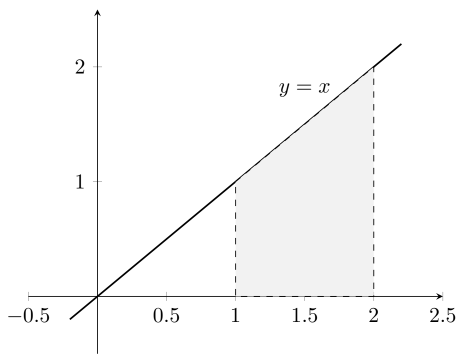
第 05 周作业解答

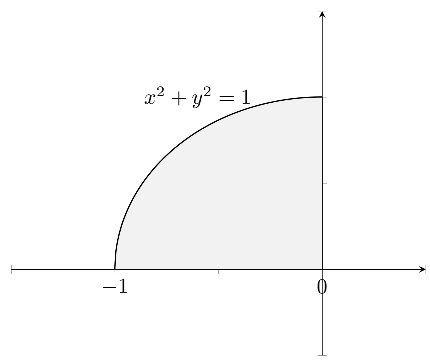
练习 1. 用定积分的几何意义计算 $\int_1^2 xdx$
步骤：1. 确定曲边梯形；2. 计算曲边梯形的面积

解：



利用梯形面积公式：梯形面积 $=\frac{1}{2}(1+2)\cdot 1 = \frac{3}{2}$。所以 $\int_1^2 xdx = \frac{3}{2}$。(或者将梯形面积视为两个三角形面积之差)

练习 2. 用定积分表示右图阴影部分面积。
并通过计算面积，求出该定积分的值。



解：曲线的方程是

$$y = \sqrt{1-x^2}.$$

所以阴影部分的面积用定积分表示是

$$\int_{-1}^{0} \sqrt{1-x^2}dx.$$

注意到该阴影区域的正好是四分之一个半径为 1 的圆盘，所以面积是 $\frac{1}{4}\pi$，进而可知

$$\int_{-1}^{0} \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{4}\pi.$$

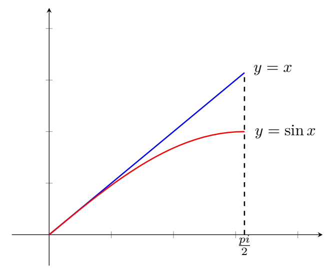
练习 3. 设 $\int_0^1 2f(x)dx = 6$，$\int_1^3 f(x)dx = 8$，$\int_0^3 g(x)dx = 2$，求：$\int_0^3 [5f(x) - 4g(x)]dx$

解：

$$\begin{aligned}\int_0^3 [5f(x)-4g(x)]dx &= 5\int_0^3 f(x)dx - 4\int_0^3 g(x)dx \\ &= 5\left(\int_0^1 f(x)dx + \int_1^3 f(x)dx\right) - 4\cdot 2 \\ &= 5(3+8)-8 \\ &= 47\end{aligned}$$

练习 4. 根据定积分的性质，比较三组定积分的大小：(1) $\int_0^1 x^2dx$ 与 $\int_0^1 x^3dx$；(2) $\int_1^2 e^xdx$ 与 $\int_1^2 e^{x^2}dx$；(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx$ 与 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin xdx$。

提示：



解：(1)$\int_0^1 x^2dx > \int_0^1 x^3dx$

(2)$\int_1^2 e^xdx < \int_1^2 e^{x^2}dx$

(3)$\int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin xdx$

练习 5. 求导数：(1) $\frac{d}{dx}\int_x^1 \sqrt{1+t^4}dt$；(2) $\frac{d}{dx}\int_{\sqrt{x}}^x e^{-t^2}dt$

解：(1)

$$\frac{d}{dx}\int_x^1 \sqrt{1+t^4}dt = -\frac{d}{dx}\int_1^x \sqrt{1+t^4}dt = -\sqrt{1+x^4}$$

(2)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_{\sqrt{x}}^x e^{-t^2}dt &= \frac{d}{dx}\left(\int_{\sqrt{x}}^0 e^{-t^2}dt + \int_0^x e^{-t^2}dt\right) = -\frac{d}{dx}\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}dt + \frac{d}{dx}\int_0^x e^{-t^2}dt \\ &= -e^{-(\sqrt{x})^2}\cdot(\sqrt{x})' + e^{-x^2} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-x} + e^{-x^2}\end{aligned}$$

练习 6. 用牛顿—莱布尼茨公式求下列定积分

(1) $\int_0^1 (x^2+e^x+100^x)dx$；(2) $\int_9^{16} \frac{\sqrt{x}+2}{x}dx$；(3) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos x + \sin x)dx$

解：(1)

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x^2+e^x+100^x)dx &= \left(\frac{1}{3}x^3 + e^x + \frac{100^x}{\ln 100}\right)\Big|_0^1 \\ &= \left(\frac{1}{3} + e + \frac{100}{\ln 100}\right) - \left(0 + 1 + \frac{1}{\ln 100}\right) = -\frac{2}{3} + e + \frac{99}{2\ln 10}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int_9^{16} \frac{\sqrt{x}+2}{x}dx &= \int_9^{16} \frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{2}{x}dx = \int_9^{16} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x}dx = \left(2\sqrt{x} + 2\ln|x|\right)\Big|_9^{16} \\ &= (2\cdot\sqrt{16} + 2\ln 16) - (2\cdot\sqrt{9} + 2\ln 9) = 2 + 4\ln\frac{4}{3}\end{aligned}$$

(3)

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\cos x+\sin x)dx=(\sin x-\cos x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=(\sin\pi-\cos\pi)-(\sin\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{2})=(0+1)-(1-0)=0$$