第 12 周作业解答

练习 1. 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量。

解

练习 2. 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量。

解

- 解特征方程 $|\lambda I - A| = 0$。

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

所以特征值为 $\lambda_1=1, \lambda_2=2, \lambda_3=3$。

- 关于特征值 $\lambda_1=1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$。

$$(\lambda_1 I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

同解方程组为

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

取 x_1 为自由变量，得基础解系

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

所以对应于特征值 $\lambda_1=1$ 的所有特征向量为：

$$c_1\alpha_1 = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

其中 $c_1 \neq 0$。

- 关于特征值 $\lambda_2=2$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$。

$$(\lambda_2 I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

取 x_2 为自由变量，得基础解系

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

所以对应于特征值 $\lambda_2 = 2$ 的所有特征向量为：

$$c_2\alpha_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

其中 $c_2 \neq 0$。

- 关于特征值 $\lambda_3 = 3$，求解 $(\lambda_3 I - A)x = 0$。

$$(\lambda_3 I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

取 x_3 为自由变量，得基础解系

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以对应于特征值 $\lambda_3 = 3$ 的所有特征向量为：

$$c_3\alpha_3 = c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

其中 $c_3 \neq 0$。

练习 3. 设方阵 A 满足 $A^2 = I_n$。证明 A 的特征值只能是 1 或 -1。

证明设 λ 是 A 的特征值，α 是相应的特征向量，则

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

所以

$$\alpha = I_n\alpha = A^2\alpha = A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda^2\alpha.$$

所以 $\lambda^2 = 1$，$\lambda = \pm 1$。