

# 第 1 章 $b$ : 极限

数学系 梁卓滨

2019-2020 学年 I

# Outline

1. 数列极限
2. 函数极限
3. 极限运算
4. 极限性质
5. 两个重要极限
6. 无穷大, 无穷小

# We are here now...

1. 数列极限
2. 函数极限
3. 极限运算
4. 极限性质
5. 两个重要极限
6. 无穷大，无穷小

考察一个无穷数列  $\{x_n\}$ :

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

考察一个无穷数列  $\{x_n\}$ :

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

如果  $n$  无限增大时,  $x_n$  无限接近一个数  $a$ , 则称  $\{x_n\}$  的“极限”为  $a$

考察一个无穷数列  $\{x_n\}$ :

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

如果  $n$  无限增大时,  $x_n$  无限接近一个数  $a$ , 则称  $\{x_n\}$  的“极限”为  $a$   
?

考察一个无穷数列  $\{x_n\}$ :

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

如果  $n$  无限增大时,  $x_n$  无限接近一个数  $a$ , 则称  $\{x_n\}$  的“极限”为  $a$  ?

**定义** 任意给定  $\varepsilon > 0$ , 存在正整数  $N$ , 使得  $n > N$  时, 有  $|x_n - a| < \varepsilon$ , 则称  $a$  是  $\{x_n\}$  的 **极限**

考察一个无穷数列  $\{x_n\}$ :

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

如果  $n$  无限增大时,  $x_n$  无限接近一个数  $a$ , 则称  $\{x_n\}$  的“极限”为  $a$  ?

$$x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

**定义** 任意给定  $\varepsilon > 0$ , 存在正整数  $N$ , 使得  $n > N$  时, 有  $|x_n - a| < \varepsilon$ , 则称  $a$  是  $\{x_n\}$  的 **极限**



考察一个无穷数列  $\{x_n\}$ :

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

如果  $n$  无限增大时,  $x_n$  无限接近一个数  $a$ , 则称  $\{x_n\}$  的“极限”为  $a$  ?



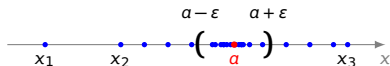
$$x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

**定义** 任意给定  $\varepsilon > 0$ , 存在正整数  $N$ , 使得  $n > N$  时, 有  $|x_n - a| < \varepsilon$ , 则称  $a$  是  $\{x_n\}$  的**极限**

考察一个无穷数列  $\{x_n\}$ :

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

如果  $n$  无限增大时,  $x_n$  无限接近一个数  $a$ , 则称  $\{x_n\}$  的“极限”为  $a$  ?



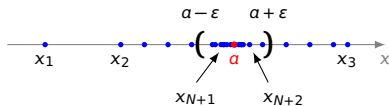
$$x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

**定义** 任意给定  $\varepsilon > 0$ , 存在正整数  $N$ , 使得  $n > N$  时, 有  $|x_n - a| < \varepsilon$ , 则称  $a$  是  $\{x_n\}$  的**极限**

考察一个无穷数列  $\{x_n\}$ :

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

如果  $n$  无限增大时,  $x_n$  无限接近一个数  $a$ , 则称  $\{x_n\}$  的“极限”为  $a$  ?



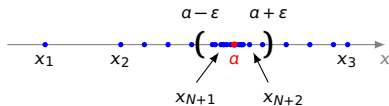
$$x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

**定义** 任意给定  $\varepsilon > 0$ , 存在正整数  $N$ , 使得  $n > N$  时, 有  $|x_n - a| < \varepsilon$ , 则称  $a$  是  $\{x_n\}$  的**极限**

考察一个无穷数列  $\{x_n\}$ :

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

如果  $n$  无限增大时,  $x_n$  无限接近一个数  $a$ , 则称  $\{x_n\}$  的“极限”为  $a$  ?



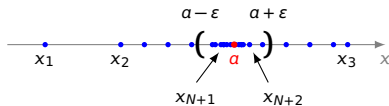
$$x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

**定义** 任意给定  $\varepsilon > 0$ , 存在正整数  $N$ , 使得  $n > N$  时, 有  $|x_n - a| < \varepsilon$ , 则称  $a$  是  $\{x_n\}$  的**极限**, 或称  $\{x_n\}$  **收敛于**  $a$ ,

考察一个无穷数列  $\{x_n\}$ :

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

如果  $n$  无限增大时,  $x_n$  无限接近一个数  $a$ , 则称  $\{x_n\}$  的“极限”为  $a$  ?



$$x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

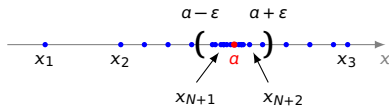
**定义** 任意给定  $\varepsilon > 0$ , 存在正整数  $N$ , 使得  $n > N$  时, 有  $|x_n - a| < \varepsilon$ , 则称  $a$  是  $\{x_n\}$  的**极限**, 或称  $\{x_n\}$  **收敛于**  $a$ , 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \text{或} \quad x_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty)$$

考察一个无穷数列  $\{x_n\}$ :

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

如果  $n$  无限增大时,  $x_n$  无限接近一个数  $a$ , 则称  $\{x_n\}$  的“极限”为  $a$  ?



$$x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

**定义** 任意给定  $\varepsilon > 0$ , 存在正整数  $N$ , 使得  $n > N$  时, 有  $|x_n - a| < \varepsilon$ , 则称  $a$  是  $\{x_n\}$  的**极限**, 或称  $\{x_n\}$  **收敛于**  $a$ , 记为

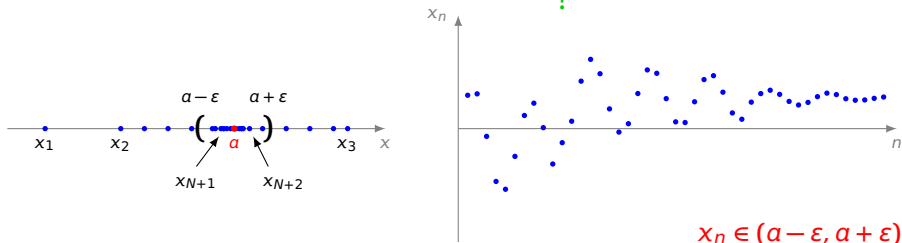
$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \text{或} \quad x_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty)$$

若不存在这样的数  $a$ , 称为  $\{x_n\}$  **发散**, 或  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  不存在

考察一个无穷数列  $\{x_n\}$ :

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

如果  $n$  无限增大时,  $x_n$  无限接近一个数  $a$ , 则称  $\{x_n\}$  的“极限”为  $a$  ?



$$x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

**定义** 任意给定  $\varepsilon > 0$ , 存在正整数  $N$ , 使得  $n > N$  时, 有  $|x_n - a| < \varepsilon$ , 则称  $a$  是  $\{x_n\}$  的**极限**, 或称  $\{x_n\}$  **收敛于**  $a$ , 记为

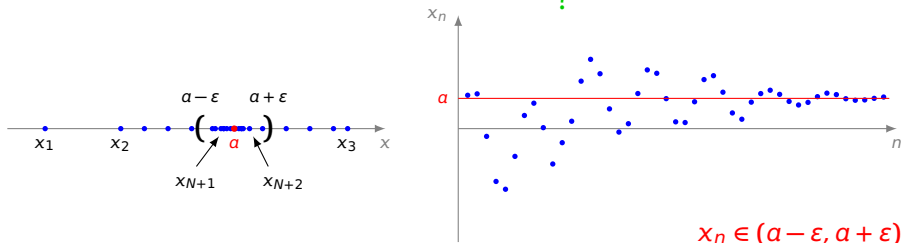
$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \text{或} \quad x_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty)$$

若不存在这样的数  $a$ , 称为  $\{x_n\}$  **发散**, 或  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  不存在

考察一个无穷数列  $\{x_n\}$ :

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

如果  $n$  无限增大时,  $x_n$  无限接近一个数  $a$ , 则称  $\{x_n\}$  的“极限”为  $a$  ?



**定义** 任意给定  $\varepsilon > 0$ , 存在正整数  $N$ , 使得  $n > N$  时, 有  $|x_n - a| < \varepsilon$ , 则称  $a$  是  $\{x_n\}$  的**极限**, 或称  $\{x_n\}$  **收敛于**  $a$ , 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \text{或} \quad x_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty)$$

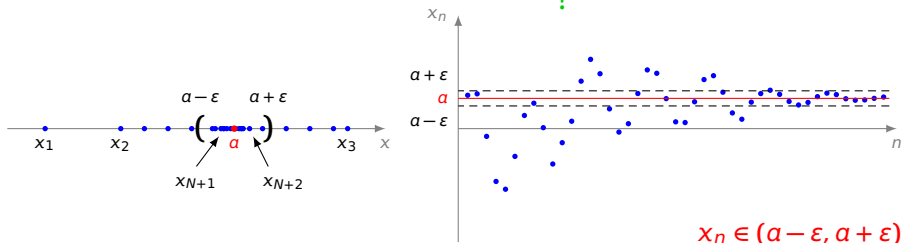
若不存在这样的数  $a$ , 称为  $\{x_n\}$  **发散**, 或  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  不存在



考察一个无穷数列  $\{x_n\}$ :

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

如果  $n$  无限增大时,  $x_n$  无限接近一个数  $a$ , 则称  $\{x_n\}$  的“极限”为  $a$  ?



$$x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

**定义** 任意给定  $\varepsilon > 0$ , 存在正整数  $N$ , 使得  $n > N$  时, 有  $|x_n - a| < \varepsilon$ , 则称  $a$  是  $\{x_n\}$  的**极限**, 或称  $\{x_n\}$  **收敛于**  $a$ , 记为

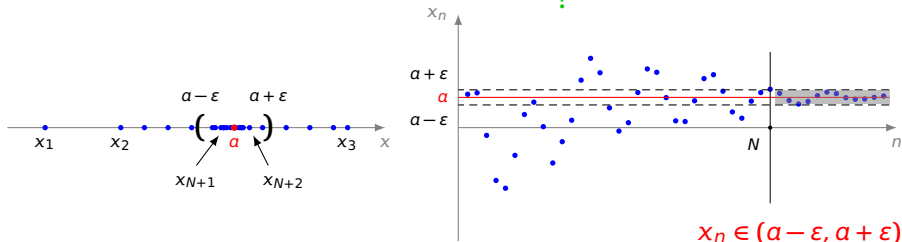
$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \text{或} \quad x_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty)$$

若不存在这样的数  $a$ , 称为  $\{x_n\}$  **发散**, 或  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  不存在

考察一个无穷数列  $\{x_n\}$ :

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

如果  $n$  无限增大时,  $x_n$  无限接近一个数  $a$ , 则称  $\{x_n\}$  的“极限”为  $a$  ?



**定义** 任意给定  $\varepsilon > 0$ , 存在正整数  $N$ , 使得  $n > N$  时, 有  $|x_n - a| < \varepsilon$ , 则称  $a$  是  $\{x_n\}$  的**极限**, 或称  $\{x_n\}$  **收敛于**  $a$ , 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \text{或} \quad x_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty)$$

若不存在这样的数  $a$ , 称为  $\{x_n\}$  **发散**, 或  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  不存在

**例 1** 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

**例 1** 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

**证明**  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N =$

, 则当  $n > N$  时, 有

$$|x_n - 0| < \varepsilon$$

**例 1** 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

**证明**  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N =$

, 则当  $n > N$  时, 有

$$|x_n - 0| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

**例 1** 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

**证明**  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N =$  , 则当  $n > N$  时, 有

$$|x_n - 0| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

**例 1** 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

**证明**  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N =$  , 则当  $n > N$  时, 有

$$|x_n - 0| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

**例 1** 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

**证明**  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N = (\text{一个大于 } \frac{1}{\varepsilon} \text{ 的正整数})$ , 则当  $n > N$  时, 有

$$|x_n - 0| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$



**例 1** 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

**证明**  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N = (\text{一个大于 } \frac{1}{\varepsilon} \text{ 的正整数})$ , 则当  $n > N$  时, 有

$$|x_n - 0| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

**例 1** 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

**证明**  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N = (\text{一个大于 } \frac{1}{\varepsilon} \text{ 的正整数})$ , 则当  $n > N$  时, 有

$$|x_n - 0| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

---

**例 2** 证明数列  $2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}, \dots$  的极限是 1

**例 1** 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

**证明**  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N = (\text{一个大于 } \frac{1}{\varepsilon} \text{ 的正整数})$ , 则当  $n > N$  时, 有

$$|x_n - 0| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

---

**例 2** 证明数列  $2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}, \dots$  的极限是 1

**证明**  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N =$  , 则当  $n > N$  时, 有

$$|x_n - 1| < \varepsilon$$

**例 1** 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

**证明**  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N = (\text{一个大于 } \frac{1}{\varepsilon} \text{ 的正整数})$ , 则当  $n > N$  时, 有

$$|x_n - 0| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

---

**例 2** 证明数列  $2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}, \dots$  的极限是 1

**证明**  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N =$  , 则当  $n > N$  时, 有

$$|x_n - 1| = \left| \frac{n + (-1)^{n-1}}{n} - 1 \right| < \varepsilon$$

**例 1** 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

**证明**  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N = (\text{一个大于 } \frac{1}{\varepsilon} \text{ 的正整数})$ , 则当  $n > N$  时, 有

$$|x_n - 0| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

---

**例 2** 证明数列  $2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}, \dots$  的极限是 1

**证明**  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N =$  , 则当  $n > N$  时, 有

$$|x_n - 1| = \left| \frac{n + (-1)^{n-1}}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

**例 1** 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

**证明**  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N = (\text{一个大于 } \frac{1}{\varepsilon} \text{ 的正整数})$ , 则当  $n > N$  时, 有

$$|x_n - 0| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

---

**例 2** 证明数列  $2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}, \dots$  的极限是 1

**证明**  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N =$  , 则当  $n > N$  时, 有

$$|x_n - 1| = \left| \frac{n + (-1)^{n-1}}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

**例 1** 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

**证明**  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N = (\text{一个大于 } \frac{1}{\varepsilon} \text{ 的正整数})$ , 则当  $n > N$  时, 有

$$|x_n - 0| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

---

**例 2** 证明数列  $2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}, \dots$  的极限是 1

**证明**  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N = (\text{一个大于 } \frac{1}{\varepsilon} \text{ 的正整数})$ , 则当  $n > N$  时, 有

$$|x_n - 1| = \left| \frac{n + (-1)^{n-1}}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

**例 1** 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

**证明**  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N = (\text{一个大于 } \frac{1}{\varepsilon} \text{ 的正整数})$ , 则当  $n > N$  时, 有

$$|x_n - 0| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

---

**例 2** 证明数列  $2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}, \dots$  的极限是 1

**证明**  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N = (\text{一个大于 } \frac{1}{\varepsilon} \text{ 的正整数})$ , 则当  $n > N$  时, 有

$$|x_n - 1| = \left| \frac{n + (-1)^{n-1}}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+(-1)^{n-1}}{n} = 1$ .



**例 3** 设  $|q| < 1$ , 证明等比数列  $1, q, q^2, \dots, q^{n-1}, \dots$  的极限是 0

**例 3** 设  $|q| < 1$ , 证明等比数列  $1, q, q^2, \dots, q^{n-1}, \dots$  的极限是 0

**证明**  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N =$  , 则当  $n > N$  时, 有

$$|x_n - 0| < \varepsilon$$

**例 3** 设  $|q| < 1$ , 证明等比数列  $1, q, q^2, \dots, q^{n-1}, \dots$  的极限是 0

**证明**  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N =$  , 则当  $n > N$  时, 有

$$|x_n - 0| = |q^{n-1}| < \varepsilon$$

**例 3** 设  $|q| < 1$ , 证明等比数列  $1, q, q^2, \dots, q^{n-1}, \dots$  的极限是 0

**证明**  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N =$  , 则当  $n > N$  时, 有

$$|x_n - 0| = |q^{n-1}| \leq |q|^{n-1} < \varepsilon$$

**例 3** 设  $|q| < 1$ ，证明等比数列  $1, q, q^2, \dots, q^{n-1}, \dots$  的极限是 0

**证明**  $\forall \varepsilon > 0$ ，取  $N =$  ，则当  $n > N$  时，有

$$|x_n - 0| = |q^{n-1}| \leq |q|^{n-1} \leq |q|^N < \varepsilon$$

**例 3** 设  $|q| < 1$ ，证明等比数列  $1, q, q^2, \dots, q^{n-1}, \dots$  的极限是 0

**证明**  $\forall \varepsilon > 0$ ，取  $N =$  ，则当  $n > N$  时，有

$$|x_n - 0| = |q^{n-1}| \leq |q|^{n-1} \leq |q|^N < \varepsilon$$

**例 3** 设  $|q| < 1$ ，证明等比数列  $1, q, q^2, \dots, q^{n-1}, \dots$  的极限是 0

**证明**  $\forall \varepsilon > 0$ ，取  $N =$  ，则当  $n > N$  时，有

$$|x_n - 0| = |q^{n-1}| \leq |q|^{n-1} \leq |q|^N < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow N \ln |q| < \ln \varepsilon$$

**例 3** 设  $|q| < 1$ , 证明等比数列  $1, q, q^2, \dots, q^{n-1}, \dots$  的极限是 0

**证明**  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N =$  , 则当  $n > N$  时, 有

$$|x_n - 0| = |q^{n-1}| \leq |q|^{n-1} \leq |q|^N < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow N \ln |q| < \ln \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow N > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|}$$



**例 3** 设  $|q| < 1$ , 证明等比数列  $1, q, q^2, \dots, q^{n-1}, \dots$  的极限是 0

**证明**  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N = (\text{一个大于 } \frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|} \text{ 的正整数})$ , 则当  $n > N$  时, 有

$$|x_n - 0| = |q^{n-1}| \leq |q|^{n-1} \leq |q|^N < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow N \ln |q| < \ln \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow N > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|}$$

**例 3** 设  $|q| < 1$ , 证明等比数列  $1, q, q^2, \dots, q^{n-1}, \dots$  的极限是 0

**证明**  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N = (\text{一个大于 } \frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|} \text{ 的正整数})$ , 则当  $n > N$  时, 有

$$|x_n - 0| = |q^{n-1}| \leq |q|^{n-1} \leq |q|^N < \varepsilon$$

所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n-1} = 0$ .

$$\Leftrightarrow N \ln |q| < \ln \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow N > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|}$$

**例 3** 设  $|q| < 1$ , 证明等比数列  $1, q, q^2, \dots, q^{n-1}, \dots$  的极限是 0

**证明**  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N = (\text{一个大于 } \frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|} \text{ 的正整数})$ , 则当  $n > N$  时, 有

$$|x_n - 0| = |q^{n-1}| \leq |q|^{n-1} \leq |q|^N < \varepsilon$$

所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n-1} = 0$ .

$$\Leftrightarrow N \ln |q| < \ln \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow N > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|}$$

**例 4** 设  $x_n = 0.\underbrace{33 \cdots 3}_{n \uparrow 3}$ , 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{3}$

**例 3** 设  $|q| < 1$ , 证明等比数列  $1, q, q^2, \dots, q^{n-1}, \dots$  的极限是 0

**证明**  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N = (\text{一个大于 } \frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|} \text{ 的正整数})$ , 则当  $n > N$  时, 有

$$|x_n - 0| = |q^{n-1}| \leq |q|^{n-1} \leq |q|^N < \varepsilon$$

所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n-1} = 0$ .

$$\Leftrightarrow N \ln |q| < \ln \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow N > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|}$$

**例 4** 设  $x_n = 0.\underbrace{33 \cdots 3}_{n \uparrow 3}$ , 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{3}$

**提示**  $|x_n - \frac{1}{3}| = \frac{1}{3}|3x_n - 1| = \frac{1}{3} \times 10^{-n}$

**例 3** 设  $|q| < 1$ , 证明等比数列  $1, q, q^2, \dots, q^{n-1}, \dots$  的极限是 0

**证明**  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N = (\text{一个大于 } \frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|} \text{ 的正整数})$ , 则当  $n > N$  时, 有

$$|x_n - 0| = |q^{n-1}| \leq |q|^{n-1} \leq |q|^N < \varepsilon$$

所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n-1} = 0$ .

$$\Leftrightarrow N \ln |q| < \ln \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow N > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|}$$

**例 4** 设  $x_n = 0.\underbrace{33 \cdots 3}_{n \uparrow 3}$ , 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{3}$

**提示**  $|x_n - \frac{1}{3}| = \frac{1}{3}|3x_n - 1| = \frac{1}{3} \times 10^{-n}$

**例 5** 证明数列  $1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n-1}, \dots$  是发散

**例 5** 证明数列  $1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n-1}, \dots$  是发散

**例 5** 证明数列  $1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n-1}, \dots$  是发散

**证明** 反证法. 假设数列收敛, 极限为  $a$ .

**例 5** 证明数列  $1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n-1}, \dots$  是发散

**证明** 反证法. 假设数列收敛, 极限为  $a$ . 则对  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , 存在正整数  $N$ , 当  $n > N$  时

$$|x_n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2}$$



**例 5** 证明数列  $1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n-1}, \dots$  是发散

**证明** 反证法. 假设数列收敛, 极限为  $a$ . 则对  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , 存在正整数  $N$ , 当  $n > N$  时

$$|x_n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2}$$

从而有

$$|1 - a| < \frac{1}{2} \quad \text{并且} \quad |-1 - a| < \frac{1}{2}$$

**例 5** 证明数列  $1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n-1}, \dots$  是发散

**证明** 反证法. 假设数列收敛, 极限为  $a$ . 则对  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , 存在正整数  $N$ , 当  $n > N$  时

$$|x_n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2}$$

从而有

$$|1 - a| < \frac{1}{2} \quad \text{并且} \quad |-1 - a| < \frac{1}{2}$$

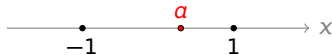
但上述两式不可能同时成立,

**例 5** 证明数列  $1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n-1}, \dots$  是发散

**证明** 反证法. 假设数列收敛, 极限为  $a$ . 则对  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , 存在正整数  $N$ , 当  $n > N$  时

$$|x_n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2}$$

从而有



$$|1 - a| < \frac{1}{2} \quad \text{并且} \quad |-1 - a| < \frac{1}{2}$$

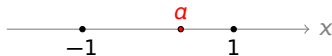
但上述两式不可能同时成立,

**例 5** 证明数列  $1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n-1}, \dots$  是发散

**证明** 反证法. 假设数列收敛, 极限为  $a$ . 则对  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , 存在正整数  $N$ , 当  $n > N$  时

$$|x_n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2}$$

从而有



$$|1 - a| < \frac{1}{2} \quad \text{并且} \quad |-1 - a| < \frac{1}{2}$$

但上述两式不可能同时成立, 否则:

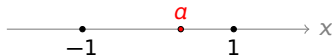
$$2 = (1 - a) + (1 + a)$$

**例 5** 证明数列  $1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n-1}, \dots$  是发散

**证明** 反证法. 假设数列收敛, 极限为  $a$ . 则对  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , 存在正整数  $N$ , 当  $n > N$  时

$$|x_n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2}$$

从而有



$$|1 - a| < \frac{1}{2} \quad \text{并且} \quad |-1 - a| < \frac{1}{2}$$

但上述两式不可能同时成立, 否则:

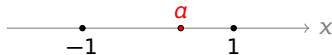
$$2 = (1 - a) + (1 + a) \leq |1 - a| + |1 + a|$$

**例 5** 证明数列  $1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n-1}, \dots$  是发散

**证明** 反证法. 假设数列收敛, 极限为  $a$ . 则对  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , 存在正整数  $N$ , 当  $n > N$  时

$$|x_n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2}$$

从而有



$$|1 - a| < \frac{1}{2} \quad \text{并且} \quad |-1 - a| < \frac{1}{2}$$

但上述两式不可能同时成立, 否则:

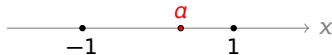
$$2 = (1 - a) + (1 + a) \leq |1 - a| + |1 + a| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

**例 5** 证明数列  $1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n-1}, \dots$  是发散

**证明** 反证法. 假设数列收敛, 极限为  $a$ . 则对  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , 存在正整数  $N$ , 当  $n > N$  时

$$|x_n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2}$$

从而有



$$|1 - a| < \frac{1}{2} \quad \text{并且} \quad |-1 - a| < \frac{1}{2}$$

但上述两式不可能同时成立, 否则:

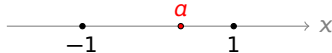
$$2 = (1 - a) + (1 + a) \leq |1 - a| + |1 + a| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

**例 5** 证明数列  $1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n-1}, \dots$  是发散

**证明** 反证法. 假设数列收敛, 极限为  $a$ . 则对  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , 存在正整数  $N$ , 当  $n > N$  时

$$|x_n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2}$$

从而有



$$|1 - a| < \frac{1}{2} \quad \text{并且} \quad |-1 - a| < \frac{1}{2}$$

但上述两式不可能同时成立, 否则:

$$2 = (1 - a) + (1 + a) \leq |1 - a| + |1 + a| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

矛盾. 所以数列发散.



# 收敛数列的性质

**性质 1** 收敛数列的极限唯一.

# 收敛数列的性质

**性质 1** 收敛数列的极限唯一.

**证明** 反证法. 设  $\{x_n\}$  有两个不同的极限  $a, b$ .

# 收敛数列的性质

**性质 1** 收敛数列的极限唯一.



**证明** 反证法. 设  $\{x_n\}$  有两个不同的极限  $a, b$ .

# 收敛数列的性质

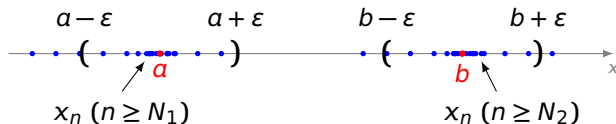
**性质 1** 收敛数列的极限唯一.



**证明** 反证法. 设  $\{x_n\}$  有两个不同的极限  $a, b$ .

# 收敛数列的性质

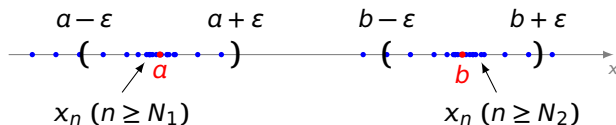
**性质 1** 收敛数列的极限唯一.



**证明** 反证法. 设  $\{x_n\}$  有两个不同的极限  $a, b$ .

# 收敛数列的性质

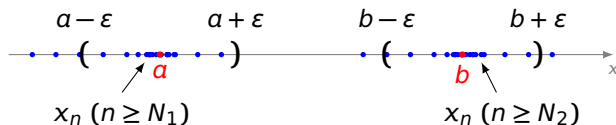
**性质 1** 收敛数列的极限唯一.



**证明** 反证法. 设  $\{x_n\}$  有两个不同的极限  $a, b$ . 取  $\varepsilon = \frac{1}{4}|a - b| > 0$ .

# 收敛数列的性质

**性质 1** 收敛数列的极限唯一.

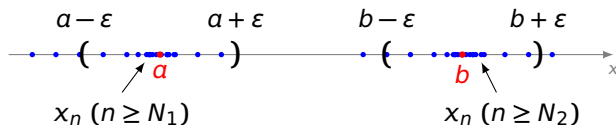


**证明** 反证法. 设  $\{x_n\}$  有两个不同的极限  $a, b$ . 取  $\varepsilon = \frac{1}{4}|a - b| > 0$ .

•  $a$  是  $\{x_n\}$  极限  $\Rightarrow \exists N_1$ , 当  $n > N_1$  时,  $|x_n - a| < \varepsilon$ .

# 收敛数列的性质

**性质 1** 收敛数列的极限唯一.



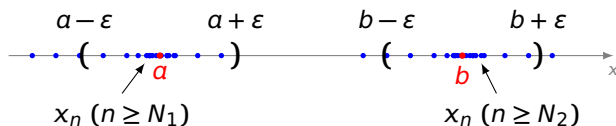
**证明** 反证法. 设  $\{x_n\}$  有两个不同的极限  $a, b$ . 取  $\varepsilon = \frac{1}{4}|a - b| > 0$ .

- $a$  是  $\{x_n\}$  极限  $\Rightarrow \exists N_1$ , 当  $n > N_1$  时,  $|x_n - a| < \varepsilon$ .
- $b$  是  $\{x_n\}$  极限  $\Rightarrow \exists N_2$ , 当  $n > N_2$  时,  $|x_n - b| < \varepsilon$ .



# 收敛数列的性质

**性质 1** 收敛数列的极限唯一.



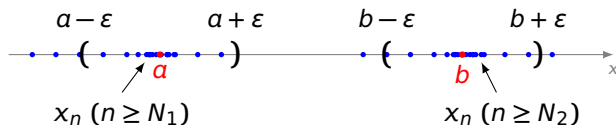
**证明** 反证法. 设  $\{x_n\}$  有两个不同的极限  $a, b$ . 取  $\varepsilon = \frac{1}{4}|a - b| > 0$ .

- $a$  是  $\{x_n\}$  极限  $\Rightarrow \exists N_1$ , 当  $n > N_1$  时,  $|x_n - a| < \varepsilon$ .
- $b$  是  $\{x_n\}$  极限  $\Rightarrow \exists N_2$ , 当  $n > N_2$  时,  $|x_n - b| < \varepsilon$ .

当  $n > \max\{N_1, N_2\}$  时, 上述两个不等式同时成立,

# 收敛数列的性质

**性质 1** 收敛数列的极限唯一.



**证明** 反证法. 设  $\{x_n\}$  有两个不同的极限  $a, b$ . 取  $\varepsilon = \frac{1}{4}|a - b| > 0$ .

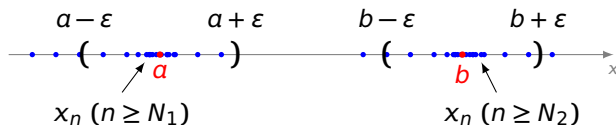
- $a$  是  $\{x_n\}$  极限  $\Rightarrow \exists N_1$ , 当  $n > N_1$  时,  $|x_n - a| < \varepsilon$ .
- $b$  是  $\{x_n\}$  极限  $\Rightarrow \exists N_2$ , 当  $n > N_2$  时,  $|x_n - b| < \varepsilon$ .

当  $n > \max\{N_1, N_2\}$  时, 上述两个不等式同时成立, 从而

$$|a - b| = |a - x_n + x_n - b|$$

# 收敛数列的性质

**性质 1** 收敛数列的极限唯一.



**证明** 反证法. 设  $\{x_n\}$  有两个不同的极限  $a, b$ . 取  $\varepsilon = \frac{1}{4}|a - b| > 0$ .

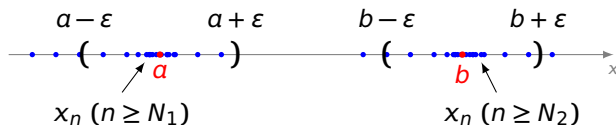
- $a$  是  $\{x_n\}$  极限  $\Rightarrow \exists N_1$ , 当  $n > N_1$  时,  $|x_n - a| < \varepsilon$ .
- $b$  是  $\{x_n\}$  极限  $\Rightarrow \exists N_2$ , 当  $n > N_2$  时,  $|x_n - b| < \varepsilon$ .

当  $n > \max\{N_1, N_2\}$  时, 上述两个不等式同时成立, 从而

$$|a - b| = |a - x_n + x_n - b| \leq |a - x_n| + |x_n - b|$$

# 收敛数列的性质

**性质 1** 收敛数列的极限唯一.



**证明** 反证法. 设  $\{x_n\}$  有两个不同的极限  $a, b$ . 取  $\varepsilon = \frac{1}{4}|a - b| > 0$ .

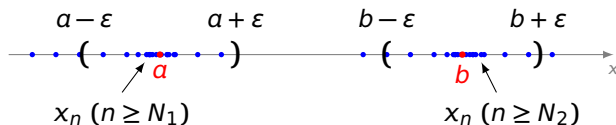
- $a$  是  $\{x_n\}$  极限  $\Rightarrow \exists N_1$ , 当  $n > N_1$  时,  $|x_n - a| < \varepsilon$ .
- $b$  是  $\{x_n\}$  极限  $\Rightarrow \exists N_2$ , 当  $n > N_2$  时,  $|x_n - b| < \varepsilon$ .

当  $n > \max\{N_1, N_2\}$  时, 上述两个不等式同时成立, 从而

$$|a - b| = |a - x_n + x_n - b| \leq |a - x_n| + |x_n - b| < 2\varepsilon$$

# 收敛数列的性质

**性质 1** 收敛数列的极限唯一.



**证明** 反证法. 设  $\{x_n\}$  有两个不同的极限  $a, b$ . 取  $\varepsilon = \frac{1}{4}|a - b| > 0$ .

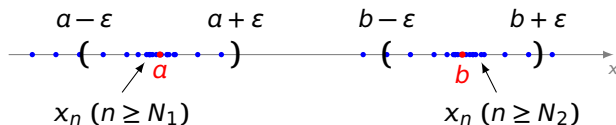
- $a$  是  $\{x_n\}$  极限  $\Rightarrow \exists N_1$ , 当  $n > N_1$  时,  $|x_n - a| < \varepsilon$ .
- $b$  是  $\{x_n\}$  极限  $\Rightarrow \exists N_2$ , 当  $n > N_2$  时,  $|x_n - b| < \varepsilon$ .

当  $n > \max\{N_1, N_2\}$  时, 上述两个不等式同时成立, 从而

$$|a - b| = |a - x_n + x_n - b| \leq |a - x_n| + |x_n - b| < 2\varepsilon = \frac{1}{2}|a - b|$$

# 收敛数列的性质

**性质 1** 收敛数列的极限唯一.



**证明** 反证法. 设  $\{x_n\}$  有两个不同的极限  $a, b$ . 取  $\varepsilon = \frac{1}{4}|a - b| > 0$ .

- $a$  是  $\{x_n\}$  极限  $\Rightarrow \exists N_1$ , 当  $n > N_1$  时,  $|x_n - a| < \varepsilon$ .
- $b$  是  $\{x_n\}$  极限  $\Rightarrow \exists N_2$ , 当  $n > N_2$  时,  $|x_n - b| < \varepsilon$ .

当  $n > \max\{N_1, N_2\}$  时, 上述两个不等式同时成立, 从而

$$|a - b| = |a - x_n + x_n - b| \leq |a - x_n| + |x_n - b| < 2\varepsilon = \frac{1}{2}|a - b|$$

所以  $|a - b| < 0$ , 不可能.

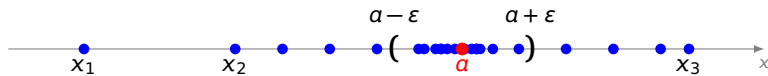
**性质 2** 收敛数列一定有界.

## 性质 2 收敛数列一定有界.

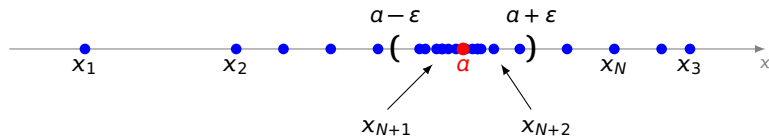




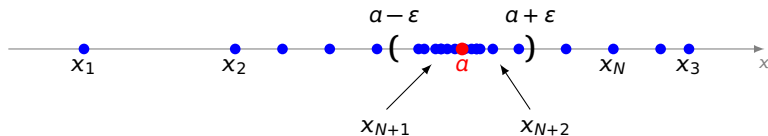
## 性质 2 收敛数列一定有界.



## 性质 2 收敛数列一定有界.



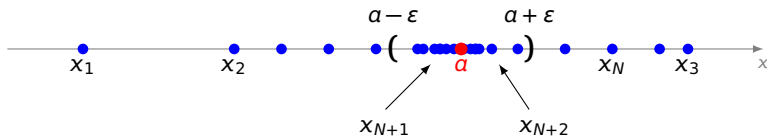
**性质 2** 收敛数列一定有界.



**证明** 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . 取  $\varepsilon = 1$ ,  $\exists$  正整数  $N$ , 当  $n > N$  时, 有

$$|x_n - a| < \varepsilon = 1.$$

**性质 2** 收敛数列一定有界.

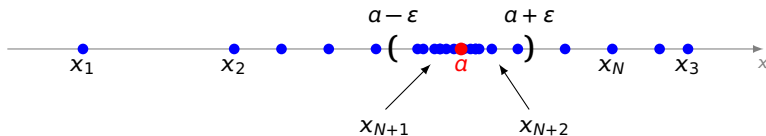


**证明** 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . 取  $\varepsilon = 1$ ,  $\exists$  正整数  $N$ , 当  $n > N$  时, 有

$$|x_n - a| < \varepsilon = 1.$$

从而  $|x_n| \leq |a| + 1$ .

**性质 2** 收敛数列一定有界.



**证明** 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . 取  $\varepsilon = 1$ ,  $\exists$  正整数  $N$ , 当  $n > N$  时, 有

$$|x_n - a| < \varepsilon = 1.$$

从而  $|x_n| \leq |a| + 1$ . 取

$$M = \max\{|x_1|, \dots, |x_N|, |a| + 1\}$$

则对所有  $n$ , 成立

$$|x_n| \leq M.$$

**性质 3** 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

- 若  $a > 0$ , 则  $\exists$  正整数  $N$ , 当  $n > N$  时, 都有  $x_n > 0$ .

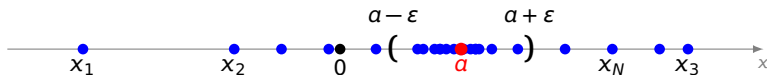
**性质 3** 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

- 若  $a > 0$ , 则  $\exists$  正整数  $N$ , 当  $n > N$  时, 都有  $x_n > 0$ .



**性质 3** 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

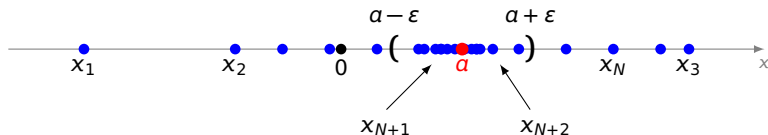
- 若  $a > 0$ , 则  $\exists$  正整数  $N$ , 当  $n > N$  时, 都有  $x_n > 0$ .





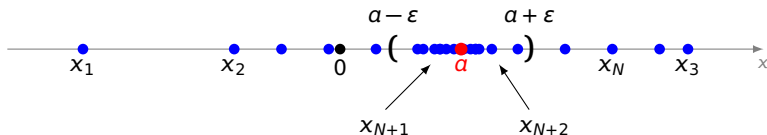
**性质 3** 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

- 若  $a > 0$ , 则  $\exists$  正整数  $N$ , 当  $n > N$  时, 都有  $x_n > 0$ .



**性质 3** 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

- 若  $a > 0$ , 则  $\exists$  正整数  $N$ , 当  $n > N$  时, 都有  $x_n > 0$ .

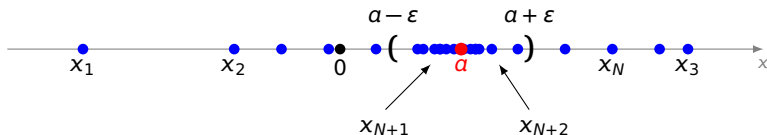


**证明** 设  $a > 0$ , 取  $\varepsilon = \frac{1}{2}a > 0$ ,  $\exists N$ , 当  $n > N$  时, 成立

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

**性质 3** 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

- 若  $a > 0$ , 则  $\exists$  正整数  $N$ , 当  $n > N$  时, 都有  $x_n > 0$ .

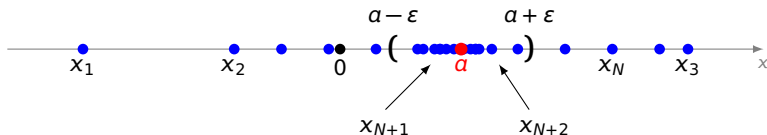


**证明** 设  $a > 0$ , 取  $\epsilon = \frac{1}{2}a > 0$ ,  $\exists N$ , 当  $n > N$  时, 成立

$$|x_n - a| < \epsilon = \frac{1}{2}a$$

**性质 3** 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

- 若  $a > 0$ , 则  $\exists$  正整数  $N$ , 当  $n > N$  时, 都有  $x_n > 0$ .

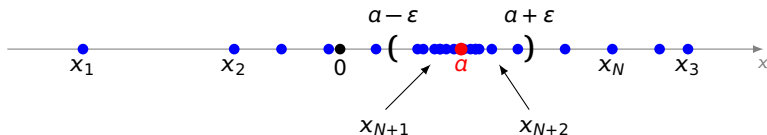


**证明** 设  $a > 0$ , 取  $\varepsilon = \frac{1}{2}a > 0$ ,  $\exists N$ , 当  $n > N$  时, 成立

$$|x_n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2}a \quad \Rightarrow \quad x_n > a - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a > 0$$

**性质 3** 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

- 若  $a > 0$ , 则  $\exists$  正整数  $N$ , 当  $n > N$  时, 都有  $x_n > 0$ .
- 若  $a < 0$ , 则  $\exists$  正整数  $N$ , 当  $n > N$  时, 都有  $x_n < 0$ .

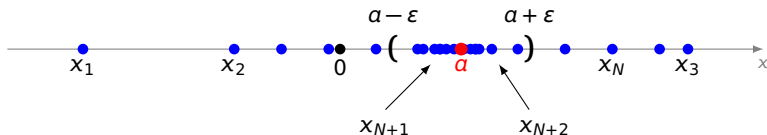


**证明** 设  $a > 0$ , 取  $\varepsilon = \frac{1}{2}a > 0$ ,  $\exists N$ , 当  $n > N$  时, 成立

$$|x_n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2}a \quad \Rightarrow \quad x_n > a - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a > 0$$

**性质 3** 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

- 若  $a > 0$ , 则  $\exists$  正整数  $N$ , 当  $n > N$  时, 都有  $x_n > 0$ .
- 若  $a < 0$ , 则  $\exists$  正整数  $N$ , 当  $n > N$  时, 都有  $x_n < 0$ .



**证明** 设  $a > 0$ , 取  $\varepsilon = \frac{1}{2}a > 0$ ,  $\exists N$ , 当  $n > N$  时, 成立

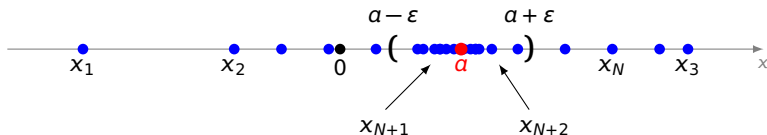
$$|x_n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2}a \quad \Rightarrow \quad x_n > a - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a > 0$$

**推论** 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

- 若从某一项开始  $x_n \geq 0$ , 则  $a \geq 0$ .

**性质 3** 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

- 若  $a > 0$ , 则  $\exists$  正整数  $N$ , 当  $n > N$  时, 都有  $x_n > 0$ .
- 若  $a < 0$ , 则  $\exists$  正整数  $N$ , 当  $n > N$  时, 都有  $x_n < 0$ .



**证明** 设  $a > 0$ , 取  $\varepsilon = \frac{1}{2}a > 0$ ,  $\exists N$ , 当  $n > N$  时, 成立

$$|x_n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2}a \quad \Rightarrow \quad x_n > a - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a > 0$$

**推论** 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

- 若从某一项开始  $x_n \geq 0$ , 则  $a \geq 0$ .
- 若从某一项开始  $x_n \leq 0$ , 则  $a \leq 0$ .

从数列  $\{x_n\}$  中，依此抽取无穷多项出来：

$\{x_n\}$       $x_1$   $x_2$   $x_3$       $x_n$

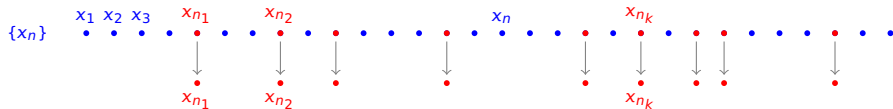




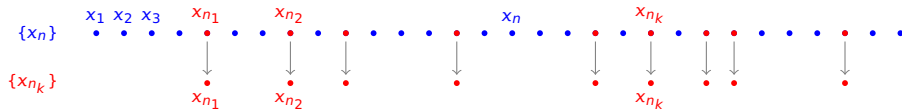
从数列  $\{x_n\}$  中，依此抽取无穷多项出来：



从数列  $\{x_n\}$  中，依此抽取无穷多项出来：

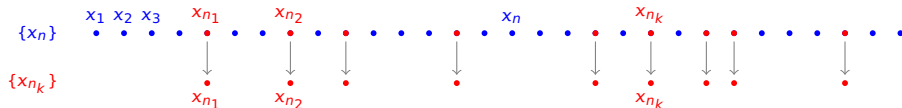


从数列  $\{x_n\}$  中，依此抽取无穷多项出来：



所得到的  $\{x_{n_k}\}$  称为  $\{x_n\}$  的一个子列.

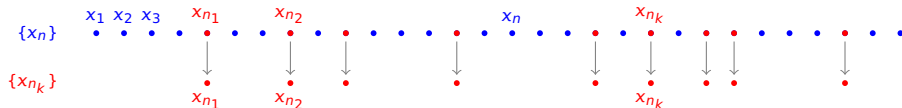
从数列  $\{x_n\}$  中，依此抽取无穷多项出来：



所得到的  $\{x_{n_k}\}$  称为  $\{x_n\}$  的一个子列.

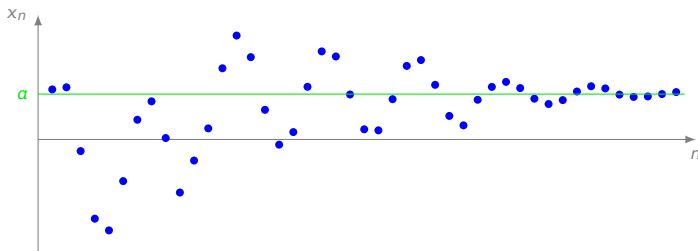
**定理** “ $\{x_n\}$  收敛于  $a$ ”  $\Leftrightarrow$  “任意子列  $\{x_{n_k}\}$  都收敛于同一个  $a$ ” .

从数列  $\{x_n\}$  中，依此抽取无穷多项出来：

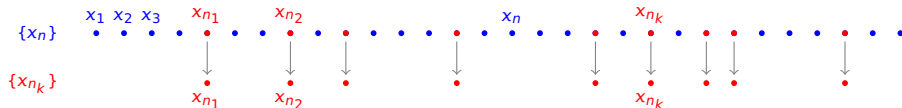


所得到的  $\{x_{n_k}\}$  称为  $\{x_n\}$  的一个子列.

**定理** “ $\{x_n\}$  收敛于  $a$ ”  $\Leftrightarrow$  “任意子列  $\{x_{n_k}\}$  都收敛于同一个  $a$ ” .

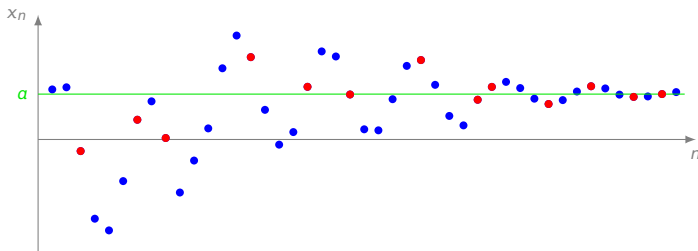


从数列  $\{x_n\}$  中，依此抽取无穷多项出来：



所得到的  $\{x_{n_k}\}$  称为  $\{x_n\}$  的一个子列.

**定理** “ $\{x_n\}$  收敛于  $a$ ”  $\Leftrightarrow$  “任意子列  $\{x_{n_k}\}$  都收敛于同一个  $a$ ” .



**例** 数列  $1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n-1}, \dots$  发散.

**例** 数列  $1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n-1}, \dots$  发散.

**证明** 偶数项构成子列

$$1, 1, \dots, 1, \dots$$

奇数项构成子列

$$-1, -1, \dots, -1, \dots$$

这两个子列的极限显然不等，所以原数列发散.



# We are here now...

1. 数列极限
2. 函数极限
3. 极限运算
4. 极限性质
5. 两个重要极限
6. 无穷大, 无穷小

**函数极限**，简单说就是，当自变量无限“趋近”某个量时，函数值是否“趋于”一致.

**函数极限**，简单说就是，当自变量无限“趋近”某个量时，函数值是否“趋于”一致.

下面将介绍以下的极限过程：

$$\begin{array}{ccc} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), & \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), & \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x), & \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), & \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \end{array}$$

“ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ”：如果  $x$  无限接近  $x_0$  时， $f(x)$  无限接近一个数  $A$ ，则称  $f(x)$  在  $x \rightarrow x_0$  时的“极限”为  $A$ .

“ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ”：如果  $x$  无限接近  $x_0$  时， $f(x)$  无限接近一个数  $A$ ，则称  $f(x)$  在  $x \rightarrow x_0$  时的“极限”为  $A$ 。

**定义**  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ ，使得  $0 < |x - x_0| < \delta$  时，有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，

“ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ”：如果  $x$  无限接近  $x_0$  时， $f(x)$  无限接近一个数  $A$ ，则称  $f(x)$  在  $x \rightarrow x_0$  时的“极限”为  $A$ 。

**定义**  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ ，使得  $0 < |x - x_0| < \delta$  时，有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称  $A$  是  $f(x)$  在  $x \rightarrow x_0$  时的**极限**，记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow x_0)$$

“ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ”：如果  $x$  无限接近  $x_0$  时， $f(x)$  无限接近一个数  $A$ ，则称  $f(x)$  在  $x \rightarrow x_0$  时的“极限”为  $A$ 。

**定义**  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ ，使得  $0 < |x - x_0| < \delta$  时，有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称  $A$  是  $f(x)$  在  $x \rightarrow x_0$  时的**极限**，记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow x_0)$$

若不存在这样的数  $A$ ，称  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  不存在

“ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ”：如果  $x$  无限接近  $x_0$  时， $f(x)$  无限接近一个数  $A$ ，则称  $f(x)$  在  $x \rightarrow x_0$  时的“极限”为  $A$ 。

$\varepsilon - \delta$  语言

**定义**  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ ，使得  $0 < |x - x_0| < \delta$  时，有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称  $A$  是  $f(x)$  在  $x \rightarrow x_0$  时的**极限**，记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow x_0)$$

若不存在这样的数  $A$ ，称  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  不存在



“ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ”：如果  $x$  无限接近  $x_0$  时， $f(x)$  无限接近一个数  $A$ ，则称  $f(x)$  在  $x \rightarrow x_0$  时的“极限”为  $A$ 。

$\varepsilon - \delta$  语言

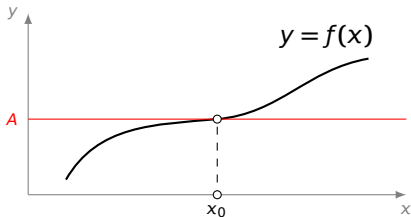
$f$  在  $x_0$  去心邻域有定义，  
而不必在  $x_0$  处有定义

**定义**  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ ，使得  $0 < |x - x_0| < \delta$  时，有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称  $A$  是  $f(x)$  在  $x \rightarrow x_0$  时的**极限**，记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow x_0)$$

若不存在这样的数  $A$ ，称  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  不存在

“ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ”：如果  $x$  无限接近  $x_0$  时， $f(x)$  无限接近一个数  $A$ ，则称  $f(x)$  在  $x \rightarrow x_0$  时的“极限”为  $A$ 。



$f$  在  $x_0$  去心邻域有定义，  
而不必在  $x_0$  处有定义

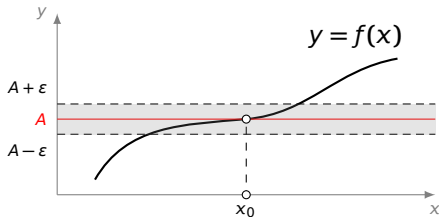
$\varepsilon - \delta$  语言

**定义**  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ ，使得  $0 < |x - x_0| < \delta$  时，有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称  $A$  是  $f(x)$  在  $x \rightarrow x_0$  时的**极限**，记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow x_0)$$

若不存在这样的数  $A$ ，称  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  不存在

“ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ”：如果  $x$  无限接近  $x_0$  时， $f(x)$  无限接近一个数  $A$ ，则称  $f(x)$  在  $x \rightarrow x_0$  时的“极限”为  $A$ 。



$\varepsilon - \delta$  语言

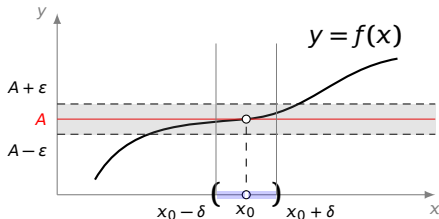
$f$  在  $x_0$  去心邻域有定义，  
而不必在  $x_0$  处有定义

**定义**  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ ，使得  $0 < |x - x_0| < \delta$  时，有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称  $A$  是  $f(x)$  在  $x \rightarrow x_0$  时的**极限**，记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow x_0)$$

若不存在这样的数  $A$ ，称  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  不存在

“ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ”：如果  $x$  无限接近  $x_0$  时， $f(x)$  无限接近一个数  $A$ ，则称  $f(x)$  在  $x \rightarrow x_0$  时的“极限”为  $A$ 。



$\epsilon - \delta$  语言

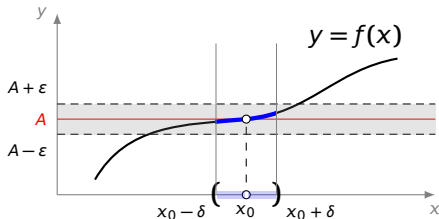
$f$  在  $x_0$  去心邻域有定义，  
而不必在  $x_0$  处有定义

**定义**  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ ，使得  $0 < |x - x_0| < \delta$  时，有  $|f(x) - A| < \epsilon$ ，则称  $A$  是  $f(x)$  在  $x \rightarrow x_0$  时的**极限**，记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow x_0)$$

若不存在这样的数  $A$ ，称  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  不存在

“ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ”：如果  $x$  无限接近  $x_0$  时， $f(x)$  无限接近一个数  $A$ ，则称  $f(x)$  在  $x \rightarrow x_0$  时的“极限”为  $A$ 。



$f$  在  $x_0$  去心邻域有定义，  
而不必在  $x_0$  处有定义

$\epsilon - \delta$  语言

**定义**  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ ，使得  $0 < |x - x_0| < \delta$  时，有  $|f(x) - A| < \epsilon$ ，则称  $A$  是  $f(x)$  在  $x \rightarrow x_0$  时的**极限**，记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow x_0)$$

若不存在这样的数  $A$ ，称  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  不存在

**例 1** 验证  $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ .

---

**例 2** 验证  $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ .

---

**例 3** 验证  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-2}{x-1} = 4$ .

**例 1** 验证  $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ .

**证明** 这里  $f(x) \equiv c$  是常值函数.

---

**例 2** 验证  $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ .

---

**例 3** 验证  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-2}{x-1} = 4$ .

**例 1** 验证  $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ .

**证明** 这里  $f(x) \equiv c$  是常值函数.  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $\delta =$  , 则当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有

$$|f(x) - c| < \varepsilon.$$

---

**例 2** 验证  $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ .

---

**例 3** 验证  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} = 4$ .



**例 1** 验证  $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ .

**证明** 这里  $f(x) \equiv c$  是常值函数.  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $\delta =$  , 则当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有

$$|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

---

**例 2** 验证  $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ .

---

**例 3** 验证  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} = 4$ .

**例 1** 验证  $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ .

**证明** 这里  $f(x) \equiv c$  是常值函数.  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $\delta = 1$ , 则当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有

$$|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

---

**例 2** 验证  $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ .

---

**例 3** 验证  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} = 4$ .

**例 1** 验证  $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ .

**证明** 这里  $f(x) \equiv c$  是常值函数.  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $\delta = 1$ , 则当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有

$$|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

所以  $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ .

---

**例 2** 验证  $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ .

**例 3** 验证  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} = 4$ .

**例 1** 验证  $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ .

**证明** 这里  $f(x) \equiv c$  是常值函数.  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $\delta = 1$ , 则当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有

$$|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

所以  $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ .

---

**例 2** 验证  $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ .

**证明** 这里  $f(x) = x$ .

---

**例 3** 验证  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} = 4$ .

**例 1** 验证  $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ .

**证明** 这里  $f(x) \equiv c$  是常值函数.  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $\delta = 1$ , 则当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有

$$|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

所以  $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ .

---

**例 2** 验证  $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ .

**证明** 这里  $f(x) = x$ .  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $\delta = \varepsilon$ , 则当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有

$$|f(x) - x_0| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon.$$

**例 3** 验证  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} = 4$ .

**例 1** 验证  $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ .

**证明** 这里  $f(x) \equiv c$  是常值函数.  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $\delta = 1$ , 则当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有

$$|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

所以  $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ .

---

**例 2** 验证  $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ .

**证明** 这里  $f(x) = x$ .  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $\delta = \varepsilon$ , 则当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有

$$|f(x) - x_0| = |x - x_0| < \varepsilon.$$

---

**例 3** 验证  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} = 4$ .

**例 1** 验证  $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ .

**证明** 这里  $f(x) \equiv c$  是常值函数.  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $\delta = 1$ , 则当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有

$$|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

所以  $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ .

---

**例 2** 验证  $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ .

**证明** 这里  $f(x) = x$ .  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $\delta = \varepsilon$ , 则当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有

$$|f(x) - x_0| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon.$$

**例 3** 验证  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} = 4$ .

**例 1** 验证  $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ .

**证明** 这里  $f(x) \equiv c$  是常值函数.  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $\delta = 1$ , 则当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有

$$|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

所以  $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ .

---

**例 2** 验证  $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ .

**证明** 这里  $f(x) = x$ .  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $\delta = \varepsilon$ , 则当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有

$$|f(x) - x_0| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon.$$

**例 3** 验证  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} = 4$ .



**例 1** 验证  $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ .

**证明** 这里  $f(x) \equiv c$  是常值函数.  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $\delta = 1$ , 则当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有

$$|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

所以  $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ .

---

**例 2** 验证  $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ .

**证明** 这里  $f(x) = x$ .  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $\delta = \varepsilon$ , 则当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有

$$|f(x) - x_0| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon.$$

所以  $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ .

---

**例 3** 验证  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} = 4$ .

例 3 验证  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-2}{x-1} = 4$

**例 3** 验证  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-2}{x-1} = 4$

**证明** 在  $x \rightarrow 1$  过程中,  $x \neq 1$ , 所以  $\frac{2x^2-2}{x-1}$  有意义, 并且

**例 3** 验证  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-2}{x-1} = 4$

**证明** 在  $x \rightarrow 1$  过程中,  $x \neq 1$ , 所以  $\frac{2x^2-2}{x-1}$  有意义, 并且

$$\frac{2x^2-2}{x-1} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x-1}$$

**例 3** 验证  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-2}{x-1} = 4$

**证明** 在  $x \rightarrow 1$  过程中,  $x \neq 1$ , 所以  $\frac{2x^2-2}{x-1}$  有意义, 并且

$$\frac{2x^2-2}{x-1} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x-1} = 2x+2.$$

**例 3** 验证  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-2}{x-1} = 4$

**证明** 在  $x \rightarrow 1$  过程中,  $x \neq 1$ , 所以  $\frac{2x^2-2}{x-1}$  有意义, 并且

$$\frac{2x^2-2}{x-1} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x-1} = 2x+2.$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} 2x+2$$

**例 3** 验证  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-2}{x-1} = 4$

**证明** 在  $x \rightarrow 1$  过程中,  $x \neq 1$ , 所以  $\frac{2x^2-2}{x-1}$  有意义, 并且

$$\frac{2x^2-2}{x-1} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x-1} = 2x+2.$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} 2x+2$$

所以只需证明

$$\lim_{x \rightarrow 1} 2x+2 = 4 ?$$

**例 3** 验证  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-2}{x-1} = 4$

**证明** 在  $x \rightarrow 1$  过程中,  $x \neq 1$ , 所以  $\frac{2x^2-2}{x-1}$  有意义, 并且

$$\frac{2x^2-2}{x-1} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x-1} = 2x+2.$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} 2x+2$$

所以只需证明

$$\lim_{x \rightarrow 1} 2x+2 = 4 ?$$

$\forall \varepsilon > 0$ , 取  $\delta =$  , 则当  $0 < |x-1| < \delta$  时, 有

$$|2x+2-4|$$

所以极限为 2.



**例 3** 验证  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-2}{x-1} = 4$

**证明** 在  $x \rightarrow 1$  过程中,  $x \neq 1$ , 所以  $\frac{2x^2-2}{x-1}$  有意义, 并且

$$\frac{2x^2-2}{x-1} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x-1} = 2x+2.$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} 2x+2$$

所以只需证明

$$\lim_{x \rightarrow 1} 2x+2 = 4 ?$$

$\forall \varepsilon > 0$ , 取  $\delta =$  , 则当  $0 < |x-1| < \delta$  时, 有

$$|2x+2-4| = 2|x-1| < 2\delta$$

所以极限为 2.

**例 3** 验证  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-2}{x-1} = 4$

**证明** 在  $x \rightarrow 1$  过程中,  $x \neq 1$ , 所以  $\frac{2x^2-2}{x-1}$  有意义, 并且

$$\frac{2x^2-2}{x-1} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x-1} = 2x+2.$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} 2x+2$$

所以只需证明

$$\lim_{x \rightarrow 1} 2x+2 = 4 ?$$

$\forall \varepsilon > 0$ , 取  $\delta =$  , 则当  $0 < |x-1| < \delta$  时, 有

$$|2x+2-4| = 2|x-1| < 2\delta = \varepsilon.$$

所以极限为 2.

**例 3** 验证  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-2}{x-1} = 4$

**证明** 在  $x \rightarrow 1$  过程中,  $x \neq 1$ , 所以  $\frac{2x^2-2}{x-1}$  有意义, 并且

$$\frac{2x^2-2}{x-1} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x-1} = 2x+2.$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} 2x+2$$

所以只需证明

$$\lim_{x \rightarrow 1} 2x+2 = 4 ?$$

$\forall \varepsilon > 0$ , 取  $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon > 0$ , 则当  $0 < |x-1| < \delta$  时, 有

$$|2x+2-4| = 2|x-1| < 2\delta = \varepsilon.$$

所以极限为 2.

- “ $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ ”:

- “ $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = B$ ”:

● “ $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ ”：当  $x$  从左边无限接近  $x_0$  时， $f(x)$  无限接近数  $A$ ,

● “ $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = B$ ”：

- “ $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ ”：当  $x$  从左边无限接近  $x_0$  时， $f(x)$  无限接近数  $A$ ，

则称  $f(x)$  在  $x \rightarrow x_0^-$  时的“左极限”为  $A$ . 也记为  $f(x_0^-) = A$ .

- “ $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = B$ ”：

- “ $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ ”：当  $x$  从左边无限接近  $x_0$  时， $f(x)$  无限接近数  $A$ ，  
则称  $f(x)$  在  $x \rightarrow x_0^-$  时的“左极限”为  $A$ 。也记为  $f(x_0^-) = A$ 。
- “ $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = B$ ”：当  $x$  从右边无限接近  $x_0$  时， $f(x)$  无限接近数  $B$ ，

- “ $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ ”：当  $x$  从左边无限接近  $x_0$  时， $f(x)$  无限接近数  $A$ ，  
则称  $f(x)$  在  $x \rightarrow x_0^-$  时的“左极限”为  $A$ 。也记为  $f(x_0^-) = A$ 。
- “ $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = B$ ”：当  $x$  从右边无限接近  $x_0$  时， $f(x)$  无限接近数  $B$ ，  
则称  $f(x)$  在  $x \rightarrow x_0^+$  时的“右极限”为  $B$ 。也记为  $f(x_0^+) = B$ 。

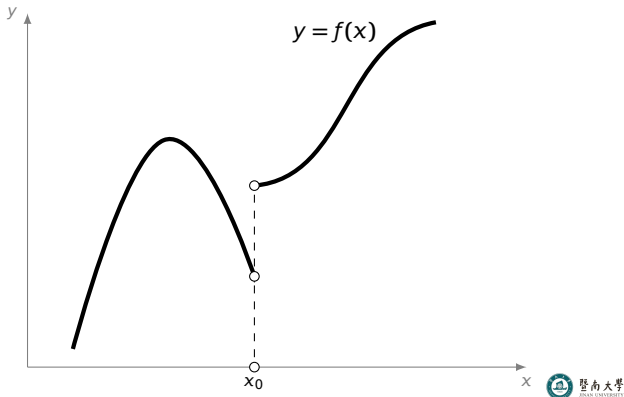


- “ $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ ”：当  $x$  从左边无限接近  $x_0$  时， $f(x)$  无限接近数  $A$ ，

则称  $f(x)$  在  $x \rightarrow x_0^-$  时的“左极限”为  $A$ . 也记为  $f(x_0^-) = A$ .

- “ $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = B$ ”：当  $x$  从右边无限接近  $x_0$  时， $f(x)$  无限接近数  $B$ ，

则称  $f(x)$  在  $x \rightarrow x_0^+$  时的“右极限”为  $B$ . 也记为  $f(x_0^+) = B$ .

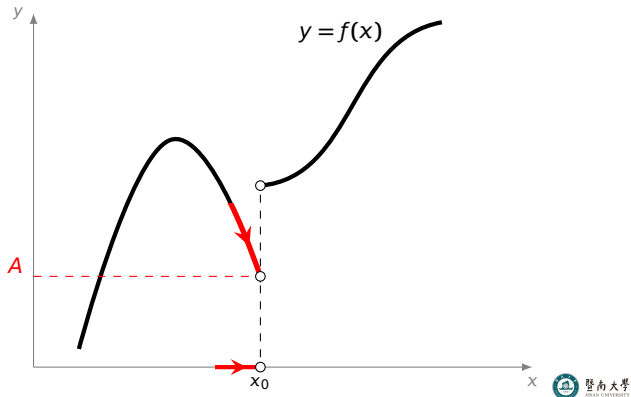


- “ $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ ”：当  $x$  从左边无限接近  $x_0$  时， $f(x)$  无限接近数  $A$ ，

则称  $f(x)$  在  $x \rightarrow x_0^-$  时的“左极限”为  $A$ . 也记为  $f(x_0^-) = A$ .

- “ $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = B$ ”：当  $x$  从右边无限接近  $x_0$  时， $f(x)$  无限接近数  $B$ ，

则称  $f(x)$  在  $x \rightarrow x_0^+$  时的“右极限”为  $B$ . 也记为  $f(x_0^+) = B$ .

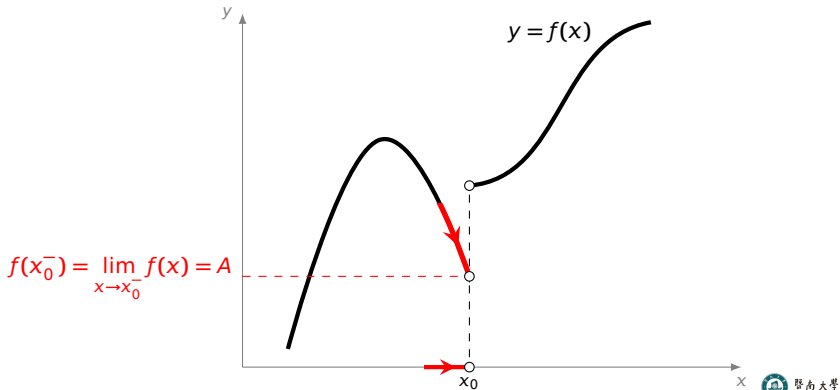


- “ $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ ”：当  $x$  从左边无限接近  $x_0$  时， $f(x)$  无限接近数  $A$ ，

则称  $f(x)$  在  $x \rightarrow x_0^-$  时的“左极限”为  $A$ . 也记为  $f(x_0^-) = A$ .

- “ $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = B$ ”：当  $x$  从右边无限接近  $x_0$  时， $f(x)$  无限接近数  $B$ ，

则称  $f(x)$  在  $x \rightarrow x_0^+$  时的“右极限”为  $B$ . 也记为  $f(x_0^+) = B$ .

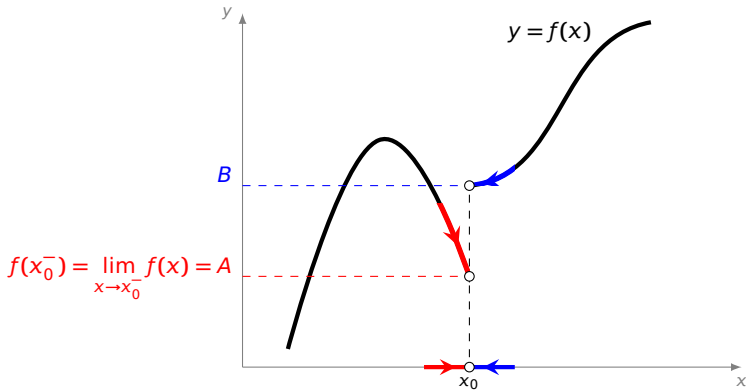


- “ $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ ”：当  $x$  从左边无限接近  $x_0$  时， $f(x)$  无限接近数  $A$ ，

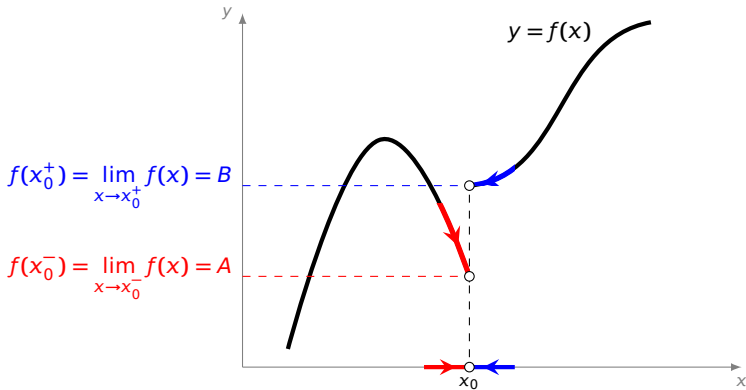
则称  $f(x)$  在  $x \rightarrow x_0^-$  时的“左极限”为  $A$ . 也记为  $f(x_0^-) = A$ .

- “ $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = B$ ”：当  $x$  从右边无限接近  $x_0$  时， $f(x)$  无限接近数  $B$ ，

则称  $f(x)$  在  $x \rightarrow x_0^+$  时的“右极限”为  $B$ . 也记为  $f(x_0^+) = B$ .



- “ $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ ”：当  $x$  从左边无限接近  $x_0$  时， $f(x)$  无限接近数  $A$ ，  
则称  $f(x)$  在  $x \rightarrow x_0^-$  时的“左极限”为  $A$ 。也记为  $f(x_0^-) = A$ 。
- “ $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = B$ ”：当  $x$  从右边无限接近  $x_0$  时， $f(x)$  无限接近数  $B$ ，  
则称  $f(x)$  在  $x \rightarrow x_0^+$  时的“右极限”为  $B$ 。也记为  $f(x_0^+) = B$ 。



**性质**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在  $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  与  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  均存在并相等. 此时, 这三个极限相等.

**性质**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在  $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  与  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  均存在并相等. 此时, 这三个极限相等.

---

**例** 设

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x + 1, & x > 0. \end{cases}$$

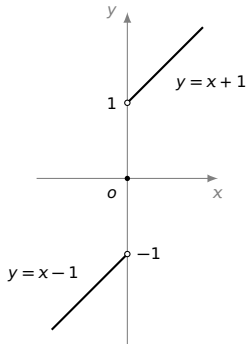
求出  $f(0^+)$  和  $f(0^-)$ , 并证明  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  不存在.

**性质**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在  $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  与  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  均存在并相等. 此时, 这三个极限相等.

**例 设**

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x + 1, & x > 0. \end{cases}$$

求出  $f(0^+)$  和  $f(0^-)$ , 并证明  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  不存在.





**性质**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在  $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  与  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  均存在并相等. 此时, 这三个极限相等.

**例 设**

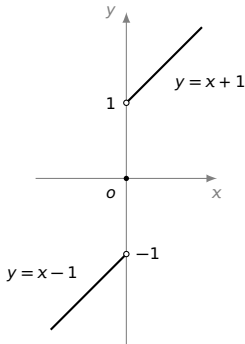
$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x + 1, & x > 0. \end{cases}$$

求出  $f(0^+)$  和  $f(0^-)$ , 并证明  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  不存在.

**解 由**

$$f(0^-) =$$

$$f(0^+) =$$



**性质**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在  $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  与  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  均存在并相等. 此时, 这三个极限相等.

**例 设**

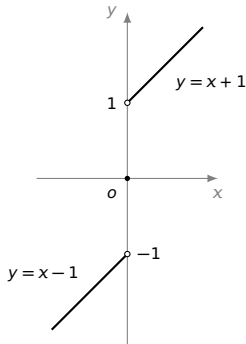
$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x + 1, & x > 0. \end{cases}$$

求出  $f(0^+)$  和  $f(0^-)$ , 并证明  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  不存在.

**解 由**

$$f(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

$$f(0^+) =$$



**性质**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在  $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  与  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  均存在并相等. 此时, 这三个极限相等.

**例 设**

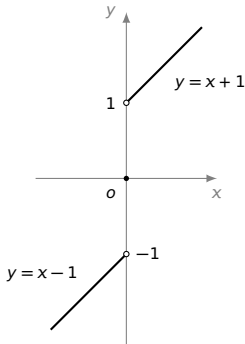
$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x + 1, & x > 0. \end{cases}$$

求出  $f(0^+)$  和  $f(0^-)$ , 并证明  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  不存在.

**解 由**

$$f(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x - 1)$$

$$f(0^+) =$$



**性质**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在  $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  与  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  均存在并相等. 此时, 这三个极限相等.

**例 设**

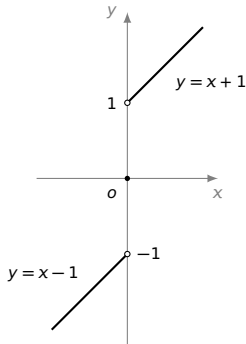
$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x + 1, & x > 0. \end{cases}$$

求出  $f(0^+)$  和  $f(0^-)$ , 并证明  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  不存在.

**解 由**

$$f(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x - 1) \stackrel{\text{上述性质}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} (x - 1)$$

$$f(0^+) =$$



**性质**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在  $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  与  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  均存在并相等. 此时, 这三个极限相等.

**例 设**

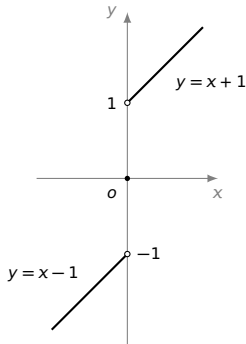
$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x + 1, & x > 0. \end{cases}$$

求出  $f(0^+)$  和  $f(0^-)$ , 并证明  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  不存在.

**解 由**

$$f(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x - 1) \stackrel{\text{上述性质}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} (x - 1) = -1$$

$$f(0^+) =$$

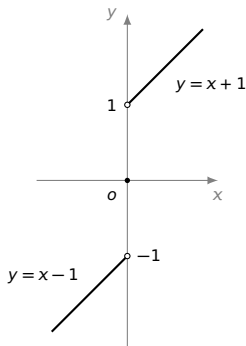


**性质**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在  $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  与  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  均存在并相等. 此时, 这三个极限相等.

**例 设**

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x + 1, & x > 0. \end{cases}$$

求出  $f(0^+)$  和  $f(0^-)$ , 并证明  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  不存在.



**解 由**

$$f(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x - 1) \xlongequal{\text{上述性质}} \lim_{x \rightarrow 0} (x - 1) = -1$$

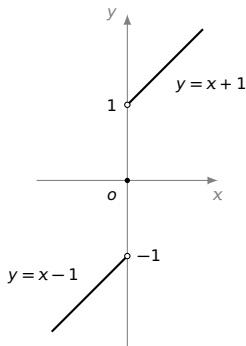
$$f(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1) \xlongequal{\text{上述性质}} \lim_{x \rightarrow 0} (x + 1) = 1$$

**性质**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在  $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  与  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  均存在并相等. 此时, 这三个极限相等.

**例 设**

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x + 1, & x > 0. \end{cases}$$

求出  $f(0^+)$  和  $f(0^-)$ , 并证明  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  不存在.



**解 由**

$$f(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x - 1) \xrightarrow{\text{上述性质}} \lim_{x \rightarrow 0} (x - 1) = -1$$

$$f(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1) \xrightarrow{\text{上述性质}} \lim_{x \rightarrow 0} (x + 1) = 1$$

知  $f(0^-) \neq f(0^+)$ , 所以  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  不存在.

“ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ ”：当  $|x|$  无限增大时， $f(x)$  无限接近一个数  $A$ .



“ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ ”：当  $|x|$  无限增大时， $f(x)$  无限接近一个数  $A$ .

**定义** 任意给定  $\varepsilon > 0$ ，存在正数  $X$ ，使得  $|x| > X$  时，有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，

“ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ ”：当  $|x|$  无限增大时， $f(x)$  无限接近一个数  $A$ .

$$x \in (-\infty, -X) \cup (X, \infty)$$

**定义** 任意给定  $\varepsilon > 0$ ，存在正数  $X$ ，使得  $|x| > X$  时，有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，

“ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ ”：当  $|x|$  无限增大时， $f(x)$  无限接近一个数  $A$ .

$$x \in (-\infty, -X) \cup (X, \infty)$$

**定义** 任意给定  $\varepsilon > 0$ ，存在正数  $X$ ，使得  $|x| > X$  时，有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称  $A$  是  $f(x)$  在  $x \rightarrow \infty$  时的**极限**，记作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow \infty)$$

“ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ ”：当  $|x|$  无限增大时， $f(x)$  无限接近一个数  $A$ .

$$x \in (-\infty, -X) \cup (X, \infty)$$

**定义** 任意给定  $\varepsilon > 0$ ，存在正数  $X$ ，使得  $|x| > X$  时，有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称  $A$  是  $f(x)$  在  $x \rightarrow \infty$  时的**极限**，记作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow \infty)$$

若不存在这样的数  $A$ ，称  $f(x)$  在  $x \rightarrow \infty$  时**发散**，或  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  不存在。

“ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ ”：当  $|x|$  无限增大时， $f(x)$  无限接近一个数  $A$ .

$$x \in (-\infty, -X) \cup (X, \infty)$$

**定义** 任意给定  $\varepsilon > 0$ ，存在正数  $X$ ，使得  $|x| > X$  时，有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称  $A$  是  $f(x)$  在  $x \rightarrow \infty$  时的**极限**，记作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow \infty)$$

若不存在这样的数  $A$ ，称  $f(x)$  在  $x \rightarrow \infty$  时**发散**，或  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  不存在。

**例**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$

“ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ ”：当  $|x|$  无限增大时， $f(x)$  无限接近一个数  $A$ .

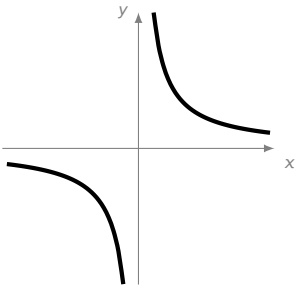
$$x \in (-\infty, -X) \cup (X, \infty)$$

**定义** 任意给定  $\varepsilon > 0$ ，存在正数  $X$ ，使得  $|x| > X$  时，有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称  $A$  是  $f(x)$  在  $x \rightarrow \infty$  时的**极限**，记作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow \infty)$$

若不存在这样的数  $A$ ，称  $f(x)$  在  $x \rightarrow \infty$  时**发散**，或  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  不存在。

**例**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ .



“ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ ”：当  $|x|$  无限增大时， $f(x)$  无限接近一个数  $A$ .

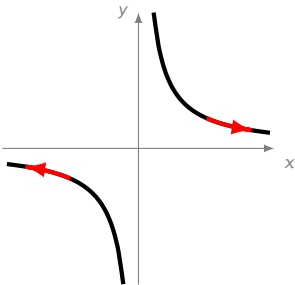
$$x \in (-\infty, -X) \cup (X, \infty)$$

**定义** 任意给定  $\varepsilon > 0$ ，存在正数  $X$ ，使得  $|x| > X$  时，有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称  $A$  是  $f(x)$  在  $x \rightarrow \infty$  时的**极限**，记作

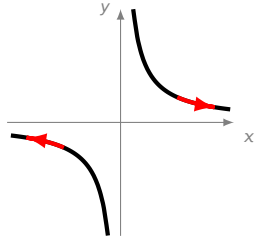
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow \infty)$$

若不存在这样的数  $A$ ，称  $f(x)$  在  $x \rightarrow \infty$  时**发散**，或  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  不存在。

**例**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ .



**例 1** 证明  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$

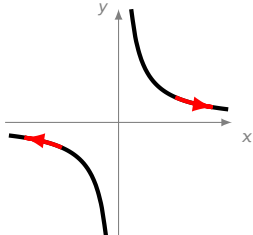




**例 1** 证明  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$

**证明**  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $X =$  , 当  $|x| > X$  时, 都有

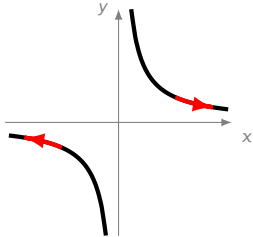
$$\left| \frac{1}{x} - 0 \right|$$



**例 1** 证明  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$

**证明**  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $X =$  , 当  $|x| > X$  时, 都有

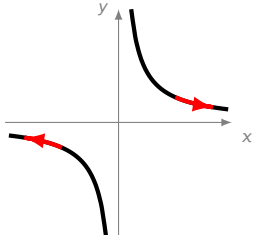
$$\left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \frac{1}{|x|}$$



**例 1** 证明  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$

**证明**  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $X =$  , 当  $|x| > X$  时, 都有

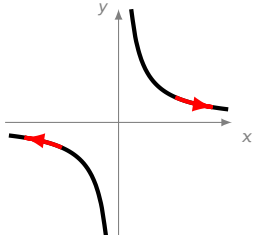
$$\left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \frac{1}{|x|} < \frac{1}{X}$$



**例 1** 证明  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$

**证明**  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $X = \frac{1}{\varepsilon} > 0$ , 当  $|x| > X$  时, 都有

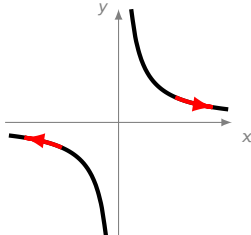
$$\left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \frac{1}{|x|} < \frac{1}{X} = \varepsilon.$$



**例 1** 证明  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$

**证明**  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $X = \frac{1}{\varepsilon} > 0$ , 当  $|x| > X$  时, 都有

$$\left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \frac{1}{|x|} < \frac{1}{X} = \varepsilon.$$



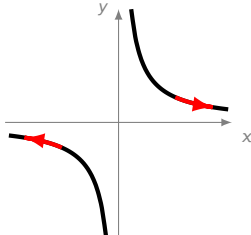
---

**例 2** 证明  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

**例 1** 证明  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$

**证明**  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $X = \frac{1}{\varepsilon} > 0$ , 当  $|x| > X$  时, 都有

$$\left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \frac{1}{|x|} < \frac{1}{X} = \varepsilon.$$



**例 2** 证明  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

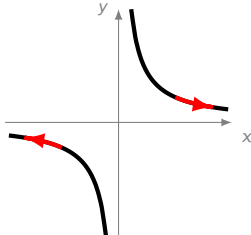
**证明**  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $X = \frac{1}{\varepsilon} > 0$ , 当  $|x| > X$  时, 都有

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 0 \right|$$

**例 1** 证明  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$

**证明**  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $X = \frac{1}{\varepsilon} > 0$ , 当  $|x| > X$  时, 都有

$$\left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \frac{1}{|x|} < \frac{1}{X} = \varepsilon.$$



**例 2** 证明  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

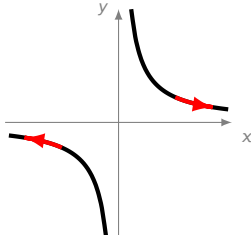
**证明**  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $X = \frac{1}{\varepsilon} > 0$ , 当  $|x| > X$  时, 都有

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 0 \right| \leq \frac{1}{|x|}$$

**例 1** 证明  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$

**证明**  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $X = \frac{1}{\varepsilon} > 0$ , 当  $|x| > X$  时, 都有

$$\left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \frac{1}{|x|} < \frac{1}{X} = \varepsilon.$$



**例 2** 证明  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

**证明**  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $X = \frac{1}{\varepsilon} > 0$ , 当  $|x| > X$  时, 都有

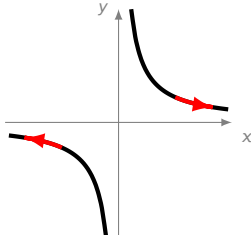
$$\left| \frac{\sin x}{x} - 0 \right| \leq \frac{1}{|x|} < \frac{1}{X}$$



**例 1** 证明  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$

**证明**  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $X = \frac{1}{\varepsilon} > 0$ , 当  $|x| > X$  时, 都有

$$\left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \frac{1}{|x|} < \frac{1}{X} = \varepsilon.$$



**例 2** 证明  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

**证明**  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $X = \frac{1}{\varepsilon} > 0$ , 当  $|x| > X$  时, 都有

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 0 \right| \leq \frac{1}{|x|} < \frac{1}{X} = \varepsilon.$$

“ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ ”：如果  $x$  无限增大时， $f(x)$  无限接近一个数  $A$ ，则称  $f(x)$  在  $x \rightarrow +\infty$  时的“极限”为  $A$ 。

“ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ ”：如果  $x$  无限增大时， $f(x)$  无限接近一个数  $A$ ，则称  $f(x)$  在  $x \rightarrow +\infty$  时的“极限”为  $A$ 。

**定义** 任意给定  $\varepsilon > 0$ ，存在正数  $X$ ，使得  $x > X$  时，有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，

“ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ ”：如果  $x$  无限增大时， $f(x)$  无限接近一个数  $A$ ，则称  $f(x)$  在  $x \rightarrow +\infty$  时的“极限”为  $A$ 。

**定义** 任意给定  $\varepsilon > 0$ ，存在正数  $X$ ，使得  $x > X$  时，有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称  $A$  是  $f(x)$  在  $x \rightarrow +\infty$  时的**极限**，记作

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow +\infty)$$

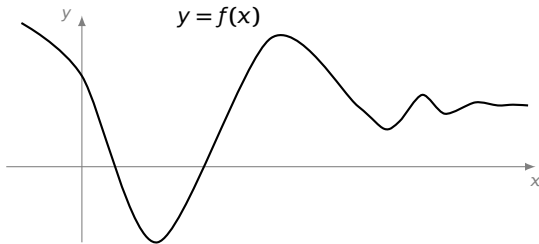
“ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ ”：如果  $x$  无限增大时， $f(x)$  无限接近一个数  $A$ ，则称  $f(x)$  在  $x \rightarrow +\infty$  时的“极限”为  $A$ 。

**定义** 任意给定  $\varepsilon > 0$ ，存在正数  $X$ ，使得  $x > X$  时，有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称  $A$  是  $f(x)$  在  $x \rightarrow +\infty$  时的**极限**，记作

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow +\infty)$$

若不存在这样的数  $A$ ，称  $f(x)$  在  $x \rightarrow +\infty$  时**发散**，或  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  不存在

“ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ ”：如果  $x$  无限增大时， $f(x)$  无限接近一个数  $A$ ，则称  $f(x)$  在  $x \rightarrow +\infty$  时的“极限”为  $A$ 。

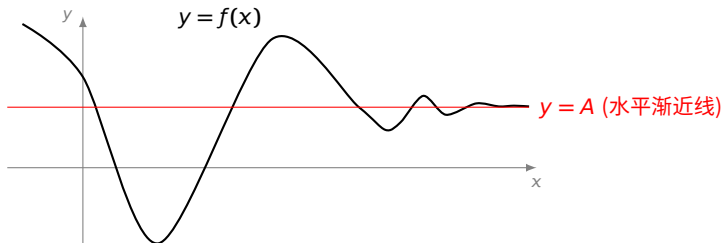


**定义** 任意给定  $\varepsilon > 0$ ，存在正数  $X$ ，使得  $x > X$  时，有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称  $A$  是  $f(x)$  在  $x \rightarrow +\infty$  时的**极限**，记作

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow +\infty)$$

若不存在这样的数  $A$ ，称  $f(x)$  在  $x \rightarrow +\infty$  时**发散**，或  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  不存在

“ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ ”：如果  $x$  无限增大时， $f(x)$  无限接近一个数  $A$ ，则称  $f(x)$  在  $x \rightarrow +\infty$  时的“极限”为  $A$ 。

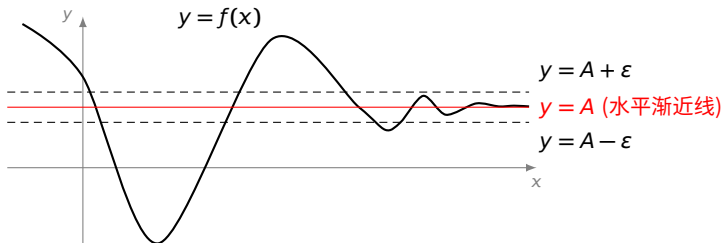


**定义** 任意给定  $\varepsilon > 0$ ，存在正数  $X$ ，使得  $x > X$  时，有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称  $A$  是  $f(x)$  在  $x \rightarrow +\infty$  时的**极限**，记作

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow +\infty)$$

若不存在这样的数  $A$ ，称  $f(x)$  在  $x \rightarrow +\infty$  时**发散**，或  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  不存在

“ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ ”：如果  $x$  无限增大时， $f(x)$  无限接近一个数  $A$ ，则称  $f(x)$  在  $x \rightarrow +\infty$  时的“极限”为  $A$ 。



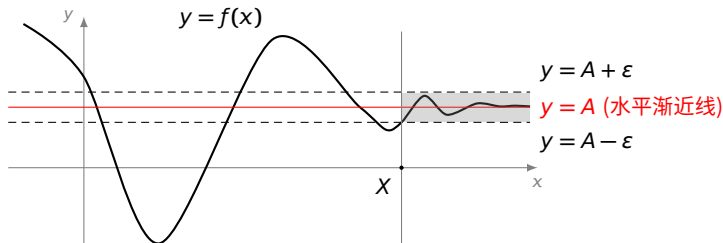
**定义** 任意给定  $\varepsilon > 0$ ，存在正数  $X$ ，使得  $x > X$  时，有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称  $A$  是  $f(x)$  在  $x \rightarrow +\infty$  时的**极限**，记作

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow +\infty)$$

若不存在这样的数  $A$ ，称  $f(x)$  在  $x \rightarrow +\infty$  时**发散**，或  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  不存在



“ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ ”：如果  $x$  无限增大时， $f(x)$  无限接近一个数  $A$ ，则称  $f(x)$  在  $x \rightarrow +\infty$  时的“极限”为  $A$ 。



**定义** 任意给定  $\varepsilon > 0$ ，存在正数  $X$ ，使得  $x > X$  时，有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称  $A$  是  $f(x)$  在  $x \rightarrow +\infty$  时的**极限**，记作

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow +\infty)$$

若不存在这样的数  $A$ ，称  $f(x)$  在  $x \rightarrow +\infty$  时**发散**，或  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  不存在

## 例 验证

1.  $a > 1$  时,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^x} = 0.$

2.  $0 < b < 1$  时,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} b^x = 0.$

## 例 验证

1.  $a > 1$  时,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^x} = 0$ .
2.  $0 < b < 1$  时,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} b^x = 0$ .

**证明 1.**  $\forall \varepsilon \in (0, 1)$ , 取  $X =$  , 当  $x > X$  时, 都有

$$\left| \frac{1}{a^x} - 0 \right| =$$

## 例 验证

1.  $a > 1$  时,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^x} = 0$ .
2.  $0 < b < 1$  时,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} b^x = 0$ .

**证明 1.**  $\forall \varepsilon \in (0, 1)$ , 取  $X =$  , 当  $x > X$  时, 都有

$$\left| \frac{1}{a^x} - 0 \right| = a^{-x}$$

## 例 验证

1.  $a > 1$  时,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^x} = 0$ .
2.  $0 < b < 1$  时,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} b^x = 0$ .

**证明 1.**  $\forall \varepsilon \in (0, 1)$ , 取  $X =$  , 当  $x > X$  时, 都有

$$\left| \frac{1}{a^x} - 0 \right| = a^{-x} = e^{\ln a^{-x}}$$

## 例 验证

1.  $a > 1$  时,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^x} = 0$ .
2.  $0 < b < 1$  时,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} b^x = 0$ .

**证明 1.**  $\forall \varepsilon \in (0, 1)$ , 取  $X =$  , 当  $x > X$  时, 都有

$$\left| \frac{1}{a^x} - 0 \right| = a^{-x} = e^{\ln a^{-x}}$$

## 例 验证

1.  $a > 1$  时,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^x} = 0$ .
2.  $0 < b < 1$  时,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} b^x = 0$ .

**证明 1.**  $\forall \varepsilon \in (0, 1)$ , 取  $X =$  , 当  $x > X$  时, 都有

$$\left| \frac{1}{a^x} - 0 \right| = a^{-x} = e^{\ln a^{-x}} = e^{-x \ln a}$$

## 例 验证

1.  $a > 1$  时,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^x} = 0$ .
2.  $0 < b < 1$  时,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} b^x = 0$ .

**证明 1.**  $\forall \varepsilon \in (0, 1)$ , 取  $X =$  , 当  $x > X$  时, 都有

$$\left| \frac{1}{a^x} - 0 \right| = a^{-x} = e^{\ln a^{-x}} = e^{-x \ln a} < e^{-X \ln a}$$



## 例 验证

1.  $a > 1$  时,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^x} = 0$ .
2.  $0 < b < 1$  时,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} b^x = 0$ .

**证明 1.**  $\forall \varepsilon \in (0, 1)$ , 取  $X = -\frac{\ln \varepsilon}{\ln a} > 0$ , 当  $x > X$  时, 都有

$$\left| \frac{1}{a^x} - 0 \right| = a^{-x} = e^{\ln a^{-x}} = e^{-x \ln a} < e^{-X \ln a} = e^{\ln \varepsilon}$$

## 例 验证

1.  $a > 1$  时,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^x} = 0$ .
2.  $0 < b < 1$  时,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} b^x = 0$ .

**证明 1.**  $\forall \varepsilon \in (0, 1)$ , 取  $X = -\frac{\ln \varepsilon}{\ln a} > 0$ , 当  $x > X$  时, 都有

$$\left| \frac{1}{a^x} - 0 \right| = a^{-x} = e^{\ln a^{-x}} = e^{-x \ln a} < e^{-X \ln a} = e^{\ln \varepsilon} = \varepsilon.$$

## 例 验证

1.  $a > 1$  时,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^x} = 0$ .

2.  $0 < b < 1$  时,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} b^x = 0$ .

**证明 1.**  $\forall \varepsilon \in (0, 1)$ , 取  $X = -\frac{\ln \varepsilon}{\ln a} > 0$ , 当  $x > X$  时, 都有

$$\left| \frac{1}{a^x} - 0 \right| = a^{-x} = e^{\ln a^{-x}} = e^{-x \ln a} < e^{-X \ln a} = e^{\ln \varepsilon} = \varepsilon.$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} b^x \quad \underline{\underline{a = \frac{1}{b} > 1}}$$

## 例 验证

1.  $a > 1$  时,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^x} = 0$ .

2.  $0 < b < 1$  时,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} b^x = 0$ .

**证明 1.**  $\forall \varepsilon \in (0, 1)$ , 取  $X = -\frac{\ln \varepsilon}{\ln a} > 0$ , 当  $x > X$  时, 都有

$$\left| \frac{1}{a^x} - 0 \right| = a^{-x} = e^{\ln a^{-x}} = e^{-x \ln a} < e^{-X \ln a} = e^{\ln \varepsilon} = \varepsilon.$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} b^x \stackrel{a=\frac{1}{b}>1}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^x$$

## 例 验证

1.  $a > 1$  时,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^x} = 0$ .

2.  $0 < b < 1$  时,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} b^x = 0$ .

**证明 1.**  $\forall \varepsilon \in (0, 1)$ , 取  $X = -\frac{\ln \varepsilon}{\ln a} > 0$ , 当  $x > X$  时, 都有

$$\left| \frac{1}{a^x} - 0 \right| = a^{-x} = e^{\ln a^{-x}} = e^{-x \ln a} < e^{-X \ln a} = e^{\ln \varepsilon} = \varepsilon.$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} b^x \stackrel{a=\frac{1}{b} > 1}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^x = 0.$$

## 例 验证

1.  $a > 1$  时,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^x} = 0$ .

2.  $0 < b < 1$  时,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} b^x = 0$ .

**证明 1.**  $\forall \varepsilon \in (0, 1)$ , 取  $X = -\frac{\ln \varepsilon}{\ln a} > 0$ , 当  $x > X$  时, 都有

$$\left| \frac{1}{a^x} - 0 \right| = a^{-x} = e^{\ln a^{-x}} = e^{-x \ln a} < e^{-X \ln a} = e^{\ln \varepsilon} = \varepsilon.$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} b^x \stackrel{a=\frac{1}{b}>1}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^x = 0.$$

---

**注** 数列极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  可以归结成函数极限: 定义函数  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(n) = a_n$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

“ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ ”：如果  $x$  无限减少时， $f(x)$  无限接近一个数  $A$ ，则称  $f(x)$  在  $x \rightarrow -\infty$  时的“极限”为  $A$ 。

“ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ ”：如果  $x$  无限减少时， $f(x)$  无限接近一个数  $A$ ，则称  $f(x)$  在  $x \rightarrow -\infty$  时的“极限”为  $A$ 。

**定义** 任意给定  $\varepsilon > 0$ ，存在正数  $X$ ，当  $x < -X$  时，有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，



“ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ ”：如果  $x$  无限减少时， $f(x)$  无限接近一个数  $A$ ，则称  $f(x)$  在  $x \rightarrow -\infty$  时的“极限”为  $A$ 。

**定义** 任意给定  $\varepsilon > 0$ ，存在正数  $X$ ，当  $x < -X$  时，有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称  $A$  是  $f(x)$  在  $x \rightarrow -\infty$  时的**极限**，记作

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow -\infty)$$

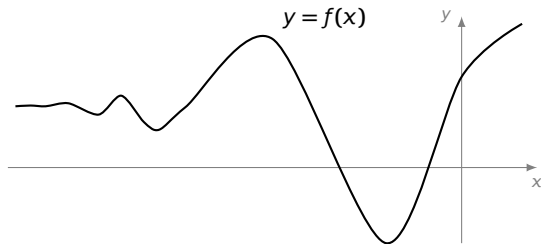
“ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ ”：如果  $x$  无限减少时， $f(x)$  无限接近一个数  $A$ ，则称  $f(x)$  在  $x \rightarrow -\infty$  时的“极限”为  $A$ 。

**定义** 任意给定  $\varepsilon > 0$ ，存在正数  $X$ ，当  $x < -X$  时，有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称  $A$  是  $f(x)$  在  $x \rightarrow -\infty$  时的**极限**，记作

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow -\infty)$$

若不存在这样的数  $A$ ，称  $f(x)$  在  $x \rightarrow -\infty$  时**发散**，或  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  不存在

“ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ ”：如果  $x$  无限减少时， $f(x)$  无限接近一个数  $A$ ，则称  $f(x)$  在  $x \rightarrow -\infty$  时的“极限”为  $A$ 。

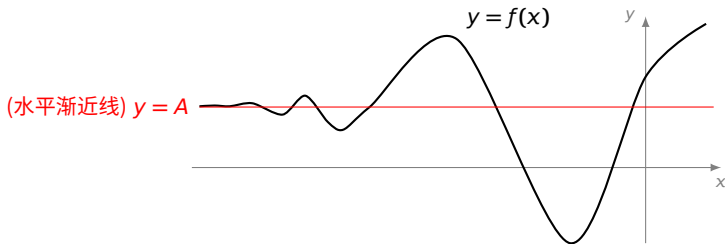


**定义** 任意给定  $\varepsilon > 0$ ，存在正数  $X$ ，当  $x < -X$  时，有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称  $A$  是  $f(x)$  在  $x \rightarrow -\infty$  时的**极限**，记作

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow -\infty)$$

若不存在这样的数  $A$ ，称  $f(x)$  在  $x \rightarrow -\infty$  时**发散**，或  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  不存在

“ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ ”：如果  $x$  无限减少时， $f(x)$  无限接近一个数  $A$ ，则称  $f(x)$  在  $x \rightarrow -\infty$  时的“极限”为  $A$ 。

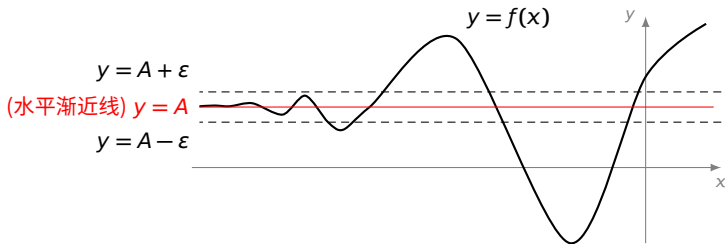


**定义** 任意给定  $\varepsilon > 0$ ，存在正数  $X$ ，当  $x < -X$  时，有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称  $A$  是  $f(x)$  在  $x \rightarrow -\infty$  时的**极限**，记作

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow -\infty)$$

若不存在这样的数  $A$ ，称  $f(x)$  在  $x \rightarrow -\infty$  时**发散**，或  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  不存在

“ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ ”：如果  $x$  无限减少时， $f(x)$  无限接近一个数  $A$ ，则称  $f(x)$  在  $x \rightarrow -\infty$  时的“极限”为  $A$ 。

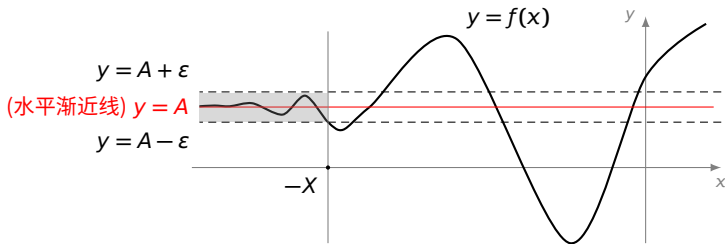


**定义** 任意给定  $\varepsilon > 0$ ，存在正数  $X$ ，当  $x < -X$  时，有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称  $A$  是  $f(x)$  在  $x \rightarrow -\infty$  时的**极限**，记作

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow -\infty)$$

若不存在这样的数  $A$ ，称  $f(x)$  在  $x \rightarrow -\infty$  时**发散**，或  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  不存在

“ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ ”：如果  $x$  无限减少时， $f(x)$  无限接近一个数  $A$ ，则称  $f(x)$  在  $x \rightarrow -\infty$  时的“极限”为  $A$ 。



**定义** 任意给定  $\epsilon > 0$ ，存在正数  $X$ ，当  $x < -X$  时，有  $|f(x) - A| < \epsilon$ ，则称  $A$  是  $f(x)$  在  $x \rightarrow -\infty$  时的**极限**，记作

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow -\infty)$$

若不存在这样的数  $A$ ，称  $f(x)$  在  $x \rightarrow -\infty$  时**发散**，或  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  不存在

**性质**  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  存在  $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  与  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  均存在并相等. 此时, 这三个极限相等.

# We are here now...

1. 数列极限
2. 函数极限
3. 极限运算
4. 极限性质
5. 两个重要极限
6. 无穷大, 无穷小



前面我们已经验证了一些特殊的极限，例如：

$$\lim_{x \rightarrow x_0} c = c, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0 \ (0 < a < 1), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^x} = 0 \ (a > 1)$$

前面我们已经**验证**了一些特殊的极限，例如：

$$\lim_{x \rightarrow x_0} c = c, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0 \ (0 < a < 1), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^x} = 0 \ (a > 1)$$

但实际中，我们需要的是**计算**极限，例如：

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}$$

为了计算一般式子的极限，我们需要知道极限的 **运算性质**。

前面我们已经**验证**了一些特殊的极限，例如：

$$\lim_{x \rightarrow x_0} c = c, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0 \ (0 < a < 1), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^x} = 0 \ (a > 1)$$

但实际中，我们需要的是**计算**极限，例如：

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}$$

为了计算一般式子的极限，我们需要知道极限的 **运算性质**。

这些运算性质一般与具体的极限过程无关：

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

因此叙述相关性质时，简单地用 “ **$\lim f(x)$** ” 表示上述任意的极限过程

**定理（极限的四则运算）** 设  $\lim f(x)$ ,  $\lim g(x)$  存在,  $a, b \in \mathbb{R}$ , 则

1.  $\lim[af(x) + bg(x)] = a \lim f(x) + b \lim g(x)$

**定理（极限的四则运算）** 设  $\lim f(x)$ ,  $\lim g(x)$  存在,  $a, b \in \mathbb{R}$ , 则

1.  $\lim[af(x) + bg(x)] = a \lim f(x) + b \lim g(x)$

(特别地,  $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$ )

**定理（极限的四则运算）** 设  $\lim f(x)$ ,  $\lim g(x)$  存在,  $a, b \in \mathbb{R}$ , 则

1.  $\lim[af(x) + bg(x)] = a \lim f(x) + b \lim g(x)$

(特别地,  $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$ )

2.  $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$

**定理（极限的四则运算）** 设  $\lim f(x)$ ,  $\lim g(x)$  存在,  $a, b \in \mathbb{R}$ , 则

1.  $\lim[af(x) + bg(x)] = a \lim f(x) + b \lim g(x)$

(特别地,  $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$ )

2.  $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$

(特别地,  $\lim[f(x)^n] = [\lim f(x)]^n$ )

**定理 (极限的四则运算)** 设  $\lim f(x)$ ,  $\lim g(x)$  存在,  $a, b \in \mathbb{R}$ , 则

1.  $\lim[af(x) + bg(x)] = a \lim f(x) + b \lim g(x)$

(特别地,  $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$ )

2.  $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$

(特别地,  $\lim[f(x)^n] = [\lim f(x)]^n$ )

3. 若  $\lim g(x) \neq 0$ , 则  $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$



**定理 (极限的四则运算)** 设  $\lim f(x)$ ,  $\lim g(x)$  存在,  $a, b \in \mathbb{R}$ , 则

1.  $\lim[af(x) + bg(x)] = a \lim f(x) + b \lim g(x)$

(特别地,  $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$ )

2.  $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$

(特别地,  $\lim[f(x)^n] = [\lim f(x)]^n$ )

3. 若  $\lim g(x) \neq 0$ , 则  $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$

---

**例 1** 计算  $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 2x + 1)$

**定理 (极限的四则运算)** 设  $\lim f(x)$ ,  $\lim g(x)$  存在,  $a, b \in \mathbb{R}$ , 则

1.  $\lim[af(x) + bg(x)] = a \lim f(x) + b \lim g(x)$

(特别地,  $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$ )

2.  $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$

(特别地,  $\lim[f(x)^n] = [\lim f(x)]^n$ )

3. 若  $\lim g(x) \neq 0$ , 则  $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$

---

**例 1** 计算  $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 2x + 1)$

**解** 原式  $= 3 \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 2 \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 1 =$

**定理 (极限的四则运算)** 设  $\lim f(x)$ ,  $\lim g(x)$  存在,  $a, b \in \mathbb{R}$ , 则

1.  $\lim[af(x) + bg(x)] = a \lim f(x) + b \lim g(x)$

(特别地,  $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$ )

2.  $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$

(特别地,  $\lim[f(x)^n] = [\lim f(x)]^n$ )

3. 若  $\lim g(x) \neq 0$ , 则  $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$

---

**例 1** 计算  $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 2x + 1)$

**解** 原式 =  $3 \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 2 \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 1 =$   
 $= [\lim_{x \rightarrow 1} x]^2$

**定理 (极限的四则运算)** 设  $\lim f(x)$ ,  $\lim g(x)$  存在,  $a, b \in \mathbb{R}$ , 则

1.  $\lim[af(x) + bg(x)] = a \lim f(x) + b \lim g(x)$

(特别地,  $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$ )

2.  $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$

(特别地,  $\lim[f(x)^n] = [\lim f(x)]^n$ )

3. 若  $\lim g(x) \neq 0$ , 则  $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$

**例 1** 计算  $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 2x + 1)$

**解** 原式 =  $3 \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 2 \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 1 =$   
 $= [\lim_{x \rightarrow 1} x]^2 - 2 \lim_{x \rightarrow 1} x + 1$   
 $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$

**定理 (极限的四则运算)** 设  $\lim f(x)$ ,  $\lim g(x)$  存在,  $a, b \in \mathbb{R}$ , 则

1.  $\lim[af(x) + bg(x)] = a \lim f(x) + b \lim g(x)$

(特别地,  $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$ )

2.  $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$

(特别地,  $\lim[f(x)^n] = [\lim f(x)]^n$ )

3. 若  $\lim g(x) \neq 0$ , 则  $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$

---

**例 1** 计算  $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 2x + 1)$

**解** 原式 =  $3 \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 2 \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 1 =$   
 $= [\lim_{x \rightarrow 1} x]^2 \quad \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0 \quad \lim_{x \rightarrow x_0} c = c$

**定理 (极限的四则运算)** 设  $\lim f(x)$ ,  $\lim g(x)$  存在,  $a, b \in \mathbb{R}$ , 则

1.  $\lim[af(x) + bg(x)] = a \lim f(x) + b \lim g(x)$

(特别地,  $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$ )

2.  $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$

(特别地,  $\lim[f(x)^n] = [\lim f(x)]^n$ )

3. 若  $\lim g(x) \neq 0$ , 则  $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$

**例 1** 计算  $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 2x + 1)$

**解** 原式 =  $3 \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 2 \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 1 = 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 2$

$= [\lim_{x \rightarrow 1} x]^2 \quad \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0 \quad \lim_{x \rightarrow x_0} c = c$

**定理 (极限的四则运算)** 设  $\lim f(x)$ ,  $\lim g(x)$  存在,  $a, b \in \mathbb{R}$ , 则

1.  $\lim[af(x) + bg(x)] = a \lim f(x) + b \lim g(x)$

(特别地,  $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$ )

2.  $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$

(特别地,  $\lim[f(x)^n] = [\lim f(x)]^n$ )

3. 若  $\lim g(x) \neq 0$ , 则  $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$

**例 1** 计算  $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 2x + 1)$

**解** 原式 =  $3 \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 2 \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 1 = \underline{3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 1} = 2$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$        $= [\lim_{x \rightarrow 1} x]^2$        $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$        $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$

**定理 (极限的四则运算)** 设  $\lim f(x)$ ,  $\lim g(x)$  存在,  $a, b \in \mathbb{R}$ , 则

1.  $\lim[af(x) + bg(x)] = a \lim f(x) + b \lim g(x)$

(特别地,  $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$ )

2.  $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$

(特别地,  $\lim[f(x)^n] = [\lim f(x)]^n$ )

3. 若  $\lim g(x) \neq 0$ , 则  $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$

**例 1** 计算  $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 2x + 1)$

**解** 原式 =  $3 \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 2 \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 1 = \underline{3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 1} = 2$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$        $= [\lim_{x \rightarrow 1} x]^2$        $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$        $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$        $f(1)$



**定理 (极限的四则运算)** 设  $\lim f(x)$ ,  $\lim g(x)$  存在,  $a, b \in \mathbb{R}$ , 则

1.  $\lim[af(x) + bg(x)] = a \lim f(x) + b \lim g(x)$

(特别地,  $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$ )

2.  $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$

(特别地,  $\lim[f(x)^n] = [\lim f(x)]^n$ )

3. 若  $\lim g(x) \neq 0$ , 则  $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$

**例 1** 计算  $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 2x + 1)$

**解** 原式 =  $3 \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 2 \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 1 = \underline{3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 1} = 2$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$        $= [\lim_{x \rightarrow 1} x]^2$        $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$        $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$        $f(1)$

**注** 一般地, 对任意多项式  $f(x)$ , 均成立  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

**例 2** 计算  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 9}$

---

**例 3** 计算  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}$

**例 4** 计算  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 - 9}$

**例 2** 计算  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 9}$

**解** 原式  $= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 2x + 3}{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 + 9}$

---

**例 3** 计算  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}$

**例 4** 计算  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 - 9}$

**例 2** 计算  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 9}$

**解** 原式  $= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 2x + 3}{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 + 9} = \frac{3^2 - 2 \cdot 3 + 3}{3^2 + 9}$

---

**例 3** 计算  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}$

**例 4** 计算  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 - 9}$

**例 2** 计算  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 9}$

**解** 原式  $= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 2x + 3}{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 + 9} = \frac{3^2 - 2 \cdot 3 + 3}{3^2 + 9} = \frac{1}{3}$

---

**例 3** 计算  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}$

**例 4** 计算  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 - 9}$

**例 2** 计算  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 9}$

**解** 原式  $= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 2x + 3}{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 + 9} = \frac{3^2 - 2 \cdot 3 + 3}{3^2 + 9} = \frac{1}{3}$

---

**例 3** 计算  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}$

**解** 原式  $= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 2x - 3}{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 9}$

---

**例 4** 计算  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 - 9}$

**例 2** 计算  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 9}$

**解** 原式  $= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 2x + 3}{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 + 9} = \frac{3^2 - 2 \cdot 3 + 3}{3^2 + 9} = \frac{1}{3}$

---

**例 3** 计算  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}$

**解** 原式  $= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 2x - 3}{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 9}$

错误!

**例 4** 计算  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 - 9}$

**例 2** 计算  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 9}$

**解** 原式  $= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 2x + 3}{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 + 9} = \frac{3^2 - 2 \cdot 3 + 3}{3^2 + 9} = \frac{1}{3}$

---

**例 3** 计算  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}$

**解** 原式  $= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 2x - 3}{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 9} = \frac{3^2 - 2 \cdot 3 - 3}{3^2 - 9} = \frac{0}{0}$  **错误!**

---

**例 4** 计算  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 - 9}$



**例 2** 计算  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 9}$

**解** 原式  $= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 2x + 3}{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 + 9} = \frac{3^2 - 2 \cdot 3 + 3}{3^2 + 9} = \frac{1}{3}$

---

**例 3** 计算  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}$

**解** 原式  $= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 2x - 3}{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 9} = \frac{3^2 - 2 \cdot 3 - 3}{3^2 - 9} = \frac{0}{0}$

错误!

正解：原式

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+1)}{(x+3)(x-3)}$$

---

**例 4** 计算  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 - 9}$

**例 2** 计算  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 9}$

**解** 原式  $= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 2x + 3}{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 + 9} = \frac{3^2 - 2 \cdot 3 + 3}{3^2 + 9} = \frac{1}{3}$

---

**例 3** 计算  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}$

**解** 原式  $= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 2x - 3}{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 9} = \frac{3^2 - 2 \cdot 3 - 3}{3^2 - 9} = \frac{0}{0}$  **错误!**

正解：原式

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+1)}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x+3}$$

---

**例 4** 计算  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 - 9}$

**例 2** 计算  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 9}$

**解** 原式  $= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 2x + 3}{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 + 9} = \frac{3^2 - 2 \cdot 3 + 3}{3^2 + 9} = \frac{1}{3}$

---

**例 3** 计算  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}$

**解** 原式  $= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 2x - 3}{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 9} = \frac{3^2 - 2 \cdot 3 - 3}{3^2 - 9} = \frac{0}{0}$

错误!

正解：原式

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+1)}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x+3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x + 1}{\lim_{x \rightarrow 3} x + 3}$$

---

**例 4** 计算  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 - 9}$

**例 2** 计算  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 9}$

**解** 原式  $= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 2x + 3}{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 + 9} = \frac{3^2 - 2 \cdot 3 + 3}{3^2 + 9} = \frac{1}{3}$

---

**例 3** 计算  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}$

**解** 原式  $= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 2x - 3}{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 9} = \frac{3^2 - 2 \cdot 3 - 3}{3^2 - 9} = \frac{0}{0}$  **错误!**

正解：原式

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+1)}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x+3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x+1}{\lim_{x \rightarrow 3} x+3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

---

**例 4** 计算  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 - 9}$

例 4 计算  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 - 9}$

---

例 5 计算  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^3 - 9}$

例 4 计算  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 - 9}$

解 原式  $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 2 \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{2 - 9 \cdot \frac{1}{x^2}}$

---

例 5 计算  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^3 - 9}$

**例 4** 计算  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 - 9}$

**解** 原式  $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 2 \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{2 - 9 \cdot \frac{1}{x^2}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 3 - 2 \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 2 - 9 \cdot \frac{1}{x^2}}$

---

**例 5** 计算  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^3 - 9}$

**例 4** 计算  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 - 9}$

**解** 原式  $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 2 \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{2 - 9 \cdot \frac{1}{x^2}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 3 - 2 \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 2 - 9 \cdot \frac{1}{x^2}} = \frac{3}{2}$

---

**例 5** 计算  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^3 - 9}$



**例 4** 计算  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 - 9}$

**解** 原式  $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 2 \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{2 - 9 \cdot \frac{1}{x^2}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 3 - 2 \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 2 - 9 \cdot \frac{1}{x^2}} = \frac{3}{2}$

---

**例 5** 计算  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^3 - 9}$

**解** 原式  $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot \frac{1}{x} - 2 \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{2 - 9 \cdot \frac{1}{x^3}}$

**例 4** 计算  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 - 9}$

**解** 原式  $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 2 \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{2 - 9 \cdot \frac{1}{x^2}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 3 - 2 \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 2 - 9 \cdot \frac{1}{x^2}} = \frac{3}{2}$

---

**例 5** 计算  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^3 - 9}$

**解** 原式  $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot \frac{1}{x} - 2 \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{2 - 9 \cdot \frac{1}{x^3}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 3 \cdot \frac{1}{x} - 2 \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 2 - 9 \cdot \frac{1}{x^3}}$

**例 4** 计算  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 - 9}$

**解** 原式  $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 2 \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{2 - 9 \cdot \frac{1}{x^2}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 3 - 2 \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 2 - 9 \cdot \frac{1}{x^2}} = \frac{3}{2}$

---

**例 5** 计算  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^3 - 9}$

**解** 原式  $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot \frac{1}{x} - 2 \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{2 - 9 \cdot \frac{1}{x^3}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 3 \cdot \frac{1}{x} - 2 \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 2 - 9 \cdot \frac{1}{x^3}} = \frac{0}{2} = 0$

**性质** 设  $\lim f(x) = 0$ ，而  $g(x)$  是有界函数，则  $\lim[f(x) \cdot g(x)] = 0$ .  
(证明作为练习)

---

**性质** 设  $\lim f(x) = 0$ ，而  $g(x)$  是有界函数，则  $\lim[f(x) \cdot g(x)] = 0$ 。  
(证明作为练习)

---

**例 6** 计算  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$

**性质** 设  $\lim f(x) = 0$ ，而  $g(x)$  是有界函数，则  $\lim[f(x) \cdot g(x)] = 0$ 。  
(证明作为练习)

---

**例 6** 计算  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$

**错误解法**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x}{\lim_{x \rightarrow \infty} x}$

**性质** 设  $\lim f(x) = 0$ , 而  $g(x)$  是有界函数, 则  $\lim[f(x) \cdot g(x)] = 0$ .  
(证明作为练习)

---

**例 6** 计算  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$

**错误解法**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x}{\lim_{x \rightarrow \infty} x}$

**正解** 因为  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ , 而  $\sin x$  是有界函数 ( $|\sin x| \leq 1$ ), 所以

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

**性质** 设  $\lim f(x) = 0$ , 而  $g(x)$  是有界函数, 则  $\lim[f(x) \cdot g(x)] = 0$ .  
(证明作为练习)

---

**例 6** 计算  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$

**错误解法**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x}{\lim_{x \rightarrow \infty} x}$

**正解** 因为  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ , 而  $\sin x$  是有界函数 ( $|\sin x| \leq 1$ ), 所以

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

**注** 若  $\lim f(x) = 0$ , 则称在该极限过程下,  $f$  是**无穷小量**. 上述性质就是说, 无穷小量与有界量的乘积仍然是无穷小量.



**问题** 是否可以通过 **变量代换** 求极限?

**问题** 是否可以通过 **变量代换** 求极限？例如：

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

**问题** 是否可以通过 **变量代换** 求极限？例如：

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \xrightarrow{x=x_0+t}$$

**问题** 是否可以通过 **变量代换** 求极限？例如：

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \xrightarrow{x=x_0+t} \lim f(x_0 + t)$$

**问题** 是否可以通过 **变量代换** 求极限？例如：

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \xrightarrow{x=x_0+t} \lim_{t \rightarrow 0} f(x_0 + t)$$

**问题** 是否可以通过 **变量代换** 求极限？例如：

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \xrightarrow{x=x_0+t} \lim_{t \rightarrow 0} f(x_0 + t)$$

则前后两个结论是否相等？

**问题** 是否可以通过 **变量代换** 求极限？例如：

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \xrightarrow{x=x_0+t} \lim_{t \rightarrow 0} f(x_0 + t)$$

则前后两个结论是否相等？或者更复杂地，考虑

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

**问题** 是否可以通过 **变量代换** 求极限？例如：

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \xrightarrow{x=x_0+t} \lim_{t \rightarrow 0} f(x_0 + t)$$

则前后两个结论是否相等？或者更复杂地，考虑

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \xrightarrow{\text{假设 } x=g(t)}$$



**问题** 是否可以通过 **变量代换** 求极限？例如：

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \xrightarrow{x=x_0+t} \lim_{t \rightarrow 0} f(x_0 + t)$$

则前后两个结论是否相等？或者更复杂地，考虑

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \xrightarrow{\text{假设 } x=g(t)} \lim f[g(t)]$$

**问题** 是否可以通过 **变量代换** 求极限？例如：

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \xrightarrow{x=x_0+t} \lim_{t \rightarrow 0} f(x_0 + t)$$

则前后两个结论是否相等？或者更复杂地，考虑

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \xrightarrow[\substack{\text{假设 } x=g(t) \\ x \rightarrow x_0 \ (t \rightarrow t_0)}]{\text{假设 } x=g(t)} \lim f[g(t)]$$

**问题** 是否可以通过 **变量代换** 求极限？例如：

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \xrightarrow{x=x_0+t} \lim_{t \rightarrow 0} f(x_0 + t)$$

则前后两个结论是否相等？或者更复杂地，考虑

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \xrightarrow[\substack{\text{假设 } x=g(t) \\ x \rightarrow x_0 \ (t \rightarrow t_0)}]{\text{假设 } x=g(t)} \lim_{t \rightarrow t_0} f[g(t)]$$

**问题** 是否可以通过 **变量代换** 求极限？例如：

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \xrightarrow{x=x_0+t} \lim_{t \rightarrow 0} f(x_0 + t)$$

则前后两个结论是否相等？或者更复杂地，考虑

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \xrightarrow[\substack{\text{假设 } x=g(t) \\ x \rightarrow x_0 \ (t \rightarrow t_0)}]{\text{假设 } x=g(t)} \lim_{t \rightarrow t_0} f[g(t)]$$

事实上，上述“一般”情况都成立，称为 **复合函数的极限运算法则**

**问题** 是否可以通过 **变量代换** 求极限？例如：

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \xrightarrow{x=x_0+t} \lim_{t \rightarrow 0} f(x_0 + t)$$

则前后两个结论是否相等？或者更复杂地，考虑

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \xrightarrow[\substack{\text{假设 } x=g(t) \\ x \rightarrow x_0 \ (t \rightarrow t_0)}]{\text{假设 } x=g(t)} \lim_{t \rightarrow t_0} f[g(t)]$$

事实上，上述“一般”情况都成立，称为 **复合函数的极限运算法则**

---

**例** 假设已知  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ，求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$

**问题** 是否可以通过 **变量代换** 求极限？例如：

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \xrightarrow{x=x_0+t} \lim_{t \rightarrow 0} f(x_0 + t)$$

则前后两个结论是否相等？或者更复杂地，考虑

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \xrightarrow[\substack{\text{假设 } x=g(t) \\ x \rightarrow x_0 \ (t \rightarrow t_0)}]{\text{假设 } x=g(t)} \lim_{t \rightarrow t_0} f[g(t)]$$

事实上，上述“一般”情况都成立，称为 **复合函数的极限运算法则**

**例** 假设已知  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ，求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$

**解**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} \xrightarrow{x=\sin t}$$

**问题** 是否可以通过 **变量代换** 求极限？例如：

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \xrightarrow{x=x_0+t} \lim_{t \rightarrow 0} f(x_0 + t)$$

则前后两个结论是否相等？或者更复杂地，考虑

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \xrightarrow[\substack{\text{假设 } x=g(t) \\ x \rightarrow x_0 (t \rightarrow t_0)}]{\text{假设 } x=g(t)} \lim_{t \rightarrow t_0} f[g(t)]$$

事实上，上述“一般”情况都成立，称为 **复合函数的极限运算法则**

**例** 假设已知  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ，求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$

**解**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} \xrightarrow{x=\sin t} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t}$$

**问题** 是否可以通过 **变量代换** 求极限？例如：

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \xrightarrow{x=x_0+t} \lim_{t \rightarrow 0} f(x_0 + t)$$

则前后两个结论是否相等？或者更复杂地，考虑

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \xrightarrow[\substack{\text{假设 } x=g(t) \\ x \rightarrow x_0 \ (t \rightarrow t_0)}]{\text{假设 } x=g(t)} \lim_{t \rightarrow t_0} f[g(t)]$$

事实上，上述“一般”情况都成立，称为 **复合函数的极限运算法则**

**例** 假设已知  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ，求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$

**解**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} \xrightarrow{x=\sin t} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t}$$



**问题** 是否可以通过 **变量代换** 求极限？例如：

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \xrightarrow{x=x_0+t} \lim_{t \rightarrow 0} f(x_0 + t)$$

则前后两个结论是否相等？或者更复杂地，考虑

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \xrightarrow[\substack{\text{假设 } x=g(t) \\ x \rightarrow x_0 \ (t \rightarrow t_0)}]{\text{假设 } x=g(t)} \lim_{t \rightarrow t_0} f[g(t)]$$

事实上，上述“一般”情况都成立，称为 **复合函数的极限运算法则**

**例** 假设已知  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ，求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$

**解**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} \xrightarrow{x=\sin t} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = 1$$

# We are here now...

1. 数列极限
2. 函数极限
3. 极限运算
4. 极限性质
5. 两个重要极限
6. 无穷大，无穷小

# 函数极限的性质

**定理 1 (唯一性)** 如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在, 那么这极限唯一.

# 函数极限的性质

**定理 1 (唯一性)** 如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在, 那么这极限唯一.

**定理 2 (有界性)** 如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  存在, 那么  $f$  在  $x_0$  附近是有界

# 函数极限的性质

**定理 1 (唯一性)** 如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在, 那么这极限唯一.

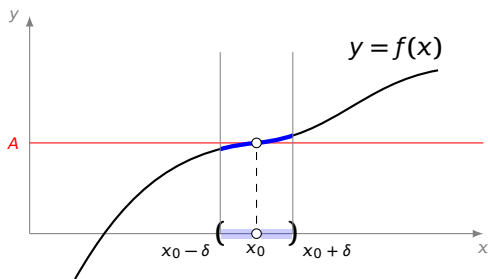
**定理 2 (有界性)** 如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  存在, 那么  $f$  在  $x_0$  附近是有界:  
存在常数  $M > 0$  和  $\delta > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有  $|f(x)| \leq M$ .

**定理 3 (保号性)** 如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ,

- 若  $A > 0$ , 则  $\exists \delta > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 都有  $f(x) > 0$ .

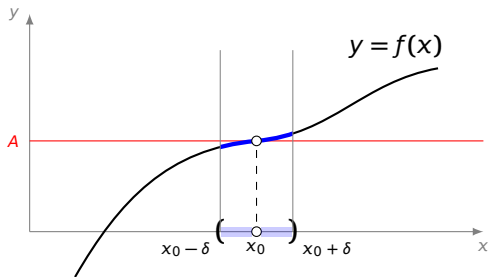
**定理 3 (保号性)** 如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ,

- 若  $A > 0$ , 则  $\exists \delta > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 都有  $f(x) > 0$ .



**定理 3 (保号性)** 如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ,

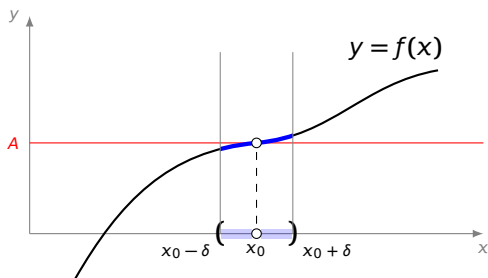
- 若  $A > 0$ , 则  $\exists \delta > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 都有  $f(x) > 0$ .
- 若  $A < 0$ , 则  $\exists \delta > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 都有  $f(x) < 0$ .





**定理 3 (保号性)** 如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ,

- 若  $A > 0$ , 则  $\exists \delta > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 都有  $f(x) > 0$ .
- 若  $A < 0$ , 则  $\exists \delta > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 都有  $f(x) < 0$ .

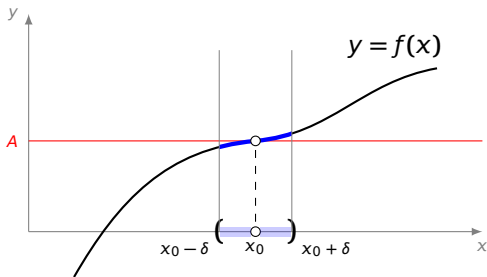


**推论** 设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ,

- 若在  $x_0$  附近都有  $f(x) \geq 0$ , 则  $A \geq 0$ .

**定理 3 (保号性)** 如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ,

- 若  $A > 0$ , 则  $\exists \delta > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 都有  $f(x) > 0$ .
- 若  $A < 0$ , 则  $\exists \delta > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 都有  $f(x) < 0$ .



**推论** 设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ,

- 若在  $x_0$  附近都有  $f(x) \geq 0$ , 则  $A \geq 0$ .
- 若在  $x_0$  附近都有  $f(x) \leq 0$ , 则  $A \leq 0$ .

# We are here now...

1. 数列极限
2. 函数极限
3. 极限运算
4. 极限性质
5. 两个重要极限
6. 无穷大, 无穷小

# 两个重要极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

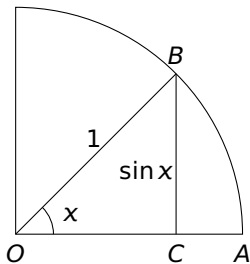
**重要极限 I**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  (也就是,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ )

**重要极限 I**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  (也就是,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ )

**证明** 只需证明  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ , 所以假设  $x > 0$ .

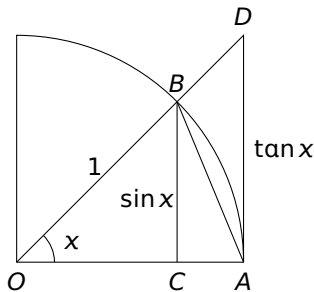
**重要极限 I**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  (也就是,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ )

**证明** 只需证明  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ , 所以假设  $x > 0$ . 如图



**重要极限 I**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  (也就是,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ )

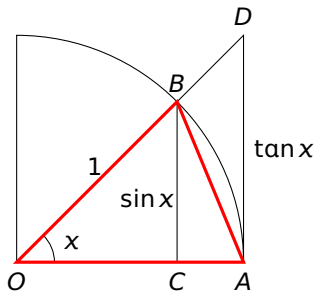
**证明** 只需证明  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ , 所以假设  $x > 0$ . 如图





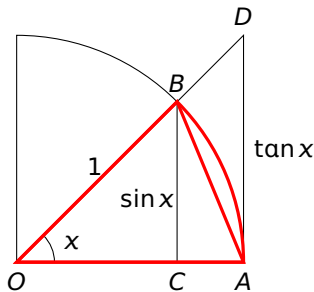
**重要极限 I**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  (也就是,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ )

**证明** 只需证明  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ , 所以假设  $x > 0$ . 如图



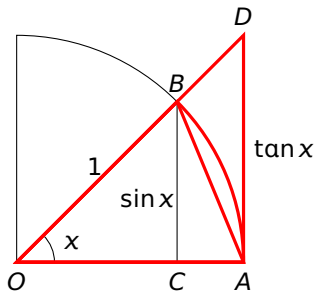
**重要极限 I**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  (也就是,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ )

**证明** 只需证明  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ , 所以假设  $x > 0$ . 如图



**重要极限 I**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  (也就是,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ )

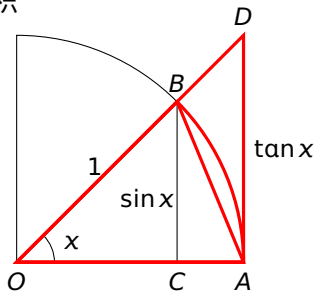
**证明** 只需证明  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ , 所以假设  $x > 0$ . 如图



**重要极限 I**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  (也就是,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ )

**证明** 只需证明  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ , 所以假设  $x > 0$ . 如图

$\Delta AOB$  面积  $<$  扇形  $AOB$  面积  $<$   $\Delta AOD$  面积

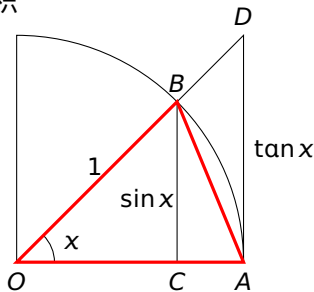


**重要极限 I**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  (也就是,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ )

**证明** 只需证明  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ , 所以假设  $x > 0$ . 如图

$\Delta AOB$  面积  $<$  扇形  $AOB$  面积  $<$   $\Delta AOD$  面积

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x$$



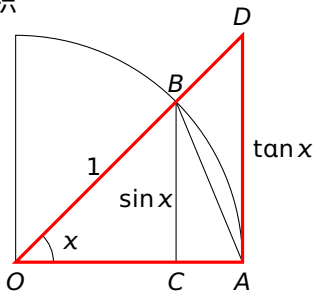
**重要极限 I**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  (也就是,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ )

**证明** 只需证明  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ , 所以假设  $x > 0$ . 如图

$\Delta AOB$  面积  $<$  扇形  $AOB$  面积  $<$   $\Delta AOD$  面积

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x$$

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x$$

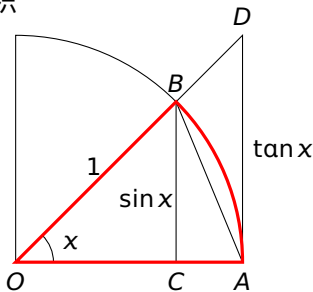


**重要极限 I**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  (也就是,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ )

**证明** 只需证明  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ , 所以假设  $x > 0$ . 如图

$\Delta AOB$  面积  $<$  扇形  $AOB$  面积  $<$   $\Delta AOD$  面积

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x \quad \frac{x}{2\pi} \cdot \pi \quad \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x$$

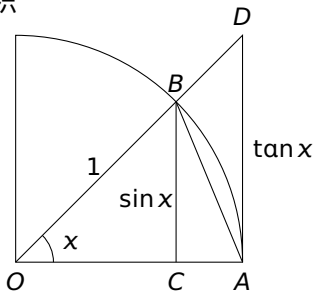


**重要极限 I**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  (也就是,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ )

**证明** 只需证明  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ , 所以假设  $x > 0$ . 如图

$\Delta AOB$  面积  $<$  扇形  $AOB$  面积  $<$   $\Delta AOD$  面积

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x < \frac{x}{2\pi} \cdot \pi < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x$$





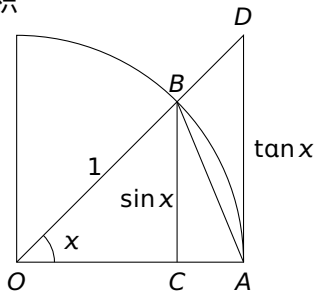
**重要极限 I**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  (也就是,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ )

**证明** 只需证明  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ , 所以假设  $x > 0$ . 如图

$\Delta AOB$  面积  $<$  扇形  $AOB$  面积  $<$   $\Delta AOD$  面积

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x < \frac{x}{2\pi} \cdot \pi < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x$$

$$\Rightarrow \sin x < x < \tan x$$



**重要极限 I**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  (也就是,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ )

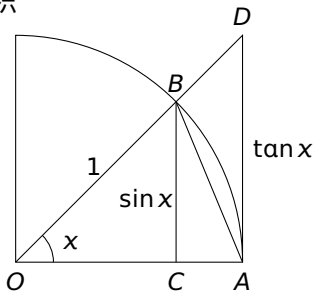
**证明** 只需证明  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ , 所以假设  $x > 0$ . 如图

$\Delta AOB$  面积  $<$  扇形  $AOB$  面积  $<$   $\Delta AOD$  面积

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x < \frac{x}{2\pi} \cdot \pi < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x$$

$$\Rightarrow \sin x < x < \tan x$$

$$\Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$



**重要极限 I**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  (也就是,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ )

**证明** 只需证明  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ , 所以假设  $x > 0$ . 如图

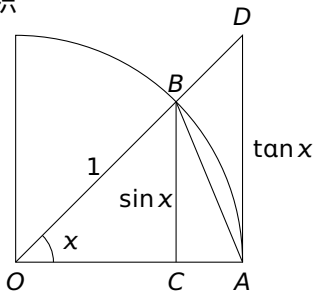
$\Delta AOB$  面积  $<$  扇形  $AOB$  面积  $<$   $\Delta AOD$  面积

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x < \frac{x}{2\pi} \cdot \pi < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x$$

$$\Rightarrow \sin x < x < \tan x$$

$$\Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x$$



**重要极限 I**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  (也就是,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ )

**证明** 只需证明  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ , 所以假设  $x > 0$ . 如图

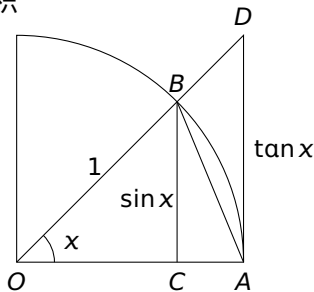
$\Delta AOB$  面积  $<$  扇形  $AOB$  面积  $<$   $\Delta AOD$  面积

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x < \frac{x}{2\pi} \cdot \pi < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x$$

$$\Rightarrow \sin x < x < \tan x$$

$$\Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$



**重要极限 I**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  (也就是,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ )

**证明** 只需证明  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ , 所以假设  $x > 0$ . 如图

$\Delta AOB$  面积  $<$  扇形  $AOB$  面积  $<$   $\Delta AOD$  面积

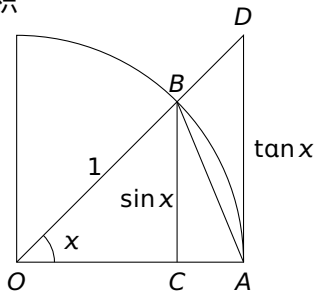
$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x < \frac{x}{2\pi} \cdot \pi < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x$$

$$\Rightarrow \sin x < x < \tan x$$

$$\Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

(利用  $\sin \frac{x}{2} < \frac{x}{2}$ )

$$\Rightarrow 0 < \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$



**重要极限 I**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  (也就是,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ )

**证明** 只需证明  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ , 所以假设  $x > 0$ . 如图

$\Delta AOB$  面积  $<$  扇形  $AOB$  面积  $<$   $\Delta AOD$  面积

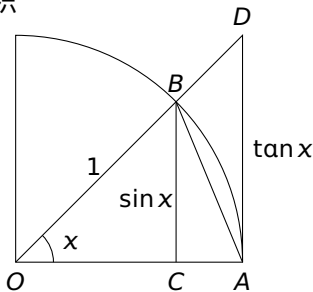
$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x < \frac{x}{2\pi} \cdot \pi < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x$$

$$\Rightarrow \sin x < x < \tan x$$

$$\Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} < \frac{x^2}{2}$$

(利用  $\sin \frac{x}{2} < \frac{x}{2}$ )



**重要极限 I**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  (也就是,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ )

**证明** 只需证明  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ , 所以假设  $x > 0$ . 如图

$\triangle AOB$  面积  $<$  扇形  $AOB$  面积  $<$   $\triangle AOD$  面积

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x < \frac{x}{2\pi} \cdot \pi < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x$$

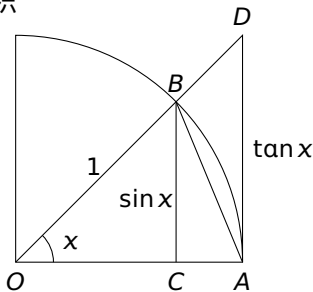
$$\Rightarrow \sin x < x < \tan x$$

$$\Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

(利用  $\sin \frac{x}{2} < \frac{x}{2}$ )

$$\Rightarrow 0 < \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} < \frac{x^2}{2}$$

可见  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .



**重要极限 I**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  (也就是,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ )

**证明** 只需证明  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ , 所以假设  $x > 0$ . 如图

$\triangle AOB$  面积  $<$  扇形  $AOB$  面积  $<$   $\triangle AOD$  面积

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x < \frac{x}{2\pi} \cdot \pi < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x$$

$$\Rightarrow \sin x < x < \tan x$$

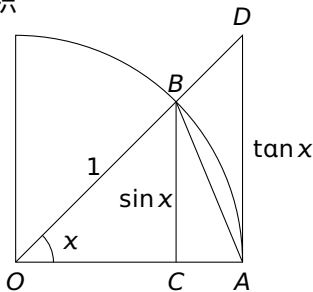
$$\Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

(利用  $\sin \frac{x}{2} < \frac{x}{2}$ )

$$\Rightarrow 0 < \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} < \frac{x^2}{2}$$

可见  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

**注 1** 重要不等式:  $x > 0$  时, 成立  $x < \sin x < \tan x$





**重要极限 I**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  (也就是,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ )

**证明** 只需证明  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ , 所以假设  $x > 0$ . 如图

$\triangle AOB$  面积  $<$  扇形  $AOB$  面积  $<$   $\triangle AOD$  面积

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x < \frac{x}{2\pi} \cdot \pi < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x$$

$$\Rightarrow \sin x < x < \tan x$$

$$\Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

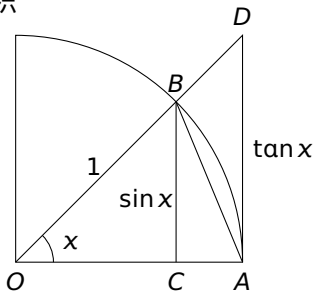
(利用  $\sin \frac{x}{2} < \frac{x}{2}$ )

$$\Rightarrow 0 < \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} < \frac{x^2}{2}$$

可见  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

**注 1** 重要不等式:  $x > 0$  时, 成立  $x < \sin x < \tan x$

**注 2** 由证明可知:  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$



**例 1** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

---

**例 2** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 4x}$

---

**例 3** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

**例 1** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

**解** 原式  $= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x}$

---

**例 2** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 4x}$

---

**例 3** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

**例 1** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

**解** 原式  $= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \stackrel{t=3x}{=} 3 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t}$

---

**例 2** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 4x}$

**例 3** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

**例 1** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

**解** 原式  $= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \xrightarrow{t=3x} 3 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t}$

---

**例 2** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 4x}$

**例 3** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

**例 1** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

**解** 原式  $= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \stackrel{t=3x}{=} 3 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 3$

---

**例 2** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 4x}$

**例 3** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

**例 1** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

**解** 原式  $= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \xrightarrow{t=3x} 3 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 3$

---

**例 2** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 4x}$

**解** 原式  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{4x}{\sin 4x}$

---

**例 3** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

**例 1** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

**解** 原式  $= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \stackrel{t=3x}{=} 3 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 3$

---

**例 2** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 4x}$

**解** 原式  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{4x}{\sin 4x} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sin 4x}$

---

**例 3** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$



**例 1** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

**解** 原式  $= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \xrightarrow{t=3x} 3 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 3$

---

**例 2** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 4x}$

**解** 原式  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{4x}{\sin 4x} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sin 4x} = \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{4}$

---

**例 3** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

**例 1** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

**解** 原式  $= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \stackrel{t=3x}{=} 3 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 3$

---

**例 2** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 4x}$

**解** 原式  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{4x}{\sin 4x} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sin 4x} = \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{4}$

---

**例 3** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

**解** 原式  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}$

**例 1** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

**解** 原式  $= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \stackrel{t=3x}{=} 3 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 3$

---

**例 2** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 4x}$

**解** 原式  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{4x}{\sin 4x} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sin 4x} = \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{4}$

---

**例 3** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

**解** 原式  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x}$

**例 1** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

**解** 原式  $= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \stackrel{t=3x}{=} 3 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 3$

---

**例 2** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 4x}$

**解** 原式  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{4x}{\sin 4x} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sin 4x} = \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{4}$

---

**例 3** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

**解** 原式  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1$

**例 1** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

**解** 原式  $= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \stackrel{t=3x}{=} 3 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 3$

---

**例 2** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 4x}$

**解** 原式  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{4x}{\sin 4x} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sin 4x} = \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{4}$

---

**例 3** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

**解** 原式  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1$

---

**例 4** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x}$

**例 4** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x}$

**解**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2} \quad \underline{\underline{t=x^2}}$$

**例 4** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x}$

**解**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2} \stackrel{t=x^2}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{3t}$$

**例 4** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x}$

**解**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2} \xrightarrow{t=x^2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{3t}$$



**例 4** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x}$

**解**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2} \stackrel{t=x^2}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{3t} = \frac{2}{3}$$

**例 4** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x}$

**解**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2} \stackrel{t=x^2}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{3t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{2t} \cdot \frac{3t}{\sin 3t} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

**例 4** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x}$

**解**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2} \stackrel{t=x^2}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{3t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{2t} \cdot \frac{3t}{\sin 3t} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{5} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{5x}{\tan 5x}$$

**例 4** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x}$

**解**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2} \stackrel{t=x^2}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{3t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{2t} \cdot \frac{3t}{\sin 3t} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{5} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{5x}{\tan 5x} = \frac{3}{5} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{3}{5}$$

**例 4** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x}$

**解**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2} \xrightarrow{t=x^2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{3t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{2t} \cdot \frac{3t}{\sin 3t} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{5} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{5x}{\tan 5x} = \frac{3}{5} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x} \xrightarrow{t=\sqrt{x}}$$

**例 4** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x}$

**解**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2} \xrightarrow{t=x^2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{3t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{2t} \cdot \frac{3t}{\sin 3t} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{5} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{5x}{\tan 5x} = \frac{3}{5} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x} \xrightarrow{t=\sqrt{x}} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t \tan t}{t^2}$$

**例 4** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x}$

**解**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2} \stackrel{t=x^2}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{3t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{2t} \cdot \frac{3t}{\sin 3t} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{5} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{5x}{\tan 5x} = \frac{3}{5} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x} \stackrel{t=\sqrt{x}}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t \tan t}{t^2}$$

**例 4** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x}$

**解**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2} \stackrel{t=x^2}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{3t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{2t} \cdot \frac{3t}{\sin 3t} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{5} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{5x}{\tan 5x} = \frac{3}{5} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x} \stackrel{t=\sqrt{x}}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t \tan t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\tan t}{t}$$



**例 4** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x}$

**解**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2} \stackrel{t=x^2}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{3t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{2t} \cdot \frac{3t}{\sin 3t} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{5} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{5x}{\tan 5x} = \frac{3}{5} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x} \stackrel{t=\sqrt{x}}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t \tan t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\tan t}{t} = 1$$

**例 4** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x}$

**解**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2} \stackrel{t=x^2}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{3t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{2t} \cdot \frac{3t}{\sin 3t} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{5} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{5x}{\tan 5x} = \frac{3}{5} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x} \stackrel{t=\sqrt{x}}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t \tan t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\tan t}{t} = 1$$

**例 5** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x}$

**例 4** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x}$

**解**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2} \xrightarrow{t=x^2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{3t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{2t} \cdot \frac{3t}{\sin 3t} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{5} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{5x}{\tan 5x} = \frac{3}{5} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x} \xrightarrow{t=\sqrt{x}} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t \tan t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\tan t}{t} = 1$$

**例 5** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x}$

**解**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} \xrightarrow{x=\sin t}$$

**例 4** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x}$

**解**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2} \xrightarrow{t=x^2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{3t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{2t} \cdot \frac{3t}{\sin 3t} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{5} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{5x}{\tan 5x} = \frac{3}{5} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x} \xrightarrow{t=\sqrt{x}} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t \tan t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\tan t}{t} = 1$$

---

**例 5** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x}$

**解**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} \xrightarrow{x=\sin t} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t}$$

**例 4** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x}$

**解**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2} \xrightarrow{t=x^2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{3t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{2t} \cdot \frac{3t}{\sin 3t} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{5} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{5x}{\tan 5x} = \frac{3}{5} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x} \xrightarrow{t=\sqrt{x}} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t \tan t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\tan t}{t} = 1$$

**例 5** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x}$

**解**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} \xrightarrow{x=\sin t} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t}$$

**例 4** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x}$

**解**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2} \xrightarrow{t=x^2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{3t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{2t} \cdot \frac{3t}{\sin 3t} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{5} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{5x}{\tan 5x} = \frac{3}{5} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x} \xrightarrow{t=\sqrt{x}} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t \tan t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\tan t}{t} = 1$$

---

**例 5** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x}$

**解**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} \xrightarrow{x=\sin t} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = 1,$$

**例 4** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x}$

**解**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2} \xrightarrow{t=x^2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{3t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{2t} \cdot \frac{3t}{\sin 3t} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{5} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{5x}{\tan 5x} = \frac{3}{5} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x} \xrightarrow{t=\sqrt{x}} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t \tan t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\tan t}{t} = 1$$

**例 5** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x}$

**解**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} \xrightarrow{x=\sin t} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} \xrightarrow{x=\tan t}$$

**例 4** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x}$

**解**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2} \stackrel{t=x^2}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{3t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{2t} \cdot \frac{3t}{\sin 3t} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{5} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{5x}{\tan 5x} = \frac{3}{5} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x} \stackrel{t=\sqrt{x}}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t \tan t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\tan t}{t} = 1$$

**例 5** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x}$

**解**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} \stackrel{x=\sin t}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} \stackrel{x=\tan t}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\tan t}$$



**例 4** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x}$

**解**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2} \xrightarrow{t=2x^2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{3t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{2t} \cdot \frac{3t}{\sin 3t} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{5} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{5x}{\tan 5x} = \frac{3}{5} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x} \xrightarrow{t=\sqrt{x}} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t \tan t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\tan t}{t} = 1$$

**例 5** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x}$

**解**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} \xrightarrow{x=\sin t} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} \xrightarrow{x=\tan t} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\tan t}$$

**例 4** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x}$

**解**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2} \xrightarrow{t=2x^2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{3t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{2t} \cdot \frac{3t}{\sin 3t} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{5} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{5x}{\tan 5x} = \frac{3}{5} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x} \xrightarrow{t=\sqrt{x}} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t \tan t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\tan t}{t} = 1$$

**例 5** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x}$

**解**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} \xrightarrow{x=\sin t} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} \xrightarrow{x=\tan t} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\tan t} = 1$$

# 小结

我们已经得到了以下常用极限：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

# 重要极限 II

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

---

**重要极限 II**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \xRightarrow{t=1/x} \quad \lim (1+t)^{1/t} = e$

---

**重要极限 II**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \xRightarrow{t=1/x} \quad \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e$

---

**重要极限 II**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \xRightarrow{t=1/x} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e$

---

**例 1** 计算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$$

**重要极限 II**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \xRightarrow{t=1/x} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e$

---

**例 1** 计算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=2t}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$$



**重要极限 II**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \xrightarrow{t=1/x} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e$

---

**例 1** 计算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{2t}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$$

**重要极限 II**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \xrightarrow{t=1/x} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e$

---

**例 1** 计算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{2t}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$$

**重要极限 II**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \xrightarrow{t=1/x} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e$

---

**例 1** 计算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$$

**重要极限 II**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \xRightarrow{t=1/x} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e$

---

**例 1** 计算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x \xRightarrow{x=2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^2 = e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$$

**重要极限 II**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \xrightarrow{t=1/x} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e$

---

**例 1** 计算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^2 = e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=-2t}$$

**重要极限 II**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \xrightarrow{t=1/x} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e$

---

**例 1** 计算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^2 = e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=-2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-2t}$$

**重要极限 II**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \xrightarrow{t=1/x} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e$

---

**例 1** 计算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^2 = e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=-2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-2t}$$

**重要极限 II**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \xrightarrow{t=1/x} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e$

---

**例 1** 计算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^2 = e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=-2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^{-2} = e^{-2}$$



**重要极限 II**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \xrightarrow{t=1/x} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e$

---

**例 1** 计算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^2 = e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=-2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^{-2} = e^{-2}$$

**重要极限 II**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \xrightarrow{t=1/x} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e$

---

**例 1** 计算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^2 = e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=-2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^{-2} = e^{-2}$$

---

**例 2** 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

**重要极限 II**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \xrightarrow{t=1/x} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e$

---

**例 1** 计算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^2 = e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=-2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^{-2} = e^{-2}$$

---

**例 2** 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{t=x/2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

**重要极限 II**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \xrightarrow{t=1/x} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e$

---

**例 1** 计算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^2 = e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=-2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^{-2} = e^{-2}$$

---

**例 2** 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{t=x/2} \lim (1+t)^{\frac{1}{2t}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

**重要极限 II**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \xrightarrow{t=1/x} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e$

---

**例 1** 计算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^2 = e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=-2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^{-2} = e^{-2}$$

---

**例 2** 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{t=x/2} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{2t}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

**重要极限 II**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \xrightarrow{t=1/x} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e$

---

**例 1** 计算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^2 = e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=-2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^{-2} = e^{-2}$$

---

**例 2** 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{t=x/2} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{2t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left[(1+t)^{1/t}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

**重要极限 II**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \xrightarrow{t=1/x} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e$

---

**例 1** 计算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^2 = e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=-2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^{-2} = e^{-2}$$

---

**例 2** 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{t=x/2} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{2t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left[(1+t)^{1/t}\right]^{\frac{1}{2}} = e^{1/2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

**重要极限 II**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \xrightarrow{t=1/x} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e$

---

**例 1** 计算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^2 = e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=-2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^{-2} = e^{-2}$$

---

**例 2** 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{t=x/2} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{2t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left[(1+t)^{1/t}\right]^{\frac{1}{2}} = e^{1/2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{t=-x/2}$$



**重要极限 II**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \xrightarrow{t=1/x} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e$

---

**例 1** 计算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^2 = e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=-2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^{-2} = e^{-2}$$

---

**例 2** 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{t=x/2} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{2t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left[(1+t)^{1/t}\right]^{\frac{1}{2}} = e^{1/2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{t=-x/2} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{-\frac{1}{2t}}$$

**重要极限 II**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \xrightarrow{t=1/x} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e$

---

**例 1** 计算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^2 = e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=-2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^{-2} = e^{-2}$$

---

**例 2** 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{t=x/2} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{2t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left[(1+t)^{1/t}\right]^{\frac{1}{2}} = e^{1/2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{t=-x/2} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{-\frac{1}{2t}}$$

**重要极限 II**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \xrightarrow{t=1/x} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e$

---

**例 1** 计算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^2 = e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=-2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^{-2} = e^{-2}$$

---

**例 2** 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{t=x/2} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{2t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left[(1+t)^{1/t}\right]^{\frac{1}{2}} = e^{1/2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{t=-x/2} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{-\frac{1}{2t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^{-\frac{1}{2}}$$

**重要极限 II**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \xrightarrow{t=1/x} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e$

---

**例 1** 计算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^2 = e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=-2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^{-2} = e^{-2}$$

---

**例 2** 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{t=x/2} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{2t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left[(1+t)^{1/t}\right]^{\frac{1}{2}} = e^{1/2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{t=-x/2} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{-\frac{1}{2t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^{-\frac{1}{2}} = e^{-1/2}$$

### 例 3 计算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x} \right)^{x+1}$$

### 例 3 计算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{x-1} \right)^x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x} \right)^{x+1}$$

### 例 3 计算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{x-1} \right)^x$$
$$\underline{\underline{t = \frac{x-1}{2}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x} \right)^{x+1}$$

### 例 3 计算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{x-1} \right)^x$$
$$\stackrel{t=\frac{x-1}{2}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^{2t+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x} \right)^{x+1}$$



### 例 3 计算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{x-1} \right)^x$$
$$\stackrel{t=\frac{x-1}{2}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^{2t+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x} \right)^{x+1}$$

### 例 3 计算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{x-1} \right)^x$$

$$\stackrel{t=\frac{x-1}{2}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^{2t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^{2t} \cdot \left( 1 + \frac{1}{t} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x} \right)^{x+1}$$

### 例 3 计算

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{x-1} \right)^x \\ &\stackrel{t=\frac{x-1}{2}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^{2t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^{2t} \cdot \left( 1 + \frac{1}{t} \right) = e^2\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x} \right)^{x+1}$$

### 例 3 计算

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{x-1} \right)^x \\ &\stackrel{t=\frac{x-1}{2}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^{2t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^{2t} \cdot \left( 1 + \frac{1}{t} \right) = e^2\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x} \right)^{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{x} \right)^{x+1}$$

### 例 3 计算

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{x-1} \right)^x \\ &\stackrel{t=\frac{x-1}{2}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^{2t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^{2t} \cdot \left( 1 + \frac{1}{t} \right) = e^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x} \right)^{x+1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{x} \right)^{x+1} \\ &\stackrel{t=-x}{=}\end{aligned}$$

### 例 3 计算

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{x-1} \right)^x \\ &\stackrel{t=\frac{x-1}{2}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^{2t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^{2t} \cdot \left( 1 + \frac{1}{t} \right) = e^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x} \right)^{x+1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{x} \right)^{x+1} \\ &\stackrel{t=-x}{=} \lim_{t \rightarrow -\infty} \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^{-t+1}\end{aligned}$$

### 例 3 计算

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{x-1} \right)^x \\ &\stackrel{t=\frac{x-1}{2}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^{2t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^{2t} \cdot \left( 1 + \frac{1}{t} \right) = e^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x} \right)^{x+1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{x} \right)^{x+1} \\ &\stackrel{t=-x}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^{-t+1}\end{aligned}$$

### 例 3 计算

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{x-1} \right)^x \\ &\stackrel{t=\frac{x-1}{2}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^{2t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^{2t} \cdot \left( 1 + \frac{1}{t} \right) = e^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x} \right)^{x+1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{x} \right)^{x+1} \\ &\stackrel{t=-x}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^{-t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\left( 1 + \frac{1}{t} \right)^t} \cdot \left( 1 + \frac{1}{t} \right)\end{aligned}$$



### 例3 计算

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{x-1} \right)^x \\ &\stackrel{t=\frac{x-1}{2}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^{2t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^{2t} \cdot \left( 1 + \frac{1}{t} \right) = e^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x} \right)^{x+1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{x} \right)^{x+1} \\ &\stackrel{t=-x}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^{-t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\left( 1 + \frac{1}{t} \right)^t} \cdot \left( 1 + \frac{1}{t} \right) = e^{-1}\end{aligned}$$

### 例 3 计算

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{x-1} \right)^x \\ &\stackrel{t=\frac{x-1}{2}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^{2t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^{2t} \cdot \left( 1 + \frac{1}{t} \right) = e^2 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x} \right)^{x+1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{x} \right)^{x+1} \\ &\stackrel{t=-x}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^{-t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\left( 1 + \frac{1}{t} \right)^t} \cdot \left( 1 + \frac{1}{t} \right) = e^{-1}\end{aligned}$$

### 例 4 计算

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}}$$

### 例 3 计算

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{x-1} \right)^x \\ &\stackrel{t=\frac{x-1}{2}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^{2t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^{2t} \cdot \left( 1 + \frac{1}{t} \right) = e^2 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x} \right)^{x+1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{x} \right)^{x+1} \\ &\stackrel{t=-x}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^{-t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\left( 1 + \frac{1}{t} \right)^t} \cdot \left( 1 + \frac{1}{t} \right) = e^{-1}\end{aligned}$$

### 例 4 计算

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}} \stackrel{t=x-1}{=}$$

### 例 3 计算

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{x-1} \right)^x \\ &\stackrel{t=\frac{x-1}{2}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^{2t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^{2t} \cdot \left( 1 + \frac{1}{t} \right) = e^2 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x} \right)^{x+1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{x} \right)^{x+1} \\ &\stackrel{t=-x}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^{-t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\left( 1 + \frac{1}{t} \right)^t} \cdot \left( 1 + \frac{1}{t} \right) = e^{-1}\end{aligned}$$

### 例 4 计算

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}} \stackrel{t=x-1}{=} \lim_{t \rightarrow 0} (t+1)^{\frac{1}{t}}$$

### 例 3 计算

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{x-1} \right)^x \\ &\stackrel{t=\frac{x-1}{2}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^{2t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^{2t} \cdot \left( 1 + \frac{1}{t} \right) = e^2 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x} \right)^{x+1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{x} \right)^{x+1} \\ &\stackrel{t=-x}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^{-t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\left( 1 + \frac{1}{t} \right)^t} \cdot \left( 1 + \frac{1}{t} \right) = e^{-1}\end{aligned}$$

### 例 4 计算

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}} \stackrel{t=x-1}{=} \lim_{t \rightarrow 0} (t+1)^{\frac{1}{t}}$$

### 例 3 计算

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{x-1} \right)^x \\ &\stackrel{t=\frac{x-1}{2}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^{2t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^{2t} \cdot \left( 1 + \frac{1}{t} \right) = e^2 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x} \right)^{x+1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{x} \right)^{x+1} \\ &\stackrel{t=-x}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^{-t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\left( 1 + \frac{1}{t} \right)^t} \cdot \left( 1 + \frac{1}{t} \right) = e^{-1}\end{aligned}$$

### 例 4 计算

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}} \stackrel{t=x-1}{=} \lim_{t \rightarrow 0} (t+1)^{\frac{1}{t}} = e$$

## 例 5 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{\sin x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{4x}}$$

## 例 5 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{3x} \cdot \frac{3x}{\sin x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{4x}}$$



## 例 5 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{3x} \cdot \frac{3x}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ (1 + 3x)^{\frac{1}{3x}} \right]^{\frac{3x}{\sin x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{4x}}$$

### 例 5 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{3x} \cdot \frac{3x}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ (1 + 3x)^{\frac{1}{3x}} \right]^{\frac{3x}{\sin x}} = e^3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{4x}}$$

## 例 5 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{3x} \cdot \frac{3x}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ (1 + 3x)^{\frac{1}{3x}} \right]^{\frac{3x}{\sin x}} = e^3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{4x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{4x}}$$

## 例 5 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{3x} \cdot \frac{3x}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ (1 + 3x)^{\frac{1}{3x}} \right]^{\frac{3x}{\sin x}} = e^3$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{4x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{4x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ (1 - \sin x)^{\frac{1}{\sin x}} \right]^{\frac{\sin x}{4x}} \end{aligned}$$

## 例 5 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{3x} \cdot \frac{3x}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ (1 + 3x)^{\frac{1}{3x}} \right]^{\frac{3x}{\sin x}} = e^3$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{4x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{4x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ (1 - \sin x)^{\frac{1}{\sin x}} \right]^{\frac{\sin x}{4x}} \end{aligned}$$

(利用  $\lim_{t \rightarrow \infty} (1 - t)^{\frac{1}{t}} = e^{-1}$ )

## 例 5 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{3x} \cdot \frac{3x}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ (1 + 3x)^{\frac{1}{3x}} \right]^{\frac{3x}{\sin x}} = e^3$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{4x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{4x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ (1 - \sin x)^{\frac{1}{\sin x}} \right]^{\frac{\sin x}{4x}} = e^{-\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

(利用  $\lim_{t \rightarrow \infty} (1 - t)^{\frac{1}{t}} = e^{-1}$ )

# 小结

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = e^{-1}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1 - t)^{\frac{1}{t}} = e^{-1}$$

# We are here now...

1. 数列极限
2. 函数极限
3. 极限运算
4. 极限性质
5. 两个重要极限
6. 无穷大，无穷小



**定义** 如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  (或  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ) , 则称  $f(x)$  为当  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 时的**无穷小**.

**定义** 如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  (或  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ) , 则称  $f(x)$  为当  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 时的**无穷小**.

**例** 因为  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ , 所以说  $\frac{1}{x}$  为当  $x \rightarrow \infty$  时的无穷小.

**定义** 如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  (或  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ) , 则称  $f(x)$  为当  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 时的**无穷小**.

**例** 因为  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ , 所以说  $\frac{1}{x}$  为当  $x \rightarrow \infty$  时的无穷小.

---

**性质**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$ , 其中  $\alpha$  为当  $x \rightarrow x_0$  时的无穷小.

**定义** 如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  (或  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ) , 则称  $f(x)$  为当  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 时的**无穷小**.

**例** 因为  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ , 所以说  $\frac{1}{x}$  为当  $x \rightarrow \infty$  时的无穷小.

---

**性质**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$ , 其中  $\alpha$  为当  $x \rightarrow x_0$  时的无穷小.

**证明**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - A] = 0$$

**定义** 如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  (或  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ) , 则称  $f(x)$  为当  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 时的**无穷小**.

**例** 因为  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ , 所以说  $\frac{1}{x}$  为当  $x \rightarrow \infty$  时的无穷小.

---

**性质**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$ , 其中  $\alpha$  为当  $x \rightarrow x_0$  时的无穷小.

**证明**

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - A] = 0 \\ &\Leftrightarrow f(x) - A \text{ 是无穷小}\end{aligned}$$

**定义** 如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  (或  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ) , 则称  $f(x)$  为当  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 时的**无穷小**.

**例** 因为  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ , 所以说  $\frac{1}{x}$  为当  $x \rightarrow \infty$  时的无穷小.

---

**性质**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$ , 其中  $\alpha$  为当  $x \rightarrow x_0$  时的无穷小.

**证明**

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - A] = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha := f(x) - A \text{ 是无穷小}\end{aligned}$$

**定义** 如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  (或  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ) , 则称  $f(x)$  为当  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 时的**无穷小**.

**例** 因为  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ , 所以说  $\frac{1}{x}$  为当  $x \rightarrow \infty$  时的无穷小.

---

**性质**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$ , 其中  $\alpha$  为当  $x \rightarrow x_0$  时的无穷小.

(把  $x \rightarrow x_0$  换成  $x \rightarrow \infty$ , 上述结论仍成立)

**证明**

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - A] = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha := f(x) - A \text{ 是无穷小}\end{aligned}$$

**定义** 如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$  (或  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ) , 则称  $f(x)$  为当  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 时的**无穷大**.



**定义** 如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$  (或  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ) , 则称  $f(x)$  为当  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 时的**无穷大**.

**注**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$  指:  $\forall M > 0$ ,  $\exists \delta > 0$ , 使得  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有  $|f(x)| > M$ .

**定义** 如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$  (或  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ) , 则称  $f(x)$  为当  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 时的**无穷大**.

**注**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$  指:  $\forall M > 0, \exists \delta > 0$ , 使得  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有  $|f(x)| > M$ .

同理可定义  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ .

**定义** 如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$  (或  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ) , 则称  $f(x)$  为当  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 时的**无穷大**.

**注**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$  指:  $\forall M > 0, \exists \delta > 0$ , 使得  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有  $|f(x)| > M$ .

同理可定义  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ .

**例** 验证  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$ , 所以说  $\frac{1}{x}$  为当  $x \rightarrow 0$  时的无穷大。

**定义** 如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$  (或  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ) , 则称  $f(x)$  为当  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 时的**无穷大**.

**注**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$  指:  $\forall M > 0, \exists \delta > 0$ , 使得  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有  $|f(x)| > M$ .

同理可定义  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ .

**例** 验证  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$ , 所以说  $\frac{1}{x}$  为当  $x \rightarrow 0$  时的无穷大.

---

**性质** 假设  $f(x) \neq 0$ , 则  $\lim f(x) = 0 \iff \lim \frac{1}{f(x)} = \infty$ .

**定义** 设  $\alpha$  和  $\beta$  都是无穷小.

- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$ , 那么称  $\beta$  是比  $\alpha$  **高阶的无穷小**, 记作  $\beta = o(\alpha)$ .

**定义** 设  $\alpha$  和  $\beta$  都是无穷小.

- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$ , 那么称  $\beta$  是比  $\alpha$  **高阶的无穷小**, 记作  $\beta = o(\alpha)$ .
- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$ , 那么称  $\beta$  是比  $\alpha$  **低阶的无穷小**.

**定义** 设  $\alpha$  和  $\beta$  都是无穷小.

- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$ , 那么称  $\beta$  是比  $\alpha$  **高阶的无穷小**, 记作  $\beta = o(\alpha)$ .
- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$ , 那么称  $\beta$  是比  $\alpha$  **低阶的无穷小**.
- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$ , 那么称  $\beta$  与  $\alpha$  是 **同阶无穷小**.

**定义** 设  $\alpha$  和  $\beta$  都是无穷小.

- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$ , 那么称  $\beta$  是比  $\alpha$  **高阶的无穷小**, 记作  $\beta = o(\alpha)$ .
- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$ , 那么称  $\beta$  是比  $\alpha$  **低阶的无穷小**.
- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$ , 那么称  $\beta$  与  $\alpha$  是 **同阶无穷小**.
- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$ , 那么称  $\beta$  与  $\alpha$  是 **等价无穷小**, 记作  $\alpha \sim \beta$ .



**定义** 设  $\alpha$  和  $\beta$  都是无穷小.

- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$ , 那么称  $\beta$  是比  $\alpha$  **高阶的无穷小**, 记作  $\beta = o(\alpha)$ .
- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$ , 那么称  $\beta$  是比  $\alpha$  **低阶的无穷小**.
- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$ , 那么称  $\beta$  与  $\alpha$  是 **同阶无穷小**.
- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$ , 那么称  $\beta$  与  $\alpha$  是 **等价无穷小**, 记作  $\alpha \sim \beta$ .
- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0$ , 那么称  $\beta$  是关于  $\alpha$  的  **$k$  阶的无穷小**.

**定义** 设  $\alpha$  和  $\beta$  都是无穷小.

- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$ , 那么称  $\beta$  是比  $\alpha$  **高阶的无穷小**, 记作  $\beta = o(\alpha)$ .
- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$ , 那么称  $\beta$  是比  $\alpha$  **低阶的无穷小**.
- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$ , 那么称  $\beta$  与  $\alpha$  是 **同阶无穷小**.
- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$ , 那么称  $\beta$  与  $\alpha$  是 **等价无穷小**, 记作  $\alpha \sim \beta$ .
- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0$ , 那么称  $\beta$  是关于  $\alpha$  的  **$k$  阶的无穷小**.

**例**

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{x} = 0$

**定义** 设  $\alpha$  和  $\beta$  都是无穷小.

- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$ , 那么称  $\beta$  是比  $\alpha$  **高阶的无穷小**, 记作  $\beta = o(\alpha)$ .
- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$ , 那么称  $\beta$  是比  $\alpha$  **低阶的无穷小**.
- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$ , 那么称  $\beta$  与  $\alpha$  是 **同阶无穷小**.
- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$ , 那么称  $\beta$  与  $\alpha$  是 **等价无穷小**, 记作  $\alpha \sim \beta$ .
- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0$ , 那么称  $\beta$  是关于  $\alpha$  的  **$k$  阶的无穷小**.

**例**

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{x} = 0 \Rightarrow$  当  $x \rightarrow 0$  时,  $3x^2$  是比  $x$  高阶的无穷小,

**定义** 设  $\alpha$  和  $\beta$  都是无穷小.

- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$ , 那么称  $\beta$  是比  $\alpha$  **高阶的无穷小**, 记作  $\beta = o(\alpha)$ .
- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$ , 那么称  $\beta$  是比  $\alpha$  **低阶的无穷小**.
- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$ , 那么称  $\beta$  与  $\alpha$  是 **同阶无穷小**.
- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$ , 那么称  $\beta$  与  $\alpha$  是 **等价无穷小**, 记作  $\alpha \sim \beta$ .
- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0$ , 那么称  $\beta$  是关于  $\alpha$  的  **$k$  阶的无穷小**.

**例**

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{x} = 0 \Rightarrow$  当  $x \rightarrow 0$  时,  $3x^2$  是比  $x$  高阶的无穷小, 记作  
 $3x^2 = o(x) (x \rightarrow 0)$ .

**定义** 设  $\alpha$  和  $\beta$  都是无穷小.

- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$ , 那么称  $\beta$  是比  $\alpha$  **高阶的无穷小**, 记作  $\beta = o(\alpha)$ .
- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$ , 那么称  $\beta$  是比  $\alpha$  **低阶的无穷小**.
- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$ , 那么称  $\beta$  与  $\alpha$  是 **同阶无穷小**.
- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$ , 那么称  $\beta$  与  $\alpha$  是 **等价无穷小**, 记作  $\alpha \sim \beta$ .
- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0$ , 那么称  $\beta$  是关于  $\alpha$  的  **$k$  阶的无穷小**.

**例**

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{x} = 0 \Rightarrow$  当  $x \rightarrow 0$  时,  $3x^2$  是比  $x$  高阶的无穷小, 记作  
$$3x^2 = o(x) \quad (x \rightarrow 0).$$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

**定义** 设  $\alpha$  和  $\beta$  都是无穷小.

- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$ , 那么称  $\beta$  是比  $\alpha$  **高阶的无穷小**, 记作  $\beta = o(\alpha)$ .
- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$ , 那么称  $\beta$  是比  $\alpha$  **低阶的无穷小**.
- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$ , 那么称  $\beta$  与  $\alpha$  是 **同阶无穷小**.
- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$ , 那么称  $\beta$  与  $\alpha$  是 **等价无穷小**, 记作  $\alpha \sim \beta$ .
- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0$ , 那么称  $\beta$  是关于  $\alpha$  的  **$k$  阶的无穷小**.

**例**

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{x} = 0 \Rightarrow$  当  $x \rightarrow 0$  时,  $3x^2$  是比  $x$  高阶的无穷小, 记作  $3x^2 = o(x) (x \rightarrow 0)$ .
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow$  当  $x \rightarrow 0$  时,  $1 - \cos x$  与  $x^2$  是同阶无穷小,

**定义** 设  $\alpha$  和  $\beta$  都是无穷小.

- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$ , 那么称  $\beta$  是比  $\alpha$  **高阶的无穷小**, 记作  $\beta = o(\alpha)$ .
- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$ , 那么称  $\beta$  是比  $\alpha$  **低阶的无穷小**.
- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$ , 那么称  $\beta$  与  $\alpha$  是 **同阶无穷小**.
- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$ , 那么称  $\beta$  与  $\alpha$  是 **等价无穷小**, 记作  $\alpha \sim \beta$ .
- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0$ , 那么称  $\beta$  是关于  $\alpha$  的  **$k$  阶的无穷小**.

**例**

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{x} = 0 \Rightarrow$  当  $x \rightarrow 0$  时,  $3x^2$  是比  $x$  高阶的无穷小, 记作  $3x^2 = o(x) (x \rightarrow 0)$ .
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow$  当  $x \rightarrow 0$  时,  $1 - \cos x$  与  $x^2$  是同阶无穷小,  $1 - \cos x$  是  $x$  的 2 阶无穷小,

**定义** 设  $\alpha$  和  $\beta$  都是无穷小.

- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$ , 那么称  $\beta$  是比  $\alpha$  **高阶的无穷小**, 记作  $\beta = o(\alpha)$ .
- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$ , 那么称  $\beta$  是比  $\alpha$  **低阶的无穷小**.
- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$ , 那么称  $\beta$  与  $\alpha$  是 **同阶无穷小**.
- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$ , 那么称  $\beta$  与  $\alpha$  是 **等价无穷小**, 记作  $\alpha \sim \beta$ .
- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0$ , 那么称  $\beta$  是关于  $\alpha$  的  **$k$  阶的无穷小**.

**例**

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{x} = 0 \Rightarrow$  当  $x \rightarrow 0$  时,  $3x^2$  是比  $x$  高阶的无穷小, 记作  $3x^2 = o(x) (x \rightarrow 0)$ .
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow$  当  $x \rightarrow 0$  时,  $1 - \cos x$  与  $x^2$  是同阶无穷小,  $1 - \cos x$  是  $x$  的 2 阶无穷小,  $1 - \cos x$  与  $\frac{1}{2}x^2$  是等价无穷小.