第 9 章 d：隐函数的求导公式

数学系　　梁卓滨

2018-2019 学年 II

We are here now...

1. 隐函数的求导法：一个方程的情形

2. 隐函数的求导法：方程组的情形

3. 隐函数定理

隐函数的求导法 I

问题

给定二元函数 $F(x,y)$ $\Rightarrow$ 考虑方程 $F(x,y)=0$

隐函数的求导法 I

问题

$$
\begin{aligned}
\text{给定二元函数 } F(x,y) \ &\Rightarrow\ \text{考虑方程 } F(x,y)=0 \\
&\Rightarrow\ \text{解出 } y=f(x)
\end{aligned}
$$

隐函数的求导法 I

问题

$$给定二元函数\ F(x,y) \Rightarrow 考虑方程\ F(x,y)=0$$

$$\Rightarrow 解出\ y=f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=?$$

隐函数的求导法 I

问题

给定二元函数 $F(x,y)$ $\Rightarrow$ 考虑方程 $F(x,y)=0$

$\Rightarrow$ ~~解出 $y=f(x)$~~ 设 $y=f(x)$ 满足 $F(x,y)=0$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=?$$

隐函数的求导法 I

问题

给定二元函数 $F(x,y)$ $\Rightarrow$ 考虑方程 $F(x,y)=0$

$\Rightarrow$ ~~解出 $y=f(x)$~~ 设 $y=f(x)$ 满足 $F(x,y)=0$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=?$$

公式

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$$

隐函数的求导法 I

问题

给定二元函数 $F(x,y)$ $\Rightarrow$ 考虑方程 $F(x,y)=0$

$\Rightarrow$ ~~解出 $y=f(x)$~~ 设 $y=f(x)$ 满足 $F(x,y)=0$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=?$$

公式

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y} \qquad (F_y\neq 0)$$

隐函数的求导法 I

问题

给定二元函数 $F(x,y)$ $\Rightarrow$ 考虑方程 $F(x,y)=0$

$\Rightarrow$ ~~解出 $y=f(x)$~~ 设 $y=f(x)$ 满足 $F(x,y)=0$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = ?$$

公式

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} \qquad (F_y \neq 0)$$

证明

$F(x,f(x))=0 \quad \Rightarrow$

隐函数的求导法 I

问题

给定二元函数 $F(x,y)$ $\Rightarrow$ 考虑方程 $F(x,y)=0$

$\Rightarrow$ ~~解出 $y=f(x)$~~ 设 $y=f(x)$ 满足 $F(x,y)=0$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=?$$

公式

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y} \qquad (F_y\neq 0)$$

证明 $F(x,f(x))=0 \;\Rightarrow\; 0=\dfrac{d}{dx}F(x,f(x))=$

隐函数的求导法 I

问题

给定二元函数 $F(x,y)$ $\Rightarrow$ 考虑方程 $F(x,y)=0$

$\Rightarrow$ $\cancel{解出\ y=f(x)}$ 设 $y=f(x)$ 满足 $F(x,y)=0$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=?$$

公式

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y} \qquad (F_y\neq 0)$$

证明 $F(x,f(x))=0 \;\Rightarrow\; 0=\dfrac{d}{dx}F(x,f(x))=F_x+$

隐函数的求导法 I

问题

给定二元函数 $F(x,y)$ $\Rightarrow$ 考虑方程 $F(x,y)=0$

$\Rightarrow$ ~~解出 $y=f(x)$~~ 设 $y=f(x)$ 满足 $F(x,y)=0$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = ?$$

公式

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} \qquad (F_y \neq 0)$$

证明 $F(x,f(x))=0 \;\Rightarrow\; 0 = \dfrac{d}{dx}F(x,f(x)) = F_x + F_y \cdot \dfrac{df}{dx}$

隐函数的求导法 I

问题

给定二元函数 $F(x,y)$ $\Rightarrow$ 考虑方程 $F(x,y)=0$

$\Rightarrow$ ~~解出 $y=f(x)$~~ 设 $y=f(x)$ 满足 $F(x,y)=0$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=?$$

公式

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y} \qquad (F_y\neq 0)$$

证明 $F(x,f(x))=0 \ \Rightarrow\ 0=\dfrac{d}{dx}F(x,f(x))=F_x+F_y\cdot\dfrac{df}{dx}$

$$\Rightarrow \quad \frac{df}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$$

例 1 设 $y = f(x)$ 满足 $\sin y + e^x = xy^2$，求 $\frac{dy}{dx}$

例 1 设 $y = f(x)$ 满足 $\sin y + e^x = xy^2$，求 $\frac{dy}{dx}$

方法一

$F(x, y) = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} =$$

例 1 设 $y=f(x)$ 满足 $\sin y+e^x=xy^2$，求 $\frac{dy}{dx}$

方法一 注意 $\sin y+e^x-xy^2=0$

$F(x, y)=0$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=$$

例 1 设 $y=f(x)$ 满足 $\sin y+e^x=xy^2$，求 $\frac{dy}{dx}$

方法一 注意 $\sin y+e^x-xy^2=0$，令 $F(x,y)=\sin y+e^x-xy^2$，$F(x,y)=0$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=$$

例 1 设 $y=f(x)$ 满足 $\sin y+e^x=xy^2$，求 $\frac{dy}{dx}$

方法一 注意 $\sin y+e^x-xy^2=0$，令 $F(x,y)=\sin y+e^x-xy^2$，则 $F(x,y)=0$，所以

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{(\sin y+e^x-xy^2)'_x}{(\sin y+e^x-xy^2)'_y}=$$

例 1 设 $y = f(x)$ 满足 $\sin y + e^x = xy^2$，求 $\frac{dy}{dx}$

方法一 注意 $\sin y + e^x - xy^2 = 0$，令 $F(x, y) = \sin y + e^x - xy^2$，则 $F(x, y) = 0$，所以

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{(\sin y + e^x - xy^2)'_x}{(\sin y + e^x - xy^2)'_y} = -\underline{\hspace{4cm}}$$

例 1 设 $y=f(x)$ 满足 $\sin y+e^x=xy^2$，求 $\frac{dy}{dx}$

方法一 注意 $\sin y+e^x-xy^2=0$，令 $F(x,y)=\sin y+e^x-xy^2$，则 $F(x,y)=0$，所以

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{(\sin y+e^x-xy^2)'_x}{(\sin y+e^x-xy^2)'_y}=-\frac{e^x-y^2}{\qquad\qquad}$$

例 1 设 $y=f(x)$ 满足 $\sin y+e^x=xy^2$，求 $\frac{dy}{dx}$

方法一 注意 $\sin y+e^x-xy^2=0$，令 $F(x,y)=\sin y+e^x-xy^2$，则 $F(x,y)=0$，所以

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{(\sin y+e^x-xy^2)'_x}{(\sin y+e^x-xy^2)'_y}=-\frac{e^x-y^2}{\cos y-2xy}$$

例 1 设 $y=f(x)$ 满足 $\sin y+e^x=xy^2$，求 $\frac{dy}{dx}$

方法一 注意 $\sin y+e^x-xy^2=0$，令 $F(x,y)=\sin y+e^x-xy^2$，则 $F(x,y)=0$，所以

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{(\sin y+e^x-xy^2)'_x}{(\sin y+e^x-xy^2)'_y}=-\frac{e^x-y^2}{\cos y-2xy}$$

方法二

例 1 设 $y=f(x)$ 满足 $\sin y+e^x=xy^2$，求 $\frac{dy}{dx}$

方法一 注意 $\sin y+e^x-xy^2=0$，令 $F(x, y)=\sin y+e^x-xy^2$，则 $F(x, y)=0$，所以

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{(\sin y+e^x-xy^2)'_x}{(\sin y+e^x-xy^2)'_y}=-\frac{e^x-y^2}{\cos y-2xy}$$

方法二 注意 $\sin y(x)+e^x-xy(x)^2=0$，

例 1 设 $y=f(x)$ 满足 $\sin y+e^x=xy^2$，求 $\frac{dy}{dx}$

方法一 注意 $\sin y+e^x-xy^2=0$，令 $F(x,y)=\sin y+e^x-xy^2$，则 $F(x,y)=0$，所以

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{(\sin y+e^x-xy^2)'_x}{(\sin y+e^x-xy^2)'_y}=-\frac{e^x-y^2}{\cos y-2xy}$$

方法二 注意 $\sin y(x)+e^x-xy(x)^2=0$，所以

$$0=\left(\sin y(x)+e^x-xy(x)^2\right)'_x$$

例 1 设 $y=f(x)$ 满足 $\sin y+e^x=xy^2$，求 $\frac{dy}{dx}$

方法一 注意 $\sin y+e^x-xy^2=0$，令 $F(x,y)=\sin y+e^x-xy^2$，则 $F(x,y)=0$，所以

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{(\sin y+e^x-xy^2)'_x}{(\sin y+e^x-xy^2)'_y}=-\frac{e^x-y^2}{\cos y-2xy}$$

方法二 注意 $\sin y(x)+e^x-xy(x)^2=0$，所以

$$\begin{aligned}0&=\left(\sin y(x)+e^x-xy(x)^2\right)'_x\\&=(\sin y(x))'_x+(e^x)'_x-(xy(x)^2)'_x\end{aligned}$$

例 1 设 $y=f(x)$ 满足 $\sin y+e^x=xy^2$，求 $\frac{dy}{dx}$

方法一 注意 $\sin y+e^x-xy^2=0$，令 $F(x,y)=\sin y+e^x-xy^2$，则 $F(x,y)=0$，所以

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{(\sin y+e^x-xy^2)'_x}{(\sin y+e^x-xy^2)'_y}=-\frac{e^x-y^2}{\cos y-2xy}$$

方法二 注意 $\sin y(x)+e^x-xy(x)^2=0$，所以

$$\begin{aligned}0&=\left(\sin y(x)+e^x-xy(x)^2\right)'_x\\&=(\sin y(x))'_x+(e^x)'_x-(xy(x)^2)'_x\\&=\cos y\cdot y'\end{aligned}$$

例 1 设 $y=f(x)$ 满足 $\sin y+e^x=xy^2$，求 $\frac{dy}{dx}$

方法一 注意 $\sin y+e^x-xy^2=0$，令 $F(x,y)=\sin y+e^x-xy^2$，则 $F(x,y)=0$，所以

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{(\sin y+e^x-xy^2)'_x}{(\sin y+e^x-xy^2)'_y}=-\frac{e^x-y^2}{\cos y-2xy}$$

方法二 注意 $\sin y(x)+e^x-xy(x)^2=0$，所以

$$\begin{aligned}0&=\left(\sin y(x)+e^x-xy(x)^2\right)'_x\\&=(\sin y(x))'_x+(e^x)'_x-(xy(x)^2)'_x\\&=\cos y\cdot y'+e^x\end{aligned}$$

例 1 设 $y=f(x)$ 满足 $\sin y+e^x=xy^2$，求 $\frac{dy}{dx}$

方法一 注意 $\sin y+e^x-xy^2=0$，令 $F(x,\,y)=\sin y+e^x-xy^2$，则 $F(x,\,y)=0$，所以

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{(\sin y+e^x-xy^2)'_x}{(\sin y+e^x-xy^2)'_y}=-\frac{e^x-y^2}{\cos y-2xy}$$

方法二 注意 $\sin y(x)+e^x-xy(x)^2=0$，所以

$$\begin{aligned}0&=\left(\sin y(x)+e^x-xy(x)^2\right)'_x\\&=(\sin y(x))'_x+(e^x)'_x-(xy(x)^2)'_x\\&=\cos y\cdot y'+e^x-y^2-2xy\cdot y'\end{aligned}$$

例 1 设 $y=f(x)$ 满足 $\sin y+e^x=xy^2$，求 $\frac{dy}{dx}$

方法一 注意 $\sin y+e^x-xy^2=0$，令 $F(x,y)=\sin y+e^x-xy^2$，则 $F(x,y)=0$，所以

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{(\sin y+e^x-xy^2)'_x}{(\sin y+e^x-xy^2)'_y}=-\frac{e^x-y^2}{\cos y-2xy}$$

方法二 注意 $\sin y(x)+e^x-xy(x)^2=0$，所以

$$\begin{aligned}0&=\left(\sin y(x)+e^x-xy(x)^2\right)'_x\\&=(\sin y(x))'_x+(e^x)'_x-(xy(x)^2)'_x\\&=\cos y\cdot y'+e^x-y^2-2xy\cdot y'\\&=e^x-y^2+(\cos y-2xy)y'\end{aligned}$$

例 1 设 $y=f(x)$ 满足 $\sin y+e^x=xy^2$，求 $\frac{dy}{dx}$

方法一 注意 $\sin y+e^x-xy^2=0$，令 $F(x,y)=\sin y+e^x-xy^2$，则 $F(x,y)=0$，所以

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{(\sin y+e^x-xy^2)'_x}{(\sin y+e^x-xy^2)'_y}=-\frac{e^x-y^2}{\cos y-2xy}$$

方法二 注意 $\sin y(x)+e^x-xy(x)^2=0$，所以

$$\begin{aligned}0&=\left(\sin y(x)+e^x-xy(x)^2\right)'_x\\&=(\sin y(x))'_x+(e^x)'_x-(xy(x)^2)'_x\\&=\cos y\cdot y'+e^x-y^2-2xy\cdot y'\\&=e^x-y^2+(\cos y-2xy)y'\end{aligned}$$

所以 $y'=-\frac{e^x-y^2}{\cos y-2xy}$

例 2 设 $y=f(x)$ 满足 $\ln(x^2+y^2)+3xy=4$，求 $\frac{dy}{dx}$

例 2 设 $y = f(x)$ 满足 $\ln(x^2 + y^2) + 3xy = 4$，求 $\frac{dy}{dx}$

解

$F(x, y) = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} =$$

例 2 设 $y=f(x)$ 满足 $\ln(x^2+y^2)+3xy=4$，求 $\frac{dy}{dx}$

解 注意 $\ln(x^2+y^2)+3xy-4=0$

$F(x, y)=0$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=$$

例 2 设 $y=f(x)$ 满足 $\ln(x^2+y^2)+3xy=4$，求 $\frac{dy}{dx}$

解 注意 $\ln(x^2+y^2)+3xy-4=0$，令

$$F(x, y)=\ln(x^2+y^2)+3xy-4$$

$F(x, y)=0$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=$$

例 2 设 $y=f(x)$ 满足 $\ln(x^2+y^2)+3xy=4$，求 $\frac{dy}{dx}$

解 注意 $\ln(x^2+y^2)+3xy-4=0$，令

$$F(x, y)=\ln(x^2+y^2)+3xy-4$$

则 $F(x, y)=0$，所以

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{(\ln(x^2+y^2)+3xy-4)'_x}{(\ln(x^2+y^2)+3xy-4)'_y}$$

例 2 设 $y=f(x)$ 满足 $\ln(x^2+y^2)+3xy=4$，求 $\frac{dy}{dx}$

解 注意 $\ln(x^2+y^2)+3xy-4=0$，令

$$F(x,y)=\ln(x^2+y^2)+3xy-4$$

则 $F(x,y)=0$，所以

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{(\ln(x^2+y^2)+3xy-4)'_x}{(\ln(x^2+y^2)+3xy-4)'_y}$$

$$=-\frac{\qquad}{\qquad}$$

例 2 设 $y=f(x)$ 满足 $\ln(x^2+y^2)+3xy=4$，求 $\frac{dy}{dx}$

解 注意 $\ln(x^2+y^2)+3xy-4=0$，令

$$F(x,y)=\ln(x^2+y^2)+3xy-4$$

则 $F(x,y)=0$，所以

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{(\ln(x^2+y^2)+3xy-4)'_x}{(\ln(x^2+y^2)+3xy-4)'_y}$$

$$=-\frac{\frac{2x}{x^2+y^2}+3y}{\quad}$$

例 2 设 $y=f(x)$ 满足 $\ln(x^2+y^2)+3xy=4$，求 $\frac{dy}{dx}$

解 注意 $\ln(x^2+y^2)+3xy-4=0$，令

$$F(x,y)=\ln(x^2+y^2)+3xy-4$$

则 $F(x,y)=0$，所以

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{(\ln(x^2+y^2)+3xy-4)'_x}{(\ln(x^2+y^2)+3xy-4)'_y}$$

$$=-\frac{\frac{2x}{x^2+y^2}+3y}{\frac{2y}{x^2+y^2}+3x}$$

例 2 设 $y=f(x)$ 满足 $\ln(x^2+y^2)+3xy=4$，求 $\frac{dy}{dx}$

解 注意 $\ln(x^2+y^2)+3xy-4=0$，令

$$F(x,y)=\ln(x^2+y^2)+3xy-4$$

则 $F(x,y)=0$，所以

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{(\ln(x^2+y^2)+3xy-4)'_x}{(\ln(x^2+y^2)+3xy-4)'_y}$$

$$=-\frac{\frac{2x}{x^2+y^2}+3y}{\frac{2y}{x^2+y^2}+3x}$$

$$=-\frac{2x+3x^2y+3y^3}{2y+3xy^2+3x^3}$$

隐函数的求导法 II

问题

给定 $F(x,y,z) \ \Rightarrow\ $ 考虑方程 $F(x,y,z)=0$

隐函数的求导法 II

问题

$$\begin{aligned}\text{给定 } F(x,y,z) \;&\Rightarrow\; \text{考虑方程 } F(x,y,z)=0\\ &\Rightarrow\; \text{解出 } z=u(x,y)\end{aligned}$$

隐函数的求导法 II

问题

$$\text{给定 } F(x,y,z) \ \Rightarrow \ \text{考虑方程 } F(x,y,z)=0$$

$$\Rightarrow \ \text{解出 } z=u(x,y)$$

$$\Rightarrow \ \frac{\partial z}{\partial x}=?, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=?$$

隐函数的求导法 II

问题

给定 $F(x,y,z)$ $\Rightarrow$ 考虑方程 $F(x,y,z)=0$

$\Rightarrow$ ~~解出 $z=u(x,y)$~~ 设 $z=u(x,y)$ 满足 $F(x,y,z)=0$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x}=?, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=?$$

隐函数的求导法 II

问题

给定 $F(x,y,z)$ $\Rightarrow$ 考虑方程 $F(x,y,z)=0$

$\Rightarrow$ ~~解出 $z=u(x,y)$~~ 设 $z=u(x,y)$ 满足 $F(x,y,z)=0$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x}=?, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=?$$

公式

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}}$$

隐函数的求导法 II

问题

给定 $F(x,y,z)$ $\Rightarrow$ 考虑方程 $F(x,y,z)=0$

$\Rightarrow$ ~~解出 $z=u(x,y)$~~ 设 $z=u(x,y)$ 满足 $F(x,y,z)=0$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x}=?, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=?$$

公式

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z} \qquad (F_z\neq 0)$$

隐函数的求导法 II

问题

给定 $F(x, y, z)$ $\Rightarrow$ 考虑方程 $F(x, y, z) = 0$

$\Rightarrow$ ~~解出 $z = u(x, y)$~~ 设 $z = u(x, y)$ 满足 $F(x, y, z) = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x} = ?, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = ?$$

公式

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} \qquad (F_z \neq 0)$$

证明 $F(x, y, u(x, y)) = 0 \quad \Rightarrow$

隐函数的求导法 II

问题

给定 $F(x,y,z) \;\Rightarrow\;$ 考虑方程 $F(x,y,z)=0$

$\Rightarrow$ ~~解出~~ $\cancel{z=u(x,y)}$ 设 $z=u(x,y)$ 满足 $F(x,y,z)=0$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x}=?, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=?$$

公式

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z} \qquad (F_z\neq 0)$$

证明 $F(x,y,u(x,y))=0 \;\Rightarrow\; 0=\dfrac{\partial}{\partial x}F(x,y,u(x,y))=$

隐函数的求导法 II

问题

给定 $F(x,y,z)$ $\Rightarrow$ 考虑方程 $F(x,y,z)=0$

$\Rightarrow$ ~~解出 $z=u(x,y)$~~ 设 $z=u(x,y)$ 满足 $F(x,y,z)=0$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x}=?, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=?$$

公式

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z} \qquad (F_z\neq 0)$$

证明 $F(x,y,u(x,y))=0 \;\Rightarrow\; 0=\dfrac{\partial}{\partial x}F(x,y,u(x,y))=F_x+$

隐函数的求导法 II

问题

$$\text{给定 } F(x,y,z) \;\Rightarrow\; \text{考虑方程 } F(x,y,z)=0$$

$$\Rightarrow\; \cancel{\text{解出 } z=u(x,y)} \quad \text{设 } z=u(x,y) \text{ 满足 } F(x,y,z)=0$$

$$\Rightarrow\; \frac{\partial z}{\partial x}=?,\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=?$$

公式

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}\qquad (F_z\neq 0)$$

证明 $F(x,y,u(x,y))=0 \;\Rightarrow\; 0=\frac{\partial}{\partial x}F(x,y,u(x,y))=F_x+F_z\cdot\frac{\partial u}{dx}$

隐函数的求导法 II

问题

给定 $F(x,y,z)$ $\Rightarrow$ 考虑方程 $F(x,y,z)=0$

$\Rightarrow$ ~~解出~~ $\cancel{z=u(x,y)}$ 设 $z=u(x,y)$ 满足 $F(x,y,z)=0$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x} = ?, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = ?$$

公式

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} \qquad (F_z \neq 0)$$

证明 $F(x,y,u(x,y))=0 \;\Rightarrow\; 0 = \dfrac{\partial}{\partial x}F(x,y,u(x,y)) = F_x + F_z \cdot \dfrac{\partial u}{dx}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$$

隐函数的求导法 II

问题

给定 $F(x,y,z)$ $\Rightarrow$ 考虑方程 $F(x,y,z)=0$

$\Rightarrow$ $\cancel{\text{解出 } z=u(x,y)}$ 设 $z=u(x,y)$ 满足 $F(x,y,z)=0$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x}=?, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=?$$

公式

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z} \qquad (F_z\neq 0)$$

证明 $F(x,y,u(x,y))=0 \;\Rightarrow\; 0=\frac{\partial}{\partial x}F(x,y,u(x,y))=F_x+F_z\cdot\frac{\partial u}{dx}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}, \quad \text{同理} \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$$

例 1 设 $z = f(x, y)$ 满足 $x + y + xz = e^z - 1$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

例 1 设 $z=f(x,y)$ 满足 $x+y+xz=e^z-1$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 $F(x,y,z)=0$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=$$

例 1 设 $z=f(x,y)$ 满足 $x+y+xz=e^z-1$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x,y,z)=x+y+xz-e^z+1$，　$F(x,y,z)=0$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=$$

例 1 设 $z=f(x, y)$ 满足 $x+y+xz=e^z-1$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x, y, z)=x+y+xz-e^z+1$，则 $F(x, y, z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(x+y+xz-e^z+1)'_x}{(x+y+xz-e^z+1)'_z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(x+y+xz-e^z+1)'_y}{(x+y+xz-e^z+1)'_z}$$

例 1 设 $z=f(x,y)$ 满足 $x+y+xz=e^z-1$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x,y,z)=x+y+xz-e^z+1$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(x+y+xz-e^z+1)'_x}{(x+y+xz-e^z+1)'_z}$$

$$=-\frac{\qquad}{\qquad}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(x+y+xz-e^z+1)'_y}{(x+y+xz-e^z+1)'_z}$$

$$=-\frac{\qquad}{\qquad}$$

例 1 设 $z=f(x,y)$ 满足 $x+y+xz=e^z-1$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x,y,z)=x+y+xz-e^z+1$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(x+y+xz-e^z+1)'_x}{(x+y+xz-e^z+1)'_z}$$

$$=-\frac{\qquad\qquad}{0}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(x+y+xz-e^z+1)'_y}{(x+y+xz-e^z+1)'_z}$$

$$=-\frac{\qquad\qquad}{\qquad}$$

例 1 设 $z = f(x, y)$ 满足 $x + y + xz = e^z - 1$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x, y, z) = x + y + xz - e^z + 1$，则 $F(x, y, z) = 0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{(x+y+xz-e^z+1)'_x}{(x+y+xz-e^z+1)'_z}$$

$$= -\frac{\qquad}{0+0}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{(x+y+xz-e^z+1)'_y}{(x+y+xz-e^z+1)'_z}$$

$$= -\frac{\qquad}{\qquad}$$

例 1 设 $z=f(x,y)$ 满足 $x+y+xz=e^z-1$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x,y,z)=x+y+xz-e^z+1$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(x+y+xz-e^z+1)'_x}{(x+y+xz-e^z+1)'_z}$$

$$=-\frac{\qquad}{0+0+x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(x+y+xz-e^z+1)'_y}{(x+y+xz-e^z+1)'_z}$$

$$=-\frac{\qquad}{\qquad}$$

例 1 设 $z=f(x, y)$ 满足 $x+y+xz=e^z-1$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x, y, z)=x+y+xz-e^z+1$，则 $F(x, y, z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(x+y+xz-e^z+1)'_x}{(x+y+xz-e^z+1)'_z}$$

$$=-\frac{\qquad}{0+0+x-e^z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(x+y+xz-e^z+1)'_y}{(x+y+xz-e^z+1)'_z}$$

$$=-\frac{\qquad}{\qquad}$$

例 1 设 $z = f(x, y)$ 满足 $x + y + xz = e^z - 1$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x, y, z) = x + y + xz - e^z + 1$，则 $F(x, y, z) = 0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{(x + y + xz - e^z + 1)'_x}{(x + y + xz - e^z + 1)'_z}$$

$$= -\frac{}{0 + 0 + x - e^z + 0}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{(x + y + xz - e^z + 1)'_y}{(x + y + xz - e^z + 1)'_z}$$

$$= -\frac{}{}$$

例 1 设 $z = f(x, y)$ 满足 $x + y + xz = e^z - 1$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x, y, z) = x + y + xz - e^z + 1$，则 $F(x, y, z) = 0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{(x + y + xz - e^z + 1)'_x}{(x + y + xz - e^z + 1)'_z}$$

$$= -\frac{\qquad}{0 + 0 + x - e^z + 0}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{(x + y + xz - e^z + 1)'_y}{(x + y + xz - e^z + 1)'_z}$$

$$= -\frac{\qquad}{0 + 0 + x - e^z + 0}$$

例 1 设 $z=f(x,y)$ 满足 $x+y+xz=e^z-1$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x,y,z)=x+y+xz-e^z+1$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(x+y+xz-e^z+1)'_x}{(x+y+xz-e^z+1)'_z}$$

$$=-\frac{1}{0+0+x-e^z+0}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(x+y+xz-e^z+1)'_y}{(x+y+xz-e^z+1)'_z}$$

$$=-\frac{}{0+0+x-e^z+0}$$

例 1 设 $z = f(x, y)$ 满足 $x + y + xz = e^z - 1$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x, y, z) = x + y + xz - e^z + 1$，则 $F(x, y, z) = 0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{(x + y + xz - e^z + 1)'_x}{(x + y + xz - e^z + 1)'_z}$$

$$= -\frac{1 + 0}{0 + 0 + x - e^z + 0}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{(x + y + xz - e^z + 1)'_y}{(x + y + xz - e^z + 1)'_z}$$

$$= -\frac{}{0 + 0 + x - e^z + 0}$$

例 1 设 $z=f(x,y)$ 满足 $x+y+xz=e^z-1$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x,y,z)=x+y+xz-e^z+1$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(x+y+xz-e^z+1)'_x}{(x+y+xz-e^z+1)'_z}$$

$$=-\frac{1+0+z}{0+0+x-e^z+0}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(x+y+xz-e^z+1)'_y}{(x+y+xz-e^z+1)'_z}$$

$$=-\frac{}{0+0+x-e^z+0}$$

例 1 设 $z=f(x, y)$ 满足 $x+y+xz=e^z-1$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x, y, z)=x+y+xz-e^z+1$，则 $F(x, y, z)=0$，所以

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z} &= -\frac{(x+y+xz-e^z+1)'_x}{(x+y+xz-e^z+1)'_z} \\
&= -\frac{1+0+z-0}{0+0+x-e^z+0}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z} &= -\frac{(x+y+xz-e^z+1)'_y}{(x+y+xz-e^z+1)'_z} \\
&= -\frac{}{0+0+x-e^z+0}
\end{aligned}
$$

例 1 设 $z = f(x, y)$ 满足 $x + y + xz = e^z - 1$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x, y, z) = x + y + xz - e^z + 1$，则 $F(x, y, z) = 0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{(x + y + xz - e^z + 1)'_x}{(x + y + xz - e^z + 1)'_z}$$

$$= -\frac{1 + 0 + z - 0 + 0}{0 + 0 + x - e^z + 0}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{(x + y + xz - e^z + 1)'_y}{(x + y + xz - e^z + 1)'_z}$$

$$= -\frac{}{0 + 0 + x - e^z + 0}$$

例 1 设 $z = f(x, y)$ 满足 $x + y + xz = e^z - 1$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x, y, z) = x + y + xz - e^z + 1$，则 $F(x, y, z) = 0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{(x + y + xz - e^z + 1)'_x}{(x + y + xz - e^z + 1)'_z}$$

$$= -\frac{1 + 0 + z - 0 + 0}{0 + 0 + x - e^z + 0} = -\frac{1 + z}{x - e^z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{(x + y + xz - e^z + 1)'_y}{(x + y + xz - e^z + 1)'_z}$$

$$= -\frac{\qquad}{0 + 0 + x - e^z + 0}$$

例 1 设 $z=f(x,y)$ 满足 $x+y+xz=e^z-1$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x,y,z)=x+y+xz-e^z+1$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(x+y+xz-e^z+1)'_x}{(x+y+xz-e^z+1)'_z}$$

$$=-\frac{1+0+z-0+0}{0+0+x-e^z+0}=-\frac{1+z}{x-e^z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(x+y+xz-e^z+1)'_y}{(x+y+xz-e^z+1)'_z}$$

$$=-\frac{0}{0+0+x-e^z+0}$$

例 1 设 $z=f(x, y)$ 满足 $x+y+xz=e^z-1$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x, y, z)=x+y+xz-e^z+1$，则 $F(x, y, z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(x+y+xz-e^z+1)'_x}{(x+y+xz-e^z+1)'_z}$$

$$=-\frac{1+0+z-0+0}{0+0+x-e^z+0}=-\frac{1+z}{x-e^z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(x+y+xz-e^z+1)'_y}{(x+y+xz-e^z+1)'_z}$$

$$=-\frac{0+1}{0+0+x-e^z+0}$$

例 1 设 $z=f(x, y)$ 满足 $x+y+xz=e^z-1$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x, y, z)=x+y+xz-e^z+1$，则 $F(x, y, z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(x+y+xz-e^z+1)'_x}{(x+y+xz-e^z+1)'_z}$$

$$=-\frac{1+0+z-0+0}{0+0+x-e^z+0}=-\frac{1+z}{x-e^z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(x+y+xz-e^z+1)'_y}{(x+y+xz-e^z+1)'_z}$$

$$=-\frac{0+1+0}{0+0+x-e^z+0}$$

例 1 设 $z=f(x,y)$ 满足 $x+y+xz=e^z-1$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x,y,z)=x+y+xz-e^z+1$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(x+y+xz-e^z+1)'_x}{(x+y+xz-e^z+1)'_z}$$

$$=-\frac{1+0+z-0+0}{0+0+x-e^z+0}=-\frac{1+z}{x-e^z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(x+y+xz-e^z+1)'_y}{(x+y+xz-e^z+1)'_z}$$

$$=-\frac{0+1+0-0}{0+0+x-e^z+0}$$

例 1 设 $z=f(x, y)$ 满足 $x+y+xz=e^z-1$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x, y, z)=x+y+xz-e^z+1$，则 $F(x, y, z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(x+y+xz-e^z+1)'_x}{(x+y+xz-e^z+1)'_z}$$

$$=-\frac{1+0+z-0+0}{0+0+x-e^z+0}=-\frac{1+z}{x-e^z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(x+y+xz-e^z+1)'_y}{(x+y+xz-e^z+1)'_z}$$

$$=-\frac{0+1+0-0+0}{0+0+x-e^z+0}=-\frac{1}{x-e^z}$$

例 2 设 $z = f(x, y)$ 满足 $2\sin(x + 2y - 3z) = x + 2y - 3z$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

例 2 设 $z=f(x,y)$ 满足 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解

$F(x,\ y,\ z)=0$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=$$

例 2 设 $z=f(x,y)$ 满足 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x, y, z)=2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z$,

$F(x, y, z)=0$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=$$

例 2 设 $z=f(x,y)$ 满足 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x,y,z)=2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z$，则

$F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_x}{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_y}{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_z}$$

$$=$$

例 2 设 $z=f(x,y)$ 满足 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x, y, z)=2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z$，则

$F(x, y, z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_x}{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_z}$$

$$=-\frac{\qquad}{\qquad}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_y}{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_z}$$

$$=-\frac{\qquad}{\qquad}$$

例 2 设 $z=f(x,y)$ 满足 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x,\ y,\ z)=2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z$，则 $F(x,\ y,\ z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_x}{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_z}$$

$$=-\frac{}{-6\cos(x+2y-3z)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_y}{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_z}$$

$$=-\frac{}{}$$

例 2 设 $z=f(x,y)$ 满足 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x,\ y,\ z)=2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z$，则

$F(x,\ y,\ z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_x}{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_z}$$

$$=-\frac{\qquad}{-6\cos(x+2y-3z)+3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_y}{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_z}$$

$$=-\frac{\qquad}{\qquad}$$

例 2 设 $z=f(x,y)$ 满足 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x,\ y,\ z)=2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z$，则
$F(x,\ y,\ z)=0$，所以

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}&=-\frac{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_x}{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_z}\\&=-\frac{2\cos(x+2y-3z)}{-6\cos(x+2y-3z)+3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}&=-\frac{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_y}{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_z}\\&=-\frac{\qquad}{\qquad}\end{aligned}$$

例 2 设 $z = f(x, y)$ 满足 $2\sin(x+2y-3z) = x+2y-3z$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x, y, z) = 2\sin(x+2y-3z) - x - 2y + 3z$，则

$F(x, y, z) = 0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_x}{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_z}$$

$$= -\frac{2\cos(x+2y-3z)-1}{-6\cos(x+2y-3z)+3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_y}{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_z}$$

$$= -\frac{\qquad}{\qquad}$$

例 2 设 $z=f(x,y)$ 满足 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x,\ y,\ z)=2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z$，则

$F(x,\ y,\ z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_x}{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_z}$$

$$=-\frac{2\cos(x+2y-3z)-1}{-6\cos(x+2y-3z)+3}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_y}{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_z}$$

$$=-\frac{\qquad}{\qquad}$$

例 2 设 $z=f(x,y)$ 满足 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x,\ y,\ z)=2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z$，则

$F(x,\ y,\ z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_x}{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_z}$$

$$=-\frac{2\cos(x+2y-3z)-1}{-6\cos(x+2y-3z)+3}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_y}{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_z}$$

$$=-\frac{}{-6\cos(x+2y-3z)+3}$$

例 2 设 $z=f(x,y)$ 满足 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x,\,y,\,z)=2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z$，则 $F(x,\,y,\,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_x}{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_z}$$

$$=-\frac{2\cos(x+2y-3z)-1}{-6\cos(x+2y-3z)+3}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_y}{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_z}$$

$$=-\frac{4\cos(x+2y-3z)}{-6\cos(x+2y-3z)+3}$$

例 2 设 $z=f(x,y)$ 满足 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 令 $F(x,\ y,\ z)=2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z$，则

$F(x,\ y,\ z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_x}{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_z}$$

$$=-\frac{2\cos(x+2y-3z)-1}{-6\cos(x+2y-3z)+3}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_y}{(2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z)'_z}$$

$$=-\frac{4\cos(x+2y-3z)-2}{-6\cos(x+2y-3z)+3}$$

例 3 设 $z=f(x,y)$ 满足 $z-y-x+xe^{z-y-x}=0$，求 dz

例 3 设 $z = f(x, y)$ 满足 $z - y - x + xe^{z-y-x} = 0$，求 dz

解

$$\frac{\partial z}{\partial x} =$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} =$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy =$$

例 3 设 $z = f(x, y)$ 满足 $z - y - x + xe^{z-y-x} = 0$，求 dz

解 令 $F(x, y, z) = z - y - x + xe^{z-y-x}$，则 $F(x, y, z) = 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x} =$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} =$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy =$$

例 3 设 $z = f(x, y)$ 满足 $z - y - x + xe^{z-y-x} = 0$，求 dz

解 令 $F(x, y, z) = z - y - x + xe^{z-y-x}$，则 $F(x, y, z) = 0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} =$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} =$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy =$$

例 3 设 $z=f(x,y)$ 满足 $z-y-x+xe^{z-y-x}=0$，求 dz

解 令 $F(x,y,z)=z-y-x+xe^{z-y-x}$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_x}{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_y}{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_z}$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=$$

例 3 设 $z=f(x,y)$ 满足 $z-y-x+xe^{z-y-x}=0$，求 dz

解 令 $F(x,y,z)=z-y-x+xe^{z-y-x}$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_x}{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_z}$$

$$=-\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_y}{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_z}=-\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=$$

例 3 设 $z=f(x,y)$ 满足 $z-y-x+xe^{z-y-x}=0$，求 dz

解 令 $F(x,y,z)=z-y-x+xe^{z-y-x}$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_x}{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_z}$$

$$=-\frac{\qquad}{1+xe^{z-y-x}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_y}{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_z}=-\frac{\qquad}{\qquad}$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=$$

例 3 设 $z=f(x,y)$ 满足 $z-y-x+xe^{z-y-x}=0$，求 dz

解 令 $F(x,y,z)=z-y-x+xe^{z-y-x}$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_x}{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_z}$$

$$=-\frac{-1}{1+xe^{z-y-x}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_y}{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_z}=-\underline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=$$

例 3 设 $z=f(x,y)$ 满足 $z-y-x+xe^{z-y-x}=0$，求 dz

解 令 $F(x,y,z)=z-y-x+xe^{z-y-x}$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_x}{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_z}$$

$$=-\frac{-1+e^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_y}{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_z}=-\underline{\qquad\qquad}$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=$$

例 3 设 $z=f(x,y)$ 满足 $z-y-x+xe^{z-y-x}=0$，求 dz

解 令 $F(x,y,z)=z-y-x+xe^{z-y-x}$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_x}{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_z}$$

$$=-\frac{-1+e^{z-y-x}-xe^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_y}{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_z}=-\frac{\qquad}{\qquad}$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=$$

例 3 设 $z=f(x,y)$ 满足 $z-y-x+xe^{z-y-x}=0$，求 dz

解 令 $F(x,y,z)=z-y-x+xe^{z-y-x}$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_x}{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_z}$$

$$=-\frac{-1+e^{z-y-x}-xe^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}}=\frac{1+(x-1)e^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_y}{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_z}=-\frac{\qquad}{\qquad}$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=$$

例 3 设 $z=f(x,y)$ 满足 $z-y-x+xe^{z-y-x}=0$，求 dz

解 令 $F(x,y,z)=z-y-x+xe^{z-y-x}$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_x}{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_z}$$

$$=-\frac{-1+e^{z-y-x}-xe^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}}=\frac{1+(x-1)e^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_y}{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_z}=-\frac{\qquad}{1+xe^{z-y-x}}$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=$$

例 3 设 $z=f(x,y)$ 满足 $z-y-x+xe^{z-y-x}=0$，求 dz

解 令 $F(x,y,z)=z-y-x+xe^{z-y-x}$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_x}{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_z}$$

$$=-\frac{-1+e^{z-y-x}-xe^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}}=\frac{1+(x-1)e^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_y}{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_z}=-\frac{-1}{1+xe^{z-y-x}}$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=$$

例 3 设 $z=f(x,y)$ 满足 $z-y-x+xe^{z-y-x}=0$，求 dz

解 令 $F(x,y,z)=z-y-x+xe^{z-y-x}$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_x}{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_z}$$

$$=-\frac{-1+e^{z-y-x}-xe^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}}=\frac{1+(x-1)e^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_y}{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_z}=-\frac{-1-xe^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}}$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=$$

例 3 设 $z=f(x,y)$ 满足 $z-y-x+xe^{z-y-x}=0$，求 dz

解 令 $F(x,y,z)=z-y-x+xe^{z-y-x}$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_x}{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_z}$$

$$=-\frac{-1+e^{z-y-x}-xe^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}}=\frac{1+(x-1)e^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_y}{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_z}=-\frac{-1-xe^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}}=1$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=$$

例 3 设 $z=f(x,y)$ 满足 $z-y-x+xe^{z-y-x}=0$，求 dz

解 令 $F(x,y,z)=z-y-x+xe^{z-y-x}$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_x}{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_z}$$

$$=-\frac{-1+e^{z-y-x}-xe^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}}=\frac{1+(x-1)e^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_y}{(z-y-x+xe^{z-y-x})'_z}=-\frac{-1-xe^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}}=1$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=-\frac{1+(x-1)e^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}}dx+dy$$

例 4 设 $\Phi(u, v)$ 具有连续偏导数，函数 $z = z(x, y)$ 满足 $\Phi(cx - az, cy - bz) = 0$，证明：

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c.$$

例 4 设 $\Phi(u, v)$ 具有连续偏导数，函数 $z = z(x, y)$ 满足 $\Phi(cx - az, cy - bz) = 0$，证明：

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c.$$

解 令 $F(x, y, z) = \Phi(cx - az, cy - bz)$，则

例 4 设 $\Phi(u, v)$ 具有连续偏导数，函数 $z = z(x, y)$ 满足 $\Phi(cx - az, cy - bz) = 0$，证明：

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c.$$

解 令 $F(x, y, z) = \Phi(cx - az, cy - bz)$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} =$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} =$$

例 4 设 $\Phi(u, v)$ 具有连续偏导数，函数 $z = z(x, y)$ 满足 $\Phi(cx - az, cy - bz) = 0$，证明：

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c.$$

解 令 $F(x, y, z) = \Phi(cx - az, cy - bz)$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} =$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} =$$

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} =$$

例 4 设 $\Phi(u, v)$ 具有连续偏导数，函数 $z = z(x, y)$ 满足 $\Phi(cx - az, cy - bz) = 0$，证明：

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c.$$

解 令 $F(x, y, z) = \Phi(cx - az, cy - bz)$，则

$$F_x =$$

$$F_y =$$

$$F_z =$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} =$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} =$$

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} =$$

例 4 设 $\Phi(u, v)$ 具有连续偏导数，函数 $z = z(x, y)$ 满足 $\Phi(cx - az, cy - bz) = 0$，证明：

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c.$$

解 令 $F(x, y, z) = \Phi(cx - az, cy - bz)$，则

$$F_x = \Phi_u \cdot u_x + \Phi_v \cdot v_x$$

$$F_y =$$

$$F_z =$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} =$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} =$$

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} =$$

例 4 设 $\Phi(u, v)$ 具有连续偏导数，函数 $z = z(x, y)$ 满足 $\Phi(cx - az, cy - bz) = 0$，证明：

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c.$$

解 令 $F(x, y, z) = \Phi(cx - az, cy - bz)$，则

$$F_x = \Phi_u \cdot u_x + \Phi_v \cdot v_x = c\Phi_u$$

$$F_y =$$

$$F_z =$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} =$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} =$$

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} =$$

例 4 设 $\Phi(u, v)$ 具有连续偏导数，函数 $z = z(x, y)$ 满足 $\Phi(cx - az, cy - bz) = 0$，证明：

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c.$$

解 令 $F(x, y, z) = \Phi(cx - az, cy - bz)$，则

$$F_x = \Phi_u \cdot u_x + \Phi_v \cdot v_x = c\Phi_u$$

$$F_y = \Phi_u \cdot u_y + \Phi_v \cdot v_y$$

$$F_z =$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} =$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} =$$

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} =$$

例 4 设 $\Phi(u, v)$ 具有连续偏导数，函数 $z = z(x, y)$ 满足 $\Phi(cx - az, cy - bz) = 0$，证明：

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c.$$

解 令 $F(x, y, z) = \Phi(cx - az, cy - bz)$，则

$$F_x = \Phi_u \cdot u_x + \Phi_v \cdot v_x = c\Phi_u$$

$$F_y = \Phi_u \cdot u_y + \Phi_v \cdot v_y = c\Phi_v$$

$$F_z =$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} =$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} =$$

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} =$$

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

例 4 设 $\Phi(u, v)$ 具有连续偏导数，函数 $z = z(x, y)$ 满足 $\Phi(cx - az, cy - bz) = 0$，证明：

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c.$$

解 令 $F(x, y, z) = \Phi(cx - az, cy - bz)$，则

$$F_x = \Phi_u \cdot u_x + \Phi_v \cdot v_x = c\Phi_u$$

$$F_y = \Phi_u \cdot u_y + \Phi_v \cdot v_y = c\Phi_v$$

$$F_z = \Phi_u \cdot u_z + \Phi_v \cdot v_z$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} =$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} =$$

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} =$$

例 4 设 $\Phi(u, v)$ 具有连续偏导数，函数 $z = z(x, y)$ 满足 $\Phi(cx - az, cy - bz) = 0$，证明：

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c.$$

解 令 $F(x, y, z) = \Phi(cx - az, cy - bz)$，则

$$F_x = \Phi_u \cdot u_x + \Phi_v \cdot v_x = c\Phi_u$$

$$F_y = \Phi_u \cdot u_y + \Phi_v \cdot v_y = c\Phi_v$$

$$F_z = \Phi_u \cdot u_z + \Phi_v \cdot v_z = -a\Phi_u - b\Phi_v$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} =$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} =$$

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} =$$

例 4 设 $\Phi(u, v)$ 具有连续偏导数，函数 $z = z(x, y)$ 满足 $\Phi(cx - az, cy - bz) = 0$，证明：

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c.$$

解 令 $F(x, y, z) = \Phi(cx - az, cy - bz)$，则

$$F_x = \Phi_u \cdot u_x + \Phi_v \cdot v_x = c\Phi_u$$

$$F_y = \Phi_u \cdot u_y + \Phi_v \cdot v_y = c\Phi_v$$

$$F_z = \Phi_u \cdot u_z + \Phi_v \cdot v_z = -a\Phi_u - b\Phi_v$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{c\Phi_u}{a\Phi_u + b\Phi_v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} =$$

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} =$$

例 4 设 $\Phi(u,v)$ 具有连续偏导数，函数 $z=z(x,y)$ 满足 $\Phi(cx-az,cy-bz)=0$，证明：

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c.$$

解 令 $F(x,y,z)=\Phi(cx-az,cy-bz)$，则

$$F_x=\Phi_u\cdot u_x+\Phi_v\cdot v_x=c\Phi_u$$

$$F_y=\Phi_u\cdot u_y+\Phi_v\cdot v_y=c\Phi_v$$

$$F_z=\Phi_u\cdot u_z+\Phi_v\cdot v_z=-a\Phi_u-b\Phi_v$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{c\Phi_u}{a\Phi_u+b\Phi_v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{c\Phi_v}{a\Phi_u+b\Phi_v}$$

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=$$

例 4 设 $\Phi(u, v)$ 具有连续偏导数，函数 $z = z(x, y)$ 满足 $\Phi(cx - az, cy - bz) = 0$，证明：

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c.$$

解 令 $F(x, y, z) = \Phi(cx - az, cy - bz)$，则

$$F_x = \Phi_u \cdot u_x + \Phi_v \cdot v_x = c\Phi_u$$

$$F_y = \Phi_u \cdot u_y + \Phi_v \cdot v_y = c\Phi_v$$

$$F_z = \Phi_u \cdot u_z + \Phi_v \cdot v_z = -a\Phi_u - b\Phi_v$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{c\Phi_u}{a\Phi_u + b\Phi_v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{c\Phi_v}{a\Phi_u + b\Phi_v}$$

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{ac\Phi_u}{a\Phi_u + b\Phi_v} + \frac{bc\Phi_v}{a\Phi_u + b\Phi_v}$$

例 4 设 $\Phi(u, v)$ 具有连续偏导数，函数 $z = z(x, y)$ 满足 $\Phi(cx - az, cy - bz) = 0$，证明：

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c.$$

解 令 $F(x, y, z) = \Phi(cx - az, cy - bz)$，则

$$F_x = \Phi_u \cdot u_x + \Phi_v \cdot v_x = c\Phi_u$$

$$F_y = \Phi_u \cdot u_y + \Phi_v \cdot v_y = c\Phi_v$$

$$F_z = \Phi_u \cdot u_z + \Phi_v \cdot v_z = -a\Phi_u - b\Phi_v$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{c\Phi_u}{a\Phi_u + b\Phi_v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{c\Phi_v}{a\Phi_u + b\Phi_v}$$

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{ac\Phi_u}{a\Phi_u + b\Phi_v} + \frac{bc\Phi_v}{a\Phi_u + b\Phi_v} = c$$

例 5 设 $z=f(x,y)$ 满足 $z=x+ye^z$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

例 5 设 $z=f(x,y)$ 满足 $z=x+ye^z$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

解 $F(x,y,z)=x+ye^z-z$，则 $F(x,y,z)=0$

例 5 设 $z=f(x,y)$ 满足 $z=x+ye^z$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

解 $F(x,y,z)=x+ye^z-z$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=$$

例 5 设 $z=f(x,y)$ 满足 $z=x+ye^z$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

解 $F(x,y,z)=x+ye^z-z$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=$$

例 5 设 $z=f(x,y)$ 满足 $z=x+ye^z$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

解 $F(x,y,z)=x+ye^z-z$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(x+ye^z-z)_x}{(x+ye^z-z)_z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=$$

例 5 设 $z = f(x, y)$ 满足 $z = x + ye^z$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

解 $F(x, y, z) = x + ye^z - z$，则 $F(x, y, z) = 0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{(x + ye^z - z)_x}{(x + ye^z - z)_z} = -\underline{\qquad\qquad}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} =$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) =$$

例 5 设 $z = f(x, y)$ 满足 $z = x + ye^z$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

解 $F(x, y, z) = x + ye^z - z$，则 $F(x, y, z) = 0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{(x + ye^z - z)_x}{(x + ye^z - z)_z} = -\frac{}{ye^z - 1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} =$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) =$$

例 5 设 $z=f(x,y)$ 满足 $z=x+ye^z$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

解 $F(x,y,z)=x+ye^z-z$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(x+ye^z-z)_x}{(x+ye^z-z)_z}=-\frac{1}{ye^z-1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=$$

例 5 设 $z=f(x,y)$ 满足 $z=x+ye^z$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

解 $F(x,y,z)=x+ye^z-z$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(x+ye^z-z)_x}{(x+ye^z-z)_z}=-\frac{1}{ye^z-1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(x+ye^z-z)_y}{(x+ye^z-z)_z}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=$$

例 5 设 $z=f(x, y)$ 满足 $z=x+ye^z$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

解 $F(x, y, z)=x+ye^z-z$，则 $F(x, y, z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(x+ye^z-z)_x}{(x+ye^z-z)_z}=-\frac{1}{ye^z-1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(x+ye^z-z)_y}{(x+ye^z-z)_z}=-\frac{e^z}{ye^z-1}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=$$

例 5 设 $z=f(x, y)$ 满足 $z=x+ye^z$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

解 $F(x, y, z)=x+ye^z-z$，则 $F(x, y, z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(x+ye^z-z)_x}{(x+ye^z-z)_z}=-\frac{1}{ye^z-1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(x+ye^z-z)_y}{(x+ye^z-z)_z}=-\frac{e^z}{ye^z-1}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(-\frac{1}{ye^z-1}\right)'_y$$

例 5 设 $z=f(x,y)$ 满足 $z=x+ye^z$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

解 $F(x,y,z)=x+ye^z-z$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(x+ye^z-z)_x}{(x+ye^z-z)_z}=-\frac{1}{ye^z-1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(x+ye^z-z)_y}{(x+ye^z-z)_z}=-\frac{e^z}{ye^z-1}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(-\frac{1}{ye^z-1}\right)'_y=\frac{(ye^z-1)'_y}{(ye^z-1)^2}$$

例 5 设 $z=f(x,y)$ 满足 $z=x+ye^z$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

解 $F(x,y,z)=x+ye^z-z$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(x+ye^z-z)_x}{(x+ye^z-z)_z}=-\frac{1}{ye^z-1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(x+ye^z-z)_y}{(x+ye^z-z)_z}=-\frac{e^z}{ye^z-1}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(-\frac{1}{ye^z-1}\right)_y'=\frac{(ye^z-1)_y'}{(ye^z-1)^2}$$

$$=\frac{e^z+y(e^z)_y'}{(ye^z-1)^2}$$

例 5 设 $z=f(x,y)$ 满足 $z=x+ye^z$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

解 $F(x,y,z)=x+ye^z-z$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(x+ye^z-z)_x}{(x+ye^z-z)_z}=-\frac{1}{ye^z-1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(x+ye^z-z)_y}{(x+ye^z-z)_z}=-\frac{e^z}{ye^z-1}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(-\frac{1}{ye^z-1}\right)'_y=\frac{(ye^z-1)'_y}{(ye^z-1)^2}$$

$$=\frac{e^z+y(e^z)'_y}{(ye^z-1)^2}=\frac{e^z+ye^z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}}{(ye^z-1)^2}$$

例 5 设 $z=f(x,y)$ 满足 $z=x+ye^z$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

解 $F(x,y,z)=x+ye^z-z$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(x+ye^z-z)_x}{(x+ye^z-z)_z}=-\frac{1}{ye^z-1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(x+ye^z-z)_y}{(x+ye^z-z)_z}=-\frac{e^z}{ye^z-1}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(-\frac{1}{ye^z-1}\right)'_y=\frac{(ye^z-1)'_y}{(ye^z-1)^2}$$

$$=\frac{e^z+y(e^z)'_y}{(ye^z-1)^2}=\frac{e^z+ye^z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}}{(ye^z-1)^2}=\frac{e^z+ye^z\cdot\left(-\frac{e^z}{ye^z-1}\right)}{(ye^z-1)^2}$$

例 5 设 $z=f(x, y)$ 满足 $z=x+ye^z$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

解 $F(x, y, z)=x+ye^z-z$，则 $F(x, y, z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(x+ye^z-z)_x}{(x+ye^z-z)_z}=-\frac{1}{ye^z-1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(x+ye^z-z)_y}{(x+ye^z-z)_z}=-\frac{e^z}{ye^z-1}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(-\frac{1}{ye^z-1}\right)'_y=\frac{(ye^z-1)'_y}{(ye^z-1)^2}$$

$$=\frac{e^z+y(e^z)'_y}{(ye^z-1)^2}=\frac{e^z+ye^z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}}{(ye^z-1)^2}=\frac{e^z+ye^z\cdot\left(-\frac{e^z}{ye^z-1}\right)}{(ye^z-1)^2}$$

$$=\frac{-e^z}{(ye^z-1)^3}$$

例 5 设 $z=f(x,y)$ 满足 $z=x+ye^z$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

解 $F(x,y,z)=x+ye^z-z$，则 $F(x,y,z)=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{(x+ye^z-z)_x}{(x+ye^z-z)_z}=-\frac{1}{ye^z-1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(x+ye^z-z)_y}{(x+ye^z-z)_z}=-\frac{e^z}{ye^z-1}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(-\frac{1}{ye^z-1}\right)'_y=\frac{(ye^z-1)'_y}{(ye^z-1)^2}$$

$$=\frac{e^z+y(e^z)'_y}{(ye^z-1)^2}=\frac{e^z+ye^z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}}{(ye^z-1)^2}=\frac{e^z+ye^z\cdot\left(-\frac{e^z}{ye^z-1}\right)}{(ye^z-1)^2}$$

$$=\frac{-e^z}{(ye^z-1)^3}=\frac{e^z}{(1+x-z)^3}$$

We are here now...

1. 隐函数的求导法：一个方程的情形

2. 隐函数的求导法：方程组的情形

3. 隐函数定理

回顾：二元线性方程组的求解

二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 & (1) \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 & (2) \end{cases}$$

用消元法解：

回顾：二元线性方程组的求解

二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 & \quad (1) \times a_{22} \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 & \quad (2) \times a_{12} \end{cases}$$

用消元法解：

$(1) \times a_{22} - (2) \times a_{12}$，消去 y，得：

回顾：二元线性方程组的求解

二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}\,a_{22}x + a_{12}\,a_{22}y = a_{22}b_1 & (1)\times a_{22} \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 & (2)\times a_{12} \end{cases}$$

用消元法解：

$(1)\times a_{22} - (2)\times a_{12}$，消去 y，得：

回顾：二元线性方程组的求解

二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}\,a_{22}x + a_{12}\,a_{22}y = a_{22}b_1 & (1)\times a_{22} \\ a_{21}\,a_{12}x + a_{22}\,a_{12}y = a_{12}b_2 & (2)\times a_{12} \end{cases}$$

用消元法解：

$(1)\times a_{22} - (2)\times a_{12}$，消去 y，得：

回顾：二元线性方程组的求解

二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}\,a_{22}x + a_{12}\,a_{22}y = a_{22}b_1 & (1)\times a_{22} \\ a_{21}\,a_{12}x + a_{22}\,a_{12}y = a_{12}b_2 & (2)\times a_{12} \end{cases}$$

用消元法解：

$(1)\times a_{22} - (2)\times a_{12}$，消去 y，得：

$$x = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

回顾：二元线性方程组的求解

二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 & (1) \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 & (2) \end{cases}$$

用消元法解：

$(1) \times a_{22} - (2) \times a_{12}$，消去 y，得：

$$x = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

回顾：二元线性方程组的求解

二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 & \qquad (1) \times a_{21} \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 & \qquad (2) \times a_{11} \end{cases}$$

用消元法解：

$(1) \times a_{22} - (2) \times a_{12}$，消去 y，得：

$$x = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

$(2) \times a_{11} - (1) \times a_{21}$，消去 x，得：

回顾：二元线性方程组的求解

二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 & (1)\times a_{21} \\ a_{21}\,a_{11}x + a_{22}\,a_{11}y = a_{11}b_2 & (2)\times a_{11} \end{cases}$$

用消元法解：

$(1)\times a_{22} - (2)\times a_{12}$，消去 y，得：

$$x = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$(2)\times a_{11} - (1)\times a_{21}$，消去 x，得：

回顾：二元线性方程组的求解

二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}\,a_{21}x + a_{12}\,a_{21}y = a_{21}b_1 & (1)\times a_{21} \\ a_{21}\,a_{11}x + a_{22}\,a_{11}y = a_{11}b_2 & (2)\times a_{11} \end{cases}$$

用消元法解：

$(1)\times a_{22} - (2)\times a_{12}$，消去 y，得：

$$x = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$(2)\times a_{11} - (1)\times a_{21}$，消去 x，得：

回顾：二元线性方程组的求解

二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}\,a_{21}x + a_{12}\,a_{21}y = a_{21}b_1 & (1) \times a_{21} \\ a_{21}\,a_{11}x + a_{22}\,a_{11}y = a_{11}b_2 & (2) \times a_{11} \end{cases}$$

用消元法解：

$(1) \times a_{22} - (2) \times a_{12}$，消去 y，得：

$$x = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$(2) \times a_{11} - (1) \times a_{21}$，消去 x，得：

$$y = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

回顾：二元线性方程组的求解

二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 & (1) \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 & (2) \end{cases}$$

用消元法解：

$(1) \times a_{22} - (2) \times a_{12}$，消去 y，得：

$$x = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

$(2) \times a_{11} - (1) \times a_{21}$，消去 x，得：

$$y = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

回顾：二元线性方程组的求解

二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 & (1) \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 & (2) \end{cases}$$

用消元法解：

$(1) \times a_{22} - (2) \times a_{12}$，消去 y，得：

$$x = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{\quad}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

$(2) \times a_{11} - (1) \times a_{21}$，消去 x，得：

$$y = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{\quad}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

回顾：二元线性方程组的求解

二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 & (1) \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 & (2) \end{cases}$$

用消元法解：

$(1) \times a_{22} - (2) \times a_{12}$，消去 y，得：

$$x = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

$(2) \times a_{11} - (1) \times a_{21}$，消去 x，得：

$$y = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

回顾：二元线性方程组的求解

二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 & (1) \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 & (2) \end{cases}$$

用消元法解：

$(1) \times a_{22} - (2) \times a_{12}$，消去 y，得：

$$x = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

$(2) \times a_{11} - (1) \times a_{21}$，消去 x，得：

$$y = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

公式：

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

公式：

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \Rightarrow \quad x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

练习 利用二阶行列式求解下面二元线性方程组

1. $\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ 3x + 8y = 4 \end{cases}$ $x =$ ， $y =$

2. $\begin{cases} 7x + 16y = 1 \\ 2x + 5y = -1 \end{cases}$ $x =$ ， $y =$

公式：

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

练习 利用二阶行列式求解下面二元线性方程组

1. $\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ 3x + 8y = 4 \end{cases} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{\quad}{\quad} \qquad , \quad y =$

2. $\begin{cases} 7x + 16y = 1 \\ 2x + 5y = -1 \end{cases} \quad x = \qquad\qquad , \; y =$

公式：

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \Rightarrow \quad x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

练习 利用二阶行列式求解下面二元线性方程组

1. $\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ 3x + 8y = 4 \end{cases} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \underline{\qquad}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \underline{\quad}$

2. $\begin{cases} 7x + 16y = 1 \\ 2x + 5y = -1 \end{cases} \quad x = \qquad\qquad, \ y =$

公式：

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

练习 利用二阶行列式求解下面二元线性方程组

1. $\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ 3x + 8y = 4 \end{cases}$ $x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{}{1}$, $y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = -$

2. $\begin{cases} 7x + 16y = 1 \\ 2x + 5y = -1 \end{cases}$ $x =$, $y =$

公式:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \Rightarrow \quad x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

练习 利用二阶行列式求解下面二元线性方程组

1. $\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ 3x + 8y = 4 \end{cases} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{-20}{1} \quad , \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = -$

2. $\begin{cases} 7x + 16y = 1 \\ 2x + 5y = -1 \end{cases} \quad x = \qquad , \; y =$

公式:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \Rightarrow \quad x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

练习 利用二阶行列式求解下面二元线性方程组

1. $$\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ 3x + 8y = 4 \end{cases} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{-20}{1} = -20, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = -$$

2. $$\begin{cases} 7x + 16y = 1 \\ 2x + 5y = -1 \end{cases} \quad x = \qquad\qquad , \ y =$$

公式：

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

练习 利用二阶行列式求解下面二元线性方程组

1. $\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ 3x + 8y = 4 \end{cases}$ $x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{-20}{1} = -20, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{}{1}$

2. $\begin{cases} 7x + 16y = 1 \\ 2x + 5y = -1 \end{cases}$ $x = \qquad\qquad , \; y =$

公式：

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \Rightarrow \quad x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

练习 利用二阶行列式求解下面二元线性方程组

1. $\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ 3x + 8y = 4 \end{cases}$ $\quad x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{-20}{1} = -20, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{8}{1}$

2. $\begin{cases} 7x + 16y = 1 \\ 2x + 5y = -1 \end{cases}$ $\quad x =$, $y =$

公式：

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \Rightarrow \quad x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

练习 利用二阶行列式求解下面二元线性方程组

1. $\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ 3x + 8y = 4 \end{cases}$ $\quad x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{-20}{1} = -20, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{8}{1} = 8$

2. $\begin{cases} 7x + 16y = 1 \\ 2x + 5y = -1 \end{cases}$ $\quad x =$, $y =$

公式：

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \Rightarrow \quad x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

练习 利用二阶行列式求解下面二元线性方程组

1. $$\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ 3x + 8y = 4 \end{cases} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{-20}{1} = -20, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{8}{1} = 8$$

2. $$\begin{cases} 7x + 16y = 1 \\ 2x + 5y = -1 \end{cases} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 16 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 16 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{\quad}{\quad}, \quad y =$$

公式：

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \Rightarrow \quad x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

练习 利用二阶行列式求解下面二元线性方程组

1. $$\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ 3x + 8y = 4 \end{cases} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{-20}{1} = -20, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{8}{1} = 8$$

2. $$\begin{cases} 7x + 16y = 1 \\ 2x + 5y = -1 \end{cases} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 16 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 16 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = — \quad , \; y = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 16 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = —$$

公式:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \Rightarrow \quad x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

练习 利用二阶行列式求解下面二元线性方程组

1. $\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ 3x + 8y = 4 \end{cases}$ $\quad x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{-20}{1} = -20, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{8}{1} = 8$

2. $\begin{cases} 7x + 16y = 1 \\ 2x + 5y = -1 \end{cases}$ $\quad x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 16 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 16 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{\quad}{3}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 16 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{\quad}{\quad}$

公式:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \Rightarrow \quad x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

练习 利用二阶行列式求解下面二元线性方程组

1. $\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ 3x + 8y = 4 \end{cases} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{-20}{1} = -20, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{8}{1} = 8$

2. $\begin{cases} 7x + 16y = 1 \\ 2x + 5y = -1 \end{cases} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 16 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 16 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{21}{3} \quad , \ y = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 16 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \text{—}$

公式：

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \Rightarrow \quad x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

练习 利用二阶行列式求解下面二元线性方程组

1. $\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ 3x + 8y = 4 \end{cases} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{-20}{1} = -20, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{8}{1} = 8$

2. $\begin{cases} 7x + 16y = 1 \\ 2x + 5y = -1 \end{cases} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 16 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 16 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{21}{3} = 7, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 16 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = —$

公式：

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \Rightarrow \quad x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

练习 利用二阶行列式求解下面二元线性方程组

1. $\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ 3x + 8y = 4 \end{cases}$ $\quad x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{-20}{1} = -20, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{8}{1} = 8$

2. $\begin{cases} 7x + 16y = 1 \\ 2x + 5y = -1 \end{cases}$ $\quad x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 16 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 16 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{21}{3} = 7, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 16 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{}{3}$

公式：

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \Rightarrow \quad x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

练习 利用二阶行列式求解下面二元线性方程组

1. $$\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ 3x + 8y = 4 \end{cases} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{-20}{1} = -20, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{8}{1} = 8$$

2. $$\begin{cases} 7x + 16y = 1 \\ 2x + 5y = -1 \end{cases} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 16 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 16 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{21}{3} = 7, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 16 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-9}{3}$$

公式：

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \Rightarrow \quad x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

练习 利用二阶行列式求解下面二元线性方程组

1. $\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ 3x + 8y = 4 \end{cases} \quad x = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \dfrac{-20}{1} = -20, \quad y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \dfrac{8}{1} = 8$

2. $\begin{cases} 7x + 16y = 1 \\ 2x + 5y = -1 \end{cases} \quad x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 16 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 16 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \dfrac{21}{3} = 7, \quad y = \dfrac{\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 16 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \dfrac{-9}{3} = -3$

方程组的隐函数求导公式

$$
\begin{gathered}
F(x, y, u, v) \\
G(x, y, u, v)
\end{gathered}
$$

方程组的隐函数求导公式

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0, \\ G(x, y, u, v) = 0. \end{cases}$$

方程组的隐函数求导公式

假设函数 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 满足方程组

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0, \\ G(x, y, u, v) = 0. \end{cases}$$

方程组的隐函数求导公式

假设函数 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 满足方程组

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0, \\ G(x, y, u, v) = 0. \end{cases}$$

问题：如何计算 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$?

方程组的隐函数求导公式

假设函数 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 满足方程组

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0, \\ G(x, y, u, v) = 0. \end{cases}$$

问题：如何计算 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$?

求解如下：

$$\begin{cases} F(x,y,u,v) = 0 \\ G(x,y,u,v) = 0 \end{cases} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} \\ \end{cases}$$

方程组的隐函数求导公式

假设函数 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 满足方程组

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0, \\ G(x, y, u, v) = 0. \end{cases}$$

问题：如何计算 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$?

求解如下：

$$\begin{cases} F(x,y,u,v) = 0 \\ G(x,y,u,v) = 0 \end{cases} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} F_x + F_u \cdot u_x + F_v \cdot v_x = 0 \\ \end{cases}$$

方程组的隐函数求导公式

假设函数 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ 满足方程组

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0, \\ G(x,y,u,v)=0. \end{cases}$$

问题：如何计算 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$?

求解如下：

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} F_x+F_u\cdot u_x+F_v\cdot v_x=0 \\ G_x+G_u\cdot u_x+G_v\cdot v_x=0 \end{cases}$$

方程组的隐函数求导公式

假设函数 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 满足方程组

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0, \\ G(x, y, u, v) = 0. \end{cases}$$

问题：如何计算 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$?

求解如下：

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} F_x + F_u \cdot u_x + F_v \cdot v_x = 0 \\ G_x + G_u \cdot u_x + G_v \cdot v_x = 0 \end{cases}$$

方程组的隐函数求导公式

假设函数 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 满足方程组

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0, \\ G(x, y, u, v) = 0. \end{cases}$$

问题：如何计算 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$?

求解如下：

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} F_u \cdot u_x + F_v \cdot v_x = -F_x \\ G_u \cdot u_x + G_v \cdot v_x = -G_x \end{cases}$$

方程组的隐函数求导公式

假设函数 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 满足方程组

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0, \\ G(x, y, u, v) = 0. \end{cases}$$

问题：如何计算 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$?

求解如下：

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} F_u \cdot u_x + F_v \cdot v_x = -F_x \\ G_u \cdot u_x + G_v \cdot v_x = -G_x \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_x = \underline{\qquad\qquad}, \quad v_x = \underline{\qquad\qquad}$$

方程组的隐函数求导公式

假设函数 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 满足方程组

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0, \\ G(x, y, u, v) = 0. \end{cases}$$

问题：如何计算 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$?

求解如下：

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} F_u \cdot u_x + F_v \cdot v_x = -F_x \\ G_u \cdot u_x + G_v \cdot v_x = -G_x \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_x = \frac{\qquad}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}, \quad v_x = \frac{\qquad}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$$

方程组的隐函数求导公式

假设函数 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 满足方程组

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0, \\ G(x, y, u, v) = 0. \end{cases}$$

问题：如何计算 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$?

求解如下：

$$\begin{cases} F(x,y,u,v) = 0 \\ G(x,y,u,v) = 0 \end{cases} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} F_u \cdot u_x + F_v \cdot v_x = -F_x \\ G_u \cdot u_x + G_v \cdot v_x = -G_x \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_x = \frac{\begin{vmatrix} -F_x & F_v \\ -G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}, \quad v_x = \frac{}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$$

方程组的隐函数求导公式

假设函数 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 满足方程组

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0, \\ G(x, y, u, v) = 0. \end{cases}$$

问题：如何计算 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$?

求解如下：

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} F_u \cdot u_x + F_v \cdot v_x = -F_x \\ G_u \cdot u_x + G_v \cdot v_x = -G_x \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_x = \frac{\begin{vmatrix} -F_x & F_v \\ -G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}, \quad v_x = \frac{\begin{vmatrix} F_u & -F_x \\ G_u & -G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$$

方程组的隐函数求导公式

假设函数 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 满足方程组

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0, \\ G(x, y, u, v) = 0. \end{cases}$$

问题：如何计算 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$?

求解如下：

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} F_u \cdot u_x + F_v \cdot v_x = -F_x \\ G_u \cdot u_x + G_v \cdot v_x = -G_x \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_x = -\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}, \quad v_x = -\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$$

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial y}}$$

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \begin{cases} F_y + F_u \cdot u_y + F_v \cdot v_y = 0 \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \begin{cases} F_y + F_u \cdot u_y + F_v \cdot v_y = 0 \\ G_y + G_u \cdot u_y + G_v \cdot v_y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \begin{cases} F_y + F_u \cdot u_y + F_v \cdot v_y = 0 \\ G_y + G_u \cdot u_y + G_v \cdot v_y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases} \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \begin{cases} F_u \cdot u_y + F_v \cdot v_y = -F_y \\ G_u \cdot u_y + G_v \cdot v_y = -G_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \begin{cases} F_u\cdot u_y+F_v\cdot v_y=-F_y \\ G_u\cdot u_y+G_v\cdot v_y=-G_y \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_y = \underline{\qquad\qquad},\quad v_y = \underline{\qquad\qquad}$$

$$
\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \begin{cases} F_u\cdot u_y + F_v\cdot v_y = -F_y \\ G_u\cdot u_y + G_v\cdot v_y = -G_y \end{cases}
$$

$$
\Rightarrow u_y = \frac{\qquad}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}},\quad v_y = \frac{\qquad}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}
$$

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \begin{cases} F_u \cdot u_y + F_v \cdot v_y = -F_y \\ G_u \cdot u_y + G_v \cdot v_y = -G_y \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_y = \frac{\begin{vmatrix} -F_y & F_v \\ -G_y & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}, \quad v_y = \frac{\qquad}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$$

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases} \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \begin{cases} F_u\cdot u_y+F_v\cdot v_y=-F_y \\ G_u\cdot u_y+G_v\cdot v_y=-G_y \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_y=\frac{\begin{vmatrix} -F_y & F_v \\ -G_y & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}},\quad v_y=\frac{\begin{vmatrix} F_u & -F_y \\ G_u & -G_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$$

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \begin{cases} F_u \cdot u_y + F_v \cdot v_y = -F_y \\ G_u \cdot u_y + G_v \cdot v_y = -G_y \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_y = -\frac{\begin{vmatrix} F_y & F_v \\ G_y & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}, \quad v_y = -\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_y \\ G_u & G_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$$

总结 设 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ 满足方程组

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$$

总结 设 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 满足方程组

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$$

$u_x =$

$v_x =$

$u_y =$

$v_y =$

总结 设 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 满足方程组

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \\ \\ \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \end{array}$$

$u_x =$ $\qquad\qquad$ $v_x =$

$u_y =$ $\qquad\qquad$ $v_y =$

总结 设 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 满足方程组

$$\begin{cases} F(x,y,u,v) = 0 \\ G(x,y,u,v) = 0 \end{cases} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} F_x + F_u \cdot u_x + F_v \cdot v_x = 0 \\ G_x + G_u \cdot u_x + G_v \cdot v_x = 0 \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\frac{\partial}{\partial y}}$$

$u_x =$ $\qquad\qquad$ $v_x =$

$u_y =$ $\qquad\qquad$ $v_y =$

总结 设 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 满足方程组

$$\begin{cases} F(x,y,u,v) = 0 \\ G(x,y,u,v) = 0 \end{cases} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} F_x + F_u \cdot u_x + F_v \cdot v_x = 0 \\ G_x + G_u \cdot u_x + G_v \cdot v_x = 0 \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \begin{cases} F_y + F_u \cdot u_y + F_v \cdot v_y = 0 \\ G_y + G_u \cdot u_y + G_v \cdot v_y = 0 \end{cases}$$

$u_x =$ $\qquad\qquad$ $v_x =$

$u_y =$ $\qquad\qquad$ $v_y =$

总结 设 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 满足方程组

$$\begin{cases} F(x,y,u,v) = 0 \\ G(x,y,u,v) = 0 \end{cases} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} F_x + F_u \cdot u_x + F_v \cdot v_x = 0 \\ G_x + G_u \cdot u_x + G_v \cdot v_x = 0 \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \begin{cases} F_y + F_u \cdot u_y + F_v \cdot v_y = 0 \\ G_y + G_u \cdot u_y + G_v \cdot v_y = 0 \end{cases}$$

$u_x =$ $\qquad$ $v_x =$

$u_y =$ $\qquad$ $v_y =$

总结 设 $u=u(x,y),\ v=v(x,y)$ 满足方程组

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} F_x+F_u\cdot u_x+F_v\cdot v_x=0 \\ G_x+G_u\cdot u_x+G_v\cdot v_x=0 \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \begin{cases} F_y+F_u\cdot u_y+F_v\cdot v_y=0 \\ G_y+G_u\cdot u_y+G_v\cdot v_y=0 \end{cases}$$

所以

$$u_x=-\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} \qquad v_x=-\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$$

$$u_y=-\frac{\begin{vmatrix} F_y & F_v \\ G_y & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} \qquad v_y=-\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_y \\ G_u & G_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$$

总结 设 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ 满足方程组

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases} \quad \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} F_x+F_u\cdot u_x+F_v\cdot v_x=0 \\ G_x+G_u\cdot u_x+G_v\cdot v_x=0 \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \begin{cases} F_y+F_u\cdot u_y+F_v\cdot v_y=0 \\ G_y+G_u\cdot u_y+G_v\cdot v_y=0 \end{cases}$$

所以

$$u_x=-\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}, \qquad v_x=-\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$$

$$u_y=-\frac{\begin{vmatrix} F_y & F_v \\ G_y & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} \qquad v_y=-\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_y \\ G_u & G_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$$

总结 设 $u=u(x,y),\ v=v(x,y)$ 满足方程组

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases} \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} F_x+F_u\cdot u_x+F_v\cdot v_x=0 \\ G_x+G_u\cdot u_x+G_v\cdot v_x=0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \begin{cases} F_y+F_u\cdot u_y+F_v\cdot v_y=0 \\ G_y+G_u\cdot u_y+G_v\cdot v_y=0 \end{cases}$$

所以

$$u_x=-\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)},\qquad v_x=-\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}$$

$$u_y=-\frac{\begin{vmatrix} F_y & F_v \\ G_y & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}\qquad v_y=-\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_y \\ G_u & G_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$$

总结 设 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 满足方程组

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} F_x + F_u \cdot u_x + F_v \cdot v_x = 0 \\ G_x + G_u \cdot u_x + G_v \cdot v_x = 0 \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \begin{cases} F_y + F_u \cdot u_y + F_v \cdot v_y = 0 \\ G_y + G_u \cdot u_y + G_v \cdot v_y = 0 \end{cases}$$

所以

$$u_x = -\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)}, \quad v_x = -\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)}$$

$$u_y = -\frac{\begin{vmatrix} F_y & F_v \\ G_y & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, v)}, \quad v_y = -\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_y \\ G_u & G_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$$

总结 设 $u=u(x,y),\ v=v(x,y)$ 满足方程组

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} F_x+F_u\cdot u_x+F_v\cdot v_x=0 \\ G_x+G_u\cdot u_x+G_v\cdot v_x=0 \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \begin{cases} F_y+F_u\cdot u_y+F_v\cdot v_y=0 \\ G_y+G_u\cdot u_y+G_v\cdot v_y=0 \end{cases}$$

所以

$$u_x=-\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)},\qquad v_x=-\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}$$

$$u_y=-\frac{\begin{vmatrix} F_y & F_v \\ G_y & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)},\qquad v_y=-\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_y \\ G_u & G_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}$$

例 设 $\begin{cases} x = e^u + u\sin v \\ y = e^u - u\cos v \end{cases}$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$

例 设 $\begin{cases} x = e^u + u\sin v \\ y = e^u - u\cos v \end{cases}$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$

解

$$\xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}}$$

$$\begin{cases} e^u + u\sin v = x \\ e^u - u\cos v = y \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\frac{\partial}{\partial y}}$$

$u_x =$ $\qquad$ $v_x =$

$u_y =$ $\qquad$ $v_y =$

例 设 $\begin{cases} x = e^u + u\sin v \\ y = e^u - u\cos v \end{cases}$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$

解

$$\begin{cases} e^u + u\sin v = x \\ e^u - u\cos v = y \end{cases} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} (e^u + \sin v)u_x + u\cos v \cdot v_x = 1 \\ \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\frac{\partial}{\partial y}}$$

$u_x =$ $v_x =$

$u_y =$ $v_y =$

例 设 $\begin{cases} x = e^u + u\sin v \\ y = e^u - u\cos v \end{cases}$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$

解

$$\begin{cases} e^u + u\sin v = x \\ e^u - u\cos v = y \end{cases} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} (e^u + \sin v)u_x + u\cos v \cdot v_x = 1 \\ (e^u - \cos v)u_x + u\sin v \cdot v_x = 0 \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\frac{\partial}{\partial y}}$$

$u_x =$ $\qquad$ $v_x =$

$u_y =$ $\qquad$ $v_y =$

例 设 $\begin{cases} x = e^u + u\sin v \\ y = e^u - u\cos v \end{cases}$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$

解

$$\begin{cases} e^u + u\sin v = x \\ e^u - u\cos v = y \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} (e^u + \sin v)u_x + u\cos v \cdot v_x = 1 \\ (e^u - \cos v)u_x + u\sin v \cdot v_x = 0 \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \begin{cases} (e^u + \sin v)u_y + u\cos v \cdot v_y = 0 \\ \end{cases}$$

$u_x =$ $v_x =$

$u_y =$ $v_y =$

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

例 设 $\begin{cases} x = e^u + u\sin v \\ y = e^u - u\cos v \end{cases}$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$

解

$$\begin{cases} e^u + u\sin v = x \\ e^u - u\cos v = y \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} (e^u + \sin v)u_x + u\cos v \cdot v_x = 1 \\ (e^u - \cos v)u_x + u\sin v \cdot v_x = 0 \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \begin{cases} (e^u + \sin v)u_y + u\cos v \cdot v_y = 0 \\ (e^u - \cos v)u_y + u\sin v \cdot v_y = 1 \end{cases}$$

$u_x =$

$v_x =$

$u_y =$

$v_y =$

例 设 $\begin{cases} x = e^u + u\sin v \\ y = e^u - u\cos v \end{cases}$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$

解

$$\begin{cases} e^u + u\sin v = x \\ e^u - u\cos v = y \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} (e^u + \sin v)u_x + u\cos v \cdot v_x = 1 \\ (e^u - \cos v)u_x + u\sin v \cdot v_x = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \begin{cases} (e^u + \sin v)u_y + u\cos v \cdot v_y = 0 \\ (e^u - \cos v)u_y + u\sin v \cdot v_y = 1 \end{cases}$$

$u_x =$ $\qquad\qquad$ $v_x =$

$u_y =$ $\qquad\qquad$ $v_y =$

例 设 $\begin{cases} x = e^u + u\sin v \\ y = e^u - u\cos v \end{cases}$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$

解

$$\begin{cases} e^u + u\sin v = x \\ e^u - u\cos v = y \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} (e^u + \sin v){\color{red}u_x} + u\cos v \cdot {\color{red}v_x} = 1 \\ (e^u - \cos v){\color{red}u_x} + u\sin v \cdot {\color{red}v_x} = 0 \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \begin{cases} (e^u + \sin v){\color{red}u_y} + u\cos v \cdot {\color{red}v_y} = 0 \\ (e^u - \cos v){\color{red}u_y} + u\sin v \cdot {\color{red}v_y} = 1 \end{cases}$$

所以 $J = \begin{vmatrix} e^u + \sin v & u\cos v \\ e^u - \cos v & u\sin v \end{vmatrix}$

$$u_x = \frac{\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}}{J} \qquad v_x = \frac{\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}}{J}$$

$$u_y = \frac{\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}}{J} \qquad v_y = \frac{\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}}{J}$$

例 设 $\begin{cases} x = e^u + u\sin v \\ y = e^u - u\cos v \end{cases}$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$

解

$$\begin{cases} e^u + u\sin v = x \\ e^u - u\cos v = y \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} (e^u + \sin v)u_x + u\cos v \cdot v_x = 1 \\ (e^u - \cos v)u_x + u\sin v \cdot v_x = 0 \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \begin{cases} (e^u + \sin v)u_y + u\cos v \cdot v_y = 0 \\ (e^u - \cos v)u_y + u\sin v \cdot v_y = 1 \end{cases}$$

所以 $J = \begin{vmatrix} e^u + \sin v & u\cos v \\ e^u - \cos v & u\sin v \end{vmatrix}$

$$u_x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & u\cos v \\ 0 & u\sin v \end{vmatrix}}{J} \qquad v_x = \frac{\begin{vmatrix} \end{vmatrix}}{J}$$

$$u_y = \frac{\begin{vmatrix} \end{vmatrix}}{J} \qquad v_y = \frac{\begin{vmatrix} \end{vmatrix}}{J}$$

例 设 $\begin{cases} x = e^u + u\sin v \\ y = e^u - u\cos v \end{cases}$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$

解

$$\begin{cases} e^u + u\sin v = x \\ e^u - u\cos v = y \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} (e^u + \sin v)u_x + u\cos v \cdot v_x = 1 \\ (e^u - \cos v)u_x + u\sin v \cdot v_x = 0 \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \begin{cases} (e^u + \sin v)u_y + u\cos v \cdot v_y = 0 \\ (e^u - \cos v)u_y + u\sin v \cdot v_y = 1 \end{cases}$$

所以 $J = \begin{vmatrix} e^u + \sin v & u\cos v \\ e^u - \cos v & u\sin v \end{vmatrix}$

$$u_x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & u\cos v \\ 0 & u\sin v \end{vmatrix}}{J} \qquad v_x = \frac{\begin{vmatrix} e^u + \sin v & 1 \\ e^u - \cos v & 0 \end{vmatrix}}{J}$$

$$u_y = \frac{\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}}{J} \qquad v_y = \frac{\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}}{J}$$

例 设 $\begin{cases} x = e^u + u\sin v \\ y = e^u - u\cos v \end{cases}$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$

解

$$\begin{cases} e^u + u\sin v = x \\ e^u - u\cos v = y \end{cases} \overset{\frac{\partial}{\partial x}}{\Longrightarrow} \begin{cases} (e^u + \sin v)u_x + u\cos v \cdot v_x = 1 \\ (e^u - \cos v)u_x + u\sin v \cdot v_x = 0 \end{cases}$$

$$\overset{\frac{\partial}{\partial y}}{\Longrightarrow} \begin{cases} (e^u + \sin v)u_y + u\cos v \cdot v_y = 0 \\ (e^u - \cos v)u_y + u\sin v \cdot v_y = 1 \end{cases}$$

所以 $J = \begin{vmatrix} e^u + \sin v & u\cos v \\ e^u - \cos v & u\sin v \end{vmatrix}$

$$u_x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & u\cos v \\ 0 & u\sin v \end{vmatrix}}{J} \qquad v_x = \frac{\begin{vmatrix} e^u + \sin v & 1 \\ e^u - \cos v & 0 \end{vmatrix}}{J}$$

$$u_y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & u\cos v \\ 1 & u\sin v \end{vmatrix}}{J} \qquad v_y = \frac{\begin{vmatrix} \quad \\ \quad \end{vmatrix}}{J}$$

例 设 $\begin{cases} x = e^u + u\sin v \\ y = e^u - u\cos v \end{cases}$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$

解

$$\begin{cases} e^u + u\sin v = x \\ e^u - u\cos v = y \end{cases} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} (e^u + \sin v)u_x + u\cos v\cdot v_x = 1 \\ (e^u - \cos v)u_x + u\sin v\cdot v_x = 0 \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \begin{cases} (e^u + \sin v)u_y + u\cos v\cdot v_y = 0 \\ (e^u - \cos v)u_y + u\sin v\cdot v_y = 1 \end{cases}$$

所以 $J = \begin{vmatrix} e^u + \sin v & u\cos v \\ e^u - \cos v & u\sin v \end{vmatrix}$

$$u_x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & u\cos v \\ 0 & u\sin v \end{vmatrix}}{J} \qquad v_x = \frac{\begin{vmatrix} e^u + \sin v & 1 \\ e^u - \cos v & 0 \end{vmatrix}}{J}$$

$$u_y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & u\cos v \\ 1 & u\sin v \end{vmatrix}}{J} \qquad v_y = \frac{\begin{vmatrix} e^u + \sin v & 0 \\ e^u - \cos v & 1 \end{vmatrix}}{J}$$

例 设 $\begin{cases} x = e^u + u\sin v \\ y = e^u - u\cos v \end{cases}$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$

解

$$\begin{cases} e^u + u\sin v = x \\ e^u - u\cos v = y \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} (e^u + \sin v)u_x + u\cos v \cdot v_x = 1 \\ (e^u - \cos v)u_x + u\sin v \cdot v_x = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \begin{cases} (e^u + \sin v)u_y + u\cos v \cdot v_y = 0 \\ (e^u - \cos v)u_y + u\sin v \cdot v_y = 1 \end{cases}$$

所以 $J = \begin{vmatrix} e^u + \sin v & u\cos v \\ e^u - \cos v & u\sin v \end{vmatrix} = ue^u(\sin v - \cos v) + u$

$$u_x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & u\cos v \\ 0 & u\sin v \end{vmatrix}}{J} \qquad v_x = \frac{\begin{vmatrix} e^u + \sin v & 1 \\ e^u - \cos v & 0 \end{vmatrix}}{J}$$

$$u_y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & u\cos v \\ 1 & u\sin v \end{vmatrix}}{J} \qquad v_y = \frac{\begin{vmatrix} e^u + \sin v & 0 \\ e^u - \cos v & 1 \end{vmatrix}}{J}$$

例 设 $\begin{cases} x = e^u + u\sin v \\ y = e^u - u\cos v \end{cases}$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$

解

$$\begin{cases} e^u + u\sin v = x \\ e^u - u\cos v = y \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} (e^u + \sin v)u_x + u\cos v \cdot v_x = 1 \\ (e^u - \cos v)u_x + u\sin v \cdot v_x = 0 \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \begin{cases} (e^u + \sin v)u_y + u\cos v \cdot v_y = 0 \\ (e^u - \cos v)u_y + u\sin v \cdot v_y = 1 \end{cases}$$

所以 $J = \begin{vmatrix} e^u + \sin v & u\cos v \\ e^u - \cos v & u\sin v \end{vmatrix} = ue^u(\sin v - \cos v) + u$

$$u_x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & u\cos v \\ 0 & u\sin v \end{vmatrix}}{J} = \frac{\sin v}{e^u(\sin v - \cos v) + 1}, \quad v_x = \frac{\begin{vmatrix} e^u + \sin v & 1 \\ e^u - \cos v & 0 \end{vmatrix}}{J}$$

$$u_y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & u\cos v \\ 1 & u\sin v \end{vmatrix}}{J} \qquad v_y = \frac{\begin{vmatrix} e^u + \sin v & 0 \\ e^u - \cos v & 1 \end{vmatrix}}{J}$$

例 设 $\begin{cases} x = e^u + u\sin v \\ y = e^u - u\cos v \end{cases}$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$

解

$$\begin{cases} e^u + u\sin v = x \\ e^u - u\cos v = y \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} (e^u + \sin v)u_x + u\cos v \cdot v_x = 1 \\ (e^u - \cos v)u_x + u\sin v \cdot v_x = 0 \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \begin{cases} (e^u + \sin v)u_y + u\cos v \cdot v_y = 0 \\ (e^u - \cos v)u_y + u\sin v \cdot v_y = 1 \end{cases}$$

所以 $J = \begin{vmatrix} e^u + \sin v & u\cos v \\ e^u - \cos v & u\sin v \end{vmatrix} = ue^u(\sin v - \cos v) + u$

$$u_x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & u\cos v \\ 0 & u\sin v \end{vmatrix}}{J} = \frac{\sin v}{e^u(\sin v - \cos v) + 1}, \quad v_x = \frac{\begin{vmatrix} e^u + \sin v & 1 \\ e^u - \cos v & 0 \end{vmatrix}}{J} = \frac{-e^u + \cos v}{ue^u(\sin v - \cos v) + u}$$

$$u_y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & u\cos v \\ 1 & u\sin v \end{vmatrix}}{J} \qquad v_y = \frac{\begin{vmatrix} e^u + \sin v & 0 \\ e^u - \cos v & 1 \end{vmatrix}}{J}$$

例 设 $\begin{cases} x = e^u + u\sin v \\ y = e^u - u\cos v \end{cases}$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$

解

$$\begin{cases} e^u + u\sin v = x \\ e^u - u\cos v = y \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} (e^u + \sin v)u_x + u\cos v \cdot v_x = 1 \\ (e^u - \cos v)u_x + u\sin v \cdot v_x = 0 \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \begin{cases} (e^u + \sin v)u_y + u\cos v \cdot v_y = 0 \\ (e^u - \cos v)u_y + u\sin v \cdot v_y = 1 \end{cases}$$

所以 $J = \begin{vmatrix} e^u + \sin v & u\cos v \\ e^u - \cos v & u\sin v \end{vmatrix} = ue^u(\sin v - \cos v) + u$

$$u_x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & u\cos v \\ 0 & u\sin v \end{vmatrix}}{J} = \frac{\sin v}{e^u(\sin v - \cos v) + 1}, \quad v_x = \frac{\begin{vmatrix} e^u + \sin v & 1 \\ e^u - \cos v & 0 \end{vmatrix}}{J} = \frac{-e^u + \cos v}{ue^u(\sin v - \cos v) + u}$$

$$u_y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & u\cos v \\ 1 & u\sin v \end{vmatrix}}{J} = \frac{-\cos v}{e^u(\sin v - \cos v) + 1}, \quad v_y = \frac{\begin{vmatrix} e^u + \sin v & 0 \\ e^u - \cos v & 1 \end{vmatrix}}{J}$$

例 设 $\begin{cases} x = e^u + u\sin v \\ y = e^u - u\cos v \end{cases}$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$

解

$$\begin{cases} e^u + u\sin v = x \\ e^u - u\cos v = y \end{cases} \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} (e^u + \sin v)u_x + u\cos v \cdot v_x = 1 \\ (e^u - \cos v)u_x + u\sin v \cdot v_x = 0 \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \begin{cases} (e^u + \sin v)u_y + u\cos v \cdot v_y = 0 \\ (e^u - \cos v)u_y + u\sin v \cdot v_y = 1 \end{cases}$$

所以 $J = \begin{vmatrix} e^u + \sin v & u\cos v \\ e^u - \cos v & u\sin v \end{vmatrix} = ue^u(\sin v - \cos v) + u$

$$u_x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & u\cos v \\ 0 & u\sin v \end{vmatrix}}{J} = \frac{\sin v}{e^u(\sin v - \cos v) + 1}, \quad v_x = \frac{\begin{vmatrix} e^u + \sin v & 1 \\ e^u - \cos v & 0 \end{vmatrix}}{J} = \frac{-e^u + \cos v}{ue^u(\sin v - \cos v) + u}$$

$$u_y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & u\cos v \\ 1 & u\sin v \end{vmatrix}}{J} = \frac{-\cos v}{e^u(\sin v - \cos v) + 1}, \quad v_y = \frac{\begin{vmatrix} e^u + \sin v & 0 \\ e^u - \cos v & 1 \end{vmatrix}}{J} = \frac{e^u + \sin v}{ue^u(\sin v - \cos v) + u}$$

We are here now...

1. 隐函数的求导法：一个方程的情形

2. 隐函数的求导法：方程组的情形

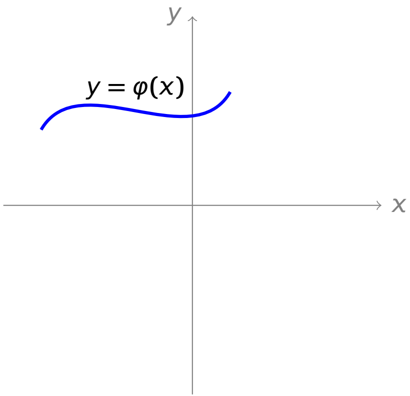
3. 隐函数定理

平面光滑曲线的定义

平面上光滑曲线应该包含：一元光滑函数的图形

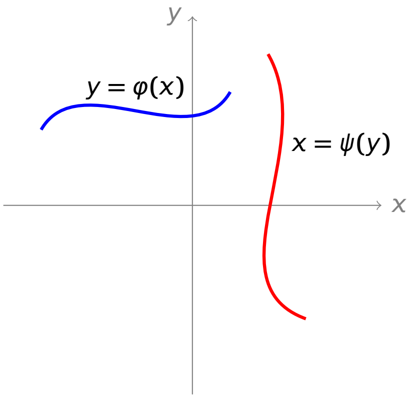
平面光滑曲线的定义

平面上光滑曲线应该包含：一元光滑函数的图形



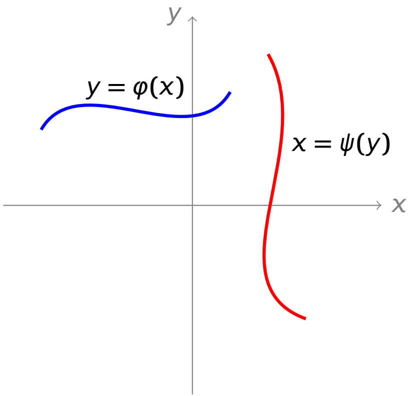
平面光滑曲线的定义

平面上光滑曲线应该包含：一元光滑函数的图形



平面光滑曲线的定义

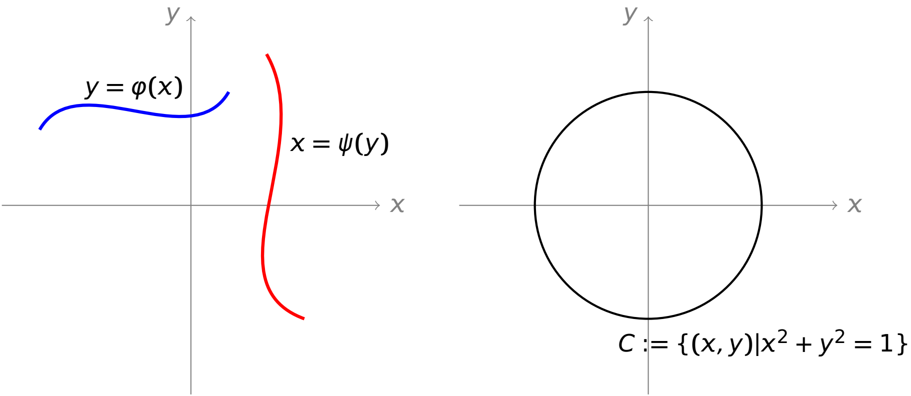
平面上光滑曲线应该包含：一元光滑函数的图形



一般地，平面上一个点集 C 称为光滑曲线，是指该点集“局部”上总可以表示成一元光滑函数的图形。

平面光滑曲线的定义

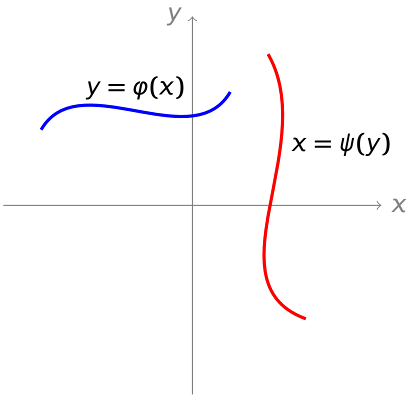
平面上光滑曲线应该包含：一元光滑函数的图形

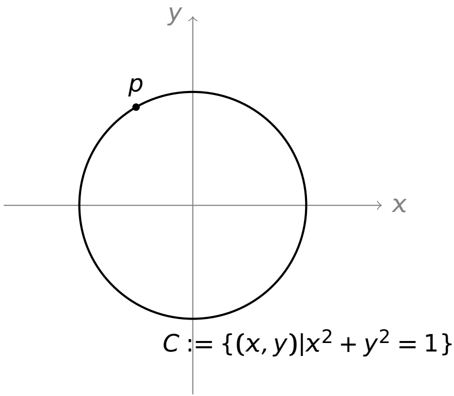


一般地，平面上一个点集 C 称为光滑曲线，是指该点集“局部”上总可以表示成一元光滑函数的图形。

平面光滑曲线的定义

平面上光滑曲线应该包含：一元光滑函数的图形

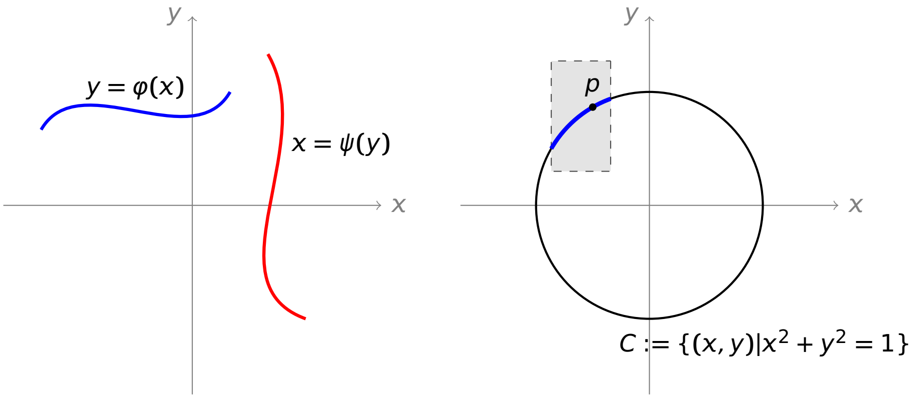




一般地，平面上一个点集 C 称为光滑曲线，是指该点集“局部”上总可以表示成一元光滑函数的图形。

平面光滑曲线的定义

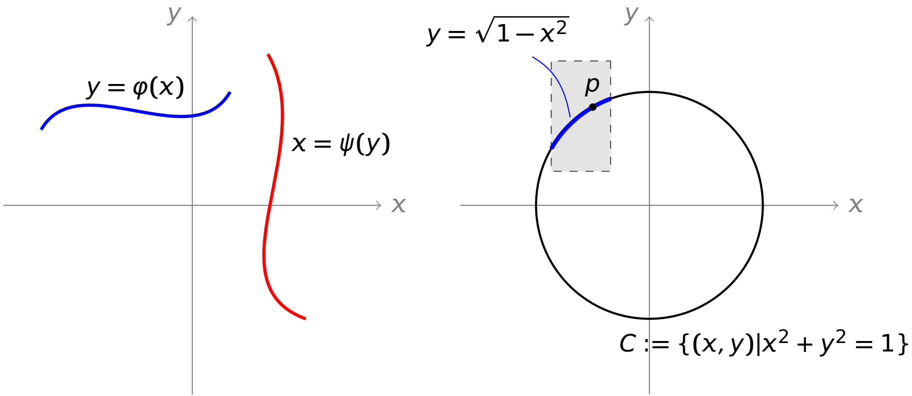
平面上光滑曲线应该包含：一元光滑函数的图形



一般地，平面上一个点集 C 称为光滑曲线，是指该点集“局部”上总可以表示成一元光滑函数的图形。

平面光滑曲线的定义

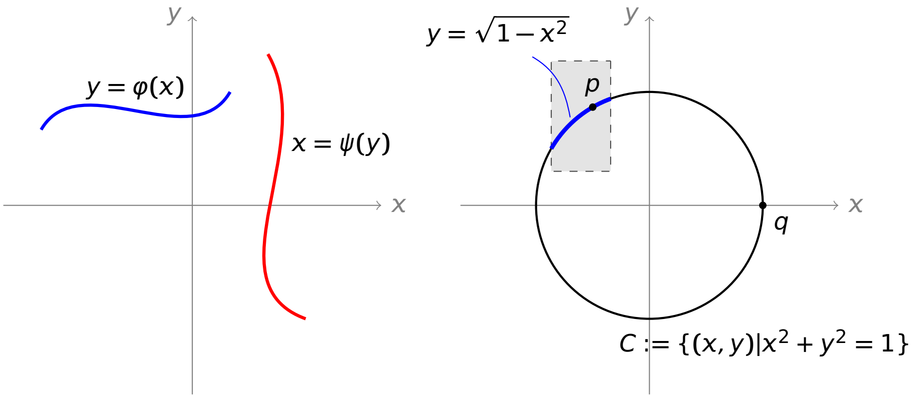
平面上光滑曲线应该包含：一元光滑函数的图形



一般地，平面上一个点集 C 称为光滑曲线，是指该点集“局部”上总可以表示成一元光滑函数的图形。

平面光滑曲线的定义

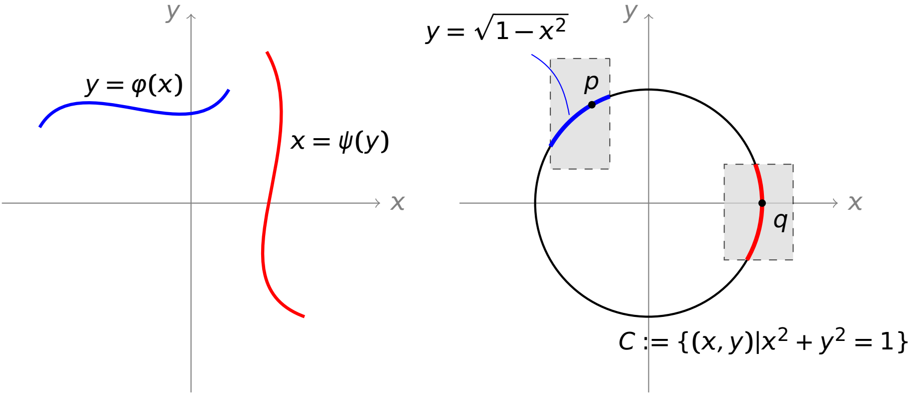
平面上光滑曲线应该包含：一元光滑函数的图形



一般地，平面上一个点集 C 称为光滑曲线，是指该点集“局部”上总可以表示成一元光滑函数的图形。

平面光滑曲线的定义

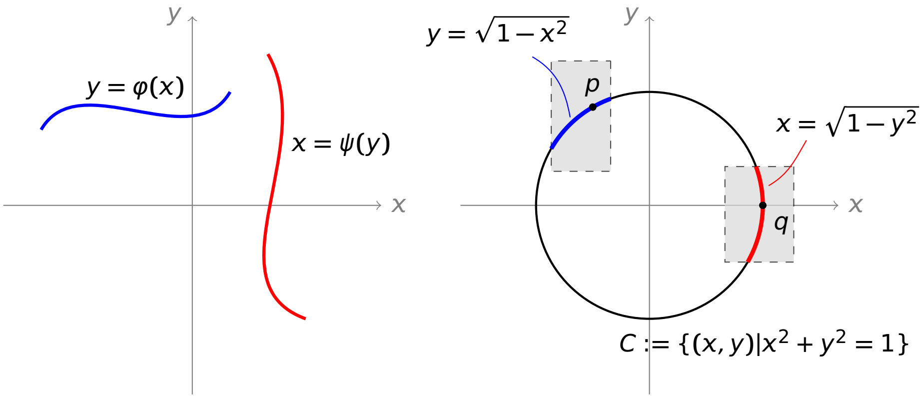
平面上光滑曲线应该包含：一元光滑函数的图形



一般地，平面上一个点集 C 称为光滑曲线，是指该点集“局部”上总可以表示成一元光滑函数的图形。

平面光滑曲线的定义

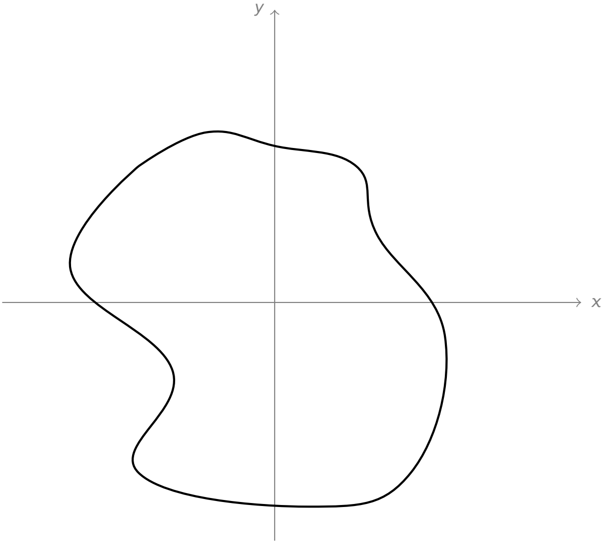
平面上光滑曲线应该包含：一元光滑函数的图形



一般地，平面上一个点集 C 称为光滑曲线，是指该点集“局部”上总可以表示成一元光滑函数的图形。

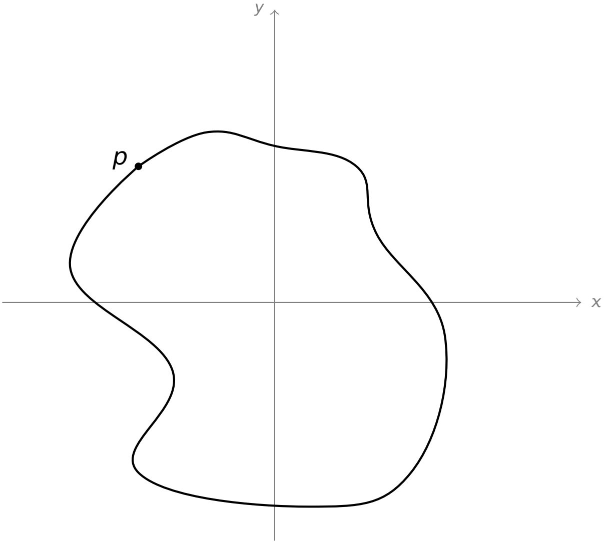
平面光滑曲线的切线

由于平面光滑曲线局部是一元函数的图形，因而存在切线，如图：



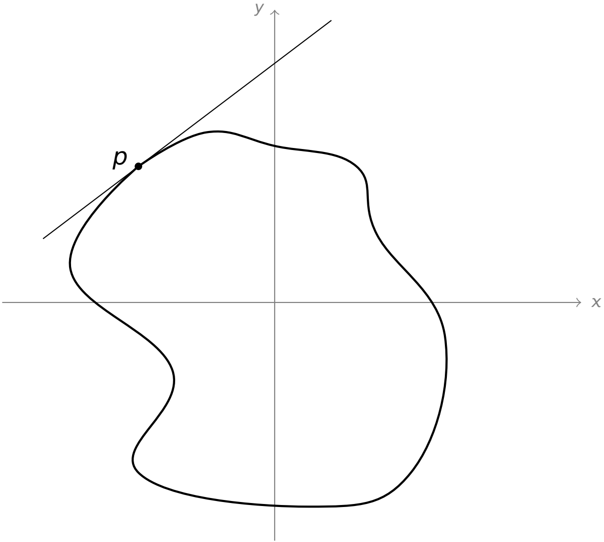
平面光滑曲线的切线

由于平面光滑曲线局部是一元函数的图形，因而存在切线，如图：



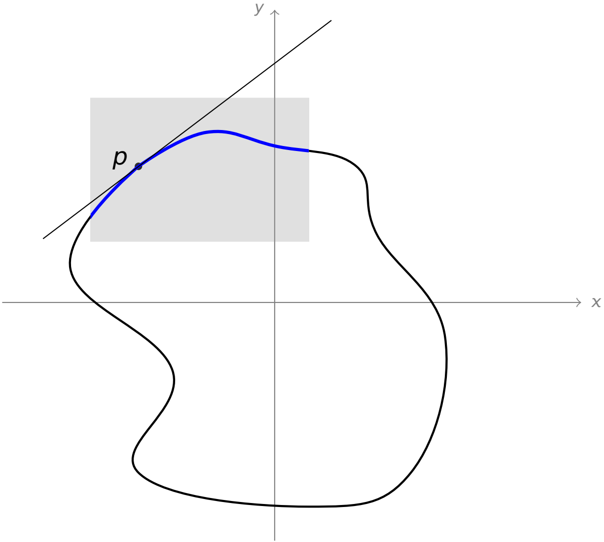
平面光滑曲线的切线

由于平面光滑曲线局部是一元函数的图形，因而存在切线，如图：



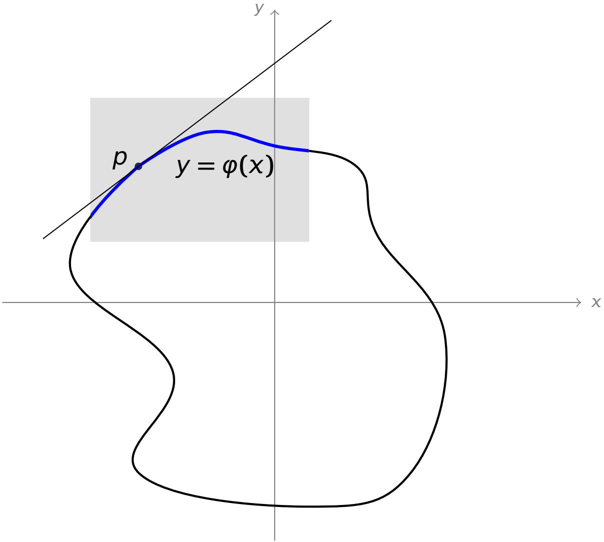
平面光滑曲线的切线

由于平面光滑曲线局部是一元函数的图形，因而存在切线，如图：



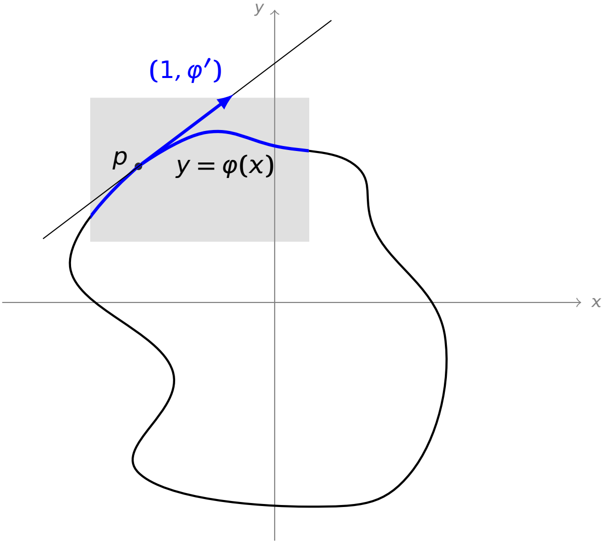
平面光滑曲线的切线

由于平面光滑曲线局部是一元函数的图形，因而存在切线，如图：



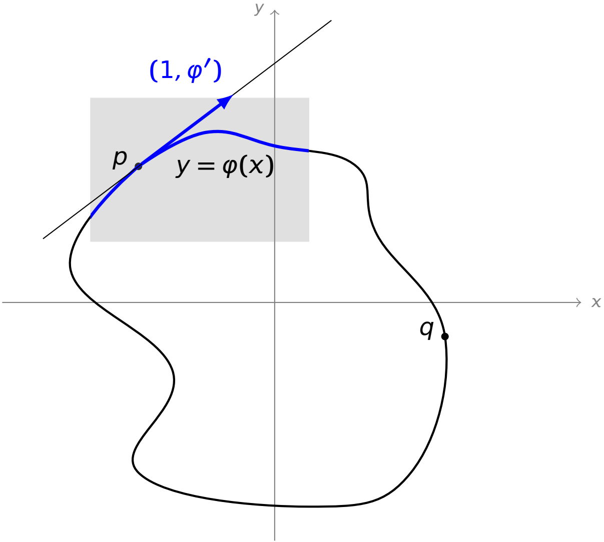
平面光滑曲线的切线

由于平面光滑曲线局部是一元函数的图形，因而存在切线，如图：



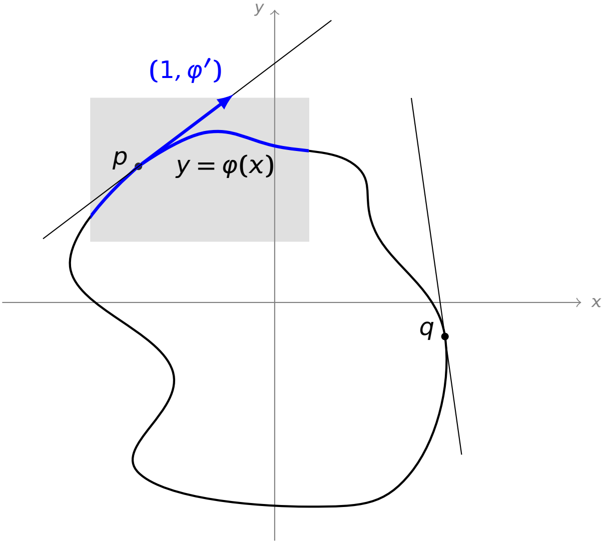
平面光滑曲线的切线

由于平面光滑曲线局部是一元函数的图形，因而存在切线，如图：



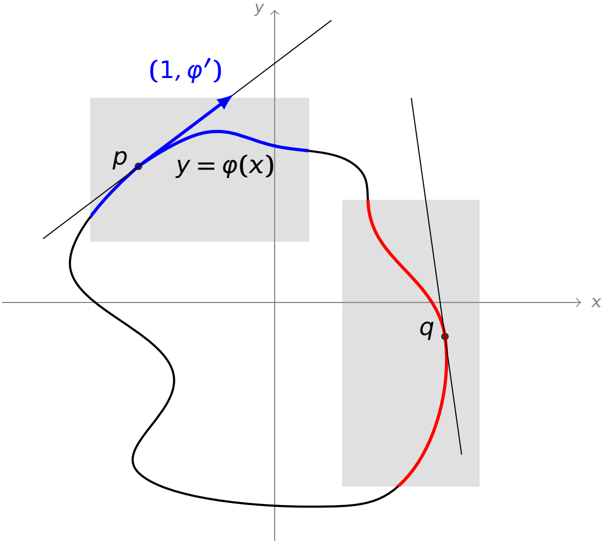
平面光滑曲线的切线

由于平面光滑曲线局部是一元函数的图形，因而存在切线，如图：



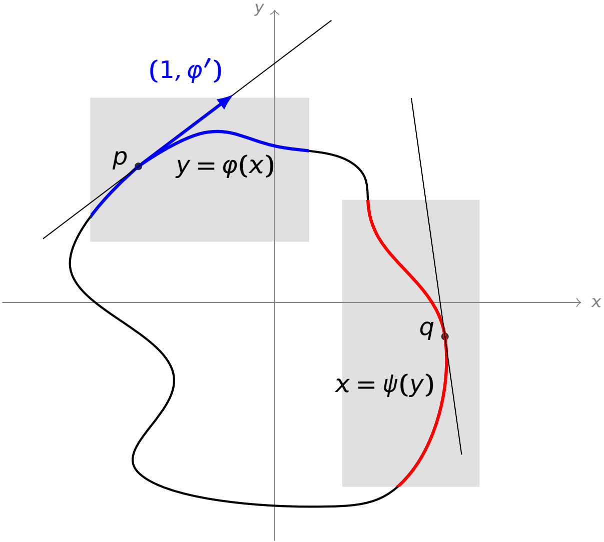
平面光滑曲线的切线

由于平面光滑曲线局部是一元函数的图形，因而存在切线，如图：



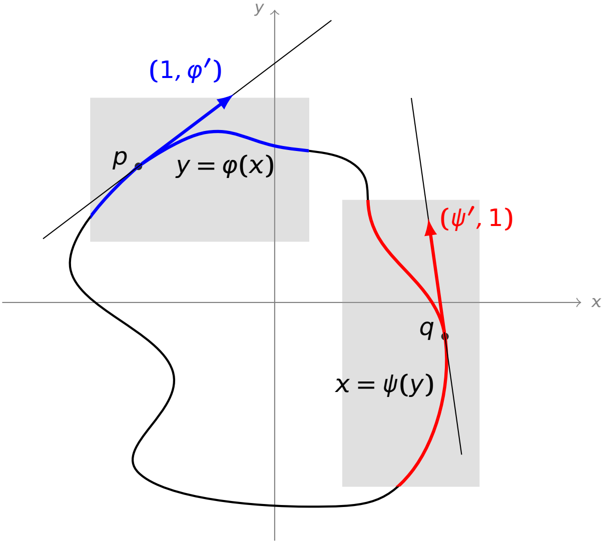
平面光滑曲线的切线

由于平面光滑曲线局部是一元函数的图形，因而存在切线，如图：



平面光滑曲线的切线

由于平面光滑曲线局部是一元函数的图形，因而存在切线，如图：



假设 $f(x, y)$ 是光滑的二元函数，其零点集 $\{f = 0\}$ 是平面上点集。

1. 何时 $\{f = 0\}$ 表示平面上一条光滑曲线？
2. 如何求曲线 $\{f = 0\}$ 上每一点处的切线？

假设 $f(x, y)$ 是光滑的二元函数，其零点集 $\{f = 0\}$ 是平面上点集。

1. 何时 $\{f = 0\}$表示平面上一条光滑曲线？
2. 如何求曲线 $\{f = 0\}$ 上每一点处的切线？

- 若 f 仅仅光滑，则 $\{f = 0\}$ 的形状可以任意复杂，可以不是一条光滑曲线。

假设 $f(x, y)$ 是光滑的二元函数，其零点集 $\{f = 0\}$ 是平面上点集。

1. 何时 $\{f = 0\}$表示平面上一条光滑曲线？
2. 如何求曲线 $\{f = 0\}$ 上每一点处的切线？

- 若 f 仅仅光滑，则 $\{f = 0\}$ 的形状可以任意复杂，可以不是一条光滑曲线。事实上，任意一个闭集，都是某个光滑函数的零点集。

假设 $f(x, y)$ 是光滑的二元函数，其零点集 $\{f = 0\}$ 是平面上点集。

1. 何时 $\{f = 0\}$ 表示平面上一条光滑曲线？
2. 如何求曲线 $\{f = 0\}$ 上每一点处的切线？

- 若 f 仅仅光滑，则 $\{f = 0\}$ 的形状可以任意复杂，可以不是一条光滑曲线。事实上，任意一个闭集，都是某个光滑函数的零点集。
- 定义 $\nabla f = (f_x, f_y)$，称为 f 的梯度。

假设 $f(x, y)$ 是光滑的二元函数，其零点集 $\{f = 0\}$ 是平面上点集。

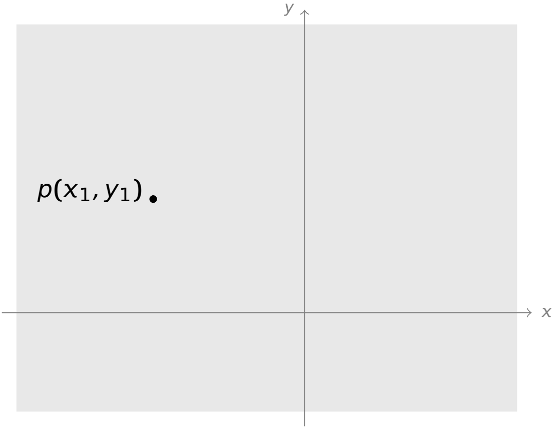
1. 何时 $\{f = 0\}$ 表示平面上一条光滑曲线？
2. 如何求曲线 $\{f = 0\}$ 上每一点处的切线？

- 若 f 仅仅光滑，则 $\{f = 0\}$ 的形状可以任意复杂，可以不是一条光滑曲线。事实上，任意一个闭集，都是某个光滑函数的零点集。
- 定义 $\nabla f = (f_x, f_y)$，称为 f 的梯度。
- 由隐函数定理可知，如果 $\nabla f \neq 0$，则 $\{f = 0\}$ 是一条光滑曲线，且该曲线上任一点 (x, y) 的一个切方向是 $(f_y, -f_x)$（与梯度 ∇f 垂直）。

隐函数定理 1

设 $f(x,y)$ 光滑，$f(x_1,y_1)=0$，$f_y(x_1,y_1)\neq 0$，

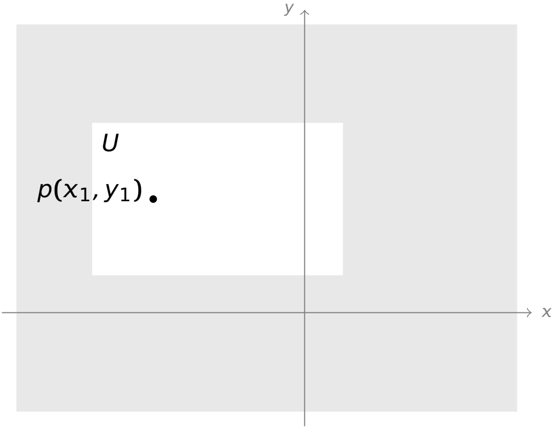
$$\{f=0\}$$



隐函数定理 1

设 $f(x,y)$ 光滑，$f(x_1,y_1)=0$，$f_y(x_1,y_1)\neq 0$，

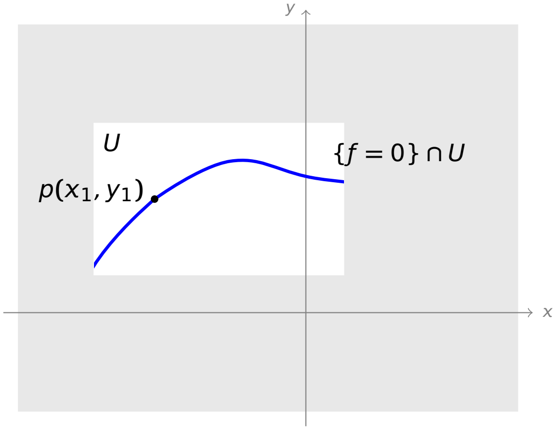
$$\{f=0\}$$



隐函数定理 1

设 $f(x,y)$ 光滑，$f(x_1,y_1)=0$，$f_y(x_1,y_1)\neq 0$，

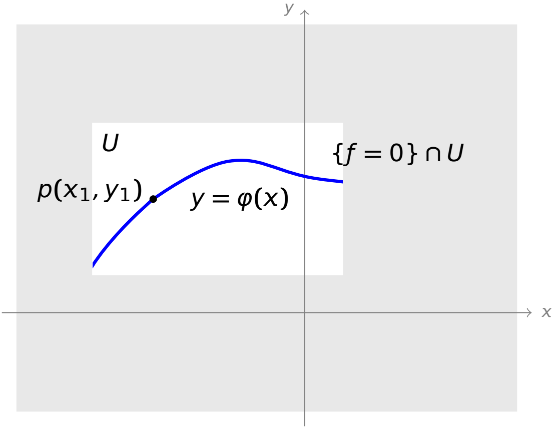
$$\{f=0\}$$



隐函数定理 1

设 $f(x,y)$ 光滑，$f(x_1,y_1)=0$，$f_y(x_1,y_1)\neq 0$，

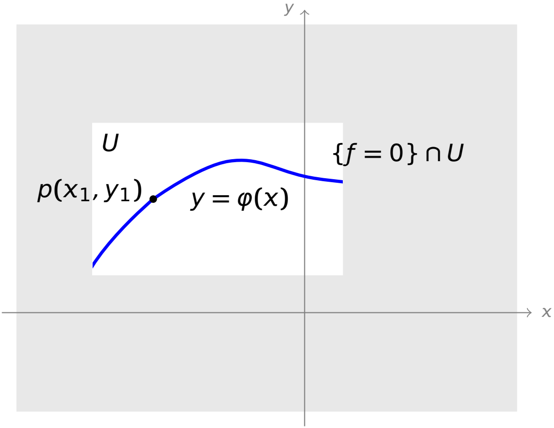
$$\{f=0\}$$



隐函数定理 1

设 $f(x,y)$ 光滑，$f(x_1,y_1)=0$，$f_y(x_1,y_1)\neq 0$，则存在光滑函数 $y=\varphi(x)$ 使得：

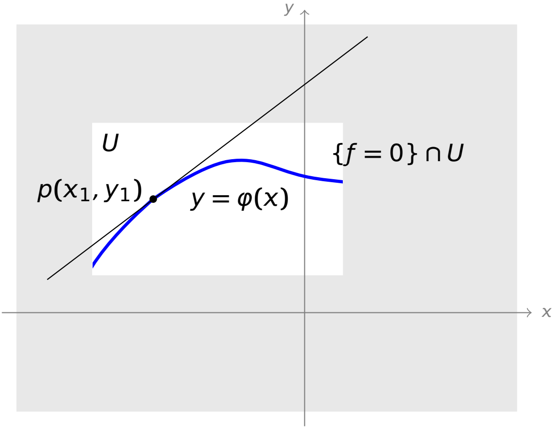
$$\{f=0\}\cap U=\mathrm{Graph}(\varphi).$$



隐函数定理 1

设 $f(x,y)$ 光滑，$f(x_1,y_1)=0$，$f_y(x_1,y_1)\neq 0$，则存在光滑函数 $y=\varphi(x)$ 使得：

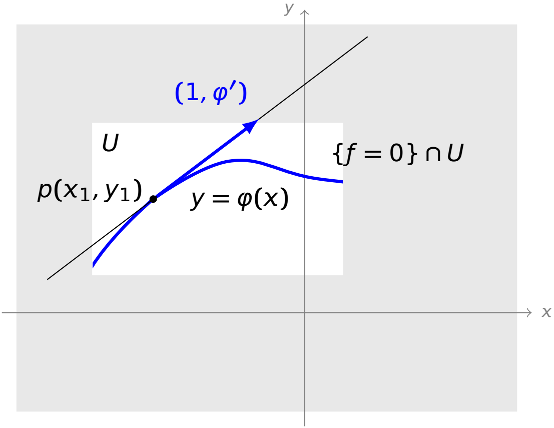
$$\{f=0\}\cap U=\mathrm{Graph}(\varphi).$$



隐函数定理 1

设 $f(x,y)$ 光滑，$f(x_1,y_1)=0$，$f_y(x_1,y_1)\neq 0$，则存在光滑函数 $y=\varphi(x)$ 使得：

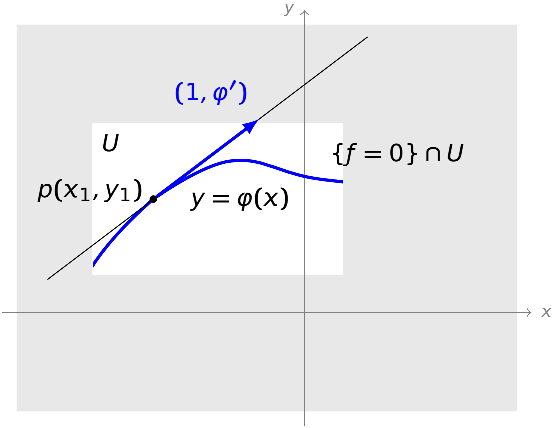
$$\{f=0\}\cap U=\mathrm{Graph}(\varphi).$$



隐函数定理 1

设 $f(x,y)$ 光滑，$f(x_1,y_1)=0$，$f_y(x_1,y_1)\neq 0$，则存在光滑函数 $y=\varphi(x)$ 使得：

$$\{f=0\}\cap U=\mathrm{Graph}(\varphi).$$

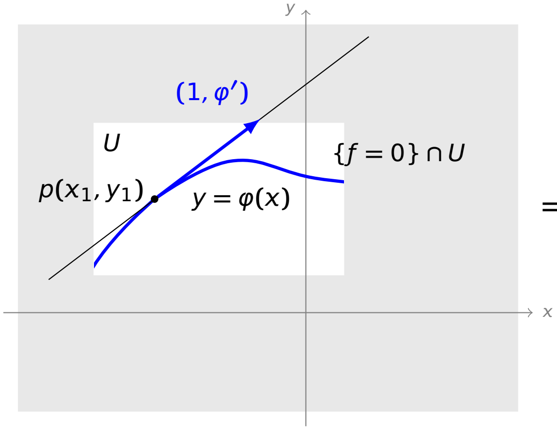


$y=\varphi(x)$ 满足 $f(x,y)=0$

隐函数定理 1

设 $f(x,y)$ 光滑，$f(x_1,y_1)=0$，$f_y(x_1,y_1)\neq 0$，则存在光滑函数 $y=\varphi(x)$ 使得：

$$\{f=0\}\cap U=\mathrm{Graph}(\varphi).$$



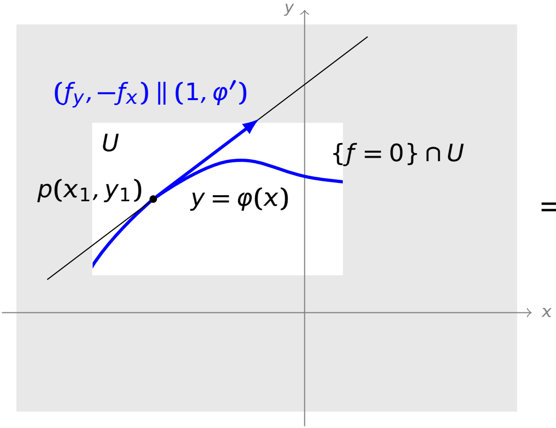
$y=\varphi(x)$ 满足 $f(x,y)=0$

$$\Rightarrow\ \varphi'=-\frac{f_x}{f_y}$$

隐函数定理 1

设 $f(x,y)$ 光滑，$f(x_1,y_1)=0$，$f_y(x_1,y_1)\neq 0$，则存在光滑函数 $y=\varphi(x)$ 使得：

$$\{f=0\}\cap U=\mathrm{Graph}(\varphi).$$



$y=\varphi(x)$ 满足 $f(x,y)=0$

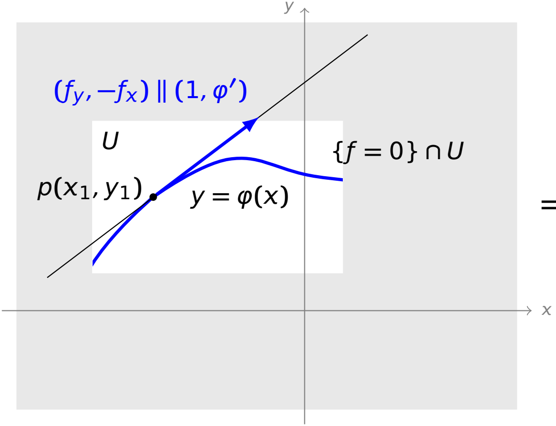
$$\Rightarrow\ \varphi'=-\frac{f_x}{f_y}$$

隐函数定理 1

设 $f(x,y)$ 光滑，$f(x_1,y_1)=0$，$f_y(x_1,y_1)\neq 0$，则存在光滑函数 $y=\varphi(x)$ 使得：

$$\{f=0\}\cap U=\text{Graph}(\varphi).$$

并且 (x_1,y_1) 处的一个切向量为 $(f_y(x_1,y_1),-f_x(x_1,y_1))$，



$y=\varphi(x)$ 满足 $f(x,y)=0$

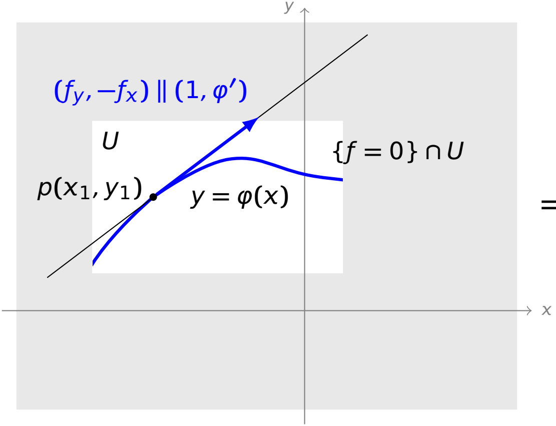
$$\Rightarrow\ \varphi'=-\frac{f_x}{f_y}$$

隐函数定理 1

设 $f(x,y)$ 光滑，$f(x_1,y_1)=0$，$f_y(x_1,y_1)\neq 0$，则存在光滑函数 $y=\varphi(x)$ 使得：

$$\{f=0\}\cap U=\mathrm{Graph}(\varphi).$$

并且 (x_1,y_1) 处的一个切向量为 $(f_y(x_1,y_1),-f_x(x_1,y_1))$，与 ∇f 垂直.



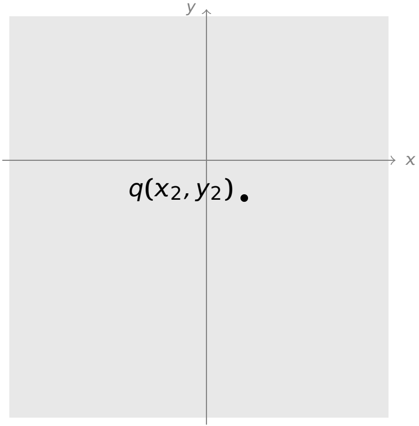
$y=\varphi(x)$ 满足 $f(x,y)=0$

$$\Rightarrow\ \varphi'=-\frac{f_x}{f_y}$$

隐函数定理 2

设 $f(x,y)$ 光滑，$f(x_2,y_2)=0$，$f_x(x_2,y_2)\neq 0$，

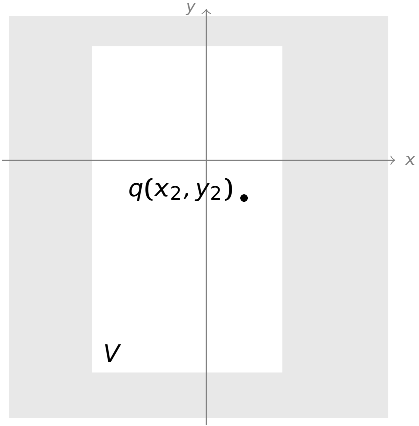
$$\{f=0\}$$



隐函数定理 2

设 $f(x,y)$ 光滑，$f(x_2,y_2)=0$，$f_x(x_2,y_2)\neq 0$，

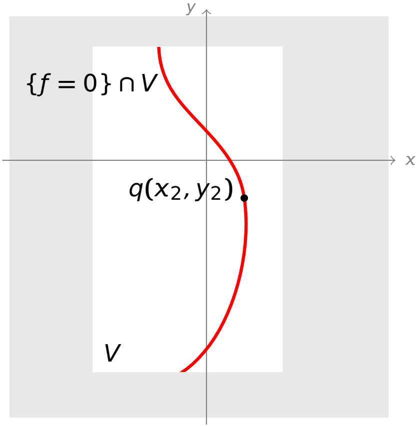
$$\{f=0\}$$



隐函数定理 2

设 $f(x,y)$ 光滑，$f(x_2,y_2)=0$，$f_x(x_2,y_2)\neq 0$，

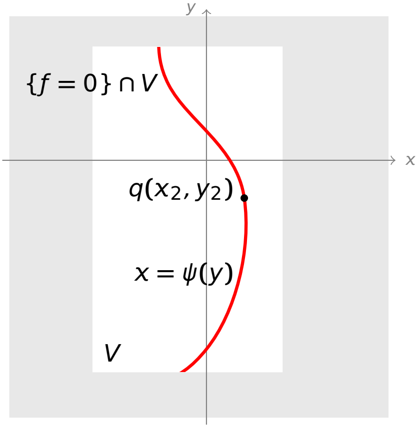
$$\{f=0\}$$



隐函数定理 2

设 $f(x,y)$ 光滑，$f(x_2,y_2)=0$，$f_x(x_2,y_2)\neq 0$，

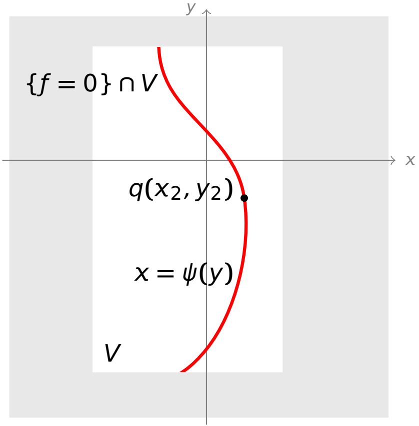
$$\{f=0\}$$



隐函数定理 2

设 $f(x,y)$ 光滑，$f(x_2,y_2)=0$，$f_x(x_2,y_2)\neq 0$，则存在光滑函数 $x=\psi(y)$ 使得：

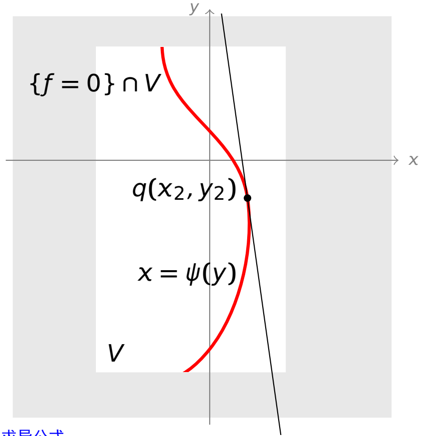
$$\{f=0\}\cap V=\mathrm{Graph}(\psi).$$



隐函数定理 2

设 $f(x,y)$ 光滑，$f(x_2,y_2)=0$，$f_x(x_2,y_2)\neq 0$，则存在光滑函数 $x=\psi(y)$ 使得：

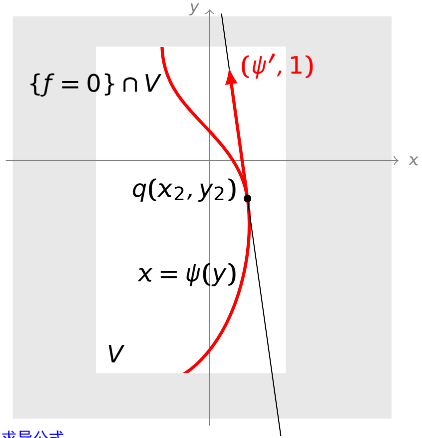
$$\{f=0\}\cap V=\mathrm{Graph}(\psi).$$



隐函数定理 2

设 $f(x,y)$ 光滑，$f(x_2,y_2)=0$，$f_x(x_2,y_2)\neq 0$，则存在光滑函数 $x=\psi(y)$ 使得：

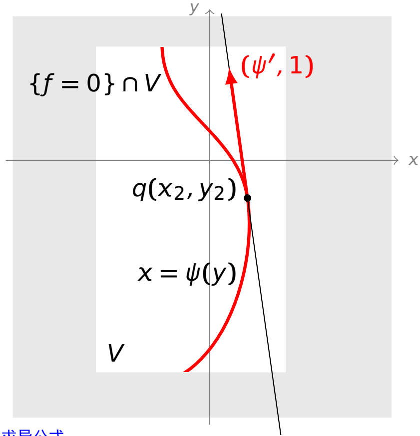
$$\{f=0\}\cap V=\mathrm{Graph}(\psi).$$



隐函数定理 2

设 $f(x,y)$ 光滑，$f(x_2,y_2)=0$，$f_x(x_2,y_2)\neq 0$，则存在光滑函数 $x=\psi(y)$ 使得：

$$\{f=0\}\cap V=\mathrm{Graph}(\psi).$$

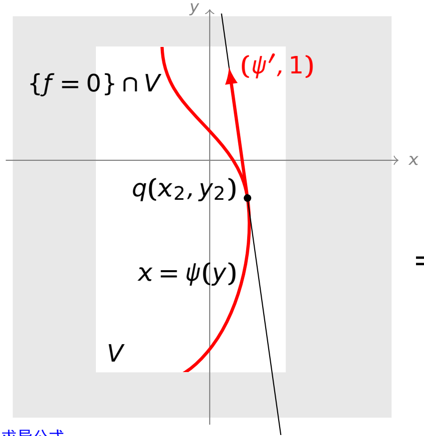


$x=\psi(y)$ 满足 $f(x,y)=0$

隐函数定理 2

设 $f(x,y)$ 光滑，$f(x_2,y_2)=0$，$f_x(x_2,y_2)\neq 0$，则存在光滑函数 $x=\psi(y)$ 使得：

$$\{f=0\}\cap V=\mathrm{Graph}(\psi).$$



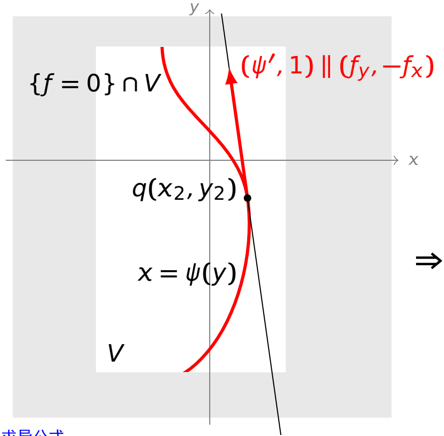
$x=\psi(y)$ 满足 $f(x,y)=0$

$$\Rightarrow\ \psi'=-\frac{f_y}{f_x}$$

隐函数定理 2

设 $f(x,y)$ 光滑，$f(x_2,y_2)=0$，$f_x(x_2,y_2)\neq 0$，则存在光滑函数 $x=\psi(y)$ 使得：

$$\{f=0\}\cap V=\mathrm{Graph}(\psi).$$



$x=\psi(y)$ 满足 $f(x,y)=0$

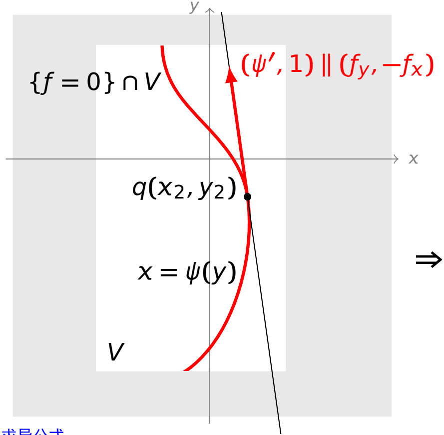
$$\Rightarrow \psi' = -\frac{f_y}{f_x}$$

隐函数定理 2

设 $f(x,y)$ 光滑，$f(x_2,y_2)=0$，$f_x(x_2,y_2)\neq 0$，则存在光滑函数 $x=\psi(y)$ 使得：

$$\{f=0\}\cap V=\mathrm{Graph}(\psi).$$

并且 (x_2,y_2) 处的一个切向量为 $(f_y(x_2,y_2),-f_x(x_2,y_2))$，



$x=\psi(y)$ 满足 $f(x,y)=0$

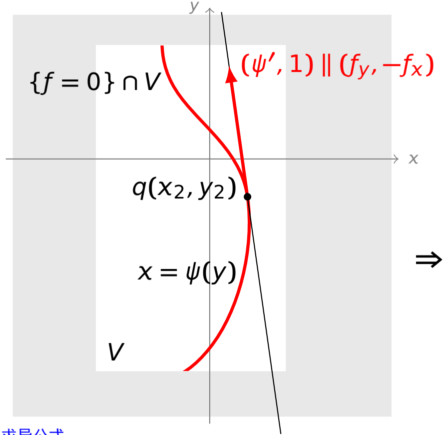
$$\Rightarrow\ \psi'=-\frac{f_y}{f_x}$$

隐函数定理 2

设 $f(x,y)$ 光滑，$f(x_2,y_2)=0$，$f_x(x_2,y_2)\neq 0$，则存在光滑函数 $x=\psi(y)$ 使得：

$$\{f=0\}\cap V=\mathrm{Graph}(\psi).$$

并且 (x_2,y_2) 处的一个切向量为 $(f_y(x_2,y_2),-f_x(x_2,y_2))$，与 ∇f 垂直.



$x=\psi(y)$ 满足 $f(x,y)=0$

$$\Rightarrow\ \psi'=-\frac{f_y}{f_x}$$

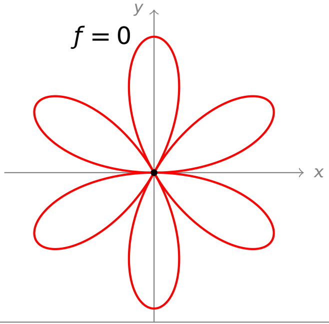
隐函数定理中的条件 $f_x(x_0, y_0) \neq 0$ 或 $f_y(x_0, y_0) \neq 0$ 不能去掉，如图

$$f(x,y) = \left(3x^2 - y^2\right)^2 y^2 - \left(x^2 + y^2\right)^4$$

$$f(x,y) = \left(x^2 + y^2 + y\right)^2 - \left(x^2 + y^2\right)$$

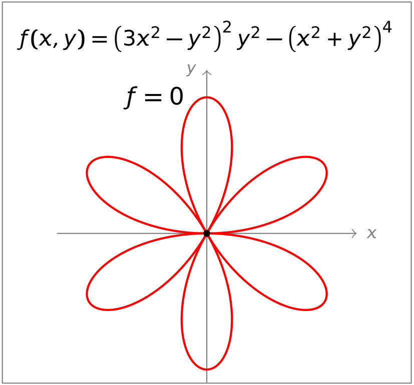
隐函数定理中的条件 $f_x(x_0,y_0)\neq 0$ 或 $f_y(x_0,y_0)\neq 0$ 不能去掉，如图

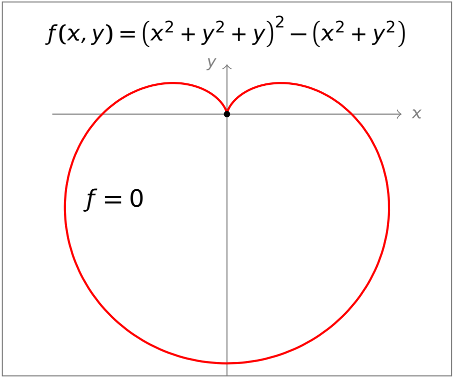
$$f(x,y)=\left(3x^2-y^2\right)^2 y^2-\left(x^2+y^2\right)^4$$



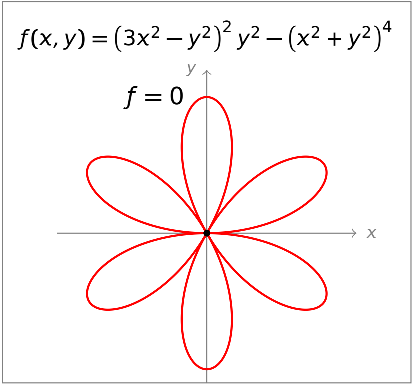
$$f(x,y)=\left(x^2+y^2+y\right)^2-\left(x^2+y^2\right)$$

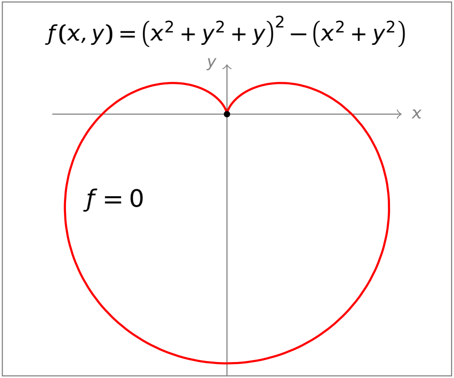
隐函数定理中的条件 $f_x(x_0, y_0) \neq 0$ 或 $f_y(x_0, y_0) \neq 0$ 不能去掉，如图





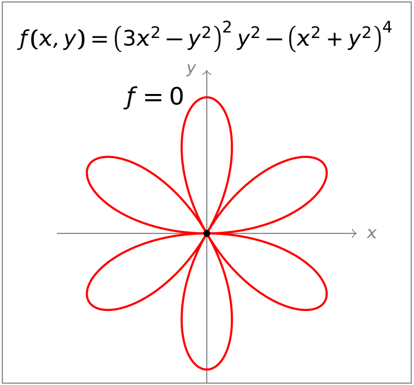
隐函数定理中的条件 $f_x(x_0, y_0) \neq 0$ 或 $f_y(x_0, y_0) \neq 0$ 不能去掉，如图

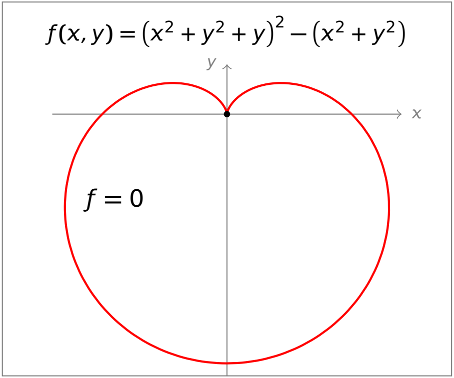




- $(0,0)$ 处 $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$，不存在切线

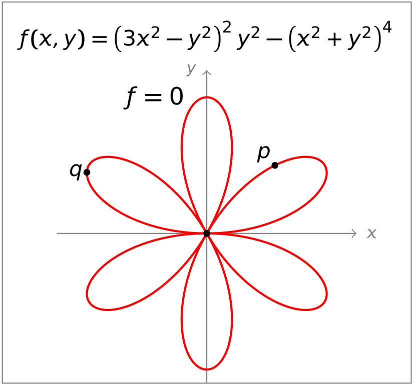
隐函数定理中的条件 $f_x(x_0, y_0) \neq 0$ 或 $f_y(x_0, y_0) \neq 0$ 不能去掉，如图

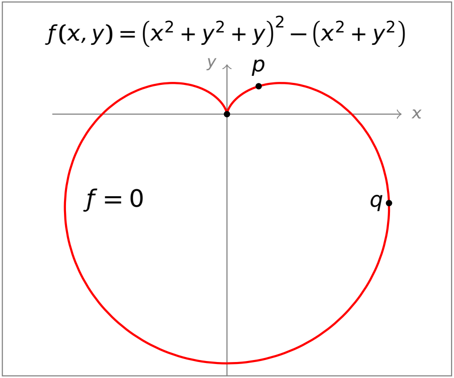




- $(0, 0)$ 处 $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$，不存在切线
- 其余点处的梯度不为零。

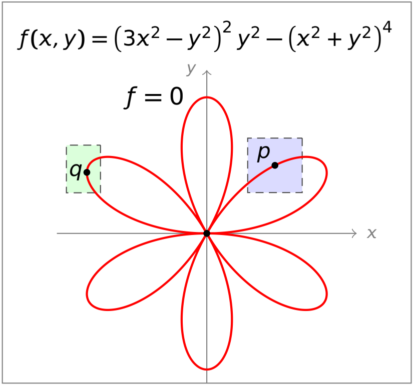
隐函数定理中的条件 $f_x(x_0, y_0) \neq 0$ 或 $f_y(x_0, y_0) \neq 0$ 不能去掉，如图

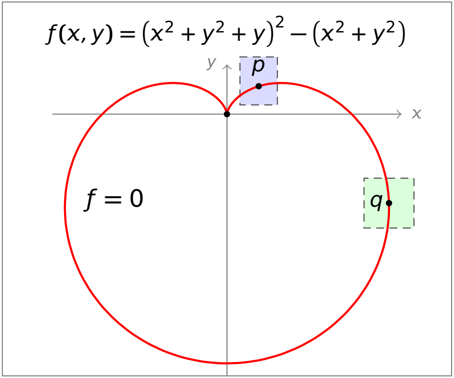




- $(0,0)$ 处 $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$，不存在切线
- 其余点处的梯度不为零。

隐函数定理中的条件 $f_x(x_0, y_0) \neq 0$ 或 $f_y(x_0, y_0) \neq 0$ 不能去掉，如图





- $(0,0)$ 处 $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$，不存在切线
- 其余点处的梯度不为零。
- 在 p 点附近，$\{f = 0\}$ 是函数 $y = \varphi(x)$ 的图形
- 在 q 点附近，$\{f = 0\}$ 是函数 $x = \psi(y)$ 的图形

设 $f(x, y)$ 是光滑函数，c 是常数，考虑平面点集 $\{f = c\}$。

设 $f(x, y)$ 是光滑函数，c 是常数，考虑平面点集 $\{f = c\}$。与零点集情形类似，有如下结论：

设 $f(x, y)$ 是光滑函数，c 是常数，考虑平面点集 $\{f = c\}$。与零点集情形类似，有如下结论：

定理 设 $p(x_0, y_0)$ 满足 $f(x_0, y_0) = c$，且偏导数 $f_x(x_0, y_0)$ 和 $f_y(x_0, y_0)$ 不全为零。则

设 $f(x, y)$ 是光滑函数，c 是常数，考虑平面点集 $\{f = c\}$。与零点集情形类似，有如下结论：

定理 设 $p(x_0, y_0)$ 满足 $f(x_0, y_0) = c$，且偏导数 $f_x(x_0, y_0)$ 和 $f_y(x_0, y_0)$ 不全为零。则

- 点集 $\{f = c\}$ 在 p 点附近是光滑曲线，且切线平行于 $(f_y, -f_x)$。

设 $f(x, y)$ 是光滑函数，c 是常数，考虑平面点集 $\{f = c\}$。与零点集情形类似，有如下结论：

定理 设 $p(x_0, y_0)$ 满足 $f(x_0, y_0) = c$，且偏导数 $f_x(x_0, y_0)$ 和 $f_y(x_0, y_0)$ 不全为零。则

- 点集 $\{f = c\}$ 在 p 点附近是光滑曲线，且切线平行于 $(f_y, -f_x)$。

证明 令 $F(x, y) = f(x, y) - c$，则 $\{f = c\} = \{F = 0\}$，运用上一个结论即可。

设 $f(x,y)$ 是光滑函数，c 是常数，考虑平面点集 $\{f=c\}$。与零点集情形类似，有如下结论：

定理 设 $p(x_0,y_0)$ 满足 $f(x_0,y_0)=c$，且偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 和 $f_y(x_0,y_0)$ 不全为零。则

- 点集 $\{f=c\}$ 在 p 点附近是光滑曲线，且切线平行于 $(f_y,-f_x)$。

证明 令 $F(x,y)=f(x,y)-c$，则 $\{f=c\}=\{F=0\}$，运用上一个结论即可。

注 1 若 f_x 和 f_y 处处不全为零，则 $\{f=c\}$ 关于参数 c 构成平面上一族曲线，

设 $f(x, y)$ 是光滑函数，c 是常数，考虑平面点集 $\{f = c\}$。与零点集情形类似，有如下结论：

定理 设 $p(x_0, y_0)$ 满足 $f(x_0, y_0) = c$，且偏导数 $f_x(x_0, y_0)$ 和 $f_y(x_0, y_0)$ 不全为零。则

- 点集 $\{f = c\}$ 在 p 点附近是光滑曲线，且切线平行于 $(f_y, -f_x)$。

证明 令 $F(x, y) = f(x, y) - c$，则 $\{f = c\} = \{F = 0\}$，运用上一个结论即可。

注 1 若 f_x 和 f_y 处处不全为零，则 $\{f = c\}$ 关于参数 c 构成平面上一族曲线，称为函数 $f(x, y)$ 的等值线。

设 $f(x, y)$ 是光滑函数，c 是常数，考虑平面点集 $\{f = c\}$。与零点集情形类似，有如下结论：

定理 设 $p(x_0, y_0)$ 满足 $f(x_0, y_0) = c$，且偏导数 $f_x(x_0, y_0)$ 和 $f_y(x_0, y_0)$ 不全为零。则

- 点集 $\{f = c\}$ 在 p 点附近是光滑曲线，且切线平行于 $(f_y, -f_x)$。

证明 令 $F(x, y) = f(x, y) - c$，则 $\{f = c\} = \{F = 0\}$，运用上一个结论即可。

注 1 若 f_x 和 f_y 处处不全为零，则 $\{f = c\}$ 关于参数 c 构成平面上一族曲线，称为函数 $f(x, y)$ 的等值线。

注 2 等值线 $\{f = c\}$ 可视为空间曲线 $\begin{cases} z = f(x, y) \\ z = c \end{cases}$ 在 xoy 坐标面上的投影。

例 设 $f(x,y)=\left(3x^2-y^2\right)^2y^2-\left(x^2+y^2\right)^4$

- 在 desmos 上画出等值线 $\{f=c\}$
- 在 CalcPlot3D 上画出曲面 $z=f(x,y)$，平面 $z=c$，及交线空间曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ z=c \end{cases}$

例 设 $f(x,y)=\left(3x^2-y^2\right)^2 y^2-\left(x^2+y^2\right)^4$

- 在 desmos 上画出等值线 $\{f=c\}$
- 在 CalcPlot3D 上画出曲面 $z=f(x,y)$，平面 $z=c$，及交线空间曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ z=c \end{cases}$

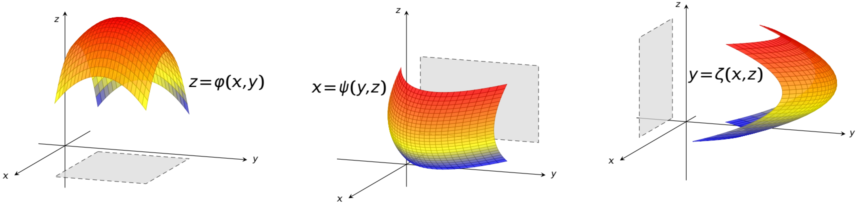
（参考值 $c=-2,\ -0.3,\ 0,\ 0.1$）

空间光滑曲面的定义

空间中光滑曲面应该包含：二元光滑函数的图形，即 $z=\varphi(x,y)$，$y=\psi(x,z)$ 及 $x=\zeta(y,z)$ 的图形

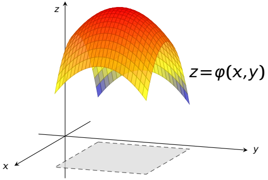
空间光滑曲面的定义

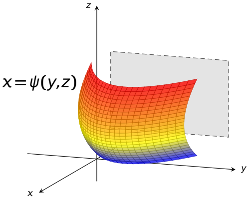
空间中光滑曲面应该包含：二元光滑函数的图形，即 $z = \varphi(x, y)$，$y = \psi(x, z)$ 及 $x = \zeta(y, z)$ 的图形

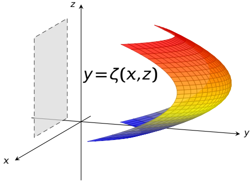


空间光滑曲面的定义

空间中光滑曲面应该包含：二元光滑函数的图形，即 $z=\varphi(x,y)$，$y=\psi(x,z)$ 及 $x=\zeta(y,z)$ 的图形



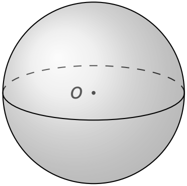




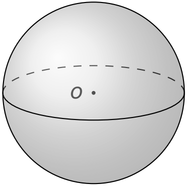
一般地，空间中的点集 S 称为光滑曲面，是指 S “局部”上是二元光滑函数的图形。

例 球面 $\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=1\}$ 是光滑曲面。

例 球面 $\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=1\}$ 是光滑曲面。



例 球面 $\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=1\}$ 是光滑曲面。



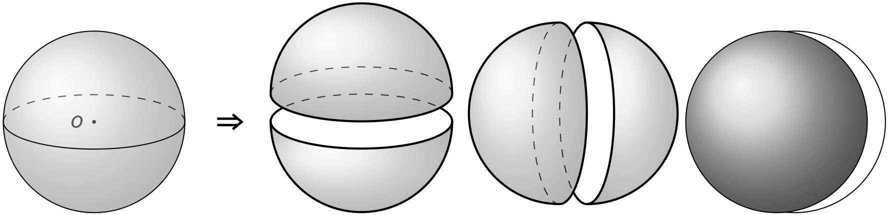
解 这是，球面局部上是如下 6 种二元函数的图形之一：

$$z=\pm\sqrt{1-x^2-y^2},\qquad (\sqrt{x^2+y^2}<1)$$

$$y=\pm\sqrt{1-z^2-x^2},\qquad (\sqrt{z^2+x^2}<1)$$

$$x=\pm\sqrt{1-y^2-z^2},\qquad (\sqrt{y^2+z^2}<1)$$

例 球面 $\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=1\}$ 是光滑曲面。



解 这是，球面局部上是如下 6 种二元函数的图形之一：

$$z=\pm\sqrt{1-x^2-y^2}, \qquad (\sqrt{x^2+y^2}<1)$$

$$y=\pm\sqrt{1-z^2-x^2}, \qquad (\sqrt{z^2+x^2}<1)$$

$$x=\pm\sqrt{1-y^2-z^2}, \qquad (\sqrt{y^2+z^2}<1)$$

假设 $f(x,y,z)$ 是光滑的三元函数，其零点集 $\{f=0\}$ 是平面上点集。

1. 何时 $\{f=0\}$表示空间一个光滑曲面？
2. 如何求曲面 $\{f=0\}$ 上每一点处的切平面？

假设 $f(x,y,z)$ 是光滑的三元函数，其零点集 $\{f=0\}$ 是平面上点集。

1. 何时 $\{f=0\}$ 表示空间一个光滑曲面？
2. 如何求曲面 $\{f=0\}$ 上每一点处的切平面？

- 若 f 仅仅光滑，则 $\{f=0\}$ 的形状可以任意复杂，可以不是一个光滑曲面。

假设 $f(x,y,z)$ 是光滑的三元函数，其零点集 $\{f=0\}$ 是平面上点集。

1. 何时 $\{f=0\}$ 表示空间一个光滑曲面？
2. 如何求曲面 $\{f=0\}$ 上每一点处的切平面？

- 若 f 仅仅光滑，则 $\{f=0\}$ 的形状可以任意复杂，可以不是一个光滑曲面。事实上，空间中任意一个闭集，都是某个光滑函数的零点集。

假设 $f(x,y,z)$ 是光滑的三元函数，其零点集 $\{f=0\}$ 是平面上点集。

1. 何时 $\{f=0\}$ 表示空间一个光滑曲面？
2. 如何求曲面 $\{f=0\}$ 上每一点处的切平面？

- 若 f 仅仅光滑，则 $\{f=0\}$ 的形状可以任意复杂，可以不是一个光滑曲面。事实上，空间中任意一个闭集，都是某个光滑函数的零点集。
- 定义 $\nabla f=(f_x,f_y,f_z)$，称为 f 的梯度。

假设 $f(x,y,z)$ 是光滑的三元函数，其零点集 $\{f=0\}$ 是平面上点集。

1. 何时 $\{f=0\}$表示空间一个光滑曲面？
2. 如何求曲面 $\{f=0\}$ 上每一点处的切平面？

- 若 f 仅仅光滑，则 $\{f=0\}$ 的形状可以任意复杂，可以不是一个光滑曲面。事实上，空间中任意一个闭集，都是某个光滑函数的零点集。
- 定义 $\nabla f=(f_x,f_y,f_z)$，称为 f 的梯度。
- 由隐函数定理可知，如果 $\nabla f\neq 0$，则 $\{f=0\}$ 是一个光滑曲面，且该曲面上任一点的切平面垂直于梯度 ∇f。

隐函数定理

定理 设 $f(x, y, z)$ 是光滑函数，$p(x_0, y_0, z_0)$ 满足 $f(x_0, y_0, z_0) = 0$，且偏导数 $f_x(x_0, y_0, z_0)$、$f_y(x_0, y_0, z_0)$ 和 $f_z(x_0, y_0, z_0)$ 不全为零。

隐函数定理

定理 设 $f(x, y, z)$ 是光滑函数，$p(x_0, y_0, z_0)$ 满足 $f(x_0, y_0, z_0) = 0$，且偏导数 $f_x(x_0, y_0, z_0)$、$f_y(x_0, y_0, z_0)$ 和 $f_z(x_0, y_0, z_0)$ 不全为零。则 $\{f = 0\}$ 在 p 点附近是某一个光滑二元函数的图像。

隐函数定理

定理 设 $f(x,y,z)$ 是光滑函数，$p(x_0,y_0,z_0)$ 满足 $f(x_0,y_0,z_0)=0$，且偏导数 $f_x(x_0,y_0,z_0)$、$f_y(x_0,y_0,z_0)$ 和 $f_z(x_0,y_0,z_0)$ 不全为零。则 $\{f=0\}$ 在 p 点附近是某一个光滑二元函数的图像。

注

- 进一步，若偏导数处处不全为零（即 $\nabla f\neq 0$），则 $\{f=0\}$ 是空间中光滑曲面。

隐函数定理

定理 设 $f(x,y,z)$ 是光滑函数，$p(x_0,y_0,z_0)$ 满足 $f(x_0,y_0,z_0)=0$，且偏导数 $f_x(x_0,y_0,z_0)$、$f_y(x_0,y_0,z_0)$ 和 $f_z(x_0,y_0,z_0)$ 不全为零。则 $\{f=0\}$ 在 p 点附近是某一个光滑二元函数的图像。

注

- 进一步，若偏导数处处不全为零（即 $\nabla f \neq 0$），则 $\{f=0\}$ 是空间中光滑曲面。并且不难知道，曲面上任一点的切平面垂直于梯度 ∇f。

隐函数定理

定理 设 $f(x,y,z)$ 是光滑函数，$p(x_0,y_0,z_0)$ 满足 $f(x_0,y_0,z_0)=0$，且偏导数 $f_x(x_0,y_0,z_0)$、$f_y(x_0,y_0,z_0)$ 和 $f_z(x_0,y_0,z_0)$ 不全为零。则 $\{f=0\}$ 在 p 点附近是某一个光滑二元函数的图像。

注

- 进一步，若偏导数处处不全为零（即 $\nabla f \neq 0$），则 $\{f=0\}$ 是空间中光滑曲面。并且不难知道，曲面上任一点的切平面垂直于梯度 ∇f。
- 对任意常数 c，上述结论仍然成立。特别地，若 $\nabla f \neq 0$，则空间点集 $\{f=c\}$ 是光滑曲面，且曲面上任一点的切平面垂直于梯度 ∇f。

隐函数定理

定理 设 $f(x,y,z)$ 是光滑函数，$p(x_0,y_0,z_0)$ 满足 $f(x_0,y_0,z_0)=0$，且偏导数 $f_x(x_0,y_0,z_0)$、$f_y(x_0,y_0,z_0)$ 和 $f_z(x_0,y_0,z_0)$ 不全为零。则 $\{f=0\}$ 在 p 点附近是某一个光滑二元函数的图像。

注

- 进一步，若偏导数处处不全为零（即 $\nabla f\neq 0$），则 $\{f=0\}$ 是空间中光滑曲面。并且不难知道，曲面上任一点的切平面垂直于梯度 ∇f。
- 对任意常数 c，上述结论仍然成立。特别地，若 $\nabla f\neq 0$，则空间点集 $\{f=c\}$ 是光滑曲面，且曲面上任一点的切平面垂直于梯度 ∇f。$\{f=c\}$ 称为等值面

例 设 $f(x,y,z)=(2x^2+y^2+z^2-1)^3-\frac{1}{10}x^2z^3-y^2z^3$

例 设 $f(x,y,z)=(2x^2+y^2+z^2-1)^3-\frac{1}{10}x^2z^3-y^2z^3$

- 求出 $\{f=0\}$ 上偏导数全为零的点（临界点）
- 在 CalcPlot3D 上画出曲面 $\{f=0\}$
- 观察临界点附近是否光滑
- 观察曲面哪些部分可以表示成光滑二元函数 $z=\varphi(x,y)$，或 $y=\psi(x,z)$，或 $x=\gamma(y,z)$ 的图形