第 9 章 f：多元函数微分学的几何应用

数学系　　梁卓滨

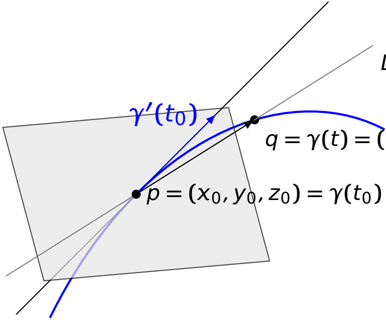
2017.07 暑期班

曲线的切线方程、法平面方程

$$L \quad \parallel \quad \lim_{q\to p}\overrightarrow{pq}=0 \parallel \quad \lim_{t\to t_0}\frac{\overrightarrow{pq}}{t-t_0}=\Big(\lim_{t\to t_0}\frac{u(t)-u(t_0)}{t-t_0},\ \lim_{t\to t_0}\frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0},$$

$$=(u'(t_0),\ v'(t_0),\ w'(t_0))=\gamma'(t$$

$$L_{pq} \quad \parallel \quad \overrightarrow{pq} \parallel \quad \frac{\overrightarrow{pq}}{t-t_0}=\Big(\frac{u(t)-u(t_0)}{t-t_0},\ \frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0},\ \frac{w(t)-w(t_0}{t-t_0}$$



- 曲线的切线方程

$$\frac{x-x_0}{u'(t_0)}=\frac{y-y_0}{v'(t_0)}=\frac{z-z_0}{w'(t_0)}$$

- 曲线的法平面方程

$$u'(t_0)(x-x_0)+v'(t_0)(y-y_0)+w'(t_0)(z-z_0)=0$$

例 求曲线 $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$ 在点 $(1, 1, 1)$（$t = 1$）处的切线及法平面的方程。

解

$$\gamma'(t) = (1, 2t, 3t^2)$$

$$\gamma'(0) = (1, 2, 3)$$

- 线的切线方程

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$$

- 曲线的法平面方程

$$1\cdot(x-1)+2\cdot(y-1)+3\cdot(z-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x+2y+3z-6 = 0$$

例 求曲线 $\gamma(t)=(\frac{t}{1+t},\frac{1+t}{t},t^2)$ 在对应于 $t_0=1$ 的点处的切线及法平面的方程。

解

$$\gamma'(t)=(\frac{1}{(1+t)^2},-\frac{1}{t^2},2t)$$

$$\gamma'(1)=(\frac{1}{4},-1,2)$$

- 线的切线方程

$$\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{2}$$

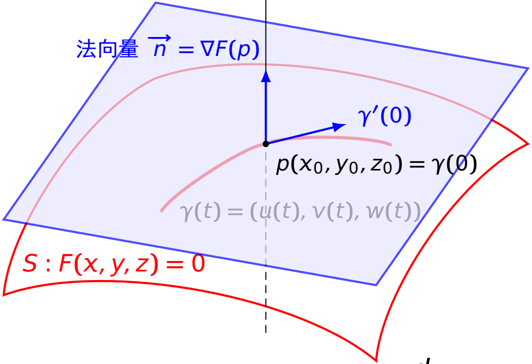
- 曲线的法平面方程

$$\frac{1}{4}\cdot(x-\frac{1}{2})+(-1)\cdot(y-2)+2\cdot(z-1)=0$$

切平面

切平面 $F_x(p)(x-x_0)+F_y(p)(y-y_0)+F_z(p)(z-z_0)=0$

法线 $\dfrac{x-x_0}{F_x(p)}=\dfrac{y-y_0}{F_y(p)}=\dfrac{z-z_0}{F_z(p)}$



例 求曲面 $3xy+z^2=4$ 在点 (1, 1, 1) 处的切平面及法线的方程。

$$0\equiv F(u(t),v(t),w(t))\Rightarrow 0=\frac{d}{dt}F(u(t),v(t),w(t))\Big|_{t=0}$$

$$=F_x(p)\cdot u'(0)+F_y(p)\cdot v'(0)+F_z(p)\cdot w'(0)$$

$$=\nabla F(p)\cdot\gamma'(0)$$

例 求曲面 $3xy + z^2 = 4$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切平面及法线的方程。

解
$$F(x, y, z) = 3xy + z^2 - 4,$$
$$\overrightarrow{n} = \nabla F = (F_x, F_y, F_z) = (3y, 3x, 2z),$$
$$\overrightarrow{n}|_{(1,1,1)} = (3, 3, 2).$$

所以在点处的切平面方程为

$$3(x-1) + 3(y-1) + 2(z-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x + 3y + 2z - 8 = 0$$

法线方程为

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{2}$$

例 求椭圆抛物面 $z = 2x^2 + y^2 - 1$ 在点 $(2, 1, 8)$ 处的切平面及法线的方程。

解

$$F(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - z - 1,$$

$$\overrightarrow{n} = \nabla F = (F_x, F_y, F_z) = (4x, 2y, -1),$$

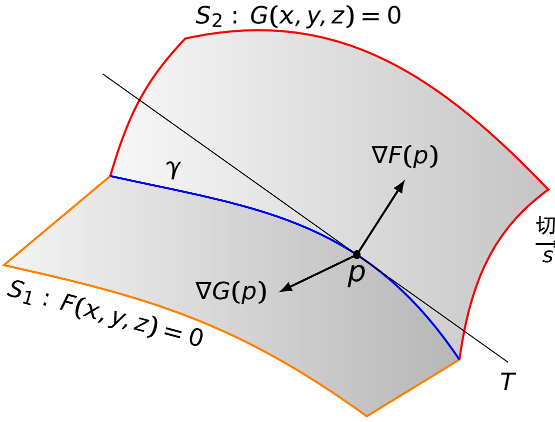
$$\overrightarrow{n}|_{(2,1,8)} = (8, 2, -1).$$

所以在点处的切平面方程为

$$8(x-2) + 2(y-1) + (-1)(z-8) = 0 \quad \Rightarrow \quad 8x + 2y - z - 10 = 0$$

法线方程为

$$\frac{x-2}{8} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-8}{-1}$$



切线T的方向向量可取为

$$\vec{s} = \nabla F(p) \times \nabla G(p) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x(p) & F_y(p) & F_z(p) \\ G_x(p) & G_y(p) & G_z(p) \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_p, -\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}_p, \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_p \right)$$

- 切线方程：$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_p} = \frac{y-y_0}{-\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}_p} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_p}$$
- 法平面方程：

$$\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_p (x-x_0) - \begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}_p (y-y_0) + \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_p (z-z_0) = 0$$

小结 曲线 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 上一点 $p(x_0,y_0,z_0)$ 处

- 切方向可取为

$$\vec{s}=\nabla F(p)\times\nabla G(p)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ F_x & F_y & F_z\\ G_x & G_y & G_z\end{vmatrix}_p=\left(\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}_p,\ -\begin{vmatrix}F_x & F_z\\ G_x & G_z\end{vmatrix}_p\ \begin{vmatrix}F_z & F_x\\ G_z & G_x\end{vmatrix}_p,\ \right.$$

- 切线方程: $\dfrac{x-x_0}{\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}_p}=\dfrac{y-y_0}{-\begin{vmatrix}F_x & F_z\\ G_x & G_z\end{vmatrix}_p\begin{vmatrix}F_z & F_x\\ G_z & G_x\end{vmatrix}_p}=\dfrac{z-z_0}{\begin{vmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{vmatrix}_p}$

- 法平面方程:

$$0=\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}_p(x-x_0)-\begin{vmatrix}F_x & F_z\\ G_x & G_z\end{vmatrix}_p(y-y_0)+\begin{vmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{vmatrix}_p(z-z_0)$$

$$=\begin{vmatrix}x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ F_x(p) & F_y(p) & F_z(p)\\ G_x(p) & G_y(p) & G_z(p)\end{vmatrix}$$

例 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线与法平面方程

解 曲线在该点处的切线方向可取为

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}_p = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{(1,-2,1)} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-3,0,3)$$

简单计，又不妨取为

$$\overrightarrow{s} = (1,0,-1)$$

所以

- 切线方程：$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-1}{-1}$
- 法平面方程：

$$1\cdot(x-1)+0\cdot(y+2)+(-1)\cdot(z-1)=0 \quad\Rightarrow\quad x-z=0$$

例 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0 \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切线与法平面方程

解 曲线在该点处的切线方向可取为

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}_p = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x-3 & 2y & 2z \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix}_{(1,1,1)} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = (16, 9, -1)$$

所以

- 切线方程：$\frac{x-1}{16} = \frac{y-1}{9} = \frac{z-1}{-1}$
- 法平面方程：$16\cdot(x-1)+9\cdot(y-1)+(-1)\cdot(z-1)=0 \quad \Rightarrow$

  $16x+9y-z-24=0$