第 07 周作业解答

练习 1. 设

$$M=\begin{pmatrix} O_{r\times s} & A_{r\times r} \\ B_{s\times s} & O_{s\times r}\end{pmatrix}$$

其中 A, B 分别为 r, s 阶可逆方阵，求 M 的逆矩阵 M^{-1}。

解设

$$M^{-1}=\begin{pmatrix} U_{s\times r} & V_{s\times s} \\ W_{r\times r} & X_{r\times s}\end{pmatrix}$$

应有

$$MM^{-1}=\begin{pmatrix} O_{r\times s} & A_{r\times r} \\ B_{s\times s} & O_{s\times r}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_{s\times r} & V_{s\times s} \\ W_{r\times r} & X_{r\times s}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} OU+AW & OV+AX \\ BU+OW & BV+OX\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AW & AX \\ BU & BV\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_r & O_{r\times s} \\ O_{s\times r} & I_s\end{pmatrix}$$

故须

$$AW=I,\quad AX=O,\quad BU=O,\quad BV=I$$

利用 A, B 可逆条件，可解出

$$W=A^{-1},\quad X=O,\quad U=O,\quad V=B^{-1}$$

所以

$$M^{-1}=\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O\end{pmatrix}$$

练习 2. 用初等变换将下列矩阵化为等价标准形：

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & -4\end{pmatrix}$$

解

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & -4\end{pmatrix}\xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \\ -4 & 2 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-r_1\\ r_4+4r_1}]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+2r_2]{r_3-3r_2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{c_3+c_2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{(-1)\times c_2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

练习 3. 用<u>初等行变换</u>求下列矩阵 A, B, C 的逆矩阵：

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

解

$$(A\vdots I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&2&3&1&0&0\\3&1&3&0&1&0\\-1&2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1&2&1&0&0&1\\3&1&3&0&1&0\\2&2&3&1&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{(-1)\times r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&-1&0&0&-1\\3&1&3&0&1&0\\2&2&3&1&0&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-3r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&-1&0&0&-1\\0&7&6&0&1&3\\0&6&5&1&0&2\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&-1&0&0&-1\\0&1&1&-1&1&1\\0&6&5&1&0&2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3-6r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&-1&0&0&-1\\0&1&1&-1&1&1\\0&0&-1&7&-6&-4\end{array}\right)\xrightarrow{(-1)\times r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&-1&0&0&-1\\0&1&1&-1&1&1\\0&0&1&-7&6&4\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1+r_3]{r_2-r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&0&-7&6&3\\0&1&0&6&-5&-3\\0&0&1&-7&6&4\end{array}\right)\xrightarrow{r_1+2r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&5&-4&-3\\0&1&0&6&-5&-3\\0&0&1&-7&6&4\end{array}\right)$$

所以 $A^{-1}=\begin{pmatrix}5&-4&-3\\6&-5&-3\\-7&6&4\end{pmatrix}$。

$$(B\vdots I)=\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&2&3&4&1&0&0&0\\0&1&2&3&0&1&0&0\\0&0&1&2&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{r_2-3\times r_4\\r_3-2\times r_4}]{r_1-4\times r_4}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&2&3&0&1&0&0&-4\\0&1&2&0&0&1&0&-3\\0&0&1&0&0&0&1&-2\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2-2\times r_3]{r_1-3\times r_3}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&2&0&0&1&0&-3&2\\0&1&0&0&0&1&-2&1\\0&0&1&0&0&0&1&-2\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-2\times r_2}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&-2&1&0\\0&1&0&0&0&1&-2&1\\0&0&1&0&0&0&1&-2\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right)$$

所以 $B^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&1&0\\0&1&-2&1\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$。

$$(C\vdots I)=\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&1&1&0&0&0\\-1&1&1&1&0&1&0&0\\-1&-1&1&1&0&0&1&0\\-1&-1&-1&1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{r_3+r_2\\r_4+r_3}]{r_2+r_1}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&1&1&0&0&0\\0&2&2&2&1&1&0&0\\0&0&2&2&1&0&1&0\\0&0&0&2&1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}\times r_4}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&1&1&0&0&0\\0&2&2&2&1&1&0&0\\0&0&2&2&1&0&1&0\\0&0&0&1&\frac{1}{2}&0&0&\frac{1}{2}\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{r_2-2r_4\\r_1-r_4}]{r_3-2r_4}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&0&\frac{1}{2}&0&0&-\frac{1}{2}\\0&2&2&0&0&1&0&-1\\0&0&2&0&0&0&1&-1\\0&0&0&1&\frac{1}{2}&0&0&\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}\times r_3}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&0&\frac{1}{2}&0&0&-\frac{1}{2}\\0&2&2&0&0&1&0&-1\\0&0&1&0&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&0&1&\frac{1}{2}&0&0&\frac{1}{2}\end{array}\right)\xrightarrow[r_1-r_3]{r_2-2r_3}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&0&0&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}&0\\0&2&0&0&0&1&-1&0\\0&0&1&0&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&0&1&\frac{1}{2}&0&0&\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}\times r_2}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&0&0&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}&0\\0&1&0&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1&0&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&0&1&\frac{1}{2}&0&0&\frac{1}{2}\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-r_2}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&0\\0&1&0&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1&0&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&0&1&\frac{1}{2}&0&0&\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

所以 $C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$。

思考题：假设 k 为实数，G 是 n 阶可逆方阵，β 是 $n\times 1$ 的列向量。考虑如下形式的分块矩阵

$$A := \begin{pmatrix} k & \beta^T \\ \beta & G \end{pmatrix}.$$

其中 β^T 表示 β 的转置。假设

$$k - \beta^T G^{-1}\beta \neq 0.$$

证明 A 是 $n+1$ 阶可逆方阵，求出其逆矩阵，并计算 A 的行列式。

解注意到

$$\begin{pmatrix} 1 & -\beta^T G^{-1} \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k & \beta^T \\ \beta & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -G^{-1}\beta & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k-\beta^T G^{-1}\beta & 0 \\ \beta & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -G^{-1}\beta & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k-\beta^T G^{-1}\beta & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}$$

得到

$$\begin{pmatrix} k & \beta^T \\ \beta & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\beta^T G^{-1} \\ 0 & I_n \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} k-\beta^T G^{-1}\beta & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -G^{-1}\beta & I_n \end{pmatrix}^{-1}.$$

所以

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} k & \beta^T \\ \beta & G \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -G^{-1}\beta & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k-\beta^T G^{-1}\beta & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -\beta^T G^{-1} \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -G^{-1}\beta & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{k-\beta^T G^{-1}\beta} & 0 \\ 0 & G^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\beta^T G^{-1} \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{k-\beta^T G^{-1}\beta} & -\frac{\beta^T G^{-1}}{k-\beta^T G^{-1}\beta} \\ -\frac{G^{-1}\beta}{k-\beta^T G^{-1}\beta} & G^{-1} + \frac{G^{-1}\beta\beta^T G^{-1}}{k-\beta^T G^{-1}\beta} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} k & \beta^T \\ \beta & G \end{vmatrix} &= \left|\begin{pmatrix} 1 & -\beta^T G^{-1} \\ 0 & I_n \end{pmatrix}^{-1}\right|\left|\begin{pmatrix} k-\beta^T G^{-1}\beta & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}\right|\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -G^{-1}\beta & I_n \end{pmatrix}^{-1}\right| \\
&= \left|\begin{pmatrix} k-\beta^T G^{-1}\beta & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}\right| \\
&= (k-\beta^T G^{-1}\beta)|G|
\end{aligned}$$

（用到三角形行列式的值等于对角线元素乘积）。