第 8 章 b：平面及其方程

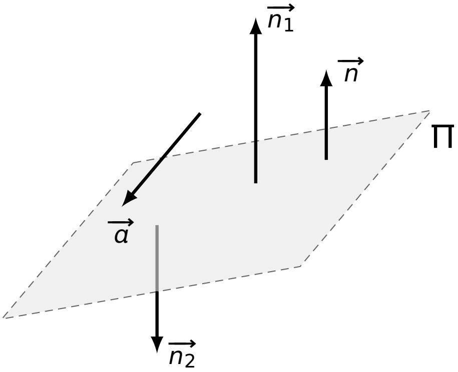
数学系　　梁卓滨

2017.07 暑期班

提要

- 平面的法向量
- 平面方程
- 平面夹角
- 点到平面的距离

平面的法向量



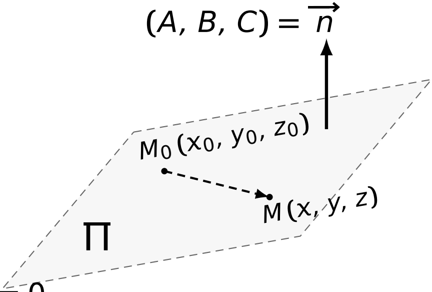
定义 垂直于平面的向量称为该平面的法向量 。如：$\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$

注 1 任意两个法向量是平行的。

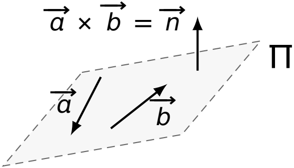
注 2 $\overrightarrow{a} \parallel \Pi \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{n}$

平面方程

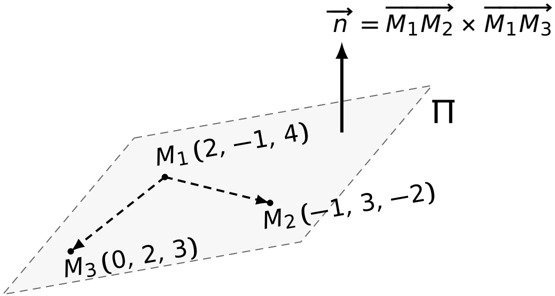
$$M \in \Pi$$
$$\Updownarrow$$
$$\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$$
$$\Updownarrow$$
$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$
$$\Updownarrow$$
$$Ax+By+Cz+D=0, \qquad D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$$



注 计算法向量 $\vec{n}$ 的通常方法：



例 设平面 Π 过点
$M_1(2, -1, 4)$,
$M_2(-1, 3, -2)$,
$M_3(0, 2, 3)$,
求 Π 方程。



解 1. 求一个法向量：取

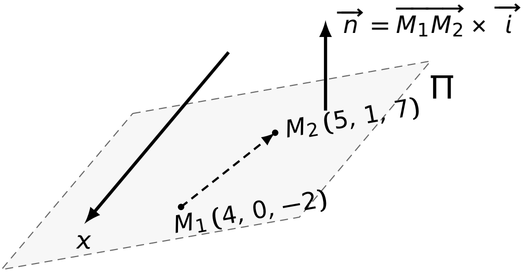
$$\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \vec{k} = 14\vec{i} + 9\vec{j} - \vec{k}$$

2. 平面方程：

$$14(x-0) + 9(y-2) - (z-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad 14x + 9y - z - 15 = 0$$

例 设平面 $\Pi \parallel x$ 轴，且过
$M_1(4, 0, -2)$,
$M_2(5, 1, 7)$,
求 Π 方程。



解 1. 求一个法向量：取

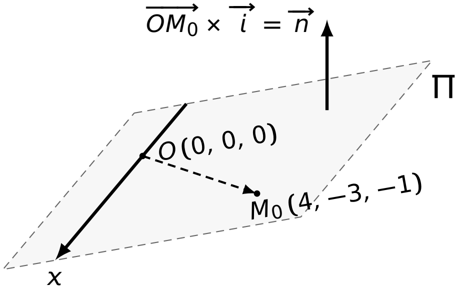
$$\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} = 9\vec{j} - \vec{k}$$

2. 平面方程：

$$0(x-4) + 9(y-0) - (z+2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 9y - z - 2 = 0$$

例 设平面 Π 包含 x 轴，且过 $M_0(4,-3,-1)$，求 Π 方程。



解 1. 求一个法向量：取

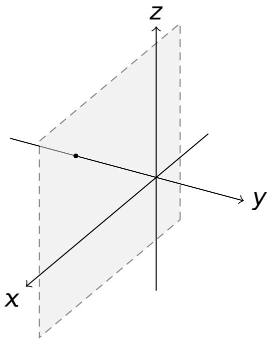
$$\vec{n}=\overrightarrow{OM_0}\times\vec{i}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & -3 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}-3 & -1\\ 0 & 0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}4 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}4 & -3\\ 1 & 0\end{vmatrix}\vec{k}=-\vec{j}+3\vec{k}$$

2. 平面方程：

$$0(x-0)-1\cdot(y-0)+3(z-0)=0 \quad\Rightarrow\quad y-3z=0$$

例 设平面 Π 平行于 xoz 坐标面，且过 $(2, -5, 3)$，求平面 Π 方程。



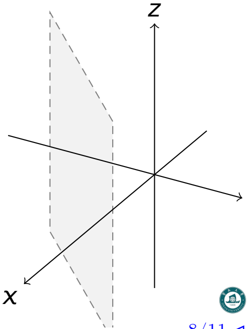
解 1. 求一个法向量：取 $\vec{n} = (0, 1, 0)$

2. 平面方程：

$$0(x-2)+1\cdot(y+5)+0(z-3)=0$$

$$\Rightarrow y+5=0$$

例 问平面 $\Pi: Ax+By=1$ 平行于哪个坐标轴？



解 平行于 z 轴。

这是因为：Π 的一个法向量为 $(A, B, 0)$，与 z 轴垂直（$(A, B, 0)\cdot(0, 0, 1)=0$）

平面夹角

$$\cos\theta = \cos\left(\angle(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2})\right) = \left|\cos\left(\angle(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2})\right)\right|$$

$$= \left|\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}\right|$$

例 求平面 $x - y + 2z - 6 = 0$ 和 $2x + y + z - 5 = 0$ 的夹角

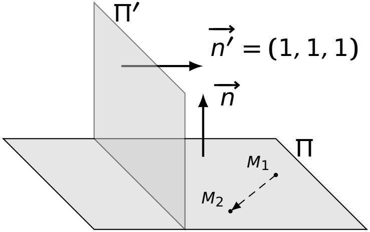
解

$$\overrightarrow{n_1} = (1, -1, 2), \qquad \overrightarrow{n_2} = (2, 1, 1)$$

$$\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|} = \frac{|1\cdot 2 + (-1)\cdot 1 + 2\cdot 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}\cdot\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

例 设平面 Π 过点 $M_1(1,\ 1,\ 1)$, $M_2(0,\ 1,\ -1)$，且与平面 $\Pi': x+y+z=0$ 垂直，求 Π 方程。



解 1. 求一个法向量：

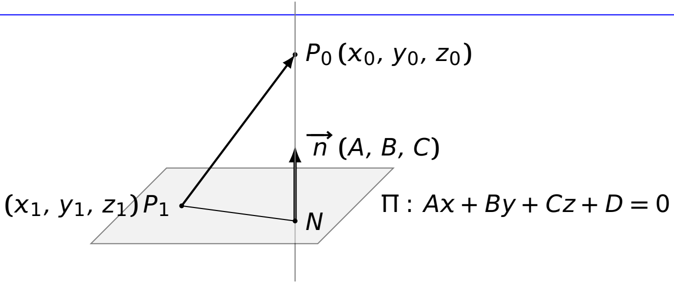
$$\vec{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\vec{n'}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}0 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}\vec{k}=2\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$$

2. 平面方程：

$$2(x-1)-1\cdot(y-1)-1\cdot(z-1)=0 \quad\Rightarrow\quad 2x-y-z=0$$

点到平面的距离



$$P_0 \text{ 到 } \Pi \text{ 的距离} = \left|\mathrm{Prj}_{\vec{n}} \overrightarrow{P_1P_0}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{P_1P_0} \cdot \vec{n}\right|}{|\vec{n}|}$$

例 求点 $P_0\,(2, 1, 1)$ 到平面 $\Pi: x + y - z = 1$ 的距离。

解 取 $P_1\,(1, 0, 0)$，则 $\overrightarrow{P_1P_0} = (1, 1, 1)$, $\quad \vec{n} = (1, 1, -1)$

$$P_0 \text{ 到 } \Pi \text{ 的距离} = \frac{\left|\overrightarrow{P_1P_0} \cdot \vec{n}\right|}{|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$