第 7 章 a：微分方程的概念

数学系　　梁卓滨

2017.07 暑期班

常微分方程定义

- 设 $y = f(x)$ 为未知函数，如下方程

$$\frac{dy}{dx} = y\sin x, \quad y' - 2xy + e^x = 0,$$
$$(y''')^4 - (y'')^2 = 5 - y, \ \ldots$$

  都是所谓常微分方程

- 注 $xdy + ydx = 0$ 也是常微分方程：

$$xdy + ydx = 0 \quad \Rightarrow \quad x\frac{dy}{dx} + y = 0 \quad \Rightarrow \quad xy' + y = 0$$

- 实际问题 $\xrightarrow{\text{建模}}$ 微分方程 $\xrightarrow{\text{求解方程}}$ 实际问题

常微分方程

例 在理想实验条件下，任何时刻，培养皿中细菌数目满足

$$\frac{\text{细菌分裂速度}}{\text{细菌数目}} = k.$$

问细菌数目随时间变化规律。

探讨 设 $y(t)$ 为 t 时刻细菌数目，则 $y'(t)$ 为细菌分裂速度，并且

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = k \quad \Rightarrow \quad y'(t) = k \cdot y(t)$$

如何求出 $y(t)$？

常微分方程的阶

- 常微分方程中，未知函数的导数的最高阶数称为微分方程的阶

例

常微分方程	阶数
$y' - 2xy^3 + e^x = 0$	1
$(y''')^{400} - (y'')^2 + y' = 5e^x - y$	3
$xdy + ydx = 0$	1
$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 7x = 0$	2

常微分方程的解 I

- 若一个函数代入常微分方程后，使方程成为恒等式，则称该函数为该微分方程的解

例 验证 $y = Ce^{3x}$ 是否微分方程 $\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ 的解，其中 C 为任意常数。

解
$$\frac{dy}{dx} - 3y = \left(Ce^{3x}\right)' - 3Ce^{3x} = C \cdot 3e^{3x} - 3Ce^{3x} = 0$$

注 通常，满足微分方程的函数可以有很多。这时要对方程附加额外条件，才有可能得到唯一解。一般添加所谓 “初始条件”。

例 求 $\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ 在初始条件 $y(0) = 2$ 下的解。

解 已知 $y = Ce^{3x}$。 将 $y(0) = 2$ 代入，得 $2 = C \cdot e^{3 \cdot 0} = C$，所以 $y = 2e^{3x}$。

常微分方程的解 II

例 验证 $y = xe^x$ 是否微分方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 的解?

解

$$\because\ y' = (xe^x)' = e^x + xe^x$$

$$y'' = (e^x + xe^x)' = e^x + e^x + xe^x = 2e^x + xe^x$$

$$\therefore\ y'' - 2y' + y = (2e^x + xe^x) - 2(e^x + xe^x) + xe^x = 0$$

所以 $y = xe^x$ 是微分方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 的解

例 验证 $y = c_1x + c_2x^2$ 是否微分方程 $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0$ 的解? 其中 c_1, c_2 是任意常数

常微分方程的解 III

例 验证 $y = c_1x + c_2x^2$ 是否微分方程 $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0$ 的解？其中 c_1, c_2 是任意常数

解

$$\because\ y' = (c_1x + c_2x^2)' = c_1 + 2c_2x$$

$$y'' = (c_1 + 2c_2x)' = 2c_2$$

$$\therefore\ y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = (2c_2) - \frac{2}{x}(c_1 + 2c_2x) + \frac{2}{x^2}(c_1x + c_2x^2)$$

$$= 2c_2 - \frac{2c_1}{x} - 4c_2 + \frac{2c_1}{x} + 2c_2 = 0$$

所以 $y = c_1x + c_2x^2$ 是微分方程 $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0$ 的解

常微分方程的解 IV

- 如果常微分方程的解含有相互独立的任意常数，且数目与常微分方程的阶相同，则称此解是微分方程的通解
- 如果常微分方程的解不包含有任意取值的常数，则称此解是微分方程的特解

比较：

1. $y = Ce^{3x}$ 是 $y' - 3y = 0$ 的解（通解），$y = 2e^{3x}$ 是特解
2. $y = xe^{x}$ 是 $y'' - 2y' + y = 0$ 的解（特解）
3. $y = c_1 x + c_2 x^2$ 是 $y'' - \frac{2}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = 0$ 的解（通解）

注 通常，添加初始条件后，可确定出通解中的常数，从而得出特解。

“增长-衰减” 系统

- 不少物理系统中，物理量的变化率正比于该时刻的物理量，从而

$$f'(t) = \gamma f(t) \qquad （\gamma\text{为常数}）$$

  这是一阶常微分方程。
- 应用 放射性物质衰变；温度交换；生物繁殖……
- 练习
  1. 验证 $f(t) = e^{\gamma t}$ 是方程的解。特解
  2. 验证 $f(t) = Ce^{\gamma t}$ 也是解（C 是任意常数）。通解

  解 2. 这是 $f'(t) = (Ce^{\gamma t})' = C(e^{\gamma t})' = C \cdot \gamma e^{\gamma t} = \gamma f(t)$
- 注
  1. 可以证明，$f(t) = Ce^{\gamma t}$ 给出了所有解。
  2. C 是初始值：$f(0) = Ce^{\gamma \cdot 0} = C$。所以

$$f(t) = f(0)e^{\gamma t}.$$

  （说明该物理系统中，物理量 $f(t)$ 由初始值唯一确定）

“增长-衰减”系统

总结

- 一阶常微分方程
$$f'(t) = \gamma f(t)$$
的所有解是
$$f(t) = Ce^{\gamma t}$$
（C 是任意常数）
- 如果给定初始值 $f(0)$，则方程有唯一解
$$f(t) = f(0)e^{\gamma t}.$$

注

- $\gamma > 0$ 时，$f(t)$ 是指数增长；
- $\gamma < 0$ 时，$f(t)$ 是指数衰减。

练习 求解方程 $\frac{dy}{dx}+7y=0$ 的通解。如果 $y(0)=2$，求 $y(x)$。

解

$$\frac{dy}{dx}=-7y \quad \Rightarrow \quad y=Ce^{-7x}$$

如果 $y(0)=2$，则 $2=y(0)=Ce^{-7\cdot 0}=C$，所以 $y=2e^{-7x}$。

练习 求解方程 $ydx+3dy=0$ 的通解。

解

$$ydx+3dy=0 \quad \Rightarrow \quad y+3\frac{dy}{dx}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{3}y$$
$$\Rightarrow \quad y=Ce^{-\frac{1}{3}x}.$$

练习 求解方程 $5ydx-2dy=0$ 的通解。（答案 $y=Ce^{\frac{5}{2}x}$）

例 假设

- 室温恒为 $20°C$；刚开始时粥的温度是 $80°C$；
- $\dfrac{\text{粥的冷却速度}(°C/\mathrm{mins})}{\text{粥当前温度与室温之间的温差}(°C)} = -0.0837$（牛顿冷却定律）。

客人希望在粥为 $50°C$ 时才喝，问需要等多长时间？

解 设 $f(t)$ 表示在 t 时刻粥与外界（$20°C$）的温度差，则粥在时刻 t 的温度是 $f(t)+20$，并且：

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = -0.0837. \quad \Rightarrow \quad f'(t) = -0.0837 f(t).$$

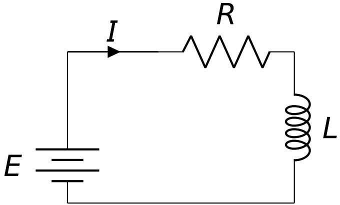
注意到初始温度差为 $f(0) = 80 - 20 = 60$，所以

$$f(t) = f(0)e^{-0.0837t} = 60e^{-0.0837t}.$$

粥为 $50°C$ 时，温度差 $f(t) = 50 - 20 = 30$，求解

$$30 = f(t) = 60e^{-0.0837t} \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{1}{0.0837}\ln\frac{1}{2} \approx 8.28(\mathrm{minutes})$$

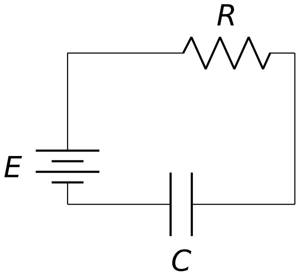
电路系统



E 电压
I 电流
L 电感
R 电阻

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E$$

一阶常微分方程



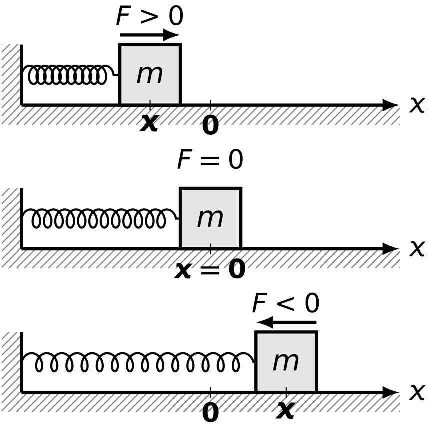
C 电容
E 电压
Q 电量
R 电阻

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E$$

一阶常微分方程

注 这是可分离变量的一阶常微分方程，需要熟练求解

“弹簧-重物” 系统



牛顿2^{nd}定律 $\quad m\dfrac{d^2x}{dt^2}=F_{合}$

胡克定律 $\quad F_{弹}=-kx \quad (k>0)$

$$\xRightarrow[F_{合}=F_{弹}]{无摩擦} \quad m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0 \quad (\omega=\sqrt{k/m})}$$

二阶常微分方程

练习

1. 验证 $x=\cos(\omega t)$，$x=\sin(\omega t)$ 均是方程的解。
2. 验证 $x=C_1\cos(\omega t)+C_2\sin(\omega t)$ 是解（C_1, C_2 是任意常数）。

练习 对于二阶微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$，验证

1. 验证 $x=\cos(\omega t)$，$x=\sin(\omega t)$ 均是方程的解。
2. 验证 $x=C_1\cos(\omega t)+C_2\sin(\omega t)$ 是解（C_1, C_2 是任意常数）。

解

1.
$$x=\cos(\omega t) \overset{\text{代入}}{\Rightarrow} \frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=\frac{d^2}{dt^2}\cos(\omega t)+\omega^2\cos(\omega t)$$
$$=-\omega^2\cos(\omega t)+\omega^2\cos(\omega t)$$
$$=0$$

$$x=\sin(\omega t) \overset{\text{代入}}{\Rightarrow} \frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=\frac{d^2}{dt^2}\sin(\omega t)+\omega^2\sin(\omega t)$$
$$=-\omega^2\sin(\omega t)+\omega^2\sin(\omega t)$$
$$=0$$

练习 对于二阶常微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$，验证

1. 验证 $x=\cos(\omega t)$，$x=\sin(\omega t)$ 均是方程的解。
2. 验证 $x=C_1\cos(\omega t)+C_2\sin(\omega t)$ 是解（C_1, C_2 是任意常数）。

解

2. 将 $x=C_1\cos(\omega t)+C_2\sin(\omega t)$ 代入方程进行验证：

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x$$

$$=\frac{d^2}{dt^2}\Big[C_1\cos(\omega t)+C_2\sin(\omega t)\Big]+\omega^2\Big[C_1\cos(\omega t)+C_2\sin(\omega t)\Big]$$

$$=C_1\left[\frac{d^2\cos(\omega t)}{dt^2}+\omega^2\cos(\omega t)\right]+C_2\left[\frac{d^2\sin(\omega t)}{dt^2}+\omega^2\sin(\omega t)\right]$$

$$=0+0=0$$

- 可以验证：二阶微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ 的所有解是

$$x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$$

（C_1, C_2 是任意常数）

- 参数C_1和C_2的物理含义：

$$x_0 = x(0) = C_1$$

$$v_0 = x'(0) = -C_1\omega \sin(\omega t) + C_2\omega \cos(\omega t)\Big|_{t=0} = C_2\omega$$

- 所以

$$\boxed{x = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t).}$$

- 条件“$x(0) = x_0$, $x'(0) = v_0$”称为初始条件
- 给定初始条件，解则唯一确定！（物理：运动方式完全确定）

总结

- 二阶常微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

的所有解是

$$x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$$

（C_1, C_2 是任意常数）

- 如果规定初始条件

$$x(0) = x_0,\ x'(0) = v_0$$

则

$$x = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t).$$

例 求解二阶微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 0$ 在初始条件 $x(0) = 1, x'(0) = 6$ 下的特解。

解

(1) 方程的通解为：

$$x = C_1 \cos(3t) + C_2 \sin(3t).$$

(2) 将 $t = 0$ 代入，并结合初始条件，以求出 C_1, C_2：

$$1 = x(0) = C_1$$

$$6 = x'(0) = -3C_1 \sin(3t) + 3C_2 \cos(3t)\Big|_{t=0} = 3C_2$$

所以该特解是：

$$x = \cos(3t) + 2\sin(3t).$$

“弹簧-重物”系统 II：阻尼运动

牛顿2^{nd}定律 $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = F_{合}$

胡克定律 $F_{弹} = -kx \quad (k > 0)$

摩擦力 $F_{摩} = -\delta m\dfrac{dx}{dt} \quad (\delta > 0)$

- 无摩擦

$$F_{合} = F_{弹} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

$$\Longrightarrow \quad x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$$

- 有摩擦

$$F_{合} = F_{弹} + F_{摩} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \delta\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$$

阻尼运动方程

$$\Longrightarrow \quad x(t) = ?$$