第 8 章 α：向量的基本概念

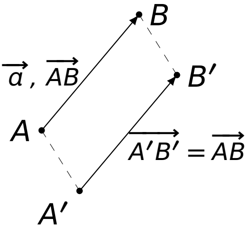
数学系　梁卓滨

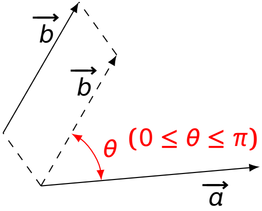
2017.07 暑期班

提要

- 向量的基本概念
  - 向量的线性运算
  - 向量的长度
  - 向量间的夹角
  - 向量的投影
- 向量的坐标表示、计算
  - 计算向量的线性运算、长度、夹角、投影
- 向量的数量积
- 向量的向量积

- 具有长度（大小）及方向的物理量：如力、速度等等
- 能够转化成什么数学量，从而进行运算推演？





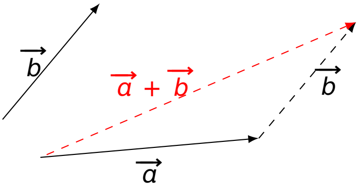
- 向量的定义：“箭头”。向量的表示：$\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$
- 注 向量与位置无关：通过平移能够重合的“箭头”，视为同一向量。
- 零向量：$\vec{0}$。单位向量 $\vec{a}$：$|\vec{a}| = 1$。
- 向量的夹角 θ：

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$\left.\begin{array}{l} \theta = 0 \Leftrightarrow \vec{a},\ \vec{b}\ \text{同向} \\ \theta = \pi \Leftrightarrow \vec{a},\ \vec{b}\ \text{反向} \end{array}\right\} \vec{a} \parallel \vec{b}$$

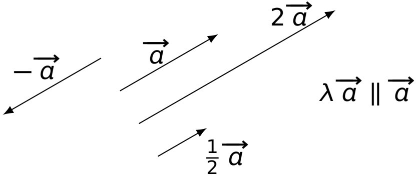
向量的线性运算：加法、数乘

加法：$\vec{a} + \vec{b}$



数乘：$\lambda \vec{a} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

- $\lambda \vec{a}$ 的方向：
$$\begin{cases} \lambda \geq 0, & \lambda \vec{a} \text{与} \vec{a} \text{同向} \\ \lambda < 0, & \lambda \vec{a} \text{与} \vec{a} \text{反向} \end{cases}$$
- $\lambda \vec{a}$ 的长度：$|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$

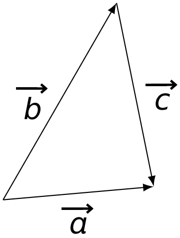


运算律 设为 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 为向量，$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$，则

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$；
- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$；
- $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$；
- $\mu(\lambda \vec{a}) = (\mu\lambda)\vec{a}$；
- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$； $\quad 0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$.

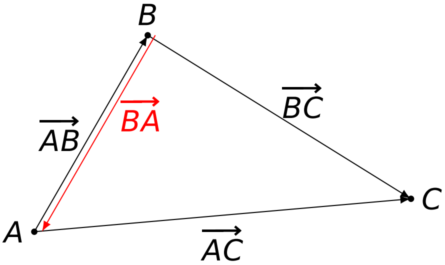
例 如图，用另外两向量表示第三个向量：

- $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$
- $\vec{b} = \vec{a} - \vec{c}$
- $\vec{c} = -\vec{b} + \vec{a}$

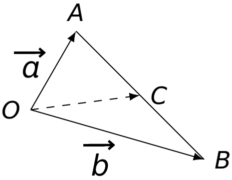


例 验证对任何三点 A, B, C，总成立

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}, \qquad \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$$



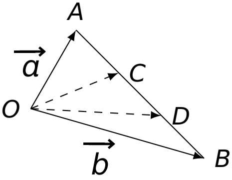
例 如图，设 C 是线段 $\overline{AB}$ 的二等分点，试用 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{OC}$



解

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\vec{a}+\frac{1}{2}(-\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$$

例 如图，设 C, D 是线段 $\overline{AB}$ 的三等分点，试用 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$

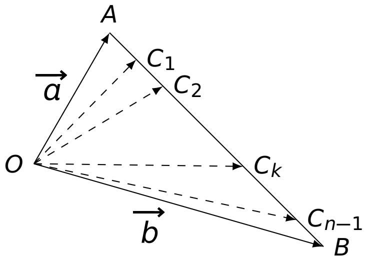


解

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\vec{a}+\frac{1}{3}(-\vec{a}+\vec{b})=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\vec{a}+\frac{2}{3}(-\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$$

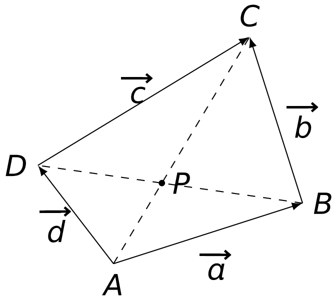
如图，设 $C_1, C_2, \cdots, C_{n-1}$ 是线段 $\overline{AB}$ 的 n 等分点，试用 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ 表示其中任意等分点 C_k



解

$$\overrightarrow{OC_k} = \frac{n-k}{n}\overrightarrow{a} + \frac{k}{n}\overrightarrow{b}$$

例 如图，设该四边形对角线互相平分，证明该四边形为平行四边形。



证明 往证：$\vec{a} = \vec{c}$。这是：

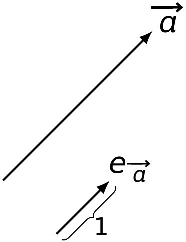
$$\vec{a} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{DP} = \vec{c}.$$

方向向量

性质 设 $\vec{a} \neq 0$，定义

$$e_{\vec{a}} := \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}.$$

则 $e_{\vec{a}}$ 是与 $\vec{a}$ 同向的单位向量。



证明

- 因为 $\frac{1}{|\vec{a}|} > 0$，所以 $e_{\vec{a}}$ 与 $\vec{a}$ 同向。
- $|e_{\vec{a}}| = \left|\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}\right| = \left|\frac{1}{|\vec{a}|}\right| \cdot |\vec{a}| = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| = 1$。

注 $e_{\vec{a}}$ 也称为 $\vec{a}$ 的单位化向量，或方向向量。

平行向量

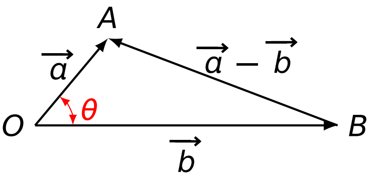
性质 设有两向量 $\overrightarrow{a} \neq 0$ 及 $\overrightarrow{b}$，则

$$\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{存在}\lambda \in \mathbb{R},\ \text{使得}\ \overrightarrow{b} = \lambda \overrightarrow{a}$$

向量夹角

性质 设 θ 是向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 夹角，则

$$\cos\theta = \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2}{2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$



证明 这是由三角形的余弦定理：

$$|BA|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 - 2|OA|\cdot|OB|\cdot\cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta$$

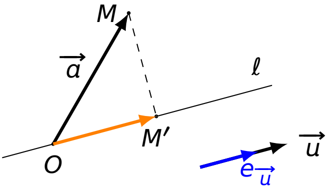
向量的投影

如图，存在唯一的数 λ，使得：

$$\overrightarrow{OM'} = \lambda e_{\vec{u}}$$

该 λ 称为 $\vec{a}$ 在 $\vec{u}$ 方向上的投影，记为：

$$\lambda = \mathrm{Prj}_{\vec{u}}\,\vec{a}$$

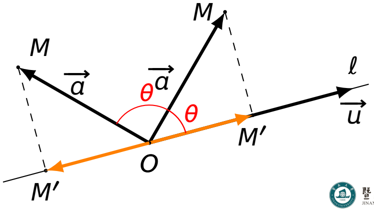


性质 设 θ 为 $\vec{a}$ 和 $\vec{u}$ 的夹角，则成立

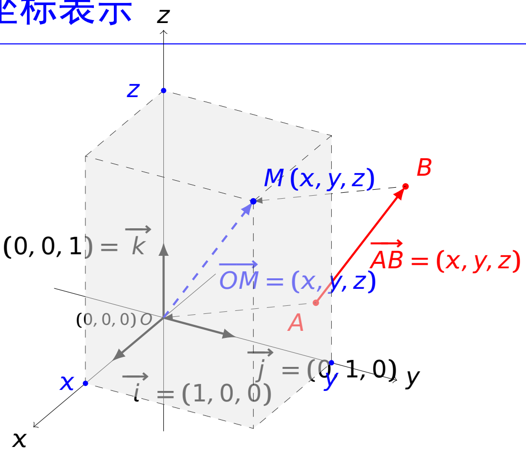
$$\mathrm{Prj}_{\vec{u}}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos\theta, \qquad \overrightarrow{OM'} = \big(|\vec{a}|\cos\theta\big)e_{\vec{u}}.$$

证明 只需证 $\overrightarrow{OM'}$ 和 $\big(|\vec{a}|\cos\theta\big)e_{\vec{u}}$ 方向相同，长度也相同。分情况：

- $\theta \le \frac{\pi}{2}$
- $\theta \ge \frac{\pi}{2}$



点、向量的坐标表示



- 点 $M \longleftrightarrow$ 三元数组 (x, y, z)：以 (x, y, z) 作为点 M 的坐标
- $\overrightarrow{AB} \overset{\text{平移}}{\longleftrightarrow} \overrightarrow{OM}$：以 (x, y, z) 作为向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标

注 三元数组 (x, y, z) 同时作为点 M 和向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标

性质 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标为 (x, y, z) 当且仅当 $\overrightarrow{AB} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$。即

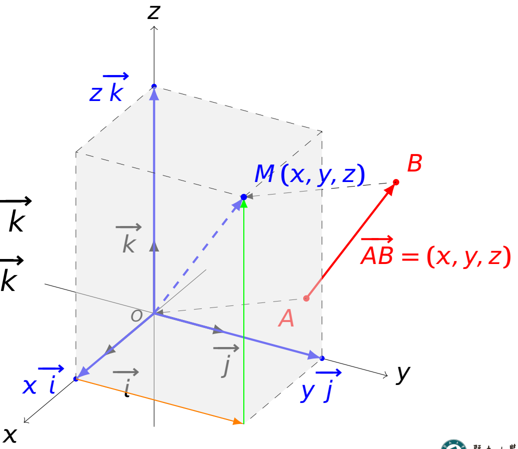
$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

注 以后直接写：$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$

证明

- 必要性

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{AB} = (x, y, z) \\ \Rightarrow \quad & \text{点}M\text{坐标为}(x, y, z) \\ \Rightarrow \quad & \overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} \\ ?\Rightarrow \quad & \overrightarrow{AB} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} \end{aligned}$$



- 充分性：略

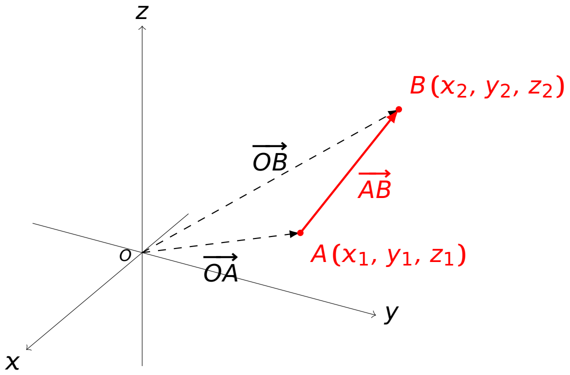
例 设有两点 $A=(x_1,y_1,z_1)$ 和 $B=(x_2,y_2,z_2)$，则

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,\, y_2-y_1,\, z_2-z_1)$$

证明 这是

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\left(x_2\overrightarrow{i}+y_2\overrightarrow{j}+z_2\overrightarrow{k}\right)-\left(x_1\overrightarrow{i}+y_1\overrightarrow{j}+z_1\overrightarrow{k}\right)$$

$$=(x_2-x_1)\overrightarrow{i}+(y_2-y_1)\overrightarrow{j}+(z_2-z_1)\overrightarrow{k}$$



利用坐标值，可以方便地计算：

- 向量的线性运算
- 向量的长度
- 向量间的夹角
- 向量的投影

利用坐标值计算向量的线性运算

性质 设向量 $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\overrightarrow{b} = (b_x, b_y, b_z)$，设 $\lambda \in \mathbb{R}$，则

$$\overrightarrow{a} \pm \overrightarrow{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$$

$$\lambda \overrightarrow{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

证明 这是

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} &= (a_x, a_y, a_z) + (b_x, b_y, b_z) \\
&= \left(a_x \overrightarrow{i} + a_y \overrightarrow{j} + a_z \overrightarrow{k}\right) + \left(b_x \overrightarrow{i} + b_y \overrightarrow{j} + b_z \overrightarrow{k}\right) \\
&= (a_x + b_x) \overrightarrow{i} + (a_y + b_y) \overrightarrow{j} + (a_z + b_z) \overrightarrow{k} \\
&= (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda \overrightarrow{a} &= \lambda (a_x, a_y, a_z) = \lambda \left(a_x \overrightarrow{i} + a_y \overrightarrow{j} + a_z \overrightarrow{k}\right) \\
&= \lambda a_x \overrightarrow{i} + \lambda a_y \overrightarrow{j} + \lambda a_z \overrightarrow{k} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)
\end{aligned}$$

例 设向量 $\overrightarrow{a}=(7,-1,10)$, $\overrightarrow{b}=(2,1,2)$，向量 $\overrightarrow{x}$ 满足 $\overrightarrow{a}=2\overrightarrow{b}-3\overrightarrow{x}$。求 $\overrightarrow{x}$

解

$$\begin{aligned}\overrightarrow{x} &= \frac{1}{3}(2\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}) = \frac{1}{3}[(4,2,4)-(7,-1,10)] \\ &= \frac{1}{3}(-3,3,-6) = (-1,1,-2)\end{aligned}$$

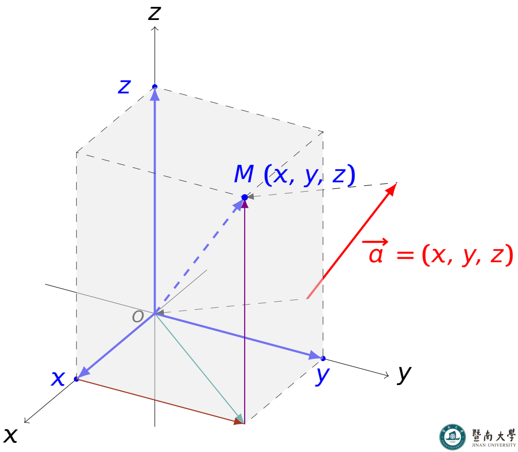
利用坐标值计算向量的长度

性质 向量 $\overrightarrow{a} = (x, y, z)$ 的长度是

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

证明 如图, 平移 $\overrightarrow{a}$ 得 $\overrightarrow{OM}$, 则

$$|\overrightarrow{a}|^2 = \left|\overrightarrow{OM}\right|^2 = x^2 + y^2 + z^2$$



性质 设点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$，则

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

证明 这是

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\Rightarrow \quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

例 设点 $A(4, 0, 5)$ 和 $B(7, 1, 3)$，求 $|\overrightarrow{AB}|$ 及 $e_{\overrightarrow{AB}}$。

解

$$\overrightarrow{AB} = (7-4, 1-0, 3-5) = (3, 1, -2)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$$

$$e_{\overrightarrow{AB}} = \frac{1}{|\overrightarrow{AB}|}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{\sqrt{14}}(3, 1, -2) = \left(\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}\right)$$

利用坐标值计算向量的夹角

性质 设 θ 为向量 $\overrightarrow{a}=(a_x, a_y, a_z)$ 和 $\overrightarrow{b}=(b_x, b_y, b_z)$ 的夹角，则

$$\cos\theta=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|}.$$

证明 由三角形余弦定理，成立

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{|\overrightarrow{a}|^2+|\overrightarrow{b}|^2-|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|^2}{2|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|}\\ &= \frac{\left(a_x^2+a_y^2+a_z^2\right)+\left(b_x^2+b_y^2+b_z^2\right)-\left[(a_x-b_x)^2+(a_y-b_y)^2+(a_z-b_z)^2\right]}{2|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|}\\ &= \frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|}\end{aligned}$$

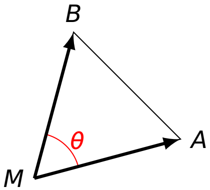
例 设有三点 $M(1, 1, 1)$, $A(2, 2, 1)$, $B(2, 1, 2)$，计算角 $\theta=\angle AMB$。

利用坐标值计算向量的夹角

性质 设 θ 为向量 $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\overrightarrow{b} = (b_x, b_y, b_z)$ 的夹角，则

$$\cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|}.$$

例 设有三点 $M(1, 1, 1)$, $A(2, 2, 1)$, $B(2, 1, 2)$，计算角 $\theta = \angle AMB$。



解

$$\overrightarrow{MA} = (1, 1, 0), \qquad \overrightarrow{MB} = (1, 0, 1)$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{1\cdot1 + 1\cdot0 + 0\cdot1}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

利用坐标值计算向量的投影

性质 设向量 $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\overrightarrow{b} = (b_x, b_y, b_z)$，则

$$\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\overrightarrow{b}|}.$$

证明 这是

$$\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}| \cdot \cos\theta = |\overrightarrow{a}| \cdot \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\overrightarrow{b}|}.$$

例 设 $\overrightarrow{a} = (1, -3, 2)$，$\overrightarrow{b} = (-2, 0, 3)$，计算投影 $\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a}$。

解

$$\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a} = \frac{1 \cdot (-2) + (-3) \cdot 0 + 2 \cdot 3}{\sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 3^2}} = \frac{4}{\sqrt{13}}.$$

向量的数量积

定义 设向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$，定义 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 数量积为：

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

注 求夹角、投影的公式可以改写为

$$\cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\mathrm{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \vec{a} \cdot e_{\vec{b}}$$

性质 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\theta$，特别地

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2, \qquad \vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

例 设空间中三个点 $C(1, -1, 2)$，$A(3, 3, 1)$，$B(3, 1, 3)$。令 $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$，$\vec{b} = \overrightarrow{CB}$，$\theta = \angle(\vec{a}, \vec{b})$。求 $\vec{a} \cdot \vec{b}$，θ，$\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\vec{a}$。

解 1. $\vec{a} = \overrightarrow{CA} = (2, 4, -1)$，$\vec{b} = \overrightarrow{CB} = (2, 2, 1)$

2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 = 11$

3. $\cos\theta = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \dfrac{11}{3\sqrt{21}}$，所以 $\theta = \arccos\dfrac{11}{3\sqrt{21}} \approx 36.9^\circ$

4. $\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\vec{a} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \dfrac{11}{3}$

数量积的运算律

交换律 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

分配律 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

结合律 $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$

证明 设 $\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b}=(b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c}=(c_x, c_y, c_z)$，则

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=b_xa_x+b_ya_y+b_za_z=\vec{b}\cdot\vec{a}$$

$$\begin{aligned}(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}&=(a_x+b_x, a_y+b_y, a_z+b_z)\cdot(c_x, c_y, c_z)\\&=(a_x+b_x)c_x+(a_y+b_y)c_y+(a_z+b_z)c_z\\&=a_xc_x+a_yc_y+a_zc_z+b_xc_x+b_yc_y+b_zc_z\\&=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}\end{aligned}$$

例 已知 $|\overrightarrow{a}|=2$，$|\overrightarrow{b}|=4$，若 $\overrightarrow{a}+\lambda\overrightarrow{b}$ 与 $\overrightarrow{a}-\lambda\overrightarrow{b}$ 互相垂直，则 $\lambda=$ ________。

解

$$\begin{aligned}
0 &= (\overrightarrow{a}+\lambda\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{a}-\lambda\overrightarrow{b}) \\
&= \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}+\overrightarrow{a}\cdot(-\lambda\overrightarrow{b})+(\lambda\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{a}+(\lambda\overrightarrow{b})\cdot(-\lambda\overrightarrow{b}) \\
&= \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}-\lambda\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\lambda\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}-\lambda^2\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{b} \\
&= |\overrightarrow{a}|^2-\lambda^2|\overrightarrow{b}|^2
\end{aligned}$$

所以

$$\lambda^2=\frac{|\overrightarrow{a}|^2}{|\overrightarrow{b}|^2}=\frac{2^2}{4^2}=\frac{1}{4} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda=\pm\frac{1}{2}.$$

方向角

定义 向量 $\overrightarrow{a}=(a_x,a_y,a_z)$ 的三个方向角：

α: $\overrightarrow{a}$ 与 x 轴正向的夹角，即 $\alpha=\angle(\overrightarrow{a},\overrightarrow{i})$

β: $\overrightarrow{a}$ 与 y 轴正向的夹角，即 $\beta=\angle(\overrightarrow{a},\overrightarrow{j})$

γ: $\overrightarrow{a}$ 与 z 轴正向的夹角，即 $\gamma=\angle(\overrightarrow{a},\overrightarrow{k})$

方向角的计算

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{i}}{|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{i}|}=\frac{a_x}{|\overrightarrow{a}|},\qquad \cos\beta=\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{j}}{|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{j}|}=\frac{a_y}{|\overrightarrow{a}|},$$

$$\cos\gamma=\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{k}}{|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{k}|}=\frac{a_z}{|\overrightarrow{a}|}.$$

可见

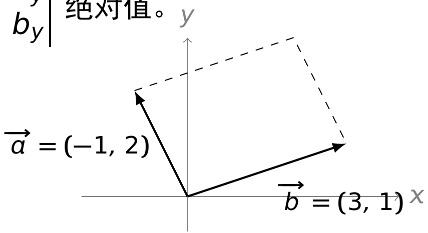
$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\frac{1}{|\overrightarrow{a}|}(a_x,a_y,a_z)=e_{\overrightarrow{a}}$$

二阶行列式

- 定义 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，称为 二阶行列式
- 例 $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 1 - 2\cdot 3 = -7$， $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$
- 反称性

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

- 几何意义 平面向量 $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y)$, $\overrightarrow{b} = (b_x, b_y)$ 所张成平行四边形面积为的 $\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$ 绝对值。



三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$$= 4\cdot(-5) - 3\cdot 5 + 2\cdot 5 = -25$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -9 & 16 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -9 \end{vmatrix}$$

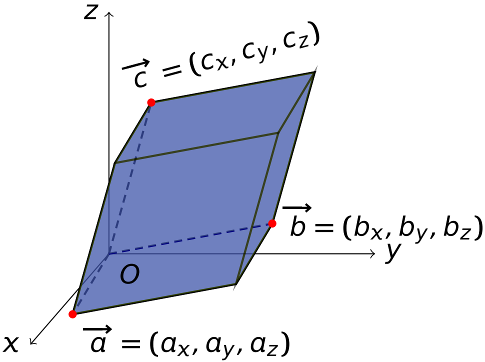
$$= 1\cdot(-12) + 1\cdot 16 + 1\cdot(-6) = -2$$

性质 交换行列式的两行、或两列，行列式的值变号。

三阶行列式的几何意义

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 张成平行六面体的体积

$$= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \text{的绝对值}$$



性质 向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$ 不共面的充分必要条件是：

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \neq 0$$

右手规则

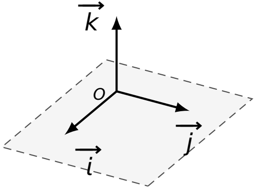
定义 假设 $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\overrightarrow{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\overrightarrow{c} = (c_x, c_y, c_z)$ 不共面，若

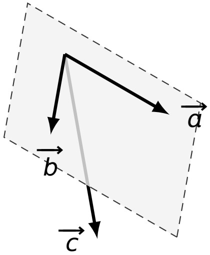
- $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} > 0$，则称有序向量组 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ 符合右手规则；
- $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} < 0$，则称有序向量组 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ 符合左手规则；

例

1. $\overrightarrow{i}=(1,0,0)$, $\overrightarrow{j}=(0,1,0)$, $\overrightarrow{k}=(0,0,1)$ 符合右手规则；
2. $\overrightarrow{a}=(1,1,1)$, $\overrightarrow{b}=(2,3,4)$, $\overrightarrow{c}=(4,9,16)$ 符合右手规则；

解 这是因为 $\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=1>0,\qquad \begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&4\\4&9&16\end{vmatrix}=2>0$





注 若 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ 符合右手规则，则张开的右手手指可做如下指向：

$$食指\to\overrightarrow{a};\quad 中指\to\overrightarrow{b};\quad 拇指\to\overrightarrow{c}$$

性质 假设 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 符合右手规则，则有序向量组

$$\vec{a}, \vec{c}, \vec{b} \quad 及 \quad \vec{a}, \vec{b}, -\vec{c} \quad 符合左手规则$$

证明 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 符合右手规则 $\Rightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} > 0$，所以

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} < 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}, \vec{c}, \vec{b} \quad 符合左手规则$$

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ -c_x & -c_y & -c_z \end{vmatrix} < 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}, \vec{b}, -\vec{c} \quad 符合左手规则$$

注 假设 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 不共面，则任意交换两个向量的次序，或者对任一个向量添加负号，新的有序向量组“手性”相反。

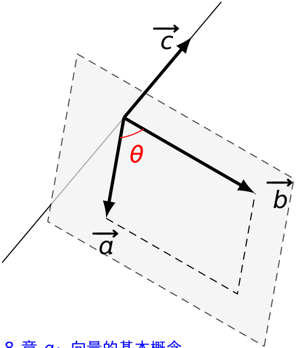
向量积

定义 设有向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$，现按如下方式定义第三个向量 $\vec{c}$：

方向　$\vec{c}$ 与 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 均垂直，且 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 满足右手规则

长度　$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\theta$，其中 $\theta = \angle(\vec{a}, \vec{b})$

称 $\vec{c}$ 为 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的向量积，记作 $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$。



注 1

$|\vec{a} \times \vec{b}| = \vec{a}, \vec{b}$ 张成平行四边形面积

注 2

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \parallel \vec{b}$$

特别地，$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

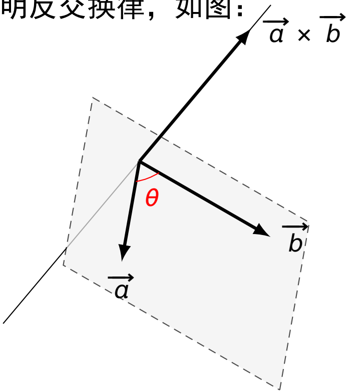
向量积的运算律

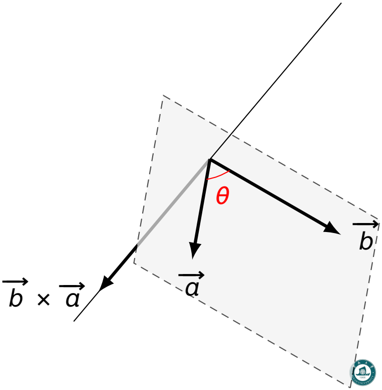
反交换 $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

分配律 $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

结合律 $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$

证明反交换律，如图：





性质 对于 $\overrightarrow{i}=(1,0,0)$, $\overrightarrow{j}=(0,1,0)$, $\overrightarrow{k}=(0,0,1)$，成立

$$\begin{cases} \overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j}=\overrightarrow{k}, & \overrightarrow{j}\times\overrightarrow{k}=\overrightarrow{i}, & \overrightarrow{k}\times\overrightarrow{i}=\overrightarrow{j}, \\ \overrightarrow{j}\times\overrightarrow{i}=-\overrightarrow{k}, & \overrightarrow{k}\times\overrightarrow{j}=-\overrightarrow{i}, & \overrightarrow{i}\times\overrightarrow{k}=-\overrightarrow{j}, \\ \overrightarrow{i}\times\overrightarrow{i}=\overrightarrow{j}\times\overrightarrow{j}=\overrightarrow{k}\times\overrightarrow{k}=0. \end{cases}$$

证明 以为 $\overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j}=\overrightarrow{k}$ 例证明：

$$\left.\begin{array}{r} |\overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j}|=|\overrightarrow{i}|\cdot|\overrightarrow{j}|\cdot\sin\frac{\pi}{2}=1=|\overrightarrow{k}| \\ \overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{k}\text{ 均垂直于 }\overrightarrow{i}\text{ 和 }\overrightarrow{j}\ \Rightarrow\ \overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j}\parallel\overrightarrow{k} \end{array}\right\}\Rightarrow\ \overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j}=\pm\overrightarrow{k}$$

$$\xRightarrow[\overrightarrow{i},\,\overrightarrow{j},\,\overrightarrow{k}\text{ 符合右手规则}]{\overrightarrow{i},\,\overrightarrow{j},\,\overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j}\text{ 符合右手规则}}\ \overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j}=\overrightarrow{k}$$

性质 设 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$，则

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

证明

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}\right) \times \left(b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}\right)$$

$$= a_x b_x(\vec{i} \times \vec{i}\ \vec{i} \times \vec{i}) + a_x b_y(\vec{i} \times \vec{j}\ \vec{i} \times \vec{j}) + a_x b_z(\vec{i}$$

$$a_y b_x(\vec{j} \times \vec{i}\ \vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_y(\vec{j} \times \vec{j}\ \vec{j} \times \vec{j}) + a_y b_z(\vec{j}$$

$$a_z b_x(\vec{k} \times \vec{i}\ \vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y(\vec{k} \times \vec{j}\ \vec{k} \times \vec{j}) + a_z b_z(\vec{k}$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i}\ \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j}\ \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)$$

注

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

例 (1) 设 $\overrightarrow{a}=(2,1,-1)$, $\overrightarrow{b}=(1,-1,2)$，计算 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$

(2) 设 $\overrightarrow{a}=(3,-1,-2)$, $\overrightarrow{b}=(1,2,1)$，计算 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$

解

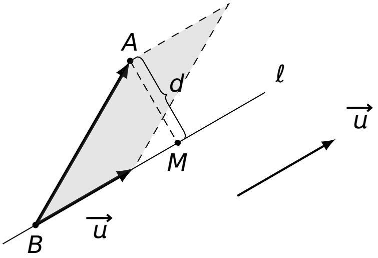
(1)
$$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}\overrightarrow{i}-\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\overrightarrow{j}+\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}\overrightarrow{k}$$
$$=\overrightarrow{i}-5\overrightarrow{j}-3\overrightarrow{k}=(1,-5,-3)$$

(2)
$$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 3 & -1 & -2\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}\overrightarrow{i}-\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}\overrightarrow{j}+\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\overrightarrow{k}$$
$$=3\overrightarrow{i}-5\overrightarrow{j}+7\overrightarrow{k}=(3,-5,7)$$

例 设空间中三个点 $C(1, -1, 2)$，$A(3, 3, 1)$，$B(3, 1, 3)$。令 $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{b} = \overrightarrow{CB}$。求 $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ 及三角形 ΔABC 面积。

解
$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{CA} = (2, 4, -1),$$
$$\overrightarrow{b} = \overrightarrow{CB} = (2, 2, 1),$$
$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \overrightarrow{k}$$
$$= 6\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j} - 4\overrightarrow{k} = (6, -4, -4)$$
$$\Delta ABC\text{面积} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = \frac{1}{2}\sqrt{6^2 + (-4)^2 + (-4)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{68} = \sqrt{17}$$

例 设 ℓ 是过点 $B(-1, 2, -1)$ 的直线，且与 $\overrightarrow{u} = (1, 1, 1)$ 平行。求点 $A(2, 3, 1)$ 到直线 ℓ 的距离 d。



解

$$\overrightarrow{BA} = (3, 1, 2)$$

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{u} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= = \left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-1, -1, 2)$$

$$d = \frac{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{u}\text{张成平行四边形面积}}{|\overrightarrow{u}|} = \frac{|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{u}|}{|\overrightarrow{u}|} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$$