

第 7 章 d: 二阶线性常系数微分方程

数学系 梁卓滨

2018-2019 学年 II

We are here now...

◆ 复数简介

♣ 二阶线性微分方程

♥ 二阶常系数齐次线性微分方程

♠ 二阶常系数非齐次线性微分方程

复数简介

引入动机 希望方程 $x^2 = -1$ 有解。方法：扩充数域

复数简介

引入动机 希望方程 $x^2 = -1$ 有解。方法：扩充数域

复数定义

- 引入“虚数单位”，用符号“ i ”（或者“ $\sqrt{-1}$ ”）表示，满足

$$i^2 = -1$$

复数简介

引入动机 希望方程 $x^2 = -1$ 有解。方法：扩充数域

复数定义

- 引入“虚数单位”，用符号“ i ”（或者“ $\sqrt{-1}$ ”）表示，满足

$$i^2 = -1$$

- 复数： $a + bi$ （其中 a, b 为实数；

复数简介

引入动机 希望方程 $x^2 = -1$ 有解。方法：扩充数域

复数定义

- 引入“虚数单位”，用符号“ i ”（或者“ $\sqrt{-1}$ ”）表示，满足

$$i^2 = -1$$

- 复数： $a + bi$ （其中 a, b 为实数； a 称为实部， b 称为虚部）

复数简介

引入动机 希望方程 $x^2 = -1$ 有解。方法：扩充数域

复数定义

- 引入“虚数单位”，用符号“ i ”（或者“ $\sqrt{-1}$ ”）表示，满足

$$i^2 = -1$$

- 复数： $a + bi$ （其中 a, b 为实数； a 称为实部， b 称为虚部）

复数运算

$$(a + bi) + (c + di) =$$

$$(a + bi) - (c + di) =$$

$$(a + bi)(c + di) =$$

复数简介

引入动机 希望方程 $x^2 = -1$ 有解。方法：扩充数域

复数定义

- 引入“虚数单位”，用符号“ i ”（或者“ $\sqrt{-1}$ ”）表示，满足

$$i^2 = -1$$

- 复数： $a + bi$ （其中 a, b 为实数； a 称为实部， b 称为虚部）

复数运算

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) =$$

$$(a + bi)(c + di) =$$

复数简介

引入动机 希望方程 $x^2 = -1$ 有解。方法：扩充数域

复数定义

- 引入“虚数单位”，用符号“ i ”（或者“ $\sqrt{-1}$ ”）表示，满足

$$i^2 = -1$$

- 复数： $a + bi$ （其中 a, b 为实数； a 称为实部， b 称为虚部）

复数运算

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

$$(a + bi)(c + di) =$$

复数简介

引入动机 希望方程 $x^2 = -1$ 有解。方法：扩充数域

复数定义

- 引入“**虚数单位**”，用符号“ i ”（或者“ $\sqrt{-1}$ ”）表示，满足

$$i^2 = -1$$

- 复数**： $a + bi$ （其中 a, b 为实数； a 称为实部， b 称为虚部）

复数运算

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

$$(a + bi)(c + di) = a \cdot c + a \cdot di + bi \cdot c + bi \cdot di$$

复数简介

引入动机 希望方程 $x^2 = -1$ 有解。方法：扩充数域

复数定义

- 引入“**虚数单位**”，用符号“ i ”（或者“ $\sqrt{-1}$ ”）表示，满足

$$i^2 = -1$$

- 复数**： $a + bi$ （其中 a, b 为实数； a 称为实部， b 称为虚部）

复数运算

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

$$(a + bi)(c + di) = a \cdot c + a \cdot di + bi \cdot c + bi \cdot di$$

$$= (ac - bd) + (ad + bc)i$$

例 计算 $(1 + 2i) - 3(5 - 2i)$ 及 $(2 + i)^2$ 。

解

$$(1 + 2i) - 3(5 - 2i) =$$

$$(2 + i)^2 =$$

例 计算 $(1 + 2i) - 3(5 - 2i)$ 及 $(2 + i)^2$ 。

解

$$(1 + 2i) - 3(5 - 2i) = (1 + 2i) - (15 - 6i)$$

$$(2 + i)^2 =$$

例 计算 $(1 + 2i) - 3(5 - 2i)$ 及 $(2 + i)^2$ 。

解

$$(1 + 2i) - 3(5 - 2i) = (1 + 2i) - (15 - 6i) = -14 + 8i,$$
$$(2 + i)^2 =$$

例 计算 $(1 + 2i) - 3(5 - 2i)$ 及 $(2 + i)^2$ 。

解

$$(1 + 2i) - 3(5 - 2i) = (1 + 2i) - (15 - 6i) = -14 + 8i,$$

$$(2 + i)^2 = (2 + i)(2 + i)$$

例 计算 $(1 + 2i) - 3(5 - 2i)$ 及 $(2 + i)^2$ 。

解

$$(1 + 2i) - 3(5 - 2i) = (1 + 2i) - (15 - 6i) = -14 + 8i,$$

$$(2 + i)^2 = (2 + i)(2 + i)$$

$$= 2 \cdot 2 + 2 \cdot i + i \cdot 2 + i \cdot i$$

例 计算 $(1 + 2i) - 3(5 - 2i)$ 及 $(2 + i)^2$ 。

解

$$(1 + 2i) - 3(5 - 2i) = (1 + 2i) - (15 - 6i) = -14 + 8i,$$

$$(2 + i)^2 = (2 + i)(2 + i)$$

$$= 2 \cdot 2 + 2 \cdot i + i \cdot 2 + i \cdot i = 3 + 4i.$$

一元二次方程求解

例 方程 $x^2 + 1 = 0$

一元二次方程求解

例 方程 $x^2 + 1 = 0$ 在复数范围内有两个根

一元二次方程求解

例 方程 $x^2 + 1 = 0$ 在复数范围内有两个根 $r_1 = i$ 和 $r_2 =$

一元二次方程求解

例 方程 $x^2 + 1 = 0$ 在复数范围内有两个根 $r_1 = i$ 和 $r_2 = -i$

一元二次方程求解

例 方程 $x^2 + 1 = 0$ 在复数范围内有两个根 $r_1 = i$ 和 $r_2 = -i$

一元二次方程求根公式：

$$ar^2 + br + c = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = \text{—————}$$

一元二次方程求解

例 方程 $x^2 + 1 = 0$ 在复数范围内有两个根 $r_1 = i$ 和 $r_2 = -i$

一元二次方程求根公式：

$$ar^2 + br + c = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

一元二次方程求解

例 方程 $x^2 + 1 = 0$ 在复数范围内有两个根 $r_1 = i$ 和 $r_2 = -i$

一元二次方程求根公式：

$$ar^2 + br + c = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

一元二次方程求解

例 方程 $x^2 + 1 = 0$ 在复数范围内有两个根 $r_1 = i$ 和 $r_2 = -i$

一元二次方程求根公式：

$$ar^2 + br + c = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- 当 $b^2 - 4ac > 0$ 时,
- 当 $b^2 - 4ac = 0$ 时,
- 当 $b^2 - 4ac < 0$ 时,

一元二次方程求解

例 方程 $x^2 + 1 = 0$ 在复数范围内有两个根 $r_1 = i$ 和 $r_2 = -i$

一元二次方程求根公式：

$$ar^2 + br + c = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- 当 $b^2 - 4ac > 0$ 时，有两个互异实根；
- 当 $b^2 - 4ac = 0$ 时，
- 当 $b^2 - 4ac < 0$ 时，

一元二次方程求解

例 方程 $x^2 + 1 = 0$ 在复数范围内有两个根 $r_1 = i$ 和 $r_2 = -i$

一元二次方程求根公式：

$$ar^2 + br + c = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- 当 $b^2 - 4ac > 0$ 时，有两个互异实根；
- 当 $b^2 - 4ac = 0$ 时，有唯一实根
- 当 $b^2 - 4ac < 0$ 时，

一元二次方程求解

例 方程 $x^2 + 1 = 0$ 在复数范围内有两个根 $r_1 = i$ 和 $r_2 = -i$

一元二次方程求根公式：

$$ar^2 + br + c = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- 当 $b^2 - 4ac > 0$ 时，有两个互异实根；
- 当 $b^2 - 4ac = 0$ 时，有唯一实根
- 当 $b^2 - 4ac < 0$ 时，有两个互异复根：

一元二次方程求解

例 方程 $x^2 + 1 = 0$ 在复数范围内有两个根 $r_1 = i$ 和 $r_2 = -i$

一元二次方程求根公式：

$$ar^2 + br + c = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- 当 $b^2 - 4ac > 0$ 时，有两个互异实根；
- 当 $b^2 - 4ac = 0$ 时，有唯一实根
- 当 $b^2 - 4ac < 0$ 时，有两个互异复根：

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

一元二次方程求解

例 方程 $x^2 + 1 = 0$ 在复数范围内有两个根 $r_1 = i$ 和 $r_2 = -i$

一元二次方程求根公式：

$$ar^2 + br + c = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- 当 $b^2 - 4ac > 0$ 时，有两个互异实根；
- 当 $b^2 - 4ac = 0$ 时，有唯一实根
- 当 $b^2 - 4ac < 0$ 时，有两个互异复根：

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{(4ac - b^2) \cdot (-1)}}{2a}$$

一元二次方程求解

例 方程 $x^2 + 1 = 0$ 在复数范围内有两个根 $r_1 = i$ 和 $r_2 = -i$

一元二次方程求根公式：

$$ar^2 + br + c = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- 当 $b^2 - 4ac > 0$ 时，有两个互异实根；
- 当 $b^2 - 4ac = 0$ 时，有唯一实根
- 当 $b^2 - 4ac < 0$ 时，有两个互异复根：

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2} \cdot \sqrt{-1}}{2a}$$

一元二次方程求解

例 方程 $x^2 + 1 = 0$ 在复数范围内有两个根 $r_1 = i$ 和 $r_2 = -i$

一元二次方程求根公式：

$$ar^2 + br + c = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- 当 $b^2 - 4ac > 0$ 时，有两个互异实根；
- 当 $b^2 - 4ac = 0$ 时，有唯一实根
- 当 $b^2 - 4ac < 0$ 时，有两个互异复根：

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2}i}{2a}$$

一元二次方程求解

例 方程 $x^2 + 1 = 0$ 在复数范围内有两个根 $r_1 = i$ 和 $r_2 = -i$

一元二次方程求根公式：

$$ar^2 + br + c = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- 当 $b^2 - 4ac > 0$ 时，有两个互异实根；
- 当 $b^2 - 4ac = 0$ 时，有唯一实根
- 当 $b^2 - 4ac < 0$ 时，有两个互异复根：

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}i$$

一元二次方程求解

例 方程 $x^2 + 1 = 0$ 在复数范围内有两个根 $r_1 = i$ 和 $r_2 = -i$

一元二次方程求根公式：

$$ar^2 + br + c = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- 当 $b^2 - 4ac > 0$ 时，有两个互异实根；
- 当 $b^2 - 4ac = 0$ 时，有唯一实根
- 当 $b^2 - 4ac < 0$ 时，有两个互异复根：

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \underbrace{-\frac{b}{2a}}_{\alpha} \pm \underbrace{\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}}_{\beta} i$$

一元二次方程求解

例 方程 $x^2 + 1 = 0$ 在复数范围内有两个根 $r_1 = i$ 和 $r_2 = -i$

一元二次方程求根公式：

$$ar^2 + br + c = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- 当 $b^2 - 4ac > 0$ 时，有两个互异实根；
- 当 $b^2 - 4ac = 0$ 时，有唯一实根
- 当 $b^2 - 4ac < 0$ 时，有两个互异复根：

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \underbrace{-\frac{b}{2a}}_{\alpha} \pm \underbrace{\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}}_{\beta} i = \alpha \pm \beta i$$

一元二次方程求解

例 方程 $x^2 + 1 = 0$ 在复数范围内有两个根 $r_1 = i$ 和 $r_2 = -i$

一元二次方程求根公式：

$$ar^2 + br + c = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- 当 $b^2 - 4ac > 0$ 时，有两个互异实根；
- 当 $b^2 - 4ac = 0$ 时，有唯一实根（二重根）；
- 当 $b^2 - 4ac < 0$ 时，有两个互异复根：

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \underbrace{-\frac{b}{2a}}_{\alpha} \pm \underbrace{\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}}_{\beta} i = \alpha \pm \beta i$$

一元二次方程求解

例 方程 $x^2 + 1 = 0$ 在复数范围内有两个根 $r_1 = i$ 和 $r_2 = -i$

一元二次方程求根公式：

$$ar^2 + br + c = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- 当 $b^2 - 4ac > 0$ 时，有两个互异实根；
- 当 $b^2 - 4ac = 0$ 时，有唯一实根（二重根）；
- 当 $b^2 - 4ac < 0$ 时，有两个互异复根：

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \underbrace{-\frac{b}{2a}}_{\alpha} \pm \underbrace{\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}}_{\beta} i = \alpha \pm \beta i$$

例 求 $2r^2 - 3r + 1 = 0$, $r^2 - 4r + 4 = 0$, $r^2 + 2r + 2 = 0$ 的根

例 求 $2r^2 - 3r + 1 = 0$, $r^2 - 4r + 4 = 0$, $r^2 + 2r + 2 = 0$ 的根

解

例 求 $2r^2 - 3r + 1 = 0$, $r^2 - 4r + 4 = 0$, $r^2 + 2r + 2 = 0$ 的根

解

$$2r^2 - 3r + 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2}$$

例 求 $2r^2 - 3r + 1 = 0$, $r^2 - 4r + 4 = 0$, $r^2 + 2r + 2 = 0$ 的根

解

$$2r^2 - 3r + 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = 1 \text{ or } \frac{1}{2}$$

例 求 $2r^2 - 3r + 1 = 0$, $r^2 - 4r + 4 = 0$, $r^2 + 2r + 2 = 0$ 的根

解

$$2r^2 - 3r + 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = 1 \text{ or } \frac{1}{2}$$

$$r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$$

例 求 $2r^2 - 3r + 1 = 0$, $r^2 - 4r + 4 = 0$, $r^2 + 2r + 2 = 0$ 的根

解

$$2r^2 - 3r + 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = 1 \text{ or } \frac{1}{2}$$

$$r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = 2$$

例 求 $2r^2 - 3r + 1 = 0$, $r^2 - 4r + 4 = 0$, $r^2 + 2r + 2 = 0$ 的根

解

$$2r^2 - 3r + 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = 1 \text{ or } \frac{1}{2}$$

$$r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = 2$$

$$r^2 + 2r + 2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$$

例 求 $2r^2 - 3r + 1 = 0$, $r^2 - 4r + 4 = 0$, $r^2 + 2r + 2 = 0$ 的根

解

$$2r^2 - 3r + 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = 1 \text{ or } \frac{1}{2}$$

$$r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = 2$$

$$\begin{aligned} r^2 + 2r + 2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} \end{aligned}$$

例 求 $2r^2 - 3r + 1 = 0$, $r^2 - 4r + 4 = 0$, $r^2 + 2r + 2 = 0$ 的根

解

$$2r^2 - 3r + 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = 1 \text{ or } \frac{1}{2}$$

$$r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = 2$$

$$\begin{aligned} r^2 + 2r + 2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm i \end{aligned}$$

例 求 $2r^2 - 3r + 1 = 0$, $r^2 - 4r + 4 = 0$, $r^2 + 2r + 2 = 0$ 的根

解

$$2r^2 - 3r + 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = 1 \text{ or } \frac{1}{2}$$

$$r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = 2$$

$$\begin{aligned} r^2 + 2r + 2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm i \end{aligned}$$

注 也可以用配方法：

例 求 $2r^2 - 3r + 1 = 0$, $r^2 - 4r + 4 = 0$, $r^2 + 2r + 2 = 0$ 的根

解

$$2r^2 - 3r + 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = 1 \text{ or } \frac{1}{2}$$

$$r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = 2$$

$$\begin{aligned} r^2 + 2r + 2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm i \end{aligned}$$

注 也可以用配方法:

$$r^2 + 2r + 2 = 0 \Rightarrow (r + 1)^2 = -1$$

例 求 $2r^2 - 3r + 1 = 0$, $r^2 - 4r + 4 = 0$, $r^2 + 2r + 2 = 0$ 的根

解

$$2r^2 - 3r + 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = 1 \text{ or } \frac{1}{2}$$

$$r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = 2$$

$$\begin{aligned} r^2 + 2r + 2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm i \end{aligned}$$

注 也可以用配方法:

$$r^2 + 2r + 2 = 0 \Rightarrow (r+1)^2 = -1 \Rightarrow r+1 = \pm\sqrt{-1}$$

例 求 $2r^2 - 3r + 1 = 0$, $r^2 - 4r + 4 = 0$, $r^2 + 2r + 2 = 0$ 的根

解

$$2r^2 - 3r + 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = 1 \text{ or } \frac{1}{2}$$

$$r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = 2$$

$$\begin{aligned} r^2 + 2r + 2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm i \end{aligned}$$

注 也可以用配方法:

$$r^2 + 2r + 2 = 0 \Rightarrow (r+1)^2 = -1 \Rightarrow r+1 = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$

例 求 $2r^2 - 3r + 1 = 0$, $r^2 - 4r + 4 = 0$, $r^2 + 2r + 2 = 0$ 的根

解

$$2r^2 - 3r + 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = 1 \text{ or } \frac{1}{2}$$

$$r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = 2$$

$$\begin{aligned} r^2 + 2r + 2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm i \end{aligned}$$

注 也可以用配方法:

$$\begin{aligned} r^2 + 2r + 2 = 0 &\Rightarrow (r+1)^2 = -1 \Rightarrow r+1 = \pm\sqrt{-1} = \pm i \\ &\Rightarrow r = -1 \pm i \end{aligned}$$

- 复数和平面上的点一一对应

$$z = a + bi$$

•

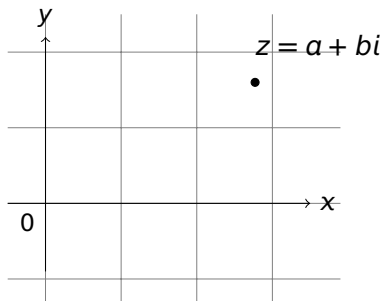
$$z = a + bi$$

•

- 复数和平面上的点一一对应

$$z \longleftrightarrow (a, b)$$

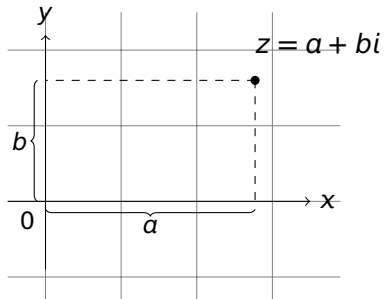
直角坐标



- 复数和平面上的点一一对应

$$z \leftrightarrow (a, b)$$

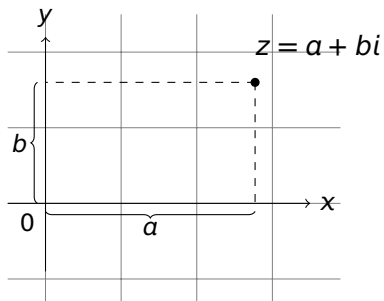
直角坐标



- 复数和平面上的点一一对应

$$z \leftrightarrow (a, b)$$

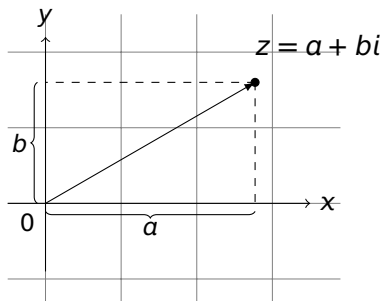
直角坐标



- 复数和平面上的点一一对应

$$z \leftrightarrow (a, b) \leftrightarrow (r, \theta)$$

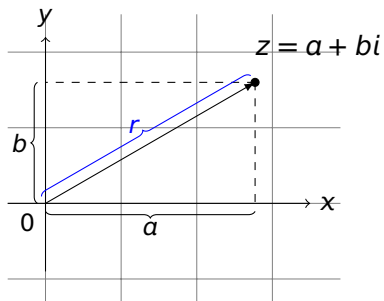
直角坐标 极坐标



- 复数和平面上的点一一对应

$$z \leftrightarrow (a, b) \leftrightarrow (r, \theta)$$

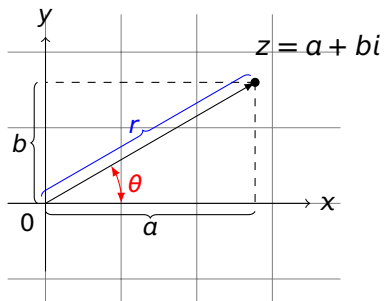
直角坐标 极坐标



- 复数和平面上的点一一对应

$$z \leftrightarrow (a, b) \leftrightarrow (r, \theta)$$

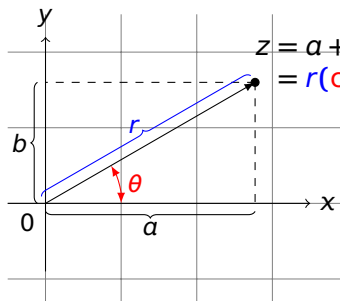
直角坐标 极坐标



- 复数和平面上的点一一对应

$$z \leftrightarrow (a, b) \leftrightarrow (r, \theta)$$

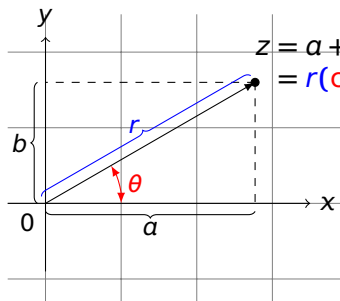
直角坐标 极坐标



- 复数和平面上的点一一对应

$$z \leftrightarrow (a, b) \leftrightarrow (r, \theta)$$

直角坐标 极坐标



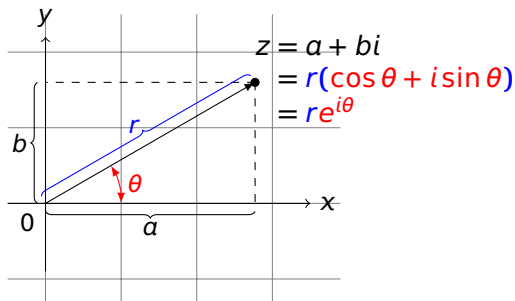
- 复数和平面上的点一一对应

$$z \leftrightarrow (a, b) \leftrightarrow (r, \theta)$$

直角坐标 极坐标

- “定义”:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$



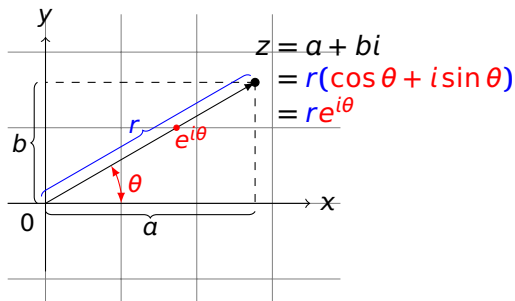
- 复数和平面上的点一一对应

$$z \leftrightarrow (a, b) \leftrightarrow (r, \theta)$$

直角坐标 极坐标

- “定义”:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$



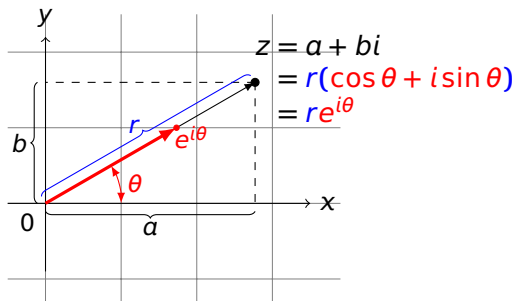
- 复数和平面上的点一一对应

$$z \leftrightarrow (a, b) \leftrightarrow (r, \theta)$$

直角坐标 极坐标

- “定义”:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$



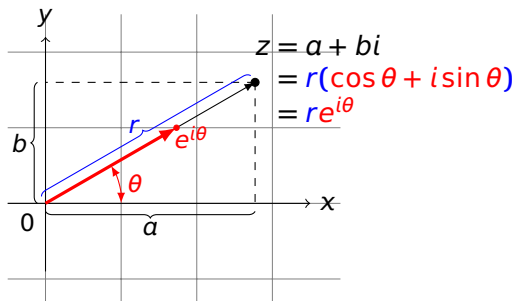
- 复数和平面上的点一一对应

$$z \leftrightarrow (a, b) \leftrightarrow (r, \theta)$$

直角坐标 极坐标

- “定义”:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$



- 复数和平面上的点一一对应

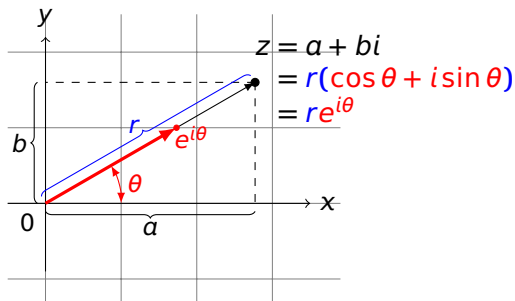
$$z \leftrightarrow (a, b) \leftrightarrow (r, \theta)$$

直角坐标 极坐标

- “定义”:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

(注: $e^{i\pi} =$)



- 复数和平面上的点一一对应

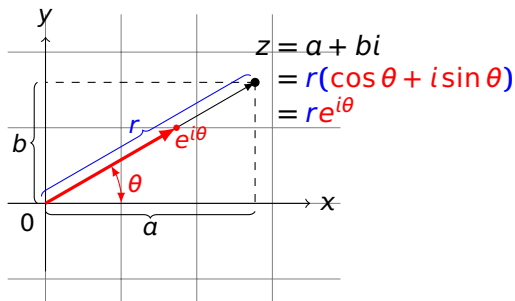
$$z \leftrightarrow (a, b) \leftrightarrow (r, \theta)$$

直角坐标 极坐标

- “定义”:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

(注: $e^{i\pi} = -1$)



- 复数和平面上的点一一对应

$$z \leftrightarrow (a, b) \leftrightarrow (r, \theta)$$

直角坐标 极坐标

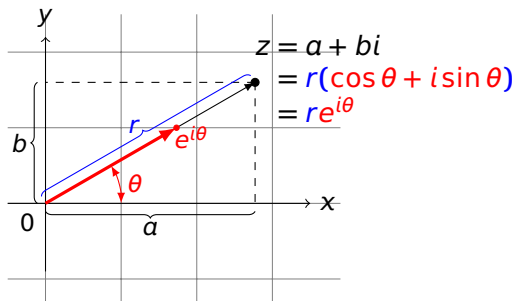
- “定义”:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

(注: $e^{i\pi} = -1$)

定义 设 $z = \alpha + i\beta$, 定义

$$e^z$$



- 复数和平面上的点一一对应

$$z \leftrightarrow (a, b) \leftrightarrow (r, \theta)$$

直角坐标 极坐标

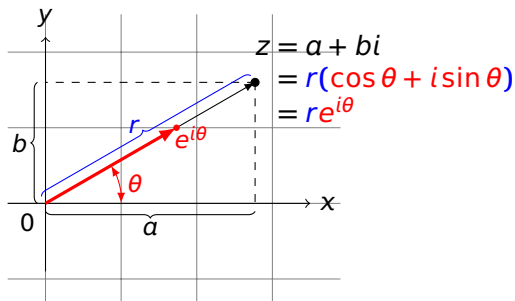
- “定义”:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

(注: $e^{i\pi} = -1$)

定义 设 $z = \alpha + i\beta$, 定义

$$e^z := e^{\alpha + i\beta}$$



- 复数和平面上的点一一对应

$$z \leftrightarrow (a, b) \leftrightarrow (r, \theta)$$

直角坐标 极坐标

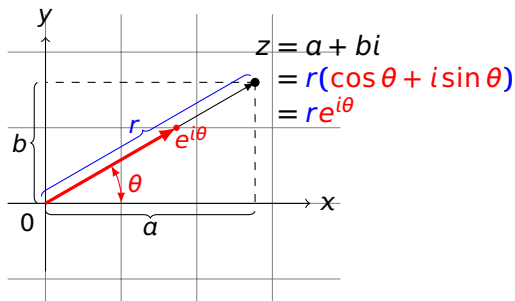
- “定义”:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

(注: $e^{i\pi} = -1$)

定义 设 $z = \alpha + i\beta$, 定义

$$e^z := e^{\alpha + i\beta} := e^{\alpha} \cdot e^{i\beta}$$



- 复数和平面上的点一一对应

$$z \leftrightarrow (a, b) \leftrightarrow (r, \theta)$$

直角坐标 极坐标

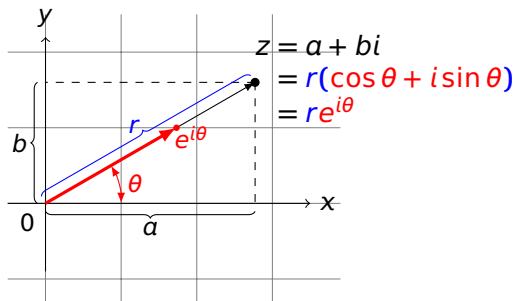
- “定义”:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

(注: $e^{i\pi} = -1$)

定义 设 $z = \alpha + i\beta$, 定义

$$e^z := e^{\alpha + i\beta} := e^{\alpha} \cdot e^{i\beta} = e^{\alpha} (\cos \beta + i \sin \beta)$$



- 复数和平面上的点一一对应

$$z \leftrightarrow (a, b) \leftrightarrow (r, \theta)$$

直角坐标 极坐标

- “定义”:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

(注: $e^{i\pi} = -1$)

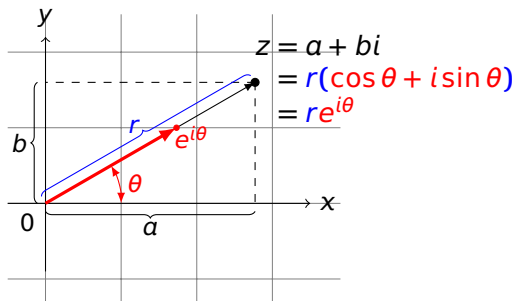
定义 设 $z = \alpha + i\beta$, 定义

$$e^z := e^{\alpha + i\beta} := e^\alpha \cdot e^{i\beta} = e^\alpha (\cos \beta + i \sin \beta)$$

考虑取值为复数的函数

$$e^{zx}$$

$$x \in \mathbb{R}$$



- 复数和平面上的点一一对应

$$z \leftrightarrow (a, b) \leftrightarrow (r, \theta)$$

直角坐标 极坐标

- “定义”:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

(注: $e^{i\pi} = -1$)

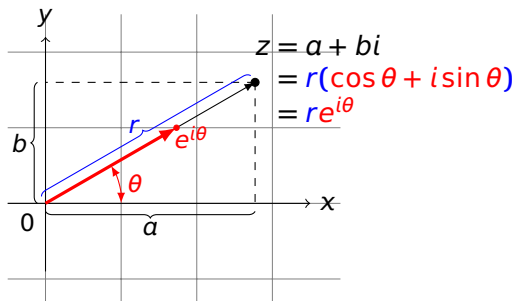
定义 设 $z = \alpha + i\beta$, 定义

$$e^z := e^{\alpha + i\beta} := e^\alpha \cdot e^{i\beta} = e^\alpha (\cos \beta + i \sin \beta)$$

考虑取值为复数的函数 ($zx = (\alpha + i\beta)x$)

$$e^{zx}$$

$$x \in \mathbb{R}$$



- 复数和平面上的点一一对应

$$z \leftrightarrow (a, b) \leftrightarrow (r, \theta)$$

直角坐标 极坐标

- “定义”:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

(注: $e^{i\pi} = -1$)

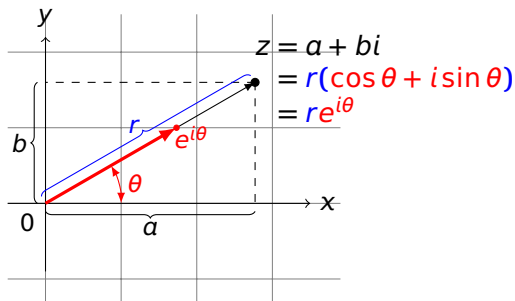
定义 设 $z = \alpha + i\beta$, 定义

$$e^z := e^{\alpha + i\beta} := e^\alpha \cdot e^{i\beta} = e^\alpha (\cos \beta + i \sin \beta)$$

考虑取值为复数的函数 ($zx = (\alpha + i\beta)x = \alpha x + i\beta x$)

$$e^{zx}$$

$$x \in \mathbb{R}$$



- 复数和平面上的点一一对应

$$z \leftrightarrow (a, b) \leftrightarrow (r, \theta)$$

直角坐标 极坐标

- “定义”:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

(注: $e^{i\pi} = -1$)

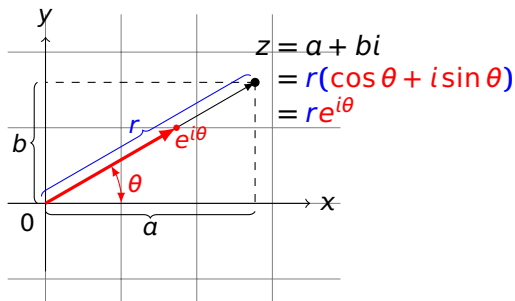
定义 设 $z = \alpha + i\beta$, 定义

$$e^z := e^{\alpha + i\beta} := e^{\alpha} \cdot e^{i\beta} = e^{\alpha} (\cos \beta + i \sin \beta)$$

考虑取值为复数的函数 ($zx = (\alpha + i\beta)x = \alpha x + i\beta x$)

$$e^{zx} = e^{\alpha x + i\beta x}$$

$$x \in \mathbb{R}$$



- 复数和平面上的点一一对应

$$z \leftrightarrow (a, b) \leftrightarrow (r, \theta)$$

直角坐标 极坐标

- “定义”:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

(注: $e^{i\pi} = -1$)

定义 设 $z = \alpha + i\beta$, 定义

$$e^z := e^{\alpha + i\beta} := e^\alpha \cdot e^{i\beta} = e^\alpha (\cos \beta + i \sin \beta)$$

考虑取值为复数的函数 ($zx = (\alpha + i\beta)x = \alpha x + i\beta x$)

$$e^{zx} = e^{\alpha x + i\beta x} = e^{\alpha x} [\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)], \quad x \in \mathbb{R}$$

性质 设 $z = \alpha + \beta i$ 为复数, $x \in \mathbb{R}$, 成立

$$\frac{d}{dx} e^{zx} = z e^{zx}$$

证明

性质 设 $z = \alpha + \beta i$ 为复数, $x \in \mathbb{R}$, 成立

$$\frac{d}{dx} e^{zx} = z e^{zx}$$

证明 这是

$$\frac{d}{dx} e^{zx}$$

$$= z e^{zx}$$

性质 设 $z = \alpha + \beta i$ 为复数, $x \in \mathbb{R}$, 成立

$$\frac{d}{dx} e^{zx} = z e^{zx}$$

证明 这是

$$\frac{d}{dx} e^{zx} = \frac{d}{dx} [e^{\alpha x} (\cos(\beta x) + i \sin(\beta x))]$$

$$= z e^{zx}$$

性质 设 $z = \alpha + \beta i$ 为复数, $x \in \mathbb{R}$, 成立

$$\frac{d}{dx} e^{zx} = z e^{zx}$$

证明 这是

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} e^{zx} &= \frac{d}{dx} [e^{\alpha x} (\cos(\beta x) + i \sin(\beta x))] \\ &= \frac{d}{dx} [e^{\alpha x} \cos(\beta x) + i e^{\alpha x} \sin(\beta x)] \\ &= z e^{zx} \end{aligned}$$

性质 设 $z = \alpha + \beta i$ 为复数, $x \in \mathbb{R}$, 成立

$$\frac{d}{dx} e^{zx} = z e^{zx}$$

证明 这是

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} e^{zx} &= \frac{d}{dx} [e^{\alpha x} (\cos(\beta x) + i \sin(\beta x))] \\ &= \frac{d}{dx} [e^{\alpha x} \cos(\beta x) + i e^{\alpha x} \sin(\beta x)] \\ &= \frac{d}{dx} [e^{\alpha x} \cos(\beta x)] + i \frac{d}{dx} [e^{\alpha x} \sin(\beta x)] \\ &= z e^{zx} \end{aligned}$$

性质 设 $z = \alpha + \beta i$ 为复数, $x \in \mathbb{R}$, 成立

$$\frac{d}{dx} e^{zx} = z e^{zx}$$

证明 这是

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} e^{zx} &= \frac{d}{dx} [e^{\alpha x} (\cos(\beta x) + i \sin(\beta x))] \\ &= \frac{d}{dx} [e^{\alpha x} \cos(\beta x) + i e^{\alpha x} \sin(\beta x)] \\ &= \frac{d}{dx} [e^{\alpha x} \cos(\beta x)] + i \frac{d}{dx} [e^{\alpha x} \sin(\beta x)] \\ &= (\alpha + \beta i) e^{\alpha x} [\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)] \\ &= z e^{zx} \end{aligned}$$

性质 设 $z = \alpha + \beta i$ 为复数, $x \in \mathbb{R}$, 成立

$$\frac{d}{dx} e^{zx} = z e^{zx}$$

证明 这是

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} e^{zx} &= \frac{d}{dx} [e^{\alpha x} (\cos(\beta x) + i \sin(\beta x))] \\ &= \frac{d}{dx} [e^{\alpha x} \cos(\beta x) + i e^{\alpha x} \sin(\beta x)] \\ &= \frac{d}{dx} [e^{\alpha x} \cos(\beta x)] + i \frac{d}{dx} [e^{\alpha x} \sin(\beta x)] \\ &\vdots \\ &= (\alpha + \beta i) e^{\alpha x} [\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)] \\ &= z e^{zx} \end{aligned}$$

We are here now...

◆ 复数简介

♣ 二阶线性微分方程

♥ 二阶常系数齐次线性微分方程

♠ 二阶常系数非齐次线性微分方程

二阶线性微分方程

- 二阶齐次线性微分方程：

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

- 二阶非齐次线性微分方程：

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

二阶线性微分方程

- 二阶齐次线性微分方程：

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

- 二阶非齐次线性微分方程：

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

问题 这些方程的通解有怎样的“结构”？

二阶齐次线性微分方程的解的结构

定理 设 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个特解, 则

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

也是解, 其中 C_1, C_2 是任意常数。

二阶齐次线性微分方程的解的结构

定理 设 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个特解, 则

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

也是解, 其中 C_1, C_2 是任意常数。

证明 直接代入验证

$$\begin{aligned} & y'' + P(x)y' + Q(x)y \\ &= [C_1 y_1 + C_2 y_2]'' + P(x)[C_1 y_1 + C_2 y_2]' + Q(x)[C_1 y_1 + C_2 y_2] \end{aligned}$$

二阶齐次线性微分方程的解的结构

定理 设 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个特解, 则

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

也是解, 其中 C_1, C_2 是任意常数。

证明 直接代入验证

$$\begin{aligned} & y'' + P(x)y' + Q(x)y \\ &= [C_1 y_1 + C_2 y_2]'' + P(x)[C_1 y_1 + C_2 y_2]' + Q(x)[C_1 y_1 + C_2 y_2] \\ &= C_1 \left[\quad \quad \quad \right] + C_2 \left[\quad \quad \quad \right] \end{aligned}$$

二阶齐次线性微分方程的解的结构

定理 设 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个特解, 则

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

也是解, 其中 C_1, C_2 是任意常数。

证明 直接代入验证

$$\begin{aligned} & y'' + P(x)y' + Q(x)y \\ &= [C_1 y_1 + C_2 y_2]'' + P(x)[C_1 y_1 + C_2 y_2]' + Q(x)[C_1 y_1 + C_2 y_2] \\ &= C_1 [y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1] + C_2 [\end{aligned}$$

二阶齐次线性微分方程的解的结构

定理 设 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个特解, 则

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

也是解, 其中 C_1, C_2 是任意常数。

证明 直接代入验证

$$\begin{aligned} & y'' + P(x)y' + Q(x)y \\ &= [C_1 y_1 + C_2 y_2]'' + P(x)[C_1 y_1 + C_2 y_2]' + Q(x)[C_1 y_1 + C_2 y_2] \\ &= C_1 [y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1] + C_2 [y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2] \end{aligned}$$

二阶齐次线性微分方程的解的结构

定理 设 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个特解, 则

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

也是解, 其中 C_1, C_2 是任意常数。

证明 直接代入验证

$$\begin{aligned} & y'' + P(x)y' + Q(x)y \\ &= [C_1 y_1 + C_2 y_2]'' + P(x)[C_1 y_1 + C_2 y_2]' + Q(x)[C_1 y_1 + C_2 y_2] \\ &= C_1 [y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1] + C_2 [y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2] \\ &= 0 + 0 \end{aligned}$$

二阶齐次线性微分方程的解的结构

定理 设 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个特解, 则

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

也是解, 其中 C_1, C_2 是任意常数。

证明 直接代入验证

$$\begin{aligned} & y'' + P(x)y' + Q(x)y \\ &= [C_1 y_1 + C_2 y_2]'' + P(x)[C_1 y_1 + C_2 y_2]' + Q(x)[C_1 y_1 + C_2 y_2] \\ &= C_1 [y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1] + C_2 [y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2] \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

二阶齐次线性微分方程的解的结构

定理 设 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个（特解），则

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

也是解，其中 C_1 , C_2 是任意常数。

推论

二阶齐次线性微分方程的解的结构

定理 设 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个（特解），则

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

也是解，其中 C_1 , C_2 是任意常数。

推论 若该特解 y_1 和 y_2 不是成比例（线性无关；即 $\frac{y_1}{y_2} \neq \text{常数}$ ），则齐次线性方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ 的通解是

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

二阶齐次线性微分方程的解的结构

定理 设 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个（特解），则

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

也是解，其中 C_1, C_2 是任意常数。

推论 若该特解 y_1 和 y_2 不是成比例（线性无关；即 $\frac{y_1}{y_2} \neq \text{常数}$ ），则齐次线性方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ 的通解是

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

也就是说，求通解，只需找到两个线性无关的特解！

二阶非齐次线性微分方程的解的结构

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \quad (*)$$

二阶非齐次线性微分方程的解的结构

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \quad (*)$$

二阶非齐次线性微分方程的解的结构

定理 设 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个线性无关特解,

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \quad (*)$$

二阶非齐次线性微分方程的解的结构

定理 设 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个线性无关特解, $y^*(x)$ 是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \quad (*)$$

的一个特解,

二阶非齐次线性微分方程的解的结构

定理 设 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个线性无关特解, $y^*(x)$ 是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \quad (*)$$

的一个特解, 则

$$y = y^* + C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

是非齐次线性微分方程 $(*)$ 的通解, 其中 C_1, C_2 是任意常数。

二阶非齐次线性微分方程的解的结构

定理 设 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个线性无关特解, $y^*(x)$ 是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \quad (*)$$

的一个特解, 则

$$y = y^* + \overbrace{C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)}^{Y(x)}$$

是非齐次线性微分方程 $(*)$ 的通解, 其中 C_1, C_2 是任意常数。

二阶非齐次线性微分方程的解的结构

定理 设 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个线性无关特解, $y^*(x)$ 是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \quad (*)$$

的一个特解, 则

$$y = y^* + \overbrace{C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)}^{Y(x)}$$

是非齐次线性微分方程 $(*)$ 的通解, 其中 C_1, C_2 是任意常数。

证明 只需验证 $y = y^*(x) + Y(x)$ 是解:

二阶非齐次线性微分方程的解的结构

定理 设 $y_1(x), y_2(x)$ 是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个线性无关特解, $y^*(x)$ 是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \quad (*)$$

的一个特解, 则

$$y = y^* + \overbrace{C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)}^{Y(x)}$$

是非齐次线性微分方程 $(*)$ 的通解, 其中 C_1, C_2 是任意常数。

证明 只需验证 $y = y^*(x) + Y(x)$ 是解:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = [y^* + Y]'' + P[y^* + Y]' + Q[y^* + Y]$$

二阶非齐次线性微分方程的解的结构

定理 设 $y_1(x), y_2(x)$ 是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个线性无关特解, $y^*(x)$ 是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \quad (*)$$

的一个特解, 则

$$y = y^* + \overbrace{C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)}^{Y(x)}$$

是非齐次线性微分方程 $(*)$ 的通解, 其中 C_1, C_2 是任意常数。

证明 只需验证 $y = y^*(x) + Y(x)$ 是解:

$$\begin{aligned} y'' + P(x)y' + Q(x)y &= [y^* + Y]'' + P[y^* + Y]' + Q[y^* + Y] \\ &= [\quad] + [\quad] \end{aligned}$$

二阶非齐次线性微分方程的解的结构

定理 设 $y_1(x), y_2(x)$ 是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个线性无关特解, $y^*(x)$ 是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \quad (*)$$

的一个特解, 则

$$y = y^* + \overbrace{C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)}^{Y(x)}$$

是非齐次线性微分方程 $(*)$ 的通解, 其中 C_1, C_2 是任意常数。

证明 只需验证 $y = y^*(x) + Y(x)$ 是解:

$$\begin{aligned} y'' + P(x)y' + Q(x)y &= [y^* + Y]'' + P[y^* + Y]' + Q[y^* + Y] \\ &= [y^{*''} + Py^{*'} + Qy^*] + [\end{aligned}$$

二阶非齐次线性微分方程的解的结构

定理 设 $y_1(x), y_2(x)$ 是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个线性无关特解, $y^*(x)$ 是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \quad (*)$$

的一个特解, 则

$$y = y^* + \overbrace{C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)}^{Y(x)}$$

是非齐次线性微分方程 $(*)$ 的通解, 其中 C_1, C_2 是任意常数。

证明 只需验证 $y = y^*(x) + Y(x)$ 是解:

$$\begin{aligned} y'' + P(x)y' + Q(x)y &= [y^* + Y]'' + P[y^* + Y]' + Q[y^* + Y] \\ &= [y^{*''} + Py^{*'} + Qy^*] + [Y'' + PY' + QY] \end{aligned}$$

二阶非齐次线性微分方程的解的结构

定理 设 $y_1(x), y_2(x)$ 是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个线性无关特解, $y^*(x)$ 是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \quad (*)$$

的一个特解, 则

$$y = y^* + \overbrace{C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)}^{Y(x)}$$

是非齐次线性微分方程 $(*)$ 的通解, 其中 C_1, C_2 是任意常数。

证明 只需验证 $y = y^*(x) + Y(x)$ 是解:

$$\begin{aligned} y'' + P(x)y' + Q(x)y &= [y^* + Y]'' + P[y^* + Y]' + Q[y^* + Y] \\ &= [y^{*''} + Py^{*'} + Qy^*] + [Y'' + PY' + QY] \\ &= f(x) + 0 \end{aligned}$$

二阶非齐次线性微分方程的解的结构

定理 设 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个线性无关特解, $y^*(x)$ 是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \quad (*)$$

的一个特解, 则

$$y = y^* + \overbrace{C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)}^{Y(x)}$$

是非齐次线性微分方程 $(*)$ 的通解, 其中 C_1, C_2 是任意常数。

证明 只需验证 $y = y^*(x) + Y(x)$ 是解:

$$\begin{aligned} y'' + P(x)y' + Q(x)y &= [y^* + Y]'' + P[y^* + Y]' + Q[y^* + Y] \\ &= [y^{*''} + Py^{*'} + Qy^*] + [Y'' + PY' + QY] \\ &= f(x) + 0 = f(x) \end{aligned}$$

We are here now...

◆ 复数简介

♣ 二阶线性微分方程

♥ 二阶常系数齐次线性微分方程

♠ 二阶常系数非齐次线性微分方程

二阶线性常系数微分方程——特解

目标 找出 $y'' + py' + qy = 0$ 的两个线性无关的特解 y_1, y_2 。

二阶线性常系数微分方程——特解

目标 找出 $y'' + py' + qy = 0$ 的两个线性无关的特解 y_1, y_2 。

做法 尝试寻找形如

$$y = e^{rx}$$

的特解。

二阶线性常系数微分方程——特解

目标 找出 $y'' + py' + qy = 0$ 的两个线性无关的特解 y_1, y_2 。

做法 尝试寻找形如

$$y = e^{rx}$$

的特解。代入方程：

$$y'' + py' + qy = (e^{rx})'' + p(e^{rx})' + qy =$$

二阶线性常系数微分方程——特解

目标 找出 $y'' + py' + qy = 0$ 的两个线性无关的特解 y_1, y_2 。

做法 尝试寻找形如

$$y = e^{rx}$$

的特解。代入方程：

$$y'' + py' + qy = (e^{rx})'' + p(e^{rx})' + qy = \quad + qe^{rx}$$

二阶线性常系数微分方程——特解

目标 找出 $y'' + py' + qy = 0$ 的两个线性无关的特解 y_1, y_2 。

做法 尝试寻找形如

$$y = e^{rx}$$

的特解。代入方程：

$$y'' + py' + q = (e^{rx})'' + p(e^{rx})' + qy = \quad + pre^{rx} + qe^{rx}$$

二阶线性常系数微分方程——特解

目标 找出 $y'' + py' + qy = 0$ 的两个线性无关的特解 y_1, y_2 。

做法 尝试寻找形如

$$y = e^{rx}$$

的特解。代入方程：

$$y'' + py' + qy = (e^{rx})'' + p(e^{rx})' + qy = r^2 e^{rx} + pre^{rx} + qe^{rx}$$

二阶线性常系数微分方程——特解

目标 找出 $y'' + py' + qy = 0$ 的两个线性无关的特解 y_1, y_2 。

做法 尝试寻找形如

$$y = e^{rx}$$

的特解。代入方程：

$$y'' + py' + qy = (e^{rx})'' + p(e^{rx})' + qy = (r^2 + pr + q)e^{rx}$$

二阶线性常系数微分方程——特解

目标 找出 $y'' + py' + qy = 0$ 的两个线性无关的特解 y_1, y_2 。

做法 尝试寻找形如

$$y = e^{rx}$$

的特解。代入方程：

$$y'' + py' + q = (e^{rx})'' + p(e^{rx})' + qy = (r^2 + pr + q)e^{rx}$$

所以

$$y'' + py' + q = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 + pr + q = 0$$

二阶线性常系数微分方程——特解

目标 找出 $y'' + py' + qy = 0$ 的两个线性无关的特解 y_1, y_2 。

做法 尝试寻找形如

$$y = e^{rx}$$

的特解。代入方程：

$$y'' + py' + qy = (e^{rx})'' + p(e^{rx})' + qy = (r^2 + pr + q)e^{rx}$$

所以

$$y'' + py' + qy = 0 \iff r^2 + pr + q = 0$$

所以

- $p^2 - 4q > 0$ 时,
- $p^2 - 4q = 0$ 时,
- $p^2 - 4q < 0$ 时,

二阶线性常系数微分方程——特解

目标 找出 $y'' + py' + qy = 0$ 的两个线性无关的特解 y_1, y_2 。

做法 尝试寻找形如

$$y = e^{rx}$$

的特解。代入方程：

$$y'' + py' + qy = (e^{rx})'' + p(e^{rx})' + qy = (r^2 + pr + q)e^{rx}$$

所以

$$y'' + py' + qy = 0 \iff r^2 + pr + q = 0$$

所以

- $p^2 - 4q > 0$ 时, $r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$
- $p^2 - 4q = 0$ 时,
- $p^2 - 4q < 0$ 时,

二阶线性常系数微分方程——特解

目标 找出 $y'' + py' + qy = 0$ 的两个线性无关的特解 y_1, y_2 。

做法 尝试寻找形如

$$y = e^{rx}$$

的特解。代入方程：

$$y'' + py' + qy = (e^{rx})'' + p(e^{rx})' + qy = (r^2 + pr + q)e^{rx}$$

所以

$$y'' + py' + qy = 0 \iff r^2 + pr + q = 0$$

所以

- $p^2 - 4q > 0$ 时, $r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \Rightarrow y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}$
- $p^2 - 4q = 0$ 时,
- $p^2 - 4q < 0$ 时,

二阶线性常系数微分方程——特解

目标 找出 $y'' + py' + qy = 0$ 的两个线性无关的特解 y_1, y_2 。

做法 尝试寻找形如

$$y = e^{rx}$$

的特解。代入方程：

$$y'' + py' + qy = (e^{rx})'' + p(e^{rx})' + qy = (r^2 + pr + q)e^{rx}$$

所以

$$y'' + py' + qy = 0 \iff r^2 + pr + q = 0$$

所以

- $p^2 - 4q > 0$ 时, $r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \Rightarrow y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}$
- $p^2 - 4q = 0$ 时, $r_{1,2} = \frac{-p}{2}$
- $p^2 - 4q < 0$ 时,

二阶线性常系数微分方程——特解

目标 找出 $y'' + py' + qy = 0$ 的两个线性无关的特解 y_1, y_2 。

做法 尝试寻找形如

$$y = e^{rx}$$

的特解。代入方程：

$$y'' + py' + qy = (e^{rx})'' + p(e^{rx})' + qy = (r^2 + pr + q)e^{rx}$$

所以

$$y'' + py' + qy = 0 \iff r^2 + pr + q = 0$$

所以

- $p^2 - 4q > 0$ 时, $r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \Rightarrow y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}$
- $p^2 - 4q = 0$ 时, $r_{1,2} = \frac{-p}{2} \Rightarrow y_1 = e^{r_1 x};$
- $p^2 - 4q < 0$ 时,

二阶线性常系数微分方程——特解

目标 找出 $y'' + py' + qy = 0$ 的两个线性无关的特解 y_1, y_2 。

做法 尝试寻找形如

$$y = e^{rx}$$

的特解。代入方程：

$$y'' + py' + qy = (e^{rx})'' + p(e^{rx})' + qy = (r^2 + pr + q)e^{rx}$$

所以

$$y'' + py' + qy = 0 \iff r^2 + pr + q = 0$$

所以

- $p^2 - 4q > 0$ 时, $r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \Rightarrow y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}$
- $p^2 - 4q = 0$ 时, $r_{1,2} = \frac{-p}{2} \Rightarrow y_1 = e^{r_1 x}$; 验证 $y_2 = xe^{r_1 x}$ 也是解
- $p^2 - 4q < 0$ 时,

二阶线性常系数微分方程——特解

目标 找出 $y'' + py' + qy = 0$ 的两个线性无关的特解 y_1, y_2 。

做法 尝试寻找形如

$$y = e^{rx}$$

的特解。代入方程：

$$y'' + py' + qy = (e^{rx})'' + p(e^{rx})' + qy = (r^2 + pr + q)e^{rx}$$

所以

$$y'' + py' + qy = 0 \iff r^2 + pr + q = 0$$

所以

- $p^2 - 4q > 0$ 时, $r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \Rightarrow y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}$
- $p^2 - 4q = 0$ 时, $r_{1,2} = \frac{-p}{2} \Rightarrow y_1 = e^{r_1 x}$; 验证 $y_2 = x e^{r_1 x}$ 也是解
- $p^2 - 4q < 0$ 时, $r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$

二阶线性常系数微分方程——特解

目标 找出 $y'' + py' + qy = 0$ 的两个线性无关的特解 y_1, y_2 。

做法 尝试寻找形如

$$y = e^{rx}$$

的特解。代入方程：

$$y'' + py' + qy = (e^{rx})'' + p(e^{rx})' + qy = (r^2 + pr + q)e^{rx}$$

所以

$$y'' + py' + qy = 0 \iff r^2 + pr + q = 0$$

所以

- $p^2 - 4q > 0$ 时, $r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \Rightarrow y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}$
- $p^2 - 4q = 0$ 时, $r_{1,2} = \frac{-p}{2} \Rightarrow y_1 = e^{r_1 x}$; 验证 $y_2 = xe^{r_1 x}$ 也是解
- $p^2 - 4q < 0$ 时, $r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2}i$

二阶线性常系数微分方程——特解

目标 找出 $y'' + py' + qy = 0$ 的两个线性无关的特解 y_1, y_2 。

做法 尝试寻找形如

$$y = e^{rx}$$

的特解。代入方程：

$$y'' + py' + qy = (e^{rx})'' + p(e^{rx})' + qy = (r^2 + pr + q)e^{rx}$$

所以

$$y'' + py' + qy = 0 \iff r^2 + pr + q = 0$$

所以

- $p^2 - 4q > 0$ 时, $r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \Rightarrow y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}$
- $p^2 - 4q = 0$ 时, $r_{1,2} = \frac{-p}{2} \Rightarrow y_1 = e^{r_1 x}$; 验证 $y_2 = x e^{r_1 x}$ 也是解
- $p^2 - 4q < 0$ 时, $r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2} i = \alpha \pm \beta i$

二阶线性常系数微分方程——特解

目标 找出 $y'' + py' + qy = 0$ 的两个线性无关的特解 y_1, y_2 。

做法 尝试寻找形如

$$y = e^{rx}$$

的特解。代入方程：

$$y'' + py' + qy = (e^{rx})'' + p(e^{rx})' + qy = (r^2 + pr + q)e^{rx}$$

所以

$$y'' + py' + qy = 0 \iff r^2 + pr + q = 0$$

所以

- $p^2 - 4q > 0$ 时, $r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \Rightarrow y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}$
- $p^2 - 4q = 0$ 时, $r_{1,2} = -\frac{p}{2} \Rightarrow y_1 = e^{r_1 x}$; 验证 $y_2 = xe^{r_1 x}$ 也是解
- $p^2 - 4q < 0$ 时, $r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2}i = \alpha \pm \beta i$
 $\Rightarrow y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}$

二阶线性常系数微分方程——特解

目标 找出 $y'' + py' + qy = 0$ 的两个线性无关的特解 y_1, y_2 。

二阶线性常系数微分方程——特解

目标 找出 $y'' + py' + qy = 0$ 的两个线性无关的特解 y_1, y_2 。

结论 求解方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的根 $r_{1,2}$, 则

$p^2 - 4q > 0$	$r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$	$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x}$
$p^2 - 4q = 0$	$r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$	$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = x e^{r_1 x}$
$p^2 - 4q < 0$	$r_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2} i$ $= \alpha \pm \beta i$	$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x}$

二阶线性常系数微分方程——特解

目标 找出 $y'' + py' + qy = 0$ 的两个线性无关的特解 y_1, y_2 。

结论 求解方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的根 $r_{1,2}$, 则

$p^2 - 4q > 0$	$r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$	$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x}$
$p^2 - 4q = 0$	$r_1 = r_2 = \frac{-p}{2}$	$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = x e^{r_1 x}$
$p^2 - 4q < 0$	$r_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2} i$ $= \alpha \pm \beta i$	$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x}$

注 $p^2 - 4q < 0$ 时, 特解

$$y_1 = e^{r_1 x}$$

二阶线性常系数微分方程——特解

目标 找出 $y'' + py' + qy = 0$ 的两个线性无关的特解 y_1, y_2 。

结论 求解方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的根 $r_{1,2}$, 则

$p^2 - 4q > 0$	$r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$	$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x}$
$p^2 - 4q = 0$	$r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$	$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = x e^{r_1 x}$
$p^2 - 4q < 0$	$r_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2} i$ $= \alpha \pm \beta i$	$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x}$

注 $p^2 - 4q < 0$ 时, 特解

$$y_1 = e^{r_1 x} = e^{(\alpha + \beta i)x}$$

二阶线性常系数微分方程——特解

目标 找出 $y'' + py' + qy = 0$ 的两个线性无关的特解 y_1, y_2 。

结论 求解方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的根 $r_{1,2}$, 则

$p^2 - 4q > 0$	$r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$	$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x}$
$p^2 - 4q = 0$	$r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$	$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = x e^{r_1 x}$
$p^2 - 4q < 0$	$r_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2} i$ $= \alpha \pm \beta i$	$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x}$

注 $p^2 - 4q < 0$ 时, 特解

$$y_1 = e^{r_1 x} = e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x} [\cos(\beta x) + \sin(\beta x)i]$$

二阶线性常系数微分方程——特解

目标 找出 $y'' + py' + qy = 0$ 的两个线性无关的特解 y_1, y_2 。

结论 求解方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的根 $r_{1,2}$, 则

$p^2 - 4q > 0$	$r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$	$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x}$
$p^2 - 4q = 0$	$r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$	$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = x e^{r_1 x}$
$p^2 - 4q < 0$	$r_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2} i$ $= \alpha \pm \beta i$	$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x}$

注 $p^2 - 4q < 0$ 时, 特解

$$y_1 = e^{r_1 x} = e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x} [\cos(\beta x) + \sin(\beta x)i]$$

的实部、虚部所构成的函数

二阶线性常系数微分方程——特解

目标 找出 $y'' + py' + qy = 0$ 的两个线性无关的特解 y_1, y_2 。

结论 求解方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的根 $r_{1,2}$, 则

$p^2 - 4q > 0$	$r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$	$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x}$
$p^2 - 4q = 0$	$r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$	$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = x e^{r_1 x}$
$p^2 - 4q < 0$	$r_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2} i$ $= \alpha \pm \beta i$	$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x}$

注 $p^2 - 4q < 0$ 时, 特解

$$y_1 = e^{r_1 x} = e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x} [\cos(\beta x) + \sin(\beta x)i]$$

的实部、虚部所构成的函数

$$e^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

二阶线性常系数微分方程——特解

目标 找出 $y'' + py' + qy = 0$ 的两个线性无关的特解 y_1, y_2 。

结论 求解方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的根 $r_{1,2}$, 则

$p^2 - 4q > 0$	$r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$	$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x}$
$p^2 - 4q = 0$	$r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$	$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = x e^{r_1 x}$
$p^2 - 4q < 0$	$r_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2} i$ $= \alpha \pm \beta i$	$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x}$

注 $p^2 - 4q < 0$ 时, 特解

$$y_1 = e^{r_1 x} = e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x} [\cos(\beta x) + \sin(\beta x)i]$$

的实部、虚部所构成的函数

$$e^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

也是两个线性无关特解!

二阶线性常系数微分方程——通解

性质 在 $p^2 - 4q < 0$ 情形中, $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ 。可以证明

$$e^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

也是两个线性无关特解。

二阶线性常系数微分方程——通解

性质 在 $p^2 - 4q < 0$ 情形中, $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ 。可以证明
 $e^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad e^{\alpha x} \sin(\beta x)$

也是两个线性无关特解。

证明 当 $p^2 - 4q < 0$ 时, 有特解
 $y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x}$

二阶线性常系数微分方程——通解

性质 在 $p^2 - 4q < 0$ 情形中, $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ 。可以证明
 $e^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad e^{\alpha x} \sin(\beta x)$

也是两个线性无关特解。

证明 当 $p^2 - 4q < 0$ 时, 有特解

$$y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x} \cos(\beta x) + e^{\alpha x} \sin(\beta x)i$$

二阶线性常系数微分方程——通解

性质 在 $p^2 - 4q < 0$ 情形中, $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ 。可以证明

$$e^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

也是两个线性无关特解。

证明 当 $p^2 - 4q < 0$ 时, 有特解

$$y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x} \cos(\beta x) + e^{\alpha x} \sin(\beta x)i =: s + ti$$

二阶线性常系数微分方程——通解

性质 在 $p^2 - 4q < 0$ 情形中, $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ 。可以证明

$$e^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

也是两个线性无关特解。

证明 当 $p^2 - 4q < 0$ 时, 有特解

$$y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x} \cos(\beta x) + e^{\alpha x} \sin(\beta x)i =: s + ti$$

所以

$$0 = y_1'' + py_1' + qy_1$$

二阶线性常系数微分方程——通解

性质 在 $p^2 - 4q < 0$ 情形中, $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ 。可以证明

$$e^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

也是两个线性无关特解。

证明 当 $p^2 - 4q < 0$ 时, 有特解

$$y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x} \cos(\beta x) + e^{\alpha x} \sin(\beta x)i =: s + ti$$

所以

$$0 = y_1'' + py_1' + qy_1 = (s + ti)'' + p(s + ti)' + q(s + ti)$$

二阶线性常系数微分方程——通解

性质 在 $p^2 - 4q < 0$ 情形中, $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ 。可以证明

$$e^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

也是两个线性无关特解。

证明 当 $p^2 - 4q < 0$ 时, 有特解

$$y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x} \cos(\beta x) + e^{\alpha x} \sin(\beta x)i =: s + ti$$

所以

$$\begin{aligned} 0 &= y_1'' + py_1' + qy_1 = (s + ti)'' + p(s + ti)' + q(s + ti) \\ &= (s'' + t''i) + p(s' + t'i) + q(s + ti) \end{aligned}$$

二阶线性常系数微分方程——通解

性质 在 $p^2 - 4q < 0$ 情形中, $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ 。可以证明

$$e^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

也是两个线性无关特解。

证明 当 $p^2 - 4q < 0$ 时, 有特解

所以 $y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x} \cos(\beta x) + e^{\alpha x} \sin(\beta x)i =: s + ti$

$$0 = y_1'' + py_1' + qy_1 = (s + ti)'' + p(s + ti)' + q(s + ti)$$

$$= (s'' + t''i) + p(s' + t'i) + q(s + ti)$$

$$= (s'' + ps' + qs) + (t'' + pt' + qt)i$$

二阶线性常系数微分方程——通解

性质 在 $p^2 - 4q < 0$ 情形中, $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ 。可以证明

$$e^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

也是两个线性无关特解。

证明 当 $p^2 - 4q < 0$ 时, 有特解

所以
$$y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x} \cos(\beta x) + e^{\alpha x} \sin(\beta x)i =: s + ti$$

$$0 = y_1'' + py_1' + qy_1 = (s + ti)'' + p(s + ti)' + q(s + ti)$$

$$= (s'' + t''i) + p(s' + t'i) + q(s + ti)$$

$$= (s'' + ps' + qs) + (t'' + pt' + qt)i$$

所以
$$s'' + ps' + qs = 0 \quad \text{且} \quad t'' + pt' + qt = 0$$

二阶线性常系数微分方程——通解

性质 在 $p^2 - 4q < 0$ 情形中, $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ 。可以证明

$$e^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

也是两个线性无关特解。

证明 当 $p^2 - 4q < 0$ 时, 有特解

所以 $y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x} \cos(\beta x) + e^{\alpha x} \sin(\beta x)i =: s + ti$

$$0 = y_1'' + py_1' + qy_1 = (s + ti)'' + p(s + ti)' + q(s + ti)$$

$$= (s'' + t''i) + p(s' + t'i) + q(s + ti)$$

$$= (s'' + ps' + qs) + (t'' + pt' + qt)i$$

所以 $s'' + ps' + qs = 0$ 且 $t'' + pt' + qt = 0$

所以 $s = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ 及 $t = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$ 为特解。

二阶线性常系数微分方程——通解

性质 在 $p^2 - 4q < 0$ 情形中, $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ 。可以证明

$$e^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

也是两个线性无关特解。

证明 当 $p^2 - 4q < 0$ 时, 有特解

所以 $y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x} \cos(\beta x) + e^{\alpha x} \sin(\beta x)i =: s + ti$

$$\begin{aligned} 0 &= y_1'' + py_1' + qy_1 = (s + ti)'' + p(s + ti)' + q(s + ti) \\ &= (s'' + t''i) + p(s' + t'i) + q(s + ti) \\ &= (s'' + ps' + qs) + (t'' + pt' + qt)i \end{aligned}$$

所以 $s'' + ps' + qs = 0$ 且 $t'' + pt' + qt = 0$

所以 $s = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ 及 $t = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$ 为特解。

$\frac{e^{\alpha x} \cos(\beta x)}{e^{\alpha x} \sin(\beta x)}$ 不是常数 \Rightarrow 线性无关性。

二阶线性常系数微分方程的解

目标 找出 $y'' + py' + qy = 0$ 的两个线性无关的特解 y_1, y_2 。

结论 求解特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的根 $r_{1,2}$, 则

- $p^2 - 4q > 0$ 时, $r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$
 - 特解: $y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}$
- $p^2 - 4q = 0$ 时, $r_1 = r_2 = \frac{-p}{2}$
 - 特解: $y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = x e^{r_2 x}$
- $p^2 - 4q < 0$ 时, $r_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2} i = \alpha \pm \beta i$
 - 特解: $y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x), y_2 = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$

二阶线性常系数微分方程的解

目标 找出 $y'' + py' + qy = 0$ 的两个线性无关的特解 y_1, y_2 。

结论 求解特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的根 $r_{1,2}$, 则

- $p^2 - 4q > 0$ 时, $r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$
 - 特解: $y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}$
 - 通解:
- $p^2 - 4q = 0$ 时, $r_1 = r_2 = \frac{-p}{2}$
 - 特解: $y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = x e^{r_2 x}$
 - 通解:
- $p^2 - 4q < 0$ 时, $r_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2} i = \alpha \pm \beta i$
 - 特解: $y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x), y_2 = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$
 - 通解:

二阶线性常系数微分方程的解

目标 找出 $y'' + py' + qy = 0$ 的两个线性无关的特解 y_1, y_2 。

结论 求解特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的根 $r_{1,2}$, 则

- $p^2 - 4q > 0$ 时, $r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$
 - 特解: $y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}$
 - 通解: $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
- $p^2 - 4q = 0$ 时, $r_1 = r_2 = \frac{-p}{2}$
 - 特解: $y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = x e^{r_2 x}$
 - 通解:
- $p^2 - 4q < 0$ 时, $r_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2} i = \alpha \pm \beta i$
 - 特解: $y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x), y_2 = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$
 - 通解:

二阶线性常系数微分方程的解

目标 找出 $y'' + py' + qy = 0$ 的两个线性无关的特解 y_1, y_2 。

结论 求解特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的根 $r_{1,2}$, 则

- $p^2 - 4q > 0$ 时, $r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$
 - 特解: $y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}$
 - 通解: $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
- $p^2 - 4q = 0$ 时, $r_1 = r_2 = \frac{-p}{2}$
 - 特解: $y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = x e^{r_2 x}$
 - 通解: $y = (C_1 + C_2 x) e^{r_2 x}$
- $p^2 - 4q < 0$ 时, $r_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2} i = \alpha \pm \beta i$
 - 特解: $y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x), y_2 = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$
 - 通解:

二阶线性常系数微分方程的解

目标 找出 $y'' + py' + qy = 0$ 的两个线性无关的特解 y_1, y_2 。

结论 求解特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的根 $r_{1,2}$, 则

- $p^2 - 4q > 0$ 时, $r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$
 - 特解: $y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}$
 - 通解: $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
- $p^2 - 4q = 0$ 时, $r_1 = r_2 = \frac{-p}{2}$
 - 特解: $y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = x e^{r_2 x}$
 - 通解: $y = (C_1 + C_2 x) e^{r_2 x}$
- $p^2 - 4q < 0$ 时, $r_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2} i = \alpha \pm \beta i$
 - 特解: $y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x), y_2 = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$
 - 通解: $y = e^{\alpha x} [C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)]$

例 求微分方程的通解：

$$y'' - 4y' + 3y = 0; \quad y'' + 4y' + 4y = 0; \quad y'' - 2y' + 5y = 0$$

例 求微分方程的通解：

$$y'' - 4y' + 3y = 0; \quad y'' + 4y' + 4y = 0; \quad y'' - 2y' + 5y = 0$$

解

$$y'' - 4y' + 3y = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 - 4r + 3 = 0$$

例 求微分方程的通解：

$$y'' - 4y' + 3y = 0; \quad y'' + 4y' + 4y = 0; \quad y'' - 2y' + 5y = 0$$

解

$$y'' - 4y' + 3y = 0 \Rightarrow r^2 - 4r + 3 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = 3$$

例 求微分方程的通解：

$$y'' - 4y' + 3y = 0; \quad y'' + 4y' + 4y = 0; \quad y'' - 2y' + 5y = 0$$

解

$$y'' - 4y' + 3y = 0 \Rightarrow r^2 - 4r + 3 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = 3$$

$e^x \qquad e^{3x}$

例 求微分方程的通解：

$$y'' - 4y' + 3y = 0; \quad y'' + 4y' + 4y = 0; \quad y'' - 2y' + 5y = 0$$

解

$$\begin{aligned} y'' - 4y' + 3y = 0 &\Rightarrow r^2 - 4r + 3 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = 3 \\ &\Rightarrow y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}. \end{aligned}$$

例 求微分方程的通解：

$$y'' - 4y' + 3y = 0; \quad y'' + 4y' + 4y = 0; \quad y'' - 2y' + 5y = 0$$

解

$$\begin{aligned} y'' - 4y' + 3y = 0 &\Rightarrow r^2 - 4r + 3 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = 3 \\ &\Rightarrow y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}. \end{aligned}$$

$$y'' + 4y' + 4y = 0 \Rightarrow r^2 + 4r + 4 = 0$$

例 求微分方程的通解：

$$y'' - 4y' + 3y = 0; \quad y'' + 4y' + 4y = 0; \quad y'' - 2y' + 5y = 0$$

解

$$\begin{aligned} y'' - 4y' + 3y = 0 &\Rightarrow r^2 - 4r + 3 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = 3 \\ &\Rightarrow y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}. \end{aligned}$$

$$y'' + 4y' + 4y = 0 \Rightarrow r^2 + 4r + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = -2$$

例 求微分方程的通解：

$$y'' - 4y' + 3y = 0; \quad y'' + 4y' + 4y = 0; \quad y'' - 2y' + 5y = 0$$

解

$$\begin{aligned} y'' - 4y' + 3y = 0 &\Rightarrow r^2 - 4r + 3 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = 3 \\ &\Rightarrow y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' + 4y' + 4y = 0 &\Rightarrow r^2 + 4r + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = -2 \\ &\Rightarrow y = (C_1 + C_2 x) e^{-2x}. \end{aligned}$$

例 求微分方程的通解：

$$y'' - 4y' + 3y = 0; \quad y'' + 4y' + 4y = 0; \quad y'' - 2y' + 5y = 0$$

解

$$\begin{aligned} y'' - 4y' + 3y = 0 &\Rightarrow r^2 - 4r + 3 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = 3 \\ &\Rightarrow y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' + 4y' + 4y = 0 &\Rightarrow r^2 + 4r + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = -2 \\ &\Rightarrow y = (C_1 + C_2 x) e^{-2x}. \end{aligned}$$

$$y'' - 2y' + 5y = 0$$

例 求微分方程的通解：

$$y'' - 4y' + 3y = 0; \quad y'' + 4y' + 4y = 0; \quad y'' - 2y' + 5y = 0$$

解

$$\begin{aligned} y'' - 4y' + 3y = 0 &\Rightarrow r^2 - 4r + 3 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = 3 \\ &\Rightarrow y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' + 4y' + 4y = 0 &\Rightarrow r^2 + 4r + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = -2 \\ &\Rightarrow y = (C_1 + C_2 x) e^{-2x}. \end{aligned}$$

$$y'' - 2y' + 5y = 0 \Rightarrow r^2 - 2r + 5 = 0$$

例 求微分方程的通解：

$$y'' - 4y' + 3y = 0; \quad y'' + 4y' + 4y = 0; \quad y'' - 2y' + 5y = 0$$

解

$$\begin{aligned} y'' - 4y' + 3y = 0 &\Rightarrow r^2 - 4r + 3 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = 3 \\ &\Rightarrow y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' + 4y' + 4y = 0 &\Rightarrow r^2 + 4r + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = -2 \\ &\Rightarrow y = (C_1 + C_2 x) e^{-2x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' - 2y' + 5y = 0 &\Rightarrow r^2 - 2r + 5 = 0 \\ &\Rightarrow r_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2} \end{aligned}$$

例 求微分方程的通解：

$$y'' - 4y' + 3y = 0; \quad y'' + 4y' + 4y = 0; \quad y'' - 2y' + 5y = 0$$

解

$$\begin{aligned} y'' - 4y' + 3y = 0 &\Rightarrow r^2 - 4r + 3 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = 3 \\ &\Rightarrow y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' + 4y' + 4y = 0 &\Rightarrow r^2 + 4r + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = -2 \\ &\Rightarrow y = (C_1 + C_2 x) e^{-2x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' - 2y' + 5y = 0 &\Rightarrow r^2 - 2r + 5 = 0 \\ &\Rightarrow r_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2} = 1 \pm 2i \end{aligned}$$

例 求微分方程的通解：

$$y'' - 4y' + 3y = 0; \quad y'' + 4y' + 4y = 0; \quad y'' - 2y' + 5y = 0$$

解

$$\begin{aligned} y'' - 4y' + 3y = 0 &\Rightarrow r^2 - 4r + 3 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = 3 \\ &\Rightarrow y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' + 4y' + 4y = 0 &\Rightarrow r^2 + 4r + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = -2 \\ &\Rightarrow y = (C_1 + C_2 x) e^{-2x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' - 2y' + 5y = 0 &\Rightarrow r^2 - 2r + 5 = 0 \\ &\Rightarrow r_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2} = 1 \pm 2i \\ &\Rightarrow y = e^x [C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)]. \end{aligned}$$

We are here now...

◆ 复数简介

♣ 二阶线性微分方程

♥ 二阶常系数齐次线性微分方程

♠ 二阶常系数非齐次线性微分方程

二阶常系数非齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

二阶常系数非齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

通解的求解步骤：

1. 求解齐次部分

$$y'' + py' + qy = 0$$

的通解

$$C_1y_1 + C_2y_2$$

2. 求出原方程的一个特解 y^*

3. 则原方程的通解为

$$y = y^* + C_1y_1 + C_2y_2$$

二阶常系数非齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

通解的求解步骤：

1. 求解齐次部分

$$y'' + py' + qy = 0$$

的通解

$$C_1y_1 + C_2y_2$$

2. 求出原方程的一个特解 y^*

3. 则原方程的通解为

$$y = y^* + C_1y_1 + C_2y_2$$

注 关键是求出一个特解

二阶常系数非齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

通解的求解步骤：

1. 求解齐次部分

$$y'' + py' + qy = 0$$

的通解

$$C_1y_1 + C_2y_2$$

2. 求出原方程的一个特解 y^*

3. 则原方程的通解为

$$y = y^* + C_1y_1 + C_2y_2$$

注 关键是求出一个特解，方法基本靠猜！

二阶常系数非齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

通解的求解步骤：

1. 求解齐次部分

$$y'' + py' + qy = 0$$

的通解

$$C_1y_1 + C_2y_2$$

2. 求出原方程的一个特解 y^*

3. 则原方程的通解为

$$y = y^* + C_1y_1 + C_2y_2$$

注 关键是求出一个特解，方法基本靠猜！（待定系数法）

例 求出下列方程的一个特解：

(1) $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$; (2) $y'' - 6y' + 9y = 5$; (3) $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解

例 求出下列方程的一个特解：

(1) $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$; (2) $y'' - 6y' + 9y = 5$; (3) $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解

1. 猜 $y^* = ax + b$, 其中 a, b 待定。

例 求出下列方程的一个特解：

(1) $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$; (2) $y'' - 6y' + 9y = 5$; (3) $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解

1. 猜 $y^* = ax + b$ ，其中 a, b 待定。代入方程得：

$$y^{*''} + 2y^{*'} + 4y^* =$$

例 求出下列方程的一个特解：

(1) $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$; (2) $y'' - 6y' + 9y = 5$; (3) $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解

1. 猜 $y^* = ax + b$ ，其中 a, b 待定。代入方程得：

$$y^{*''} + 2y^{*'} + 4y^* = 0 +$$

例 求出下列方程的一个特解：

(1) $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$; (2) $y'' - 6y' + 9y = 5$; (3) $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解

1. 猜 $y^* = ax + b$ ，其中 a, b 待定。代入方程得：

$$y^{*''} + 2y^{*'} + 4y^* = 0 + 2a$$

例 求出下列方程的一个特解：

(1) $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$; (2) $y'' - 6y' + 9y = 5$; (3) $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解

1. 猜 $y^* = ax + b$ ，其中 a, b 待定。代入方程得：

$$y^{*''} + 2y^{*'} + 4y^* = 0 + 2a + 4(ax + b)$$

例 求出下列方程的一个特解：

(1) $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$; (2) $y'' - 6y' + 9y = 5$; (3) $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解

1. 猜 $y^* = ax + b$ ，其中 a, b 待定。代入方程得：

$$y^{*''} + 2y^{*'} + 4y^* = 0 + 2a + 4(ax + b) = 2a + 4b + 4ax$$

例 求出下列方程的一个特解：

(1) $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$; (2) $y'' - 6y' + 9y = 5$; (3) $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解

1. 猜 $y^* = ax + b$ ，其中 a, b 待定。代入方程得：

$$\begin{aligned} y^{*''} + 2y^{*'} + 4y^* &= 0 + 2a + 4(ax + b) = 2a + 4b + 4ax \\ &= 3 - 2x \end{aligned}$$

例 求出下列方程的一个特解：

(1) $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$; (2) $y'' - 6y' + 9y = 5$; (3) $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解

1. 猜 $y^* = ax + b$ ，其中 a, b 待定。代入方程得：

$$\begin{aligned} y^{*''} + 2y^{*'} + 4y^* &= 0 + 2a + 4(ax + b) = 2a + 4b + 4ax \\ &= 3 - 2x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + 4b = 3 \\ 4a = -2 \end{cases}$$

例 求出下列方程的一个特解：

(1) $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$; (2) $y'' - 6y' + 9y = 5$; (3) $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解

1. 猜 $y^* = ax + b$ ，其中 a, b 待定。代入方程得：

$$\begin{aligned} y^{*''} + 2y^{*'} + 4y^* &= 0 + 2a + 4(ax + b) = 2a + 4b + 4ax \\ &= 3 - 2x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + 4b = 3 \\ 4a = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

例 求出下列方程的一个特解：

(1) $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$; (2) $y'' - 6y' + 9y = 5$; (3) $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解

1. 猜 $y^* = ax + b$ ，其中 a, b 待定。代入方程得：

$$\begin{aligned} y^{*''} + 2y^{*'} + 4y^* &= 0 + 2a + 4(ax + b) = 2a + 4b + 4ax \\ &= 3 - 2x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + 4b = 3 \\ 4a = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow y^* = -\frac{1}{2}x + 1$$

例 求出下列方程的一个特解：

(1) $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$; (2) $y'' - 6y' + 9y = 5$; (3) $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解

1. 猜 $y^* = ax + b$, 其中 a, b 待定。代入方程得：

$$\begin{aligned} y^{*''} + 2y^{*'} + 4y^* &= 0 + 2a + 4(ax + b) = 2a + 4b + 4ax \\ &= 3 - 2x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + 4b = 3 \\ 4a = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow y^* = -\frac{1}{2}x + 1$$

2. 显然 $y^* = \frac{5}{9}$

例 求出下列方程的一个特解：

(1) $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$; (2) $y'' - 6y' + 9y = 5$; (3) $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解

1. 猜 $y^* = ax + b$, 其中 a, b 待定。代入方程得：

$$\begin{aligned} y^{*''} + 2y^{*'} + 4y^* &= 0 + 2a + 4(ax + b) = 2a + 4b + 4ax \\ &= 3 - 2x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + 4b = 3 \\ 4a = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow y^* = -\frac{1}{2}x + 1$$

2. 显然 $y^* = \frac{5}{9}$

3. 猜 $y^* = ae^x$, 其中 a 待定。

例 求出下列方程的一个特解：

(1) $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$; (2) $y'' - 6y' + 9y = 5$; (3) $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解

1. 猜 $y^* = ax + b$, 其中 a, b 待定。代入方程得：

$$\begin{aligned} y^{*''} + 2y^{*'} + 4y^* &= 0 + 2a + 4(ax + b) = 2a + 4b + 4ax \\ &= 3 - 2x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + 4b = 3 \\ 4a = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow y^* = -\frac{1}{2}x + 1$$

2. 显然 $y^* = \frac{5}{9}$

3. 猜 $y^* = ae^x$, 其中 a 待定。代入方程

$$y^{*''} + 4y^{*'} - y^* =$$

例 求出下列方程的一个特解：

(1) $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$; (2) $y'' - 6y' + 9y = 5$; (3) $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解

1. 猜 $y^* = ax + b$, 其中 a, b 待定。代入方程得：

$$\begin{aligned} y^{*''} + 2y^{*'} + 4y^* &= 0 + 2a + 4(ax + b) = 2a + 4b + 4ax \\ &= 3 - 2x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + 4b = 3 \\ 4a = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow y^* = -\frac{1}{2}x + 1$$

2. 显然 $y^* = \frac{5}{9}$

3. 猜 $y^* = ae^x$, 其中 a 待定。代入方程

$$y^{*''} + 4y^{*'} - y^* = ae^x$$

例 求出下列方程的一个特解：

(1) $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$; (2) $y'' - 6y' + 9y = 5$; (3) $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解

1. 猜 $y^* = ax + b$, 其中 a, b 待定。代入方程得：

$$\begin{aligned} y^{*''} + 2y^{*'} + 4y^* &= 0 + 2a + 4(ax + b) = 2a + 4b + 4ax \\ &= 3 - 2x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + 4b = 3 \\ 4a = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow y^* = -\frac{1}{2}x + 1$$

2. 显然 $y^* = \frac{5}{9}$

3. 猜 $y^* = ae^x$, 其中 a 待定。代入方程

$$y^{*''} + 4y^{*'} - y^* = ae^x + 4ae^x$$

例 求出下列方程的一个特解：

(1) $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$; (2) $y'' - 6y' + 9y = 5$; (3) $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解

1. 猜 $y^* = ax + b$, 其中 a, b 待定。代入方程得：

$$\begin{aligned} y^{*''} + 2y^{*'} + 4y^* &= 0 + 2a + 4(ax + b) = 2a + 4b + 4ax \\ &= 3 - 2x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + 4b = 3 \\ 4a = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow y^* = -\frac{1}{2}x + 1$$

2. 显然 $y^* = \frac{5}{9}$

3. 猜 $y^* = ae^x$, 其中 a 待定。代入方程

$$y^{*''} + 4y^{*'} - y^* = ae^x + 4ae^x - ae^x$$

例 求出下列方程的一个特解:

(1) $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$; (2) $y'' - 6y' + 9y = 5$; (3) $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解

1. 猜 $y^* = ax + b$, 其中 a, b 待定。代入方程得:

$$\begin{aligned} y^{*''} + 2y^{*'} + 4y^* &= 0 + 2a + 4(ax + b) = 2a + 4b + 4ax \\ &= 3 - 2x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + 4b = 3 \\ 4a = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow y^* = -\frac{1}{2}x + 1$$

2. 显然 $y^* = \frac{5}{9}$

3. 猜 $y^* = ae^x$, 其中 a 待定。代入方程

$$y^{*''} + 4y^{*'} - y^* = ae^x + 4ae^x - ae^x = 4ae^x$$

例 求出下列方程的一个特解:

(1) $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$; (2) $y'' - 6y' + 9y = 5$; (3) $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解

1. 猜 $y^* = ax + b$, 其中 a, b 待定。代入方程得:

$$\begin{aligned} y^{*''} + 2y^{*'} + 4y^* &= 0 + 2a + 4(ax + b) = 2a + 4b + 4ax \\ &= 3 - 2x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + 4b = 3 \\ 4a = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow y^* = -\frac{1}{2}x + 1$$

2. 显然 $y^* = \frac{5}{9}$

3. 猜 $y^* = ae^x$, 其中 a 待定。代入方程

$$y^{*''} + 4y^{*'} - y^* = ae^x + 4ae^x - ae^x = 4ae^x = 2e^x$$

例 求出下列方程的一个特解:

(1) $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$; (2) $y'' - 6y' + 9y = 5$; (3) $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解

1. 猜 $y^* = ax + b$, 其中 a, b 待定。代入方程得:

$$\begin{aligned} y^{*''} + 2y^{*'} + 4y^* &= 0 + 2a + 4(ax + b) = 2a + 4b + 4ax \\ &= 3 - 2x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + 4b = 3 \\ 4a = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow y^* = -\frac{1}{2}x + 1$$

2. 显然 $y^* = \frac{5}{9}$

3. 猜 $y^* = ae^x$, 其中 a 待定。代入方程

$$y^{*''} + 4y^{*'} - y^* = ae^x + 4ae^x - ae^x = 4ae^x = 2e^x$$

$$\text{所以 } a = \frac{1}{2}, y^* = \frac{1}{2}e^x$$

例 求出下列方程的通解：

(1) $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$; (2) $y'' - 6y' + 9y = 5$; (3) $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解

例 求出下列方程的通解：

(1) $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$; (2) $y'' - 6y' + 9y = 5$; (3) $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解 (1) Step 1 求其次部分的通解

$$y'' + 2y' + 4y = 0$$

例 求出下列方程的通解：

(1) $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$; (2) $y'' - 6y' + 9y = 5$; (3) $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解 (1) Step 1 求其次部分的通解

$$y'' + 2y' + 4y = 0$$

$$\Rightarrow r^2 + 2r + 4 = 0$$

例 求出下列方程的通解：

(1) $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$; (2) $y'' - 6y' + 9y = 5$; (3) $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解 (1) Step 1 求其次部分的通解

$$y'' + 2y' + 4y = 0$$

$$\Rightarrow r^2 + 2r + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2}$$

例 求出下列方程的通解：

(1) $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$; (2) $y'' - 6y' + 9y = 5$; (3) $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解 (1) Step 1 求其次部分的通解

$$y'' + 2y' + 4y = 0$$

$$\Rightarrow r^2 + 2r + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}i$$

例 求出下列方程的通解：

(1) $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$; (2) $y'' - 6y' + 9y = 5$; (3) $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解 (1) Step 1 求其次部分的通解

$$y'' + 2y' + 4y = 0$$

$$\Rightarrow r^2 + 2r + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}i$$

$$\Rightarrow \text{齐次的通解是 } e^{-x} [C_1 \cos(\sqrt{3}x) + C_2 \sin(\sqrt{3}x)]$$

例 求出下列方程的通解：

(1) $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$; (2) $y'' - 6y' + 9y = 5$; (3) $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解 (1) Step 1 求其次部分的通解

$$y'' + 2y' + 4y = 0$$

$$\Rightarrow r^2 + 2r + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}i$$

$$\Rightarrow \text{齐次的通解是 } e^{-x} [C_1 \cos(\sqrt{3}x) + C_2 \sin(\sqrt{3}x)i]$$

Step 2 原方程的一个特解是 $y^* = -\frac{1}{2}x + 1$

例 求出下列方程的通解：

(1) $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$; (2) $y'' - 6y' + 9y = 5$; (3) $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解 (1) Step 1 求其次部分的通解

$$y'' + 2y' + 4y = 0$$

$$\Rightarrow r^2 + 2r + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}i$$

$$\Rightarrow \text{齐次的通解是 } e^{-x} [C_1 \cos(\sqrt{3}x) + C_2 \sin(\sqrt{3}x)]$$

Step 2 原方程的一个特解是 $y^* = -\frac{1}{2}x + 1$

Step 3 所以原方程的通解是

例 求出下列方程的通解：

(1) $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$; (2) $y'' - 6y' + 9y = 5$; (3) $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解 (1) Step 1 求其次部分的通解

$$y'' + 2y' + 4y = 0$$

$$\Rightarrow r^2 + 2r + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}i$$

$$\Rightarrow \text{齐次的通解是 } e^{-x} [C_1 \cos(\sqrt{3}x) + C_2 \sin(\sqrt{3}x)i]$$

Step 2 原方程的一个特解是 $y^* = -\frac{1}{2}x + 1$

Step 3 所以原方程的通解是

$$y = -\frac{1}{2}x + 1 + e^{-x} [C_1 \cos(\sqrt{3}x) + C_2 \sin(\sqrt{3}x)i]$$

例 求出下列方程的通解：

(1) $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$; (2) $y'' - 6y' + 9y = 5$; (3) $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解

例 求出下列方程的通解：

(1) $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$; (2) $y'' - 6y' + 9y = 5$; (3) $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解 (2) Step 1 求其次部分的通解

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

例 求出下列方程的通解：

(1) $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$; (2) $y'' - 6y' + 9y = 5$; (3) $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解 (2) Step 1 求其次部分的通解

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

$$\Rightarrow r^2 - 6r + 9 = 0$$

例 求出下列方程的通解：

(1) $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$; (2) $y'' - 6y' + 9y = 5$; (3) $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解 (2) Step 1 求其次部分的通解

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

$$\Rightarrow r^2 - 6r + 9 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 3$$

例 求出下列方程的通解：

(1) $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$; (2) $y'' - 6y' + 9y = 5$; (3) $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解 (2) Step 1 求其次部分的通解

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

$$\Rightarrow r^2 - 6r + 9 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 3$$

$$\Rightarrow \text{齐次的通解是 } (C_1 + C_2x)e^{3x}$$

例 求出下列方程的通解：

(1) $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$; (2) $y'' - 6y' + 9y = 5$; (3) $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解 (2) Step 1 求其次部分的通解

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

$$\Rightarrow r^2 - 6r + 9 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 3$$

$$\Rightarrow \text{齐次的通解是 } (C_1 + C_2x)e^{3x}$$

Step 2 原方程的一个特解是 $y^* = \frac{5}{9}$

例 求出下列方程的通解：

(1) $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$; (2) $y'' - 6y' + 9y = 5$; (3) $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解 (2) Step 1 求其次部分的通解

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

$$\Rightarrow r^2 - 6r + 9 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 3$$

$$\Rightarrow \text{齐次的通解是 } (C_1 + C_2x)e^{3x}$$

Step 2 原方程的一个特解是 $y^* = \frac{5}{9}$

Step 3 所以原方程的通解是

$$y = \frac{5}{9} + (C_1 + C_2x)e^{3x}$$

例 求出下列方程的通解：

(1) $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$; (2) $y'' - 6y' + 9y = 5$; (3) $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解

例 求出下列方程的通解：

(1) $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$; (2) $y'' - 6y' + 9y = 5$; (3) $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解 (3) Step 1 求其次部分的通解

$$y'' + 4y' - y = 0$$

例 求出下列方程的通解：

(1) $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$; (2) $y'' - 6y' + 9y = 5$; (3) $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解 (3) Step 1 求其次部分的通解

$$y'' + 4y' - y = 0$$

$$\Rightarrow r^2 + 4r - 1 = 0$$

例 求出下列方程的通解：

(1) $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$; (2) $y'' - 6y' + 9y = 5$; (3) $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解 (3) Step 1 求其次部分的通解

$$y'' + 4y' - y = 0$$

$$\Rightarrow r^2 + 4r - 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4}}{2}$$

例 求出下列方程的通解：

(1) $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$; (2) $y'' - 6y' + 9y = 5$; (3) $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解 (3) Step 1 求其次部分的通解

$$y'' + 4y' - y = 0$$

$$\Rightarrow r^2 + 4r - 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4}}{2} = -2 \pm \sqrt{5}$$

例 求出下列方程的通解：

(1) $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$; (2) $y'' - 6y' + 9y = 5$; (3) $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解 (3) Step 1 求其次部分的通解

$$y'' + 4y' - y = 0$$

$$\Rightarrow r^2 + 4r - 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4}}{2} = -2 \pm \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \text{齐次的通解是 } C_1 e^{(-2+\sqrt{5})x} + C_2 e^{(-2-\sqrt{5})x}$$

例 求出下列方程的通解：

(1) $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$; (2) $y'' - 6y' + 9y = 5$; (3) $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解 (3) Step 1 求其次部分的通解

$$y'' + 4y' - y = 0$$

$$\Rightarrow r^2 + 4r - 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4}}{2} = -2 \pm \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \text{齐次的通解是 } C_1 e^{(-2+\sqrt{5})x} + C_2 e^{(-2-\sqrt{5})x}$$

Step 2 原方程的一个特解是 $y^* = \frac{1}{2}e^x$

例 求出下列方程的通解：

(1) $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$; (2) $y'' - 6y' + 9y = 5$; (3) $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解 (3) Step 1 求其次部分的通解

$$y'' + 4y' - y = 0$$

$$\Rightarrow r^2 + 4r - 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4}}{2} = -2 \pm \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \text{齐次的通解是 } C_1 e^{(-2+\sqrt{5})x} + C_2 e^{(-2-\sqrt{5})x}$$

Step 2 原方程的一个特解是 $y^* = \frac{1}{2}e^x$

Step 3 所以原方程的通解是

$$y = \frac{1}{2}e^x + C_1 e^{(-2+\sqrt{5})x} + C_2 e^{(-2-\sqrt{5})x}$$

二阶常系数非齐次线性微分方程

回忆

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

的通解是

$$y = y^* + C_1y_1 + C_2y_2$$

二阶常系数非齐次线性微分方程

回忆

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

原方程的一个特解

的通解是

$$y = \boxed{y^*} + C_1y_1 + C_2y_2$$

二阶常系数非齐次线性微分方程

回忆

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

的通解是

原方程的一个特解

齐次部分 $y'' + py' + qy = 0$
的两个线性无关特解

$$y = \boxed{y^*} + C_1 \boxed{y_1} + C_2 \boxed{y_2}$$

二阶常系数非齐次线性微分方程

回忆

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

的通解是

原方程的一个特解

齐次部分 $y'' + py' + qy = 0$ 的两个线性无关特解

$$y = \boxed{y^*} + C_1 \boxed{y_1} + C_2 \boxed{y_2}$$

目标 对如下类型的 $f(x)$ ，掌握求方程特解的方法

- $f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$
- $f(x) = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos(\omega x) + Q_n(x) \sin(\omega x)]$

二阶常系数非齐次线性微分方程

回忆

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

的通解是

原方程的一个特解

齐次部分 $y'' + py' + qy = 0$ 的两个线性无关特解

$$y = \boxed{y^*} + C_1 \boxed{y_1} + C_2 \boxed{y_2}$$

目标 对如下类型的 $f(x)$ ，掌握求方程特解的方法

- $f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$
- $f(x) = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos(\omega x) + Q_n(x) \sin(\omega x)]$

(其中 P_m, P_l, Q_n 分别为 m, l, n 次多项式)

二阶常系数非齐次线性微分方程

回忆

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

的通解是

原方程的一个特解

齐次部分 $y'' + py' + qy = 0$ 的两个线性无关特解

$$y = \boxed{y^*} + C_1 \boxed{y_1} + C_2 \boxed{y_2}$$

目标 对如下类型的 $f(x)$ ，掌握求方程特解的方法（待定系数法）

- $f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$
- $f(x) = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos(\omega x) + Q_n(x) \sin(\omega x)]$

（其中 P_m, P_l, Q_n 分别为 m, l, n 次多项式）

目标 计算以下方程的一个特解 y^* :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x)$$

计算步骤

目标 计算以下方程的一个特解 y^* :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x)$$

计算步骤

1. 设 $y^* = e^{\lambda x} R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式)

目标 计算以下方程的一个特解 y^* :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x)$$

计算步骤

1. 设 $y^* = e^{\lambda x} R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式), 代入原方程
 $y'' + py' + qy$

目标 计算以下方程的一个特解 y^* :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x)$$

计算步骤

1. 设 $y^* = e^{\lambda x} R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式), 代入原方程, 整理可得:

$$\begin{aligned} & y'' + py' + qy \\ &= e^{\lambda x} [R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x)] \end{aligned}$$

目标 计算以下方程的一个特解 y^* :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x)$$

计算步骤

1. 设 $y^* = e^{\lambda x} R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式), 代入原方程, 整理可得:

$$\begin{aligned} & y'' + py' + qy \\ &= e^{\lambda x} [R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x)] = e^{\lambda x} P_m(x) \end{aligned}$$

目标 计算以下方程的一个特解 y^* :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x)$$

计算步骤

1. 设 $y^* = e^{\lambda x} R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式), 代入原方程, 整理可得:

$$\begin{aligned} & y'' + py' + qy \\ &= e^{\lambda x} [R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x)] = e^{\lambda x} P_m(x) \end{aligned}$$

目标 计算以下方程的一个特解 y^* :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x)$$

计算步骤

1. 设 $y^* = e^{\lambda x} R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式), 代入原方程, 整理可得:

$$[R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x)] = P_m(x)$$

目标 计算以下方程的一个特解 y^* :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x)$$

计算步骤

1. 设 $y^* = e^{\lambda x} R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式), 代入原方程, 整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_m(x)$$

目标 计算以下方程的一个特解 y^* :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x)$$

计算步骤

1. 设 $y^* = e^{\lambda x} R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式), 代入原方程, 整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_m(x)$$

2. 确定多项式 $R(x)$:

目标 计算以下方程的一个特解 y^* :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x)$$

计算步骤

1. 设 $y^* = e^{\lambda x} R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式), 代入原方程, 整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_m(x)$$

2. 确定多项式 $R(x)$:

- $\lambda^2 + p\lambda + q \neq 0$

- $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 但 $2\lambda + p \neq 0$

- $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 且 $2\lambda + p = 0$

目标 计算以下方程的一个特解 y^* :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x)$$

计算步骤

1. 设 $y^* = e^{\lambda x} R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式), 代入原方程, 整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_m(x)$$

2. 确定多项式 $R(x)$:

- $\lambda^2 + p\lambda + q \neq 0$, 则

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_m(x)$$

- $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 但 $2\lambda + p \neq 0$

- $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 且 $2\lambda + p = 0$

目标 计算以下方程的一个特解 y^* :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x)$$

计算步骤

1. 设 $y^* = e^{\lambda x} R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式), 代入原方程, 整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_m(x)$$

2. 确定多项式 $R(x)$:

- $\lambda^2 + p\lambda + q \neq 0$, 则

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_m(x) \quad (R \text{ 为 } m \text{ 次})$$

- $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 但 $2\lambda + p \neq 0$

- $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 且 $2\lambda + p = 0$

目标 计算以下方程的一个特解 y^* :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x)$$

计算步骤

1. 设 $y^* = e^{\lambda x} R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式), 代入原方程, 整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_m(x)$$

2. 确定多项式 $R(x)$:

- $\lambda^2 + p\lambda + q \neq 0$, 则

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_m(x) \quad (R \text{ 为 } m \text{ 次})$$

- $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 但 $2\lambda + p \neq 0$, 则

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) = P_m(x)$$

- $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 且 $2\lambda + p = 0$

目标 计算以下方程的一个特解 y^* :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x)$$

计算步骤

1. 设 $y^* = e^{\lambda x} R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式), 代入原方程, 整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_m(x)$$

2. 确定多项式 $R(x)$:

- $\lambda^2 + p\lambda + q \neq 0$, 则

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_m(x) \quad (R \text{ 为 } m \text{ 次})$$

- $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 但 $2\lambda + p \neq 0$, 则

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) = P_m(x) \quad (R' \text{ 为 } m \text{ 次})$$

- $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 且 $2\lambda + p = 0$

目标 计算以下方程的一个特解 y^* :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x)$$

计算步骤

1. 设 $y^* = e^{\lambda x} R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式), 代入原方程, 整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_m(x)$$

2. 确定多项式 $R(x)$:

- $\lambda^2 + p\lambda + q \neq 0$, 则

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_m(x) \quad (R \text{ 为 } m \text{ 次})$$

- $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 但 $2\lambda + p \neq 0$, 则

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) = P_m(x) \quad (R' \text{ 为 } m \text{ 次})$$

- $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 且 $2\lambda + p = 0$, 则

$$R''(x) = P_m(x)$$

目标 计算以下方程的一个特解 y^* :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x)$$

计算步骤

1. 设 $y^* = e^{\lambda x} R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式), 代入原方程, 整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_m(x)$$

2. 确定多项式 $R(x)$:

- $\lambda^2 + p\lambda + q \neq 0$, 则

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_m(x) \quad (R \text{ 为 } m \text{ 次})$$

- $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 但 $2\lambda + p \neq 0$, 则

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) = P_m(x) \quad (R' \text{ 为 } m \text{ 次})$$

- $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 且 $2\lambda + p = 0$, 则

$$R''(x) = P_m(x) \quad (R'' \text{ 为 } m \text{ 次})$$

目标 计算以下方程的一个特解 y^* :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x)$$

计算步骤

1. 设 $y^* = e^{\lambda x} R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式), 代入原方程, 整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_m(x)$$

2. 确定多项式 $R(x)$:

- 若 λ 非特征方程的根: $\lambda^2 + p\lambda + q \neq 0$, 则

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_m(x) \quad (R \text{ 为 } m \text{ 次})$$

- $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 但 $2\lambda + p \neq 0$, 则

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) = P_m(x) \quad (R' \text{ 为 } m \text{ 次})$$

- $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 且 $2\lambda + p = 0$, 则

$$R''(x) = P_m(x) \quad (R'' \text{ 为 } m \text{ 次})$$

目标 计算以下方程的一个特解 y^* :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x)$$

计算步骤

1. 设 $y^* = e^{\lambda x} R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式), 代入原方程, 整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_m(x)$$

2. 确定多项式 $R(x)$:

- 若 λ 非特征方程的根: $\lambda^2 + p\lambda + q \neq 0$, 则

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_m(x) \quad (R \text{ 为 } m \text{ 次})$$

- 若 λ 为特征方程的单根: $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 但 $2\lambda + p \neq 0$, 则

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) = P_m(x) \quad (R' \text{ 为 } m \text{ 次})$$

- $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 且 $2\lambda + p = 0$, 则

$$R''(x) = P_m(x) \quad (R'' \text{ 为 } m \text{ 次})$$

目标 计算以下方程的一个特解 y^* :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x)$$

计算步骤

1. 设 $y^* = e^{\lambda x} R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式), 代入原方程, 整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_m(x)$$

2. 确定多项式 $R(x)$:

- 若 λ 非特征方程的根: $\lambda^2 + p\lambda + q \neq 0$, 则

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_m(x) \quad (R \text{ 为 } m \text{ 次})$$

- 若 λ 为特征方程的单根: $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 但 $2\lambda + p \neq 0$, 则

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) = P_m(x) \quad (R' \text{ 为 } m \text{ 次})$$

- 若 λ 为特征方程的重根: $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 且 $2\lambda + p = 0$, 则

$$R''(x) = P_m(x) \quad (R'' \text{ 为 } m \text{ 次})$$

例 1 计算 $y'' - 2y' - y = (3x + 1)e^{2x}$ 的一个特解。

例 1 计算 $y'' - 2y' - y = (3x + 1)e^{2x}$ 的一个特解。

解

1. 设 $y^* = e^{\lambda x}R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式)

例 1 计算 $y'' - 2y' - y = (3x + 1)\overline{e^{\lambda x}}$ 的一个特解。

解

1. 设 $y^* = e^{\lambda x}R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式)

例 1 计算 $y'' - 2y' - y = (3x + 1)\overline{e^{2x}}$ 的一个特解。

解

1. 设 $y^* = e^{\lambda x}R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式)，代入原方程整理可得：

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P(x)$$

例 1 计算 $\underbrace{y''}_{p} - \underbrace{2y'}_{q} - \underbrace{y}_{P(x)} = \underbrace{(3x+1)e^{2x}}_{e^{\lambda x}}$ 的一个特解。

解

1. 设 $y^* = e^{\lambda x} R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式)，代入原方程整理可得：

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P(x)$$

例 1 计算 $\underbrace{y''}_{p} - \underbrace{2y'}_{q} - \underbrace{y}_{P(x)} = \underbrace{(3x+1)e^{2x}}_{e^{\lambda x}}$ 的一个特解。

解

1. 设 $y^* = e^{\lambda x} R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式)，代入原方程整理可得：

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P(x)$$

$$\Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 2)R'(x) + (\lambda^2 - 2\lambda - 1)R(x) = 3x + 1$$

例 1 计算 $\underbrace{y''}_{p} - \underbrace{2y'}_{q} - \underbrace{y}_{P(x)} = \underbrace{(3x+1)e^{2x}}_{e^{\lambda x}}$ 的一个特解。

解

1. 设 $y^* = e^{\lambda x} R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式)，代入原方程整理可得：

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P(x)$$

$$\Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 2)R'(x) + (\lambda^2 - 2\lambda - 1)R(x) = 3x + 1$$

$$\Rightarrow R''(x) + 2R'(x) - R(x) = 3x + 1$$

例 1 计算 $\underbrace{y''}_{p} - \underbrace{2y'}_{q} - \underbrace{y}_{P(x)} = \underbrace{(3x+1)e^{2x}}_{e^{\lambda x}}$ 的一个特解。

解

1. 设 $y^* = e^{\lambda x} R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式)，代入原方程整理可得：

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P(x)$$

$$\Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 2)R'(x) + (\lambda^2 - 2\lambda - 1)R(x) = 3x + 1$$

$$\Rightarrow R''(x) + 2R'(x) - R(x) = 3x + 1 \quad (R(x) \text{ 为 1 次多项式})$$

例 1 计算 $\underbrace{y''}_{p} - \underbrace{2y'}_{q} - \underbrace{y}_{P(x)} = \underbrace{(3x+1)e^{2x}}_{e^{\lambda x}}$ 的一个特解。

解

1. 设 $y^* = e^{\lambda x} R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式), 代入原方程整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P(x)$$

$$\Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 2)R'(x) + (\lambda^2 - 2\lambda - 1)R(x) = 3x + 1$$

$$\Rightarrow R''(x) + 2R'(x) - R(x) = 3x + 1 \quad (R(x) \text{ 为 1 次多项式})$$

2. 设 $R(x) = ax + b$

例 1 计算 $\frac{y''}{p} - \frac{2y'}{q} - \frac{y}{P(x)} = \frac{(3x+1)e^{2x}}{e^{\lambda x}}$ 的一个特解。

解

1. 设 $y^* = e^{\lambda x} R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式), 代入原方程整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P(x)$$

$$\Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 2)R'(x) + (\lambda^2 - 2\lambda - 1)R(x) = 3x + 1$$

$$\Rightarrow R''(x) + 2R'(x) - R(x) = 3x + 1 \quad (R(x) \text{ 为 1 次多项式})$$

2. 设 $R(x) = ax + b$, 则

$$R''(x) + 2R'(x) - R(x) =$$

例 1 计算 $\underbrace{y''}_p - \underbrace{2y'}_q - \underbrace{y}_{P(x)} = \underbrace{(3x+1)e^{2x}}_{e^{\lambda x}}$ 的一个特解。

解

1. 设 $y^* = e^{\lambda x} R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式), 代入原方程整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P(x)$$

$$\Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 2)R'(x) + (\lambda^2 - 2\lambda - 1)R(x) = 3x + 1$$

$$\Rightarrow R''(x) + 2R'(x) - R(x) = 3x + 1 \quad (R(x) \text{ 为 1 次多项式})$$

2. 设 $R(x) = ax + b$, 则

$$R''(x) + 2R'(x) - R(x) = 2a$$

例 1 计算 $\underbrace{y''}_p - \underbrace{2y'}_q - \underbrace{y}_{P(x)} = \underbrace{(3x+1)e^{2x}}_{e^{\lambda x}}$ 的一个特解。

解

1. 设 $y^* = e^{\lambda x} R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式), 代入原方程整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P(x)$$

$$\Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 2)R'(x) + (\lambda^2 - 2\lambda - 1)R(x) = 3x + 1$$

$$\Rightarrow R''(x) + 2R'(x) - R(x) = 3x + 1 \quad (R(x) \text{ 为 1 次多项式})$$

2. 设 $R(x) = ax + b$, 则

$$R''(x) + 2R'(x) - R(x) = 2a - (ax + b)$$

例 1 计算 $\underbrace{y''}_p - \underbrace{2y'}_q - \underbrace{y}_{P(x)} = \underbrace{(3x+1)e^{2x}}_{e^{\lambda x}}$ 的一个特解。

解

1. 设 $y^* = e^{\lambda x} R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式)，代入原方程整理可得：

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P(x)$$

$$\Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 2)R'(x) + (\lambda^2 - 2\lambda - 1)R(x) = 3x + 1$$

$$\Rightarrow R''(x) + 2R'(x) - R(x) = 3x + 1 \quad (R(x) \text{ 为 1 次多项式})$$

2. 设 $R(x) = ax + b$ ，则

$$R''(x) + 2R'(x) - R(x) = 2a - (ax + b) = -ax + 2a - b$$

例 1 计算 $\underbrace{y''}_p - \underbrace{2y'}_q - \underbrace{y}_{P(x)} = \underbrace{(3x+1)e^{2x}}_{e^{\lambda x}}$ 的一个特解。

解

1. 设 $y^* = e^{\lambda x} R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式)，代入原方程整理可得：

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P(x)$$

$$\Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 2)R'(x) + (\lambda^2 - 2\lambda - 1)R(x) = 3x + 1$$

$$\Rightarrow R''(x) + 2R'(x) - R(x) = 3x + 1 \quad (R(x) \text{ 为 1 次多项式})$$

2. 设 $R(x) = ax + b$ ，则

$$R''(x) + 2R'(x) - R(x) = 2a - (ax + b) = -ax + 2a - b = 3x + 1$$

例 1 计算 $\underbrace{y''}_p - \underbrace{2y'}_q - \underbrace{y}_{P(x)} = \underbrace{(3x+1)e^{2x}}_{e^{\lambda x}}$ 的一个特解。

解

1. 设 $y^* = e^{\lambda x} R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式), 代入原方程整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P(x)$$

$$\Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 2)R'(x) + (\lambda^2 - 2\lambda - 1)R(x) = 3x + 1$$

$$\Rightarrow R''(x) + 2R'(x) - R(x) = 3x + 1 \quad (R(x) \text{ 为 1 次多项式})$$

2. 设 $R(x) = ax + b$, 则

$$R''(x) + 2R'(x) - R(x) = 2a - (ax + b) = -ax + 2a - b = 3x + 1$$

所以
$$\begin{cases} -a = 3 \\ 2a - b = 1 \end{cases}$$

例 1 计算 $\underbrace{y''}_p - \underbrace{2y'}_q - \underbrace{y}_{P(x)} = \underbrace{(3x+1)e^{2x}}_{e^{\lambda x}}$ 的一个特解。

解

1. 设 $y^* = e^{\lambda x} R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式), 代入原方程整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P(x)$$

$$\Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 2)R'(x) + (\lambda^2 - 2\lambda - 1)R(x) = 3x + 1$$

$$\Rightarrow R''(x) + 2R'(x) - R(x) = 3x + 1 \quad (R(x) \text{ 为 1 次多项式})$$

2. 设 $R(x) = ax + b$, 则

$$R''(x) + 2R'(x) - R(x) = 2a - (ax + b) = -ax + 2a - b = 3x + 1$$

所以
$$\begin{cases} -a = 3 \\ 2a - b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -7 \end{cases}$$

例 1 计算 $\frac{y''}{p} - \frac{2y'}{q} - \frac{y}{P(x)} = \frac{(3x+1)e^{2x}}{e^{\lambda x}}$ 的一个特解。

解

1. 设 $y^* = e^{\lambda x} R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式), 代入原方程整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P(x)$$

$$\Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 2)R'(x) + (\lambda^2 - 2\lambda - 1)R(x) = 3x + 1$$

$$\Rightarrow R''(x) + 2R'(x) - R(x) = 3x + 1 \quad (R(x) \text{ 为 1 次多项式})$$

2. 设 $R(x) = ax + b$, 则

$$R''(x) + 2R'(x) - R(x) = 2a - (ax + b) = -ax + 2a - b = 3x + 1$$

所以
$$\begin{cases} -a = 3 \\ 2a - b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -7 \end{cases} \Rightarrow R(x) = -3x - 7$$

例 1 计算 $\frac{y''}{p} - \frac{2y'}{q} - \frac{y}{P(x)} = \frac{(3x+1)e^{2x}}{e^{\lambda x}}$ 的一个特解。

解

1. 设 $y^* = e^{\lambda x} R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式), 代入原方程整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P(x)$$

$$\Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 2)R'(x) + (\lambda^2 - 2\lambda - 1)R(x) = 3x + 1$$

$$\Rightarrow R''(x) + 2R'(x) - R(x) = 3x + 1 \quad (R(x) \text{ 为 1 次多项式})$$

2. 设 $R(x) = ax + b$, 则

$$R''(x) + 2R'(x) - R(x) = 2a - (ax + b) = -ax + 2a - b = 3x + 1$$

$$\text{所以} \quad \begin{cases} -a = 3 \\ 2a - b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -7 \end{cases} \Rightarrow R(x) = -3x - 7$$

$$\text{所以 } y^* = (-3x - 7)e^{2x}$$

例 1 计算 $\underbrace{y''}_p - \underbrace{2y'}_q - \underbrace{y}_{P(x)} = \underbrace{(3x+1)e^{2x}}_{e^{\lambda x}}$ 的一个特解。

解

1. 设 $y^* = e^{\lambda x} R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式), 代入原方程整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P(x)$$

$$\Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 2)R'(x) + (\lambda^2 - 2\lambda - 1)R(x) = 3x + 1$$

$$\Rightarrow R''(x) + 2R'(x) - R(x) = 3x + 1 \quad (R(x) \text{ 为 1 次多项式})$$

2. 设 $R(x) = ax + b$, 则

$$R''(x) + 2R'(x) - R(x) = 2a - (ax + b) = -ax + 2a - b = 3x + 1$$

$$\text{所以} \quad \begin{cases} -a = 3 \\ 2a - b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -7 \end{cases} \Rightarrow R(x) = -3x - 7$$

$$\text{所以 } y^* = (-3x - 7)e^{2x}$$

例 2 计算 $y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$ 的一个特解。

例 2 计算 $y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$ 的一个特解。

例 2 计算 $y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$ 的一个特解。

解

1. 设 $y^* = e^{\lambda x}R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式)

例 2 计算 $y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$ 的一个特解。
 $\underline{e^{\lambda x}}$

解

1. 设 $y^* = e^{\lambda x}R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式)

例 2 计算 $y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$ 的一个特解。

解

1. 设 $y^* = e^{\lambda x}R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式), 代入原方程整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P(x)$$

例 2 计算 $\underbrace{y''}_p - \underbrace{5y'}_q + \underbrace{6y}_{P(x)} = \underbrace{x e^{2x}}_{e^{\lambda x}}$ 的一个特解。

解

1. 设 $y^* = e^{\lambda x} R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式)，代入原方程整理可得：

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P(x)$$

例 2 计算 $\underbrace{y''}_{p} - \underbrace{5y'}_{q} + \underbrace{6y}_{P(x)} = \underbrace{x}_{e^{\lambda x}}$ 的一个特解。

解

1. 设 $y^* = e^{\lambda x} R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式)，代入原方程整理可得：

$$\begin{aligned} R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) &= P(x) \\ \Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 5)R'(x) + (\lambda^2 - 5\lambda + 6)R(x) &= x \end{aligned}$$

例 2 计算 $\underbrace{y''}_{p} - \underbrace{5y'}_{q} + \underbrace{6y}_{P(x)} = \underbrace{x}_{e^{\lambda x}}$ 的一个特解。

解

1. 设 $y^* = e^{\lambda x} R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式)，代入原方程整理可得：

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P(x)$$

$$\Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 5)R'(x) + (\lambda^2 - 5\lambda + 6)R(x) = x$$

$$\Rightarrow R''(x) - R'(x) = x$$

例 2 计算 $\underbrace{y''}_p - \underbrace{5y'}_q + \underbrace{6y}_{P(x)e^{\lambda x}} = xe^{2x}$ 的一个特解。

解

1. 设 $y^* = e^{\lambda x}R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式)，代入原方程整理可得：

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P(x)$$

$$\Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 5)R'(x) + (\lambda^2 - 5\lambda + 6)R(x) = x$$

$$\Rightarrow R''(x) - R'(x) = x \quad (R'(x) \text{ 为 1 次多项式})$$

例 2 计算 $\underbrace{y''}_{p} - \underbrace{5y'}_{q} + \underbrace{6y}_{P(x)} = \underbrace{x}_{e^{\lambda x}}$ 的一个特解。

解

1. 设 $y^* = e^{\lambda x} R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式)，代入原方程整理可得：

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P(x)$$

$$\Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 5)R'(x) + (\lambda^2 - 5\lambda + 6)R(x) = x$$

$$\Rightarrow R''(x) - R'(x) = x \quad (R'(x) \text{ 为 1 次多项式})$$

2. 设 $R'(x) = ax + b$

例 2 计算 $\underbrace{y''}_p - \underbrace{5y'}_q = \underbrace{x}_{P(x)} \underbrace{e^{2x}}_{e^{\lambda x}}$ 的一个特解。

解

1. 设 $y^* = e^{\lambda x} R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式), 代入原方程整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P(x)$$

$$\Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 5)R'(x) + (\lambda^2 - 5\lambda + 6)R(x) = x$$

$$\Rightarrow R''(x) - R'(x) = x \quad (R'(x) \text{ 为 1 次多项式})$$

2. 设 $R'(x) = ax + b$, 则

$$R''(x) - R'(x) =$$

例 2 计算 $\underbrace{y''}_p - \underbrace{5y'}_q = \underbrace{x}_{P(x)} \underbrace{e^{2x}}_{e^{\lambda x}}$ 的一个特解。

解

1. 设 $y^* = e^{\lambda x} R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式)，代入原方程整理可得：

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P(x)$$

$$\Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 5)R'(x) + (\lambda^2 - 5\lambda + 6)R(x) = x$$

$$\Rightarrow R''(x) - R'(x) = x \quad (R'(x) \text{ 为 1 次多项式})$$

2. 设 $R'(x) = ax + b$ ，则

$$R''(x) - R'(x) = a$$

例 2 计算 $\underbrace{y''}_p - \underbrace{5y'}_q = \underbrace{x}_{P(x)} \underbrace{e^{2x}}_{e^{\lambda x}}$ 的一个特解。

解

1. 设 $y^* = e^{\lambda x} R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式)，代入原方程整理可得：

$$\begin{aligned} R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) &= P(x) \\ \Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 5)R'(x) + (\lambda^2 - 5\lambda + 6)R(x) &= x \\ \Rightarrow R''(x) - R'(x) &= x \quad (R'(x) \text{ 为 1 次多项式}) \end{aligned}$$

2. 设 $R'(x) = ax + b$ ，则

$$R''(x) - R'(x) = a - (ax + b)$$

例 2 计算 $\underbrace{y''}_p - \underbrace{5y'}_q = \underbrace{x}_{P(x)} \underbrace{e^{2x}}_{e^{\lambda x}}$ 的一个特解。

解

1. 设 $y^* = e^{\lambda x} R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式)，代入原方程整理可得：

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P(x)$$

$$\Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 5)R'(x) + (\lambda^2 - 5\lambda + 6)R(x) = x$$

$$\Rightarrow R''(x) - R'(x) = x \quad (R'(x) \text{ 为 1 次多项式})$$

2. 设 $R'(x) = ax + b$ ，则

$$R''(x) - R'(x) = a - (ax + b) = -ax + a - b$$

例 2 计算 $\underbrace{y''}_p - \underbrace{5y'}_q = \underbrace{x}_{P(x)} \underbrace{e^{2x}}_{e^{\lambda x}}$ 的一个特解。

解

1. 设 $y^* = e^{\lambda x} R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式)，代入原方程整理可得：

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P(x)$$

$$\Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 5)R'(x) + (\lambda^2 - 5\lambda + 6)R(x) = x$$

$$\Rightarrow R''(x) - R'(x) = x \quad (R'(x) \text{ 为 1 次多项式})$$

2. 设 $R'(x) = ax + b$ ，则

$$R''(x) - R'(x) = a - (ax + b) = -ax + a - b = x$$

例 2 计算 $\underbrace{y''}_p - \underbrace{5y'}_q = \underbrace{x}_{P(x)} \underbrace{e^{2x}}_{e^{\lambda x}}$ 的一个特解。

解

1. 设 $y^* = e^{\lambda x} R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式)，代入原方程整理可得：

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P(x)$$

$$\Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 5)R'(x) + (\lambda^2 - 5\lambda + 6)R(x) = x$$

$$\Rightarrow R''(x) - R'(x) = x \quad (R'(x) \text{ 为 1 次多项式})$$

2. 设 $R'(x) = ax + b$ ，则

$$R''(x) - R'(x) = a - (ax + b) = -ax + a - b = x$$

所以
$$\begin{cases} -a = 1 \\ a - b = 0 \end{cases}$$

例 2 计算 $\underbrace{y''}_{p} - \underbrace{5y'}_{q} + \underbrace{6y}_{P(x)} = \underbrace{x}_{e^{\lambda x}}$ 的一个特解。

解

1. 设 $y^* = e^{\lambda x} R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式), 代入原方程整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P(x)$$

$$\Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 5)R'(x) + (\lambda^2 - 5\lambda + 6)R(x) = x$$

$$\Rightarrow R''(x) - R'(x) = x \quad (R'(x) \text{ 为 1 次多项式})$$

2. 设 $R'(x) = ax + b$, 则

$$R''(x) - R'(x) = a - (ax + b) = -ax + a - b = x$$

所以

$$\begin{cases} -a = 1 \\ a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$$

例 2 计算 $\underbrace{y''}_{p} - \underbrace{5y'}_{q} + \underbrace{6y}_{P(x)} = \underbrace{x e^{2x}}_{e^{\lambda x}}$ 的一个特解。

解

1. 设 $y^* = e^{\lambda x} R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式)，代入原方程整理可得：

$$\begin{aligned} R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) &= P(x) \\ \Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 5)R'(x) + (\lambda^2 - 5\lambda + 6)R(x) &= x \\ \Rightarrow R''(x) - R'(x) &= x \quad (R'(x) \text{ 为 1 次多项式}) \end{aligned}$$

2. 设 $R'(x) = ax + b$ ，则

$$R''(x) - R'(x) = a - (ax + b) = -ax + a - b = x$$

所以
$$\begin{cases} -a = 1 \\ a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow R'(x) = -x - 1$$

例 2 计算 $\underbrace{y''}_p - \underbrace{5y'}_q + \underbrace{6y}_{P(x)} = \underbrace{x e^{2x}}_{e^{\lambda x}}$ 的一个特解。

解

1. 设 $y^* = e^{\lambda x} R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式)，代入原方程整理可得：

$$\begin{aligned} R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) &= P(x) \\ \Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 5)R'(x) + (\lambda^2 - 5\lambda + 6)R(x) &= x \\ \Rightarrow R''(x) - R'(x) &= x \quad (R'(x) \text{ 为 1 次多项式}) \end{aligned}$$

2. 设 $R'(x) = ax + b$ ，则

$$R''(x) - R'(x) = a - (ax + b) = -ax + a - b = x$$

所以
$$\begin{cases} -a = 1 \\ a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow R'(x) = -x - 1$$

不妨取 $R(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x$,

例 2 计算 $\underbrace{y''}_p - \underbrace{5y'}_q + \underbrace{6y}_{P(x)} = \underbrace{x e^{2x}}_{e^{\lambda x}}$ 的一个特解。

解

1. 设 $y^* = e^{\lambda x} R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式), 代入原方程整理可得:

$$\begin{aligned} R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) &= P(x) \\ \Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 5)R'(x) + (\lambda^2 - 5\lambda + 6)R(x) &= x \\ \Rightarrow R''(x) - R'(x) &= x \quad (R'(x) \text{ 为 1 次多项式}) \end{aligned}$$

2. 设 $R'(x) = ax + b$, 则

$$R''(x) - R'(x) = a - (ax + b) = -ax + a - b = x$$

所以
$$\begin{cases} -a = 1 \\ a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow R'(x) = -x - 1$$

不妨取 $R(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x$, 所以 $y^* = (-\frac{1}{2}x^2 - x)e^{2x}$

例 2 计算 $\underbrace{y''}_p - \underbrace{5y'}_q + \underbrace{6y}_{P(x)e^{\lambda x}} = xe^{2x}$ 的一个特解。

解

1. 设 $y^* = e^{\lambda x}R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式), 代入原方程整理可得:

$$\begin{aligned} R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) &= P(x) \\ \Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 5)R'(x) + (\lambda^2 - 5\lambda + 6)R(x) &= x \\ \Rightarrow R''(x) - R'(x) &= x \quad (R'(x) \text{ 为 1 次多项式}) \end{aligned}$$

2. 设 $R'(x) = ax + b$, 则

$$R''(x) - R'(x) = a - (ax + b) = -ax + a - b = x$$

所以
$$\begin{cases} -a = 1 \\ a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow R'(x) = -x - 1$$

不妨取 $R(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x$, 所以 $y^* = (-\frac{1}{2}x^2 - x)e^{2x}$

例 3 计算 $y'' - 6y' + 9y = (x + 1)e^{3x}$ 的一个特解。

例 3 计算 $y'' - 6y' + 9y = (x + 1)e^{3x}$ 的一个特解。

例 3 计算 $y'' - 6y' + 9y = (x + 1)e^{3x}$ 的一个特解。

解

1. 设 $y^* = e^{\lambda x}R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式)

例 3 计算 $y'' - 6y' + 9y = (x + 1)\overbrace{e^{\lambda x}}^{e^{3x}}$ 的一个特解。

解

1. 设 $y^* = e^{\lambda x}R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式)

例 3 计算 $y'' - 6y' + 9y = (x + 1)\overline{e^{\lambda x}}$ 的一个特解。

解

1. 设 $y^* = e^{\lambda x}R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式)，代入原方程整理可得：

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P(x)$$

例 3 计算 $\underbrace{y''}_p - \underbrace{6y'}_q + 9y = \underbrace{(x+1)}_{P(x)} \underbrace{e^{3x}}_{e^{\lambda x}}$ 的一个特解。

解

1. 设 $y^* = e^{\lambda x} R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式)，代入原方程整理可得：

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P(x)$$

例 3 计算 $\underbrace{y''}_p - \underbrace{6y'}_q + 9y = \underbrace{(x+1)}_{P(x)} \underbrace{e^{3x}}_{e^{\lambda x}}$ 的一个特解。

解

1. 设 $y^* = e^{\lambda x} R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式)，代入原方程整理可得：

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P(x)$$

$$\Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 6)R'(x) + (\lambda^2 - 6\lambda + 9)R(x) = x + 1$$

例 3 计算 $\underbrace{y''}_p - \underbrace{6y'}_q + 9y = \underbrace{(x+1)}_{P(x)} \underbrace{e^{3x}}_{e^{\lambda x}}$ 的一个特解。

解

1. 设 $y^* = e^{\lambda x} R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式)，代入原方程整理可得：

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P(x)$$

$$\Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 6)R'(x) + (\lambda^2 - 6\lambda + 9)R(x) = x + 1$$

$$\Rightarrow R''(x) = x + 1$$

例3 计算 $y'' - 6y' + 9y = (x+1)e^{3x}$ 的一个特解。

解

1. 设 $y^* = e^{\lambda x} R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式)，代入原方程整理可得：

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P(x)$$

$$\Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 6)R'(x) + (\lambda^2 - 6\lambda + 9)R(x) = x + 1$$

$$\Rightarrow R''(x) = x + 1$$

2. 不妨取 $R'(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$,

例3 计算 $\underbrace{y''}_p - \underbrace{6y'}_q + \underbrace{9y}_{P(x)} = \underbrace{(x+1)}_{P(x)} \underbrace{e^{3x}}_{e^{\lambda x}}$ 的一个特解。

解

1. 设 $y^* = e^{\lambda x} R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式)，代入原方程整理可得：

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P(x)$$

$$\Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 6)R'(x) + (\lambda^2 - 6\lambda + 9)R(x) = x + 1$$

$$\Rightarrow R''(x) = x + 1$$

2. 不妨取 $R'(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$, $R(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2$,

例3 计算 $\underbrace{y''}_p - \underbrace{6y'}_q + 9y = \underbrace{(x+1)}_{P(x)} \underbrace{e^{3x}}_{e^{\lambda x}}$ 的一个特解。

解

1. 设 $y^* = e^{\lambda x} R(x)$ ($R(x)$ 为待定多项式)，代入原方程整理可得：

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P(x)$$

$$\Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 6)R'(x) + (\lambda^2 - 6\lambda + 9)R(x) = x + 1$$

$$\Rightarrow R''(x) = x + 1$$

2. 不妨取 $R'(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$, $R(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2$, 所以

$$y^* = \left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)e^{3x}$$

目标 计算以下方程的一个特解 y^* :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos(\omega x) + Q_n(x) \sin(\omega x)]$$

计算步骤 设
 $y^* =$

目标 计算以下方程的一个特解 y^* :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos(\omega x) + Q_n(x) \sin(\omega x)]$$

计算步骤 设

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos(\omega x) + R_m^{(2)}(x) \sin(\omega x)]$$

目标 计算以下方程的一个特解 y^* :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos(\omega x) + Q_n(x) \sin(\omega x)]$$

计算步骤 设

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos(\omega x) + R_m^{(2)}(x) \sin(\omega x)]$$

$$k = \begin{cases} 0 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 非特征值} \\ 1 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 为特征值} \end{cases}$$

目标 计算以下方程的一个特解 y^* :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos(\omega x) + Q_n(x) \sin(\omega x)]$$

计算步骤 设

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos(\omega x) + R_m^{(2)}(x) \sin(\omega x)]$$

$$k = \begin{cases} 0 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 非特征值} \\ 1 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 为特征值} \end{cases}$$

$R_m^{(1)}, R_m^{(2)}$ 为 m 次待定多项式
 $m = \max\{l, n\}$

目标 计算以下方程的一个特解 y^* :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos(\omega x) + Q_n(x) \sin(\omega x)]$$

计算步骤 设

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos(\omega x) + R_m^{(2)}(x) \sin(\omega x)]$$

$$k = \begin{cases} 0 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 非特征值} \\ 1 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 为特征值} \end{cases}$$

$R_m^{(1)}, R_m^{(2)}$ 为 m 次待定多项式
 $m = \max\{l, n\}$

例 1 计算 $y'' - y = e^x \cos(2x)$ 的通解。

目标 计算以下方程的一个特解 y^* :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos(\omega x) + Q_n(x) \sin(\omega x)]$$

计算步骤 设

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos(\omega x) + R_m^{(2)}(x) \sin(\omega x)]$$

$$k = \begin{cases} 0 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 非特征值} \\ 1 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 为特征值} \end{cases}$$

$R_m^{(1)}, R_m^{(2)}$ 为 m 次待定多项式
 $m = \max\{l, n\}$

例 1 计算 $y'' - y = e^x \cos(2x)$ 的通解。

解 1. 特征方程: $r^2 - 1 = 0$,

目标 计算以下方程的一个特解 y^* :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos(\omega x) + Q_n(x) \sin(\omega x)]$$

计算步骤 设

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos(\omega x) + R_m^{(2)}(x) \sin(\omega x)]$$

$$k = \begin{cases} 0 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 非特征值} \\ 1 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 为特征值} \end{cases}$$

$R_m^{(1)}, R_m^{(2)}$ 为 m 次待定多项式
 $m = \max\{l, n\}$

例 1 计算 $y'' - y = e^x \cos(2x)$ 的通解。

解 1. 特征方程: $r^2 - 1 = 0$, 特征值: $r_{1,2} = \pm 1$,

目标 计算以下方程的一个特解 y^* :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos(\omega x) + Q_n(x) \sin(\omega x)]$$

计算步骤 设

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos(\omega x) + R_m^{(2)}(x) \sin(\omega x)]$$

$$k = \begin{cases} 0 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 非特征值} \\ 1 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 为特征值} \end{cases}$$

$R_m^{(1)}, R_m^{(2)}$ 为 m 次待定多项式
 $m = \max\{l, n\}$

例 1 计算 $y'' - y = e^x \cos(2x)$ 的通解。

解 1. 特征方程: $r^2 - 1 = 0$, 特征值: $r_{1,2} = \pm 1$, 齐次部分 $y'' - y = 0$ 的通解是 $C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

目标 计算以下方程的一个特解 y^* :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos(\omega x) + Q_n(x) \sin(\omega x)]$$

计算步骤 设

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos(\omega x) + R_m^{(2)}(x) \sin(\omega x)]$$

$$k = \begin{cases} 0 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 非特征值} \\ 1 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 为特征值} \end{cases}$$

$R_m^{(1)}, R_m^{(2)}$ 为 m 次待定多项式
 $m = \max\{l, n\}$

例 1 计算 $y'' - y = e^x \cos(2x)$ 的通解。

解 1. 特征方程: $r^2 - 1 = 0$, 特征值: $r_{1,2} = \pm 1$, 齐次部分 $y'' - y = 0$ 的通解是 $C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

2. $\lambda =$, $\omega =$,

目标 计算以下方程的一个特解 y^* :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos(\omega x) + Q_n(x) \sin(\omega x)]$$

计算步骤 设

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos(\omega x) + R_m^{(2)}(x) \sin(\omega x)]$$

$$k = \begin{cases} 0 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 非特征值} \\ 1 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 为特征值} \end{cases}$$

$R_m^{(1)}, R_m^{(2)}$ 为 m 次待定多项式
 $m = \max\{l, n\}$

例 1 计算 $y'' - y = e^x \cos(2x)$ 的通解。

解 1. 特征方程: $r^2 - 1 = 0$, 特征值: $r_{1,2} = \pm 1$, 齐次部分 $y'' - y = 0$ 的通解是 $C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

2. $\lambda = 1$, $\omega = 2$,

目标 计算以下方程的一个特解 y^* :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos(\omega x) + Q_n(x) \sin(\omega x)]$$

计算步骤 设

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos(\omega x) + R_m^{(2)}(x) \sin(\omega x)]$$

$$k = \begin{cases} 0 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 非特征值} \\ 1 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 为特征值} \end{cases}$$

$R_m^{(1)}, R_m^{(2)}$ 为 m 次待定多项式
 $m = \max\{l, n\}$

例 1 计算 $y'' - y = e^x \cos(2x)$ 的通解。

解 1. 特征方程: $r^2 - 1 = 0$, 特征值: $r_{1,2} = \pm 1$, 齐次部分 $y'' - y = 0$ 的通解是 $C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

2. $\lambda = 1, \omega = 2,$

目标 计算以下方程的一个特解 y^* :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos(\omega x) + Q_n(x) \sin(\omega x)]$$

计算步骤 设

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos(\omega x) + R_m^{(2)}(x) \sin(\omega x)]$$

$$k = \begin{cases} 0 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 非特征值} \\ 1 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 为特征值} \end{cases}$$

$R_m^{(1)}, R_m^{(2)}$ 为 m 次待定多项式
 $m = \max\{l, n\}$

例 1 计算 $y'' - y = e^x \cos(2x)$ 的通解。

解 1. 特征方程: $r^2 - 1 = 0$, 特征值: $r_{1,2} = \pm 1$, 齐次部分 $y'' - y = 0$ 的通解是 $C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

2. $\lambda = 1$, $\omega = 2$, $\lambda + i\omega = 1 + 2i$

目标 计算以下方程的一个特解 y^* :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos(\omega x) + Q_n(x) \sin(\omega x)]$$

计算步骤 设

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos(\omega x) + R_m^{(2)}(x) \sin(\omega x)]$$

$$k = \begin{cases} 0 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 非特征值} \\ 1 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 为特征值} \end{cases}$$

$R_m^{(1)}, R_m^{(2)}$ 为 m 次待定多项式
 $m = \max\{l, n\}$

例 1 计算 $y'' - y = e^x \cos(2x)$ 的通解。

解 1. 特征方程: $r^2 - 1 = 0$, 特征值: $r_{1,2} = \pm 1$, 齐次部分 $y'' - y = 0$ 的通解是 $C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

2. $\lambda = 1$, $\omega = 2$, $\lambda + i\omega = 1 + 2i$ 不是特征值,

目标 计算以下方程的一个特解 y^* :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos(\omega x) + Q_n(x) \sin(\omega x)]$$

计算步骤 设

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos(\omega x) + R_m^{(2)}(x) \sin(\omega x)]$$

$$k = \begin{cases} 0 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 非特征值} \\ 1 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 为特征值} \end{cases}$$

$R_m^{(1)}, R_m^{(2)}$ 为 m 次待定多项式
 $m = \max\{l, n\}$

例 1 计算 $y'' - y = e^x \cos(2x)$ 的通解。

解 1. 特征方程: $r^2 - 1 = 0$, 特征值: $r_{1,2} = \pm 1$, 齐次部分 $y'' - y = 0$ 的通解是 $C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

2. $\lambda = 1$, $\omega = 2$, $\lambda + i\omega = 1 + 2i$ 不是特征值, 故设

$$y^* = e^x [a \cos(2x) + b \sin(2x)]$$

例 1 计算 $y'' - y = e^x \cos(2x)$ 的通解。

解 1. 特征方程: $r^2 - 1 = 0$, 特征值: $r_{1,2} = \pm 1$, 齐次部分 $y'' - y = 0$ 的通解是 $C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

2. $\lambda = 1$, $\omega = 2$, $\lambda + i\omega = 1 + 2i$ 不是特征值, 故设

$$y^* = e^x [a \cos(2x) + b \sin(2x)]$$

例 1 计算 $y'' - y = e^x \cos(2x)$ 的通解。

解 1. 特征方程: $r^2 - 1 = 0$, 特征值: $r_{1,2} = \pm 1$, 齐次部分 $y'' - y = 0$ 的通解是 $C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

2. $\lambda = 1$, $\omega = 2$, $\lambda + i\omega = 1 + 2i$ 不是特征值, 故设

$$y^* = e^x [a \cos(2x) + b \sin(2x)]$$

代入原方程, 有

$$y^{*''} - y^*$$

例 1 计算 $y'' - y = e^x \cos(2x)$ 的通解。

解 1. 特征方程: $r^2 - 1 = 0$, 特征值: $r_{1,2} = \pm 1$, 齐次部分 $y'' - y = 0$ 的通解是 $C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

2. $\lambda = 1$, $\omega = 2$, $\lambda + i\omega = 1 + 2i$ 不是特征值, 故设

$$y^* = e^x [a \cos(2x) + b \sin(2x)]$$

代入原方程, 有

$$y^{*''} - y^* = e^x [(-4a + 4b) \cos(2x) + (-4a - 4b) \sin(2x)]$$

例 1 计算 $y'' - y = e^x \cos(2x)$ 的通解。

解 1. 特征方程: $r^2 - 1 = 0$, 特征值: $r_{1,2} = \pm 1$, 齐次部分 $y'' - y = 0$ 的通解是 $C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

2. $\lambda = 1$, $\omega = 2$, $\lambda + i\omega = 1 + 2i$ 不是特征值, 故设

$$y^* = e^x [a \cos(2x) + b \sin(2x)]$$

代入原方程, 有

$$\begin{aligned} y^{*''} - y^* &= e^x [(-4a + 4b) \cos(2x) + (-4a - 4b) \sin(2x)] \\ &= e^x \cos(2x) \end{aligned}$$

例 1 计算 $y'' - y = e^x \cos(2x)$ 的通解。

解 1. 特征方程: $r^2 - 1 = 0$, 特征值: $r_{1,2} = \pm 1$, 齐次部分 $y'' - y = 0$ 的通解是 $C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

2. $\lambda = 1$, $\omega = 2$, $\lambda + i\omega = 1 + 2i$ 不是特征值, 故设

$$y^* = e^x [a \cos(2x) + b \sin(2x)]$$

代入原方程, 有

$$\begin{aligned} y^{*''} - y^* &= e^x [(-4a + 4b) \cos(2x) + (-4a - 4b) \sin(2x)] \\ &= e^x \cos(2x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4a + 4b = 1 \\ -4a - 4b = 0 \end{cases}$$

例 1 计算 $y'' - y = e^x \cos(2x)$ 的通解。

解 1. 特征方程: $r^2 - 1 = 0$, 特征值: $r_{1,2} = \pm 1$, 齐次部分 $y'' - y = 0$ 的通解是 $C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

2. $\lambda = 1$, $\omega = 2$, $\lambda + i\omega = 1 + 2i$ 不是特征值, 故设

$$y^* = e^x [a \cos(2x) + b \sin(2x)]$$

代入原方程, 有

$$\begin{aligned} y^{*''} - y^* &= e^x [(-4a + 4b) \cos(2x) + (-4a - 4b) \sin(2x)] \\ &= e^x \cos(2x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4a + 4b = 1 \\ -4a - 4b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{8} \\ b = \frac{1}{8} \end{cases}$$

例 1 计算 $y'' - y = e^x \cos(2x)$ 的通解。

解 1. 特征方程: $r^2 - 1 = 0$, 特征值: $r_{1,2} = \pm 1$, 齐次部分 $y'' - y = 0$ 的通解是 $C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

2. $\lambda = 1$, $\omega = 2$, $\lambda + i\omega = 1 + 2i$ 不是特征值, 故设

$$y^* = e^x [a \cos(2x) + b \sin(2x)]$$

代入原方程, 有

$$\begin{aligned} y^{*''} - y^* &= e^x [(-4a + 4b) \cos(2x) + (-4a - 4b) \sin(2x)] \\ &= e^x \cos(2x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4a + 4b = 1 \\ -4a - 4b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{8} \\ b = \frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow y^* = \frac{1}{8} e^x [-\cos(2x) + \sin(2x)]$$

例 1 计算 $y'' - y = e^x \cos(2x)$ 的通解。

解 1. 特征方程: $r^2 - 1 = 0$, 特征值: $r_{1,2} = \pm 1$, 齐次部分 $y'' - y = 0$ 的通解是 $C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

2. $\lambda = 1$, $\omega = 2$, $\lambda + i\omega = 1 + 2i$ 不是特征值, 故设

$$y^* = e^x [a \cos(2x) + b \sin(2x)]$$

代入原方程, 有

$$\begin{aligned} y^{*''} - y^* &= e^x [(-4a + 4b) \cos(2x) + (-4a - 4b) \sin(2x)] \\ &= e^x \cos(2x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4a + 4b = 1 \\ -4a - 4b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{8} \\ b = \frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow y^* = \frac{1}{8} e^x [-\cos(2x) + \sin(2x)]$$

3. 通解是

$$y = \frac{1}{8} e^x [-\cos(2x) + \sin(2x)] + C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

目标 计算以下方程的一个特解 y^* :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos(\omega x) + Q_n(x) \sin(\omega x)]$$

计算步骤 设

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos(\omega x) + R_m^{(2)}(x) \sin(\omega x)]$$

$$k = \begin{cases} 0 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 非特征值} \\ 1 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 为特征值} \end{cases}$$

$R_m^{(1)}, R_m^{(2)}$ 为 m 次待定多项式
 $m = \max\{l, n\}$

例 2 计算 $y'' + y = \cos x$ 的通解。

目标 计算以下方程的一个特解 y^* :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos(\omega x) + Q_n(x) \sin(\omega x)]$$

计算步骤 设

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos(\omega x) + R_m^{(2)}(x) \sin(\omega x)]$$

$$k = \begin{cases} 0 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 非特征值} \\ 1 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 为特征值} \end{cases}$$

$R_m^{(1)}, R_m^{(2)}$ 为 m 次待定多项式
 $m = \max\{l, n\}$

例 2 计算 $y'' + y = \cos x$ 的通解。

解 1. 特征方程: $r^2 + 1 = 0$,

目标 计算以下方程的一个特解 y^* :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos(\omega x) + Q_n(x) \sin(\omega x)]$$

计算步骤 设

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos(\omega x) + R_m^{(2)}(x) \sin(\omega x)]$$

$$k = \begin{cases} 0 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 非特征值} \\ 1 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 为特征值} \end{cases}$$

$R_m^{(1)}, R_m^{(2)}$ 为 m 次待定多项式
 $m = \max\{l, n\}$

例 2 计算 $y'' + y = \cos x$ 的通解。

解 1. 特征方程: $r^2 + 1 = 0$, 特征值: $r_{1,2} = \pm i$,

目标 计算以下方程的一个特解 y^* :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos(\omega x) + Q_n(x) \sin(\omega x)]$$

计算步骤 设

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos(\omega x) + R_m^{(2)}(x) \sin(\omega x)]$$

$$k = \begin{cases} 0 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 非特征值} \\ 1 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 为特征值} \end{cases}$$

$R_m^{(1)}, R_m^{(2)}$ 为 m 次待定多项式
 $m = \max\{l, n\}$

例 2 计算 $y'' + y = \cos x$ 的通解。

解 1. 特征方程: $r^2 + 1 = 0$, 特征值: $r_{1,2} = \pm i$, 齐次部分 $y'' + y = 0$ 的通解是 $C_1 \cos x + C_2 \sin x$

目标 计算以下方程的一个特解 y^* :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos(\omega x) + Q_n(x) \sin(\omega x)]$$

计算步骤 设

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos(\omega x) + R_m^{(2)}(x) \sin(\omega x)]$$

$$k = \begin{cases} 0 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 非特征值} \\ 1 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 为特征值} \end{cases}$$

$R_m^{(1)}, R_m^{(2)}$ 为 m 次待定多项式
 $m = \max\{l, n\}$

例 2 计算 $y'' + y = \cos x$ 的通解。

解 1. 特征方程: $r^2 + 1 = 0$, 特征值: $r_{1,2} = \pm i$, 齐次部分 $y'' + y = 0$ 的通解是 $C_1 \cos x + C_2 \sin x$

2. $\lambda =$, $\omega =$,

目标 计算以下方程的一个特解 y^* :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos(\omega x) + Q_n(x) \sin(\omega x)]$$

计算步骤 设

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos(\omega x) + R_m^{(2)}(x) \sin(\omega x)]$$

$$k = \begin{cases} 0 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 非特征值} \\ 1 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 为特征值} \end{cases}$$

$R_m^{(1)}, R_m^{(2)}$ 为 m 次待定多项式
 $m = \max\{l, n\}$

例 2 计算 $y'' + y = \cos x$ 的通解。

解 1. 特征方程: $r^2 + 1 = 0$, 特征值: $r_{1,2} = \pm i$, 齐次部分 $y'' + y = 0$ 的通解是 $C_1 \cos x + C_2 \sin x$

2. $\lambda = 0$, $\omega = 1$,

目标 计算以下方程的一个特解 y^* :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos(\omega x) + Q_n(x) \sin(\omega x)]$$

计算步骤 设

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos(\omega x) + R_m^{(2)}(x) \sin(\omega x)]$$

$$k = \begin{cases} 0 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 非特征值} \\ 1 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 为特征值} \end{cases}$$

$R_m^{(1)}, R_m^{(2)}$ 为 m 次待定多项式
 $m = \max\{l, n\}$

例 2 计算 $y'' + y = \cos x$ 的通解。

解 1. 特征方程: $r^2 + 1 = 0$, 特征值: $r_{1,2} = \pm i$, 齐次部分 $y'' + y = 0$ 的通解是 $C_1 \cos x + C_2 \sin x$

2. $\lambda = 0, \omega = 1,$

目标 计算以下方程的一个特解 y^* :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos(\omega x) + Q_n(x) \sin(\omega x)]$$

计算步骤 设

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos(\omega x) + R_m^{(2)}(x) \sin(\omega x)]$$

$$k = \begin{cases} 0 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 非特征值} \\ 1 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 为特征值} \end{cases}$$

$R_m^{(1)}, R_m^{(2)}$ 为 m 次待定多项式
 $m = \max\{l, n\}$

例 2 计算 $y'' + y = \cos x$ 的通解。

解 1. 特征方程: $r^2 + 1 = 0$, 特征值: $r_{1,2} = \pm i$, 齐次部分 $y'' + y = 0$ 的通解是 $C_1 \cos x + C_2 \sin x$

2. $\lambda = 0$, $\omega = 1$, $\lambda + i\omega = i$

目标 计算以下方程的一个特解 y^* :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos(\omega x) + Q_n(x) \sin(\omega x)]$$

计算步骤 设

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos(\omega x) + R_m^{(2)}(x) \sin(\omega x)]$$

$$k = \begin{cases} 0 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 非特征值} \\ 1 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 为特征值} \end{cases}$$

$R_m^{(1)}, R_m^{(2)}$ 为 m 次待定多项式
 $m = \max\{l, n\}$

例 2 计算 $y'' + y = \cos x$ 的通解。

解 1. 特征方程: $r^2 + 1 = 0$, 特征值: $r_{1,2} = \pm i$, 齐次部分 $y'' + y = 0$ 的通解是 $C_1 \cos x + C_2 \sin x$

2. $\lambda = 0$, $\omega = 1$, $\lambda + i\omega = i$ 是特征值,

目标 计算以下方程的一个特解 y^* :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos(\omega x) + Q_n(x) \sin(\omega x)]$$

计算步骤 设

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos(\omega x) + R_m^{(2)}(x) \sin(\omega x)]$$

$$k = \begin{cases} 0 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 非特征值} \\ 1 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 为特征值} \end{cases}$$

$R_m^{(1)}, R_m^{(2)}$ 为 m 次待定多项式
 $m = \max\{l, n\}$

例 2 计算 $y'' + y = \cos x$ 的通解。

解 1. 特征方程: $r^2 + 1 = 0$, 特征值: $r_{1,2} = \pm i$, 齐次部分 $y'' + y = 0$ 的通解是 $C_1 \cos x + C_2 \sin x$

2. $\lambda = 0$, $\omega = 1$, $\lambda + i\omega = i$ 是特征值, 故设

$$y^* = x e^{0 \cdot x} (a \cos x + b \sin x)$$

目标 计算以下方程的一个特解 y^* :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos(\omega x) + Q_n(x) \sin(\omega x)]$$

计算步骤 设

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos(\omega x) + R_m^{(2)}(x) \sin(\omega x)]$$

$$k = \begin{cases} 0 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 非特征值} \\ 1 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 为特征值} \end{cases}$$

$R_m^{(1)}, R_m^{(2)}$ 为 m 次待定多项式
 $m = \max\{l, n\}$

例 2 计算 $y'' + y = \cos x$ 的通解。

解 1. 特征方程: $r^2 + 1 = 0$, 特征值: $r_{1,2} = \pm i$, 齐次部分 $y'' + y = 0$ 的通解是 $C_1 \cos x + C_2 \sin x$

2. $\lambda = 0$, $\omega = 1$, $\lambda + i\omega = i$ 是特征值, 故设

$$y^* = x e^{0 \cdot x} (a \cos x + b \sin x) = x (a \cos x + b \sin x)$$

例 2 计算 $y'' + y = \cos x$ 的通解。

解 1. 特征方程: $r^2 + 1 = 0$, 特征值: $r_{1,2} = \pm i$, 齐次部分 $y'' + y = 0$ 的通解是 $C_1 \cos x + C_2 \sin x$

2. $\lambda = 0$, $\omega = 1$, $\lambda + i\omega = i$ 是特征值, 故设

$$y^* = x(a \cos x + b \sin x)$$

例 2 计算 $y'' + y = \cos x$ 的通解。

解 1. 特征方程: $r^2 + 1 = 0$, 特征值: $r_{1,2} = \pm i$, 齐次部分 $y'' + y = 0$ 的通解是 $C_1 \cos x + C_2 \sin x$

2. $\lambda = 0$, $\omega = 1$, $\lambda + i\omega = i$ 是特征值, 故设

$$y^* = x(a \cos x + b \sin x)$$

代入原方程, 有

$$y^{*''} + y^*$$

例 2 计算 $y'' + y = \cos x$ 的通解。

解 1. 特征方程: $r^2 + 1 = 0$, 特征值: $r_{1,2} = \pm i$, 齐次部分 $y'' + y = 0$ 的通解是 $C_1 \cos x + C_2 \sin x$

2. $\lambda = 0$, $\omega = 1$, $\lambda + i\omega = i$ 是特征值, 故设

$$y^* = x(a \cos x + b \sin x)$$

代入原方程, 有

$$y^{*''} + y^* = 2b \cos x - 2a \sin x$$

例 2 计算 $y'' + y = \cos x$ 的通解。

解 1. 特征方程: $r^2 + 1 = 0$, 特征值: $r_{1,2} = \pm i$, 齐次部分 $y'' + y = 0$ 的通解是 $C_1 \cos x + C_2 \sin x$

2. $\lambda = 0$, $\omega = 1$, $\lambda + i\omega = i$ 是特征值, 故设

$$y^* = x(a \cos x + b \sin x)$$

代入原方程, 有

$$y^{*''} + y^* = 2b \cos x - 2a \sin x = \cos x$$

例 2 计算 $y'' + y = \cos x$ 的通解。

解 1. 特征方程: $r^2 + 1 = 0$, 特征值: $r_{1,2} = \pm i$, 齐次部分 $y'' + y = 0$ 的通解是 $C_1 \cos x + C_2 \sin x$

2. $\lambda = 0$, $\omega = 1$, $\lambda + i\omega = i$ 是特征值, 故设

$$y^* = x(a \cos x + b \sin x)$$

代入原方程, 有

$$y^{*''} + y^* = 2b \cos x - 2a \sin x = \cos x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

例 2 计算 $y'' + y = \cos x$ 的通解。

解 1. 特征方程: $r^2 + 1 = 0$, 特征值: $r_{1,2} = \pm i$, 齐次部分 $y'' + y = 0$ 的通解是 $C_1 \cos x + C_2 \sin x$

2. $\lambda = 0$, $\omega = 1$, $\lambda + i\omega = i$ 是特征值, 故设

$$y^* = x(a \cos x + b \sin x)$$

代入原方程, 有

$$y^{*''} + y^* = 2b \cos x - 2a \sin x = \cos x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow y^* = \frac{1}{2}x \sin x$$

例 2 计算 $y'' + y = \cos x$ 的通解。

解 1. 特征方程: $r^2 + 1 = 0$, 特征值: $r_{1,2} = \pm i$, 齐次部分 $y'' + y = 0$ 的通解是 $C_1 \cos x + C_2 \sin x$

2. $\lambda = 0$, $\omega = 1$, $\lambda + i\omega = i$ 是特征值, 故设

$$y^* = x(a \cos x + b \sin x)$$

代入原方程, 有

$$y^{*''} + y^* = 2b \cos x - 2a \sin x = \cos x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow y^* = \frac{1}{2}x \sin x$$

3. 通解是

$$y = \frac{1}{2}x \sin x + C_1 \cos x + C_2 \sin x$$