

第 01 周作业解答

练习 1. 利用公式

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

求解二元线性方程

$$\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 3x + 7y = 2 \end{cases}$$

解

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{-3}{-1} = 3, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{1}{-1} = -1$$

练习 2. 行列式 $\begin{vmatrix} k-1 & 2 \\ 2 & k-1 \end{vmatrix} \neq 0$ 的充分必要条件是 k 满足什么条件?

解利用

$$\begin{vmatrix} k-1 & 2 \\ 2 & k-1 \end{vmatrix} = (k-1)^2 - 4 = k^2 - 2k - 3 = (k+1)(k-3) \neq 0$$

所以 $k \neq -1$ 且 $k \neq 3$ 。

练习 3. 按下列步骤求解三元线性方程组

$$\begin{cases} x + y + z = 6 & (1) \\ x + 2y - z = 2 & (2) \\ 2x - 3y - z = -7 & (3) \end{cases}$$

1. 计算三阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix}$ 及 $D_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -7 & -3 & -1 \end{vmatrix}$, 再利用 $x = \frac{D_1}{D}$ 求出 x 。

2. 将第一步求解出的 x , 代入方程 (1)、(2), 得到关于 y, z 的二元线性方程组。此时利用练习 1 的公式, 求解 y 和 z 。

解 (1)

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = (-2) + (-2) + (-3) - 3 - (-1) - 4 = -13$$
$$D_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -7 & -3 & -1 \end{vmatrix} = (-12) + 7 + (-6) - 18 - (-2) - (-14) = -13$$

所以 $x = 1$ 。

(2) 将 $x = 1$ 代入方程 (1)、(2) 得：

$$\begin{cases} y + z = 5 \\ 2y - z = 1 \end{cases}$$

所以

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-6}{-3} = 2, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{-9}{-3} = 3$$

总结 $x = 1, y = 2, z = 3$ 。

练习 4. 设三阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 6$ 。利用行列式的性质计算：以下两个行列式分别是多少？

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} - 2a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} - 2a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} - 2a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{12} & a_{13} \\ 3a_{21} & 6a_{22} & 3a_{23} \\ a_{31} & 2a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

解 利用行列式的基本性质，可得：

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} - 2a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} - 2a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} - 2a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{可加性}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & -2a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -2a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & -2a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}_{\text{两列成比例，故为零}} \xrightarrow{\text{交换2,3列}} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -6$$

以及

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{12} & a_{13} \\ 3a_{21} & 6a_{22} & 3a_{23} \\ a_{31} & 2a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{数乘性}} 3 \begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 2a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 2a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{数乘性}} 3 \cdot 2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot 6 = 36$$