

第 9 章 e: 方向导数与梯度

数学系 梁卓滨

2016-2017 学年 II

提要

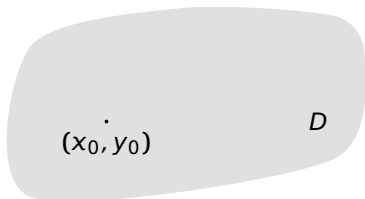
1. 二元函数的

- 梯度
- 等值线
- 方向导数

2. 三元函数的

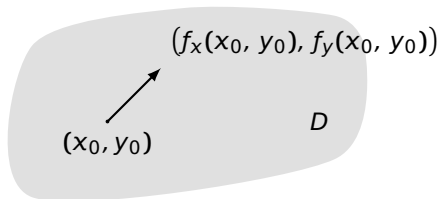
- 梯度
- 等值面
- 方向导数

梯度



定义 设 $f(x, y)$ 在平面区域 D 内具有一阶连续偏导数, 对于每一点 $p_0(x_0, y_0)$,

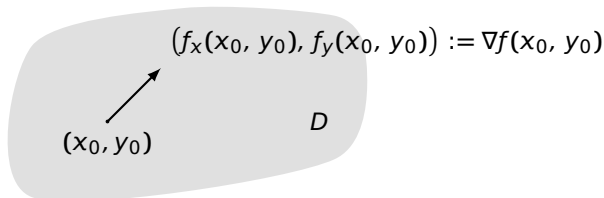
梯度



定义 设 $f(x, y)$ 在平面区域 D 内具有一阶连续偏导数, 对于每一点 $p_0(x_0, y_0)$, 定义向量

$$f_x(x_0, y_0) \vec{i} + f_y(x_0, y_0) \vec{j} = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)),$$

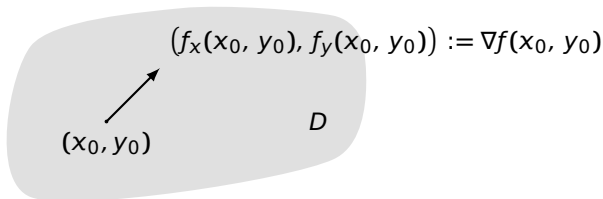
梯度



定义 设 $f(x, y)$ 在平面区域 D 内具有一阶连续偏导数, 对于每一点 $p_0(x_0, y_0)$, 定义向量

$$f_x(x_0, y_0) \vec{i} + f_y(x_0, y_0) \vec{j} = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)),$$

梯度

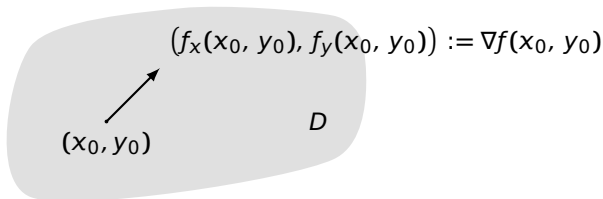


定义 设 $f(x, y)$ 在平面区域 D 内具有一阶连续偏导数, 对于每一点 $p_0(x_0, y_0)$, 定义向量

$$f_x(x_0, y_0) \vec{i} + f_y(x_0, y_0) \vec{j} = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)),$$

称为 $f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处的**梯度**,

梯度



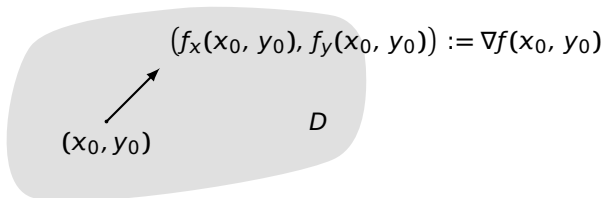
定义 设 $f(x, y)$ 在平面区域 D 内具有一阶连续偏导数, 对于每一点 $p_0(x_0, y_0)$, 定义向量

$$f_x(x_0, y_0) \vec{i} + f_y(x_0, y_0) \vec{j} = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)),$$

称为 $f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处的**梯度**, 记为

$$\text{grad } f(x_0, y_0) \quad \text{或} \quad \nabla f(x_0, y_0)$$

梯度



定义 设 $f(x, y)$ 在平面区域 D 内具有一阶连续偏导数, 对于每一点 $p_0(x_0, y_0)$, 定义向量

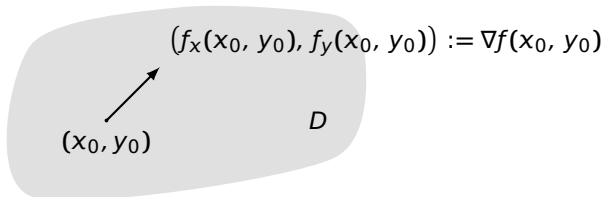
$$f_x(x_0, y_0) \vec{i} + f_y(x_0, y_0) \vec{j} = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)),$$

称为 $f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处的**梯度**, 记为

$$\text{grad } f(x_0, y_0) \quad \text{或} \quad \nabla f(x_0, y_0)$$

例 设 $f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$, 求 ∇f

梯度



定义 设 $f(x, y)$ 在平面区域 D 内具有一阶连续偏导数, 对于每一点 $p_0(x_0, y_0)$, 定义向量

$$f_x(x_0, y_0) \vec{i} + f_y(x_0, y_0) \vec{j} = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)),$$

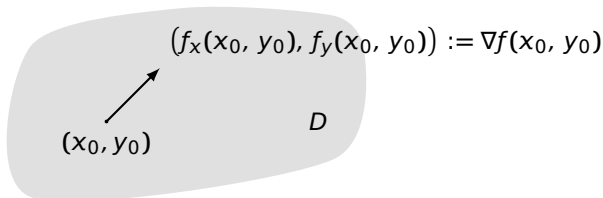
称为 $f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处的**梯度**, 记为

$$\text{grad } f(x_0, y_0) \quad \text{或} \quad \nabla f(x_0, y_0)$$

例 设 $f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$, 求 ∇f

解 $\nabla f = (f_x, f_y) = (\quad , \quad)$

梯度



定义 设 $f(x, y)$ 在平面区域 D 内具有一阶连续偏导数, 对于每一点 $p_0(x_0, y_0)$, 定义向量

$$f_x(x_0, y_0) \vec{i} + f_y(x_0, y_0) \vec{j} = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)),$$

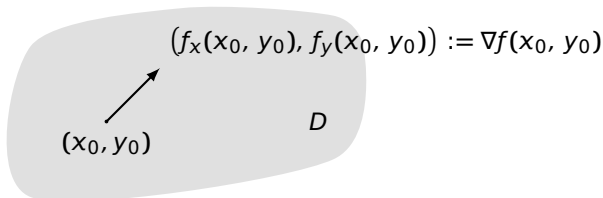
称为 $f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处的**梯度**, 记为

$$\text{grad } f(x_0, y_0) \quad \text{或} \quad \nabla f(x_0, y_0)$$

例 设 $f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$, 求 ∇f

解 $\nabla f = (f_x, f_y) = \left(\frac{x}{2}, \quad \right)$

梯度



定义 设 $f(x, y)$ 在平面区域 D 内具有一阶连续偏导数, 对于每一点 $p_0(x_0, y_0)$, 定义向量

$$f_x(x_0, y_0) \vec{i} + f_y(x_0, y_0) \vec{j} = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)),$$

称为 $f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处的**梯度**, 记为

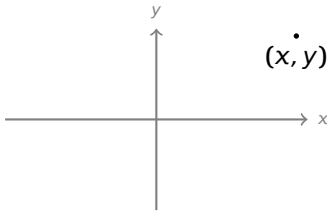
$$\text{grad } f(x_0, y_0) \quad \text{或} \quad \nabla f(x_0, y_0)$$

例 设 $f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$, 求 ∇f

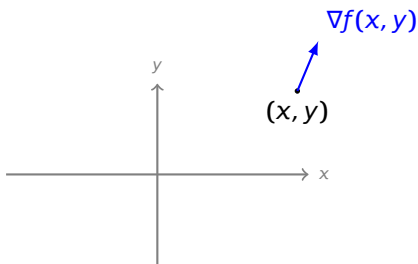
解 $\nabla f = (f_x, f_y) = (\frac{x}{2}, 2y)$

例 设 $f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$, 则 $\nabla f(x, y) = (\frac{x}{2}, 2y)$

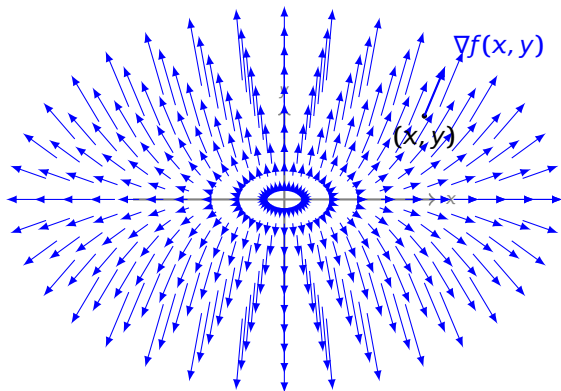
例 设 $f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$, 则 $\nabla f(x, y) = (\frac{x}{2}, 2y)$



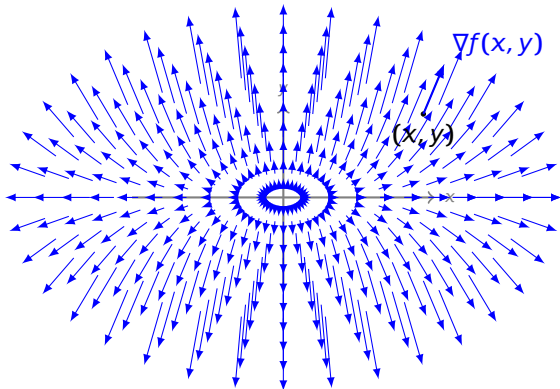
例 设 $f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$, 则 $\nabla f(x, y) = (\frac{x}{2}, 2y)$



例 设 $f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$, 则 $\nabla f(x, y) = (\frac{x}{2}, 2y)$

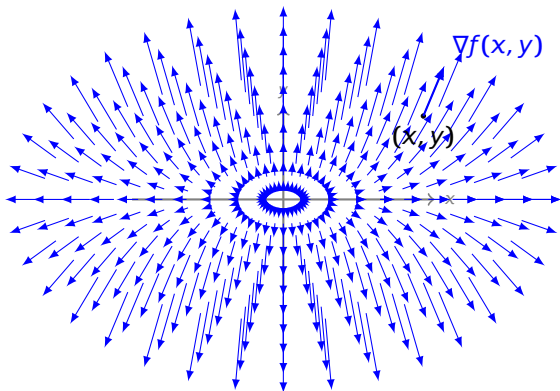


例 设 $f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$, 则 $\nabla f(x, y) = (\frac{x}{2}, 2y)$



- 梯度 ∇f 是一个向量场

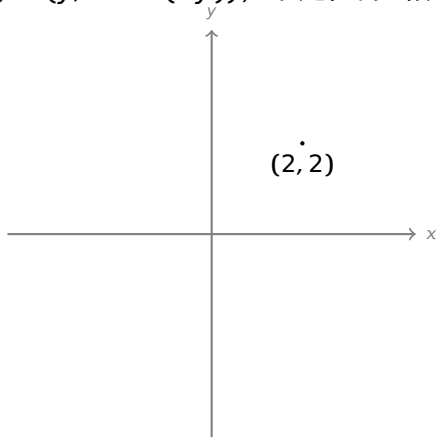
例 设 $f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$, 则 $\nabla f(x, y) = (\frac{x}{2}, 2y)$



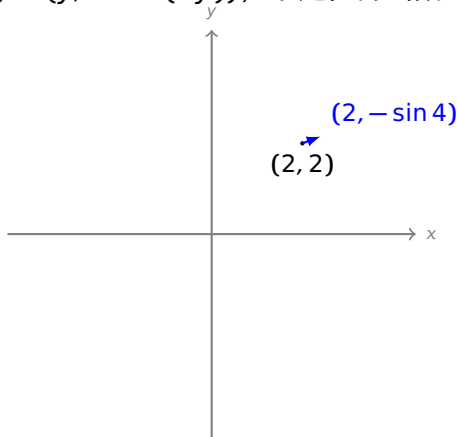
- 梯度 ∇f 是一个向量场
- 反过来，向量场并不总是某个函数的梯度！

例 向量场 $F(x, y) = (y, -\sin(xy))$, 不是任何函数的梯度

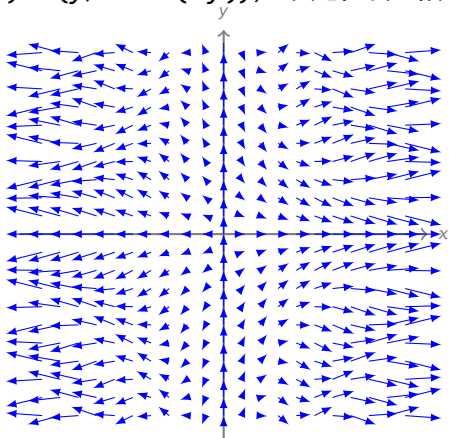
例 向量场 $F(x, y) = (y, -\sin(xy))$, 不是任何函数的梯度



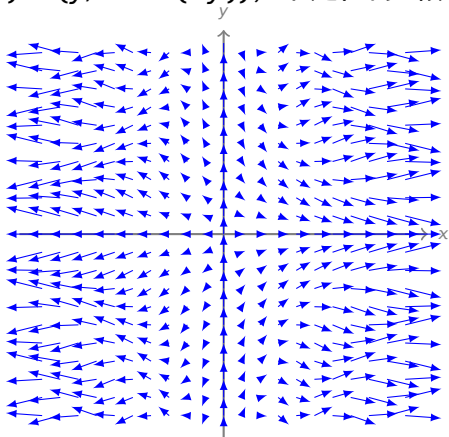
例 向量场 $F(x, y) = (y, -\sin(xy))$, 不是任何函数的梯度



例 向量场 $F(x, y) = (y, -\sin(xy))$, 不是任何函数的梯度

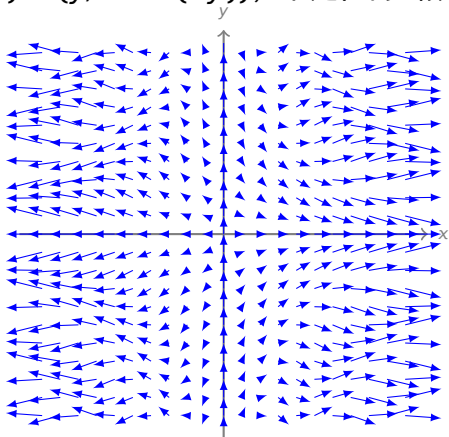


例 向量场 $F(x, y) = (y, -\sin(xy))$, 不是任何函数的梯度



证明 若 $F(x, y) = (y, -\sin(xy)) = \nabla f = (f_x, f_y)$, 则

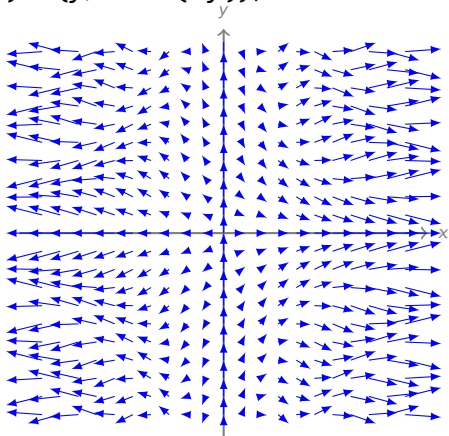
例 向量场 $F(x, y) = (y, -\sin(xy))$, 不是任何函数的梯度



证明 若 $F(x, y) = (y, -\sin(xy)) = \nabla f = (f_x, f_y)$, 则

$$f_x = y, \quad f_y = -\sin(xy)$$

例 向量场 $F(x, y) = (y, -\sin(xy))$, 不是任何函数的梯度

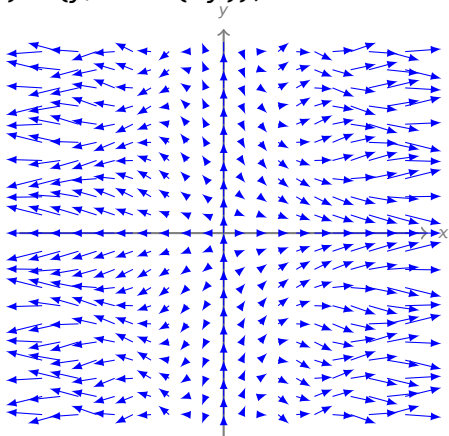


证明 若 $F(x, y) = (y, -\sin(xy)) = \nabla f = (f_x, f_y)$, 则

$$f_x = y, \quad f_y = -\sin(xy)$$

$$f_{xy} = \quad, \quad f_{yx} =$$

例 向量场 $F(x, y) = (y, -\sin(xy))$, 不是任何函数的梯度

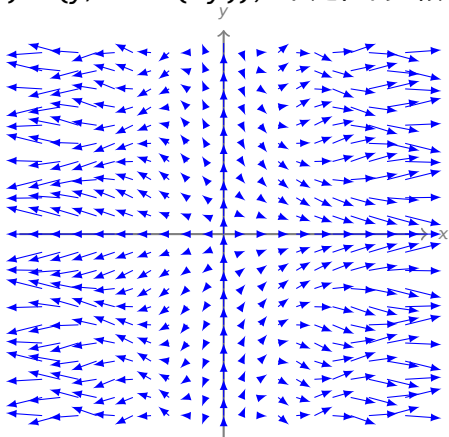


证明 若 $F(x, y) = (y, -\sin(xy)) = \nabla f = (f_x, f_y)$, 则

$$f_x = y, \quad f_y = -\sin(xy)$$

$$f_{xy} = 1, \quad f_{yx} =$$

例 向量场 $F(x, y) = (y, -\sin(xy))$, 不是任何函数的梯度

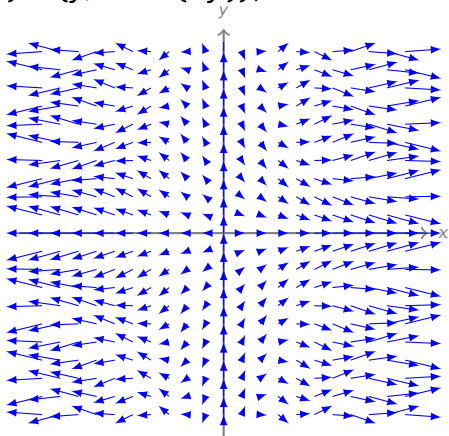


证明 若 $F(x, y) = (y, -\sin(xy)) = \nabla f = (f_x, f_y)$, 则

$$f_x = y, \quad f_y = -\sin(xy)$$

$$f_{xy} = 1, \quad f_{yx} = -y \cos(xy)$$

例 向量场 $F(x, y) = (y, -\sin(xy))$, 不是任何函数的梯度

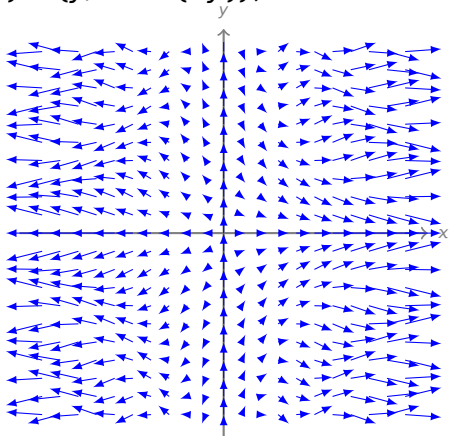


证明 若 $F(x, y) = (y, -\sin(xy)) = \nabla f = (f_x, f_y)$, 则

$$f_x = y, \quad f_y = -\sin(xy)$$

$$f_{xy} = 1, \quad f_{yx} = -y \cos(xy) \Rightarrow f_{xy} \neq f_{yx}$$

例 向量场 $F(x, y) = (y, -\sin(xy))$, 不是任何函数的梯度



证明 若 $F(x, y) = (y, -\sin(xy)) = \nabla f = (f_x, f_y)$, 则

$$f_x = y, \quad f_y = -\sin(xy)$$

$$f_{xy} = 1, \quad f_{yx} = -y \cos(xy) \Rightarrow f_{xy} \neq f_{yx}$$

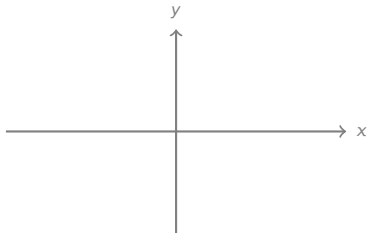
不可能

等值线与梯度

定义 设 c 为常数，定义域上满足 $f(x, y) = c$ 的点，构成“等值线”。

等值线与梯度

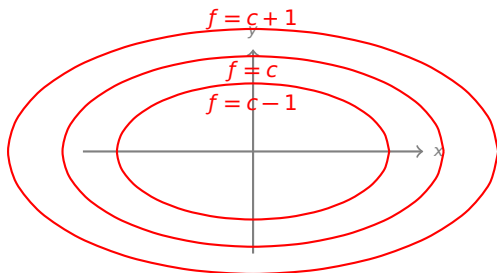
$$f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$$



定义 设 c 为常数，定义域上满足 $f(x, y) = c$ 的点，构成“等值线”。

等值线与梯度

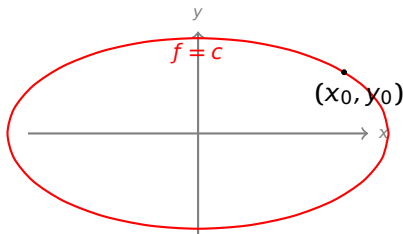
$$f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$$



定义 设 c 为常数，定义域上满足 $f(x, y) = c$ 的点，构成“等值线”。

等值线与梯度

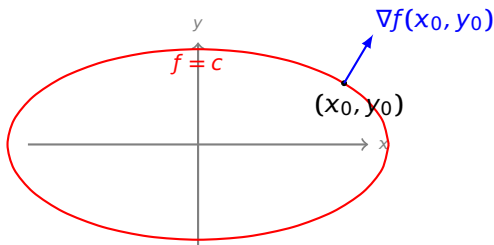
$$f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$$



定义 设 c 为常数，定义域上满足 $f(x, y) = c$ 的点，构成“等值线”。

等值线与梯度

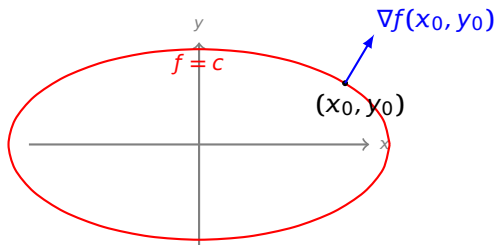
$$f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$$



定义 设 c 为常数，定义域上满足 $f(x, y) = c$ 的点，构成“等值线”。

等值线与梯度

$$f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$$

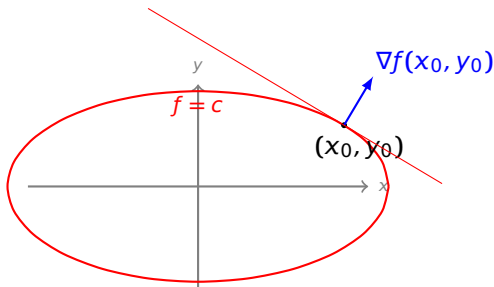


定义 设 c 为常数，定义域上满足 $f(x, y) = c$ 的点，构成“等值线”。

性质 过点 $p_0(x_0, y_0)$ 处的梯度 $\nabla f(x_0, y_0)$ ，垂直于过该点的等值线。

等值线与梯度

$$f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$$

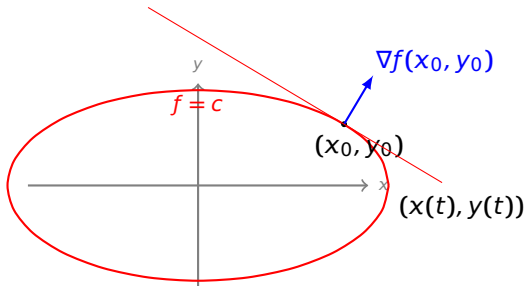


定义 设 c 为常数，定义域上满足 $f(x, y) = c$ 的点，构成“等值线”。

性质 过点 $p_0(x_0, y_0)$ 处的梯度 $\nabla f(x_0, y_0)$ ，垂直于过该点的等值线。

等值线与梯度

$$f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$$



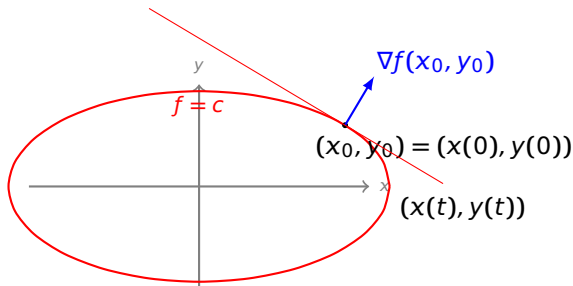
定义 设 c 为常数，定义域上满足 $f(x, y) = c$ 的点，构成“等值线”。

性质 过点 $p_0(x_0, y_0)$ 处的梯度 $\nabla f(x_0, y_0)$ ，垂直于过该点的等值线。

证明 设该等值线的参数方程为 $(x(t), y(t))$ ，

等值线与梯度

$$f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$$



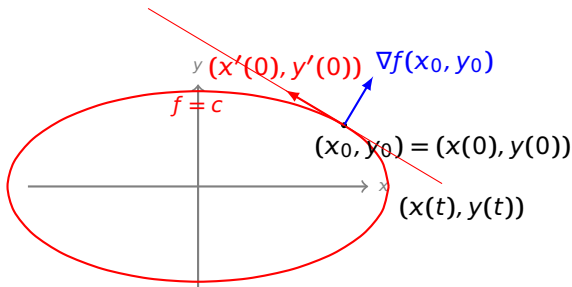
定义 设 c 为常数，定义域上满足 $f(x, y) = c$ 的点，构成“等值线”。

性质 过点 $p_0(x_0, y_0)$ 处的梯度 $\nabla f(x_0, y_0)$ ，垂直于过该点的等值线。

证明 设该等值线的参数方程为 $(x(t), y(t))$ ，

等值线与梯度

$$f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$$



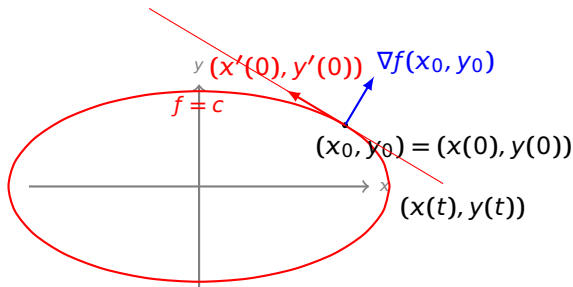
定义 设 c 为常数，定义域上满足 $f(x, y) = c$ 的点，构成“等值线”。

性质 过点 $p_0(x_0, y_0)$ 处的梯度 $\nabla f(x_0, y_0)$ ，垂直于过该点的等值线。

证明 设该等值线的参数方程为 $(x(t), y(t))$ ，

等值线与梯度

$$f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$$



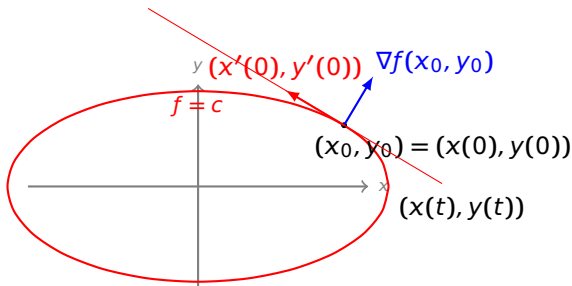
定义 设 c 为常数，定义域上满足 $f(x, y) = c$ 的点，构成“等值线”。

性质 过点 $p_0(x_0, y_0)$ 处的梯度 $\nabla f(x_0, y_0)$ ，垂直于过该点的等值线。

证明 设该等值线的参数方程为 $(x(t), y(t))$ ，由 $f(x(t), y(t)) \equiv c$ 得：

等值线与梯度

$$f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$$



定义 设 c 为常数，定义域上满足 $f(x, y) = c$ 的点，构成“等值线”。

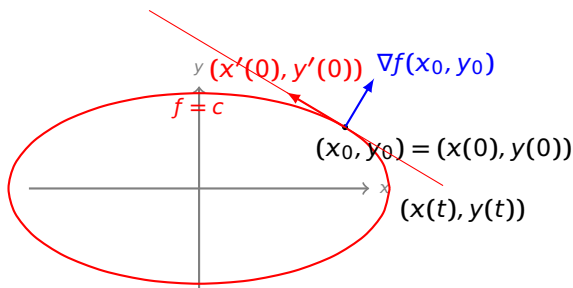
性质 过点 $p_0(x_0, y_0)$ 处的梯度 $\nabla f(x_0, y_0)$ ，垂直于过该点的等值线。

证明 设该等值线的参数方程为 $(x(t), y(t))$ ，由 $f(x(t), y(t)) \equiv c$ 得：

$$0 = \left. \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) \right|_{t=0}$$

等值线与梯度

$$f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$$



定义 设 c 为常数，定义域上满足 $f(x, y) = c$ 的点，构成“等值线”。

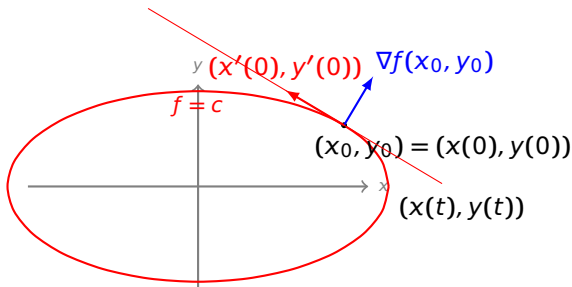
性质 过点 $p_0(x_0, y_0)$ 处的梯度 $\nabla f(x_0, y_0)$ ，垂直于过该点的等值线。

证明 设该等值线的参数方程为 $(x(t), y(t))$ ，由 $f(x(t), y(t)) \equiv c$ 得：

$$0 = \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) \Big|_{t=0} = f_x(x_0, y_0) x'_0(0) + f_y(x_0, y_0) y'_0(0)$$

等值线与梯度

$$f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$$



定义 设 c 为常数，定义域上满足 $f(x, y) = c$ 的点，构成“等值线”。

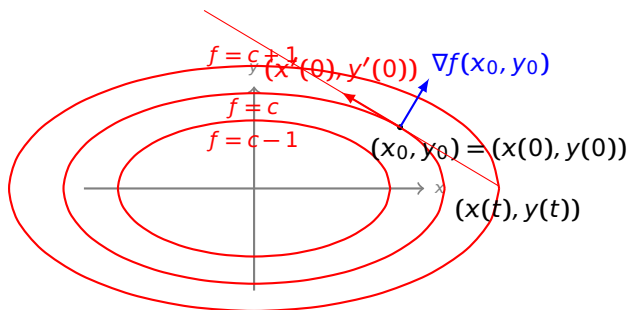
性质 过点 $p_0(x_0, y_0)$ 处的梯度 $\nabla f(x_0, y_0)$ ，垂直于过该点的等值线。

证明 设该等值线的参数方程为 $(x(t), y(t))$ ，由 $f(x(t), y(t)) \equiv c$ 得：

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) \right|_{t=0} = f_x(x_0, y_0)x'_0(0) + f_y(x_0, y_0)y'_0(0) \\ &= \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x'_0(0), y'_0(0)) \end{aligned}$$

等值线与梯度

$$f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$$



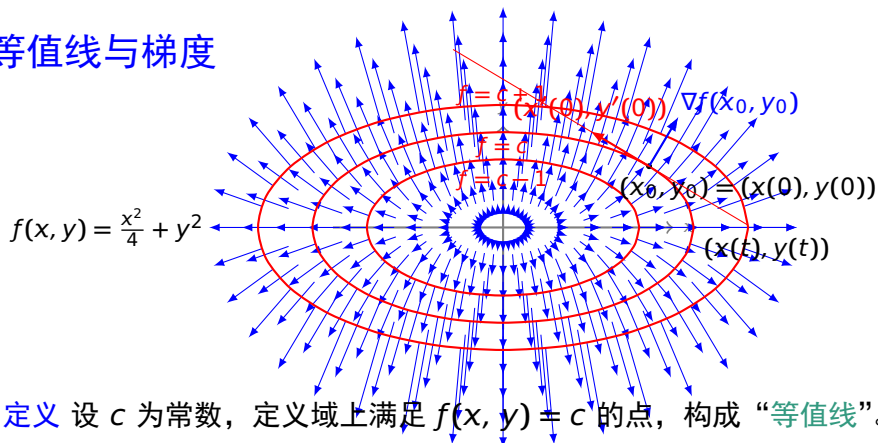
定义 设 c 为常数，定义域上满足 $f(x, y) = c$ 的点，构成“等值线”。

性质 过点 $p_0(x_0, y_0)$ 处的梯度 $\nabla f(x_0, y_0)$ ，垂直于过该点的等值线。

证明 设该等值线的参数方程为 $(x(t), y(t))$ ，由 $f(x(t), y(t)) \equiv c$ 得：

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) \Big|_{t=0} = f_x(x_0, y_0)x'_0(0) + f_y(x_0, y_0)y'_0(0) \\ &= \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x'_0(0), y'_0(0)) \end{aligned}$$

等值线与梯度

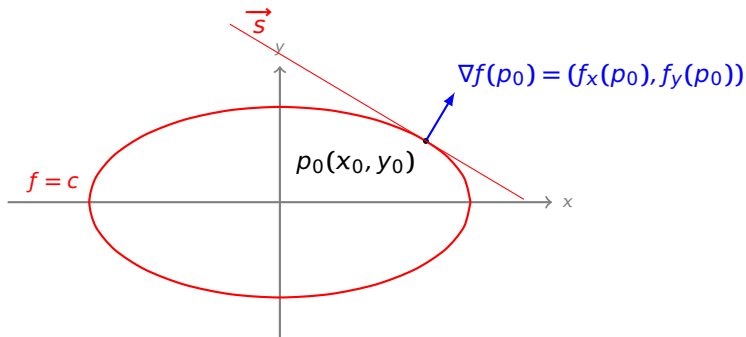


定义 设 c 为常数，定义域上满足 $f(x, y) = c$ 的点，构成“等值线”。

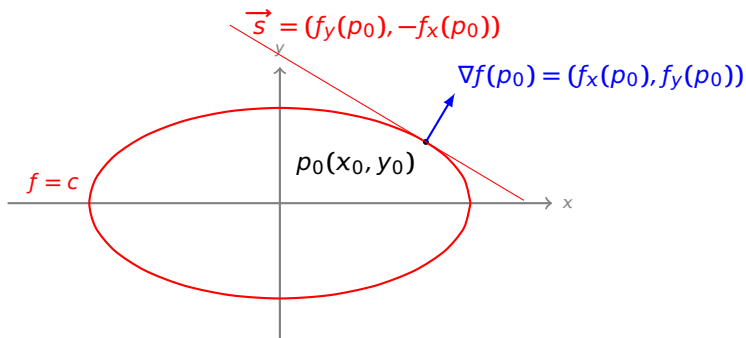
性质 过点 $p_0(x_0, y_0)$ 处的梯度 $\nabla f(x_0, y_0)$ ，垂直于过该点的等值线。

证明 设该等值线的参数方程为 $(x(t), y(t))$ ，由 $f(x(t), y(t)) \equiv c$ 得：

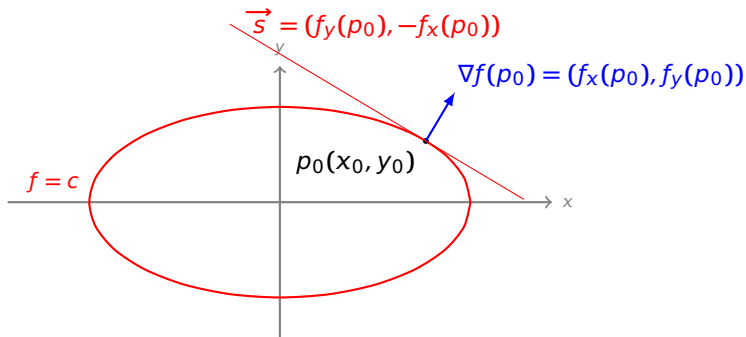
$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) \Big|_{t=0} = f_x(x_0, y_0)x'_0(0) + f_y(x_0, y_0)y'_0(0) \\ &= \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x'_0(0), y'_0(0)) \end{aligned}$$



性质 设过点 $p_0(x_0, y_0)$ 处的梯度 $\nabla f(p_0) \neq 0$ ，则过该点的等值线，其切线的一个方向向量为 $\vec{s} =$ 。



性质 设过点 $p_0(x_0, y_0)$ 处的梯度 $\nabla f(p_0) \neq 0$, 则过该点的等值线, 其切线的一个方向向量为 $\vec{s} = (f_y(p_0), -f_x(p_0))$ 。

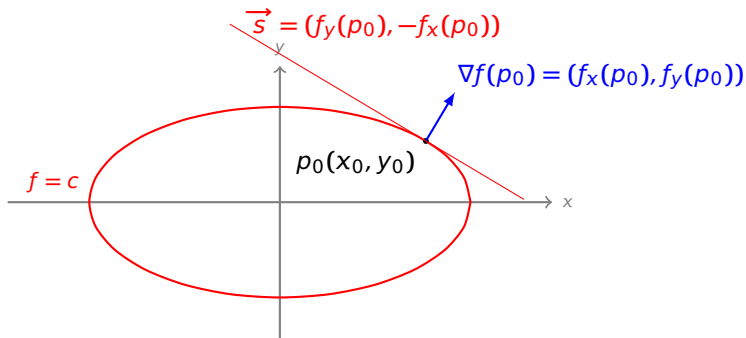


性质 设过点 $p_0(x_0, y_0)$ 处的梯度 $\nabla f(p_0) \neq 0$ ，则过该点的等值线，其切线的一个方向向量为 $\vec{s} = (f_y(p_0), -f_x(p_0))$ 。

证明 验证：

$$\vec{s} \cdot \nabla f(p_0) =$$

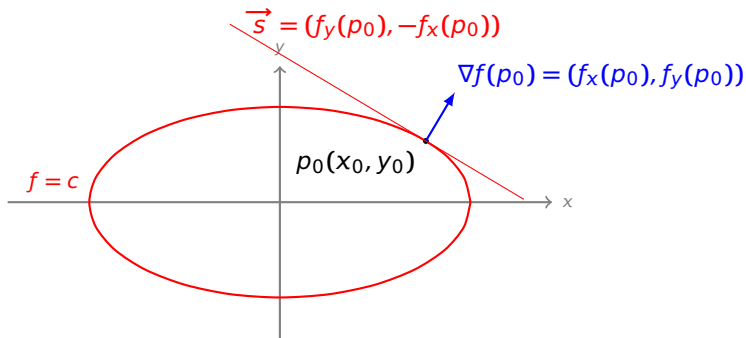
0



性质 设过点 $p_0(x_0, y_0)$ 处的梯度 $\nabla f(p_0) \neq 0$, 则过该点的等值线, 其切线的一个方向向量为 $\vec{s} = (f_y(p_0), -f_x(p_0))$ 。

证明 验证:

$$\vec{s} \cdot \nabla f(p_0) = (f_y(p_0), -f_x(p_0)) \cdot (f_x(p_0), f_y(p_0)) = 0$$

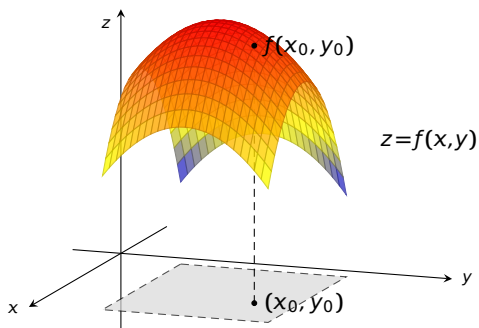


性质 设过点 $p_0(x_0, y_0)$ 处的梯度 $\nabla f(p_0) \neq 0$ ，则过该点的等值线，其切线的一个方向向量为 $\vec{s} = (f_y(p_0), -f_x(p_0))$ 。

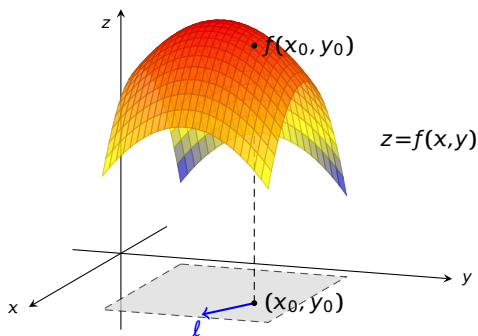
证明 验证：

$$\vec{s} \cdot \nabla f(p_0) = (f_y(p_0), -f_x(p_0)) \cdot (f_x(p_0), f_y(p_0)) = 0$$

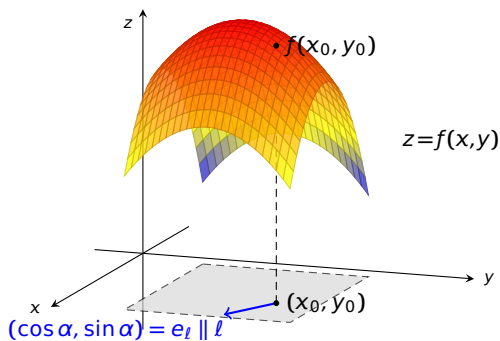
方向导数



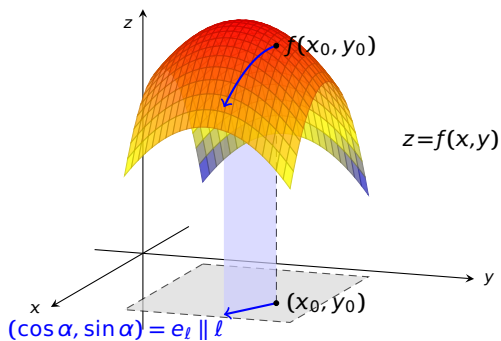
方向导数



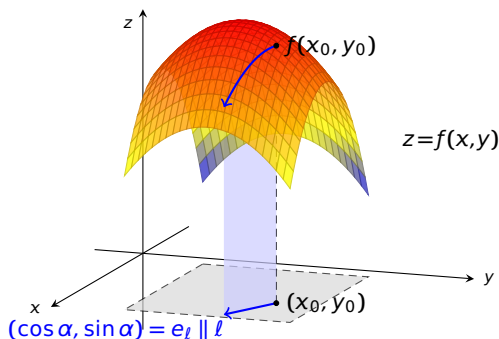
方向导数



方向导数



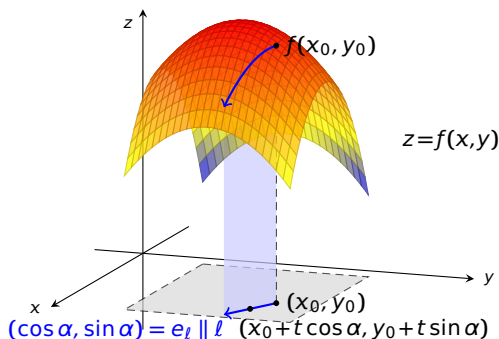
方向导数



$z = f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处沿方向 l 的变化率，即方向导数：

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0)} :=$$

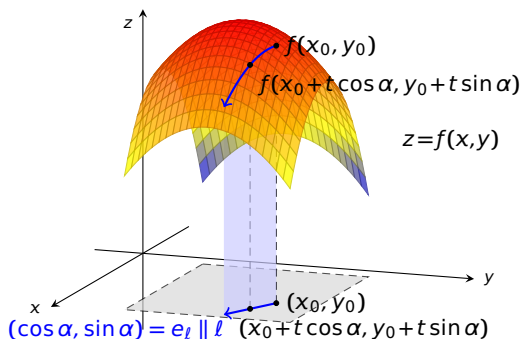
方向导数



$z = f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处沿方向 l 的变化率，即方向导数：

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0)} :=$$

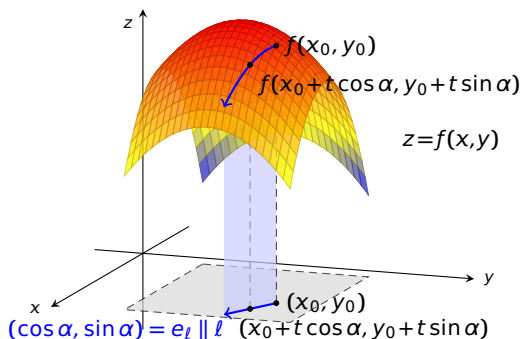
方向导数



$z = f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处沿方向 l 的变化率，即方向导数：

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0)} :=$$

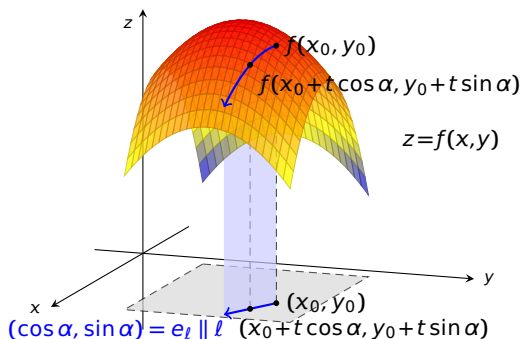
方向导数



$z = f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处沿方向 \mathbf{l} 的变化率，即方向导数：

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \ell} \right|_{(x_0, y_0)} := \frac{f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \sin \alpha) - f(x_0, y_0)}{t}$$

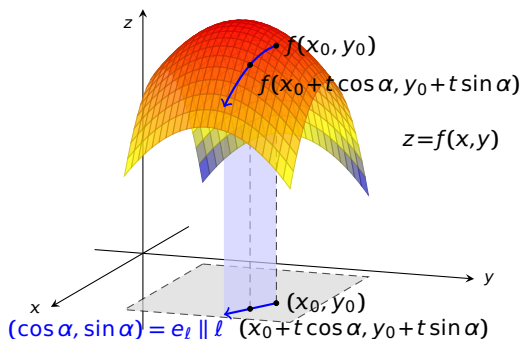
方向导数



$z = f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处沿方向 l 的变化率，即方向导数：

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0)} := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \sin \alpha) - f(x_0, y_0)}{t}$$

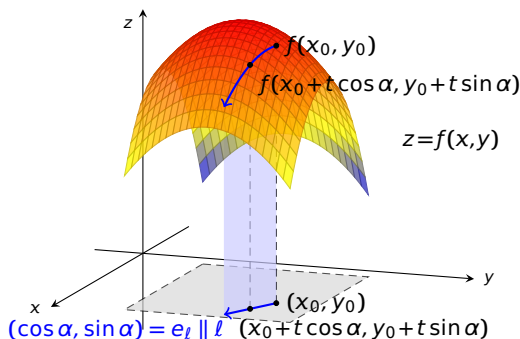
方向导数



$z = f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处沿方向 l 的变化率，即方向导数：

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0)} &:= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \sin \alpha) - f(x_0, y_0)}{t} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \sin \alpha)\end{aligned}$$

方向导数



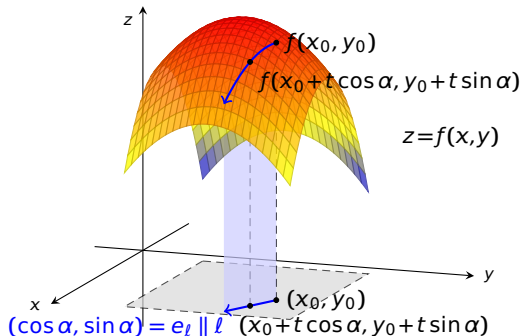
$z = f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处沿方向 ℓ 的变化率，即方向导数：

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \ell} \right|_{(x_0, y_0)} := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \sin \alpha) - f(x_0, y_0)}{t}$$

$$= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \sin \alpha)$$

$$= f_x(x_0, y_0) \cos \alpha + f_y(x_0, y_0) \sin \alpha$$

方向导数



$z = f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处沿方向 l 的变化率，即方向导数：

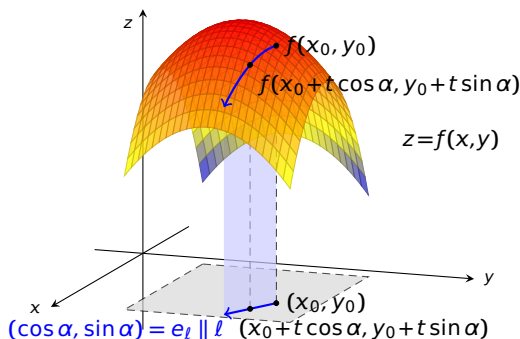
$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0)} := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \sin \alpha) - f(x_0, y_0)}{t}$$

$$= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \sin \alpha)$$

$$= f_x(x_0, y_0) \cos \alpha + f_y(x_0, y_0) \sin \alpha$$

$$= \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{e}_l$$

方向导数



$z = f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处沿方向 l 的变化率，即方向导数：

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0)} := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \sin \alpha) - f(x_0, y_0)}{t}$$

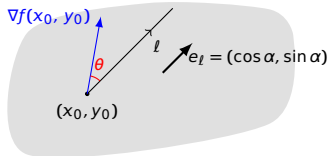
$$= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \sin \alpha)$$

$$= f_x(x_0, y_0) \cos \alpha + f_y(x_0, y_0) \sin \alpha$$

$$= \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{e}_l = |\nabla f| \cos \theta$$

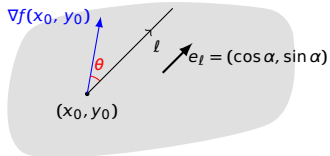
- $z = f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处沿方向 ℓ 的方向导数：

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \ell} \right|_{(x_0, y_0)} = \nabla f(x_0, y_0) \cdot e_\ell = |\nabla f| \cos \theta$$

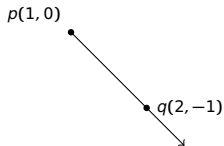


- $z = f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处沿方向 l 的**方向导数**：

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0)} = \nabla f(x_0, y_0) \cdot e_l = |\nabla f| \cos \theta$$

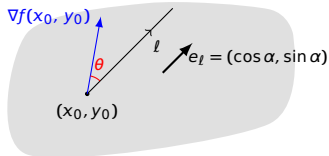


例 求 $z = xe^{2y}$ 在点 $p(1, 0)$ 处，往点 $q(2, -1)$ 方向上的方向导数。



- $z = f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处沿方向 l 的方向导数：

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0)} = \nabla f(x_0, y_0) \cdot e_l = |\nabla f| \cos \theta$$



例 求 $z = xe^{2y}$ 在点 $p(1, 0)$ 处，往点 $q(2, -1)$ 方向上的方向导数。

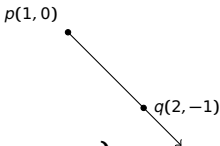
解 1. 方向 $l = \overrightarrow{pq} = (\quad)$ ，对应单位向量 $e_l = (\quad)$

2. 计算梯度

$$\nabla z = (z_x, z_y) =$$

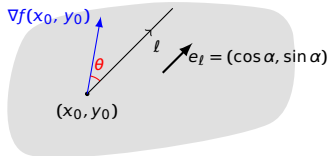
3. 方向导数

$$\left. \frac{\partial z}{\partial l} \right|_{(1, 0)} = \nabla z(1, 0) \cdot e_l =$$



- $z = f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处沿方向 l 的方向导数：

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0)} = \nabla f(x_0, y_0) \cdot e_l = |\nabla f| \cos \theta$$



例 求 $z = xe^{2y}$ 在点 $p(1, 0)$ 处，往点 $q(2, -1)$ 方向上的方向导数。

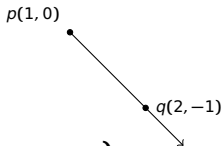
解 1. 方向 $l = \overrightarrow{pq} = (1, -1)$ ，对应单位向量 $e_l = (\quad)$

2. 计算梯度

$$\nabla z = (z_x, z_y) =$$

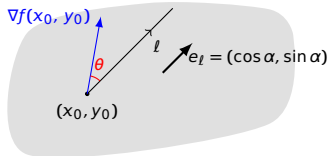
3. 方向导数

$$\left. \frac{\partial z}{\partial l} \right|_{(1, 0)} = \nabla z(1, 0) \cdot e_l =$$



- $z = f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处沿方向 l 的方向导数：

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0)} = \nabla f(x_0, y_0) \cdot e_l = |\nabla f| \cos \theta$$



例 求 $z = xe^{2y}$ 在点 $p(1, 0)$ 处，往点 $q(2, -1)$ 方向上的方向导数。

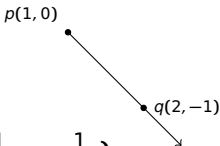
解 1. 方向 $l = \overrightarrow{pq} = (1, -1)$ ，对应单位向量 $e_l = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$

2. 计算梯度

$$\nabla z = (z_x, z_y) =$$

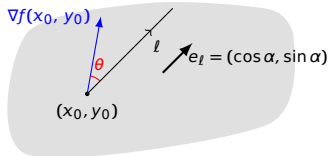
3. 方向导数

$$\left. \frac{\partial z}{\partial l} \right|_{(1, 0)} = \nabla z(1, 0) \cdot e_l =$$



- $z = f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处沿方向 l 的方向导数：

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0)} = \nabla f(x_0, y_0) \cdot e_l = |\nabla f| \cos \theta$$



例 求 $z = xe^{2y}$ 在点 $p(1, 0)$ 处，往点 $q(2, -1)$ 方向上的方向导数。

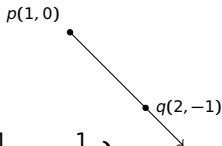
解 1. 方向 $l = \overrightarrow{pq} = (1, -1)$ ，对应单位向量 $e_l = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$

2. 计算梯度

$$\nabla z = (z_x, z_y) = (e^{2y}, 2xe^{2y})$$

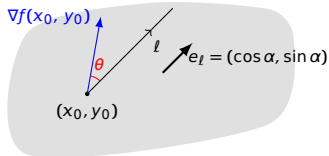
3. 方向导数

$$\left. \frac{\partial z}{\partial l} \right|_{(1, 0)} = \nabla z(1, 0) \cdot e_l =$$



- $z = f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处沿方向 l 的方向导数：

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0)} = \nabla f(x_0, y_0) \cdot e_l = |\nabla f| \cos \theta$$



例 求 $z = xe^{2y}$ 在点 $p(1, 0)$ 处，往点 $q(2, -1)$ 方向上的方向导数。

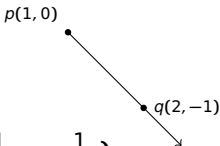
解 1. 方向 $l = \overrightarrow{pq} = (1, -1)$ ，对应单位向量 $e_l = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$

2. 计算梯度

$$\nabla z = (z_x, z_y) = (e^{2y}, 2xe^{2y})$$

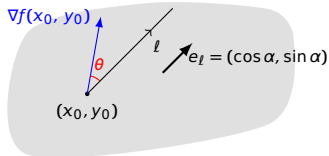
3. 方向导数

$$\left. \frac{\partial z}{\partial l} \right|_{(1, 0)} = \nabla z(1, 0) \cdot e_l = (1, 2) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$



- $z = f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处沿方向 l 的方向导数：

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0)} = \nabla f(x_0, y_0) \cdot e_l = |\nabla f| \cos \theta$$



例 求 $z = xe^{2y}$ 在点 $p(1, 0)$ 处，往点 $q(2, -1)$ 方向上的方向导数。

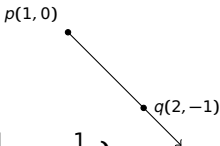
解 1. 方向 $l = \overrightarrow{pq} = (1, -1)$ ，对应单位向量 $e_l = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$

2. 计算梯度

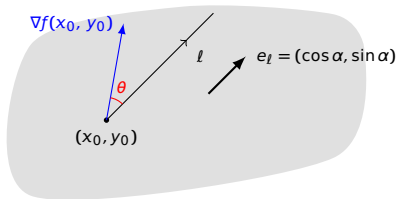
$$\nabla z = (z_x, z_y) = (e^{2y}, 2xe^{2y})$$

3. 方向导数

$$\left. \frac{\partial z}{\partial l} \right|_{(1, 0)} = \nabla z(1, 0) \cdot e_l = (1, 2) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

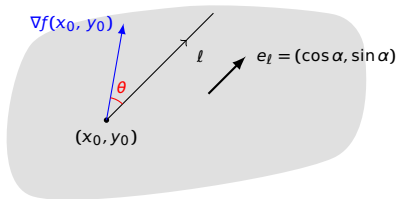


- $$\left. \frac{\partial f}{\partial \ell} \right|_{(x_0, y_0)} = |\nabla f(x_0, y_0)| \cos \theta$$



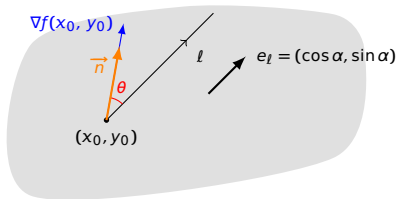
- $$\left. \frac{\partial f}{\partial \ell} \right|_{(x_0, y_0)} = |\nabla f(x_0, y_0)| \cos \theta$$

假设 $\nabla f \neq 0$,



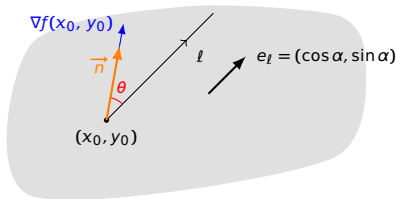
- $\left. \frac{\partial f}{\partial \ell} \right|_{(x_0, y_0)} = |\nabla f(x_0, y_0)| \cos \theta$

假设 $\nabla f \neq 0$, 令 $\vec{n} := \frac{1}{|\nabla f|} \nabla f$



- $\left. \frac{\partial f}{\partial \ell} \right|_{(x_0, y_0)} = |\nabla f(x_0, y_0)| \cos \theta$

假设 $\nabla f \neq 0$, 令 $\vec{n} := \frac{1}{|\nabla f|} \nabla f$



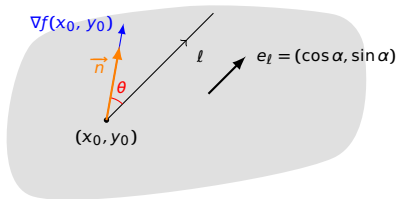
- 当 $\theta = 0$ 时,

- 当 $\theta = \pi$ 时,

- 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时,

- $\left. \frac{\partial f}{\partial \ell} \right|_{(x_0, y_0)} = |\nabla f(x_0, y_0)| \cos \theta$

假设 $\nabla f \neq 0$, 令 $\vec{n} := \frac{1}{|\nabla f|} \nabla f$



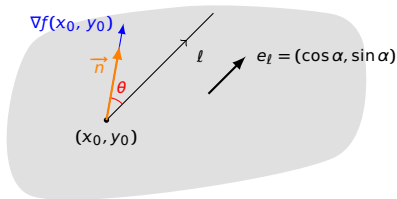
- 当 $\theta = 0$ 时, $e_\ell = \vec{n}$,

- 当 $\theta = \pi$ 时,

- 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时,

- $$\left. \frac{\partial f}{\partial \ell} \right|_{(x_0, y_0)} = |\nabla f(x_0, y_0)| \cos \theta$$

假设 $\nabla f \neq 0$, 令 $\vec{n} := \frac{1}{|\nabla f|} \nabla f$



- 当 $\theta = 0$ 时, $e_\ell = \vec{n}$, 并且方向导数达到最大值:

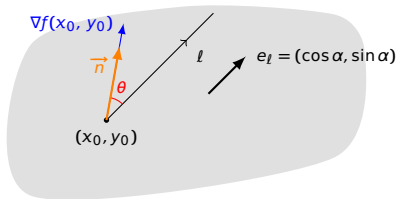
$$\left. \frac{\partial f}{\partial \ell} \right|_{(x_0, y_0)} = |\nabla f(x_0, y_0)| > 0,$$

- 当 $\theta = \pi$ 时,

- 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时,

- $$\left. \frac{\partial f}{\partial \ell} \right|_{(x_0, y_0)} = |\nabla f(x_0, y_0)| \cos \theta$$

假设 $\nabla f \neq 0$, 令 $\vec{n} := \frac{1}{|\nabla f|} \nabla f$



- 当 $\theta = 0$ 时, $e_\ell = \vec{n}$, 并且方向导数达到最大值:

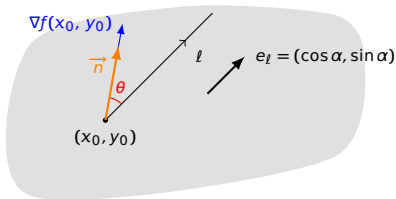
$$\left. \frac{\partial f}{\partial \ell} \right|_{(x_0, y_0)} = |\nabla f(x_0, y_0)| > 0, \text{ 说明沿梯度方向, 函数增速最快}$$

- 当 $\theta = \pi$ 时,

- 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时,

- $\left. \frac{\partial f}{\partial \ell} \right|_{(x_0, y_0)} = |\nabla f(x_0, y_0)| \cos \theta$

假设 $\nabla f \neq 0$, 令 $\vec{n} := \frac{1}{|\nabla f|} \nabla f$



- 当 $\theta = 0$ 时, $e_\ell = \vec{n}$, 并且方向导数达到最大值:

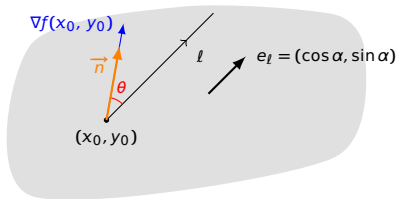
$$\left. \frac{\partial f}{\partial \ell} \right|_{(x_0, y_0)} = |\nabla f(x_0, y_0)| > 0, \text{ 说明沿梯度方向, 函数增速最快}$$

- 当 $\theta = \pi$ 时, $e_\ell = -\vec{n}$,

- 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时,

- $$\left. \frac{\partial f}{\partial \ell} \right|_{(x_0, y_0)} = |\nabla f(x_0, y_0)| \cos \theta$$

假设 $\nabla f \neq 0$, 令 $\vec{n} := \frac{1}{|\nabla f|} \nabla f$



- 当 $\theta = 0$ 时, $e_\ell = \vec{n}$, 并且方向导数达到最大值:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \ell} \right|_{(x_0, y_0)} = |\nabla f(x_0, y_0)| > 0, \text{ 说明沿梯度方向, 函数增速最快}$$

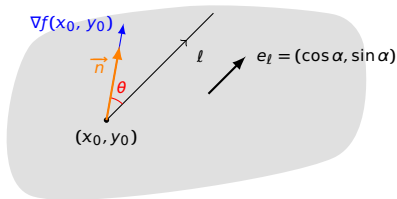
- 当 $\theta = \pi$ 时, $e_\ell = -\vec{n}$, 并且方向导数达到最小值:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \ell} \right|_{(x_0, y_0)} = -|\nabla f(x_0, y_0)| < 0,$$

- 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时,

- $$\left. \frac{\partial f}{\partial \ell} \right|_{(x_0, y_0)} = |\nabla f(x_0, y_0)| \cos \theta$$

假设 $\nabla f \neq 0$, 令 $\vec{n} := \frac{1}{|\nabla f|} \nabla f$



- 当 $\theta = 0$ 时, $e_\ell = \vec{n}$, 并且方向导数达到最大值:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \ell} \right|_{(x_0, y_0)} = |\nabla f(x_0, y_0)| > 0, \text{ 说明沿梯度方向, 函数增速最快}$$

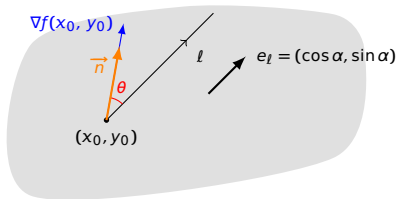
- 当 $\theta = \pi$ 时, $e_\ell = -\vec{n}$, 并且方向导数达到最小值:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \ell} \right|_{(x_0, y_0)} = -|\nabla f(x_0, y_0)| < 0, \text{ 说明沿梯度反方向, 函数减速最快}$$

- 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时,

- $$\left. \frac{\partial f}{\partial \ell} \right|_{(x_0, y_0)} = |\nabla f(x_0, y_0)| \cos \theta$$

假设 $\nabla f \neq 0$, 令 $\vec{n} := \frac{1}{|\nabla f|} \nabla f$



- 当 $\theta = 0$ 时, $e_\ell = \vec{n}$, 并且方向导数达到最大值:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \ell} \right|_{(x_0, y_0)} = |\nabla f(x_0, y_0)| > 0, \text{ 说明沿梯度方向, 函数增速最快}$$

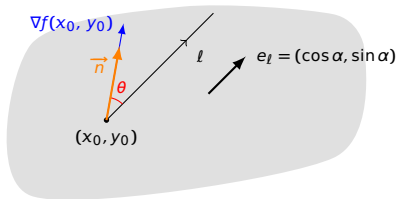
- 当 $\theta = \pi$ 时, $e_\ell = -\vec{n}$, 并且方向导数达到最小值:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \ell} \right|_{(x_0, y_0)} = -|\nabla f(x_0, y_0)| < 0, \text{ 说明沿梯度反方向, 函数减速最快}$$

- 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, $e_\ell \perp \vec{n}$,

- $$\left. \frac{\partial f}{\partial \ell} \right|_{(x_0, y_0)} = |\nabla f(x_0, y_0)| \cos \theta$$

假设 $\nabla f \neq 0$, 令 $\vec{n} := \frac{1}{|\nabla f|} \nabla f$



- 当 $\theta = 0$ 时, $e_\ell = \vec{n}$, 并且方向导数达到最大值:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \ell} \right|_{(x_0, y_0)} = |\nabla f(x_0, y_0)| > 0, \text{ 说明沿梯度方向, 函数增速最快}$$

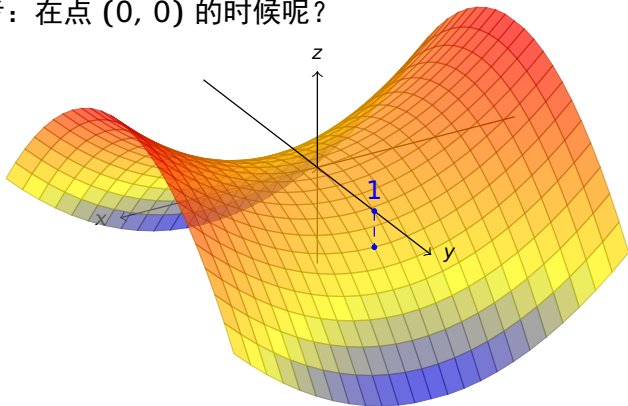
- 当 $\theta = \pi$ 时, $e_\ell = -\vec{n}$, 并且方向导数达到最小值:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \ell} \right|_{(x_0, y_0)} = -|\nabla f(x_0, y_0)| < 0, \text{ 说明沿梯度反方向, 函数减速最快}$$

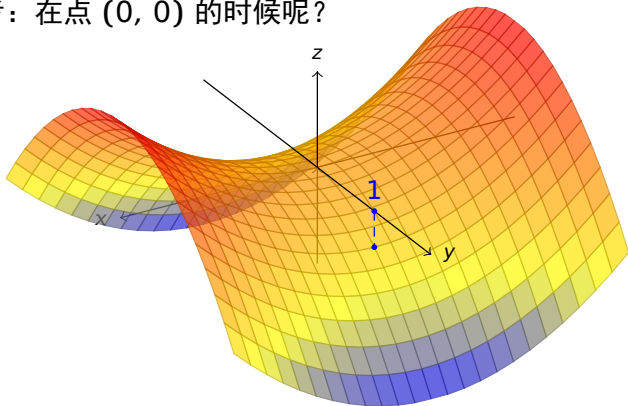
- 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, $e_\ell \perp \vec{n}$, 并且方向导数为零: $\left. \frac{\partial f}{\partial \ell} \right|_{(x_0, y_0)} = 0$ 。

例 函数 $z = x^2 - y^2$ 在点 $(0, 1)$ 沿什么方向，其增加、减少的速度最大？并思考：在点 $(0, 0)$ 的时候呢？

例 函数 $z = x^2 - y^2$ 在点 $(0, 1)$ 沿什么方向，其增加、减少的速度最大？并思考：在点 $(0, 0)$ 的时候呢？

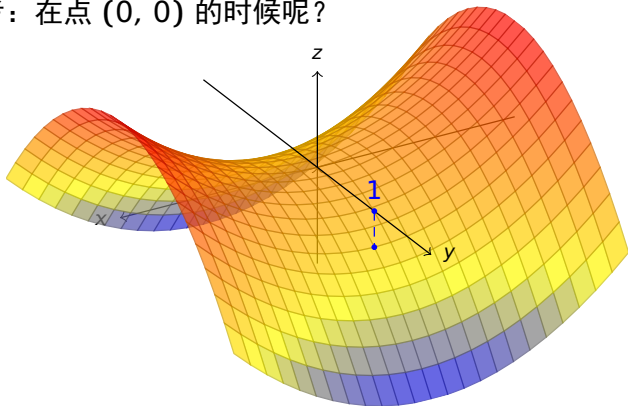


例 函数 $z = x^2 - y^2$ 在点 $(0, 1)$ 沿什么方向，其增加、减少的速度最大？并思考：在点 $(0, 0)$ 的时候呢？



解 梯度 $\nabla z = (2x, -2y)$,

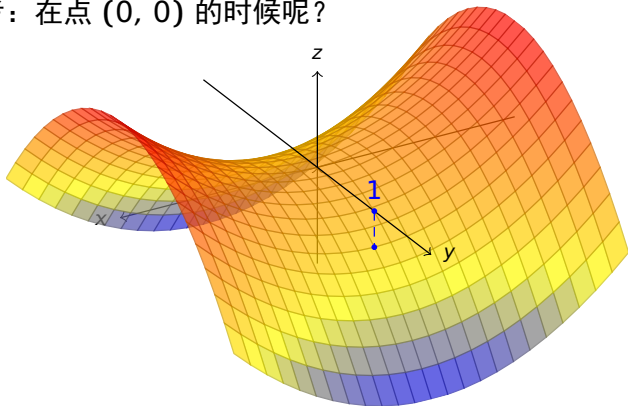
例 函数 $z = x^2 - y^2$ 在点 $(0, 1)$ 沿什么方向，其增加、减少的速度最大？并思考：在点 $(0, 0)$ 的时候呢？



解 梯度 $\nabla z = (2x, -2y)$,

- 沿方向 $\nabla z(0, 1) = (\quad)$ 增加最快
- 沿方向 $-\nabla z(0, 1) = (\quad)$ 减少最快

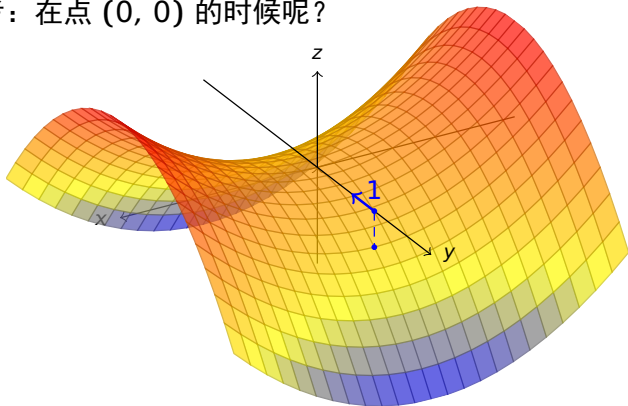
例 函数 $z = x^2 - y^2$ 在点 $(0, 1)$ 沿什么方向，其增加、减少的速度最大？并思考：在点 $(0, 0)$ 的时候呢？



解 梯度 $\nabla z = (2x, -2y)$ ，所以在点 $(0, 1)$ 时，

- 沿方向 $\nabla z(0, 1) = (0, -2)$ 增加最快
- 沿方向 $-\nabla z(0, 1) = (0, 2)$ 减少最快

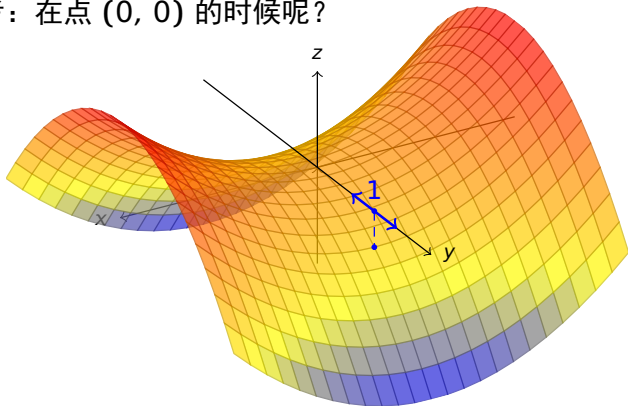
例 函数 $z = x^2 - y^2$ 在点 $(0, 1)$ 沿什么方向，其增加、减少的速度最大？并思考：在点 $(0, 0)$ 的时候呢？



解 梯度 $\nabla z = (2x, -2y)$ ，所以在点 $(0, 1)$ 时，

- 沿方向 $\nabla z(0, 1) = (0, -2)$ 增加最快
- 沿方向 $-\nabla z(0, 1) = (0, 2)$ 减少最快

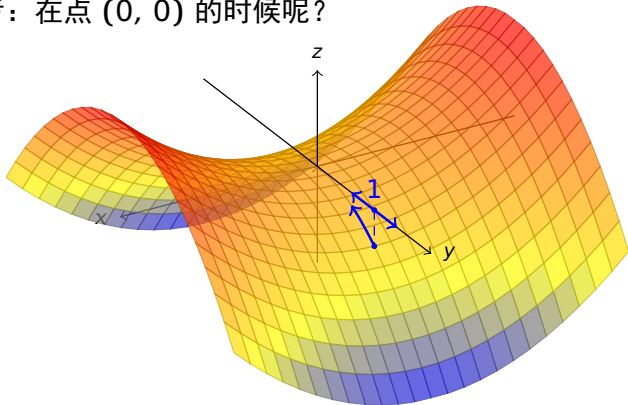
例 函数 $z = x^2 - y^2$ 在点 $(0, 1)$ 沿什么方向，其增加、减少的速度最大？并思考：在点 $(0, 0)$ 的时候呢？



解 梯度 $\nabla z = (2x, -2y)$ ，所以在点 $(0, 1)$ 时，

- 沿方向 $\nabla z(0, 1) = (0, -2)$ 增加最快
- 沿方向 $-\nabla z(0, 1) = (0, 2)$ 减少最快

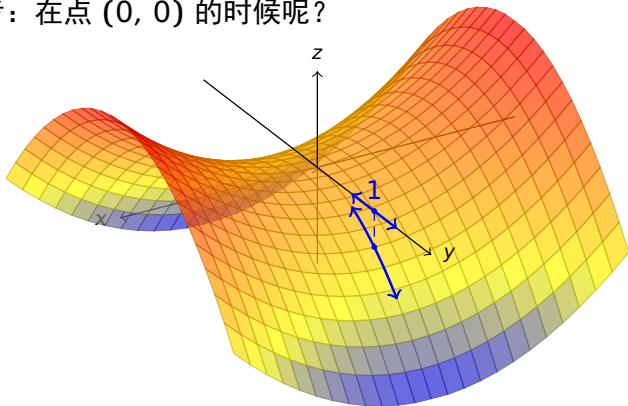
例 函数 $z = x^2 - y^2$ 在点 $(0, 1)$ 沿什么方向，其增加、减少的速度最大？并思考：在点 $(0, 0)$ 的时候呢？



解 梯度 $\nabla z = (2x, -2y)$ ，所以在点 $(0, 1)$ 时，

- 沿方向 $\nabla z(0, 1) = (0, -2)$ 增加最快
- 沿方向 $-\nabla z(0, 1) = (0, 2)$ 减少最快

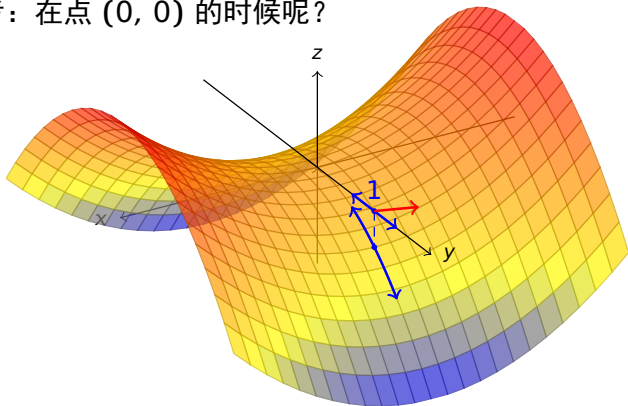
例 函数 $z = x^2 - y^2$ 在点 $(0, 1)$ 沿什么方向，其增加、减少的速度最大？并思考：在点 $(0, 0)$ 的时候呢？



解 梯度 $\nabla z = (2x, -2y)$ ，所以在点 $(0, 1)$ 时，

- 沿方向 $\nabla z(0, 1) = (0, -2)$ 增加最快
- 沿方向 $-\nabla z(0, 1) = (0, 2)$ 减少最快

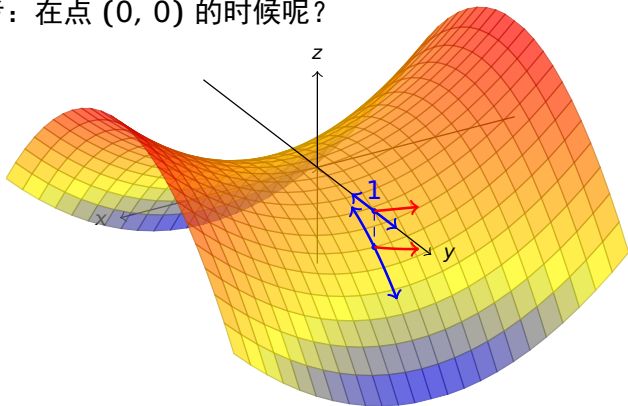
例 函数 $z = x^2 - y^2$ 在点 $(0, 1)$ 沿什么方向，其增加、减少的速度最大？并思考：在点 $(0, 0)$ 的时候呢？



解 梯度 $\nabla z = (2x, -2y)$ ，所以在点 $(0, 1)$ 时，

- 沿方向 $\nabla z(0, 1) = (0, -2)$ 增加最快
- 沿方向 $-\nabla z(0, 1) = (0, 2)$ 减少最快

例 函数 $z = x^2 - y^2$ 在点 $(0, 1)$ 沿什么方向，其增加、减少的速度最大？并思考：在点 $(0, 0)$ 的时候呢？



解 梯度 $\nabla z = (2x, -2y)$ ，所以在点 $(0, 1)$ 时，

- 沿方向 $\nabla z(0, 1) = (0, -2)$ 增加最快
- 沿方向 $-\nabla z(0, 1) = (0, 2)$ 减少最快

三元函数梯度

- 三元函数 $z = f(x, y, z)$ 在点 $p_0(x_0, y_0, z_0)$ 的梯度:

三元函数梯度

- 三元函数 $z = f(x, y, z)$ 在点 $p_0(x_0, y_0, z_0)$ 的梯度:

$$\left(f_x(x_0, y_0, z_0), f_y(x_0, y_0, z_0), f_z(x_0, y_0, z_0) \right)$$

三元函数梯度

- 三元函数 $z = f(x, y, z)$ 在点 $p_0(x_0, y_0, z_0)$ 的梯度:

$$\begin{aligned} & f_x(x_0, y_0, z_0) \vec{i} + f_y(x_0, y_0, z_0) \vec{j} + f_z(x_0, y_0, z_0) \vec{k} \\ &= \left(f_x(x_0, y_0, z_0), f_y(x_0, y_0, z_0), f_z(x_0, y_0, z_0) \right) \end{aligned}$$

三元函数梯度

- 三元函数 $z = f(x, y, z)$ 在点 $p_0(x_0, y_0, z_0)$ 的梯度:

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} f(x_0, y_0, z_0) &\stackrel{\text{或}}{=} \nabla f(x_0, y_0, z_0) \\&= f_x(x_0, y_0, z_0) \vec{i} + f_y(x_0, y_0, z_0) \vec{j} + f_z(x_0, y_0, z_0) \vec{k} \\&= \left(f_x(x_0, y_0, z_0), f_y(x_0, y_0, z_0), f_z(x_0, y_0, z_0) \right)\end{aligned}$$

三元函数梯度

- 三元函数 $z = f(x, y, z)$ 在点 $p_0(x_0, y_0, z_0)$ 的梯度:

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} f(x_0, y_0, z_0) &\stackrel{\text{或}}{=} \nabla f(x_0, y_0, z_0) \\&= f_x(x_0, y_0, z_0) \vec{i} + f_y(x_0, y_0, z_0) \vec{j} + f_z(x_0, y_0, z_0) \vec{k} \\&= \left(f_x(x_0, y_0, z_0), f_y(x_0, y_0, z_0), f_z(x_0, y_0, z_0) \right)\end{aligned}$$

当 $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ 时, 则函数在点 (x_0, y_0, z_0) 处,

- 沿梯度方向, 增加速度最快,
- 沿梯度反方向, 减少速度最快,
- 梯度垂直方向, 其改变率为零

三元函数梯度

- 三元函数 $z = f(x, y, z)$ 在点 $p_0(x_0, y_0, z_0)$ 的梯度:

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} f(x_0, y_0, z_0) &\stackrel{\text{或}}{=} \nabla f(x_0, y_0, z_0) \\&= f_x(x_0, y_0, z_0) \vec{i} + f_y(x_0, y_0, z_0) \vec{j} + f_z(x_0, y_0, z_0) \vec{k} \\&= \left(f_x(x_0, y_0, z_0), f_y(x_0, y_0, z_0), f_z(x_0, y_0, z_0) \right)\end{aligned}$$

当 $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ 时, 则函数在点 (x_0, y_0, z_0) 处,

- 沿梯度方向, 增加速度最快, 达到 $|\nabla f(x_0, y_0, z_0)|$
- 沿梯度反方向, 减少速度最快,
- 梯度垂直方向, 其改变率为零

三元函数梯度

- 三元函数 $z = f(x, y, z)$ 在点 $p_0(x_0, y_0, z_0)$ 的梯度:

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} f(x_0, y_0, z_0) &\stackrel{\text{或}}{=} \nabla f(x_0, y_0, z_0) \\&= f_x(x_0, y_0, z_0) \vec{i} + f_y(x_0, y_0, z_0) \vec{j} + f_z(x_0, y_0, z_0) \vec{k} \\&= \left(f_x(x_0, y_0, z_0), f_y(x_0, y_0, z_0), f_z(x_0, y_0, z_0) \right)\end{aligned}$$

当 $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ 时, 则函数在点 (x_0, y_0, z_0) 处,

- 沿梯度方向, 增加速度最快, 达到 $|\nabla f(x_0, y_0, z_0)|$
- 沿梯度反方向, 减少速度最快, 达到 $-|\nabla f(x_0, y_0, z_0)|$
- 梯度垂直方向, 其改变率为零

例 设 $f(x, y, z) = -x^3 + xy^2 + z$, $p_0(0.5, 0.5, 1)$ 。问: f 在 p_0 点沿什么方向变化最快, 变化率是多少?

例 设 $f(x, y, z) = -x^3 + xy^2 + z$, $p_0(0.5, 0.5, 1)$ 。问: f 在 p_0 点沿什么方向变化最快, 变化率是多少?

解 1. f 的梯度是

$$\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = (\quad \quad \quad)$$

例 设 $f(x, y, z) = -x^3 + xy^2 + z$, $p_0(0.5, 0.5, 1)$ 。问: f 在 p_0 点沿什么方向变化最快, 变化率是多少?

解 1. f 的梯度是

$$\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = (-3x^2 + y^2, \quad \quad \quad)$$

例 设 $f(x, y, z) = -x^3 + xy^2 + z$, $p_0(0.5, 0.5, 1)$ 。问: f 在 p_0 点沿什么方向变化最快, 变化率是多少?

解 1. f 的梯度是

$$\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = (-3x^2 + y^2, 2xy, 1)$$

例 设 $f(x, y, z) = -x^3 + xy^2 + z$, $p_0(0.5, 0.5, 1)$ 。问: f 在 p_0 点沿什么方向变化最快, 变化率是多少?

解 1. f 的梯度是

$$\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = (-3x^2 + y^2, 2xy, 1)$$

例 设 $f(x, y, z) = -x^3 + xy^2 + z$, $p_0(0.5, 0.5, 1)$ 。问: f 在 p_0 点沿什么方向变化最快, 变化率是多少?

解 1. f 的梯度是

$$\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = (-3x^2 + y^2, 2xy, 1)$$

所以 $\nabla f(0.5, 0.5, 1) =$

例 设 $f(x, y, z) = -x^3 + xy^2 + z$, $p_0(0.5, 0.5, 1)$ 。问: f 在 p_0 点沿什么方向变化最快, 变化率是多少?

解 1. f 的梯度是

$$\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = (-3x^2 + y^2, 2xy, 1)$$

所以 $\nabla f(0.5, 0.5, 1) = (-0.5, 0.5, 1)$

例 设 $f(x, y, z) = -x^3 + xy^2 + z$, $p_0(0.5, 0.5, 1)$ 。问: f 在 p_0 点沿什么方向变化最快, 变化率是多少?

解 1. f 的梯度是

$$\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = (-3x^2 + y^2, 2xy, 1)$$

所以 $\nabla f(0.5, 0.5, 1) = (-0.5, 0.5, 1)$

2. 函数沿梯度方向 $\nabla f(1, 1, 0)$, 增加速度最大, 达到 $|\nabla f(x_0, y_0)|$

例 设 $f(x, y, z) = -x^3 + xy^2 + z$, $p_0(0.5, 0.5, 1)$ 。问: f 在 p_0 点沿什么方向变化最快, 变化率是多少?

解 1. f 的梯度是

$$\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = (-3x^2 + y^2, 2xy, 1)$$

所以 $\nabla f(0.5, 0.5, 1) = (-0.5, 0.5, 1)$

2. 函数沿梯度方向 $\nabla f(1, 1, 0) = (2, -2, -1)$, 增加速度最大, 达到 $|\nabla f(x_0, y_0)|$

例 设 $f(x, y, z) = -x^3 + xy^2 + z$, $p_0(0.5, 0.5, 1)$ 。问: f 在 p_0 点沿什么方向变化最快, 变化率是多少?

解 1. f 的梯度是

$$\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = (-3x^2 + y^2, 2xy, 1)$$

所以 $\nabla f(0.5, 0.5, 1) = (-0.5, 0.5, 1)$

2. 函数沿梯度方向 $\nabla f(1, 1, 0) = (2, -2, -1)$, 增加速度最大, 达到 $|\nabla f(x_0, y_0)| = 3$

例 设 $f(x, y, z) = -x^3 + xy^2 + z$, $p_0(0.5, 0.5, 1)$ 。问: f 在 p_0 点沿什么方向变化最快, 变化率是多少?

解 1. f 的梯度是

$$\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = (-3x^2 + y^2, 2xy, 1)$$

所以 $\nabla f(0.5, 0.5, 1) = (-0.5, 0.5, 1)$

2. 函数沿梯度方向 $\nabla f(1, 1, 0) = (2, -2, -1)$, 增加速度最大, 达到 $|\nabla f(x_0, y_0)| = 3$

3. 函数沿梯度反方向 $-\nabla f(1, 1, 0)$, 减少速度最大, 达到 $-|\nabla f(x_0, y_0)|$

例 设 $f(x, y, z) = -x^3 + xy^2 + z$, $p_0(0.5, 0.5, 1)$ 。问: f 在 p_0 点沿什么方向变化最快, 变化率是多少?

解 1. f 的梯度是

$$\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = (-3x^2 + y^2, 2xy, 1)$$

所以 $\nabla f(0.5, 0.5, 1) = (-0.5, 0.5, 1)$

2. 函数沿梯度方向 $\nabla f(1, 1, 0) = (2, -2, -1)$, 增加速度最大, 达到 $|\nabla f(x_0, y_0)| = 3$

3. 函数沿梯度反方向 $-\nabla f(1, 1, 0) = (-2, 2, 1)$, 减少速度最大, 达到 $-|\nabla f(x_0, y_0)|$

例 设 $f(x, y, z) = -x^3 + xy^2 + z$, $p_0(0.5, 0.5, 1)$ 。问: f 在 p_0 点沿什么方向变化最快, 变化率是多少?

解 1. f 的梯度是

$$\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = (-3x^2 + y^2, 2xy, 1)$$

所以 $\nabla f(0.5, 0.5, 1) = (-0.5, 0.5, 1)$

2. 函数沿梯度方向 $\nabla f(1, 1, 0) = (2, -2, -1)$, 增加速度最大, 达到 $|\nabla f(x_0, y_0)| = 3$

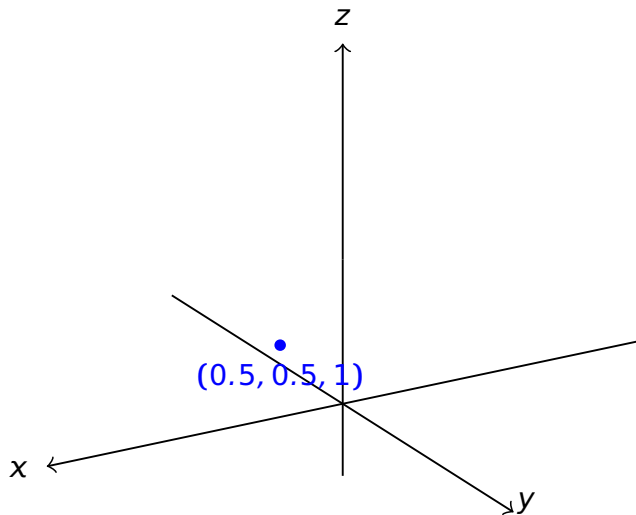
3. 函数沿梯度反方向 $-\nabla f(1, 1, 0) = (-2, 2, 1)$, 减少速度最大, 达到 $-|\nabla f(x_0, y_0)| = -3$

函数 $f(x, y, z) = -x^3 + xy^2 + z$

- 在点 $p_0(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ 的梯度
- 等值面与梯度向量场

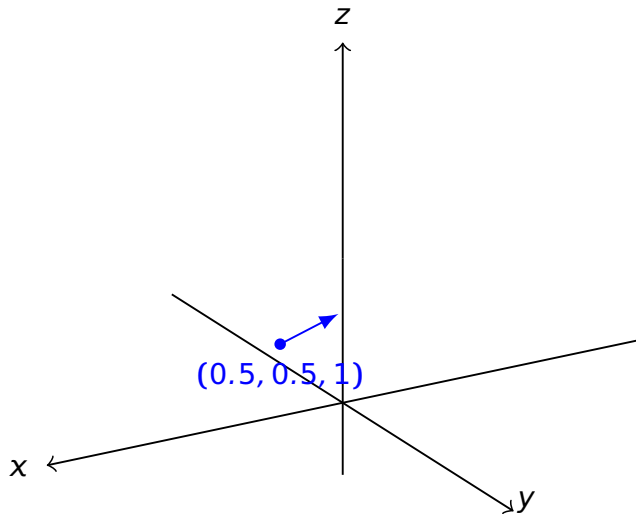
函数 $f(x, y, z) = -x^3 + xy^2 + z$

- 在点 $p_0(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ 的梯度
- 等值面与梯度向量场



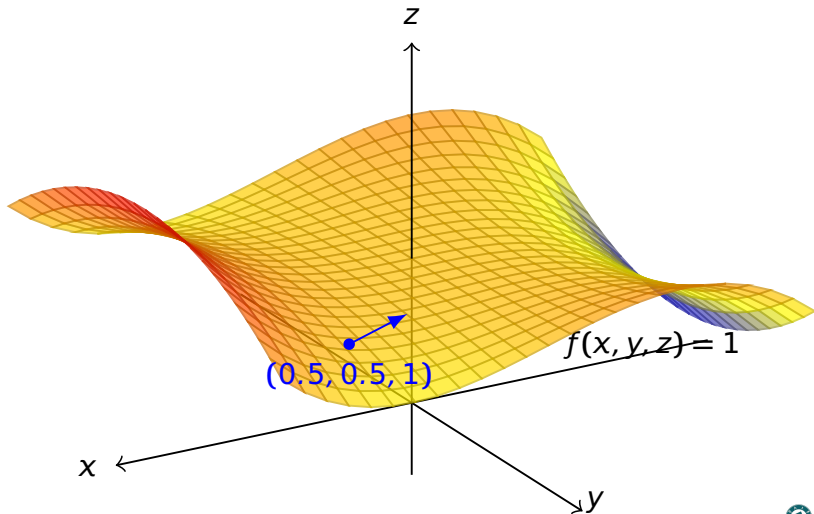
函数 $f(x, y, z) = -x^3 + xy^2 + z$

- 在点 $p_0(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ 的梯度
- 等值面与梯度向量场



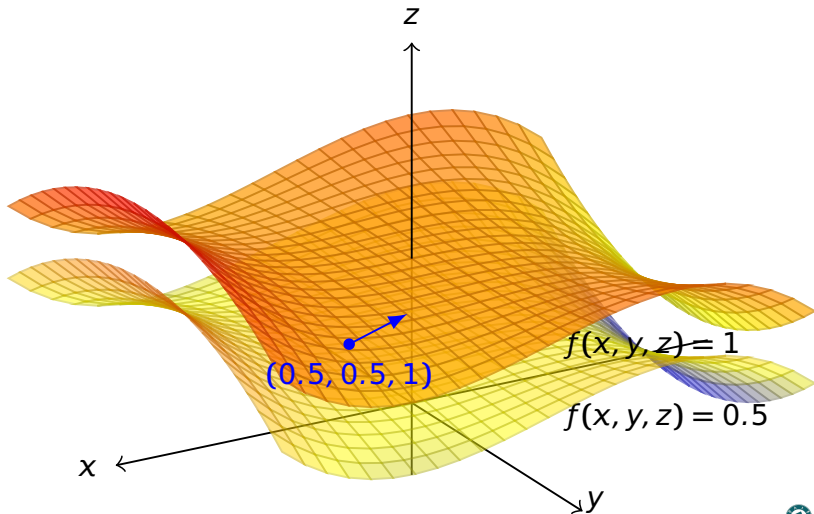
函数 $f(x, y, z) = -x^3 + xy^2 + z$

- 在点 $p_0(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ 的梯度
- 等值面与梯度向量场



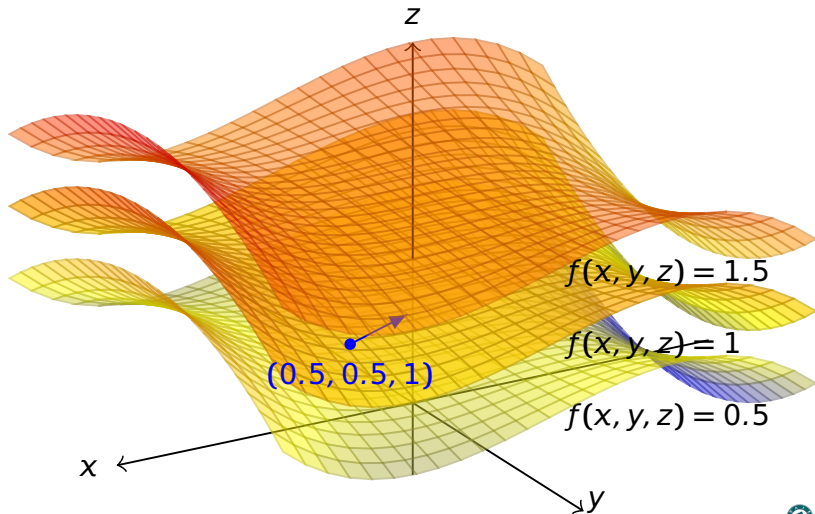
函数 $f(x, y, z) = -x^3 + xy^2 + z$

- 在点 $p_0(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ 的梯度
- 等值面与梯度向量场



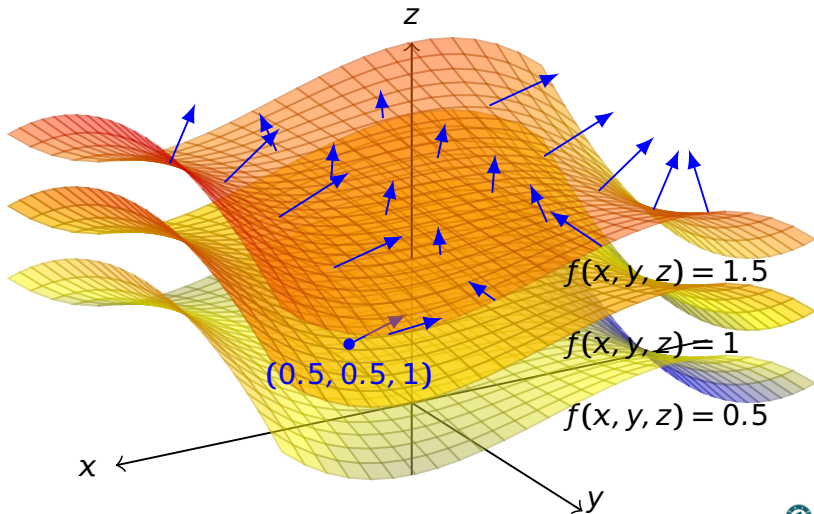
函数 $f(x, y, z) = -x^3 + xy^2 + z$

- 在点 $p_0(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ 的梯度
- 等值面与梯度向量场



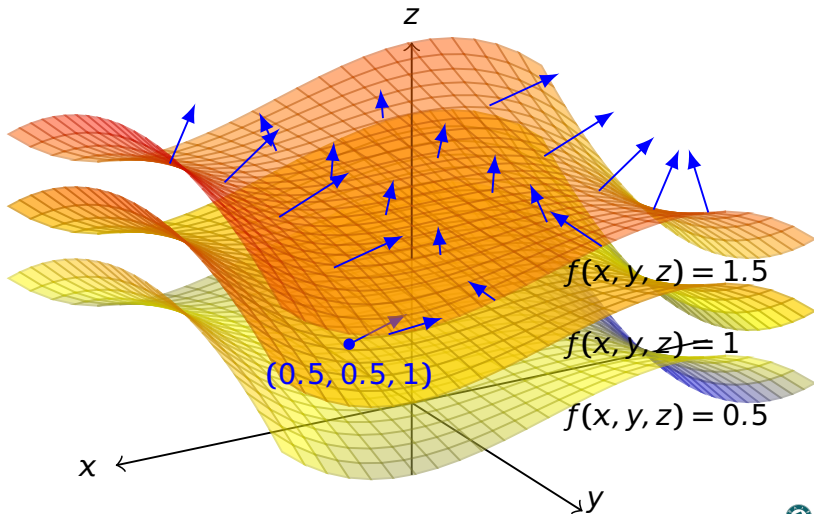
函数 $f(x, y, z) = -x^3 + xy^2 + z$

- 在点 $p_0(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ 的梯度
- 等值面与梯度向量场



函数 $f(x, y, z) = -x^3 + xy^2 + z$

- 在点 $p_0(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ 的梯度
- 等值面与梯度向量场 (互相垂直)



设三元函数 $f(x, y, z)$ 在点 $p_0(x_0, y_0, z_0)$ 的一个邻域内有定义, 设 ℓ 是从 p_0 出发的射线, 方向向量为

$$e_\ell = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

设三元函数 $f(x, y, z)$ 在点 $p_0(x_0, y_0, z_0)$ 的一个邻域内有定义, 设 ℓ 是从 p_0 出发的射线, 方向向量为

$$e_\ell = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

则 $f(x, y, z)$ 在点 p_0 处沿方向 ℓ 的变化率, 即方向导数, 为

设三元函数 $f(x, y, z)$ 在点 $p_0(x_0, y_0, z_0)$ 的一个邻域内有定义, 设 ℓ 是从 p_0 出发的射线, 方向向量为

$$e_\ell = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

则 $f(x, y, z)$ 在点 p_0 处沿方向 ℓ 的变化率, 即方向导数, 为

$$\frac{f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta, z_0 + t \cos \gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{t}$$

设三元函数 $f(x, y, z)$ 在点 $p_0(x_0, y_0, z_0)$ 的一个邻域内有定义, 设 ℓ 是从 p_0 出发的射线, 方向向量为

$$e_\ell = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

则 $f(x, y, z)$ 在点 p_0 处沿方向 ℓ 的变化率, 即方向导数, 为

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta, z_0 + t \cos \gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{t}$$

设三元函数 $f(x, y, z)$ 在点 $p_0(x_0, y_0, z_0)$ 的一个邻域内有定义, 设 l 是从 p_0 出发的射线, 方向向量为

$$e_l = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

则 $f(x, y, z)$ 在点 p_0 处沿方向 l 的变化率, 即方向导数, 为

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0, z_0)} : \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta, z_0 + t \cos \gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{t} \end{aligned}$$

设三元函数 $f(x, y, z)$ 在点 $p_0(x_0, y_0, z_0)$ 的一个邻域内有定义, 设 ℓ 是从 p_0 出发的射线, 方向向量为

$$e_\ell = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

则 $f(x, y, z)$ 在点 p_0 处沿方向 ℓ 的变化率, 即方向导数, 为

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial f}{\partial \ell} \right|_{(x_0, y_0, z_0)} : \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta, z_0 + t \cos \gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{t} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta, z_0 + t \cos \gamma) \end{aligned}$$

设三元函数 $f(x, y, z)$ 在点 $p_0(x_0, y_0, z_0)$ 的一个邻域内有定义, 设 l 是从 p_0 出发的射线, 方向向量为

$$e_l = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

则 $f(x, y, z)$ 在点 p_0 处沿方向 l 的变化率, 即方向导数, 为

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0, z_0)} : \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta, z_0 + t \cos \gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{t} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta, z_0 + t \cos \gamma) \\ &= f_x(x_0, y_0, z_0) \cos \alpha + f_y(x_0, y_0, z_0) \cos \beta + f_z(x_0, y_0, z_0) \cos \gamma \end{aligned}$$

设三元函数 $f(x, y, z)$ 在点 $p_0(x_0, y_0, z_0)$ 的一个邻域内有定义, 设 ℓ 是从 p_0 出发的射线, 方向向量为

$$e_\ell = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

则 $f(x, y, z)$ 在点 p_0 处沿方向 ℓ 的变化率, 即方向导数, 为

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial f}{\partial \ell} \right|_{(x_0, y_0, z_0)} : \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta, z_0 + t \cos \gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{t} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta, z_0 + t \cos \gamma) \\ &= f_x(x_0, y_0, z_0) \cos \alpha + f_y(x_0, y_0, z_0) \cos \beta + f_z(x_0, y_0, z_0) \cos \gamma \\ &= \nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot e_\ell \end{aligned}$$

设三元函数 $f(x, y, z)$ 在点 $p_0(x_0, y_0, z_0)$ 的一个邻域内有定义, 设 ℓ 是从 p_0 出发的射线, 方向向量为

$$e_\ell = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

则 $f(x, y, z)$ 在点 p_0 处沿方向 ℓ 的变化率, 即方向导数, 为

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial f}{\partial \ell} \right|_{(x_0, y_0, z_0)} : \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta, z_0 + t \cos \gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{t} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta, z_0 + t \cos \gamma) \\ &= f_x(x_0, y_0, z_0) \cos \alpha + f_y(x_0, y_0, z_0) \cos \beta + f_z(x_0, y_0, z_0) \cos \gamma \\ &= \nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot e_\ell = |\nabla f| \cos \theta \end{aligned}$$

其中 θ 是 $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ 与 e_ℓ 的夹角