

第 08 周作业

练习 1. 设 D 是平面上由 x 轴, y 轴, 以及直线 $x+y=6$ 所以围成的闭区域。假设二元函数 $z = x^2y(4-x-y)$ 定义在闭区域 D 上。

1. 画出区域 D 。
2. 求出 z 在闭区域 D 内部的所有极值点。
3. 求出 z 在边界 ∂D 上所能取到的最大值和最小值。
4. 求出 z 在整个闭区域 D 上的最大值和最小值。

练习 2. 求函数 $f(x, y) = x + y$ 在条件 $x^2 + y^2 = 1$ 下的最大、最小值，并求出对应的最值点。(利用拉格朗日乘子法求解)。

练习 3. 假设矩形的边长分别为 x 和 y ，周长为定值 $2p$ 。将矩形绕长为 x 的边旋转一周而构成一个圆柱体。问 x, y 各为多少时，圆柱体的体积最大？(利用拉格朗日乘子法求解)

练习 4. 利用拉格朗日乘数法求三元函数 $f = x^2 + y^2 + z^2$ 在附加条件 $\begin{cases} x^2 + y^2 + 4z^2 = 1 \\ x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$ 下的最大值和最小值。

练习 5. 比较二重积分 $\iint_D (x+y)^2 d\sigma$ 和 $\iint_D (x+y)^3 d\sigma$ 的大小, 其中 D 是由 x 轴, y 轴和直线 $x+y=1$ 所围成的闭区域。

练习 6. 估计二重积分 $\iint_D \sin^2 x \sin^2 y d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$ 。

练习 7. 计算由四个平面 $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$ 所围成的柱体被平面 $z = 0$ 及 $2x + 3y + z = 6$ 截得的立体的体积。

练习 8. 画出积分区域，并计算二重积分：

1. $\iint_D x\sqrt{y}d\sigma$, 其中 D 是由两条抛物线 $y = \sqrt{x}$ 和 $y = x^2$ 所围成的闭区域；
2. $\iint_D (x^2 + y^2 - x)d\sigma$, 其中 D 是由直线 $y = 2$, $y = x$ 和 $y = 2x$ 所围成的闭区域；
3. $\iint_D x \cos(x + y)d\sigma$, 其中 D 是顶点分别为 $(0, 0)$, $(\pi, 0)$ 和 (π, π) 的三角区闭区域；
4. $\iint_D e^{x+y}d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) | |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.
5. $\iint_D e^{x+y}d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 1\}$.

练习 9. 交换二次积分 $\int_1^2 \left[\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy \right] dx$ 的积分次序。

练习 10. 通过交换积分次序计算二次积分 $\int_0^2 dx \int_x^2 e^{-y^2} dy$ 。