第 14 周作业解答

练习 1. 写出二次型 $f=x_1^2+x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2-x_1x_3+2x_2x_3$ 所对应的矩阵。

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

练习 2. 用配方法求以下二次型的标准型，写出所做的非退化线性变量代换 $y=Cx$ 是什么，并指出正、负惯性指标是多少。

1. $f=x_1^2+x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$
2. $f=x_1^2-3x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$

解

1.

$$\begin{aligned} f &= x_1^2+2x_1(2x_2+x_3)+x_2^2+3x_3^2+2x_2x_3 \\ &= x_1^2+2x_1(2x_2+x_3)+x_2^2+3x_3^2+2x_2x_3 \\ &= x_1^2+2x_1(2x_2+x_3)+(2x_2+x_3)^2-(2x_2+x_3)^2+x_2^2+3x_3^2+2x_2x_3 \\ &= (x_1+2x_2+x_3)^2-3x_2^2-2x_2x_3+2x_3^2 \\ &= (x_1+2x_2+x_3)^2-3\left[x_2^2+2\cdot x_2\cdot\frac{1}{3}x_3\right]+2x_3^2 \\ &= (x_1+2x_2+x_3)^2-3\left[x_2^2+2\cdot x_2\cdot\frac{1}{3}x_3+\left(\frac{1}{3}x_3\right)^2\right]+\frac{1}{3}x_3^2+2x_3^2 \\ &= (x_1+2x_2+x_3)^2-3\left(x_2+\frac{1}{3}x_3\right)^2+\frac{7}{3}x_3^2. \end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} y_1=x_1+2x_2+x_3 \\ y_2=x_2+\frac{1}{3}x_3 \\ y_3=x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=y_1-2y_2-\frac{1}{3}y_3 \\ x_2=y_2-\frac{1}{3}y_3 \\ x_3=y_3 \end{cases} \Rightarrow x=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y=Cy$$

则 $|C|=1\neq 0$（说明为非退化线性变换），且

$$f=y_1^2-3y_2^2+\frac{7}{3}y_3^2.$$

正惯性指标为 2，负惯性指标为 1。

2.

$$\begin{aligned} f &= x_1^2-3x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3 \\ &= x_1^2+2x_1(-x_2+x_3)-3x_3^2-6x_2x_3 \\ &= x_1^2+2x_1(-x_2+x_3)+(-x_2+x_3)^2-(-x_2+x_3)^2-3x_3^2-6x_2x_3 \\ &= (x_1-x_2+x_3)^2-x_2^2-4x_2x_3-4x_3^2 \\ &= (x_1-x_2+x_3)^2-(x_2+2x_3)^2 \end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 + \ \ x_3 \\ y_2 = \qquad x_2 + 2x_3 \\ y_3 = \qquad\qquad x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 - 3y_3 \\ x_2 = \qquad y_2 - 2y_3 \\ x_3 = \qquad\qquad y_3 \end{cases} \Rightarrow \quad x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y = Cy$$

则 $|C| = 1 \neq 0$（说明为非退化线性变换）

$$f = y_1^2 - y_2^2.$$

正惯性指标为 1，负惯性指标为 1。

练习 3. t 为何值时，二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 是正定?

解 f 的系数矩阵是:

$$\begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}.$$

f 是正定当且仅当所以顺序主子式大于零，所以

$A_1 = t > 0,$

$A_2 = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2 - 1 > 0 \Rightarrow t > 1 \quad \text{or} \quad t < -1 \xRightarrow{t>0} t > 1,$

$A_3 = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} \xlongequal[r_3 - t\times r_1]{r_2 + r_1} \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ t+1 & t+1 & 0 \\ 1-t^2 & -1-t & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+1 & t+1 \\ 1-t^2 & -1-t \end{vmatrix} = (t+1)^2(t-2) > 0 \xRightarrow{t>1} t > 2.$

所以 $t > 2.$

练习 4. 设 A, B 均是 n 阶正定矩阵，证明 $A + B$ 也是正定矩阵。

证明设 $x \neq 0$ 为 n 维列向量，则

$$x^T(A+B)x = x^TAx + x^TBx > 0$$

其中最后一步用到 A, B 的正定性。所以 $A + B$ 为正定矩阵。

练习 5. 设 n 阶对称矩阵 A 满足 $A^2 - 4A + 3I = 0$。证明 A 是正定矩阵。

证明设 λ 为 A 的任一特征值，α 为相应特征向量，即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

从而

$$\begin{aligned} 0 &= (A^2 - 4A + 3I)\alpha \\ &= A^2\alpha - 4A\alpha + 3\alpha \\ &= \lambda^2\alpha - 4\lambda\alpha + 3\alpha \\ &= (\lambda^2 - 4\lambda + 3)\alpha \end{aligned}$$

所以

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

得 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = 3$。总之，$\lambda > 0$。说明 A 的特征值均是大于零，所以 A 是正定。