

# 第 12 章 $\alpha$ : 常数项级数的概念和性质

数学系 梁卓滨

2017.07 暑期班

# 无穷级数的概念

给定数列:  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$

- 无穷级数 (级数):  $\sum_{i=1}^{\infty} u_i = u_1 + u_2 + \dots + u_i + \dots$
- 级数的第  $n$  次部分和:  $s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \sum_{i=1}^n u_i$
- 若  $\{s_n\}$  收敛, 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$  (有限数), 则称级数收敛, 并定义

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_i = u_1 + u_2 + \dots + u_i + \dots = s$$

- 若  $\{s_n\}$  发散, 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  不存在, 则称级数发散。发散级数没有和
- 若级数收敛, 称

$$r_n := s - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$$

为级数的余项余项。

## 例 无穷级数

$$\sum_{i=0}^{\infty} aq^i = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^i + \cdots$$

叫做**等比级数**（又称**几何级数**），其中  $a \neq 0$ ， $q$  叫做**级数的公比**。

- 当  $q \neq 1$  时，

$$s_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1} = a(1 + q + \cdots + q^{n-1}) = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

- 当  $|q| < 1$  时， $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{a}{1-q}$ ，级数收敛， $\sum_{i=0}^{\infty} aq^i = \frac{a}{1-q}$
- 当  $|q| > 1$  或  $q = -1$  时， $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  不存在，级数发散

- 当  $q = 1$  时，

$$s_n = a + a + \cdots + a = na \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \text{ 不存在} \quad \Rightarrow \quad \text{级数发散}$$

### 小结 等比级数 ( $a \neq 0$ )

$$\sum_{i=0}^{\infty} aq^i = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^i + \cdots$$

- 当  $|q| < 1$  时, 级数收敛, 且  $\sum_{i=0}^{\infty} aq^i = \frac{a}{1-q}$ 。
- 当  $|q| \geq 1$  时, 级数发散。

注 当  $|q| < 1$  时,  $\sum_{i=1}^{\infty} aq^i = aq + aq^2 + \cdots + aq^i + \cdots = \frac{a}{1-q} - a = \frac{aq}{1-q}$

## 例 无穷级数

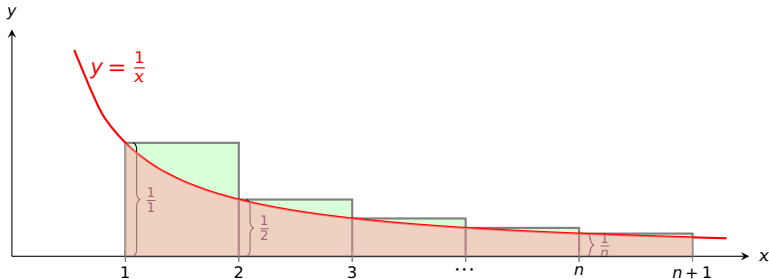
$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{i} + \cdots$$

叫做**调和级数**。这是一个发散的级数。

这是：

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^{n+1} = \ln(n+1) \rightarrow \infty$$

所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  不存在，调和级数发散。



例  $p$  级数 ( $p > 0$ )

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

- 当  $0 < p \leq 1$  时,

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} \geq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \geq \ln(n+1) \rightarrow \infty$$

所以级数发散。

- 当  $p > 1$  时, 级数收敛 (证明在下一节)。

例 判断以下无穷级数的敛散性，收敛的话求出级数的和。

1.  $1 + 2 + 3 + \cdots + n + \cdots$

2.  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \cdots$

解 1.

$$s_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \text{ 不存在} \Rightarrow \text{级数发散}$$

2.

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}, \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n &= 1, \end{aligned}$$

所以级数收敛，并且  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \cdots = 1$

**例** 判断无穷级数  $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$  的敛散性。

**解** 计算部分和  $s_n$ :

- 当  $n$  为偶数时,  $s_n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + 1 - 1 = 0$
- 当  $n$  为奇数时,  $s_n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + 1 - 1 + 1 = 1$

可见极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  不存在, 所以级数发散



性质 1 假设  $k \in \mathbb{R}$  以及  $\sum_{i=1}^{\infty} u_i = s$ , 则  $\sum_{i=1}^{\infty} (ku_i) = ks$ .

证明

$$ku_1 + ku_2 + \cdots + ku_n = k(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = ks_n \rightarrow ks,$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{\infty} (ku_i) = ks.$$

性质 2 假设  $\sum_{i=1}^{\infty} u_i = s$  及  $\sum_{i=1}^{\infty} v_i = \sigma$ , 则  $\sum_{i=1}^{\infty} (u_i \pm v_i) = s \pm \sigma$ .

证明

$$\begin{aligned}(u_1 + v_1) + \cdots + (u_n + v_n) &= (u_1 + \cdots + u_n) + (v_1 + \cdots + v_n) \\ &= s_n + \sigma_n \rightarrow s + \sigma,\end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{\infty} (u_i + v_i) = s + \sigma, \quad \text{同理} \quad \sum_{i=1}^{\infty} (u_i - v_i) = s - \sigma.$$

**性质 3** 在级数中去掉、加上或改变有限项，不会改变级数的敛散性。

性质 4 设  $\sum_{i=1}^{\infty} u_i = s$ , 则

$$(u_1 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}) + \cdots + (u_{n_{k-1}+1} + \cdots + u_{n_k}) + \cdots = s$$

即：加括号后的级数也收敛，并且值不改变。

证明 加括号后的级数，其部分和  $\{A_k\}$ ：

$$A_1 = (u_1 + \cdots + u_{n_1}) = s_{n_1},$$

$$A_2 = (u_1 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}) = s_{n_2},$$

$$\vdots$$

$$A_k = (u_1 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}) + \cdots \\ + (u_{n_{k-1}+1} + \cdots + u_{n_k}) = s_{n_k},$$

正好是原级数部分和  $\{s_n\}$  的子列  $\{s_{n_k}\}$ 。因为  $\lim_{k \rightarrow \infty} s_{n_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ ,

所以加括号后的级数也是收敛，并且值为  $s$ 。

**例** 判断以下的计算出错在哪里？

对级数  $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$  按如下两种方式加括号再运算：

$$\begin{aligned} 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots &= (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots \\ &= 0 + 0 + 0 + \cdots = 0 \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned} 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots &= 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) \cdots \\ &= 1 + 0 + 0 + 0 + \cdots = 1 \end{aligned}$$

**出错原因：**原级数  $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$  不收敛，不能随意加（无穷多个）括号！

性质 5 (收敛的必要条件) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ 。

证明 这是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

例

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} n$  发散, 这是  $n \not\rightarrow 0$ 。
2.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n+1}$  发散, 这是  $(-1)^{n-1} \frac{n}{n+1} \not\rightarrow 0$ 。

注 但  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$  不一定保证级数收敛, 例如:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \text{但} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$