第 05 周作业

应于 19-04-2018 提交

练习 1. 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 与平面 $x + y + z = 0$ 在 xoy 坐标面上的投影曲线方程。

练习 2. 分别求母线平行于 x 轴及 y 轴，而且通过曲线 $\begin{cases} 2x^2 + y^2 + z^2 = 16 & (1) \\ x^2 - y^2 + z^2 = 0 & (2) \end{cases}$ 的柱面。

练习 3. 化曲线的一般方程 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9 \\ y=z \end{cases}$ 为参数方程。

练习 4. 填空

函数	定义域	类型（填：闭集/开集，有界集/无界集，连通/不连通）
$z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$	$D=\{(x,y)\mid y\geq 0,\, x\geq 0且x^2\geq y\}$	
$z=\frac{1}{\sqrt{x+y}}+\frac{1}{\sqrt{x-y}}$	$D=\{(x,y)\mid x+y>0且x-y>0\}$	

并分别画出上述两定义域 D，在图上标示哪部分是内点，哪部分是外点，哪部分是边界。

练习 5. 画出二元函数 $z=2-x^2-y^2$ 的函数图形，其中函数定义域为 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 1\}$。

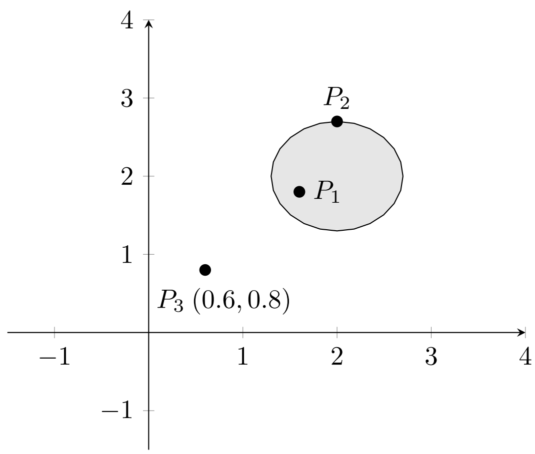
练习 6. 设 E 是平面上一个点集，则平面上任意一点 P 只能是一下三种的一种：(1) E 的内点；(2) E 的外点；(3) E 的边界点。现假设点 Q 是 E 的聚点，则可以证明 Q 或者为 E 的内点，或者为 E 的边界点；也就是

$$\{\text{全体聚点}\} \subset \{\text{内点}\} \cup \{\text{边界点}\}$$

但一般而言，$\{\text{全体聚点}\}$ 未必与并集 $\{\text{内点}\} \cup \{\text{边界点}\}$ 相同。

以下是一个例子

假设点集 $E = \{(x,\, y)|\, (x-2)^2 + (y-2)^2 \le 0.7^2\} \cup \{(0.6,\, 0.8)\}$（如下图）。填写（请填上 ✓ 或 ×）



	内点	边界点	聚点
$P_1(1.6\,1.8)$			
$P_2(2,\, 2.7)$			
$P_3(0.6,\, 0.8)$			

练习 7. 证明下列极限不存在

1. $\lim_{(x,\, y)\to(0,\, 0)} \frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

2. $\lim_{(x,\, y)\to(0,\, 0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

练习 8. 求下列函数的偏导数

(1) $s = \dfrac{u^2 + v^2}{uv}$; (2) $z = \sin(xy) + \cos^2(xy)$; (3) $z = (1 + xy)^y$; (4) $u = \arctan(x - y)^z$.

练习 9. 设 $z = f(x,\, y)$，计算 z 在某一点 $(x_0,\, y_0)$ 处的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,\, y_0)$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,\, y_0)$ 有两种方法：

1. 先求出偏导函数 $\frac{\partial f}{\partial x}(x,\, y)$ 及 $\frac{\partial f}{\partial y}(x,\, y)$，再将 $(x,\, y) = (x_0,\, y_0)$ 代入偏导函数，计算该点处的偏导数值。
2. 直接利用定义

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x}(x_0,\, y_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x,\, y_0) - f(x_0,\, y_0)}{\Delta x} = \frac{d}{dx}\left[f(x,\, y_0)\right]\Big|_{x=x_0}, \\ \frac{\partial z}{\partial y}(x_0,\, y_0) &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0,\, y_0 + \Delta y) - f(x_0,\, y_0)}{\Delta y} = \frac{d}{dy}\left[f(x_0,\, y)\right]\Big|_{y=y_0}. \end{aligned}$$

现在设 $f(x,\, y) = x + (y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$，利用上述两种方法分别求 $f_x(x,\, 1)$。

练习 10. 设 $f(x,\, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, & (x,\, y) \neq (0,\, 0) \\ 0, & (x,\, y) = (0,\, 0) \end{cases}$. 求 $\frac{\partial f}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial y}$。