第 12 周作业解答

练习 1. 设 λ_1, λ_2 是方阵 A 的特征值，对应的特征向量分别为 α_1, α_2。证明：如果 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，则 $\alpha_1 + \alpha_2$ 一定不是 A 的特征向量。

证明反证法，假设 $\alpha_1 + \alpha_2$ 是 A 的特征向量，相应特征向值为 λ。则

$$A(\alpha_1 + \alpha_2) = \lambda(\alpha_1 + \alpha_2).$$

另一方面

$$A(\alpha_1 + \alpha_2) = A\alpha_1 + A\alpha_2 = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2.$$

综合上述两式，得

$$\lambda(\alpha_1 + \alpha_2) = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2.$$

所以

$$(\lambda - \lambda_1)\alpha_1 + (\lambda - \lambda_2)\alpha_2 = 0.$$

注意到对应不同特征值的特征向量线性无关，从而上式意味

$$\lambda = \lambda_1, \quad \lambda = \lambda_2.$$

这与 λ_1, λ_2 不等矛盾。矛盾在于假设了 $\alpha_1 + \alpha_2$ 是 A 的特征向量。所以 $\alpha_1 + \alpha_2$ 一定不是 A 的特征向量。

练习 2. 设 3 阶方阵 A 的特征值为 $1, 2, 3$，求 $|A|$ 的值。

解 $|A| = 1 \times 2 \times 3 = 6$。

练习 3. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$ 和 $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & y \end{pmatrix}$ 相似，求 x, y 的值。

解因为 A 和 B 相似，所以 A 和 B 具有相同特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$。所以

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & y \end{vmatrix}, \qquad 2 + 0 + x = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2 + 3 + y.$$

化简可得:

$$-2 = 2(3y + 8), \qquad 2 + x = 5 + y.$$

所以 $x = 0, y = -3$。

练习 4. 已知 $A = \begin{pmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 有特征值 $2, 6$，求 x 的值。

解设 A 的第 3 个特征值为 λ_3，所以成立

$$\begin{cases} 2 + 6 + \lambda_3 = x + 4 + 5 \\ 2 \times 6 \times \lambda_3 = \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{vmatrix} \end{cases}$$

化简得:

$$\begin{cases}\lambda_3 - x = 1 \\ 12\lambda_3 = 14x + 10\end{cases}$$

所以

$$\lambda_3 = 2, \qquad x = 1.$$

练习 5. 判断矩阵 $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ 可否对角化。若能，求出相应的对角阵 Λ，和可逆矩阵 P。

解

- 解特征方程 $|\lambda I - A| = 0$。

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-4 & 0 & 2 \\ -2 & \lambda-5 & -4 \\ 0 & 0 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-5)\begin{vmatrix} \lambda-4 & 0 \\ -2 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-4)(\lambda-5)^2$$

  所以特征值为 $\lambda_1 = 4$，$\lambda_2 = 5$（二重特征值）。

- 关于特征值 $\lambda_1 = 4$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$。

$$(4I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  自由变量取为 x_2。同解方程组为

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = 2x_2 \end{cases}$$

  取 $x_2 = 1$，得基础解系

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- 关于特征值 $\lambda_2 = 5$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$。

$$(5I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  自由变量取为 x_2, x_3。同解方程组为

$$x_1 + 2x_3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = -2x_3$$

  分别取 $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，得基础解系

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

  所以对应于特征值 $\lambda_1 = -2$ 的有 2 个线性无关特征向量。

- 可见 A 有 3 个线性无关特征向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$，所以 A 可对角化。令

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 4 & & \\ & 5 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$$

则

$$P^{-1}AP = \Lambda.$$

练习 6. 判断矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ 可否对角化。若能，求出相应的对角阵 Λ，和可逆矩阵 P。

解

- 解特征方程 $|\lambda I - A| = 0$。

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 3 & -3 \\ -3 & \lambda+5 & -3 \\ -6 & 6 & \lambda-4 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3+c_2} \begin{vmatrix} \lambda-1 & 3 & 0 \\ -3 & \lambda+5 & \lambda+2 \\ -6 & 6 & \lambda+2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+2)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 3 & 0 \\ -3 & \lambda+5 & 1 \\ -6 & 6 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2-r_3} (\lambda+2)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 3 & 0 \\ 3 & \lambda-1 & 0 \\ -6 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+2)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 3 \\ 3 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda^2-2\lambda-8) = (\lambda+2)^2(\lambda-4)$$

所以特征值为 $\lambda_1 = -2$（二重特征值），$\lambda_2 = 4$。

- 关于特征值 $\lambda_1 = -2$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$。

$$(-2I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & -3 & 0 \\ -6 & 6 & -6 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

同解方程组为

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = x_2 - x_3$$

自由变量取为 x_2, x_3。分别取 $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，得基础解系

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以对应于特征值 $\lambda_1 = -2$ 的有 2 个线性无关特征向量。(等价于 $r(-2I - A) = 3 - 2 = 1$。)

- 关于特征值 $\lambda_2 = 4$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$。

$$(-2I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & -3 & 0 \\ -3 & 9 & -3 & 0 \\ -6 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{-\frac{1}{3}\times r_2 \\ -\frac{1}{6}\times r_3}]{\frac{1}{3}\times r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-r_2]{r_2-r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}\times r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3+r_2]{r_1-r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = 2x_2 \end{cases}$$

自由变量取为 x_2。取 $x_2 = 1$，得基础解系

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- 可见 A 有 3 个线性无关特征向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$，所以 A 可对角化。令

$$P = \begin{array}{c} \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & -2 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$$

则

$$P^{-1}AP = \Lambda.$$