第 14 周作业解答

练习 1. 写出二次型 $f = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3$ 所对应的矩阵。

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

练习 2. 用配方法求以下二次型的标准型，写出所做的非退化线性变量代换 $y = Cx$ 是什么，并指出正、负惯性指标是多少。

1. $f = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$
2. $f = x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$

解

1.

$$\begin{aligned} f &= x_1^2 + 2x_1(2x_2 + x_3) + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_2x_3 \\ &= x_1^2 + 2x_1(2x_2 + x_3) + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_2x_3 \\ &= x_1^2 + 2x_1(2x_2 + x_3) + (2x_2 + x_3)^2 - (2x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_2x_3 \\ &= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 3x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2 \\ &= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 3\left[x_2^2 + 2 \cdot x_2 \cdot \frac{1}{3}x_3\right] + 2x_3^2 \\ &= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 3\left[x_2^2 + 2 \cdot x_2 \cdot \frac{1}{3}x_3 + \left(\frac{1}{3}x_3\right)^2\right] + \frac{1}{3}x_3^2 + 2x_3^2 \\ &= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 3\left(x_2 + \frac{1}{3}x_3\right)^2 + \frac{7}{3}x_3^2. \end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + \quad x_3 \\ y_2 = \qquad\quad x_2 + \frac{1}{3}x_3 \\ y_3 = \qquad\qquad\quad x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 - \frac{1}{3}y_3 \\ x_2 = \qquad\quad y_2 - \frac{1}{3}y_3 \\ x_3 = \qquad\qquad\quad y_3 \end{cases} \Rightarrow \quad x = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y = Cy$$

则 $|C| = 1 \neq 0$（说明为非退化线性变换），且

$$f = y_1^2 - 3y_2^2 + \frac{7}{3}y_3^2.$$

正惯性指标为 2，负惯性指标为 1。

2.

$$\begin{aligned} f &= x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3 \\ &= x_1^2 + 2x_1(-x_2 + x_3) - 3x_3^2 - 6x_2x_3 \\ &= x_1^2 + 2x_1(-x_2 + x_3) + (-x_2 + x_3)^2 - (-x_2 + x_3)^2 - 3x_3^2 - 6x_2x_3 \\ &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 - x_2^2 - 4x_2x_3 - 4x_3^2 \\ &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 - (x_2 + 2x_3)^2 \end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 + \ \ x_3 \\ y_2 = \qquad x_2 + 2x_3 \\ y_3 = \qquad\qquad\ x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 - 3y_3 \\ x_2 = \qquad y_2 - 2y_3 \\ x_3 = \qquad\qquad\ y_3 \end{cases} \Rightarrow \quad x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y = Cy$$

则 $|C| = 1 \neq 0$（说明为非退化线性变换）

$$f = y_1^2 - y_2^2.$$

正惯性指标为 1，负惯性指标为 1。

练习 3. t 为何值时，二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 是正定?

解 f 的系数矩阵是:

$$\begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}.$$

f 是正定当且仅当所以顺序主子式大于零，所以

$A_1 = t > 0,$

$A_2 = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2 - 1 > 0 \Rightarrow t > 1 \quad \text{or} \quad t < -1 \xRightarrow{t>0} t > 1,$

$A_3 = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} \xlongequal[r_3 - t \times r_1]{r_2 + r_1} \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ t+1 & t+1 & 0 \\ 1-t^2 & -1-t & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+1 & t+1 \\ 1-t^2 & -1-t \end{vmatrix} = (t+1)^2(t-2) > 0 \xRightarrow{t>1} t > 2.$

所以 $t > 2$.

练习 4. 设 A, B 均是 n 阶正定矩阵，证明 $A + B$ 也是正定矩阵。

证明设 $x \neq 0$ 为 n 维列向量，则

$$x^T(A + B)x = x^T Ax + x^T Bx > 0$$

其中最后一步用到 A, B 的正定性。所以 $A + B$ 为正定矩阵。

练习 5. 设 n 阶对称矩阵 A 满足 $A^2 - 4A + 3I = 0$。证明 A 是正定矩阵。

证明设 λ 为 A 的任一特征值，α 为相应特征向量，即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

从而

$$\begin{aligned} 0 &= (A^2 - 4A + 3I)\alpha \\ &= A^2\alpha - 4A\alpha + 3\alpha \\ &= \lambda^2\alpha - 4\lambda\alpha + 3\alpha \\ &= (\lambda^2 - 4\lambda + 3)\alpha \end{aligned}$$

所以

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

得 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = 3$。总之，$\lambda > 0$。说明 A 的特征值均是大于零，所以 A 是正定。

练习 6. 设 α 和 β 是两个非零 m 维列向量，令 $A = I - \alpha\beta^T$。

1. 证明 α 是 A 的一个特征向量。
2. 证明：若 $\beta^T\alpha \neq 0$，则 A 可对角化。
3. 求 $|A|$。
4. 问何时 A 可逆，并求出 A^{-1}（提示：参考式子 $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \cdots$）

解 (1) 注意到

$$A\alpha = (I - \alpha\beta^T)\alpha = \alpha - \alpha\beta^T\alpha = (1 - \beta^T\alpha)\alpha,$$

并且 $\alpha \neq 0$，所以 α 是 A 的一个特征向量，对应特征值为 $1 - \beta^T\alpha$.

(2) 齐次线性方程组 $\beta^T x = 0$ 的基础解系包含 $n - r(\beta^T) = n - 1$ 个向量，记为：$\xi_1, \cdots, \xi_{n-1}$。有题设，$1 - \beta^T\alpha \neq 1$，说明 α 与 ξ_i 是不同特征值的特征向量，进而 $\alpha, \xi_1, \cdots, \xi_{n-1}$ 线性无关。

注意到

$$A\xi_i = (I - \alpha\beta^T)\xi_i = \xi_i.$$

所以 $\xi_1, \cdots, \xi_{n-1}$ 均为 A 的特征向量，对应特征值为 1.

所以 A 有 n 个线性无关向量 $\alpha, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$。所以 A 可对角化。

(3) 假设 $\beta^T\alpha \neq 0$。由上一步可知 A 相似于 $\begin{pmatrix} 1-\beta^T\alpha & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$，所以

$$|A| = 1 - \beta^T\alpha.$$

现在讨论 $\beta^T\alpha = 0$ 的情况。令 $\alpha_k = \alpha + \frac{1}{k}\beta$（$k$ 为任意正整数）。则 $\beta^T\alpha_k = \beta^T\alpha + \frac{1}{k}\beta^T\beta = \frac{1}{k}\beta^T\beta \neq 0$。所以对 $I - \alpha_k\beta^T$ 可应用上述结论，得

$$|I - \alpha_k\beta^T| = 1 - \beta^T\alpha_k.$$

在上式中取极限 $k \to \infty$，即可得

$$|I - \alpha\beta^T| = 1 - \beta^T\alpha.$$

(4) 当 $1 - \beta^T\alpha \neq 0$ 时，A 可逆，此时 $A^{-1} = I + \frac{1}{1-\beta^T\alpha}\alpha\beta^T$。(猜测 A^{-1} 的过程：联想到 $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \cdots$，张冠李戴之下，尝试

$$\begin{aligned}
(I - \beta^T\alpha)^{-1} &= I + \beta^T\alpha + (\beta^T\alpha)^2 + (\beta^T\alpha)^3 + \cdots \\
&= I + \beta^T\alpha + \beta^T\alpha\beta^T\alpha + \beta^T\alpha\beta^T\alpha\beta^T\alpha + \cdots \\
&= I + \beta^T\alpha + (\beta^T\alpha)\alpha\beta^T + (\beta^T\alpha)^2\alpha\beta^T + \cdots \\
&= I + [1 + \beta^T\alpha + (\beta^T\alpha)^2 + \cdots]\alpha\beta^T \\
&= I + \frac{1}{1-\beta^T\alpha}\alpha\beta^T.
\end{aligned}$$

直接验证 $(I - \alpha\beta^T)(I + \frac{1}{1-\beta^T\alpha}\alpha\beta^T) = I$，所以确实为所求。)