第 3 章 c：泰勒公式

数学系　梁卓滨

2019-2020 学年 I

Outline

多项式逼近函数

问题 是否可以用多项式“**逼近**”一般函数 $f(x)$?

多项式逼近函数

问题 是否可以用多项式“**逼近**”一般函数 $f(x)$?

性质 设 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导，则存在 n 阶多项式 $p_n(x)$，使得

$$f^{(k)}(x_0) = p_n^{(k)}(x_0) \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

多项式逼近函数

问题 是否可以用多项式“**逼近**”一般函数 $f(x)$?

性质 设 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导，则存在 n 阶多项式 $p_n(x)$，使得

$$f^{(k)}(x_0) = p_n^{(k)}(x_0) \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

证明 设

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n.$$

多项式逼近函数

问题 是否可以用多项式“**逼近**”一般函数 $f(x)$?

性质 设 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导，则存在 n 阶多项式 $p_n(x)$，使得

$$f^{(k)}(x_0) = p_n^{(k)}(x_0) \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

证明 设

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n.$$

则 $f(x_0) = p_n(x_0)$

多项式逼近函数

问题 是否可以用多项式“**逼近**”一般函数 $f(x)$?

性质 设 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导，则存在 n 阶多项式 $p_n(x)$，使得

$$f^{(k)}(x_0) = p_n^{(k)}(x_0) \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

证明 设

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n.$$

则 $f(x_0) = p_n(x_0) = a_0$

多项式逼近函数

问题 是否可以用多项式“**逼近**”一般函数 $f(x)$?

性质 设 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导，则存在 n 阶多项式 $p_n(x)$，使得

$$f^{(k)}(x_0) = p_n^{(k)}(x_0) \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

证明 设

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n.$$

则 $f(x_0) = p_n(x_0) = a_0$

$$f'(x_0) = p_n'(x_0)$$

多项式逼近函数

问题 是否可以用多项式“**逼近**”一般函数 $f(x)$?

性质 设 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导，则存在 n 阶多项式 $p_n(x)$，使得

$$f^{(k)}(x_0) = p_n^{(k)}(x_0) \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

证明 设

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n.$$

则 $f(x_0) = p_n(x_0) = a_0$

$$p_n'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \cdots + na_n(x - x_0)^{n-1}$$

$$f'(x_0) = p_n'(x_0)$$

多项式逼近函数

问题 是否可以用多项式“**逼近**”一般函数 $f(x)$?

性质 设 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导，则存在 n 阶多项式 $p_n(x)$，使得

$$f^{(k)}(x_0) = p_n^{(k)}(x_0) \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

证明 设

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n.$$

则 $f(x_0) = p_n(x_0) = a_0$

$$p_n'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \cdots + na_n(x - x_0)^{n-1}$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = p_n'(x_0) = a_1$$

多项式逼近函数

问题 是否可以用多项式“**逼近**”一般函数 $f(x)$?

性质 设 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导，则存在 n 阶多项式 $p_n(x)$，使得

$$f^{(k)}(x_0) = p_n^{(k)}(x_0) \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

证明 设

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n.$$

则 $f(x_0) = p_n(x_0) = a_0$

$$p_n'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \cdots + na_n(x - x_0)^{n-1}$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = p_n'(x_0) = a_1$$

$$f''(x_0) = p_n''(x_0)$$

多项式逼近函数

问题 是否可以用多项式“**逼近**”一般函数 $f(x)$?

性质 设 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导，则存在 n 阶多项式 $p_n(x)$，使得

$$f^{(k)}(x_0) = p_n^{(k)}(x_0) \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

证明 设

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n.$$

则 $f(x_0) = p_n(x_0) = a_0$

$$p_n'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \cdots + na_n(x - x_0)^{n-1}$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = p_n'(x_0) = a_1$$

$$p_n''(x) = 2a_2 + \cdots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2}$$

$$f''(x_0) = p_n''(x_0)$$

多项式逼近函数

问题 是否可以用多项式“**逼近**”一般函数 $f(x)$?

性质 设 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导，则存在 n 阶多项式 $p_n(x)$，使得

$$f^{(k)}(x_0) = p_n^{(k)}(x_0) \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

证明 设

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n.$$

则 $f(x_0) = p_n(x_0) = a_0$

$$p_n'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \cdots + na_n(x - x_0)^{n-1}$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = p_n'(x_0) = a_1$$

$$p_n''(x) = 2a_2 + \cdots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2}$$

$$\Rightarrow f''(x_0) = p_n''(x_0) = 2a_2$$

多项式逼近函数

问题 是否可以用多项式“**逼近**”一般函数 $f(x)$?

性质 设 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导，则存在 n 阶多项式 $p_n(x)$，使得

$$f^{(k)}(x_0) = p_n^{(k)}(x_0) \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

证明 设

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n.$$

则 $f(x_0) = p_n(x_0) = a_0$

$$p_n'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \cdots + na_n(x - x_0)^{n-1}$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = p_n'(x_0) = a_1$$

$$p_n''(x) = 2a_2 + \cdots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2}$$

$$\Rightarrow f''(x_0) = p_n''(x_0) = 2a_2$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x_0) = p_n^{(n)}(x_0)$$

多项式逼近函数

问题 是否可以用多项式“**逼近**”一般函数 $f(x)$?

性质 设 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导，则存在 n 阶多项式 $p_n(x)$，使得

$$f^{(k)}(x_0) = p_n^{(k)}(x_0) \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

证明 设

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n.$$

则 $f(x_0) = p_n(x_0) = a_0$

$$p_n'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \cdots + na_n(x - x_0)^{n-1}$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = p_n'(x_0) = a_1$$

$$p_n''(x) = 2a_2 + \cdots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2}$$

$$\Rightarrow f''(x_0) = p_n''(x_0) = 2a_2$$

$$\vdots$$

$$p_n^{(n)}(x) = n!a_n$$

$$f^{(n)}(x_0) = p_n^{(n)}(x_0)$$

多项式逼近函数

问题 是否可以用多项式“**逼近**”一般函数 $f(x)$?

性质 设 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导，则存在 n 阶多项式 $p_n(x)$，使得

$$f^{(k)}(x_0) = p_n^{(k)}(x_0) \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

证明 设

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n.$$

则 $f(x_0) = p_n(x_0) = a_0$

$$p_n'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \cdots + na_n(x - x_0)^{n-1}$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = p_n'(x_0) = a_1$$

$$p_n''(x) = 2a_2 + \cdots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2}$$

$$\Rightarrow f''(x_0) = p_n''(x_0) = 2a_2$$

$$\vdots$$

$$p_n^{(n)}(x) = n!a_n$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(x_0) = p_n^{(n)}(x_0) = n!a_n$$

多项式逼近函数

问题 是否可以用多项式“**逼近**”一般函数 $f(x)$?

性质 设 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导，则存在 n 阶多项式 $p_n(x)$，使得

$$f^{(k)}(x_0) = p_n^{(k)}(x_0) \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

证明 设

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n.$$

则 $f(x_0) = p_n(x_0) = a_0$

$$\left.\begin{aligned}
p_n'(x) &= a_1 + 2a_2(x - x_0) + \cdots + na_n(x - x_0)^{n-1} \\
&\Rightarrow f'(x_0) = p_n'(x_0) = a_1 \\
p_n''(x) &= 2a_2 + \cdots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} \\
&\Rightarrow f''(x_0) = p_n''(x_0) = 2a_2 \\
&\vdots \\
p_n^{(n)}(x) &= n!a_n \\
&\Rightarrow f^{(n)}(x_0) = p_n^{(n)}(x_0) = n!a_n
\end{aligned}\right\} k!a_k = f^{(k)}(x_0)$$

多项式逼近函数

问题 是否可以用多项式“**逼近**”一般函数 $f(x)$?

性质 设 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导，则存在 n 阶多项式 $p_n(x)$，使得

$$f^{(k)}(x_0)=p_n^{(k)}(x_0)\qquad (k=0,1,2,\cdots,n)$$

证明 设

$$p_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n.$$

则 $f(x_0)=p_n(x_0)=a_0$

$$p_n'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+\cdots+na_n(x-x_0)^{n-1}$$

$$\Rightarrow f'(x_0)=p_n'(x_0)=a_1$$

$$p_n''(x)=2a_2+\cdots+n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}$$

$$\Rightarrow f''(x_0)=p_n''(x_0)=2a_2$$

$$\vdots$$

$$p_n^{(n)}(x)=n!a_n$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(x_0)=p_n^{(n)}(x_0)=n!a_n$$

$$k!a_k=f^{(k)}(x_0)$$

$$a_k=\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)$$

暨南大学 JINAN UNIVERSITY

小结 设 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导，则 n 阶多项式

$$p_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

满足：

$$f^{(k)}(x_0)=p_n^{(k)}(x_0) \qquad (k=0,1,2,\cdots,n).$$

小结 设 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导，则 n 阶多项式

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

满足:

$$f^{(k)}(x_0) = p_n^{(k)}(x_0) \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots, n).$$

定义 $p_n(x)$ 称为 $f(x)$ 在 x_0 处的 **n 次泰勒多项式**.

小结 设 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导，则 n 阶多项式

$$p_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

满足:

$$f^{(k)}(x_0)=p_n^{(k)}(x_0) \qquad (k=0,1,2,\cdots,n).$$

定义 $p_n(x)$ 称为 $f(x)$ 在 x_0 处的 n **次泰勒多项式**.

注 当 $x_0=0$ 时

$$p_n(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\cdots+\frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^k+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n$$

小结 设 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导，则 n 阶多项式

$$p_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

满足:

$$f^{(k)}(x_0)=p_n^{(k)}(x_0) \qquad (k=0,1,2,\cdots,n).$$

定义 $p_n(x)$ 称为 $f(x)$ 在 x_0 处的 n **次泰勒多项式**.

注 当 $x_0=0$ 时

$$p_n(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\cdots+\frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^k+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n$$

也称为 n **次麦克劳林多项式**

小结 设 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导，则 n 阶多项式

$$p_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

满足：

$$f^{(k)}(x_0)=p_n^{(k)}(x_0)\qquad (k=0,1,2,\cdots,n).$$

定义 $p_n(x)$ 称为 $f(x)$ 在 x_0 处的 n **次泰勒多项式**.

注 当 $x_0=0$ 时

$$p_n(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\cdots+\frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^k+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n$$

也称为 n **次麦克劳林多项式**

例 1 求 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 处的 n 次泰勒多项式.

$$p_n(0) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

例 1 求 $f(x) = e^x$ 在 $x = 0$ 处的 n 次泰勒级数.

$$p_n(0) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

例 1 求 $f(x) = e^x$ 在 $x = 0$ 处的 n 次泰勒级数.

解

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x$$

$$p_n(0) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

例 1 求 $f(x) = e^x$ 在 $x = 0$ 处的 n 次泰勒级数.

解

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x$$

$$\Rightarrow \quad f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 1$$

$$p_n(0)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

例 1 求 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 处的 n 次泰勒级数.

解

$$f(x)=f'(x)=f''(x)=f'''(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=e^x$$

$$\Rightarrow\quad f(0)=f'(0)=f''(0)=f'''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=1$$

$$\Rightarrow\quad n\text{次泰勒级数：}1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n$$

$$p_n(0)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

例 1 求 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 处的 n 次泰勒级数.

解

$$f(x)=f'(x)=f''(x)=f'''(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=e^x$$

$$\Rightarrow \quad f(0)=f'(0)=f''(0)=f'''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=1$$

$$\Rightarrow \quad n\text{次泰勒级数：}1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n$$

例 2 求 $f(x)=\sin x$ 在 $x=0$ 处的泰勒多项式.

$$p_n(0) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

例 2 求 $f(x) = \sin x$ 在 $x = 0$ 处的泰勒多项式.

$$p_n(0) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

例 2 求 $f(x) = \sin x$ 在 $x = 0$ 处的泰勒多项式.

解

	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
$n = 0, 4, 8 \ldots$	$\sin x$	0
$n = 1, 5, 9 \ldots$	$\cos x$	1
$n = 2, 6, 10 \ldots$	$-\sin x$	0
$n = 3, 7, 11 \ldots$	$-\cos x$	-1

$$p_n(0)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

例 2 求 $f(x)=\sin x$ 在 $x=0$ 处的泰勒多项式.

解

	$f^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n}{2}\pi)$	$f^{(n)}(0)$
$n=0,\ 4,\ 8\ldots$	$\sin x$	0
$n=1,\ 5,\ 9\ldots$	$\cos x$	1
$n=2,\ 6,\ 10\ldots$	$-\sin x$	0
$n=3,\ 7,\ 11\ldots$	$-\cos x$	-1

$$p_n(0) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

例 2 求 $f(x) = \sin x$ 在 $x = 0$ 处的泰勒多项式.

解

	$f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n}{2}\pi)$	$f^{(n)}(0) = \sin(\frac{n}{2}\pi)$
$n = 0, 4, 8 \dots$	$\sin x$	0
$n = 1, 5, 9 \dots$	$\cos x$	1
$n = 2, 6, 10 \dots$	$-\sin x$	0
$n = 3, 7, 11 \dots$	$-\cos x$	-1

$$p_n(0) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

例 2 求 $f(x) = \sin x$ 在 $x = 0$ 处的泰勒多项式.

解

	$f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n}{2}\pi)$	$f^{(n)}(0) = \sin(\frac{n}{2}\pi)$
$n = 0, 4, 8 \ldots$	$\sin x$	0
$n = 1, 5, 9 \ldots$	$\cos x$	1
$n = 2, 6, 10 \ldots$	$-\sin x$	0
$n = 3, 7, 11 \ldots$	$-\cos x$	-1

所以 n 次泰勒多项式是

$$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots$$

$$p_n(0) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

例 2 求 $f(x) = \sin x$ 在 $x = 0$ 处的泰勒多项式.

解

	$f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n}{2}\pi)$	$f^{(n)}(0) = \sin(\frac{n}{2}\pi)$
$n = 0, 4, 8 \ldots$	$\sin x$	0
$n = 1, 5, 9 \ldots$	$\cos x$	1
$n = 2, 6, 10 \ldots$	$-\sin x$	0
$n = 3, 7, 11 \ldots$	$-\cos x$	-1

所以 n 次泰勒多项式是

$$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots$$

$$p_n(0)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

例 2 求 $f(x)=\sin x$ 在 $x=0$ 处的泰勒多项式.

解

	$f^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n}{2}\pi)$	$f^{(n)}(0)=\sin(\frac{n}{2}\pi)$
$n=0,\ 4,\ 8\ldots$	$\sin x$	0
$n=1,\ 5,\ 9\ldots$	$\cos x$	1
$n=2,\ 6,\ 10\ldots$	$-\sin x$	0
$n=3,\ 7,\ 11\ldots$	$-\cos x$	-1

所以 n 次泰勒多项式是

$$x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1}$$

小结 $\sin x$ 的 n 次泰勒多项式是

小结 $\sin x$ 的 n 次泰勒多项式是

$$p_1 = x;$$

小结 $\sin x$ 的 n 次泰勒多项式是

$$p_1 = p_2 = x;$$

小结 $\sin x$ 的 n 次泰勒多项式是

$$p_1 = p_2 = x;$$

$$p_3 \qquad = x - \frac{1}{3!}x^3;$$

小结 $\sin x$ 的 n 次泰勒多项式是

$$p_1 = p_2 = x;$$

$$p_3 = p_4 = x - \frac{1}{3!}x^3;$$

小结 $\sin x$ 的 n 次泰勒多项式是

$$p_1 = p_2 = x;$$

$$p_3 = p_4 = x - \frac{1}{3!}x^3;$$

$$p_5 = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5;$$

小结 $\sin x$ 的 n 次泰勒多项式是

$$p_1 = p_2 = x;$$

$$p_3 = p_4 = x - \frac{1}{3!}x^3;$$

$$p_5 = p_6 = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5;$$

小结 $\sin x$ 的 n 次泰勒多项式是

$$p_1 = p_2 = x;$$

$$p_3 = p_4 = x - \frac{1}{3!}x^3;$$

$$p_5 = p_6 = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5;$$

$$\vdots$$

p_{2m+1}

小结 $\sin x$ 的 n 次泰勒多项式是

$$p_1 = p_2 = x;$$

$$p_3 = p_4 = x - \frac{1}{3!}x^3;$$

$$p_5 = p_6 = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5;$$

$$\vdots$$

$$p_{2m+1} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1}$$

小结 $\sin x$ 的 n 次泰勒多项式是

$$p_1 = p_2 = x;$$

$$p_3 = p_4 = x - \frac{1}{3!}x^3;$$

$$p_5 = p_6 = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5;$$

$$\vdots$$

$$p_{2m+1} = p_{2m+2} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1}$$

小结 $\sin x$ 的 n 次泰勒多项式是

$$p_1 = p_2 = x;$$

$$p_3 = p_4 = x - \frac{1}{3!}x^3;$$

$$p_5 = p_6 = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5;$$

$$\vdots$$

$$p_{2m+1} = p_{2m+2} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1}$$

例 3 求 $f(x) = \cos x$ 在 $x = 0$ 处的泰勒多项式.

$$p_n(0) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

例 3 求 $f(x) = \cos x$ 在 $x = 0$ 处的泰勒多项式.

$$p_n(0) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

例 3 求 $f(x) = \cos x$ 在 $x = 0$ 处的泰勒多项式.

解

	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
$n = 0, 4, 8 \ldots$	$\cos x$	1
$n = 1, 5, 9 \ldots$	$-\sin x$	0
$n = 2, 6, 10 \ldots$	$-\cos x$	-1
$n = 3, 7, 11 \ldots$	$\sin x$	0

$$p_n(0) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

例 3 求 $f(x) = \cos x$ 在 $x = 0$ 处的泰勒多项式.

解

	$f^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{n}{2}\pi)$	$f^{(n)}(0)$
$n = 0, 4, 8 \ldots$	$\cos x$	1
$n = 1, 5, 9 \ldots$	$-\sin x$	0
$n = 2, 6, 10 \ldots$	$-\cos x$	-1
$n = 3, 7, 11 \ldots$	$\sin x$	0

$$p_n(0) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

例 3 求 $f(x) = \cos x$ 在 $x = 0$ 处的泰勒多项式.

解

	$f^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{n}{2}\pi)$	$f^{(n)}(0) = \cos(\frac{n}{2}\pi)$
$n = 0, 4, 8 \ldots$	$\cos x$	1
$n = 1, 5, 9 \ldots$	$-\sin x$	0
$n = 2, 6, 10 \ldots$	$-\cos x$	-1
$n = 3, 7, 11 \ldots$	$\sin x$	0

$$p_n(0) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

例 3 求 $f(x) = \cos x$ 在 $x = 0$ 处的泰勒多项式.

解

	$f^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{n}{2}\pi)$	$f^{(n)}(0) = \cos(\frac{n}{2}\pi)$
$n = 0, 4, 8 \ldots$	$\cos x$	1
$n = 1, 5, 9 \ldots$	$-\sin x$	0
$n = 2, 6, 10 \ldots$	$-\cos x$	-1
$n = 3, 7, 11 \ldots$	$\sin x$	0

所以泰勒级数多项式是

$$1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots$$

$$p_n(0) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

例 3 求 $f(x) = \cos x$ 在 $x = 0$ 处的泰勒多项式.

解

	$f^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{n}{2}\pi)$	$f^{(n)}(0) = \cos(\frac{n}{2}\pi)$
$n = 0, 4, 8 \ldots$	$\cos x$	1
$n = 1, 5, 9 \ldots$	$-\sin x$	0
$n = 2, 6, 10 \ldots$	$-\cos x$	-1
$n = 3, 7, 11 \ldots$	$\sin x$	0

所以泰勒级数多项式是

$$1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m)!}x^{2m}$$

小结 $\cos x$ 的 n 次泰勒多项式是

小结 $\cos x$ 的 n 次泰勒多项式是

$$p_0 = 1;$$

小结 $\cos x$ 的 n 次泰勒多项式是

$$p_0 = p_1 = 1;$$

小结 $\cos x$ 的 n 次泰勒多项式是

$$p_0 = p_1 = 1;$$

$$p_2 = 1 - \frac{1}{2!}x^2;$$

小结 $\cos x$ 的 n 次泰勒多项式是

$$p_0 = p_1 = 1;$$

$$p_2 = p_3 = 1 - \frac{1}{2!}x^2;$$

小结 $\cos x$ 的 n 次泰勒多项式是

$$
\begin{aligned}
p_0 = p_1 &= 1; \\
p_2 = p_3 &= 1 - \frac{1}{2!}x^2; \\
p_4 \qquad &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4;
\end{aligned}
$$

小结 $\cos x$ 的 n 次泰勒多项式是

$$p_0 = p_1 = 1;$$

$$p_2 = p_3 = 1 - \frac{1}{2!}x^2;$$

$$p_4 = p_5 = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4;$$

小结 $\cos x$ 的 n 次泰勒多项式是

$$p_0 = p_1 = 1;$$

$$p_2 = p_3 = 1 - \frac{1}{2!}x^2;$$

$$p_4 = p_5 = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4;$$

$$\vdots$$

$p_{2m}(x)$

小结 $\cos x$ 的 n 次泰勒多项式是

$$p_0 = p_1 = 1;$$

$$p_2 = p_3 = 1 - \frac{1}{2!}x^2;$$

$$p_4 = p_5 = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4;$$

$$\vdots$$

$$p_{2m}(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m)!}x^{2m}$$

小结 $\cos x$ 的 n 次泰勒多项式是

$$\begin{aligned} p_0 &= p_1 = 1; \\ p_2 &= p_3 = 1 - \frac{1}{2!}x^2; \\ p_4 &= p_5 = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4; \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$p_{2m}(x) = p_{2m+1}(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m)!}x^{2m}$$

小结 $\cos x$ 的 n 次泰勒多项式是

$$p_0 = p_1 = 1;$$

$$p_2 = p_3 = 1 - \frac{1}{2!}x^2;$$

$$p_4 = p_5 = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4;$$

$$\vdots$$

$$p_{2m}(x) = p_{2m+1}(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m)!}x^{2m}$$

例 4 求 $f(x) = \ln(1 + x)$ 在 $x = 0$ 处的 n 次泰勒多项式.

$$p_n(0) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

例 4 求 $f(x) = \ln(1+x)$ 在 $x = 0$ 处的 n 次泰勒多项式.

$$p_n(0) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

例 4 求 $f(x) = \ln(1+x)$ 在 $x = 0$ 处的 n 次泰勒多项式.

解

$$f = \ln(1+x), \quad f' = \frac{1}{1+x},$$

$$p_n(0) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

例 4 求 $f(x) = \ln(1+x)$ 在 $x = 0$ 处的 n 次泰勒多项式.

解

$$f = \ln(1+x), \quad f' = \frac{1}{1+x}, \quad f'' = \frac{(-1)}{(1+x)^2},$$

$$p_n(0)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

例 4 求 $f(x)=\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 次泰勒多项式.

解

$$f=\ln(1+x),\quad f'=\frac{1}{1+x},\quad f''=\frac{(-1)}{(1+x)^2},\quad f'''=\frac{2}{(1+x)^3},$$

$$p_n(0)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

例 4 求 $f(x)=\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 次泰勒多项式.

解

$$f=\ln(1+x),\quad f'=\frac{1}{1+x},\quad f''=\frac{(-1)}{(1+x)^2},\quad f'''=\frac{2}{(1+x)^3},$$

$$f^{(4)}=\frac{-2\cdot 3}{(1+x)^4},$$

$$p_n(0) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

例 4 求 $f(x) = \ln(1+x)$ 在 $x = 0$ 处的 n 次泰勒多项式.

解

$$f = \ln(1+x), \quad f' = \frac{1}{1+x}, \quad f'' = \frac{(-1)}{(1+x)^2}, \quad f''' = \frac{2}{(1+x)^3},$$

$$f^{(4)} = \frac{-2\cdot 3}{(1+x)^4}, \quad f^{(5)} = \frac{2\cdot 3\cdot 4}{(1+x)^5}, \ \ldots,$$

$$p_n(0) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

例 4 求 $f(x) = \ln(1+x)$ 在 $x = 0$ 处的 n 次泰勒多项式.

解

$$f = \ln(1+x), \quad f' = \frac{1}{1+x}, \quad f'' = \frac{(-1)}{(1+x)^2}, \quad f''' = \frac{2}{(1+x)^3},$$

$$f^{(4)} = \frac{-2\cdot 3}{(1+x)^4}, \quad f^{(5)} = \frac{2\cdot 3\cdot 4}{(1+x)^5}, \ \ldots, \quad f^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

$$p_n(0)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

例 4 求 $f(x)=\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 次泰勒多项式.

解

$$f=\ln(1+x),\quad f'=\frac{1}{1+x},\quad f''=\frac{(-1)}{(1+x)^2},\quad f'''=\frac{2}{(1+x)^3},$$

$$f^{(4)}=\frac{-2\cdot 3}{(1+x)^4},\quad f^{(5)}=\frac{2\cdot 3\cdot 4}{(1+x)^5},\ \ldots,\quad f^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

所以 $\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$,

$$p_n(0) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

例 4 求 $f(x) = \ln(1+x)$ 在 $x = 0$ 处的 n 次泰勒多项式.

解

$$f = \ln(1+x), \quad f' = \frac{1}{1+x}, \quad f'' = \frac{(-1)}{(1+x)^2}, \quad f''' = \frac{2}{(1+x)^3},$$

$$f^{(4)} = \frac{-2\cdot 3}{(1+x)^4}, \quad f^{(5)} = \frac{2\cdot 3\cdot 4}{(1+x)^5}, \quad \cdots, \quad f^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

所以 $\frac{1}{n!}f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$，$n$ 次泰勒级数是

$$p_n(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots$$

$$p_n(0) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

例 4 求 $f(x) = \ln(1+x)$ 在 $x = 0$ 处的 n 次泰勒多项式.

解

$$f = \ln(1+x), \quad f' = \frac{1}{1+x}, \quad f'' = \frac{(-1)}{(1+x)^2}, \quad f''' = \frac{2}{(1+x)^3},$$

$$f^{(4)} = \frac{-2\cdot 3}{(1+x)^4}, \quad f^{(5)} = \frac{2\cdot 3\cdot 4}{(1+x)^5}, \ \cdots, \quad f^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

所以 $\frac{1}{n!}f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$，$n$ 次泰勒级数是

$$p_n(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n$$

小结

e^x，$\sin x$，$\cos x$，$\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的泰勒多项式：

$$e^x \Rightarrow 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n$$

$$\sin x \Rightarrow x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1}$$

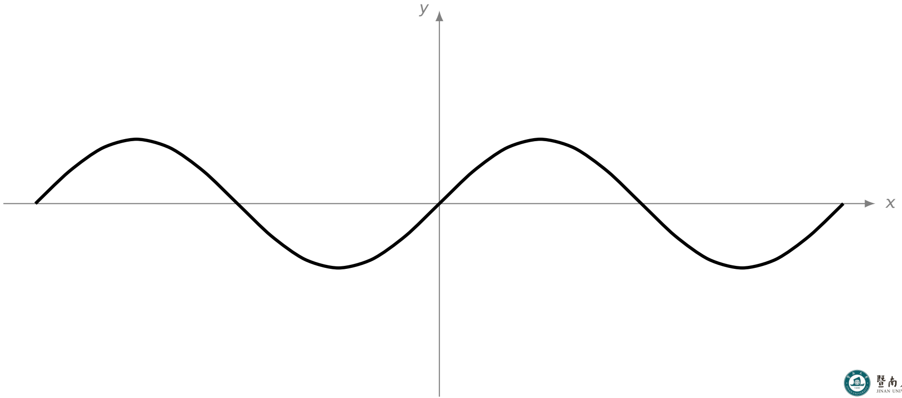
$$\cos x \Rightarrow 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m)!}x^{2m}$$

$$\ln(1+x) \Rightarrow x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n$$

正弦函数的近似

比较正弦函数 $\sin x$ 及其泰勒多项式:

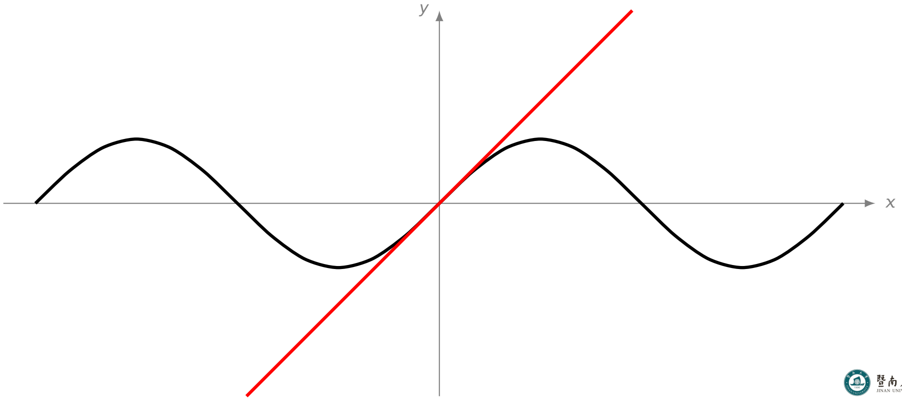
$$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1}$$



正弦函数的近似

比较正弦函数 $\sin x$ 及其泰勒多项式：

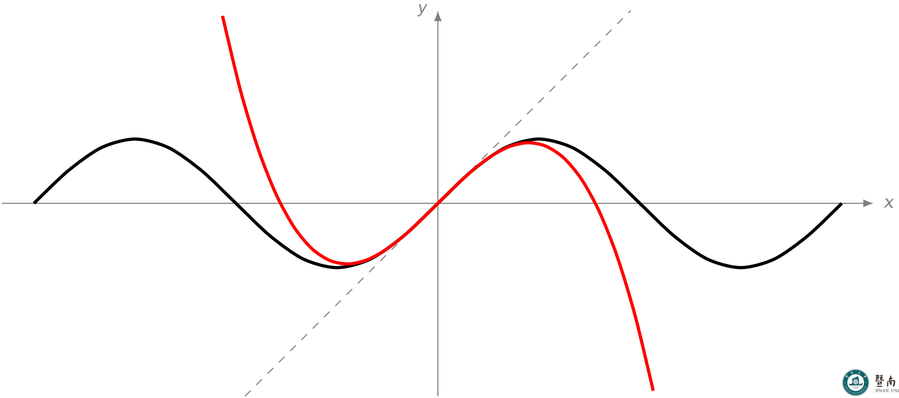
$$\boxed{x} - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1}$$



正弦函数的近似

比较正弦函数 $\sin x$ 及其泰勒多项式：

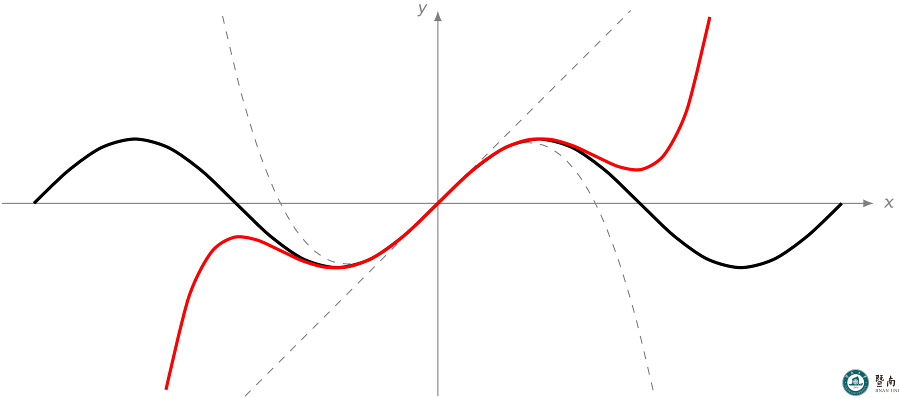
$$\boxed{x-\frac{1}{3!}x^3}+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1}$$



正弦函数的近似

比较正弦函数 $\sin x$ 及其泰勒多项式：

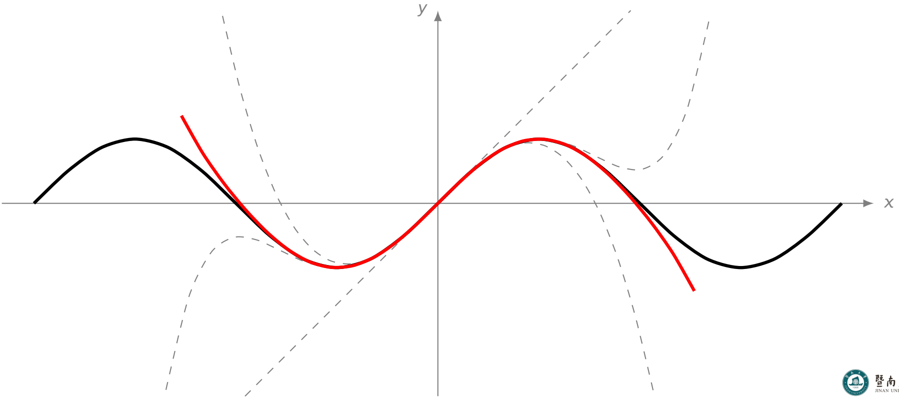
$$\boxed{x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5} - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1}$$



正弦函数的近似

比较正弦函数 $\sin x$ 及其泰勒多项式：

$$\boxed{x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7} + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1}$$



泰勒公式 （带佩亚诺余项）

设 $f(x)$ 在点 x_0 处存在 n 阶导数，则

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2$$
$$+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+o((x-x_n)^n)$$

泰勒公式 （带佩亚诺余项）

设 $f(x)$ 在点 x_0 处存在 n 阶导数，则

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2$$
$$+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+o((x-x_n)^n)$$

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+o(x^n)$$

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1}+o(x^{2m+2})$$

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m)!}x^{2m}+o(x^{2m+1})$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n++o(x^n)$$

例 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$

例 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$$

例 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left[x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^4)\right]-x\left[1-\frac{1}{2!}x^2+o(x^3)\right]}{x^3}$$

例 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$

解

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to0}\frac{\left[x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^4)\right]-x\left[1-\frac{1}{2!}x^2+o(x^3)\right]}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^4)}{x^3}$$

例 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left[x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^4)\right]-x\left[1-\frac{1}{2!}x^2+o(x^3)\right]}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^4)}{x^3} = \frac{1}{3}$$

例 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left[x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^4)\right]-x\left[1-\frac{1}{2!}x^2+o(x^3)\right]}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^4)}{x^3} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left[\qquad\qquad\qquad\right]-\left[\qquad\qquad\qquad\right]}{x^2\left[x+\left(\qquad\qquad\right)\right]}$$

例 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$

解

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to0}\frac{\left[x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^4)\right]-x\left[1-\frac{1}{2!}x^2+o(x^3)\right]}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^4)}{x^3}=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left[1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^5)\right]-\left[\qquad\qquad\right]}{x^2\left[x+\left(\qquad\qquad\right)\right]}$$

例 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$

解

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to0}\frac{\left[x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^4)\right]-x\left[1-\frac{1}{2!}x^2+o(x^3)\right]}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^4)}{x^3}=\frac{1}{3}$$

$$e^t=1+t+\frac{1}{2!}t^2+o(t^2)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left[1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^5)\right]-\left[\qquad\qquad\right]}{x^2\left[x+\left(\qquad\qquad\right)\right]}$$

例 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left[x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^4)\right]-x\left[1-\frac{1}{2!}x^2+o(x^3)\right]}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^4)}{x^3} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$$

$$e^t = 1+t+\frac{1}{2!}t^2+o(t^2)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left[1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^5)\right]-\left[1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4+o(x^4)\right]}{x^2\left[x+\left(\qquad\qquad\right)\right]}$$

例 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$， $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left[x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^4)\right]-x\left[1-\frac{1}{2!}x^2+o(x^3)\right]}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^4)}{x^3} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$$

$$e^t = 1+t+\frac{1}{2!}t^2+o(t^2)$$

$$\ln(1+t) = t-\frac{1}{2!}t^2+o(t^2)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left[1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^5)\right]-\left[1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4+o(x^4)\right]}{x^2\left[x+\left(\qquad\qquad\right)\right]}$$

例 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$，$\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$

解

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to0}\frac{\left[x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^4)\right]-x\left[1-\frac{1}{2!}x^2+o(x^3)\right]}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^4)}{x^3}=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$$

$$e^t=1+t+\frac{1}{2!}t^2+o(t^2)$$

$$\ln(1+t)=t-\frac{1}{2!}t^2+o(t^2)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left[1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^5)\right]-\left[1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4+o(x^4)\right]}{x^2\left[x+\left(-x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)\right]}$$

例 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left[x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\right] - x\left[1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^3)\right]}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3 + o(x^4)}{x^3} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$$

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + o(t^2)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{1}{2!}t^2 + o(t^2)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left[1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^5)\right] - \left[1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)\right]}{x^2\left[x + \left(-x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)\right]}$$

$$= = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)}{-\frac{1}{2}x^4 + o(x^4)}$$

例 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$， $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$

解

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to0}\frac{\left[x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^4)\right]-x\left[1-\frac{1}{2!}x^2+o(x^3)\right]}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^4)}{x^3}=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$$

$$e^t=1+t+\frac{1}{2!}t^2+o(t^2)$$

$$\ln(1+t)=t-\frac{1}{2!}t^2+o(t^2)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left[1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^5)\right]-\left[1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4+o(x^4)\right]}{x^2\left[x+\left(-x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)\right]}$$

$$==\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}{-\frac{1}{2}x^4+o(x^4)}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{12}+o(x^4)/x^4}{-\frac{1}{2}+o(x^4)/x^4}$$

例 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left[x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^4)\right]-x\left[1-\frac{1}{2!}x^2+o(x^3)\right]}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^4)}{x^3}=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$$

$$e^t=1+t+\frac{1}{2!}t^2+o(t^2)$$

$$\ln(1+t)=t-\frac{1}{2!}t^2+o(t^2)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left[1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^5)\right]-\left[1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4+o(x^4)\right]}{x^2\left[x+\left(-x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)\right]}$$

$$==\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}{-\frac{1}{2}x^4+o(x^4)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{12}+o(x^4)/x^4}{-\frac{1}{2}+o(x^4)/x^4}=\frac{1}{6}$$

泰勒公式 （带拉格朗日余项）

设 $f(x)$ 在点 x_0 处存在 $n+1$ 阶导数，则

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2$$

$$+ \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}$$

泰勒公式 （带拉格朗日余项）

设 $f(x)$ 在点 x_0 处存在 $n+1$ 阶导数，则

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$

其中 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个值.

泰勒公式 （带拉格朗日余项）

设 $f(x)$ 在点 x_0 处存在 $n+1$ 阶导数，则

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + \underbrace{\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}}_{R_n(x)}$$

其中 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个值.

泰勒公式 （带拉格朗日余项）

设 $f(x)$ 在点 x_0 处存在 $n+1$ 阶导数，则

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2$$

$$+ \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + \underbrace{\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}}_{R_n(x)}$$

其中 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个值.

注

1. ξ 可表示成 $(1-\theta)x_0 + \theta x$，$(0 < \theta < 1)$.

泰勒公式 （带拉格朗日余项）

设 $f(x)$ 在点 x_0 处存在 $n+1$ 阶导数，则

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2$$
$$+ \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + \underbrace{\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}}_{R_n(x)}$$

其中 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个值.

注

1. ξ 可表示成 $(1-\theta)x_0+\theta x$，$(0<\theta<1)$. 从而

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}((1-\theta)x_0+\theta x)(x-x_0)^{n+1}.$$

泰勒公式 （带拉格朗日余项）

设 $f(x)$ 在点 x_0 处存在 $n+1$ 阶导数，则

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + \underbrace{\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}}_{R_n(x)}$$

其中 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个值.

注

1. ξ 可表示成 $(1-\theta)x_0+\theta x$，$(0<\theta<1)$. 从而

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}((1-\theta)x_0+\theta x)(x-x_0)^{n+1}.$$

2. ξ（以及 θ）不是固定不变的，而是随 x 和 n 的改变而变化。

泰勒公式 （带拉格朗日余项）

设 $f(x)$ 在点 x_0 处存在 $n+1$ 阶导数，则

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + \underbrace{\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}}_{R_n(x)}$$

其中 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个值.

注

1. ξ 可表示成 $(1-\theta)x_0+\theta x$，$(0<\theta<1)$. 从而
$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}((1-\theta)x_0+\theta x)(x-x_0)^{n+1}.$$
2. ξ（以及 θ）不是固定不变的，而是随 x 和 n 的改变而变化。
3. 当 $x_0=0$ 时，则余项可写成
$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}, \qquad (0<\theta<1)$$

例 1 求 $f(x) = e^x$ 在 $x = 0$ 处的带拉格朗日余项的泰勒公式

例 1 求 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 处的带拉格朗日余项的泰勒公式

解 已求出 n 次泰勒多项式，所以

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + R_n(x)$$

其中

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}$$

例 1 求 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 处的带拉格朗日余项的泰勒公式

解 已求出 n 次泰勒多项式，所以

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + R_n(x)$$

其中

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1} = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}, \qquad (0<\theta<1).$$

例 1 求 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 处的带拉格朗日余项的泰勒公式

解 已求出 n 次泰勒多项式，所以

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + R_n(x)$$

其中

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1} = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}, \qquad (0<\theta<1).$$

例 2

- $\sin x$ 在 $x=0$ 处的带拉格朗日余项

- $\cos x$ 在 $x=0$ 处的带拉格朗日余项

例 1 求 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 处的带拉格朗日余项的泰勒公式

解 已求出 n 次泰勒多项式，所以

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + R_n(x)$$

其中

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1} = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}, \qquad (0<\theta<1).$$

例 2

- $\sin x$ 在 $x=0$ 处的带拉格朗日余项

$$R_n(x) = \frac{\sin\left(\theta x + \frac{n+1}{2}\pi\right)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad (0<\theta<1).$$

- $\cos x$ 在 $x=0$ 处的带拉格朗日余项

例 1 求 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 处的带拉格朗日余项的泰勒公式

解 已求出 n 次泰勒多项式，所以

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + R_n(x)$$

其中

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1} = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}, \qquad (0<\theta<1).$$

例 2

- $\sin x$ 在 $x=0$ 处的带拉格朗日余项

$$R_n(x) = \frac{\sin\left(\theta x + \frac{n+1}{2}\pi\right)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad (0<\theta<1).$$

- $\cos x$ 在 $x=0$ 处的带拉格朗日余项

$$R_n(x) = \frac{\cos\left(\theta x + \frac{n+1}{2}\pi\right)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad (0<\theta<1).$$