§8.2 多元函数的概念

2017-2018 学年 II

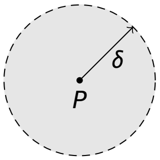
邻域、去心邻域

设 $P(x_0, y_0)$ 是 xoy 平面中的点；$\delta > 0$。

P

邻域、去心邻域

设 $P(x_0, y_0)$ 是 xoy 平面中的点；$\delta > 0$。

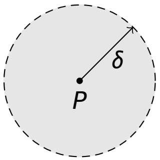


邻域、去心邻域

设 $P(x_0, y_0)$ 是 xoy 平面中的点；$\delta > 0$。

- P 的 δ 邻域

$$U(P, \delta)$$



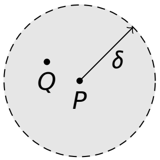
P的δ邻域$U(P, \delta)$

邻域、去心邻域

设 $P(x_0, y_0)$ 是 xoy 平面中的点；$\delta > 0$。

- P 的 δ 邻域

$$U(P, \delta) = \{Q \in \mathbb{R}^2 | \qquad\qquad \}$$



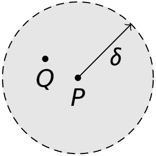
P的δ邻域$U(P, \delta)$

邻域、去心邻域

设 $P(x_0, y_0)$ 是 xoy 平面中的点；$\delta > 0$。

- P 的 δ 邻域

$$U(P, \delta) = \{Q \in \mathbb{R}^2 \mid |PQ| < \delta\}$$



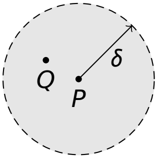
P的δ邻域$U(P, \delta)$

邻域、去心邻域

设 $P(x_0, y_0)$ 是 xoy 平面中的点；$\delta > 0$。

- P 的 δ 邻域

$$
\begin{aligned}
U(P, \delta) &= \{Q \in \mathbb{R}^2 \mid |PQ| < \delta\} \\
&= \{(x, y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta\}
\end{aligned}
$$



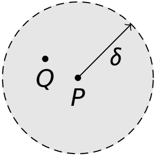
P的δ邻域$U(P, \delta)$

邻域、去心邻域

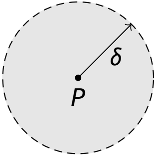
设 $P(x_0, y_0)$ 是 xoy 平面中的点；$\delta > 0$。

- P 的 δ 邻域

$$
\begin{aligned}
U(P, \delta) &= \{Q \in \mathbb{R}^2 \mid |PQ| < \delta\} \\
&= \{(x, y) \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\}
\end{aligned}
$$



P的δ邻域$U(P, \delta)$

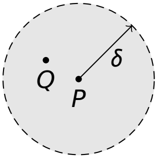


邻域、去心邻域

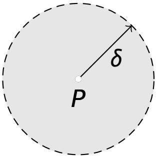
设 $P(x_0, y_0)$ 是 xoy 平面中的点；$\delta > 0$。

- P 的 δ 邻域

$$U(P, \delta) = \{Q \in \mathbb{R}^2 \mid |PQ| < \delta\}$$
$$= \{(x, y) \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\}$$



P的δ邻域$U(P, \delta)$

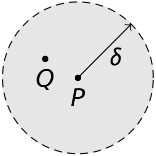


邻域、去心邻域

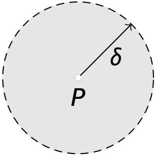
设 $P(x_0, y_0)$ 是 xoy 平面中的点；$\delta > 0$。

- P 的 δ 邻域

$$U(P, \delta) = \{Q \in \mathbb{R}^2 \mid |PQ| < \delta\}$$
$$= \{(x, y) \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\}$$



P的δ邻域$U(P, \delta)$



P的去心δ邻域$\mathring{U}(P, \delta)$

- P 的 去心 δ 邻域

$$\mathring{U}(P, \delta)$$

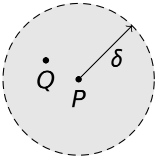
邻域、去心邻域

设 $P(x_0, y_0)$ 是 xoy 平面中的点；$\delta > 0$。

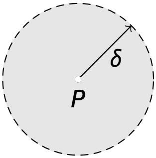
- P 的 δ 邻域

$$U(P,\delta) = \{Q \in \mathbb{R}^2 \mid |PQ| < \delta\}$$

$$= \{(x,y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta\}$$



P的δ邻域$U(P,\delta)$



P的去心δ邻域$\mathring{U}(P,\delta)$

- P 的 去心 δ 邻域

$$\mathring{U}(P,\delta) = U(P,\delta) - \{P\}$$

设 E 是平面上的点集，则

- E 是开集
- E 是闭集

- E 是连通集
- E 是开区域（区域）
- E 是闭域（区域）

设 E 是平面上的点集，则

- E 是 开集，指 E 不包含任何边界点
- E 是 闭集

- E 是 连通集
- E 是 开区域（区域）
- E 是 闭域（区域）

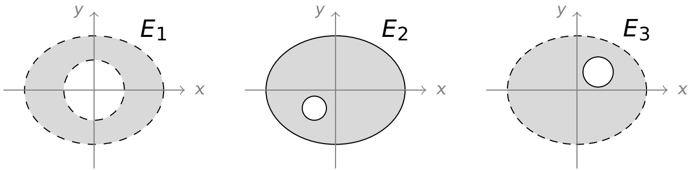
设 E 是平面上的点集，则

- E 是开集，指 E 不包含任何边界点
- E 是闭集，指 E 包含所有边界点

- E 是连通集
- E 是开区域（区域）
- E 是闭域（区域）

设 E 是平面上的点集，则

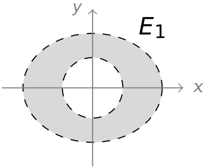
- E 是 开集，指 E 不包含任何边界点
- E 是 闭集，指 E 包含所有边界点



- E 是 连通集
- E 是 开区域（区域）
- E 是 闭域（区域）

设 E 是平面上的点集，则

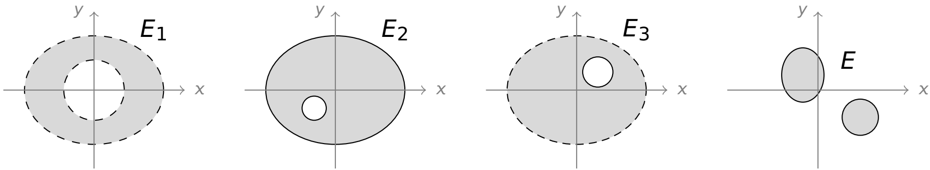
- E 是 开集，指 E 不包含任何边界点
- E 是 闭集，指 E 包含所有边界点



- E 是 连通集，指 E 中任两点均可用 E 中折线连起来
- E 是 开区域（区域）
- E 是 闭域（区域）

设 E 是平面上的点集，则

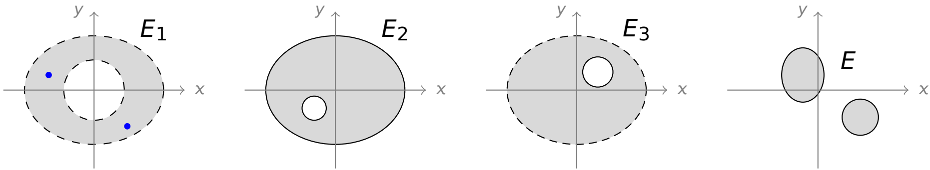
- E 是 开集，指 E 不包含任何边界点
- E 是 闭集，指 E 包含所有边界点



- E 是 连通集，指 E 中任两点均可用 E 中折线连起来
- E 是 开区域（区域）
- E 是 闭域（区域）

设 E 是平面上的点集，则

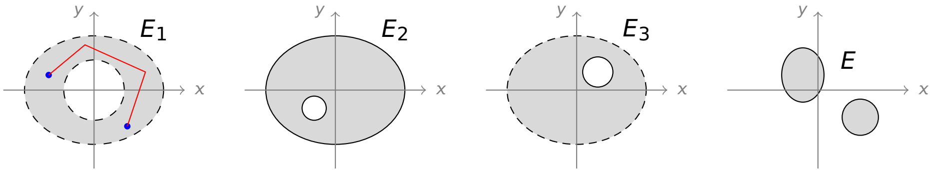
- E 是 开集，指 E 不包含任何边界点
- E 是 闭集，指 E 包含所有边界点



- E 是 连通集，指 E 中任两点均可用 E 中折线连起来
- E 是 开区域（区域）
- E 是 闭域（区域）

设 E 是平面上的点集，则

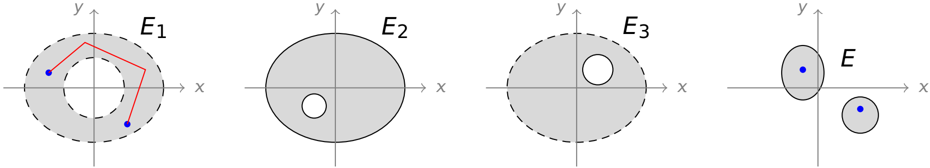
- E 是 开集，指 E 不包含任何边界点
- E 是 闭集，指 E 包含所有边界点



- E 是 连通集，指 E 中任两点均可用 E 中折线连起来
- E 是 开区域（区域）
- E 是 闭域（区域）

设 E 是平面上的点集，则

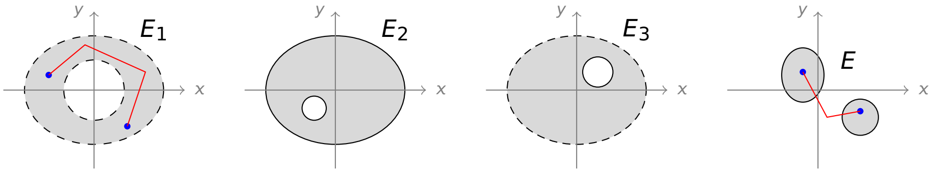
- E 是 开集，指 E 不包含任何边界点
- E 是 闭集，指 E 包含所有边界点



- E 是 连通集，指 E 中任两点均可用 E 中折线连起来
- E 是 开区域（区域）
- E 是 闭域（区域）

设 E 是平面上的点集，则

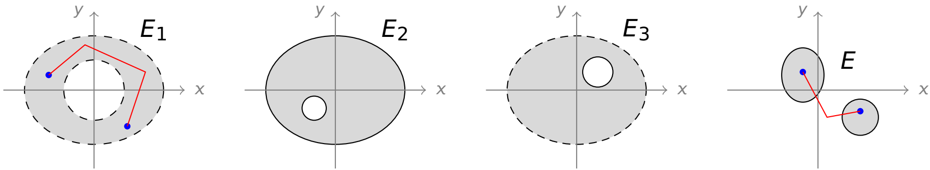
- E 是 开集，指 E 不包含任何边界点
- E 是 闭集，指 E 包含所有边界点



- E 是 连通集，指 E 中任两点均可用 E 中折线连起来
- E 是 开区域（区域）
- E 是 闭域（区域）

设 E 是平面上的点集，则

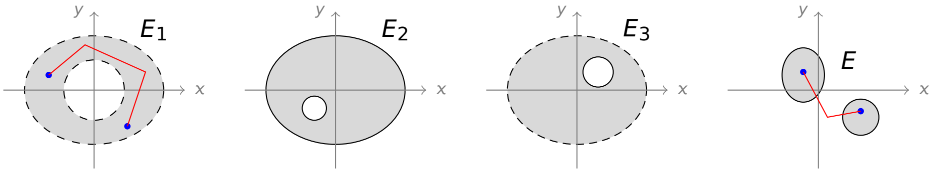
- E 是 开集，指 E 不包含任何边界点
- E 是 闭集，指 E 包含所有边界点



- E 是 连通集，指 E 中任两点均可用 E 中折线连起来
- E 是 开区域（区域）
- E 是 闭域（区域）

设 E 是平面上的点集，则

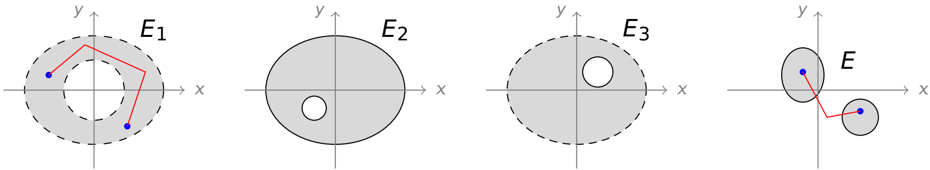
- E 是 开集，指 E 不包含任何边界点
- E 是 闭集，指 E 包含所有边界点



- E 是 连通集，指 E 中任两点均可用 E 中折线连起来
- E 是 开区域（区域），指 E 是开集且连通
- E 是 闭域（区域）

设 E 是平面上的点集，则

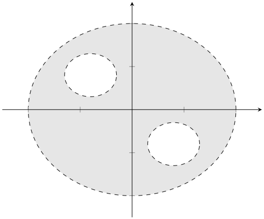
- E 是 开集，指 E 不包含任何边界点
- E 是 闭集，指 E 包含所有边界点

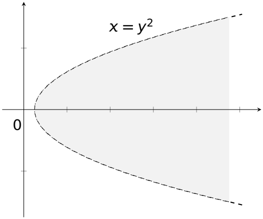


- E 是 连通集，指 E 中任两点均可用 E 中折线连起来
- E 是 开区域（区域），指 E 是开集且连通
- E 是 闭域（区域），指 E 是闭集且连通

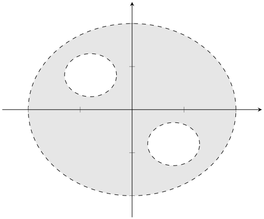
- 区域可分为 有界区域 和 无界区域

- 区域可分为 有界区域 和 无界区域

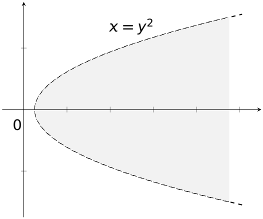




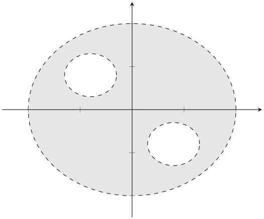
- 区域可分为 有界区域 和 无界区域



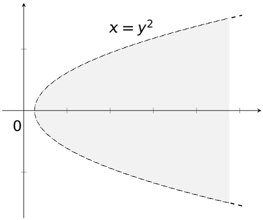
有界区域



- 区域可分为 有界区域 和 无界区域



有界区域



无界区域

二元函数，及其图形

定义 设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个非空点集，称映射 $f : D \to \mathbb{R}$

二元函数，及其图形

定义 设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个非空点集，称映射 $f: D \to \mathbb{R}$为定义在 D 上的二元函数

二元函数，及其图形

定义 设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个非空点集，称映射 $f: D \to \mathbb{R}$为定义在 D 上的二元函数，记为

$$z = f(x, y), \qquad (x, y) \in D$$

二元函数，及其图形

定义 设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个非空点集，称映射 $f: D \to \mathbb{R}$为定义在 D 上的二元函数，记为

$$z = f(x, y), \qquad (x, y) \in D$$

其中 D 称为 定义域，x 和 y 称为 自变量，z 称为因变量。

二元函数，及其图形

定义 设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个非空点集，称映射 $f: D \to \mathbb{R}$为定义在 D 上的二元函数，记为

$$z = f(x, y), \qquad (x, y) \in D$$

其中 D 称为 定义域，x 和 y 称为 自变量，z 称为因变量。

例 $z = f(x, y) = xy^2 + 1$ 是一个二元函数

二元函数，及其图形

定义 设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个非空点集，称映射 $f: D \to \mathbb{R}$为定义在 D 上的二元函数，记为

$$z = f(x, y), \qquad (x, y) \in D$$

其中 D 称为 定义域，x 和 y 称为 自变量，z 称为因变量。

例 $z = f(x, y) = xy^2 + 1$ 是一个二元函数

注 二元函数的图像是空间中一张曲面：

二元函数，及其图形

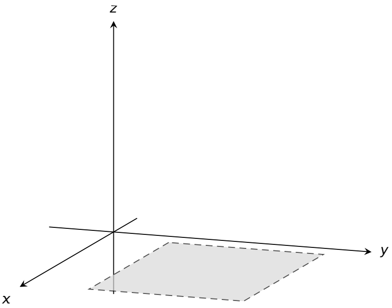
定义 设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个非空点集，称映射 $f: D \to \mathbb{R}$为定义在 D 上的二元函数，记为

$$z = f(x, y), \qquad (x, y) \in D$$

其中 D 称为 定义域，x 和 y 称为 自变量，z 称为因变量。

例 $z = f(x, y) = xy^2 + 1$ 是一个二元函数

注 二元函数的图像是空间中一张曲面：



二元函数，及其图形

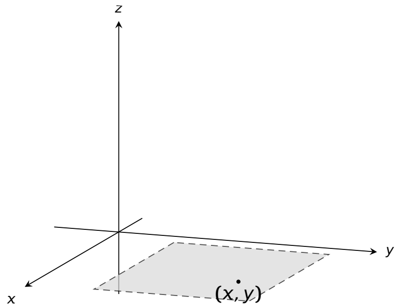
定义 设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个非空点集，称映射 $f: D \to \mathbb{R}$为定义在 D 上的二元函数，记为

$$z = f(x, y), \qquad (x, y) \in D$$

其中 D 称为 定义域，x 和 y 称为 自变量，z 称为因变量。

例 $z = f(x, y) = xy^2 + 1$ 是一个二元函数

注 二元函数的图像是空间中一张曲面：



二元函数，及其图形

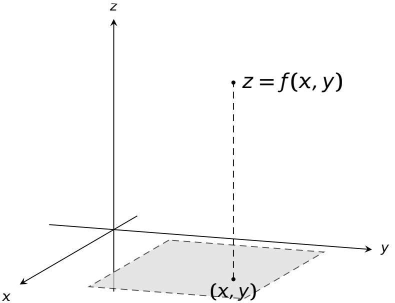
定义 设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个非空点集，称映射 $f: D \to \mathbb{R}$为定义在 D 上的二元函数，记为

$$z = f(x, y), \qquad (x, y) \in D$$

其中 D 称为 定义域，x 和 y 称为 自变量，z 称为因变量。

例 $z = f(x, y) = xy^2 + 1$ 是一个二元函数

注 二元函数的图像是空间中一张曲面：



二元函数，及其图形

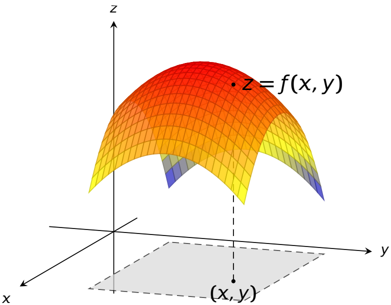
定义 设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个非空点集，称映射 $f: D \to \mathbb{R}$为定义在 D 上的二元函数，记为

$$z = f(x, y), \qquad (x, y) \in D$$

其中 D 称为 定义域，x 和 y 称为 自变量，z 称为因变量。

例 $z = f(x, y) = xy^2 + 1$ 是一个二元函数

注 二元函数的图像是空间中一张曲面：



注 函数 $z=f(x,y)$ 在一点 (x_0,y_0) 处的值：

$$f(x_0,y_0) \qquad \text{或} \qquad z\Big|_{(x_0,y_0)}$$

注 函数 $z=f(x,y)$ 在一点 (x_0,y_0) 处的值：

$$f(x_0,y_0) \qquad \text{或} \qquad z\Big|_{(x_0,y_0)}$$

例 设 $z=f(x,y)=x^2y+1$，则

$$z\Big|_{(2,-1)}=$$

注 函数 $z=f(x, y)$ 在一点 (x_0, y_0) 处的值：

$$f(x_0, y_0) \qquad \text{或} \qquad z\Big|_{(x_0, y_0)}$$

例 设 $z=f(x, y)=x^2y+1$，则

$$z\Big|_{(2,-1)}=f(2,-1)=$$

注 函数 $z = f(x, y)$ 在一点 (x_0, y_0) 处的值：

$$f(x_0, y_0) \qquad \text{或} \qquad z\Big|_{(x_0, y_0)}$$

例 设 $z = f(x, y) = x^2 y + 1$，则

$$z\Big|_{(2,-1)} = f(2, -1) = 2^2 \cdot (-1) + 1$$

注 函数 $z=f(x,y)$ 在一点 (x_0,y_0) 处的值：

$$f(x_0,y_0) \qquad \text{或} \qquad z\Big|_{(x_0,y_0)}$$

例 设 $z=f(x,y)=x^2y+1$，则

$$z\Big|_{(2,-1)}=f(2,-1)=2^2\cdot(-1)+1=-3$$

例 1 $z = \ln(x + y)$ 是二元函数，求其定义域，并计算 $f(e^8, 0)$

例 1 $z=\ln(x+y)$ 是二元函数，求其定义域，并计算 $f(e^8, 0)$

解 要 $\ln(x+y)$ 有意义，必须 $x+y>0$。

例 1 $z=\ln(x+y)$ 是二元函数，求其定义域，并计算 $f(e^8,0)$

解 要 $\ln(x+y)$ 有意义，必须 $x+y>0$。所以定义域

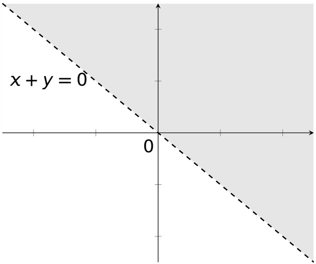
$$D=\{(x,y)|x+y>0\}.$$

例 1 $z = \ln(x+y)$ 是二元函数，求其定义域，并计算 $f(e^8, 0)$

解 要 $\ln(x+y)$ 有意义，必须 $x+y>0$。所以定义域

$$D = \{(x, y) | x+y>0\}.$$

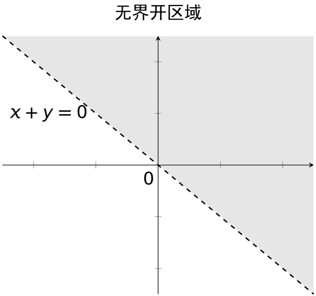
无界开区域



例 1 $z = \ln(x+y)$ 是二元函数，求其定义域，并计算 $f(e^8, 0)$

解 要 $\ln(x+y)$ 有意义，必须 $x+y>0$。所以定义域

$$D = \{(x, y) | x+y > 0\}.$$



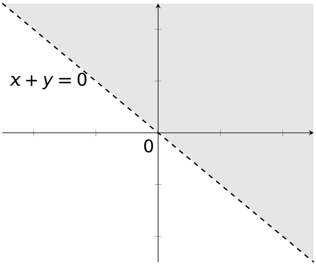
$$f(e^8, 0) =$$

例 1 $z = \ln(x+y)$ 是二元函数，求其定义域，并计算 $f(e^8, 0)$

解 要 $\ln(x+y)$ 有意义，必须 $x+y>0$。所以定义域

$$D = \{(x, y) | x+y>0\}.$$

无界开区域



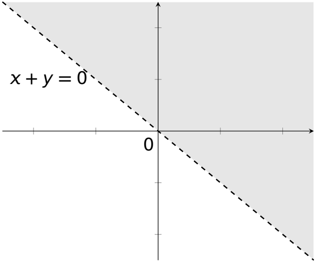
$$f(e^8, 0) = \ln(e^8+0)$$

例 1 $z = \ln(x+y)$ 是二元函数，求其定义域，并计算 $f(e^8, 0)$

解 要 $\ln(x+y)$ 有意义，必须 $x+y>0$。所以定义域

$$D = \{(x, y) | x+y>0\}.$$

无界开区域

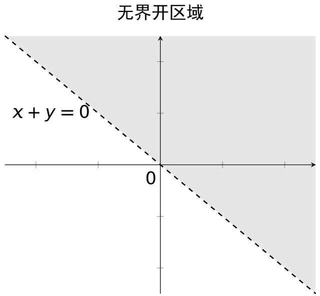


$$f(e^8, 0) = \ln(e^8+0) = \ln e^8$$

例 1 $z = \ln(x+y)$ 是二元函数，求其定义域，并计算 $f(e^8, 0)$

解 要 $\ln(x+y)$ 有意义，必须 $x+y>0$。所以定义域

$$D = \{(x, y) | x + y > 0\}.$$



$$f(e^8, 0) = \ln(e^8 + 0) = \ln e^8 = 8$$

例 2 求 $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-4y^2}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$

例 2 求 $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-4y^2}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$

解 要 z 有意义，必须

$$\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ 1-4y^2 \geq 0 \end{cases}$$

例 2 求 $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-4y^2}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$

解 要 z 有意义，必须

$$\begin{cases} 1-x^2\ge 0 \\ 1-4y^2\ge 0 \end{cases} \implies \begin{cases} -1\le x\le 1 \\ \end{cases}$$

例 2 求 $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-4y^2}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$

解 要 z 有意义，必须

$$\begin{cases}1-x^2\geq 0\\ 1-4y^2\geq 0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}-1\leq x\leq 1\\ -\frac{1}{2}\leq y\leq \frac{1}{2}\end{cases}$$

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

例 2 求 $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-4y^2}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$

解 要 z 有意义，必须

$$\begin{cases}1-x^2\geq 0\\ 1-4y^2\geq 0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}-1\leq x\leq 1\\ -\frac{1}{2}\leq y\leq\frac{1}{2}\end{cases}$$

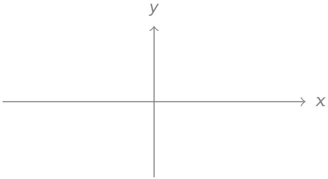
所以定义域 $D=\left\{(x,y)\middle|-1\leq x\leq 1,-\frac{1}{2}\leq y\leq\frac{1}{2}\right\}$.

例 2 求 $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-4y^2}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$

解 要 z 有意义，必须

$$\begin{cases}1-x^2\geq 0\\ 1-4y^2\geq 0\end{cases}\implies\begin{cases}-1\leq x\leq 1\\ -\frac{1}{2}\leq y\leq\frac{1}{2}\end{cases}$$

所以定义域 $D=\left\{(x,y)|-1\leq x\leq 1,-\frac{1}{2}\leq y\leq\frac{1}{2}\right\}$.

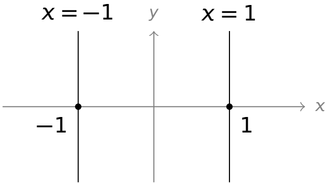


例 2 求 $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-4y^2}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$

解 要 z 有意义，必须

$$\begin{cases}1-x^2\geq 0\\ 1-4y^2\geq 0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}-1\leq x\leq 1\\ -\frac{1}{2}\leq y\leq \frac{1}{2}\end{cases}$$

所以定义域 $D=\left\{(x,y)|-1\leq x\leq 1,-\frac{1}{2}\leq y\leq \frac{1}{2}\right\}$.

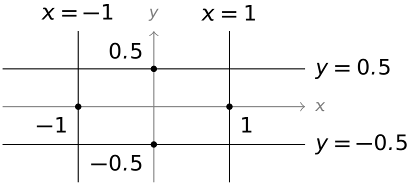


例 2 求 $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-4y^2}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$

解 要 z 有意义，必须

$$\begin{cases}1-x^2\geq 0\\ 1-4y^2\geq 0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}-1\leq x\leq 1\\ -\frac{1}{2}\leq y\leq \frac{1}{2}\end{cases}$$

所以定义域 $D=\left\{(x,y)|-1\leq x\leq 1,-\frac{1}{2}\leq y\leq \frac{1}{2}\right\}.$

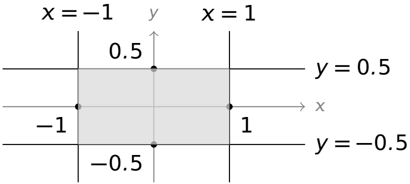


例 2 求 $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-4y^2}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$

解 要 z 有意义，必须

$$\begin{cases}1-x^2\geq 0\\1-4y^2\geq 0\end{cases}\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases}-1\leq x\leq 1\\-\frac{1}{2}\leq y\leq\frac{1}{2}\end{cases}$$

所以定义域 $D=\left\{(x,y)|-1\leq x\leq 1,-\frac{1}{2}\leq y\leq\frac{1}{2}\right\}$.

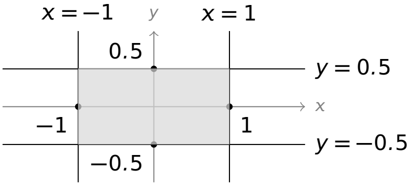


例 2 求 $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-4y^2}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$

解 要 z 有意义，必须

$$\begin{cases}1-x^2\geq 0\\ 1-4y^2\geq 0\end{cases}\implies\begin{cases}-1\leq x\leq 1\\ -\frac{1}{2}\leq y\leq\frac{1}{2}\end{cases}$$

所以定义域 $D=\left\{(x,y)|-1\leq x\leq 1,-\frac{1}{2}\leq y\leq\frac{1}{2}\right\}.$



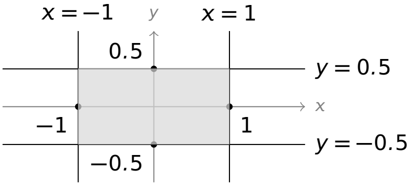
$$z\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)=$$

例 2 求 $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-4y^2}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$

解 要 z 有意义，必须

$$\begin{cases}1-x^2\geq 0\\ 1-4y^2\geq 0\end{cases}\implies\begin{cases}-1\leq x\leq 1\\ -\frac{1}{2}\leq y\leq\frac{1}{2}\end{cases}$$

所以定义域 $D=\left\{(x,y)|-1\leq x\leq 1,-\frac{1}{2}\leq y\leq\frac{1}{2}\right\}.$



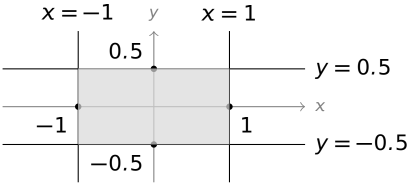
$$z\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\sqrt{1-4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2}$$

例 2 求 $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-4y^2}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$

解 要 z 有意义，必须

$$\begin{cases}1-x^2\geq 0\\ 1-4y^2\geq 0\end{cases}\implies\begin{cases}-1\leq x\leq 1\\ -\frac{1}{2}\leq y\leq\frac{1}{2}\end{cases}$$

所以定义域 $D=\left\{(x,y)|-1\leq x\leq 1,-\frac{1}{2}\leq y\leq\frac{1}{2}\right\}$.



$$z\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\sqrt{1-4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\sqrt{3}$$

例 3 求 $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(1, \frac{1}{4})$

例 3 求 $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(1,\frac{1}{4})$

解 要 z 有意义，必须

例 3 求 $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(1,\frac{1}{4})$

解 要 z 有意义，必须

$$\begin{cases} x-\sqrt{y}\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$$

例 3 求 $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(1,\frac{1}{4})$

解 要 z 有意义，必须

$$\begin{cases} x-\sqrt{y}\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} x^2\geq y \\ y\geq 0 \end{cases}$$

例 3 求 $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(1,\frac{1}{4})$

解 要 z 有意义，必须

$$\begin{cases} x-\sqrt{y}\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2\geq y,\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$$

例 3 求 $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(1,\frac{1}{4})$

解 要 z 有意义，必须

$$\begin{cases} x-\sqrt{y}\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2\geq y,\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases} \Longrightarrow 0\leq y\leq x^2,\ x\geq 0$$

例 3 求 $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(1,\frac{1}{4})$

解 要 z 有意义，必须

$$\begin{cases} x-\sqrt{y}\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2\geq y,\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases} \Longrightarrow 0\leq y\leq x^2,\ x\geq 0$$

所以定义域

$$D=\left\{(x,y)|\,0\leq y\leq x^2,\ x\geq 0\right\}.$$

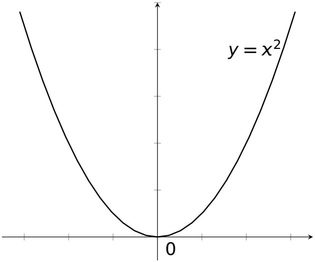
例 3 求 $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(1,\frac{1}{4})$

解 要 z 有意义，必须

$$\begin{cases} x-\sqrt{y}\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2\ge y,\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases} \Longrightarrow 0\le y\le x^2,\ x\ge 0$$

所以定义域

$$D=\left\{(x,y)|\,0\le y\le x^2,\ x\ge 0\right\}.$$



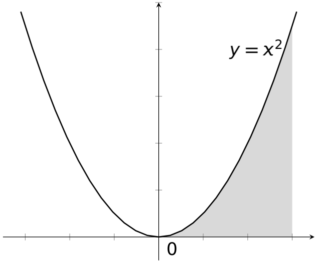
例 3 求 $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(1,\frac{1}{4})$

解 要 z 有意义，必须

$$\begin{cases} x-\sqrt{y}\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2\geq y,\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases} \Longrightarrow 0\leq y\leq x^2,\ x\geq 0$$

所以定义域

$$D=\left\{(x,y)|\,0\leq y\leq x^2,\ x\geq 0\right\}.$$



例 3 求 $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(1,\frac{1}{4})$

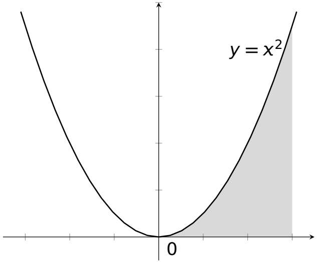
解 要 z 有意义，必须

$$\begin{cases} x-\sqrt{y}\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2\geq y,\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \quad 0\leq y\leq x^2,\ x\geq 0$$

所以定义域

$$D=\left\{(x,y)\,|\,0\leq y\leq x^2,\ x\geq 0\right\}.$$

（闭区域，无界）



例 3 求 $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(1,\frac{1}{4})$

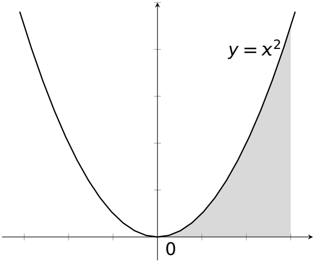
解 要 z 有意义，必须

$$\begin{cases} x-\sqrt{y}\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2\geq y,\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases} \Longrightarrow 0\leq y\leq x^2,\ x\geq 0$$

所以定义域

$$D=\left\{(x,y)|\,0\leq y\leq x^2,\ x\geq 0\right\}.$$

（闭区域，无界）



$$z\left(1,\frac{1}{4}\right)=$$

例 3 求 $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(1,\frac{1}{4})$

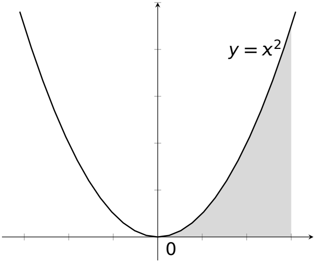
解 要 z 有意义，必须

$$\begin{cases} x-\sqrt{y}\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2\geq y,\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases} \Longrightarrow 0\leq y\leq x^2,\ x\geq 0$$

所以定义域

$$D=\left\{(x,y)|\,0\leq y\leq x^2,\ x\geq 0\right\}.$$

（闭区域，无界）



$$z\left(1,\frac{1}{4}\right)=\sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{4}}}=$$

例 3 求 $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(1,\frac{1}{4})$

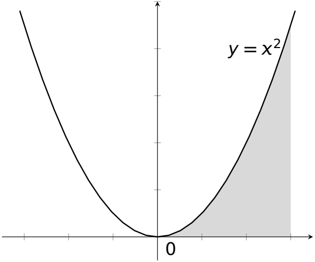
解 要 z 有意义，必须

$$\begin{cases} x-\sqrt{y}\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2\geq y,\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases} \Longrightarrow 0\leq y\leq x^2,\ x\geq 0$$

所以定义域

$$D=\left\{(x,y)|\,0\leq y\leq x^2,\ x\geq 0\right\}.$$

（闭区域，无界）



$$z\left(1,\frac{1}{4}\right)=\sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{4}}}=\sqrt{1-\frac{1}{2}}$$

例 3 求 $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(1, \frac{1}{4})$

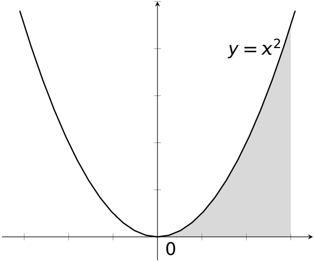
解 要 z 有意义，必须

$$\begin{cases} x - \sqrt{y} \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 \geq y,\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow 0 \leq y \leq x^2,\ x \geq 0$$

所以定义域

$$D = \left\{ (x, y) | 0 \leq y \leq x^2,\ x \geq 0 \right\}.$$

（闭区域，无界）



$$z\left(1, \frac{1}{4}\right) = \sqrt{1 - \sqrt{\frac{1}{4}}} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

n 元函数

- 三元函数：$u = f(x, y, z)$,

n 元函数

- 三元函数：$u = f(x, y, z)$，如

$$f(x, y, z) = \frac{z}{x^2 + y + 1} + \sin(xyz)$$

n 元函数

- 三元函数：$u = f(x, y, z)$，如

$$f(x, y, z) = \frac{z}{x^2 + y + 1} + \sin(xyz)$$

例 设长方体的长宽高分别为 x，y，z，则体积为

n 元函数

- 三元函数：$u = f(x, y, z)$，如

$$f(x, y, z) = \frac{z}{x^2 + y + 1} + \sin(xyz)$$

例 设长方体的长宽高分别为 x，y，z，则体积为

$$V = xyz$$

n 元函数

- 三元函数：$u = f(x, y, z)$，如

$$f(x, y, z) = \frac{z}{x^2 + y + 1} + \sin(xyz)$$

例 设长方体的长宽高分别为 x，y，z，则体积为

$$V = xyz$$

是关于 x，y，z 的三元函数，

n 元函数

- 三元函数：$u = f(x, y, z)$，如

$$f(x, y, z) = \frac{z}{x^2 + y + 1} + \sin(xyz)$$

例 设长方体的长宽高分别为 x，y，z，则体积为

$$V = xyz$$

是关于 x，y，z 的三元函数，定义域是

$$D = \{(x, y, z) | x, y, z > 0\}.$$

n 元函数

- 三元函数：$u=f(x,y,z)$，如
$$f(x,y,z)=\frac{z}{x^2+y+1}+\sin(xyz)$$

例 设长方体的长宽高分别为 x，y，z，则体积为
$$V=xyz$$
是关于 x，y，z 的三元函数，定义域是
$$D=\{(x,y,z)|x,y,z>0\}.$$

- n 原函数：$u=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$