第 11 周作业解答

练习 1. 1. 计算 $\int_L (x+y+yz)ds$，其中曲线 L 是螺旋线 $\gamma(t)=(\sin t,\,\cos t,\,t)$, $0\le t\le 2\pi$。

2. 计算 $\int_L xdx+ydy+zdz$，其中有向曲线 L 的参数方程是 $\gamma(t)=(e^t,\,t,\,t^2)$, $0\le t\le 1$。

3. 计算 $\int_L(\sin z)dx+(\cos z)dy-(xy)^{1/3}dz$，其中有向曲线 L 的参数方程是 $\gamma(\theta)=(\cos^3\theta,\,\sin^3\theta,\,\theta)$, $0\le\theta\le\frac{7}{2}\pi$。

解 1.

$$\begin{aligned}\int_L(x+y+yz)ds&=\int_0^{2\pi}(\sin t+\cos t+t\cos t)\sqrt{[(\sin t)']^2+[(\cos t)']^2+[(t)']^2}dt\\&=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}(\sin t+\cos t+t\cos t)dt=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}t\cos tdt=\sqrt{2}(t\sin t+\cos t)\Big|_0^{2\pi}=0.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\int_L xdx+ydy+zdz&=\int_0^1[e^t\cdot(e^t)'+t\cdot(t)'+t^2\cdot(t^2)']dt\\&=\int_0^1[e^{2t}+t+2t^3]dt=(\frac{1}{2}e^{2t}+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t^4)\Big|_0^1=\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\int_L(\sin z)dx+(\cos z)dy-(xy)^{1/3}dz&=\int_0^{\frac{7}{2}\pi}[\sin\theta\cdot(\cos^3\theta)'+\cos\theta\cdot(\sin^3\theta)'-(\cos^3\theta\sin^3\theta)^{1/3}\cdot(\theta)']d\theta\\&=\int_0^{\frac{7}{2}\pi}[-3\sin^2\theta\cos^2\theta+3\cos^2\theta\sin^2\theta-\cos\theta\sin\theta]d\theta\\&=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{7}{2}\pi}\sin 2\theta d\theta=\frac{1}{4}\cos 2\theta\Big|_0^{\frac{7}{2}\pi}=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

练习 2. 证明曲线积分 $\int_{(1,2)}^{(3,4)}(6xy^2-y^3)dx+(6x^2y-3xy^2)dy$ 与路径无关，并计算积分值。

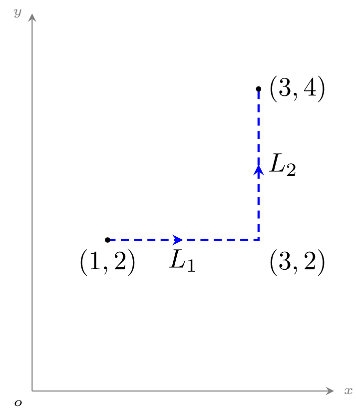
证法一注意到向量场 $F=(6xy^2-y^3,6x^2y-3xy^2)=\nabla f$，这里 $f=3x^2y^2-xy^3$。所以 F 是梯度向量场，故 F 的曲线积分与路径无关，并且

$$\int_{(1,2)}^{(3,4)}(6xy^2-y^3)dx+(6x^2y-3xy^2)dy=f(3,4)-f(1,2)=(3\cdot144-3\cdot64)-(3\cdot4-8)=236.$$

证法二因为在全平面上成立

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}\\6xy^2-y^3&6x^2y-3xy^2\end{vmatrix}=0$$

并且全平面是单连通区域，所以该曲线积分与路径无关。选择 $(1,2)$ 到 $(3,4)$ 的一条路径以计算该曲线积分：令 $L_1:(t,\,2),\,t:1\to3$ 及 $L_2:(3,\,t),\,t:2\to4$，



所以

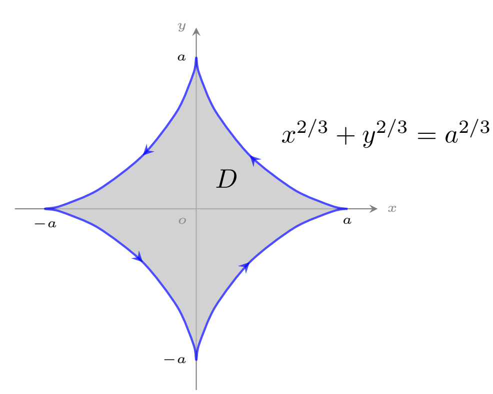
$$\begin{aligned}\int_{(1,2)}^{(3,4)}(6xy^2-y^3)dx+(6x^2y-3xy^2)dy &= \int_{L_1}(6xy^2-y^3)dx+(6x^2y-3xy^2)dy+\int_{L_2}(6xy^2-y^3)dx+(6x^2y-3xy^2)dy\\ &= \int_1^3(6t\cdot 2^2-2^3)dt+\int_2^4(6\cdot 3^2\cdot t-3\cdot 3\cdot t^2)dt\\ &= (12t^2-8t)\Big|_1^3+(27t^2-3t^3)\Big|_2^4\\ &= 236.\end{aligned}$$

练习 3. 利用格林公式计算 $\int_C(2x^3-y^3)dx+(x^3+y^3)dy$，其中 C 是圆周 $x^2+y^2=1$，逆时针方向。

解

$$\begin{aligned}\int_C(2x^3-y^3)dx+(x^3+y^3)dy &= \iint_D\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\\ 2x^3-y^3 & x^3+y^3\end{vmatrix}dxdy\\ &= \iint_D(3x^2+3y^2)dxdy\\ &\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} 3\iint_D\rho^2\cdot\rho d\rho d\theta\\ &= 3\int_0^{2\pi}\left[\int_0^1\rho^3d\rho\right]d\theta = 6\pi\int_0^1\rho^3d\rho=\frac{3}{2}\pi.\end{aligned}$$

练习 4. 利用格林公式的推论 $\text{Area}(D)=\frac{1}{2}\int_{\partial D}-ydx+xdy$ 计算曲线 $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ 所围成区域 D 的面积。



解
边界 ∂D（逆时针方向）的参数方程为 $x = a\cos^3\theta, y = a\sin^3\theta, \theta: 0 \to 2\pi$，所以

$$\begin{aligned}
\text{Area}(D) &= \frac{1}{2}\int_{\partial D} -ydx + xdy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [(-a\sin^3\theta)(a\cos^3\theta)' + (a\cos^3\theta)(a\sin^3\theta)']d\theta \\
&= \frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi} [3\sin^4\theta\cos^2\theta + 3\cos^4\theta\sin^2\theta]d\theta \\
&= \frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\cos^2\theta d\theta \\
&= \frac{3}{8}a^2\int_0^{2\pi} \sin^2 2\theta d\theta \\
&= \frac{3}{8}a^2\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 4\theta}{2} d\theta \\
&= \frac{3}{16}a^2(\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta)\Big|_0^{2\pi} = \frac{3}{8}\pi a^2.
\end{aligned}$$

练习 5. 利用格林公式的推论 $\text{Area}(D) = \frac{1}{2}\int_{\partial D} -ydx + xdy$ 计算半径为 R 的圆的面积。

解设圆周的参数方程为 $x = R\cos\theta, y = R\sin\theta, \theta: 0 \to 2\pi$，由格林公式的推论有，

$$\begin{aligned}
\text{Area}(D) &= \frac{1}{2}\int_{\partial D} -ydx + xdy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \Big[-R\sin\theta\cdot(R\cos\theta)' + R\cos\theta\cdot(R\sin\theta)'\Big]d\theta \\
&= \pi R^2.
\end{aligned}$$

练习 6. 设平面区域 D 具有光滑边界，证明 D 的面积 A 满足：

$$A = \int_{\partial D} xdy = -\int_{\partial D} ydx$$

其中 ∂D 取边界正向。

证明这是

$$\int_{\partial D} xdy = \iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & x \end{vmatrix} dxdy = \iint_D 1dxdy = A$$

以及

$$\int_{\partial D} -ydy = \iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ -y & 0 \end{vmatrix} dxdy = \iint_D 1dxdy = A$$

练习 7. 计算

1. $\iint_\Sigma (x+y+z)dS$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 在 $z \geq h$ 的部分（$0<h<a$）。
2. $\iint_\Sigma (x^2+y^2)dS$，其中 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和平面 $z=1$ 所围成区域的整个的表面。

解 1. Σ 是二元函数 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, $(x,\,y)\in D_{xy}=\{(x,\,y)|\,x^2+y^2\le a^2-h^2\}$ 的图形，所以

$$
\begin{aligned}
\iint_\Sigma (x+y+z)dS \xlongequal{\text{对称性}} & \iint_\Sigma zdS \\
&= \iint_{D_{xy}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy \\
&= \iint_{D_{xy}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy \\
&= a\iint_{D_{xy}} dxdy = a\mathrm{Area}(D_{xy}) = a(a^2-h^2)\pi
\end{aligned}
$$

2. Σ 由两部分 Σ_1 和 Σ_2 组成，其中 Σ_1 是二元函数 $z=f(x,y)=1$, $(x,\,y)\in D_{xy}=\{(x,\,y)|\,x^2+y^2\le 1\}$ 的图形，Σ_2 是二元函数 $z=g(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, $(x,\,y)\in D_{xy}=\{(x,\,y)|\,x^2+y^2\le 1\}$ 的图形，所以

$$
\begin{aligned}
\iint_\Sigma (x^2+y^2)dS &= \iint_{\Sigma_1}(x^2+y^2)dS + \iint_{\Sigma_2}(x^2+y^2)dS \\
&= \iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\cdot\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}dxdy + \iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\cdot\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}dxdy \\
&= \iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy + \iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\cdot\sqrt{2}dxdy \\
&= (1+\sqrt{2})\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy \\
&= (1+\sqrt{2})\iint_{D_{xy}}\rho^2\cdot\rho d\rho d\theta \\
&= (1+\sqrt{2})\int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 \rho^3 d\rho\right]d\theta = \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})\pi.
\end{aligned}
$$