第 07 周作业解答

练习 1. 靠近太阳的一艘飞船，船身正要融化。假设飞船坐标为 $(1, 1, 1)$，周围的温度分布函数为 $T = e^{-x^2-2y^2-3z^2}$。船长问此时应该转向哪一个方向，使得温度可以尽快降下来？写出该方向的单位方向向量。

解 1. 求梯度

$$\nabla T = (T_x, T_y, T_z) = (-2xe^{-x^2-2y^2-3z^2}, -4ye^{-x^2-2y^2-3z^2}, -6ze^{-x^2-2y^2-3z^2}).$$

所以

$$\nabla T(1, 1, 1) = (-2e^{-6}, -4e^{-6}, -6e^{-6}), \quad |\nabla T(1, 1, 1)| = 2e^{-6}\sqrt{14}.$$

2. 沿方向

$$\overrightarrow{s} = -\frac{\nabla T(1, 1, 1)}{|\nabla T(1, 1, 1)|} = (\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}})$$

温度下降最快。

练习 2. 计算曲面 $3xy + z^2 = 4$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切平面、法线的方程。

解 1. 令 $F(x, y, z) = 3xy + z^2 - 4$，则曲面方程为 $F(x, y, z) = 0$。曲面在点 $(1, 1, 1)$ 处的一个法向量可以取为：

$$\nabla F(1, 1, 1) = (3y, 3x, 2z)\Big|_{(1,1,1)} = (3, 3, 2).$$

2. 切平面方程：

$$3(x-1) + 3(y-1) + 2(z-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x + 3y + 2z - 8 = 0$$

3. 法线方程：

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{2}$$

练习 3. 计算二元函数 $z = xy$ 的图形在点 $(1, 1, 1)$ 处的切平面、法线的方程。

解 1. 令 $F(x, y, z) = z - xy$，则曲面方程为 $F(x, y, z) = 0$。曲面在点 $(1, 1, 1)$ 处的一个法向量可以取为：

$$\nabla F(1, 1, 1) = (-y, -x, 1)\Big|_{(1,1,1)} = (-1, -1, 1).$$

2. 切平面方程：

$$-(x-1) - (y-1) + (z-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x + y - z - 1 = 0$$

3. 法线方程：

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$$

练习 4. 计算螺旋线 $x = \cos\theta, y = \sin\theta, z = 3\theta$ 在点 $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\pi}{2})$ 处的切线、法平面的方程。

解 1. 该点对应参数 $\theta=\frac{\pi}{6}$，可取方向向量为

$$((\cos\theta)',\,(\sin\theta)',\,(3\theta)')\Big|_{\theta=\frac{\pi}{6}}=(-\sin\theta,\,\cos\theta,\,3)\Big|_{\theta=\frac{\pi}{6}}=(-\frac{1}{2},\,\frac{\sqrt{3}}{2},\,3).$$

2. 切线方程：

$$\frac{x-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}=\frac{y-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{z-\frac{\pi}{2}}{3}$$

3. 法平面方程：

$$-\frac{1}{2}(x-\frac{\sqrt{3}}{2})+\frac{\sqrt{3}}{2}(y-\frac{1}{2})+3(z-\frac{\pi}{2})=0\quad\Rightarrow\quad x-\sqrt{3}y-6z+3\pi=0$$

练习 5. 计算曲线 $\left\{\begin{array}{l}x^2+y^2+z^2-3x=0\\2x-3y+5z-4=0\end{array}\right.$ 在点 $(1,\,1,\,1)$ 处的切线、法平面的方程。

解 1. 令 $F(x,\,y,\,z)=x^2+y^2+z^2-3x$, $G(x,\,y,\,z)=2x-3y+5z-4$，则该点处的一个方向向量可取为

$$\nabla F(1,\,1,\,1)\times\nabla G(1,\,1,\,1)=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\F_x&F_y&F_z\\G_x&G_y&G_z\end{vmatrix}_{(1,\,1,\,1)}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2x-3&2y&2z\\2&-3&5\end{vmatrix}_{(1,\,1,\,1)}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-1&2&2\\2&-3&5\end{vmatrix}=(16,\,9,\,-1)$$

2. 切线方程：

$$\frac{x-1}{16}=\frac{y-1}{9}=\frac{z-1}{-1}$$

3. 法平面的方程：

$$16(x-1)+9(y-1)-(z-1)=0\quad\Rightarrow\quad 16x+9y-z-24=0$$

练习 6. 求函数 $f(x,\,y)=e^{2x}(x+y^2+2y)$ 的极值。

解 1. 求驻点。

$$z_x=e^{2x}(2x+2y^2+4y+1),\quad z_y=e^{2x}(x+2y+2).$$

求解方程组

$$\begin{cases}z_x=e^{2x}(2x+2y^2+4y+1)=0\\z_y=e^{2x}(2y+2)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x+2y^2+4y+1=0 & (1)\\2y+2=0 & (2)\end{cases}$$

由 (2) 的 $y=-1$，再代入 (1) 得到 $x=\frac{1}{2}$。所以驻点只有一个：$(\frac{1}{2},\,-1)$。

2. 判断驻点是否极值点。

$$z_{xx}=4e^{2x}(x+y^2+2y+1),\quad z_{xy}=4e^{2x}(y+1),\quad z_{yy}=2e^{2x}$$

所以

$$P(x,\,y)=z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^2=8e^{4x}(x+y^2+2y+1)-16e^{4x}(y+1)^2=8e^{4x}(x-y^2-2y-1).$$

驻点	$(\frac{1}{2},\,-1)$
$P(x,\,y)$	$4e^2>0$
$z_{xx}(x,\,y)$	$2e>0$
是否极值点	极小值点

3. 结论：只有一个极值点 $(\frac{1}{2},\,-1)$，且为极小值点。

练习 7. 设函数 $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ 是定义在全平面 $\mathbb{R}^2$ 上。求函数的极值点，并判断在该极值点处，函数是否取得最大、最小值?

解 1. 求驻点。求解方程组

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ f_y = 6xy - 12 = 0 \end{cases}$$

得 $(x, y) = (-2, -1), (-1, -2), (1, 2), (2, 1)$。

2. 判断驻点是否极值点。计算二阶偏导数

$$f_{xx} = 6x, \quad f_{xy} = 6y, \quad f_{yy} = 6x$$

可求出判别式 $P(x, y) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 36x^2 - 36y^2$。

	$(-2, -1)$	$(-1, -2)$	$(1, 2)$	$(2, 1)$
$P(x, y)$	$108 > 0$	$-108 < 0$	$-108 < 0$	$108 > 0$
f_{xx}	$-12 < 0$			$12 > 0$
是否极值点	极大值点	☹	☹	极小值点
极值 $f(x, y)$	28			-28

3. 极大值点 $(-2, -1)$ 并不是函数的最大值点。显然 $f(1, 10) = 166 > 28 = f(-2, -1)$。实事上，函数 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上没有上界，取不到最大值，这是 $\lim_{y\to+\infty} f(1, y) = \lim_{y\to+\infty} 3y^2 - 12y - 14 = +\infty$.

极小值点 $(2, 1)$ 并不是函数的最小值点。显然 $f(-10, 0) = -850 < -28 = f(2, 1)$。实事上，函数 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上没有下界，取不到最小值，这是 $\lim_{x\to-\infty} f(x, 0) = \lim_{x\to-\infty} x^3 - 15x = -\infty$.