第 13 周作业解答

练习 1. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$ 和 $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & y \end{pmatrix}$ 相似，求 x, y 的值。

解因为 $A \sim B$ ，所以 A, B 有相同特征值，设为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$。由特征值和矩阵元素的关系，得

$$2+0+x=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2+3+y$$

及

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & y \end{vmatrix}.$$

所以

$$\left\{\begin{array}{l} 2+x=5+y \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & y \end{vmatrix} \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} 2+x=5+y \\ -1=3y+8 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=-3 \end{array}\right.$$

练习 2. 判断矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ 可否对角化。若能，求出相应的对角阵 Λ，和可逆矩阵 P。

解

- 解特征方程 $|\lambda I-A|=0$。

$$\begin{aligned} |\lambda I-A| &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & 3 & -3 \\ -3 & \lambda+5 & -3 \\ -6 & 6 & \lambda-4 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3+c_2} \begin{vmatrix} \lambda-1 & 3 & 0 \\ -3 & \lambda+5 & \lambda+2 \\ -6 & 6 & \lambda+2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda+2)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 3 & 0 \\ -3 & \lambda+5 & 1 \\ -6 & 6 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2-r_3} (\lambda+2)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 3 & 0 \\ 3 & \lambda-1 & 0 \\ -6 & 6 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda+2)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 3 \\ 3 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda^2-2\lambda-8)=(\lambda+2)^2(\lambda-4) \end{aligned}$$

  所以特征值为 $\lambda_1=-2$（二重特征值），$\lambda_2=4$。

- 关于特征值 $\lambda_1=-2$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$。

$$(-2I-A\vdots 0)=\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & -3 & 0 \\ -6 & 6 & -6 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  同解方程组为

$$x_1-x_2+x_3=0 \qquad \Rightarrow \qquad x_1=x_2-x_3$$

自由变量取为 x_2,x_3。分别取 $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，得基础解系

$$\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\qquad \alpha_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以对应于特征值 $\lambda_1=-2$ 的有 2 个线性无关特征向量。(等价于 $r(-2I-A)=3-2=1$。)

- 关于特征值 $\lambda_1=4$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$。

$$(-2I-A\,\vdots\,0)=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & -3 & 0 \\ -3 & 9 & -3 & 0 \\ -6 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right)\xrightarrow[\substack{-\frac{1}{3}\times r_2 \\ -\frac{1}{6}\times r_3}]{\frac{1}{3}\times r_1}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)\xrightarrow[r_3-r_2]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}\times r_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)\xrightarrow[r_3+r_2]{r_1-r_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

同解方程组为

$$\begin{cases} x_1-x_2=0 \\ 2x_2-x_3=0 \end{cases}\qquad\Rightarrow\qquad\begin{cases} x_1=x_2 \\ x_3=2x_2 \end{cases}$$

自由变量取为 x_2。取 $x_2=1$，得基础解系

$$\alpha_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- 可见 A 有 3 个线性无关特征向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，所以 A 可对角化。令

$$P=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array},\quad \Lambda=\begin{pmatrix} -2 & & \\ & -2 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$$

则

$$P^{-1}AP=\Lambda.$$

注. P 的选取不唯一。Λ 也可以是 $\begin{pmatrix} -2 & & \\ & 4 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} 4 & & \\ & -2 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$，但此时 P 要作相应调整。

练习 3. 判断矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 可否对角化，说明理由。

解

- 解特征方程 $|\lambda I-A|=0$。

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda-1)^3$$

所以特征值为 $\lambda_1=1$（三重特征值）。

- 由于 $r(\lambda_1 I - A) = 2 \neq 0$ （即 $r(\lambda_1 I - A) \neq n - n_1$，其中 n_1 为 λ_1 的重数)，所以 A 不可对角化。

练习 4. 设 3 阶方阵 A 的特征值为 1, 2, 3，求 $|A|$ 的值。

解 $|A| = 1 \times 2 \times 3 = 6$。

练习 5. 假设 3 阶方阵 A 的特征值为 2, 1, −1。求行列式 $|A^2 - 2I|$ 和 $|A^{-1} - 2I|$。

解由假设知 3 阶方阵 A 有 3 个不同特征值，所以 A 可以对角化。设存在可逆矩阵 P 使得

$$P^{-1}AP = \Lambda \quad \Rightarrow \quad A = P\Lambda P^{-1},$$

其中设方阵 A 满足 $A^2 = I_n$。证明 A 的特征值只能是 1 或 −1。

证明设 λ 是 A 的特征值，α 是相应的特征向量，则

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

所以

$$\alpha = I_n\alpha = A^2\alpha = A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda^2\alpha.$$

所以 $\lambda^2 = 1$，$\lambda = \pm 1$。

练习 6. 设 u 是 n 维非零列向量，$A = uu^T$ 是 n 阶方阵。证明 $||u||^2$ 是 A 的一个特征值。

证明注意到

$$Au = uu^Tu = u(u^Tu) = ||u||^2u.$$

因为 $u \neq 0$，所以上述说明 $||u||^2$ 是 A 的一个特征值，而 u 是一个相应的特征向量。

练习 7. 将下列向量组正交化

1. $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}$

解

1.

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T\beta_1}{||\beta_1||^2}\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -1 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\alpha_3^T\beta_1}{||\beta_1||^2}\beta_1 - \frac{\alpha_3^T\beta_2}{||\beta_2||^2}\beta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -1 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

2.

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{||\beta_1||^2}\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{-10}{10}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\alpha_3^T \beta_1}{||\beta_1||^2}\beta_1 - \frac{\alpha_3^T \beta_2}{||\beta_2||^2}\beta_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix} - \frac{30}{10}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{-26}{26}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

练习 8. 已知对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，求正交矩阵 Q，使得 Q^TAQ 为对角矩阵。

解

- 解特征方程 $|\lambda I - A| = 0$。

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda & -2 \\ -4 & -2 & \lambda-3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3-2r_2} \begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda & -2 \\ 0 & -2\lambda-2 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+1)\begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2+2c_3} (\lambda+1)\begin{vmatrix} \lambda-3 & -10 & -4 \\ -2 & \lambda-4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+1)\begin{vmatrix} \lambda-3 & -10 \\ -2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda^2-7\lambda-8) = (\lambda+1)^2(\lambda-8)$$

所以特征值为 $\lambda_1 = -1$（二重特征值），$\lambda_2 = 8$。

- 关于特征值 $\lambda_1 = -1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$。

$$(-I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & -4 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \\ -4 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

同解方程组为

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = -2x_1 - 2x_3$$

自由变量取为 x_1, x_3。分别取 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，得基础解系

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

– 下面将 α_1, α_2 正交化：

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{\beta_1^T \beta_1}\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

– 下面将 β_1, β_2 单位化：

$$\gamma_1 = \frac{1}{||\beta_1||}\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{||\beta_2||}\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{45}}\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- 关于特征值 $\lambda_2 = 8$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$。

$$(8I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -4 & 0 \\ -2 & 8 & -2 & 0 \\ -4 & -2 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{-\frac{1}{3}\times r_2 \\ -\frac{1}{6}\times r_3}]{-\frac{1}{2}\times r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -4 & 0 \\ -4 & -2 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3+4r_1]{r_2-5r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 18 & -9 & 0 \\ 0 & -18 & 9 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1+r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(-1)\times r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ x_3 = 2x_2 \end{cases}$$

自由变量取为 x_2。取 $x_2 = 1$，得基础解系

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

– 将 α_3 单位化得：

$$\gamma_3 = \frac{1}{||\alpha_3||}\alpha_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- 令

$$Q = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \end{array}$$

则 Q 为正交矩阵，且

$$Q^T A Q = Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 8 \end{pmatrix}.$$

练习 9. 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=2, \lambda_2=-2, \lambda_3=1$，对应的特征向量分别为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$。求 A。

解由题意知，A 有 3 个线性无关特征向量，故 A 可对角化。令 $P=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，$\Lambda=\begin{pmatrix}2&&\\&-2&\\&&1\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\Lambda$。所以 $A=P\Lambda P^{-1}$。先求 P^{-1}：

$$(P\vdots I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&1&1&1&0&0\\1&1&1&0&1&0\\1&1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&0&1&0\\0&1&1&1&0&0\\1&1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&0&1&0\\0&1&1&1&0&0\\0&0&-1&0&-1&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(-1)\times r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&0&1&0\\0&1&1&1&0&0\\0&0&1&0&1&-1\end{array}\right)\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1-r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&0&0&1\\0&1&0&1&-1&1\\0&0&1&0&1&-1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1-r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&1&0\\0&1&0&1&-1&1\\0&0&1&0&1&-1\end{array}\right).$$

所以 $P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$。所以

$$A=P\Lambda P^{-1}=\begin{pmatrix}-2&3&-3\\-4&5&-3\\-4&-4&-2\end{pmatrix}.$$