

第 01 周作业解答

练习 1. 验证 $F(x) = -\ln(\cos x)$ 是 $f(x) = \tan x$ 的一个原函数。

解: 验证

$$F'(x) = (-\ln(\cos x))' = -\frac{(\cos x)'}{\cos} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x.$$

练习 2. 验证 $F(x) = x(\ln x - 1)$ 是 $f(x) = \ln x$ 的一个原函数。

解: 验证

$$F'(x) = (x(\ln x - 1))' = x'(\ln x - 1) + x(\ln x - 1)' = (\ln x - 1) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x.$$

练习 3. 假设 $\frac{2}{3} \ln \cos 2x$ 是 $f(x) = k \tan 2x$ 的一个原函数, 试求 k 。

解: $\frac{2}{3} \ln \cos 2x$ 是 $f(x)$ 原函数, 说明 $f(x) = (\frac{2}{3} \ln \cos 2x)' = -\frac{4}{3} \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = -\frac{4}{3} \tan 2x$ 。对比假设 $f(x) = k \tan 2x$, 可知 $k = -\frac{4}{3}$ 。

练习 4. 1. 假设 $\int f(x)dx = x^3 + C$, 试求出 $f(x)$ 。

2. 假设 $\int f(x)dx = e^{2x} \cos x + C$, 试求出 $f(x)$ 。

3. 假设 $\int xf(x)dx = \arctan x + C$, 试求出 $f(x)$ 。

解: 1.

$$f(x) = \left(\int f(x)dx \right)' = (x^3 + C)' = 3x^2.$$

2.

$$f(x) = \left(\int f(x)dx \right)' = (e^{2x} \cos x + C)' = (2 \cos x - \sin x)e^{2x}.$$

3.

$$xf(x) = \left(\int xf(x)dx \right)' = (\arctan x + C)' = \frac{1}{1+x^2},$$

所以 $f(x) = \frac{1}{x(1+x^2)}$ 。

练习 5. 求 $\int d(x^2 \ln x)$ 。

解:

$$\int d(x^2 \ln x) = x^2 \ln x + C.$$

练习 6. 设生产 x 单位某产品的总成本 C 是 x 的函数 $C(x)$, 固定成本为 20 元 (即 $C(0) = 20$), 边际成本函数为 $2x + 10$ (元/单位), 求总成本函数 $C(x)$ 。

解: 边际成本是 $C'(x) = 2x + 10$ 。所以 $C(x) = \int C'(x)dx = \int 2x + 10dx = x^2 + 10x + C$ 。再结合 $C(0) = 20$, 得 $C = 20$ 。所以 $C(x) = x^2 + 10x + 20$ 。

练习 7. 求不定积分 $\int \left(\frac{x}{2} - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} - 4 \sin x + \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{2}{1+x^2} \right) dx$

解：

$$\begin{aligned}& \int \left(\frac{x}{2} - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} - 4 \sin x + \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{2}{1+x^2} \right) dx \\&= \frac{1}{2} \int x dx - 3 \int \frac{1}{x} dx + \int x^{-2} dx - 4 \int \sin x dx + \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int \frac{2}{1+x^2} dx \\&= \frac{1}{4} x^2 - 3 \ln |x| - x^{-1} + 4 \cos x + \tan x - 2 \arctan x + C\end{aligned}$$