§2.6　矩阵的初等变换

数学系　梁卓滨

2017 - 2018 学年 I

提要

- 初等变换，初等矩阵，及两者关系
- 初等变换化矩阵为等价标准型
- 初等行变换求逆矩阵

矩阵的初等变换

初等行变换

初等列变换

矩阵的初等变换

初等行变换

- 交换第 i 行和第 j 行:
- 第 i 行乘以 k 倍（$k \neq 0$）:
- 第 i 行加上第 j 行的 l 倍:

初等列变换

矩阵的初等变换

初等行变换

- 交换第 i 行和第 j 行：
- 第 i 行乘以 k 倍（$k \neq 0$）：
- 第 i 行加上第 j 行的 l 倍：

初等列变换

- 交换第 i 列和第 j 列：
- 第 i 列乘以 k 倍（$k \neq 0$）：
- 第 i 列加上第 j 列的 l 倍：

矩阵的初等变换

初等行变换

- 交换第 i 行和第 j 行：$r_i \leftrightarrow r_j$
- 第 i 行乘以 k 倍（$k \neq 0$）：
- 第 i 行加上第 j 行的 l 倍：

初等列变换

- 交换第 i 列和第 j 列：
- 第 i 列乘以 k 倍（$k \neq 0$）：
- 第 i 列加上第 j 列的 l 倍：

矩阵的初等变换

初等行变换

- 交换第 i 行和第 j 行：$r_i \leftrightarrow r_j$
- 第 i 行乘以 k 倍（$k \neq 0$）：$k \times r_i$
- 第 i 行加上第 j 行的 l 倍：

初等列变换

- 交换第 i 列和第 j 列：
- 第 i 列乘以 k 倍（$k \neq 0$）：
- 第 i 列加上第 j 列的 l 倍：

矩阵的初等变换

初等行变换

- 交换第 i 行和第 j 行：$r_i \leftrightarrow r_j$
- 第 i 行乘以 k 倍（$k \neq 0$）：$k \times r_i$
- 第 i 行加上第 j 行的 l 倍：$r_i + lr_j$

初等列变换

- 交换第 i 列和第 j 列：
- 第 i 列乘以 k 倍（$k \neq 0$）：
- 第 i 列加上第 j 列的 l 倍：

矩阵的初等变换

初等行变换

- 交换第 i 行和第 j 行：$r_i \leftrightarrow r_j$
- 第 i 行乘以 k 倍（$k \neq 0$）：$k \times r_i$
- 第 i 行加上第 j 行的 l 倍：$r_i + lr_j$

初等列变换

- 交换第 i 列和第 j 列：$c_i \leftrightarrow c_j$
- 第 i 列乘以 k 倍（$k \neq 0$）：
- 第 i 列加上第 j 列的 l 倍：

矩阵的初等变换

初等行变换

- 交换第 i 行和第 j 行：$r_i \longleftrightarrow r_j$
- 第 i 行乘以 k 倍（$k \neq 0$）：$k \times r_i$
- 第 i 行加上第 j 行的 l 倍：$r_i + lr_j$

初等列变换

- 交换第 i 列和第 j 列：$c_i \longleftrightarrow c_j$
- 第 i 列乘以 k 倍（$k \neq 0$）：$k \times c_i$
- 第 i 列加上第 j 列的 l 倍：

矩阵的初等变换

初等行变换

- 交换第 i 行和第 j 行：$r_i \leftrightarrow r_j$
- 第 i 行乘以 k 倍（$k \neq 0$）：$k \times r_i$
- 第 i 行加上第 j 行的 l 倍：$r_i + lr_j$

初等列变换

- 交换第 i 列和第 j 列：$c_i \leftrightarrow c_j$
- 第 i 列乘以 k 倍（$k \neq 0$）：$k \times c_i$
- 第 i 列加上第 j 列的 l 倍：$c_i + lc_j$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2 - c_3}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2 - c_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例

$$
\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2}
\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\xrightarrow{r_2 - 3r_1}
\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{c_2 - c_3}
\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

注 变换前后是两个不同的矩阵，故用“$\rightarrow$”，而不用“$=$”。

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2 - c_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注 变换前后是两个不同的矩阵，故用“$\rightarrow$”，而不用“$=$”。区别行列式的变换：

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2 - c_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注 变换前后是两个不同的矩阵，故用“→”，而不用“=”。区别行列式的变换：

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2 - c_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注 变换前后是两个不同的矩阵，故用“→”，而不用“=”。区别行列式的变换：

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_1 \leftrightarrow r_2}{=\!=\!=} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2 - c_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注 变换前后是两个不同的矩阵，故用“$\to$”，而不用“$=$”。区别行列式的变换：

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_1 \leftrightarrow r_2}{=\!=\!=} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_2 - 3r_1}{=\!=\!=}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2 - c_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注 变换前后是两个不同的矩阵，故用“$\to$”，而不用“$=$”。区别行列式的变换：

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 - 3r_1} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2 - c_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注 变换前后是两个不同的矩阵，故用“$\rightarrow$”，而不用“$=$”。区别行列式的变换：

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_1 \leftrightarrow r_2}{=\!=\!=} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_2 - 3r_1}{=\!=\!=} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_2 - c_3}{=\!=\!=}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2 - c_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注 变换前后是两个不同的矩阵，故用“$\rightarrow$”，而不用“$=$”。区别行列式的变换：

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_1 \leftrightarrow r_2}{=\!=\!=} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_2 - 3r_1}{=\!=\!=} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_2 - c_3}{=\!=\!=} - \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2 - c_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注 变换前后是两个不同的矩阵，故用“→”，而不用“=”。区别行列式的变换：

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_1 \leftrightarrow r_2}{=\!=\!=} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_2 - 3r_1}{=\!=\!=} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_2 - c_3}{=\!=\!=} -\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -8$$

初等矩阵 I

定义 对单位矩阵 I 施以一次初等变换得到的矩阵，称为初等矩阵。

初等矩阵 I

定义 对单位矩阵 I 施以一次初等变换得到的矩阵，称为初等矩阵。

- 对 I 施以第一种初等行变换（$r_i \leftrightarrow r_j$）得到的矩阵：

$$\left(\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & & & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & & & & \\
& & 1 & & & & & & & & \\
& & & 1 & & & & & & & \\
& & & & 1 & & & & & & \\
& & & & & \ddots & & & & & \\
& & & & & & 1 & & & & \\
& & & & & & & 1 & & & \\
& & & & & & & & 1 & & \\
& & & & & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & & & & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \leftarrow i\ \text{th} \\ \\ \\ \\ \leftarrow j\ \text{th} \\ \\ \\ \\
\end{array}
\xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j}$$

初等矩阵 I

定义 对单位矩阵 I 施以一次初等变换得到的矩阵，称为初等矩阵。

- 对 I 施以第一种初等行变换（$r_i \leftrightarrow r_j$）得到的矩阵：

$$
\begin{array}{c}
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & & & & \\
& & 1 & & & & & & & & \\
& & & 1 & & & & & & & \\
& & & & 1 & & & & & & \\
& & & & & \ddots & & & & & \\
& & & & & & 1 & & & & \\
& & & & & & & 1 & & & \\
& & & & & & & & 1 & & \\
& & & & & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \leftarrow i\text{ th} \\ \\ \\ \\ \leftarrow j\text{ th} \\ \\ \\ \\
\end{array}
\xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j}
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & & \\
& & 1 & & & & & & \\
& & & 0 & \cdots & \cdots & 1 & & \\
& & & \vdots & 1 & & \vdots & & \\
& & & \vdots & & \ddots & \vdots & & \\
& & & \vdots & & 1 & \vdots & & \\
& & & 1 & \cdots & \cdots & 0 & & \\
& & & & & & & 1 & \\
& & & & & & & & \ddots \\
& & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \leftarrow i\text{ th} \\ \\ \\ \\ \leftarrow j\text{ th} \\ \\ \\ \\
\end{array}
$$

初等矩阵 I

定义 对单位矩阵 I 施以一次初等变换得到的矩阵，称为初等矩阵。

- 对 I 施以第一种初等行变换（$r_i \leftrightarrow r_j$）得到的矩阵：

$$\left(\begin{array}{ccccccccccc}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& 1 &&&&&&& \\
&&&& 1 &&&&&& \\
&&&&& \ddots &&&&& \\
&&&&&& 1 &&&& \\
&&&&&&& 1 &&& \\
&&&&&&&& 1 && \\
&&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \leftarrow i\text{ th} \\ \\ \\ \\ \leftarrow j\text{ th} \\ \\ \\ \\
\end{array}
\xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j}
\left(\begin{array}{ccccccccccc}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 &&& \\
&&& \vdots & 1 &&& \vdots &&& \\
&&& \vdots && \ddots && \vdots &&& \\
&&& \vdots &&& 1 & \vdots &&& \\
&&& 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 &&& \\
&&&&&&&& 1 && \\
&&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \leftarrow i\text{ th} \\ \\ \\ \\ \leftarrow j\text{ th} \\ \\ \\ \\
\end{array}
=: I(ij)$$

初等矩阵 I

定义 对单位矩阵 I 施以一次初等变换得到的矩阵，称为初等矩阵。

- 对 I 施以第一种初等行变换（$r_i \leftrightarrow r_j$）得到的矩阵：

$$
\begin{array}{c}
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & \\
 & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & & & \ddots & & & \\
 & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & 1 & \\
 & & & & & & & & 1 \\
 & & & & & & & & & \ddots \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \leftarrow i\text{ th} \\ \\ \\ \\ \leftarrow j\text{ th} \\ \\ \\ \\
\end{array}
\xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j}
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & \\
 & & & 0 & \cdots & \cdots & 1 & & \\
 & & & \vdots & 1 & & \vdots & & \\
 & & & \vdots & & \ddots & \vdots & & \\
 & & & \vdots & & 1 & \vdots & & \\
 & & & 1 & \cdots & \cdots & 0 & & \\
 & & & & & & & 1 & \\
 & & & & & & & & \ddots \\
 & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \leftarrow i\text{ th} \\ \\ \\ \\ \leftarrow j\text{ th} \\ \\ \\ \\
\end{array}
=: I(ij)
$$

注 对 I 施以第一种初等列变换（$c_i \leftrightarrow c_j$），同样得到 $I(ij)$ 。

初等矩阵 II

定义 对单位矩阵 I 施以一次初等变换得到的矩阵，称为初等矩阵。

- 对 I 施以第二种初等行变换（$k \times r_i$）得到的矩阵：

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{行} \xrightarrow[(k\neq 0)]{k\times r_i}$$

初等矩阵 II

定义 对单位矩阵 I 施以一次初等变换得到的矩阵，称为初等矩阵。

- 对 I 施以第二种初等行变换（$k \times r_i$）得到的矩阵：

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}\end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i\text{行} \\ \\ \\ \\ \end{array} \xrightarrow[(k\neq 0)]{k\times r_i} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i\text{行} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

初等矩阵 II

定义 对单位矩阵 I 施以一次初等变换得到的矩阵，称为**初等矩阵**。

- 对 I 施以第二种初等行变换（$k \times r_i$）得到的矩阵：

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{行} \xrightarrow[(k\neq 0)]{k\times r_i} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{行} =: I(i(k))$$

初等矩阵 II

定义 对单位矩阵 I 施以一次初等变换得到的矩阵，称为初等矩阵。

- 对 I 施以第二种初等行变换（$k \times r_i$）得到的矩阵：

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{行} \xrightarrow[(k\neq 0)]{k\times r_i} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{行} =: I(i(k))$$

注 对 I 施以第二种初等列变换（$k \times c_i$），同样得到 $I(i(k))$。

初等矩阵 III

定义 对单位矩阵 I 施以一次初等变换得到的矩阵，称为初等矩阵。

- 对 I 施以第三种初等行变换（$r_i + lr_j$）得到的矩阵：

$$\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&&\ddots&&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \leftarrow i\text{行}\\ \\ \leftarrow j\text{行}\\ \\ \\ \end{array}\xrightarrow{r_i+lr_j}$$

初等矩阵 III

定义 对单位矩阵 I 施以一次初等变换得到的矩阵，称为初等矩阵。

- 对 I 施以第三种初等行变换（$r_i + lr_j$）得到的矩阵：

$$\begin{array}{cc}\begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 &&&& \\ &&& \ddots &&& \\ &&&& 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i\text{行} \\ \\ \leftarrow j\text{行} \\ \\ \\ \end{array}\end{array} \xrightarrow{r_i+lr_j} \begin{array}{cc}\begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 & \cdots & l && \\ &&& \ddots & \vdots && \\ &&&& 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i\text{行} \\ \\ \leftarrow j\text{行} \\ \\ \\ \end{array}\end{array}$$

初等矩阵 III

定义 对单位矩阵 I 施以一次初等变换得到的矩阵，称为**初等矩阵**。

- 对 I 施以第三种初等行变换（$r_i + lr_j$）得到的矩阵：

$$\left(\begin{array}{ccccccc} 1 &&&&&& \\ &\ddots&&&&& \\ &&1&&&& \\ &&&\ddots&&& \\ &&&&1&& \\ &&&&&\ddots& \\ &&&&&&1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i\text{行} \\ \\ \leftarrow j\text{行} \\ \\ \\ \end{array} \xrightarrow{r_i+lr_j} \left(\begin{array}{ccccccc} 1 &&&&&& \\ &\ddots&&&&& \\ &&1&\cdots\cdots&l&& \\ &&&\ddots&\vdots&& \\ &&&&1&& \\ &&&&&\ddots& \\ &&&&&&1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i\text{行} \\ \\ \leftarrow j\text{行} \\ \\ \\ \end{array} =: I(ij(l))$$

初等矩阵 III

定义 对单位矩阵 I 施以一次初等变换得到的矩阵，称为初等矩阵。

- 对 I 施以第三种初等行变换（$r_i + lr_j$）得到的矩阵：

$$
\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}
\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i\text{行} \\ \\ \leftarrow j\text{行} \\ \\ \\ \end{array}
\xrightarrow{r_i+lr_j}
\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & l & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}
\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i\text{行} \\ \\ \leftarrow j\text{行} \\ \\ \\ \end{array}
=: I(ij(l))
$$

注 对 I 施以第三种初等列变换（$c_j + lc_i$），同样得到 $I(ij(l))$。

例

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或} c_1 \leftrightarrow c_2]{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或} c_1 \leftrightarrow c_2]{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或}c_1 \leftrightarrow c_2]{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{k \times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或}c_1 \leftrightarrow c_2]{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或}k \times c_2]{k \times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或} c_1 \leftrightarrow c_2]{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或} k \times c_2]{k \times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或}c_1 \leftrightarrow c_2]{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或}k \times c_2]{k \times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + l r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或}c_1 \leftrightarrow c_2]{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或}k \times c_2]{k \times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或}c_3 + lc_1]{r_1 + lr_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{或}c_1\leftrightarrow c_2]{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I(12)$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{或}k\times c_2]{k\times r_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{或}c_3+lc_1]{r_1+lr_3}\begin{pmatrix}1&0&l\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或}c_1\leftrightarrow c_2]{r_1\leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I(12)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或}k\times c_2]{k\times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I(2(k))$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或}c_3+lc_1]{r_1+lr_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或}c_1 \leftrightarrow c_2]{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I(12)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或}k \times c_2]{k \times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I(2(k))$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或}c_3 + lc_1]{r_1 + lr_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I(13(l))$$

设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$，计算以下矩阵的乘积：

- $I(12)A$

- $I(2(k))A$

- $I(13(l))A$

设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$，计算以下矩阵的乘积：

- $I(12)A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$

- $I(2(k))A$

- $I(13(l))A$

设 $A = (a_{ij})_{3\times 3}$，计算以下矩阵的乘积：

- $$I(12)A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

- $I(2(k))A$

- $I(13(l))A$

设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$，计算以下矩阵的乘积：

- $I(12)A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

- $I(2(k))A$

- $I(13(l))A$

设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$，计算以下矩阵的乘积：

- $I(12)A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\ & & \end{pmatrix}$

- $I(2(k))A$

- $I(13(l))A$

设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$，计算以下矩阵的乘积：

- $I(12)A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

- $I(2(k))A$

- $I(13(l))A$

设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$，计算以下矩阵的乘积：

- $I(12)A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$

  结果将 A 作变换 $r_1\leftrightarrow r_2$

- $I(2(k))A$

- $I(13(l))A$

设 $A = (a_{ij})_{3\times 3}$，计算以下矩阵的乘积：

- $$I(12)A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

  结果将 A 作变换 $r_1 \longleftrightarrow r_2$

- $$I(2(k))A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- $I(13(l))A$

设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$，计算以下矩阵的乘积：

- $$I(12)A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$$

  结果将 A 作变换 $r_1\longleftrightarrow r_2$

- $$I(2(k))A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\quad&\quad&\quad\\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

- $I(13(l))A$

设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$，计算以下矩阵的乘积：

- $$I(12)A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$$

  结果将 A 作变换 $r_1\longleftrightarrow r_2$

- $$I(2(k))A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

- $I(13(l))A$

设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$，计算以下矩阵的乘积：

- $$I(12)A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$$

  结果将 A 作变换 $r_1\longleftrightarrow r_2$

- $$I(2(k))A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\ka_{21}&ka_{22}&ka_{23}\\ & & \end{pmatrix}$$

- $I(13(l))A$

设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$，计算以下矩阵的乘积：

- $I(12)A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$

  结果将 A 作变换 $r_1\leftrightarrow r_2$

- $I(2(k))A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\ka_{21}&ka_{22}&ka_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$

- $I(13(l))A$

设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$，计算以下矩阵的乘积：

- $$I(12)A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$$

  结果将 A 作变换 $r_1\longleftrightarrow r_2$

- $$I(2(k))A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\ka_{21}&ka_{22}&ka_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$$

  结果将 A 作变换 $k\times r_2$

- $I(13(l))A$

设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$，计算以下矩阵的乘积：

- $$I(12)A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$$

  结果将 A 作变换 $r_1\longleftrightarrow r_2$

- $$I(2(k))A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\ka_{21}&ka_{22}&ka_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$$

  结果将 A 作变换 $k\times r_2$

- $$I(13(l))A=\begin{pmatrix}1 0 l\\010\\001\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}a_{12}a_{13}\\a_{21}a_{22}a_{23}\\a_{31}a_{32}a_{33}\end{pmatrix}$$

设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$，计算以下矩阵的乘积：

- $$I(12)A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$$

  结果将 A 作变换 $r_1\longleftrightarrow r_2$

- $$I(2(k))A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\ka_{21}&ka_{22}&ka_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$$

  结果将 A 作变换 $k\times r_2$

- $$I(13(l))A=\begin{pmatrix}1 0 l\\010\\001\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}a_{12}a_{13}\\a_{21}a_{22}a_{23}\\a_{31}a_{32}a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\quad&\quad&\quad\\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$，计算以下矩阵的乘积：

- $$I(12)A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$$

  结果将 A 作变换 $r_1\longleftrightarrow r_2$

- $$I(2(k))A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\ka_{21}&ka_{22}&ka_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$$

  结果将 A 作变换 $k\times r_2$

- $$I(13(l))A=\begin{pmatrix}10\,l\\010\\001\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}a_{12}a_{13}\\a_{21}a_{22}a_{23}\\a_{31}a_{32}a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}+la_{31}a_{12}+la_{32}a_{13}+la_{33}\\ \\ \end{pmatrix}$$

设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$，计算以下矩阵的乘积：

- $$I(12)A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$$

  结果将 A 作变换 $r_1\longleftrightarrow r_2$

- $$I(2(k))A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\ka_{21}&ka_{22}&ka_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$$

  结果将 A 作变换 $k\times r_2$

- $$I(13(l))A=\begin{pmatrix}10\,l\\010\\001\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}a_{12}a_{13}\\a_{21}a_{22}a_{23}\\a_{31}a_{32}a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}+la_{31}a_{12}+la_{32}a_{13}+la_{33}\\ \quad a_{21}\qquad a_{22}\qquad a_{23}\\ \end{pmatrix}$$

设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$，计算以下矩阵的乘积：

- $$I(12)A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$$

  结果将 A 作变换 $r_1\longleftrightarrow r_2$

- $$I(2(k))A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\ka_{21}&ka_{22}&ka_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$$

  结果将 A 作变换 $k\times r_2$

- $$I(13(l))A=\begin{pmatrix}10l\\010\\001\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}a_{12}a_{13}\\a_{21}a_{22}a_{23}\\a_{31}a_{32}a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}+la_{31}a_{12}+la_{32}a_{13}+la_{33}\\a_{21}\quad a_{22}\quad a_{23}\\a_{31}\quad a_{32}\quad a_{33}\end{pmatrix}$$

设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$，计算以下矩阵的乘积：

- $I(12)A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$

  结果将 A 作变换 $r_1\longleftrightarrow r_2$

- $I(2(k))A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\ka_{21}&ka_{22}&ka_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$

  结果将 A 作变换 $k\times r_2$

- $I(13(l))A=\begin{pmatrix}1&0&l\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}+la_{31}&a_{12}+la_{32}&a_{13}+la_{33}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$

  结果将 A 作变换 r_1+lr_3

设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$，计算以下矩阵的乘积：

- $AI(12)$

- $AI(2(k))$

- $AI(31(l))$

设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$，计算以下矩阵的乘积：

- $AI(12)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $AI(2(k))$

- $AI(31(l))$

设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$，计算以下矩阵的乘积：

- $AI(12)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

- $AI(2(k))$

- $AI(31(l))$

设 $A=(a_{ij})_{3\times3}$，计算以下矩阵的乘积：

- $$AI(12)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{12} & & \\ a_{22} & & \\ a_{32} & & \end{pmatrix}$$

- $AI(2(k))$

- $AI(31(l))$

设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$，计算以下矩阵的乘积：

- $AI(12)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & \\ a_{22} & a_{21} & \\ a_{32} & a_{31} & \end{pmatrix}$

- $AI(2(k))$

- $AI(31(l))$

设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$，计算以下矩阵的乘积：

- $AI(12)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$

- $AI(2(k))$

- $AI(31(l))$

设 $A=(a_{ij})_{3\times3}$，计算以下矩阵的乘积：

- $AI(12)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$

  结果将 A 作变换 $c_1 \longleftrightarrow c_2$

- $AI(2(k))$

- $AI(31(l))$

设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$，计算以下矩阵的乘积：

- $$AI(12)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

  结果将 A 作变换 $c_1 \longleftrightarrow c_2$

- $$AI(2(k))=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $AI(31(l))$

设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$，计算以下矩阵的乘积：

- $$AI(12)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

  结果将 A 作变换 $c_1 \longleftrightarrow c_2$

- $$AI(2(k))=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

- $AI(31(l))$

设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$，计算以下矩阵的乘积：

- $AI(12)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$

  结果将 A 作变换 $c_1 \longleftrightarrow c_2$

- $AI(2(k))=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ a_{21} & & \\ a_{31} & & \end{pmatrix}$

- $AI(31(l))$

设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$，计算以下矩阵的乘积：

- $$AI(12)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

  结果将 A 作变换 $c_1 \longleftrightarrow c_2$

- $$AI(2(k))=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & ka_{12} & \\ a_{21} & ka_{22} & \\ a_{31} & ka_{32} & \end{pmatrix}$$

- $AI(31(l))$

设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$，计算以下矩阵的乘积：

- $$AI(12)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

  结果将 A 作变换 $c_1 \longleftrightarrow c_2$

- $$AI(2(k))=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- $AI(31(l))$

设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$，计算以下矩阵的乘积：

- $$AI(12)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

  结果将 A 作变换 $c_1 \longleftrightarrow c_2$

- $$AI(2(k))=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

  结果将 A 作变换 $k\times c_2$

- $AI(31(l))$

设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$，计算以下矩阵的乘积：

- $$AI(12)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

  结果将 A 作变换 $c_1 \longleftrightarrow c_2$

- $$AI(2(k))=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

  结果将 A 作变换 $k \times c_2$

- $$AI(31(l))=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$，计算以下矩阵的乘积：

- $AI(12)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$

  结果将 A 作变换 $c_1 \longleftrightarrow c_2$

- $AI(2(k))=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

  结果将 A 作变换 $k \times c_2$

- $AI(31(l))=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$，计算以下矩阵的乘积：

- $$AI(12)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

  结果将 A 作变换 $c_1 \longleftrightarrow c_2$

- $$AI(2(k))=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

  结果将 A 作变换 $k\times c_2$

- $$AI(31(l))=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ a_{21} & & \\ a_{31} & & \end{pmatrix}$$

设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$，计算以下矩阵的乘积：

- $$AI(12)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

  结果将 A 作变换 $c_1 \longleftrightarrow c_2$

- $$AI(2(k))=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

  结果将 A 作变换 $k\times c_2$

- $$AI(31(l))=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \\ a_{21} & a_{22} & \\ a_{31} & a_{32} & \end{pmatrix}$$

设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$，计算以下矩阵的乘积：

- $$AI(12)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

  结果将 A 作变换 $c_1 \longleftrightarrow c_2$

- $$AI(2(k))=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

  结果将 A 作变换 $k \times c_2$

- $$AI(31(l))=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+la_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+la_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+la_{31} \end{pmatrix}$$

设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$，计算以下矩阵的乘积：

- $$AI(12)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

  结果将 A 作变换 $c_1 \longleftrightarrow c_2$

- $$AI(2(k))=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

  结果将 A 作变换 $k\times c_2$

- $$AI(31(l))=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+la_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+la_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+la_{31} \end{pmatrix}$$

  结果将 A 作变换 c_1+lc_3

初等矩阵与初等变换关系

设 A 是 $m \times n$ 矩阵，则

初等矩阵与初等变换关系

设 A 是 $m \times n$ 矩阵，则

性质 1 对 A 作初等 行 变换等价于对 A 左乘 相应种类的初等矩阵

性质 2 对 A 作初等 列 变换等价于对 A 右乘 相应种类的初等矩阵

初等矩阵与初等变换关系

设 A 是 $m \times n$ 矩阵，则

性质 1 对 A 作初等 行 变换等价于对 A 左乘 相应种类的初等矩阵：

$$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} \qquad , \qquad A \xrightarrow{k \times r_i} \qquad , \qquad A \xrightarrow{r_i + l r_j}$$

性质 2 对 A 作初等 列 变换等价于对 A 右乘 相应种类的初等矩阵

初等矩阵与初等变换关系

设 A 是 $m \times n$ 矩阵，则

性质 1 对 A 作初等 行 变换等价于对 A 左乘 相应种类的初等矩阵：

$$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} I(ij)A, \qquad A \xrightarrow{k \times r_i} \qquad\qquad , \qquad A \xrightarrow{r_i + l r_j}$$

性质 2 对 A 作初等 列 变换等价于对 A 右乘 相应种类的初等矩阵

初等矩阵与初等变换关系

设 A 是 $m \times n$ 矩阵，则

性质 1 对 A 作初等 行 变换等价于对 A 左乘 相应种类的初等矩阵：

$$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} I(ij)A, \qquad A \xrightarrow{k \times r_i} I(i(k))A, \qquad A \xrightarrow{r_i + l r_j}$$

性质 2 对 A 作初等 列 变换等价于对 A 右乘 相应种类的初等矩阵

初等矩阵与初等变换关系

设 A 是 $m \times n$ 矩阵，则

性质 1 对 A 作初等 行 变换等价于对 A 左乘 相应种类的初等矩阵：

$$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} I(ij)A, \qquad A \xrightarrow{k \times r_i} I(i(k))A, \qquad A \xrightarrow{r_i + l r_j} I(ij(l))A$$

性质 2 对 A 作初等 列 变换等价于对 A 右乘 相应种类的初等矩阵

初等矩阵与初等变换关系

设 A 是 $m \times n$ 矩阵，则

性质 1 对 A 作初等 行 变换等价于对 A 左乘 相应种类的初等矩阵：

$$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} I(ij)A, \qquad A \xrightarrow{k \times r_i} I(i(k))A, \qquad A \xrightarrow{r_i + l r_j} I(ij(l))A$$

性质 2 对 A 作初等 列 变换等价于对 A 右乘 相应种类的初等矩阵：

$$A \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} \qquad , \qquad A \xrightarrow{k \times c_i} \qquad , \qquad A \xrightarrow{c_j + l c_i}$$

初等矩阵与初等变换关系

设 A 是 $m \times n$ 矩阵，则

性质 1 对 A 作初等 行 变换等价于对 A 左乘 相应种类的初等矩阵：

$$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} I(ij)A, \qquad A \xrightarrow{k \times r_i} I(i(k))A, \qquad A \xrightarrow{r_i + l r_j} I(ij(l))A$$

性质 2 对 A 作初等 列 变换等价于对 A 右乘 相应种类的初等矩阵：

$$A \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} AI(ij), \qquad A \xrightarrow{k \times c_i} \qquad\qquad , \qquad A \xrightarrow{c_j + l c_i}$$

初等矩阵与初等变换关系

设 A 是 $m \times n$ 矩阵，则

性质 1 对 A 作初等 行 变换等价于对 A 左乘 相应种类的初等矩阵：

$$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} I(ij)A, \qquad A \xrightarrow{k \times r_i} I(i(k))A, \qquad A \xrightarrow{r_i + l r_j} I(ij(l))A$$

性质 2 对 A 作初等 列 变换等价于对 A 右乘 相应种类的初等矩阵：

$$A \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} AI(ij), \qquad A \xrightarrow{k \times c_i} AI(i(k)), \qquad A \xrightarrow{c_j + l c_i}$$

初等矩阵与初等变换关系

设 A 是 $m \times n$ 矩阵，则

性质 1 对 A 作初等 行 变换等价于对 A 左乘 相应种类的初等矩阵：

$$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} I(ij)A, \qquad A \xrightarrow{k \times r_i} I(i(k))A, \qquad A \xrightarrow{r_i + l r_j} I(ij(l))A$$

性质 2 对 A 作初等 列 变换等价于对 A 右乘 相应种类的初等矩阵：

$$A \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} AI(ij), \qquad A \xrightarrow{k \times c_i} AI(i(k)), \qquad A \xrightarrow{c_j + l c_i} AI(ij(l))$$

初等矩阵与初等变换关系

设 A 是 $m \times n$ 矩阵，则

性质 1 对 A 作初等 行 变换等价于对 A 左乘 相应种类的初等矩阵：

$$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} I(ij)A, \qquad A \xrightarrow{k \times r_i} I(i(k))A, \qquad A \xrightarrow{r_i + l r_j} I(ij(l))A$$

性质 2 对 A 作初等 列 变换等价于对 A 右乘 相应种类的初等矩阵：

$$A \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} AI(ij), \qquad A \xrightarrow{k \times c_i} AI(i(k)), \qquad A \xrightarrow{c_j + l c_i} AI(ij(l))$$

注 性质 1 中的初等矩阵是 $n \times n$，而性质 2 中的初等矩阵是 $m \times m$

下面证明：$A \xrightarrow{c_j+lc_i} AI(ij(l))$。其余类似。

下面证明：$A \xrightarrow{c_j+lc_i} AI(ij(l))$。其余类似。

1. 将 $I(ij(l))$ 和 A 写成分块矩阵的形式：

$$I(ij(l)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & \cdots & \cdots & l & & \\ & & & \ddots & & \vdots & & \\ & & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

下面证明：$A \xrightarrow{c_j+lc_i} AI(ij(l))$。其余类似。

1. 将 $I(ij(l))$ 和 A 写成分块矩阵的形式：

$$I(ij(l))=\left(\begin{array}{c|c|c|cc|c|c|c}
1 & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & \\
 & & 1 & \cdots & \cdots & l & & \\
 & & & \ddots & & \vdots & & \\
 & & & & \ddots & \vdots & & \\
 & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & 1
\end{array}\right)$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

下面证明：$A \xrightarrow{c_j+lc_i} AI(ij(l))$。其余类似。

1. 将 $I(ij(l))$ 和 A 写成分块矩阵的形式：

$$
I(ij(l)) = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} \varepsilon_1 & & & & & & & \end{array} \\
\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c}
1 & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & \\
 & & 1 & \cdots & \cdots & l & & \\
 & & & \ddots & & \vdots & & \\
 & & & & \ddots & \vdots & & \\
 & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & 1
\end{array}\right)
\end{array}
$$

$$
A = \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}
$$

下面证明：$A \xrightarrow{c_j+lc_i} AI(ij(l))$。其余类似。

1. 将 $I(ij(l))$ 和 A 写成分块矩阵的形式：

$$I(ij(l)) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} \varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_i & \cdots & \cdots & & \cdots & \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & \cdots & \cdots & l & & \\ & & & \ddots & & \vdots & & \\ & & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

下面证明：$A \xrightarrow{c_j+lc_i} AI(ij(l))$。其余类似。

1. 将 $I(ij(l))$ 和 A 写成分块矩阵的形式：

$$I(ij(l)) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} \varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_i & \cdots & \cdots & & \cdots & \varepsilon_n \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & \cdots & \cdots & l & & \\ & & & \ddots & & \vdots & & \\ & & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

下面证明：$A\xrightarrow{c_j+lc_i}AI(ij(l))$。其余类似。

1. 将 $I(ij(l))$ 和 A 写成分块矩阵的形式：

$$I(ij(l))=\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} \varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_i & \cdots & \cdots & \varepsilon_j+l\varepsilon_j & \cdots & \varepsilon_n \end{array}\\
\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c}
1 & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & \\
 & & 1 & \cdots & \cdots & l & & \\
 & & & \ddots & & \vdots & & \\
 & & & & \ddots & \vdots & & \\
 & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & 1
\end{array}\right)
\end{array}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

下面证明：$A \xrightarrow{c_j + lc_i} AI(ij(l))$。其余类似。

1. 将 $I(ij(l))$ 和 A 写成分块矩阵的形式：

$$
I(ij(l)) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} \varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_i & \cdots & \cdots & \varepsilon_j + l\varepsilon_j & \cdots & \varepsilon_n \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c}
1 & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & \\
 & & 1 & \cdots & \cdots & l & & \\
 & & & \ddots & & \vdots & & \\
 & & & & \ddots & \vdots & & \\
 & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & 1
\end{array}\right) \end{array} = (\varepsilon_1, \cdots \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{ th}}}{\varepsilon_i} \cdots, \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{ th}}}{\varepsilon_j + l\varepsilon_i}, \cdots, \varepsilon_n)
$$

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}
$$

下面证明：$A \xrightarrow{c_j + lc_i} AI(ij(l))$。其余类似。

1. 将 $I(ij(l))$ 和 A 写成分块矩阵的形式：

$$I(ij(l)) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_i & \cdots & \cdots\ \varepsilon_j + l\varepsilon_j & \cdots & \varepsilon_n \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots\quad\cdots & l & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & \quad\ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{array}\right) \end{array} = (\varepsilon_1, \cdots \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{ th}}}{\varepsilon_i} \cdots, \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{ th}}}{\varepsilon_j + l\varepsilon_i}, \cdots, \varepsilon_n)$$

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right)$$

下面证明：$A \xrightarrow{c_j+lc_i} AI(ij(l))$。其余类似。

1. 将 $I(ij(l))$ 和 A 写成分块矩阵的形式：

$$I(ij(l)) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} \varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_i & \cdots & \cdots & \varepsilon_j + l\varepsilon_j & \cdots & \varepsilon_n \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots\ \cdots & l & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{array}\right) \end{array} = (\varepsilon_1, \cdots \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{ th}}}{\varepsilon_i} \cdots, \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{ th}}}{\varepsilon_j + l\varepsilon_i}, \cdots, \varepsilon_n)$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right) \end{array}$$

下面证明：$A \xrightarrow{c_j+lc_i} AI(ij(l))$。其余类似。

1. 将 $I(ij(l))$ 和 A 写成分块矩阵的形式：

$$I(ij(l)) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_i & \cdots & \cdots\ \varepsilon_j + l\varepsilon_j \cdots & & \varepsilon_n \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots\ \ \cdots & l & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & \quad\ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{array}\right) \end{array} = (\varepsilon_1, \cdots \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{ th}}}{\varepsilon_i} \cdots, \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{ th}}}{\varepsilon_j + l\varepsilon_i}, \cdots, \varepsilon_n)$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right) \end{array} = (A_1, A_2, \cdots, A_n)$$

下面证明：$A \xrightarrow{c_j+lc_i} AI(ij(l))$。其余类似。

1. 将 $I(ij(l))$ 和 A 写成分块矩阵的形式：

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} \varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_i & \cdots & \cdots\ \varepsilon_j + l\varepsilon_j & \cdots & \varepsilon_n \end{array} \\
I(ij(l)) = & \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 1 & \cdots\quad\cdots & l & & \\
 & & & \ddots & \vdots & & \\
 & & & \ddots & \vdots & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{array}\right) = (\varepsilon_1, \cdots \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{ th}}}{\varepsilon_i} \cdots, \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{ th}}}{\varepsilon_j + l\varepsilon_i}, \cdots, \varepsilon_n)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \end{array} \\
A = & \left(\begin{array}{c|c|c|c}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{array}\right) = (A_1, A_2, \cdots, A_n)
\end{array}
$$

容易验证 $A\varepsilon_i = A_i$

2. 计算乘积：

$$AI(ij(l))$$

2. 计算乘积：

$$AI(ij(l)) = A(\varepsilon_1, \cdots, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{ th}}}{\varepsilon_i}, \cdots, \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{ th}}}{\varepsilon_j + l\varepsilon_i}, \cdots, \varepsilon_n)$$

2. 计算乘积：

$$
\begin{aligned}
AI(ij(l)) &= A(\varepsilon_1, \cdots, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{ th}}}{\varepsilon_i}, \cdots, \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{ th}}}{\varepsilon_j + l\varepsilon_i}, \cdots, \varepsilon_n) \\
&= (A\varepsilon_1, \cdots, A\varepsilon_i, \cdots, \cdots, A(\varepsilon_j + l\varepsilon_i), \cdots, A\varepsilon_n)
\end{aligned}
$$

2. 计算乘积：

$$AI(ij(l)) = A(\varepsilon_1, \cdots, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{ th}}}{\varepsilon_i}, \cdots, \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{ th}}}{\varepsilon_j + l\varepsilon_i}, \cdots, \varepsilon_n)$$

$$= (A\varepsilon_1, \cdots, A\varepsilon_i, \cdots, \cdots, A(\varepsilon_j + l\varepsilon_i), \cdots, A\varepsilon_n)$$

$$= (A\varepsilon_1, \cdots, A\varepsilon_i, \cdots, \cdots, A\varepsilon_j + lA\varepsilon_i, \cdots, A\varepsilon_n)$$

2. 计算乘积：

$$
\begin{aligned}
AI(ij(l)) &= A(\varepsilon_1, \cdots, \underset{\substack{\uparrow \\ i\ \text{th}}}{\varepsilon_i}, \cdots, \underset{\substack{\uparrow \\ j\ \text{th}}}{\varepsilon_j + l\varepsilon_i}, \cdots, \varepsilon_n) \\
&= (A\varepsilon_1, \cdots, A\varepsilon_i, \cdots, \cdots, A(\varepsilon_j + l\varepsilon_i), \cdots, A\varepsilon_n) \\
&= (A\varepsilon_1, \cdots, A\varepsilon_i, \cdots, \cdots, A\varepsilon_j + lA\varepsilon_i, \cdots, A\varepsilon_n) \\
&= (A_1, \cdots, A_i, \cdots, \cdots, A_j + lA_i, \cdots, A_n)
\end{aligned}
$$

2. 计算乘积：

$$
\begin{aligned}
AI(ij(l)) &= A(\varepsilon_1, \cdots, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{ th}}}{\varepsilon_i}, \cdots, \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{ th}}}{\varepsilon_j + l\varepsilon_i}, \cdots, \varepsilon_n) \\
&= (A\varepsilon_1, \cdots, A\varepsilon_i, \cdots, \cdots, A(\varepsilon_j + l\varepsilon_i), \cdots, A\varepsilon_n) \\
&= (A\varepsilon_1, \cdots, A\varepsilon_i, \cdots, \cdots, A\varepsilon_j + lA\varepsilon_i, \cdots, A\varepsilon_n) \\
&= (A_1, \cdots, A_i, \cdots, \cdots, A_j + lA_i, \cdots, A_n) \\
&= A \text{ 的第 } j \text{ 列加上第 } i \text{ 列的 } l \text{ 倍}
\end{aligned}
$$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$，其中（$k \neq 0$）
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$，其中（$i \neq j$）

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$，其中（$k \neq 0$）
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$，其中（$i \neq j$）

证明

- $I(ij)I(ij) =$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$，其中（$k \neq 0$）
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$，其中（$i \neq j$）

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) =$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$，其中（$k \neq 0$）
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$，其中（$i \neq j$）

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$，其中（$k \neq 0$）
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$，其中（$i \neq j$）

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} * \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j}$$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$，其中（$k \neq 0$）
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$，其中（$i \neq j$）

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} * \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} I$$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$，其中（$k \neq 0$）
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$，其中（$i \neq j$）

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{c_i \longleftrightarrow c_j} * \xrightarrow{c_i \longleftrightarrow c_j} I$$

- $I(i(k))I(i(\frac{1}{k})) =$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$，其中（$k \neq 0$）
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$，其中（$i \neq j$）

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} * \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} I$$

- $I(i(k))I(i(\frac{1}{k})) = I \cdot I(i(k)) \cdot I(i(\frac{1}{k})) =$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$，其中（$k \neq 0$）
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$，其中（$i \neq j$）

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{c_i \longleftrightarrow c_j} * \xrightarrow{c_i \longleftrightarrow c_j} I$$

- $I(i(k))I(i(\frac{1}{k})) = I \cdot I(i(k)) \cdot I(i(\frac{1}{k})) = I$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$，其中（$k \neq 0$）
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$，其中（$i \neq j$）

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{c_i \longleftrightarrow c_j} * \xrightarrow{c_i \longleftrightarrow c_j} I$$

- $I(i(k))I(i(\frac{1}{k})) = I \cdot I(i(k)) \cdot I(i(\frac{1}{k})) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{k \times c_i} * \xrightarrow{\frac{1}{k} \times c_i}$$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$，其中（$k \neq 0$）
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$，其中（$i \neq j$）

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{c_i \longleftrightarrow c_j} * \xrightarrow{c_i \longleftrightarrow c_j} I$$

- $I(i(k))I(i(\frac{1}{k})) = I \cdot I(i(k)) \cdot I(i(\frac{1}{k})) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{k \times c_i} * \xrightarrow{\frac{1}{k} \times c_i} I$$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$，其中（$k \neq 0$）
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$，其中（$i \neq j$）

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} * \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} I$$

- $I(i(k))I(i(\frac{1}{k})) = I \cdot I(i(k)) \cdot I(i(\frac{1}{k})) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{k \times c_i} * \xrightarrow{\frac{1}{k} \times c_i} I$$

- $I(ij(l))I(ij(-l)) =$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$，其中（$k \neq 0$）
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$，其中（$i \neq j$）

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} * \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} I$$

- $I(i(k))I(i(\frac{1}{k})) = I \cdot I(i(k)) \cdot I(i(\frac{1}{k})) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{k \times c_i} * \xrightarrow{\frac{1}{k} \times c_i} I$$

- $I(ij(l))I(ij(-l)) = I \cdot I(ij(l)) \cdot I(ij(-l)) =$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$，其中（$k \neq 0$）
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$，其中（$i \neq j$）

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{c_i \longleftrightarrow c_j} * \xrightarrow{c_i \longleftrightarrow c_j} I$$

- $I(i(k))I(i(\frac{1}{k})) = I \cdot I(i(k)) \cdot I(i(\frac{1}{k})) = I$，这是利用：

$$I \xrightarrow{k \times c_i} * \xrightarrow{\frac{1}{k} \times c_i} I$$

- $I(ij(l))I(ij(-l)) = I \cdot I(ij(l)) \cdot I(ij(-l)) = I$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$，其中（$k \neq 0$）
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$，其中（$i \neq j$）

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$，这是利用：
$$I \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} * \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} I$$
- $I(i(k))I(i(\frac{1}{k})) = I \cdot I(i(k)) \cdot I(i(\frac{1}{k})) = I$，这是利用：
$$I \xrightarrow{k \times c_i} * \xrightarrow{\frac{1}{k} \times c_i} I$$
- $I(ij(l))I(ij(-l)) = I \cdot I(ij(l)) \cdot I(ij(-l)) = I$，这是利用：
$$I \xrightarrow{c_j + l c_i} * \xrightarrow{c_j - l c_i}$$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$，其中（$k \neq 0$）
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$，其中（$i \neq j$）

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$，这是利用：
$$I \xrightarrow{c_i \longleftrightarrow c_j} * \xrightarrow{c_i \longleftrightarrow c_j} I$$
- $I(i(k))I(i(\frac{1}{k})) = I \cdot I(i(k)) \cdot I(i(\frac{1}{k})) = I$，这是利用：
$$I \xrightarrow{k \times c_i} * \xrightarrow{\frac{1}{k} \times c_i} I$$
- $I(ij(l))I(ij(-l)) = I \cdot I(ij(l)) \cdot I(ij(-l)) = I$，这是利用：
$$I \xrightarrow{c_j + lc_i} * \xrightarrow{c_j - lc_i} I$$

矩阵的等价标准形

定理 任何矩阵 $A_{m\times n}$，经过有限次初等变换后，总可以化为如下形式的矩阵：

$$D=\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$$

矩阵的等价标准形

定理 任何矩阵 $A_{m\times n}$，经过有限次初等变换后，总可以化为如下形式的矩阵：

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$$

即，除左上角为 r 阶单位矩阵，其余元素均为零。

矩阵的等价标准形

定理 任何矩阵 $A_{m\times n}$，经过有限次初等变换后，总可以化为如下形式的矩阵：

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{m\times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

即，除左上角为 r 阶单位矩阵，其余元素均为零。

矩阵的等价标准形

定理 任何矩阵 $A_{m\times n}$，经过有限次初等变换后，总可以化为如下形式的矩阵：

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{m\times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

即，除左上角为 r 阶单位矩阵，其余元素均为零。该形式称为 A 的等价标准形。

矩阵的等价标准形

定理 任何矩阵 $A_{m\times n}$，经过有限次初等变换后，总可以化为如下形式的矩阵：

$$D=\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

即，除左上角为 r 阶单位矩阵，其余元素均为零。该形式称为 A 的等价标准形。

注 r 取值范围：

矩阵的等价标准形

定理 任何矩阵 $A_{m\times n}$，经过有限次初等变换后，总可以化为如下形式的矩阵：

$$D=\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

即，除左上角为 r 阶单位矩阵，其余元素均为零。该形式称为 A 的等价标准形。

注 r 取值范围：$0\le r$,

矩阵的等价标准形

定理 任何矩阵 $A_{m\times n}$，经过有限次初等变换后，总可以化为如下形式的矩阵：

$$D=\begin{pmatrix}1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0\end{pmatrix}_{m\times n}=\begin{pmatrix}I_r & O \\ O & O\end{pmatrix}$$

即，除左上角为 r 阶单位矩阵，其余元素均为零。该形式称为 A 的等价标准形。

注 r 取值范围：$0\le r$，$r\le m$

矩阵的等价标准形

定理 任何矩阵 $A_{m\times n}$，经过有限次初等变换后，总可以化为如下形式的矩阵：

$$D=\begin{pmatrix}1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0\end{pmatrix}_{m\times n}=\begin{pmatrix}I_r & O\\ O & O\end{pmatrix}$$

即，除左上角为 r 阶单位矩阵，其余元素均为零。该形式称为 A 的等价标准形。

注 r 取值范围：$0\le r$，$r\le m$且 $r\le n$

例 4×3 矩阵 $\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ 所有可能的等价标准形是什么？

例 4×3 矩阵 $\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ 所有可能的等价标准形是什么？

4×3 矩阵等价标准形的一般形式是

$$D = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}_{4\times 3}$$

例 4×3 矩阵 $\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ 所有可能的等价标准形是什么？

4×3 矩阵等价标准形的一般形式是

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{4\times 3} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

例 4×3 矩阵 $\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ 所有可能的等价标准形是什么？

4×3 矩阵等价标准形的一般形式是

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{4\times 3} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

其中 $0 \leq r \leq 3$

例 4×3 矩阵 $\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ 所有可能的等价标准形是什么？

4×3 矩阵等价标准形的一般形式是

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{4\times 3} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

其中 $0 \le r \le 3$，所以全部可能是：

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

例 4×3 矩阵 $\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ 所有可能的等价标准形是什么？

4×3 矩阵等价标准形的一般形式是

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{4\times 3} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

其中 $0 \leq r \leq 3$，所以全部可能是：

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

例 4×3 矩阵 $\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ 所有可能的等价标准形是什么？

4×3 矩阵等价标准形的一般形式是

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{4\times 3} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

其中 $0 \le r \le 3$，所以全部可能是：

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

例 4×3 矩阵 $\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ 所有可能的等价标准形是什么?

4×3 矩阵等价标准形的一般形式是

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{4\times 3} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

其中 $0 \le r \le 3$，所以全部可能是:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ & & & \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ & & & \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2 - \frac{1}{2}c_1}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-\frac{1}{2}c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & & \\ 0 & -1 & & \\ 0 & -1 & & \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_3-c_1]{c_2-\frac{1}{2}c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & & \\ 0 & -1 & & \\ 0 & -1 & & \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_3-c_1]{c_2-\frac{1}{2}c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \\ 0 & -1 & -1 & \\ 0 & -1 & -1 & \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{c_3-c_1 \\ c_4-\frac{3}{2}c_1}]{c_2-\frac{1}{2}c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \\ 0 & -1 & -1 & \\ 0 & -1 & -1 & \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{c_3-c_1 \\ c_4-\frac{3}{2}c_1}]{c_2-\frac{1}{2}c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{c_3 - c_1 \\ c_4 - \frac{3}{2}c_1}]{c_2 - \frac{1}{2}c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2} \times r_1}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{c_3-c_1 \\ c_4-\frac{3}{2}c_1}]{c_2-\frac{1}{2}c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}\times r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{c_3-c_1 \\ c_4-\frac{3}{2}c_1}]{c_2-\frac{1}{2}c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}\times r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{c_3-c_1 \\ c_4-\frac{3}{2}c_1}]{c_2-\frac{1}{2}c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}\times r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{c_3-c_1 \\ c_4-\frac{3}{2}c_1}]{c_2-\frac{1}{2}c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}\times r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3-c_2}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{c_3-c_1 \\ c_4-\frac{3}{2}c_1}]{c_2-\frac{1}{2}c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}\times r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3-c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & -1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{c_3-c_1 \\ c_4-\frac{3}{2}c_1}]{c_2-\frac{1}{2}c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}\times r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_4-c_2]{c_3-c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & -1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{c_3-c_1 \\ c_4-\frac{3}{2}c_1}]{c_2-\frac{1}{2}c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}\times r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_4-c_2]{c_3-c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{c_3-c_1 \\ c_4-\frac{3}{2}c_1}]{c_2-\frac{1}{2}c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}\times r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_4-c_2]{c_3-c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)\times r_2}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{c_3-c_1 \\ c_4-\frac{3}{2}c_1}]{c_2-\frac{1}{2}c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}\times r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_4-c_2]{c_3-c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)\times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2 - 4c_1}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2 - 4c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & 2 & & \\ 0 & -2 & & \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_3 - 3c_1]{c_2 - 4c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & 2 & & \\ 0 & -2 & & \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_3 - 3c_1]{c_2 - 4c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 2 & 2 & \\ 0 & -2 & -2 & \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{c_3 - 3c_1 \\ c_4 - 5c_1}]{c_2 - 4c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 2 & 2 & \\ 0 & -2 & -2 & \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{c_3 - 3c_1 \\ c_4 - 5c_1}]{c_2 - 4c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{c_3 - 3c_1 \\ c_4 - 5c_1}]{c_2 - 4c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{c_3 - 3c_1 \\ c_4 - 5c_1}]{c_2 - 4c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{c_3 - 3c_1 \\ c_4 - 5c_1}]{c_2 - 4c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3 - c_2}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{c_3 - 3c_1 \\ c_4 - 5c_1}]{c_2 - 4c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3 - c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 2 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$
\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}
\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2}
\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}
\xrightarrow{r_3 - r_1}
\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[\substack{c_3 - 3c_1 \\ c_4 - 5c_1}]{c_2 - 4c_1}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}
\xrightarrow{r_3 + r_2}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[c_4 - \frac{3}{2}c_2]{c_3 - c_2}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 2 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}
$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{c_3 - 3c_1 \\ c_4 - 5c_1}]{c_2 - 4c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_4 - \frac{3}{2}c_2]{c_3 - c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{c_3 - 3c_1 \\ c_4 - 5c_1}]{c_2 - 4c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_4 - \frac{3}{2}c_2]{c_3 - c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2} \times r_2}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{c_3 - 3c_1 \\ c_4 - 5c_1}]{c_2 - 4c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_4 - \frac{3}{2}c_2]{c_3 - c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2} \times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+r_1}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ & \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ & \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-3c_1}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-3c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-3c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-3c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-3c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\longleftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{5}\times r_2}$$

例 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-3c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{5}\times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

性质 设 A 是 n 阶可逆方阵，则可以经过有限次初等**行**变换可化为单位矩阵。

性质 设 A 是 n 阶可逆方阵，则可以经过有限次初等行变换可化为单位矩阵。等价地，存在初等矩阵 $R_1, \cdots, R_k$ 使得

$$R_1 \cdots R_k A = I_n.$$

性质 设 A 是 n 阶可逆方阵，则可以经过有限次初等行变换可化为单位矩阵。等价地，存在初等矩阵 $R_1, \cdots, R_k$ 使得

$$R_1 \cdots R_k A = I_n.$$

证明

$$A \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

性质 设 A 是 n 阶可逆方阵，则可以经过有限次初等行变换可化为单位矩阵。等价地，存在初等矩阵 $R_1, \cdots, R_k$ 使得

$$R_1 \cdots R_k A = I_n.$$

证明

$$A \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

从而存在 n 阶初等矩阵 $P_1, P_2, \ldots, P_s$ 与 $Q_1, Q_2, \ldots, Q_t$ 使得

性质 设 A 是 n 阶可逆方阵，则可以经过有限次初等行变换可化为单位矩阵。等价地，存在初等矩阵 $R_1, \cdots, R_k$ 使得

$$R_1 \cdots R_k A = I_n.$$

证明

$$A \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

从而存在 n 阶初等矩阵 $P_1, P_2, \ldots, P_s$ 与 $Q_1, Q_2, \ldots, Q_t$ 使得

$$P_s \cdots P_2 P_1 A$$

性质 设 A 是 n 阶可逆方阵，则可以经过有限次初等行变换可化为单位矩阵。等价地，存在初等矩阵 $R_1, \cdots, R_k$ 使得

$$R_1 \cdots R_k A = I_n.$$

证明

$$A \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

从而存在 n 阶初等矩阵 $P_1, P_2, \ldots, P_s$ 与 $Q_1, Q_2, \ldots, Q_t$ 使得

$$P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t$$

性质 设 A 是 n 阶可逆方阵，则可以经过有限次初等行变换可化为单位矩阵。等价地，存在初等矩阵 $R_1, \cdots, R_k$ 使得

$$R_1 \cdots R_k A = I_n.$$

证明

$$A \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

从而存在 n 阶初等矩阵 $P_1, P_2, \ldots, P_s$ 与 $Q_1, Q_2, \ldots, Q_t$ 使得

$$P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = D = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

性质 设 A 是 n 阶可逆方阵，则可以经过有限次初等行变换可化为单位矩阵。等价地，存在初等矩阵 $R_1, \cdots, R_k$ 使得

$$R_1 \cdots R_k A = I_n.$$

证明

$$A \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

从而存在 n 阶初等矩阵 $P_1, P_2, \ldots, P_s$ 与 $Q_1, Q_2, \ldots, Q_t$ 使得

$$P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = D = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

注意到

$$|A| \neq 0$$

性质 设 A 是 n 阶可逆方阵，则可以经过有限次初等行变换可化为单位矩阵。等价地，存在初等矩阵 $R_1, \cdots, R_k$ 使得

$$R_1 \cdots R_k A = I_n.$$

证明

$$A \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

从而存在 n 阶初等矩阵 $P_1, P_2, \ldots, P_s$ 与 $Q_1, Q_2, \ldots, Q_t$ 使得

$$P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = D = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

注意到

$$|A| \neq 0 \quad \Rightarrow \quad |D| \neq 0$$

性质 设 A 是 n 阶可逆方阵，则可以经过有限次初等行变换可化为单位矩阵。等价地，存在初等矩阵 $R_1, \cdots, R_k$ 使得

$$R_1 \cdots R_k A = I_n.$$

证明

$$A \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

从而存在 n 阶初等矩阵 $P_1, P_2, \ldots, P_s$ 与 $Q_1, Q_2, \ldots, Q_t$ 使得

$$P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = D = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

注意到

$$|A| \neq 0 \quad \Rightarrow \quad |D| \neq 0 \quad \Rightarrow \quad r = n,$$

性质 设 A 是 n 阶可逆方阵，则可以经过有限次初等行变换可化为单位矩阵。等价地，存在初等矩阵 $R_1, \cdots, R_k$ 使得

$$R_1 \cdots R_k A = I_n.$$

证明

$$A \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

从而存在 n 阶初等矩阵 $P_1, P_2, \ldots, P_s$ 与 $Q_1, Q_2, \ldots, Q_t$ 使得

$$P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = D = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

注意到

$$|A| \neq 0 \quad \Rightarrow \quad |D| \neq 0 \quad \Rightarrow \quad r = n, D = I_n$$

性质 设 A 是 n 阶可逆方阵，则可以经过有限次初等行变换可化为单位矩阵。等价地，存在初等矩阵 $R_1, \cdots, R_k$ 使得

$$R_1 \cdots R_k A = I_n.$$

证明

$$A \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

从而存在 n 阶初等矩阵 $P_1, P_2, \ldots, P_s$ 与 $Q_1, Q_2, \ldots, Q_t$ 使得

$$P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = D = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

注意到

$$|A| \neq 0 \quad \Rightarrow \quad |D| \neq 0 \quad \Rightarrow \quad r = n, D = I_n$$

所以

$$P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = I_n$$

性质 设 A 是 n 阶可逆方阵，则可以经过有限次初等行变换可化为单位矩阵。等价地，存在初等矩阵 $R_1, \cdots, R_k$ 使得

$$R_1 \cdots R_k A = I_n.$$

证明

$$A \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

从而存在 n 阶初等矩阵 $P_1, P_2, \ldots, P_s$ 与 $Q_1, Q_2, \ldots, Q_t$ 使得

$$P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = D = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

注意到

$$|A| \neq 0 \quad \Rightarrow \quad |D| \neq 0 \quad \Rightarrow \quad r = n, D = I_n$$

所以

$$\underline{P_s \cdots P_2 P_1 A}\ \underline{\underline{Q_1 Q_2 \cdots Q_t}} = I_n$$

性质 设 A 是 n 阶可逆方阵，则可以经过有限次初等行变换可化为单位矩阵。等价地，存在初等矩阵 $R_1, \cdots, R_k$ 使得

$$R_1 \cdots R_k A = I_n.$$

证明

$$A \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

从而存在 n 阶初等矩阵 $P_1, P_2, \dots, P_s$ 与 $Q_1, Q_2, \dots, Q_t$ 使得

$$P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = D = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

注意到

$$|A| \neq 0 \quad \Rightarrow \quad |D| \neq 0 \quad \Rightarrow \quad r = n, D = I_n$$

所以

$$\underline{P_s \cdots P_2 P_1 A}\, \underline{\underline{Q_1 Q_2 \cdots Q_t}} = I_n \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{Q_1 Q_2 \cdots Q_t}}\, \underline{P_s \cdots P_2 P_1 A} = I_n$$

假设 A 可逆，则通过行变换就可将 A 化为单位矩阵，

假设 A 可逆，则通过行变换就可将 A 化为单位矩阵，实际中可采用以下步骤：

假设 A 可逆，则通过行变换就可将 A 化为单位矩阵，实际中可采用以下步骤：

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

假设 A 可逆，则通过行变换就可将 A 化为单位矩阵，实际中可采用以下步骤：

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

假设 A 可逆，则通过行变换就可将 A 化为单位矩阵，实际中可采用以下步骤：

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

假设 A 可逆，则通过行变换就可将 A 化为单位矩阵，实际中可采用以下步骤：

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$

假设 A 可逆，则通过行变换就可将 A 化为单位矩阵，实际中可采用以下步骤：

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$

假设 A 可逆，则通过行变换就可将 A 化为单位矩阵，实际中可采用以下步骤：

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

假设 A 可逆，则通过行变换就可将 A 化为单位矩阵，实际中可采用以下步骤：

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

假设 A 可逆，则通过行变换就可将 A 化为单位矩阵，实际中可采用以下步骤：

$$
\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}
$$

$$
\to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

假设 A 可逆，则通过行变换就可将 A 化为单位矩阵，实际中可采用以下步骤：

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

假设 A 可逆，则通过行变换就可将 A 化为单位矩阵，实际中可采用以下步骤：

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

初等行变换求逆矩阵

假设 $A_{n\times n}$ 是可逆方阵，则

$$A_{n\times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D = I_n$$

初等行变换求逆矩阵

假设 $A_{n\times n}$ 是可逆方阵，则

$$A_{n\times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D = I_n \quad \Rightarrow \quad P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = I_n$$

初等行变换求逆矩阵

假设 $A_{n\times n}$ 是可逆方阵，则

$$A_{n\times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D = I_n \quad \Rightarrow \quad \underline{P_s \cdots P_2 P_1 A}\ \underline{\underline{Q_1 Q_2 \cdots Q_t}} = I_n$$

初等行变换求逆矩阵

假设 $A_{n\times n}$ 是可逆方阵，则

$$A_{n\times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D = I_n \quad \Rightarrow \quad \underline{P_s \cdots P_2 P_1 A}\; \underline{\underline{Q_1 Q_2 \cdots Q_t}} = I_n$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{Q_1 Q_2 \cdots Q_t}}\; \underline{P_s \cdots P_2 P_1 A} = I_n$$

初等行变换求逆矩阵

假设 $A_{n\times n}$ 是可逆方阵，则

$$A_{n\times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D = I_n \quad \Rightarrow \quad \underline{P_s\cdots P_2P_1A}\ \underline{\underline{Q_1Q_2\cdots Q_t}} = I_n$$

$$\Rightarrow \quad Q_1Q_2\cdots Q_tP_s\cdots P_2P_1A = I_n$$

初等行变换求逆矩阵

假设 $A_{n\times n}$ 是可逆方阵，则

$$A_{n\times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D = I_n \quad \Rightarrow \quad \underline{P_s\cdots P_2P_1A}\,\underline{\underline{Q_1Q_2\cdots Q_t}} = I_n$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{Q_1Q_2\cdots Q_tP_s\cdots P_2P_1}_{A^{-1}}A = I_n$$

初等行变换求逆矩阵

假设 $A_{n\times n}$ 是可逆方阵，则

$$A_{n\times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D = I_n \quad \Rightarrow \quad \underline{P_s \cdots P_2 P_1 A}\ \underline{\underline{Q_1 Q_2 \cdots Q_t}} = I_n$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{Q_1 Q_2 \cdots Q_t P_s \cdots P_2 P_1}_{A^{-1}} A = I_n$$

初等行变换求逆矩阵的步骤 设 $A_{n\times n}$ 是可逆方阵

$$(A \vdots I)$$

初等行变换求逆矩阵

假设 $A_{n\times n}$ 是可逆方阵，则

$$A_{n\times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D = I_n \quad \Rightarrow \quad \underline{P_s \cdots P_2 P_1 A}\ \underline{\underline{Q_1 Q_2 \cdots Q_t}} = I_n$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{Q_1 Q_2 \cdots Q_t P_s \cdots P_2 P_1}_{A^{-1}} A = I_n$$

初等行变换求逆矩阵的步骤 设 $A_{n\times n}$ 是可逆方阵

$$(A \vdots I) \xrightarrow{\text{一系列初等行变换}}$$

初等行变换求逆矩阵

假设 $A_{n\times n}$ 是可逆方阵，则

$$A_{n\times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D = I_n \quad \Rightarrow \quad \underline{P_s \cdots P_2 P_1 A}\ \underline{\underline{Q_1 Q_2 \cdots Q_t}} = I_n$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{Q_1 Q_2 \cdots Q_t P_s \cdots P_2 P_1}_{A^{-1}} A = I_n$$

初等行变换求逆矩阵的步骤 设 $A_{n\times n}$ 是可逆方阵

$$(A \vdots I) \xrightarrow{\text{一系列初等行变换}} (I \vdots B)$$

初等行变换求逆矩阵

假设 $A_{n\times n}$ 是可逆方阵，则

$$A_{n\times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D = I_n \quad \Rightarrow \quad \underline{P_s\cdots P_2P_1A}\ \underline{\underline{Q_1Q_2\cdots Q_t}} = I_n$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{Q_1Q_2\cdots Q_tP_s\cdots P_2P_1}_{A^{-1}}A = I_n$$

初等行变换求逆矩阵的步骤 设 $A_{n\times n}$ 是可逆方阵

$$(A \vdots I) \xrightarrow{\text{一系列初等行变换}} (I \vdots B)$$

则此时 B 就是 A^{-1}

示例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵。步骤如下:

示例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\2&0&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵。步骤如下：

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\2&0&1&0&0&1\end{array}\right)$$

示例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\2&0&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵。步骤如下：

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\2&0&1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\Downarrow_{r_3-2r_1}$$

示例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\2&0&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵。步骤如下：

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\2&0&1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\Downarrow_{r_3-2r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&-2&0&1\end{array}\right)$$

示例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\2&0&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵。步骤如下：

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\2&0&1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\Downarrow_{r_3-2r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\Downarrow_{r_2-r_3}$$

示例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\2&0&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵。步骤如下：

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\2&0&1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\Downarrow_{r_3-2r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\Downarrow_{r_2-r_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&2&1&-1\\0&0&1&-2&0&1\end{array}\right)$$

示例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\2&0&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵。步骤如下：

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\2&0&1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\Downarrow_{r_3-2r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\Downarrow_{r_2-r_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&2&1&-1\\0&0&1&-2&0&1\end{array}\right)$$

则 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&-1\\-2&0&1\end{pmatrix}$

示例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\2&0&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵。步骤如下：

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\2&0&1&0&0&1\end{array}\right) \qquad = \qquad (A \vdots I)$$

$$\Downarrow_{r_3-2r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\Downarrow_{r_2-r_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&2&1&-1\\0&0&1&-2&0&1\end{array}\right)$$

则 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&-1\\-2&0&1\end{pmatrix}$

示例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\2&0&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵。步骤如下：

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\2&0&1&0&0&1\end{array}\right) = (A \vdots I)$$

$$\Downarrow_{r_3-2r_1} \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&-2&0&1\end{array}\right) = (P_1A \vdots P_1I)$$

$$\Downarrow_{r_2-r_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&2&1&-1\\0&0&1&-2&0&1\end{array}\right)$$

则 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&-1\\-2&0&1\end{pmatrix}$

示例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\2&0&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵。步骤如下：

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\2&0&1&0&0&1\end{array}\right) \quad == \quad (A \vdots I)$$

$$\Downarrow_{r_3-2r_1} \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&-2&0&1\end{array}\right) \quad == \quad (P_1A \vdots P_1I)=(P_1A \vdots P_1)$$

$$\Downarrow_{r_2-r_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&2&1&-1\\0&0&1&-2&0&1\end{array}\right)$$

则 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&-1\\-2&0&1\end{pmatrix}$

示例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\2&0&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵。步骤如下：

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\2&0&1&0&0&1\end{array}\right) \quad\Longleftrightarrow\quad (A \vdots I)$$

$$\Downarrow_{r_3-2r_1} \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&-2&0&1\end{array}\right) \quad\Longleftrightarrow\quad (P_1A \vdots P_1I)=(P_1A \vdots P_1)$$

$$\Downarrow_{r_2-r_3} \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&2&1&-1\\0&0&1&-2&0&1\end{array}\right) \quad\Longleftrightarrow\quad (P_2P_1A \vdots P_2P_1)$$

则 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&-1\\-2&0&1\end{pmatrix}$

示例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\2&0&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵。步骤如下：

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\2&0&1&0&0&1\end{array}\right) \;=\!=\!=\; (A\,\vdots\,I)$$

$$\Downarrow_{r_3-2r_1} \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&-2&0&1\end{array}\right) \;=\!=\!=\; (P_1A\,\vdots\,P_1I)=(P_1A\,\vdots\,P_1)$$

$$\Downarrow_{r_2-r_3} \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&2&1&-1\\0&0&1&-2&0&1\end{array}\right) \;=\!=\!=\; (P_2P_1A\,\vdots\,P_2P_1)=(I\,\vdots\,P_2P_1)$$

则 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&-1\\-2&0&1\end{pmatrix}$

示例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\2&0&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵。步骤如下：

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\2&0&1&0&0&1\end{array}\right) \;=\!=\!=\; (A \vdots I)$$

$$\Downarrow_{r_3-2r_1} \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&-2&0&1\end{array}\right) \;=\!=\!=\; (P_1A \vdots P_1I)=(P_1A \vdots P_1)$$

$$\Downarrow_{r_2-r_3} \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&2&1&-1\\0&0&1&-2&0&1\end{array}\right) \;=\!=\!=\; (\underbrace{P_2P_1}_{A^{-1}}A \vdots P_2P_1)=(I \vdots P_2P_1)$$

则 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&-1\\-2&0&1\end{pmatrix}$

示例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\2&0&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵。步骤如下：

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\2&0&1&0&0&1\end{array}\right) \quad = \quad (A \vdots I)$$

$$\Downarrow_{r_3-2r_1} \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&-2&0&1\end{array}\right) \quad = \quad (P_1A \vdots P_1I)=(P_1A \vdots P_1)$$

$$\Downarrow_{r_2-r_3} \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&2&1&-1\\0&0&1&-2&0&1\end{array}\right) \quad = \quad (\underbrace{P_2P_1}_{A^{-1}}A \vdots \underbrace{P_2P_1}_{A^{-1}})=(I \vdots P_2P_1)$$

则 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&-1\\-2&0&1\end{pmatrix}$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A \vdots I) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\-3&2&-5\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A \vdots I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&0&0\\2&1&0&0&1&0\\-3&2&-5&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-2r_1}$$

例 求 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A \vdots I) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ & & & & & \end{array}\right)$$

例 求 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A \vdots I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ & & & & & \end{array}\right)$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ -3 & 2 & -5\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\,\vdots\,I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -3 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -2 & 3 & 0 & 1\end{array}\right)$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\-3&2&-5\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\,\vdots\,I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&0&0\\2&1&0&0&1&0\\-3&2&-5&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&2&-2&3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-2r_2}$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\-3&2&-5\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A \vdots I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&0&0\\2&1&0&0&1&0\\-3&2&-5&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&2&-2&3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-2r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&0&2&7&-2&1\end{array}\right)$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\-3&2&-5\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\vdots I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&0&0\\2&1&0&0&1&0\\-3&2&-5&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&2&-2&3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-2r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&0&2&7&-2&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}r_3}$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A \vdots I) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3-2r_2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}r_3} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 & -1 & 1/2 \end{array}\right)$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\-3&2&-5\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\vdots I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&0&0\\2&1&0&0&1&0\\-3&2&-5&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&2&-2&3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-2r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&0&2&7&-2&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&0&1&7/2&-1&1/2\end{array}\right)\xrightarrow{r_2+2r_3}$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\-3&2&-5\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\vdots I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&0&0\\2&1&0&0&1&0\\-3&2&-5&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&2&-2&3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-2r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&0&2&7&-2&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&0&1&7/2&-1&1/2\end{array}\right)\xrightarrow{r_2+2r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}&&&&&\\0&1&0&5&-1&1\\0&0&1&7/2&-1&1/2\end{array}\right)$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\-3&2&-5\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\,\vdots\,I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\2&1&0&0&1&0\\-3&2&-5&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&2&-2&3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-2r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&0&2&7&-2&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&0&1&7/2&-1&1/2\end{array}\right)\xrightarrow[r_1-r_3]{r_2+2r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}&&&&&\\0&1&0&5&-1&1\\0&0&1&7/2&-1&1/2\end{array}\right)$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ -3 & 2 & -5\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A \vdots I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -3 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -2 & 3 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-2r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 7 & -2 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 7/2 & -1 & 1/2\end{array}\right)\xrightarrow[r_1-r_3]{r_2+2r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & -5/2 & 1 & -1/2\\ 0 & 1 & 0 & 5 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 7/2 & -1 & 1/2\end{array}\right)$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\-3&2&-5\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\vdots I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&0&0\\2&1&0&0&1&0\\-3&2&-5&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&2&-2&3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-2r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&0&2&7&-2&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&0&1&7/2&-1&1/2\end{array}\right)\xrightarrow[r_1-r_3]{r_2+2r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-5/2&1&-1/2\\0&1&0&5&-1&1\\0&0&1&7/2&-1&1/2\end{array}\right)$$

所以 $A^{-1}=\begin{pmatrix}-5/2&1&-1/2\\5&-1&1\\7/2&-1&1/2\end{pmatrix}$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&1\\2&0&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\,\vdots\,I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&0&0\\1&1&1&0&1&0\\2&0&3&0&0&1\end{array}\right)$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&1\\2&0&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\,\vdots\,I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&0&0\\1&1&1&0&1&0\\2&0&3&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-r_1}$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&1\\2&0&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\vdots I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&0&0\\1&1&1&0&1&0\\2&0&3&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\ & & & & & \end{array}\right)$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A \vdots I) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ & & & & & \end{array}\right)$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&1\\2&0&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\vdots I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&0&0\\1&1&1&0&1&0\\2&0&3&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&0&-1&-2&0&1\end{array}\right)$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&1\\2&0&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\vdots I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&0&0\\1&1&1&0&1&0\\2&0&3&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&0&-1&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{(-1)\times r_3}$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&1\\2&0&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\,\vdots\,I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&0&0\\1&1&1&0&1&0\\2&0&3&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&0&-1&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{(-1)\times r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&0&1&2&0&-1\end{array}\right)$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&1\\2&0&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A \vdots I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&0&0\\1&1&1&0&1&0\\2&0&3&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&0&-1&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{(-1)\times r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&0&1&2&0&-1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2+r_3}$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&1\\2&0&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\,\vdots\,I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&0&0\\1&1&1&0&1&0\\2&0&3&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&0&-1&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{(-1)\times r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&0&1&2&0&-1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2+r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}&&&&&\\0&1&0&1&1&-1\\0&0&1&2&0&-1\end{array}\right)$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&1\\2&0&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A \vdots I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\1&1&1&0&1&0\\2&0&3&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&0&-1&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{(-1)\times r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&0&1&2&0&-1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1-2r_3]{r_2+r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & & & \\0&1&0&1&1&-1\\0&0&1&2&0&-1\end{array}\right)$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&1\\2&0&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\vdots I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\1&1&1&0&1&0\\2&0&3&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&0&-1&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{(-1)\times r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&0&1&2&0&-1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1-2r_3]{r_2+r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-3&0&2\\0&1&0&1&1&-1\\0&0&1&2&0&-1\end{array}\right)$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&1\\2&0&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A \vdots I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&0&0\\1&1&1&0&1&0\\2&0&3&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&0&-1&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{(-1)\times r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&0&1&2&0&-1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1-2r_3]{r_2+r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-3&0&2\\0&1&0&1&1&-1\\0&0&1&2&0&-1\end{array}\right)$$

所以 $A^{-1}=\begin{pmatrix}-3&0&2\\1&1&-1\\2&0&-1\end{pmatrix}$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\,\vdots\,I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\2&2&1&0&0&1\end{array}\right)$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\,\vdots\,I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\2&2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-2r_1}$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\vdots I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\2&2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&-3&-2&-2&1&0\\ & & & & & \end{array}\right)$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\vdots I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\2&2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&-3&-2&-2&1&0\\&&&&&\end{array}\right)$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A \vdots I) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\,\vdots\,I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\2&2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&-3&-2&-2&1&0\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-2r_3}$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A \vdots I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\2&2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&-3&-2&-2&1&0\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-2r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\vdots I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\2&2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&-3&-2&-2&1&0\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-2r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+2r_2}$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\,\vdots\,I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\2&2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&-3&-2&-2&1&0\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-2r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+2r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&0&5&2&2&-3\end{array}\right)$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\,\vdots\,I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\2&2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&-3&-2&-2&1&0\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-2r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+2r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&0&5&2&2&-3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}\times r_3}$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\vdots I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\2&2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&-3&-2&-2&1&0\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-2r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+2r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&0&5&2&2&-3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}\times r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&0&1&2/5&2/5&-3/5\end{array}\right)$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\vdots I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\2&2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&-3&-2&-2&1&0\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-2r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+2r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&0&5&2&2&-3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}\times r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&0&1&2/5&2/5&-3/5\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-4r_3}$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\vdots I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\2&2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&-3&-2&-2&1&0\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-2r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+2r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&0&5&2&2&-3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}\times r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&0&1&2/5&2/5&-3/5\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-4r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}&&&&&\\0&1&0&2/5&-3/5&2/5\\0&0&1&2/5&2/5&-3/5\end{array}\right)$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\,\vdots\,I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\2&2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&-3&-2&-2&1&0\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-2r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+2r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&0&5&2&2&-3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}\times r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&0&1&2/5&2/5&-3/5\end{array}\right)\xrightarrow[r_1-2r_3]{r_2-4r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}&&&&&\\0&1&0&2/5&-3/5&2/5\\0&0&1&2/5&2/5&-3/5\end{array}\right)$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\,\vdots\,I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\2&2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&-3&-2&-2&1&0\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-2r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+2r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&0&5&2&2&-3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}\times r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&0&1&2/5&2/5&-3/5\end{array}\right)\xrightarrow[r_1-2r_3]{r_2-4r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&0&1/5&-4/5&6/5\\0&1&0&2/5&-3/5&2/5\\0&0&1&2/5&2/5&-3/5\end{array}\right)$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\,\vdots\,I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\2&2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&-3&-2&-2&1&0\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-2r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+2r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&0&5&2&2&-3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}\times r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&0&1&2/5&2/5&-3/5\end{array}\right)\xrightarrow[r_1-2r_3]{r_2-4r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&0&1/5&-4/5&6/5\\0&1&0&2/5&-3/5&2/5\\0&0&1&2/5&2/5&-3/5\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1-2r_2}$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A\vdots I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\2&2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&-3&-2&-2&1&0\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-2r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+2r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&0&5&2&2&-3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}\times r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&0&1&2/5&2/5&-3/5\end{array}\right)\xrightarrow[r_1-2r_3]{r_2-4r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1/5&-4/5&6/5\\0&1&0&2/5&-3/5&2/5\\0&0&1&2/5&2/5&-3/5\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1-2r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-3/5&2/5&2/5\\0&1&0&2/5&-3/5&2/5\\0&0&1&2/5&2/5&-3/5\end{array}\right)$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$
(A\,\vdots\,I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\2&2&1&0&0&1\end{array}\right)
\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1}
\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&-3&-2&-2&1&0\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{r_2-2r_3}
\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)
\xrightarrow{r_3+2r_2}
\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&0&5&2&2&-3\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{\frac{1}{5}\times r_3}
\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&4&2&1&-2\\0&0&1&2/5&2/5&-3/5\end{array}\right)
\xrightarrow[r_1-2r_3]{r_2-4r_3}
\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1/5&-4/5&6/5\\0&1&0&2/5&-3/5&2/5\\0&0&1&2/5&2/5&-3/5\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{r_1-2r_2}
\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-3/5&2/5&2/5\\0&1&0&2/5&-3/5&2/5\\0&0&1&2/5&2/5&-3/5\end{array}\right),\quad
A^{-1}=\begin{pmatrix}-3/5&2/5&2/5\\2/5&-3/5&2/5\\2/5&2/5&-3/5\end{pmatrix}
$$

例 求 $A=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵，其中 a_i 都不为 0。

例 求 $A=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵，其中 a_i 都不为 0。

解

$$(A \vdots I)=\left(\begin{array}{cccc:cccc} 0 & a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

例 求 $A=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵，其中 a_i 都不为 0。

解

$$(A \vdots I)=\left(\begin{array}{cccc:cccc} 0 & a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_4 \leftrightarrow r_3} * \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_2} * \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_1}$$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵，其中 a_i 都不为 0。

解

$$(A \vdots I) = \left(\begin{array}{cccc:cccc} 0 & a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_4 \leftrightarrow r_3} * \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_2} * \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc} a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

例 求 $A=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵，其中 a_i 都不为 0。

解

$$(A \vdots I) = \left(\begin{array}{cccc:cccc} 0 & a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_4 \leftrightarrow r_3} * \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_2} * \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc} a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\frac{1}{a_1} \times r_2 \\ \frac{1}{a_2} \times r_3 \\ \frac{1}{a_3} \times r_4}]{\frac{1}{a_4} \times r_1}$$

例 求 $A=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵，其中 a_i 都不为 0。

解

$$(A\vdots I)=\left(\begin{array}{cccc:cccc} 0 & a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_4\leftrightarrow r_3} * \xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_2} * \xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc} a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\frac{1}{a_1}\times r_2 \\ \frac{1}{a_2}\times r_3 \\ \frac{1}{a_3}\times r_4}]{\frac{1}{a_4}\times r_1} \left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a_3} & 0 \end{array}\right)$$

例 求 $A=\begin{pmatrix}0&a_1&0&0\\0&0&a_2&0\\0&0&0&a_3\\a_4&0&0&0\end{pmatrix}$ 的逆矩阵，其中 a_i 都不为 0。

解

$$(A\,\vdots\,I)=\left(\begin{array}{cccc:cccc}0&a_1&0&0&1&0&0&0\\0&0&a_2&0&0&1&0&0\\0&0&0&a_3&0&0&1&0\\a_4&0&0&0&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_4\leftrightarrow r_3}*\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_2}*\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc}a_4&0&0&0&0&0&0&1\\0&a_1&0&0&1&0&0&0\\0&0&a_2&0&0&1&0&0\\0&0&0&a_3&0&0&1&0\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{\frac{1}{a_1}\times r_2\\ \frac{1}{a_2}\times r_3\\ \frac{1}{a_3}\times r_4}]{\frac{1}{a_4}\times r_1}\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{a_4}\\0&1&0&0&\frac{1}{a_1}&0&0&0\\0&0&1&0&0&\frac{1}{a_2}&0&0\\0&0&0&1&0&0&\frac{1}{a_3}&0\end{array}\right)$$

所以 $A^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&0&\frac{1}{a_4}\\\frac{1}{a_1}&0&0&0\\0&\frac{1}{a_2}&0&0\\0&0&\frac{1}{a_3}&0\end{pmatrix}$