第 06 周作业解答

练习 1. 令 $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$，$v=\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$。证明 $Av=\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\theta)\\ \sin(\alpha+\theta)\end{pmatrix}$，并计算 A^n。

解

$$\begin{aligned}
Av&=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta\cos\alpha-\sin\theta\sin\alpha\\ \sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\theta)\\ \sin(\alpha+\theta)\end{pmatrix},\\
A^n&=\begin{pmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

练习 2. 求满足 $A^2=O$ 的所有 2×2 矩阵 A。

解 $\begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix}$，其中 b 和 c 为任意数，a 满足 $a^2=-bc$。

练习 3. 设 A 为 n 阶方阵，分别解答：

1. 假设 $|A|=-2$，计算 $\left|2|A|A^T\right|$。
2. 假设 $AA^T=I_n$ 且 $|A|<0$，计算 $|A|$。

解 1. $\left|2|A|A^T\right|=(2|A|)^n|A^T|=(2|A|)^n|A|=2^n|A|^{n+1}=2^n(-2)^{n+1}=(-1)^{n+1}2^{2n+1}$。
2. 计算等式 $AA^T=I_n$ 两边的行列式：

$$1=|I_n|=|AA^T|=|A|\cdot|A^T|=|A|\cdot|A|$$

所以 $|A|=\pm1$。又因为 $|A|<0$，所以 $|A|=-1$。

练习 4. 判断 2 阶方阵 $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出逆矩阵。

解 1. 计算行列式：$|A|=\begin{vmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{vmatrix}=1\neq 0$ 所以可逆。

2. 计算伴随矩阵：$A^*=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$。

3. 所以逆矩阵为：$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$。

练习 5. 判断 3 阶方阵 $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 4 & -2\end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出逆矩阵。

解 1. 计算行列式：

$$D=\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 4 & -2\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_2]{r_1-2r_2}\begin{vmatrix}0 & 3 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 5 & -3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}3 & 1\\ 5 & -3\end{vmatrix}=14\neq 0$$

所以 A 可逆。

2. 计算伴随矩阵：

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 14 & 4 \\ 3 & -7 & 1 \\ 5 & -7 & -3 \end{pmatrix}$$

3. 所以逆矩阵为

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -2 & 14 & 4 \\ 3 & -7 & 1 \\ 5 & -7 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/7 & 1 & 2/7 \\ 3/14 & -1/2 & 1/14 \\ 5/14 & -1/2 & -3/14 \end{pmatrix}$$

练习 6. 3 阶方阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & k \\ 1 & 4 & k^2 \end{pmatrix}$ 可逆时，k 满足什么条件?

解

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & k \\ 1 & 4 & k^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k-1 \\ 0 & 3 & k^2-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & k-1 \\ 3 & k^2-1 \end{vmatrix} = k^2 - 3k + 2 = (k-1)(k-2)$$

A 可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 1$ 且 $k \neq 2$

练习 7. 设 M_n 是 n 阶方阵，$n \geq 2$，全部元素按列次序为 $1, 2, 3, \cdots, n^2$。例如

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}.$$

问当 n 为何值时，M_n 可逆。

解当 $n = 2$ 时，$|M_2| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$，所以 M_2 可逆。

当 $n \geq 3$ 时，

$$|M_n| = \begin{vmatrix} 1 & n+1 & 2n+1 & \cdots & (n-1)n+1 \\ 2 & n+2 & 2n+2 & \cdots & (n-1)n+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 2n & 3n & \cdots & n^2 \end{vmatrix} \xlongequal[c_3 - c_1]{c_2 - c_1} \begin{vmatrix} 1 & n & 2n & \cdots & (n-1)n+1 \\ 2 & n & 2n & \cdots & (n-1)n+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & 2n & \cdots & n^2 \end{vmatrix} = 0$$

所以当 $n \geq 3$ 时，M_n 不可逆。

练习 8. 假设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 - 3A - 5I = O$，证明 $A + I$ 可逆，并求 $(A+I)^{-1}$。

解因为

$$A^2 - 3A - 5I = O \quad \Rightarrow \quad A^2 - 3A - 4I = I \quad \Rightarrow \quad (A+I)(A-4I) = I$$

所以 $A + I$ 可逆，且 $(A+I)^{-1} = A - 4I$。

练习 9. 设 A 为 4 阶方阵，满足 $|A| = \frac{1}{2}$，求 $\left|(3A)^{-1} - 2A^*\right|$ 的值。

解利用恒等式 $AA^* = |A|I$ 知：$A^* = \frac{1}{2}A^{-1}$。所以

$$\left|(3A)^{-1} - 2A^*\right| = \left|\frac{1}{3}A^{-1} - 2 \cdot \frac{1}{2}A^{-1}\right| = \left|-\frac{2}{3}A^{-1}\right| = \left(-\frac{2}{3}\right)^4 \left|A^{-1}\right| = \left(-\frac{2}{3}\right)^4 |A|^{-1} = \left(-\frac{2}{3}\right)^4 \cdot 2 = \frac{32}{81}$$

练习 10. 设 A, B 为 n 阶对称方阵，证明方阵 $AB + BA$ 也是对称。

解因为

$$(AB + BA)^T = (AB)^T + (BA)^T = B^T A^T + A^T B^T = BA + AB = AB + BA$$

所以 $AB + BA$ 是对称。