

# 第 8 章 $\alpha$ : 向量的基本概念

数学系 梁卓滨

2016-2017 学年 II

- 向量的基本概念
  - 向量的线性运算
  - 向量的长度
  - 向量间的夹角
  - 向量的投影
- 向量的坐标表示、计算
  - 计算向量的线性运算、长度、夹角、投影
- 向量的数量积
- 向量的向量积

# We are here now...

---

◆ 向量的基本概念

♣ 向量的坐标表示

♥ 向量的数量积

♠ 向量的向量积

- 具有长度（大小）及方向的物理量

- 具有长度（大小）及方向的物理量：如力、速度等等

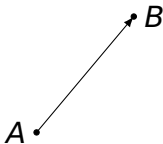
- 具有长度（大小）及方向的物理量：如力、速度等等
- 能够转化成什么数学量，从而进行运算推演？

- 具有长度（大小）及方向的物理量：如力、速度等等
- 能够转化成什么数学量，从而进行运算推演？

•  $B$

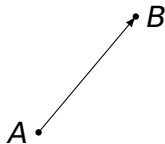
$A \cdot$

- 具有长度（大小）及方向的物理量：如力、速度等等
- 能够转化成什么数学量，从而进行运算推演？



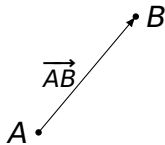


- 具有长度（大小）及方向的物理量：如力、速度等等
- 能够转化成什么数学量，从而进行运算推演？



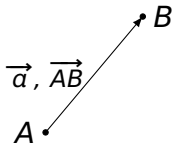
- 向量的定义：“箭头”。

- 具有长度（大小）及方向的物理量：如力、速度等等
- 能够转化成什么数学量，从而进行运算推演？



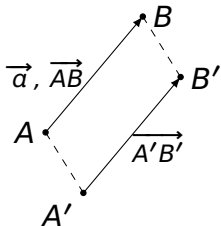
- 向量的定义：“箭头”。向量的表示： $\overrightarrow{AB}$

- 具有长度（大小）及方向的物理量：如力、速度等等
- 能够转化成什么数学量，从而进行运算推演？



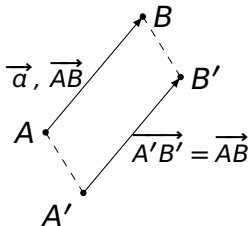
- 向量的定义：“箭头”。向量的表示： $\overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{a}$

- 具有**长度**（**大小**）及**方向**的物理量：如力、速度等等
- 能够转化成什么数学量，从而进行运算推演？



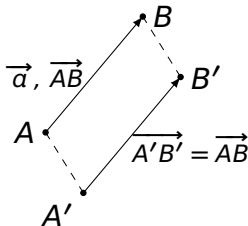
- **向量**的定义：“箭头”。向量的表示： $\overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{a}$

- 具有**长度**（**大小**）及**方向**的物理量：如力、速度等等
- 能够转化成什么数学量，从而进行运算推演？



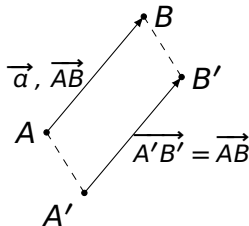
- **向量**的定义：“箭头”。向量的表示： $\overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{a}$
- **注** 向量与位置无关：通过平移能够重合的“箭头”，视为同一向量。

- 具有**长度**（**大小**）及**方向**的物理量：如力、速度等等
- 能够转化成什么数学量，从而进行运算推演？



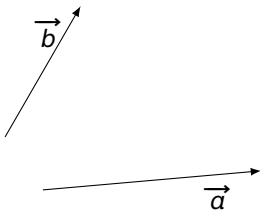
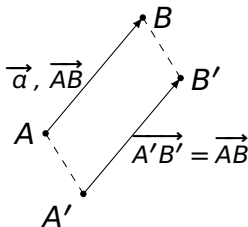
- **向量**的定义：“箭头”。向量的表示： $\overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{a}$
- **注** 向量与位置无关：通过平移能够重合的“箭头”，视为同一向量。
- **零向量**： $\vec{0}$ 。

- 具有**长度**（**大小**）及**方向**的物理量：如力、速度等等
- 能够转化成什么数学量，从而进行运算推演？



- **向量**的定义：“箭头”。向量的表示： $\overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{a}$
- **注** 向量与位置无关：通过平移能够重合的“箭头”，视为同一向量。
- **零向量**： $\vec{0}$ 。**单位向量**  $\vec{a}$ ： $|\vec{a}| = 1$ 。

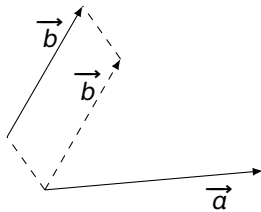
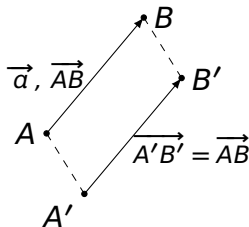
- 具有**长度**（大小）及**方向**的物理量：如力、速度等等
- 能够转化成什么数学量，从而进行运算推演？



- **向量**的定义：“箭头”。向量的表示： $\overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{a}$
- **注** 向量与位置无关：通过平移能够重合的“箭头”，视为同一向量。
- **零向量**： $\vec{0}$ 。**单位向量**  $\vec{a}$ ： $|\vec{a}| = 1$ 。
- 向量的**夹角**  $\theta$ ：

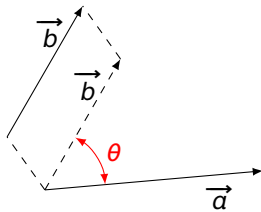
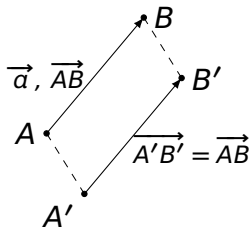


- 具有**长度**（**大小**）及**方向**的物理量：如力、速度等等
- 能够转化成什么数学量，从而进行运算推演？



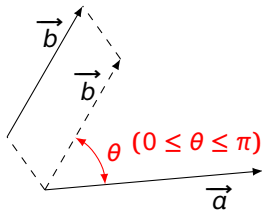
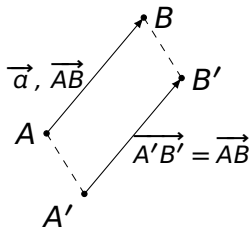
- **向量**的定义：“箭头”。向量的表示： $\overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{a}$
- **注** 向量与位置无关：通过平移能够重合的“箭头”，视为同一向量。
- **零向量**： $\vec{0}$ 。**单位向量**  $\vec{a}$ ： $|\vec{a}| = 1$ 。
- 向量的**夹角**  $\theta$ ：

- 具有**长度**（**大小**）及**方向**的物理量：如力、速度等等
- 能够转化成什么数学量，从而进行运算推演？



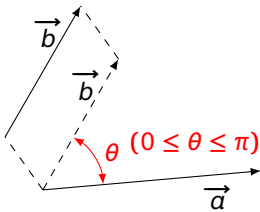
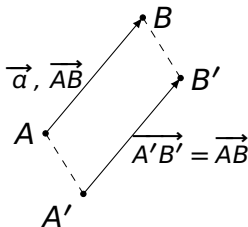
- **向量**的定义：“箭头”。向量的表示： $\overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{a}$
- **注** 向量与位置无关：通过平移能够重合的“箭头”，视为同一向量。
- **零向量**： $\vec{0}$ 。**单位向量**  $\vec{a}$ ： $|\vec{a}| = 1$ 。
- 向量的**夹角**  $\theta$ ：

- 具有**长度**（**大小**）及**方向**的物理量：如力、速度等等
- 能够转化成什么数学量，从而进行运算推演？



- **向量**的定义：“箭头”。向量的表示： $\overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{a}$
- **注** 向量与位置无关：通过平移能够重合的“箭头”，视为同一向量。
- **零向量**： $\vec{0}$ 。**单位向量**  $\vec{a}$ ： $|\vec{a}| = 1$ 。
- 向量的**夹角**  $\theta$ ：

- 具有**长度**（**大小**）及**方向**的物理量：如力、速度等等
- 能够转化成什么数学量，从而进行运算推演？



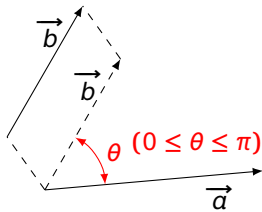
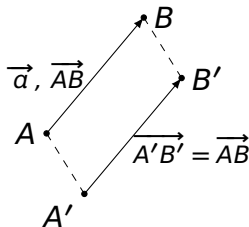
- **向量**的定义：“箭头”。向量的表示： $\overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{a}$
- **注** 向量与位置无关：通过平移能够重合的“箭头”，视为同一向量。
- **零向量**： $\vec{0}$ 。**单位向量**  $\vec{a}$ ： $|\vec{a}| = 1$ 。

- 向量的**夹角**  $\theta$ :  $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\theta = 0$$

$$\theta = \pi$$

- 具有**长度**（**大小**）及**方向**的物理量：如力、速度等等
- 能够转化成什么数学量，从而进行运算推演？

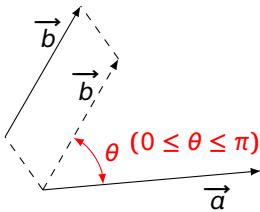
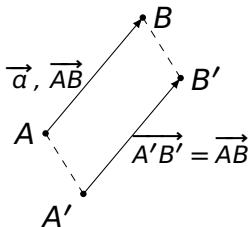


- **向量**的定义：“箭头”。向量的表示： $\overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{a}$
- **注** 向量与位置无关：通过平移能够重合的“箭头”，视为同一向量。
- **零向量**： $\vec{0}$ 。**单位向量**  $\vec{a}$ ： $|\vec{a}| = 1$ 。
- 向量的**夹角**  $\theta$ ： $\theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

$$\theta = 0$$

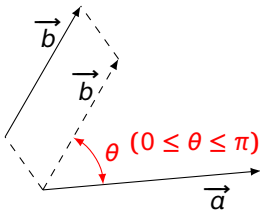
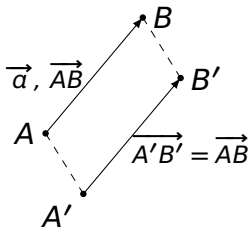
$$\theta = \pi$$

- 具有**长度**（**大小**）及**方向**的物理量：如力、速度等等
- 能够转化成什么数学量，从而进行运算推演？



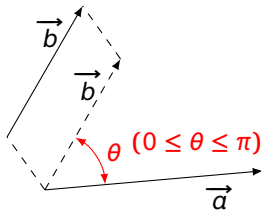
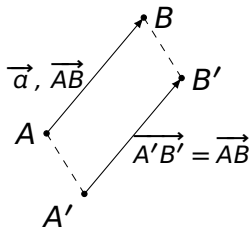
- **向量**的定义：“箭头”。向量的表示： $\overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{a}$
- **注** 向量与位置无关：通过平移能够重合的“箭头”，视为同一向量。
- **零向量**： $\vec{0}$ 。**单位向量**  $\vec{a}$ ： $|\vec{a}| = 1$ 。
- 向量的**夹角**  $\theta$ ： $\theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$   
 $\theta = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$  同向  
 $\theta = \pi$

- 具有**长度**（**大小**）及**方向**的物理量：如力、速度等等
- 能够转化成什么数学量，从而进行运算推演？



- **向量**的定义：“箭头”。向量的表示： $\overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{a}$
- **注** 向量与位置无关：通过平移能够重合的“箭头”，视为同一向量。
- **零向量**： $\vec{0}$ 。**单位向量**  $\vec{a}$ ： $|\vec{a}| = 1$ 。
- 向量的**夹角**  $\theta$ ： $\theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$   
 $\theta = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$  同向  
 $\theta = \pi \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$  反向

- 具有**长度**（大小）及**方向**的物理量：如力、速度等等
- 能够转化成什么数学量，从而进行运算推演？



- **向量**的定义：“箭头”。向量的表示： $\overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{a}$
- **注** 向量与位置无关：通过平移能够重合的“箭头”，视为同一向量。
- **零向量**： $\vec{0}$ 。**单位向量**  $\vec{a}$ ： $|\vec{a}| = 1$ 。

- 向量的**夹角**  $\theta$ :  $\theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

$$\left. \begin{array}{l} \theta = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b} \text{ 同向} \\ \theta = \pi \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b} \text{ 反向} \end{array} \right\} \vec{a} \parallel \vec{b}$$



# 向量的线性运算：加法、数乘

---

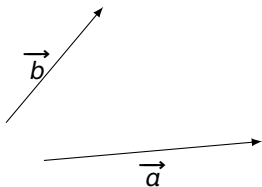
加法：  $\vec{a} + \vec{b}$

数乘：  $\lambda \vec{a}$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ )

# 向量的线性运算：加法、数乘

加法：  $\vec{a} + \vec{b}$

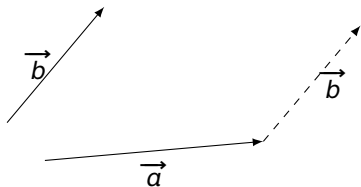
数乘：  $\lambda \vec{a}$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ )



# 向量的线性运算：加法、数乘

加法：  $\vec{a} + \vec{b}$

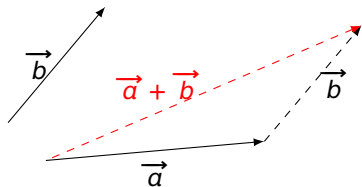
数乘：  $\lambda \vec{a}$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ )



# 向量的线性运算：加法、数乘

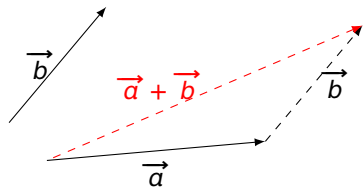
加法： $\vec{a} + \vec{b}$

数乘： $\lambda \vec{a}$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ )



# 向量的线性运算：加法、数乘

加法： $\vec{a} + \vec{b}$



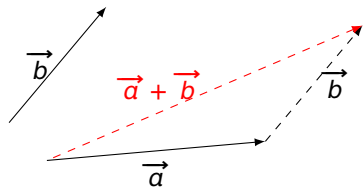
数乘： $\lambda \vec{a}$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ )

- $\lambda \vec{a}$  的方向：

- $\lambda \vec{a}$  的长度：

# 向量的线性运算：加法、数乘

加法：  $\vec{a} + \vec{b}$



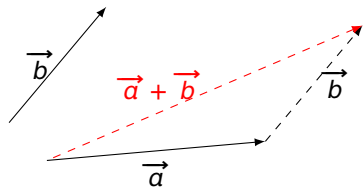
数乘：  $\lambda \vec{a}$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ )

- $\lambda \vec{a}$  的方向：

- $\lambda \vec{a}$  的长度：  $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$

# 向量的线性运算：加法、数乘

加法：  $\vec{a} + \vec{b}$



数乘：  $\lambda \vec{a}$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ )

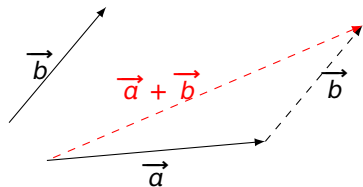
•  $\lambda \vec{a}$  的方向：

$$\begin{cases} \lambda \geq 0, \\ \lambda < 0, \end{cases}$$

•  $\lambda \vec{a}$  的长度：  $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$

# 向量的线性运算：加法、数乘

加法： $\vec{a} + \vec{b}$



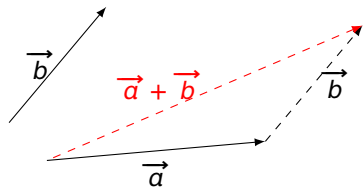
数乘： $\lambda \vec{a}$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ )

- $\lambda \vec{a}$  的方向：
$$\begin{cases} \lambda \geq 0, & \lambda \vec{a} \text{ 与 } \vec{a} \text{ 同向} \\ \lambda < 0, \end{cases}$$
- $\lambda \vec{a}$  的长度： $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$



# 向量的线性运算：加法、数乘

加法：  $\vec{a} + \vec{b}$

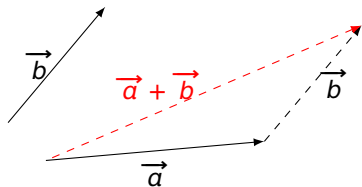


数乘：  $\lambda \vec{a}$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ )

- $\lambda \vec{a}$  的方向：
$$\begin{cases} \lambda \geq 0, & \lambda \vec{a} \text{ 与 } \vec{a} \text{ 同向} \\ \lambda < 0, & \lambda \vec{a} \text{ 与 } \vec{a} \text{ 反向} \end{cases}$$
- $\lambda \vec{a}$  的长度：  $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$

# 向量的线性运算：加法、数乘

加法： $\vec{a} + \vec{b}$

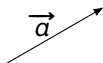


数乘： $\lambda \vec{a}$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ )

•  $\lambda \vec{a}$  的方向：

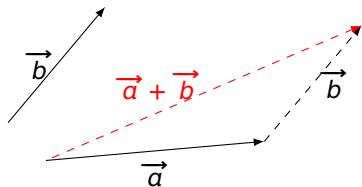
$$\begin{cases} \lambda \geq 0, & \lambda \vec{a} \text{ 与 } \vec{a} \text{ 同向} \\ \lambda < 0, & \lambda \vec{a} \text{ 与 } \vec{a} \text{ 反向} \end{cases}$$

•  $\lambda \vec{a}$  的长度： $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$



# 向量的线性运算：加法、数乘

加法：  $\vec{a} + \vec{b}$

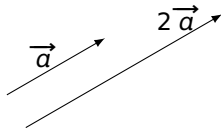


数乘：  $\lambda \vec{a}$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ )

•  $\lambda \vec{a}$  的方向：

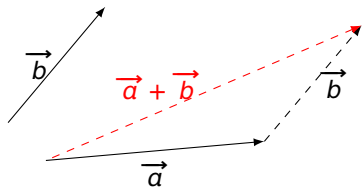
$$\begin{cases} \lambda \geq 0, & \lambda \vec{a} \text{ 与 } \vec{a} \text{ 同向} \\ \lambda < 0, & \lambda \vec{a} \text{ 与 } \vec{a} \text{ 反向} \end{cases}$$

•  $\lambda \vec{a}$  的长度：  $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$



# 向量的线性运算：加法、数乘

加法： $\vec{a} + \vec{b}$

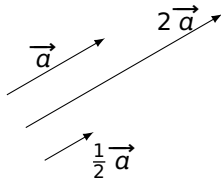


数乘： $\lambda \vec{a}$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ )

•  $\lambda \vec{a}$  的方向：

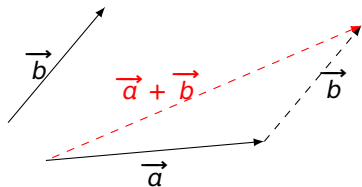
$$\begin{cases} \lambda \geq 0, & \lambda \vec{a} \text{ 与 } \vec{a} \text{ 同向} \\ \lambda < 0, & \lambda \vec{a} \text{ 与 } \vec{a} \text{ 反向} \end{cases}$$

•  $\lambda \vec{a}$  的长度： $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$



# 向量的线性运算：加法、数乘

加法： $\vec{a} + \vec{b}$

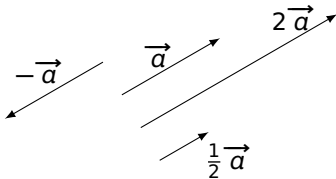


数乘： $\lambda \vec{a}$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ )

•  $\lambda \vec{a}$  的方向：

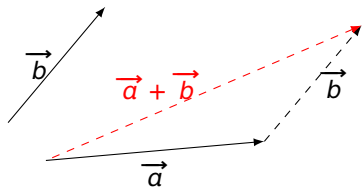
$$\begin{cases} \lambda \geq 0, & \lambda \vec{a} \text{ 与 } \vec{a} \text{ 同向} \\ \lambda < 0, & \lambda \vec{a} \text{ 与 } \vec{a} \text{ 反向} \end{cases}$$

•  $\lambda \vec{a}$  的长度： $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$



# 向量的线性运算：加法、数乘

加法： $\vec{a} + \vec{b}$

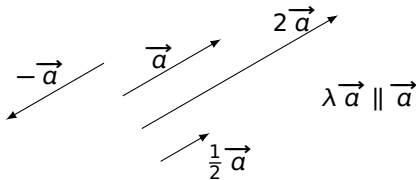


数乘： $\lambda \vec{a}$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ )

•  $\lambda \vec{a}$  的方向：

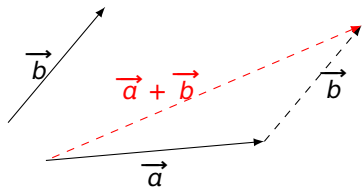
$$\begin{cases} \lambda \geq 0, & \lambda \vec{a} \text{ 与 } \vec{a} \text{ 同向} \\ \lambda < 0, & \lambda \vec{a} \text{ 与 } \vec{a} \text{ 反向} \end{cases}$$

•  $\lambda \vec{a}$  的长度： $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$



# 向量的线性运算：加法、数乘

加法： $\vec{a} + \vec{b}$



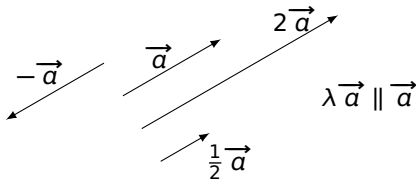
**运算律** 设为  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  为向量,  
 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , 则

数乘： $\lambda \vec{a}$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ )

•  $\lambda \vec{a}$  的方向：

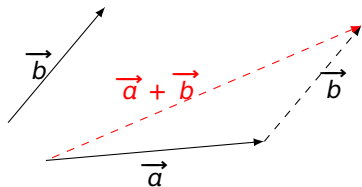
$$\begin{cases} \lambda \geq 0, & \lambda \vec{a} \text{ 与 } \vec{a} \text{ 同向} \\ \lambda < 0, & \lambda \vec{a} \text{ 与 } \vec{a} \text{ 反向} \end{cases}$$

•  $\lambda \vec{a}$  的长度： $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$



# 向量的线性运算：加法、数乘

加法： $\vec{a} + \vec{b}$



数乘： $\lambda \vec{a}$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ )

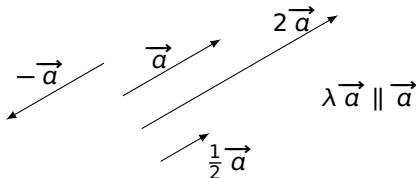
•  $\lambda \vec{a}$  的方向：

$$\begin{cases} \lambda \geq 0, & \lambda \vec{a} \text{ 与 } \vec{a} \text{ 同向} \\ \lambda < 0, & \lambda \vec{a} \text{ 与 } \vec{a} \text{ 反向} \end{cases}$$

•  $\lambda \vec{a}$  的长度： $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$

**运算律** 设为  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  为向量,  
 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , 则

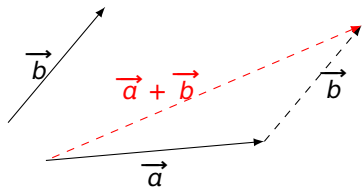
•  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ ;





# 向量的线性运算：加法、数乘

加法：  $\vec{a} + \vec{b}$



数乘：  $\lambda \vec{a}$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ )

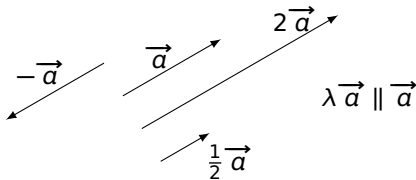
•  $\lambda \vec{a}$  的方向：

$$\begin{cases} \lambda \geq 0, & \lambda \vec{a} \text{ 与 } \vec{a} \text{ 同向} \\ \lambda < 0, & \lambda \vec{a} \text{ 与 } \vec{a} \text{ 反向} \end{cases}$$

•  $\lambda \vec{a}$  的长度：  $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$

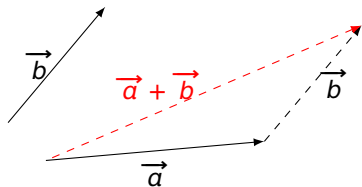
**运算律** 设为  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  为向量，  
 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ，则

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ ;
- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ ;



# 向量的线性运算：加法、数乘

加法： $\vec{a} + \vec{b}$



数乘： $\lambda \vec{a}$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ )

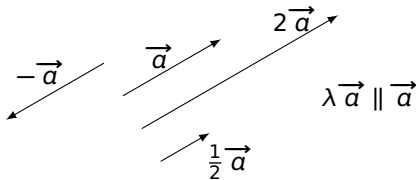
•  $\lambda \vec{a}$  的方向：

$$\begin{cases} \lambda \geq 0, & \lambda \vec{a} \text{ 与 } \vec{a} \text{ 同向} \\ \lambda < 0, & \lambda \vec{a} \text{ 与 } \vec{a} \text{ 反向} \end{cases}$$

•  $\lambda \vec{a}$  的长度： $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$

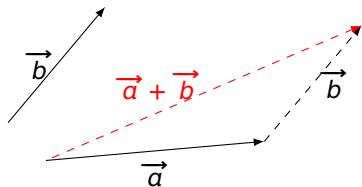
**运算律** 设为  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  为向量,  
 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , 则

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ ;
- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ ;
- $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$ ;



# 向量的线性运算：加法、数乘

加法： $\vec{a} + \vec{b}$



数乘： $\lambda \vec{a}$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ )

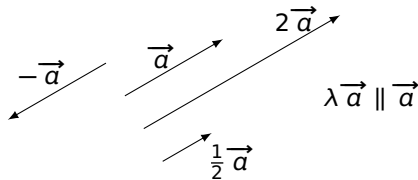
•  $\lambda \vec{a}$  的方向：

$$\begin{cases} \lambda \geq 0, & \lambda \vec{a} \text{ 与 } \vec{a} \text{ 同向} \\ \lambda < 0, & \lambda \vec{a} \text{ 与 } \vec{a} \text{ 反向} \end{cases}$$

•  $\lambda \vec{a}$  的长度： $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$

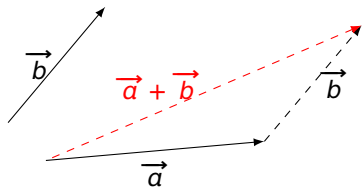
**运算律** 设为  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  为向量,  
 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , 则

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ ;
- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ ;
- $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$ ;
- $\mu(\lambda \vec{a}) = (\mu\lambda) \vec{a}$ ;



# 向量的线性运算：加法、数乘

加法： $\vec{a} + \vec{b}$



数乘： $\lambda \vec{a}$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ )

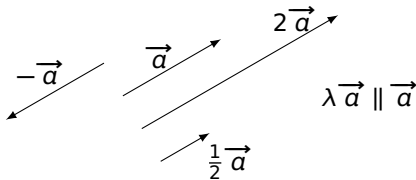
•  $\lambda \vec{a}$  的方向：

$$\begin{cases} \lambda \geq 0, & \lambda \vec{a} \text{ 与 } \vec{a} \text{ 同向} \\ \lambda < 0, & \lambda \vec{a} \text{ 与 } \vec{a} \text{ 反向} \end{cases}$$

•  $\lambda \vec{a}$  的长度： $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$

**运算律** 设为  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  为向量，  
 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ，则

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ ;
- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ ;
- $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$ ;
- $\mu(\lambda \vec{a}) = (\mu\lambda) \vec{a}$ ;
- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ ;  $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ .

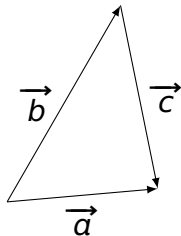


例 如图，用另外两向量表示第三个向量：

- $\vec{a} =$

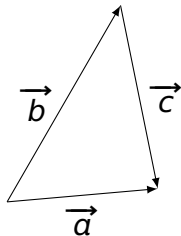
- $\vec{b} =$

- $\vec{c} =$



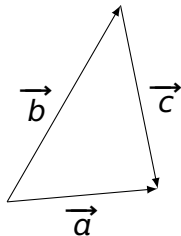
例 如图，用另外两向量表示第三个向量：

- $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$
- $\vec{b} =$
- $\vec{c} =$



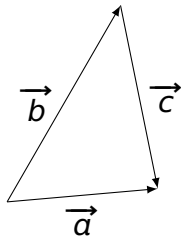
例 如图，用另外两向量表示第三个向量：

- $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$
- $\vec{b} = \vec{a} - \vec{c}$
- $\vec{c} =$



例 如图，用另外两向量表示第三个向量：

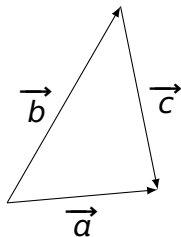
- $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$
- $\vec{b} = \vec{a} - \vec{c}$
- $\vec{c} = -\vec{b} + \vec{a}$





例 如图，用另外两向量表示第三个向量：

- $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$
- $\vec{b} = \vec{a} - \vec{c}$
- $\vec{c} = -\vec{b} + \vec{a}$

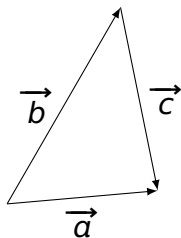


例 验证对任何三点  $A, B, C$ ，总成立

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}, \quad \vec{BA} = -\vec{AB}$$

例 如图，用另外两向量表示第三个向量：

- $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$
- $\vec{b} = \vec{a} - \vec{c}$
- $\vec{c} = -\vec{b} + \vec{a}$



例 验证对任何三点  $A, B, C$ ，总成立

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}, \quad \vec{BA} = -\vec{AB}$$

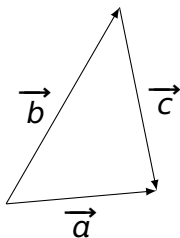
$B$   
•

•  $C$

$A$ •

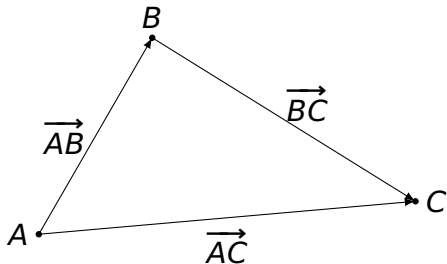
例 如图，用另外两向量表示第三个向量：

- $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$
- $\vec{b} = \vec{a} - \vec{c}$
- $\vec{c} = -\vec{b} + \vec{a}$



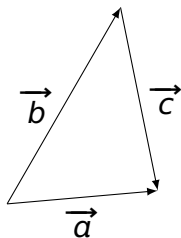
例 验证对任何三点  $A, B, C$ ，总成立

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}, \quad \vec{BA} = -\vec{AB}$$



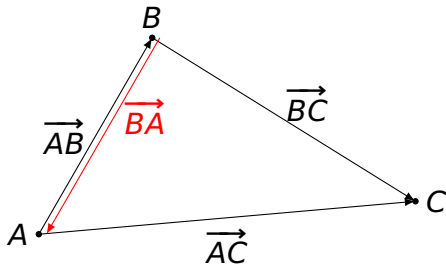
例 如图，用另外两向量表示第三个向量：

- $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$
- $\vec{b} = \vec{a} - \vec{c}$
- $\vec{c} = -\vec{b} + \vec{a}$

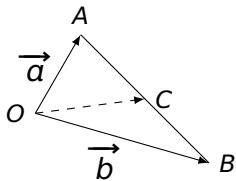


例 验证对任何三点  $A, B, C$ ，总成立

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}, \quad \vec{BA} = -\vec{AB}$$



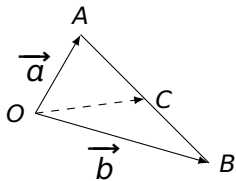
**例** 如图，设  $C$  是线段  $\overline{AB}$  的二等分点，试用  $\vec{a}, \vec{b}$  表示  $\vec{OC}$



**例** 如图, 设  $C$  是线段  $\overline{AB}$  的二等分点, 试用  $\vec{a}, \vec{b}$  表示  $\vec{OC}$

**解**

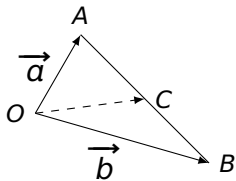
$$\vec{OC} =$$



**例** 如图, 设  $C$  是线段  $\overline{AB}$  的二等分点, 试用  $\vec{a}, \vec{b}$  表示  $\vec{OC}$

**解**

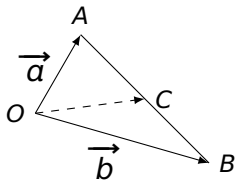
$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC}$$



**例** 如图, 设  $C$  是线段  $\overline{AB}$  的二等分点, 试用  $\vec{a}, \vec{b}$  表示  $\vec{OC}$

**解**

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{a} +$$

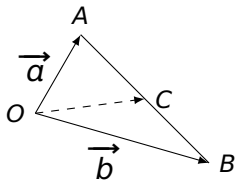




**例** 如图，设  $C$  是线段  $\overline{AB}$  的二等分点，试用  $\vec{a}, \vec{b}$  表示  $\vec{OC}$

**解**

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{AB}$$

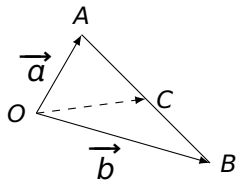


**例** 如图, 设  $C$  是线段  $\overline{AB}$  的二等分点, 试用  $\vec{a}, \vec{b}$  表示  $\vec{OC}$

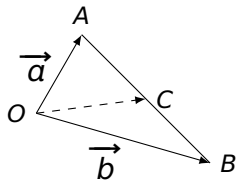
**解**

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{AB}$$

$$\frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b})$$



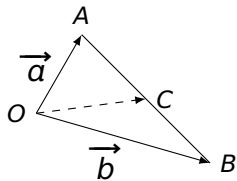
**例** 如图, 设  $C$  是线段  $\overline{AB}$  的二等分点, 试用  $\vec{a}, \vec{b}$  表示  $\vec{OC}$



**解**

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \vec{a} + \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b})$$

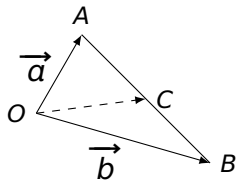
**例** 如图, 设  $C$  是线段  $\overline{AB}$  的二等分点, 试用  $\vec{a}, \vec{b}$  表示  $\vec{OC}$



**解**

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \vec{a} + \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

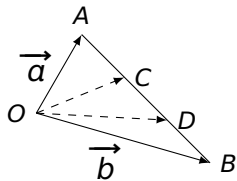
**例** 如图, 设  $C$  是线段  $\overline{AB}$  的二等分点, 试用  $\vec{a}, \vec{b}$  表示  $\vec{OC}$



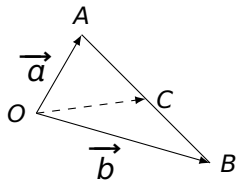
**解**

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \vec{a} + \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

**例** 如图, 设  $C, D$  是线段  $\overline{AB}$  的三等分点, 试用  $\vec{a}, \vec{b}$  表示  $\vec{OC}, \vec{OD}$



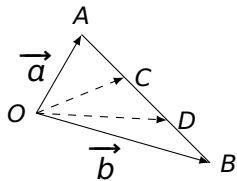
**例** 如图, 设  $C$  是线段  $\overline{AB}$  的二等分点, 试用  $\overrightarrow{a}$ ,  $\overrightarrow{b}$  表示  $\overrightarrow{OC}$



**解**

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a} + \frac{1}{2}(-\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b}$$

**例** 如图, 设  $C, D$  是线段  $\overline{AB}$  的三等分点, 试用  $\overrightarrow{a}$ ,  $\overrightarrow{b}$  表示  $\overrightarrow{OC}$ ,  $\overrightarrow{OD}$

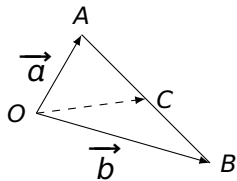


**解**

$$\overrightarrow{OC} =$$

$$\overrightarrow{OD} =$$

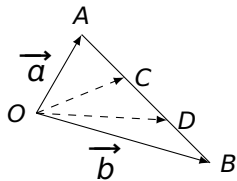
**例** 如图, 设  $C$  是线段  $\overline{AB}$  的二等分点, 试用  $\vec{a}, \vec{b}$  表示  $\vec{OC}$



**解**

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \vec{a} + \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

**例** 如图, 设  $C, D$  是线段  $\overline{AB}$  的三等分点, 试用  $\vec{a}, \vec{b}$  表示  $\vec{OC}, \vec{OD}$

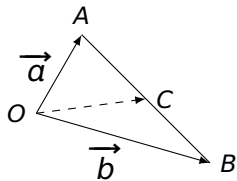


**解**

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC}$$

$$\vec{OD} =$$

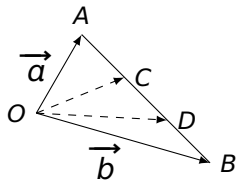
**例** 如图, 设  $C$  是线段  $\overline{AB}$  的二等分点, 试用  $\vec{a}, \vec{b}$  表示  $\vec{OC}$



**解**

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \vec{a} + \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

**例** 如图, 设  $C, D$  是线段  $\overline{AB}$  的三等分点, 试用  $\vec{a}, \vec{b}$  表示  $\vec{OC}, \vec{OD}$



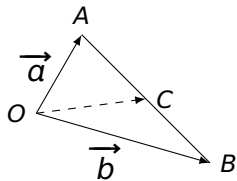
**解**

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{a} +$$

$$\vec{OD} =$$



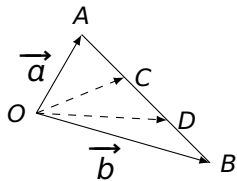
**例** 如图, 设  $C$  是线段  $\overline{AB}$  的二等分点, 试用  $\vec{a}, \vec{b}$  表示  $\vec{OC}$



**解**

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \vec{a} + \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

**例** 如图, 设  $C, D$  是线段  $\overline{AB}$  的三等分点, 试用  $\vec{a}, \vec{b}$  表示  $\vec{OC}, \vec{OD}$

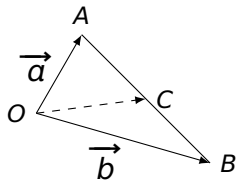


**解**

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{a} + \frac{1}{3}\vec{AB}$$

$$\vec{OD} =$$

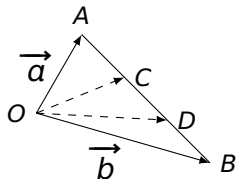
**例** 如图, 设  $C$  是线段  $\overline{AB}$  的二等分点, 试用  $\vec{a}, \vec{b}$  表示  $\vec{OC}$



**解**

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \vec{a} + \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

**例** 如图, 设  $C, D$  是线段  $\overline{AB}$  的三等分点, 试用  $\vec{a}, \vec{b}$  表示  $\vec{OC}, \vec{OD}$

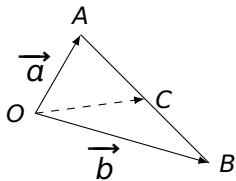


**解**

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{a} + \frac{1}{3}\vec{AB} \qquad \frac{1}{3}(-\vec{a} + \vec{b})$$

$$\vec{OD} =$$

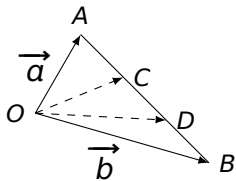
**例** 如图, 设  $C$  是线段  $\overline{AB}$  的二等分点, 试用  $\overrightarrow{a}$ ,  $\overrightarrow{b}$  表示  $\overrightarrow{OC}$



**解**

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a} + \frac{1}{2}(-\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b}$$

**例** 如图, 设  $C, D$  是线段  $\overline{AB}$  的三等分点, 试用  $\overrightarrow{a}$ ,  $\overrightarrow{b}$  表示  $\overrightarrow{OC}$ ,  $\overrightarrow{OD}$

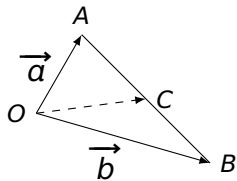


**解**

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a} + \frac{1}{3}(-\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$$

$$\overrightarrow{OD} =$$

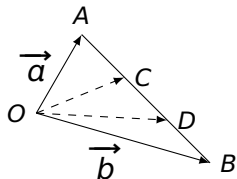
**例** 如图, 设  $C$  是线段  $\overline{AB}$  的二等分点, 试用  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  表示  $\vec{OC}$



**解**

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \vec{a} + \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

**例** 如图, 设  $C, D$  是线段  $\overline{AB}$  的三等分点, 试用  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  表示  $\vec{OC}$ ,  $\vec{OD}$

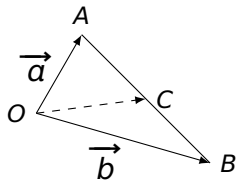


**解**

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{a} + \frac{1}{3}\vec{AB} = \vec{a} + \frac{1}{3}(-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$$

$$\vec{OD} =$$

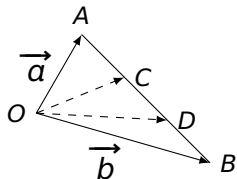
**例** 如图, 设  $C$  是线段  $\overline{AB}$  的二等分点, 试用  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  表示  $\vec{OC}$



**解**

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \vec{a} + \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

**例** 如图, 设  $C, D$  是线段  $\overline{AB}$  的三等分点, 试用  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  表示  $\vec{OC}$ ,  $\vec{OD}$

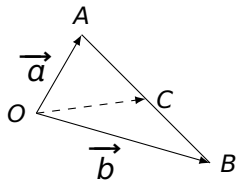


**解**

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{a} + \frac{1}{3}\vec{AB} = \vec{a} + \frac{1}{3}(-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$$

$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{AD}$$

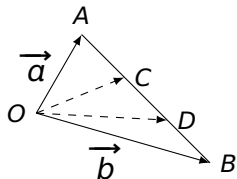
**例** 如图, 设  $C$  是线段  $\overline{AB}$  的二等分点, 试用  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  表示  $\vec{OC}$



**解**

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \vec{a} + \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

**例** 如图, 设  $C, D$  是线段  $\overline{AB}$  的三等分点, 试用  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  表示  $\vec{OC}$ ,  $\vec{OD}$

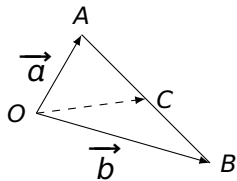


**解**

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{a} + \frac{1}{3}\vec{AB} = \vec{a} + \frac{1}{3}(-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$$

$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{AD} = \vec{a} +$$

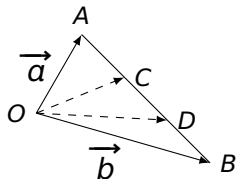
**例** 如图, 设  $C$  是线段  $\overline{AB}$  的二等分点, 试用  $\overrightarrow{a}$ ,  $\overrightarrow{b}$  表示  $\overrightarrow{OC}$



**解**

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a} + \frac{1}{2}(-\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b}$$

**例** 如图, 设  $C, D$  是线段  $\overline{AB}$  的三等分点, 试用  $\overrightarrow{a}$ ,  $\overrightarrow{b}$  表示  $\overrightarrow{OC}$ ,  $\overrightarrow{OD}$

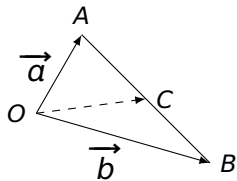


**解**

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a} + \frac{1}{3}(-\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{b}$$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{a} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

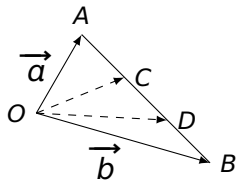
**例** 如图, 设  $C$  是线段  $\overline{AB}$  的二等分点, 试用  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  表示  $\vec{OC}$



**解**

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \vec{a} + \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

**例** 如图, 设  $C, D$  是线段  $\overline{AB}$  的三等分点, 试用  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  表示  $\vec{OC}$ ,  $\vec{OD}$



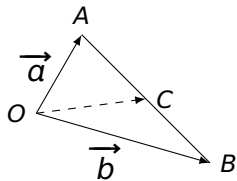
**解**

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{a} + \frac{1}{3}\vec{AB} = \vec{a} + \frac{1}{3}(-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$$

$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{AD} = \vec{a} + \frac{2}{3}\vec{AB} = \vec{a} + \frac{2}{3}(-\vec{a} + \vec{b})$$



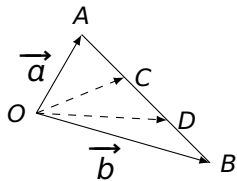
**例** 如图, 设  $C$  是线段  $\overline{AB}$  的二等分点, 试用  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  表示  $\vec{OC}$



**解**

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \vec{a} + \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

**例** 如图, 设  $C, D$  是线段  $\overline{AB}$  的三等分点, 试用  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  表示  $\vec{OC}$ ,  $\vec{OD}$

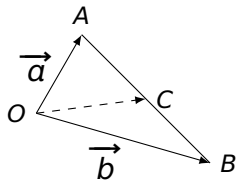


**解**

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{a} + \frac{1}{3}\vec{AB} = \vec{a} + \frac{1}{3}(-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$$

$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{AD} = \vec{a} + \frac{2}{3}\vec{AB} = \vec{a} + \frac{2}{3}(-\vec{a} + \vec{b})$$

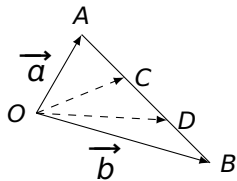
**例** 如图, 设  $C$  是线段  $\overline{AB}$  的二等分点, 试用  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  表示  $\vec{OC}$



**解**

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \vec{a} + \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

**例** 如图, 设  $C, D$  是线段  $\overline{AB}$  的三等分点, 试用  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  表示  $\vec{OC}$ ,  $\vec{OD}$

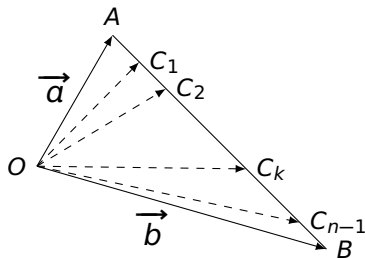


**解**

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{a} + \frac{1}{3}\vec{AB} = \vec{a} + \frac{1}{3}(-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$$

$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{AD} = \vec{a} + \frac{2}{3}\vec{AB} = \vec{a} + \frac{2}{3}(-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$$

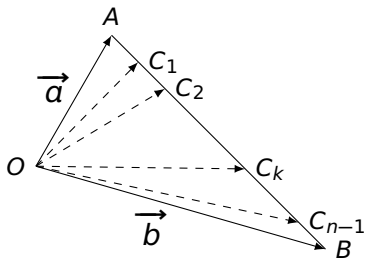
如图, 设  $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$  是线段  $\overline{AB}$  的  $n$  等分点, 试用  $\vec{a}, \vec{b}$  表示其中任意等分点  $C_k$



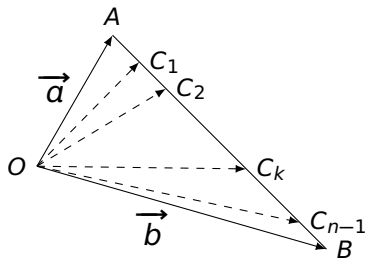
如图, 设  $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$  是线段  $\overline{AB}$  的  $n$  等分点, 试用  $\vec{a}, \vec{b}$  表示其中任意等分点  $C_k$

解

$$\overrightarrow{OC_k} =$$



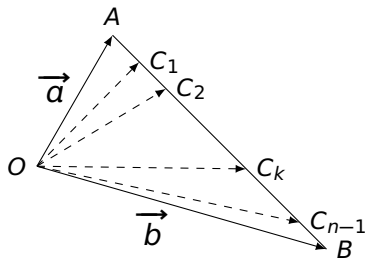
如图, 设  $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$  是线段  $\overline{AB}$  的  $n$  等分点, 试用  $\vec{a}, \vec{b}$  表示其中任意等分点  $C_k$



解

$$\overrightarrow{OC_k} = \vec{a} + \vec{b}$$

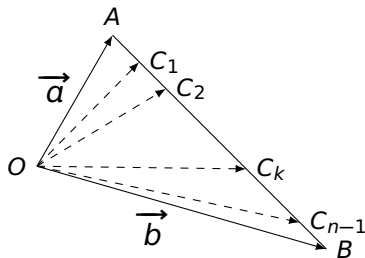
如图, 设  $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$  是线段  $\overline{AB}$  的  $n$  等分点, 试用  $\vec{a}, \vec{b}$  表示其中任意等分点  $C_k$



解

$$\overrightarrow{OC_k} = \frac{k}{n} \vec{a} + \frac{n-k}{n} \vec{b}$$

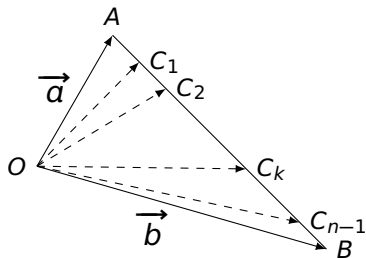
如图, 设  $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$  是线段  $\overline{AB}$  的  $n$  等分点, 试用  $\vec{a}, \vec{b}$  表示其中任意等分点  $C_k$



解

$$\overrightarrow{OC_k} = \frac{n-k}{n} \vec{a} + \frac{k}{n} \vec{b}$$

如图, 设  $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$  是线段  $\overline{AB}$  的  $n$  等分点, 试用  $\vec{a}, \vec{b}$  表示其中任意等分点  $C_k$

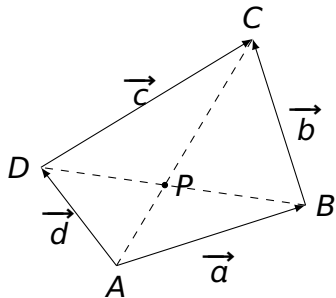


解

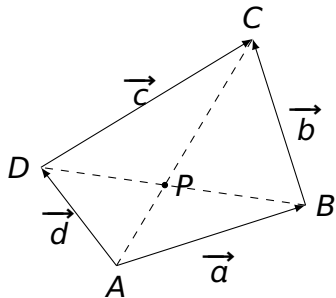
$$\overrightarrow{OC_k} = \frac{n-k}{n} \vec{a} + \frac{k}{n} \vec{b}$$



**例** 如图，设该四边形对角线互相平分，证明该四边形为平行四边形。

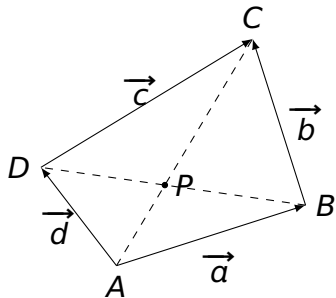


**例** 如图，设该四边形对角线互相平分，证明该四边形为平行四边形。



**证明** 往证：  $\vec{a} = \vec{c}$ 。

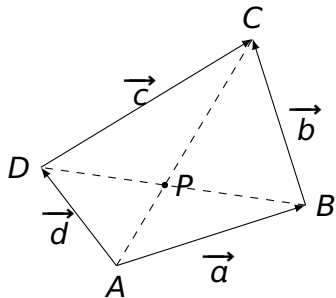
**例** 如图，设该四边形对角线互相平分，证明该四边形为平行四边形。



**证明** 往证：  $\vec{a} = \vec{c}$ 。这是：

$$\vec{a} = \vec{AP} + \vec{PB}$$

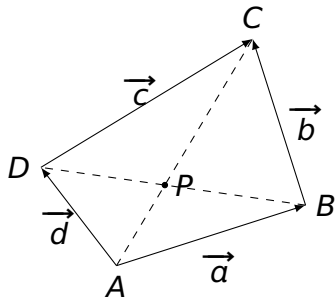
**例** 如图，设该四边形对角线互相平分，证明该四边形为平行四边形。



**证明** 往证：  $\vec{a} = \vec{c}$ 。这是：

$$\vec{a} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{DP}$$

**例** 如图，设该四边形对角线互相平分，证明该四边形为平行四边形。



**证明** 往证：  $\vec{a} = \vec{c}$ 。这是：

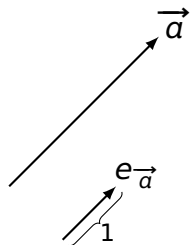
$$\vec{a} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{DP} = \vec{c}.$$

# 方向向量

性质 设  $\vec{a} \neq 0$ , 定义

$$e_{\vec{a}} := \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}.$$

则  $e_{\vec{a}}$  是与  $\vec{a}$  同向的单位向量。

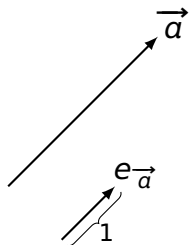


# 方向向量

性质 设  $\vec{a} \neq 0$ , 定义

$$e_{\vec{a}} := \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}.$$

则  $e_{\vec{a}}$  是与  $\vec{a}$  同向的单位向量。



证明

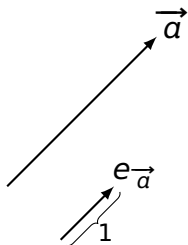
- 因为  $\frac{1}{|\vec{a}|} > 0$ , 所以  $e_{\vec{a}}$  与  $\vec{a}$  同向。

# 方向向量

性质 设  $\vec{a} \neq 0$ , 定义

$$e_{\vec{a}} := \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}.$$

则  $e_{\vec{a}}$  是与  $\vec{a}$  同向的单位向量。



证明

- 因为  $\frac{1}{|\vec{a}|} > 0$ , 所以  $e_{\vec{a}}$  与  $\vec{a}$  同向。
- $|e_{\vec{a}}| =$

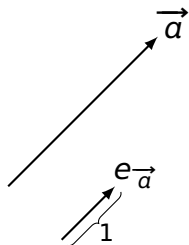


# 方向向量

性质 设  $\vec{a} \neq 0$ , 定义

$$e_{\vec{a}} := \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}.$$

则  $e_{\vec{a}}$  是与  $\vec{a}$  同向的单位向量。



证明

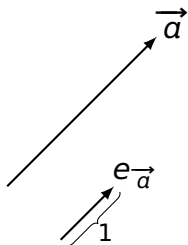
- 因为  $\frac{1}{|\vec{a}|} > 0$ , 所以  $e_{\vec{a}}$  与  $\vec{a}$  同向。
- $|e_{\vec{a}}| = \left| \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} \right| =$

# 方向向量

性质 设  $\vec{a} \neq 0$ , 定义

$$e_{\vec{a}} := \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}.$$

则  $e_{\vec{a}}$  是与  $\vec{a}$  同向的单位向量。



证明

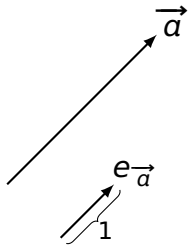
- 因为  $\frac{1}{|\vec{a}|} > 0$ , 所以  $e_{\vec{a}}$  与  $\vec{a}$  同向。
- $|e_{\vec{a}}| = \left| \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} \right| = \left| \frac{1}{|\vec{a}|} \right| \cdot |\vec{a}| =$

# 方向向量

性质 设  $\vec{a} \neq 0$ , 定义

$$e_{\vec{a}} := \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}.$$

则  $e_{\vec{a}}$  是与  $\vec{a}$  同向的单位向量。



证明

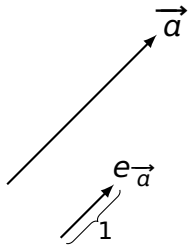
- 因为  $\frac{1}{|\vec{a}|} > 0$ , 所以  $e_{\vec{a}}$  与  $\vec{a}$  同向。
- $|e_{\vec{a}}| = \left| \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} \right| = \left| \frac{1}{|\vec{a}|} \right| \cdot |\vec{a}| = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| =$

# 方向向量

性质 设  $\vec{a} \neq 0$ , 定义

$$e_{\vec{a}} := \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}.$$

则  $e_{\vec{a}}$  是与  $\vec{a}$  同向的单位向量。



证明

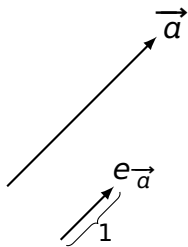
- 因为  $\frac{1}{|\vec{a}|} > 0$ , 所以  $e_{\vec{a}}$  与  $\vec{a}$  同向。
- $|e_{\vec{a}}| = \left| \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} \right| = \left| \frac{1}{|\vec{a}|} \right| \cdot |\vec{a}| = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| = 1.$

# 方向向量

性质 设  $\vec{a} \neq 0$ , 定义

$$e_{\vec{a}} := \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}.$$

则  $e_{\vec{a}}$  是与  $\vec{a}$  同向的单位向量。



证明

- 因为  $\frac{1}{|\vec{a}|} > 0$ , 所以  $e_{\vec{a}}$  与  $\vec{a}$  同向。
- $|e_{\vec{a}}| = \left| \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} \right| = \left| \frac{1}{|\vec{a}|} \right| \cdot |\vec{a}| = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| = 1.$

注  $e_{\vec{a}}$  也称为  $\vec{a}$  的 **单位化向量**, 或 **方向向量**。

# 平行向量

---

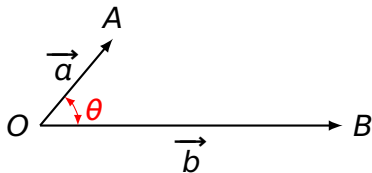
性质 设有两向量  $\vec{a} \neq 0$  及  $\vec{b}$ , 则

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \text{存在 } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ 使得 } \vec{b} = \lambda \vec{a}$$

# 向量夹角

性质 设  $\theta$  是向量  $\vec{a}$  和  $\vec{b}$  夹角, 则

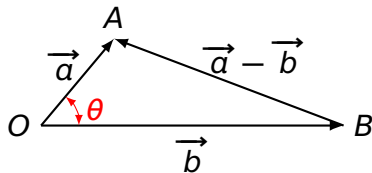
$$\cos \theta$$



# 向量夹角

性质 设  $\theta$  是向量  $\vec{a}$  和  $\vec{b}$  夹角, 则

$$\cos \theta$$

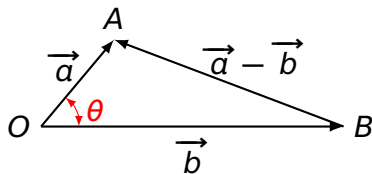




# 向量夹角

性质 设  $\theta$  是向量  $\vec{a}$  和  $\vec{b}$  夹角, 则

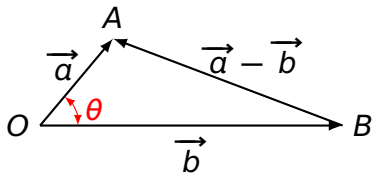
$$\cos \theta = \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2}{2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$



# 向量夹角

性质 设  $\theta$  是向量  $\vec{a}$  和  $\vec{b}$  夹角, 则

$$\cos \theta = \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2}{2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$



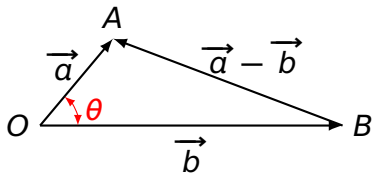
证明 这是由三角形的余弦定理:

$$|BA|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 - 2|OA| \cdot |OB| \cdot \cos \theta$$

# 向量夹角

性质 设  $\theta$  是向量  $\vec{a}$  和  $\vec{b}$  夹角, 则

$$\cos \theta = \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2}{2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

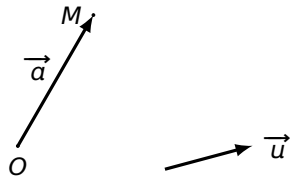


证明 这是由三角形的余弦定理:

$$\begin{aligned} |BA|^2 &= |OA|^2 + |OB|^2 - 2|OA| \cdot |OB| \cdot \cos \theta \\ \Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \theta \end{aligned}$$

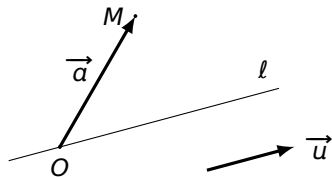
# 向量的投影

如图,



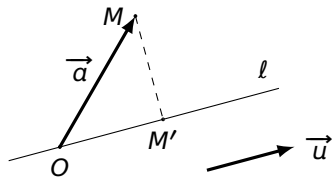
# 向量的投影

如图,



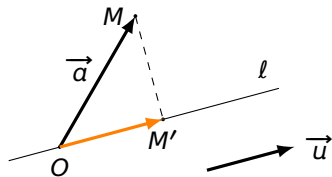
# 向量的投影

如图,



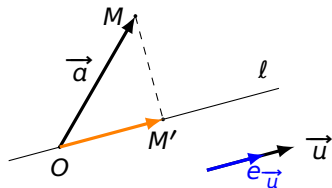
# 向量的投影

如图,



# 向量的投影

如图,

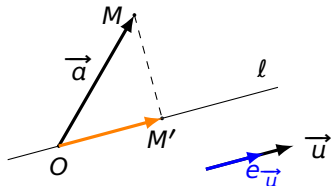




# 向量的投影

如图，存在唯一的数  $\lambda$ ，使得：

$$\overrightarrow{OM'} = \lambda \mathbf{e}_{\vec{u}}$$

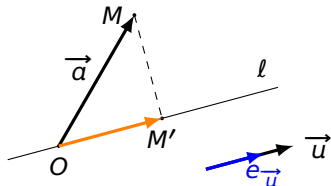


# 向量的投影

如图，存在唯一的数  $\lambda$ ，使得：

$$\overrightarrow{OM'} = \lambda \mathbf{e}_{\vec{u}}$$

该  $\lambda$  称为  $\vec{a}$  在  $\vec{u}$  方向上的投影，记为：



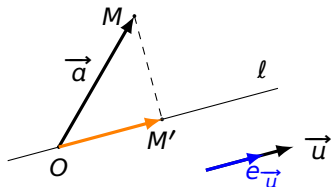
# 向量的投影

如图，存在唯一的数  $\lambda$ ，使得：

$$\overrightarrow{OM'} = \lambda \mathbf{e}_{\vec{u}}$$

该  $\lambda$  称为  $\vec{a}$  在  $\vec{u}$  方向上的投影，记为：

$$\lambda = \text{Prj}_{\vec{u}} \vec{a}$$



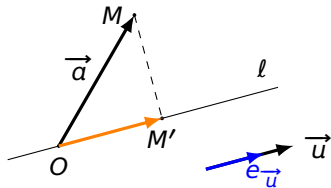
# 向量的投影

如图，存在唯一的数  $\lambda$ ，使得：

$$\overrightarrow{OM'} = \lambda \mathbf{e}_{\vec{u}}$$

该  $\lambda$  称为  $\vec{a}$  在  $\vec{u}$  方向上的投影，记为：

$$\lambda = \text{Prj}_{\vec{u}} \vec{a}$$



**性质** 设  $\theta$  为  $\vec{a}$  和  $\vec{u}$  的夹角，则成立

$$\text{Prj}_{\vec{u}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \theta,$$

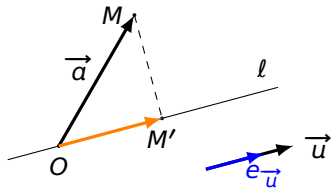
# 向量的投影

如图，存在唯一的数  $\lambda$ ，使得：

$$\overrightarrow{OM'} = \lambda \mathbf{e}_{\vec{u}}$$

该  $\lambda$  称为  $\vec{a}$  在  $\vec{u}$  方向上的**投影**，记为：

$$\lambda = \text{Prj}_{\vec{u}} \vec{a}$$



**性质** 设  $\theta$  为  $\vec{a}$  和  $\vec{u}$  的夹角，则成立

$$\text{Prj}_{\vec{u}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \theta, \quad \overrightarrow{OM'} = (|\vec{a}| \cos \theta) \mathbf{e}_{\vec{u}}.$$

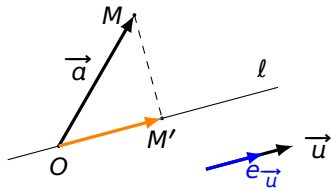
# 向量的投影

如图，存在唯一的数  $\lambda$ ，使得：

$$\overrightarrow{OM'} = \lambda \mathbf{e}_{\vec{u}}$$

该  $\lambda$  称为  $\vec{a}$  在  $\vec{u}$  方向上的**投影**，记为：

$$\lambda = \text{Prj}_{\vec{u}} \vec{a}$$



**性质** 设  $\theta$  为  $\vec{a}$  和  $\vec{u}$  的夹角，则成立

$$\text{Prj}_{\vec{u}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \theta, \quad \overrightarrow{OM'} = (|\vec{a}| \cos \theta) \mathbf{e}_{\vec{u}}.$$

**证明** 只需证  $\overrightarrow{OM'}$  和  $(|\vec{a}| \cos \theta) \mathbf{e}_{\vec{u}}$  既同向，也同长度。

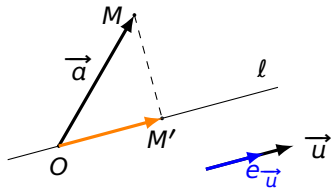
# 向量的投影

如图，存在唯一的数  $\lambda$ ，使得：

$$\overrightarrow{OM'} = \lambda \mathbf{e}_{\vec{u}}$$

该  $\lambda$  称为  $\vec{a}$  在  $\vec{u}$  方向上的**投影**，记为：

$$\lambda = \text{Prj}_{\vec{u}} \vec{a}$$



**性质** 设  $\theta$  为  $\vec{a}$  和  $\vec{u}$  的夹角，则成立

$$\text{Prj}_{\vec{u}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \theta, \quad \overrightarrow{OM'} = (|\vec{a}| \cos \theta) \mathbf{e}_{\vec{u}}.$$

**证明** 只需证  $\overrightarrow{OM'}$  和  $(|\vec{a}| \cos \theta) \mathbf{e}_{\vec{u}}$

既同向，也同长度。分情况：

- $\theta \leq \frac{\pi}{2}$
- $\theta \geq \frac{\pi}{2}$

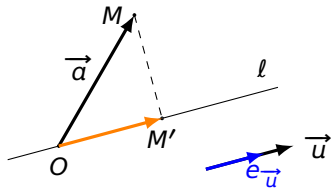
# 向量的投影

如图，存在唯一的数  $\lambda$ ，使得：

$$\overrightarrow{OM'} = \lambda \mathbf{e}_{\vec{u}}$$

该  $\lambda$  称为  $\vec{a}$  在  $\vec{u}$  方向上的**投影**，记为：

$$\lambda = \text{Prj}_{\vec{u}} \vec{a}$$

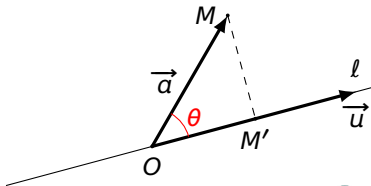


**性质** 设  $\theta$  为  $\vec{a}$  和  $\vec{u}$  的夹角，则成立

$$\text{Prj}_{\vec{u}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \theta, \quad \overrightarrow{OM'} = (|\vec{a}| \cos \theta) \mathbf{e}_{\vec{u}}.$$

**证明** 只需证  $\overrightarrow{OM'}$  和  $(|\vec{a}| \cos \theta) \mathbf{e}_{\vec{u}}$  既同向，也同长度。分情况：

- $\theta \leq \frac{\pi}{2}$
- $\theta \geq \frac{\pi}{2}$





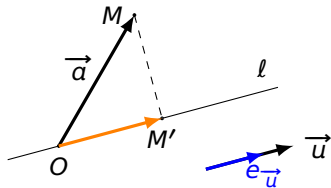
# 向量的投影

如图，存在唯一的数  $\lambda$ ，使得：

$$\overrightarrow{OM'} = \lambda \mathbf{e}_{\vec{u}}$$

该  $\lambda$  称为  $\vec{a}$  在  $\vec{u}$  方向上的**投影**，记为：

$$\lambda = \text{Prj}_{\vec{u}} \vec{a}$$

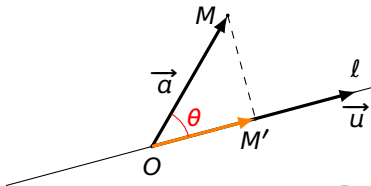


**性质** 设  $\theta$  为  $\vec{a}$  和  $\vec{u}$  的夹角，则成立

$$\text{Prj}_{\vec{u}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \theta, \quad \overrightarrow{OM'} = (|\vec{a}| \cos \theta) \mathbf{e}_{\vec{u}}.$$

**证明** 只需证  $\overrightarrow{OM'}$  和  $(|\vec{a}| \cos \theta) \mathbf{e}_{\vec{u}}$  既同向，也同长度。分情况：

- $\theta \leq \frac{\pi}{2}$
- $\theta \geq \frac{\pi}{2}$



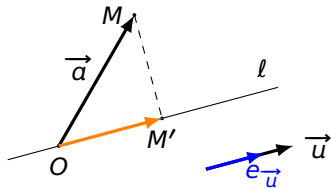
# 向量的投影

如图，存在唯一的数  $\lambda$ ，使得：

$$\overrightarrow{OM'} = \lambda \mathbf{e}_{\vec{u}}$$

该  $\lambda$  称为  $\vec{a}$  在  $\vec{u}$  方向上的**投影**，记为：

$$\lambda = \text{Prj}_{\vec{u}} \vec{a}$$

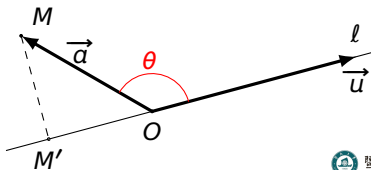


**性质** 设  $\theta$  为  $\vec{a}$  和  $\vec{u}$  的夹角，则成立

$$\text{Prj}_{\vec{u}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \theta, \quad \overrightarrow{OM'} = (|\vec{a}| \cos \theta) \mathbf{e}_{\vec{u}}.$$

**证明** 只需证  $\overrightarrow{OM'}$  和  $(|\vec{a}| \cos \theta) \mathbf{e}_{\vec{u}}$  既同向，也同长度。分情况：

- $\theta \leq \frac{\pi}{2}$
- $\theta \geq \frac{\pi}{2}$



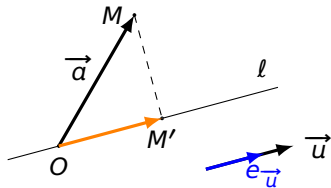
# 向量的投影

如图，存在唯一的数  $\lambda$ ，使得：

$$\overrightarrow{OM'} = \lambda \mathbf{e}_{\vec{u}}$$

该  $\lambda$  称为  $\vec{a}$  在  $\vec{u}$  方向上的**投影**，记为：

$$\lambda = \text{Prj}_{\vec{u}} \vec{a}$$

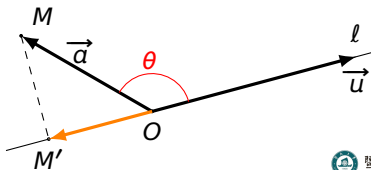


**性质** 设  $\theta$  为  $\vec{a}$  和  $\vec{u}$  的夹角，则成立

$$\text{Prj}_{\vec{u}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \theta, \quad \overrightarrow{OM'} = (|\vec{a}| \cos \theta) \mathbf{e}_{\vec{u}}.$$

**证明** 只需证  $\overrightarrow{OM'}$  和  $(|\vec{a}| \cos \theta) \mathbf{e}_{\vec{u}}$  既同向，也同长度。分情况：

- $\theta \leq \frac{\pi}{2}$
- $\theta \geq \frac{\pi}{2}$



# We are here now...

---

◆ 向量的基本概念

♣ 向量的坐标表示

♥ 向量的数量积

♠ 向量的向量积

# 点、向量的坐标表示

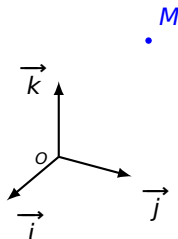
---

$M$



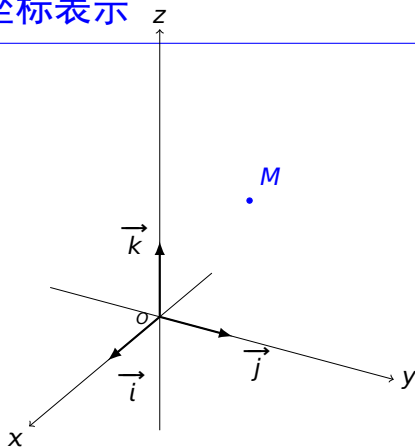
- 点  $M \longleftrightarrow$  三元数组  $(x, y, z)$  : 以  $(x, y, z)$  作为点  $M$  的坐标

# 点、向量的坐标表示



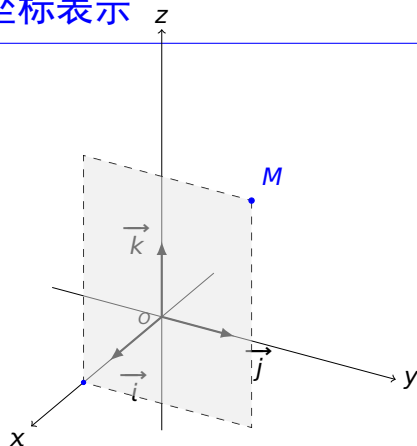
- 点  $M \longleftrightarrow$  三元数组  $(x, y, z)$  : 以  $(x, y, z)$  作为点  $M$  的坐标

# 点、向量的坐标表示



- 点  $M \longleftrightarrow$  三元数组  $(x, y, z)$  : 以  $(x, y, z)$  作为点  $M$  的坐标

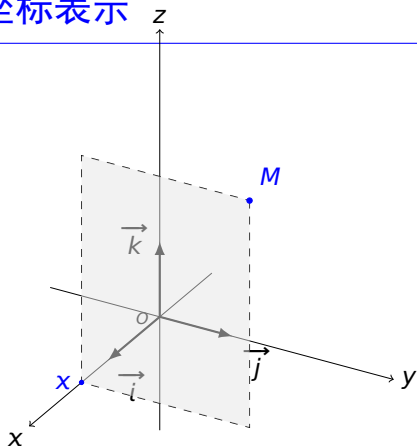
# 点、向量的坐标表示



- 点  $M \longleftrightarrow$  三元数组  $(x, y, z)$  : 以  $(x, y, z)$  作为点  $M$  的坐标

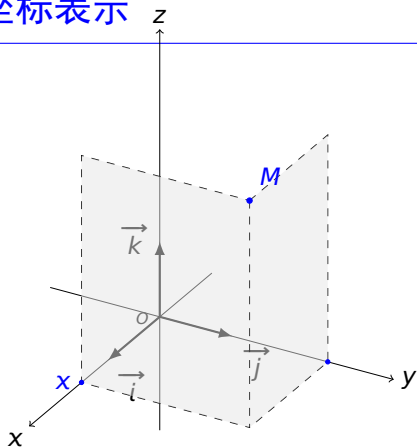


# 点、向量的坐标表示



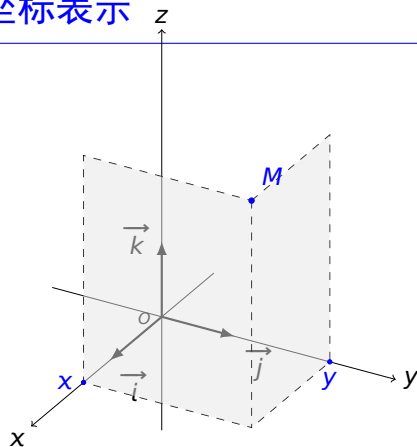
- 点  $M \longleftrightarrow$  三元数组  $(x, y, z)$  : 以  $(x, y, z)$  作为点  $M$  的坐标

# 点、向量的坐标表示



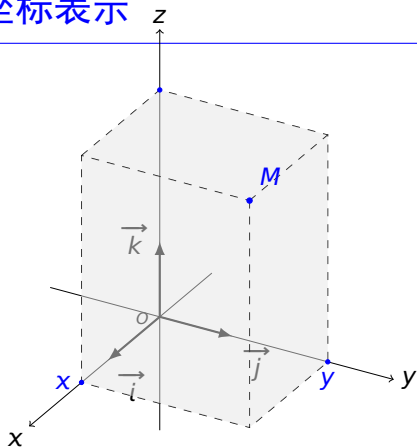
- 点  $M \longleftrightarrow$  三元数组  $(x, y, z)$  : 以  $(x, y, z)$  作为点  $M$  的坐标

# 点、向量的坐标表示



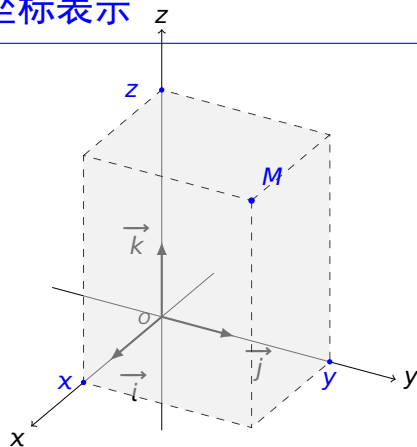
- 点  $M \longleftrightarrow$  三元数组  $(x, y, z)$  : 以  $(x, y, z)$  作为点  $M$  的坐标

# 点、向量的坐标表示



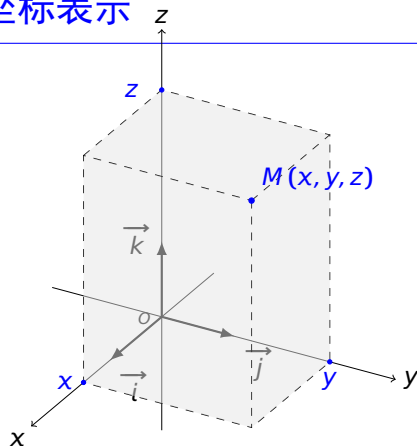
- 点  $M \longleftrightarrow$  三元数组  $(x, y, z)$  : 以  $(x, y, z)$  作为点  $M$  的坐标

# 点、向量的坐标表示



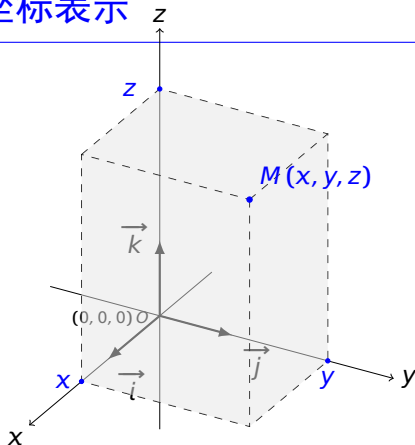
- 点  $M \longleftrightarrow$  三元数组  $(x, y, z)$  : 以  $(x, y, z)$  作为点  $M$  的坐标

# 点、向量的坐标表示



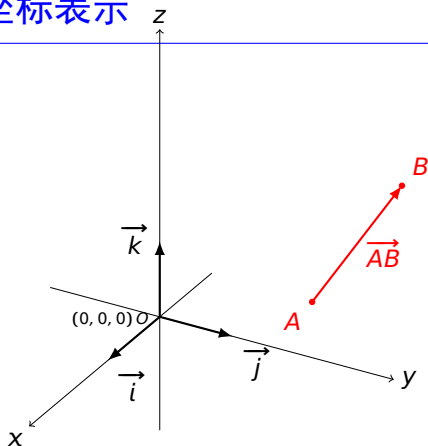
- 点  $M \longleftrightarrow$  三元数组  $(x, y, z)$  : 以  $(x, y, z)$  作为点  $M$  的坐标

# 点、向量的坐标表示



- 点  $M \longleftrightarrow$  三元数组  $(x, y, z)$  : 以  $(x, y, z)$  作为点  $M$  的坐标

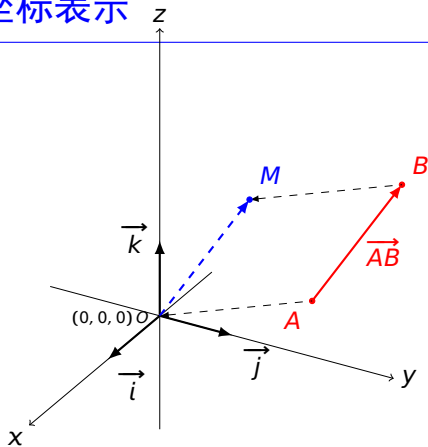
# 点、向量的坐标表示



- 点  $M \longleftrightarrow$  三元数组  $(x, y, z)$  : 以  $(x, y, z)$  作为点  $M$  的坐标
- $\vec{AB}$

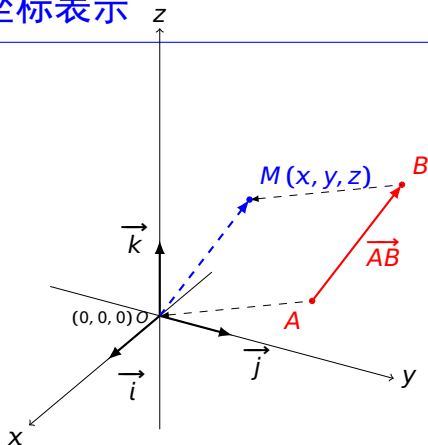


# 点、向量的坐标表示



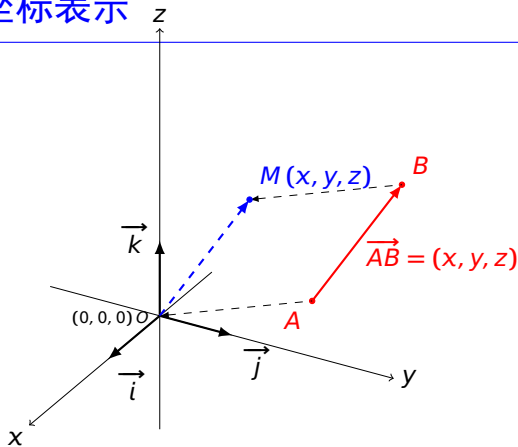
- 点  $M \longleftrightarrow$  三元数组  $(x, y, z)$  : 以  $(x, y, z)$  作为点  $M$  的坐标
- $\overrightarrow{AB} \xrightarrow{\text{平移}} \overrightarrow{OM}$

# 点、向量的坐标表示



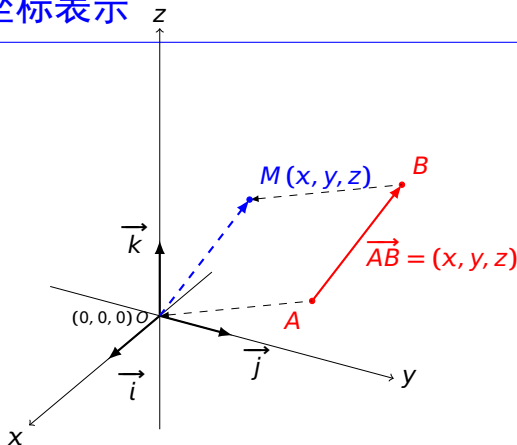
- 点  $M \longleftrightarrow$  三元数组  $(x, y, z)$  : 以  $(x, y, z)$  作为点  $M$  的坐标
- $\vec{AB} \xrightarrow{\text{平移}} \vec{OM}$

# 点、向量的坐标表示



- 点  $M \longleftrightarrow$  三元数组  $(x, y, z)$  : 以  $(x, y, z)$  作为点  $M$  的坐标
- $\overrightarrow{AB} \xrightarrow{\text{平移}} \overrightarrow{OM}$  : 以  $(x, y, z)$  作为向量  $\overrightarrow{AB}$  的坐标

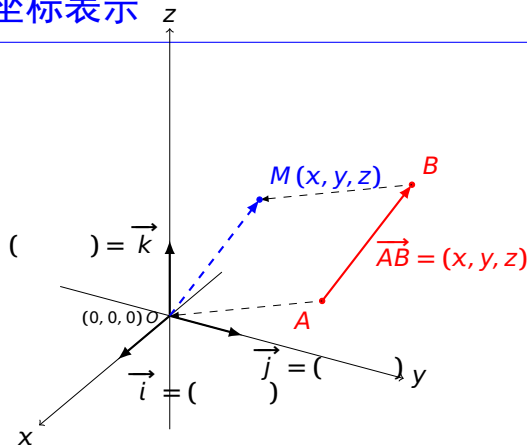
# 点、向量的坐标表示



- 点  $M \longleftrightarrow$  三元数组  $(x, y, z)$  : 以  $(x, y, z)$  作为点  $M$  的坐标
- $\overrightarrow{AB} \xrightarrow{\text{平移}} \overrightarrow{OM} : \text{以 } (x, y, z) \text{ 作为向量 } \overrightarrow{AB} \text{ 的坐标}$

注 三元数组  $(x, y, z)$  同时作为点  $M$  和向量  $\overrightarrow{AB}$  的坐标

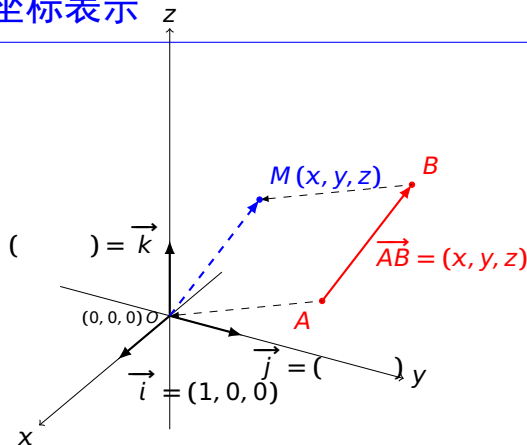
# 点、向量的坐标表示



- 点  $M \longleftrightarrow$  三元数组  $(x, y, z)$  : 以  $(x, y, z)$  作为点  $M$  的坐标
- $\overrightarrow{AB} \xrightarrow{\text{平移}} \overrightarrow{OM}$  : 以  $(x, y, z)$  作为向量  $\overrightarrow{AB}$  的坐标

注 三元数组  $(x, y, z)$  同时作为点  $M$  和向量  $\overrightarrow{AB}$  的坐标

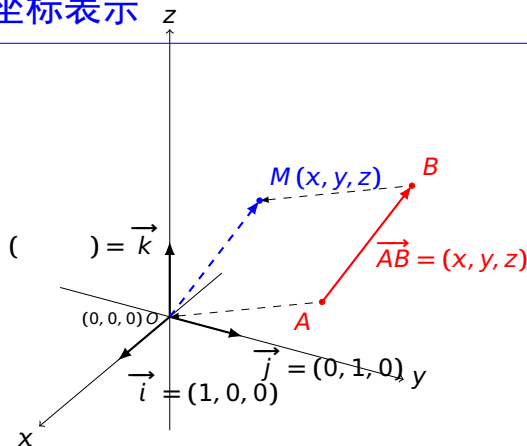
# 点、向量的坐标表示



- 点  $M \longleftrightarrow$  三元数组  $(x, y, z)$  : 以  $(x, y, z)$  作为点  $M$  的坐标
- $\overrightarrow{AB} \xrightarrow{\text{平移}} \overrightarrow{OM}$  : 以  $(x, y, z)$  作为向量  $\overrightarrow{AB}$  的坐标

注 三元数组  $(x, y, z)$  同时作为点  $M$  和向量  $\overrightarrow{AB}$  的坐标

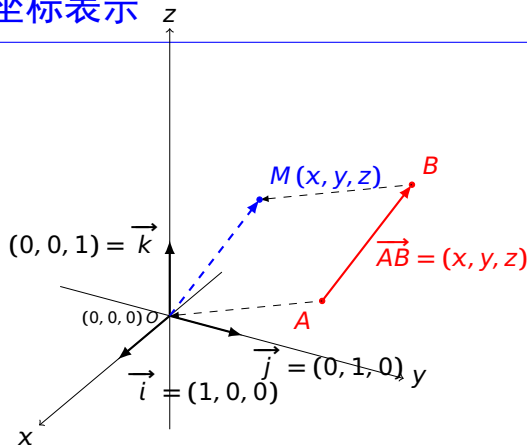
# 点、向量的坐标表示



- 点  $M \longleftrightarrow$  三元数组  $(x, y, z)$  : 以  $(x, y, z)$  作为点  $M$  的坐标
- $\overrightarrow{AB} \xrightarrow{\text{平移}} \overrightarrow{OM}$  : 以  $(x, y, z)$  作为向量  $\overrightarrow{AB}$  的坐标

注 三元数组  $(x, y, z)$  同时作为点  $M$  和向量  $\overrightarrow{AB}$  的坐标

# 点、向量的坐标表示

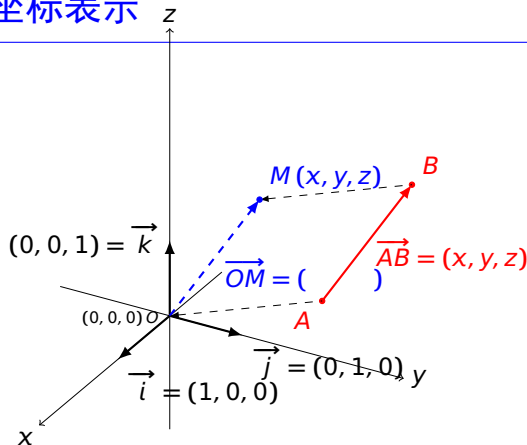


- 点  $M \longleftrightarrow$  三元数组  $(x, y, z)$  : 以  $(x, y, z)$  作为点  $M$  的坐标
- $\overrightarrow{AB} \xrightarrow{\text{平移}} \overrightarrow{OM}$  : 以  $(x, y, z)$  作为向量  $\overrightarrow{AB}$  的坐标

注 三元数组  $(x, y, z)$  同时作为点  $M$  和向量  $\overrightarrow{AB}$  的坐标



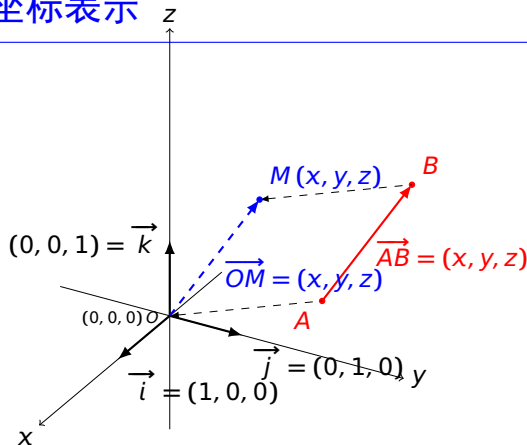
# 点、向量的坐标表示



- 点  $M \longleftrightarrow$  三元数组  $(x, y, z)$  : 以  $(x, y, z)$  作为点  $M$  的坐标
- $\overrightarrow{AB} \xrightarrow{\text{平移}} \overrightarrow{OM}$  : 以  $(x, y, z)$  作为向量  $\overrightarrow{AB}$  的坐标

**注** 三元数组  $(x, y, z)$  同时作为点  $M$  和向量  $\overrightarrow{AB}$  的坐标

# 点、向量的坐标表示



- 点  $M \longleftrightarrow$  三元数组  $(x, y, z)$  : 以  $(x, y, z)$  作为点  $M$  的坐标
- $\overrightarrow{AB} \xrightarrow{\text{平移}} \overrightarrow{OM}$  : 以  $(x, y, z)$  作为向量  $\overrightarrow{AB}$  的坐标

注 三元数组  $(x, y, z)$  同时作为点  $M$  和向量  $\overrightarrow{AB}$  的坐标

性质 向量  $\overrightarrow{AB}$  的坐标为  $(x, y, z)$  当且仅当  $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ 。

**性质** 向量  $\overrightarrow{AB}$  的坐标为  $(x, y, z)$  当且仅当  $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ 。即

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) \iff \overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$

**性质** 向量  $\overrightarrow{AB}$  的坐标为  $(x, y, z)$  当且仅当  $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ 。即

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$

**证明**

- 必要性

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$

**性质** 向量  $\overrightarrow{AB}$  的坐标为  $(x, y, z)$  当且仅当  $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ 。即

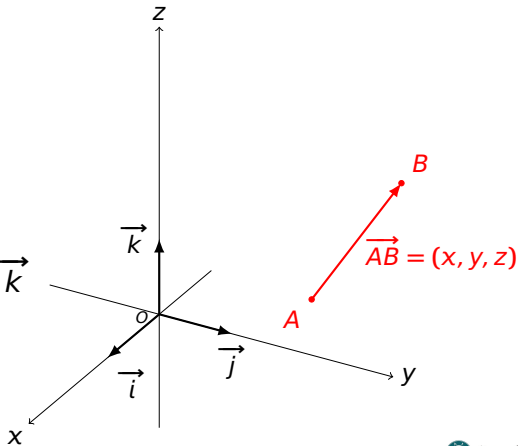
$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$

**证明**

• 必要性

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$



**性质** 向量  $\overrightarrow{AB}$  的坐标为  $(x, y, z)$  当且仅当  $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ 。即

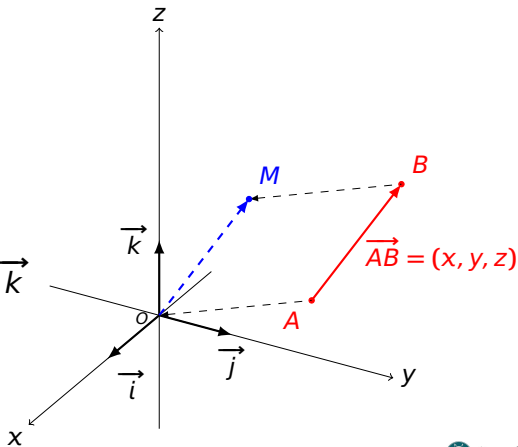
$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$

**证明**

• 必要性

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$



**性质** 向量  $\overrightarrow{AB}$  的坐标为  $(x, y, z)$  当且仅当  $\overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ 。即

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

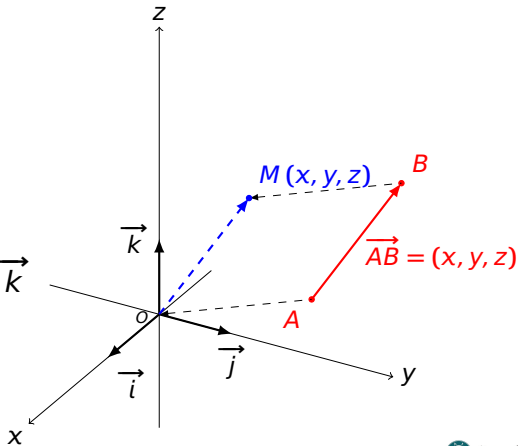
## 证明

### • 必要性

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$$

$\Rightarrow$  点  $M$  坐标为  $(x, y, z)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$





**性质** 向量  $\overrightarrow{AB}$  的坐标为  $(x, y, z)$  当且仅当  $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ 。即

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$

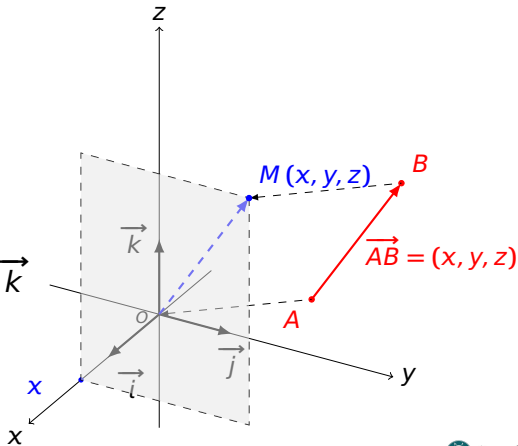
## 证明

- 必要性

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$$

$\Rightarrow$  点  $M$  坐标为  $(x, y, z)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$



**性质** 向量  $\overrightarrow{AB}$  的坐标为  $(x, y, z)$  当且仅当  $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ 。即

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$

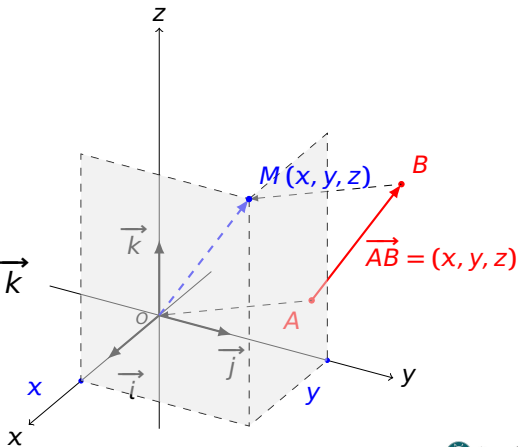
## 证明

### • 必要性

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$$

$\Rightarrow$  点  $M$  坐标为  $(x, y, z)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$



**性质** 向量  $\overrightarrow{AB}$  的坐标为  $(x, y, z)$  当且仅当  $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ 。即

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$

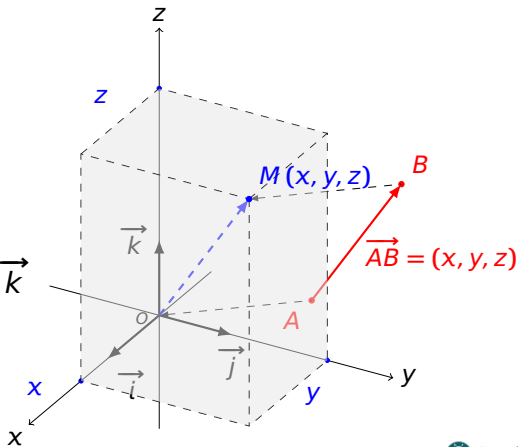
## 证明

### • 必要性

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$$

$\Rightarrow$  点  $M$  坐标为  $(x, y, z)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$



**性质** 向量  $\overrightarrow{AB}$  的坐标为  $(x, y, z)$  当且仅当  $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ 。即

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$

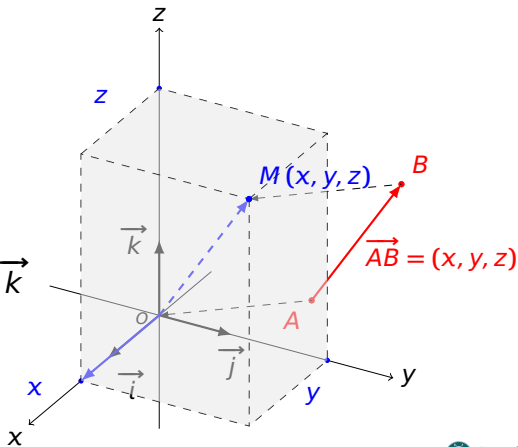
## 证明

### • 必要性

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$$

$\Rightarrow$  点  $M$  坐标为  $(x, y, z)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$



**性质** 向量  $\overrightarrow{AB}$  的坐标为  $(x, y, z)$  当且仅当  $\overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ 。即

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

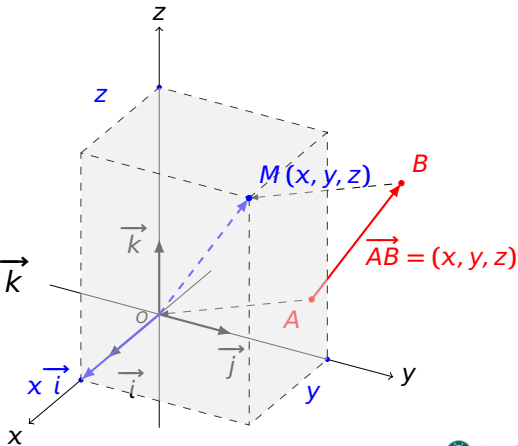
## 证明

### • 必要性

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$$

$\Rightarrow$  点  $M$  坐标为  $(x, y, z)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$



**性质** 向量  $\overrightarrow{AB}$  的坐标为  $(x, y, z)$  当且仅当  $\overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ 。即

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

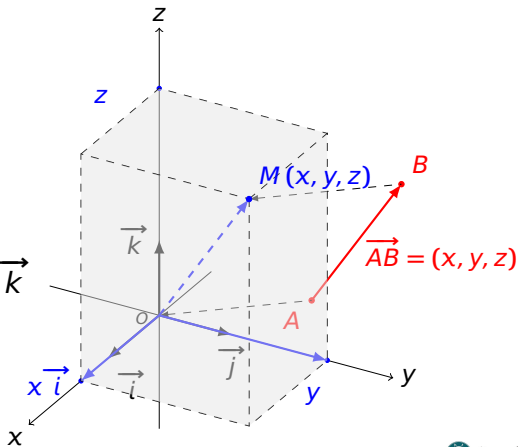
## 证明

### • 必要性

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$$

$\Rightarrow$  点  $M$  坐标为  $(x, y, z)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$



**性质** 向量  $\overrightarrow{AB}$  的坐标为  $(x, y, z)$  当且仅当  $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ 。即

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$

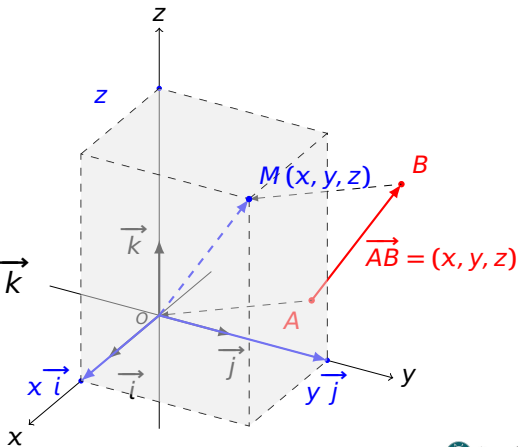
**证明**

• 必要性

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$$

$\Rightarrow$  点  $M$  坐标为  $(x, y, z)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$



**性质** 向量  $\overrightarrow{AB}$  的坐标为  $(x, y, z)$  当且仅当  $\overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ 。即

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

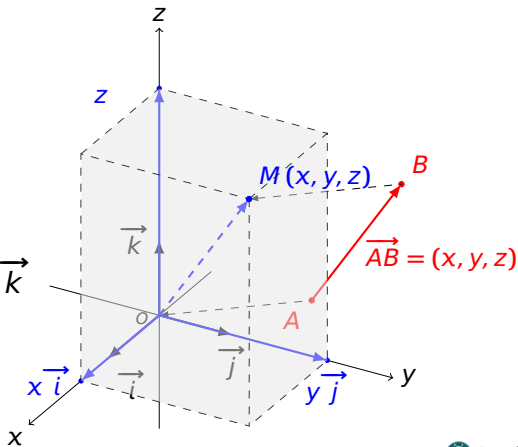
## 证明

### • 必要性

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$$

$\Rightarrow$  点  $M$  坐标为  $(x, y, z)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$





**性质** 向量  $\overrightarrow{AB}$  的坐标为  $(x, y, z)$  当且仅当  $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ 。即

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$

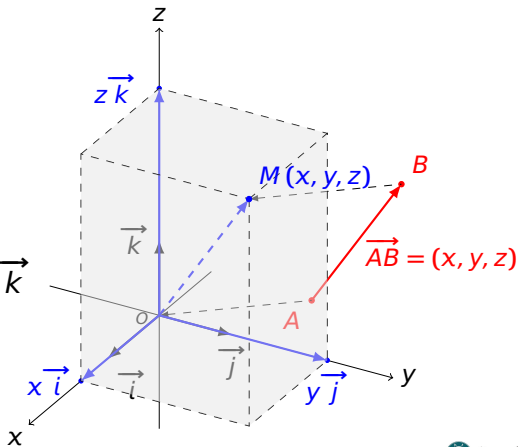
## 证明

### • 必要性

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$$

$\Rightarrow$  点  $M$  坐标为  $(x, y, z)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$



**性质** 向量  $\overrightarrow{AB}$  的坐标为  $(x, y, z)$  当且仅当  $\overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ 。即

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

## 证明

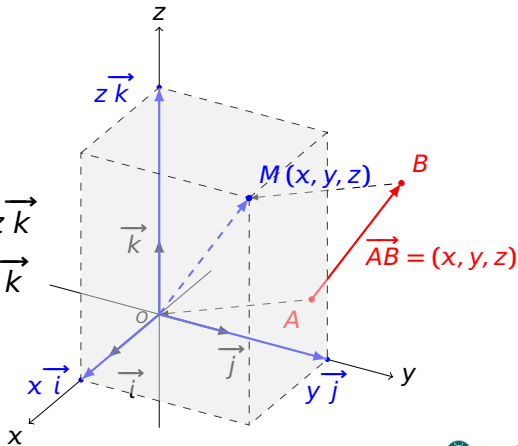
### • 必要性

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$$

$$\Rightarrow \text{点 } M \text{ 坐标为 } (x, y, z)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$



**性质** 向量  $\overrightarrow{AB}$  的坐标为  $(x, y, z)$  当且仅当  $\overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ 。即

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

## 证明

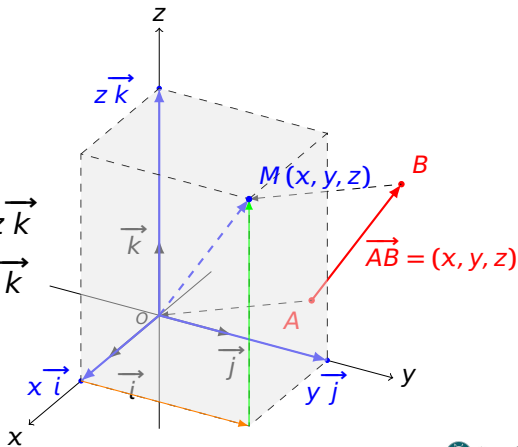
### • 必要性

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$$

$$\Rightarrow \text{点 } M \text{ 坐标为 } (x, y, z)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$



**性质** 向量  $\overrightarrow{AB}$  的坐标为  $(x, y, z)$  当且仅当  $\overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ 。即

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

## 证明

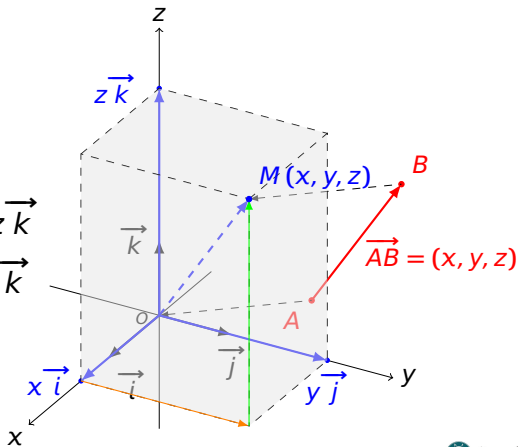
### • 必要性

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$$

$$\Rightarrow \text{点 } M \text{ 坐标为 } (x, y, z)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$



**性质** 向量  $\overrightarrow{AB}$  的坐标为  $(x, y, z)$  当且仅当  $\overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ 。即

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

## 证明

### • 必要性

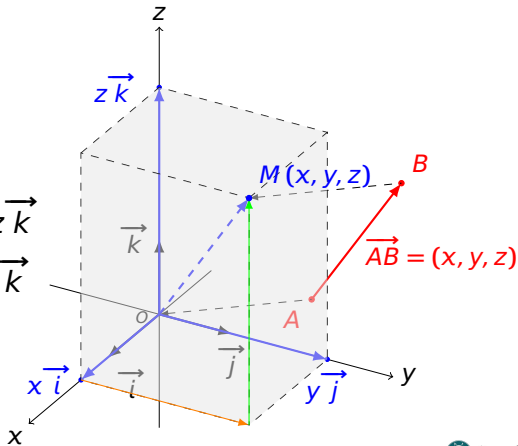
$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$$

$$\Rightarrow \text{点 } M \text{ 坐标为 } (x, y, z)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

### • 充分性：略



**性质** 向量  $\overrightarrow{AB}$  的坐标为  $(x, y, z)$  当且仅当  $\overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ 。即

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

**注** 以后直接写:  $\overrightarrow{AB} = (x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

**证明**

• 必要性

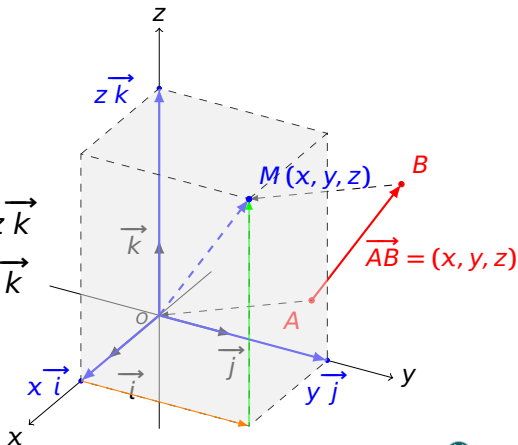
$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$$

$\Rightarrow$  点  $M$  坐标为  $(x, y, z)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

• 充分性: 略



例 设有两点  $A = (x_1, y_1, z_1)$  和  $B = (x_2, y_2, z_2)$ , 则

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

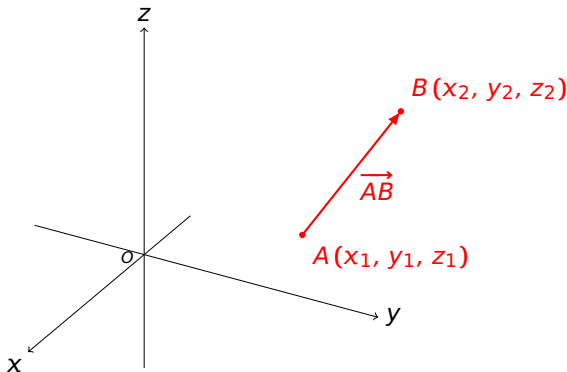
$O$

例 设有两点  $A = (x_1, y_1, z_1)$  和  $B = (x_2, y_2, z_2)$ , 则

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

证明 这是

$$\overrightarrow{AB} =$$



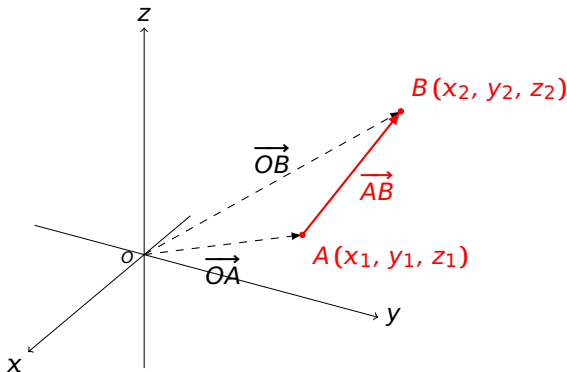


例 设有两点  $A = (x_1, y_1, z_1)$  和  $B = (x_2, y_2, z_2)$ , 则

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

证明 这是

$$\overrightarrow{AB} =$$

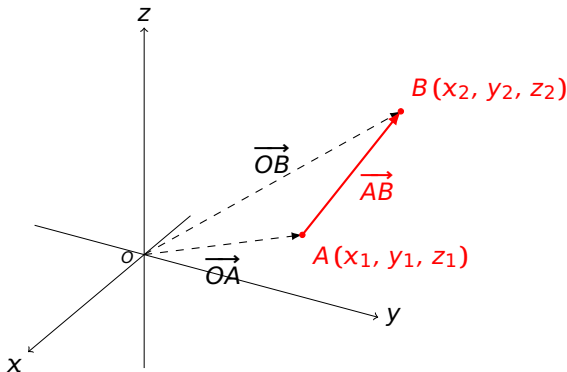


例 设有两点  $A = (x_1, y_1, z_1)$  和  $B = (x_2, y_2, z_2)$ , 则

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

证明 这是

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

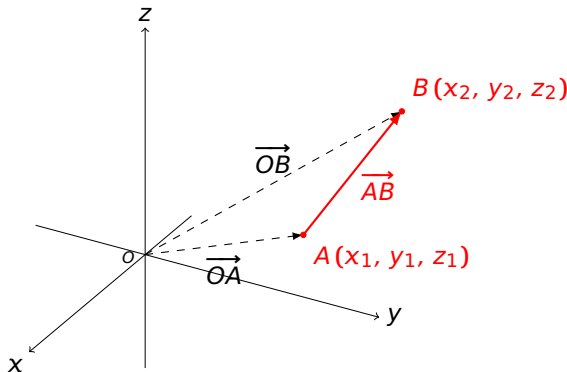


例 设有两点  $A = (x_1, y_1, z_1)$  和  $B = (x_2, y_2, z_2)$ , 则

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

证明 这是

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) - ( \quad )$$

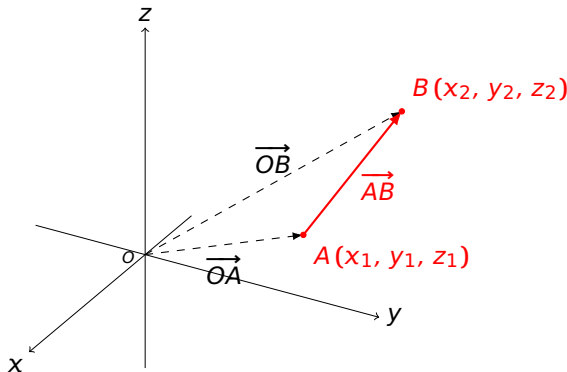


例 设有两点  $A = (x_1, y_1, z_1)$  和  $B = (x_2, y_2, z_2)$ , 则

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

证明 这是

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) - (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k})$$

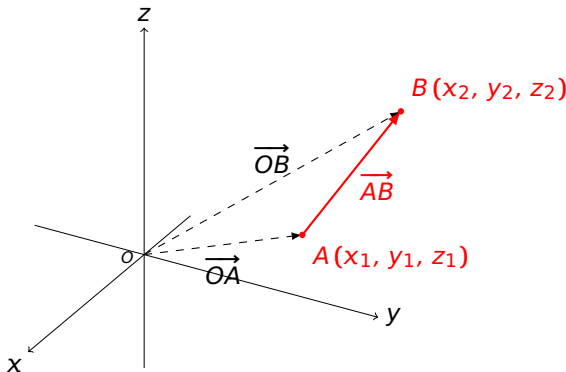


例 设有两点  $A = (x_1, y_1, z_1)$  和  $B = (x_2, y_2, z_2)$ , 则

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

证明 这是

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) - (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) \\ &= (x_2 - x_1) \vec{i} + (y_2 - y_1) \vec{j} + (z_2 - z_1) \vec{k}\end{aligned}$$



利用坐标值，可以方便地计算：

- 向量的线性运算
- 向量的长度
- 向量间的夹角
- 向量的投影

# 利用坐标值计算向量的线性运算

性质 设向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  和  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ , 设  $\lambda \in \mathbb{R}$ , 则

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

# 利用坐标值计算向量的线性运算

性质 设向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  和  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ , 设  $\lambda \in \mathbb{R}$ , 则

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

证明 这是

$$\vec{a} + \vec{b} =$$

$$\lambda \vec{a} =$$



# 利用坐标值计算向量的线性运算

**性质** 设向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  和  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ , 设  $\lambda \in \mathbb{R}$ , 则

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

**证明** 这是

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x, a_y, a_z) + (b_x, b_y, b_z)$$

$$\lambda \vec{a} =$$

# 利用坐标值计算向量的线性运算

**性质** 设向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  和  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ , 设  $\lambda \in \mathbb{R}$ , 则

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

**证明** 这是

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= (a_x, a_y, a_z) + (b_x, b_y, b_z) \\ &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) + (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k})\end{aligned}$$

$$\lambda \vec{a} =$$

# 利用坐标值计算向量的线性运算

**性质** 设向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  和  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ , 设  $\lambda \in \mathbb{R}$ , 则

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

**证明** 这是

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= (a_x, a_y, a_z) + (b_x, b_y, b_z) \\ &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) + (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) \\ &= (a_x + b_x) \vec{i} + (a_y + b_y) \vec{j} + (a_z + b_z) \vec{k}\end{aligned}$$

$$\lambda \vec{a} =$$

# 利用坐标值计算向量的线性运算

**性质** 设向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  和  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ , 设  $\lambda \in \mathbb{R}$ , 则

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

**证明** 这是

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= (a_x, a_y, a_z) + (b_x, b_y, b_z) \\ &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) + (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) \\ &= (a_x + b_x) \vec{i} + (a_y + b_y) \vec{j} + (a_z + b_z) \vec{k} \\ &= (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)\end{aligned}$$

$$\lambda \vec{a} =$$

## 利用坐标值计算向量的线性运算

**性质** 设向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  和  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ , 设  $\lambda \in \mathbb{R}$ , 则

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

**证明** 这是

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= (a_x, a_y, a_z) + (b_x, b_y, b_z) \\ &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) + (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) \\ &= (a_x + b_x) \vec{i} + (a_y + b_y) \vec{j} + (a_z + b_z) \vec{k} \\ &= (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)\end{aligned}$$

$$\lambda \vec{a} = \lambda(a_x, a_y, a_z)$$

## 利用坐标值计算向量的线性运算

**性质** 设向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  和  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ , 设  $\lambda \in \mathbb{R}$ , 则

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

**证明** 这是

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= (a_x, a_y, a_z) + (b_x, b_y, b_z) \\ &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) + (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) \\ &= (a_x + b_x) \vec{i} + (a_y + b_y) \vec{j} + (a_z + b_z) \vec{k} \\ &= (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)\end{aligned}$$

$$\lambda \vec{a} = \lambda(a_x, a_y, a_z) = \lambda(a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k})$$

# 利用坐标值计算向量的线性运算

**性质** 设向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  和  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ , 设  $\lambda \in \mathbb{R}$ , 则

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

**证明** 这是

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= (a_x, a_y, a_z) + (b_x, b_y, b_z) \\&= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) + (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) \\&= (a_x + b_x) \vec{i} + (a_y + b_y) \vec{j} + (a_z + b_z) \vec{k} \\&= (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda \vec{a} &= \lambda(a_x, a_y, a_z) = \lambda(a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \\&= \lambda a_x \vec{i} + \lambda a_y \vec{j} + \lambda a_z \vec{k}\end{aligned}$$

# 利用坐标值计算向量的线性运算

**性质** 设向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  和  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ , 设  $\lambda \in \mathbb{R}$ , 则

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

**证明** 这是

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= (a_x, a_y, a_z) + (b_x, b_y, b_z) \\ &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) + (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) \\ &= (a_x + b_x) \vec{i} + (a_y + b_y) \vec{j} + (a_z + b_z) \vec{k} \\ &= (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda \vec{a} &= \lambda(a_x, a_y, a_z) = \lambda(a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \\ &= \lambda a_x \vec{i} + \lambda a_y \vec{j} + \lambda a_z \vec{k} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)\end{aligned}$$



例 设向量  $\vec{a} = (7, -1, 10)$ ,  $\vec{b} = (2, 1, 2)$ , 向量  $\vec{x}$  满足  $\vec{a} = 2\vec{b} - 3\vec{x}$ 。求  $\vec{x}$

例 设向量  $\vec{a} = (7, -1, 10)$ ,  $\vec{b} = (2, 1, 2)$ , 向量  $\vec{x}$  满足  $\vec{a} = 2\vec{b} - 3\vec{x}$ 。求  $\vec{x}$

解

$$\vec{x} = \frac{1}{3}(2\vec{b} - \vec{a})$$

例 设向量  $\vec{a} = (7, -1, 10)$ ,  $\vec{b} = (2, 1, 2)$ , 向量  $\vec{x}$  满足  $\vec{a} = 2\vec{b} - 3\vec{x}$ 。求  $\vec{x}$

解

$$\vec{x} = \frac{1}{3}(2\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{3}[(4, 2, 4) - (7, -1, 10)]$$

例 设向量  $\vec{a} = (7, -1, 10)$ ,  $\vec{b} = (2, 1, 2)$ , 向量  $\vec{x}$  满足  $\vec{a} = 2\vec{b} - 3\vec{x}$ 。求  $\vec{x}$

解

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \frac{1}{3}(2\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{3}[(4, 2, 4) - (7, -1, 10)] \\ &= \frac{1}{3}(-3, 3, -6)\end{aligned}$$

例 设向量  $\vec{a} = (7, -1, 10)$ ,  $\vec{b} = (2, 1, 2)$ , 向量  $\vec{x}$  满足  $\vec{a} = 2\vec{b} - 3\vec{x}$ 。求  $\vec{x}$

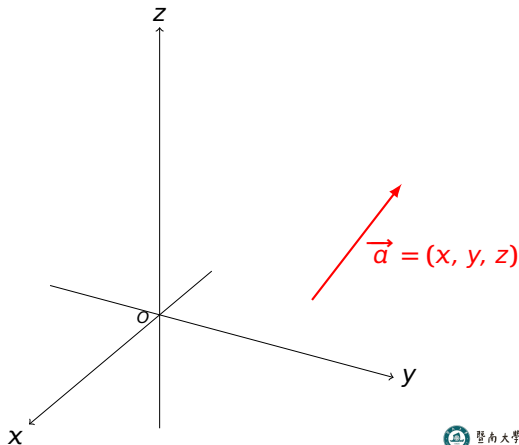
解

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \frac{1}{3}(2\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{3}[(4, 2, 4) - (7, -1, 10)] \\ &= \frac{1}{3}(-3, 3, -6) = (-1, 1, -2)\end{aligned}$$

# 利用坐标值计算向量的长度

性质 向量  $\vec{a} = (x, y, z)$  的长度是

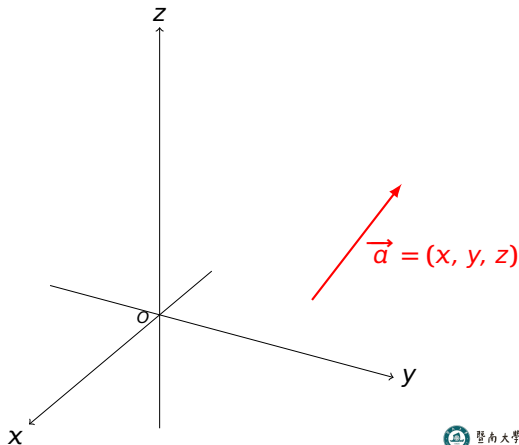
$$|\vec{a}| =$$



# 利用坐标值计算向量的长度

性质 向量  $\vec{a} = (x, y, z)$  的长度是

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

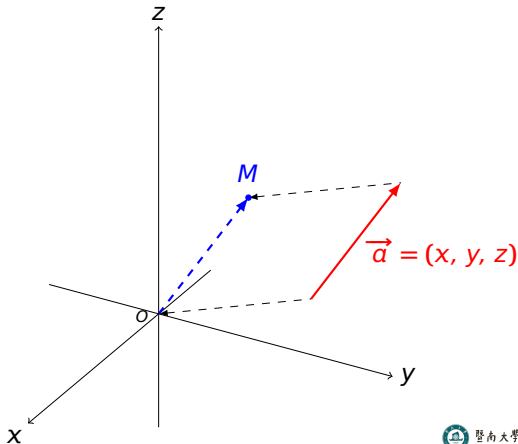


# 利用坐标值计算向量的长度

性质 向量  $\vec{a} = (x, y, z)$  的长度是

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

证明 如图, 平移  $\vec{a}$  得  $\overrightarrow{OM}$ ,





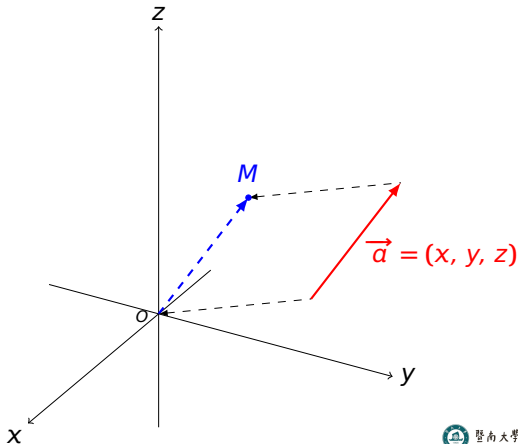
# 利用坐标值计算向量的长度

性质 向量  $\vec{a} = (x, y, z)$  的长度是

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

证明 如图, 平移  $\vec{a}$  得  $\overrightarrow{OM}$ , 则

$$|\vec{a}|^2 = |\overrightarrow{OM}|^2$$



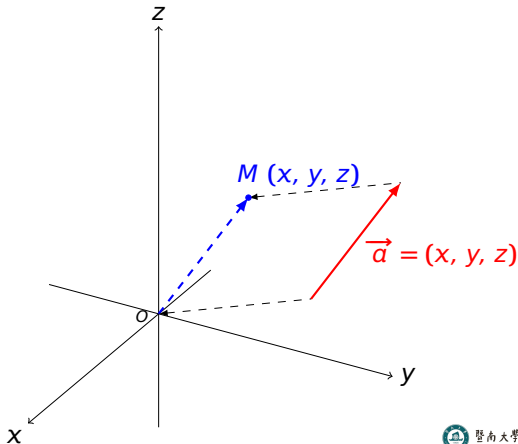
# 利用坐标值计算向量的长度

性质 向量  $\vec{a} = (x, y, z)$  的长度是

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

证明 如图, 平移  $\vec{a}$  得  $\overrightarrow{OM}$ , 则

$$|\vec{a}|^2 = |\overrightarrow{OM}|^2$$



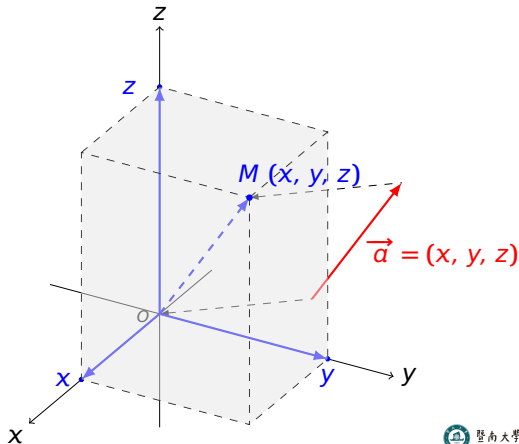
# 利用坐标值计算向量的长度

性质 向量  $\vec{a} = (x, y, z)$  的长度是

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

证明 如图, 平移  $\vec{a}$  得  $\overrightarrow{OM}$ , 则

$$|\vec{a}|^2 = |\overrightarrow{OM}|^2$$



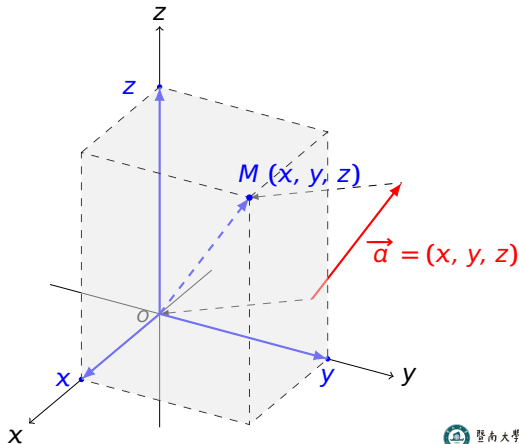
# 利用坐标值计算向量的长度

性质 向量  $\vec{a} = (x, y, z)$  的长度是

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

证明 如图, 平移  $\vec{a}$  得  $\overrightarrow{OM}$ , 则

$$|\vec{a}|^2 = |\overrightarrow{OM}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$$



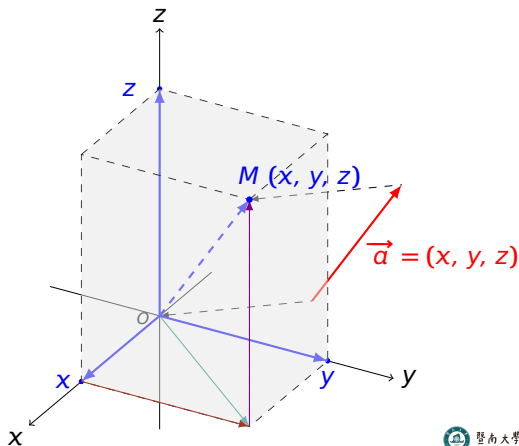
# 利用坐标值计算向量的长度

性质 向量  $\vec{a} = (x, y, z)$  的长度是

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

证明 如图, 平移  $\vec{a}$  得  $\overrightarrow{OM}$ , 则

$$|\vec{a}|^2 = |\overrightarrow{OM}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$$



性质 设点  $A(x_1, y_1, z_1)$  和  $B(x_2, y_2, z_2)$ , 则

$$|\overrightarrow{AB}| =$$

性质 设点  $A(x_1, y_1, z_1)$  和  $B(x_2, y_2, z_2)$ , 则

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

性质 设点  $A(x_1, y_1, z_1)$  和  $B(x_2, y_2, z_2)$ , 则

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

证明 这是

$$\overrightarrow{AB} =$$



性质 设点  $A(x_1, y_1, z_1)$  和  $B(x_2, y_2, z_2)$ , 则

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

证明 这是

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

性质 设点  $A(x_1, y_1, z_1)$  和  $B(x_2, y_2, z_2)$ , 则

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

证明 这是

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

性质 设点  $A(x_1, y_1, z_1)$  和  $B(x_2, y_2, z_2)$ , 则

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

证明 这是

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

---

例 设点  $A(4, 0, 5)$  和  $B(7, 1, 3)$ , 求  $|\overrightarrow{AB}|$  及  $e_{\overrightarrow{AB}}$ 。

性质 设点  $A(x_1, y_1, z_1)$  和  $B(x_2, y_2, z_2)$ , 则

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

证明 这是

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

---

例 设点  $A(4, 0, 5)$  和  $B(7, 1, 3)$ , 求  $|\overrightarrow{AB}|$  及  $e_{\overrightarrow{AB}}$ 。

解

$$\overrightarrow{AB} =$$

$$|\overrightarrow{AB}| =$$

$$e_{\overrightarrow{AB}} =$$

性质 设点  $A(x_1, y_1, z_1)$  和  $B(x_2, y_2, z_2)$ , 则

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

证明 这是

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

---

例 设点  $A(4, 0, 5)$  和  $B(7, 1, 3)$ , 求  $|\overrightarrow{AB}|$  及  $e_{\overrightarrow{AB}}$ 。

解

$$\overrightarrow{AB} = (7 - 4, 1 - 0, 3 - 5)$$

$$|\overrightarrow{AB}| =$$

$$e_{\overrightarrow{AB}} =$$

性质 设点  $A(x_1, y_1, z_1)$  和  $B(x_2, y_2, z_2)$ , 则

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

证明 这是

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

---

例 设点  $A(4, 0, 5)$  和  $B(7, 1, 3)$ , 求  $|\overrightarrow{AB}|$  及  $e_{\overrightarrow{AB}}$ 。

解

$$\overrightarrow{AB} = (7 - 4, 1 - 0, 3 - 5) = (3, 1, -2)$$

$$|\overrightarrow{AB}| =$$

$$e_{\overrightarrow{AB}} =$$

性质 设点  $A(x_1, y_1, z_1)$  和  $B(x_2, y_2, z_2)$ , 则

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

证明 这是

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

---

例 设点  $A(4, 0, 5)$  和  $B(7, 1, 3)$ , 求  $|\overrightarrow{AB}|$  及  $e_{\overrightarrow{AB}}$ 。

解

$$\overrightarrow{AB} = (7 - 4, 1 - 0, 3 - 5) = (3, 1, -2)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2}$$

$$e_{\overrightarrow{AB}} =$$

性质 设点  $A(x_1, y_1, z_1)$  和  $B(x_2, y_2, z_2)$ , 则

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

证明 这是

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

---

例 设点  $A(4, 0, 5)$  和  $B(7, 1, 3)$ , 求  $|\overrightarrow{AB}|$  及  $e_{\overrightarrow{AB}}$ 。

解

$$\overrightarrow{AB} = (7 - 4, 1 - 0, 3 - 5) = (3, 1, -2)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$$

$$e_{\overrightarrow{AB}} =$$



性质 设点  $A(x_1, y_1, z_1)$  和  $B(x_2, y_2, z_2)$ , 则

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

证明 这是

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

---

例 设点  $A(4, 0, 5)$  和  $B(7, 1, 3)$ , 求  $|\overrightarrow{AB}|$  及  $e_{\overrightarrow{AB}}$ 。

解

$$\overrightarrow{AB} = (7 - 4, 1 - 0, 3 - 5) = (3, 1, -2)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$$

$$e_{\overrightarrow{AB}} = \frac{1}{|\overrightarrow{AB}|} \overrightarrow{AB}$$

性质 设点  $A(x_1, y_1, z_1)$  和  $B(x_2, y_2, z_2)$ , 则

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

证明 这是

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

---

例 设点  $A(4, 0, 5)$  和  $B(7, 1, 3)$ , 求  $|\overrightarrow{AB}|$  及  $e_{\overrightarrow{AB}}$ 。

解

$$\overrightarrow{AB} = (7 - 4, 1 - 0, 3 - 5) = (3, 1, -2)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$$

$$e_{\overrightarrow{AB}} = \frac{1}{|\overrightarrow{AB}|} \overrightarrow{AB} = \frac{1}{\sqrt{14}}(3, 1, -2)$$

性质 设点  $A(x_1, y_1, z_1)$  和  $B(x_2, y_2, z_2)$ , 则

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

证明 这是

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

---

例 设点  $A(4, 0, 5)$  和  $B(7, 1, 3)$ , 求  $|\overrightarrow{AB}|$  及  $e_{\overrightarrow{AB}}$ 。

解

$$\overrightarrow{AB} = (7 - 4, 1 - 0, 3 - 5) = (3, 1, -2)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$$

$$e_{\overrightarrow{AB}} = \frac{1}{|\overrightarrow{AB}|} \overrightarrow{AB} = \frac{1}{\sqrt{14}} (3, 1, -2) = \left( \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}} \right)$$

# 利用坐标值计算向量的夹角

性质 设  $\theta$  为向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  和  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$  的夹角, 则

$$\cos \theta =$$

# 利用坐标值计算向量的夹角

性质 设  $\theta$  为向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  和  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$  的夹角, 则

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

## 利用坐标值计算向量的夹角

**性质** 设  $\theta$  为向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  和  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$  的夹角, 则

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

**证明** 由三角形余弦定理, 成立

$$\cos \theta = \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2}{2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

## 利用坐标值计算向量的夹角

**性质** 设  $\theta$  为向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  和  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$  的夹角, 则

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

**证明** 由三角形余弦定理, 成立

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2}{2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \\ &= \frac{(\quad) + (\quad) - [\quad]}{2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \end{aligned}$$

## 利用坐标值计算向量的夹角

**性质** 设  $\theta$  为向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  和  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$  的夹角, 则

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

**证明** 由三角形余弦定理, 成立

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2}{2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \\ &= \frac{(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2) + (b_x^2 + b_y^2 + b_z^2) - [(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 + (a_z - b_z)^2]}{2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \end{aligned}$$



## 利用坐标值计算向量的夹角

**性质** 设  $\theta$  为向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  和  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$  的夹角, 则

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

**证明** 由三角形余弦定理, 成立

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2}{2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \\ &= \frac{(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2) + (b_x^2 + b_y^2 + b_z^2) - \left[ \right]}{2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \end{aligned}$$

## 利用坐标值计算向量的夹角

**性质** 设  $\theta$  为向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  和  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$  的夹角, 则

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

**证明** 由三角形余弦定理, 成立

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2}{2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \\ &= \frac{(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2) + (b_x^2 + b_y^2 + b_z^2) - [(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 + (a_z - b_z)^2]}{2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \end{aligned}$$

# 利用坐标值计算向量的夹角

**性质** 设  $\theta$  为向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  和  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$  的夹角, 则

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

**证明** 由三角形余弦定理, 成立

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2}{2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \\ &= \frac{(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2) + (b_x^2 + b_y^2 + b_z^2) - [(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 + (a_z - b_z)^2]}{2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \\ &= \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \end{aligned}$$

## 利用坐标值计算向量的夹角

**性质** 设  $\theta$  为向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  和  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$  的夹角, 则

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

**证明** 由三角形余弦定理, 成立

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2}{2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \\ &= \frac{(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2) + (b_x^2 + b_y^2 + b_z^2) - [(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 + (a_z - b_z)^2]}{2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \\ &= \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \end{aligned}$$

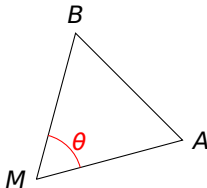
**例** 设有三点  $M(1, 1, 1)$ ,  $A(2, 2, 1)$ ,  $B(2, 1, 2)$ , 计算角  $\theta = \angle AMB$ 。

## 利用坐标值计算向量的夹角

**性质** 设  $\theta$  为向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  和  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$  的夹角, 则

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

**例** 设有三点  $M(1, 1, 1)$ ,  $A(2, 2, 1)$ ,  $B(2, 1, 2)$ , 计算角  $\theta = \angle AMB$ .

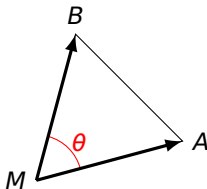


## 利用坐标值计算向量的夹角

**性质** 设  $\theta$  为向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  和  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$  的夹角, 则

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

**例** 设有三点  $M(1, 1, 1)$ ,  $A(2, 2, 1)$ ,  $B(2, 1, 2)$ , 计算角  $\theta = \angle AMB$ 。

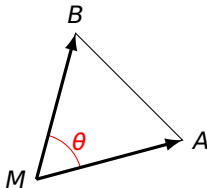


## 利用坐标值计算向量的夹角

**性质** 设  $\theta$  为向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  和  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$  的夹角, 则

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

**例** 设有三点  $M(1, 1, 1)$ ,  $A(2, 2, 1)$ ,  $B(2, 1, 2)$ , 计算角  $\theta = \angle AMB$ 。



**解**

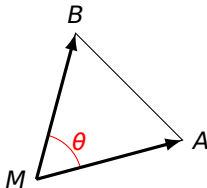
$$\vec{MA} = ( \quad ), \quad \vec{MB} = ( \quad )$$

## 利用坐标值计算向量的夹角

**性质** 设  $\theta$  为向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  和  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$  的夹角, 则

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

**例** 设有三点  $M(1, 1, 1)$ ,  $A(2, 2, 1)$ ,  $B(2, 1, 2)$ , 计算角  $\theta = \angle AMB$ 。



**解**

$$\vec{MA} = (1, 1, 0), \quad \vec{MB} = ( \quad \quad )$$

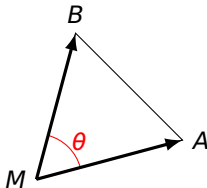


## 利用坐标值计算向量的夹角

**性质** 设  $\theta$  为向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  和  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$  的夹角, 则

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

**例** 设有三点  $M(1, 1, 1)$ ,  $A(2, 2, 1)$ ,  $B(2, 1, 2)$ , 计算角  $\theta = \angle AMB$ .



**解**

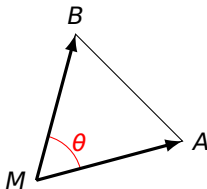
$$\vec{MA} = (1, 1, 0), \quad \vec{MB} = (1, 0, 1)$$

## 利用坐标值计算向量的夹角

性质 设  $\theta$  为向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  和  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$  的夹角, 则

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

例 设有三点  $M(1, 1, 1)$ ,  $A(2, 2, 1)$ ,  $B(2, 1, 2)$ , 计算角  $\theta = \angle AMB$ .



解

$$\vec{MA} = (1, 1, 0), \quad \vec{MB} = (1, 0, 1)$$

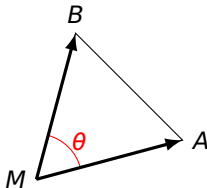
$$\Rightarrow \cos \theta = \underline{\hspace{2cm}}$$

## 利用坐标值计算向量的夹角

**性质** 设  $\theta$  为向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  和  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$  的夹角, 则

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

**例** 设有三点  $M(1, 1, 1)$ ,  $A(2, 2, 1)$ ,  $B(2, 1, 2)$ , 计算角  $\theta = \angle AMB$ .



**解**

$$\vec{MA} = (1, 1, 0), \quad \vec{MB} = (1, 0, 1)$$

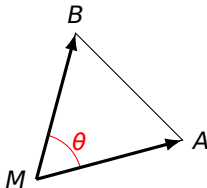
$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1}{\phantom{1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1}}$$

## 利用坐标值计算向量的夹角

**性质** 设  $\theta$  为向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  和  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$  的夹角, 则

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

**例** 设有三点  $M(1, 1, 1)$ ,  $A(2, 2, 1)$ ,  $B(2, 1, 2)$ , 计算角  $\theta = \angle AMB$ .



**解**

$$\vec{MA} = (1, 1, 0), \quad \vec{MB} = (1, 0, 1)$$

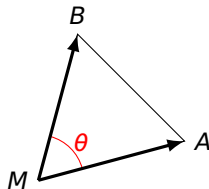
$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}}.$$

## 利用坐标值计算向量的夹角

**性质** 设  $\theta$  为向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  和  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$  的夹角, 则

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

**例** 设有三点  $M(1, 1, 1)$ ,  $A(2, 2, 1)$ ,  $B(2, 1, 2)$ , 计算角  $\theta = \angle AMB$ .



**解**

$$\vec{MA} = (1, 1, 0), \quad \vec{MB} = (1, 0, 1)$$

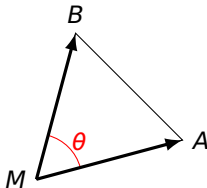
$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}}$$

## 利用坐标值计算向量的夹角

**性质** 设  $\theta$  为向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  和  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$  的夹角, 则

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

**例** 设有三点  $M(1, 1, 1)$ ,  $A(2, 2, 1)$ ,  $B(2, 1, 2)$ , 计算角  $\theta = \angle AMB$ .



**解**

$$\vec{MA} = (1, 1, 0), \quad \vec{MB} = (1, 0, 1)$$

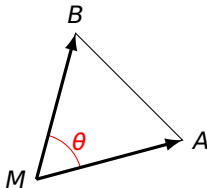
$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{2}$$

## 利用坐标值计算向量的夹角

**性质** 设  $\theta$  为向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  和  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$  的夹角, 则

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

**例** 设有三点  $M(1, 1, 1)$ ,  $A(2, 2, 1)$ ,  $B(2, 1, 2)$ , 计算角  $\theta = \angle AMB$ .



**解**

$$\vec{MA} = (1, 1, 0), \quad \vec{MB} = (1, 0, 1)$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

# 利用坐标值计算向量的投影

性质 设向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  和  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ , 则

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} =$$



# 利用坐标值计算向量的投影

性质 设向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  和  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ , 则

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{b}|}.$$

# 利用坐标值计算向量的投影

性质 设向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  和  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ , 则

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{b}|}.$$

证明 这是

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \theta$$

# 利用坐标值计算向量的投影

性质 设向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  和  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ , 则

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{b}|}.$$

证明 这是

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \theta = |\vec{a}| \cdot \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

## 利用坐标值计算向量的投影

性质 设向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  和  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ , 则

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{b}|}.$$

证明 这是

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \theta = |\vec{a}| \cdot \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{b}|}.$$

## 利用坐标值计算向量的投影

**性质** 设向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  和  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ , 则

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{b}|}.$$

**证明** 这是

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \theta = |\vec{a}| \cdot \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{b}|}.$$

**例** 设  $\vec{a} = (1, -3, 2)$ ,  $\vec{b} = (-2, 0, 3)$ , 计算投影  $\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a}$ 。

# 利用坐标值计算向量的投影

**性质** 设向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  和  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ , 则

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{b}|}.$$

**证明** 这是

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \theta = |\vec{a}| \cdot \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{b}|}.$$

**例** 设  $\vec{a} = (1, -3, 2)$ ,  $\vec{b} = (-2, 0, 3)$ , 计算投影  $\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a}$ 。

**解**

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \underline{\hspace{4cm}}$$

## 利用坐标值计算向量的投影

**性质** 设向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  和  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ , 则

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{b}|}.$$

**证明** 这是

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \theta = |\vec{a}| \cdot \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{b}|}.$$

**例** 设  $\vec{a} = (1, -3, 2)$ ,  $\vec{b} = (-2, 0, 3)$ , 计算投影  $\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a}$ 。

**解**

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{1 \cdot (-2) + (-3) \cdot 0 + 2 \cdot 3}{|\vec{b}|}$$

# 利用坐标值计算向量的投影

**性质** 设向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  和  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ , 则

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{b}|}.$$

**证明** 这是

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \theta = |\vec{a}| \cdot \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{b}|}.$$

**例** 设  $\vec{a} = (1, -3, 2)$ ,  $\vec{b} = (-2, 0, 3)$ , 计算投影  $\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a}$ 。

**解**

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{1 \cdot (-2) + (-3) \cdot 0 + 2 \cdot 3}{\sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 3^2}}$$



# 利用坐标值计算向量的投影

**性质** 设向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  和  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ , 则

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{b}|}.$$

**证明** 这是

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \theta = |\vec{a}| \cdot \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{b}|}.$$

**例** 设  $\vec{a} = (1, -3, 2)$ ,  $\vec{b} = (-2, 0, 3)$ , 计算投影  $\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a}$ 。

**解**

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{1 \cdot (-2) + (-3) \cdot 0 + 2 \cdot 3}{\sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 3^2}} = \frac{4}{\sqrt{13}}.$$

# We are here now...

---

◆ 向量的基本概念

♣ 向量的坐标表示

♥ 向量的数量积

♠ 向量的向量积

# 向量的数量积

---

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{b}|}$$

# 向量的数量积

---

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

---

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{b}|}$$

# 向量的数量积

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

注 求夹角、投影的公式可以改写为

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{b}|}$$

# 向量的数量积

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

注 求夹角、投影的公式可以改写为

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$$

## 向量的数量积

**定义** 设向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  和  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ , 定义  $\vec{a}$  和  $\vec{b}$  数量积为:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

**注** 求夹角、投影的公式可以改写为

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$$

## 向量的数量积

**定义** 设向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  和  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ , 定义  $\vec{a}$  和  $\vec{b}$  数量积为:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

**注** 求夹角、投影的公式可以改写为

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$$

**性质**  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \theta$



## 向量的数量积

**定义** 设向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  和  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ , 定义  $\vec{a}$  和  $\vec{b}$  数量积为:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

**注** 求夹角、投影的公式可以改写为

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$$

**性质**  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \theta$ , 特别地

$$\vec{a} \cdot \vec{a} =$$

## 向量的数量积

**定义** 设向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  和  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ , 定义  $\vec{a}$  和  $\vec{b}$  数量积为:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

**注** 求夹角、投影的公式可以改写为

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$$

**性质**  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \theta$ , 特别地

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

# 向量的数量积

**定义** 设向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  和  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ , 定义  $\vec{a}$  和  $\vec{b}$  数量积为:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

**注** 求夹角、投影的公式可以改写为

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$
$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$$

**性质**  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \theta$ , 特别地

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

## 向量的数量积

**定义** 设向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  和  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ , 定义  $\vec{a}$  和  $\vec{b}$  数量积为:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

**注** 求夹角、投影的公式可以改写为

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$
$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$$

**性质**  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \theta$ , 特别地

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2, \quad \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

例 设空间中三个点  $C(1, -1, 2)$ ,  $A(3, 3, 1)$ ,  $B(3, 1, 3)$ 。令  $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$ ,  $\theta = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ 。求  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ,  $\theta$ ,  $\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a}$ 。

例 设空间中三个点  $C(1, -1, 2)$ ,  $A(3, 3, 1)$ ,  $B(3, 1, 3)$ 。令  $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$ ,  $\theta = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ 。求  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ,  $\theta$ ,  $\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a}$ 。

解 1.  $\vec{a} = \overrightarrow{CA} = (2, 4, -1)$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{CB} = (2, 2, 1)$

例 设空间中三个点  $C(1, -1, 2)$ ,  $A(3, 3, 1)$ ,  $B(3, 1, 3)$ 。令  $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$ ,  $\theta = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ 。求  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ,  $\theta$ ,  $\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a}$ 。

解 1.  $\vec{a} = \overrightarrow{CA} = (2, 4, -1)$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{CB} = (2, 2, 1)$

2.  $\vec{a} \cdot \vec{b} =$

3.  $\cos \theta =$

4.  $\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} =$

例 设空间中三个点  $C(1, -1, 2)$ ,  $A(3, 3, 1)$ ,  $B(3, 1, 3)$ 。令  $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$ ,  $\theta = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ 。求  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ,  $\theta$ ,  $\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a}$ 。

解 1.  $\vec{a} = \overrightarrow{CA} = (2, 4, -1)$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{CB} = (2, 2, 1)$

2.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 = 11$

3.  $\cos \theta =$

4.  $\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} =$



例 设空间中三个点  $C(1, -1, 2)$ ,  $A(3, 3, 1)$ ,  $B(3, 1, 3)$ 。令  $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$ ,  $\theta = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ 。求  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ,  $\theta$ ,  $\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a}$ 。

解 1.  $\vec{a} = \overrightarrow{CA} = (2, 4, -1)$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{CB} = (2, 2, 1)$

2.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 = 11$

3.  $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

4.  $\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$

例 设空间中三个点  $C(1, -1, 2)$ ,  $A(3, 3, 1)$ ,  $B(3, 1, 3)$ 。令  $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$ ,  $\theta = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ 。求  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ,  $\theta$ ,  $\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a}$ 。

解 1.  $\vec{a} = \overrightarrow{CA} = (2, 4, -1)$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{CB} = (2, 2, 1)$

2.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 = 11$

3.  $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{11}{3\sqrt{21}}$

4.  $\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$

例 设空间中三个点  $C(1, -1, 2)$ ,  $A(3, 3, 1)$ ,  $B(3, 1, 3)$ 。令  $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$ ,  $\theta = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ 。求  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ,  $\theta$ ,  $\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a}$ 。

解 1.  $\vec{a} = \overrightarrow{CA} = (2, 4, -1)$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{CB} = (2, 2, 1)$

2.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 = 11$

3.  $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{11}{3\sqrt{21}}$

4.  $\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{11}{3}$

例 设空间中三个点  $C(1, -1, 2)$ ,  $A(3, 3, 1)$ ,  $B(3, 1, 3)$ 。令  $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$ ,  $\theta = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ 。求  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ,  $\theta$ ,  $\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a}$ 。

解 1.  $\vec{a} = \overrightarrow{CA} = (2, 4, -1)$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{CB} = (2, 2, 1)$

2.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 = 11$

3.  $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{11}{3\sqrt{21}}$ , 所以  $\theta = \arccos \frac{11}{3\sqrt{21}} \approx 36.9^\circ$

4.  $\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{11}{3}$

# 数量积的运算律

---

交换律  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

分配律  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

结合律  $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$

# 数量积的运算律

交换律  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

分配律  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

结合律  $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$

**证明** 设  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ,  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ ,  $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$ , 则

# 数量积的运算律

交换律  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

分配律  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

结合律  $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$

**证明** 设  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ,  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ ,  $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$ , 则

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = b_x a_x + b_y a_y + b_z a_z = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

# 数量积的运算律

交换律  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

分配律  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

结合律  $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$

**证明** 设  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ,  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ ,  $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$ , 则

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \qquad \vec{b} \cdot \vec{a}$$



# 数量积的运算律

交换律  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

分配律  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

结合律  $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$

**证明** 设  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ,  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ ,  $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$ , 则

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad b_x a_x + b_y a_y + b_z a_z = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

# 数量积的运算律

交换律  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

分配律  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

结合律  $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$

**证明** 设  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ,  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ ,  $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$ , 则

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = b_x a_x + b_y a_y + b_z a_z = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

# 数量积的运算律

交换律  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

分配律  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

结合律  $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$

**证明** 设  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ,  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ ,  $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$ , 则

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = b_x a_x + b_y a_y + b_z a_z = \vec{b} \cdot \vec{a}$$
$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

# 数量积的运算律

交换律  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

分配律  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

结合律  $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$

**证明** 设  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ,  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ ,  $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$ , 则

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = b_x a_x + b_y a_y + b_z a_z = \vec{b} \cdot \vec{a}$$
$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

$$\begin{aligned} & a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z + b_x c_x + b_y c_y + b_z c_z \\ &= \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} \end{aligned}$$

# 数量积的运算律

交换律  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

分配律  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

结合律  $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$

**证明** 设  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ,  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ ,  $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$ , 则

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = b_x a_x + b_y a_y + b_z a_z = \vec{b} \cdot \vec{a}$$
$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z) \cdot (c_x, c_y, c_z)$$

$$\begin{aligned} & a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z + b_x c_x + b_y c_y + b_z c_z \\ &= \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} \end{aligned}$$

# 数量积的运算律

交换律  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

分配律  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

结合律  $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$

**证明** 设  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ,  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ ,  $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$ , 则

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = b_x a_x + b_y a_y + b_z a_z = \vec{b} \cdot \vec{a} \\ (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} &= (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z) \cdot (c_x, c_y, c_z) \\ &= (a_x + b_x)c_x + (a_y + b_y)c_y + (a_z + b_z)c_z \\ &\quad a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z + b_x c_x + b_y c_y + b_z c_z \\ &= \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}\end{aligned}$$

# 数量积的运算律

交换律  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

分配律  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

结合律  $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$

**证明** 设  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ,  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ ,  $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$ , 则

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = b_x a_x + b_y a_y + b_z a_z = \vec{b} \cdot \vec{a} \\ (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} &= (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z) \cdot (c_x, c_y, c_z) \\ &= (a_x + b_x)c_x + (a_y + b_y)c_y + (a_z + b_z)c_z \\ &= a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z + b_x c_x + b_y c_y + b_z c_z \\ &= \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}\end{aligned}$$

例 已知  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 4$ , 若  $\vec{a} + \lambda \vec{b}$  与  $\vec{a} - \lambda \vec{b}$  互相垂直, 则  $\lambda =$  \_\_\_\_\_。



例 已知  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 4$ , 若  $\vec{a} + \lambda \vec{b}$  与  $\vec{a} - \lambda \vec{b}$  互相垂直, 则  $\lambda =$  \_\_\_\_\_。

解

$$0 = (\vec{a} + \lambda \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \lambda \vec{b})$$

例 已知  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 4$ , 若  $\vec{a} + \lambda \vec{b}$  与  $\vec{a} - \lambda \vec{b}$  互相垂直, 则  $\lambda =$  \_\_\_\_\_。

解

$$\begin{aligned} 0 &= (\vec{a} + \lambda \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \lambda \vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot (-\lambda \vec{b}) + (\lambda \vec{b}) \cdot \vec{a} + (\lambda \vec{b}) \cdot (-\lambda \vec{b}) \end{aligned}$$

例 已知  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 4$ , 若  $\vec{a} + \lambda \vec{b}$  与  $\vec{a} - \lambda \vec{b}$  互相垂直, 则  $\lambda =$  \_\_\_\_\_。

解

$$\begin{aligned} 0 &= (\vec{a} + \lambda \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \lambda \vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot (-\lambda \vec{b}) + (\lambda \vec{b}) \cdot \vec{a} + (\lambda \vec{b}) \cdot (-\lambda \vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} - \lambda \vec{a} \cdot \vec{b} + \lambda \vec{b} \cdot \vec{a} - \lambda^2 \vec{b} \cdot \vec{b} \end{aligned}$$

例 已知  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 4$ , 若  $\vec{a} + \lambda \vec{b}$  与  $\vec{a} - \lambda \vec{b}$  互相垂直, 则  $\lambda =$  \_\_\_\_\_。

解

$$\begin{aligned} 0 &= (\vec{a} + \lambda \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \lambda \vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot (-\lambda \vec{b}) + (\lambda \vec{b}) \cdot \vec{a} + (\lambda \vec{b}) \cdot (-\lambda \vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} - \lambda \vec{a} \cdot \vec{b} + \lambda \vec{b} \cdot \vec{a} - \lambda^2 \vec{b} \cdot \vec{b} \\ &= |\vec{a}|^2 - \lambda^2 |\vec{b}|^2 \end{aligned}$$

例 已知  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 4$ , 若  $\vec{a} + \lambda \vec{b}$  与  $\vec{a} - \lambda \vec{b}$  互相垂直, 则  $\lambda =$  \_\_\_\_\_。

解

$$\begin{aligned} 0 &= (\vec{a} + \lambda \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \lambda \vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot (-\lambda \vec{b}) + (\lambda \vec{b}) \cdot \vec{a} + (\lambda \vec{b}) \cdot (-\lambda \vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} - \lambda \vec{a} \cdot \vec{b} + \lambda \vec{b} \cdot \vec{a} - \lambda^2 \vec{b} \cdot \vec{b} \\ &= |\vec{a}|^2 - \lambda^2 |\vec{b}|^2 \end{aligned}$$

所以

$$\lambda^2 = \frac{|\vec{a}|^2}{|\vec{b}|^2}$$

例 已知  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 4$ , 若  $\vec{a} + \lambda \vec{b}$  与  $\vec{a} - \lambda \vec{b}$  互相垂直, 则  $\lambda =$  \_\_\_\_\_。

解

$$\begin{aligned} 0 &= (\vec{a} + \lambda \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \lambda \vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot (-\lambda \vec{b}) + (\lambda \vec{b}) \cdot \vec{a} + (\lambda \vec{b}) \cdot (-\lambda \vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} - \lambda \vec{a} \cdot \vec{b} + \lambda \vec{b} \cdot \vec{a} - \lambda^2 \vec{b} \cdot \vec{b} \\ &= |\vec{a}|^2 - \lambda^2 |\vec{b}|^2 \end{aligned}$$

所以

$$\lambda^2 = \frac{|\vec{a}|^2}{|\vec{b}|^2} = \frac{2^2}{4^2} = \frac{1}{4}$$

例 已知  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 4$ , 若  $\vec{a} + \lambda \vec{b}$  与  $\vec{a} - \lambda \vec{b}$  互相垂直, 则  $\lambda =$  \_\_\_\_\_。

解

$$\begin{aligned} 0 &= (\vec{a} + \lambda \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \lambda \vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot (-\lambda \vec{b}) + (\lambda \vec{b}) \cdot \vec{a} + (\lambda \vec{b}) \cdot (-\lambda \vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} - \lambda \vec{a} \cdot \vec{b} + \lambda \vec{b} \cdot \vec{a} - \lambda^2 \vec{b} \cdot \vec{b} \\ &= |\vec{a}|^2 - \lambda^2 |\vec{b}|^2 \end{aligned}$$

所以

$$\lambda^2 = \frac{|\vec{a}|^2}{|\vec{b}|^2} = \frac{2^2}{4^2} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm \frac{1}{2}.$$

# 方向角

---

定义 向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  的三个方向角:

$\alpha$ :

$\beta$ :

$\gamma$ :



# 方向角

---

定义 向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  的三个方向角:

$\alpha$ :  $\vec{a}$  与  $x$  轴正向的夹角,

$\beta$ :

$\gamma$ :

# 方向角

定义 向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  的三个方向角:

$\alpha$ :  $\vec{a}$  与  $x$  轴正向的夹角,

$\beta$ :  $\vec{a}$  与  $y$  轴正向的夹角,

$\gamma$ :

# 方向角

定义 向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  的三个方向角:

$\alpha$ :  $\vec{a}$  与  $x$  轴正向的夹角,

$\beta$ :  $\vec{a}$  与  $y$  轴正向的夹角,

$\gamma$ :  $\vec{a}$  与  $z$  轴正向的夹角,

# 方向角

定义 向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  的三个方向角:

$\alpha$ :  $\vec{a}$  与  $x$  轴正向的夹角, 即  $\alpha = \angle(\vec{a}, \vec{i})$

$\beta$ :  $\vec{a}$  与  $y$  轴正向的夹角, 即  $\beta = \angle(\vec{a}, \vec{j})$

$\gamma$ :  $\vec{a}$  与  $z$  轴正向的夹角, 即  $\gamma = \angle(\vec{a}, \vec{k})$

# 方向角

定义 向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  的三个方向角:

$\alpha$ :  $\vec{a}$  与  $x$  轴正向的夹角, 即  $\alpha = \angle(\vec{a}, \vec{i})$

$\beta$ :  $\vec{a}$  与  $y$  轴正向的夹角, 即  $\beta = \angle(\vec{a}, \vec{j})$

$\gamma$ :  $\vec{a}$  与  $z$  轴正向的夹角, 即  $\gamma = \angle(\vec{a}, \vec{k})$

## 方向角的计算

$$\cos \alpha =$$

$$\cos \beta =$$

$$\cos \gamma =$$

# 方向角

定义 向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  的三个方向角:

$\alpha$ :  $\vec{a}$  与  $x$  轴正向的夹角, 即  $\alpha = \angle(\vec{a}, \vec{i})$

$\beta$ :  $\vec{a}$  与  $y$  轴正向的夹角, 即  $\beta = \angle(\vec{a}, \vec{j})$

$\gamma$ :  $\vec{a}$  与  $z$  轴正向的夹角, 即  $\gamma = \angle(\vec{a}, \vec{k})$

方向角的计算

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{i}|}$$

$$\cos \beta =$$

$$\cos \gamma =$$

# 方向角

定义 向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  的三个方向角:

$\alpha$ :  $\vec{a}$  与  $x$  轴正向的夹角, 即  $\alpha = \angle(\vec{a}, \vec{i})$

$\beta$ :  $\vec{a}$  与  $y$  轴正向的夹角, 即  $\beta = \angle(\vec{a}, \vec{j})$

$\gamma$ :  $\vec{a}$  与  $z$  轴正向的夹角, 即  $\gamma = \angle(\vec{a}, \vec{k})$

方向角的计算

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{i}|}$$

$$\cos \beta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{j}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{j}|}$$

$$\cos \gamma =$$

# 方向角

定义 向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  的三个方向角:

$\alpha$ :  $\vec{a}$  与  $x$  轴正向的夹角, 即  $\alpha = \angle(\vec{a}, \vec{i})$

$\beta$ :  $\vec{a}$  与  $y$  轴正向的夹角, 即  $\beta = \angle(\vec{a}, \vec{j})$

$\gamma$ :  $\vec{a}$  与  $z$  轴正向的夹角, 即  $\gamma = \angle(\vec{a}, \vec{k})$

方向角的计算

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{i}|}$$

$$\cos \beta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{j}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{j}|}$$

$$\cos \gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{k}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{k}|}$$



# 方向角

定义 向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  的三个方向角:

$\alpha$ :  $\vec{a}$  与  $x$  轴正向的夹角, 即  $\alpha = \angle(\vec{a}, \vec{i})$

$\beta$ :  $\vec{a}$  与  $y$  轴正向的夹角, 即  $\beta = \angle(\vec{a}, \vec{j})$

$\gamma$ :  $\vec{a}$  与  $z$  轴正向的夹角, 即  $\gamma = \angle(\vec{a}, \vec{k})$

方向角的计算

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{i}|} = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{j}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{j}|}$$

$$\cos \gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{k}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{k}|}$$

# 方向角

定义 向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  的三个方向角:

$\alpha$ :  $\vec{a}$  与  $x$  轴正向的夹角, 即  $\alpha = \angle(\vec{a}, \vec{i})$

$\beta$ :  $\vec{a}$  与  $y$  轴正向的夹角, 即  $\beta = \angle(\vec{a}, \vec{j})$

$\gamma$ :  $\vec{a}$  与  $z$  轴正向的夹角, 即  $\gamma = \angle(\vec{a}, \vec{k})$

方向角的计算

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{i}|} = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{j}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{j}|} = \frac{a_y}{|\vec{a}|},$$

$$\cos \gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{k}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{k}|}$$

# 方向角

定义 向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  的三个方向角:

$\alpha$ :  $\vec{a}$  与  $x$  轴正向的夹角, 即  $\alpha = \angle(\vec{a}, \vec{i})$

$\beta$ :  $\vec{a}$  与  $y$  轴正向的夹角, 即  $\beta = \angle(\vec{a}, \vec{j})$

$\gamma$ :  $\vec{a}$  与  $z$  轴正向的夹角, 即  $\gamma = \angle(\vec{a}, \vec{k})$

方向角的计算

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{i}|} = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{j}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{j}|} = \frac{a_y}{|\vec{a}|},$$

$$\cos \gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{k}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{k}|} = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

# 方向角

定义 向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  的三个方向角:

$\alpha$ :  $\vec{a}$  与  $x$  轴正向的夹角, 即  $\alpha = \angle(\vec{a}, \vec{i})$

$\beta$ :  $\vec{a}$  与  $y$  轴正向的夹角, 即  $\beta = \angle(\vec{a}, \vec{j})$

$\gamma$ :  $\vec{a}$  与  $z$  轴正向的夹角, 即  $\gamma = \angle(\vec{a}, \vec{k})$

## 方向角的计算

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{i}|} = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{j}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{j}|} = \frac{a_y}{|\vec{a}|},$$

$$\cos \gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{k}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{k}|} = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

可见

$$\vec{e}_a = \frac{1}{|\vec{a}|} (a_x, a_y, a_z)$$

# 方向角

定义 向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  的三个方向角:

$\alpha$ :  $\vec{a}$  与  $x$  轴正向的夹角, 即  $\alpha = \angle(\vec{a}, \vec{i})$

$\beta$ :  $\vec{a}$  与  $y$  轴正向的夹角, 即  $\beta = \angle(\vec{a}, \vec{j})$

$\gamma$ :  $\vec{a}$  与  $z$  轴正向的夹角, 即  $\gamma = \angle(\vec{a}, \vec{k})$

## 方向角的计算

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{i}|} = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{j}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{j}|} = \frac{a_y}{|\vec{a}|},$$

$$\cos \gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{k}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{k}|} = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

可见

$$e_{\vec{a}} = \frac{1}{|\vec{a}|}(a_x, a_y, a_z) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

# We are here now...

---

◆ 向量的基本概念

♣ 向量的坐标表示

♥ 向量的数量积

♠ 向量的向量积

# 二阶行列式

- 定义  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$  , 称为 二阶行列式

## 二阶行列式

---

- 定义  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ , 称为 二阶行列式



# 二阶行列式

- 定义  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ , 称为 二阶行列式
- 例  $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$

## 二阶行列式

- 定义  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ , 称为 二阶行列式
- 例  $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 - 2 \cdot 3$

## 二阶行列式

- 定义  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ , 称为 二阶行列式
- 例  $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -7$

## 二阶行列式

- 定义  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ , 称为 二阶行列式
- 例  $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -7$ ,  $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

## 二阶行列式

- 定义  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ , 称为 二阶行列式
- 例  $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -7$ ,  $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

## 二阶行列式

- 定义  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ , 称为 二阶行列式

- 例  $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -7$ ,  $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

- 反称性

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}$$

## 二阶行列式

- 定义  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ , 称为 二阶行列式

- 例  $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -7$ ,  $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

- 反称性

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}$$

## 二阶行列式

- 定义  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ , 称为 二阶行列式

- 例  $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -7$ ,  $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

- 反称性

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$



## 二阶行列式

- 定义  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ , 称为 二阶行列式

- 例  $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -7$ ,  $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

- 反称性

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

- 几何意义 平面向量  $\vec{a} = (a_x, a_y)$ ,  $\vec{b} = (b_x, b_y)$  所张成平行四边形面积为  $\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$  绝对值。

## 二阶行列式

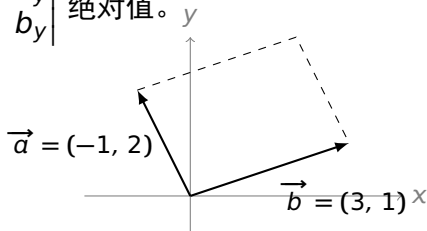
- 定义  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ , 称为 **二阶行列式**

- 例  $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -7$ ,  $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

- 反称性

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

- 几何意义 平面向量  $\vec{a} = (a_x, a_y)$ ,  $\vec{b} = (b_x, b_y)$  所张成平行四边形的面积为  $\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$  绝对值。



# 三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

# 三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \quad -a_{12} \quad +a_{13}$$

# 三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

# 三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

# 三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

# 三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$



# 三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

# 三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \cancel{a_{33}} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

# 三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \cancel{a_{33}} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

# 三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算  $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix}$$

# 三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算  $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix}$$

# 三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算  $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix}$$

# 三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算  $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} \phantom{0} & \phantom{1} \\ \phantom{5} & \phantom{7} \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} \phantom{0} & \phantom{1} \\ \phantom{5} & \phantom{7} \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix}$$

# 三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算  $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} \phantom{0} & \phantom{1} \\ \phantom{5} & \phantom{7} \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} \phantom{0} & \phantom{1} \\ \phantom{5} & \phantom{7} \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix}$$



# 三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算  $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix}$$

# 三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算  $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix}$$

# 三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算  $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix}$$

# 三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算  $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$$= 4 \cdot \quad - 3 \cdot \quad + 2 \cdot$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix}$$

# 三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算  $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$$= 4 \cdot (-5) - 3 \cdot \quad + 2 \cdot$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix}$$

# 三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算  $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$$= 4 \cdot (-5) - 3 \cdot 5 + 2 \cdot$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix}$$

# 三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算  $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$$= 4 \cdot (-5) - 3 \cdot 5 + 2 \cdot 5$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix}$$

# 三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算  $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$$= 4 \cdot (-5) - 3 \cdot 5 + 2 \cdot 5 = -25$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix}$$



# 三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算  $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$$= 4 \cdot (-5) - 3 \cdot 5 + 2 \cdot 5 = -25$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -9 & 16 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -9 \end{vmatrix}$$

# 三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算  $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$$= 4 \cdot (-5) - 3 \cdot 5 + 2 \cdot 5 = -25$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -9 & 16 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -9 \end{vmatrix}$$

# 三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算  $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$$= 4 \cdot (-5) - 3 \cdot 5 + 2 \cdot 5 = -25$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -9 & 16 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -9 \end{vmatrix}$$

# 三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算  $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$$= 4 \cdot (-5) - 3 \cdot 5 + 2 \cdot 5 = -25$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -9 & 16 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -9 \end{vmatrix}$$

# 三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算  $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$$= 4 \cdot (-5) - 3 \cdot 5 + 2 \cdot 5 = -25$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -9 & 16 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -9 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \cdot \quad \quad + 1 \cdot \quad \quad + 1 \cdot$$

# 三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算  $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$$= 4 \cdot (-5) - 3 \cdot 5 + 2 \cdot 5 = -25$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -9 & 16 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -9 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \cdot (-12) + 1 \cdot \quad + 1 \cdot$$

# 三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算  $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$$= 4 \cdot (-5) - 3 \cdot 5 + 2 \cdot 5 = -25$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -9 & 16 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -9 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \cdot (-12) + 1 \cdot 16 + 1 \cdot$$

# 三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算  $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$$= 4 \cdot (-5) - 3 \cdot 5 + 2 \cdot 5 = -25$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -9 & 16 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -9 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \cdot (-12) + 1 \cdot 16 + 1 \cdot (-6)$$



# 三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算  $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$$= 4 \cdot (-5) - 3 \cdot 5 + 2 \cdot 5 = -25$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -9 & 16 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -9 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \cdot (-12) + 1 \cdot 16 + 1 \cdot (-6) = -2$$

# 三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算  $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$$= 4 \cdot (-5) - 3 \cdot 5 + 2 \cdot 5 = -25$$

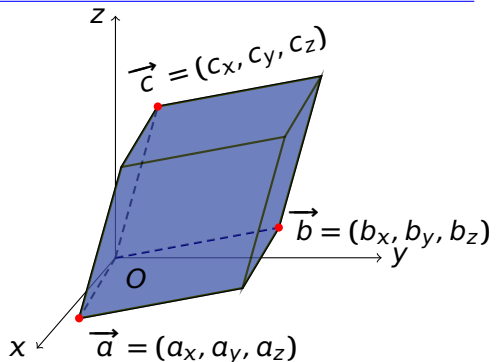
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -9 & 16 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -9 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \cdot (-12) + 1 \cdot 16 + 1 \cdot (-6) = -2$$

性质 交换行列式的两行、或两列，行列式的值变号。

# 三阶行列式的几何意义

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  张成平行六面体的体积

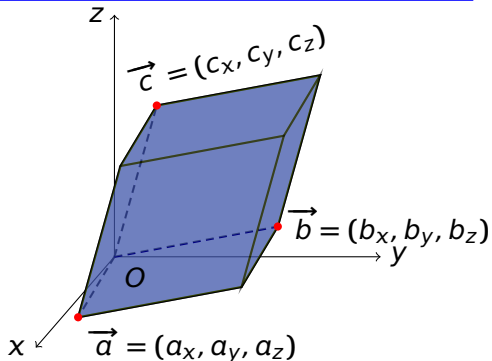
=



# 三阶行列式的几何意义

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  张成平行六面体的体积

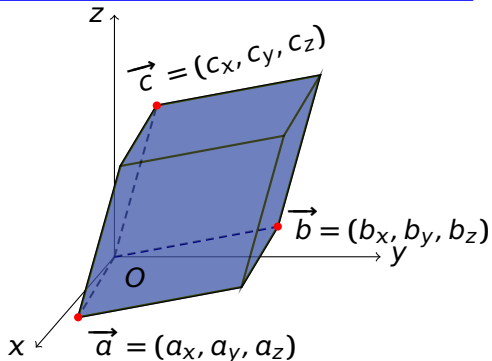
$$= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \text{ 的绝对值}$$



# 三阶行列式的几何意义

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  张成平行六面体的体积

$$= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \text{ 的绝对值}$$

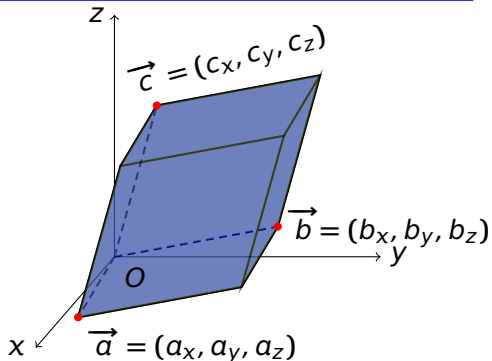


**性质** 向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ,  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ ,  $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$  不共面的充分必要条件是：

# 三阶行列式的几何意义

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  张成平行六面体的体积

$$= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \text{ 的绝对值}$$



**性质** 向量  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ,  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ ,  $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$  不共面的充分必要条件是：

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \neq 0$$

# 右手规则

**定义** 假设  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ,  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ ,  $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$  不共面, 若

$$\bullet \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} > 0,$$

$$\bullet \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} < 0,$$

# 右手规则

**定义** 假设  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ,  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ ,  $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$  不共面, 若

- $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} > 0$ , 则称有序向量组  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  符合右手规则;
- $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} < 0$ ,



# 右手规则

**定义** 假设  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ,  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ ,  $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$  不共面, 若

- $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} > 0$ , 则称有序向量组  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  符合**右手规则**;
- $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} < 0$ , 则称有序向量组  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  符合**左手规则**;

## 例

1.  $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{j} = (0, 1, 0)$ ,  $\vec{k} = (0, 0, 1)$  符合 手规则;
2.  $\vec{a} = (1, 1, 1)$ ,  $\vec{b} = (2, 3, 4)$ ,  $\vec{c} = (4, 9, 16)$  符合 手规则;

例

1.  $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{j} = (0, 1, 0)$ ,  $\vec{k} = (0, 0, 1)$  符合 手规则;
2.  $\vec{a} = (1, 1, 1)$ ,  $\vec{b} = (2, 3, 4)$ ,  $\vec{c} = (4, 9, 16)$  符合 手规则;

解 这是因为  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$ ,  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = 2 > 0$

## 例

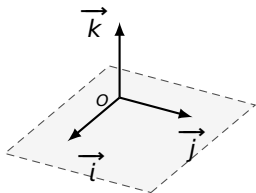
1.  $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{j} = (0, 1, 0)$ ,  $\vec{k} = (0, 0, 1)$  符合右手规则;
2.  $\vec{a} = (1, 1, 1)$ ,  $\vec{b} = (2, 3, 4)$ ,  $\vec{c} = (4, 9, 16)$  符合右手规则;

解 这是因为  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$ ,  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = 2 > 0$

## 例

1.  $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{j} = (0, 1, 0)$ ,  $\vec{k} = (0, 0, 1)$  符合右手规则;
2.  $\vec{a} = (1, 1, 1)$ ,  $\vec{b} = (2, 3, 4)$ ,  $\vec{c} = (4, 9, 16)$  符合右手规则;

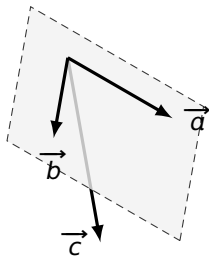
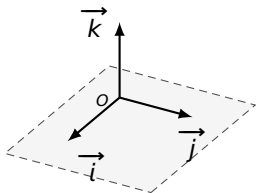
解 这是因为  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$ ,  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = 2 > 0$



## 例

1.  $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{j} = (0, 1, 0)$ ,  $\vec{k} = (0, 0, 1)$  符合右手规则;
2.  $\vec{a} = (1, 1, 1)$ ,  $\vec{b} = (2, 3, 4)$ ,  $\vec{c} = (4, 9, 16)$  符合右手规则;

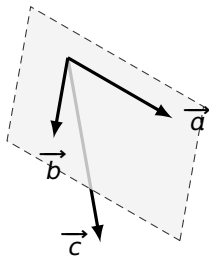
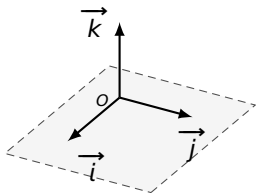
解 这是因为  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$ ,  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = 2 > 0$



## 例

1.  $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{j} = (0, 1, 0)$ ,  $\vec{k} = (0, 0, 1)$  符合右手规则;
2.  $\vec{a} = (1, 1, 1)$ ,  $\vec{b} = (2, 3, 4)$ ,  $\vec{c} = (4, 9, 16)$  符合右手规则;

解 这是因为  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$ ,  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = 2 > 0$



注 若  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  符合右手规则, 则张开的右手手指可做如下指向:

食指  $\rightarrow \vec{a}$ ; 中指  $\rightarrow \vec{b}$ ; 拇指  $\rightarrow \vec{c}$

性质 假设  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  符合右手规则, 则有序向量组

$\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}$  及  $\vec{a}, \vec{b}, -\vec{c}$  符合左手规则



性质 假设  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  符合右手规则，则有序向量组

$\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}$  及  $\vec{a}, \vec{b}, -\vec{c}$  符合左手规则

证明  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  符合右手规则  $\Rightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} > 0$ ，所以

性质 假设  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  符合右手规则, 则有序向量组

$\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}$  及  $\vec{a}, \vec{b}, -\vec{c}$  符合左手规则

证明  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  符合右手规则  $\Rightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} > 0$ , 所以

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ -c_x & -c_y & -c_z \end{vmatrix}$$

性质 假设  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  符合右手规则, 则有序向量组

$\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}$  及  $\vec{a}, \vec{b}, -\vec{c}$  符合左手规则

证明  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  符合右手规则  $\Rightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} > 0$ , 所以

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} < 0$$

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ -c_x & -c_y & -c_z \end{vmatrix}$$

性质 假设  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  符合右手规则, 则有序向量组

$\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}$  及  $\vec{a}, \vec{b}, -\vec{c}$  符合左手规则

证明  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  符合右手规则  $\Rightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} > 0$ , 所以

$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} < 0 \Rightarrow \vec{a}, \vec{c}, \vec{b}$  符合左手规则

$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ -c_x & -c_y & -c_z \end{vmatrix}$

性质 假设  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  符合右手规则, 则有序向量组

$\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}$  及  $\vec{a}, \vec{b}, -\vec{c}$  符合左手规则

证明  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  符合右手规则  $\Rightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} > 0$ , 所以

$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} < 0 \Rightarrow \vec{a}, \vec{c}, \vec{b}$  符合左手规则

$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ -c_x & -c_y & -c_z \end{vmatrix} < 0$

性质 假设  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  符合右手规则, 则有序向量组

$\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}$  及  $\vec{a}, \vec{b}, -\vec{c}$  符合左手规则

证明  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  符合右手规则  $\Rightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} > 0$ , 所以

$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} < 0 \Rightarrow \vec{a}, \vec{c}, \vec{b}$  符合左手规则

$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ -c_x & -c_y & -c_z \end{vmatrix} < 0 \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, -\vec{c}$  符合左手规则

**性质** 假设  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  符合右手规则, 则有序向量组

$\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}$  及  $\vec{a}, \vec{b}, -\vec{c}$  符合左手规则

**证明**  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  符合右手规则  $\Rightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} > 0$ , 所以

$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} < 0 \Rightarrow \vec{a}, \vec{c}, \vec{b}$  符合左手规则

$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ -c_x & -c_y & -c_z \end{vmatrix} < 0 \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, -\vec{c}$  符合左手规则

**注** 假设  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  不共面, 则任意交换两个向量的次序, 或者对任一个向量添加负号,

**性质** 假设  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  符合右手规则, 则有序向量组

$\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}$  及  $\vec{a}, \vec{b}, -\vec{c}$  符合左手规则

**证明**  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  符合右手规则  $\Rightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} > 0$ , 所以

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} < 0 \Rightarrow \vec{a}, \vec{c}, \vec{b} \text{ 符合左手规则}$$

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ -c_x & -c_y & -c_z \end{vmatrix} < 0 \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, -\vec{c} \text{ 符合左手规则}$$

**注** 假设  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  不共面, 则任意交换两个向量的次序, 或者对任一个向量添加负号, 新的有序向量组“手性”相反。



# 向量积

---

定义 设有向量  $\vec{a}, \vec{b}$ , 现按如下方式定义第三个向量  $\vec{c}$ :

方向

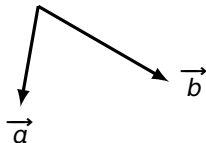
长度

# 向量积

定义 设有向量  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ , 现按如下方式定义第三个向量  $\vec{c}$ :

方向

长度

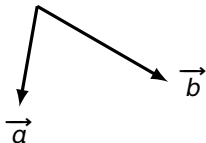


# 向量积

**定义** 设有向量  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ , 现按如下方式定义第三个向量  $\vec{c}$ :

**方向**  $\vec{c}$  与  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  均垂直,

**长度**

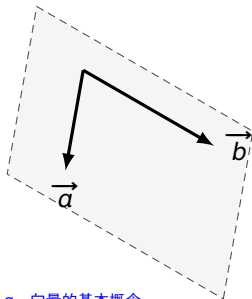


# 向量积

**定义** 设有向量  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ , 现按如下方式定义第三个向量  $\vec{c}$ :

**方向**  $\vec{c}$  与  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  均垂直,

**长度**

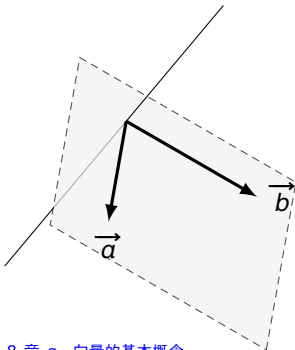


# 向量积

**定义** 设有向量  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ , 现按如下方式定义第三个向量  $\vec{c}$ :

**方向**  $\vec{c}$  与  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  均垂直,

**长度**

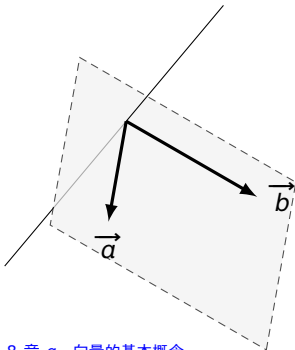


# 向量积

**定义** 设有向量  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ , 现按如下方式定义第三个向量  $\vec{c}$ :

**方向**  $\vec{c}$  与  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  均垂直, 且  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  满足右手规则

**长度**

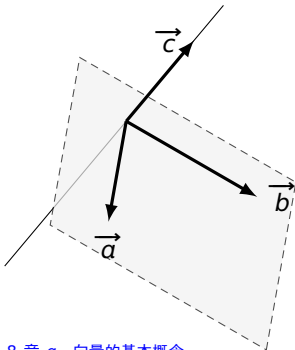


# 向量积

**定义** 设有向量  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ , 现按如下方式定义第三个向量  $\vec{c}$ :

**方向**  $\vec{c}$  与  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  均垂直, 且  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  满足右手规则

**长度**

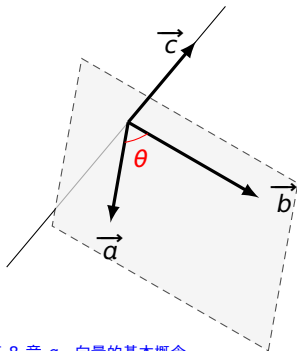


# 向量积

**定义** 设有向量  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ , 现按如下方式定义第三个向量  $\vec{c}$ :

**方向**  $\vec{c}$  与  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  均垂直, 且  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  满足右手规则

**长度**  $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \theta$ , 其中  $\theta = \angle(\vec{a}, \vec{b})$





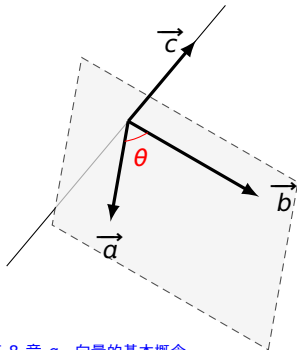
# 向量积

**定义** 设有向量  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ , 现按如下方式定义第三个向量  $\vec{c}$ :

**方向**  $\vec{c}$  与  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  均垂直, 且  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  满足右手规则

**长度**  $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \theta$ , 其中  $\theta = \angle(\vec{a}, \vec{b})$

称  $\vec{c}$  为  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  的**向量积**, 记作  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ 。



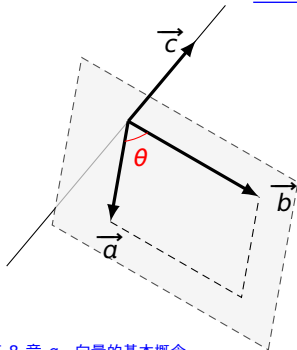
# 向量积

**定义** 设有向量  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ , 现按如下方式定义第三个向量  $\vec{c}$ :

**方向**  $\vec{c}$  与  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  均垂直, 且  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  满足右手规则

**长度**  $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \theta$ , 其中  $\theta = \angle(\vec{a}, \vec{b})$

称  $\vec{c}$  为  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  的**向量积**, 记作  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ 。



# 向量积

**定义** 设有向量  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ , 现按如下方式定义第三个向量  $\vec{c}$ :

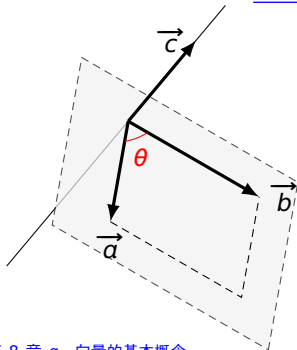
**方向**  $\vec{c}$  与  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  均垂直, 且  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  满足右手规则

**长度**  $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \theta$ , 其中  $\theta = \angle(\vec{a}, \vec{b})$

称  $\vec{c}$  为  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  的**向量积**, 记作  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ 。

注 1

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \vec{a}, \vec{b} \text{ 张成平行四边形面积}$$



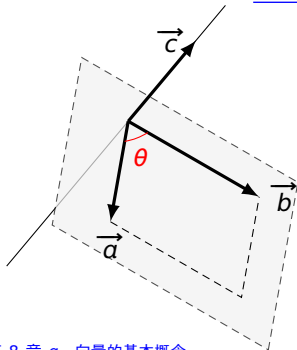
# 向量积

**定义** 设有向量  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ , 现按如下方式定义第三个向量  $\vec{c}$ :

**方向**  $\vec{c}$  与  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  均垂直, 且  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  满足右手规则

**长度**  $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \theta$ , 其中  $\theta = \angle(\vec{a}, \vec{b})$

称  $\vec{c}$  为  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  的**向量积**, 记作  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ .



注 1

$|\vec{a} \times \vec{b}| = \vec{a}, \vec{b}$  张成平行四边形面积

注 2

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow$$

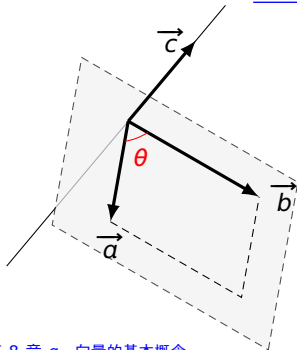
# 向量积

**定义** 设有向量  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ , 现按如下方式定义第三个向量  $\vec{c}$ :

**方向**  $\vec{c}$  与  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  均垂直, 且  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  满足右手规则

**长度**  $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \theta$ , 其中  $\theta = \angle(\vec{a}, \vec{b})$

称  $\vec{c}$  为  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  的**向量积**, 记作  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ 。



**注 1**

$|\vec{a} \times \vec{b}| = \vec{a}, \vec{b}$  张成平行四边形面积

**注 2**

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \iff \vec{a} \parallel \vec{b}$$

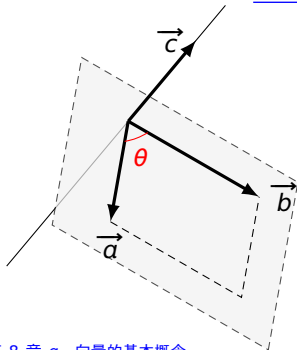
# 向量积

**定义** 设有向量  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ , 现按如下方式定义第三个向量  $\vec{c}$ :

**方向**  $\vec{c}$  与  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  均垂直, 且  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  满足右手规则

**长度**  $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \theta$ , 其中  $\theta = \angle(\vec{a}, \vec{b})$

称  $\vec{c}$  为  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  的**向量积**, 记作  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ 。



**注 1**

$|\vec{a} \times \vec{b}| = \vec{a}, \vec{b}$  张成平行四边形面积

**注 2**

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \iff \vec{a} \parallel \vec{b}$$

特别地,  $\vec{a} \times \vec{a} =$

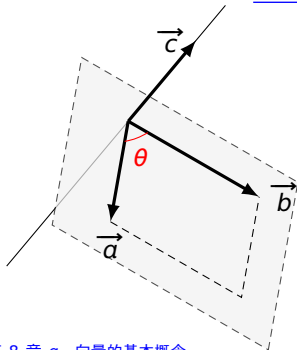
# 向量积

**定义** 设有向量  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ , 现按如下方式定义第三个向量  $\vec{c}$ :

**方向**  $\vec{c}$  与  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  均垂直, 且  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  满足右手规则

**长度**  $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \theta$ , 其中  $\theta = \angle(\vec{a}, \vec{b})$

称  $\vec{c}$  为  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  的**向量积**, 记作  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ .



注 1

$|\vec{a} \times \vec{b}| = \vec{a}, \vec{b}$  张成平行四边形面积

注 2

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \iff \vec{a} \parallel \vec{b}$$

特别地,  $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

# 向量积的运算律

---

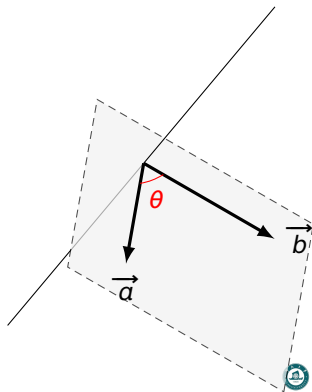
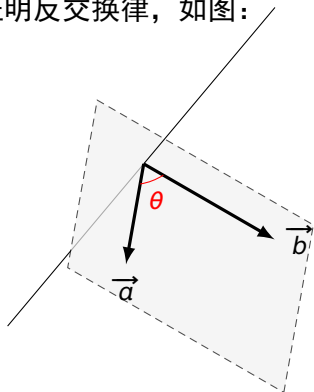
反交换  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$



# 向量积的运算律

$$\text{反交换 } \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

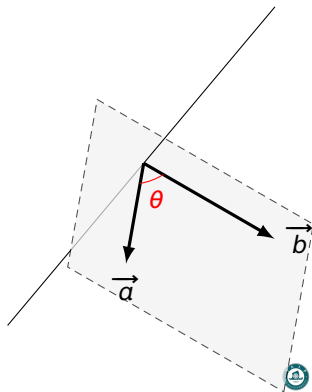
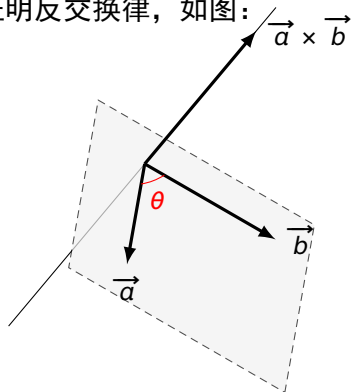
证明反交换律，如图：



# 向量积的运算律

反交换  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

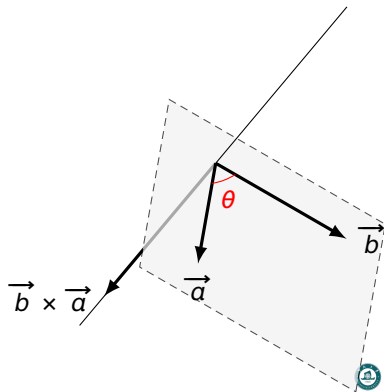
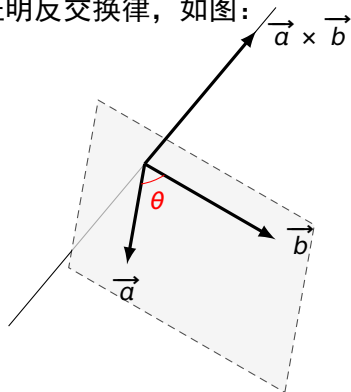
证明反交换律，如图：



# 向量积的运算律

反交换  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

证明反交换律，如图：

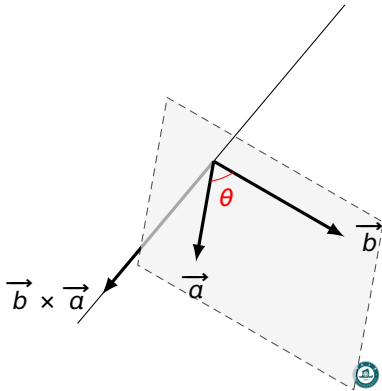
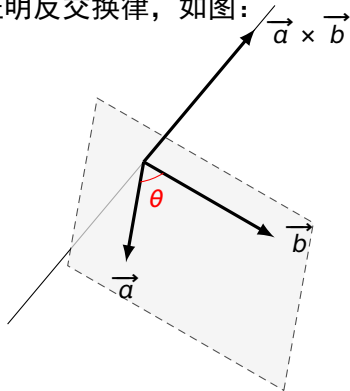


# 向量积的运算律

反交换  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

分配律  $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

证明反交换律，如图：



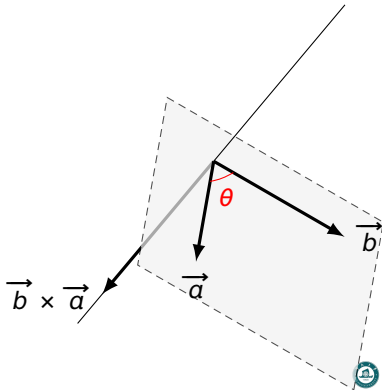
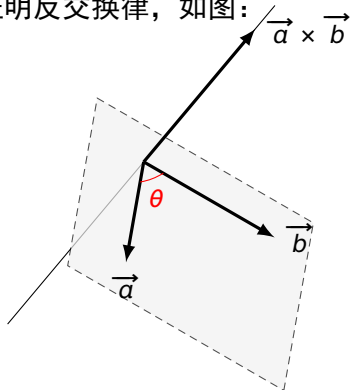
# 向量积的运算律

反交换  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

分配律  $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

结合律  $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$

证明反交换律，如图：



性质 对于  $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{j} = (0, 1, 0)$ ,  $\vec{k} = (0, 0, 1)$ , 成立

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \\ \end{array} \right.$$

性质 对于  $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{j} = (0, 1, 0)$ ,  $\vec{k} = (0, 0, 1)$ , 成立

$$\begin{cases} \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, & \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, & \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \\ \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, & \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, & \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \end{cases}$$

性质 对于  $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{j} = (0, 1, 0)$ ,  $\vec{k} = (0, 0, 1)$ , 成立

$$\begin{cases} \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, & \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, & \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \\ \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, & \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, & \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \\ \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0. \end{cases}$$



**性质** 对于  $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{j} = (0, 1, 0)$ ,  $\vec{k} = (0, 0, 1)$ , 成立

$$\begin{cases} \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, & \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, & \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \\ \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, & \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, & \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \\ \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0. \end{cases}$$

**证明** 以为  $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$  例证明:

$$|\vec{i} \times \vec{j}| =$$

**性质** 对于  $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{j} = (0, 1, 0)$ ,  $\vec{k} = (0, 0, 1)$ , 成立

$$\begin{cases} \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, & \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, & \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \\ \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, & \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, & \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \\ \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0. \end{cases}$$

**证明** 以为  $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$  例证明:

$$|\vec{i} \times \vec{j}| = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot \sin \frac{\pi}{2}$$

**性质** 对于  $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{j} = (0, 1, 0)$ ,  $\vec{k} = (0, 0, 1)$ , 成立

$$\begin{cases} \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, & \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, & \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \\ \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, & \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, & \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \\ \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0. \end{cases}$$

**证明** 以为  $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$  例证明:

$$|\vec{i} \times \vec{j}| = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

**性质** 对于  $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{j} = (0, 1, 0)$ ,  $\vec{k} = (0, 0, 1)$ , 成立

$$\begin{cases} \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, & \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, & \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \\ \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, & \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, & \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \\ \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0. \end{cases}$$

**证明** 以为  $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$  例证明:

$$|\vec{i} \times \vec{j}| = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 1 = |\vec{k}|$$

**性质** 对于  $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{j} = (0, 1, 0)$ ,  $\vec{k} = (0, 0, 1)$ , 成立

$$\begin{cases} \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, & \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, & \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \\ \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, & \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, & \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \\ \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0. \end{cases}$$

**证明** 以为  $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$  例证明:

$$|\vec{i} \times \vec{j}| = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 1 = |\vec{k}|$$

$\vec{i} \times \vec{j}, \vec{k}$  均垂直于  $\vec{i}$  和  $\vec{j} \Rightarrow$

**性质** 对于  $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{j} = (0, 1, 0)$ ,  $\vec{k} = (0, 0, 1)$ , 成立

$$\begin{cases} \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, & \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, & \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \\ \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, & \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, & \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \\ \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0. \end{cases}$$

**证明** 以为  $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$  例证明:

$$|\vec{i} \times \vec{j}| = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 1 = |\vec{k}|$$

$$\vec{i} \times \vec{j}, \vec{k} \text{ 均垂直于 } \vec{i} \text{ 和 } \vec{j} \Rightarrow \vec{i} \times \vec{j} \parallel \vec{k}$$

**性质** 对于  $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{j} = (0, 1, 0)$ ,  $\vec{k} = (0, 0, 1)$ , 成立

$$\begin{cases} \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, & \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, & \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \\ \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, & \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, & \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \\ \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0. \end{cases}$$

**证明** 以为  $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$  例证明:

$$\left. \begin{aligned} |\vec{i} \times \vec{j}| &= |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 1 = |\vec{k}| \\ \vec{i} \times \vec{j}, \vec{k} &\text{均垂直于 } \vec{i} \text{ 和 } \vec{j} \Rightarrow \vec{i} \times \vec{j} \parallel \vec{k} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

**性质** 对于  $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{j} = (0, 1, 0)$ ,  $\vec{k} = (0, 0, 1)$ , 成立

$$\begin{cases} \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, & \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, & \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \\ \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, & \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, & \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \\ \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0. \end{cases}$$

**证明** 以为  $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$  例证明:

$$\left. \begin{array}{l} |\vec{i} \times \vec{j}| = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 1 = |\vec{k}| \\ \vec{i} \times \vec{j}, \vec{k} \text{ 均垂直于 } \vec{i} \text{ 和 } \vec{j} \Rightarrow \vec{i} \times \vec{j} \parallel \vec{k} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{i} \times \vec{j} = \pm \vec{k}$$



**性质** 对于  $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{j} = (0, 1, 0)$ ,  $\vec{k} = (0, 0, 1)$ , 成立

$$\begin{cases} \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, & \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, & \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \\ \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, & \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, & \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \\ \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0. \end{cases}$$

**证明** 以为  $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$  例证明:

$$\left. \begin{array}{l} |\vec{i} \times \vec{j}| = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 1 = |\vec{k}| \\ \vec{i} \times \vec{j}, \vec{k} \text{ 均垂直于 } \vec{i} \text{ 和 } \vec{j} \Rightarrow \vec{i} \times \vec{j} \parallel \vec{k} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{i} \times \vec{j} = \pm \vec{k}$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{i} \times \vec{j}$  符合右手规则

**性质** 对于  $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{j} = (0, 1, 0)$ ,  $\vec{k} = (0, 0, 1)$ , 成立

$$\begin{cases} \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, & \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, & \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \\ \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, & \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, & \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \\ \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0. \end{cases}$$

**证明** 以为  $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$  例证明:

$$\left. \begin{array}{l} |\vec{i} \times \vec{j}| = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 1 = |\vec{k}| \\ \vec{i} \times \vec{j}, \vec{k} \text{ 均垂直于 } \vec{i} \text{ 和 } \vec{j} \Rightarrow \vec{i} \times \vec{j} \parallel \vec{k} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{i} \times \vec{j} = \pm \vec{k}$$

$$\xrightarrow{\vec{i}, \vec{j}, \vec{i} \times \vec{j} \text{ 符合右手规则}} \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$$

性质 设  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ,  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ , 则

$$\vec{a} \times \vec{b} = ( \quad , \quad , \quad )$$

性质 设  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ,  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ , 则

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, \quad , \quad )$$

性质 设  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ,  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ , 则

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, \quad )$$

性质 设  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ,  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ , 则

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

性质 设  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ,  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ , 则

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

证明

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k})$$

性质 设  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ,  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ , 则

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

证明

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) \\&= a_x b_x (\vec{i} \times \vec{i}) + a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x b_z (\vec{i} \times \vec{k}) + \\&\quad a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j} \times \vec{j}) + a_y b_z (\vec{j} \times \vec{k}) + \\&\quad a_z b_x (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z b_z (\vec{k} \times \vec{k})\end{aligned}$$



性质 设  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ,  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ , 则

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

证明

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) \\&= a_x b_x (\vec{i} \times \vec{i}) + a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x b_z (\vec{i} \times \vec{k}) + \\&\quad a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j} \times \vec{j}) + a_y b_z (\vec{j} \times \vec{k}) + \\&\quad a_z b_x (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z b_z (\vec{k} \times \vec{k})\end{aligned}$$

性质 设  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ,  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ , 则

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

证明

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) \\&= a_x b_x (\vec{i} \times \vec{i}) + a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x b_z (\vec{i} \times \vec{k}) + \\&\quad a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j} \times \vec{j}) + a_y b_z (\vec{j} \times \vec{k}) + \\&\quad a_z b_x (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z b_z (\vec{k} \times \vec{k}) \\&= ( \quad ) \vec{i} + ( \quad ) \vec{j} + ( \quad ) \vec{k}\end{aligned}$$

性质 设  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ,  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ , 则

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

证明

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) \\&= a_x b_x (\vec{i} \times \vec{i}) + a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x b_z (\vec{i} \times \vec{k}) + \\&\quad a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j} \times \vec{j}) + a_y b_z (\vec{j} \times \vec{k}) + \\&\quad a_z b_x (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z b_z (\vec{k} \times \vec{k}) \\&= ( \quad ) \vec{i} + ( \quad ) \vec{j} + ( \quad ) \vec{k}\end{aligned}$$

性质 设  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ,  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ , 则

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

证明

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) \\&= a_x b_x (\vec{i} \times \vec{i}) + a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x b_z (\vec{i} \times \vec{k}) + \\&\quad a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j} \times \vec{j}) + a_y b_z (\vec{j} \times \vec{k}) + \\&\quad a_z b_x (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z b_z (\vec{k} \times \vec{k}) \\&= ( \quad ) \vec{i} + ( \quad ) \vec{j} + ( \quad ) \vec{k}\end{aligned}$$

性质 设  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ,  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ , 则

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

证明

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) \\&= a_x b_x (\vec{i} \times \vec{i}) + a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x b_z (\vec{i} \times \vec{k}) + \\&\quad a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j} \times \vec{j}) + a_y b_z (\vec{j} \times \vec{k}) + \\&\quad a_z b_x (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z b_z (\vec{k} \times \vec{k}) \\&= ( \quad ) \vec{i} + ( \quad ) \vec{j} + ( \quad ) \vec{k}\end{aligned}$$

性质 设  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ,  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ , 则

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

证明

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) \\&= a_x b_x (\vec{i} \times \vec{i}) + a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x b_z (\vec{i} \times \vec{k}) + \\&\quad a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j} \times \vec{j}) + a_y b_z (\vec{j} \times \vec{k}) + \\&\quad a_z b_x (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z b_z (\vec{k} \times \vec{k}) \\&= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}\end{aligned}$$

性质 设  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ,  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ , 则

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

证明

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) \\&= a_x b_x (\vec{i} \times \vec{i}) + a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x b_z (\vec{i} \times \vec{k}) + \\&\quad a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j} \times \vec{j}) + a_y b_z (\vec{j} \times \vec{k}) + \\&\quad a_z b_x (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z b_z (\vec{k} \times \vec{k}) \\&= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}\end{aligned}$$

性质 设  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ,  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ , 则

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

证明

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) \\&= a_x b_x (\vec{i} \times \vec{i}) + a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x b_z (\vec{i} \times \vec{k}) + \\&\quad a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j} \times \vec{j}) + a_y b_z (\vec{j} \times \vec{k}) + \\&\quad a_z b_x (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z b_z (\vec{k} \times \vec{k}) \\&= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}\end{aligned}$$



性质 设  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ,  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ , 则

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

证明

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) \\&= a_x b_x (\vec{i} \times \vec{i}) + a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x b_z (\vec{i} \times \vec{k}) + \\&\quad a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j} \times \vec{j}) + a_y b_z (\vec{j} \times \vec{k}) + \\&\quad a_z b_x (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z b_z (\vec{k} \times \vec{k}) \\&= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}\end{aligned}$$

注

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

性质 设  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ,  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ , 则

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

证明

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) \\&= a_x b_x (\vec{i} \times \vec{i}) + a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x b_z (\vec{i} \times \vec{k}) + \\&\quad a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j} \times \vec{j}) + a_y b_z (\vec{j} \times \vec{k}) + \\&\quad a_z b_x (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z b_z (\vec{k} \times \vec{k}) \\&= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}\end{aligned}$$

注

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}$$

性质 设  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ,  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ , 则

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

证明

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) \\&= a_x b_x (\vec{i} \times \vec{i}) + a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x b_z (\vec{i} \times \vec{k}) + \\&\quad a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j} \times \vec{j}) + a_y b_z (\vec{j} \times \vec{k}) + \\&\quad a_z b_x (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z b_z (\vec{k} \times \vec{k}) \\&= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}\end{aligned}$$

注

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}$$

性质 设  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ,  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ , 则

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

证明

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) \\&= a_x b_x (\vec{i} \times \vec{i}) + a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x b_z (\vec{i} \times \vec{k}) + \\&\quad a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j} \times \vec{j}) + a_y b_z (\vec{j} \times \vec{k}) + \\&\quad a_z b_x (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z b_z (\vec{k} \times \vec{k}) \\&= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}\end{aligned}$$

注

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}$$

性质 设  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ,  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ , 则

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

证明

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) \\&= a_x b_x (\vec{i} \times \vec{i}) + a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x b_z (\vec{i} \times \vec{k}) + \\&\quad a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j} \times \vec{j}) + a_y b_z (\vec{j} \times \vec{k}) + \\&\quad a_z b_x (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z b_z (\vec{k} \times \vec{k}) \\&= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}\end{aligned}$$

注

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

例 设  $\vec{a} = (2, 1, -1)$ ,  $\vec{b} = (1, -1, 2)$ , 计算  $\vec{a} \times \vec{b}$

例 设  $\vec{a} = (2, 1, -1)$ ,  $\vec{b} = (1, -1, 2)$ , 计算  $\vec{a} \times \vec{b}$

解

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

例 设  $\vec{a} = (2, 1, -1)$ ,  $\vec{b} = (1, -1, 2)$ , 计算  $\vec{a} \times \vec{b}$

解

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$



例 设  $\vec{a} = (2, 1, -1)$ ,  $\vec{b} = (1, -1, 2)$ , 计算  $\vec{a} \times \vec{b}$

解

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$



例 设  $\vec{a} = (2, 1, -1)$ ,  $\vec{b} = (1, -1, 2)$ , 计算  $\vec{a} \times \vec{b}$

解

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{k}\end{aligned}$$

例 设  $\vec{a} = (2, 1, -1)$ ,  $\vec{b} = (1, -1, 2)$ , 计算  $\vec{a} \times \vec{b}$

解

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{k}\end{aligned}$$

例 设  $\vec{a} = (2, 1, -1)$ ,  $\vec{b} = (1, -1, 2)$ , 计算  $\vec{a} \times \vec{b}$

解

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{k}\end{aligned}$$

例 设  $\vec{a} = (2, 1, -1)$ ,  $\vec{b} = (1, -1, 2)$ , 计算  $\vec{a} \times \vec{b}$

解

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= \vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k}\end{aligned}$$

例 设  $\vec{a} = (2, 1, -1)$ ,  $\vec{b} = (1, -1, 2)$ , 计算  $\vec{a} \times \vec{b}$

解

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= \vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k} = (1, -5, -3)\end{aligned}$$

例 设空间中三个点  $C(1, -1, 2)$ ,  $A(3, 3, 1)$ ,  $B(3, 1, 3)$ 。令  $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$ 。求  $\vec{a} \times \vec{b}$  及三角形  $\triangle ABC$  面积。



例 设空间中三个点  $C(1, -1, 2)$ ,  $A(3, 3, 1)$ ,  $B(3, 1, 3)$ 。令  $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$ 。求  $\vec{a} \times \vec{b}$  及三角形  $\triangle ABC$  面积。

解  $\vec{a} = \overrightarrow{CA} = ( \quad ),$

$$\vec{b} = \overrightarrow{CB} = ( \quad ),$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{vmatrix}$$

$$\triangle ABC \text{面积} =$$

例 设空间中三个点  $C(1, -1, 2)$ ,  $A(3, 3, 1)$ ,  $B(3, 1, 3)$ 。令  $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$ 。求  $\vec{a} \times \vec{b}$  及三角形  $\triangle ABC$  面积。

解  $\vec{a} = \overrightarrow{CA} = ( \quad ),$

$$\vec{b} = \overrightarrow{CB} = ( \quad ),$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{vmatrix}$$

$$\triangle ABC \text{ 面积} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

例 设空间中三个点  $C(1, -1, 2)$ ,  $A(3, 3, 1)$ ,  $B(3, 1, 3)$ 。令  $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$ 。求  $\vec{a} \times \vec{b}$  及三角形  $\triangle ABC$  面积。

解  $\vec{a} = \overrightarrow{CA} = (2, 4, -1),$

$$\vec{b} = \overrightarrow{CB} = ( \quad ),$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \end{vmatrix}$$

$$\triangle ABC \text{面积} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

**例** 设空间中三个点  $C(1, -1, 2)$ ,  $A(3, 3, 1)$ ,  $B(3, 1, 3)$ 。令  $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$ 。求  $\vec{a} \times \vec{b}$  及三角形  $\triangle ABC$  面积。

**解**  $\vec{a} = \overrightarrow{CA} = (2, 4, -1),$

$$\vec{b} = \overrightarrow{CB} = (2, 2, 1),$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\triangle ABC \text{ 面积} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

例 设空间中三个点  $C(1, -1, 2)$ ,  $A(3, 3, 1)$ ,  $B(3, 1, 3)$ 。令  $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$ 。求  $\vec{a} \times \vec{b}$  及三角形  $\triangle ABC$  面积。

解  $\vec{a} = \overrightarrow{CA} = (2, 4, -1),$

$$\vec{b} = \overrightarrow{CB} = (2, 2, 1),$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\triangle ABC \text{ 面积} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

例 设空间中三个点  $C(1, -1, 2)$ ,  $A(3, 3, 1)$ ,  $B(3, 1, 3)$ 。令  $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$ 。求  $\vec{a} \times \vec{b}$  及三角形  $\triangle ABC$  面积。

解  $\vec{a} = \overrightarrow{CA} = (2, 4, -1),$

$$\vec{b} = \overrightarrow{CB} = (2, 2, 1),$$

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{k}\end{aligned}$$

$$\triangle ABC \text{ 面积} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

例 设空间中三个点  $C(1, -1, 2)$ ,  $A(3, 3, 1)$ ,  $B(3, 1, 3)$ 。令  $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$ 。求  $\vec{a} \times \vec{b}$  及三角形  $\triangle ABC$  面积。

解  $\vec{a} = \overrightarrow{CA} = (2, 4, -1),$

$$\vec{b} = \overrightarrow{CB} = (2, 2, 1),$$

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= 6\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k}\end{aligned}$$

$$\triangle ABC \text{ 面积} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

例 设空间中三个点  $C(1, -1, 2)$ ,  $A(3, 3, 1)$ ,  $B(3, 1, 3)$ 。令  $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$ 。求  $\vec{a} \times \vec{b}$  及三角形  $\triangle ABC$  面积。

解  $\vec{a} = \overrightarrow{CA} = (2, 4, -1),$

$$\vec{b} = \overrightarrow{CB} = (2, 2, 1),$$

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= 6\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k} = (6, -4, -4)\end{aligned}$$

$$\triangle ABC \text{ 面积} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$



例 设空间中三个点  $C(1, -1, 2)$ ,  $A(3, 3, 1)$ ,  $B(3, 1, 3)$ 。令  $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$ 。求  $\vec{a} \times \vec{b}$  及三角形  $\triangle ABC$  面积。

解  $\vec{a} = \overrightarrow{CA} = (2, 4, -1),$

$$\vec{b} = \overrightarrow{CB} = (2, 2, 1),$$

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= 6\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k} = (6, -4, -4)\end{aligned}$$

$$\triangle ABC \text{ 面积} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} \sqrt{6^2 + (-4)^2 + (-4)^2}$$

例 设空间中三个点  $C(1, -1, 2)$ ,  $A(3, 3, 1)$ ,  $B(3, 1, 3)$ 。令  $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$ 。求  $\vec{a} \times \vec{b}$  及三角形  $\triangle ABC$  面积。

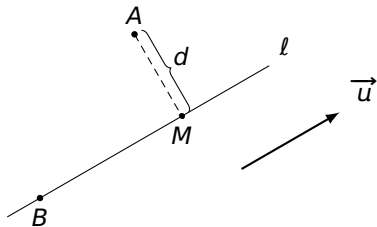
解  $\vec{a} = \overrightarrow{CA} = (2, 4, -1),$

$$\vec{b} = \overrightarrow{CB} = (2, 2, 1),$$

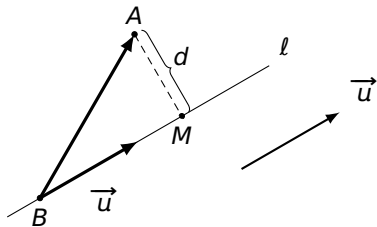
$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= 6\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k} = (6, -4, -4)\end{aligned}$$

$$\triangle ABC \text{ 面积} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} \sqrt{6^2 + (-4)^2 + (-4)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{68} = \sqrt{17}$$

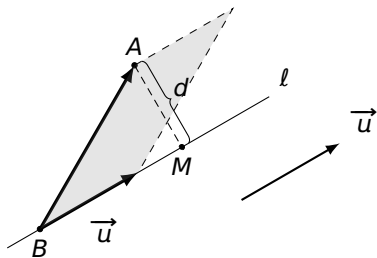
例 设  $l$  是过点  $B(-1, 2, -1)$  的直线，  
且与  $\vec{u} = (1, 1, 1)$  平行。  
求点  $A(2, 3, 1)$  到直线  $l$  的距离  $d$ 。



例 设  $l$  是过点  $B(-1, 2, -1)$  的直线，  
且与  $\vec{u} = (1, 1, 1)$  平行。  
求点  $A(2, 3, 1)$  到直线  $l$  的距离  $d$ 。

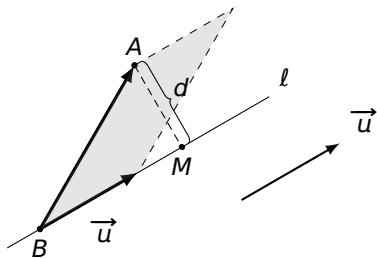


例 设  $l$  是过点  $B(-1, 2, -1)$  的直线，  
且与  $\vec{u} = (1, 1, 1)$  平行。  
求点  $A(2, 3, 1)$  到直线  $l$  的距离  $d$ 。



例 设  $l$  是过点  $B(-1, 2, -1)$  的直线，  
且与  $\vec{u} = (1, 1, 1)$  平行。  
求点  $A(2, 3, 1)$  到直线  $l$  的距离  $d$ 。

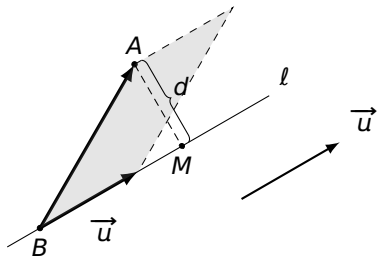
解



$$d = \frac{|\vec{BA}, \vec{u}| \text{ 张成平行四边形面积}}{|\vec{u}|}$$

例 设  $l$  是过点  $B(-1, 2, -1)$  的直线，  
且与  $\vec{u} = (1, 1, 1)$  平行。  
求点  $A(2, 3, 1)$  到直线  $l$  的距离  $d$ 。

解

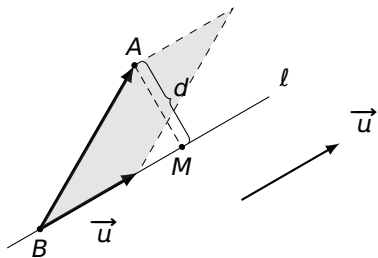


$$d = \frac{|\vec{BA}, \vec{u} \text{ 张成平行四边形面积}|}{|\vec{u}|} = \frac{|\vec{BA} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

例 设  $l$  是过点  $B(-1, 2, -1)$  的直线，  
且与  $\vec{u} = (1, 1, 1)$  平行。  
求点  $A(2, 3, 1)$  到直线  $l$  的距离  $d$ 。

解  $\vec{BA} =$

$$\vec{BA} \times \vec{u} =$$



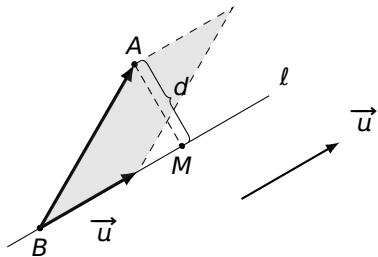
$$d = \frac{|\vec{BA}, \vec{u} \text{ 张成平行四边形面积}|}{|\vec{u}|} = \frac{|\vec{BA} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$



例 设  $l$  是过点  $B(-1, 2, -1)$  的直线，  
且与  $\vec{u} = (1, 1, 1)$  平行。  
求点  $A(2, 3, 1)$  到直线  $l$  的距离  $d$ 。

解  $\vec{BA} = (3, 1, 2)$

$$\vec{BA} \times \vec{u} =$$

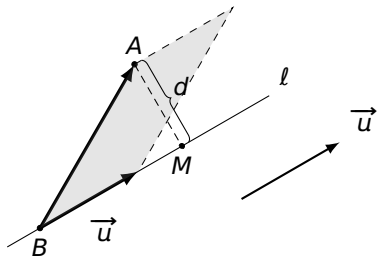


$$d = \frac{|\vec{BA}, \vec{u} \text{ 张成平行四边形面积}|}{|\vec{u}|} = \frac{|\vec{BA} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

例 设  $l$  是过点  $B(-1, 2, -1)$  的直线，  
且与  $\vec{u} = (1, 1, 1)$  平行。  
求点  $A(2, 3, 1)$  到直线  $l$  的距离  $d$ 。

解  $\vec{BA} = (3, 1, 2)$

$$\vec{BA} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

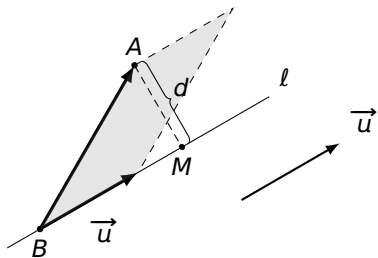


$$d = \frac{|\vec{BA}, \vec{u} \text{ 张成平行四边形面积}|}{|\vec{u}|} = \frac{|\vec{BA} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

例 设  $l$  是过点  $B(-1, 2, -1)$  的直线，  
且与  $\vec{u} = (1, 1, 1)$  平行。  
求点  $A(2, 3, 1)$  到直线  $l$  的距离  $d$ 。

解  $\vec{BA} = (3, 1, 2)$

$$\begin{aligned}\vec{BA} \times \vec{u} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \left( \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) \\ d &= \frac{|\vec{BA}, \vec{u} \text{ 张成平行四边形面积}|}{|\vec{u}|} = \frac{|\vec{BA} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}\end{aligned}$$

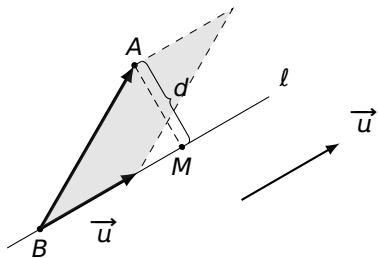


例 设  $l$  是过点  $B(-1, 2, -1)$  的直线，  
且与  $\vec{u} = (1, 1, 1)$  平行。  
求点  $A(2, 3, 1)$  到直线  $l$  的距离  $d$ 。

解  $\vec{BA} = (3, 1, 2)$

$$\begin{aligned}\vec{BA} \times \vec{u} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \left( \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-1, -1, 2)\end{aligned}$$

$$d = \frac{|\vec{BA}, \vec{u} \text{ 张成平行四边形面积}|}{|\vec{u}|} = \frac{|\vec{BA} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

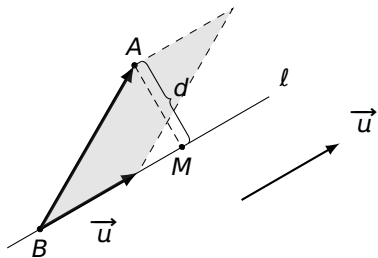


例 设  $l$  是过点  $B(-1, 2, -1)$  的直线，  
且与  $\vec{u} = (1, 1, 1)$  平行。  
求点  $A(2, 3, 1)$  到直线  $l$  的距离  $d$ 。

解  $\vec{BA} = (3, 1, 2)$

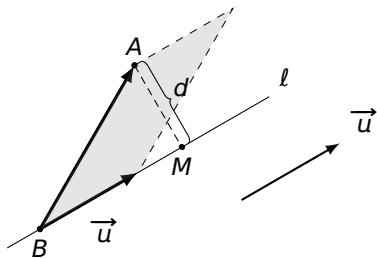
$$\begin{aligned}\vec{BA} \times \vec{u} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \left( \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-1, -1, 2)\end{aligned}$$

$$d = \frac{|\vec{BA}, \vec{u} \text{ 张成平行四边形面积}|}{|\vec{u}|} = \frac{|\vec{BA} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$$



例 设  $l$  是过点  $B(-1, 2, -1)$  的直线，  
且与  $\vec{u} = (1, 1, 1)$  平行。  
求点  $A(2, 3, 1)$  到直线  $l$  的距离  $d$ 。

解  $\vec{BA} = (3, 1, 2)$



$$\begin{aligned}\vec{BA} \times \vec{u} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \left( \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-1, -1, 2)\end{aligned}$$

$$d = \frac{|\vec{BA}, \vec{u} \text{ 张成平行四边形面积}|}{|\vec{u}|} = \frac{|\vec{BA} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$$