

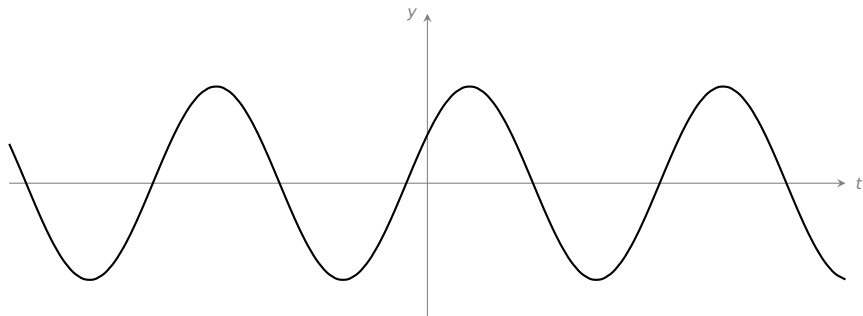
1. 傅里叶级数的概念
2. 周期为 2π 的傅里叶级数
3. 一般周期的傅里叶级数

We are here now...

1. 傅里叶级数的概念
2. 周期为 2π 的傅里叶级数
3. 一般周期的傅里叶级数

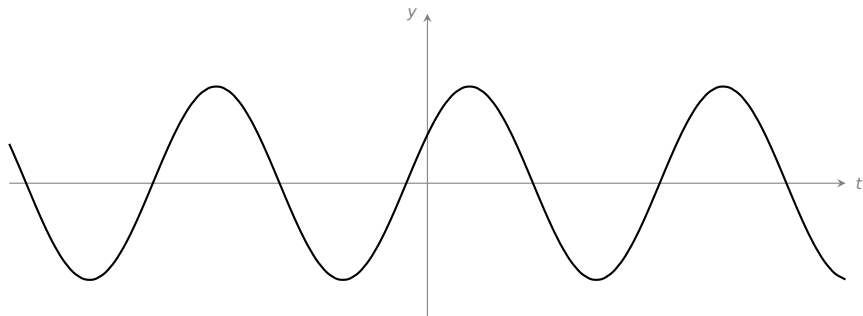
正弦函数

正弦函数 $y = A \sin(\omega t + \varphi)$



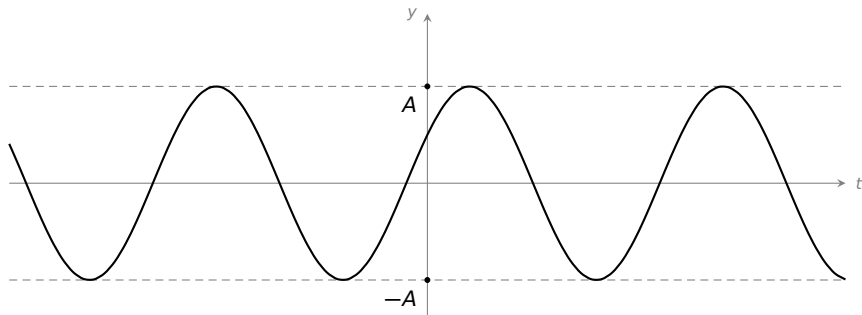
正弦函数

正弦函数 $y = A \sin(\omega t + \varphi)$ (t : 时间;)



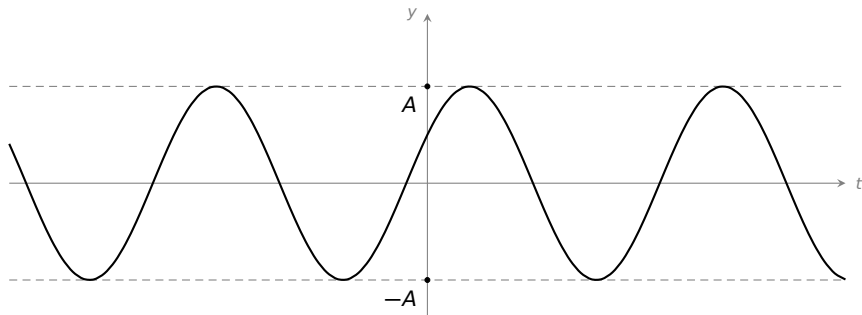
正弦函数

正弦函数 $y = A \sin(\omega t + \varphi)$ (t : 时间; A : 振幅;)



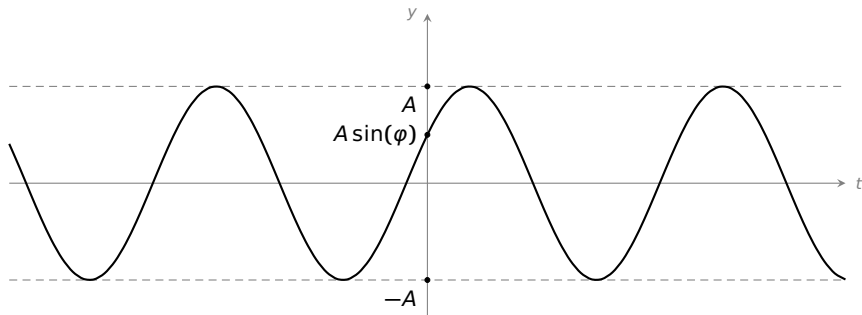
正弦函数

正弦函数 $y = A \sin(\omega t + \varphi)$ (t : 时间; A : 振幅; φ : 初相;)



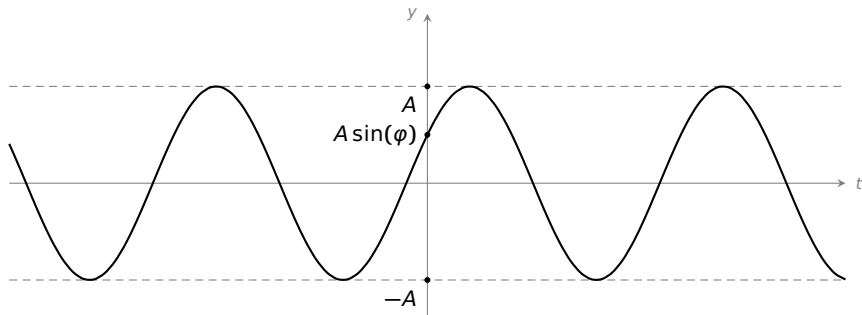
正弦函数

正弦函数 $y = A \sin(\omega t + \varphi)$ (t : 时间; A : 振幅; φ : 初相;)



正弦函数

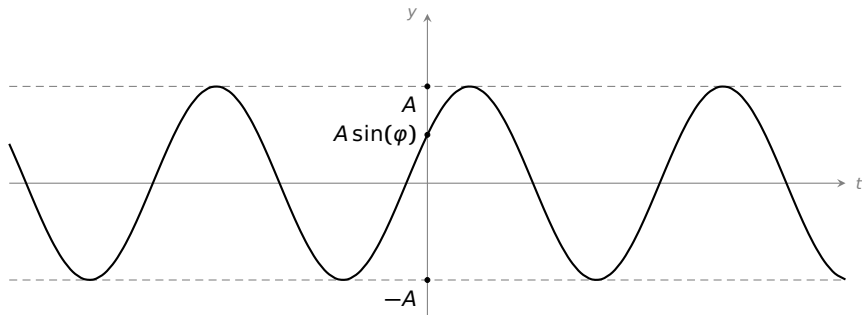
正弦函数 $y = A \sin(\omega t + \varphi)$ (t : 时间; A : 振幅; φ : 初相; ω : 频率)



正弦函数

正弦函数 $y = A \sin(\omega t + \varphi)$ (t : 时间; A : 振幅; φ : 初相; ω : 频率)

具有周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$

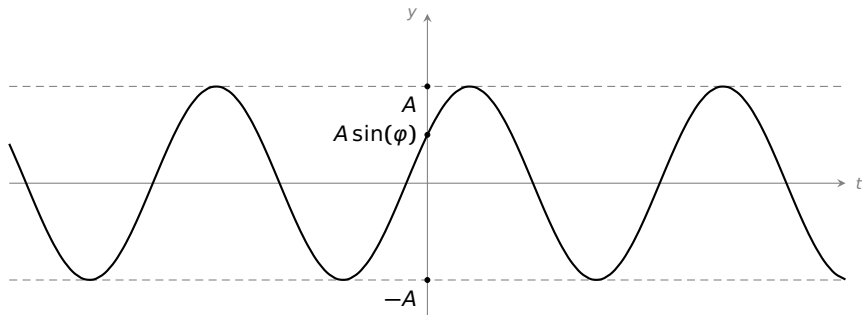


正弦函数

正弦函数 $y = A \sin(\omega t + \varphi)$ (t : 时间; A : 振幅; φ : 初相; ω : 频率)

具有周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$, 也就是

$$A \sin(\omega(t + T) + \varphi)$$

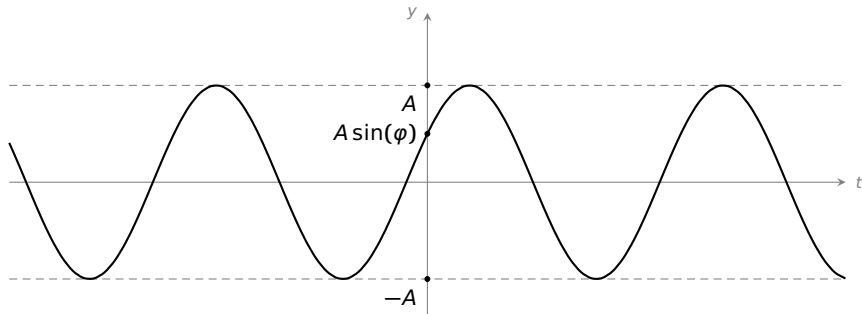


正弦函数

正弦函数 $y = A \sin(\omega t + \varphi)$ (t : 时间; A : 振幅; φ : 初相; ω : 频率)

具有周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$, 也就是

$$A \sin(\omega t + \varphi) = A \sin(\omega(t + T) + \varphi)$$

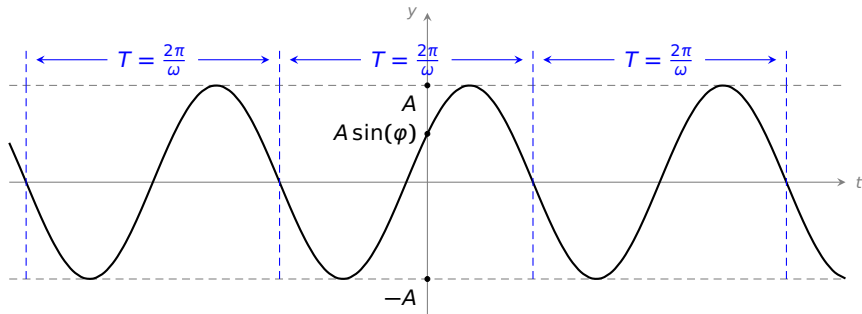


正弦函数

正弦函数 $y = A \sin(\omega t + \varphi)$ (t : 时间; A : 振幅; φ : 初相; ω : 频率)

具有周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$, 也就是

$$A \sin(\omega t + \varphi) = A \sin(\omega(t + T) + \varphi)$$

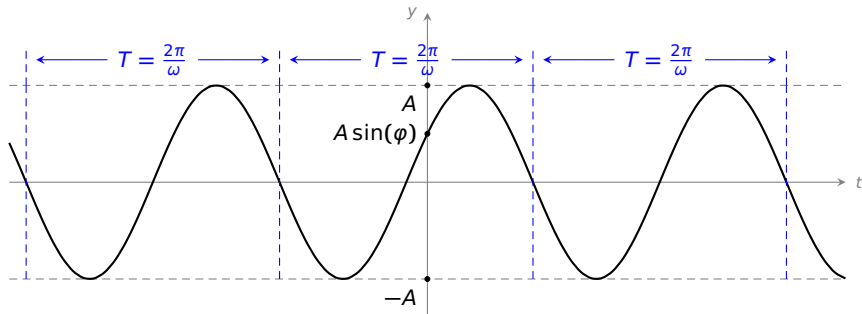


正弦函数

正弦函数 $y = A \sin(\omega t + \varphi)$ (t : 时间; A : 振幅; φ : 初相; ω : 频率)

具有周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$, 也就是

$$A \sin(\omega t + \varphi) = A \sin(\omega(t + T) + \varphi)$$



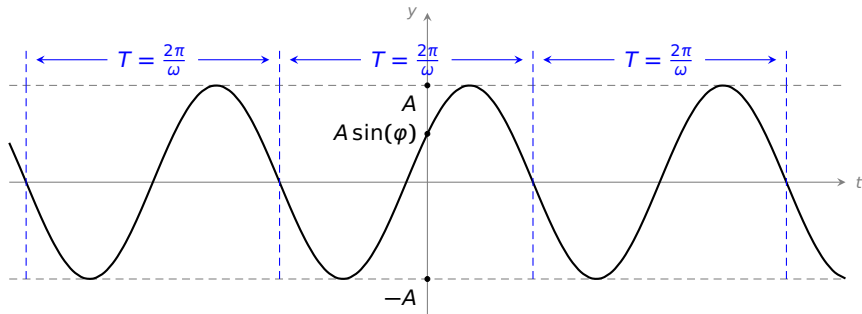
设 n 为正整数, 正弦函数 $y = A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$

正弦函数

正弦函数 $y = A \sin(\omega t + \varphi)$ (t : 时间; A : 振幅; φ : 初相; ω : 频率)

具有周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$, 也就是

$$A \sin(\omega t + \varphi) = A \sin(\omega(t + T) + \varphi)$$



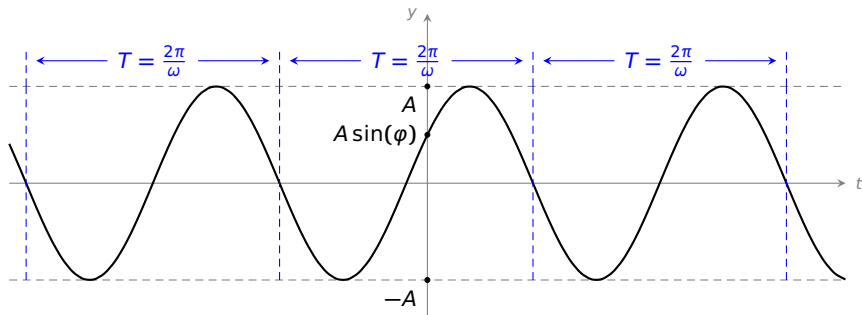
设 n 为正整数, 正弦函数 $y = A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$ 的最小周期是 $\frac{2\pi}{n\omega}$,

正弦函数

正弦函数 $y = A \sin(\omega t + \varphi)$ (t : 时间; A : 振幅; φ : 初相; ω : 频率)

具有周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$, 也就是

$$A \sin(\omega t + \varphi) = A \sin(\omega(t + T) + \varphi)$$



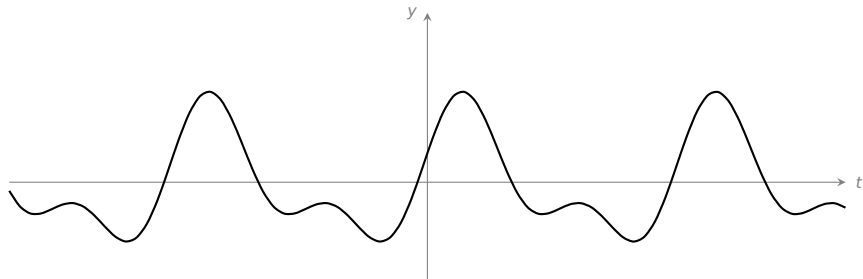
设 n 为正整数, 正弦函数 $y = A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$ 的最小周期是 $\frac{2\pi}{n\omega}$, 显然 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 也是周期

周期函数

假设 $f(t)$ 是定义域为 \mathbb{R} 的周期函数，周期也是 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 。

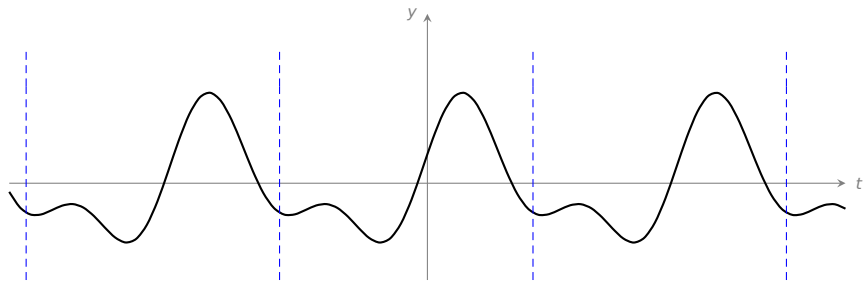
周期函数

假设 $f(t)$ 是定义域为 \mathbb{R} 的周期函数，周期也是 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 。



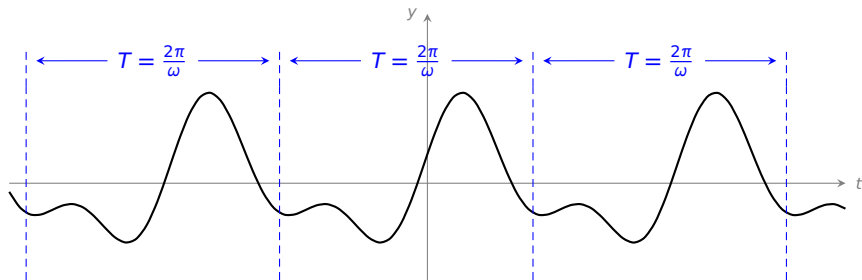
周期函数

假设 $f(t)$ 是定义域为 \mathbb{R} 的周期函数，周期也是 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 。



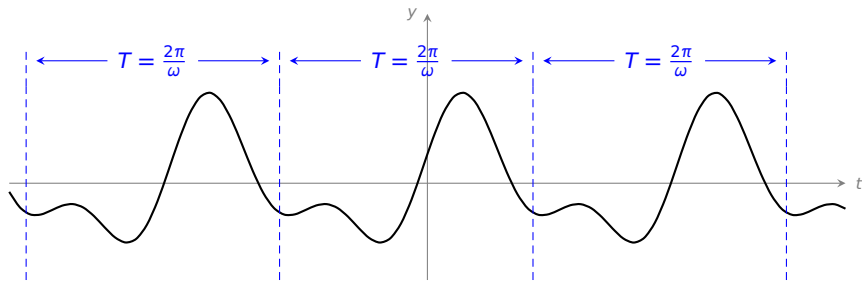
周期函数

假设 $f(t)$ 是定义域为 \mathbb{R} 的周期函数，周期也是 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 。



周期函数

假设 $f(t)$ 是定义域为 \mathbb{R} 的周期函数，周期也是 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 。

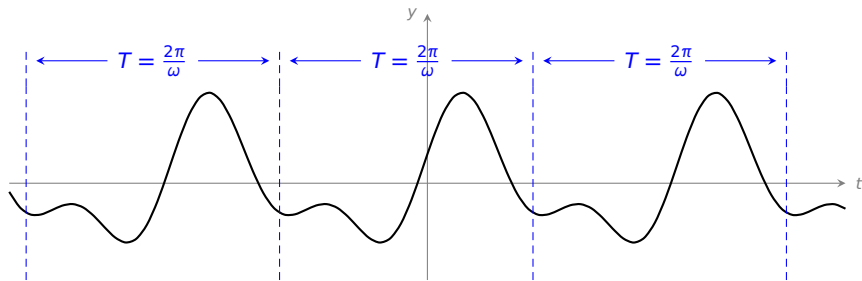


问题 是否有如下展开

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$$

周期函数

假设 $f(t)$ 是定义域为 \mathbb{R} 的周期函数，周期也是 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 。



问题 是否有如下展开

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$$

注 在电工学中，上述展开称为**谐波分析**； A_0 称为直流分量；

$A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$ 称为 n 次谐波

设 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2l$,

设 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2l$, 故区间 $[-l, l]$ 是 $f(t)$ 的一个完整周期。

设 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2l$, 故区间 $[-l, l]$ 是 $f(t)$ 的一个完整周期。

注意到 $\omega = \frac{\pi}{l}$,

设 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2l$, 故区间 $[-l, l]$ 是 $f(t)$ 的一个完整周期。

注意到 $\omega = \frac{\pi}{l}$, 所以

$$A_n \sin(n\omega t + \varphi_n) = A_n \sin\left(\frac{n\pi t}{l} + \varphi_n\right)$$

设 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2l$, 故区间 $[-l, l]$ 是 $f(t)$ 的一个完整周期。

注意到 $\omega = \frac{\pi}{l}$, 所以

$$A_n \sin(n\omega t + \varphi_n) = A_n \sin\left(\frac{n\pi t}{l} + \varphi_n\right)$$

$$\sin \varphi_n \cos \frac{n\pi t}{l} + \cos \varphi_n \sin \frac{n\pi t}{l}$$

设 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2l$, 故区间 $[-l, l]$ 是 $f(t)$ 的一个完整周期。

注意到 $\omega = \frac{\pi}{l}$, 所以

$$\begin{aligned} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n) &= A_n \sin\left(\frac{n\pi t}{l} + \varphi_n\right) \\ &= A_n \left[\sin \varphi_n \cos \frac{n\pi t}{l} + \cos \varphi_n \sin \frac{n\pi t}{l} \right] \end{aligned}$$

设 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2l$, 故区间 $[-l, l]$ 是 $f(t)$ 的一个完整周期。

注意到 $\omega = \frac{\pi}{l}$, 所以

$$\begin{aligned} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n) &= A_n \sin\left(\frac{n\pi t}{l} + \varphi_n\right) \\ &= A_n \left[\sin \varphi_n \cos \frac{n\pi t}{l} + \cos \varphi_n \sin \frac{n\pi t}{l} \right] \\ &=: a_n \cos \frac{n\pi t}{l} + b_n \sin \frac{n\pi t}{l} \end{aligned}$$

设 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2l$, 故区间 $[-l, l]$ 是 $f(t)$ 的一个完整周期。

注意到 $\omega = \frac{\pi}{l}$, 所以

$$\begin{aligned} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n) &= A_n \sin\left(\frac{n\pi t}{l} + \varphi_n\right) \\ &= A_n \left[\sin \varphi_n \cos \frac{n\pi t}{l} + \cos \varphi_n \sin \frac{n\pi t}{l} \right] \\ &=: a_n \cos \frac{n\pi t}{l} + b_n \sin \frac{n\pi t}{l} \end{aligned}$$

这时

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$$

设 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2l$, 故区间 $[-l, l]$ 是 $f(t)$ 的一个完整周期。

注意到 $\omega = \frac{\pi}{l}$, 所以

$$\begin{aligned} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n) &= A_n \sin\left(\frac{n\pi t}{l} + \varphi_n\right) \\ &= A_n \left[\sin \varphi_n \cos \frac{n\pi t}{l} + \cos \varphi_n \sin \frac{n\pi t}{l} \right] \\ &=: a_n \cos \frac{n\pi t}{l} + b_n \sin \frac{n\pi t}{l} \end{aligned}$$

这时

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi t}{l} + b_n \sin \frac{n\pi t}{l} \right)$$

设 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2l$, 故区间 $[-l, l]$ 是 $f(t)$ 的一个完整周期。

注意到 $\omega = \frac{\pi}{l}$, 所以

$$\begin{aligned} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n) &= A_n \sin\left(\frac{n\pi t}{l} + \varphi_n\right) \\ &= A_n \left[\sin \varphi_n \cos \frac{n\pi t}{l} + \cos \varphi_n \sin \frac{n\pi t}{l} \right] \\ &=: a_n \cos \frac{n\pi t}{l} + b_n \sin \frac{n\pi t}{l} \end{aligned}$$

这时

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi t}{l} + b_n \sin \frac{n\pi t}{l} \right)$$

设 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2l$, 故区间 $[-l, l]$ 是 $f(t)$ 的一个完整周期。

注意到 $\omega = \frac{\pi}{l}$, 所以

$$\begin{aligned} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n) &= A_n \sin\left(\frac{n\pi t}{l} + \varphi_n\right) \\ &= A_n \left[\sin \varphi_n \cos \frac{n\pi t}{l} + \cos \varphi_n \sin \frac{n\pi t}{l} \right] \\ &=: a_n \cos \frac{n\pi t}{l} + b_n \sin \frac{n\pi t}{l} \end{aligned}$$

这时

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi t}{l} + b_n \sin \frac{n\pi t}{l} \right)$$

以下不妨先设周期 $T = 2\pi$ ($l = \pi$)。 $f(x)$ 的周期区间为 $[-\pi, \pi]$,

设 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2l$, 故区间 $[-l, l]$ 是 $f(t)$ 的一个完整周期。

注意到 $\omega = \frac{\pi}{l}$, 所以

$$\begin{aligned} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n) &= A_n \sin\left(\frac{n\pi t}{l} + \varphi_n\right) \\ &= A_n \left[\sin \varphi_n \cos \frac{n\pi t}{l} + \cos \varphi_n \sin \frac{n\pi t}{l} \right] \\ &=: a_n \cos \frac{n\pi t}{l} + b_n \sin \frac{n\pi t}{l} \end{aligned}$$

这时

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi t}{l} + b_n \sin \frac{n\pi t}{l} \right)$$

以下不妨先设周期 $T = 2\pi$ ($l = \pi$)。 $f(x)$ 的周期区间为 $[-\pi, \pi]$, 相应的展开为

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

We are here now...

1. 傅里叶级数的概念
2. 周期为 2π 的傅里叶级数
3. 一般周期的傅里叶级数

性质 三角函数系

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

在区间 $[-\pi, \pi]$ 上正交。

性质 三角函数系

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

在区间 $[-\pi, \pi]$ 上正交。即上述任意相异两个函数的乘积，在 $[-\pi, \pi]$ 上的积分为零：

性质 三角函数系

$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$

在区间 $[-\pi, \pi]$ 上正交。即上述任意相异两个函数的乘积，在 $[-\pi, \pi]$ 上的积分为零：

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

性质 三角函数系

$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$

在区间 $[-\pi, \pi]$ 上正交。即上述任意相异两个函数的乘积，在 $[-\pi, \pi]$ 上的积分为零：

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cdot \cos nx dx = 0 \quad (k, n = 1, 2, 3, \dots, k \neq n)$$

性质 三角函数系

$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$

在区间 $[-\pi, \pi]$ 上正交。即上述任意相异两个函数的乘积，在 $[-\pi, \pi]$ 上的积分为零：

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cdot \cos nx dx = 0 \quad (k, n = 1, 2, 3, \dots, k \neq n)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cdot \sin nx dx = 0 \quad (k, n = 1, 2, 3, \dots, k \neq n)$$

性质 三角函数系

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

在区间 $[-\pi, \pi]$ 上正交。即上述任意相异两个函数的乘积，在 $[-\pi, \pi]$ 上的积分为零：

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cdot \cos nx dx = 0 \quad (k, n = 1, 2, 3, \dots, k \neq n)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cdot \sin nx dx = 0 \quad (k, n = 1, 2, 3, \dots, k \neq n)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cdot \cos nx dx = 0 \quad (k, n = 1, 2, 3, \dots, k \neq n)$$

性质 三角函数系

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

在区间 $[-\pi, \pi]$ 上正交。即上述任意相异两个函数的乘积，在 $[-\pi, \pi]$ 上的积分为零：

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cdot \cos nx dx = 0 \quad (k, n = 1, 2, 3, \dots, k \neq n)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cdot \sin nx dx = 0 \quad (k, n = 1, 2, 3, \dots, k \neq n)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cdot \cos nx dx = 0 \quad (k, n = 1, 2, 3, \dots, k \neq n)$$

另外

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

有理由认为 若假设

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

则

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

有理由认为 若假设

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

则

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

“形式推导” (1) 当 $n = 1, 2, 3, \dots$ 时,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

有理由认为 若假设

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

则

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

“形式推导” (1) 当 $n = 1, 2, 3, \dots$ 时,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right] \cos nx$$

有理由认为 若假设

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

则

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

“形式推导” (1) 当 $n = 1, 2, 3, \dots$ 时,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right] \cos nx dx$$

有理由认为 若假设

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

则

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

“形式推导” (1) 当 $n = 1, 2, 3, \dots$ 时,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right] \cos nx dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx \cdot \cos nx dx \end{aligned}$$

有理由认为 若假设

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

则

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

“形式推导” (1) 当 $n = 1, 2, 3, \dots$ 时,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right] \cos nx dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx \cdot \cos nx dx = \pi a_n \end{aligned}$$

有理由认为 若假设

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

则

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

“形式推导” (2) 当 $n = 1, 2, 3, \dots$ 时,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

有理由认为 若假设

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

则

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

“形式推导” (2) 当 $n = 1, 2, 3, \dots$ 时,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right] \sin nx dx$$

有理由认为 若假设

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

则

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

“形式推导” (2) 当 $n = 1, 2, 3, \dots$ 时,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right] \sin nx dx$$

有理由认为 若假设

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

则

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

“形式推导” (2) 当 $n = 1, 2, 3, \dots$ 时,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right] \sin nx dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} a_n \sin nx \cdot \sin nx dx \end{aligned}$$

有理由认为 若假设

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

则

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

“形式推导” (2) 当 $n = 1, 2, 3, \dots$ 时,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right] \sin nx dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} a_n \sin nx \cdot \sin nx dx = \pi a_n \end{aligned}$$

有理由认为 若假设

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

则

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

“形式推导” (3)

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

有理由认为 若假设

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

则

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

“形式推导” (3)

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right] dx$$

有理由认为 若假设

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

则

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

“形式推导” (3)

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right] dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx \end{aligned}$$

有理由认为 若假设

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

则

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

“形式推导” (3)

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right] dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx = \pi a_0 \end{aligned}$$

定义 $f(x)$ 的傅里叶级数定义为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

其中

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

定义 $f(x)$ 的傅里叶级数定义为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

其中

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

问题 何时成立 $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$?

定义 $f(x)$ 的傅里叶级数定义为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

其中

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

问题 何时成立 $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$?

定理 (收敛定理, 狄利克雷充分条件)

定理（收敛定理，狄利克雷充分条件） 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，如果它满足：

1. 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点；
2. 在一个周期内至多只有有限个极值点，

定理（收敛定理，狄利克雷充分条件） 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，如果它满足：

1. 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点；
2. 在一个周期内至多只有有限个极值点，

那么 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛，并且

定理（收敛定理，狄利克雷充分条件） 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，如果它满足：

1. 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点；
2. 在一个周期内至多只有有限个极值点，

那么 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛，并且

- 当 x 是 $f(x)$ 的连续点时，
- 当 x 是 $f(x)$ 的间断点时，

定理（收敛定理，狄利克雷充分条件） 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，如果它满足：

1. 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点；
2. 在一个周期内至多只有有限个极值点，

那么 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛，并且

- 当 x 是 $f(x)$ 的连续点时，

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

- 当 x 是 $f(x)$ 的间断点时，

定理（收敛定理，狄利克雷充分条件） 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，如果它满足：

1. 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点；
2. 在一个周期内至多只有有限个极值点，

那么 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛，并且

- 当 x 是 $f(x)$ 的连续点时，

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

- 当 x 是 $f(x)$ 的间断点时，

$$\frac{1}{2} [f(x^-) + f(x^+)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

例 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为

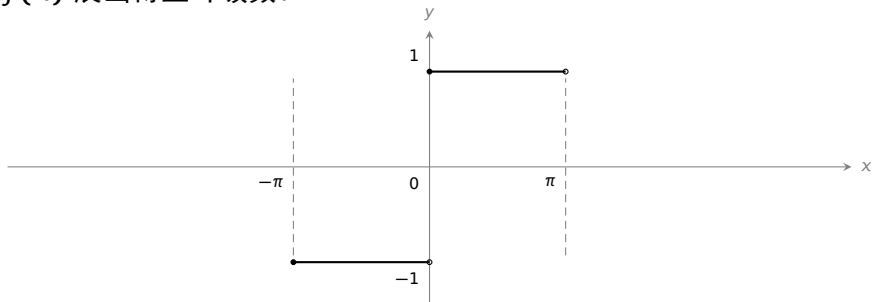
$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

将 $f(x)$ 展出傅里叶级数。

例 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

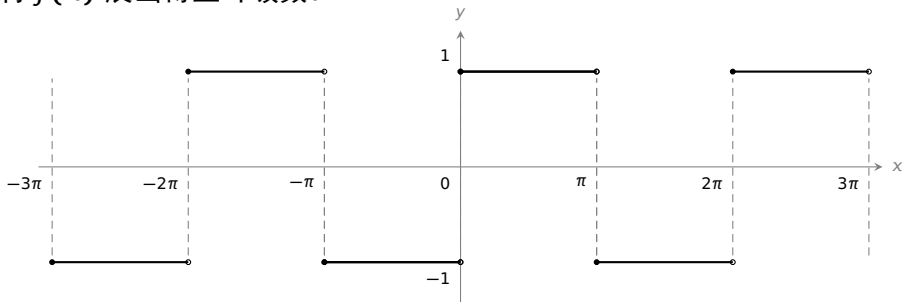
将 $f(x)$ 展出傅里叶级数。



例 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

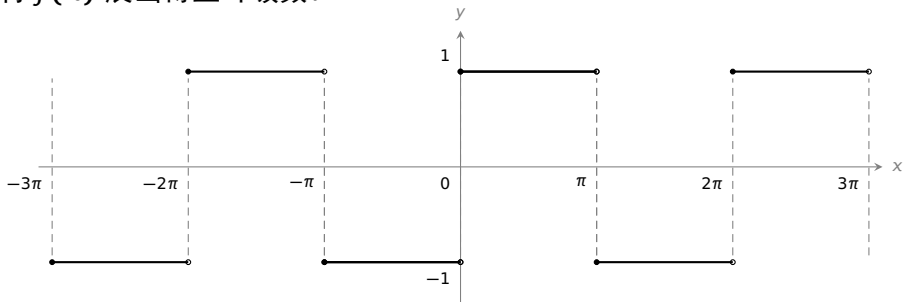
将 $f(x)$ 展出傅里叶级数。



例 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

将 $f(x)$ 展成傅里叶级数。



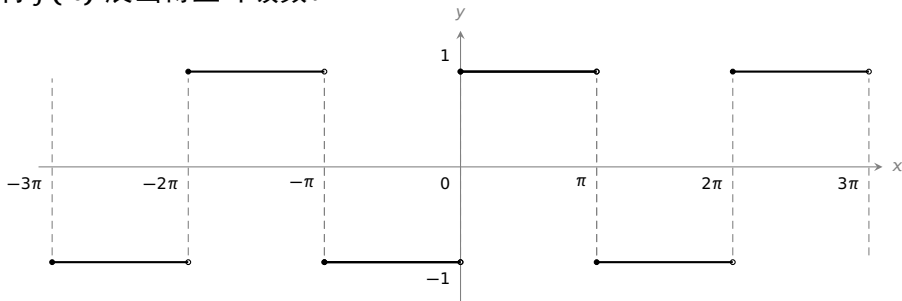
解 计算傅里叶系数如下：

$$a_n$$

例 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

将 $f(x)$ 展成傅里叶级数。



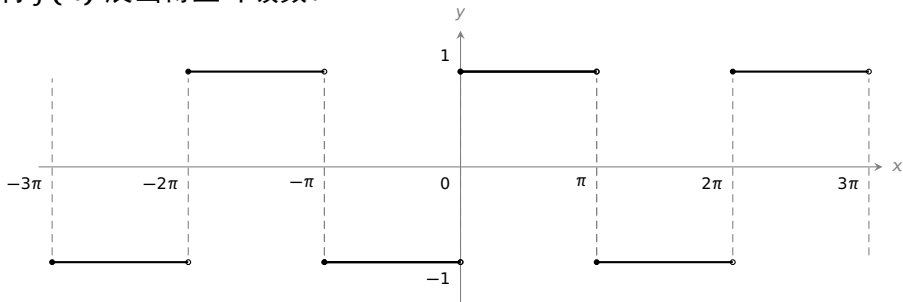
解 计算傅里叶系数如下：

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

例 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

将 $f(x)$ 展成傅里叶级数。



解 计算傅里叶系数如下：

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \xrightarrow{\text{奇偶性}} 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \stackrel{\text{奇偶性}}{=} 0,$$

$$b_n$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \xrightarrow{\text{奇偶性}} 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \stackrel{\text{奇偶性}}{=} 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \xrightarrow{\text{奇偶性}} 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \xrightarrow{\text{奇偶性}} 0,$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot (-1) \cdot \left. \frac{\cos nx}{n} \right|_0^{\pi} \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \xrightarrow{\text{奇偶性}} 0,$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot (-1) \cdot \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{n\pi} [1 - \cos n\pi] \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \xrightarrow{\text{奇偶性}} 0,$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot (-1) \cdot \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{n\pi} [1 - \cos n\pi] = \frac{2}{n\pi} [1 - (-1)^n] \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \xrightarrow{\text{奇偶性}} 0,$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot (-1) \cdot \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{n\pi} [1 - \cos n\pi] = \frac{2}{n\pi} [1 - (-1)^n] \\ &= \begin{cases} n = 1, 3, 5, \dots \\ n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \stackrel{\text{奇偶性}}{=} 0,$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot (-1) \cdot \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{n\pi} [1 - \cos n\pi] = \frac{2}{n\pi} [1 - (-1)^n] \\ &= \begin{cases} & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \xrightarrow{\text{奇偶性}} 0,$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot (-1) \cdot \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{n\pi} [1 - \cos n\pi] = \frac{2}{n\pi} [1 - (-1)^n] \\ &= \begin{cases} \frac{4}{n\pi}, & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \xrightarrow{\text{奇偶性}} 0,$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot (-1) \cdot \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{n\pi} [1 - \cos n\pi] = \frac{2}{n\pi} [1 - (-1)^n] \\ &= \begin{cases} \frac{4}{n\pi}, & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

所以傅里叶级数为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \xrightarrow{\text{奇偶性}} 0,$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot (-1) \cdot \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{n\pi} [1 - \cos n\pi] = \frac{2}{n\pi} [1 - (-1)^n] \\ &= \begin{cases} \frac{4}{n\pi}, & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

所以傅里叶级数为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \stackrel{\text{奇偶性}}{=} 0,$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot (-1) \cdot \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{n\pi} [1 - \cos n\pi] = \frac{2}{n\pi} [1 - (-1)^n] \\ &= \begin{cases} \frac{4}{n\pi}, & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

所以傅里叶级数为

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \\ &= \frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right] \end{aligned}$$

注 1 $f(x)$ 的傅里叶级数是 $\frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \cdots \right],$

注 1 $f(x)$ 的傅里叶级数是 $\frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \cdots \right]$, 利用

收敛定理分析可知:

- 当 $x \neq n\pi$ 时,

- 当 $x = n\pi$ 是,

注 1 $f(x)$ 的傅里叶级数是 $\frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \cdots \right]$, 利用

收敛定理分析可知:

- 当 $x \neq n\pi$ 时, 是 f 的连续点,
- 当 $x = n\pi$ 是,

注 1 $f(x)$ 的傅里叶级数是 $\frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \cdots \right]$, 利用收敛定理分析可知:

- 当 $x \neq n\pi$ 时, 是 f 的连续点, 此时

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \cdots \right]$$

- 当 $x = n\pi$ 是,

注 1 $f(x)$ 的傅里叶级数是 $\frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \cdots \right]$, 利用收敛定理分析可知:

- 当 $x \neq n\pi$ 时, 是 f 的连续点, 此时

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \cdots \right]$$

- 当 $x = n\pi$ 是, 是 f 的间断点,

注 1 $f(x)$ 的傅里叶级数是 $\frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \cdots \right]$, 利用收敛定理分析可知:

- 当 $x \neq n\pi$ 时, 是 f 的连续点, 此时

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \cdots \right]$$

- 当 $x = n\pi$ 是, 是 f 的间断点, 此时

$$\frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \cdots \right] = \frac{1}{2} [f(x^-) + f(x^+)]$$

注 1 $f(x)$ 的傅里叶级数是 $\frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \cdots \right]$, 利用收敛定理分析可知:

- 当 $x \neq n\pi$ 时, 是 f 的连续点, 此时

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \cdots \right]$$

- 当 $x = n\pi$ 是, 是 f 的间断点, 此时

$$\frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \cdots \right] = \frac{1}{2} [f(x^-) + f(x^+)] = 0$$

注 1 $f(x)$ 的傅里叶级数是 $\frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \cdots \right]$, 利用收敛定理分析可知:

- 当 $x \neq n\pi$ 时, 是 f 的连续点, 此时

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \cdots \right]$$

- 当 $x = n\pi$ 是, 是 f 的间断点, 此时

$$\frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \cdots \right] = \frac{1}{2} [f(x^-) + f(x^+)] = 0$$

(显然, 可直接看出当 $x = n\pi$ 时傅里叶级数的值为 0)

注 1 $f(x)$ 的傅里叶级数是 $\frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \cdots \right]$, 利用收敛定理分析可知:

- 当 $x \neq n\pi$ 时, 是 f 的连续点, 此时

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \cdots \right]$$

- 当 $x = n\pi$ 是, 是 f 的间断点, 此时

$$\frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \cdots \right] = \frac{1}{2} [f(x^-) + f(x^+)] = 0$$

(显然, 可直接看出当 $x = n\pi$ 时傅里叶级数的值为 0)

注 2 取 $x = \frac{\pi}{2}$, 可得到

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

注 1 $f(x)$ 的傅里叶级数是 $\frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \cdots \right]$, 利用收敛定理分析可知:

- 当 $x \neq n\pi$ 时, 是 f 的连续点, 此时

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \cdots \right]$$

- 当 $x = n\pi$ 是, 是 f 的间断点, 此时

$$\frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \cdots \right] = \frac{1}{2} [f(x^-) + f(x^+)] = 0$$

(显然, 可直接看出当 $x = n\pi$ 时傅里叶级数的值为 0)

注 2 取 $x = \frac{\pi}{2}$, 可得到

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

注 1 $f(x)$ 的傅里叶级数是 $\frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \cdots \right]$, 利用收敛定理分析可知:

- 当 $x \neq n\pi$ 时, 是 f 的连续点, 此时

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \cdots \right]$$

- 当 $x = n\pi$ 是, 是 f 的间断点, 此时

$$\frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \cdots \right] = \frac{1}{2} [f(x^-) + f(x^+)] = 0$$

(显然, 可直接看出当 $x = n\pi$ 时傅里叶级数的值为 0)

注 2 取 $x = \frac{\pi}{2}$, 可得到

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

注 3 奇函数 $f(x)$ 的傅里叶级数是 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$

$f(x)$ 的傅里叶级数是

$$\frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \cdots \right]$$

$f(x)$ 的傅里叶级数是

$$\frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \cdots \right] = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin[(2n-1)x]$$

$f(x)$ 的傅里叶级数是

$$\frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \cdots \right] = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin[(2n-1)x]$$

考虑部分和

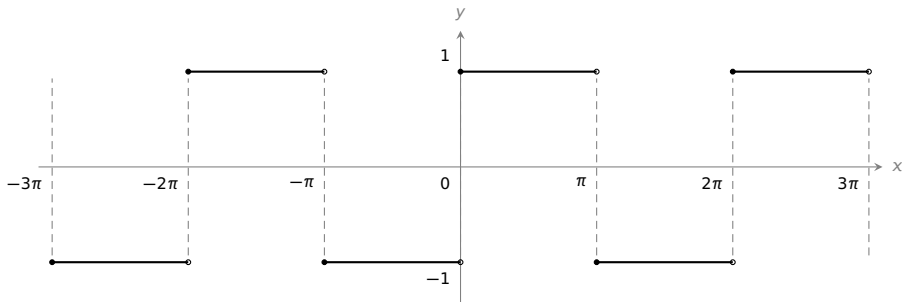
$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{2n-1} \sin[(2n-1)x]$$

$f(x)$ 的傅里叶级数是

$$\frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \cdots \right] = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin[(2n-1)x]$$

考虑部分和

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{2n-1} \sin[(2n-1)x]$$

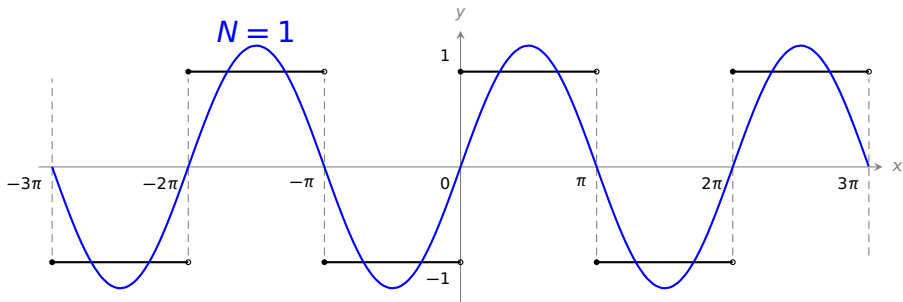


$f(x)$ 的傅里叶级数是

$$\frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \cdots \right] = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin[(2n-1)x]$$

考虑部分和

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{2n-1} \sin[(2n-1)x]$$

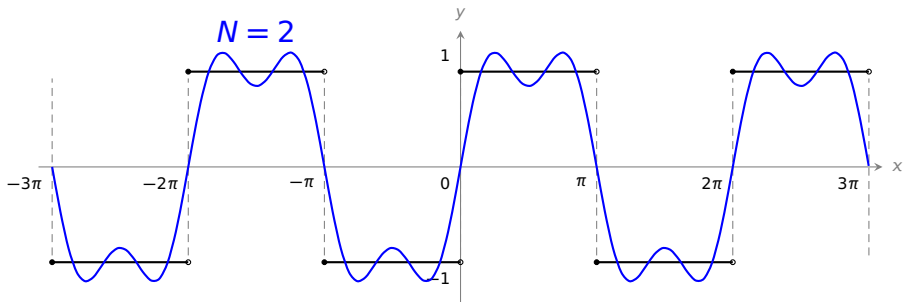


$f(x)$ 的傅里叶级数是

$$\frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \cdots \right] = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin[(2n-1)x]$$

考虑部分和

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{2n-1} \sin[(2n-1)x]$$

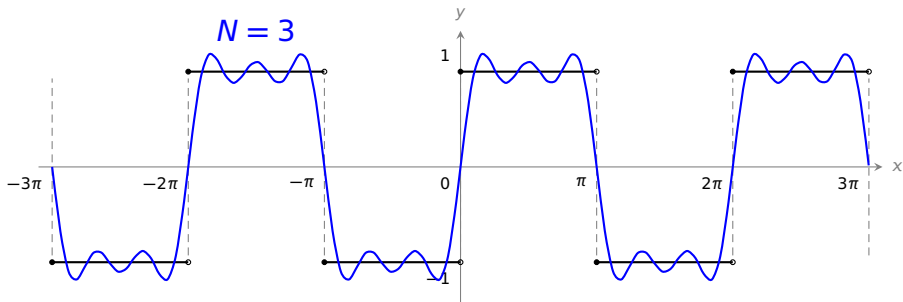


$f(x)$ 的傅里叶级数是

$$\frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \cdots \right] = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin[(2n-1)x]$$

考虑部分和

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{2n-1} \sin[(2n-1)x]$$

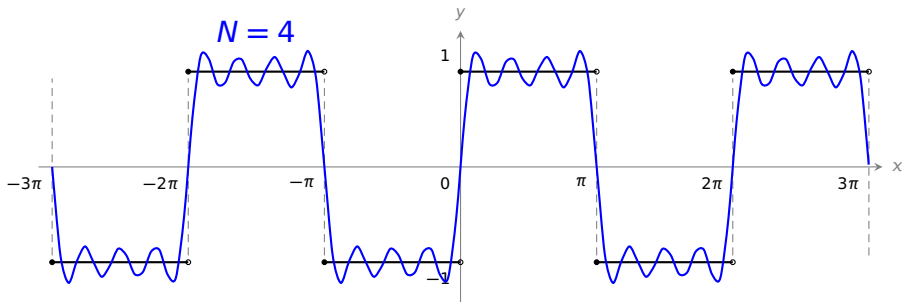


$f(x)$ 的傅里叶级数是

$$\frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \cdots \right] = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin[(2n-1)x]$$

考虑部分和

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{2n-1} \sin[(2n-1)x]$$

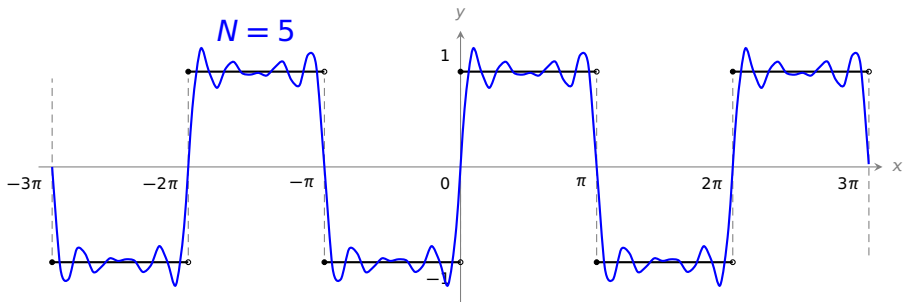


$f(x)$ 的傅里叶级数是

$$\frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \cdots \right] = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin[(2n-1)x]$$

考虑部分和

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{2n-1} \sin[(2n-1)x]$$

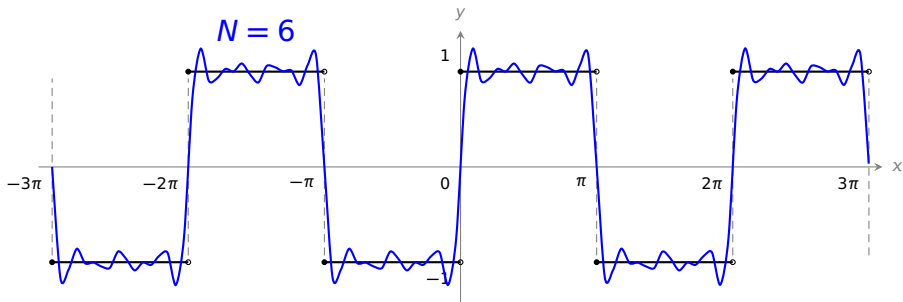


$f(x)$ 的傅里叶级数是

$$\frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \cdots \right] = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin[(2n-1)x]$$

考虑部分和

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{2n-1} \sin[(2n-1)x]$$

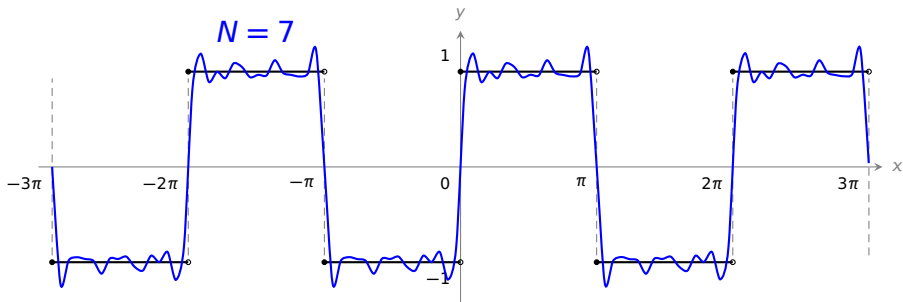


$f(x)$ 的傅里叶级数是

$$\frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \cdots \right] = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin[(2n-1)x]$$

考虑部分和

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{2n-1} \sin[(2n-1)x]$$

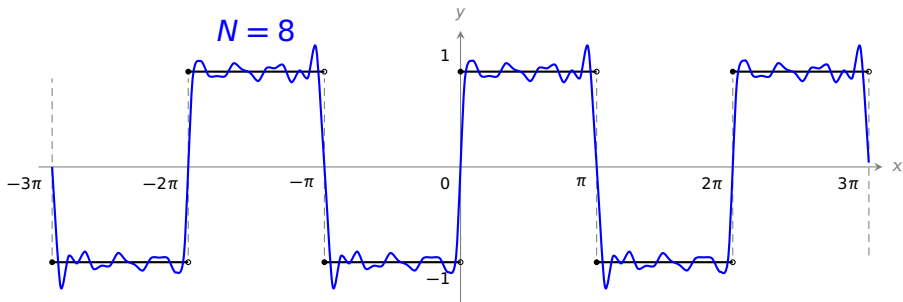


$f(x)$ 的傅里叶级数是

$$\frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \cdots \right] = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin[(2n-1)x]$$

考虑部分和

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{2n-1} \sin[(2n-1)x]$$



例 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为

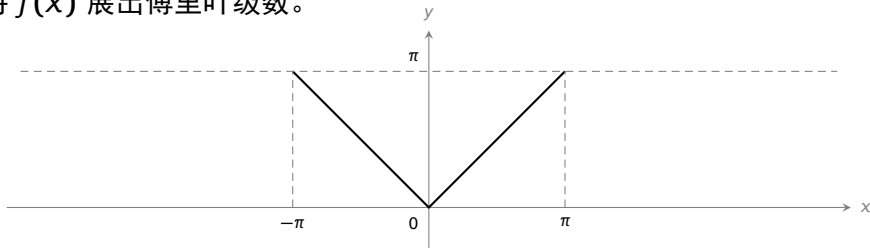
$$f(x) = |x|$$

将 $f(x)$ 展成傅里叶级数。

例 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为

$$f(x) = |x|$$

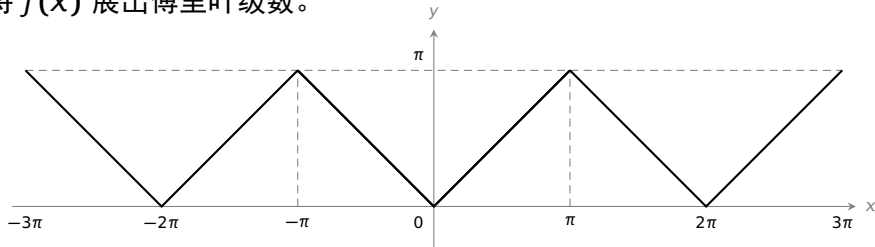
将 $f(x)$ 展成傅里叶级数。



例 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为

$$f(x) = |x|$$

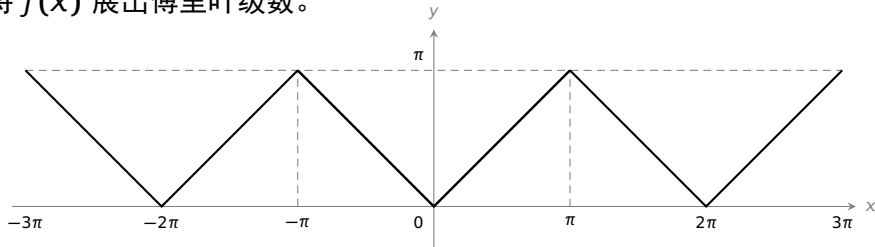
将 $f(x)$ 展成傅里叶级数。



例 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为

$$f(x) = |x|$$

将 $f(x)$ 展成傅里叶级数。



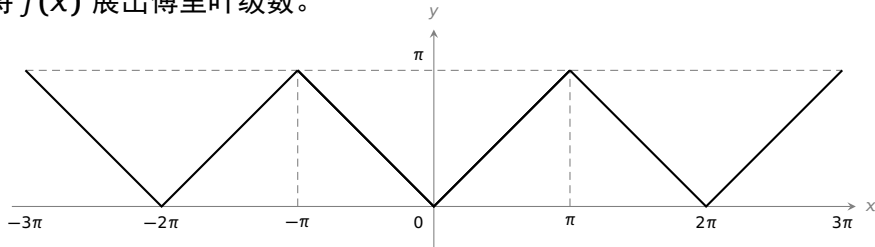
解 计算傅里叶系数如下：

$$b_n$$

例 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为

$$f(x) = |x|$$

将 $f(x)$ 展成傅里叶级数。



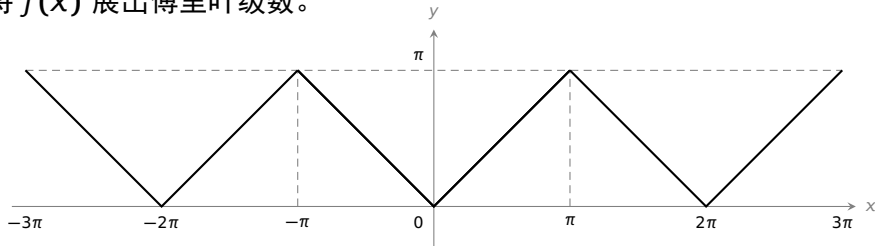
解 计算傅里叶系数如下：

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

例 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为

$$f(x) = |x|$$

将 $f(x)$ 展成傅里叶级数。



解 计算傅里叶系数如下：

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \xrightarrow{\text{奇偶性}} 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \xrightarrow{\text{奇偶性}} 0,$$

$$a_n =$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \xrightarrow{\text{奇偶性}} 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \xrightarrow{\text{奇偶性}} 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \xrightarrow{\text{奇偶性}} 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \xrightarrow{\text{奇偶性}} 0,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx \\ &= \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} x d \sin nx \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \xrightarrow{\text{奇偶性}} 0,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx \\ &= \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} x d \sin nx = \frac{2}{n\pi} \left[x \sin nx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin nx dx \right] \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \xrightarrow{\text{奇偶性}} 0,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx \\ &= \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} x d \sin nx = \frac{2}{n\pi} \left[x \sin nx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin nx dx \right] \\ &= \frac{2}{n\pi} \left[\frac{1}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi} \right] \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \stackrel{\text{奇偶性}}{=} 0,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx \\ &= \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} x d \sin nx = \frac{2}{n\pi} \left[x \sin nx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin nx dx \right] \\ &= \frac{2}{n\pi} \left[\frac{1}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{2}{n^2 \pi} \left[(-1)^n - 1 \right] \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \stackrel{\text{奇偶性}}{=} 0,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx \\ &= \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} x d \sin nx = \frac{2}{n\pi} \left[x \sin nx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin nx dx \right] \\ &= \frac{2}{n\pi} \left[\frac{1}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{2}{n^2 \pi} \left[(-1)^n - 1 \right] = \begin{cases} & n = 1, 3, 5, \dots \\ & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \stackrel{\text{奇偶性}}{=} 0,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx \\ &= \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} x d \sin nx = \frac{2}{n\pi} \left[x \sin nx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin nx dx \right] \\ &= \frac{2}{n\pi} \left[\frac{1}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{2}{n^2\pi} \left[(-1)^n - 1 \right] = \begin{cases} -\frac{4}{n^2\pi}, & n = 1, 3, 5, \dots \\ n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \stackrel{\text{奇偶性}}{=} 0,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx \\ &= \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} x d \sin nx = \frac{2}{n\pi} \left[x \sin nx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin nx dx \right] \\ &= \frac{2}{n\pi} \left[\frac{1}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{2}{n^2\pi} \left[(-1)^n - 1 \right] = \begin{cases} -\frac{4}{n^2\pi}, & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \stackrel{\text{奇偶性}}{=} 0,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx \\ &= \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} x d \sin nx = \frac{2}{n\pi} \left[x \sin nx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin nx dx \right] \\ &= \frac{2}{n\pi} \left[\frac{1}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{2}{n^2\pi} \left[(-1)^n - 1 \right] = \begin{cases} -\frac{4}{n^2\pi}, & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

$$a_0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \xrightarrow{\text{奇偶性}} 0,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx \\ &= \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} x d \sin nx = \frac{2}{n\pi} \left[x \sin nx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin nx dx \right] \\ &= \frac{2}{n\pi} \left[\frac{1}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{2}{n^2\pi} \left[(-1)^n - 1 \right] = \begin{cases} -\frac{4}{n^2\pi}, & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \xrightarrow{\text{奇偶性}} 0,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx \\ &= \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} x d \sin nx = \frac{2}{n\pi} \left[x \sin nx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin nx dx \right] \\ &= \frac{2}{n\pi} \left[\frac{1}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{2}{n^2\pi} [(-1)^n - 1] = \begin{cases} -\frac{4}{n^2\pi}, & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \xrightarrow{\text{奇偶性}} 0,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx \\ &= \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} x d \sin nx = \frac{2}{n\pi} \left[x \sin nx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin nx dx \right] \\ &= \frac{2}{n\pi} \left[\frac{1}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{2}{n^2\pi} [(-1)^n - 1] = \begin{cases} -\frac{4}{n^2\pi}, & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \stackrel{\text{奇偶性}}{=} 0,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx \\ &= \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} x d \sin nx = \frac{2}{n\pi} \left[x \sin nx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin nx dx \right] \\ &= \frac{2}{n\pi} \left[\frac{1}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{2}{n^2\pi} [(-1)^n - 1] = \begin{cases} -\frac{4}{n^2\pi}, & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^{\pi}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \xrightarrow{\text{奇偶性}} 0,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx \\ &= \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} x d \sin nx = \frac{2}{n\pi} \left[x \sin nx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin nx dx \right] \\ &= \frac{2}{n\pi} \left[\frac{1}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{2}{n^2\pi} [(-1)^n - 1] = \begin{cases} -\frac{4}{n^2\pi}, & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^{\pi} = \pi.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \xrightarrow{\text{奇偶性}} 0,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx \\ &= \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} x d \sin nx = \frac{2}{n\pi} \left[x \sin nx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin nx dx \right] \\ &= \frac{2}{n\pi} \left[\frac{1}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{2}{n^2\pi} [(-1)^n - 1] = \begin{cases} -\frac{4}{n^2\pi}, & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^{\pi} = \pi.$$

所以傅里叶级数为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \xrightarrow{\text{奇偶性}} 0,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx \\ &= \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} x d \sin nx = \frac{2}{n\pi} \left[x \sin nx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin nx dx \right] \\ &= \frac{2}{n\pi} \left[\frac{1}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{2}{n^2\pi} [(-1)^n - 1] = \begin{cases} -\frac{4}{n^2\pi}, & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^{\pi} = \pi.$$

所以傅里叶级数为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \dots \right]$$

注 1 $f(x)$ 的傅里叶级数是

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \cdots \right]$$

注 1 $f(x)$ 的傅里叶级数是

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \cdots \right]$$

又因为 $f(x)$ 是连续函数,

注 1 $f(x)$ 的傅里叶级数是

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \cdots \right]$$

又因为 $f(x)$ 是连续函数，故利用收敛定理分析可知：

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \cdots \right]$$

注 1 $f(x)$ 的傅里叶级数是

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \cdots \right]$$

又因为 $f(x)$ 是连续函数，故利用收敛定理分析可知：

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \cdots \right]$$

注 2 取 $x = 0$ ，可得到

注 1 $f(x)$ 的傅里叶级数是

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \cdots \right]$$

又因为 $f(x)$ 是连续函数, 故利用收敛定理分析可知:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \cdots \right]$$

注 2 取 $x = 0$, 可得到

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

注 1 $f(x)$ 的傅里叶级数是

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \cdots \right]$$

又因为 $f(x)$ 是连续函数, 故利用收敛定理分析可知:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \cdots \right]$$

注 2 取 $x = 0$, 可得到

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

注 3 偶函数 $f(x)$ 的傅里叶级数是 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$

$f(x)$ 的傅里叶级数是

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \cdots \right]$$

$f(x)$ 的傅里叶级数是

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \cdots \right] = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}$$

$f(x)$ 的傅里叶级数是

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \cdots \right] = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}$$

考虑部分和

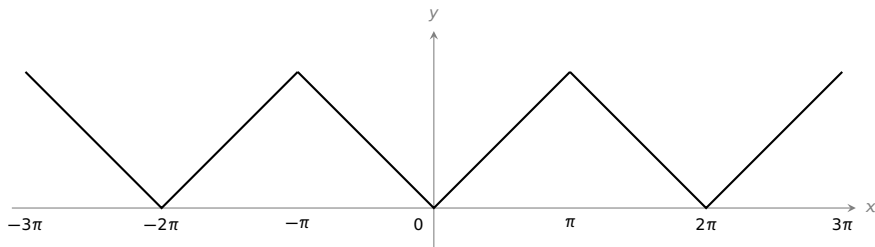
$$\sum_{n=1}^N \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos[(2n-1)x]$$

$f(x)$ 的傅里叶级数是

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \cdots \right] = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}$$

考虑部分和

$$\sum_{n=1}^N \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos[(2n-1)x]$$



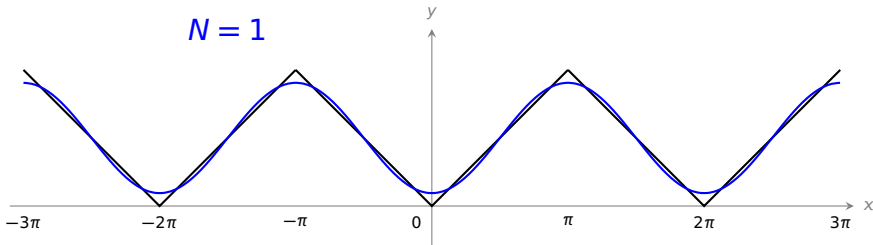
$f(x)$ 的傅里叶级数是

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \cdots \right] = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}$$

考虑部分和

$$\sum_{n=1}^N \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos[(2n-1)x]$$

$N = 1$



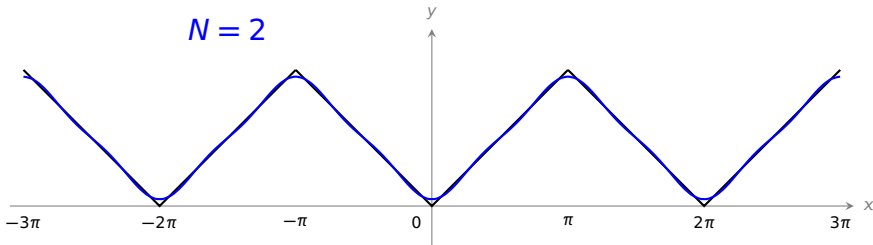
$f(x)$ 的傅里叶级数是

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \cdots \right] = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}$$

考虑部分和

$$\sum_{n=1}^N \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos[(2n-1)x]$$

$N = 2$



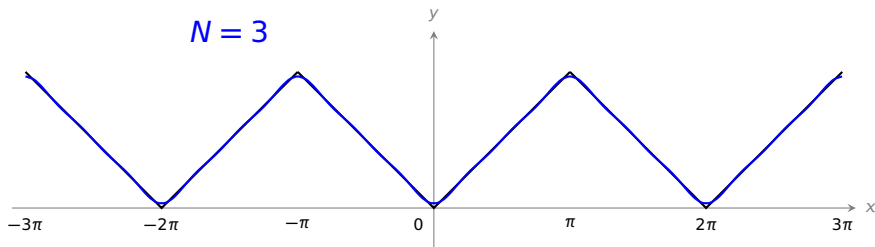
$f(x)$ 的傅里叶级数是

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \cdots \right] = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}$$

考虑部分和

$$\sum_{n=1}^N \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos[(2n-1)x]$$

$N = 3$



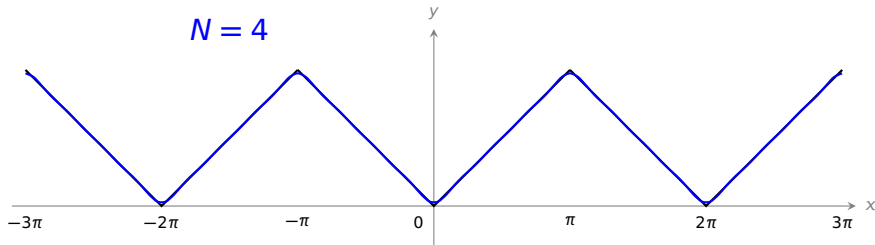
$f(x)$ 的傅里叶级数是

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \cdots \right] = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}$$

考虑部分和

$$\sum_{n=1}^N \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos[(2n-1)x]$$

$N = 4$



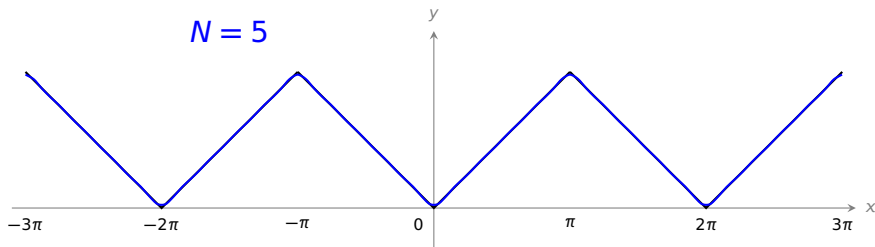
$f(x)$ 的傅里叶级数是

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \cdots \right] = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}$$

考虑部分和

$$\sum_{n=1}^N \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos[(2n-1)x]$$

$N = 5$



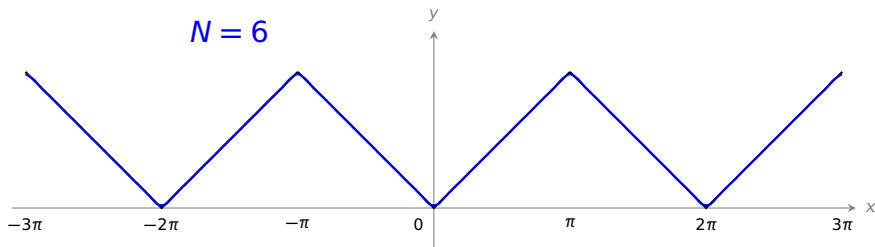
$f(x)$ 的傅里叶级数是

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \cdots \right] = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}$$

考虑部分和

$$\sum_{n=1}^N \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos[(2n-1)x]$$

$N = 6$



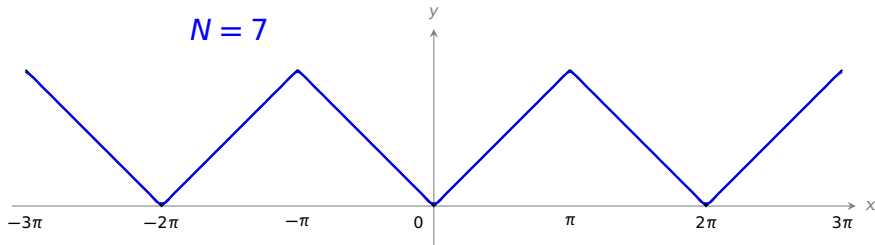
$f(x)$ 的傅里叶级数是

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \cdots \right] = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}$$

考虑部分和

$$\sum_{n=1}^N \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos[(2n-1)x]$$

$N = 7$



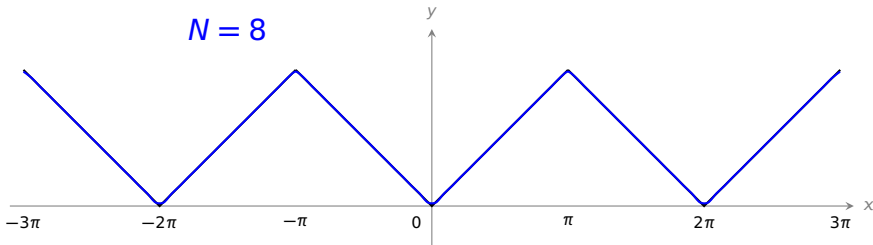
$f(x)$ 的傅里叶级数是

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \cdots \right] = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}$$

考虑部分和

$$\sum_{n=1}^N \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos[(2n-1)x]$$

$N = 8$



性质 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数,

- 若 $f(x)$ 是奇函数, 则傅里叶级数为
- 若 $f(x)$ 是偶函数, 则傅里叶级数为

性质 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数,

- 若 $f(x)$ 是奇函数, 则傅里叶级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

- 若 $f(x)$ 是偶函数, 则傅里叶级数为

性质 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数,

- 若 $f(x)$ 是奇函数, 则傅里叶级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

- 若 $f(x)$ 是偶函数, 则傅里叶级数为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

性质 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数,

- 若 $f(x)$ 是奇函数, 则傅里叶级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

- 若 $f(x)$ 是偶函数, 则傅里叶级数为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

性质 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数,

- 若 $f(x)$ 是奇函数, 则傅里叶级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

- 若 $f(x)$ 是偶函数, 则傅里叶级数为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx.$$

性质 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数,

- 若 $f(x)$ 是奇函数, 则傅里叶级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

- 若 $f(x)$ 是偶函数, 则傅里叶级数为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx.$$

证明 (1) 假设 f 为奇函数, 则

性质 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数,

- 若 $f(x)$ 是奇函数, 则傅里叶级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

- 若 $f(x)$ 是偶函数, 则傅里叶级数为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx.$$

证明 (1) 假设 f 为奇函数, 则

$$a_n =$$

$$b_n =$$

性质 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数,

- 若 $f(x)$ 是奇函数, 则傅里叶级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

- 若 $f(x)$ 是偶函数, 则傅里叶级数为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx.$$

证明 (1) 假设 f 为奇函数, 则

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$b_n =$$

性质 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数,

- 若 $f(x)$ 是奇函数, 则傅里叶级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

- 若 $f(x)$ 是偶函数, 则傅里叶级数为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx.$$

证明 (1) 假设 f 为奇函数, 则

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

性质 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数,

- 若 $f(x)$ 是奇函数, 则傅里叶级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

- 若 $f(x)$ 是偶函数, 则傅里叶级数为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx.$$

证明 (1) 假设 f 为奇函数, 则

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \xrightarrow{\text{奇偶性}} 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

性质 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数,

- 若 $f(x)$ 是奇函数, 则傅里叶级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

- 若 $f(x)$ 是偶函数, 则傅里叶级数为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx.$$

证明 (1) 假设 f 为奇函数, 则

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \xrightarrow{\text{奇偶性}} 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \xrightarrow{\text{奇偶性}} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

性质 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数,

- 若 $f(x)$ 是奇函数, 则傅里叶级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

- 若 $f(x)$ 是偶函数, 则傅里叶级数为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx.$$

证明 (2) 假设 f 为偶函数, 则

$$b_n =$$

$$a_n =$$

性质 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数,

- 若 $f(x)$ 是奇函数, 则傅里叶级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

- 若 $f(x)$ 是偶函数, 则傅里叶级数为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx.$$

证明 (2) 假设 f 为偶函数, 则

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

$$a_n =$$

性质 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数,

- 若 $f(x)$ 是奇函数, 则傅里叶级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

- 若 $f(x)$ 是偶函数, 则傅里叶级数为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx.$$

证明 (2) 假设 f 为偶函数, 则

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

性质 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数,

- 若 $f(x)$ 是奇函数, 则傅里叶级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

- 若 $f(x)$ 是偶函数, 则傅里叶级数为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx.$$

证明 (2) 假设 f 为偶函数, 则

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \stackrel{\text{奇偶性}}{=} 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

性质 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数,

- 若 $f(x)$ 是奇函数, 则傅里叶级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

- 若 $f(x)$ 是偶函数, 则傅里叶级数为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx.$$

证明 (2) 假设 f 为偶函数, 则

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \xrightarrow{\text{奇偶性}} 0$$

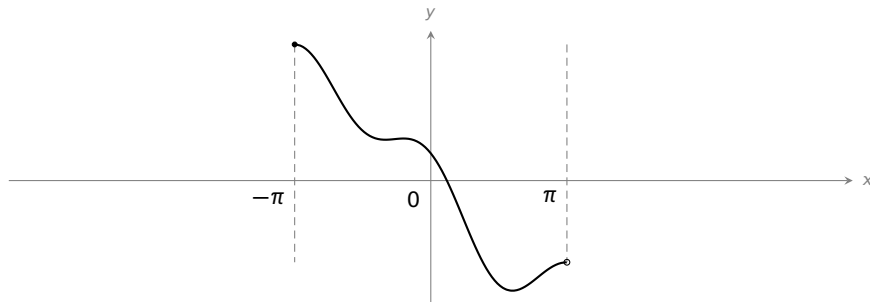
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \xrightarrow{\text{奇偶性}} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

周期延拓

设 $f(x)$ 是定义在区间 $[-\pi, \pi)$ (或 $(-\pi, \pi]$) 上的函数, 可以对其进行周期延拓, 从而得到定义在 \mathbb{R} 上的周期函数

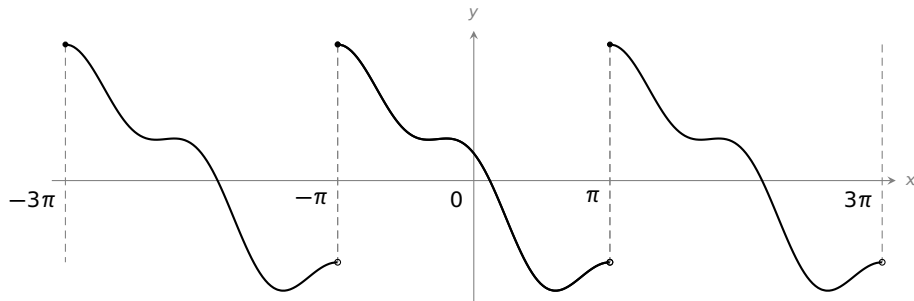
周期延拓

设 $f(x)$ 是定义在区间 $[-\pi, \pi)$ (或 $(-\pi, \pi]$) 上的函数, 可以对其进行周期延拓, 从而得到定义在 \mathbb{R} 上的周期函数, 如图:



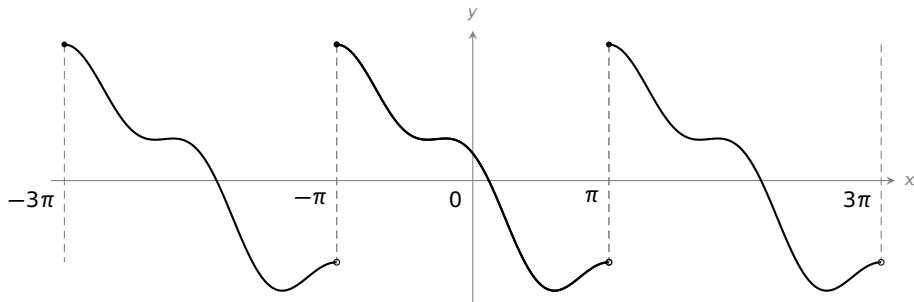
周期延拓

设 $f(x)$ 是定义在区间 $[-\pi, \pi)$ (或 $(-\pi, \pi]$) 上的函数, 可以对其进行**周期延拓**, 从而得到定义在 \mathbb{R} 上的周期函数, 如图:



周期延拓

设 $f(x)$ 是定义在区间 $[-\pi, \pi)$ (或 $(-\pi, \pi]$) 上的函数, 可以对其进行**周期延拓**, 从而得到定义在 \mathbb{R} 上的周期函数, 如图:



延拓后的周期函数任然记为 $f(x)$, 此时可以进行傅里叶展开。

奇延拓

设 $f(x)$ 是定义在区间 $(0, \pi]$ 上的函数，可以对其进行奇延拓，从而得到定义在 \mathbb{R} 上的周期奇函数。

奇延拓

设 $f(x)$ 是定义在区间 $(0, \pi]$ 上的函数，可以对其进行奇延拓，从而得到定义在 \mathbb{R} 上的周期奇函数。

奇延拓步骤：

奇延拓

设 $f(x)$ 是定义在区间 $(0, \pi]$ 上的函数，可以对其进行奇延拓，从而得到定义在 \mathbb{R} 上的周期奇函数。

奇延拓步骤：

- 定义 $f(0) = 0$

奇延拓

设 $f(x)$ 是定义在区间 $(0, \pi]$ 上的函数，可以对其进行奇延拓，从而得到定义在 \mathbb{R} 上的周期奇函数。

奇延拓步骤：

- 定义 $f(0) = 0$ ；当 $x \in (-\pi, 0)$ 时，定义 $f(x) = -f(-x)$ ；

奇延拓

设 $f(x)$ 是定义在区间 $(0, \pi]$ 上的函数，可以对其进行奇延拓，从而得到定义在 \mathbb{R} 上的周期奇函数。

奇延拓步骤：

- 定义 $f(0) = 0$ ；当 $x \in (-\pi, 0)$ 时，定义 $f(x) = -f(-x)$ ；
(此时 f 在 $(-\pi, \pi]$ 上有定义，且在 $(-\pi, \pi)$ 上为奇函数)

奇延拓

设 $f(x)$ 是定义在区间 $(0, \pi]$ 上的函数，可以对其进行奇延拓，从而得到定义在 \mathbb{R} 上的周期奇函数。

奇延拓步骤：

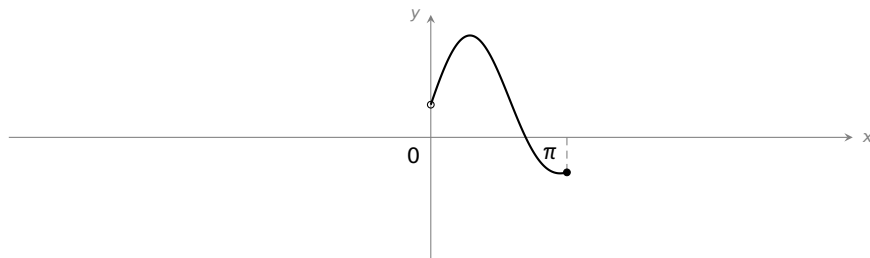
- 定义 $f(0) = 0$ ；当 $x \in (-\pi, 0)$ 时，定义 $f(x) = -f(-x)$ ；
(此时 f 在 $(-\pi, \pi]$ 上有定义，且在 $(-\pi, \pi)$ 上为奇函数)
- 周期延拓 f 在 $(-\pi, \pi]$ 上的取值。

奇延拓

设 $f(x)$ 是定义在区间 $(0, \pi]$ 上的函数，可以对其进行奇延拓，从而得到定义在 \mathbb{R} 上的周期奇函数。

奇延拓步骤：

- 定义 $f(0) = 0$ ；当 $x \in (-\pi, 0)$ 时，定义 $f(x) = -f(-x)$ ；
(此时 f 在 $(-\pi, \pi]$ 上有定义，且在 $(-\pi, \pi)$ 上为奇函数)
- 周期延拓 f 在 $(-\pi, \pi]$ 上的取值。

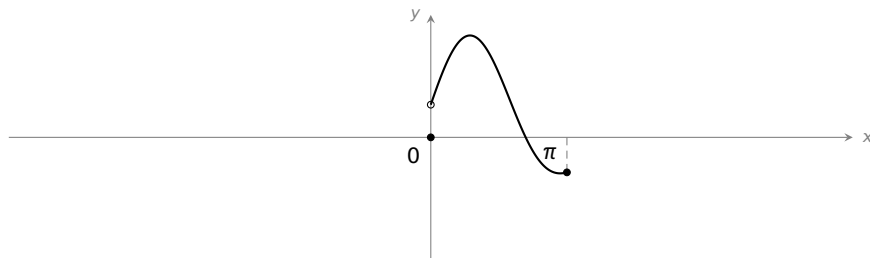


奇延拓

设 $f(x)$ 是定义在区间 $(0, \pi]$ 上的函数，可以对其进行奇延拓，从而得到定义在 \mathbb{R} 上的周期奇函数。

奇延拓步骤：

- 定义 $f(0) = 0$ ；当 $x \in (-\pi, 0)$ 时，定义 $f(x) = -f(-x)$ ；
(此时 f 在 $(-\pi, \pi]$ 上有定义，且在 $(-\pi, \pi)$ 上为奇函数)
- 周期延拓 f 在 $(-\pi, \pi]$ 上的取值。

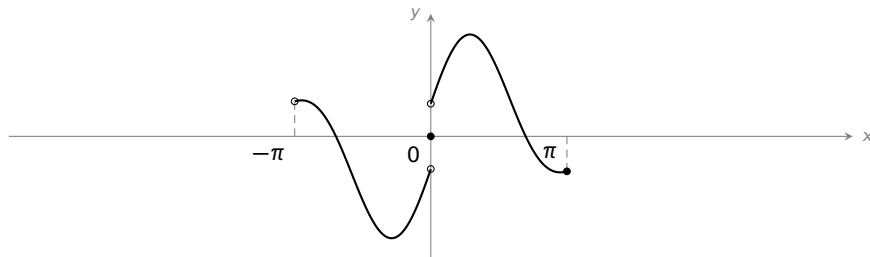


奇延拓

设 $f(x)$ 是定义在区间 $(0, \pi]$ 上的函数，可以对其进行奇延拓，从而得到定义在 \mathbb{R} 上的周期奇函数。

奇延拓步骤：

- 定义 $f(0) = 0$ ；当 $x \in (-\pi, 0)$ 时，定义 $f(x) = -f(-x)$ ；
(此时 f 在 $(-\pi, \pi]$ 上有定义，且在 $(-\pi, \pi)$ 上为奇函数)
- 周期延拓 f 在 $(-\pi, \pi]$ 上的取值。

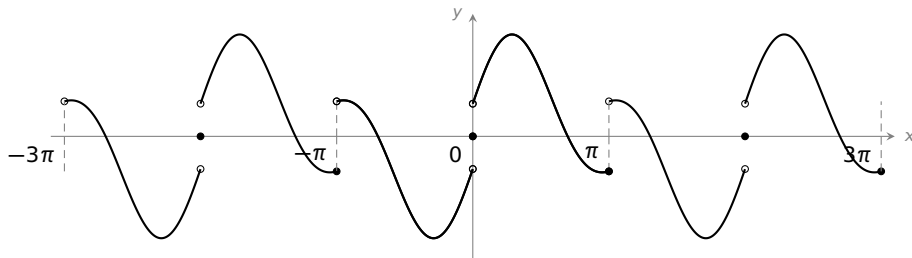


奇延拓

设 $f(x)$ 是定义在区间 $(0, \pi]$ 上的函数，可以对其进行奇延拓，从而得到定义在 \mathbb{R} 上的周期奇函数。

奇延拓步骤：

- 定义 $f(0) = 0$ ；当 $x \in (-\pi, 0)$ 时，定义 $f(x) = -f(-x)$ ；
(此时 f 在 $(-\pi, \pi]$ 上有定义，且在 $(-\pi, \pi)$ 上为奇函数)
- 周期延拓 f 在 $(-\pi, \pi]$ 上的取值。



偶延拓

设 $f(x)$ 是定义在区间 $[0, \pi]$ 上的函数，可以对其进行偶延拓，从而得到定义在 \mathbb{R} 上的周期偶函数。

偶延拓

设 $f(x)$ 是定义在区间 $[0, \pi]$ 上的函数，可以对其进行偶延拓，从而得到定义在 \mathbb{R} 上的周期偶函数。

偶延拓步骤：

偶延拓

设 $f(x)$ 是定义在区间 $[0, \pi]$ 上的函数，可以对其进行偶延拓，从而得到定义在 \mathbb{R} 上的周期偶函数。

偶延拓步骤：

- 当 $x \in [-\pi, 0]$ 时，定义 $f(x) = f(-x)$;

偶延拓

设 $f(x)$ 是定义在区间 $[0, \pi]$ 上的函数，可以对其进行偶延拓，从而得到定义在 \mathbb{R} 上的周期偶函数。

偶延拓步骤：

- 当 $x \in [-\pi, 0]$ 时，定义 $f(x) = f(-x)$ ；
(此时 f 成为定义在 $[-\pi, \pi]$ 上为偶函数)

偶延拓

设 $f(x)$ 是定义在区间 $[0, \pi]$ 上的函数，可以对其进行偶延拓，从而得到定义在 \mathbb{R} 上的周期偶函数。

偶延拓步骤：

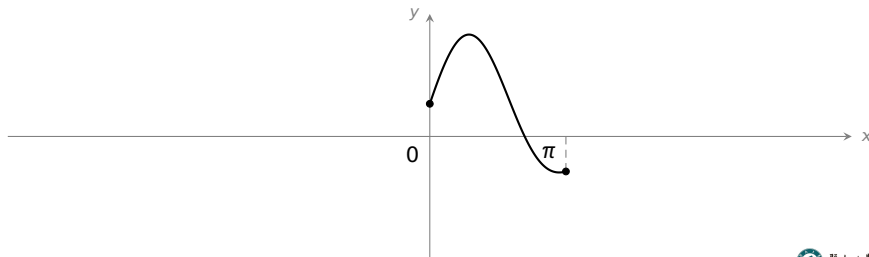
- 当 $x \in [-\pi, 0]$ 时，定义 $f(x) = f(-x)$ ；
(此时 f 成为定义在 $[-\pi, \pi]$ 上为偶函数)
- 周期延拓 f 在 $[-\pi, \pi]$ 上的取值。

偶延拓

设 $f(x)$ 是定义在区间 $[0, \pi]$ 上的函数，可以对其进行偶延拓，从而得到定义在 \mathbb{R} 上的周期偶函数。

偶延拓步骤：

- 当 $x \in [-\pi, 0]$ 时，定义 $f(x) = f(-x)$ ；
(此时 f 成为定义在 $[-\pi, \pi]$ 上为偶函数)
- 周期延拓 f 在 $[-\pi, \pi]$ 上的取值。

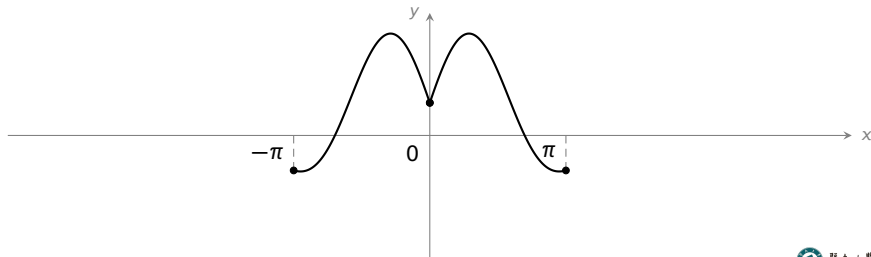


偶延拓

设 $f(x)$ 是定义在区间 $[0, \pi]$ 上的函数，可以对其进行偶延拓，从而得到定义在 \mathbb{R} 上的周期偶函数。

偶延拓步骤：

- 当 $x \in [-\pi, 0]$ 时，定义 $f(x) = f(-x)$ ；
(此时 f 成为定义在 $[-\pi, \pi]$ 上为偶函数)
- 周期延拓 f 在 $[-\pi, \pi]$ 上的取值。

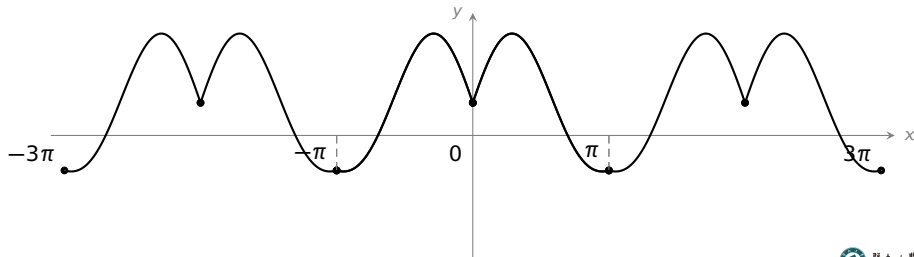


偶延拓

设 $f(x)$ 是定义在区间 $[0, \pi]$ 上的函数，可以对其进行偶延拓，从而得到定义在 \mathbb{R} 上的周期偶函数。

偶延拓步骤：

- 当 $x \in [-\pi, 0]$ 时，定义 $f(x) = f(-x)$ ；
(此时 f 成为定义在 $[-\pi, \pi]$ 上为偶函数)
- 周期延拓 f 在 $[-\pi, \pi]$ 上的取值。



We are here now...

1. 傅里叶级数的概念
2. 周期为 2π 的傅里叶级数
3. 一般周期的傅里叶级数

假设 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上周期函数, 周期为 $T = 2l$,

假设 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上周期函数，周期为 $T = 2l$ ，其傅里叶级数应为：

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

假设 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上周期函数，周期为 $T = 2l$ ，其傅里叶级数应为：

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

其中

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

假设 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上周期函数，周期为 $T = 2l$ ，其傅里叶级数应为：

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

其中

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

“推导” 令 $g(x) = f(\frac{l}{\pi}x)$,

假设 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上周期函数, 周期为 $T = 2l$, 其傅里叶级数应为:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

其中

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

“推导” 令 $g(x) = f(\frac{l}{\pi}x)$, 则 g 是周期为 2π 的周期函数:

假设 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上周期函数，周期为 $T = 2l$ ，其傅里叶级数应为：

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

其中

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

“推导” 令 $g(x) = f(\frac{l}{\pi}x)$ ，则 g 是周期为 2π 的周期函数：

$$g(x + 2\pi)$$

假设 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上周期函数, 周期为 $T = 2l$, 其傅里叶级数应为:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

其中

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

“推导” 令 $g(x) = f(\frac{l}{\pi}x)$, 则 g 是周期为 2π 的周期函数:

$$g(x + 2\pi) = f\left(\frac{l}{\pi}(x + 2\pi)\right)$$

假设 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上周期函数, 周期为 $T = 2l$, 其傅里叶级数应为:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

其中

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

“推导” 令 $g(x) = f(\frac{l}{\pi}x)$, 则 g 是周期为 2π 的周期函数:

$$g(x + 2\pi) = f\left(\frac{l}{\pi}(x + 2\pi)\right) = f\left(\frac{l}{\pi}x + 2l\right)$$

假设 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上周期函数, 周期为 $T = 2l$, 其傅里叶级数应为:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

其中

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

“推导” 令 $g(x) = f(\frac{l}{\pi}x)$, 则 g 是周期为 2π 的周期函数:

$$g(x + 2\pi) = f\left(\frac{l}{\pi}(x + 2\pi)\right) = f\left(\frac{l}{\pi}x + 2l\right) = f\left(\frac{l}{\pi}x\right)$$

假设 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上周期函数，周期为 $T = 2l$ ，其傅里叶级数应为：

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

其中

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

“推导” 令 $g(x) = f(\frac{l}{\pi}x)$ ，则 g 是周期为 2π 的周期函数：

$$g(x + 2\pi) = f\left(\frac{l}{\pi}(x + 2\pi)\right) = f\left(\frac{l}{\pi}x + 2l\right) = f\left(\frac{l}{\pi}x\right) = g(x)$$

假设 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上周期函数, 周期为 $T = 2l$, 其傅里叶级数应为:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

其中

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

“推导” 令 $g(x) = f(\frac{l}{\pi}x)$, 则 g 是周期为 2π 的周期函数:

$$g(x + 2\pi) = f\left(\frac{l}{\pi}(x + 2\pi)\right) = f\left(\frac{l}{\pi}x + 2l\right) = f\left(\frac{l}{\pi}x\right) = g(x)$$

所以

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right)$$

假设 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上周期函数, 周期为 $T = 2l$, 其傅里叶级数应为:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

其中

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

“推导” 令 $g(x) = f(\frac{l}{\pi}x)$, 则 g 是周期为 2π 的周期函数:

$$g(x + 2\pi) = f\left(\frac{l}{\pi}(x + 2\pi)\right) = f\left(\frac{l}{\pi}x + 2l\right) = f\left(\frac{l}{\pi}x\right) = g(x)$$

所以

$$f\left(\frac{l}{\pi}x\right) = g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right)$$

既然

$$f\left(\frac{l}{\pi}x\right) = g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right)$$

既然

$$f\left(\frac{l}{\pi}x\right) = g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right)$$

所以

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

既然

$$f\left(\frac{l}{\pi}x\right) = g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right)$$

所以

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

其中

$$a_n$$

$$b_n$$

既然

$$f\left(\frac{l}{\pi}x\right) = g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right)$$

所以

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

其中

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(z) \cos n z dz$$

$$b_n$$

既然

$$f\left(\frac{l}{\pi}x\right) = g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right)$$

所以

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

其中

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(z) \cos n z dz$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(z) \sin n z dz$$

既然

$$f\left(\frac{l}{\pi}x\right) = g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right)$$

所以

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

其中

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(z) \cos n z dz = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}z\right) \cos n z dz$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(z) \sin n z dz$$

既然

$$f\left(\frac{l}{\pi}x\right) = g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right)$$

所以

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

其中

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(z) \cos n z dz = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}z\right) \cos n z dz$$

$$\underline{\underline{x = \frac{l}{\pi}z}}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(z) \sin n z dz$$

既然

$$f\left(\frac{l}{\pi}x\right) = g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right)$$

所以

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

其中

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(z) \cos n z dz = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}z\right) \cos n z dz$$

$$\xrightarrow{x=\frac{l}{\pi}z} \frac{1}{\pi} \int f(x) \cos \frac{n\pi x}{l}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(z) \sin n z dz$$

既然

$$f\left(\frac{l}{\pi}x\right) = g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right)$$

所以

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

其中

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(z) \cos n z dz = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}z\right) \cos n z dz$$

$$\stackrel{x=\frac{l}{\pi}z}{=} \frac{1}{\pi} \int f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} d\left(\frac{\pi}{l}x\right)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(z) \sin n z dz$$

既然

$$f\left(\frac{l}{\pi}x\right) = g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right)$$

所以

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

其中

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(z) \cos n z dz = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}z\right) \cos n z dz$$

$$\stackrel{x=\frac{l}{\pi}z}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} d\left(\frac{\pi}{l}x\right)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(z) \sin n z dz$$

既然

$$f\left(\frac{l}{\pi}x\right) = g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right)$$

所以

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

其中

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(z) \cos n z d z = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi} z\right) \cos n z d z \\ &\stackrel{x=\frac{l}{\pi} z}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n \pi x}{l} d\left(\frac{\pi}{l} x\right) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n \pi x}{l} d x, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(z) \sin n z d z \end{aligned}$$

既然

$$f\left(\frac{l}{\pi}x\right) = g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right)$$

所以

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

其中

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(z) \cos n z d z = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi} z\right) \cos n z d z \\ &\stackrel{x=\frac{l}{\pi} z}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n \pi x}{l} d\left(\frac{\pi}{l} x\right) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n \pi x}{l} d x, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(z) \sin n z d z = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi} z\right) \sin n z d z \end{aligned}$$

既然

$$f\left(\frac{l}{\pi}x\right) = g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right)$$

所以

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

其中

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(z) \cos n z dz = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}z\right) \cos n z dz$$
$$\xrightarrow{x=\frac{l}{\pi}z} \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} d\left(\frac{\pi}{l}x\right) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(z) \sin n z dz = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}z\right) \sin n z dz$$
$$\xrightarrow{x=\frac{l}{\pi}z}$$

既然

$$f\left(\frac{l}{\pi}x\right) = g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right)$$

所以

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

其中

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(z) \cos n z dz = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}z\right) \cos n z dz \\ &\stackrel{x=\frac{l}{\pi}z}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} d\left(\frac{\pi}{l}x\right) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(z) \sin n z dz = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}z\right) \sin n z dz \\ &\stackrel{x=\frac{l}{\pi}z}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \end{aligned}$$

既然

$$f\left(\frac{l}{\pi}x\right) = g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right)$$

所以

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

其中

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(z) \cos n z dz = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}z\right) \cos n z dz \\ &\stackrel{x=\frac{l}{\pi}z}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} d\left(\frac{\pi}{l}x\right) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(z) \sin n z dz = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}z\right) \sin n z dz \\ &\stackrel{x=\frac{l}{\pi}z}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} d\left(\frac{\pi}{l}x\right) \end{aligned}$$

既然

$$f\left(\frac{l}{\pi}x\right) = g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right)$$

所以

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

其中

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(z) \cos n z dz = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}z\right) \cos n z dz \\ &\stackrel{x=\frac{l}{\pi}z}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} d\left(\frac{\pi}{l}x\right) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(z) \sin n z dz = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}z\right) \sin n z dz \\ &\stackrel{x=\frac{l}{\pi}z}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} d\left(\frac{\pi}{l}x\right) \end{aligned}$$

既然

$$f\left(\frac{l}{\pi}x\right) = g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right)$$

所以

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

其中

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(z) \cos n z dz = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}z\right) \cos n z dz$$

$$\stackrel{x=\frac{l}{\pi}z}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} d\left(\frac{\pi}{l}x\right) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(z) \sin n z dz = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}z\right) \sin n z dz$$

$$\stackrel{x=\frac{l}{\pi}z}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} d\left(\frac{\pi}{l}x\right) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

傅里叶变换在工程中有许多应用，更多内容可以浏览在 “Stanford Engineering Everywhere” 中的课程 “[The Fourier Transform and Its Applications](#)”，讲义在 [这里](#)。