

## 第 7 章 c: 可降阶微分方程

数学系 梁卓滨

2018-2019 学年 II

假设  $y = y(x)$  为未知函数，探讨如何求解以下三种类型的可降阶微分方程：

- $y^{(n)} = f(x)$
- $y'' = f(x, y')$
- $y'' = f(y, y')$

# We are here now...

---

◆  $y^{(n)} = f(x)$  型的微分方程

♣  $y'' = f(x, y')$  型的微分方程

♥  $y'' = f(y, y')$  型的微分方程

# $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程

---

计算通解的方法：连续 $n$ 次积分

# $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程

---

计算通解的方法：连续 $n$ 次积分

$$y^{(n)} = f(x)$$

两边积分  
 $\Longrightarrow$

# $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程

---

计算通解的方法：连续 $n$ 次积分

$$y^{(n)} = f(x)$$

$$\xRightarrow{\text{两边积分}} y^{(n-1)} = \int f(x) dx + C_1$$

# $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程

---

计算通解的方法：连续 $n$ 次积分

$$y^{(n)} = f(x)$$

$$\xRightarrow{\text{两边积分}} y^{(n-1)} = \int f(x) dx + C_1$$

$$\xRightarrow{\text{两边积分}}$$

# $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程

计算通解的方法：连续 $n$ 次积分

$$y^{(n)} = f(x)$$

$$\xRightarrow{\text{两边积分}} y^{(n-1)} = \int f(x) dx + C_1$$

$$\xRightarrow{\text{两边积分}} y^{(n-2)} = \int \left[ \int f(x) dx + C_1 \right] dx + C_2$$

.....



# $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程

计算通解的方法：连续 $n$ 次积分

$$y^{(n)} = f(x)$$

$$\xRightarrow{\text{两边积分}} y^{(n-1)} = \int f(x) dx + C_1$$

$$\xRightarrow{\text{两边积分}} y^{(n-2)} = \int \left[ \int f(x) dx + C_1 \right] dx + C_2$$

.....

$$\xRightarrow{\text{两边积分}}$$

# $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程

计算通解的方法：连续 $n$ 次积分

$$y^{(n)} = f(x)$$

$$\xRightarrow{\text{两边积分}} y^{(n-1)} = \int f(x) dx + C_1$$

$$\xRightarrow{\text{两边积分}} y^{(n-2)} = \int \left[ \int f(x) dx + C_1 \right] dx + C_2$$

.....

$$\xRightarrow{\text{两边积分}} y = \int \left\{ \cdots \int \left[ \int f(x) dx + C_1 \right] dx + C_2 \cdots \right\} dx + C_n$$

例 1 求  $y''' = e^{2x} - \cos x$  的通解

解

例 1 求  $y''' = e^{2x} - \cos x$  的通解

解 连续两边积分

$$y''' = e^{2x} - \cos x \Rightarrow$$

例 1 求  $y''' = e^{2x} - \cos x$  的通解

解 连续两边积分

$$y''' = e^{2x} - \cos x \Rightarrow y'' =$$

例 1 求  $y''' = e^{2x} - \cos x$  的通解

解 连续两边积分

$$y''' = e^{2x} - \cos x \Rightarrow y'' = \frac{1}{2}e^{2x} -$$

例 1 求  $y''' = e^{2x} - \cos x$  的通解

解 连续两边积分

$$y''' = e^{2x} - \cos x \Rightarrow y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x$$

例 1 求  $y''' = e^{2x} - \cos x$  的通解

解 连续两边积分

$$y''' = e^{2x} - \cos x \Rightarrow y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1$$



例 1 求  $y''' = e^{2x} - \cos x$  的通解

解 连续两边积分

$$y''' = e^{2x} - \cos x \Rightarrow y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1$$

$$\Rightarrow y' =$$

例 1 求  $y''' = e^{2x} - \cos x$  的通解

解 连续两边积分

$$y''' = e^{2x} - \cos x \Rightarrow y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{4}e^{2x}$$

例 1 求  $y''' = e^{2x} - \cos x$  的通解

解 连续两边积分

$$y''' = e^{2x} - \cos x \Rightarrow y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x$$

例 1 求  $y''' = e^{2x} - \cos x$  的通解

解 连续两边积分

$$\begin{aligned} y''' = e^{2x} - \cos x &\Rightarrow y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1 \\ &\Rightarrow y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1x \end{aligned}$$

例 1 求  $y''' = e^{2x} - \cos x$  的通解

解 连续两边积分

$$y''' = e^{2x} - \cos x \Rightarrow y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1x + C_2$$

例 1 求  $y''' = e^{2x} - \cos x$  的通解

解 连续两边积分

$$y''' = e^{2x} - \cos x \Rightarrow y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1x + C_2$$

$$\Rightarrow y =$$

例 1 求  $y''' = e^{2x} - \cos x$  的通解

解 连续两边积分

$$y''' = e^{2x} - \cos x \Rightarrow y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1x + C_2$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{8}e^{2x}$$

例 1 求  $y''' = e^{2x} - \cos x$  的通解

解 连续两边积分

$$y''' = e^{2x} - \cos x \Rightarrow y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1x + C_2$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x$$



例 1 求  $y''' = e^{2x} - \cos x$  的通解

解 连续两边积分

$$y''' = e^{2x} - \cos x \Rightarrow y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1x + C_2$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + \frac{1}{2}C_1x^2$$

例 1 求  $y''' = e^{2x} - \cos x$  的通解

解 连续两边积分

$$y''' = e^{2x} - \cos x \Rightarrow y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1x + C_2$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x$$

例 1 求  $y''' = e^{2x} - \cos x$  的通解

解 连续两边积分

$$y''' = e^{2x} - \cos x \Rightarrow y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1x + C_2$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3$$

例 1 求  $y''' = e^{2x} - \cos x$  的通解

解 连续两边积分

$$y''' = e^{2x} - \cos x \Rightarrow y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1x + C_2$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3$$

例 2 求  $y''' = \frac{1}{\sqrt{x}}$  的通解

例 1 求  $y''' = e^{2x} - \cos x$  的通解

解 连续两边积分

$$y''' = e^{2x} - \cos x \Rightarrow y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1x + C_2$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3$$

例 2 求  $y''' = \frac{1}{\sqrt{x}}$  的通解

解 连续两边积分

$$y''' = x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

例 1 求  $y''' = e^{2x} - \cos x$  的通解

解 连续两边积分

$$y''' = e^{2x} - \cos x \Rightarrow y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1x + C_2$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3$$

例 2 求  $y''' = \frac{1}{\sqrt{x}}$  的通解

解 连续两边积分

$$y''' = x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow y'' =$$

例 1 求  $y''' = e^{2x} - \cos x$  的通解

解 连续两边积分

$$y''' = e^{2x} - \cos x \Rightarrow y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1x + C_2$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3$$

例 2 求  $y''' = \frac{1}{\sqrt{x}}$  的通解

解 连续两边积分

$$y''' = x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow y'' = x^{\frac{1}{2}}$$

例 1 求  $y''' = e^{2x} - \cos x$  的通解

解 连续两边积分

$$y''' = e^{2x} - \cos x \Rightarrow y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1x + C_2$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3$$

例 2 求  $y''' = \frac{1}{\sqrt{x}}$  的通解

解 连续两边积分

$$y''' = x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow y'' = 2x^{\frac{1}{2}}$$



例 1 求  $y''' = e^{2x} - \cos x$  的通解

解 连续两边积分

$$y''' = e^{2x} - \cos x \Rightarrow y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1x + C_2$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3$$

例 2 求  $y''' = \frac{1}{\sqrt{x}}$  的通解

解 连续两边积分

$$y''' = x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow y'' = 2x^{\frac{1}{2}} + C_1$$

例 1 求  $y''' = e^{2x} - \cos x$  的通解

解 连续两边积分

$$y''' = e^{2x} - \cos x \Rightarrow y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1x + C_2$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3$$

例 2 求  $y''' = \frac{1}{\sqrt{x}}$  的通解

解 连续两边积分

$$y''' = x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow y'' = 2x^{\frac{1}{2}} + C_1 \Rightarrow y' =$$

例 1 求  $y''' = e^{2x} - \cos x$  的通解

解 连续两边积分

$$y''' = e^{2x} - \cos x \Rightarrow y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1x + C_2$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3$$

例 2 求  $y''' = \frac{1}{\sqrt{x}}$  的通解

解 连续两边积分

$$y''' = x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow y'' = 2x^{\frac{1}{2}} + C_1 \Rightarrow y' = x^{\frac{3}{2}}$$

例 1 求  $y''' = e^{2x} - \cos x$  的通解

解 连续两边积分

$$y''' = e^{2x} - \cos x \Rightarrow y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1x + C_2$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3$$

例 2 求  $y''' = \frac{1}{\sqrt{x}}$  的通解

解 连续两边积分

$$y''' = x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow y'' = 2x^{\frac{1}{2}} + C_1 \Rightarrow y' = 2 \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$$

例 1 求  $y''' = e^{2x} - \cos x$  的通解

解 连续两边积分

$$y''' = e^{2x} - \cos x \Rightarrow y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1x + C_2$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3$$

例 2 求  $y''' = \frac{1}{\sqrt{x}}$  的通解

解 连续两边积分

$$y''' = x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow y'' = 2x^{\frac{1}{2}} + C_1 \Rightarrow y' = 2 \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C_1x$$

例 1 求  $y''' = e^{2x} - \cos x$  的通解

解 连续两边积分

$$y''' = e^{2x} - \cos x \Rightarrow y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1x + C_2$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3$$

例 2 求  $y''' = \frac{1}{\sqrt{x}}$  的通解

解 连续两边积分

$$y''' = x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow y'' = 2x^{\frac{1}{2}} + C_1 \Rightarrow y' = 2 \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C_1x + C_2$$

例 1 求  $y''' = e^{2x} - \cos x$  的通解

解 连续两边积分

$$y''' = e^{2x} - \cos x \Rightarrow y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1x + C_2$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3$$

例 2 求  $y''' = \frac{1}{\sqrt{x}}$  的通解

解 连续两边积分

$$y''' = x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow y'' = 2x^{\frac{1}{2}} + C_1 \Rightarrow y' = 2 \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C_1x + C_2$$

$$\Rightarrow y =$$

例 1 求  $y''' = e^{2x} - \cos x$  的通解

解 连续两边积分

$$y''' = e^{2x} - \cos x \Rightarrow y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1x + C_2$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3$$

例 2 求  $y''' = \frac{1}{\sqrt{x}}$  的通解

解 连续两边积分

$$y''' = x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow y'' = 2x^{\frac{1}{2}} + C_1 \Rightarrow y' = 2 \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C_1x + C_2$$

$$\Rightarrow y = x^{\frac{5}{2}}$$



例 1 求  $y''' = e^{2x} - \cos x$  的通解

解 连续两边积分

$$y''' = e^{2x} - \cos x \Rightarrow y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1x + C_2$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3$$

例 2 求  $y''' = \frac{1}{\sqrt{x}}$  的通解

解 连续两边积分

$$y''' = x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow y'' = 2x^{\frac{1}{2}} + C_1 \Rightarrow y' = 2 \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C_1x + C_2$$

$$\Rightarrow y = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$$

例 1 求  $y''' = e^{2x} - \cos x$  的通解

解 连续两边积分

$$y''' = e^{2x} - \cos x \Rightarrow y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1x + C_2$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3$$

例 2 求  $y''' = \frac{1}{\sqrt{x}}$  的通解

解 连续两边积分

$$y''' = x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow y'' = 2x^{\frac{1}{2}} + C_1 \Rightarrow y' = 2 \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C_1x + C_2$$

$$\Rightarrow y = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}C_1x^2$$

例 1 求  $y''' = e^{2x} - \cos x$  的通解

解 连续两边积分

$$y''' = e^{2x} - \cos x \Rightarrow y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1x + C_2$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3$$

例 2 求  $y''' = \frac{1}{\sqrt{x}}$  的通解

解 连续两边积分

$$y''' = x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow y'' = 2x^{\frac{1}{2}} + C_1 \Rightarrow y' = 2 \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C_1x + C_2$$

$$\Rightarrow y = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x$$

例 1 求  $y''' = e^{2x} - \cos x$  的通解

解 连续两边积分

$$y''' = e^{2x} - \cos x \Rightarrow y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1x + C_2$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3$$

例 2 求  $y''' = \frac{1}{\sqrt{x}}$  的通解

解 连续两边积分

$$y''' = x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow y'' = 2x^{\frac{1}{2}} + C_1 \Rightarrow y' = 2 \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C_1x + C_2$$

$$\Rightarrow y = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3$$

下面考虑两类二阶微分方程：

- $y'' = f(x, y')$
- $y'' = f(y, y')$

下面考虑两类二阶微分方程：

- $y'' = f(x, y')$ ，特点：
- $y'' = f(y, y')$ ，特点：

下面考虑两类二阶微分方程：

- $y'' = f(x, y')$ ，特点：只含  $y''$ ,  $y'$ ,  $x$ ，不含  $y$
- $y'' = f(y, y')$ ，特点：

下面考虑两类二阶微分方程：

- $y'' = f(x, y')$ ，特点：只含  $y''$ ,  $y'$ ,  $x$ ，不含  $y$
- $y'' = f(y, y')$ ，特点：只含  $y''$ ,  $y'$ ,  $y$ ，不含  $x$



下面考虑两类二阶微分方程：

- $y'' = f(x, y')$ ，特点：只含  $y''$ ,  $y'$ ,  $x$ ，不含  $y$
- $y'' = f(y, y')$ ，特点：只含  $y''$ ,  $y'$ ,  $y$ ，不含  $x$

这两类特殊类型的二阶微分方程，都可以通过变量代换，降阶成一阶微分方程。

# We are here now...

---

◆  $y^{(n)} = f(x)$  型的微分方程

♣  $y'' = f(x, y')$  型的微分方程

♥  $y'' = f(y, y')$  型的微分方程

## $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程

---

将  $y'' = f(x, y')$  看成关于  $y'$  的一阶微分方程。

计算通解的方法：

## $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程

---

将  $y'' = f(x, y')$  看成关于  $y'$  的一阶微分方程。

计算通解的方法：

1. 作变量代换  $p = y'$ ，得

## $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程

---

将  $y'' = f(x, y')$  看成关于  $y'$  的一阶微分方程。

计算通解的方法：

1. 作变量代换  $p = y'$ ，得

$$= f(x, p)$$

## $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程

---

将  $y'' = f(x, y')$  看成关于  $y'$  的一阶微分方程。

计算通解的方法：

1. 作变量代换  $p = y'$ ，得

$$p' = f(x, p)$$

## $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程

将  $y'' = f(x, y')$  看成关于  $y'$  的一阶微分方程。

计算通解的方法：

1. 作变量代换  $p = y'$ ，得

$$p' = f(x, p)$$

(降阶得到关于  $p$  的一阶微分方程)

## $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程

将  $y'' = f(x, y')$  看成关于  $y'$  的一阶微分方程。

计算通解的方法：

1. 作变量代换  $p = y'$ ，得

$$p' = f(x, p)$$

(降阶得到关于  $p$  的一阶微分方程)

2. 利用求解一阶微分方程的方法，假设可求出通解



## $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程

将  $y'' = f(x, y')$  看成关于  $y'$  的一阶微分方程。

计算通解的方法：

1. 作变量代换  $p = y'$ ，得

$$p' = f(x, p)$$

(降阶得到关于  $p$  的一阶微分方程)

2. 利用求解一阶微分方程的方法，假设可求出通解

$$p = \varphi(x, C_1)$$

3. 代回变量  $p = y'$  得：

## $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程

将  $y'' = f(x, y')$  看成关于  $y'$  的一阶微分方程。

计算通解的方法：

1. 作变量代换  $p = y'$ ，得

$$p' = f(x, p)$$

(降阶得到关于  $p$  的一阶微分方程)

2. 利用求解一阶微分方程的方法，假设可求出通解

$$p = \varphi(x, C_1)$$

3. 代回变量  $p = y'$  得：

$$y' = \varphi(x, C_1)$$

## $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程

将  $y'' = f(x, y')$  看成关于  $y'$  的一阶微分方程。

计算通解的方法：

1. 作变量代换  $p = y'$ ，得

$$p' = f(x, p)$$

(降阶得到关于  $p$  的一阶微分方程)

2. 利用求解一阶微分方程的方法，假设可求出通解

$$p = \varphi(x, C_1)$$

3. 代回变量  $p = y'$  得：

$$y' = \varphi(x, C_1)$$

所以

$$y = \int \varphi(x, C_1) dx + C_2$$

例 1 求  $(1 + x^2)y'' = 2xy'$  的通解

解

例 1 求  $(1 + x^2)y'' = 2xy'$  的通解

解 1. 作变量代换  $p = y'$ , 得

例 1 求  $(1 + x^2)y'' = 2xy'$  的通解

解 1. 作变量代换  $p = y'$ , 得

$$p' = \frac{2x}{1 + x^2}p$$

例 1 求  $(1 + x^2)y'' = 2xy'$  的通解

解 1. 作变量代换  $p = y'$ , 得

$$p' = \frac{2x}{1 + x^2} p$$

2. 这是可分离变量微分方程

例 1 求  $(1+x^2)y'' = 2xy'$  的通解

解 1. 作变量代换  $p = y'$ , 得

$$p' = \frac{2x}{1+x^2}p$$

2. 这是可分离变量微分方程

$$\frac{1}{p}dp = \frac{2x}{1+x^2}dx$$



例 1 求  $(1+x^2)y'' = 2xy'$  的通解

解 1. 作变量代换  $p = y'$ , 得

$$p' = \frac{2x}{1+x^2}p$$

2. 这是可分离变量微分方程

$$\frac{1}{p}dp = \frac{2x}{1+x^2}dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{p}dp = \int \frac{2x}{1+x^2}dx$$

例 1 求  $(1+x^2)y'' = 2xy'$  的通解

解 1. 作变量代换  $p = y'$ , 得

$$p' = \frac{2x}{1+x^2}p$$

2. 这是可分离变量微分方程

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}dp &= \frac{2x}{1+x^2}dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{p}dp = \int \frac{2x}{1+x^2}dx \\ &\Rightarrow \quad \ln|p| = \ln(1+x^2) + C'_1\end{aligned}$$

例 1 求  $(1+x^2)y'' = 2xy'$  的通解

解 1. 作变量代换  $p = y'$ , 得

$$p' = \frac{2x}{1+x^2}p$$

2. 这是可分离变量微分方程

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}dp &= \frac{2x}{1+x^2}dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{p}dp = \int \frac{2x}{1+x^2}dx \\ &\Rightarrow \ln|p| = \ln(1+x^2) + C'_1 \\ &\Rightarrow p = C_1(1+x^2)\end{aligned}$$

例 1 求  $(1+x^2)y'' = 2xy'$  的通解

解 1. 作变量代换  $p = y'$ , 得

$$p' = \frac{2x}{1+x^2}p$$

2. 这是可分离变量微分方程

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}dp &= \frac{2x}{1+x^2}dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{p}dp = \int \frac{2x}{1+x^2}dx \\ &\Rightarrow \ln|p| = \ln(1+x^2) + C'_1 \\ &\Rightarrow p = C_1(1+x^2)\end{aligned}$$

3. 还原变量

例 1 求  $(1+x^2)y'' = 2xy'$  的通解

解 1. 作变量代换  $p = y'$ , 得

$$p' = \frac{2x}{1+x^2}p$$

2. 这是可分离变量微分方程

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}dp &= \frac{2x}{1+x^2}dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{p}dp = \int \frac{2x}{1+x^2}dx \\ &\Rightarrow \ln|p| = \ln(1+x^2) + C'_1 \\ &\Rightarrow p = C_1(1+x^2)\end{aligned}$$

3. 还原变量

$$y' = C_1(1+x^2)$$

例 1 求  $(1+x^2)y'' = 2xy'$  的通解

解 1. 作变量代换  $p = y'$ , 得

$$p' = \frac{2x}{1+x^2}p$$

2. 这是可分离变量微分方程

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}dp &= \frac{2x}{1+x^2}dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{p}dp = \int \frac{2x}{1+x^2}dx \\ &\Rightarrow \ln|p| = \ln(1+x^2) + C'_1 \\ &\Rightarrow p = C_1(1+x^2)\end{aligned}$$

3. 还原变量, 并两边积分

$$y' = C_1(1+x^2)$$

例 1 求  $(1+x^2)y'' = 2xy'$  的通解

解 1. 作变量代换  $p = y'$ , 得

$$p' = \frac{2x}{1+x^2}p$$

2. 这是可分离变量微分方程

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}dp &= \frac{2x}{1+x^2}dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{p}dp = \int \frac{2x}{1+x^2}dx \\ &\Rightarrow \ln|p| = \ln(1+x^2) + C'_1 \\ &\Rightarrow p = C_1(1+x^2)\end{aligned}$$

3. 还原变量, 并两边积分

$$y' = C_1(1+x^2) \quad \Rightarrow \quad y = C_1 \int (1+x^2)dx$$

例 1 求  $(1+x^2)y'' = 2xy'$  的通解

解 1. 作变量代换  $p = y'$ , 得

$$p' = \frac{2x}{1+x^2}p$$

2. 这是可分离变量微分方程

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}dp &= \frac{2x}{1+x^2}dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{p}dp = \int \frac{2x}{1+x^2}dx \\ &\Rightarrow \ln|p| = \ln(1+x^2) + C_1' \\ &\Rightarrow p = C_1(1+x^2)\end{aligned}$$

3. 还原变量, 并两边积分

$$y' = C_1(1+x^2) \quad \Rightarrow \quad y = C_1 \int (1+x^2)dx = C_1 \left( \frac{1}{3}x^3 + x + C_2 \right)$$



例 1 求  $(1+x^2)y'' = 2xy'$  的通解

解 1. 作变量代换  $p = y'$ , 得

$$p' = \frac{2x}{1+x^2}p$$

2. 这是可分离变量微分方程

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}dp &= \frac{2x}{1+x^2}dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{p}dp = \int \frac{2x}{1+x^2}dx \\ &\Rightarrow \ln|p| = \ln(1+x^2) + C_1' \\ &\Rightarrow p = C_1(1+x^2)\end{aligned}$$

3. 还原变量, 并两边积分

$$y' = C_1(1+x^2) \quad \Rightarrow \quad y = C_1 \int (1+x^2)dx = C_1 \left( \frac{1}{3}x^3 + x + C_2 \right)$$

思考 求在初始条件  $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 3$  的特解

例 2 求  $y'' = y' + x$  的通解

解

例 2 求  $y'' = y' + x$  的通解

解 1. 作变量代换  $p = y'$ , 得

例 2 求  $y'' = y' + x$  的通解

解 1. 作变量代换  $p = y'$ , 得

$$p' = p + x$$

例 2 求  $y'' = y' + x$  的通解

解 1. 作变量代换  $p = y'$ , 得

$$p' = p + x \quad \Rightarrow \quad p' - p = x$$

例 2 求  $y'' = y' + x$  的通解

解 1. 作变量代换  $p = y'$ , 得

$$p' = p + x \quad \Rightarrow \quad p' - p = x$$

2. 这是一阶线性微分方程

例 2 求  $y'' = y' + x$  的通解

解 1. 作变量代换  $p = y'$ , 得

$$p' = p + x \quad \Rightarrow \quad p' - p = x$$

2. 这是一阶线性微分方程

2.1 齐次部分

2.2 常数变易

例 2 求  $y'' = y' + x$  的通解

解 1. 作变量代换  $p = y'$ , 得

$$p' = p + x \quad \Rightarrow \quad p' - p = x$$

2. 这是一阶线性微分方程

2.1 齐次部分  $p' - p = 0$

2.2 常数变易



例 2 求  $y'' = y' + x$  的通解

解 1. 作变量代换  $p = y'$ , 得

$$p' = p + x \quad \Rightarrow \quad p' - p = x$$

2. 这是一阶线性微分方程

2.1 齐次部分  $p' - p = 0 \quad \Rightarrow \quad p = Ce^x$

2.2 常数变易

例 2 求  $y'' = y' + x$  的通解

解 1. 作变量代换  $p = y'$ , 得

$$p' = p + x \quad \Rightarrow \quad p' - p = x$$

2. 这是一阶线性微分方程

2.1 齐次部分  $p' - p = 0 \quad \Rightarrow \quad p = Ce^x$

2.2 常数变易  $p = u(x)e^x$

例 2 求  $y'' = y' + x$  的通解

解 1. 作变量代换  $p = y'$ , 得

$$p' = p + x \Rightarrow p' - p = x$$

2. 这是一阶线性微分方程

2.1 齐次部分  $p' - p = 0 \Rightarrow p = Ce^x$

2.2 常数变易  $p = u(x)e^x \Rightarrow u'e^x = x$

例 2 求  $y'' = y' + x$  的通解

解 1. 作变量代换  $p = y'$ , 得

$$p' = p + x \Rightarrow p' - p = x$$

2. 这是一阶线性微分方程

2.1 齐次部分  $p' - p = 0 \Rightarrow p = Ce^x$

2.2 常数变易  $p = u(x)e^x \Rightarrow u'e^x = x \Rightarrow u' = xe^{-x}$

例 2 求  $y'' = y' + x$  的通解

解 1. 作变量代换  $p = y'$ , 得

$$p' = p + x \Rightarrow p' - p = x$$

2. 这是一阶线性微分方程

2.1 齐次部分  $p' - p = 0 \Rightarrow p = Ce^x$

2.2 常数变易  $p = u(x)e^x \Rightarrow u'e^x = x \Rightarrow u' = xe^{-x}$

$$\Rightarrow u = \int xe^{-x} dx =$$

例 2 求  $y'' = y' + x$  的通解

解 1. 作变量代换  $p = y'$ , 得

$$p' = p + x \Rightarrow p' - p = x$$

2. 这是一阶线性微分方程

2.1 齐次部分  $p' - p = 0 \Rightarrow p = Ce^x$

2.2 常数变易  $p = u(x)e^x \Rightarrow u'e^x = x \Rightarrow u' = xe^{-x}$

$$\Rightarrow u = \int xe^{-x} dx = -(1+x)e^{-x} + C_1$$

例 2 求  $y'' = y' + x$  的通解

解 1. 作变量代换  $p = y'$ , 得

$$p' = p + x \quad \Rightarrow \quad p' - p = x$$

2. 这是一阶线性微分方程

2.1 齐次部分  $p' - p = 0 \quad \Rightarrow \quad p = Ce^x$

2.2 常数变易  $p = u(x)e^x \Rightarrow u'e^x = x \Rightarrow u' = xe^{-x}$

$$\Rightarrow u = \int xe^{-x} dx = -(1+x)e^{-x} + C_1$$

$$\Rightarrow p = -(1+x) + C_1e^x$$

例 2 求  $y'' = y' + x$  的通解

解 1. 作变量代换  $p = y'$ , 得

$$p' = p + x \quad \Rightarrow \quad p' - p = x$$

2. 这是一阶线性微分方程

2.1 齐次部分  $p' - p = 0 \quad \Rightarrow \quad p = Ce^x$

2.2 常数变易  $p = u(x)e^x \Rightarrow u'e^x = x \Rightarrow u' = xe^{-x}$

$$\Rightarrow u = \int xe^{-x} dx = -(1+x)e^{-x} + C_1$$

$$\Rightarrow p = -(1+x) + C_1e^x$$

3. 还原变量

$$y' = -(1+x) + C_1e^x$$



例 2 求  $y'' = y' + x$  的通解

解 1. 作变量代换  $p = y'$ , 得

$$p' = p + x \Rightarrow p' - p = x$$

2. 这是一阶线性微分方程

2.1 齐次部分  $p' - p = 0 \Rightarrow p = Ce^x$

2.2 常数变易  $p = u(x)e^x \Rightarrow u'e^x = x \Rightarrow u' = xe^{-x}$

$$\Rightarrow u = \int xe^{-x} dx = -(1+x)e^{-x} + C_1$$

$$\Rightarrow p = -(1+x) + C_1e^x$$

3. 还原变量, 并两边积分

$$y' = -(1+x) + C_1e^x$$

例 2 求  $y'' = y' + x$  的通解

解 1. 作变量代换  $p = y'$ , 得

$$p' = p + x \Rightarrow p' - p = x$$

2. 这是一阶线性微分方程

2.1 齐次部分  $p' - p = 0 \Rightarrow p = Ce^x$

2.2 常数变易  $p = u(x)e^x \Rightarrow u'e^x = x \Rightarrow u' = xe^{-x}$

$$\Rightarrow u = \int xe^{-x} dx = -(1+x)e^{-x} + C_1$$

$$\Rightarrow p = -(1+x) + C_1e^x$$

3. 还原变量, 并两边积分

$$y' = -(1+x) + C_1e^x \Rightarrow y = -x - \frac{1}{2}x^2 + C_1e^x + C_2$$

# We are here now...

---

◆  $y^{(n)} = f(x)$  型的微分方程

♣  $y'' = f(x, y')$  型的微分方程

♥  $y'' = f(y, y')$  型的微分方程

# $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程

---

计算通解的方法：

# $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程

---

计算通解的方法：

1. 作变量代换  $p = y'$ ，得：

# $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程

---

计算通解的方法：

1. 作变量代换  $p = y'$ ，得：

$$= f(y, p)$$

# $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程

计算通解的方法：

1. 作变量代换  $p = y'$ ，得：

$$\frac{dp}{dx} = f(y, p)$$

# $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程

计算通解的方法：

1. 作变量代换  $p = y'$ ，得：

$$\frac{dp}{dx} = f(y, p)$$

2. 改写：  $\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$



# $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程

计算通解的方法：

1. 作变量代换  $p = y'$ ，得：

$$\frac{dp}{dx} = f(y, p)$$

2. 改写：  $\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$

# $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程

计算通解的方法：

1. 作变量代换  $p = y'$ ，得：

$$\frac{dp}{dx} = f(y, p)$$

2. 改写：  $\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$ 。代入上式得：

$$p \frac{dp}{dy} = f(y, p)$$

# $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程

计算通解的方法：

1. 作变量代换  $p = y'$ ，得：

$$\frac{dp}{dx} = f(y, p)$$

2. 改写：  $\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$ 。代入上式得：

$$p \frac{dp}{dy} = f(y, p)$$

（至此，降阶得到关于  $p$  的一阶微分方程，自变量为  $y$ ）

# $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程

计算通解的方法：

1. 作变量代换  $p = y'$ ，得：

$$\frac{dp}{dx} = f(y, p)$$

2. 改写：  $\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$ 。代入上式得：

$$p \frac{dp}{dy} = f(y, p)$$

（至此，降阶得到关于  $p$  的一阶微分方程，自变量为  $y$ ）

3. 假设可解得：

$$p = \varphi(y, C_1)$$

# $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程

计算通解的方法：

1. 作变量代换  $p = y'$ ，得：

$$\frac{dp}{dx} = f(y, p)$$

2. 改写：  $\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$ 。代入上式得：

$$p \frac{dp}{dy} = f(y, p)$$

（至此，降阶得到关于  $p$  的一阶微分方程，自变量为  $y$ ）

3. 假设可解得：

$$y' = p = \varphi(y, C_1)$$

# $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程

计算通解的方法：

1. 作变量代换  $p = y'$ ，得：

$$\frac{dp}{dx} = f(y, p)$$

2. 改写： $\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$ 。代入上式得：

$$p \frac{dp}{dy} = f(y, p)$$

（至此，降阶得到关于  $p$  的一阶微分方程，自变量为  $y$ ）

3. 假设可解得：

$$y' = p = \varphi(y, C_1) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1)$$

# $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程

计算通解的方法：

1. 作变量代换  $p = y'$ ，得：

$$\frac{dp}{dx} = f(y, p)$$

2. 改写： $\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$ 。代入上式得：

$$p \frac{dp}{dy} = f(y, p)$$

（至此，降阶得到关于  $p$  的一阶微分方程，自变量为  $y$ ）

3. 假设可解得：

$$y' = p = \varphi(y, C_1) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1)$$

所以

$$x = \int \frac{1}{\varphi(y, C_1)} dy + C_2$$

例 1 求微分方程  $yy'' - y'^2 = 0$  的通解



例 1 求微分方程  $yy'' - y'^2 = 0$  的通解

解 1. 作变量代换  $p = y'$ :

例 1 求微分方程  $yy'' - y'^2 = 0$  的通解

解 1. 作变量代换  $p = y'$ :

$$y \frac{dp}{dx} - p^2 = 0$$

例 1 求微分方程  $yy'' - y'^2 = 0$  的通解

解 1. 作变量代换  $p = y'$ :

$$y \frac{dp}{dx} - p^2 = 0$$

2. 改写:  $\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$

例 1 求微分方程  $yy'' - y'^2 = 0$  的通解

解 1. 作变量代换  $p = y'$ :

$$y \frac{dp}{dx} - p^2 = 0$$

2. 改写:  $\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$

例 1 求微分方程  $yy'' - y'^2 = 0$  的通解

解 1. 作变量代换  $p = y'$ :

$$y \frac{dp}{dx} - p^2 = 0$$

2. 改写:  $\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$ 。代入上式得:

例 1 求微分方程  $yy'' - y'^2 = 0$  的通解

解 1. 作变量代换  $p = y'$ :

$$y \frac{dp}{dx} - p^2 = 0$$

2. 改写:  $\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$ 。代入上式得:

$$\Rightarrow yp \frac{dp}{dy} - p^2 = 0$$

例 1 求微分方程  $yy'' - y'^2 = 0$  的通解

解 1. 作变量代换  $p = y'$ :

$$y \frac{dp}{dx} - p^2 = 0$$

2. 改写:  $\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$ 。代入上式得:

$$\Rightarrow yp \frac{dp}{dy} - p^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{p} dp = \frac{1}{y} dy$$

例 1 求微分方程  $yy'' - y'^2 = 0$  的通解

解 1. 作变量代换  $p = y'$ :

$$y \frac{dp}{dx} - p^2 = 0$$

2. 改写:  $\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$ 。代入上式得:

$$\Rightarrow yp \frac{dp}{dy} - p^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{p} dp = \frac{1}{y} dy$$

3. 这是分离变量方程, 两边积分:



例 1 求微分方程  $yy'' - y'^2 = 0$  的通解

解 1. 作变量代换  $p = y'$ :

$$y \frac{dp}{dx} - p^2 = 0$$

2. 改写:  $\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$ 。代入上式得:

$$\Rightarrow yp \frac{dp}{dy} - p^2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{p} dp = \frac{1}{y} dy$$

3. 这是分离变量方程, 两边积分:

$$\int \frac{1}{p} dp = \int \frac{1}{y} dy$$

例 1 求微分方程  $yy'' - y'^2 = 0$  的通解

解 1. 作变量代换  $p = y'$ :

$$y \frac{dp}{dx} - p^2 = 0$$

2. 改写:  $\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$ 。代入上式得:

$$\Rightarrow yp \frac{dp}{dy} - p^2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{p} dp = \frac{1}{y} dy$$

3. 这是分离变量方程, 两边积分:

$$\int \frac{1}{p} dp = \int \frac{1}{y} dy \Rightarrow \ln |p| = \ln |y| + C'_1$$

例 1 求微分方程  $yy'' - y'^2 = 0$  的通解

解 1. 作变量代换  $p = y'$ :

$$y \frac{dp}{dx} - p^2 = 0$$

2. 改写:  $\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$ 。代入上式得:

$$\Rightarrow yp \frac{dp}{dy} - p^2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{p} dp = \frac{1}{y} dy$$

3. 这是分离变量方程, 两边积分:

$$\int \frac{1}{p} dp = \int \frac{1}{y} dy \Rightarrow \ln |p| = \ln |y| + C'_1 \Rightarrow p = C_1 y$$

例 1 求微分方程  $yy'' - y'^2 = 0$  的通解

解 1. 作变量代换  $p = y'$ :

$$y \frac{dp}{dx} - p^2 = 0$$

2. 改写:  $\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$ 。代入上式得:

$$\Rightarrow yp \frac{dp}{dy} - p^2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{p} dp = \frac{1}{y} dy$$

3. 这是分离变量方程, 两边积分:

$$\int \frac{1}{p} dp = \int \frac{1}{y} dy \Rightarrow \ln |p| = \ln |y| + C'_1 \Rightarrow p = C_1 y$$

4. 还原变量:

例 1 求微分方程  $yy'' - y'^2 = 0$  的通解

解 1. 作变量代换  $p = y'$ :

$$y \frac{dp}{dx} - p^2 = 0$$

2. 改写:  $\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$ 。代入上式得:

$$\Rightarrow yp \frac{dp}{dy} - p^2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{p} dp = \frac{1}{y} dy$$

3. 这是分离变量方程, 两边积分:

$$\int \frac{1}{p} dp = \int \frac{1}{y} dy \Rightarrow \ln |p| = \ln |y| + C'_1 \Rightarrow p = C_1 y$$

4. 还原变量:

$$\frac{dy}{dx} = C_1 y$$

例 1 求微分方程  $yy'' - y'^2 = 0$  的通解

解 1. 作变量代换  $p = y'$ :

$$y \frac{dp}{dx} - p^2 = 0$$

2. 改写:  $\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$ 。代入上式得:

$$\Rightarrow y p \frac{dp}{dy} - p^2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{p} dp = \frac{1}{y} dy$$

3. 这是分离变量方程, 两边积分:

$$\int \frac{1}{p} dp = \int \frac{1}{y} dy \Rightarrow \ln |p| = \ln |y| + C'_1 \Rightarrow p = C_1 y$$

4. 还原变量:

$$\frac{dy}{dx} = C_1 y \Rightarrow y = C_2 e^{C_1 x}.$$

例 2 求  $y^3 y'' + 1 = 0$  在初始条件  $y|_{x=1} = 1, y'|_{x=1} = 0$  下的特解

例 2 求  $y^3 y'' + 1 = 0$  在初始条件  $y|_{x=1} = 1, y'|_{x=1} = 0$  下的特解

解 作变量代换  $p = y'$ :



例 2 求  $y^3 y'' + 1 = 0$  在初始条件  $y|_{x=1} = 1, y'|_{x=1} = 0$  下的特解

解 作变量代换  $p = y'$ :

$$y^3 \frac{dp}{dx} + 1 = 0$$

例 2 求  $y^3 y'' + 1 = 0$  在初始条件  $y|_{x=1} = 1, y'|_{x=1} = 0$  下的特解

解 作变量代换  $p = y'$ :

$$p \frac{dp}{dy} \quad y^3 \frac{dp}{dx} + 1 = 0$$

例 2 求  $y^3 y'' + 1 = 0$  在初始条件  $y|_{x=1} = 1, y'|_{x=1} = 0$  下的特解

解 作变量代换  $p = y'$ :

$$y^3 p \frac{dp}{dy} + 1 = y^3 \frac{dp}{dx} + 1 = 0$$

例 2 求  $y^3 y'' + 1 = 0$  在初始条件  $y|_{x=1} = 1, y'|_{x=1} = 0$  下的特解

解 作变量代换  $p = y'$ :

$$y^3 p \frac{dp}{dy} + 1 = 0$$

例 2 求  $y^3 y'' + 1 = 0$  在初始条件  $y|_{x=1} = 1, y'|_{x=1} = 0$  下的特解

解 作变量代换  $p = y'$ :

$$y^3 p \frac{dp}{dy} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow p dp = -y^{-3} dy$$

例 2 求  $y^3 y'' + 1 = 0$  在初始条件  $y|_{x=1} = 1, y'|_{x=1} = 0$  下的特解

解 作变量代换  $p = y'$ :

$$y^3 p \frac{dp}{dy} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow p dp = -y^{-3} dy \Rightarrow \int p dp = - \int y^{-3} dy$$

例 2 求  $y^3 y'' + 1 = 0$  在初始条件  $y|_{x=1} = 1, y'|_{x=1} = 0$  下的特解

解 作变量代换  $p = y'$ :

$$y^3 p \frac{dp}{dy} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow p dp = -y^{-3} dy \Rightarrow \int p dp = - \int y^{-3} dy$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} p^2 = \frac{1}{2} y^{-2} + C_1$$

例 2 求  $y^3 y'' + 1 = 0$  在初始条件  $y|_{x=1} = 1, y'|_{x=1} = 0$  下的特解

解 作变量代换  $p = y'$ :

$$y^3 p \frac{dp}{dy} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow p dp = -y^{-3} dy \Rightarrow \int p dp = - \int y^{-3} dy$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} p^2 = \frac{1}{2} y^{-2} + C_1 \xrightarrow[y=1, p=0]{x=1 \text{ 时}}$$



例 2 求  $y^3 y'' + 1 = 0$  在初始条件  $y|_{x=1} = 1, y'|_{x=1} = 0$  下的特解

解 作变量代换  $p = y'$ :

$$y^3 p \frac{dp}{dy} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow p dp = -y^{-3} dy \Rightarrow \int p dp = - \int y^{-3} dy$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} p^2 = \frac{1}{2} y^{-2} + C_1 \xrightarrow[y=1, p=0]{x=1 \text{ 时}} C_1 = -\frac{1}{2},$$

例 2 求  $y^3 y'' + 1 = 0$  在初始条件  $y|_{x=1} = 1, y'|_{x=1} = 0$  下的特解

解 作变量代换  $p = y'$ :

$$y^3 p \frac{dp}{dy} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow p dp = -y^{-3} dy \Rightarrow \int p dp = - \int y^{-3} dy$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} p^2 = \frac{1}{2} y^{-2} + C_1 \xrightarrow[y=1, p=0]{x=1 \text{ 时}} C_1 = -\frac{1}{2}, p^2 = y^{-2} - 1$$

例 2 求  $y^3 y'' + 1 = 0$  在初始条件  $y|_{x=1} = 1, y'|_{x=1} = 0$  下的特解

解 作变量代换  $p = y'$ :

$$y^3 p \frac{dp}{dy} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow p dp = -y^{-3} dy \Rightarrow \int p dp = - \int y^{-3} dy$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} p^2 = \frac{1}{2} y^{-2} + C_1 \xrightarrow[y=1, p=0]{x=1 \text{ 时}} C_1 = -\frac{1}{2}, p^2 = y^{-2} - 1$$

$$\Rightarrow p = \pm \sqrt{y^{-2} - 1}$$

例 2 求  $y^3 y'' + 1 = 0$  在初始条件  $y|_{x=1} = 1, y'|_{x=1} = 0$  下的特解

解 作变量代换  $p = y'$ :

$$y^3 p \frac{dp}{dy} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow p dp = -y^{-3} dy \Rightarrow \int p dp = - \int y^{-3} dy$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} p^2 = \frac{1}{2} y^{-2} + C_1 \xrightarrow[y=1, p=0]{x=1 \text{ 时}} C_1 = -\frac{1}{2}, p^2 = y^{-2} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = p = \pm \sqrt{y^{-2} - 1}$$

例 2 求  $y^3 y'' + 1 = 0$  在初始条件  $y|_{x=1} = 1, y'|_{x=1} = 0$  下的特解

解 作变量代换  $p = y'$ :

$$y^3 p \frac{dp}{dy} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow p dp = -y^{-3} dy \Rightarrow \int p dp = - \int y^{-3} dy$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} p^2 = \frac{1}{2} y^{-2} + C_1 \xrightarrow[y=1, p=0]{x=1 \text{ 时}} C_1 = -\frac{1}{2}, p^2 = y^{-2} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = p = \pm \sqrt{y^{-2} - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{y dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \pm dx$$

例 2 求  $y^3 y'' + 1 = 0$  在初始条件  $y|_{x=1} = 1, y'|_{x=1} = 0$  下的特解

解 作变量代换  $p = y'$ :

$$y^3 p \frac{dp}{dy} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow p dp = -y^{-3} dy \Rightarrow \int p dp = - \int y^{-3} dy$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} p^2 = \frac{1}{2} y^{-2} + C_1 \xrightarrow[y=1, p=0]{x=1 \text{ 时}} C_1 = -\frac{1}{2}, p^2 = y^{-2} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = p = \pm \sqrt{y^{-2} - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{y dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \pm dx \Rightarrow -\sqrt{1 - y^2} = \pm x + C_2$$

例 2 求  $y^3 y'' + 1 = 0$  在初始条件  $y|_{x=1} = 1, y'|_{x=1} = 0$  下的特解

解 作变量代换  $p = y'$ :

$$y^3 p \frac{dp}{dy} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow p dp = -y^{-3} dy \Rightarrow \int p dp = - \int y^{-3} dy$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} p^2 = \frac{1}{2} y^{-2} + C_1 \xrightarrow[y=1, p=0]{x=1 \text{ 时}} C_1 = -\frac{1}{2}, p^2 = y^{-2} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = p = \pm \sqrt{y^{-2} - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{y dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \pm dx \Rightarrow -\sqrt{1 - y^2} = \pm x + C_2$$

$$\Rightarrow \xrightarrow[y=1]{x=1 \text{ 时}}$$

例 2 求  $y^3 y'' + 1 = 0$  在初始条件  $y|_{x=1} = 1, y'|_{x=1} = 0$  下的特解

解 作变量代换  $p = y'$ :

$$y^3 p \frac{dp}{dy} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow p dp = -y^{-3} dy \Rightarrow \int p dp = - \int y^{-3} dy$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} p^2 = \frac{1}{2} y^{-2} + C_1 \xrightarrow[y=1, p=0]{x=1 \text{ 时}} C_1 = -\frac{1}{2}, p^2 = y^{-2} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = p = \pm \sqrt{y^{-2} - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{y dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \pm dx \Rightarrow -\sqrt{1 - y^2} = \pm x + C_2$$

$$\Rightarrow \xrightarrow[y=1]{x=1 \text{ 时}} C_2 = \mp 1,$$



例 2 求  $y^3 y'' + 1 = 0$  在初始条件  $y|_{x=1} = 1, y'|_{x=1} = 0$  下的特解

解 作变量代换  $p = y'$ :

$$y^3 p \frac{dp}{dy} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow p dp = -y^{-3} dy \Rightarrow \int p dp = - \int y^{-3} dy$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} p^2 = \frac{1}{2} y^{-2} + C_1 \xrightarrow[y=1, p=0]{x=1 \text{ 时}} C_1 = -\frac{1}{2}, p^2 = y^{-2} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = p = \pm \sqrt{y^{-2} - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{y dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \pm dx \Rightarrow -\sqrt{1 - y^2} = \pm x + C_2$$

$$\Rightarrow \xrightarrow[y=1]{x=1 \text{ 时}} C_2 = \mp 1, -\sqrt{1 - y^2} = \pm x \mp 1$$

例2 求  $y^3 y'' + 1 = 0$  在初始条件  $y|_{x=1} = 1, y'|_{x=1} = 0$  下的特解

解 作变量代换  $p = y'$ :

$$y^3 p \frac{dp}{dy} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow p dp = -y^{-3} dy \Rightarrow \int p dp = - \int y^{-3} dy$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} p^2 = \frac{1}{2} y^{-2} + C_1 \xrightarrow[y=1, p=0]{x=1 \text{ 时}} C_1 = -\frac{1}{2}, p^2 = y^{-2} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = p = \pm \sqrt{y^{-2} - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{y dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \pm dx \Rightarrow -\sqrt{1 - y^2} = \pm x + C_2$$

$$\Rightarrow \xrightarrow[y=1]{x=1 \text{ 时}} C_2 = \mp 1, -\sqrt{1 - y^2} = \pm x \mp 1 = \pm(x - 1)$$

例2 求  $y^3 y'' + 1 = 0$  在初始条件  $y|_{x=1} = 1, y'|_{x=1} = 0$  下的特解

解 作变量代换  $p = y'$ :

$$y^3 p \frac{dp}{dy} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow p dp = -y^{-3} dy \Rightarrow \int p dp = - \int y^{-3} dy$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} p^2 = \frac{1}{2} y^{-2} + C_1 \xrightarrow[y=1, p=0]{x=1 \text{ 时}} C_1 = -\frac{1}{2}, p^2 = y^{-2} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = p = \pm \sqrt{y^{-2} - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{y dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \pm dx \Rightarrow -\sqrt{1 - y^2} = \pm x + C_2$$

$$\Rightarrow \xrightarrow[y=1]{x=1 \text{ 时}} C_2 = \mp 1, -\sqrt{1 - y^2} = \pm x \mp 1 = \pm(x - 1)$$

$$\Rightarrow 1 - y^2 = (x - 1)^2$$

例2 求  $y^3 y'' + 1 = 0$  在初始条件  $y|_{x=1} = 1, y'|_{x=1} = 0$  下的特解

解 作变量代换  $p = y'$ :

$$y^3 p \frac{dp}{dy} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow p dp = -y^{-3} dy \Rightarrow \int p dp = - \int y^{-3} dy$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} p^2 = \frac{1}{2} y^{-2} + C_1 \xrightarrow[y=1, p=0]{x=1 \text{ 时}} C_1 = -\frac{1}{2}, p^2 = y^{-2} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = p = \pm \sqrt{y^{-2} - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{y dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \pm dx \Rightarrow -\sqrt{1 - y^2} = \pm x + C_2$$

$$\Rightarrow \xrightarrow[y=1]{x=1 \text{ 时}} C_2 = \mp 1, -\sqrt{1 - y^2} = \pm x \mp 1 = \pm(x - 1)$$

$$\Rightarrow 1 - y^2 = (x - 1)^2 \Rightarrow y^2 = 2x - x^2$$