第 5 章 c：定积分的换元积分法与分部积分法

数学系　梁卓滨

2019-2020 学年 I

Outline

- 求定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 可分成两步：
    1. 求出不定积分 $\int f(x)dx = F(x) + C$

       （方法：直接积分法、换元积分法、分部积分法（第五章））
    2. $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

- 求定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 可分成两步：
  1. 求出不定积分 $\int f(x)dx = F(x) + C$

     （方法：直接积分法、换元积分法、分部积分法（第五章））
  2. $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$
- 在实际操作中，两步可合成一步：

- 求定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 可分成两步：
  1. 求出不定积分 $\int f(x)dx = F(x) + C$

     （方法：直接积分法、换元积分法、分部积分法（第五章））
  2. $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$
- 在实际操作中，两步可合成一步：
  - 以换元积分法、分部积分法为例说明

凑微分：例

例 1 计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$

凑微分：例

例 1 计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$

解法一 先计算 $\int \sin^2 x \cos x dx$，再将积分上下限代入原函数：

凑微分：例

例 1 计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$

解法一 先计算 $\int \sin^2 x \cos x dx$，再将积分上下限代入原函数：

$$\because \int \sin^2 x \cos x dx =$$

凑微分：例

例 1 计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$

解法一 先计算 $\int \sin^2 x \cos x dx$，再将积分上下限代入原函数：

$$\because \int \sin^2 x \cos x dx = \int \sin^2 x d \sin x =$$

凑微分：例

例 1 计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$

解法一 先计算 $\int \sin^2 x \cos x dx$，再将积分上下限代入原函数：

$$\because \int \sin^2 x \cos x dx = \int \sin^2 x d \sin x = \frac{1}{3} \sin^3 x + C$$

凑微分：例

例 1 计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$

解法一 先计算 $\int \sin^2 x \cos x dx$，再将积分上下限代入原函数：

$$\because \int \sin^2 x \cos x dx = \int \sin^2 x d \sin x = \frac{1}{3} \sin^3 x + C$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx = \frac{1}{3} \sin^3 x \Big|_0^{\pi/2}$$

凑微分：例

例 1 计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$

解法一 先计算 $\int \sin^2 x \cos x dx$，再将积分上下限代入原函数：

$$\because \int \sin^2 x \cos x dx = \int \sin^2 x d \sin x = \frac{1}{3} \sin^3 x + C$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx = \frac{1}{3} \sin^3 x \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}(1-0)$$

凑微分：例

例 1 计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$

解法一 先计算 $\int \sin^2 x \cos x dx$，再将积分上下限代入原函数：

$$\because \int \sin^2 x \cos x dx = \int \sin^2 x d \sin x = \frac{1}{3} \sin^3 x + C$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx = \frac{1}{3} \sin^3 x \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}(1-0) = \frac{1}{3}$$

凑微分：例

例 1 计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$

解法一 先计算 $\int \sin^2 x \cos x dx$，再将积分上下限代入原函数：

$$\because \int \sin^2 x \cos x dx = \int \sin^2 x d \sin x = \frac{1}{3} \sin^3 x + C$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx = \frac{1}{3} \sin^3 x \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}(1-0) = \frac{1}{3}$$

解法二 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$

凑微分：例

例 1 计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$

解法一 先计算 $\int \sin^2 x \cos x dx$，再将积分上下限代入原函数：

$$\because \int \sin^2 x \cos x dx = \int \sin^2 x d \sin x = \frac{1}{3} \sin^3 x + C$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx = \frac{1}{3} \sin^3 x \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}(1-0) = \frac{1}{3}$$

解法二 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x d \sin x$

凑微分：例

例 1 计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$

解法一 先计算 $\int \sin^2 x \cos x dx$，再将积分上下限代入原函数：

$$\because \int \sin^2 x \cos x dx = \int \sin^2 x d \sin x = \frac{1}{3} \sin^3 x + C$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx = \frac{1}{3} \sin^3 x \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}(1-0) = \frac{1}{3}$$

解法二 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x d \sin x \xlongequal{u=\sin x} \int \quad u^2 du$$

暨南大学 JINAN UNIVERSITY

凑微分：例

例 1 计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$

解法一 先计算 $\int \sin^2 x \cos x dx$，再将积分上下限代入原函数：

$$\because \int \sin^2 x \cos x dx = \int \sin^2 x d \sin x = \frac{1}{3} \sin^3 x + C$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx = \frac{1}{3} \sin^3 x \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}(1-0) = \frac{1}{3}$$

解法二 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x d \sin x \xlongequal{u=\sin x} \int_0^1 u^2 du$

凑微分：例

例 1 计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$

解法一 先计算 $\int \sin^2 x \cos x dx$，再将积分上下限代入原函数：

$$\because \int \sin^2 x \cos x dx = \int \sin^2 x d\sin x = \frac{1}{3}\sin^3 x + C$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx = \frac{1}{3}\sin^3 x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}(1-0) = \frac{1}{3}$$

解法二 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x d\sin x \overset{u=\sin x}{=\!=\!=\!=} \int_0^1 u^2 du$$

$$= \frac{1}{3}u^3$$

凑微分：例

例 1 计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$

解法一 先计算 $\int \sin^2 x \cos x dx$，再将积分上下限代入原函数：

$$\because \int \sin^2 x \cos x dx = \int \sin^2 x d \sin x = \frac{1}{3} \sin^3 x + C$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx = \frac{1}{3} \sin^3 x \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}(1-0) = \frac{1}{3}$$

解法二 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x d \sin x \xlongequal{u=\sin x} \int_0^1 u^2 du$

$$= \frac{1}{3} u^3 \Big|_0^1$$

凑微分：例

例 1 计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$

解法一 先计算 $\int \sin^2 x \cos x dx$，再将积分上下限代入原函数：

$$\because \int \sin^2 x \cos x dx = \int \sin^2 x d\sin x = \frac{1}{3}\sin^3 x + C$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx = \frac{1}{3}\sin^3 x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}(1-0) = \frac{1}{3}$$

解法二

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x d\sin x \xlongequal{u=\sin x} \int_0^1 u^2 du$$

$$= \frac{1}{3}u^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(1-0)$$

凑微分：例

例 1 计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$

解法一 先计算 $\int \sin^2 x \cos x dx$，再将积分上下限代入原函数：

$$\because \int \sin^2 x \cos x dx = \int \sin^2 x d \sin x = \frac{1}{3} \sin^3 x + C$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx = \frac{1}{3} \sin^3 x \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}(1-0) = \frac{1}{3}$$

解法二
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x d \sin x \xlongequal{u=\sin x} \int_0^1 u^2 du$$

$$= \frac{1}{3} u^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}(1-0) = \frac{1}{3}$$

凑微分：例

例 1 计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$

解法一 先计算 $\int \sin^2 x \cos x dx$，再将积分上下限代入原函数：

$$\because \int \sin^2 x \cos x dx = \int \sin^2 x d\sin x = \frac{1}{3}\sin^3 x + C$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx = \frac{1}{3}\sin^3 x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}(1-0) = \frac{1}{3}$$

解法二 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x d\sin x \xlongequal{u=\sin x} \int_0^1 u^2 du$$

$$= \frac{1}{3}u^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(1-0) = \frac{1}{3}$$

例 2 计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx$

凑微分：例

例 2 计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx$

凑微分：例

例 2 计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx$

解法一 先计算 $\int \cos^2 x \sin x dx$，再将积分上下限代入原函数：

凑微分：例

例 2 计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx$

解法一 先计算 $\int \cos^2 x \sin x dx$，再将积分上下限代入原函数：

$$\because \int \cos^2 x \sin x dx =$$

凑微分：例

例 2 计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx$

解法一 先计算 $\int \cos^2 x \sin x dx$，再将积分上下限代入原函数：

$$\because \int \cos^2 x \sin x dx = -\int \cos^2 x d \cos x$$

凑微分：例

例 2 计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx$

解法一 先计算 $\int \cos^2 x \sin x dx$，再将积分上下限代入原函数：

$$\because \int \cos^2 x \sin x dx = -\int \cos^2 x d\cos x = -\frac{1}{3}\cos^3 x + C$$

凑微分：例

例 2 计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx$

解法一 先计算 $\int \cos^2 x \sin x dx$，再将积分上下限代入原函数：

$$\because \int \cos^2 x \sin x dx = -\int \cos^2 x d\cos x = -\frac{1}{3}\cos^3 x + C$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx = -\frac{1}{3}\cos^3 x \Big|_0^{\pi/2}$$

凑微分：例

例 2 计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx$

解法一 先计算 $\int \cos^2 x \sin x dx$，再将积分上下限代入原函数：

$$\because \int \cos^2 x \sin x dx = -\int \cos^2 x d\cos x = -\frac{1}{3}\cos^3 x + C$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx = -\frac{1}{3}\cos^3 x\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{3}(0-1)$$

凑微分：例

例 2 计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx$

解法一 先计算 $\int \cos^2 x \sin x dx$，再将积分上下限代入原函数：

$$\because \int \cos^2 x \sin x dx = -\int \cos^2 x d\cos x = -\frac{1}{3}\cos^3 x + C$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx = -\frac{1}{3}\cos^3 x\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{3}(0-1) = \frac{1}{3}$$

凑微分：例

例 2 计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx$

解法一 先计算 $\int \cos^2 x \sin x dx$，再将积分上下限代入原函数：

$$\because \int \cos^2 x \sin x dx = -\int \cos^2 x d\cos x = -\frac{1}{3}\cos^3 x + C$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx = -\frac{1}{3}\cos^3 x\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{3}(0-1) = \frac{1}{3}$$

解法二

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx$$

凑微分：例

例 2 计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx$

解法一 先计算 $\int \cos^2 x \sin x dx$，再将积分上下限代入原函数：

$$\because \int \cos^2 x \sin x dx = -\int \cos^2 x d\cos x = -\frac{1}{3}\cos^3 x + C$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx = -\frac{1}{3}\cos^3 x\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{3}(0-1) = \frac{1}{3}$$

解法二

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x d\cos x$$

凑微分：例

例 2 计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx$

解法一 先计算 $\int \cos^2 x \sin x dx$，再将积分上下限代入原函数：

$$\because \int \cos^2 x \sin x dx = -\int \cos^2 x d\cos x = -\frac{1}{3}\cos^3 x + C$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx = -\frac{1}{3}\cos^3 x\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{3}(0-1) = \frac{1}{3}$$

解法二

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x d\cos x \overset{u=\cos x}{=\!=\!=\!=} -\int \quad u^2 du$$

凑微分：例

例 2 计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx$

解法一 先计算 $\int \cos^2 x \sin x dx$，再将积分上下限代入原函数：

$$\because \int \cos^2 x \sin x dx = -\int \cos^2 x d\cos x = -\frac{1}{3}\cos^3 x + C$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx = -\frac{1}{3}\cos^3 x\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{3}(0-1) = \frac{1}{3}$$

解法二

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x d\cos x \overset{u=\cos x}{=\!=\!=\!=} -\int_1^0 u^2 du$$

凑微分：例

例 2 计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx$

解法一 先计算 $\int \cos^2 x \sin x dx$，再将积分上下限代入原函数：

$$\because \int \cos^2 x \sin x dx = -\int \cos^2 x d\cos x = -\frac{1}{3}\cos^3 x + C$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx = -\frac{1}{3}\cos^3 x\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{3}(0-1) = \frac{1}{3}$$

解法二

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x d\cos x \xlongequal{u=\cos x} -\int_1^0 u^2 du$$

$$= -\frac{1}{3}u^3$$

凑微分：例

例 2 计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx$

解法一 先计算 $\int \cos^2 x \sin x dx$，再将积分上下限代入原函数：

$$\because \int \cos^2 x \sin x dx = -\int \cos^2 x d\cos x = -\frac{1}{3}\cos^3 x + C$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx = -\frac{1}{3}\cos^3 x\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{3}(0-1) = \frac{1}{3}$$

解法二

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x d\cos x \xlongequal{u=\cos x} -\int_1^0 u^2 du$$

$$= -\frac{1}{3}u^3\Big|_1^0$$

凑微分：例

例 2 计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx$

解法一 先计算 $\int \cos^2 x \sin x dx$，再将积分上下限代入原函数：

$$\because \int \cos^2 x \sin x dx = -\int \cos^2 x d\cos x = -\frac{1}{3}\cos^3 x + C$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx = -\frac{1}{3}\cos^3 x \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{3}(0-1) = \frac{1}{3}$$

解法二

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x d\cos x \overset{u=\cos x}{=\!=\!=\!=} -\int_1^0 u^2 du$$

$$= -\frac{1}{3}u^3\Big|_1^0 = -\frac{1}{3}[0-(-1)]$$

凑微分：例

例 2 计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx$

解法一 先计算 $\int \cos^2 x \sin x dx$，再将积分上下限代入原函数：

$$\because \int \cos^2 x \sin x dx = -\int \cos^2 x d\cos x = -\frac{1}{3}\cos^3 x + C$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx = -\frac{1}{3}\cos^3 x\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{3}(0-1) = \frac{1}{3}$$

解法二

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x d\cos x \xlongequal{u=\cos x} -\int_1^0 u^2 du$$

$$= -\frac{1}{3}u^3\Big|_1^0 = -\frac{1}{3}[0-(-1)] = \frac{1}{3}$$

凑微分：例

例 2 计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx$

解法一 先计算 $\int \cos^2 x \sin x dx$，再将积分上下限代入原函数：

$$\because \int \cos^2 x \sin x dx = -\int \cos^2 x d\cos x = -\frac{1}{3}\cos^3 x + C$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx = -\frac{1}{3}\cos^3 x\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{3}(0-1) = \frac{1}{3}$$

解法二

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x d\cos x \xlongequal{u=\cos x} -\int_1^0 u^2 du$$

$$= -\frac{1}{3}u^3\Big|_1^0 = -\frac{1}{3}[0-(-1)] = \frac{1}{3}$$

例 3 计算定积分 $\int_0^3 \frac{x}{1+x^2} dx$

凑微分：例

例 3 计算定积分 $\int_0^3 \frac{x}{1+x^2}dx$

凑微分：例

例 3 计算定积分 $\int_0^3 \frac{x}{1+x^2}dx$

解

$$\int_0^3 \frac{x}{1+x^2}dx$$

凑微分：例

例 3 计算定积分 $\int_0^3 \frac{x}{1+x^2}dx$

解

$$\int_0^3 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{1}{1+x^2}d(1+x^2)$$

凑微分：例

例 3 计算定积分 $\int_0^3 \frac{x}{1+x^2}dx$

解

$$\int_0^3 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{1}{1+x^2}d(1+x^2) \xlongequal{u=1+x^2} \frac{1}{2}\int \qquad \frac{1}{u}du$$

凑微分：例

例 3 计算定积分 $\int_0^3 \frac{x}{1+x^2} dx$

解

$$\int_0^3 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^3 \frac{1}{1+x^2} d(1+x^2) \xlongequal{u=1+x^2} \frac{1}{2} \int_1^{10} \frac{1}{u} du$$

凑微分：例

例 3 计算定积分 $\int_0^3 \frac{x}{1+x^2} dx$

解

$$\int_0^3 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^3 \frac{1}{1+x^2} d(1+x^2) \xlongequal{u=1+x^2} \frac{1}{2} \int_1^{10} \frac{1}{u} du$$

$$= \frac{1}{2} \ln u$$

凑微分：例

例 3 计算定积分 $\int_0^3 \frac{x}{1+x^2}dx$

解

$$\int_0^3 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{1}{1+x^2}d(1+x^2) \xlongequal{u=1+x^2} \frac{1}{2}\int_1^{10} \frac{1}{u}du$$
$$= \frac{1}{2}\ln u\Big|_1^{10}$$

凑微分：例

例 3 计算定积分 $\int_0^3 \frac{x}{1+x^2} dx$

解

$$\int_0^3 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^3 \frac{1}{1+x^2} d(1+x^2) \xlongequal{u=1+x^2} \frac{1}{2} \int_1^{10} \frac{1}{u} du$$

$$= \frac{1}{2} \ln u \Big|_1^{10} = \frac{1}{2} [\ln 10 - \ln 1)]$$

凑微分：例

例 3 计算定积分 $\int_0^3 \frac{x}{1+x^2}dx$

解

$$\int_0^3 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{1}{1+x^2}d(1+x^2) \xlongequal{u=1+x^2} \frac{1}{2}\int_1^{10} \frac{1}{u}du$$

$$= \frac{1}{2}\ln u\Big|_1^{10} = \frac{1}{2}[\ln 10 - \ln 1)] = \frac{1}{2}\ln 10$$

变量代换：例

例 1 计算定积分 $\int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx$

变量代换：例

例 1 计算定积分 $\int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx$

解法一 先求出 $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx$，

变量代换：例

例 1 计算定积分 $\int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx$

解法一 先求出 $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx$，令 $t = \sqrt{x}$，则 $x = t^2$，

变量代换：例

例 1 计算定积分 $\int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx$

解法一 先求出 $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx$，令 $t=\sqrt{x}$，则 $x=t^2$，

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx = \int \frac{1}{t^2+t}\cdot$$

变量代换：例

例 1 计算定积分 $\int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx$

解法一 先求出 $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx$，令 $t = \sqrt{x}$，则 $x = t^2$，$dx = 2tdt$

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx = \int \frac{1}{t^2+t} \cdot$$

变量代换：例

例 1 计算定积分 $\int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx$

解法一 先求出 $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx$，令 $t = \sqrt{x}$，则 $x = t^2$，$dx = 2tdt$

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx = \int \frac{1}{t^2+t} \cdot 2tdt$$

变量代换：例

例 1 计算定积分 $\int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx$

解法一 先求出 $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx$，令 $t=\sqrt{x}$，则 $x=t^2$，$dx=2tdt$

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx = \int \frac{1}{t^2+t} \cdot 2tdt = \int \frac{2}{t+1} dt$$

变量代换：例

例 1 计算定积分 $\int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx$

解法一 先求出 $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx$，令 $t=\sqrt{x}$，则 $x=t^2$，$dx=2tdt$

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx = \int \frac{1}{t^2+t}\cdot 2tdt = \int \frac{2}{t+1}dt$$

$$= 2\ln|t+1| + C$$

变量代换：例

例 1 计算定积分 $\int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx$

解法一 先求出 $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx$，令 $t = \sqrt{x}$，则 $x = t^2$，$dx = 2tdt$

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx = \int \frac{1}{t^2+t} \cdot 2tdt = \int \frac{2}{t+1} dt$$

$$= 2\ln|t+1| + C = 2\ln(\sqrt{x}+1) + C$$

变量代换：例

例 1 计算定积分 $\int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx$

解法一 先求出 $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx$，令 $t = \sqrt{x}$，则 $x = t^2$，$dx = 2tdt$

$$\int \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx = \int \frac{1}{t^2 + t} \cdot 2tdt = \int \frac{2}{t+1} dt$$

$$= 2\ln|t+1| + C = 2\ln(\sqrt{x} + 1) + C$$

$$\therefore \int_1^4 \frac{x}{1+x^2} dx = 2\ln(\sqrt{x} + 1)\Big|_1^4$$

变量代换：例

例 1 计算定积分 $\int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx$

解法一 先求出 $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx$，令 $t=\sqrt{x}$，则 $x=t^2$，$dx=2tdt$

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx = \int \frac{1}{t^2+t}\cdot 2tdt = \int \frac{2}{t+1}dt$$

$$= 2\ln|t+1| + C = 2\ln(\sqrt{x}+1) + C$$

$$\therefore \int_1^4 \frac{x}{1+x^2}dx = 2\ln(\sqrt{x}+1)\Big|_1^4 = 2(\ln 3 - \ln 2)$$

变量代换：例

例 1 计算定积分 $\int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx$

解法一 先求出 $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx$，令 $t = \sqrt{x}$，则 $x = t^2$，$dx = 2tdt$

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx = \int \frac{1}{t^2+t} \cdot 2tdt = \int \frac{2}{t+1} dt$$

$$= 2\ln|t+1| + C = 2\ln(\sqrt{x}+1) + C$$

$$\therefore \int_1^4 \frac{x}{1+x^2} dx = 2\ln(\sqrt{x}+1)\Big|_1^4 = 2(\ln 3 - \ln 2) = 2\ln\frac{3}{2}$$

变量代换：例

例 1 计算定积分 $\int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx$

解法一 先求出 $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx$，令 $t = \sqrt{x}$，则 $x = t^2$，$dx = 2tdt$

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx = \int \frac{1}{t^2+t} \cdot 2tdt = \int \frac{2}{t+1} dt$$

$$= 2\ln|t+1| + C = 2\ln(\sqrt{x}+1) + C$$

$$\therefore \int_1^4 \frac{x}{1+x^2} dx = 2\ln(\sqrt{x}+1)\Big|_1^4 = 2(\ln 3 - \ln 2) = 2\ln\frac{3}{2}$$

解法二 令 $t = \sqrt{x}$，则 $x = t^2$，$dx = 2tdt$，

变量代换：例

例 1 计算定积分 $\int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx$

解法一 先求出 $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx$，令 $t = \sqrt{x}$，则 $x = t^2$，$dx = 2tdt$

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx = \int \frac{1}{t^2+t} \cdot 2tdt = \int \frac{2}{t+1} dt$$

$$= 2\ln|t+1| + C = 2\ln(\sqrt{x}+1) + C$$

$$\therefore \int_1^4 \frac{x}{1+x^2} dx = 2\ln(\sqrt{x}+1)\Big|_1^4 = 2(\ln 3 - \ln 2) = 2\ln\frac{3}{2}$$

解法二 令 $t = \sqrt{x}$，则 $x = t^2$，$dx = 2tdt$，

$$\int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx = \int \frac{1}{t^2+t} \cdot 2tdt$$

变量代换：例

例 1 计算定积分 $\int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx$

解法一 先求出 $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx$，令 $t=\sqrt{x}$，则 $x=t^2$，$dx=2tdt$

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx = \int \frac{1}{t^2+t}\cdot 2tdt = \int \frac{2}{t+1}dt$$

$$= 2\ln|t+1| + C = 2\ln(\sqrt{x}+1)+C$$

$$\therefore \int_1^4 \frac{x}{1+x^2}dx = 2\ln(\sqrt{x}+1)\Big|_1^4 = 2(\ln 3 - \ln 2) = 2\ln\frac{3}{2}$$

解法二 令 $t=\sqrt{x}$，则 $x=t^2$，$dx=2tdt$，$t=1\ldots2$

$$\int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx = \int \frac{1}{t^2+t}\cdot 2tdt$$

变量代换：例

例 1 计算定积分 $\int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx$

解法一 先求出 $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx$，令 $t=\sqrt{x}$，则 $x=t^2$，$dx=2tdt$

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx = \int \frac{1}{t^2+t}\cdot 2tdt = \int \frac{2}{t+1}dt$$

$$= 2\ln|t+1| + C = 2\ln(\sqrt{x}+1) + C$$

$$\therefore \int_1^4 \frac{x}{1+x^2}dx = 2\ln(\sqrt{x}+1)\Big|_1^4 = 2(\ln 3 - \ln 2) = 2\ln\frac{3}{2}$$

解法二 令 $t=\sqrt{x}$，则 $x=t^2$，$dx=2tdt$，$t=1\ldots 2$

$$\int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx = \int_1^2 \frac{1}{t^2+t}\cdot 2tdt$$

变量代换：例

例 1 计算定积分 $\int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx$

解法一 先求出 $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx$，令 $t = \sqrt{x}$，则 $x = t^2$，$dx = 2t dt$

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx = \int \frac{1}{t^2+t} \cdot 2t dt = \int \frac{2}{t+1} dt$$

$$= 2 \ln |t+1| + C = 2 \ln(\sqrt{x}+1) + C$$

$$\therefore \int_1^4 \frac{x}{1+x^2} dx = 2 \ln(\sqrt{x}+1)\Big|_1^4 = 2(\ln 3 - \ln 2) = 2 \ln \frac{3}{2}$$

解法二 令 $t = \sqrt{x}$，则 $x = t^2$，$dx = 2t dt$，$t = 1 \dots 2$

$$\int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx = \int_1^2 \frac{1}{t^2+t} \cdot 2t dt = \int_1^2 \frac{2}{t+1} dt$$

变量代换：例

例 1 计算定积分 $\int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx$

解法一 先求出 $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx$，令 $t=\sqrt{x}$，则 $x=t^2$，$dx=2tdt$

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx = \int \frac{1}{t^2+t}\cdot 2tdt = \int \frac{2}{t+1}dt$$

$$= 2\ln|t+1| + C = 2\ln(\sqrt{x}+1) + C$$

$$\therefore \int_1^4 \frac{x}{1+x^2}dx = 2\ln(\sqrt{x}+1)\Big|_1^4 = 2(\ln 3 - \ln 2) = 2\ln\frac{3}{2}$$

解法二 令 $t=\sqrt{x}$，则 $x=t^2$，$dx=2tdt$，$t=1\ldots 2$

$$\int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx = \int_1^2 \frac{1}{t^2+t}\cdot 2tdt = \int_1^2 \frac{2}{t+1}dt = 2\ln|t+1|$$

变量代换：例

例 1 计算定积分 $\int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx$

解法一 先求出 $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx$，令 $t=\sqrt{x}$，则 $x=t^2$，$dx=2tdt$

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx = \int \frac{1}{t^2+t} \cdot 2tdt = \int \frac{2}{t+1} dt$$

$$= 2\ln|t+1| + C = 2\ln(\sqrt{x}+1) + C$$

$$\therefore \int_1^4 \frac{x}{1+x^2} dx = 2\ln(\sqrt{x}+1)\Big|_1^4 = 2(\ln 3 - \ln 2) = 2\ln\frac{3}{2}$$

解法二 令 $t=\sqrt{x}$，则 $x=t^2$，$dx=2tdt$，$t=1\ldots2$

$$\int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx = \int_1^2 \frac{1}{t^2+t} \cdot 2tdt = \int_1^2 \frac{2}{t+1} dt = 2\ln|t+1|\Big|_1^2$$

变量代换：例

例 1 计算定积分 $\int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx$

解法一 先求出 $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx$，令 $t=\sqrt{x}$，则 $x=t^2$，$dx=2tdt$

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx = \int \frac{1}{t^2+t} \cdot 2tdt = \int \frac{2}{t+1} dt$$

$$= 2\ln|t+1| + C = 2\ln(\sqrt{x}+1) + C$$

$$\therefore \int_1^4 \frac{x}{1+x^2} dx = 2\ln(\sqrt{x}+1)\Big|_1^4 = 2(\ln 3 - \ln 2) = 2\ln\frac{3}{2}$$

解法二 令 $t=\sqrt{x}$，则 $x=t^2$，$dx=2tdt$，$t=1\ldots 2$

$$\int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx = \int_1^2 \frac{1}{t^2+t} \cdot 2tdt = \int_1^2 \frac{2}{t+1} dt = 2\ln|t+1|\Big|_1^2 = 2\ln\frac{3}{2}$$

变量代换：例

例 1 计算定积分 $\int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx$

解法一 先求出 $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx$，令 $t = \sqrt{x}$，则 $x = t^2$，$dx = 2tdt$

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx = \int \frac{1}{t^2+t} \cdot 2tdt = \int \frac{2}{t+1} dt$$

$$= 2\ln|t+1| + C = 2\ln(\sqrt{x}+1) + C$$

$$\therefore \int_1^4 \frac{x}{1+x^2} dx = 2\ln(\sqrt{x}+1)\Big|_1^4 = 2(\ln 3 - \ln 2) = 2\ln\frac{3}{2}$$

解法二 令 $t = \sqrt{x}$，则 $x = t^2$，$dx = 2tdt$，$t = 1 \ldots 2$

$$\int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx = \int_1^2 \frac{1}{t^2+t} \cdot 2tdt = \int_1^2 \frac{2}{t+1} dt = 2\ln|t+1|\Big|_1^2 = 2\ln\frac{3}{2}$$

变量代换：例

例 1 计算定积分 $\int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx$

解法一 先求出 $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx$，令 $t=\sqrt{x}$，则 $x=t^2$，$dx=2tdt$

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx = \int \frac{1}{t^2+t}\cdot 2tdt = \int \frac{2}{t+1} dt$$

$$= 2\ln|t+1| + C = 2\ln(\sqrt{x}+1) + C$$

$$\therefore \int_1^4 \frac{x}{1+x^2} dx = 2\ln(\sqrt{x}+1)\Big|_1^4 = 2(\ln 3 - \ln 2) = 2\ln\frac{3}{2}$$

解法二 令 $t=\sqrt{x}$，则 $x=t^2$，$dx=2tdt$，$t=1\ldots 2$

$$\int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx = \int_1^2 \frac{1}{t^2+t}\cdot 2tdt = \int_1^2 \frac{2}{t+1} dt = 2\ln|t+1|\Big|_1^2 = 2\ln\frac{3}{2}$$

例 2 计算定积分 $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}+1} dx$

变量代换：例

例 2 计算定积分 $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}+1} dx$

变量代换：例

例 2 计算定积分 $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}+1} dx$

解 令 $t = \sqrt{x} + 1$，则 $x = (t-1)^2$，$dx = 2(t-1)dt$，

变量代换：例

例 2 计算定积分 $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}+1}dx$

解 令 $t=\sqrt{x}+1$，则 $x=(t-1)^2$，$dx=2(t-1)dt$，

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}+1}dx = \int \quad \frac{1}{t}\cdot 2(t-1)dt$$

变量代换：例

例 2 计算定积分 $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}+1} dx$

解 令 $t = \sqrt{x} + 1$，则 $x = (t-1)^2$，$dx = 2(t-1)dt$，$t = 2 \ldots 3$

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}+1} dx = \int \frac{1}{t} \cdot 2(t-1)dt$$

变量代换：例

例 2 计算定积分 $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}+1}dx$

解 令 $t = \sqrt{x}+1$，则 $x = (t-1)^2$，$dx = 2(t-1)dt$，$t = 2...3$

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}+1}dx = \int_2^3 \frac{1}{t} \cdot 2(t-1)dt$$

变量代换：例

例 2 计算定积分 $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}+1} dx$

解 令 $t = \sqrt{x} + 1$，则 $x = (t-1)^2$，$dx = 2(t-1)dt$，$t = 2 \ldots 3$

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}+1} dx = \int_2^3 \frac{1}{t} \cdot 2(t-1)dt = 2\int_2^3 1 - \frac{1}{t} dt$$

变量代换：例

例 2 计算定积分 $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}+1} dx$

解 令 $t=\sqrt{x}+1$，则 $x=(t-1)^2$，$dx=2(t-1)dt$，$t=2\dots3$

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}+1} dx = \int_2^3 \frac{1}{t}\cdot 2(t-1)dt = 2\int_2^3 1-\frac{1}{t} dt$$

$$= 2(t-\ln|t|)$$

变量代换：例

例 2 计算定积分 $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}+1} dx$

解 令 $t = \sqrt{x} + 1$，则 $x = (t-1)^2$，$dx = 2(t-1)dt$，$t = 2 \ldots 3$

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}+1} dx = \int_2^3 \frac{1}{t} \cdot 2(t-1)dt = 2\int_2^3 1 - \frac{1}{t} dt$$

$$= 2(t - \ln|t|)\Big|_2^3 =$$

变量代换：例

例 2 计算定积分 $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}+1} dx$

解 令 $t = \sqrt{x} + 1$，则 $x = (t-1)^2$，$dx = 2(t-1)dt$，$t = 2 \ldots 3$

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}+1} dx = \int_2^3 \frac{1}{t} \cdot 2(t-1)dt = 2\int_2^3 1 - \frac{1}{t} dt$$

$$= 2(t - \ln|t|)\Big|_2^3 = 2 + 2\ln\frac{2}{3}$$

变量代换：例

例 2 计算定积分 $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}+1}dx$

解 令 $t=\sqrt{x}+1$，则 $x=(t-1)^2$，$dx=2(t-1)dt$，$t=2\ldots3$

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}+1}dx = \int_2^3 \frac{1}{t}\cdot 2(t-1)dt = 2\int_2^3 1-\frac{1}{t}dt$$

$$= 2(t-\ln|t|)\Big|_2^3 = 2+2\ln\frac{2}{3}$$

例 3 计算定积分 $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx$

变量代换：例

例 3 计算定积分 $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$

解

变量代换：例

例 3 计算定积分 $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$

解 令 $t = \sqrt{e^x - 1}$,

变量代换：例

例 3 计算定积分 $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}dx$

解 令 $t = \sqrt{e^x - 1}$,

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}dx = \int \quad t \cdot$$

变量代换：例

例 3 计算定积分 $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$

解 令 $t = \sqrt{e^x - 1}$，则 $x = \ln(1 + t^2)$，

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx = \int \quad t \cdot$$

变量代换：例

例 3 计算定积分 $\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx$

解 令 $t=\sqrt{e^x-1}$，则 $x=\ln(1+t^2)$，$dx=\frac{2t}{1+t^2}dt$，

$$\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx=\int \quad t\cdot$$

变量代换：例

例 3 计算定积分 $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}dx$

解 令 $t = \sqrt{e^x - 1}$，则 $x = \ln(1 + t^2)$，$dx = \frac{2t}{1+t^2}dt$，

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}dx = \int \quad t \cdot \frac{2t}{1 + t^2}dt$$

变量代换：例

例 3 计算定积分 $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}dx$

解 令 $t = \sqrt{e^x - 1}$，则 $x = \ln(1 + t^2)$，$dx = \frac{2t}{1+t^2}dt$，$t = 0 \dots 1$

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}dx = \int \quad t \cdot \frac{2t}{1 + t^2}dt$$

变量代换：例

例 3 计算定积分 $\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx$

解 令 $t=\sqrt{e^x-1}$，则 $x=\ln(1+t^2)$，$dx=\frac{2t}{1+t^2}dt$，$t=0\ldots1$

$$\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx=\int_0^1 t\cdot\frac{2t}{1+t^2}dt$$

变量代换：例

例 3 计算定积分 $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$

解 令 $t = \sqrt{e^x - 1}$，则 $x = \ln(1 + t^2)$，$dx = \frac{2t}{1+t^2} dt$，$t = 0 \ldots 1$

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx = \int_0^1 t \cdot \frac{2t}{1 + t^2} dt = 2 \int_0^1 \frac{t^2}{1 + t^2} dt$$

变量代换：例

例 3 计算定积分 $\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx$

解 令 $t=\sqrt{e^x-1}$，则 $x=\ln(1+t^2)$，$dx=\frac{2t}{1+t^2}dt$，$t=0\ldots1$

$$\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx=\int_0^1 t\cdot\frac{2t}{1+t^2}dt=2\int_0^1\frac{t^2}{1+t^2}dt$$

$$=2\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt$$

变量代换：例

例 3 计算定积分 $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}dx$

解 令 $t = \sqrt{e^x - 1}$，则 $x = \ln(1 + t^2)$，$dx = \frac{2t}{1+t^2}dt$，$t = 0 \dots 1$

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}dx = \int_0^1 t \cdot \frac{2t}{1 + t^2}dt = 2\int_0^1 \frac{t^2}{1 + t^2}dt$$

$$= 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1 + t^2}\right)dt$$

$$= 2(t - \arctan t)$$

变量代换：例

例 3 计算定积分 $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}dx$

解 令 $t = \sqrt{e^x - 1}$，则 $x = \ln(1 + t^2)$，$dx = \frac{2t}{1+t^2}dt$，$t = 0 \dots 1$

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}dx = \int_0^1 t \cdot \frac{2t}{1 + t^2}dt = 2\int_0^1 \frac{t^2}{1 + t^2}dt$$

$$= 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1 + t^2}\right)dt$$

$$= 2(t - \arctan t)\Big|_0^1$$

变量代换：例

例 3 计算定积分 $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$

解 令 $t = \sqrt{e^x - 1}$，则 $x = \ln(1 + t^2)$，$dx = \frac{2t}{1+t^2} dt$，$t = 0 \ldots 1$

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx = \int_0^1 t \cdot \frac{2t}{1 + t^2} dt = 2 \int_0^1 \frac{t^2}{1 + t^2} dt$$

$$= 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1 + t^2}\right) dt$$

$$= 2(t - \arctan t)\Big|_0^1 = 2[(1 - \frac{\pi}{4}) - 0] =$$

变量代换：例

例 3 计算定积分 $\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx$

解 令 $t=\sqrt{e^x-1}$，则 $x=\ln(1+t^2)$，$dx=\frac{2t}{1+t^2}dt$，$t=0\ldots1$

$$\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx=\int_0^1 t\cdot\frac{2t}{1+t^2}dt=2\int_0^1\frac{t^2}{1+t^2}dt$$

$$=2\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt$$

$$=2(t-\arctan t)\Big|_0^1=2[(1-\frac{\pi}{4})-0]=2-\frac{\pi}{2}$$