

第 09 周作业

练习 1. 问 k 取何值时, 方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + kx_3 = 4 \\ -x_1 + kx_2 + x_3 = k^2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$$
 有唯一解、无穷多解、无解。并且有解时, 求出全部解。

练习 2. 问 $\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 是否能由向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ 线性表示? 若能, 写出其中一个线性组合的表达式。

练习 3. 问向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是否线性相关? 若线性相关, 写出它们的一个相关表达式。

练习 4. 根据参数 a 的取值, 讨论向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$ 何时线性相关, 何时线性无关。

练习 5. 设 α, β, γ 线性无关, 证明: $\alpha, \alpha + \beta, \alpha + \beta + \gamma$ 也是线性无关。

下一题是附加题, 做出来的同学下周交上来, 可以加分

练习 6. 先介绍“幂零”的概念: 一个方阵 A 称为幂零是指存在正整数 m 使得 $A^m = O$ 。要注意的是幂零矩阵不一定是零矩阵。例如 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 不是零矩阵, 但满足 $A^2 = O$ 。

现假设 n 阶方阵 A 是幂零, 并假设 m 是最小的正整数满足 $A^m = O$ 。设 v 是 \mathbb{R}^n 的向量, 并且满足 $A^{m-1}v \neq 0$ 。证明: 向量组 $v, Av, A^2v, \dots, A^{m-1}v$ 是线性无关。

利用上述结论证明: 如果 n 阶方阵 A 是幂零, 则 $A^n = O$ 。