

第 12 章 c: 幂级数

数学系 梁卓滨

2018-2019 学年 II

We are here now...

1. 函数项级数的概念

2. 幂级数及其收敛性

3. 幂级数的运算

• 设 $u_0(x), u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$

是定义在区间 I 上的函数列, 则称

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

为定义在区间 I 上的 (函数项) (无穷) 级数。

- 设 $u_0(x), u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$

是定义在区间 I 上的函数列，则称

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

为定义在区间 I 上的（函数项）（无穷）级数。

- 如果 $x \in I$ 使得 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ 收敛，则称 x 是函数项级数的收敛点，全体收敛点构成的集合称为收敛域；

- 设 $u_0(x), u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$

是定义在区间 I 上的函数列, 则称

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

为定义在区间 I 上的 (函数项) (无穷) 级数。

- 如果 $x \in I$ 使得 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ 收敛, 则称 x 是函数项级数的收敛点, 全体收敛点构成的集合称为收敛域;
- 如果 $x \in I$ 使得 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ 发散, 则称 x 是函数项级数的发散点, 全体发散点构成的集合称为发散域;

- 设 $u_0(x), u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$

是定义在区间 I 上的函数列, 则称

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

为定义在区间 I 上的 (函数项) (无穷) 级数。

- 如果 $x \in I$ 使得 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ 收敛, 则称 x 是函数项级数的收敛点, 全体收敛点构成的集合称为收敛域;

- 如果 $x \in I$ 使得 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ 发散, 则称 x 是函数项级数的发散点, 全体发散点构成的集合称为发散域;

- 函数项级数
$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$

可视为定义在收敛域上的函数, 也称为函数项级数的和函数。

We are here now...

1. 函数项级数的概念

2. 幂级数及其收敛性

3. 幂级数的运算

- 形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

的函数项级数称为**幂级数**。

- 形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

的函数项级数称为**幂级数**。

- 如果函数项级数是形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1 (x-x_0) + a_2 (x-x_0)^2 + \cdots + a_n (x-x_0)^n + \cdots$$

- 形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

的函数项级数称为**幂级数**。

- 如果函数项级数是形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1 (x-x_0) + a_2 (x-x_0)^2 + \cdots + a_n (x-x_0)^n + \cdots$$

则通过变量代换 $t = x - x_0$ ，可得到前述的幂级数形式：

- 形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

的函数项级数称为**幂级数**。

- 如果函数项级数是形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1 (x-x_0) + a_2 (x-x_0)^2 + \cdots + a_n (x-x_0)^n + \cdots$$

则通过变量代换 $t = x - x_0$ ，可得到前述的幂级数形式：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n + \cdots$$

- 形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

的函数项级数称为**幂级数**。

- 如果函数项级数是形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1 (x-x_0) + a_2 (x-x_0)^2 + \cdots + a_n (x-x_0)^n + \cdots$$

则通过变量代换 $t = x - x_0$ ，可得到前述的幂级数形式：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n + \cdots$$

问题 如何确定幂级数的收敛域？

- 形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

的函数项级数称为**幂级数**。

- 如果函数项级数是形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1 (x-x_0) + a_2 (x-x_0)^2 + \cdots + a_n (x-x_0)^n + \cdots$$

则通过变量代换 $t = x - x_0$ ，可得到前述的幂级数形式：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n + \cdots$$

问题 如何确定幂级数的收敛域？

- 尝试先用**比值审敛法的极限形式** 或者 **根值审敛法**

例 1 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$ 的收敛域

例 1 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{n+1} x^{n+1}}{\frac{1}{n} x^n} \right| =$$

例 1 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{n+1} x^{n+1}}{\frac{1}{n} x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{n+1} x \right| =$$

例 1 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{n+1} x^{n+1}}{\frac{1}{n} x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{n+1} x \right| = |x|$$

例 1 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{n+1} x^{n+1}}{\frac{1}{n} x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{n+1} x \right| = |x|$$

- 当 $|x| < 1$ 时, 收敛; $|x| > 1$ 时, 发散; $x = \pm 1$ 时, 另外讨论

例 1 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{n+1} x^{n+1}}{\frac{1}{n} x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{n+1} x \right| = |x|$$

- 当 $|x| < 1$ 时, 收敛; $|x| > 1$ 时, 发散; $x = \pm 1$ 时, 另外讨论
- 当 $x = 1$ 时,
- 当 $x = -1$ 时,

例 1 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{n+1} x^{n+1}}{\frac{1}{n} x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{n+1} x \right| = |x|$$

- 当 $|x| < 1$ 时, 收敛; $|x| > 1$ 时, 发散; $x = \pm 1$ 时, 另外讨论
- 当 $x = 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$
- 当 $x = -1$ 时,

例 1 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{n+1} x^{n+1}}{\frac{1}{n} x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{n+1} x \right| = |x|$$

- 当 $|x| < 1$ 时, 收敛; $|x| > 1$ 时, 发散; $x = \pm 1$ 时, 另外讨论
- 当 $x = 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散
- 当 $x = -1$ 时,

例 1 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{n+1} x^{n+1}}{\frac{1}{n} x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{n+1} x \right| = |x|$$

- 当 $|x| < 1$ 时, 收敛; $|x| > 1$ 时, 发散; $x = \pm 1$ 时, 另外讨论
- 当 $x = 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散
- 当 $x = -1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

例 1 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{n+1} x^{n+1}}{\frac{1}{n} x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{n+1} x \right| = |x|$$

- 当 $|x| < 1$ 时, 收敛; $|x| > 1$ 时, 发散; $x = \pm 1$ 时, 另外讨论
- 当 $x = 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散
- 当 $x = -1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛

例 1 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{n+1} x^{n+1}}{\frac{1}{n} x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{n+1} x \right| = |x|$$

- 当 $|x| < 1$ 时, 收敛; $|x| > 1$ 时, 发散; $x = \pm 1$ 时, 另外讨论
- 当 $x = 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散
- 当 $x = -1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛

所以收敛域是 $[-1, 1)$.

例 1 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{n+1} x^{n+1}}{\frac{1}{n} x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{n+1} x \right| = |x|$$

- 当 $|x| < 1$ 时, 收敛; $|x| > 1$ 时, 发散; $x = \pm 1$ 时, 另外讨论
- 当 $x = 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散
- 当 $x = -1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛

所以收敛域是 $[-1, 1)$.

注 1 当 $x \in (-1, 1)$ 时, 级数绝对收敛; $x = -1$ 是, 级数条件收敛.

例 1 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{n+1} x^{n+1}}{\frac{1}{n} x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{n+1} x \right| = |x|$$

- 当 $|x| < 1$ 时, 收敛; $|x| > 1$ 时, 发散; $x = \pm 1$ 时, 另外讨论
- 当 $x = 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散
- 当 $x = -1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛

所以收敛域是 $[-1, 1)$.

注 1 当 $x \in (-1, 1)$ 时, 级数绝对收敛; $x = -1$ 是, 级数条件收敛.

注 2 当 $x \in [-1, 1)$ 时: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots = -\ln(1-x)$.

例 1 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$ 的收敛域

例 1 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$ 的收敛域

另解 注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{1}{n} x^n \right|} =$$

例 1 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$ 的收敛域

另解 注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{1}{n} x^n \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\frac{1}{n}} |x| =$$

例 1 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$ 的收敛域

另解 注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{1}{n} x^n \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\frac{1}{n}} |x| = |x|$$

例 1 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$ 的收敛域

另解 注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{1}{n} x^n \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\frac{1}{n}} |x| = |x|$$

- 当 $|x| < 1$ 时, 收敛; $|x| > 1$ 时, 发散; $x = \pm 1$ 时, 另外讨论
- 当 $x = 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散
- 当 $x = -1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛

所以收敛域是 $[-1, 1)$

例 2 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$ 的收敛域

例 2 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1) \cdot 2^{n+1}}}{\frac{x^n}{n \cdot 2^n}} \right| =$$

例 2 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1) \cdot 2^{n+1}}}{\frac{x^n}{n \cdot 2^n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2(n+1)} |x| =$$

例 2 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1) \cdot 2^{n+1}}}{\frac{x^n}{n \cdot 2^n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2(n+1)} |x| = \frac{1}{2} |x|$$

例 2 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1) \cdot 2^{n+1}}}{\frac{x^n}{n \cdot 2^n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2(n+1)} |x| = \frac{1}{2} |x|$$

- 当 $|x| < 2$ 时, 收敛; $|x| > 2$ 时, 发散; $x = \pm 2$ 时, 另外讨论

例 2 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1) \cdot 2^{n+1}}}{\frac{x^n}{n \cdot 2^n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2(n+1)} |x| = \frac{1}{2} |x|$$

- 当 $|x| < 2$ 时, 收敛; $|x| > 2$ 时, 发散; $x = \pm 2$ 时, 另外讨论
- 当 $x = 2$ 时,
- 当 $x = -2$ 时,

例 2 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1) \cdot 2^{n+1}}}{\frac{x^n}{n \cdot 2^n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2(n+1)} |x| = \frac{1}{2} |x|$$

- 当 $|x| < 2$ 时, 收敛; $|x| > 2$ 时, 发散; $x = \pm 2$ 时, 另外讨论
- 当 $x = 2$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$
- 当 $x = -2$ 时,

例 2 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1) \cdot 2^{n+1}}}{\frac{x^n}{n \cdot 2^n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2(n+1)} |x| = \frac{1}{2} |x|$$

- 当 $|x| < 2$ 时, 收敛; $|x| > 2$ 时, 发散; $x = \pm 2$ 时, 另外讨论
- 当 $x = 2$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散
- 当 $x = -2$ 时,

例 2 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1) \cdot 2^{n+1}}}{\frac{x^n}{n \cdot 2^n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2(n+1)} |x| = \frac{1}{2} |x|$$

- 当 $|x| < 2$ 时, 收敛; $|x| > 2$ 时, 发散; $x = \pm 2$ 时, 另外讨论
- 当 $x = 2$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散
- 当 $x = -2$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

例 2 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1) \cdot 2^{n+1}}}{\frac{x^n}{n \cdot 2^n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2(n+1)} |x| = \frac{1}{2} |x|$$

- 当 $|x| < 2$ 时, 收敛; $|x| > 2$ 时, 发散; $x = \pm 2$ 时, 另外讨论
- 当 $x = 2$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散
- 当 $x = -2$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛

例 2 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1) \cdot 2^{n+1}}}{\frac{x^n}{n \cdot 2^n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2(n+1)} |x| = \frac{1}{2} |x|$$

- 当 $|x| < 2$ 时, 收敛; $|x| > 2$ 时, 发散; $x = \pm 2$ 时, 另外讨论
- 当 $x = 2$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散
- 当 $x = -2$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛

所以收敛域是 $[-2, 2)$

例 2 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1) \cdot 2^{n+1}}}{\frac{x^n}{n \cdot 2^n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2(n+1)} |x| = \frac{1}{2} |x|$$

- 当 $|x| < 2$ 时, 收敛; $|x| > 2$ 时, 发散; $x = \pm 2$ 时, 另外讨论
- 当 $x = 2$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散
- 当 $x = -2$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛

所以收敛域是 $[-2, 2)$

注 1 当 $x \in (-2, 2)$ 时, 级数绝对收敛; $x = -2$ 时, 级数条件收敛.

例 2 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$ 的收敛域

例 2 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$ 的收敛域

另解 注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{x^n}{n \cdot 2^n} \right|} =$$

例 2 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$ 的收敛域

另解 注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{x^n}{n \cdot 2^n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)^{-\frac{1}{n}} \frac{1}{2} |x| =$$

例 2 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$ 的收敛域

另解 注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{x^n}{n \cdot 2^n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)^{-\frac{1}{n}} \frac{1}{2} |x| = \frac{1}{2} |x|$$

例 2 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$ 的收敛域

另解 注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{x^n}{n \cdot 2^n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)^{-\frac{1}{n}} \frac{1}{2} |x| = \frac{1}{2} |x|$$

- 当 $|x| < 2$ 时, 收敛; $|x| > 2$ 时, 发散; $x = \pm 2$ 时, 另外讨论
- 当 $x = 2$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散
- 当 $x = -2$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛

所以收敛域是 $[-2, 2)$

例 3 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot x^n$ 的收敛域

例 4 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 的收敛域

例 3 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot x^n$ 的收敛域

解 注意到当 $x \neq 0$ 时都有

例 4 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 的收敛域

例 3 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot x^n$ 的收敛域

解 注意到当 $x \neq 0$ 时都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)! \cdot x^{n+1}}{n! \cdot x^n} \right| =$$

例 4 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 的收敛域

例 3 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot x^n$ 的收敛域

解 注意到当 $x \neq 0$ 时都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)! \cdot x^{n+1}}{n! \cdot x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) |x| =$$

例 4 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 的收敛域

例 3 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot x^n$ 的收敛域

解 注意到当 $x \neq 0$ 时都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)! \cdot x^{n+1}}{n! \cdot x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) |x| = \infty > 1$$

例 4 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 的收敛域

例 3 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot x^n$ 的收敛域

解 注意到当 $x \neq 0$ 时都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)! \cdot x^{n+1}}{n! \cdot x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) |x| = \infty > 1$$

说明 $x \neq 0$ 时, 函数项级数都发散。

例 4 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 的收敛域

例 3 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot x^n$ 的收敛域

解 注意到当 $x \neq 0$ 时都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)! \cdot x^{n+1}}{n! \cdot x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) |x| = \infty > 1$$

说明 $x \neq 0$ 时, 函数项级数都发散。所以收敛域是 $\{0\}$ 。

例 4 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 的收敛域

例 3 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot x^n$ 的收敛域

解 注意到当 $x \neq 0$ 时都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)! \cdot x^{n+1}}{n! \cdot x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) |x| = \infty > 1$$

说明 $x \neq 0$ 时, 函数项级数都发散。所以收敛域是 $\{0\}$ 。

例 4 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| =$$

例 3 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot x^n$ 的收敛域

解 注意到当 $x \neq 0$ 时都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)! \cdot x^{n+1}}{n! \cdot x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) |x| = \infty > 1$$

说明 $x \neq 0$ 时, 函数项级数都发散。所以收敛域是 $\{0\}$ 。

例 4 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} =$$

例 3 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot x^n$ 的收敛域

解 注意到当 $x \neq 0$ 时都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)! \cdot x^{n+1}}{n! \cdot x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) |x| = \infty > 1$$

说明 $x \neq 0$ 时, 函数项级数都发散。所以收敛域是 $\{0\}$ 。

例 4 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$$

例 3 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot x^n$ 的收敛域

解 注意到当 $x \neq 0$ 时都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)! \cdot x^{n+1}}{n! \cdot x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) |x| = \infty > 1$$

说明 $x \neq 0$ 时, 函数项级数都发散。所以收敛域是 $\{0\}$ 。

例 4 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$$

说明对任何 x , 函数项级数都绝对收敛。

例 3 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot x^n$ 的收敛域

解 注意到当 $x \neq 0$ 时都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)! \cdot x^{n+1}}{n! \cdot x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) |x| = \infty > 1$$

说明 $x \neq 0$ 时, 函数项级数都发散。所以收敛域是 $\{0\}$ 。

例 4 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$$

说明对任何 x , 函数项级数都绝对收敛。所以收敛域是 $(-\infty, \infty)$ 。

定理 假设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的系数满足条件:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho \quad \text{或} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho.$$

则成立:

定理 假设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的系数满足条件:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho \quad \text{或} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho.$$

则成立:

- 若 $\rho \neq 0$,
- 若 $\rho = 0$,
- 若 $\rho = \infty$,

定理 假设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的系数满足条件:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho \quad \text{或} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho.$$

则成立:

- 若 $\rho \neq 0$, 则当 $|x| < \frac{1}{\rho}$ 时级数绝对收敛,
- 若 $\rho = 0$,
- 若 $\rho = \infty$,

定理 假设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的系数满足条件:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho \quad \text{或} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho.$$

则成立:

- 若 $\rho \neq 0$, 则当 $|x| < \frac{1}{\rho}$ 时级数绝对收敛, $|x| > \frac{1}{\rho}$ 时级数发散,
- 若 $\rho = 0$,
- 若 $\rho = \infty$,

定理 假设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的系数满足条件:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho \quad \text{或} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho.$$

则成立:

- 若 $\rho \neq 0$, 则当 $|x| < \frac{1}{\rho}$ 时级数绝对收敛, $|x| > \frac{1}{\rho}$ 时级数发散, $x = \pm \frac{1}{\rho}$ 时不确定 (需具体问题具体分析);
- 若 $\rho = 0$,
- 若 $\rho = \infty$,

定理 假设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的系数满足条件:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho \quad \text{或} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho.$$

则成立:

- 若 $\rho \neq 0$, 则当 $|x| < \frac{1}{\rho}$ 时级数绝对收敛, $|x| > \frac{1}{\rho}$ 时级数发散, $x = \pm \frac{1}{\rho}$ 时不确定 (需具体问题具体分析);
- 若 $\rho = 0$, 则对任意 $x \in \mathbb{R}$, 级数绝对收敛;
- 若 $\rho = \infty$,

定理 假设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的系数满足条件:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho \quad \text{或} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho.$$

则成立:

- 若 $\rho \neq 0$, 则当 $|x| < \frac{1}{\rho}$ 时级数绝对收敛, $|x| > \frac{1}{\rho}$ 时级数发散, $x = \pm \frac{1}{\rho}$ 时不确定 (需具体问题具体分析);
- 若 $\rho = 0$, 则对任意 $x \in \mathbb{R}$, 级数绝对收敛;
- 若 $\rho = \infty$, 则只有当 $x = 0$ 时级数收敛, $x \neq 0$ 时, 级数发散。

定理 假设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的系数满足条件:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho \quad \text{或} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho.$$

则成立:

- 若 $\rho \neq 0$, 则当 $|x| < \frac{1}{\rho}$ 时级数绝对收敛, $|x| > \frac{1}{\rho}$ 时级数发散, $x = \pm \frac{1}{\rho}$ 时不确定 (需具体问题具体分析);
- 若 $\rho = 0$, 则对任意 $x \in \mathbb{R}$, 级数绝对收敛;
- 若 $\rho = \infty$, 则只有当 $x = 0$ 时级数收敛, $x \neq 0$ 时, 级数发散。

证明 运用比值审敛法的极限形式和根值审敛法。

定理 假设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的系数满足条件:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho \quad \text{或} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho.$$

则成立:

- 若 $\rho \neq 0$, 则当 $|x| < \frac{1}{\rho}$ 时级数绝对收敛, $|x| > \frac{1}{\rho}$ 时级数发散, $x = \pm \frac{1}{\rho}$ 时不确定 (需具体问题具体分析);
- 若 $\rho = 0$, 则对任意 $x \in \mathbb{R}$, 级数绝对收敛;
- 若 $\rho = \infty$, 则只有当 $x = 0$ 时级数收敛, $x \neq 0$ 时, 级数发散。

证明 运用比值审敛法的极限形式和根值审敛法。因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \quad \text{或} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} =$$

定理 假设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的系数满足条件:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho \quad \text{或} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho.$$

则成立:

- 若 $\rho \neq 0$, 则当 $|x| < \frac{1}{\rho}$ 时级数绝对收敛, $|x| > \frac{1}{\rho}$ 时级数发散, $x = \pm \frac{1}{\rho}$ 时不确定 (需具体问题具体分析);
- 若 $\rho = 0$, 则对任意 $x \in \mathbb{R}$, 级数绝对收敛;
- 若 $\rho = \infty$, 则只有当 $x = 0$ 时级数收敛, $x \neq 0$ 时, 级数发散。

证明 运用比值审敛法的极限形式和根值审敛法。因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \rho |x| \quad \text{或} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} =$$

定理 假设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的系数满足条件:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho \quad \text{或} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho.$$

则成立:

- 若 $\rho \neq 0$, 则当 $|x| < \frac{1}{\rho}$ 时级数绝对收敛, $|x| > \frac{1}{\rho}$ 时级数发散, $x = \pm \frac{1}{\rho}$ 时不确定 (需具体问题具体分析);
- 若 $\rho = 0$, 则对任意 $x \in \mathbb{R}$, 级数绝对收敛;
- 若 $\rho = \infty$, 则只有当 $x = 0$ 时级数收敛, $x \neq 0$ 时, 级数发散。

证明 运用比值审敛法的极限形式和根值审敛法。因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \rho |x| \quad \text{或} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \rho |x|$$

定理 假设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的系数满足条件:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho \quad \text{或} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho.$$

则成立:

- 若 $\rho \neq 0$, 则当 $|x| < \frac{1}{\rho}$ 时级数绝对收敛, $|x| > \frac{1}{\rho}$ 时级数发散, $x = \pm \frac{1}{\rho}$ 时不确定 (需具体问题具体分析);
- 若 $\rho = 0$, 则对任意 $x \in \mathbb{R}$, 级数绝对收敛;
- 若 $\rho = \infty$, 则只有当 $x = 0$ 时级数收敛, $x \neq 0$ 时, 级数发散。

证明 运用比值审敛法的极限形式和根值审敛法。因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \rho |x| \quad \text{或} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \rho |x|$$

所以 $|x| < \frac{1}{\rho}$ 时, 级数 (绝对) 收敛; $|x| > \frac{1}{\rho}$ 时, 级数发散。

如果极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ 不存在, 则需另觅方法。

如果极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ 不存在, 则需另觅方法。

定理 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域一定是如下几种情况之一:

- 收敛域是单点集 $\{0\}$;
- 收敛域是全部实数 $(-\infty, \infty)$;
- 收敛域是如下四种可能的有限区间:

$$(-R, R), \quad [-R, R), \quad (-R, R], \quad [-R, R]$$

其中 $0 < R < \infty$ 。

如果极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ 不存在, 则需另觅方法。

定理 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域一定是如下几种情况之一:

- 收敛域是单点集 $\{0\}$;
- 收敛域是全部实数 $(-\infty, \infty)$;
- 收敛域是如下四种可能的有限区间:

$$(-R, R), \quad [-R, R), \quad (-R, R], \quad [-R, R]$$

其中 $0 < R < \infty$ 。

注

- R 称为收敛半径。

如果极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ 不存在, 则需另觅方法。

定理 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域一定是如下几种情况之一:

- 收敛域是单点集 $\{0\}$; (收敛半径 $R = 0$)
- 收敛域是全部实数 $(-\infty, \infty)$; (收敛半径 $R = \infty$)
- 收敛域是如下四种可能的有限区间: (收敛半径 R 有限)

$$(-R, R), \quad [-R, R), \quad (-R, R], \quad [-R, R]$$

其中 $0 < R < \infty$ 。

注

- R 称为收敛半径。

如果极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ 不存在, 则需另觅方法。

定理 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域一定是如下几种情况之一:

- 收敛域是单点集 $\{0\}$; (收敛半径 $R = 0$)
- 收敛域是全部实数 $(-\infty, \infty)$; (收敛半径 $R = \infty$)
- 收敛域是如下四种可能的有限区间: (收敛半径 R 有限)

$$(-R, R), \quad [-R, R), \quad (-R, R], \quad [-R, R]$$

其中 $0 < R < \infty$ 。

注

- R 称为收敛半径。
- $(-R, R)$ 称为收敛区间。

如果极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ 不存在, 则需另觅方法。

定理 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域一定是如下几种情况之一:

- 收敛域是单点集 $\{0\}$; (收敛半径 $R = 0$)
- 收敛域是全部实数 $(-\infty, \infty)$; (收敛半径 $R = \infty$)
- 收敛域是如下四种可能的有限区间: (收敛半径 R 有限)

$$(-R, R), \quad [-R, R), \quad (-R, R], \quad [-R, R]$$

其中 $0 < R < \infty$ 。

注

- R 称为收敛半径。
- $(-R, R)$ 称为收敛区间。收敛区间 \subseteq 收敛域。

如果极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ 不存在, 则需另觅方法。

定理 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域一定是如下几种情况之一:

- 收敛域是单点集 $\{0\}$; (收敛半径 $R = 0$)
- 收敛域是全部实数 $(-\infty, \infty)$; (收敛半径 $R = \infty$)
- 收敛域是如下四种可能的有限区间: (收敛半径 R 有限)

$$(-R, R), \quad [-R, R), \quad (-R, R], \quad [-R, R]$$

其中 $0 < R < \infty$ 。

注

- R 称为收敛半径。
- $(-R, R)$ 称为收敛区间。收敛区间 \subseteq 收敛域。
- 可以证明在收敛区间 $(-R, R)$ 内, 级数绝对收敛。

例 假设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的系数满足条件:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho \quad \text{或} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$$

则收敛半径

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, & \rho \neq 0, \\ +\infty, & \rho = 0, \\ 0, & \rho = +\infty. \end{cases}$$

例 假设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的系数满足条件:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho \quad \text{或} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$$

则收敛半径

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, & \rho \neq 0, \\ +\infty, & \rho = 0, \\ 0, & \rho = +\infty. \end{cases}$$

证明 这是由比值审敛法的极限形式和根值审敛法知: $|x| < \frac{1}{\rho}$ 时, 级数 (绝对) 收敛; $|x| > \frac{1}{\rho}$ 时, 级数发散。

例 假设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的系数满足条件:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho \quad \text{或} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$$

则收敛半径

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, & \rho \neq 0, \\ +\infty, & \rho = 0, \\ 0, & \rho = +\infty. \end{cases}$$

证明 这是由比值审敛法的极限形式和根值审敛法知: $|x| < \frac{1}{\rho}$ 时, 级数 (绝对) 收敛; $|x| > \frac{1}{\rho}$ 时, 级数发散。所以收敛半径 $R = \frac{1}{\rho}$ 。

例 假设有幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ ，及在 $x_0 \neq 0$ 。那么

- 若 x_0 是收敛点，则对所有满足 $|x| < |x_0|$ 的 x ，级数均绝对收敛。
- 若 x_0 是发散点，则对所有满足 $|x| > |x_0|$ 的 x ，级数均发散。

例 假设有幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ ，及在 $x_0 \neq 0$ 。那么

- 若 x_0 是收敛点，则对所有满足 $|x| < |x_0|$ 的 x ，级数均绝对收敛。
- 若 x_0 是发散点，则对所有满足 $|x| > |x_0|$ 的 x ，级数均发散。

证明 设该幂级数的收敛半径为 R ，则：

例 假设有幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, 及在 $x_0 \neq 0$ 。那么

- 若 x_0 是收敛点, 则对所有满足 $|x| < |x_0|$ 的 x , 级数均绝对收敛。
- 若 x_0 是发散点, 则对所有满足 $|x| > |x_0|$ 的 x , 级数均发散。

证明 设该幂级数的收敛半径为 R , 则:

$$x_0 \text{ 是收敛点} \Rightarrow |x_0| \leq R$$

例 假设有幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ ，及在 $x_0 \neq 0$ 。那么

- 若 x_0 是收敛点，则对所有满足 $|x| < |x_0|$ 的 x ，级数均绝对收敛。
- 若 x_0 是发散点，则对所有满足 $|x| > |x_0|$ 的 x ，级数均发散。

证明 设该幂级数的收敛半径为 R ，则：

$$x_0 \text{ 是收敛点} \Rightarrow |x_0| \leq R \Rightarrow |x| < R$$

例 假设有幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, 及在 $x_0 \neq 0$ 。那么

- 若 x_0 是收敛点, 则对所有满足 $|x| < |x_0|$ 的 x , 级数均绝对收敛。
- 若 x_0 是发散点, 则对所有满足 $|x| > |x_0|$ 的 x , 级数均发散。

证明 设该幂级数的收敛半径为 R , 则:

x_0 是收敛点 $\Rightarrow |x_0| \leq R \Rightarrow |x| < R \Rightarrow$ 级数在 x 处绝对收敛

例 假设有幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ ，及在 $x_0 \neq 0$ 。那么

- 若 x_0 是收敛点，则对所有满足 $|x| < |x_0|$ 的 x ，级数均绝对收敛。
- 若 x_0 是发散点，则对所有满足 $|x| > |x_0|$ 的 x ，级数均发散。

证明 设该幂级数的收敛半径为 R ，则：

x_0 是收敛点 $\Rightarrow |x_0| \leq R \Rightarrow |x| < R \Rightarrow$ 级数在 x 处绝对收敛

x_0 是发散点 $\Rightarrow |x_0| \geq R$

例 假设有幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ ，及在 $x_0 \neq 0$ 。那么

- 若 x_0 是收敛点，则对所有满足 $|x| < |x_0|$ 的 x ，级数均绝对收敛。
- 若 x_0 是发散点，则对所有满足 $|x| > |x_0|$ 的 x ，级数均发散。

证明 设该幂级数的收敛半径为 R ，则：

x_0 是收敛点 $\Rightarrow |x_0| \leq R \Rightarrow |x| < R \Rightarrow$ 级数在 x 处绝对收敛

x_0 是发散点 $\Rightarrow |x_0| \geq R \Rightarrow |x| > R$

例 假设有幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ ，及在 $x_0 \neq 0$ 。那么

- 若 x_0 是收敛点，则对所有满足 $|x| < |x_0|$ 的 x ，级数均绝对收敛。
- 若 x_0 是发散点，则对所有满足 $|x| > |x_0|$ 的 x ，级数均发散。

证明 设该幂级数的收敛半径为 R ，则：

x_0 是收敛点 $\Rightarrow |x_0| \leq R \Rightarrow |x| < R \Rightarrow$ 级数在 x 处绝对收敛

x_0 是发散点 $\Rightarrow |x_0| \geq R \Rightarrow |x| > R \Rightarrow$ 级数在 x 处发散

We are here now...

1. 函数项级数的概念

2. 幂级数及其收敛性

3. 幂级数的运算

性质 1 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域 I 上是连续函数。

性质 1 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域 I 上是连续函数。

性质 2 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域 I 上可积，并成立逐项积分公式：

性质 1 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域 I 上是连续函数。

性质 2 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域 I 上可积，并成立逐项积分公式：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

性质 1 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域 I 上是连续函数。

性质 2 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域 I 上可积，并成立逐项积分公式：

$$\int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right] dt \quad (x \in I)$$

性质 1 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域 I 上是连续函数。

性质 2 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域 I 上可积，并成立逐项积分公式：

$$\int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right] dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt \quad (x \in I)$$

性质 1 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域 I 上是连续函数。

性质 2 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域 I 上可积，并成立逐项积分公式：

$$\int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right] dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \quad (x \in I)$$

性质 1 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域 I 上是连续函数。

性质 2 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域 I 上可积，并成立逐项积分公式：

$$\int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right] dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \quad (x \in I)$$

性质 1 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域 I 上是连续函数。

性质 2 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域 I 上可积，并成立逐项积分公式：

$$\int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right] dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \quad (x \in I)$$

逐项积分后的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 与原级数有相同收敛半径，

性质 1 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域 I 上是连续函数。

性质 2 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域 I 上可积，并成立逐项积分公式：

$$\int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right] dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \quad (x \in I)$$

逐项积分后的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 与原级数有相同收敛半径，但收敛域不一定相同。

性质 1 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域 I 上是连续函数。

性质 2 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域 I 上可积，并成立逐项积分公式：

$$\int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right] dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \quad (x \in I)$$

逐项积分后的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 与原级数有相同收敛半径，但收敛域不一定相同。

例 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

性质 1 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域 I 上是连续函数。

性质 2 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域 I 上可积，并成立逐项积分公式：

$$\int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right] dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \quad (x \in I)$$

逐项积分后的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 与原级数有相同收敛半径，但收敛域不一定相同。

例 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 的收敛域是 $(-1, 1)$,

性质 1 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域 I 上是连续函数。

性质 2 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域 I 上可积，并成立逐项积分公式：

$$\int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right] dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \quad (x \in I)$$

逐项积分后的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 与原级数有相同收敛半径，但收敛域不一定相同。

例 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 的收敛域是 $(-1, 1)$ ，而逐项积分后的幂级数是

性质 1 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域 I 上是连续函数。

性质 2 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域 I 上可积，并成立逐项积分公式：

$$\int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right] dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \quad (x \in I)$$

逐项积分后的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 与原级数有相同收敛半径，但收敛域不一定相同。

例 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 的收敛域是 $(-1, 1)$ ，而逐项积分后的幂级数是

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

性质 1 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域 I 上是连续函数。

性质 2 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域 I 上可积，并成立逐项积分公式：

$$\int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right] dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \quad (x \in I)$$

逐项积分后的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 与原级数有相同收敛半径，但收敛域不一定相同。

例 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 的收敛域是 $(-1, 1)$ ，而逐项积分后的幂级数是

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

其收敛域是 $[-1, 1)$ 。

逐项积分公式的应用

例 对级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 运用逐项积分公式：

逐项积分公式的应用

例 对级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 运用逐项积分公式:

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

逐项积分公式的应用

例 对级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 运用逐项积分公式:

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt$$

$$x \in (-1, 1)$$

逐项积分公式的应用

例 对级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 运用逐项积分公式:

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n dt \quad x \in (-1, 1)$$

逐项积分公式的应用

例 对级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 运用逐项积分公式:

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}, \quad x \in (-1, 1)$$

逐项积分公式的应用

例 对级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 运用逐项积分公式:

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}, \quad x \in (-1, 1)$$

另一方面 $\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$, 所以

逐项积分公式的应用

例 对级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 运用逐项积分公式:

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}, \quad x \in (-1, 1)$$

另一方面 $\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$, 所以

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt \quad x \in (-1, 1)$$

逐项积分公式的应用

例 对级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 运用逐项积分公式:

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}, \quad x \in (-1, 1)$$

另一方面 $\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$, 所以

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-t) \Big|_0^x \quad x \in (-1, 1)$$

逐项积分公式的应用

例 对级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 运用逐项积分公式:

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}, \quad x \in (-1, 1)$$

另一方面 $\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$, 所以

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-t) \Big|_0^x = -\ln(1-x), \quad x \in (-1, 1)$$

逐项积分公式的应用

例 对级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 运用逐项积分公式:

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}, \quad x \in (-1, 1)$$

另一方面 $\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$, 所以

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-t) \Big|_0^x = -\ln(1-x), \quad x \in (-1, 1)$$

综上两式, 得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = -\ln(1-x), \quad x \in (-1, 1)$$

逐项积分公式的应用

例 对级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 运用逐项积分公式:

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}, \quad x \in (-1, 1)$$

另一方面 $\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$, 所以

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-t) \Big|_0^x = -\ln(1-x), \quad x \in (-1, 1)$$

综上两式, 得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = -\ln(1-x), \quad x \in (-1, 1) \xrightarrow{\text{连续性}} x \in [-1, 1)$$

逐项积分公式的应用

例 对级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 运用逐项积分公式:

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}, \quad x \in (-1, 1)$$

另一方面 $\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$, 所以

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-t) \Big|_0^x = -\ln(1-x), \quad x \in (-1, 1)$$

综上两式, 得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = -\ln(1-x), \quad x \in (-1, 1) \xrightarrow{\text{连续性}} x \in [-1, 1)$$

(记 $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}$, 则 $s(-1) =$

)

逐项积分公式的应用

例 对级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 运用逐项积分公式:

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}, \quad x \in (-1, 1)$$

另一方面 $\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$, 所以

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-t) \Big|_0^x = -\ln(1-x), \quad x \in (-1, 1)$$

综上两式, 得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = -\ln(1-x), \quad x \in (-1, 1) \xrightarrow{\text{连续性}} x \in [-1, 1)$$

(记 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}$, 则 $S(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} S(x)$)

逐项积分公式的应用

例 对级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 运用逐项积分公式:

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}, \quad x \in (-1, 1)$$

另一方面 $\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$, 所以

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-t) \Big|_0^x = -\ln(1-x), \quad x \in (-1, 1)$$

综上两式, 得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = -\ln(1-x), \quad x \in (-1, 1) \xrightarrow{\text{连续性}} x \in [-1, 1)$$

(记 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}$, 则 $S(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} S(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} -\ln(1-x)$)

逐项积分公式的应用

例 对级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 运用逐项积分公式:

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}, \quad x \in (-1, 1)$$

另一方面 $\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$, 所以

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-t) \Big|_0^x = -\ln(1-x), \quad x \in (-1, 1)$$

综上两式, 得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = -\ln(1-x), \quad x \in (-1, 1) \xrightarrow{\text{连续性}} x \in [-1, 1)$$

(记 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}$, 则 $S(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} S(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} -\ln(1-x) = -\ln 2$)

性质 3 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R , 则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R, R)$ 上可导,

性质 3 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R , 则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R, R)$ 上可导, 并成立逐项求导公式:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' \quad x \in (-R, R)$$

性质 3 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R , 则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R, R)$ 上可导, 并成立逐项求导公式:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' \quad x \in (-R, R)$$

性质 3 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R , 则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R, R)$ 上可导, 并成立逐项求导公式:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = n a_n x^{n-1}, \quad x \in (-R, R)$$

性质 3 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R , 则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R, R)$ 上可导, 并成立逐项求导公式:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad x \in (-R, R)$$

性质 3 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R , 则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R, R)$ 上可导, 并成立逐项求导公式:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad x \in (-R, R)$$

逐项求导后的幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 与原级数有相同收敛半径。

性质 3 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R , 则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R, R)$ 上可导, 并成立逐项求导公式:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad x \in (-R, R)$$

逐项求导后的幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 与原级数有相同收敛半径。

推论 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R , 则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R, R)$ 上具有任意阶的导数, 并成立逐项求导公式:

$$\frac{d^k}{dx^k} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^k}{dx^k} (a_n x^n), \quad x \in (-R, R)$$

逐项求导后的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^k}{dx^k} (a_n x^n)$ 与原级数有相同收敛半径。

利用逐项求导、或逐项积分，把级数化为简单的级数，从而求出原级数。

例 1 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的和函数。

例 1 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的和函数。

解 Step 1. 求收敛域：

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

例 1 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的和函数。

解 Step 1. 求收敛域:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

$$\therefore R = \frac{1}{\rho} = 1, \quad \text{收敛区间}(-1, 1)$$

例 1 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的和函数。

解 Step 1. 求收敛域:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

$$\therefore R = \frac{1}{\rho} = 1, \quad \text{收敛区间}(-1, 1)$$

$$\text{当 } x = 1 \text{ 时, } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \text{ 发散}$$

例 1 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的和函数。

解 Step 1. 求收敛域:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

$$\therefore R = \frac{1}{\rho} = 1, \quad \text{收敛区间}(-1, 1)$$

$$\text{当 } x = 1 \text{ 时, } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \text{ 发散}$$

$$\text{当 } x = -1 \text{ 时, } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \text{ 收敛}$$

例 1 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的和函数。

解 Step 1. 求收敛域:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

$$\therefore R = \frac{1}{\rho} = 1, \quad \text{收敛区间}(-1, 1)$$

$$\text{当 } x = 1 \text{ 时, } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \text{ 发散}$$

$$\text{当 } x = -1 \text{ 时, } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \text{ 收敛}$$

$$\therefore \text{收敛域}[-1, 1)$$

例 1 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的和函数。

解 Step 2. 记 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$, $x \in [-1, 1)$,

例 1 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的和函数。

解 Step 2. 记 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$, $x \in [-1, 1)$, 则:

$$xS(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in [-1, 1)$$

例 1 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的和函数。

解 Step 2. 记 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$, $x \in [-1, 1)$, 则:

$$xS(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in [-1, 1)$$

当 $x \in (-1, 1)$ 时, 两边求导可得:

$$[xS(x)]' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)'$$

例 1 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的和函数。

解 Step 2. 记 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$, $x \in [-1, 1)$, 则:

$$xS(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in [-1, 1)$$

当 $x \in (-1, 1)$ 时, 两边求导可得:

$$[xS(x)]' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \right)'$$

例 1 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的和函数。

解 Step 2. 记 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$, $x \in [-1, 1)$, 则:

$$xS(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in [-1, 1)$$

当 $x \in (-1, 1)$ 时, 两边求导可得:

$$[xS(x)]' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

例 1 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的和函数。

解 Step 2. 记 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$, $x \in [-1, 1)$, 则:

$$xS(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in [-1, 1)$$

当 $x \in (-1, 1)$ 时, 两边求导可得:

$$[xS(x)]' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

例 1 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的和函数。

解 Step 2. 记 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$, $x \in [-1, 1)$, 则:

$$xS(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in [-1, 1)$$

当 $x \in (-1, 1)$ 时, 两边求导可得:

$$[xS(x)]' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

所以

$$xS(x) = \int \frac{1}{1-x} dx$$

例 1 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的和函数。

解 Step 2. 记 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$, $x \in [-1, 1)$, 则:

$$xS(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in [-1, 1)$$

当 $x \in (-1, 1)$ 时, 两边求导可得:

$$[xS(x)]' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

所以

$$xS(x) = \int \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-x) + C,$$

例 1 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的和函数。

解 Step 2. 记 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$, $x \in [-1, 1)$, 则:

$$xS(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in [-1, 1)$$

当 $x \in (-1, 1)$ 时, 两边求导可得:

$$[xS(x)]' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

所以

$$xS(x) = \int \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-x) + C, \quad x \in (-1, 1)$$

例 1 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的和函数。

解 Step 2. 记 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$, $x \in [-1, 1)$, 则:

$$xS(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in [-1, 1)$$

当 $x \in (-1, 1)$ 时, 两边求导可得:

$$[xS(x)]' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

所以

$$xS(x) = \int \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-x) + C, \quad x \in (-1, 1)$$

上式取 $x = 0$ 时, 可得 $C = 0$, 所以

例 1 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的和函数。

解 Step 2. 记 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$, $x \in [-1, 1)$, 则:

$$xS(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in [-1, 1)$$

当 $x \in (-1, 1)$ 时, 两边求导可得:

$$[xS(x)]' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

所以

$$xS(x) = \int \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-x) + C, \quad x \in (-1, 1)$$

上式取 $x = 0$ 时, 可得 $C = 0$, 所以

$$xS(x) = -\ln(1-x), \quad x \in (-1, 1).$$

例 1 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的和函数。

解 Step 3. 至此已知: $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的收敛域是 $x \in [-1, 1)$, 而

$$xS(x) = -\ln(1-x), \quad x \in (-1, 1)$$

例 1 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的和函数。

解 Step 3. 至此已知: $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的收敛域是 $x \in [-1, 1)$, 而

$$xS(x) = -\ln(1-x), \quad x \in (-1, 1)$$

- 当 $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ 时, $S(x) = -\frac{1}{x} \ln(1-x)$

例 1 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的和函数。

解 Step 3. 至此已知: $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的收敛域是 $x \in [-1, 1)$, 而

$$xS(x) = -\ln(1-x), \quad x \in (-1, 1)$$

- 当 $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ 时, $S(x) = -\frac{1}{x} \ln(1-x)$
- 当 $x = 0$ 时, $S(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n+1} = 1$
- 当 $x = -1$ 时, 由连续性

例 1 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的和函数。

解 Step 3. 至此已知: $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的收敛域是 $x \in [-1, 1)$, 而

$$xS(x) = -\ln(1-x), \quad x \in (-1, 1)$$

- 当 $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ 时, $S(x) = -\frac{1}{x} \ln(1-x)$
- 当 $x = 0$ 时, $S(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n+1} = 1$
- 当 $x = -1$ 时, 由连续性

$$S(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} S(x)$$

例 1 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的和函数。

解 Step 3. 至此已知: $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的收敛域是 $x \in [-1, 1)$, 而

$$xS(x) = -\ln(1-x), \quad x \in (-1, 1)$$

- 当 $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ 时, $S(x) = -\frac{1}{x} \ln(1-x)$
- 当 $x = 0$ 时, $S(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n+1} = 1$
- 当 $x = -1$ 时, 由连续性

$$S(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} S(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} -\frac{1}{x} \ln(1-x)$$

例 1 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的和函数。

解 Step 3. 至此已知: $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的收敛域是 $x \in [-1, 1)$, 而

$$xS(x) = -\ln(1-x), \quad x \in (-1, 1)$$

- 当 $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ 时, $S(x) = -\frac{1}{x} \ln(1-x)$
- 当 $x = 0$ 时, $S(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n+1} = 1$
- 当 $x = -1$ 时, 由连续性

$$S(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} S(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} -\frac{1}{x} \ln(1-x) = -\frac{1}{x} \ln(1-x) \Big|_{x=-1}$$

例 1 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的和函数。

解 Step 3. 至此已知: $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的收敛域是 $x \in [-1, 1)$, 而

$$xS(x) = -\ln(1-x), \quad x \in (-1, 1)$$

- 当 $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ 时, $S(x) = -\frac{1}{x} \ln(1-x)$
- 当 $x = 0$ 时, $S(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n+1} = 1$
- 当 $x = -1$ 时, 由连续性

$$S(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} S(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} -\frac{1}{x} \ln(1-x) = -\frac{1}{x} \ln(1-x) \Big|_{x=-1}$$

综上

$$S(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} \ln(1-x) & x \in [-1, 1) \setminus \{0\}, \\ 1 & x = 0. \end{cases}$$

注 在等式

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \begin{cases} -\frac{1}{x} \ln(1-x) & x \in [-1, 1) \setminus \{0\}, \\ 1 & x = 0. \end{cases}$$

注 在等式

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \begin{cases} -\frac{1}{x} \ln(1-x) & x \in [-1, 1) \setminus \{0\}, \\ 1 & x = 0. \end{cases}$$

中取 $x = -1$, 可得

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \cdots$$

注 在等式

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \begin{cases} -\frac{1}{x} \ln(1-x) & x \in [-1, 1) \setminus \{0\}, \\ 1 & x = 0. \end{cases}$$

中取 $x = -1$, 可得

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \cdots = \ln 2.$$

例 2 求幂级数 $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots$ 的和函数。

例 2 求幂级数 $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots$ 的和函数。

解 Step 1. 求收敛域：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{2n+1}}{2n+1}}{\frac{x^{2n-1}}{2n-1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n+1} |x|^2 = |x|^2$$

例 2 求幂级数 $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots$ 的和函数。

解 Step 1. 求收敛域:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{2n+1}}{2n+1}}{\frac{x^{2n-1}}{2n-1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n+1} |x|^2 = |x|^2$$

$$\therefore |x|^2 < 1 \quad \Rightarrow \quad \text{收敛区间}(-1, 1)$$

例 2 求幂级数 $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots$ 的和函数。

解 Step 1. 求收敛域:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{2n+1}}{2n+1}}{\frac{x^{2n-1}}{2n-1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n+1} |x|^2 = |x|^2$$

$$\therefore |x|^2 < 1 \quad \Rightarrow \quad \text{收敛区间}(-1, 1)$$

当 $x = 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ 发散 (比较审敛法)

例 2 求幂级数 $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots$ 的和函数。

解 Step 1. 求收敛域:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{2n+1}}{2n+1}}{\frac{x^{2n-1}}{2n-1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n+1} |x|^2 = |x|^2$$

$$\therefore |x|^2 < 1 \quad \Rightarrow \quad \text{收敛区间}(-1, 1)$$

当 $x = 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ 发散 (比较审敛法)

当 $x = -1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{2n-1}$ 发散

例 2 求幂级数 $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots$ 的和函数。

解 Step 1. 求收敛域:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{2n+1}}{2n+1}}{\frac{x^{2n-1}}{2n-1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n+1} |x|^2 = |x|^2$$

$$\therefore |x|^2 < 1 \quad \Rightarrow \quad \text{收敛区间}(-1, 1)$$

当 $x = 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ 发散 (比较审敛法)

当 $x = -1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{2n-1}$ 发散

\therefore 收敛域 $(-1, 1)$

例 2 求幂级数 $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots$ 的和函数。

解 Step 2. 记 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \quad x \in (-1, 1)$

例 2 求幂级数 $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots$ 的和函数。

解 Step 2. 记 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, $x \in (-1, 1)$, 两边求导可得:

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right)'$$

例 2 求幂级数 $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots$ 的和函数。

解 Step 2. 记 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, $x \in (-1, 1)$, 两边求导可得:

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right)'$$

例 2 求幂级数 $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots$ 的和函数。

解 Step 2. 记 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, $x \in (-1, 1)$, 两边求导可得:

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-2}$$

例 2 求幂级数 $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots$ 的和函数。

解 Step 2. 记 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, $x \in (-1, 1)$, 两边求导可得:

$$\begin{aligned} S'(x) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-2} \\ &= 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots \end{aligned}$$

例 2 求幂级数 $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots$ 的和函数。

解 Step 2. 记 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, $x \in (-1, 1)$, 两边求导可得:

$$\begin{aligned} S'(x) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-2} \\ &= 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots = \frac{1}{1-x^2} \end{aligned}$$

例 2 求幂级数 $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots$ 的和函数。

解 Step 2. 记 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, $x \in (-1, 1)$, 两边求导可得:

$$\begin{aligned} S'(x) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-2} \\ &= 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots = \frac{1}{1-x^2} \end{aligned}$$

所以

$$S(x) = \int \frac{1}{1-x^2} dx$$

例 2 求幂级数 $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots$ 的和函数。

解 Step 2. 记 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, $x \in (-1, 1)$, 两边求导可得:

$$\begin{aligned} S'(x) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-2} \\ &= 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots = \frac{1}{1-x^2} \end{aligned}$$

所以

$$S(x) = \int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + C,$$

例 2 求幂级数 $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots$ 的和函数。

解 Step 2. 记 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, $x \in (-1, 1)$, 两边求导可得:

$$\begin{aligned} S'(x) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-2} \\ &= 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots = \frac{1}{1-x^2} \end{aligned}$$

所以

$$S(x) = \int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + C, \quad x \in (-1, 1)$$

例 2 求幂级数 $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots$ 的和函数。

解 Step 2. 记 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, $x \in (-1, 1)$, 两边求导可得:

$$\begin{aligned} S'(x) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-2} \\ &= 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots = \frac{1}{1-x^2} \end{aligned}$$

所以

$$S(x) = \int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + C, \quad x \in (-1, 1)$$

上式取 $x = 0$ 时, 可得 $C = 0$

例 2 求幂级数 $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots$ 的和函数。

解 Step 2. 记 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, $x \in (-1, 1)$, 两边求导可得:

$$\begin{aligned} S'(x) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-2} \\ &= 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots = \frac{1}{1-x^2} \end{aligned}$$

所以

$$S(x) = \int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + C, \quad x \in (-1, 1)$$

上式取 $x = 0$ 时, 可得 $C = 0$, 所以

$$S(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad x \in (-1, 1)$$

例 3 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1}$ 的和函数。

例 3 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1}$ 的和函数。

解 Step 1. 求收敛域：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)x^{n+2}}{nx^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} |x| = |x|$$

例 3 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1}$ 的和函数。

解 Step 1. 求收敛域：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)x^{n+2}}{nx^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} |x| = |x|$$

$$\therefore |x| < 1 \quad \Rightarrow \quad \text{收敛区间}(-1, 1)$$

例 3 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1}$ 的和函数。

解 Step 1. 求收敛域:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)x^{n+2}}{nx^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} |x| = |x|$$

$$\therefore |x| < 1 \quad \Rightarrow \quad \text{收敛区间}(-1, 1)$$

当 $x = \pm 1$ 时, 一般项 $nx^{n+1} = n(\pm 1)^{n+1} \not\rightarrow 0$, 级数发散

例 3 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1}$ 的和函数。

解 Step 1. 求收敛域:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)x^{n+2}}{nx^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} |x| = |x|$$

$\therefore |x| < 1 \quad \Rightarrow \quad \text{收敛区间}(-1, 1)$

当 $x = \pm 1$ 时, 一般项 $nx^{n+1} = n(\pm 1)^{n+1} \not\rightarrow 0$, 级数发散

$\therefore \text{收敛域}(-1, 1)$

例 3 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1}$ 的和函数。

解 Step 1. 求收敛域:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)x^{n+2}}{nx^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} |x| = |x|$$

$$\therefore |x| < 1 \quad \Rightarrow \quad \text{收敛区间}(-1, 1)$$

当 $x = \pm 1$ 时, 一般项 $nx^{n+1} = n(\pm 1)^{n+1} \not\rightarrow 0$, 级数发散

$$\therefore \text{收敛域}(-1, 1)$$

$$\text{Step 2. 记 } S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1} \qquad x \in (-1, 1),$$

例 3 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1}$ 的和函数。

解 Step 1. 求收敛域:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)x^{n+2}}{nx^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} |x| = |x|$$

$$\therefore |x| < 1 \quad \Rightarrow \quad \text{收敛区间}(-1, 1)$$

当 $x = \pm 1$ 时, 一般项 $nx^{n+1} = n(\pm 1)^{n+1} \not\rightarrow 0$, 级数发散

$$\therefore \text{收敛域}(-1, 1)$$

Step 2. 记 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1} = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$, $x \in (-1, 1)$,

例 3 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1}$ 的和函数。

解 Step 1. 求收敛域:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)x^{n+2}}{nx^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} |x| = |x|$$

$$\therefore |x| < 1 \quad \Rightarrow \quad \text{收敛区间}(-1, 1)$$

当 $x = \pm 1$ 时, 一般项 $nx^{n+1} = n(\pm 1)^{n+1} \not\rightarrow 0$, 级数发散

$$\therefore \text{收敛域}(-1, 1)$$

Step 2. 记 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1} = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$, $x \in (-1, 1)$, 则:

$$S(x)$$

例 3 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1}$ 的和函数。

解 Step 1. 求收敛域:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)x^{n+2}}{nx^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} |x| = |x|$$

$$\therefore |x| < 1 \quad \Rightarrow \quad \text{收敛区间}(-1, 1)$$

当 $x = \pm 1$ 时, 一般项 $nx^{n+1} = n(\pm 1)^{n+1} \not\rightarrow 0$, 级数发散

$$\therefore \text{收敛域}(-1, 1)$$

Step 2. 记 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1} = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$, $x \in (-1, 1)$, 则:

$$S(x) = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)'$$

例 3 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1}$ 的和函数。

解 Step 1. 求收敛域:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)x^{n+2}}{nx^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} |x| = |x|$$

$$\therefore |x| < 1 \quad \Rightarrow \quad \text{收敛区间}(-1, 1)$$

当 $x = \pm 1$ 时, 一般项 $nx^{n+1} = n(\pm 1)^{n+1} \not\rightarrow 0$, 级数发散

$$\therefore \text{收敛域}(-1, 1)$$

Step 2. 记 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1} = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$, $x \in (-1, 1)$, 则:

$$S(x) = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = x^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)'$$

例 3 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1}$ 的和函数。

解 Step 1. 求收敛域:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)x^{n+2}}{nx^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} |x| = |x|$$

$$\therefore |x| < 1 \quad \Rightarrow \quad \text{收敛区间}(-1, 1)$$

当 $x = \pm 1$ 时, 一般项 $nx^{n+1} = n(\pm 1)^{n+1} \not\rightarrow 0$, 级数发散

$$\therefore \text{收敛域}(-1, 1)$$

Step 2. 记 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1} = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$, $x \in (-1, 1)$, 则:

$$S(x) = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = x^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' = x^2 \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right)'$$

例 3 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1}$ 的和函数。

解 Step 1. 求收敛域:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)x^{n+2}}{nx^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} |x| = |x|$$

$$\therefore |x| < 1 \quad \Rightarrow \quad \text{收敛区间}(-1, 1)$$

当 $x = \pm 1$ 时, 一般项 $nx^{n+1} = n(\pm 1)^{n+1} \not\rightarrow 0$, 级数发散

$$\therefore \text{收敛域}(-1, 1)$$

Step 2. 记 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1} = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$, $x \in (-1, 1)$, 则:

$$S(x) = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = x^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' = x^2 \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right)' = \frac{x^2}{(1-x)^2}$$

注 等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1} = \frac{x^2}{(1-x)^2}, \quad x \in (-1, 1)$$

推出

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad x \in (-1, 1)$$

注 等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1} = \frac{x^2}{(1-x)^2}, \quad x \in (-1, 1)$$

推出

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad x \in (-1, 1)$$

中取 $x = \frac{1}{2}$, 可得

$$1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \frac{5}{2^4} + \cdots$$

注 等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1} = \frac{x^2}{(1-x)^2}, \quad x \in (-1, 1)$$

推出

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad x \in (-1, 1)$$

中取 $x = \frac{1}{2}$, 可得

$$1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \frac{5}{2^4} + \cdots = 4.$$