

§4.2 相似矩阵与矩阵对角化

数学系 梁卓滨

2017 - 2018 学年 I

相似矩阵

定义 设 A, B 是 n 阶方阵。若存在 n 阶可逆矩阵 P , 满足

$$P^{-1}AP = B.$$

则称 A 与 B 相似, 记为 $A \sim B$ 。

相似矩阵

定义 设 A, B 是 n 阶方阵。若存在 n 阶可逆矩阵 P , 满足

$$P^{-1}AP = B.$$

则称 A 与 B 相似, 记为 $A \sim B$ 。

注 $A \sim B \iff B \sim A$

相似矩阵

定义 设 A, B 是 n 阶方阵。若存在 n 阶可逆矩阵 P , 满足

$$P^{-1}AP = B.$$

则称 A 与 B 相似, 记为 $A \sim B$ 。

注 $A \sim B \iff B \sim A$

这是:

$$A \sim B \Rightarrow P^{-1}AP = B \Rightarrow$$

$$Q^{-1}BQ = A \Rightarrow B \sim A$$

相似矩阵

定义 设 A, B 是 n 阶方阵。若存在 n 阶可逆矩阵 P , 满足

$$P^{-1}AP = B.$$

则称 A 与 B 相似, 记为 $A \sim B$ 。

注 $A \sim B \iff B \sim A$

这是:

$$A \sim B \Rightarrow P^{-1}AP = B \Rightarrow A = PBP^{-1}$$

$$Q^{-1}BQ = A \Rightarrow B \sim A$$

相似矩阵

定义 设 A, B 是 n 阶方阵。若存在 n 阶可逆矩阵 P , 满足

$$P^{-1}AP = B.$$

则称 A 与 B 相似, 记为 $A \sim B$ 。

注 $A \sim B \iff B \sim A$

这是:

$$A \sim B \Rightarrow P^{-1}AP = B \Rightarrow A = PBP^{-1} \xrightarrow{Q:=P^{-1}} Q^{-1}BQ = A \Rightarrow B \sim A$$

例

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 19 & 45 \\ -7 & -17 \end{pmatrix}}_A$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}}_B$$

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \underbrace{\begin{pmatrix} 19 & 45 \\ -7 & -17 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}}_B$$

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \underbrace{\begin{pmatrix} 19 & 45 \\ -7 & -17 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}}_B$$

例

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 19 & 45 \\ -7 & -17 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}}_P = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}}_B$$

例

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 19 & 45 \\ -7 & -17 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}}_P = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}}_B$$

所以 $A \sim B$

例

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 19 & 45 \\ -7 & -17 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}}_P = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}}_B$$

所以 $A \sim B$

问题 怎样有效判断两个矩阵是否相似？

例

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 19 & 45 \\ -7 & -17 \end{pmatrix}}_A$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}}_B$$

所以 $A \sim B$

问题 怎样有效判断两个矩阵是否相似？

例

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 19 & 45 \\ -7 & -17 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}}_P = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}}_B$$

所以 $A \sim B$

问题 怎样有效判断两个矩阵是否相似？

例

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 19 & 45 \\ -7 & -17 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}}_P = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}}_B$$

所以 $A \sim B$

问题 怎样有效判断两个矩阵是否相似？

1. “ λ 矩阵” 的方法，但并不简单的。。。
2. 下面只给出两个矩阵相似的必要条件

两个矩阵相似的必要条件

定理 设 $A \sim B$, 则

1. A 与 B 有相同特征值;
2. $r(A) = r(B)$;
3. $|A| = |B|$

两个矩阵相似的必要条件

定理 设 $A \sim B$, 则

1. A 与 B 有相同特征值;
2. $r(A) = r(B)$;
3. $|A| = |B|$, 特别地, A 与 B 同时可逆或不可逆

两个矩阵相似的必要条件

定理 设 $A \sim B$, 则

1. A 与 B 有相同特征值;
2. $r(A) = r(B)$;
3. $|A| = |B|$, 特别地, A 与 B 同时可逆或不可逆

证明 存在可逆矩阵 P , 满足

$$P^{-1}AP = B$$

两个矩阵相似的必要条件

定理 设 $A \sim B$, 则

1. A 与 B 有相同特征值;
2. $r(A) = r(B)$;
3. $|A| = |B|$, 特别地, A 与 B 同时可逆或不可逆

证明 存在可逆矩阵 P , 满足

$$P^{-1}AP = B$$

1. $|\lambda I - B| =$

$$|\lambda I - A|$$

两个矩阵相似的必要条件

定理 设 $A \sim B$, 则

1. A 与 B 有相同特征值;
2. $r(A) = r(B)$;
3. $|A| = |B|$, 特别地, A 与 B 同时可逆或不可逆

证明 存在可逆矩阵 P , 满足

$$P^{-1}AP = B$$

$$\begin{aligned} 1. |\lambda I - B| &= |\lambda P^{-1}IP - P^{-1}AP| = \\ &|\lambda I - A| \end{aligned}$$

两个矩阵相似的必要条件

定理 设 $A \sim B$, 则

1. A 与 B 有相同特征值;
2. $r(A) = r(B)$;
3. $|A| = |B|$, 特别地, A 与 B 同时可逆或不可逆

证明 存在可逆矩阵 P , 满足

$$P^{-1}AP = B$$

$$\begin{aligned} 1. |\lambda I - B| &= |\lambda P^{-1}IP - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda I - A)P| = \\ &|\lambda I - A| \end{aligned}$$

两个矩阵相似的必要条件

定理 设 $A \sim B$, 则

1. A 与 B 有相同特征值;
2. $r(A) = r(B)$;
3. $|A| = |B|$, 特别地, A 与 B 同时可逆或不可逆

证明 存在可逆矩阵 P , 满足

$$P^{-1}AP = B$$

$$\begin{aligned} 1. \quad |\lambda I - B| &= |\lambda P^{-1}IP - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda I - A)P| = \\ &= |P^{-1}| \cdot |\lambda I - A| \cdot |P| = |\lambda I - A| \end{aligned}$$

两个矩阵相似的必要条件

定理 设 $A \sim B$, 则

1. A 与 B 有相同特征值;
2. $r(A) = r(B)$;
3. $|A| = |B|$, 特别地, A 与 B 同时可逆或不可逆

证明 存在可逆矩阵 P , 满足

$$P^{-1}AP = B$$

1. $|\lambda I - B| = |\lambda P^{-1}IP - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda I - A)P| = |P^{-1}| \cdot |\lambda I - A| \cdot |P| = |\lambda I - A|$

两个矩阵相似的必要条件

定理 设 $A \sim B$, 则

1. A 与 B 有相同特征值;
2. $r(A) = r(B)$;
3. $|A| = |B|$, 特别地, A 与 B 同时可逆或不可逆

证明 存在可逆矩阵 P , 满足

$$P^{-1}AP = B$$

1. $|\lambda I - B| = |\lambda P^{-1}IP - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda I - A)P| = |P^{-1}| \cdot |\lambda I - A| \cdot |P| = |\lambda I - A|$
2. $r(B) = r(P^{-1}AP) = r(A)$

两个矩阵相似的必要条件

定理 设 $A \sim B$, 则

1. A 与 B 有相同特征值;
2. $r(A) = r(B)$;
3. $|A| = |B|$, 特别地, A 与 B 同时可逆或不可逆

证明 存在可逆矩阵 P , 满足

$$P^{-1}AP = B$$

1. $|\lambda I - B| = |\lambda P^{-1}IP - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda I - A)P| = |P^{-1}| \cdot |\lambda I - A| \cdot |P| = |\lambda I - A|$
2. $r(B) = r(P^{-1}AP) = r(A)$
3. $|B| = |A|$

两个矩阵相似的必要条件

定理 设 $A \sim B$, 则

1. A 与 B 有相同特征值;
2. $r(A) = r(B)$;
3. $|A| = |B|$, 特别地, A 与 B 同时可逆或不可逆

证明 存在可逆矩阵 P , 满足

$$P^{-1}AP = B$$

1. $|\lambda I - B| = |\lambda P^{-1}IP - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda I - A)P| = |P^{-1}| \cdot |\lambda I - A| \cdot |P| = |\lambda I - A|$
2. $r(B) = r(P^{-1}AP) = r(A)$
3. $|B| = |P^{-1}AP| = |A|$

两个矩阵相似的必要条件

定理 设 $A \sim B$, 则

1. A 与 B 有相同特征值;
2. $r(A) = r(B)$;
3. $|A| = |B|$, 特别地, A 与 B 同时可逆或不可逆

证明 存在可逆矩阵 P , 满足

$$P^{-1}AP = B$$

1. $|\lambda I - B| = |\lambda P^{-1}IP - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda I - A)P| = |P^{-1}| \cdot |\lambda I - A| \cdot |P| = |\lambda I - A|$
2. $r(B) = r(P^{-1}AP) = r(A)$
3. $|B| = |P^{-1}AP| = |P^{-1}| \cdot |A| \cdot |P| = |A|$

两个矩阵相似的必要条件

定理 设 $A \sim B$, 则

1. A 与 B 有相同特征值;
2. $r(A) = r(B)$;
3. $|A| = |B|$, 特别地, A 与 B 同时可逆或不可逆

证明 存在可逆矩阵 P , 满足

$$P^{-1}AP = B$$

1. $|\lambda I - B| = |\lambda P^{-1}IP - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda I - A)P| = |P^{-1}| \cdot |\lambda I - A| \cdot |P| = |\lambda I - A|$
2. $r(B) = r(P^{-1}AP) = r(A)$
3. $|B| = |P^{-1}AP| = |P^{-1}| \cdot |A| \cdot |P| = |A|$

可对角化矩阵

定义 若方阵 $A_{n \times n}$ 与对角阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 相似，则称 A 可对角化

可对角化矩阵

定义 若方阵 $A_{n \times n}$ 与对角阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 相似，则称 A 可对角化

$$P^{-1}AP = \Lambda$$

可对角化矩阵

定义 若方阵 $A_{n \times n}$ 与对角阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 相似，则称 A 可对角化

$$P^{-1}AP = \Lambda \Leftrightarrow AP = P\Lambda$$

可对角化矩阵

定义 若方阵 $A_{n \times n}$ 与对角阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 相似，则称 A 可对角化

$$P^{-1}AP = \Lambda \Leftrightarrow AP = P\Lambda$$

$$\underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}_P$$

可对角化矩阵

定义 若方阵 $A_{n \times n}$ 与对角阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 相似，则称 A 可对角化

$$P^{-1}AP = \Lambda \Leftrightarrow AP = P\Lambda$$

$$\Leftrightarrow A \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}_P = \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}_P \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

可对角化矩阵

定义 若方阵 $A_{n \times n}$ 与对角阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 相似, 则称 A 可对角化

$$P^{-1}AP = \Lambda \Leftrightarrow AP = P\Lambda$$

$$\Leftrightarrow A \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}_P = \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}_P \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

$$\Leftrightarrow (\quad , \quad , \dots , \quad) = (\quad , \quad , \dots , \quad)$$

可对角化矩阵

定义 若方阵 $A_{n \times n}$ 与对角阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 相似, 则称 A 可对角化

$$P^{-1}AP = \Lambda \Leftrightarrow AP = P\Lambda$$

$$\Leftrightarrow A \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}_P = \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}_P \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

$$\Leftrightarrow (A\alpha_1, \quad , \dots, \quad) = (\quad , \quad , \dots, \quad)$$

可对角化矩阵

定义 若方阵 $A_{n \times n}$ 与对角阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 相似, 则称 A 可对角化

$$P^{-1}AP = \Lambda \Leftrightarrow AP = P\Lambda$$

$$\Leftrightarrow A \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}_P = \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}_P \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

$$\Leftrightarrow (A\alpha_1, A\alpha_2, \dots,) = (\quad , \quad , \dots, \quad)$$

可对角化矩阵

定义 若方阵 $A_{n \times n}$ 与对角阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 相似, 则称 A 可对角化

$$P^{-1}AP = \Lambda \Leftrightarrow AP = P\Lambda$$

$$\Leftrightarrow A \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}_P = \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}_P \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

$$\Leftrightarrow (A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_n) = (\quad , \quad , \dots , \quad)$$

可对角化矩阵

定义 若方阵 $A_{n \times n}$ 与对角阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 相似, 则称 A 可对角化

$$P^{-1}AP = \Lambda \Leftrightarrow AP = P\Lambda$$

$$\Leftrightarrow A \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}_P = \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}_P \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

$$\Leftrightarrow (A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_n) = (\lambda_1\alpha_1, \quad , \dots, \quad)$$

可对角化矩阵

定义 若方阵 $A_{n \times n}$ 与对角阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 相似, 则称 A 可对角化

$$P^{-1}AP = \Lambda \Leftrightarrow AP = P\Lambda$$

$$\Leftrightarrow A \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}_P = \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}_P \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

$$\Leftrightarrow (A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_n) = (\lambda_1\alpha_1, \lambda_2\alpha_2, \dots, \quad)$$

可对角化矩阵

定义 若方阵 $A_{n \times n}$ 与对角阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 相似, 则称 A 可对角化

$$P^{-1}AP = \Lambda \Leftrightarrow AP = P\Lambda$$

$$\Leftrightarrow A \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}_P = \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}_P \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_\Lambda$$

$$\Leftrightarrow (A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_n) = (\lambda_1\alpha_1, \lambda_2\alpha_2, \dots, \lambda_n\alpha_n)$$

可对角化矩阵

定义 若方阵 $A_{n \times n}$ 与对角阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 相似, 则称 A 可对角化

$$P^{-1}AP = \Lambda \Leftrightarrow AP = P\Lambda$$

$$\Leftrightarrow A \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}_P = \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}_P \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

$$\Leftrightarrow (A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_n) = (\lambda_1\alpha_1, \lambda_2\alpha_2, \dots, \lambda_n\alpha_n)$$

$$\Leftrightarrow A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i$$

可对角化矩阵

定义 若方阵 $A_{n \times n}$ 与对角阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 相似, 则称 A 可对角化

$$P^{-1}AP = \Lambda \Leftrightarrow AP = P\Lambda$$

$$\Leftrightarrow A \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}_P = \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}_P \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_\Lambda$$

$$\Leftrightarrow (A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_n) = (\lambda_1\alpha_1, \lambda_2\alpha_2, \dots, \lambda_n\alpha_n)$$

$$\Leftrightarrow A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i \quad (\lambda_i \text{ 是特征值, } \alpha_i \text{ 是特征向量})$$

可对角化矩阵

定义 若方阵 $A_{n \times n}$ 与对角阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 相似，则称 A 可对角化

$$P^{-1}AP = \Lambda \Leftrightarrow AP = P\Lambda$$

$$\Leftrightarrow A \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}_P = \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}_P \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

$$\Leftrightarrow (A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_n) = (\lambda_1\alpha_1, \lambda_2\alpha_2, \dots, \lambda_n\alpha_n)$$

$$\Leftrightarrow A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i \quad (\lambda_i \text{ 是特征值, } \alpha_i \text{ 是特征向量})$$

定理 A 可对角化 $\Leftrightarrow A$ 有 n 个线性无关的特征向量

可对角化矩阵

定义 若方阵 $A_{n \times n}$ 与对角阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 相似，则称 A 可对角化

$$P^{-1}AP = \Lambda \Leftrightarrow AP = P\Lambda$$

$$\Leftrightarrow A \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}_P = \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}_P \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

$$\Leftrightarrow (A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_n) = (\lambda_1\alpha_1, \lambda_2\alpha_2, \dots, \lambda_n\alpha_n)$$

$$\Leftrightarrow A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i \quad (\lambda_i \text{ 是特征值, } \alpha_i \text{ 是特征向量})$$

定理 A 可对角化 $\Leftrightarrow A$ 有 n 个线性无关的特征向量

推论 若方阵 $A_{n \times n}$ 有 n 不同特征值，则 A 可对角化。

问题 判断 n 阶方阵 A 是否可以对角化？若能，确定可逆矩阵 P 及对角阵 Λ ，使得 $P^{-1}AP = \Lambda$ 。

问题 判断 n 阶方阵 A 是否可以对角化？若能，确定可逆矩阵 P 及对角阵 Λ ，使得 $P^{-1}AP = \Lambda$ 。

步骤

1. 求出 A 的所有特征值，及相应特征向量

问题 判断 n 阶方阵 A 是否可以对角化？若能，确定可逆矩阵 P 及对角阵 Λ ，使得 $P^{-1}AP = \Lambda$ 。

步骤

1. 求出 A 的所有特征值，及相应特征向量
2. 若有 n 个线性无关特征向量，则 A 可对角化；否则，不能对角化

问题 判断 n 阶方阵 A 是否可以对角化？若能，确定可逆矩阵 P 及对角阵 Λ ，使得 $P^{-1}AP = \Lambda$ 。

步骤

1. 求出 A 的所有特征值，及相应特征向量
2. 若有 n 个线性无关特征向量，则 A 可对角化；否则，不能对角化
3. 假设存在 n 个线性无关特征向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ，记对应特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

问题 判断 n 阶方阵 A 是否可以对角化？若能，确定可逆矩阵 P 及对角阵 Λ ，使得 $P^{-1}AP = \Lambda$ 。

步骤

1. 求出 A 的所有特征值，及相应特征向量
2. 若有 n 个线性无关特征向量，则 A 可对角化；否则，不能对角化
3. 假设存在 n 个线性无关特征向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ，记对应特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

$$\underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}_P$$

问题 判断 n 阶方阵 A 是否可以 diagonal 化？若能，确定可逆矩阵 P 及对角阵 Λ ，使得 $P^{-1}AP = \Lambda$ 。

步骤

1. 求出 A 的所有特征值，及相应特征向量
2. 若有 n 个线性无关特征向量，则 A 可对角化；否则，不能 diagonal 化
3. 假设存在 n 个线性无关特征向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ，记对应特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

$$\underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}_P$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_\Lambda$$

问题 判断 n 阶方阵 A 是否可以 diagonal 化？若能，确定可逆矩阵 P 及对角阵 Λ ，使得 $P^{-1}AP = \Lambda$ 。

步骤

1. 求出 A 的所有特征值，及相应特征向量
2. 若有 n 个线性无关特征向量，则 A 可对角化；否则，不能 diagonal 化
3. 假设存在 n 个线性无关特征向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ，记对应特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

$$\underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}_P$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_\Lambda$$

$$\Rightarrow P^{-1}AP = \Lambda$$

问题 判断 n 阶方阵 A 是否可以对角化？若能，确定可逆矩阵 P 及对角阵 Λ ，使得 $P^{-1}AP = \Lambda$ 。

步骤

1. 求出 A 的所有特征值，及相应特征向量
2. 若有 n 个线性无关特征向量，则 A 可对角化；否则，不能对角化
3. 假设存在 n 个线性无关特征向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ，记对应特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ （即： $A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i$ ）则

$$\underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}_P$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

$$\Rightarrow P^{-1}AP = \Lambda$$

问题 判断 n 阶方阵 A 是否可以 diagonal 化？若能，确定可逆矩阵 P 及对角阵 Λ ，使得 $P^{-1}AP = \Lambda$ 。

步骤

1. 求出 A 的所有特征值，及相应特征向量
2. 若有 n 个线性无关特征向量，则 A 可对角化；否则，不能 diagonal 化
3. 假设存在 n 个线性无关特征向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ，记对应特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ （即： $A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i$ ）则

$$A(\underbrace{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}_P) = (\underbrace{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}_P) \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

$$\Rightarrow P^{-1}AP = \Lambda$$

问题 判断 n 阶方阵 A 是否可以 diagonal 化？若能，确定可逆矩阵 P 及对角阵 Λ ，使得 $P^{-1}AP = \Lambda$ 。

步骤

1. 求出 A 的所有特征值，及相应特征向量
2. 若有 n 个线性无关特征向量，则 A 可对角化；否则，不能 diagonal 化
3. 假设存在 n 个线性无关特征向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ，记对应特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ （即： $A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i$ ）则

$$A(\underbrace{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}_P) = (\underbrace{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}_P) \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

$$\Rightarrow AP = P\Lambda \Rightarrow P^{-1}AP = \Lambda$$

例 1 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

例 1 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

- 特征方程: $0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 2)(\lambda - 4)$

例 1 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

- 特征方程: $0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 2)(\lambda - 4)$
- 特征值 $\lambda_1 = 4$,
- 特征值 $\lambda_2 = -2$,

例 1 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

- 特征方程: $0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 2)(\lambda - 4)$
- 特征值 $\lambda_1 = 4$, 特征向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- 特征值 $\lambda_2 = -2$,

例 1 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

- 特征方程: $0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 2)(\lambda - 4)$
- 特征值 $\lambda_1 = 4$, 特征向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- 特征值 $\lambda_2 = -2$, 特征向量 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

例 1 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

- 特征方程: $0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 2)(\lambda - 4)$
- 特征值 $\lambda_1 = 4$, 特征向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- 特征值 $\lambda_2 = -2$, 特征向量 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

可见 A 有 2 个线性无关特征向量: α_1, α_2 。所以 A 可以对角化。

例 1 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

- 特征方程: $0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 2)(\lambda - 4)$
- 特征值 $\lambda_1 = 4$, 特征向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- 特征值 $\lambda_2 = -2$, 特征向量 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

可见 A 有 2 个线性无关特征向量: α_1, α_2 。所以 A 可以对角化。令

$$P = \begin{pmatrix} & \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix},$$

则

$$P^{-1}AP = \Lambda.$$

例 1 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

- 特征方程: $0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 2)(\lambda - 4)$
- 特征值 $\lambda_1 = 4$, 特征向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- 特征值 $\lambda_2 = -2$, 特征向量 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

可见 A 有 2 个线性无关特征向量: α_1, α_2 。所以 A 可以对角化。令

$$P = (\alpha_1, \alpha_2), \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

则

$$P^{-1}AP = \Lambda.$$

例 1 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

- 特征方程: $0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 2)(\lambda - 4)$
- 特征值 $\lambda_1 = 4$, 特征向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- 特征值 $\lambda_2 = -2$, 特征向量 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

可见 A 有 2 个线性无关特征向量: α_1, α_2 。所以 A 可以对角化。令

$$P = (\alpha_1, \alpha_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

则

$$P^{-1}AP = \Lambda.$$

例 1 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

- 特征方程: $0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 2)(\lambda - 4)$
- 特征值 $\lambda_1 = 4$, 特征向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- 特征值 $\lambda_2 = -2$, 特征向量 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

可见 A 有 2 个线性无关特征向量: α_1, α_2 。所以 A 可以对角化。令

$$P = (\alpha_1, \alpha_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & \\ & -2 \end{pmatrix},$$

则

$$P^{-1}AP = \Lambda.$$

例 2 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 是否能对角化? 若能, 写出 P 和 Λ

例 2 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 是否能对角化？若能，写出 P 和 Λ

- 特征方程： $0 = |\lambda I - A|$

例 2 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 是否能对角化? 若能, 写出 P 和 Λ

- 特征方程: $0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 2)^2(\lambda - 6)$

例 2 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 是否能对角化? 若能, 写出 P 和 Λ

- 特征方程: $0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 2)^2(\lambda - 6)$
- 特征值 $\lambda_1 = 2$ (二重)
- 特征值 $\lambda_2 = 6$

例 2 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 是否能对角化? 若能, 写出 P 和 Λ

- 特征方程: $0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 2)^2(\lambda - 6)$
- 特征值 $\lambda_1 = 2$ (二重), 特征向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- 特征值 $\lambda_2 = 6$

例 2 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 是否能对角化？若能，写出 P 和 Λ

- 特征方程： $0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 2)^2(\lambda - 6)$
- 特征值 $\lambda_1 = 2$ （二重），特征向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- 特征值 $\lambda_2 = 6$ ，特征向量 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

可见 A 有 3 个线性无关特征向量： $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 。所以 A 可以对角化。

例 2 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 是否能对角化? 若能, 写出 P 和 Λ

- 特征方程: $0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 2)^2(\lambda - 6)$
- 特征值 $\lambda_1 = 2$ (二重), 特征向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- 特征值 $\lambda_2 = 6$, 特征向量 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

可见 A 有 3 个线性无关特征向量: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 。所以 A 可以对角化。

令

$$P = \left(\begin{array}{ccc} & & \end{array} \right), \quad \Lambda = \left(\begin{array}{ccc} & & \end{array} \right),$$

则

$$P^{-1}AP = \Lambda.$$

例 2 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 是否能对角化? 若能, 写出 P 和 Λ

- 特征方程: $0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 2)^2(\lambda - 6)$
- 特征值 $\lambda_1 = 2$ (二重), 特征向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- 特征值 $\lambda_2 = 6$, 特征向量 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

可见 A 有 3 个线性无关特征向量: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 。所以 A 可以对角化。

令

$$P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

则

$$P^{-1}AP = \Lambda.$$

例 2 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 是否能对角化? 若能, 写出 P 和 Λ

- 特征方程: $0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 2)^2(\lambda - 6)$
- 特征值 $\lambda_1 = 2$ (二重), 特征向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- 特征值 $\lambda_2 = 6$, 特征向量 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

可见 A 有 3 个线性无关特征向量: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 。所以 A 可以对角化。

令

$$P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

则

$$P^{-1}AP = \Lambda.$$

例 2 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 是否能对角化? 若能, 写出 P 和 Λ

- 特征方程: $0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 2)^2(\lambda - 6)$
- 特征值 $\lambda_1 = 2$ (二重), 特征向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- 特征值 $\lambda_2 = 6$, 特征向量 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

可见 A 有 3 个线性无关特征向量: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 。所以 A 可以对角化。

令

$$P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{pmatrix},$$

则

$$P^{-1}AP = \Lambda.$$

例 3 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ 是否能对角化？若能，写出 P 和 Λ

例 3 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ 是否能对角化? 若能, 写出 P 和 Λ

- 特征方程: $0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$ [Details](#)
- 特征值 $\lambda_1 = 1$, 特征向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ [Details](#)
- 特征值 $\lambda_2 = 2$ (二重), 特征向量 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ [Det](#)

例 3 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ 是否能对角化? 若能, 写出 P 和 Λ

- 特征方程: $0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$ [Details](#)
- 特征值 $\lambda_1 = 1$, 特征向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ [Details](#)
- 特征值 $\lambda_2 = 2$ (二重), 特征向量 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ [Det](#)

可见 A 有 3 个线性无关特征向量: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 。所以 A 可以对角化。

例 3 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ 是否能对角化? 若能, 写出 P 和 Λ

• 特征方程: $0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$ [Details](#)

• 特征值 $\lambda_1 = 1$, 特征向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ [Details](#)

• 特征值 $\lambda_2 = 2$ (二重), 特征向量 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ [Det](#)

可见 A 有 3 个线性无关特征向量: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 。所以 A 可以对角化。

令

$$P = \left(\begin{array}{ccc} & & \end{array} \right), \quad \Lambda = \left(\begin{array}{ccc} & & \end{array} \right),$$

则

$$P^{-1}AP = \Lambda.$$

例 3 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ 是否能对角化? 若能, 写出 P 和 Λ

- 特征方程: $0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$ [Details](#)
- 特征值 $\lambda_1 = 1$, 特征向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ [Details](#)
- 特征值 $\lambda_2 = 2$ (二重), 特征向量 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ [Det](#)

可见 A 有 3 个线性无关特征向量: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 。所以 A 可以对角化。

令

$$P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

则

$$P^{-1}AP = \Lambda.$$

例 3 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ 是否能对角化? 若能, 写出 P 和 Λ

- 特征方程: $0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$ [Details](#)
- 特征值 $\lambda_1 = 1$, 特征向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ [Details](#)
- 特征值 $\lambda_2 = 2$ (二重), 特征向量 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ [Det](#)

可见 A 有 3 个线性无关特征向量: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 。所以 A 可以对角化。

令

$$P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

则

$$P^{-1}AP = \Lambda.$$

例 3 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ 是否能对角化? 若能, 写出 P 和 Λ

- 特征方程: $0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$ [Details](#)
- 特征值 $\lambda_1 = 1$, 特征向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ [Details](#)
- 特征值 $\lambda_2 = 2$ (二重), 特征向量 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ [Det](#)

可见 A 有 3 个线性无关特征向量: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 。所以 A 可以对角化。

令

$$P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix},$$

则

$$P^{-1}AP = \Lambda.$$

例 3 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 是否可对角化? 若能, 写出 P 和 Λ

例 3 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 是否可对角化? 若能, 写出 P 和 Λ

• 特征方程: $0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 1)^2(\lambda - 5)$ [Details](#)

• 特征值 $\lambda_1 = -1$ (二重), 特征向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ [Det](#)

• 特征值 $\lambda_2 = 5$, 特征向量 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ [Det](#)

例 3 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 是否可对角化? 若能, 写出 P 和 Λ

- 特征方程: $0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 1)^2(\lambda - 5)$ [▶ Details](#)
- 特征值 $\lambda_1 = -1$ (二重), 特征向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ [▶ Det](#)
- 特征值 $\lambda_2 = 5$, 特征向量 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ [▶ Det](#)

可见 A 有 3 个线性无关特征向量: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 。所以 A 可对角化。

例 3 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 是否能对角化? 若能, 写出 P 和 Λ

• 特征方程: $0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 1)^2(\lambda - 5)$ [Details](#)

• 特征值 $\lambda_1 = -1$ (二重), 特征向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ [Det](#)

• 特征值 $\lambda_2 = 5$, 特征向量 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ [Det](#)

可见 A 有 3 个线性无关特征向量: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 。所以 A 可以对角化。

令

$$P = \left(\begin{array}{ccc} & & \end{array} \right), \quad \Lambda = \left(\begin{array}{ccc} & & \end{array} \right),$$

则

$$P^{-1}AP = \Lambda.$$

例 3 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 是否能对角化? 若能, 写出 P 和 Λ

• 特征方程: $0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 1)^2(\lambda - 5)$ [Details](#)

• 特征值 $\lambda_1 = -1$ (二重), 特征向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ [Det](#)

• 特征值 $\lambda_2 = 5$, 特征向量 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ [Det](#)

可见 A 有 3 个线性无关特征向量: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 。所以 A 可以对角化。

令

$$P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

则

$$P^{-1}AP = \Lambda.$$

例 3 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 是否能对角化? 若能, 写出 P 和 Λ

• 特征方程: $0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 1)^2(\lambda - 5)$ [Details](#)

• 特征值 $\lambda_1 = -1$ (二重), 特征向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ [Det](#)

• 特征值 $\lambda_2 = 5$, 特征向量 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ [Det](#)

可见 A 有 3 个线性无关特征向量: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 。所以 A 可以对角化。

令

$$P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

则

$$P^{-1}AP = \Lambda.$$

例3 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 是否能对角化? 若能, 写出 P 和 Λ

- 特征方程: $0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 1)^2(\lambda - 5)$ [Details](#)
- 特征值 $\lambda_1 = -1$ (二重), 特征向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ [Det](#)
- 特征值 $\lambda_2 = 5$, 特征向量 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ [Det](#)

可见 A 有 3 个线性无关特征向量: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 。所以 A 可以对角化。

令

$$P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 5 \end{pmatrix},$$

则

$$P^{-1}AP = \Lambda.$$

定理 n 阶方阵 A 可对角化的充分必要条件是：每个 n_i 重的特征值 λ_i ，矩阵 $\lambda_i I - A$ 的秩是 $n - n_i$ 。

定理 n 阶方阵 A 可对角化的充分必要条件是：每个 n_i 重的特征值 λ_i ，矩阵 $\lambda_i I - A$ 的秩是 $n - n_i$ 。

图解如下：

不同 特征值	重 数	$(\lambda_i I - A)x = 0$ 基础解系 /线性无关特征向量
λ_1	n_1	
λ_2	n_2	
\vdots	\vdots	
λ_s	n_s	
共 n		
$ \lambda I - A = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$		

定理 n 阶方阵 A 可对角化的充分必要条件是：每个 n_i 重的特征值 λ_i ，矩阵 $\lambda_i I - A$ 的秩是 $n - n_i$ 。

图解如下：

不同 特征值	重 数	$(\lambda_i I - A)x = 0$ 基础解系 /线性无关特征向量
λ_1	n_1	$r(\lambda_1 I - A) = n - n_1$
λ_2	n_2	
\vdots	\vdots	
λ_s	n_s	
共 n		
$ \lambda I - A = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$		

定理 n 阶方阵 A 可对角化的充分必要条件是：每个 n_i 重的特征值 λ_i ，矩阵 $\lambda_i I - A$ 的秩是 $n - n_i$ 。

图解如下：

不同 特征值	重 数	$(\lambda_i I - A)x = 0$ 基础解系 /线性无关特征向量	
λ_1	n_1	$r(\lambda_1 I - A) = n - n_1$	$\Rightarrow \alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \dots, \alpha_{n_1}^{(1)}$
λ_2	n_2		
\vdots	\vdots		
λ_s	n_s		
共 n			
$ \lambda I - A = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$			

定理 n 阶方阵 A 可对角化的充分必要条件是：每个 n_i 重的特征值 λ_i ，矩阵 $\lambda_i I - A$ 的秩是 $n - n_i$ 。

图解如下：

不同 特征值	重 数	$(\lambda_i I - A)x = 0$ 基础解系 /线性无关特征向量	
λ_1	n_1	$r(\lambda_1 I - A) = n - n_1$	$\Rightarrow \alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \dots, \alpha_{n_1}^{(1)}$
λ_2	n_2	$r(\lambda_2 I - A) = n - n_2$	
\vdots	\vdots		
λ_s	n_s		
共 n			
$ \lambda I - A = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$			

定理 n 阶方阵 A 可对角化的充分必要条件是：每个 n_i 重的特征值 λ_i ，矩阵 $\lambda_i I - A$ 的秩是 $n - n_i$ 。

图解如下：

不同 特征值	重 数	$(\lambda_i I - A)x = 0$ 基础解系 /线性无关特征向量	
λ_1	n_1	$r(\lambda_1 I - A) = n - n_1 \Rightarrow$	$\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \dots, \alpha_{n_1}^{(1)}$
λ_2	n_2	$r(\lambda_2 I - A) = n - n_2 \Rightarrow$	$\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \dots, \alpha_{n_2}^{(2)}$
\vdots	\vdots		
λ_s	n_s		
共 n			
$ \lambda I - A = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$			

定理 n 阶方阵 A 可对角化的充分必要条件是：每个 n_i 重的特征值 λ_i ，矩阵 $\lambda_i I - A$ 的秩是 $n - n_i$ 。

图解如下：

不同 特征值	重 数	$(\lambda_i I - A)x = 0$ 基础解系 /线性无关特征向量	
λ_1	n_1	$r(\lambda_1 I - A) = n - n_1 \Rightarrow$	$\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \dots, \alpha_{n_1}^{(1)}$
λ_2	n_2	$r(\lambda_2 I - A) = n - n_2 \Rightarrow$	$\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \dots, \alpha_{n_2}^{(2)}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
λ_s	n_s	$r(\lambda_s I - A) = n - n_s$	
共 n			
$ \lambda I - A = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$			

定理 n 阶方阵 A 可对角化的充分必要条件是：每个 n_i 重的特征值 λ_i ，矩阵 $\lambda_i I - A$ 的秩是 $n - n_i$ 。

图解如下：

不同 特征值	重 数	$(\lambda_i I - A)x = 0$ 基础解系 /线性无关特征向量	
λ_1	n_1	$r(\lambda_1 I - A) = n - n_1 \Rightarrow$	$\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \dots, \alpha_{n_1}^{(1)}$
λ_2	n_2	$r(\lambda_2 I - A) = n - n_2 \Rightarrow$	$\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \dots, \alpha_{n_2}^{(2)}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
λ_s	n_s	$r(\lambda_s I - A) = n - n_s \Rightarrow$	$\alpha_1^{(s)}, \alpha_2^{(s)}, \dots, \alpha_{n_s}^{(s)}$

共 n

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$$

定理 n 阶方阵 A 可对角化的充分必要条件是：每个 n_i 重的特征值 λ_i ，矩阵 $\lambda_i I - A$ 的秩是 $n - n_i$ 。

图解如下：

不同 特征值	重 数	$(\lambda_i I - A)x = 0$ 基础解系 /线性无关特征向量	
λ_1	n_1	$r(\lambda_1 I - A) = n - n_1 \Rightarrow$	$\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \dots, \alpha_{n_1}^{(1)}$
λ_2	n_2	$r(\lambda_2 I - A) = n - n_2 \Rightarrow$	$\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \dots, \alpha_{n_2}^{(2)}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
λ_s	n_s	$r(\lambda_s I - A) = n - n_s \Rightarrow$	$\alpha_1^{(s)}, \alpha_2^{(s)}, \dots, \alpha_{n_s}^{(s)}$
共 n		共 n 个无关特征向量	
$ \lambda I - A = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$			

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 \Leftrightarrow

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow A$ 可对角化

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow A$ 可对角化, $\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = 2$

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow A$ 可对角化, $\lambda_1 = 1$ (二重), $\lambda_2 = 2$

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow A$ 可对角化, $\lambda_1 = 1$ (二重), $\lambda_2 = 2$ (一重)

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow A$ 可对角化, $\lambda_1 = 1$ (二重), $\lambda_2 = 2$ (一重)
 $\Leftrightarrow r(I-A) = \quad \quad \quad$ 且 $r(2I-A) =$

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow A$ 可对角化, $\lambda_1 = 1$ (二重), $\lambda_2 = 2$ (一重)
 $\Leftrightarrow r(I-A) = 3-2 = 1$ 且 $r(2I-A) =$

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow A$ 可对角化, $\lambda_1 = 1$ (二重), $\lambda_2 = 2$ (一重)
 $\Leftrightarrow r(I-A) = 3-2 = 1$ 且 $r(2I-A) = 3-1 = 2$

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow A$ 可对角化, $\lambda_1 = 1$ (二重), $\lambda_2 = 2$ (一重)

解 $\Leftrightarrow r(I-A) = 3-2 = 1$ 且 $r(2I-A) = 3-1 = 2$

 A_1 A_2 A_3 A_4

 $I-A$ $r(I-A)$

 $2I-A$ $r(2I-A)$

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow A$ 可对角化, $\lambda_1 = 1$ (二重), $\lambda_2 = 2$ (一重)

解 $\Leftrightarrow r(I-A) = 3-2 = 1$ 且 $r(2I-A) = 3-1 = 2$

	A_1	A_2	A_3	A_4
$I-A$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$			
$r(I-A)$				
$2I-A$				
$r(2I-A)$				

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow A$ 可对角化, $\lambda_1 = 1$ (二重), $\lambda_2 = 2$ (一重)

解 $\Leftrightarrow r(I-A) = 3-2 = 1$ 且 $r(2I-A) = 3-1 = 2$

	A_1	A_2	A_3	A_4
$I-A$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$		
$r(I-A)$				
$2I-A$				
$r(2I-A)$				

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow A$ 可对角化, $\lambda_1 = 1$ (二重), $\lambda_2 = 2$ (一重)

解 $\Leftrightarrow r(I-A) = 3-2 = 1$ 且 $r(2I-A) = 3-1 = 2$

	A_1	A_2	A_3	A_4
$I-A$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	
$r(I-A)$				
$2I-A$				
$r(2I-A)$				

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow A$ 可对角化, $\lambda_1 = 1$ (二重), $\lambda_2 = 2$ (一重)

解 $\Leftrightarrow r(I-A) = 3-2 = 1$ 且 $r(2I-A) = 3-1 = 2$

	A_1	A_2	A_3	A_4
$I-A$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$r(I-A)$	2	2	1	2
$2I-A$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$r(2I-A)$	3	3	3	2

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow A$ 可对角化, $\lambda_1 = 1$ (二重), $\lambda_2 = 2$ (一重)

解 $\Leftrightarrow r(I-A) = 3-2 = 1$ 且 $r(2I-A) = 3-1 = 2$

	A_1	A_2	A_3	A_4
$I-A$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$r(I-A)$	2			

$$2I-A$$

$$r(2I-A)$$

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow A$ 可对角化, $\lambda_1 = 1$ (二重), $\lambda_2 = 2$ (一重)

解 $\Leftrightarrow r(I-A) = 3-2 = 1$ 且 $r(2I-A) = 3-1 = 2$

	A_1	A_2	A_3	A_4
$I-A$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$r(I-A)$	2	2		

$$2I-A$$

$$r(2I-A)$$

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow A$ 可对角化, $\lambda_1 = 1$ (二重), $\lambda_2 = 2$ (一重)

解 $\Leftrightarrow r(I-A) = 3-2 = 1$ 且 $r(2I-A) = 3-1 = 2$

	A_1	A_2	A_3	A_4
$I-A$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$r(I-A)$	2	2	1	

$2I-A$

$r(2I-A)$

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow A$ 可对角化, $\lambda_1 = 1$ (二重), $\lambda_2 = 2$ (一重)

解 $\Leftrightarrow r(I-A) = 3-2 = 1$ 且 $r(2I-A) = 3-1 = 2$

	A_1	A_2	A_3	A_4
$I-A$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$r(I-A)$	2	2	1	2

$$2I-A$$

$$r(2I-A)$$

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow A$ 可对角化, $\lambda_1 = 1$ (二重), $\lambda_2 = 2$ (一重)

解 $\Leftrightarrow r(I-A) = 3-2 = 1$ 且 $r(2I-A) = 3-1 = 2$

	A_1	A_2	A_3	A_4
$I-A$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$r(I-A)$	2	2	1	2
$2I-A$			$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	
$r(2I-A)$				

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow A$ 可对角化, $\lambda_1 = 1$ (二重), $\lambda_2 = 2$ (一重)

解 $\Leftrightarrow r(I-A) = 3-2 = 1$ 且 $r(2I-A) = 3-1 = 2$

	A_1	A_2	A_3	A_4
$I-A$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$r(I-A)$	2	2	1	2
$2I-A$			$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	
$r(2I-A)$			2	

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow A$ 可对角化, $\lambda_1 = 1$ (二重), $\lambda_2 = 2$ (一重)

解 $\Leftrightarrow r(I-A) = 3-2 = 1$ 且 $r(2I-A) = 3-1 = 2$

	A_1	A_2	A_3	A_4
$I-A$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$r(I-A)$	2	2	1	2
$2I-A$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$r(2I-A)$			2	

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow A$ 可对角化, $\lambda_1 = 1$ (二重), $\lambda_2 = 2$ (一重)

解 $\Leftrightarrow r(I-A) = 3-2 = 1$ 且 $r(2I-A) = 3-1 = 2$

	A_1	A_2	A_3	A_4
$I-A$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$r(I-A)$	2	2	1	2
$2I-A$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$r(2I-A)$	2	2	2	2

应用

例 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, 求 A^n

应用

例 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, 求 A^n

解

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{pmatrix}$$

应用

例 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, 求 A^n

解

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A = P \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{pmatrix} P^{-1}$$

应用

例 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, 求 A^n

解

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A = P \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{pmatrix} P^{-1} = P \Lambda P^{-1}$$

应用

例 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, 求 A^n

解

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A = P \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{pmatrix} P^{-1} = P \Lambda P^{-1}$$

所以

$$A^n =$$

应用

例 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, 求 A^n

解

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A = P \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{pmatrix} P^{-1} = P \Lambda P^{-1}$$

所以

$$\begin{aligned} A^n &= (P \Lambda P^{-1}) \cdot (P \Lambda P^{-1}) (P \Lambda P^{-1}) \cdots (P \Lambda P^{-1}) (P \Lambda P^{-1}) \\ &= \end{aligned}$$

应用

例 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, 求 A^n

解

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A = P \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{pmatrix} P^{-1} = P \Lambda P^{-1}$$

所以

$$\begin{aligned} A^n &= (P \Lambda P^{-1}) \cdot (P \Lambda P^{-1}) (P \Lambda P^{-1}) \cdots (P \Lambda P^{-1}) (P \Lambda P^{-1}) \\ &= P \Lambda \cdot \Lambda \cdots \Lambda P^{-1} \\ &= \end{aligned}$$

应用

例 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, 求 A^n

解

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A = P \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{pmatrix} P^{-1} = P \Lambda P^{-1}$$

所以

$$\begin{aligned} A^n &= (P \Lambda P^{-1}) \cdot (P \Lambda P^{-1}) (P \Lambda P^{-1}) \cdots (P \Lambda P^{-1}) (P \Lambda P^{-1}) \\ &= P \Lambda \cdot \Lambda \cdots \Lambda P^{-1} \\ &= P \Lambda^n P^{-1} \\ &= \end{aligned}$$

应用

例 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, 求 A^n

解

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A = P \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{pmatrix} P^{-1} = P \Lambda P^{-1}$$

所以

$$\begin{aligned} A^n &= (P \Lambda P^{-1}) \cdot (P \Lambda P^{-1}) (P \Lambda P^{-1}) \cdots (P \Lambda P^{-1}) (P \Lambda P^{-1}) \\ &= P \Lambda \cdot \Lambda \cdots \Lambda P^{-1} \\ &= P \Lambda^n P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & & \\ & 2^n & \\ & & 6^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

应用

例 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, 求 A^n

解

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A = P \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{pmatrix} P^{-1} = P \Lambda P^{-1}$$

所以

$$\begin{aligned} A^n &= (P \Lambda P^{-1}) \cdot (P \Lambda P^{-1}) (P \Lambda P^{-1}) \cdots (P \Lambda P^{-1}) (P \Lambda P^{-1}) \\ &= P \Lambda \cdot \Lambda \cdots \Lambda P^{-1} \\ &= P \Lambda^n P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & & \\ & 2^n & \\ & & 6^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \end{aligned}$$

The End

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| =$$

► Back

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 1 \\ 2 & \lambda - 4 & 2 \\ 2 & -2 & \lambda \end{vmatrix}$$

► Back

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 1 \\ 2 & \lambda - 4 & 2 \\ 2 & -2 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{r_3 - r_2}}$$

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 1 \\ 2 & \lambda - 4 & 2 \\ 2 & -2 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{r_3 - r_2}} \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 1 \\ 2 & \lambda - 4 & 2 \\ 0 & -\lambda + 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$$

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 1 \\ 2 & \lambda - 4 & 2 \\ 2 & -2 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\underline{\underline{r_3 - r_2}}} \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 1 \\ 2 & \lambda - 4 & 2 \\ 0 & -\lambda + 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 1 \\ 2 & \lambda - 4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

- 求解特征方程

$$\begin{aligned} 0 = |\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 1 \\ 2 & \lambda - 4 & 2 \\ 2 & -2 & \lambda \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 1 \\ 2 & \lambda - 4 & 2 \\ 0 & -\lambda + 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 1 \\ 2 & \lambda - 4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2 + c_3} \end{aligned}$$

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 1 \\ 2 & \lambda - 4 & 2 \\ 2 & -2 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{r_3 - r_2}} \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 1 \\ 2 & \lambda - 4 & 2 \\ 0 & -\lambda + 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 1 \\ 2 & \lambda - 4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{c_2 + c_3}}} (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 1 \\ 2 & \lambda - 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 1 \\ 2 & \lambda - 4 & 2 \\ 2 & -2 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 1 \\ 2 & \lambda - 4 & 2 \\ 0 & -\lambda + 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 1 \\ 2 & \lambda - 4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2 + c_3} (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 1 \\ 2 & \lambda - 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$$

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 1 \\ 2 & \lambda - 4 & 2 \\ 2 & -2 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{r_3 - r_2}} \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 1 \\ 2 & \lambda - 4 & 2 \\ 0 & -\lambda + 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 1 \\ 2 & \lambda - 4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{c_2 + c_3}}} (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 1 \\ 2 & \lambda - 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$$

► Back

- 当 $\lambda_1 = 1$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(1I - A : 0) =$$

- 当 $\lambda_1 = 1$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(1I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

- 当 $\lambda_1 = 1$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(1I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

- 当 $\lambda_1 = 1$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(1I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_2 - r_1}$$

- 当 $\lambda_1 = 1$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(1I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$
$$\xrightarrow{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

- 当 $\lambda_1 = 1$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(1I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- 当 $\lambda_1 = 1$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(1I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- 当 $\lambda_1 = 1$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(1I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

所以
$$\begin{cases} x_1 & -\frac{1}{2}x_3 = 0 \end{cases}$$

- 当 $\lambda_1 = 1$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(1I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

所以
$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

- 当 $\lambda_1 = 1$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(1I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

所以
$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

- 当 $\lambda_1 = 1$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(1I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

所以
$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

基础解系: $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

- 当 $\lambda_1 = 1$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(1I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

所以
$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

基础解系: $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

- 当 $\lambda_2 = 2$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(2I - A : 0) =$$

► Back

- 当 $\lambda_2 = 2$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(2I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$$

► Back

- 当 $\lambda_2 = 2$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(2I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

► Back

- 当 $\lambda_2 = 2$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(2I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

所以

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

► Back

- 当 $\lambda_2 = 2$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(2I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

所以

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 - x_3$$

► Back

- 当 $\lambda_2 = 2$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(2I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

所以

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 - x_3$$

基础解系: $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

► Back

- 当 $\lambda_2 = 2$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(2I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

所以

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 - x_3$$

基础解系: $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

► Back

- 当 $\lambda_2 = 2$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(2I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

所以

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 - x_3$$

基础解系: $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

► Back

- 当 $\lambda_2 = 2$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(2I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

所以

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 - x_3$$

基础解系: $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

► Back

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| =$$

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{r_3 - r_2}}$$

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{r_3 - r_2}} \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ 0 & -\lambda - 1 & \lambda + 1 \end{vmatrix}$$

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{r_3 - r_2}} \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ 0 & -\lambda - 1 & \lambda + 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda + 1) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

- 求解特征方程

$$\begin{aligned} 0 = |\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow{\underline{\underline{r_3 - r_2}}} \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ 0 & -\lambda - 1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda + 1) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{c_2 + c_3}}} \end{aligned}$$

- 求解特征方程

$$\begin{aligned}
 0 = |\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\
 &\xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ 0 & -\lambda - 1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} \\
 &= (\lambda + 1) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2 + c_3} (\lambda + 1) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -4 & -2 \\ -2 & \lambda - 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{r_3 - r_2}} \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ 0 & -\lambda - 1 & \lambda + 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda + 1) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{c_2 + c_3}}} (\lambda + 1) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -4 & -2 \\ -2 & \lambda - 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda + 1) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -4 \\ -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix}$$

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{r_3 - r_2}} \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ 0 & -\lambda - 1 & \lambda + 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda + 1) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{c_2 + c_3}}} (\lambda + 1) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -4 & -2 \\ -2 & \lambda - 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda + 1) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -4 \\ -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda + 1)(\lambda^2 - 4\lambda - 5)$$

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{r_3 - r_2}} \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ 0 & -\lambda - 1 & \lambda + 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda + 1) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{c_2 + c_3}}} (\lambda + 1) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -4 & -2 \\ -2 & \lambda - 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda + 1) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -4 \\ -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda + 1)(\lambda^2 - 4\lambda - 5)$$

$$= (\lambda + 1)^2(\lambda - 5)$$

- 当 $\lambda_1 = -1$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(-I - A : 0) =$$

► Back

- 当 $\lambda_1 = -1$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(-I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$$

► Back

- 当 $\lambda_1 = -1$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(-I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

► Back

- 当 $\lambda_1 = -1$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(-I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

所以

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

► Back

- 当 $\lambda_1 = -1$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(-I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

所以

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -x_2 - x_3$$

► Back

- 当 $\lambda_1 = -1$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(-I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

所以

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2 - x_3$$

$$\text{基础解系: } \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

► Back

- 当 $\lambda_1 = -1$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(-I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

所以

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2 - x_3$$

$$\text{基础解系: } \alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

▶ Back

- 当 $\lambda_1 = -1$, 求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$:

$$(-I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

所以

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -x_2 - x_3$$

$$\text{基础解系: } \alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

► Back

- 当 $\lambda_2 = 5$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(5I - A : 0) =$$

- 当 $\lambda_2 = 5$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(5I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \end{array} \right)$$

- 当 $\lambda_2 = 5$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(5I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

- 当 $\lambda_2 = 5$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(5I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3}$$

- 当 $\lambda_2 = 5$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(5I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

- 当 $\lambda_2 = 5$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(5I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

- 当 $\lambda_2 = 5$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(5I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- 当 $\lambda_2 = 5$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(5I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- 当 $\lambda_2 = 5$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(5I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

所以
$$\begin{cases} x_1 & -x_3 = 0 \end{cases}$$

- 当 $\lambda_2 = 5$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(5I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

所以
$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

- 当 $\lambda_2 = 5$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(5I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

所以
$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

- 当 $\lambda_2 = 5$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(5I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

所以
$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

基础解系: $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- 当 $\lambda_2 = 5$, 求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$:

$$(5I - A : 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

所以
$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

基础解系: $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$