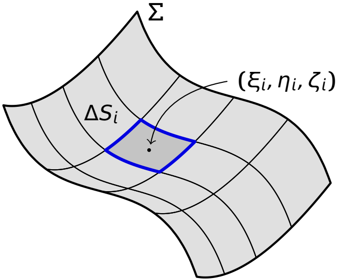
第 11 章 d：对面积的曲面积分

数学系　　梁卓滨

2017.07 暑期班

曲面的质量



假设

- Σ 为空间中曲面
- 密度为 μ
- 质量为 m

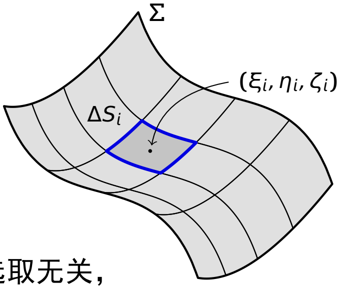
- 当材料均匀时（$\mu =$ 常数），

$$m = \mu \cdot \mathrm{Area}(\Sigma)$$

- 当材料非均匀时（$\mu = \mu(x, y, z)$ 为 Σ 上函数），利用微元法可知

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \mu(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$$

对面积的曲面积分的定义



设

- Σ 是空间中有界分片光滑曲面，
- $f(x, y, z)$ 是 Σ 上的有界函数，

若

- 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i$存在，
- 且该极限与 Σ 的划分、(ξ_i, η_i, ζ_i) 的选取无关，

则定义

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)dS = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i$$

称为 $f(x, y, z)$ 在 Σ 上对面积的曲面积分。dS 称为面积元素。

注 对面积曲面积分的定义式与二重积分的类似，故性质也类似

对面积曲面积分的性质

- 存在性 若 $f(x, y, z)$ 在有界曲面 Σ 上连续，则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$$

  存在。

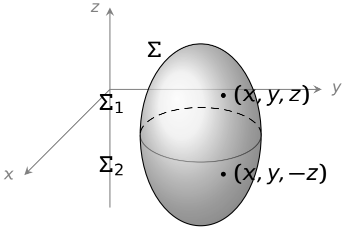
- 线性性 $\iint_{\Sigma}(\alpha f+\beta g) dS=\alpha \iint_{\Sigma} f dS+\beta \iint_{\Sigma} g dS$
- 可加性 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS=\iint_{\Sigma_1} f(x, y, z) dS+\iint_{\Sigma_2} f(x, y, z) dS$
- $\iint_{\Sigma} 1 dS=\mathrm{Area}(\Sigma)$
- 若 $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$，则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS \leq \iint_{\Sigma} g(x, y, z) dS$$

积分的对称性

性质 设曲面 Σ 关于 xoy 坐标面对称，

- 若 $f(x,y,z)$ 关于 z 是奇函数（即：$f(x,y,-z)=-f(x,y,z)$），则
$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = 0$$
- 若 $f(x,y,z)$ 关于 z 是偶函数（即：$f(x,y,-z)=f(x,y,z)$），则
$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = 2\iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)dS = 2\iint_{\Sigma_2} f(x,y,z)dS$$



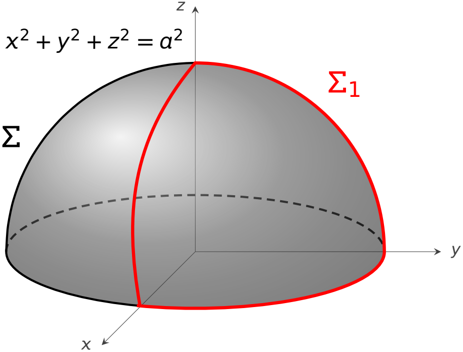
例 设曲面 Σ 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2\ (z\geq 0)$；$\Sigma_1$ 为 Σ 在第一卦限的部分。则有 (C)

(A) $\iint_{\Sigma} x dS = 4\iint_{\Sigma_1} x dS$

(B) $\iint_{\Sigma} y dS = 4\iint_{\Sigma_1} y dS$

(C) $\iint_{\Sigma} z dS = 4\iint_{\Sigma_1} z dS$

(D) $\iint_{\Sigma} xyz dS = 4\iint_{\Sigma_1} xyz dS$



例 计算 $\iint_\Sigma (x^2+y^2)dS$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$。

解 由对称性：

$$\iint_\Sigma x^2 dS = \iint_\Sigma y^2 dS = \iint_\Sigma z^2 dS$$

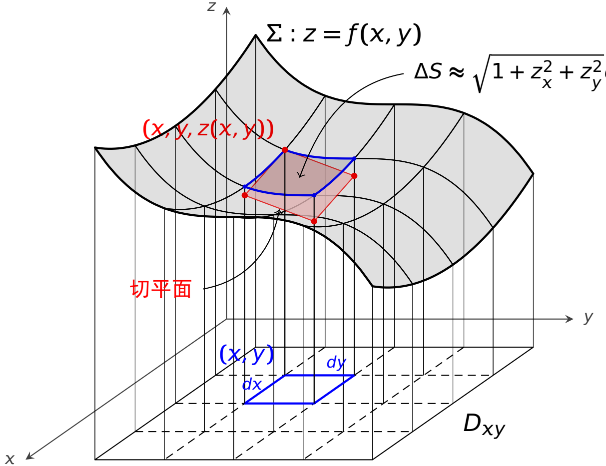
所以

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma (x^2+y^2)dS &= 2\iint_\Sigma x^2 dS \\ &= \frac{2}{3}\left[\iint_\Sigma x^2 dS + \iint_\Sigma y^2 dS + \iint_\Sigma z^2 dS\right] \\ &= \frac{2}{3}\iint_\Sigma x^2+y^2+z^2 dS \\ &= \frac{2}{3}\iint_\Sigma R^2 dS = \frac{2}{3}R^2 \mathrm{Area}(\Sigma) = \frac{2}{3}R^2\cdot 4\pi R^2 = \frac{8}{3}\pi R^4\end{aligned}$$

对面积曲面积分的计算

- 假设 Σ 是二元函数 $z=z(x,y)$, $(x,y)\in D_{xy}$ 的图形，则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$



对面积曲面积分的计算

- 假设 Σ 是二元函数 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 的图形，则

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)dS = \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y)) \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

- 假设 Σ 是二元函数 $y = y(x, z)$, $(x, z) \in D_{xz}$ 的图形，则

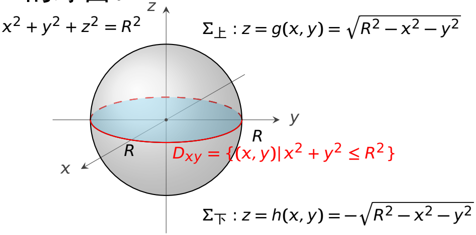
$$\iint_\Sigma f(x,y,z)dS = \iint_{D_{xz}} f(x,y(x,z),z) \cdot \sqrt{1+y_x^2+y_z^2}dxdz$$

- 假设 Σ 是二元函数 $x = x(y, z)$, $(y, z) \in D_{yz}$ 的图形，则

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)dS = \iint_{D_{yz}} f(x(y,z),y,z) \cdot \sqrt{1+x_y^2+x_z^2}dydz$$

注 对于复杂的曲面 Σ，尝试将其分解成若干部分 $\Sigma_1, \cdots, \Sigma_n$，每一部分 Σ_k 都分别是某个二元函数的图形

例 将对面积的曲面积分 $\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS$ 转换为重积分，其中 Σ 是球心在原点，半径为 R 的球面。



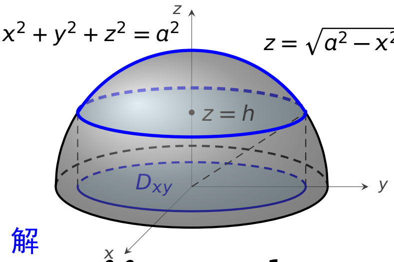
$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \iint_{\Sigma_{上}} f(x,y,z)dS + \iint_{\Sigma_{下}} f(x,y,z)dS$$

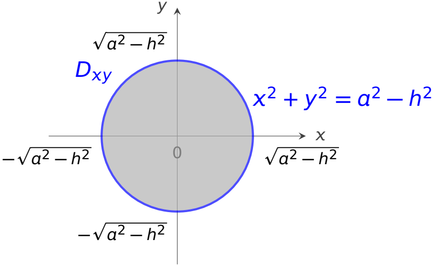
$$= \iint_{D_{xy}} f(x,y,\sqrt{R^2-x^2-y^2}) \qquad \cdot \sqrt{1$$

$$+ \iint_{D_{xy}} f(x,y,-\sqrt{R^2-x^2-y^2}) \qquad \cdot \sqrt{}$$

$$= \iint_{D_{xy}} \left[f(x,y,\sqrt{R^2-x^2-y^2}) + f(x,y,-\sqrt{R^2-x^2-y^2}) \right] \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dxdy$$

例 计算 $\iint_\Sigma \frac{1}{z}dS$，其中曲面 Σ 如图所示。





解

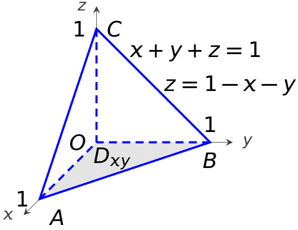
$$\text{原式}=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

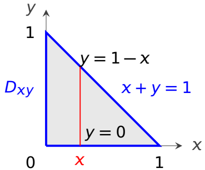
$$=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\cdot\sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2-y^2}}d$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}}\frac{a}{a^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho\right]d\theta \xlongequal{u=a^2-\rho^2} 2\pi\cdot\int_{a^2}^{h^2}\frac{a}{u}\cdot(-$$

$$=-\pi a\ln u\Big|_{a^2}^{h^2}=2\pi a\ln\frac{a}{h}$$

例 计算 $\iint_\Sigma xyz\,dS$，其中曲面 Σ 如图所示。





解

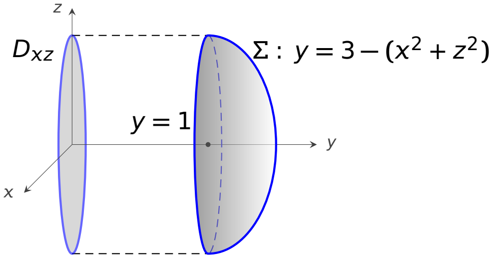
$$\text{原式} = \left(\iint_{\Delta OAB} + \iint_{\Delta OAC} + \iint_{\Delta OBC} + \iint_{\Delta ABC}\right) xyz\,dS = \iint_{\Delta ABC} xyz\,dS$$

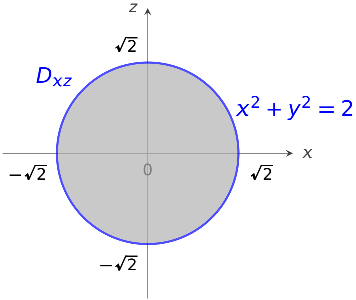
$$= \iint_{D_{xy}} xy(1-x-y)\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} xy(1-x-y)\cdot\sqrt{3}\,dy\right]dx$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 x\left[(1-x)\frac{y^2}{2} - \frac{1}{3}y^3\right]\Bigg|_0^{1-x} dx = \sqrt{3}\int_0^1 \frac{1}{6}x(1-x)^3\,dx = \frac{\sqrt{3}}{120}$$

例 计算 $I=\iint_{\Sigma}(x^2+z^2+y)dS$，其中 Σ 是曲面 $y=3-(x^2+z^2)$ 在 $y\geq 1$ 的部分。





解

$$I=\iint_{D_{xz}}3\cdot\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}dxdz=\iint_{D_{xz}}3\cdot\sqrt{1+4x^2+4z^2}dxdz$$

$$\overset{x=\rho\cos\theta}{\underset{z=\rho\sin\theta}{=\!=\!=}}\iint_{D_{xz}}3\sqrt{1+4\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\sqrt{2}}3\sqrt{1+4\rho^2}\cdot\rho d\rho\right.$$

$$\overset{u=1+4\rho^2}{=\!=\!=}2\pi\cdot\int_1^9 3\sqrt{u}\cdot\frac{1}{8}du=\frac{1}{2}\pi u^{\frac{3}{2}}\Big|_1^9=13\pi$$