第 09 周作业解答

练习 1. 求平面 $3x-2y+5z-12=0$ 上以点 $(-2, 1, 4)$ 为圆心且半径为 4 的圆周的方程。

解

$$\begin{cases}3x-2y+5z-12=0\\(x+2)^2+(y-1)^2+(z-4)^2=4^2\end{cases}$$

练习 2. 求到点 $A(1, -1, 1)$ 与 $B(2, 1, -1)$ 等距离的点的轨迹。

解设点 $P(x, y, z)$ 到 A，B 距离相等，则 $|AP|=|BP|$，所以

$$\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2}.$$

两边平方，化简整理可得

$$2x+4y-4z-3=0$$

这是该轨迹的方程。

练习 3. 设函数 $f(x, y)=x^2+y^2-xy\sin\frac{y}{x}$，试求 $f(1, 2)$，$f(x+y, x-y)$ 及 $f(tx, ty)$。

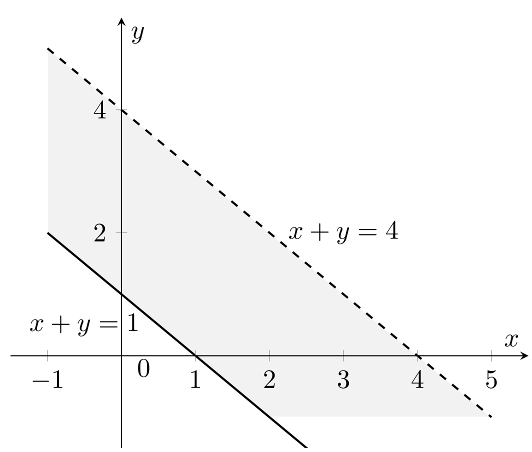
解

$$\begin{aligned}f(1, 2)&=1^2+2^2-1\times 2\times\sin\frac{2}{1}=5-2\sin 2\\f(x+y, x-y)&=(x+y)^2+(x-y)^2-(x+y)(x-y)\sin\frac{x-y}{x+y}\\&=2x^2+2y^2-(x^2-y^2)\sin\frac{x-y}{x+y}\\f(tx, ty)&=(tx)^2+(ty)^2-(tx)(ty)\sin\frac{ty}{tx}\\&=t^2(x^2+y^2-xy\sin\frac{y}{x})\end{aligned}$$

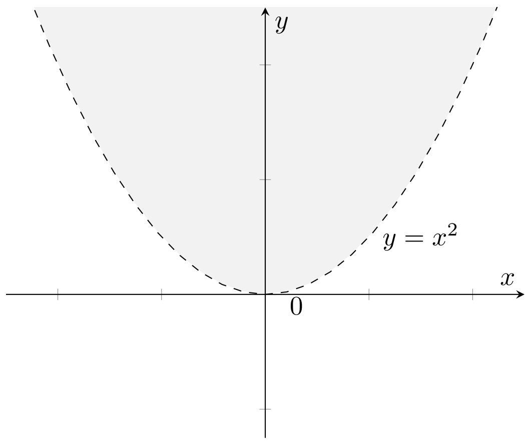
练习 4. 作出下列区域图形，判断区域是开区域、闭区域，或者都不是？

(1) $\{(x, y)|\, 1\le x+y<4\}$；(2) $\{(x, y)|\, y>x^2\}$

解 (1) 非开非闭



(2) 开区域



练习 5. 指出下列函数的定义域:

(1) $z=\sqrt{x}-y$; (2) $z=\ln(-x-y-1)$; (3) $z=\frac{1}{\sqrt{2-x^2-y^2}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$

解 (1) $D=\{(x,\,y)|\,x\geq 0\}$; (2) $D=\{(x,\,y)|\,x+y<-1\}$; (3) $D=\{(x,\,y)|\,1<x^2+y^2<2\}$

练习 6. 求极限:

(1) $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,\,3)}\frac{\sin(xy)}{x}$; (2) $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,\,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}$; (3) $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,\,1)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

解 (1)

$$\lim_{(x,\,y)\to(0,\,3)}\frac{\sin(xy)}{x}=\lim_{(x,\,y)\to(0,\,3)}\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot y\xlongequal{x=xy}\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}\cdot\lim_{(x,\,y)\to(0,\,3)}y=1\times 3=3$$

(2)

$$\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)}\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot y$$

注意到

$$0\leq\frac{x^2}{x^2+y^2}\leq 1$$

说明 $\frac{x^2}{x^2+y^2}$ 是有界量。而在 $(x,\,y)\to(0,\,0)$ 过程中, y 是无穷小量。因为有界量与无穷小量的乘积还是无穷小量, 所以

$$\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=0$$

(3) 因为 $(0,\,1)$ 是在 $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ 的定义域内, 所以

$$\lim_{(x,\,y)\to(0,\,1)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\frac{0^2-1^2}{0^2+1^2}=-1.$$

练习 7. 求下列函数的偏导数: (1) $z=x^3y-y^3x$; (2) $z=x^2\sin(2y)$.

解 (1)

$$z_x=\left(x^3y-y^3x\right)'_x=3x^2y-y^3$$
$$z_y=\left(x^3y-y^3x\right)'_y=x^3-3y^2x$$

(2)

$$
\begin{aligned}
z_x &= \left(x^2 \sin(2y)\right)'_x = 2x \sin(2y) \\
z_y &= \left(x^2 \sin(2y)\right)'_y = 2x^2 \cos(2y)
\end{aligned}
$$