第 13 周作业解答

练习 1. 请利用拉格朗日乘数法求解下列最优方案：

工厂	产量	总成本	总生产任务
A	x	$f(x, y) = x^2 + 3y^2 + x + y + 15$	1000
B	y		

如何分配工厂生产任务，使总成本最少？

解：问题是求 $f(x, y) = x^2 + 3y^2 + x + y + 15$ 在条件 $x + y = 1000$ 下的最小值点。

1. 构造拉格朗日函数

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = x^2 + 3y^2 + x + y + 15 + \lambda(x + y - 1000)$$

2. 求解方程组

$$\begin{cases} F_x(x, y, \lambda) = 2x + 1 + \lambda = 0 \\ F_y(x, y, \lambda) = 6y + 1 + \lambda = 0 \\ x + y - 1000 = 0 \end{cases}$$

只有唯一解 $(x, y) = (750, 250)$。

3. 讨论：问题有最优方案，即最小值点；而上述方程组只有唯一解，所以恰好就是最优方案。因此，当 A 生产 750，B 生产 250 时，总成本最小。

练习 2. 假设产量 Q，劳动力 L，以及资本 K 的关系为 $Q = L^{\frac{2}{3}}K^{\frac{1}{3}}$，并假设劳动力的单位价格是 2，资本的单位价格是 1。请利用拉格朗日乘数法求解下列最优方案：

1. 计划在劳动力和资本上一共投入 3000，问此时应在 K 和 L 上各投入多少，可使产量 Q 最大？
2. 计划产量 Q 达到 800，问此时应在 K 和 L 上各投入多少，使得成本最少？

解：（1）问题是求 $Q(K, L) = L^{\frac{2}{3}}K^{\frac{1}{3}}$ 在条件 $2L + K = 3000$ 下的最大值点。

1. 构造拉格朗日函数

$$F(K, L, \lambda) = Q(K, L) + \lambda g(K, L) = L^{\frac{2}{3}}K^{\frac{1}{3}} + \lambda(2L + K - 3000)$$

2. 求解方程组

$$\begin{cases} F_K(K, L, \lambda) = \frac{1}{3}L^{\frac{2}{3}}K^{-\frac{2}{3}} + \lambda = 0 \\ F_L(K, L, \lambda) = \frac{2}{3}L^{-\frac{1}{3}}K^{\frac{1}{3}} + 2\lambda = 0 \\ 2L + K - 3000 = 0 \end{cases}$$

只有唯一解 $(K, L) = (1000, 1000)$。

3. 讨论：问题有最优方案，即最大值点；而上述方程组只有唯一解，所以恰好就是最优方案。因此，当在 K 上投入 1000，在 L 上投入 1000 时，产量最大。

（2）问题是求 $C(K, L) = 2L + K$ 在条件 $L^{\frac{2}{3}}K^{\frac{1}{3}} = 800$ 下的最小值点。

1. 构造拉格朗日函数

$$F(K, L, \lambda) = C(K, L) + \lambda g(K, L) = 2L + K + \lambda(L^{\frac{2}{3}}K^{\frac{1}{3}} - 800)$$

2. 求解方程组

$$\begin{cases} F_K(K,\,L,\,\lambda) = 1 + \frac{1}{3}\lambda L^{\frac{2}{3}}K^{-\frac{2}{3}} = 0 \\ F_L(K,\,L,\,\lambda) = 2 + \frac{2}{3}\lambda L^{-\frac{1}{3}}K^{\frac{1}{3}} = 0 \\ L^{\frac{2}{3}}K^{\frac{1}{3}} - 800 = 0 \end{cases}$$

只有唯一解 $(K,\,L) = (800,\,800)$。

3. 讨论：问题有最优方案，即最小值点；而上述方程组只有唯一解，所以恰好就是最优方案。因此，当在 K 上投入 800，在 L 上投入 800 时，成本最小。

练习 3. 先画出区域 D，再求二重积分：

1. $\iint_D x + 2ydxdy$，其中 D 是由曲线 $y = 1 - x^2$ 及 $y = x^2 - 1$ 所围成的区域
2. $\iint_D \frac{x^2}{y^2}dxdy$，其中 D 是由双曲线 $xy = 1$ 及直线 $y = x$，$x = 2$ 所围成的区域

解：1. 画出 D
可见 $D = \{(x,\,y)|\,-1 \le x \le 1,\,1 - x^2 \le y \le x^2 - 1\}$ 是 X-型区域。所以

$$\begin{aligned}\iint_D x + 2ydxdy &= \int_{-1}^{1}\left[\int_{1-x^2}^{x^2-1} x + 2ydy\right]dx \\ &= \int_{-1}^{1}\left[\big(xy + y^2\big)\big|_{1-x^2}^{x^2-1}\right]dx \\ &= \int_{-1}^{1}\left[\big(x(x^2-1) + (x^2-1)^2\big) - \big(x(1-x^2) + (1-x^2)^2\big)\right]dx \\ &= \int_{-1}^{1} 2x(x^2-1)dx \\ &= (\frac{1}{2}x^4 - x^2)\big|_{-1}^{1} \\ &= 0\end{aligned}$$

2. 1. 画出 D
可见 $D = \{(x,\,y)|\,1 \le x \le 2,\,\frac{1}{x} \le y \le x\}$ 是 X-型区域。所以

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{x^2}{y^2}dxdy &= \int_1^2\left[\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2}{y^2}dy\right]dx \\ &= \int_1^2\left[\big(-\frac{x^2}{y}\big)\big|_{\frac{1}{x}}^{x}\right]dx \\ &= \int_1^2\left[-x + x^3\right]dx \\ &= (-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4)\big|_1^2 \\ &= \frac{9}{4}\end{aligned}$$