第2章a:矩阵的概念

数学系 梁卓滨

2019-2020 学年 I

定义 由 $m \times n$ 个数 a_{ij} (i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n) 按一定次序排成的一个 m 行 n 列的矩形数表,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

定义 由 $m \times n$ 个数 a_{ij} (i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n) 按一定次 序排成的一个 m 行 n 列的矩形数表,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 $m \times n$ 矩阵,简称矩阵。

定义 由 $m \times n$ 个数 a_{ij} (i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n) 按一定次 序排成的一个 m 行 n 列的矩形数表,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 $m \times n$ 矩阵,简称矩阵。其中 α_{ii} 称为矩阵第 i 行第 j 列的元素。

矩阵概念 1/6 < ▷ △ ▽

定义 由 $m \times n$ 个数 a_{ij} (i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n) 按一定次 序排成的一个 m 行 n 列的矩形数表,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 $m \times n$ 矩阵,简称矩阵。其中 a_{ij} 称为矩阵第i 行第j 列的元素。

注 通常表示矩阵的符号

1. 大写字母 *A* , *B* , *C* , · · ·

矩阵概念 1/6 ⊲ ▷ △ ▽

定义 由 $m \times n$ 个数 a_{ij} (i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n) 按一定次 序排成的一个 m 行 n 列的矩形数表,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

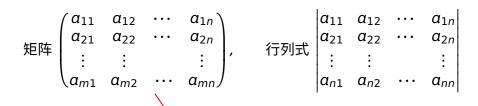
称为 $m \times n$ 矩阵,简称矩阵。其中 a_{ij} 称为矩阵第i 行第j 列的元素。

注 通常表示矩阵的符号

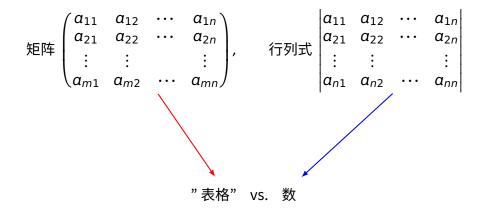
- 1. 大写字母 *A* , *B* , *C* , · · ·
- 2. $A_{m \times n}$, $(a_{ij})_{m \times n}$

矩阵概念 1/6 < ▷ △ ▽

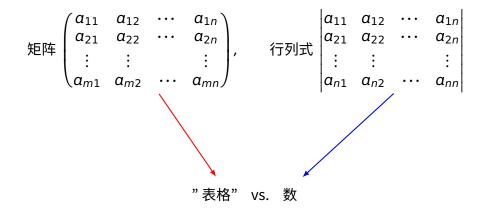
矩阵
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$
, 行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$



"表格"

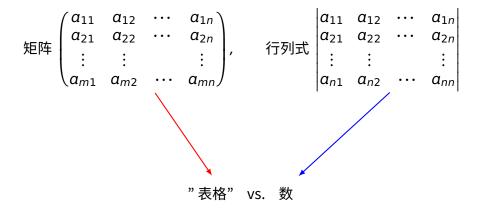


矩阵概念 2/6 < □ ▷ △ ▽



行数、列数可以不等

矩阵概念 2/6 < ▷ △ ▽



行数、列数可以不等 vs. 行数、列数相等

矩阵概念 2/6 < ▷ △ ▽

● A, B 有相同的行数和列数("同型"),

● A, B 有相同的行数和列数("同型"),

• 对应位置上的元素相等,

● A, B 有相同的行数和列数("同型"),即:

$$A=(\alpha_{ij})_{m\times n},\,B=(b_{ij})_{m\times n}$$

• 对应位置上的元素相等,

● A, B 有相同的行数和列数("同型"),即:

$$A=(\alpha_{ij})_{m\times n},\,B=(b_{ij})_{m\times n}$$

• 对应位置上的元素相等,即:

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

定义 矩阵A、B相等是指

● A, B 有相同的行数和列数("同型"),即:

$$A=(\alpha_{ij})_{m\times n},\,B=(b_{ij})_{m\times n}$$

• 对应位置上的元素相等,即:

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

此时记为A = B

● A, B 有相同的行数和列数("同型"),即:

$$A=(\alpha_{ij})_{m\times n},\,B=(b_{ij})_{m\times n}$$

• 对应位置上的元素相等,即:

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

此时记为A = B

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix},$$

● A, B 有相同的行数和列数("同型"),即:

$$A=(\alpha_{ij})_{m\times n},\,B=(b_{ij})_{m\times n}$$

• 对应位置上的元素相等,即:

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

此时记为A = B

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&7\end{pmatrix},$$

● A, B 有相同的行数和列数("同型"),即:

$$A=(\alpha_{ij})_{m\times n},\,B=(b_{ij})_{m\times n}$$

• 对应位置上的元素相等,即:

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

此时记为A = B

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

● A, B 有相同的行数和列数("同型"),即:

$$A=(\alpha_{ij})_{m\times n},\,B=(b_{ij})_{m\times n}$$

• 对应位置上的元素相等,即:

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

此时记为A = B

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

● A, B 有相同的行数和列数("同型"),即:

$$A=(\alpha_{ij})_{m\times n},\,B=(b_{ij})_{m\times n}$$

• 对应位置上的元素相等,即:

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

此时记为A = B

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \sin^2 t + \cos^2 t & -1 \\ 9 & 4 \\ 0 & \sqrt{t^2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 9 & 4 \\ 0 & |t| \end{pmatrix}$$

● A, B 有相同的行数和列数("同型"),即:

$$A=(\alpha_{ij})_{m\times n},\,B=(b_{ij})_{m\times n}$$

• 对应位置上的元素相等,即:

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

此时记为A = B

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \sin^2 t + \cos^2 t & -1 \\ 9 & 4 \\ 0 & \sqrt{t^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 9 & 4 \\ 0 & |t| \end{pmatrix}$$

零矩阵、方阵

设
$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

• 若 $a_{ij} = 0$ (i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n),则称 A 为 $m \times n$ 零矩阵,记为 $O_{m \times n}$ 或 O。例如:

$$O_{2\times3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad O_{3\times2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

零矩阵、方阵

设
$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

• 若 $a_{ij} = 0$ (i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n),则称 A 为 $m \times n$ 零矩阵,记为 $O_{m \times n}$ 或 O。例如:

$$O_{2\times3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad O_{3\times2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

者 m = n,即行数与列数相等:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则称 A 为 n **阶方阵**。

• 对 n 阶方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$,可以计算其行列式 |A|。

• 对 n 阶方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$,可以计算其行列式 |A|。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

• 对 n 阶方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$,可以计算其行列式 |A|。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \implies |A|$$

• 对 n 阶方阵 $A = (\alpha_{ii})_{n \times n}$,可以计算其行列式 |A|。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

• 对 n 阶方阵 $A = (\alpha_{ii})_{n \times n}$,可以计算其行列式 |A|。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -58$$

• 对 n 阶方阵 $A = (a_{ii})_{n \times n}$,可以计算其行列式 |A|。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -58$$

注

1. 若 $A = A_{m \times n}$ 非方阵 $(m \neq n)$,则不存在行列式 |A|

• 对 n 阶方阵 $A = (a_{ii})_{n \times n}$,可以计算其行列式 |A|。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -58$$

注

- 1. 若 $A = A_{m \times n}$ 非方阵 $(m \neq n)$,则不存在行列式 |A|
- 2. 注意区分矩阵和行列式:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

设
$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

• 若 m=1,即只有一行:

$$A = (a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n})$$

设
$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

• 若 m=1,即只有一行:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

则称 A 为 行矩阵 或 行向量

设
$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

● 若 *m* = 1,即只有一行:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

则称 A 为 行矩阵 或 行向量

• 若 n=1,即只有一列:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

设
$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

• 若 m=1,即只有一行:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

则称 A 为 行矩阵 或 行向量

若 n = 1,即只有一列:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

则称 A 为列矩阵 或 列向量