

### §3.5 线性方程组解的结构

数学系 梁卓滨

2017 - 2018 学年 I

# 引入

例 解齐次线性方程组：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

# 引入

例 解齐次线性方程组: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

# 引入

例 解齐次线性方程组: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}}$$

# 引入

例 解齐次线性方程组: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

# 引入

例 解齐次线性方程组: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$r(A) = 2$$

# 引入

例 解齐次线性方程组: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

# 引入

例 解齐次线性方程组: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$



# 引入

例 解齐次线性方程组: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

# 引入

例 解齐次线性方程组: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

自由变量  
 $x_3, x_4$

# 引入

例 解齐次线性方程组: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

自由变量  
 $x_3, x_4$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \\ x_2 = \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$

# 引入

例 解齐次线性方程组: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

自由变量  
 $x_3, x_4$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$

# 引入

例 解齐次线性方程组: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

自由变量  
 $x_3, x_4$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$

# 引入

例 解齐次线性方程组: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

自由变量  
 $x_3, x_4$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$

# 引入

例 解齐次线性方程组: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{自由变量} \\ x_3, x_4 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c_1 \\ c_1 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3c_2 \\ -2c_2 \\ 0 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

# 引入

例 解齐次线性方程组: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{自由变量} \\ x_3, x_4 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



# 引入

例 解齐次线性方程组: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{自由变量} \\ x_3, x_4 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}_x = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\xi_1} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\xi_2}$$

# 引入

例 解齐次线性方程组: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{自由变量} \\ x_3, x_4 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}_x = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\xi_1} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\xi_2}$$

$$\Rightarrow x = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$$

# 引入

例 解齐次线性方程组: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{自由变量} \\ x_3, x_4 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}_x = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\xi_1} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\xi_2}$$

$$\Rightarrow x = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$$

$\xi_1, \xi_2$  基础解系

# 引入

例 解齐次线性方程组: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{自由变量} \\ x_3, x_4 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}_x = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\xi_1} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\xi_2}$$

$$\Rightarrow x = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$$

$\xi_1, \xi_2$  基础解系

# 引入

例 解齐次线性方程组: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{自由变量} \\ x_3, x_4 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}_x = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\xi_1} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\xi_2}$$

$$\Rightarrow x = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$$

$\xi_1, \xi_2$  基础解系

# 引入

例 解齐次线性方程组: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$r(A) = 2$$

# 引入

例 解齐次线性方程组: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

# 引入

例 解齐次线性方程组: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$



# 引入

例 解齐次线性方程组: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases}$$

# 引入

例 解齐次线性方程组: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases}$$

自由变量  
 $x_2, x_4$

# 引入

例 解齐次线性方程组: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases}$$

自由变量  
 $x_2, x_4$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$

# 引入

例 解齐次线性方程组: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases}$$

自由变量  
 $x_2, x_4$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_1 + 2c_2 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$

# 引入

例 解齐次线性方程组: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases}$$

自由变量  
 $x_2, x_4$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_1 + 2c_2 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$

# 引入

例 解齐次线性方程组: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases}$$

自由变量  
 $x_2, x_4$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_1 + 2c_2 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$

# 引入

例 解齐次线性方程组: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases}$$

自由变量  
 $x_2, x_4$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_1 + 2c_2 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} -2c_1 \\ c_1 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\xi_1} + \begin{pmatrix} -c_2 \\ 0 \\ 2c_2 \\ c_2 \end{pmatrix}_{\xi_2}$$

# 引入

例 解齐次线性方程组: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{自由变量} \\ x_2, x_4 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_1 + 2c_2 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



# 引入

例 解齐次线性方程组: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{自由变量} \\ x_2, x_4 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_1 + 2c_2 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}_x = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\xi_1} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\xi_2}$$

# 引入

例 解齐次线性方程组: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{自由变量} \\ x_2, x_4 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_1 + 2c_2 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}_x = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\xi_1} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\xi_2}$$

$$\Rightarrow x = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$$

# 引入

例 解齐次线性方程组: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{自由变量} \\ x_2, x_4 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_1 + 2c_2 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}_x = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\xi_1} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\xi_2}$$

$$\Rightarrow x = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$$

$\xi_1, \xi_2$  基础解系

# 引入

例 解齐次线性方程组: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{自由变量} \\ x_2, x_4 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_1 + 2c_2 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}_x = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\xi_1} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\xi_2}$$

$$\Rightarrow x = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$$

$\xi_1, \xi_2$  基础解系

# 引入

例 解齐次线性方程组: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{自由变量} \\ x_2, x_4 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_1 + 2c_2 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\xi_1$                        $\xi_2$

$$\Rightarrow x = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$$

$\xi_1, \xi_2$  基础解系

# 齐次线性方程组的基础解系

**定义** 如果  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$  是齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

的解向量组的一个极大无关组，则称

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$$

是齐次方程组的一个**基础解系**。

---

# 齐次线性方程组的基础解系

**定义** 如果  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$  是齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

的解向量组的一个极大无关组，则称

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$$

是齐次方程组的一个**基础解系**。

---

**定理** 若齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

满足

$$r(A) = r < n$$

则方程组的基础解系存在，且每个基础解系恰恰有  $n - r$  个向量组成：

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s, \quad (s = n - r)$$

# 齐次线性方程组的基础解系

**定义** 如果  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$  是齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

的解向量组的一个极大无关组，则称

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$$

是齐次方程组的一个**基础解系**。

---

**定理** 若齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

满足

$$r(A) = r < n$$

则方程组的基础解系存在，且每个基础解系恰恰有  $n - r$  个向量组成：

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s, \quad (s = n - r)$$

并且，方程组的任意解  $x$ ，均可由基础解系线性表示：

$$x = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_s \xi_s$$



# 齐次线性方程组的基础解系

**定义** 如果  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$  是齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

的解向量组的一个极大无关组, 则称

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$$

是齐次方程组的一个**基础解系**。

---

**定理** 若齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

满足

$$r(A) = r < n$$

则方程组的基础解系存在, 且每个基础解系恰恰有  $n - r$  个向量组成:

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s, \quad (s = n - r)$$

并且, 方程组的任意解  $x$ , 均可由基础解系线性表示:

$$x = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_s \xi_s$$

# 齐次线性方程组的基础解系

**定义** 如果  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$  是齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

的解向量组的一个极大无关组，则称

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$$

是齐次方程组的一个**基础解系**。

**定理** 若齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

满足  $r(A) = r < n$  也是自由变量个数

则方程组的基础解系存在，且每个基础解系恰恰有  $n-r$  个向量组成：

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s, \quad (s = n - r)$$

并且，方程组的任意解  $x$ ，均可由基础解系线性表示：

$$x = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_s \xi_s$$

## 基础解系表示齐次方程组 $Ax = 0$ 的通解

1.  $(A:0) \xrightarrow{\text{初等行变换}}$  简化的阶梯型矩阵, 写出同解的方程组;
2. 确定自由未知变量;

## 基础解系表示齐次方程组 $Ax = 0$ 的通解

1.  $(A:0) \xrightarrow{\text{初等行变换}}$  简化的阶梯型矩阵, 写出同解的方程组;
2. 确定自由未知变量;
3. 求基础解系:

## 基础解系表示齐次方程组 $Ax = 0$ 的通解

1.  $(A:0) \xrightarrow{\text{初等行变换}}$  简化的阶梯型矩阵, 写出同解的方程组;
2. 确定自由未知变量;
3. 求基础解系:
  - 将一个自由变量取值为 1, 其余取 0, 得到一个解向量;
  - 对所有  $n - r(A)$  个自由变量作类似操作, 便得  $n - r(A)$  个解向量, 构成基础解系

## 基础解系表示齐次方程组 $Ax = 0$ 的通解

1.  $(A:0) \xrightarrow{\text{初等行变换}}$  简化的阶梯型矩阵, 写出同解的方程组;
2. 确定自由未知变量;
3. 求基础解系:
  - 将一个自由变量取值为 1, 其余取 0, 得到一个解向量;
  - 对所有  $n - r(A)$  个自由变量作类似操作, 便得  $n - r(A)$  个解向量, 构成基础解系
4. 通解就是: 基础解系的线性组合

## 基础解系表示齐次方程组 $Ax = 0$ 的通解

1.  $(A:0) \xrightarrow{\text{初等行变换}}$  简化的阶梯型矩阵, 写出同解的方程组;
2. 确定自由未知变量;
3. 求基础解系:
  - 将一个自由变量取值为 1, 其余取 0, 得到一个解向量;
  - 对所有  $n - r(A)$  个自由变量作类似操作, 使得  $n - r(A)$  个解向量, 构成基础解系
4. 通解就是: 基础解系的线性组合

例

1. 假设求得同解方程组为 
$$\begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - & x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

## 基础解系表示齐次方程组 $Ax = 0$ 的通解

1.  $(A:0) \xrightarrow{\text{初等行变换}}$  简化的阶梯型矩阵, 写出同解的方程组;
2. 确定自由未知变量;
3. 求基础解系:
  - 将一个自由变量取值为 1, 其余取 0, 得到一个解向量;
  - 对所有  $n - r(A)$  个自由变量作类似操作, 使得  $n - r(A)$  个解向量, 构成基础解系
4. 通解就是: 基础解系的线性组合

### 例

1. 假设求得同解方程组为 
$$\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$$



## 基础解系表示齐次方程组 $Ax = 0$ 的通解

1.  $(A:0) \xrightarrow{\text{初等行变换}}$  简化的阶梯型矩阵, 写出同解的方程组;
2. 确定自由未知变量;
3. 求基础解系:
  - 将一个自由变量取值为 1, 其余取 0, 得到一个解向量;
  - 对所有  $n - r(A)$  个自由变量作类似操作, 使得  $n - r(A)$  个解向量, 构成基础解系
4. 通解就是: 基础解系的线性组合

---

### 例

1. 假设求得同解方程组为 
$$\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$$
2. 自由变量为  $x_3, x_4$

## 基础解系表示齐次方程组 $Ax = 0$ 的通解

1.  $(A:0) \xrightarrow{\text{初等行变换}}$  简化的阶梯型矩阵, 写出同解的方程组;
2. 确定自由未知变量;
3. 求基础解系:
  - 将一个自由变量取值为 1, 其余取 0, 得到一个解向量;
  - 对所有  $n - r(A)$  个自由变量作类似操作, 使得  $n - r(A)$  个解向量, 构成基础解系
4. 通解就是: 基础解系的线性组合

### 例

1. 假设求得同解方程组为 
$$\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$$
2. 自由变量为  $x_3, x_4$
3. 基础解系  $\xi_1, \xi_2$ :

## 基础解系表示齐次方程组 $Ax = 0$ 的通解

1.  $(A:0) \xrightarrow{\text{初等行变换}}$  简化的阶梯型矩阵, 写出同解的方程组;
2. 确定自由未知变量;
3. 求基础解系:
  - 将一个自由变量取值为 1, 其余取 0, 得到一个解向量;
  - 对所有  $n - r(A)$  个自由变量作类似操作, 使得  $n - r(A)$  个解向量, 构成基础解系
4. 通解就是: 基础解系的线性组合

### 例

1. 假设求得同解方程组为 
$$\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$$
2. 自由变量为  $x_3, x_4$
3. 基础解系  $\xi_1, \xi_2$ : 
$$\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## 基础解系表示齐次方程组 $Ax = 0$ 的通解

1.  $(A:0) \xrightarrow{\text{初等行变换}}$  简化的阶梯型矩阵, 写出同解的方程组;
2. 确定自由未知变量;
3. 求基础解系:
  - 将一个自由变量取值为 1, 其余取 0, 得到一个解向量;
  - 对所有  $n - r(A)$  个自由变量作类似操作, 使得  $n - r(A)$  个解向量, 构成基础解系
4. 通解就是: 基础解系的线性组合

例

1. 假设求得同解方程组为 
$$\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

2. 自由变量为  $x_3, x_4$

3. 基础解系  $\xi_1, \xi_2$ : 
$$\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## 基础解系表示齐次方程组 $Ax = 0$ 的通解

1.  $(A:0) \xrightarrow{\text{初等行变换}}$  简化的阶梯型矩阵, 写出同解的方程组;
2. 确定自由未知变量;
3. 求基础解系:
  - 将一个自由变量取值为 1, 其余取 0, 得到一个解向量;
  - 对所有  $n - r(A)$  个自由变量作类似操作, 使得  $n - r(A)$  个解向量, 构成基础解系
4. 通解就是: 基础解系的线性组合

例

1. 假设求得同解方程组为 
$$\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$$
2. 自由变量为  $x_3, x_4$
3. 基础解系  $\xi_1, \xi_2$ : 
$$\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## 基础解系表示齐次方程组 $Ax = 0$ 的通解

1.  $(A:0) \xrightarrow{\text{初等行变换}}$  简化的阶梯型矩阵, 写出同解的方程组;
2. 确定自由未知变量;
3. 求基础解系:
  - 将一个自由变量取值为 1, 其余取 0, 得到一个解向量;
  - 对所有  $n - r(A)$  个自由变量作类似操作, 使得  $n - r(A)$  个解向量, 构成基础解系
4. 通解就是: 基础解系的线性组合

### 例

1. 假设求得同解方程组为 
$$\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$$
2. 自由变量为  $x_3, x_4$
3. 基础解系  $\xi_1, \xi_2$ : 
$$\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## 基础解系表示齐次方程组 $Ax = 0$ 的通解

1.  $(A:0) \xrightarrow{\text{初等行变换}}$  简化的阶梯型矩阵, 写出同解的方程组;
2. 确定自由未知变量;
3. 求基础解系:
  - 将一个自由变量取值为 1, 其余取 0, 得到一个解向量;
  - 对所有  $n - r(A)$  个自由变量作类似操作, 使得  $n - r(A)$  个解向量, 构成基础解系
4. 通解就是: 基础解系的线性组合

### 例

1. 假设求得同解方程组为 
$$\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$$
2. 自由变量为  $x_3, x_4$
3. 基础解系  $\xi_1, \xi_2$ : 
$$\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## 基础解系表示齐次方程组 $Ax = 0$ 的通解

1.  $(A:0) \xrightarrow{\text{初等行变换}}$  简化的阶梯型矩阵, 写出同解的方程组;
2. 确定自由未知变量;
3. 求基础解系:
  - 将一个自由变量取值为 1, 其余取 0, 得到一个解向量;
  - 对所有  $n - r(A)$  个自由变量作类似操作, 使得  $n - r(A)$  个解向量, 构成基础解系
4. 通解就是: 基础解系的线性组合

### 例

1. 假设求得同解方程组为 
$$\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$$
2. 自由变量为  $x_3, x_4$
3. 基础解系  $\xi_1, \xi_2$ : 
$$\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



## 基础解系表示齐次方程组 $Ax = 0$ 的通解

1.  $(A:0) \xrightarrow{\text{初等行变换}}$  简化的阶梯型矩阵, 写出同解的方程组;
2. 确定自由未知变量;
3. 求基础解系:
  - 将一个自由变量取值为 1, 其余取 0, 得到一个解向量;
  - 对所有  $n - r(A)$  个自由变量作类似操作, 使得  $n - r(A)$  个解向量, 构成基础解系
4. 通解就是: 基础解系的线性组合

### 例

1. 假设求得同解方程组为 
$$\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$$
2. 自由变量为  $x_3, x_4$
3. 基础解系  $\xi_1, \xi_2$ : 
$$\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
4. 通解:  $x = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$

例 用基础解系表示  $\begin{cases} x_1 + x_3 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_3 + 6x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$  的通解

例 用基础解系表示  $\begin{cases} x_1 + x_3 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_3 + 6x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$  的通解

解

$$(A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{array} \right)$$

例 用基础解系表示  $\begin{cases} x_1 + x_3 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_3 + 6x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$  的通解

解

$$(A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}$$

例 用基础解系表示  $\begin{cases} x_1 + x_3 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_3 + 6x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$  的通解

解

$$(A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

例 用基础解系表示  $\begin{cases} x_1 + x_3 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_3 + 6x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$  的通解

解

$$(A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_2]{r_1-r_2}$$

例 用基础解系表示  $\begin{cases} x_1 + x_3 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_3 + 6x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$  的通解

解

$$(A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_2]{r_1-r_2} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

例 用基础解系表示  $\begin{cases} x_1 + x_3 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_3 + 6x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$  的通解

解

$$(A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_2]{r_1-r_2} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

所以同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + 7x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$$



例 用基础解系表示  $\begin{cases} x_1 + x_3 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_3 + 6x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$  的通解

解

$$(A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_2]{r_1-r_2} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

所以同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + 7x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

例 用基础解系表示  $\begin{cases} x_1 + x_3 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_3 + 6x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$  的通解

解

$$(A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_2]{r_1-r_2} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

所以同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + 7x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -7x_3 + 4x_4 \\ x_2 = 3x_3 - x_4 \end{cases}$$

例 用基础解系表示  $\begin{cases} x_1 + x_3 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_3 + 6x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$  的通解

解

$$(A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

1. 同解方程组  $\begin{cases} x_1 = -7x_3 + 4x_4 \\ x_2 = 3x_3 - x_4 \end{cases}$

例 用基础解系表示  $\begin{cases} x_1 + x_3 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_3 + 6x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$  的通解

解

$$(A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

1. 同解方程组  $\begin{cases} x_1 = -7x_3 + 4x_4 \\ x_2 = 3x_3 - x_4 \end{cases}$
2. 自由变量  $x_3, x_4$

例 用基础解系表示  $\begin{cases} x_1 + x_3 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_3 + 6x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$  的通解

解

$$(A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

1. 同解方程组  $\begin{cases} x_1 = -7x_3 + 4x_4 \\ x_2 = 3x_3 - x_4 \end{cases}$

2. 自由变量  $x_3, x_4$

3. 基础解系  $\xi_1, \xi_2$ :

,

例 用基础解系表示  $\begin{cases} x_1 + x_3 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_3 + 6x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$  的通解

解

$$(A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

1. 同解方程组  $\begin{cases} x_1 = -7x_3 + 4x_4 \\ x_2 = 3x_3 - x_4 \end{cases}$

2. 自由变量  $x_3, x_4$

3. 基础解系  $\xi_1, \xi_2$ :  $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

例 用基础解系表示  $\begin{cases} x_1 + x_3 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_3 + 6x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$  的通解

解

$$(A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

1. 同解方程组  $\begin{cases} x_1 = -7x_3 + 4x_4 \\ x_2 = 3x_3 - x_4 \end{cases}$

2. 自由变量  $x_3, x_4$

3. 基础解系  $\xi_1, \xi_2$ :  $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

例 用基础解系表示  $\begin{cases} x_1 + x_3 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_3 + 6x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$  的通解

解

$$(A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

1. 同解方程组  $\begin{cases} x_1 = -7x_3 + 4x_4 \\ x_2 = 3x_3 - x_4 \end{cases}$

2. 自由变量  $x_3, x_4$

3. 基础解系  $\xi_1, \xi_2$ :  $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



例 用基础解系表示  $\begin{cases} x_1 + x_3 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_3 + 6x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$  的通解

解

$$(A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

1. 同解方程组  $\begin{cases} x_1 = -7x_3 + 4x_4 \\ x_2 = 3x_3 - x_4 \end{cases}$

2. 自由变量  $x_3, x_4$

3. 基础解系  $\xi_1, \xi_2$ :  $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

例 用基础解系表示  $\begin{cases} x_1 + x_3 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_3 + 6x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$  的通解

解

$$(A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

1. 同解方程组  $\begin{cases} x_1 = -7x_3 + 4x_4 \\ x_2 = 3x_3 - x_4 \end{cases}$

2. 自由变量  $x_3, x_4$

3. 基础解系  $\xi_1, \xi_2$ :  $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

例 用基础解系表示  $\begin{cases} x_1 + x_3 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_3 + 6x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$  的通解

解

$$(A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

1. 同解方程组  $\begin{cases} x_1 = -7x_3 + 4x_4 \\ x_2 = 3x_3 - x_4 \end{cases}$

2. 自由变量  $x_3, x_4$

3. 基础解系  $\xi_1, \xi_2$ :  $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. 通解:  $x = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$

例 用基础解系表示  $\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_3 - x_3 - 7x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_3 - x_3 - 11x_4 = 0 \end{cases}$  的通解

例 用基础解系表示  $\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_3 - x_3 - 7x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_3 - x_3 - 11x_4 = 0 \end{cases}$  的通解

解

$$(A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{array} \right)$$

例 用基础解系表示  $\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_3 - x_3 - 7x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_3 - x_3 - 11x_4 = 0 \end{cases}$  的通解

解

$$(A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}$$

例 用基础解系表示  $\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_3 - x_3 - 7x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_3 - x_3 - 11x_4 = 0 \end{cases}$  的通解

解

$$(A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

例 用基础解系表示  $\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_3 - x_3 - 7x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_3 - x_3 - 11x_4 = 0 \end{cases}$  的通解

解

$$(A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_2]{r_1+3r_2}$$



例 用基础解系表示  $\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_3 - x_3 - 7x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_3 - x_3 - 11x_4 = 0 \end{cases}$  的通解

解

$$(A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right)$$
$$\xrightarrow[r_3-2r_2]{r_1+3r_2} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

例 用基础解系表示  $\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_3 - x_3 - 7x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_3 - x_3 - 11x_4 = 0 \end{cases}$  的通解

解

$$(A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_2]{r_1+3r_2} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

所以同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_4 = 0 \end{cases}$$

例 用基础解系表示  $\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_3 - x_3 - 7x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_3 - x_3 - 11x_4 = 0 \end{cases}$  的通解

解

$$(A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_2]{r_1+3r_2} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

所以同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

例 用基础解系表示  $\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_3 - x_3 - 7x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_3 - x_3 - 11x_4 = 0 \end{cases}$  的通解

解

$$(A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_2]{r_1+3r_2} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

所以同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$$

例 用基础解系表示  $\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_3 - x_3 - 7x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_3 - x_3 - 11x_4 = 0 \end{cases}$  的通解

解

$$(A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

1. 同解方程组  $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$

例 用基础解系表示  $\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_3 - x_3 - 7x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_3 - x_3 - 11x_4 = 0 \end{cases}$  的通解

解

$$(A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

1. 同解方程组  $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$
2. 自由变量  $x_2, x_4$

例 用基础解系表示  $\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_3 - x_3 - 7x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_3 - x_3 - 11x_4 = 0 \end{cases}$  的通解

解

$$(A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

1. 同解方程组  $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$

2. 自由变量  $x_2, x_4$

3. 基础解系  $\xi_1, \xi_2$ :

,

例 用基础解系表示  $\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_3 - x_3 - 7x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_3 - x_3 - 11x_4 = 0 \end{cases}$  的通解

解

$$(A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

1. 同解方程组  $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$

2. 自由变量  $x_2, x_4$

3. 基础解系  $\xi_1, \xi_2$ :  $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



例 用基础解系表示  $\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_3 - x_3 - 7x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_3 - x_3 - 11x_4 = 0 \end{cases}$  的通解

解

$$(A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

1. 同解方程组  $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$

2. 自由变量  $x_2, x_4$

3. 基础解系  $\xi_1, \xi_2$ :  $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

例 用基础解系表示  $\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_3 - x_3 - 7x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_3 - x_3 - 11x_4 = 0 \end{cases}$  的通解

解

$$(A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

1. 同解方程组  $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$

2. 自由变量  $x_2, x_4$

3. 基础解系  $\xi_1, \xi_2$ :  $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

例 用基础解系表示  $\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_3 - x_3 - 7x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_3 - x_3 - 11x_4 = 0 \end{cases}$  的通解

解

$$(A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

1. 同解方程组  $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$

2. 自由变量  $x_2, x_4$

3. 基础解系  $\xi_1, \xi_2$ :  $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

例 用基础解系表示  $\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_3 - x_3 - 7x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_3 - x_3 - 11x_4 = 0 \end{cases}$  的通解

解

$$(A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

1. 同解方程组  $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$

2. 自由变量  $x_2, x_4$

3. 基础解系  $\xi_1, \xi_2$ :  $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

例 用基础解系表示  $\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_3 - x_3 - 7x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_3 - x_3 - 11x_4 = 0 \end{cases}$  的通解

解

$$(A:0) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

1. 同解方程组  $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$

2. 自由变量  $x_2, x_4$

3. 基础解系  $\xi_1, \xi_2$ :  $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. 通解:  $x = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$

## 定理 齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

的解有下列性质：

1. 若  $\xi_1, \xi_2$  是解，则  $\xi_1 + \xi_2$  也是解

## 定理 齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

的解有下列性质：

1. 若  $\xi_1, \xi_2$  是解，则  $\xi_1 + \xi_2$  也是解
2. 若  $\xi$  是解，则对  $\forall c \in \mathbb{R}$ ,  $c\xi$  也是解

## 定理 齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

的解有下列性质：

1. 若  $\xi_1, \xi_2$  是解，则  $\xi_1 + \xi_2$  也是解
2. 若  $\xi$  是解，则对  $\forall c \in \mathbb{R}$ ,  $c\xi$  也是解
3. 更一般地，若  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$  是解， $c_1, c_2, \dots, c_s$  是任意常数，  
则解的线性组合

也是解

$$\xi = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \dots + c_s\xi_s$$



## 定理 齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

的解有下列性质：

1. 若  $\xi_1, \xi_2$  是解，则  $\xi_1 + \xi_2$  也是解
2. 若  $\xi$  是解，则对  $\forall c \in \mathbb{R}$ ,  $c\xi$  也是解
3. 更一般地，若  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$  是解， $c_1, c_2, \dots, c_s$  是任意常数，  
则解的线性组合

也是解

$$\xi = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_s\xi_s$$

证明

$$A\xi$$

$$= 0$$

## 定理 齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

的解有下列性质：

1. 若  $\xi_1, \xi_2$  是解，则  $\xi_1 + \xi_2$  也是解
2. 若  $\xi$  是解，则对  $\forall c \in \mathbb{R}$ ,  $c\xi$  也是解
3. 更一般地，若  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$  是解， $c_1, c_2, \dots, c_s$  是任意常数，  
则解的线性组合

也是解

$$\xi = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_s\xi_s$$

证明

$$A\xi = A(c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_s\xi_s)$$

## 定理 齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

的解有下列性质：

1. 若  $\xi_1, \xi_2$  是解，则  $\xi_1 + \xi_2$  也是解
2. 若  $\xi$  是解，则对  $\forall c \in \mathbb{R}$ ,  $c\xi$  也是解
3. 更一般地，若  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$  是解， $c_1, c_2, \dots, c_s$  是任意常数，  
则解的线性组合

也是解

$$\xi = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_s\xi_s$$

证明

$$\begin{aligned} A\xi &= A(c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_s\xi_s) \\ &= c_1A\xi_1 + c_2A\xi_2 + \cdots + c_sA\xi_s \end{aligned}$$

## 定理 齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

的解有下列性质：

1. 若  $\xi_1, \xi_2$  是解，则  $\xi_1 + \xi_2$  也是解
2. 若  $\xi$  是解，则对  $\forall c \in \mathbb{R}$ ,  $c\xi$  也是解
3. 更一般地，若  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$  是解， $c_1, c_2, \dots, c_s$  是任意常数，  
则解的线性组合

也是解

$$\xi = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_s\xi_s$$

证明

$$\begin{aligned} A\xi &= A(c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_s\xi_s) \\ &= c_1A\xi_1 + c_2A\xi_2 + \cdots + c_sA\xi_s \\ &= c_10 + c_20 + \cdots + c_s0 \end{aligned}$$

## 定理 齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

的解有下列性质：

1. 若  $\xi_1, \xi_2$  是解，则  $\xi_1 + \xi_2$  也是解
2. 若  $\xi$  是解，则对  $\forall c \in \mathbb{R}$ ,  $c\xi$  也是解
3. 更一般地，若  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$  是解， $c_1, c_2, \dots, c_s$  是任意常数，  
则解的线性组合

也是解

$$\xi = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_s\xi_s$$

证明

$$\begin{aligned} A\xi &= A(c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_s\xi_s) \\ &= c_1A\xi_1 + c_2A\xi_2 + \cdots + c_sA\xi_s \\ &= c_10 + c_20 + \cdots + c_s0 = 0 \end{aligned}$$

**例** 假设  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  是齐次方程组  $Ax = 0$  的一个基础解系, 问如下各向量组是否也是方程组的一个基础解系:

1.  $\xi_1, \xi_2 + \xi_3$
2.  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$
3.  $\xi_1 - \xi_2, \xi_2 - \xi_3, \xi_1 - \xi_3$
4.  $\xi_1 + \xi_2, \xi_2 + \xi_3, \xi_3 + \xi_1$

**例** 假设  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  是齐次方程组  $Ax = 0$  的一个基础解系, 问如下各向量组是否也是方程组的一个基础解系:

1.  $\xi_1, \xi_2 + \xi_3$
2.  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$
3.  $\xi_1 - \xi_2, \xi_2 - \xi_3, \xi_1 - \xi_3$
4.  $\xi_1 + \xi_2, \xi_2 + \xi_3, \xi_3 + \xi_1$

**提示** 判断

1. 是否为解

**例** 假设  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  是齐次方程组  $Ax = 0$  的一个基础解系, 问如下各向量组是否也是方程组的一个基础解系:

1.  $\xi_1, \xi_2 + \xi_3$
2.  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$
3.  $\xi_1 - \xi_2, \xi_2 - \xi_3, \xi_1 - \xi_3$
4.  $\xi_1 + \xi_2, \xi_2 + \xi_3, \xi_3 + \xi_1$

**提示** 判断

1. 是否为解
2. 是否包含 3 个解 (基础解系包含向量的个数是定值)



**例** 假设  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  是齐次方程组  $Ax = 0$  的一个基础解系, 问如下各向量组是否也是方程组的一个基础解系:

1.  $\xi_1, \xi_2 + \xi_3$
2.  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$
3.  $\xi_1 - \xi_2, \xi_2 - \xi_3, \xi_1 - \xi_3$
4.  $\xi_1 + \xi_2, \xi_2 + \xi_3, \xi_3 + \xi_1$

**提示** 判断

1. 是否为解
2. 是否包含 3 个解 (基础解系包含向量的个数是定值)
3. 是否为线性无关

例 解非齐次线性方程组：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = -4 \end{cases}$$

例 解非齐次线性方程组: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:b) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{array} \right)$$

例 解非齐次线性方程组：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:b) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

例 解非齐次线性方程组：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:b) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{matrix} r(A) = r(A:b) \\ = 2 \end{matrix}$$

例 解非齐次线性方程组：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:b) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{matrix} r(A) = r(A:b) \\ = 2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 2 \end{cases}$$

例 解非齐次线性方程组：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:b) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{matrix} r(A) = r(A:b) \\ = 2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases}$$

例 解非齐次线性方程组：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:b) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{matrix} r(A) = r(A:b) \\ = 2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 \end{cases}$$



例 解非齐次线性方程组：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:b) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} r(A) = r(A:b) \\ = 2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{自由变量} \\ x_3, x_4 \end{array}$$

例 解非齐次线性方程组：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:b) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{matrix} r(A) = r(A:b) \\ = 2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{自由变量} \\ x_3, x_4 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$

例 解非齐次线性方程组：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:b) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{matrix} r(A) = r(A:b) \\ = 2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{自由变量} \\ x_3, x_4 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$

例 解非齐次线性方程组: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:b) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} r(A) = r(A:b) \\ = 2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{自由变量} \\ x_3, x_4 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2c_1 \\ c_1 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3c_2 \\ -2c_2 \\ 0 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

例 解非齐次线性方程组: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:b) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{matrix} r(A) = r(A:b) \\ = 2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{自由变量} \\ x_3, x_4 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

例 解非齐次线性方程组: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:b) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} r(A) = r(A:b) \\ = 2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{自由变量} \\ x_3, x_4 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} x & \eta & \xi_1 & \xi_2 \end{matrix}$

例 解非齐次线性方程组: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:b) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} r(A) = r(A:b) \\ = 2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{自由变量} \\ x_3, x_4 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} x & & \eta & & \xi_1 & & \xi_2 \end{matrix}$

$$\Rightarrow x = \eta + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$$

例 解非齐次线性方程组: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:b) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} r(A) = r(A:b) \\ = 2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{自由变量} \\ x_3, x_4 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} x & \eta & \xi_1 & \xi_2 \end{matrix}$

$$\Rightarrow x = \eta + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$$

$\eta: Ax = b$  一个解



例 解非齐次线性方程组: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:b) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} r(A) = r(A:b) \\ = 2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{自由变量} \\ x_3, x_4 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x \qquad \eta \qquad \xi_1 \qquad \xi_2$

$$\Rightarrow x = \eta + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$$

$\eta : Ax = b$  一个解  
 $\xi_1, \xi_2 : Ax = 0$  基础解系

例 解非齐次线性方程组: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:b) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} r(A) = r(A:b) \\ = 2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{自由变量} \\ x_3, x_4 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\eta$                        $\xi_1$                        $\xi_2$

$$\Rightarrow x = \eta + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$$

$\eta : Ax = b$  一个解  
 $\xi_1, \xi_2 : Ax = 0$  基础解系

定义 在非齐次线性方程组

$$Ax = b$$

中, 用 0 代替  $b$ , 所得到的齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

称为原方程组  $Ax = b$  的导出组。

定义 在非齐次线性方程组

$$Ax = b$$

中, 用 0 代替  $b$ , 所得到的齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

称为原方程组  $Ax = b$  的导出组。

---

如  $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 6x_4 = -9 \end{cases}$  的导出组是

定义 在非齐次线性方程组

$$Ax = b$$

中, 用 0 代替  $b$ , 所得到的齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

称为原方程组  $Ax = b$  的导出组。

如  $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 6x_4 = -9 \end{cases}$  的导出组是

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases}$$

**定理** 如果  $\eta$  是非齐次线性方程组

$$Ax = b$$

的一个解, 则原方程组的任意解  $x$  可以表示成

$$x = \eta + \xi$$

其中  $\xi$  是导出组  $Ax = 0$  的解。

**定理** 如果  $\eta$  是非齐次线性方程组

$$Ax = b$$

的一个解, 则原方程组的任意解  $x$  可以表示成

$$x = \eta + \xi$$

其中  $\xi$  是导出组  $Ax = 0$  的解。

进一步, 设导出组  $Ax = 0$  的基础解系是

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$$

**定理** 如果  $\eta$  是非齐次线性方程组

$$Ax = b$$

的一个解, 则原方程组的任意解  $x$  可以表示成

$$x = \eta + \xi$$

其中  $\xi$  是导出组  $Ax = 0$  的解。

进一步, 设导出组  $Ax = 0$  的基础解系是

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$$

$$\underline{\xi} \quad \underline{c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_s \xi_s}$$



**定理** 如果  $\eta$  是非齐次线性方程组

$$Ax = b$$

的一个解, 则原方程组的任意解  $x$  可以表示成

$$x = \eta + \xi$$

其中  $\xi$  是导出组  $Ax = 0$  的解。

进一步, 设导出组  $Ax = 0$  的基础解系是

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$$

则原方程组的任意解  $x$  可以表示成

$$x = \eta + \underline{\xi} = \eta + \underline{c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_s\xi_s}$$

**定理** 如果  $\eta$  是非齐次线性方程组

$$Ax = b$$

的一个解, 则原方程组的任意解  $x$  可以表示成

$$x = \eta + \xi$$

其中  $\xi$  是导出组  $Ax = 0$  的解。

进一步, 设导出组  $Ax = 0$  的基础解系是

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$$

则原方程组的任意解  $x$  可以表示成

$$x = \eta + \underline{\xi} = \eta + \underline{c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_s\xi_s}$$

**证明** 因为

$$Ax = b, \quad A\eta = b$$

**定理** 如果  $\eta$  是非齐次线性方程组

$$Ax = b$$

的一个解, 则原方程组的任意解  $x$  可以表示成

$$x = \eta + \xi$$

其中  $\xi$  是导出组  $Ax = 0$  的解。

进一步, 设导出组  $Ax = 0$  的基础解系是

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$$

则原方程组的任意解  $x$  可以表示成

$$x = \eta + \underline{\xi} = \eta + \underline{c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_s\xi_s}$$

**证明** 因为

$$Ax = b, \quad A\eta = b$$

所以  $A(x - \eta) = Ax - A\eta = b - b = 0$

**定理** 如果  $\eta$  是非齐次线性方程组

$$Ax = b$$

的一个解, 则原方程组的任意解  $x$  可以表示成

$$x = \eta + \xi$$

其中  $\xi$  是导出组  $Ax = 0$  的解。

进一步, 设导出组  $Ax = 0$  的基础解系是

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$$

则原方程组的任意解  $x$  可以表示成

$$x = \eta + \underline{\xi} = \eta + \underline{c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_s\xi_s}$$

**证明** 因为

$$Ax = b, \quad A\eta = b$$

所以  $A(x - \eta) = Ax - A\eta = b - b = 0$ , 说明  $x - \eta$  是导出组  $Ax = 0$  的解。

**定理** 如果  $\eta$  是非齐次线性方程组

$$Ax = b$$

的一个解, 则原方程组的任意解  $x$  可以表示成

$$x = \eta + \xi$$

其中  $\xi$  是导出组  $Ax = 0$  的解。

进一步, 设导出组  $Ax = 0$  的基础解系是

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$$

则原方程组的任意解  $x$  可以表示成

$$x = \eta + \underline{\xi} = \eta + \underline{c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_s\xi_s}$$

**证明** 因为

$$Ax = b, \quad A\eta = b$$

所以  $A(x - \eta) = Ax - A\eta = b - b = 0$ , 说明  $x - \eta$  是导出组  $Ax = 0$  的解。所以  $x - \eta = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_s\xi_s$ 。

# 用基础解系表示 $Ax = b$ 通解

先是

- 将增广矩阵  $(A, b)$  化为简化的阶梯形矩阵，写出同解方程组；
- 确定自由未知变量；

然后

- 求出一个特解  $\eta$ ：
- 求出导出组  $Ax = 0$  的基础解系：  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$

则  $Ax = b$  的通解是

# 用基础解系表示 $Ax = b$ 通解

先是

- 将增广矩阵  $(A, b)$  化为简化的阶梯形矩阵，写出同解方程组；
- 确定自由未知变量；

然后

- 求出一个特解  $\eta$ ：
- 求出导出组  $Ax = 0$  的基础解系：  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$

则  $Ax = b$  的通解是

$$x = \eta + c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_s\xi_s$$

# 用基础解系表示 $Ax = b$ 通解

先是

- 将增广矩阵  $(A, b)$  化为简化的阶梯形矩阵，写出同解方程组；
- 确定自由未知变量；

然后

- 求出一个特解  $\eta$ ：可取自由未知量全为 0 得到
- 求出导出组  $Ax = 0$  的基础解系： $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$

则  $Ax = b$  的通解是

$$x = \eta + c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_s\xi_s$$



例 用“特解 + 基础解系的线性组合”的形式，求出

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ \phantom{x_1} x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 3 \end{cases} \text{ 的通解。}$$

例 用“特解 + 基础解系的线性组合”的形式，求出

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ \phantom{x_1} x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 3 \end{cases} \text{ 的通解。}$$

解

$$(A | b) = \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{array} \right)$$

例 用“特解 + 基础解系的线性组合”的形式，求出

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ \quad \quad x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 3 \end{cases} \text{ 的通解。}$$

解

$$(A | b) = \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 - 2r_1}$$

例 用“特解 + 基础解系的线性组合”的形式，求出

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ \quad \quad x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 3 \end{cases} \text{ 的通解。}$$

解

$$(A | b) = \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

例 用“特解 + 基础解系的线性组合”的形式，求出

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ \quad \quad x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 3 \end{cases} \text{ 的通解。}$$

解

$$(A | b) = \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$
$$\xrightarrow{r_3 + r_2}$$

例 用“特解 + 基础解系的线性组合”的形式，求出

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 3 \end{cases} \text{的通解。}$$

解

$$\begin{aligned} (A | b) &= \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{r_3 + r_2} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

例 用“特解 + 基础解系的线性组合”的形式，求出

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ \quad \quad x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 3 \end{cases} \text{ 的通解。}$$

解

$$\begin{aligned} (A | b) &= \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{r_3 + r_2} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[r_1 - r_3]{r_2 - r_3} \end{aligned}$$

例 用“特解 + 基础解系的线性组合”的形式，求出

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ \quad \quad x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 3 \end{cases} \text{ 的通解。}$$

解

$$\begin{aligned} (A | b) &= \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{r_3 + r_2} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[r_1 - r_3]{r_2 - r_3} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \end{aligned}$$



例 用“特解 + 基础解系的线性组合”的形式，求出

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 3 \end{cases} \text{ 的通解。}$$

解

$$\begin{aligned} (A | b) &= \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{r_3 + r_2} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[r_1 - r_3]{r_2 - r_3} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{r_1 - 2r_2} \end{aligned}$$

例 用“特解 + 基础解系的线性组合”的形式，求出

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ \quad \quad x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 3 \end{cases} \text{ 的通解。}$$

解

$$\begin{aligned} (A | b) &= \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{r_3 + r_2} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[r_1 - r_3]{r_2 - r_3} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{r_1 - 2r_2} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

例 用“特解 + 基础解系的线性组合”的形式，求出

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ \quad \quad x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 3 \end{cases} \text{ 的通解。}$$

解

$$\begin{aligned} (A | b) &= \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{r_3 + r_2} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[r_1 - r_3]{r_2 - r_3} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{r_1 - 2r_2} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

例 用“特解 + 基础解系的线性组合”的形式，求出

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ \quad \quad x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 3 \end{cases} \text{ 的通解。}$$

解

$$\begin{aligned} (A|b) &= \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3-2r_1} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{r_3+r_2} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[r_1-r_3]{r_2-r_3} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{r_1-2r_2} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

1. 同解于: 
$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 - x_5 = -1 \\ x_4 + x_5 = 2 \end{cases}$$

例 用“特解 + 基础解系的线性组合”的形式，求出

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ \quad \quad x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 3 \end{cases} \text{ 的通解。}$$

解

$$\begin{aligned} (A|b) &= \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3-2r_1} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{r_3+r_2} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[r_1-r_3]{r_2-r_3} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{r_1-2r_2} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$1. \text{ 同解于: } \begin{cases} x_1 - x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 - x_5 = -1 \\ x_4 + x_5 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 + x_5 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$$

1. 原方程组同解于:

$$\begin{cases} x_1 & -x_3 & & & = 1 \\ & x_2 & +x_3 & -x_5 & = -1 \\ & & & x_4 & +x_5 & = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 + x_5 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$$

1. 原方程组同解于:

$$\begin{cases} x_1 & -x_3 & & & = 1 \\ & x_2 & +x_3 & -x_5 & = -1 \\ & & & x_4 & +x_5 & = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 + x_5 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$$

2. 自由变量:  $x_3, x_5$

1. 原方程组同解于:

$$\begin{cases} x_1 & -x_3 & & & = 1 \\ & x_2 & +x_3 & -x_5 & = -1 \\ & & & x_4 & +x_5 & = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 + x_5 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$$

2. 自由变量:  $x_3, x_5$

3. 原方程组特解: 取自由变量  $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,



1. 原方程组同解于:

$$\begin{cases} x_1 & -x_3 & & & = 1 \\ & x_2 & +x_3 & -x_5 & = -1 \\ & & & x_4 & +x_5 & = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 + x_5 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$$

2. 自由变量:  $x_3, x_5$

3. 原方程组特解: 取自由变量  $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , 得特解  $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 。

1. 原方程组同解于:

$$\begin{cases} x_1 & -x_3 & & & = 1 \\ & x_2 & +x_3 & -x_5 & = -1 \\ & & & x_4 & +x_5 & = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 + x_5 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$$

2. 自由变量:  $x_3, x_5$

3. 原方程组特解: 取自由变量  $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , 得特解  $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 。

4. 导出组  $Ax = 0$

1. 原方程组同解于:

$$\begin{cases} x_1 & -x_3 & & & = 1 \\ & x_2 & +x_3 & -x_5 & = -1 \\ & & & x_4 & +x_5 & = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 + x_5 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$$

2. 自由变量:  $x_3, x_5$

3. 原方程组特解: 取自由变量  $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , 得特解  $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 。

4. 导出组  $Ax = 0$  同解于  $\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_3 + x_5 \\ x_4 = -x_5 \end{cases}$  .

1. 原方程组同解于:

$$\begin{cases} x_1 & -x_3 & & & = 1 \\ & x_2 & +x_3 & -x_5 & = -1 \\ & & & x_4 & +x_5 & = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 + x_5 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$$

2. 自由变量:  $x_3, x_5$

3. 原方程组特解: 取自由变量  $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , 得特解  $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 。

4. 导出组  $Ax = 0$  同解于  $\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_3 + x_5 \\ x_4 = -x_5 \end{cases}$ . 分别取  $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  和  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 得基础解系  $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

1. 原方程组同解于:

$$\begin{cases} x_1 & -x_3 & & & = 1 \\ & x_2 & +x_3 & -x_5 & = -1 \\ & & & x_4 & +x_5 & = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 + x_5 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$$

2. 自由变量:  $x_3, x_5$

3. 原方程组特解: 取自由变量  $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , 得特解  $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 。

4. 导出组  $Ax = 0$  同解于  $\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_3 + x_5 \\ x_4 = -x_5 \end{cases}$ . 分别取  $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  和  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 得基础解系  $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

5. 通解:  $x = \eta + c_1\xi_1 + c_2\xi_2$  其中  $c_1, c_2$  为任意常数。