

第 05 周作业解答

练习 1. 判断 2 阶方阵 $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出逆矩阵。

解 1. 计算行列式: $|A| = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ 所以可逆。

2. 计算伴随矩阵: $A^* = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ 。

3. 所以逆矩阵为: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ 。

练习 2. 判断 3 阶方阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求出逆矩阵。

解 1. 计算行列式:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_2]{r_1 - 2r_2} \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 14 \neq 0$$

所以 A 可逆。

2. 计算伴随矩阵:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 14 & 4 \\ 3 & -7 & 1 \\ 5 & -7 & -3 \end{pmatrix}$$

3. 所以逆矩阵为

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -2 & 14 & 4 \\ 3 & -7 & 1 \\ 5 & -7 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/7 & 1 & 2/7 \\ 3/14 & -1/2 & 1/14 \\ 5/14 & -1/2 & -3/14 \end{pmatrix}$$

练习 3. 3 阶方阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & k \\ 1 & 4 & k^2 \end{pmatrix}$ 可逆时, k 满足什么条件?

解

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & k \\ 1 & 4 & k^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k-1 \\ 0 & 3 & k^2-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & k-1 \\ 3 & k^2-1 \end{vmatrix} = k^2 - 3k + 2 = (k-1)(k-2)$$

A 可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 1$ 且 $k \neq 2$

练习 4. 设 M_n 是 n 阶方阵, $n \geq 2$, 全部元素按列次序为 $1, 2, 3, \dots, n^2$ 。例如

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}.$$

问当 n 为何值时, M_n 可逆。

解当 $n = 2$ 时, $|M_2| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, 所以 M_2 可逆。

当 $n \geq 3$ 时,

$$|M_n| = \begin{vmatrix} 1 & n+1 & 2n+1 & \cdots & (n-1)n+1 \\ 2 & n+2 & 2n+2 & \cdots & (n-1)n+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 2n & 3n & \cdots & n^2 \end{vmatrix} \xrightarrow[\frac{c_3-c_1}{c_3-c_1}]{} \begin{vmatrix} 1 & n & 2n & \cdots & (n-1)n+1 \\ 2 & n & 2n & \cdots & (n-1)n+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & 2n & \cdots & n^2 \end{vmatrix} = 0$$

所以当 $n \geq 3$ 时, M_n 不可逆。

练习 5. 假设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 - 3A - 5I = O$, 证明 $A + I$ 可逆, 并求 $(A + I)^{-1}$ 。

解因为

$$A^2 - 3A - 5I = O \Rightarrow A^2 - 3A - 4I = I \Rightarrow (A + I)(A - 4I) = I$$

所以 $A + I$ 可逆, 且 $(A + I)^{-1} = A - 4I$ 。

练习 6. 设 A 为 4 阶方阵, 满足 $|A| = \frac{1}{2}$, 求 $|(3A)^{-1} - 2A^*|$ 的值。

解利用恒等式 $AA^* = |A|I$ 知: $A^* = \frac{1}{2}A^{-1}$ 。所以

$$|(3A)^{-1} - 2A^*| = \left| \frac{1}{3}A^{-1} - 2 \cdot \frac{1}{2}A^{-1} \right| = \left| -\frac{2}{3}A^{-1} \right| = \left(-\frac{2}{3} \right)^4 |A^{-1}| = \left(-\frac{2}{3} \right)^4 |A|^{-1} = \left(-\frac{2}{3} \right)^4 \cdot 2 = \frac{32}{81}$$

练习 7. 设 A, B 为 n 阶对称方阵, 证明方阵 $AB + BA$ 也是对称。

解因为

$$(AB + BA)^T = (AB)^T + (BA)^T = B^T A^T + A^T B^T = BA + AB = AB + BA$$

所以 $AB + BA$ 是对称。