# 第 12 章 $d$：函数展开成幂级数

数学系　　梁卓滨

2018-2019 学年 II

问题 给定函数 $f(x)$，设在 $x=0$ 附近有定义，问

1. $f(x)$ 能否展成幂级数：$f(x) \stackrel{?}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$
2. 如果能的话，该幂级数是什么，即 $a_n = ?$

问题 给定函数 $f(x)$，设在 $x=0$ 附近有定义，问

1. $f(x)$ 能否展成幂级数：$f(x) \overset{?}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$
2. 如果能的话，该幂级数是什么，即 $a_n = ?$

---

性质 若 $f(x)$ 能展成上述幂级数，则 $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$.

**问题** 给定函数 $f(x)$，设在 $x=0$ 附近有定义，问

1. $f(x)$ 能否展成幂级数：$f(x) \stackrel{?}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$
2. 如果能的话，该幂级数是什么，即 $a_n = ?$

---

**性质** 若 $f(x)$ 能展成上述幂级数，则 $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$.

**证明** 两边求 $k$ 次导，并运用逐项求导公式：

$$f^{(k)}(x) = \left[ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right]^{(k)}$$

问题 给定函数 $f(x)$，设在 $x=0$ 附近有定义，问

1. $f(x)$ 能否展成幂级数：$f(x) \overset{?}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$
2. 如果能的话，该幂级数是什么，即 $a_n = ?$

---

性质 若 $f(x)$ 能展成上述幂级数，则 $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$.

证明 两边求 $k$ 次导，并运用逐项求导公式：

$$f^{(k)}(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right]^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n x^n\right]^{(k)}$$

**问题** 给定函数 $f(x)$，设在 $x=0$ 附近有定义，问

1. $f(x)$ 能否展成幂级数：$f(x) \stackrel{?}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$
2. 如果能的话，该幂级数是什么，即 $a_n =?$

---

**性质** 若 $f(x)$ 能展成上述幂级数，则 $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$.

**证明** 两边求 $k$ 次导，并运用逐项求导公式：

$$f^{(k)}(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right]^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n x^n\right]^{(k)}$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty}$$

问题 给定函数 $f(x)$，设在 $x=0$ 附近有定义，问

1. $f(x)$ 能否展成幂级数：$f(x) \overset{?}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$
2. 如果能的话，该幂级数是什么，即 $a_n = ?$

---

性质 若 $f(x)$ 能展成上述幂级数，则 $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$.

证明 两边求 $k$ 次导，并运用逐项求导公式：

$$f^{(k)}(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right]^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n x^n\right]^{(k)}$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) \cdot x^{n-k}$$

**问题** 给定函数 $f(x)$，设在 $x = 0$ 附近有定义，问

1. $f(x)$ 能否展成幂级数：$f(x) \overset{?}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$
2. 如果能的话，该幂级数是什么，即 $a_n = ?$

---

**性质** 若 $f(x)$ 能展成上述幂级数，则 $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$.

**证明** 两边求 $k$ 次导，并运用逐项求导公式：

$$
\begin{aligned}
f^{(k)}(x) &= \left[ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right]^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ a_n x^n \right]^{(k)} \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) \cdot x^{n-k} \\
&= a_k \cdot k!
\end{aligned}
$$

**问题** 给定函数 $f(x)$，设在 $x=0$ 附近有定义，问

1. $f(x)$ 能否展成幂级数：$f(x) \overset{?}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$
2. 如果能的话，该幂级数是什么，即 $a_n = ?$

---

**性质** 若 $f(x)$ 能展成上述幂级数，则 $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$.

**证明** 两边求 $k$ 次导，并运用逐项求导公式：

$$f^{(k)}(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right]^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n x^n\right]^{(k)}$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) \cdot x^{n-k}$$

$$= a_k \cdot k! + (*)x + (*)x^2 + \cdots$$

**问题** 给定函数 $f(x)$，设在 $x=0$ 附近有定义，问

1. $f(x)$ 能否展成幂级数：$f(x) \overset{?}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$
2. 如果能的话，该幂级数是什么，即 $a_n = ?$

---

**性质** 若 $f(x)$ 能展成上述幂级数，则 $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$.

**证明** 两边求 $k$ 次导，并运用逐项求导公式：

$$f^{(k)}(x) = \left[ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right]^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ a_n x^n \right]^{(k)}$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) \cdot x^{n-k}$$

$$= a_k \cdot k! + (*) x + (*) x^2 + \cdots$$

取 $x=0$ 得 $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)$

**性质** 如果 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$，则

$$a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(0).$$

也就是，该幂级数只能是

$$f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+\cdots$$

性质 如果 $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$，则

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0).$$

也就是，该幂级数只能是 $f$ 在 $x = 0$ 处的泰勒级数

$$\boxed{f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n + \cdots}$$

**性质** 如果 $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$，则

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0).$$

也就是，该幂级数只能是

$f$ 在 $x = 0$ 处的泰勒级数

$$\boxed{\underbrace{f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n}_{n\text{ 次泰勒多项式 } p_n} + \cdots}$$

**性质** 如果 $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$，则

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0).$$

也就是，该幂级数只能是 $f$ 在 $x = 0$ 处的 **泰勒级数**

$$\boxed{\underbrace{f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n}_{n\text{ 次泰勒多项式 } p_n} + \cdots}$$

**注** 泰勒级数 $= \lim_{n\to\infty} p_n(x)$

性质 如果 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$，则

$$a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(0).$$

也就是，该幂级数只能是 $f$ 在 $x=0$ 处的 泰勒级数

$$\boxed{\underbrace{f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n}_{n\text{ 次泰勒多项式 } p_n}+\cdots}$$

注 泰勒级数 $=\lim\limits_{n\to\infty}p_n(x)$

---

例 求出下列函数在 $x=0$ 处的泰勒级数，并指出收敛域：

$$e^x,\ \sin x,\ \cos x,\ \ln(1+x),\ (1+x)^\alpha,\ \frac{1}{1+x}$$

例 1 求 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数，及其收敛域。

例 1 求 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数，及其收敛域。

解 1. $x=0$ 处的泰勒级数：

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

例 1 求 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数，及其收敛域。

解 1. $x=0$ 处的泰勒级数：

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

当 $f(x)=e^x$ 时，

$$f(x)=f'(x)=f''(x)=f'''(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=e^x$$

例 1 求 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数，及其收敛域。

解 1. $x=0$ 处的泰勒级数：

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

当 $f(x)=e^x$ 时，

$$f(x)=f'(x)=f''(x)=f'''(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=e^x$$

$$\Rightarrow \quad f(0)=f'(0)=f''(0)=f'''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=1$$

例 1 求 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数，及其收敛域。

解 1. $x=0$ 处的泰勒级数：

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

当 $f(x)=e^x$ 时，

$$f(x)=f'(x)=f''(x)=f'''(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=e^x$$

$$\Rightarrow\quad f(0)=f'(0)=f''(0)=f'''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=1$$

$$\Rightarrow\quad \text{泰勒级数：}\ 1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

例 1 求 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数，及其收敛域。

解 1. $x=0$ 处的泰勒级数：

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

当 $f(x)=e^x$ 时，

$$f(x)=f'(x)=f''(x)=f'''(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=e^x$$

$$\Rightarrow\quad f(0)=f'(0)=f''(0)=f'''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=1$$

$$\Rightarrow\quad \text{泰勒级数：}\ 1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

2. 该泰勒级数的收敛域为 $(-\infty,+\infty)$

例 1 求 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数，及其收敛域。

解 1. $x=0$ 处的泰勒级数：

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

当 $f(x)=e^x$ 时，

$$f(x)=f'(x)=f''(x)=f'''(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=e^x$$

$$\Rightarrow \quad f(0)=f'(0)=f''(0)=f'''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=1$$

$$\Rightarrow \quad \text{泰勒级数：} 1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

2. 该泰勒级数的收敛域为 $(-\infty,+\infty)$

---

注 $n$ 次泰勒多项式是：$p_n(x)=$

例 1 求 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数，及其收敛域。

解 1. $x=0$ 处的泰勒级数：

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

当 $f(x)=e^x$ 时，

$$f(x)=f'(x)=f''(x)=f'''(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=e^x$$

$$\Rightarrow \quad f(0)=f'(0)=f''(0)=f'''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=1$$

$$\Rightarrow \quad \text{泰勒级数：}\ 1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

2. 该泰勒级数的收敛域为 $(-\infty,+\infty)$

---

注 $n$ 次泰勒多项式是：$p_n(x)=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n$

例 2 求 $f(x)=\sin x$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数，及其收敛域。

**例 2** 求 $f(x)=\sin x$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数，及其收敛域。

**解** 1. $x=0$ 处泰勒级数：$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$

当 $f(x)=\sin x$ 时，

例 2 求 $f(x)=\sin x$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数，及其收敛域。

解 1. $x=0$ 处泰勒级数：$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$

当 $f(x)=\sin x$ 时，

| | $f^{(n)}(x)$ | $f^{(n)}(0)$ |
|---|---|---|
| $n=0, 4, 8\ldots$ | $\sin x$ | $0$ |
| $n=1, 5, 9\ldots$ | $\cos x$ | $1$ |
| $n=2, 6, 10\ldots$ | $-\sin x$ | $0$ |
| $n=3, 7, 11\ldots$ | $-\cos x$ | $-1$ |

例 2 求 $f(x)=\sin x$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数，及其收敛域。

解 1. $x=0$ 处泰勒级数：$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$

当 $f(x)=\sin x$ 时，

| | $f^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n}{2}\pi)$ | $f^{(n)}(0)$ |
|---|---|---|
| $n=0,4,8\ldots$ | $\sin x$ | $0$ |
| $n=1,5,9\ldots$ | $\cos x$ | $1$ |
| $n=2,6,10\ldots$ | $-\sin x$ | $0$ |
| $n=3,7,11\ldots$ | $-\cos x$ | $-1$ |

**例 2** 求 $f(x)=\sin x$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数，及其收敛域。

**解** 1. $x=0$ 处泰勒级数：$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$

当 $f(x)=\sin x$ 时，

| | $f^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n}{2}\pi)$ | $f^{(n)}(0)=\sin(\frac{n}{2}\pi)$ |
|---|---|---|
| $n=0,4,8\ldots$ | $\sin x$ | $0$ |
| $n=1,5,9\ldots$ | $\cos x$ | $1$ |
| $n=2,6,10\ldots$ | $-\sin x$ | $0$ |
| $n=3,7,11\ldots$ | $-\cos x$ | $-1$ |

例 2 求 $f(x)=\sin x$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数，及其收敛域。

解 1. $x=0$ 处泰勒级数：$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$

当 $f(x)=\sin x$ 时，

| | $f^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n}{2}\pi)$ | $f^{(n)}(0)=\sin(\frac{n}{2}\pi)$ |
|---|---|---|
| $n=0,4,8\ldots$ | $\sin x$ | $0$ |
| $n=1,5,9\ldots$ | $\cos x$ | $1$ |
| $n=2,6,10\ldots$ | $-\sin x$ | $0$ |
| $n=3,7,11\ldots$ | $-\cos x$ | $-1$ |

所以泰勒级数是

$$x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots$$

例 2 求 $f(x)=\sin x$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数，及其收敛域。

解 1. $x=0$ 处泰勒级数：$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$

当 $f(x)=\sin x$ 时，

| | $f^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n}{2}\pi)$ | $f^{(n)}(0)=\sin(\frac{n}{2}\pi)$ |
|---|---|---|
| $n=0,4,8\ldots$ | $\sin x$ | $0$ |
| $n=1,5,9\ldots$ | $\cos x$ | $1$ |
| $n=2,6,10\ldots$ | $-\sin x$ | $0$ |
| $n=3,7,11\ldots$ | $-\cos x$ | $-1$ |

所以泰勒级数是

$$x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1}+\cdots$$

例 2 求 $f(x)=\sin x$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数，及其收敛域。

解 1. $x=0$ 处泰勒级数：$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$

当 $f(x)=\sin x$ 时，

| | $f^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n}{2}\pi)$ | $f^{(n)}(0)=\sin(\frac{n}{2}\pi)$ |
|---|---|---|
| $n=0,\ 4,\ 8\ldots$ | $\sin x$ | $0$ |
| $n=1,\ 5,\ 9\ldots$ | $\cos x$ | $1$ |
| $n=2,\ 6,\ 10\ldots$ | $-\sin x$ | $0$ |
| $n=3,\ 7,\ 11\ldots$ | $-\cos x$ | $-1$ |

所以泰勒级数是

$$x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1}+\cdots$$

2. 该泰勒级数的收敛域为 $(-\infty,+\infty)$

- $\sin x$ 的泰勒级数是：

$$x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1}+\cdots$$

- $\sin x$ 的 $n$ 次泰勒多项式是：

- $\sin x$ 的泰勒级数是：

$$x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1}+\cdots$$

- $\sin x$ 的 $n$ 次泰勒多项式是：

$$p_1 \qquad = x;$$

- $\sin x$ 的泰勒级数是：

$$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \cdots$$

- $\sin x$ 的 $n$ 次泰勒多项式是：

$$p_1 = p_2 = x;$$

- $\sin x$ 的泰勒级数是：

$$x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1}+\cdots$$

- $\sin x$ 的 $n$ 次泰勒多项式是：

$$p_1=p_2=x;$$

$$p_3\qquad=x-\frac{1}{3!}x^3;$$

- $\sin x$ 的泰勒级数是：

$$x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1}+\cdots$$

- $\sin x$ 的 $n$ 次泰勒多项式是：

$$p_1=p_2=x;$$

$$p_3=p_4=x-\frac{1}{3!}x^3;$$

- $\sin x$ 的泰勒级数是：

$$x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1}+\cdots$$

- $\sin x$ 的 $n$ 次泰勒多项式是：

$$p_1=p_2=x;$$

$$p_3=p_4=x-\frac{1}{3!}x^3;$$

$$p_5\qquad=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5;$$

- $\sin x$ 的泰勒级数是：

$$x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1}+\cdots$$

- $\sin x$ 的 $n$ 次泰勒多项式是：

$$p_1=p_2=x;$$

$$p_3=p_4=x-\frac{1}{3!}x^3;$$

$$p_5=p_6=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5;$$

- $\sin x$ 的泰勒级数是：

$$x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1}+\cdots$$

- $\sin x$ 的 $n$ 次泰勒多项式是：

$$p_1=p_2=x;$$

$$p_3=p_4=x-\frac{1}{3!}x^3;$$

$$p_5=p_6=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5;$$

$$\vdots$$

$p_{2m+1}$

- $\sin x$ 的泰勒级数是：

$$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \cdots$$

- $\sin x$ 的 $n$ 次泰勒多项式是：

$$p_1 = p_2 = x;$$

$$p_3 = p_4 = x - \frac{1}{3!}x^3;$$

$$p_5 = p_6 = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5;$$

$$\vdots$$

$$p_{2m+1} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1}$$

- $\sin x$ 的泰勒级数是：

$$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \cdots$$

- $\sin x$ 的 $n$ 次泰勒多项式是：

$$p_1 = p_2 = x;$$

$$p_3 = p_4 = x - \frac{1}{3!}x^3;$$

$$p_5 = p_6 = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5;$$

$$\vdots$$

$$p_{2m+1} = p_{2m+2} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1}$$

例 3 求 $f(x)=\cos x$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数，及其收敛域。

例 3 求 $f(x)=\cos x$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数，及其收敛域。

解 1. $x=0$ 处泰勒级数：$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$

当 $f(x)=\cos x$ 时，

例 3 求 $f(x)=\cos x$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数，及其收敛域。

解 1. $x=0$ 处泰勒级数：$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$

当 $f(x)=\cos x$ 时，

| | $f^{(n)}(x)$ | $f^{(n)}(0)$ |
|---|---|---|
| $n=0,4,8\dots$ | $\cos x$ | $1$ |
| $n=1,5,9\dots$ | $-\sin x$ | $0$ |
| $n=2,6,10\dots$ | $-\cos x$ | $-1$ |
| $n=3,7,11\dots$ | $\sin x$ | $0$ |

例 3 求 $f(x)=\cos x$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数，及其收敛域。

解 1. $x=0$ 处泰勒级数：$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$

当 $f(x)=\cos x$ 时，

| | $f^{(n)}(x)=\cos(x+\frac{n}{2}\pi)$ | $f^{(n)}(0)$ |
|---|---|---|
| $n=0,4,8\ldots$ | $\cos x$ | $1$ |
| $n=1,5,9\ldots$ | $-\sin x$ | $0$ |
| $n=2,6,10\ldots$ | $-\cos x$ | $-1$ |
| $n=3,7,11\ldots$ | $\sin x$ | $0$ |

例 3 求 $f(x)=\cos x$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数，及其收敛域。

解 1. $x=0$ 处泰勒级数：$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$

当 $f(x)=\cos x$ 时，

| | $f^{(n)}(x)=\cos(x+\frac{n}{2}\pi)$ | $f^{(n)}(0)=\cos(\frac{n}{2}\pi)$ |
|---|---|---|
| $n=0,4,8\ldots$ | $\cos x$ | $1$ |
| $n=1,5,9\ldots$ | $-\sin x$ | $0$ |
| $n=2,6,10\ldots$ | $-\cos x$ | $-1$ |
| $n=3,7,11\ldots$ | $\sin x$ | $0$ |

例 3 求 $f(x)=\cos x$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数，及其收敛域。

解 1. $x=0$ 处泰勒级数：$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$

当 $f(x)=\cos x$ 时，

| | $f^{(n)}(x)=\cos(x+\frac{n}{2}\pi)$ | $f^{(n)}(0)=\cos(\frac{n}{2}\pi)$ |
|---|---|---|
| $n=0,4,8\ldots$ | $\cos x$ | 1 |
| $n=1,5,9\ldots$ | $-\sin x$ | 0 |
| $n=2,6,10\ldots$ | $-\cos x$ | $-1$ |
| $n=3,7,11\ldots$ | $\sin x$ | 0 |

所以泰勒级数是

$$1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots$$

例 3 求 $f(x)=\cos x$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数，及其收敛域。

解 1. $x=0$ 处泰勒级数：$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$

当 $f(x)=\cos x$ 时，

| | $f^{(n)}(x)=\cos(x+\frac{n}{2}\pi)$ | $f^{(n)}(0)=\cos(\frac{n}{2}\pi)$ |
|---|---|---|
| $n=0,4,8\ldots$ | $\cos x$ | 1 |
| $n=1,5,9\ldots$ | $-\sin x$ | 0 |
| $n=2,6,10\ldots$ | $-\cos x$ | $-1$ |
| $n=3,7,11\ldots$ | $\sin x$ | 0 |

所以泰勒级数是

$$1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m)!}x^{2m}+\cdots$$

例 3 求 $f(x)=\cos x$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数，及其收敛域。

解 1. $x=0$ 处泰勒级数：$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$

当 $f(x)=\cos x$ 时，

| | $f^{(n)}(x)=\cos(x+\frac{n}{2}\pi)$ | $f^{(n)}(0)=\cos(\frac{n}{2}\pi)$ |
|---|---|---|
| $n=0,4,8\dots$ | $\cos x$ | $1$ |
| $n=1,5,9\dots$ | $-\sin x$ | $0$ |
| $n=2,6,10\dots$ | $-\cos x$ | $-1$ |
| $n=3,7,11\dots$ | $\sin x$ | $0$ |

所以泰勒级数是

$$1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m)!}x^{2m}+\cdots$$

2. 该泰勒级数的收敛域为 $(-\infty,+\infty)$

- $\cos x$ 的泰勒级数是：

$$1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m)!}x^{2m}+\cdots$$

- $\cos x$ 的 $n$ 次泰勒多项式是：

- $\cos x$ 的泰勒级数是：

$$1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m)!}x^{2m}+\cdots$$

- $\cos x$ 的 $n$ 次泰勒多项式是：

$$p_0 = 1;$$

- $\cos x$ 的泰勒级数是：

$$1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m)!}x^{2m}+\cdots$$

- $\cos x$ 的 $n$ 次泰勒多项式是：

$$p_0=p_1=1;$$

- $\cos x$ 的泰勒级数是：

$$1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m)!}x^{2m}+\cdots$$

- $\cos x$ 的 $n$ 次泰勒多项式是：

$$p_0=p_1=1;$$

$$p_2\qquad=1-\frac{1}{2!}x^2;$$

- $\cos x$ 的泰勒级数是：

$$1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m)!}x^{2m}+\cdots$$

- $\cos x$ 的 $n$ 次泰勒多项式是：

$$p_0=p_1=1;$$

$$p_2=p_3=1-\frac{1}{2!}x^2;$$

- $\cos x$ 的泰勒级数是：

$$1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m)!}x^{2m}+\cdots$$

- $\cos x$ 的 $n$ 次泰勒多项式是：

$$p_0=p_1=1;$$

$$p_2=p_3=1-\frac{1}{2!}x^2;$$

$$p_4\qquad=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4;$$

- $\cos x$ 的泰勒级数是:

$$1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m)!}x^{2m}+\cdots$$

- $\cos x$ 的 $n$ 次泰勒多项式是:

$$p_0=p_1=1;$$

$$p_2=p_3=1-\frac{1}{2!}x^2;$$

$$p_4=p_5=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4;$$

- $\cos x$ 的泰勒级数是：

$$1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m)!}x^{2m}+\cdots$$

- $\cos x$ 的 $n$ 次泰勒多项式是：

$$p_0=p_1=1;$$

$$p_2=p_3=1-\frac{1}{2!}x^2;$$

$$p_4=p_5=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4;$$

$$\vdots$$

$p_{2m}(x)$

- $\cos x$ 的泰勒级数是：

$$1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m)!}x^{2m}+\cdots$$

- $\cos x$ 的 $n$ 次泰勒多项式是：

$$
\begin{aligned}
p_0 = p_1 &= 1; \\
p_2 = p_3 &= 1-\frac{1}{2!}x^2; \\
p_4 = p_5 &= 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4; \\
&\vdots \\
p_{2m}(x) &= 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m)!}x^{2m}
\end{aligned}
$$

- $\cos x$ 的泰勒级数是：

$$1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m)!}x^{2m}+\cdots$$

- $\cos x$ 的 $n$ 次泰勒多项式是：

$$p_0=p_1=1;$$

$$p_2=p_3=1-\frac{1}{2!}x^2;$$

$$p_4=p_5=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4;$$

$$\vdots$$

$$p_{2m}(x)=p_{2m+1}(x)=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m)!}x^{2m}$$

例 4 求 $f(x)=\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处泰勒级数，及其收敛域。

例 4 求 $f(x)=\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处泰勒级数，及其收敛域。

解 1. $x=0$ 处泰勒级数：$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$

当 $f(x)=\ln(1+x)$ 时，

例 4 求 $f(x)=\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处泰勒级数，及其收敛域。

解 1. $x=0$ 处泰勒级数：$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$

当 $f(x)=\ln(1+x)$ 时，

$$f=\ln(1+x),\quad f'=\frac{1}{1+x},$$

例 4 求 $f(x)=\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处泰勒级数，及其收敛域。

解 1. $x=0$ 处泰勒级数：$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$

当 $f(x)=\ln(1+x)$ 时,

$$f=\ln(1+x),\quad f'=\frac{1}{1+x},\quad f''=\frac{(-1)}{(1+x)^2},$$

例 4 求 $f(x)=\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处泰勒级数，及其收敛域。

解 1. $x=0$ 处泰勒级数：$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$

当 $f(x)=\ln(1+x)$ 时，

$$f=\ln(1+x),\quad f'=\frac{1}{1+x},\quad f''=\frac{(-1)}{(1+x)^2},\quad f'''=\frac{2}{(1+x)^3},$$

例 4 求 $f(x)=\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处泰勒级数，及其收敛域。

解 1. $x=0$ 处泰勒级数：$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$

当 $f(x)=\ln(1+x)$ 时，

$$f=\ln(1+x),\quad f'=\frac{1}{1+x},\quad f''=\frac{(-1)}{(1+x)^2},\quad f'''=\frac{2}{(1+x)^3},$$

$$f^{(4)}=\frac{-2\cdot 3}{(1+x)^4},$$

例 4 求 $f(x)=\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处泰勒级数，及其收敛域。

解 1. $x=0$ 处泰勒级数：$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$

当 $f(x)=\ln(1+x)$ 时，

$$f=\ln(1+x),\quad f'=\frac{1}{1+x},\quad f''=\frac{(-1)}{(1+x)^2},\quad f'''=\frac{2}{(1+x)^3},$$

$$f^{(4)}=\frac{-2\cdot 3}{(1+x)^4},\quad f^{(5)}=\frac{2\cdot 3\cdot 4}{(1+x)^5},\ \cdots,$$

例 4 求 $f(x)=\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处泰勒级数，及其收敛域。

解 1. $x=0$ 处泰勒级数：$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$

当 $f(x)=\ln(1+x)$ 时，

$$f=\ln(1+x),\quad f'=\frac{1}{1+x},\quad f''=\frac{(-1)}{(1+x)^2},\quad f'''=\frac{2}{(1+x)^3},$$

$$f^{(4)}=\frac{-2\cdot 3}{(1+x)^4},\quad f^{(5)}=\frac{2\cdot 3\cdot 4}{(1+x)^5},\ \ldots,\ f^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n},\ \cdots$$

例 4 求 $f(x)=\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处泰勒级数，及其收敛域。

解 1. $x=0$ 处泰勒级数：$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$

当 $f(x)=\ln(1+x)$ 时，

$$f=\ln(1+x),\quad f'=\frac{1}{1+x},\quad f''=\frac{(-1)}{(1+x)^2},\quad f'''=\frac{2}{(1+x)^3},$$

$$f^{(4)}=\frac{-2\cdot 3}{(1+x)^4},\quad f^{(5)}=\frac{2\cdot 3\cdot 4}{(1+x)^5},\ \ldots,\ f^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n},\ \cdots$$

所以 $\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$,

**例 4** 求 $f(x)=\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处泰勒级数，及其收敛域。

**解 1.** $x=0$ 处泰勒级数：$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$

当 $f(x)=\ln(1+x)$ 时，

$$f=\ln(1+x),\quad f'=\frac{1}{1+x},\quad f''=\frac{(-1)}{(1+x)^2},\quad f'''=\frac{2}{(1+x)^3},$$

$$f^{(4)}=\frac{-2\cdot3}{(1+x)^4},\quad f^{(5)}=\frac{2\cdot3\cdot4}{(1+x)^5},\ \ldots,\ f^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n},\ \cdots$$

所以 $\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$，泰勒级数是

$$x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots$$

例 4 求 $f(x)=\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处泰勒级数，及其收敛域。

解 1. $x=0$ 处泰勒级数：$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$

当 $f(x)=\ln(1+x)$ 时，

$$f=\ln(1+x),\quad f'=\frac{1}{1+x},\quad f''=\frac{(-1)}{(1+x)^2},\quad f'''=\frac{2}{(1+x)^3},$$

$$f^{(4)}=\frac{-2\cdot 3}{(1+x)^4},\quad f^{(5)}=\frac{2\cdot 3\cdot 4}{(1+x)^5},\ \ldots,\ f^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n},\ \cdots$$

所以 $\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$，泰勒级数是

$$x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+\cdots$$

例 4 求 $f(x)=\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处泰勒级数，及其收敛域。

解 1. $x=0$ 处泰勒级数：$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$

当 $f(x)=\ln(1+x)$ 时，

$$f=\ln(1+x),\quad f'=\frac{1}{1+x},\quad f''=\frac{(-1)}{(1+x)^2},\quad f'''=\frac{2}{(1+x)^3},$$

$$f^{(4)}=\frac{-2\cdot 3}{(1+x)^4},\quad f^{(5)}=\frac{2\cdot 3\cdot 4}{(1+x)^5},\ \ldots,\ f^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n},\ \cdots$$

所以 $\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$，泰勒级数是

$$x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+\cdots$$

2. 该泰勒级数的收敛域为 $(-1,1]$

例 4 求 $f(x)=\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处泰勒级数，及其收敛域。

解 1. $x=0$ 处泰勒级数：$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$

当 $f(x)=\ln(1+x)$ 时，

$$f=\ln(1+x),\quad f'=\frac{1}{1+x},\quad f''=\frac{(-1)}{(1+x)^2},\quad f'''=\frac{2}{(1+x)^3},$$

$$f^{(4)}=\frac{-2\cdot 3}{(1+x)^4},\quad f^{(5)}=\frac{2\cdot 3\cdot 4}{(1+x)^5},\ \ldots,\ f^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n},\ \cdots$$

所以 $\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$，泰勒级数是

$$x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+\cdots$$

2. 该泰勒级数的收敛域为 $(-1,1]$

---

注 $n$ 次泰勒多项式：$p_n(x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n$

例 5 求 $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ 在 $x = 0$ 处的泰勒级数

例 5 求 $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数

解 $x=0$ 处泰勒级数：$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$

当 $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ 时，

**例 5** 求 $f(x) = (1+x)^\alpha$ 在 $x = 0$ 处的泰勒级数

**解** $x = 0$ 处泰勒级数：$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$

当 $f(x) = (1+x)^\alpha$ 时，

$$f = (1+x)^\alpha, \quad f' = \alpha(1+x)^{\alpha-1},$$

例 5 求 $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数

解 $x=0$ 处泰勒级数：$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$

当 $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ 时，

$$f=(1+x)^{\alpha},\quad f'=\alpha(1+x)^{\alpha-1},\quad f''=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},$$

**例 5** 求 $f(x)=(1+x)^\alpha$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数

**解** $x=0$ 处泰勒级数：$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$

当 $f(x)=(1+x)^\alpha$ 时，

$$f=(1+x)^\alpha,\quad f'=\alpha(1+x)^{\alpha-1},\quad f''=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},$$

$$\ldots,\ f^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},\ \cdots$$

**例 5** 求 $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数

**解** $x=0$ 处泰勒级数：$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$

当 $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ 时，

$$f=(1+x)^{\alpha},\quad f'=\alpha(1+x)^{\alpha-1},\quad f''=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},$$

$$\ldots,\ f^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},\ \cdots$$

所以 $\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$，

例 5 求 $f(x)=(1+x)^\alpha$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数

解 $x=0$ 处泰勒级数：$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$

当 $f(x)=(1+x)^\alpha$ 时，

$$f=(1+x)^\alpha,\quad f'=\alpha(1+x)^{\alpha-1},\quad f''=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},$$
$$\ldots,\ f^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},\ \cdots$$

所以 $\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$，泰勒级数是

$$1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots$$

例 5 求 $f(x)=(1+x)^\alpha$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数

解 $x=0$ 处泰勒级数：$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$

当 $f(x)=(1+x)^\alpha$ 时，

$$f=(1+x)^\alpha,\quad f'=\alpha(1+x)^{\alpha-1},\quad f''=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},$$

$$\ldots,\ f^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},\ \cdots$$

所以 $\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$，泰勒级数是

$$1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

例 6 求 $f(x)=\frac{1}{1+x}$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数，及其收敛域

**例 6** 求 $f(x)=\frac{1}{1+x}$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数，及其收敛域

**解法一** 1. 泰勒级数：$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$

当 $f(x)=\frac{1}{1+x}$ 时，

**例 6** 求 $f(x)=\frac{1}{1+x}$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数，及其收敛域

**解法一** 1. 泰勒级数：$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$

当 $f(x)=\frac{1}{1+x}$ 时，

$$f=\frac{1}{1+x},\quad f'=\frac{-1}{(1+x)^2},$$

例 6 求 $f(x)=\frac{1}{1+x}$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数，及其收敛域

解法一 1. 泰勒级数：$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$

当 $f(x)=\frac{1}{1+x}$ 时，

$$f=\frac{1}{1+x},\quad f'=\frac{-1}{(1+x)^2},\quad f''=\frac{2}{(1+x)^3},\quad f'''=\frac{-2\cdot 3}{(1+x)^4},$$

例 6 求 $f(x)=\frac{1}{1+x}$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数，及其收敛域

解法一 1. 泰勒级数：$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$

当 $f(x)=\frac{1}{1+x}$ 时，

$$f=\frac{1}{1+x},\quad f'=\frac{-1}{(1+x)^2},\quad f''=\frac{2}{(1+x)^3},\quad f'''=\frac{-2\cdot 3}{(1+x)^4},$$

$$\ldots,\ f^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}},\ \cdots$$

例 6 求 $f(x)=\frac{1}{1+x}$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数，及其收敛域

解法一 1. 泰勒级数：$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$

当 $f(x)=\frac{1}{1+x}$ 时，

$$f=\frac{1}{1+x},\quad f'=\frac{-1}{(1+x)^2},\quad f''=\frac{2}{(1+x)^3},\quad f'''=\frac{-2\cdot 3}{(1+x)^4},$$

$$\ldots,\ f^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}},\ \cdots$$

所以 $\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)=(-1)^n$，

例 6 求 $f(x)=\frac{1}{1+x}$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数，及其收敛域

解法一 1. 泰勒级数：$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$

当 $f(x)=\frac{1}{1+x}$ 时，

$$f=\frac{1}{1+x},\quad f'=\frac{-1}{(1+x)^2},\quad f''=\frac{2}{(1+x)^3},\quad f'''=\frac{-2\cdot 3}{(1+x)^4},$$

$$\ldots,\ f^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}},\ \cdots$$

所以 $\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)=(-1)^n$，泰勒级数是

$$1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots$$

例 6 求 $f(x)=\frac{1}{1+x}$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数，及其收敛域

解法一 1. 泰勒级数：$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$

当 $f(x)=\frac{1}{1+x}$ 时，

$$f=\frac{1}{1+x},\quad f'=\frac{-1}{(1+x)^2},\quad f''=\frac{2}{(1+x)^3},\quad f'''=\frac{-2\cdot 3}{(1+x)^4},$$

$$\ldots,\ f^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}},\ \cdots$$

所以 $\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)=(-1)^n$，泰勒级数是

$$1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots$$

2. 该泰勒级数的收敛域为 $(-1,1)$

例 6 求 $f(x)=\frac{1}{1+x}$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数，及其收敛域

解法一 1. 泰勒级数：$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$

当 $f(x)=\frac{1}{1+x}$ 时，

$$f=\frac{1}{1+x},\quad f'=\frac{-1}{(1+x)^2},\quad f''=\frac{2}{(1+x)^3},\quad f'''=\frac{-2\cdot 3}{(1+x)^4},$$

$$\ldots,\ f^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}},\ \cdots$$

所以 $\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)=(-1)^n$，泰勒级数是

$$1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots$$

2. 该泰勒级数的收敛域为 $(-1,1)$

解法二 由等比级数知：$1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots=\frac{1}{1+x}$。

**例 6** 求 $f(x)=\frac{1}{1+x}$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数，及其收敛域

**解法一** 1. 泰勒级数：$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$

当 $f(x)=\frac{1}{1+x}$ 时，

$$f=\frac{1}{1+x},\quad f'=\frac{-1}{(1+x)^2},\quad f''=\frac{2}{(1+x)^3},\quad f'''=\frac{-2\cdot 3}{(1+x)^4},$$

$$\ldots,\ f^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}},\ \cdots$$

所以 $\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)=(-1)^n$，泰勒级数是

$$1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots$$

2. 该泰勒级数的收敛域为 $(-1,1)$

**解法二** 由等比级数知：$1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots=\frac{1}{1+x}$。

该幂级数就是 $\frac{1}{1+x}$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数。

性质 一般地，设 $f(x)$ 在 $x_0$ 附近有定义。若

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots$$

则

$$a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0).$$

也就是，该幂级数只能是

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\cdots$$

性质 一般地，设 $f(x)$ 在 $x_0$ 附近有定义。若

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots$$

则

$$a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0).$$

也就是，该幂级数只能是

$f$ 在 $x=x_0$ 处的 泰勒级数

$$\boxed{f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\cdots}$$

**性质** 一般地，设 $f(x)$ 在 $x_0$ 附近有定义。若

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

则

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

也就是，该幂级数只能是

$f$ 在 $x = x_0$ 处的泰勒级数

$$\boxed{\underbrace{f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}_{n\text{ 次泰勒多项式 } p_n}+\cdots}$$

性质 一般地，设 $f(x)$ 在 $x_0$ 附近有定义。若

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots$$

则

$$a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0).$$

也就是，该幂级数只能是

$f$ 在 $x=x_0$ 处的泰勒级数

$$\boxed{\underbrace{f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}_{n\text{ 次泰勒多项式 }p_n}+\cdots}$$

注 泰勒级数 $=\lim\limits_{n\to\infty}p_n(x)$

回到问题：对哪些 $x$，$f(x)$ 等于其泰勒级数 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$？

回到问题：对哪些 $x$，$f(x)$ 等于其泰勒级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$？

想法

1. $x$ 在 $f$ 的定义域中；并且
2. $x$ 是泰勒级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$ 的收敛点；并且

回到问题：对哪些 $x$，$f(x)$ 等于其泰勒级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$？

想法

$$f(x) \xlongequal{\text{泰勒中值定理}} p_n(x)+R_n(x)$$

1. $x$ 在 $f$ 的定义域中；并且
2. $x$ 是泰勒级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$ 的收敛点；并且

回到问题：对哪些 $x$，$f(x)$ 等于其泰勒级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$？

**想法**

$$f(x) \xlongequal{\text{泰勒中值定理}} p_n(x)+R_n(x) \quad \Rightarrow \quad f(x)=\lim_{n\to\infty}p_n(x)+\lim_{n\to\infty}R_n(x)$$

1. $x$ 在 $f$ 的定义域中；并且
2. $x$ 是泰勒级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$ 的收敛点；并且

回到问题：对哪些 $x$，$f(x)$ 等于其泰勒级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$？

想法

$$f(x) \xlongequal{\text{泰勒中值定理}} p_n(x) + R_n(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) = \underbrace{\boxed{\lim_{n\to\infty} p_n(x)}}_{}{}^{\text{泰勒级数}} + \lim_{n\to\infty} R_n(x)$$

1. $x$ 在 $f$ 的定义域中；并且
2. $x$ 是泰勒级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$ 的收敛点；并且

回到问题：对哪些 $x$，$f(x)$ 等于其泰勒级数 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$？

想法

泰勒级数

$$f(x) \xlongequal{\text{泰勒中值定理}} p_n(x) + R_n(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) = \boxed{\lim_{n\to\infty} p_n(x)} + \lim_{n\to\infty} R_n(x)$$

如果

1. $x$ 在 $f$ 的定义域中；并且
2. $x$ 是泰勒级数 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$ 的收敛点；并且
3. $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$

回到问题：对哪些 $x$，$f(x)$ 等于其泰勒级数 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$？

想法

泰勒级数

$$f(x) \xlongequal{\text{泰勒中值定理}} p_n(x)+R_n(x) \quad \Rightarrow \quad f(x)=\boxed{\lim_{n\to\infty} p_n(x)}+\lim_{n\to\infty} R_n(x)$$

如果

1. $x$ 在 $f$ 的定义域中；并且
2. $x$ 是泰勒级数 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$ 的收敛点；并且
3. $\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$

则对此 $x$ 成立

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$$

回忆 泰勒中值定理 1 若 $f$ 具有 $n$ 阶导数，则

$$R_n(x) = o\left((x-x_0)^n\right).$$

回忆 泰勒中值定理 1 若 $f$ 具有 $n$ 阶导数，则

$$R_n(x) = o\big((x - x_0)^n\big).$$

特别地，

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x)$$

回忆 泰勒中值定理 1 若 $f$ 具有 $n$ 阶导数，则

$$R_n(x) = o\big((x-x_0)^n\big).$$

特别地，

$$\begin{aligned} f(x) &= p_n(x) + R_n(x) \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 \\ &\qquad + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o\big((x-x_0)^n\big) \end{aligned}$$

例

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1} + o(x^{2m+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m)!}x^{2m} + o(x^{2m+1})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

例 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$

**例** 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$，$\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$

**解**

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$$

**例** 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$

**解**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left[x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\right] - x\left[1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^3)\right]}{x^3}$$

**例** 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$

**解**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left[x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^4)\right]-x\left[1-\frac{1}{2!}x^2+o(x^3)\right]}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^4)}{x^3}$$

例 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$， $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left[x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\right] - x\left[1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^3)\right]}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3 + o(x^4)}{x^3} = \frac{1}{3}$$

**例** 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$

**解**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left[x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^4)\right]-x\left[1-\frac{1}{2!}x^2+o(x^3)\right]}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^4)}{x^3} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left[\qquad\qquad\qquad\right]-\left[\qquad\qquad\qquad\right]}{x^2\left[x+\left(\qquad\qquad\right)\right]}$$

例 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$， $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left[x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^4)\right]-x\left[1-\frac{1}{2!}x^2+o(x^3)\right]}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^4)}{x^3}=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left[\qquad\qquad\right]-\left[\qquad\qquad\right]}{x^2\left[x+\left(-x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)\right]}$$

例 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$， $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$

解

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to0}\frac{\left[x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^4)\right]-x\left[1-\frac{1}{2!}x^2+o(x^3)\right]}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^4)}{x^3}=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left[1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^5)\right]-\left[\qquad\qquad\right]}{x^2\left[x+\left(-x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)\right]}$$

例 求 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$， $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left[x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^4)\right]-x\left[1-\frac{1}{2!}x^2+o(x^3)\right]}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^4)}{x^3} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left[1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^5)\right]-\left[1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4+o(x^4)\right]}{x^2\left[x+\left(-x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)\right]}$$

**例** 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$

**解**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left[x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^4)\right]-x\left[1-\frac{1}{2!}x^2+o(x^3)\right]}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^4)}{x^3}=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left[1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^5)\right]-\left[1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4+o(x^4)\right]}{x^2\left[x+\left(-x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)\right]}$$

$$==\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}{-\frac{1}{2}x^4+o(x^4)}$$

例 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$， $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$

解

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to0}\frac{\left[x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^4)\right]-x\left[1-\frac{1}{2!}x^2+o(x^3)\right]}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^4)}{x^3}=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left[1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^5)\right]-\left[1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4+o(x^4)\right]}{x^2\left[x+\left(-x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)\right]}$$

$$==\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}{-\frac{1}{2}x^4+o(x^4)}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{12}+o(x^4)/x^4}{-\frac{1}{2}+o(x^4)/x^4}$$

例 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$，$\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$

解

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to0}\frac{\left[x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^4)\right]-x\left[1-\frac{1}{2!}x^2+o(x^3)\right]}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^4)}{x^3}=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left[1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^5)\right]-\left[1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4+o(x^4)\right]}{x^2\left[x+\left(-x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)\right]}$$

$$==\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}{-\frac{1}{2}x^4+o(x^4)}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{12}+o(x^4)/x^4}{-\frac{1}{2}+o(x^4)/x^4}=\frac{1}{6}$$

**泰勒中值定理 2** 若 $f$ 具有 $n+1$ 阶导数，则

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$

其中 $\xi$ 是 $x_0$ 与 $x$ 之间的某个值

泰勒中值定理 2 若 $f$ 具有 $n+1$ 阶导数，则

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$

$$(1-\theta)x_0 + \theta x$$

其中 $\xi$ 是 $x_0$ 与 $x$ 之间的某个值，$0 < \theta < 1$。

泰勒中值定理 2 若 $f$ 具有 $n+1$ 阶导数，则

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$

$$\overset{or}{=} \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}((1-\theta)x_0 + \theta x)(x-x_0)^{n+1},$$

其中 $\xi$ 是 $x_0$ 与 $x$ 之间的某个值，$0 < \theta < 1$。

**泰勒中值定理 2** 若 $f$ 具有 $n+1$ 阶导数，则

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$
$$\overset{or}{=} \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}((1-\theta)x_0+\theta x)(x-x_0)^{n+1},$$

其中 $\xi$ 是 $x_0$ 与 $x$ 之间的某个值，$0<\theta<1$。

---

**注**

1. $\xi$（以及 $\theta$）不是固定不变的，而是随 $x$ 和 $n$ 的改变而变化。

泰勒中值定理 2 若 $f$ 具有 $n+1$ 阶导数，则

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$

$$\overset{or}{=} \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}((1-\theta)x_0+\theta x)(x-x_0)^{n+1},$$

其中 $\xi$ 是 $x_0$ 与 $x$ 之间的某个值，$0<\theta<1$。

---

注

1. $\xi$（以及 $\theta$）不是固定不变的，而是随 $x$ 和 $n$ 的改变而变化。
2. 当 $x_0=0$ 时，则余项可写成

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}, \qquad (0<\theta<1)$$

性质 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$，$e^x$ 等于其泰勒级数。即

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, \qquad x \in (-\infty, \infty).$$

性质 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$，$e^x$ 等于其泰勒级数。即

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, \qquad x \in (-\infty, \infty).$$

证明

1. 只需证明对任意 $x$，成立 $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$。

性质 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$，$e^x$ 等于其泰勒级数。即

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, \qquad x \in (-\infty, \infty).$$

证明

1. 只需证明对任意 $x$，成立 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$。
2. 由泰勒中值定理 2，

$$|R_n(x)| = \left|\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}\right|$$

**性质** 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$，$e^x$ 等于其泰勒级数。即

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, \qquad x \in (-\infty, \infty).$$

**证明**

1. 只需证明对任意 $x$，成立 $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$。
2. 由泰勒中值定理 2，

$$|R_n(x)| = \left|\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}\right| = \left|\frac{e^{\theta x}x^{n+1}}{(n+1)!}\right|$$

**性质** 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$，$e^x$ 等于其泰勒级数。即

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, \qquad x \in (-\infty, \infty).$$

**证明**

1. 只需证明对任意 $x$，成立 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$。
2. 由泰勒中值定理 2，

$$|R_n(x)| = \left|\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}\right| = \left|\frac{e^{\theta x}x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^{|x|}$$

**性质** 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$，$e^x$ 等于其泰勒级数。即

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, \qquad x \in (-\infty, \infty).$$

**证明**

1. 只需证明对任意 $x$，成立 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$。
2. 由泰勒中值定理 2，

$$|R_n(x)| = \left|\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}\right| = \left|\frac{e^{\theta x}x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^{|x|} \to 0$$

**性质** 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$，$e^x$ 等于其泰勒级数。即

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, \qquad x \in (-\infty, \infty).$$

**证明**

1. 只需证明对任意 $x$，成立 $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$。
2. 由泰勒中值定理 2，

$$|R_n(x)| = \left|\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}\right| = \left|\frac{e^{\theta x}x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^{|x|} \to 0$$

（已知级数 $\sum \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ 收敛，所以一般项 $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$）

**性质** 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$，$e^x$ 等于其泰勒级数。即

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, \qquad x \in (-\infty, \infty).$$

**证明**

1. 只需证明对任意 $x$，成立 $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$。
2. 由泰勒中值定理 2，

$$|R_n(x)| = \left|\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}\right| = \left|\frac{e^{\theta x}x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^{|x|} \to 0$$

（已知级数 $\sum \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ 收敛，所以一般项 $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$）

---

**注** $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$

**性质** 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$，$e^x$ 等于其泰勒级数。即

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, \qquad x \in (-\infty, \infty).$$

**证明**

1. 只需证明对任意 $x$，成立 $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$。
2. 由泰勒中值定理 2，

$$|R_n(x)| = \left|\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}\right| = \left|\frac{e^{\theta x}x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^{|x|} \to 0$$

（已知级数 $\sum \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ 收敛，所以一般项 $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$）

---

**注** $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

性质 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$，$\sin x$ 等于其泰勒级数。即

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \cdots$$

其中 $x \in (-\infty, \infty)$。

**性质** 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$，$\sin x$ 等于其泰勒级数。即

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \cdots$$

其中 $x \in (-\infty, \infty)$。

**证明**

1. 只需证明对任意 $x$，成立 $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$。

**性质** 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$，$\sin x$ 等于其泰勒级数。即

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \cdots$$

其中 $x \in (-\infty, \infty)$。

**证明**

1. 只需证明对任意 $x$，成立 $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$。
2. 由泰勒中值定理 2，

$$|R_n(x)| = \left| \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) x^{n+1} \right|$$

**性质** 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$，$\sin x$ 等于其泰勒级数。即

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \cdots$$

其中 $x \in (-\infty, \infty)$。

**证明**

1. 只需证明对任意 $x$，成立 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$。
2. 由泰勒中值定理 2，

$$|R_n(x)| = \left|\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}\right| = \left|\frac{\sin\left(\theta x + \frac{n+1}{2}\pi\right)x^{n+1}}{(n+1)!}\right|$$

性质 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$，$\sin x$ 等于其泰勒级数。即

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \cdots$$

其中 $x \in (-\infty, \infty)$。

证明

1. 只需证明对任意 $x$，成立 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$。
2. 由泰勒中值定理 2，

$$|R_n(x)| = \left|\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}\right| = \left|\frac{\sin\left(\theta x + \frac{n+1}{2}\pi\right)x^{n+1}}{(n+1)!}\right|$$

$$\leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

性质 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$，$\sin x$ 等于其泰勒级数。即

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \cdots$$

其中 $x \in (-\infty, \infty)$。

证明

1. 只需证明对任意 $x$，成立 $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$。
2. 由泰勒中值定理 2，

$$|R_n(x)| = \left|\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}\right| = \left|\frac{\sin\left(\theta x + \frac{n+1}{2}\pi\right)x^{n+1}}{(n+1)!}\right|$$

$$\leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$$

**性质** 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$，$\sin x$ 等于其泰勒级数。即

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \cdots$$

其中 $x \in (-\infty, \infty)$。

**证明**

1. 只需证明对任意 $x$，成立 $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$。
2. 由泰勒中值定理 2，

$$|R_n(x)| = \left|\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}\right| = \left|\frac{\sin\left(\theta x + \frac{n+1}{2}\pi\right)x^{n+1}}{(n+1)!}\right|$$

$$\le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$$

（已知级数 $\sum \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ 收敛，所以一般项 $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$）

性质 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$，$\cos x$ 等于其泰勒级数。即

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m)!}x^{2m} + \cdots$$

其中 $x \in (-\infty, \infty)$。

性质 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$，$\cos x$ 等于其泰勒级数。即

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m)!}x^{2m} + \cdots$$

其中 $x \in (-\infty, \infty)$。

证明

1. 只需证明对任意 $x$，成立 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$。

**性质** 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$，$\cos x$ 等于其泰勒级数。即

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m)!}x^{2m} + \cdots$$

其中 $x \in (-\infty, \infty)$。

**证明**

1. 只需证明对任意 $x$，成立 $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$。
2. 由泰勒中值定理 2，

$$|R_n(x)| = \left| \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) x^{n+1} \right|$$

**性质** 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$，$\cos x$ 等于其泰勒级数。即

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m)!}x^{2m} + \cdots$$

其中 $x \in (-\infty, \infty)$。

**证明**

1. 只需证明对任意 $x$，成立 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$。
2. 由泰勒中值定理 2，

$$|R_n(x)| = \left|\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}\right| = \left|\frac{\cos\left(\theta x + \frac{n+1}{2}\pi\right)x^{n+1}}{(n+1)!}\right|$$

性质 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$，$\cos x$ 等于其泰勒级数。即

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m)!}x^{2m} + \cdots$$

其中 $x \in (-\infty, \infty)$。

证明

1. 只需证明对任意 $x$，成立 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$。
2. 由泰勒中值定理 2，

$$|R_n(x)| = \left|\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}\right| = \left|\frac{\cos\left(\theta x + \frac{n+1}{2}\pi\right)x^{n+1}}{(n+1)!}\right|$$

$$\leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

**性质** 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$，$\cos x$ 等于其泰勒级数。即

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m)!}x^{2m} + \cdots$$

其中 $x \in (-\infty, \infty)$。

**证明**

1. 只需证明对任意 $x$，成立 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$。
2. 由泰勒中值定理 2，

$$|R_n(x)| = \left|\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}\right| = \left|\frac{\cos\left(\theta x + \frac{n+1}{2}\pi\right)x^{n+1}}{(n+1)!}\right|$$

$$\le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$$

性质 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$，$\cos x$ 等于其泰勒级数。即

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m)!}x^{2m} + \cdots$$

其中 $x \in (-\infty, \infty)$。

证明

1. 只需证明对任意 $x$，成立 $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$。
2. 由泰勒中值定理 2，

$$|R_n(x)| = \left|\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}\right| = \left|\frac{\cos\left(\theta x + \frac{n+1}{2}\pi\right)x^{n+1}}{(n+1)!}\right|$$

$$\le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$$

（已知级数 $\sum \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ 收敛，所以一般项 $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$）

- 至此，我们知道 $e^x$，$\sin x$，$\cos x$ 以及 $\frac{1}{1+x}$ 是等于其泰勒级数，即

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots, x \in (-\infty, \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, x \in (-1, 1)$$

- 至此，我们知道 $e^x$，$\sin x$，$\cos x$ 以及 $\frac{1}{1+x}$ 是等于其泰勒级数，即

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots, x \in (-\infty, \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, x \in (-1, 1)$$

- 利用最后一式，及逐项积分公式，可进一步求出 $\ln(1+x)$，$\arctan x$ 的幂级数展开。

性质 成立

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1].$$

性质 成立

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+\cdots,\quad x\in(-1,1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $(-1, 1]$，故上式至多对 $x\in(-1, 1]$ 成立。

性质 成立

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+\cdots,\quad x\in(-1,1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $(-1, 1]$，故上式至多对 $x \in (-1, 1]$ 成立。

2.

$$\ln(1+x)=\int_0^x \frac{1}{1+t}dt$$

性质 成立

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+\cdots,\quad x\in(-1,1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $(-1,1]$，故上式至多对 $x\in(-1,1]$ 成立。

2.

$$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{1}{1+t}dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n dt$$

性质 成立

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+\cdots,\quad x\in(-1,1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $(-1, 1]$，故上式至多对 $x\in(-1, 1]$ 成立。

2.

$$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{1}{1+t}dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^n dt$$

性质 成立

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $(-1, 1]$，故上式至多对 $x \in (-1, 1]$ 成立。

2.

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^n dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+1}x^{n+1}$$

性质 成立

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+\cdots,\quad x\in(-1,1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $(-1, 1]$，故上式至多对 $x\in(-1, 1]$ 成立。

2.

$$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{1}{1+t}dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^n dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$$

性质 成立

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+\cdots,\quad x\in(-1,1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $(-1, 1]$，故上式至多对 $x \in (-1, 1]$ 成立。

2. 当 $x \in (-1, 1)$ 时，利用逐项积分可得

$$\ln(1+x)=\int_0^x \frac{1}{1+t}dt=\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^n dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$$

性质 成立

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $(-1, 1]$，故上式至多对 $x \in (-1, 1]$ 成立。

2. 当 $x \in (-1, 1)$ 时，利用逐项积分可得

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^n dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$$

3. 注意 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ 收敛域是 $(-1, 1]$，由连续性，当 $x = 1$ 时也成立

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n.$$

性质 成立

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+\cdots,\quad x\in(-1,1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $(-1, 1]$，故上式至多对 $x\in(-1, 1]$ 成立。

2. 当 $x\in(-1, 1)$ 时，利用逐项积分可得

$$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{1}{1+t}dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^n dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$$

3. 注意 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ 收敛域是 $(-1, 1]$，由连续性，当 $x=1$ 时也成立

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n.$$

（这是 $f(1)=$ $S(1)$）

性质 成立

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $(-1, 1]$，故上式至多对 $x \in (-1, 1]$ 成立。

2. 当 $x \in (-1, 1)$ 时，利用逐项积分可得

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^n dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$$

3. 注意 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ 收敛域是 $(-1, 1]$，由连续性，当 $x=1$ 时也成立

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n.$$

（这是 $f(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} \ln(1+x)$ $S(1)$）

性质 成立

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+\cdots,\quad x\in(-1,1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $(-1,1]$，故上式至多对 $x\in(-1,1]$ 成立。

2. 当 $x\in(-1,1)$ 时，利用逐项积分可得

$$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{1}{1+t}dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^n dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$$

3. 注意 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ 收敛域是 $(-1,1]$，由连续性，当 $x=1$ 时也成立

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n.$$

（这是 $f(1)=\lim\limits_{x\to1^-}\ln(1+x)=\lim\limits_{x\to1^-}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=\qquad S(1)$）

**性质** 成立

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+\cdots,\quad x\in(-1,\,1].$$

**证明** 1. 幂级数的收敛域是 $(-1,\,1]$，故上式至多对 $x\in(-1,\,1]$ 成立。

2. 当 $x\in(-1,\,1)$ 时，利用逐项积分可得

$$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{1}{1+t}dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^n dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$$

3. 注意 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ 收敛域是 $(-1,\,1]$，由连续性，当 $x=1$ 时也成立

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n.$$

（这是 $f(1)=\lim\limits_{x\to1^-}\ln(1+x)=\lim\limits_{x\to1^-}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=\lim\limits_{x\to1^-}S(x)\quad S(1)$）

**性质** 成立

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+\cdots,\quad x\in(-1,1].$$

**证明** 1. 幂级数的收敛域是 $(-1,1]$，故上式至多对 $x\in(-1,1]$ 成立。

2. 当 $x\in(-1,1)$ 时，利用逐项积分可得

$$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{1}{1+t}dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^n dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$$

3. 注意 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ 收敛域是 $(-1,1]$，由连续性，当 $x=1$ 时也成立

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n.$$

（这是 $f(1)=\lim\limits_{x\to1^-}\ln(1+x)=\lim\limits_{x\to1^-}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=\lim\limits_{x\to1^-}S(x)=S(1)$）

性质 成立

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots, x \in [-1, 1].$$

**性质** 成立

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots, x \in [-1, 1].$$

**证明** 1. 幂级数的收敛域是 $[-1, 1]$，故上式至多对 $x \in [-1, 1]$ 成立。

性质 成立

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} + \cdots, x \in [-1, 1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $[-1, 1]$，故上式至多对 $x \in [-1, 1]$ 成立。

2.

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$$

性质 成立

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots, x \in [-1, 1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $[-1, 1]$，故上式至多对 $x \in [-1, 1]$ 成立。

2.

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt$$

性质 成立

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots, x \in [-1, 1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $[-1, 1]$，故上式至多对 $x \in [-1, 1]$ 成立。

2.

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^{2n}dt$$

性质 成立

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots, x \in [-1, 1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $[-1, 1]$，故上式至多对 $x \in [-1, 1]$ 成立。

2.

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^{2n}dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$$

性质 成立

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots, x \in [-1, 1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $[-1, 1]$，故上式至多对 $x \in [-1, 1]$ 成立。

2. 当 $x \in (-1, 1)$ 时，利用逐项积分可得

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^{2n} dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$$

性质 成立

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots, x \in [-1, 1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $[-1, 1]$，故上式至多对 $x \in [-1, 1]$ 成立。

2. 当 $x \in (-1, 1)$ 时，利用逐项积分可得

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^{2n}dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$$

3. 注意 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ 收敛域是 $[-1, 1]$, 由连续性, 当 $x = \pm 1$ 时也有

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1}.$$

性质 成立

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots, x \in [-1, 1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $[-1, 1]$，故上式至多对 $x \in [-1, 1]$ 成立。

2. 当 $x \in (-1, 1)$ 时，利用逐项积分可得

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^{2n}dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$$

3. 注意 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ 收敛域是 $[-1, 1]$, 由连续性, 当 $x = \pm 1$ 时也有

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1}.$$

（如$f(1) =$ $S(1)$）

性质 成立

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots, x \in [-1, 1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $[-1, 1]$，故上式至多对 $x \in [-1, 1]$ 成立。

2. 当 $x \in (-1, 1)$ 时，利用逐项积分可得

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$$

3. 注意 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ 收敛域是 $[-1, 1]$, 由连续性, 当 $x = \pm 1$ 时也有

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}.$$

（如$f(1) = \lim\limits_{x \to 1^-} \arctan x$ $S(1)$）

性质 成立

$$\arctan x = x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}+\cdots, x\in[-1,1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $[-1, 1]$，故上式至多对 $x\in[-1, 1]$ 成立。

2. 当 $x\in(-1, 1)$ 时，利用逐项积分可得

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^{2n}dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$$

3. 注意 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ 收敛域是 $[-1, 1]$, 由连续性, 当 $x=\pm1$ 时也有

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}.$$

（如$f(1) = \lim\limits_{x\to1^-}\arctan x = \lim\limits_{x\to1^-}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} =$ $S(1)$）

性质 成立

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots, x \in [-1, 1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $[-1, 1]$，故上式至多对 $x \in [-1, 1]$ 成立。

2. 当 $x \in (-1, 1)$ 时，利用逐项积分可得

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$$

3. 注意 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ 收敛域是 $[-1, 1]$, 由连续性, 当 $x = \pm 1$ 时也有

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}.$$

（如$f(1) = \lim\limits_{x \to 1^-} \arctan x = \lim\limits_{x \to 1^-} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \lim\limits_{x \to 1^-} S(x) \quad S(1)$）

**性质** 成立

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots, x \in [-1, 1].$$

**证明** 1. 幂级数的收敛域是 $[-1, 1]$，故上式至多对 $x \in [-1, 1]$ 成立。

2. 当 $x \in (-1, 1)$ 时，利用逐项积分可得

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$$

3. 注意 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ 收敛域是 $[-1, 1]$, 由连续性, 当 $x = \pm 1$ 时也有

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}.$$

（如$f(1) = \lim\limits_{x \to 1^-} \arctan x = \lim\limits_{x \to 1^-} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \lim\limits_{x \to 1^-} S(x) = S(1)$）

性质 成立

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots, \quad x \in [-1, 1]$$

性质 成立

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots, \quad x \in [-1, 1]$$

注 取 $x = 1$，则得到

性质 成立

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots, \quad x \in [-1, 1]$$

注 取 $x = 1$，则得到

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

- 至此，我们知道 $e^x$，$\sin x$，$\cos x$ 以及 $\frac{1}{1+x}$ 是等于其泰勒级数，即

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots, x \in (-\infty, \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1]$$

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots, x \in [-1, 1]$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, x \in (-1, 1)$$

- 至此，我们知道 $e^x$，$\sin x$，$\cos x$ 以及 $\frac{1}{1+x}$ 是等于其泰勒级数，即

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots, x \in (-\infty, \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1]$$

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots, x \in [-1, 1]$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, x \in (-1, 1)$$

- 用上述结果, 及逐项求导、积分公式, 可求更多函数的泰勒级数展开

例 1 把函数 $f(x)=(1-x)\ln(1+x)$ 展开成 $x$ 的幂级数。

**例 1** 把函数 $f(x)=(1-x)\ln(1+x)$ 展开成 $x$ 的幂级数。

**解** 利用

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+\cdots,\quad x\in(-1,1].$$

例 1 把函数 $f(x)=(1-x)\ln(1+x)$ 展开成 $x$ 的幂级数。

解 利用

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+\cdots, \quad x\in(-1,1].$$

所以当 $x\in(-1,1]$ 时，

$$(1-x)\ln(1+x)=(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n$$

例 1 把函数 $f(x)=(1-x)\ln(1+x)$ 展开成 $x$ 的幂级数。

解 利用

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+\cdots,\quad x\in(-1,1].$$

所以当 $x\in(-1,1]$ 时,

$$\begin{aligned}(1-x)\ln(1+x)&=(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^{n+1}\end{aligned}$$

例 1 把函数 $f(x)=(1-x)\ln(1+x)$ 展开成 $x$ 的幂级数。

解 利用

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+\cdots,\quad x\in(-1,1].$$

所以当 $x\in(-1,1]$ 时,

$$(1-x)\ln(1+x)=(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^{n+1}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-2}\frac{1}{n-1}x^n$$

例 1 把函数 $f(x)=(1-x)\ln(1+x)$ 展开成 $x$ 的幂级数。

解 利用

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+\cdots,\quad x\in(-1,1].$$

所以当 $x\in(-1,1]$ 时,

$$\begin{aligned}(1-x)\ln(1+x)&=(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^{n+1}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n-\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-2}\frac{1}{n-1}x^n\end{aligned}$$

例 1 把函数 $f(x)=(1-x)\ln(1+x)$ 展开成 $x$ 的幂级数。

解 利用

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+\cdots,\quad x\in(-1,\ 1].$$

所以当 $x\in(-1,\ 1]$ 时,

$$\begin{aligned}(1-x)\ln(1+x)&=(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^{n+1}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n-\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-2}\frac{1}{n-1}x^n\\&=x+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n\end{aligned}$$

例 1 把函数 $f(x)=(1-x)\ln(1+x)$ 展开成 $x$ 的幂级数。

解 利用

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+\cdots, \quad x\in(-1,1].$$

所以当 $x\in(-1,1]$ 时,

$$\begin{aligned}(1-x)\ln(1+x)&=(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^{n+1}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n-\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-2}\frac{1}{n-1}x^n\\&=x+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n-\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-2}\frac{1}{n-1}x^n\end{aligned}$$

例 1 把函数 $f(x)=(1-x)\ln(1+x)$ 展开成 $x$ 的幂级数。

解 利用

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+\cdots, \quad x\in(-1,1].$$

所以当 $x\in(-1,1]$ 时,

$$\begin{aligned}(1-x)\ln(1+x)&=(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^{n+1}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n-\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-2}\frac{1}{n-1}x^n\\&=x+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n-\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-2}\frac{1}{n-1}x^n\\&=x+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n}-\frac{(-1)^n}{n-1}\right)x^n\end{aligned}$$

例 2 把函数 $f(x)=\cos^2 x$ 展开成 $x$ 的幂级数。

例 2 把函数 $f(x)=\cos^2 x$ 展开成 $x$ 的幂级数。

解 利用

$$\cos t = 1-\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{4!}t^4-\frac{1}{6!}t^6+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}t^{2n}+\cdots,\ t\in(-\infty,\infty)$$

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x$$

例 2 把函数 $f(x)=\cos^2 x$ 展开成 $x$ 的幂级数。

解 利用

$$\cos t = 1-\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{4!}t^4-\frac{1}{6!}t^6+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}t^{2n}+\cdots,\ t\in(-\infty,\infty)$$

所以当 $x\in(-\infty,\infty)$ 时,

$$\begin{aligned}\cos^2 x &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}(2x)^{2n}\end{aligned}$$

例 2 把函数 $f(x)=\cos^2 x$ 展开成 $x$ 的幂级数。

解 利用

$$\cos t = 1-\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{4!}t^4-\frac{1}{6!}t^6+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}t^{2n}+\cdots,\ t\in(-\infty,\infty)$$

所以当 $x\in(-\infty,\infty)$ 时，

$$\begin{aligned}\cos^2 x &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}(2x)^{2n} \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!}x^{2n}\end{aligned}$$

例 2 把函数 $f(x)=\cos^2 x$ 展开成 $x$ 的幂级数。

解 利用

$$\cos t = 1-\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{4!}t^4-\frac{1}{6!}t^6+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}t^{2n}+\cdots,\ t\in(-\infty,\infty)$$

所以当 $x\in(-\infty,\infty)$ 时,

$$\begin{aligned}\cos^2 x &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}(2x)^{2n}\\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!}x^{2n}\\ &= 1+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!}x^{2n}\end{aligned}$$

例 3 把函数 $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数。

例 3 把函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数。

解 1. 注意到 $\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$.

例 3 把函数 $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数。

解 1. 注意到 $\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$.

2. 利用 $\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \cdots + t^n + \cdots, \; t \in (-1, 1)$

将 $\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x+2}$ 分别展开成 $(x+4)$ 的幂级数：

例 3 把函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数。

解 1. 注意到 $\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$.

2. 利用 $\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+t^3+\cdots+t^n+\cdots,\ t\in(-1,1)$

将 $\frac{1}{x+1},\frac{1}{x+2}$ 分别展开成 $(x+4)$ 的幂级数：令 $t=x+4$，则

* $$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{t-3}$$

例 3 把函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数。

解 1. 注意到 $\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$.

2. 利用 $\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+t^3+\cdots+t^n+\cdots,\ t\in(-1,1)$

将 $\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x+2}$ 分别展开成 $(x+4)$ 的幂级数：令 $t=x+4$，则

* $$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{t-3}=\frac{1}{-3}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{3}}$$

例 3 把函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数。

解 1. 注意到 $\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$.

2. 利用 $\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+t^3+\cdots+t^n+\cdots,\ t\in(-1,1)$

将 $\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x+2}$ 分别展开成 $(x+4)$ 的幂级数：令 $t=x+4$，则

* $$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{t-3}=\frac{1}{-3}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{3^n}$$

例 3 把函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数。

解 1. 注意到 $\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$.

2. 利用 $\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+t^3+\cdots+t^n+\cdots,\ t\in(-1,1)$

将 $\frac{1}{x+1},\frac{1}{x+2}$ 分别展开成 $(x+4)$ 的幂级数：令 $t=x+4$，则

$$* \quad \frac{1}{x+1}=\frac{1}{t-3}=\frac{1}{-3}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{3^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{3^{n+1}}$$

例 3 把函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数。

解 1. 注意到 $\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$.

2. 利用 $\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+t^3+\cdots+t^n+\cdots,\ t\in(-1,1)$

将 $\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x+2}$ 分别展开成 $(x+4)$ 的幂级数：令 $t=x+4$，则

* $$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{t-3}=\frac{1}{-3}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{3^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{3^{n+1}}$$

其中 $|\frac{t}{3}|<1$

例 3 把函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数。

解 1. 注意到 $\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$.

2. 利用 $\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+t^3+\cdots+t^n+\cdots,\ t\in(-1,1)$

将 $\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x+2}$ 分别展开成 $(x+4)$ 的幂级数：令 $t=x+4$，则

$$* \quad \frac{1}{x+1}=\frac{1}{t-3}=\frac{1}{-3}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{3^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{3^{n+1}}$$

其中 $|\frac{x+4}{3}|=|\frac{t}{3}|<1$

例 3 把函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数。

解 1. 注意到 $\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$.

2. 利用 $\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+t^3+\cdots+t^n+\cdots,\ t\in(-1,1)$

将 $\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x+2}$ 分别展开成 $(x+4)$ 的幂级数：令 $t=x+4$，则

$$* \quad \frac{1}{x+1}=\frac{1}{t-3}=\frac{1}{-3}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{3^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{3^{n+1}}$$

其中 $|\frac{x+4}{3}|=|\frac{t}{3}|<1$，即 $-7<x<-1$。

例 3 把函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数。

解 1. 注意到 $\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$.

2. 利用 $\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+t^3+\cdots+t^n+\cdots,\ t\in(-1,1)$

将 $\frac{1}{x+1}$, $\frac{1}{x+2}$ 分别展开成 $(x+4)$ 的幂级数：令 $t=x+4$，则

* $$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{t-3}=\frac{1}{-3}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{3^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{3^{n+1}}$$

其中 $\left|\frac{x+4}{3}\right|=\left|\frac{t}{3}\right|<1$，即 $-7<x<-1$。

* $$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{t-2}$$

例 3 把函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数。

解 1. 注意到 $\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$.

2. 利用 $\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+t^3+\cdots+t^n+\cdots,\ t\in(-1,1)$

将 $\frac{1}{x+1},\frac{1}{x+2}$ 分别展开成 $(x+4)$ 的幂级数：令 $t=x+4$，则

* $$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{t-3}=\frac{1}{-3}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{3^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{3^{n+1}}$$

其中 $|\frac{x+4}{3}|=|\frac{t}{3}|<1$，即 $-7<x<-1$。

* $$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{t-2}=\frac{1}{-2}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{2}}$$

例 3 把函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数。

解 1. 注意到 $\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$.

2. 利用 $\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+t^3+\cdots+t^n+\cdots,\ t\in(-1,1)$

将 $\frac{1}{x+1},\frac{1}{x+2}$ 分别展开成 $(x+4)$ 的幂级数：令 $t=x+4$，则

* $$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{t-3}=\frac{1}{-3}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{3^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{3^{n+1}}$$

其中 $|\frac{x+4}{3}|=|\frac{t}{3}|<1$，即 $-7<x<-1$。

* $$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{t-2}=\frac{1}{-2}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{2^n}$$

例 3 把函数 $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数。

解 1. 注意到 $\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$.

2. 利用 $\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \cdots + t^n + \cdots,\ t \in (-1, 1)$

将 $\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x+2}$ 分别展开成 $(x+4)$ 的幂级数：令 $t = x+4$，则

* $$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{t-3} = \frac{1}{-3} \cdot \frac{1}{1-\frac{t}{3}} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{3^n} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{3^{n+1}}$$

其中 $|\frac{x+4}{3}| = |\frac{t}{3}| < 1$，即 $-7 < x < -1$。

* $$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{t-2} = \frac{1}{-2} \cdot \frac{1}{1-\frac{t}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{2^n} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{2^{n+1}}$$

例 3 把函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数。

解 1. 注意到 $\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$.

2. 利用 $\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+t^3+\cdots+t^n+\cdots,\ t\in(-1,1)$

将 $\frac{1}{x+1},\frac{1}{x+2}$ 分别展开成 $(x+4)$ 的幂级数：令 $t=x+4$，则

* $$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{t-3}=\frac{1}{-3}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{3^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{3^{n+1}}$$

其中 $|\frac{x+4}{3}|=|\frac{t}{3}|<1$，即 $-7<x<-1$。

* $$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{t-2}=\frac{1}{-2}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{2^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{2^{n+1}}$$

其中 $|\frac{t}{2}|<1$

例 3 把函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数。

解 1. 注意到 $\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$.

2. 利用 $\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+t^3+\cdots+t^n+\cdots,\ t\in(-1,1)$

将 $\frac{1}{x+1}$, $\frac{1}{x+2}$ 分别展开成 $(x+4)$ 的幂级数：令 $t=x+4$，则

* $$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{t-3}=\frac{1}{-3}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{3^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{3^{n+1}}$$

其中 $|\frac{x+4}{3}|=|\frac{t}{3}|<1$，即 $-7<x<-1$。

* $$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{t-2}=\frac{1}{-2}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{2^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{2^{n+1}}$$

其中$|\frac{x+4}{2}|=|\frac{t}{2}|<1$

例 3 把函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数。

解 1. 注意到 $\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$.

2. 利用 $\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+t^3+\cdots+t^n+\cdots,\ t\in(-1,1)$

将 $\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x+2}$ 分别展开成 $(x+4)$ 的幂级数：令 $t=x+4$，则

* $$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{t-3}=\frac{1}{-3}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{3^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{3^{n+1}}$$

其中 $|\frac{x+4}{3}|=|\frac{t}{3}|<1$，即 $-7<x<-1$。

* $$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{t-2}=\frac{1}{-2}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{2^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{2^{n+1}}$$

其中 $|\frac{x+4}{2}|=|\frac{t}{2}|<1$，即 $-6<x<-2$。

例 3 把函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数。

解 1. 注意到 $\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$.

2. 利用 $\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+t^3+\cdots+t^n+\cdots,\ t\in(-1,1)$

将 $\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x+2}$ 分别展开成 $(x+4)$ 的幂级数：令 $t=x+4$，则

* $$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{t-3}=\frac{1}{-3}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{3^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{3^{n+1}}$$

其中 $|\frac{x+4}{3}|=|\frac{t}{3}|<1$，即 $-7<x<-1$。

* $$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{t-2}=\frac{1}{-2}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{2^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{2^{n+1}}$$

其中$|\frac{x+4}{2}|=|\frac{t}{2}|<1$，即 $-6<x<-2$。

3. 所以 $-6<x<-2$ 时

例 3 把函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数。

解 1. 注意到 $\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$.

2. 利用 $\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+t^3+\cdots+t^n+\cdots,\ t\in(-1,1)$

将 $\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x+2}$ 分别展开成 $(x+4)$ 的幂级数：令 $t=x+4$，则

* $$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{t-3}=\frac{1}{-3}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{3^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{3^{n+1}}$$

其中 $|\frac{x+4}{3}|=|\frac{t}{3}|<1$，即 $-7<x<-1$。

* $$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{t-2}=\frac{1}{-2}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{2^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{2^{n+1}}$$

其中 $|\frac{x+4}{2}|=|\frac{t}{2}|<1$，即 $-6<x<-2$。

3. 所以 $-6<x<-2$ 时

$$\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n.$$