第 9 章 α：多元函数的基本概念

数学系　　梁卓滨

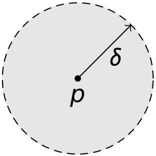
2017.07 暑期班

We are here now...

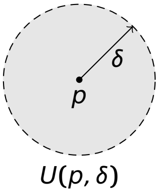
平面点集

- 点 p 的 δ邻域

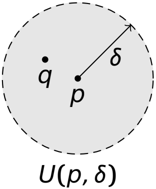
- 点 p 的 δ邻域



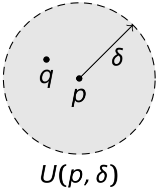
- 点 p 的 δ邻域



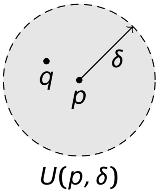
- 点 p 的 δ邻域



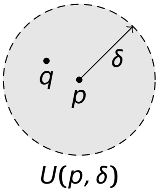
- 点 p 的 δ邻域：$U(p,\delta)=\{q\,|\,|pq|<\delta\}$



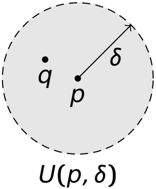
- 点 p 的 δ邻域：$U(p,\delta) = \{q \mid |pq| < \delta\}$
- 点 p 的去心δ邻域



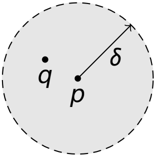
- 点 p 的 δ邻域：$U(p,\delta)=\{q\,|\,|pq|<\delta\}$
- 点 p 的去心δ邻域：$\mathring{U}(p,\delta)=U(p,\delta)-\{p\}$



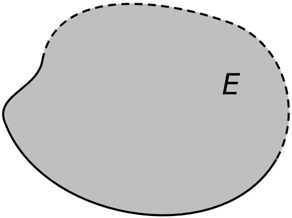
- 点 p 的 δ邻域：$U(p,\delta)=\{q \mid |pq|<\delta\}$
- 点 p 的去心δ邻域：$\mathring{U}(p,\delta)=U(p,\delta)-\{p\}=\{q \mid 0<|pq|<\delta\}$



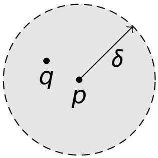
- 点 p 的 δ邻域：$U(p,\delta)=\{q\,|\,|pq|<\delta\}$
- 点 p 的去心δ邻域：$\mathring{U}(p,\delta)=U(p,\delta)-\{p\}=\{q\,|\,0<|pq|<\delta\}$



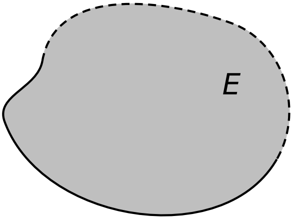
$U(p,\delta)$



- 点 p 的 δ邻域：$U(p,\delta)=\{q\,|\,|pq|<\delta\}$
- 点 p 的去心δ邻域：$\mathring{U}(p,\delta)=U(p,\delta)-\{p\}=\{q\,|\,0<|pq|<\delta\}$

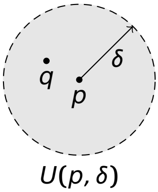


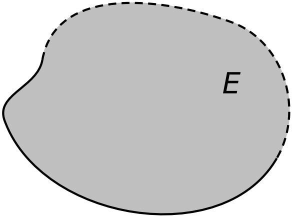
$U(p,\delta)$



- 点 p 是 E 的内点
- 点 p 是 E 的外点
- 点 p 是 E 的边界点

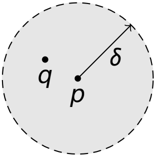
- 点 p 的 δ邻域：$U(p,\delta)=\{q\,|\,|pq|<\delta\}$
- 点 p 的去心δ邻域：$\mathring{U}(p,\delta)=U(p,\delta)-\{p\}=\{q\,|\,0<|pq|<\delta\}$



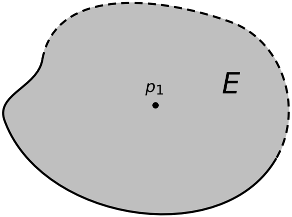


- 点 p 是 E 的内点，指：$\exists\delta>0$ 使得 $U(p,\delta)\subset E$；
- 点 p 是 E 的外点
- 点 p 是 E 的边界点

- 点 p 的 δ邻域：$U(p,\delta)=\{q\,|\,|pq|<\delta\}$
- 点 p 的去心δ邻域：$\mathring{U}(p,\delta)=U(p,\delta)-\{p\}=\{q\,|\,0<|pq|<\delta\}$

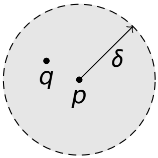


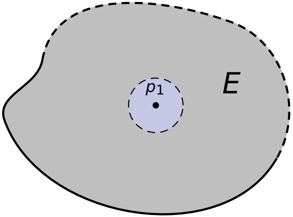
$U(p,\delta)$



- 点 p 是 E 的内点，指：$\exists\delta>0$ 使得 $U(p,\delta)\subset E$；
- 点 p 是 E 的外点
- 点 p 是 E 的边界点

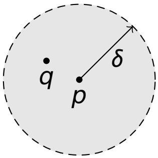
- 点 p 的 δ邻域：$U(p,\delta)=\{q\,|\,|pq|<\delta\}$
- 点 p 的去心δ邻域：$\mathring{U}(p,\delta)=U(p,\delta)-\{p\}=\{q\,|\,0<|pq|<\delta\}$



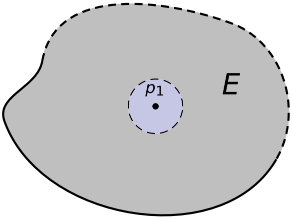


- 点 p 是 E 的内点，指：$\exists\delta>0$ 使得 $U(p,\delta)\subset E$；
- 点 p 是 E 的外点
- 点 p 是 E 的边界点

- 点 p 的 δ邻域：$U(p,\delta)=\{q\,|\,|pq|<\delta\}$
- 点 p 的去心δ邻域：$\mathring{U}(p,\delta)=U(p,\delta)-\{p\}=\{q\,|\,0<|pq|<\delta\}$

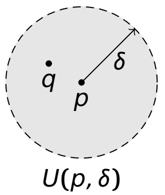


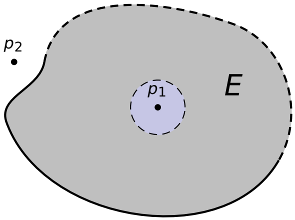
$U(p,\delta)$



- 点 p 是 E 的内点，指：$\exists\delta>0$ 使得 $U(p,\delta)\subset E$；
- 点 p 是 E 的外点，指：$\exists\delta>0$ 使得 $U(p,\delta)\cap E=\varnothing$；
- 点 p 是 E 的边界点

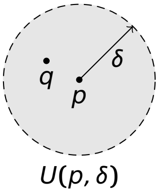
- 点 p 的 δ邻域：$U(p,\delta)=\{q\,|\,|pq|<\delta\}$
- 点 p 的去心δ邻域：$\mathring{U}(p,\delta)=U(p,\delta)-\{p\}=\{q\,|\,0<|pq|<\delta\}$

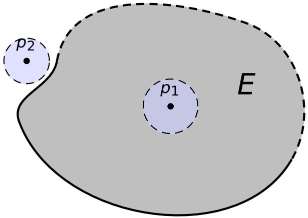




- 点 p 是 E 的内点，指：$\exists\delta>0$ 使得 $U(p,\delta)\subset E$；
- 点 p 是 E 的外点，指：$\exists\delta>0$ 使得 $U(p,\delta)\cap E=\varnothing$；
- 点 p 是 E 的边界点

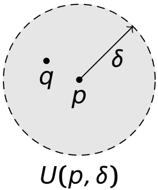
- 点 p 的 δ邻域：$U(p,\delta)=\{q \mid |pq|<\delta\}$
- 点 p 的去心δ邻域：$\mathring{U}(p,\delta)=U(p,\delta)-\{p\}=\{q \mid 0<|pq|<\delta\}$

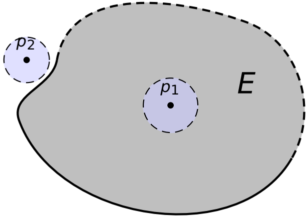




- 点 p 是 E 的内点，指：$\exists\delta>0$ 使得 $U(p,\delta)\subset E$；
- 点 p 是 E 的外点，指：$\exists\delta>0$ 使得 $U(p,\delta)\cap E=\varnothing$；
- 点 p 是 E 的边界点

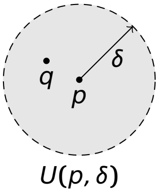
- 点 p 的 δ邻域：$U(p,\delta)=\{q\,|\,|pq|<\delta\}$
- 点 p 的去心δ邻域：$\mathring{U}(p,\delta)=U(p,\delta)-\{p\}=\{q\,|\,0<|pq|<\delta\}$

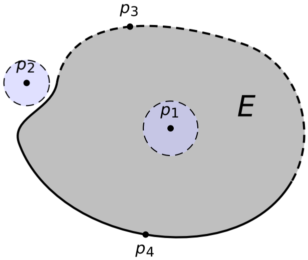




- 点 p 是 E 的内点，指：$\exists\delta>0$ 使得 $U(p,\delta)\subset E$；
- 点 p 是 E 的外点，指：$\exists\delta>0$ 使得 $U(p,\delta)\cap E=\varnothing$；
- 点 p 是 E 的边界点，指：不是内点，也不是外点；

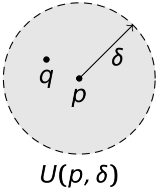
- 点 p 的 δ邻域：$U(p,\delta) = \{q \mid |pq| < \delta\}$
- 点 p 的去心δ邻域：$\mathring{U}(p,\delta) = U(p,\delta) - \{p\} = \{q \mid 0 < |pq| < \delta\}$

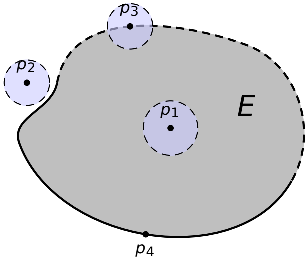




- 点 p 是 E 的内点，指：$\exists \delta > 0$ 使得 $U(p,\delta) \subset E$；
- 点 p 是 E 的外点，指：$\exists \delta > 0$ 使得 $U(p,\delta) \cap E = \varnothing$；
- 点 p 是 E 的边界点，指：不是内点，也不是外点；

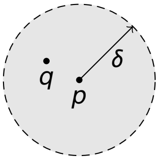
- 点 p 的 δ邻域：$U(p,\delta)=\{q\,|\,|pq|<\delta\}$
- 点 p 的去心δ邻域：$\mathring{U}(p,\delta)=U(p,\delta)-\{p\}=\{q\,|\,0<|pq|<\delta\}$



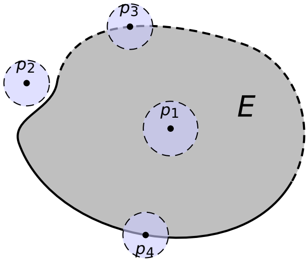


- 点 p 是 E 的内点，指：$\exists\delta>0$ 使得 $U(p,\delta)\subset E$；
- 点 p 是 E 的外点，指：$\exists\delta>0$ 使得 $U(p,\delta)\cap E=\varnothing$；
- 点 p 是 E 的边界点，指：不是内点，也不是外点；

- 点 p 的 δ邻域：$U(p,\delta)=\{q\,|\,|pq|<\delta\}$
- 点 p 的去心δ邻域：$\overset{\circ}{U}(p,\delta)=U(p,\delta)-\{p\}=\{q\,|\,0<|pq|<\delta\}$

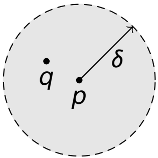


$U(p,\delta)$

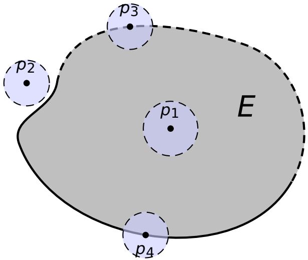


- 点 p 是 E 的内点，指：$\exists\delta>0$ 使得 $U(p,\delta)\subset E$；
- 点 p 是 E 的外点，指：$\exists\delta>0$ 使得 $U(p,\delta)\cap E=\varnothing$；
- 点 p 是 E 的边界点，指：不是内点，也不是外点；

- 点 p 的 δ邻域：$U(p, \delta) = \{q \mid |pq| < \delta\}$
- 点 p 的去心δ邻域：$U(p,\delta) = U(p,\delta) - \{p\} = \{q \mid 0 < |pq| < \delta\}$

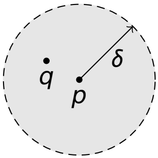


$U(p,\delta)$

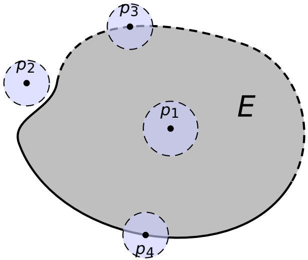


- 点 p 是 E 的内点，指：$\exists\delta > 0$ 使得 $U(p, \delta) \subset E$；
- 点 p 是 E 的外点，指：$\exists\delta > 0$ 使得 $U(p, \delta) \cap E = \varnothing$；
- 点 p 是 E 的边界点，指：不是内点，也不是外点；即，$\forall\delta > 0$, $U(p, \delta)$ 同时包含 E 以外、以内的点。

- 点 p 的 δ邻域：$U(p, \delta) = \{q \,|\, |pq| < \delta\}$
- 点 p 的去心δ邻域：$U(p, \delta) = U(p, \delta) - \{p\} = \{q \,|\, 0 < |pq| < \delta\}$



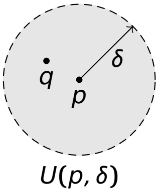
$U(p, \delta)$

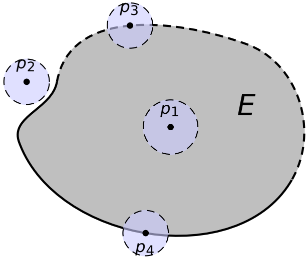


- 点 p 是 E 的内点，指：$\exists \delta > 0$ 使得 $U(p, \delta) \subset E$；（内点 $\in E$）
- 点 p 是 E 的外点，指：$\exists \delta > 0$ 使得 $U(p, \delta) \cap E = \varnothing$；
- 点 p 是 E 的边界点，指：不是内点，也不是外点；即，

  $\forall \delta > 0$, $U(p, \delta)$ 同时包含 E 以外、以内的点。

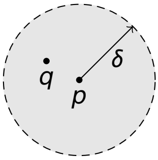
- 点 p 的 δ邻域：$U(p,\delta)=\{q\,|\,|pq|<\delta\}$
- 点 p 的去心δ邻域：$\mathring{U}(p,\delta)=U(p,\delta)-\{p\}=\{q\,|\,0<|pq|<\delta\}$



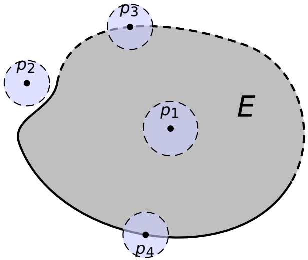


- 点 p 是 E 的内点，指：$\exists\delta>0$ 使得 $U(p,\delta)\subset E$；（内点 $\in E$）
- 点 p 是 E 的外点，指：$\exists\delta>0$ 使得 $U(p,\delta)\cap E=\varnothing$；（外点 $\notin E$）
- 点 p 是 E 的边界点，指：不是内点，也不是外点；即，
  $\forall\delta>0$, $U(p,\delta)$ 同时包含 E 以外、以内的点。

- 点 p 的 δ邻域：$U(p,\delta)=\{q\,|\,|pq|<\delta\}$
- 点 p 的去心δ邻域：$\mathring{U}(p,\delta)=U(p,\delta)-\{p\}=\{q\,|\,0<|pq|<\delta\}$



$U(p,\delta)$



- 点 p 是 E 的内点，指：$\exists\delta>0$ 使得 $U(p,\delta)\subset E$；（内点 $\in E$）
- 点 p 是 E 的外点，指：$\exists\delta>0$ 使得 $U(p,\delta)\cap E=\emptyset$；（外点 $\notin E$）
- 点 p 是 E 的边界点，指：不是内点，也不是外点；即，$\forall\delta>0$, $U(p,\delta)$ 同时包含 E 以外、以内的点。（边界点可能 $\in E$，也可能 $\notin E$）

设 E 是平面上的点集，则

- E 是 开集
- E 是 闭集

- E 是 连通集
- E 是 开区域（区域）
- E 是 闭域（区域）

设 E 是平面上的点集，则

- E 是 开集，指边界点都不属于 E
- E 是 闭集

- E 是 连通集
- E 是 开区域（区域）
- E 是 闭域（区域）

设 E 是平面上的点集，则

- E 是 开集，指边界点都不属于 E（$E = \{E$的内点$\}$）
- E 是 闭集

- E 是 连通集
- E 是 开区域（区域）
- E 是 闭域（区域）

设 E 是平面上的点集，则

- E 是 开集，指边界点都不属于 E（$E = \{E$的内点$\}$）
- E 是 闭集，指边界点都属于 E

- E 是 连通集
- E 是 开区域（区域）
- E 是 闭域（区域）

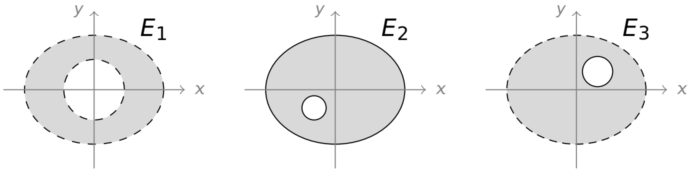
设 E 是平面上的点集，则

- E 是 开集，指边界点都不属于 E（$E = \{E$的内点$\}$）
- E 是 闭集，指边界点都属于 E（即，$E = \{E$的内点$\} \cup \{$边界点$\}$）

- E 是 连通集
- E 是 开区域（区域）
- E 是 闭域（区域）

设 E 是平面上的点集，则

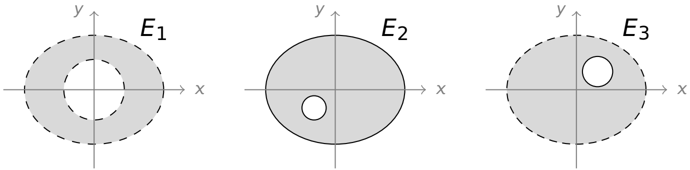
- E 是 开集，指边界点都不属于 E（$E = \{E$的内点$\}$）
- E 是 闭集，指边界点都属于 E（即，$E = \{E$的内点$\} \cup \{$边界点$\}$）



- E 是 连通集
- E 是 开区域（区域）
- E 是 闭域（区域）

设 E 是平面上的点集，则

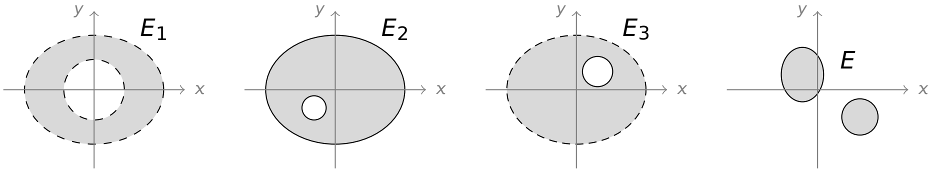
- E 是 开集，指边界点都不属于 E（$E = \{E\text{的内点}\}$）
- E 是 闭集，指边界点都属于 E（即，$E = \{E\text{的内点}\} \cup \{\text{边界点}\}$）



- E 是 连通集，指 E 中任两点均可用 E 中折线连起来
- E 是 开区域（区域）
- E 是 闭域（区域）

设 E 是平面上的点集，则

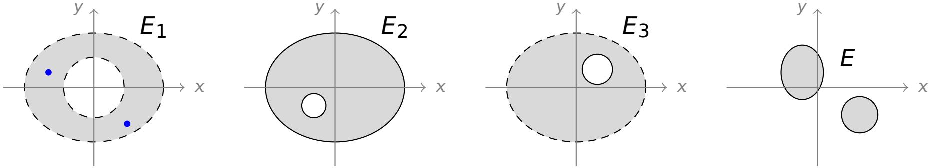
- E 是 开集，指边界点都不属于 E（$E = \{E$的内点$\}$）
- E 是 闭集，指边界点都属于 E（即，$E = \{E$的内点$\} \cup \{$边界点$\}$）



- E 是 连通集，指 E 中任两点均可用 E 中折线连起来
- E 是 开区域（区域）
- E 是 闭域（区域）

设 E 是平面上的点集，则

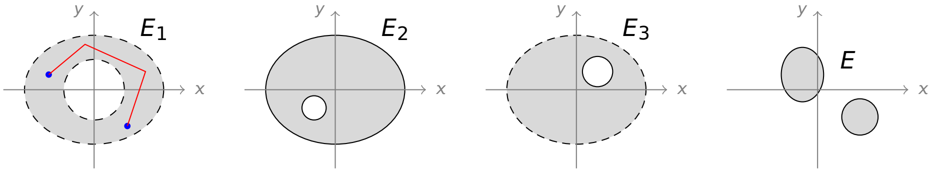
- E 是 开集，指边界点都不属于 E（$E = \{E\text{的内点}\}$）
- E 是 闭集，指边界点都属于 E（即，$E = \{E\text{的内点}\} \cup \{\text{边界点}\}$）



- E 是 连通集，指 E 中任两点均可用 E 中折线连起来
- E 是 开区域（区域）
- E 是 闭域（区域）

设 E 是平面上的点集，则

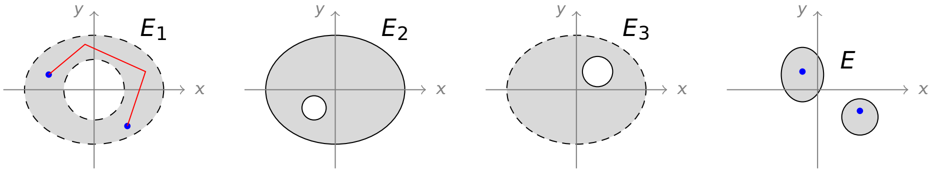
- E 是 开集，指边界点都不属于 E（$E = \{E$的内点$\}$）
- E 是 闭集，指边界点都属于 E（即，$E = \{E$的内点$\} \cup \{$边界点$\}$）



- E 是 连通集，指 E 中任两点均可用 E 中折线连起来
- E 是 开区域（区域）
- E 是 闭域（区域）

设 E 是平面上的点集，则

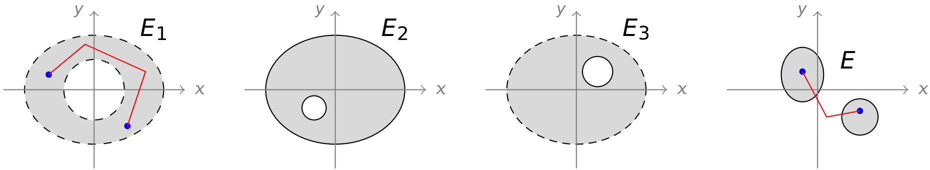
- E 是 开集，指边界点都不属于 E（$E = \{E$的内点$\}$）
- E 是 闭集，指边界点都属于 E（即，$E = \{E$的内点$\} \cup \{$边界点$\}$）



- E 是 连通集，指 E 中任两点均可用 E 中折线连起来
- E 是 开区域（区域）
- E 是 闭域（区域）

设 E 是平面上的点集，则

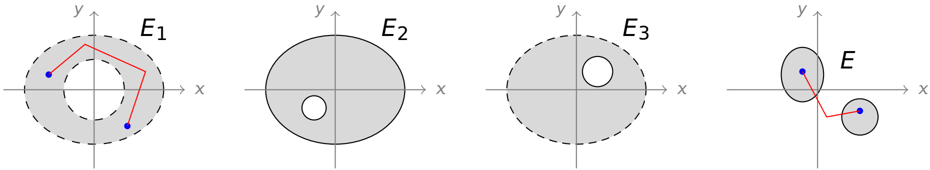
- E 是 开集，指边界点都不属于 E（$E = \{E$的内点$\}$）
- E 是 闭集，指边界点都属于 E（即，$E = \{E$的内点$\} \cup \{$边界点$\}$）



- E 是 连通集，指 E 中任两点均可用 E 中折线连起来
- E 是 开区域（区域）
- E 是 闭域（区域）

设 E 是平面上的点集，则

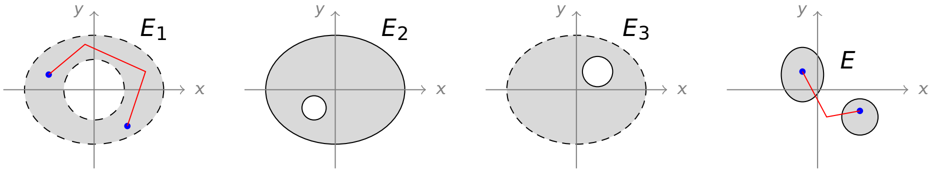
- E 是 开集，指边界点都不属于 E（$E = \{E\text{的内点}\}$）
- E 是 闭集，指边界点都属于 E（即，$E = \{E\text{的内点}\} \cup \{\text{边界点}\}$）



- E 是 连通集，指 E 中任两点均可用 E 中折线连起来
- E 是 开区域（区域），指 E 是开集且连通
- E 是 闭域（区域）

设 E 是平面上的点集，则

- E 是 开集，指边界点都不属于 E（$E = \{E$的内点$\}$）
- E 是 闭集，指边界点都属于 E（即，$E = \{E$的内点$\} \cup \{$边界点$\}$）



- E 是 连通集，指 E 中任两点均可用 E 中折线连起来
- E 是 开区域（区域），指 E 是开集且连通
- E 是 闭域（区域），指 E 是闭集且连通

设 E 是平面上的点集，则

- E 是 有界集
- E 是 无界集

设 E 是平面上的点集，则

- E 是 有界集，指 $\exists r > 0$ 使得 $E \subset U(0, r)$
- E 是 无界集

设 E 是平面上的点集，则

- E 是 有界集，指 $\exists r > 0$ 使得 $E \subset U(0, r)$
- E 是 无界集，指 E 不是有界集

设 E 是平面上的点集，则

- E 是 有界集，指 $\exists r > 0$ 使得 $E \subset U(0, r)$
- E 是 无界集，指 E 不是有界集

例

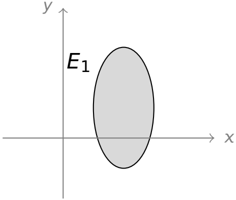
- $E_1 := \{(x-2)^2 + \frac{1}{4}(y-1)^2 \leq 1\}$ 是 界集；
- $E_2 := \{x - y \leq 1\}$ 是 界集；

设 E 是平面上的点集，则

- E 是 有界集，指 $\exists r > 0$ 使得 $E \subset U(0, r)$
- E 是 无界集，指 E 不是有界集

例

- $E_1 := \{(x-2)^2 + \frac{1}{4}(y-1)^2 \leq 1\}$ 是　界集；
- $E_2 := \{x - y \leq 1\}$ 是　界集；

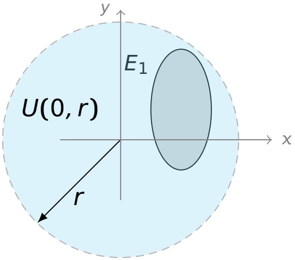


设 E 是平面上的点集，则

- E 是 有界集，指 $\exists r>0$ 使得 $E\subset U(0,r)$
- E 是 无界集，指 E 不是有界集

例

- $E_1 := \{(x-2)^2+\frac{1}{4}(y-1)^2\le 1\}$ 是 界集；
- $E_2 := \{x-y\le 1\}$ 是 界集；

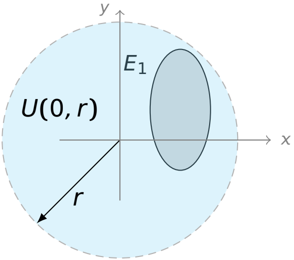


设 E 是平面上的点集，则

- E 是 有界集，指 $\exists r > 0$ 使得 $E \subset U(0, r)$
- E 是 无界集，指 E 不是有界集

例

- $E_1 := \{(x-2)^2 + \frac{1}{4}(y-1)^2 \le 1\}$ 是有界集；
- $E_2 := \{x - y \le 1\}$ 是　界集；

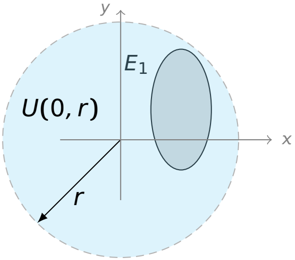


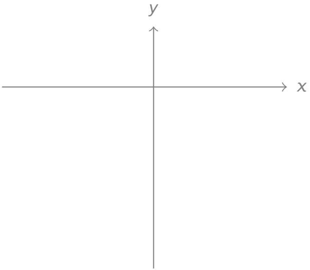
设 E 是平面上的点集，则

- E 是 有界集，指 $\exists r > 0$ 使得 $E \subset U(0, r)$
- E 是 无界集，指 E 不是有界集

例

- $E_1 := \{(x-2)^2 + \frac{1}{4}(y-1)^2 \leq 1\}$ 是有界集；
- $E_2 := \{x - y \leq 1\}$ 是　　界集；



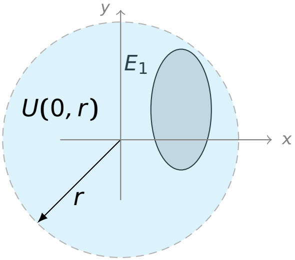


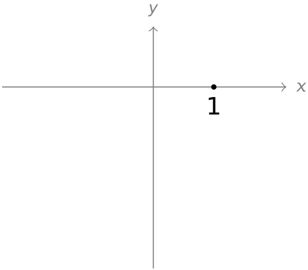
设 E 是平面上的点集，则

- E 是 有界集，指 $\exists r > 0$ 使得 $E \subset U(0, r)$
- E 是 无界集，指 E 不是有界集

例

- $E_1 := \{(x-2)^2 + \frac{1}{4}(y-1)^2 \leq 1\}$ 是有界集；
- $E_2 := \{x - y \leq 1\}$ 是　界集；



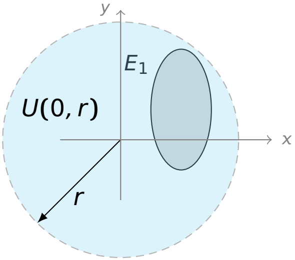


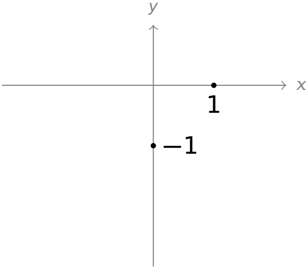
设 E 是平面上的点集，则

- E 是 有界集，指 $\exists r>0$ 使得 $E\subset U(0,r)$
- E 是 无界集，指 E 不是有界集

例

- $E_1:=\{(x-2)^2+\frac{1}{4}(y-1)^2\le 1\}$ 是有界集；
- $E_2:=\{x-y\le 1\}$ 是　界集；



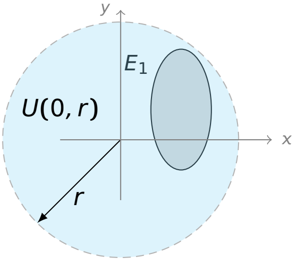


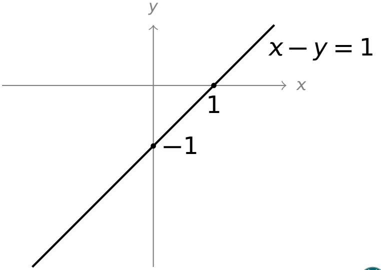
设 E 是平面上的点集，则

- E 是 有界集，指 $\exists r > 0$ 使得 $E \subset U(0, r)$
- E 是 无界集，指 E 不是有界集

例

- $E_1 := \{(x-2)^2 + \frac{1}{4}(y-1)^2 \le 1\}$ 是有界集；
- $E_2 := \{x - y \le 1\}$ 是 　界集；



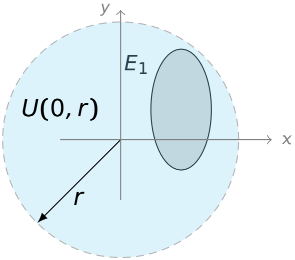


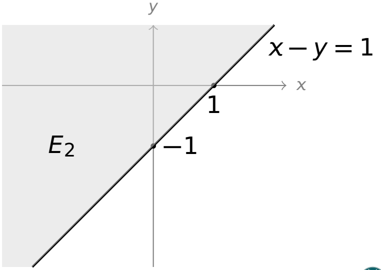
设 E 是平面上的点集，则

- E 是 有界集，指 $\exists r>0$ 使得 $E\subset U(0,r)$
- E 是 无界集，指 E 不是有界集

例

- $E_1 := \{(x-2)^2+\frac{1}{4}(y-1)^2\le 1\}$ 是有界集；
- $E_2 := \{x-y\le 1\}$ 是　界集；



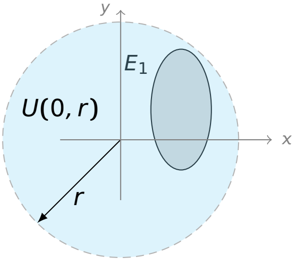


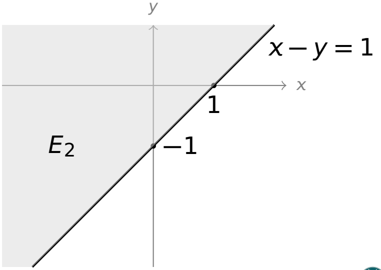
设 E 是平面上的点集，则

- E 是 有界集，指 $\exists r > 0$ 使得 $E \subset U(0, r)$
- E 是 无界集，指 E 不是有界集

例

- $E_1 := \{(x-2)^2 + \frac{1}{4}(y-1)^2 \leq 1\}$ 是有界集；
- $E_2 := \{x - y \leq 1\}$ 是无界集；



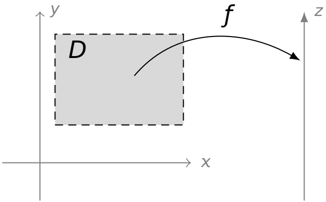


二元函数，及其图形

定义 设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个非空子集，称映射 $f: D \to \mathbb{R}$

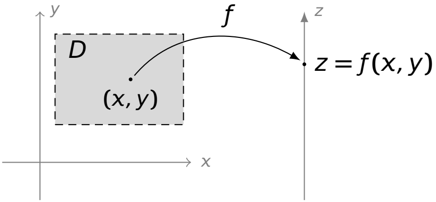
二元函数，及其图形

定义 设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个非空子集，称映射 $f: D \to \mathbb{R}$



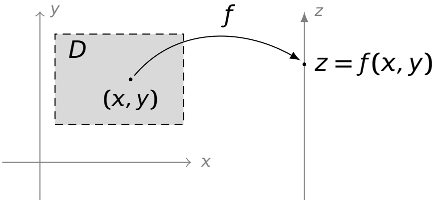
二元函数，及其图形

定义 设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个非空子集，称映射 $f: D \to \mathbb{R}$



二元函数，及其图形

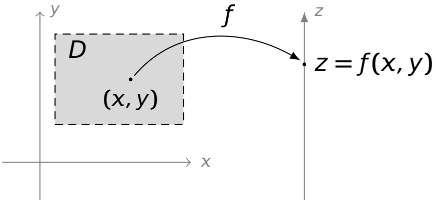
定义 设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个非空子集，称映射 $f: D \to \mathbb{R}$为定义在 D 上的二元函数



二元函数，及其图形

定义 设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个非空子集，称映射 $f : D \to \mathbb{R}$为定义在 D 上的二元函数，记为

$$z = f(x, y), \qquad (x, y) \in D$$



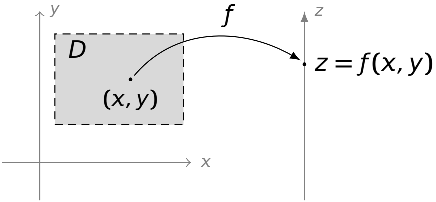
二元函数，及其图形

定义 设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个非空子集，称映射 $f: D \to \mathbb{R}$为定义在 D 上的二元函数，记为

$$z = f(x, y), \qquad (x, y) \in D$$

或

$$z = f(p), \qquad p \in D.$$



二元函数，及其图形

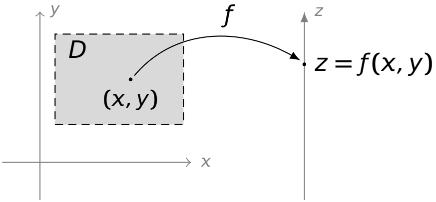
定义 设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个非空子集，称映射 $f: D \to \mathbb{R}$为定义在 D 上的二元函数，记为

$$z = f(x, y), \qquad (x, y) \in D$$

或

$$z = f(p), \qquad p \in D.$$

其中 D 称为 定义域，x 和 y 称为 自变量，z 称为因变量。



二元函数，及其图形

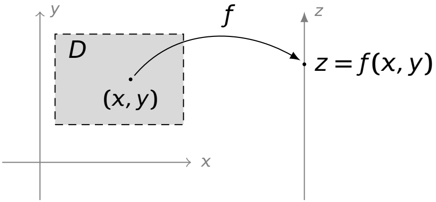
定义 设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个非空子集，称映射 $f: D \to \mathbb{R}$为定义在 D 上的二元函数，记为

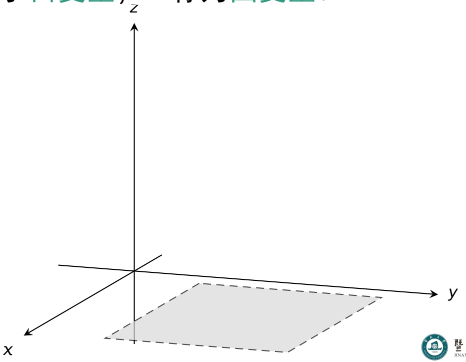
$$z = f(x, y), \qquad (x, y) \in D$$

或

$$z = f(p), \qquad p \in D.$$

其中 D 称为 定义域，x 和 y 称为 自变量，z 称为因变量。





二元函数，及其图形

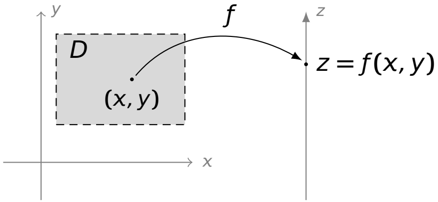
定义 设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个非空子集，称映射 $f : D \to \mathbb{R}$为定义在 D 上的二元函数，记为

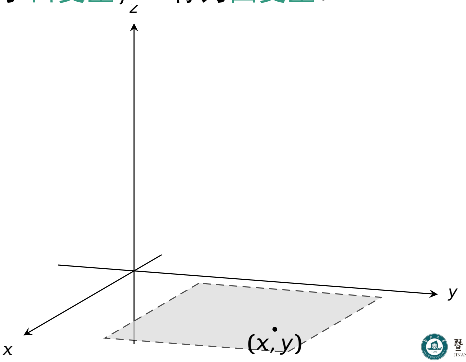
$$z = f(x, y), \qquad (x, y) \in D$$

或

$$z = f(p), \qquad p \in D.$$

其中 D 称为 定义域，x 和 y 称为 自变量，z 称为因变量。





二元函数，及其图形

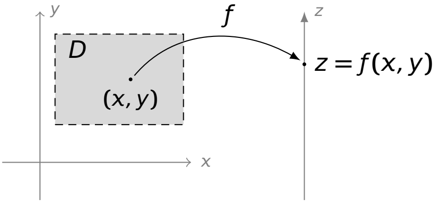
定义 设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个非空子集，称映射 $f: D \to \mathbb{R}$为定义在 D 上的二元函数，记为

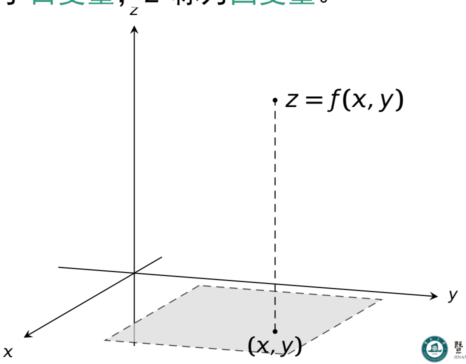
$$z = f(x, y), \qquad (x, y) \in D$$

或

$$z = f(p), \qquad p \in D.$$

其中 D 称为 定义域，x 和 y 称为 自变量，z 称为因变量。





二元函数，及其图形

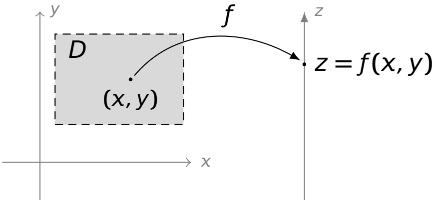
定义 设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个非空子集，称映射 $f : D \to \mathbb{R}$为定义在 D 上的二元函数，记为

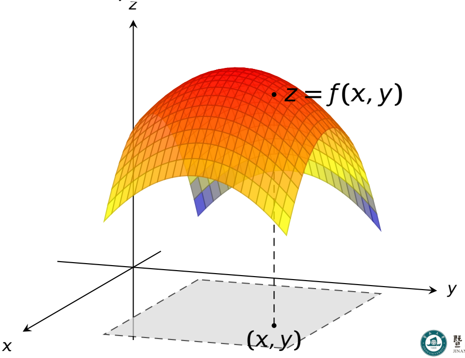
$$z = f(x, y), \qquad (x, y) \in D$$

或

$$z = f(p), \qquad p \in D.$$

其中 D 称为 定义域，x 和 y 称为 自变量，z 称为因变量。





例 $z = f(x, y) = \ln(1 + x + y)$ 是二元函数。

例 $z = f(x, y) = \ln(1 + x + y)$ 是二元函数。

其定义域取所谓的 “自然定义域”,

例 $z = f(x, y) = \ln(1 + x + y)$ 是二元函数。

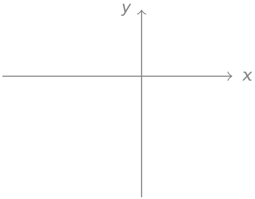
其定义域取所谓的"自然定义域"，即：

$$D := \{(x, y) \mid 1 + x + y > 0\}$$

例 $z = f(x, y) = \ln(1 + x + y)$ 是二元函数。

其定义域取所谓的"自然定义域"，即：

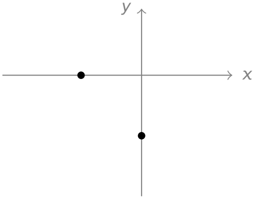
$$D := \{(x, y) \mid 1 + x + y > 0\}$$



例 $z = f(x, y) = \ln(1 + x + y)$ 是二元函数。

其定义域取所谓的“自然定义域”，即：

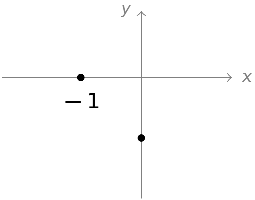
$$D := \{(x, y) \mid 1 + x + y > 0\}$$



例 $z = f(x, y) = \ln(1 + x + y)$ 是二元函数。

其定义域取所谓的“自然定义域”，即：

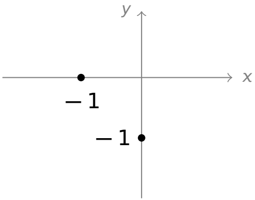
$$D := \{(x, y) \mid 1 + x + y > 0\}$$



例 $z = f(x, y) = \ln(1 + x + y)$ 是二元函数。

其定义域取所谓的“自然定义域”，即：

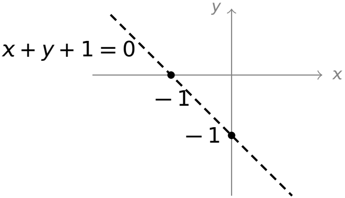
$$D := \{(x, y) \mid 1 + x + y > 0\}$$



例 $z = f(x, y) = \ln(1 + x + y)$ 是二元函数。

其定义域取所谓的“自然定义域”，即：

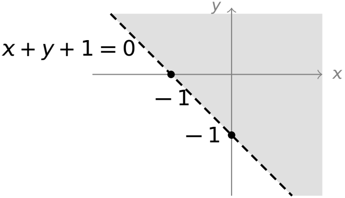
$$D := \{(x, y) \mid 1 + x + y > 0\}$$



例 $z = f(x, y) = \ln(1 + x + y)$ 是二元函数。

其定义域取所谓的“自然定义域”，即：

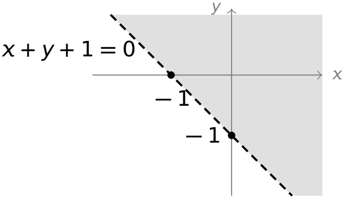
$$D := \{(x, y) \mid 1 + x + y > 0\}$$



例 $z = f(x, y) = \ln(1 + x + y)$ 是二元函数。

其定义域取所谓的“自然定义域”，即：

$$D := \{(x, y) \mid 1 + x + y > 0\}$$



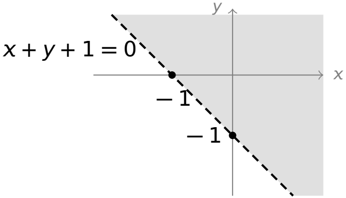
计算

$z|_{(e^8,-1)} =$

例 $z = f(x, y) = \ln(1 + x + y)$ 是二元函数。

其定义域取所谓的“自然定义域”，即：

$$D := \{(x, y) \,|\, 1 + x + y > 0\}$$



计算

$z|_{(e^8,-1)} = f(e^8, -1) =$

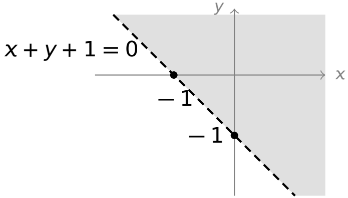
注 函数 $z = f(x, y)$ 在一点 (x_0, y_0) 处的值：

$$f(x_0, y_0) \qquad \text{或} \qquad z\big|_{(x_0, y_0)}$$

例 $z = f(x, y) = \ln(1 + x + y)$ 是二元函数。

其定义域取所谓的“自然定义域”，即：

$$D := \{(x, y) \,|\, 1 + x + y > 0\}$$



计算

$$z|_{(e^8, -1)} = f(e^8, -1) =$$

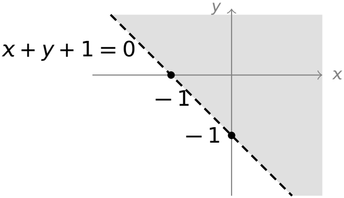
注 函数 $z = f(x, y)$ 在一点 (x_0, y_0) 处的值：

$$f(x_0, y_0) \qquad \text{或} \qquad z\big|_{(x_0, y_0)}$$

例 $z = f(x, y) = \ln(1 + x + y)$ 是二元函数。

其定义域取所谓的“自然定义域”，即：

$$D := \{(x, y) \,|\, 1 + x + y > 0\}$$



计算

$$z|_{(e^8, -1)} = f(e^8, -1) = \ln(1 + e^8 - 1) =$$

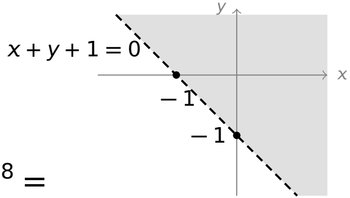
注 函数 $z=f(x,y)$ 在一点 (x_0,y_0) 处的值：

$$f(x_0,y_0) \qquad 或 \qquad z\big|_{(x_0,y_0)}$$

例 $z=f(x,y)=\ln(1+x+y)$ 是二元函数。

其定义域取所谓的“自然定义域”，即：

$$D := \{(x,y)\,|\,1+x+y>0\}$$



计算

$$z|_{(e^8,-1)} = f(e^8,-1) = \ln(1+e^8-1) = \ln e^8 =$$

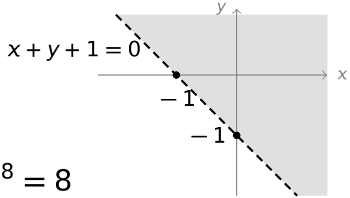
注 函数 $z = f(x, y)$ 在一点 (x_0, y_0) 处的值：

$$f(x_0, y_0) \qquad \text{或} \qquad z\big|_{(x_0, y_0)}$$

例 $z = f(x, y) = \ln(1 + x + y)$ 是二元函数。

其定义域取所谓的 “自然定义域”，即：

$$D := \{(x, y) \,|\, 1 + x + y > 0\}$$



计算

$$z|_{(e^8, -1)} = f(e^8, -1) = \ln(1 + e^8 - 1) = \ln e^8 = 8$$

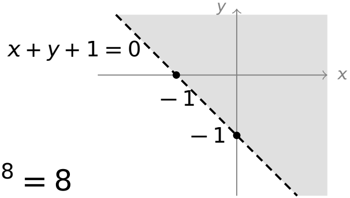
注 函数 $z = f(x, y)$ 在一点 (x_0, y_0) 处的值：

$$f(x_0, y_0) \qquad 或 \qquad z\big|_{(x_0, y_0)}$$

例 $z = f(x, y) = \ln(1 + x + y)$ 是二元函数。

其定义域取所谓的 “自然定义域”，即：

$$D := \{(x, y) \,|\, 1 + x + y > 0\}$$



计算

$$z|_{(e^8,-1)} = f(e^8, -1) = \ln(1+e^8-1) = \ln e^8 = 8$$

例 求 $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - 4y^2}$ 定义域，画出图形，计算 $z(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$

例 求 $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-4y^2}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$

例 求 $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-4y^2}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$

解 要 z 有意义，必须

$$\begin{cases}1-x^2\geq 0\\ 1-4y^2\geq 0\end{cases}$$

例 求 $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-4y^2}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$

解 要 z 有意义，必须

$$\begin{cases}1-x^2\geq 0\\1-4y^2\geq 0\end{cases}\implies\begin{cases}-1\leq x\leq 1\\ \end{cases}$$

例 求 $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-4y^2}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$

解 要 z 有意义，必须

$$\begin{cases}1-x^2\geq 0\\ 1-4y^2\geq 0\end{cases}\implies\begin{cases}-1\leq x\leq 1\\ -\frac{1}{2}\leq y\leq\frac{1}{2}\end{cases}$$

例 求 $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-4y^2}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$

解 要 z 有意义，必须

$$\begin{cases}1-x^2\geq 0\\ 1-4y^2\geq 0\end{cases}\implies\begin{cases}-1\leq x\leq 1\\ -\frac{1}{2}\leq y\leq \frac{1}{2}\end{cases}$$

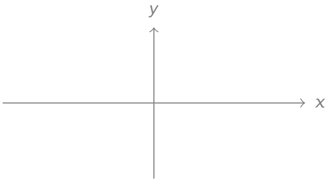
所以定义域 $D=\left\{(x,y)|-1\leq x\leq 1,-\frac{1}{2}\leq y\leq\frac{1}{2}\right\}.$

例 求 $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-4y^2}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$

解 要 z 有意义，必须

$$\begin{cases}1-x^2\geq 0\\ 1-4y^2\geq 0\end{cases} \implies \begin{cases}-1\leq x\leq 1\\ -\frac{1}{2}\leq y\leq \frac{1}{2}\end{cases}$$

所以定义域 $D=\left\{(x,y)\middle|-1\leq x\leq 1,-\frac{1}{2}\leq y\leq \frac{1}{2}\right\}$.

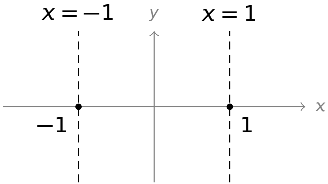


例 求 $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-4y^2}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$

解 要 z 有意义，必须

$$\begin{cases}1-x^2\geq 0\\ 1-4y^2\geq 0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}-1\leq x\leq 1\\ -\frac{1}{2}\leq y\leq\frac{1}{2}\end{cases}$$

所以定义域 $D=\left\{(x,y)|-1\leq x\leq 1,-\frac{1}{2}\leq y\leq\frac{1}{2}\right\}.$

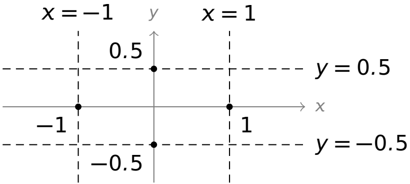


例 求 $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-4y^2}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$

解 要 z 有意义，必须

$$\begin{cases}1-x^2\ge 0\\ 1-4y^2\ge 0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}-1\le x\le 1\\ -\frac{1}{2}\le y\le\frac{1}{2}\end{cases}$$

所以定义域 $D=\left\{(x,y)|-1\le x\le 1,-\frac{1}{2}\le y\le\frac{1}{2}\right\}$.

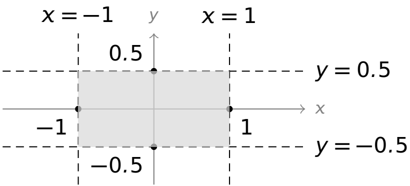


例 求 $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-4y^2}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$

解 要 z 有意义，必须

$$\begin{cases}1-x^2\ge 0\\1-4y^2\ge 0\end{cases}\implies\begin{cases}-1\le x\le 1\\-\frac{1}{2}\le y\le\frac{1}{2}\end{cases}$$

所以定义域 $D=\left\{(x,y)|-1\le x\le 1,-\frac{1}{2}\le y\le\frac{1}{2}\right\}$.

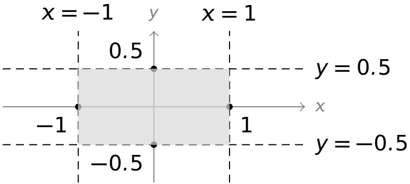


例 求 $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-4y^2}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$

解 要 z 有意义，必须

$$\begin{cases}1-x^2\geq 0\\ 1-4y^2\geq 0\end{cases}\implies\begin{cases}-1\leq x\leq 1\\ -\frac{1}{2}\leq y\leq\frac{1}{2}\end{cases}$$

所以定义域 $D=\left\{(x,y)\middle|-1\leq x\leq 1,-\frac{1}{2}\leq y\leq\frac{1}{2}\right\}$.



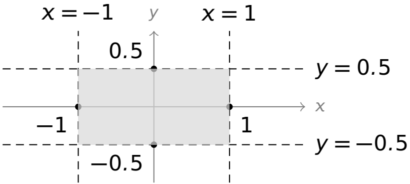
$$z\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)=$$

例 求 $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-4y^2}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$

解 要 z 有意义，必须

$$\begin{cases}1-x^2\geq 0\\ 1-4y^2\geq 0\end{cases}\implies\begin{cases}-1\leq x\leq 1\\ -\frac{1}{2}\leq y\leq\frac{1}{2}\end{cases}$$

所以定义域 $D=\left\{(x,y)|-1\leq x\leq 1,-\frac{1}{2}\leq y\leq\frac{1}{2}\right\}.$



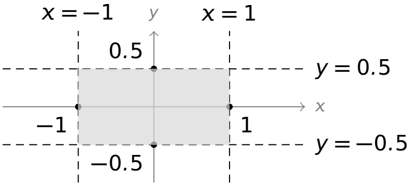
$$z\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\sqrt{1-4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2}$$

例 求 $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-4y^2}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$

解 要 z 有意义，必须

$$\begin{cases}1-x^2\geq 0\\ 1-4y^2\geq 0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}-1\leq x\leq 1\\ -\frac{1}{2}\leq y\leq\frac{1}{2}\end{cases}$$

所以定义域 $D=\left\{(x,y)\middle|-1\leq x\leq 1,-\frac{1}{2}\leq y\leq\frac{1}{2}\right\}.$



$$z\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\sqrt{1-4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\sqrt{3}$$

例 求 $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(1,\frac{1}{4})$

例 求 $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(1,\frac{1}{4})$

解 要 z 有意义，必须

例 求 $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(1, \frac{1}{4})$

解 要 z 有意义，必须

$$\begin{cases} x - \sqrt{y} \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

例 求 $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(1, \frac{1}{4})$

解 要 z 有意义，必须

$$\begin{cases} x - \sqrt{y} \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x^2 \geq y \\ y \geq 0 \end{cases}$$

例 求 $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(1, \frac{1}{4})$

解 要 z 有意义，必须

$$\begin{cases} x - \sqrt{y} \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x^2 \geq y,\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

例 求 $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(1,\frac{1}{4})$

解 要 z 有意义，必须

$$\begin{cases} x-\sqrt{y}\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x^2\geq y,\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases} \implies 0\leq y\leq x^2,\ x\geq 0$$

例 求 $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(1, \frac{1}{4})$

解 要 z 有意义，必须

$$\begin{cases} x - \sqrt{y} \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 \geq y,\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow 0 \leq y \leq x^2,\ x \geq 0$$

所以定义域

$$D = \left\{(x, y) | \, 0 \leq y \leq x^2,\ x \geq 0\right\}.$$

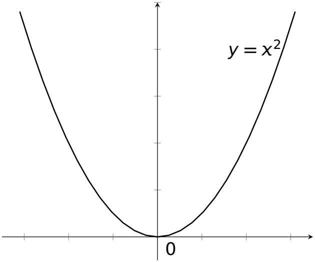
例 求 $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(1,\frac{1}{4})$

解 要 z 有意义，必须

$$\begin{cases} x-\sqrt{y}\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2\geq y,\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases} \Longrightarrow 0\leq y\leq x^2,\ x\geq 0$$

所以定义域

$$D=\left\{(x,y)|\,0\leq y\leq x^2,\ x\geq 0\right\}.$$



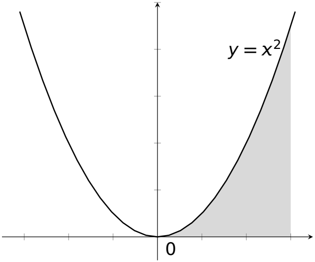
例 求 $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(1,\frac{1}{4})$

解 要 z 有意义，必须

$$\begin{cases} x-\sqrt{y}\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2\geq y,\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases} \Longrightarrow 0\leq y\leq x^2,\ x\geq 0$$

所以定义域

$$D=\left\{(x,y)|\,0\leq y\leq x^2,\ x\geq 0\right\}.$$



例 求 $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(1,\frac{1}{4})$

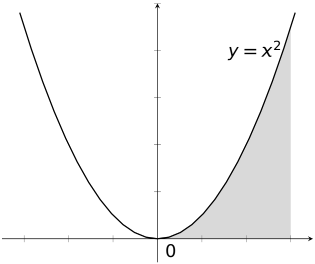
解 要 z 有意义，必须

$$\begin{cases} x-\sqrt{y}\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2\geq y,\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases} \Longrightarrow 0\leq y\leq x^2,\ x\geq 0$$

所以定义域

$$D=\left\{(x,y)|\,0\leq y\leq x^2,\ x\geq 0\right\}.$$

（闭区域，无界）



例 求 $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(1,\frac{1}{4})$

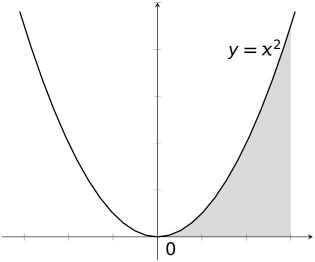
解 要 z 有意义，必须

$$\begin{cases} x-\sqrt{y}\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x^2\geq y,\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases} \implies 0\leq y\leq x^2,\ x\geq 0$$

所以定义域

$$D=\left\{(x,y)|\,0\leq y\leq x^2,\ x\geq 0\right\}.$$

（闭区域，无界）



$$z\left(1,\frac{1}{4}\right)=$$

例 求 $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(1,\frac{1}{4})$

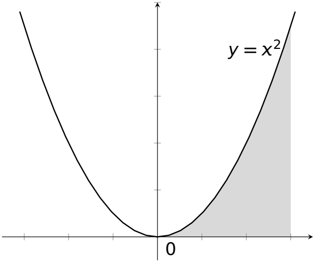
解 要 z 有意义，必须

$$\begin{cases} x-\sqrt{y}\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2\ge y,\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases} \Longrightarrow \quad 0\le y\le x^2,\ x\ge 0$$

所以定义域

$$D=\left\{(x,y)|\,0\le y\le x^2,\ x\ge 0\right\}.$$

（闭区域，无界）



$$z\left(1,\frac{1}{4}\right)=\sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{4}}}=$$

例 求 $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(1,\frac{1}{4})$

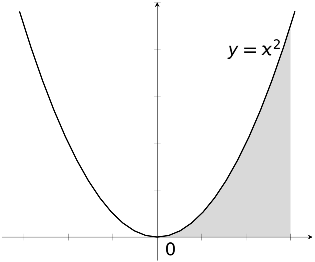
解 要 z 有意义，必须

$$\begin{cases} x-\sqrt{y}\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2\geq y,\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases} \Longrightarrow 0\leq y\leq x^2,\ x\geq 0$$

所以定义域

$$D=\left\{(x,y)|\,0\leq y\leq x^2,\ x\geq 0\right\}.$$

（闭区域，无界）



$$z\left(1,\frac{1}{4}\right)=\sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{4}}}=\sqrt{1-\frac{1}{2}}$$

例 求 $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$ 定义域，画出定义域，计算 $z(1,\frac{1}{4})$

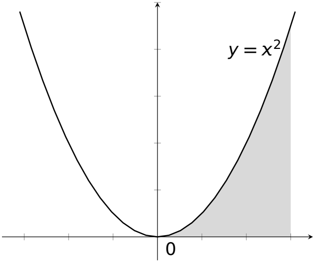
解 要 z 有意义，必须

$$\begin{cases} x-\sqrt{y}\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2\geq y,\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases} \Longrightarrow 0\leq y\leq x^2,\ x\geq 0$$

所以定义域

$$D=\left\{(x,y)\,|\,0\leq y\leq x^2,\ x\geq 0\right\}.$$

（闭区域，无界）



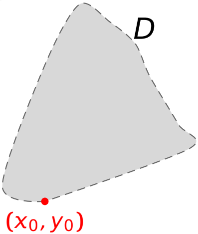
$$z\left(1,\frac{1}{4}\right)=\sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{4}}}=\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

二元函数的极限：直观

- $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = A$

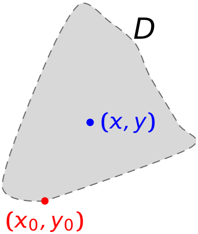
二元函数的极限：直观

- $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = A$ 表示：



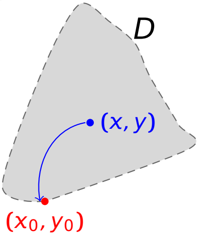
二元函数的极限：直观

- $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$ 表示：



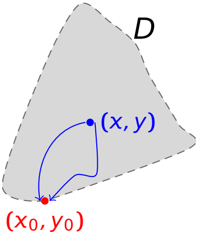
二元函数的极限：直观

- $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$ 表示：



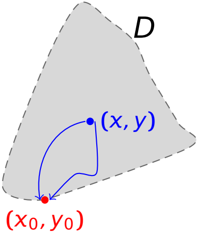
二元函数的极限：直观

- $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,\, y) = A$ 表示：



二元函数的极限：直观

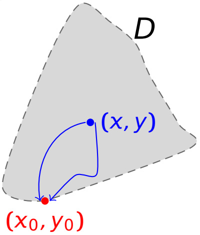
- $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,\ y) = A$ 表示：



$$\Rightarrow \quad f(x,y) \to A$$

二元函数的极限：直观

- $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$ 表示：



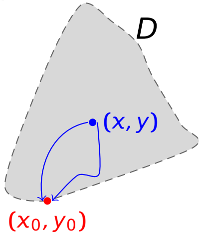
$\Rightarrow \quad f(x,y) \to A$

注

- 点 $p_0(x_0, y_0)$ 不必属于定义域 D，即 $f(x_0, y_0)$ 可能无定义

二元函数的极限：直观

- $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$ 表示：



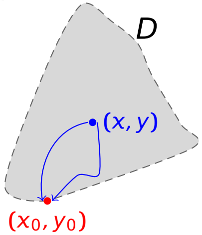
$\Rightarrow \quad f(x,y)\to A$

注

- 点 $p_0(x_0,y_0)$ 不必属于定义域 D，即 $f(x_0,y_0)$ 可能无定义
- 点 $p_0(x_0,y_0)$ 只需是定义域 D 的“聚点”：

二元函数的极限：直观

- $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$ 表示：



$$\Rightarrow \quad f(x,y) \to A$$

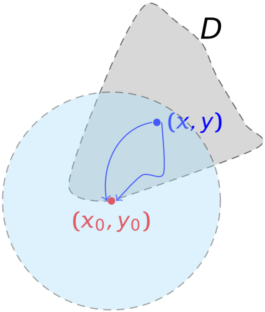
注

- 点 $p_0(x_0, y_0)$ 不必属于定义域 D，即 $f(x_0, y_0)$ 可能无定义
- 点 $p_0(x_0, y_0)$ 只需是定义域 D 的“聚点”：

$$\forall \delta > 0,\ \mathring{U}(p_0, \delta) \cap D \neq \varnothing$$

二元函数的极限：直观

- $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = A$ 表示：



$\Rightarrow \quad f(x,y) \to A$

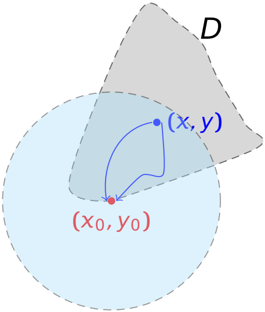
注

- 点 $p_0(x_0, y_0)$ 不必属于定义域 D，即 $f(x_0, y_0)$ 可能无定义
- 点 $p_0(x_0, y_0)$ 只需是定义域 D 的“聚点”：

$$\forall \delta > 0,\ \mathring{U}(p_0, \delta) \cap D \neq \varnothing$$

二元函数的极限：直观

- $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = A$ 表示：



$\Rightarrow \quad f(x, y) \to A$

注

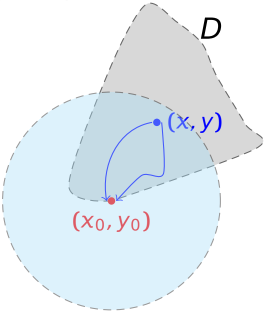
- 点 $p_0(x_0, y_0)$ 不必属于定义域 D，即 $f(x_0, y_0)$ 可能无定义
- 点 $p_0(x_0, y_0)$ 只需是定义域 D 的 “聚点”：

$$\forall \delta > 0, \mathring{U}(p_0, \delta) \cap D \neq \varnothing$$

- 点 $p_0(x_0, y_0)$ 以任何方式趋于 D，函数值 $f(x, y)$ 均趋于同一数 A

二元函数的极限：直观

- $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$ 表示：



$$\Rightarrow \quad f(x,y)\to A$$

注

- 点 $p_0(x_0,y_0)$ 不必属于定义域 D，即 $f(x_0,y_0)$ 可能无定义
- 点 $p_0(x_0,y_0)$ 只需是定义域 D 的“聚点”：

$$\forall\delta>0,\ \mathring{U}(p_0,\delta)\cap D\neq\varnothing$$

- 点 $p_0(x_0,y_0)$ 以任何方式趋于 D，函数值 $f(x,y)$ 均趋于同一数 A

思考 聚点和边界点的关系是什么？

多元函数的极限

极限定义 设 $f(x, y), (x, y) \in D$；$p_0(x_0, y_0)$ 为 D 的聚点。称

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = A \qquad （或 \lim_{p\to p_0} f(p) = A）$$

指：

多元函数的极限

极限定义 设 $f(x, y), (x, y) \in D$；$p_0(x_0, y_0)$ 为 D 的聚点。称

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = A \qquad （或 \lim_{p\to p_0} f(p) = A）$$

指：$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon, \qquad \forall 点 p(x, y) \in D 且 0 < |p - p_0| < \delta$$

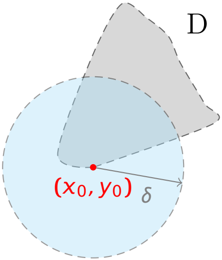
多元函数的极限

极限定义 设 $f(x, y), (x, y) \in D$；$p_0(x_0, y_0)$ 为 D 的聚点。称

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = A \qquad （或 \lim_{p\to p_0} f(p) = A）$$

指：$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon, \qquad \forall 点 p(x, y) \in D 且 0 < |p - p_0| < \delta$$



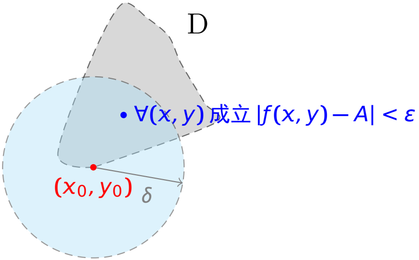
多元函数的极限

极限定义 设 $f(x, y), (x, y) \in D$；$p_0(x_0, y_0)$ 为 D 的聚点。称

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = A \qquad （或 \lim_{p\to p_0} f(p) = A）$$

指：$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon, \qquad \forall 点 p(x, y) \in D 且 0 < |p - p_0| < \delta$$

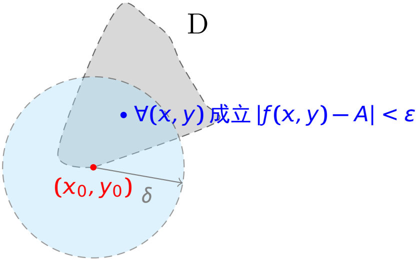


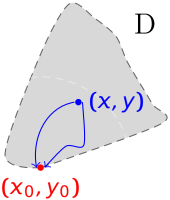
极限定义 设 $f(x, y)$, $(x, y) \in D$；$p_0(x_0, y_0)$ 为 D 的聚点。称

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = A \qquad （或 \lim_{p\to p_0} f(p) = A）$$

指：$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon, \qquad \forall 点 p(x, y) \in D 且 0 < |p - p_0| < \delta$$

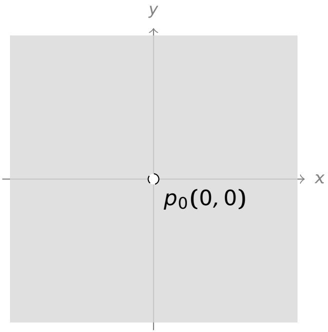




例 设 $f(x, y) = (x^2 + y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$。证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$

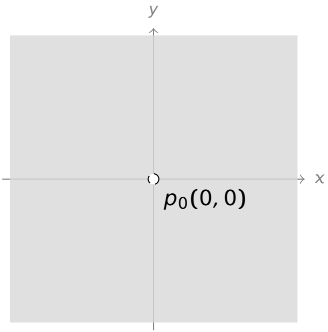
例 设 $f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$。证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$

证明



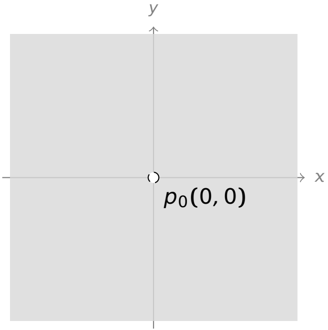
例 设 $f(x, y) = (x^2 + y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$。证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$

证明 对 $\forall \varepsilon > 0$，



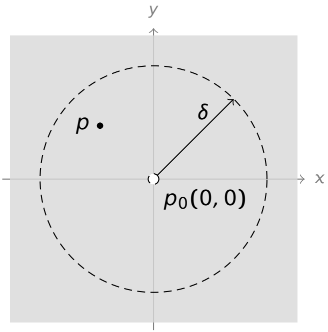
例 设 $f(x, y) = (x^2 + y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$。证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$

证明 对 $\forall\varepsilon > 0$，取 $\delta \qquad > 0$，



例 设 $f(x, y) = (x^2 + y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$。证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$

证明 对 $\forall\varepsilon > 0$，取 $\delta \qquad > 0$，

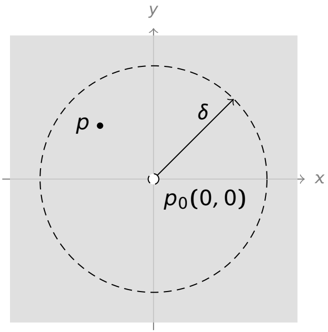


例 设 $f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$。证明 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$

证明 对 $\forall\varepsilon>0$，取 δ >0，则当 $0<|p-p_0|<\delta$ 时，成立

$$|f(x,y)-0|$$

$$<\varepsilon$$

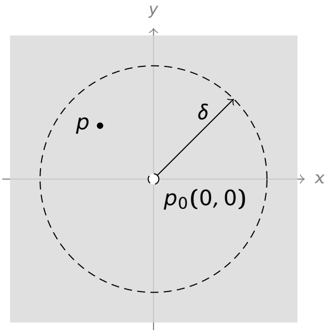


例 设 $f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$。证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$

证明 对 $\forall\varepsilon>0$，取 δ >0，则当 $0<|p-p_0|<\delta$ 时，成立

$$|f(x,y)-0|=|f(x,y)|$$

$$<\varepsilon$$

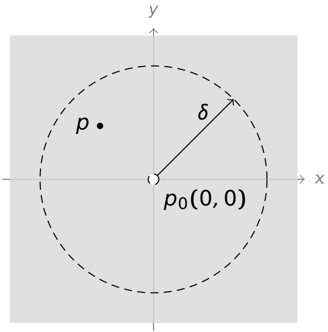


例 设 $f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$。证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$

证明 对 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta \qquad > 0$，则当 $0<|p-p_0|<\delta$ 时，成立

$$|f(x,y)-0|=|f(x,y)|=\left|(x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right|$$

$$<\varepsilon$$

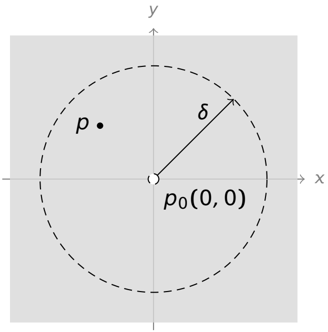


例 设 $f(x, y) = (x^2 + y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$。证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$

证明 对 $\forall\varepsilon > 0$，取 δ > 0，则当 $0 < |p - p_0| < \delta$ 时，成立

$$|f(x, y) - 0| = |f(x, y)| = \left|(x^2 + y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)\right|$$

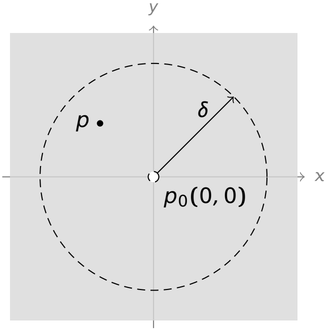
$$\leq |x^2 + y^2| \qquad\qquad < \varepsilon$$



例 设 $f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$。证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$

证明 对 $\forall\varepsilon>0$，取 δ >0，则当 $0<|p-p_0|<\delta$ 时，成立

$$|f(x,y)-0|=|f(x,y)|=\left|(x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right|$$
$$\leq |x^2+y^2|=|p-p_0|^2<\varepsilon$$

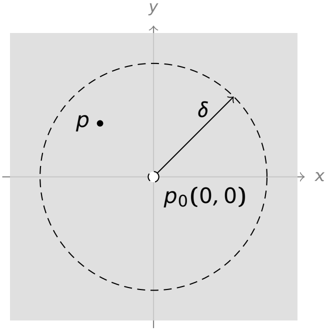


例 设 $f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$。证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$

证明 对 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}>0$，则当 $0<|p-p_0|<\delta$ 时，成立

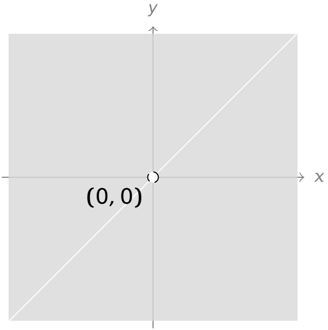
$$|f(x,y)-0|=|f(x,y)|=\left|(x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right|$$

$$\le|x^2+y^2|=|p-p_0|^2<\varepsilon$$



例 证明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ 不存在

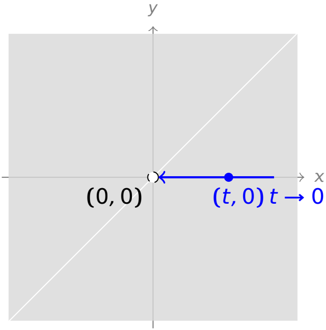
例 证明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ 不存在



证明

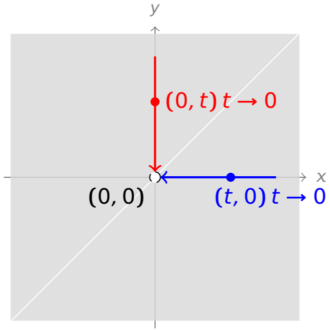
例 证明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ 不存在

证明



例 证明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{x-y}$ 不存在

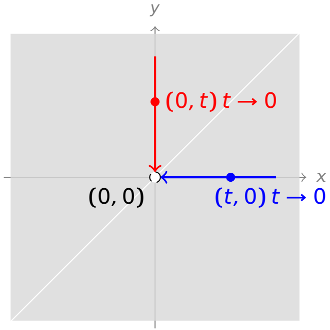
证明



例 证明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ 不存在

证明

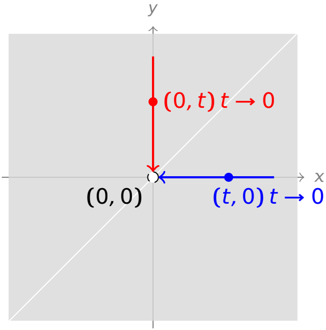
$$f(t,0) =$$



例 证明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ 不存在

证明

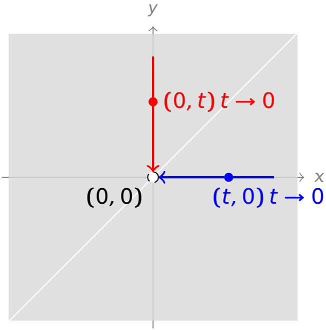
$$f(t,0) = \frac{t+0}{t-0} =$$



例 证明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ 不存在

证明

$$f(t,\,0) = \frac{t+0}{t-0} = 1$$

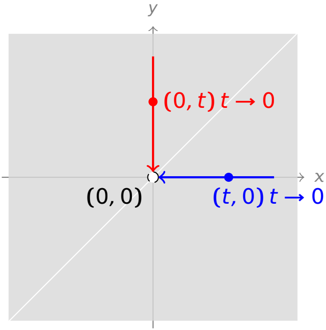


例 证明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ 不存在

证明

$$f(t,0) = \frac{t+0}{t-0} = 1$$

$$f(0,t) =$$

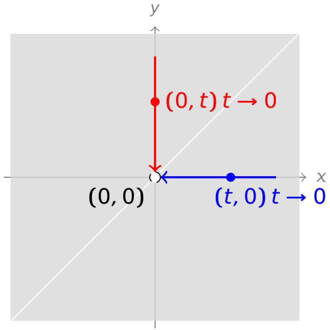


例 证明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ 不存在

证明

$$f(t,0) = \frac{t+0}{t-0} = 1$$

$$f(0,t) = \frac{0+t}{0-t} =$$

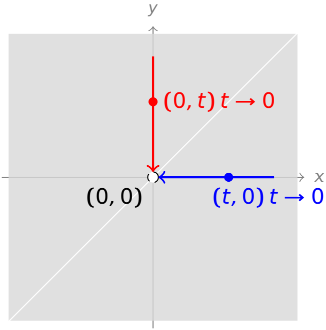


例 证明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ 不存在

证明

$$f(t,0) = \frac{t+0}{t-0} = 1$$

$$f(0,t) = \frac{0+t}{0-t} = -1$$



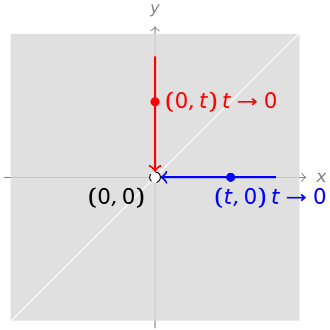
例 证明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ 不存在

证明

$$f(t,0)=\frac{t+0}{t-0}=1$$

$$f(0,t)=\frac{0+t}{0-t}=-1$$

可见，点按不同方式趋于 $(0,0)$ 时，函数值趋于不同的数。故极限不存在。



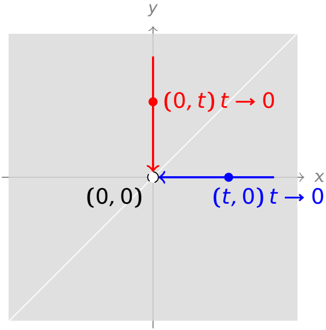
例 证明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ 不存在

证明

$$f(t,0)=\frac{t+0}{t-0}=1$$

$$f(0,t)=\frac{0+t}{0-t}=-1$$

可见，点按不同方式趋于 $(0,0)$ 时，函数值趋于不同的数。故极限不存在。



例 证明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在

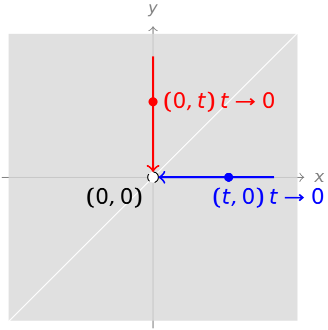
例 证明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ 不存在

证明

$$f(t,0)=\frac{t+0}{t-0}=1$$

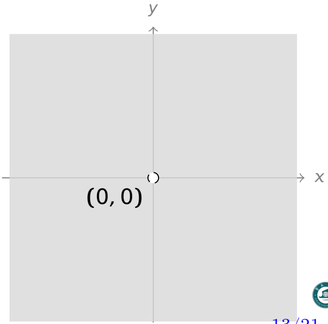
$$f(0,t)=\frac{0+t}{0-t}=-1$$

可见，点按不同方式趋于 (0, 0) 时，
函数值趋于不同的数。故极限不存在。



例 证明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在

证明



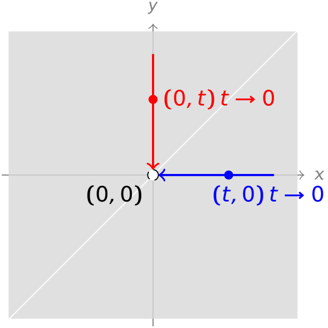
例 证明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ 不存在

证明

$$f(t,0) = \frac{t+0}{t-0} = 1$$

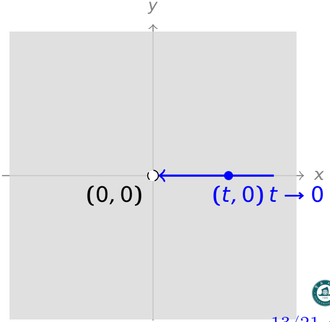
$$f(0,t) = \frac{0+t}{0-t} = -1$$

可见，点按不同方式趋于 $(0,0)$ 时，函数值趋于不同的数。故极限不存在。



例 证明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在

证明



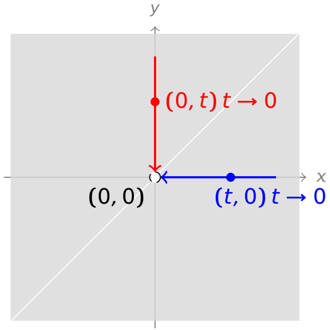
例 证明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ 不存在

证明

$$f(t,0) = \frac{t+0}{t-0} = 1$$

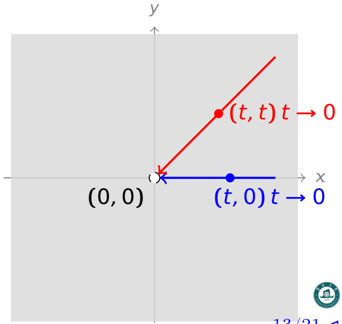
$$f(0,t) = \frac{0+t}{0-t} = -1$$

可见，点按不同方式趋于 $(0,0)$ 时，函数值趋于不同的数。故极限不存在。

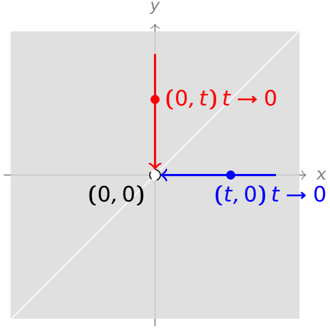


例 证明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在

证明



例 证明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ 不存在



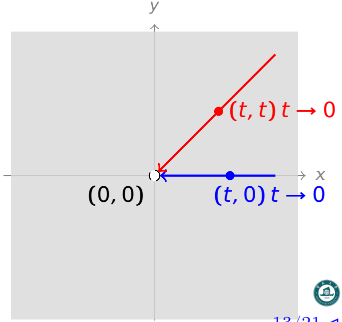
证明

$$f(t,0) = \frac{t+0}{t-0} = 1$$

$$f(0,t) = \frac{0+t}{0-t} = -1$$

可见，点按不同方式趋于 (0, 0) 时，
函数值趋于不同的数。故极限不存在。

例 证明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在



证明

$$f(t,0) =$$

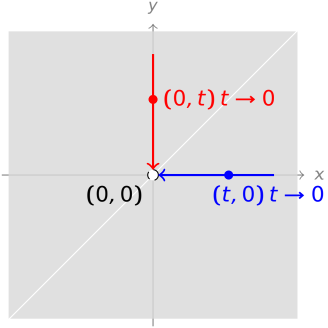
例 证明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ 不存在

证明

$$f(t,0)=\frac{t+0}{t-0}=1$$

$$f(0,t)=\frac{0+t}{0-t}=-1$$

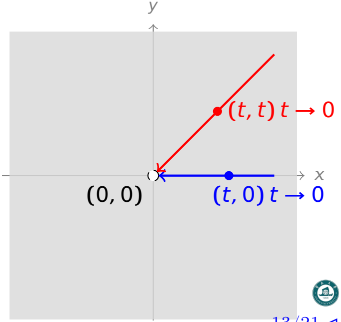
可见，点按不同方式趋于 (0, 0) 时，
函数值趋于不同的数。故极限不存在。



例 证明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在

证明

$$f(t,0)=\frac{t\cdot 0}{t^2+0^2}=$$



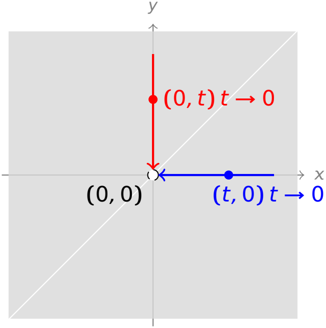
例 证明极限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ 不存在

证明

$$f(t,0)=\frac{t+0}{t-0}=1$$

$$f(0,t)=\frac{0+t}{0-t}=-1$$

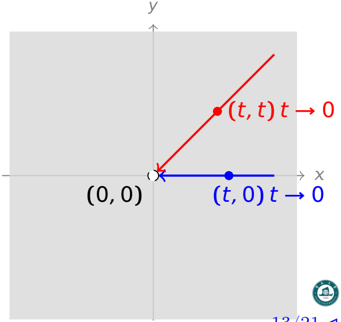
可见，点按不同方式趋于 $(0,0)$ 时，函数值趋于不同的数。故极限不存在。



例 证明极限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在

证明

$$f(t,0)=\frac{t\cdot 0}{t^2+0^2}=0$$



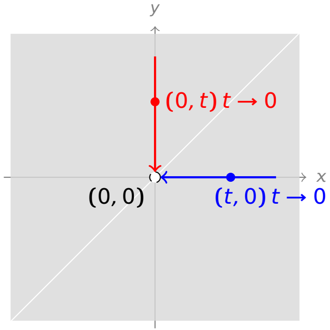
例 证明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ 不存在

证明

$$f(t,\,0)=\frac{t+0}{t-0}=1$$

$$f(0,\,t)=\frac{0+t}{0-t}=-1$$

可见，点按不同方式趋于 $(0,\,0)$ 时，函数值趋于不同的数。故极限不存在。

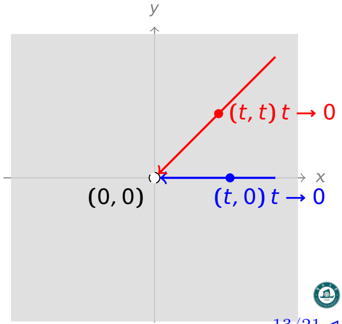


例 证明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在

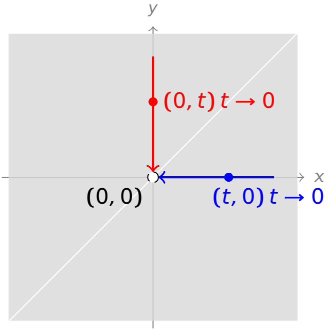
证明

$$f(t,\,0)=\frac{t\cdot 0}{t^2+0^2}=0$$

$$f(t,\,t)=$$



例 证明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ 不存在



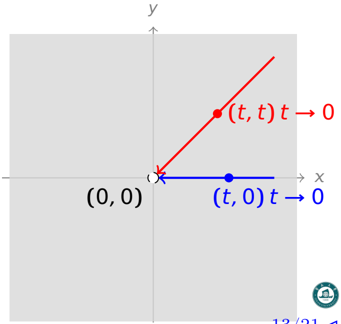
证明

$$f(t,0)=\frac{t+0}{t-0}=1$$

$$f(0,t)=\frac{0+t}{0-t}=-1$$

可见，点按不同方式趋于 $(0,0)$ 时，函数值趋于不同的数。故极限不存在。

例 证明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在



证明

$$f(t,0)=\frac{t\cdot 0}{t^2+0^2}=0$$

$$f(t,t)=\frac{t\cdot t}{t^2+t^2}=$$

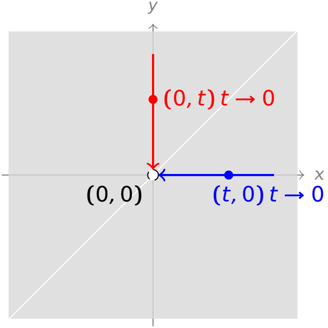
例 证明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ 不存在

证明

$$f(t,0) = \frac{t+0}{t-0} = 1$$

$$f(0,t) = \frac{0+t}{0-t} = -1$$

可见，点按不同方式趋于 (0, 0) 时，函数值趋于不同的数。故极限不存在。

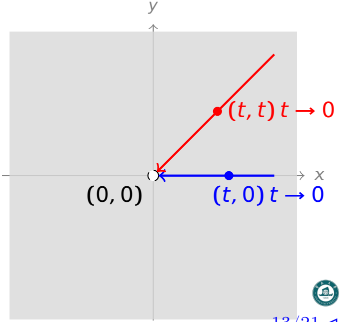


例 证明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在

证明

$$f(t,0) = \frac{t\cdot 0}{t^2+0^2} = 0$$

$$f(t,t) = \frac{t\cdot t}{t^2+t^2} = \frac{1}{2}$$



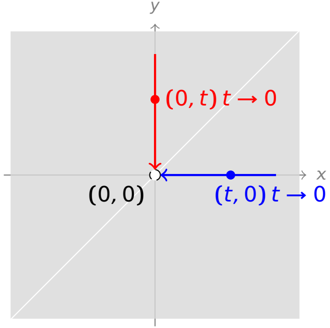
例 证明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ 不存在

证明

$$f(t,0)=\frac{t+0}{t-0}=1$$

$$f(0,t)=\frac{0+t}{0-t}=-1$$

可见，点按不同方式趋于 (0, 0) 时，函数值趋于不同的数。故极限不存在。



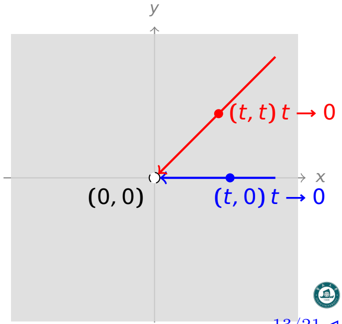
例 证明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在

证明

$$f(t,0)=\frac{t\cdot 0}{t^2+0^2}=0$$

$$f(t,t)=\frac{t\cdot t}{t^2+t^2}=\frac{1}{2}$$

可见，点按不同方式趋于 (0, 0) 时，函数值趋于不同的数。故极限不存在。



计算二元函数的极限：化为单变量极限

例 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{x}$

计算二元函数的极限：化为单变量极限

例 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{x}$

解

$$原式 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot y$$

计算二元函数的极限：化为单变量极限

例 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{x}$

解 原式 $= \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{xy} \cdot y = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{xy} \cdot \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y$

计算二元函数的极限：化为单变量极限

例 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{x}$

解

$$原式 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot y = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} y$$

$$\xlongequal{令t=xy} \lim \frac{\sin t}{t}$$

计算二元函数的极限：化为单变量极限

例 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{x}$

解 原式 $= \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{xy} \cdot y = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{xy} \cdot \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y$

$$\xlongequal{\text{令}t=xy} \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t}$$

计算二元函数的极限：化为单变量极限

例 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{x}$

解 $$\text{原式} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy}\cdot y = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy}\cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} y$$

$$\xlongequal{\text{令}t=xy} \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t}\cdot 0$$

计算二元函数的极限：化为单变量极限

例 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{x}$

解

$$原式 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot y = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} y$$

$$\xlongequal{令t=xy} \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} \cdot 0 = 1 \cdot 0$$

计算二元函数的极限：化为单变量极限

例 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{x}$

解

$$原式 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot y = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} y$$

$$\overset{令 t=xy}{=\!=\!=\!=} \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0$$

计算二元函数的极限：化为单变量极限

例 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x}$

解 原式 $= \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot y = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y$

$$\overset{\text{令}t=xy}{=\!=\!=\!=} \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0$$

例 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$

计算二元函数的极限：化为单变量极限

例 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{x}$

解 原式 $= \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{xy} \cdot y = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{xy} \cdot \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y$

$$\overset{令 t=xy}{=\!=\!=\!=} \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0$$

例 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$

解 原式 $\overset{令 u=xy}{=\!=\!=\!=}$

计算二元函数的极限：化为单变量极限

例 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x}$

解 原式 $= \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot y = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y$

$$\xlongequal{\text{令}t=xy} \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0$$

例 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$

解 原式 $\xlongequal{\text{令}u=xy} \lim \frac{2-\sqrt{u+4}}{u}$

计算二元函数的极限：化为单变量极限

例 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{x}$

解 $$原式 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy}\cdot y = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy}\cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} y$$

$$\xlongequal{令t=xy} \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t}\cdot 0 = 1\cdot 0 = 0$$

例 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$

解 $$原式 \xlongequal{令u=xy} \lim_{u\to 0} \frac{2-\sqrt{u+4}}{u}$$

例 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{x}$

解 原式 $= \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{xy} \cdot y = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{xy} \cdot \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y$

$$\xlongequal{令t=xy} \lim_{t\to0} \frac{\sin t}{t} \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0$$

例 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$

解 原式 $\xlongequal{令u=xy} \lim\limits_{u\to0} \dfrac{2-\sqrt{u+4}}{u}$ ↓洛必达法则

$$= \lim_{u\to0} \frac{\left[2-(u+4)^{1/2}\right]'}{u'}$$

计算二元函数的极限：化为单变量极限

例 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x}$

解

$$原式 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy}\cdot y = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy}\cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} y$$

$$\overset{令t=xy}{=\!=\!=\!=} \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot 0 = 1\cdot 0 = 0$$

例 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$

解

$$原式 \overset{令u=xy}{=\!=\!=\!=} \lim_{u\to 0}\frac{2-\sqrt{u+4}}{u}$$

↓洛必达法则

$$= \lim_{u\to 0}\frac{\left[2-(u+4)^{1/2}\right]'}{u'} = \lim_{u\to 0}\frac{\qquad}{\qquad}$$

计算二元函数的极限：化为单变量极限

例 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{x}$

解 原式 $= \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{xy} \cdot y = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{xy} \cdot \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y$

$$\xlongequal{\text{令}t=xy} \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0$$

例 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$

解 原式 $\xlongequal{\text{令}u=xy} \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{2-\sqrt{u+4}}{u}$ ↓洛必达法则

$$= \lim_{u\to 0} \frac{\left[2-(u+4)^{1/2}\right]'}{u'} = \lim_{u\to 0} \frac{\qquad}{1}$$

计算二元函数的极限：化为单变量极限

例 求极限 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(xy)}{x}$

解 原式 $\displaystyle=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot y=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot\lim_{(x,y)\to(0,0)}y$

$$\overset{令t=xy}{=\!=\!=\!=}\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}\cdot0=1\cdot0=0$$

例 求极限 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$

解 原式 $\displaystyle\overset{令u=xy}{=\!=\!=\!=}\lim_{u\to0}\frac{2-\sqrt{u+4}}{u}$ ↓洛必达法则

$$=\lim_{u\to0}\frac{\left[2-(u+4)^{1/2}\right]'}{u'}=\lim_{u\to0}\frac{-\frac{1}{2}(u+4)^{-1/2}}{1}$$

例 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x}$

解

$$\text{原式} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot y = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} y$$

$$\overset{\text{令}t=xy}{=\!=\!=\!=} \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0$$

例 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$

解

$$\text{原式} \overset{\text{令}u=xy}{=\!=\!=\!=} \lim_{u\to 0} \frac{2-\sqrt{u+4}}{u}$$

$\downarrow$ 洛必达法则

$$= \lim_{u\to 0} \frac{\left[2-(u+4)^{1/2}\right]'}{u'} = \lim_{u\to 0} \frac{-\frac{1}{2}(u+4)^{-1/2}}{1}$$

$$= \lim_{u\to 0} -\frac{1}{2(u+4)^{1/2}}$$

计算二元函数的极限：化为单变量极限

例 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{x}$

解

$$\text{原式} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy}\cdot y = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy}\cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} y$$

$$\xlongequal{\text{令}t=xy} \lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}\cdot 0 = 1\cdot 0 = 0$$

例 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$

解

$$\text{原式} \xlongequal{\text{令}u=xy} \lim_{u\to0}\frac{2-\sqrt{u+4}}{u}$$

↓洛必达法则

$$= \lim_{u\to0}\frac{\left[2-(u+4)^{1/2}\right]'}{u'} = \lim_{u\to0}\frac{-\frac{1}{2}(u+4)^{-1/2}}{1}$$

$$= \lim_{u\to0} -\frac{1}{2(u+4)^{1/2}} = -\frac{1}{4}$$

例 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$

例 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$

解

$$原式 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{e^{x^2y^2}}$$

例 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$

解

$$\text{原式} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{e^{x^2y^2}}$$

$$\overset{t:=x^2+y^2}{\underset{s:=xy}{=\!=\!=\!=}}$$

例 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$

解

$$\text{原式} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{e^{x^2y^2}}$$

$$\xlongequal[s:=xy]{t:=x^2+y^2} \lim \frac{1-\cos t}{t} \cdot \lim \frac{1}{e^{s^2}}$$

例 求极限 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$

解

$$\text{原式} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{e^{x^2y^2}}$$

$$\xlongequal[s:=xy]{t:=x^2+y^2} \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t} \cdot \lim \frac{1}{e^{s^2}}$$

例 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$

解

$$\text{原式} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{e^{x^2y^2}}$$

$$\xlongequal[s:=xy]{t:=x^2+y^2} \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t} \cdot \lim_{s\to 0} \frac{1}{e^{s^2}}$$

例 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$

解

$$\text{原式} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{e^{x^2y^2}}$$

$$\xlongequal[s:=xy]{t:=x^2+y^2} \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t} \cdot \lim_{s\to 0} \frac{1}{e^{s^2}}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{1} \cdot 1$$

例 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$

解

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{e^{x^2y^2}} \\
&\xlongequal[s:=xy]{t:=x^2+y^2} \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t} \cdot \lim_{s\to 0} \frac{1}{e^{s^2}} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{1} \cdot 1 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

连续性

定义

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

则称 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续。

连续性

定义 设 $f(x, y)$, $(x, y) \in D$；$p_0(x_0, y_0)$ 为 D 的聚点，且 $p_0 \in D$。若

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

则称 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续。

连续性

定义 设 $f(x, y)$, $(x, y) \in D$；$p_0(x_0, y_0)$ 为 D 的聚点，且 $p_0 \in D$。若

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

则称 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续。若 $z = f(x, y)$ 在定义域上每一点处连续，则称 $z = f(x, y)$ 是连续函数。

连续性

定义 设 $f(x, y)$, $(x, y) \in D$；$p_0(x_0, y_0)$ 为 D 的聚点，且 $p_0 \in D$。若

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

则称 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续。若 $z = f(x, y)$ 在定义域上每一点处连续，则称 $z = f(x, y)$ 是连续函数。

注

- 二元初等函数在其定义域内是连续函数

连续性

定义 设 $f(x,y)$, $(x,y)\in D$；$p_0(x_0,y_0)$ 为 D 的聚点，且 $p_0\in D$。若

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

则称 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续。若 $z=f(x,y)$ 在定义域上每一点处连续，则称 $z=f(x,y)$ 是连续函数。

注

- 二元初等函数：由 x 和 y 的基本初等函数经有限次的四则运算、复合运算所得的表达式
- 二元初等函数在其定义域内是连续函数

连续性

定义 设 $f(x,y)$, $(x,y)\in D$；$p_0(x_0,y_0)$ 为 D 的聚点，且 $p_0\in D$。若

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

则称 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续。若 $z=f(x,y)$ 在定义域上每一点处连续，则称 $z=f(x,y)$ 是连续函数。

注

- 二元初等函数：由 x 和 y 的基本初等函数经有限次的四则运算、复合运算所得的表达式
- 二元初等函数在其定义域内是连续函数
- 二元初等函数在定义域内一点 (x_0,y_0) 的极限值，等于该点处的函数值

连续性

定义 设 $f(x,y)$, $(x,y)\in D$；$p_0(x_0,y_0)$ 为 D 的聚点，且 $p_0\in D$。若

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

则称 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续。若 $z=f(x,y)$ 在定义域上每一点处连续，则称 $z=f(x,y)$ 是连续函数。

注

- 二元初等函数：由 x 和 y 的基本初等函数经有限次的四则运算、复合运算所得的表达式
- 二元初等函数在其定义域内是连续函数
- 二元初等函数在定义域内一点 (x_0,y_0) 的极限值，等于该点处的函数值

例 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)} 2xy+e^{x+y}$

连续性

定义 设 $f(x, y)$, $(x, y) \in D$；$p_0(x_0, y_0)$ 为 D 的聚点，且 $p_0 \in D$。若

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

则称 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续。若 $z = f(x, y)$ 在定义域上每一点处连续，则称 $z = f(x, y)$ 是连续函数。

注

- 二元初等函数：由 x 和 y 的基本初等函数经有限次的四则运算、复合运算所得的表达式
- 二元初等函数在其定义域内是连续函数
- 二元初等函数在定义域内一点 (x_0, y_0) 的极限值，等于该点处的函数值

例 $$\lim_{(x,y)\to(1,2)} 2xy + e^{x+y} = 2\cdot 1\cdot 2 + e^{1+2}$$

连续性

定义 设 $f(x,y)$, $(x,y)\in D$；$p_0(x_0,y_0)$ 为 D 的聚点，且 $p_0\in D$。若

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

则称 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续。若 $z=f(x,y)$ 在定义域上每一点处连续，则称 $z=f(x,y)$ 是连续函数。

注

- 二元初等函数：由 x 和 y 的基本初等函数经有限次的四则运算、复合运算所得的表达式
- 二元初等函数在其定义域内是连续函数
- 二元初等函数在定义域内一点 (x_0,y_0) 的极限值，等于该点处的函数值

例 $$\lim_{(x,y)\to(1,2)} 2xy+e^{x+y}=2\cdot 1\cdot 2+e^{1+2}=4+e^3$$

例 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2}$, $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

例 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2}$，$\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

解

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

例 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2}$，$\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

解

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2} = \frac{2\cdot 2^2-3\cdot 1^2}{2^2+1^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

例 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2}$, $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

解

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2} = \frac{2\cdot 2^2-3\cdot 1^2}{2^2+1^2} = 1$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

例 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2}$，$\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

解

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2} = \frac{2\cdot 2^2-3\cdot 1^2}{2^2+1^2} = 1$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\ln(1+e^0)}{\sqrt{1^2+0^2}}$$

例 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2}$, $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

解

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2} = \frac{2\cdot 2^2-3\cdot 1^2}{2^2+1^2} = 1$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\ln(1+e^0)}{\sqrt{1^2+0^2}} = \ln 2$$

例 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2}$, $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

解

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2} = \frac{2\cdot 2^2-3\cdot 1^2}{2^2+1^2} = 1$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\ln(1+e^0)}{\sqrt{1^2+0^2}} = \ln 2$$

例 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x+y}{x^2-y^2}$

解

例 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)}\frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2}$, $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

解

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)}\frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2}=\frac{2\cdot 2^2-3\cdot 1^2}{2^2+1^2}=1$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\ln(1+e^0)}{\sqrt{1^2+0^2}}=\ln 2$$

例 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)}\frac{x+y}{x^2-y^2}$

解 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)}\frac{x+y}{x^2-y^2}=$

例 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2}$, $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

解

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2} = \frac{2\cdot 2^2-3\cdot 1^2}{2^2+1^2} = 1$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\ln(1+e^0)}{\sqrt{1^2+0^2}} = \ln 2$$

例 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x+y}{x^2-y^2}$

解

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x+y}{x^2-y^2} = \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x+y}{(x+y)(x-y)}$$

例 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2}$，$\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

解

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2} = \frac{2\cdot 2^2-3\cdot 1^2}{2^2+1^2} = 1$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\ln(1+e^0)}{\sqrt{1^2+0^2}} = \ln 2$$

例 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x+y}{x^2-y^2}$

解

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x+y}{x^2-y^2} = \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x+y}{(x+y)(x-y)} = \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{1}{x-y}$$

例 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2}$, $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

解

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2} = \frac{2\cdot 2^2 - 3\cdot 1^2}{2^2+1^2} = 1$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\ln(1+e^0)}{\sqrt{1^2+0^2}} = \ln 2$$

例 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x+y}{x^2-y^2}$

解

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x+y}{x^2-y^2} = \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x+y}{(x+y)(x-y)}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{1}{x-y} = \frac{1}{1-(-1)}$$

例 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2}$， $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

解

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2} = \frac{2\cdot 2^2-3\cdot 1^2}{2^2+1^2} = 1$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\ln(1+e^0)}{\sqrt{1^2+0^2}} = \ln 2$$

例 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x+y}{x^2-y^2}$

解

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x+y}{x^2-y^2} = \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x+y}{(x+y)(x-y)}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{1}{x-y} = \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2}$$

有界性与最大值最小值定理

回忆 有界闭区间 上的 连续函数 $y = f(x)$ 有界，并且能取到最大值和最小值。

有界性与最大值最小值定理

回忆 有界闭区间 上的 连续函数 $y = f(x)$ 有界，并且能取到最大值和最小值。

定理 有界闭区域 上的 连续函数 $z = f(x, y)$ 一定有界，并且能取到最大值和最小值。

有界性与最大值最小值定理

回忆 有界闭区间 上的 连续函数 $y = f(x)$ 有界，并且能取到最大值和最小值。

定理 有界闭区域 上的 连续函数 $z = f(x, y)$ 一定有界，并且能取到最大值和最小值。

注 “有界闭区域”，“连续性”不能少，否则不一定有界，也不一定能取到最大、最小值。

有界性与最大值最小值定理

回忆 有界闭区间 上的 连续函数 $y = f(x)$ 有界，并且能取到最大值和最小值。

定理 有界闭区域 上的 连续函数 $z = f(x, y)$ 一定有界，并且能取到最大值和最小值。

注 “有界闭区域”，“连续性”不能少，否则不一定有界，也不一定能取到最大、最小值。

例 设 $z = f(x, y) = \frac{1}{1-x^2-y^2}$，则

- 在有界闭区域 $D_1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}\}$
- 在有界开区域 $D_2 = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

有界性与最大值最小值定理

回忆 有界闭区间 上的 连续函数 $y = f(x)$ 有界，并且能取到最大值和最小值。

定理 有界闭区域 上的 连续函数 $z = f(x, y)$ 一定有界，并且能取到最大值和最小值。

注 “有界闭区域”，“连续性”不能少，否则不一定有界，也不一定能取到最大、最小值。

例 设 $z = f(x, y) = \frac{1}{1-x^2-y^2}$，则

- 在有界闭区域 $D_1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}\}$上取得最值
- 在有界开区域 $D_2 = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$

有界性与最大值最小值定理

回忆 有界闭区间 上的 连续函数 $y = f(x)$ 有界，并且能取到最大值和最小值。

定理 有界闭区域 上的 连续函数 $z = f(x, y)$ 一定有界，并且能取到最大值和最小值。

注 “有界闭区域”，“连续性”不能少，否则不一定有界，也不一定能取到最大、最小值。

例 设 $z = f(x, y) = \frac{1}{1-x^2-y^2}$，则

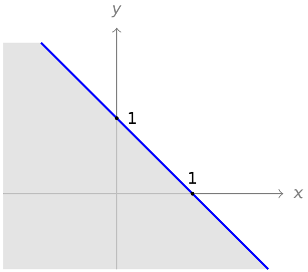
- 在有界闭区域 $D_1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}\}$上取得最值
- 在有界开区域 $D_2 = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$上取不到最大值

例 设 $z=f(x, y)=x^2-y^2$，定义在无界闭区域

$D=\{(x, y)\,|\,x+y\leq 1\}$

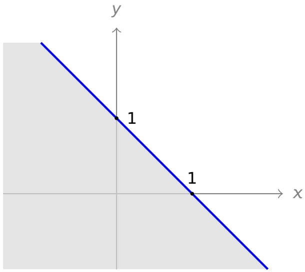
例 设 $z = f(x, y) = x^2 - y^2$，定义在无界闭区域

$D = \{(x, y) \,|\, x + y \leq 1\}$



例 设 $z=f(x,y)=x^2-y^2$，定义在无界闭区域

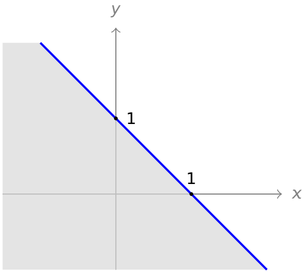
$D=\{(x,y)\,|\,x+y\le 1\}$



解 在边界 $x+y=1$ 上，$y=1-x$，

例 设 $z = f(x, y) = x^2 - y^2$，定义在无界闭区域

$D = \{(x, y) \mid x + y \le 1\}$

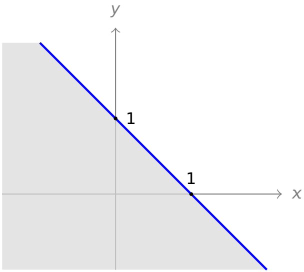


解 在边界 $x + y = 1$ 上，$y = 1 - x$，此时

$$f(x, y) = x^2 - y^2 = x^2 - (1 - x)^2$$

例 设 $z=f(x,y)=x^2-y^2$，定义在无界闭区域

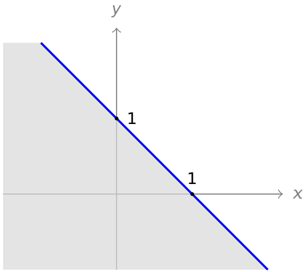
$D=\{(x,y)\,|\,x+y\le 1\}$



解 在边界 $x+y=1$ 上，$y=1-x$，此时

$$f(x,y)=x^2-y^2=x^2-(1-x)^2=2x-1$$

例 设 $z = f(x, y) = x^2 - y^2$，定义在无界闭区域 $D = \{(x, y) \,|\, x + y \le 1\}$



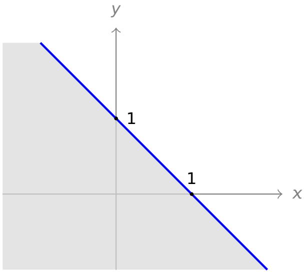
解 在边界 $x + y = 1$ 上，$y = 1 - x$，此时

$$f(x, y) = x^2 - y^2 = x^2 - (1 - x)^2 = 2x - 1$$

- 当 $x \to +\infty$ 时，函数值 $f \to +\infty$

例 设 $z = f(x, y) = x^2 - y^2$，定义在无界闭区域

$D = \{(x, y) \mid x + y \le 1\}$

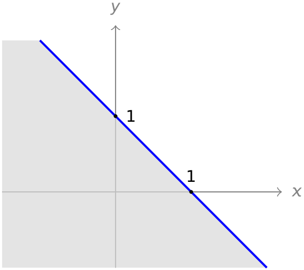


解 在边界 $x + y = 1$ 上，$y = 1 - x$，此时

$$f(x, y) = x^2 - y^2 = x^2 - (1 - x)^2 = 2x - 1$$

- 当 $x \to +\infty$ 时，函数值 $f \to +\infty$
- 当 $x \to -\infty$ 时，函数值 $f \to -\infty$

例 设 $z=f(x,y)=x^2-y^2$，定义在无界闭区域 $D=\{(x,y)\,|\,x+y\leq 1\}$，则 $f(x,y)$ 既取不到最小值，也取不到最大值。



解 在边界 $x+y=1$ 上，$y=1-x$，此时

$$f(x,y)=x^2-y^2=x^2-(1-x)^2=2x-1$$

- 当 $x\to+\infty$ 时，函数值 $f\to+\infty$
- 当 $x\to-\infty$ 时，函数值 $f\to-\infty$

介值定理

回忆 有界闭区间 上的 连续函数 的介值定理是什么说？

介值定理

回忆 <u>有界闭区间</u> 上的 <u>连续函数</u> 的介值定理是什么说?

定理 设

- $z = f(x, y)$ 是 <u>有界闭区域</u> $\overline{D}$ 上的 <u>连续函数</u>;

介值定理

回忆 <u>有界闭区间</u> 上的 <u>连续函数</u> 的介值定理是什么说？

定理 设

- $z = f(x, y)$ 是 <u>有界闭区域</u> $\overline{D}$ 上的 <u>连续函数</u>；
- C 是介于 $f(x, y)$ 最大值与最小值之间的任意一个数。

介值定理

回忆 有界闭区间 上的 连续函数 的介值定理是什么说？

定理 设

- $z = f(x, y)$ 是 有界闭区域 $\overline{D}$ 上的 连续函数；
- C 是介于 $f(x, y)$ 最大值与最小值之间的任意一个数。

则至少存在一点 $(\xi, \eta) \in \overline{D}$，使得 $f(\xi, \eta) = C$。

n 元函数

- 三元函数：$u = f(x, y, z)$，

n 元函数

- 三元函数：$u = f(x, y, z)$，如

$$f(x, y, z) = \frac{z}{x^2 + y + 1} + \sin(xyz)$$

n 元函数

- 三元函数：$u=f(x,y,z)$，如

$$f(x,y,z)=\frac{z}{x^2+y+1}+\sin(xyz)$$

例 设长方体的长宽高分别为 x，y，z，则体积为

n 元函数

- 三元函数：$u=f(x,y,z)$，如

$$f(x,y,z)=\frac{z}{x^2+y+1}+\sin(xyz)$$

例 设长方体的长宽高分别为 x，y，z，则体积为

$$V=xyz$$

n 元函数

- 三元函数：$u = f(x, y, z)$，如

$$f(x, y, z) = \frac{z}{x^2 + y + 1} + \sin(xyz)$$

例 设长方体的长宽高分别为 x，y，z，则体积为

$$V = xyz$$

是关于 x，y，z 的三元函数，

n 元函数

- 三元函数：$u = f(x, y, z)$，如

$$f(x, y, z) = \frac{z}{x^2 + y + 1} + \sin(xyz)$$

例 设长方体的长宽高分别为 x，y，z，则体积为

$$V = xyz$$

是关于 x，y，z 的三元函数，定义域是

$$D = \{(x, y, z) | x, y, z > 0\}.$$

n 元函数

- 三元函数：$u = f(x, y, z)$，如
$$f(x, y, z) = \frac{z}{x^2 + y + 1} + \sin(xyz)$$

例 设长方体的长宽高分别为 x，y，z，则体积为
$$V = xyz$$
是关于 x，y，z 的三元函数，定义域是
$$D = \{(x, y, z) | x, y, z > 0\}.$$

- n 原函数：$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$