姓名 :
专业 :
学号 :

第 06 周作业

练习 1. 将 4 阶方阵 M 作如下分块

$$M=\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A & O \\ I & -A \end{pmatrix}$$

请按此分块方式计算 M^2。

练习 2. 将矩阵 A, B 作如下分块

$$A=\left(\begin{array}{c:cc} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ \hdashline 3 & 1 & 0 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_1 & 2I \\ 3 & A_2 \end{pmatrix},\quad B=\left(\begin{array}{cc:cc} 2 & 7 & 0 & 0 \\ \hdashline -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} B_1 & O \\ -I & B_2 \end{pmatrix},$$

请按此分块方式计算乘积 AB。

练习 3. 设

$$M=\begin{pmatrix} O_{r\times s} & A_{r\times r} \\ B_{s\times s} & O_{s\times r} \end{pmatrix}$$

其中 A, B 分别为 r, s 阶可逆方阵，求 M 的逆矩阵 M^{-1}。

练习 4. 用初等变换将下列矩阵化为等价标准形:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

练习 5. 用<u>初等行变换</u>求下列矩阵 A, B, C, D 的逆矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(其中 $a_i \neq 0$, $i = 1, 2, 3, 4$)

练习 6. 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

以下两题是附加题，做出来的同学下次课交，可以加分。注意解答过程要详细。

练习 7. 求出一个 2 阶方阵 A，满足 $A^{17} = I_2$，且 $A \neq I_2$。

练习 8. 设分块矩阵 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ 中子块 A_{11} 和 A_{22} 为方阵，并且 A_{11} 可逆。求出矩阵 X 和 Y 满足

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & O \\ X & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & \\ & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & Y \\ O & I \end{pmatrix}$$

其中 $S = A_{22} - A_{21}A_{22}^{-1}A_{21}$。

假设 S 也是可逆，导出用 S^{-1}，A_{11}^{-1} 及 A 的子块计算 A^{-1} 的一个公式。

以下是附加题，做出来的同学下次课交，可以加分。注意解答过程要详细。

练习 9. （关于纠错码）在这个练习中，我们不使用实数，而使用二进制数字 0 和 1。在这种数字系统中，加法、减法、乘法定义为：$1+1=0$，$1+0=1$，$0-1=1$，$1\cdot 1=1$，$0\cdot 1=0$ 等等。用 $\mathbb{F}$ 表示这种数字系统，即 $\mathbb{F}=\{0,1\}$。（题外话，实数系统则记为 $\mathbb{R}$。）

把分量均为 $\mathbb{F}$ 中的 0 和 1 的 n 维向量的全体，定义为 $\mathbb{F}^n$。不难知道，$\mathbb{F}^n$ 只包含 2^n 个向量。在信息通信中，$\mathbb{F}^8$ 中的一个向量就是一个字节（byte）。例如，向量

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

就是一个字节。

计算机中信息储存的形式是 0 和 1 的字符串。例如

$$\cdots 101100011110010010101110 \cdots$$

通常把该字符串以 8 个数字为一段加以断开。例如上述字符串就断开成：

$$\cdots \;\Big|\; 10110001 \;\Big|\; 11100100 \;\Big|\; 10101110 \;\Big|\; \cdots$$

这样，每一段的 8 个数字正好构成 1 个字节，也就是 $\mathbb{F}^8$ 中的一个向量。通信时，每次传输 1 字节的信息。

通信的过程有时会出错，例如，把字节 10110001 发送出去，但接受方可能收到的是字节 10110101。那么，有没有一种办法，让接收方**自行**判断收到的字节是否正确？这是有的，其中一种办法是采用"纠错码"。这种方法会涉及到线性代数中矩阵的乘积。以上就是本题的背景和说明。

下面介绍纠错码时，我们假设字符串是以 4 个数字为一段进行断开，而不是通常的 8 个数字。这样做是为了叙述简单。

首先给出一些定义。定义矩阵

$$H=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

该矩阵称为 Hamming 矩阵。定义 $\mathbb{F}^7$ 中四个向量：

$$v_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad v_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad v_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad v_4=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

验证：乘积 Hv_1, Hv_2, Hv_3, Hv_4 均为 $\mathbb{F}^3$ 中的零向量。

定义矩阵

$$M=(v_1, v_2, v_3, v_4).$$

（即：矩阵 M 为 7×4 矩阵，各列依次为：v_1, v_2, v_3, v_4）则上述所验证的结论说明 $HM=O$。

现在假设 Coco 要发送信息 $u\in\mathbb{F}^4$ 给 Cici。纠错码的办法是：

1. 首先 Coco 计算乘积 $v := Mu$。(注意 $v \in \mathbb{F}^7$。) **验证**: v 的后四位数字正好就是 u。

2. 然后,Coco 把 v 发送给 Cici。(注意不是发送原信息 u。)

3. 假设 Cici 收到的信息是 $w \in \mathbb{F}^7$。(如果 $w \neq v$,则说明发送过程出错。但 Cici 现在还不知道收到的 w 究竟有错没错。)

4. 假设传输过程信息**最多出错一个数字**。例如,假设发送的是 $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,那么收到的可能是 $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$(第 2 位数字出错)或者 $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$(第 6 位数字出错)等等,但不可能收到 $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$(第 2,6 位数字同时出错)。

4. Cici 开始验证了:计算乘积 Hw。请你**验证**:如果 $Hw = 0$,则说明传输过程没错,即 $w = u$。这时 w 的后 4 位数字正好就是原信息 u。如果 $Hw \neq 0$,则说明传输过程出错,即 $w \neq v$。

5. 即便传输过程出错,也是有办法在错误中把原信息恢复出来。请你以这个例子想一想:假设收到 $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,那么原信息 u 是什么?

最后,想一想“纠错码”体现在哪里?