

## 第 13 周作业

练习 1. 判断下列级数的敛散性, 并说明原因

1.  $\frac{1^4}{1!} + \frac{2^4}{2!} + \frac{3^4}{3!} + \cdots + \frac{n^4}{n!} + \cdots$

2.  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}$

**练习 2.** 判断下列级数是否收敛？若然，是绝对收敛还是条件收敛？

1.  $\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 5} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{\ln(n+1)} + \cdots$

2.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin \frac{\pi}{n+1}}{\pi^{n+1}}$

3.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n+1}{n}$

4.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$

**练习 3.** 举例说明:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 但  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  发散。

**练习 4.** 求下列级数的收敛域:

1.  $1 - x + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^3}{3^2} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n^2} + \cdots$

2.  $\frac{x}{1 \cdot 4} + \frac{x^2}{2 \cdot 4^2} + \frac{x^3}{3 \cdot 4^3} + \cdots + \frac{x^n}{n \cdot 4^n} + \cdots$

3.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

4.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^{3n-1}}{\sqrt{n}}$

**练习 5.** 设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  (不一定是正项级数) 收敛, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n} = 1$ 。问级数  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  是否也收敛? 说明理由。

**练习 6.** 利用逐项求导或逐项积分, 求级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2(n-1)}$  的和函数。

**练习 7.** 求级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$  的值。

**提示**构造幂级数  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  使得  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = S(1)$ ；求解  $S(x)$ ；利用逐步求导公式，将  $S(x)$  化为幂级数  $1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots = e^x$ 。