线性代数（内外招） 姓名：

2018-2019 学年（上） 专业：

学号：

第 11 周作业解答

练习 1. 用“特解 + 基础解系的线性组合”的形式，表示线性方程组 $\left\{\begin{array}{rrrrrl} x_1+ & 2x_2+ & x_3+ & x_4- & x_5 & =1 \\ & x_2+ & x_3+ & x_4 & & =1 \\ 2x_1+ & 3x_2+ & x_3+ & 2x_4- & x_5 & =3 \end{array}\right.$ 的通解。

解

$$
\left(\,A \,\middle|\, b\,\right) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3-2r_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{r_3+r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[r_1-r_3]{r_2-r_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{r_1-2r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)
$$

1. 从最后简化的阶梯型矩阵看出，原方程组同解于：

$$
\left\{\begin{array}{rrrrl} x_1 & & -x_3 & & =1 \\ & x_2 & +x_3 & -x_5 & =-1 \\ & & x_4 & +x_5 & =2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 + x_5 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{array}\right.
$$

2. 自由变量：x_3, x_5

3. 原方程组特解：取自由变量 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，得特解 $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$。

4. 导出组 $Ax = 0$ 同解于

$$
\left\{\begin{array}{l} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_3 + x_5 \\ x_4 = -x_5 \end{array}\right. .
$$

分别取 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，得基础解系

$$
\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.
$$

5. 通解：

$$x=\eta+c_1\xi_1+c_2\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\\0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

其中 c_1, c_2 为任意常数。

练习 2. 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-a&-b&-c\end{pmatrix}$ 的特征多项式。

解

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&0\\0&\lambda&-1\\a&b&\lambda+c\end{vmatrix}=\lambda^3+c\lambda^2+b\lambda+a$$

练习 3. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1&k\\4&3\end{pmatrix}$ 的一个特征值是 5，求 k 的值。

解 $0=|5I-A|=\begin{vmatrix}5+1&-k\\-4&5-3\end{vmatrix}=12-4k$，所以 $k=3$。

练习 4. 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&-2\\-2&3\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量。

练习 5. 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}5&6&-3\\-1&0&1\\1&2&1\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量。

解

- 解特征方程 $|\lambda I - A| = 0$。

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-5 & -6 & 3 \\ 1 & \lambda & -1 \\ -1 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3+r_2} \begin{vmatrix} \lambda-5 & -6 & 3 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 0 & \lambda-2 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-5 & -6 & 3 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2-c_3} (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-5 & -9 & 3 \\ 1 & \lambda+1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-5 & -9 \\ 1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda^2-4\lambda+4) = (\lambda-2)^3$$

所以特征值为 $\lambda_1 = 2$（这是三重特征值）。

- 关于特征值 $\lambda_1 = 2$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$。

$$(\lambda_1 I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -6 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

同解方程组为

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = -2x_2 + x_3$$

自由变量取为 x_2, x_3。分别取 $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，得基础解系

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以对应于特征值 $\lambda_1 = 2$ 的所有特征向量为：

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 = c_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

其中 c_1, c_2 是不全为零的任意常数。

练习 6. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量。

解

- 解特征方程 $|\lambda I - A| = 0$。

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

所以特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$。

- 关于特征值 $\lambda_1 = 1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$。

$$(\lambda_1 I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

同解方程组为

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

取 x_1 为自由变量，得基础解系

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

所以对应于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的所有特征向量为：

$$c_1\alpha_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

其中 $c_1 \neq 0$。

- 关于特征值 $\lambda_2 = 2$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$。

$$(\lambda_2 I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

取 x_2 为自由变量，得基础解系

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

所以对应于特征值 $\lambda_2 = 2$ 的所有特征向量为：

$$c_2\alpha_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

其中 $c_2 \neq 0$。

- 关于特征值 $\lambda_3 = 3$，求解 $(\lambda_3 I - A)x = 0$。

$$(\lambda_3 I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

取 x_3 为自由变量，得基础解系

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以对应于特征值 $\lambda_3 = 3$ 的所有特征向量为：

$$c_3\alpha_3 = c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

其中 $c_3 \neq 0$。

练习 7. 设 λ_1, λ_2 是方阵 A 的特征值，α_1, α_2 分别为 λ_1, λ_2 的特征向量。证明：如果 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，则 $\alpha_1 + \alpha_2$ 一定不是 A 的特征向量。

证明反证法，假设 $\alpha_1 + \alpha_2$ 是 A 的特征向量，相应特征向值为 λ。则

$$A(\alpha_1 + \alpha_2) = \lambda(\alpha_1 + \alpha_2).$$

另一方面

$$A(\alpha_1 + \alpha_2) = A\alpha_1 + A\alpha_2 = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2.$$

综合上述两式，得

$$\lambda(\alpha_1 + \alpha_2) = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2.$$

所以

$$(\lambda - \lambda_1)\alpha_1 + (\lambda - \lambda_2)\alpha_2 = 0.$$

注意到对应不同特征值的特征向量线性无关，从而上式意味

$$\lambda = \lambda_1, \quad \lambda = \lambda_2.$$

这与 λ_1, λ_2 不等矛盾。矛盾在于假设了 $\alpha_1 + \alpha_2$ 是 A 的特征向量。所以 $\alpha_1 + \alpha_2$ 一定不是 A 的特征向量。