第 11 章 d：对面积的曲面积分

数学系　　梁卓滨

2016-2017 学年 II

Outline

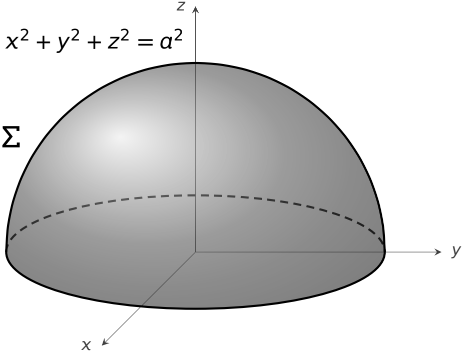
例 设曲面 Σ 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2\ (z\geq 0)$；$\Sigma_1$ 为 Σ 在第一卦限的部分。则有 (　　)

(A) $\iint_{\Sigma} xdS = 4\iint_{\Sigma_1} xdS$

(B) $\iint_{\Sigma} ydS = 4\iint_{\Sigma_1} ydS$

(C) $\iint_{\Sigma} zdS = 4\iint_{\Sigma_1} zdS$

(D) $\iint_{\Sigma} xyzdS = 4\iint_{\Sigma_1} xyzdS$



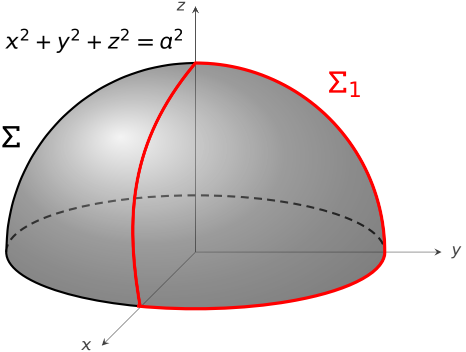
例 设曲面 Σ 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2\ (z\geq 0)$；$\Sigma_1$ 为 Σ 在第一卦限的部分。则有（ ）

(A) $\iint_{\Sigma} xdS = 4\iint_{\Sigma_1} xdS$

(B) $\iint_{\Sigma} ydS = 4\iint_{\Sigma_1} ydS$

(C) $\iint_{\Sigma} zdS = 4\iint_{\Sigma_1} zdS$

(D) $\iint_{\Sigma} xyzdS = 4\iint_{\Sigma_1} xyzdS$



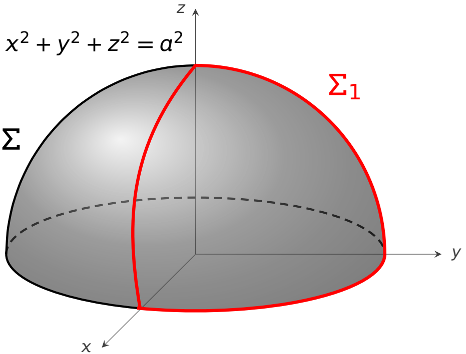
例 设曲面 Σ 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2\ (z\geq 0)$；$\Sigma_1$ 为 Σ 在第一卦限的部分。则有 (C)

(A) $\iint_\Sigma x dS = 4\iint_{\Sigma_1} x dS$

(B) $\iint_\Sigma y dS = 4\iint_{\Sigma_1} y dS$

(C) $\iint_\Sigma z dS = 4\iint_{\Sigma_1} z dS$

(D) $\iint_\Sigma xyz dS = 4\iint_{\Sigma_1} xyz dS$



例 计算 $\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)dS$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$。

例 计算 $\iint_\Sigma (x^2+y^2)dS$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$。

解 由对称性：

$$\iint_\Sigma x^2 dS = \iint_\Sigma y^2 dS = \iint_\Sigma z^2 dS$$

例 计算 $\iint_\Sigma (x^2+y^2)dS$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$。

解 由对称性：

$$\iint_\Sigma x^2 dS = \iint_\Sigma y^2 dS = \iint_\Sigma z^2 dS$$

所以

$$\iint_\Sigma (x^2+y^2)dS = 2\iint_\Sigma x^2 dS$$

例 计算 $\iint_\Sigma (x^2+y^2)dS$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$。

解 由对称性：

$$\iint_\Sigma x^2 dS = \iint_\Sigma y^2 dS = \iint_\Sigma z^2 dS$$

所以

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma (x^2+y^2)dS &= 2\iint_\Sigma x^2 dS \\ &= \frac{2}{3}\left[\iint_\Sigma x^2 dS + \iint_\Sigma y^2 dS + \iint_\Sigma z^2 dS\right]\end{aligned}$$

例 计算 $\iint_\Sigma (x^2+y^2)dS$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$。

解 由对称性：

$$\iint_\Sigma x^2 dS = \iint_\Sigma y^2 dS = \iint_\Sigma z^2 dS$$

所以

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma (x^2+y^2)dS &= 2\iint_\Sigma x^2 dS \\ &= \frac{2}{3}\left[\iint_\Sigma x^2 dS + \iint_\Sigma y^2 dS + \iint_\Sigma z^2 dS\right] \\ &= \frac{2}{3}\iint_\Sigma x^2+y^2+z^2 dS\end{aligned}$$

例 计算 $\iint_\Sigma (x^2+y^2)dS$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$。

解 由对称性：

$$\iint_\Sigma x^2 dS = \iint_\Sigma y^2 dS = \iint_\Sigma z^2 dS$$

所以

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma (x^2+y^2)dS &= 2\iint_\Sigma x^2 dS \\ &= \frac{2}{3}\left[\iint_\Sigma x^2 dS + \iint_\Sigma y^2 dS + \iint_\Sigma z^2 dS\right] \\ &= \frac{2}{3}\iint_\Sigma x^2+y^2+z^2 dS \\ &= \frac{2}{3}\iint_\Sigma 1 dS\end{aligned}$$

例 计算 $\iint_\Sigma (x^2+y^2)dS$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$。

解 由对称性：

$$\iint_\Sigma x^2 dS = \iint_\Sigma y^2 dS = \iint_\Sigma z^2 dS$$

所以

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma (x^2+y^2)dS &= 2\iint_\Sigma x^2 dS \\ &= \frac{2}{3}\left[\iint_\Sigma x^2 dS + \iint_\Sigma y^2 dS + \iint_\Sigma z^2 dS\right] \\ &= \frac{2}{3}\iint_\Sigma x^2+y^2+z^2 dS \\ &= \frac{2}{3}\iint_\Sigma 1 dS = \frac{2}{3}\mathrm{Area}(\Sigma)\end{aligned}$$

例 计算 $\iint_\Sigma (x^2+y^2)dS$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$。

解 由对称性：

$$\iint_\Sigma x^2 dS = \iint_\Sigma y^2 dS = \iint_\Sigma z^2 dS$$

所以

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma (x^2+y^2)dS &= 2\iint_\Sigma x^2 dS \\ &= \frac{2}{3}\left[\iint_\Sigma x^2 dS + \iint_\Sigma y^2 dS + \iint_\Sigma z^2 dS\right] \\ &= \frac{2}{3}\iint_\Sigma x^2+y^2+z^2 dS \\ &= \frac{2}{3}\iint_\Sigma 1 dS = \frac{2}{3}\mathrm{Area}(\Sigma) = \frac{2}{3}\cdot 4\pi R^2\end{aligned}$$

例 计算 $\iint_\Sigma (x^2+y^2)dS$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$。

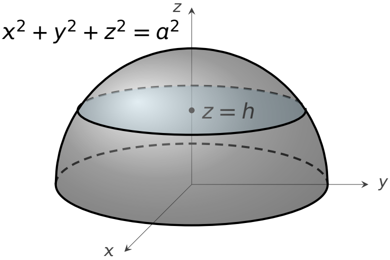
解 由对称性：

$$\iint_\Sigma x^2 dS = \iint_\Sigma y^2 dS = \iint_\Sigma z^2 dS$$

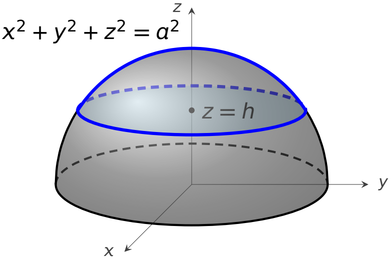
所以

$$\begin{aligned}
\iint_\Sigma (x^2+y^2)dS &= 2\iint_\Sigma x^2 dS \\
&= \frac{2}{3}\left[\iint_\Sigma x^2 dS + \iint_\Sigma y^2 dS + \iint_\Sigma z^2 dS\right] \\
&= \frac{2}{3}\iint_\Sigma x^2+y^2+z^2 dS \\
&= \frac{2}{3}\iint_\Sigma 1 dS = \frac{2}{3}\mathrm{Area}(\Sigma) = \frac{2}{3}\cdot 4\pi R^2 = \frac{8}{3}\pi R^2
\end{aligned}$$

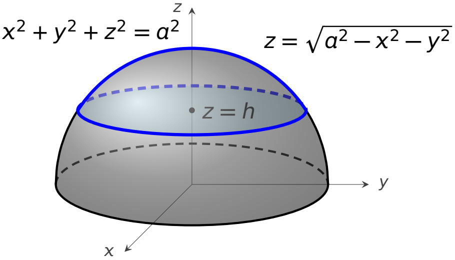
例 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$，其中曲面 Σ 如图所示。



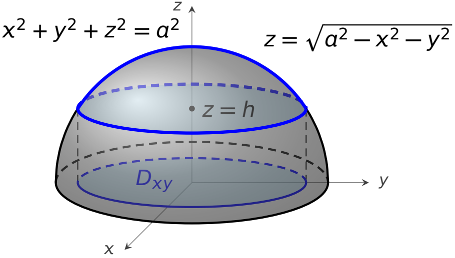
例 计算 $\iint_\Sigma \frac{1}{z} dS$，其中曲面 Σ 如图所示。



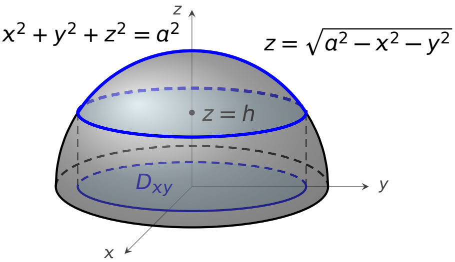
例 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$，其中曲面 Σ 如图所示。

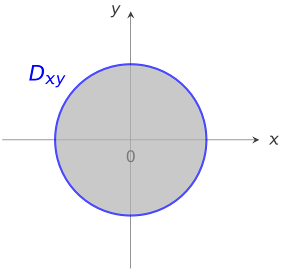


例 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$，其中曲面 Σ 如图所示。

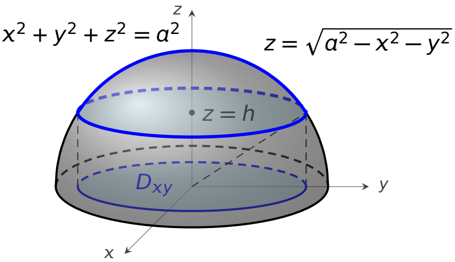


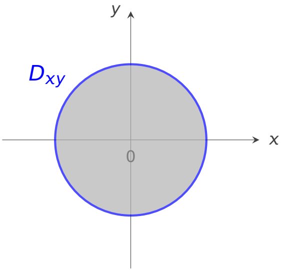
例 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$，其中曲面 Σ 如图所示。



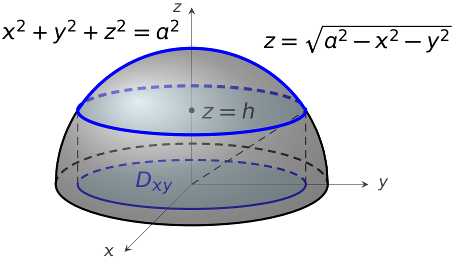


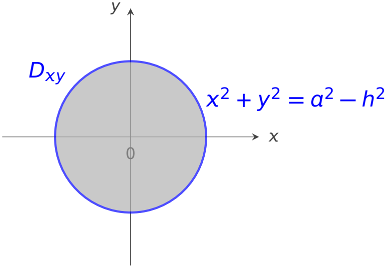
例 计算 $\iint_\Sigma \frac{1}{z} dS$，其中曲面 Σ 如图所示。



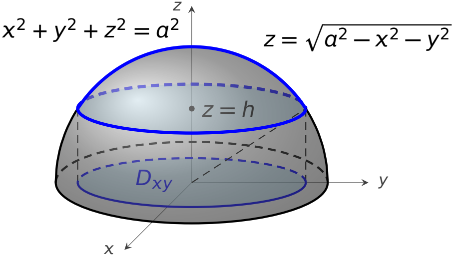


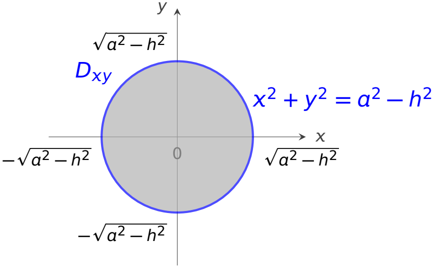
例 计算 $\iint_\Sigma \frac{1}{z} dS$，其中曲面 Σ 如图所示。



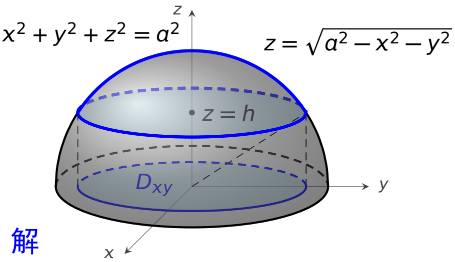


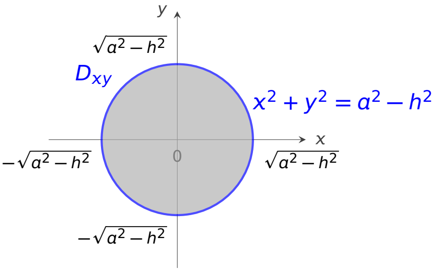
例 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$，其中曲面 Σ 如图所示。





例 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$，其中曲面 Σ 如图所示。

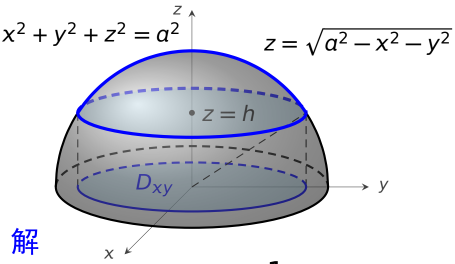


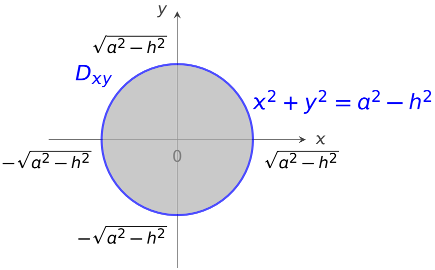


解

原式 =

例 计算 $\iint_\Sigma \frac{1}{z} dS$，其中曲面 Σ 如图所示。

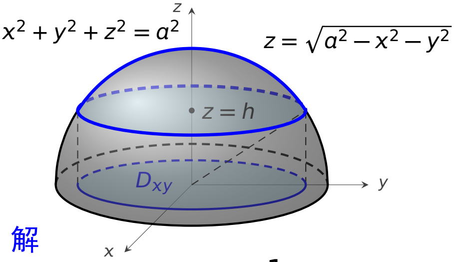


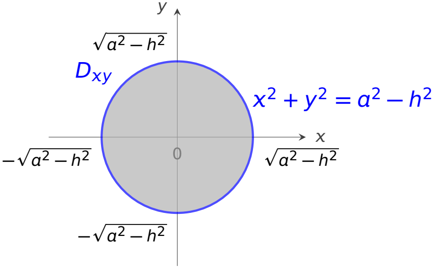


解

$$\text{原式} = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

例 计算 $\iint_\Sigma \frac{1}{z} dS$，其中曲面 Σ 如图所示。

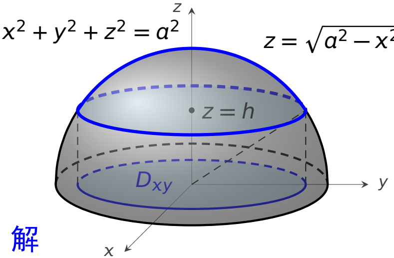


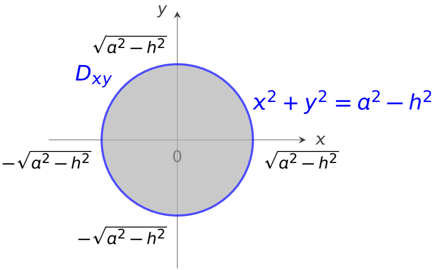


解

$$\text{原式} = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

例 计算 $\iint_\Sigma \frac{1}{z}dS$，其中曲面 Σ 如图所示。

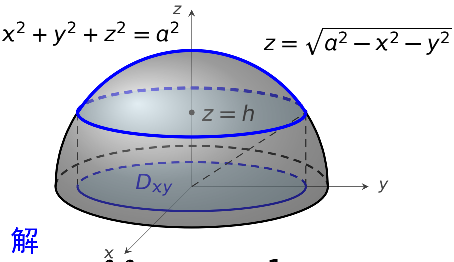


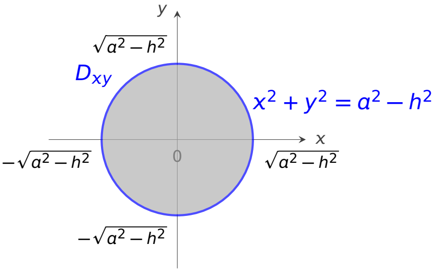


解

$$\text{原式} = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

例 计算 $\iint_\Sigma \frac{1}{z} dS$，其中曲面 Σ 如图所示。



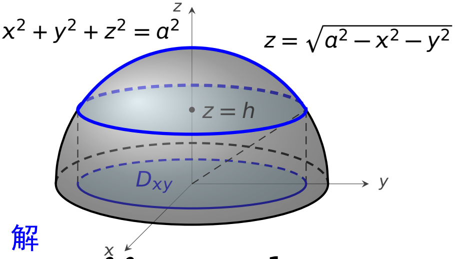


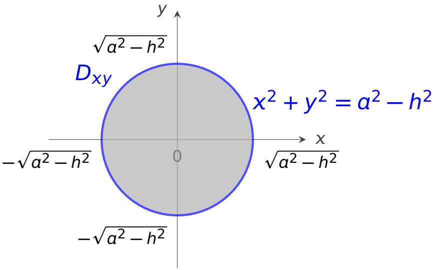
解

$$\text{原式} = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

$$\cdot \sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2-y^2}}$$

例 计算 $\iint_\Sigma \frac{1}{z}dS$，其中曲面 Σ 如图所示。



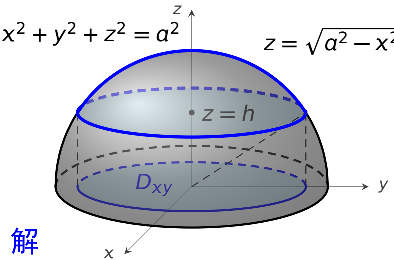


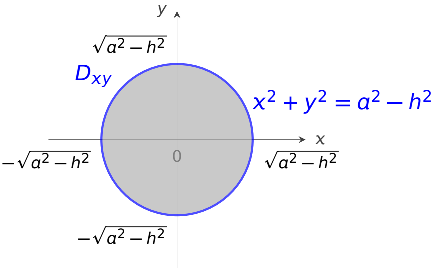
解

$$\text{原式} = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

$$= \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \cdot \sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2-y^2}}\,dxdy$$

例 计算 $\iint_\Sigma \frac{1}{z}dS$，其中曲面 Σ 如图所示。



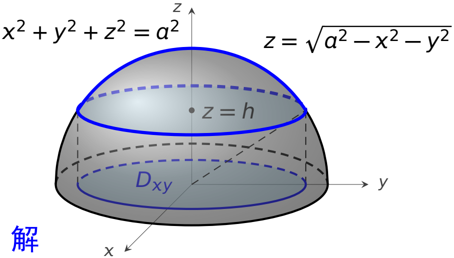


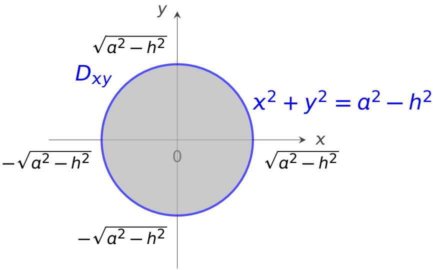
解

$$\text{原式}=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}\frac{a}{a^2-x^2-y^2}dxdy$$

例 计算 $\iint_\Sigma \frac{1}{z}dS$，其中曲面 Σ 如图所示。



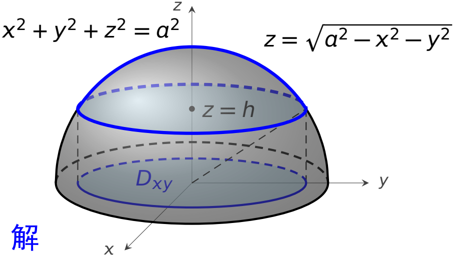


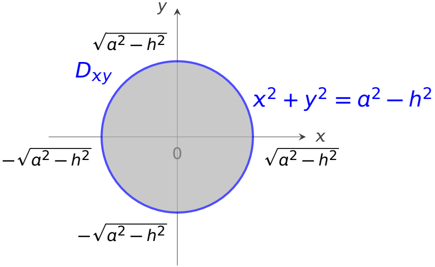
解

$$原式 = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

$$= \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2-x^2-y^2}dxdy \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}$$

例 计算 $\iint_\Sigma \frac{1}{z} dS$，其中曲面 Σ 如图所示。



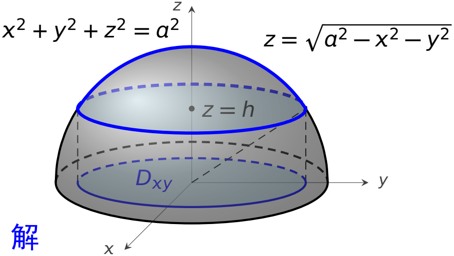


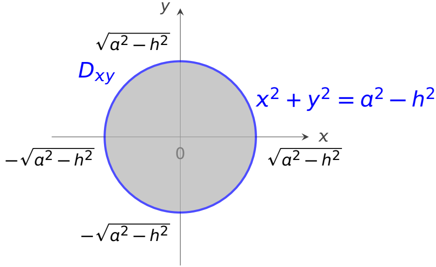
解

$$\text{原式} = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

$$= \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2-x^2-y^2} dxdy \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2-\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta$$

例 计算 $\iint_\Sigma \frac{1}{z}dS$，其中曲面 Σ 如图所示。





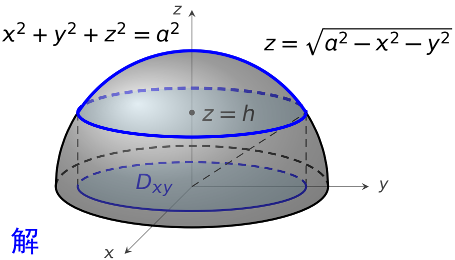
解

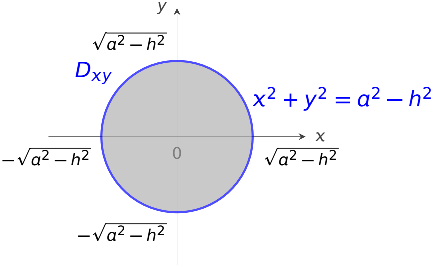
$$\text{原式}=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}\frac{a}{a^2-x^2-y^2}dxdy \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_{D_{xy}}\frac{a}{a^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$=\int\left[\int\frac{a}{a^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho\right]d\theta$$

例 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$，其中曲面 Σ 如图所示。





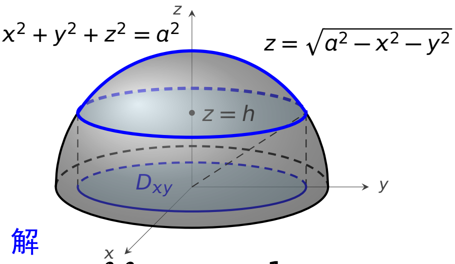
解

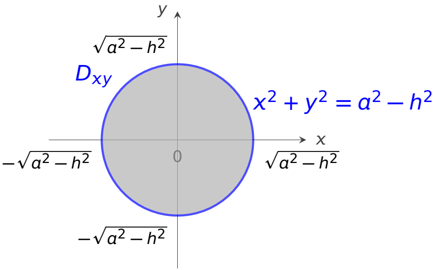
$$\text{原式} = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\, dxdy$$

$$= \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2-x^2-y^2} dxdy \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2-\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big[\int \qquad \frac{a}{a^2-\rho^2} \cdot \rho d\rho \Big] d\theta$$

例 计算 $\iint_\Sigma \frac{1}{z}dS$，其中曲面 Σ 如图所示。





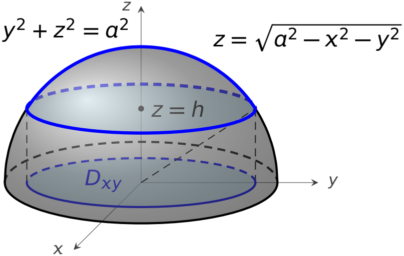
解

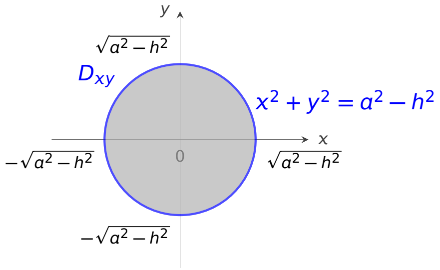
$$\text{原式}=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}\frac{a}{a^2-x^2-y^2}dxdy \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_{D_{xy}}\frac{a}{a^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}}\frac{a}{a^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho\right]d\theta$$

例 计算 $\iint_\Sigma \frac{1}{z}dS$，其中曲面 Σ 如图所示。





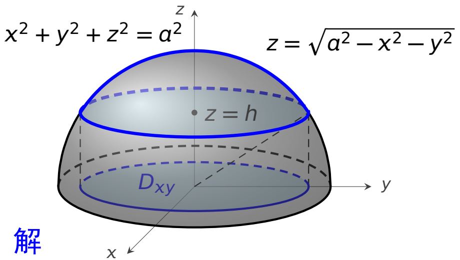
解

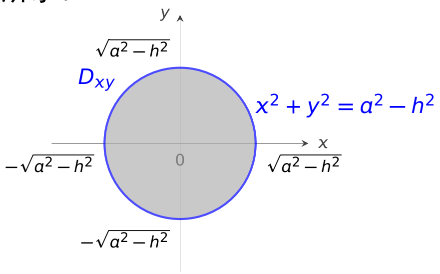
$$\text{原式} = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

$$= \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2-x^2-y^2}dxdy \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2-\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}} \frac{a}{a^2-\rho^2} \cdot \rho d\rho\right]d\theta = 2\pi \cdot$$

例 计算 $\iint_\Sigma \frac{1}{z}dS$，其中曲面 Σ 如图所示。





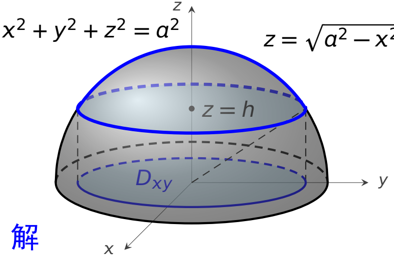
解

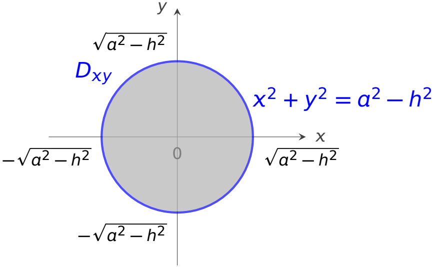
$$原式=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}\frac{a}{a^2-x^2-y^2}dxdy \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_{D_{xy}}\frac{a}{a^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}}\frac{a}{a^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho\right]d\theta=2\pi\cdot(-\frac{1}{2})a\ln(a^2-\rho^2)$$

例 计算 $\iint_\Sigma \frac{1}{z}dS$，其中曲面 Σ 如图所示。





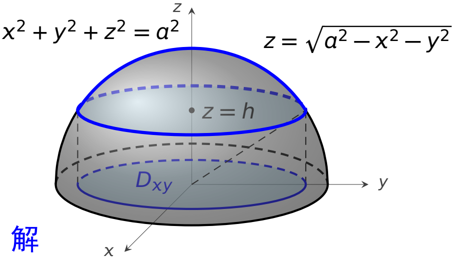
解

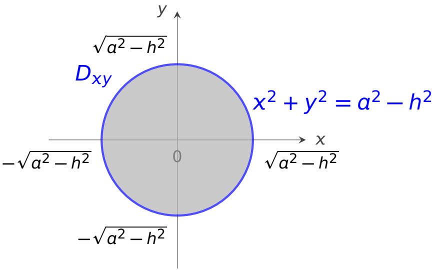
$$\text{原式}=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}\frac{a}{a^2-x^2-y^2}dxdy \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_{D_{xy}}\frac{a}{a^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}}\frac{a}{a^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho\right]d\theta=2\pi\cdot(-\frac{1}{2})a\ln(a^2-\rho^2)\Big|_0^{\sqrt{a^2-h^2}}$$

例 计算 $\iint_\Sigma \frac{1}{z}dS$，其中曲面 Σ 如图所示。





解

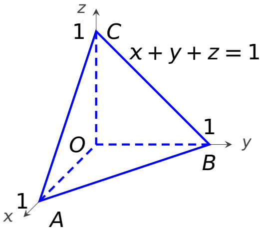
$$\text{原式}=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}\frac{a}{a^2-x^2-y^2}dxdy \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_{D_{xy}}\frac{a}{a^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta$$

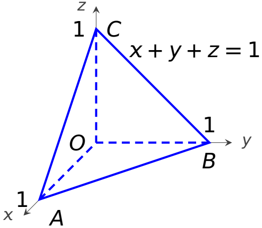
$$=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}}\frac{a}{a^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho\right]d\theta=2\pi\cdot(-\frac{1}{2})a\ln(a^2-\rho^2)\Big|_0^{\sqrt{a^2-h^2}}$$

$$=2\pi a\ln\frac{a}{h}$$

例 计算 $\iint_{\Sigma} xyz dS$，其中曲面 Σ 如图所示。



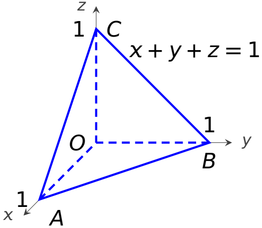
例 计算 $\iint_{\Sigma} xyzdS$，其中曲面 Σ 如图所示。



解

$$\text{原式} = \left(\iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC}\right) xyzdS$$

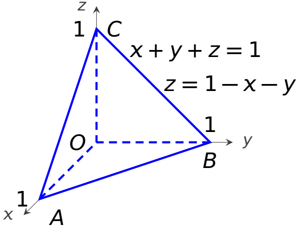
例 计算 $\iint_{\Sigma} xyzdS$，其中曲面 Σ 如图所示。



解

$$原式 = \left(\iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC}\right) xyzdS = \iint_{\Delta ABC} xyzdS$$

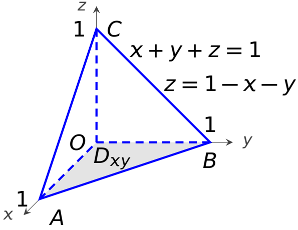
例 计算 $\iint_{\Sigma} xyzdS$，其中曲面 Σ 如图所示。



解

$$原式 = \left(\iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC}\right) xyzdS = \iint_{\Delta ABC} xyzdS$$

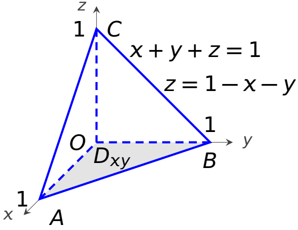
例 计算 $\iint_{\Sigma} xyz dS$，其中曲面 Σ 如图所示。

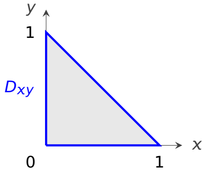


解

$$原式 = \left(\iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC}\right) xyz dS = \iint_{\Delta ABC} xyz dS$$

例 计算 $\iint_{\Sigma} xyzdS$，其中曲面 Σ 如图所示。

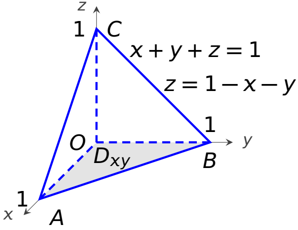


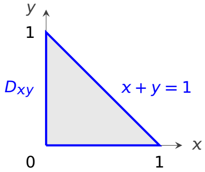


解

$$原式 = \left(\iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC}\right) xyzdS = \iint_{\Delta ABC} xyzdS$$

例 计算 $\iint_{\Sigma} xyzdS$，其中曲面 Σ 如图所示。

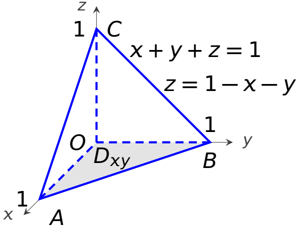


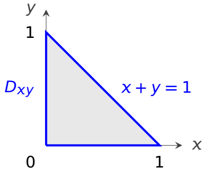


解

$$\text{原式} = \left(\iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC} \right) xyzdS = \iint_{\Delta ABC} xyzdS$$

例 计算 $\iint_{\Sigma} xyzdS$，其中曲面 Σ 如图所示。



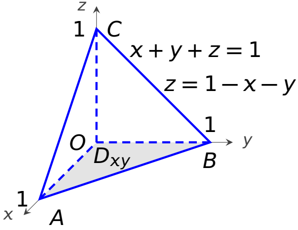


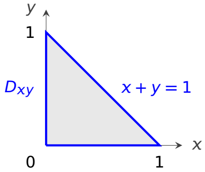
解

$$\text{原式} = \left(\iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC} \right) xyzdS = \iint_{\Delta ABC} xyzdS$$

$$xy(1-x-y)$$

例 计算 $\iint_{\Sigma} xyzdS$，其中曲面 Σ 如图所示。



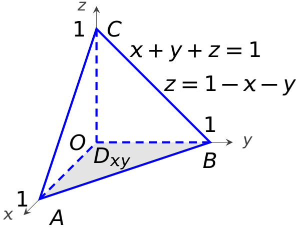


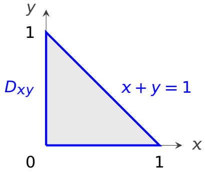
解

$$\text{原式} = \left(\iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC}\right) xyzdS = \iint_{\Delta ABC} xyzdS$$

$$xy(1-x-y)\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

例 计算 $\iint_\Sigma xyzdS$，其中曲面 Σ 如图所示。



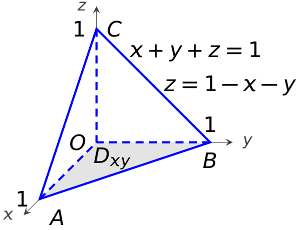


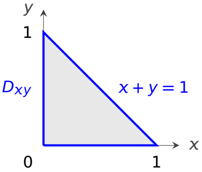
解

$$原式=\left(\iint_{\Delta OAB}+\iint_{\Delta OAC}+\iint_{\Delta OBC}+\iint_{\Delta ABC}\right)xyzdS=\iint_{\Delta ABC}xyzdS$$

$$=\iint_{D_{xy}}xy(1-x-y)\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

例 计算 $\iint_\Sigma xyzdS$，其中曲面 Σ 如图所示。





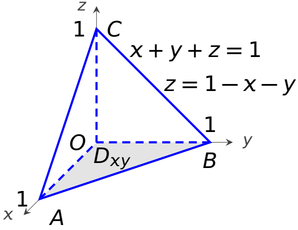
解

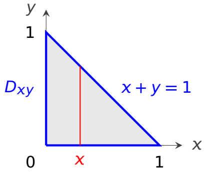
$$\text{原式} = \left(\iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC}\right) xyzdS = \iint_{\Delta ABC} xyzdS$$

$$= \iint_{D_{xy}} xy(1-x-y)\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

$$= \int \left[\int xy(1-x-y)\cdot\sqrt{3}dy\right]dx$$

例 计算 $\iint_{\Sigma} xyz dS$，其中曲面 Σ 如图所示。





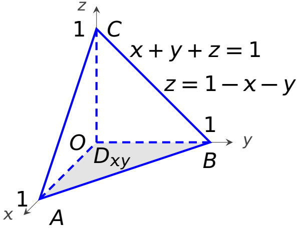
解

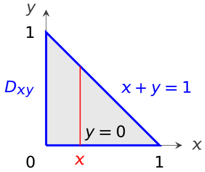
$$\text{原式} = \left(\iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC}\right) xyz dS = \iint_{\Delta ABC} xyz dS$$

$$= \iint_{D_{xy}} xy(1-x-y) \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy$$

$$= \int \left[\int \quad xy(1-x-y) \cdot \sqrt{3} dy\right] dx$$

例 计算 $\iint_{\Sigma} xyz dS$，其中曲面 Σ 如图所示。





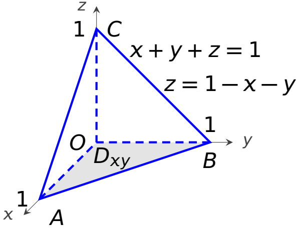
解

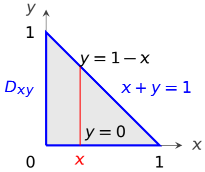
$$原式 = \left(\iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC}\right) xyz dS = \iint_{\Delta ABC} xyz dS$$

$$= \iint_{D_{xy}} xy(1-x-y) \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$$

$$= \int \left[\int \quad xy(1-x-y) \cdot \sqrt{3} dy \right] dx$$

例 计算 $\iint_\Sigma xyzdS$，其中曲面 Σ 如图所示。





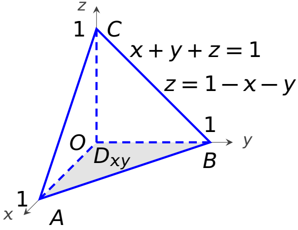
解

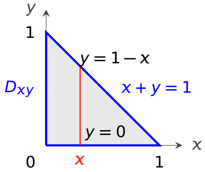
$$\text{原式} = \left(\iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC}\right) xyzdS = \iint_{\Delta ABC} xyzdS$$

$$= \iint_{D_{xy}} xy(1-x-y)\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

$$= \int \left[\int \quad xy(1-x-y)\cdot\sqrt{3}dy\right]dx$$

例 计算 $\iint_\Sigma xyzdS$，其中曲面 Σ 如图所示。





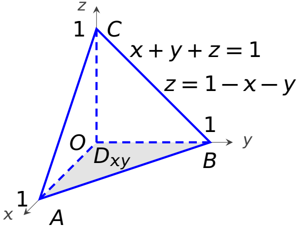
解

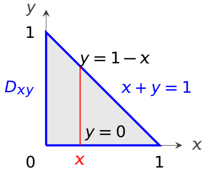
$$原式=\left(\iint_{\Delta OAB}+\iint_{\Delta OAC}+\iint_{\Delta OBC}+\iint_{\Delta ABC}\right)xyzdS=\iint_{\Delta ABC}xyzdS$$

$$=\iint_{D_{xy}}xy(1-x-y)\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

$$=\int_0^1\left[\int\quad xy(1-x-y)\cdot\sqrt{3}dy\right]dx$$

例 计算 $\iint_\Sigma xyzdS$，其中曲面 Σ 如图所示。





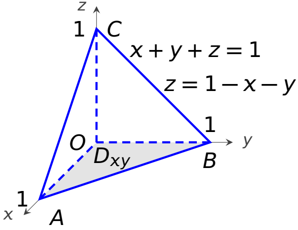
解

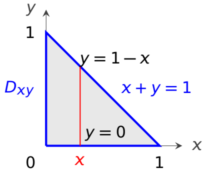
$$\text{原式} = \left(\iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC}\right) xyzdS = \iint_{\Delta ABC} xyzdS$$

$$= \iint_{D_{xy}} xy(1-x-y)\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} xy(1-x-y)\cdot\sqrt{3}dy\right]dx$$

例 计算 $\iint_\Sigma xyzdS$，其中曲面 Σ 如图所示。





解

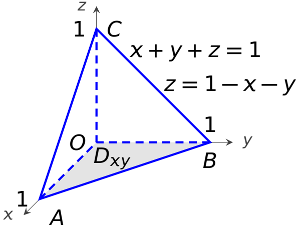
$$原式=\left(\iint_{\Delta OAB}+\iint_{\Delta OAC}+\iint_{\Delta OBC}+\iint_{\Delta ABC}\right)xyzdS=\iint_{\Delta ABC}xyzdS$$

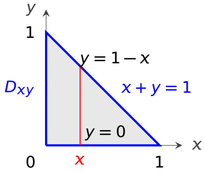
$$=\iint_{D_{xy}}xy(1-x-y)\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

$$=\int_0^1\left[\int_0^{1-x}xy(1-x-y)\cdot\sqrt{3}dy\right]dx$$

$$=\qquad x\left[(1-x)\frac{y^2}{2}-\frac{1}{3}y^3\right]$$

例 计算 $\iint_\Sigma xyzdS$，其中曲面 Σ 如图所示。





解

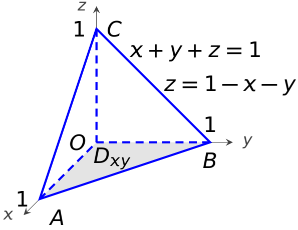
$$\text{原式} = \left(\iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC}\right) xyzdS = \iint_{\Delta ABC} xyzdS$$

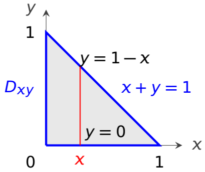
$$= \iint_{D_{xy}} xy(1-x-y)\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} xy(1-x-y)\cdot\sqrt{3}dy\right]dx$$

$$= \qquad x\left[(1-x)\frac{y^2}{2} - \frac{1}{3}y^3\right]\Bigg|_0^{1-x}$$

例 计算 $\iint_\Sigma xyzdS$，其中曲面 Σ 如图所示。





解

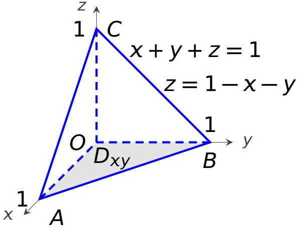
$$原式 = \left(\iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC}\right) xyzdS = \iint_{\Delta ABC} xyzdS$$

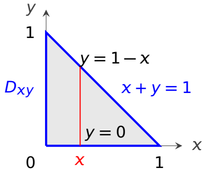
$$= \iint_{D_{xy}} xy(1-x-y)\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} xy(1-x-y)\cdot\sqrt{3}dy\right]dx$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 x\left[(1-x)\frac{y^2}{2} - \frac{1}{3}y^3\right]\Bigg|_0^{1-x} dx$$

例 计算 $\iint_\Sigma xyzdS$，其中曲面 Σ 如图所示。





解

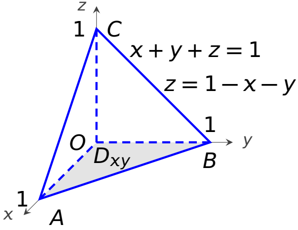
$$\text{原式} = \left(\iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC}\right) xyzdS = \iint_{\Delta ABC} xyzdS$$

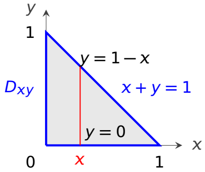
$$= \iint_{D_{xy}} xy(1-x-y)\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} xy(1-x-y)\cdot\sqrt{3}dy\right]dx$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 x\left[(1-x)\frac{y^2}{2} - \frac{1}{3}y^3\right]\Bigg|_0^{1-x} dx = \sqrt{3}\int_0^1 \frac{1}{6}x(1-x)^3 dx$$

例 计算 $\iint_\Sigma xyzdS$，其中曲面 Σ 如图所示。





解

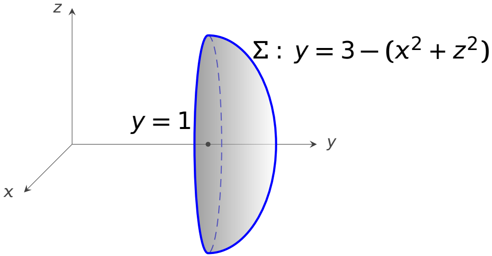
$$\text{原式} = \left(\iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC}\right) xyzdS = \iint_{\Delta ABC} xyzdS$$

$$= \iint_{D_{xy}} xy(1-x-y)\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

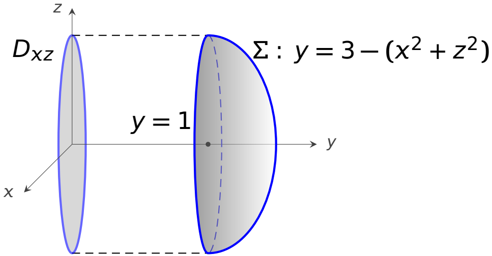
$$= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} xy(1-x-y)\cdot\sqrt{3}dy\right]dx$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 x\left[(1-x)\frac{y^2}{2} - \frac{1}{3}y^3\right]\Bigg|_0^{1-x} dx = \sqrt{3}\int_0^1 \frac{1}{6}x(1-x)^3 dx = \frac{\sqrt{3}}{120}$$

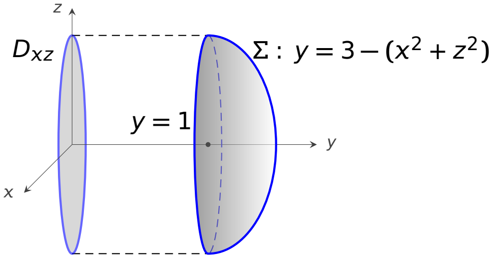
例 计算 $I = \iint_\Sigma (x^2 + z^2 + y)dS$，其中 Σ 是曲面 $y = 3 - (x^2 + z^2)$ 在 $y \geq 1$ 的部分。

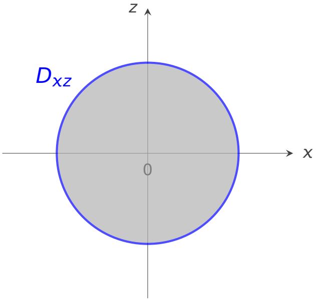


例 计算 $I = \iint_{\Sigma}(x^2+z^2+y)dS$，其中 Σ 是曲面 $y = 3-(x^2+z^2)$ 在 $y \geq 1$ 的部分。

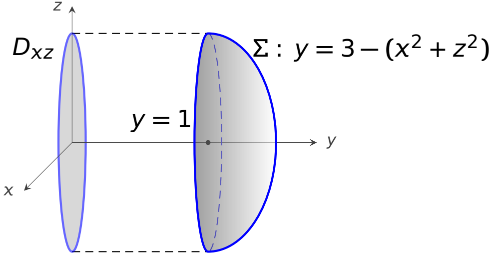


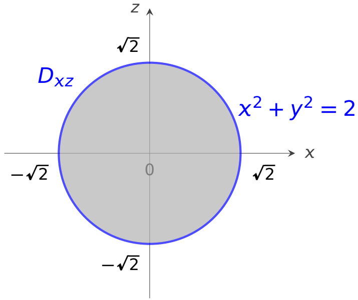
例 计算 $I = \iint_\Sigma (x^2 + z^2 + y)dS$，其中 Σ 是曲面 $y = 3 - (x^2 + z^2)$ 在 $y \geq 1$ 的部分。



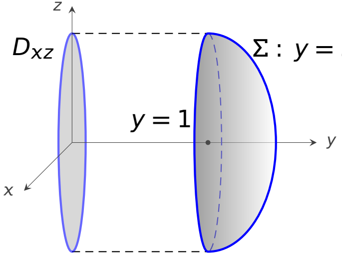


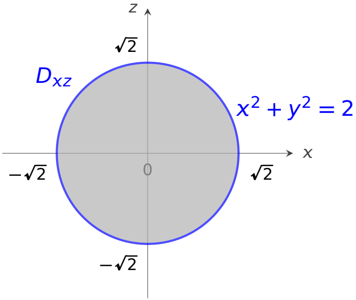
例 计算 $I=\iint_{\Sigma}(x^2+z^2+y)dS$，其中 Σ 是曲面 $y=3-(x^2+z^2)$ 在 $y\geq 1$ 的部分。





例 计算 $I=\iint_{\Sigma}(x^2+z^2+y)dS$，其中 Σ 是曲面 $y=3-(x^2+z^2)$ 在 $y\geq 1$ 的部分。

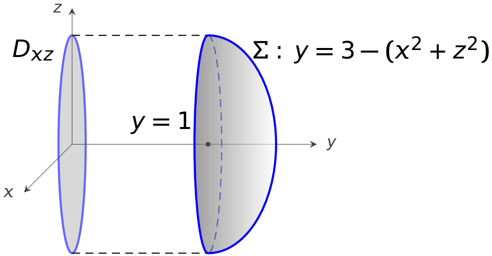


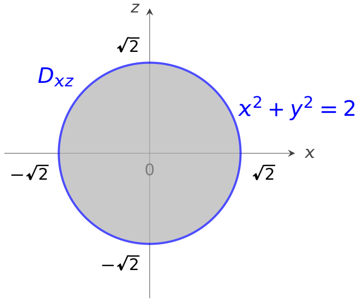


解

$I=$ 3

例 计算 $I=\iint_{\Sigma}(x^2+z^2+y)dS$，其中 Σ 是曲面 $y=3-(x^2+z^2)$ 在 $y\geq 1$ 的部分。

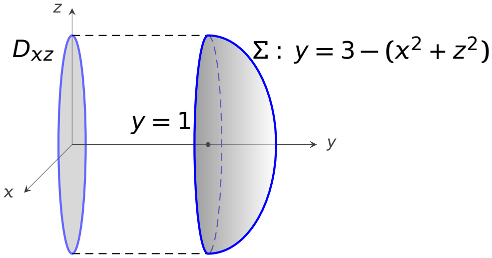


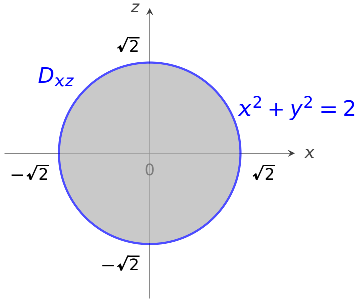


解

$$I= \qquad 3\cdot\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}dxdz$$

例 计算 $I=\iint_{\Sigma}(x^2+z^2+y)dS$，其中 Σ 是曲面 $y=3-(x^2+z^2)$ 在 $y\geq 1$ 的部分。

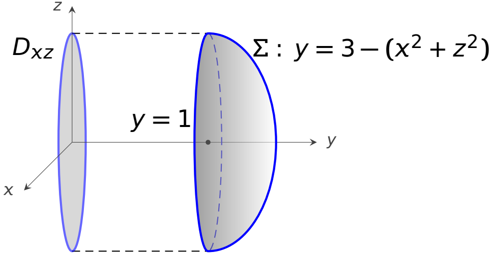


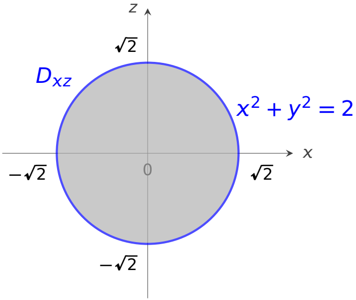


解

$$I=\iint_{D_{xz}} 3\cdot\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}dxdz$$

例 计算 $I=\iint_{\Sigma}(x^2+z^2+y)dS$，其中 Σ 是曲面 $y=3-(x^2+z^2)$ 在 $y\geq 1$ 的部分。

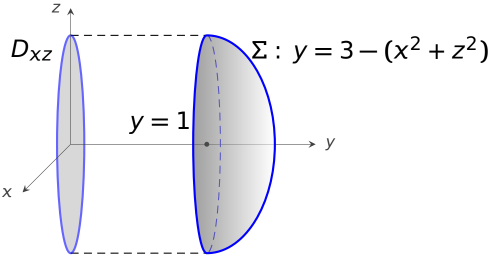


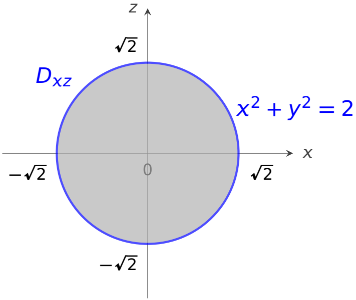


解

$$I=\iint_{D_{xz}}3\cdot\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}dxdz=\iint_{D_{xz}}3\cdot\sqrt{1+4x^2+4z^2}dxdz$$

例 计算 $I=\iint_{\Sigma}(x^2+z^2+y)dS$，其中 Σ 是曲面 $y=3-(x^2+z^2)$ 在 $y\geq 1$ 的部分。



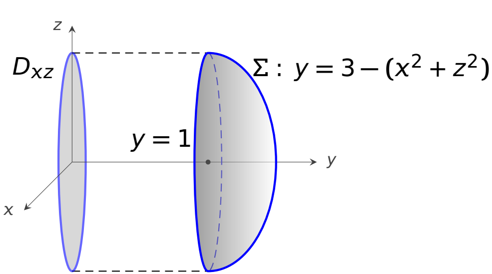


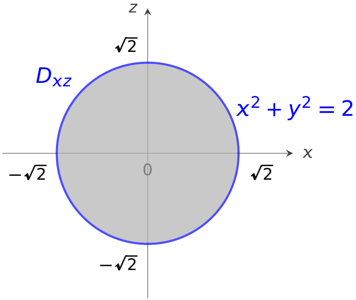
解

$$I=\iint_{D_{xz}}3\cdot\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}dxdz=\iint_{D_{xz}}3\cdot\sqrt{1+4x^2+4z^2}dxdz$$

$$\underset{z=\rho\sin\theta}{\overset{x=\rho\cos\theta}{=\!=\!=\!=\!=}}$$

例 计算 $I=\iint_{\Sigma}(x^2+z^2+y)dS$，其中 Σ 是曲面 $y=3-(x^2+z^2)$ 在 $y\geq 1$ 的部分。



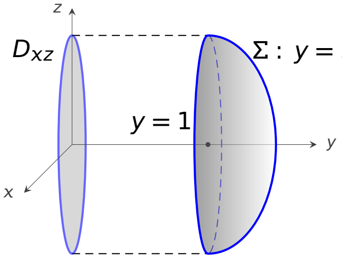


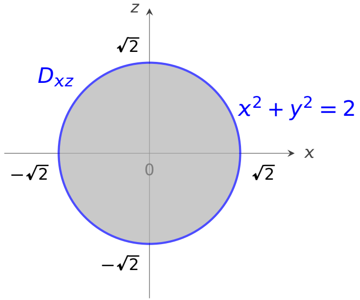
解

$$I=\iint_{D_{xz}}3\cdot\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}dxdz=\iint_{D_{xz}}3\cdot\sqrt{1+4x^2+4z^2}dxdz$$

$$\xlongequal[z=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}\iint_{D_{xz}}3\sqrt{1+4\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta$$

例 计算 $I=\iint_{\Sigma}(x^2+z^2+y)dS$，其中 Σ 是曲面 $y=3-(x^2+z^2)$ 在 $y\geq 1$ 的部分。



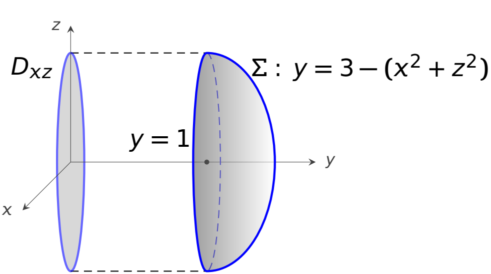


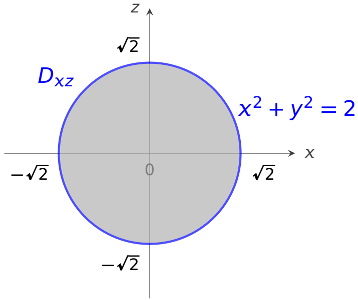
解

$$I=\iint_{D_{xz}}3\cdot\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}dxdz=\iint_{D_{xz}}3\cdot\sqrt{1+4x^2+4z^2}dxdz$$

$$\xlongequal[z=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}\iint_{D_{xz}}3\sqrt{1+4\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta=\int\left[\int 3\sqrt{1+4\rho^2}\cdot\rho d\rho\right]d\theta$$

例 计算 $I=\iint_\Sigma (x^2+z^2+y)dS$，其中 Σ 是曲面 $y=3-(x^2+z^2)$ 在 $y\geq 1$ 的部分。



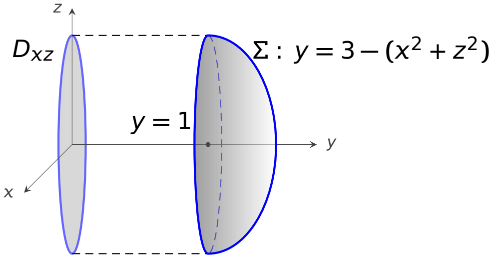


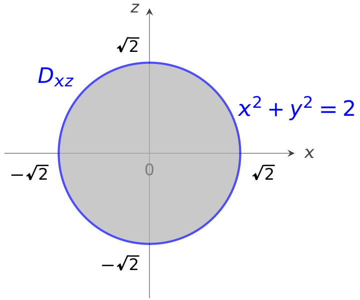
解

$$I=\iint_{D_{xz}} 3\cdot\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}dxdz=\iint_{D_{xz}} 3\cdot\sqrt{1+4x^2+4z^2}dxdz$$

$$\xlongequal[z=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}\iint_{D_{xz}} 3\sqrt{1+4\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta=\int_0^{2\pi}\left[\int 3\sqrt{1+4\rho^2}\cdot\rho d\rho\right]d\theta$$

例 计算 $I=\iint_\Sigma (x^2+z^2+y)dS$，其中 Σ 是曲面 $y=3-(x^2+z^2)$ 在 $y\ge 1$ 的部分。



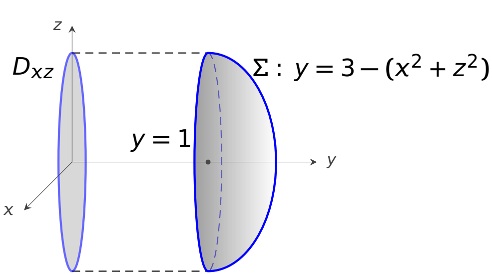


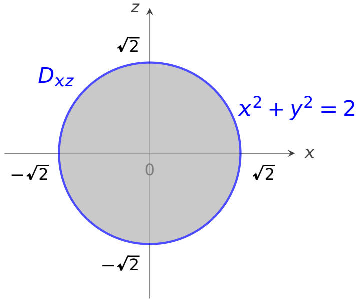
解

$$I=\iint_{D_{xz}} 3\cdot\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}dxdz=\iint_{D_{xz}} 3\cdot\sqrt{1+4x^2+4z^2}dxdz$$

$$\xlongequal[z=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}\iint_{D_{xz}} 3\sqrt{1+4\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\sqrt{2}} 3\sqrt{1+4\rho^2}\cdot\rho d\rho\right]d\theta$$

例 计算 $I=\iint_{\Sigma}(x^2+z^2+y)dS$，其中 Σ 是曲面 $y=3-(x^2+z^2)$ 在 $y\geq 1$ 的部分。





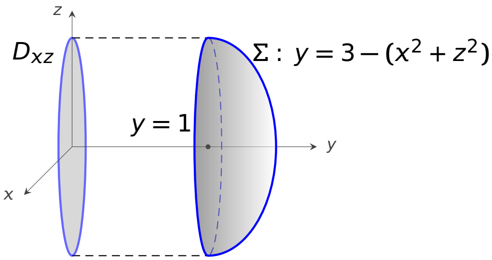
解

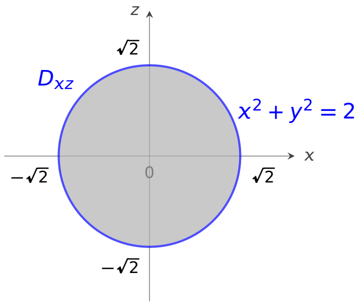
$$I=\iint_{D_{xz}}3\cdot\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}dxdz=\iint_{D_{xz}}3\cdot\sqrt{1+4x^2+4z^2}dxdz$$

$$\xlongequal[z=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}\iint_{D_{xz}}3\sqrt{1+4\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\sqrt{2}}3\sqrt{1+4\rho^2}\cdot\rho d\rho\right]d\theta$$

$$=2\pi\cdot$$

例 计算 $I=\iint_{\Sigma}(x^2+z^2+y)dS$，其中 Σ 是曲面 $y=3-(x^2+z^2)$ 在 $y\geq 1$ 的部分。





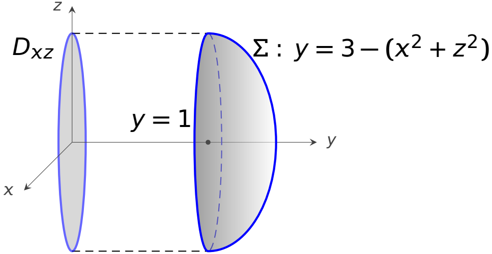
解

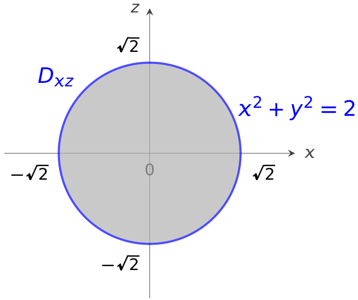
$$I=\iint_{D_{xz}} 3\cdot\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}dxdz=\iint_{D_{xz}} 3\cdot\sqrt{1+4x^2+4z^2}dxdz$$

$$\xlongequal[z=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}\iint_{D_{xz}} 3\sqrt{1+4\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\sqrt{2}}3\sqrt{1+4\rho^2}\cdot\rho d\rho\right]d\theta$$

$$=2\pi\cdot(3\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}(1+4\rho^2)^{\frac{3}{2}}$$

例 计算 $I=\iint_{\Sigma}(x^2+z^2+y)dS$，其中 Σ 是曲面 $y=3-(x^2+z^2)$ 在 $y\geq 1$ 的部分。





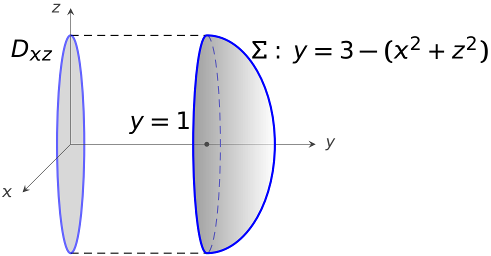
解

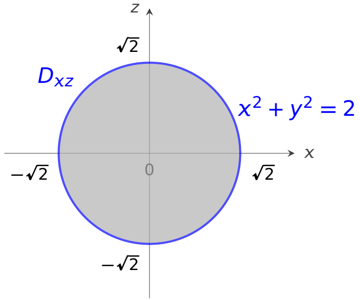
$$I=\iint_{D_{xz}}3\cdot\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}dxdz=\iint_{D_{xz}}3\cdot\sqrt{1+4x^2+4z^2}dxdz$$

$$\xlongequal[z=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}\iint_{D_{xz}}3\sqrt{1+4\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\sqrt{2}}3\sqrt{1+4\rho^2}\cdot\rho d\rho\right]d\theta$$

$$=2\pi\cdot(3\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}(1+4\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}}$$

例 计算 $I=\iint_{\Sigma}(x^2+z^2+y)dS$，其中 Σ 是曲面 $y=3-(x^2+z^2)$ 在 $y\geq 1$ 的部分。





解

$$I=\iint_{D_{xz}}3\cdot\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}dxdz=\iint_{D_{xz}}3\cdot\sqrt{1+4x^2+4z^2}dxdz$$

$$\xlongequal[z=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}\iint_{D_{xz}}3\sqrt{1+4\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\sqrt{2}}3\sqrt{1+4\rho^2}\cdot\rho d\rho\right]d\theta$$

$$=2\pi\cdot(3\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}(1+4\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}}=\frac{27}{2}\pi$$