# 第2章a:矩阵的概念

数学系 梁卓滨

2020-2021 学年 I

例 4×7个数字排成一个 4×7矩阵

,	98 90 88	58	75	78	20	60	64	1
1	98	70	85	84	30	59	70	١
١	90	75	90	90	35	66	75	
١	88	70	82	80	62	70	80	J

定义 由  $m \times n$  个数  $a_{ij}$  (i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n) 按一定次 序排成的一个m行n列的矩形数表,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 $m \times n$  矩阵,简称矩阵。

定义 由  $m \times n$  个数  $a_{ij}$  (i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n) 按一定次 序排成的一个m行n列的矩形数表,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 $m \times n$  矩阵,简称矩阵。其中  $a_{ij}$  称为矩阵第 i 行第 j 列的元素。

1/6 ⊲ ⊳

**倒4×7**个数字排成一个4×7矩阵 (80 58 75 78 20 60 64 98 70 85 84 30 59 70 90 75 90 90 35 66 75 88 70 82 80 62 70 80 )

定义 由  $m \times n$  个数  $a_{ij}$  (i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n) 按一定次 序排成的一个m行n列的矩形数表,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 $m \times n$  矩阵,简称矩阵。其中  $a_{ii}$  称为矩阵第 i 行第 j 列的元素。

注 诵常表示矩阵的符号

大写字母 A, B, C, · · ·

矩阵概念 1/6 ⊲ ⊳

**倒4×7**个数字排成一个4×7矩阵 (80 58 75 78 20 60 64 98 70 85 84 30 59 70 90 75 90 90 35 66 75 88 70 82 80 62 70 80 )

定义 由  $m \times n$  个数  $a_{ij}$  (i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n) 按一定次 序排成的一个m行n列的矩形数表,

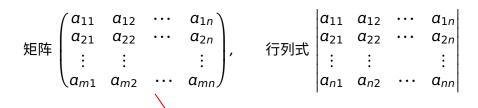
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 $m \times n$  矩阵,简称矩阵。其中  $a_{ii}$  称为矩阵第 i 行第 j 列的元素。

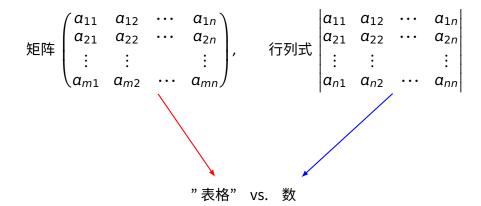
#### 注 诵常表示矩阵的符号

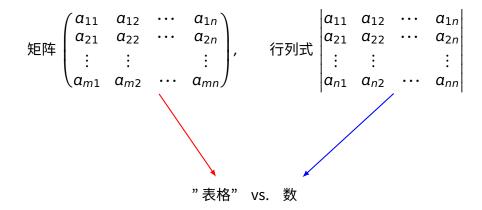
- 1. 大写字母 *A* , *B* , *C* , · · ·
- 2.  $A_{m \times n}$ ,  $(a_{ij})_{m \times n}$

矩阵 
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$
, 行列式  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 

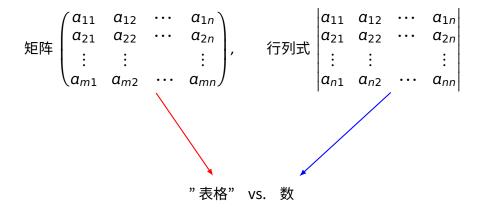


"表格"





行数、列数可以不等



行数、列数可以不等 vs. 行数、列数相等

● A, B 有相同的行数和列数("同型"),

● A, B 有相同的行数和列数("同型"),

• 对应位置上的元素相等,

● A, B 有相同的行数和列数("同型"),即:

$$A=(\alpha_{ij})_{m\times n},\,B=(b_{ij})_{m\times n}$$

• 对应位置上的元素相等,

● A, B 有相同的行数和列数("同型"),即:

$$A=(\alpha_{ij})_{m\times n},\,B=(b_{ij})_{m\times n}$$

• 对应位置上的元素相等,即:

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

矩阵概念 3/6 4 ▷

● A, B 有相同的行数和列数("同型"),即:

$$A=(\alpha_{ij})_{m\times n},\,B=(b_{ij})_{m\times n}$$

• 对应位置上的元素相等,即:

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

此时记为A = B

● A, B 有相同的行数和列数("同型"),即:

$$A=(\alpha_{ij})_{m\times n},\,B=(b_{ij})_{m\times n}$$

• 对应位置上的元素相等,即:

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

此时记为A = B

例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix},$$

● A, B 有相同的行数和列数("同型"),即:

$$A=(\alpha_{ij})_{m\times n},\,B=(b_{ij})_{m\times n}$$

• 对应位置上的元素相等,即:

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

此时记为A = B

例如

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&7\end{pmatrix},$$

● A, B 有相同的行数和列数("同型"),即:

$$A=(\alpha_{ij})_{m\times n},\,B=(b_{ij})_{m\times n}$$

• 对应位置上的元素相等,即:

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

此时记为A = B

例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

矩阵概念

● A, B 有相同的行数和列数("同型"),即:

$$A=(\alpha_{ij})_{m\times n},\,B=(b_{ij})_{m\times n}$$

• 对应位置上的元素相等,即:

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

此时记为A = B

例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

矩阵概念

● A, B 有相同的行数和列数("同型"),即:

$$A=(\alpha_{ij})_{m\times n},\,B=(b_{ij})_{m\times n}$$

• 对应位置上的元素相等,即:

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

此时记为A = B

例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \sin^2 t + \cos^2 t & -1 \\ 9 & 4 \\ 0 & \sqrt{t^2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 9 & 4 \\ 0 & |t| \end{pmatrix}$$

● A, B 有相同的行数和列数("同型"),即:

$$A=(\alpha_{ij})_{m\times n},\,B=(b_{ij})_{m\times n}$$

• 对应位置上的元素相等,即:

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

此时记为A = B

例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \sin^2 t + \cos^2 t & -1 \\ 9 & 4 \\ 0 & \sqrt{t^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 9 & 4 \\ 0 & |t| \end{pmatrix}$$

### 零矩阵、方阵

设 
$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

• 若  $\alpha_{ij} = 0$  (i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n),则称 A 为  $m \times n$  零矩阵,记为  $O_{m \times n}$  或 O。例如:

$$O_{2\times3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad O_{3\times2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# 零矩阵、方阵

设
$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

• 若  $\alpha_{ij} = 0$  (i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n),则称 A 为  $m \times n$  零矩阵,记为  $O_{m \times n}$  或 O。例如:

$$O_{2\times3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad O_{3\times2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

者 m = n,即行数与列数相等:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则称 A 为 n **阶方阵**。

• 对 n 阶方阵  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ ,可以计算其行列式 |A|。

• 对 n 阶方阵  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ ,可以计算其行列式 |A|。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

• 对 n 阶方阵  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ ,可以计算其行列式 |A|。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \implies |A|$$

• 对 n 阶方阵  $A = (a_{ii})_{n \times n}$ ,可以计算其行列式 |A|。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

• 对 n 阶方阵  $A = (a_{ii})_{n \times n}$ ,可以计算其行列式 |A|。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -58$$

• 对 n 阶方阵  $A = (a_{ii})_{n \times n}$ ,可以计算其行列式 |A|。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -58$$

#### 注

1. 若  $A = A_{m \times n}$  非方阵  $(m \neq n)$ ,则不存在行列式 |A|

• 对 n 阶方阵  $A = (a_{ii})_{n \times n}$ ,可以计算其行列式 |A|。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -58$$

#### 注

- 1. 若  $A = A_{m \times n}$  非方阵  $(m \neq n)$ ,则不存在行列式 |A|
- 2. 注意区分矩阵和行列式:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

矩阵概念

设
$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

• 若 m=1,即只有一行:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

设
$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

• 若 m=1,即只有一行:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

则称 A 为行矩阵 或 行向量

设
$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

若 m = 1,即只有一行:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

则称 A 为 行矩阵 或 行向量

• 若 n=1,即只有一列:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

设
$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

● 若 *m* = 1,即只有一行:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

则称 A 为 行矩阵 或 行向量

• 若 n=1,即只有一列:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

则称 A 为列矩阵 或 列向量