

§1.2 行列式的定义与性质

数学系 梁卓滨

2018 - 2019 学年上学期

Outline of §1.2

1. 行列式的基本性质——从二三阶行列式讲起
2. n 阶行列式的公理化定义
3. 四阶行列式的计算（初步）
4. 转置行列式

We are here now...

1. 行列式的基本性质——从二三阶行列式讲起

2. n 阶行列式的公理化定义

3. 四阶行列式的计算（初步）

4. 转置行列式

行列式的规范性

主对角线：从左上角到右下角的对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

副对角线：从右上角到左下角的对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

行列式的规范性

主对角线：从左上角到右下角的对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

副对角线：从右上角到左下角的对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

行列式的规范性

主对角线：从左上角到右下角的对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

副对角线：从右上角到左下角的对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

行列式的规范性

主对角线：从左上角到右下角的对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

副对角线：从右上角到左下角的对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

行列式的规范性

主对角线：从左上角到右下角的对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

副对角线：从右上角到左下角的对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

行列式的规范性

主对角线：从左上角到右下角的对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

副对角线：从右上角到左下角的对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

单位行列式：主对角线上元素为 1 其他元素为 0 的行列式

行列式的规范性

主对角线：从左上角到右下角的对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

副对角线：从右上角到左下角的对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

单位行列式：主对角线上元素为 1 其他元素为 0 的行列式

例 二阶 单位行列式 : ; 三阶 单位行列式 :

行列式的规范性

主对角线：从左上角到右下角的对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

副对角线：从右上角到左下角的对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

单位行列式：主对角线上元素为 1 其他元素为 0 的行列式

例 二阶 单位行列式： $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ ； 三阶 单位行列式：

行列式的规范性

主对角线：从左上角到右下角的对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

副对角线：从右上角到左下角的对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

单位行列式：主对角线上元素为 1 其他元素为 0 的行列式

例 二阶 三阶
单位行列式 : $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$; 单位行列式 : $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

行列式的规范性

主对角线：从左上角到右下角的对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

副对角线：从右上角到左下角的对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

单位行列式：主对角线上元素为 1 其他元素为 0 的行列式

例 二阶 单位行列式 : $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$; 三阶 单位行列式 : $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

性质 1 (规范性) 单位行列式的值为 1。

行列式的反称性

性质 2（反称性） 行列式交换两行（列）后，它的值变号。

行列式的反称性

性质 2（反称性） 行列式交换两行（列）后，它的值变号。

例

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

行列式的反称性

性质 2（反称性） 行列式交换两行（列）后，它的值变号。

例

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

行列式的反称性

性质 2（反称性） 行列式交换两行（列）后，它的值变号。

例

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

行列式的反称性

性质 2（反称性） 行列式交换两行（列）后，它的值变号。

例

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

行列式的反称性

性质 2（反称性） 行列式交换两行（列）后，它的值变号。

例

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

行列式的反称性

性质 2（反称性） 行列式交换两行（列）后，它的值变号。

例

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

行列式的反称性

性质 2（反称性） 行列式交换两行（列）后，它的值变号。

例

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

例 已知行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 7$ ，则 $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$

行列式的反称性

性质 2（反称性） 行列式交换两行（列）后，它的值变号。

例

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

例 已知行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 7$ ，则 $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = \underline{-7}$

行列式的数乘性

性质 3（数乘性） 行列式任一行（列）可以把公倍数 k “提”出行列式。

行列式的数乘性

性质 3（数乘性） 行列式任一行（列）可以把公倍数 k “提” 出行列式。

例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

行列式的数乘性

性质 3（数乘性） 行列式任一行（列）可以把公倍数 k “提” 出行列式。

例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

行列式的数乘性

性质 3（数乘性） 行列式任一行（列）可以把公倍数 k “提” 出行列式。

例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

行列式的数乘性

性质 3 (数乘性) 行列式任一行 (列) 可以把公倍数 k “提” 出行列式。

例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

例 已知 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -28$, 则 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3k \\ 0 & 5 & 4k \\ 1 & 6 & 3k \end{vmatrix} =$

行列式的数乘性

性质 3 (数乘性) 行列式任一行 (列) 可以把公倍数 k “提” 出行列式。

例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

例

已知 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -28$, 则 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3k \\ 0 & 5 & 4k \\ 1 & 6 & 3k \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} =$

行列式的数乘性

性质 3 (数乘性) 行列式任一行 (列) 可以把公倍数 k “提” 出行列式。

例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

例

已知 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -28$, 则 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3k \\ 0 & 5 & 4k \\ 1 & 6 & 3k \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -28k$

行列式的数乘性

性质 3 (数乘性) 行列式任一行 (列) 可以把公倍数 k “提” 出行列式。

例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

例

已知 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -28$, 则 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3k \\ 0 & 5 & 4k \\ 1 & 6 & 3k \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -28k$

例

已知 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -58$, 则 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -3 & 0 & 18 \end{vmatrix} =$

行列式的数乘性

性质 3 (数乘性) 行列式任一行 (列) 可以把公倍数 k “提” 出行列式。

例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

例 已知 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -28$, 则 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3k \\ 0 & 5 & 4k \\ 1 & 6 & 3k \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -28k$

例 已知 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -58$, 则 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -3 & 0 & 18 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} =$

行列式的数乘性

性质 3 (数乘性) 行列式任一行 (列) 可以把公倍数 k “提” 出行列式。

例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

例 已知 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -28$, 则 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3k \\ 0 & 5 & 4k \\ 1 & 6 & 3k \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -28k$

例 已知 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -58$, 则 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -3 & 0 & 18 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -174$

例 已知 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -58$, 求 $\begin{vmatrix} k & 2k & 3k \\ 4k & 0 & 5k \\ -k & 0 & 6k \end{vmatrix}$ 。

例 已知 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -58$, 求 $\begin{vmatrix} k & 2k & 3k \\ 4k & 0 & 5k \\ -k & 0 & 6k \end{vmatrix}$ 。

解

$$\begin{vmatrix} k & 2k & 3k \\ 4k & 0 & 5k \\ -k & 0 & 6k \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 1 & 2k & 3k \\ 4 & 0 & 5k \\ -1 & 0 & 6k \end{vmatrix}$$

例 已知 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -58$, 求 $\begin{vmatrix} k & 2k & 3k \\ 4k & 0 & 5k \\ -k & 0 & 6k \end{vmatrix}$ 。

解

$$\begin{vmatrix} k & 2k & 3k \\ 4k & 0 & 5k \\ -k & 0 & 6k \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 1 & 2k & 3k \\ 4 & 0 & 5k \\ -1 & 0 & 6k \end{vmatrix} = k \cdot k \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3k \\ 4 & 0 & 5k \\ -1 & 0 & 6k \end{vmatrix}$$

例 已知 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -58$, 求 $\begin{vmatrix} k & 2k & 3k \\ 4k & 0 & 5k \\ -k & 0 & 6k \end{vmatrix}$ 。

解

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} k & 2k & 3k \\ 4k & 0 & 5k \\ -k & 0 & 6k \end{vmatrix} &= k \begin{vmatrix} 1 & 2k & 3k \\ 4 & 0 & 5k \\ -1 & 0 & 6k \end{vmatrix} = k \cdot k \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3k \\ 4 & 0 & 5k \\ -1 & 0 & 6k \end{vmatrix} \\ &= k \cdot k \cdot k \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

例 已知 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -58$, 求 $\begin{vmatrix} k & 2k & 3k \\ 4k & 0 & 5k \\ -k & 0 & 6k \end{vmatrix}$ 。

解

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} k & 2k & 3k \\ 4k & 0 & 5k \\ -k & 0 & 6k \end{vmatrix} &= k \begin{vmatrix} 1 & 2k & 3k \\ 4 & 0 & 5k \\ -1 & 0 & 6k \end{vmatrix} = k \cdot k \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3k \\ 4 & 0 & 5k \\ -1 & 0 & 6k \end{vmatrix} \\ &= k \cdot k \cdot k \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -58k^3 \end{aligned}$$

行列式的可加性

性质 4（可加性） 行列式可沿一行（列）拆分成两个行列式之和。

行列式的可加性

性质 4（可加性） 行列式可沿一行（列）拆分成两个行列式之和。

例

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 7 & 9 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

行列式的可加性

性质 4（可加性） 行列式可沿一行（列）拆分成两个行列式之和。

例

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 7 & 9 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & 7 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

行列式的可加性

性质 4（可加性） 行列式可沿一行（列）拆分成两个行列式之和。

例

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 7 & 9 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & & \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

行列式的可加性

性质 4（可加性） 行列式可沿一行（列）拆分成两个行列式之和。

例

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 7 & 9 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & 7 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

行列式的可加性

性质 4（可加性） 行列式可沿一行（列）拆分成两个行列式之和。

例

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 7 & 9 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & 7 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

行列式的可加性

性质 4（可加性） 行列式可沿一行（列）拆分成两个行列式之和。

例

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 7 & 9 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & 7 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

例

$$\begin{vmatrix} 13 & 3 & 20 \\ -2 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

行列式的可加性

性质 4 (可加性) 行列式可沿一行 (列) 拆分成两个行列式之和。

例

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 7 & 9 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & 7 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

例

$$\begin{vmatrix} 13 & 3 & 20 \\ -2 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 3 & \\ -2 & 8 & \\ 4 & 7 & \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 13 & 3 & \\ -2 & 8 & \\ 4 & 7 & \end{vmatrix}$$

行列式的可加性

性质 4 (可加性) 行列式可沿一行 (列) 拆分成两个行列式之和。

例

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 7 & 9 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & 7 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

例

$$\begin{vmatrix} 13 & 3 & 20 \\ -2 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 3 & -1 \\ -2 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 13 & 3 & 20 \\ -2 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

行列式的可加性

性质 4 (可加性) 行列式可沿一行 (列) 拆分成两个行列式之和。

例

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 7 & 9 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & 7 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

例

$$\begin{vmatrix} 13 & 3 & 20 \\ -2 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 3 & -1 \\ -2 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 13 & 3 & -21 \\ -2 & 8 & \\ 4 & 7 & \end{vmatrix}$$

行列式的可加性

性质 4（可加性） 行列式可沿一行（列）拆分成两个行列式之和。

例

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 7 & 9 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & 7 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

例

$$\begin{vmatrix} 13 & 3 & 20 \\ -2 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 3 & -1 \\ -2 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 13 & 3 & -21 \\ -2 & 8 & -9 \\ 4 & 7 & \end{vmatrix}$$

行列式的可加性

性质 4（可加性） 行列式可沿一行（列）拆分成两个行列式之和。

例

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 7 & 9 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & 7 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

例

$$\begin{vmatrix} 13 & 3 & 20 \\ -2 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 3 & -1 \\ -2 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 13 & 3 & -21 \\ -2 & 8 & -9 \\ 4 & 7 & -2 \end{vmatrix}$$

行列式的可加性

性质 4 (可加性) 行列式可沿一行 (列) 拆分成两个行列式之和。

例
$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 7 & 9 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & 7 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

例
$$\begin{vmatrix} 13 & 3 & 20 \\ -2 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 3 & -1 \\ -2 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 13 & 3 & -21 \\ -2 & 8 & -9 \\ 4 & 7 & -2 \end{vmatrix}$$

例
$$\begin{vmatrix} a_1 + x_1 & a_2 + x_2 & a_3 + x_3 \\ b_1 + y_1 & b_2 + y_2 & b_3 + y_3 \\ c_1 + z_1 & c_2 + z_2 & c_3 + z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

行列式的可加性

性质 4 (可加性) 行列式可沿一行 (列) 拆分成两个行列式之和。

例
$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 7 & 9 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & 7 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

例
$$\begin{vmatrix} 13 & 3 & 20 \\ -2 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 3 & -1 \\ -2 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 13 & 3 & -21 \\ -2 & 8 & -9 \\ 4 & 7 & -2 \end{vmatrix}$$

例 但以下的拆分是错误：

$$\begin{vmatrix} a_1 + x_1 & a_2 + x_2 & a_3 + x_3 \\ b_1 + y_1 & b_2 + y_2 & b_3 + y_3 \\ c_1 + z_1 & c_2 + z_2 & c_3 + z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

行列式的可加性

性质 4 (可加性) 行列式可沿一行 (列) 拆分成两个行列式之和。

例
$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 7 & 9 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & 7 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

例
$$\begin{vmatrix} 13 & 3 & 20 \\ -2 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 3 & -1 \\ -2 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 13 & 3 & -21 \\ -2 & 8 & -9 \\ 4 & 7 & -2 \end{vmatrix}$$

例 但以下的拆分是错误的：

$$\begin{vmatrix} a_1 + x_1 & a_2 + x_2 & a_3 + x_3 \\ b_1 + y_1 & b_2 + y_2 & b_3 + y_3 \\ c_1 + z_1 & c_2 + z_2 & c_3 + z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

每次拆分只能针对一行或一列！

反过来,“可加性”可理解成“两式仅一行(列)不同可相加”。

反过来, “可加性” 可理解成 “两式仅一行 (列) 不同可相加”。

例

$$\begin{vmatrix} 13 & 3 & -1 \\ -2 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 13 & 3 & 21 \\ -2 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix} =$$

反过来, “可加性” 可理解成 “两式仅一行 (列) 不同可相加”。

例

$$\begin{vmatrix} 13 & 3 & -1 \\ -2 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 13 & 3 & 21 \\ -2 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix} =$$

反过来, “可加性” 可理解成 “两式仅一行 (列) 不同可相加”。

例

$$\begin{vmatrix} 13 & 3 & -1 \\ -2 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 13 & 3 & 21 \\ -2 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 3 & 20 \\ -2 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

反过来, “可加性” 可理解成 “两式仅一行 (列) 不同可相加”。

例

$$\begin{vmatrix} 13 & 3 & -1 \\ -2 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 13 & 3 & 21 \\ -2 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 3 & 20 \\ -2 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 7 & 6 \\ 8 & -2 & 9 \end{vmatrix} =$$

反过来, “可加性” 可理解成 “两式仅一行 (列) 不同可相加”。

例

$$\begin{vmatrix} 13 & 3 & -1 \\ -2 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 13 & 3 & 21 \\ -2 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 3 & 20 \\ -2 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 7 & 6 \\ 8 & -2 & 9 \end{vmatrix} =$$

反过来, “可加性” 可理解成 “两式仅一行 (列) 不同可相加”。

例

$$\begin{vmatrix} 13 & 3 & -1 \\ -2 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 13 & 3 & 21 \\ -2 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 3 & 20 \\ -2 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 7 & 6 \\ 8 & -2 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 6 \\ -2 & 8 & 9 \end{vmatrix} =$$

反过来, “可加性” 可理解成 “两式仅一行 (列) 不同可相加”。

例

$$\begin{vmatrix} 13 & 3 & -1 \\ -2 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 13 & 3 & 21 \\ -2 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 3 & 20 \\ -2 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 7 & 6 \\ 8 & -2 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 6 \\ -2 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -3 & 5 & 6 \\ 9 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

行列式基本性质总结

规范性 单位行列式的值为 1

反称性 交换两行 (列) 后, 值变号

数乘性 某行 (列) 乘 k 倍, 值变 k 倍

可加性 两式仅一行 (列) 不同可相加

行列式基本性质总结

规范性 单位行列式的值为 1

反称性 交换两行 (列) 后, 值变号

数乘性 某行 (列) 乘 k 倍, 值变 k 倍

可加性 两式仅一行 (列) 不同可相加

利用上述 4 个性质, 可以推导出行列式的其他性质。

而在这些推导中, 2 阶 3 阶行列式的具体表达式不起作用。

行列式基本性质的推论

推论 若行列式其中某行（列）所有元素都为零，则它的值为零

行列式基本性质的推论

推论 若行列式其中某行（列）所有元素都为零，则它的值为零

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

行列式基本性质的推论

推论 若行列式其中某行（列）所有元素都为零，则它的值为零

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

行列式基本性质的推论

推论 若行列式其中某行（列）所有元素都为零，则它的值为零

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

行列式基本性质的推论

推论 若行列式其中某行（列）所有元素都为零，则它的值为零

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

例如, $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 7 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \underline{\quad}$

行列式基本性质的推论

推论 若行列式其中某行（列）所有元素都为零，则它的值为零

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

例如, $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 7 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \underline{0}$

行列式基本性质的推论

推论 若行列式其中两行（列）对应元素相同，则它的值为零

行列式基本性质的推论

推论 若行列式其中两行（列）对应元素相同，则它的值为零

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

行列式基本性质的推论

推论 若行列式其中两行（列）对应元素相同，则它的值为零

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{交换 2,3 行}}$$

行列式基本性质的推论

推论 若行列式其中两行（列）对应元素相同，则它的值为零

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{交换 2,3 行}} \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix},$$

行列式基本性质的推论

推论 若行列式其中两行（列）对应元素相同，则它的值为零

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{交换 2,3 行}} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix},$$

行列式基本性质的推论

推论 若行列式其中两行（列）对应元素相同，则它的值为零

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{交换 2,3 行}} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix}, \quad \therefore \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0$$

行列式基本性质的推论

推论 若行列式其中两行（列）对应元素相同，则它的值为零

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{交换 2,3 行}} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix}, \quad \therefore \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0$$

例如, $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 9 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$

行列式基本性质的推论

推论 若行列式其中两行（列）对应元素相同，则它的值为零

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{交换 2,3 行}} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix}, \quad \therefore \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0$$

例如, $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 9 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$

行列式基本性质的推论

推论 若行列式其中两行（列）对应元素相同，则它的值为零

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{交换 2,3 行}} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix}, \quad \therefore \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0$$

例如, $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 9 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$

推论 若行列式其中两行（列）对应元素成比例，则它的值为零

行列式基本性质的推论

推论 若行列式其中两行（列）对应元素相同，则它的值为零

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{交换 2,3 行}} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix}, \quad \therefore \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0$$

例如, $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 9 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$

推论 若行列式其中两行（列）对应元素成比例，则它的值为零

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ ku & kv & kw \end{vmatrix} =$$

行列式基本性质的推论

推论 若行列式其中两行（列）对应元素相同，则它的值为零

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{交换 2,3 行}} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix}, \quad \therefore \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0$$

例如, $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 9 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$

推论 若行列式其中两行（列）对应元素成比例，则它的值为零

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ ku & kv & kw \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix} =$$

行列式基本性质的推论

推论 若行列式其中两行（列）对应元素相同，则它的值为零

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{交换 2,3 行}} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix}, \quad \therefore \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0$$

例如, $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 9 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$

推论 若行列式其中两行（列）对应元素成比例，则它的值为零

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ ku & kv & kw \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0$$

行列式基本性质的推论

推论 若行列式其中两行（列）对应元素相同，则它的值为零

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{交换 2,3 行}} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix}, \quad \therefore \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0$$

例如, $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 9 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$

推论 若行列式其中两行（列）对应元素成比例，则它的值为零

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ ku & kv & kw \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0$$

例如, $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 7 & 9 & 21 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$

行列式基本性质的推论

推论 若行列式其中两行（列）对应元素相同，则它的值为零

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{交换 2,3 行}} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix}, \quad \therefore \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0$$

例如, $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 9 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$

推论 若行列式其中两行（列）对应元素成比例，则它的值为零

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ ku & kv & kw \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0$$

例如, $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 7 & 9 & 21 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$

行列式基本性质的推论

推论！ 行列式的某行（列）加上另一行（列）的 k 倍，它的值不变。

行列式基本性质的推论

推论！ 行列式的某行（列）加上另一行（列）的 k 倍，它的值不变。例如：

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

行列式基本性质的推论

推论！ 行列式的某行（列）加上另一行（列）的 k 倍，它的值不变。例如：

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x + ku & y + kv & z + kw \end{vmatrix}$$

行列式基本性质的推论

推论！ 行列式的某行（列）加上另一行（列）的 k 倍，它的值不变。例如：

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x + ku & y + kv & z + kw \end{vmatrix}$$

行列式基本性质的推论

推论！ 行列式的某行（列）加上另一行（列）的 k 倍，它的值不变。例如：

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x + ku & y + kv & z + kw \end{vmatrix}$$

这是因为：

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x + ku & y + kv & z + kw \end{vmatrix} =$$

行列式基本性质的推论

推论！ 行列式的某行（列）加上另一行（列）的 k 倍，它的值不变。例如：

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x+ku & y+kv & z+kw \end{vmatrix}$$

这是因为：

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x+ku & y+kv & z+kw \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ ku & kv & kw \end{vmatrix} =$$

行列式基本性质的推论

推论！ 行列式的某行（列）加上另一行（列）的 k 倍，它的值不变。例如：

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x+ku & y+kv & z+kw \end{vmatrix}$$

这是因为：

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x+ku & y+kv & z+kw \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ ku & kv & kw \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

例 利用行列式的性质说明 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$

例 利用行列式的性质说明 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$

这是：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} =$$

例 利用行列式的性质说明 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$

这是：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} =$$

例 利用行列式的性质说明 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$

这是：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

符号说明

行 (row) 变换记号

- $r_i \times k$ 表示第 i 行乘以 k 倍
- $r_i \leftrightarrow r_j$ 表示交换第 i 行和第 j 行
- $r_i + kr_j$ 表示第 i 行加上第 j 行的 k 倍

符号说明

行 (row) 变换记号

- $r_i \times k$ 表示第 i 行乘以 k 倍
- $r_i \leftrightarrow r_j$ 表示交换第 i 行和第 j 行
- $r_i + kr_j$ 表示第 i 行加上第 j 行的 k 倍

列 (column) 变换记号

- $c_i \times k$ 表示第 i 列乘以 k 倍
- $c_i \leftrightarrow c_j$ 表示交换第 i 列和第 j 列
- $c_i + kc_j$ 表示第 i 列加上第 j 列的 k 倍

符号说明

行 (row) 变换记号

- $r_i \times k$ 表示第 i 行乘以 k 倍
- $r_i \leftrightarrow r_j$ 表示交换第 i 行和第 j 行
- $r_i + kr_j$ 表示第 i 行加上第 j 行的 k 倍

列 (column) 变换记号

- $c_i \times k$ 表示第 i 列乘以 k 倍
- $c_i \leftrightarrow c_j$ 表示交换第 i 列和第 j 列
- $c_i + kc_j$ 表示第 i 列加上第 j 列的 k 倍

例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

符号说明

行 (row) 变换记号

- $r_i \times k$ 表示第 i 行乘以 k 倍
- $r_i \leftrightarrow r_j$ 表示交换第 i 行和第 j 行
- $r_i + kr_j$ 表示第 i 行加上第 j 行的 k 倍

列 (column) 变换记号

- $c_i \times k$ 表示第 i 列乘以 k 倍
- $c_i \leftrightarrow c_j$ 表示交换第 i 列和第 j 列
- $c_i + kc_j$ 表示第 i 列加上第 j 列的 k 倍

例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_2}$$

符号说明

行 (row) 变换记号

- $r_i \times k$ 表示第 i 行乘以 k 倍
- $r_i \leftrightarrow r_j$ 表示交换第 i 行和第 j 行
- $r_i + kr_j$ 表示第 i 行加上第 j 行的 k 倍

列 (column) 变换记号

- $c_i \times k$ 表示第 i 列乘以 k 倍
- $c_i \leftrightarrow c_j$ 表示交换第 i 列和第 j 列
- $c_i + kc_j$ 表示第 i 列加上第 j 列的 k 倍

例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

符号说明

行 (row) 变换记号

- $r_i \times k$ 表示第 i 行乘以 k 倍
- $r_i \leftrightarrow r_j$ 表示交换第 i 行和第 j 行
- $r_i + kr_j$ 表示第 i 行加上第 j 行的 k 倍

列 (column) 变换记号

- $c_i \times k$ 表示第 i 列乘以 k 倍
- $c_i \leftrightarrow c_j$ 表示交换第 i 列和第 j 列
- $c_i + kc_j$ 表示第 i 列加上第 j 列的 k 倍

例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

符号说明

行 (row) 变换记号

- $r_i \times k$ 表示第 i 行乘以 k 倍
- $r_i \leftrightarrow r_j$ 表示交换第 i 行和第 j 行
- $r_i + kr_j$ 表示第 i 行加上第 j 行的 k 倍

列 (column) 变换记号

- $c_i \times k$ 表示第 i 列乘以 k 倍
- $c_i \leftrightarrow c_j$ 表示交换第 i 列和第 j 列
- $c_i + kc_j$ 表示第 i 列加上第 j 列的 k 倍

例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3}$$

符号说明

行 (row) 变换记号

- $r_i \times k$ 表示第 i 行乘以 k 倍
- $r_i \leftrightarrow r_j$ 表示交换第 i 行和第 j 行
- $r_i + kr_j$ 表示第 i 行加上第 j 行的 k 倍

列 (column) 变换记号

- $c_i \times k$ 表示第 i 列乘以 k 倍
- $c_i \leftrightarrow c_j$ 表示交换第 i 列和第 j 列
- $c_i + kc_j$ 表示第 i 列加上第 j 列的 k 倍

例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

符号说明

行 (row) 变换记号

- $r_i \times k$ 表示第 i 行乘以 k 倍
- $r_i \leftrightarrow r_j$ 表示交换第 i 行和第 j 行
- $r_i + kr_j$ 表示第 i 行加上第 j 行的 k 倍

列 (column) 变换记号

- $c_i \times k$ 表示第 i 列乘以 k 倍
- $c_i \leftrightarrow c_j$ 表示交换第 i 列和第 j 列
- $c_i + kc_j$ 表示第 i 列加上第 j 列的 k 倍

例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

符号说明

行 (row) 变换记号

- $r_i \times k$ 表示第 i 行乘以 k 倍
- $r_i \leftrightarrow r_j$ 表示交换第 i 行和第 j 行
- $r_i + kr_j$ 表示第 i 行加上第 j 行的 k 倍

列 (column) 变换记号

- $c_i \times k$ 表示第 i 列乘以 k 倍
- $c_i \leftrightarrow c_j$ 表示交换第 i 列和第 j 列
- $c_i + kc_j$ 表示第 i 列加上第 j 列的 k 倍

例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

练习 用行列式的性质证明

$$\begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 + c_1 & c_1 \\ a_2 + kb_2 & b_2 + c_2 & c_2 \\ a_3 + kb_3 & b_3 + c_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

练习 用行列式的性质证明
$$\begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 + c_1 & c_1 \\ a_2 + kb_2 & b_2 + c_2 & c_2 \\ a_3 + kb_3 & b_3 + c_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

证明

$$\begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 + c_1 & c_1 \\ a_2 + kb_2 & b_2 + c_2 & c_2 \\ a_3 + kb_3 & b_3 + c_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

练习 用行列式的性质证明

$$\begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 + c_1 & c_1 \\ a_2 + kb_2 & b_2 + c_2 & c_2 \\ a_3 + kb_3 & b_3 + c_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

证明

$$\begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 + c_1 & c_1 \\ a_2 + kb_2 & b_2 + c_2 & c_2 \\ a_3 + kb_3 & b_3 + c_3 & c_3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{C_2 - C_3}}}$$

练习 用行列式的性质证明
$$\begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 + c_1 & c_1 \\ a_2 + kb_2 & b_2 + c_2 & c_2 \\ a_3 + kb_3 & b_3 + c_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

证明

$$\begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 + c_1 & c_1 \\ a_2 + kb_2 & b_2 + c_2 & c_2 \\ a_3 + kb_3 & b_3 + c_3 & c_3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{c_2 - c_3}}} \begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + kb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

练习 用行列式的性质证明
$$\begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 + c_1 & c_1 \\ a_2 + kb_2 & b_2 + c_2 & c_2 \\ a_3 + kb_3 & b_3 + c_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

证明

$$\begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 + c_1 & c_1 \\ a_2 + kb_2 & b_2 + c_2 & c_2 \\ a_3 + kb_3 & b_3 + c_3 & c_3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{c_2 - c_3}}} \begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + kb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{c_1 - kc_2}}$$

练习 用行列式的性质证明
$$\begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 + c_1 & c_1 \\ a_2 + kb_2 & b_2 + c_2 & c_2 \\ a_3 + kb_3 & b_3 + c_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

证明

$$\begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 + c_1 & c_1 \\ a_2 + kb_2 & b_2 + c_2 & c_2 \\ a_3 + kb_3 & b_3 + c_3 & c_3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{c_2 - c_3}}} \begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + kb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{c_1 - kc_2}}} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

练习 用行列式的性质证明

$$\begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 + c_1 & c_1 \\ a_2 + kb_2 & b_2 + c_2 & c_2 \\ a_3 + kb_3 & b_3 + c_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

证明

$$\begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 + c_1 & c_1 \\ a_2 + kb_2 & b_2 + c_2 & c_2 \\ a_3 + kb_3 & b_3 + c_3 & c_3 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2 - c_3} \begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + kb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_1 - kc_2} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

练习 用行列式的性质证明

$$\begin{vmatrix} b_1 + c_1 & c_1 + a_1 & a_1 + b_1 \\ b_2 + c_2 & c_2 + a_2 & a_2 + b_2 \\ b_3 + c_3 & c_3 + a_3 & a_3 + b_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} b_1 + c_1 & c_1 + a_1 & a_1 + b_1 \\ b_2 + c_2 & c_2 + a_2 & a_2 + b_2 \\ b_3 + c_3 & c_3 + a_3 & a_3 + b_3 \end{vmatrix}$$

=

$$= 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} b_1 + c_1 & c_1 + a_1 & a_1 + b_1 \\ b_2 + c_2 & c_2 + a_2 & a_2 + b_2 \\ b_3 + c_3 & c_3 + a_3 & a_3 + b_3 \end{vmatrix} \\
 = \begin{vmatrix} b_1 + c_1 & c_1 + a_1 & 0 \\ b_2 + c_2 & c_2 + a_2 & 0 \\ b_3 + c_3 & c_3 + a_3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 + c_1 & c_1 + a_1 & 0 \\ b_2 + c_2 & c_2 + a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} b_1 + c_1 & c_1 + a_1 & a_1 + b_1 \\ b_2 + c_2 & c_2 + a_2 & a_2 + b_2 \\ b_3 + c_3 & c_3 + a_3 & a_3 + b_3 \end{vmatrix} \\
 = \begin{vmatrix} b_1 + c_1 & c_1 + a_1 & a_1 \\ b_2 + c_2 & c_2 + a_2 & a_2 \\ b_3 + c_3 & c_3 + a_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 + c_1 & c_1 + a_1 & 0 \\ b_2 + c_2 & c_2 + a_2 & 0 \\ b_3 + c_3 & c_3 + a_3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} b_1 + c_1 & c_1 + a_1 & a_1 + b_1 \\ b_2 + c_2 & c_2 + a_2 & a_2 + b_2 \\ b_3 + c_3 & c_3 + a_3 & a_3 + b_3 \end{vmatrix} \\
 = \begin{vmatrix} b_1 + c_1 & c_1 + a_1 & a_1 \\ b_2 + c_2 & c_2 + a_2 & a_2 \\ b_3 + c_3 & c_3 + a_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 + c_1 & c_1 + a_1 & b_1 \\ b_2 + c_2 & c_2 + a_2 & b_2 \\ b_3 + c_3 & c_3 + a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\
 =$$

$$= 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} b_1 + c_1 & c_1 + a_1 & a_1 + b_1 \\ b_2 + c_2 & c_2 + a_2 & a_2 + b_2 \\ b_3 + c_3 & c_3 + a_3 & a_3 + b_3 \end{vmatrix} \\
= \begin{vmatrix} b_1 + c_1 & c_1 + a_1 & a_1 \\ b_2 + c_2 & c_2 + a_2 & a_2 \\ b_3 + c_3 & c_3 + a_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 + c_1 & c_1 + a_1 & b_1 \\ b_2 + c_2 & c_2 + a_2 & b_2 \\ b_3 + c_3 & c_3 + a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\
= \begin{vmatrix} b_1 + c_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 + c_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 + c_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix} + \\
= 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} b_1 + c_1 & c_1 + a_1 & a_1 + b_1 \\ b_2 + c_2 & c_2 + a_2 & a_2 + b_2 \\ b_3 + c_3 & c_3 + a_3 & a_3 + b_3 \end{vmatrix} \\
= \begin{vmatrix} b_1 + c_1 & c_1 + a_1 & a_1 \\ b_2 + c_2 & c_2 + a_2 & a_2 \\ b_3 + c_3 & c_3 + a_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 + c_1 & c_1 + a_1 & b_1 \\ b_2 + c_2 & c_2 + a_2 & b_2 \\ b_3 + c_3 & c_3 + a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\
= \begin{vmatrix} b_1 + c_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 + c_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 + c_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & c_1 + a_1 & b_1 \\ c_2 & c_2 + a_2 & b_2 \\ c_3 & c_3 + a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\
= \\
= 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} b_1 + c_1 & c_1 + a_1 & a_1 + b_1 \\ b_2 + c_2 & c_2 + a_2 & a_2 + b_2 \\ b_3 + c_3 & c_3 + a_3 & a_3 + b_3 \end{vmatrix} \\
= \begin{vmatrix} b_1 + c_1 & c_1 + a_1 & a_1 \\ b_2 + c_2 & c_2 + a_2 & a_2 \\ b_3 + c_3 & c_3 + a_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 + c_1 & c_1 + a_1 & b_1 \\ b_2 + c_2 & c_2 + a_2 & b_2 \\ b_3 + c_3 & c_3 + a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\
= \begin{vmatrix} b_1 + c_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 + c_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 + c_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & c_1 + a_1 & b_1 \\ c_2 & c_2 + a_2 & b_2 \\ c_3 & c_3 + a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\
= \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix} + \\
= 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} b_1 + c_1 & c_1 + a_1 & a_1 + b_1 \\ b_2 + c_2 & c_2 + a_2 & a_2 + b_2 \\ b_3 + c_3 & c_3 + a_3 & a_3 + b_3 \end{vmatrix} \\
= \begin{vmatrix} b_1 + c_1 & c_1 + a_1 & a_1 \\ b_2 + c_2 & c_2 + a_2 & a_2 \\ b_3 + c_3 & c_3 + a_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 + c_1 & c_1 + a_1 & b_1 \\ b_2 + c_2 & c_2 + a_2 & b_2 \\ b_3 + c_3 & c_3 + a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\
= \begin{vmatrix} b_1 + c_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 + c_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 + c_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & c_1 + a_1 & b_1 \\ c_2 & c_2 + a_2 & b_2 \\ c_3 & c_3 + a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\
= \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \\
= 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} b_1 + c_1 & c_1 + a_1 & a_1 + b_1 \\ b_2 + c_2 & c_2 + a_2 & a_2 + b_2 \\ b_3 + c_3 & c_3 + a_3 & a_3 + b_3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} b_1 + c_1 & c_1 + a_1 & a_1 \\ b_2 + c_2 & c_2 + a_2 & a_2 \\ b_3 + c_3 & c_3 + a_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 + c_1 & c_1 + a_1 & b_1 \\ b_2 + c_2 & c_2 + a_2 & b_2 \\ b_3 + c_3 & c_3 + a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} b_1 + c_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 + c_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 + c_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & c_1 + a_1 & b_1 \\ c_2 & c_2 + a_2 & b_2 \\ c_3 & c_3 + a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix} \\
&= 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} b_1 + c_1 & c_1 + a_1 & a_1 + b_1 \\ b_2 + c_2 & c_2 + a_2 & a_2 + b_2 \\ b_3 + c_3 & c_3 + a_3 & a_3 + b_3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} b_1 + c_1 & c_1 + a_1 & a_1 \\ b_2 + c_2 & c_2 + a_2 & a_2 \\ b_3 + c_3 & c_3 + a_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 + c_1 & c_1 + a_1 & b_1 \\ b_2 + c_2 & c_2 + a_2 & b_2 \\ b_3 + c_3 & c_3 + a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} b_1 + c_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 + c_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 + c_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & c_1 + a_1 & b_1 \\ c_2 & c_2 + a_2 & b_2 \\ c_3 & c_3 + a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} b_1 + c_1 & c_1 + a_1 & a_1 + b_1 \\ b_2 + c_2 & c_2 + a_2 & a_2 + b_2 \\ b_3 + c_3 & c_3 + a_3 & a_3 + b_3 \end{vmatrix} \\
= \begin{vmatrix} b_1 + c_1 & c_1 + a_1 & a_1 \\ b_2 + c_2 & c_2 + a_2 & a_2 \\ b_3 + c_3 & c_3 + a_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 + c_1 & c_1 + a_1 & b_1 \\ b_2 + c_2 & c_2 + a_2 & b_2 \\ b_3 + c_3 & c_3 + a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\
= \begin{vmatrix} b_1 + c_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 + c_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 + c_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & c_1 + a_1 & b_1 \\ c_2 & c_2 + a_2 & b_2 \\ c_3 & c_3 + a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\
= \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix} \\
= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} b_1 + c_1 & c_1 + a_1 & a_1 + b_1 \\ b_2 + c_2 & c_2 + a_2 & a_2 + b_2 \\ b_3 + c_3 & c_3 + a_3 & a_3 + b_3 \end{vmatrix} \\
= \begin{vmatrix} b_1 + c_1 & c_1 + a_1 & a_1 \\ b_2 + c_2 & c_2 + a_2 & a_2 \\ b_3 + c_3 & c_3 + a_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 + c_1 & c_1 + a_1 & b_1 \\ b_2 + c_2 & c_2 + a_2 & b_2 \\ b_3 + c_3 & c_3 + a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\
= \begin{vmatrix} b_1 + c_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 + c_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 + c_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & c_1 + a_1 & b_1 \\ c_2 & c_2 + a_2 & b_2 \\ c_3 & c_3 + a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\
= \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix} \\
= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

We are here now...

1. 行列式的基本性质——从二三阶行列式讲起

2. n 阶行列式的公理化定义

3. 四阶行列式的计算（初步）

4. 转置行列式

2 阶 3 阶行列式回顾

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{matrix}$$

2 阶 3 阶行列式回顾

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{matrix}$$



规范性
反称性
数乘性
可加性

2 阶 3 阶行列式回顾

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{matrix}$$

⇒

规范性
反称性
数乘性
可加性

⇒

其它
性质 ...

2 阶 3 阶行列式回顾

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{matrix}$$

⇒

⇐

规范性
反称性
数乘性
可加性

⇒ 其它
性质 ...

2 阶 3 阶行列式回顾

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{matrix}$$

⇒

⇐

规范性
反称性
数乘性
可加性

⇒ 其它
性质 ...

注 2 阶 3 阶行列式的展开表达式，与“四个基本性质”，是相互等价的。

2 阶 3 阶行列式回顾

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{matrix}$$

\Rightarrow

\Leftarrow

规范性
反称性
数乘性
可加性

\Rightarrow 其它
性质 ...

注 2 阶 3 阶行列式的展开表达式，与“四个基本性质”，是相互等价的。

例 假设忘记二阶行列式的定义。利用“四个基本性质”，推导

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 的展开表达式。

例 利用“四个基本性质”，推导 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 的展开表达式。

例 利用“四个基本性质”，推导 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 的展开表达式。

解 拆分行列式，直到化成一些单位行列式的组合：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

例 利用“四个基本性质”，推导 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 的展开表达式。

解 拆分行列式，直到化成一些单位行列式的组合：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{可加性}} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

例 利用“四个基本性质”，推导 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 的展开表达式。

解 拆分行列式，直到化成一些单位行列式的组合：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{可加性}} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ \xrightarrow{\text{可加性}} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} +$$

例 利用“四个基本性质”，推导 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 的展开表达式。

解 拆分行列式，直到化成一些单位行列式的组合：

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \xrightarrow{\text{可加性}} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ & \xrightarrow{\text{可加性}} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

例 利用“四个基本性质”，推导 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 的展开表达式。

解 拆分行列式，直到化成一些单位行列式的组合：

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &\xrightarrow{\text{可加性}} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow{\text{可加性}} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} + \cancel{\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix}} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} + \cancel{\begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix}} \end{aligned}$$

例 利用“四个基本性质”，推导 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 的展开表达式。

解 拆分行列式，直到化成一些单位行列式的组合：

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{可加性}} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\
 & \xrightarrow{\text{可加性}} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} + \cancel{\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix}} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} + \cancel{\begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix}} \\
 & \xrightarrow{\text{数乘性}} a_{11} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} + a_{12} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

例 利用“四个基本性质”，推导 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 的展开表达式。

解 拆分行列式，直到化成一些单位行列式的组合：

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{可加性}} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\
 & \xrightarrow{\text{可加性}} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} + \cancel{\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix}} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} + \cancel{\begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix}} \\
 & \xrightarrow{\text{数乘性}} a_{11} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} + a_{12} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} \\
 & \xrightarrow{\text{数乘性}} a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + a_{12}a_{21} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

例 利用“四个基本性质”，推导 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 的展开表达式。

解 拆分行列式，直到化成一些单位行列式的组合：

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{可加性}} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\
 & \xrightarrow{\text{可加性}} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} + \cancel{\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix}} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} + \cancel{\begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix}} \\
 & \xrightarrow{\text{数乘性}} a_{11} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} + a_{12} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} \\
 & \xrightarrow{\text{数乘性}} a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + a_{12}a_{21} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\
 & \xrightarrow{\text{反称性}} a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - a_{12}a_{21} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

例 利用“四个基本性质”，推导 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 的展开表达式。

解 拆分行列式，直到化成一些单位行列式的组合：

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{可加性}} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\
 & \xrightarrow{\text{可加性}} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} + \cancel{\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix}} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} + \cancel{\begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix}} \\
 & \xrightarrow{\text{数乘性}} a_{11} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} + a_{12} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} \\
 & \xrightarrow{\text{数乘性}} a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + a_{12}a_{21} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\
 & \xrightarrow{\text{反称性}} a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - a_{12}a_{21} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\
 & \xrightarrow{\text{规范性}} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}
 \end{aligned}$$

例 利用“四个基本性质”，推导 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 的展开表达式。

例 利用“四个基本性质”，推导 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 的展开表达式。

(证明与 2 阶时类似，方法是：拆分行列式，直到化成一些单位行列式的组合。)

从 2 阶 3 阶行列式到 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} = ?$$

从 2 阶 3 阶行列式到 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{matrix} \Rightarrow$$

规范性
反称性
数乘性
可加性

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = ?$$

从 2 阶 3 阶行列式到 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = ? \quad \Leftarrow$$

规范性
反称性
数乘性
可加性

从 2 阶 3 阶行列式到 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = ? \quad \Leftarrow$$

规范性
反称性
数乘性
可加性

注 可以利用“四个基本性质”，来定义一般的 n 阶行列式。

从 2 阶 3 阶行列式到 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = ?$$

规范性
反称性
数乘性
可加性

⇒ 其它性质 ...

注 可以利用“四个基本性质”，来定义一般的 n 阶行列式。

n 阶行列式的定义

定义 记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示对其中的 n 行 n 列的共 n^2 个元素 a_{ij} ($i, j = 1, \cdots, n$), 进行运算得到一个数值。

n 阶行列式的定义

定义 记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示对其中的 n 行 n 列的共 n^2 个元素 a_{ij} ($i, j = 1, \cdots, n$), 进行运算得到一个数值。并且要求这种运算满足四个基本性质:

规范性、反称性、数乘性、可加性

n 阶行列式的定义

定义 记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示对其中的 n 行 n 列的共 n^2 个元素 a_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$), 进行运算得到一个数值。并且要求这种运算满足四个基本性质:

规范性、反称性、数乘性、可加性

则称上述记号为 n 阶行列式。

n 阶行列式的定义

定义 记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示对其中的 n 行 n 列的共 n^2 个元素 a_{ij} ($i, j = 1, \cdots, n$), 进行运算得到一个数值。并且要求这种运算满足四个基本性质:

规范性、反称性、数乘性、可加性

则称上述记号为 n 阶行列式。

定理 满足 4 个基本性质的运算是存在、唯一!

n 阶行列式的定义

定义 记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示对其中的 n 行 n 列的共 n^2 个元素 a_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$), 进行运算得到一个数值。并且要求这种运算满足四个基本性质:

规范性、反称性、数乘性、可加性

则称上述记号为 n 阶行列式。

定理 满足 4 个基本性质的运算是存在、唯一!

注 任意一个行列式的值均可通过以上四个基本性质算出。

n 阶行列式的规范性、反称性

规范性是指， n 阶单位行列式的值应为 1。

n 阶行列式的规范性、反称性

规范性是指, n 阶单位行列式的值应为 1。即

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

n 阶行列式的规范性、反称性

规范性是指, n 阶单位行列式的值应为 1。即

$$\begin{vmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{vmatrix} = 1$$

n 阶行列式的规范性、反称性

规范性是指， n 阶单位行列式的值应为 1。即

$$\begin{vmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{vmatrix} = 1$$

反称性 是指，交换行列式两行（列）后，行列式的值变号

n 阶行列式的规范性、反称性

规范性是指， n 阶**单位行列式**的值应为 1。即

$$\begin{vmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{vmatrix} = 1$$

反称性是指，交换行列式两行（列）后，行列式的值变号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1t} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2t} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nt} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

n 阶行列式的规范性、反称性

规范性是指, n 阶单位行列式的值应为 1。即

$$\begin{vmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{vmatrix} = 1$$

反称性 是指, 交换行列式两行 (列) 后, 行列式的值变号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1t} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2t} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nt} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xrightarrow{C_s \leftrightarrow C_t}$$

n 阶行列式的规范性、反称性

规范性是指, n 阶**单位行列式**的值应为 1。即

$$\begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{vmatrix} = 1$$

反称性是指, 交换行列式两行(列)后, 行列式的值变号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1t} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2t} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nt} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xrightarrow{C_s \leftrightarrow C_t} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1t} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2t} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nt} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

n 阶行列式的规范性、反称性

规范性是指， n 阶单位行列式的值应为 1。即

$$\begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{vmatrix} = 1$$

反称性是指，交换行列式两行（列）后，行列式的值变号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1t} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2t} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nt} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xrightarrow{c_s \leftrightarrow c_t} - \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1t} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2t} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nt} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

n 阶行列式的可加性

可加性，譬如（以行为例）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{s1} & c_{s2} & \cdots & c_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

n 阶行列式的可加性

可加性，譬如（以行为例）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{s1} & c_{s2} & \cdots & c_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

n 阶行列式的可加性

可加性，譬如（以行为例）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{s1} & c_{s2} & \cdots & c_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1}+c_{s1} & b_{s2}+c_{s2} & \cdots & b_{sn}+c_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

n 阶行列式的可加性

可加性，譬如（以行为例）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{s1} & c_{s2} & \cdots & c_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1}+c_{s1} & b_{s2}+c_{s2} & \cdots & b_{sn}+c_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

注 对列也有类似可加性

n 阶行列式的可加性

可加性，譬如（以行为例）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{s1} & c_{s2} & \cdots & c_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1}+c_{s1} & b_{s2}+c_{s2} & \cdots & b_{sn}+c_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

注 对列也有类似可加性

注 可加性也可以理解成把行列式拆分

n 阶行列式的数乘性

数乘性 一行（列）元素的公倍数可以提出来。

n 阶行列式的数乘性

数乘性 一行（列）元素的公倍数可以提出来。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & ka_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & ka_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & ka_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

n 阶行列式的数乘性

数乘性 一行（列）元素的公倍数可以提出来。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & ka_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & ka_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & ka_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

n 阶行列式的数乘性

数乘性 一行（列）元素的公倍数可以提出来。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & k a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & k a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & k a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

注 2 若行列式某行（列）全为零，则值为零。

n 阶行列式的数乘性

数乘性 一行（列）元素的公倍数可以提出来。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & k a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & k a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & k a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

注 2 若行列式某行（列）全为零，则值为零。

如

$$\begin{vmatrix} 2 & 54 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 2 & -7 & 30 \\ 1 & -8 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

n 阶行列式的数乘性

数乘性 一行（列）元素的公倍数可以提出来。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & k a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & k a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & k a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

注 2 若行列式某行（列）全为零，则值为零。

如

$$\begin{vmatrix} 2 & 54 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 2 & -7 & 30 \\ 1 & -8 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 54 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 2 & -7 & 30 \\ 1 & -8 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

n 阶行列式的数乘性

数乘性 一行（列）元素的公倍数可以提出来。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & k a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & k a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & k a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

注 2 若行列式某行（列）全为零，则值为零。

如

$$\begin{vmatrix} 2 & 54 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 2 & -7 & 30 \\ 1 & -8 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 54 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 2 & -7 & 30 \\ 1 & -8 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

n 阶行列式表示线性方程组的解

$$\begin{array}{l} \text{对 } n \text{ 元 } n \text{ 方程} \\ \text{线性方程组} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right.$$

n 阶行列式表示线性方程组的解

$$\begin{array}{l} \text{对 } n \text{ 元 } n \text{ 方程} \\ \text{线性方程组} \end{array} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\text{令 } D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

系数行列式

n 阶行列式表示线性方程组的解

$$\text{对 } n \text{ 元 } n \text{ 方程} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

线性方程组

$$\text{令 } D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1,j} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2,j} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{n,j} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

系数行列式

n 阶行列式表示线性方程组的解

$$\begin{array}{l} \text{对 } n \text{ 元 } n \text{ 方程} \\ \text{线性方程组} \end{array} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\text{令 } D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & \color{red}{b_1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & \color{red}{b_2} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \color{red}{\vdots} & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & \color{red}{b_n} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

系数行列式

n 阶行列式表示线性方程组的解

$$\begin{array}{l} \text{对 } n \text{ 元 } n \text{ 方程} \\ \text{线性方程组} \end{array} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\text{令 } D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

系数行列式

n 阶行列式表示线性方程组的解

$$\text{对 } n \text{ 元 } n \text{ 方程线性方程组} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\text{令 } D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 假设 x_1, \dots, x_n 是上述线性方程组的解。若系数行列式 $D \neq 0$ ，则：

n 阶行列式表示线性方程组的解

$$\text{对 } n \text{ 元 } n \text{ 方程线性方程组} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\text{令 } D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 假设 x_1, \dots, x_n 是上述线性方程组的解。若系数行列式 $D \neq 0$ ，则：

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{D_n}{D}$$

证明

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & \color{red}{b_1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & \color{red}{b_2} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \color{red}{\vdots} & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & \color{red}{b_n} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{\text{把方程代入}}} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{\text{把方程代入}}} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{c_j - x_1 c_1}}$$

证明

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

把方程代入

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$c_j - x_1 c_1$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

把方程代入

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$c_j - x_1 c_1$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$c_j - x_2 c_2$...

证明

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

把方程代入

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$c_j - x_1 c_1$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$c_j - x_2 c_2$... =

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j}x_j & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j}x_j & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj}x_j & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

把方程代入

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$c_j - x_1 c_1$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$c_j - x_2 c_2$... =

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j}x_j & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j}x_j & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj}x_j & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = x_j D$$

证明

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

把方程代入

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$c_j - x_1 c_1$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$c_j - x_2 c_2$... =

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j}x_j & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j}x_j & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj}x_j & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = x_j D \quad \xRightarrow{D \neq 0}$$

证明

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

把方程代入

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$c_j - x_1 c_1$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$c_j - x_2 c_2$... =

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j}x_j & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j}x_j & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj}x_j & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = x_j D \xrightarrow{D \neq 0} x_j = \frac{D_j}{D}$$

问题 如何计算 n 阶行列式

问题 如何计算 n 阶行列式

原则上，由“四个基本性质”

规范性、反称性、数乘性、可加性

可以推出 n 阶行列式完整的展开表达式，例如：

问题 如何计算 n 阶行列式

原则上，由“四个基本性质”

规范性、反称性、数乘性、可加性

可以推出 n 阶行列式完整的展开表达式，例如：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} =$$

问题 如何计算 n 阶行列式

原则上, 由“四个基本性质”

规范性、反称性、数乘性、可加性

可以推出 n 阶行列式完整的展开表达式, 例如:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} \\ & + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} \\ & + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} \\ & + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} \\ & - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} \\ & - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} \\ & - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} \\ & - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} \end{aligned}$$

问题 如何计算 n 阶行列式

原则上, 由“四个基本性质”

规范性、反称性、数乘性、可加性

可以推出 n 阶行列式完整的展开表达式, 例如:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} \\ & + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} \\ & + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} \\ & + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} \\ & - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} \\ & - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} \\ & - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} \\ & - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} \end{aligned}$$

- $n \geq 4$ 时, 这些公式过于复杂, 难以直接用来计算行列式。

问题 如何计算 n 阶行列式

原则上, 由“四个基本性质”

规范性、反称性、数乘性、可加性

可以推出 n 阶行列式完整的展开表达式, 例如:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} \\ & + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} \\ & + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} \\ & + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} \\ & - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} \\ & - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} \\ & - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} \\ & - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} \end{aligned}$$

- $n \geq 4$ 时, 这些公式过于复杂, 难以直接用来计算行列式。
- 后面学习“排列”、“逆序数”后, 将给出上式的“简化形式表示”。

问题 如何计算 n 阶行列式

原则上，由“四个基本性质”

规范性、反称性、数乘性、可加性

可以推出 n 阶行列式完整的展开表达式，例如：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} \\ & + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} \\ & + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} \\ & + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} \\ & - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} \\ & - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} \\ & - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} \\ & - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} \end{aligned}$$

- $n \geq 4$ 时，这些公式过于复杂，难以直接用来计算行列式。
- 后面学习“排列”、“逆序数”后，将给出上式的“简化形式表示”。
- 行列式的具体计算，关键是灵活运用“四个基本性质”。

例 计算四阶

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

例 计算四阶

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

例 计算四阶

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{r_1 \leftrightarrow r_3}}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

例 计算四阶

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

例 计算四阶

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

例 计算四阶

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

对角行列式

主对角线之外都为零的行列式称为**对角行列式**。

对角行列式

主对角线之外都为零的行列式称为**对角行列式**。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

对角行列式

主对角线之外都为零的行列式称为**对角行列式**。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & & \\ & & a_{33} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

对角行列式

主对角线之外都为零的行列式称为**对角行列式**。由数乘性，它的值为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & a_{33} & \\ & & & \ddots \\ & & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

这是因为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

这是因为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

=

$$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

这是因为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11} a_{22} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

这是因为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11} a_{22} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots$$
$$=$$
$$= a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

这是因为：

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
 & = a_{11} a_{22} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots \\
 & = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \\
 & = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}
 \end{aligned}$$

例 计算四阶行列式
$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

(想法：利用行列式的性质，将其化为对角行列式)

例 计算四阶行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

(想法：利用行列式的性质，将其化为对角行列式)

例 计算四阶行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

(想法: 利用行列式的性质, 将其化为对角行列式)

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

例 计算四阶行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

(想法: 利用行列式的性质, 将其化为对角行列式)

$$\begin{vmatrix} \underline{3} & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

例 计算四阶行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

(想法: 利用行列式的性质, 将其化为对角行列式)

$$\begin{vmatrix} \underline{3} & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

例 计算四阶行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

(想法: 利用行列式的性质, 将其化为对角行列式)

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

例 计算四阶行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

(想法: 利用行列式的性质, 将其化为对角行列式)

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

例 计算四阶行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

(想法: 利用行列式的性质, 将其化为对角行列式)

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

例 计算四阶行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

(想法: 利用行列式的性质, 将其化为对角行列式)

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

例 计算四阶行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

(想法: 利用行列式的性质, 将其化为对角行列式)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

例 计算四阶行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

(想法: 利用行列式的性质, 将其化为对角行列式)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

例 计算四阶行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

(想法: 利用行列式的性质, 将其化为对角行列式)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 2 = \end{aligned}$$

例 计算四阶行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

(想法: 利用行列式的性质, 将其化为对角行列式)

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 2 = -6$$

三角行列式

一般地, 上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

三角行列式

一般地，上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

三角行列式

一般地，上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

同理，下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

三角行列式

一般地，上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

同理，下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

We are here now...

1. 行列式的基本性质——从二三阶行列式讲起
2. n 阶行列式的公理化定义
3. 四阶行列式的计算（初步）
4. 转置行列式

重要的行列式变换

利用行列式的性质，可以知道：

推论 行列式的某行（列）加上另一行的 k 倍，它的值不变

重要的行列式变换

利用行列式的性质，可以知道：

推论 行列式的某行（列）加上另一行的 k 倍，它的值不变

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

重要的行列式变换

利用行列式的性质，可以知道：

推论 行列式的某行（列）加上另一行的 k 倍，它的值不变

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xrightarrow{r_i + kr_j}$$

重要的行列式变换

利用行列式的性质，可以知道：

推论 行列式的某行（列）加上另一行的 k 倍，它的值不变

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xrightarrow{r_i + kr_j} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + ka_{j1} & a_{i2} + ka_{j2} & \cdots & a_{in} + ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

重要的行列式变换

利用行列式的性质，可以知道：

推论 行列式的某行（列）加上另一行的 k 倍，它的值不变

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xrightarrow{r_i + kr_j} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + ka_{j1} & a_{i2} + ka_{j2} & \cdots & a_{in} + ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

化一般行列式为三角行列式

- 计算一般行列式的想法：利用变换

$$r_i \leftrightarrow r_j, \quad r_i + kr_j, \quad c_s \leftrightarrow c_t, \quad c_s + kc_t$$

化行列式为三角形行列式，从而算出行列式

化一般行列式为三角行列式

- 计算一般行列式的想法：利用变换

$$r_i \leftrightarrow r_j, \quad r_i + kr_j, \quad c_s \leftrightarrow c_t, \quad c_s + kc_t$$

化行列式为三角形行列式，从而算出行列式，图示：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

化一般行列式为三角行列式

- 计算一般行列式的想法：利用变换

$$r_i \leftrightarrow r_j, \quad r_i + kr_j, \quad c_s \leftrightarrow c_t, \quad c_s + kc_t$$

化行列式为三角形行列式，从而算出行列式，图示：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{(一系列变换)}} \cdots =$$

化一般行列式为三角行列式

- 计算一般行列式的想法：利用变换

$$r_i \leftrightarrow r_j, \quad r_i + kr_j, \quad c_s \leftrightarrow c_t, \quad c_s + kc_t$$

化行列式为三角形行列式，从而算出行列式，图示：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{(一系列变换)}} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & 0 & b_{33} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

化一般行列式为三角行列式

- 计算一般行列式的想法：利用变换

$$r_i \leftrightarrow r_j, \quad r_i + kr_j, \quad c_s \leftrightarrow c_t, \quad c_s + kc_t$$

化行列式为三角形行列式，从而算出行列式，图示：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{(一系列变换)}} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & 0 & b_{33} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \cdots = \cdots = b_{11}b_{22}b_{33}\cdots b_{nn}$$

化一般行列式为三角行列式

- 计算一般行列式的想法：利用变换

$$r_i \leftrightarrow r_j, \quad r_i + kr_j, \quad c_s \leftrightarrow c_t, \quad c_s + kc_t$$

化行列式为三角形行列式，从而算出行列式，图示：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{(一系列变换)}} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & 0 & b_{33} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \cdots = \cdots = b_{11}b_{22}b_{33}\cdots b_{nn}$$

例 1 通过化为三角形行列式，计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{r_2 + r_1}}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{r_2 + r_1}}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & & & \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix}$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{r_2 + r_1}}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & & \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix}$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{r_2 + r_1}}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{r_2 + r_1}}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & & & \end{vmatrix}$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & \end{vmatrix}$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4-2r_1]{\begin{matrix} r_2+r_1 \\ r_3-2r_1 \end{matrix}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4-2r_1]{\begin{matrix} r_2+r_1 \\ r_3-2r_1 \end{matrix}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & & & \end{vmatrix}$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4-2r_1]{\begin{matrix} r_2+r_1 \\ r_3-2r_1 \end{matrix}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & & \end{vmatrix}$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4-2r_1]{\begin{matrix} r_2+r_1 \\ r_3-2r_1 \end{matrix}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & \end{vmatrix}$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4-2r_1]{\begin{matrix} r_2+r_1 \\ r_3-2r_1 \end{matrix}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4-2r_1]{\begin{matrix} r_2+r_1 \\ r_3-2r_1 \end{matrix}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ & & & \end{vmatrix}$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1, r_4-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3-2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1, r_4-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3-2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & & 5 & -9 \\ 0 & & 3 & -9 \end{vmatrix}$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4-2r_1]{\begin{matrix} r_2+r_1 \\ r_3-2r_1 \end{matrix}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3-2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \end{vmatrix}$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4-2r_1]{\begin{matrix} r_2+r_1 \\ r_3-2r_1 \end{matrix}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3-2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & \end{vmatrix}$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4-2r_1]{\begin{matrix} r_2+r_1 \\ r_3-2r_1 \end{matrix}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3-2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -9 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4-2r_1]{\begin{matrix} r_2+r_1 \\ r_3-2r_1 \end{matrix}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4-r_2]{r_3-2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -9 \end{vmatrix}$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4-2r_1]{\begin{matrix} r_2+r_1 \\ r_3-2r_1 \end{matrix}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4-r_2]{\begin{matrix} r_3-2r_2 \\ r_4-r_2 \end{matrix}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \end{vmatrix}$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4-2r_1]{\begin{matrix} r_2+r_1 \\ r_3-2r_1 \end{matrix}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4-r_2]{\begin{matrix} r_3-2r_2 \\ r_4-r_2 \end{matrix}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & & \end{vmatrix}$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4-2r_1]{\begin{matrix} r_2+r_1 \\ r_3-2r_1 \end{matrix}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4-r_2]{\begin{matrix} r_3-2r_2 \\ r_4-r_2 \end{matrix}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & \end{vmatrix}$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4-2r_1]{\begin{matrix} r_2+r_1 \\ r_3-2r_1 \end{matrix}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4-r_2]{\begin{matrix} r_3-2r_2 \\ r_4-r_2 \end{matrix}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{vmatrix}$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4-2r_1]{\begin{matrix} r_2+r_1 \\ r_3-2r_1 \end{matrix}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4-r_2]{r_3-2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\quad} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -9 \end{vmatrix} =$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4-2r_1]{\begin{matrix} r_2+r_1 \\ r_3-2r_1 \end{matrix}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4-r_2]{\begin{matrix} r_3-2r_2 \\ r_4-r_2 \end{matrix}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4-\frac{2}{5}r_3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{28}{5} \end{vmatrix} =$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4-2r_1]{\begin{matrix} r_2+r_1 \\ r_3-2r_1 \end{matrix}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4-r_2]{r_3-2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4-\frac{2}{5}r_3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4-2r_1]{\begin{matrix} r_2+r_1 \\ r_3-2r_1 \end{matrix}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4-r_2]{\begin{matrix} r_3-2r_2 \\ r_4-r_2 \end{matrix}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4-\frac{2}{5}r_3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & \end{vmatrix} =$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4-2r_1]{\begin{matrix} r_2+r_1 \\ r_3-2r_1 \end{matrix}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4-r_2]{\begin{matrix} r_3-2r_2 \\ r_4-r_2 \end{matrix}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4-\frac{2}{5}r_3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{12}{5} \end{vmatrix} =$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4-2r_1]{\begin{matrix} r_2+r_1 \\ r_3-2r_1 \end{matrix}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4-r_2]{\begin{matrix} r_3-2r_2 \\ r_4-r_2 \end{matrix}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{vmatrix}$$
$$\xrightarrow{r_4-\frac{2}{5}r_3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{12}{5} \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times 5 \times \left(-\frac{12}{5}\right) =$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4-2r_1]{\begin{matrix} r_2+r_1 \\ r_3-2r_1 \end{matrix}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4-r_2]{\begin{matrix} r_3-2r_2 \\ r_4-r_2 \end{matrix}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4-\frac{2}{5}r_3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{12}{5} \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times 5 \times \left(-\frac{12}{5}\right) = -12$$

想法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

具体做法

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4-2r_1]{\substack{r_2+r_1 \\ r_3-2r_1}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4-r_2]{r_3-2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{vmatrix} \\ \xrightarrow{r_4-\frac{2}{5}r_3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{12}{5} \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times 5 \times \left(-\frac{12}{5}\right) = -12$$

例2 通过化为三角形行列式, 计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

例 2 通过化为三角形行列式, 计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

解

例 2 通过化为三角形行列式, 计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

解

目标: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{(一系列变换)}} \dots = \dots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$

例 2 通过化为三角形行列式, 计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix}$$

目标: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{(一系列变换)}} \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$

例 2 通过化为三角形行列式, 计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{r_2+r_1}}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

目标: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{(\text{一系列变换})} \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$

例 2 通过化为三角形行列式, 计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{r_2+r_1}}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

目标: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{(\text{一系列变换})} \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$

例 2 通过化为三角形行列式, 计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3+r_1]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

目标: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{(\text{一系列变换})} \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$

例 2 通过化为三角形行列式, 计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3+r_1]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

目标: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{(\text{一系列变换})} \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$

例 2 通过化为三角形行列式, 计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4+r_1]{\begin{matrix} r_2+r_1 \\ r_3+r_1 \end{matrix}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

目标: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{(一系列变换)}} \dots = \dots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$

例 2 通过化为三角形行列式, 计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4+r_1]{\begin{matrix} r_2+r_1 \\ r_3+r_1 \end{matrix}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\text{目标: } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{(\text{一系列变换})} \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

例 2 通过化为三角形行列式, 计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4+r_1]{\begin{matrix} r_2+r_1 \\ r_3+r_1 \end{matrix}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times 2 \times 2$$

目标: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{(一系列变换)}} \dots = \dots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$

例 2 通过化为三角形行列式, 计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4+r_1]{\begin{matrix} r_2+r_1 \\ r_3+r_1 \end{matrix}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times 2 \times 2 = 8$$

目标: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{(一系列变换)}} \dots = \dots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$

例 2 通过化为三角形行列式, 计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4+r_1]{\begin{matrix} r_2+r_1 \\ r_3+r_1 \end{matrix}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times 2 \times 2 = 8$$

例 3 计算

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

目标:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{(一系列变换)}} \dots = \dots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{r_1 \leftrightarrow r_2}}}$$

$$\text{目标: } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{(一系列变换)}} \dots = \dots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{r_1 \leftrightarrow r_2}}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

目标：

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{(一系列变换)}} \dots = \dots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{r_1 \leftrightarrow r_2}}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

目标: $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{(一系列变换)}} \dots = \dots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{r_1 \leftrightarrow r_2}}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{\quad}}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ & & & \end{vmatrix}$$

目标:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{(一系列变换)}} \dots = \dots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{r_1 \leftrightarrow r_2}}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{r_3 - 5r_1}}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & -9 \\ 0 & 3 & -6 & -13 \end{vmatrix}$$

目标:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{(一系列变换)}} \dots = \dots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{r_1 \leftrightarrow r_2}}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{r_3 - 5r_1}}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & & & \end{vmatrix}$$

目标:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{(一系列变换)}} \dots = \dots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{r_1 \leftrightarrow r_2}}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{r_3 - 5r_1}}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & -9 \\ 0 & 3 & -6 & -13 \end{vmatrix}$$

目标:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{(一系列变换)}} \dots = \dots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{r_1 \leftrightarrow r_2}}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{r_3 - 5r_1}}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & \end{vmatrix}$$

目标:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{(一系列变换)}} \dots = \dots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{r_1 \leftrightarrow r_2}}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{r_3 - 5r_1}}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & -9 \end{vmatrix}$$

目标:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{(一系列变换)}} \dots = \dots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{r_1 \leftrightarrow r_2}}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{\begin{matrix} r_3 - 5r_1 \\ r_4 - 5r_1 \end{matrix}}}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & -9 \end{vmatrix}$$

目标:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{(一系列变换)}} \dots = \dots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{r_1 \leftrightarrow r_2}}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\underline{\underline{r_4 - 5r_1}}]{\underline{\underline{r_3 - 5r_1}}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & -9 \\ 0 & 3 & -6 & -9 \end{vmatrix}$$

目标:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{(一系列变换)}} \dots = \dots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{r_1 \leftrightarrow r_2}}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{\begin{matrix} r_3 - 5r_1 \\ r_4 - 5r_1 \end{matrix}}}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & -9 \\ 0 & 3 & & \end{vmatrix}$$

目标:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{(一系列变换)}} \dots = \dots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{r_1 \leftrightarrow r_2}}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{\begin{matrix} r_3 - 5r_1 \\ r_4 - 5r_1 \end{matrix}}}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & -9 \\ 0 & 3 & -6 & \end{vmatrix}$$

目标:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{(一系列变换)}} \dots = \dots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{r_1 \leftrightarrow r_2}}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{\begin{matrix} r_3 - 5r_1 \\ r_4 - 5r_1 \end{matrix}}}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & -9 \\ 0 & 3 & -6 & -11 \end{vmatrix}$$

目标:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{(一系列变换)}} \dots = \dots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4 - 5r_1]{r_3 - 5r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & -9 \\ 0 & 3 & -6 & -11 \end{vmatrix} \\
 & \xrightarrow{\quad} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\text{目标: } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{(一系列变换)}} \dots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4 - 5r_1]{r_3 - 5r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & -9 \\ 0 & 3 & -6 & -11 \end{vmatrix}$$
$$\xrightarrow{r_3 + 2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -13 \\ 0 & 3 & -6 & -11 \end{vmatrix}$$

目标:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{(一系列变换)}} \dots = \dots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4 - 5r_1]{r_3 - 5r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & -9 \\ 0 & 3 & -6 & -11 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 + 2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -13 \\ 0 & 3 & -6 & -11 \end{vmatrix}$$

目标：

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{(一系列变换)}} \dots = \dots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4 - 5r_1]{r_3 - 5r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & -9 \\ 0 & 3 & -6 & -11 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 + 2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -13 \end{vmatrix}$$

目标：

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{(一系列变换)}} \dots = \dots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4 - 5r_1]{r_3 - 5r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & -9 \\ 0 & 3 & -6 & -11 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 + 2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \end{vmatrix}$$

目标：

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{(一系列变换)}} \dots = \dots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4 - 5r_1]{r_3 - 5r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & -9 \\ 0 & 3 & -6 & -11 \end{vmatrix}$$
$$\xrightarrow{r_3 + 2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -13 \end{vmatrix}$$

目标:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{(一系列变换)}} \dots = \dots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4 - 5r_1]{r_3 - 5r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & -9 \\ 0 & 3 & -6 & -11 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4 - 3r_2]{r_3 + 2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -13 \end{vmatrix}$$

目标：

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{(一系列变换)}} \dots = \dots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4 - 5r_1]{r_3 - 5r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & -9 \\ 0 & 3 & -6 & -11 \end{vmatrix}$$
$$\xrightarrow[r_4 - 3r_2]{r_3 + 2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

目标:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{(一系列变换)}} \dots = \dots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{r_3 - 5r_1 \\ r_4 - 5r_1}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & -9 \\ 0 & 3 & -6 & -11 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{r_3 + 2r_2 \\ r_4 - 3r_2}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & & \end{vmatrix}$$

目标：

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{(一系列变换)}} \dots = \dots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4 - 5r_1]{r_3 - 5r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & -9 \\ 0 & 3 & -6 & -11 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4 - 3r_2]{r_3 + 2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & -12 & \end{vmatrix}$$

目标：

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{(一系列变换)}} \dots = \dots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} r_3 - 5r_1 \\ r_4 - 5r_1 \end{smallmatrix}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & -9 \\ 0 & 3 & -6 & -11 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{smallmatrix} r_3 + 2r_2 \\ r_4 - 3r_2 \end{smallmatrix}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & -12 & -5 \end{vmatrix}$$

目标：

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{(一系列变换)}} \dots = \dots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{aligned}
 & \left| \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{array} \right| \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{array} \right| \xrightarrow{\substack{r_3 - 5r_1 \\ r_4 - 5r_1}} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & -9 \\ 0 & 3 & -6 & -11 \end{array} \right| \\
 & \xrightarrow{\substack{r_3 + 2r_2 \\ r_4 - 3r_2}} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & -12 & -5 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -13 \end{array} \right|
 \end{aligned}$$

目标：

$$\left| \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{array} \right| \xrightarrow{\text{(一系列变换)}} \dots = \dots = \left| \begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{array} \right|$$

解

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{r_1 \leftrightarrow r_2}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} \underline{r_3 - 5r_1} \\ \underline{r_4 - 5r_1} \end{smallmatrix}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & -9 \\ 0 & 3 & -6 & -11 \end{vmatrix} \\
 & \xrightarrow{\begin{smallmatrix} \underline{r_3 + 2r_2} \\ \underline{r_4 - 3r_2} \end{smallmatrix}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & -12 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{r_4 - 4r_3}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

目标：

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{(\text{一系列变换})} \dots = \dots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{aligned}
 & \left| \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{array} \right| \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{array} \right| \xrightarrow{\substack{r_3 - 5r_1 \\ r_4 - 5r_1}} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & -9 \\ 0 & 3 & -6 & -11 \end{array} \right| \\
 & \xrightarrow{\substack{r_3 + 2r_2 \\ r_4 - 3r_2}} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & -12 & -5 \end{array} \right| \xrightarrow{r_4 - 4r_3} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right|
 \end{aligned}$$

目标：

$$\left| \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{array} \right| \xrightarrow{\text{(一系列变换)}} \dots = \dots = \left| \begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{array} \right|$$

解

$$\begin{aligned}
 & \left| \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{array} \right| \xrightarrow{\underline{r_1 \leftrightarrow r_2}} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{array} \right| \xrightarrow{\begin{array}{l} \underline{r_3 - 5r_1} \\ \underline{r_4 - 5r_1} \end{array}} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & -9 \\ 0 & 3 & -6 & -11 \end{array} \right| \\
 & \xrightarrow{\begin{array}{l} \underline{r_3 + 2r_2} \\ \underline{r_4 - 3r_2} \end{array}} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & -12 & -5 \end{array} \right| \xrightarrow{\underline{r_4 - 4r_3}} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & \end{array} \right|
 \end{aligned}$$

目标：

$$\left| \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{array} \right| \xrightarrow{\text{(一系列变换)}} \dots = \dots = \left| \begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{array} \right|$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} r_3 - 5r_1 \\ r_4 - 5r_1 \end{smallmatrix}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & -9 \\ 0 & 3 & -6 & -11 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{smallmatrix} r_3 + 2r_2 \\ r_4 - 3r_2 \end{smallmatrix}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & -12 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_4 - 4r_3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 47 \end{vmatrix}$$

目标：

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{(一系列变换)}} \dots = \dots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} r_3 - 5r_1 \\ r_4 - 5r_1 \end{smallmatrix}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & -9 \\ 0 & 3 & -6 & -11 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{smallmatrix} r_3 + 2r_2 \\ r_4 - 3r_2 \end{smallmatrix}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & -12 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_4 - 4r_3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 47 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \times 1 \times 1 \times (-3) \times 47 =$$

$$\text{目标: } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{(一系列变换)}} \dots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} r_3 - 5r_1 \\ r_4 - 5r_1 \end{smallmatrix}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & -9 \\ 0 & 3 & -6 & -11 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{smallmatrix} r_3 + 2r_2 \\ r_4 - 3r_2 \end{smallmatrix}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & -12 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_4 - 4r_3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 47 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \times 1 \times 1 \times (-3) \times 47 = 141$$

目标: $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{(一系列变换)}} \dots = \dots = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$

例 4 通过化为三角形行列式, 计算

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

例 4 通过化为三角形行列式, 计算

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{r_1 \leftrightarrow r_2}}}$$

例 4 通过化为三角形行列式, 计算

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{r_1 \leftrightarrow r_2}}} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

例 4 通过化为三角形行列式, 计算

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \underline{\underline{r_2 + 3r_1}} \\ \underline{\underline{r_3 - 2r_1}} \end{array}$$

例 4 通过化为三角形行列式, 计算

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 + 3r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

例 4 通过化为三角形行列式, 计算

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 + 3r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_4 + 2r_2}{r_3 - r_2}$$

例 4 通过化为三角形行列式, 计算

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 + 3r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4 + 2r_2]{r_3 - r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

例 4 通过化为三角形行列式, 计算

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 + 3r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4 + 2r_2]{r_3 - r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4 - 3r_3}$$

例 4 通过化为三角形行列式, 计算

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 + 3r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4 + 2r_2]{r_3 - r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4 - 3r_3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 22 \end{vmatrix}$$

例 4 通过化为三角形行列式, 计算

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 + 3r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4 + 2r_2]{r_3 - r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4 - 3r_3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 22 \end{vmatrix} = -22$$

例 5 通过化为三角形行列式, 计算
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

例 5 通过化为三角形行列式, 计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \underline{\underline{r_2 - 2r_1}} \\ \underline{\underline{r_3 - 3r_1}} \\ \end{array}$$

例 5 通过化为三角形行列式, 计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

例 5 通过化为三角形行列式, 计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4 + r_2]{r_3 - 6r_2}$$

例 5 通过化为三角形行列式, 计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[\underline{\underline{r_3 - 3r_1}}]{\underline{\underline{r_2 - 2r_1}}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[\underline{\underline{r_4 + r_2}}]{\underline{\underline{r_3 - 6r_2}}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 28 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{vmatrix}$$

例 5 通过化为三角形行列式, 计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4+r_2]{r_3-6r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 28 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \times 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

例 5 通过化为三角形行列式, 计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4+r_2]{r_3-6r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 28 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \times 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_4}$$

例 5 通过化为三角形行列式, 计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4+r_2]{r_3-6r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 28 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \times 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_4} -16 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \end{vmatrix}$$

例 5 通过化为三角形行列式, 计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4+r_2]{r_3-6r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 28 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \times 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_4} -16 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{r_4+7r_3}}$$

例 5 通过化为三角形行列式, 计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4+r_2]{r_3-6r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 28 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \times 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_4} -16 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4+7r_3} -16 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

例 5 通过化为三角形行列式, 计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4+r_2]{r_3-6r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 28 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \times 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_4} -16 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4+7r_3} -16 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -96$$

例 6 判断下面做法是否正确？

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \cdots = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 28 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{vmatrix}$$

例 6 判断下面做法是否正确？

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \cdots = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 28 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{7r_4+r_3}}$$

例 6 判断下面做法是否正确?

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \cdots = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 28 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{vmatrix}$$
$$\xrightarrow{\underline{\underline{7r_4+r_3}}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 28 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{vmatrix}$$

例 6 判断下面做法是否正确？

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \cdots = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 28 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{7r_4+r_3}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 28 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times (-1) \times 28 \times 24$$

例 6 判断下面做法是否正确？

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \cdots = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 28 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\underline{\underline{7r_4+r_3}}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 28 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times (-1) \times 28 \times 24$$

这是错的！

We are here now...

1. 行列式的基本性质——从二三阶行列式讲起
2. n 阶行列式的公理化定义
3. 四阶行列式的计算（初步）
4. 转置行列式

转置行列式

定义 将行列式 D 的行和列互换，所得的新的行列式称为 D 的**转置行列式**，记为 D^T

转置行列式

定义 将行列式 D 的行和列互换，所得的新的行列式称为 D 的**转置行列式**，记为 D^T

例 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}$ ，则转置行列式为 $D^T =$

转置行列式

定义 将行列式 D 的行和列互换，所得的新的行列式称为 D 的**转置行列式**，记为 D^T

例 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}$ ，则转置行列式为 $D^T = \begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$

转置行列式

定义 将行列式 D 的行和列互换，所得的新的行列式称为 D 的**转置行列式**，记为 D^T

例 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}$ ，则转置行列式为 $D^T = \begin{vmatrix} 1 & & \\ -4 & & \\ 3 & & \end{vmatrix}$

转置行列式

定义 将行列式 D 的行和列互换，所得的新的行列式称为 D 的**转置行列式**，记为 D^T

例 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}$ ，则转置行列式为 $D^T = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

转置行列式

定义 将行列式 D 的行和列互换，所得的新的行列式称为 D 的**转置行列式**，记为 D^T

例 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}$ ，则转置行列式为 $D^T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

转置行列式

定义 将行列式 D 的行和列互换，所得的新的行列式称为 D 的**转置行列式**，记为 D^T

例 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}$ ，则转置行列式为 $D^T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

练习 分别计算上述的 D ，及转置 D^T ：

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}, \quad D^T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$$

转置行列式

定义 将行列式 D 的行和列互换，所得的新的行列式称为 D 的**转置行列式**，记为 D^T

例 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}$ ，则转置行列式为 $D^T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

练习 分别计算上述的 D ，及转置 D^T ：

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = \underline{-40}, \quad D^T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$$

转置行列式

定义 将行列式 D 的行和列互换，所得的新的行列式称为 D 的**转置行列式**，记为 D^T

例 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}$ ，则转置行列式为 $D^T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

练习 分别计算上述的 D ，及转置 D^T ：

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = \underline{-40}, \quad D^T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \underline{-40}$$

转置行列式

定义 将行列式 D 的行和列互换，所得的新的行列式称为 D 的**转置行列式**，记为 D^T

例 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}$ ，则转置行列式为 $D^T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

练习 分别计算上述的 D ，及转置 D^T ：

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = \underline{-40}, \quad D^T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \underline{-40}$$

性质 对任何 n 阶行列式，其转置之后的值不变，即 $D = D^T$