§8.7 二重积分

2016-2017 学年 II

Outline

We are here now...

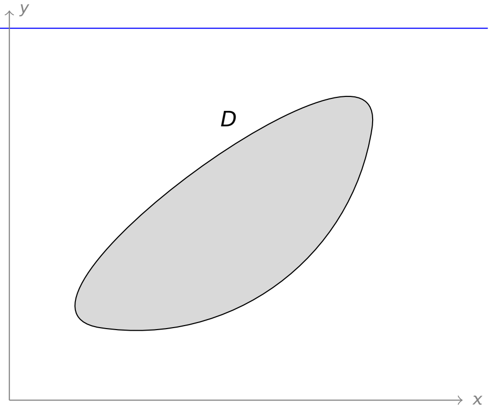
1. 二重积分的基本概念

2. 二重积分的计算

平面薄片的质量

假设

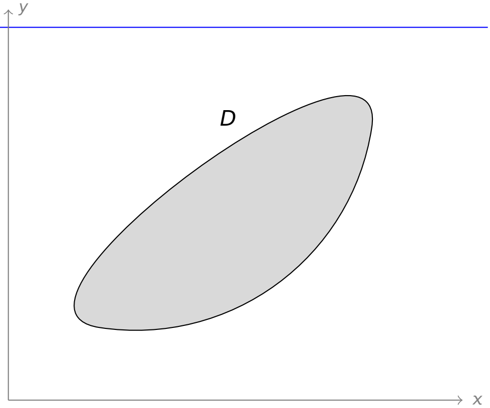
- 区域 D 为平面薄片
- 密度为 μ
- 质量为 m



平面薄片的质量

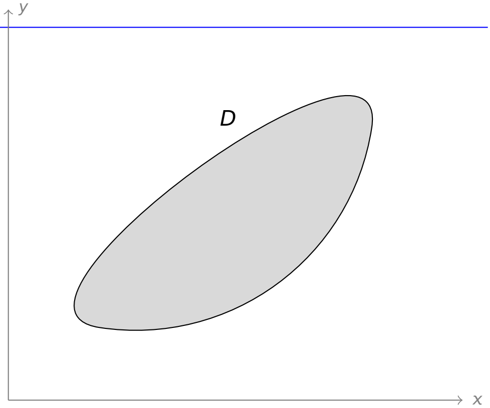
假设

- 区域 D 为平面薄片
- 密度为 μ
- 质量为 m



- 当薄片均匀时（$\mu =$ 常数），
- 当薄片非均匀时（$\mu = \mu(x, y)$ 为 D 上函数），

平面薄片的质量



假设

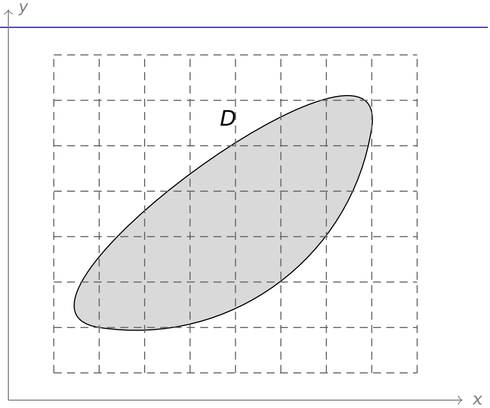
- 区域 D 为平面薄片
- 密度为 μ
- 质量为 m

- 当薄片均匀时（$\mu =$ 常数），

$$m = \mu \cdot \mathrm{Area}(D)$$

- 当薄片非均匀时（$\mu = \mu(x, y)$ 为 D 上函数），

平面薄片的质量



假设

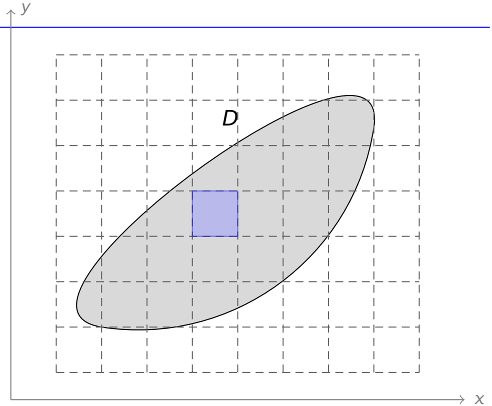
- 区域 D 为平面薄片
- 密度为 μ
- 质量为 m

- 当薄片均匀时（$\mu=$ 常数），

$$m=\mu\cdot\mathrm{Area}(D)$$

- 当薄片非均匀时（$\mu=\mu(x,y)$ 为 D 上函数），利用微元法可知

平面薄片的质量



假设

- 区域 D 为平面薄片
- 密度为 μ
- 质量为 m

- 当薄片均匀时（$\mu =$ 常数），

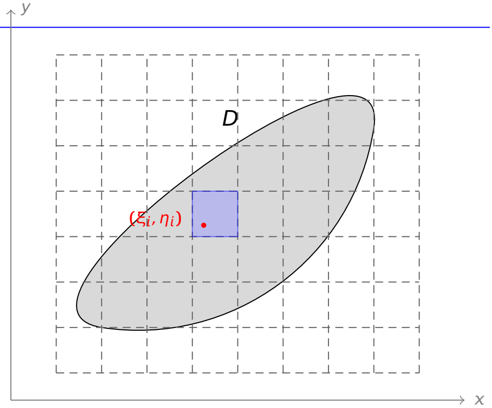
$$m = \mu \cdot \mathrm{Area}(D)$$

- 当薄片非均匀时（$\mu = \mu(x, y)$ 为 D 上函数），利用微元法可知

平面薄片的质量

假设

- 区域 D 为平面薄片
- 密度为 μ
- 质量为 m



- 当薄片均匀时（$\mu =$ 常数），

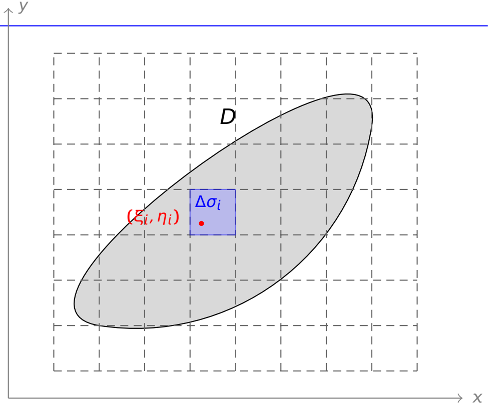
$$m = \mu \cdot \mathrm{Area}(D)$$

- 当薄片非均匀时（$\mu = \mu(x, y)$ 为 D 上函数），利用微元法可知

平面薄片的质量

假设

- 区域 D 为平面薄片
- 密度为 μ
- 质量为 m



- 当薄片均匀时（$\mu =$ 常数），

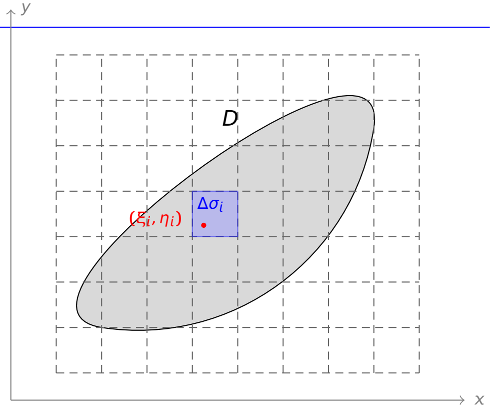
$$m = \mu \cdot \mathrm{Area}(D)$$

- 当薄片非均匀时（$\mu = \mu(x, y)$ 为 D 上函数），利用微元法可知

平面薄片的质量

假设

- 区域 D 为平面薄片
- 密度为 μ
- 质量为 m



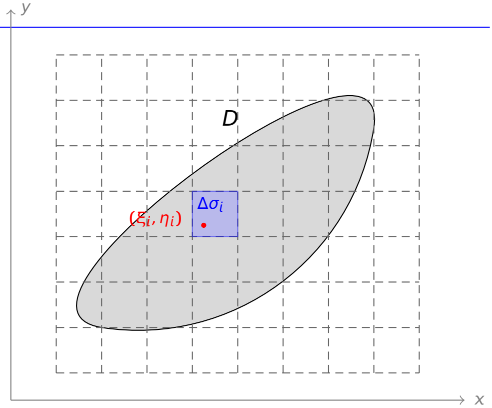
- 当薄片均匀时（$\mu =$ 常数），

$$m = \mu \cdot \mathrm{Area}(D)$$

- 当薄片非均匀时（$\mu = \mu(x, y)$ 为 D 上函数），利用微元法可知

$$\mu(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

平面薄片的质量



假设

- 区域 D 为平面薄片
- 密度为 μ
- 质量为 m

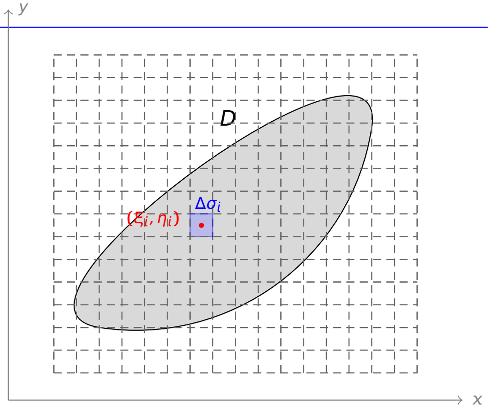
- 当薄片均匀时（$\mu =$ 常数），

$$m = \mu \cdot \mathrm{Area}(D)$$

- 当薄片非均匀时（$\mu = \mu(x, y)$ 为 D 上函数），利用微元法可知

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

平面薄片的质量



假设

- 区域 D 为平面薄片
- 密度为 μ
- 质量为 m

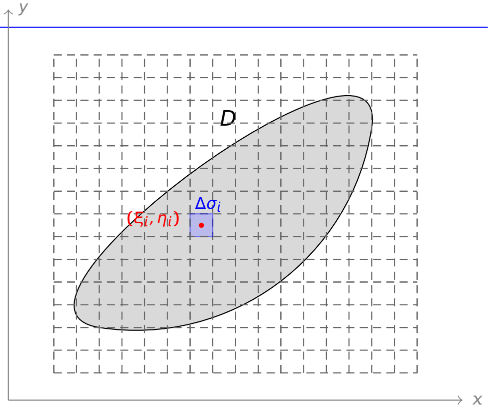
- 当薄片均匀时（$\mu=$ 常数），

$$m=\mu\cdot\mathrm{Area}(D)$$

- 当薄片非均匀时（$\mu=\mu(x,y)$ 为 D 上函数），利用微元法可知

$$\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

平面薄片的质量



假设

- 区域 D 为平面薄片
- 密度为 μ
- 质量为 m

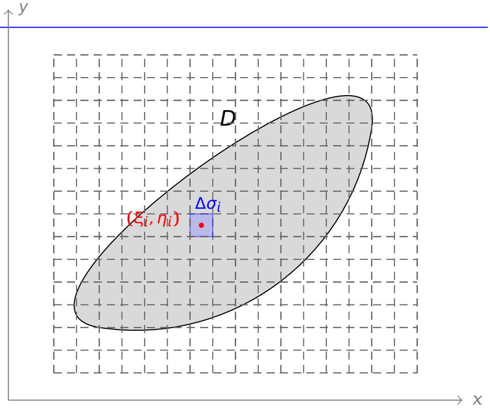
- 当薄片均匀时（$\mu =$ 常数），

$$m = \mu \cdot \mathrm{Area}(D)$$

- 当薄片非均匀时（$\mu = \mu(x, y)$ 为 D 上函数），利用微元法可知

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \mu(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

平面薄片的质量



假设

- 区域 D 为平面薄片
- 密度为 μ
- 质量为 m

- 当薄片均匀时（$\mu =$ 常数），

$$m = \mu \cdot \mathrm{Area}(D)$$

- 当薄片非均匀时（$\mu = \mu(x, y)$ 为 D 上函数），利用微元法可知

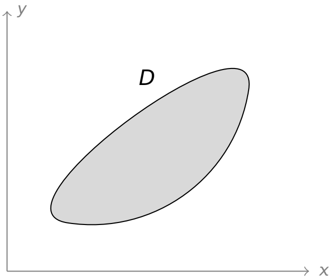
$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \mu(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

二重积分的定义

二重积分定义 设

- D 是平面上有界闭区域，
- $f(x, y)$ 是 D 上的有界函数，

若

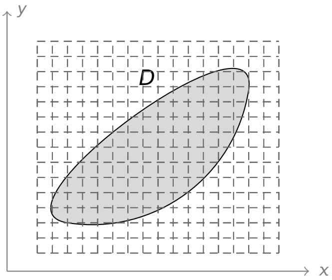


二重积分的定义

二重积分定义 设

- D 是平面上有界闭区域，
- $f(x, y)$ 是 D 上的有界函数，

若

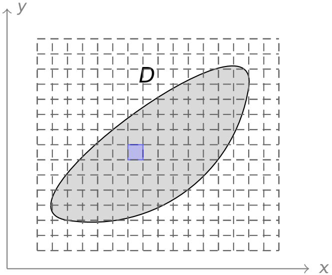


二重积分的定义

二重积分定义 设

- D 是平面上有界闭区域，
- $f(x, y)$ 是 D 上的有界函数，

若

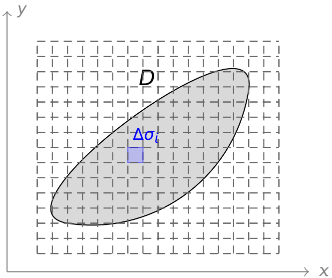


二重积分的定义

二重积分定义 设

- D 是平面上有界闭区域，
- $f(x, y)$ 是 D 上的有界函数，

若

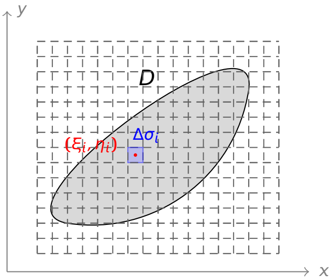


二重积分的定义

二重积分定义 设

- D 是平面上有界闭区域,
- $f(x, y)$ 是 D 上的有界函数,

若



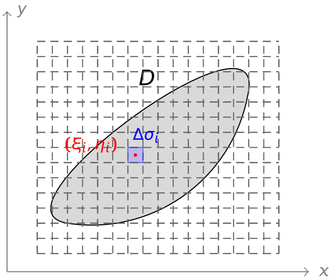
二重积分的定义

二重积分定义 设

- D 是平面上有界闭区域,
- $f(x, y)$ 是 D 上的有界函数,

若

$$f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$



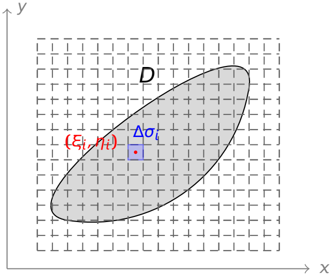
二重积分的定义

二重积分定义 设

- D 是平面上有界闭区域，
- $f(x, y)$ 是 D 上的有界函数，

若

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$



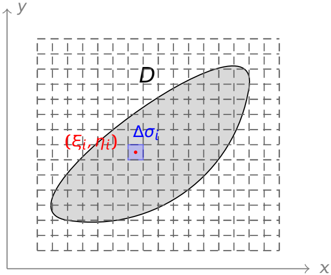
二重积分的定义

二重积分定义 设

- D 是平面上有界闭区域，
- $f(x, y)$ 是 D 上的有界函数，

若

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$



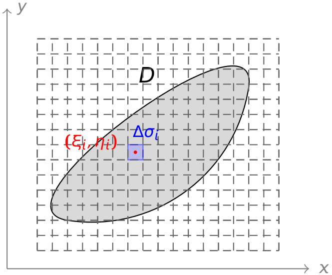
二重积分的定义

二重积分定义 设

- D 是平面上有界闭区域,
- $f(x,y)$ 是 D 上的有界函数,

若

- 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 存在,



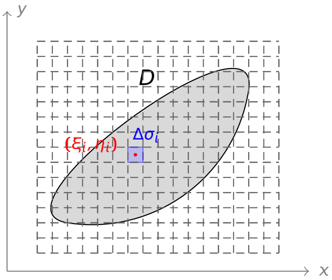
二重积分的定义

二重积分定义 设

- D 是平面上有界闭区域，
- $f(x, y)$ 是 D 上的有界函数，

若

- 极限 $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$存在，且极限
- 与上述 D 的划分、(ξ_i, η_i) 的选取无关，



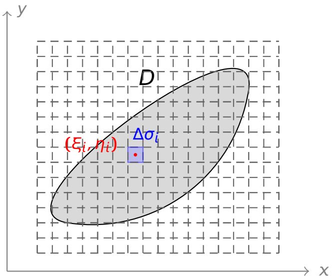
二重积分的定义

二重积分定义 设

- D 是平面上有界闭区域，
- $f(x, y)$ 是 D 上的有界函数，

若

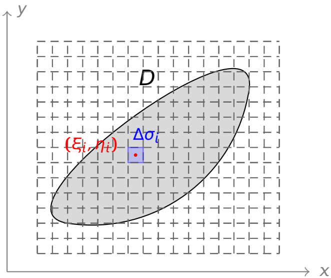
- 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$存在，且极限
- 与上述 D 的划分、(ξ_i, η_i) 的选取无关，



则定义

$$\iint_D f(x, y)d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

二重积分的定义



二重积分定义 设

- D 是平面上有界闭区域，
- $f(x,y)$ 是 D 上的有界函数，

若

- 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$存在，且极限
- 与上述 D 的划分、(ξ_i,η_i) 的选取无关，

则定义

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

称为 $f(x,y)$ 在 D 上的二重积分。

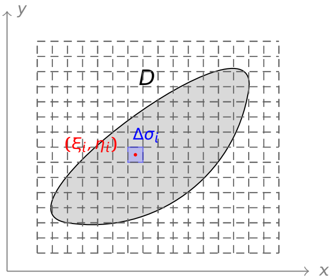
二重积分的定义

二重积分定义 设

- D 是平面上有界闭区域，
- $f(x, y)$ 是 D 上的有界函数，

若

- 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$存在，且极限
- 与上述 D 的划分、(ξ_i, η_i) 的选取无关，



则定义

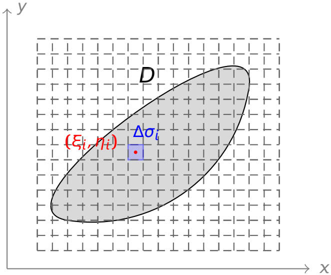
$$\iint_D f(x, y)d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

称为 $f(x, y)$ 在 D 上的二重积分。$d\sigma$ 称为面积元素。

二重积分的定义

二重积分定义 设

- D 是平面上有界闭区域，
- $f(x, y)$ 是 D 上的有界函数，



若

- 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$存在，且极限
- 与上述 D 的划分、(ξ_i, η_i) 的选取无关，

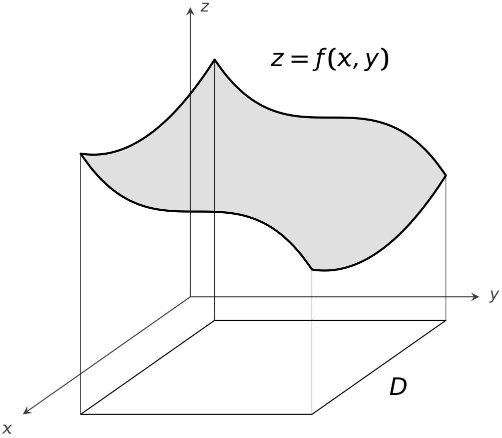
则定义

$$\iint_D f(x, y)d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

称为 $f(x, y)$ 在 D 上的二重积分。$d\sigma$ 称为面积元素。

定理 若 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则 $\iint_D f(x, y)d\sigma$ 存在。

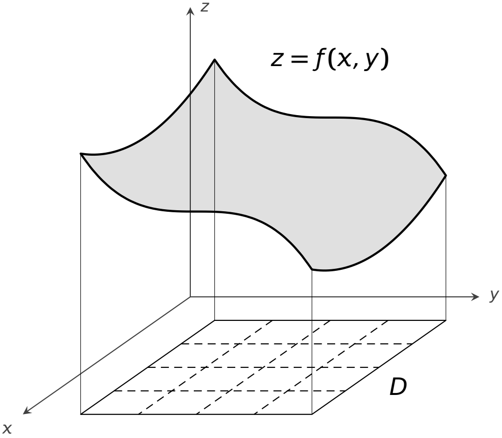
二重积分的几何意义



曲顶柱体的体积：

$$V$$

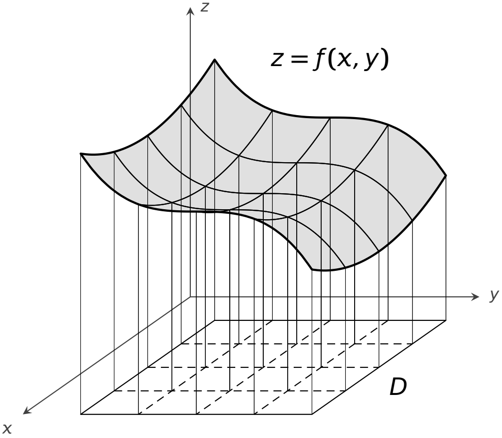
二重积分的几何意义



曲顶柱体的体积：

$$V$$

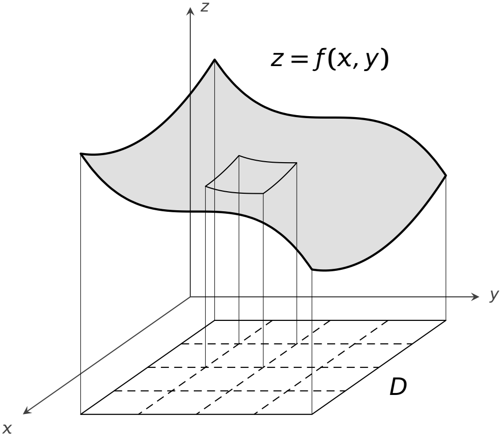
二重积分的几何意义



曲顶柱体的体积：

$$V$$

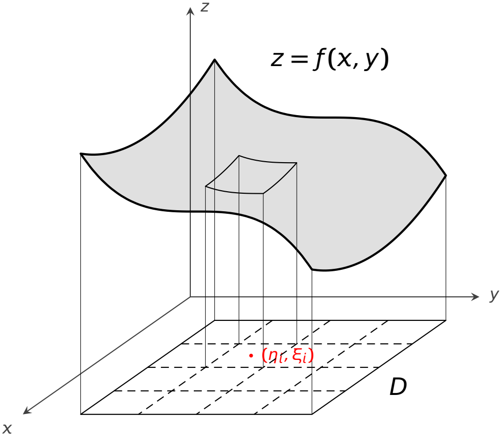
二重积分的几何意义



曲顶柱体的体积：

$$V$$

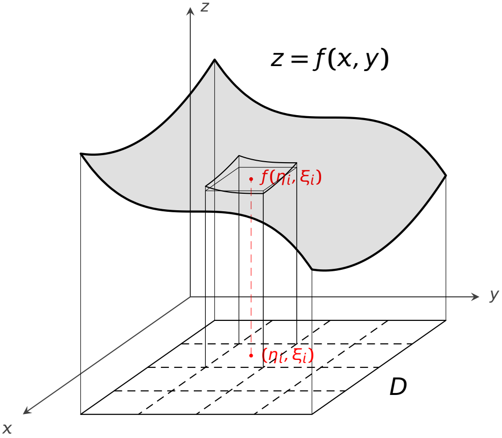
二重积分的几何意义



曲顶柱体的体积：

$$V$$

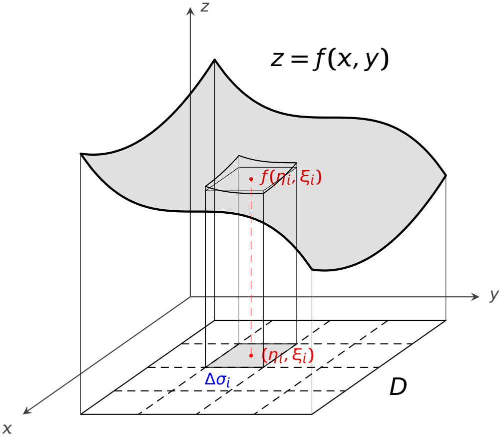
二重积分的几何意义



曲顶柱体的体积：

$$V$$

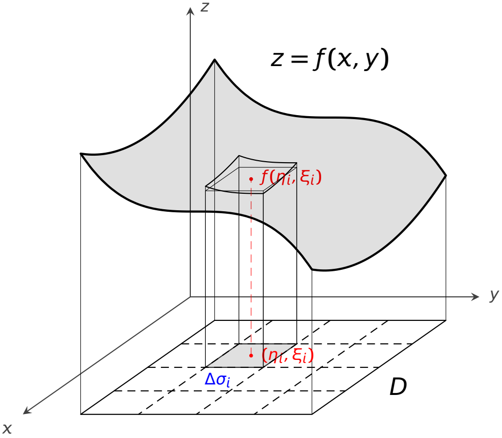
二重积分的几何意义



曲顶柱体的体积：

$$V$$

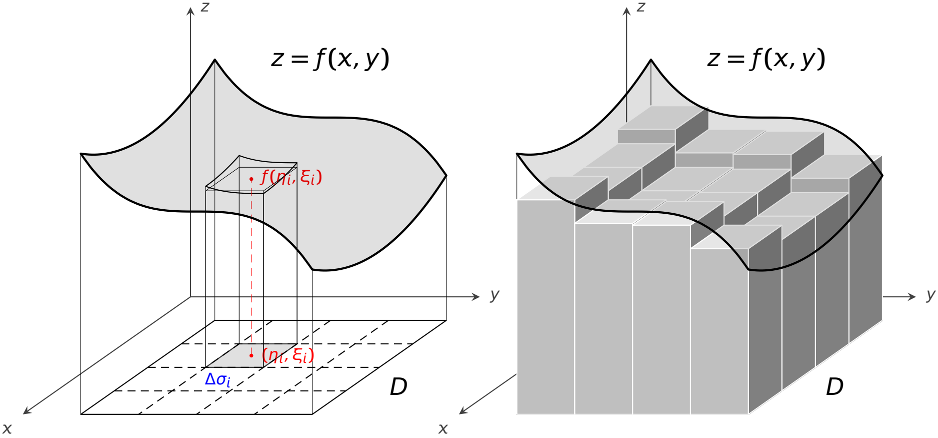
二重积分的几何意义



曲顶柱体的体积：

$$V \qquad\qquad f(\eta_i, \xi_i)\Delta\sigma_i$$

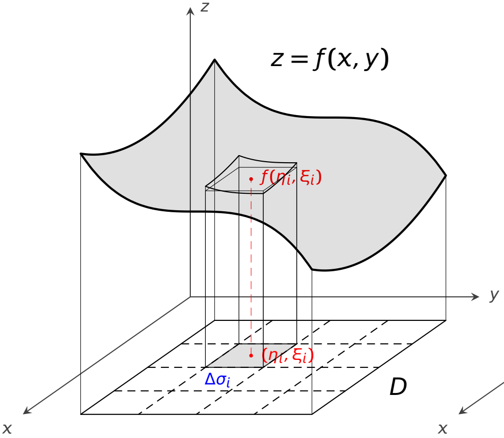
二重积分的几何意义

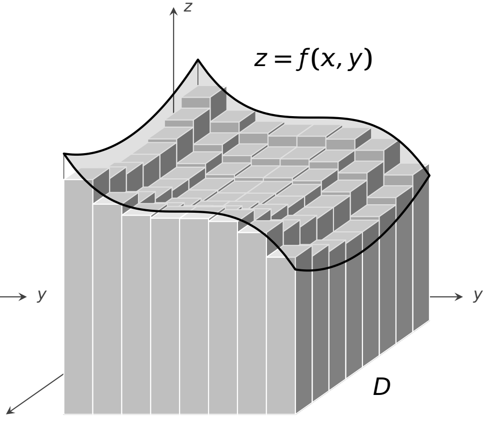


曲顶柱体的体积：

$$V \qquad \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i, \xi_i)\Delta\sigma_i$$

二重积分的几何意义

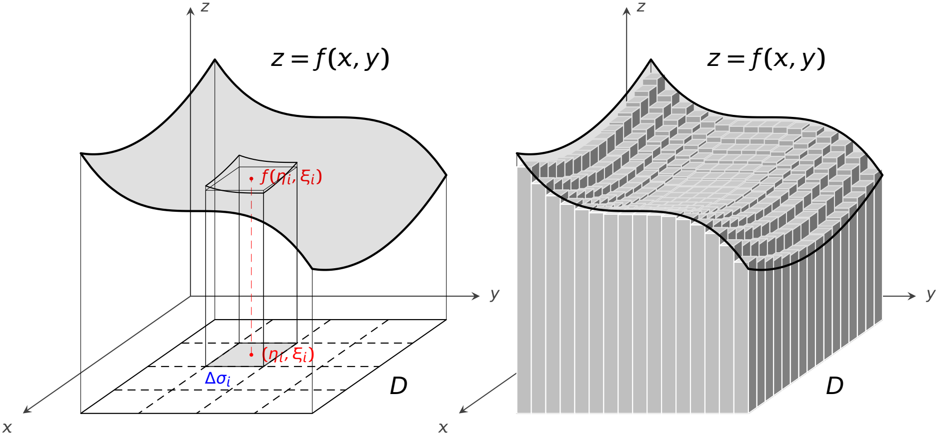




曲顶柱体的体积：

$$V \qquad \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i,\ \xi_i)\Delta\sigma_i$$

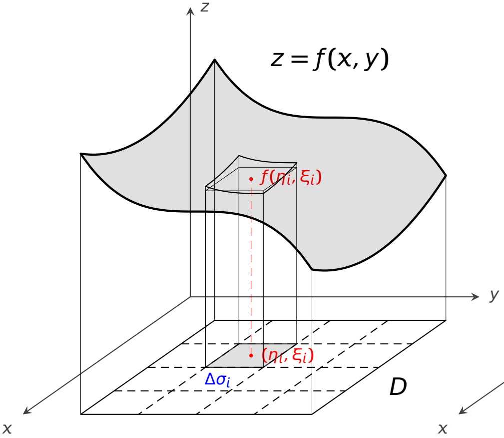
二重积分的几何意义

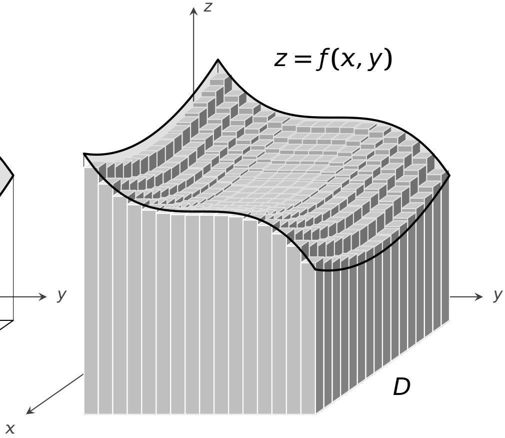


曲顶柱体的体积：

$$V \qquad \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i,\ \xi_i)\Delta\sigma_i$$

二重积分的几何意义

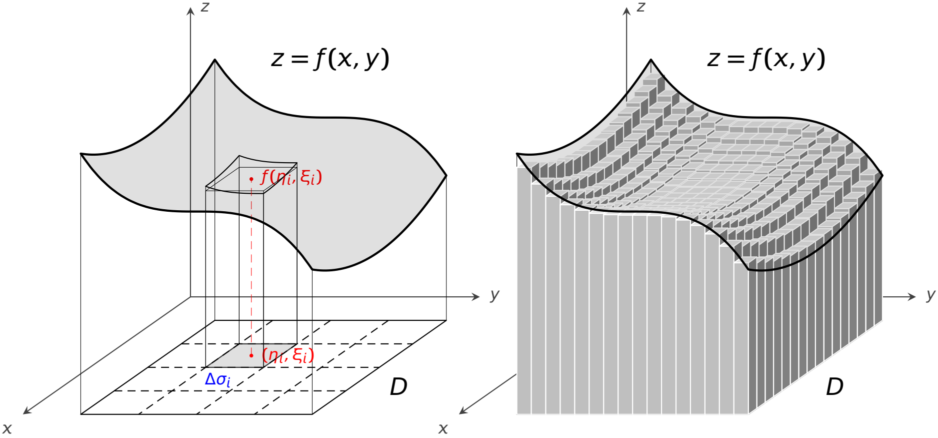




曲顶柱体的体积：

$$V=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\eta_i,\xi_i)\Delta\sigma_i$$

二重积分的几何意义



曲顶柱体的体积：

$$V=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\eta_i,\xi_i)\Delta\sigma_i=\iint_D f(x,y)d\sigma$$

二重积分的性质

性质 1（线性性）

$$\iint_D \alpha f(x, y) + \beta g(x, y) d\sigma = \alpha \iint_D f(x, y) d\sigma + \beta \iint_D g(x, y) d\sigma,$$

其中 α, β 是常数。

二重积分的性质

性质 1（线性性）

$\iint_D \alpha f(x, y) + \beta g(x, y) d\sigma = \alpha \iint_D f(x, y) d\sigma + \beta \iint_D g(x, y) d\sigma$,

其中 α, β 是常数。

证明

$$\iint_D \alpha f(x, y) + \beta g(x, y) d\sigma$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} [\alpha f(\xi_i, \eta_i) + \beta g(\xi_i, \eta_i)] \Delta\sigma_i$$

二重积分的性质

性质 1（线性性）

$\iint_D \alpha f(x,y)+\beta g(x,y)d\sigma=\alpha\iint_D f(x,y)d\sigma+\beta\iint_D g(x,y)d\sigma$，

其中 α,β 是常数。

证明

$$
\begin{aligned}
&\iint_D \alpha f(x,y)+\beta g(x,y)d\sigma\\
&=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left[\alpha f(\xi_i,\eta_i)+\beta g(\xi_i,\eta_i)\right]\Delta\sigma_i\\
&=\alpha\cdot\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i+\beta\cdot\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}g(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i
\end{aligned}
$$

二重积分的性质

性质 1（线性性）

$\iint_D \alpha f(x, y) + \beta g(x, y) d\sigma = \alpha \iint_D f(x, y) d\sigma + \beta \iint_D g(x, y) d\sigma$,

其中 α, β 是常数。

证明

$$\iint_D \alpha f(x, y) + \beta g(x, y) d\sigma$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} [\alpha f(\xi_i, \eta_i) + \beta g(\xi_i, \eta_i)] \Delta\sigma_i$$

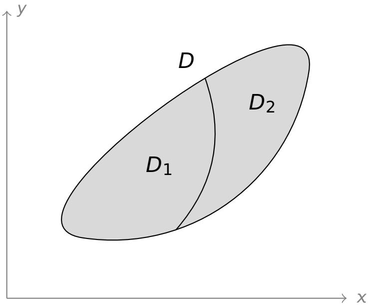
$$= \alpha \cdot \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i + \beta \cdot \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

$$= \alpha \iint_D f(x, y) d\sigma + \beta \iint_D g(x, y) d\sigma$$

二重积分的性质 (Cont.)

性质 2（积分可加性） 将 D 划分成两部分 D_1 和 D_2，则

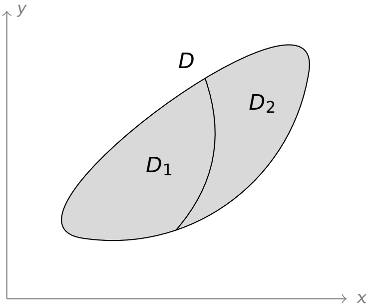
$$\iint_D f(x, y)d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y)d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y)d\sigma$$

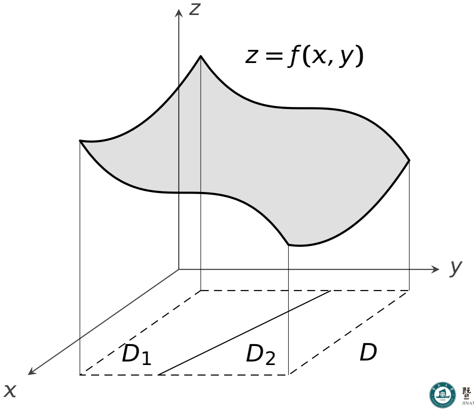


二重积分的性质 (Cont.)

性质 2（积分可加性） 将 D 划分成两部分 D_1 和 D_2，则

$$\iint_D f(x, y)d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y)d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y)d\sigma$$

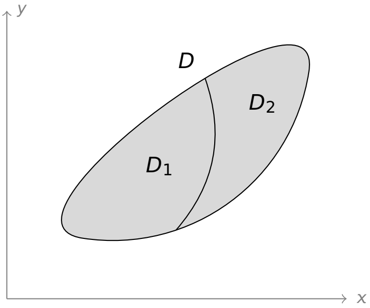


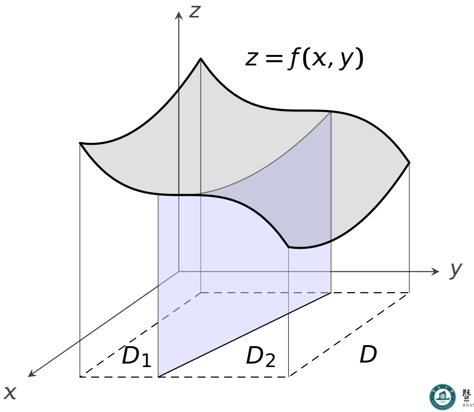


二重积分的性质 (Cont.)

性质 2（积分可加性） 将 D 划分成两部分 D_1 和 D_2，则

$$\iint_D f(x, y)d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y)d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y)d\sigma$$



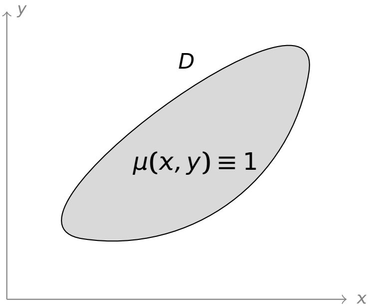


二重积分的性质 (Cont.)

性质 3 $\iint_D 1 d\sigma = |D|$（D 的面积）。

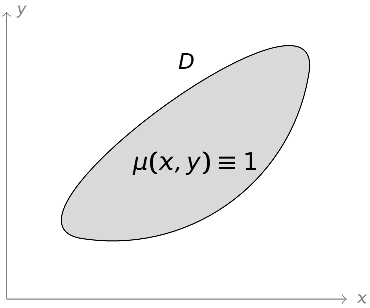
二重积分的性质 (Cont.)

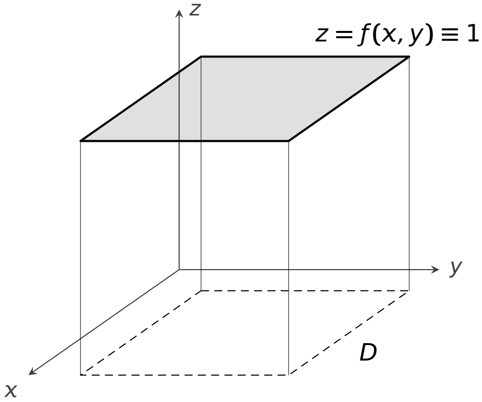
性质 3 $\iint_D 1 d\sigma = |D|$（D 的面积）。



二重积分的性质 (Cont.)

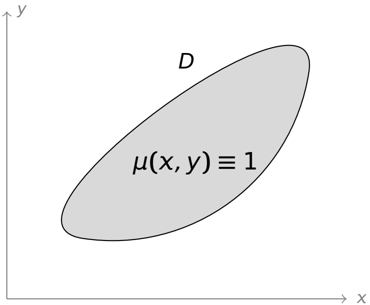
性质 3 $\iint_D 1 d\sigma = |D|$（D 的面积）。

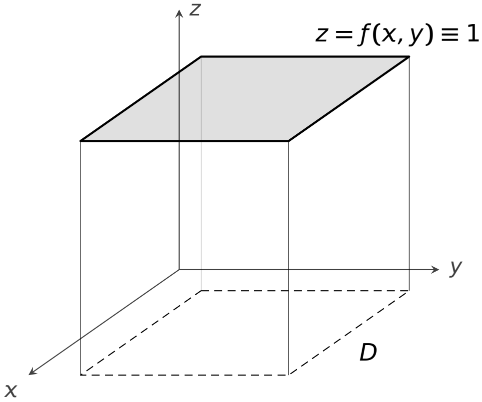




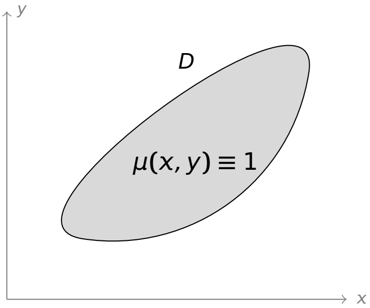
二重积分的性质 (Cont.)

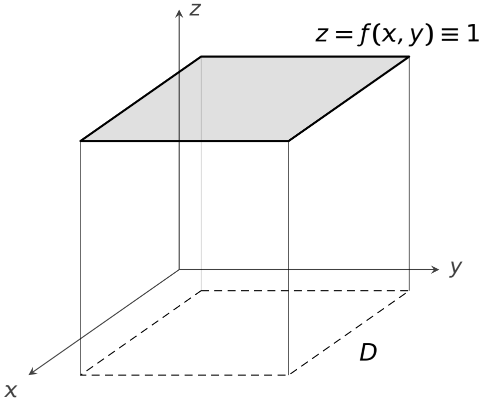
性质 3 $\iint_D 1 d\sigma = |D|$（D 的面积）。特别滴，$\iint_D k d\sigma =$ 　　　。





性质 3 $\iint_D 1 d\sigma = |D|$（D 的面积）。特别滴，$\iint_D k d\sigma = k|D|$。





二重积分的性质 (Cont.)

性质 4 如果在 D 上成立 $f(x, y) \leq g(x, y)$，则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma$$

二重积分的性质 (Cont.)

性质 4 如果在 D 上成立 $f(x,y) \le g(x,y)$，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma \le \iint_D g(x,y)d\sigma$$

性质 5 假设在 D 上成立 $m \le f(x,y) \le M$，则

$$m\sigma \le \iint_D f(x,y)d\sigma \le M\sigma,$$

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

二重积分的性质 (Cont.)

性质 4 如果在 D 上成立 $f(x, y) \leq g(x, y)$，则

$$\iint_D f(x, y)d\sigma \leq \iint_D g(x, y)d\sigma$$

性质 5 假设在 D 上成立 $m \leq f(x, y) \leq M$，则

$$m\sigma \leq \iint_D f(x, y)d\sigma \leq M\sigma, \qquad \text{（}\sigma\text{为}D\text{的面积）}$$

二重积分的性质 (Cont.)

性质 4 如果在 D 上成立 $f(x, y) \le g(x, y)$，则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \le \iint_D g(x, y) d\sigma$$

性质 5 假设在 D 上成立 $m \le f(x, y) \le M$，则

$$m\sigma \le \iint_D f(x, y) d\sigma \le M\sigma, \qquad （\sigma\text{为}D\text{的面积}）$$

证明

$$\iint_D m d\sigma \le \iint_D f(x, y) d\sigma \le \iint_D M d\sigma$$

二重积分的性质 (Cont.)

性质 4 如果在 D 上成立 $f(x,y) \le g(x,y)$，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma \le \iint_D g(x,y)d\sigma$$

性质 5 假设在 D 上成立 $m \le f(x,y) \le M$，则

$$m\sigma \le \iint_D f(x,y)d\sigma \le M\sigma, \qquad (\sigma\text{为}D\text{的面积})$$

证明

$$\iint_D m d\sigma \le \iint_D f(x,y)d\sigma \le \iint_D M d\sigma = M\sigma$$

性质 4 如果在 D 上成立 $f(x, y) \le g(x, y)$，则

$$\iint_D f(x, y)d\sigma \le \iint_D g(x, y)d\sigma$$

性质 5 假设在 D 上成立 $m \le f(x, y) \le M$，则

$$m\sigma \le \iint_D f(x, y)d\sigma \le M\sigma, \qquad (\sigma\text{为}D\text{的面积})$$

证明

$$m\sigma = \iint_D m d\sigma \le \iint_D f(x, y)d\sigma \le \iint_D M d\sigma = M\sigma$$

例 估计下列积分 $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$ 值的范围，其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \le 4\}$。

例 估计下列积分 $I=\iint_D(x^2+4y^2+9)d\sigma$ 值的范围，其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$。

解

$$9\le x^2+4y^2+9$$

例 估计下列积分 $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$ 值的范围，其中 $D = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \le 4\}$。

解

$$9 \le x^2 + 4y^2 + 9 = (x^2 + y^2) + 3y^2 + 9$$

例 估计下列积分 $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$ 值的范围，其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$。

解

$$9 \leq x^2 + 4y^2 + 9 = (x^2 + y^2) + 3y^2 + 9 \leq 4 + 3 \cdot 4 + 9$$

例 估计下列积分 $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$ 值的范围，其中 $D = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \leq 4\}$。

解

$$9 \leq x^2 + 4y^2 + 9 = (x^2 + y^2) + 3y^2 + 9 \leq 4 + 3 \cdot 4 + 9 = 25$$

例 估计下列积分 $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$ 值的范围，其中 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 4\}$。

解

$$9 \le x^2 + 4y^2 + 9 = (x^2 + y^2) + 3y^2 + 9 \le 4 + 3 \cdot 4 + 9 = 25$$

$$\Rightarrow \quad 9|D| \le I \le 25|D|$$

例 估计下列积分 $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$ 值的范围，其中 $D = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \leq 4\}$。

解

$$9 \leq x^2 + 4y^2 + 9 = (x^2 + y^2) + 3y^2 + 9 \leq 4 + 3 \cdot 4 + 9 = 25$$

$$\Rightarrow \quad 9|D| \leq I \leq 25|D| \quad \xRightarrow{|D| = 4\pi}$$

例 估计下列积分 $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$ 值的范围，其中 $D = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \leq 4\}$。

解

$$9 \leq x^2 + 4y^2 + 9 = (x^2 + y^2) + 3y^2 + 9 \leq 4 + 3 \cdot 4 + 9 = 25$$

$$\Rightarrow \quad 9|D| \leq I \leq 25|D| \quad \xrightarrow{|D|=4\pi} \quad 36\pi \leq I \leq 100\pi$$

二重积分的性质 (Cont.)

性质 6（二重积分的中值定理） 设函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，$|D|$ 是 D 的面积，则在 D 上至少存在一点 (ξ,η)，使得

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)\cdot|D|.$$

二重积分的性质 (Cont.)

性质 6（二重积分的中值定理） 设函数 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上连续，$|D|$ 是 D 的面积，则在 D 上至少存在一点 (ξ, η)，使得

$$\iint_D f(x, y)d\sigma = f(\xi, \eta) \cdot |D|.$$

证明

$$m \cdot |D| \leq \iint_D f(x, y)d\sigma \leq M \cdot |D|$$

二重积分的性质 (Cont.)

性质 6（二重积分的中值定理） 设函数 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上连续，$|D|$ 是 D 的面积，则在 D 上至少存在一点 (ξ, η)，使得

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) \cdot |D|.$$

证明

$$m \cdot |D| \le \iint_D f(x, y) d\sigma \le M \cdot |D| \quad \Rightarrow \quad m \le \frac{1}{|D|} \iint_D f(x, y) d\sigma \le M$$

二重积分的性质 (Cont.)

性质 6（二重积分的中值定理） 设函数 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上连续，$|D|$ 是 D 的面积，则在 D 上至少存在一点 (ξ, η)，使得

$$\iint_D f(x, y)d\sigma = f(\xi, \eta) \cdot |D|.$$

证明 因为

$$m \cdot |D| \leq \iint_D f(x, y)d\sigma \leq M \cdot |D| \quad \Rightarrow \quad m \leq \frac{1}{|D|}\iint_D f(x, y)d\sigma \leq M$$

由闭区域上连续函数的中值定理可知：存在 $(\xi, \eta) \in D$，使得

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{|D|}\iint_D f(x, y)d\sigma,$$

二重积分的性质 (Cont.)

性质 6（二重积分的中值定理） 设函数 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上连续，$|D|$ 是 D 的面积，则在 D 上至少存在一点 (ξ, η)，使得

$$\iint_D f(x, y)d\sigma = f(\xi, \eta) \cdot |D|.$$

证明 因为

$$m \cdot |D| \leq \iint_D f(x, y)d\sigma \leq M \cdot |D| \quad \Rightarrow \quad m \leq \frac{1}{|D|} \iint_D f(x, y)d\sigma \leq M$$

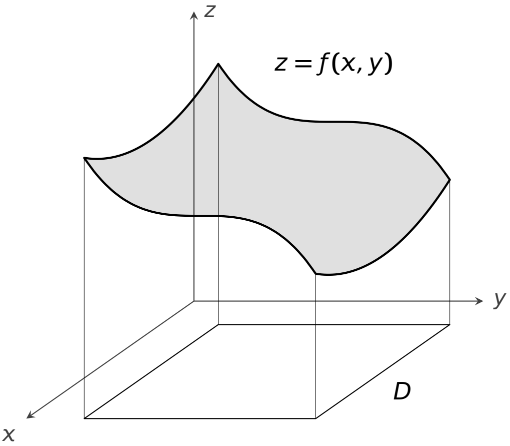
由闭区域上连续函数的中值定理可知：存在 $(\xi, \eta) \in D$，使得

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{|D|} \iint_D f(x, y)d\sigma,$$

即

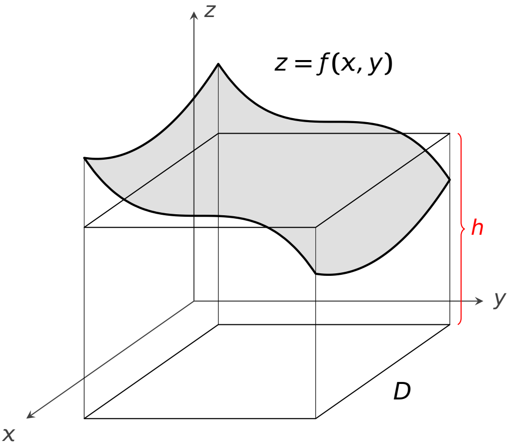
$$\iint_D f(x, y)d\sigma = f(\xi, \eta) \cdot |D|.$$

二重积分中值定理的几何直观



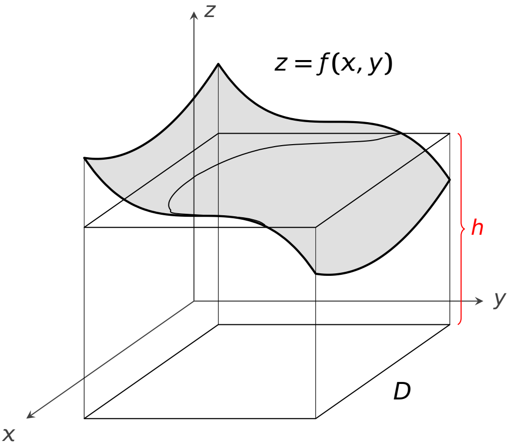
$$\iint_D f(x,y)d\sigma$$

二重积分中值定理的几何直观



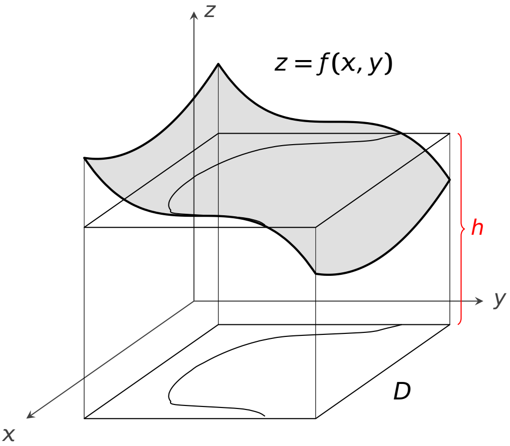
$$\iint_D f(x, y)d\sigma = h|D|$$

二重积分中值定理的几何直观



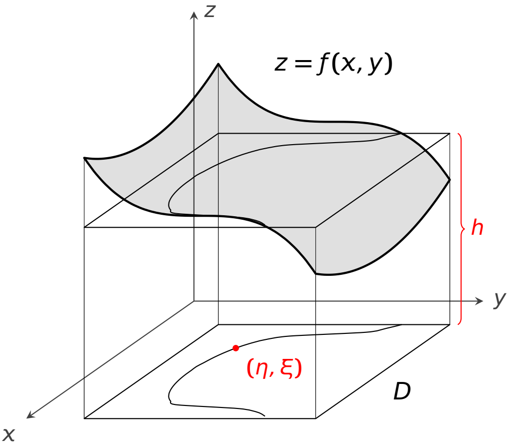
$$\iint_D f(x, y) d\sigma = h|D|$$

二重积分中值定理的几何直观



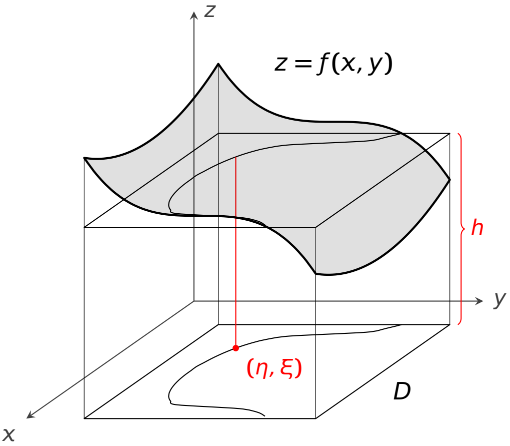
$$\iint_D f(x, y)d\sigma = h|D|$$

二重积分中值定理的几何直观



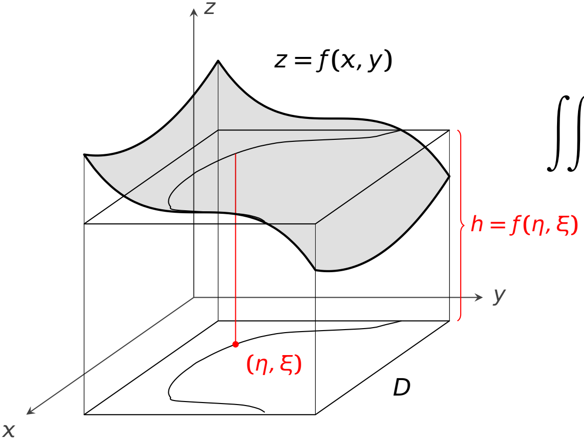
$$\iint_D f(x,y)d\sigma = h|D|$$

二重积分中值定理的几何直观



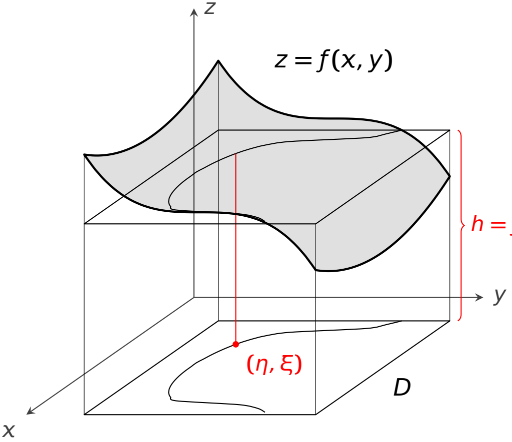
$$\iint_D f(x, y)d\sigma = h|D|$$

二重积分中值定理的几何直观



$$\iint_D f(x,\, y) d\sigma = h|D|$$

二重积分中值定理的几何直观



$$\iint_D f(x,y)d\sigma = h|D|$$
$$= f(\xi,\eta)|D|$$

We are here now...

1. 二重积分的基本概念

2. 二重积分的计算

- 一般方法 化二重积分为“累次积分”:

$$\iint_D f(x, y)d\sigma =$$

- 一般方法 化二重积分为“累次积分”:

$$\iint_D f(x, y)d\sigma = \iint_D f(x, y)dxdy$$

- 一般方法 化二重积分为“累次积分”:

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f(x,y)dxdy = \int \quad \int \quad f(x,y)dx \ dy$$

- 一般方法 化二重积分为“累次积分”:

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f(x,y)dxdy = \int \left[\int f(x,y)dx\right]dy$$

- 一般方法 化二重积分为“累次积分”:

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f(x,y)dxdy = \int \left[\int_*^* f(x,y)dx \right] dy$$

- 一般方法 化二重积分为“累次积分”:

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_*^* \left[\int_*^* f(x,y)dx\right]dy$$

- 一般方法 化二重积分为“累次积分”:

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_*^* \left[\int_*^* f(x,y)dx\right]dy$$

$$= \int_*^* \left[\int_*^* f(x,y)dy\right]dx$$

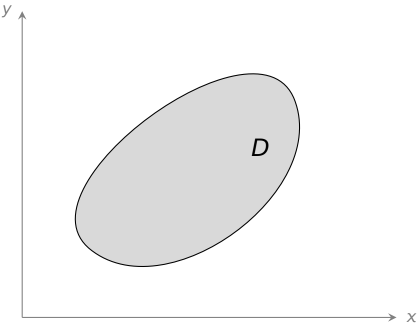
- 一般方法 化二重积分为“累次积分”：

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_*^* \left[\int_*^* f(x,y)dx\right]dy$$
$$= \int_*^* \left[\int_*^* f(x,y)dy\right]dx$$

- 问题：如何确定积分上下限？

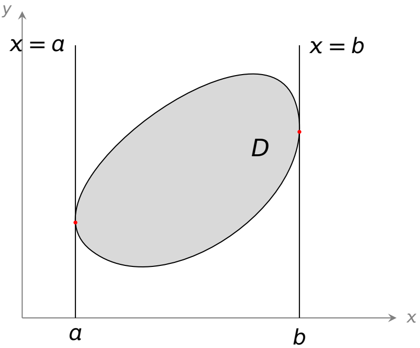
固定 x，先对 y 积分

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int \left[\int \qquad f(x,y)dy\right]dx$$



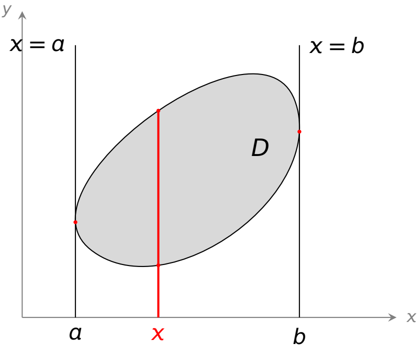
固定 x，先对 y 积分

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int \left[\int \qquad f(x,y)\,dy\right]dx$$



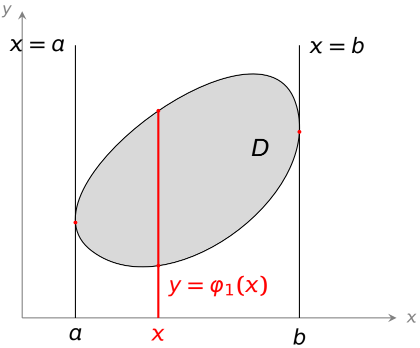
固定 x，先对 y 积分

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int \left[\int \qquad f(x,y)dy \right] dx$$



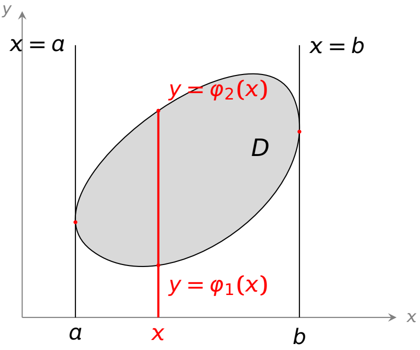
固定 x，先对 y 积分

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int \Big[\int \qquad f(x,y)dy \Big] dx$$



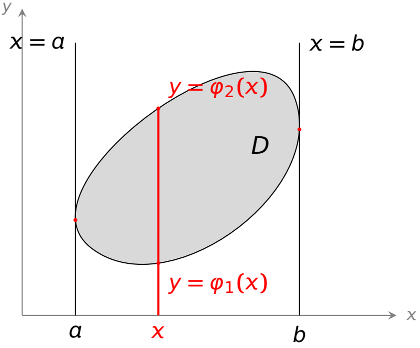
固定 x，先对 y 积分

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int \left[\int \qquad f(x,y)dy\right]dx$$



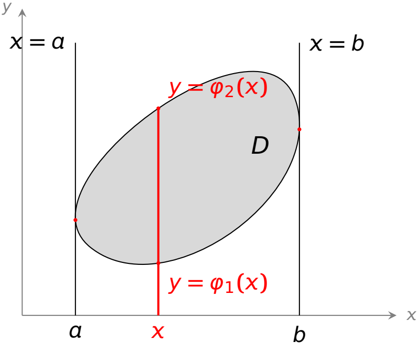
固定 x，先对 y 积分

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int \qquad f(x,y)dy \right] dx$$



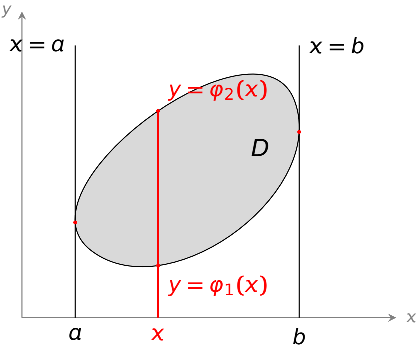
固定 x，先对 y 积分

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right] dx$$



固定 x，先对 y 积分

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx$$



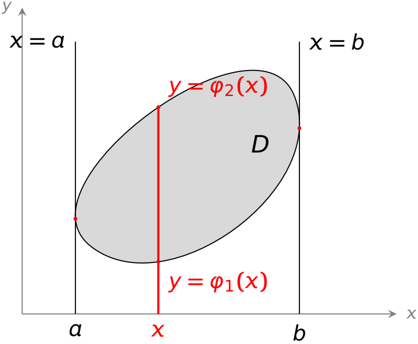
注 上述区域 D 可以表示成

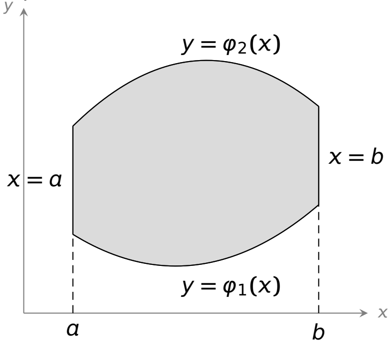
$$D = \{(x,y) | \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x), a \le x \le b\}$$

称为 X-型区域。

固定 x，先对 y 积分

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right] dx$$





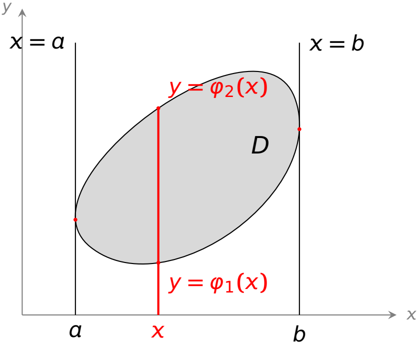
注 上述区域 D 可以表示成

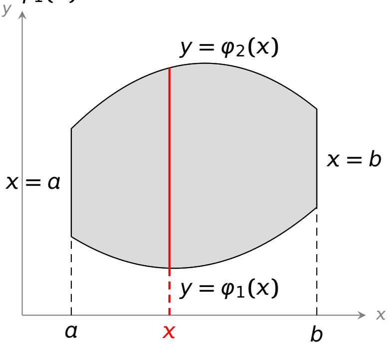
$$D = \{(x,y) | \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x), a \le x \le b\}$$

称为 X-型区域。

固定 x，先对 y 积分

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right] dx$$





注 上述区域 D 可以表示成

$$D = \{(x,y) | \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x), a \le x \le b\}$$

称为 X-型区域。

二次积分化为累次积分：几何解释

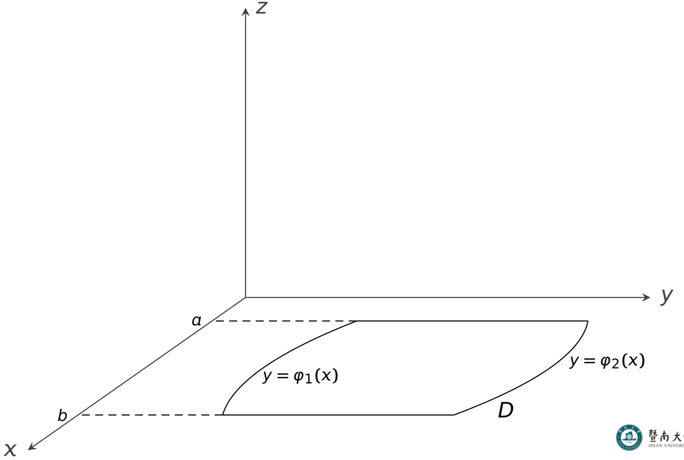
- 设 $D = \{(x, y) | \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x), a \le x \le b\}$，则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

二次积分化为累次积分：几何解释

- 设 $D=\{(x,y)|\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x),\ a\le x\le b\}$，则

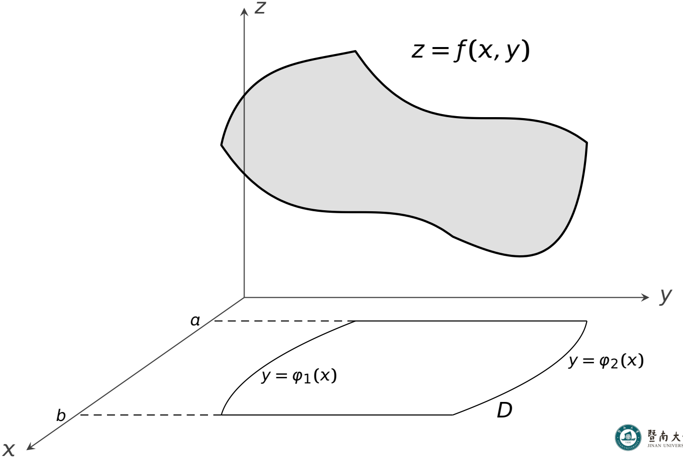
$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)dy\right]dx$$



二次积分化为累次积分：几何解释

- 设 $D=\{(x,y)|\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x),\ a\le x\le b\}$，则

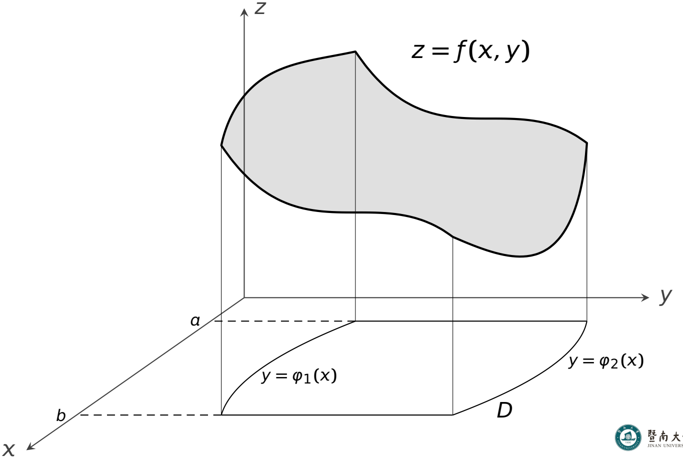
$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)dy\right]dx$$



二次积分化为累次积分：几何解释

- 设 $D=\{(x,y)|\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x), a\le x\le b\}$，则

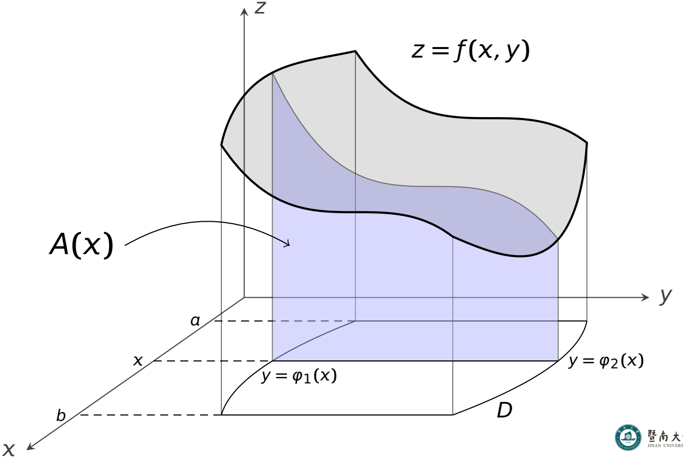
$$\iint_D f(x,y)d\sigma = V \qquad \int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx$$



二次积分化为累次积分：几何解释

- 设 $D=\{(x,y)\,|\,\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x),\ a\le x\le b\}$，则

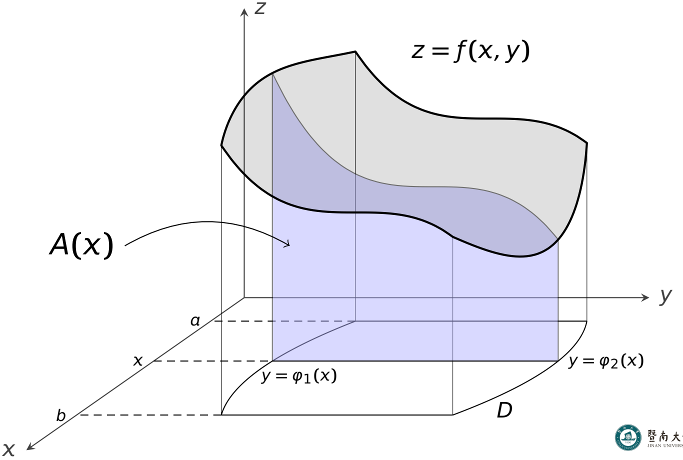
$$\iint_D f(x,y)d\sigma = V \qquad \int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx$$



二次积分化为累次积分：几何解释

- 设 $D = \{(x, y) | \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x), a \le x \le b\}$，则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = V = \int_a^b A(x) dx \qquad \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

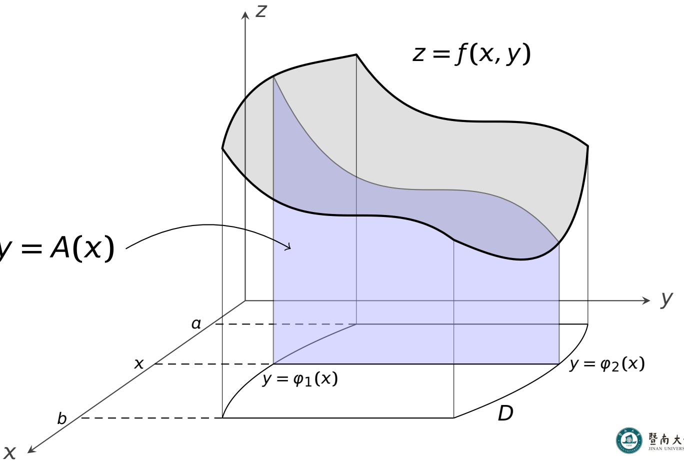


二次积分化为累次积分：几何解释

- 设 $D=\{(x,y)\,|\,\varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x),\ a\le x\le b\}$，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = V = \int_a^b A(x)dx \qquad \int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx$$

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy = A(x)$$

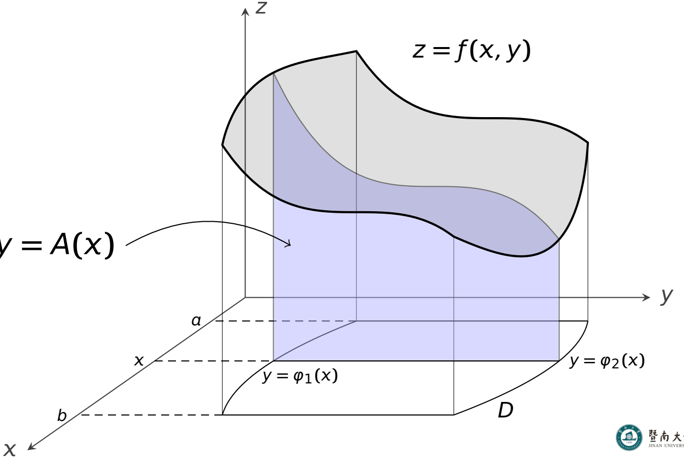


二次积分化为累次积分：几何解释

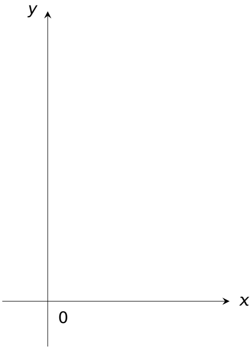
- 设 $D=\{(x,y)|\,\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x),\ a\le x\le b\}$，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = V = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx$$

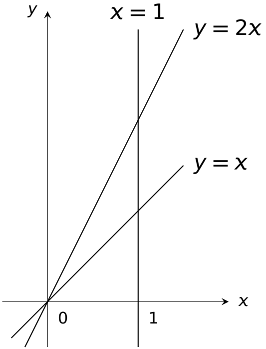
$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy = A(x)$$



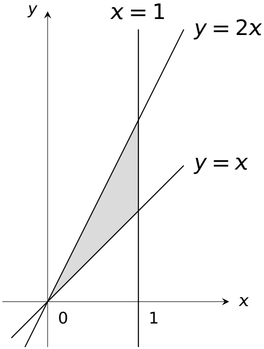
例 计算 $\iint_D xy dxdy$，其中 D 是由直线 $y = 2x$，$y = x$ 和 $x = 1$ 所围成区域。



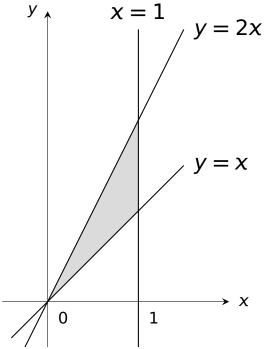
例 计算 $\iint_D xy\,dxdy$，其中 D 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。



例 计算 $\iint_D xy\,dxdy$，其中 D 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。



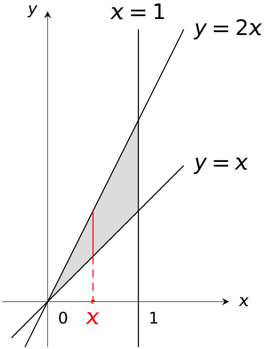
例 计算 $\iint_D xydxdy$，其中 D 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。



解

$$\iint_D xydxdy = \int \left[\int \quad xydy\right]dx$$

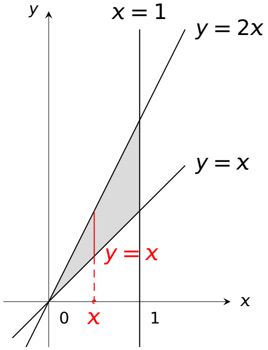
例 计算 $\iint_D xydxdy$，其中 D 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。



解

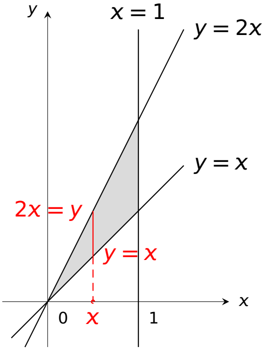
$$\iint_D xydxdy = \int \left[\int \quad xydy \right] dx$$

例 计算 $\iint_D xydxdy$，其中 D 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。



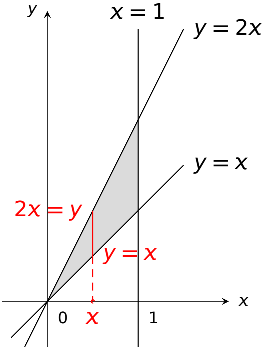
解 $$\iint_D xydxdy = \int \left[\int \quad xydy\right]dx$$

例 计算 $\iint_D xydxdy$，其中 D 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。



解 $$\iint_D xydxdy = \int \left[\int \quad xydy\right]dx$$

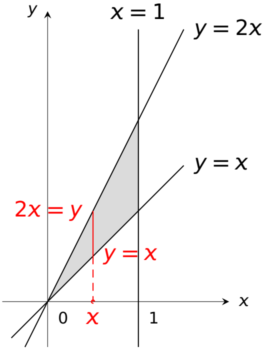
例 计算 $\iint_D xydxdy$，其中 D 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。



解

$$\iint_D xydxdy = \int_0^1 \left[\int \quad xydy \right] dx$$

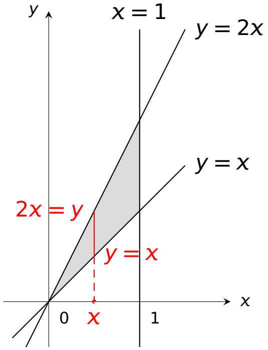
例 计算 $\iint_D xydxdy$，其中 D 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。



解

$$\iint_D xydxdy = \int_0^1 \left[\int_x^{2x} xydy\right]dx$$

例 计算 $\iint_D xy\,dxdy$，其中 D 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。

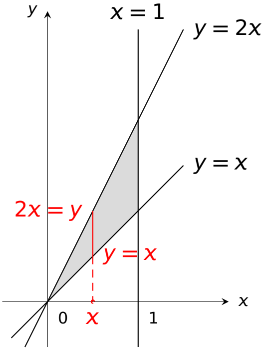


解

$$\iint_D xy\,dxdy = \int_0^1 \left[\int_x^{2x} xy\,dy \right] dx$$

$$\frac{1}{2}xy^2$$

例 计算 $\iint_D xydxdy$，其中 D 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。

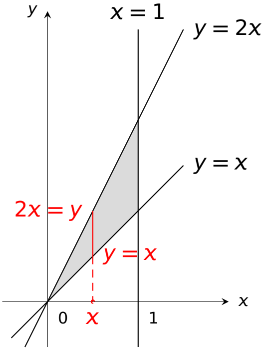


解

$$\iint_D xydxdy = \int_0^1 \left[\int_x^{2x} xydy \right] dx$$

$$\frac{1}{2}xy^2\Big|_x^{2x}$$

例 计算 $\iint_D xydxdy$，其中 D 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。

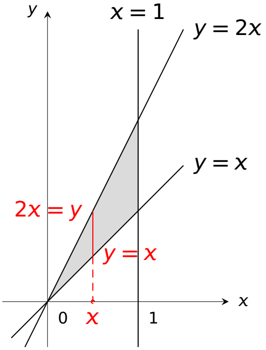


解

$$\iint_D xydxdy = \int_0^1 \left[\int_x^{2x} xydy\right]dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}xy^2\Big|_x^{2x}\right]dx$$

例 计算 $\iint_D xy\,dx\,dy$，其中 D 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。

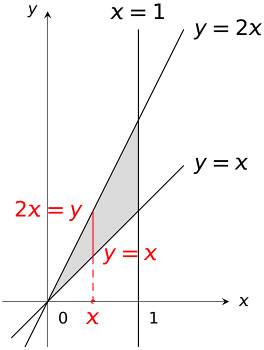


解

$$\iint_D xy\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\int_x^{2x} xy\,dy\right]dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}xy^2\Big|_x^{2x}\right]dx \qquad \frac{3}{2}x^3$$

例 计算 $\iint_D xydxdy$，其中 D 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。

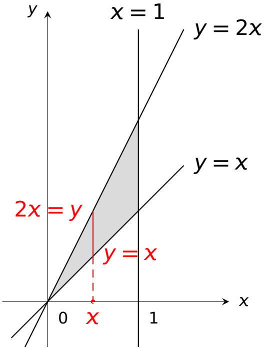


解

$$\iint_D xydxdy = \int_0^1 \left[\int_x^{2x} xydy\right]dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}xy^2\Big|_x^{2x}\right]dx = \int_0^1 \frac{3}{2}x^3 dx$$

例 计算 $\iint_D xydxdy$，其中 D 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。

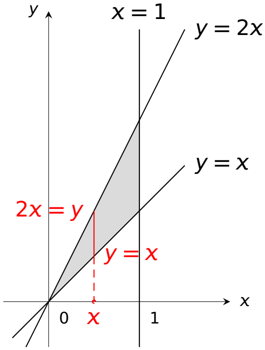


解

$$\iint_D xydxdy = \int_0^1 \left[\int_x^{2x} xydy\right]dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}xy^2\Big|_x^{2x}\right]dx = \int_0^1 \frac{3}{2}x^3dx = \frac{3}{8}x^4$$

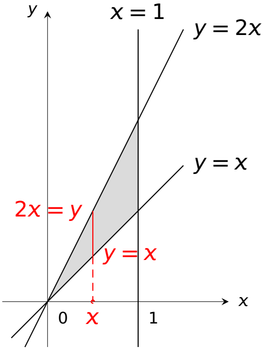
例 计算 $\iint_D xy\,dxdy$，其中 D 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。



解
$$\iint_D xy\,dxdy=\int_0^1\left[\int_x^{2x}xy\,dy\right]dx$$

$$=\int_0^1\left[\frac{1}{2}xy^2\Big|_x^{2x}\right]dx=\int_0^1\frac{3}{2}x^3dx=\frac{3}{8}x^4\Big|_0^1$$

例 计算 $\iint_D xydxdy$，其中 D 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。

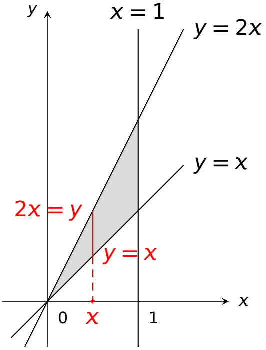


解

$$\iint_D xydxdy = \int_0^1 \left[\int_x^{2x} xydy\right]dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}xy^2\Big|_x^{2x}\right]dx = \int_0^1 \frac{3}{2}x^3dx = \frac{3}{8}x^4\Big|_0^1 = \frac{3}{8}$$

例 计算 $\iint_D xydxdy$，其中 D 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。



解

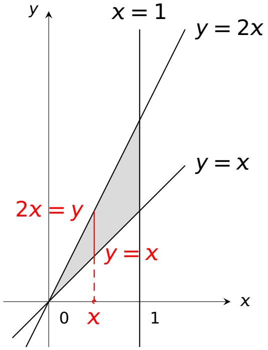
$$\iint_D xydxdy = \int_0^1 \Big[\int_x^{2x} xydy\Big]dx$$

$$= \int_0^1 \Big[\frac{1}{2}xy^2\Big|_x^{2x}\Big]dx = \int_0^1 \frac{3}{2}x^3dx = \frac{3}{8}x^4\Big|_0^1 = \frac{3}{8}$$

注 D 是 X-型区域，可以表示为

$$D = \{(x, y)| \qquad\qquad\qquad\qquad \}$$

例 计算 $\iint_D xydxdy$，其中 D 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。

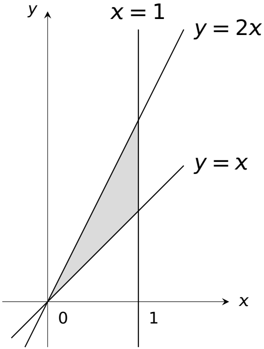


解
$$\iint_D xydxdy = \int_0^1 \left[\int_x^{2x} xydy\right]dx$$
$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}xy^2\Big|_x^{2x}\right]dx = \int_0^1 \frac{3}{2}x^3dx = \frac{3}{8}x^4\Big|_0^1 = \frac{3}{8}$$

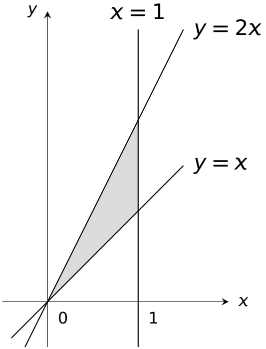
注 D 是 X-型区域，可以表示为

$$D = \{(x, y) | x \le y \le 2x,\ 0 \le x \le 1\}$$

例 计算 $\iint_D e^{x+y}dxdy$，其中 D 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。



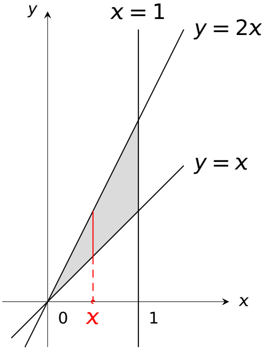
例 计算 $\iint_D e^{x+y}dxdy$，其中 D 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。



解

$$\iint_D e^{x+y}dxdy = \int \Big[\int \quad e^{x+y}dy \Big] dx$$

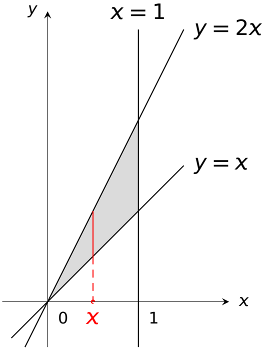
例 计算 $\iint_D e^{x+y}dxdy$，其中 D 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。



解

$$\iint_D e^{x+y}dxdy = \int \left[\int \quad e^{x+y}dy\right]dx$$

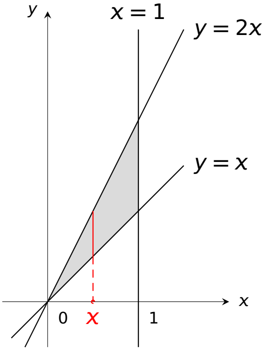
例 计算 $\iint_D e^{x+y}dxdy$，其中 D 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。



解

$$\iint_D e^{x+y}dxdy = \int_0^1 \Big[\int \quad e^{x+y}dy \Big] dx$$

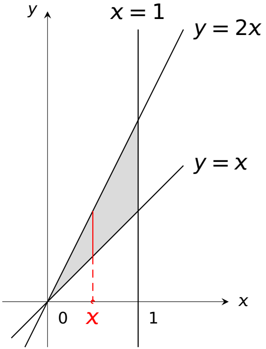
例 计算 $\iint_D e^{x+y}dxdy$，其中 D 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。



解

$$\iint_D e^{x+y}dxdy = \int_0^1 \Big[\int_x^{2x} e^{x+y}dy\Big]dx$$

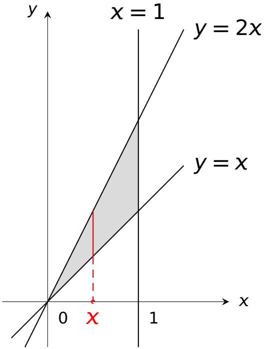
例 计算 $\iint_D e^{x+y}dxdy$，其中 D 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。



解

$$\iint_D e^{x+y}dxdy = \int_0^1 \Big[\int_x^{2x} e^{x+y}dy\Big]dx \qquad e^{x+y}$$

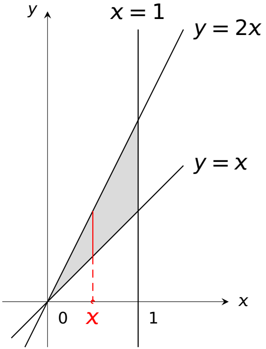
例 计算 $\iint_D e^{x+y}dxdy$，其中 D 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。



解

$$\iint_D e^{x+y}dxdy=\int_0^1\Big[\int_x^{2x} e^{x+y}dy\Big]dx \qquad e^{x+y}\Big|_x^{2x}$$

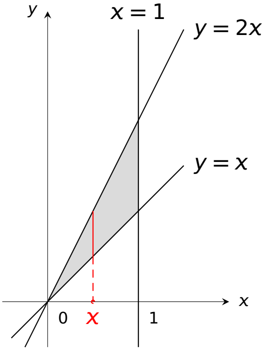
例 计算 $\iint_D e^{x+y}dxdy$，其中 D 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。



解

$$\iint_D e^{x+y}dxdy = \int_0^1 \left[\int_x^{2x} e^{x+y}dy\right]dx = \int_0^1 \left[e^{x+y}\Big|_x^{2x}\right]dx$$

例 计算 $\iint_D e^{x+y}dxdy$，其中 D 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。

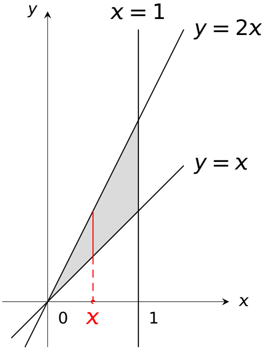


解

$$\iint_D e^{x+y}dxdy=\int_0^1\left[\int_x^{2x}e^{x+y}dy\right]dx=\int_0^1\left[e^{x+y}\Big|_x^{2x}\right]dx$$

$$e^{3x}-e^{2x}$$

例 计算 $\iint_D e^{x+y}dxdy$，其中 D 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。

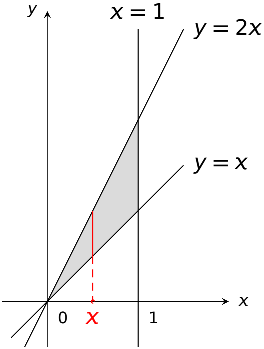


解

$$\iint_D e^{x+y}dxdy = \int_0^1 \left[\int_x^{2x} e^{x+y}dy\right]dx = \int_0^1 \left[e^{x+y}\Big|_x^{2x}\right]dx$$

$$= \int_0^1 e^{3x} - e^{2x}dx$$

例 计算 $\iint_D e^{x+y}dxdy$，其中 D 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。

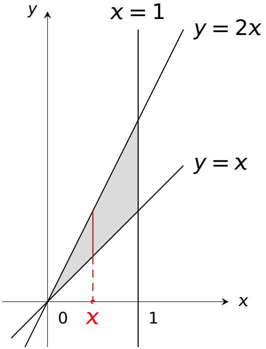


解

$$\iint_D e^{x+y}dxdy = \int_0^1 \left[\int_x^{2x} e^{x+y}dy\right]dx = \int_0^1 \left[e^{x+y}\Big|_x^{2x}\right]dx$$

$$= \int_0^1 e^{3x} - e^{2x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{2}e^{2x}$$

例 计算 $\iint_D e^{x+y}dxdy$，其中 D 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。

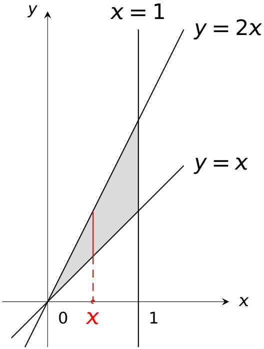


解

$$\iint_D e^{x+y}dxdy=\int_0^1\left[\int_x^{2x}e^{x+y}dy\right]dx=\int_0^1\left[e^{x+y}\Big|_x^{2x}\right]dx$$

$$=\int_0^1 e^{3x}-e^{2x}dx=\frac{1}{3}e^{3x}-\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1$$

例 计算 $\iint_D e^{x+y}dxdy$，其中 D 是由直线 $y=2x$，$y=x$ 和 $x=1$ 所围成区域。

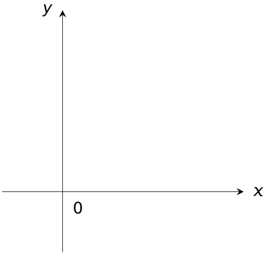


解

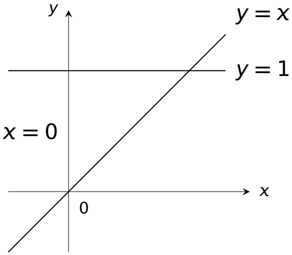
$$\iint_D e^{x+y}dxdy = \int_0^1\left[\int_x^{2x} e^{x+y}dy\right]dx = \int_0^1\left[e^{x+y}\Big|_x^{2x}\right]dx$$

$$= \int_0^1 e^{3x} - e^{2x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{6}$$

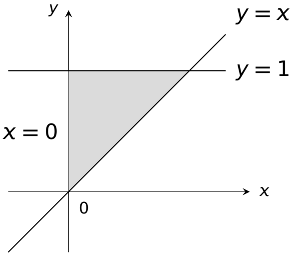
例 计算 $\iint_D (2x+6y)dxdy$，其中 D 是由直线 $x=0$，$y=1$ 和 $y=x$ 所围成区域。



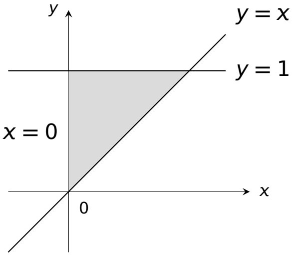
例 计算 $\iint_D (2x+6y)dxdy$，其中 D 是由直线 $x=0$，$y=1$ 和 $y=x$ 所围成区域。



例 计算 $\iint_D (2x+6y)dxdy$，其中 D 是由直线 $x=0$，$y=1$ 和 $y=x$ 所围成区域。



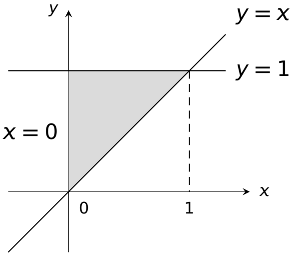
例 计算 $\iint_D (2x+6y)dxdy$，其中 D 是由直线 $x=0$，$y=1$ 和 $y=x$ 所围成区域。



解

$$\iint_D (2x+6y)dxdy = \int \left[\int (2x+6y)dy\right]dx$$

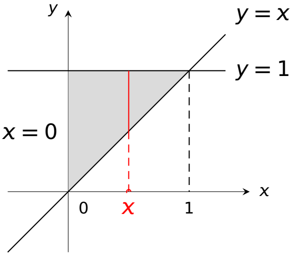
例 计算 $\iint_D (2x+6y)dxdy$，其中 D 是由直线 $x=0$，$y=1$ 和 $y=x$ 所围成区域。



解

$$\iint_D (2x+6y)dxdy = \int \Big[\int (2x+6y)dy\Big]dx$$

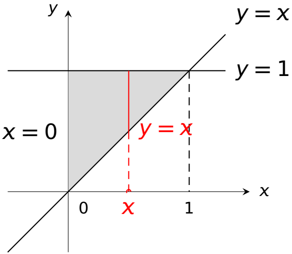
例 计算 $\iint_D (2x+6y)dxdy$，其中 D 是由直线 $x=0$，$y=1$ 和 $y=x$ 所围成区域。



解

$$\iint_D (2x+6y)dxdy = \int \left[\int (2x+6y)dy \right] dx$$

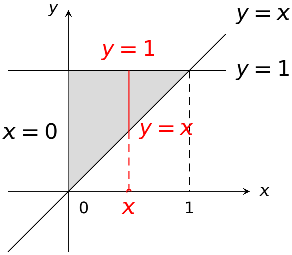
例 计算 $\iint_D (2x+6y)dxdy$，其中 D 是由直线 $x=0$，$y=1$ 和 $y=x$ 所围成区域。



解

$$\iint_D (2x+6y)dxdy = \int \left[\int (2x+6y)dy \right] dx$$

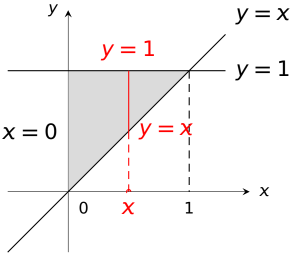
例 计算 $\iint_D (2x+6y)dxdy$，其中 D 是由直线 $x=0$，$y=1$ 和 $y=x$ 所围成区域。



解

$$\iint_D (2x+6y)dxdy = \int \left[\int (2x+6y)dy\right]dx$$

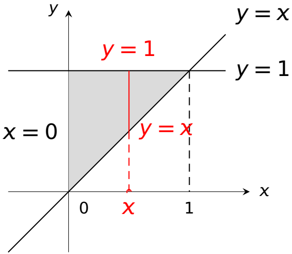
例 计算 $\iint_D (2x+6y)dxdy$，其中 D 是由直线 $x=0$，$y=1$ 和 $y=x$ 所围成区域。



解

$$\iint_D (2x+6y)dxdy = \int_0^1 \left[\int \quad (2x+6y)dy \right] dx$$

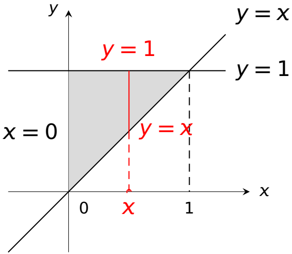
例 计算 $\iint_D (2x+6y)dxdy$，其中 D 是由直线 $x=0$，$y=1$ 和 $y=x$ 所围成区域。



解

$$\iint_D (2x+6y)dxdy = \int_0^1 \left[\int_x^1 (2x+6y)dy \right] dx$$

例 计算 $\iint_D(2x+6y)dxdy$，其中 D 是由直线 $x=0$，$y=1$ 和 $y=x$ 所围成区域。

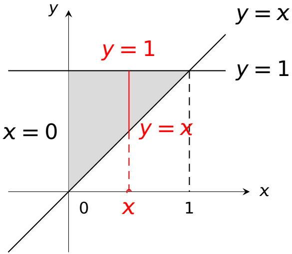


解

$$\iint_D(2x+6y)dxdy = \int_0^1\left[\int_x^1(2x+6y)dy\right]dx$$

$$2xy+3y^2$$

例 计算 $\iint_D (2x+6y)dxdy$，其中 D 是由直线 $x=0$，$y=1$ 和 $y=x$ 所围成区域。

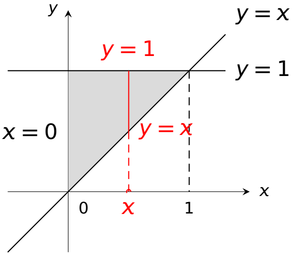


解

$$\iint_D (2x+6y)dxdy = \int_0^1 \left[\int_x^1 (2x+6y)dy\right]dx$$

$$2xy+3y^2\Big|_x^1$$

例 计算 $\iint_D (2x+6y)dxdy$，其中 D 是由直线 $x=0$，$y=1$ 和 $y=x$ 所围成区域。

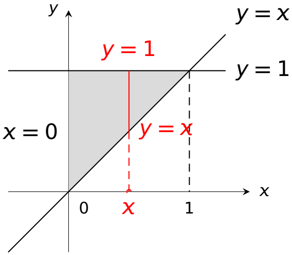


解

$$\iint_D (2x+6y)dxdy = \int_0^1 \left[\int_x^1 (2x+6y)dy\right]dx$$

$$= \int_0^1 \left[2xy + 3y^2\Big|_x^1\right]dx$$

例 计算 $\iint_D (2x+6y)dxdy$，其中 D 是由直线 $x=0$，$y=1$ 和 $y=x$ 所围成区域。

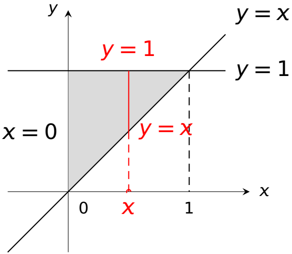


解

$$\iint_D (2x+6y)dxdy = \int_0^1 \left[\int_x^1 (2x+6y)dy \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[2xy + 3y^2 \Big|_x^1 \right] dx \qquad -5x^2 + 2x + 3$$

例 计算 $\iint_D (2x+6y)dxdy$，其中 D 是由直线 $x=0$，$y=1$ 和 $y=x$ 所围成区域。

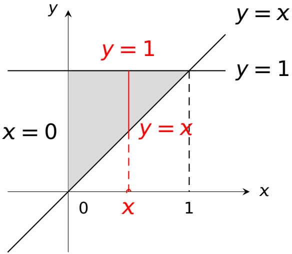


解

$$\iint_D (2x+6y)dxdy = \int_0^1 \left[\int_x^1 (2x+6y)dy\right]dx$$

$$= \int_0^1 \left[2xy + 3y^2\Big|_x^1\right]dx = \int_0^1 -5x^2 + 2x + 3dx$$

例 计算 $\iint_D(2x+6y)dxdy$，其中 D 是由直线 $x=0$，$y=1$ 和 $y=x$ 所围成区域。



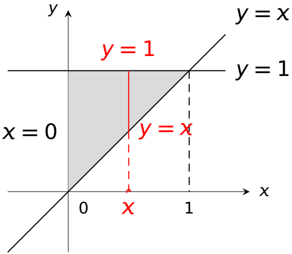
解

$$\iint_D(2x+6y)dxdy=\int_0^1\left[\int_x^1(2x+6y)dy\right]dx$$

$$=\int_0^1\left[2xy+3y^2\Big|_x^1\right]dx=\int_0^1-5x^2+2x+3dx$$

$$=-\frac{5}{3}x^3+x^2+3x$$

例 计算 $\iint_D (2x+6y)dxdy$，其中 D 是由直线 $x=0$，$y=1$ 和 $y=x$ 所围成区域。



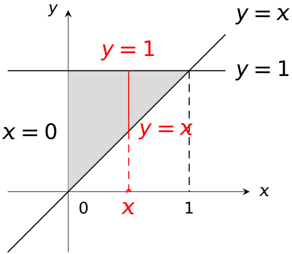
解

$$\iint_D (2x+6y)dxdy = \int_0^1 \left[\int_x^1 (2x+6y)dy \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[2xy + 3y^2 \Big|_x^1 \right] dx = \int_0^1 -5x^2 + 2x + 3dx$$

$$= -\frac{5}{3}x^3 + x^2 + 3x \Big|_0^1$$

例 计算 $\iint_D (2x+6y)dxdy$，其中 D 是由直线 $x=0$，$y=1$ 和 $y=x$ 所围成区域。



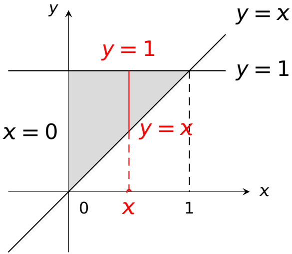
解

$$\iint_D (2x+6y)dxdy = \int_0^1 \left[\int_x^1 (2x+6y)dy\right]dx$$

$$= \int_0^1 \left[2xy+3y^2\Big|_x^1\right]dx = \int_0^1 -5x^2+2x+3dx$$

$$= -\frac{5}{3}x^3+x^2+3x\Big|_0^1 = \frac{7}{3}$$

例 计算 $\iint_D (2x+6y)dxdy$，其中 D 是由直线 $x=0$，$y=1$ 和 $y=x$ 所围成区域。



解

$$\iint_D (2x+6y)dxdy = \int_0^1 \left[\int_x^1 (2x+6y)dy\right]dx$$

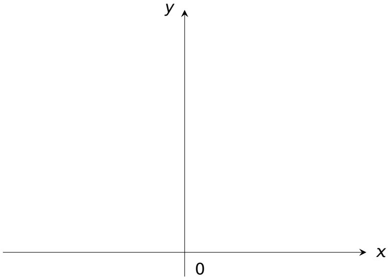
$$= \int_0^1 \left[2xy+3y^2\Big|_x^1\right]dx = \int_0^1 -5x^2+2x+3dx$$

$$= -\frac{5}{3}x^3+x^2+3x\Big|_0^1 = \frac{7}{3}$$

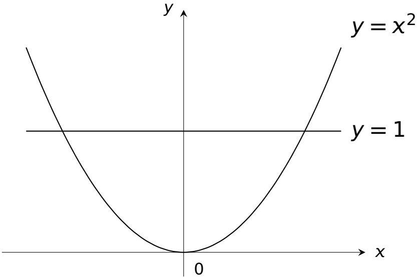
注 D 是 X-型区域，可以表示为

$$D = \{(x,y) | x \le y \le 1, 0 \le x \le 1\}$$

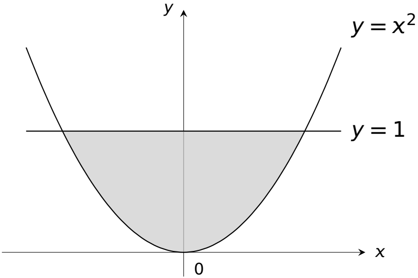
例 计算 $\iint_D x^2 y dxdy$，其中 D 是由曲线 $y = x^2$ 和直线 $y = 1$ 所围成区域。



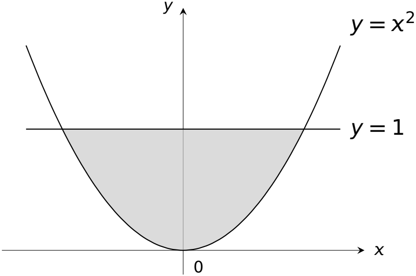
例 计算 $\iint_D x^2 y dxdy$，其中 D 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 所围成区域。



例 计算 $\iint_D x^2 y dxdy$，其中 D 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 所围成区域。



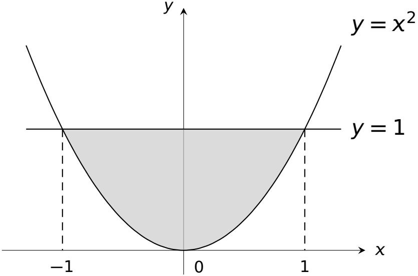
例 计算 $\iint_D x^2 y dxdy$，其中 D 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 所围成区域。



解

$$\iint_D x^2 y dxdy = \int \quad \Big[\int \quad x^2 y dy \Big] dx$$

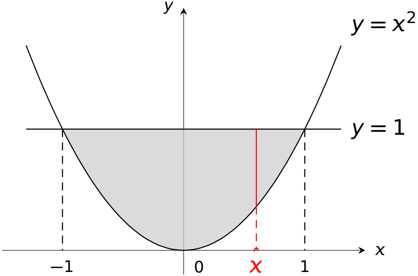
例 计算 $\iint_D x^2 y dxdy$，其中 D 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 所围成区域。



解

$$\iint_D x^2 y dxdy = \int \quad \left[\int \quad x^2 y dy\right] dx$$

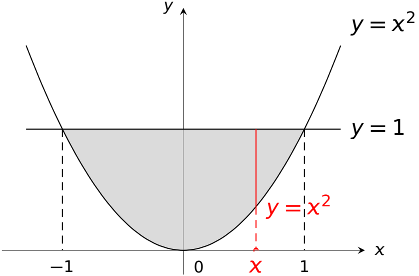
例 计算 $\iint_D x^2ydxdy$，其中 D 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 所围成区域。



解

$$\iint_D x^2ydxdy = \int \quad \left[\int \quad x^2ydy\right]dx$$

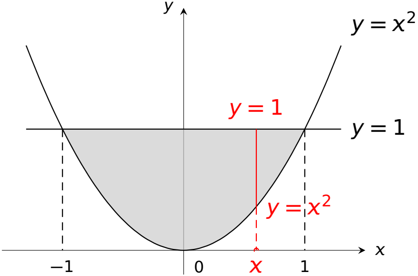
例 计算 $\iint_D x^2 y dxdy$，其中 D 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 所围成区域。



解

$$\iint_D x^2 y dxdy = \int \left[\int x^2 y dy\right] dx$$

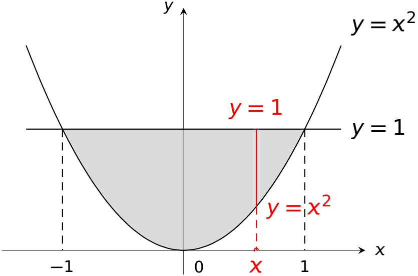
例 计算 $\iint_D x^2ydxdy$，其中 D 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 所围成区域。



解

$$\iint_D x^2ydxdy = \int \left[\int x^2ydy\right]dx$$

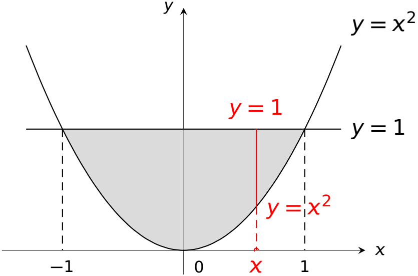
例 计算 $\iint_D x^2 y dxdy$，其中 D 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 所围成区域。



解

$$\iint_D x^2 y dxdy = \int_{-1}^{1}\left[\int \quad x^2 y dy\right]dx$$

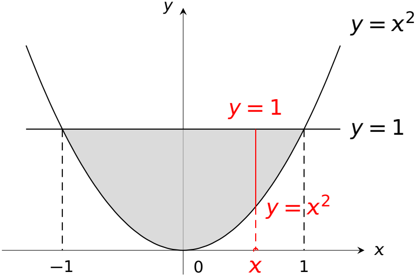
例 计算 $\iint_D x^2 y dxdy$，其中 D 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 所围成区域。



解

$$\iint_D x^2 y dxdy = \int_{-1}^{1}\left[\int_{x^2}^{1} x^2 y dy\right]dx$$

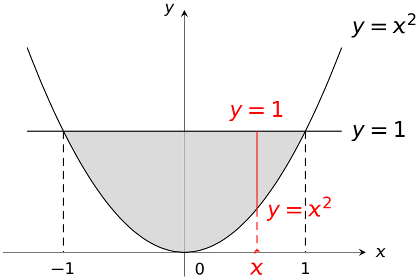
例 计算 $\iint_D x^2 y dxdy$，其中 D 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 所围成区域。



解

$$\iint_D x^2 y dxdy = \int_{-1}^{1} \left[\int_{x^2}^{1} x^2 y dy \right] dx \qquad \frac{1}{2}x^2y^2$$

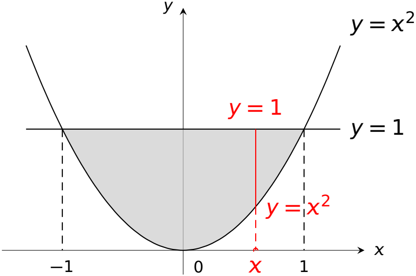
例 计算 $\iint_D x^2 y dxdy$，其中 D 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 所围成区域。



解

$$\iint_D x^2 y dxdy = \int_{-1}^{1}\left[\int_{x^2}^{1} x^2 y dy\right]dx \qquad \frac{1}{2}x^2y^2\Big|_{x^2}^{1}$$

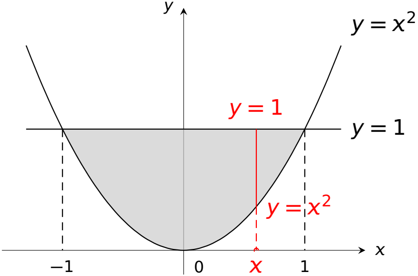
例 计算 $\iint_D x^2 y dxdy$，其中 D 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 所围成区域。



解

$$\iint_D x^2 y dxdy = \int_{-1}^{1}\left[\int_{x^2}^{1} x^2 y dy\right]dx = \int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}x^2y^2\Big|_{x^2}^{1}\right]dx$$

例 计算 $\iint_D x^2 y dxdy$，其中 D 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 所围成区域。

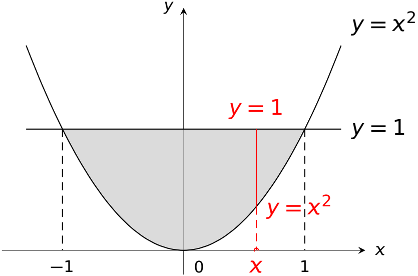


解

$$\iint_D x^2 y dxdy = \int_{-1}^{1}\left[\int_{x^2}^{1} x^2 y dy\right]dx = \int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}x^2y^2\Big|_{x^2}^{1}\right]dx$$

$$\frac{1}{2}x^2(1-x^4)$$

例 计算 $\iint_D x^2ydxdy$，其中 D 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 所围成区域。

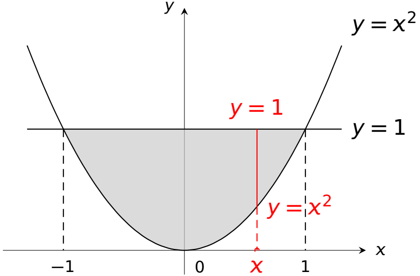


解

$$\iint_D x^2ydxdy=\int_{-1}^{1}\left[\int_{x^2}^{1}x^2ydy\right]dx=\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}x^2y^2\Big|_{x^2}^{1}\right]dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}x^2(1-x^4)dx$$

例 计算 $\iint_D x^2 y dxdy$，其中 D 是由曲线 $y = x^2$ 和直线 $y = 1$ 所围成区域。

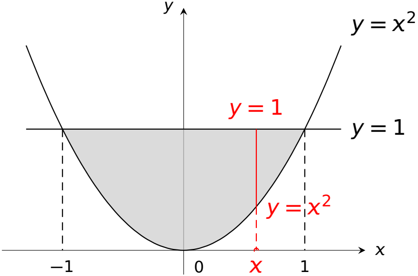


解

$$\iint_D x^2 y dxdy = \int_{-1}^{1}\left[\int_{x^2}^{1} x^2 y dy\right]dx = \int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}x^2 y^2\Big|_{x^2}^{1}\right]dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\frac{1}{2}x^2(1-x^4)dx = \frac{1}{4}(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{7}x^7)$$

例 计算 $\iint_D x^2 y dxdy$，其中 D 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 所围成区域。

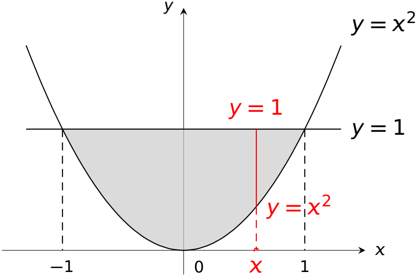


解

$$\iint_D x^2 y dxdy = \int_{-1}^{1}\left[\int_{x^2}^{1} x^2 y dy\right]dx = \int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}x^2y^2\Big|_{x^2}^{1}\right]dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\frac{1}{2}x^2(1-x^4)dx = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{7}x^7\right)\Big|_{-1}^{1}$$

例 计算 $\iint_D x^2 y dxdy$，其中 D 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 所围成区域。

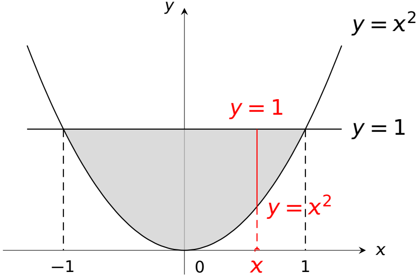


解

$$\iint_D x^2 y dxdy = \int_{-1}^{1}\left[\int_{x^2}^{1} x^2 y dy\right]dx = \int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}x^2y^2\Big|_{x^2}^{1}\right]dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\frac{1}{2}x^2(1-x^4)dx = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{7}x^7\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{4}{21}$$

例 计算 $\iint_D x^2 y dxdy$，其中 D 是由曲线 $y = x^2$ 和直线 $y = 1$ 所围成区域。



解

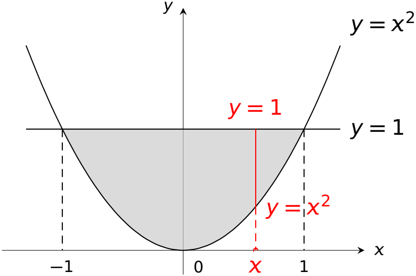
$$\iint_D x^2 y dxdy = \int_{-1}^{1} \left[\int_{x^2}^{1} x^2 y dy \right] dx = \int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{2} x^2 y^2 \Big|_{x^2}^{1} \right] dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} x^2 (1 - x^4) dx = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{7} x^7 \right) \Big|_{-1}^{1} = \frac{4}{21}$$

注 D 是 X-型区域，可以表示为

$$D = \{(x, y) | \qquad\qquad\qquad\qquad \}$$

例 计算 $\iint_D x^2 y dxdy$，其中 D 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 所围成区域。



解

$$\iint_D x^2 y dxdy = \int_{-1}^{1}\left[\int_{x^2}^{1} x^2 y dy\right]dx = \int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}x^2y^2\Big|_{x^2}^{1}\right]dx$$

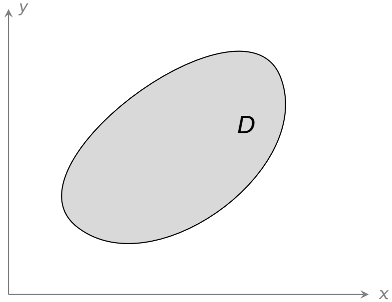
$$= \int_{-1}^{1}\frac{1}{2}x^2(1-x^4)dx = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{7}x^7\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{4}{21}$$

注 D 是 X-型区域，可以表示为

$$D=\{(x,y)|x^2\le y\le 1, -1\le x\le 1\}$$

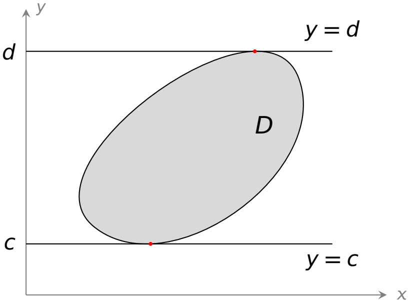
固定 y，先对 x 积分

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int \left[\int \qquad f(x,y)dx \right] dy$$



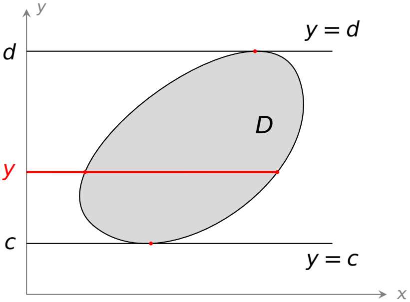
固定 y，先对 x 积分

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int \left[\int \qquad f(x,y)\,dx \right] dy$$



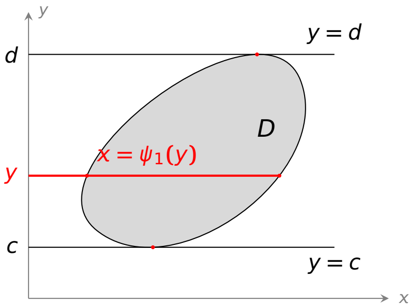
固定 y，先对 x 积分

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int \left[\int \qquad f(x,y)dx \right] dy$$



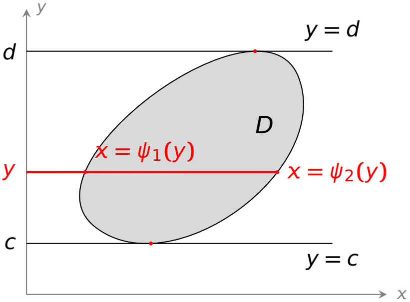
固定 y，先对 x 积分

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int \Big[\int \qquad f(x, y)dx \Big]dy$$



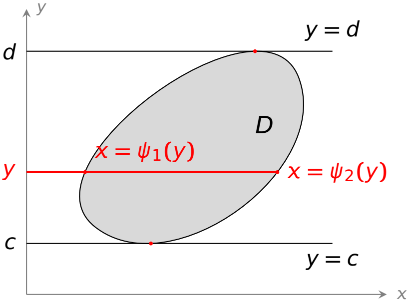
固定 y，先对 x 积分

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int \left[\int \quad f(x,y)dx \right] dy$$



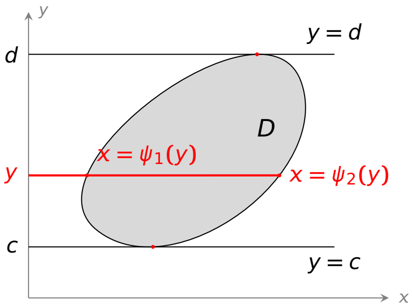
固定 y，先对 x 积分

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \Big[\int \qquad f(x,y)dx \Big] dy$$



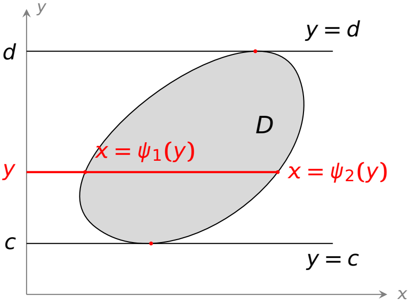
固定 y，先对 x 积分

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)dx \right] dy$$



固定 y，先对 x 积分

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \Big[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx\Big]dy$$



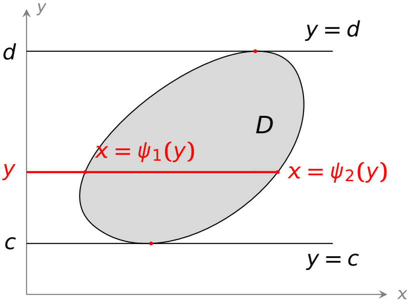
注 上述区域 D 可以表示成

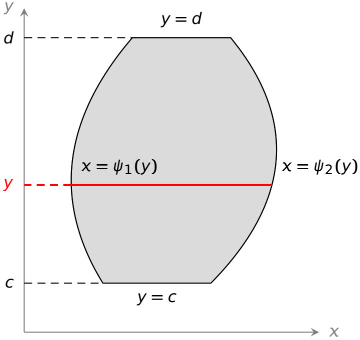
$$D = \{(x,y) \mid \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y),\, c \le y \le d\}$$

称为 Y-型区域。

固定 y，先对 x 积分

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx\right]dy$$



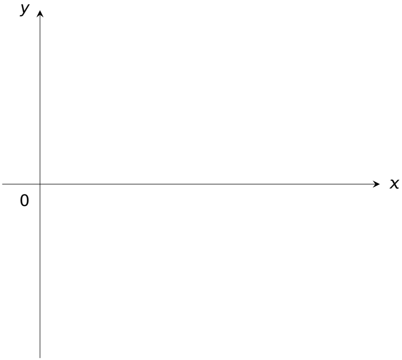


注 上述区域 D 可以表示成

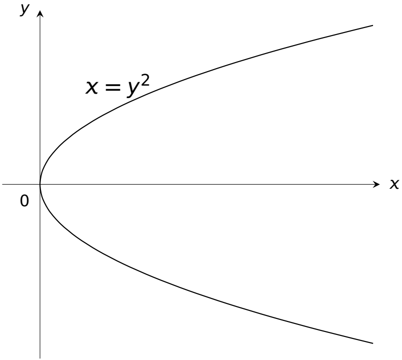
$$D = \{(x,y) \mid \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y),\ c \le y \le d\}$$

称为 Y-型区域。

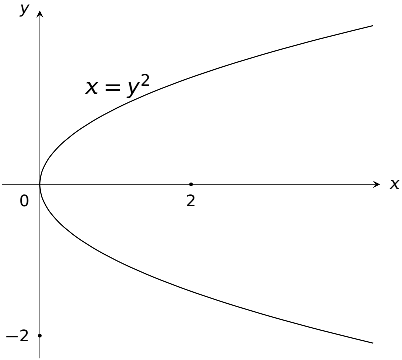
例 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。



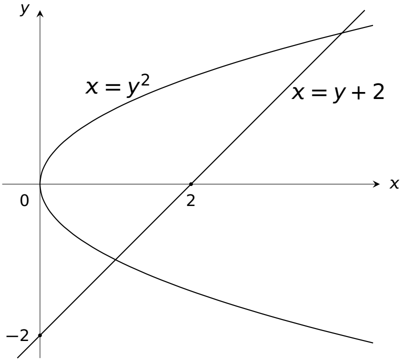
例 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。



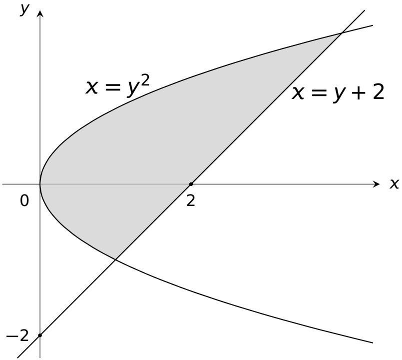
例 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。



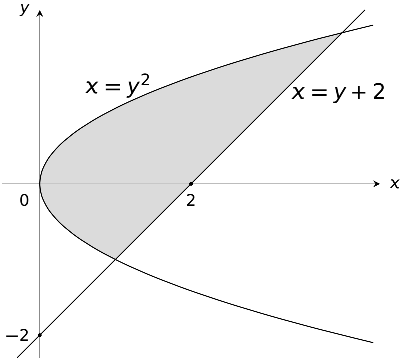
例 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。



例 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。



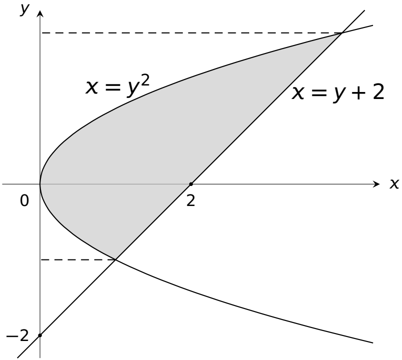
例 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。



解

$$原式=\int \Big[\int \quad xydx\Big]dy$$

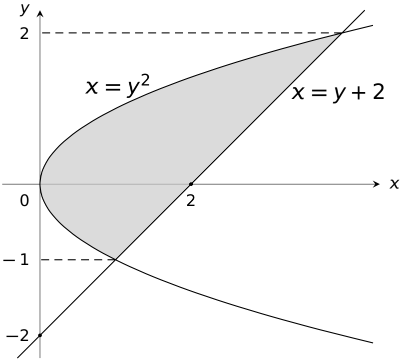
例 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。



解

$$\text{原式} = \int \left[\int xydx \right] dy$$

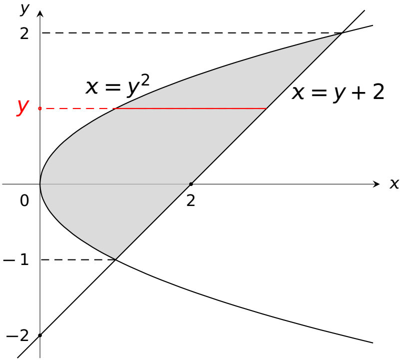
例 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。



解

$$\text{原式}=\int\left[\int\quad xydx\right]dy$$

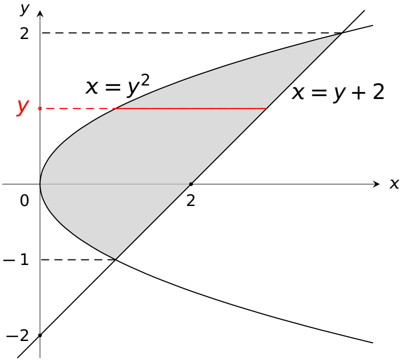
例 计算 $\iint_D xy\,dxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。



解

$$\text{原式}=\int \left[\int \quad xy\,dx\right]dy$$

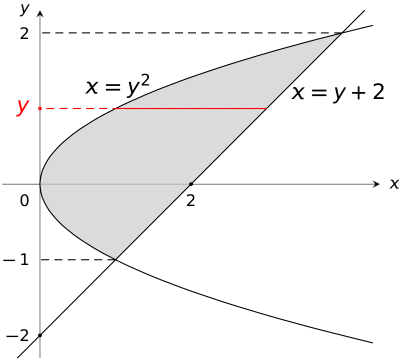
例 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。



解

$$原式=\int_{-1}^{2}\Big[\int \quad xydx\Big]dy$$

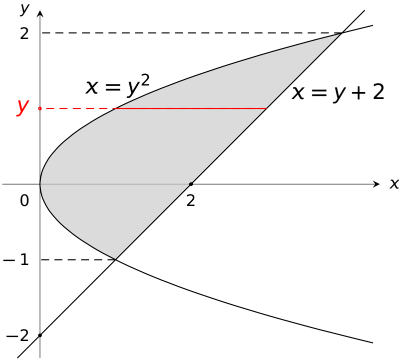
例 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。



解

$$\text{原式}=\int_{-1}^{2}\left[\int_{y^2}^{y+2} xydx\right]dy$$

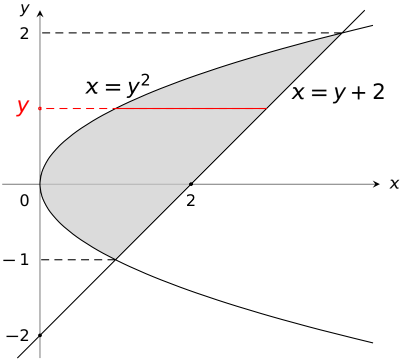
例 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。



解

$$\text{原式}=\int_{-1}^{2}\Big[\int_{y^2}^{y+2} xydx\Big]dy \qquad \frac{1}{2}x^2y$$

例 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。

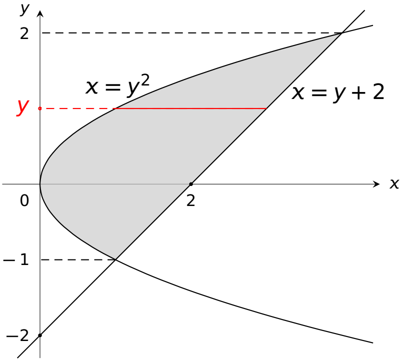


解

$$\text{原式}=\int_{-1}^{2}\left[\int_{y^2}^{y+2}xydx\right]dy$$

$$\frac{1}{2}x^2y\Big|_{y^2}^{y+2}$$

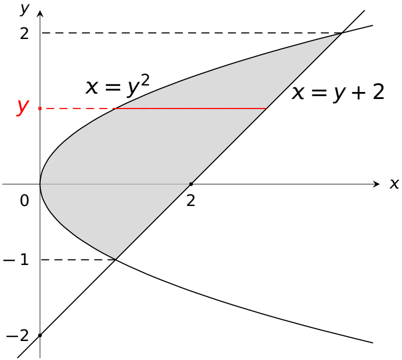
例 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。



解

$$原式 = \int_{-1}^{2}\left[\int_{y^2}^{y+2} xydx\right]dy = \int_{-1}^{2}\left[\frac{1}{2}x^2y\Big|_{y^2}^{y+2}\right]dy$$

例 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。

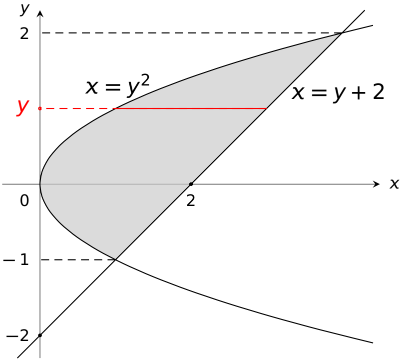


解

$$原式=\int_{-1}^{2}\left[\int_{y^2}^{y+2} xydx\right]dy=\int_{-1}^{2}\left[\frac{1}{2}x^2y\Big|_{y^2}^{y+2}\right]dy$$

$$\frac{1}{2}y\left[(y+2)^2-y^4\right]$$

例 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。

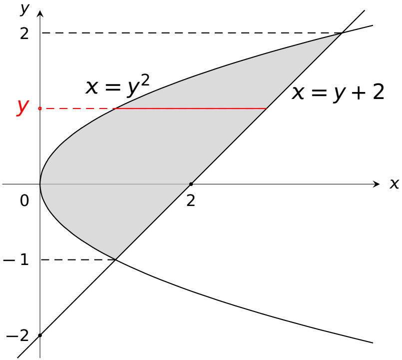


解

$$原式=\int_{-1}^{2}\left[\int_{y^2}^{y+2} xydx\right]dy=\int_{-1}^{2}\left[\frac{1}{2}x^2y\Big|_{y^2}^{y+2}\right]dy$$

$$=\int_{-1}^{2}\frac{1}{2}y\left[(y+2)^2-y^4\right]dy$$

例 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。

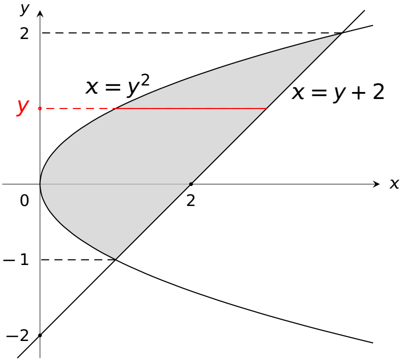


解

$$原式=\int_{-1}^{2}\Big[\int_{y^2}^{y+2}xydx\Big]dy=\int_{-1}^{2}\Big[\frac{1}{2}x^2y\Big|_{y^2}^{y+2}\Big]dy$$

$$=\int_{-1}^{2}\frac{1}{2}y\big[(y+2)^2-y^4\big]dy=\frac{1}{2}\int_{-1}^{2}-y^5+y^3+4y^2+4ydy$$

例 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。

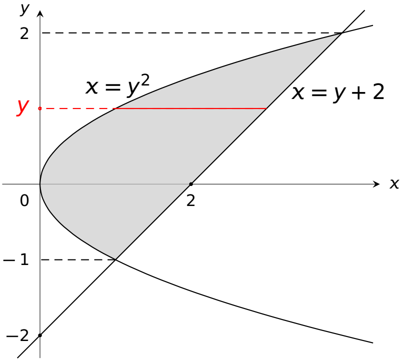


解

$$\text{原式}=\int_{-1}^{2}\left[\int_{y^2}^{y+2}xydx\right]dy=\int_{-1}^{2}\left[\frac{1}{2}x^2y\Big|_{y^2}^{y+2}\right]dy$$

$$=\int_{-1}^{2}\frac{1}{2}y\left[(y+2)^2-y^4\right]dy=\frac{1}{2}\int_{-1}^{2}-y^5+y^3+4y^2+4ydy=\frac{45}{8}$$

例 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。



解

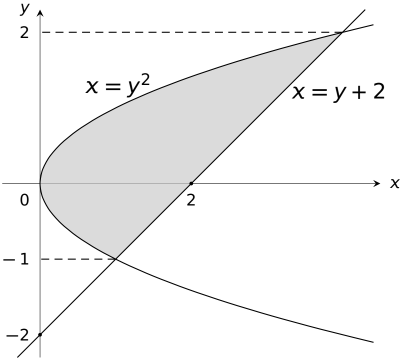
$$\text{原式}=\int_{-1}^{2}\left[\int_{y^2}^{y+2}xydx\right]dy=\int_{-1}^{2}\left[\frac{1}{2}x^2y\Big|_{y^2}^{y+2}\right]dy$$

$$=\int_{-1}^{2}\frac{1}{2}y\left[(y+2)^2-y^4\right]dy=\frac{1}{2}\int_{-1}^{2}-y^5+y^3+4y^2+4ydy=\frac{45}{8}$$

注 D 是 X-型区域，可以表示为

$$D=\{(x,y)|x^2\le y\le 1,-1\le x\le 1\}$$

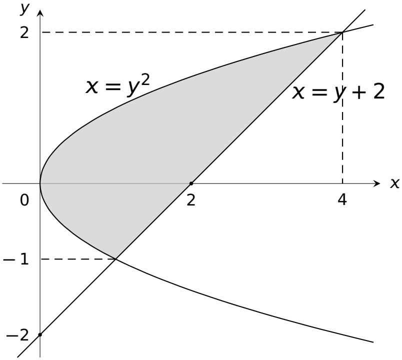
例 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。



解

$$\text{原式}=\int \left[\int xydy\right]dx$$

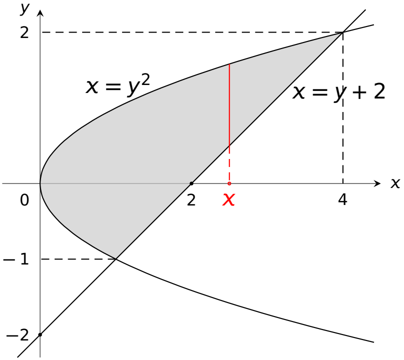
例 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。



解

$$\text{原式} = \int \quad \left[\int \quad xydy \right] dx$$

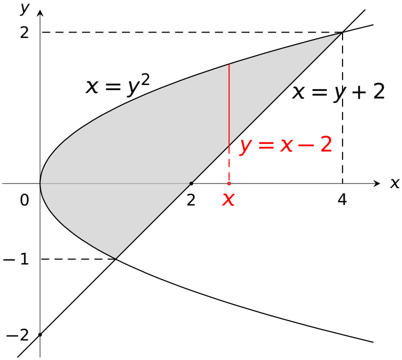
例 计算 $\iint_D xy\,dxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。



解

$$\text{原式}=\int \quad \Big[\int \quad xy\,dy\Big]dx$$

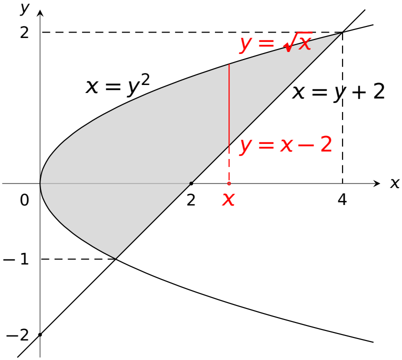
例 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。



解

$$\text{原式}=\int \quad \left[\int \quad xydy\right]dx$$

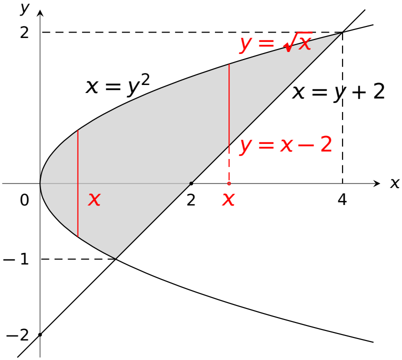
例 计算 $\iint_D xy\,dxdy$，其中是由抛物线 $x = y^2$ 和直线 $y = x - 2$ 所围成区域。



解

$$\text{原式} = \int \quad \left[\int \quad xy\,dy \right] dx$$

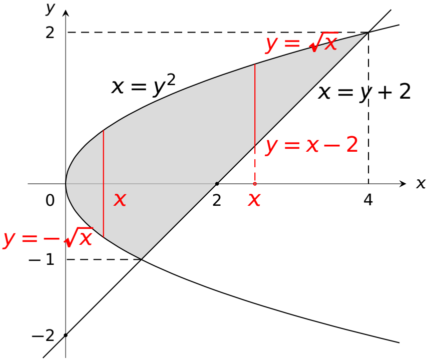
例 计算 $\iint_D xy\,dxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。



解

$$\text{原式}=\int \left[\int xy\,dy\right]dx$$

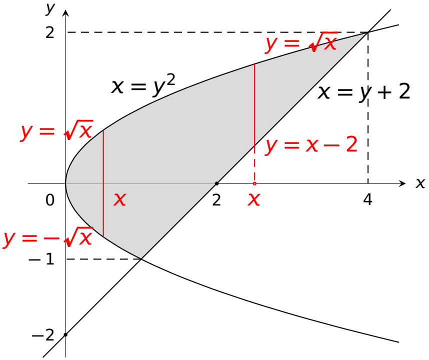
例 计算 $\iint_D xy\,dx\,dy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。



解

$$原式=\int \quad \left[\int \quad xy\,dy\right]dx$$

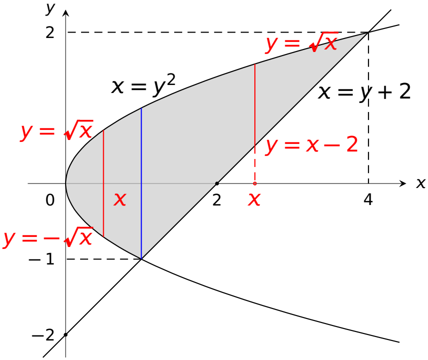
例 计算 $\iint_D xy\,dxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。



解

$$\text{原式}=\int \left[\int xy\,dy\right]dx$$

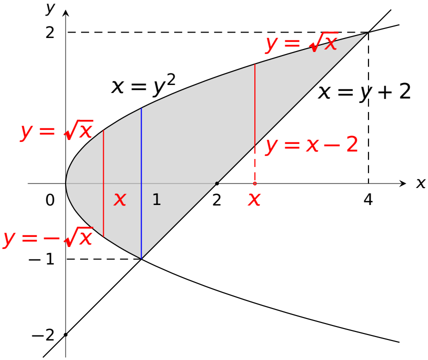
例 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。



解

$$原式=\int\Big[\int xydy\Big]dx$$

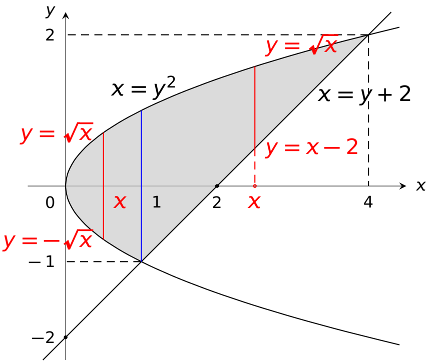
例 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。



解

$$\text{原式}=\int \left[\int xydy\right]dx$$

例 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。

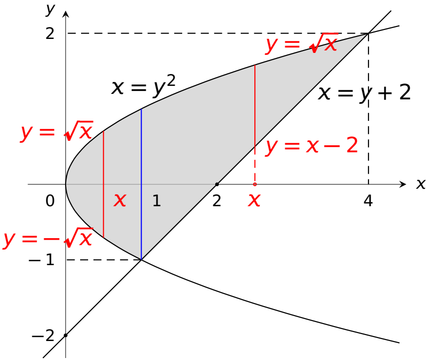


解

$$原式 = \int \left[\int xydy\right]dx$$

$$= \int_0^1 \left[\int xydy\right]dx + \int_1^4 \left[\int xydy\right]dx$$

例 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。

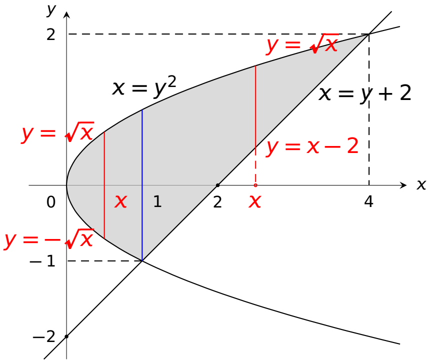


解

$$原式=\int\left[\int xydy\right]dx$$

$$=\int_0^1\left[\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}xydy\right]dx+\int_1^4\left[\int xydy\right]dx$$

例 计算 $\iint_D xydxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。

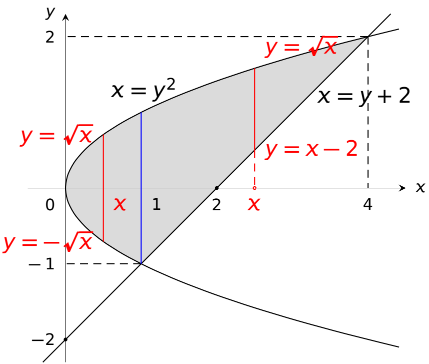


解

$$\text{原式}=\int\quad\left[\int\quad xydy\right]dx$$

$$=\int_0^1\left[\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}xydy\right]dx+\int_1^4\left[\int_{x-2}^{\sqrt{x}}xydy\right]dx$$

例 计算 $\iint_D xy\,dxdy$，其中是由抛物线 $x=y^2$ 和直线 $y=x-2$ 所围成区域。

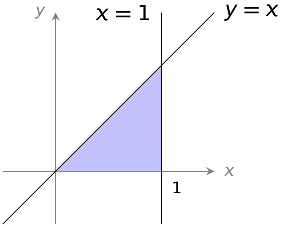


解

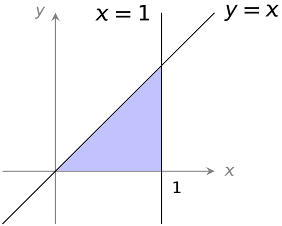
$$\text{原式}=\int\quad\Big[\int\quad xy\,dy\Big]dx$$

$$=\int_0^1\Big[\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} xy\,dy\Big]dx+\int_1^4\Big[\int_{x-2}^{\sqrt{x}} xy\,dy\Big]dx=\cdots$$

例 计算 $\iint_D e^{x^2}dxdy$，其中 D 是由 $y=x$，$x=1$，x 轴所围成的区域



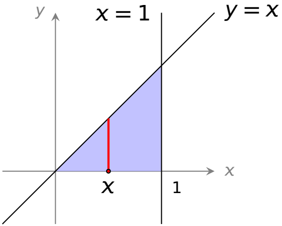
例 计算 $\iint_D e^{x^2} dxdy$，其中 D 是由 $y=x$，$x=1$，x 轴所围成的区域



解法一 固定 x，先对 y 积分：

$$\iint_D e^{x^2} dxdy = \int \Big[\int \quad e^{x^2} dy\Big] dx$$

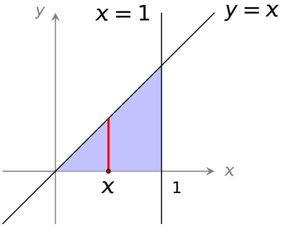
例 计算 $\iint_D e^{x^2}dxdy$，其中 D 是由 $y=x$，$x=1$，x 轴所围成的区域



解法一 固定 x，先对 y 积分：

$$\iint_D e^{x^2}dxdy=\int\left[\int e^{x^2}dy\right]dx$$

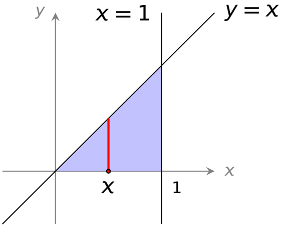
例 计算 $\iint_D e^{x^2}dxdy$，其中 D 是由 $y=x$，$x=1$，x 轴所围成的区域



解法一 固定 x，先对 y 积分：

$$\iint_D e^{x^2}dxdy = \int_0^1 \left[\int \quad e^{x^2}dy \right] dx$$

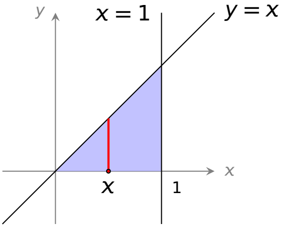
例 计算 $\iint_D e^{x^2}dxdy$，其中 D 是由 $y=x$，$x=1$，x 轴所围成的区域



解法一 固定 x，先对 y 积分：

$$\iint_D e^{x^2}dxdy = \int_0^1\left[\int_0^x e^{x^2}dy\right]dx$$

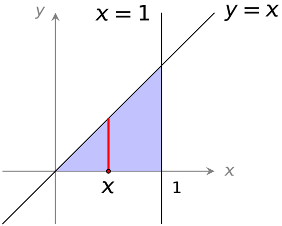
例 计算 $\iint_D e^{x^2}dxdy$，其中 D 是由 $y=x$，$x=1$，x 轴所围成的区域



解法一 固定 x，先对 y 积分：

$$\iint_D e^{x^2}dxdy = \int_0^1 \left[\int_0^x e^{x^2}dy\right]dx \qquad e^{x^2}y\Big|_0^x$$

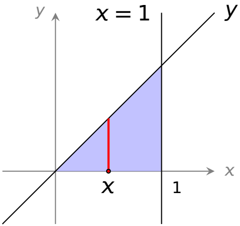
例 计算 $\iint_D e^{x^2} dxdy$，其中 D 是由 $y=x$，$x=1$，x 轴所围成的区域



解法一 固定 x，先对 y 积分：

$$\iint_D e^{x^2} dxdy = \int_0^1 \left[\int_0^x e^{x^2} dy \right] dx = \int_0^1 \left[e^{x^2} y \Big|_0^x \right] dx$$

例 计算 $\iint_D e^{x^2}dxdy$，其中 D 是由 $y=x$，$x=1$，x 轴所围成的区域

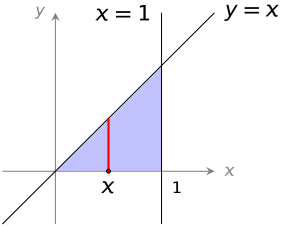


解法一 固定 x，先对 y 积分：

$$\iint_D e^{x^2}dxdy = \int_0^1\left[\int_0^x e^{x^2}dy\right]dx = \int_0^1\left[e^{x^2}y\Big|_0^x\right]dx$$

$$= \quad xe^{x^2}$$

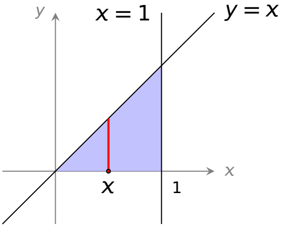
例 计算 $\iint_D e^{x^2}dxdy$，其中 D 是由 $y=x$，$x=1$，x 轴所围成的区域



解法一 固定 x，先对 y 积分：

$$\iint_D e^{x^2}dxdy = \int_0^1 \left[\int_0^x e^{x^2}dy\right]dx = \int_0^1 \left[e^{x^2}y\Big|_0^x\right]dx$$

$$= \int_0^1 xe^{x^2}dx$$



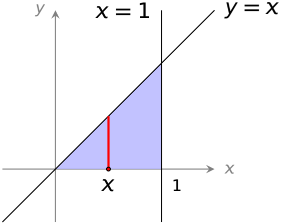
例 计算 $\iint_D e^{x^2}dxdy$，其中 D 是由 $y=x$，$x=1$，x 轴所围成的区域

解法一 固定 x，先对 y 积分：

$$\iint_D e^{x^2}dxdy=\int_0^1\left[\int_0^x e^{x^2}dy\right]dx=\int_0^1\left[e^{x^2}y\Big|_0^x\right]dx$$

$$=\int_0^1 xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1$$

例 计算 $\iint_D e^{x^2}dxdy$，其中 D 是由 $y=x$，$x=1$，x 轴所围成的区域

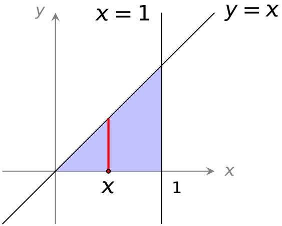


解法一 固定 x，先对 y 积分：

$$\iint_D e^{x^2}dxdy = \int_0^1 \left[\int_0^x e^{x^2}dy\right]dx = \int_0^1 \left[e^{x^2}y\Big|_0^x\right]dx$$

$$= \int_0^1 xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}$$

例 计算 $\iint_D e^{x^2}dxdy$，其中 D 是由 $y=x$，$x=1$，x 轴所围成的区域



解法一 固定 x，先对 y 积分：

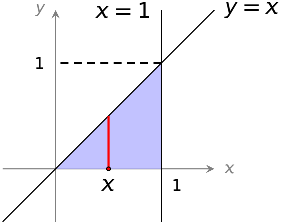
$$\iint_D e^{x^2}dxdy = \int_0^1 \left[\int_0^x e^{x^2}dy\right]dx = \int_0^1 \left[e^{x^2}y\Big|_0^x\right]dx$$

$$= \int_0^1 xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}$$

解法二 固定 y，先对 x 积分：

$$\iint_D e^{x^2}dxdy = \int \left[\int e^{x^2}dx\right]dy$$

例 计算 $\iint_D e^{x^2}dxdy$，其中 D 是由 $y=x$，$x=1$，x 轴所围成的区域



解法一 固定 x，先对 y 积分：

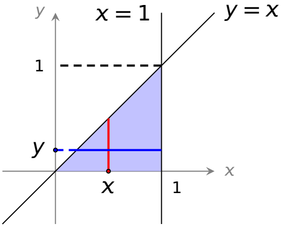
$$\iint_D e^{x^2}dxdy = \int_0^1 \Big[\int_0^x e^{x^2}dy\Big]dx = \int_0^1 \Big[e^{x^2}y\Big|_0^x\Big]dx$$

$$= \int_0^1 xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}$$

解法二 固定 y，先对 x 积分：

$$\iint_D e^{x^2}dxdy = \int \Big[\int e^{x^2}dx\Big]dy$$

例 计算 $\iint_D e^{x^2}dxdy$，其中 D 是由 $y=x$，$x=1$，x 轴所围成的区域



解法一 固定 x，先对 y 积分：

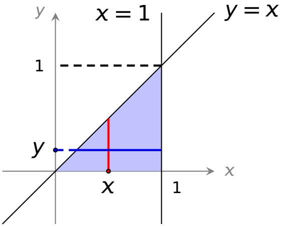
$$\iint_D e^{x^2}dxdy = \int_0^1 \left[\int_0^x e^{x^2}dy\right]dx = \int_0^1 \left[e^{x^2}y\Big|_0^x\right]dx$$

$$= \int_0^1 xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}$$

解法二 固定 y，先对 x 积分：

$$\iint_D e^{x^2}dxdy = \int \left[\int e^{x^2}dx\right]dy$$

例 计算 $\iint_D e^{x^2}dxdy$，其中 D 是由 $y=x$，$x=1$，x 轴所围成的区域



解法一 固定 x，先对 y 积分：

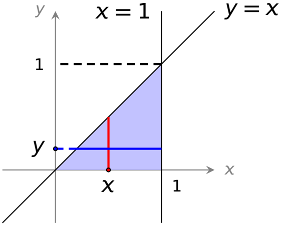
$$\iint_D e^{x^2}dxdy=\int_0^1\left[\int_0^x e^{x^2}dy\right]dx=\int_0^1\left[e^{x^2}y\Big|_0^x\right]dx$$

$$=\int_0^1 xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}$$

解法二 固定 y，先对 x 积分：

$$\iint_D e^{x^2}dxdy=\int_0^1\left[\int e^{x^2}dx\right]dy$$

例 计算 $\iint_D e^{x^2}dxdy$，其中 D 是由 $y=x$，$x=1$，x 轴所围成的区域



解法一 固定 x，先对 y 积分：

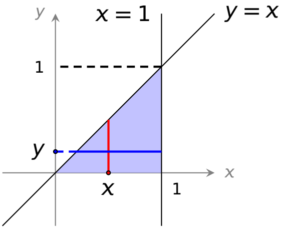
$$\iint_D e^{x^2}dxdy=\int_0^1\Big[\int_0^x e^{x^2}dy\Big]dx=\int_0^1\Big[e^{x^2}y\Big|_0^x\Big]dx$$

$$=\int_0^1 xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}$$

解法二 固定 y，先对 x 积分：

$$\iint_D e^{x^2}dxdy=\int_0^1\Big[\int_y^1 e^{x^2}dx\Big]dy$$

例 计算 $\iint_D e^{x^2}dxdy$，其中 D 是由 $y=x$，$x=1$，x 轴所围成的区域



解法一 固定 x，先对 y 积分：

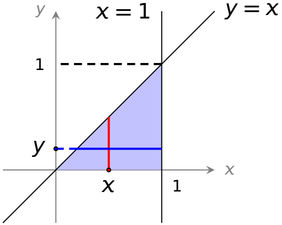
$$\iint_D e^{x^2}dxdy=\int_0^1\Big[\int_0^x e^{x^2}dy\Big]dx=\int_0^1\Big[e^{x^2}y\Big|_0^x\Big]dx$$

$$=\int_0^1 xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}$$

解法二 固定 y，先对 x 积分：

$$\iint_D e^{x^2}dxdy=\int_0^1\Big[\int_y^1 e^{x^2}dx\Big]dy=\cdots\cdots\text{积不出}$$

例 计算 $\iint_D e^{x^2}dxdy$，其中 D 是由 $y=x$，$x=1$，x 轴所围成的区域



解法一 固定 x，先对 y 积分：

$$\iint_D e^{x^2}dxdy = \int_0^1\Big[\int_0^x e^{x^2}dy\Big]dx = \int_0^1\Big[e^{x^2}y\Big|_0^x\Big]dx$$

$$= \int_0^1 xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}e-\frac{1}{2}$$

解法二 固定 y，先对 x 积分：

$$\iint_D e^{x^2}dxdy = \int_0^1\Big[\int_y^1 e^{x^2}dx\Big]dy = \cdots\cdots \text{积不出}$$

注 选择恰当的积分次序，才能算出二重积分！