# 第 10 章 *b*：二重积分的计算

数学系　　梁卓滨

2016-2017 学年 II

# Outline

1. 如何计算二重积分？
2. 固定 $x$，先对 $y$ 积分
3. 固定 $y$，先对 $x$ 积分
4. 交换二重积分的积分次序
5. 极坐标下计算二重积分
6. 二重积分的应用

# We are here now...

1. 如何计算二重积分？
2. 固定 $x$，先对 $y$ 积分
3. 固定 $y$，先对 $x$ 积分
4. 交换二重积分的积分次序
5. 极坐标下计算二重积分
6. 二重积分的应用

# 如何计算二重积分：

- 一般方法 化二重积分为“累次积分”：

$$\iint_D f(x, y) d\sigma =$$

# 如何计算二重积分：

- 一般方法 化二重积分为“累次积分”：

$$\iint_D f(x, y)d\sigma = \iint_D f(x, y)dxdy$$

# 如何计算二重积分：

- 一般方法 化二重积分为“累次积分”：

$$\iint_D f(x, y)d\sigma = \iint_D f(x, y)dxdy = \int \quad \int \quad f(x, y)dx \ \ dy$$

# 如何计算二重积分：

- 一般方法 化二重积分为“累次积分”：

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f(x,y)dxdy = \int \left[\int f(x,y)dx\right]dy$$

# 如何计算二重积分：

- 一般方法 化二重积分为“累次积分”：

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f(x,y)dxdy = \int \left[\int_*^* f(x,y)dx\right]dy$$

# 如何计算二重积分：

- 一般方法 化二重积分为“累次积分”：

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_*^* \left[\int_*^* f(x,y)dx\right]dy$$

# 如何计算二重积分：

- 一般方法 化二重积分为“累次积分”：

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_*^* \Big[\int_*^* f(x,y)dx\Big]dy$$

$$= \int_*^* \Big[\int_*^* f(x,y)dy\Big]dx$$

# 如何计算二重积分：

- 一般方法 化二重积分为“累次积分”：

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_*^* \left[\int_*^* f(x,y)dx\right]dy$$
$$= \int_*^* \left[\int_*^* f(x,y)dy\right]dx$$

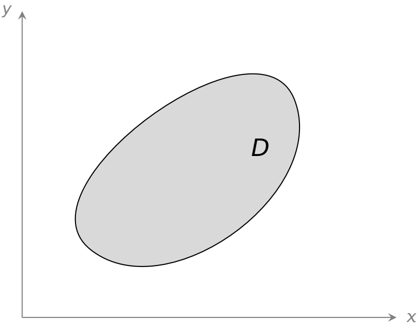
- 问题：如何确定积分上下限？

# We are here now...

1. 如何计算二重积分？
2. 固定 $x$，先对 $y$ 积分
3. 固定 $y$，先对 $x$ 积分
4. 交换二重积分的积分次序
5. 极坐标下计算二重积分
6. 二重积分的应用

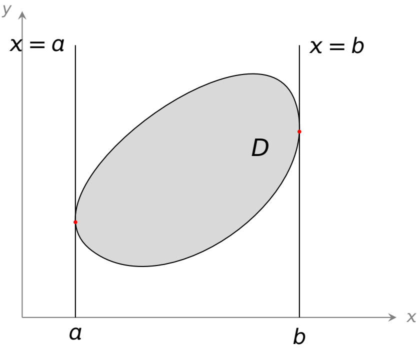
# 固定 $x$，先对 $y$ 积分

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int \left[ \int \qquad f(x,y)dy \right] dx$$



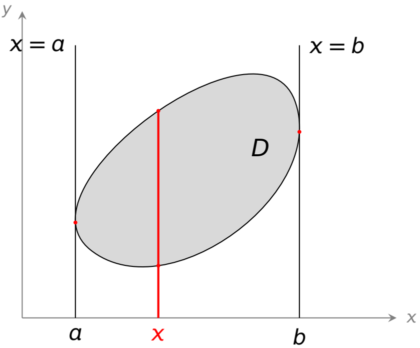
# 固定 $x$，先对 $y$ 积分

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int \left[\int \qquad f(x,y)dy\right]dx$$



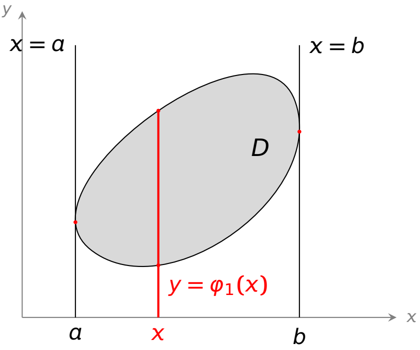
# 固定 $x$，先对 $y$ 积分

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int \left[ \int \qquad f(x,y)dy \right] dx$$



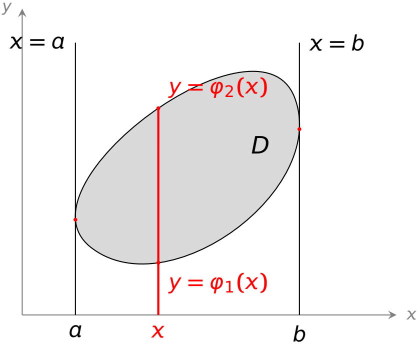
# 固定 $x$，先对 $y$ 积分

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int \left[ \int \qquad f(x,y)dy \right] dx$$



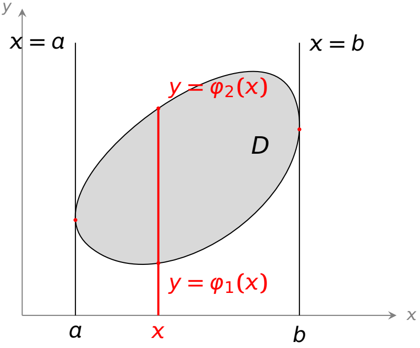
# 固定 $x$，先对 $y$ 积分

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int \left[ \int \quad f(x,y)dy \right] dx$$



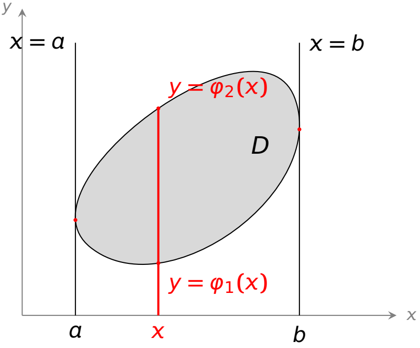
# 固定 $x$，先对 $y$ 积分

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[ \int \qquad f(x,y)dy \right] dx$$



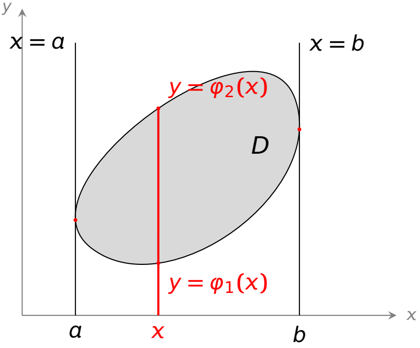
# 固定 $x$，先对 $y$ 积分

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right] dx$$



# 固定 $x$，先对 $y$ 积分

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right] dx$$



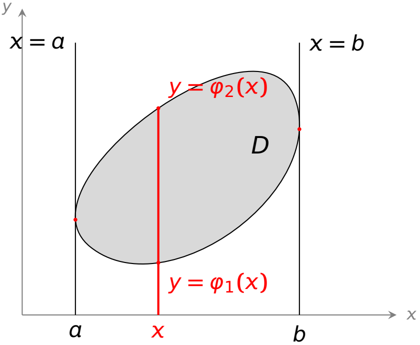

注 上述区域 $D$ 可以表示成

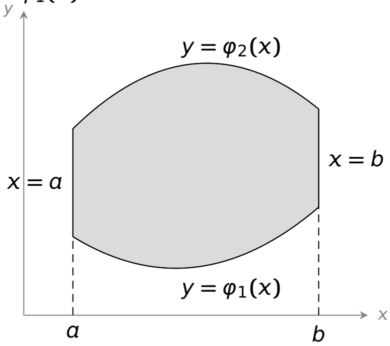
$$D = \{(x,y) | \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x), a \le x \le b\}$$

称为 $X$-型区域。

# 固定 $x$，先对 $y$ 积分

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right] dx$$



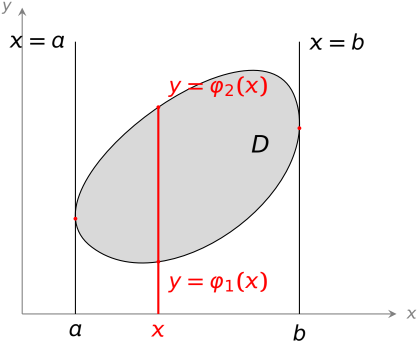

注 上述区域 $D$ 可以表示成

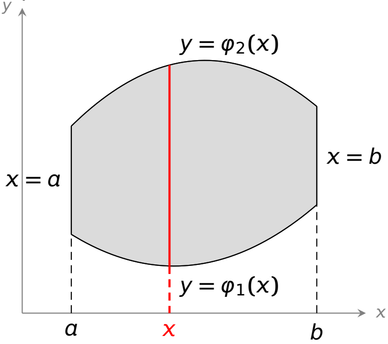
$$D = \{(x,y) | \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x),\ a \le x \le b\}$$

称为 $X$-型区域。

# 固定 $x$，先对 $y$ 积分

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right]dx$$




**注** 上述区域 $D$ 可以表示成

$$D = \{(x,y) \mid \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x),\ a \le x \le b\}$$

称为 $X$-型区域。

# 二次积分化为累次积分：几何解释

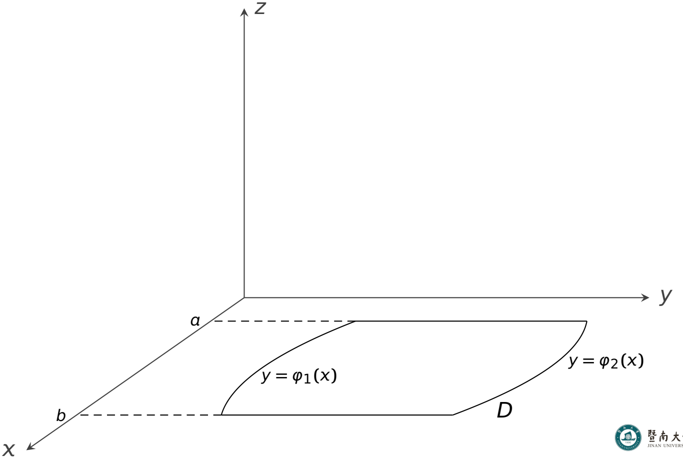
- 设 $D=\{(x,y)|\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x),\ a\le x\le b\}$，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx$$

# 二次积分化为累次积分：几何解释

- 设 $D=\{(x,y)|\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x),\ a\le x\le b\}$，则

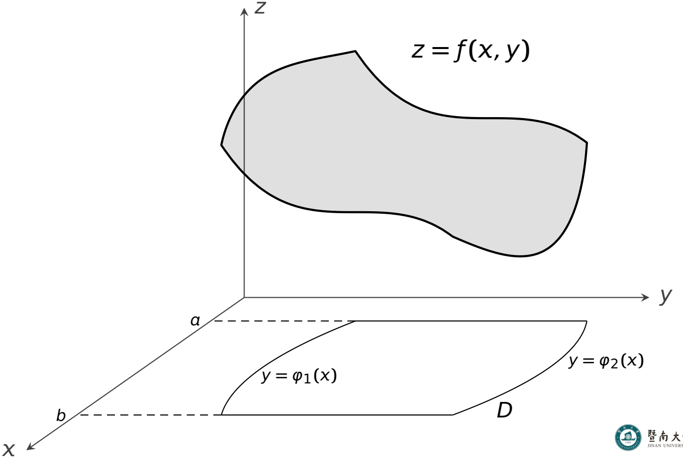
$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx$$



# 二次积分化为累次积分：几何解释

- 设 $D=\{(x,y)|\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x),\ a\le x\le b\}$，则

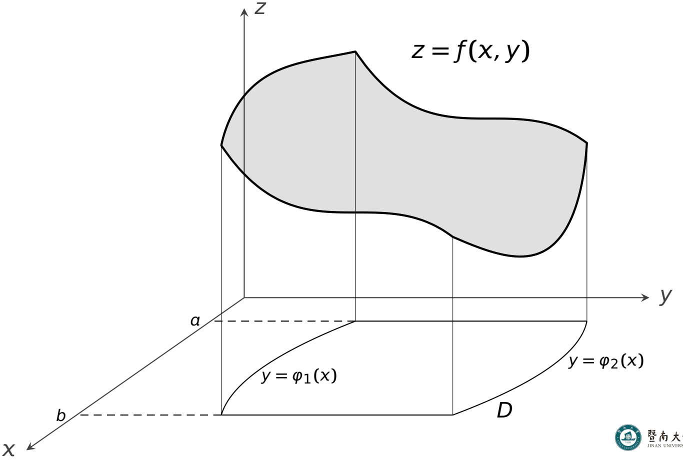
$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx$$



# 二次积分化为累次积分：几何解释

- 设 $D=\{(x,y)|\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x),\ a\le x\le b\}$，则

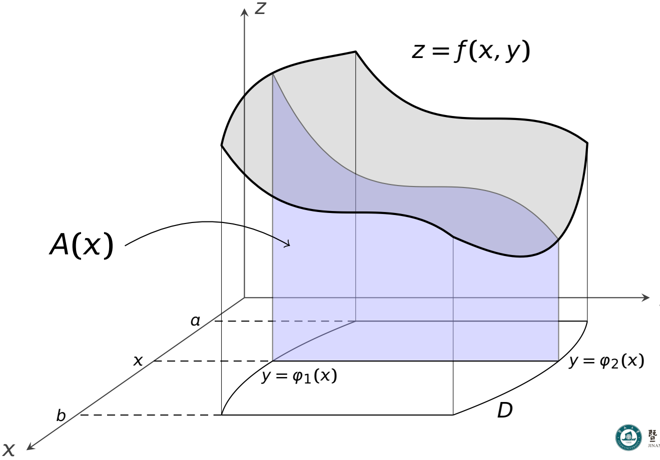
$$\iint_D f(x,y)d\sigma = V \qquad \int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx$$



# 二次积分化为累次积分：几何解释

- 设 $D=\{(x,y)|\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x),\ a\le x\le b\}$，则

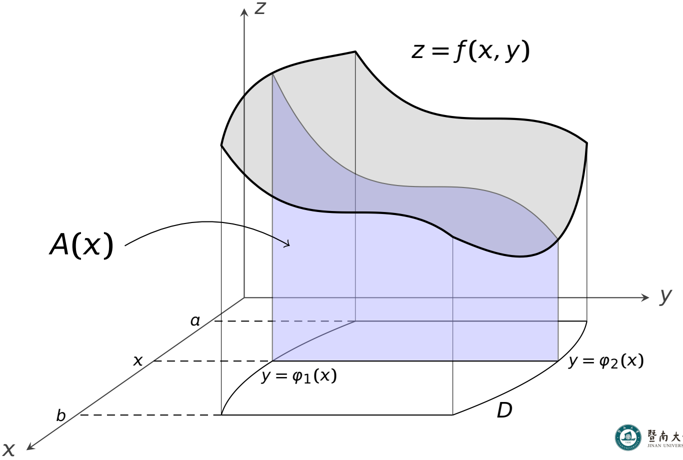
$$\iint_D f(x,y)d\sigma = V \qquad\qquad \int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx$$



# 二次积分化为累次积分：几何解释

- 设 $D = \{(x, y) | \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x), a \le x \le b\}$，则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = V = \int_a^b A(x) dx \qquad \int_a^b \left[ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

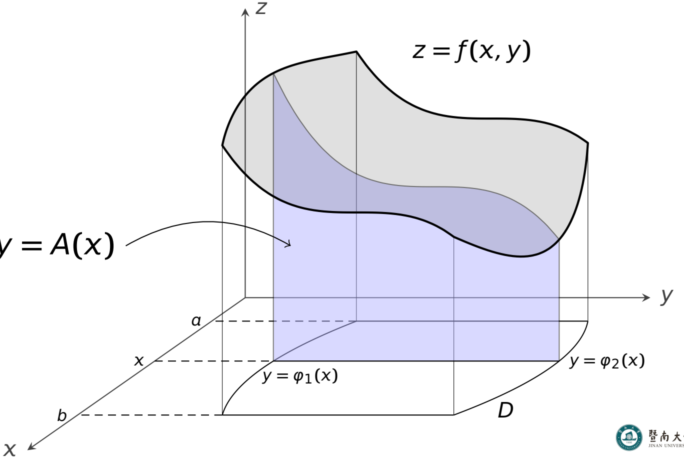


# 二次积分化为累次积分：几何解释

- 设 $D = \{(x, y) | \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x), a \le x \le b\}$，则

$$\iint_D f(x, y)d\sigma = V = \int_a^b A(x)dx \qquad \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy\right]dx$$

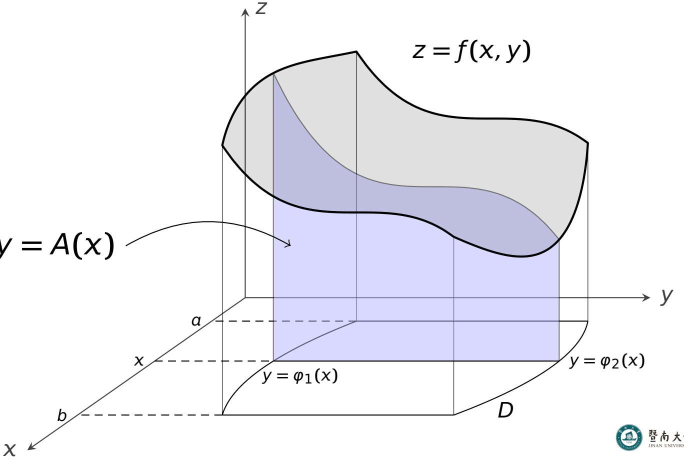
$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy = A(x)$$



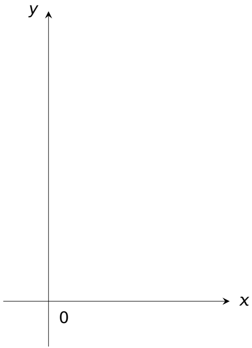
# 二次积分化为累次积分：几何解释

- 设 $D=\{(x,y)|\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x), a\le x\le b\}$，则
$$\iint_D f(x,y)d\sigma = V = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx$$

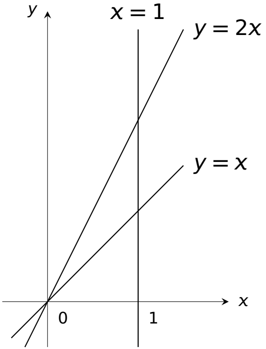
$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy = A(x)$$



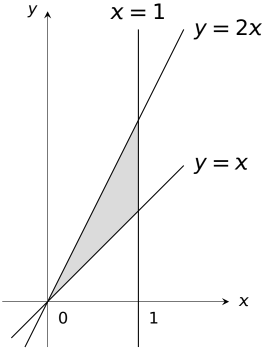
**例** 计算 $\iint_D xy\,dx\,dy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。



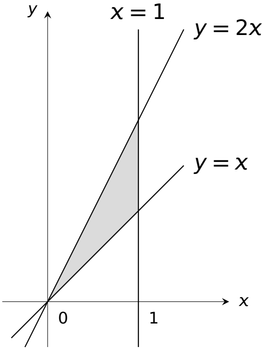
**例** 计算 $\iint_D xy\,dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。



**例** 计算 $\iint_D xy\,dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y = 2x$，$y = x$ 和 $x = 1$ 所围成区域。



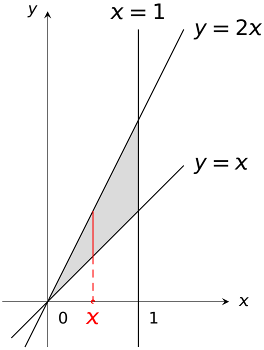
**例** 计算 $\iint_D xydxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。




**解**

$$\iint_D xydxdy = \int \left[ \int \quad xydy \right] dx$$

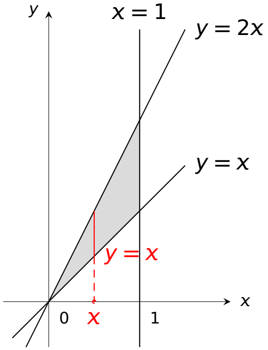
**例** 计算 $\iint_D xydxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。




**解**

$$\iint_D xydxdy = \int \left[ \int \quad xydy \right] dx$$

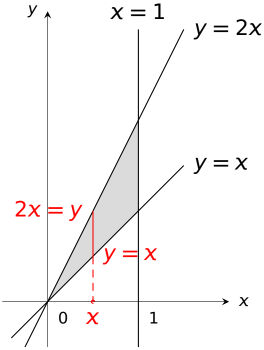
**例** 计算 $\iint_D xy dx dy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。




**解**

$$\iint_D xy dx dy = \int \left[ \int \quad xy dy \right] dx$$

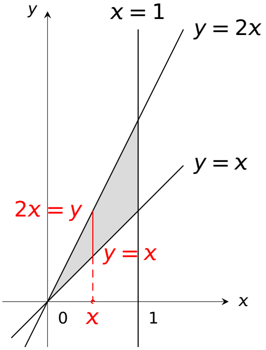
**例** 计算 $\iint_D xydxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。




**解**

$$\iint_D xydxdy = \int \left[ \int \quad xydy \right] dx$$

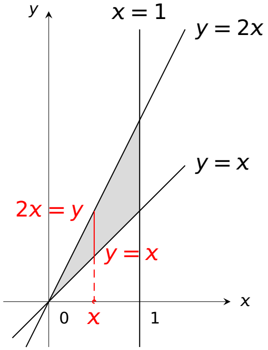
**例** 计算 $\iint_D xydxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。




**解**

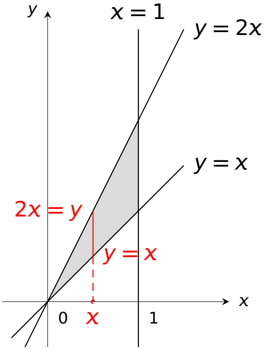
$$\iint_D xydxdy = \int_0^1 \left[ \int \quad xydy \right] dx$$

例 计算 $\iint_D xydxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。




解
$$\iint_D xydxdy = \int_0^1 \left[\int_x^{2x} xydy\right]dx$$

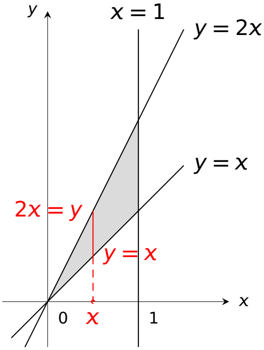
**例** 计算 $\iint_D xydxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。




**解**
$$\iint_D xydxdy = \int_0^1 \left[ \int_x^{2x} xydy \right] dx$$

$$\frac{1}{2}xy^2$$

**例** 计算 $\iint_D xydxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。

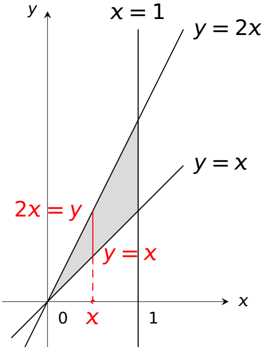



**解**

$$\iint_D xydxdy = \int_0^1 \left[\int_x^{2x} xydy\right]dx$$

$$\frac{1}{2}xy^2\Big|_x^{2x}$$

**例** 计算 $\iint_D xydxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y = 2x$，$y = x$ 和 $x = 1$ 所围成区域。

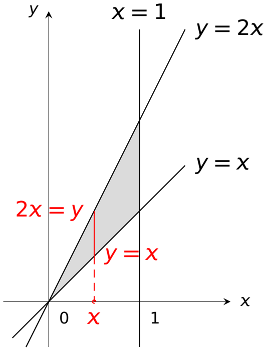



**解**

$$\iint_D xydxdy = \int_0^1 \left[\int_x^{2x} xydy\right]dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}xy^2\Big|_x^{2x}\right]dx$$

**例** 计算 $\iint_D xydxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。

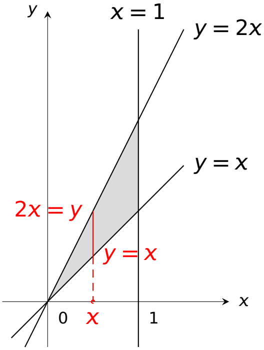



**解**

$$\iint_D xydxdy = \int_0^1 \left[\int_x^{2x} xydy\right]dx$$

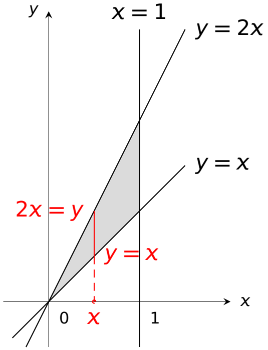
$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}xy^2\Big|_x^{2x}\right]dx \qquad \frac{3}{2}x^3$$

**例** 计算 $\iint_D xydxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。




**解**
$$\iint_D xydxdy = \int_0^1 \left[\int_x^{2x} xydy\right]dx$$
$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}xy^2\Big|_x^{2x}\right]dx = \int_0^1 \frac{3}{2}x^3dx$$

**例** 计算 $\iint_D xydxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。

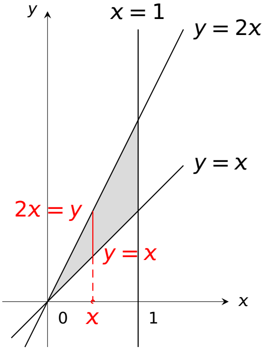



**解**

$$\iint_D xydxdy = \int_0^1 \left[\int_x^{2x} xydy\right]dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}xy^2\Big|_x^{2x}\right]dx = \int_0^1 \frac{3}{2}x^3dx = \frac{3}{8}x^4$$

**例** 计算 $\iint_D xydxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。

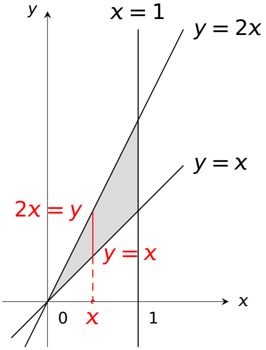



**解**

$$\iint_D xydxdy = \int_0^1 \left[\int_x^{2x} xydy\right]dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}xy^2\Big|_x^{2x}\right]dx = \int_0^1 \frac{3}{2}x^3dx = \frac{3}{8}x^4\Big|_0^1$$

**例** 计算 $\iint_D xydxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。

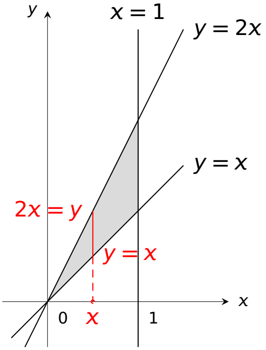



**解**

$$\iint_D xydxdy = \int_0^1 \left[\int_x^{2x} xydy\right]dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}xy^2\Big|_x^{2x}\right]dx = \int_0^1 \frac{3}{2}x^3dx = \frac{3}{8}x^4\Big|_0^1 = \frac{3}{8}$$

**例** 计算 $\iint_D xydxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。




**解**

$$\iint_D xydxdy = \int_0^1 \left[ \int_x^{2x} xydy \right] dx$$

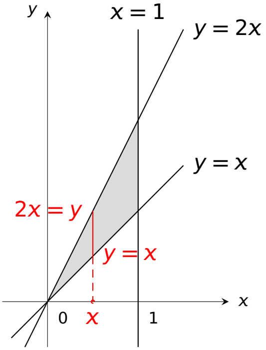
$$= \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} xy^2 \Big|_x^{2x} \right] dx = \int_0^1 \frac{3}{2} x^3 dx = \frac{3}{8} x^4 \Big|_0^1 = \frac{3}{8}$$

---

**注** $D$ 是 $X$-型区域，可以表示为

$$D = \{(x, y) | \qquad\qquad\qquad\qquad \}$$

**例** 计算 $\iint_D xydxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。




**解**

$$\iint_D xydxdy = \int_0^1 \left[\int_x^{2x} xydy\right]dx$$

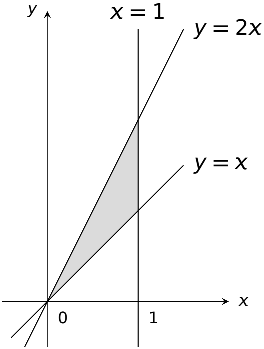
$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}xy^2\Big|_x^{2x}\right]dx = \int_0^1 \frac{3}{2}x^3dx = \frac{3}{8}x^4\Big|_0^1 = \frac{3}{8}$$

---

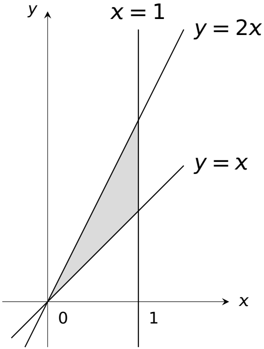
**注** $D$ 是 $X$-型区域，可以表示为

$$D = \{(x, y) | x \le y \le 2x,\ 0 \le x \le 1\}$$

例 计算 $\iint_D e^{x+y}dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。



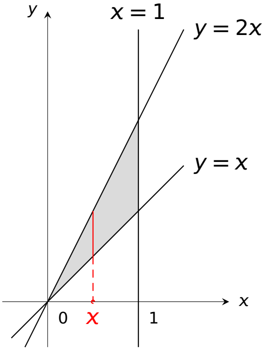
**例** 计算 $\iint_D e^{x+y}dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。




**解**

$$\iint_D e^{x+y}dxdy = \int \left[\int \quad e^{x+y}dy\right]dx$$

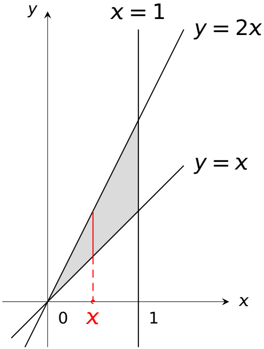
**例** 计算 $\iint_D e^{x+y}dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。




**解**

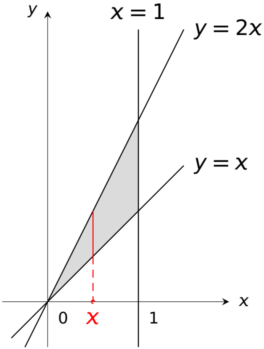
$$\iint_D e^{x+y}dxdy = \int \left[\int \quad e^{x+y}dy\right]dx$$

**例** 计算 $\iint_D e^{x+y}dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。




**解**

$$\iint_D e^{x+y}dxdy = \int_0^1 \Big[\int \quad e^{x+y}dy\Big]dx$$

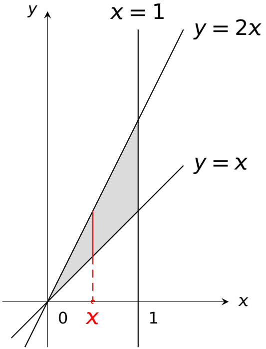



**例** 计算 $\iint_D e^{x+y}dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。

**解**

$$\iint_D e^{x+y}dxdy = \int_0^1 \Big[\int_x^{2x} e^{x+y}dy\Big]dx$$

**例** 计算 $\iint_D e^{x+y}dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。

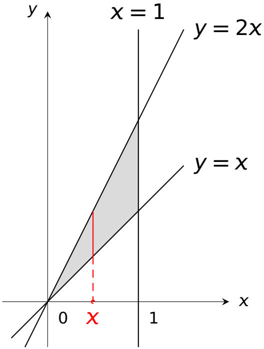



**解**

$$\iint_D e^{x+y}dxdy = \int_0^1 \left[\int_x^{2x} e^{x+y}dy\right]dx$$

$$e^{x+y}$$

例 计算 $\iint_D e^{x+y}dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。

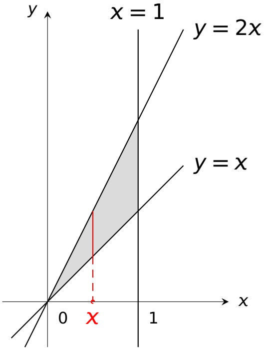



解

$$\iint_D e^{x+y}dxdy = \int_0^1 \Big[\int_x^{2x} e^{x+y}dy\Big]dx$$

$$e^{x+y}\Big|_x^{2x}$$

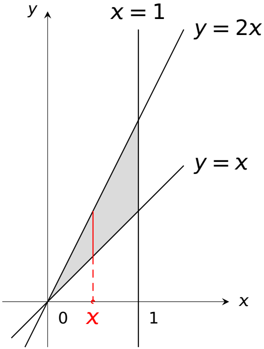
**例** 计算 $\iint_D e^{x+y}dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。




**解**

$$\iint_D e^{x+y}dxdy = \int_0^1 \left[\int_x^{2x} e^{x+y}dy\right]dx = \int_0^1 \left[e^{x+y}\Big|_x^{2x}\right]dx$$

**例** 计算 $\iint_D e^{x+y}dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。

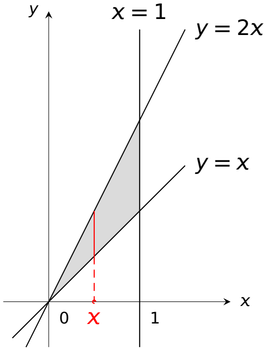



**解**

$$\iint_D e^{x+y}dxdy = \int_0^1 \left[\int_x^{2x} e^{x+y}dy\right]dx = \int_0^1 \left[e^{x+y}\Big|_x^{2x}\right]dx$$

$$e^{3x} - e^{2x}$$

**例** 计算 $\iint_D e^{x+y} dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。

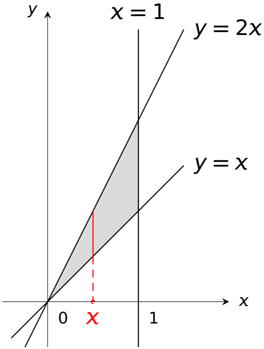



**解**

$$\iint_D e^{x+y} dxdy = \int_0^1 \left[ \int_x^{2x} e^{x+y} dy \right] dx = \int_0^1 \left[ e^{x+y} \Big|_x^{2x} \right] dx$$

$$= \int_0^1 e^{3x} - e^{2x} dx$$

**例** 计算 $\iint_D e^{x+y}dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。

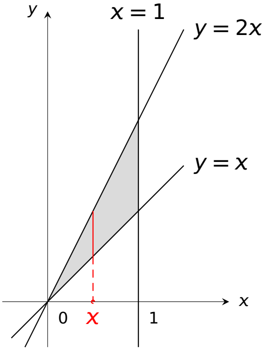



**解**

$$\iint_D e^{x+y}dxdy = \int_0^1 \Big[\int_x^{2x} e^{x+y}dy\Big]dx = \int_0^1 \Big[e^{x+y}\Big|_x^{2x}\Big]dx$$

$$= \int_0^1 e^{3x} - e^{2x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{2}e^{2x}$$

**例** 计算 $\iint_D e^{x+y}dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。

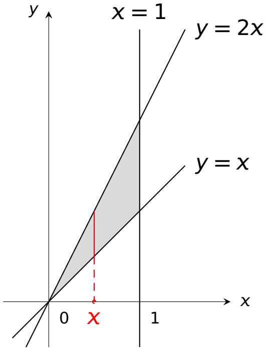



**解**

$$\iint_D e^{x+y}dxdy = \int_0^1 \left[\int_x^{2x} e^{x+y}dy\right]dx = \int_0^1 \left[e^{x+y}\Big|_x^{2x}\right]dx$$

$$= \int_0^1 e^{3x} - e^{2x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1$$

**例** 计算 $\iint_D e^{x+y}dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。

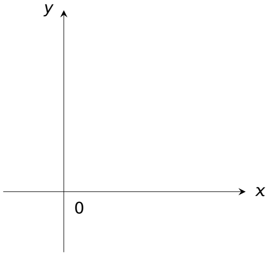



**解**

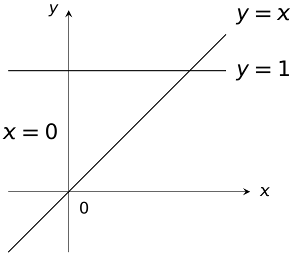
$$\iint_D e^{x+y}dxdy = \int_0^1 \left[\int_x^{2x} e^{x+y}dy\right]dx = \int_0^1 \left[e^{x+y}\Big|_x^{2x}\right]dx$$

$$= \int_0^1 e^{3x} - e^{2x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{6}$$

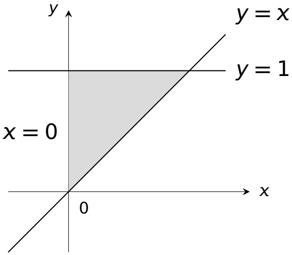
**例** 计算 $\iint_D (2x+6y)dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $x=0$，$y=1$ 和 $y=x$ 所围成区域。



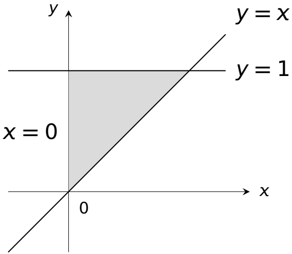
**例** 计算 $\iint_D (2x+6y)dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $x=0$，$y=1$ 和 $y=x$ 所围成区域。



**例** 计算 $\iint_D (2x+6y)dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $x=0$，$y=1$ 和 $y=x$ 所围成区域。



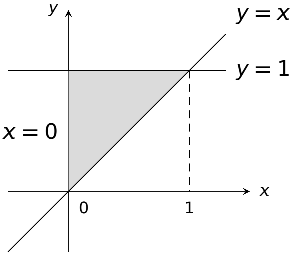
**例** 计算 $\iint_D (2x+6y)dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $x=0$，$y=1$ 和 $y=x$ 所围成区域。




**解**

$$\iint_D (2x+6y)dxdy = \int \left[\int (2x+6y)dy\right]dx$$

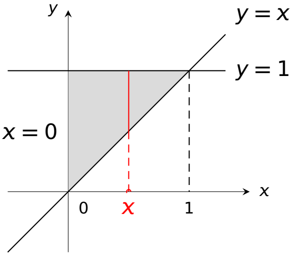
**例** 计算 $\iint_D (2x+6y)dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $x=0$，$y=1$ 和 $y=x$ 所围成区域。




**解**

$$\iint_D (2x+6y)dxdy = \int \left[\int (2x+6y)dy\right]dx$$

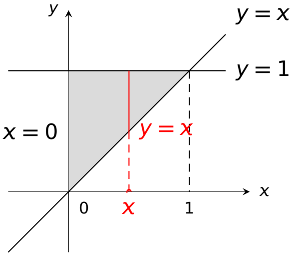
例 计算 $\iint_D (2x+6y)dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $x=0$，$y=1$ 和 $y=x$ 所围成区域。




解

$$\iint_D (2x+6y)dxdy = \int \Big[ \int (2x+6y)dy \Big] dx$$

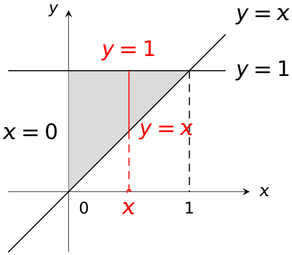
**例** 计算 $\iint_D (2x+6y)dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $x=0$，$y=1$ 和 $y=x$ 所围成区域。




**解**

$$\iint_D (2x+6y)dxdy = \int \left[ \int (2x+6y)dy \right] dx$$

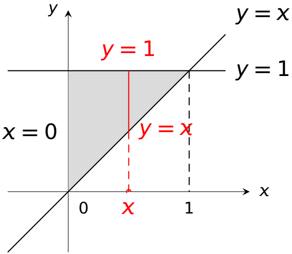
**例** 计算 $\iint_D(2x+6y)dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $x=0$，$y=1$ 和 $y=x$ 所围成区域。




**解**

$$\iint_D(2x+6y)dxdy=\int\Big[\int(2x+6y)dy\Big]dx$$

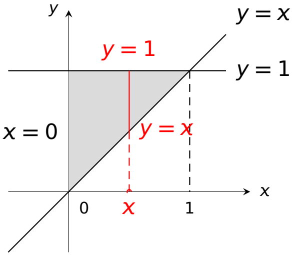
**例** 计算 $\iint_D (2x+6y)dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $x=0$，$y=1$ 和 $y=x$ 所围成区域。




**解**

$$\iint_D (2x+6y)dxdy = \int_0^1 \left[ \int \quad (2x+6y)dy \right] dx$$

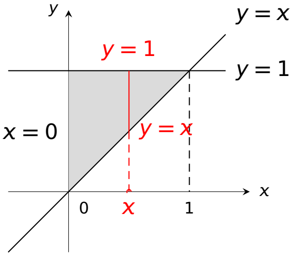
**例** 计算 $\iint_D (2x+6y)dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $x=0$，$y=1$ 和 $y=x$ 所围成区域。




**解**

$$\iint_D (2x+6y)dxdy = \int_0^1 \left[\int_x^1 (2x+6y)dy\right]dx$$

**例** 计算 $\iint_D (2x+6y)dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $x=0$，$y=1$ 和 $y=x$ 所围成区域。

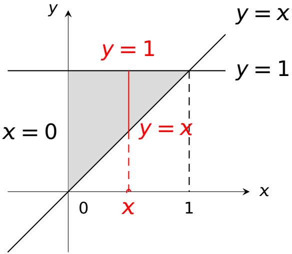



**解**

$$\iint_D (2x+6y)dxdy = \int_0^1 \left[ \int_x^1 (2x+6y)dy \right] dx$$

$$2xy + 3y^2$$

**例** 计算 $\iint_D (2x+6y)dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $x=0$，$y=1$ 和 $y=x$ 所围成区域。

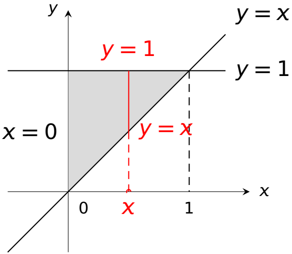



**解**

$$\iint_D (2x+6y)dxdy = \int_0^1 \left[ \int_x^1 (2x+6y)dy \right] dx$$

$$2xy+3y^2\Big|_x^1$$

**例** 计算 $\iint_D (2x+6y)dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $x=0$，$y=1$ 和 $y=x$ 所围成区域。

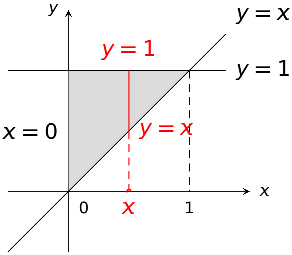



**解**

$$\iint_D (2x+6y)dxdy = \int_0^1 \left[\int_x^1 (2x+6y)dy\right]dx$$

$$= \int_0^1 \left[2xy + 3y^2\Big|_x^1\right]dx$$

**例** 计算 $\iint_D (2x+6y)dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $x=0$，$y=1$ 和 $y=x$ 所围成区域。

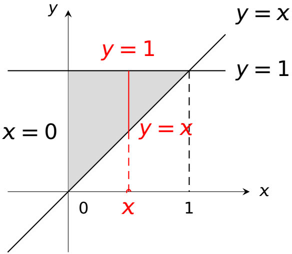



**解**

$$\iint_D (2x+6y)dxdy = \int_0^1 \left[\int_x^1 (2x+6y)dy\right]dx$$

$$= \int_0^1 \left[2xy+3y^2\Big|_x^1\right]dx \qquad -5x^2+2x+3$$

**例** 计算 $\iint_D (2x+6y)dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $x=0$，$y=1$ 和 $y=x$ 所围成区域。

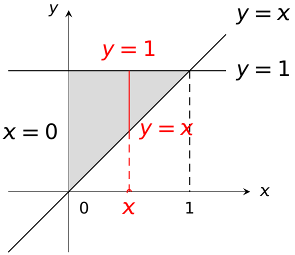



**解**

$$\iint_D (2x+6y)dxdy = \int_0^1 \left[\int_x^1 (2x+6y)dy\right]dx$$

$$= \int_0^1 \left[2xy+3y^2\Big|_x^1\right]dx = \int_0^1 -5x^2+2x+3dx$$

**例** 计算 $\iint_D (2x+6y)dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $x=0$，$y=1$ 和 $y=x$ 所围成区域。



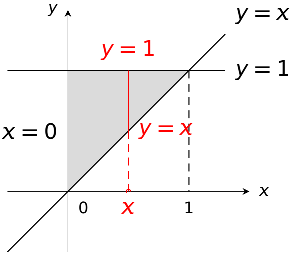

**解**

$$\iint_D (2x+6y)dxdy = \int_0^1 \left[ \int_x^1 (2x+6y)dy \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[ 2xy + 3y^2 \Big|_x^1 \right] dx = \int_0^1 -5x^2 + 2x + 3dx$$

$$= -\frac{5}{3}x^3 + x^2 + 3x$$

**例** 计算 $\iint_D (2x+6y)dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $x=0$，$y=1$ 和 $y=x$ 所围成区域。



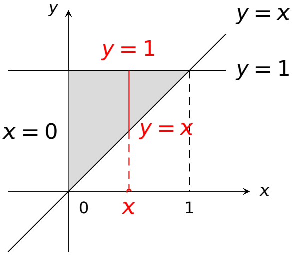

**解**

$$\iint_D (2x+6y)dxdy = \int_0^1 \left[\int_x^1 (2x+6y)dy\right]dx$$

$$= \int_0^1 \left[2xy+3y^2\Big|_x^1\right]dx = \int_0^1 -5x^2+2x+3dx$$

$$= -\frac{5}{3}x^3+x^2+3x\Big|_0^1$$

**例** 计算 $\iint_D (2x+6y)dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $x=0$，$y=1$ 和 $y=x$ 所围成区域。



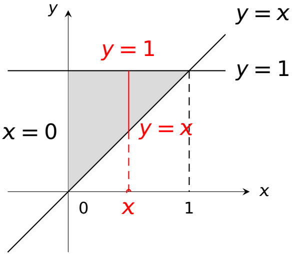

**解**

$$\iint_D (2x+6y)dxdy = \int_0^1 \left[\int_x^1 (2x+6y)dy\right]dx$$

$$= \int_0^1 \left[2xy + 3y^2\Big|_x^1\right]dx = \int_0^1 -5x^2+2x+3dx$$

$$= -\frac{5}{3}x^3 + x^2 + 3x\Big|_0^1 = \frac{7}{3}$$

**例** 计算 $\iint_D (2x+6y)dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $x=0$，$y=1$ 和 $y=x$ 所围成区域。




**解**

$$\iint_D (2x+6y)dxdy = \int_0^1 \left[\int_x^1 (2x+6y)dy\right]dx$$

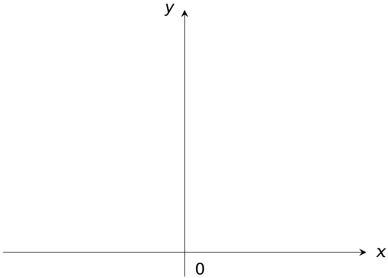
$$= \int_0^1 \left[2xy + 3y^2\Big|_x^1\right]dx = \int_0^1 -5x^2+2x+3dx$$

$$= -\frac{5}{3}x^3 + x^2 + 3x\Big|_0^1 = \frac{7}{3}$$

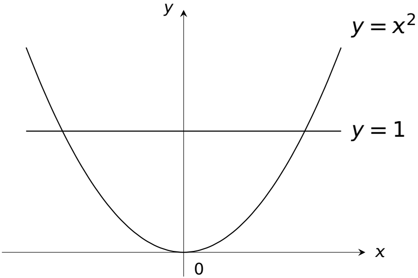
**注** $D$ 是 $X$-型区域，可以表示为

$$D = \{(x,y) | x \le y \le 1, 0 \le x \le 1\}$$

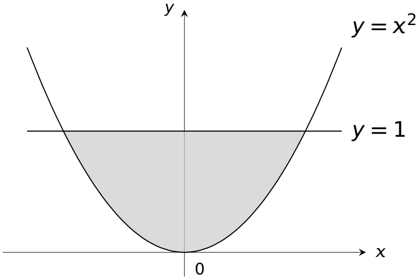
**例** 计算 $\iint_D x^2 y dxdy$，其中 $D$ 是由曲线 $y = x^2$ 和直线 $y = 1$ 所围成区域。



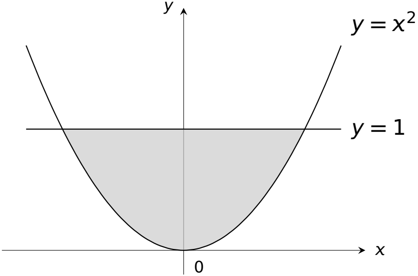
例 计算 $\iint_D x^2 y dxdy$，其中 $D$ 是由曲线 $y = x^2$ 和直线 $y = 1$ 所围成区域。



**例** 计算 $\iint_D x^2 y dxdy$，其中 $D$ 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 所围成区域。



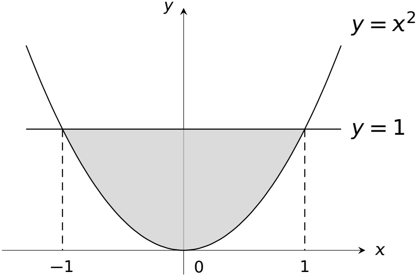
**例** 计算 $\iint_D x^2ydxdy$，其中 $D$ 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 所围成区域。




**解**

$$\iint_D x^2ydxdy = \int \quad \left[\int \quad x^2ydy\right]dx$$

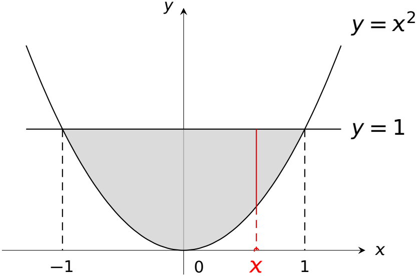
例 计算 $\iint_D x^2 y dxdy$，其中 $D$ 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 所围成区域。




解

$$\iint_D x^2 y dxdy = \int \left[ \int x^2 y dy \right] dx$$

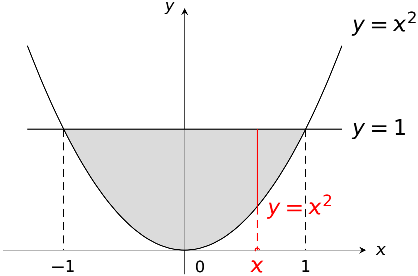
**例** 计算 $\iint_D x^2 y dxdy$，其中 $D$ 是由曲线 $y = x^2$ 和直线 $y = 1$ 所围成区域。




**解**

$$\iint_D x^2 y dxdy = \int \left[ \int x^2 y dy \right] dx$$

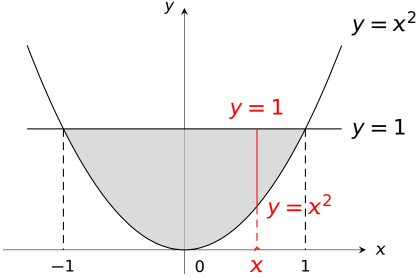
**例** 计算 $\iint_D x^2 y dxdy$，其中 $D$ 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 所围成区域。




**解**

$$\iint_D x^2 y dxdy = \int \left[ \int x^2 y dy \right] dx$$

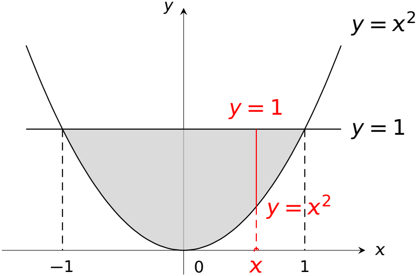
**例** 计算 $\iint_D x^2 y dxdy$，其中 $D$ 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 所围成区域。




**解**

$$\iint_D x^2 y dxdy = \int \quad \left[ \int \quad x^2 y dy \right] dx$$

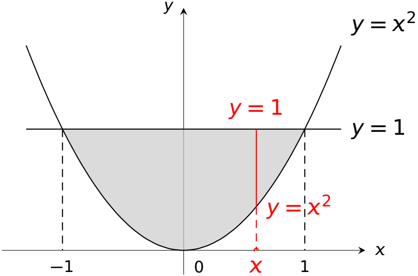
**例** 计算 $\iint_D x^2ydxdy$，其中 $D$ 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 所围成区域。




**解**

$$\iint_D x^2ydxdy = \int_{-1}^{1}\left[\int\ \ x^2ydy\right]dx$$

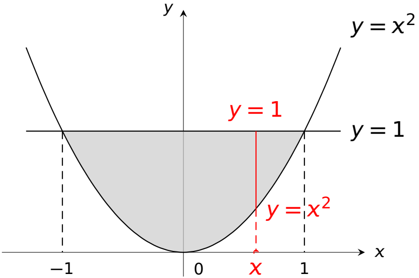
例 计算 $\iint_D x^2 y dxdy$，其中 $D$ 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 所围成区域。




解

$$\iint_D x^2 y dxdy = \int_{-1}^{1} \left[ \int_{x^2}^{1} x^2 y dy \right] dx$$

**例** 计算 $\iint_D x^2 y dxdy$，其中 $D$ 是由曲线 $y = x^2$ 和直线 $y = 1$ 所围成区域。

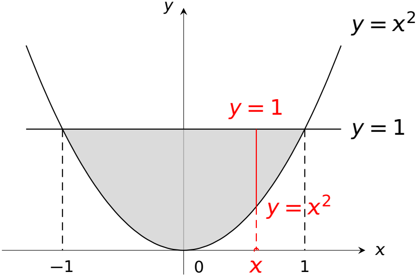



**解**

$$\iint_D x^2 y dxdy = \int_{-1}^{1} \left[ \int_{x^2}^{1} x^2 y dy \right] dx$$

$$\frac{1}{2} x^2 y^2$$

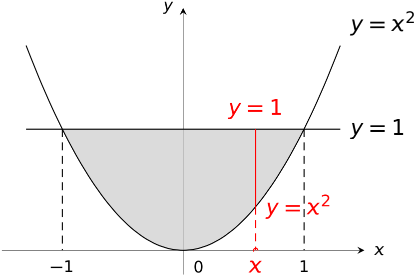
**例** 计算 $\iint_D x^2 y dxdy$，其中 $D$ 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 所围成区域。




**解**

$$\iint_D x^2 y dxdy = \int_{-1}^{1} \left[ \int_{x^2}^{1} x^2 y dy \right] dx \qquad \frac{1}{2} x^2 y^2 \Big|_{x^2}^{1}$$

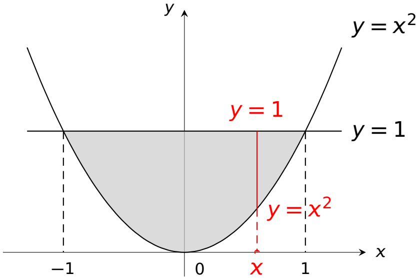
**例** 计算 $\iint_D x^2 y dxdy$，其中 $D$ 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 所围成区域。




**解**

$$\iint_D x^2 y dxdy = \int_{-1}^{1}\left[\int_{x^2}^{1} x^2 y dy\right]dx = \int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}x^2y^2\Big|_{x^2}^{1}\right]dx$$

**例** 计算 $\iint_D x^2 y dxdy$，其中 $D$ 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 所围成区域。

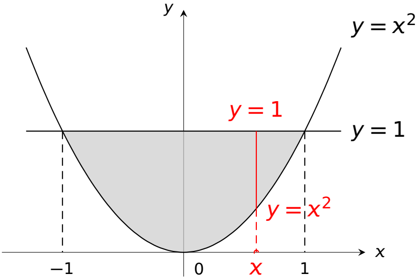



**解**

$$\iint_D x^2 y dxdy = \int_{-1}^{1}\left[\int_{x^2}^{1} x^2 y dy\right]dx = \int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}x^2y^2\Big|_{x^2}^{1}\right]dx$$

$$\frac{1}{2}x^2(1-x^4)$$

**例** 计算 $\iint_D x^2 y dxdy$，其中 $D$ 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 所围成区域。

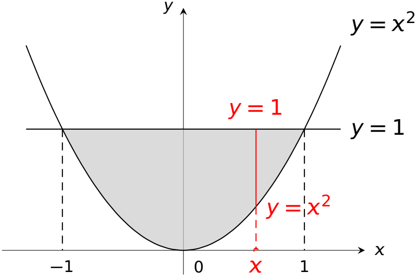



**解**

$$\iint_D x^2 y dxdy = \int_{-1}^{1}\left[\int_{x^2}^{1} x^2 y dy\right]dx = \int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}x^2y^2\Big|_{x^2}^{1}\right]dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\frac{1}{2}x^2(1-x^4)dx$$

**例** 计算 $\iint_D x^2ydxdy$，其中 $D$ 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 所围成区域。

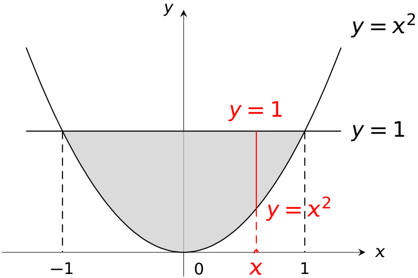



**解**

$$\iint_D x^2ydxdy=\int_{-1}^{1}\Big[\int_{x^2}^{1}x^2ydy\Big]dx=\int_{-1}^{1}\Big[\frac{1}{2}x^2y^2\Big|_{x^2}^{1}\Big]dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}x^2(1-x^4)dx=\frac{1}{4}(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{7}x^7)$$

**例** 计算 $\iint_D x^2ydxdy$，其中 $D$ 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 所围成区域。

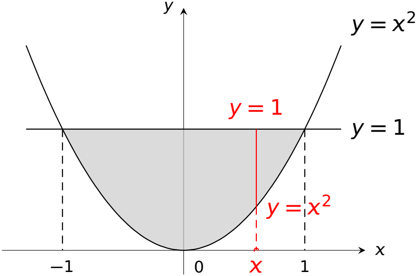



**解**

$$\iint_D x^2ydxdy=\int_{-1}^{1}\Big[\int_{x^2}^{1}x^2ydy\Big]dx=\int_{-1}^{1}\Big[\frac{1}{2}x^2y^2\Big|_{x^2}^{1}\Big]dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}x^2(1-x^4)dx=\frac{1}{4}(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{7}x^7)\Big|_{-1}^{1}$$

**例** 计算 $\iint_D x^2 y dxdy$，其中 $D$ 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 所围成区域。

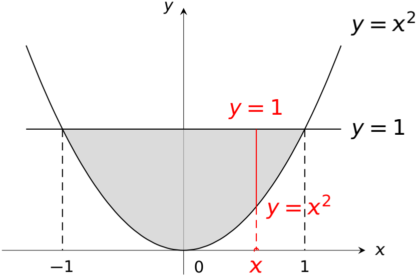



**解**

$$\iint_D x^2 y dxdy = \int_{-1}^{1}\left[\int_{x^2}^{1} x^2 y dy\right]dx = \int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}x^2y^2\Big|_{x^2}^{1}\right]dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\frac{1}{2}x^2(1-x^4)dx = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{7}x^7\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{4}{21}$$

**例** 计算 $\iint_D x^2ydxdy$，其中 $D$ 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 所围成区域。




**解**

$$\iint_D x^2ydxdy=\int_{-1}^{1}\Big[\int_{x^2}^{1}x^2ydy\Big]dx=\int_{-1}^{1}\Big[\frac{1}{2}x^2y^2\Big|_{x^2}^{1}\Big]dx$$

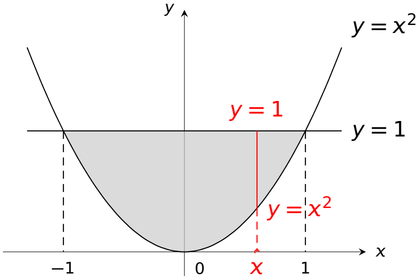
$$=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}x^2(1-x^4)dx=\frac{1}{4}(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{7}x^7)\Big|_{-1}^{1}=\frac{4}{21}$$

---

**注** $D$ 是 $X$-型区域，可以表示为

$$D=\{(x,y)| \qquad \qquad \}$$

**例** 计算 $\iint_D x^2ydxdy$，其中 $D$ 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 所围成区域。




**解**

$$\iint_D x^2ydxdy=\int_{-1}^{1}\left[\int_{x^2}^{1}x^2ydy\right]dx=\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}x^2y^2\Big|_{x^2}^{1}\right]dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}x^2(1-x^4)dx=\frac{1}{4}(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{7}x^7)\Big|_{-1}^{1}=\frac{4}{21}$$

---

**注** $D$ 是 $X$-型区域，可以表示为

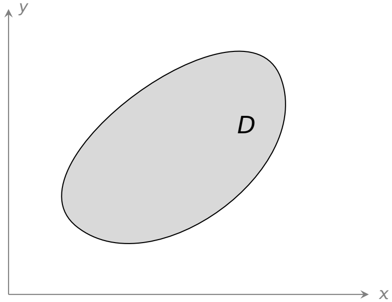
$$D=\{(x,y)|x^2\le y\le 1,-1\le x\le 1\}$$

# We are here now...

1. 如何计算二重积分？
2. 固定 $x$，先对 $y$ 积分
3. 固定 $y$，先对 $x$ 积分
4. 交换二重积分的积分次序
5. 极坐标下计算二重积分
6. 二重积分的应用

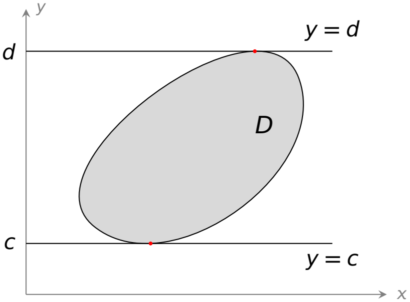
# 固定 $y$，先对 $x$ 积分

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int \left[ \int \qquad f(x,y)dx \right] dy$$



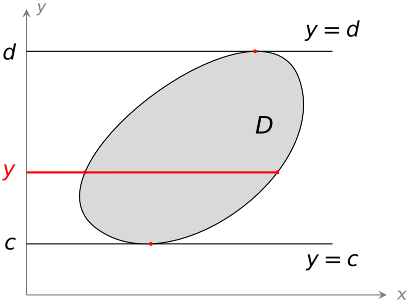
# 固定 $y$，先对 $x$ 积分

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int \left[ \int \qquad f(x,y)dx \right] dy$$



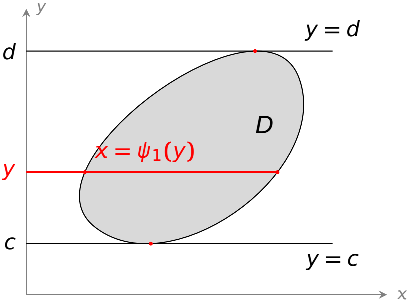
# 固定 $y$，先对 $x$ 积分

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int \left[ \int \qquad f(x,y)dx \right] dy$$



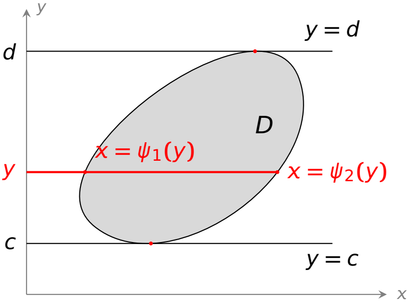
# 固定 $y$，先对 $x$ 积分

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int \left[\int \qquad f(x,y)dx\right]dy$$



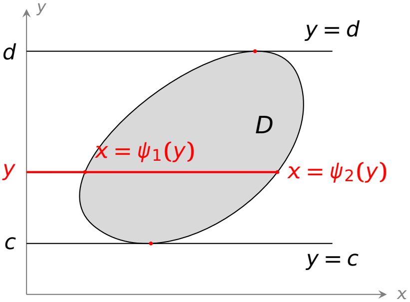
# 固定 $y$，先对 $x$ 积分

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int \left[ \int \quad f(x,y)dx \right] dy$$



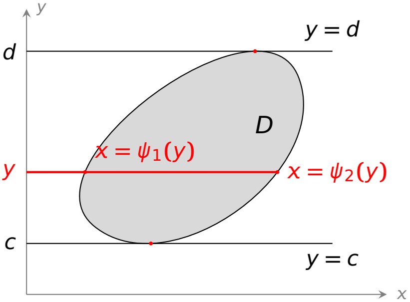
# 固定 $y$，先对 $x$ 积分

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left[ \int \qquad f(x,y)dx \right] dy$$



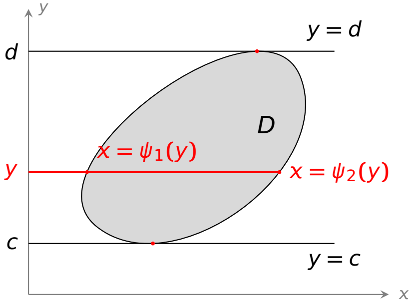
# 固定 $y$，先对 $x$ 积分

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left[ \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right] dy$$



# 固定 $y$，先对 $x$ 积分

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left[ \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right] dy$$



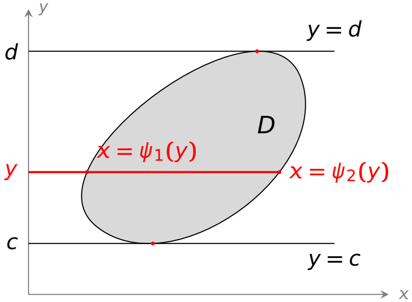

**注** 上述区域 $D$ 可以表示成

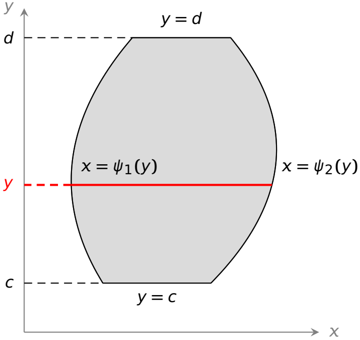
$$D = \{(x,y) \mid \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y),\ c \le y \le d\}$$

称为 $Y$-型区域。

# 固定 $y$，先对 $x$ 积分

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left[ \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right] dy$$



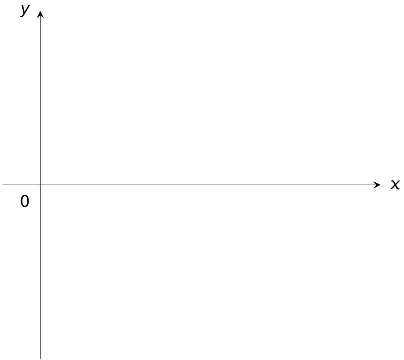




注 上述区域 $D$ 可以表示成

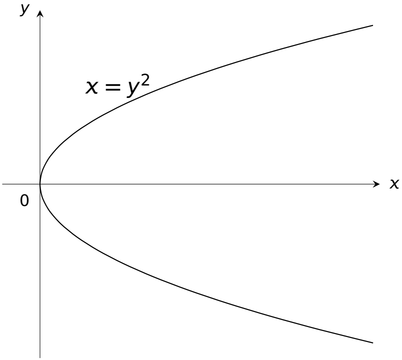
$$D = \{(x,y) | \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y), c \le y \le d\}$$

称为 $Y$-型区域。

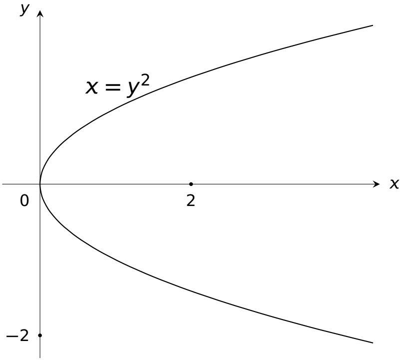
**例** 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x = y^2$ 和直线 $y = x - 2$ 所围成区域。



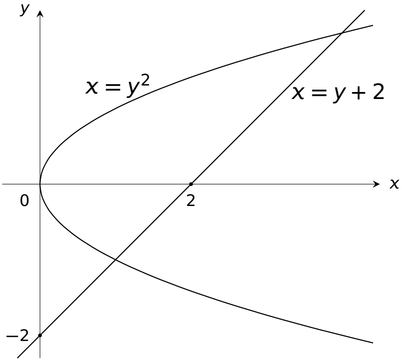
**例** 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。



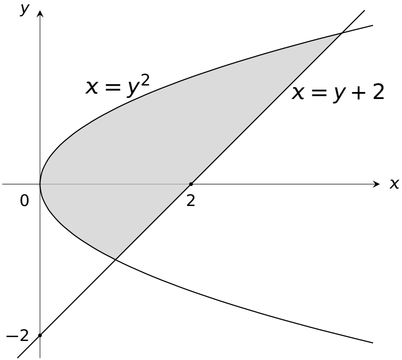
例 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。



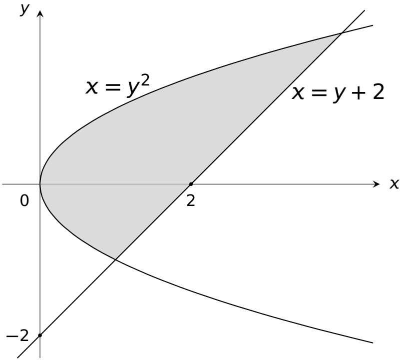
例 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。



**例** 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。



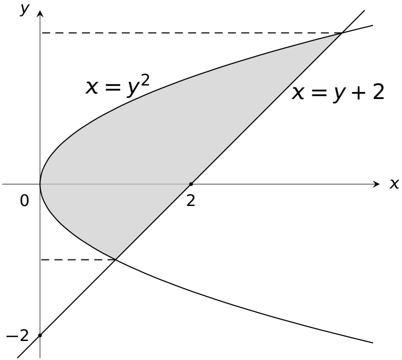
**例** 计算 $\iint_D xy\,dxdy$，其中是由抛物线 $x = y^2$ 和直线 $y = x - 2$ 所围成区域。




**解**

$$原式 = \int \Big[\int \quad xy\,dx\Big]dy$$

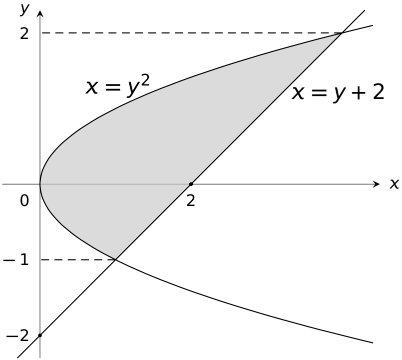
**例** 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。




**解**

$$原式 = \int \quad \Big[ \int \qquad xydx \Big] dy$$

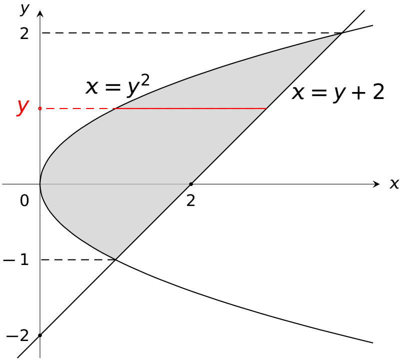
例 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。




解

$$\text{原式}=\int \Big[\int \quad xydx\Big]dy$$

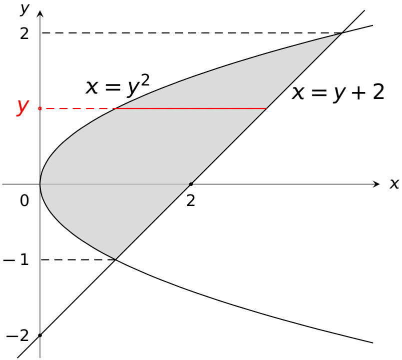
**例** 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。




**解**

$$\text{原式}=\int \left[\int xydx\right]dy$$

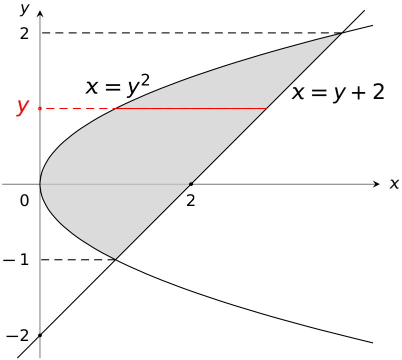
**例** 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。




**解**

$$原式=\int_{-1}^{2}\Big[\int \quad xydx\Big]dy$$

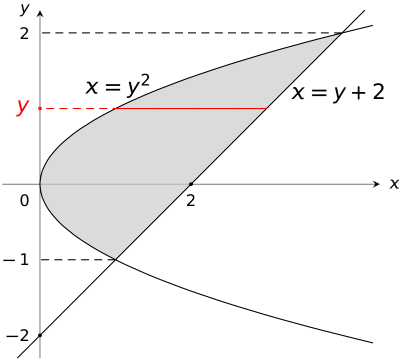
**例** 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。




**解**

$$\text{原式} = \int_{-1}^{2}\Big[\int_{y^2}^{y+2} xydx\Big]dy$$

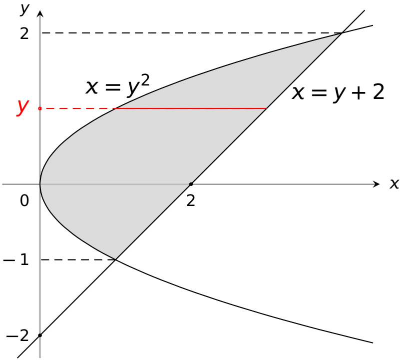
**例** 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。




**解**

$$原式 = \int_{-1}^{2}\left[\int_{y^2}^{y+2} xydx\right]dy \qquad \frac{1}{2}x^2y$$

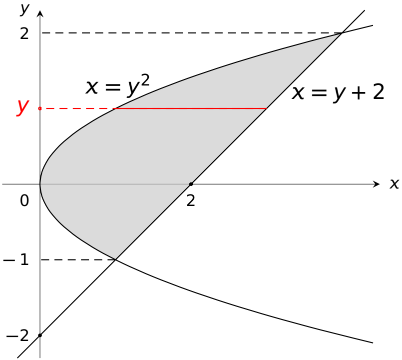
例 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。




解

$$\text{原式}=\int_{-1}^{2}\left[\int_{y^2}^{y+2} xydx\right]dy \qquad \frac{1}{2}x^2y\Big|_{y^2}^{y+2}$$

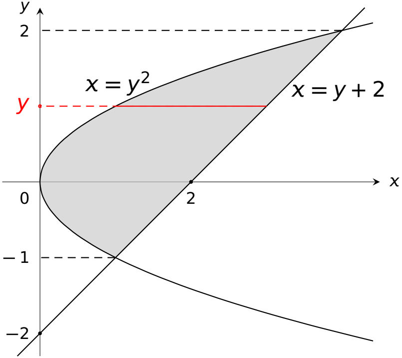
**例** 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。




**解**

$$原式=\int_{-1}^{2}\left[\int_{y^2}^{y+2}xydx\right]dy=\int_{-1}^{2}\left[\frac{1}{2}x^2y\Big|_{y^2}^{y+2}\right]dy$$

例 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。

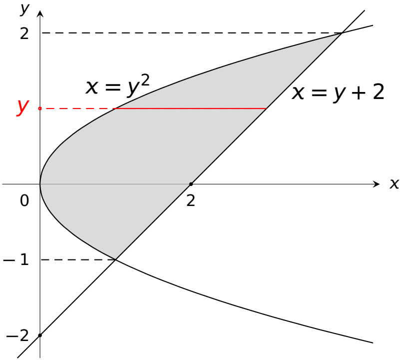



解

$$\text{原式} = \int_{-1}^{2}\left[\int_{y^2}^{y+2} xydx\right]dy = \int_{-1}^{2}\left[\frac{1}{2}x^2y\Big|_{y^2}^{y+2}\right]dy$$

$$y\left[(y+2)^2 - y^4\right]$$

**例** 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。

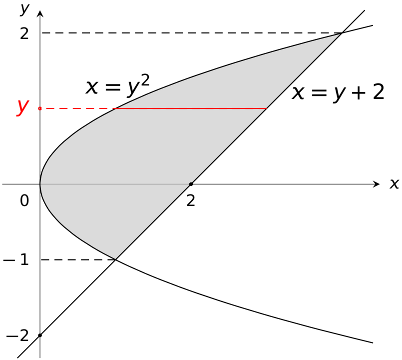



**解**

$$\text{原式}=\int_{-1}^{2}\Big[\int_{y^2}^{y+2}xydx\Big]dy=\int_{-1}^{2}\Big[\frac{1}{2}x^2y\Big|_{y^2}^{y+2}\Big]dy$$

$$=\int_{-1}^{2}y\big[(y+2)^2-y^4\big]dy$$

**例** 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。

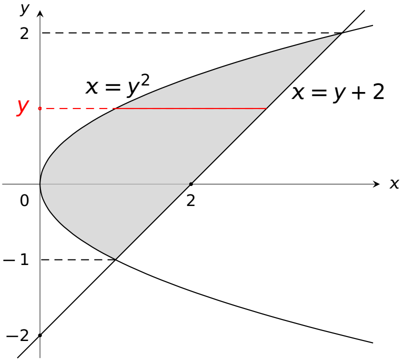



**解**

$$\text{原式}=\int_{-1}^{2}\Big[\int_{y^2}^{y+2}xydx\Big]dy=\int_{-1}^{2}\Big[\frac{1}{2}x^2y\Big|_{y^2}^{y+2}\Big]dy$$

$$=\int_{-1}^{2}y\big[(y+2)^2-y^4\big]dy=\frac{1}{2}\int_{-1}^{2}-y^5+y^3+4y^2+4ydy$$

**例** 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。

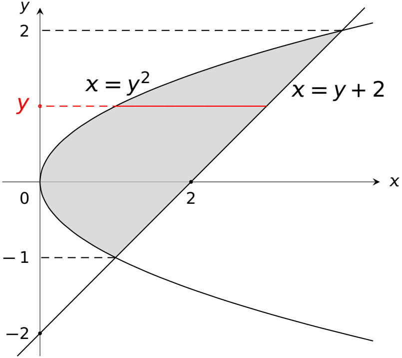



**解**

$$\text{原式}=\int_{-1}^{2}\left[\int_{y^2}^{y+2}xydx\right]dy=\int_{-1}^{2}\left[\frac{1}{2}x^2y\Big|_{y^2}^{y+2}\right]dy$$

$$=\int_{-1}^{2}y\left[(y+2)^2-y^4\right]dy=\frac{1}{2}\int_{-1}^{2}-y^5+y^3+4y^2+4ydy=\frac{45}{8}$$

**例** 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。




**解**

$$\text{原式}=\int_{-1}^{2}\left[\int_{y^2}^{y+2}xydx\right]dy=\int_{-1}^{2}\left[\frac{1}{2}x^2y\Big|_{y^2}^{y+2}\right]dy$$

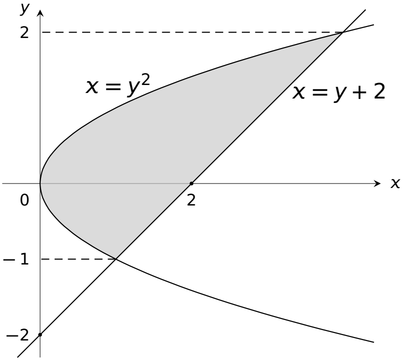
$$=\int_{-1}^{2}y\left[(y+2)^2-y^4\right]dy=\frac{1}{2}\int_{-1}^{2}-y^5+y^3+4y^2+4ydy=\frac{45}{8}$$

---

**注** $D$ 是 $X$-型区域，可以表示为

$$D=\{(x,y)|\,x^2\le y\le 1,-1\le x\le 1\}$$

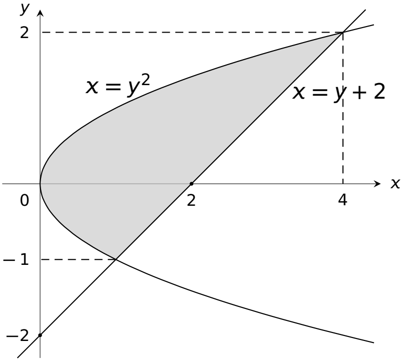
**例** 计算 $\iint_D xy\,dxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。




**解**

$$\text{原式}=\int \quad \left[\int \quad xydy\right]dx$$

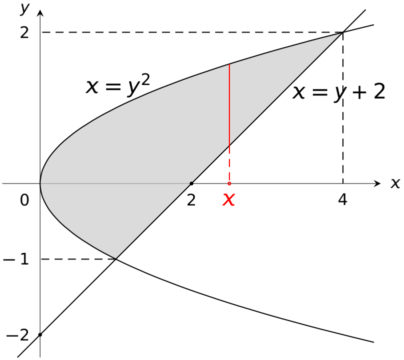
**例** 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。




**解**

$$原式=\int \quad \left[\int \quad xydy\right]dx$$

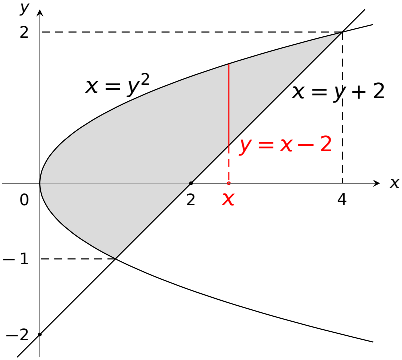
**例** 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。




**解**

$$\text{原式} = \int \quad \left[ \int \quad xydy \right] dx$$

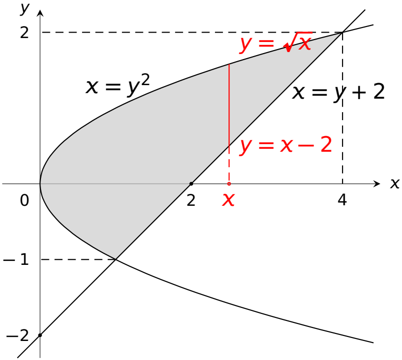
**例** 计算 $\iint_D xy\,dxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。




**解**

$$\text{原式} = \int \quad \left[ \int \quad xy\,dy \right] dx$$

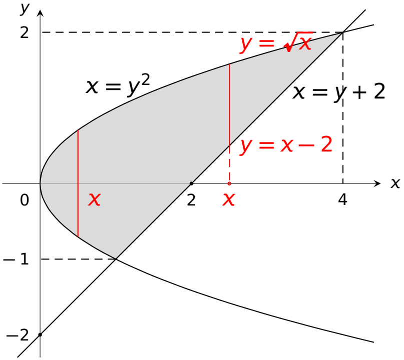
**例** 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。




**解**

$$\text{原式}=\int \left[\int \quad xydy\right]dx$$

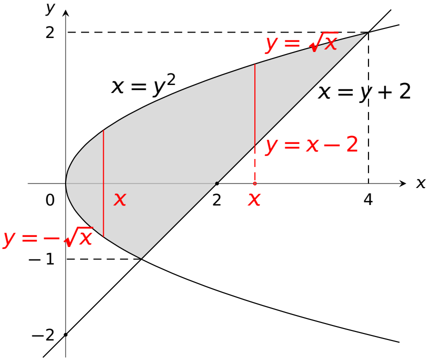
**例** 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。




**解**

$$\text{原式}=\int \quad \Big[\int \quad xydy\Big]dx$$

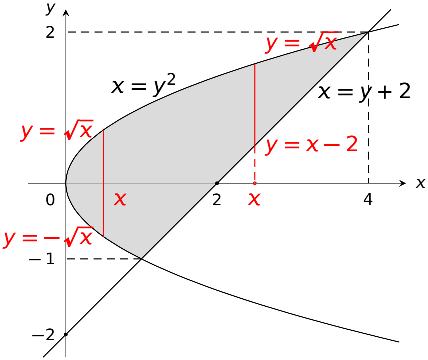
**例** 计算 $\iint_D xy\,dx\,dy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。




**解**

$$\text{原式} = \int \Big[ \int \quad xy\,dy \Big] dx$$

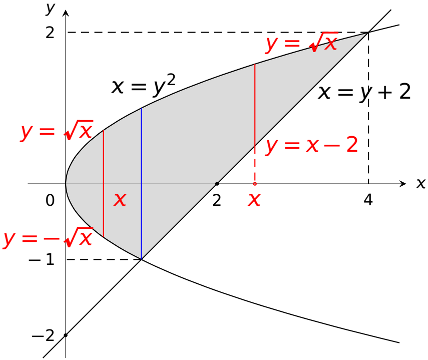
**例** 计算 $\iint_D xy\,dxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。




**解**

$$原式 = \int \Big[\int xy\,dy\Big]dx$$

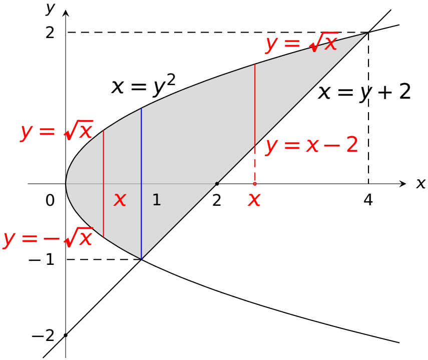
**例** 计算 $\iint_D xy\,dxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。




**解**

$$\text{原式}=\int \quad \left[\int \quad xydy\right]dx$$

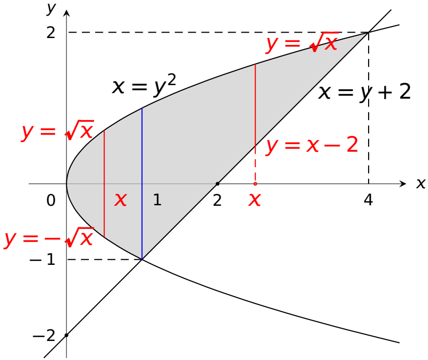
**例** 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。




**解**

$$\text{原式}=\int \quad \left[\int \quad xydy\right]dx$$

**例** 计算 $\iint_D xy\,dxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。

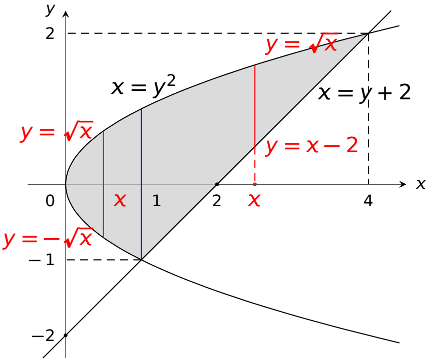



**解**

$$原式=\int \left[\int xy\,dy\right]dx$$

$$=\int_0^1\left[\int xy\,dy\right]dx+\int_1^4\left[\int xy\,dy\right]dx$$

**例** 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。

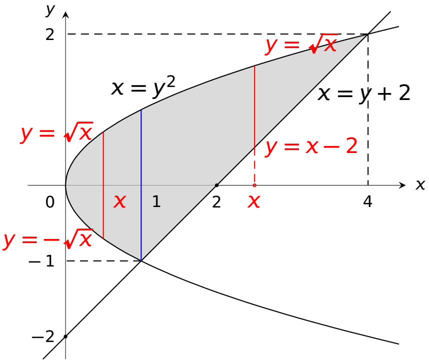



**解**

$$原式=\int \left[\int xydy\right]dx$$

$$=\int_0^1\left[\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} xydy\right]dx+\int_1^4\left[\int xydy\right]dx$$

**例** 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。

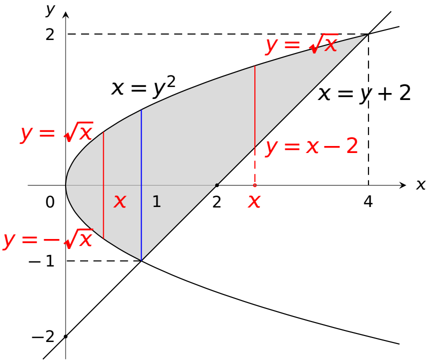



**解**

$$\text{原式}=\int \left[\iint xydy\right]dx$$

$$=\int_0^1\left[\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}xydy\right]dx+\int_1^4\left[\int_{x-2}^{\sqrt{x}}xydy\right]dx$$

**例** 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。

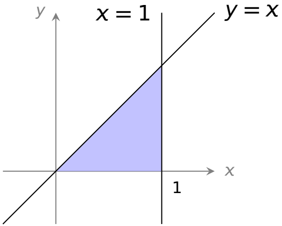



**解**

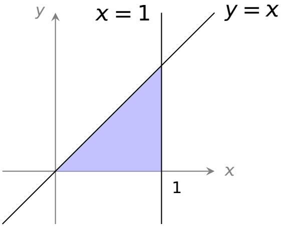
$$\text{原式} = \int \quad \left[\int \quad xydy\right]dx$$

$$= \int_0^1 \left[\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} xydy\right]dx + \int_1^4 \left[\int_{x-2}^{\sqrt{x}} xydy\right]dx = \cdots$$

例 计算 $\iint_D e^{x^2}dxdy$，其中 $D$ 是由 $y=x$，$x=1$，$x$ 轴所围成的区域



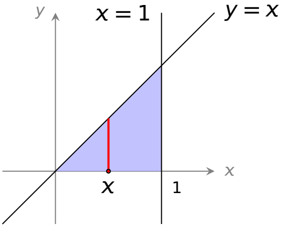
例 计算 $\iint_D e^{x^2}dxdy$，其中 $D$ 是由 $y=x$，$x=1$，$x$ 轴所围成的区域




解法一 固定 $x$，先对 $y$ 积分：

$$\iint_D e^{x^2}dxdy = \int \left[\int e^{x^2}dy\right]dx$$

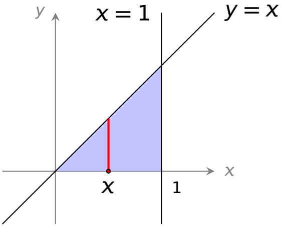
例 计算 $\iint_D e^{x^2} dxdy$，其中 $D$ 是由 $y=x$，$x=1$，$x$ 轴所围成的区域




解法一 固定 $x$，先对 $y$ 积分：

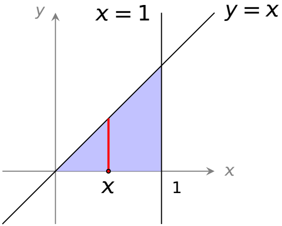
$$\iint_D e^{x^2} dxdy = \int \Big[ \int \quad e^{x^2} dy \Big] dx$$

例 计算 $\iint_D e^{x^2} dxdy$，其中 $D$ 是由 $y = x$，$x = 1$，$x$ 轴所围成的区域




解法一 固定 $x$，先对 $y$ 积分：

$$\iint_D e^{x^2} dxdy = \int_0^1 \Big[ \int \quad e^{x^2} dy \Big] dx$$

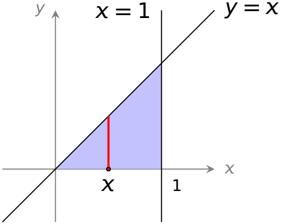



例 计算 $\iint_D e^{x^2} dxdy$，其中 $D$ 是由 $y = x$，$x = 1$，$x$ 轴所围成的区域

解法一 固定 $x$，先对 $y$ 积分：

$$\iint_D e^{x^2} dxdy = \int_0^1 \left[ \int_0^x e^{x^2} dy \right] dx$$

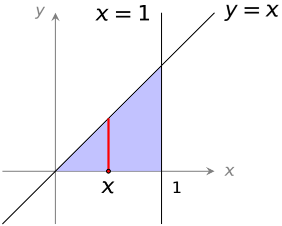
例 计算 $\iint_D e^{x^2}dxdy$，其中 $D$ 是由 $y=x$，$x=1$，$x$ 轴所围成的区域




解法一 固定 $x$，先对 $y$ 积分：

$$\iint_D e^{x^2}dxdy = \int_0^1 \left[ \int_0^x e^{x^2}dy \right] dx \qquad e^{x^2}y\Big|_0^x$$

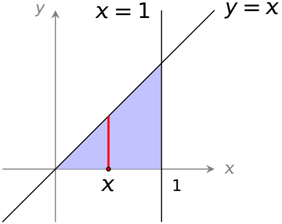
例 计算 $\iint_D e^{x^2}dxdy$，其中 $D$ 是由 $y=x$，$x=1$，$x$ 轴所围成的区域




解法一 固定 $x$，先对 $y$ 积分：

$$\iint_D e^{x^2}dxdy = \int_0^1 \left[\int_0^x e^{x^2}dy\right]dx = \int_0^1 \left[e^{x^2}y\Big|_0^x\right]dx$$

例 计算 $\iint_D e^{x^2}dxdy$，其中 $D$ 是由 $y=x$，$x=1$，$x$ 轴所围成的区域

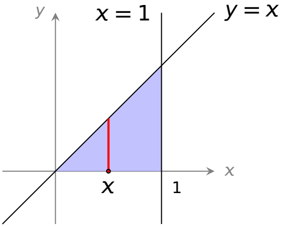



解法一 固定 $x$，先对 $y$ 积分：

$$\iint_D e^{x^2}dxdy = \int_0^1 \left[\int_0^x e^{x^2}dy\right]dx = \int_0^1 \left[e^{x^2}y\Big|_0^x\right]dx$$

$$= \quad xe^{x^2}$$

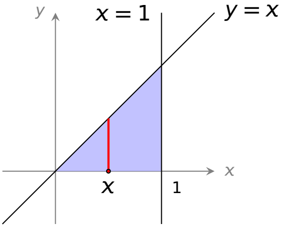
**例** 计算 $\iint_D e^{x^2} dxdy$，其中 $D$ 是由 $y = x$，$x = 1$，$x$ 轴所围成的区域




**解法一** 固定 $x$，先对 $y$ 积分：

$$\iint_D e^{x^2} dxdy = \int_0^1 \left[ \int_0^x e^{x^2} dy \right] dx = \int_0^1 \left[ e^{x^2} y \Big|_0^x \right] dx$$

$$= \int_0^1 x e^{x^2} dx$$



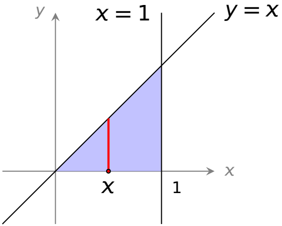

**例** 计算 $\iint_D e^{x^2}dxdy$，其中 $D$ 是由 $y=x$，$x=1$，$x$ 轴所围成的区域

**解法一** 固定 $x$，先对 $y$ 积分：

$$\iint_D e^{x^2}dxdy = \int_0^1\Big[\int_0^x e^{x^2}dy\Big]dx = \int_0^1\Big[e^{x^2}y\Big|_0^x\Big]dx$$

$$= \int_0^1 xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1$$

例 计算 $\iint_D e^{x^2}dxdy$，其中 $D$ 是由 $y=x$，$x=1$，$x$ 轴所围成的区域

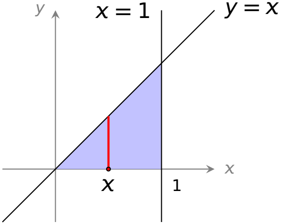



解法一 固定 $x$，先对 $y$ 积分：

$$\iint_D e^{x^2}dxdy = \int_0^1\left[\int_0^x e^{x^2}dy\right]dx = \int_0^1\left[e^{x^2}y\Big|_0^x\right]dx$$

$$= \int_0^1 xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}$$

**例** 计算 $\iint_D e^{x^2}dxdy$，其中 $D$ 是由 $y=x$，$x=1$，$x$ 轴所围成的区域




**解法一** 固定 $x$，先对 $y$ 积分：

$$\iint_D e^{x^2}dxdy = \int_0^1\left[\int_0^x e^{x^2}dy\right]dx = \int_0^1\left[e^{x^2}y\Big|_0^x\right]dx$$

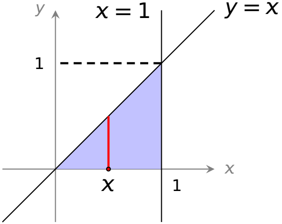
$$= \int_0^1 xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}$$

---

**解法二** 固定 $y$，先对 $x$ 积分：

$$\iint_D e^{x^2}dxdy = \int\left[\int e^{x^2}dx\right]dy$$

**例** 计算 $\iint_D e^{x^2}dxdy$，其中 $D$ 是由 $y=x$，$x=1$，$x$ 轴所围成的区域




**解法一** 固定 $x$，先对 $y$ 积分：

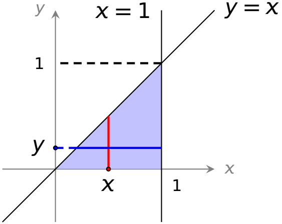
$$\iint_D e^{x^2}dxdy = \int_0^1 \left[\int_0^x e^{x^2}dy\right]dx = \int_0^1 \left[e^{x^2}y\Big|_0^x\right]dx$$

$$= \int_0^1 xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}$$

---

**解法二** 固定 $y$，先对 $x$ 积分：

$$\iint_D e^{x^2}dxdy = \int \left[\int e^{x^2}dx\right]dy$$




例 计算 $\iint_D e^{x^2}dxdy$，其中 $D$ 是由 $y=x$，$x=1$，$x$ 轴所围成的区域

解法一 固定 $x$，先对 $y$ 积分：

$$\iint_D e^{x^2}dxdy=\int_0^1\Big[\int_0^x e^{x^2}dy\Big]dx=\int_0^1\Big[e^{x^2}y\Big|_0^x\Big]dx$$

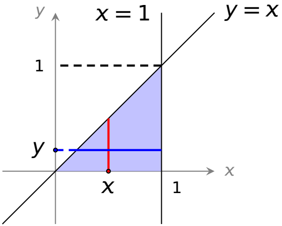
$$=\int_0^1 xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}$$

---

解法二 固定 $y$，先对 $x$ 积分：

$$\iint_D e^{x^2}dxdy=\int\ \Big[\int\ \ e^{x^2}dx\Big]dy$$

例 计算 $\iint_D e^{x^2}dxdy$，其中 $D$ 是由 $y=x$，$x=1$，$x$ 轴所围成的区域




解法一 固定 $x$，先对 $y$ 积分：

$$\iint_D e^{x^2}dxdy = \int_0^1\left[\int_0^x e^{x^2}dy\right]dx = \int_0^1\left[e^{x^2}y\Big|_0^x\right]dx$$

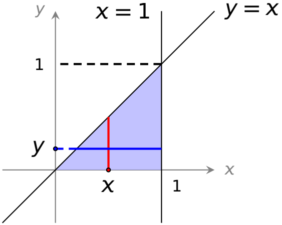
$$= \int_0^1 xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}$$

---

解法二 固定 $y$，先对 $x$ 积分：

$$\iint_D e^{x^2}dxdy = \int_0^1\left[\int\quad e^{x^2}dx\right]dy$$

例 计算 $\iint_D e^{x^2}dxdy$，其中 $D$ 是由 $y=x$，$x=1$，$x$ 轴所围成的区域




解法一 固定 $x$，先对 $y$ 积分：

$$\iint_D e^{x^2}dxdy=\int_0^1\left[\int_0^x e^{x^2}dy\right]dx=\int_0^1\left[e^{x^2}y\Big|_0^x\right]dx$$

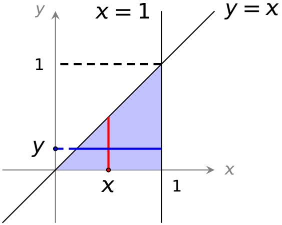
$$=\int_0^1 xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}$$

---

解法二 固定 $y$，先对 $x$ 积分：

$$\iint_D e^{x^2}dxdy=\int_0^1\left[\int_y^1 e^{x^2}dx\right]dy$$

**例** 计算 $\iint_D e^{x^2}dxdy$，其中 $D$ 是由 $y=x$，$x=1$，$x$ 轴所围成的区域




**解法一** 固定 $x$，先对 $y$ 积分：

$$\iint_D e^{x^2}dxdy = \int_0^1 \Big[\int_0^x e^{x^2}dy\Big]dx = \int_0^1 \Big[e^{x^2}y\Big|_0^x\Big]dx$$

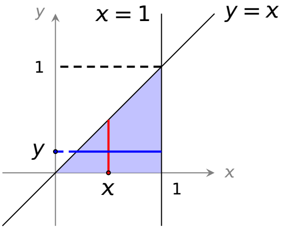
$$= \int_0^1 xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}$$

---

**解法二** 固定 $y$，先对 $x$ 积分：

$$\iint_D e^{x^2}dxdy = \int_0^1 \Big[\int_y^1 e^{x^2}dx\Big]dy = \cdots\cdots \text{积不出}$$

**例** 计算 $\iint_D e^{x^2}dxdy$，其中 $D$ 是由 $y=x$，$x=1$，$x$ 轴所围成的区域




**解法一** 固定 $x$，先对 $y$ 积分：

$$\iint_D e^{x^2}dxdy = \int_0^1\Big[\int_0^x e^{x^2}dy\Big]dx = \int_0^1\Big[e^{x^2}y\Big|_0^x\Big]dx$$

$$= \int_0^1 xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}$$

---

**解法二** 固定 $y$，先对 $x$ 积分：

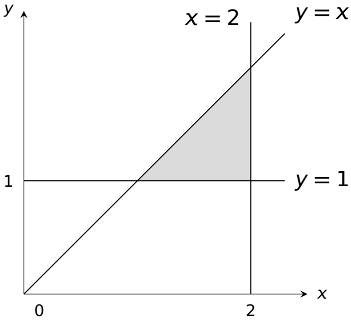
$$\iint_D e^{x^2}dxdy = \int_0^1\Big[\int_y^1 e^{x^2}dx\Big]dy = \cdots\cdots \text{积不出}$$

**注** 选择恰当的积分次序，才能算出二重积分！

# We are here now...

1. 如何计算二重积分？
2. 固定 $x$，先对 $y$ 积分
3. 固定 $y$，先对 $x$ 积分
4. 交换二重积分的积分次序
5. 极坐标下计算二重积分
6. 二重积分的应用

# 交换积分次序



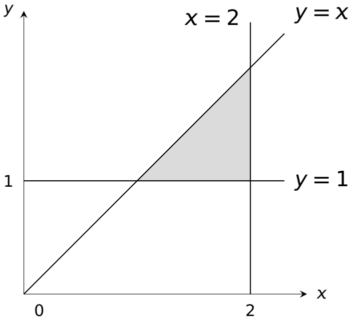

$$\iint_D f(x,y)dx =$$

# 交换积分次序

区域 $D$ 同时是

- $X$-型区域：

- $Y$-型区域：



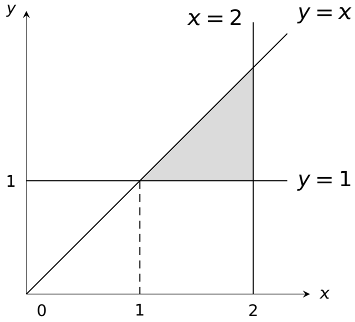

$$\iint_D f(x,y)dx =$$

# 交换积分次序

区域 $D$ 同时是

- $X$-型区域：

- $Y$-型区域：



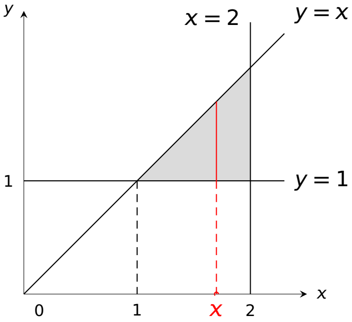

$$\iint_D f(x,y)dx =$$

# 交换积分次序

区域 $D$ 同时是

- $X$-型区域:
- $Y$-型区域:

$$\iint_D f(x,y)dx =$$

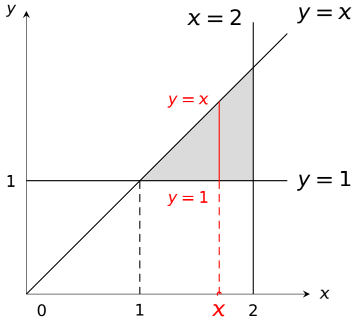


# 交换积分次序

区域 $D$ 同时是

- $X$-型区域：

- $Y$-型区域：




$$\iint_D f(x,y)dx =$$

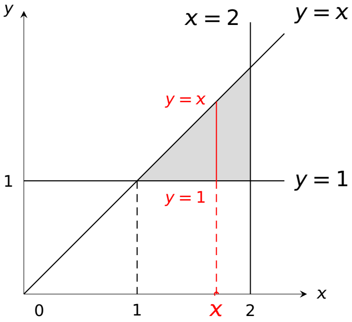
# 交换积分次序

区域 $D$ 同时是

- $X$-型区域：

  $D = \{(x, y) | 1 \le y \le x, 1 \le x \le 2\}$

- $Y$-型区域：




$$\iint_D f(x, y) dx =$$

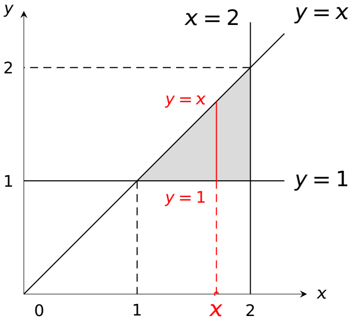
# 交换积分次序

区域 $D$ 同时是

- $X$-型区域：

  $D = \{(x, y) | 1 \le y \le x,\ 1 \le x \le 2\}$

- $Y$-型区域：




$$\iint_D f(x, y) dx =$$

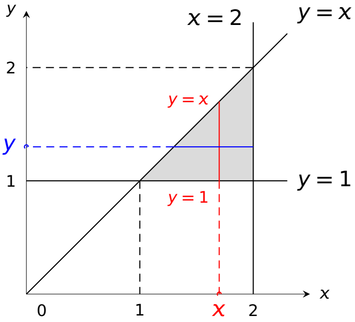
# 交换积分次序

区域 $D$ 同时是

- $X$-型区域：

  $D=\{(x,y)|1\le y\le x, 1\le x\le 2\}$

- $Y$-型区域：




$$\iint_D f(x,y)dx=$$

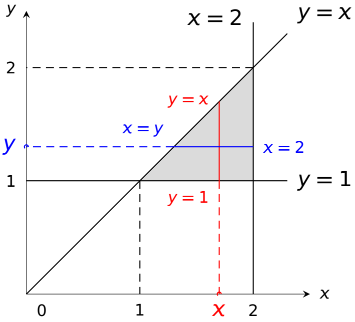
# 交换积分次序

区域 $D$ 同时是

- $X$-型区域：

  $D = \{(x, y) | 1 \leq y \leq x, 1 \leq x \leq 2\}$

- $Y$-型区域：




$$\iint_D f(x, y) dx =$$

# 交换积分次序

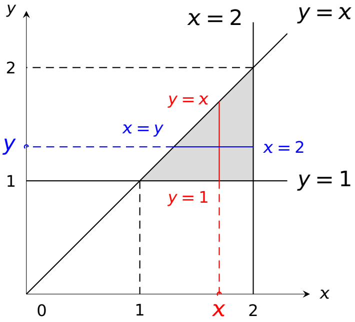
区域 $D$ 同时是

- $X$-型区域：

  $D = \{(x, y) | 1 \le y \le x, 1 \le x \le 2\}$

- $Y$-型区域：

  $D = \{(x, y) | y \le x \le 2, 1 \le y \le 2\}$




$$\iint_D f(x, y) dx =$$

# 交换积分次序

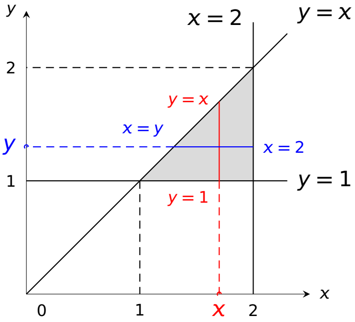
区域 $D$ 同时是

- $X$-型区域：

  $D=\{(x,y)|1\le y\le x,\ 1\le x\le 2\}$

- $Y$-型区域：

  $D=\{(x,y)|y\le x\le 2,\ 1\le y\le 2\}$




$$\iint_D f(x,y)dx=\int\ \Big[\int\ f(x,y)dy\Big]dx$$

# 交换积分次序

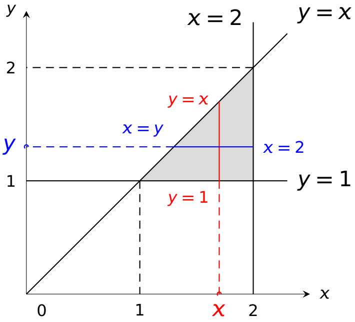
区域 $D$ 同时是

- $X$-型区域：

  $D = \{(x, y) | 1 \le y \le x,\ 1 \le x \le 2\}$

- $Y$-型区域：

  $D = \{(x, y) | y \le x \le 2,\ 1 \le y \le 2\}$




$$\iint_D f(x,y)dx = \int_1^2 \left[ \int \quad f(x,y)dy \right] dx$$

# 交换积分次序

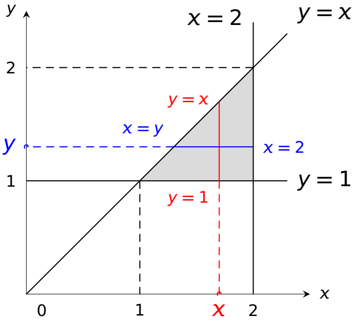
区域 $D$ 同时是

- $X$-型区域:

  $D = \{(x, y) | 1 \le y \le x,\ 1 \le x \le 2\}$

- $Y$-型区域:

  $D = \{(x, y) | y \le x \le 2,\ 1 \le y \le 2\}$




$$\iint_D f(x, y) dx = \int_1^2 \left[ \int_1^x f(x, y) dy \right] dx$$

# 交换积分次序

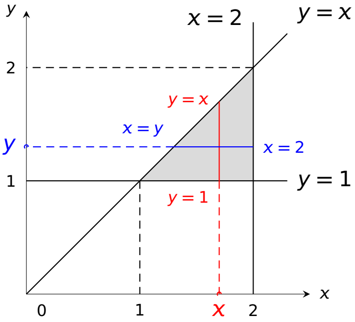
区域 $D$ 同时是

- $X$-型区域：

  $D = \{(x, y) | 1 \le y \le x,\ 1 \le x \le 2\}$

- $Y$-型区域：

  $D = \{(x, y) | y \le x \le 2,\ 1 \le y \le 2\}$




$$\iint_D f(x,y)dx = \int_1^2 \Big[\int_1^x f(x,y)dy\Big]dx = \int \Big[\int f(x,y)dx\Big]dy$$

# 交换积分次序

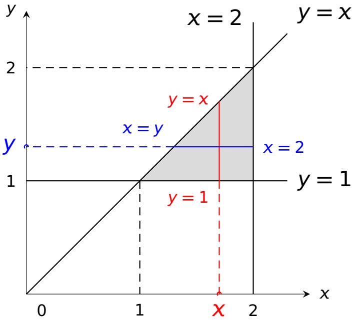
区域 $D$ 同时是

- $X$-型区域：

  $D = \{(x, y) | 1 \leq y \leq x,\ 1 \leq x \leq 2\}$

- $Y$-型区域：

  $D = \{(x, y) | y \leq x \leq 2,\ 1 \leq y \leq 2\}$




$$\iint_D f(x,y)dx = \int_1^2 \Big[\int_1^x f(x,y)dy\Big]dx = \int_0^1 \Big[\int \quad f(x,y)dx\Big]dy$$

# 交换积分次序

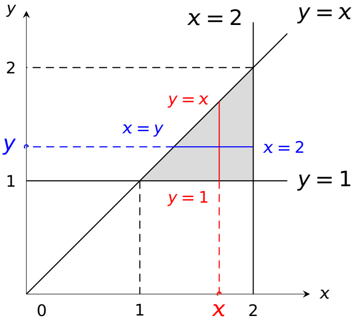
区域 $D$ 同时是

- $X$-型区域：

  $D = \{(x, y) | 1 \le y \le x,\ 1 \le x \le 2\}$

- $Y$-型区域：

  $D = \{(x, y) | y \le x \le 2,\ 1 \le y \le 2\}$




$$\iint_D f(x,y)dx = \int_1^2 \left[ \int_1^x f(x,y)dy \right] dx = \int_0^1 \left[ \int_0^y f(x,y)dx \right] dy$$

# 交换积分次序

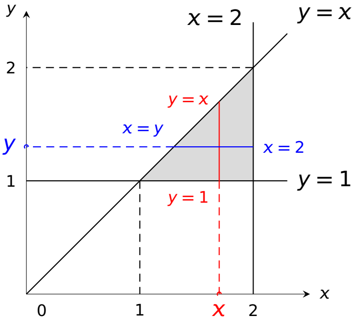
区域 $D$ 同时是

- $X$-型区域：

  $D = \{(x, y) | 1 \le y \le x,\ 1 \le x \le 2\}$

- $Y$-型区域：

  $D = \{(x, y) | y \le x \le 2,\ 1 \le y \le 2\}$




$$\iint_D f(x,y)dx = \int_1^2 \Big[\int_1^x f(x,y)dy\Big]dx = \int_0^1 \Big[\int_0^y f(x,y)dx\Big]dy$$

问题 1. $\int_0^1 \Big[\int_0^y f(x,y)dx\Big]dy$

# 交换积分次序

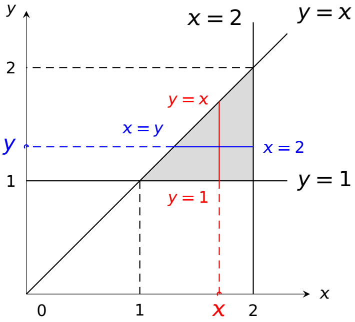
区域 $D$ 同时是

- $X$-型区域：

  $D=\{(x,y)|1\le y\le x,\ 1\le x\le 2\}$

- $Y$-型区域：

  $D=\{(x,y)|y\le x\le 2,\ 1\le y\le 2\}$




$$\iint_D f(x,y)dx=\int_1^2\Big[\int_1^x f(x,y)dy\Big]dx=\int_0^1\Big[\int_0^y f(x,y)dx\Big]dy$$

问题 1. $\int_0^1\Big[\int_0^y f(x,y)dx\Big]dy=\int_*^*\Big[\int_*^* f(x,y)dy\Big]dx,$

# 交换积分次序

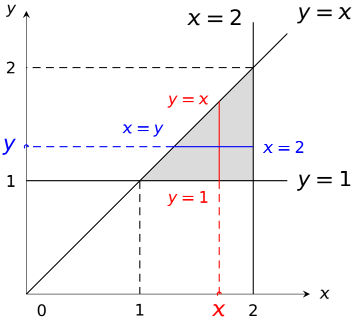
区域 $D$ 同时是

- $X$-型区域：

  $D = \{(x, y) | 1 \le y \le x,\ 1 \le x \le 2\}$

- $Y$-型区域：

  $D = \{(x, y) | y \le x \le 2,\ 1 \le y \le 2\}$




$$\iint_D f(x,y)dx = \int_1^2 \Big[ \int_1^x f(x,y)dy \Big] dx = \int_0^1 \Big[ \int_0^y f(x,y)dx \Big] dy$$

问题 1. $\int_0^1 \Big[ \int_0^y f(x,y)dx \Big] dy = \int_*^* \Big[ \int_*^* f(x,y)dy \Big] dx,$

2. $\int_1^2 \Big[ \int_1^x f(x,y)dy \Big] dx$

# 交换积分次序

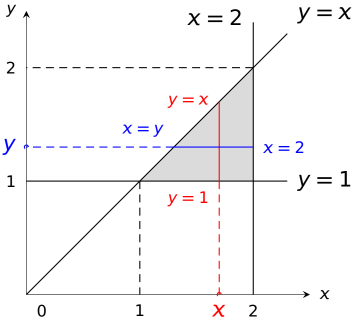
区域 $D$ 同时是

- $X$-型区域：

  $D=\{(x,y)|1\le y\le x,\ 1\le x\le 2\}$

- $Y$-型区域：

  $D=\{(x,y)|y\le x\le 2,\ 1\le y\le 2\}$




$$\iint_D f(x,y)dx=\int_1^2\Big[\int_1^x f(x,y)dy\Big]dx=\int_0^1\Big[\int_0^y f(x,y)dx\Big]dy$$

问题 1. $\int_0^1\Big[\int_0^y f(x,y)dx\Big]dy=\int_*^*\Big[\int_*^* f(x,y)dy\Big]dx,$

2. $\int_1^2\Big[\int_1^x f(x,y)dy\Big]dx=\int_*^*\Big[\int_*^* f(x,y)dx\Big]dy.$

例 补充积分限 1. $\int_1^e\left[\int_0^{\ln x} f(x,y)dy\right]dx = \int_*^*\left[\int_*^* f(x,y)dx\right]dy,$

2. $\int_{-1}^1\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy\right]dx = \int_*^*\left[\int_*^* f(x,y)dx\right]dy.$

例 补充积分限 1. $\int_1^e\left[\int_0^{\ln x} f(x,y)dy\right]dx = \int_*^*\left[\int_*^* f(x,y)dx\right]dy,$

2. $\int_{-1}^1\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy\right]dx = \int_*^*\left[\int_*^* f(x,y)dx\right]dy.$

解 1. 因为

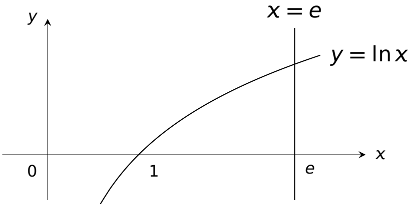
$$D = \{(x,y) | \, 0 \le y \le \ln x, \; 1 \le x \le e\}$$

例 补充积分限 1. $\int_1^e\left[\int_0^{\ln x} f(x,y)dy\right]dx=\int_*^*\left[\int_*^* f(x,y)dx\right]dy,$

2. $\int_{-1}^1\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy\right]dx=\int_*^*\left[\int_*^* f(x,y)dx\right]dy.$

解 1. 因为

$$D=\{(x,y)|\,0\le y\le \ln x,\ 1\le x\le e\}$$

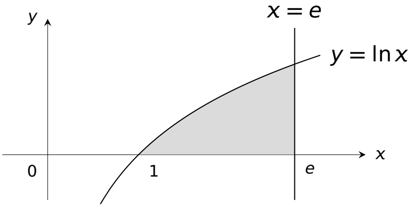


例 补充积分限 1. $\int_1^e\left[\int_0^{\ln x} f(x,y)dy\right]dx = \int_*^*\left[\int_*^* f(x,y)dx\right]dy,$

2. $\int_{-1}^1\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy\right]dx = \int_*^*\left[\int_*^* f(x,y)dx\right]dy.$

解 1. 因为

$$D = \{(x,y) | \, 0 \le y \le \ln x, \, 1 \le x \le e\}$$



例 补充积分限 1. $\int_1^e\left[\int_0^{\ln x} f(x,y)dy\right]dx = \int_*^*\left[\int_*^* f(x,y)dx\right]dy,$

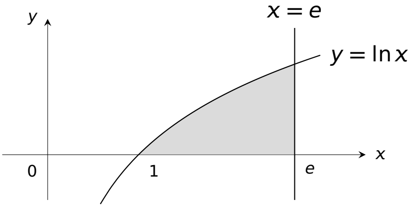
2. $\int_{-1}^1\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy\right]dx = \int_*^*\left[\int_*^* f(x,y)dx\right]dy.$

解 1. 因为

$$D = \{(x,y)|\, 0 \le y \le \ln x,\ 1 \le x \le e\}$$

$$\int_1^e\left[\int_0^{\ln x} f(x,y)dy\right]dx$$

$$= \int\left[\int f(x,y)dx\right]dy$$

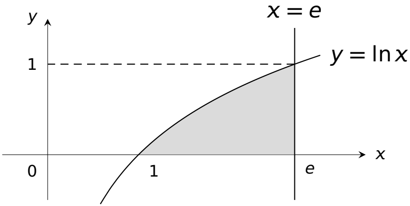


例 补充积分限 1. $\int_1^e\left[\int_0^{\ln x} f(x,y)dy\right]dx = \int_*^*\left[\int_*^* f(x,y)dx\right]dy,$

2. $\int_{-1}^1\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy\right]dx = \int_*^*\left[\int_*^* f(x,y)dx\right]dy.$

解 1. 因为

$$D = \{(x,y)|\, 0 \le y \le \ln x,\ 1 \le x \le e\}$$




$$\int_1^e\left[\int_0^{\ln x} f(x,y)dy\right]dx$$

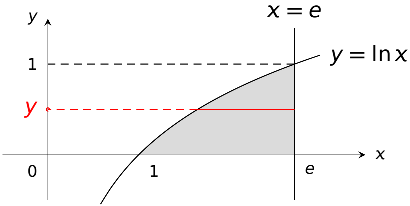
$$= \int \left[\int f(x,y)dx\right]dy$$

**例** 补充积分限 1. $\int_1^e\left[\int_0^{\ln x} f(x,y)dy\right]dx = \int_*^*\left[\int_*^* f(x,y)dx\right]dy,$

2. $\int_{-1}^1\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy\right]dx = \int_*^*\left[\int_*^* f(x,y)dx\right]dy.$

**解** 1. 因为

$D = \{(x,y)|\, 0 \le y \le \ln x,\ 1 \le x \le e\}$




$$\int_1^e\left[\int_0^{\ln x} f(x,y)dy\right]dx$$

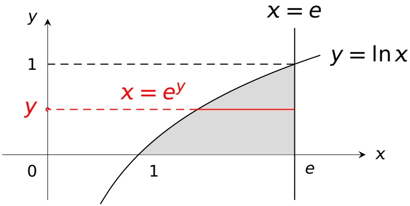
$$= \int \left[\int f(x,y)dx\right]dy$$

**例** 补充积分限 1. $\int_1^e \left[\int_0^{\ln x} f(x,y)dy\right]dx = \int_*^* \left[\int_*^* f(x,y)dx\right]dy,$

2. $\int_{-1}^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy\right]dx = \int_*^* \left[\int_*^* f(x,y)dx\right]dy.$

**解** 1. 因为

$$D = \{(x,y) \mid 0 \le y \le \ln x,\ 1 \le x \le e\}$$




$$\int_1^e \left[\int_0^{\ln x} f(x,y)dy\right]dx$$

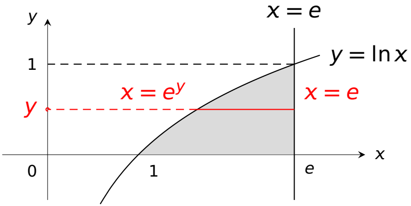
$$= \int \left[\int f(x,y)dx\right]dy$$

例 补充积分限 1. $\int_1^e\left[\int_0^{\ln x} f(x,y)dy\right]dx = \int_*^*\left[\int_*^* f(x,y)dx\right]dy,$

2. $\int_{-1}^1\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy\right]dx = \int_*^*\left[\int_*^* f(x,y)dx\right]dy.$

解 1. 因为

$$D = \{(x,y) \mid 0 \le y \le \ln x,\ 1 \le x \le e\}$$




$$\int_1^e\left[\int_0^{\ln x} f(x,y)dy\right]dx$$

$$= \int \left[\int f(x,y)dx\right]dy$$

**例** 补充积分限 1. $\int_1^e\left[\int_0^{\ln x} f(x,y)dy\right]dx = \int_*^*\left[\int_*^* f(x,y)dx\right]dy,$

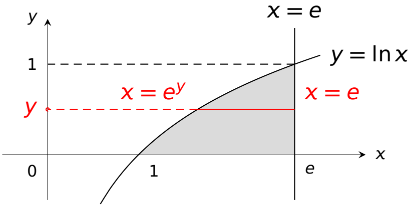
2. $\int_{-1}^1\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy\right]dx = \int_*^*\left[\int_*^* f(x,y)dx\right]dy.$

**解** 1. 因为

$$D = \{(x,y) \mid 0 \le y \le \ln x,\ 1 \le x \le e\}$$

所以

$$\int_1^e\left[\int_0^{\ln x} f(x,y)dy\right]dx$$
$$= \int_0^1\left[\int \quad f(x,y)dx\right]dy$$



例 补充积分限 1. $\int_1^e\left[\int_0^{\ln x} f(x,y)dy\right]dx = \int_*^*\left[\int_*^* f(x,y)dx\right]dy,$

2. $\int_{-1}^1\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy\right]dx = \int_*^*\left[\int_*^* f(x,y)dx\right]dy.$

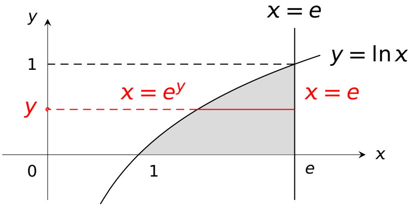
解 1. 因为

$$D=\{(x,y)|\,0\le y\le \ln x,\ 1\le x\le e\}$$

所以

$$\int_1^e\left[\int_0^{\ln x} f(x,y)dy\right]dx$$

$$=\int_0^1\left[\int_{e^y}^{e} f(x,y)dx\right]dy$$



例 补充积分限 1. $\int_1^e\left[\int_0^{\ln x} f(x,y)dy\right]dx = \int_*^*\left[\int_*^* f(x,y)dx\right]dy,$

2. $\int_{-1}^1\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy\right]dx = \int_*^*\left[\int_*^* f(x,y)dx\right]dy.$

例 补充积分限 1. $\int_1^e\left[\int_0^{\ln x} f(x,y)dy\right]dx=\int_*^*\left[\int_*^* f(x,y)dx\right]dy,$

2. $\int_{-1}^1\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy\right]dx=\int_*^*\left[\int_*^* f(x,y)dx\right]dy.$

解 2. 因为

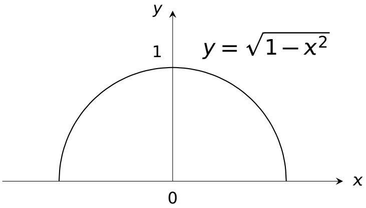
$$D=\{(x,y)|\,0\le y\le\sqrt{1-x^2},-1\le x\le 1\}$$

例 补充积分限 1. $\int_1^e\left[\int_0^{\ln x} f(x,y)dy\right]dx=\int_*^*\left[\int_*^* f(x,y)dx\right]dy,$

2. $\int_{-1}^1\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy\right]dx=\int_*^*\left[\int_*^* f(x,y)dx\right]dy.$

解 2. 因为

$$D=\{(x,y)|0\le y\le\sqrt{1-x^2},-1\le x\le 1\}$$

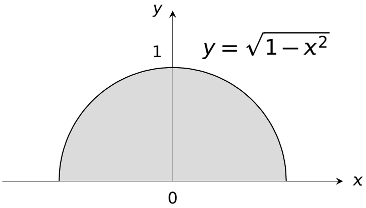


**例** 补充积分限 1. $\int_1^e \left[\int_0^{\ln x} f(x,y)dy\right]dx = \int_*^* \left[\int_*^* f(x,y)dx\right]dy,$

2. $\int_{-1}^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy\right]dx = \int_*^* \left[\int_*^* f(x,y)dx\right]dy.$

**解** 2. 因为

$$D = \{(x,y) | 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}, -1 \le x \le 1\}$$



例 补充积分限 1. $\int_1^e \left[\int_0^{\ln x} f(x,y)dy\right]dx = \int_*^* \left[\int_*^* f(x,y)dx\right]dy,$

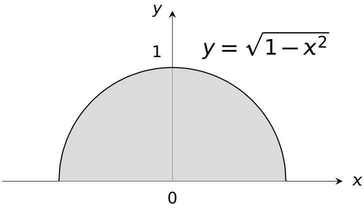
2. $\int_{-1}^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy\right]dx = \int_*^* \left[\int_*^* f(x,y)dx\right]dy.$

解 2. 因为

$$D = \{(x,y) | 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}, -1 \le x \le 1\}$$

$$\int_{-1}^{1}\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy\right]dx$$

$$= \int \left[\int \qquad f(x,y)dx\right]dy$$



**例** 补充积分限 1. $\int_1^e\left[\int_0^{\ln x} f(x,y)dy\right]dx = \int_*^*\left[\int_*^* f(x,y)dx\right]dy$,

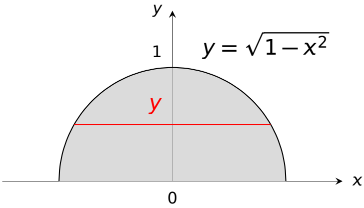
2. $\int_{-1}^1\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy\right]dx = \int_*^*\left[\int_*^* f(x,y)dx\right]dy$.

**解** 2. 因为

$$D = \{(x,y) \mid 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}, -1 \le x \le 1\}$$

$$\int_{-1}^{1}\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy\right]dx$$

$$= \int \left[\int \qquad f(x,y)dx\right]dy$$



例 补充积分限 1. $\int_1^e \left[\int_0^{\ln x} f(x,y)dy\right]dx = \int_*^* \left[\int_*^* f(x,y)dx\right]dy,$

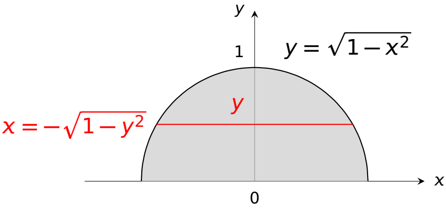
2. $\int_{-1}^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy\right]dx = \int_*^* \left[\int_*^* f(x,y)dx\right]dy.$

解 2. 因为

$$D = \{(x,y) | 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}, -1 \le x \le 1\}$$

$$\int_{-1}^{1} \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy\right]dx$$

$$= \int \left[\int f(x,y)dx\right]dy$$



**例** 补充积分限 1. $\int_1^e \left[\int_0^{\ln x} f(x,y)dy\right]dx = \int_*^* \left[\int_*^* f(x,y)dx\right]dy,$

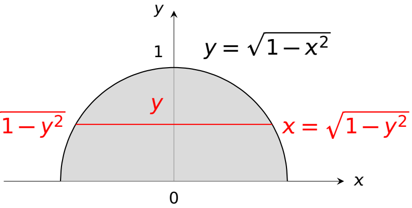
2. $\int_{-1}^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy\right]dx = \int_*^* \left[\int_*^* f(x,y)dx\right]dy.$

**解** 2. 因为

$$D = \{(x,y) | 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}, -1 \le x \le 1\}$$

$$\int_{-1}^{1} \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy\right]dx$$

$$= \int \left[\int f(x,y)dx\right]dy$$



**例** 补充积分限 1. $\int_1^e\left[\int_0^{\ln x} f(x,y)dy\right]dx = \int_*^*\left[\int_*^* f(x,y)dx\right]dy,$

2. $\int_{-1}^1\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy\right]dx = \int_*^*\left[\int_*^* f(x,y)dx\right]dy.$

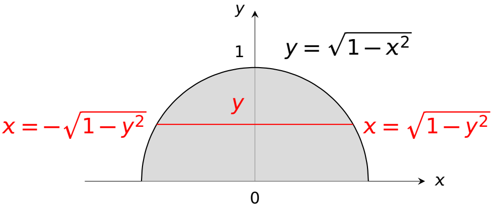
**解** 2. 因为

$$D = \{(x,y) | 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}, -1 \le x \le 1\}$$

所以

$$\int_{-1}^1\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy\right]dx$$

$$= \int_0^1\left[\int \qquad f(x,y)dx\right]dy$$



**例** 补充积分限 1. $\int_1^e\left[\int_0^{\ln x} f(x,y)dy\right]dx = \int_*^*\left[\int_*^* f(x,y)dx\right]dy,$

2. $\int_{-1}^1\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy\right]dx = \int_*^*\left[\int_*^* f(x,y)dx\right]dy.$

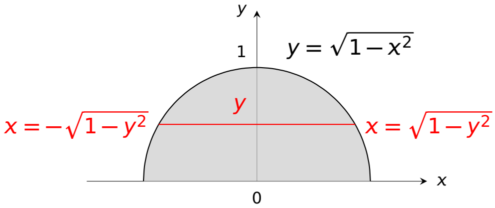
**解** 2. 因为

$$D = \{(x,y) | 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}, -1 \le x \le 1\}$$

所以

$$\int_{-1}^1\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy\right]dx$$

$$= \int_0^1\left[\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx\right]dy$$



**例** 补充积分限 $\int_0^2 \left[\int_{y^2}^{2y} f(x,y)dx\right]dy = \int_*^* \left[\int_*^* f(x,y)dy\right]dx.$

例 补充积分限 $\int_0^2\left[\int_{y^2}^{2y} f(x,y)dx\right]dy = \int_*^*\left[\int_*^* f(x,y)dy\right]dx.$

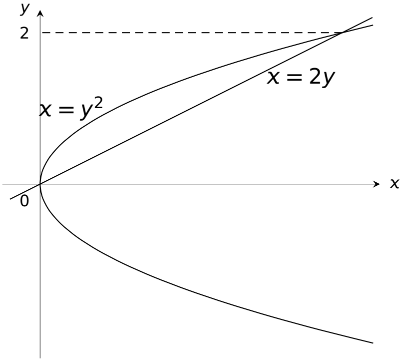
解 因为

$D = \{(x,y) | y^2 \le x \le 2y,\ 0 \le y \le 2\}$

**例** 补充积分限 $\int_0^2\left[\int_{y^2}^{2y} f(x,y)dx\right]dy = \int_*^*\left[\int_*^* f(x,y)dy\right]dx.$

**解** 因为

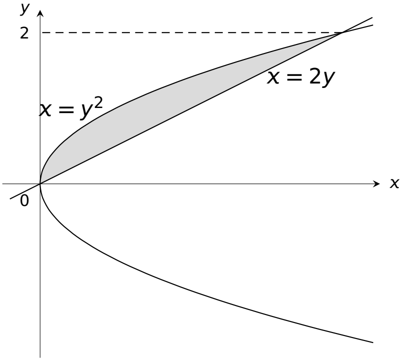
$$D = \{(x,y)|\, y^2 \le x \le 2y,\ 0 \le y \le 2\}$$



**例** 补充积分限 $\int_0^2\left[\int_{y^2}^{2y} f(x,y)dx\right]dy = \int_*^*\left[\int_*^* f(x,y)dy\right]dx.$

**解** 因为

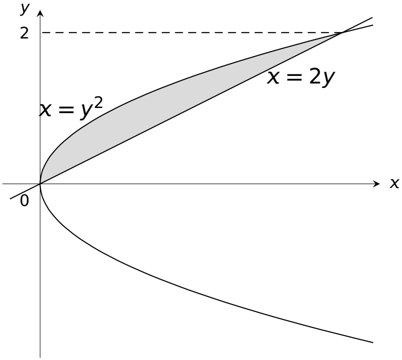
$$D = \{(x,y) | y^2 \le x \le 2y,\ 0 \le y \le 2\}$$



**例** 补充积分限 $\int_0^2\left[\int_{y^2}^{2y} f(x,y)dx\right]dy=\int_*^*\left[\int_*^* f(x,y)dy\right]dx.$

**解** 因为

$$D=\{(x,y)|\,y^2\le x\le 2y,\ 0\le y\le 2\}$$



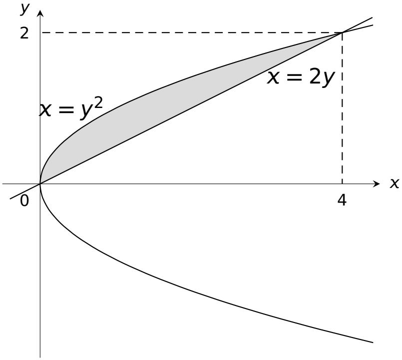

$$\int_0^2\left[\int_{y^2}^{2y} f(x,y)dx\right]dy$$

$$=\int\left[\int f(x,y)dy\right]dx$$

例 补充积分限 $\int_0^2\left[\int_{y^2}^{2y} f(x,y)dx\right]dy = \int_*^*\left[\int_*^* f(x,y)dy\right]dx.$

解 因为

$D = \{(x,y)|\, y^2 \le x \le 2y,\ 0 \le y \le 2\}$



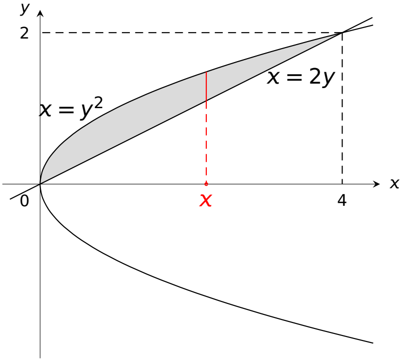

$$\int_0^2\left[\int_{y^2}^{2y} f(x,y)dx\right]dy$$

$$= \int \left[\int \quad f(x,y)dy\right]dx$$

**例** 补充积分限 $\int_0^2\left[\int_{y^2}^{2y} f(x,y)dx\right]dy = \int_*^*\left[\int_*^* f(x,y)dy\right]dx.$

**解** 因为

$$D = \{(x,y) | y^2 \leq x \leq 2y,\ 0 \leq y \leq 2\}$$



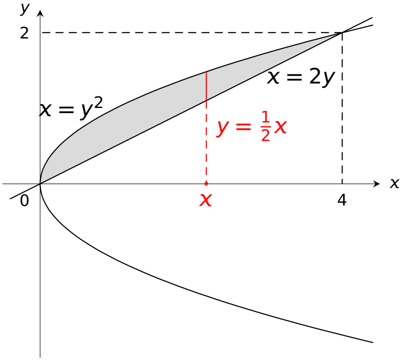

$$\int_0^2\left[\int_{y^2}^{2y} f(x,y)dx\right]dy$$

$$= \int\left[\int f(x,y)dy\right]dx$$

**例** 补充积分限 $\int_0^2\left[\int_{y^2}^{2y} f(x,y)dx\right]dy = \int_*^*\left[\int_*^* f(x,y)dy\right]dx.$

**解** 因为

$$D = \{(x,y) | y^2 \le x \le 2y,\ 0 \le y \le 2\}$$



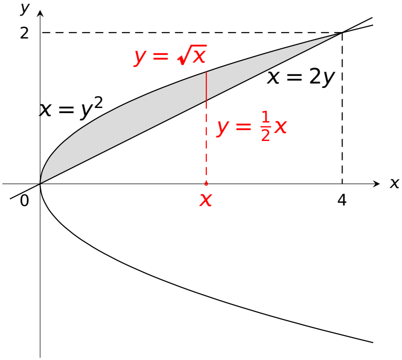

$$\int_0^2 \left[\int_{y^2}^{2y} f(x,y)dx\right]dy$$

$$= \int \left[\int \quad f(x,y)dy\right]dx$$

**例** 补充积分限 $\int_0^2\left[\int_{y^2}^{2y} f(x,y)dx\right]dy = \int_*^*\left[\int_*^* f(x,y)dy\right]dx.$

**解** 因为

$D = \{(x,y) | y^2 \le x \le 2y,\ 0 \le y \le 2\}$




$$\int_0^2\left[\int_{y^2}^{2y} f(x,y)dx\right]dy$$

$$= \int\left[\int \quad f(x,y)dy\right]dx$$

**例** 补充积分限 $\int_0^2\left[\int_{y^2}^{2y} f(x,y)dx\right]dy = \int_*^*\left[\int_*^* f(x,y)dy\right]dx.$

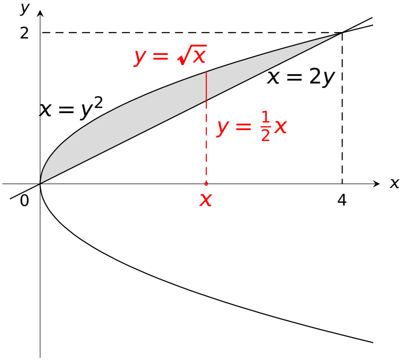
**解** 因为

$$D = \{(x,y) \mid y^2 \le x \le 2y,\ 0 \le y \le 2\}$$

所以

$$\int_0^2 \left[\int_{y^2}^{2y} f(x,y)dx\right]dy$$

$$= \int_0^4 \left[\int \quad f(x,y)dy\right]dx$$



**例** 补充积分限 $\int_0^2\left[\int_{y^2}^{2y} f(x,y)dx\right]dy = \int_*^*\left[\int_*^* f(x,y)dy\right]dx.$

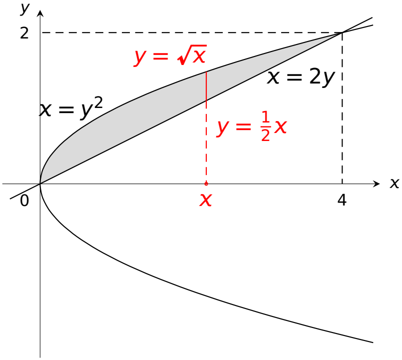
**解** 因为

$$D = \{(x,y)|\, y^2 \le x \le 2y,\ 0 \le y \le 2\}$$

所以

$$\int_0^2\left[\int_{y^2}^{2y} f(x,y)dx\right]dy$$

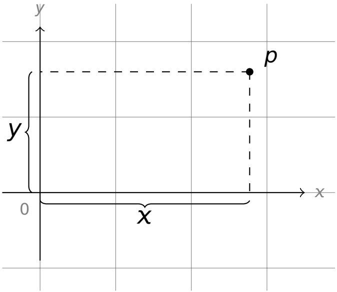
$$= \int_0^4\left[\int_{\frac{1}{2}x}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy\right]dx$$



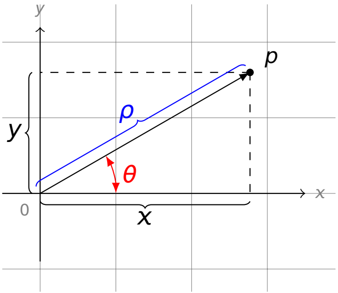
# We are here now...

1. 如何计算二重积分？
2. 固定 $x$，先对 $y$ 积分
3. 固定 $y$，先对 $x$ 积分
4. 交换二重积分的积分次序
5. 极坐标下计算二重积分
6. 二重积分的应用

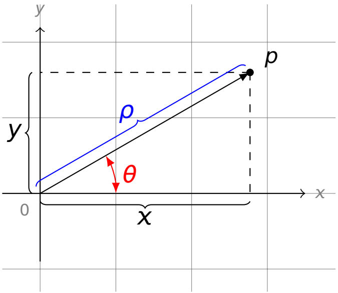
# 回顾极坐标



# 回顾极坐标



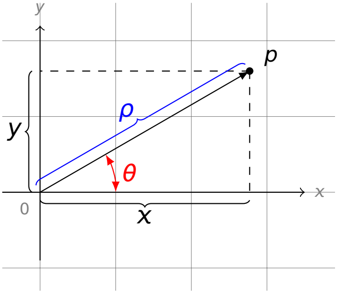
# 回顾极坐标




- 直角坐标 $(x, y)$，极坐标 $(\rho, \theta)$ 的转换：

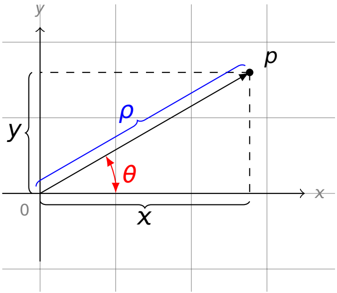
$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

# 回顾极坐标




- 直角坐标 $(x, y)$，极坐标 $(\rho, \theta)$ 的转换：
$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$
- 注
  - 圆周的方程是 $\rho = \rho_0$
  - 射线的方程是 $\theta = \theta_0$

# 回顾极坐标




- 直角坐标 $(x, y)$，极坐标 $(\rho, \theta)$ 的转换：

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

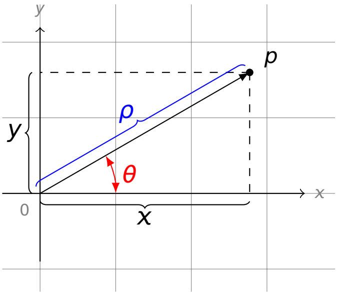
- 注
  - 圆周的方程是 $\rho = \rho_0$
  - 射线的方程是 $\theta = \theta_0$

如下情形，不妨引入极坐标：

- 函数 $f(x, y)$ 在极坐标下，能够简化

- 点集 $D$ 在极坐标下的表示，显得简单

# 回顾极坐标




- 直角坐标 $(x, y)$，极坐标 $(\rho, \theta)$ 的转换：

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

- 注
  - 圆周的方程是 $\rho = \rho_0$
  - 射线的方程是 $\theta = \theta_0$

如下情形，不妨引入极坐标：

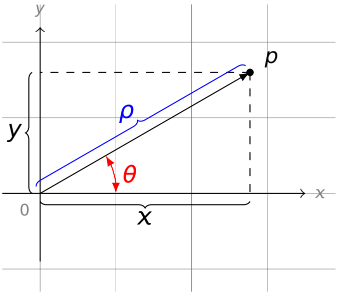
- 函数 $f(x, y)$ 在极坐标下，能够简化，如

$$f_1(x,y) = e^{-x^2-y^2} \qquad f_2(x,y) = \ln(1+x^2+y^2)$$

$$f_3(x,y) = \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}$$

- 点集 $D$ 在极坐标下的表示，显得简单

# 回顾极坐标




- 直角坐标 $(x, y)$，极坐标 $(\rho, \theta)$ 的转换：
$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$
- 注
  - 圆周的方程是 $\rho = \rho_0$
  - 射线的方程是 $\theta = \theta_0$

如下情形，不妨引入极坐标：

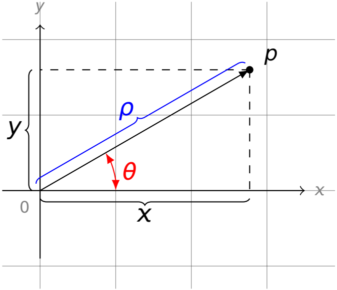
- 函数 $f(x, y)$ 在极坐标下，能够简化，如

$$f_1(x,y) = e^{-x^2-y^2} = e^{-\rho^2}; \quad f_2(x,y) = \ln(1+x^2+y^2)$$

$$f_3(x,y) = \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}$$

- 点集 $D$ 在极坐标下的表示，显得简单

# 回顾极坐标




- 直角坐标 $(x, y)$，极坐标 $(\rho, \theta)$ 的转换：

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

- 注
  - 圆周的方程是 $\rho = \rho_0$
  - 射线的方程是 $\theta = \theta_0$

如下情形，不妨引入极坐标：

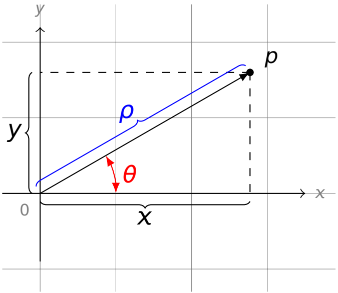
- 函数 $f(x, y)$ 在极坐标下，能够简化，如

$$f_1(x,y) = e^{-x^2-y^2} = e^{-\rho^2}; \quad f_2(x,y) = \ln(1+x^2+y^2) = \ln(1+\rho^2)$$

$$f_3(x,y) = \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}$$

- 点集 $D$ 在极坐标下的表示，显得简单

# 回顾极坐标




- 直角坐标 $(x, y)$，极坐标 $(\rho, \theta)$ 的转换：

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

- 注
  - 圆周的方程是 $\rho = \rho_0$
  - 射线的方程是 $\theta = \theta_0$

如下情形，不妨引入极坐标：

- 函数 $f(x, y)$ 在极坐标下，能够简化，如

$$f_1(x,y) = e^{-x^2-y^2} = e^{-\rho^2}; \quad f_2(x,y) = \ln(1+x^2+y^2) = \ln(1+\rho^2)$$

$$f_3(x,y) = \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{4a^2 - \rho^2}$$

- 点集 $D$ 在极坐标下的表示，显得简单

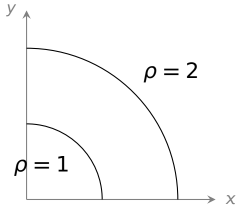
例 用极坐标表示以下的闭区域：

1. $D_1$ 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2=4$ 在第一象限围成的区域
2. $D_2$ 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 在第一象限所围成的闭区域
3. $D_3$ 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 所围成的闭区域

**例** 用极坐标表示以下的闭区域：

1. $D_1$ 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2=4$ 在第一象限围成的区域
2. $D_2$ 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 在第一象限所围成的闭区域
3. $D_3$ 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 所围成的闭区域

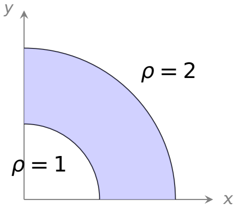
**解**



**例** 用极坐标表示以下的闭区域：

1. $D_1$ 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2=4$ 在第一象限围成的区域
2. $D_2$ 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 在第一象限所围成的闭区域
3. $D_3$ 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 所围成的闭区域

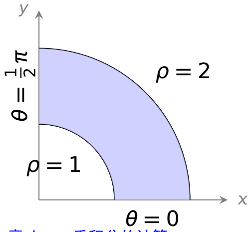
**解**



**例** 用极坐标表示以下的闭区域：

1. $D_1$ 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2=4$ 在第一象限围成的区域
2. $D_2$ 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 在第一象限所围成的闭区域
3. $D_3$ 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 所围成的闭区域

**解**

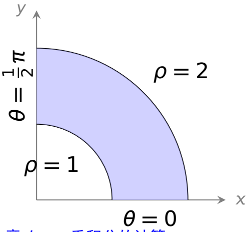


**例** 用极坐标表示以下的闭区域：

1. $D_1$ 是由圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 和 $x^2 + y^2 = 4$ 在第一象限围成的区域
2. $D_2$ 是由圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 在第一象限所围成的闭区域
3. $D_3$ 是由圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 所围成的闭区域

**解**

1. $D_1 = \{(\rho, \theta) | 1 \le \rho \le 2,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\}.$

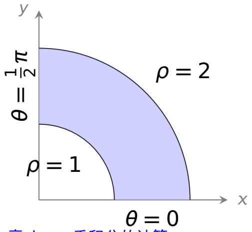


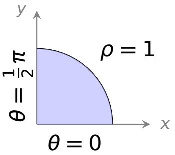
**例** 用极坐标表示以下的闭区域：

1. $D_1$ 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2=4$ 在第一象限围成的区域
2. $D_2$ 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 在第一象限所围成的闭区域
3. $D_3$ 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 所围成的闭区域

**解**

1. $D_1=\{(\rho,\theta)|\,1\le\rho\le 2,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\}$.



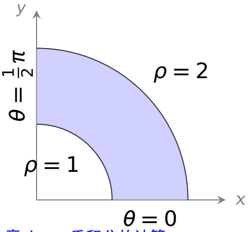



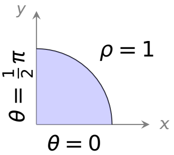
**例** 用极坐标表示以下的闭区域：

1. $D_1$ 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2=4$ 在第一象限围成的区域
2. $D_2$ 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 在第一象限所围成的闭区域
3. $D_3$ 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 所围成的闭区域

**解**

1. $D_1=\{(\rho,\theta)|\,1\le\rho\le 2,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\}$.
2. $D_2=\{(\rho,\theta)|\,0\le\rho\le 1,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\}$.



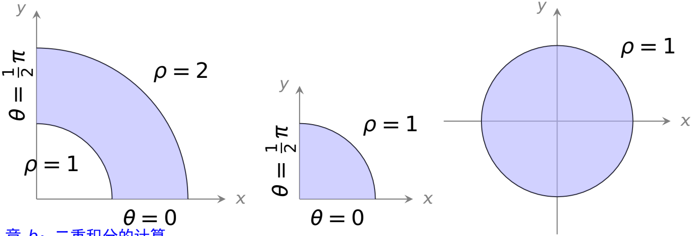



**例** 用极坐标表示以下的闭区域：

1. $D_1$ 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2=4$ 在第一象限围成的区域
2. $D_2$ 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 在第一象限所围成的闭区域
3. $D_3$ 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 所围成的闭区域

**解**

1. $D_1=\{(\rho,\theta)|\,1\le\rho\le 2,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\}$.
2. $D_2=\{(\rho,\theta)|\,0\le\rho\le 1,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\}$.

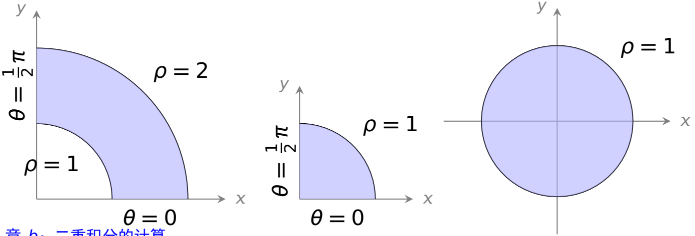


**例** 用极坐标表示以下的闭区域：

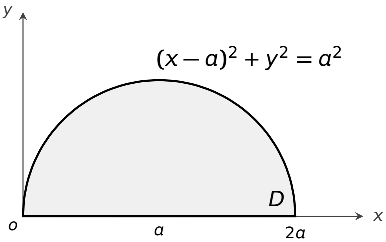
1. $D_1$ 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2=4$ 在第一象限围成的区域
2. $D_2$ 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 在第一象限所围成的闭区域
3. $D_3$ 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 所围成的闭区域

**解**

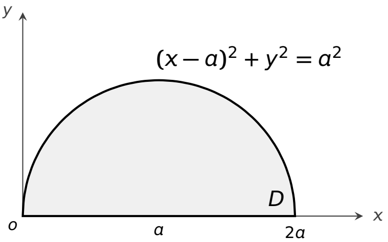
1. $D_1=\{(\rho,\theta)|\,1\le\rho\le2,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\}$.
2. $D_2=\{(\rho,\theta)|\,0\le\rho\le1,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\}$.
3. $D_3=\{(\rho,\theta)|\,0\le\rho\le1,\ 0\le\theta\le2\pi\}$.



例 用极坐标表示右图区域 $D$



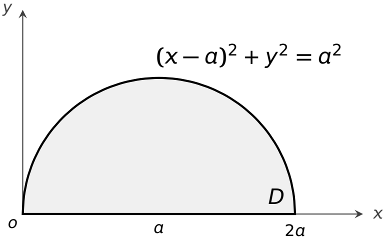
**例** 用极坐标表示右图区域 $D$




**解** 1. 先把圆弧的方程用极坐标改写：

$$(x-a)^2+y^2=a^2$$

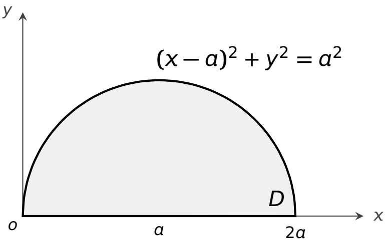
**例** 用极坐标表示右图区域 $D$




**解** 1. 先把圆弧的方程用极坐标改写：

$$(x-a)^2+y^2=a^2 \quad \Rightarrow \quad x^2-2ax+y^2=0$$

例 用极坐标表示右图区域 $D$

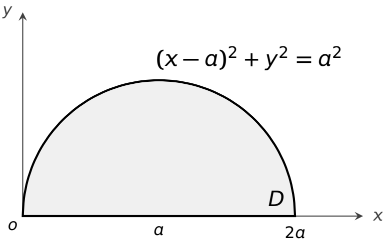



解 1. 先把圆弧的方程用极坐标改写：

$$(x-a)^2+y^2=a^2 \quad \Rightarrow \quad x^2-2ax+y^2=0$$

$$\xRightarrow[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}$$

**例** 用极坐标表示右图区域 $D$

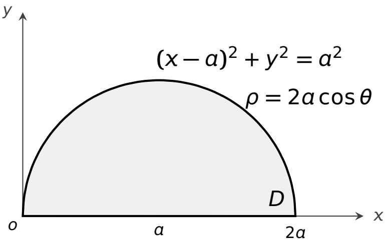



**解** 1. 先把圆弧的方程用极坐标改写：

$$(x-a)^2+y^2=a^2 \quad \Rightarrow \quad x^2-2ax+y^2=0$$

$$\xRightarrow[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \quad \rho^2-2a\rho\cos\theta=0$$

例 用极坐标表示右图区域 $D$



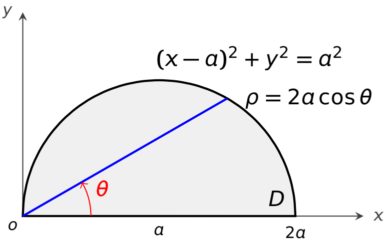

解 1. 先把圆弧的方程用极坐标改写：

$$(x-a)^2+y^2=a^2 \quad \Rightarrow \quad x^2-2ax+y^2=0$$

$$\xRightarrow[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \quad \rho^2-2a\rho\cos\theta=0$$

$$\Rightarrow \quad \rho=2a\cos\theta$$

例 用极坐标表示右图区域 $D$



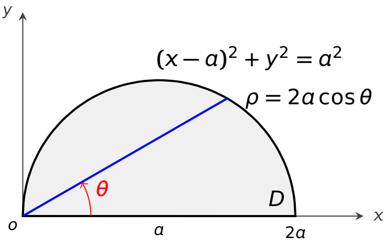

解 1. 先把圆弧的方程用极坐标改写：

$$(x-a)^2+y^2=a^2 \quad \Rightarrow \quad x^2-2ax+y^2=0$$

$$\xrightarrow[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \quad \rho^2-2a\rho\cos\theta=0$$

$$\Rightarrow \quad \rho=2a\cos\theta$$

**例** 用极坐标表示右图区域 $D$




**解** 1. 先把圆弧的方程用极坐标改写：

$$(x-a)^2+y^2=a^2 \quad \Rightarrow \quad x^2-2ax+y^2=0$$

$$\xRightarrow[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \quad \rho^2-2a\rho\cos\theta=0$$

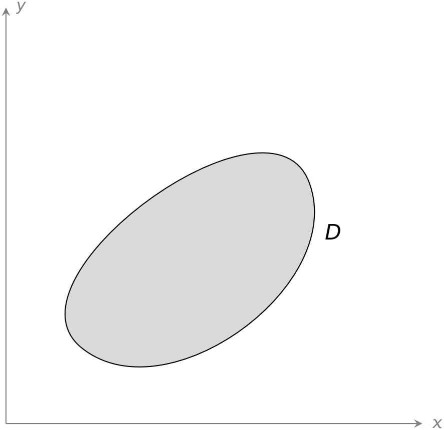
$$\Rightarrow \quad \rho=2a\cos\theta$$

2. 所以

$$D=\{(\rho,\,\theta)\,|\,0\le\rho\le 2a\cos\theta,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\}.$$

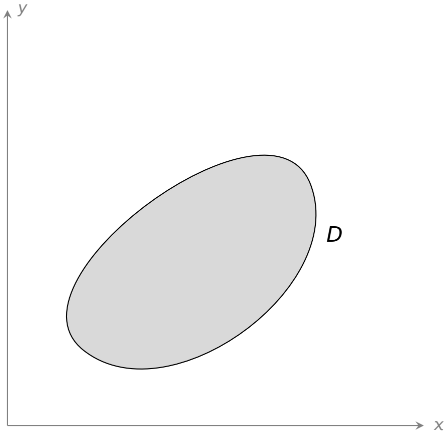
# 极坐标下计算二重积分

$$\iint_D f(x,y)d\sigma \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}$$



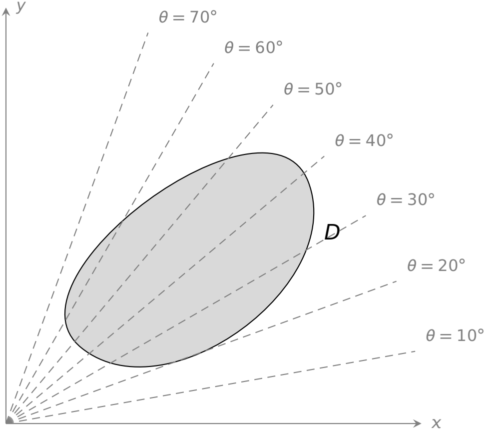
# 极坐标下计算二重积分

$$\iint_D f(x,y)d\sigma \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$



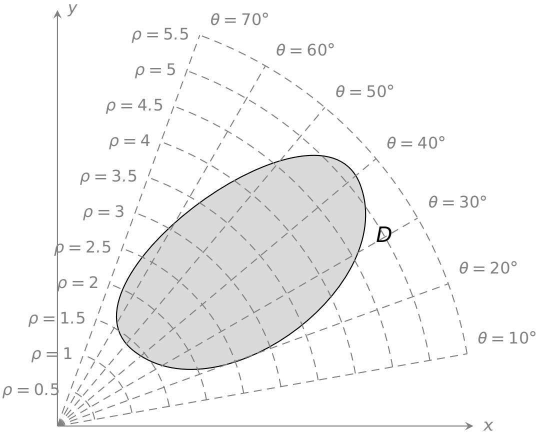
# 极坐标下计算二重积分

$$\iint_D f(x,y)d\sigma \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$



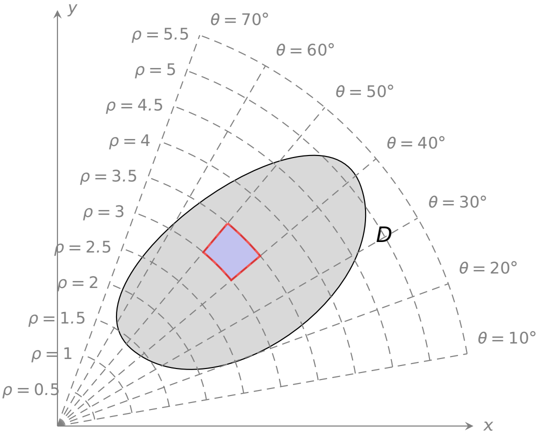
# 极坐标下计算二重积分

$$\iint_D f(x,y)d\sigma \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$$



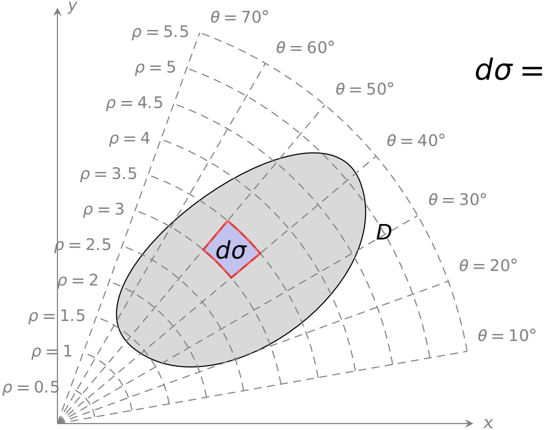
# 极坐标下计算二重积分

$$\iint_D f(x, y)d\sigma \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$



# 极坐标下计算二重积分

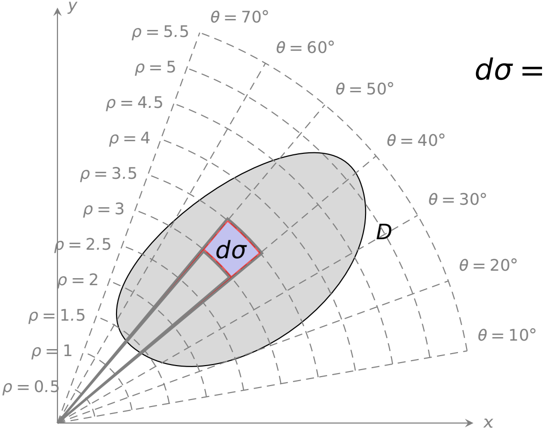
$$\iint_D f(x,y)d\sigma \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$




$d\sigma =$

# 极坐标下计算二重积分

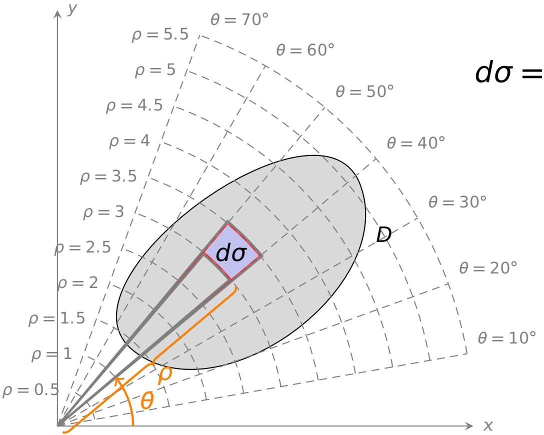
$$\iint_D f(x,y)d\sigma \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$$




$$d\sigma =$$

# 极坐标下计算二重积分

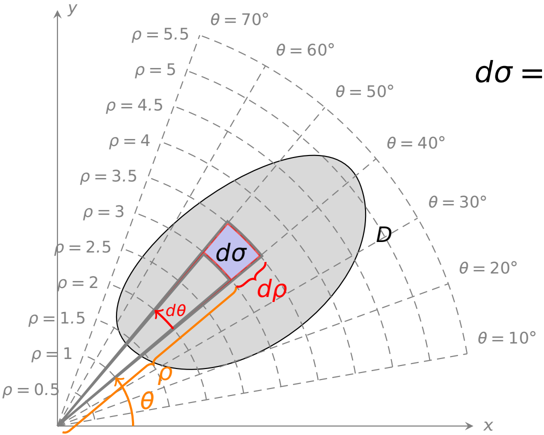
$$\iint_D f(x,y)d\sigma \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$




$$d\sigma =$$

# 极坐标下计算二重积分

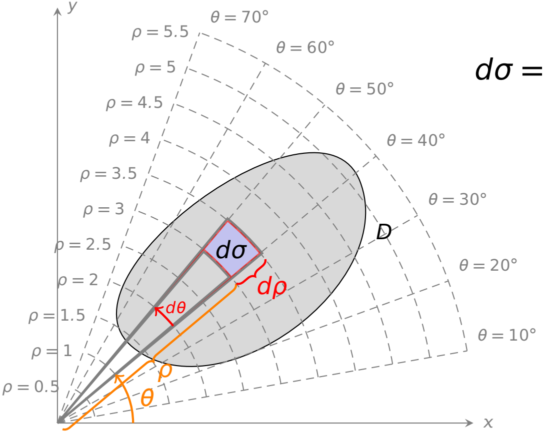
$$\iint_D f(x,y)d\sigma \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$




$d\sigma =$

# 极坐标下计算二重积分

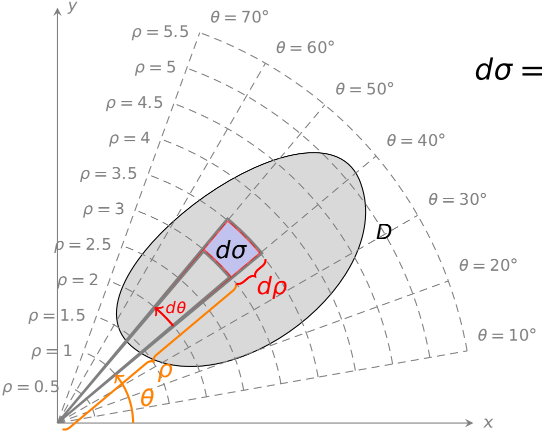
$$\iint_D f(x,y)d\sigma \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$




$$d\sigma = \pi(\rho + d\rho)^2$$

# 极坐标下计算二重积分

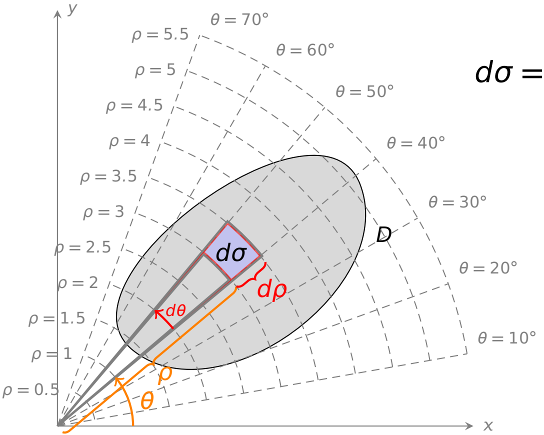
$$\iint_D f(x,y)d\sigma \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$




$$d\sigma = \pi(\rho + d\rho)^2 \cdot \frac{d\theta}{2\pi}$$

# 极坐标下计算二重积分

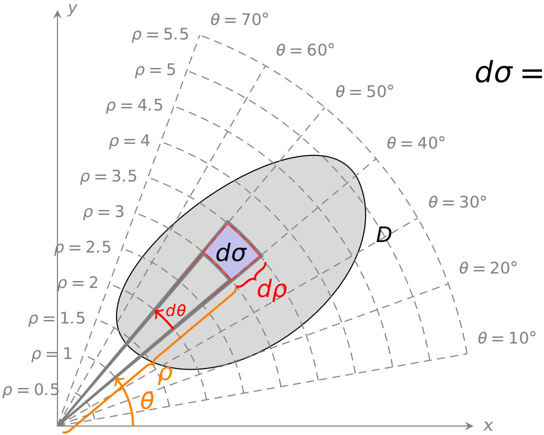
$$\iint_D f(x,y)d\sigma \;\overset{x=\rho\cos\theta}{\underset{y=\rho\sin\theta}{=\!=\!=\!=}}\; \iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$$




$$d\sigma = \pi(\rho+d\rho)^2\cdot\frac{d\theta}{2\pi} \qquad \pi\rho^2$$

# 极坐标下计算二重积分

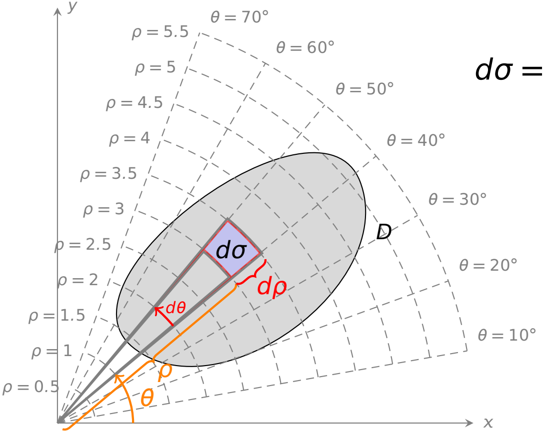
$$\iint_D f(x,y)d\sigma \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$




$$d\sigma = \pi(\rho + d\rho)^2 \cdot \frac{d\theta}{2\pi} \qquad \pi\rho^2 \cdot \frac{d\theta}{2\pi}$$

# 极坐标下计算二重积分

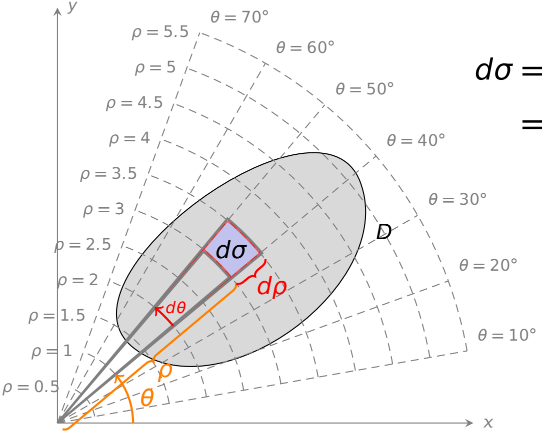
$$\iint_D f(x,y)d\sigma \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$




$$d\sigma = \pi(\rho + d\rho)^2 \cdot \frac{d\theta}{2\pi} - \pi\rho^2 \cdot \frac{d\theta}{2\pi}$$

# 极坐标下计算二重积分

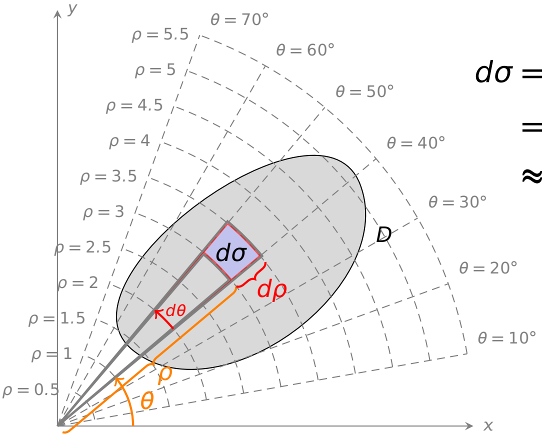
$$\iint_D f(x,y)d\sigma \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$




$$d\sigma = \pi(\rho + d\rho)^2 \cdot \frac{d\theta}{2\pi} - \pi\rho^2 \cdot \frac{d\theta}{2\pi}$$
$$= \rho d\rho d\theta + \frac{1}{2} dr^2 d\theta$$

# 极坐标下计算二重积分

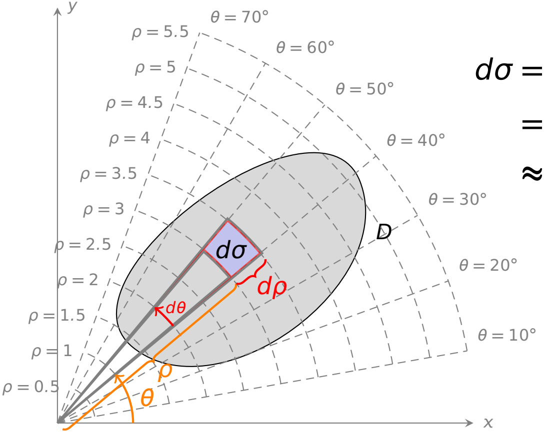
$$\iint_D f(x,y)d\sigma \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$




$$\begin{aligned} d\sigma &= \pi(\rho+d\rho)^2 \cdot \frac{d\theta}{2\pi} - \pi\rho^2 \cdot \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \rho d\rho d\theta + \frac{1}{2} dr^2 d\theta \\ &\approx \rho d\rho d\theta \end{aligned}$$

# 极坐标下计算二重积分

$$\iint_D f(x,y)d\sigma \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

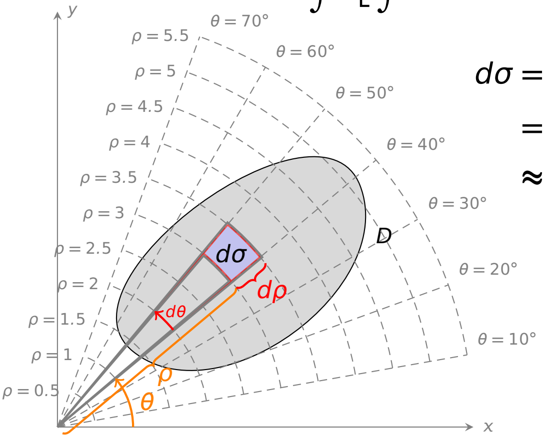



$$\begin{aligned} d\sigma &= \pi(\rho+d\rho)^2\cdot\frac{d\theta}{2\pi} - \pi\rho^2\cdot\frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \rho d\rho d\theta + \frac{1}{2}dr^2 d\theta \\ &\approx \rho d\rho d\theta \end{aligned}$$

# 极坐标下计算二重积分

$$\iint_D f(x,y)d\sigma \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

$$= \int \left[ \int \quad f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho \right] d\theta$$

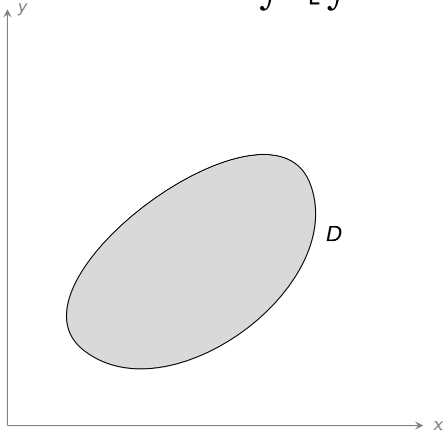



$$\begin{aligned} d\sigma &= \pi(\rho+d\rho)^2 \cdot \frac{d\theta}{2\pi} - \pi\rho^2 \cdot \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \rho d\rho d\theta + \tfrac{1}{2} dr^2 d\theta \\ &\approx \rho d\rho d\theta \end{aligned}$$

# 极坐标下计算二重积分

$$\iint_D f(x,y)d\sigma \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

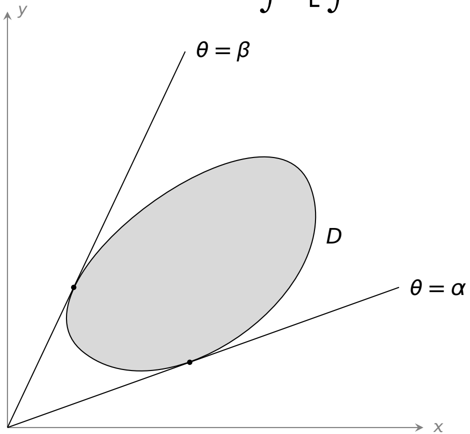
$$= \int \left[ \int \qquad f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho \right] d\theta$$



# 极坐标下计算二重积分

$$\iint_D f(x, y)d\sigma \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

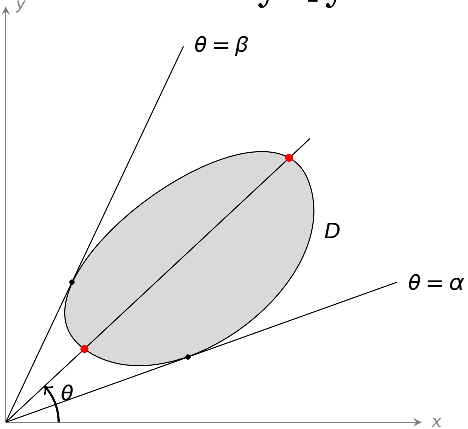
$$= \int \left[ \int \qquad f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho \right] d\theta$$



# 极坐标下计算二重积分

$$\iint_D f(x,y)d\sigma \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

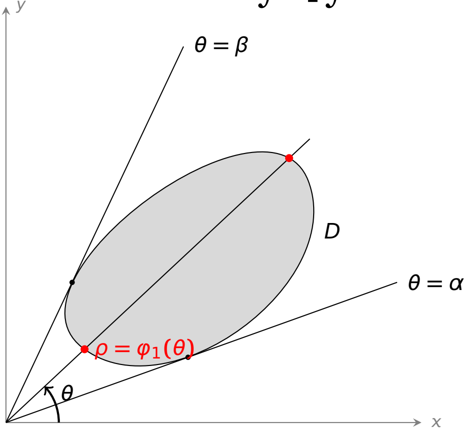
$$= \int \left[\int \qquad f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho\right] d\theta$$



# 极坐标下计算二重积分

$$\iint_D f(x,y)d\sigma \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

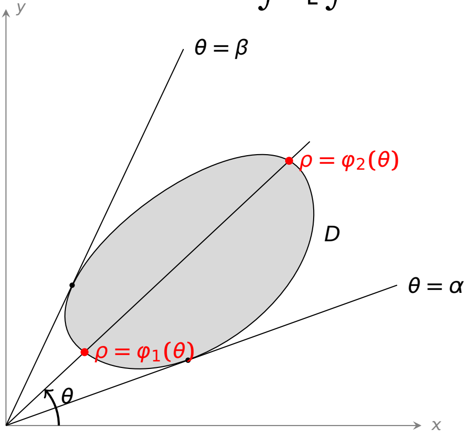
$$= \int \left[ \int \qquad f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho \right] d\theta$$



# 极坐标下计算二重积分

$$\iint_D f(x,y)d\sigma \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

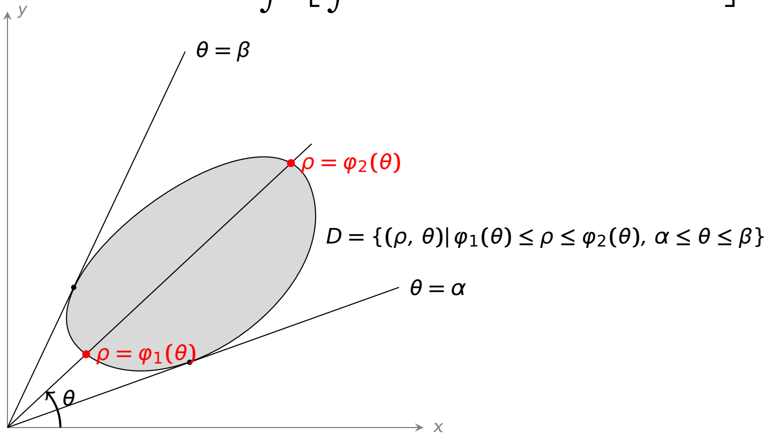
$$= \int \left[ \int f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho \right] d\theta$$



# 极坐标下计算二重积分

$$\iint_D f(x,y)d\sigma \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

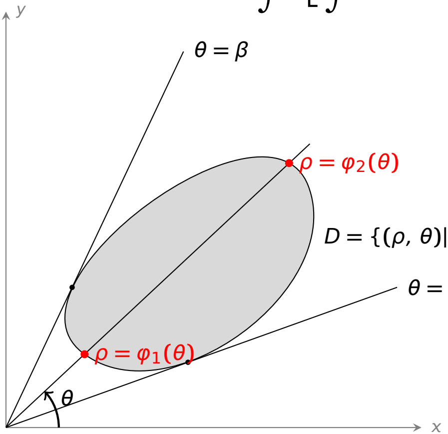
$$= \int \left[ \int \qquad f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho \right] d\theta$$



# 极坐标下计算二重积分

$$\iint_D f(x,y)d\sigma \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

$$= \int \left[ \int \qquad f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho \right] d\theta$$

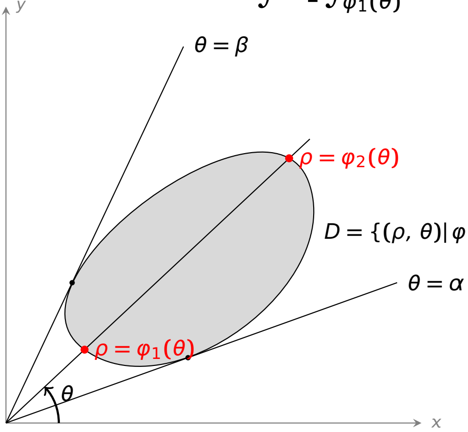



$D=\{(\rho,\theta)|\varphi_1(\theta)\le\rho\le\varphi_2(\theta),\ \alpha\le\theta\le\beta\}$

# 极坐标下计算二重积分

$$\iint_D f(x,y)d\sigma \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

$$= \int \left[\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho\right] d\theta$$

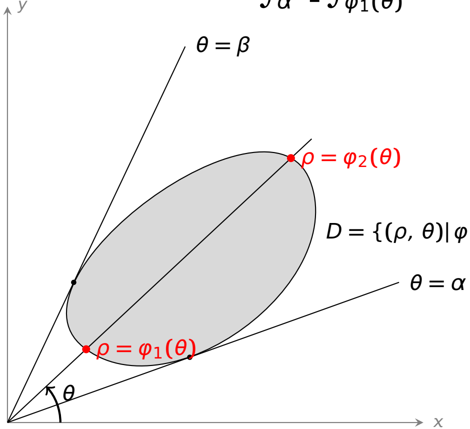



$D = \{(\rho,\theta) | \varphi_1(\theta) \le \rho \le \varphi_2(\theta), \alpha \le \theta \le \beta\}$

# 极坐标下计算二重积分

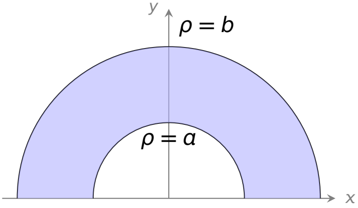
$$\iint_D f(x,y)d\sigma \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta \left[ \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho \right] d\theta$$

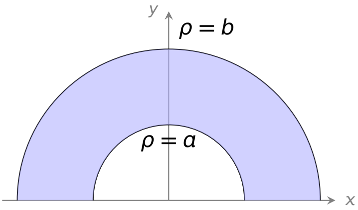



$D = \{(\rho, \theta) | \varphi_1(\theta) \le \rho \le \varphi_2(\theta), \alpha \le \theta \le \beta\}$

**例** 计算 $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$，其中区域 $D$ 如右图所示

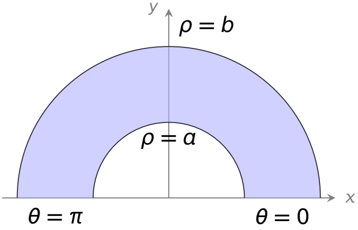


例 计算 $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$，其中区域 $D$ 如右图所示




解 区域 $D$ 用极坐标表示是：

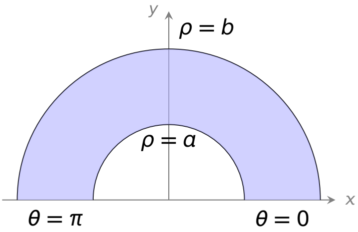
例 计算 $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$，其中区域 $D$ 如右图所示




解 区域 $D$ 用极坐标表示是：

$$D = \{(\rho, \theta) | a \le \rho \le b, 0 \le \theta \le \pi\}$$

**例** 计算 $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$，其中区域 $D$ 如右图所示



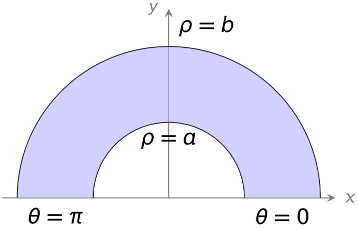

**解** 区域 $D$ 用极坐标表示是：

$$D = \{(\rho, \theta) | a \le \rho \le b, 0 \le \theta \le \pi\}$$

所以

$$\text{原式} \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}$$

**例** 计算 $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$，其中区域 $D$ 如右图所示



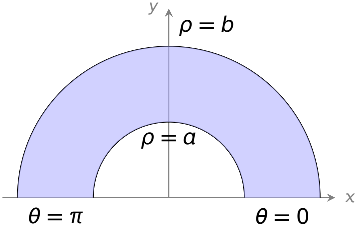

**解** 区域 $D$ 用极坐标表示是：

$$D = \{(\rho, \theta) | a \leq \rho \leq b, 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

所以

$$原式 \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_D \rho$$

**例** 计算 $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$，其中区域 $D$ 如右图所示



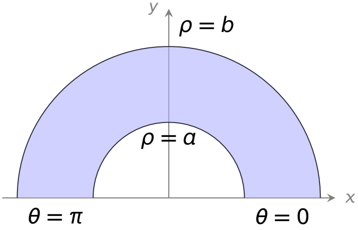

**解** 区域 $D$ 用极坐标表示是:

$$D = \{(\rho, \theta) | a \le \rho \le b, 0 \le \theta \le \pi\}$$

所以

$$原式 \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_D \rho \cdot \rho d\rho d\theta$$

例 计算 $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$，其中区域 $D$ 如右图所示

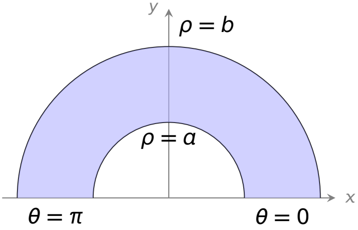



解 区域 $D$ 用极坐标表示是：

$$D = \{(\rho,\ \theta) | a \le \rho \le b,\ 0 \le \theta \le \pi\}$$

所以

$$\text{原式} \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_D \rho \cdot \rho d\rho d\theta = \int \Big[ \int \rho^2 d\rho \Big] d\theta$$




**例** 计算 $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$，其中区域 $D$ 如右图所示

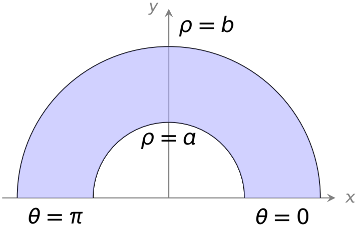
**解** 区域 $D$ 用极坐标表示是：

$$D = \{(\rho, \theta) | a \le \rho \le b, 0 \le \theta \le \pi\}$$

所以

$$\text{原式} \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_D \rho \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^\pi \left[ \int \quad \rho^2 d\rho \right] d\theta$$

**例** 计算 $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$，其中区域 $D$ 如右图所示



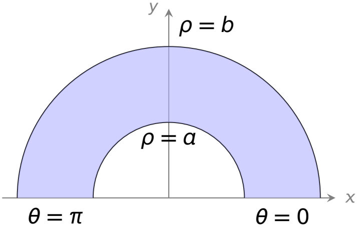

**解** 区域 $D$ 用极坐标表示是：

$$D = \{(\rho, \theta) | a \le \rho \le b, 0 \le \theta \le \pi\}$$

所以

$$\text{原式} \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_D \rho \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^\pi \left[ \int_a^b \rho^2 d\rho \right] d\theta$$

**例** 计算 $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$，其中区域 $D$ 如右图所示




**解** 区域 $D$ 用极坐标表示是：

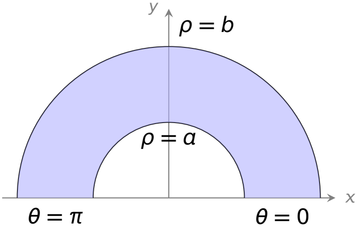
$$D=\{(\rho,\theta)|a\le\rho\le b,\ 0\le\theta\le\pi\}$$

所以

$$\text{原式}\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}\iint_D \rho\cdot\rho d\rho d\theta=\int_0^\pi\Big[\int_a^b\rho^2d\rho\Big]d\theta$$

$$=\pi\Big(\qquad\qquad\Big)$$

**例** 计算 $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$，其中区域 $D$ 如右图所示




**解** 区域 $D$ 用极坐标表示是：

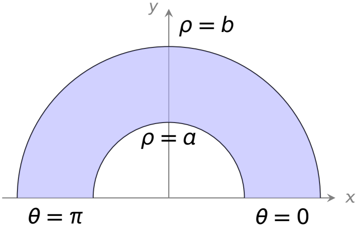
$$D = \{(\rho, \theta) | a \le \rho \le b, 0 \le \theta \le \pi\}$$

所以

$$\text{原式} \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_D \rho \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{\pi} \left[ \int_a^b \rho^2 d\rho \right] d\theta$$

$$= \pi \left( \frac{1}{3}\rho^3 \Big|_a^b \right)$$

**例** 计算 $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$，其中区域 $D$ 如右图所示




**解** 区域 $D$ 用极坐标表示是：

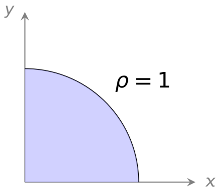
$$D = \{(\rho,\ \theta) | a \le \rho \le b,\ 0 \le \theta \le \pi\}$$

所以

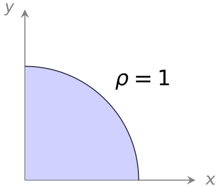
$$\text{原式} \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_D \rho \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{\pi} \left[ \int_a^b \rho^2 d\rho \right] d\theta$$

$$= \pi \left( \frac{1}{3} \rho^3 \Big|_a^b \right) = \frac{\pi}{3}(b^3 - a^3)$$

例 计算 $\iint_D \ln(1+x^2+y^2)dxdy$，其中区域 $D$ 如右图所示

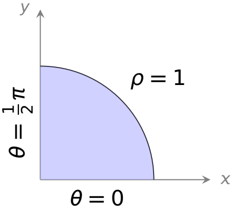


例 计算 $\iint_D \ln(1+x^2+y^2)dxdy$，其中区域 $D$ 如右图所示




解 区域 $D$ 用极坐标表示是：

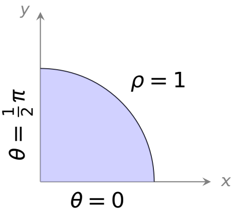
**例** 计算 $\iint_D \ln(1+x^2+y^2)dxdy$，其中区域 $D$ 如右图所示




**解** 区域 $D$ 用极坐标表示是:

$$D = \{(\rho, \theta) | 0 \le \rho \le 1, 0 \le \theta \le \frac{1}{2}\pi\}$$

例 计算 $\iint_D \ln(1+x^2+y^2)dxdy$，其中区域 $D$ 如右图所示



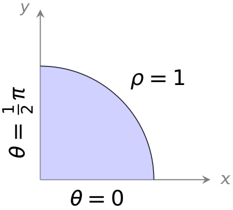

解 区域 $D$ 用极坐标表示是:

$$D = \{(\rho,\theta) | 0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \theta \le \frac{1}{2}\pi\}$$

所以

原式 $\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}$

例 计算 $\iint_D \ln(1+x^2+y^2)dxdy$，其中区域 $D$ 如右图所示



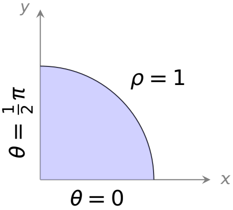

解 区域 $D$ 用极坐标表示是:

$$D = \{(\rho, \theta) | 0 \le \rho \le 1, 0 \le \theta \le \frac{1}{2}\pi\}$$

所以

原式 $\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_D \ln(1+\rho^2)$

**例** 计算 $\iint_D \ln(1+x^2+y^2)dxdy$，其中区域 $D$ 如右图所示



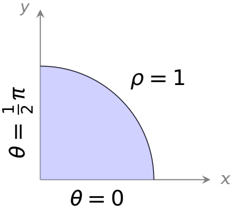

**解** 区域 $D$ 用极坐标表示是:

$$D=\{(\rho,\theta)|\,0\le\rho\le 1,\ 0\le\theta\le\frac{1}{2}\pi\}$$

所以

原式 $\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_D \ln(1+\rho^2)\cdot\rho d\rho d\theta$

**例** 计算 $\iint_D \ln(1+x^2+y^2)dxdy$，其中区域 $D$ 如右图所示




**解** 区域 $D$ 用极坐标表示是：

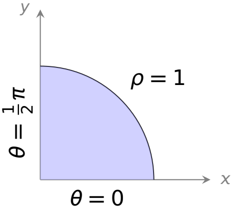
$$D = \{(\rho,\theta) | \, 0 \le \rho \le 1, \; 0 \le \theta \le \frac{1}{2}\pi\}$$

所以

$$\text{原式} \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_D \ln(1+\rho^2)\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$= \int \Big[ \int \ln(1+\rho^2)\cdot\rho d\rho \Big] d\theta$$

**例** 计算 $\iint_D \ln(1+x^2+y^2)dxdy$，其中区域 $D$ 如右图所示




**解** 区域 $D$ 用极坐标表示是：

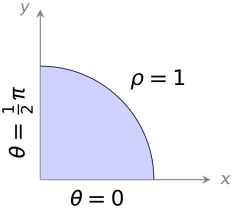
$$D = \{(\rho,\theta) | 0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \theta \le \frac{1}{2}\pi\}$$

所以

$$\text{原式} \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_D \ln(1+\rho^2)\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left[\int \quad \ln(1+\rho^2)\cdot\rho d\rho\right]d\theta$$

例 计算 $\iint_D \ln(1+x^2+y^2)dxdy$，其中区域 $D$ 如右图所示




解 区域 $D$ 用极坐标表示是:

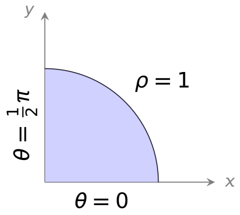
$$D=\{(\rho,\theta)|\,0\le\rho\le 1,\ 0\le\theta\le\frac{1}{2}\pi\}$$

所以

$$\text{原式}\ \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}\ \iint_D \ln(1+\rho^2)\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\Big[\int_0^1 \ln(1+\rho^2)\cdot\rho d\rho\Big]d\theta$$

**例** 计算 $\iint_D \ln(1+x^2+y^2)dxdy$，其中区域 $D$ 如右图所示




**解** 区域 $D$ 用极坐标表示是：

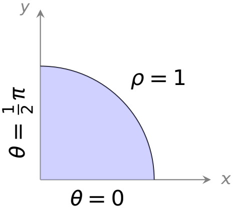
$$D = \{(\rho, \theta) | 0 \le \rho \le 1, 0 \le \theta \le \frac{1}{2}\pi\}$$

所以

$$\text{原式} \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_D \ln(1+\rho^2)\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left[\int_0^1 \ln(1+\rho^2)\cdot\rho d\rho\right]d\theta \xlongequal{u=1+\rho^2}$$

例 计算 $\iint_D \ln(1+x^2+y^2)dxdy$，其中区域 $D$ 如右图所示




解 区域 $D$ 用极坐标表示是：

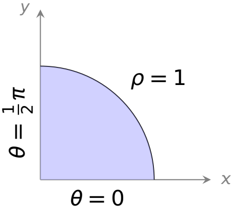
$$D = \{(\rho, \theta) | 0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \theta \le \frac{1}{2}\pi\}$$

所以

原式 $\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_D \ln(1+\rho^2)\cdot\rho d\rho d\theta$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left[\int_0^1 \ln(1+\rho^2)\cdot\rho d\rho\right]d\theta \xlongequal{u=1+\rho^2} \qquad \ln u$$

**例** 计算 $\iint_D \ln(1+x^2+y^2)dxdy$，其中区域 $D$ 如右图所示




**解** 区域 $D$ 用极坐标表示是:

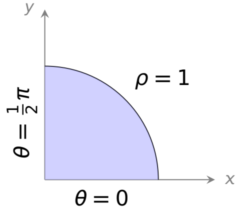
$$D = \{(\rho,\, \theta) | \, 0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \theta \le \frac{1}{2}\pi\}$$

所以

$$\text{原式} \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_D \ln(1+\rho^2)\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left[\int_0^1 \ln(1+\rho^2)\cdot\rho d\rho\right]d\theta \xlongequal{u=1+\rho^2} \qquad \ln u \cdot \frac{1}{2}du$$

**例** 计算 $\iint_D \ln(1+x^2+y^2)dxdy$，其中区域 $D$ 如右图所示




**解** 区域 $D$ 用极坐标表示是:

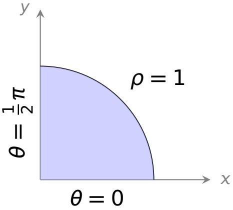
$$D = \{(\rho,\ \theta) | \ 0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \theta \le \frac{1}{2}\pi\}$$

所以

原式 $\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \displaystyle\iint_D \ln(1+\rho^2)\cdot\rho d\rho d\theta$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left[\int_0^1 \ln(1+\rho^2)\cdot\rho d\rho\right]d\theta \xlongequal{u=1+\rho^2} \qquad \int_1^2 \ln u\cdot\frac{1}{2}du$$

**例** 计算 $\iint_D \ln(1+x^2+y^2)dxdy$，其中区域 $D$ 如右图所示




**解** 区域 $D$ 用极坐标表示是：

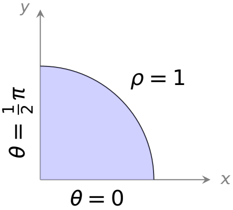
$$D=\{(\rho,\,\theta)|\,0\le\rho\le 1,\,0\le\theta\le\frac{1}{2}\pi\}$$

所以

$$\text{原式}\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}\iint_D \ln(1+\rho^2)\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\Big[\int_0^1 \ln(1+\rho^2)\cdot\rho d\rho\Big]d\theta\xlongequal{u=1+\rho^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\Big[\int_1^2 \ln u\cdot\frac{1}{2}du\Big]d\theta$$

**例** 计算 $\iint_D \ln(1+x^2+y^2)dxdy$，其中区域 $D$ 如右图所示




**解** 区域 $D$ 用极坐标表示是：

$$D=\{(\rho,\ \theta)|\,0\le\rho\le1,\ 0\le\theta\le\frac{1}{2}\pi\}$$

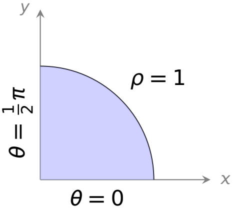
所以

原式 $\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \displaystyle\iint_D \ln(1+\rho^2)\cdot\rho d\rho d\theta$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\Big[\int_0^1 \ln(1+\rho^2)\cdot\rho d\rho\Big]d\theta \xlongequal{u=1+\rho^2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\Big[\int_1^2 \ln u\cdot\frac{1}{2}du\Big]d\theta$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot$$

**例** 计算 $\iint_D \ln(1+x^2+y^2)dxdy$，其中区域 $D$ 如右图所示




**解** 区域 $D$ 用极坐标表示是:

$$D = \{(\rho,\ \theta)|\, 0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \theta \le \frac{1}{2}\pi\}$$

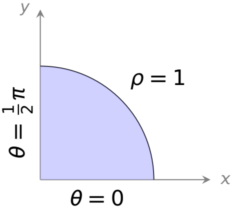
所以

$$原式 \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_D \ln(1+\rho^2)\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\Big[\int_0^1 \ln(1+\rho^2)\cdot\rho d\rho\Big]d\theta \xlongequal{u=1+\rho^2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\Big[\int_1^2 \ln u\cdot\frac{1}{2}du\Big]d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\Big[u\ln u\Big|_1^2 - \int_1^2 u d\ln u\Big]$$

**例** 计算 $\iint_D \ln(1+x^2+y^2)dxdy$，其中区域 $D$ 如右图所示




**解** 区域 $D$ 用极坐标表示是：

$$D = \{(\rho,\,\theta)|\,0 \le \rho \le 1,\, 0 \le \theta \le \frac{1}{2}\pi\}$$

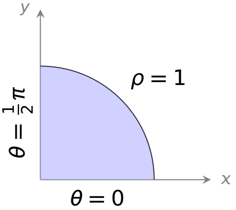
所以

$$\text{原式} \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_D \ln(1+\rho^2)\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\Big[\int_0^1 \ln(1+\rho^2)\cdot\rho d\rho\Big]d\theta \xlongequal{u=1+\rho^2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\Big[\int_1^2 \ln u\cdot\frac{1}{2}du\Big]d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\Big[u\ln u\Big|_1^2 - \int_1^2 u d\ln u\Big] = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\Big[2\ln 2-1\Big]$$

例 计算 $\iint_D \ln(1+x^2+y^2)dxdy$，其中区域 $D$ 如右图所示




解 区域 $D$ 用极坐标表示是：

$$D = \{(\rho, \theta) | 0 \le \rho \le 1, \, 0 \le \theta \le \frac{1}{2}\pi\}$$

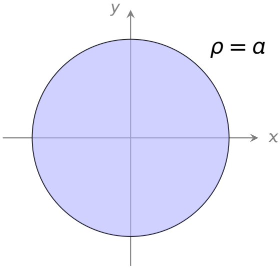
所以

$$\text{原式} \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_D \ln(1+\rho^2)\cdot\rho d\rho d\theta$$

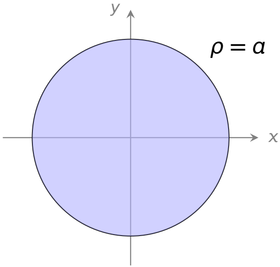
$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\Big[\int_0^1 \ln(1+\rho^2)\cdot\rho d\rho\Big]d\theta \xlongequal{u=1+\rho^2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\Big[\int_1^2 \ln u\cdot\frac{1}{2}du\Big]d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\Big[u\ln u\big|_1^2 - \int_1^2 u d\ln u\Big] = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\Big[2\ln 2 - 1\Big] = \frac{\pi}{4}(2\ln 2 - 1)$$

例 计算 $\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy$，其中区域 $D$ 如右图所示

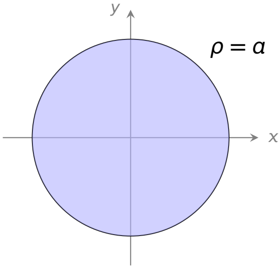


例 计算 $\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy$，其中区域 $D$ 如右图所示




解 区域 $D$ 用极坐标表示是：

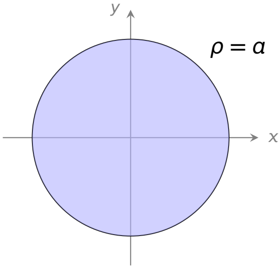
例 计算 $\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy$，其中区域 $D$ 如右图所示




解 区域 $D$ 用极坐标表示是：

$$D=\{(\rho,\theta)|\,0\le\rho\le a,\,0\le\theta\le 2\pi\}$$

例 计算 $\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy$，其中区域 $D$ 如右图所示



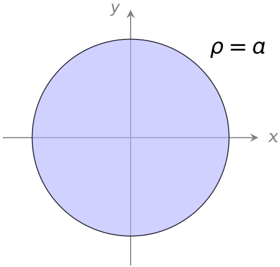

解 区域 $D$ 用极坐标表示是：

$$D = \{(\rho, \theta) | 0 \le \rho \le a, 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

所以

原式 $\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}$

例 计算 $\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy$，其中区域 $D$ 如右图所示



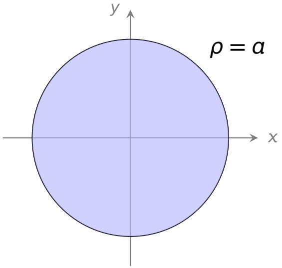

解 区域 $D$ 用极坐标表示是：

$$D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

所以

原式 $\overset{x=\rho\cos\theta}{\underset{y=\rho\sin\theta}{=\!=\!=\!=}} \iint_D e^{-\rho^2}$

**例** 计算 $\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy$，其中区域 $D$ 如右图所示



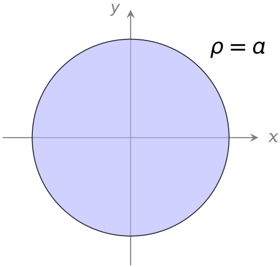

**解** 区域 $D$ 用极坐标表示是：

$$D = \{(\rho, \theta) | 0 \le \rho \le a, 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

所以

$$\text{原式} \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_D e^{-\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta$$

**例** 计算 $\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy$，其中区域 $D$ 如右图所示



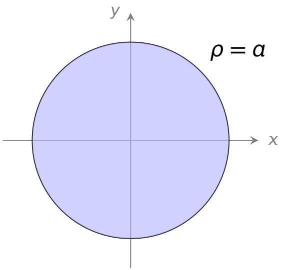

**解** 区域 $D$ 用极坐标表示是：

$$D = \{(\rho,\theta) | 0 \le \rho \le a,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

所以

$$\text{原式} \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_D e^{-\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta = \int \left[\int e^{-\rho^2}\cdot\rho d\rho\right] d\theta$$

**例** 计算 $\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy$，其中区域 $D$ 如右图所示



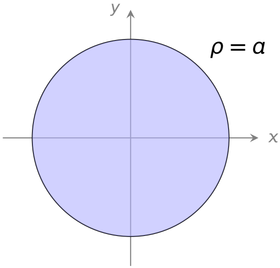

**解** 区域 $D$ 用极坐标表示是：

$$D = \{(\rho, \theta) | \, 0 \le \rho \le a, \, 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

所以

$$原式 \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_D e^{-\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ \int \quad e^{-\rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta$$

例 计算 $\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy$，其中区域 $D$ 如右图所示



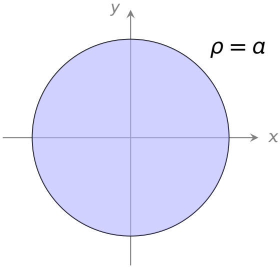

解 区域 $D$ 用极坐标表示是：

$$D=\{(\rho,\theta)|\,0\le\rho\le a,\,0\le\theta\le 2\pi\}$$

所以

$$\text{原式}\ \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}\ \iint_D e^{-\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^a e^{-\rho^2}\cdot\rho d\rho\right]d\theta$$

**例** 计算 $\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy$，其中区域 $D$ 如右图所示




**解** 区域 $D$ 用极坐标表示是：

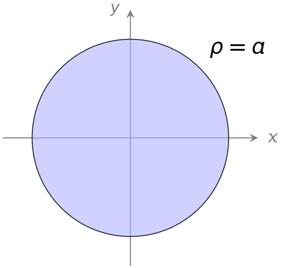
$$D = \{(\rho, \theta) | \, 0 \le \rho \le a, \, 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

所以

$$\text{原式} \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_D e^{-\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^a e^{-\rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta$$

$$= 2\pi \left[ \qquad\qquad \right]$$

例 计算 $\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy$，其中区域 $D$ 如右图所示




解 区域 $D$ 用极坐标表示是：

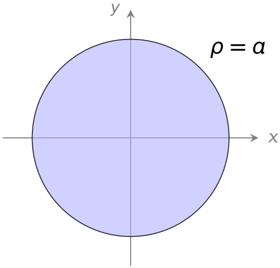
$$D = \{(\rho, \theta) | \, 0 \le \rho \le a, \, 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

所以

$$\text{原式} \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_D e^{-\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^a e^{-\rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta$$

$$\xlongequal{u=\rho^2} 2\pi \left[ \qquad\qquad \right]$$

例 计算 $\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy$，其中区域 $D$ 如右图所示




解 区域 $D$ 用极坐标表示是：

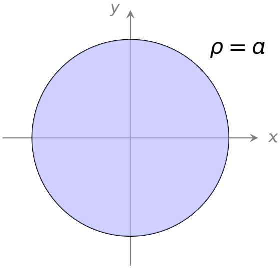
$$D = \{(\rho, \theta) | 0 \le \rho \le a, 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

所以

$$\text{原式} \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_D e^{-\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^a e^{-\rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta$$

$$\xlongequal{u=\rho^2} 2\pi \left[ \qquad e^{-u} \qquad \qquad \right]$$

**例** 计算 $\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy$，其中区域 $D$ 如右图所示




**解** 区域 $D$ 用极坐标表示是：

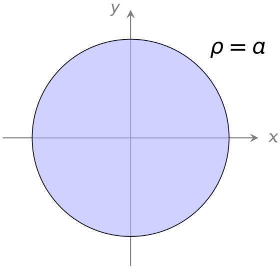
$$D=\{(\rho,\theta)|\,0\le\rho\le a,\,0\le\theta\le 2\pi\}$$

所以

$$\text{原式}\ \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}\ \iint_D e^{-\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^a e^{-\rho^2}\cdot\rho d\rho\right]d\theta$$

$$\xlongequal{u=\rho^2}\ 2\pi\left[\qquad e^{-u}\cdot\frac{1}{2}du\right]$$

例 计算 $\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy$，其中区域 $D$ 如右图所示




解 区域 $D$ 用极坐标表示是：

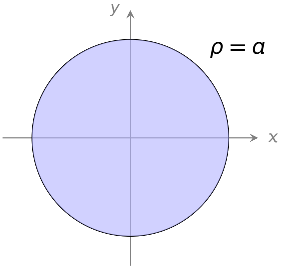
$$D = \{(\rho, \theta) | 0 \le \rho \le a, 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

所以

$$原式 \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_D e^{-\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^a e^{-\rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta$$

$$\xlongequal{u=\rho^2} 2\pi \left[ \int_0^{a^2} e^{-u} \cdot \frac{1}{2} du \right]$$

例 计算 $\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy$，其中区域 $D$ 如右图所示




解 区域 $D$ 用极坐标表示是：

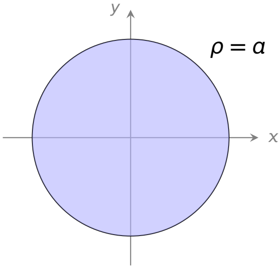
$$D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

所以

$$\text{原式} \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_D e^{-\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^a e^{-\rho^2} \cdot \rho d\rho \right] d\theta$$

$$\xlongequal{u=\rho^2} 2\pi \left[ \int_0^{a^2} e^{-u} \cdot \frac{1}{2} du \right] = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \left[ -e^{-u} \Big|_0^{a^2} \right]$$

例 计算 $\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy$，其中区域 $D$ 如右图所示




解 区域 $D$ 用极坐标表示是：

$$D=\{(\rho,\theta)|\,0\le\rho\le a,\ 0\le\theta\le 2\pi\}$$

所以

$$\text{原式}\ \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}\ \iint_D e^{-\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^a e^{-\rho^2}\cdot\rho d\rho\right]d\theta$$

$$\xlongequal{u=\rho^2}\ 2\pi\left[\int_0^{a^2} e^{-u}\cdot\frac{1}{2}du\right]=2\pi\cdot\frac{1}{2}\left[-e^{-u}\Big|_0^{a^2}\right]=(1-e^{-a^2})\pi$$

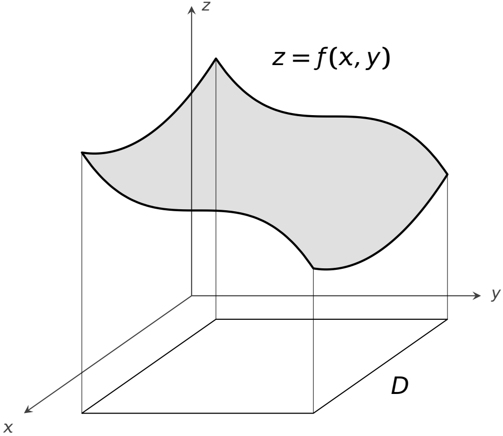
# We are here now...

1. 如何计算二重积分?
2. 固定 $x$，先对 $y$ 积分
3. 固定 $y$，先对 $x$ 积分
4. 交换二重积分的积分次序
5. 极坐标下计算二重积分
6. 二重积分的应用

# 曲顶柱体体积

曲顶柱体的体积：

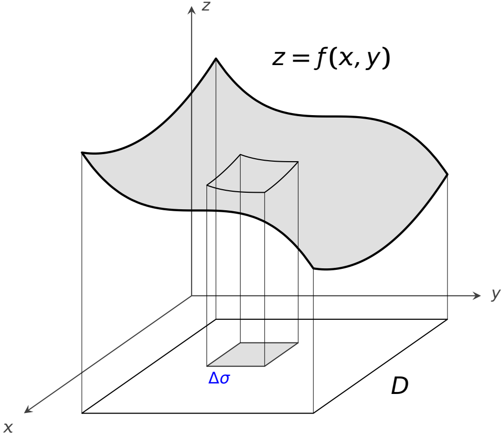
$$V = \iint_D f(x, y) d\sigma$$



# 曲顶柱体体积

曲顶柱体的体积：

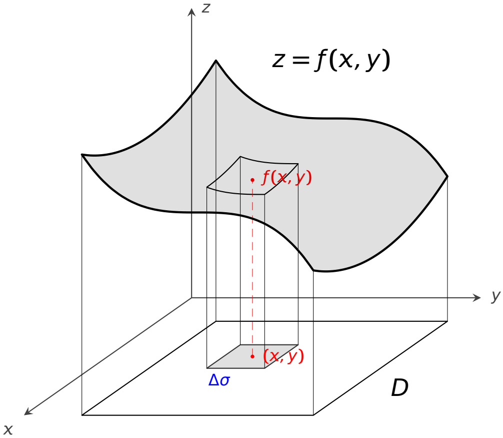
$$V = \iint_D f(x, y) d\sigma$$



# 曲顶柱体体积

曲顶柱体的体积：

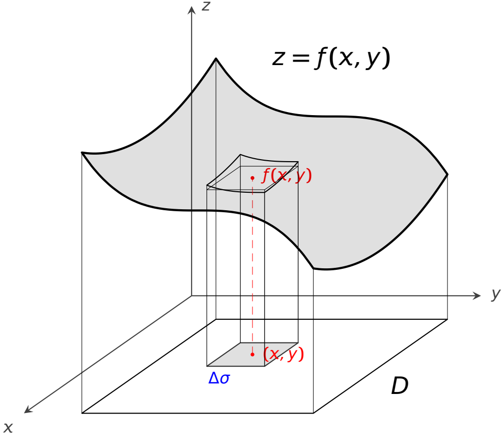
$$V = \iint_D f(x, y) d\sigma$$



# 曲顶柱体体积

曲顶柱体的体积：

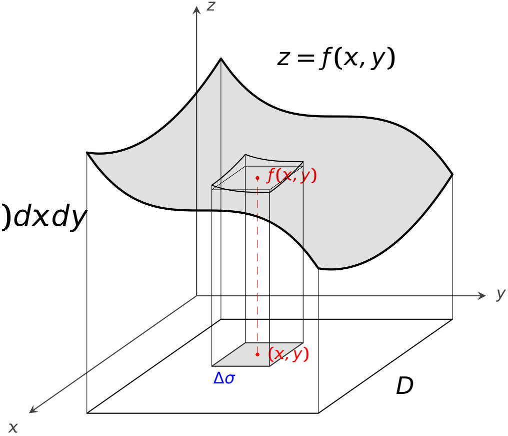
$$V = \iint_D f(x, y) d\sigma$$



# 曲顶柱体体积

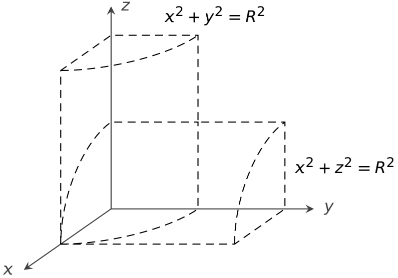
曲顶柱体的体积：

$$V = \iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(x, y) dx dy$$

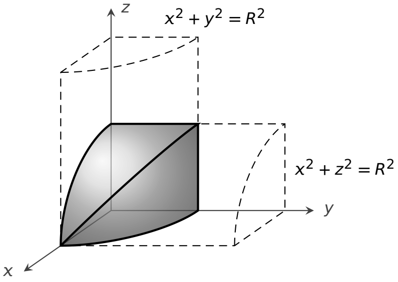


例 求两个底圆半径均为 $R$ 的直交圆柱面所围成的立体体积。

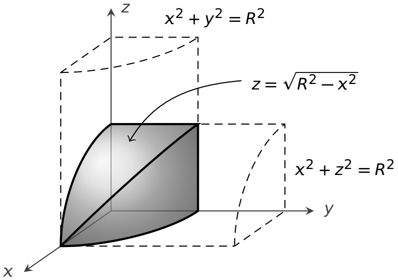
例 求两个底圆半径均为 $R$ 的直交圆柱面所围成的立体体积。



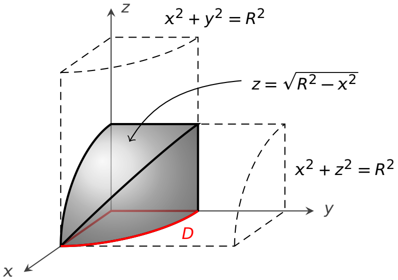
例 求两个底圆半径均为 $R$ 的直交圆柱面所围成的立体体积。



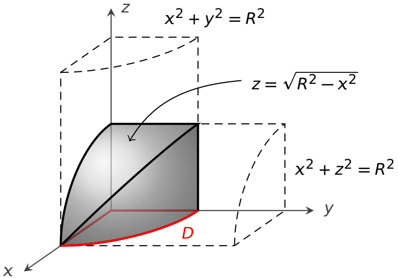
例 求两个底圆半径均为 $R$ 的直交圆柱面所围成的立体体积。



例 求两个底圆半径均为 $R$ 的直交圆柱面所围成的立体体积。



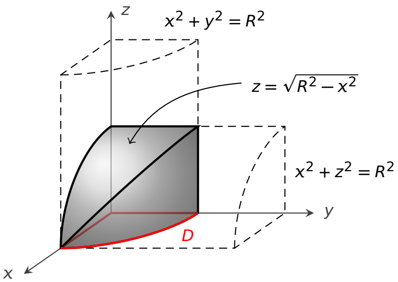
**例** 求两个底圆半径均为 $R$ 的直交圆柱面所围成的立体体积。




**解**

$$\iint_D \sqrt{R^2 - x^2}\, dx dy$$

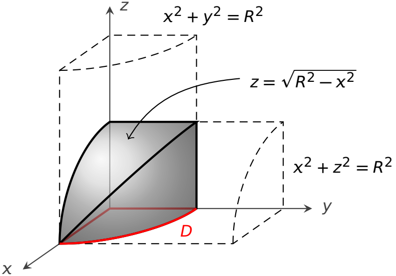
例 求两个底圆半径均为 $R$ 的直交圆柱面所围成的立体体积。




解

$$V = 8\iint_D \sqrt{R^2 - x^2}dxdy$$

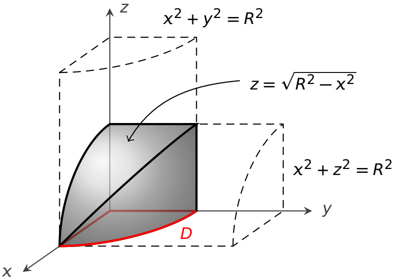
**例** 求两个底圆半径均为 $R$ 的直交圆柱面所围成的立体体积。

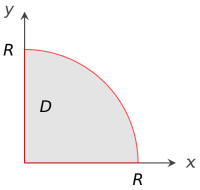



**解**

$$V=8\iint_D \sqrt{R^2-x^2}dxdy=8\int \left[\int \qquad \sqrt{R^2-x^2}dy\right]dx$$

例 求两个底圆半径均为 $R$ 的直交圆柱面所围成的立体体积。

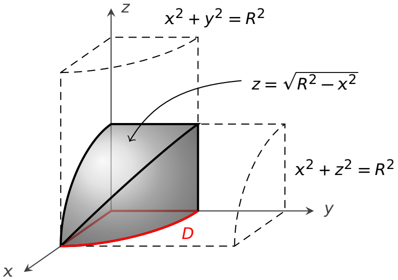


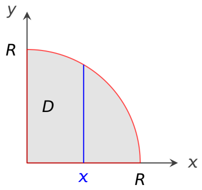




解

$$V=8\iint_D\sqrt{R^2-x^2}dxdy=8\int\Big[\int\qquad\sqrt{R^2-x^2}dy\Big]dx$$

例 求两个底圆半径均为 $R$ 的直交圆柱面所围成的立体体积。

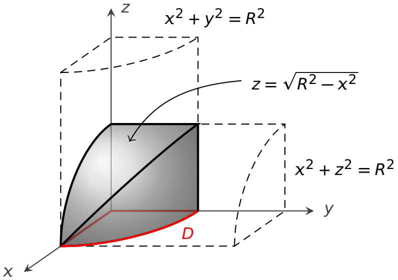


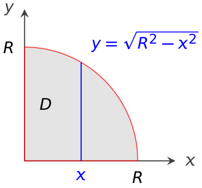




解

$$V=8\iint_D\sqrt{R^2-x^2}dxdy=8\int\Big[\int\qquad\sqrt{R^2-x^2}dy\Big]dx$$

例 求两个底圆半径均为 $R$ 的直交圆柱面所围成的立体体积。

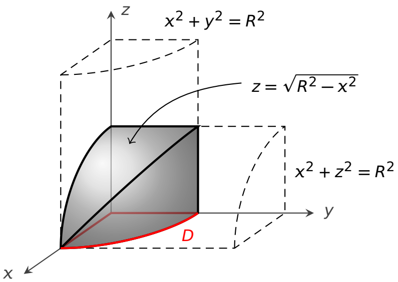


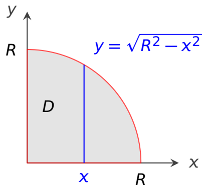




解

$$V=8\iint_D\sqrt{R^2-x^2}dxdy=8\int\ \Big[\int\qquad\qquad\sqrt{R^2-x^2}dy\Big]dx$$

**例** 求两个底圆半径均为 $R$ 的直交圆柱面所围成的立体体积。

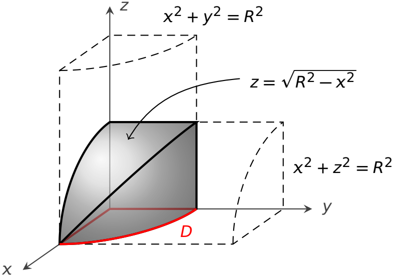


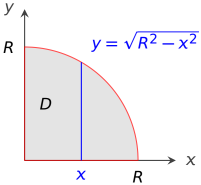




**解**

$$V=8\iint_D \sqrt{R^2-x^2}dxdy=8\int_0^R\Big[\int \qquad\qquad \sqrt{R^2-x^2}dy\Big]dx$$

**例** 求两个底圆半径均为 $R$ 的直交圆柱面所围成的立体体积。

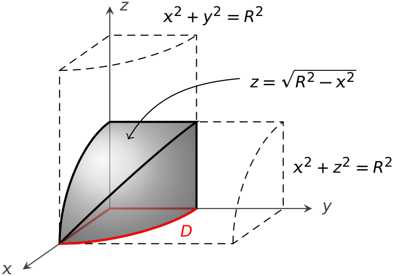


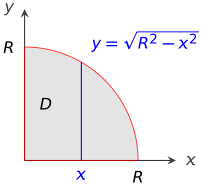




**解**

$$V = 8\iint_D \sqrt{R^2 - x^2}\,dxdy = 8\int_0^R \left[\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2 - x^2}\,dy\right]dx$$

**例** 求两个底圆半径均为 $R$ 的直交圆柱面所围成的立体体积。



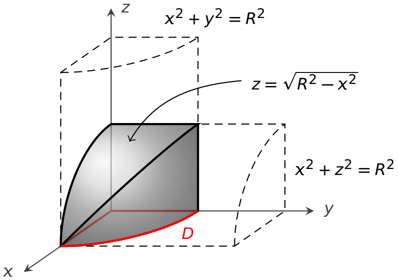



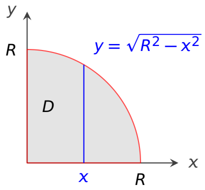

**解**

$$V = 8\iint_D \sqrt{R^2-x^2}\,dxdy = 8\int_0^R \left[\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2-x^2}\,dy\right]dx$$

$$\left[R^2-x^2\right]$$

例 求两个底圆半径均为 $R$ 的直交圆柱面所围成的立体体积。



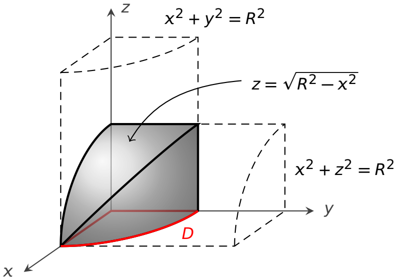



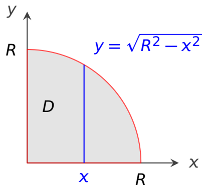

解

$$V=8\iint_D \sqrt{R^2-x^2}\,dx\,dy=8\int_0^R\left[\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\sqrt{R^2-x^2}\,dy\right]dx$$

$$=8\int_0^R\left[R^2-x^2\right]dx$$

例 求两个底圆半径均为 $R$ 的直交圆柱面所围成的立体体积。



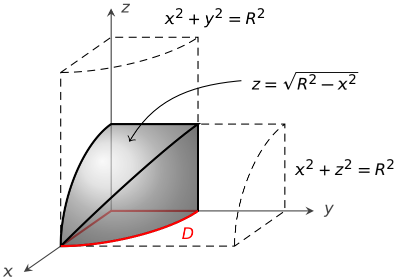



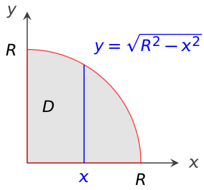

解

$$V=8\iint_D\sqrt{R^2-x^2}dxdy=8\int_0^R\left[\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\sqrt{R^2-x^2}dy\right]dx$$

$$=8\int_0^R\left[R^2-x^2\right]dx=8(R^2x-\frac{1}{3}x^3)\Big|_0^R$$

**例** 求两个底圆半径均为 $R$ 的直交圆柱面所围成的立体体积。



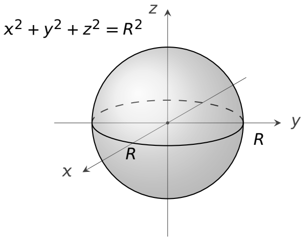




**解**

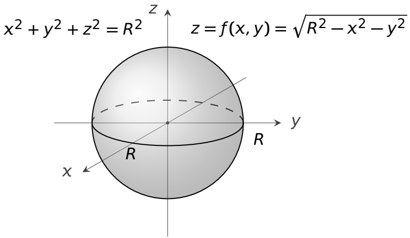
$$V=8\iint_D\sqrt{R^2-x^2}dxdy=8\int_0^R\Big[\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\sqrt{R^2-x^2}dy\Big]dx$$

$$=8\int_0^R\Big[R^2-x^2\Big]dx=8(R^2x-\frac{1}{3}x^3)\Big|_0^R=\frac{16}{3}R^3$$

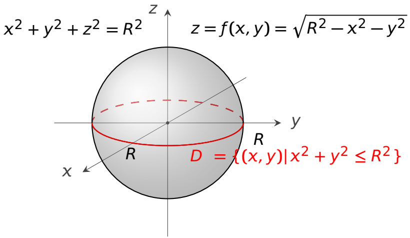
**例** 求半径为 $R$ 的球的体积。



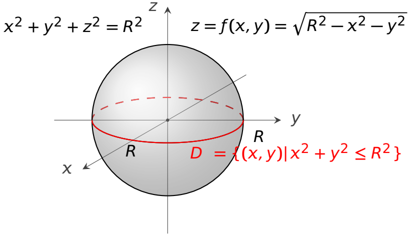
**例** 求半径为 $R$ 的球的体积。



**例** 求半径为 $R$ 的球的体积。



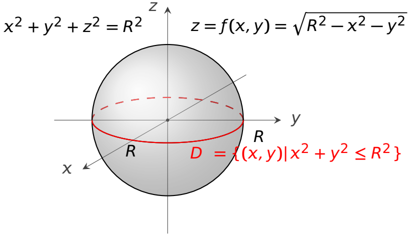
**例** 求半径为 $R$ 的球的体积。




**解**

$$\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy$$

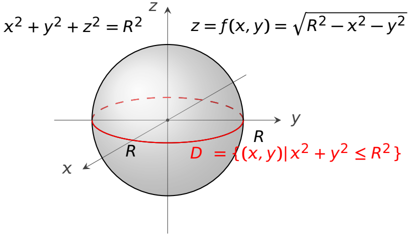
**例** 求半径为 $R$ 的球的体积。




**解**

$$V=2\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy$$

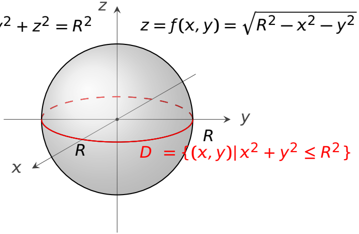
**例** 求半径为 $R$ 的球的体积。




**解**

$$V=2\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}$$

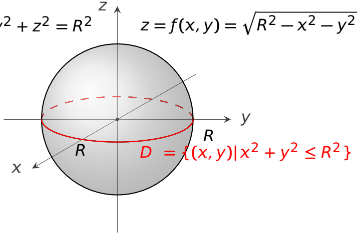
**例** 求半径为 $R$ 的球的体积。




**解**

$$V=2\iint_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} 2\iint_D\sqrt{R^2-\rho^2}$$

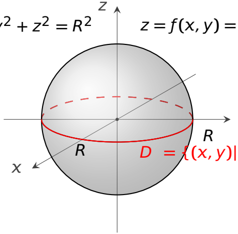
**例** 求半径为 $R$ 的球的体积。




**解**

$$V=2\iint_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} 2\iint_D\sqrt{R^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta$$

**例** 求半径为 $R$ 的球的体积。

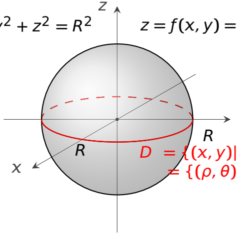



**解**

$$V=2\iint_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} 2\iint_D\sqrt{R^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$=2\int\left[\int\sqrt{R^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho\right]d\theta$$

**例** 求半径为 $R$ 的球的体积。

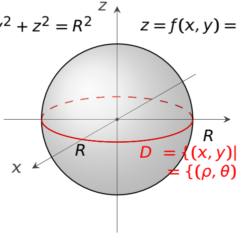



**解**

$$V=2\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} 2\iint_D \sqrt{R^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$=2\int\left[\int\sqrt{R^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho\right]d\theta$$

**例** 求半径为 $R$ 的球的体积。

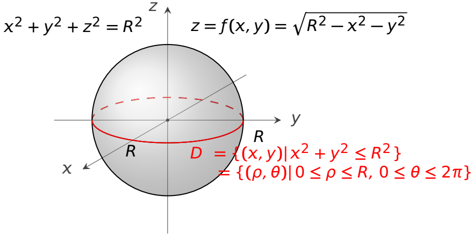



**解**

$$V=2\iint_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy\ \overset{x=\rho\cos\theta}{\underset{y=\rho\sin\theta}{=\!=\!=}}\ 2\iint_D\sqrt{R^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$=2\int_0^{2\pi}\left[\int\quad\sqrt{R^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho\right]d\theta$$

例 求半径为 $R$ 的球的体积。

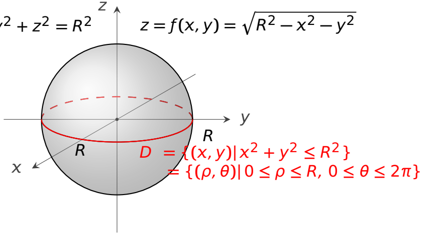



解

$$V=2\iint_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} 2\iint_D\sqrt{R^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$=2\int_0^{2\pi}\left[\int_0^R\sqrt{R^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho\right]d\theta$$

**例** 求半径为 $R$ 的球的体积。

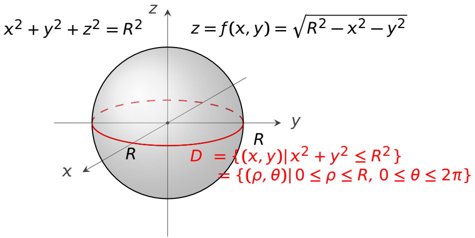



**解**

$$V=2\iint_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} 2\iint_D\sqrt{R^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$=2\int_0^{2\pi}\left[\int_0^R\sqrt{R^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho\right]d\theta=4\pi\int_0^R\sqrt{R^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho$$

**例** 求半径为 $R$ 的球的体积。



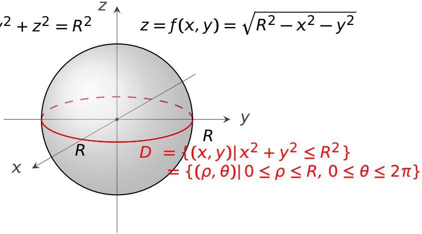

**解**

$$V=2\iint_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy\ \underline{\underline{\overset{x=\rho\cos\theta}{\underset{y=\rho\sin\theta}{}}}}\ 2\iint_D\sqrt{R^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$=2\int_0^{2\pi}\left[\int_0^R\sqrt{R^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho\right]d\theta=4\pi\int_0^R\sqrt{R^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho$$

$$\underline{\underline{u=R^2-\rho^2}}$$

**例** 求半径为 $R$ 的球的体积。



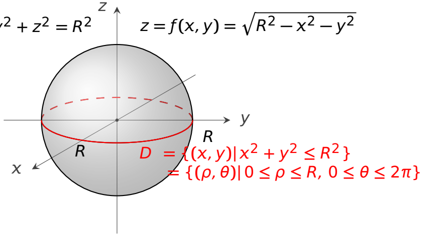

**解**

$$V=2\iint_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy\ \overset{x=\rho\cos\theta}{\underset{y=\rho\sin\theta}{=\!=\!=}}\ 2\iint_D\sqrt{R^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$=2\int_0^{2\pi}\left[\int_0^R\sqrt{R^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho\right]d\theta=4\pi\int_0^R\sqrt{R^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho$$

$$\overset{u=R^2-\rho^2}{=\!=\!=}\ 4\pi\int\ u^{\frac{1}{2}}\cdot(-\frac{1}{2})du$$

**例** 求半径为 $R$ 的球的体积。



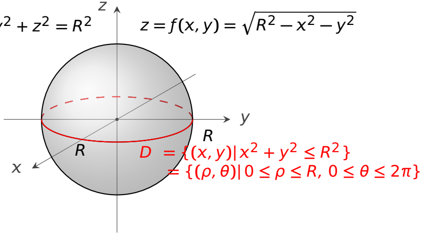

**解**

$$V=2\iint_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} 2\iint_D\sqrt{R^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$=2\int_0^{2\pi}\Big[\int_0^R\sqrt{R^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho\Big]d\theta=4\pi\int_0^R\sqrt{R^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho$$

$$\xlongequal{u=R^2-\rho^2} 4\pi\int_{R^2}^0 u^{\frac{1}{2}}\cdot(-\frac{1}{2})du$$

例 求半径为 $R$ 的球的体积。



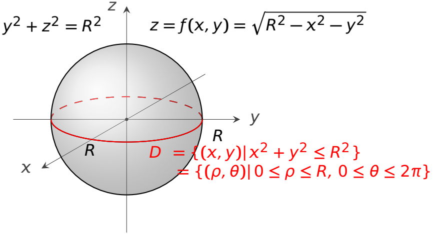

解

$$V=2\iint_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} 2\iint_D\sqrt{R^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$=2\int_0^{2\pi}\left[\int_0^R\sqrt{R^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho\right]d\theta=4\pi\int_0^R\sqrt{R^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho$$

$$\xlongequal{u=R^2-\rho^2} 4\pi\int_{R^2}^0 u^{\frac{1}{2}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)du=2\pi\int_0^R u^{\frac{1}{2}}du$$

**例** 求半径为 $R$ 的球的体积。



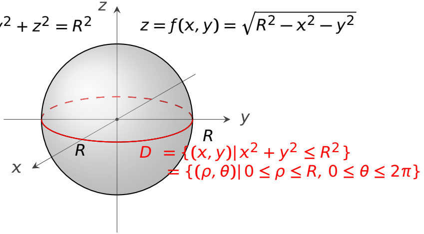

**解**

$$V=2\iint_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy\ \overset{x=\rho\cos\theta}{\underset{y=\rho\sin\theta}{=\!=\!=}}\ 2\iint_D\sqrt{R^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$=2\int_0^{2\pi}\left[\int_0^R\sqrt{R^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho\right]d\theta=4\pi\int_0^R\sqrt{R^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho$$

$$\overset{u=R^2-\rho^2}{=\!=\!=}\ 4\pi\int_{R^2}^0u^{\frac{1}{2}}\cdot(-\frac{1}{2})du=2\pi\int_0^Ru^{\frac{1}{2}}du=2\pi\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_0^R$$

**例** 求半径为 $R$ 的球的体积。




**解**

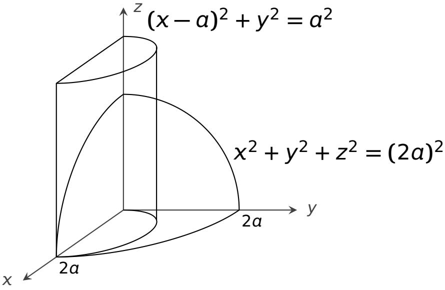
$$V=2\iint_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} 2\iint_D\sqrt{R^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$=2\int_0^{2\pi}\left[\int_0^R\sqrt{R^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho\right]d\theta=4\pi\int_0^R\sqrt{R^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho$$

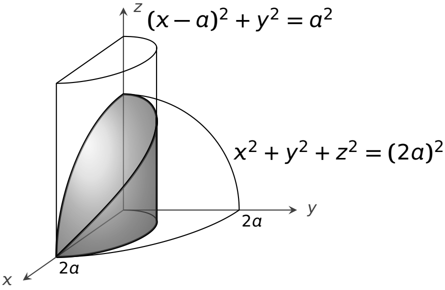
$$\xlongequal{u=R^2-\rho^2} 4\pi\int_{R^2}^0 u^{\frac{1}{2}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)du=2\pi\int_0^R u^{\frac{1}{2}}du=2\pi\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_0^R=\frac{4}{3}\pi R^3$$

例 求球体 $x^2+y^2+z^2 \leq (2a)^2$ 被圆柱 $(x-a)^2+y^2=0$（$a>0$）所截得的立体的体积。

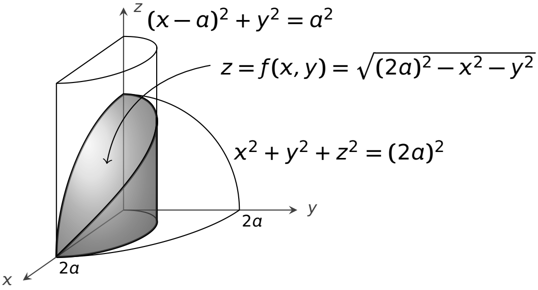
例 求球体 $x^2+y^2+z^2 \le (2a)^2$ 被圆柱 $(x-a)^2+y^2=0$（$a>0$）所截得的立体的体积。



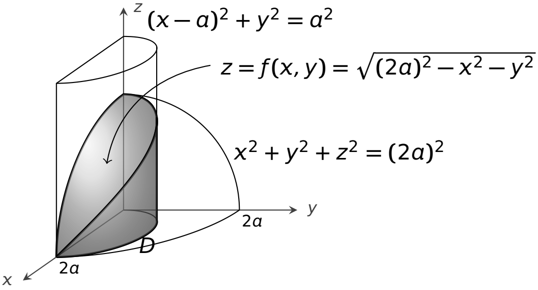
例 求球体 $x^2+y^2+z^2 \le (2a)^2$ 被圆柱 $(x-a)^2+y^2=0$（$a>0$）所截得的立体的体积。



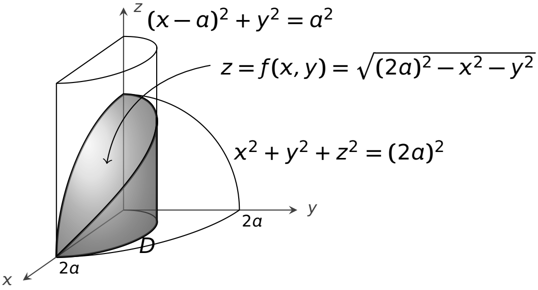
例 求球体 $x^2+y^2+z^2 \leq (2a)^2$ 被圆柱 $(x-a)^2+y^2=0$（$a>0$）所截得的立体的体积。

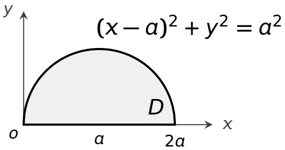


例 求球体 $x^2+y^2+z^2\le(2a)^2$ 被圆柱 $(x-a)^2+y^2=0$（$a>0$）所截得的立体的体积。

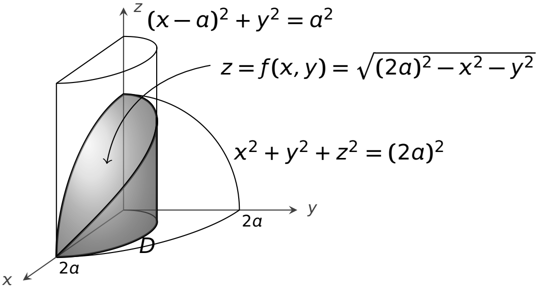


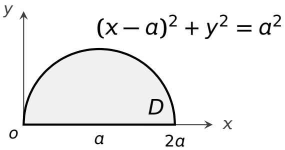
**例** 求球体 $x^2+y^2+z^2 \le (2a)^2$ 被圆柱 $(x-a)^2+y^2=0$（$a>0$）所截得的立体的体积。



**例** 求球体 $x^2+y^2+z^2 \le (2a)^2$ 被圆柱 $(x-a)^2+y^2=0$（$a>0$）所截得的立体的体积。

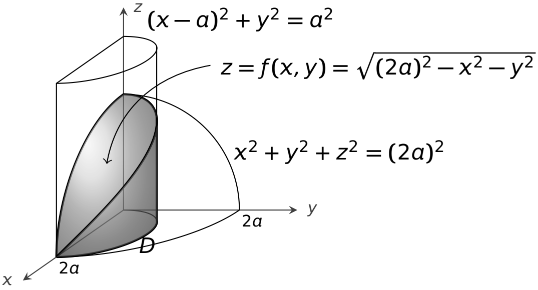


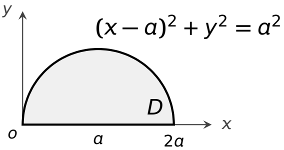




**解**

$$\iint_D \sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,dxdy$$

**例** 求球体 $x^2+y^2+z^2 \le (2a)^2$ 被圆柱 $(x-a)^2+y^2=0$（$a>0$）所截得的立体的体积。

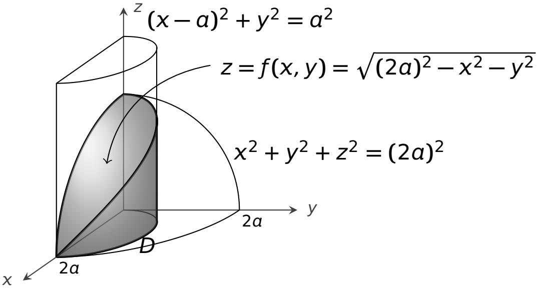


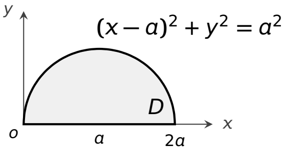




**解**

$$V=4\iint_D \sqrt{4a^2-x^2-y^2}dxdy$$

例 求球体 $x^2+y^2+z^2 \le (2a)^2$ 被圆柱 $(x-a)^2+y^2=0$（$a>0$）所截得的立体的体积。

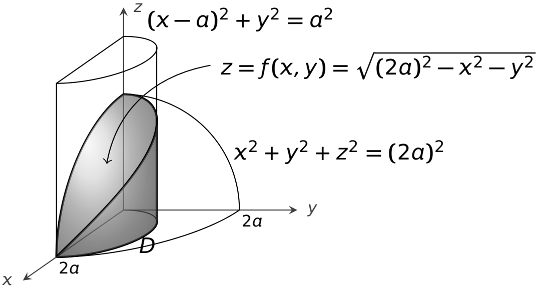


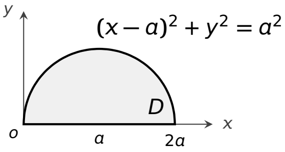




解

$$V=4\iint_D \sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,dxdy \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}$$

**例** 求球体 $x^2+y^2+z^2 \le (2a)^2$ 被圆柱 $(x-a)^2+y^2=0$（$a>0$）所截得的立体的体积。

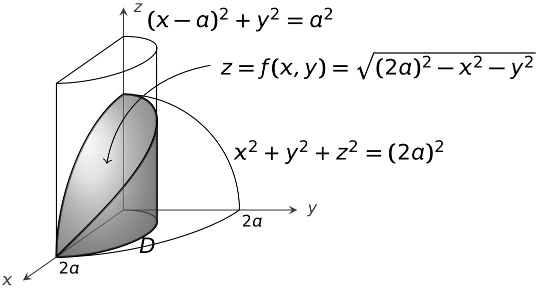


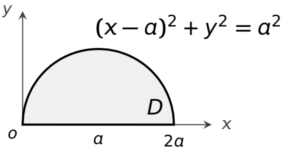




**解**

$$V = 4\iint_D \sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,dxdy \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} 4\iint_D \sqrt{4a^2-\rho^2}$$

**例** 求球体 $x^2+y^2+z^2\le(2a)^2$ 被圆柱 $(x-a)^2+y^2=0$（$a>0$）所截得的立体的体积。

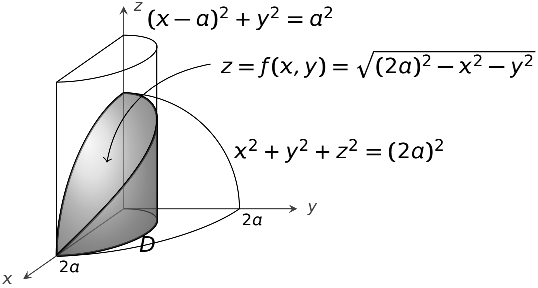


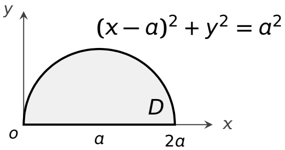




**解**

$$V=4\iint_D\sqrt{4a^2-x^2-y^2}dxdy \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} 4\iint_D\sqrt{4a^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta$$

**例** 求球体 $x^2+y^2+z^2 \le (2a)^2$ 被圆柱 $(x-a)^2+y^2=0$（$a>0$）所截得的立体的体积。



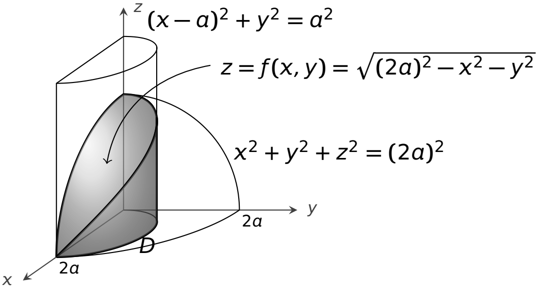



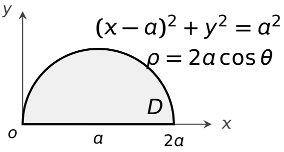

**解**

$$V=4\iint_D \sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,dxdy \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} 4\iint_D \sqrt{4a^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$=4\int \left[\int \qquad \sqrt{4a^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho\right]d\theta$$

例 求球体 $x^2+y^2+z^2 \le (2a)^2$ 被圆柱 $(x-a)^2+y^2=0$（$a>0$）所截得的立体的体积。



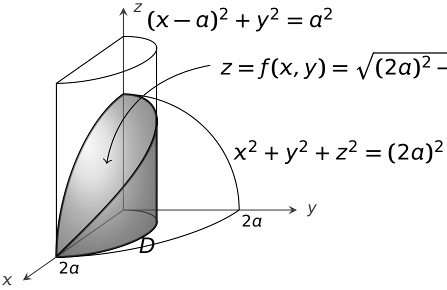



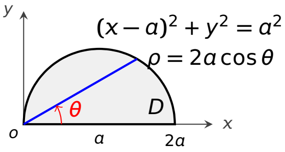

**解**

$$V=4\iint_D\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,dxdy \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} 4\iint_D\sqrt{4a^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$=4\int\left[\int\sqrt{4a^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho\right]d\theta$$

**例** 求球体 $x^2+y^2+z^2 \le (2a)^2$ 被圆柱 $(x-a)^2+y^2=0$（$a>0$）所截得的立体的体积。



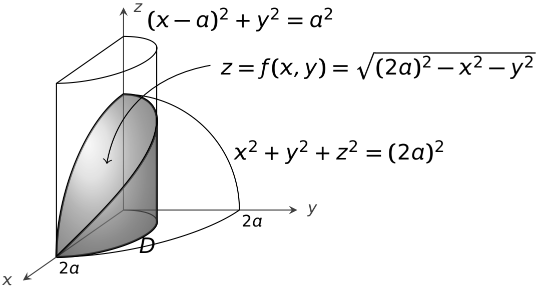



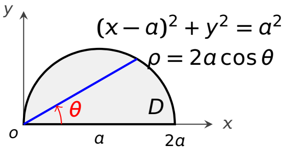

**解**

$$V=4\iint_D\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,dxdy \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} 4\iint_D\sqrt{4a^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$=4\int\left[\int\sqrt{4a^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho\right]d\theta$$

例 求球体 $x^2+y^2+z^2 \le (2a)^2$ 被圆柱 $(x-a)^2+y^2=0$（$a>0$）所截得的立体的体积。



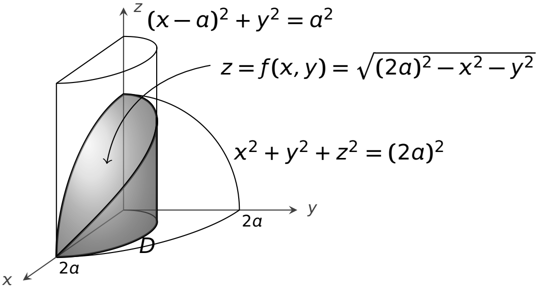



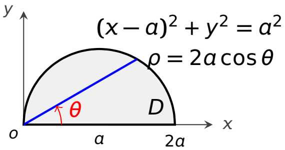

解

$$V=4\iint_D \sqrt{4a^2-x^2-y^2}dxdy \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} 4\iint_D \sqrt{4a^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int \qquad \sqrt{4a^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho\right]d\theta$$

**例** 求球体 $x^2+y^2+z^2 \leq (2a)^2$ 被圆柱 $(x-a)^2+y^2=0$（$a>0$）所截得的立体的体积。




**解**

$$V=4\iint_D \sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,dxdy \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} 4\iint_D \sqrt{4a^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^{2a\cos\theta}\sqrt{4a^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho\right]d\theta$$

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^{2a\cos\theta}\sqrt{4a^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho\right]d\theta$$

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^{2a\cos\theta}\sqrt{4a^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho\right]d\theta$$

$$\underline{\underline{u=4a^2-\rho^2}}$$

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{2a\cos\theta} \sqrt{4a^2-\rho^2}\cdot \rho d\rho\right] d\theta$$

$$\xlongequal{u=4a^2-\rho^2} 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_{4a^2}^{4a^2\sin^2\theta} u^{\frac{1}{2}}\cdot(-\frac{1}{2}) du\right] d\theta$$

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big[\int_0^{2a\cos\theta}\sqrt{4a^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho\Big]d\theta$$

$$\xlongequal{u=4a^2-\rho^2} 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big[\int_{4a^2}^{4a^2\sin^2\theta} u^{\frac{1}{2}}\cdot(-\frac{1}{2})du\Big]d\theta$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big[u^{\frac{3}{2}}\Big|_{4a^2\sin^2\theta}^{4a^2}\Big]d\theta$$

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^{2a\cos\theta}\sqrt{4a^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho\right]d\theta$$

$$\xlongequal{u=4a^2-\rho^2} 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_{4a^2}^{4a^2\sin^2\theta}u^{\frac{1}{2}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)du\right]d\theta$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[u^{\frac{3}{2}}\Big|_{4a^2\sin^2\theta}^{4a^2}\right]d\theta=\frac{4}{3}\cdot 8a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)d\theta$$

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big[\int_0^{2a\cos\theta}\sqrt{4a^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho\Big]d\theta$$

$$\underline{\underline{\underline{u=4a^2-\rho^2}}}\ 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big[\int_{4a^2}^{4a^2\sin^2\theta}u^{\frac{1}{2}}\cdot(-\frac{1}{2})du\Big]d\theta$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big[u^{\frac{3}{2}}\Big|_{4a^2\sin^2\theta}^{4a^2}\Big]d\theta=\frac{4}{3}\cdot 8a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)d\theta$$

其中

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta d\theta$$

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^{2a\cos\theta}\sqrt{4a^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho\right]d\theta$$

$$\xlongequal{u=4a^2-\rho^2}4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_{4a^2}^{4a^2\sin^2\theta}u^{\frac{1}{2}}\cdot(-\frac{1}{2})du\right]d\theta$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[u^{\frac{3}{2}}\Big|_{4a^2\sin^2\theta}^{4a^2}\right]d\theta=\frac{4}{3}\cdot 8a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)d\theta$$

其中

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cdot\sin\theta d\theta$$

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^{2a\cos\theta}\sqrt{4a^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho\right]d\theta$$

$$\xlongequal{u=4a^2-\rho^2} 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_{4a^2}^{4a^2\sin^2\theta} u^{\frac{1}{2}}\cdot(-\frac{1}{2})du\right]d\theta$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[u^{\frac{3}{2}}\Big|_{4a^2\sin^2\theta}^{4a^2}\right]d\theta = \frac{4}{3}\cdot 8a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)d\theta$$

其中

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cdot\sin\theta d\theta = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\theta)d\cos\theta$$

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big[\int_0^{2a\cos\theta} \sqrt{4a^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho\Big]d\theta$$

$$\xlongequal{u=4a^2-\rho^2} 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big[\int_{4a^2}^{4a^2\sin^2\theta} u^{\frac{1}{2}}\cdot(-\frac{1}{2})du\Big]d\theta$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big[u^{\frac{3}{2}}\Big|_{4a^2\sin^2\theta}^{4a^2}\Big]d\theta = \frac{4}{3}\cdot 8a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)d\theta$$

其中

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cdot\sin\theta d\theta = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\theta)d\cos\theta$$

$$\xlongequal{u=\cos\theta} -\int_1^0 (1-u^2)du$$

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big[\int_0^{2a\cos\theta}\sqrt{4a^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho\Big]d\theta$$

$$\xlongequal{u=4a^2-\rho^2} 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big[\int_{4a^2}^{4a^2\sin^2\theta} u^{\frac{1}{2}}\cdot(-\frac{1}{2})du\Big]d\theta$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big[u^{\frac{3}{2}}\Big|_{4a^2\sin^2\theta}^{4a^2}\Big]d\theta = \frac{4}{3}\cdot 8a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)d\theta$$

其中

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cdot\sin\theta d\theta = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\theta)d\cos\theta$$

$$\xlongequal{u=\cos\theta} -\int_1^0(1-u^2)du = -(u-\frac{1}{3}u^3)\Big|_1^0$$

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{2a\cos\theta} \sqrt{4a^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho\right] d\theta$$

$$\overset{u=4a^2-\rho^2}{=\!=\!=\!=} 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_{4a^2}^{4a^2\sin^2\theta} u^{\frac{1}{2}}\cdot(-\frac{1}{2})du\right] d\theta$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[u^{\frac{3}{2}}\Big|_{4a^2\sin^2\theta}^{4a^2}\right] d\theta = \frac{4}{3}\cdot 8a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)d\theta$$

其中

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cdot\sin\theta d\theta = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\theta)d\cos\theta$$

$$\overset{u=\cos\theta}{=\!=\!=\!=} -\int_1^0 (1-u^2)du = -(u-\frac{1}{3}u^3)\Big|_1^0 = \frac{2}{3}$$

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big[\int_0^{2a\cos\theta}\sqrt{4a^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho\Big]d\theta$$

$$\xlongequal{u=4a^2-\rho^2}4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big[\int_{4a^2}^{4a^2\sin^2\theta}u^{\frac{1}{2}}\cdot(-\frac{1}{2})du\Big]d\theta$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big[u^{\frac{3}{2}}\Big|_{4a^2\sin^2\theta}^{4a^2}\Big]d\theta=\frac{4}{3}\cdot 8a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)d\theta$$

其中

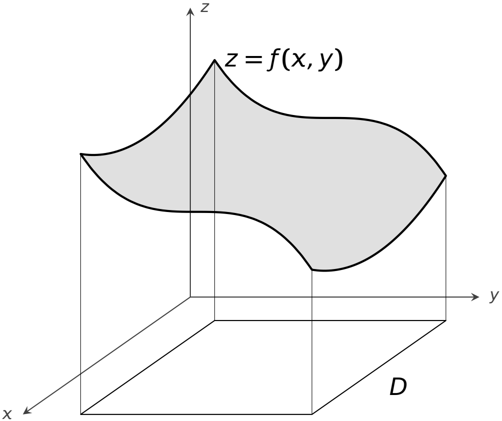
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cdot\sin\theta d\theta=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\theta)d\cos\theta$$

$$\xlongequal{u=\cos\theta}-\int_1^0(1-u^2)du=-(u-\frac{1}{3}u^3)\Big|_1^0=\frac{2}{3}$$

所以 $V=\frac{32}{3}a^3\Big[\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\Big]$

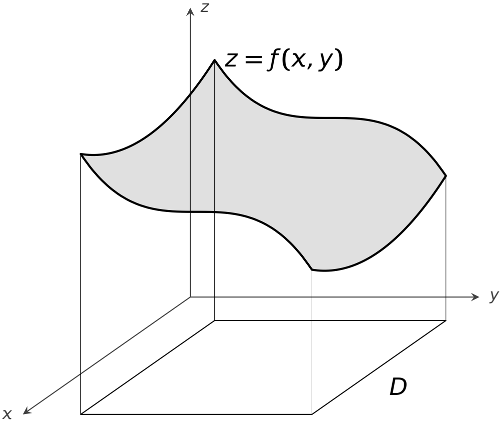
# 曲面的面积

$$A =$$



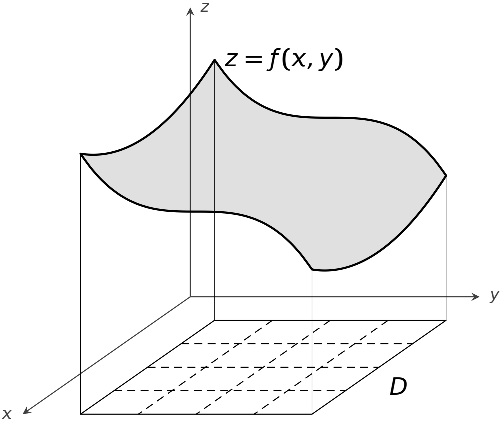
# 曲面的面积

$$A = \iint_D \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2}\, dxdy$$



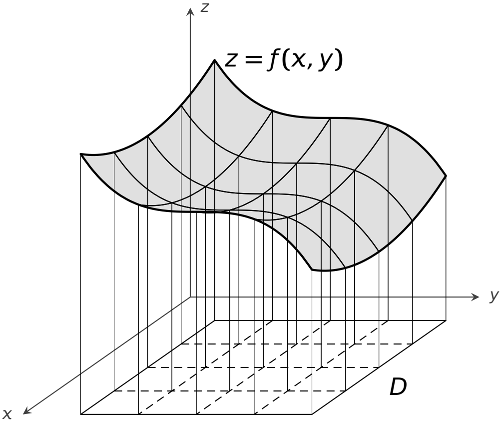
# 曲面的面积

$$A = \iint_D \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2} dxdy$$



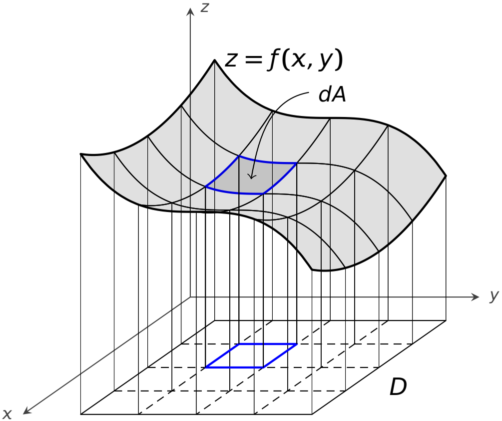
# 曲面的面积

$$A = \iint_D \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2} dxdy$$



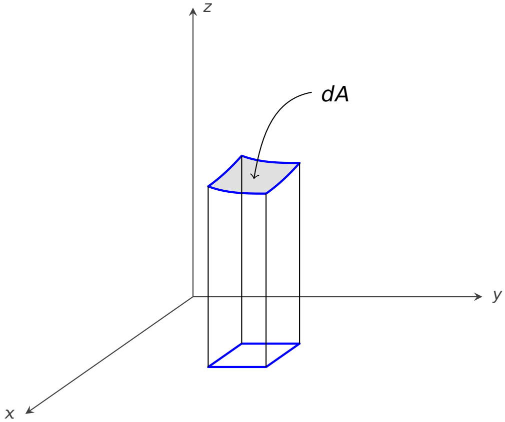
# 曲面的面积

$$A = \iint_D \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2}\, dxdy$$



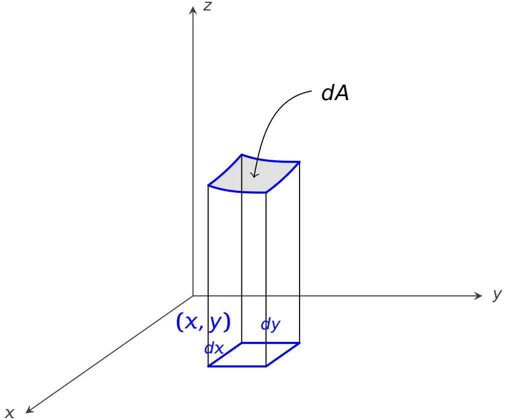
# 曲面的面积

$$A=\iint_D \sqrt{1+f_x(x,y)^2+f_y(x,y)^2}\,dxdy$$



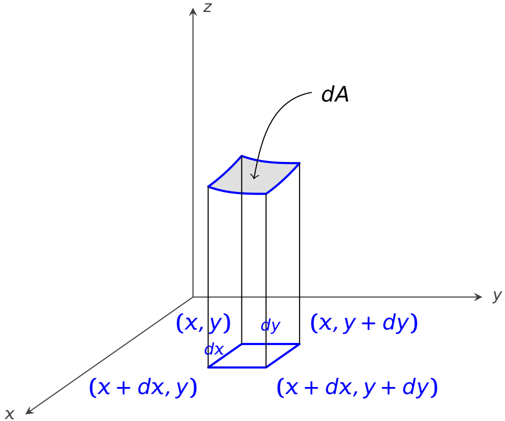
# 曲面的面积

$$A = \iint_D \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2}\, dxdy$$



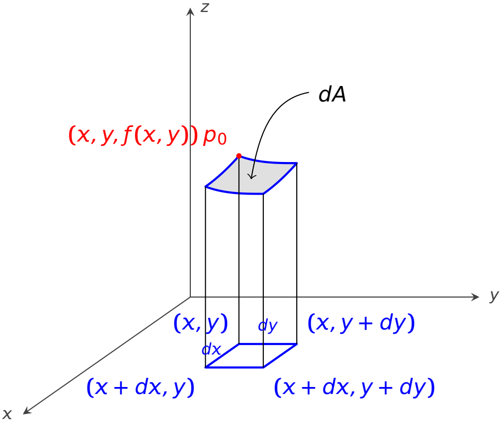
# 曲面的面积

$$A=\iint_D \sqrt{1+f_x(x,y)^2+f_y(x,y)^2}\,dxdy$$



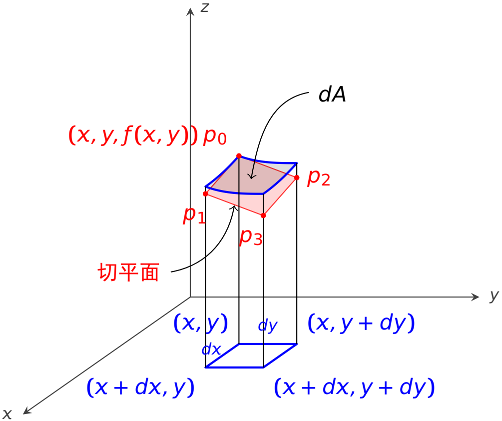
# 曲面的面积

$$A=\iint_D \sqrt{1+f_x(x,\,y)^2+f_y(x,\,y)^2}dxdy$$



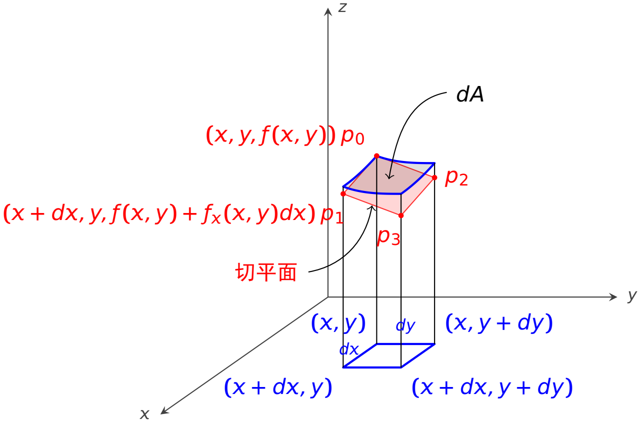
# 曲面的面积

$$A = \iint_D \sqrt{1 + f_x(x,\, y)^2 + f_y(x,\, y)^2}\, dxdy$$



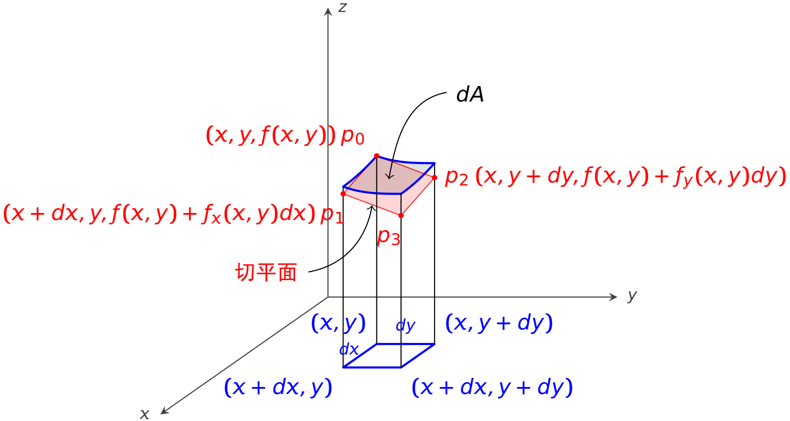
# 曲面的面积

$$A = \iint_D \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2} dxdy$$



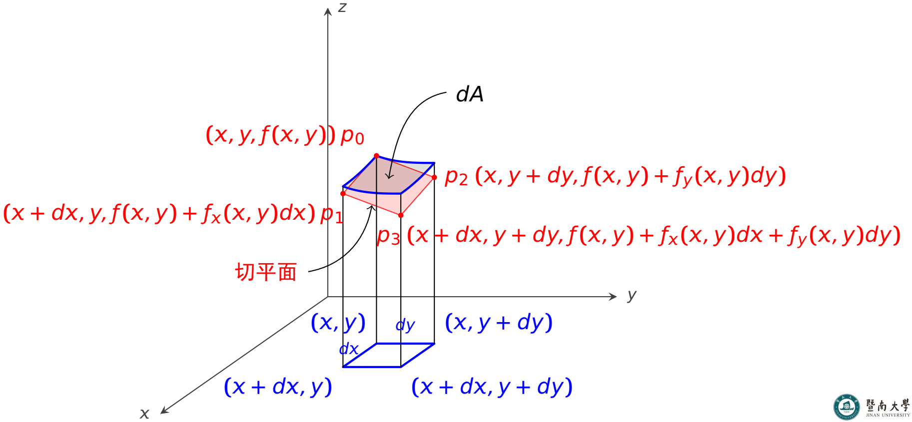
# 曲面的面积

$$A = \iint_D \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2} dxdy$$



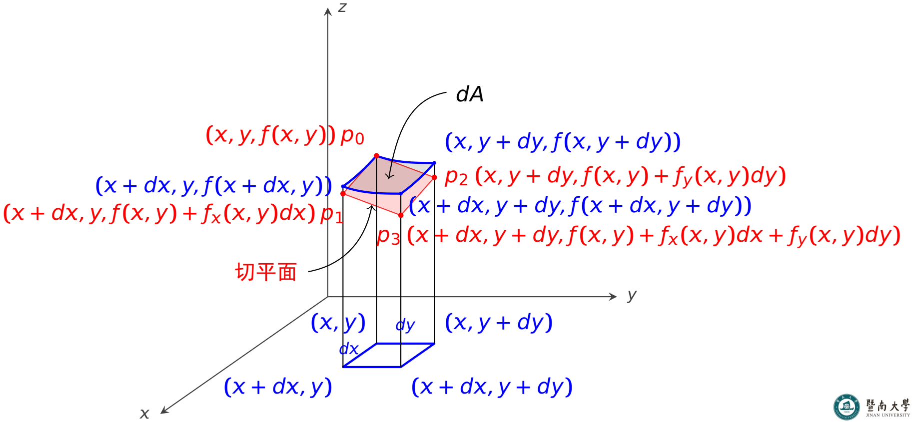
# 曲面的面积

$$A=\iint_D \sqrt{1+f_x(x,y)^2+f_y(x,y)^2}\,dxdy$$



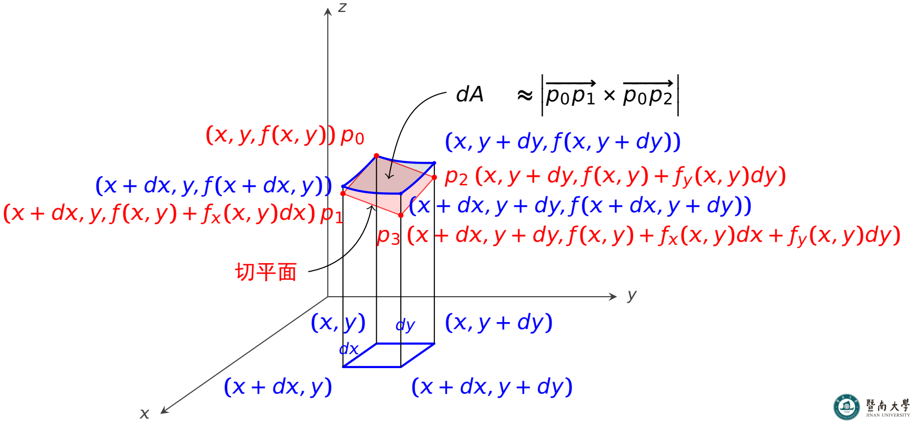
# 曲面的面积

$$A = \iint_D \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2} dxdy$$



# 曲面的面积

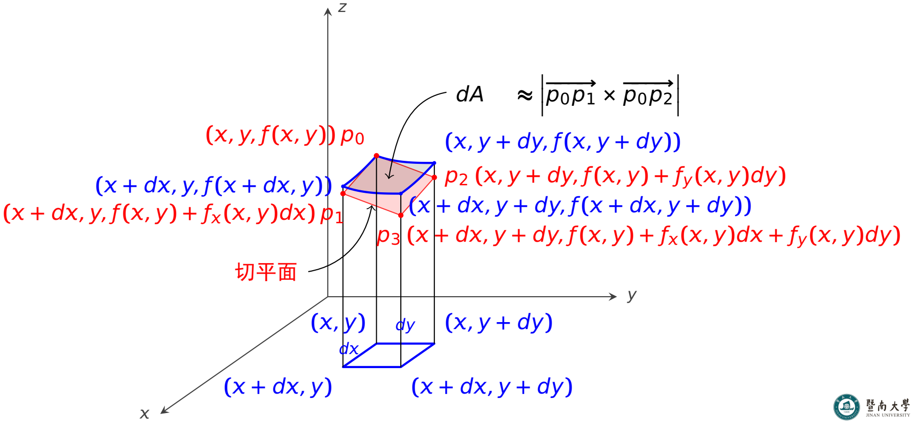
$$A = \iint_D \sqrt{1 + f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2}\,dxdy$$



# 曲面的面积

$$A = \iint_D \sqrt{1 + f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2}\,dxdy$$

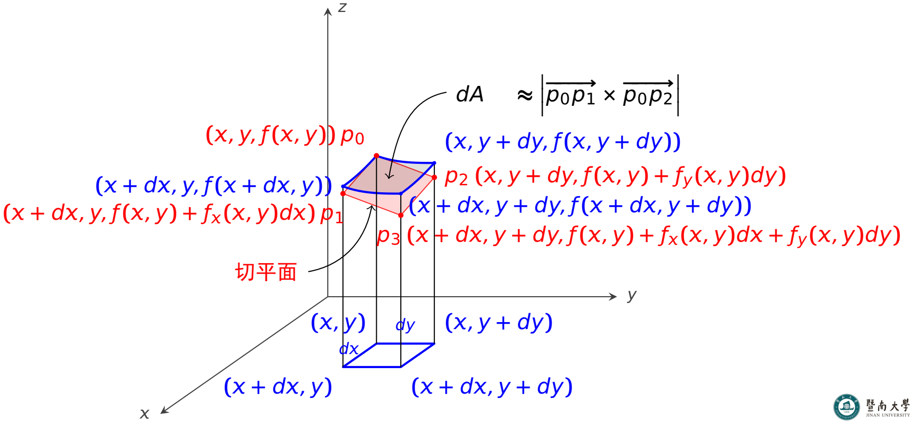
$$\overrightarrow{p_0p_1} \times \overrightarrow{p_0p_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$$



# 曲面的面积

$$A=\iint_D\sqrt{1+f_x(x,y)^2+f_y(x,y)^2}dxdy$$

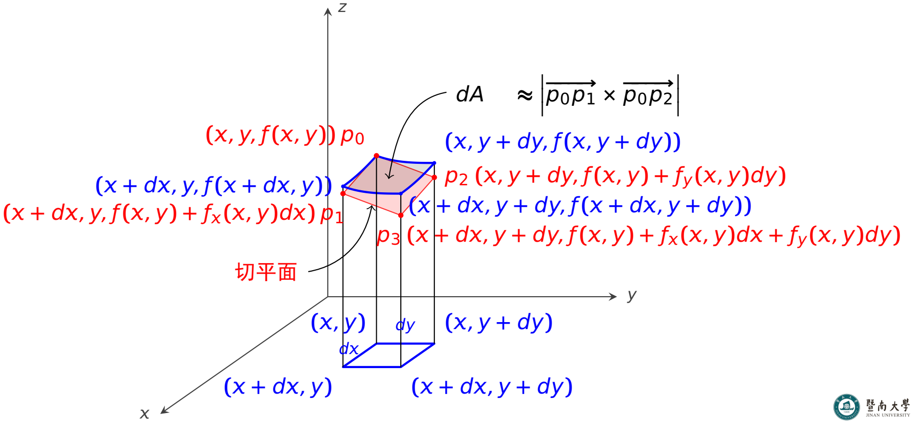
$$\overrightarrow{p_0p_1}\times\overrightarrow{p_0p_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ dx & 0 & f_xdx \\ & & \end{vmatrix}$$



# 曲面的面积

$$A = \iint_D \sqrt{1+f_x(x,y)^2+f_y(x,y)^2}\,dxdy$$

$$\overrightarrow{p_0p_1}\times\overrightarrow{p_0p_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ dx & 0 & f_x dx \\ 0 & dy & f_y dy \end{vmatrix}$$

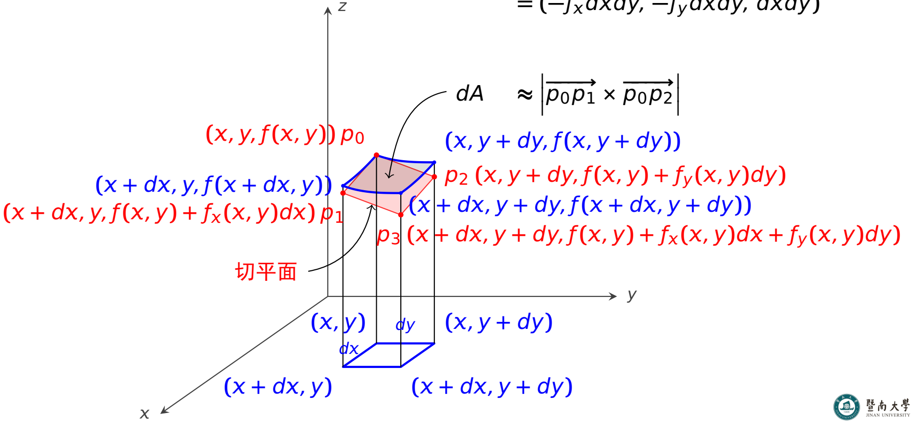


# 曲面的面积

$$A=\iint_D \sqrt{1+f_x(x,y)^2+f_y(x,y)^2}\,dxdy$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{p_0p_1}\times\overrightarrow{p_0p_2} &= \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ dx & 0 & f_x dx\\ 0 & dy & f_y dy\end{vmatrix}\\ &= (-f_x dxdy, -f_y dxdy, dxdy)\end{aligned}$$

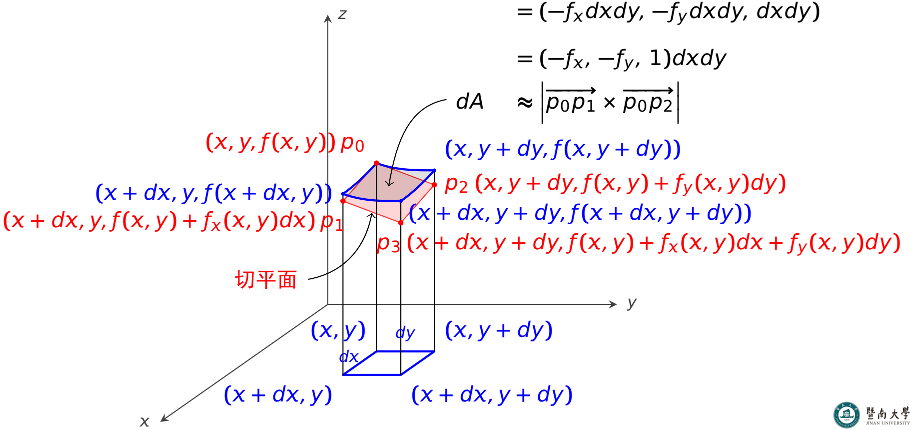
$$dA \approx \left|\overrightarrow{p_0p_1}\times\overrightarrow{p_0p_2}\right|$$



# 曲面的面积

$$A = \iint_D \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2}dxdy$$

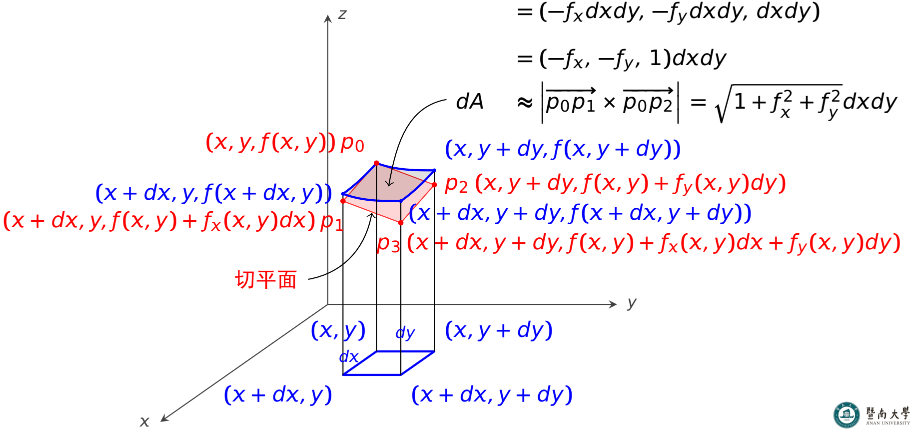
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{p_0p_1} \times \overrightarrow{p_0p_2} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ dx & 0 & f_x dx \\ 0 & dy & f_y dy \end{vmatrix} \\
&= (-f_x dxdy, -f_y dxdy, dxdy) \\
&= (-f_x, -f_y, 1)dxdy \\
dA &\approx \left|\overrightarrow{p_0p_1} \times \overrightarrow{p_0p_2}\right|
\end{aligned}$$



# 曲面的面积

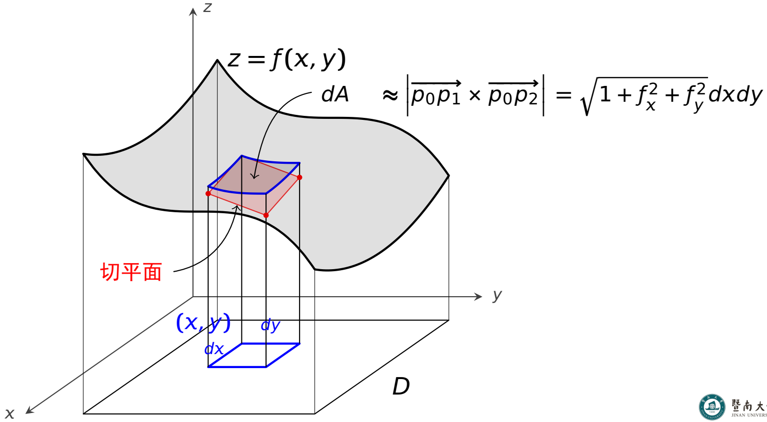
$$A = \iint_D \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2}\, dxdy$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{p_0p_1} \times \overrightarrow{p_0p_2} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ dx & 0 & f_x dx \\ 0 & dy & f_y dy \end{vmatrix} \\
&= (-f_x dxdy, -f_y dxdy, dxdy) \\
&= (-f_x, -f_y, 1) dxdy \\
dA &\approx \left| \overrightarrow{p_0p_1} \times \overrightarrow{p_0p_2} \right| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dxdy
\end{aligned}$$

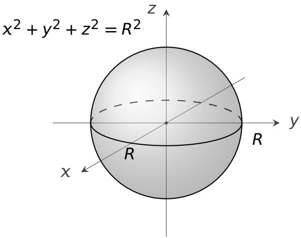


# 曲面的面积

$$A = \iint_D \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2}\,dxdy$$

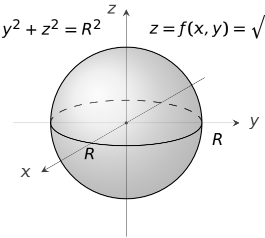


例 求半径为 $R$ 的球面的表面积。

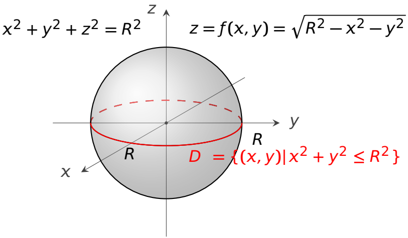


例 求半径为 $R$ 的球面的表面积。

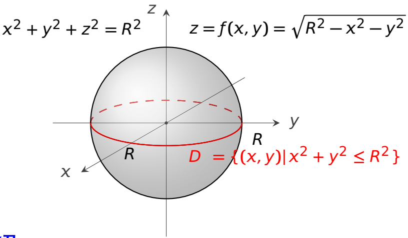
$x^2+y^2+z^2=R^2$ $\quad$ $z=f(x,y)=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$



**例** 求半径为 $R$ 的球面的表面积。



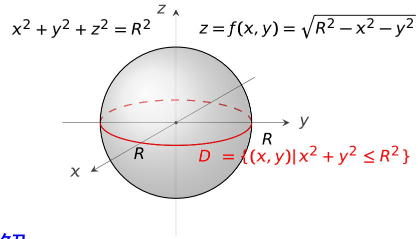
**例** 求半径为 $R$ 的球面的表面积。




**解**

$$\iint_D \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}dxdy$$

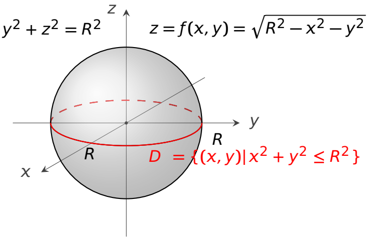
例 求半径为 $R$ 的球面的表面积。




解

$$A=2\iint_D\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}dxdy$$

**例** 求半径为 $R$ 的球面的表面积。

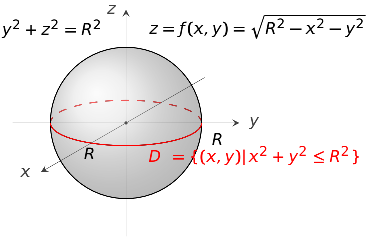



$$f_x=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$
$$f_y=\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

**解**

$$A=2\iint_D\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}dxdy$$

**例** 求半径为 $R$ 的球面的表面积。

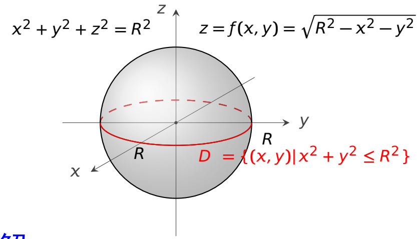



$$f_x=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$
$$f_y=\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$
$$\Rightarrow 1+f_x^2+f_y^2=\frac{R^2}{R^2-x^2-y^2}$$

**解**

$$A=2\iint_D\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}dxdy$$

**例** 求半径为 $R$ 的球面的表面积。

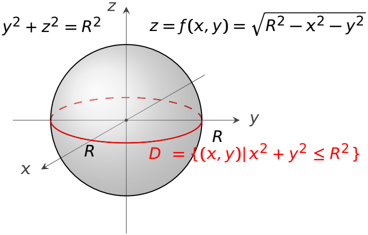



$$f_x=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \qquad f_y=\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \Rightarrow 1+f_x^2+f_y^2=\frac{R^2}{R^2-x^2-y^2}$$

**解**

$$A=2\iint_D\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}dxdy=2\iint_D\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$

**例** 求半径为 $R$ 的球面的表面积。



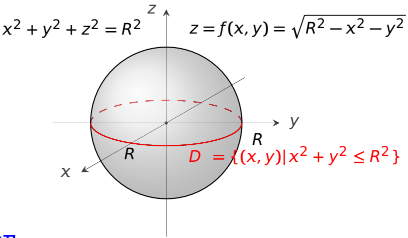

$$f_x=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$
$$f_y=\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$
$$\Rightarrow 1+f_x^2+f_y^2=\frac{R^2}{R^2-x^2-y^2}$$

**解**

$$A=2\iint_D\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}dxdy=2\iint_D\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}$$

**例** 求半径为 $R$ 的球面的表面积。



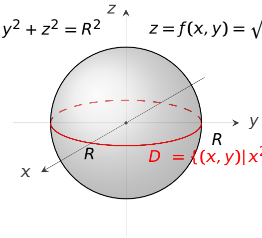

$$f_x=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$
$$f_y=\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$
$$\Rightarrow 1+f_x^2+f_y^2=\frac{R^2}{R^2-x^2-y^2}$$

**解**

$$A=2\iint_D\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}dxdy=2\iint_D\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}2\iint_D\frac{R}{\sqrt{R^2-\rho^2}}$$

例 求半径为 $R$ 的球面的表面积。



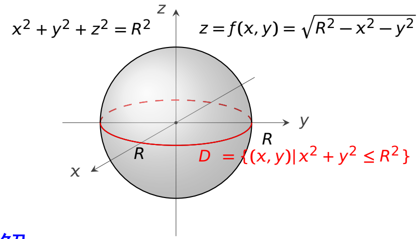

$$f_x=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\qquad f_y=\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\Rightarrow 1+f_x^2+f_y^2=\frac{R^2}{R^2-x^2-y^2}$$

解

$$A=2\iint_D\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}dxdy=2\iint_D\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}2\iint_D\frac{R}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\cdot\rho d\rho d\theta$$

例 求半径为 $R$ 的球面的表面积。



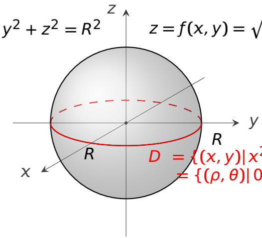

$$f_x=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \quad f_y=\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \Rightarrow 1+f_x^2+f_y^2=\frac{R^2}{R^2-x^2-y^2}$$

解

$$A=2\iint_D\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}dxdy=2\iint_D\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} 2\iint_D\frac{R}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\cdot\rho d\rho d\theta=2\int\left[\int\frac{R}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\cdot\rho d\rho\right]d\theta$$

**例** 求半径为 $R$ 的球面的表面积。



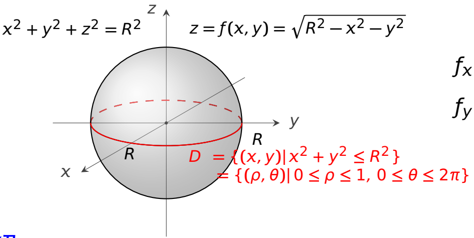

$$f_x=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\quad f_y=\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\Rightarrow 1+f_x^2+f_y^2=\frac{R^2}{R^2-x^2-y^2}$$

**解**

$$A=2\iint_D\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}dxdy=2\iint_D\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}2\iint_D\frac{R}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\cdot\rho d\rho d\theta=2\int\left[\int\frac{R}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\cdot\rho d\rho\right]d\theta$$

**例** 求半径为 $R$ 的球面的表面积。




$$f_x=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\quad f_y=\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\Rightarrow 1+f_x^2+f_y^2=\frac{R^2}{R^2-x^2-y^2}$$

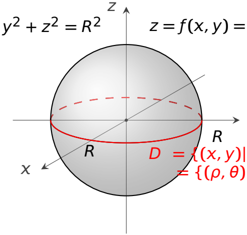
**解**

$$A=2\iint_D\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}dxdy=2\iint_D\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$\overset{x=\rho\cos\theta}{\underset{y=\rho\sin\theta}{=\!=\!=}}2\iint_D\frac{R}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\cdot\rho d\rho d\theta=2\int_0^{2\pi}\left[\int\frac{R}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\cdot\rho d\rho\right]d\theta$$

**例** 求半径为 $R$ 的球面的表面积。

$x^2+y^2+z^2=R^2$ $\qquad$ $z=f(x,y)=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$




$$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le R^2\}$$
$$=\{(\rho,\theta)\,|\,0\le\rho\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi\}$$

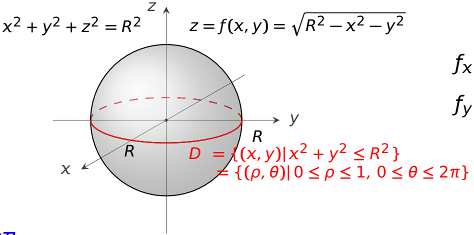
$$f_x=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$
$$f_y=\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \Rightarrow 1+f_x^2+f_y^2=\frac{R^2}{R^2-x^2-y^2}$$

**解**

$$A=2\iint_D\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dxdy=2\iint_D\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} 2\iint_D\frac{R}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\cdot\rho d\rho d\theta=2\int_0^{2\pi}\left[\int_0^R\frac{R}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\cdot\rho d\rho\right]d\theta$$

例 求半径为 $R$ 的球面的表面积。




$$f_x=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\quad f_y=\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\Rightarrow 1+f_x^2+f_y^2=\frac{R^2}{R^2-x^2-y^2}$$

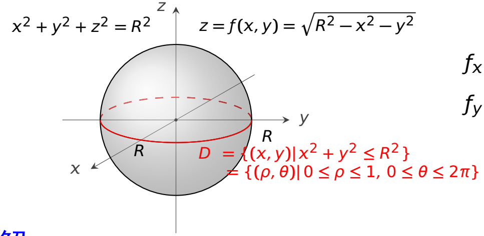
解

$$A=2\iint_D\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}dxdy=2\iint_D\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}2\iint_D\frac{R}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\cdot\rho d\rho d\theta=2\int_0^{2\pi}\left[\int_0^R\frac{R}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\cdot\rho d\rho\right]d\theta$$

$$=4\pi R\int_0^R\frac{\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}d\rho$$

**例** 求半径为 $R$ 的球面的表面积。




$$f_x=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\quad f_y=\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\Rightarrow 1+f_x^2+f_y^2=\frac{R^2}{R^2-x^2-y^2}$$

**解**

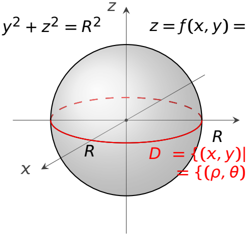
$$A=2\iint_D\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}dxdy=2\iint_D\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}2\iint_D\frac{R}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\cdot\rho d\rho d\theta=2\int_0^{2\pi}\left[\int_0^R\frac{R}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\cdot\rho d\rho\right]d\theta$$

$$=4\pi R\int_0^R\frac{\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}d\rho\xlongequal{u=R^2-\rho^2}$$

**例** 求半径为 $R$ 的球面的表面积。

$x^2+y^2+z^2=R^2$ $\qquad z=f(x,y)=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$




$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le R^2\}$
$=\{(\rho,\theta)|\,0\le\rho\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi\}$

$$f_x=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \qquad f_y=\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \quad\Rightarrow 1+f_x^2+f_y^2=\frac{R^2}{R^2-x^2-y^2}$$

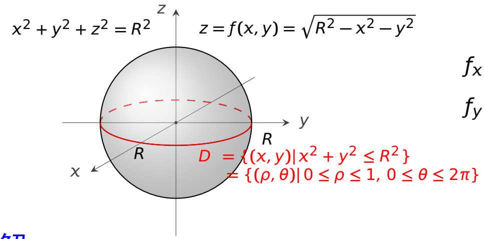
**解**

$$A=2\iint_D\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}dxdy=2\iint_D\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} 2\iint_D\frac{R}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\cdot\rho d\rho d\theta=2\int_0^{2\pi}\left[\int_0^R\frac{R}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\cdot\rho d\rho\right]d\theta$$

$$=4\pi R\int_0^R\frac{\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}d\rho \xlongequal{u=R^2-\rho^2} 4\pi R\int\quad u^{-\frac{1}{2}}\cdot(-\frac{1}{2})du$$

**例** 求半径为 $R$ 的球面的表面积。




$$f_x=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\qquad f_y=\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\Rightarrow 1+f_x^2+f_y^2=\frac{R^2}{R^2-x^2-y^2}$$

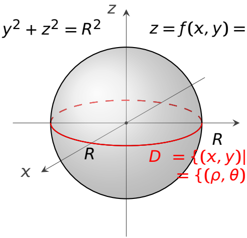
**解**

$$A=2\iint_D\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dxdy=2\iint_D\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}2\iint_D\frac{R}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\cdot\rho d\rho d\theta=2\int_0^{2\pi}\left[\int_0^R\frac{R}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\cdot\rho d\rho\right]d\theta$$

$$=4\pi R\int_0^R\frac{\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}d\rho\xlongequal{u=R^2-\rho^2}4\pi R\int_{R^2}^0u^{-\frac{1}{2}}\cdot(-\frac{1}{2})du$$

**例** 求半径为 $R$ 的球面的表面积。




$$f_x=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\quad f_y=\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \Rightarrow 1+f_x^2+f_y^2=\frac{R^2}{R^2-x^2-y^2}$$

**解**

$$A=2\iint_D\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dxdy=2\iint_D\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}2\iint_D\frac{R}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\cdot\rho d\rho d\theta=2\int_0^{2\pi}\left[\int_0^R\frac{R}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\cdot\rho d\rho\right]d\theta$$

$$=4\pi R\int_0^R\frac{\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}d\rho\xlongequal{u=R^2-\rho^2}4\pi R\int_{R^2}^0u^{-\frac{1}{2}}\cdot(-\frac{1}{2})du=4\pi R^2$$