第 5 章 d：反常积分

数学系　梁卓滨

2019-2020 学年 I

Outline

"正常积分":

$$\int_a^b f(x)dx$$

其中

- $[a, b]$ 是有界区间;
- $f(x)$ 是连续函数（至少是有界函数）.

"正常积分":

$$\int_a^b f(x)dx$$

其中

- $[a, b]$ 是有界区间;
- $f(x)$ 是连续函数（至少是有界函数）.

反常积分:

- 积分区间是无限区间:
- 被积函数是无界函数:

"正常积分":

$$\int_a^b f(x)dx$$

其中

- $[a, b]$ 是有界区间;
- $f(x)$ 是连续函数（至少是有界函数）.

反常积分:

- 积分区间是无限区间:

$$\int_0^{\infty} xe^{-x}dx, \quad \int_{-\infty}^{4} e^{4x}dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$$

- 被积函数是无界函数:

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}}dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}dx$$

暨南大学 JINAN UNIVERSITY

无限区间上的积分

定义 设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$，则定义

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty}$$

无限区间上的积分

定义 设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$，则定义

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a)$$

无限区间上的积分

定义 设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$，则定义

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a) = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a).$$

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

无限区间上的积分

定义 设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$，则定义

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a) = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a).$$

若极限存在，则称反常积分**收敛**；

无限区间上的积分

定义 设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$，则定义

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a) = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a).$$

若极限存在，则称反常积分**收敛**；若极限不存在，则称反常积分**发散**.

无限区间上的积分

定义 设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$，则定义

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a) = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a).$$

若极限存在，则称反常积分**收敛**；若极限不存在，则称反常积分**发散**.

例 1 计算反常积分 $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx$.

无限区间上的积分

定义 设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$，则定义

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a) = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a).$$

若极限存在，则称反常积分**收敛**；若极限不存在，则称反常积分**发散**.

例 1 计算反常积分 $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$.

解 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \quad = -\frac{1}{x}$

无限区间上的积分

定义 设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$，则定义

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a) = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a).$$

若极限存在，则称反常积分**收敛**；若极限不存在，则称反常积分**发散**.

例 1 计算反常积分 $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$.

解 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \quad = -\frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty}$

无限区间上的积分

定义 设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$，则定义

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a) = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a).$$

若极限存在，则称反常积分**收敛**；若极限不存在，则称反常积分**发散**.

例 1 计算反常积分 $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx$.

解 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = \quad = -\frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty} = -\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} - 1\right)$

无限区间上的积分

定义 设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$，则定义

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a) = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a).$$

若极限存在，则称反常积分**收敛**；若极限不存在，则称反常积分**发散**.

例 1 计算反常积分 $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx.$

解 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \quad = -\frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty} = -\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} - 1\right) = 1$

无限区间上的积分

定义 设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$，则定义

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_{a}^{+\infty} = F(+\infty) - F(a) = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a).$$

若极限存在，则称反常积分**收敛**；若极限不存在，则称反常积分**发散**.

例 1 计算反常积分 $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx.$

解 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = \quad = -\frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty} = -\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} - 1\right) = 1$

例 2 计算反常积分 $\int_0^{\infty} xe^{-x^2}dx.$

无限区间上的积分

定义 设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$，则定义

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a) = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a).$$

若极限存在，则称反常积分**收敛**；若极限不存在，则称反常积分**发散**.

例 1 计算反常积分 $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx$.

解 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = \; = -\frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty} = -\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} - 1\right) = 1$

例 2 计算反常积分 $\int_0^{\infty} xe^{-x^2}dx$.

解 $\int_0^{\infty} xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$

无限区间上的积分

定义 设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$，则定义

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a) = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a).$$

若极限存在，则称反常积分**收敛**；若极限不存在，则称反常积分**发散**.

例 1 计算反常积分 $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx$.

解 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = \ = -\frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty} = -\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} - 1\right) = 1$

例 2 计算反常积分 $\int_0^{\infty} xe^{-x^2}dx$.

解 $\int_0^{\infty} xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^{+\infty}$

无限区间上的积分

定义 设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$，则定义

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a) = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a).$$

若极限存在，则称反常积分**收敛**；若极限不存在，则称反常积分**发散**.

例 1 计算反常积分 $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx$.

解 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = \; = -\frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty} = -\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} - 1\right) = 1$

例 2 计算反常积分 $\int_0^{\infty} xe^{-x^2}dx$.

解 $\int_0^{\infty} xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} - e^0\right)$

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

无限区间上的积分

定义 设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$，则定义

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a) = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a).$$

若极限存在，则称反常积分**收敛**；若极限不存在，则称反常积分**发散**.

例 1 计算反常积分 $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx.$

解 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \; = -\frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty} = -\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} - 1\right) = 1$

例 2 计算反常积分 $\int_0^{\infty} xe^{-x^2} dx.$

解 $\int_0^{\infty} xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} - e^0\right) = \frac{1}{2}.$

例 3 计算反常积分 $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$.

例 3 计算反常积分 $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$.

解法一 先求出原函数

$$\int xe^{-x}dx$$

例 3 计算反常积分 $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$.

解法一 先求出原函数

$$\int xe^{-x}dx = -\int xde^{-x}$$

例 3 计算反常积分 $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$.

解法一 先求出原函数

$$\int xe^{-x}dx = -\int xde^{-x} = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx$$

例 3 计算反常积分 $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$.

解法一 先求出原函数

$$\int xe^{-x}dx = -\int xde^{-x} = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C$$

例 3 计算反常积分 $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx.$

解法一 先求出原函数

$$\int xe^{-x}dx = -\int xde^{-x} = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C$$

所以

$$\int_0^{\infty} xe^{-x}dx = -(x+1)e^{-x}\Big|_0^{+\infty}$$

例 3 计算反常积分 $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$.

解法一 先求出原函数

$$\int xe^{-x}dx = -\int xde^{-x} = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C$$

所以

$$\int_0^{\infty} xe^{-x}dx = -(x+1)e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = -\left(\lim_{x\to+\infty}(x+1)e^{-x} - 1\right)$$

例 3 计算反常积分 $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$.

解法一 先求出原函数

$$\int xe^{-x}dx = -\int xde^{-x} = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C$$

所以

$$\int_0^{\infty} xe^{-x}dx = -(x+1)e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = -\left(\lim_{x\to+\infty}(x+1)e^{-x} - 1\right) = 1.$$

例 3 计算反常积分 $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$.

解法一 先求出原函数

$$\int xe^{-x}dx = -\int xde^{-x} = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C$$

所以

$$\int_0^{\infty} xe^{-x}dx = -(x+1)e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = -\left(\lim_{x\to+\infty}(x+1)e^{-x} - 1\right) = 1.$$

解法二

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = -\int_0^{+\infty} xde^{-x}$$

例 3 计算反常积分 $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$.

解法一 先求出原函数

$$\int xe^{-x}dx = -\int xde^{-x} = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C$$

所以

$$\int_0^{\infty} xe^{-x}dx = -(x+1)e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = -\left(\lim_{x\to+\infty}(x+1)e^{-x} - 1\right) = 1.$$

解法二

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = -\int_0^{+\infty} xde^{-x} = -xe^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}dx$$

例 3 计算反常积分 $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$.

解法一 先求出原函数

$$\int xe^{-x}dx = -\int xde^{-x} = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C$$

所以

$$\int_0^{\infty} xe^{-x}dx = -(x+1)e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = -\left(\lim_{x\to+\infty}(x+1)e^{-x} - 1\right) = 1.$$

解法二

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = -\int_0^{+\infty} xde^{-x} = -xe^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}dx$$

$$= -\left(\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} - 0\right)$$

例 3 计算反常积分 $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$.

解法一 先求出原函数

$$\int xe^{-x}dx = -\int xde^{-x} = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C$$

所以

$$\int_0^{\infty} xe^{-x}dx = -(x+1)e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = -\left(\lim_{x\to+\infty}(x+1)e^{-x} - 1\right) = 1.$$

解法二

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = -\int_0^{+\infty} xde^{-x} = -xe^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}dx$$

$$= -\left(\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} - 0\right) - e^{-x}\Big|_0^{+\infty}$$

例 3 计算反常积分 $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$.

解法一 先求出原函数

$$\int xe^{-x}dx = -\int xde^{-x} = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C$$

所以

$$\int_0^{\infty} xe^{-x}dx = -(x+1)e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = -\left(\lim_{x\to+\infty}(x+1)e^{-x} - 1\right) = 1.$$

解法二

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx &= -\int_0^{+\infty} xde^{-x} = -xe^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}dx \\ &= -\left(\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} - 0\right) - e^{-x}\Big|_0^{+\infty} \\ &= -\left(\lim_{x\to+\infty} e^{-x} - 1\right)\end{aligned}$$

例 3 计算反常积分 $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx.$

解法一 先求出原函数

$$\int xe^{-x}dx = -\int xde^{-x} = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C$$

所以

$$\int_0^{\infty} xe^{-x}dx = -(x+1)e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = -\left(\lim_{x\to+\infty}(x+1)e^{-x} - 1\right) = 1.$$

解法二

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = -\int_0^{+\infty} xde^{-x} = -xe^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}dx$$

$$= -\left(\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} - 0\right) - e^{-x}\Big|_0^{+\infty}$$

$$= -\left(\lim_{x\to+\infty} e^{-x} - 1\right) = 1.$$

定义 设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$，则定义

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{b}$$

定义 设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$，则定义

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{b} = F(b) - F(-\infty)$$

定义 设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$，则定义

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{b} = F(b) - F(-\infty) = F(b) - \lim_{x\to-\infty} F(x).$$

定义 设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$，则定义

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{b} = F(b) - F(-\infty) = F(b) - \lim_{x\to-\infty} F(x).$$

若极限存在，则称反常积分**收敛**；

定义 设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$，则定义

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{b} = F(b) - F(-\infty) = F(b) - \lim_{x\to-\infty} F(x).$$

若极限存在，则称反常积分**收敛**；若极限不存在，则称反常积分**发散**.

定义 设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$，则定义

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{b} = F(b) - F(-\infty) = F(b) - \lim_{x\to-\infty} F(x).$$

若极限存在，则称反常积分**收敛**；若极限不存在，则称反常积分**发散**.

定义 设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$，则定义

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

定义 设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$，则定义

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{b} = F(b) - F(-\infty) = F(b) - \lim_{x\to-\infty} F(x).$$

若极限存在，则称反常积分**收敛**；若极限不存在，则称反常积分**发散**.

定义 设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$，则定义

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = F(+\infty) - F(-\infty)$$

定义 设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$，则定义

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{b} = F(b) - F(-\infty) = F(b) - \lim_{x\to-\infty} F(x).$$

若极限存在，则称反常积分**收敛**；若极限不存在，则称反常积分**发散**.

定义 设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$，则定义

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = F(+\infty) - F(-\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x) - \lim_{x\to-\infty} F(x).$$

定义 设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$，则定义

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{b} = F(b) - F(-\infty) = F(b) - \lim_{x\to-\infty} F(x).$$

若极限存在，则称反常积分 **收敛**；若极限不存在，则称反常积分 **发散**.

定义 设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$，则定义

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = F(+\infty) - F(-\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x) - \lim_{x\to-\infty} F(x).$$

若上述两个极限都存在，则称反常积分 **收敛**；

定义 设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$，则定义

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{b} = F(b) - F(-\infty) = F(b) - \lim_{x\to-\infty} F(x).$$

若极限存在，则称反常积分**收敛**；若极限不存在，则称反常积分**发散**.

定义 设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$，则定义

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = F(+\infty) - F(-\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x) - \lim_{x\to-\infty} F(x).$$

若上述两个极限都存在，则称反常积分**收敛**；否则，称反常积分**发散**.

定义 设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$，则定义

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{b} = F(b) - F(-\infty) = F(b) - \lim_{x\to-\infty} F(x).$$

若极限存在，则称反常积分**收敛**；若极限不存在，则称反常积分**发散**.

定义 设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$，则定义

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = F(+\infty) - F(-\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x) - \lim_{x\to-\infty} F(x).$$

若上述两个极限都存在，则称反常积分**收敛**；否则，称反常积分**发散**.

定义 设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$，则定义

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{b} = F(b) - F(-\infty) = F(b) - \lim_{x\to-\infty} F(x).$$

若极限存在，则称反常积分**收敛**；若极限不存在，则称反常积分**发散**.

定义 设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$，则定义

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = F(+\infty) - F(-\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x) - \lim_{x\to-\infty} F(x).$$

若上述两个极限都存在，则称反常积分**收敛**；否则，称反常积分**发散**.

例 4 计算反常积分 **(1)** $\int_{-\infty}^{0} e^{4x}dx$, **(2)** $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$.

例 4 计算反常积分 **(1)** $\int_{-\infty}^{0} e^{4x} dx$, **(2)** $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$.

例 4 计算反常积分 **(1)** $\int_{-\infty}^{0} e^{4x}dx$, **(2)** $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$.

解 (1)

$$\int_{-\infty}^{0} e^{4x}dx = \frac{1}{4}e^{4x}$$

例 4 计算反常积分 **(1)** $\int_{-\infty}^{0} e^{4x} dx$, **(2)** $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$.

解 **(1)**

$$\int_{-\infty}^{0} e^{4x} dx = \frac{1}{4} e^{4x} \Big|_{-\infty}^{0}$$

例 4 计算反常积分 **(1)** $\int_{-\infty}^{0} e^{4x}dx$, **(2)** $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$.

解 **(1)**

$$\int_{-\infty}^{0} e^{4x}dx = \frac{1}{4}e^{4x}\Big|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{4}\left(1 - \lim_{x\to-\infty} e^{4x}\right)$$

例 4 计算反常积分 **(1)** $\int_{-\infty}^{0} e^{4x} dx$, **(2)** $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$.

解 (1)

$$\int_{-\infty}^{0} e^{4x} dx = \frac{1}{4} e^{4x} \Big|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{4}\left(1 - \lim_{x \to -\infty} e^{4x}\right) = \frac{1}{4}.$$

例 4 计算反常积分 **(1)** $\int_{-\infty}^{0} e^{4x} dx$, **(2)** $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$.

解 (1)

$$\int_{-\infty}^{0} e^{4x} dx = \frac{1}{4} e^{4x} \Big|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{4}\left(1 - \lim_{x \to -\infty} e^{4x}\right) = \frac{1}{4}.$$

(2)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x$$

例 4 计算反常积分 **(1)** $\int_{-\infty}^{0} e^{4x} dx$, **(2)** $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$.

解 (1)

$$\int_{-\infty}^{0} e^{4x} dx = \frac{1}{4} e^{4x}\Big|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{4}\left(1 - \lim_{x\to-\infty} e^{4x}\right) = \frac{1}{4}.$$

(2)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x\Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

例 4 计算反常积分 **(1)** $\int_{-\infty}^{0} e^{4x}dx$, **(2)** $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$.

解 (1)

$$\int_{-\infty}^{0} e^{4x}dx = \frac{1}{4}e^{4x}\Big|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{4}\left(1 - \lim_{x\to-\infty} e^{4x}\right) = \frac{1}{4}.$$

(2)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x\Big|_{-\infty}^{+\infty}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \arctan x - \lim_{x\to-\infty} \arctan x$$

例 4 计算反常积分 **(1)** $\int_{-\infty}^{0} e^{4x}dx$, **(2)** $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$.

解 **(1)**

$$\int_{-\infty}^{0} e^{4x}dx = \frac{1}{4}e^{4x}\Big|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{4}\left(1 - \lim_{x\to-\infty} e^{4x}\right) = \frac{1}{4}.$$

(2)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x\Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \arctan x - \lim_{x\to-\infty} \arctan x$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

例 4 计算反常积分 **(1)** $\int_{-\infty}^{0} e^{4x}dx$, **(2)** $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$.

解 (1)

$$\int_{-\infty}^{0} e^{4x}dx = \frac{1}{4}e^{4x}\Big|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{4}\left(1 - \lim_{x\to-\infty} e^{4x}\right) = \frac{1}{4}.$$

(2)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x\Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \arctan x - \lim_{x\to-\infty} \arctan x$$

$$= \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi.$$

无界函数的反常积分

定义

(1) 设 $f(x)$ 在 $(a, b]$ 上连续，具有原函数 $F(x)$，并且在趋于点 a 时无界

$$\int_a^b f(x)dx$$

无界函数的反常积分

定义

(1) 设 $f(x)$ 在 $(a, b]$ 上连续，具有原函数 $F(x)$，并且在趋于点 a 时无界（a 称为**瑕点**），

$$\int_a^b f(x)dx$$

无界函数的反常积分

定义

(1) 设 $f(x)$ 在 $(a, b]$ 上连续，具有原函数 $F(x)$，并且在趋于点 a 时无界（a 称为**瑕点**），则定义

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_{a^+}^{b}$$

无界函数的反常积分

定义

(1) 设 $f(x)$ 在 $(a, b]$ 上连续，具有原函数 $F(x)$，并且在趋于点 a 时无界（a 称为**瑕点**），则定义

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_{a^+}^b = F(b) - F(a^+).$$

无界函数的反常积分

定义

(1) 设 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续，具有原函数 $F(x)$，并且在趋于点 a 时无界（a 称为**瑕点**），则定义

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_{a^+}^{b} = F(b) - F(a^+).$$

(2) 设 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续，具有原函数 $F(x)$，并且在趋于点 b 时无界 则定义

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_{a}^{b^-}$$

无界函数的反常积分

定义

(1) 设 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续，具有原函数 $F(x)$，并且在趋于点 a 时无界（a 称为**瑕点**），则定义

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_{a^+}^b = F(b) - F(a^+).$$

(2) 设 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续，具有原函数 $F(x)$，并且在趋于点 b 时无界 则定义

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^{b^-} = F(b^-) - F(a).$$

无界函数的反常积分

定义

(1) 设 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续，具有原函数 $F(x)$，并且在趋于点 a 时无界（a 称为**瑕点**），则定义

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_{a^+}^{b} = F(b) - F(a^+).$$

(2) 设 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续，具有原函数 $F(x)$，并且在趋于点 b 时无界（b 称为**瑕点**），则定义

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_{a}^{b^-} = F(b^-) - F(a).$$

无界函数的反常积分

定义

(1) 设 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续，具有原函数 $F(x)$，并且在趋于点 a 时无界（a 称为**瑕点**），则定义

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_{a^+}^{b} = F(b) - F(a^+).$$

(2) 设 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续，具有原函数 $F(x)$，并且在趋于点 b 时无界（b 称为**瑕点**），则定义

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_{a}^{b^-} = F(b^-) - F(a).$$

若上述极限存在，则称反常积分**收敛**；

无界函数的反常积分

定义

(1) 设 $f(x)$ 在 $(a, b]$ 上连续，具有原函数 $F(x)$，并且在趋于点 a 时无界（a 称为**瑕点**），则定义

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_{a^+}^b = F(b) - F(a^+).$$

(2) 设 $f(x)$ 在 $[a, b)$ 上连续，具有原函数 $F(x)$，并且在趋于点 b 时无界（b 称为**瑕点**），则定义

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^{b^-} = F(b^-) - F(a).$$

若上述极限存在，则称反常积分**收敛**；若不存在，则称反常积分**发散**.

无界函数的反常积分

定义

(1) 设 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续，具有原函数 $F(x)$，并且在趋于点 a 时无界（a 称为**瑕点**），则定义

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_{a^+}^{b} = F(b) - F(a^+).$$

(2) 设 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续，具有原函数 $F(x)$，并且在趋于点 b 时无界（b 称为**瑕点**），则定义

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_{a}^{b^-} = F(b^-) - F(a).$$

若上述极限存在，则称反常积分**收敛**；若不存在，则称反常积分**发散**.

例 1 计算反常积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

例 1 计算反常积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

例 1 计算反常积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

解

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x$$

例 1 计算反常积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

解

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x \Big|_0^{1^-}$$

例 1 计算反常积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

解

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x \Big|_0^{1^-} = \lim_{x \to 1^-} \arcsin x - 0$$

例 1 计算反常积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

解

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x\Big|_0^{1^-} = \lim_{x\to 1^-} \arcsin x - 0 = \frac{\pi}{2}.$$