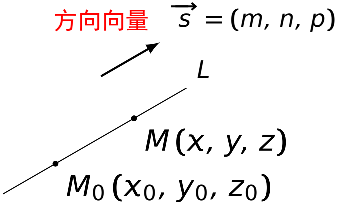
第 8 章 c：空间直线及其方程

数学系　　梁卓滨

2017.07 暑期班

空间直线的参数方程



$$M \in L$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R}, \text{使得 } \overrightarrow{M_0M} = t\vec{s}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(m, n, p)$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - x_0 = tm \\ y - y_0 = tn \\ z - z_0 = tp \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + tm \\ y = y_0 + tn \\ z = z_0 + tp \end{cases}$$

空间直线的对称式方程

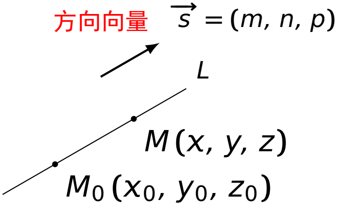
$$M \in L$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R}, \text{使得 } \overrightarrow{M_0M} = t\vec{s}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(m, n, p)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

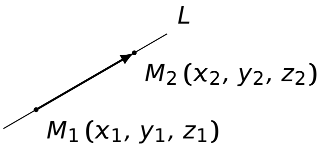


注 1　若 $m = 0$，则 $\frac{x-x_0}{0} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ 表示

$$x = x_0 \qquad \text{且} \qquad \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

注 2　一般地，点向式用作表示，参数式用作具体计算

例 设直线过点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$，求直线方程。



解 取方向向量为

$$\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

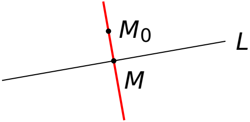
所以直线方程为

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

或等价地，

$$\frac{x - x_2}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_2}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_2}{z_2 - z_1}$$

例 求过点 $M_0(2, 1, 3)$ 且与直线 $L: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程。



解 设垂足为 $M(x, y, z)$，则

$$M \in L \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + tm = -1 + 3t \\ y = y_0 + tn = 1 + 2t \\ z = z_0 + tp = -t \end{cases}$$

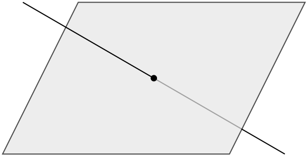
$$\overrightarrow{M_0M} \perp L \quad \Rightarrow \quad 0 = \overrightarrow{M_0M} \cdot (3, 2, -1)$$

$$= (-3 + 3t) \cdot 3 + (2t) \cdot 2 + (-t - 3) \cdot (-1)$$

$$\Rightarrow \quad t = 3/7$$

所以交点为 $\overrightarrow{M_0M} = -\frac{6}{7}(2, -1, 4)$，直线方程为$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{4}$.

例 求直线 $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{2}$ 与平面 $2x+y+z-6=0$ 的交点。



解 直线上点的坐标为

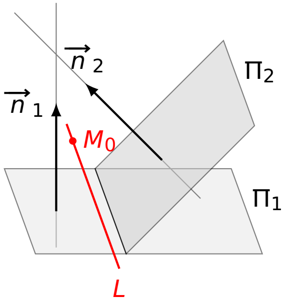
$$\begin{cases} x=x_0+tm=2+t \\ y=y_0+tn=3+t \\ z=z_0+tp=4+2t \end{cases}$$

代入平面方程，得：

$$2(2+t)+(3+t)+(4+2t)-6=0 \quad \Rightarrow \quad t=-1$$

所以交点为 $(1,2,2)$。

例 设直线 L 过点 $M_0(-3, 2, 5)$，且与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行，并 L 方程。



解 1. 取方向向量

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -4\\ 2 & -1 & -5\end{vmatrix}$$

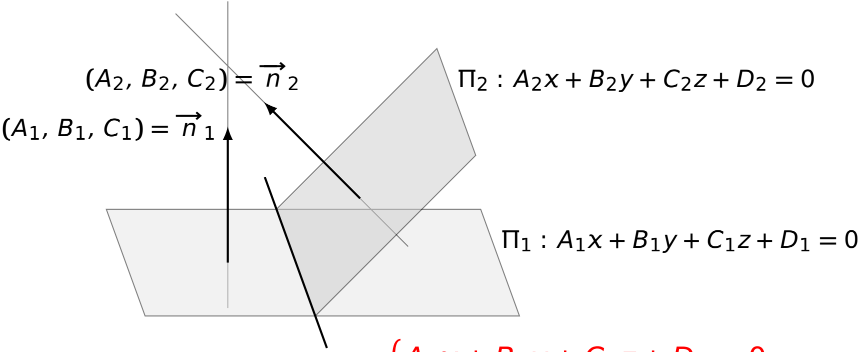
$$=\begin{vmatrix}0 & -4\\ -1 & -5\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & -4\\ 2 & -5\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=-4\vec{i}-3\vec{j}-\vec{k}=(-4,-3,-1)$$

1. 点向式：

$$\frac{x+3}{-4}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-5}{-1}$$

空间直线的一般方程



$$L : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

性质 L 的方向向量可取为 $\overrightarrow{s} = \overrightarrow{n}_1 \times \overrightarrow{n}_2 = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$

例 求直线 $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+y+z=4 \end{cases}$ 的一个方向向量，并求出点向式方程。

解 1. 取方向向量

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=-2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}=(-2,1,3)$$

2. 求直线上一点。

不妨取 $x=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -y+z=1 \\ y+z=4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y=\frac{3}{2} \\ z=\frac{5}{2} \end{cases}$

3. 点向式：

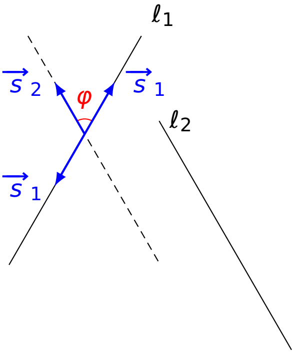
$$\frac{x}{-2}=\frac{y-\frac{3}{2}}{1}=\frac{z-\frac{5}{2}}{3}$$

直线与直线的夹角

夹角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$，且

$$\cos\varphi = \left|\cos(\angle(\overrightarrow{s}_1, \overrightarrow{s}_2))\right|$$

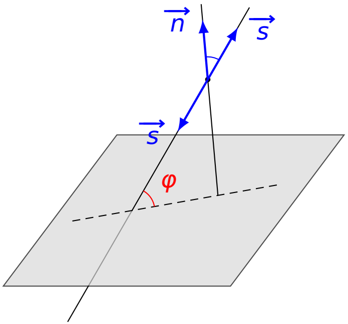
$$= \frac{|\overrightarrow{s}_1 \cdot \overrightarrow{s}_2|}{|\overrightarrow{s}_1| \cdot |\overrightarrow{s}_2|}$$



直线与平面的夹角

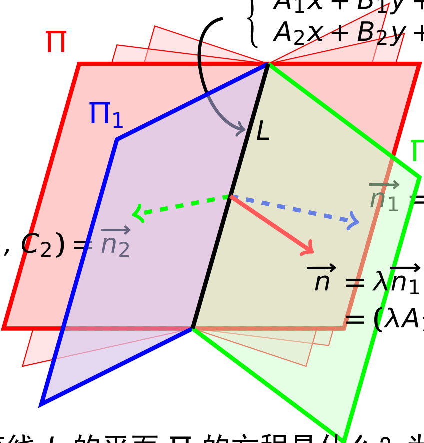
夹角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$，且

$$\sin\varphi = \left|\cos(\angle(\vec{n}, \vec{s}))\right| = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{s}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{s}|}$$



平面束及其方程

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \longrightarrow \Pi_1 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \longrightarrow \Pi_2 \end{cases}$$



Π_2过定直线 L 的 平面束

$\overrightarrow{n_1}=(A_1,B_1,C_1)$

$(A_2,B_2,C_2)=\overrightarrow{n_2}$

问题　给出平面束中的平面，其方程的通式

$$\overrightarrow{n}=\lambda\overrightarrow{n_1}+\mu\overrightarrow{n_2}$$
$$=(\lambda A_1+\mu A_2,\lambda B_1+\mu B_2,\lambda C_1+\mu C_2)$$

则过直线 L 的平面 Π 的方程是什么？为

$$\boxed{\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0} \quad \Pi'=\Pi$$

其中 λ，μ 为（不全为零的）待定的常数。

例 求过点 $M(1, 2, 3)$ 和直线 $\begin{cases} x-4z=3 \\ 2y-z=0 \end{cases}$ 的平面的方程。

利用平面束方程

解 1. 过直线 $\begin{cases} x-4z-3=0 \\ 2y-z=0 \end{cases}$ 的平面可设为

$$\lambda(x-4z-3)+\mu(2y-z)=0$$

其中 λ 和 μ 是待定的常数。

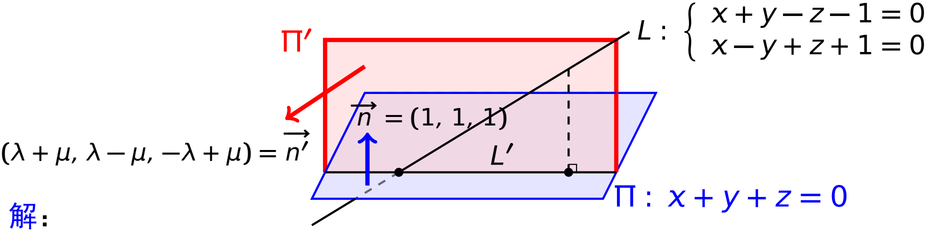
2. 因为 $M(1, 2, 3)$ 在平面上，所以 $(1, 2, 3)$ 满足平面方程：

$$\lambda(1-4\cdot 3-3)+\mu(2\cdot 2-3)=0 \quad \Rightarrow \quad -14\lambda+\mu=0$$

不妨取 $\lambda=1$，$\mu=14$。所以平面方程是

$$x+28y-18z-3=0.$$

平面束方程应用：求投影直线方程



解：

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面。由于 Π' 过 L，可设 Π' 方程为

$$\lambda(x+y-z-1)+\mu(x-y+z+1)=0 \quad \text{（其中}\lambda,\mu\text{ 待定）}$$

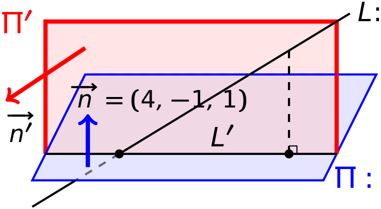
2. $\vec{n'}\perp\vec{n} \Rightarrow \vec{n'}\cdot\vec{n}=1\cdot(\lambda+\mu)+1\cdot(\lambda-\mu)+1\cdot(-\lambda+\mu)=0$

$\Rightarrow \lambda+\mu=0$ 不妨取 $\lambda=1,\mu=-1$

$\Rightarrow$ Π'的方程：$y-z-1=0$

3. 投影直线 L' 的方程是 $\begin{cases} y-z-1=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

$$L:\begin{cases}2x-4y+z=0\\3x-y-2z=9\end{cases}$$



$(2\lambda+3\mu,\ -4\lambda-\mu,\ \lambda-2\mu)=\vec{n'}$

$\Pi:\ 4x-y+z=1$

解：

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面。由于 Π' 过 L，可设 Π' 方程为

$$\lambda(2x-4y+z)+\mu(3x-y-2z-9)=0 \quad （其中\lambda,\mu\ 待定）$$

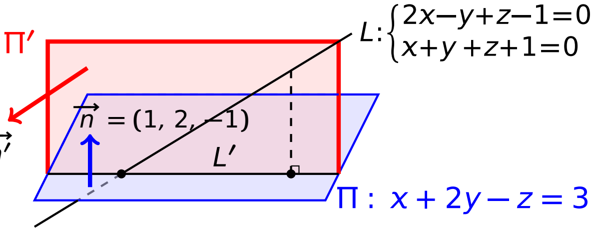
2. $\vec{n'}\perp\vec{n}\ \Rightarrow 0=\vec{n'}\cdot\vec{n}$

$$=4\cdot(2\lambda+3\mu)+(-1)\cdot(-4\lambda-\mu)+1\cdot(\lambda-2\mu)$$

$$\Rightarrow 13\lambda+11\mu=0 \quad 不妨取 \quad \lambda=11,\ \mu=-13$$

$$\Rightarrow \Pi'的方程：17x+31y-37z-117=0$$

3. 投影直线 L' 的方程是 $\begin{cases}17x+31y-37z-117=0\\4x-y+z-1=0\end{cases}$



解：

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面。由于 Π' 过 L，可设 Π' 方程为

$$\lambda(2x-y+z-1)+\mu(x+y+z+1)=0 \quad \text{（其中}\lambda,\mu\text{ 待定）}$$

2. $$\vec{n'}\perp\vec{n} \quad \Rightarrow 0=\vec{n'}\cdot\vec{n}$$

$$=1\cdot(2\lambda+\mu)+2\cdot(-\lambda+\mu)+(-1)\cdot(\lambda+\mu)$$

$$\Rightarrow -\lambda+2\mu=0 \quad \text{不妨取} \quad \lambda=2,\mu=1$$

$$\Rightarrow \Pi'\text{的方程：}5x-y+3z-1=0$$

3. 投影直线 L' 的方程是 $\begin{cases}5x-y+3z-1=0\\x+2y-z-3=0\end{cases}$