第 11 周作业解答

练习 1. 求向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 7 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ 的一组极大无关组，并将其余向量表示成极大无关组的线性组合。

解

$$
\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ -1 & -3 & -5 & -2 \\ 2 & -1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ -1 & -3 & -5 & -2 \\ 2 & -1 & -4 & -3 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[\substack{r_4+r_1 \\ r_5-2r_1}]{\substack{r_2+2r_1 \\ r_3-3r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 10 & 5 \\ 0 & -4 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -14 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{-\frac{1}{4}\times r_3 \\ -\frac{1}{7}\times r_5}]{\frac{1}{5}\times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[r_5-r_2]{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

可见

- $r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4) = 2$，说明极大无关组应含 2 个向量；
- 从最后简化的阶梯型矩阵容易看出：α_1, α_2 线性无关，所以 α_1, α_2 构成一极大无关组；
- 也是从最后简化的阶梯型矩阵看出：

$$
\alpha_3 = -\alpha_1 + 2\alpha_2, \qquad \alpha_4 = -\alpha_1 + \alpha_2.
$$

练习 2. 用基础解系表示齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 6x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}$ 的通解。

解

$$
\left(A \mid 0 \right) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-r_1 \\ r_4-3r_1}]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 & 0 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[\substack{r_4-2r_2 \\ r_1+r_2}]{r_3-2r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(-1)\times r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

1. 从最后简化的阶梯型矩阵看出，原方程组同解于：

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad +2x_3+ \quad x_4- \quad 2x_5 = 0 \\ \quad\quad x_2 \quad -x_3+ \quad 3x_4- \quad x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 - x_4 + 2x_5 \\ x_2 = x_3 - 3x_4 + x_5 \end{cases}$$

2. 自由变量：x_3, x_4, x_5

3. 基础解系：

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. 通解：

$$x = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + c_3\xi_3$$

其中 c_1, c_2, c_3 为任意常数。

练习 3. 用 “特解 + 基础解系的线性组合” 的形式，表示线性方程组 $\begin{cases} x_1+ \ 2x_2+ \ x_3+ \ x_4- \ x_5 = 1 \\ \quad\quad x_2+ \ x_3+ \ x_4 \quad\quad = 1 \\ 2x_1+ \ 3x_2+ \ x_3+ \ 2x_4- \ x_5 = 3 \end{cases}$ 的通解。

解

$$\left(A \mid b \right) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 + r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[r_1 - r_3]{r_2 - r_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1 - 2r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

1. 从最后简化的阶梯型矩阵看出，原方程组同解于：

$$\begin{cases} x_1 \quad -x_3 \quad\quad\quad\quad = 1 \\ \quad x_2 \ +x_3 \quad\quad -x_5 = -1 \\ \quad\quad\quad\quad x_4 \ +x_5 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 + x_5 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$$

2. 自由变量：x_3, x_5

3. 原方程组特解：取自由变量 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，得特解 $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$。

4. 导出组 $Ax=0$ 同解于

$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_3 + x_5 \\ x_4 = -x_5 \end{cases}.$$

分别取 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，得基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5. 通解：

$$x = \eta + c_1\xi_1 + c_2\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

其中 c_1, c_2 为任意常数。