第 01 周作业解答

练习 1. 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$ 和 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$.

解

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 1 \times (-4) - (-2) \times 3 = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot (-2) \\ -1 \cdot (-2) \cdot (-2) - 2 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 3 \end{array} = -40$$

练习 2. 当 x 为何值时，$\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} \neq 0$?

解

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x(3x + 0 + 0 - 0 - 4 - x) = 2x(x-2)$$

所以 $x \neq 0$ 且 $x \neq 2$。

练习 3. 求平面上直线 $x + 5y = -7$ 和 $x - 2y = -2$ 的交点。

解交点是方程组 $\begin{cases} x + 5y = -7 \\ x - 2y = -2 \end{cases}$ 的解。解得 $x = \dfrac{\begin{vmatrix} -7 & 5 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = -\frac{24}{7}$，$y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = -\frac{5}{7}$。所以交点是 $(-\frac{24}{7}, -\frac{5}{7})$。

练习 4. 利用公式求解三元线性方程组

$$\begin{cases} x & +y & +z & = 6 \\ x & +2y & -z & = 2 \\ 2x & -3y & -z & = -7 \end{cases}$$

解 (1)

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = (-2) + (-2) + (-3) - 3 - (-1) - 4 = -13$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -7 & -3 & -1 \end{vmatrix} = (-12) + 7 + (-6) - 18 - (-2) - (-14) = -13$$

所以 $x = 1$。

(2) 将 $x=1$ 代入方程 (1)、(2) 得：

$$\begin{cases} y + z = 5 \\ 2y - z = 1 \end{cases}$$

所以

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-6}{-3} = 2, \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{-9}{-3} = 3$$

总结 $x=1, y=2, z=3$。

练习 5. 求一个 2 次多项式 $p(t)=a_0+a_1t+a_2t^2$，满足 $p(1)=12$，$p(2)=15$，$p(3)=16$。

解列方程

$$\begin{cases} a_0+a_1+a_2=12 \\ a_0+2a_1+4a_2=15 \\ a_0+3a_1+9a_2=16 \end{cases}$$

所以 $a_0=\frac{D_0}{D}=\frac{14}{2}=7$，$a_1=\frac{D_1}{D}=\frac{12}{2}=6$，$a_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-2}{2}=-1$。所以 $p(t)=7+6t-t^2$。

练习 6. 设三阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=6$。利用行列式的性质计算：以下两个行列式分别是多少？

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}-2a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23}-2a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33}-2a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{12} & a_{13} \\ 3a_{21} & 6a_{22} & 3a_{23} \\ a_{31} & 2a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

解利用行列式的基本性质，可得：

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}-2a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23}-2a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33}-2a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{可加性}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} + \underbrace{\cancel{\begin{vmatrix} a_{11} & -2a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -2a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & -2a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}}_{\text{两列成比例，故为零}} \xlongequal{\text{交换2, 3列}} -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -6$$

以及

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{12} & a_{13} \\ 3a_{21} & 6a_{22} & 3a_{23} \\ a_{31} & 2a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{数乘性}} 3\begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 2a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 2a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{数乘性}} 3\cdot 2\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 3\cdot 2\cdot 6 = 36$$

练习 7. 假设 x_1, x_2, x_3 是方程

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

的解。试利用行列式的性质证明：

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = x_1\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} = x_2\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} = x_3\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

这是：

$$
\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 - x_2 c_2} \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{13}x_3 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}x_1 + a_{23}x_3 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}x_1 + a_{33}x_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal{c_1 - x_3 c_3} \begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}x_1 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}x_1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
$$

所以第一个等式得证。其余两个等式的证明类似。