

第 2 章 c: 特殊矩阵

数学系 梁卓滨

2019-2020 学年 I

提要

- 单位矩阵 数量矩阵 对角矩阵 三角矩阵

提要

- 单位矩阵 \subset 数量矩阵 \subset 对角矩阵 \subset 三角矩阵

提要

- 单位矩阵 \subset 数量矩阵 \subset 对角矩阵 \subset 三角矩阵
- 对称矩阵

单位矩阵

定义 对角线元素都是 1，其余元素均为 0 的 n 阶矩阵称为 **单位矩阵**，记为 I_n （有时简记为 I ），即

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

单位矩阵

定义 对角线元素都是 1，其余元素均为 0 的 n 阶矩阵称为 **单位矩阵**，记为 I_n （有时简记为 I ），即

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

性质 对任意矩阵 $A_{n \times m}$ 和 $B_{m \times n}$ ，都有

$$I_n A_{n \times m} = \quad \quad B_{m \times n} I_n =$$

单位矩阵

定义 对角线元素都是 1，其余元素均为 0 的 n 阶矩阵称为 **单位矩阵**，记为 I_n （有时简记为 I ），即

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

性质 对任意矩阵 $A_{n \times m}$ 和 $B_{m \times n}$ ，都有

$$I_n A_{n \times m} = A_{n \times m}, \quad B_{m \times n} I_n =$$

单位矩阵

定义 对角线元素都是 1，其余元素均为 0 的 n 阶矩阵称为 **单位矩阵**，记为 I_n （有时简记为 I ），即

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

性质 对任意矩阵 $A_{n \times m}$ 和 $B_{m \times n}$ ，都有

$$I_n A_{n \times m} = A_{n \times m}, \quad B_{m \times n} I_n = B_{m \times n}$$

数量矩阵

定义 对角线元素都是同一个数 k ，其余元素均为 0 的 n 阶矩阵称为**数量矩阵**

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n \times n}$$

数量矩阵

定义 对角线元素都是同一个数 k ，其余元素均为 0 的 n 阶矩阵称为**数量矩阵**，即

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n \times n} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

数量矩阵

定义 对角线元素都是同一个数 k ，其余元素均为 0 的 n 阶矩阵称为**数量矩阵**，即

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n \times n} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n} = kI_n$$

数量矩阵

定义 对角线元素都是同一个数 k ，其余元素均为 0 的 n 阶矩阵称为**数量矩阵**，即

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n \times n} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n} = kI_n$$

可见，数量矩阵可表示为 kI_n 。

数量矩阵

定义 对角线元素都是同一个数 k ，其余元素均为 0 的 n 阶矩阵称为**数量矩阵**，即

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n \times n} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n} = kI_n$$

可见，数量矩阵可表示为 kI_n 。

性质 两个数量矩阵的和、差、乘积仍是数量矩阵

数量矩阵

定义 对角线元素都是同一个数 k ，其余元素均为 0 的 n 阶矩阵称为**数量矩阵**，即

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n \times n} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n} = kI_n$$

可见，数量矩阵可表示为 kI_n 。

性质 两个数量矩阵的和、差、乘积仍是数量矩阵，例如

1. $kI_n + lI_n =$

数量矩阵

定义 对角线元素都是同一个数 k ，其余元素均为 0 的 n 阶矩阵称为**数量矩阵**，即

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n \times n} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n} = kI_n$$

可见，数量矩阵可表示为 kI_n 。

性质 两个数量矩阵的和、差、乘积仍是数量矩阵，例如

1. $kI_n + lI_n = (k + l)I_n$

数量矩阵

定义 对角线元素都是同一个数 k ，其余元素均为 0 的 n 阶矩阵称为**数量矩阵**，即

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n \times n} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n} = kI_n$$

可见，数量矩阵可表示为 kI_n 。

性质 两个数量矩阵的和、差、乘积仍是数量矩阵，例如

1. $kI_n + lI_n = (k + l)I_n$, $kI_n - lI_n =$

数量矩阵

定义 对角线元素都是同一个数 k ，其余元素均为 0 的 n 阶矩阵称为**数量矩阵**，即

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n \times n} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n} = kI_n$$

可见，数量矩阵可表示为 kI_n 。

性质 两个数量矩阵的和、差、乘积仍是数量矩阵，例如

1. $kI_n + lI_n = (k + l)I_n$, $kI_n - lI_n = (k - l)I_n$

数量矩阵

定义 对角线元素都是同一个数 k ，其余元素均为 0 的 n 阶矩阵称为**数量矩阵**，即

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n \times n} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n} = kI_n$$

可见，数量矩阵可表示为 kI_n 。

性质 两个数量矩阵的和、差、乘积仍是数量矩阵，例如

1. $kI_n + lI_n = (k + l)I_n$, $kI_n - lI_n = (k - l)I_n$
2. $(kI_n)(lI_n) =$

数量矩阵

定义 对角线元素都是同一个数 k ，其余元素均为 0 的 n 阶矩阵称为**数量矩阵**，即

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n \times n} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n} = kI_n$$

可见，数量矩阵可表示为 kI_n 。

性质 两个数量矩阵的和、差、乘积仍是数量矩阵，例如

1. $kI_n + lI_n = (k + l)I_n$, $kI_n - lI_n = (k - l)I_n$
2. $(kI_n)(lI_n) = (kl)I_nI_n =$

数量矩阵

定义 对角线元素都是同一个数 k ，其余元素均为 0 的 n 阶矩阵称为**数量矩阵**，即

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n \times n} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n} = kI_n$$

可见，数量矩阵可表示为 kI_n 。

性质 两个数量矩阵的和、差、乘积仍是数量矩阵，例如

1. $kI_n + lI_n = (k + l)I_n$, $kI_n - lI_n = (k - l)I_n$
2. $(kI_n)(lI_n) = (kl)I_nI_n = (kl)I_n$

对角矩阵

定义 除了对角线，其余位置都是 0 的 n 阶矩阵，称为**对角矩阵**，即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

对角矩阵

定义 除了对角线，其余位置都是 0 的 n 阶矩阵，称为**对角矩阵**，即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n} \quad \underline{\underline{\text{或写成}}} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & & \\ & & a_{33} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

对角矩阵

定义 除了对角线，其余位置都是 0 的 n 阶矩阵，称为**对角矩阵**，即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n} \quad \underline{\underline{\text{或写成}}} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & & \\ & & a_{33} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

性质 两个对角矩阵的和、差、乘积仍是对角矩阵

对角矩阵的和、差

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & & & \\ & a_{22} + b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} + b_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

对角矩阵的和、差

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & & & \\ & a_{22} - b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} - b_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

对角矩阵的和、差

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & & & \\ & a_{22} \pm b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \pm b_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

对角矩阵的乘积

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

对角矩阵的乘积

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}_{n \times n}$$

对角矩阵的乘积

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}_{n \times n}$$

对角矩阵的乘积

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & & & \\ & a_{22}b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \end{pmatrix}_{n \times n}$$

对角矩阵的乘积

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & & & \\ & a_{22}b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \end{pmatrix}_{n \times n}$$

对角矩阵的乘积

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & & & \\ & a_{22}b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

三角矩阵

- 上三角矩阵
$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & * & \cdots & * \\ & a_{22} & * & \cdots & * \\ & & a_{33} & \cdots & * \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

三角矩阵

- 上三角矩阵
$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & * & \cdots & * \\ & a_{22} & * & \cdots & * \\ & & a_{33} & \cdots & * \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- 下三角矩阵
$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ * & a_{22} & & & \\ * & * & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ * & * & * & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

三角矩阵

- 上三角矩阵
$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & * & \cdots & * \\ & a_{22} & * & \cdots & * \\ & & a_{33} & \cdots & * \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- 下三角矩阵
$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ * & a_{22} & & & \\ * & * & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ * & * & * & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

性质 两个上（下）三角矩阵的和、差、乘积仍是上（下）三角矩阵

三角矩阵的和、差

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ & a_{22} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \Delta & \cdots & \Delta \\ & b_{22} & \cdots & \Delta \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \odot & \cdots & \odot \\ & a_{22} + b_{22} & \cdots & \odot \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} + b_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

三角矩阵的和、差

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ & a_{22} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & \Delta & \cdots & \Delta \\ & b_{22} & \cdots & \Delta \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & \odot & \cdots & \odot \\ & a_{22} - b_{22} & \cdots & \odot \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} - b_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

三角矩阵的和、差

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ & a_{22} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & \Delta & \cdots & \Delta \\ & b_{22} & \cdots & \Delta \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & \odot & \cdots & \odot \\ & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & \odot \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \pm b_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

三角矩阵的乘积

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ & a_{22} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \Delta & \cdots & \Delta \\ & b_{22} & \cdots & \Delta \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

三角矩阵的乘积

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ & a_{22} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \Delta & \cdots & \Delta \\ & b_{22} & \cdots & \Delta \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}_{n \times n}$$

三角矩阵的乘积

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ & a_{22} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \Delta & \cdots & \Delta \\ & b_{22} & \cdots & \Delta \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & \odot & \cdots & \odot \\ & a_{22}b_{22} & \cdots & \odot \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

对称矩阵

定义 如果 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$ 满足

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n$$

则称为 **对称矩阵**。

对称矩阵

定义 如果 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$ 满足

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n$$

则称为 **对称矩阵**。

例 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ 都是对称矩阵。

对称矩阵

定义 如果 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$ 满足

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n$$

则称为 **对称矩阵**。

例 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ 都是对称矩阵。

对称矩阵

定义 如果 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$ 满足

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n$$

则称为 **对称矩阵**。

例 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ 都是对称矩阵。

注 方阵 A 对称，等价于它满足 $A^T = A$ 。

对称矩阵

定义 如果 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$ 满足

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n$$

则称为 **对称矩阵**。

例 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ 都是对称矩阵。

注 方阵 A 对称，等价于它满足 $A^T = A$ 。这是：

	A	A^T
位置 (i, j) 上的元素		

对称矩阵

定义 如果 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$ 满足

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n$$

则称为 **对称矩阵**。

例 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ 都是对称矩阵。

注 方阵 A 对称，等价于它满足 $A^T = A$ 。这是：

	A	A^T
位置 (i, j) 上的元素	a_{ij}	

对称矩阵

定义 如果 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$ 满足

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n$$

则称为 **对称矩阵**。

例 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ 都是对称矩阵。

注 方阵 A 对称，等价于它满足 $A^T = A$ 。这是：

	A	A^T
位置 (i, j) 上的元素	a_{ij}	a_{ji}

性质

1. 设 A, B 为 n 阶对称矩阵, 则 $A \pm B, kA$ 也是 n 阶对称矩阵.

性质

1. 设 A, B 为 n 阶对称矩阵, 则 $A \pm B, kA$ 也是 n 阶对称矩阵.

证明

1. $(A \pm B)^T =$

性质

1. 设 A, B 为 n 阶对称矩阵, 则 $A \pm B, kA$ 也是 n 阶对称矩阵.

证明

1. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T =$

性质

1. 设 A, B 为 n 阶对称矩阵, 则 $A \pm B, kA$ 也是 n 阶对称矩阵.

证明

1. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$

性质

1. 设 A, B 为 n 阶对称矩阵, 则 $A \pm B, kA$ 也是 n 阶对称矩阵.

证明

1. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$, 所以 $A \pm B$ 对称.

性质

1. 设 A, B 为 n 阶对称矩阵, 则 $A \pm B, kA$ 也是 n 阶对称矩阵.

证明

1. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$, 所以 $A \pm B$ 对称.
 $(kA)^T =$

性质

1. 设 A, B 为 n 阶对称矩阵, 则 $A \pm B, kA$ 也是 n 阶对称矩阵.

证明

1. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$, 所以 $A \pm B$ 对称.
 $(kA)^T = kA^T =$

性质

1. 设 A, B 为 n 阶对称矩阵, 则 $A \pm B, kA$ 也是 n 阶对称矩阵.

证明

1. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$, 所以 $A \pm B$ 对称.
 $(kA)^T = kA^T = kA$

性质

1. 设 A, B 为 n 阶对称矩阵, 则 $A \pm B, kA$ 也是 n 阶对称矩阵.

证明

1. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$, 所以 $A \pm B$ 对称.
 $(kA)^T = kA^T = kA$, 所以 kA 对称.

性质

1. 设 A, B 为 n 阶对称矩阵, 则 $A \pm B, kA$ 也是 n 阶对称矩阵.
2. 设 C 为任一 n 阶方阵, 则 $C + C^T$ 为 n 阶对称矩阵.

证明

1. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$, 所以 $A \pm B$ 对称.
 $(kA)^T = kA^T = kA$, 所以 kA 对称.

性质

1. 设 A, B 为 n 阶对称矩阵, 则 $A \pm B, kA$ 也是 n 阶对称矩阵.
2. 设 C 为任一 n 阶方阵, 则 $C + C^T$ 为 n 阶对称矩阵.

证明

1. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$, 所以 $A \pm B$ 对称.
 $(kA)^T = kA^T = kA$, 所以 kA 对称.
2. $(C + C^T)^T =$

性质

1. 设 A, B 为 n 阶对称矩阵, 则 $A \pm B, kA$ 也是 n 阶对称矩阵.
2. 设 C 为任一 n 阶方阵, 则 $C + C^T$ 为 n 阶对称矩阵.

证明

1. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$, 所以 $A \pm B$ 对称.
 $(kA)^T = kA^T = kA$, 所以 kA 对称.
2. $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T =$

性质

1. 设 A, B 为 n 阶对称矩阵, 则 $A \pm B, kA$ 也是 n 阶对称矩阵.
2. 设 C 为任一 n 阶方阵, 则 $C + C^T$ 为 n 阶对称矩阵.

证明

1. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$, 所以 $A \pm B$ 对称.
 $(kA)^T = kA^T = kA$, 所以 kA 对称.
2. $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C =$

性质

1. 设 A, B 为 n 阶对称矩阵, 则 $A \pm B, kA$ 也是 n 阶对称矩阵.
2. 设 C 为任一 n 阶方阵, 则 $C + C^T$ 为 n 阶对称矩阵.

证明

1. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$, 所以 $A \pm B$ 对称.
 $(kA)^T = kA^T = kA$, 所以 kA 对称.
2. $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C = C + C^T$

性质

1. 设 A, B 为 n 阶对称矩阵, 则 $A \pm B, kA$ 也是 n 阶对称矩阵.
2. 设 C 为任一 n 阶方阵, 则 $C + C^T$ 为 n 阶对称矩阵.

证明

1. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$, 所以 $A \pm B$ 对称.
 $(kA)^T = kA^T = kA$, 所以 kA 对称.
2. $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C = C + C^T$, 所以 $C + C^T$ 对称.

性质

1. 设 A, B 为 n 阶对称矩阵, 则 $A \pm B, kA$ 也是 n 阶对称矩阵.
2. 设 C 为任一 n 阶方阵, 则 $C + C^T$ 为 n 阶对称矩阵.
3. 设 D 为任一 $m \times n$ 矩阵, 则 DD^T 为 m 阶对称方阵; D^TD 为 n 阶对称方阵.

证明

1. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$, 所以 $A \pm B$ 对称.
 $(kA)^T = kA^T = kA$, 所以 kA 对称.
2. $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C = C + C^T$, 所以 $C + C^T$ 对称.

性质

1. 设 A, B 为 n 阶对称矩阵, 则 $A \pm B, kA$ 也是 n 阶对称矩阵.
2. 设 C 为任一 n 阶方阵, 则 $C + C^T$ 为 n 阶对称矩阵.
3. 设 D 为任一 $m \times n$ 矩阵, 则 DD^T 为 m 阶对称方阵; D^TD 为 n 阶对称方阵.

证明

1. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$, 所以 $A \pm B$ 对称.
 $(kA)^T = kA^T = kA$, 所以 kA 对称.
2. $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C = C + C^T$, 所以 $C + C^T$ 对称.
3. D 为 $m \times n$, D^T 为 $n \times m$, 所以 DD^T 为 $m \times m$ 方阵, D^TD 为 $n \times n$ 方阵.

性质

1. 设 A, B 为 n 阶对称矩阵, 则 $A \pm B, kA$ 也是 n 阶对称矩阵.
2. 设 C 为任一 n 阶方阵, 则 $C + C^T$ 为 n 阶对称矩阵.
3. 设 D 为任一 $m \times n$ 矩阵, 则 DD^T 为 m 阶对称方阵; D^TD 为 n 阶对称方阵.

证明

1. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$, 所以 $A \pm B$ 对称.
 $(kA)^T = kA^T = kA$, 所以 kA 对称.
2. $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C = C + C^T$, 所以 $C + C^T$ 对称.
3. D 为 $m \times n$, D^T 为 $n \times m$, 所以 DD^T 为 $m \times m$, D^TD 为

性质

1. 设 A, B 为 n 阶对称矩阵, 则 $A \pm B, kA$ 也是 n 阶对称矩阵.
2. 设 C 为任一 n 阶方阵, 则 $C + C^T$ 为 n 阶对称矩阵.
3. 设 D 为任一 $m \times n$ 矩阵, 则 DD^T 为 m 阶对称方阵; D^TD 为 n 阶对称方阵.

证明

1. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$, 所以 $A \pm B$ 对称.
 $(kA)^T = kA^T = kA$, 所以 kA 对称.
2. $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C = C + C^T$, 所以 $C + C^T$ 对称.
3. D 为 $m \times n$, D^T 为 $n \times m$, 所以 DD^T 为 $m \times m$, D^TD 为 $n \times n$

性质

1. 设 A, B 为 n 阶对称矩阵, 则 $A \pm B, kA$ 也是 n 阶对称矩阵.
2. 设 C 为任一 n 阶方阵, 则 $C + C^T$ 为 n 阶对称矩阵.
3. 设 D 为任一 $m \times n$ 矩阵, 则 DD^T 为 m 阶对称方阵; D^TD 为 n 阶对称方阵.

证明

1. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$, 所以 $A \pm B$ 对称.
 $(kA)^T = kA^T = kA$, 所以 kA 对称.
2. $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C = C + C^T$, 所以 $C + C^T$ 对称.
3. D 为 $m \times n$, D^T 为 $n \times m$, 所以 DD^T 为 $m \times m$, D^TD 为 $n \times n$.
此外:

$$(DD^T)^T =$$

性质

1. 设 A, B 为 n 阶对称矩阵, 则 $A \pm B, kA$ 也是 n 阶对称矩阵.
2. 设 C 为任一 n 阶方阵, 则 $C + C^T$ 为 n 阶对称矩阵.
3. 设 D 为任一 $m \times n$ 矩阵, 则 DD^T 为 m 阶对称方阵; D^TD 为 n 阶对称方阵.

证明

1. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$, 所以 $A \pm B$ 对称.
 $(kA)^T = kA^T = kA$, 所以 kA 对称.
2. $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C = C + C^T$, 所以 $C + C^T$ 对称.
3. D 为 $m \times n$, D^T 为 $n \times m$, 所以 DD^T 为 $m \times m$, D^TD 为 $n \times n$.
此外:

$$(DD^T)^T = (D^T)^T D^T =$$

性质

1. 设 A, B 为 n 阶对称矩阵, 则 $A \pm B, kA$ 也是 n 阶对称矩阵.
2. 设 C 为任一 n 阶方阵, 则 $C + C^T$ 为 n 阶对称矩阵.
3. 设 D 为任一 $m \times n$ 矩阵, 则 DD^T 为 m 阶对称方阵; D^TD 为 n 阶对称方阵.

证明

1. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$, 所以 $A \pm B$ 对称.
 $(kA)^T = kA^T = kA$, 所以 kA 对称.
2. $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C = C + C^T$, 所以 $C + C^T$ 对称.
3. D 为 $m \times n$, D^T 为 $n \times m$, 所以 DD^T 为 $m \times m$, D^TD 为 $n \times n$.
此外:

$$(DD^T)^T = (D^T)^T D^T = DD^T$$

性质

1. 设 A, B 为 n 阶对称矩阵, 则 $A \pm B, kA$ 也是 n 阶对称矩阵.
2. 设 C 为任一 n 阶方阵, 则 $C + C^T$ 为 n 阶对称矩阵.
3. 设 D 为任一 $m \times n$ 矩阵, 则 DD^T 为 m 阶对称方阵; D^TD 为 n 阶对称方阵.

证明

1. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$, 所以 $A \pm B$ 对称.
 $(kA)^T = kA^T = kA$, 所以 kA 对称.
2. $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C = C + C^T$, 所以 $C + C^T$ 对称.
3. D 为 $m \times n$, D^T 为 $n \times m$, 所以 DD^T 为 $m \times m$, D^TD 为 $n \times n$.
此外:

$$(DD^T)^T = (D^T)^T D^T = DD^T$$

$$(D^TD)^T =$$

性质

1. 设 A, B 为 n 阶对称矩阵, 则 $A \pm B, kA$ 也是 n 阶对称矩阵.
2. 设 C 为任一 n 阶方阵, 则 $C + C^T$ 为 n 阶对称矩阵.
3. 设 D 为任一 $m \times n$ 矩阵, 则 DD^T 为 m 阶对称方阵; D^TD 为 n 阶对称方阵.

证明

1. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$, 所以 $A \pm B$ 对称.
 $(kA)^T = kA^T = kA$, 所以 kA 对称.
2. $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C = C + C^T$, 所以 $C + C^T$ 对称.
3. D 为 $m \times n$, D^T 为 $n \times m$, 所以 DD^T 为 $m \times m$, D^TD 为 $n \times n$.
此外:

$$(DD^T)^T = (D^T)^T D^T = DD^T$$

$$(D^TD)^T = D^T(D^T)^T =$$

性质

1. 设 A, B 为 n 阶对称矩阵, 则 $A \pm B, kA$ 也是 n 阶对称矩阵.
2. 设 C 为任一 n 阶方阵, 则 $C + C^T$ 为 n 阶对称矩阵.
3. 设 D 为任一 $m \times n$ 矩阵, 则 DD^T 为 m 阶对称方阵; D^TD 为 n 阶对称方阵.

证明

1. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$, 所以 $A \pm B$ 对称.
 $(kA)^T = kA^T = kA$, 所以 kA 对称.
2. $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C = C + C^T$, 所以 $C + C^T$ 对称.
3. D 为 $m \times n$, D^T 为 $n \times m$, 所以 DD^T 为 $m \times m$, D^TD 为 $n \times n$.
此外:

$$(DD^T)^T = (D^T)^T D^T = DD^T$$

$$(D^TD)^T = D^T (D^T)^T = D^TD$$

性质

1. 设 A, B 为 n 阶对称矩阵, 则 $A \pm B, kA$ 也是 n 阶对称矩阵.
2. 设 C 为任一 n 阶方阵, 则 $C + C^T$ 为 n 阶对称矩阵.
3. 设 D 为任一 $m \times n$ 矩阵, 则 DD^T 为 m 阶对称方阵; $D^T D$ 为 n 阶对称方阵.

证明

1. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$, 所以 $A \pm B$ 对称.
 $(kA)^T = kA^T = kA$, 所以 kA 对称.
2. $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C = C + C^T$, 所以 $C + C^T$ 对称.
3. D 为 $m \times n$, D^T 为 $n \times m$, 所以 DD^T 为 $m \times m$, $D^T D$ 为 $n \times n$.
此外:

$$(DD^T)^T = (D^T)^T D^T = DD^T$$

$$(D^T D)^T = D^T (D^T)^T = D^T D$$

所以 $DD^T, D^T D$ 均对称.

对称矩阵

注 设 A, B 为 n 阶对称矩阵, 然而 AB 未必对称。

对称矩阵

注 设 A, B 为 n 阶对称矩阵, 然而 AB 未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

对称矩阵

注 设 A, B 为 n 阶对称矩阵, 然而 AB 未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

对称矩阵

注 设 A, B 为 n 阶对称矩阵, 然而 AB 未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

对称矩阵

注 设 A, B 为 n 阶对称矩阵, 然而 AB 未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ 却不是对称。}$$

对称矩阵

注 设 A, B 为 n 阶对称矩阵, 然而 AB 未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ 却不是对称。}$$

性质 设 A, B 为 n 阶对称矩阵, 则 AB 对称的充分必要条件是交换 (i.e. $AB = BA$)。

对称矩阵

注 设 A, B 为 n 阶对称矩阵, 然而 AB 未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ 却不是对称。}$$

性质 设 A, B 为 n 阶对称矩阵, 则 AB 对称的充分必要条件是交换 (i.e. $AB = BA$)。

证明

AB 对称

对称矩阵

注 设 A, B 为 n 阶对称矩阵, 然而 AB 未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ 却不是对称。}$$

性质 设 A, B 为 n 阶对称矩阵, 则 AB 对称的充分必要条件是交换 (i.e. $AB = BA$)。

证明

$$AB \text{ 对称} \implies AB = (AB)^T =$$

对称矩阵

注 设 A, B 为 n 阶对称矩阵, 然而 AB 未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ 却不是对称。}$$

性质 设 A, B 为 n 阶对称矩阵, 则 AB 对称的充分必要条件是交换 (i.e. $AB = BA$)。

证明

$$AB \text{ 对称} \implies AB = (AB)^T = B^T A^T =$$

对称矩阵

注 设 A, B 为 n 阶对称矩阵, 然而 AB 未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ 却不是对称。}$$

性质 设 A, B 为 n 阶对称矩阵, 则 AB 对称的充分必要条件是交换 (i.e. $AB = BA$)。

证明

$$AB \text{ 对称} \implies AB = (AB)^T = B^T A^T = BA$$

对称矩阵

注 设 A, B 为 n 阶对称矩阵, 然而 AB 未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ 却不是对称。}$$

性质 设 A, B 为 n 阶对称矩阵, 则 AB 对称的充分必要条件是交换 (i.e. $AB = BA$)。

证明

$$AB \text{ 对称} \implies AB = (AB)^T = B^T A^T = BA$$

反之,

$$AB = BA \implies$$

对称矩阵

注 设 A, B 为 n 阶对称矩阵, 然而 AB 未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ 却不是对称。}$$

性质 设 A, B 为 n 阶对称矩阵, 则 AB 对称的充分必要条件是交换 (i.e. $AB = BA$)。

证明

$$AB \text{ 对称} \implies AB = (AB)^T = B^T A^T = BA$$

反之,

$$AB = BA \implies (AB)^T = AB$$

对称矩阵

注 设 A, B 为 n 阶对称矩阵, 然而 AB 未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ 却不是对称。}$$

性质 设 A, B 为 n 阶对称矩阵, 则 AB 对称的充分必要条件是交换 (i.e. $AB = BA$)。

证明

$$AB \text{ 对称} \implies AB = (AB)^T = B^T A^T = BA$$

反之,

$$AB = BA \implies (AB)^T = B^T A^T = AB$$

对称矩阵

注 设 A, B 为 n 阶对称矩阵, 然而 AB 未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ 却不是对称。}$$

性质 设 A, B 为 n 阶对称矩阵, 则 AB 对称的充分必要条件是交换 (i.e. $AB = BA$)。

证明

$$AB \text{ 对称} \implies AB = (AB)^T = B^T A^T = BA$$

反之,

$$AB = BA \implies (AB)^T = B^T A^T = BA \quad AB$$

对称矩阵

注 设 A, B 为 n 阶对称矩阵, 然而 AB 未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ 却不是对称。}$$

性质 设 A, B 为 n 阶对称矩阵, 则 AB 对称的充分必要条件是交换 (i.e. $AB = BA$)。

证明

$$AB \text{ 对称} \implies AB = (AB)^T = B^T A^T = BA$$

反之,

$$AB = BA \implies (AB)^T = B^T A^T = BA = AB$$

对称矩阵

注 设 A, B 为 n 阶对称矩阵, 然而 AB 未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ 却不是对称。}$$

性质 设 A, B 为 n 阶对称矩阵, 则 AB 对称的充分必要条件是交换 (i.e. $AB = BA$)。

证明

$$AB \text{ 对称} \implies AB = (AB)^T = B^T A^T = BA$$

反之,

$$AB = BA \implies (AB)^T = B^T A^T = BA = AB \implies AB \text{ 对称}$$