第 10 周作业解答

练习 1. 计算 $\iiint_\Omega zdv$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域。分别用“先一后二”及“先二后一”的方法化为累次积分进行计算。

解“先一后二”法：Ω 在 xoy 坐标面上的投影是 $D_{xy}=\{(x,y)|\,x^2+y^2\le 1\}$，

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega zdv &= \iint_{D_{xy}}\left[\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} zdz\right]dxdy=\iint_{D_{xy}}\left[\frac{1}{2}z^2\Big|_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}\right]dxdy\\ &= \frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}\left[2-x^2-y^2-(x^2+y^2)^2\right]dxdy\\ &\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}\left[2-\rho^2-\rho^4\right]\cdot\rho d\rho d\theta\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^1\left[2-\rho^2-\rho^4\right]\cdot\rho d\rho\right\}d\theta=\pi\int_0^1\left[2\rho-\rho^3-\rho^5\right]d\rho\\ &= \pi\left(\rho^2-\frac{1}{4}\rho^4-\frac{1}{6}\rho^6\right)\Big|_0^1=\frac{7}{12}\pi\end{aligned}$$

“先二后一”法：$0\le z\le\sqrt{2}$。当 $0\le z\le 1$ 时，截面 $D_z=\{(x,y)|\,x^2+y^2\le z\}$；当 $1\le z\le\sqrt{2}$ 时，截面 $D_z=\{(x,y)|\,x^2+y^2\le 2-z^2\}$。

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega zdv &= \int_0^{\sqrt{2}}\left[\iint_{D_z} zdxdy\right]dz=\int_0^{\sqrt{2}} z\left[\iint_{D_z} dxdy\right]dz=\int_0^{\sqrt{2}} z|D_z|dz\\ &= \int_0^1 z|D_z|dz+\int_1^{\sqrt{2}} z|D_z|dz\\ &= \int_0^1 z(\pi z)dz+\int_1^{\sqrt{2}} z\pi(2-z^2)dz\\ &= \frac{1}{3}\pi z^3\Big|_0^1+\pi(z^2-\frac{1}{4}z^4)\Big|_1^{\sqrt{2}}=\frac{7}{12}\pi\end{aligned}$$

练习 2. 计算 $\iiint_\Omega x^2\cos zdv$，其中 Ω 是由 $z=0$, $z=\frac{\pi}{2}$, $y=0$, $y=1$, $x=0$ 及 $x+y=1$ 所围成的闭区域。

解　“先一后二”法：Ω 在 xoy 坐标面上的投影是 $D_{xy}=\{(x,y)|\,0\le x,\,0\le y,\,x+y\le 1\}$。$\Omega=\{(x,y,z)|\,0\le z\le\frac{\pi}{2},\,(x,y)\in D_{xy}\}$。

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega x^2\cos zdv &= \iint_{D_{xy}}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos zdz\right]dxdy=\iint_{D_{xy}}\left[x^2\sin z\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right]dxdy\\ &= \iint_{D_{xy}} x^2dxdy=\int_0^1\left[\int_0^{1-x} x^2dy\right]dx=\int_0^1\left[x^2(1-x)\right]dx\\ &= \left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^1=\frac{1}{12}.\end{aligned}$$

练习 3. 计算 $\iiint_\Omega x dv$，其中 Ω 是由 $x=0, y=0, z=2$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域。

解 “先一后二”法：Ω 在 xoy 坐标面上的投影是 $D_{xy}=\{(x,\,y)|\,0\le x,\,0\le y,\,x^2+y^2\le 2\}$。

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega x dv &= \iint_{D_{xy}}\left[\int_{x^2+y^2}^2 x dz\right]dxdy = \iint_{D_{xy}}\left[x(2-x^2-y^2)\right]dxdy\\ &\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_{D_{xy}} \rho\cos\theta\cdot(2-\rho^2)\cdot\rho d\rho d\theta\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^{\sqrt{2}}(2\rho^2-\rho^4)\cos\theta d\rho\right]d\theta = \left[\int_0^{\sqrt{2}}(2\rho^2-\rho^4)d\rho\right]\cdot\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta\right]\\ &= \frac{8}{15}\sqrt{2}.\end{aligned}$$

练习 4. 计算 $\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)dxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$。

解 用球面坐标计算：

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)dxdydz &= \int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{\pi}\left[\int_0^1 \rho^2\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho\right]d\varphi\right\}d\theta\\ &= 2\pi\left[\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\right]\cdot\left[\int_0^1\rho^4 d\rho\right]\\ &= 2\pi\cdot 2\cdot\frac{1}{5} = \frac{4}{5}\pi\end{aligned}$$