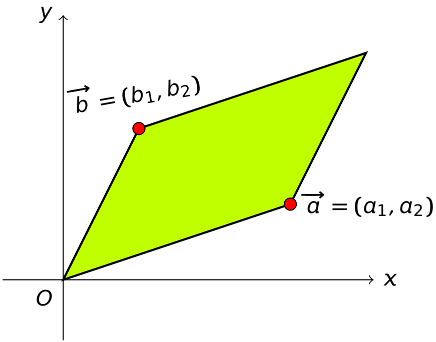
第 1 章 e：行列式的几何意义

数学系　梁卓滨

2020-2021 学年 I

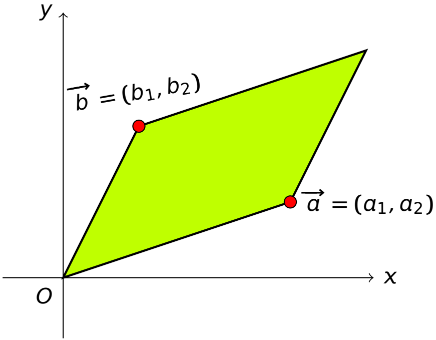
二阶行列式的几何意义



二阶行列式的几何意义

平行四边形的面积等于行列式

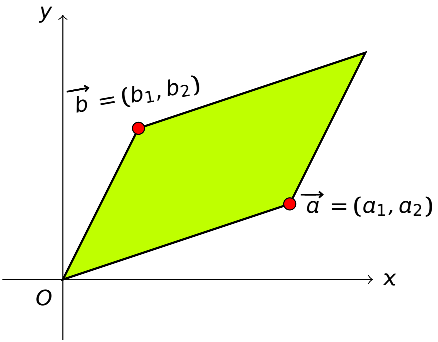
$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ 的 **绝对值**



二阶行列式的几何意义

平行四边形的面积等于行列式

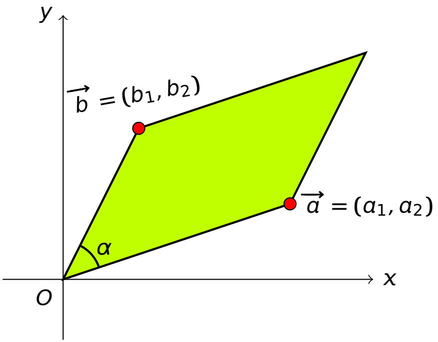
$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ 的 **绝对值**



验证：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

二阶行列式的几何意义



平行四边形的面积等于行列式

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ 的 **绝对值**

验证：

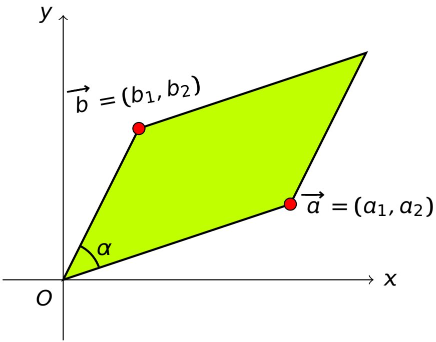
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

$$|\vec{a}||\vec{b}|\sin\alpha = \quad S_{\square \vec{a}\,\vec{b}}$$

二阶行列式的几何意义

平行四边形的面积等于行列式

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ 的 **绝对值**



验证：

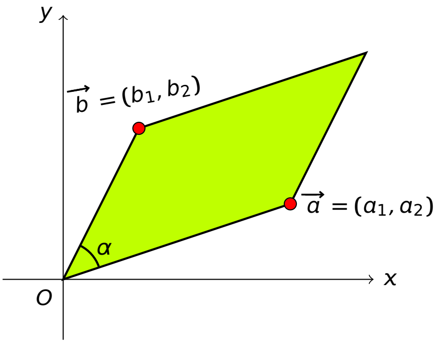
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = (a_1,\, a_2) \cdot (b_2,\, -b_1)$$

$$|\vec{a}||\vec{b}|\sin\alpha = \quad S_{\square \vec{a}\,\vec{b}}$$

二阶行列式的几何意义

平行四边形的面积等于行列式

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ 的 **绝对值**



验证：

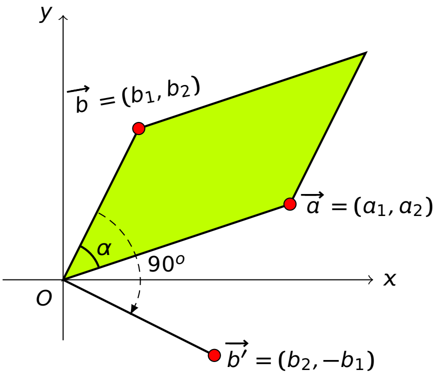
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = (a_1, a_2) \cdot (b_2, -b_1)$$

$$= \vec{a} \cdot \vec{b'} \qquad |\vec{a}||\vec{b}| \sin\alpha = \quad S_{\square \vec{a}\,\vec{b}}$$

二阶行列式的几何意义

平行四边形的面积等于行列式

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ 的 **绝对值**



验证：

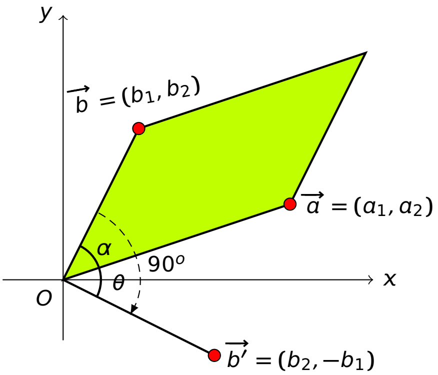
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = (a_1,\ a_2) \cdot (b_2,\ -b_1)$$

$$= \vec{a} \cdot \vec{b'} \qquad |\vec{a}||\vec{b}|\sin\alpha = \quad S_{\square \vec{a}\,\vec{b}}$$

二阶行列式的几何意义

平行四边形的面积等于行列式

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ 的 **绝对值**



验证：

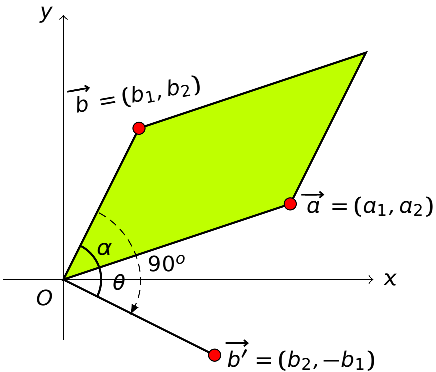
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = (a_1,\, a_2)\cdot(b_2,\, -b_1)$$

$$= \vec{a}\cdot\vec{b'} = |\vec{a}||\vec{b'}|\cos\theta \qquad |\vec{a}||\vec{b}|\sin\alpha = \quad S_{\Box\vec{a}\,\vec{b}}$$

二阶行列式的几何意义

平行四边形的面积等于行列式

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ 的 **绝对值**



验证：

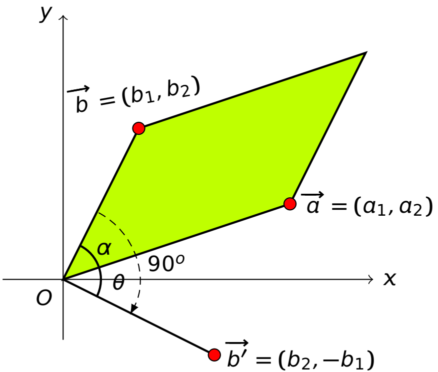
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = (a_1,\ a_2)\cdot(b_2,\ -b_1)$$

$$= \vec{a}\cdot\vec{b'} = |\vec{a}||\vec{b'}|\cos\theta = \pm|\vec{a}||\vec{b}|\sin\alpha = S_{\Box\vec{a}\,\vec{b}}$$

二阶行列式的几何意义

平行四边形的面积等于行列式

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ 的 **绝对值**

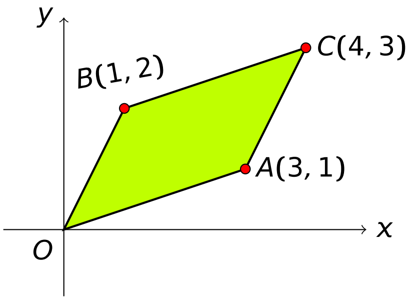


验证：

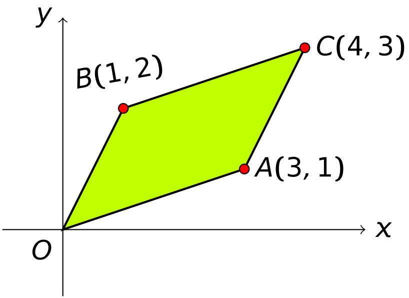
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = (a_1,\ a_2) \cdot (b_2, -b_1)$$

$$= \vec{a} \cdot \vec{b'} = |\vec{a}||\vec{b'}|\cos\theta = \pm|\vec{a}||\vec{b}|\sin\alpha = \pm S_{\square \vec{a}\,\vec{b}}$$

练习 求如下平行四边形的面积

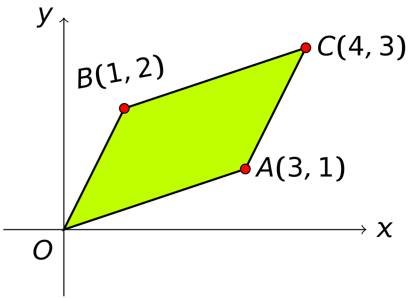


练习 求如下平行四边形的面积



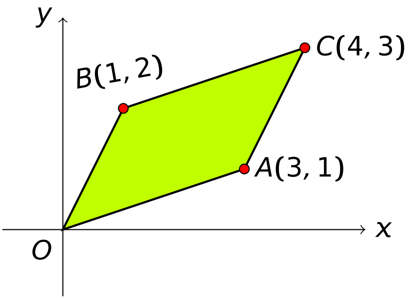
解 平行四边形面积为 2 阶行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ 的绝对值

练习 求如下平行四边形的面积



解 平行四边形面积为 2 阶行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$ 的绝对值，即面积为 5。

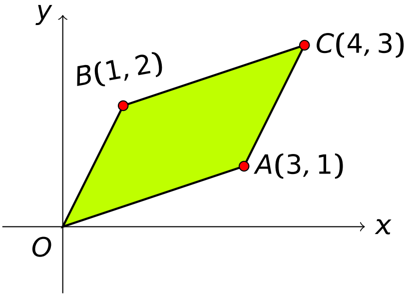
练习 求如下平行四边形的面积



解 平行四边形面积为 2 阶行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$ 的绝对值，即面积为 5。

性质 向量 $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$, $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2)$ 不平行的充分必要条件是：

练习 求如下平行四边形的面积



解 平行四边形面积为 2 阶行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$ 的绝对值，即面积为 5。

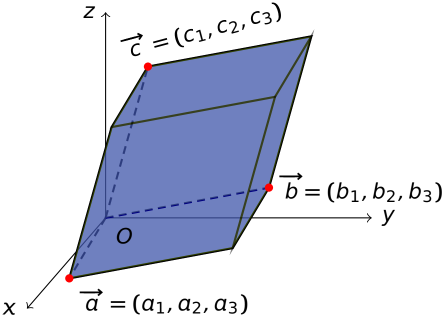
性质 向量 $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$, $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2)$ 不平行的充分必要条件是：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

三阶行列式的几何意义

$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$张成平行六面体的体积

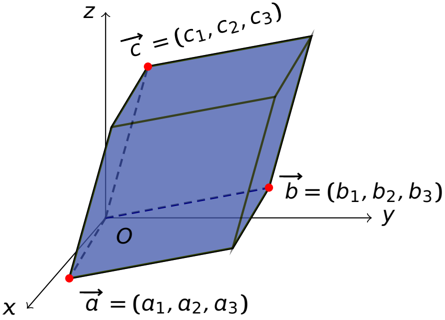
$=$



三阶行列式的几何意义

$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ 张成平行六面体的体积

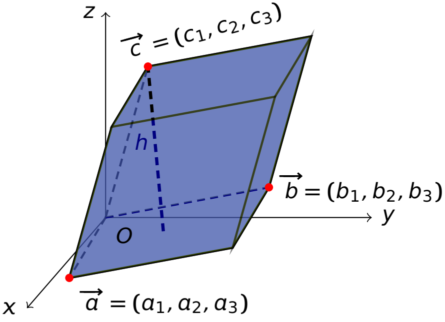
$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \text{的绝对值}$$



三阶行列式的几何意义

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$张成平行六面体的体积

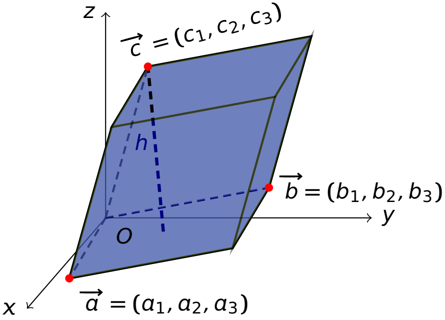
$$=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\text{的绝对值}$$



三阶行列式的几何意义

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 张成平行六面体的体积

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \text{的绝对值}$$

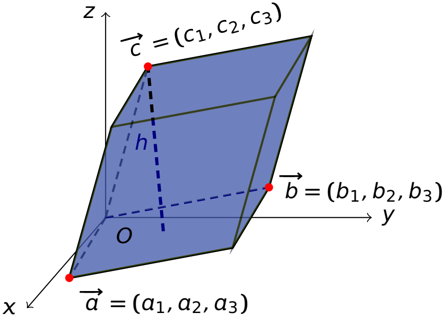


$$\text{六面体的体积} = S_{\square \vec{a}\vec{b}} \cdot h$$

三阶行列式的几何意义

$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$张成平行六面体的体积

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \text{的绝对值}$$

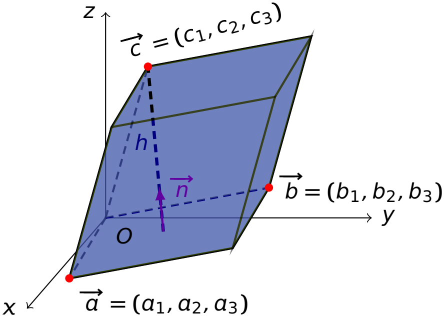


$$\text{六面体的体积} = S_{\square \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}} \cdot h = |\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| \cdot$$

三阶行列式的几何意义

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 张成平行六面体的体积

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \text{的绝对值}$$

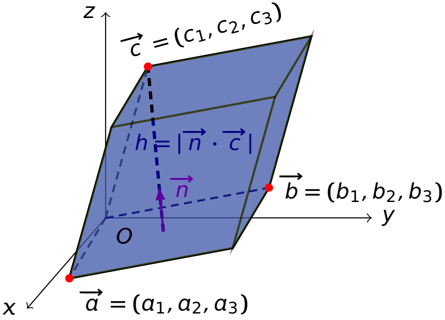


$$\text{六面体的体积} = S_{\square \vec{a}\,\vec{b}} \cdot h = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot$$

三阶行列式的几何意义

$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ 张成平行六面体的体积

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \text{的绝对值}$$

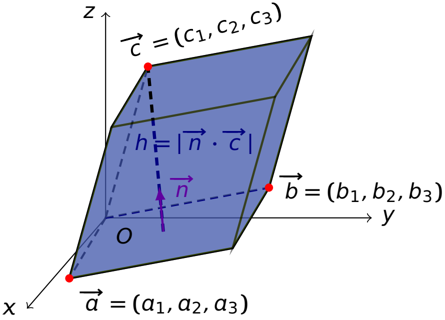


$$\text{六面体的体积} = S_{\square \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}} \cdot h = |\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| \cdot$$

三阶行列式的几何意义

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 张成平行六面体的体积

$$=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\text{的绝对值}$$

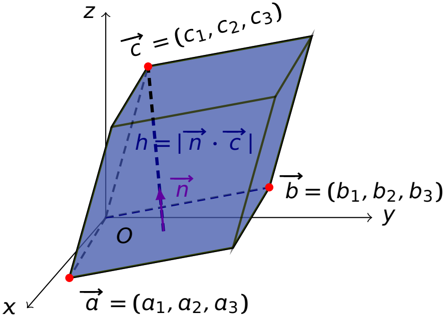


$$\text{六面体的体积}=S_{\square\vec{a}\,\vec{b}}\cdot h=|\vec{a}\times\vec{b}|\cdot|\vec{n}\cdot\vec{c}|$$

三阶行列式的几何意义

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$张成平行六面体的体积

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \text{的绝对值}$$

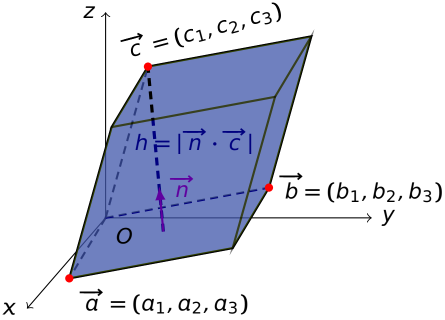


$$\text{六面体的体积} = S_{\square \vec{a}\,\vec{b}} \cdot h = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{n} \cdot \vec{c}| = ||\vec{a} \times \vec{b}|\vec{n} \cdot \vec{c}|$$

三阶行列式的几何意义

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$张成平行六面体的体积

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \text{的绝对值}$$



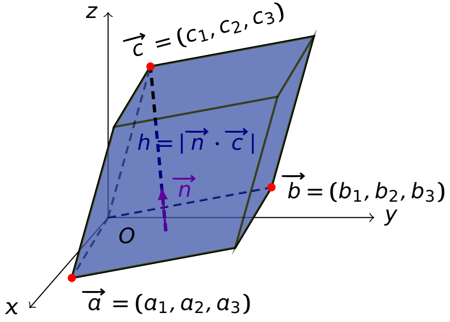
$$\text{六面体的体积} = S_{\square \vec{a}\,\vec{b}} \cdot h = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{n} \cdot \vec{c}| = ||\vec{a} \times \vec{b}|\vec{n} \cdot \vec{c}|$$

$$\pm \vec{a} \times \vec{b}$$

三阶行列式的几何意义

$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$张成平行六面体的体积

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \text{的绝对值}$$



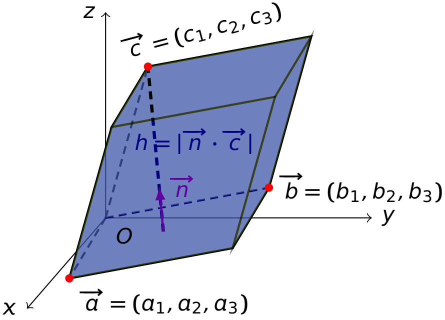
$$\text{六面体的体积} = S_{\square \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}} \cdot h = |\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| \cdot |\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{c}| = ||\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{c}|$$

$$= |(\pm \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c}|$$

三阶行列式的几何意义

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 张成平行六面体的体积

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \text{的绝对值}$$



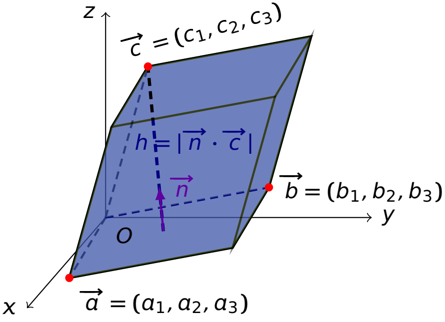
$$\text{六面体的体积} = S_{\square \vec{a}\,\vec{b}} \cdot h = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{n} \cdot \vec{c}| = ||\vec{a} \times \vec{b}|\vec{n} \cdot \vec{c}|$$

$$= |(\pm \vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$$

三阶行列式的几何意义

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$张成平行六面体的体积

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \text{的绝对值}$$



$$\text{六面体的体积} = S_{\square \vec{a}\vec{b}} \cdot h = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{n} \cdot \vec{c}| = ||\vec{a} \times \vec{b}|\vec{n} \cdot \vec{c}|$$

$$= |(\pm \vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \text{的绝对值}$$

性质 向量 $\overrightarrow{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\overrightarrow{b}=(b_1, b_2, b_3)$, $\overrightarrow{c}=(c_1, c_2, c_3)$ 不共面的充分必要条件是：

性质 向量 $\overrightarrow{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\overrightarrow{b}=(b_1, b_2, b_3)$, $\overrightarrow{c}=(c_1, c_2, c_3)$ 不共面的充分必要条件是:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

性质 向量 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\overrightarrow{c}=(c_1,c_2,c_3)$ 不共面的充分必要条件是:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

定义 假设 $\overrightarrow{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\overrightarrow{b}=(b_x,b_y,b_z)$, $\overrightarrow{c}=(c_x,c_y,c_z)$ 不共面，若

- $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} > 0$,
- $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} < 0$,

性质 向量 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\overrightarrow{c}=(c_1,c_2,c_3)$ 不共面的充分必要条件是:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

定义 假设 $\overrightarrow{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\overrightarrow{b}=(b_x,b_y,b_z)$, $\overrightarrow{c}=(c_x,c_y,c_z)$ 不共面，若

- $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} > 0$，则称有序向量组 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ 符合**右手规则**；
- $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} < 0$，

性质 向量 $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\overrightarrow{c} = (c_1, c_2, c_3)$ 不共面的充分必要条件是:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

定义 假设 $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\overrightarrow{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\overrightarrow{c} = (c_x, c_y, c_z)$ 不共面，若

- $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} > 0$，则称有序向量组 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ 符合**右手规则**；
- $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} < 0$，则称有序向量组 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ 符合**左手规则**；

符合右手规则的 3 个向量，在空间中的大致位置关系：