第 3 章 α：微分中值定理

数学系　梁卓滨

2019-2020 学年 I

Outline

费马引理

定义 设 $y = f(x)$ 是定义在开区间 I 上的可导函数，$x_0 \in I$. 如果 $f'(x_0) = 0$，则称 x_0 是 $y = f(x)$ 的**驻点**.

费马引理

定义 设 $y = f(x)$ 是定义在开区间 I 上的可导函数，$x_0 \in I$. 如果 $f'(x_0) = 0$，则称 x_0 是 $y = f(x)$ 的**驻点**.

驻点的几何意义 x_0 是 $y = f(x)$ 的驻点 $\Leftrightarrow$ 曲线 $y = f(x)$ 在 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线是水平.

费马引理

定义 设 $y=f(x)$ 是定义在开区间 I 上的可导函数，$x_0\in I$. 如果 $f'(x_0)=0$，则称 x_0 是 $y=f(x)$ 的**驻点**.

驻点的几何意义 x_0 是 $y=f(x)$ 的驻点 $\Leftrightarrow$ 曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线是水平.

费马引理 设 $y=f(x)$ 在 x_0 处可导，并且取到局部最大值
即：在 x_0 附近成立

$$f(x)\le f(x_0)$$

那么 x_0 是驻点.

费马引理

定义 设 $y=f(x)$ 是定义在开区间 I 上的可导函数，$x_0 \in I$. 如果 $f'(x_0)=0$，则称 x_0 是 $y=f(x)$ 的**驻点**.

驻点的几何意义 x_0 是 $y=f(x)$ 的驻点 $\Leftrightarrow$ 曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线是水平.

费马引理 设 $y=f(x)$ 在 x_0 处可导，并且取到局部最大值（最小值），即：在 x_0 附近成立

$$f(x) \leq f(x_0) \qquad (f(x) \geq f(x_0))$$

那么 x_0 是驻点.

费马引理

定义 设 $y=f(x)$ 是定义在开区间 I 上的可导函数，$x_0\in I$. 如果 $f'(x_0)=0$，则称 x_0 是 $y=f(x)$ 的**驻点**.

驻点的几何意义 x_0 是 $y=f(x)$ 的驻点 $\Leftrightarrow$ 曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线是水平.

费马引理 设 $y=f(x)$ 在 x_0 处可导，并且取到局部最大值（最小值），即：在 x_0 附近成立

$$f(x)\le f(x_0) \qquad (f(x)\ge f(x_0))$$

那么 x_0 是驻点.

证明 设 $f(x)\le f(x_0)$，则

$$f'(x_0)=f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

费马引理

定义 设 $y=f(x)$ 是定义在开区间 I 上的可导函数，$x_0\in I$. 如果 $f'(x_0)=0$，则称 x_0 是 $y=f(x)$ 的**驻点**.

驻点的几何意义 x_0 是 $y=f(x)$ 的驻点 $\Leftrightarrow$ 曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线是水平.

费马引理 设 $y=f(x)$ 在 x_0 处可导，并且取到局部最大值（最小值），即：在 x_0 附近成立

$$f(x)\le f(x_0)\qquad (f(x)\ge f(x_0))$$

那么 x_0 是驻点.

证明 设 $f(x)\le f(x_0)$，则

$$f'(x_0)=f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0,$$

费马引理

定义 设 $y=f(x)$ 是定义在开区间 I 上的可导函数，$x_0\in I$. 如果 $f'(x_0)=0$，则称 x_0 是 $y=f(x)$ 的**驻点**.

驻点的几何意义 x_0 是 $y=f(x)$ 的驻点 $\Leftrightarrow$ 曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线是水平.

费马引理 设 $y=f(x)$ 在 x_0 处可导，并且取到局部最大值（最小值），即：在 x_0 附近成立

$$f(x)\le f(x_0) \qquad (f(x)\ge f(x_0))$$

那么 x_0 是驻点.

证明 设 $f(x)\le f(x_0)$，则

$$f'(x_0)=f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0,$$

$$f'(x_0)=f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

费马引理

定义 设 $y=f(x)$ 是定义在开区间 I 上的可导函数，$x_0 \in I$. 如果 $f'(x_0)=0$，则称 x_0 是 $y=f(x)$ 的**驻点**.

驻点的几何意义 x_0 是 $y=f(x)$ 的驻点 $\Longleftrightarrow$ 曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线是水平.

费马引理 设 $y=f(x)$ 在 x_0 处可导，并且取到局部最大值（最小值），即：在 x_0 附近成立

$$f(x) \leq f(x_0) \qquad (f(x) \geq f(x_0))$$

那么 x_0 是驻点.

证明 设 $f(x) \leq f(x_0)$，则

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0,$$

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0,$$

费马引理

定义 设 $y=f(x)$ 是定义在开区间 I 上的可导函数，$x_0\in I$. 如果 $f'(x_0)=0$，则称 x_0 是 $y=f(x)$ 的**驻点**.

驻点的几何意义 x_0 是 $y=f(x)$ 的驻点 $\Leftrightarrow$ 曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线是水平.

费马引理 设 $y=f(x)$ 在 x_0 处可导，并且取到局部最大值（最小值），即：在 x_0 附近成立

$$f(x)\le f(x_0)\qquad (f(x)\ge f(x_0))$$

那么 x_0 是驻点.

证明 设 $f(x)\le f(x_0)$，则

$$\left.\begin{aligned} f'(x_0)=f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0,\\ f'(x_0)=f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0,\end{aligned}\right\}\Rightarrow f'(x_0)=0$$

费马引理

$y=f(x)$ 在 x_0 处取到局部最大（或最小） $\Rightarrow$ x_0 是驻点

费马引理

$$y=f(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 处取到局部最大（或最小）} \quad \Rightarrow \quad x_0 \text{ 是驻点}$$

注 费马定理的逆命题不成立.

费马引理

$$y = f(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 处取到局部最大（或最小）} \quad \Rightarrow \quad x_0 \text{ 是驻点}$$

注 费马定理的逆命题不成立. 也就是：

$$x_0 \text{ 是驻点} \quad \not\Rightarrow \quad y = f(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 处取到局部最大（或最小）}$$

费马引理

$$y = f(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 处取到局部最大（或最小）} \quad \Rightarrow \quad x_0 \text{ 是驻点}$$

注 费马定理的逆命题不成立. 也就是:

$$x_0 \text{ 是驻点} \quad \not\Rightarrow \quad y = f(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 处取到局部最大（或最小）}$$

例 $x_0 = 0$ 是 $y = x^3$ 的驻点，但不是局部最大（或最小）值点.

罗尔定理

定理 如果函数 $f(x)$ 满足条件：

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，

(2) 在开区间 (a,b) 上可导，

(3) 在端点处 $f(a)=f(b)$，

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

罗尔定理

定理 如果函数 $f(x)$ 满足条件：

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，

(2) 在开区间 (a, b) 上可导，

(3) 在端点处 $f(a) = f(b)$，

则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$，使得 $f'(\xi) = 0$.

证明 由连续性，$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上取到最值，设 $x = \xi_1$ 是最大值点，$x = \xi_2$ 是最小值点.

罗尔定理

定理 如果函数 $f(x)$ 满足条件：

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，

(2) 在开区间 (a,b) 上可导，

(3) 在端点处 $f(a)=f(b)$，

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

证明 由连续性，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上取到最值，设 $x=\xi_1$ 是最大值点，$x=\xi_2$ 是最小值点.

- 若 $\xi_1\in(a,b)$

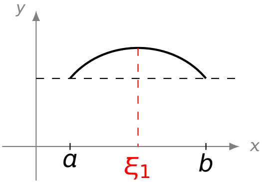
罗尔定理

定理 如果函数 $f(x)$ 满足条件：

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，

(2) 在开区间 (a,b) 上可导，

(3) 在端点处 $f(a)=f(b)$，



则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

证明 由连续性，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上取到最值，设 $x=\xi_1$ 是最大值点，$x=\xi_2$ 是最小值点.

- 若 $\xi_1\in(a,b)$

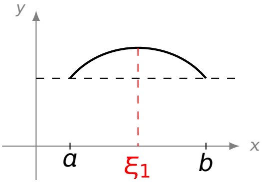
罗尔定理

定理 如果函数 $f(x)$ 满足条件：

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，

(2) 在开区间 (a,b) 上可导，

(3) 在端点处 $f(a)=f(b)$，



则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

证明 由连续性，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上取到最值，设 $x=\xi_1$ 是最大值点，$x=\xi_2$ 是最小值点.

- 若 $\xi_1\in(a,b)$，则由费马引理，$f'(\xi_1)=0$

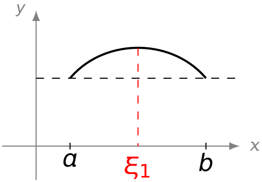
罗尔定理

定理 如果函数 $f(x)$ 满足条件：

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，

(2) 在开区间 (a,b) 上可导，

(3) 在端点处 $f(a)=f(b)$，



则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

证明 由连续性，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上取到最值，设 $x=\xi_1$ 是最大值点，$x=\xi_2$ 是最小值点.

- 若 $\xi_1 \in (a,b)$，则由费马引理，$f'(\xi_1)=0$
- 若 $\xi_2 \in (a,b)$

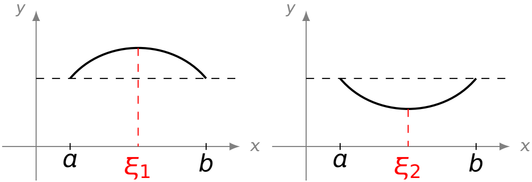
罗尔定理

定理 如果函数 $f(x)$ 满足条件：

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，

(2) 在开区间 (a,b) 上可导，

(3) 在端点处 $f(a)=f(b)$，



则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

证明 由连续性，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上取到最值，设 $x=\xi_1$ 是最大值点，$x=\xi_2$ 是最小值点.

- 若 $\xi_1\in(a,b)$，则由费马引理，$f'(\xi_1)=0$
- 若 $\xi_2\in(a,b)$

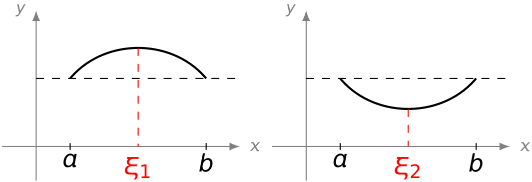
罗尔定理

定理 如果函数 $f(x)$ 满足条件：

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，

(2) 在开区间 (a, b) 上可导，

(3) 在端点处 $f(a) = f(b)$，



则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$，使得 $f'(\xi) = 0$.

证明 由连续性，$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上取到最值，设 $x = \xi_1$ 是最大值点，$x = \xi_2$ 是最小值点.

- 若 $\xi_1 \in (a, b)$，则由费马引理，$f'(\xi_1) = 0$
- 若 $\xi_2 \in (a, b)$，则由费马引理，$f'(\xi_2) = 0$

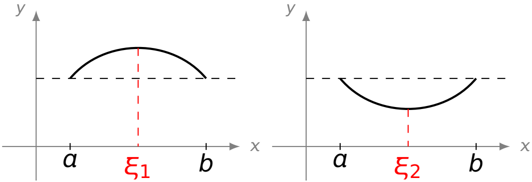
罗尔定理

定理 如果函数 $f(x)$ 满足条件：

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，

(2) 在开区间 (a,b) 上可导，

(3) 在端点处 $f(a)=f(b)$，



则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

证明 由连续性，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上取到最值，设 $x=\xi_1$ 是最大值点，$x=\xi_2$ 是最小值点.

- 若 $\xi_1\in(a,b)$，则由费马引理，$f'(\xi_1)=0$
- 若 $\xi_2\in(a,b)$，则由费马引理，$f'(\xi_2)=0$
- 若 ξ_1,ξ_2 为端点 $x=a,b$，

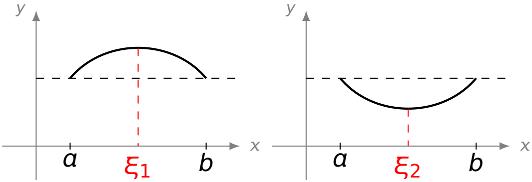
罗尔定理

定理 如果函数 $f(x)$ 满足条件：

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，

(2) 在开区间 (a, b) 上可导，

(3) 在端点处 $f(a) = f(b)$，



则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$，使得 $f'(\xi) = 0$.

证明 由连续性，$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上取到最值，设 $x = \xi_1$ 是最大值点，$x = \xi_2$ 是最小值点.

- 若 $\xi_1 \in (a, b)$，则由费马引理，$f'(\xi_1) = 0$
- 若 $\xi_2 \in (a, b)$，则由费马引理，$f'(\xi_2) = 0$
- 若 ξ_1, ξ_2 为端点 $x = a, b$，则由于 $f(a) = f(b)$，说明此时 $f(x)$ 为常值函数

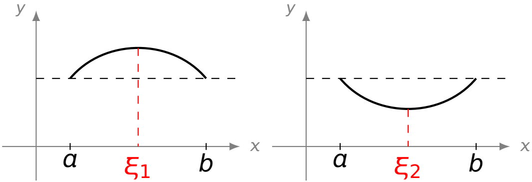
罗尔定理

定理 如果函数 $f(x)$ 满足条件：

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，

(2) 在开区间 (a,b) 上可导，

(3) 在端点处 $f(a)=f(b)$，



则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

证明 由连续性，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上取到最值，设 $x=\xi_1$ 是最大值点，$x=\xi_2$ 是最小值点.

- 若 $\xi_1\in(a,b)$，则由费马引理，$f'(\xi_1)=0$
- 若 $\xi_2\in(a,b)$，则由费马引理，$f'(\xi_2)=0$
- 若 ξ_1,ξ_2 为端点 $x=a,b$，则由于 $f(a)=f(b)$，说明此时 $f(x)$ 为常值函数，$f'\equiv 0$

罗尔定理

定理 如果函数 $f(x)$ 满足条件：

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，

(2) 在开区间 (a, b) 上可导，

(3) 在端点处 $f(a) = f(b)$，

则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$，使得 $f'(\xi) = 0$.

罗尔定理

定理 如果函数 $f(x)$ 满足条件：

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，

(2) 在开区间 (a,b) 上可导，

(3) 在端点处 $f(a)=f(b)$，

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

注 罗尔定理的三个条件，缺一不可，否则都有反例.

罗尔定理

定理 如果函数 $f(x)$ 满足条件：

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，

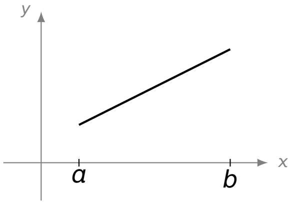
(2) 在开区间 (a, b) 上可导，

(3) 在端点处 $f(a) = f(b)$，

则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$，使得 $f'(\xi) = 0$.

注 罗尔定理的三个条件，缺一不可，否则都有反例.

例如 (3) 不满足时，结论不成立：



例 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在上可导，而且 $f(0)=0$，$f(1)=1$. 证明：存在 $\xi \in (0,1)$，使得 $f'(\xi)=2\xi$.

例 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在上可导，而且 $f(0)=0$，$f(1)=1$. 证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=2\xi$.

证明 令 $g(x)=f(x)-x^2$，则 $g(x)$ 满足罗尔定理的三个条件：

例 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在上可导，而且 $f(0)=0$，$f(1)=1$. 证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=2\xi$.

证明 令 $g(x)=f(x)-x^2$，则 $g(x)$ 满足罗尔定理的三个条件：

(1) 在闭区间 $0,1]$ 上连续，

例 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在上可导，而且 $f(0)=0$，$f(1)=1$. 证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=2\xi$.

证明 令 $g(x)=f(x)-x^2$，则 $g(x)$ 满足罗尔定理的三个条件：

(1) 在闭区间 $0,1]$ 上连续，

(2) 在开区间 $(0,1)$ 上可导，

例 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在上可导，而且 $f(0)=0$，$f(1)=1$. 证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=2\xi$.

证明 令 $g(x)=f(x)-x^2$，则 $g(x)$ 满足罗尔定理的三个条件：

(1) 在闭区间 $0,1]$ 上连续，

(2) 在开区间 $(0,1)$ 上可导，

(3) 端点处 $g(0)=g(1)$

例 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在上可导，而且 $f(0)=0$，$f(1)=1$. 证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=2\xi$.

证明 令 $g(x)=f(x)-x^2$，则 $g(x)$ 满足罗尔定理的三个条件：

(1) 在闭区间 $0,1]$ 上连续，

(2) 在开区间 $(0,1)$ 上可导，

(3) 端点处 $g(0)=g(1)$（$g(0)=f(0)-0=0$， ）

例 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在上可导，而且 $f(0)=0$，$f(1)=1$. 证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=2\xi$.

证明 令 $g(x)=f(x)-x^2$，则 $g(x)$ 满足罗尔定理的三个条件：

(1) 在闭区间 $0,1]$ 上连续，

(2) 在开区间 $(0,1)$ 上可导，

(3) 端点处 $g(0)=g(1)$（$g(0)=f(0)-0=0$，$g(1)=f(1)-1=0$）

例 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在上可导，而且 $f(0)=0$，$f(1)=1$. 证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=2\xi$.

证明 令 $g(x)=f(x)-x^2$，则 $g(x)$ 满足罗尔定理的三个条件：

(1) 在闭区间 $0,1]$ 上连续，

(2) 在开区间 $(0,1)$ 上可导，

(3) 端点处 $g(0)=g(1)$（$g(0)=f(0)-0=0$，$g(1)=f(1)-1=0$）

所以由罗尔定理可知：存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $g'(\xi)=0$.

例 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在上可导，而且 $f(0)=0$，$f(1)=1$. 证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=2\xi$.

证明 令 $g(x)=f(x)-x^2$，则 $g(x)$ 满足罗尔定理的三个条件：

(1) 在闭区间 0, 1] 上连续，

(2) 在开区间 $(0,1)$ 上可导，

(3) 端点处 $g(0)=g(1)$（$g(0)=f(0)-0=0$，$g(1)=f(1)-1=0$）

所以由罗尔定理可知：存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $g'(\xi)=0$.

因为 $g'(x)=f'(x)-2x$，所以 $f'(\xi)-2\xi=0$.

拉格朗日中值定理

定理 如果函数 $f(x)$ 满足条件：

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，

(2) 在开区间 (a, b) 上可导，

拉格朗日中值定理

定理 如果函数 $f(x)$ 满足条件：

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，

(2) 在开区间 (a,b) 上可导，

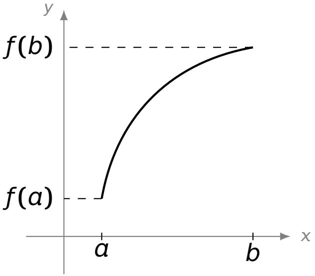
则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得 $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

拉格朗日中值定理

定理 如果函数 $f(x)$ 满足条件：

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，

(2) 在开区间 (a,b) 上可导，



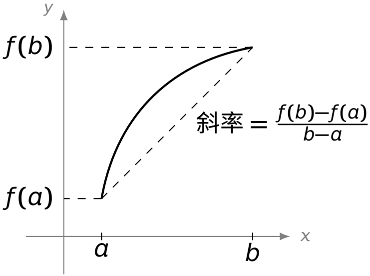
则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

拉格朗日中值定理

定理 如果函数 $f(x)$ 满足条件：

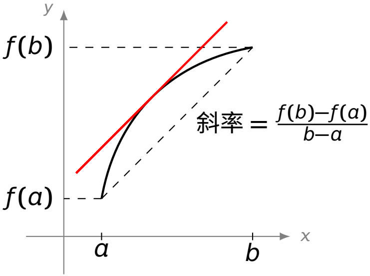
(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，

(2) 在开区间 (a,b) 上可导，



则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得 $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

拉格朗日中值定理



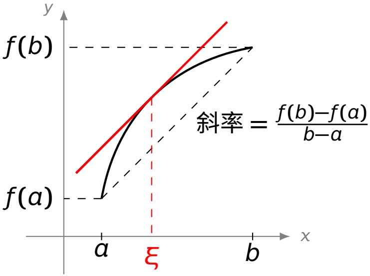
定理 如果函数 $f(x)$ 满足条件：

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，

(2) 在开区间 (a,b) 上可导，

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

拉格朗日中值定理



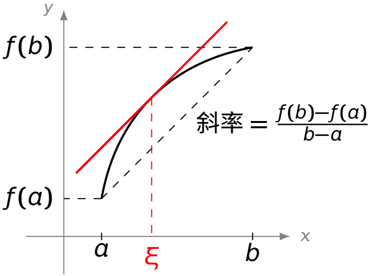
定理 如果函数 $f(x)$ 满足条件：

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，

(2) 在开区间 (a, b) 上可导，

则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$，使得 $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

拉格朗日中值定理



定理 如果函数 $f(x)$ 满足条件：

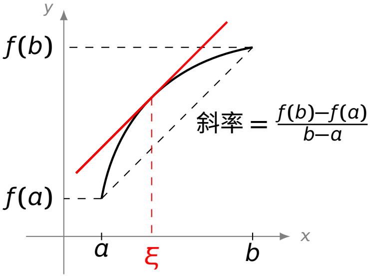
(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，

(2) 在开区间 (a,b) 上可导，

则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得 $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

证明 设 $h(x)$ 表示过曲线两个端点的直线，

拉格朗日中值定理



定理 如果函数 $f(x)$ 满足条件：

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，

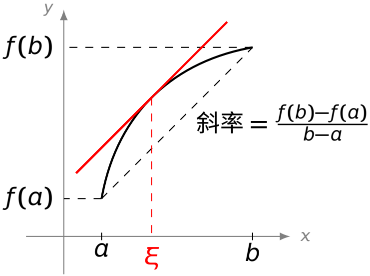
(2) 在开区间 (a,b) 上可导，

则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得 $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

证明 设 $h(x)$ 表示过曲线两个端点的直线，则

$$h(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a).$$

拉格朗日中值定理



定理 如果函数 $f(x)$ 满足条件：

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，

(2) 在开区间 (a,b) 上可导，

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

证明 设 $h(x)$ 表示过曲线两个端点的直线，则

$$h(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a).$$

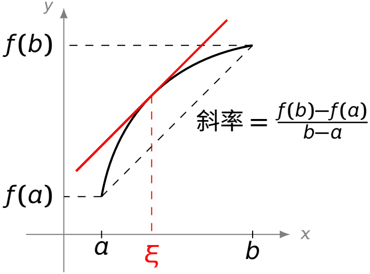
令 $g(x)=f(x)-h(x)$.

拉格朗日中值定理

定理 如果函数 $f(x)$ 满足条件：

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，

(2) 在开区间 (a,b) 上可导，



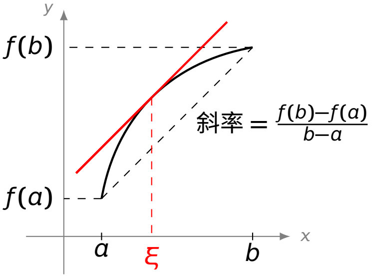
则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

证明 设 $h(x)$ 表示过曲线两个端点的直线，则

$$h(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a).$$

令 $g(x)=f(x)-h(x)$. 则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 内可导，$g(a)=0=g(b)$.

拉格朗日中值定理



定理 如果函数 $f(x)$ 满足条件:

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续,

(2) 在开区间 (a, b) 上可导,

则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$，使得 $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

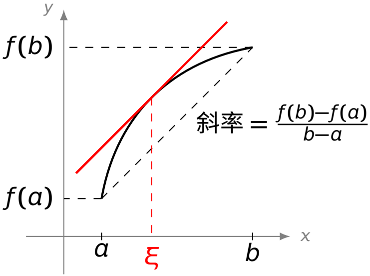
证明 设 $h(x)$ 表示过曲线两个端点的直线，则

$$h(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a).$$

令 $g(x) = f(x) - h(x)$. 则 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，(a, b) 内可导，$g(a) = 0 = g(b)$.所以由罗尔定理知，存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$0 = h'(\xi) \qquad .$$

拉格朗日中值定理



定理 如果函数 $f(x)$ 满足条件：

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，

(2) 在开区间 (a,b) 上可导，

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

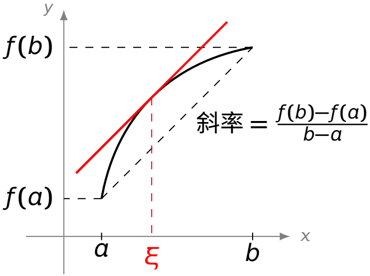
证明 设 $h(x)$ 表示过曲线两个端点的直线，则

$$h(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a).$$

令 $g(x)=f(x)-h(x)$. 则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 内可导，$g(a)=0=g(b)$.所以由罗尔定理知，存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$0=h'(\xi)=f'(\xi)-h'(\xi) \qquad .$$

拉格朗日中值定理



定理 如果函数 $f(x)$ 满足条件：

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，

(2) 在开区间 (a,b) 上可导，

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

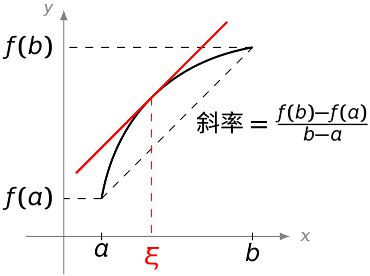
证明 设 $h(x)$ 表示过曲线两个端点的直线，则

$$h(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a).$$

令 $g(x)=f(x)-h(x)$. 则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 内可导，$g(a)=0=g(b)$.所以由罗尔定理知，存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$0=h'(\xi)=f'(\xi)-h'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

拉格朗日中值定理



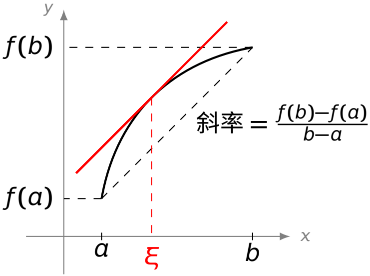
定理 如果函数 $f(x)$ 满足条件：

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，

(2) 在开区间 (a, b) 上可导，

则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$，使得 $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

拉格朗日中值定理



定理 如果函数 $f(x)$ 满足条件：

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，

(2) 在开区间 (a, b) 上可导，

则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$，使得 $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

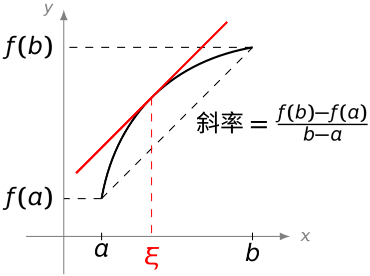
推论 设 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，在开区间 (a, b) 上可导并且恒成立 $f'(x) = 0$，则 f 是常数.

拉格朗日中值定理

定理 如果函数 $f(x)$ 满足条件：

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，

(2) 在开区间 (a,b) 上可导，



则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

推论 设 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 上可导并且恒成立 $f'(x)=0$，则 f 是常数.

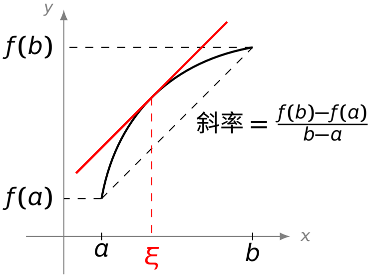
证明 任取 $a\le x_1<x_2\le b$. 在区间 $[x_1,x_2]$ 上运用拉氏中值定理知：

拉格朗日中值定理

定理 如果函数 $f(x)$ 满足条件：

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，

(2) 在开区间 (a, b) 上可导，



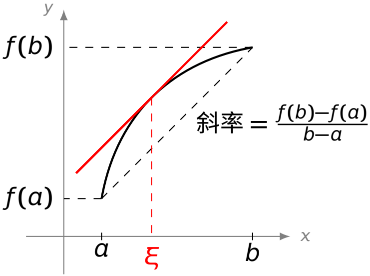
则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$，使得 $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

推论 设 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，在开区间 (a, b) 上可导并且恒成立 $f'(x) = 0$，则 f 是常数.

证明 任取 $a \le x_1 < x_2 \le b$. 在区间 $[x_1, x_2]$ 上运用拉氏中值定理知：$\exists \xi \in (x_1, x_2)$ 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

拉格朗日中值定理



定理 如果函数 $f(x)$ 满足条件：

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，

(2) 在开区间 (a,b) 上可导，

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

推论 设 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 上可导并且恒成立 $f'(x)=0$，则 f 是常数.

证明 任取 $a\le x_1<x_2\le b$. 在区间 $[x_1,x_2]$ 上运用拉氏中值定理知：$\exists\xi\in(x_1,x_2)$ 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

由条件 $f'(\xi)=0$，所以 $f(x_2)=f(x_1)$.

例 1 证明当 $x_1 < x_2$ 时，成立不等式：

$$\arctan x_2 - \arctan x_1 \leq x_2 - x_1.$$

例 1 证明当 $x_1 < x_2$ 时，成立不等式：

$$\arctan x_2 - \arctan x_1 \le x_2 - x_1.$$

证明 令 $f(x) = \arctan x$，则 $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上满足拉氏中值定理的条件，

例 1 证明当 $x_1 < x_2$ 时，成立不等式：

$$\arctan x_2 - \arctan x_1 \leq x_2 - x_1.$$

证明 令 $f(x) = \arctan x$，则 $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上满足拉氏中值定理的条件，故 $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ 使得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi)$$

例 1 证明当 $x_1 < x_2$ 时，成立不等式：

$$\arctan x_2 - \arctan x_1 \le x_2 - x_1.$$

证明 令 $f(x) = \arctan x$，则 $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上满足拉氏中值定理的条件，故 $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ 使得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2}$$

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

例 1 证明当 $x_1 < x_2$ 时，成立不等式：

$$\arctan x_2 - \arctan x_1 \le x_2 - x_1.$$

证明 令 $f(x) = \arctan x$，则 $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上满足拉氏中值定理的条件，故 $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ 使得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2} \le 1$$

例 1 证明当 $x_1 < x_2$ 时，成立不等式：

$$\arctan x_2 - \arctan x_1 \le x_2 - x_1.$$

证明 令 $f(x) = \arctan x$，则 $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上满足拉氏中值定理的条件，故 $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ 使得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2} \le 1$$

所以 $\arctan x_2 - \arctan x_1 = f(x_2) - f(x_1) \le x_2 - x_1$

例 1 证明当 $x_1 < x_2$ 时，成立不等式：

$$\arctan x_2 - \arctan x_1 \le x_2 - x_1.$$

证明 令 $f(x) = \arctan x$，则 $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上满足拉氏中值定理的条件，故 $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ 使得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2} \le 1$$

所以 $\arctan x_2 - \arctan x_1 = f(x_2) - f(x_1) \le x_2 - x_1$

例 2 证明当 $x_1 < x_2$ 时，成立不等式：

$$\sin x_2 - \sin x_1 \le x_2 - x_1.$$

例 1 证明当 $x_1 < x_2$ 时，成立不等式：

$$\arctan x_2 - \arctan x_1 \le x_2 - x_1.$$

证明 令 $f(x) = \arctan x$，则 $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上满足拉氏中值定理的条件，故 $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ 使得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2} \le 1$$

所以 $\arctan x_2 - \arctan x_1 = f(x_2) - f(x_1) \le x_2 - x_1$

例 2 证明当 $x_1 < x_2$ 时，成立不等式：

$$\sin x_2 - \sin x_1 \le x_2 - x_1.$$

证明 令 $f(x) = \sin x$，则 $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上满足拉氏中值定理的条件，

例 1 证明当 $x_1 < x_2$ 时，成立不等式：

$$\arctan x_2 - \arctan x_1 \le x_2 - x_1.$$

证明 令 $f(x) = \arctan x$，则 $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上满足拉氏中值定理的条件，故 $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ 使得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2} \le 1$$

所以 $\arctan x_2 - \arctan x_1 = f(x_2) - f(x_1) \le x_2 - x_1$

例 2 证明当 $x_1 < x_2$ 时，成立不等式：

$$\sin x_2 - \sin x_1 \le x_2 - x_1.$$

证明 令 $f(x) = \sin x$，则 $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上满足拉氏中值定理的条件，故 $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ 使得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi)$$

例 1 证明当 $x_1 < x_2$ 时，成立不等式：

$$\arctan x_2 - \arctan x_1 \le x_2 - x_1.$$

证明 令 $f(x) = \arctan x$，则 $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上满足拉氏中值定理的条件，故 $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ 使得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2} \le 1$$

所以 $\arctan x_2 - \arctan x_1 = f(x_2) - f(x_1) \le x_2 - x_1$

例 2 证明当 $x_1 < x_2$ 时，成立不等式：

$$\sin x_2 - \sin x_1 \le x_2 - x_1.$$

证明 令 $f(x) = \sin x$，则 $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上满足拉氏中值定理的条件，故 $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ 使得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) = \cos \xi \le 1$$

例 1 证明当 $x_1 < x_2$ 时，成立不等式：

$$\arctan x_2 - \arctan x_1 \le x_2 - x_1.$$

证明 令 $f(x) = \arctan x$，则 $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上满足拉氏中值定理的条件，故 $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ 使得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2} \le 1$$

所以 $\arctan x_2 - \arctan x_1 = f(x_2) - f(x_1) \le x_2 - x_1$

例 2 证明当 $x_1 < x_2$ 时，成立不等式：

$$\sin x_2 - \sin x_1 \le x_2 - x_1.$$

证明 令 $f(x) = \sin x$，则 $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上满足拉氏中值定理的条件，故 $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ 使得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) = \cos \xi \le 1$$

所以 $\sin x_2 - \sin x_1 = f(x_2) - f(x_1) \le x_2 - x_1$

定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，在开区间 (a, b) 内可导，则

定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，则

- (a,b) 上恒成立 $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上（严格）单调增加.

定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，在开区间 (a, b) 内可导，则

- (a, b) 上恒成立 $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a, b]$ 上（严格）单调增加.
- (a, b) 上恒成立 $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a, b]$ 上（严格）单调递减.

定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，则

- (a,b) 上恒成立 $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上（严格）单调增加.
- (a,b) 上恒成立 $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上（严格）单调递减.

解 只证 $f'>0$ 情形（$f'<0$ 情形类似）.

定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，在开区间 (a, b) 内可导，则

- (a, b) 上恒成立 $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a, b]$ 上（严格）单调增加.
- (a, b) 上恒成立 $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a, b]$ 上（严格）单调递减.

解 只证 $f' > 0$ 情形（$f' < 0$ 情形类似）.

设 $a \leq x_1 < x_2 \leq b$.

定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，则

- (a,b) 上恒成立 $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上（严格）单调增加.
- (a,b) 上恒成立 $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上（严格）单调递减.

解 只证 $f'>0$ 情形（$f'<0$ 情形类似）.

设 $a \le x_1 < x_2 \le b$. 由拉格朗日中值定理知：存在 $\xi \in (x_1, x_2)$ 使得

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = f'(\xi)$$

定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，则

- (a,b) 上恒成立 $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上（严格）单调增加.
- (a,b) 上恒成立 $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上（严格）单调递减.

解 只证 $f' > 0$ 情形（$f' < 0$ 情形类似）.

设 $a \le x_1 < x_2 \le b$. 由拉格朗日中值定理知：存在 $\xi \in (x_1, x_2)$ 使得

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(\xi) > 0.$$

定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，则

- (a,b) 上恒成立 $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上（严格）单调增加.
- (a,b) 上恒成立 $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上（严格）单调递减.

解 只证 $f'>0$ 情形（$f'<0$ 情形类似）.

设 $a\le x_1<x_2\le b$. 由拉格朗日中值定理知：存在 $\xi\in(x_1,x_2)$ 使得

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=f'(\xi)>0.$$

所以 $f(x_1)<f(x_2)$.

定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，则

- (a,b) 上恒成立 $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上（严格）单调增加.
- (a,b) 上恒成立 $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上（严格）单调递减.

解 只证 $f'>0$ 情形（$f'<0$ 情形类似）.

设 $a\le x_1<x_2\le b$. 由拉格朗日中值定理知：存在 $\xi\in(x_1,x_2)$ 使得

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=f'(\xi)>0.$$

所以 $f(x_1)<f(x_2)$.

例 3 证明当 $x>0$ 时，成立不等式：

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x.$$

定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，则

- (a,b) 上恒成立 $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上（严格）单调增加.
- (a,b) 上恒成立 $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上（严格）单调递减.

解 只证 $f'>0$ 情形（$f'<0$ 情形类似）.

设 $a \le x_1 < x_2 \le b$. 由拉格朗日中值定理知：存在 $\xi \in (x_1, x_2)$ 使得

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = f'(\xi) > 0.$$

所以 $f(x_1) < f(x_2)$.

例 3 证明当 $x>0$ 时，成立不等式：

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

提示 设 $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$，$g(x) = x - \ln(1+x)$.

定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，则

- (a,b) 上恒成立 $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上（严格）单调增加.
- (a,b) 上恒成立 $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上（严格）单调递减.

解 只证 $f'>0$ 情形（$f'<0$ 情形类似）.

设 $a \le x_1 < x_2 \le b$. 由拉格朗日中值定理知：存在 $\xi \in (x_1, x_2)$ 使得

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = f'(\xi) > 0.$$

所以 $f(x_1) < f(x_2)$.

例 3 证明当 $x>0$ 时，成立不等式：

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

提示 设 $f(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}$，$g(x)=x-\ln(1+x)$. 若单调增，则 $f(x)>f(0)$ ，$g(x)>g(0)$

定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，则

- (a,b) 上恒成立 $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上（严格）单调增加.
- (a,b) 上恒成立 $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上（严格）单调递减.

解 只证 $f'>0$ 情形（$f'<0$ 情形类似）.

设 $a \le x_1 < x_2 \le b$. 由拉格朗日中值定理知：存在 $\xi \in (x_1,x_2)$ 使得

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = f'(\xi) > 0.$$

所以 $f(x_1) < f(x_2)$.

例 3 证明当 $x>0$ 时，成立不等式：

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

提示 设 $f(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}$，$g(x)=x-\ln(1+x)$. 若单调增，则 $f(x)>f(0)=0$，$g(x)>g(0)=0$.

例 3 证明当 $x > 0$ 时，成立不等式：

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

证明 设 $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$，$g(x) = x - \ln(1+x)$. 对 $x > 0$ 成立

$$f'(x)$$

$$g'(x)$$

例 3 证明当 $x > 0$ 时，成立不等式：

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

证明 设 $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$，$g(x) = x - \ln(1+x)$. 对 $x > 0$ 成立

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$g'(x)$$

例 3 证明当 $x > 0$ 时，成立不等式：

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

证明 设 $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$，$g(x) = x - \ln(1+x)$. 对 $x > 0$ 成立

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2}$$

$$g'(x)$$

例 3 证明当 $x > 0$ 时，成立不等式：

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

证明 设 $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$，$g(x) = x - \ln(1+x)$. 对 $x > 0$ 成立

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2} > 0,$$

$$g'(x)$$

例 3 证明当 $x > 0$ 时，成立不等式：

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

证明 设 $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$，$g(x) = x - \ln(1+x)$. 对 $x > 0$ 成立

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2} > 0,$$

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x}$$

例 3 证明当 $x > 0$ 时，成立不等式：

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

证明 设 $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$，$g(x) = x - \ln(1+x)$. 对 $x > 0$ 成立

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2} > 0,$$

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$$

例 3 证明当 $x > 0$ 时，成立不等式：

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

证明 设 $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$，$g(x) = x - \ln(1+x)$. 对 $x > 0$ 成立

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2} > 0,$$

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} > 0.$$

例 3 证明当 $x>0$ 时，成立不等式：

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x.$$

证明 设 $f(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}$，$g(x)=x-\ln(1+x)$. 对 $x>0$ 成立

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}=\frac{x}{(1+x)^2}>0,$$

$$g'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}>0.$$

所以当 $x>0$ 时，$f(x)$ 和 $g(x)$ 严格单调递增. 所以

$$f(x)>f(0)=0$$

$$g(x)>g(0)=0$$

例 3 证明当 $x>0$ 时，成立不等式：

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x.$$

证明 设 $f(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}$，$g(x)=x-\ln(1+x)$. 对 $x>0$ 成立

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}=\frac{x}{(1+x)^2}>0,$$

$$g'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}>0.$$

所以当 $x>0$ 时，$f(x)$ 和 $g(x)$ 严格单调递增. 所以

$$f(x)>f(0)=0 \quad \Rightarrow \quad \ln(1+x)-\frac{x}{1+x}>0$$

$$g(x)>g(0)=0$$

例 3 证明当 $x>0$ 时，成立不等式：

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x.$$

证明 设 $f(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}$，$g(x)=x-\ln(1+x)$. 对 $x>0$ 成立

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}=\frac{x}{(1+x)^2}>0,$$

$$g'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}>0.$$

所以当 $x>0$ 时，$f(x)$ 和 $g(x)$ 严格单调递增. 所以

$$f(x)>f(0)=0 \quad\Rightarrow\quad \ln(1+x)-\frac{x}{1+x}>0$$

$$g(x)>g(0)=0 \quad\Rightarrow\quad x-\ln(1+x)>0$$

柯西中值定理

定理 如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足条件：

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，

(2) 在开区间 (a, b) 上可导，

(3) 在开区间 (a, b) 内 $g'(x) \neq 0$，

则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$，使得 $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.