第 13 周作业解答

练习 1. 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量。

解

- 解特征方程 $|\lambda I-A|=0$。

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-3 & 2 \\ 2 & \lambda-3 \end{vmatrix}=(\lambda-3)^2-2^2=(\lambda-1)(\lambda-5)$$

  所以特征值为 $\lambda_1=1, \lambda_2=5$。

- 关于特征值 $\lambda_1=1$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$。

$$(\lambda_1 I-A\,\vdots\,0)=\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  同解方程组为

$$x_1-x_2=0 \qquad \Rightarrow \qquad x_1=x_2$$

  自由变量取为 x_2。取 $x_2=1$，得基础解系

$$\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

  所以对应于特征值 $\lambda_1=1$ 的所有特征向量为：

$$c_1\alpha_1=c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  其中 c_1 是任意非零常数。

- 关于特征值 $\lambda_2=5$，求解 $(\lambda_2 I-A)x=0$。

$$(\lambda_1 I-A\,\vdots\,0)=\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  同解方程组为

$$x_1+x_2=0 \qquad \Rightarrow \qquad x_1=-x_2$$

  自由变量取为 x_2。取 $x_2=1$，得基础解系

$$\alpha_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

  所以对应于特征值 $\lambda_2=5$ 的所有特征向量为：

$$c_2\alpha_2=c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  其中 c_2 是任意非零常数。

练习 2. 已知 $A = \begin{pmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 有特征值 $2, 6$，求 x 的值。

解设 A 的第 3 个特征值为 λ_3，所以成立

$$\begin{cases} 2+6+\lambda_3 = x+4+5 \\ 2\times 6\times \lambda_3 = \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{vmatrix} \end{cases}$$

化简得：

$$\begin{cases} \lambda_3 - x = 1 \\ 12\lambda_3 = 14x + 10 \end{cases}$$

所以

$$\lambda_3 = 2, \qquad x = 1.$$

练习 3. 判断矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ 可否对角化。若能，求出相应的对角阵 Λ，和可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP = \Lambda$。

解

- 解特征方程 $|\lambda I - A| = 0$。

$$\begin{aligned} |\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & 3 & -3 \\ -3 & \lambda+5 & -3 \\ -6 & 6 & \lambda-4 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3+c_2} \begin{vmatrix} \lambda-1 & 3 & 0 \\ -3 & \lambda+5 & \lambda+2 \\ -6 & 6 & \lambda+2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda+2)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 3 & 0 \\ -3 & \lambda+5 & 1 \\ -6 & 6 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2-r_3} (\lambda+2)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 3 & 0 \\ 3 & \lambda-1 & 0 \\ -6 & 6 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda+2)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 3 \\ 3 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda^2-2\lambda-8) = (\lambda+2)^2(\lambda-4) \end{aligned}$$

  所以特征值为 $\lambda_1 = -2$（二重特征值），$\lambda_2 = 4$。

- 关于特征值 $\lambda_1 = -2$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$。

$$(-2I - A \,\vdots\, 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & -3 & 0 \\ -6 & 6 & -6 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  同解方程组为

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = x_2 - x_3$$

  自由变量取为 x_2, x_3。分别取 $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，得基础解系

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

  所以对应于特征值 $\lambda_1 = -2$ 的有 2 个线性无关特征向量。(等价于 $r(-2I - A) = 3 - 2 = 1$。)

- 关于特征值 $\lambda_1 = 4$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$。

$$(-2I - A \,\vdots\, 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & -3 & 0 \\ -3 & 9 & -3 & 0 \\ -6 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{-\frac{1}{3}\times r_2 \\ -\frac{1}{6}\times r_3}]{\frac{1}{3}\times r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - r_2]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}\times r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 + r_2]{r_1 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = 2x_2 \end{cases}$$

自由变量取为 x_2。取 $x_2 = 1$，得基础解系

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- 可见 A 有 3 个线性无关特征向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$，所以 A 可对角化。令

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \scriptstyle\alpha_1 & \scriptstyle\alpha_2 & \scriptstyle\alpha_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & -2 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$$

则

$$P^{-1}AP = \Lambda.$$

注. P 的选取不唯一。Λ 也可以是 $\begin{pmatrix} -2 & & \\ & 4 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} 4 & & \\ & -2 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$，但此时 P 要作相应调整。