第 08 周作业解答

练习 1. 设 D 是平面上由 x 轴, y 轴, 以及直线 $x+y=6$ 所以围成的闭区域。假设二元函数 $z=x^2y(4-x-y)$ 定义在闭区域 D 上。

1. 画出区域 D。
2. 求出 z 在闭区域 D 内部的所有极值点。
3. 求出 z 在边界 ∂D 上所能取到的最大值和最小值。
4. 求出 z 在整个闭区域 D 上的最大值和最小值。

解 1. 求出 D 内部的驻点。求偏导数

$$z_x = xy(8-3x-2y), \qquad z_y = 4x^2 - x^3 - 2x^2y = x^2(4-x-2y).$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = xy(8-3x-2y) = 0 \\ z_y = x^2(4-x-2y) = 0 \end{cases}$$

因为在 D 的内部，成立 $x>0$ 及 $y>0$。所有求得驻点只有 $(2, 1)$。

2. 判断驻点是否极值点。因为

$$z_{xx} = 2y(4-3x-y), \quad z_{xy} = x(8-3x-4y), \quad z_{yy} = -2x^2,$$

所以

$$z_{xx}(2, 1) = -6 < 0, \quad z_{xy}(2, 1) = -4, \quad z_{yy}(2, 1) = -8.$$

判别式为

$$P(2, 1) = (-6)\cdot(-8) - (-4)^2 = 32 > 0.$$

函数 z 在 D 内部只有一个极值点 $(2, 1)$，并且是极大值点。$z(2, 1) = 4$。

3. 求 z 在边界 ∂D 的最值。边界∂D 由三部分构成：$B_1 = \{(x, 0) | 0 \le x \le 6\}$，$B_2 = \{(0, y) | 0 \le y \le 6\}$ 以及 $B_3 = \{(x, y) | x+y=6, 0 \le x \le 6\}$. 在 B_1 和 B_2 上，z 的取值恒为零。在 B_3 上，$y=6-x$，代入 z 得

$$2x^2(x-6), \qquad (0 \le x \le 6).$$

计算此一元函数的最值可知，当 $x=4$ 时该一元函数取得最小值 -64；当 $x=0, 6$ 时，函数取得最大值 0。

4. 结论。

二元函数 z 在 D 内部有唯一的极值点 $(2, 1)$，且为极大值点，$z(2, 1)$。z 在边界 ∂D 上的最小值是 -64（在 $(4, 2)$ 处取得），最大值是 0。

所以 z 在闭区域 D 的点 $(2, 1)$ 处取得最大值，为 $z(2, 1) = 4$。而在点 $(4, 2)$ 处取得最小值，为 $z(4, 2) = -64$。

练习 2. 求函数 $f(x, y) = x+y$ 在条件 $x^2+y^2=1$ 下的最大、最小值，并求出对应的最值点。(利用拉格朗日乘子法求解)。

解 1. 方程 $x^2+y^2=1$ 表示平面上的圆周，是有界闭集。有连续函数的最值定理，f 在该圆周上一定能取得最值。对应的最值点是极值点。

2. 令 $\varphi(x,y)=x^2+y^2-1$。构造拉格朗日函数 $L=f+\lambda\varphi=x+y+\lambda(x^2+y^2-1)$，求解方程组：

$$\begin{cases} L_x=1+2\lambda x=0 \\ L_y=1+2\lambda y=0 \\ \varphi=x^2+y^2-1=0 \end{cases}$$

显然 $\lambda\neq 0$，所以从第 1，2 条方程可知 $x=y$。再结合第 3 条方程，得

$$(x,y)=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}) \quad \text{或} \quad (-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$$

3. 比较函数值。$f(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{2}$，$f(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})=-\sqrt{2}$。说明 $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ 是最大值点，最大值是 $f(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{2}$；$(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$ 是最小值点，最小值是 $f(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})=-\sqrt{2}$。

练习 3. 假设矩形的边长分别为 x 和 y，周长为定值 $2p$。将矩形绕长为 x 的边旋转一周而构成一个圆柱体。问 x,y 各为多少时，圆柱体的体积最大？（利用拉格朗日乘子法求解）

解 1. 求二元函数 $z=\pi xy^2$ 在附加条件 $\varphi(x,y)=x+y-p=0$ 下的极值。

构造拉格朗日函数

$$L=z+\lambda\varphi$$

其中 λ 为待定的参数。求解方程组

$$\begin{cases} L_x=\pi y^2+\lambda=0 & (1) \\ L_y=2\pi xy+\lambda=0 & (2) \\ \varphi=x+y-p=0 & (3) \end{cases}$$

$(1)-(2)$ 得 $y^2-2xy=0$。因为边长 $y>0$，所以 $y-2x=0$。再结合方程 (3)，可解出 $x=\frac{1}{3}p$，$y=\frac{2}{3}p$。

2. 由于函数 z 在附加条件 $\varphi=0$ 下的可能的极值点只有唯一的一个 $(\frac{1}{3}p,\frac{2}{3}p)$，而问题存在最大值。所以此可能的唯一极值点 $(\frac{1}{3}p,\frac{2}{3}p)$ 就是问题的最大值点。

结论：当 $x=\frac{1}{3}p$，$y=\frac{2}{3}p$ 时，圆柱体的体积最大，为 $\pi xy^2=\frac{4\pi}{27}p^3$。

练习 4. 利用拉格朗日乘数法求三元函数 $f=x^2+y^2+z^2$ 在附加条件 $\begin{cases} x^2+y^2+4z^2=1 \\ x+3y+2z=0 \end{cases}$ 下的最大值和最小值。（想一想：为什么在该附加条件下 f 能取到最值？附加条件其实是描述了空间中的什么图形？）

解 1. 令 $\varphi=x^2+y^2+4z^2-1$，$\psi=x+3y+2z$。拉格朗日函数为

$$L=f+\lambda\varphi+\mu\psi$$

其中 λ，μ 为待定参数。求解方程组

$$\begin{cases} L_x=2x+2\lambda x+\mu=0 & (1) \\ L_y=2y+2\lambda y+3\mu=0 & (2) \\ L_z=2z+8\lambda z+2\mu=0 & (3) \\ \varphi=x^2+y^2+4z^2-1=0 & (4) \\ \psi=x+3y+2z=0 & (5) \end{cases}$$

$(2)-3\times(1)$ 可得

$$2(\lambda+1)(y-3x)=0.$$

所以 $\lambda=-1$ 或 $y=3x$。

情形一：$\lambda=-1$。

代入 (1) 可得 $\mu=0$。这时 (3) 化简为 $-6z=0$，所以 $z=0$。从而 (4)(5) 化为

$$\begin{cases} x^2+y^2-1=0 \\ x+3y=0 \end{cases}$$

解得：$(x,\,y)=\left(\frac{-3}{\sqrt{10}},\,\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$ 或 $(x,\,y)=\left(\frac{3}{\sqrt{10}},\,\frac{-1}{\sqrt{10}}\right)$。

所以此时 $(x,\,y,\,z)=\left(\frac{-3}{\sqrt{10}},\,\frac{1}{\sqrt{10}},\,0\right)$ 或 $(x,\,y,\,z)=\left(\frac{3}{\sqrt{10}},\,\frac{-1}{\sqrt{10}},\,0\right)$。

情形二：$y=3x$。

此时 (4)(5) 化为

$$\begin{cases} 10x^2+4z^2=1 \\ 10x+2z=0 \end{cases}$$

解得：$(x,\,z)=\left(\frac{-1}{\sqrt{110}},\,\frac{5}{\sqrt{110}}\right)$ 或 $(x,\,z)=\left(\frac{1}{\sqrt{110}},\,\frac{-5}{\sqrt{110}}\right)$。

所以此时 $(x,\,y,\,z)=\left(\frac{-1}{\sqrt{110}},\,\frac{-3}{\sqrt{110}},\,\frac{5}{\sqrt{110}}\right)$ 或 $(x,\,y,\,z)=\left(\frac{1}{\sqrt{110}},\,\frac{3}{\sqrt{110}},\,\frac{-5}{\sqrt{110}}\right)$。

2. 从上述计算知，函数 f 在附加条件 $\varphi=0$ 和 $\psi=0$ 下的可能的极值点有四个，而问题存在最大值、最小值。所以最大值点和最小值点一定包含在这四个可能的极值点里。

分别计算这四个点的函数值

$(x,\,y,\,z)$	$\left(\frac{-3}{\sqrt{10}},\,\frac{1}{\sqrt{10}},\,0\right)$	$\left(\frac{3}{\sqrt{10}},\,\frac{-1}{\sqrt{10}},\,0\right)$	$\left(\frac{-1}{\sqrt{110}},\,\frac{-3}{\sqrt{110}},\,\frac{5}{\sqrt{110}}\right)$	$\left(\frac{1}{\sqrt{110}},\,\frac{3}{\sqrt{110}},\,\frac{-5}{\sqrt{110}}\right)$
f	1	1	$\frac{7}{22}$	$\frac{7}{22}$

可见函数 f 在 $\left(\frac{-3}{\sqrt{10}},\,\frac{1}{\sqrt{10}},\,0\right)$ 和 $\left(\frac{3}{\sqrt{10}},\,\frac{-1}{\sqrt{10}},\,0\right)$ 处取得最大值，最大值为 1；在 $\left(\frac{-1}{\sqrt{110}},\,\frac{-3}{\sqrt{110}},\,\frac{5}{\sqrt{110}}\right)$ 和 $\left(\frac{1}{\sqrt{110}},\,\frac{3}{\sqrt{110}},\,\frac{-5}{\sqrt{110}}\right)$ 处取得最小值，最小值为 $\frac{7}{22}$。

3. 附加的方程组 $\begin{cases} x^2+y^2+4z^2=1 \\ x+3y+2z=0 \end{cases}$，其图形是空间中的椭球面与平面的交线，是一条闭曲线。该条件极值问题其实是求 f 在该闭曲线上最大、最小值。

练习 5. 比较二重积分 $\iint_D (x+y)^2 d\sigma$ 和 $\iint_D (x+y)^3 d\sigma$ 的大小，其中 D 是由 x 轴，y 轴和直线 $x+y=1$ 所围成的闭区域。

解在 D 上成立 $0\le x+y\le 1$，所以 $(x+y)^2\ge (x+y)^3$ 以及

$$\iint_D (x+y)^2 d\sigma > \iint_D (x+y)^3 d\sigma.$$

练习 6. 估计二重积分 $\iint_D \sin^2 x\sin^2 y d\sigma$，其中 $D=\{(x,\,y)|\,0\le x\le\pi,\,0\le y\le\pi\}$。

解在 D 上成立 $0\le\sin^2 x\sin^2 y\le 1$，所以

$$0<\iint_D \sin^2 x\sin^2 y d\sigma<|D|=\pi^2.$$

练习 7. 计算由四个平面 $x=0$，$y=0$，$x=1$，$y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 及 $2x+3y+z=6$ 截得的立体的体积。

解即要求二元函数 $z=6-2x-3y$ 在有界闭区域 $D=\{(x,\,y)|\,0\le x\le 1,\,0\le y\le 1\}$ 上的二重积分：

$$\iint_D (6-2x-3y)d\sigma=\int_0^1\left[\int_0^1(6-2x-3y)dx\right]dy=\int_0^1\left[6x-x^2-3xy\Big|_0^1\right]dy$$
$$=\int_0^1(5-3y)dy=\left(5y-\frac{3}{2}y^2\right)\Bigg|_0^1=\frac{7}{2}.$$

练习 8. 画出积分区域，并计算二重积分：

1. $\iint_D x\sqrt{y}d\sigma$，其中 D 是由两条抛物线 $y=\sqrt{x}$ 和 $y=x^2$ 所围成的闭区域；
2. $\iint_D (x^2+y^2-x)d\sigma$，其中 D 是由直线 $y=2$，$y=x$ 和 $y=2x$ 所围成的闭区域；
3. $\iint_D x\cos(x+y)d\sigma$，其中 D 是顶点分别为 $(0,\,0)$，$(\pi,\,0)$ 和 $(\pi,\,\pi)$ 的三角区闭区域；
4. $\iint_D e^{x+y}d\sigma$，其中 $D=\{(x,\,y)|\,|x|\le 1,\,|y|\le 1\}$.
5. $\iint_D e^{x+y}d\sigma$，其中 $D=\{(x,\,y)|\,|x|+|y|\le 1\}$.

解 1. 将 D 视为 X 型区域：$D=\{(x,\,y)|\,x^2\le y\le\sqrt{x},\,0\le x\le 1\}$。所以

$$\iint_D x\sqrt{y}d\sigma=\int_0^1\left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}}x\sqrt{y}dy\right]dx=\int_0^1\left[\frac{2}{3}xy^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{x^2}^{\sqrt{x}}\right]dx=\int_0^1\left[\frac{2}{3}x^{\frac{7}{4}}-\frac{2}{3}x^4\right]dx$$
$$=\left(\frac{8}{33}x^{\frac{11}{4}}-\frac{2}{15}x^5\right)\Bigg|_0^1=\frac{8}{33}-\frac{2}{15}=\frac{6}{55}.$$

也可以将 D 视为 Y 型区域：$D=\{(x,\,y)|\,y^2\le x\le\sqrt{y},\,0\le y\le 1\}$。所以

$$\iint_D x\sqrt{y}d\sigma=\int_0^1\left[\int_{y^2}^{\sqrt{y}}x\sqrt{y}dx\right]dy=\int_0^1\left[\frac{1}{2}x^2y^{\frac{1}{2}}\Bigg|_{y^2}^{\sqrt{y}}\right]dy=\int_0^1\left[\frac{1}{2}y^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^{\frac{9}{2}}\right]dy$$
$$=\left(\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{11}x^{\frac{11}{2}}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{5}-\frac{1}{11}=\frac{6}{55}.$$

2. 将 D 视为 Y 型区域：$D=\{(x,\,y)|\,\frac{1}{2}y\le x\le y,\,0\le y\le 2\}$。所以

$$\iint_D (x^2+y^2-x)d\sigma=\int_0^2\left[\int_{\frac{1}{2}y}^{y}(x^2+y^2-x)dx\right]dy=\int_0^2\left[\frac{1}{3}x^3+xy^2-\frac{1}{2}x^2\Bigg|_{\frac{1}{2}y}^{y}\right]dy=\int_0^1\left[\frac{19}{24}y^3-\frac{3}{8}y^2\right]dy$$
$$=\left(\frac{19}{96}y^4-\frac{1}{8}y^3\right)\Bigg|_0^2=\frac{19}{6}-1=\frac{13}{6}.$$

3. 将 D 视为 Y 型区域：$D=\{(x,\,y)|\,y\le x\le\pi,\,0\le y\le\pi\}$。所以

$$\begin{aligned}
\iint_D x\cos(x+y)d\sigma &= \int_0^\pi\left[\int_y^\pi x\cos(x+y)dx\right]dy = \int_0^\pi\left[\int_y^\pi xd\sin(x+y)\right]dy\\
&= \int_0^\pi\left[x\sin(x+y)\big|_y^\pi - \int_y^\pi \sin(x+y)dx\right]dy\\
&= \int_0^\pi\left[\pi\sin(\pi+y) - y\sin(2y) + \cos(\pi+y) - \cos(2y)\right]dy\\
&= \int_0^\pi\left[-\pi\sin y - y\sin(2y) - \cos y - \cos(2y)\right]dy\\
&= \pi\cos y\big|_0^\pi - \sin y\big|_0^\pi - \frac{1}{2}\sin 2y\big|_0^\pi + \frac{1}{2}\int_0^\pi yd\cos(2y)\\
&= -2\pi + \frac{1}{2}\left(y\cos(2y)\big|_0^\pi - \int_0^\pi \cos(2y)dy\right)\\
&= -2\pi + \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{1}{2}\sin(2y)\big|_0^\pi\right) = -\frac{3}{2}\pi.
\end{aligned}$$

也可以将 D 视为 X 型区域：$D=\{(x,\,y)|\,0\le y\le x,\,0\le x\le\pi\}$。所以

$$\begin{aligned}
\iint_D x\cos(x+y)d\sigma &= \int_0^\pi\left[\int_0^x x\cos(x+y)dy\right]dx = \int_0^\pi\left[x\sin(x+y)\Big|_0^x\right]dx = \int_0^\pi\left[x\sin(2x) - x\sin x\right]dx\\
&= \int_0^\pi xd\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)+\cos x\right) = x\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)+\cos x\right)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)+\cos x\right)dx\\
&= -\frac{3}{2}\pi - \left[-\frac{1}{4}\sin(2x)+\sin x\right]\Big|_0^\pi = -\frac{3}{2}\pi.
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\iint_D e^{x+y}d\sigma &= \int_{-1}^1\left(\int_{-1}^1 e^{x+y}dx\right)dy = \int_{-1}^1\left(e^{x+y}\big|_{-1}^1\right)dy = \int_0^1 e^{1+y} - e^{-1+y}dy\\
&= e^{1+y} - e^{-1+y}\big|_{-1}^1 = e^2 + e^{-2} - 2.
\end{aligned}$$

5. 将 D 视为两个 X 型区域之并：

$$D = D_1\cup D_2 = \{(x,\,y)|\,-x-1\le y\le x+1,\,-1\le x\le 0\}\cup\{(x,\,y)|\,-1+x\le y\le 1-x,\,0\le x\le 1\}.$$

所以

$$
\begin{aligned}
\iint_D e^{x+y}d\sigma &= \iint_{D_1} e^{x+y}d\sigma + \iint_{D_2} e^{x+y}d\sigma \\
&= \int_{-1}^{0}\left[\int_{-x-1}^{x+1} e^{x+y}dy\right]dx + \int_0^1\left[\int_{-1+x}^{1-x} e^{x+y}dy\right]dx \\
&= \int_{-1}^{0}\left[e^{x+y}\Big|_{-x-1}^{x+1}\right]dx + \int_0^1\left[e^{x+y}\Big|_{-1+x}^{1-x}\right]dx \\
&= \int_{-1}^{0}\left[e^{2x+1}-e^{-1}\right]dx + \int_0^1\left[e-e^{2x-1}\right]dx \\
&= (\frac{1}{2}e^{2x+1}-e^{-1}x)\Big|_{-1}^{0} + (ex-\frac{1}{2}e^{2x-1})\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{2}e-0-\frac{1}{2}e^{-1}-e^{-1}+e-\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}e^{-1} \\
&= e-e^{-1}.
\end{aligned}
$$

也可以将 D 视为两个 Y 型区域之并：

$$D = D_1 \cup D_2 = \{(x,\, y)|\, -y-1 \le x \le y+1,\, -1 \le y \le 0\} \cup \{(x,\, y)|\, y-1 \le x \le -y+1,\, 0 \le y \le 1\}.$$

所以

$$
\begin{aligned}
\iint_D e^{x+y}d\sigma &= \iint_{D_1} e^{x+y}d\sigma + \iint_{D_2} e^{x+y}d\sigma \\
&= \int_{-1}^{0}\left[\int_{-y-1}^{y+1} e^{x+y}dx\right]dy + \int_0^1\left[\int_{y-1}^{-y+1} e^{x+y}dx\right]dy \\
&= \int_{-1}^{0}\left[e^{x+y}\Big|_{-y-1}^{y+1}\right]dy + \int_0^1\left[e^{x+y}\Big|_{-1+y}^{1-y}\right]dy \\
&= \int_{-1}^{0}\left[e^{2y+1}-e^{-1}\right]dy + \int_0^1\left[e-e^{2y-1}\right]dy \\
&= (\frac{1}{2}e^{2y+1}-e^{-1}y)\Big|_{-1}^{0} + (ey-\frac{1}{2}e^{2y-1})\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{2}e-0-\frac{1}{2}e^{-1}-e^{-1}+e-\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}e^{-1} \\
&= e-e^{-1}.
\end{aligned}
$$

练习 9. 交换二次积分 $\int_1^2\left[\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,\, y)dy\right]dx$ 的积分次序。

解 1. $\int_1^2\left[\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,\, y)dy\right]dx = \iint_D f(x,\, y)d\sigma$，其中 $D = \{(x,\, y)|\, 2-x \le y \le \sqrt{2x-x^2},\, 1 \le x \le 2\}$ 视为 X 型区域。

2. D 也可视为 Y 型区域：$D = \{(x,\, y)|\, 2-y \le x \le 1+\sqrt{1-y^2},\, 0 \le y \le 1\}$。所以

$$\int_1^2\left[\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,\, y)dy\right]dx = \iint_D f(x,\, y)d\sigma = \int_0^1\left[\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,\, y)dx\right]dy.$$

练习 10. 通过交换积分次序计算二次积分 $\int_0^2 dx\int_x^2 e^{-y^2}dy$。

解 1. $\int_0^2 \left[\int_x^2 e^{-y^2}dy\right]dx = \iint_D f(x,\, y)d\sigma$，其中 $D=\{(x,\, y)|\, x\le y\le 2,\, 0\le x\le 2\}$ 视为 X 型区域。
2. D 也可视为 Y 型区域：$D=\{(x,\, y)|\, 0\le x\le y,\, 0\le y\le 2\}$。所以

$$
\begin{aligned}
\int_0^2 \left[\int_x^2 e^{-y^2}dy\right]dx &= \iint_D f(x,\, y)d\sigma \\
&= \int_0^2 \left[\int_0^y e^{-y^2}dx\right]dy \\
&= \int_0^2 e^{-y^2}ydy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 e^{-y^2}dy^2 \\
&= \frac{1}{2}\int_0^4 e^{-u}du \\
&= -\frac{1}{2}e^{-u}\Big|_0^4 = \frac{1}{2}(1-e^{-4}).
\end{aligned}
$$