姓名:
专业:
学号:

第 01 周作业

练习 1. 1. $y^4 + y'' + 2x = 0$ 的阶是 ____________。

2. $(7x-6)dy + (x+y)dx = 0$ 的阶是 ____________。

练习 2. 验证 $y = Cx - \frac{1}{4}C^2$（C 为任意常数）是常微分方程 $y = xy' - \frac{1}{4}(y')^2$ 的通解。验证 $y = x^2$ 也是解，由此说明通解不一定包含所有解。

练习 3. 1. 假设 $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x)$ 是微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的解，判断 $y = C_1y_1 + C_2y_2$（其中 C_1, C_2 为任意常数）是否也是该方程的解?

2. 假设 $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x)$ 是微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的解，判断 $y = C_1y_1 + C_2y_2$（其中 C_1, C_2 为任意常数）是否也是该方程的解?

练习 4. （关于半衰期）设 $M(t)$ 为某放射物质在时刻 t 的含量。已知任何时刻，该物质衰变速度与剩余含量之比为 $-\lambda$（λ 是正常数）。问需要经过多长时间，该物质含量减少为初始时刻 $t = 0$ 时含量的一半?

练习 5. 已知弹簧系统（详细见课件）满足方程

$$x'' + \frac{9}{4}x = 0$$

问该物体的运动周期是多少？假设物体的初始位置 $x(0) = 2$，初始速度 $x'(0) = -1$，求该物体的位置函数 $x(t)$。

练习 6. 求出 $y' = x^2 y$ 的通解。

练习 7. 求解初值问题 $\begin{cases} xydx + (x^2+1)dy = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ 。

练习 8. 求解初值问题 $\begin{cases}\cos y dx+(1+e^{-x})\sin y dy=0\\ y(0)=\frac{\pi}{4}\end{cases}$ 。

练习 9. 求出 $(x^2+y^2)dx-xydy=0$ 的通解。

练习 10. 求出 $y'-\frac{3y}{x}+\frac{1}{2}x=0$ 的通解。

练习 11. 求解微分方程 $\begin{cases} y' + y\cot x = 5e^{\cos x} \\ y(\frac{\pi}{2}) = -4 \end{cases}$.

练习 12. 求一曲线的方程，这曲线通过原点，并且曲线上任一点 (x, y) 处的斜率是 $3x + y$。

练习 13. 设函数 $f(x)$ 满足方程 $f' = \gamma f$（γ 为常数）。证明：$\left(\frac{f(x)}{e^{\gamma x}}\right)' = 0$，从而 $f(x) = Ce^{\gamma x}$。（想想：为什么这就说明 $f' = \gamma f$ 的通解 $f(x) = Ce^{\gamma x}$ 包含了所有解）

练习 14. （一阶线性微分方程的另一种解法）

(1) 设 $y(x)$ 是可微函数，$p(x)$ 是连续函数，验证成立恒等式 $y' + p(x)y = e^{\int -p(x)dx}(e^{\int p(x)dx}y)'$。

(2) 设函数 $y(x)$ 满足方程 $y'+p(x)y = q(x)$。利用上述恒等式证明：$y(x) = \left[\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx + C\right]e^{\int p(x)dx}$。

（想想：为什么这就说明一阶线性微分方程的通解等同于全部解）