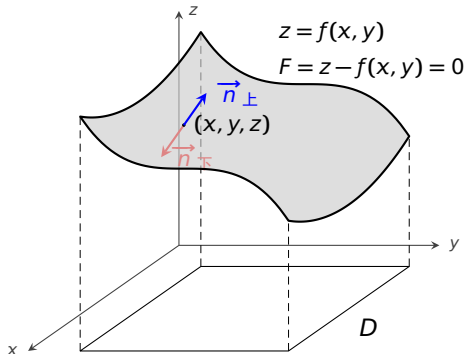
解 令 $F(x, y, z) = z - f(x, y)$ ，则该图形方程改写为 $F = 0$ 。计算

$$\nabla F = (-f_x, -f_y, 1), \quad |\nabla F| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$$

所以两个单位法向量场为

$$\frac{1}{|\nabla F|} \nabla F = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} (-f_x, -f_y, 1), \quad -\frac{1}{|\nabla F|} \nabla F = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} (f_x, f_y, -1)$$

例 写出二元函数 $z = f(x, y)$ 图形的两个单位法向量场，并指出哪一个指向上侧，哪个指向下侧？



解 令 $F(x, y, z) = z - f(x, y)$ ，则该图形方程改写为 $F = 0$ 。计算

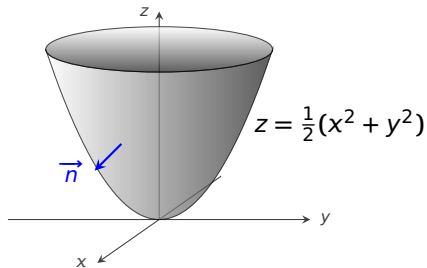
$$\nabla F = (-f_x, -f_y, 1), \quad |\nabla F| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$$

所以两个单位法向量场为

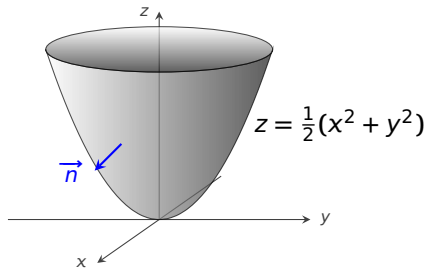
$$\frac{1}{|\nabla F|} \nabla F = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} (-f_x, -f_y, 1), \quad -\frac{1}{|\nabla F|} \nabla F = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} (f_x, f_y, -1)$$

前一个指向上侧，后一个指向下侧。

例 求抛物面 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$
指向外侧的单位法向量场。



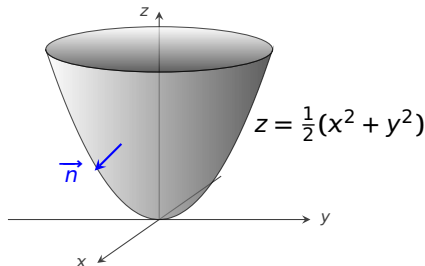
例 求抛物面 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 指向外侧的单位法向量场。



解 该单位法向量场应取为

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}(z_x, z_y, -1) =$$

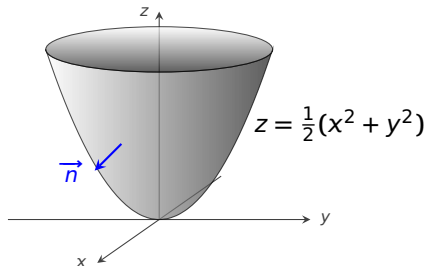
例 求抛物面 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 指向外侧的单位法向量场。



解 该单位法向量场应取为

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}(z_x, z_y, -1) = (x, y, -1)$$

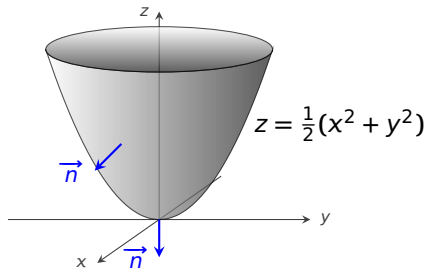
例 求抛物面 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 指向外侧的单位法向量场。



解 该单位法向量场应取为

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}(z_x, z_y, -1) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}(x, y, -1)$$

例 求抛物面 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 指向外侧的单位法向量场。



解 该单位法向量场应取为

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}(z_x, z_y, -1) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}(x, y, -1)$$

空间中向量场

设 $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ 是三元函数, 则

$$V = (P, Q, R)$$

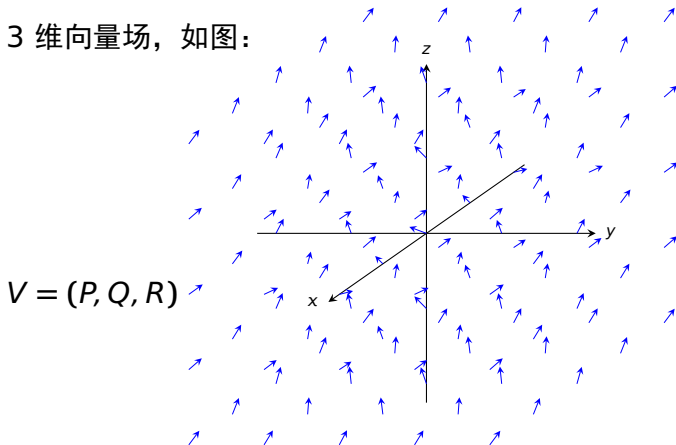
构成空间 3 维向量场,

空间中向量场

设 $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ 是三元函数, 则

$$V = (P, Q, R)$$

构成空间 3 维向量场, 如图:

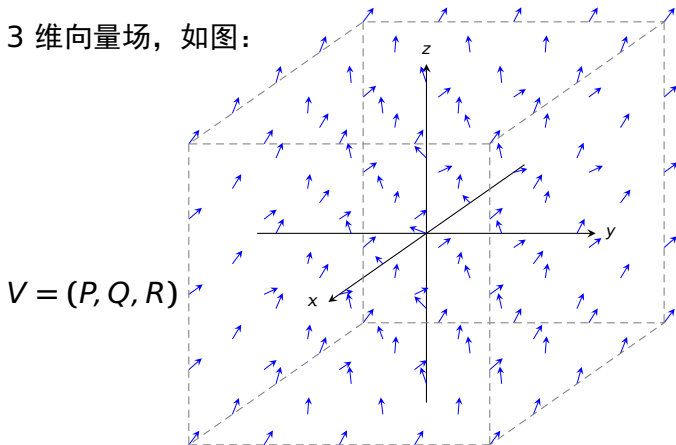


空间中向量场

设 $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ 是三元函数, 则

$$V = (P, Q, R)$$

构成空间 3 维向量场, 如图:

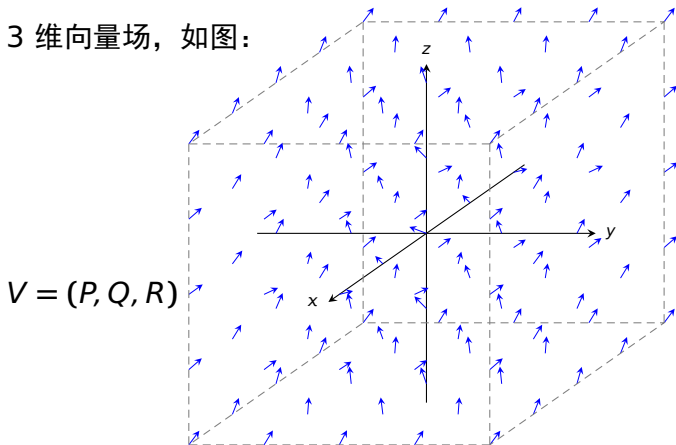


空间中向量场

设 $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ 是三元函数, 则

$$V = (P, Q, R)$$

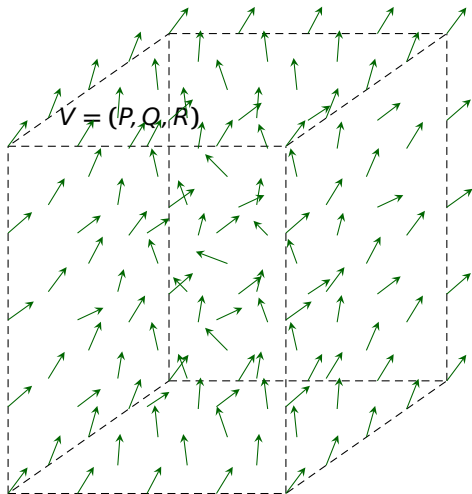
构成空间 3 维向量场, 如图:



物理应用: 向量场 $V = (P, Q, R)$ 可表示流体在任一点处的速度

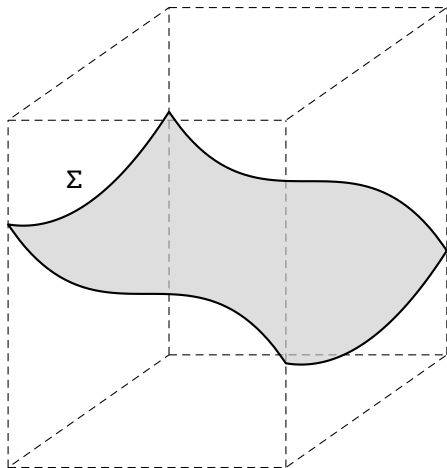
物理应用 流体 $V = (P, Q, R)$ 在单位时间内流过曲面 Σ 一侧（单位法向量 \vec{n} 所指向的一侧）的流量是：

$$\Phi =$$



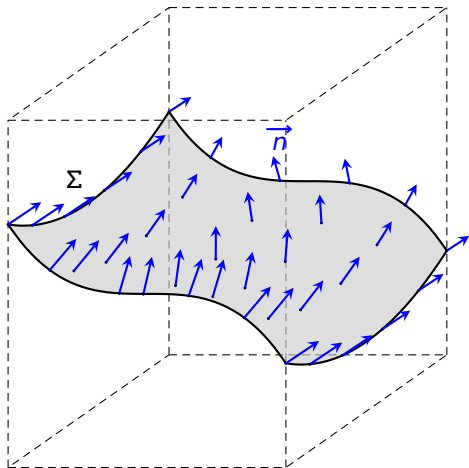
物理应用 流体 $V = (P, Q, R)$ 在单位时间内流过曲面 Σ 一侧（单位法向量 \vec{n} 所指向的一侧）的流量是：

$$\Phi =$$



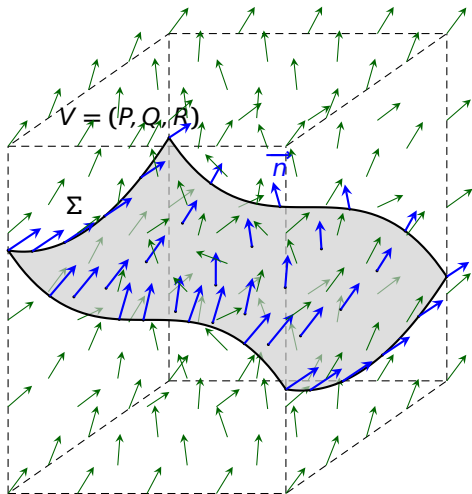
物理应用 流体 $V = (P, Q, R)$ 在单位时间内流过曲面 Σ 一侧（单位法向量 \vec{n} 所指向的一侧）的流量是：

$$\Phi =$$



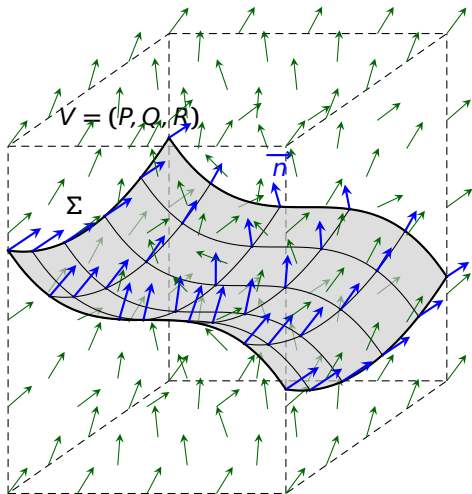
物理应用 流体 $V = (P, Q, R)$ 在单位时间内流过曲面 Σ 一侧（单位法向量 \vec{n} 所指向的一侧）的流量是：

$$\Phi =$$



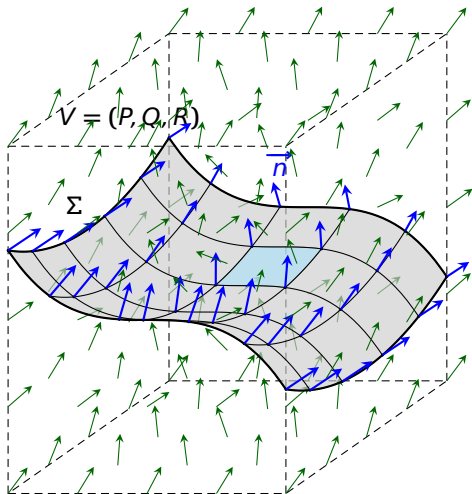
物理应用 流体 $V = (P, Q, R)$ 在单位时间内流过曲面 Σ 一侧（单位法向量 \vec{n} 所指向的一侧）的流量是：

$$\Phi =$$



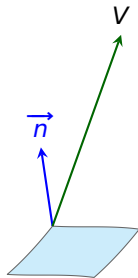
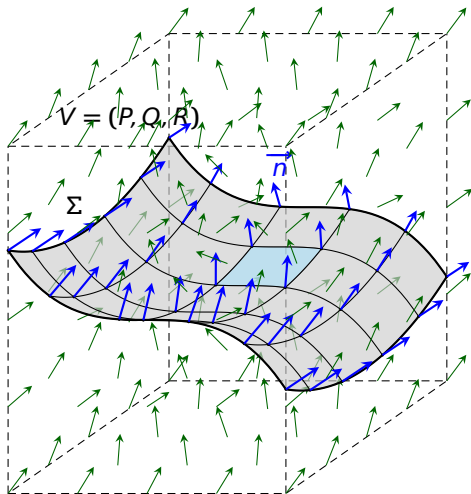
物理应用 流体 $V = (P, Q, R)$ 在单位时间内流过曲面 Σ 一侧（单位法向量 \vec{n} 所指向的一侧）的流量是：

$$\Phi =$$



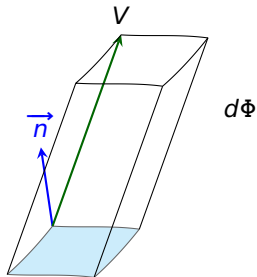
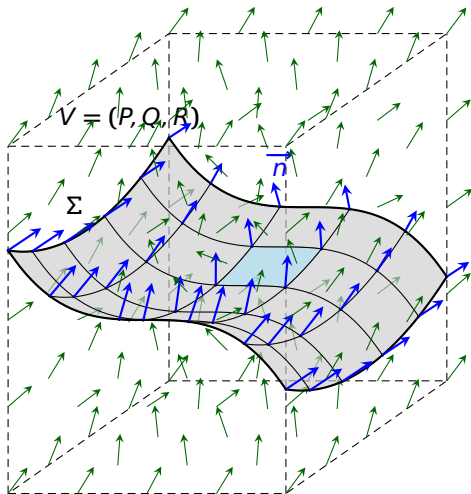
物理应用 流体 $V = (P, Q, R)$ 在单位时间内流过曲面 Σ 一侧（单位法向量 \vec{n} 所指向的一侧）的流量是：

$$\Phi =$$



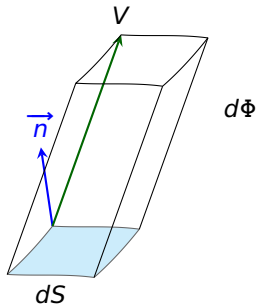
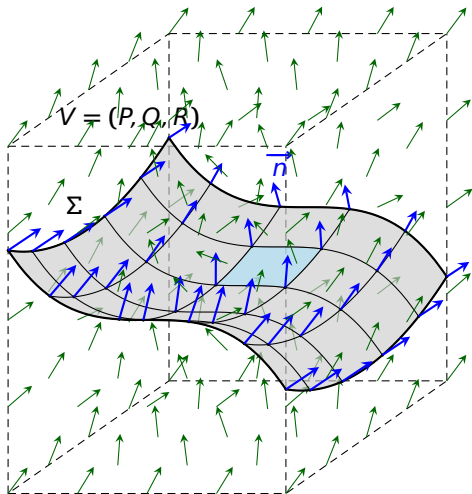
物理应用 流体 $V = (P, Q, R)$ 在单位时间内流过曲面 Σ 一侧（单位法向量 \vec{n} 所指向的一侧）的流量是：

$$\Phi =$$



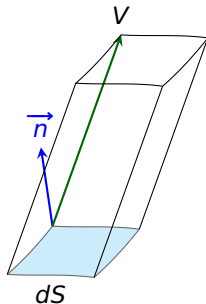
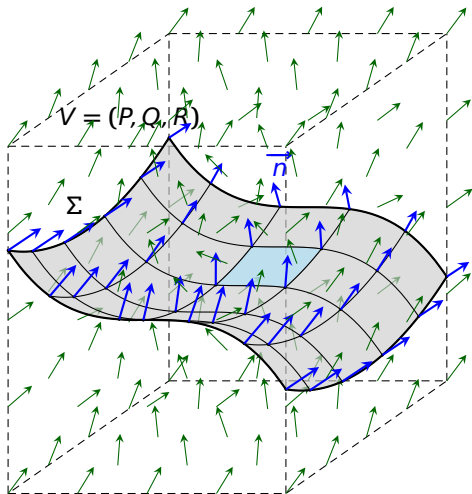
物理应用 流体 $V = (P, Q, R)$ 在单位时间内流过曲面 Σ 一侧（单位法向量 \vec{n} 所指向的一侧）的流量是：

$$\Phi =$$



物理应用 流体 $V = (P, Q, R)$ 在单位时间内流过曲面 Σ 一侧（单位法向量 \vec{n} 所指向的一侧）的流量是：

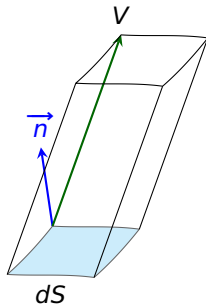
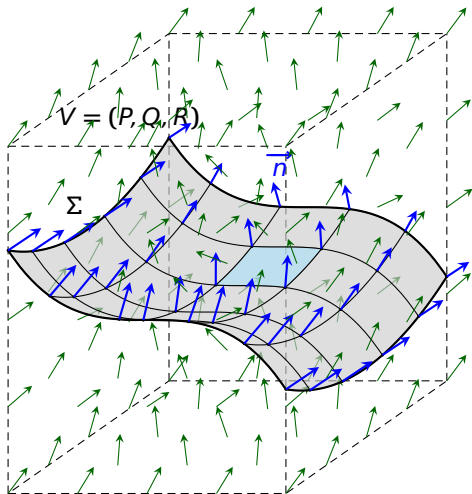
$$\Phi =$$



$$d\Phi = \text{高} \times dS$$

物理应用 流体 $V = (P, Q, R)$ 在单位时间内流过曲面 Σ 一侧（单位法向量 \vec{n} 所指向的一侧）的流量是：

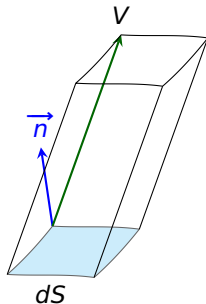
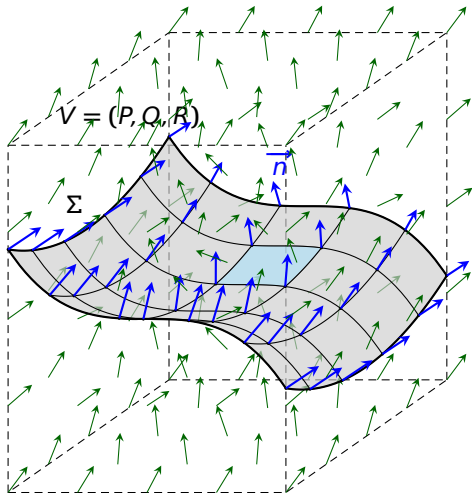
$$\Phi =$$



$$d\Phi = \text{高} \times dS \\ V \cdot \vec{n}$$

物理应用 流体 $V = (P, Q, R)$ 在单位时间内流过曲面 Σ 一侧（单位法向量 \vec{n} 所指向的一侧）的流量是：

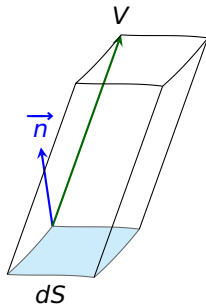
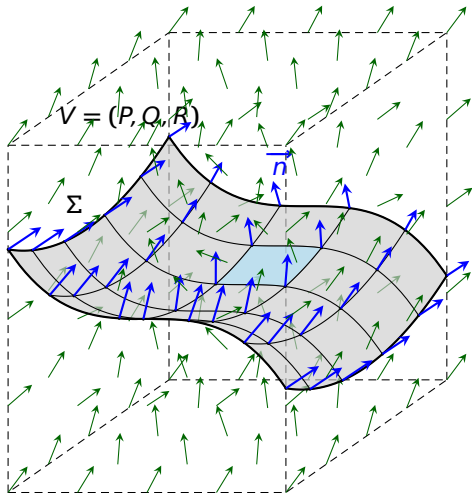
$$\Phi =$$



$$\begin{aligned} d\Phi &= \text{高} \times dS \\ &= V \cdot \vec{n} dS \end{aligned}$$

物理应用 流体 $V = (P, Q, R)$ 在单位时间内流过曲面 Σ 一侧（单位法向量 \vec{n} 所指向的一侧）的流量是：

$$\Phi = \iint_{\Sigma} V \cdot \vec{n} dS$$



$$\begin{aligned} d\Phi &= \text{高} \times dS \\ &= V \cdot \vec{n} dS \end{aligned}$$

向量场在定向曲面的曲面积分

定义 假设

- $V = (P, Q, R)$ 是空间某区域上的向量场;
 - Σ 是定向曲面, \vec{n} 是 Σ 上指定的单位法向量场;
- 则称

向量场在定向曲面的曲面积分

定义 假设

- $V = (P, Q, R)$ 是空间某区域上的向量场;
 - Σ 是定向曲面, \vec{n} 是 Σ 上指定的单位法向量场;
- 则称

$$\iint_{\Sigma} V \cdot \vec{n} dS$$

为向量场 V 在定向曲面 Σ 上的曲面积分。

向量场在定向曲面的曲面积分

定义 假设

- $V = (P, Q, R)$ 是空间某区域上的向量场;
- Σ 是定向曲面, \vec{n} 是 Σ 上指定的单位法向量场;

则称

$$\iint_{\Sigma} V \cdot \vec{n} dS$$

为向量场 V 在定向曲面 Σ 上的曲面积分。令 $d\vec{S} = \vec{n} dS$,

向量场在定向曲面的曲面积分

定义 假设

- $V = (P, Q, R)$ 是空间某区域上的向量场;
- Σ 是定向曲面, \vec{n} 是 Σ 上指定的单位法向量场;

则称

$$\iint_{\Sigma} V \cdot \vec{n} dS$$

为向量场 V 在定向曲面 Σ 上的曲面积分。令 $d\vec{S} = \vec{n} dS$, 则记作

$$\iint_{\Sigma} V \cdot d\vec{S}$$

向量场在定向曲面的曲面积分

定义 假设

- $V = (P, Q, R)$ 是空间某区域上的向量场;
 - Σ 是定向曲面, \vec{n} 是 Σ 上指定的单位法向量场;
- 则称

$$\iint_{\Sigma} V \cdot \vec{n} dS$$

为向量场 V 在定向曲面 Σ 上的曲面积分。令 $d\vec{S} = \vec{n} dS$, 则记作

$$\iint_{\Sigma} V \cdot d\vec{S}$$

也记作

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy$$

向量场在定向曲面的曲面积分

定义 假设

- $V = (P, Q, R)$ 是空间某区域上的向量场;
 - Σ 是定向曲面, \vec{n} 是 Σ 上指定的单位法向量场;
- 则称

$$\iint_{\Sigma} V \cdot \vec{n} dS$$

为向量场 V 在定向曲面 Σ 上的曲面积分。令 $d\vec{S} = \vec{n} dS$, 则记作

$$\iint_{\Sigma} V \cdot d\vec{S}$$

也记作

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

(此时也称为对坐标的曲面积分, 或第二类曲面积分)

性质 设 Σ 是定向曲面, Σ^- 表示与取 Σ 相反侧的有向曲面, 则

性质 设 Σ 是定向曲面, Σ^- 表示与取 Σ 相反侧的有向曲面, 则

$$\iint_{\Sigma^-} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = - \iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

性质 设 Σ 是定向曲面, Σ^- 表示与取 Σ 相反侧的有向曲面, 则

$$\iint_{\Sigma^-} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy = - \iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy$$

物理解释 流过负侧的流量 = - 流过正侧的流量

性质 设 Σ 是定向曲面, Σ^- 表示与取 Σ 相反侧的有向曲面, 则

$$\iint_{\Sigma^-} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy = - \iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy$$

物理解释 流过负侧的流量 = - 流过正侧的流量

证明 设 \vec{n} 是与 Σ 定向相符的单位法向量场,

性质 设 Σ 是定向曲面, Σ^- 表示与取 Σ 相反侧的有向曲面, 则

$$\iint_{\Sigma^-} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy = - \iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy$$

物理解释 流过负侧的流量 = - 流过正侧的流量

证明 设 \vec{n} 是与 Σ 定向相符的单位法向量场, 则 $-\vec{n}$ 是与 Σ^- 定向相符的单位法向量场。

性质 设 Σ 是定向曲面, Σ^- 表示与取 Σ 相反侧的有向曲面, 则

$$\iint_{\Sigma^-} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy = - \iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy$$

物理解释 流过负侧的流量 = - 流过正侧的流量

证明 设 \vec{n} 是与 Σ 定向相符的单位法向量场, 则 $-\vec{n}$ 是与 Σ^- 定向相符的单位法向量场。

令 $V = (P, Q, R)$ 。则

性质 设 Σ 是定向曲面, Σ^- 表示与取 Σ 相反侧的有向曲面, 则

$$\iint_{\Sigma^-} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy = - \iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy$$

物理解释 流过负侧的流量 = - 流过正侧的流量

证明 设 \vec{n} 是与 Σ 定向相符的单位法向量场, 则 $-\vec{n}$ 是与 Σ^- 定向相符的单位法向量场。

令 $V = (P, Q, R)$ 。则

$$\iint_{\Sigma^-} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy =$$

性质 设 Σ 是定向曲面, Σ^- 表示与取 Σ 相反侧的有向曲面, 则

$$\iint_{\Sigma^-} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy = - \iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy$$

物理解释 流过负侧的流量 = - 流过正侧的流量

证明 设 \vec{n} 是与 Σ 定向相符的单位法向量场, 则 $-\vec{n}$ 是与 Σ^- 定向相符的单位法向量场。

令 $V = (P, Q, R)$ 。则

$$\iint_{\Sigma^-} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy = \iint_{\Sigma} V \cdot (-\vec{n}) dS$$

性质 设 Σ 是定向曲面, Σ^- 表示与取 Σ 相反侧的有向曲面, 则

$$\iint_{\Sigma^-} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy = - \iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy$$

物理解释 流过负侧的流量 = - 流过正侧的流量

证明 设 \vec{n} 是与 Σ 定向相符的单位法向量场, 则 $-\vec{n}$ 是与 Σ^- 定向相符的单位法向量场。

令 $V = (P, Q, R)$ 。则

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma^-} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy &= \iint_{\Sigma} V \cdot (-\vec{n}) dS \\ &= - \iint_{\Sigma} V \cdot \vec{n} dS \end{aligned}$$

性质 设 Σ 是定向曲面, Σ^- 表示与取 Σ 相反侧的有向曲面, 则

$$\iint_{\Sigma^-} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy = - \iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy$$

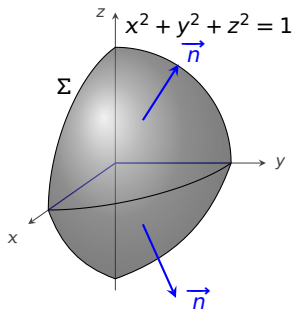
物理解释 流过负侧的流量 = - 流过正侧的流量

证明 设 \vec{n} 是与 Σ 定向相符的单位法向量场, 则 $-\vec{n}$ 是与 Σ^- 定向相符的单位法向量场。

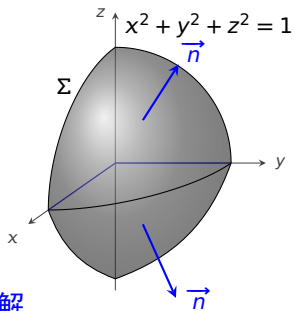
令 $V = (P, Q, R)$ 。则

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma^-} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy &= \iint_{\Sigma} V \cdot (-\vec{n}) dS \\ &= - \iint_{\Sigma} V \cdot \vec{n} dS \\ &= - \iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy\end{aligned}$$

例 计算 $\iint_{\Sigma} xyz dx dy$, 其中定向曲面 Σ 如图:



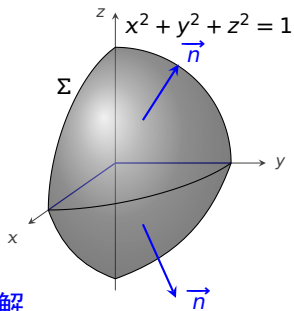
例 计算 $\iint_{\Sigma} xyz dx dy$, 其中定向曲面 Σ 如图:



解

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma} V \cdot \vec{n} dS$$

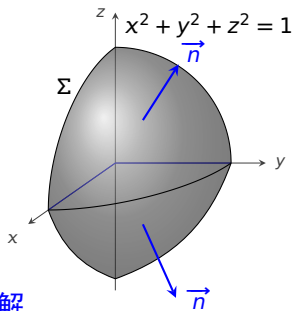
例 计算 $\iint_{\Sigma} xyz dx dy$, 其中定向曲面 Σ 如图:



解

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma} V \cdot \vec{n} dS \xlongequal{V=(0,0,xyz)}$$

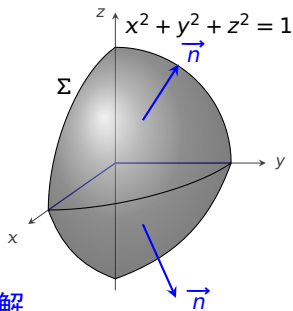
例 计算 $\iint_{\Sigma} xyz dx dy$, 其中定向曲面 Σ 如图:



解

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma} V \cdot \vec{n} dS \stackrel{\substack{V=(0,0,xyz) \\ \vec{n}=(x,y,z)}}{=}$$

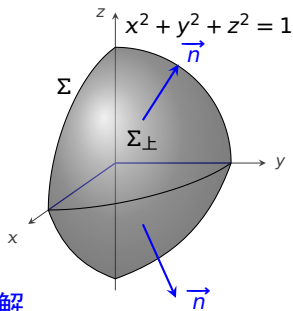
例 计算 $\iint_{\Sigma} xyz dx dy$, 其中定向曲面 Σ 如图:



解

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma} V \cdot \vec{n} dS \stackrel{\substack{V=(0,0,xyz) \\ \vec{n}=(x,y,z)}}{=} \iint_{\Sigma} xyz^2 dS$$

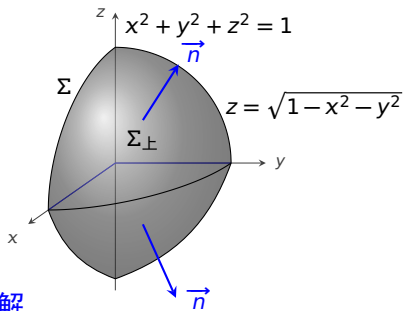
例 计算 $\iint_{\Sigma} xyz dx dy$, 其中定向曲面 Σ 如图:



解

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma} V \cdot \vec{n} dS \stackrel{\substack{V=(0,0,xyz) \\ \vec{n}=(x,y,z)}}{=} \iint_{\Sigma} xyz^2 dS = 2 \iint_{\Sigma_{\text{上}}} xyz^2 dS$$

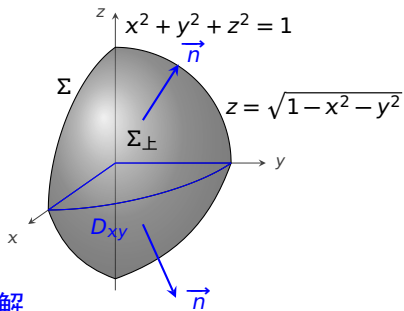
例 计算 $\iint_{\Sigma} xyz dx dy$, 其中定向曲面 Σ 如图:



解

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma} V \cdot \vec{n} dS \stackrel{\substack{V=(0,0,xyz) \\ \vec{n}=(x,y,z)}}{=} \iint_{\Sigma} xyz^2 dS = 2 \iint_{\Sigma_{\text{上}}} xyz^2 dS$$

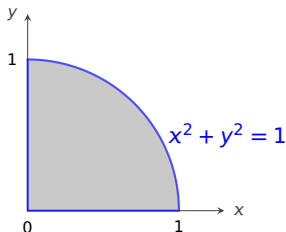
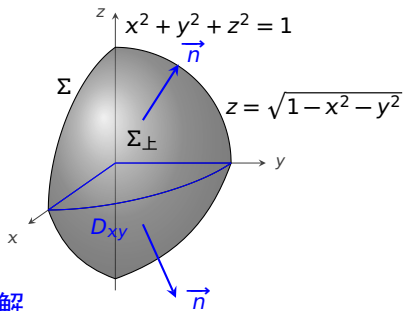
例 计算 $\iint_{\Sigma} xyz dx dy$, 其中定向曲面 Σ 如图:



解

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma} V \cdot \vec{n} dS \stackrel{\substack{V=(0,0,xyz) \\ \vec{n}=(x,y,z)}}{=} \iint_{\Sigma} xyz^2 dS = 2 \iint_{\Sigma_{\text{上}}} xyz^2 dS$$

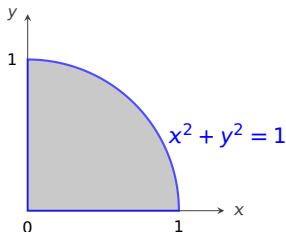
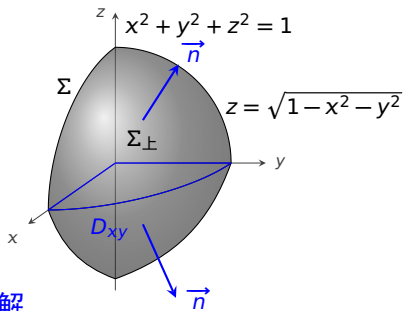
例 计算 $\iint_{\Sigma} xyz dx dy$, 其中定向曲面 Σ 如图:



解

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma} V \cdot \vec{n} dS \stackrel{\substack{V=(0,0,xyz) \\ \vec{n}=(x,y,z)}}{=} \iint_{\Sigma} xyz^2 dS = 2 \iint_{\Sigma_{\text{上}}} xyz^2 dS$$

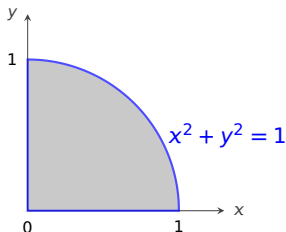
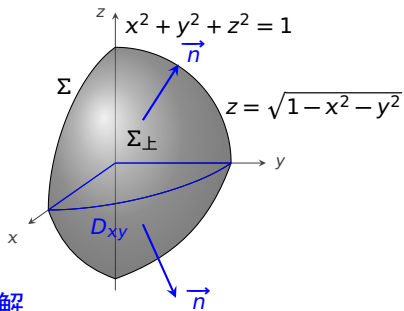
例 计算 $\iint_{\Sigma} xyz dx dy$, 其中定向曲面 Σ 如图:



解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iint_{\Sigma} V \cdot \vec{n} dS \stackrel{\substack{V=(0,0,xyz) \\ \vec{n}=(x,y,z)}}{=} \iint_{\Sigma} xyz^2 dS = 2 \iint_{\Sigma_{\text{上}}} xyz^2 dS \\ &\quad xy(1-x^2-y^2) \end{aligned}$$

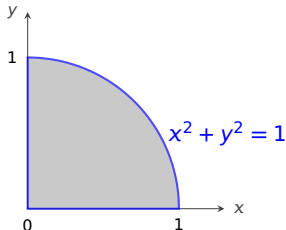
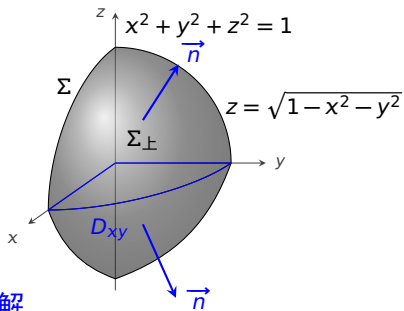
例 计算 $\iint_{\Sigma} xyz dx dy$, 其中定向曲面 Σ 如图:



解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iint_{\Sigma} V \cdot \vec{n} dS \stackrel{\substack{V=(0,0,xyz) \\ \vec{n}=(x,y,z)}}{=} \iint_{\Sigma} xyz^2 dS = 2 \iint_{\Sigma_{\text{上}}} xyz^2 dS \\ &\quad xy(1-x^2-y^2) \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy \end{aligned}$$

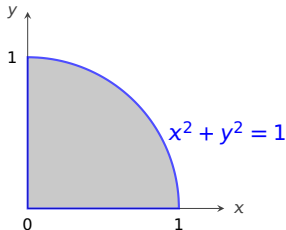
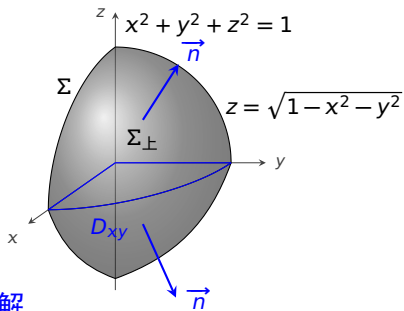
例 计算 $\iint_{\Sigma} xyz dx dy$, 其中定向曲面 Σ 如图:



解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iint_{\Sigma} V \cdot \vec{n} dS \stackrel{\substack{V=(0,0,xyz) \\ \vec{n}=(x,y,z)}}{=} \iint_{\Sigma} xyz^2 dS = 2 \iint_{\Sigma_{\text{上}}} xyz^2 dS \\
 &= \iint_{D_{xy}} xy(1-x^2-y^2) \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy
 \end{aligned}$$

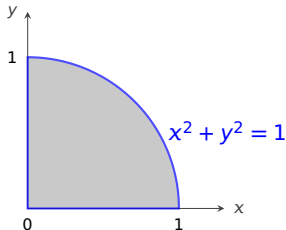
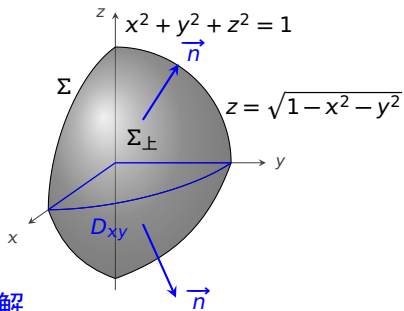
例 计算 $\iint_{\Sigma} xyz dx dy$, 其中定向曲面 Σ 如图:



解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iint_{\Sigma} V \cdot \vec{n} dS \stackrel{\substack{V=(0,0,xyz) \\ \vec{n}=(x,y,z)}}{=} \iint_{\Sigma} xyz^2 dS = 2 \iint_{\Sigma_{\text{上}}} xyz^2 dS \\
 &= \iint_{D_{xy}} xy(1-x^2-y^2) \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy \\
 &\quad \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy
 \end{aligned}$$

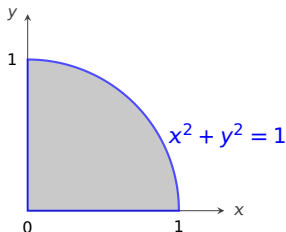
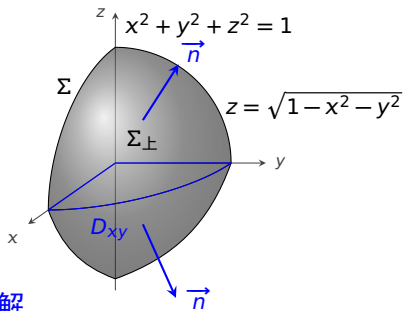
例 计算 $\iint_{\Sigma} xyz dx dy$, 其中定向曲面 Σ 如图:



解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iint_{\Sigma} V \cdot \vec{n} dS \stackrel{\substack{V=(0,0,xyz) \\ \vec{n}=(x,y,z)}}{=} \iint_{\Sigma} xyz^2 dS = 2 \iint_{\Sigma_{\text{上}}} xyz^2 dS \\ &= \iint_{D_{xy}} xy(1-x^2-y^2) \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy \\ &= 2 \iint_{D_{xy}} xy(1-x^2-y^2) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy \end{aligned}$$

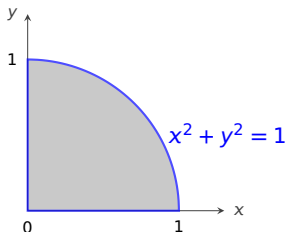
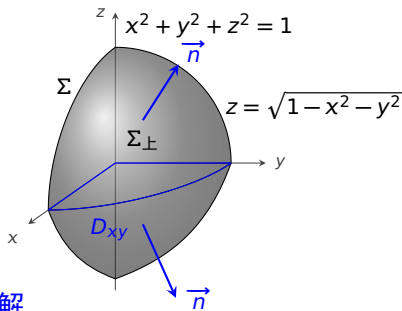
例 计算 $\iint_{\Sigma} xyz dx dy$, 其中定向曲面 Σ 如图:



解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iint_{\Sigma} \vec{V} \cdot \vec{n} dS \stackrel{\substack{V=(0,0,xyz) \\ \vec{n}=(x,y,z)}}{=} \iint_{\Sigma} xyz^2 dS = 2 \iint_{\Sigma_{\perp}} xyz^2 dS \\
 &= \iint_{D_{xy}} xy(1-x^2-y^2) \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy \\
 &= 2 \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy
 \end{aligned}$$

例 计算 $\iint_{\Sigma} xyz dx dy$, 其中定向曲面 Σ 如图:



解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iint_{\Sigma} V \cdot \vec{n} dS \stackrel{\substack{V=(0,0,xyz) \\ \vec{n}=(x,y,z)}}{=} \iint_{\Sigma} xyz^2 dS = 2 \iint_{\Sigma_+} xyz^2 dS \\
 &= \iint_{D_{xy}} xy(1-x^2-y^2) \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy \\
 &= 2 \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy \stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \iint_{\Sigma} V \cdot \vec{n} dS \stackrel{\substack{V=(0,0,xyz) \\ \vec{n}=(x,y,z)}}{=} \iint_{\Sigma} xyz^2 dS = 2 \iint_{\Sigma_{\perp}} xyz^2 dS \\
&= \iint_{D_{xy}} xy(1-x^2-y^2) \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy \\
&= 2 \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy \\
&\stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} 2 \iint_{D_{xy}} \rho^2 \sin \theta \cos \theta \cdot \sqrt{1-\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \iint_{\Sigma} V \cdot \vec{n} dS \stackrel{\substack{V=(0,0,xyz) \\ \vec{n}=(x,y,z)}}{=} \iint_{\Sigma} xyz^2 dS = 2 \iint_{\Sigma_{\perp}} xyz^2 dS \\
&= \iint_{D_{xy}} xy(1-x^2-y^2) \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy \\
&= 2 \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy \\
&\stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} 2 \iint_{D_{xy}} \rho^2 \sin \theta \cos \theta \cdot \sqrt{1-\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta \\
&= 2 \int \left[\int \sin \theta \cos \theta \rho^3 \sqrt{1-\rho^2} d\rho \right] d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \iint_{\Sigma} V \cdot \vec{n} dS \stackrel{\substack{V=(0,0,xyz) \\ \vec{n}=(x,y,z)}}{=} \iint_{\Sigma} xyz^2 dS = 2 \iint_{\Sigma_{\perp}} xyz^2 dS \\
&= \iint_{D_{xy}} xy(1-x^2-y^2) \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy \\
&= 2 \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy \\
&\stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} 2 \iint_{D_{xy}} \rho^2 \sin \theta \cos \theta \cdot \sqrt{1-\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta \\
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int \sin \theta \cos \theta \rho^3 \sqrt{1-\rho^2} d\rho \right] d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \iint_{\Sigma} V \cdot \vec{n} dS \stackrel{\substack{V=(0,0,xyz) \\ \vec{n}=(x,y,z)}}{=} \iint_{\Sigma} xyz^2 dS = 2 \iint_{\Sigma_{\perp}} xyz^2 dS \\
&= \iint_{D_{xy}} xy(1-x^2-y^2) \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy \\
&= 2 \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy \\
&\stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} 2 \iint_{D_{xy}} \rho^2 \sin \theta \cos \theta \cdot \sqrt{1-\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta \\
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^1 \sin \theta \cos \theta \rho^3 \sqrt{1-\rho^2} d\rho \right] d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \iint_{\Sigma} V \cdot \vec{n} dS \stackrel{\substack{V=(0,0,xyz) \\ \vec{n}=(x,y,z)}}{=} \iint_{\Sigma} xyz^2 dS = 2 \iint_{\Sigma_{\perp}} xyz^2 dS \\
&= \iint_{D_{xy}} xy(1-x^2-y^2) \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy \\
&= 2 \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy \\
&\stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} 2 \iint_{D_{xy}} \rho^2 \sin \theta \cos \theta \cdot \sqrt{1-\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta \\
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^1 \sin \theta \cos \theta \rho^3 \sqrt{1-\rho^2} d\rho \right] d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\theta) d\theta \cdot \int_0^1 \rho^2 \sqrt{1-\rho^2} \cdot \rho d\rho
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \iint_{\Sigma} V \cdot \vec{n} dS \stackrel{\substack{V=(0, 0, xyz) \\ \vec{n}=(x, y, z)}}{=} \iint_{\Sigma} xyz^2 dS = 2 \iint_{\Sigma_{\perp}} xyz^2 dS \\
&= \iint_{D_{xy}} xy(1-x^2-y^2) \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy \\
&= 2 \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy \\
&\stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} 2 \iint_{D_{xy}} \rho^2 \sin \theta \cos \theta \cdot \sqrt{1-\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta \\
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^1 \sin \theta \cos \theta \rho^3 \sqrt{1-\rho^2} d\rho \right] d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\theta) d\theta \cdot \int_0^1 \rho^2 \sqrt{1-\rho^2} \cdot \rho d\rho \\
&\stackrel{u=\sqrt{1-\rho^2}}{=}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \iint_{\Sigma} \mathbf{V} \cdot \vec{n} dS \stackrel{\substack{\mathbf{V}=(0, 0, xyz) \\ \vec{n}=(x, y, z)}}{=} \iint_{\Sigma} xyz^2 dS = 2 \iint_{\Sigma_{\perp}} xyz^2 dS \\
&= \iint_{D_{xy}} xy(1-x^2-y^2) \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy \\
&= 2 \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy \\
&\stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} 2 \iint_{D_{xy}} \rho^2 \sin \theta \cos \theta \cdot \sqrt{1-\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta \\
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^1 \sin \theta \cos \theta \rho^3 \sqrt{1-\rho^2} d\rho \right] d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\theta) d\theta \cdot \int_0^1 \rho^2 \sqrt{1-\rho^2} \cdot \rho d\rho \\
&\stackrel{u=\sqrt{1-\rho^2}}{=} \cdot (-udu)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \iint_{\Sigma} \mathbf{V} \cdot \vec{n} dS \stackrel{\substack{\mathbf{V}=(0, 0, xyz) \\ \vec{n}=(x, y, z)}}{=} \iint_{\Sigma} xyz^2 dS = 2 \iint_{\Sigma_{\perp}} xyz^2 dS \\
&= \iint_{D_{xy}} xy(1-x^2-y^2) \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy \\
&= 2 \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy \\
&\stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} 2 \iint_{D_{xy}} \rho^2 \sin \theta \cos \theta \cdot \sqrt{1-\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta \\
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^1 \sin \theta \cos \theta \rho^3 \sqrt{1-\rho^2} d\rho \right] d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\theta) d\theta \cdot \int_0^1 \rho^2 \sqrt{1-\rho^2} \cdot \rho d\rho \\
&\stackrel{u=\sqrt{1-\rho^2}}{=} (1-u^2)u \cdot (-udu)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \iint_{\Sigma} V \cdot \vec{n} dS \stackrel{\substack{V=(0, 0, xyz) \\ \vec{n}=(x, y, z)}}{=} \iint_{\Sigma} xyz^2 dS = 2 \iint_{\Sigma_{\perp}} xyz^2 dS \\
&= \iint_{D_{xy}} xy(1-x^2-y^2) \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy \\
&= 2 \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy \\
&\stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} 2 \iint_{D_{xy}} \rho^2 \sin \theta \cos \theta \cdot \sqrt{1-\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta \\
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^1 \sin \theta \cos \theta \rho^3 \sqrt{1-\rho^2} d\rho \right] d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\theta) d\theta \cdot \int_0^1 \rho^2 \sqrt{1-\rho^2} \cdot \rho d\rho \\
&\stackrel{u=\sqrt{1-\rho^2}}{=} \int_1^0 (1-u^2)u \cdot (-udu)
\end{aligned}$$

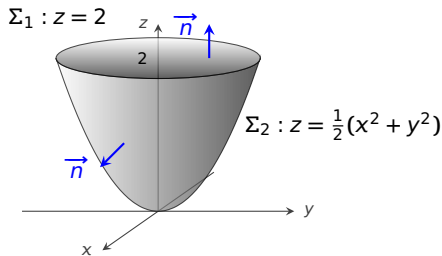
$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \iint_{\Sigma} \mathbf{V} \cdot \vec{n} dS \stackrel{\substack{\mathbf{V}=(0, 0, xyz) \\ \vec{n}=(x, y, z)}}{=} \iint_{\Sigma} xyz^2 dS = 2 \iint_{\Sigma_{\perp}} xyz^2 dS \\
&= \iint_{D_{xy}} xy(1-x^2-y^2) \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy \\
&= 2 \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy \\
&\stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} 2 \iint_{D_{xy}} \rho^2 \sin \theta \cos \theta \cdot \sqrt{1-\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta \\
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^1 \sin \theta \cos \theta \rho^3 \sqrt{1-\rho^2} d\rho \right] d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\theta) d\theta \cdot \int_0^1 \rho^2 \sqrt{1-\rho^2} \cdot \rho d\rho \\
&\stackrel{u=\sqrt{1-\rho^2}}{=} 1 \cdot \int_1^0 (1-u^2)u \cdot (-udu)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \iint_{\Sigma} V \cdot \vec{n} dS \stackrel{\substack{V=(0,0,xyz) \\ \vec{n}=(x,y,z)}}{=} \iint_{\Sigma} xyz^2 dS = 2 \iint_{\Sigma_{\perp}} xyz^2 dS \\
&= \iint_{D_{xy}} xy(1-x^2-y^2) \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy \\
&= 2 \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy \\
&\stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} 2 \iint_{D_{xy}} \rho^2 \sin \theta \cos \theta \cdot \sqrt{1-\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta \\
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^1 \sin \theta \cos \theta \rho^3 \sqrt{1-\rho^2} d\rho \right] d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\theta) d\theta \cdot \int_0^1 \rho^2 \sqrt{1-\rho^2} \cdot \rho d\rho \\
&\stackrel{u=\sqrt{1-\rho^2}}{=} 1 \cdot \int_1^0 (1-u^2)u \cdot (-u du) = \frac{2}{15}
\end{aligned}$$

例 计算

$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dydz - z dx dy$$

其中定向曲面 $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ 是三维区域的边界，如图：



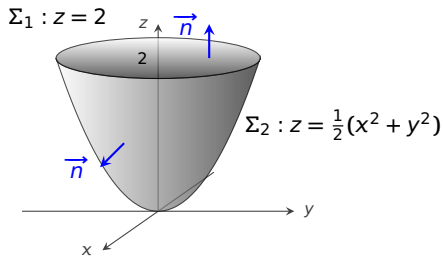
例 计算

$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz - z dx dy$$

其中定向曲面 $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ 是三维区域的边界，如图：

解

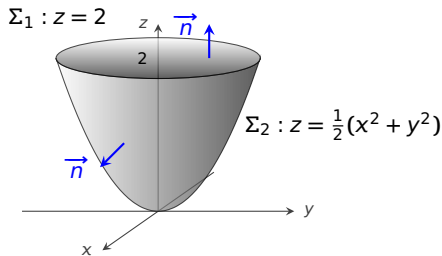
$$\text{原式} = \iint_{\Sigma} \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$



例 计算

$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz - z dx dy$$

其中定向曲面 $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ 是三维区域的边界，如图：



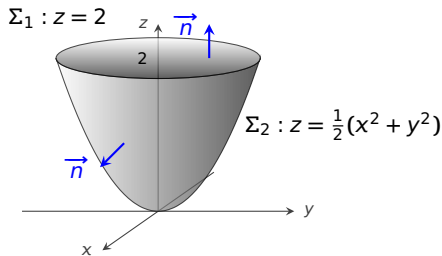
解

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma} \boldsymbol{v} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\Sigma_1} \boldsymbol{v} \cdot \vec{n} dS + \iint_{\Sigma_2} \boldsymbol{v} \cdot \vec{n} dS,$$

例 计算

$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz - z dx dy$$

其中定向曲面 $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ 是三维区域的边界, 如图:



解

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\Sigma_1} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS + \iint_{\Sigma_2} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS,$$

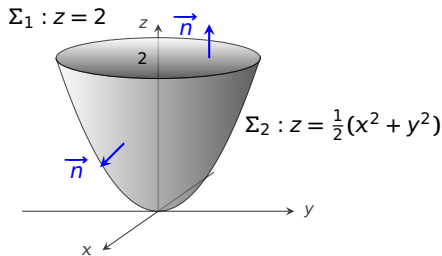
$$\iint_{\Sigma_1} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS$$

$$\iint_{\Sigma_2} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS$$

例 计算

$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz - z dx dy$$

其中定向曲面 $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ 是三维区域的边界, 如图:



解

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\Sigma_1} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS + \iint_{\Sigma_2} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS,$$

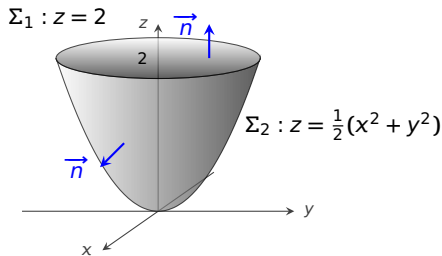
$$\iint_{\Sigma_1} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS \underline{\underline{V=(z^2+x, 0, -z)}}$$

$$\iint_{\Sigma_2} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS \underline{\underline{V=(z^2+x, 0, -z)}}$$

例 计算

$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz - z dx dy$$

其中定向曲面 $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ 是三维区域的边界，如图：



解

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma} \mathbf{V} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\Sigma_1} \mathbf{V} \cdot \vec{n} dS + \iint_{\Sigma_2} \mathbf{V} \cdot \vec{n} dS,$$

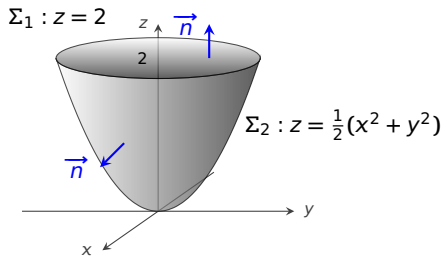
$$\iint_{\Sigma_1} \mathbf{V} \cdot \vec{n} dS \underline{\underline{\begin{matrix} \mathbf{V} = (z^2 + x, 0, -z) \\ \vec{n} = (0, 0, 1) \end{matrix}}}}$$

$$\iint_{\Sigma_2} \mathbf{V} \cdot \vec{n} dS \underline{\underline{\begin{matrix} \mathbf{V} = (z^2 + x, 0, -z) \end{matrix}}}}$$

例 计算

$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dydz - z dx dy$$

其中定向曲面 $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ 是三维区域的边界，如图：



解

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\Sigma_1} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS + \iint_{\Sigma_2} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS,$$

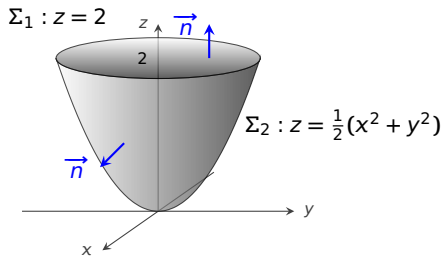
$$\iint_{\Sigma_1} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS \stackrel{\mathbf{v}=(z^2+x, 0, -z)}{\stackrel{\vec{n}=(0, 0, 1)}}{\iint_{\Sigma_1} -z dS}}$$

$$\iint_{\Sigma_2} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS \stackrel{\mathbf{v}=(z^2+x, 0, -z)}{\stackrel{\vec{n}=(0, 0, 1)}}{\iint_{\Sigma_2} -z dS}}$$

例 计算

$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dydz - z dx dy$$

其中定向曲面 $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ 是三维区域的边界，如图：



解

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma} \mathbf{V} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\Sigma_1} \mathbf{V} \cdot \vec{n} dS + \iint_{\Sigma_2} \mathbf{V} \cdot \vec{n} dS,$$

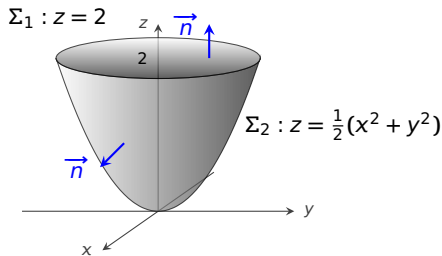
$$\iint_{\Sigma_1} \mathbf{V} \cdot \vec{n} dS \stackrel{\mathbf{V}=(z^2+x, 0, -z)}{\stackrel{\vec{n}=(0, 0, 1)}}{\iint_{\Sigma_1} -z dS}} = \iint_{\Sigma_1} -2 dS$$

$$\iint_{\Sigma_2} \mathbf{V} \cdot \vec{n} dS \stackrel{\mathbf{V}=(z^2+x, 0, -z)}{\iint_{\Sigma_2}}$$

例 计算

$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dydz - z dx dy$$

其中定向曲面 $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ 是三维区域的边界，如图：



解

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma} \mathbf{V} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\Sigma_1} \mathbf{V} \cdot \vec{n} dS + \iint_{\Sigma_2} \mathbf{V} \cdot \vec{n} dS,$$

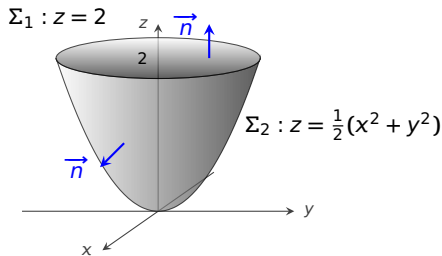
$$\iint_{\Sigma_1} \mathbf{V} \cdot \vec{n} dS \stackrel{\substack{\mathbf{V}=(z^2+x, 0, -z) \\ \vec{n}=(0, 0, 1)}}}{=} \iint_{\Sigma_1} -z dS = \iint_{\Sigma_1} -2 dS = -2|\Sigma_1|$$

$$\iint_{\Sigma_2} \mathbf{V} \cdot \vec{n} dS \stackrel{\mathbf{V}=(z^2+x, 0, -z)}{=}$$

例 计算

$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz - z dx dy$$

其中定向曲面 $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ 是三维区域的边界, 如图:



解

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma} \mathbf{V} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\Sigma_1} \mathbf{V} \cdot \vec{n} dS + \iint_{\Sigma_2} \mathbf{V} \cdot \vec{n} dS,$$

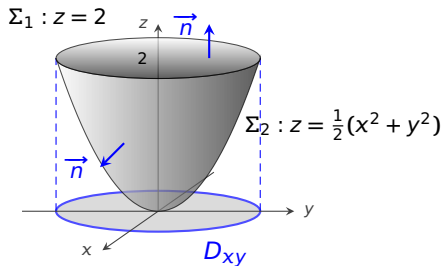
$$\iint_{\Sigma_1} \mathbf{V} \cdot \vec{n} dS \stackrel{\substack{\mathbf{V}=(z^2+x, 0, -z) \\ \vec{n}=(0, 0, 1)}}}{=} \iint_{\Sigma_1} -z dS = \iint_{\Sigma_1} -2 dS = -2|\Sigma_1| = -8\pi,$$

$$\iint_{\Sigma_2} \mathbf{V} \cdot \vec{n} dS \stackrel{\mathbf{V}=(z^2+x, 0, -z)}{=}$$

例 计算

$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz - z dx dy$$

其中定向曲面 $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ 是三维区域的边界, 如图:



解

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma} \mathbf{V} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\Sigma_1} \mathbf{V} \cdot \vec{n} dS + \iint_{\Sigma_2} \mathbf{V} \cdot \vec{n} dS,$$

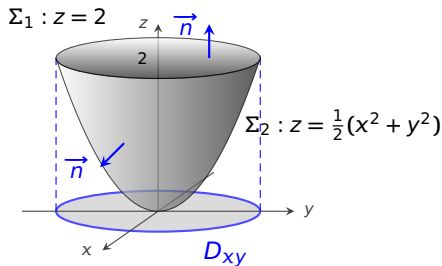
$$\iint_{\Sigma_1} \mathbf{V} \cdot \vec{n} dS \stackrel{\substack{\mathbf{V}=(z^2+x, 0, -z) \\ \vec{n}=(0, 0, 1)}}}{=} \iint_{\Sigma_1} -z dS = \iint_{\Sigma_1} -2 dS = -2|\Sigma_1| = -8\pi,$$

$$\iint_{\Sigma_2} \mathbf{V} \cdot \vec{n} dS \stackrel{\mathbf{V}=(z^2+x, 0, -z)}{=}$$

例 计算

$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz - z dx dy$$

其中定向曲面 $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ 是三维区域的边界, 如图:



解

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma} \mathbf{V} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\Sigma_1} \mathbf{V} \cdot \vec{n} dS + \iint_{\Sigma_2} \mathbf{V} \cdot \vec{n} dS,$$

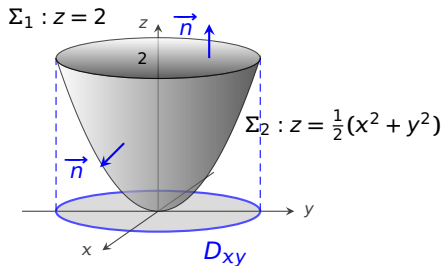
$$\iint_{\Sigma_1} \mathbf{V} \cdot \vec{n} dS \stackrel{\mathbf{V}=(z^2+x, 0, -z)}{\stackrel{\vec{n}=(0, 0, 1)}}{\iint_{\Sigma_1} -z dS}} = \iint_{\Sigma_1} -2 dS = -2|\Sigma_1| = -8\pi,$$

$$\iint_{\Sigma_2} \mathbf{V} \cdot \vec{n} dS \stackrel{\mathbf{V}=(z^2+x, 0, -z)}{\stackrel{\vec{n}=\frac{(x, y, -1)}{\sqrt{1+x^2+y^2}}}}{\iint_{\Sigma_2} \frac{-z}{\sqrt{1+x^2+y^2}} dS}}$$

例 计算

$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz - z dx dy$$

其中定向曲面 $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ 是三维区域的边界, 如图:



解

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\Sigma_1} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS + \iint_{\Sigma_2} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS,$$

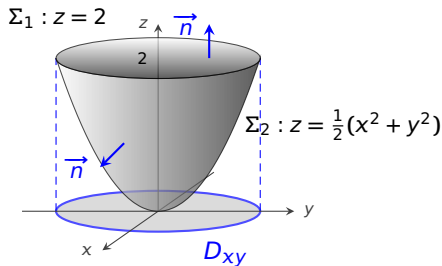
$$\iint_{\Sigma_1} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS \stackrel{\substack{\mathbf{v}=(z^2+x, 0, -z) \\ \vec{n}=(0, 0, 1)}}}{=} \iint_{\Sigma_1} -z dS = \iint_{\Sigma_1} -2 dS = -2|\Sigma_1| = -8\pi,$$

$$\iint_{\Sigma_2} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS \stackrel{\substack{\mathbf{v}=(z^2+x, 0, -z) \\ \vec{n}=\frac{(x, y, -1)}{\sqrt{1+x^2+y^2}}}}{=} \frac{(z^2+x)x + z}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$$

例 计算

$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz - z dx dy$$

其中定向曲面 $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ 是三维区域的边界, 如图:



解

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\Sigma_1} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS + \iint_{\Sigma_2} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS,$$

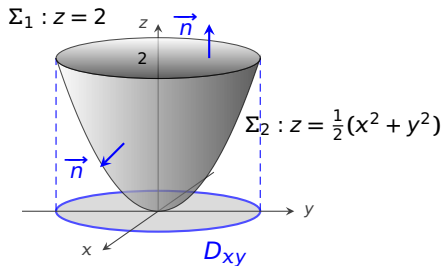
$$\iint_{\Sigma_1} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS \stackrel{\substack{\mathbf{v}=(z^2+x, 0, -z) \\ \vec{n}=(0, 0, 1)}}}{=} \iint_{\Sigma_1} -z dS = \iint_{\Sigma_1} -2 dS = -2|\Sigma_1| = -8\pi,$$

$$\iint_{\Sigma_2} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS \stackrel{\substack{\mathbf{v}=(z^2+x, 0, -z) \\ \vec{n}=\frac{(x, y, -1)}{\sqrt{1+x^2+y^2}}}}{=} \frac{(z^2+x)x + z}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy$$

例 计算

$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz - z dx dy$$

其中定向曲面 $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ 是三维区域的边界, 如图:



解

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\Sigma_1} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS + \iint_{\Sigma_2} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS,$$

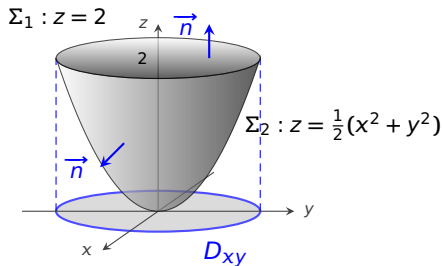
$$\iint_{\Sigma_1} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS \stackrel{\substack{\mathbf{v}=(z^2+x, 0, -z) \\ \vec{n}=(0, 0, 1)}}}{=} \iint_{\Sigma_1} -z dS = \iint_{\Sigma_1} -2 dS = -2|\Sigma_1| = -8\pi,$$

$$\iint_{\Sigma_2} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS \stackrel{\substack{\mathbf{v}=(z^2+x, 0, -z) \\ \vec{n}=\frac{(x, y, -1)}{\sqrt{1+x^2+y^2}}}}{=} \iint_{D_{xy}} \frac{(z^2+x)x + z}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dxdy$$

例 计算

$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dydz - z dx dy$$

其中定向曲面 $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ 是三维区域的边界, 如图:



解

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\Sigma_1} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS + \iint_{\Sigma_2} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS,$$

$$\iint_{\Sigma_1} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS \stackrel{\substack{\mathbf{v}=(z^2+x, 0, -z) \\ \vec{n}=(0, 0, 1)}}}{=} \iint_{\Sigma_1} -z dS = \iint_{\Sigma_1} -2 dS = -2|\Sigma_1| = -8\pi,$$

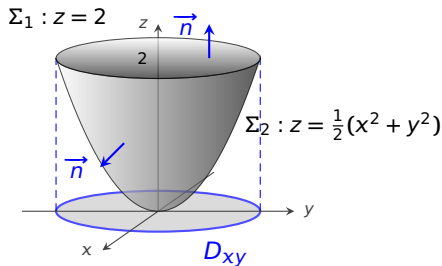
$$\iint_{\Sigma_2} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS \stackrel{\substack{\mathbf{v}=(z^2+x, 0, -z) \\ \vec{n}=\frac{(x, y, -1)}{\sqrt{1+x^2+y^2}}}}{=} \iint_{D_{xy}} \frac{(z^2+x)x + z}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy$$

$$= \iint_{D_{xy}} (z^2+x)x + z dx dy$$

例 计算

$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dydz - z dx dy$$

其中定向曲面 $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ 是三维区域的边界, 如图:



解

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\Sigma_1} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS + \iint_{\Sigma_2} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS,$$

$$\iint_{\Sigma_1} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS \stackrel{\substack{\mathbf{v}=(z^2+x, 0, -z) \\ \vec{n}=(0, 0, 1)}}}{=} \iint_{\Sigma_1} -z dS = \iint_{\Sigma_1} -2 dS = -2|\Sigma_1| = -8\pi,$$

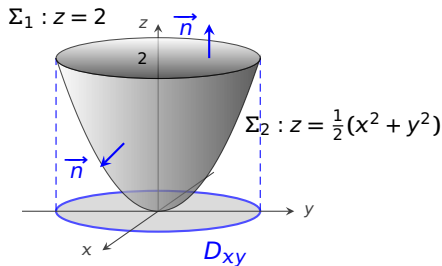
$$\iint_{\Sigma_2} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS \stackrel{\substack{\mathbf{v}=(z^2+x, 0, -z) \\ \vec{n}=\frac{(x, y, -1)}{\sqrt{1+x^2+y^2}}}}{=} \iint_{D_{xy}} \frac{(z^2+x)x + z}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy$$

$$= \iint_{D_{xy}} (z^2+x)x + z dx dy \stackrel{\text{对称性}}{=} \iint_{D_{xy}} x^2 + z dx dy$$

例 计算

$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz - z dx dy$$

其中定向曲面 $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ 是三维区域的边界, 如图:



解

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\Sigma_1} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS + \iint_{\Sigma_2} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS,$$

$$\iint_{\Sigma_1} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS \stackrel{\substack{\mathbf{v}=(z^2+x, 0, -z) \\ \vec{n}=(0, 0, 1)}}}{=} \iint_{\Sigma_1} -z dS = \iint_{\Sigma_1} -2 dS = -2|\Sigma_1| = -8\pi,$$

$$\iint_{\Sigma_2} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS \stackrel{\substack{\mathbf{v}=(z^2+x, 0, -z) \\ \vec{n}=\frac{(x, y, -1)}{\sqrt{1+x^2+y^2}}}}{=} \iint_{D_{xy}} \frac{(z^2+x)x + z}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy$$

$$= \iint_{D_{xy}} (z^2+x)x + z dx dy \stackrel{\text{对称性}}{=} \iint_{D_{xy}} x^2 + z dx dy = \dots$$

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\Sigma_1} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS + \iint_{\Sigma_2} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS,$$

$$\iint_{\Sigma_1} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS \stackrel{\substack{V=(z^2+x, 0, -z) \\ \vec{n}=(0, 0, 1)}}{=} \iint_{\Sigma_1} -z dS \int_{\Sigma_1} -2 dS = -2|\Sigma_1| = -8\pi,$$

$$\iint_{\Sigma_2} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS \stackrel{\substack{V=(z^2+x, 0, -z) \\ \vec{n}=\frac{(x, y, -1)}{\sqrt{1+x^2+y^2}}}}{=} \iint_{D_{xy}} \frac{(z^2+x)x+z}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy$$

$$= \iint_{D_{xy}} (z^2+x)x+z dx dy \stackrel{\text{对称性}}{=} \iint_{D_{xy}} x^2+z dx dy$$

$$\stackrel{z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{=} \frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} 3x^2+y^2 dx dy$$

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\Sigma_1} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS + \iint_{\Sigma_2} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS,$$

$$\iint_{\Sigma_1} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS \stackrel{\substack{V=(z^2+x, 0, -z) \\ \vec{n}=(0, 0, 1)}}{=} \iint_{\Sigma_1} -z dS \int_{\Sigma_1} -2 dS = -2|\Sigma_1| = -8\pi,$$

$$\iint_{\Sigma_2} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS \stackrel{\substack{V=(z^2+x, 0, -z) \\ \vec{n}=\frac{(x, y, -1)}{\sqrt{1+x^2+y^2}}}}{=} \iint_{D_{xy}} \frac{(z^2+x)x+z}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy$$

$$= \iint_{D_{xy}} (z^2+x)x+z dx dy \stackrel{\text{对称性}}{=} \iint_{D_{xy}} x^2+z dx dy$$

$$\stackrel{z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{=} \frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} 3x^2+y^2 dx dy \stackrel{\text{对称性}}{=} 2 \iint_{D_{xy}} x^2 dx dy$$

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\Sigma_1} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS + \iint_{\Sigma_2} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS,$$

$$\iint_{\Sigma_1} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS \stackrel{\substack{V=(z^2+x, 0, -z) \\ \vec{n}=(0, 0, 1)}}{=} \iint_{\Sigma_1} -z dS \iint_{\Sigma_1} -2 dS = -2|\Sigma_1| = -8\pi,$$

$$\iint_{\Sigma_2} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS \stackrel{\substack{V=(z^2+x, 0, -z) \\ \vec{n}=\frac{(x, y, -1)}{\sqrt{1+x^2+y^2}}}}{=} \iint_{D_{xy}} \frac{(z^2+x)x+z}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy$$

$$= \iint_{D_{xy}} (z^2+x)x+z dx dy \stackrel{\text{对称性}}{=} \iint_{D_{xy}} x^2+z dx dy$$

$$\stackrel{z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{=} \frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} 3x^2+y^2 dx dy \stackrel{\text{对称性}}{=} 2 \iint_{D_{xy}} x^2 dx dy$$

$$\stackrel{\text{对称性}}{=} \iint_{D_{xy}} x^2+y^2 dx dy$$

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\Sigma_1} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS + \iint_{\Sigma_2} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS,$$

$$\iint_{\Sigma_1} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS \stackrel{\substack{V=(z^2+x, 0, -z) \\ \vec{n}=(0, 0, 1)}}{=} \iint_{\Sigma_1} -z dS \iint_{\Sigma_1} -2 dS = -2|\Sigma_1| = -8\pi,$$

$$\iint_{\Sigma_2} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS \stackrel{\substack{V=(z^2+x, 0, -z) \\ \vec{n}=\frac{(x, y, -1)}{\sqrt{1+x^2+y^2}}}}{=} \iint_{D_{xy}} \frac{(z^2+x)x+z}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy$$

$$= \iint_{D_{xy}} (z^2+x)x+z dx dy \stackrel{\text{对称性}}{=} \iint_{D_{xy}} x^2+z dx dy$$

$$\stackrel{z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{=} \frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} 3x^2+y^2 dx dy \stackrel{\text{对称性}}{=} 2 \iint_{D_{xy}} x^2 dx dy$$

$$\stackrel{\text{对称性}}{=} \iint_{D_{xy}} x^2+y^2 dx dy = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^2 \rho^2 \cdot \rho d\rho \right] d\theta$$

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\Sigma_1} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS + \iint_{\Sigma_2} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS,$$

$$\iint_{\Sigma_1} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS \stackrel{\substack{V=(z^2+x, 0, -z) \\ \vec{n}=(0, 0, 1)}}{=} \iint_{\Sigma_1} -z dS \iint_{\Sigma_1} -2 dS = -2|\Sigma_1| = -8\pi,$$

$$\iint_{\Sigma_2} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS \stackrel{\substack{V=(z^2+x, 0, -z) \\ \vec{n}=\frac{(x, y, -1)}{\sqrt{1+x^2+y^2}}}}{=} \iint_{D_{xy}} \frac{(z^2+x)x+z}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy$$

$$= \iint_{D_{xy}} (z^2+x)x+z dx dy \stackrel{\text{对称性}}{=} \iint_{D_{xy}} x^2+z dx dy$$

$$\stackrel{z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{=} \frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} 3x^2+y^2 dx dy \stackrel{\text{对称性}}{=} 2 \iint_{D_{xy}} x^2 dx dy$$

$$\stackrel{\text{对称性}}{=} \iint_{D_{xy}} x^2+y^2 dx dy = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^2 \rho^2 \cdot \rho d\rho \right] d\theta = 8\pi$$

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\Sigma_1} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS + \iint_{\Sigma_2} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS,$$

$$\iint_{\Sigma_1} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS \stackrel{\substack{V=(z^2+x, 0, -z) \\ \vec{n}=(0, 0, 1)}}{=} \iint_{\Sigma_1} -z dS \iint_{\Sigma_1} -2 dS = -2|\Sigma_1| = -8\pi,$$

$$\iint_{\Sigma_2} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS \stackrel{\substack{V=(z^2+x, 0, -z) \\ \vec{n}=\frac{(x, y, -1)}{\sqrt{1+x^2+y^2}}}}{=} \iint_{D_{xy}} \frac{(z^2+x)x+z}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy$$

$$= \iint_{D_{xy}} (z^2+x)x+z dx dy \stackrel{\text{对称性}}{=} \iint_{D_{xy}} x^2+z dx dy$$

$$\stackrel{z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{=} \frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} 3x^2+y^2 dx dy \stackrel{\text{对称性}}{=} 2 \iint_{D_{xy}} x^2 dx dy$$

$$\stackrel{\text{对称性}}{=} \iint_{D_{xy}} x^2+y^2 dx dy = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^2 \rho^2 \cdot \rho d\rho \right] d\theta = 8\pi$$

$$\therefore \text{原式} = -8\pi + 8\pi = 0$$

例 设 Σ 是二元函数 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 的图形, 取朝上的单位法向量。则

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy.$$

例 设 Σ 是二元函数 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 的图形, 取朝上的单位法向量。则

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy.$$

证明 这是:

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_{\Sigma} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS$$

例 设 Σ 是二元函数 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 的图形, 取朝上的单位法向量。则

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy.$$

证明 这是:

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_{\Sigma} V \cdot \vec{n} dS$$

$$V = (0, 0, R)$$

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}(-z_x, -z_y, 1)$$

例 设 Σ 是二元函数 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 的图形, 取朝上的单位法向量。则

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy.$$

证明 这是:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy &= \iint_{\Sigma} \vec{V} \cdot \vec{n} dS \\ \vec{n} &= \frac{V=(0,0,R)}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} (-z_x, -z_y, 1) \end{aligned} \quad R(x, y, z) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$$

例 设 Σ 是二元函数 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 的图形, 取朝上的单位法向量。则

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy.$$

证明 这是:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy &= \iint_{\Sigma} V \cdot \vec{n} dS \\ &\stackrel{V=(0,0,R)}{=} \iint_{\Sigma} R(x, y, z) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} dS \\ &\stackrel{\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}(-z_x, -z_y, 1)}{=} \iint_{\Sigma} R(x, y, z) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} dS \end{aligned}$$

例 设 Σ 是二元函数 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 的图形, 取朝上的单位法向量。则

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy.$$

证明 这是:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy &= \iint_{\Sigma} \mathbf{V} \cdot \vec{n} dS \\ &\stackrel{\mathbf{V}=(0,0,R)}{=} \iint_{\Sigma} R(x, y, z) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} dS \\ &\stackrel{\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}(-z_x, -z_y, 1)}{=} \iint_{\Sigma} R(x, y, z(x, y)) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} dS \end{aligned}$$

例 设 Σ 是二元函数 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 的图形, 取朝上的单位法向量。则

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy.$$

证明 这是:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy &= \iint_{\Sigma} \mathbf{V} \cdot \vec{n} dS \\ &\stackrel{\mathbf{V}=(0,0,R)}{=} \iint_{\Sigma} R(x, y, z) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} dS \\ &\stackrel{\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}(-z_x, -z_y, 1)}{=} \iint_{\Sigma} R(x, y, z(x, y)) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy \end{aligned}$$

例 设 Σ 是二元函数 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 的图形, 取朝上的单位法向量。则

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy.$$

证明 这是:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy &= \iint_{\Sigma} V \cdot \vec{n} dS \\ &\stackrel{V=(0,0,R)}{=} \iint_{\Sigma} R(x, y, z) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} dS \\ &\stackrel{\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}(-z_x, -z_y, 1)}{=} \iint_{\Sigma} R(x, y, z) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} dS \\ &= \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy \end{aligned}$$

例 设 Σ 是二元函数 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 的图形, 取朝上的单位法向量。则

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy.$$

证明 这是:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy &= \iint_{\Sigma} \mathbf{V} \cdot \vec{n} dS \\ &\stackrel{\mathbf{V}=(0,0,R)}{=} \iint_{\Sigma} R(x, y, z) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} dS \\ &\stackrel{\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}(-z_x, -z_y, 1)}{=} \iint_{\Sigma} R(x, y, z) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy \end{aligned}$$