§9.3 差分方程的一般概念

2017-2018 学年 II

Outline

差分的概念

- 微积分所研究的函数 $y = f(x)$，其自变量 x 是连续变化。

差分的概念

- 微积分所研究的函数 $y = f(x)$，其自变量 x 是连续变化。
- 但在某些应用问题中，$y = f(x)$ 的自变量 x 是离散的。

差分的概念

- 微积分所研究的函数 $y = f(x)$，其自变量 x 是连续变化。
- 但在某些应用问题中，$y = f(x)$ 的自变量 x 是离散的。

假设 x 取非负整数

差分的概念

- 微积分所研究的函数 $y=f(x)$，其自变量 x 是连续变化。
- 但在某些应用问题中，$y=f(x)$ 的自变量 x 是离散的。

假设 x 取非负整数

$$f(0),\quad f(1),\quad f(2),\quad \cdots\cdots,\quad f(n),\quad f(n+1)\quad \cdots\cdots$$

差分的概念

- 微积分所研究的函数 $y = f(x)$，其自变量 x 是连续变化。
- 但在某些应用问题中，$y = f(x)$ 的自变量 x 是离散的。

假设 x 取非负整数，记：

$$\underset{y_0}{\overset{f(0)}{\shortparallel}}, \quad f(1), \quad f(2), \quad \cdots\cdots, \quad f(n), \quad f(n+1) \quad \cdots\cdots$$

差分的概念

- 微积分所研究的函数 $y=f(x)$，其自变量 x 是连续变化。
- 但在某些应用问题中，$y=f(x)$ 的自变量 x 是离散的。

假设 x 取非负整数，记：

$$\begin{matrix} f(0) & & f(1) & & f(2) & & & f(n) & & f(n+1) & \\ \shortparallel & , & \shortparallel & , & & , & \ldots\ldots, & & , & & \ldots\ldots \\ y_0 & & y_1 & & & & & & & & \end{matrix}$$

差分的概念

- 微积分所研究的函数 $y=f(x)$，其自变量 x 是连续变化。
- 但在某些应用问题中，$y=f(x)$ 的自变量 x 是离散的。

假设 x 取非负整数，记：

$$\underset{y_0}{\overset{f(0)}{\shortparallel}},\quad \underset{y_1}{\overset{f(1)}{\shortparallel}},\quad \underset{y_2}{\overset{f(2)}{\shortparallel}},\quad \cdots\cdots,\quad f(n),\quad f(n+1)\quad \cdots\cdots$$

差分的概念

- 微积分所研究的函数 $y = f(x)$，其自变量 x 是连续变化。
- 但在某些应用问题中，$y = f(x)$ 的自变量 x 是离散的。

假设 x 取非负整数，记：

$$\begin{array}{cccccccc} f(0) & & f(1) & & f(2) & & f(n) & f(n+1) \\ \parallel & , & \parallel & , & \parallel & ,\ \ldots\ldots, & \parallel\ , & \ldots\ldots \\ y_0 & & y_1 & & y_2 & & y_n & \end{array}$$

差分的概念

- 微积分所研究的函数 $y=f(x)$，其自变量 x 是连续变化。
- 但在某些应用问题中，$y=f(x)$ 的自变量 x 是离散的。

假设 x 取非负整数，记：

$$\begin{array}{ccccccccccc} f(0) & & f(1) & & f(2) & & & & f(n) & & f(n+1) \\ \parallel & , & \parallel & , & \parallel & , & \cdots\cdots, & & \parallel & , & \parallel & & \cdots\cdots \\ y_0 & & y_1 & & y_2 & & & & y_n & & y_{n+1} \end{array}$$

差分的概念

- 微积分所研究的函数 $y=f(x)$，其自变量 x 是连续变化。
- 但在某些应用问题中，$y=f(x)$ 的自变量 x 是离散的。

假设 x 取非负整数，记：

$$\underset{y_0}{\overset{f(0)}{\parallel}},\quad \underset{y_1}{\overset{f(1)}{\parallel}},\quad \underset{y_2}{\overset{f(2)}{\parallel}},\quad \ldots\ldots,\quad \underset{y_n}{\overset{f(n)}{\parallel}},\quad \underset{y_{n+1}}{\overset{f(n+1)}{\parallel}}\quad \ldots\ldots$$

定义 称 $y_{n+1}-y_n$ 为函数的一阶差分，记为 Δy_n

差分的概念

- 微积分所研究的函数 $y = f(x)$，其自变量 x 是连续变化。
- 但在某些应用问题中，$y = f(x)$ 的自变量 x 是离散的。

假设 x 取非负整数，记：

$$\begin{array}{cccccccccccc} f(0) & & f(1) & & f(2) & & & f(n) & & f(n+1) & \\ \shortparallel & , & \shortparallel & , & \shortparallel & , & \cdots\cdots, & \shortparallel & , & \shortparallel & \cdots\cdots \\ y_0 & & y_1 & & y_2 & & & y_n & & y_{n+1} & \end{array}$$

定义 称 $y_{n+1} - y_n$ 为函数的一阶差分，记为 Δy_n，即：

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$$

差分的概念

- 微积分所研究的函数 $y=f(x)$，其自变量 x 是连续变化。
- 但在某些应用问题中，$y=f(x)$ 的自变量 x 是离散的。

假设 x 取非负整数，记：

$$\begin{array}{ccccccccccc} f(0) & & f(1) & & f(2) & & & f(n) & & f(n+1) & \\ \shortparallel & , & \shortparallel & , & \shortparallel & , & \ldots\ldots, & \shortparallel & , & \shortparallel & \ldots\ldots \\ y_0 & & y_1 & & y_2 & & & y_n & & y_{n+1} & \end{array}$$

定义 称 $y_{n+1}-y_n$ 为函数的一阶差分，记为 Δy_n，即：

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$$

例 设 $y_n = n^2 - 3n + 2$，求 Δy_n

差分的概念

- 微积分所研究的函数 $y = f(x)$，其自变量 x 是连续变化。
- 但在某些应用问题中，$y = f(x)$ 的自变量 x 是离散的。

假设 x 取非负整数，记：

$$\begin{matrix} f(0) & & f(1) & & f(2) & & & f(n) & & f(n+1) & \\ \shortparallel & , & \shortparallel & , & \shortparallel & , & \cdots\cdots, & \shortparallel & , & \shortparallel & \cdots\cdots \\ y_0 & & y_1 & & y_2 & & & y_n & & y_{n+1} & \end{matrix}$$

定义 称 $y_{n+1} - y_n$ 为函数的一阶差分，记为 Δy_n，即：

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$$

例 设 $y_n = n^2 - 3n + 2$，求 Δy_n

解 $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$

差分的概念

- 微积分所研究的函数 $y=f(x)$，其自变量 x 是连续变化。
- 但在某些应用问题中，$y=f(x)$ 的自变量 x 是离散的。

假设 x 取非负整数，记：

$$\begin{array}{ccccccccccc} f(0) & & f(1) & & f(2) & & & & f(n) & & f(n+1) \\ \shortparallel & , & \shortparallel & , & \shortparallel & , & \cdots\cdots, & & \shortparallel & , & \shortparallel & & \cdots\cdots \\ y_0 & & y_1 & & y_2 & & & & y_n & & y_{n+1} \end{array}$$

定义 称 $y_{n+1}-y_n$ 为函数的一阶差分，记为 Δy_n，即：

$$\Delta y_n = y_{n+1}-y_n$$

例 设 $y_n = n^2-3n+2$，求 Δy_n

解 $\Delta y_n = y_{n+1}-y_n$

$$= (\qquad\qquad\qquad\qquad) - (\qquad\qquad\qquad)$$

差分的概念

- 微积分所研究的函数 $y=f(x)$，其自变量 x 是连续变化。
- 但在某些应用问题中，$y=f(x)$ 的自变量 x 是离散的。

假设 x 取非负整数，记：

$$\begin{array}{ccccccccccc} f(0) & & f(1) & & f(2) & & & & f(n) & & f(n+1) \\ \shortparallel & , & \shortparallel & , & \shortparallel & , & \cdots\cdots, & & \shortparallel & , & \shortparallel & & \cdots\cdots \\ y_0 & & y_1 & & y_2 & & & & y_n & & y_{n+1} \end{array}$$

定义 称 $y_{n+1}-y_n$ 为函数的一阶差分，记为 Δy_n，即：

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$$

例 设 $y_n = n^2 - 3n + 2$，求 Δy_n

解

$$\begin{aligned} \Delta y_n &= y_{n+1} - y_n \\ &= \Big(\qquad\qquad\qquad\qquad \Big) - \left(n^2 - 3n + 2\right) \end{aligned}$$

差分的概念

- 微积分所研究的函数 $y=f(x)$，其自变量 x 是连续变化。
- 但在某些应用问题中，$y=f(x)$ 的自变量 x 是离散的。

假设 x 取非负整数，记：

$$\begin{array}{ccccccccccc} f(0) & & f(1) & & f(2) & & & & f(n) & & f(n+1) \\ \shortparallel & , & \shortparallel & , & \shortparallel & , & \cdots\cdots, & & \shortparallel & , & \shortparallel & \cdots\cdots \\ y_0 & & y_1 & & y_2 & & & & y_n & & y_{n+1} \end{array}$$

定义 称 $y_{n+1}-y_n$ 为函数的一阶差分，记为 Δy_n，即：

$$\Delta y_n = y_{n+1}-y_n$$

例 设 $y_n = n^2-3n+2$，求 Δy_n

解
$$\begin{aligned} \Delta y_n &= y_{n+1}-y_n \\ &= \left((n+1)^2-3(n+1)+2\right)-\left(n^2-3n+2\right) \end{aligned}$$

差分的概念

- 微积分所研究的函数 $y=f(x)$，其自变量 x 是连续变化。
- 但在某些应用问题中，$y=f(x)$ 的自变量 x 是离散的。

假设 x 取非负整数，记：

$$\begin{array}{ccccccccccc} f(0) & & f(1) & & f(2) & & & & f(n) & & f(n+1) & \\ \parallel & , & \parallel & , & \parallel & , & \cdots\cdots, & & \parallel & , & \parallel & \cdots\cdots \\ y_0 & & y_1 & & y_2 & & & & y_n & & y_{n+1} & \end{array}$$

定义 称 $y_{n+1}-y_n$ 为函数的一阶差分，记为 Δy_n，即：

$$\Delta y_n = y_{n+1}-y_n$$

例 设 $y_n = n^2-3n+2$，求 Δy_n

解 $\Delta y_n = y_{n+1}-y_n$

$$= \left((n+1)^2-3(n+1)+2\right)-\left(n^2-3n+2\right) = 2n-2$$

例 设 $y_n = n^2 + 3^n$，求 Δy_n

解

例 设 $y_n = n^2 + 3^n$，求 Δy_n

解 $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$

例 设 $y_n = n^2 + 3^n$，求 Δy_n

解 $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$

$$= (\qquad\qquad\qquad\qquad) - (\qquad\qquad)$$

例 设 $y_n = n^2 + 3^n$，求 Δy_n

解 $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$

$$= \left(\qquad\qquad\qquad\qquad \right) - \left(n^2 + 3^n \right)$$

例 设 $y_n = n^2 + 3^n$，求 Δy_n

解 $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$

$$= \left((n+1)^2 + 3^{n+1}\right) - \left(n^2 + 3^n\right)$$

例 设 $y_n = n^2 + 3^n$，求 Δy_n

解 $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$

$$= \left((n+1)^2 + 3^{n+1}\right) - \left(n^2 + 3^n\right)$$

$$= \left(\qquad\qquad\qquad\qquad\right) - \left(n^2 + 3^n\right)$$

例 设 $y_n = n^2 + 3^n$，求 Δy_n

解 $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$

$$= \left((n+1)^2 + 3^{n+1}\right) - \left(n^2 + 3^n\right)$$

$$= \left(n^2 + 2n + 1 + \qquad\qquad\right) - \left(n^2 + 3^n\right)$$

例 设 $y_n = n^2 + 3^n$，求 Δy_n

解 $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$

$$= \left((n+1)^2 + 3^{n+1}\right) - \left(n^2 + 3^n\right)$$

$$= \left(n^2 + 2n + 1 + 3 \cdot 3^n\right) - \left(n^2 + 3^n\right)$$

例 设 $y_n = n^2 + 3^n$，求 Δy_n

解 $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$

$$= \left((n+1)^2 + 3^{n+1}\right) - \left(n^2 + 3^n\right)$$

$$= \left(n^2 + 2n + 1 + 3 \cdot 3^n\right) - \left(n^2 + 3^n\right) = 2n + 1 + 2 \cdot 3^n$$

例 设 $y_n = n^2 + 3^n$，求 Δy_n

解
$$
\begin{aligned}
\Delta y_n &= y_{n+1} - y_n \\
&= \left((n+1)^2 + 3^{n+1}\right) - \left(n^2 + 3^n\right) \\
&= \left(n^2 + 2n + 1 + 3 \cdot 3^n\right) - \left(n^2 + 3^n\right) = 2n + 1 + 2 \cdot 3^n
\end{aligned}
$$

定义 二阶差分 $\Delta^2 y_n$:

例 设 $y_n = n^2 + 3^n$，求 Δy_n

解
$$\begin{aligned}\Delta y_n &= y_{n+1} - y_n \\ &= \left((n+1)^2 + 3^{n+1}\right) - \left(n^2 + 3^n\right) \\ &= \left(n^2 + 2n + 1 + 3 \cdot 3^n\right) - \left(n^2 + 3^n\right) = 2n + 1 + 2 \cdot 3^n\end{aligned}$$

定义 二阶差分 $\Delta^2 y_n$：

$$\Delta^2 y_n =$$

例 设 $y_n = n^2 + 3^n$，求 Δy_n

解 $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$

$$= \left((n+1)^2 + 3^{n+1}\right) - \left(n^2 + 3^n\right)$$

$$= \left(n^2 + 2n + 1 + 3 \cdot 3^n\right) - \left(n^2 + 3^n\right) = 2n + 1 + 2 \cdot 3^n$$

定义 二阶差分 $\Delta^2 y_n$:

$$\Delta^2 y_n = \Delta(\Delta y_n) =$$

例 设 $y_n = n^2 + 3^n$，求 Δy_n

解 $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$

$$= \left((n+1)^2 + 3^{n+1}\right) - \left(n^2 + 3^n\right)$$

$$= \left(n^2 + 2n + 1 + 3 \cdot 3^n\right) - \left(n^2 + 3^n\right) = 2n + 1 + 2 \cdot 3^n$$

定义 二阶差分 $\Delta^2 y_n$：

$$\Delta^2 y_n = \Delta(\Delta y_n) = \Delta y_{n+1} -$$

例 设 $y_n = n^2 + 3^n$，求 Δy_n

解 $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$

$$= \left((n+1)^2 + 3^{n+1}\right) - \left(n^2 + 3^n\right)$$

$$= \left(n^2 + 2n + 1 + 3 \cdot 3^n\right) - \left(n^2 + 3^n\right) = 2n + 1 + 2 \cdot 3^n$$

定义 二阶差分 $\Delta^2 y_n$：

$$\Delta^2 y_n = \Delta(\Delta y_n) = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n$$

例 设 $y_n = n^2 + 3^n$，求 Δy_n

解 $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$

$$= \left((n+1)^2 + 3^{n+1}\right) - \left(n^2 + 3^n\right)$$

$$= \left(n^2 + 2n + 1 + 3 \cdot 3^n\right) - \left(n^2 + 3^n\right) = 2n + 1 + 2 \cdot 3^n$$

定义 二阶差分 $\Delta^2 y_n$：

$$\Delta^2 y_n = \Delta(\Delta y_n) = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n$$

$$= (\qquad\qquad\qquad) - (\qquad\qquad\qquad)$$

例 设 $y_n = n^2 + 3^n$，求 Δy_n

解 $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$

$$= \left((n+1)^2 + 3^{n+1}\right) - \left(n^2 + 3^n\right)$$

$$= \left(n^2 + 2n + 1 + 3 \cdot 3^n\right) - \left(n^2 + 3^n\right) = 2n + 1 + 2 \cdot 3^n$$

定义 二阶差分 $\Delta^2 y_n$：

$$\Delta^2 y_n = \Delta(\Delta y_n) = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n$$

$$= (\qquad\qquad\qquad) - (y_{n+1} - y_n)$$

例 设 $y_n = n^2 + 3^n$，求 Δy_n

解 $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$

$$= \left((n+1)^2 + 3^{n+1}\right) - \left(n^2 + 3^n\right)$$

$$= \left(n^2 + 2n + 1 + 3 \cdot 3^n\right) - \left(n^2 + 3^n\right) = 2n + 1 + 2 \cdot 3^n$$

定义 二阶差分 $\Delta^2 y_n$：

$$\Delta^2 y_n = \Delta(\Delta y_n) = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n$$

$$= (y_{n+2} - y_{n+1}) - (y_{n+1} - y_n)$$

例 设 $y_n = n^2 + 3^n$，求 Δy_n

解 $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$

$$= \left((n+1)^2 + 3^{n+1}\right) - \left(n^2 + 3^n\right)$$

$$= \left(n^2 + 2n + 1 + 3 \cdot 3^n\right) - \left(n^2 + 3^n\right) = 2n + 1 + 2 \cdot 3^n$$

定义 二阶差分 $\Delta^2 y_n$：

$$\Delta^2 y_n = \Delta(\Delta y_n) = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n$$

$$= (y_{n+2} - y_{n+1}) - (y_{n+1} - y_n) = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n$$

例 设 $y_n = n^2 + 3^n$，求 Δy_n

解 $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$

$$= \left((n+1)^2 + 3^{n+1}\right) - \left(n^2 + 3^n\right)$$

$$= \left(n^2 + 2n + 1 + 3\cdot 3^n\right) - \left(n^2 + 3^n\right) = 2n + 1 + 2\cdot 3^n$$

定义 二阶差分 $\Delta^2 y_n$：

$$\Delta^2 y_n = \Delta(\Delta y_n) = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n$$

$$= (y_{n+2} - y_{n+1}) - (y_{n+1} - y_n) = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n$$

例 设 $y_n = n^2 + 3^n$，求 $\Delta^2 y_n$

例 设 $y_n = n^2 + 3^n$，求 Δy_n

解 $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$

$$= \left((n+1)^2 + 3^{n+1}\right) - \left(n^2 + 3^n\right)$$

$$= \left(n^2 + 2n + 1 + 3 \cdot 3^n\right) - \left(n^2 + 3^n\right) = 2n + 1 + 2 \cdot 3^n$$

定义 二阶差分 $\Delta^2 y_n$：

$$\Delta^2 y_n = \Delta(\Delta y_n) = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n$$

$$= (y_{n+2} - y_{n+1}) - (y_{n+1} - y_n) = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n$$

例 设 $y_n = n^2 + 3^n$，求 $\Delta^2 y_n$

解 $\Delta^2 y_n = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n$

例 设 $y_n = n^2 + 3^n$，求 Δy_n

解 $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$

$$= \left((n+1)^2 + 3^{n+1}\right) - \left(n^2 + 3^n\right)$$

$$= \left(n^2 + 2n + 1 + 3 \cdot 3^n\right) - \left(n^2 + 3^n\right) = 2n + 1 + 2 \cdot 3^n$$

定义 二阶差分 $\Delta^2 y_n$：

$$\Delta^2 y_n = \Delta(\Delta y_n) = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n$$

$$= (y_{n+2} - y_{n+1}) - (y_{n+1} - y_n) = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n$$

例 设 $y_n = n^2 + 3^n$，求 $\Delta^2 y_n$

解 $\Delta^2 y_n = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n$

$$= \left(\qquad\qquad\qquad\qquad \right) - \left(\qquad\qquad\qquad\qquad \right)$$

例 设 $y_n = n^2 + 3^n$，求 Δy_n

解 $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$

$$= \left((n+1)^2 + 3^{n+1}\right) - \left(n^2 + 3^n\right)$$

$$= \left(n^2 + 2n + 1 + 3 \cdot 3^n\right) - \left(n^2 + 3^n\right) = 2n + 1 + 2 \cdot 3^n$$

定义 二阶差分 $\Delta^2 y_n$：

$$\Delta^2 y_n = \Delta(\Delta y_n) = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n$$

$$= (y_{n+2} - y_{n+1}) - (y_{n+1} - y_n) = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n$$

例 设 $y_n = n^2 + 3^n$，求 $\Delta^2 y_n$

解 $\Delta^2 y_n = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n$

$$= \left(\qquad\qquad\qquad\qquad\right) - \left(2n + 1 + 2 \cdot 3^n\right)$$

例 设 $y_n = n^2 + 3^n$，求 Δy_n

解
$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$$
$$= \left((n+1)^2 + 3^{n+1}\right) - \left(n^2 + 3^n\right)$$
$$= \left(n^2 + 2n + 1 + 3 \cdot 3^n\right) - \left(n^2 + 3^n\right) = 2n + 1 + 2 \cdot 3^n$$

定义 二阶差分 $\Delta^2 y_n$：

$$\Delta^2 y_n = \Delta(\Delta y_n) = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n$$
$$= (y_{n+2} - y_{n+1}) - (y_{n+1} - y_n) = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n$$

例 设 $y_n = n^2 + 3^n$，求 $\Delta^2 y_n$

解
$$\Delta^2 y_n = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n$$
$$= \left(2(n+1) + 1 + 2 \cdot 3^{n+1}\right) - \left(2n + 1 + 2 \cdot 3^n\right)$$

例 设 $y_n = n^2 + 3^n$，求 Δy_n

解 $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$

$$= \left((n+1)^2 + 3^{n+1}\right) - \left(n^2 + 3^n\right)$$

$$= \left(n^2 + 2n + 1 + 3 \cdot 3^n\right) - \left(n^2 + 3^n\right) = 2n + 1 + 2 \cdot 3^n$$

定义 二阶差分 $\Delta^2 y_n$：

$$\Delta^2 y_n = \Delta(\Delta y_n) = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n$$

$$= (y_{n+2} - y_{n+1}) - (y_{n+1} - y_n) = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n$$

例 设 $y_n = n^2 + 3^n$，求 $\Delta^2 y_n$

解 $\Delta^2 y_n = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n$

$$= \left(2(n+1) + 1 + 2 \cdot 3^{n+1}\right) - \left(2n + 1 + 2 \cdot 3^n\right)$$

$$= \left(\qquad\qquad\qquad\right) - \left(2n + 1 + 2 \cdot 3^n\right)$$

例 设 $y_n = n^2 + 3^n$，求 Δy_n

解 $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$

$$= \left((n+1)^2 + 3^{n+1}\right) - \left(n^2 + 3^n\right)$$

$$= \left(n^2 + 2n + 1 + 3 \cdot 3^n\right) - \left(n^2 + 3^n\right) = 2n + 1 + 2 \cdot 3^n$$

定义 二阶差分 $\Delta^2 y_n$：

$$\Delta^2 y_n = \Delta(\Delta y_n) = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n$$

$$= (y_{n+2} - y_{n+1}) - (y_{n+1} - y_n) = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n$$

例 设 $y_n = n^2 + 3^n$，求 $\Delta^2 y_n$

解 $\Delta^2 y_n = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n$

$$= \left(2(n+1) + 1 + 2 \cdot 3^{n+1}\right) - \left(2n + 1 + 2 \cdot 3^n\right)$$

$$= \left(2n + 3 + \qquad\qquad \right) - \left(2n + 1 + 2 \cdot 3^n\right)$$

例 设 $y_n = n^2 + 3^n$，求 Δy_n

解 $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$

$$= \left((n+1)^2 + 3^{n+1}\right) - \left(n^2 + 3^n\right)$$

$$= \left(n^2 + 2n + 1 + 3 \cdot 3^n\right) - \left(n^2 + 3^n\right) = 2n + 1 + 2 \cdot 3^n$$

定义 二阶差分 $\Delta^2 y_n$:

$$\Delta^2 y_n = \Delta(\Delta y_n) = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n$$

$$= (y_{n+2} - y_{n+1}) - (y_{n+1} - y_n) = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n$$

例 设 $y_n = n^2 + 3^n$，求 $\Delta^2 y_n$

解 $\Delta^2 y_n = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n$

$$= \left(2(n+1) + 1 + 2 \cdot 3^{n+1}\right) - \left(2n + 1 + 2 \cdot 3^n\right)$$

$$= \left(2n + 3 + 3 \cdot 2 \cdot 3^n\right) - \left(2n + 1 + 2 \cdot 3^n\right)$$

例 设 $y_n = n^2 + 3^n$，求 Δy_n

解 $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$

$$= \left((n+1)^2 + 3^{n+1}\right) - \left(n^2 + 3^n\right)$$

$$= \left(n^2 + 2n + 1 + 3 \cdot 3^n\right) - \left(n^2 + 3^n\right) = 2n + 1 + 2 \cdot 3^n$$

定义 二阶差分 $\Delta^2 y_n$：

$$\Delta^2 y_n = \Delta(\Delta y_n) = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n$$

$$= (y_{n+2} - y_{n+1}) - (y_{n+1} - y_n) = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n$$

例 设 $y_n = n^2 + 3^n$，求 $\Delta^2 y_n$

解 $\Delta^2 y_n = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n$

$$= \left(2(n+1) + 1 + 2 \cdot 3^{n+1}\right) - \left(2n + 1 + 2 \cdot 3^n\right)$$

$$= \left(2n + 3 + 3 \cdot 2 \cdot 3^n\right) - \left(2n + 1 + 2 \cdot 3^n\right) = 2 + 4 \cdot 3^n$$

例 设 $y_n = n^2$，求 $\Delta^2 y_n$

解

例 设 $y_n = n^2$，求 $\Delta^2 y_n$

解 $$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n =$$

例 设 $y_n = n^2$，求 $\Delta^2 y_n$

解 $$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n = (n+1)^2 -$$

例 设 $y_n = n^2$，求 $\Delta^2 y_n$

解 $$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n = (n+1)^2 - n^2 =$$

例 设 $y_n = n^2$，求 $\Delta^2 y_n$

解 $$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$$

例 设 $y_n = n^2$，求 $\Delta^2 y_n$

解

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1$$

$$\Delta^2 y_n = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n$$

$$= (\qquad\qquad\qquad) - (\qquad\qquad)$$

例 设 $y_n = n^2$，求 $\Delta^2 y_n$

解

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1$$

$$\Delta^2 y_n = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n$$

$$= (\qquad\qquad\qquad) - (2n+1)$$

例 设 $y_n = n^2$，求 $\Delta^2 y_n$

解
$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1$$

$$\begin{aligned}\Delta^2 y_n &= \Delta y_{n+1} - \Delta y_n \\ &= (2(n+1)+1) - (2n+1)\end{aligned}$$

例 设 $y_n = n^2$，求 $\Delta^2 y_n$

解 $$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1$$

$$\begin{aligned}\Delta^2 y_n &= \Delta y_{n+1} - \Delta y_n \\ &= (2(n+1)+1) - (2n+1) = 2\end{aligned}$$

例 设 $y_n = n^2$，求 $\Delta^2 y_n$

解 $$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1$$

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_n &= \Delta y_{n+1} - \Delta y_n \\ &= (2(n+1)+1) - (2n+1) = 2 \end{aligned}$$

例 设 $y_n = n^3$，求 $\Delta^2 y_n$

解

例 设 $y_n = n^2$，求 $\Delta^2 y_n$

解

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$$

$$\begin{aligned}\Delta^2 y_n &= \Delta y_{n+1} - \Delta y_n \\ &= (2(n+1)+1) - (2n+1) = 2\end{aligned}$$

例 设 $y_n = n^3$，求 $\Delta^2 y_n$

解

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n =$$

例 设 $y_n = n^2$，求 $\Delta^2 y_n$

解

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1$$

$$\begin{aligned}\Delta^2 y_n &= \Delta y_{n+1} - \Delta y_n \\ &= (2(n+1)+1) - (2n+1) = 2\end{aligned}$$

例 设 $y_n = n^3$，求 $\Delta^2 y_n$

解

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n = (n+1)^3 -$$

例 设 $y_n = n^2$，求 $\Delta^2 y_n$

解 $$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1$$

$$\begin{aligned}\Delta^2 y_n &= \Delta y_{n+1} - \Delta y_n \\ &= (2(n+1)+1) - (2n+1) = 2\end{aligned}$$

例 设 $y_n = n^3$，求 $\Delta^2 y_n$

解 $$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n = (n+1)^3 - n^3 =$$

例 设 $y_n = n^2$，求 $\Delta^2 y_n$

解 $$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1$$

$$\begin{aligned}\Delta^2 y_n &= \Delta y_{n+1} - \Delta y_n \\ &= (2(n+1)+1) - (2n+1) = 2\end{aligned}$$

例 设 $y_n = n^3$，求 $\Delta^2 y_n$

解 $$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n = (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$$

例 设 $y_n = n^2$，求 $\Delta^2 y_n$

解 $$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1$$

$$\Delta^2 y_n = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n$$

$$= (2(n+1)+1) - (2n+1) = 2$$

例 设 $y_n = n^3$，求 $\Delta^2 y_n$

解 $$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n = (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$$

$$\Delta^2 y_n = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n$$

$$= (\qquad\qquad\qquad\qquad) - (\qquad\qquad\qquad)$$

例 设 $y_n = n^2$，求 $\Delta^2 y_n$

解
$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1$$
$$\Delta^2 y_n = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n$$
$$= (2(n+1)+1) - (2n+1) = 2$$

例 设 $y_n = n^3$，求 $\Delta^2 y_n$

解
$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n = (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$$
$$\Delta^2 y_n = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n$$
$$= \left(\qquad\qquad\qquad\qquad \right) - \left(3n^2 + 3n + 1\right)$$

例 设 $y_n = n^2$，求 $\Delta^2 y_n$

解 $$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1$$

$$\Delta^2 y_n = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n$$

$$= (2(n+1)+1) - (2n+1) = 2$$

例 设 $y_n = n^3$，求 $\Delta^2 y_n$

解 $$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n = (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$$

$$\Delta^2 y_n = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n$$

$$= \left(3(n+1)^2 + 3(n+1) + 1\right) - \left(3n^2 + 3n + 1\right)$$

$$=$$

例 设 $y_n = n^2$，求 $\Delta^2 y_n$

解

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1$$

$$\Delta^2 y_n = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n$$

$$= (2(n+1)+1) - (2n+1) = 2$$

例 设 $y_n = n^3$，求 $\Delta^2 y_n$

解

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n = (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$$

$$\Delta^2 y_n = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n$$

$$= \left(3(n+1)^2 + 3(n+1) + 1\right) - \left(3n^2 + 3n + 1\right)$$

$$= \left(\qquad \qquad \qquad \right) - \left(3n^2 + 3n + 1\right)$$

例 设 $y_n = n^2$，求 $\Delta^2 y_n$

解

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$$

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_n &= \Delta y_{n+1} - \Delta y_n \\ &= (2(n+1)+1) - (2n+1) = 2 \end{aligned}$$

例 设 $y_n = n^3$，求 $\Delta^2 y_n$

解

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n = (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$$

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_n &= \Delta y_{n+1} - \Delta y_n \\ &= \left(3(n+1)^2 + 3(n+1) + 1\right) - \left(3n^2 + 3n + 1\right) \\ &= \left(3n^2 + 9n + 7\right) - \left(3n^2 + 3n + 1\right) \end{aligned}$$

例 设 $y_n = n^2$，求 $\Delta^2 y_n$

解 $$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1$$

$$\Delta^2 y_n = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n$$

$$= (2(n+1)+1) - (2n+1) = 2$$

例 设 $y_n = n^3$，求 $\Delta^2 y_n$

解 $$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n = (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$$

$$\Delta^2 y_n = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n$$

$$= \left(3(n+1)^2 + 3(n+1) + 1\right) - \left(3n^2 + 3n + 1\right)$$

$$= \left(3n^2 + 9n + 7\right) - \left(3n^2 + 3n + 1\right) = 6n + 6$$

差分方程

- 如下的方程都是所谓的差分方程

$$y_{n+2} + 2y_{n+1} - y_n = 3, \qquad y_{n+2} + 2y_{n+1} - y_n = 3y_{n-1},$$

$$\Delta y_n - 4y_n = 3, \qquad \Delta y_n - 4y_{n-1} = e^{n-2},$$

差分方程

- 如下的方程都是所谓的差分方程

$$y_{n+2} + 2y_{n+1} - y_n = 3, \qquad y_{n+2} + 2y_{n+1} - y_n = 3y_{n-1},$$

$$\Delta y_n - 4y_n = 3, \qquad \Delta y_n - 4y_{n-1} = e^{n-2},$$

定义 若方程含有未知函数若干时期的值或未知函数的差分，则称为差分方程

差分方程的阶

定义 差分方程中未知函数附标的最大值与最小值的差，称为差分方程的**阶**

差分方程的阶

定义 差分方程中未知函数附标的最大值与最小值的差，称为差分方程的**阶**

例

差分方程	阶
$y_{n+2} + 2y_{n+1} - y_n = 3$	
$y_{n+2} + 2y_{n+1} - y_n = 3y_{n-1}$	
$\Delta y_n - 4y_n = 3$	
$\Delta y_n - 4y_{n-1} = e^{n-2}$	

差分方程的阶

定义 差分方程中未知函数附标的最大值与最小值的差，称为差分方程的阶

例

差分方程	阶
$y_{n+2}+2y_{n+1}-y_n=3$	2
$y_{n+2}+2y_{n+1}-y_n=3y_{n-1}$	
$\Delta y_n-4y_n=3$	
$\Delta y_n-4y_{n-1}=e^{n-2}$	

差分方程的阶

定义 差分方程中未知函数附标的最大值与最小值的差，称为差分方程的**阶**

例

差分方程	阶
$y_{n+2} + 2y_{n+1} - y_n = 3$	2
$y_{n+2} + 2y_{n+1} - y_n = 3y_{n-1}$	3
$\Delta y_n - 4y_n = 3$	
$\Delta y_n - 4y_{n-1} = e^{n-2}$	

差分方程的阶

定义 差分方程中未知函数附标的最大值与最小值的差，称为差分方程的**阶**

例

差分方程	阶
$y_{n+2} + 2y_{n+1} - y_n = 3$	2
$y_{n+2} + 2y_{n+1} - y_n = 3y_{n-1}$	3
$\Delta y_n - 4y_n = 3$	
$\Delta y_n - 4y_{n-1} = e^{n-2}$	

（要将 Δy_n 换成 $y_{n+1} - y_n$）

差分方程的阶

定义 差分方程中未知函数附标的最大值与最小值的差，称为差分方程的阶

例

差分方程	阶
$y_{n+2}+2y_{n+1}-y_n=3$	2
$y_{n+2}+2y_{n+1}-y_n=3y_{n-1}$	3
$\Delta y_n-4y_n=3$	1
$\Delta y_n-4y_{n-1}=e^{n-2}$	

（要将 Δy_n 换成 $y_{n+1}-y_n$）

差分方程的阶

定义 差分方程中未知函数附标的最大值与最小值的差，称为差分方程的阶

例

差分方程	阶
$y_{n+2}+2y_{n+1}-y_n=3$	2
$y_{n+2}+2y_{n+1}-y_n=3y_{n-1}$	3
$\Delta y_n-4y_n=3$	1
$\Delta y_n-4y_{n-1}=e^{n-2}$	2

（要将 Δy_n 换成 $y_{n+1}-y_n$）

一阶差分方程

定义 一阶常系数常数项线性差分方程的标准形式：

$$y_{n+1} - ay_n = b$$

一阶差分方程

定义 一阶常系数常数项线性差分方程的标准形式：

$$y_{n+1} - ay_n = b$$

问题 能否解出 y_n？

一阶差分方程

定义 一阶常系数常数项线性差分方程的标准形式：

$$y_{n+1} - a y_n = b$$

问题 能否解出 y_n？

公式 上述差分方程的通解为：

$$y_n = \begin{cases} c a^n + \frac{b}{1-a}, & a \neq 1 \\ , & a = 1 \end{cases}$$

一阶差分方程

定义 一阶常系数常数项线性差分方程的标准形式：

$$y_{n+1} - ay_n = b$$

问题 能否解出 y_n？

公式 上述差分方程的通解为：

$$y_n = \begin{cases} ca^n + \frac{b}{1-a}, & a \neq 1 \\ \quad , & a = 1 \end{cases}$$

其中 c 是常数

一阶差分方程

定义 一阶常系数常数项线性差分方程的标准形式：

$$y_{n+1} - a y_n = b$$

问题 能否解出 y_n？

公式 上述差分方程的通解为：

$$y_n = \begin{cases} ca^n + \frac{b}{1-a}, & a \neq 1 \\ c + nb, & a = 1 \end{cases}$$

其中 c 是常数

一阶差分方程

定义 一阶常系数常数项线性差分方程的标准形式：

$$y_{n+1} - a y_n = b$$

问题 能否解出 y_n？

公式 上述差分方程的通解为：

$$y_n = \begin{cases} c a^n + \frac{b}{1-a}, & a \neq 1 \\ c + nb, & a = 1 \end{cases}$$

其中 c 是常数，与初始值 y_0 的关系是：

$$c = \begin{cases} y_0 - \frac{b}{1-a}, & a \neq 1 \\ y_0, & a = 1 \end{cases}$$

一阶差分方程解公式的推导

由
$$y_{n+1} - ay_n = b$$

所以

$$y_n =$$

$$= \begin{cases} \left(y_0 - \frac{b}{1-a}\right)a^n + \frac{b}{1-a}, & a \neq 1 \\ y_0 + nb, & a = 1 \end{cases}$$

一阶差分方程解公式的推导

由 $$y_{n+1} - ay_n = b \quad \Rightarrow \quad y_{n+1} = ay_n + b$$

所以

$$y_n =$$

$$= \begin{cases} \left(y_0 - \frac{b}{1-a}\right)a^n + \frac{b}{1-a}, & a \neq 1 \\ y_0 + nb, & a = 1 \end{cases}$$

一阶差分方程解公式的推导

由
$$y_{n+1} - ay_n = b \quad \Rightarrow \quad y_{n+1} = ay_n + b$$
所以

$$y_1 = ay_0 + b$$

$$y_n =$$

$$= \begin{cases} \left(y_0 - \frac{b}{1-a}\right)a^n + \frac{b}{1-a}, & a \neq 1 \\ y_0 + nb, & a = 1 \end{cases}$$

一阶差分方程解公式的推导

由 $$y_{n+1} - ay_n = b \quad \Rightarrow \quad y_{n+1} = ay_n + b$$

所以

$$y_1 = ay_0 + b$$

$$y_2 = ay_1 + b =$$

$$y_n =$$

$$= \begin{cases} \left(y_0 - \frac{b}{1-a}\right)a^n + \frac{b}{1-a}, & a \neq 1 \\ y_0 + nb, & a = 1 \end{cases}$$

一阶差分方程解公式的推导

由
$$y_{n+1} - ay_n = b \quad \Rightarrow \quad y_{n+1} = ay_n + b$$
所以

$$y_1 = ay_0 + b$$

$$y_2 = ay_1 + b = a[ay_0 + b] + b =$$

$$y_n =$$

$$= \begin{cases} \left(y_0 - \frac{b}{1-a}\right)a^n + \frac{b}{1-a}, & a \neq 1 \\ y_0 + nb, & a = 1 \end{cases}$$

一阶差分方程解公式的推导

由
$$y_{n+1} - ay_n = b \quad \Rightarrow \quad y_{n+1} = ay_n + b$$
所以

$$y_1 = ay_0 + b$$

$$y_2 = ay_1 + b = a[ay_0 + b] + b = a^2 y_0 + (1+a)b$$

$$y_n =$$

$$= \begin{cases} \left(y_0 - \frac{b}{1-a}\right)a^n + \frac{b}{1-a}, & a \neq 1 \\ y_0 + nb, & a = 1 \end{cases}$$

一阶差分方程解公式的推导

由
$$y_{n+1} - ay_n = b \quad \Rightarrow \quad y_{n+1} = ay_n + b$$
所以

$$y_1 = ay_0 + b$$

$$y_2 = ay_1 + b = a[ay_0 + b] + b = a^2y_0 + (1 + a)b$$

$$y_3 = ay_2 + b =$$

$$y_n =$$

$$= \begin{cases} \left(y_0 - \frac{b}{1-a}\right)a^n + \frac{b}{1-a}, & a \neq 1 \\ y_0 + nb, & a = 1 \end{cases}$$

一阶差分方程解公式的推导

由
$$y_{n+1} - ay_n = b \quad \Rightarrow \quad y_{n+1} = ay_n + b$$

所以

$$y_1 = ay_0 + b$$

$$y_2 = ay_1 + b = a[ay_0 + b] + b = a^2 y_0 + (1+a)b$$

$$y_3 = ay_2 + b = a[a^2 y_0 + (1+a)b] + b =$$

$$y_n =$$

$$= \begin{cases} \left(y_0 - \frac{b}{1-a}\right)a^n + \frac{b}{1-a}, & a \neq 1 \\ y_0 + nb, & a = 1 \end{cases}$$

一阶差分方程解公式的推导

由
$$y_{n+1} - ay_n = b \quad \Rightarrow \quad y_{n+1} = ay_n + b$$

所以

$$y_1 = ay_0 + b$$

$$y_2 = ay_1 + b = a[ay_0 + b] + b = a^2y_0 + (1+a)b$$

$$y_3 = ay_2 + b = a[a^2y_0 + (1+a)b] + b = a^3y_0 + (1+a+a^2)b$$

$$\vdots$$

$$y_n =$$

$$= \begin{cases} \left(y_0 - \frac{b}{1-a}\right)a^n + \frac{b}{1-a}, & a \neq 1 \\ y_0 + nb, & a = 1 \end{cases}$$

一阶差分方程解公式的推导

由 $$y_{n+1} - ay_n = b \quad \Rightarrow \quad y_{n+1} = ay_n + b$$

所以

$$y_1 = ay_0 + b$$

$$y_2 = ay_1 + b = a[ay_0 + b] + b = a^2 y_0 + (1+a)b$$

$$y_3 = ay_2 + b = a[a^2 y_0 + (1+a)b] + b = a^3 y_0 + (1+a+a^2)b$$

$$\vdots$$

$$y_n = a^n y_0 +$$

$$= \begin{cases} \left(y_0 - \frac{b}{1-a}\right) a^n + \frac{b}{1-a}, & a \neq 1 \\ y_0 + nb, & a = 1 \end{cases}$$

一阶差分方程解公式的推导

由 $$y_{n+1} - ay_n = b \quad \Rightarrow \quad y_{n+1} = ay_n + b$$

所以

$$y_1 = ay_0 + b$$

$$y_2 = ay_1 + b = a[ay_0 + b] + b = a^2y_0 + (1+a)b$$

$$y_3 = ay_2 + b = a[a^2y_0 + (1+a)b] + b = a^3y_0 + (1+a+a^2)b$$

$$\vdots$$

$$y_n = a^ny_0 + (1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1})b$$

$$= \begin{cases} \left(y_0 - \frac{b}{1-a}\right)a^n + \frac{b}{1-a}, & a \neq 1 \\ y_0 + nb, & a = 1 \end{cases}$$

一阶差分方程解公式的推导

由
$$y_{n+1} - a y_n = b \quad \Rightarrow \quad y_{n+1} = a y_n + b$$

所以

$$y_1 = a y_0 + b$$

$$y_2 = a y_1 + b = a[a y_0 + b] + b = a^2 y_0 + (1 + a) b$$

$$y_3 = a y_2 + b = a[a^2 y_0 + (1 + a) b] + b = a^3 y_0 + (1 + a + a^2) b$$

$$\vdots$$

$$y_n = a^n y_0 + (1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1}) b$$

$$= \begin{cases} a^n y_0 + \frac{1-a^n}{1-a} b, & a \neq 1 \\ & a = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \left(y_0 - \frac{b}{1-a}\right) a^n + \frac{b}{1-a}, & a \neq 1 \\ y_0 + nb, & a = 1 \end{cases}$$

一阶差分方程解公式的推导

由
$$y_{n+1} - ay_n = b \quad \Rightarrow \quad y_{n+1} = ay_n + b$$
所以

$$y_1 = ay_0 + b$$

$$y_2 = ay_1 + b = a[ay_0 + b] + b = a^2y_0 + (1+a)b$$

$$y_3 = ay_2 + b = a[a^2y_0 + (1+a)b] + b = a^3y_0 + (1+a+a^2)b$$

$$\vdots$$

$$y_n = a^ny_0 + (1+a+a^2+\cdots+a^{n-1})b$$

$$= \begin{cases} a^ny_0 + \frac{1-a^n}{1-a}b, & a \neq 1 \\ y_0 + nb, & a = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \left(y_0 - \frac{b}{1-a}\right)a^n + \frac{b}{1-a}, & a \neq 1 \\ y_0 + nb, & a = 1 \end{cases}$$

一阶差分方程解公式的推导

由
$$y_{n+1} - ay_n = b \quad \Rightarrow \quad y_{n+1} = ay_n + b$$
所以

$$y_1 = ay_0 + b$$

$$y_2 = ay_1 + b = a[ay_0 + b] + b = a^2 y_0 + (1+a)b$$

$$y_3 = ay_2 + b = a[a^2 y_0 + (1+a)b] + b = a^3 y_0 + (1+a+a^2)b$$

$$\vdots$$

$$y_n = a^n y_0 + (1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1})b$$

$$= \begin{cases} a^n y_0 + \frac{1-a^n}{1-a} b, & a \neq 1 \\ y_0 + nb, & a = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \left(y_0 - \frac{b}{1-a}\right) a^n + \frac{b}{1-a}, & a \neq 1 \\ y_0 + nb, & a = 1 \end{cases} = \begin{cases} ca^n + \frac{b}{1-a}, & a \neq 1 \\ c + nb, & a = 1 \end{cases}$$

$$y_{n+1} - ay_n = b \quad \Longrightarrow \quad y_n = \begin{cases} ca^n + \frac{b}{1-a}, & a \neq 1 \\ c + nb, & a = 1 \end{cases}$$

$$y_{n+1} - ay_n = b \quad \Longrightarrow \quad y_n = \begin{cases} ca^n + \frac{b}{1-a}, & a \neq 1 \\ c + nb, & a = 1 \end{cases}$$

例 求 $y_{n+1} - 3y_n = -9$ 的通解，及满足初始条件 $y_0 = 5$ 的特解。

$$y_{n+1} - ay_n = b \quad \Longrightarrow \quad y_n = \begin{cases} ca^n + \frac{b}{1-a}, & a \neq 1 \\ c + nb, & a = 1 \end{cases}$$

例 求 $y_{n+1} - 3y_n = -9$ 的通解，及满足初始条件 $y_0 = 5$ 的特解。

解 对应标准形式中 $a =$ ，$b =$ 。

$$y_{n+1} - a y_n = b \quad \Longrightarrow \quad y_n = \begin{cases} c a^n + \frac{b}{1-a}, & a \neq 1 \\ c + nb, & a = 1 \end{cases}$$

例 求 $y_{n+1} - 3y_n = -9$ 的通解，及满足初始条件 $y_0 = 5$ 的特解。

解 对应标准形式中 $a = 3$，$b =$ 。

$$y_{n+1} - ay_n = b \quad \Longrightarrow \quad y_n = \begin{cases} ca^n + \frac{b}{1-a}, & a \neq 1 \\ c + nb, & a = 1 \end{cases}$$

例 求 $y_{n+1} - 3y_n = -9$ 的通解，及满足初始条件 $y_0 = 5$ 的特解。

解 对应标准形式中 $a = 3$，$b = -9$。

$$y_{n+1} - ay_n = b \quad \Longrightarrow \quad y_n = \begin{cases} ca^n + \frac{b}{1-a}, & a \neq 1 \\ c + nb, & a = 1 \end{cases}$$

例 求 $y_{n+1} - 3y_n = -9$ 的通解，及满足初始条件 $y_0 = 5$ 的特解。

解 对应标准形式中 $a = 3$，$b = -9$。所以通解为

$$y_n = c \cdot 3^n + \frac{-9}{1-3} =$$

$$y_{n+1} - ay_n = b \quad \Longrightarrow \quad y_n = \begin{cases} ca^n + \frac{b}{1-a}, & a \neq 1 \\ c + nb, & a = 1 \end{cases}$$

例 求 $y_{n+1} - 3y_n = -9$ 的通解，及满足初始条件 $y_0 = 5$ 的特解。

解 对应标准形式中 $a = 3$，$b = -9$。所以通解为

$$y_n = c \cdot 3^n + \frac{-9}{1-3} = c \cdot 3^n + \frac{9}{2}$$

$$y_{n+1} - ay_n = b \quad \Longrightarrow \quad y_n = \begin{cases} ca^n + \frac{b}{1-a}, & a \neq 1 \\ c + nb, & a = 1 \end{cases}$$

例 求 $y_{n+1} - 3y_n = -9$ 的通解，及满足初始条件 $y_0 = 5$ 的特解。

解 对应标准形式中 $a = 3$，$b = -9$。所以通解为

$$y_n = c \cdot 3^n + \frac{-9}{1-3} = c \cdot 3^n + \frac{9}{2}$$

将 $y_0 = 5$ 代入通解：

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

$$y_{n+1} - a y_n = b \quad \Longrightarrow \quad y_n = \begin{cases} c a^n + \frac{b}{1-a}, & a \neq 1 \\ c + nb, & a = 1 \end{cases}$$

例 求 $y_{n+1} - 3y_n = -9$ 的通解，及满足初始条件 $y_0 = 5$ 的特解。

解 对应标准形式中 $a = 3$，$b = -9$。所以通解为

$$y_n = c \cdot 3^n + \frac{-9}{1-3} = c \cdot 3^n + \frac{9}{2}$$

将 $y_0 = 5$ 代入通解：$5 = c \cdot 3^0 + \frac{9}{2}$

$$y_{n+1} - a y_n = b \quad \Longrightarrow \quad y_n = \begin{cases} c a^n + \frac{b}{1-a}, & a \neq 1 \\ c + nb, & a = 1 \end{cases}$$

例 求 $y_{n+1} - 3y_n = -9$ 的通解，及满足初始条件 $y_0 = 5$ 的特解。

解 对应标准形式中 $a = 3$，$b = -9$。所以通解为

$$y_n = c \cdot 3^n + \frac{-9}{1-3} = c \cdot 3^n + \frac{9}{2}$$

将 $y_0 = 5$ 代入通解：$5 = c \cdot 3^0 + \frac{9}{2} = c + \frac{9}{2}$

$$y_{n+1} - ay_n = b \quad \Longrightarrow \quad y_n = \begin{cases} ca^n + \frac{b}{1-a}, & a \neq 1 \\ c + nb, & a = 1 \end{cases}$$

例 求 $y_{n+1} - 3y_n = -9$ 的通解，及满足初始条件 $y_0 = 5$ 的特解。

解 对应标准形式中 $a = 3$，$b = -9$。所以通解为

$$y_n = c \cdot 3^n + \frac{-9}{1-3} = c \cdot 3^n + \frac{9}{2}$$

将 $y_0 = 5$ 代入通解：$5 = c \cdot 3^0 + \frac{9}{2} = c + \frac{9}{2} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{2}$

$$y_{n+1} - ay_n = b \quad \Longrightarrow \quad y_n = \begin{cases} ca^n + \frac{b}{1-a}, & a \neq 1 \\ c + nb, & a = 1 \end{cases}$$

例 求 $y_{n+1} - 3y_n = -9$ 的通解，及满足初始条件 $y_0 = 5$ 的特解。

解 对应标准形式中 $a = 3$，$b = -9$。所以通解为

$$y_n = c \cdot 3^n + \frac{-9}{1-3} = c \cdot 3^n + \frac{9}{2}$$

将 $y_0 = 5$ 代入通解：$5 = c \cdot 3^0 + \frac{9}{2} = c + \frac{9}{2} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{2}$，所以特解是

$$y_n = \frac{1}{2} \cdot 3^n + \frac{9}{2}$$

$$y_{n+1} - a y_n = b \quad \Longrightarrow \quad y_n = \begin{cases} c a^n + \frac{b}{1-a}, & a \neq 1 \\ c + nb, & a = 1 \end{cases}$$

例 求 $\Delta y_n + 3y_n = 6$ 的通解，及满足初始条件 $y_0 = 1$ 的特解。

$$y_{n+1} - ay_n = b \quad \Longrightarrow \quad y_n = \begin{cases} ca^n + \frac{b}{1-a}, & a \neq 1 \\ c + nb, & a = 1 \end{cases}$$

例 求 $\Delta y_n + 3y_n = 6$ 的通解，及满足初始条件 $y_0 = 1$ 的特解。

解 $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$，所以方程改写为：

$$y_{n+1} - ay_n = b \quad \Longrightarrow \quad y_n = \begin{cases} ca^n + \frac{b}{1-a}, & a \neq 1 \\ c + nb, & a = 1 \end{cases}$$

例 求 $\Delta y_n + 3y_n = 6$ 的通解，及满足初始条件 $y_0 = 1$ 的特解。

解 $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$，所以方程改写为：

$$y_{n+1} + 2y_n = 6$$

$$y_{n+1} - ay_n = b \quad \Longrightarrow \quad y_n = \begin{cases} ca^n + \frac{b}{1-a}, & a \neq 1 \\ c + nb, & a = 1 \end{cases}$$

例 求 $\Delta y_n + 3y_n = 6$ 的通解，及满足初始条件 $y_0 = 1$ 的特解。

解 $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$，所以方程改写为：

$$y_{n+1} + 2y_n = 6$$

对应标准形式中 $a =$ ， $b =$ 。

$$y_{n+1} - a y_n = b \quad \Longrightarrow \quad y_n = \begin{cases} c a^n + \frac{b}{1-a}, & a \neq 1 \\ c + nb, & a = 1 \end{cases}$$

例 求 $\Delta y_n + 3y_n = 6$ 的通解，及满足初始条件 $y_0 = 1$ 的特解。

解 $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$，所以方程改写为：

$$y_{n+1} + 2y_n = 6$$

对应标准形式中 $a = -2$，$b =$　。

$$y_{n+1} - ay_n = b \quad \Longrightarrow \quad y_n = \begin{cases} ca^n + \frac{b}{1-a}, & a \neq 1 \\ c + nb, & a = 1 \end{cases}$$

例 求 $\Delta y_n + 3y_n = 6$ 的通解，及满足初始条件 $y_0 = 1$ 的特解。

解 $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$，所以方程改写为：

$$y_{n+1} + 2y_n = 6$$

对应标准形式中 $a = -2$，$b = 6$。

$$y_{n+1} - ay_n = b \quad \Longrightarrow \quad y_n = \begin{cases} ca^n + \frac{b}{1-a}, & a \neq 1 \\ c + nb, & a = 1 \end{cases}$$

例 求 $\Delta y_n + 3y_n = 6$ 的通解，及满足初始条件 $y_0 = 1$ 的特解。

解 $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$，所以方程改写为：

$$y_{n+1} + 2y_n = 6$$

对应标准形式中 $a = -2$，$b = 6$。所以通解为

$$y_n = c \cdot (-2)^n + \frac{6}{1-(-2)} =$$

$$y_{n+1} - a y_n = b \quad \Longrightarrow \quad y_n = \begin{cases} c a^n + \frac{b}{1-a}, & a \neq 1 \\ c + nb, & a = 1 \end{cases}$$

例 求 $\Delta y_n + 3y_n = 6$ 的通解，及满足初始条件 $y_0 = 1$ 的特解。

解 $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$，所以方程改写为：

$$y_{n+1} + 2y_n = 6$$

对应标准形式中 $a = -2$，$b = 6$。所以通解为

$$y_n = c \cdot (-2)^n + \frac{6}{1-(-2)} = c \cdot (-2)^n + 2$$

将 $y_0 = 1$ 代入通解：

$$y_{n+1} - ay_n = b \quad \Longrightarrow \quad y_n = \begin{cases} ca^n + \frac{b}{1-a}, & a \neq 1 \\ c + nb, & a = 1 \end{cases}$$

例 求 $\Delta y_n + 3y_n = 6$ 的通解，及满足初始条件 $y_0 = 1$ 的特解。

解 $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$，所以方程改写为：

$$y_{n+1} + 2y_n = 6$$

对应标准形式中 $a = -2$，$b = 6$。所以通解为

$$y_n = c \cdot (-2)^n + \frac{6}{1-(-2)} = c \cdot (-2)^n + 2$$

将 $y_0 = 1$ 代入通解：$1 = c \cdot (-2)^0 + 2$

$$y_{n+1} - ay_n = b \quad \Longrightarrow \quad y_n = \begin{cases} ca^n + \frac{b}{1-a}, & a \neq 1 \\ c + nb, & a = 1 \end{cases}$$

例 求 $\Delta y_n + 3y_n = 6$ 的通解，及满足初始条件 $y_0 = 1$ 的特解。

解 $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$，所以方程改写为：

$$y_{n+1} + 2y_n = 6$$

对应标准形式中 $a = -2$，$b = 6$。所以通解为

$$y_n = c \cdot (-2)^n + \frac{6}{1-(-2)} = c \cdot (-2)^n + 2$$

将 $y_0 = 1$ 代入通解：$1 = c \cdot (-2)^0 + 2 = c + 2$

$$y_{n+1} - ay_n = b \quad \Longrightarrow \quad y_n = \begin{cases} ca^n + \frac{b}{1-a}, & a \neq 1 \\ c + nb, & a = 1 \end{cases}$$

例 求 $\Delta y_n + 3y_n = 6$ 的通解，及满足初始条件 $y_0 = 1$ 的特解。

解 $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$，所以方程改写为：

$$y_{n+1} + 2y_n = 6$$

对应标准形式中 $a = -2$，$b = 6$。所以通解为

$$y_n = c \cdot (-2)^n + \frac{6}{1-(-2)} = c \cdot (-2)^n + 2$$

将 $y_0 = 1$ 代入通解：$1 = c \cdot (-2)^0 + 2 = c + 2 \quad \Rightarrow \quad c = -1$

$$y_{n+1} - ay_n = b \quad \Longrightarrow \quad y_n = \begin{cases} ca^n + \frac{b}{1-a}, & a \neq 1 \\ c + nb, & a = 1 \end{cases}$$

例 求 $\Delta y_n + 3y_n = 6$ 的通解，及满足初始条件 $y_0 = 1$ 的特解。

解 $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$，所以方程改写为：

$$y_{n+1} + 2y_n = 6$$

对应标准形式中 $a = -2$，$b = 6$。所以通解为

$$y_n = c \cdot (-2)^n + \frac{6}{1-(-2)} = c \cdot (-2)^n + 2$$

将 $y_0 = 1$ 代入通解：$1 = c \cdot (-2)^0 + 2 = c + 2 \quad \Rightarrow \quad c = -1$，所以特解是

$$y_n = -(-2)^n + 2$$