第 05 周作业解答

练习 1. 求球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 在 xoy 坐标面上的投影曲线方程。

解交线的一般方程是

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 & (1) \\ x+y+z=0 & (2) \end{cases}$$

现在消去变量 z. 由 (2) 式得 $z=-x-y$，代入 (1) 式，得

$$x^2+y^2+(-x-y)^2=1 \qquad \Rightarrow \qquad 2x^2+2xy+2y^2=1$$

所以投影曲线的方程是

$$\begin{cases} 2x^2+2xy+2y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$$

练习 2. 分别求母线平行于 x 轴及 y 轴，而且通过曲线 $\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=16 & (1) \\ x^2-y^2+z^2=0 & (2) \end{cases}$ 的柱面。

解 1. 母线平行于 x 轴情形。其实就是求曲线到 yoz 坐标面的投影柱面。目标是消去变量 x。由 $(1)-(2)\times 2$ 可得

$$3y^2-z^2=16.$$

这就是曲线到 yoz 坐标面的投影柱面，也就是母线平行于 x 轴而且通过曲线的柱面。

2. 母线平行于 y 轴情形。其实就是求曲线到 xoz 坐标面的投影柱面。目标是消去变量 y。由 $(1)+(2)$ 可得

$$3x^2+2z^2=16.$$

这就是曲线到 xoz 坐标面的投影柱面，也就是母线平行于 y 轴而且通过曲线的柱面。

练习 3. 化曲线的一般方程 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9 \\ y=z \end{cases}$ 为参数方程。

解将 (2) 式代入 (1) 式，消去 z 可得

$$x^2+2y^2=9 \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}y}{3}\right)^2=1$$

可设

$$\frac{x}{3}=\cos\theta, \qquad \frac{\sqrt{2}y}{3}=\sin\theta$$

其中 $0\le\theta\le 2\pi$。所以参数方程是

$$\begin{cases} x=3\cos\theta \\ y=\frac{3}{\sqrt{2}}\sin\theta \\ z=\frac{3}{\sqrt{2}}\sin\theta \end{cases} \quad (0\le\theta\le 2\pi).$$

1 多元函数微分法及其应用

练习 4. 填空

函数	定义域	类型（填：闭集/开集，有界集/无界集，连通/不连通）
$z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$	$D=\{(x,y)\mid y\geq 0,\, x\geq 0 且 x^2\geq y\}$	闭集，无界集，连通
$z=\frac{1}{\sqrt{x+y}}+\frac{1}{\sqrt{x-y}}$	$D=\{(x,y)\mid x+y>0 且 x-y>0\}$	开集，无界集，连通

并分别画出上述两定义域 D，在图上标示哪部分是内点，哪部分是外点，哪部分是边界。

解图以后补上:)

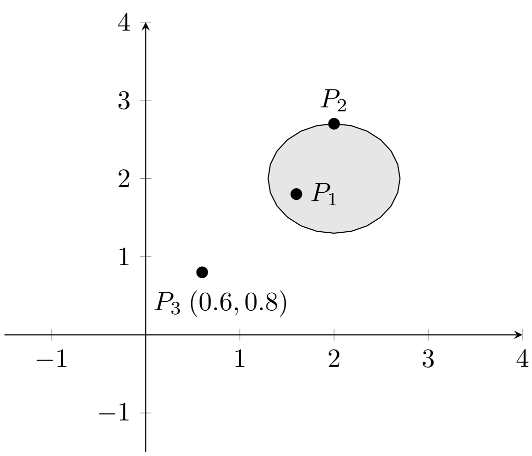
练习 5. 画出二元函数 $z=2-x^2-y^2$ 的函数图形，其中函数定义域为 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 1\}$。
（题外话：网络上有不少在线画图程序，课堂上演示的是用这个：`http://www.flashandmath.com/mathlets/multicalc/fungraph3d/`。该网站的主页还有很多有趣的数学程式。）

解这是旋转面，由 xoz 面上的抛物线 $z=2-x^2$（$-1\leq x\leq 1$）绕 z 轴旋转一周得到。图形以后补上:)

练习 6. 设 E 是平面上一个点集，则平面上任意一点 P 只能是一下三种的一种：（1）E 的内点；（2）E 的外点；（3）E 的边界点。现假设点 Q 是 E 的聚点，则可以证明 Q 或者为 E 的内点，或者为 E 的边界点；也就是

$$\{全体聚点\}\subset\{内点\}\cup\{边界点\}$$

但一般而言，$\{全体聚点\}$ 未必与并集 $\{内点\}\cup\{边界点\}$ 相同。
以下是一个例子
假设点集 $E=\{(x,y)\mid (x-2)^2+(y-2)^2\leq 0.7^2\}\cup\{(0.6,0.8)\}$（如下图）。填写（请填上 ✓ 或 ×）



	内点	边界点	聚点
$P_1(1.6\,1.8)$	✓	×	✓
$P_2(2,\,2.7)$	×	✓	✓
$P_3(0.6,\,0.8)$	×	✓	×

练习 7. 证明下列极限不存在

1. $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

2. $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^4}$

解 (1) 设 $\delta>0$，取点 $P(0,\,\frac{\delta}{2})$，$Q(\frac{\delta}{2},\,\frac{\delta}{2})$。则点 P,Q 都在原点 $(0,\,0)$ 去心 δ 邻域中，且

$$f(P)=f(0,\,\frac{\delta}{2})=\frac{0-\frac{\delta}{2}}{\sqrt{0^2+(\frac{\delta}{2})^2}}=-1,\qquad f(Q)=f(\frac{\delta}{2},\,\frac{\delta}{2})=\frac{\frac{\delta}{2}-\frac{\delta}{2}}{\sqrt{(\frac{\delta}{2})^2+(\frac{\delta}{2})^2}}=0$$

这说明：即便令 $\delta\to 0$，点 $(0,\,0)$ 去心 δ 邻域中的点的函数值也并不会趋于相同，可知极限一定不存在。

(1) 设 $\delta\in(0,\,1)$，取点 $P(0,\,\frac{\delta}{2})$，$Q(\frac{\delta^2}{4},\,\frac{\delta}{2})$。则点 P,Q 都在原点 $(0,\,0)$ 去心 δ 邻域中，且

$$f(P)=f(0,\,\frac{\delta}{2})=0,\qquad f(Q)=f(\frac{\delta^2}{2},\,\frac{\delta}{2})=\frac{\frac{\delta^2}{4}\cdot(\frac{\delta}{2})^2}{\sqrt{(\frac{\delta^2}{4})^2+(\frac{\delta}{2})^4}}=\frac{1}{2}$$

这说明：即便令 $\delta\to 0$，点 $(0,\,0)$ 去心 δ 邻域中的点的函数值也并不会趋于相同，可知极限一定不存在。

练习 8. 求下列函数的偏导数

$$(1)\quad s=\frac{u^2+v^2}{uv};\qquad (2)\quad z=\sin(xy)+\cos^2(xy);\qquad (3)\quad z=(1+xy)^y;\qquad (4)\quad u=\arctan(x-y)^z.$$

解 (1)

$$\begin{aligned}\frac{\partial s}{\partial u}&=\left(\frac{u^2+v^2}{uv}\right)_u=\frac{(u^2+v^2)_u\cdot uv-(u^2+v^2)\cdot(uv)_u}{(uv)^2}=\frac{2u\cdot uv-(u^2+v^2)\cdot v}{u^2v^2}=\frac{u^2v-v^3}{u^2v^2},\\ \frac{\partial s}{\partial v}&=\left(\frac{u^2+v^2}{uv}\right)_v=\frac{(u^2+v^2)_v\cdot uv-(u^2+v^2)\cdot(uv)_v}{(uv)^2}=\frac{2v\cdot uv-(u^2+v^2)\cdot u}{u^2v^2}=\frac{uv^2-u^3}{u^2v^2}.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=y\cos(xy)+2\cos(xy)\cdot(-\sin(xy))\cdot y=y\cos(xy)-2y\cos(xy)\sin(xy),\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=x\cos(xy)+2\cos(xy)\cdot(-\sin(xy))\cdot x=x\cos(xy)-2x\cos(xy)\sin(xy).\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=[(1+xy)^y]_x=y(1+xy)^{y-1}\cdot y=y^2(1+xy)^{y-1},\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=[(1+xy)^y]_y=\ln(1+xy)\cdot(1+xy)^y+y(1+xy)^{y-1}\cdot x=(1+xy)^y\left[\ln(1+xy)+\frac{xy}{1+xy}\right]\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=\frac{1}{1+(x-y)^{2z}}\cdot[(x-y)^z]_x=\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}},\\ \frac{\partial u}{\partial y}&=\frac{1}{1+(x-y)^{2z}}\cdot[(x-y)^z]_y=\frac{-z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}},\\ \frac{\partial u}{\partial z}&=\frac{1}{1+(x-y)^{2z}}\cdot[(x-y)^z]_z=\frac{(x-y)^z\ln(x-y)}{1+(x-y)^{2z}}.\end{aligned}$$

练习 9. 设 $z=f(x,\,y)$，计算 z 在某一点 $(x_0,\,y_0)$ 处的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,\,y_0)$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,\,y_0)$ 有两种方法：

1. 先求出偏导函数 $\frac{\partial f}{\partial x}(x,\,y)$ 及 $\frac{\partial f}{\partial y}(x,\,y)$，再将 $(x,\,y)=(x_0,\,y_0)$ 代入偏导函数，计算该点处的偏导数值。

2. 直接利用定义

$$
\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,\, y_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,\, y_0)-f(x_0,\, y_0)}{\Delta x} = \frac{d}{dx}\left[f(x,\, y_0)\right]\big|_{x=x_0},
$$
$$
\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,\, y_0) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,\, y_0+\Delta y)-f(x_0,\, y_0)}{\Delta y} = \frac{d}{dy}\left[f(x_0,\, y)\right]\big|_{y=y_0}.
$$

现在设 $f(x,\, y) = x + (y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$，利用上述两种方法分别求 $f_x(x,\, 1)$。

解 1. 方法一，先求出偏导数的一般形式：

$$
\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + (y-1)\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}}\cdot\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)_x = 1+(y-1)\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}\right)^{-1/2}\frac{1}{y}.
$$

所以 $\frac{\partial f}{\partial x}(x,\, 1) = 1$.

2. 方法二

$$
\frac{\partial f}{\partial x}(x,\, 1) = \frac{d}{dx}\left[z(x,\, 1)\right] = \frac{d}{dx}\left[x\right] = 1.
$$

练习 10. 设 $f(x,\, y) = \begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,\, y)\neq(0,\, 0)\\ 0, & (x,\, y)=(0,\, 0)\end{cases}$. 求 $\frac{\partial f}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial y}$。

解当 $(x,\, y)\neq(0,\, 0)$ 时，

$$
\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right)_x = \frac{2xy(x^2+y^2)-x^2y\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2},
$$
$$
\frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right)_y = \frac{x^2(x^2+y^2)-x^2y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}.
$$

当 $(x,\, y)=(0,\, 0)$ 时，

$$
\frac{\partial f}{\partial x}(0,\, 0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,\, 0)-f(0,\, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{(\Delta x)^2\cdot 0}{(\Delta x)^2+0^2}-0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x} = 0,
$$
$$
\frac{\partial f}{\partial y}(0,\, 0) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\, \Delta y)-f(0,\, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\frac{0\cdot(\Delta y)^2}{0^2+(\Delta y)^2}-0}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y} = 0.
$$

所以

$$
\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases}\frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}, & (x,\, y)\neq(0,\, 0)\\ 0, & (x,\, y)=(0,\, 0)\end{cases}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases}\frac{x^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}, & (x,\, y)\neq(0,\, 0)\\ 0, & (x,\, y)=(0,\, 0)\end{cases}.
$$

练习 11. 求下列函数的所有二阶偏导数

$$
(1)\quad z=\arctan\frac{y}{x};\qquad (2)\quad z=y^x.
$$

解 (1)

$$
z_x = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)_x = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2},
$$
$$
z_y = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)_y = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2},
$$

$$
\begin{aligned}
z_{xx} &= \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)_x = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \\
z_{xy} &= \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)_y = -\frac{(x^2+y^2)-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}, \\
z_{yx} &= \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)_x = \frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}, \\
z_{yy} &= \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)_y = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
z_x &= (y^x)_x = y^x \ln y, \\
z_y &= (y^x)_y = xy^{x-1}, \\
z_{xx} &= (y^x \ln y)_x = y^x (\ln y)^2, \\
z_{xy} &= (y^x \ln y)_y = xy^{x-1}\ln y + y^{x-1} = y^{x-1}(1 + x\ln y), \\
z_{yx} &= (xy^{x-1})_x = y^{x-1} + xy^{x-1}\ln y = y^{x-1}(1 + x\ln y), \\
z_{yy} &= (xy^{x-1})_y = x(x-1)y^{x-2}.
\end{aligned}
$$