第 7 章 e：二阶线性常系数微分方程

数学系　梁卓滨

2017.07 暑期班

复数简介

引入动机 希望方程 $x^2 = -1$ 有解。方法：扩充数域

复数定义

- 引入“虚数单位”，用符号“i”（或者“$\sqrt{-1}$”）表示，满足

$$i^2 = -1$$

- 复数：$a + bi$（其中 a, b 为实数；a 称为实部，b 称为虚部）

复数运算

$$(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$$

$$(a+bi)-(c+di) = (a-c)+(b-d)i$$

$$\begin{aligned}(a+bi)(c+di) &= a\cdot c + a\cdot di + bi\cdot c + bi\cdot di \\ &= (ac-bd)+(ad+bc)i\end{aligned}$$

例 计算 $(1+2i)-3(5-2i)$ 及 $(2+i)^2$。

解

$$
\begin{aligned}
(1+2i)-3(5-2i) =& (1+2i)-(15-6i) = -14+8i, \\
(2+i)^2 =& (2+i)(2+i) \\
=& 2\cdot 2+2\cdot i+i\cdot 2+i\cdot i = 3+4i.
\end{aligned}
$$

一元二次方程求解

例 方程 $x^2+1=0$在复数范围内有两个根 $r_1=i$ 和 $r_2=-i$

一元二次方程求根公式：

$$ar^2+br+c=0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

- 当 $b^2-4ac>0$ 时，有两个互异实根；
- 当 $b^2-4ac=0$ 时，有唯一实根（二重根）；
- 当 $b^2-4ac<0$ 时，有两个互异复根：

$$r_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}= \qquad \frac{-b\pm\sqrt{(4a}}{}$$

例 求 $2r^2-3r+1=0,\quad r^2-4r+4=0,\quad r^2+2r+2=0$ 的根

例 求 $2r^2-3r+1=0,\quad r^2-4r+4=0,\quad r^2+2r+2=0$ 的根

解

$$2r^2-3r+1=0 \quad\Rightarrow\quad r_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 2\cdot 1}}{2\cdot 2}=1 \text{ or } \frac{1}{2}$$

$$r^2-4r+4=0 \quad\Rightarrow\quad r_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 1\cdot 4}}{2\cdot 1}=2$$

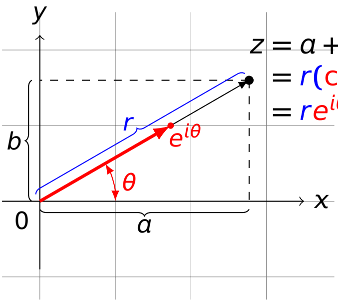
$$r^2+2r+2=0 \quad\Rightarrow\quad r_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1}$$

$$=\frac{-2\pm\sqrt{-4}}{2}=-1\pm i$$

注 也可以用配方法：

$$r^2+2r+2=0 \quad\Rightarrow\quad (r+1)^2=-1 \quad\Rightarrow\quad r+1=\pm\sqrt{-1}=\pm i$$

$$\Rightarrow\quad r=-1\pm i$$



$$z = a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

- 复数和平面上的点一一对应

$$z \longleftrightarrow \underset{\text{直角坐标}}{(a, b)} \longleftrightarrow \underset{\text{极坐标}}{(r, \theta)}$$

- “定义”：

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

（注：$e^{i\pi} = -1$）

性质 $e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$.

证明

$$\begin{aligned} e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} &= (\cos\alpha + i\sin\alpha) \cdot (\cos\beta + i\sin\beta) \\ &= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta) \\ &= \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) = e^{i(\alpha+\beta)} \end{aligned}$$

注 反过来，恒等式 $e^{i\alpha}\cdot e^{i\beta}=e^{i(\alpha+\beta)}$ 能帮助记忆三角函数的和差公式：

$$e^{i\alpha}\cdot e^{i\beta}=(\cos\alpha+i\sin\alpha)\cdot(\cos\beta+i\sin\beta)$$

$$=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)+i(\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta)$$

$$e^{i(\alpha+\beta)}=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$$

所以

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta.$$

特别地，取 $\beta=\alpha$，则

$$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

或者

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2},\qquad \sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

定义 设 $z=\alpha+i\beta$，定义

$$e^z := e^{\alpha+i\beta} := e^{\alpha}\cdot e^{i\beta} = e^{\alpha}(\cos\beta + i\sin\beta)$$

考虑取值为复数的函数（$zx=(\alpha+i\beta)x=\alpha x+i\beta x$）

$$e^{zx} = e^{\alpha x+i\beta x} = e^{\alpha x}[\cos(\beta x)+i\sin(\beta x)], \qquad x\in\mathbb{R}$$

性质 设 $z=\alpha+\beta i$ 为复数，$x\in\mathbb{R}$，成立

$$\frac{d}{dx}e^{zx} = ze^{zx}$$

性质 设 $z=\alpha+\beta i$ 为复数，$x\in\mathbb{R}$，成立

$$\frac{d}{dx}e^{zx}=ze^{zx}$$

证明 这是

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}e^{zx} &= \frac{d}{dx}\left[e^{\alpha x}(\cos(\beta x)+i\sin(\beta x))\right] \\
&= \frac{d}{dx}\left[e^{\alpha x}\cos(\beta x)+ie^{\alpha x}\sin(\beta x)\right] \\
&= \frac{d}{dx}\left[e^{\alpha x}\cos(\beta x)\right]+i\frac{d}{dx}\left[e^{\alpha x}\sin(\beta x)\right] \\
&\vdots \\
&= (\alpha+\beta i)e^{\alpha x}\left[\cos(\beta x)+i\sin(\beta x)\right] \\
&= ze^{zx}
\end{aligned}$$

二阶线性微分方程

- 二阶齐次线性微分方程：

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

- 二阶非齐次线性微分方程：

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

问题 这些方程的通解有怎样的“结构”？可以如何表示？

二阶齐次线性微分方程的解的结构

定理 设 $y_1(x), y_2(x)$ 是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个特解，则

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

也是解，其中 C_1, C_2 是任意常数。

证明 直接代入验证

$$\begin{aligned}
&y'' + P(x)y' + Q(x)y \\
&= [C_1y_1 + C_2y_2]'' + P(x)[C_1y_1 + C_2y_2]' + Q(x)[C_1y_1 + C_2y_2] \\
&= C_1\left[y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1\right] + C_2\left[y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2\right] \\
&= 0 + 0 = 0
\end{aligned}$$

二阶齐次线性微分方程的解的结构

定理 设 $y_1(x), y_2(x)$ 是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个（特解），则

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

也是解，其中 C_1, C_2 是任意常数。

推论 若该特解 y_1 和 y_2 不是成比例（线性无关；即 $\frac{y_1}{y_2} \neq$ 常数），则齐次线性方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ 的通解是

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

<u>也就是说，求通解，只需找到两个线性无关的特解！</u>

二阶非齐次线性微分方程的解的结构

定理 设 $y_1(x), y_2(x)$ 是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个线性无关特解，$y^*(x)$ 是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \qquad (*)$$

的一个特解，则

$$y = y^* + C_1y_1(x) + C_2y_2(x)y = y^* + \overbrace{C_1y_1(x) + C_2y_2(x)}^{Y(x)}$$

是非齐次线性微分方程 $(*)$ 的通解，其中 C_1, C_2 是任意常数。

证明 只需验证 $y = y^*(x) + Y(x)$ 是解：

$$\begin{aligned} y'' + P(x)y' + Q(x)y &= [y^* + Y]'' + P[y^* + Y]' + Q[y^* + Y] \\ &= \left[y^{*\prime\prime} + Py^{*\prime} + Qy^*\right] + \left[Y'' + PY' + QY\right] \\ &= f(x) + 0 = f(x) \end{aligned}$$

二阶线性常系数微分方程——特解

目标 找出 $y'' + py' + qy = 0$ 的两个线性无关的特解 y_1, y_2。

做法 尝试寻找形如

$$y = e^{rx}$$

的特解。代入方程：

$$y'' + py' + q = \left(e^{rx}\right)'' + p\left(e^{rx}\right)' + qy = \qquad r^2 e^{rx} +$$

所以

$$y'' + py' + q = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad r^2 + pr + q = 0$$

所以

- $p^2 - 4q > 0$ 时，$r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2-4q}}{2} \Rightarrow y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x}$
- $p^2 - 4q = 0$ 时，$r_{1,2} = \frac{-p}{2} \Rightarrow y_1 = e^{r_1 x}$; 验证 $y_2 = xe^{r_1 x}$ 也是解
- $p^2 - 4q < 0$ 时，$r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2-4q}}{2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} i = \alpha \pm \beta i$

$$\Rightarrow y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x}$$

二阶线性常系数微分方程——特解

目标 找出 $y'' + py' + qy = 0$ 的两个线性无关的特解 y_1, y_2。

结论 求解方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的根 $r_{1,2}$，则

$p^2 - 4q > 0$	$r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2-4q}}{2}$	$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x}$
$p^2 - 4q = 0$	$r_1 = r_2 = \frac{-p}{2}$	$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = x e^{r_1 x}$
$p^2 - 4q < 0$	$r_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} i$ $= \alpha \pm \beta i$	$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x}$

注 $p^2 - 4q < 0$ 时，特解

$$y_1 = e^{r_1 x} = e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x}\left[\cos(\beta x) + \sin(\beta x) i\right]$$

的实部、虚部所构成的函数

$$e^{\alpha x}\cos(\beta x), \qquad e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

也是两个线性无关特解！

二阶线性常系数微分方程——通解

性质 在 $p^2-4q<0$ 情形中，$r_{1,2}=\alpha\pm\beta i$。可以证明

$$e^{\alpha x}\cos(\beta x),\qquad e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

也是两个线性无关特解。

证明 当 $p^2-4q<0$ 时，有特解

$$y_1=e^{(\alpha+\beta i)x}=e^{\alpha x}\cos(\beta x)+e^{\alpha x}\sin(\beta x)i=:s+ti$$

所以

$$\begin{aligned}0=y_1''+py_1'+qy_1&=(s+ti)''+p(s+ti)'+q(s+ti)\\&=(s''+t''i)+p(s'+t'i)+q(s+ti)\\&=(s''+ps'+qs)+(t''+pt'+qt)i\end{aligned}$$

所以

$$s''+ps'+qs=0\quad 且\quad t''+pt'+qt=0$$

所以 $s=e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ 及 $t=e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ 为特解。

$\dfrac{e^{\alpha x}\cos(\beta x)}{e^{\alpha x}\sin(\beta x)}$ 不是常数 $\Rightarrow$ 线性无关性。

二阶线性常系数微分方程的解

目标 找出 $y'' + py' + qy = 0$ 的两个线性无关的特解 y_1, y_2。

结论 求解特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的根 $r_{1,2}$，则

- $p^2 - 4q > 0$ 时，$r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2-4q}}{2}$
  - 特解：$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x}$
  - 通解：$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
- $p^2 - 4q = 0$ 时，$r_1 = r_2 = \frac{-p}{2}$
  - 特解：$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = x e^{r_2 x}$
  - 通解：$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_2 x}$
- $p^2 - 4q < 0$ 时，$r_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} i = \alpha \pm \beta i$
  - 特解：$y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad y_2 = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$
  - 通解：$y = e^{\alpha x} [C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)]$

暨南大学 JINAN UNIVERSITY

例 求微分方程的通解：

$$y''-4y'+3y=0;\quad y''+4y'+4y=0;\quad y''-2y'+5y=0$$

解

$$y''-4y'+3y=0 \quad\Rightarrow\quad r^2-4r+3=0 \quad\Rightarrow\quad r_1=1,\ r_2=3$$

$$\Rightarrow\quad y=C_1e^x+C_2e^{3x}.$$

$$y''+4y'+4y=0 \quad\Rightarrow\quad r^2+4r+4=0 \quad\Rightarrow\quad r_{1,2}=-2$$

$$\Rightarrow\quad y=(C_1+C_2x)e^{-2x}.$$

$$y''-2y'+5y=0 \quad\Rightarrow\quad r^2-2r+5=0$$

$$\Rightarrow\quad r_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot5}}{2}=1\pm2i$$

$$\Rightarrow\quad y=e^x\left[C_1\cos(2x)+C_2\sin(2x)\right].$$

二阶常系数非齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

通解的求解步骤：

1. 求解齐次部分

$$y'' + py' + qy = 0$$

   的通解

$$C_1y_1 + C_2y_2$$

2. 求出原方程的一个特解 y^*
3. 则原方程的通解为

$$y = y^* + C_1y_1 + C_2y_2$$

注 关键是求出一个特解，方法基本靠猜！（待定系数法）

例 求出下列方程的一个特解：

(1) $y''+2y'+4y=3-2x$; (2) $y''-6y'+9y=5$; (3) $y''+4y'-y=2e^x$

解

1. 猜 $y^*=ax+b$，其中 a, b 待定。代入方程得：

$$y^{*''}+2y^{*'}+4y^*=0+2a+4(ax+b)=2a+4b+4ax$$
$$=3-2x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a+4b=3 \\ 4a=-2 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=-\frac{1}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow y^*=-\frac{1}{2}x+1$$

2. 显然 $y^*=\frac{5}{9}$

3. 猜 $y^*=ae^x$，其中 a 待定。代入方程

$$y^{*''}+4y^{*'}-y^*=ae^x+4ae^x-ae^x=4ae^x=2e^x$$

所以 $a=\frac{1}{2}$，$y^*=\frac{1}{2}e^x$

例 求出下列方程的通解：

(1) $y''+2y'+4y=3-2x$; (2) $y''-6y'+9y=5$; (3) $y''+4y'-y=2e^{x}$

解 (1) Step 1 求齐次部分的通解

$$y''+2y'+4y=0$$

$$\Rightarrow \quad r^2+2r+4=0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-16}}{2}=-1\pm\sqrt{3}i$$

$\Rightarrow$ 齐次的通解是 $e^{-x}\left[C_1\cos(\sqrt{3}x)+C_2\sin(\sqrt{3}x)\right]$

Step 2 原方程的一个特解是 $y^*=-\frac{1}{2}x+1$

Step 3 所以原方程的通解是

$$y=-\frac{1}{2}x+1+e^{-x}\left[C_1\cos(\sqrt{3}x)+C_2\sin(\sqrt{3}x)\right]$$

例 求出下列方程的通解：

(1) $y''+2y'+4y=3-2x$; (2) $y''-6y'+9y=5$; (3) $y''+4y'-y=2e^x$

解 (2) Step 1 求齐次部分的通解

$$y''-6y'+9y=0$$

$$\Rightarrow \quad r^2-6r+9=0 \quad \Rightarrow \quad r_1=r_2=3$$

$$\Rightarrow \quad \text{齐次的通解是} \quad (C_1+C_2x)e^{3x}$$

Step 2 原方程的一个特解是 $y^*=\frac{5}{9}$

Step 3 所以原方程的通解是

$$y=\frac{5}{9}+(C_1+C_2x)e^{3x}$$

例 求出下列方程的通解：

(1) $y''+2y'+4y=3-2x$; **(2)** $y''-6y'+9y=5$; **(3)** $y''+4y'-y=2e^x$

解 (3) Step 1 求齐次部分的通解

$$y''+4y'-y=0$$

$$\Rightarrow \quad r^2+4r-1=0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16+4}}{2}=-2\pm\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \quad \text{齐次的通解是} \quad C_1e^{(-2+\sqrt{5})x}+C_2e^{(-2-\sqrt{5})x}$$

Step 2 原方程的一个特解是 $y^*=\frac{1}{2}e^x$

Step 3 所以原方程的通解是

$$y=\frac{1}{2}e^x+C_1e^{(-2+\sqrt{5})x}+C_2e^{(-2-\sqrt{5})x}$$

二阶常系数非齐次线性微分方程

回忆

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

原方程的一个特解

齐次部分$y'' + py' + qy = 0$

的两个线性无关特解

的通解是

$$y = \boxed{y^*} + C_1\boxed{y_1} + C_2\boxed{y_2}$$

目标 对如下类型的 $f(x)$，掌握求方程特解的方法（待定系数法）

- $f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$
- $f(x) = e^{\lambda x} [P_l(x)\cos(\omega x) + Q_n(x)\sin(\omega x)]$

（其中 P_m, P_l, Q_n 分别为 m, l, n 次多项式）

目标 计算以下方程的一个特解 y^*：

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x)$$

计算步骤

1. 设 $y^* = e^{\lambda x} R(x)$（$R(x)$ 为待定多项式），代入原方程，整理可得：

$$y'' + py' + qy$$
$$= e^{\lambda x} = \cancel{e^{\lambda x}} \left[R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) \right] =$$

2. 确定多项式 $R(x)$：

- 若 λ 非特征方程的根：$\lambda^2 + p\lambda + q \neq 0$，则

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_m(x) \qquad (R\text{为}m\text{次})$$

- 若 λ 为特征方程的单根：$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 但 $2\lambda + p \neq 0$，则

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) = P_m(x) \qquad (R'\text{为}m\text{次})$$

- 若 λ 为特征方程的重根：$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 且 $2\lambda + p = 0$，则

$$R''(x) = P_m(x) \qquad (R''\text{为}m\text{次})$$

例 计算 $y''-2y'-y=(3x+1)e^{2x}$ 的一个特解。

解 $f(x)=(3x+1)e^{2x}=P_m e^{\lambda x}$，$\lambda=2$，$P_m=P_1=3x+1$。

1. 设 $y^*=e^{\lambda x}R(x)$（$R(x)$ 为待定多项式），代入原方程整理可得：

$$R''(x)+(2\lambda+p)R'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)R(x)=P_1(x)$$

$$\xRightarrow[\lambda=2]{p=-2,\,q=-1} R''(x)+2R'(x)-R(x)=3x+1 \quad (R(x)\text{为1次多项式})$$

2. 设 $R(x)=ax+b$，则

$$R''(x)+2R'(x)-R(x)=2a-(ax+b)=-ax+2a-b=3x+1$$

所以 $\begin{cases}-a=3\\2a-b=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=-3\\b=-7\end{cases} \Rightarrow R(x)=-3x-7$

所以 $y^*=(-3x-7)e^{2x}$

例 求方程 $y''-2y'-y=(3x+1)e^{2x}$ 的通解。

例 求方程 $y'' - 2y' - y = (3x+1)e^{2x}$ 的通解。

解 Step 1 求齐次部分的通解

$$y'' - 2y' - y = 0$$

$$\Rightarrow \quad r^2 - 2r - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \quad \text{齐次的通解是} \quad C_1 e^{(1+\sqrt{2})x} + C_2 e^{(1-\sqrt{2})x}$$

Step 2 原方程的一个特解是 $y^* = (-3x-7)e^{2x}$

Step 3 所以原方程的通解是

$$y = (-3x-7)e^{2x} + C_1 e^{(1+\sqrt{2})x} + C_2 e^{(1-\sqrt{2})x}$$

例 计算 $y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$ 的一个特解。

例 计算 $y''-5y'+6y=xe^{2x}$ 的一个特解。

解 $f(x)=xe^{2x}=P_m e^{\lambda x}$，$\lambda=2$，$P_m=P_1=x$。

1. 设 $y^*=e^{\lambda x}R(x)$（$R(x)$ 为待定多项式），代入原方程整理可得：

$$R''(x)+(2\lambda+p)R'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)R(x)=P_1(x)$$

$$\xRightarrow[\lambda=2]{p=-5,\,q=6} R''(x)-R'(x)=x \quad (R'(x)\text{为1次多项式})$$

2. 设 $R'(x)=ax+b$，则

$$R''(x)-R'(x)=a-(ax+b)=-ax+a-b=x$$

所以
$$\begin{cases}-a=1\\ a-b=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=-1\\ b=-1\end{cases} \Rightarrow R'(x)=-x-1$$

不妨取 $R(x)=-\frac{1}{2}x^2-x$，所以 $y^*=(-\frac{1}{2}x^2-x)e^{2x}$

例 求方程 $y''-5y'+6y=xe^{2x}$ 的通解。

例 求方程 $y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$ 的通解。

解 Step 1 求齐次部分的通解

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

$$\Rightarrow \quad r^2 - 5r + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 2, r_2 = 3$$

$$\Rightarrow \quad \text{齐次的通解是} \quad C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

Step 2 原方程的一个特解是 $y^* = (-\frac{1}{2}x^2 - x)e^{2x}$

Step 3 所以原方程的通解是

$$y = (-\frac{1}{2}x^2 - x)e^{2x} + C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

例 计算 $y'' - 6y' + 9y = (x+1)e^{3x}$ 的一个特解。

例 计算 $y'' - 6y' + 9y = (x+1)e^{3x}$ 的一个特解。

解 $f(x) = (x+1)e^{3x} = P_m e^{\lambda x}$，$\lambda = 3$，$P_m = P_1 = (x+1)$。

1. 设 $y^* = e^{\lambda x}R(x)$（$R(x)$ 为待定多项式），代入原方程整理可得：

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_1(x)$$

$$\xRightarrow[\lambda=3]{p=-6,\, q=9} R''(x) = x + 1$$

2. 不妨取 $R'(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$，$R(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2$，所以

$$y^* = (\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2)e^{3x}$$

例 求方程 $y'' - 6y' + 9y = (x+1)e^{3x}$ 的通解。

例 求方程 $y'' - 6y' + 9y = (x+1)e^{3x}$ 的通解。

解 Step 1 求齐次部分的通解

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

$$\Rightarrow \quad r^2 - 6r + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = r_2 = 3$$

$$\Rightarrow \quad \text{齐次的通解是} \quad (C_1 + C_2 x)e^{3x}$$

Step 2 原方程的一个特解是 $y^* = (\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2)e^{3x}$

Step 3 所以原方程的通解是

$$y = (\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2)e^{3x} + (C_1 + C_2 x)e^{3x}$$

目标 计算以下方程的一个特解 y^*：

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos(\omega x) + Q_n(x)\sin(\omega x)\right]$$

计算步骤 设

$$y^* = x^k e^{\lambda x}\left[R_m^{(1)}(x)\cos(\omega x) + R_m^{(2)}(x)\sin(\omega x)\right]$$

$$k = \begin{cases} 0 & 若\lambda + i\omega非特征值 \\ 1 & 若\lambda + i\omega为特征值 \end{cases}$$

$R_m^{(1)}, R_m^{(2)}$为m次待定多项式
$m = \max\{l, n\}$

例 计算 $y'' - y = e^x \cos(2x)$ 的通解。

解 1. 特征方程：$r^2 - 1 = 0$，特征值：$r_{1,2} = \pm 1$ ，齐次部分 $y'' - y = 0$ 的通解是 $C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

2. $\lambda = 1$，$\omega = 2$，$\lambda + i\omega = 1 + 2i$ 不是特征值，故设

$$y^* = e^x\left[a\cos(2x) + b\sin(2x)\right]$$

例 计算 $y'' - y = e^x \cos(2x)$ 的通解。

解 1. 特征方程：$r^2 - 1 = 0$，特征值：$r_{1,2} = \pm 1$，齐次部分 $y'' - y = 0$ 的通解是 $C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

2. $\lambda = 1$，$\omega = 2$，$\lambda + i\omega = 1 + 2i$ 不是特征值，故设

$$y^* = e^x [a\cos(2x) + b\sin(2x)]$$

代入原方程，有

$$\begin{aligned} y^{*\prime\prime} - y^* &= e^x [(-4a + 4b)\cos(2x) + (-4a - 4b)\sin(2x)] \\ &= e^x \cos(2x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4a + 4b = 1 \\ -4a - 4b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{8} \\ b = \frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow y^* = \frac{1}{8} e^x [-\cos(2x) + \sin(2x)]$$

3. 通解是

$$y = \frac{1}{8} e^x [-\cos(2x) + \sin(2x)] + C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

目标 计算以下方程的一个特解 y^*：

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos(\omega x) + Q_n(x)\sin(\omega x)\right]$$

计算步骤 设

$$y^* = x^k e^{\lambda x}\left[R_m^{(1)}(x)\cos(\omega x) + R_m^{(2)}(x)\sin(\omega x)\right]$$

$$k = \begin{cases} 0 & 若\lambda + i\omega非特征值 \\ 1 & 若\lambda + i\omega为特征值 \end{cases}$$

$R_m^{(1)}, R_m^{(2)}$为m次待定多项式

$m = \max\{l, n\}$

例 计算 $y'' + y = \cos x$ 的通解。

解 1. 特征方程：$r^2 + 1 = 0$，特征值：$r_{1,2} = \pm i$，齐次部分 $y'' + y = 0$ 的通解是 $C_1\cos x + C_2\sin x$

2. $\lambda = 0$，$\omega = 1$，$\lambda + i\omega = i$ 是特征值，故设

$$y^* = xe^{0\cdot x}(a\cos x + b\sin x) = x(a\cos x + b\sin x)$$

例 计算 $y'' + y = \cos x$ 的通解。

解 1. 特征方程：$r^2 + 1 = 0$，特征值：$r_{1,2} = \pm i$ ，齐次部分 $y'' + y = 0$ 的通解是 $C_1 \cos x + C_2 \sin x$

2. $\lambda = 0$，$\omega = 1$，$\lambda + i\omega = i$ 是特征值，故设

$$y^* = x(a\cos x + b\sin x)$$

代入原方程，有

$$y^{*\prime\prime} + y^* = 2b\cos x - 2a\sin x = \cos x$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y^* = \frac{1}{2} x \sin x$$

3. 通解是

$$y = \frac{1}{2} x \sin x + C_1 \cos x + C_2 \sin x$$