第 12 周作业解答

练习 1. 判断矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 可否对角化，说明理由。

解

- 解特征方程 $|\lambda I-A|=0$。

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\0&\lambda-1&-1\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^3$$

  所以特征值为 $\lambda_1=1$（三重特征值)。

- 由于 $r(\lambda_1 I-A)=2\neq 0$ （即 $r(\lambda_1 I-A)\neq n-n_1$，其中 n_1 为 λ_1 的重数)，所以 A 不可对角化。

练习 2. 假设 3 阶方阵 A 的特征值为 2, 1, -1。求行列式 $|A^2-2I|$ 和 $|A^{-1}-2I|$。

解由假设知 3 阶方阵 A 有 3 个不同特征值，所以 A 可以对角化。设存在可逆矩阵 P 使得

$$P^{-1}AP=\Lambda \quad\Rightarrow\quad A=P\Lambda P^{-1},$$

其中 $\Lambda=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$。所以

$$A^2=P\Lambda P^{-1}P\Lambda P^{-1}=P\Lambda^2P^{-1},\quad A^{-1}=(P\Lambda P^{-1})^{-1}=P\Lambda^{-1}P^{-1}$$

得:

$$\begin{aligned}|A^2-2I|&=|P\Lambda^2P^{-1}-2PIP^{-1}|=|P|\cdot|\Lambda^2-2I|\cdot|P^{-1}|=|\Lambda^2-2I|\\&=\left|\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\right|\\&=2\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}|A^{-1}-2I|&=|P\Lambda^{-1}P^{-1}-2PIP^{-1}|=|P|\cdot|\Lambda^{-1}-2I|\cdot|P^{-1}|=|\Lambda^{-1}-2I|\\&=\left|\begin{pmatrix}\frac12&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}-\frac32&0&0\\0&-3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\right|\\&=-\frac{9}{2}\end{aligned}$$

注. 简言之，利用 $A\sim\Lambda$，等同于计算行列式 $|\Lambda^2-2I|$ 和 $|\Lambda^{-1}-2I|$。

练习 3. 将下列向量组正交化

1. $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}$

解
1.

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{||\beta_1||^2}\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -1 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\alpha_3^T \beta_1}{||\beta_1||^2}\beta_1 - \frac{\alpha_3^T \beta_2}{||\beta_2||^2}\beta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -1 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

2.

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{||\beta_1||^2}\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{-10}{10}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\alpha_3^T \beta_1}{||\beta_1||^2}\beta_1 - \frac{\alpha_3^T \beta_2}{||\beta_2||^2}\beta_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix} - \frac{30}{10}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{-26}{26}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

练习 4. 设 u 是 n 维非零列向量，$A = uu^T$ 是 n 阶方阵。证明 $||u||^2$ 是 A 的一个特征值。

证明注意到

$$Au = uu^T u = u(u^T u) = ||u||^2 u.$$

因为 $u \neq 0$，所以上述说明 $||u||^2$ 是 A 的一个特征值，而 u 是一个相应的特征向量。