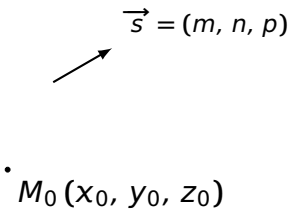


第 8 章 c: 空间直线及其方程

数学系 梁卓滨

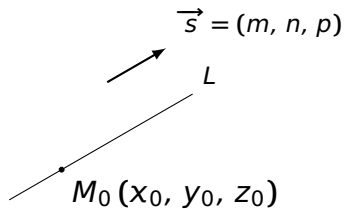
2018-2019 学年 II

空间直线的参数方程

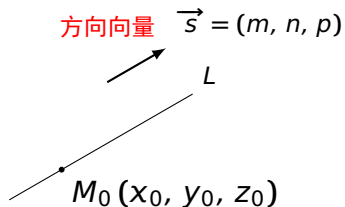

$$\vec{s} = (m, n, p)$$

$$\bullet M_0(x_0, y_0, z_0)$$

空间直线的参数方程

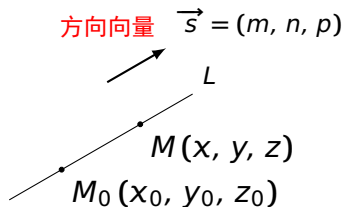


空间直线的参数方程



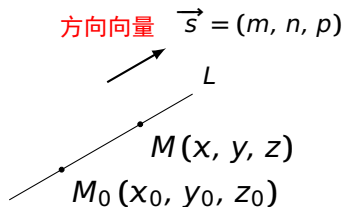
空间直线的参数方程

$$M \in L$$



空间直线的参数方程

$$\begin{aligned} M \in L \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s} \end{aligned}$$

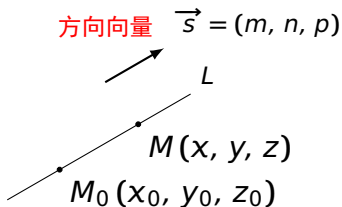


空间直线的参数方程

$$M \in L$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$$

$$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \text{ 使得 } \overrightarrow{M_0M} = t \vec{s}$$



空间直线的参数方程

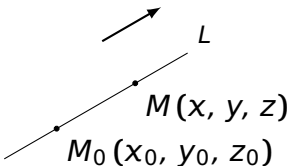
$$M \in L$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$$

$$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \text{ 使得 } \overrightarrow{M_0M} = t\vec{s}$$

$$\Leftrightarrow (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(m, n, p)$$

方向向量 $\vec{s} = (m, n, p)$



空间直线的参数方程

$$M \in L$$

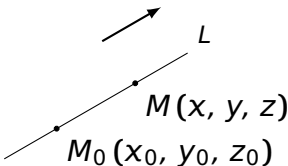
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$$

$$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \text{ 使得 } \overrightarrow{M_0M} = t\vec{s}$$

$$\Leftrightarrow (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(m, n, p)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - x_0 = tm \\ y - y_0 = tn \\ z - z_0 = tp \end{cases}$$

方向向量 $\vec{s} = (m, n, p)$



空间直线的参数方程

$$M \in L$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$$

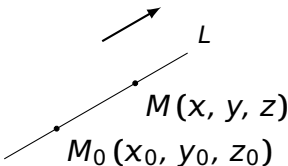
$$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \text{ 使得 } \overrightarrow{M_0M} = t\vec{s}$$

$$\Leftrightarrow (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(m, n, p)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - x_0 = tm \\ y - y_0 = tn \\ z - z_0 = tp \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + tm \\ y = y_0 + tn \\ z = z_0 + tp \end{cases}$$

方向向量 $\vec{s} = (m, n, p)$



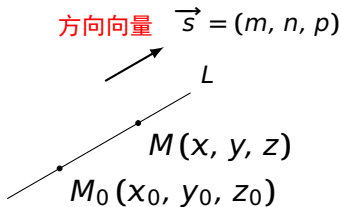
空间直线的对称式方程

$$M \in L$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$$

$$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \text{ 使得 } \overrightarrow{M_0M} = t\vec{s}$$

$$\Leftrightarrow (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(m, n, p)$$



空间直线的对称式方程

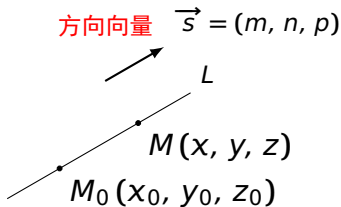
$$M \in L$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$$

$$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \text{ 使得 } \overrightarrow{M_0M} = t \vec{s}$$

$$\Leftrightarrow (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(m, n, p)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$



空间直线的对称式方程

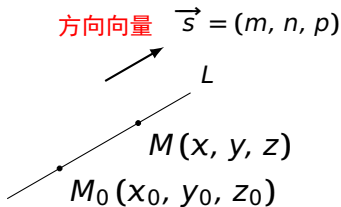
$$M \in L$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$$

$$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \text{ 使得 } \overrightarrow{M_0M} = t \vec{s}$$

$$\Leftrightarrow (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(m, n, p)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$



注1 若 $m = 0$, 则 $\frac{x-x_0}{0} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ 表示

空间直线的对称式方程

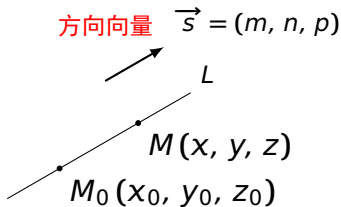
$$M \in L$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$$

$$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \text{ 使得 } \overrightarrow{M_0M} = t\vec{s}$$

$$\Leftrightarrow (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(m, n, p)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$



注1 若 $m = 0$, 则 $\frac{x-x_0}{0} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ 表示

$$x = x_0 \quad \text{且}$$

空间直线的对称式方程

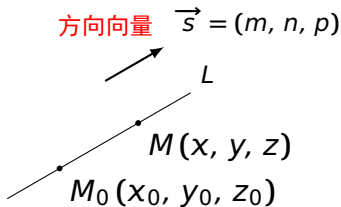
$$M \in L$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$$

$$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \text{ 使得 } \overrightarrow{M_0M} = t\vec{s}$$

$$\Leftrightarrow (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(m, n, p)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$



注1 若 $m = 0$, 则 $\frac{x-x_0}{0} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ 表示

$$x = x_0 \quad \text{且} \quad \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

空间直线的对称式方程

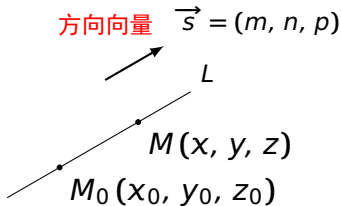
$$M \in L$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$$

$$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \text{ 使得 } \overrightarrow{M_0M} = t\vec{s}$$

$$\Leftrightarrow (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(m, n, p)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

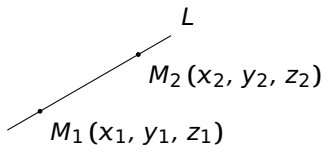


注1 若 $m = 0$, 则 $\frac{x-x_0}{0} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ 表示

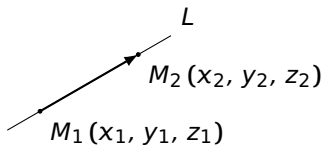
$$x = x_0 \quad \text{且} \quad \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

注2 一般地, 点向式用作表示, 参数式用作具体计算

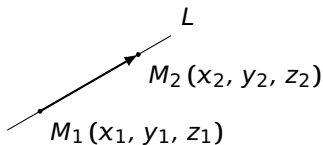
例 1 设直线过点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$, 求直线方程。



例 1 设直线过点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$, 求直线方程。



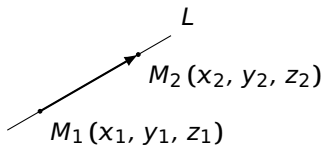
例 1 设直线过点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$, 求直线方程。



解 取方向向量为

$$\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = (\quad , \quad , \quad)$$

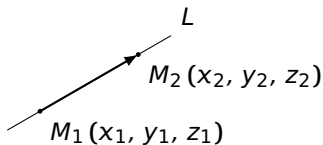
例 1 设直线过点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$, 求直线方程。



解 取方向向量为

$$\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

例 1 设直线过点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$, 求直线方程。



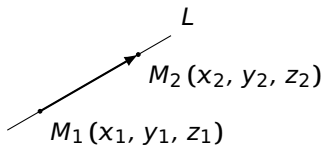
解 取方向向量为

$$\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

所以直线方程为

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

例 1 设直线过点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$, 求直线方程。



解 取方向向量为

$$\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

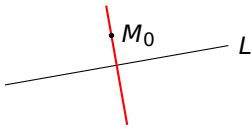
所以直线方程为

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

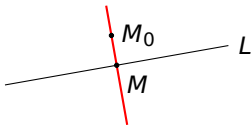
或等价地,

$$\frac{x - x_2}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_2}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_2}{z_2 - z_1}$$

例 2 求过点 $M_0(2, 1, 3)$ 且与直线 $L: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程。

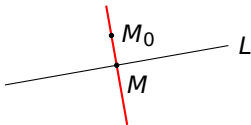


例 2 求过点 $M_0(2, 1, 3)$ 且与直线 $L: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程。



解 设垂足为 $M(x, y, z)$, 则

例 2 求过点 $M_0(2, 1, 3)$ 且与直线 $L: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程。

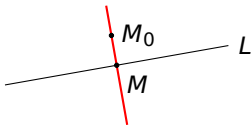


解 设垂足为 $M(x, y, z)$, 则

$$M \in L \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{M_0M} \perp L \Rightarrow$$

例 2 求过点 $M_0(2, 1, 3)$ 且与直线 $L: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程。

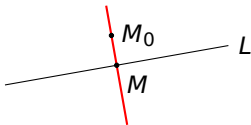


解 设垂足为 $M(x, y, z)$, 则

$$M \in L \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + tm \\ y = y_0 + tn \\ z = z_0 + tp \end{cases}$$

$$\overrightarrow{M_0M} \perp L \Rightarrow$$

例 2 求过点 $M_0(2, 1, 3)$ 且与直线 $L: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程。

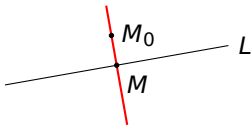


解 设垂足为 $M(x, y, z)$, 则

$$M \in L \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + tm = -1 + 3t \\ y = y_0 + tn \\ z = z_0 + tp \end{cases}$$

$$\overrightarrow{M_0M} \perp L \Rightarrow$$

例 2 求过点 $M_0(2, 1, 3)$ 且与直线 $L: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程。

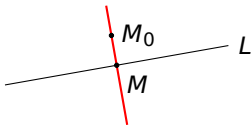


解 设垂足为 $M(x, y, z)$, 则

$$M \in L \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + tm = -1 + 3t \\ y = y_0 + tn = 1 + 2t \\ z = z_0 + tp \end{cases}$$

$$\overrightarrow{M_0M} \perp L \Rightarrow$$

例 2 求过点 $M_0(2, 1, 3)$ 且与直线 $L: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程。

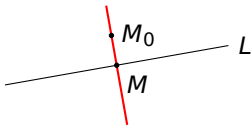


解 设垂足为 $M(x, y, z)$, 则

$$M \in L \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + tm = -1 + 3t \\ y = y_0 + tn = 1 + 2t \\ z = z_0 + tp = -t \end{cases}$$

$$\overrightarrow{M_0M} \perp L \Rightarrow$$

例 2 求过点 $M_0(2, 1, 3)$ 且与直线 $L: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程。

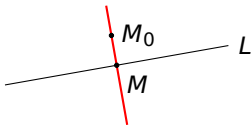


解 设垂足为 $M(x, y, z)$, 则

$$M \in L \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + tm = -1 + 3t \\ y = y_0 + tn = 1 + 2t \\ z = z_0 + tp = -t \end{cases}$$

$$\overrightarrow{M_0M} \perp L \Rightarrow 0 = \overrightarrow{M_0M} \cdot (3, 2, -1)$$

例 2 求过点 $M_0(2, 1, 3)$ 且与直线 $L: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程。

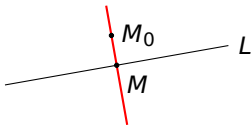


解 设垂足为 $M(x, y, z)$, 则

$$M \in L \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + tm = -1 + 3t \\ y = y_0 + tn = 1 + 2t \\ z = z_0 + tp = -t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_0M} \perp L \Rightarrow 0 &= \overrightarrow{M_0M} \cdot (3, 2, -1) \\ &= (-3 + 3t) \quad (2t) \quad (-t - 3) \end{aligned}$$

例 2 求过点 $M_0(2, 1, 3)$ 且与直线 $L: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程。

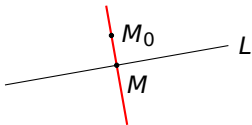


解 设垂足为 $M(x, y, z)$, 则

$$M \in L \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + tm = -1 + 3t \\ y = y_0 + tn = 1 + 2t \\ z = z_0 + tp = -t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_0M} \perp L &\Rightarrow 0 = \overrightarrow{M_0M} \cdot (3, 2, -1) \\ &= (-3 + 3t) \cdot 3 + (2t) \cdot 2 + (-t - 3) \cdot (-1) \end{aligned}$$

例 2 求过点 $M_0(2, 1, 3)$ 且与直线 $L: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程。

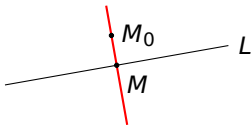


解 设垂足为 $M(x, y, z)$, 则

$$M \in L \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + tm = -1 + 3t \\ y = y_0 + tn = 1 + 2t \\ z = z_0 + tp = -t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_0M} \perp L &\Rightarrow 0 = \overrightarrow{M_0M} \cdot (3, 2, -1) \\ &= (-3 + 3t) \cdot 3 + (2t) \cdot 2 + (-t - 3) \cdot (-1) \\ &\Rightarrow t = 3/7 \end{aligned}$$

例 2 求过点 $M_0(2, 1, 3)$ 且与直线 $L: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程。



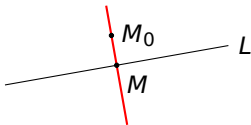
解 设垂足为 $M(x, y, z)$, 则

$$M \in L \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + tm = -1 + 3t \\ y = y_0 + tn = 1 + 2t \\ z = z_0 + tp = -t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_0M} \perp L &\Rightarrow 0 = \overrightarrow{M_0M} \cdot (3, 2, -1) \\ &= (-3 + 3t) \cdot 3 + (2t) \cdot 2 + (-t - 3) \cdot (-1) \\ &\Rightarrow t = 3/7 \end{aligned}$$

所以交点 $M = (\frac{2}{7}, \frac{13}{7}, -\frac{3}{7})$,

例 2 求过点 $M_0(2, 1, 3)$ 且与直线 $L: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程。



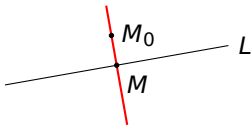
解 设垂足为 $M(x, y, z)$, 则

$$M \in L \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + tm = -1 + 3t \\ y = y_0 + tn = 1 + 2t \\ z = z_0 + tp = -t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_0M} \perp L &\Rightarrow 0 = \overrightarrow{M_0M} \cdot (3, 2, -1) \\ &= (-3 + 3t) \cdot 3 + (2t) \cdot 2 + (-t - 3) \cdot (-1) \\ &\Rightarrow t = 3/7 \end{aligned}$$

所以交点 $M = (\frac{2}{7}, \frac{13}{7}, -\frac{3}{7})$, 方向向量 $\overrightarrow{M_0M} = -\frac{6}{7}(2, -1, 4)$,

例 2 求过点 $M_0(2, 1, 3)$ 且与直线 $L: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程。



解 设垂足为 $M(x, y, z)$, 则

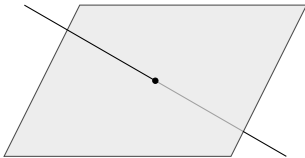
$$M \in L \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + tm = -1 + 3t \\ y = y_0 + tn = 1 + 2t \\ z = z_0 + tp = -t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_0M} \perp L &\Rightarrow 0 = \overrightarrow{M_0M} \cdot (3, 2, -1) \\ &= (-3 + 3t) \cdot 3 + (2t) \cdot 2 + (-t - 3) \cdot (-1) \\ &\Rightarrow t = 3/7 \end{aligned}$$

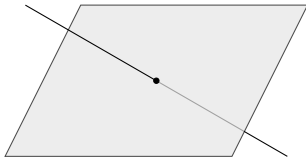
所以交点 $M = (\frac{2}{7}, \frac{13}{7}, -\frac{3}{7})$, 方向向量 $\overrightarrow{M_0M} = -\frac{6}{7}(2, -1, 4)$,

直线方程为 $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{4}$.

例 3 求直线 $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{2}$ 与平面 $2x + y + z - 6 = 0$ 的交点。



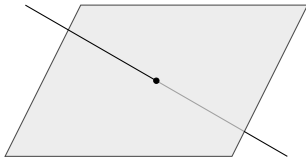
例 3 求直线 $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{2}$ 与平面 $2x + y + z - 6 = 0$ 的交点。



解 直线上点的坐标为

$$\begin{cases} x = x_0 + tm \\ y = y_0 + tn \\ z = z_0 + tp \end{cases}$$

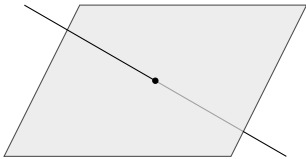
例 3 求直线 $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{2}$ 与平面 $2x + y + z - 6 = 0$ 的交点。



解 直线上点的坐标为

$$\begin{cases} x = x_0 + tm = 2 + t \\ y = y_0 + tn \\ z = z_0 + tp \end{cases}$$

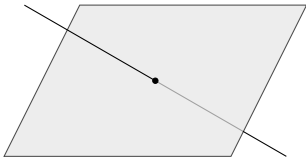
例 3 求直线 $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{2}$ 与平面 $2x + y + z - 6 = 0$ 的交点。



解 直线上点的坐标为

$$\begin{cases} x = x_0 + tm = 2 + t \\ y = y_0 + tn = 3 + t \\ z = z_0 + tp \end{cases}$$

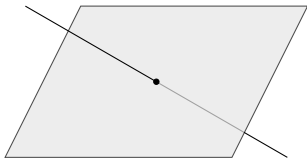
例 3 求直线 $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{2}$ 与平面 $2x + y + z - 6 = 0$ 的交点。



解 直线上点的坐标为

$$\begin{cases} x = x_0 + tm = 2 + t \\ y = y_0 + tn = 3 + t \\ z = z_0 + tp = 4 + 2t \end{cases}$$

例 3 求直线 $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{2}$ 与平面 $2x + y + z - 6 = 0$ 的交点。



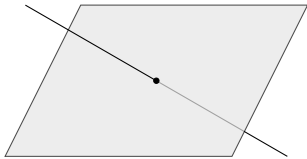
解 直线上点的坐标为

$$\begin{cases} x = x_0 + tm = 2 + t \\ y = y_0 + tn = 3 + t \\ z = z_0 + tp = 4 + 2t \end{cases}$$

代入平面方程，得：

$$2(2 + t) + (3 + t) + (4 + 2t) - 6 = 0$$

例 3 求直线 $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{2}$ 与平面 $2x + y + z - 6 = 0$ 的交点。



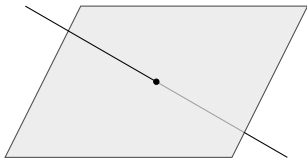
解 直线上点的坐标为

$$\begin{cases} x = x_0 + tm = 2 + t \\ y = y_0 + tn = 3 + t \\ z = z_0 + tp = 4 + 2t \end{cases}$$

代入平面方程，得：

$$2(2 + t) + (3 + t) + (4 + 2t) - 6 = 0 \Rightarrow t = -1$$

例 3 求直线 $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{2}$ 与平面 $2x + y + z - 6 = 0$ 的交点。



解 直线上点的坐标为

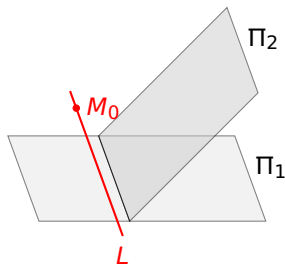
$$\begin{cases} x = x_0 + tm = 2 + t \\ y = y_0 + tn = 3 + t \\ z = z_0 + tp = 4 + 2t \end{cases}$$

代入平面方程，得：

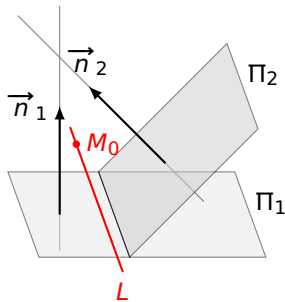
$$2(2 + t) + (3 + t) + (4 + 2t) - 6 = 0 \Rightarrow t = -1$$

所以交点为 $(1, 2, 2)$ 。

例 4 设直线 L 过点 $M_0(-3, 2, 5)$, 且与两平面 $x - 4z = 3$ 和 $2x - y - 5z = 1$ 的交线平行, 并 L 方程。



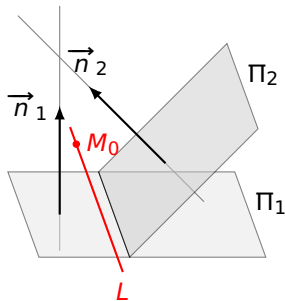
例 4 设直线 L 过点 $M_0(-3, 2, 5)$, 且与两平面 $x - 4z = 3$ 和 $2x - y - 5z = 1$ 的交线平行, 并 L 方程。



例 4 设直线 L 过点 $M_0(-3, 2, 5)$, 且与两平面 $x - 4z = 3$ 和 $2x - y - 5z = 1$ 的交线平行, 并 L 方程。

解 1. 取方向向量

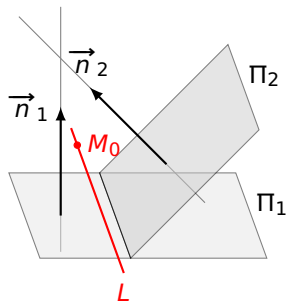
$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \vec{n}_1 & \vec{n}_2 & \end{vmatrix}$$



例 4 设直线 L 过点 $M_0(-3, 2, 5)$, 且与两平面 $x - 4z = 3$ 和 $2x - y - 5z = 1$ 的交线平行, 并 L 方程。

解 1. 取方向向量

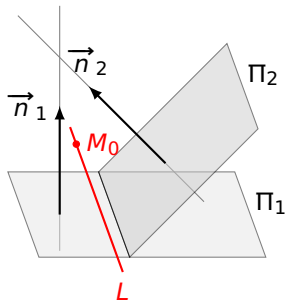
$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix}$$



例 4 设直线 L 过点 $M_0(-3, 2, 5)$, 且与两平面 $x - 4z = 3$ 和 $2x - y - 5z = 1$ 的交线平行, 并 L 方程。

解 1. 取方向向量

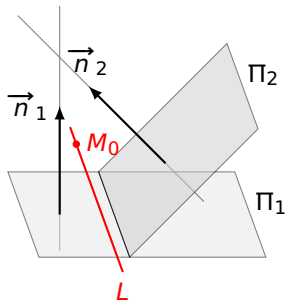
$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix}$$



例 4 设直线 L 过点 $M_0(-3, 2, 5)$, 且与两平面 $x - 4z = 3$ 和 $2x - y - 5z = 1$ 的交线平行, 并 L 方程。

解 1. 取方向向量

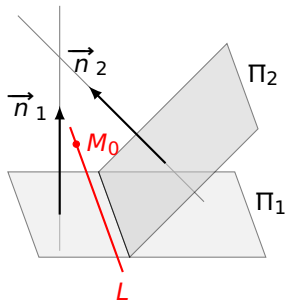
$$\begin{aligned}\vec{s} &= \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{k}\end{aligned}$$



例 4 设直线 L 过点 $M_0(-3, 2, 5)$, 且与两平面 $x - 4z = 3$ 和 $2x - y - 5z = 1$ 的交线平行, 并 L 方程。

解 1. 取方向向量

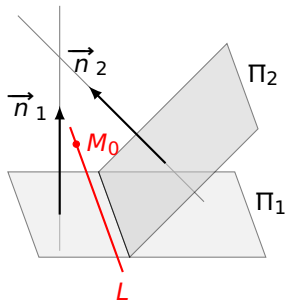
$$\begin{aligned}\vec{s} &= \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{k}\end{aligned}$$



例 4 设直线 L 过点 $M_0(-3, 2, 5)$, 且与两平面 $x - 4z = 3$ 和 $2x - y - 5z = 1$ 的交线平行, 并 L 方程。

解 1. 取方向向量

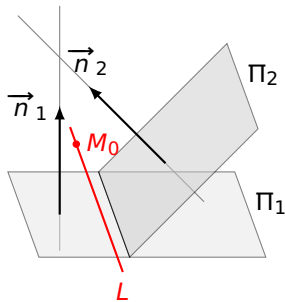
$$\begin{aligned}\vec{s} &= \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{k}\end{aligned}$$



例 4 设直线 L 过点 $M_0(-3, 2, 5)$, 且与两平面 $x - 4z = 3$ 和 $2x - y - 5z = 1$ 的交线平行, 并 L 方程。

解 1. 取方向向量

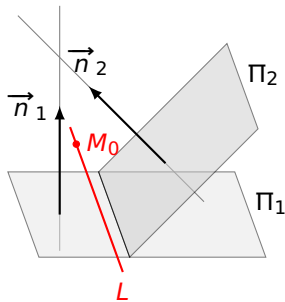
$$\begin{aligned}\vec{s} &= \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= -4\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}\end{aligned}$$



例 4 设直线 L 过点 $M_0(-3, 2, 5)$, 且与两平面 $x - 4z = 3$ 和 $2x - y - 5z = 1$ 的交线平行, 并 L 方程。

解 1. 取方向向量

$$\begin{aligned}\vec{s} &= \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= -4\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} = (-4, -3, -1)\end{aligned}$$



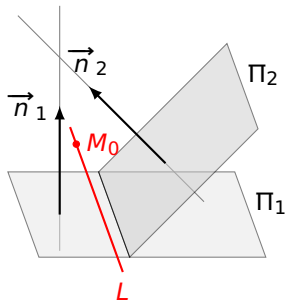
例 4 设直线 L 过点 $M_0(-3, 2, 5)$, 且与两平面 $x - 4z = 3$ 和 $2x - y - 5z = 1$ 的交线平行, 并 L 方程。

解 1. 取方向向量

$$\begin{aligned}\vec{s} &= \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= -4\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} = (-4, -3, -1)\end{aligned}$$

2. 点向式:

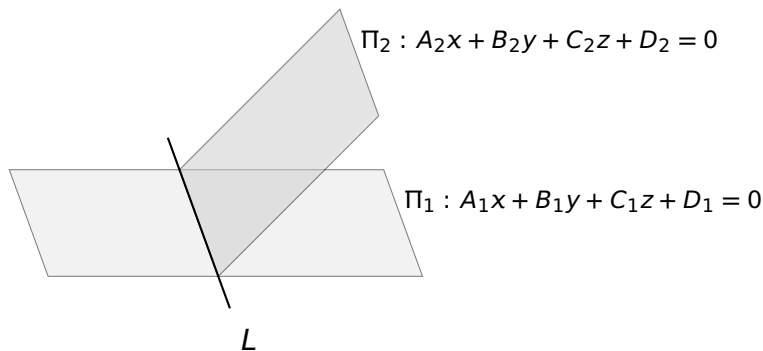
$$\frac{x+3}{-4} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-5}{-1}$$



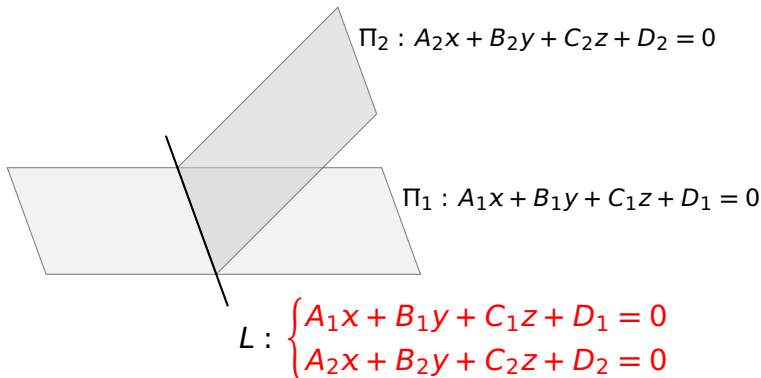
空间直线的一般方程



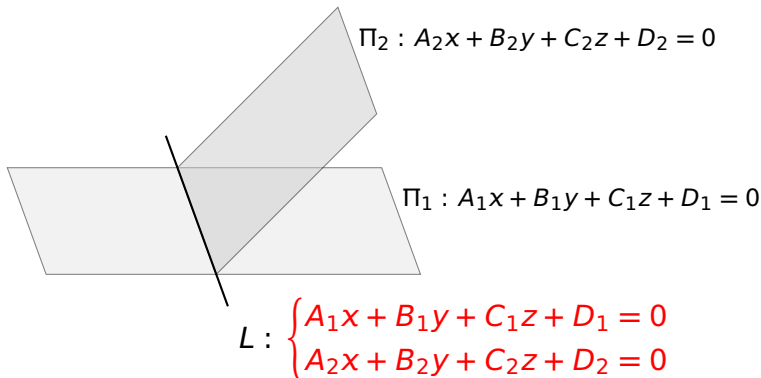
空间直线的一般方程



空间直线的一般方程

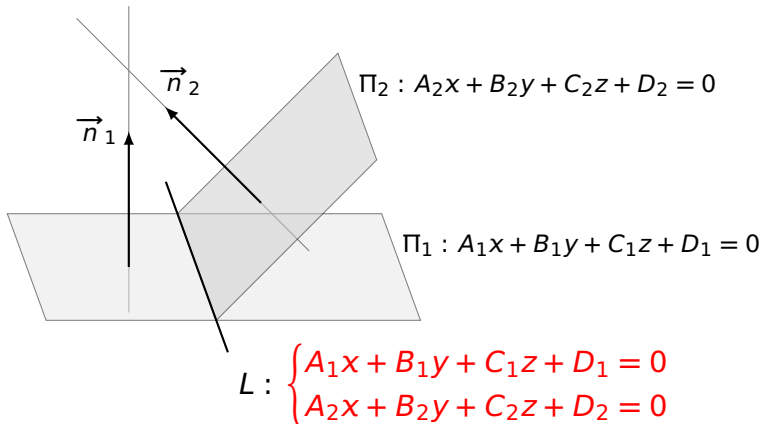


空间直线的一般方程



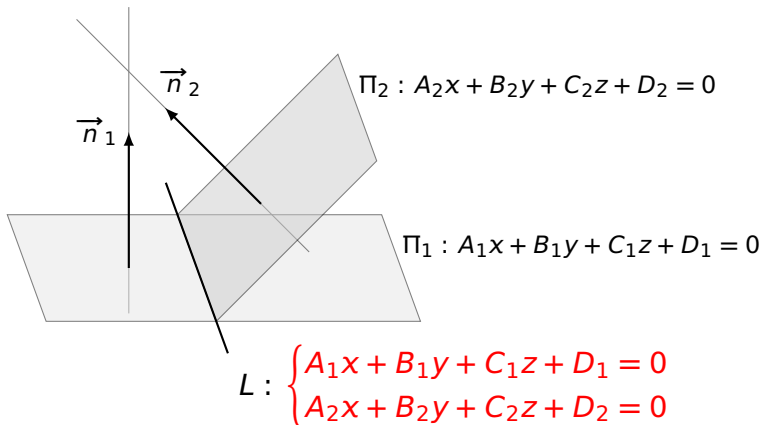
性质 L 的方向向量可取为 $\vec{s} =$

空间直线的一般方程



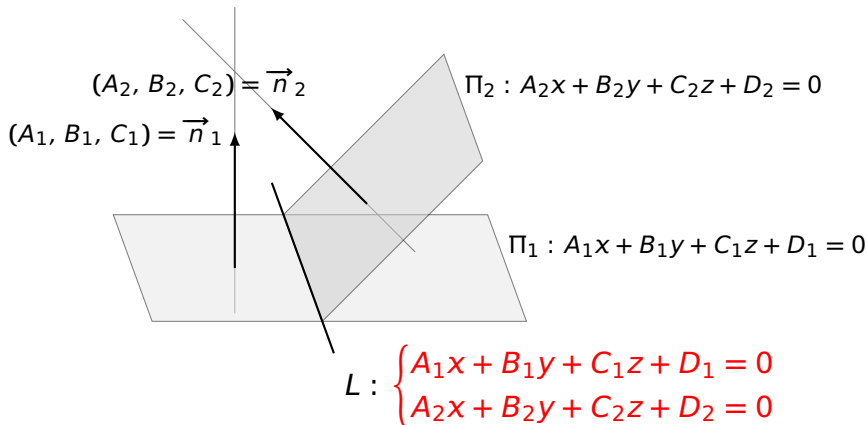
性质 L 的方向向量可取为 $\vec{s} =$

空间直线的一般方程



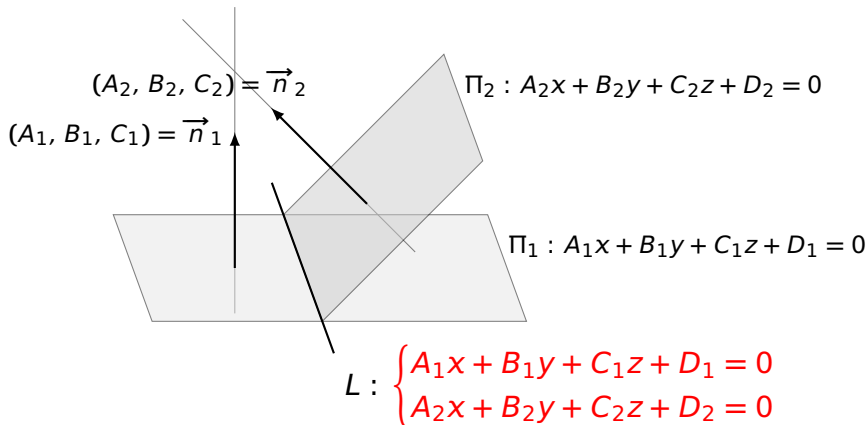
性质 L 的方向向量可取为 $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$

空间直线的一般方程



性质 L 的方向向量可取为 $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$

空间直线的一般方程



性质 L 的方向向量可取为 $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$

例 求直线 $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$ 的一个方向向量，并求出点向式方程。

例 求直线 $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$ 的一个方向向量，并求出点向式方程。

解 1. 取方向向量

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$

2. 求直线上一点。

3. 点向式：

例 求直线 $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$ 的一个方向向量，并求出点向式方程。

解 1. 取方向向量

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

2. 求直线上一点。

3. 点向式：

例 求直线 $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$ 的一个方向向量，并求出点向式方程。

解 1. 取方向向量

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

2. 求直线上一点。

3. 点向式：

例 求直线 $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$ 的一个方向向量，并求出点向式方程。

解 1. 取方向向量

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

2. 求直线上一点。

3. 点向式：

例 求直线 $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$ 的一个方向向量，并求出点向式方程。

解 1. 取方向向量

$$\begin{aligned}\vec{s} &= \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} \end{aligned}$$

2. 求直线上一点。

3. 点向式:

例 求直线 $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$ 的一个方向向量，并求出点向式方程。

解 1. 取方向向量

$$\begin{aligned}\vec{s} &= \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}\end{aligned}$$

2. 求直线上一点。

3. 点向式：

例 求直线 $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$ 的一个方向向量，并求出点向式方程。

解 1. 取方向向量

$$\begin{aligned}\vec{s} &= \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}\end{aligned}$$

2. 求直线上一点。

3. 点向式：

例 求直线 $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$ 的一个方向向量，并求出点向式方程。

解 1. 取方向向量

$$\begin{aligned}\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}\end{aligned}$$

2. 求直线上一点。

3. 点向式：

例 求直线 $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$ 的一个方向向量，并求出点向式方程。

解 1. 取方向向量

$$\begin{aligned}\vec{s} &= \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= -2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}\end{aligned}$$

2. 求直线上一点。

3. 点向式：

例 求直线 $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$ 的一个方向向量，并求出点向式方程。

解 1. 取方向向量

$$\begin{aligned}\vec{s} &= \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= -2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} = (-2, 1, 3)\end{aligned}$$

2. 求直线上一点。

3. 点向式：

例 求直线 $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$ 的一个方向向量，并求出点向式方程。

解 1. 取方向向量

$$\begin{aligned}\vec{s} &= \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= -2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} = (-2, 1, 3)\end{aligned}$$

2. 求直线上一点。

不妨取 $x = 0 \Rightarrow$

3. 点向式：

例 求直线 $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$ 的一个方向向量，并求出点向式方程。

解 1. 取方向向量

$$\begin{aligned}\vec{s} &= \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= -2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} = (-2, 1, 3)\end{aligned}$$

2. 求直线上一点。

$$\text{不妨取 } x = 0 \Rightarrow \begin{cases} -y + z = 1 \\ y + z = 4 \end{cases}$$

3. 点向式：

例 求直线 $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$ 的一个方向向量，并求出点向式方程。

解 1. 取方向向量

$$\begin{aligned}\vec{s} &= \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= -2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} = (-2, 1, 3)\end{aligned}$$

2. 求直线上一点。

$$\text{不妨取 } x = 0 \Rightarrow \begin{cases} -y + z = 1 \\ y + z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{2} \\ z = \frac{5}{2} \end{cases}$$

3. 点向式：

例 求直线 $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$ 的一个方向向量，并求出点向式方程。

解 1. 取方向向量

$$\begin{aligned}\vec{s} &= \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= -2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} = (-2, 1, 3)\end{aligned}$$

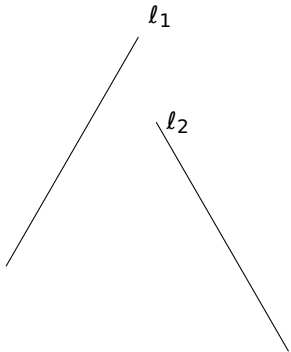
2. 求直线上一点。

$$\text{不妨取 } x = 0 \Rightarrow \begin{cases} -y + z = 1 \\ y + z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{2} \\ z = \frac{5}{2} \end{cases}$$

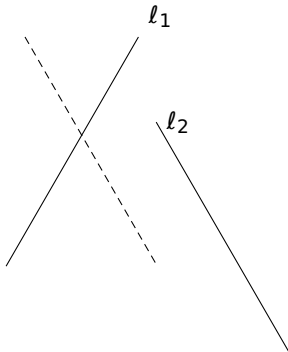
3. 点向式:

$$\frac{x}{-2} = \frac{y - \frac{3}{2}}{1} = \frac{z - \frac{5}{2}}{3}$$

直线与直线的夹角

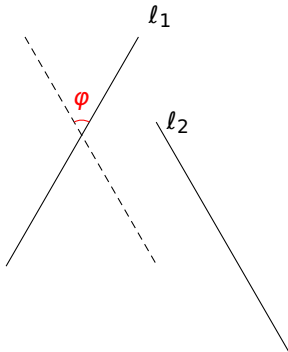


直线与直线的夹角



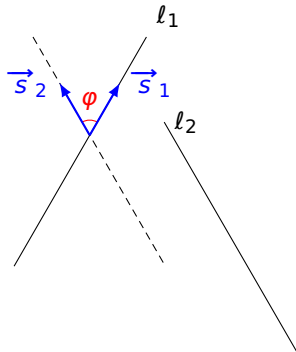
直线与直线的夹角

夹角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 且



直线与直线的夹角

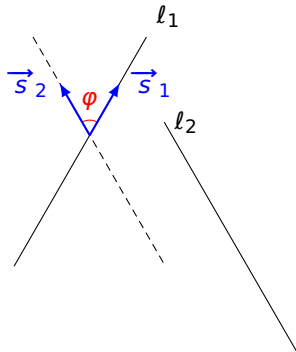
夹角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 且



直线与直线的夹角

夹角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 且

$$\cos \varphi = \cos(\angle(\vec{s}_1, \vec{s}_2))$$

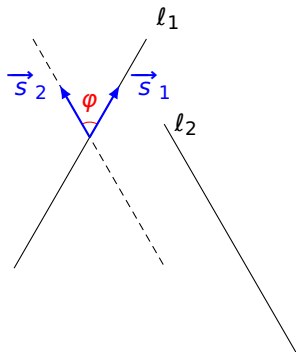


直线与直线的夹角

夹角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 且

$$\cos \varphi = \cos(\angle(\vec{s}_1, \vec{s}_2))$$

$$= \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|}$$

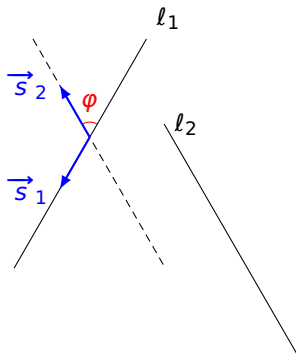


直线与直线的夹角

夹角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 且

$$\cos \varphi = \cos(\angle(\vec{s}_1, \vec{s}_2))$$

$$= \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|}$$

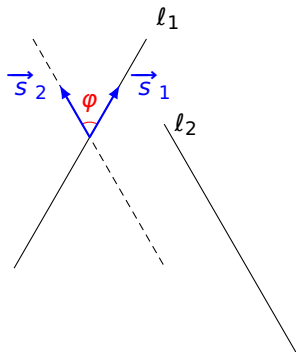


直线与直线的夹角

夹角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 且

$$\cos \varphi = \cos(\angle(\vec{s}_1, \vec{s}_2))$$

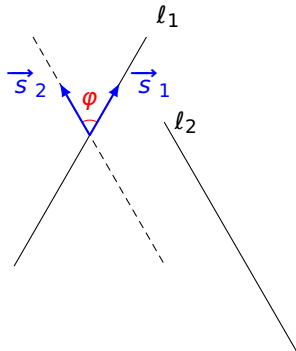
$$= \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|}$$



直线与直线的夹角

夹角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 且

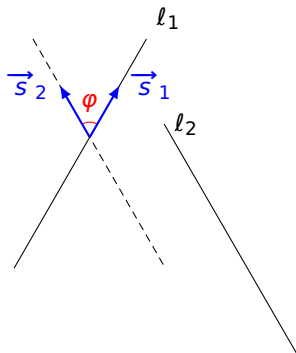
$$\begin{aligned}\cos \varphi &= |\cos(\angle(\vec{s}_1, \vec{s}_2))| \\ &= \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|}\end{aligned}$$



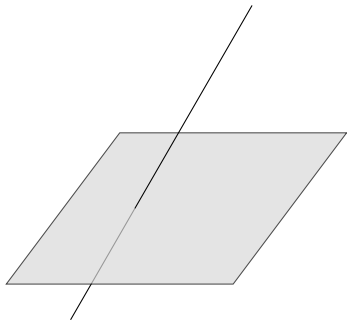
直线与直线的夹角

夹角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 且

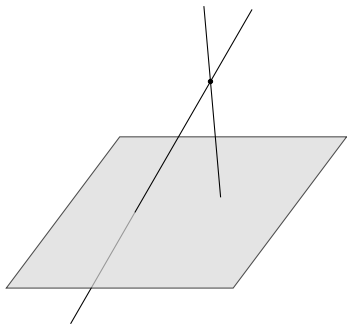
$$\begin{aligned}\cos \varphi &= |\cos(\angle(\vec{s}_1, \vec{s}_2))| \\ &= \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|}\end{aligned}$$



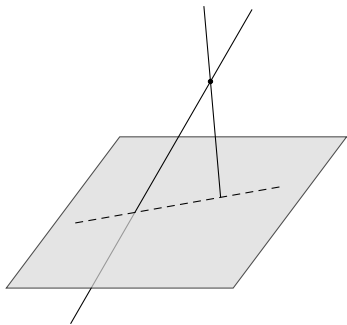
直线与平面的夹角



直线与平面的夹角

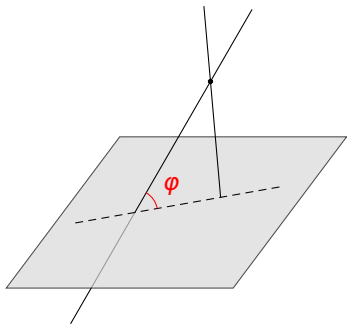


直线与平面的夹角



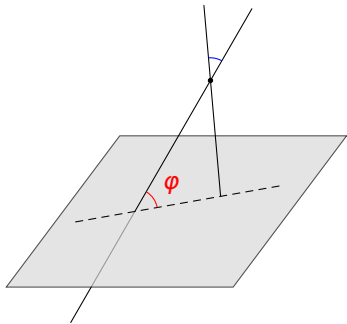
直线与平面的夹角

夹角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 且



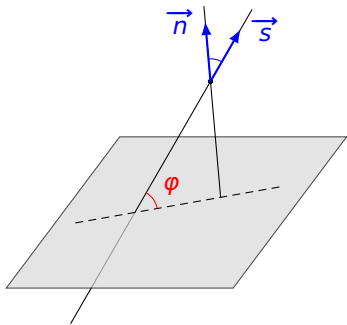
直线与平面的夹角

夹角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 且



直线与平面的夹角

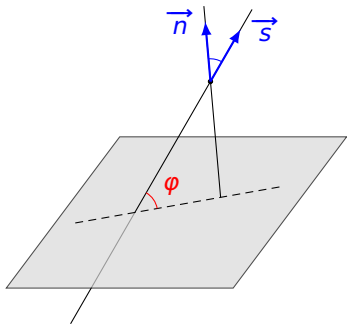
夹角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 且



直线与平面的夹角

夹角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 且

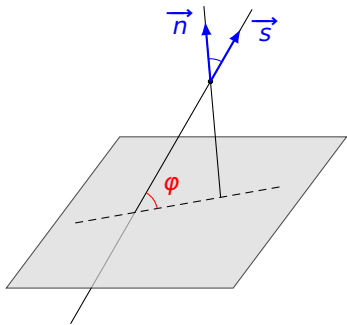
$$\cos(\angle(\vec{n}, \vec{s}))$$



直线与平面的夹角

夹角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 且

$$\sin \varphi = \cos(\angle(\vec{n}, \vec{s}))$$

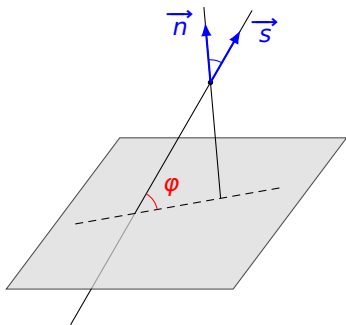


直线与平面的夹角

夹角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 且

$$\sin \varphi = \cos(\angle(\vec{n}, \vec{s}))$$

$$= \frac{\vec{n} \cdot \vec{s}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|}$$

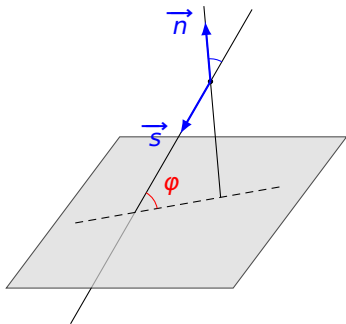


直线与平面的夹角

夹角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 且

$$\sin \varphi = \cos(\angle(\vec{n}, \vec{s}))$$

$$= \frac{\vec{n} \cdot \vec{s}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|}$$

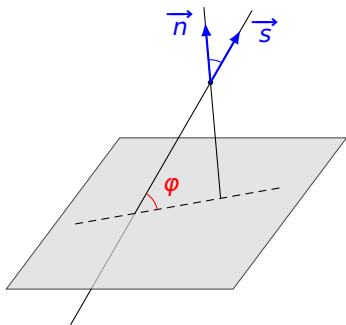


直线与平面的夹角

夹角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 且

$$\sin \varphi = \cos(\angle(\vec{n}, \vec{s}))$$

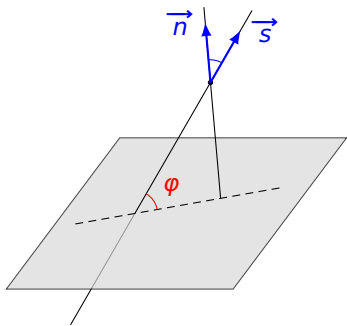
$$= \frac{\vec{n} \cdot \vec{s}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|}$$



直线与平面的夹角

夹角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 且

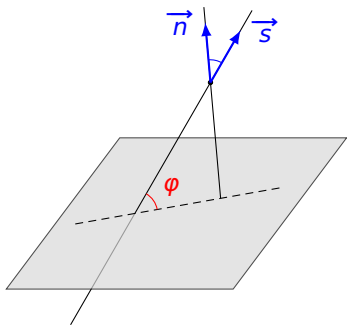
$$\begin{aligned}\sin \varphi &= |\cos(\angle(\vec{n}, \vec{s}))| \\ &= \frac{|\vec{n} \cdot \vec{s}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|}\end{aligned}$$



直线与平面的夹角

夹角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 且

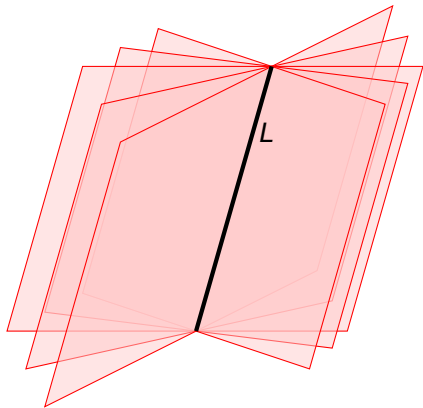
$$\begin{aligned}\sin \varphi &= |\cos(\angle(\vec{n}, \vec{s}))| \\ &= \frac{|\vec{n} \cdot \vec{s}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|}\end{aligned}$$



平面束及其方程

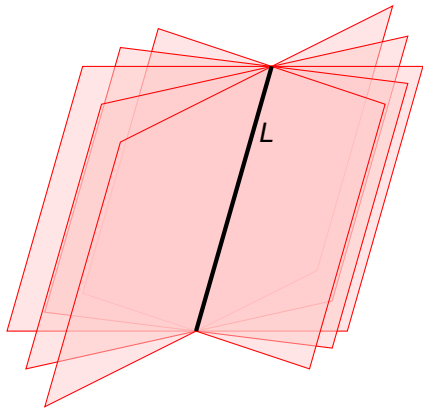


平面束及其方程



过定直线 L 的平面束

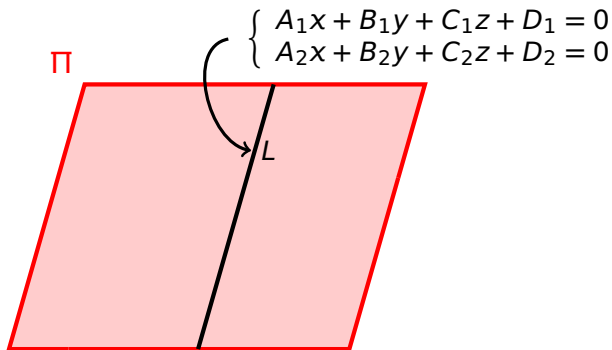
平面束及其方程



过定直线 L 的平面束

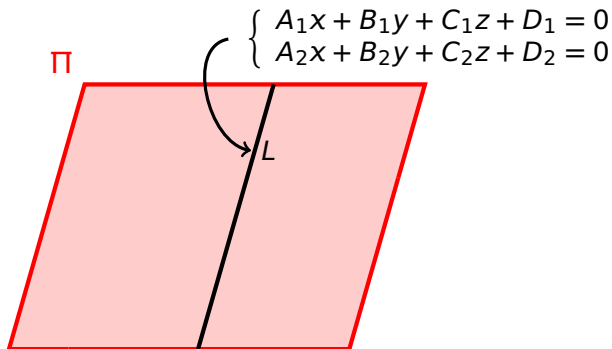
问题 给出平面束中的平面，
其方程的通式

平面束及其方程



过直线 L 的平面 Π 的方程是什么？

平面束及其方程

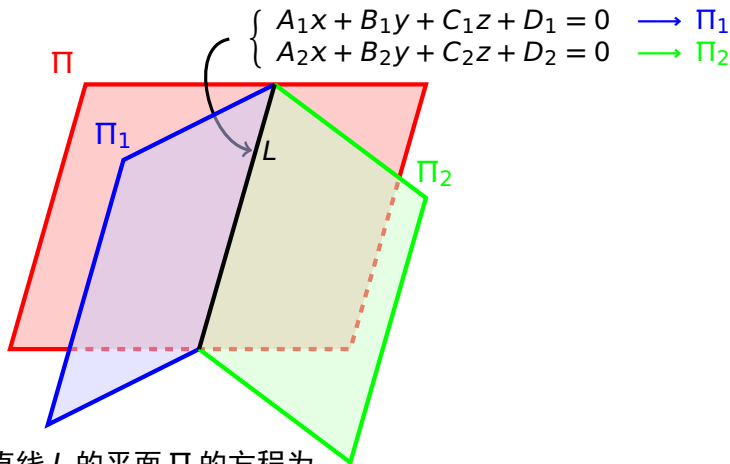


则过直线 L 的平面 Π 的方程为

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

其中 λ, μ 为（不全为零的）待定的常数。

平面束及其方程

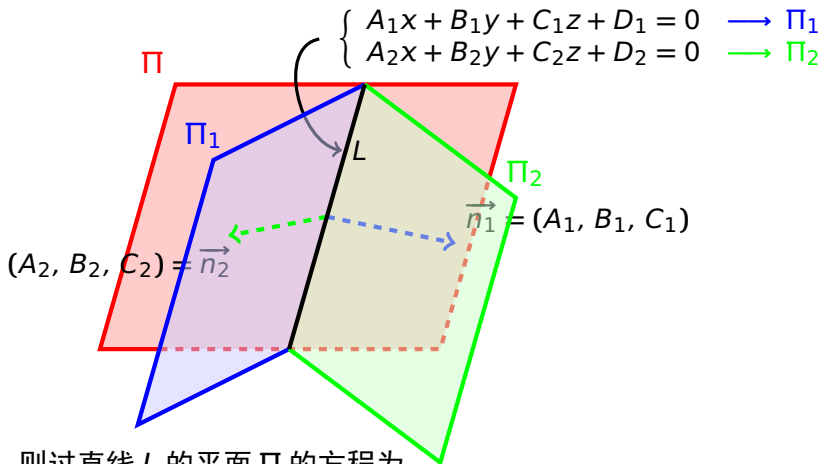


则过直线 L 的平面 Π 的方程为

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

其中 λ, μ 为（不全为零的）待定的常数。

平面束及其方程

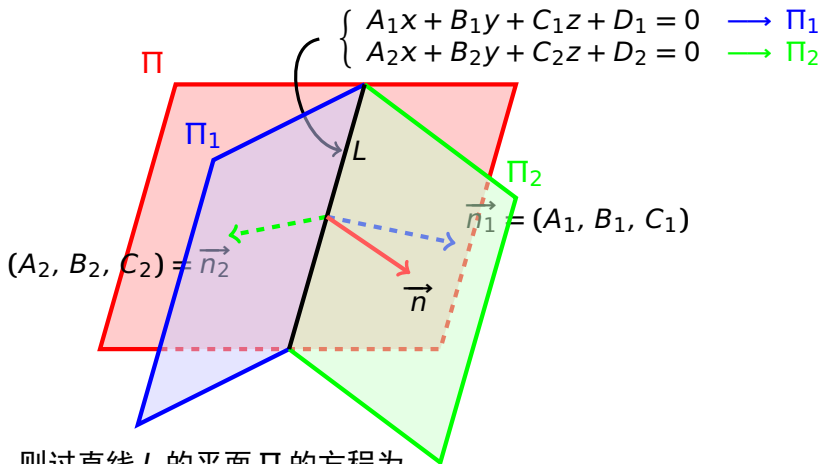


则过直线 L 的平面 Π 的方程为

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

其中 λ, μ 为（不全为零的）待定的常数。

平面束及其方程

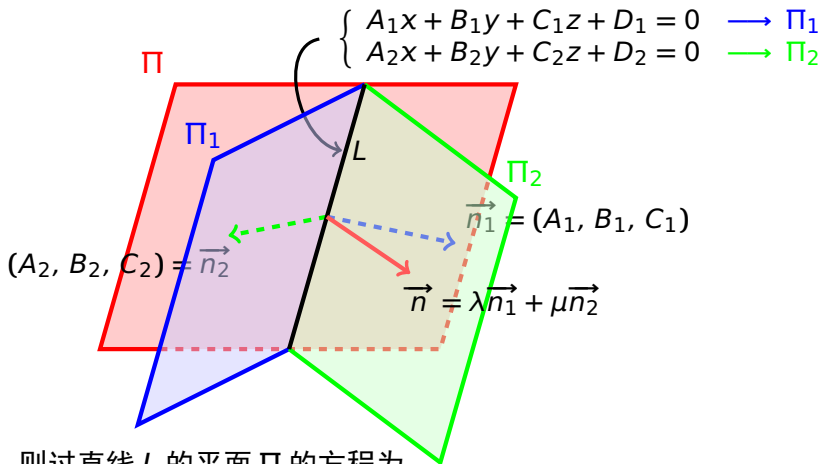


则过直线 L 的平面 Π 的方程为

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

其中 λ, μ 为（不全为零的）待定的常数。

平面束及其方程

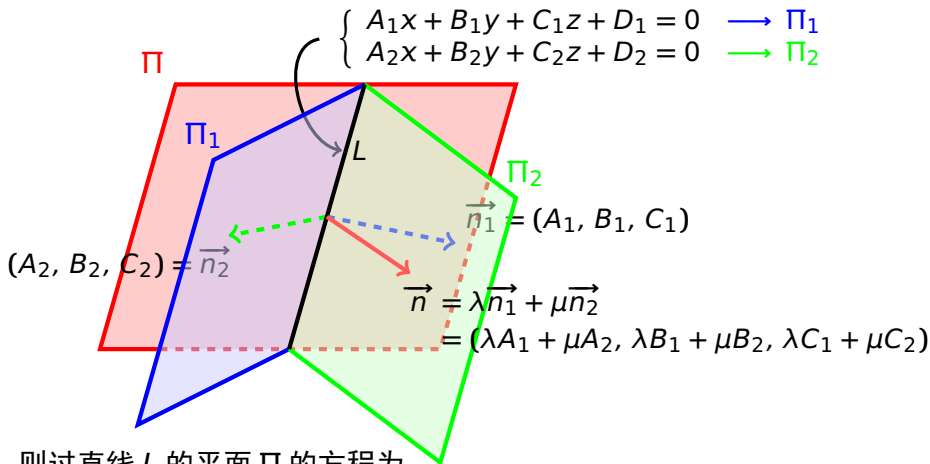


则过直线 L 的平面 Π 的方程为

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

其中 λ, μ 为（不全为零的）待定的常数。

平面束及其方程

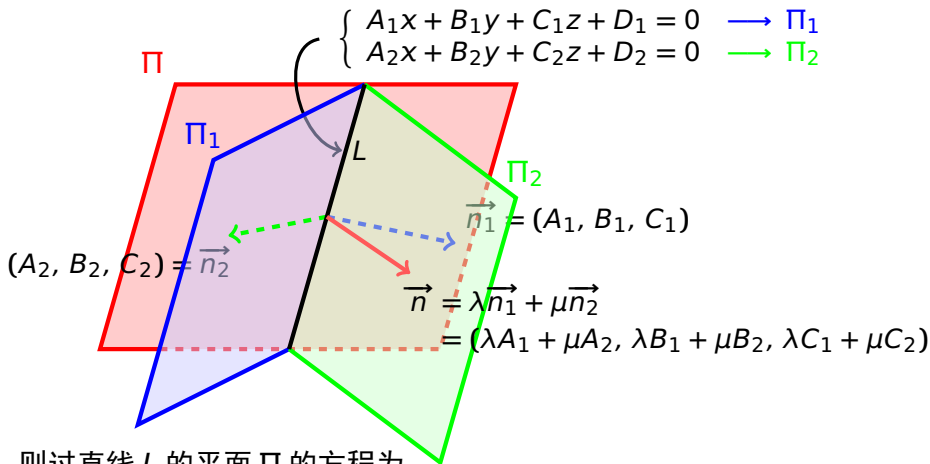


则过直线 L 的平面 Π 的方程为

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

其中 λ, μ 为（不全为零的）待定的常数。

平面束及其方程



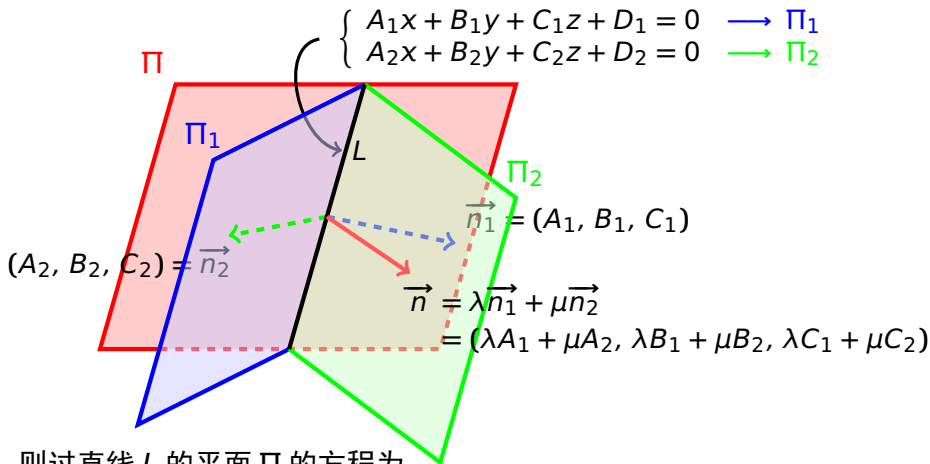
则过直线 L 的平面 Π 的方程为

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

Π'

其中 λ, μ 为（不全为零的）待定的常数。

平面束及其方程



则过直线 L 的平面 Π 的方程为

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

$\Pi' = \Pi$

其中 λ, μ 为（不全为零的）待定的常数。

例 求过点 $M(1, 2, 3)$ 和直线 $\begin{cases} x - 4z = 3 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$ 的平面的方程。

利用平面束方程

例 求过点 $M(1, 2, 3)$ 和直线 $\begin{cases} x - 4z = 3 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$ 的平面的方程。

利用平面束方程

解 1. 过直线 $\begin{cases} x - 4z - 3 = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$ 的平面可设为

例 求过点 $M(1, 2, 3)$ 和直线 $\begin{cases} x - 4z = 3 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$ 的平面的方程。

利用平面束方程

解 1. 过直线 $\begin{cases} x - 4z - 3 = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$ 的平面可设为

$$\lambda(x - 4z - 3) + \mu(2y - z) = 0$$

其中 λ 和 μ 是待定的常数。

例 求过点 $M(1, 2, 3)$ 和直线 $\begin{cases} x - 4z = 3 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$ 的平面的方程。

利用平面束方程

解 1. 过直线 $\begin{cases} x - 4z - 3 = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$ 的平面可设为

$$\lambda(x - 4z - 3) + \mu(2y - z) = 0$$

其中 λ 和 μ 是待定的常数。

2. 因为 $M(1, 2, 3)$ 在平面上, 所以 $(1, 2, 3)$ 满足平面方程:

$$\lambda(1 - 4 \cdot 3 - 3) + \mu(2 \cdot 2 - 3) = 0$$

例 求过点 $M(1, 2, 3)$ 和直线 $\begin{cases} x - 4z = 3 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$ 的平面的方程。

利用平面束方程

解 1. 过直线 $\begin{cases} x - 4z - 3 = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$ 的平面可设为

$$\lambda(x - 4z - 3) + \mu(2y - z) = 0$$

其中 λ 和 μ 是待定的常数。

2. 因为 $M(1, 2, 3)$ 在平面上, 所以 $(1, 2, 3)$ 满足平面方程:

$$\lambda(1 - 4 \cdot 3 - 3) + \mu(2 \cdot 2 - 3) = 0 \Rightarrow -14\lambda + \mu = 0$$

例 求过点 $M(1, 2, 3)$ 和直线 $\begin{cases} x - 4z = 3 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$ 的平面的方程。

利用平面束方程

解 1. 过直线 $\begin{cases} x - 4z - 3 = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$ 的平面可设为

$$\lambda(x - 4z - 3) + \mu(2y - z) = 0$$

其中 λ 和 μ 是待定的常数。

2. 因为 $M(1, 2, 3)$ 在平面上, 所以 $(1, 2, 3)$ 满足平面方程:

$$\lambda(1 - 4 \cdot 3 - 3) + \mu(2 \cdot 2 - 3) = 0 \Rightarrow -14\lambda + \mu = 0$$

不妨取 $\lambda = 1, \mu = 14$ 。

例 求过点 $M(1, 2, 3)$ 和直线 $\begin{cases} x - 4z = 3 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$ 的平面的方程。

利用平面束方程

解 1. 过直线 $\begin{cases} x - 4z - 3 = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$ 的平面可设为

$$\lambda(x - 4z - 3) + \mu(2y - z) = 0$$

其中 λ 和 μ 是待定的常数。

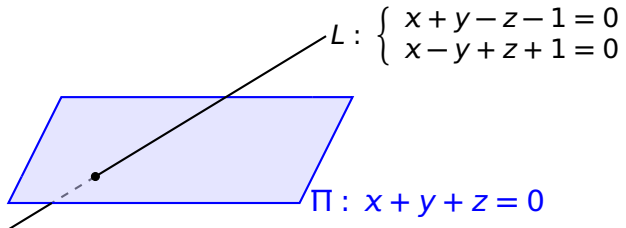
2. 因为 $M(1, 2, 3)$ 在平面上, 所以 $(1, 2, 3)$ 满足平面方程:

$$\lambda(1 - 4 \cdot 3 - 3) + \mu(2 \cdot 2 - 3) = 0 \Rightarrow -14\lambda + \mu = 0$$

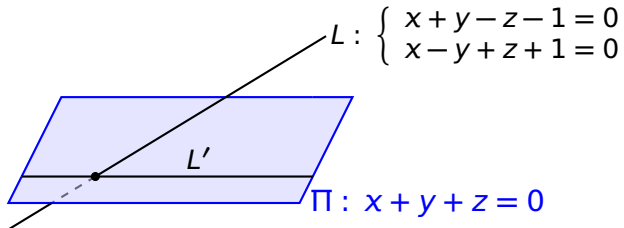
不妨取 $\lambda = 1, \mu = 14$ 。所以平面方程是

$$x + 28y - 18z - 3 = 0.$$

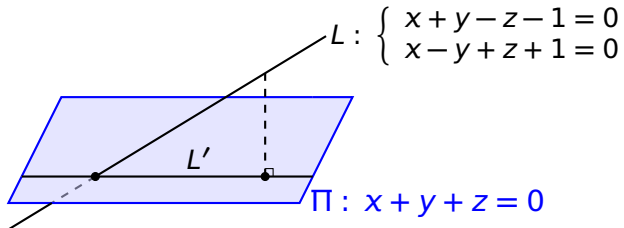
平面束方程应用：求投影直线方程



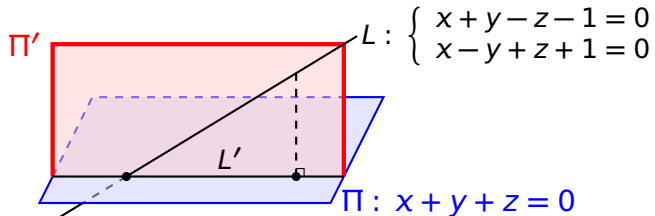
平面束方程应用：求投影直线方程



平面束方程应用：求投影直线方程



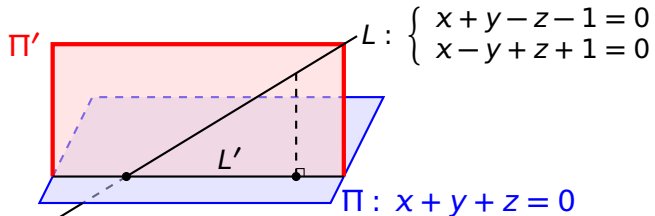
平面束方程应用：求投影直线方程



解：

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面。

平面束方程应用：求投影直线方程

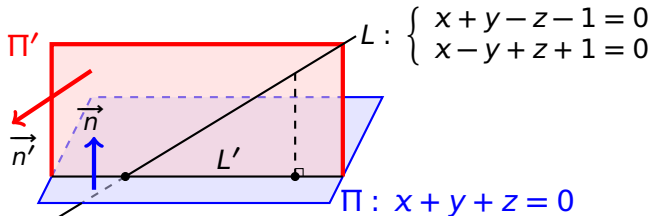


解：

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面。由于 Π' 过 L ，可设 Π' 方程为

$$\lambda(x + y - z - 1) + \mu(x - y + z + 1) = 0 \quad (\text{其中 } \lambda, \mu \text{ 待定})$$

平面束方程应用：求投影直线方程

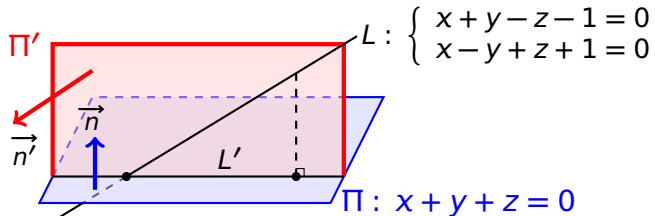


解：

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面。由于 Π' 过 L ，可设 Π' 方程为

$$\lambda(x + y - z - 1) + \mu(x - y + z + 1) = 0 \quad (\text{其中 } \lambda, \mu \text{ 待定})$$

平面束方程应用：求投影直线方程



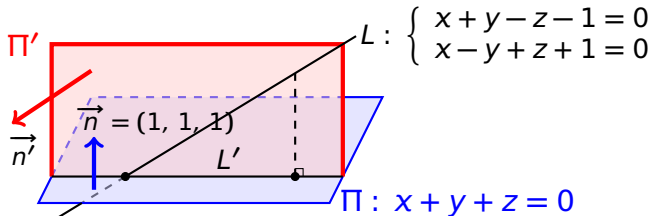
解:

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面。由于 Π' 过 L , 可设 Π' 方程为

$$\lambda(x + y - z - 1) + \mu(x - y + z + 1) = 0 \quad (\text{其中 } \lambda, \mu \text{ 待定})$$

2. $\vec{n}' \perp \vec{n} \Rightarrow \vec{n}' \cdot \vec{n} = \quad \quad \quad = 0$

平面束方程应用：求投影直线方程



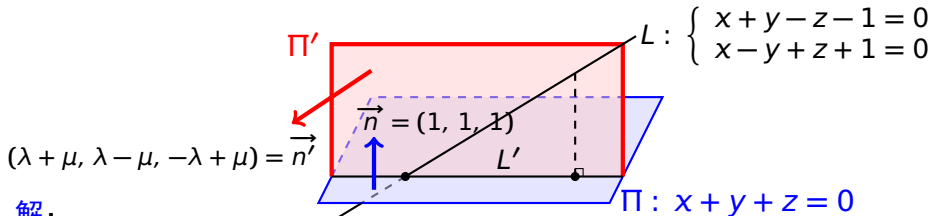
解：

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面。由于 Π' 过 L ，可设 Π' 方程为

$$\lambda(x + y - z - 1) + \mu(x - y + z + 1) = 0 \quad (\text{其中 } \lambda, \mu \text{ 待定})$$

2. $\vec{n}' \perp \vec{n} \Rightarrow \vec{n}' \cdot \vec{n} = 0$

平面束方程应用：求投影直线方程



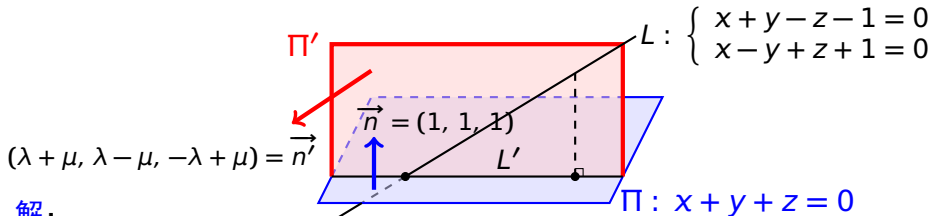
解：

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面。由于 Π' 过 L ，可设 Π' 方程为

$$\lambda(x + y - z - 1) + \mu(x - y + z + 1) = 0 \quad (\text{其中 } \lambda, \mu \text{ 待定})$$

$$2. \quad \vec{n}' \perp \vec{n} \Rightarrow \vec{n}' \cdot \vec{n} = \quad \quad \quad = 0$$

平面束方程应用：求投影直线方程



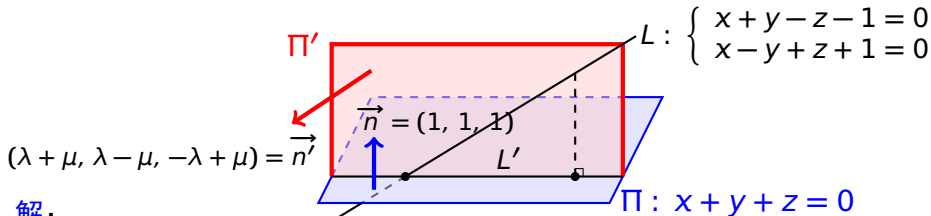
解：

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面。由于 Π' 过 L ，可设 Π' 方程为

$$\lambda(x + y - z - 1) + \mu(x - y + z + 1) = 0 \quad (\text{其中 } \lambda, \mu \text{ 待定})$$

2. $\vec{n}' \perp \vec{n} \Rightarrow \vec{n}' \cdot \vec{n} = 1 \cdot (\lambda + \mu) + 1 \cdot (\lambda - \mu) + 1 \cdot (-\lambda + \mu) = 0$

平面束方程应用：求投影直线方程



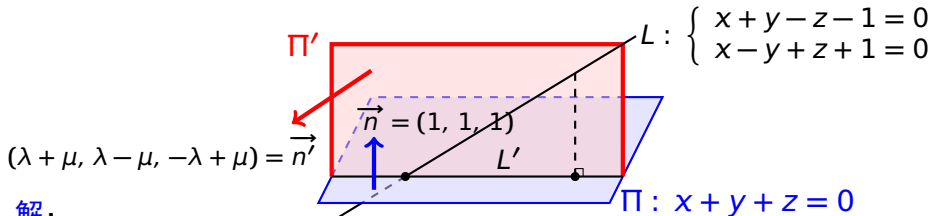
解：

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面。由于 Π' 过 L ，可设 Π' 方程为

$$\lambda(x + y - z - 1) + \mu(x - y + z + 1) = 0 \quad (\text{其中 } \lambda, \mu \text{ 待定})$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \vec{n}' \perp \vec{n} &\Rightarrow \vec{n}' \cdot \vec{n} = 1 \cdot (\lambda + \mu) + 1 \cdot (\lambda - \mu) + 1 \cdot (-\lambda + \mu) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda + \mu = 0 \end{aligned}$$

平面束方程应用：求投影直线方程



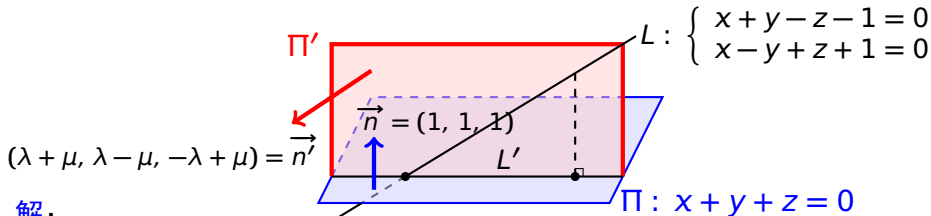
解:

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面。由于 Π' 过 L , 可设 Π' 方程为

$$\lambda(x + y - z - 1) + \mu(x - y + z + 1) = 0 \quad (\text{其中 } \lambda, \mu \text{ 待定})$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \vec{n}' \perp \vec{n} &\Rightarrow \vec{n}' \cdot \vec{n} = 1 \cdot (\lambda + \mu) + 1 \cdot (\lambda - \mu) + 1 \cdot (-\lambda + \mu) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda + \mu = 0 \quad \text{不妨取} \quad \lambda = 1, \mu = -1 \end{aligned}$$

平面束方程应用：求投影直线方程



解：

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面。由于 Π' 过 L ，可设 Π' 方程为

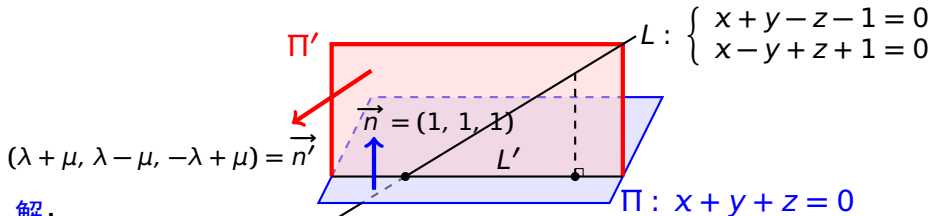
$$\lambda(x + y - z - 1) + \mu(x - y + z + 1) = 0 \quad (\text{其中 } \lambda, \mu \text{ 待定})$$

$$2. \quad \vec{n}' \perp \vec{n} \Rightarrow \vec{n}' \cdot \vec{n} = 1 \cdot (\lambda + \mu) + 1 \cdot (\lambda - \mu) + 1 \cdot (-\lambda + \mu) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda + \mu = 0 \quad \text{不妨取} \quad \lambda = 1, \mu = -1$$

$$\Rightarrow \Pi' \text{ 的方程: } y - z - 1 = 0$$

平面束方程应用：求投影直线方程



解：

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面。由于 Π' 过 L ，可设 Π' 方程为

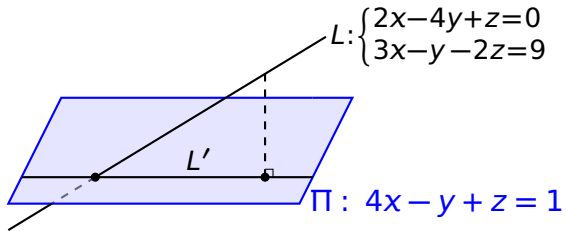
$$\lambda(x + y - z - 1) + \mu(x - y + z + 1) = 0 \quad (\text{其中 } \lambda, \mu \text{ 待定})$$

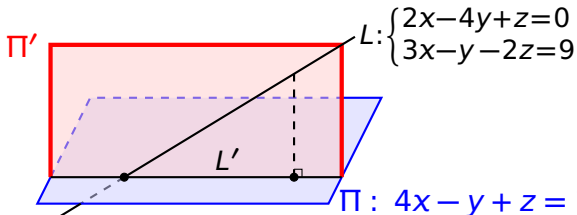
$$2. \quad \vec{n}' \perp \vec{n} \Rightarrow \vec{n}' \cdot \vec{n} = 1 \cdot (\lambda + \mu) + 1 \cdot (\lambda - \mu) + 1 \cdot (-\lambda + \mu) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda + \mu = 0 \quad \text{不妨取} \quad \lambda = 1, \mu = -1$$

$$\Rightarrow \Pi' \text{ 的方程: } y - z - 1 = 0$$

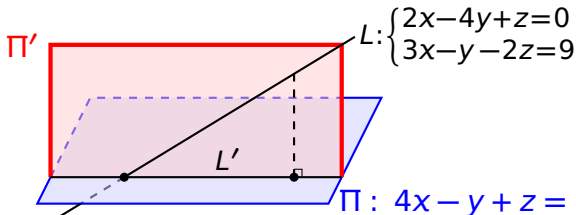
$$3. \text{ 投影直线 } L' \text{ 的方程是 } \begin{cases} y - z - 1 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$





解:

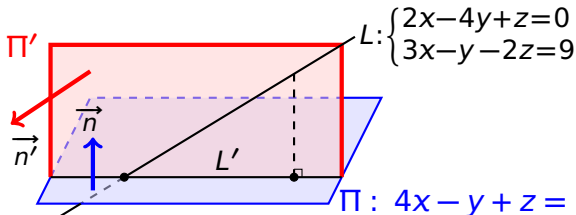
1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面。



解:

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面。由于 Π' 过 L , 可设 Π' 方程为

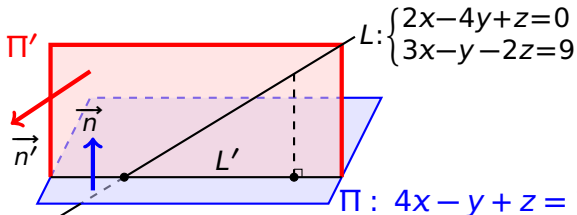
$$\lambda(2x - 4y + z) + \mu(3x - y - 2z - 9) = 0 \quad (\text{其中 } \lambda, \mu \text{ 待定})$$



解:

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面。由于 Π' 过 L ，可设 Π' 方程为

$$\lambda(2x - 4y + z) + \mu(3x - y - 2z - 9) = 0 \quad (\text{其中 } \lambda, \mu \text{ 待定})$$

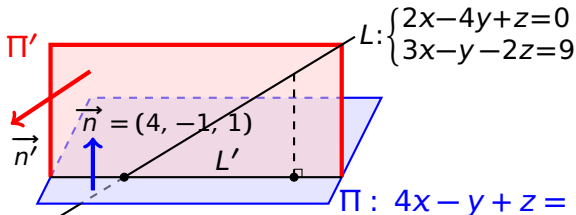


解:

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面。由于 Π' 过 L ，可设 Π' 方程为

$$\lambda(2x - 4y + z) + \mu(3x - y - 2z - 9) = 0 \quad (\text{其中 } \lambda, \mu \text{ 待定})$$

2. $\vec{n}' \perp \vec{n} \Rightarrow 0 = \vec{n}' \cdot \vec{n}$

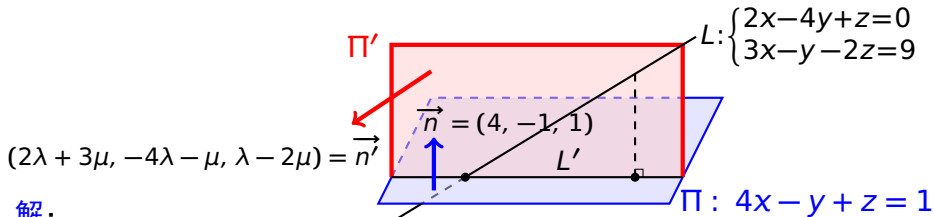


解:

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面。由于 Π' 过 L , 可设 Π' 方程为

$$\lambda(2x - 4y + z) + \mu(3x - y - 2z - 9) = 0 \quad (\text{其中 } \lambda, \mu \text{ 待定})$$

2. $\vec{n}' \perp \vec{n} \Rightarrow 0 = \vec{n}' \cdot \vec{n}$

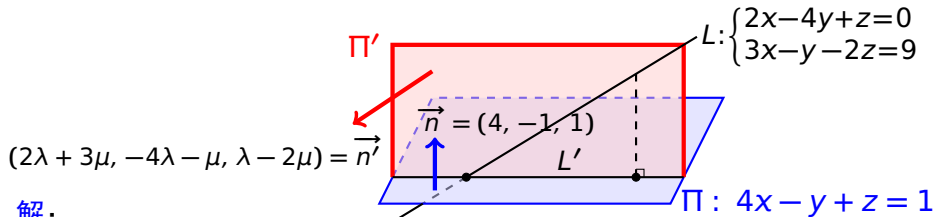


解:

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面。由于 Π' 过 L , 可设 Π' 方程为

$$\lambda(2x - 4y + z) + \mu(3x - y - 2z - 9) = 0 \quad (\text{其中 } \lambda, \mu \text{ 待定})$$

2. $\vec{n}' \perp \vec{n} \Rightarrow 0 = \vec{n}' \cdot \vec{n}$



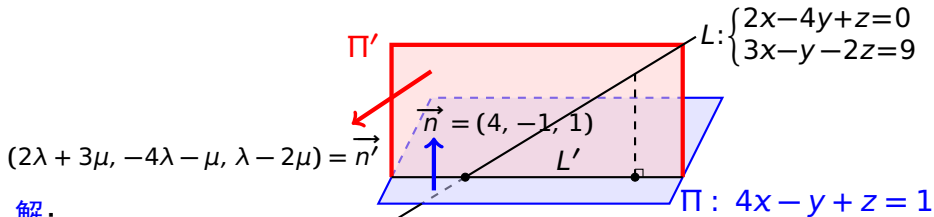
解:

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面。由于 Π' 过 L , 可设 Π' 方程为

$$\lambda(2x - 4y + z) + \mu(3x - y - 2z - 9) = 0 \quad (\text{其中 } \lambda, \mu \text{ 待定})$$

2. $\vec{n}' \perp \vec{n} \Rightarrow 0 = \vec{n}' \cdot \vec{n}$

$$= 4 \cdot (2\lambda + 3\mu) + (-1) \cdot (-4\lambda - \mu) + 1 \cdot (\lambda - 2\mu)$$



解:

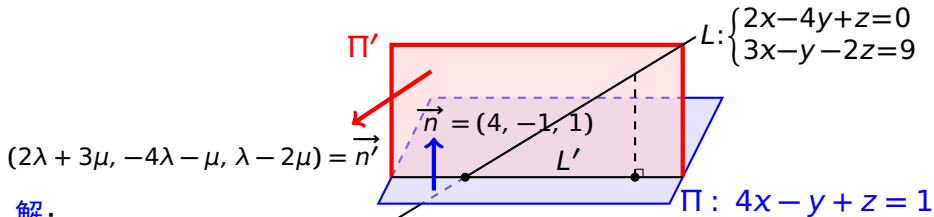
1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面。由于 Π' 过 L , 可设 Π' 方程为

$$\lambda(2x - 4y + z) + \mu(3x - y - 2z - 9) = 0 \quad (\text{其中 } \lambda, \mu \text{ 待定})$$

2. $\vec{n}' \perp \vec{n} \Rightarrow 0 = \vec{n}' \cdot \vec{n}$

$$= 4 \cdot (2\lambda + 3\mu) + (-1) \cdot (-4\lambda - \mu) + 1 \cdot (\lambda - 2\mu)$$

$$\Rightarrow 13\lambda + 11\mu = 0$$



解:

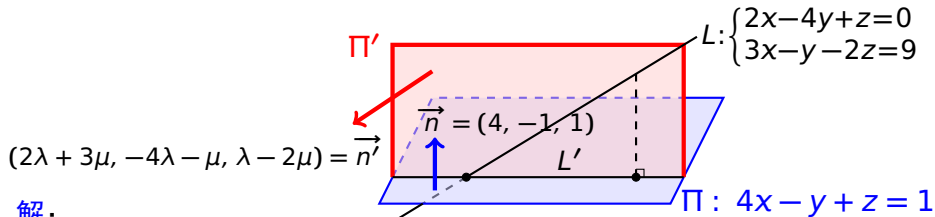
1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面。由于 Π' 过 L , 可设 Π' 方程为

$$\lambda(2x - 4y + z) + \mu(3x - y - 2z - 9) = 0 \quad (\text{其中 } \lambda, \mu \text{ 待定})$$

2. $\vec{n}' \perp \vec{n} \Rightarrow 0 = \vec{n}' \cdot \vec{n}$

$$= 4 \cdot (2\lambda + 3\mu) + (-1) \cdot (-4\lambda - \mu) + 1 \cdot (\lambda - 2\mu)$$

$$\Rightarrow 13\lambda + 11\mu = 0 \quad \text{不妨取 } \lambda = 11, \mu = -13$$



解:

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面。由于 Π' 过 L , 可设 Π' 方程为

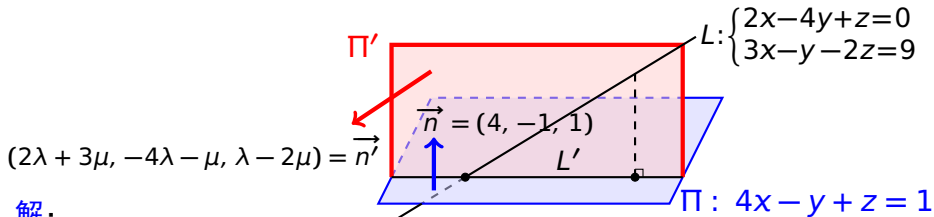
$$\lambda(2x - 4y + z) + \mu(3x - y - 2z - 9) = 0 \quad (\text{其中 } \lambda, \mu \text{ 待定})$$

2. $\vec{n}' \perp \vec{n} \Rightarrow 0 = \vec{n}' \cdot \vec{n}$

$$= 4 \cdot (2\lambda + 3\mu) + (-1) \cdot (-4\lambda - \mu) + 1 \cdot (\lambda - 2\mu)$$

$$\Rightarrow 13\lambda + 11\mu = 0 \quad \text{不妨取 } \lambda = 11, \mu = -13$$

$$\Rightarrow \Pi' \text{ 的方程: } 17x + 31y - 37z - 117 = 0$$



解:

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面。由于 Π' 过 L , 可设 Π' 方程为

$$\lambda(2x - 4y + z) + \mu(3x - y - 2z - 9) = 0 \quad (\text{其中 } \lambda, \mu \text{ 待定})$$

2. $\vec{n}' \perp \vec{n} \Rightarrow 0 = \vec{n}' \cdot \vec{n}$

$$= 4 \cdot (2\lambda + 3\mu) + (-1) \cdot (-4\lambda - \mu) + 1 \cdot (\lambda - 2\mu)$$

$$\Rightarrow 13\lambda + 11\mu = 0 \quad \text{不妨取 } \lambda = 11, \mu = -13$$

$$\Rightarrow \Pi' \text{ 的方程: } 17x + 31y - 37z - 117 = 0$$

3. 投影直线 L' 的方程是
$$\begin{cases} 17x + 31y - 37z - 117 = 0 \\ 4x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$$