第 12 章 b：常数项级数的审敛法

数学系　　梁卓滨

2016-2017 学年 II

正项级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 是指每一项 $u_n \geq 0$。

定理 1 正项级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛的充分必要条件是：部分和 $\{s_n\}$ 有上界（即，$\exists M$ 使得对 $\forall n$ 成立 $s_n \leq M$）

证明 注意到部分和 $\{s_n\}$ 是单增数列：

$$s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n \leq \cdots$$

回忆 $\boxed{\text{单调数列，极限存在} \Leftrightarrow \text{数列有界}}$。所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{收敛} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} s_n \text{收敛} \quad \Leftrightarrow \quad \{s_n\}\text{有上界}$$

注 设正项级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i = s$（收敛），则对任意 n 成立

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} u_i \leq \sum_{i=1}^{\infty} u_i = s$$

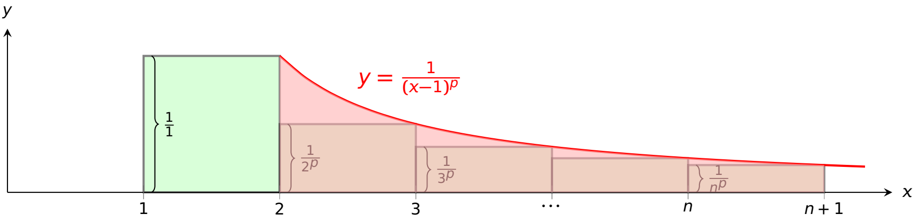
例 p 级数（$p>0$）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$

- 当 $0<p\le 1$ 时，级数发散。
- 当 $p>1$ 时，

$$s_n=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}\le 1+\int_2^{n+1}\frac{1}{(x-1)^p}dx$$

$$=1+\frac{1}{1-p}\cdot(x-1)^{1-p}\Big|_2^{n+1}=1+\frac{1-n^{1-p}}{p-1}\le 1+\frac{1}{p-1}$$

所以 $\{s_n\}$ 有上界，级数收敛。



定理 2（比较审敛法） 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数，且 $u_n \le v_n$。则

1. $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；
2. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散。（即为上述结论的逆否命题）

证明 设 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma$（收敛），则对任意的 n 成立

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n \le v_1 + v_2 + \cdots + v_n \le \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma$$

说明 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和有上界，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

注 运用比较审敛法时，需使得选取已知敛散性的级数作为比较的基准

暨南大学 JINAN UNIVERSITY

推论 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数。设 $k>0$。设

$$u_n \le k v_n, \quad \forall n \ge N.$$

则

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散。（即为上述结论的逆否命题）

证明 这是

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 收敛} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} k v_n \text{ 收敛} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛}$$

注

$$u_n \le k v_n,\ \forall n \ge N \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{u_n}{v_n} \le k,\ \forall n \ge N$$

定理 3（比较审敛法的极限形式） 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数。$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$。则成立：

1. 若 $0 \le l < +\infty$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；
2. 若 $0 < l \le +\infty$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散 $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

证明 1. 分析 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$ 的定义可知：

$$\text{当}n\text{充分大}, \frac{u_n}{v_n} \approx l \quad \Rightarrow \quad \text{当}n \ge N\text{时}, \frac{u_n}{v_n} \le l + 1$$

$$\Rightarrow \quad \text{当}n \ge N\text{时}, u_n \le (l+1)v_n$$

所以由比较审敛法知，如果 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛。

定理 3（比较审敛法的极限形式） 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数。$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$。则成立：

1. 若 $0 \le l < +\infty$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；
2. 若 $0 < l \le +\infty$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

证明 2. 分析 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$ 的定义可知：

$$\text{当}n\text{充分大}, \frac{u_n}{v_n} \approx l \quad \Rightarrow \quad \text{当}n \ge N\text{时}, \frac{u_n}{v_n} \ge \frac{l}{2} > 0$$

$$\Rightarrow \quad \text{当}n \ge N\text{时}, v_n \le \frac{2}{l} u_n$$

所以由比较审敛法知，如果 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散。

定理 3（比较审敛法的极限形式） 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数。$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$。则成立：

1. 若 $0 \leq l < +\infty$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；
2. 若 $0 < l \leq +\infty$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

注一. 简言之，若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 满足 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l \in (0, +\infty)$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的敛散性相同。

注二. 比较审敛法的极限形式，比起前面形式的比较审敛法可能更好用：特别是求极限 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n}$ 比构造不等式 $u_n \leq v_n$ 更容易的时候。

回忆 p 级数（$p>0$）

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$$

当 $0<p\le 1$ 时，发散；当 $p>1$ 时，收敛。

例 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 的敛散性。

解 与发散的调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 作比较：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n(n+1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 也是发散。

例 判断级数敛散性：

(1) $$1+\frac{1+2}{1+2^2}+\frac{1+3}{1+3^2}+\cdots+\frac{1+n}{1+n^2}+\cdots$$

(2) $$\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+4)}+\cdots$$

(3) $$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2^2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2^3}\right)+\cdots+\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)+\cdots$$

(4) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}\qquad (a>0)$$

解 （1）与发散的调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 作比较：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1+n}{1+n^2}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+n^2}{1+n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}=1$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}$ 也是发散。

例 判断级数敛散性：

$$(1)\quad 1+\frac{1+2}{1+2^2}+\frac{1+3}{1+3^2}+\cdots+\frac{1+n}{1+n^2}+\cdots$$

$$(2)\quad \frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+4)}+\cdots$$

$$(3)\quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2^2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2^3}\right)+\cdots+\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)+\cdots$$

$$(4)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$$

解 （2）与收敛的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 作比较：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)(n+4)}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)(n+4)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{4}{n}\right)}=1$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+4)}$ 也是收敛。

例 判断级数敛散性：

$$(1)\quad 1+\frac{1+2}{1+2^2}+\frac{1+3}{1+3^2}+\cdots+\frac{1+n}{1+n^2}+\cdots$$

$$(2)\quad \frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+4)}+\cdots$$

$$(3)\quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2^2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2^3}\right)+\cdots+\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)+\cdots$$

$$(4)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n},\qquad \text{其中}a>0$$

解 （3）与收敛的等比级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2^n}$ 作比较：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{\frac{\pi}{2^n}} \xlongequal{x=\frac{\pi}{2^n}} \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ 也是收敛。

例 判断级数敛散性：

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}, \qquad 其中 a > 0$$

解 （4）分两种情况 $a > 1$ 及 $0 < a \le 1$ 讨论：

- 当 $a > 1$ 时，与收敛的等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n}$ 作比较：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{1+a^n}}{\frac{1}{a^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{1+a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{a^n}} = 1$$

所以此时 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$ 也是收敛。

- 当 $0 < a \le 1$ 时，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+a^n} \neq 0$$

所以此时 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$ 收敛。

例 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}$ 敛散性

注 与收敛的等比级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 作比较：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2+(-1)^n}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} 2+(-1)^n \text{（极限不存在）}$$

解 与收敛的等比级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 作比较：

$$\frac{\frac{2+(-1)^n}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} = 2+(-1)^n \le 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{2+(-1)^n}{2^n} \le 3\cdot\frac{1}{2^n}$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}$ 也收敛。

定理 4（比值审敛法，达朗贝尔判别法） 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数，又设 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$。则

1. 若 $\rho \in [0, 1)$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；
2. 若 $\rho \in (1, +\infty]$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散；（并且此时 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$）
3. 若 $\rho = 1$，则此法失效，级数可能收敛也可能发散。

定理 4（比值审敛法，达朗贝尔判别法） 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数，又设 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$。则

1. 若 $\rho \in [0, 1)$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

证明 1. 分析 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \rho$ 的定义可知：

$$\text{当}n\text{充分大}, \frac{u_{n+1}}{u_n} \approx \rho \quad \Rightarrow \quad \text{当}n \geq m\text{时}, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{\rho+1}{2} < 1$$

$$\Rightarrow \quad \text{当}n \geq m\text{时}, u_{n+1} \leq \left(\frac{\rho+1}{2}\right) u_n$$

所以

$$\begin{array}{ccccccc} & \left(\frac{\rho+1}{2}\right) u_m & \left(\frac{\rho+1}{2}\right)^2 u_m & \left(\frac{\rho+1}{2}\right)^3 u_m & \cdots & \text{收敛} \\ & \veebar & \veebar & \veebar & & \Downarrow \\ u_1 + \cdots + u_m & + u_{m+1} & + u_{m+2} & + u_{m+3} + & \cdots & \text{收敛} \end{array}$$

定理 4（比值审敛法，达朗贝尔判别法） 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数，又设 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$。则

2. 若 $\rho \in (1, +\infty]$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散（并且此时 $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$）；

证明 2. 分析 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \rho$ 的定义可知：

$$
\begin{aligned}
\text{当}n\text{充分大}, \frac{u_{n+1}}{u_n} \approx \rho > 1 \quad &\Rightarrow \quad \text{当}n \geq m\text{时}, \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \\
&\Rightarrow \quad \text{当}n \geq m\text{时}, u_{n+1} > u_n
\end{aligned}
$$

一般项从第 m 项开始严格递增，不趋于零，所以级数发散

例 判断级数

$$10+\frac{10^2}{1\cdot 2}+\frac{10^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots+\frac{10^n}{n!}+\cdots$$

的敛散性。

解 因为：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{10^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{10^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\cdot 10^{n+1}}{(n+1)!\cdot 10^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{10}{n+1}=0$$

所以由比值审敛法知，级数收敛。

例 判断级数

$$(1)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2};\qquad (2)\quad \sum_{n=1}^{\infty} n\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$$

的敛散性。

例 判断级数 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} n \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ 的敛散性。

解 (1) 因为

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{3^n}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 \cdot 3^{n+1}}{n^2 \cdot 3^n} = \lim_{n\to\infty} 3\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = 3$$

所以由比值审敛法知，级数发散。

(2) 因为

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}{n\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} \xlongequal{x=\frac{\pi}{2^{n+2}}} \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{\tan 2x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\tan x)'}{(\tan 2x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{2 \cdot \frac{1}{\cos^2 2x}} = \frac{1}{2}$$

所以由比值审敛法知，级数收敛。

定理 4（根值审敛法，柯西判别法） 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数，如果

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$$

则

1. 若 $\rho \in [0, 1)$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；
2. 若 $\rho \in (1, +\infty]$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散（并且此时 $\lim_{n\to\infty} u_n = \infty \neq 0$）；
3. 若 $\rho = 1$，则此法失效，级数可能收敛也可能发散。

大致解释

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho \Rightarrow u_n \approx \rho^n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 与 } \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \text{ 同敛散}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{收敛} & \rho < 1 \\ \text{发散} & \rho > 1 \end{cases}$$

例 判断级数 (1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$； (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$ 的敛散性

解 (1) 因为

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1$$

所以由根值审敛法知，级数收敛。

(2) 因为

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2-\frac{1}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3-\frac{1}{n}}\right)^{2-\frac{1}{n}}=\frac{1}{9}$$

所以由根值审敛法知，级数收敛。

交错级数 是指各项是正负交错的级数。即

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$$

$$-u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} u_n$$

其中 $u_1, u_2, \cdots$ 都是正数（$u_n > 0$）

例 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$

莱布尼茨定理 若交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 满足：

1. $u_n \geq u_{n+1}$（$n = 1, 2, 3, \cdots$）；
2. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$，

则级数收敛，且其和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n \leq u_1$，余项 r_n 成立 $|r_n| \leq u_{n+1}$

证明

目标一：证明部分和 $\{s_n\}$ 收敛。

步骤：1. $\{s_{2n}\}$ 收敛；2. $\{s_{2n+1}\}$ 收敛，且 $\lim s_{2n+2} = \lim s_{2n+1}$

1. 证明 $\{s_{2n}\}$ 收敛。这是因为：

   1.1 $\{s_{2n}\}$ 是单调递增：

$$\begin{aligned} s_{2n+2} &= u_1 - u_2 + \cdots + u_{2n-1} - u_{2n} + u_{2n+1} - u_{2n+2} \\ &\geq u_1 - u_2 + \cdots + u_{2n-1} - u_{2n} = s_{2n} \end{aligned}$$

   1.2 $\{s_{2n}\}$ 是有上界：

$$\begin{aligned} s_{2n} &= u_1 - u_2 + \cdots + u_{2n-1} - u_{2n} \\ &= u_1 + (-u_2 + u_3) + \cdots + (-u_{2n-2} + u_{2n-1}) - u_{2n} \leq u_1 \end{aligned}$$

所以 $\lim s_{2n}$ 存在，且 $\lim s_{2n} \leq u_1$

目标一：证明部分和 $\{s_n\}$ 收敛。

步骤：1. $\{s_{2n}\}$ 收敛；2. $\{s_{2n+1}\}$ 收敛，且 $\lim s_{2n+1} = \lim s_{2n}$

2. 证明 $\{s_{2n+1}\}$ 收敛，且 $\lim s_{2n+1} = \lim s_{2n}$。这是因为：

$$\lim s_{2n+1} = \lim(s_{2n} + u_{2n+1}) = \lim s_{2n} + \lim u_{2n+1} = \lim s_{2n}.$$

目标二：证明项 r_n 的绝对值 $|r_n|$，成立 $|r_n| \le u_{n+1}$。这是：

$$\because \quad r_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} (-1)^{i-1} u_i$$

$$= (-1)^{n-1} \underbrace{\left(u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - u_{n+4} + \cdots\right)}_{\ge 0}$$

$$\therefore \quad |r_n| = u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - u_{n+4} + u_{n+5} \cdots$$

$$= u_{n+1} + (-u_{n+2} + u_{n+3}) + (-u_{n+4} + u_{n+5}) + \cdots$$

$$\le u_{n+1}$$

例 判断下列级数敛散性

(1) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$

(2) $\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 5}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{\ln(n+1)}+\cdots$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n!}{2^{n^2}}$

解

(1) 这是交错级数，$u_n=\frac{1}{n}$，单调递减，$\lim_{n\to\infty}u_n=0$，所以收敛

(2) 这是交错级数，$u_n=\frac{1}{\ln(n+1)}$，单调递减，$\lim_{n\to\infty}u_n=0$，所以收敛

(3) 这是交错级数，$u_n=\frac{n!}{2^{n^2}}$，单调递减（?），$\lim_{n\to\infty}u_n=0$（?）

例 判断 (3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n!}{2^{n^2}}$ 级数敛散性

解（续） (3) 这是交错级数，$u_n=\frac{n!}{2^{n^2}}$

1. 证明 u_n 是单调递减：往证 $\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$，这是

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{(n+1)!}{2^{(n+1)^2}}}{\frac{n!}{2^{n^2}}}=\frac{(n+1)}{2^{2n+1}}<\frac{2^{n+1}}{2^{2n+1}}=\frac{1}{2^n}\leq\frac{1}{2}$$

2. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$：反复利用上述结论 $u_{n+1}\leq\frac{1}{2}u_n$，可得

$$u_{n+1}\leq\frac{1}{2}u_n\leq\left(\frac{1}{2}\right)^2u_{n-1}\leq\cdots\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n u_1$$

可见 $0\leq\lim\limits_{n\to\infty}u_n\leq\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n u_1=0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$。

3. 所以根据莱布尼茨判别法，该交错级数收敛。

- 对一般的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

如果正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n| + \cdots$$

收敛，则称原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是 绝对收敛。

定理 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 级数收敛。

定理 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

证明

1. $v_n \triangleq u_n + |u_n| \Rightarrow 0 \le v_n \le 2|u_n| \xrightarrow{\text{比较审敛法}} \sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛

2. 注意到

$$u_n = (u_n + |u_n|) - |u_n| =: v_n - |u_n|,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (v_n - |u_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n - \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|.$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

注 但反过来，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，是不能断定 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的敛散性。

- 例 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也发散的例子：

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum_{n=1}^{\infty}u_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

- 例 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的例子：

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots \quad \text{（收敛）}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right|=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots \text{（发散）}$$

- 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛。

定理 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \rho \quad 或 \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = \rho$$

则成立：

1. 若 $\rho \in [0, 1)$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛；
2. 若 $\rho \in (1, +\infty]$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散（并且此时 $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$）；
3. 若 $\rho = 1$，则此法失效，级数可能收敛也可能发散。

证明 对 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 应用比值审敛法或根植收敛：

1. $\rho < 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛。
2. $\rho > 1$ 是，$\lim_{n\to\infty} |u_n| \neq 0$，所以 $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

补充

- p 级数（$p>0$）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$ 当 $p>1$ 时收敛，可以说是定义黎曼 ζ 函数的起点，接下来出场的就是大名鼎鼎的黎曼猜想！
- 推荐关于黎曼猜想的极好的科普书籍：卢昌海，《黎曼猜想漫谈》，清华大学出版社，2012