《线性代数》A 卷参考答案

一、选择题

1. 设 A 和 B 是 n 阶方阵, 如果 $|A|=2, |B|=3$, 则 $|AB^{-1}|=$ (B)

(A) $(-1)^n\frac{2}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $(-1)^n 6$ (D) 6

2. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 2 & 9 & 6 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, 则伴随矩阵 A^* 第 2 行第 3 列的元素等于 (A)

(A) 8 (B) -8 (C) 20 (D) -20

3. 假设 A, B 是对称矩阵，下列哪个矩阵不一定对称? (C)

(A) $-2B^T$ (B) $A+3B$ (C) AB (D) A^TA

4. 设分块矩阵 $X=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, $Z=\begin{pmatrix} A & O \\ C & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$ 满足 $XY=Z$, 则 $Y=$ (C)

(A) $\begin{pmatrix} I & O \\ -B^{-1}A & I \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} I & O \\ B^{-1}A & I \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} I & -A^{-1}B \\ O & I \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ O & I \end{pmatrix}$

5. 以下哪个向量组是线性无关 (D)

(A) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

6. 关于线性组合 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 则 $c_1=$ (D)

(A) 2 (B) 1 (C) 0 (D) -1

二、填空题

1. 矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的秩是 2

2. 假设 $w=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ r \\ s \end{pmatrix}$ 是 $v=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ 和 $v=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ 的线性组合, 则 $r=1, s=3$

3. 设 3 阶方阵 A 的特征值为 $1,2,3$, 则 $|A|=$6

4. 设矩阵 $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ 为正定矩阵，则 a 的范围是 $a>1$

5. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，则线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多解的充分必要条件是 $r(A\vdots b)=r(A)<n$

6. 设 $A=\begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{pmatrix}$，则极限 $\lim\limits_{k\to\infty}A^k=\begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$

三、判断题 ✓×

1. 假设 n 阶方阵 A, B 满足 $AB=BA$, 则 $A^T(B^T)^3=(B^T)^3A^T$. (✓)

2. 设 A 是一个三角形方阵，那么 A 可逆当且仅当 A 的对角元均为非零数. (✓)

3. 存在两个矩阵 A 和 B, 满足 $r(A)=4, r(B)=7, r(AB)=5$. (×)

4. 两个 n 阶方阵, 如果具有相同特征值，那么它们一定相似. (×)

5. 设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A 与 $2A$ 相似. (✓)

6. 设 A 是对称矩阵, 且 $A^5=O$, 则 $A=O$. (✓)

计算题

1.(7 分) 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

解 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \times (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \times (-1) \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6.$

2. (8 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, 求 A^{-1}

解

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1-3r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

所以 $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

3.(8 分) 求向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_5 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ 的一组极大无关组，并将其余向量表示成极大无关组的线性组合。

解

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 0 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3-9r_1 \\ r_4-4r_1}]{r_2-6r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -30 \\ 0 & -10 & -20 & -30 & -40 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-r_2]{r_3-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可见 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5$构成一个极大无关组，且

$$\alpha_3 = -\alpha_1 + 2\alpha_2, \qquad \alpha_4 = -2\alpha_1 + 3\alpha_2.$$

4.(9 分) 线性方程组用基础解系表示线性方程组 $\begin{cases} x + 2y - 3z + w = -2 \\ 3x - y - 2z - 4w = 1 \\ 2x + 3y - 5z + w = -3 \end{cases}$ 的通解。

解

$$
\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & 1 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-3r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -7 & 7 & -7 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)
$$

$$
\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1-2r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)
$$

(1) 自由变量：z, w

(2) 从简化的阶梯型矩阵看出，原方程组同解于：

$$
\begin{cases} x - z - w = 0 \\ y - z + w = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z + w \\ y = -1 + z - w \end{cases}
$$

(3) 特解：

$$
\eta = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

基础解系：

$$
\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

通解：

$$
x = \eta + c_1\xi_1 + c_2\xi_2
$$

其中 c_1, c_2 为任意常数。

5. (10 分) 判断矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ 能否对角化。若能，求出相应的对角阵 Λ，和可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP = \Lambda$。

解

(1) 解特征方程 $|\lambda I - A| = 0$。

$$
|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 2 \\ 0 & \lambda-5 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-5)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 \\ 2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-5)^2
$$

所以特征值为 $\lambda_1 = 5$（二重特征值），$\lambda_2 = 0$。

(2) 关于特征值 $\lambda_1 = 5$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$。

$$
(5I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)
$$

自由变量取为 x_1, x_2。同解方程组为

$$
2x_1 + x_3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_3 = -2x_1
$$

分别取 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，得基础解系

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

所以对应于特征值 $\lambda_1 = 5$ 的有 2 个线性无关特征向量。

(3) 关于特征值 $\lambda_2 = 0$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$。

$$(0I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

自由变量取为 x_3。同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \\ \qquad\quad x_2 = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

取 $x_3 = 1$，得基础解系

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(4) 可见 A 有 3 个线性无关特征向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$，所以 A 可对角化。令

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \scriptstyle\alpha_1 & \scriptstyle\alpha_2 & \scriptstyle\alpha_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 5 & & \\ & 5 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

则

$$P^{-1}AP = \Lambda.$$

6.(6 分) 求向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 的正交化。

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{||\beta_1||^2}\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\alpha_3^T \beta_1}{||\beta_1||^2}\beta_1 - \frac{\alpha_3^T \beta_2}{||\beta_2||^2}\beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1/2}{3/4}\begin{pmatrix} -3/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

7. (8 分) 化二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 2x_2^2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$ 为标准型，写出所做的非退化线性变换 $y = Cx$，并计算 f 的正惯性指标。

解

$$
\begin{aligned}
f &= 2(x_1^2-2x_1x_3+x_3^2)-2x_2^2+8x_2x_3-2x_3^2 \\
&= 2(x_1-x_3)^2-2(x_2-2x_3)^2+6x_3^2.
\end{aligned}
$$

令

$$
\begin{cases} y_1 = x_1 - x_3 \\ y_2 = x_2 - 2x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 + y_3 \\ x_2 = y_2 + 2y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y = Cy
$$

则 $|C| = 1 \neq 0$（说明为非退化线性变换），且

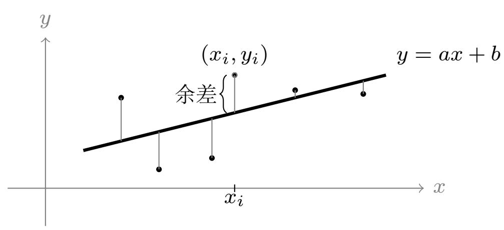
$$
f = 2y_1^2 - 2y_2^2 + 6y_3^2.
$$

正惯性指标为 2。

五、解答题

假设实验中测出的数据集为 n 个二元数组 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\dots,(x_n,y_n)$. 视这些数据为平面上的点. 现在我们希望找出一条直线 $y=a_0x+b_0$, 尽可能地 "接近" 这些点. 下面我们分几部分介绍如何找到这样一条直线, 并请你补充其中的一些证明和计算, 填写在方框中.

(1) 通常有不同的方式衡量任意一条直线 $y=ax+b$ 如何" 接近" 数据集, 这里我们将选择常见的" 余差平方和最小" 的衡量方式. 一条直线 $y=ax+b$ 与单个数据 (x_i,y_i) 的" **余差**" 定义为 $y_i-(ax_i+b_i)$, 而直线与数据集的" **余差平方和**" 则定义为 $\sum_{i=1}^n [y_i-(ax_i+b_i)]^2$.



令 $Y := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $X := \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}$, $\beta := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

证明 (1 分): 上述" 余差平方和" 等于 $||Y-X\beta||^2$. (这里 $||\cdot||^2$ 表示向量长度的平方.)

证明: $Y - X\beta = \begin{pmatrix} y_1-(ax_1+b) \\ y_2-(ax_2+b) \\ \vdots \\ y_n-(ax_n+b) \end{pmatrix}$ 所以 $||Y-X\beta||^2 = \sum_{i=1}^n [y_i-(ax_i+b_i)]^2$.

(2) 假设至少有两个数据 (x_i,y_i) 和 (x_j,y_j) 满足 $x_i \neq x_j$.

证明 (3 分): X 的秩等于 2, 并且 X^TX 是正定的 2 阶对称矩阵.

证明: $\because x_i \neq x_j$, $\therefore X$ 的列向量是线性无关, 所以 $r(X)=2$.
$\because (X^TX)^T = X^T(X^T)^T = X^TX$, $\therefore X^TX$ 是对称矩阵.
设 $\alpha \in \mathbb{R}^2$ 且 $\alpha \neq 0$. $\because X$ 的列向量线性无关, $\therefore X\alpha \neq 0$. 所以 $\alpha^T(X^TX)\alpha = (X\alpha)^T(X\alpha) > 0$. 这说明 X^TX 是正定矩阵.

(3) 由于 X^TX 是正定矩阵, 从而也是可逆矩阵. 令

$$
\beta_0 := (X^TX)^{-1}X^TY.
$$

则 β_0 是一个 2 维列向量, 记 $\beta_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$. 下面我们将要说明直线 $y = a_0x + b_0$是最接近数据集的直线.

(4) 利用关系式 $X^TX\beta_0 = X^TY$ 证明 (2 分): 对任意的 $\beta = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $X\beta_0 - X\beta$ 与 $Y - X\beta_0$ 总是正交, 并且进一步证明成立恒等式 $||Y - X\beta||^2 = ||Y - X\beta_0||^2 + ||X\beta_0 - X\beta||^2$.

证明:

$$
\begin{aligned}
(X\beta_0 - X\beta)^T(Y - X\beta_0) &= (\beta_0^T X^T - \beta^T X^T)(Y - X\beta_0) \\
&= \beta_0^T X^T Y - \beta^T X^T Y - \beta_0^T \underbrace{X^T X\beta_0}_{=X^TY} + \beta^T \underbrace{X^T X\beta_0}_{=X^TY} = 0
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
||Y - X\beta||^2 &= ||(Y - X\beta_0) + (X\beta_0 - X\beta)||^2 \\
&= ||Y - X\beta_0||^2 + 2(X\beta_0 - X\beta)^T(Y - X\beta_0) + ||Y - X\beta_0||^2 \\
&= ||Y - X\beta_0||^2 + ||Y - X\beta_0||^2
\end{aligned}
$$

(5) 上述等式说明 $||Y - X\beta_0||^2 \le ||Y - X\beta||^2$. 所以 $y = a_0x + b_0$ 是在余差平方和最小意义下最接近数据集的直线. 该直线称为**回归直线**, a_0 和 b_0 称为**回归系数**. 这种拟合数据的基本思想来自高斯 (同时还有 Legendre 的独立工作), 1801 年他用这种方法精确预测了谷神星的具体位置, 震惊了欧洲的科学界.

(6) 试求出数据 $(0,1),(1,1),(2,2)$ 的回归直线, 并在图中画出该直线. (3 分)

$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $X^TY = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

$X^TX = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, $(X^TX)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 5/6 \end{pmatrix}$

$\beta_0 = (X^TX)^{-1}X^TY = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 5/6 \end{pmatrix}$

所以回归直线为 $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{6}$