

第 10 周作业解答

练习 1. 求向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 7 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ 的一组极大无关组, 并将其余向量表示成极大无关组的线性组合。

解

$$\begin{aligned} (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4) &= \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ -1 & -3 & -5 & -2 \\ 2 & -1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ -1 & -3 & -5 & -2 \\ 2 & -1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\substack{r_2+2r_1 \\ r_3-3r_1 \\ r_4+r_1 \\ r_5-2r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 10 & 5 \\ 0 & -4 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -14 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\frac{1}{5} \times r_2 \\ -\frac{1}{4} \times r_3 \\ -\frac{1}{7} \times r_5}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\substack{r_3-r_2 \\ r_5-r_2}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

可见

- $r(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4) = 2$, 说明极大无关组应含 2 个向量;
- 从最后简化的阶梯型矩阵容易看出: α_1, α_2 线性无关, 所以 α_1, α_2 构成一极大无关组;
- 也是从最后简化的阶梯型矩阵看出:

$$\alpha_3 = -\alpha_1 + 2\alpha_2, \quad \alpha_4 = -\alpha_1 + \alpha_2.$$

练习 2. 用基础解系表示齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 6x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}$ 的通解。

解

$$\begin{aligned} (A \mid 0) &= \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-r_1 \\ r_4-3r_1}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 & 0 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\substack{r_3-2r_2 \\ r_4-2r_2 \\ r_1+r_2}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1) \times r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

1. 从最后简化的阶梯型矩阵看出, 原方程组同解于:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 - x_4 + 2x_5 \\ x_2 = x_3 - 3x_4 + x_5 \end{cases}$$

2. 自由变量: x_3, x_4, x_5

3. 基础解系:

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. 通解:

$$x = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + c_3 \xi_3$$

其中 c_1, c_2, c_3 为任意常数。

练习 3. 设 A, B 均为 $m \times n$ 矩阵, 证明: $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$ 。

证明 设矩阵 A 的 n 列依次为: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$; 矩阵 B 的 n 列依次为: $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, 则矩阵 $A+B$ 的 n 列依次为: $\alpha_1 + \beta_1, \alpha_1 + \beta_2, \dots, \alpha_1 + \beta_n$ 。

设 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = r_1$, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的极大无关组包含 r_1 个向量, 设 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_{r_1}}$ 是其中一个极大无关组。另外, 成立 $r(A) = r_1$ 。同样, 设 $r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = r_2$, 假设 $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_{r_2}}$ 是列向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 的一个极大无关组。此外, 成立 $r(B) = r_2$ 。

显然列向量组

$$\alpha_1 + \beta_1, \alpha_1 + \beta_2, \dots, \alpha_1 + \beta_n$$

能由向量组

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$$

线性表示, 继而也能由向量组

$$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_{r_1}}, \beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_{r_2}}$$

线性表示。所以

$$r(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_1 + \beta_2, \dots, \alpha_1 + \beta_n) \leq r(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_{r_1}}, \beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_{r_2}}),$$

进而

$$r(A+B) = r(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_1 + \beta_2, \dots, \alpha_1 + \beta_n) \leq r(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_{r_1}}, \beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_{r_2}}) \leq r_1 + r_2 = r(A) + r(B).$$

练习 4. 设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{n \times s}$, 假设 $AB = O_{m \times s}$ 。证明: $r(A) + r(B) \leq n$ 。

矩阵 B 的 s 列依次为: $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$, 则向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 的秩等于 B 的秩, 即:

$$r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) = r(B).$$

齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系应包含 $n - r(A)$ 个向量。假设

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t$$

是 $Ax = 0$ 的一组基础解, 其中 $t = n - r(A)$ 。

由于 $AB = O$, 所以

$$O = AB = A(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) = (A\beta_1, A\beta_2, \dots, A\beta_s) \Rightarrow A\beta_i = 0 \forall i = 1, 2, \dots, s$$

说明矩阵 B 的每一列 β_i 都是 $Ax = 0$ 的解。所以 β_i 是基础解系 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t$ 的线性组合。

上述说明向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 能由向量组 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t$ 线性表示, 所以

$$r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) \leq r(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t) = t = n - r(A),$$

进而

$$r(B) \leq n - r(A).$$

下一题是附加题, 做出来的同学下周交上来, 可以加分

练习 5. 设 A 是 n 阶方阵, 证明: 存在不全为零的数 c_0, c_1, \dots, c_n 使得 $c_0 I_n + c_1 A + \dots + c_n A^n$ 为奇异矩阵。(事实上, 可以证明 $c_0 I_n + c_1 A + \dots + c_n A^n = 0$, 但我们不证明这个。)(提示: 任取一个非零的列向量 $v \in \mathbb{R}^n$, 说明 $v, Av, \dots, A^n v$ 是线性相关。)

证明 设 $v \in \mathbb{R}^n$ 为非零列向量。因为向量组 $v, Av, \dots, A^n v$ 包含向量个数 $n+1$ 比向量维数 n 大, 所以线性相关。存在不全为零的数 c_0, c_1, \dots, c_n 使得 $c_0 v + c_1 Av + \dots + c_n A^n v = 0$, 也就是

$$(c_0 I_n + c_1 A + \dots + c_n A^n)v = 0.$$

如果 $c_0 I_n + c_1 A + \dots + c_n A^n$ 是非奇异 (可逆), 则上式推出 $v = 0$, 矛盾。所以方阵 $c_0 I_n + c_1 A + \dots + c_n A^n$ 是奇异 (不可逆)。