

第 12 章 d : 函数展开成幂级数

数学系 梁卓滨

2016-2017 学年 II

Outline

问题 给定函数 $f(x)$, 设 x_0 属于定义域, 问 $f(x)$ 能否展成以下幂级数?

$$f(x) \stackrel{?}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

问题 给定函数 $f(x)$, 设 x_0 属于定义域, 问 $f(x)$ 能否展成以下幂级数?

$$f(x) \stackrel{?}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

性质 若 $f(x)$ 能展成上述幂级数, 则

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

问题 给定函数 $f(x)$, 设 x_0 属于定义域, 问 $f(x)$ 能否展成以下幂级数?

$$f(x) \stackrel{?}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

性质 若 $f(x)$ 能展成上述幂级数, 则

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

证明 逐项求 k 次导得:

$$f^{(k)}(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \right]^{(k)}$$

问题 给定函数 $f(x)$, 设 x_0 属于定义域, 问 $f(x)$ 能否展成以下幂级数?

$$f(x) \stackrel{?}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

性质 若 $f(x)$ 能展成上述幂级数, 则

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

证明 逐项求 k 次导得:

$$f^{(k)}(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \right]^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n (x-x_0)^n]^{(k)}$$

问题 给定函数 $f(x)$, 设 x_0 属于定义域, 问 $f(x)$ 能否展成以下幂级数?

$$f(x) \stackrel{?}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

性质 若 $f(x)$ 能展成上述幂级数, 则

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

证明 逐项求 k 次导得:

$$f^{(k)}(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \right]^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n (x-x_0)^n]^{(k)}$$

$$n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) \cdot (x-x_0)^{n-k}$$

问题 给定函数 $f(x)$, 设 x_0 属于定义域, 问 $f(x)$ 能否展成以下幂级数?

$$f(x) \stackrel{?}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

性质 若 $f(x)$ 能展成上述幂级数, 则

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

证明 逐项求 k 次导得:

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \right]^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n (x-x_0)^n]^{(k)} \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) \cdot (x-x_0)^{n-k} \end{aligned}$$

问题 给定函数 $f(x)$, 设 x_0 属于定义域, 问 $f(x)$ 能否展成以下幂级数?

$$f(x) \stackrel{?}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

性质 若 $f(x)$ 能展成上述幂级数, 则

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

证明 逐项求 k 次导得:

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \right]^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n (x-x_0)^n]^{(k)} \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) \cdot (x-x_0)^{n-k} \\ &= a_k \cdot k! \end{aligned}$$

问题 给定函数 $f(x)$, 设 x_0 属于定义域, 问 $f(x)$ 能否展成以下幂级数?

$$f(x) \stackrel{?}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

性质 若 $f(x)$ 能展成上述幂级数, 则

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

证明 逐项求 k 次导得:

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \right]^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n (x-x_0)^n]^{(k)} \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) \cdot (x-x_0)^{n-k} \\ &= a_k \cdot k! + a_{k+1} \cdot (k+1) \cdots 2 \cdot (x-x_0) \end{aligned}$$

问题 给定函数 $f(x)$, 设 x_0 属于定义域, 问 $f(x)$ 能否展成以下幂级数?

$$f(x) \stackrel{?}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

性质 若 $f(x)$ 能展成上述幂级数, 则

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

证明 逐项求 k 次导得:

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \right]^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n (x-x_0)^n]^{(k)} \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) \cdot (x-x_0)^{n-k} \\ &= a_k \cdot k! + a_{k+1} \cdot (k+1) \cdots 2 \cdot (x-x_0) \\ &\quad + a_{k+2} \cdot (k+2) \cdots 3 \cdot (x-x_0)^2 + \cdots \end{aligned}$$

问题 给定函数 $f(x)$, 设 x_0 属于定义域, 问 $f(x)$ 能否展成以下幂级数?

$$f(x) \stackrel{?}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

性质 若 $f(x)$ 能展成上述幂级数, 则

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

证明 逐项求 k 次导得:

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \right]^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n (x-x_0)^n]^{(k)} \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) \cdot (x-x_0)^{n-k} \\ &= a_k \cdot k! + a_{k+1} \cdot (k+1) \cdots 2 \cdot (x-x_0) \\ &\quad + a_{k+2} \cdot (k+2) \cdots 3 \cdot (x-x_0)^2 + \cdots \end{aligned}$$

取 $x = x_0$ 得 $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)$

问题 给定函数 $f(x)$, 设 x_0 属于定义域, 问 $f(x)$ 能否展成以下幂级数?

$$f(x) \stackrel{?}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

性质 若 $f(x)$ 能展成上述幂级数, 则

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

注 1

问题 给定函数 $f(x)$, 设 x_0 属于定义域, 问 $f(x)$ 能否展成以下幂级数?

$$f(x) \stackrel{?}{=} a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots$$

性质 若 $f(x)$ 能展成上述幂级数, 则

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

注 1

$f(x_0)$

问题 给定函数 $f(x)$, 设 x_0 属于定义域, 问 $f(x)$ 能否展成以下幂级数?

$$f(x) \stackrel{?}{=} a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots$$

性质 若 $f(x)$ 能展成上述幂级数, 则

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

注 1

$$f(x_0) \quad f'(x_0)$$

问题 给定函数 $f(x)$, 设 x_0 属于定义域, 问 $f(x)$ 能否展成以下幂级数?

$$f(x) \stackrel{?}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

性质 若 $f(x)$ 能展成上述幂级数, 则

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

注 1

$$f(x_0) \quad f'(x_0) \quad \frac{1}{2!} f''(x_0)$$

问题 给定函数 $f(x)$, 设 x_0 属于定义域, 问 $f(x)$ 能否展成以下幂级数?

$$f(x) \stackrel{?}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

性质 若 $f(x)$ 能展成上述幂级数, 则

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

注 1

$$f(x_0) \quad f'(x_0) \quad \frac{1}{2!} f''(x_0) \quad \cdots \quad \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

问题 给定函数 $f(x)$, 设 x_0 属于定义域, 问 $f(x)$ 能否展成以下幂级数?

$$f(x) \stackrel{?}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

性质 若 $f(x)$ 能展成上述幂级数, 则

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

注 1 也就是, $f(x)$ 至多能展成如下形式的幂级数:

$$f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + \cdots$$

问题 给定函数 $f(x)$, 设 x_0 属于定义域, 问 $f(x)$ 能否展成以下幂级数?

$$f(x) \stackrel{?}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

性质 若 $f(x)$ 能展成上述幂级数, 则

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

注 1 也就是, $f(x)$ 至多能展成如下形式的幂级数:

$$f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + \cdots$$

- 此级数称为 $f(x)$ 在 x_0 处的 **泰勒级数**。

问题 给定函数 $f(x)$, 设 x_0 属于定义域, 问 $f(x)$ 能否展成以下幂级数?

$$f(x) \stackrel{?}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

性质 若 $f(x)$ 能展成上述幂级数, 则

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

注 1 也就是, $f(x)$ 至多能展成如下形式的幂级数:

$$f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + \cdots$$

- 此级数称为 $f(x)$ 在 x_0 处的 **泰勒级数**。
- 级数前 $n+1$ 项的部分和记为 p_n , 称为 **n 次泰勒多项式**

问题 给定函数 $f(x)$, 设 x_0 属于定义域, 问 $f(x)$ 能否展成以下幂级数?

$$f(x) \stackrel{?}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

性质 若 $f(x)$ 能展成上述幂级数, 则

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

注 1 也就是, $f(x)$ 至多能展成如下形式的幂级数:

$$f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + \cdots$$

- 此级数称为 $f(x)$ 在 x_0 处的 **泰勒级数**。
- 级数前 $n+1$ 项的部分和记为 p_n , 称为 **n 次泰勒多项式**

注 2

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

问题 给定函数 $f(x)$, 设 x_0 属于定义域, 问 $f(x)$ 能否展成以下幂级数?

$$f(x) \stackrel{?}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

性质 若 $f(x)$ 能展成上述幂级数, 则

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

注 1 也就是, $f(x)$ 至多能展成如下形式的幂级数:

$$f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + \cdots$$

- 此级数称为 $f(x)$ 在 x_0 处的 **泰勒级数**。
- 级数前 $n+1$ 项的部分和记为 p_n , 称为 **n 次泰勒多项式**

注 2

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x)$$

例 求 $f(x) = e^x$ 在 $x = 0$ 处的泰勒级数。

例 求 $f(x) = e^x$ 在 $x = 0$ 处的泰勒级数。

解 取 $x_0 = 0$ 时, 泰勒级数是

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

例 求 $f(x) = e^x$ 在 $x = 0$ 处的泰勒级数。

解 取 $x_0 = 0$ 时, 泰勒级数是

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

当 $f(x) = e^x$ 时,

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x$$

例 求 $f(x) = e^x$ 在 $x = 0$ 处的泰勒级数。

解 取 $x_0 = 0$ 时, 泰勒级数是

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

当 $f(x) = e^x$ 时,

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x$$

$$\Rightarrow f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 1$$

例 求 $f(x) = e^x$ 在 $x = 0$ 处的泰勒级数。

解 取 $x_0 = 0$ 时, 泰勒级数是

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

当 $f(x) = e^x$ 时,

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x$$

$$\Rightarrow f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 1$$

$$\Rightarrow \text{泰勒级数: } 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

例 求 $f(x) = e^x$ 在 $x = 0$ 处的泰勒级数。

解 取 $x_0 = 0$ 时, 泰勒级数是

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

当 $f(x) = e^x$ 时,

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x$$

$$\Rightarrow f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 1$$

$$\Rightarrow \text{泰勒级数: } 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

注 n 次泰勒多项式是:

$$p_n(x) =$$

例 求 $f(x) = e^x$ 在 $x = 0$ 处的泰勒级数。

解 取 $x_0 = 0$ 时, 泰勒级数是

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

当 $f(x) = e^x$ 时,

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x$$

$$\Rightarrow f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 1$$

$$\Rightarrow \text{泰勒级数: } 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

注 n 次泰勒多项式是:

$$p_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n$$

例 求 $f(x) = \sin x$ 在 $x = 0$ 处的泰勒级数。

例 求 $f(x) = \sin x$ 在 $x = 0$ 处的泰勒级数。

解 取 $x_0 = 0$ 时, 泰勒级数是

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

当 $f(x) = \sin x$ 时,

例 求 $f(x) = \sin x$ 在 $x = 0$ 处的泰勒级数。

解 取 $x_0 = 0$ 时, 泰勒级数是

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

当 $f(x) = \sin x$ 时,

	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
$n = 0, 4, 8 \dots$	$\sin x$	0
$n = 1, 5, 9 \dots$	$\cos x$	1
$n = 2, 6, 10 \dots$	$-\sin x$	0
$n = 3, 7, 11 \dots$	$-\cos x$	-1

例 求 $f(x) = \sin x$ 在 $x = 0$ 处的泰勒级数。

解 取 $x_0 = 0$ 时, 泰勒级数是

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

当 $f(x) = \sin x$ 时,

	$f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n}{2}\pi)$	$f^{(n)}(0)$
$n = 0, 4, 8 \dots$	$\sin x$	0
$n = 1, 5, 9 \dots$	$\cos x$	1
$n = 2, 6, 10 \dots$	$-\sin x$	0
$n = 3, 7, 11 \dots$	$-\cos x$	-1

例 求 $f(x) = \sin x$ 在 $x = 0$ 处的泰勒级数。

解 取 $x_0 = 0$ 时, 泰勒级数是

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

当 $f(x) = \sin x$ 时,

	$f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n}{2}\pi)$	$f^{(n)}(0) = \sin(\frac{n}{2}\pi)$
$n = 0, 4, 8 \dots$	$\sin x$	0
$n = 1, 5, 9 \dots$	$\cos x$	1
$n = 2, 6, 10 \dots$	$-\sin x$	0
$n = 3, 7, 11 \dots$	$-\cos x$	-1

例 求 $f(x) = \sin x$ 在 $x = 0$ 处的泰勒级数。

解 取 $x_0 = 0$ 时, 泰勒级数是

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

当 $f(x) = \sin x$ 时,

	$f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n}{2}\pi)$	$f^{(n)}(0) = \sin(\frac{n}{2}\pi)$
$n = 0, 4, 8 \dots$	$\sin x$	0
$n = 1, 5, 9 \dots$	$\cos x$	1
$n = 2, 6, 10 \dots$	$-\sin x$	0
$n = 3, 7, 11 \dots$	$-\cos x$	-1

所以泰勒级数是

$$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{11!}x^{11} + \cdots$$

例 求 $f(x) = \sin x$ 在 $x = 0$ 处的泰勒级数。

解 取 $x_0 = 0$ 时, 泰勒级数是

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

当 $f(x) = \sin x$ 时,

	$f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n}{2}\pi)$	$f^{(n)}(0) = \sin(\frac{n}{2}\pi)$
$n = 0, 4, 8 \dots$	$\sin x$	0
$n = 1, 5, 9 \dots$	$\cos x$	1
$n = 2, 6, 10 \dots$	$-\sin x$	0
$n = 3, 7, 11 \dots$	$-\cos x$	-1

所以泰勒级数是

$$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{11!}x^{11} + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \cdots$$

- $\sin x$ 的泰勒级数是:

$$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{11!}x^{11} + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \cdots$$

- $\sin x$ 的 n 次泰勒多项式是:

- $\sin x$ 的泰勒级数是:

$$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{11!}x^{11} + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \cdots$$

- $\sin x$ 的 n 次泰勒多项式是:

$$p_1 = x;$$

- $\sin x$ 的泰勒级数是:

$$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{11!}x^{11} + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \cdots$$

- $\sin x$ 的 n 次泰勒多项式是:

$$p_1 = p_2 = x;$$

- $\sin x$ 的泰勒级数是:

$$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{11!}x^{11} + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \cdots$$

- $\sin x$ 的 n 次泰勒多项式是:

$$p_1 = p_2 = x;$$

$$p_3 = x - \frac{1}{3!}x^3;$$

- $\sin x$ 的泰勒级数是:

$$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{11!}x^{11} + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \cdots$$

- $\sin x$ 的 n 次泰勒多项式是:

$$p_1 = p_2 = x;$$

$$p_3 = p_4 = x - \frac{1}{3!}x^3;$$

- $\sin x$ 的泰勒级数是:

$$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{11!}x^{11} + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \cdots$$

- $\sin x$ 的 n 次泰勒多项式是:

$$p_1 = p_2 = x;$$

$$p_3 = p_4 = x - \frac{1}{3!}x^3;$$

$$p_5 = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5;$$

- $\sin x$ 的泰勒级数是:

$$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{11!}x^{11} + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \cdots$$

- $\sin x$ 的 n 次泰勒多项式是:

$$p_1 = p_2 = x;$$

$$p_3 = p_4 = x - \frac{1}{3!}x^3;$$

$$p_5 = p_6 = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5;$$

- $\sin x$ 的泰勒级数是:

$$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{11!}x^{11} + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \cdots$$

- $\sin x$ 的 n 次泰勒多项式是:

$$p_1 = p_2 = x;$$

$$p_3 = p_4 = x - \frac{1}{3!}x^3;$$

$$p_5 = p_6 = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5;$$

$$\vdots$$

$$p_{2m+1}$$

- $\sin x$ 的泰勒级数是:

$$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{11!}x^{11} + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \cdots$$

- $\sin x$ 的 n 次泰勒多项式是:

$$p_1 = p_2 = x;$$

$$p_3 = p_4 = x - \frac{1}{3!}x^3;$$

$$p_5 = p_6 = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5;$$

$$\vdots$$

$$p_{2m+1} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1}$$

- $\sin x$ 的泰勒级数是:

$$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{11!}x^{11} + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \cdots$$

- $\sin x$ 的 n 次泰勒多项式是:

$$p_1 = p_2 = x;$$

$$p_3 = p_4 = x - \frac{1}{3!}x^3;$$

$$p_5 = p_6 = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5;$$

\vdots

$$p_{2m+1} = p_{2m+2} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1}$$

例 求 $f(x) = \cos x$ 在 $x = 0$ 处的泰勒级数。

例 求 $f(x) = \cos x$ 在 $x = 0$ 处的泰勒级数。

解 取 $x_0 = 0$ 时, 泰勒级数是

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

当 $f(x) = \cos x$ 时,

例 求 $f(x) = \cos x$ 在 $x = 0$ 处的泰勒级数。

解 取 $x_0 = 0$ 时, 泰勒级数是

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

当 $f(x) = \cos x$ 时,

	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
$n = 0, 4, 8 \dots$	$\cos x$	1
$n = 1, 5, 9 \dots$	$-\sin x$	0
$n = 2, 6, 10 \dots$	$-\cos x$	-1
$n = 3, 7, 11 \dots$	$\sin x$	0

例 求 $f(x) = \cos x$ 在 $x = 0$ 处的泰勒级数。

解 取 $x_0 = 0$ 时, 泰勒级数是

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

当 $f(x) = \cos x$ 时,

	$f^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{n}{2}\pi)$	$f^{(n)}(0)$
$n = 0, 4, 8 \dots$	$\cos x$	1
$n = 1, 5, 9 \dots$	$-\sin x$	0
$n = 2, 6, 10 \dots$	$-\cos x$	-1
$n = 3, 7, 11 \dots$	$\sin x$	0

例 求 $f(x) = \cos x$ 在 $x = 0$ 处的泰勒级数。

解 取 $x_0 = 0$ 时, 泰勒级数是

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

当 $f(x) = \cos x$ 时,

	$f^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{n}{2}\pi)$	$f^{(n)}(0) = \cos(\frac{n}{2}\pi)$
$n = 0, 4, 8 \dots$	$\cos x$	1
$n = 1, 5, 9 \dots$	$-\sin x$	0
$n = 2, 6, 10 \dots$	$-\cos x$	-1
$n = 3, 7, 11 \dots$	$\sin x$	0

例 求 $f(x) = \cos x$ 在 $x = 0$ 处的泰勒级数。

解 取 $x_0 = 0$ 时, 泰勒级数是

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

当 $f(x) = \cos x$ 时,

	$f^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{n}{2}\pi)$	$f^{(n)}(0) = \cos(\frac{n}{2}\pi)$
$n = 0, 4, 8 \dots$	$\cos x$	1
$n = 1, 5, 9 \dots$	$-\sin x$	0
$n = 2, 6, 10 \dots$	$-\cos x$	-1
$n = 3, 7, 11 \dots$	$\sin x$	0

所以泰勒级数是

$$1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 - \frac{1}{10!}x^{10} + \cdots$$

例 求 $f(x) = \cos x$ 在 $x = 0$ 处的泰勒级数。

解 取 $x_0 = 0$ 时, 泰勒级数是

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

当 $f(x) = \cos x$ 时,

	$f^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{n}{2}\pi)$	$f^{(n)}(0) = \cos(\frac{n}{2}\pi)$
$n = 0, 4, 8 \dots$	$\cos x$	1
$n = 1, 5, 9 \dots$	$-\sin x$	0
$n = 2, 6, 10 \dots$	$-\cos x$	-1
$n = 3, 7, 11 \dots$	$\sin x$	0

所以泰勒级数是

$$1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 - \frac{1}{10!}x^{10} + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m)!}x^{2m} + \cdots$$

- $\cos x$ 的泰勒级数是：

$$1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 - \frac{1}{10!}x^{10} + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m)!}x^{2m} + \cdots$$

- $\cos x$ 的 n 次泰勒多项式是：

- $\cos x$ 的泰勒级数是：

$$1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 - \frac{1}{10!}x^{10} + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m)!}x^{2m} + \cdots$$

- $\cos x$ 的 n 次泰勒多项式是：

$$p_0 = 1;$$

- $\cos x$ 的泰勒级数是:

$$1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 - \frac{1}{10!}x^{10} + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m)!}x^{2m} + \cdots$$

- $\cos x$ 的 n 次泰勒多项式是:

$$p_0 = p_1 = 1;$$

- $\cos x$ 的泰勒级数是:

$$1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 - \frac{1}{10!}x^{10} + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m)!}x^{2m} + \cdots$$

- $\cos x$ 的 n 次泰勒多项式是:

$$p_0 = p_1 = 1;$$

$$p_2 = 1 - \frac{1}{2!}x^2;$$

- $\cos x$ 的泰勒级数是:

$$1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 - \frac{1}{10!}x^{10} + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m)!}x^{2m} + \cdots$$

- $\cos x$ 的 n 次泰勒多项式是:

$$p_0 = p_1 = 1;$$

$$p_2 = p_3 = 1 - \frac{1}{2!}x^2;$$

- $\cos x$ 的泰勒级数是：

$$1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 - \frac{1}{10!}x^{10} + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m)!}x^{2m} + \cdots$$

- $\cos x$ 的 n 次泰勒多项式是：

$$p_0 = p_1 = 1;$$

$$p_2 = p_3 = 1 - \frac{1}{2!}x^2;$$

$$p_4 = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4;$$

- $\cos x$ 的泰勒级数是:

$$1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 - \frac{1}{10!}x^{10} + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m)!}x^{2m} + \cdots$$

- $\cos x$ 的 n 次泰勒多项式是:

$$p_0 = p_1 = 1;$$

$$p_2 = p_3 = 1 - \frac{1}{2!}x^2;$$

$$p_4 = p_5 = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4;$$

- $\cos x$ 的泰勒级数是:

$$1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 - \frac{1}{10!}x^{10} + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m)!}x^{2m} + \cdots$$

- $\cos x$ 的 n 次泰勒多项式是:

$$p_0 = p_1 = 1;$$

$$p_2 = p_3 = 1 - \frac{1}{2!}x^2;$$

$$p_4 = p_5 = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4;$$

$$\vdots$$

$$p_{2m}(x)$$

- $\cos x$ 的泰勒级数是：

$$1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 - \frac{1}{10!}x^{10} + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m)!}x^{2m} + \cdots$$

- $\cos x$ 的 n 次泰勒多项式是：

$$p_0 = p_1 = 1;$$

$$p_2 = p_3 = 1 - \frac{1}{2!}x^2;$$

$$p_4 = p_5 = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4;$$

$$\vdots$$

$$p_{2m}(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m)!}x^{2m}$$

- $\cos x$ 的泰勒级数是：

$$1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 - \frac{1}{10!}x^{10} + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m)!}x^{2m} + \cdots$$

- $\cos x$ 的 n 次泰勒多项式是：

$$p_0 = p_1 = 1;$$

$$p_2 = p_3 = 1 - \frac{1}{2!}x^2;$$

$$p_4 = p_5 = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4;$$

$$\vdots$$

$$p_{2m}(x) = p_{2m+1}(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m)!}x^{2m}$$

例 求 $f(x) = \ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处泰勒级数。

例 求 $f(x) = \ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处泰勒级数。

解 取 $x_0 = 0$ 时, 泰勒级数是

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

当 $f(x) = \ln(1+x)$ 时,

例 求 $f(x) = \ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处泰勒级数。

解 取 $x_0 = 0$ 时, 泰勒级数是

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

当 $f(x) = \ln(1+x)$ 时,

$$f = \ln(1+x), \quad f' = \frac{1}{1+x},$$

例 求 $f(x) = \ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处泰勒级数。

解 取 $x_0 = 0$ 时, 泰勒级数是

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

当 $f(x) = \ln(1+x)$ 时,

$$f = \ln(1+x), \quad f' = \frac{1}{1+x}, \quad f'' = \frac{(-1)}{(1+x)^2},$$

例 求 $f(x) = \ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处泰勒级数。

解 取 $x_0 = 0$ 时, 泰勒级数是

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

当 $f(x) = \ln(1+x)$ 时,

$$f = \ln(1+x), \quad f' = \frac{1}{1+x}, \quad f'' = \frac{(-1)}{(1+x)^2}, \quad f''' = \frac{2}{(1+x)^3},$$

例 求 $f(x) = \ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处泰勒级数。

解 取 $x_0 = 0$ 时, 泰勒级数是

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

当 $f(x) = \ln(1+x)$ 时,

$$f = \ln(1+x), \quad f' = \frac{1}{1+x}, \quad f'' = \frac{(-1)}{(1+x)^2}, \quad f''' = \frac{2}{(1+x)^3},$$

$$f^{(4)} = \frac{-2 \cdot 3}{(1+x)^4},$$

例 求 $f(x) = \ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处泰勒级数。

解 取 $x_0 = 0$ 时, 泰勒级数是

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

当 $f(x) = \ln(1+x)$ 时,

$$f = \ln(1+x), \quad f' = \frac{1}{1+x}, \quad f'' = \frac{(-1)}{(1+x)^2}, \quad f''' = \frac{2}{(1+x)^3},$$

$$f^{(4)} = \frac{-2 \cdot 3}{(1+x)^4}, \quad f^{(5)} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{(1+x)^5}, \quad \cdots,$$

例 求 $f(x) = \ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处泰勒级数。

解 取 $x_0 = 0$ 时, 泰勒级数是

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

当 $f(x) = \ln(1+x)$ 时,

$$f = \ln(1+x), \quad f' = \frac{1}{1+x}, \quad f'' = \frac{(-1)}{(1+x)^2}, \quad f''' = \frac{2}{(1+x)^3},$$

$$f^{(4)} = \frac{-2 \cdot 3}{(1+x)^4}, \quad f^{(5)} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{(1+x)^5}, \quad \dots, \quad f^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}, \quad \dots$$

例 求 $f(x) = \ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处泰勒级数。

解 取 $x_0 = 0$ 时, 泰勒级数是

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

当 $f(x) = \ln(1+x)$ 时,

$$f = \ln(1+x), \quad f' = \frac{1}{1+x}, \quad f'' = \frac{(-1)}{(1+x)^2}, \quad f''' = \frac{2}{(1+x)^3},$$

$$f^{(4)} = \frac{-2 \cdot 3}{(1+x)^4}, \quad f^{(5)} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{(1+x)^5}, \quad \dots, \quad f^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}, \quad \dots$$

$$\text{所以 } \frac{1}{n!}f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^{n-1}}{n},$$

例 求 $f(x) = \ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处泰勒级数。

解 取 $x_0 = 0$ 时, 泰勒级数是

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

当 $f(x) = \ln(1+x)$ 时,

$$f = \ln(1+x), \quad f' = \frac{1}{1+x}, \quad f'' = \frac{(-1)}{(1+x)^2}, \quad f''' = \frac{2}{(1+x)^3},$$

$$f^{(4)} = \frac{-2 \cdot 3}{(1+x)^4}, \quad f^{(5)} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{(1+x)^5}, \quad \dots, \quad f^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}, \quad \dots$$

所以 $\frac{1}{n!}f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, 泰勒级数是

$$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots$$

例 求 $f(x) = \ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处泰勒级数。

解 取 $x_0 = 0$ 时, 泰勒级数是

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

当 $f(x) = \ln(1+x)$ 时,

$$f = \ln(1+x), \quad f' = \frac{1}{1+x}, \quad f'' = \frac{(-1)}{(1+x)^2}, \quad f''' = \frac{2}{(1+x)^3},$$

$$f^{(4)} = \frac{-2 \cdot 3}{(1+x)^4}, \quad f^{(5)} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{(1+x)^5}, \quad \dots, \quad f^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}, \quad \dots$$

所以 $\frac{1}{n!}f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, 泰勒级数是

$$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + \cdots$$

例 求 $f(x) = \ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处泰勒级数。

解 取 $x_0 = 0$ 时, 泰勒级数是

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

当 $f(x) = \ln(1+x)$ 时,

$$f = \ln(1+x), \quad f' = \frac{1}{1+x}, \quad f'' = \frac{(-1)}{(1+x)^2}, \quad f''' = \frac{2}{(1+x)^3},$$

$$f^{(4)} = \frac{-2 \cdot 3}{(1+x)^4}, \quad f^{(5)} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{(1+x)^5}, \quad \dots, \quad f^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}, \quad \dots$$

所以 $\frac{1}{n!}f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, 泰勒级数是

$$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + \cdots$$

注 n 次泰勒多项式是:

$$p_n(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n$$

例 求 $f(x) = (1+x)^\alpha$ 在 $x=0$ 处的 n 次泰勒多项式 $p_n(x)$

例 求 $f(x) = (1+x)^\alpha$ 在 $x=0$ 处的 n 次泰勒多项式 $p_n(x)$

解 取 $x_0 = 0$ 时, 泰勒级数是

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

当 $f(x) = (1+x)^\alpha$ 时,

例 求 $f(x) = (1+x)^\alpha$ 在 $x=0$ 处的 n 次泰勒多项式 $p_n(x)$

解 取 $x_0 = 0$ 时, 泰勒级数是

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

当 $f(x) = (1+x)^\alpha$ 时,

$$f = (1+x)^\alpha, \quad f' = \alpha(1+x)^{\alpha-1},$$

例 求 $f(x) = (1+x)^\alpha$ 在 $x=0$ 处的 n 次泰勒多项式 $p_n(x)$

解 取 $x_0 = 0$ 时, 泰勒级数是

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

当 $f(x) = (1+x)^\alpha$ 时,

$$f = (1+x)^\alpha, \quad f' = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \quad f'' = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},$$

例 求 $f(x) = (1+x)^\alpha$ 在 $x=0$ 处的 n 次泰勒多项式 $p_n(x)$

解 取 $x_0 = 0$ 时, 泰勒级数是

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

当 $f(x) = (1+x)^\alpha$ 时,

$$\begin{aligned} f &= (1+x)^\alpha, \quad f' = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \quad f'' = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \\ \dots, \quad f^{(n)} &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}, \quad \dots \end{aligned}$$

例 求 $f(x) = (1+x)^\alpha$ 在 $x=0$ 处的 n 次泰勒多项式 $p_n(x)$

解 取 $x_0 = 0$ 时, 泰勒级数是

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

当 $f(x) = (1+x)^\alpha$ 时,

$$f = (1+x)^\alpha, \quad f' = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \quad f'' = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \\ \dots, \quad f^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}, \quad \dots$$

$$\text{所以 } \frac{1}{n!}f^{(n)}(0) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!},$$

例 求 $f(x) = (1+x)^\alpha$ 在 $x=0$ 处的 n 次泰勒多项式 $p_n(x)$

解 取 $x_0 = 0$ 时, 泰勒级数是

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

当 $f(x) = (1+x)^\alpha$ 时,

$$f = (1+x)^\alpha, \quad f' = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \quad f'' = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \\ \dots, \quad f^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}, \quad \dots$$

所以 $\frac{1}{n!}f^{(n)}(0) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$, 泰勒级数是

$$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

例 求 $f(x) = (1+x)^\alpha$ 在 $x=0$ 处的 n 次泰勒多项式 $p_n(x)$

解 取 $x_0 = 0$ 时, 泰勒级数是

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

当 $f(x) = (1+x)^\alpha$ 时,

$$f = (1+x)^\alpha, \quad f' = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \quad f'' = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \\ \dots, \quad f^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}, \quad \dots$$

所以 $\frac{1}{n!}f^{(n)}(0) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$, 泰勒级数是

$$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

例 求 $f(x) = (1+x)^\alpha$ 在 $x=0$ 处的 n 次泰勒多项式 $p_n(x)$

解 取 $x_0 = 0$ 时, 泰勒级数是

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

当 $f(x) = (1+x)^\alpha$ 时,

$$f = (1+x)^\alpha, \quad f' = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \quad f'' = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \\ \dots, \quad f^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}, \quad \dots$$

所以 $\frac{1}{n!}f^{(n)}(0) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$, 泰勒级数是

$$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

注 n 次泰勒多项式是:

$$p_n(x) =$$

例 求 $f(x) = (1+x)^\alpha$ 在 $x=0$ 处的 n 次泰勒多项式 $p_n(x)$

解 取 $x_0 = 0$ 时, 泰勒级数是

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

当 $f(x) = (1+x)^\alpha$ 时,

$$f = (1+x)^\alpha, \quad f' = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \quad f'' = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \\ \dots, \quad f^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}, \quad \dots$$

所以 $\frac{1}{n!}f^{(n)}(0) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$, 泰勒级数是

$$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

注 n 次泰勒多项式是:

$$p_n(x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

回到问题：对哪些 x ， $f(x)$ 等于其泰勒级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$ ？

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

回到问题：对哪些 x ， $f(x)$ 等于其泰勒级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$ ？

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x)$$

回到问题：对哪些 x ， $f(x)$ 等于其泰勒级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$ ？

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x) - p_n(x)] = 0$$

回到问题：对哪些 x ， $f(x)$ 等于其泰勒级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$ ？

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x) - p_n(x)] = 0$$

$$(\text{令 } R_n(x) = f(x) - p_n(x))$$

回到问题：对哪些 x ， $f(x)$ 等于其泰勒级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$ ？

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n \iff f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x)$$

$$\iff \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x) - p_n(x)] = 0$$

$$(\text{令 } R_n(x) = f(x) - p_n(x))$$

$$\iff \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

回到问题：对哪些 x ， $f(x)$ 等于其泰勒级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$ ？

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x) - p_n(x)] = 0$$

$$(\text{令 } R_n(x) = f(x) - p_n(x))$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

注 $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$ ，或者 $f(x) = p_n(x) + R_n(x)$ ，刻画了原函数 $f(x)$ 与其泰勒多项式 $p_n(x)$ 的差异。

回忆 泰勒中值定理 1 若 f 具有 n 阶导数, 则

$$R_n(x) = o((x - x_0)^n).$$

回忆 泰勒中值定理 1 若 f 具有 n 阶导数, 则

$$R_n(x) = o((x - x_0)^n).$$

特别地,

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x)$$

回忆 泰勒中值定理 1 若 f 具有 n 阶导数, 则

$$R_n(x) = o((x - x_0)^n).$$

特别地,

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x)$$

$$\begin{aligned} &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\ &\quad + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) \end{aligned}$$

例

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1} + o(x^{2m+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m)!}x^{2m} + o(x^{2m+1})$$

以及

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}x^n + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

例 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x + \ln(1-x)]}$

例 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x + \ln(1-x)]}$

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x}$$

例 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x + \ln(1-x)]}$

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4) \right] - x \left[1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^3) \right]}{x^3}$$

例 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x + \ln(1-x)]}$

解

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4) \right] - x \left[1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^3) \right]}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^3 + o(x^4)}{x^3}\end{aligned}$$

例 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x + \ln(1-x)]}$

解

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\right] - x\left[1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^3)\right]}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^3 + o(x^4)}{x^3} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

例 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x + \ln(1-x)]}$

解

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4) \right] - x \left[1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^3) \right]}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^3 + o(x^4)}{x^3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x + \ln(1-x)]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[\phantom{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}} \right] - \left[\phantom{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}} \right]}{x^2 \left[x + \left(\right) \right]} \end{aligned}$$

例 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x + \ln(1-x)]}$

解

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\right] - x\left[1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^3)\right]}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^3 + o(x^4)}{x^3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x + \ln(1-x)]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^5)\right] - \left[\right]}{x^2\left[x + \left(\right)\right]} \end{aligned}$$

例 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x + \ln(1-x)]}$

解

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\right] - x\left[1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^3)\right]}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^3 + o(x^4)}{x^3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x + \ln(1-x)]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^5)\right] - \left[1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)\right]}{x^2\left[x + \left(\right)\right]} \end{aligned}$$

例 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x + \ln(1-x)]}$

解

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\right] - x\left[1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^3)\right]}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^3 + o(x^4)}{x^3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x + \ln(1-x)]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^5)\right] - \left[1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)\right]}{x^2\left[x + \left(-x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)\right]} \end{aligned}$$

例 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x + \ln(1-x)]}$

解

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\right] - x\left[1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^3)\right]}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^3 + o(x^4)}{x^3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x + \ln(1-x)]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^5)\right] - \left[1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)\right]}{x^2\left[x + \left(-x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)\right]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)}{-\frac{1}{2}x^4 + o(x^4)} \end{aligned}$$

例 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x + \ln(1-x)]}$

解

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\right] - x\left[1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^3)\right]}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^3 + o(x^4)}{x^3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x + \ln(1-x)]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^5)\right] - \left[1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)\right]}{x^2\left[x + \left(-x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)\right]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)}{-\frac{1}{2}x^4 + o(x^4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{12} + o(x^4)/x^4}{-\frac{1}{2} + o(x^4)/x^4} \end{aligned}$$

例 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x + \ln(1-x)]}$

解

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\right] - x\left[1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^3)\right]}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^3 + o(x^4)}{x^3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x + \ln(1-x)]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^5)\right] - \left[1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)\right]}{x^2\left[x + \left(-x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)\right]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)}{-\frac{1}{2}x^4 + o(x^4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{12} + o(x^4)/x^4}{-\frac{1}{2} + o(x^4)/x^4} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

泰勒中值定理 2 若 f 具有 $n+1$ 阶导数, 则

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$

其中 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个值

泰勒中值定理 2 若 f 具有 $n+1$ 阶导数, 则

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$

$$(1-\theta)x_0 + \theta x$$

其中 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个值, $0 < \theta < 1$ 。

泰勒中值定理 2 若 f 具有 $n+1$ 阶导数, 则

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$

$$\stackrel{or}{=} \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}((1-\theta)x_0 + \theta x)(x-x_0)^{n+1},$$

其中 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个值, $0 < \theta < 1$ 。

泰勒中值定理 2 若 f 具有 $n+1$ 阶导数, 则

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$
$$\stackrel{or}{=} \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}((1-\theta)x_0 + \theta x)(x-x_0)^{n+1},$$

其中 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个值, $0 < \theta < 1$ 。

注

1. ξ (以及 θ) 不是固定不变的, 而是随 x 和 n 的改变而变化。

泰勒中值定理 2 若 f 具有 $n+1$ 阶导数, 则

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$
$$\stackrel{or}{=} \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}((1-\theta)x_0 + \theta x)(x-x_0)^{n+1},$$

其中 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个值, $0 < \theta < 1$ 。

注

1. ξ (以及 θ) 不是固定不变的, 而是随 x 和 n 的改变而变化。
2. 当 $x_0 = 0$ 时, 则余项可写成

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}, \quad (0 < \theta < 1)$$

性质 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$, e^x 等于其泰勒级数。即

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

性质 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$, e^x 等于其泰勒级数。即

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

证明

1. 只需证明对任意 x , 成立 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ 。

性质 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$, e^x 等于其泰勒级数。即

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

证明

1. 只需证明对任意 x , 成立 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ 。
2. 由泰勒中值定理 2,

$$|R_n(x)| = \left| \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) x^{n+1} \right|$$

性质 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$, e^x 等于其泰勒级数。即

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

证明

1. 只需证明对任意 x , 成立 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ 。
2. 由泰勒中值定理 2,

$$|R_n(x)| = \left| \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) x^{n+1} \right| = \left| \frac{e^{\theta x} x^{n+1}}{(n+1)!} \right|$$

性质 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$, e^x 等于其泰勒级数。即

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

证明

1. 只需证明对任意 x , 成立 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ 。
2. 由泰勒中值定理 2,

$$|R_n(x)| = \left| \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) x^{n+1} \right| = \left| \frac{e^{\theta x} x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|}$$

性质 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$, e^x 等于其泰勒级数。即

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

证明

1. 只需证明对任意 x , 成立 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ 。

2. 由泰勒中值定理 2,

$$|R_n(x)| = \left| \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) x^{n+1} \right| = \left| \frac{e^{\theta x} x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|} \rightarrow 0$$

性质 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$, e^x 等于其泰勒级数。即

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

证明

1. 只需证明对任意 x , 成立 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ 。

2. 由泰勒中值定理 2,

$$|R_n(x)| = \left| \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) x^{n+1} \right| = \left| \frac{e^{\theta x} x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|} \rightarrow 0$$

(已知级数 $\sum \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ 收敛, 所以一般项 $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0$)

性质 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$, $\sin x$ 等于其泰勒级数。即

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \cdots$$

其中 $x \in (-\infty, \infty)$ 。

性质 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$, $\sin x$ 等于其泰勒级数。即

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \cdots$$

其中 $x \in (-\infty, \infty)$ 。

证明

1. 只需证明对任意 x , 成立 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ 。

性质 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$, $\sin x$ 等于其泰勒级数。即

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \cdots$$

其中 $x \in (-\infty, \infty)$ 。

证明

1. 只需证明对任意 x , 成立 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ 。
2. 由泰勒中值定理 2,

$$|R_n(x)| = \left| \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) x^{n+1} \right|$$

性质 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$, $\sin x$ 等于其泰勒级数。即

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \cdots$$

其中 $x \in (-\infty, \infty)$ 。

证明

1. 只需证明对任意 x , 成立 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ 。

2. 由泰勒中值定理 2,

$$|R_n(x)| = \left| \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) x^{n+1} \right| = \left| \frac{\sin\left(\theta x + \frac{n+1}{2}\pi\right) x^{n+1}}{(n+1)!} \right|$$

性质 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$, $\sin x$ 等于其泰勒级数。即

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \cdots$$

其中 $x \in (-\infty, \infty)$ 。

证明

1. 只需证明对任意 x , 成立 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ 。
2. 由泰勒中值定理 2,

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left| \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) x^{n+1} \right| = \left| \frac{\sin\left(\theta x + \frac{n+1}{2}\pi\right) x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \\ &\leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

性质 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$, $\sin x$ 等于其泰勒级数。即

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \cdots$$

其中 $x \in (-\infty, \infty)$ 。

证明

1. 只需证明对任意 x , 成立 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ 。

2. 由泰勒中值定理 2,

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left| \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) x^{n+1} \right| = \left| \frac{\sin\left(\theta x + \frac{n+1}{2}\pi\right) x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \\ &\leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

性质 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$, $\sin x$ 等于其泰勒级数。即

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \cdots$$

其中 $x \in (-\infty, \infty)$ 。

证明

1. 只需证明对任意 x , 成立 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ 。

2. 由泰勒中值定理 2,

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left| \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) x^{n+1} \right| = \left| \frac{\sin\left(\theta x + \frac{n+1}{2}\pi\right) x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \\ &\leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

(已知级数 $\sum \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ 收敛, 所以一般项 $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0$)

性质 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$, $\sin x$ 等于其泰勒级数。即

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m)!}x^{2m} + \cdots$$

其中 $x \in (-\infty, \infty)$ 。

性质 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$, $\sin x$ 等于其泰勒级数。即

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m)!}x^{2m} + \cdots$$

其中 $x \in (-\infty, \infty)$ 。

证明

1. 只需证明对任意 x , 成立 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ 。

性质 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$, $\sin x$ 等于其泰勒级数。即

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m)!}x^{2m} + \cdots$$

其中 $x \in (-\infty, \infty)$ 。

证明

1. 只需证明对任意 x , 成立 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ 。
2. 由泰勒中值定理 2,

$$|R_n(x)| = \left| \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) x^{n+1} \right|$$

性质 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$, $\sin x$ 等于其泰勒级数。即

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m)!}x^{2m} + \cdots$$

其中 $x \in (-\infty, \infty)$ 。

证明

1. 只需证明对任意 x , 成立 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ 。
2. 由泰勒中值定理 2,

$$|R_n(x)| = \left| \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) x^{n+1} \right| = \left| \frac{\cos\left(\theta x + \frac{n+1}{2}\pi\right) x^{n+1}}{(n+1)!} \right|$$

性质 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$, $\sin x$ 等于其泰勒级数。即

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m)!}x^{2m} + \cdots$$

其中 $x \in (-\infty, \infty)$ 。

证明

1. 只需证明对任意 x , 成立 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ 。
2. 由泰勒中值定理 2,

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left| \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) x^{n+1} \right| = \left| \frac{\cos\left(\theta x + \frac{n+1}{2}\pi\right) x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \\ &\leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

性质 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$, $\sin x$ 等于其泰勒级数。即

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m)!}x^{2m} + \cdots$$

其中 $x \in (-\infty, \infty)$ 。

证明

1. 只需证明对任意 x , 成立 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ 。
2. 由泰勒中值定理 2,

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left| \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) x^{n+1} \right| = \left| \frac{\cos\left(\theta x + \frac{n+1}{2}\pi\right) x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \\ &\leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

性质 对任意 $x \in (-\infty, \infty)$, $\sin x$ 等于其泰勒级数。即

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m)!}x^{2m} + \cdots$$

其中 $x \in (-\infty, \infty)$ 。

证明

1. 只需证明对任意 x , 成立 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ 。

2. 由泰勒中值定理 2,

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left| \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) x^{n+1} \right| = \left| \frac{\cos\left(\theta x + \frac{n+1}{2}\pi\right) x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \\ &\leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

(已知级数 $\sum \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ 收敛, 所以一般项 $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0$)

- 至此, 我们知道 e^x , $\sin x$, $\cos x$ 以及 $\frac{1}{1+x}$ 是等于其泰勒级数, 即

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1)$$

- 至此, 我们知道 e^x , $\sin x$, $\cos x$ 以及 $\frac{1}{1+x}$ 是等于其泰勒级数, 即

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1)$$

- 利用上述结果, 及逐项积分公式, 可进一步求出

$$\ln(1+x), \quad \arctan x$$

的幂级数展开。

性质 成立

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1].$$

性质 成立

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $(-1, 1]$, 故上式至多对 $x \in (-1, 1]$ 成立。

性质 成立

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $(-1, 1]$, 故上式至多对 $x \in (-1, 1]$ 成立。

2.

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt$$

性质 成立

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $(-1, 1]$, 故上式至多对 $x \in (-1, 1]$ 成立。

2.

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n dt$$

性质 成立

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $(-1, 1]$, 故上式至多对 $x \in (-1, 1]$ 成立。

2.

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n dt$$

性质 成立

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $(-1, 1]$, 故上式至多对 $x \in (-1, 1]$ 成立。

2.

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} x^{n+1}\end{aligned}$$

性质 成立

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $(-1, 1]$, 故上式至多对 $x \in (-1, 1]$ 成立。

2.

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n\end{aligned}$$

性质 成立

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $(-1, 1]$, 故上式至多对 $x \in (-1, 1]$ 成立。

2. 当 $x \in (-1, 1)$ 时, 利用逐项积分可得

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n\end{aligned}$$

性质 成立

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $(-1, 1]$, 故上式至多对 $x \in (-1, 1]$ 成立。

2. 当 $x \in (-1, 1)$ 时, 利用逐项积分可得

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n\end{aligned}$$

3. 注意到 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ 收敛域是 $(-1, 1]$, 由连续性, 当 $x = 1$ 时也成立

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$$

)

性质 成立

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $(-1, 1]$, 故上式至多对 $x \in (-1, 1]$ 成立。

2. 当 $x \in (-1, 1)$ 时, 利用逐项积分可得

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n\end{aligned}$$

3. 注意到 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ 收敛域是 $(-1, 1]$, 由连续性, 当 $x = 1$ 时也成立

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$$

(这是 $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1+x)$)

)

性质 成立

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $(-1, 1]$, 故上式至多对 $x \in (-1, 1]$ 成立。

2. 当 $x \in (-1, 1)$ 时, 利用逐项积分可得

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n\end{aligned}$$

3. 注意到 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ 收敛域是 $(-1, 1]$, 由连续性, 当 $x = 1$ 时也成立

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$$

(这是 $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$)

性质 成立

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $(-1, 1]$, 故上式至多对 $x \in (-1, 1]$ 成立。

2. 当 $x \in (-1, 1)$ 时, 利用逐项积分可得

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n\end{aligned}$$

3. 注意到 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ 收敛域是 $(-1, 1]$, 由连续性, 当 $x = 1$ 时也成立

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$$

(这是 $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \lim_{x \rightarrow 1^-} S(x)$)

性质 成立

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $(-1, 1]$, 故上式至多对 $x \in (-1, 1]$ 成立。

2. 当 $x \in (-1, 1)$ 时, 利用逐项积分可得

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n\end{aligned}$$

3. 注意到 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ 收敛域是 $(-1, 1]$, 由连续性, 当 $x = 1$ 时也成立

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$$

$$(\text{这是 } f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = S(1))$$

性质 成立

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots, \quad x \in [-1, 1]$$

性质 成立

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots, \quad x \in [-1, 1]$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $[-1, 1]$, 故上式至多对 $x \in [-1, 1]$ 成立。

性质 成立

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots, \quad x \in [-1, 1]$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $[-1, 1]$, 故上式至多对 $x \in [-1, 1]$ 成立。

2.

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$$

性质 成立

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots, \quad x \in [-1, 1]$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $[-1, 1]$, 故上式至多对 $x \in [-1, 1]$ 成立。

2.

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt$$

性质 成立

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots, \quad x \in [-1, 1]$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $[-1, 1]$, 故上式至多对 $x \in [-1, 1]$ 成立。

2.

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt$$

性质 成立

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots, \quad x \in [-1, 1]$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $[-1, 1]$, 故上式至多对 $x \in [-1, 1]$ 成立。

2.

$$\begin{aligned}\arctan x &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}\end{aligned}$$

性质 成立

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots, \quad x \in [-1, 1]$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $[-1, 1]$, 故上式至多对 $x \in [-1, 1]$ 成立。

2. 当 $x \in (-1, 1)$ 时, 利用逐项积分可得

$$\begin{aligned}\arctan x &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}\end{aligned}$$

性质 成立

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots, \quad x \in [-1, 1]$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $[-1, 1]$, 故上式至多对 $x \in [-1, 1]$ 成立。

2. 当 $x \in (-1, 1)$ 时, 利用逐项积分可得

$$\begin{aligned}\arctan x &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}\end{aligned}$$

3. 注意到 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ 收敛域是 $[-1, 1]$, 由连续性, 当 $x = \pm 1$ 时也有

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}.$$

性质 成立

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots, \quad x \in [-1, 1]$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $[-1, 1]$, 故上式至多对 $x \in [-1, 1]$ 成立。

2. 当 $x \in (-1, 1)$ 时, 利用逐项积分可得

$$\begin{aligned}\arctan x &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}\end{aligned}$$

3. 注意到 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ 收敛域是 $[-1, 1]$, 由连续性, 当 $x = \pm 1$ 时也有

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}.$$

(如 $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \arctan x$

)

性质 成立

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots, \quad x \in [-1, 1]$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $[-1, 1]$, 故上式至多对 $x \in [-1, 1]$ 成立。

2. 当 $x \in (-1, 1)$ 时, 利用逐项积分可得

$$\begin{aligned}\arctan x &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}\end{aligned}$$

3. 注意到 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ 收敛域是 $[-1, 1]$, 由连续性, 当 $x = \pm 1$ 时也有

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}.$$

(如 $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \arctan x = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$)

性质 成立

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots, \quad x \in [-1, 1]$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $[-1, 1]$, 故上式至多对 $x \in [-1, 1]$ 成立。

2. 当 $x \in (-1, 1)$ 时, 利用逐项积分可得

$$\begin{aligned}\arctan x &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}\end{aligned}$$

3. 注意到 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ 收敛域是 $[-1, 1]$, 由连续性, 当 $x = \pm 1$ 时也有

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}.$$

$$(\text{如 } f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \arctan x = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) \quad)$$

性质 成立

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots, \quad x \in [-1, 1]$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $[-1, 1]$, 故上式至多对 $x \in [-1, 1]$ 成立。

2. 当 $x \in (-1, 1)$ 时, 利用逐项积分可得

$$\begin{aligned}\arctan x &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}\end{aligned}$$

3. 注意到 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ 收敛域是 $[-1, 1]$, 由连续性, 当 $x = \pm 1$ 时也有

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}.$$

$$(\text{如 } f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \arctan x = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = S(1))$$

性质 成立

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots, \quad x \in [-1, 1]$$

性质 成立

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots, \quad x \in [-1, 1]$$

注 取 $x = 1$, 则得到

性质 成立

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots, \quad x \in [-1, 1]$$

注 取 $x = 1$, 则得到

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

- 至此，得出如下常用函数的幂级数展开式：

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1]$$

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots, \quad x \in [-1, 1]$$

- 至此, 得出如下常用函数的幂级数展开式:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1]$$

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots, \quad x \in [-1, 1]$$

- 用上述结果, 及逐项求导、积分公式, 可求更多函数的泰勒级数展开

例 把函数 $f(x) = (1-x)\ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数。

例 把函数 $f(x) = (1-x)\ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数。

解 利用

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1].$$

例 把函数 $f(x) = (1-x)\ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数。

解 利用

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1].$$

所以当 $x \in (-1, 1]$ 时,

$$(1-x)\ln(1+x) = (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^n$$

例 把函数 $f(x) = (1-x)\ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数。

解 利用

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1].$$

所以当 $x \in (-1, 1]$ 时,

$$\begin{aligned}(1-x)\ln(1+x) &= (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^n \\&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^{n+1}\end{aligned}$$

例 把函数 $f(x) = (1-x)\ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数。

解 利用

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1].$$

所以当 $x \in (-1, 1]$ 时,

$$\begin{aligned}(1-x)\ln(1+x) &= (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^n \\&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^{n+1} \\&\quad \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-2} \frac{1}{n-1} x^n\end{aligned}$$

例 把函数 $f(x) = (1-x)\ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数。

解 利用

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1].$$

所以当 $x \in (-1, 1]$ 时,

$$\begin{aligned}(1-x)\ln(1+x) &= (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^n \\&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^{n+1} \\&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-2} \frac{1}{n-1} x^n\end{aligned}$$

例 把函数 $f(x) = (1-x)\ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数。

解 利用

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1].$$

所以当 $x \in (-1, 1]$ 时,

$$\begin{aligned}(1-x)\ln(1+x) &= (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^n \\&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^{n+1} \\&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-2} \frac{1}{n-1} x^n \\&= x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^n\end{aligned}$$

例 把函数 $f(x) = (1-x)\ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数。

解 利用

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1].$$

所以当 $x \in (-1, 1]$ 时,

$$\begin{aligned}(1-x)\ln(1+x) &= (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^n \\&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^{n+1} \\&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-2} \frac{1}{n-1} x^n \\&= x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-2} \frac{1}{n-1} x^n\end{aligned}$$

例 把函数 $f(x) = (1-x)\ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数。

解 利用

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1].$$

所以当 $x \in (-1, 1]$ 时,

$$\begin{aligned}(1-x)\ln(1+x) &= (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^n \\&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^{n+1} \\&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-2} \frac{1}{n-1} x^n \\&= x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-2} \frac{1}{n-1} x^n \\&= x + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n-1}}{n} - \frac{(-1)^{n-2}}{n-1} \right) x^n\end{aligned}$$

例 把函数 $f(x) = \cos^2 x$ 展开成 x 的幂级数。

例 把函数 $f(x) = \cos^2 x$ 展开成 x 的幂级数。

解 利用

$$\cos t = 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \frac{1}{6!}t^6 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}t^{2n} + \cdots, \quad t \in (-\infty, \infty)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$$

例 把函数 $f(x) = \cos^2 x$ 展开成 x 的幂级数。

解 利用

$$\cos t = 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \frac{1}{6!}t^6 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}t^{2n} + \cdots, \quad t \in (-\infty, \infty)$$

所以当 $x \in (-\infty, \infty)$ 时,

$$\begin{aligned}\cos^2 x &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} (2x)^{2n}\end{aligned}$$

例 把函数 $f(x) = \cos^2 x$ 展开成 x 的幂级数。

解 利用

$$\cos t = 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \frac{1}{6!}t^6 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}t^{2n} + \cdots, \quad t \in (-\infty, \infty)$$

所以当 $x \in (-\infty, \infty)$ 时,

$$\begin{aligned}\cos^2 x &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \\&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} (2x)^{2n} \\&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!} x^{2n}\end{aligned}$$

例 把函数 $f(x) = \cos^2 x$ 展开成 x 的幂级数。

解 利用

$$\cos t = 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \frac{1}{6!}t^6 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}t^{2n} + \cdots, \quad t \in (-\infty, \infty)$$

所以当 $x \in (-\infty, \infty)$ 时,

$$\begin{aligned}\cos^2 x &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \\&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} (2x)^{2n} \\&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!} x^{2n} \\&= 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!} x^{2n}\end{aligned}$$

例 把函数 $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数。

例 把函数 $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数。

解 1. 注意到 $\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$.

例 把函数 $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数。

解 1. 注意到 $\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$ 。

2. 利用 $\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \cdots + t^n + \cdots, t \in (-1, 1)$

将 $\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x+2}$ 分别展开成 $(x+4)$ 的幂级数：

例 把函数 $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数。

解 1. 注意到 $\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$.

2. 利用 $\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \cdots + t^n + \cdots, t \in (-1, 1)$

将 $\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x+2}$ 分别展开成 $(x+4)$ 的幂级数: 令 $t = x+4$, 则

$$* \quad \frac{1}{x+1} = \frac{1}{t-3}$$

例 把函数 $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数。

解 1. 注意到 $\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$.

2. 利用 $\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \cdots + t^n + \cdots, t \in (-1, 1)$

将 $\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x+2}$ 分别展开成 $(x+4)$ 的幂级数: 令 $t = x+4$, 则

$$* \quad \frac{1}{x+1} = \frac{1}{t-3} = \frac{1}{-3} \cdot \frac{1}{1-\frac{t}{3}}$$

例 把函数 $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数。

解 1. 注意到 $\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$.

2. 利用 $\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \cdots + t^n + \cdots, t \in (-1, 1)$

将 $\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x+2}$ 分别展开成 $(x+4)$ 的幂级数: 令 $t = x+4$, 则

$$* \quad \frac{1}{x+1} = \frac{1}{t-3} = \frac{1}{-3} \cdot \frac{1}{1-\frac{t}{3}} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{3^n}$$

例 把函数 $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数。

解 1. 注意到 $\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$.

2. 利用 $\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \cdots + t^n + \cdots, t \in (-1, 1)$

将 $\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x+2}$ 分别展开成 $(x+4)$ 的幂级数: 令 $t = x+4$, 则

$$* \quad \frac{1}{x+1} = \frac{1}{t-3} = \frac{1}{-3} \cdot \frac{1}{1-\frac{t}{3}} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{3^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{3^{n+1}}$$

例 把函数 $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数。

解 1. 注意到 $\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$.

2. 利用 $\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \cdots + t^n + \cdots, t \in (-1, 1)$

将 $\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x+2}$ 分别展开成 $(x+4)$ 的幂级数: 令 $t = x+4$, 则

$$* \quad \frac{1}{x+1} = \frac{1}{t-3} = \frac{1}{-3} \cdot \frac{1}{1-\frac{t}{3}} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{3^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{3^{n+1}}$$

其中 $|\frac{t}{3}| < 1$

例 把函数 $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数。

解 1. 注意到 $\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$.

2. 利用 $\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \cdots + t^n + \cdots, t \in (-1, 1)$

将 $\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x+2}$ 分别展开成 $(x+4)$ 的幂级数: 令 $t = x+4$, 则

$$* \quad \frac{1}{x+1} = \frac{1}{t-3} = \frac{1}{-3} \cdot \frac{1}{1-\frac{t}{3}} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{3^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{3^{n+1}}$$

其中 $|\frac{x+4}{3}| = |\frac{t}{3}| < 1$

例 把函数 $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数。

解 1. 注意到 $\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$.

2. 利用 $\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \cdots + t^n + \cdots, t \in (-1, 1)$

将 $\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x+2}$ 分别展开成 $(x+4)$ 的幂级数: 令 $t = x+4$, 则

$$* \quad \frac{1}{x+1} = \frac{1}{t-3} = \frac{1}{-3} \cdot \frac{1}{1-\frac{t}{3}} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{3^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{3^{n+1}}$$

其中 $|\frac{x+4}{3}| = |\frac{t}{3}| < 1$, 即 $-7 < x < -1$ 。

例 把函数 $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数。

解 1. 注意到 $\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$.

2. 利用 $\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \cdots + t^n + \cdots, t \in (-1, 1)$

将 $\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x+2}$ 分别展开成 $(x+4)$ 的幂级数: 令 $t = x+4$, 则

$$* \quad \frac{1}{x+1} = \frac{1}{t-3} = \frac{1}{-3} \cdot \frac{1}{1-\frac{t}{3}} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{3^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{3^{n+1}}$$

其中 $|\frac{x+4}{3}| = |\frac{t}{3}| < 1$, 即 $-7 < x < -1$ 。

$$* \quad \frac{1}{x+2} = \frac{1}{t-2}$$

例 把函数 $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数。

解 1. 注意到 $\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$.

2. 利用 $\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \cdots + t^n + \cdots, t \in (-1, 1)$

将 $\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x+2}$ 分别展开成 $(x+4)$ 的幂级数: 令 $t = x+4$, 则

$$* \quad \frac{1}{x+1} = \frac{1}{t-3} = \frac{1}{-3} \cdot \frac{1}{1-\frac{t}{3}} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{3^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{3^{n+1}}$$

其中 $|\frac{x+4}{3}| = |\frac{t}{3}| < 1$, 即 $-7 < x < -1$ 。

$$* \quad \frac{1}{x+2} = \frac{1}{t-2} = \frac{1}{-2} \cdot \frac{1}{1-\frac{t}{2}}$$

例 把函数 $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数。

解 1. 注意到 $\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$.

2. 利用 $\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \cdots + t^n + \cdots, t \in (-1, 1)$

将 $\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x+2}$ 分别展开成 $(x+4)$ 的幂级数: 令 $t = x+4$, 则

$$* \quad \frac{1}{x+1} = \frac{1}{t-3} = \frac{1}{-3} \cdot \frac{1}{1-\frac{t}{3}} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{3^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{3^{n+1}}$$

其中 $|\frac{x+4}{3}| = |\frac{t}{3}| < 1$, 即 $-7 < x < -1$ 。

$$* \quad \frac{1}{x+2} = \frac{1}{t-2} = \frac{1}{-2} \cdot \frac{1}{1-\frac{t}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{2^n}$$

例 把函数 $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数。

解 1. 注意到 $\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$.

2. 利用 $\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \cdots + t^n + \cdots, t \in (-1, 1)$

将 $\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x+2}$ 分别展开成 $(x+4)$ 的幂级数: 令 $t = x+4$, 则

$$* \quad \frac{1}{x+1} = \frac{1}{t-3} = \frac{1}{-3} \cdot \frac{1}{1-\frac{t}{3}} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{3^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{3^{n+1}}$$

其中 $|\frac{x+4}{3}| = |\frac{t}{3}| < 1$, 即 $-7 < x < -1$ 。

$$* \quad \frac{1}{x+2} = \frac{1}{t-2} = \frac{1}{-2} \cdot \frac{1}{1-\frac{t}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{2^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{2^{n+1}}$$

例 把函数 $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数。

解 1. 注意到 $\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$.

2. 利用 $\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \cdots + t^n + \cdots, t \in (-1, 1)$

将 $\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x+2}$ 分别展开成 $(x+4)$ 的幂级数: 令 $t = x+4$, 则

$$* \quad \frac{1}{x+1} = \frac{1}{t-3} = \frac{1}{-3} \cdot \frac{1}{1-\frac{t}{3}} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{3^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{3^{n+1}}$$

其中 $|\frac{x+4}{3}| = |\frac{t}{3}| < 1$, 即 $-7 < x < -1$ 。

$$* \quad \frac{1}{x+2} = \frac{1}{t-2} = \frac{1}{-2} \cdot \frac{1}{1-\frac{t}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{2^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{2^{n+1}}$$

其中 $|\frac{t}{2}| < 1$

例 把函数 $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数。

解 1. 注意到 $\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$.

2. 利用 $\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \cdots + t^n + \cdots, t \in (-1, 1)$

将 $\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x+2}$ 分别展开成 $(x+4)$ 的幂级数: 令 $t = x+4$, 则

$$* \quad \frac{1}{x+1} = \frac{1}{t-3} = \frac{1}{-3} \cdot \frac{1}{1-\frac{t}{3}} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{3^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{3^{n+1}}$$

其中 $|\frac{x+4}{3}| = |\frac{t}{3}| < 1$, 即 $-7 < x < -1$ 。

$$* \quad \frac{1}{x+2} = \frac{1}{t-2} = \frac{1}{-2} \cdot \frac{1}{1-\frac{t}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{2^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{2^{n+1}}$$

其中 $|\frac{x+4}{2}| = |\frac{t}{2}| < 1$

例 把函数 $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数。

解 1. 注意到 $\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$.

2. 利用 $\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \cdots + t^n + \cdots, t \in (-1, 1)$

将 $\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x+2}$ 分别展开成 $(x+4)$ 的幂级数: 令 $t = x+4$, 则

$$* \quad \frac{1}{x+1} = \frac{1}{t-3} = \frac{1}{-3} \cdot \frac{1}{1-\frac{t}{3}} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{3^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{3^{n+1}}$$

其中 $|\frac{x+4}{3}| = |\frac{t}{3}| < 1$, 即 $-7 < x < -1$ 。

$$* \quad \frac{1}{x+2} = \frac{1}{t-2} = \frac{1}{-2} \cdot \frac{1}{1-\frac{t}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{2^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{2^{n+1}}$$

其中 $|\frac{x+4}{2}| = |\frac{t}{2}| < 1$, 即 $-6 < x < -2$ 。

例 把函数 $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数。

解 1. 注意到 $\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$.

2. 利用 $\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \cdots + t^n + \cdots, t \in (-1, 1)$

将 $\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x+2}$ 分别展开成 $(x+4)$ 的幂级数: 令 $t = x+4$, 则

$$* \quad \frac{1}{x+1} = \frac{1}{t-3} = \frac{1}{-3} \cdot \frac{1}{1-\frac{t}{3}} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{3^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{3^{n+1}}$$

其中 $|\frac{x+4}{3}| = |\frac{t}{3}| < 1$, 即 $-7 < x < -1$ 。

$$* \quad \frac{1}{x+2} = \frac{1}{t-2} = \frac{1}{-2} \cdot \frac{1}{1-\frac{t}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{2^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{2^{n+1}}$$

其中 $|\frac{x+4}{2}| = |\frac{t}{2}| < 1$, 即 $-6 < x < -2$ 。

3. 所以 $-6 < x < -2$ 时

例 把函数 $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数。

解 1. 注意到 $\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$.

2. 利用 $\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \cdots + t^n + \cdots, t \in (-1, 1)$

将 $\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x+2}$ 分别展开成 $(x+4)$ 的幂级数: 令 $t = x+4$, 则

$$* \quad \frac{1}{x+1} = \frac{1}{t-3} = \frac{1}{-3} \cdot \frac{1}{1-\frac{t}{3}} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{3^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{3^{n+1}}$$

其中 $|\frac{x+4}{3}| = |\frac{t}{3}| < 1$, 即 $-7 < x < -1$ 。

$$* \quad \frac{1}{x+2} = \frac{1}{t-2} = \frac{1}{-2} \cdot \frac{1}{1-\frac{t}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{2^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{2^{n+1}}$$

其中 $|\frac{x+4}{2}| = |\frac{t}{2}| < 1$, 即 $-6 < x < -2$ 。

3. 所以 $-6 < x < -2$ 时

$$\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}} \right) (x+4)^n.$$