

# 第 10 章 $\alpha$ : 重积分的概念和性质

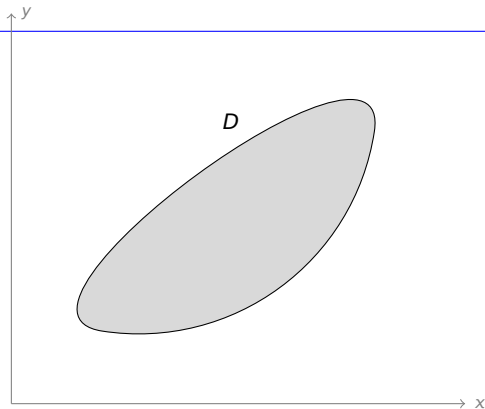
数学系 梁卓滨

2016-2017 学年 II

# 平面薄片的质量

假设

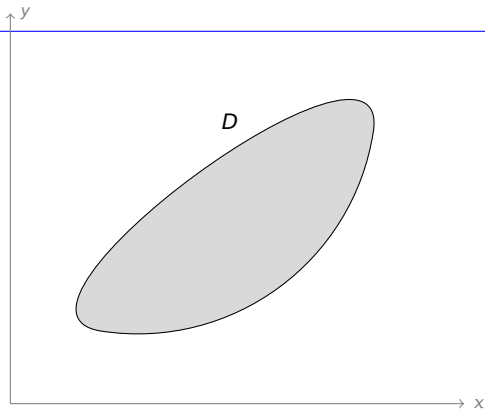
- 区域  $D$  为平面薄片
- 密度为  $\mu$
- 质量为  $m$



# 平面薄片的质量

假设

- 区域  $D$  为平面薄片
- 密度为  $\mu$
- 质量为  $m$

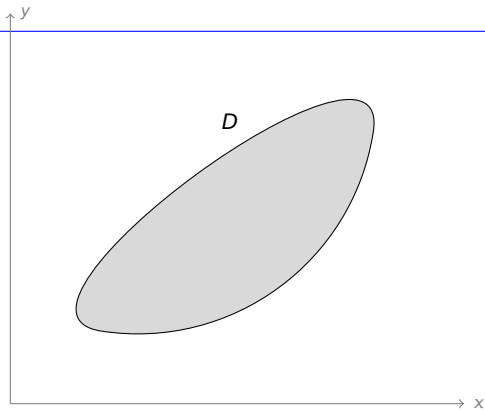


- 当薄片均匀时 ( $\mu = \text{常数}$ ),
- 当薄片非均匀时 ( $\mu = \mu(x, y)$  为  $D$  上函数),

# 平面薄片的质量

假设

- 区域  $D$  为平面薄片
- 密度为  $\mu$
- 质量为  $m$



- 当薄片均匀时 ( $\mu = \text{常数}$ ),

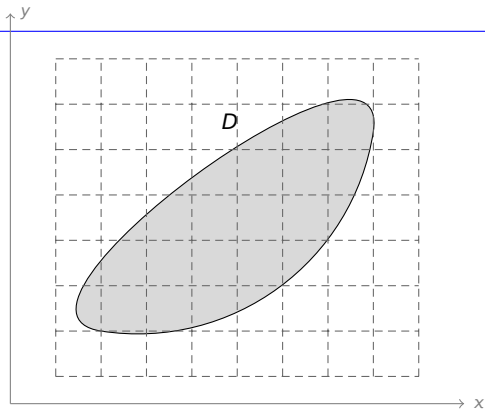
$$m = \mu \cdot \text{Area}(D)$$

- 当薄片非均匀时 ( $\mu = \mu(x, y)$  为  $D$  上函数),

# 平面薄片的质量

假设

- 区域  $D$  为平面薄片
- 密度为  $\mu$
- 质量为  $m$



- 当薄片均匀时 ( $\mu = \text{常数}$ ),

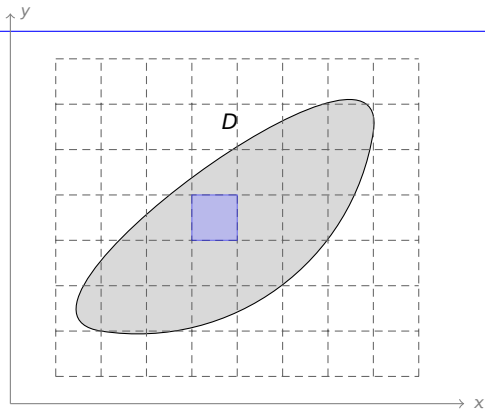
$$m = \mu \cdot \text{Area}(D)$$

- 当薄片非均匀时 ( $\mu = \mu(x, y)$  为  $D$  上函数), 利用微元法可知

# 平面薄片的质量

假设

- 区域  $D$  为平面薄片
- 密度为  $\mu$
- 质量为  $m$



- 当薄片均匀时 ( $\mu = \text{常数}$ ),

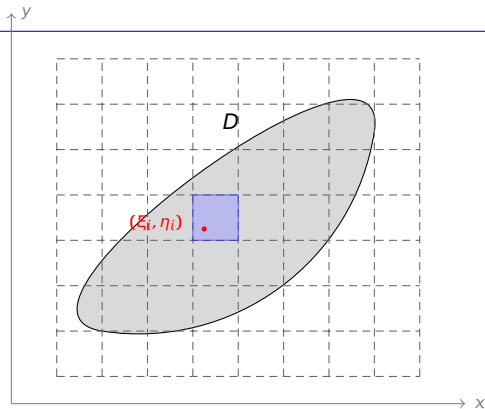
$$m = \mu \cdot \text{Area}(D)$$

- 当薄片非均匀时 ( $\mu = \mu(x, y)$  为  $D$  上函数), 利用微元法可知

# 平面薄片的质量

假设

- 区域  $D$  为平面薄片
- 密度为  $\mu$
- 质量为  $m$



- 当薄片均匀时 ( $\mu = \text{常数}$ ),

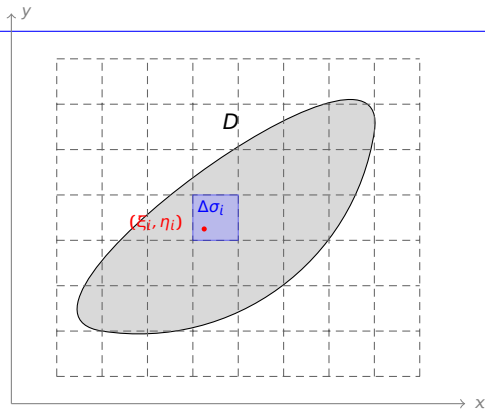
$$m = \mu \cdot \text{Area}(D)$$

- 当薄片非均匀时 ( $\mu = \mu(x, y)$  为  $D$  上函数), 利用微元法可知

# 平面薄片的质量

假设

- 区域  $D$  为平面薄片
- 密度为  $\mu$
- 质量为  $m$



- 当薄片均匀时 ( $\mu = \text{常数}$ ),

$$m = \mu \cdot \text{Area}(D)$$

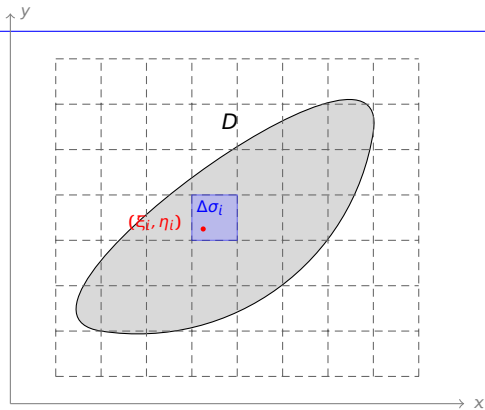
- 当薄片非均匀时 ( $\mu = \mu(x, y)$  为  $D$  上函数), 利用微元法可知



# 平面薄片的质量

假设

- 区域  $D$  为平面薄片
- 密度为  $\mu$
- 质量为  $m$



- 当薄片均匀时 ( $\mu = \text{常数}$ ),

$$m = \mu \cdot \text{Area}(D)$$

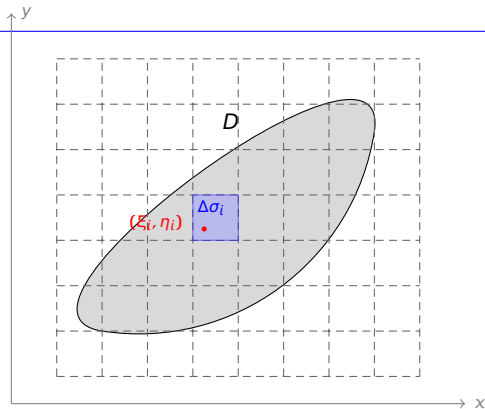
- 当薄片非均匀时 ( $\mu = \mu(x, y)$  为  $D$  上函数), 利用微元法可知

$$\mu(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

# 平面薄片的质量

假设

- 区域  $D$  为平面薄片
- 密度为  $\mu$
- 质量为  $m$



- 当薄片均匀时 ( $\mu = \text{常数}$ ),

$$m = \mu \cdot \text{Area}(D)$$

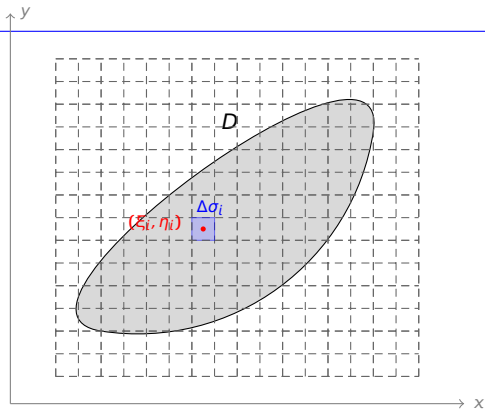
- 当薄片非均匀时 ( $\mu = \mu(x, y)$  为  $D$  上函数), 利用微元法可知

$$\sum_{i=1}^n \mu(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i$$

# 平面薄片的质量

假设

- 区域  $D$  为平面薄片
- 密度为  $\mu$
- 质量为  $m$



- 当薄片均匀时 ( $\mu = \text{常数}$ ),

$$m = \mu \cdot \text{Area}(D)$$

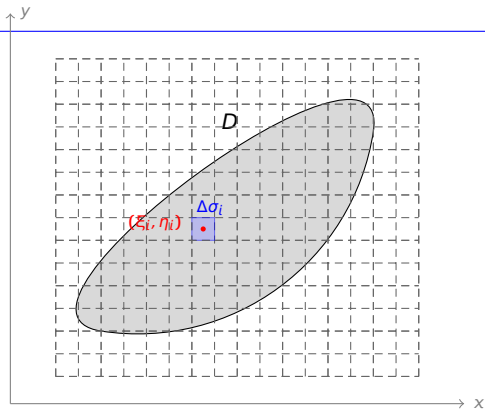
- 当薄片非均匀时 ( $\mu = \mu(x, y)$  为  $D$  上函数), 利用微元法可知

$$\sum_{i=1}^n \mu(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

# 平面薄片的质量

假设

- 区域  $D$  为平面薄片
- 密度为  $\mu$
- 质量为  $m$



- 当薄片均匀时 ( $\mu = \text{常数}$ ),

$$m = \mu \cdot \text{Area}(D)$$

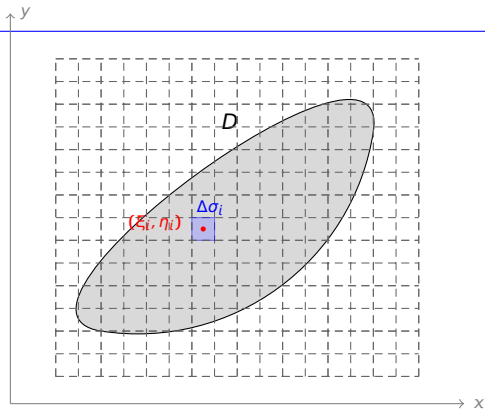
- 当薄片非均匀时 ( $\mu = \mu(x, y)$  为  $D$  上函数), 利用微元法可知

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mu(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i$$

# 平面薄片的质量

假设

- 区域  $D$  为平面薄片
- 密度为  $\mu$
- 质量为  $m$



- 当薄片均匀时 ( $\mu = \text{常数}$ ),

$$m = \mu \cdot \text{Area}(D)$$

- 当薄片非均匀时 ( $\mu = \mu(x, y)$  为  $D$  上函数), 利用微元法可知

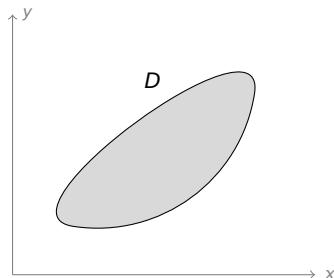
$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mu(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

## 二重积分的定义

二重积分定义 设

- $D$  是平面上有界闭区域,
- $f(x, y)$  是  $D$  上的有界函数,

若

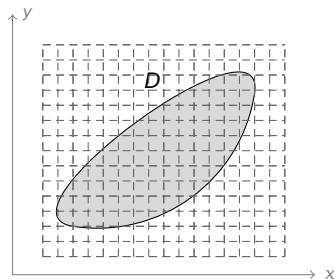


# 二重积分的定义

## 二重积分定义 设

- $D$  是平面上有界闭区域,
- $f(x, y)$  是  $D$  上的有界函数,

若

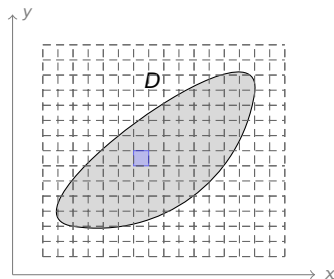


# 二重积分的定义

## 二重积分定义 设

- $D$  是平面上有界闭区域,
- $f(x, y)$  是  $D$  上的有界函数,

若



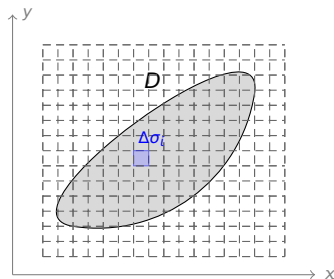


# 二重积分的定义

## 二重积分定义 设

- $D$  是平面上有界闭区域,
- $f(x, y)$  是  $D$  上的有界函数,

若

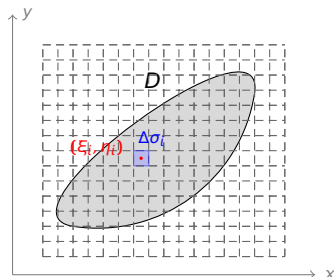


# 二重积分的定义

## 二重积分定义 设

- $D$  是平面上有界闭区域,
- $f(x, y)$  是  $D$  上的有界函数,

若



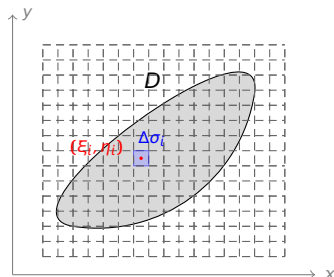
# 二重积分的定义

## 二重积分定义 设

- $D$  是平面上有界闭区域,
- $f(x, y)$  是  $D$  上的有界函数,

若

$$f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$



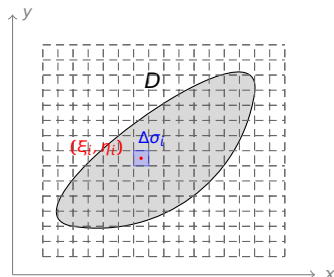
# 二重积分的定义

## 二重积分定义 设

- $D$  是平面上有界闭区域,
- $f(x, y)$  是  $D$  上的有界函数,

若

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i$$



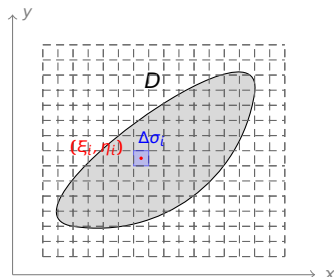
# 二重积分的定义

## 二重积分定义 设

- $D$  是平面上有界闭区域,
- $f(x, y)$  是  $D$  上的有界函数,

若

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i$$



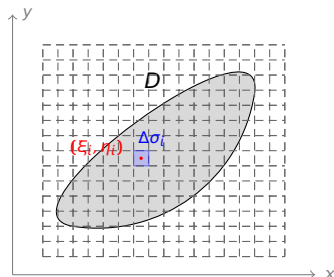
# 二重积分的定义

## 二重积分定义 设

- $D$  是平面上有界闭区域,
- $f(x, y)$  是  $D$  上的有界函数,

若

- 极限  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i$  存在,



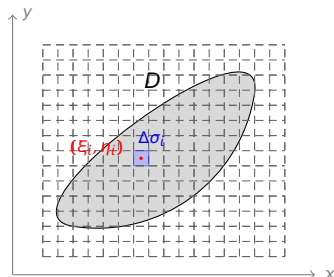
# 二重积分的定义

## 二重积分定义 设

- $D$  是平面上有界闭区域,
- $f(x, y)$  是  $D$  上的有界函数,

若

- 极限  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i$  存在, 且极限
- 与上述  $D$  的划分、 $(\xi_i, \eta_i)$  的选取无关,



# 二重积分的定义

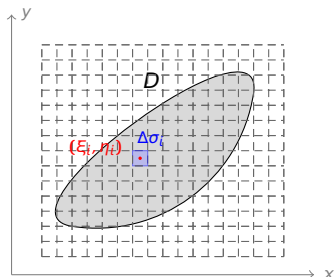
## 二重积分定义 设

- $D$  是平面上有界闭区域,
- $f(x, y)$  是  $D$  上的有界函数,

若

- 极限  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i$  存在, 且极限
- 与上述  $D$  的划分、 $(\xi_i, \eta_i)$  的选取无关,

则定义





# 二重积分的定义

## 二重积分定义 设

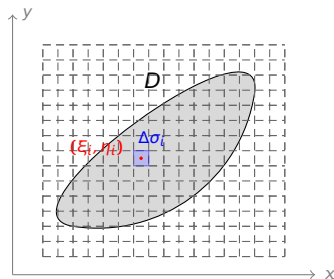
- $D$  是平面上有界闭区域,
- $f(x, y)$  是  $D$  上的有界函数,

若

- 极限  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i$  存在, 且极限
- 与上述  $D$  的划分、 $(\xi_i, \eta_i)$  的选取无关,

则定义

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i$$



# 二重积分的定义

## 二重积分定义 设

- $D$  是平面上有界闭区域,
- $f(x, y)$  是  $D$  上的有界函数,

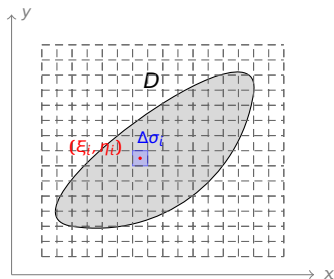
若

- 极限  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i$  存在, 且极限
- 与上述  $D$  的划分、 $(\xi_i, \eta_i)$  的选取无关,

则定义

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i$$

称为  $f(x, y)$  在  $D$  上的二重积分。



# 二重积分的定义

## 二重积分定义 设

- $D$  是平面上有界闭区域,
- $f(x, y)$  是  $D$  上的有界函数,

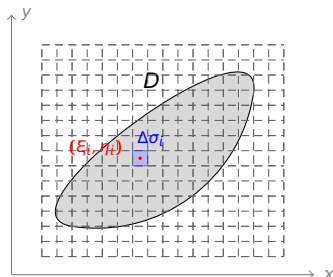
若

- 极限  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i$  存在, 且极限
- 与上述  $D$  的划分、 $(\xi_i, \eta_i)$  的选取无关,

则定义

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i$$

称为  $f(x, y)$  在  $D$  上的二重积分。 $d\sigma$  称为面积元素。



## 二重积分的定义

### 二重积分定义 设

- $D$  是平面上有界闭区域,
- $f(x, y)$  是  $D$  上的有界函数,

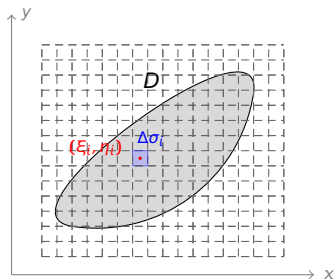
若

- 极限  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i$  存在, 且极限
- 与上述  $D$  的划分、 $(\xi_i, \eta_i)$  的选取无关,

则定义

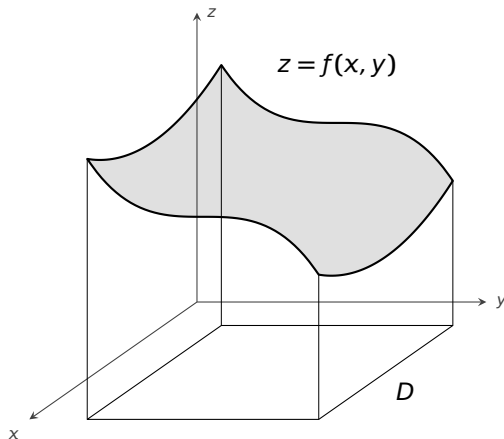
$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i$$

称为  $f(x, y)$  在  $D$  上的二重积分。 $d\sigma$  称为面积元素。



**定理** 若  $f(x, y)$  在有界闭区域  $D$  上连续, 则  $\iint_D f(x, y) d\sigma$  存在。

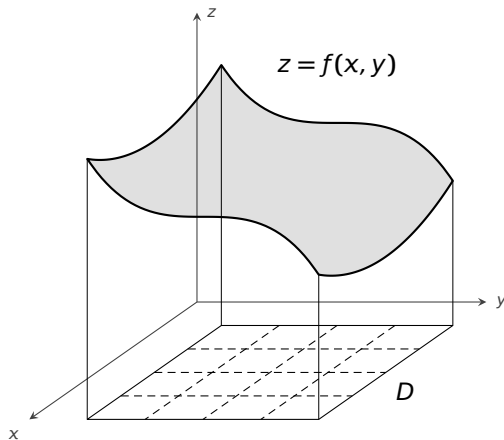
# 二重积分的几何意义



曲顶柱体的体积：

$V$

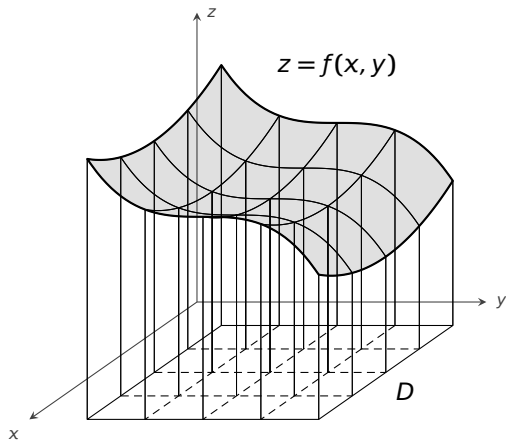
# 二重积分的几何意义



曲顶柱体的体积：

$V$

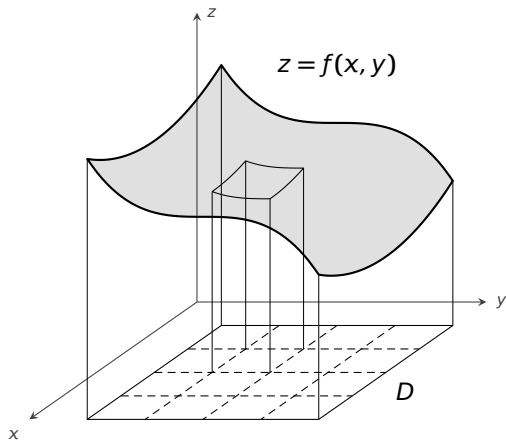
## 二重积分的几何意义



曲顶柱体的体积：

$V$

## 二重积分的几何意义

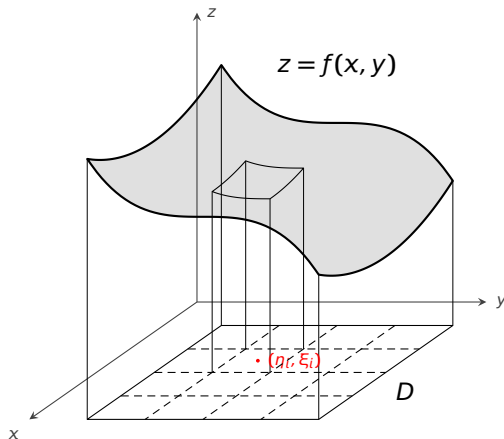


曲顶柱体的体积：

$V$



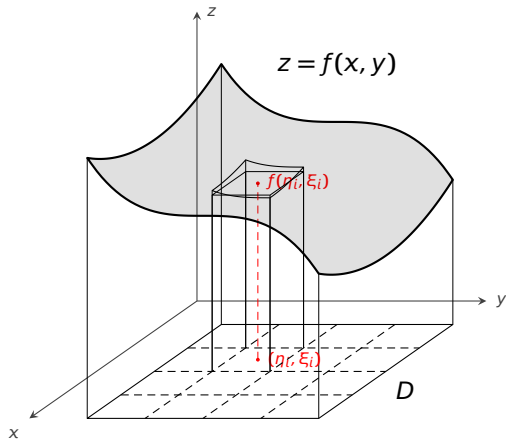
## 二重积分的几何意义



曲顶柱体的体积：

$V$

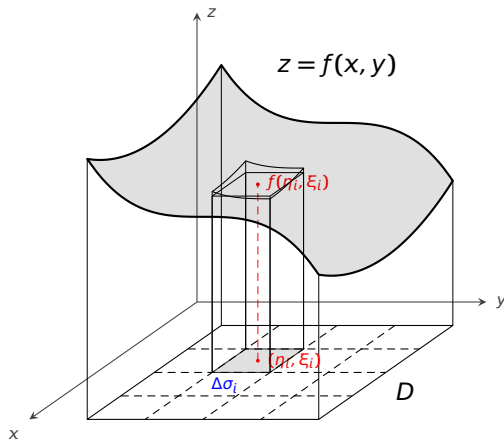
## 二重积分的几何意义



曲顶柱体的体积：

$V$

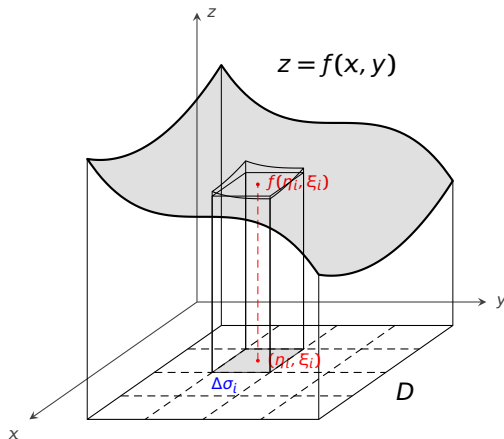
## 二重积分的几何意义



曲顶柱体的体积：

$V$

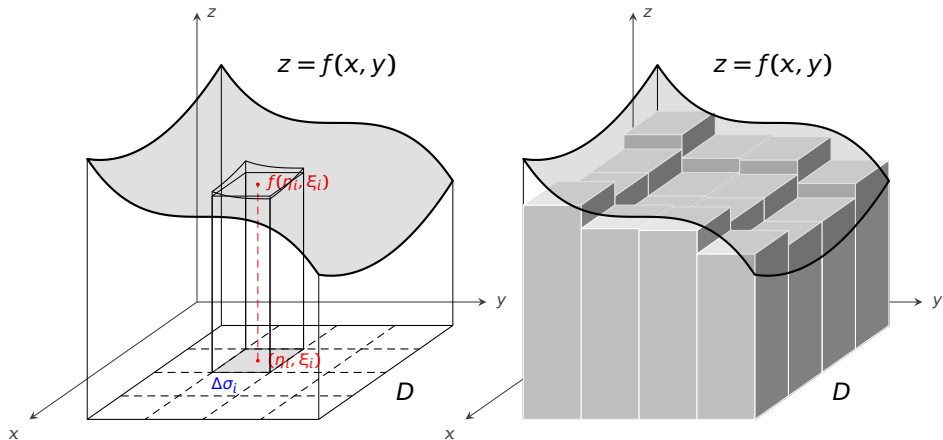
# 二重积分的几何意义



曲顶柱体的体积：

$$V = f(\eta_i, \xi_i) \Delta\sigma_i$$

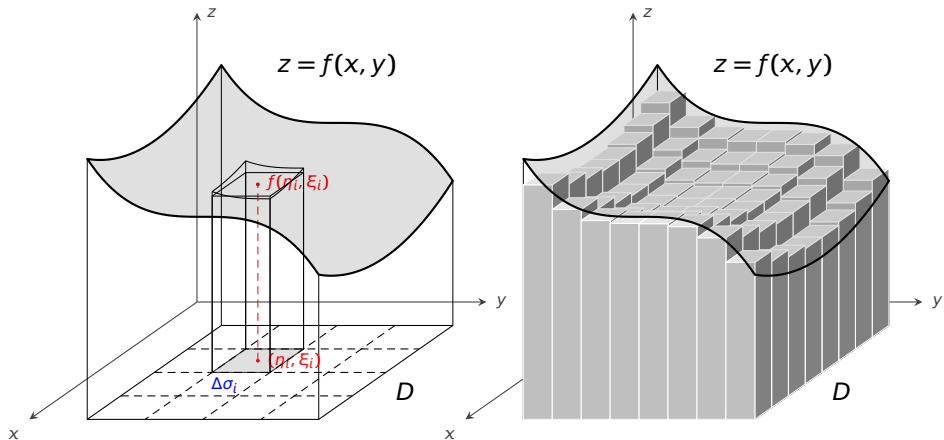
## 二重积分的几何意义



曲顶柱体的体积：

$$V = \sum_{i=1}^n f(\eta_i, \xi_i) \Delta\sigma_i$$

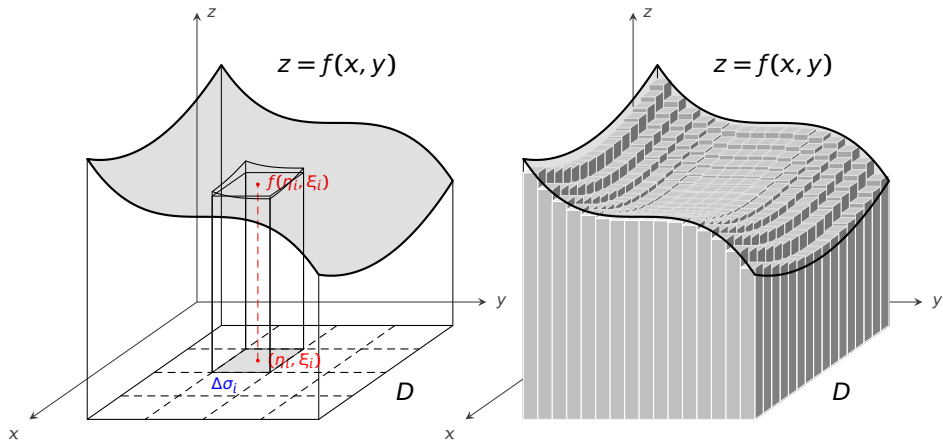
## 二重积分的几何意义



曲顶柱体的体积：

$$V = \sum_{i=1}^n f(\eta_i, \xi_i) \Delta\sigma_i$$

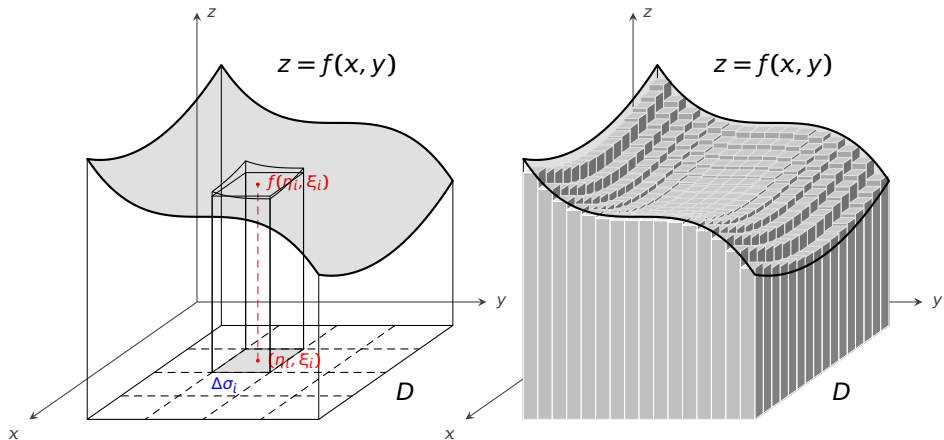
## 二重积分的几何意义



曲顶柱体的体积：

$$V = \sum_{i=1}^n f(\eta_i, \xi_i) \Delta\sigma_i$$

## 二重积分的几何意义

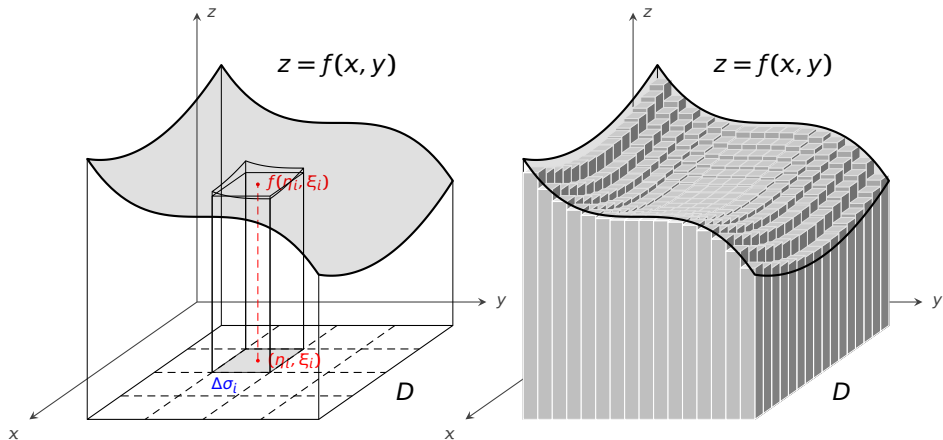


曲顶柱体的体积：

$$V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\eta_i, \xi_i) \Delta\sigma_i$$



## 二重积分的几何意义



曲顶柱体的体积：

$$V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\eta_i, \xi_i) \Delta\sigma_i = \iint_D f(x, y) d\sigma$$

## 二重积分的性质

---

### 性质 1 (线性性)

$$\iint_D \alpha f(x, y) + \beta g(x, y) d\sigma = \alpha \iint_D f(x, y) d\sigma + \beta \iint_D g(x, y) d\sigma,$$

其中  $\alpha, \beta$  是常数。

## 二重积分的性质

### 性质 1 (线性性)

$$\iint_D \alpha f(x, y) + \beta g(x, y) d\sigma = \alpha \iint_D f(x, y) d\sigma + \beta \iint_D g(x, y) d\sigma,$$
其中  $\alpha, \beta$  是常数。

证明

$$\begin{aligned} & \iint_D \alpha f(x, y) + \beta g(x, y) d\sigma \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [\alpha f(\xi_i, \eta_i) + \beta g(\xi_i, \eta_i)] \Delta\sigma_i \end{aligned}$$

## 二重积分的性质

### 性质 1 (线性性)

$\iint_D \alpha f(x, y) + \beta g(x, y) d\sigma = \alpha \iint_D f(x, y) d\sigma + \beta \iint_D g(x, y) d\sigma$ ,  
其中  $\alpha, \beta$  是常数。

证明

$$\begin{aligned} & \iint_D \alpha f(x, y) + \beta g(x, y) d\sigma \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [\alpha f(\xi_i, \eta_i) + \beta g(\xi_i, \eta_i)] \Delta\sigma_i \\ &= \alpha \cdot \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i + \beta \cdot \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i \end{aligned}$$

## 二重积分的性质

### 性质 1 (线性性)

$\iint_D \alpha f(x, y) + \beta g(x, y) d\sigma = \alpha \iint_D f(x, y) d\sigma + \beta \iint_D g(x, y) d\sigma$ ,  
其中  $\alpha, \beta$  是常数。

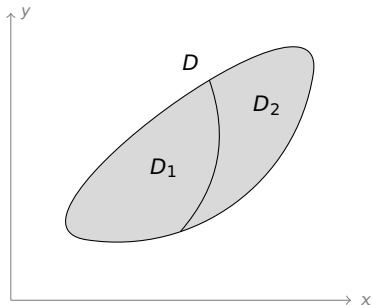
证明

$$\begin{aligned} & \iint_D \alpha f(x, y) + \beta g(x, y) d\sigma \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [\alpha f(\xi_i, \eta_i) + \beta g(\xi_i, \eta_i)] \Delta\sigma_i \\ &= \alpha \cdot \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i + \beta \cdot \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i \\ &= \alpha \iint_D f(x, y) d\sigma + \beta \iint_D g(x, y) d\sigma \end{aligned}$$

## 二重积分的性质 (Cont.)

性质 2 (积分可加性) 将  $D$  划分成两部分  $D_1$  和  $D_2$ , 则

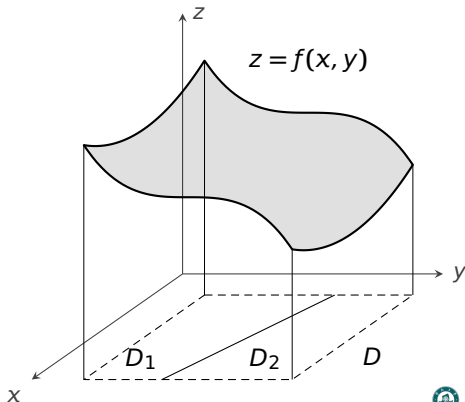
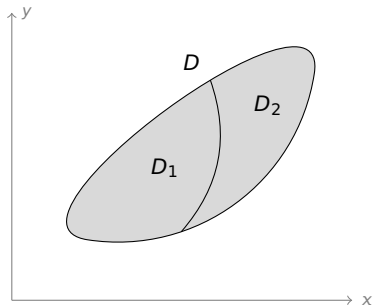
$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma$$



## 二重积分的性质 (Cont.)

性质 2 (积分可加性) 将  $D$  划分成两部分  $D_1$  和  $D_2$ , 则

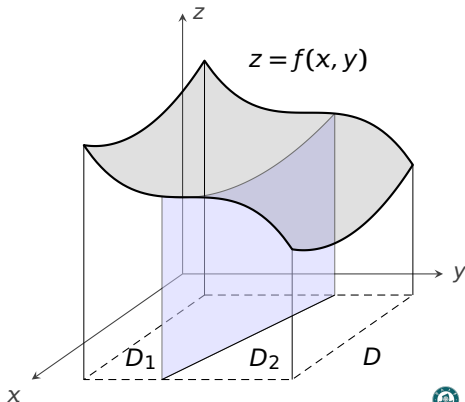
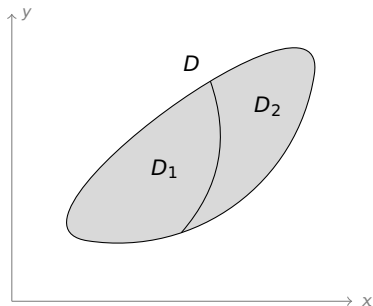
$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma$$



## 二重积分的性质 (Cont.)

性质 2 (积分可加性) 将  $D$  划分成两部分  $D_1$  和  $D_2$ , 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma$$





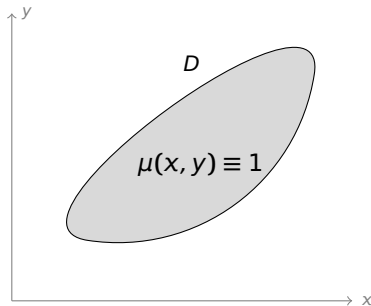
## 二重积分的性质 (Cont.)

---

性质 3  $\iint_D 1 d\sigma = |D|$  ( $D$  的面积)。

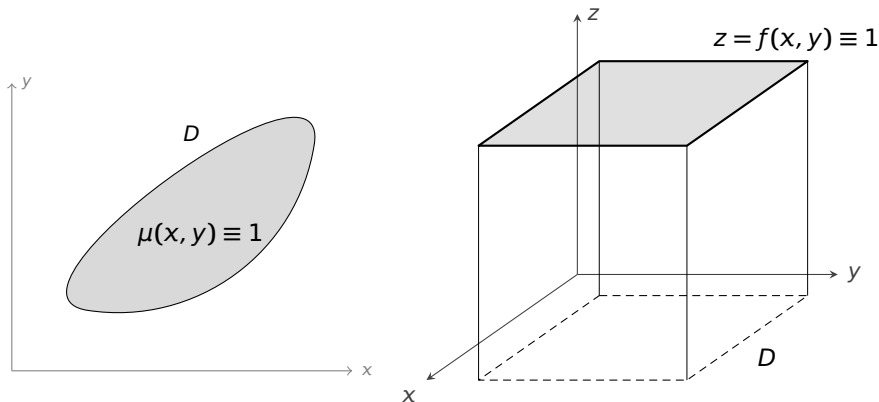
## 二重积分的性质 (Cont.)

性质 3  $\iint_D 1 d\sigma = |D|$  ( $D$  的面积)。



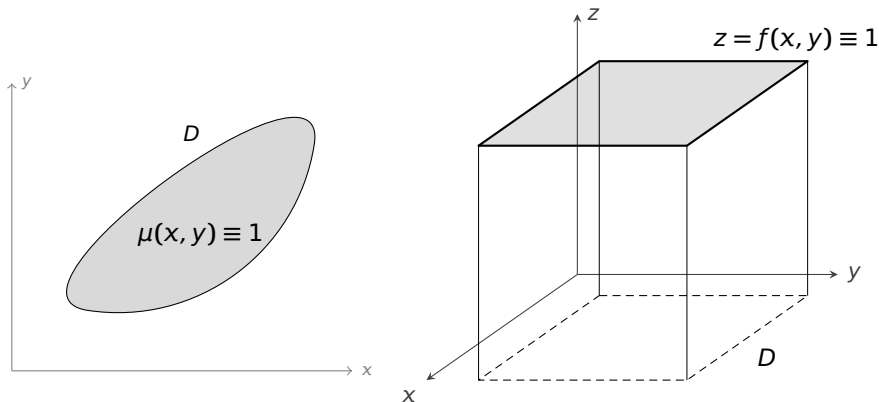
## 二重积分的性质 (Cont.)

性质 3  $\iint_D 1 d\sigma = |D|$  ( $D$  的面积)。



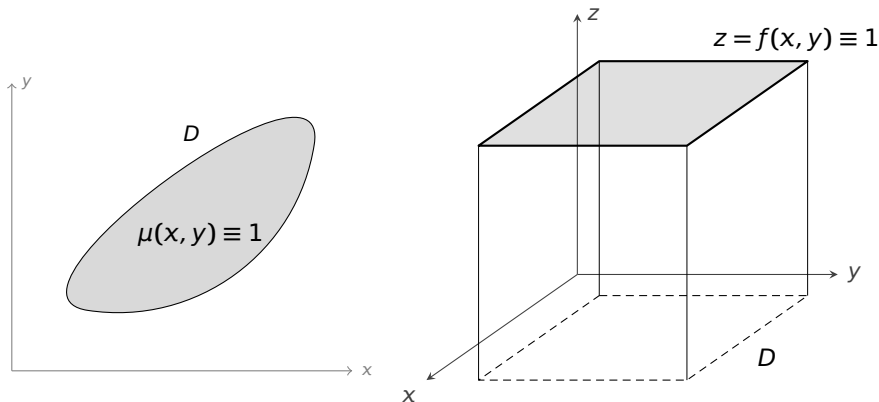
## 二重积分的性质 (Cont.)

性质 3  $\iint_D 1 d\sigma = |D|$  ( $D$  的面积)。特别滴,  $\iint_D k d\sigma =$  。



## 二重积分的性质 (Cont.)

性质 3  $\iint_D 1 d\sigma = |D|$  ( $D$  的面积)。特别滴,  $\iint_D k d\sigma = k|D|$ 。



## 二重积分的性质 (Cont.)

---

性质 4 如果在  $D$  上成立  $f(x, y) \leq g(x, y)$ , 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma$$

## 二重积分的性质 (Cont.)

性质 4 如果在  $D$  上成立  $f(x, y) \leq g(x, y)$ , 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma$$

性质 5 假设在  $D$  上成立  $m \leq f(x, y) \leq M$ , 则

$$m\sigma \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M\sigma,$$

## 二重积分的性质 (Cont.)

性质 4 如果在  $D$  上成立  $f(x, y) \leq g(x, y)$ , 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma$$

性质 5 假设在  $D$  上成立  $m \leq f(x, y) \leq M$ , 则

$$m\sigma \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M\sigma, \quad (\sigma \text{ 为 } D \text{ 的面积})$$



## 二重积分的性质 (Cont.)

性质 4 如果在  $D$  上成立  $f(x, y) \leq g(x, y)$ , 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma$$

性质 5 假设在  $D$  上成立  $m \leq f(x, y) \leq M$ , 则

$$m\sigma \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M\sigma, \quad (\sigma \text{ 为 } D \text{ 的面积})$$

证明

$$\iint_D m d\sigma \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D M d\sigma$$

## 二重积分的性质 (Cont.)

性质 4 如果在  $D$  上成立  $f(x, y) \leq g(x, y)$ , 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma$$

性质 5 假设在  $D$  上成立  $m \leq f(x, y) \leq M$ , 则

$$m\sigma \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M\sigma, \quad (\sigma \text{ 为 } D \text{ 的面积})$$

证明

$$\iint_D m d\sigma \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D M d\sigma = M\sigma$$

## 二重积分的性质 (Cont.)

性质 4 如果在  $D$  上成立  $f(x, y) \leq g(x, y)$ , 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma$$

性质 5 假设在  $D$  上成立  $m \leq f(x, y) \leq M$ , 则

$$m\sigma \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M\sigma, \quad (\sigma \text{ 为 } D \text{ 的面积})$$

证明

$$m\sigma = \iint_D m d\sigma \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D M d\sigma = M\sigma$$

### 例 估计下列积分值的范围

1.  $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$ ,  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

2.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$ ,  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$ ,  $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

### 例 估计下列积分值的范围

1.  $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma, D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

2.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}, D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}, D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

1.  $9 \leq x^2 + 4y^2 + 9$

### 例 估计下列积分值的范围

1.  $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$ ,  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

2.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$ ,  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$ ,  $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

1.  $9 \leq x^2 + 4y^2 + 9 = (x^2 + y^2) + 3y^2 + 9$

### 例 估计下列积分值的范围

1.  $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$ ,  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

2.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$ ,  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$ ,  $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

1.  $9 \leq x^2 + 4y^2 + 9 = (x^2 + y^2) + 3y^2 + 9 \leq 4 + 3 \cdot 4 + 9$

### 例 估计下列积分值的范围

1.  $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$ ,  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

2.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$ ,  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$ ,  $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

1.  $9 \leq x^2 + 4y^2 + 9 = (x^2 + y^2) + 3y^2 + 9 \leq 4 + 3 \cdot 4 + 9 = 25$



### 例 估计下列积分值的范围

1.  $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$ ,  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

2.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$ ,  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$ ,  $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

1.  $9 \leq x^2 + 4y^2 + 9 = (x^2 + y^2) + 3y^2 + 9 \leq 4 + 3 \cdot 4 + 9 = 25$

$$\Rightarrow 9|D| \leq I \leq 25|D|$$

### 例 估计下列积分值的范围

1.  $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$ ,  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

2.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$ ,  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$ ,  $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

1.  $9 \leq x^2 + 4y^2 + 9 = (x^2 + y^2) + 3y^2 + 9 \leq 4 + 3 \cdot 4 + 9 = 25$

$$\Rightarrow 9|D| \leq I \leq 25|D| \quad \xRightarrow{|D|=4\pi}$$

### 例 估计下列积分值的范围

1.  $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$ ,  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

2.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$ ,  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$ ,  $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

1.  $9 \leq x^2 + 4y^2 + 9 = (x^2 + y^2) + 3y^2 + 9 \leq 4 + 3 \cdot 4 + 9 = 25$

$$\Rightarrow 9|D| \leq I \leq 25|D| \xrightarrow{|D|=4\pi} 36\pi \leq I \leq 100\pi$$

### 例 估计下列积分值的范围

1.  $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma, D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

2.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}, D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}, D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

1.  $9 \leq x^2 + 4y^2 + 9 = (x^2 + y^2) + 3y^2 + 9 \leq 4 + 3 \cdot 4 + 9 = 25$

$$\Rightarrow 9|D| \leq I \leq 25|D| \xrightarrow{|D|=4\pi} 36\pi \leq I \leq 100\pi$$

2.  $x^2 + y^2 + 2xy + 16$

### 例 估计下列积分值的范围

1.  $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$ ,  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

2.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$ ,  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$ ,  $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

1.  $9 \leq x^2 + 4y^2 + 9 = (x^2 + y^2) + 3y^2 + 9 \leq 4 + 3 \cdot 4 + 9 = 25$

$$\Rightarrow 9|D| \leq I \leq 25|D| \xrightarrow{|D|=4\pi} 36\pi \leq I \leq 100\pi$$

2.  $x^2 + y^2 + 2xy + 16 = (x + y)^2 + 16$

### 例 估计下列积分值的范围

1.  $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$ ,  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

2.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$ ,  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$ ,  $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

1.  $9 \leq x^2 + 4y^2 + 9 = (x^2 + y^2) + 3y^2 + 9 \leq 4 + 3 \cdot 4 + 9 = 25$

$$\Rightarrow 9|D| \leq I \leq 25|D| \xrightarrow{|D|=4\pi} 36\pi \leq I \leq 100\pi$$

2.  $16 \leq x^2 + y^2 + 2xy + 16 = (x + y)^2 + 16$

### 例 估计下列积分值的范围

1.  $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$ ,  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

2.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$ ,  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$ ,  $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

1.  $9 \leq x^2 + 4y^2 + 9 = (x^2 + y^2) + 3y^2 + 9 \leq 4 + 3 \cdot 4 + 9 = 25$

$$\Rightarrow 9|D| \leq I \leq 25|D| \xrightarrow{|D|=4\pi} 36\pi \leq I \leq 100\pi$$

2.  $16 \leq x^2 + y^2 + 2xy + 16 = (x + y)^2 + 16 \leq 3^2 + 16$

### 例 估计下列积分值的范围

1.  $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$ ,  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

2.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$ ,  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$ ,  $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

1.  $9 \leq x^2 + 4y^2 + 9 = (x^2 + y^2) + 3y^2 + 9 \leq 4 + 3 \cdot 4 + 9 = 25$

$$\Rightarrow 9|D| \leq I \leq 25|D| \xrightarrow{|D|=4\pi} 36\pi \leq I \leq 100\pi$$

2.  $16 \leq x^2 + y^2 + 2xy + 16 = (x + y)^2 + 16 \leq 3^2 + 16 = 25$



### 例 估计下列积分值的范围

1.  $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma, D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

2.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}, D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}, D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

1.  $9 \leq x^2 + 4y^2 + 9 = (x^2 + y^2) + 3y^2 + 9 \leq 4 + 3 \cdot 4 + 9 = 25$

$$\Rightarrow 9|D| \leq I \leq 25|D| \xrightarrow{|D|=4\pi} 36\pi \leq I \leq 100\pi$$

2.  $16 \leq x^2 + y^2 + 2xy + 16 = (x + y)^2 + 16 \leq 3^2 + 16 = 25$

$$\Rightarrow \frac{1}{5} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}} \leq \frac{1}{4}$$

例 估计下列积分值的范围

1.  $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$ ,  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

2.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$ ,  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$ ,  $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

1.  $9 \leq x^2 + 4y^2 + 9 = (x^2 + y^2) + 3y^2 + 9 \leq 4 + 3 \cdot 4 + 9 = 25$

$$\Rightarrow 9|D| \leq I \leq 25|D| \xrightarrow{|D|=4\pi} 36\pi \leq I \leq 100\pi$$

2.  $16 \leq x^2 + y^2 + 2xy + 16 = (x + y)^2 + 16 \leq 3^2 + 16 = 25$

$$\Rightarrow \frac{1}{5} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}} \leq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5}|D| \leq I \leq \frac{1}{4}|D|$$

### 例 估计下列积分值的范围

1.  $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$ ,  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

2.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$ ,  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$ ,  $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

1.  $9 \leq x^2 + 4y^2 + 9 = (x^2 + y^2) + 3y^2 + 9 \leq 4 + 3 \cdot 4 + 9 = 25$

$$\Rightarrow 9|D| \leq I \leq 25|D| \xrightarrow{|D|=4\pi} 36\pi \leq I \leq 100\pi$$

2.  $16 \leq x^2 + y^2 + 2xy + 16 = (x + y)^2 + 16 \leq 3^2 + 16 = 25$

$$\Rightarrow \frac{1}{5} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}} \leq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5}|D| \leq I \leq \frac{1}{4}|D| \xrightarrow{|D|=2} \quad$$

### 例 估计下列积分值的范围

1.  $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$ ,  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

2.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$ ,  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$ ,  $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

1.  $9 \leq x^2 + 4y^2 + 9 = (x^2 + y^2) + 3y^2 + 9 \leq 4 + 3 \cdot 4 + 9 = 25$

$$\Rightarrow 9|D| \leq I \leq 25|D| \xrightarrow{|D|=4\pi} 36\pi \leq I \leq 100\pi$$

2.  $16 \leq x^2 + y^2 + 2xy + 16 = (x + y)^2 + 16 \leq 3^2 + 16 = 25$

$$\Rightarrow \frac{1}{5} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}} \leq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5}|D| \leq I \leq \frac{1}{4}|D| \xrightarrow{|D|=2} \frac{2}{5} \leq I \leq \frac{1}{2}$$

例 估计下列积分值的范围

1.  $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$ ,  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

2.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$ ,  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$ ,  $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解  
3.

$$\frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$$

### 例 估计下列积分值的范围

1.  $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$ ,  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

2.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$ ,  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$ ,  $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解  
3.

$$\frac{1}{102} \leq \frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$$

### 例 估计下列积分值的范围

1.  $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$ ,  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

2.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$ ,  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$ ,  $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

3.

$$\frac{1}{102} \leq \frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} \leq \frac{1}{100}$$

### 例 估计下列积分值的范围

1.  $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma, D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

2.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}, D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}, D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

3.

$$\frac{1}{102} \leq \frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} \leq \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{102} |D| \leq I \leq \frac{1}{100} |D|$$



例 估计下列积分值的范围

1.  $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$ ,  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

2.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$ ,  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$ ,  $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

3.

$$\begin{aligned} \frac{1}{102} &\leq \frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} \leq \frac{1}{100} \\ \Rightarrow \frac{1}{102} |D| &\leq I \leq \frac{1}{100} |D| \quad \xrightarrow{|D|=200} \end{aligned}$$

例 估计下列积分值的范围

1.  $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$ ,  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

2.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$ ,  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$ ,  $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

3.

$$\begin{aligned} \frac{1}{102} &\leq \frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} \leq \frac{1}{100} \\ \Rightarrow \frac{1}{102} |D| &\leq I \leq \frac{1}{100} |D| \xrightarrow{|D|=200} \frac{50}{51} \leq I \leq 2 \end{aligned}$$

例 估计下列积分值的范围

1.  $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$ ,  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

2.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$ ,  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

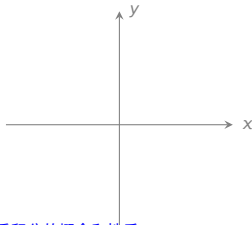
3.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$ ,  $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

3.

$$\begin{aligned} \frac{1}{102} &\leq \frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} \leq \frac{1}{100} \\ \Rightarrow \frac{1}{102} |D| &\leq I \leq \frac{1}{100} |D| \quad \xrightarrow{|D|=200} \quad \frac{50}{51} \leq I \leq 2 \end{aligned}$$

画  $|x| + |y| = 10$



### 例 估计下列积分值的范围

1.  $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$ ,  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

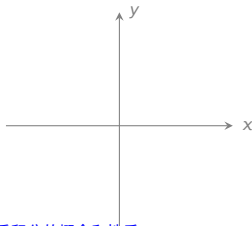
2.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$ ,  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$ ,  $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

3.

$$\begin{aligned} \frac{1}{102} &\leq \frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} \leq \frac{1}{100} \\ \Rightarrow \frac{1}{102} |D| &\leq I \leq \frac{1}{100} |D| \xrightarrow{|D|=200} \frac{50}{51} \leq I \leq 2 \end{aligned}$$



画  $|x| + |y| = 10$

- $x \geq 0, y \geq 0$  时,
- $x \geq 0, y \leq 0$  时,
- $x \leq 0, y \geq 0$  时,
- $x \leq 0, y \leq 0$  时,

### 例 估计下列积分值的范围

1.  $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$ ,  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

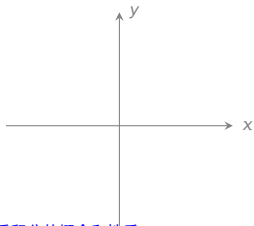
2.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$ ,  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$ ,  $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

3.

$$\frac{1}{102} \leq \frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} \leq \frac{1}{100}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{102} |D| \leq I \leq \frac{1}{100} |D| \xrightarrow{|D|=200} \frac{50}{51} \leq I \leq 2$$



画  $|x| + |y| = 10$

- $x \geq 0, y \geq 0$  时,  $x + y = 10$
- $x \geq 0, y \leq 0$  时,
- $x \leq 0, y \geq 0$  时,
- $x \leq 0, y \leq 0$  时,

### 例 估计下列积分值的范围

1.  $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$ ,  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

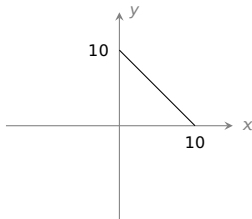
2.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$ ,  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$ ,  $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

3.

$$\begin{aligned} \frac{1}{102} &\leq \frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} \leq \frac{1}{100} \\ \Rightarrow \frac{1}{102} |D| &\leq I \leq \frac{1}{100} |D| \quad \xrightarrow{|D|=200} \quad \frac{50}{51} \leq I \leq 2 \end{aligned}$$



画  $|x| + |y| = 10$

- $x \geq 0, y \geq 0$  时,  $x + y = 10$
- $x \geq 0, y \leq 0$  时,
- $x \leq 0, y \geq 0$  时,
- $x \leq 0, y \leq 0$  时,

### 例 估计下列积分值的范围

1.  $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$ ,  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

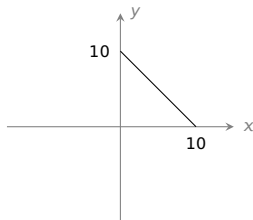
2.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$ ,  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$ ,  $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

3.

$$\frac{1}{102} \leq \frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} \leq \frac{1}{100}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{102} |D| \leq I \leq \frac{1}{100} |D| \xrightarrow{|D|=200} \frac{50}{51} \leq I \leq 2$$



画  $|x| + |y| = 10$

- $x \geq 0, y \geq 0$  时,  $x + y = 10$
- $x \geq 0, y \leq 0$  时,  $x - y = 10$
- $x \leq 0, y \geq 0$  时,
- $x \leq 0, y \leq 0$  时,

### 例 估计下列积分值的范围

1.  $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$ ,  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

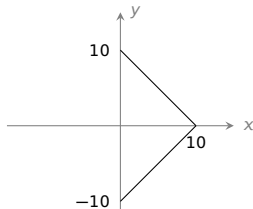
2.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$ ,  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$ ,  $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

3.

$$\begin{aligned} \frac{1}{102} &\leq \frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} \leq \frac{1}{100} \\ \Rightarrow \frac{1}{102} |D| &\leq I \leq \frac{1}{100} |D| \quad \xrightarrow{|D|=200} \quad \frac{50}{51} \leq I \leq 2 \end{aligned}$$



画  $|x| + |y| = 10$

- $x \geq 0, y \geq 0$  时,  $x + y = 10$
- $x \geq 0, y \leq 0$  时,  $x - y = 10$
- $x \leq 0, y \geq 0$  时,
- $x \leq 0, y \leq 0$  时,



### 例 估计下列积分值的范围

1.  $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$ ,  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

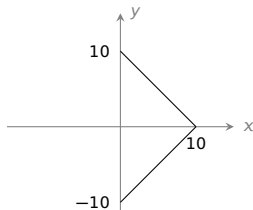
2.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$ ,  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$ ,  $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

3.

$$\begin{aligned} \frac{1}{102} &\leq \frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} \leq \frac{1}{100} \\ \Rightarrow \frac{1}{102} |D| &\leq I \leq \frac{1}{100} |D| \quad \xrightarrow{|D|=200} \quad \frac{50}{51} \leq I \leq 2 \end{aligned}$$



画  $|x| + |y| = 10$

- $x \geq 0, y \geq 0$  时,  $x + y = 10$
- $x \geq 0, y \leq 0$  时,  $x - y = 10$
- $x \leq 0, y \geq 0$  时,  $-x + y = 10$
- $x \leq 0, y \leq 0$  时,

### 例 估计下列积分值的范围

1.  $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$ ,  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

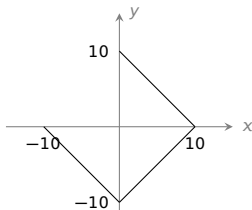
2.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$ ,  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$ ,  $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

3.

$$\begin{aligned} \frac{1}{102} &\leq \frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} \leq \frac{1}{100} \\ \Rightarrow \frac{1}{102} |D| &\leq I \leq \frac{1}{100} |D| \quad \xrightarrow{|D|=200} \quad \frac{50}{51} \leq I \leq 2 \end{aligned}$$



画  $|x| + |y| = 10$

- $x \geq 0, y \geq 0$  时,  $x + y = 10$
- $x \geq 0, y \leq 0$  时,  $x - y = 10$
- $x \leq 0, y \geq 0$  时,  $-x + y = 10$
- $x \leq 0, y \leq 0$  时,

### 例 估计下列积分值的范围

1.  $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$ ,  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

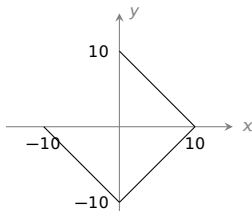
2.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$ ,  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$ ,  $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

3.

$$\begin{aligned} \frac{1}{102} &\leq \frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} \leq \frac{1}{100} \\ \Rightarrow \frac{1}{102} |D| &\leq I \leq \frac{1}{100} |D| \quad \xrightarrow{|D|=200} \quad \frac{50}{51} \leq I \leq 2 \end{aligned}$$



画  $|x| + |y| = 10$

- $x \geq 0, y \geq 0$  时,  $x + y = 10$
- $x \geq 0, y \leq 0$  时,  $x - y = 10$
- $x \leq 0, y \geq 0$  时,  $-x + y = 10$
- $x \leq 0, y \leq 0$  时,  $-x - y = 10$

### 例 估计下列积分值的范围

1.  $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$ ,  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

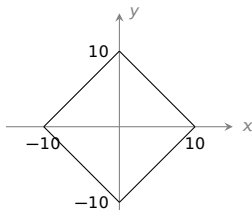
2.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$ ,  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$ ,  $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

3.

$$\begin{aligned} \frac{1}{102} &\leq \frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} \leq \frac{1}{100} \\ \Rightarrow \frac{1}{102} |D| &\leq I \leq \frac{1}{100} |D| \quad \xrightarrow{|D|=200} \quad \frac{50}{51} \leq I \leq 2 \end{aligned}$$



画  $|x| + |y| = 10$

- $x \geq 0, y \geq 0$  时,  $x + y = 10$
- $x \geq 0, y \leq 0$  时,  $x - y = 10$
- $x \leq 0, y \geq 0$  时,  $-x + y = 10$
- $x \leq 0, y \leq 0$  时,  $-x - y = 10$

### 例 估计下列积分值的范围

1.  $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$ ,  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

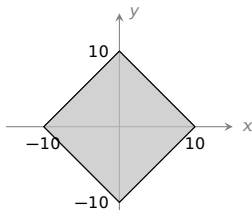
2.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$ ,  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3.  $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$ ,  $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

3.

$$\begin{aligned} \frac{1}{102} &\leq \frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} \leq \frac{1}{100} \\ \Rightarrow \frac{1}{102} |D| &\leq I \leq \frac{1}{100} |D| \quad \xrightarrow{|D|=200} \quad \frac{50}{51} \leq I \leq 2 \end{aligned}$$



画  $|x| + |y| = 10$

- $x \geq 0, y \geq 0$  时,  $x + y = 10$
- $x \geq 0, y \leq 0$  时,  $x - y = 10$
- $x \leq 0, y \geq 0$  时,  $-x + y = 10$
- $x \leq 0, y \leq 0$  时,  $-x - y = 10$

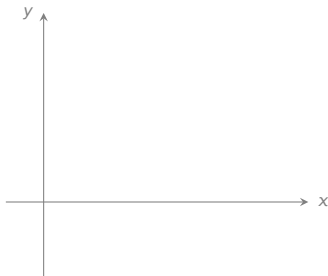
例 设  $D = \{(x, y) | (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 2\}$ , 比较以下两个积分大小:

$$I_1 = \iint_D (x+y)^2 d\sigma, \quad I_2 = \iint_D (x+y)^3 d\sigma$$

例 设  $D = \{(x, y) | (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 2\}$ , 比较以下两个积分大小:

$$I_1 = \iint_D (x+y)^2 d\sigma, \quad I_2 = \iint_D (x+y)^3 d\sigma$$

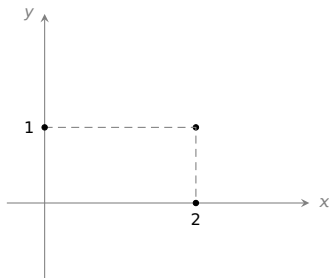
解



例 设  $D = \{(x, y) | (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 2\}$ , 比较以下两个积分大小:

$$I_1 = \iint_D (x+y)^2 d\sigma, \quad I_2 = \iint_D (x+y)^3 d\sigma$$

解

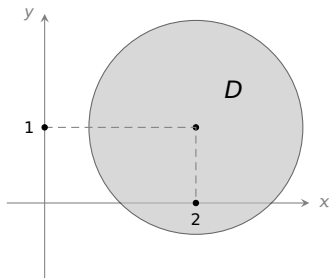




例 设  $D = \{(x, y) | (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 2\}$ , 比较以下两个积分大小:

$$I_1 = \iint_D (x+y)^2 d\sigma, \quad I_2 = \iint_D (x+y)^3 d\sigma$$

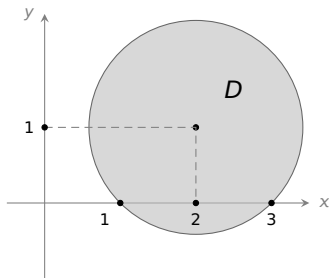
解



例 设  $D = \{(x, y) | (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 2\}$ , 比较以下两个积分大小:

$$I_1 = \iint_D (x+y)^2 d\sigma, \quad I_2 = \iint_D (x+y)^3 d\sigma$$

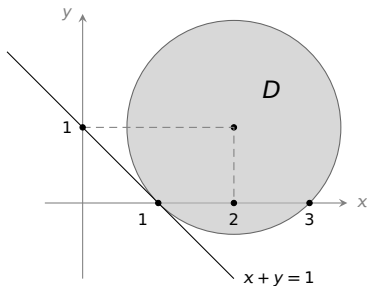
解



例 设  $D = \{(x, y) | (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 2\}$ , 比较以下两个积分大小:

$$I_1 = \iint_D (x+y)^2 d\sigma, \quad I_2 = \iint_D (x+y)^3 d\sigma$$

解



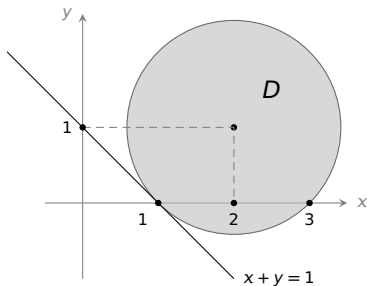
例 设  $D = \{(x, y) | (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 2\}$ , 比较以下两个积分大小:

$$I_1 = \iint_D (x+y)^2 d\sigma, \quad I_2 = \iint_D (x+y)^3 d\sigma$$

解

如图, 在区域  $D$  上成立

$$x+y \geq 1$$



例 设  $D = \{(x, y) | (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 2\}$ , 比较以下两个积分大小:

$$I_1 = \iint_D (x+y)^2 d\sigma, \quad I_2 = \iint_D (x+y)^3 d\sigma$$

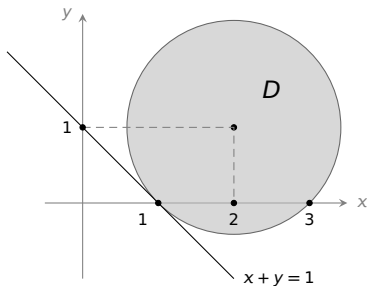
解

如图, 在区域  $D$  上成立

$$x+y \geq 1$$

所以

$$(x+y)^2 \leq (x+y)^3$$



例 设  $D = \{(x, y) | (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 2\}$ , 比较以下两个积分大小:

$$I_1 = \iint_D (x+y)^2 d\sigma, \quad I_2 = \iint_D (x+y)^3 d\sigma$$

解

如图, 在区域  $D$  上成立

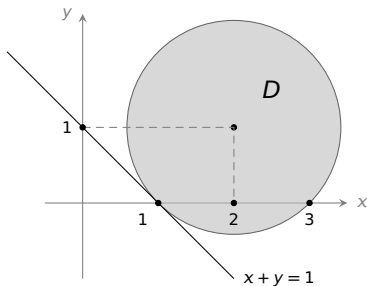
$$x+y \geq 1$$

所以

$$(x+y)^2 \leq (x+y)^3$$

所以

$$I_1 \leq I_2$$



## 二重积分的性质 (Cont.)

性质 6 (二重积分的中值定理) 设函数  $f(x, y)$  在闭区域  $D$  上连续,  $|D|$  是  $D$  的面积, 则在  $D$  上至少存在一点  $(\xi, \eta)$ , 使得

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) \cdot |D|.$$

## 二重积分的性质 (Cont.)

性质 6 (二重积分的中值定理) 设函数  $f(x, y)$  在闭区域  $D$  上连续,  $|D|$  是  $D$  的面积, 则在  $D$  上至少存在一点  $(\xi, \eta)$ , 使得

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) \cdot |D|.$$

证明

$$m \cdot |D| \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M \cdot |D|$$



## 二重积分的性质 (Cont.)

性质 6 (二重积分的中值定理) 设函数  $f(x, y)$  在闭区域  $D$  上连续,  $|D|$  是  $D$  的面积, 则在  $D$  上至少存在一点  $(\xi, \eta)$ , 使得

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) \cdot |D|.$$

证明

$$m \cdot |D| \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M \cdot |D| \quad \Rightarrow \quad m \leq \frac{1}{|D|} \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M$$

## 二重积分的性质 (Cont.)

**性质 6 (二重积分的中值定理)** 设函数  $f(x, y)$  在闭区域  $D$  上连续,  $|D|$  是  $D$  的面积, 则在  $D$  上至少存在一点  $(\xi, \eta)$ , 使得

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) \cdot |D|.$$

**证明** 因为

$$m \cdot |D| \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M \cdot |D| \Rightarrow m \leq \frac{1}{|D|} \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M$$

由闭区域上连续函数的中值定理可知: 存在  $(\xi, \eta) \in D$ , 使得

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{|D|} \iint_D f(x, y) d\sigma,$$

## 二重积分的性质 (Cont.)

**性质 6 (二重积分的中值定理)** 设函数  $f(x, y)$  在闭区域  $D$  上连续,  $|D|$  是  $D$  的面积, 则在  $D$  上至少存在一点  $(\xi, \eta)$ , 使得

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) \cdot |D|.$$

**证明** 因为

$$m \cdot |D| \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M \cdot |D| \Rightarrow m \leq \frac{1}{|D|} \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M$$

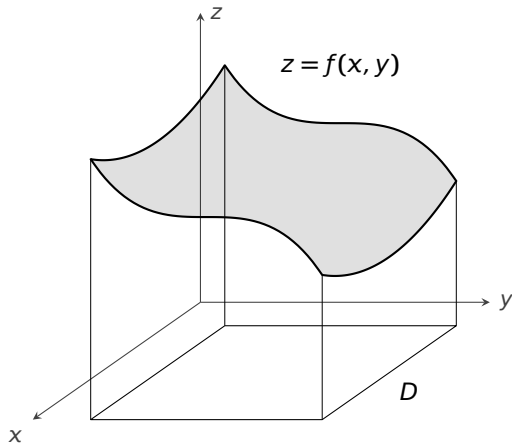
由闭区域上连续函数的中值定理可知: 存在  $(\xi, \eta) \in D$ , 使得

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{|D|} \iint_D f(x, y) d\sigma,$$

即

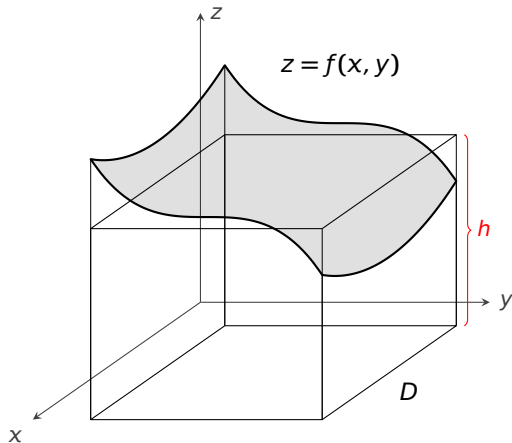
$$\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) \cdot |D|.$$

## 二重积分中值定理的几何直观



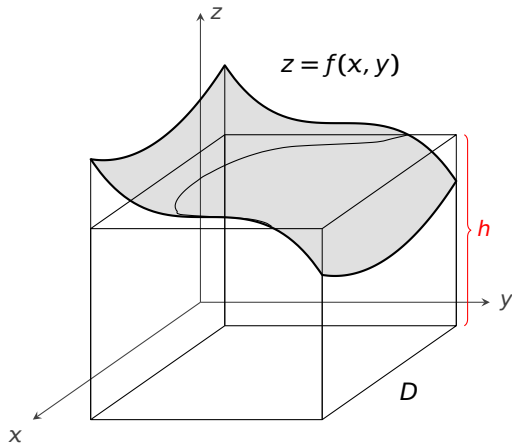
$$\iint_D f(x, y) d\sigma$$

## 二重积分中值定理的几何直观



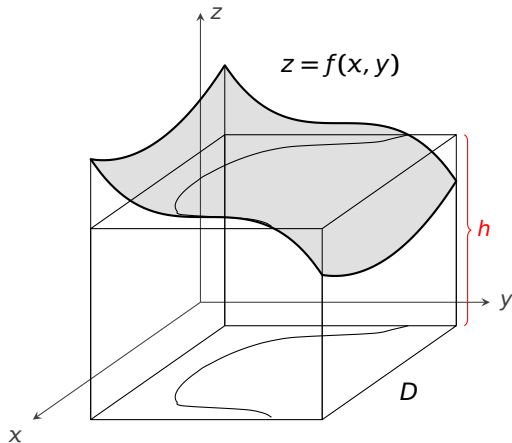
$$\iint_D f(x, y) d\sigma = h|D|$$

## 二重积分中值定理的几何直观



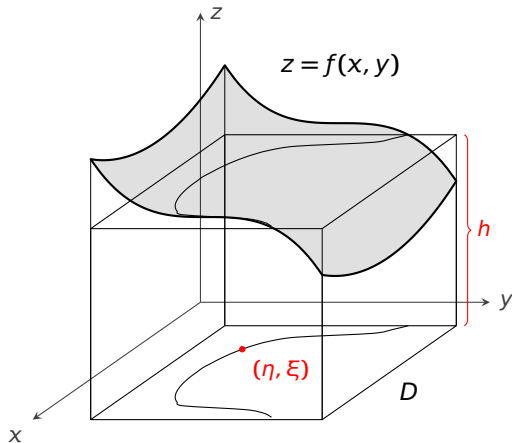
$$\iint_D f(x, y) d\sigma = h|D|$$

## 二重积分中值定理的几何直观



$$\iint_D f(x, y) d\sigma = h|D|$$

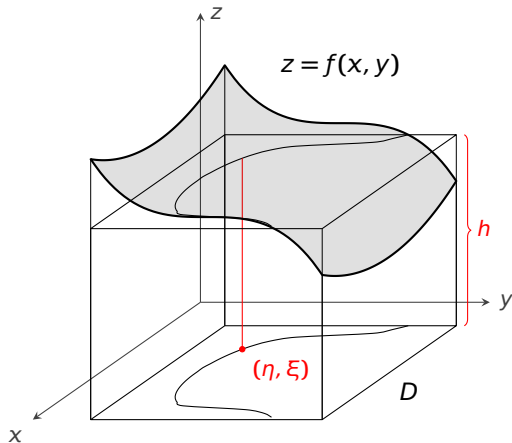
## 二重积分中值定理的几何直观



$$\iint_D f(x, y) d\sigma = h|D|$$

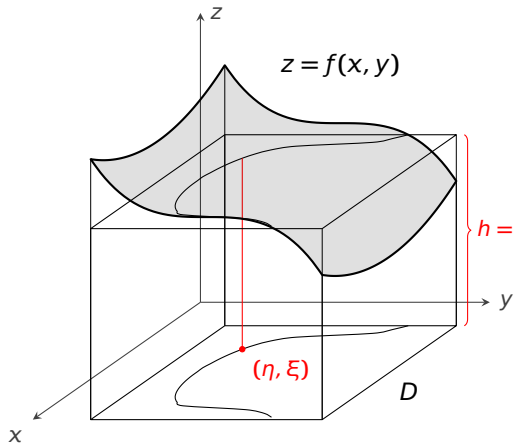


## 二重积分中值定理的几何直观



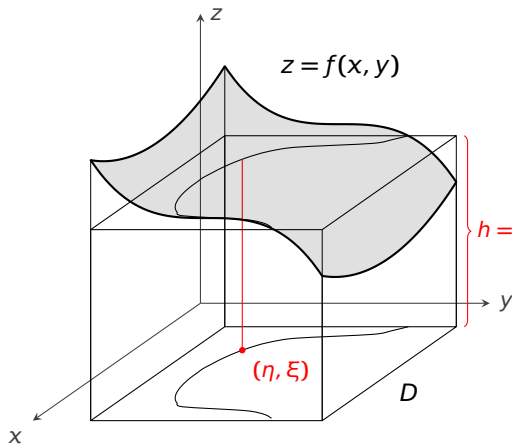
$$\iint_D f(x, y) d\sigma = h|D|$$

## 二重积分中值定理的几何直观



$$\iint_D f(x, y) d\sigma = h|D|$$

## 二重积分中值定理的几何直观



$$\iint_D f(x, y) d\sigma = h|D|$$
$$= f(\xi, \eta)|D|$$

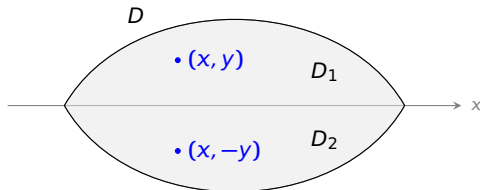
# 积分的对称性

性质 设闭区域  $D$  关于  $x$  轴对称,



# 积分的对称性

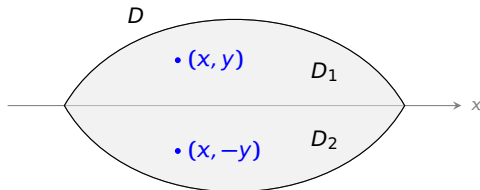
性质 设闭区域  $D$  关于  $x$  轴对称,



# 积分的对称性

性质 设闭区域  $D$  关于  $x$  轴对称,

- 若  $f(x, y)$  关于  $y$  是奇函数 (即:  $f(x, -y) = -f(x, y)$ ), 则

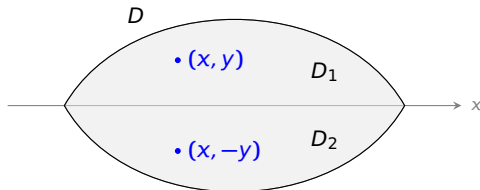


# 积分的对称性

性质 设闭区域  $D$  关于  $x$  轴对称,

- 若  $f(x, y)$  关于  $y$  是奇函数 (即:  $f(x, -y) = -f(x, y)$ ), 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = 0$$



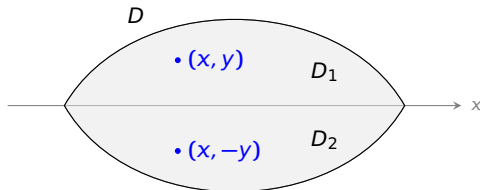
# 积分的对称性

**性质** 设闭区域  $D$  关于  $x$  轴对称,

- 若  $f(x, y)$  关于  $y$  是奇函数 (即:  $f(x, -y) = -f(x, y)$ ), 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = 0$$

- 若  $f(x, y)$  关于  $y$  是偶函数 (即:  $f(x, -y) = f(x, y)$ ), 则





# 积分的对称性

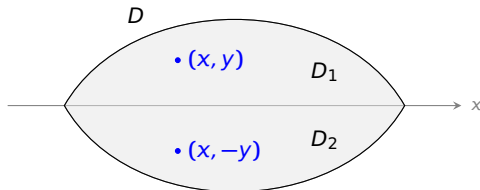
**性质** 设闭区域  $D$  关于  $x$  轴对称,

- 若  $f(x, y)$  关于  $y$  是奇函数 (即:  $f(x, -y) = -f(x, y)$ ), 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = 0$$

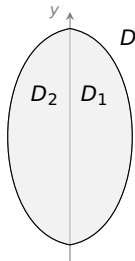
- 若  $f(x, y)$  关于  $y$  是偶函数 (即:  $f(x, -y) = f(x, y)$ ), 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = 2 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma = 2 \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma$$



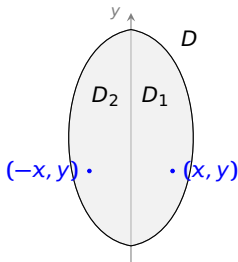
# 积分的对称性

性质 设闭区域  $D$  关于  $y$  轴对称,



# 积分的对称性

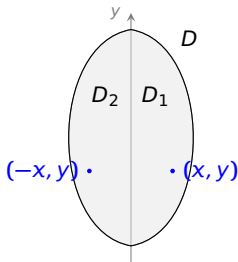
性质 设闭区域  $D$  关于  $y$  轴对称,



# 积分的对称性

性质 设闭区域  $D$  关于  $y$  轴对称,

- 若  $f(x, y)$  关于  $x$  是奇函数 (即:  $f(-x, y) = -f(x, y)$ ), 则

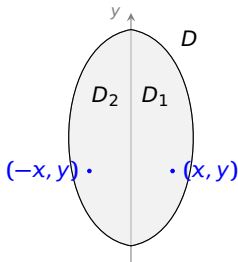


# 积分的对称性

性质 设闭区域  $D$  关于  $y$  轴对称,

- 若  $f(x, y)$  关于  $x$  是奇函数 (即:  $f(-x, y) = -f(x, y)$ ), 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = 0$$



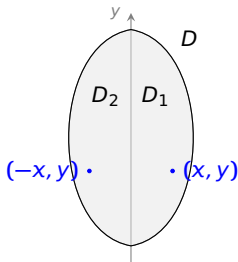
# 积分的对称性

性质 设闭区域  $D$  关于  $y$  轴对称,

- 若  $f(x, y)$  关于  $x$  是奇函数 (即:  $f(-x, y) = -f(x, y)$ ), 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = 0$$

- 若  $f(x, y)$  关于  $x$  是偶函数 (即:  $f(-x, y) = f(x, y)$ ), 则



# 积分的对称性

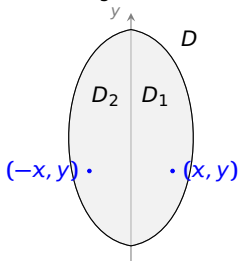
性质 设闭区域  $D$  关于  $y$  轴对称,

- 若  $f(x, y)$  关于  $x$  是奇函数 (即:  $f(-x, y) = -f(x, y)$ ), 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = 0$$

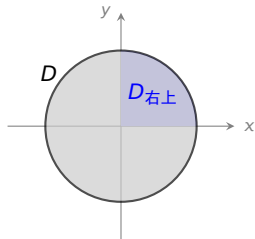
- 若  $f(x, y)$  关于  $x$  是偶函数 (即:  $f(-x, y) = f(x, y)$ ), 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = 2 \iint_{D_3} f(x, y) d\sigma = 2 \iint_{D_4} f(x, y) d\sigma$$



例 设  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ , 则

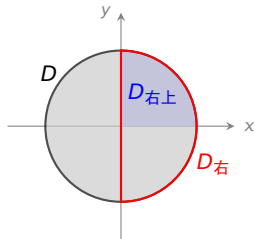
$$\iint_D x^2 + y^2 d\sigma = 4 \iint_{D_{\text{右上}}} x^2 + y^2 d\sigma$$





例 设  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ , 则

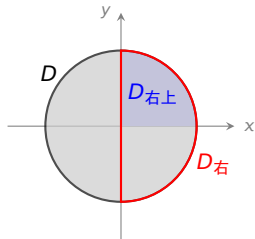
$$\iint_D x^2 + y^2 d\sigma = 4 \iint_{D_{\text{右上}}} x^2 + y^2 d\sigma$$



解  $\iint_D x^2 + y^2 d\sigma = 2 \iint_{D_{\text{右}}} x^2 + y^2 d\sigma$

例 设  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ , 则

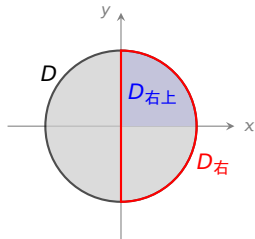
$$\iint_D x^2 + y^2 d\sigma = 4 \iint_{D_{\text{右上}}} x^2 + y^2 d\sigma$$



解  $\iint_D x^2 + y^2 d\sigma = 2 \iint_{D_{\text{右}}} x^2 + y^2 d\sigma = 2 \cdot 2 \iint_{D_{\text{右上}}} x^2 + y^2 d\sigma.$

例 设  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ , 则

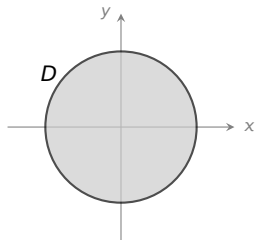
$$\iint_D x^2 + y^2 d\sigma = 4 \iint_{D_{\text{右上}}} x^2 + y^2 d\sigma$$



解  $\iint_D x^2 + y^2 d\sigma = 2 \iint_{D_{\text{右}}} x^2 + y^2 d\sigma = 2 \cdot 2 \iint_{D_{\text{右上}}} x^2 + y^2 d\sigma.$

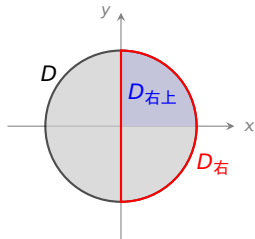
---

例 计算  $\iint_D (2x + 3y\sqrt{1-x^2}) d\sigma$ ,  
其中  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$



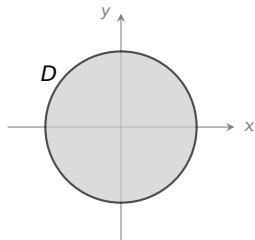
例 设  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ , 则

$$\iint_D x^2 + y^2 d\sigma = 4 \iint_{D_{\text{右上}}} x^2 + y^2 d\sigma$$



解  $\iint_D x^2 + y^2 d\sigma = 2 \iint_{D_{\text{右}}} x^2 + y^2 d\sigma = 2 \cdot 2 \iint_{D_{\text{右上}}} x^2 + y^2 d\sigma.$

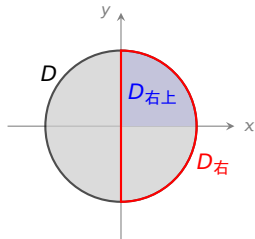
例 计算  $\iint_D (2x + 3y\sqrt{1-x^2}) d\sigma$ ,  
其中  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$



解 原式  $= 2 \iint_D x d\sigma + 3 \iint_D y\sqrt{1-x^2} d\sigma$

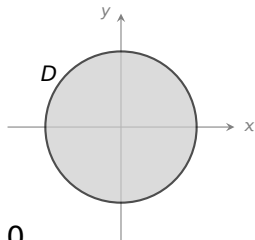
例 设  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ , 则

$$\iint_D x^2 + y^2 d\sigma = 4 \iint_{D_{\text{右上}}} x^2 + y^2 d\sigma$$



解  $\iint_D x^2 + y^2 d\sigma = 2 \iint_{D_{\text{右}}} x^2 + y^2 d\sigma = 2 \cdot 2 \iint_{D_{\text{右上}}} x^2 + y^2 d\sigma.$

例 计算  $\iint_D (2x + 3y\sqrt{1-x^2}) d\sigma$ ,  
其中  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$



解 原式  $= 2 \iint_D x d\sigma + 3 \iint_D y\sqrt{1-x^2} d\sigma = 0.$