第 12 周作业解答

练习 1. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix}$ 和 $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&4\\0&-2&y\end{pmatrix}$ 相似，求 x,y 的值。

解因为 $A\sim B$ ，所以 A,B 有相同特征值，设为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$。由特征值和矩阵元素的关系，得

$$2+0+x=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2+3+y$$

及

$$\begin{vmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&3&4\\0&-2&y\end{vmatrix}.$$

所以

$$\begin{cases}2+x=5+y\\ \begin{vmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&3&4\\0&-2&y\end{vmatrix}\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}2+x=5+y\\-1=3y+8\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x=0\\y=-3\end{cases}$$

练习 2. 判断矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-3&3\\3&-5&3\\6&-6&4\end{pmatrix}$ 可否对角化。若能，求出相应的对角阵 Λ，和可逆矩阵 P。

解

- 解特征方程 $|\lambda I-A|=0$。

$$\begin{aligned}|\lambda I-A|&=\begin{vmatrix}\lambda-1&3&-3\\-3&\lambda+5&-3\\-6&6&\lambda-4\end{vmatrix}\xlongequal{c_3+c_2}\begin{vmatrix}\lambda-1&3&0\\-3&\lambda+5&\lambda+2\\-6&6&\lambda+2\end{vmatrix}\\&=(\lambda+2)\begin{vmatrix}\lambda-1&3&0\\-3&\lambda+5&1\\-6&6&1\end{vmatrix}\xlongequal{r_2-r_3}(\lambda+2)\begin{vmatrix}\lambda-1&3&0\\3&\lambda-1&0\\-6&6&1\end{vmatrix}\\&=(\lambda+2)\begin{vmatrix}\lambda-1&3\\3&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda^2-2\lambda-8)=(\lambda+2)^2(\lambda-4)\end{aligned}$$

  所以特征值为 $\lambda_1=-2$（二重特征值），$\lambda_2=4$。

- 关于特征值 $\lambda_1=-2$，求解 $(\lambda_1I-A)x=0$。

$$(-2I-A\vdots 0)=\left(\begin{array}{ccc|c}-3&3&-3&0\\-3&3&-3&0\\-6&6&-6&0\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

  同解方程组为

$$x_1-x_2+x_3=0\qquad\Rightarrow\qquad x_1=x_2-x_3$$

自由变量取为 x_2, x_3。分别取 $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，得基础解系

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以对应于特征值 $\lambda_1 = -2$ 的有 2 个线性无关特征向量。(等价于 $r(-2I - A) = 3 - 2 = 1$。)

- 关于特征值 $\lambda_1 = 4$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$。

$$(-2I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & -3 & 0 \\ -3 & 9 & -3 & 0 \\ -6 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{-\frac{1}{3}\times r_2 \\ -\frac{1}{6}\times r_3}]{\frac{1}{3}\times r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - r_2]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}\times r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 + r_2]{r_1 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = 2x_2 \end{cases}$$

自由变量取为 x_2。取 $x_2 = 1$，得基础解系

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- 可见 A 有 3 个线性无关特征向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$，所以 A 可对角化。令

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \scriptstyle\alpha_1 & \scriptstyle\alpha_2 & \scriptstyle\alpha_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & -2 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$$

则

$$P^{-1}AP = \Lambda.$$

注. P 的选取不唯一。Λ 也可以是 $\begin{pmatrix} -2 & & \\ & 4 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} 4 & & \\ & -2 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$，但此时 P 要作相应调整。

练习 3. 判断矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 可否对角化，说明理由。

解

- 解特征方程 $|\lambda I - A| = 0$。

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^3$$

所以特征值为 $\lambda_1 = 1$（三重特征值）。

- 由于 $r(\lambda_1 I - A) = 2 \neq 0$ （即 $r(\lambda_1 I - A) \neq n - n_1$，其中 n_1 为 λ_1 的重数），所以 A 不可对角化。

练习 4. 设 3 阶方阵 A 的特征值为 1, 2, 3，求 $|A|$ 的值。

解 $|A| = 1 \times 2 \times 3 = 6$。

练习 5. 假设 3 阶方阵 A 的特征值为 $2, 1, -1$。求行列式 $|A^2 - 2I|$ 和 $|A^{-1} - 2I|$。

解由假设知 3 阶方阵 A 有 3 个不同特征值，所以 A 可以对角化。设存在可逆矩阵 P 使得

$$P^{-1}AP = \Lambda \quad \Rightarrow \quad A = P\Lambda P^{-1},$$

其中 $\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$。所以

$$A^2 = P\Lambda P^{-1}P\Lambda P^{-1} = P\Lambda^2 P^{-1}, \quad A^{-1} = (P\Lambda P^{-1})^{-1} = P\Lambda^{-1}P^{-1}$$

得:

$$\begin{aligned} |A^2 - 2I| &= |P\Lambda^2 P^{-1} - 2PIP^{-1}| = |P| \cdot |\Lambda^2 - 2I| \cdot |P^{-1}| = |\Lambda^2 - 2I| \\ &= \left| \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right| \\ &= 2 \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned} |A^{-1} - 2I| &= |P\Lambda^{-1}P^{-1} - 2PIP^{-1}| = |P| \cdot |\Lambda^{-1} - 2I| \cdot |P^{-1}| = |\Lambda^{-1} - 2I| \\ &= \left| \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right| \\ &= -\frac{9}{2} \end{aligned}$$

以下是附加题，做出来的同学下次课交，可以加分。注意解答过程要详细。

练习 6. 设 D 为平面三角形区域 $\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : 0 \leq x, 0 \leq y, x + y \leq 1\}$，设 $p = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ 为 D 中一点，设 $A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 \\ 0.6 & 0.7 \end{pmatrix}$。假设点 p 在平面上随时间运动，第 n 时刻的位置是 $p_n = A^n p$。

(a) 证明对任何时刻 $n \geq 0$，都有 $p_n \in D$。(即，点 p 的运动限制在区域 D 中。)

(b) 求 $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$。(即，求 p 点的最终位置)

证明: (1) 由点 p 的任意性，只需证明 $Ap \in D$. 因为 $Ap = \begin{pmatrix} 0.4a + 0.3b \\ 0.6a + 0.7b \end{pmatrix}$ 满足 $0.4a + 0.3b \geq 0$, $0.6a + 0.7b \geq 0$ 及 $0.4a + 0.3b + 0.6a + 0.7b = a + b \leq 1$，所以 $Ap \in D$.

(2) $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 0.4 & -0.3 \\ -0.6 & \lambda - 0.7 \end{vmatrix} = (\lambda - 0.1)(\lambda - 1)$。$\lambda = 1$ 对应的特征值是 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，$\lambda = 0.1$ 对应的特征值是 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$。所以

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$$

所以

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} p_n &= \lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ & 0.1^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &= \frac{a+b}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$