

第 02 周作业解答

练习 1. 通过化为三角化行列式, 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, 以及 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ 。

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4-2r_1]{\substack{r_2+r_1 \\ r_3-2r_1}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4-r_2]{r_3-2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -11 \\ 0 & 0 & 2 & -7 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_4-\frac{2}{5}r_3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{13}{5} \end{vmatrix} = -13.$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+3r_1} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \xrightarrow[r_4+2r_2]{r_3-r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_4-3r_3} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 22 \end{vmatrix} = -22.$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4-4r_1]{r_3-2r_1} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{vmatrix} \\ \xrightarrow[r_4+6r_2]{r_3+r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_4+r_3} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{vmatrix} = 96.$$

练习 2. 把行列式 $\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -7 & -3 & -1 \end{vmatrix}$ 按第 3 列展开, 从而算出行列式的值。

解

$$\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -7 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -7 & -3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -7 & -3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ = 8 - 11 - 10 = -13.$$