§1.6　行列式的公式表示

数学系　梁卓滨

2018 - 2019 学年上学期

回顾二三阶行列式的公式

- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$

回顾二三阶行列式的公式

- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{matrix}$

规律:

1. 每一项是不同行不同列的元素的乘积,

回顾二三阶行列式的公式

- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + \underline{a_{12}a_{23}a_{31}} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{matrix}$

规律：

1. 每一项是不同行不同列的元素的乘积，

回顾二三阶行列式的公式

- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

- $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + \underline{a_{12}a_{23}a_{31}} \xrightarrow{} 231 + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$

规律:

1. 每一项是不同行不同列的元素的乘积,

回顾二三阶行列式的公式

- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + \underline{a_{12}a_{23}a_{31}} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - \underline{a_{13}a_{22}a_{31}}$

231

规律:

1. 每一项是不同行不同列的元素的乘积,

回顾二三阶行列式的公式

- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
- $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + \overbrace{a_{12}a_{23}a_{31}}^{231} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - \underbrace{a_{13}a_{22}a_{31}}_{321} \end{array}$$

规律:

1. 每一项是不同行不同列的元素的乘积,

回顾二三阶行列式的公式

- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + \underbrace{a_{12}a_{23}a_{31}}_{231} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - \underbrace{a_{13}a_{22}a_{31}}_{321} \end{array}$

规律：

1. 每一项是不同行不同列的元素的乘积，形如

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

回顾二三阶行列式的公式

- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + \overset{231}{\underline{a_{12}a_{23}a_{31}}} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - \underset{321}{\underline{a_{13}a_{22}a_{31}}} \end{array}$

规律：

1. 每一项是不同行不同列的元素的乘积，形如

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

其中 $j_1j_2j_3$ 是“123”的任意一个排列。

回顾二三阶行列式的公式

- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + \underbrace{a_{12}a_{23}a_{31}}_{231} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - \underbrace{a_{13}a_{22}a_{31}}_{321}$

规律：

1. 每一项是不同行不同列的元素的乘积，形如

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

   其中 $j_1j_2j_3$ 是 “123” 的任意一个排列。

2. 共有 $3! = 6$ 项。

回顾二三阶行列式的公式

- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + \overset{231}{\underline{a_{12}a_{23}a_{31}}} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - \underset{321}{\underline{a_{13}a_{22}a_{31}}} \end{matrix}$

规律：

1. 每一项是不同行不同列的元素的乘积，形如
$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$
其中 $j_1j_2j_3$ 是 “123” 的任意一个排列。
2. 共有 $3! = 6$ 项。
3. 一半项带 “+” 号，另一半带 “−” 号

回顾二三阶行列式的公式

- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + \underbrace{a_{12}a_{23}a_{31}}_{231} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - \underbrace{a_{13}a_{22}a_{31}}_{321} \end{array}$

规律：

1. 每一项是不同行不同列的元素的乘积，形如

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

其中 $j_1j_2j_3$ 是“123”的任意一个排列。

2. 共有 $3! = 6$ 项。

3. 一半项带“+”号，另一半带“−”号
   - 取正号的项，列标为排列：(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)
   - 取负号的项，列标为排列：(1, 3, 2), (2, 1, 3), (3, 2, 1)

四阶行列式的公式

- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} =$

四阶行列式的公式

- $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}+a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}+a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} \\ +a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}+a_{12}a_{24}a_{33}a_{41}+a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} \\ +a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}+a_{13}a_{22}a_{34}a_{41}+a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} \\ +a_{14}a_{21}a_{33}a_{42}+a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}+a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} \\ -a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}-a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} \\ -a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}-a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}-a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} \\ -a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}-a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}-a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} \\ -a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}-a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}-a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} \end{array}$$

四阶行列式的公式

- $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}+a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}+a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} \\ & +a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}+a_{12}a_{24}a_{33}a_{41}+a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} \\ & +a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}+a_{13}a_{22}a_{34}a_{41}+a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} \\ & +a_{14}a_{21}a_{33}a_{42}+a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}+a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} \\ & -a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}-a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} \\ & -a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}-a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}-a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} \\ & -a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}-a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}-a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} \\ & -a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}-a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}-a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} \end{aligned}$$

规律：

1. 每一项是不同行不同列的元素的乘积，

四阶行列式的公式

- $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + \underline{a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} \\ & + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} \\ & + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} \\ & + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} \\ & - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} \\ & - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} \\ & - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} \\ & - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} \end{aligned}$$

规律：

1. 每一项是不同行不同列的元素的乘积，

四阶行列式的公式

1342

- $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + \underline{a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} \\ & + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} \\ & + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} \\ & + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} \\ & - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} \\ & - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} \\ & - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} \\ & - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} \end{aligned}$$

规律：

1. 每一项是不同行不同列的元素的乘积，

四阶行列式的公式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + \overbrace{\underline{a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}}}^{1342} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} \\ & + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} \\ & + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} \\ & + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} \\ & - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} \\ & - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} \\ & - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} \\ & - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} - \underline{a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} \end{aligned}$$

规律：

1. 每一项是不同行不同列的元素的乘积，

四阶行列式的公式

- $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + \underbrace{a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}}_{1342} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} \\ & + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} \\ & + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} \\ & + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} \\ & - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} \\ & - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} \\ & - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} \\ & - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} - \underbrace{a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}}_{4312} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} \end{aligned}$$

规律:

1. 每一项是不同行不同列的元素的乘积,

四阶行列式的公式

- $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + \underbrace{a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}}_{1342} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} \\ & + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} \\ & + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} \\ & + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} \\ & - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} \\ & - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} \\ & - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} \\ & - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} - \underbrace{a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}}_{4312} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} \end{aligned}$$

规律:

1. 每一项是不同行不同列的元素的乘积，形如

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$$

四阶行列式的公式

- $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + \overbrace{a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}}^{1342} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} \\ & + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} \\ & + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} \\ & + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} \\ & - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} \\ & - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} \\ & - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} \\ & - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} - \underbrace{a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}}_{4312} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} \end{aligned}$$

规律：

1. 每一项是不同行不同列的元素的乘积，形如

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$$

其中 $j_1j_2j_3j_4$ 是“1234”的任意一个排列。

四阶行列式的公式

- $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + \overbrace{a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}}^{1342} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} \\ & + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} \\ & + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} \\ & + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} \\ & - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} \\ & - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} \\ & - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} \\ & - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} - \underbrace{a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}}_{4312} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} \end{aligned}$$

规律：

1. 每一项是不同行不同列的元素的乘积，形如

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$$

   其中 $j_1j_2j_3j_4$ 是“1234”的任意一个排列。

2. 共有 $4! = 24$ 项。

四阶行列式的公式

- $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + \underbrace{a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}}_{1342} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} \\ + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} \\ + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} \\ + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} \\ - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} \\ - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} \\ - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} \\ - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} - \underbrace{a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}}_{4312} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} \end{array}$$

规律：

1. 每一项是不同行不同列的元素的乘积，形如

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$$

其中 $j_1j_2j_3j_4$ 是“1234”的任意一个排列。

2. 共有 $4! = 24$ 项。

3. 一半项带“$+$”号，另一半带“$-$”号。

更一般地，n 阶行列式的公式表达式是什么？

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = ?$$

更一般地，n 阶行列式的公式表达式是什么？

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = ?$$

猜

1. n 阶行列式应该有 $n!$ 项；

更一般地，n 阶行列式的公式表达式是什么？

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = ?$$

猜

1. n 阶行列式应该有 $n!$ 项；
2. 每一项是不同行不同列的 n 个元素的乘积，形如

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}\cdots a_{nj_n}$$

其中 $j_1j_2j_3\cdots j_n$ 是“$123\cdots n$”的任意一个排列。

更一般地，n 阶行列式的公式表达式是什么？

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = ?$$

猜

1. n 阶行列式应该有 $n!$ 项；
2. 每一项是不同行不同列的 n 个元素的乘积，形如

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}\cdots a_{nj_n}$$

   其中 $j_1j_2j_3\cdots j_n$ 是“$123\cdots n$”的任意一个排列。
3. 其中一半取正号，一半取负号。

排列、逆序

定义 由 n 个不同的数 1，2，$\cdots$，n 组成的有序数组 $i_1 i_2 \cdots i_n$，称为一个n 级排列。

排列、逆序

定义 由 n 个不同的数 1，2，$\cdots$，n 组成的有序数组 $i_1 i_2 \cdots i_n$，称为一个 n **级排列**。

例 41253 是一个 5 级排列。

排列、逆序

定义 由 n 个不同的数 1，2，$\cdots$，n 组成的有序数组 $i_1 i_2 \cdots i_n$，称为一个n 级排列。

例 41253 是一个 5 级排列。还有 23514, 43152... 都是 5 级排列。

排列、逆序

定义 由 n 个不同的数 1，2，$\cdots$，n 组成的有序数组 $i_1 i_2 \cdots i_n$，称为一个n 级排列。

例 41253 是一个 5 级排列。还有 23514, 43152... 都是 5 级排列。5 级排列一共有 ________ 个。

排列、逆序

定义 由 n 个不同的数 1，2，$\cdots$，n 组成的有序数组 $i_1 i_2 \cdots i_n$，称为一个*n 级排列*。

例 41253 是一个 5 级排列。还有 23514, 43152... 都是 5 级排列。5 级排列一共有 5! 个。

排列、逆序

定义 由 n 个不同的数 1，2，$\cdots$，n 组成的有序数组 $i_1 i_2 \cdots i_n$，称为一个*n 级排列*。

例 41253 是一个 5 级排列。还有 23514, 43152... 都是 5 级排列。5 级排列一共有 $\underline{5! = 120}$ 个。

排列、逆序

定义 由 n 个不同的数 1，2，$\cdots$，n 组成的有序数组 $i_1 i_2 \cdots i_n$，称为一个n 级排列。

例 41253 是一个 5 级排列。还有 23514, 43152... 都是 5 级排列。5 级排列一共有 <u>$5! = 120$</u> 个。

注 n 级排列一共有 $n!$ 种。

排列、逆序

定义 由 n 个不同的数 1，2，$\cdots$，n 组成的有序数组 $i_1 i_2 \cdots i_n$，称为一个n 级排列。

例 41253 是一个 5 级排列。还有 23514, 43152... 都是 5 级排列。5 级排列一共有 $\underline{5! = 120}$ 个。

注 n 级排列一共有 $n!$ 种。

定义 在排列 $i_1\ i_2\ \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots\ i_n$ 中，

排列、逆序

定义 由 n 个不同的数 1，2，$\cdots$，n 组成的有序数组 $i_1 i_2 \cdots i_n$，称为一个n 级排列。

例 41253 是一个 5 级排列。还有 23514, 43152... 都是 5 级排列。5 级排列一共有 $\underline{5! = 120}$ 个。

注 n 级排列一共有 $n!$ 种。

定义 在排列 $i_1\ i_2\ \cdots\ i_s\ \cdots\ i_t\ \cdots\ i_n$ 中，

排列、逆序

定义 由 n 个不同的数 1，2，$\cdots$，n 组成的有序数组 $i_1 i_2 \cdots i_n$，称为一个n 级排列。

例 41253 是一个 5 级排列。还有 23514, 43152... 都是 5 级排列。5 级排列一共有 $\underline{5! = 120}$ 个。

注 n 级排列一共有 $n!$ 种。

定义 在排列 $i_1\ i_2\ \cdots\ i_s\ \cdots\ i_t\ \cdots\ i_n$ 中，如果 $i_s > i_t$（前面比后面大），

排列、逆序

定义 由 n 个不同的数 1，2，$\cdots$，n 组成的有序数组 $i_1 i_2 \cdots i_n$，称为一个n 级排列。

例 41253 是一个 5 级排列。还有 23514, 43152... 都是 5 级排列。5 级排列一共有 $\underline{5! = 120}$ 个。

注 n 级排列一共有 $n!$ 种。

定义 在排列 $i_1\ i_2\ \cdots\ i_s\ \cdots\ i_t\ \cdots\ i_n$ 中，如果 $i_s > i_t$（前面比后面大），则称 i_t 和 i_s 组成一个逆序。

排列、逆序

定义 由 n 个不同的数 1，2，$\cdots$，n 组成的有序数组 $i_1 i_2 \cdots i_n$，称为一个n 级排列。

例 41253 是一个 5 级排列。还有 23514, 43152... 都是 5 级排列。5 级排列一共有 $\underline{5! = 120}$ 个。

注 n 级排列一共有 $n!$ 种。

定义 在排列 $i_1\ i_2\ \cdots\ i_s\ \cdots\ i_t\ \cdots\ i_n$ 中，如果 $i_s > i_t$（前面比后面大），则称 i_t 和 i_s 组成一个逆序。

例 (4, 1)，(4, 2) 是排列 41253 的逆序

排列、逆序

定义 由 n 个不同的数 1，2，$\cdots$，n 组成的有序数组 $i_1 i_2 \cdots i_n$，称为一个n 级排列。

例 41253 是一个 5 级排列。还有 23514, 43152... 都是 5 级排列。5 级排列一共有 $\underline{5! = 120}$ 个。

注 n 级排列一共有 $n!$ 种。

定义 在排列 $i_1\ i_2\ \cdots\ i_s\ \cdots\ i_t\ \cdots\ i_n$ 中，如果 $i_s > i_t$（前面比后面大），则称 i_t 和 i_s 组成一个逆序。

例 (4, 1)，(4, 2) 是排列 41253 的逆序，其余的逆序还有：

排列、逆序

定义 由 n 个不同的数 1，2，$\cdots$，n 组成的有序数组 $i_1 i_2 \cdots i_n$，称为一个n 级排列。

例 41253 是一个 5 级排列。还有 23514, 43152... 都是 5 级排列。5 级排列一共有 $\underline{5! = 120}$ 个。

注 n 级排列一共有 $n!$ 种。

定义 在排列 $i_1\ i_2\ \cdots\ i_s\ \cdots\ i_t\ \cdots\ i_n$ 中，如果 $i_s > i_t$（前面比后面大），则称 i_t 和 i_s 组成一个逆序。

例 (4, 1)，(4, 2) 是排列 41253 的逆序，其余的逆序还有：

(4, 3),

排列、逆序

定义 由 n 个不同的数 1，2，$\cdots$，n 组成的有序数组 $i_1 i_2 \cdots i_n$，称为一个 n 级排列。

例 41253 是一个 5 级排列。还有 23514, 43152... 都是 5 级排列。5 级排列一共有 $\underline{5! = 120}$ 个。

注 n 级排列一共有 $n!$ 种。

定义 在排列 $i_1\ i_2\ \cdots\ i_s\ \cdots\ i_t\ \cdots\ i_n$ 中，如果 $i_s > i_t$（前面比后面大），则称 i_t 和 i_s 组成一个逆序。

例 (4, 1)，(4, 2) 是排列 41253 的逆序，其余的逆序还有：

(4, 3), (5, 3)

排列、逆序

练习 写出以下 6 阶排列的所有逆序

- 243165:
- 213465:

排列、逆序

练习 写出以下 6 阶排列的所有逆序

- 243165：(2, 1),
- 213465：

排列、逆序

练习 写出以下 6 阶排列的所有逆序

- 243165：(2, 1), (4, 3),
- 213465：

排列、逆序

练习 写出以下 6 阶排列的所有逆序

- 243165：(2, 1), (4, 3), (4, 1),
- 213465：

排列、逆序

练习 写出以下 6 阶排列的所有逆序

- 243165：(2, 1), (4, 3), (4, 1), (3, 1),
- 213465：

排列、逆序

练习 写出以下 6 阶排列的所有逆序

- 243165：(2, 1), (4, 3), (4, 1), (3, 1), (6, 5)
- 213465：

排列、逆序

练习 写出以下 6 阶排列的所有逆序

- 243165：(2, 1), (4, 3), (4, 1), (3, 1), (6, 5)
- 213465：(2, 1),

排列、逆序

练习 写出以下 6 阶排列的所有逆序

- 243165：(2, 1), (4, 3), (4, 1), (3, 1), (6, 5)
- 213465：(2, 1), (6, 5)

排列、逆序

练习 写出以下 6 阶排列的所有逆序

- 243165：(2, 1), (4, 3), (4, 1), (3, 1), (6, 5)
- 213465：(2, 1), (6, 5)

定义 一个 n 级排列 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 的全部的逆序的总数，称为它的逆序数，记为 $N(i_1 i_2 \cdots i_n)$。

排列、逆序

练习 写出以下 6 阶排列的所有逆序

- 243165：(2, 1), (4, 3), (4, 1), (3, 1), (6, 5)
- 213465：(2, 1), (6, 5)

定义 一个 n 级排列 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 的全部的逆序的总数，称为它的逆序数，记为 $N(i_1 i_2 \cdots i_n)$。

例 $N(243165) =$ ，$N(213465) =$

排列、逆序

练习 写出以下 6 阶排列的所有逆序

- 243165：(2, 1), (4, 3), (4, 1), (3, 1), (6, 5)
- 213465：(2, 1), (6, 5)

定义 一个 n 级排列 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 的全部的逆序的总数，称为它的逆序数，记为 $N(i_1 i_2 \cdots i_n)$。

例 $N(243165) = 5$，$N(213465) =$

排列、逆序

练习 写出以下 6 阶排列的所有逆序

- 243165：(2, 1), (4, 3), (4, 1), (3, 1), (6, 5)
- 213465：(2, 1), (6, 5)

定义 一个 n 级排列 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 的全部的逆序的总数，称为它的逆序数，记为 $N(i_1 i_2 \cdots i_n)$。

例 $N(243165) = 5$，$N(213465) = 2$

排列、逆序

练习 写出以下 6 阶排列的所有逆序

- 243165：(2, 1), (4, 3), (4, 1), (3, 1), (6, 5)
- 213465：(2, 1), (6, 5)

定义 一个 n 级排列 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 的全部的逆序的总数，称为它的逆序数，记为 $N(i_1 i_2 \cdots i_n)$。

例 $N(243165) = 5$，$N(213465) = 2$

定义 若一个排列的逆序数为奇数 (偶数)，则称它为奇排列(偶排列)。

排列、逆序

练习 写出以下 6 阶排列的所有逆序

- 243165：(2, 1), (4, 3), (4, 1), (3, 1), (6, 5)
- 213465：(2, 1), (6, 5)

定义 一个 n 级排列 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 的全部的逆序的总数，称为它的逆序数，记为 $N(i_1 i_2 \cdots i_n)$。

例 $N(243165) = 5$，$N(213465) = 2$

定义 若一个排列的逆序数为奇数 (偶数)，则称它为奇排列(偶排列)。

例 243165　　　　，213465　　　　。

排列、逆序

练习 写出以下 6 阶排列的所有逆序

- 243165：(2, 1), (4, 3), (4, 1), (3, 1), (6, 5)
- 213465：(2, 1), (6, 5)

定义 一个 n 级排列 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 的全部的逆序的总数，称为它的逆序数，记为 $N(i_1 i_2 \cdots i_n)$。

例 $N(243165) = 5$，$N(213465) = 2$

定义 若一个排列的逆序数为奇数 (偶数)，则称它为奇排列(偶排列)。

例 243165是奇排列，213465 。

排列、逆序

练习 写出以下 6 阶排列的所有逆序

- 243165：(2, 1), (4, 3), (4, 1), (3, 1), (6, 5)
- 213465：(2, 1), (6, 5)

定义 一个 n 级排列 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 的全部的逆序的总数，称为它的逆序数，记为 $N(i_1 i_2 \cdots i_n)$。

例 $N(243165) = 5$，$N(213465) = 2$

定义 若一个排列的逆序数为奇数 (偶数)，则称它为奇排列(偶排列)。

例 243165是奇排列，213465是偶排列。

对换

定义 交换排列中其中两个数的位置，而保持其他数的位置不变，就得到一个新排列。这个新排列称为原来排列的一个对换

对换

定义 交换排列中其中两个数的位置，而保持其他数的位置不变，就得到一个新排列。这个新排列称为原来排列的一个对换

例 排列 243165 施以对换 (1, 4) 后得到排列 213465

对换

定义 交换排列中其中两个数的位置，而保持其他数的位置不变，就得到一个新排列。这个新排列称为原来排列的一个对换

例 排列 243165 施以对换 $(1, 4)$ 后得到排列 213465（奇排列 $\Rightarrow$ 偶排列）

对换

定义 交换排列中其中两个数的位置，而保持其他数的位置不变，就得到一个新排列。这个新排列称为原来排列的一个对换

例 排列 243165 施以对换 $(1, 4)$ 后得到排列 213465（奇排列 $\Rightarrow$ 偶排列）

定理 任何排列经过一个对换之后奇偶性改变

对换

定义 交换排列中其中两个数的位置，而保持其他数的位置不变，就得到一个新排列。这个新排列称为原来排列的一个对换

例 排列 243165 施以对换 (1, 4) 后得到排列 213465（奇排列 $\Rightarrow$ 偶排列）

定理 任何排列经过一个对换之后奇偶性改变

注 因为排列经过对换之后奇偶性改变，所以在所有 n 级排列中，奇排列和偶排列各占一半

再看三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{c} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$

再看三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$

- 出现所有不同行不同列的三个元素的乘积

再看三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$

- 出现所有不同行不同列的三个元素的乘积
- 乘积中三个元素行标总是按 (1, 2, 3) 顺序

再看三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{c} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$

- 出现所有不同行不同列的三个元素的乘积
- 乘积中三个元素行标总是按 (1, 2, 3) 顺序
- 正负号

再看三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{c} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$

- 出现所有不同行不同列的三个元素的乘积
- 乘积中三个元素行标总是按 (1, 2, 3) 顺序
- 正负号
    - 取正号：列标顺序是 (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)

再看三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{c} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$

- 出现所有不同行不同列的三个元素的乘积
- 乘积中三个元素行标总是按 (1, 2, 3) 顺序
- 正负号
  - 取正号：列标顺序是 (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)
  - 取负号：列标顺序是 (1, 3, 2), (2, 1, 3), (3, 2, 1)

再看三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$

- 出现所有不同行不同列的三个元素的乘积
- 乘积中三个元素行标总是按 $(1, 2, 3)$ 顺序
- 正负号
  - 取正号：列标顺序是 $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$：偶排列
  - 取负号：列标顺序是 $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(3, 2, 1)$

再看三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{c} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$

- 出现所有不同行不同列的三个元素的乘积
- 乘积中三个元素行标总是按 (1, 2, 3) 顺序
- 正负号
  - 取正号：列标顺序是 (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)：偶排列
  - 取负号：列标顺序是 (1, 3, 2), (2, 1, 3), (3, 2, 1)：奇排列

再看三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{r} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$

- 出现所有不同行不同列的三个元素的乘积
- 乘积中三个元素行标总是按 (1, 2, 3) 顺序
- 正负号
  - 取正号：列标顺序是 (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)：偶排列
  - 取负号：列标顺序是 (1, 3, 2), (2, 1, 3), (3, 2, 1)：奇排列
- 三阶行列式中中每一项形如

$$(-1)^{N(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$$

其中 $(j_1 j_2 j_3)$ 是 (1, 2, 3) 的所有排列

n 阶行列式的公式表示

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

n 阶行列式的公式表示

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

n 阶行列式的公式表示

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (-1)^{N(j_1 j_2 \dots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

n 阶行列式的公式表示

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{N(j_1 j_2 \ldots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

n 阶行列式的公式表示

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{N(j_1 j_2 \ldots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

其中 $(j_1 j_2 \ldots, j_n)$ 是 $(1, 2, \ldots, n)$ 的所有排列。

n 阶行列式的公式表示

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{N(j_1 j_2 \ldots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

其中 $(j_1 j_2 \ldots, j_n)$ 是 $(1, 2, \ldots, n)$ 的所有排列。

总结

- 和式中每一项

$$(-1)^{N(j_1 j_2 \ldots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

称为行列式的一般项。列标排列 $j_1 j_2 \ldots, j_n$ 为奇排列时，取负号；偶排列时，取正号。

n 阶行列式的公式表示

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{N(j_1 j_2 \ldots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

其中 $(j_1 j_2 \ldots, j_n)$ 是 $(1, 2, \ldots, n)$ 的所有排列。

总结

- 和式中每一项

$$(-1)^{N(j_1 j_2 \ldots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

  称为行列式的一般项。列标排列 $j_1 j_2 \ldots, j_n$ 为奇排列时，取负号；偶排列时，取正号。

- 共 $n!$ 个一般项，一半取正号，一半取负号

n 阶行列式的公式表示

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{N(j_1 j_2 \ldots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

其中 $(j_1 j_2 \ldots, j_n)$ 是 $(1, 2, \ldots, n)$ 的所有排列。

总结

- 和式中每一项

$$(-1)^{N(j_1 j_2 \ldots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

  称为行列式的一般项。列标排列 $j_1 j_2 \ldots, j_n$ 为奇排列时，取负号；偶排列时，取正号。

- 共 $n!$ 个一般项，一半取正号，一半取负号
- 不同行不同列的元素乘积的代数和

例 四阶行列式 $|a_{ij}|$ 中 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 前应冠以正号还是负号？

例 四阶行列式 $|a_{ij}|$ 中 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 前应冠以正号还是负号？

解 该项在 4 阶行列式中为

$$(-1)^{N(4312)}a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$$

例 四阶行列式 $|a_{ij}|$ 中 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 前应冠以正号还是负号？

解 该项在 4 阶行列式中为

$$(-1)^{N(4312)}a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$$

因为 $N(4312)=5$,

例 四阶行列式 $|a_{ij}|$ 中 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 前应冠以正号还是负号？

解 该项在 4 阶行列式中为

$$(-1)^{N(4312)}a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$$

因为 $N(4312) = 5$，所以 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 前应冠以负号。

例 四阶行列式 $|a_{ij}|$ 中 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 前应冠以正号还是负号？

解 该项在 4 阶行列式中为

$$(-1)^{N(4312)}a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$$

因为 $N(4312)=5$，所以 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 前应冠以负号。

练习 六阶行列式 $|a_{ij}|$ 中 $a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$ 前应冠以正号还是负号？

例 四阶行列式 $|a_{ij}|$ 中 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 前应冠以正号还是负号？

解 该项在 4 阶行列式中为

$$(-1)^{N(4312)}a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$$

因为 $N(4312)=5$，所以 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 前应冠以负号。

练习 六阶行列式 $|a_{ij}|$ 中 $a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$ 前应冠以正号还是负号？

解 现将行标按次序排好：

$$a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}=a_{16}a_{21}a_{34}a_{42}a_{53}a_{65}$$

例 四阶行列式 $|a_{ij}|$ 中 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 前应冠以正号还是负号？

解 该项在 4 阶行列式中为

$$(-1)^{N(4312)}a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$$

因为 $N(4312)=5$，所以 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 前应冠以负号。

练习 六阶行列式 $|a_{ij}|$ 中 $a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$ 前应冠以正号还是负号？

解 现将行标按次序排好：

$$a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}=a_{16}a_{21}a_{34}a_{42}a_{53}a_{65}$$

该项在 6 阶行列式中为

$$(-1)^{N(614235)}a_{16}a_{21}a_{34}a_{42}a_{53}a_{65}$$

例 四阶行列式 $|a_{ij}|$ 中 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 前应冠以正号还是负号？

解 该项在 4 阶行列式中为

$$(-1)^{N(4312)}a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$$

因为 $N(4312)=5$，所以 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 前应冠以负号。

练习 六阶行列式 $|a_{ij}|$ 中 $a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$ 前应冠以正号还是负号？

解 现将行标按次序排好：

$$a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}=a_{16}a_{21}a_{34}a_{42}a_{53}a_{65}$$

该项在 6 阶行列式中为

$$(-1)^{N(614235)}a_{16}a_{21}a_{34}a_{42}a_{53}a_{65}$$

因为 $N(614235)=7$，

例 四阶行列式 $|a_{ij}|$ 中 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 前应冠以正号还是负号？

解 该项在 4 阶行列式中为

$$(-1)^{N(4312)}a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$$

因为 $N(4312)=5$，所以 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 前应冠以负号。

练习 六阶行列式 $|a_{ij}|$ 中 $a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$ 前应冠以正号还是负号？

解 现将行标按次序排好：

$$a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}=a_{16}a_{21}a_{34}a_{42}a_{53}a_{65}$$

该项在 6 阶行列式中为

$$(-1)^{N(614235)}a_{16}a_{21}a_{34}a_{42}a_{53}a_{65}$$

因为 $N(614235)=7$，所以 $a_{16}a_{21}a_{34}a_{42}a_{53}a_{65}$ 前应冠以负号。

定理 n 阶行列式 $|a_{ij}|$ 的一般项可以记为

$$(-1)^{N(i_1 i_2 \ldots, i_n)+N(j_1 j_2 \ldots, j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$$

其中 $i_1 i_2 \ldots, i_n$，$j_1 j_2 \ldots, j_n$ 均为 n 阶排列

例 用行列式的公式计算

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

例 用行列式的公式计算

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \sum (-1)^{N(j_1 j_2 j_3 j_4)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}$$

$$=$$

例 用行列式的公式计算

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \sum (-1)^{N(j_1 j_2 j_3 j_4)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}$$

$$= \qquad a_1 \; a_2 \; a_3 \; a_4$$

例 用行列式的公式计算

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \sum(-1)^{N(j_1j_2j_3j_4)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$$

$$= \qquad a_1 \ \ a_2 \ \ a_{32}a_4$$

例 用行列式的公式计算

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \sum (-1)^{N(j_1 j_2 j_3 j_4)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}$$

$$= \qquad a_{14} a_{2\ } \ a_{32} a_{4\ }$$

例 用行列式的公式计算

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \sum (-1)^{N(j_1 j_2 j_3 j_4)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}$$

$$= \qquad a_{14} a_{2\ } a_{32} a_{43}$$

例 用行列式的公式计算

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \sum (-1)^{N(j_1 j_2 j_3 j_4)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}$$

$$= \qquad a_{14} a_{21} a_{32} a_{43}$$

例 用行列式的公式计算

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \sum (-1)^{N(j_1 j_2 j_3 j_4)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}$$

$$= (-1)^{N(4123)} a_{14} a_{21} a_{32} a_{43}$$

$$=$$

例 用行列式的公式计算

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \sum (-1)^{N(j_1 j_2 j_3 j_4)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}$$

$$= (-1)^{N(4123)} a_{14} a_{21} a_{32} a_{43}$$

$$= (-1)^3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 =$$

例 用行列式的公式计算

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \sum (-1)^{N(j_1 j_2 j_3 j_4)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}$$

$$= (-1)^{N(4123)} a_{14} a_{21} a_{32} a_{43}$$

$$= (-1)^3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = -1$$