第 10 周作业解答

练习 1. 求向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 7 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ 的一组极大无关组，并将其余向量表示成极大无关组的线性组合。

解

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ -1 & -3 & -5 & -2 \\ 2 & -1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ -1 & -3 & -5 & -2 \\ 2 & -1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_4+r_1 \\ r_5-2r_1}]{\substack{r_2+2r_1 \\ r_3-3r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 10 & 5 \\ 0 & -4 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -14 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{-\frac{1}{4}\times r_3 \\ -\frac{1}{7}\times r_5}]{\frac{1}{5}\times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_5-r_2]{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可见

- $r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4) = 2$，说明极大无关组应含 2 个向量；
- 从最后简化的阶梯型矩阵容易看出：α_1, α_2 线性无关，所以 α_1, α_2 构成一极大无关组；
- 也是从最后简化的阶梯型矩阵看出：

$$\alpha_3 = -\alpha_1 + 2\alpha_2, \qquad \alpha_4 = -\alpha_1 + \alpha_2.$$

练习 2. 用基础解系表示齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 6x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}$ 的通解。

解

$$\begin{pmatrix} A \mid 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-r_1 \\ r_4-3r_1}]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{r_4-2r_2 \\ r_1+r_2}]{r_3-2r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(-1)\times r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

1. 从最后简化的阶梯型矩阵看出，原方程组同解于：

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad +2x_3 + \quad x_4 - \quad 2x_5 = 0 \\ \quad\quad x_2 \quad -x_3 + \quad 3x_4 - \quad x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 - x_4 + 2x_5 \\ x_2 = x_3 - 3x_4 + x_5 \end{cases}$$

2. 自由变量：x_3, x_4, x_5

3. 基础解系：

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

4. 通解：

$$x = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + c_3\xi_3$$

其中 c_1, c_2, c_3 为任意常数。

练习 3. 用 "特解 + 基础解系的线性组合" 的形式，表示线性方程组 $\begin{cases} x_1 + \quad 2x_2 + \quad x_3 + \quad x_4 - \quad x_5 = 1 \\ \quad\quad x_2 + \quad x_3 + \quad x_4 \quad\quad = 1 \\ 2x_1 + \quad 3x_2 + \quad x_3 + \quad 2x_4 - \quad x_5 = 3 \end{cases}$ 的通解。

解

$$\left(A \mid b \right) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 + r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[r_1 - r_3]{r_2 - r_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1 - 2r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

1. 从最后简化的阶梯型矩阵看出，原方程组同解于：

$$\begin{cases} x_1 \quad -x_3 \quad\quad\quad = 1 \\ \quad x_2 \quad +x_3 \quad -x_5 = -1 \\ \quad\quad\quad x_4 \quad +x_5 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 + x_5 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$$

2. 自由变量：x_3, x_5

3. 原方程组特解：取自由变量 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，得特解 $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$。

4. 导出组 $Ax=0$ 同解于

$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_3 + x_5 \\ x_4 = -x_5 \end{cases}.$$

分别取 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，得基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5. 通解：

$$x = \eta + c_1\xi_1 + c_2\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

其中 c_1, c_2 为任意常数。

练习 4. 设 A, B 均为 $m \times n$ 矩阵，证明：$r(A+B) \le r(A) + r(B)$。

解 1. 准备工作（引入向量的语言）

- 设矩阵 A 的 n 列依次为：$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$；矩阵 B 的 n 列依次为：$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$，则矩阵 $A+B$ 的 n 列依次为：$\alpha_1+\beta_1, \alpha_1+\beta_2, \ldots, \alpha_1+\beta_n$。
- 设 $r_1 = r(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = r(A)$，则列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 的极大无关组应包含 r_1 个向量，设 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_{r_1}}$ 是其中一个极大无关组。同样，设 $r_2 = r(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = r(B)$，并假设 $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \ldots, \beta_{j_{r_2}}$ 是列向量组 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ 的一个极大无关组。

2. 显然列向量组

$$\alpha_1+\beta_1, \alpha_1+\beta_2, \ldots, \alpha_1+\beta_n$$

能由向量组

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$$

线性表示，继而也能由向量组

$$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_{r_1}}, \beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \ldots, \beta_{j_{r_2}}$$

线性表示。所以

$$r(\alpha_1+\beta_1, \alpha_1+\beta_2, \ldots, \alpha_1+\beta_n) \le r(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_{r_1}}, \beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \ldots, \beta_{j_{r_2}}),$$

进而

$$r(A+B) = r(\alpha_1+\beta_1, \alpha_1+\beta_2, \ldots, \alpha_1+\beta_n) \le r(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_{r_1}}, \beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \ldots, \beta_{j_{r_2}}) \le r_1+r_2 = r(A)+r(B).$$

练习 5. 设 $A = (a_{ij})_{m\times n}, B = (b_{ij})_{n\times s}$，假设 $AB = O_{m\times s}$。证明：$r(A) + r(B) \le n$。

解 1. 准备工作（引入向量的语言）

- 矩阵 B 的 s 列依次为：$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$，则向量组 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ 的秩等于 B 的秩，即：

$$r(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s) = r(B).$$

- 齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系应包含 $n-r(A)$ 个向量。假设

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_t$$

  是 $Ax=0$ 的一组基础解，其中 $t=n-r(A)$。

2. 证明

由于 $AB=O$，所以

$$O=AB=A(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s)=(A\beta_1, A\beta_2, \ldots, A\beta_s) \quad \Rightarrow \quad A\beta_i=0 \, \forall i=1, 2, \ldots, s$$

说明矩阵 B 的每一列 β_i 都是 $Ax=0$ 的解。所以 β_i 是基础解系 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_t$ 的线性组合。

上述说明向量组 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ 能由向量组 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_t$ 线性表示，所以

$$r(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s) \leq r(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_t)=t=n-r(A),$$

进而

$$r(B) \leq n-r(A).$$