第 10 章 a：重积分的概念和性质

数学系　梁卓滨

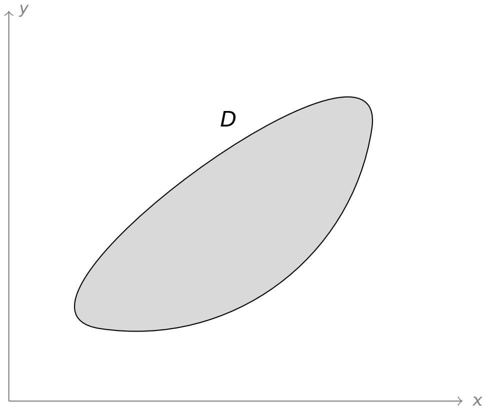
2019-2020 学年 II

Outline

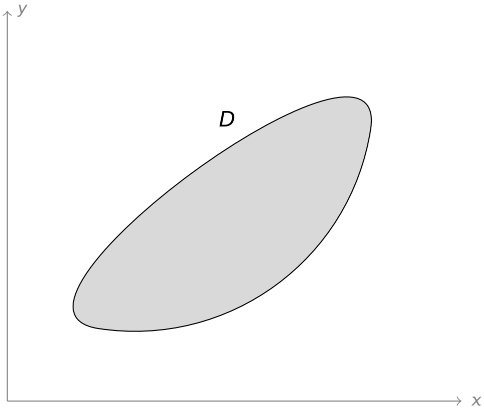
平面薄片的质量

假设

- 区域 D 为平面薄片
- 密度为 μ
- 质量为 m



平面薄片的质量

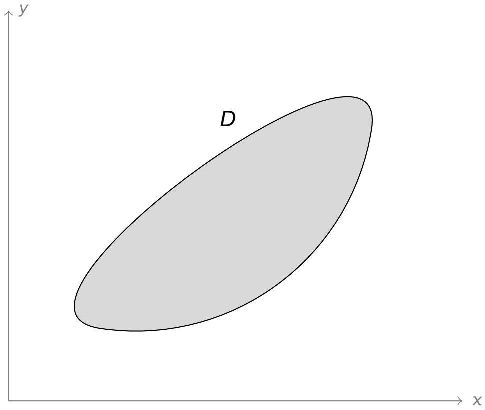


假设

- 区域 D 为平面薄片
- 密度为 μ
- 质量为 m

- 当薄片均匀时（$\mu =$ 常数），
- 当薄片非均匀时（$\mu = \mu(x, y)$ 为 D 上函数），

平面薄片的质量



假设

- 区域 D 为平面薄片
- 密度为 μ
- 质量为 m

- 当薄片均匀时（$\mu =$ 常数），

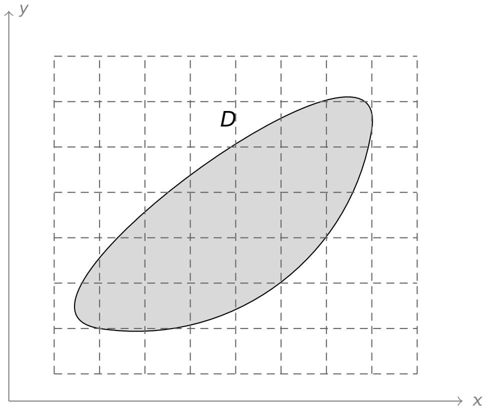
$$m = \mu \cdot \text{Area}(D)$$

- 当薄片非均匀时（$\mu = \mu(x, y)$ 为 D 上函数），

平面薄片的质量

假设

- 区域 D 为平面薄片
- 密度为 μ
- 质量为 m

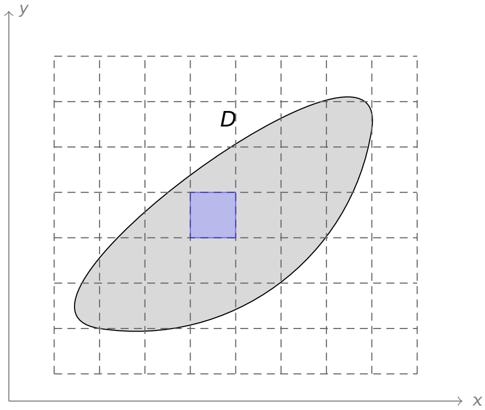


- 当薄片均匀时（$\mu =$ 常数），

$$m = \mu \cdot \text{Area}(D)$$

- 当薄片非均匀时（$\mu = \mu(x, y)$ 为 D 上函数），利用微元法可知

平面薄片的质量



假设

- 区域 D 为平面薄片
- 密度为 μ
- 质量为 m

- 当薄片均匀时（$\mu=$ 常数），

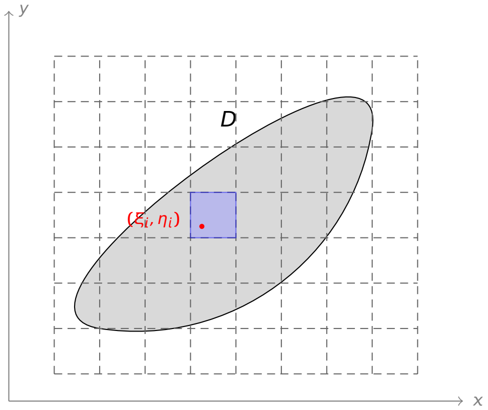
$$m=\mu\cdot\text{Area}(D)$$

- 当薄片非均匀时（$\mu=\mu(x,y)$ 为 D 上函数），利用微元法可知

平面薄片的质量

假设

- 区域 D 为平面薄片
- 密度为 μ
- 质量为 m



- 当薄片均匀时（$\mu =$ 常数），

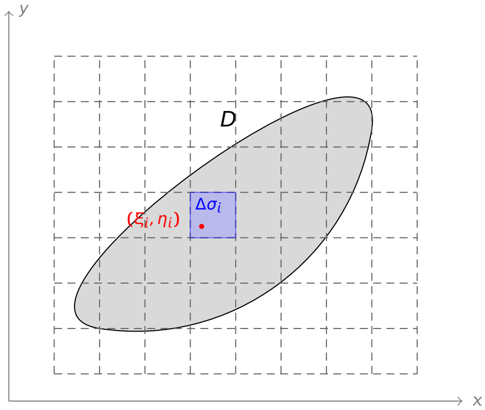
$$m = \mu \cdot \text{Area}(D)$$

- 当薄片非均匀时（$\mu = \mu(x, y)$ 为 D 上函数），利用微元法可知

平面薄片的质量

假设

- 区域 D 为平面薄片
- 密度为 μ
- 质量为 m



- 当薄片均匀时（$\mu =$ 常数），

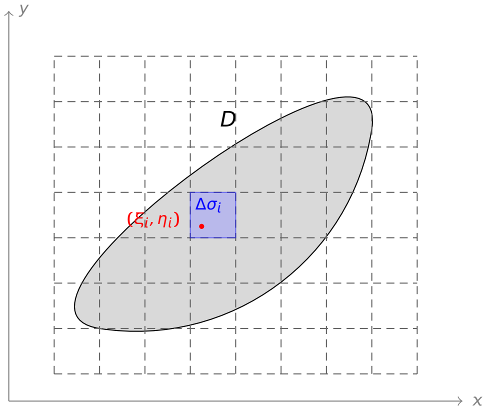
$$m = \mu \cdot \text{Area}(D)$$

- 当薄片非均匀时（$\mu = \mu(x, y)$ 为 D 上函数），利用微元法可知

平面薄片的质量

假设

- 区域 D 为平面薄片
- 密度为 μ
- 质量为 m



- 当薄片均匀时（$\mu =$ 常数），

$$m = \mu \cdot \text{Area}(D)$$

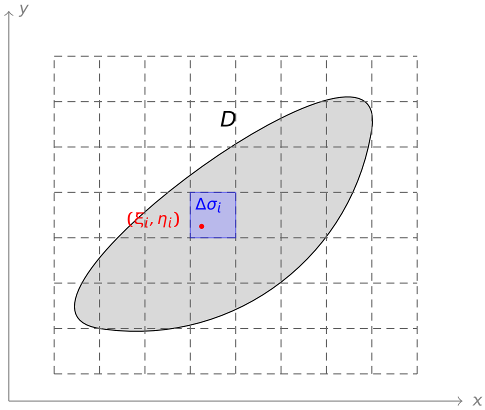
- 当薄片非均匀时（$\mu = \mu(x, y)$ 为 D 上函数），利用微元法可知

$$\mu(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

平面薄片的质量

假设

- 区域 D 为平面薄片
- 密度为 μ
- 质量为 m



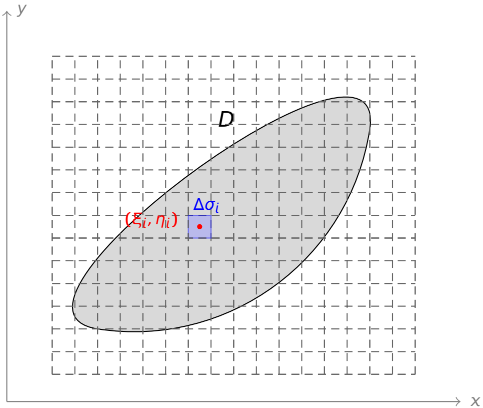
- 当薄片均匀时（$\mu =$ 常数），

$$m = \mu \cdot \mathrm{Area}(D)$$

- 当薄片非均匀时（$\mu = \mu(x, y)$ 为 D 上函数），利用微元法可知

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

平面薄片的质量



假设

- 区域 D 为平面薄片
- 密度为 μ
- 质量为 m

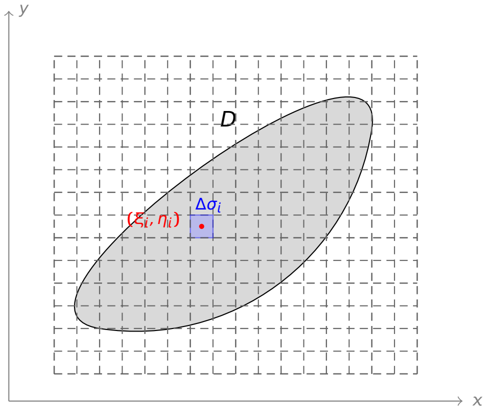
- 当薄片均匀时（$\mu=$ 常数），

$$m = \mu \cdot \mathrm{Area}(D)$$

- 当薄片非均匀时（$\mu = \mu(x, y)$ 为 D 上函数），利用微元法可知

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

平面薄片的质量



假设
- 区域 D 为平面薄片
- 密度为 μ
- 质量为 m

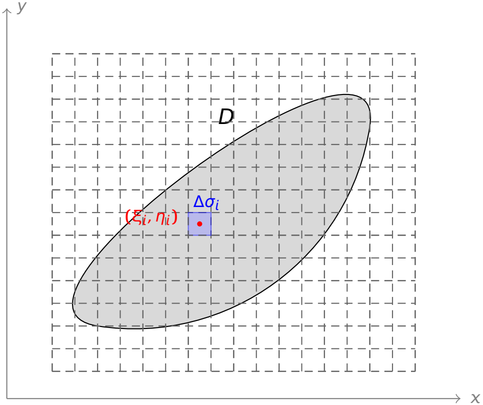
- 当薄片均匀时（$\mu =$ 常数），

$$m = \mu \cdot \text{Area}(D)$$

- 当薄片非均匀时（$\mu = \mu(x, y)$ 为 D 上函数），利用微元法可知

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \mu(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

平面薄片的质量



假设

- 区域 D 为平面薄片
- 密度为 μ
- 质量为 m

- 当薄片均匀时（$\mu =$ 常数），

$$m = \mu \cdot \mathrm{Area}(D)$$

- 当薄片非均匀时（$\mu = \mu(x, y)$ 为 D 上函数），利用微元法可知

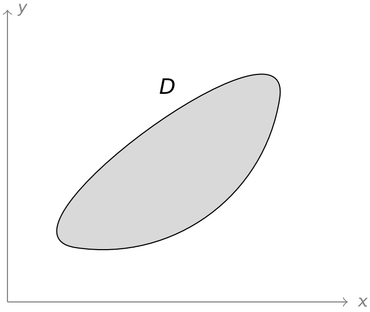
$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \mu(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

二重积分的定义

设

- D 是平面上有界闭区域，
- $f(x, y)$ 是 D 上的有界函数，

若

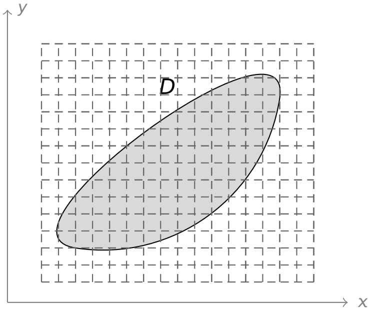


二重积分的定义

设

- D 是平面上有界闭区域，
- $f(x,y)$ 是 D 上的有界函数，

若

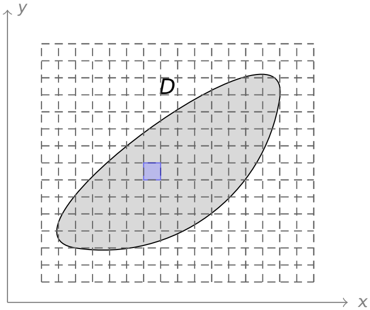


二重积分的定义

设

- D 是平面上有界闭区域，
- $f(x, y)$ 是 D 上的有界函数，

若

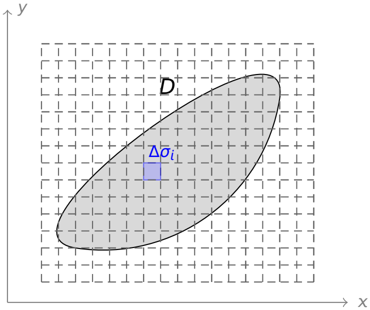


二重积分的定义

设

- D 是平面上有界闭区域，
- $f(x, y)$ 是 D 上的有界函数，

若

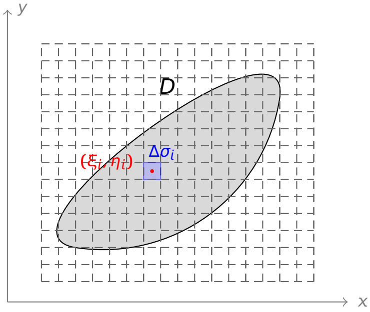


二重积分的定义

设

- D 是平面上有界闭区域，
- $f(x,y)$ 是 D 上的有界函数，

若



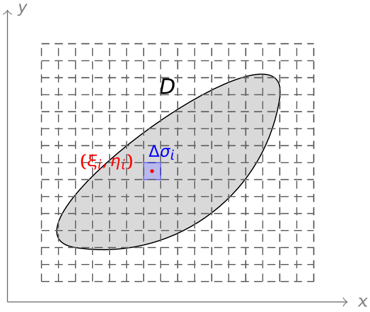
二重积分的定义

设

- D 是平面上有界闭区域，
- $f(x,y)$ 是 D 上的有界函数，

若

$$f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$



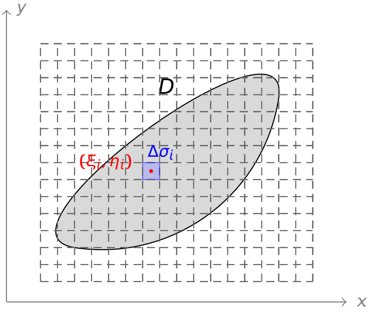
二重积分的定义

设

- D 是平面上有界闭区域，
- $f(x, y)$ 是 D 上的有界函数，

若

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$



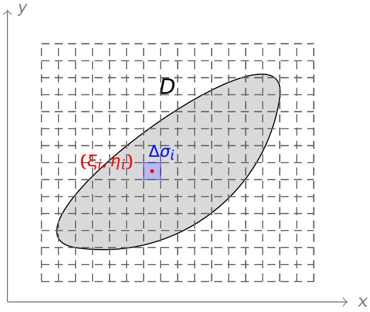
二重积分的定义

设

- D 是平面上有界闭区域，
- $f(x, y)$ 是 D 上的有界函数，

若

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$



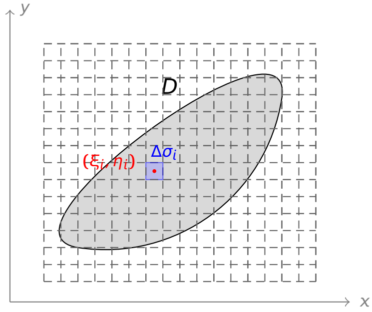
二重积分的定义

设

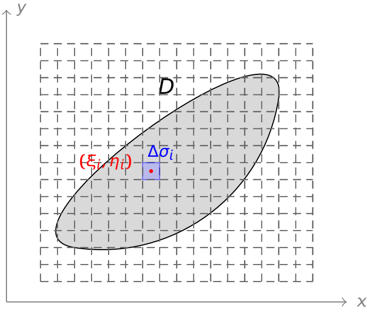
- D 是平面上有界闭区域，
- $f(x,y)$ 是 D 上的有界函数，

若

- 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$存在，



二重积分的定义



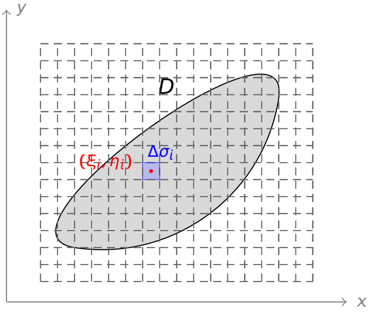
设

- D 是平面上有界闭区域，
- $f(x, y)$ 是 D 上的有界函数，

若

- 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$存在，且极限
- 与上述 D 的划分、(ξ_i, η_i) 的选取无关，

二重积分的定义



设

- D 是平面上有界闭区域，
- $f(x,y)$ 是 D 上的有界函数，

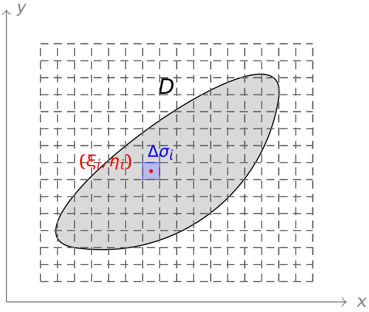
若

- 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$存在，且极限
- 与上述 D 的划分、$(\xi_i,\ \eta_i)$ 的选取无关，

则定义

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

二重积分的定义



设

- D 是平面上有界闭区域，
- $f(x,y)$ 是 D 上的有界函数，

若

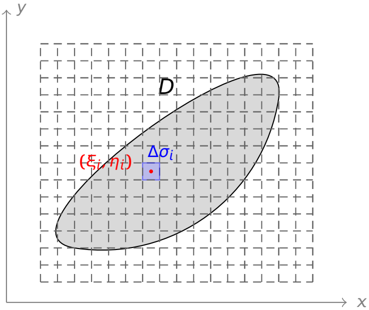
- 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$存在，且极限
- 与上述 D 的划分、$(\xi_i,\ \eta_i)$ 的选取无关，

则定义

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

称为 $f(x,y)$ 在 D 上的**二重积分**.

二重积分的定义



设

- D 是平面上有界闭区域，
- $f(x, y)$ 是 D 上的有界函数，

若

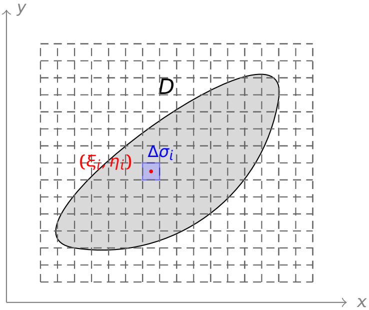
- 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$存在，且极限
- 与上述 D 的划分、$(\xi_i,\ \eta_i)$ 的选取无关，

则定义

$$\iint_D f(x, y)d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

称为 $f(x, y)$ 在 D 上的 **二重积分** .$d\sigma$ 称为 **面积元素** .

二重积分的定义



设

- D 是平面上有界闭区域，
- $f(x,y)$ 是 D 上的有界函数，

若

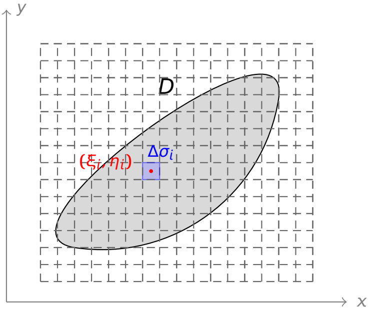
- 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 存在，且极限
- 与上述 D 的划分、$(\xi_i,\ \eta_i)$ 的选取无关，

则定义

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

称为 $f(x,y)$ 在 D 上的**二重积分** .$d\sigma$ 称为**面积元素**．（$d\sigma = dxdy$）

二重积分的定义



设

- D 是平面上有界闭区域，
- $f(x,y)$ 是 D 上的有界函数，

若

- 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$存在，且极限
- 与上述 D 的划分、$(\xi_i,\ \eta_i)$ 的选取无关，

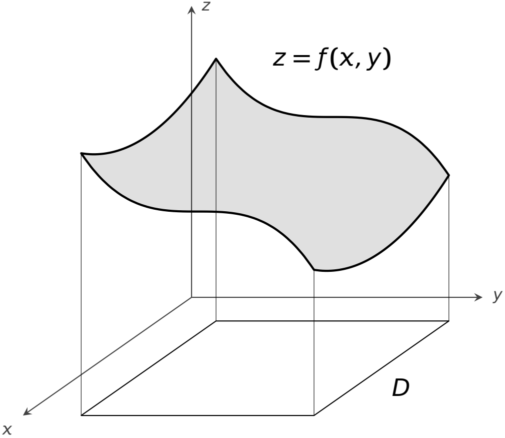
则定义

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

称为 $f(x,y)$ 在 D 上的**二重积分** .$d\sigma$ 称为**面积元素**．（$d\sigma = dxdy$）

定理 若 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则 $\iint_D f(x,y)d\sigma$ 存在.

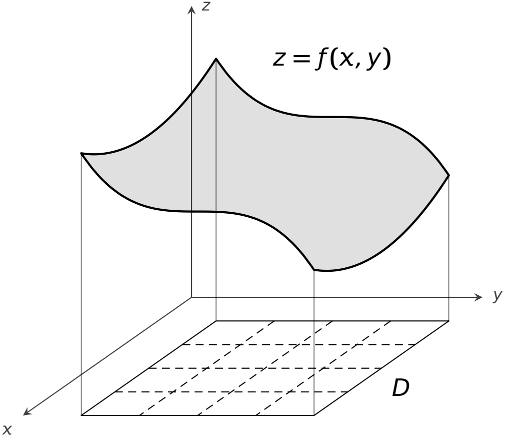
二重积分的几何意义



曲顶柱体的体积：

$$V$$

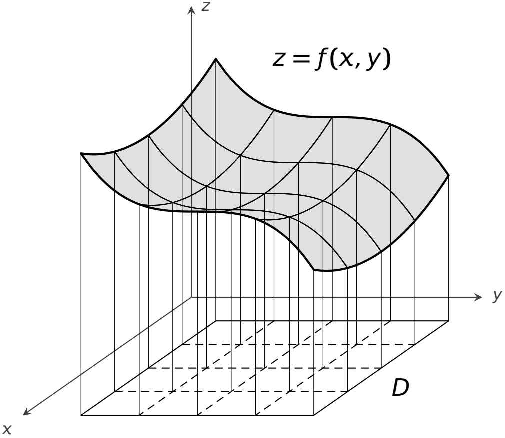
二重积分的几何意义



曲顶柱体的体积：

$$V$$

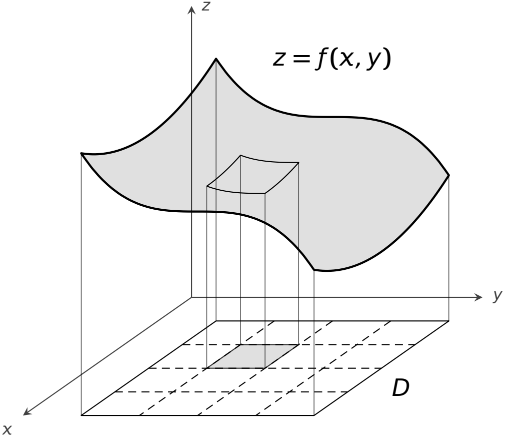
二重积分的几何意义



曲顶柱体的体积：

$$V$$

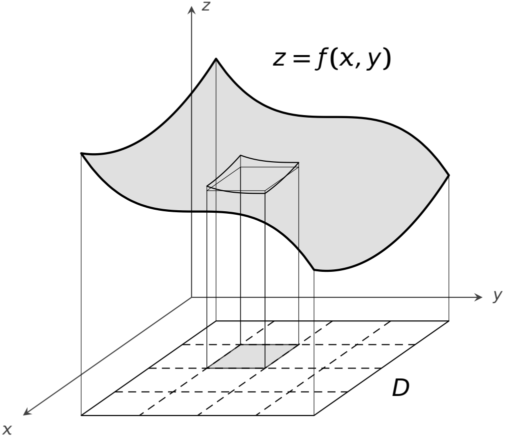
二重积分的几何意义



曲顶柱体的体积：

$$V$$

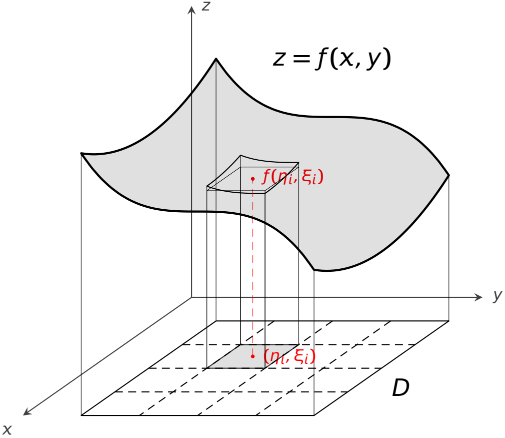
二重积分的几何意义



曲顶柱体的体积：

$$V$$

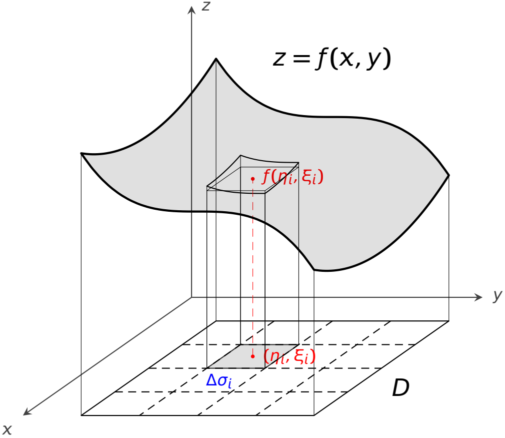
二重积分的几何意义



曲顶柱体的体积：

$$V$$

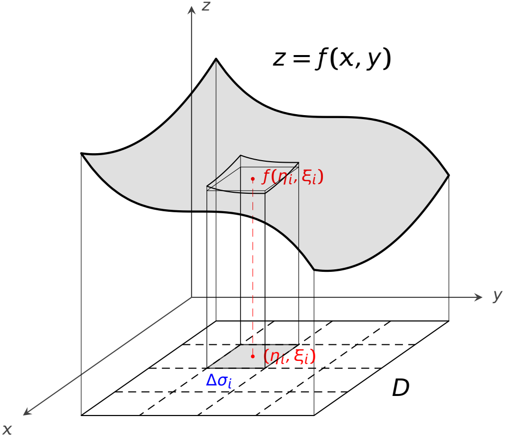
二重积分的几何意义



曲顶柱体的体积：

$$V$$

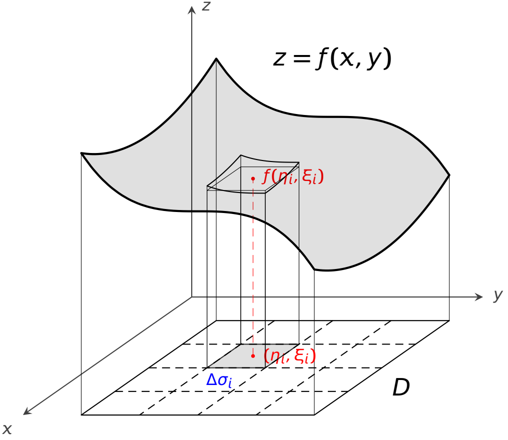
二重积分的几何意义



曲顶柱体的体积：

$$V \qquad\qquad f(\eta_i, \xi_i)\Delta\sigma_i$$

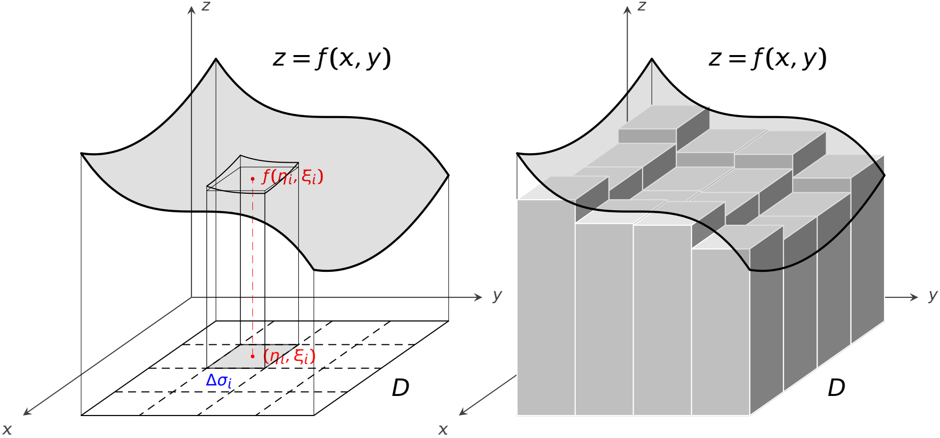
二重积分的几何意义



曲顶柱体的体积：

$$V \qquad \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i, \xi_i)\Delta\sigma_i$$

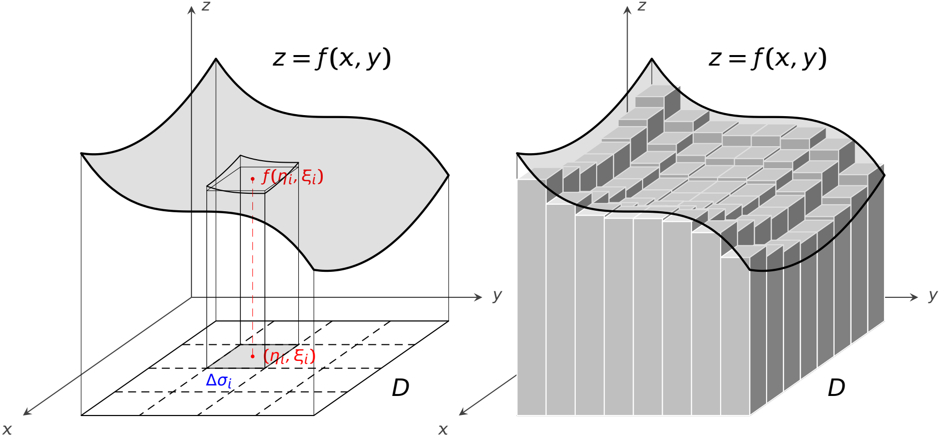
二重积分的几何意义



曲顶柱体的体积：

$$V \qquad \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i,\ \xi_i)\Delta\sigma_i$$

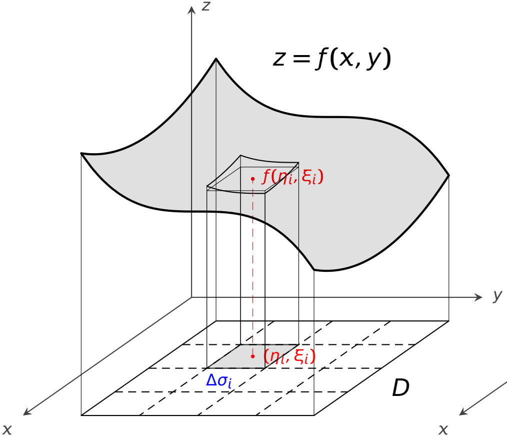
二重积分的几何意义

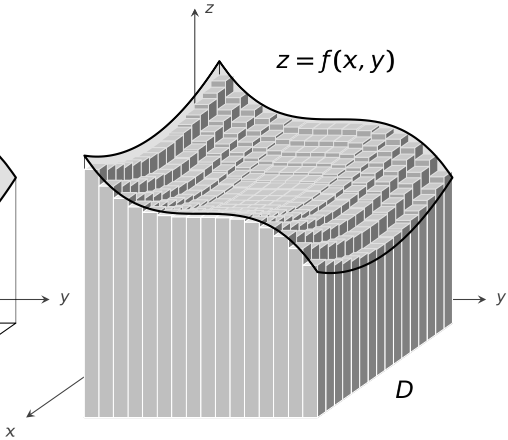


曲顶柱体的体积：

$$V \qquad \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i,\ \xi_i)\Delta\sigma_i$$

二重积分的几何意义

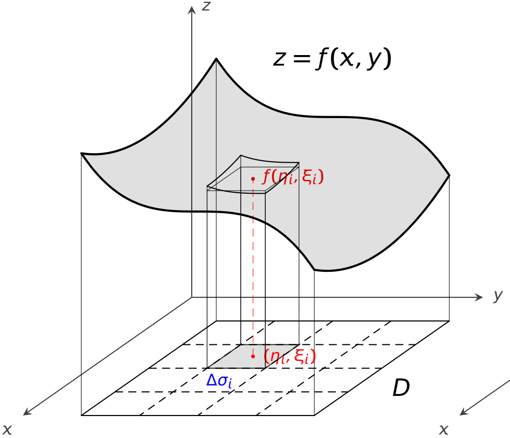


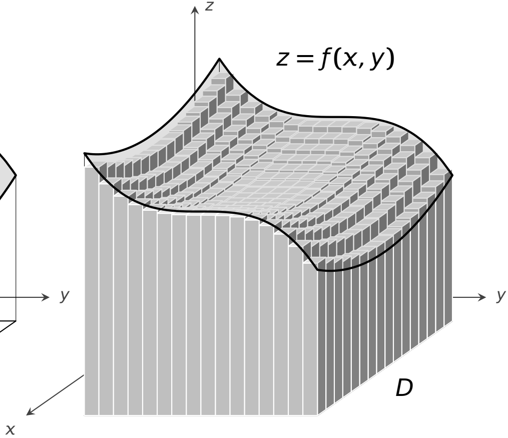


曲顶柱体的体积：

$$V \qquad \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i,\ \xi_i)\Delta\sigma_i$$

二重积分的几何意义

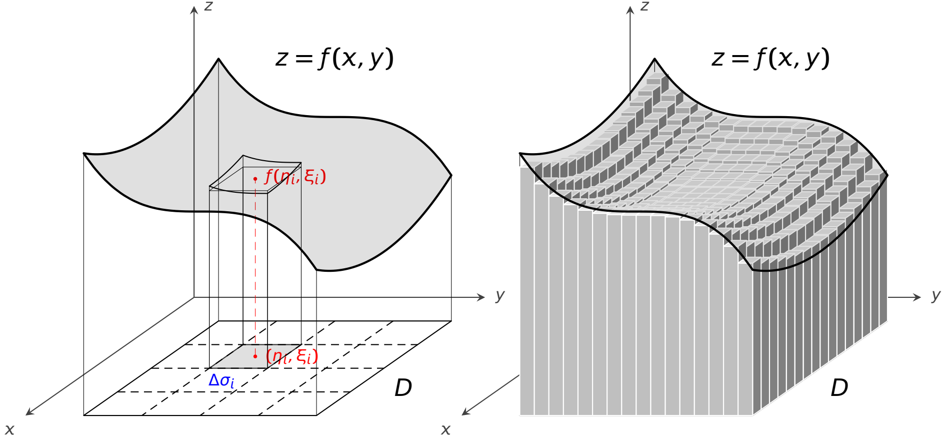




曲顶柱体的体积：

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i, \xi_i) \Delta\sigma_i$$

二重积分的几何意义



曲顶柱体的体积：

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i,\, \xi_i)\Delta\sigma_i = \iint_D f(x,\, y)d\sigma$$

二重积分的性质

性质 1（线性性）

$$\iint_D \alpha f(x,y)+\beta g(x,y)d\sigma = \alpha\iint_D f(x,y)d\sigma + \beta\iint_D g(x,y)d\sigma,$$

其中 α, β 是常数.

二重积分的性质

性质 1（线性性）

$\iint_D \alpha f(x,y)+\beta g(x,y)d\sigma=\alpha\iint_D f(x,y)d\sigma+\beta\iint_D g(x,y)d\sigma$，

其中 α, β 是常数.

证明

$$\iint_D \alpha f(x,y)+\beta g(x,y)d\sigma$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[\alpha f(\xi_i,\eta_i)+\beta g(\xi_i,\eta_i)]\,\Delta\sigma_i$$

二重积分的性质

性质 1（线性性）

$\iint_D \alpha f(x, y) + \beta g(x, y) d\sigma = \alpha \iint_D f(x, y) d\sigma + \beta \iint_D g(x, y) d\sigma$，

其中 α, β 是常数.

证明

$$\iint_D \alpha f(x, y) + \beta g(x, y) d\sigma$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} [\alpha f(\xi_i, \eta_i) + \beta g(\xi_i, \eta_i)] \Delta\sigma_i$$

$$= \alpha \cdot \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i + \beta \cdot \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

二重积分的性质

性质 1（线性性）
$\iint_D \alpha f(x, y) + \beta g(x, y) d\sigma = \alpha \iint_D f(x, y) d\sigma + \beta \iint_D g(x, y) d\sigma$，其中 α, β 是常数.

证明

$$\iint_D \alpha f(x, y) + \beta g(x, y) d\sigma$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} [\alpha f(\xi_i, \eta_i) + \beta g(\xi_i, \eta_i)] \Delta\sigma_i$$

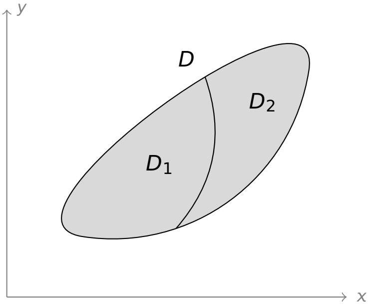
$$= \alpha \cdot \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i + \beta \cdot \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

$$= \alpha \iint_D f(x, y) d\sigma + \beta \iint_D g(x, y) d\sigma$$

二重积分的性质 (Cont.)

性质 2（积分可加性） 将 D 划分成两部分 D_1 和 D_2，则

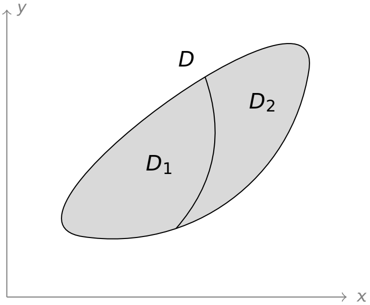
$$\iint_D f(x, y)d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y)d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y)d\sigma.$$

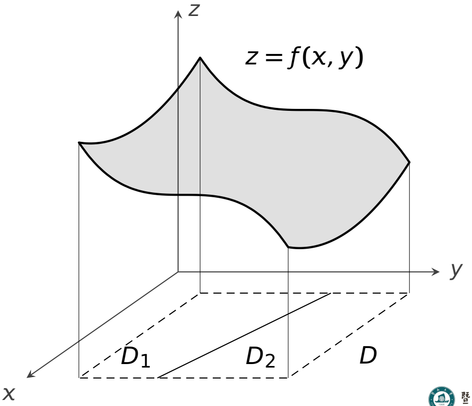


二重积分的性质 (Cont.)

性质 2（积分可加性） 将 D 划分成两部分 D_1 和 D_2，则

$$\iint_D f(x, y)d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y)d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y)d\sigma.$$

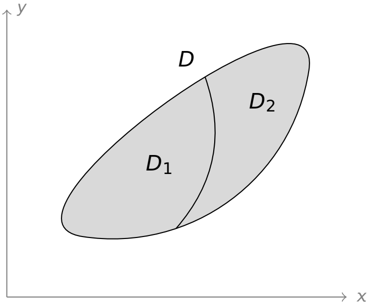


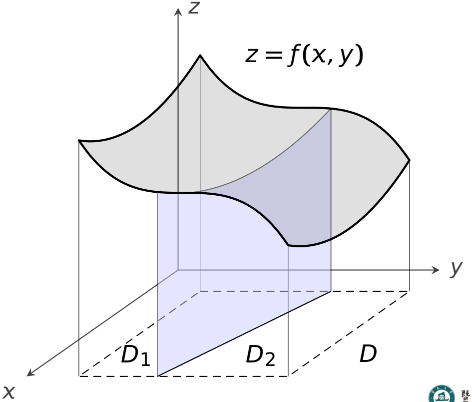


二重积分的性质 (Cont.)

性质 2（积分可加性） 将 D 划分成两部分 D_1 和 D_2，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)d\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)d\sigma.$$



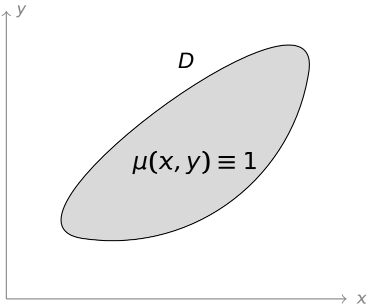


二重积分的性质 (Cont.)

性质 3 $\iint_D 1 d\sigma = |D|$（D 的面积）.

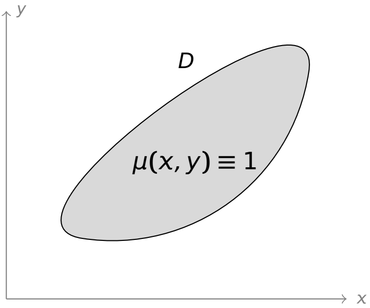
二重积分的性质 (Cont.)

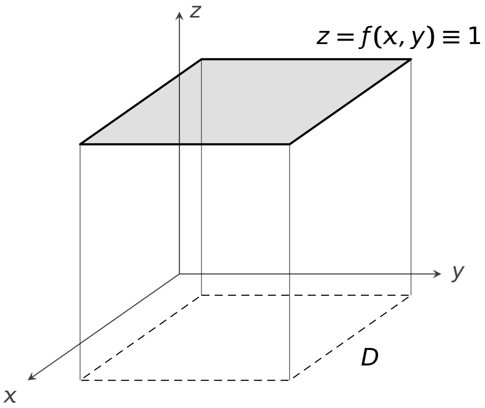
性质 3 $\iint_D 1 d\sigma = |D|$（D 的面积）.



二重积分的性质 (Cont.)

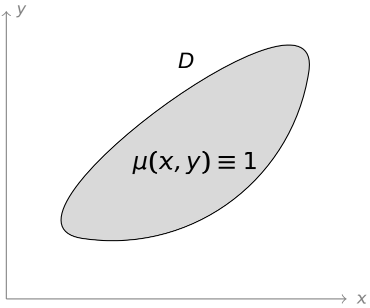
性质 3 $\iint_D 1 d\sigma = |D|$（D 的面积）.

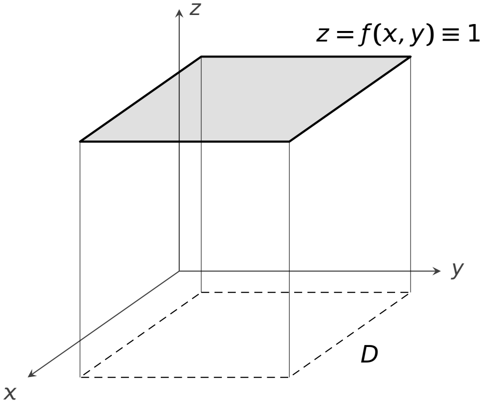




二重积分的性质 (Cont.)

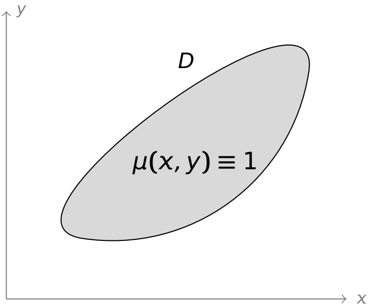
性质 3 $\iint_D 1 d\sigma = |D|$（D 的面积）．特别地，$\iint_D k d\sigma =$ ________．

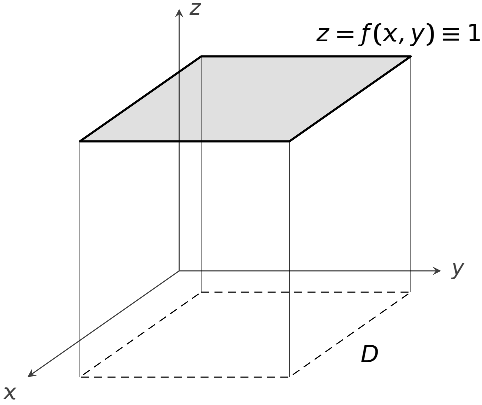




二重积分的性质 (Cont.)

性质 3 $\iint_D 1 d\sigma = |D|$（D 的面积）. 特别地，$\iint_D k d\sigma = k|D|$.





二重积分的性质 (Cont.)

性质 4 如果在 D 上成立 $f(x, y) \leq g(x, y)$，则

$$\iint_D f(x, y)d\sigma \leq \iint_D g(x, y)d\sigma.$$

二重积分的性质 (Cont.)

性质 4 如果在 D 上成立 $f(x, y) \le g(x, y)$，则

$$\iint_D f(x, y)d\sigma \le \iint_D g(x, y)d\sigma.$$

性质 5 假设在 D 上成立 $m \le f(x, y) \le M$，则

$$m\sigma \le \iint_D f(x, y)d\sigma \le M\sigma,$$

二重积分的性质 (Cont.)

性质 4 如果在 D 上成立 $f(x, y) \le g(x, y)$，则

$$\iint_D f(x, y)d\sigma \le \iint_D g(x, y)d\sigma.$$

性质 5 假设在 D 上成立 $m \le f(x, y) \le M$，则

$$m\sigma \le \iint_D f(x, y)d\sigma \le M\sigma, \qquad (\sigma\text{为}D\text{的面积}).$$

二重积分的性质 (Cont.)

性质 4 如果在 D 上成立 $f(x, y) \leq g(x, y)$，则

$$\iint_D f(x, y)d\sigma \leq \iint_D g(x, y)d\sigma.$$

性质 5 假设在 D 上成立 $m \leq f(x, y) \leq M$，则

$$m\sigma \leq \iint_D f(x, y)d\sigma \leq M\sigma, \qquad (\sigma\text{为}D\text{的面积}).$$

证明

$$\iint_D m d\sigma \leq \iint_D f(x, y)d\sigma \leq \iint_D M d\sigma$$

二重积分的性质 (Cont.)

性质 4 如果在 D 上成立 $f(x, y) \le g(x, y)$，则

$$\iint_D f(x, y)d\sigma \le \iint_D g(x, y)d\sigma.$$

性质 5 假设在 D 上成立 $m \le f(x, y) \le M$，则

$$m\sigma \le \iint_D f(x, y)d\sigma \le M\sigma, \qquad （\sigma\text{为}D\text{的面积}）.$$

证明

$$\iint_D m d\sigma \le \iint_D f(x, y)d\sigma \le \iint_D M d\sigma = M\sigma.$$

二重积分的性质 (Cont.)

性质 4 如果在 D 上成立 $f(x, y) \leq g(x, y)$，则

$$\iint_D f(x, y)d\sigma \leq \iint_D g(x, y)d\sigma.$$

性质 5 假设在 D 上成立 $m \leq f(x, y) \leq M$，则

$$m\sigma \leq \iint_D f(x, y)d\sigma \leq M\sigma, \qquad （\sigma为D的面积）.$$

证明

$$m\sigma = \iint_D m d\sigma \leq \iint_D f(x, y)d\sigma \leq \iint_D M d\sigma = M\sigma.$$

例 1 估计下列积分值的范围

1. $I=\iint_D(x^2+4y^2+9)d\sigma$，$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$
2. $I=\iint_D\frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$，$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$
3. $I=\iint_D\frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$，$D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 10\}$

例 1 估计下列积分值的范围

1. $I=\iint_D(x^2+4y^2+9)d\sigma$，$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$
2. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$，$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$
3. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$，$D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 10\}$

解

1. $9\le x^2+4y^2+9$

例 1 估计下列积分值的范围

1. $I=\iint_D(x^2+4y^2+9)d\sigma$，$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$
2. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$，$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$
3. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$，$D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 10\}$

解

1. $$9\le x^2+4y^2+9=(x^2+y^2)+3y^2+9$$

例 1 估计下列积分值的范围

1. $I=\iint_D(x^2+4y^2+9)d\sigma$，$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$
2. $I=\iint_D\frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$，$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$
3. $I=\iint_D\frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$，$D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 10\}$

解

1. $$9\le x^2+4y^2+9=(x^2+y^2)+3y^2+9\le 4+3\cdot 4+9$$

例 1 估计下列积分值的范围

1. $I=\iint_D(x^2+4y^2+9)d\sigma$，$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$
2. $I=\iint_D\frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$，$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$
3. $I=\iint_D\frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$，$D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 10\}$

解

1. $$9\le x^2+4y^2+9=(x^2+y^2)+3y^2+9\le 4+3\cdot 4+9=25$$

例 1 估计下列积分值的范围

1. $I=\iint_D(x^2+4y^2+9)d\sigma$，$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$
2. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$，$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$
3. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$，$D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 10\}$

解

1. $$9\le x^2+4y^2+9=(x^2+y^2)+3y^2+9\le 4+3\cdot 4+9=25$$

$$\Rightarrow\quad 9|D|\le I\le 25|D|$$

例 1 估计下列积分值的范围

1. $I=\iint_D(x^2+4y^2+9)d\sigma$，$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$
2. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$，$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$
3. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$，$D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 10\}$

解

1. $$9\le x^2+4y^2+9=(x^2+y^2)+3y^2+9\le 4+3\cdot 4+9=25$$

$$\Rightarrow \quad 9|D|\le I\le 25|D| \quad \xRightarrow{|D|=4\pi}$$

例 1 估计下列积分值的范围

1. $I=\iint_D (x^2+4y^2+9)d\sigma$，$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$
2. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$，$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\,0\le y\le 2\}$
3. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$，$D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 10\}$

解

1. $$9\le x^2+4y^2+9=(x^2+y^2)+3y^2+9\le 4+3\cdot 4+9=25$$

$$\Rightarrow \quad 9|D|\le I\le 25|D| \quad \xRightarrow{|D|=4\pi} \quad 36\pi\le I\le 100\pi$$

例 1 估计下列积分值的范围

1. $I=\iint_D(x^2+4y^2+9)d\sigma$，$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leq 4\}$
2. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$，$D=\{(x,y)\,|\,0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 2\}$
3. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$，$D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\leq 10\}$

解

1. $$9\leq x^2+4y^2+9=(x^2+y^2)+3y^2+9\leq 4+3\cdot 4+9=25$$

$$\Rightarrow\quad 9|D|\leq I\leq 25|D|\quad \xRightarrow{|D|=4\pi}\quad 36\pi\leq I\leq 100\pi$$

2. $$x^2+y^2+2xy+16$$

例 1 估计下列积分值的范围

1. $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9)d\sigma$，$D = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \le 4\}$
2. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$，$D = \{(x, y) \,|\, 0 \le x \le 1, \, 0 \le y \le 2\}$
3. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$，$D = \{(x, y) \,|\, |x| + |y| \le 10\}$

解

1. $$9 \le x^2 + 4y^2 + 9 = (x^2 + y^2) + 3y^2 + 9 \le 4 + 3 \cdot 4 + 9 = 25$$

$$\Rightarrow \quad 9|D| \le I \le 25|D| \quad \xRightarrow{|D|=4\pi} \quad 36\pi \le I \le 100\pi$$

2. $$x^2 + y^2 + 2xy + 16 = (x + y)^2 + 16$$

例 1 估计下列积分值的范围

1. $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9)d\sigma$，$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 4\}$
2. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$，$D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2\}$
3. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$，$D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \le 10\}$

解

1. $$9 \le x^2 + 4y^2 + 9 = (x^2 + y^2)+3y^2+9 \le 4+3\cdot4+9=25$$

$$\Rightarrow \quad 9|D| \le I \le 25|D| \quad \xRightarrow{|D|=4\pi} \quad 36\pi \le I \le 100\pi$$

2. $$16 \le x^2 + y^2 + 2xy + 16 = (x + y)^2 + 16$$

例 1 估计下列积分值的范围

1. $I=\iint_D (x^2+4y^2+9)d\sigma$，$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$
2. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$，$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$
3. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$，$D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 10\}$

解

1. $$9\le x^2+4y^2+9=(x^2+y^2)+3y^2+9\le 4+3\cdot 4+9=25$$

$$\Rightarrow \quad 9|D|\le I\le 25|D| \quad \xRightarrow{|D|=4\pi} \quad 36\pi\le I\le 100\pi$$

2. $$16\le x^2+y^2+2xy+16=(x+y)^2+16\le 3^2+16$$

例 1 估计下列积分值的范围

1. $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9)d\sigma$，$D = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \le 4\}$
2. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$，$D = \{(x, y) \,|\, 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2\}$
3. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$，$D = \{(x, y) \,|\, |x| + |y| \le 10\}$

解

1. $$9 \le x^2 + 4y^2 + 9 = (x^2 + y^2) + 3y^2 + 9 \le 4 + 3 \cdot 4 + 9 = 25$$

$$\Rightarrow \quad 9|D| \le I \le 25|D| \quad \xRightarrow{|D|=4\pi} \quad 36\pi \le I \le 100\pi$$

2. $$16 \le x^2 + y^2 + 2xy + 16 = (x + y)^2 + 16 \le 3^2 + 16 = 25$$

例 1 估计下列积分值的范围

1. $I=\iint_D(x^2+4y^2+9)d\sigma$，$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$
2. $I=\iint_D\frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$，$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$
3. $I=\iint_D\frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$，$D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 10\}$

解

1. $$9\le x^2+4y^2+9=(x^2+y^2)+3y^2+9\le 4+3\cdot 4+9=25$$

$$\Rightarrow\quad 9|D|\le I\le 25|D| \quad \xRightarrow{|D|=4\pi}\quad 36\pi\le I\le 100\pi$$

2. $$16\le x^2+y^2+2xy+16=(x+y)^2+16\le 3^2+16=25$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{5}\le\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}\le\frac{1}{4}$$

例 1 估计下列积分值的范围

1. $I=\iint_D(x^2+4y^2+9)d\sigma$，$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$
2. $I=\iint_D\frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$，$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$
3. $I=\iint_D\frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$，$D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 10\}$

解

1. $$9\le x^2+4y^2+9=(x^2+y^2)+3y^2+9\le 4+3\cdot 4+9=25$$

$$\Rightarrow\quad 9|D|\le I\le 25|D|\quad\xRightarrow{|D|=4\pi}\quad 36\pi\le I\le 100\pi$$

2. $$16\le x^2+y^2+2xy+16=(x+y)^2+16\le 3^2+16=25$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{5}\le\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}\le\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{5}|D|\le I\le\frac{1}{4}|D|$$

例 1 估计下列积分值的范围

1. $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9)d\sigma$，$D = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \le 4\}$
2. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$，$D = \{(x, y) \,|\, 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2\}$
3. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$，$D = \{(x, y) \,|\, |x| + |y| \le 10\}$

解

1. $$9 \le x^2 + 4y^2 + 9 = (x^2 + y^2) + 3y^2 + 9 \le 4 + 3 \cdot 4 + 9 = 25$$

$$\Rightarrow \quad 9|D| \le I \le 25|D| \quad \xRightarrow{|D|=4\pi} \quad 36\pi \le I \le 100\pi$$

2. $$16 \le x^2 + y^2 + 2xy + 16 = (x+y)^2 + 16 \le 3^2 + 16 = 25$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{5} \le \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}} \le \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{5}|D| \le I \le \frac{1}{4}|D| \quad \xRightarrow{|D|=2}$$

例 1 估计下列积分值的范围

1. $I=\iint_D(x^2+4y^2+9)d\sigma$，$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$
2. $I=\iint_D\frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$，$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\,0\le y\le 2\}$
3. $I=\iint_D\frac{d\sigma}{100+\cos^2x+\cos^2y}$，$D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 10\}$

解

1. $$9\le x^2+4y^2+9=(x^2+y^2)+3y^2+9\le 4+3\cdot 4+9=25$$

$$\Rightarrow\quad 9|D|\le I\le 25|D|\ \xRightarrow{|D|=4\pi}\ 36\pi\le I\le 100\pi$$

2. $$16\le x^2+y^2+2xy+16=(x+y)^2+16\le 3^2+16=25$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{5}\le\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}\le\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{5}|D|\le I\le\frac{1}{4}|D|\ \xRightarrow{|D|=2}\ \frac{2}{5}\le I\le\frac{1}{2}$$

例 1 估计下列积分值的范围

1. $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$，$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 4\}$
2. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$，$D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2\}$
3. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$，$D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \le 10\}$

解

3.
$$\frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$$

例 1 估计下列积分值的范围

1. $I=\iint_D(x^2+4y^2+9)d\sigma$，$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$
2. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$，$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$
3. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$，$D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 10\}$

解

3.
$$\frac{1}{102}\le\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$$

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

例 1 估计下列积分值的范围

1. $I=\iint_D (x^2+4y^2+9)d\sigma$，$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$
2. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$，$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$
3. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$，$D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 10\}$

解

3.
$$\frac{1}{102}\le\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\le\frac{1}{100}$$

例 1 估计下列积分值的范围

1. $I=\iint_D(x^2+4y^2+9)d\sigma$，$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$
2. $I=\iint_D\frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$，$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$
3. $I=\iint_D\frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$，$D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 10\}$

解

3.
$$\frac{1}{102}\le\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\le\frac{1}{100}$$
$$\Rightarrow\quad \frac{1}{102}|D|\le I\le\frac{1}{100}|D|$$

例 1 估计下列积分值的范围

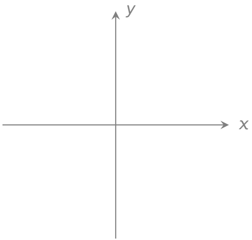
1. $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9)d\sigma$， $D = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \le 4\}$
2. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$， $D = \{(x, y) \,|\, 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2\}$
3. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$， $D = \{(x, y) \,|\, |x| + |y| \le 10\}$

解

3.
$$\frac{1}{102} \le \frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} \le \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{102}|D| \le I \le \frac{1}{100}|D|$$

画 $|x| + |y| = 10$



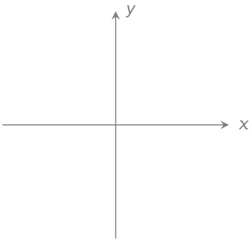
例 1 估计下列积分值的范围

1. $I=\iint_D (x^2+4y^2+9)d\sigma$，$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$
2. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$，$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$
3. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$，$D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 10\}$

解

3.
$$\frac{1}{102}\le\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\le\frac{1}{100}$$
$$\Rightarrow\quad \frac{1}{102}|D|\le I\le\frac{1}{100}|D|$$

画 $|x|+|y|=10$：
分别在四个象限画



例 1 估计下列积分值的范围

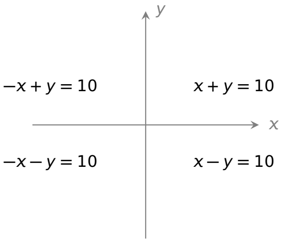
1. $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9)d\sigma$，$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 4\}$
2. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$，$D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2\}$
3. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$，$D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \le 10\}$

解

3.
$$\frac{1}{102} \le \frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} \le \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{102}|D| \le I \le \frac{1}{100}|D|$$

画 $|x| + |y| = 10$：
分别在四个象限画



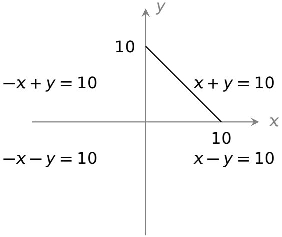
例 1 估计下列积分值的范围

1. $I=\iint_D(x^2+4y^2+9)d\sigma$，$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$
2. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$，$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$
3. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$，$D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 10\}$

解

3.
$$\frac{1}{102}\le\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\le\frac{1}{100}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{102}|D|\le I\le\frac{1}{100}|D|$$

画 $|x|+|y|=10$：
分别在四个象限画



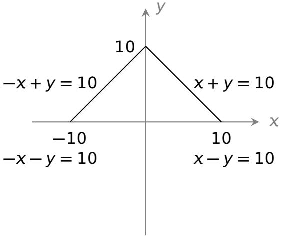
例 1 估计下列积分值的范围

1. $I=\iint_D (x^2+4y^2+9)d\sigma$，$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$
2. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$，$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$
3. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$，$D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 10\}$

解

3.
$$\frac{1}{102}\le\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\le\frac{1}{100}$$
$$\Rightarrow\quad \frac{1}{102}|D|\le I\le\frac{1}{100}|D|$$

画 $|x|+|y|=10$：
分别在四个象限画



例 1 估计下列积分值的范围

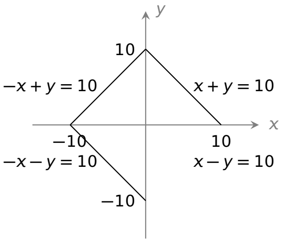
1. $I=\iint_D(x^2+4y^2+9)d\sigma$，$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$
2. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$，$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$
3. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$，$D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 10\}$

解

3.
$$\frac{1}{102}\le\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\le\frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{102}|D|\le I\le\frac{1}{100}|D|$$

画 $|x|+|y|=10$：
分别在四个象限画



例 1 估计下列积分值的范围

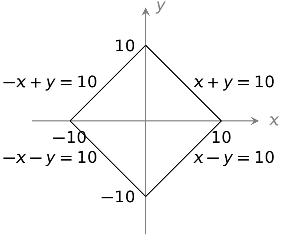
1. $I=\iint_D(x^2+4y^2+9)d\sigma$，$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$
2. $I=\iint_D\frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$，$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$
3. $I=\iint_D\frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$，$D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 10\}$

解

3.
$$\frac{1}{102}\le\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\le\frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{102}|D|\le I\le\frac{1}{100}|D|$$

画 $|x|+|y|=10$：
分别在四个象限画



例 1 估计下列积分值的范围

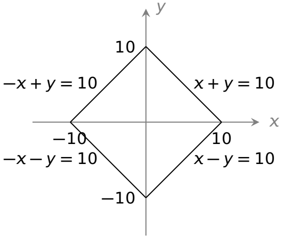
1. $I=\iint_D(x^2+4y^2+9)d\sigma$，$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$
2. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$，$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$
3. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$，$D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 10\}$

解

3.
$$\frac{1}{102}\le\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\le\frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{102}|D|\le I\le\frac{1}{100}|D| \quad \xRightarrow{|D|=200}$$

画 $|x|+|y|=10$：
分别在四个象限画



例 1 估计下列积分值的范围

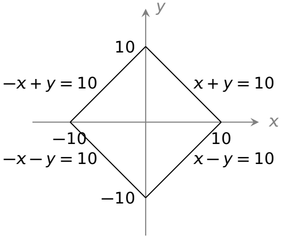
1. $I=\iint_D(x^2+4y^2+9)d\sigma$，$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$
2. $I=\iint_D\frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$，$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$
3. $I=\iint_D\frac{d\sigma}{100+\cos^2x+\cos^2y}$，$D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 10\}$

解

3.
$$\frac{1}{102}\le\frac{1}{100+\cos^2x+\cos^2y}\le\frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{102}|D|\le I\le\frac{1}{100}|D|\ \xRightarrow{|D|=200}\ \frac{50}{51}\le I\le 2$$

画 $|x|+|y|=10$：
分别在四个象限画



例 1 估计下列积分值的范围

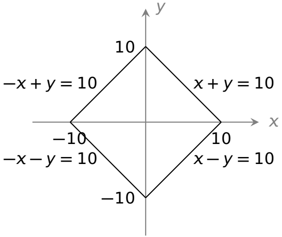
1. $I = \iint_D (x^2+4y^2+9)d\sigma$，$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$
2. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$，$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$
3. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$，$D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 10\}$

解

3.
$$\frac{1}{102}\le\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\le\frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{102}|D|\le I\le\frac{1}{100}|D| \xrightarrow{|D|=200} \frac{50}{51}\le I\le 2$$

画 $|x|+|y|=10$：
分别在四个象限画



例 1 估计下列积分值的范围

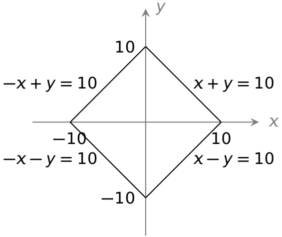
1. $I=\iint_D(x^2+4y^2+9)d\sigma$，$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$
2. $I=\iint_D \dfrac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$，$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$
3. $I=\iint_D \dfrac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$，$D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 10\}$

解

3.
$$\frac{1}{102}\le\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\le\frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{102}|D|\le I\le\frac{1}{100}|D| \xRightarrow{|D|=200} \frac{50}{51}\le I\le 2$$

画 $|x|+|y|=10$：
分别在四个象限画



例 1 估计下列积分值的范围

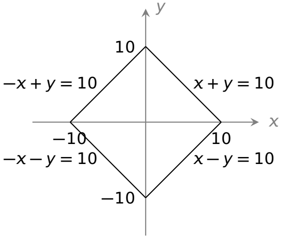
1. $I=\iint_D(x^2+4y^2+9)d\sigma$，$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$
2. $I=\iint_D\frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$，$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$
3. $I=\iint_D\frac{d\sigma}{100+\cos^2x+\cos^2y}$，$D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 10\}$

解

3.
$$\frac{1}{102}\le\frac{1}{100+\cos^2x+\cos^2y}\le\frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{102}|D|\le I\le\frac{1}{100}|D|\ \xRightarrow{|D|=200}\ \frac{50}{51}\le I\le 2$$

画 $|x|+|y|=10$：
分别在四个象限画



例 1 估计下列积分值的范围

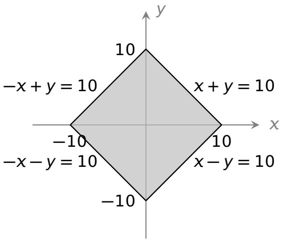
1. $I=\iint_D (x^2+4y^2+9)d\sigma$，$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$
2. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$，$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$
3. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$，$D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 10\}$

解

3.
$$\frac{1}{102}\le\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\le\frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{102}|D|\le I\le\frac{1}{100}|D| \xRightarrow{|D|=200} \frac{50}{51}\le I\le 2$$

画 $|x|+|y|=10$：
分别在四个象限画



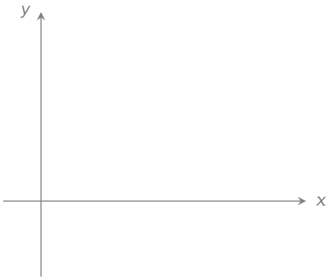
例 2 设 $D=\{(x,y)|\,(x-2)^2+(y-1)^2\le 2\}$，比较以下两个积分大小：

$$I_1=\iint_D (x+y)^2 d\sigma,\qquad I_2=\iint_D (x+y)^3 d\sigma$$

例 2 设 $D = \{(x, y) | (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 2\}$，比较以下两个积分大小：

$$I_1 = \iint_D (x+y)^2 d\sigma, \qquad I_2 = \iint_D (x+y)^3 d\sigma$$

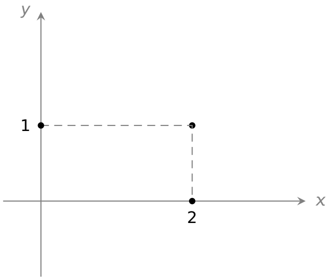
解



例 2 设 $D=\{(x,y)|(x-2)^2+(y-1)^2\le 2\}$，比较以下两个积分大小：

$$I_1=\iint_D (x+y)^2 d\sigma, \qquad I_2=\iint_D (x+y)^3 d\sigma$$

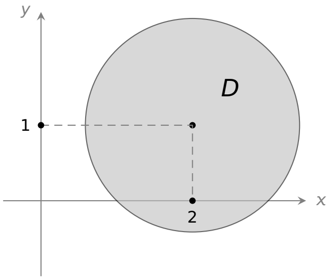
解



例 2 设 $D = \{(x, y) | (x-2)^2 + (y-1)^2 \le 2\}$，比较以下两个积分大小：

$$I_1 = \iint_D (x+y)^2 d\sigma, \qquad I_2 = \iint_D (x+y)^3 d\sigma$$

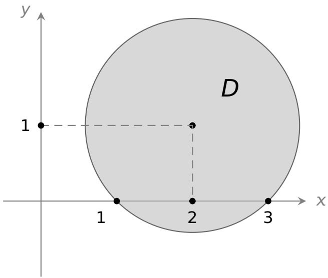
解



例 2 设 $D = \{(x, y) | (x-2)^2 + (y-1)^2 \le 2\}$，比较以下两个积分大小：

$$I_1 = \iint_D (x+y)^2 d\sigma, \qquad I_2 = \iint_D (x+y)^3 d\sigma$$

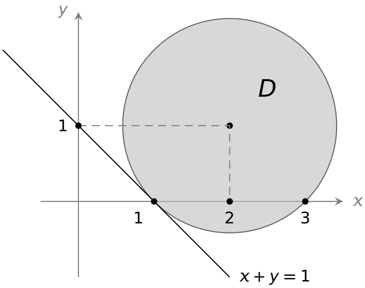
解



例 2 设 $D=\{(x,y)|(x-2)^2+(y-1)^2\leq 2\}$，比较以下两个积分大小：

$$I_1=\iint_D (x+y)^2 d\sigma, \qquad I_2=\iint_D (x+y)^3 d\sigma$$

解

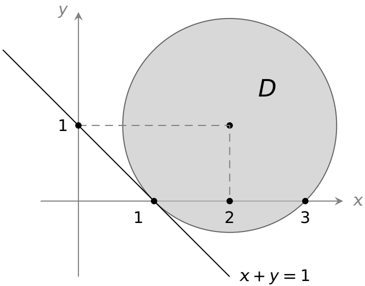


例 2 设 $D=\{(x,y)|(x-2)^2+(y-1)^2\le 2\}$，比较以下两个积分大小：

$$I_1=\iint_D (x+y)^2 d\sigma,\qquad I_2=\iint_D (x+y)^3 d\sigma$$

解 如图，在闭区域 D 上成立

$$x+y\ge 1$$

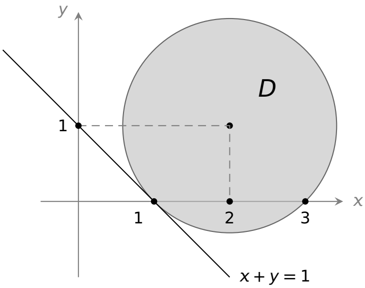


例 2 设 $D=\{(x,y)|(x-2)^2+(y-1)^2\leq 2\}$，比较以下两个积分大小：

$$I_1=\iint_D (x+y)^2 d\sigma, \qquad I_2=\iint_D (x+y)^3 d\sigma$$

解 如图，在闭区域 D 上成立

$$x+y\geq 1 \quad\Rightarrow\quad (x+y)^2\leq (x+y)^3$$

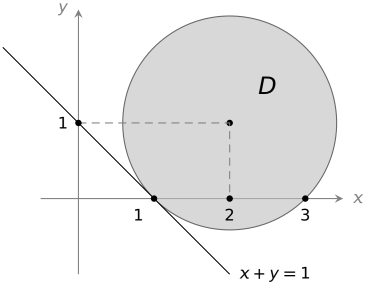


例 2 设 $D=\{(x,y)\mid(x-2)^2+(y-1)^2\le 2\}$，比较以下两个积分大小：

$$I_1=\iint_D (x+y)^2 d\sigma, \qquad I_2=\iint_D (x+y)^3 d\sigma$$

解 如图，在闭区域 D 上成立

$$x+y\ge 1 \quad\Rightarrow\quad (x+y)^2\le (x+y)^3 \quad\Rightarrow\quad I_1\le I_2.$$



二重积分的性质 (Cont.)

性质 6（二重积分的中值定理） 设函数 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上连续，$|D|$ 是 D 的面积，则在 D 上至少存在一点 (ξ, η)，使得

$$\iint_D f(x, y)d\sigma = f(\xi, \eta) \cdot |D|.$$

二重积分的性质 (Cont.)

性质 6（二重积分的中值定理） 设函数 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上连续，$|D|$ 是 D 的面积，则在 D 上至少存在一点 (ξ, η)，使得

$$\iint_D f(x, y)d\sigma = f(\xi, \eta) \cdot |D|.$$

证明

$$m \cdot |D| \le \iint_D f(x, y)d\sigma \le M \cdot |D|$$

二重积分的性质 (Cont.)

性质 6（二重积分的中值定理） 设函数 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上连续，$|D|$ 是 D 的面积，则在 D 上至少存在一点 (ξ, η)，使得

$$\iint_D f(x, y)d\sigma = f(\xi, \eta) \cdot |D|.$$

证明

$$m \cdot |D| \leq \iint_D f(x, y)d\sigma \leq M \cdot |D| \quad \Rightarrow \quad m \leq \frac{1}{|D|} \iint_D f(x, y)d\sigma \leq M$$

二重积分的性质 (Cont.)

性质 6（二重积分的中值定理） 设函数 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上连续，$|D|$ 是 D 的面积，则在 D 上至少存在一点 (ξ, η)，使得

$$\iint_D f(x, y)d\sigma = f(\xi, \eta) \cdot |D|.$$

证明 因为

$$m \cdot |D| \leq \iint_D f(x, y)d\sigma \leq M \cdot |D| \quad \Rightarrow \quad m \leq \frac{1}{|D|}\iint_D f(x, y)d\sigma \leq M$$

由闭区域上连续函数的中值定理可知：存在 $(\xi, \eta) \in D$，使得

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{|D|}\iint_D f(x, y)d\sigma,$$

二重积分的性质 (Cont.)

性质 6（二重积分的中值定理） 设函数 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上连续，$|D|$ 是 D 的面积，则在 D 上至少存在一点 (ξ, η)，使得

$$\iint_D f(x, y)d\sigma = f(\xi, \eta) \cdot |D|.$$

证明 因为

$$m \cdot |D| \leq \iint_D f(x, y)d\sigma \leq M \cdot |D| \quad \Rightarrow \quad m \leq \frac{1}{|D|} \iint_D f(x, y)d\sigma \leq M$$

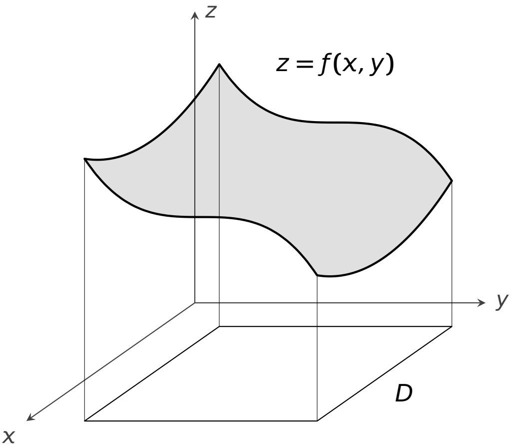
由闭区域上连续函数的中值定理可知：存在 $(\xi, \eta) \in D$，使得

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{|D|} \iint_D f(x, y)d\sigma,$$

即

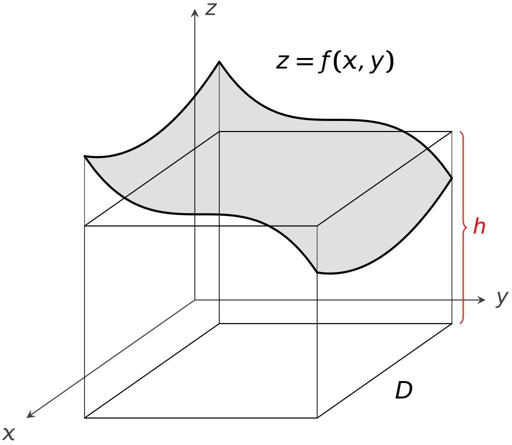
$$\iint_D f(x, y)d\sigma = f(\xi, \eta) \cdot |D|.$$

二重积分中值定理的几何直观



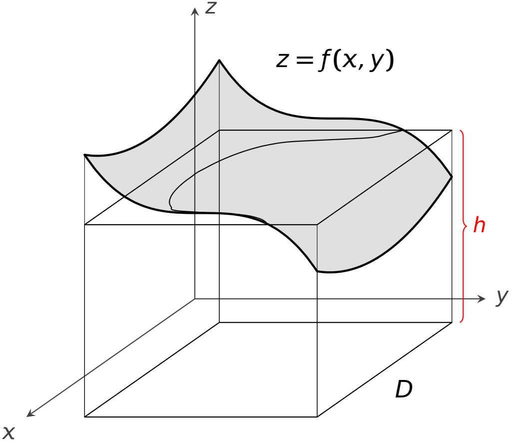
$$\iint_D f(x, y)d\sigma$$

二重积分中值定理的几何直观



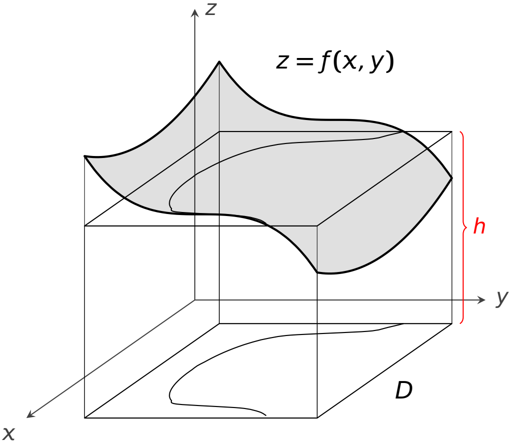
$$\iint_D f(x, y)d\sigma = h|D|$$

二重积分中值定理的几何直观



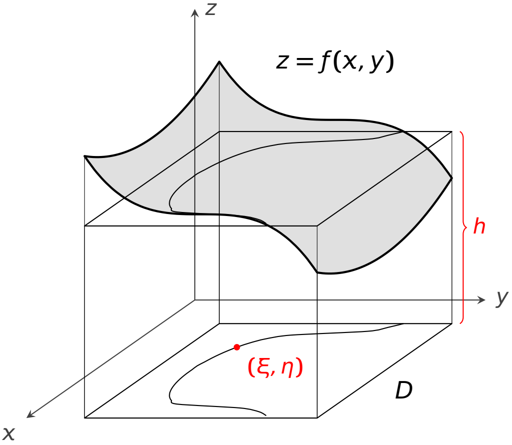
$$\iint_D f(x, y) d\sigma = h|D|$$

二重积分中值定理的几何直观



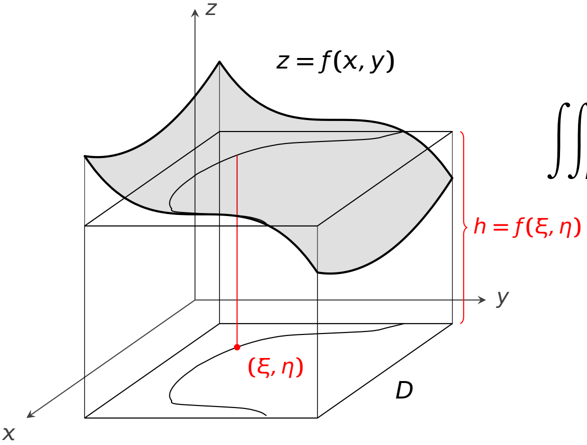
$$\iint_D f(x, y)d\sigma = h|D|$$

二重积分中值定理的几何直观



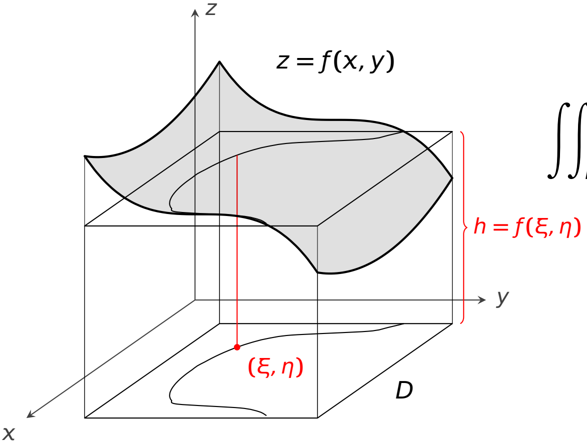
$$\iint_D f(x,y)d\sigma = h|D|$$

二重积分中值定理的几何直观



$$\iint_D f(x, y) d\sigma = h|D|$$

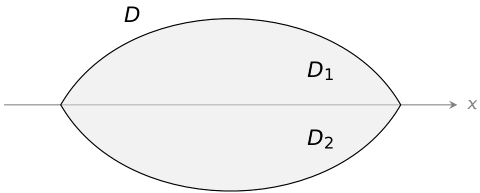
二重积分中值定理的几何直观



$$\iint_D f(x, y)d\sigma = h|D|$$
$$= f(\xi, \eta)|D|$$

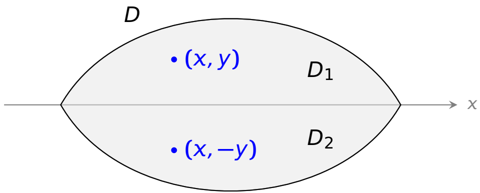
积分的对称性

性质 设闭区域 D 关于 x 轴对称，



积分的对称性

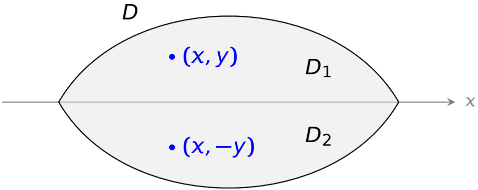
性质 设闭区域 D 关于 x 轴对称，



积分的对称性

性质 设闭区域 D 关于 x 轴对称，

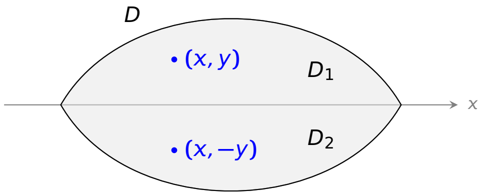
- 若 $f(x,y)$ 关于 y 是奇函数（即：$f(x,-y)=-f(x,y)$），则



积分的对称性

性质 设闭区域 D 关于 x 轴对称，

- 若 $f(x,y)$ 关于 y 是奇函数（即：$f(x,-y)=-f(x,y)$），则
$$\iint_D f(x,y)d\sigma = 0$$



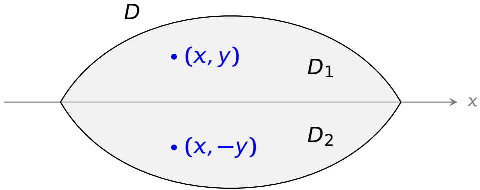
积分的对称性

性质 设闭区域 D 关于 x 轴对称，

- 若 $f(x,y)$ 关于 y 是奇函数（即：$f(x,-y)=-f(x,y)$），则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = 0$$

- 若 $f(x,y)$ 关于 y 是偶函数（即：$f(x,-y)=f(x,y)$），则



积分的对称性

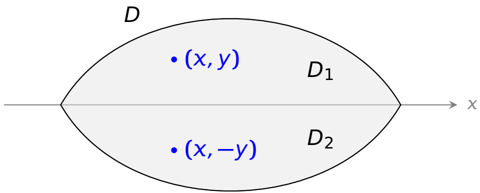
性质 设闭区域 D 关于 x 轴对称，

- 若 $f(x,y)$ 关于 y 是奇函数（即：$f(x,-y)=-f(x,y)$），则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = 0$$

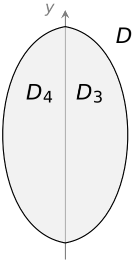
- 若 $f(x,y)$ 关于 y 是偶函数（即：$f(x,-y)=f(x,y)$），则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = 2\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma = 2\iint_{D_2} f(x,y)d\sigma$$



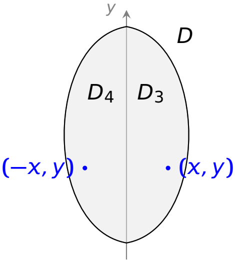
积分的对称性

性质 设闭区域 D 关于 y 轴对称，



积分的对称性

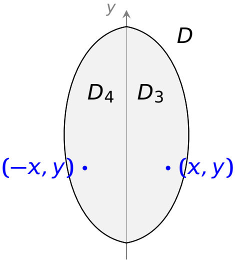
性质 设闭区域 D 关于 y 轴对称，



积分的对称性

性质 设闭区域 D 关于 y 轴对称，

- 若 $f(x, y)$ 关于 x 是奇函数（即：$f(-x, y) = -f(x, y)$），则

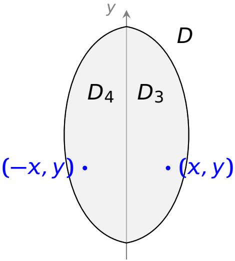


积分的对称性

性质 设闭区域 D 关于 y 轴对称，

- 若 $f(x, y)$ 关于 x 是奇函数（即：$f(-x, y) = -f(x, y)$），则

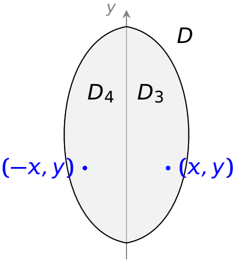
$$\iint_D f(x, y) d\sigma = 0$$



积分的对称性

性质 设闭区域 D 关于 y 轴对称，

- 若 $f(x,y)$ 关于 x 是奇函数（即：$f(-x,y)=-f(x,y)$），则
$$\iint_D f(x,y)d\sigma = 0$$
- 若 $f(x,y)$ 关于 x 是偶函数（即：$f(-x,y)=f(x,y)$），则



积分的对称性

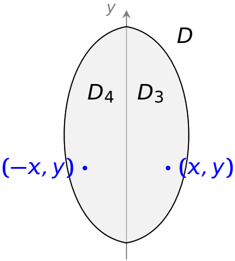
性质 设闭区域 D 关于 y 轴对称，

- 若 $f(x,y)$ 关于 x 是奇函数（即：$f(-x,y)=-f(x,y)$），则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = 0$$

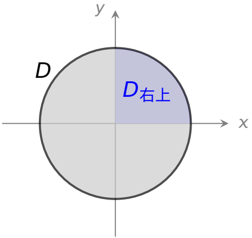
- 若 $f(x,y)$ 关于 x 是偶函数（即：$f(-x,y)=f(x,y)$），则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = 2\iint_{D_3} f(x,y)d\sigma = 2\iint_{D_4} f(x,y)d\sigma$$



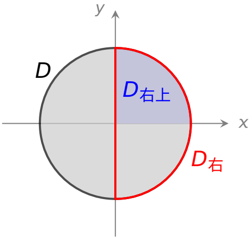
例 1 设 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$，则

$$\iint_D x^2 + y^2 d\sigma = 4 \iint_{D_{\text{右上}}} x^2 + y^2 d\sigma$$



例 1 设 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$，则

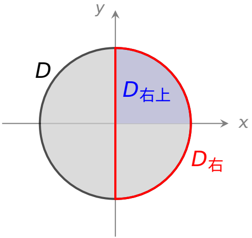
$$\iint_D x^2 + y^2 d\sigma = 4 \iint_{D_{右上}} x^2 + y^2 d\sigma$$



解 $\iint_D x^2 + y^2 d\sigma = 2 \iint_{D_{右}} x^2 + y^2 d\sigma$

例 1 设 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$，则

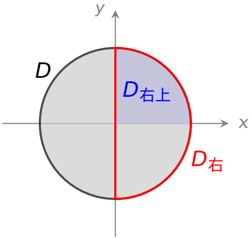
$$\iint_D x^2+y^2 d\sigma = 4\iint_{D_{右上}} x^2+y^2 d\sigma$$



解 $\iint_D x^2+y^2 d\sigma = 2\iint_{D_{右}} x^2+y^2 d\sigma = 2\cdot 2\iint_{D_{右上}} x^2+y^2 d\sigma.$

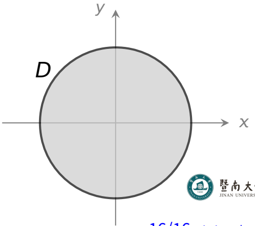
例 1 设 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 1\}$，则

$$\iint_D x^2+y^2 d\sigma = 4\iint_{D_{右上}} x^2+y^2 d\sigma$$

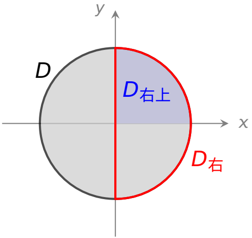


解 $\iint_D x^2+y^2 d\sigma = 2\iint_{D_{右}} x^2+y^2 d\sigma = 2\cdot 2\iint_{D_{右上}} x^2+y^2 d\sigma.$

例 2 计算 $\iint_D (2x+3y\sqrt{1-x^2})d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 1\}$



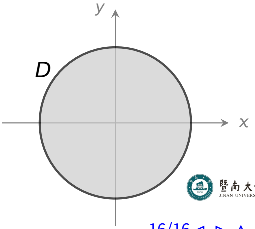
例 1 设 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$，则



$$\iint_D x^2+y^2 d\sigma = 4\iint_{D_{右上}} x^2+y^2 d\sigma$$

解 $\iint_D x^2+y^2 d\sigma = 2\iint_{D_{右}} x^2+y^2 d\sigma = 2\cdot 2\iint_{D_{右上}} x^2+y^2 d\sigma.$

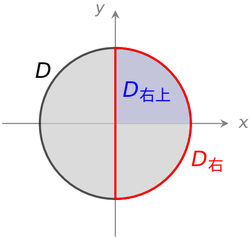
例 2 计算 $\iint_D (2x+3y\sqrt{1-x^2})d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$



解 原式 $=2\iint_D x d\sigma + 3\iint_D y\sqrt{1-x^2} d\sigma$

例 1 设 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$，则

$$\iint_D x^2+y^2 d\sigma = 4\iint_{D_{右上}} x^2+y^2 d\sigma$$



解 $\iint_D x^2+y^2 d\sigma = 2\iint_{D_{右}} x^2+y^2 d\sigma = 2\cdot 2\iint_{D_{右上}} x^2+y^2 d\sigma.$

例 2 计算 $\iint_D (2x+3y\sqrt{1-x^2})d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$

解 原式 $=2\iint_D x d\sigma + 3\iint_D y\sqrt{1-x^2}d\sigma = 0.$