

第 11 章 c: 积分路径无关; 格林公式

数学系 梁卓滨

2016-2017 学年 II

Outline

1. 保守向量场；积分路径无关性

2. 格林公式

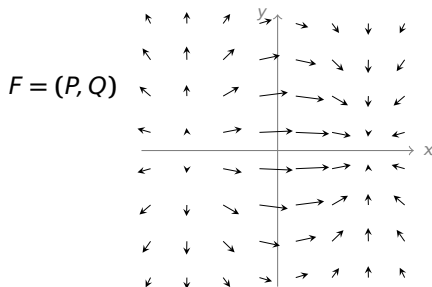
We are here now...

1. 保守向量场；积分路径无关性

2. 格林公式

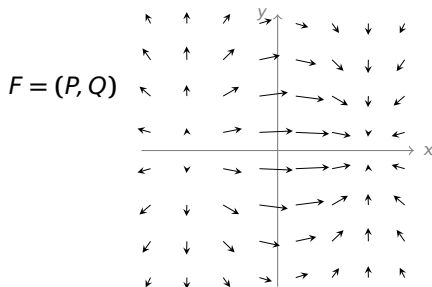
保守场

定义 设向量场 $F = (P, Q)$ 定义在平面区域 D 上。



保守场

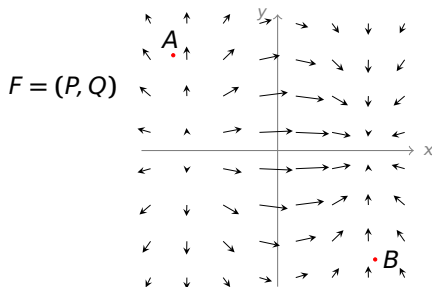
定义 设向量场 $F = (P, Q)$ 定义在平面区域 D 上。称 F 为**保守场**，是指对 F 的曲线积分是与路径无关。



保守场

定义 设向量场 $F = (P, Q)$ 定义在平面区域 D 上。称 F 为**保守场**，是指对 F 的曲线积分是与路径无关。即：

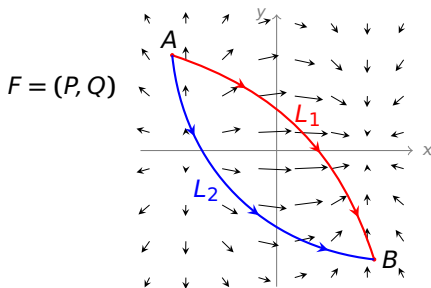
- 对于 D 内任意指定的两点 A, B ，以及



保守场

定义 设向量场 $F = (P, Q)$ 定义在平面区域 D 上。称 F 为**保守场**，是指对 F 的曲线积分是与路径无关。即：

- 对于 D 内任意指定的两点 A, B ，以及
- D 内从点 A 到点 B 的任意两条有向曲线 L_1, L_2 ，



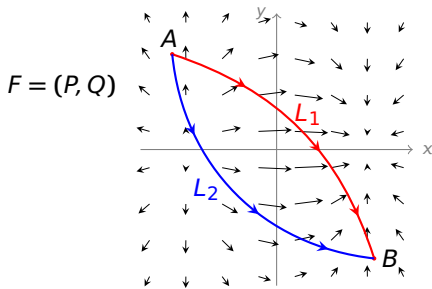
保守场

定义 设向量场 $F = (P, Q)$ 定义在平面区域 D 上。称 F 为**保守场**，是指对 F 的曲线积分是与路径无关。即：

- 对于 D 内任意指定的两点 A, B ，以及
- D 内从点 A 到点 B 的任意两条有向曲线 L_1, L_2 ，

都成立

$$\int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy.$$



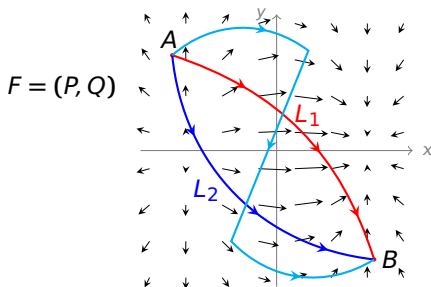
保守场

定义 设向量场 $F = (P, Q)$ 定义在平面区域 D 上。称 F 为**保守场**，是指对 F 的曲线积分是与路径无关。即：

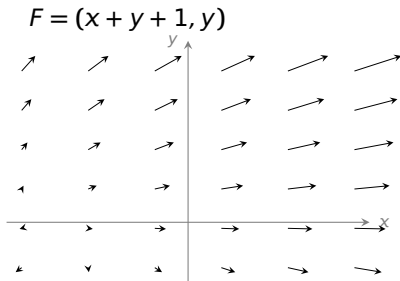
- 对于 D 内任意指定的两点 A, B ，以及
- D 内从点 A 到点 B 的任意两条有向曲线 L_1, L_2 ，

都成立

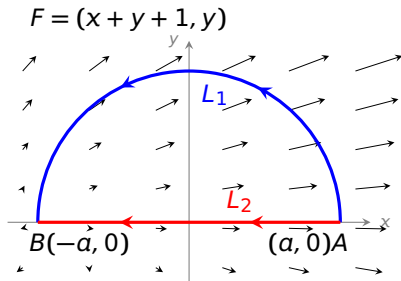
$$\int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy.$$



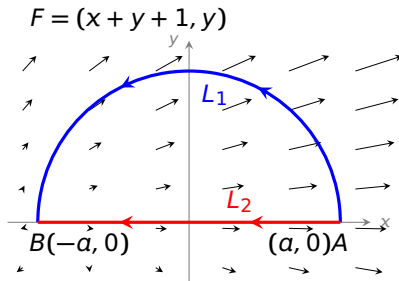
例 设 $F = (x + y + 1, y)$ 是平面上向量场，如图



例 设 $F = (x + y + 1, y)$ 是平面上向量场, 如图



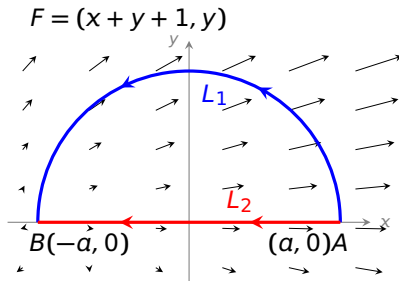
例 设 $F = (x + y + 1, y)$ 是平面上向量场, 如图



考虑对向量场 F 的曲线积分

$$I_i = \int_{L_i} (x + y + 1)dx + ydy, \quad (i = 1, 2)$$

例 设 $F = (x + y + 1, y)$ 是平面上向量场, 如图



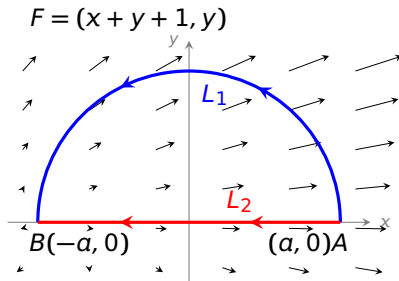
考虑对向量场 F 的曲线积分

$$I_i = \int_{L_i} (x + y + 1)dx + ydy, \quad (i = 1, 2)$$

计算知

$$I_1 = -\frac{1}{2}\pi a^2 - 2a, \quad I_2 = -2a$$

例 设 $F = (x + y + 1, y)$ 是平面上向量场, 如图



考虑对向量场 F 的曲线积分

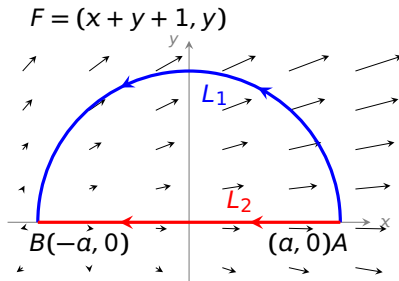
$$I_i = \int_{L_i} (x + y + 1)dx + ydy, \quad (i = 1, 2)$$

计算知

$$I_1 = -\frac{1}{2}\pi a^2 - 2a, \quad I_2 = -2a$$

可见 $I_1 \neq I_2$ 。

例 设 $F = (x + y + 1, y)$ 是平面上向量场, 如图



考虑对向量场 F 的曲线积分

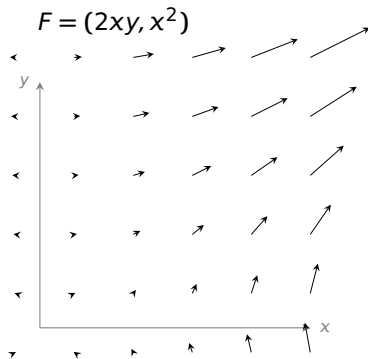
$$I_i = \int_{L_i} (x + y + 1)dx + ydy, \quad (i = 1, 2)$$

计算知

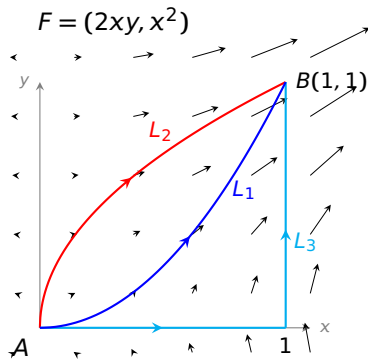
$$I_1 = -\frac{1}{2}\pi a^2 - 2a, \quad I_2 = -2a$$

可见 $I_1 \neq I_2$ 。所以 F 不是保守场

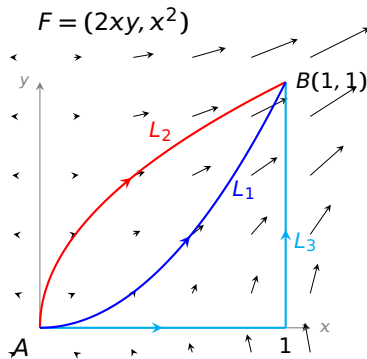
例 设 $F = (2xy, x^2)$ 是平面上向量场, 如图



例 设 $F = (2xy, x^2)$ 是平面上向量场, 如图



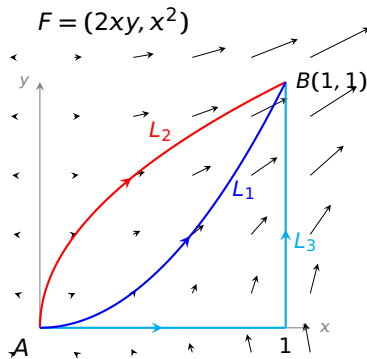
例 设 $F = (2xy, x^2)$ 是平面上向量场, 如图



考虑对向量场 F 的曲线积分

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy, \quad (i = 1, 2, 3)$$

例 设 $F = (2xy, x^2)$ 是平面上向量场, 如图



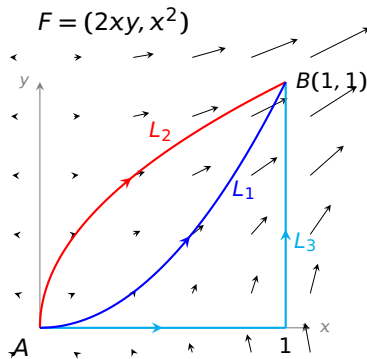
考虑对向量场 F 的曲线积分

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy, \quad (i = 1, 2, 3)$$

计算知

$$I_1 = I_2 = I_3 = 1$$

例 设 $F = (2xy, x^2)$ 是平面上向量场, 如图



考虑对向量场 F 的曲线积分

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy, \quad (i = 1, 2, 3)$$

计算知

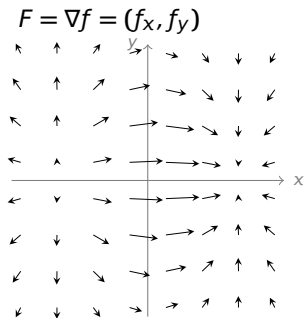
$$I_1 = I_2 = I_3 = 1$$

问题 F 是不是保守场?

定理 设 $f(x, y)$ 是定义在区域 D 上的可微函数,
则梯度向量场

$$F = \nabla f = (f_x, f_y)$$

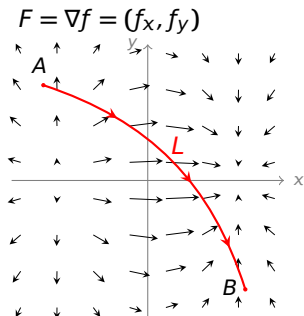
是保守场。



定理 设 $f(x, y)$ 是定义在区域 D 上的可微函数, 则梯度向量场

$$F = \nabla f = (f_x, f_y)$$

是保守场。

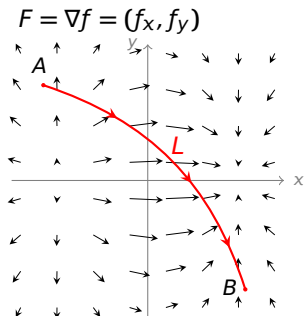


证明 设 A, B 是 D 中任意两点, L 是 D 中从 A 到 B 的任一条有向曲线。

定理 设 $f(x, y)$ 是定义在区域 D 上的可微函数, 则梯度向量场

$$F = \nabla f = (f_x, f_y)$$

是保守场。



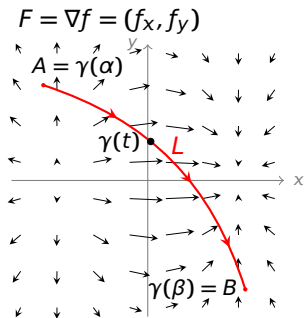
证明 设 A, B 是 D 中任意两点, L 是 D 中从 A 到 B 的任一条有向曲线。

$$\int_L f_x dx + f_y dy$$

定理 设 $f(x, y)$ 是定义在区域 D 上的可微函数，则梯度向量场

$$F = \nabla f = (f_x, f_y)$$

是保守场。



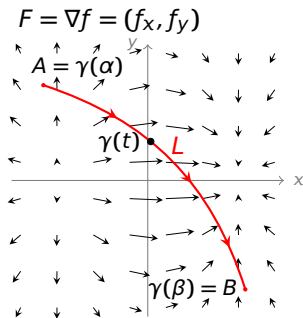
证明 设 A, B 是 D 中任意两点， L 是 D 中从 A 到 B 的任一条有向曲线。设 $\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$, $t: \alpha \rightarrow \beta$ 是 L 的参数方程，

$$\int_L f_x dx + f_y dy$$

定理 设 $f(x, y)$ 是定义在区域 D 上的可微函数, 则梯度向量场

$$F = \nabla f = (f_x, f_y)$$

是保守场。



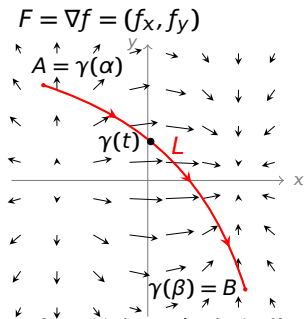
证明 设 A, B 是 D 中任意两点, L 是 D 中从 A 到 B 的任一条有向曲线。设 $\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$, $t: \alpha \rightarrow \beta$ 是 L 的参数方程, 则

$$\int_L f_x dx + f_y dy = \int_{\alpha}^{\beta} \left[f_x(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) + f_y(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t) \right] dt$$

定理 设 $f(x, y)$ 是定义在区域 D 上的可微函数, 则梯度向量场

$$F = \nabla f = (f_x, f_y)$$

是保守场。



证明 设 A, B 是 D 中任意两点, L 是 D 中从 A 到 B 的任一条有向曲线。设 $\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$, $t: \alpha \rightarrow \beta$ 是 L 的参数方程, 则

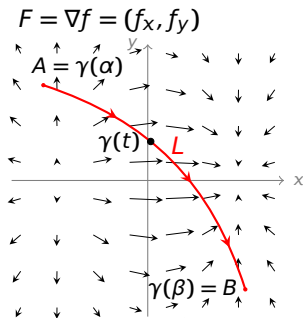
$$\int_L f_x dx + f_y dy = \int_{\alpha}^{\beta} \left[f_x(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) + f_y(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t) \right] dt$$

$$\frac{d}{dt} f(\varphi(t), \psi(t))$$

定理 设 $f(x, y)$ 是定义在区域 D 上的可微函数, 则梯度向量场

$$F = \nabla f = (f_x, f_y)$$

是保守场。



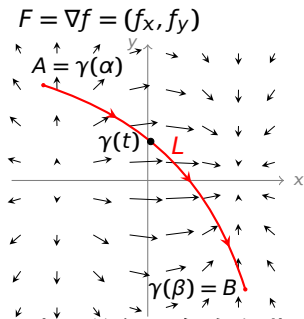
证明 设 A, B 是 D 中任意两点, L 是 D 中从 A 到 B 的任一条有向曲线。设 $\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$, $t: \alpha \rightarrow \beta$ 是 L 的参数方程, 则

$$\begin{aligned} \int_L f_x dx + f_y dy &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[f_x(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) + f_y(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t) \right] dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[\frac{d}{dt} f(\varphi(t), \psi(t)) \right] dt \end{aligned}$$

定理 设 $f(x, y)$ 是定义在区域 D 上的可微函数, 则梯度向量场

$$F = \nabla f = (f_x, f_y)$$

是保守场。



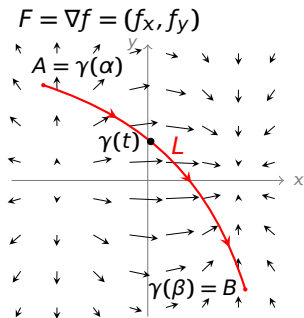
证明 设 A, B 是 D 中任意两点, L 是 D 中从 A 到 B 的任一条有向曲线。设 $\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$, $t: \alpha \rightarrow \beta$ 是 L 的参数方程, 则

$$\begin{aligned} \int_L f_x dx + f_y dy &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[f_x(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) + f_y(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t) \right] dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[\frac{d}{dt} f(\varphi(t), \psi(t)) \right] dt \\ &= f(\varphi(\beta), \psi(\beta)) - f(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)) \end{aligned}$$

定理 设 $f(x, y)$ 是定义在区域 D 上的可微函数, 则梯度向量场

$$F = \nabla f = (f_x, f_y)$$

是保守场。



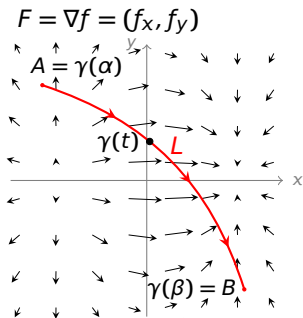
证明 设 A, B 是 D 中任意两点, L 是 D 中从 A 到 B 的任一条有向曲线。设 $\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$, $t: \alpha \rightarrow \beta$ 是 L 的参数方程, 则

$$\begin{aligned} \int_L f_x dx + f_y dy &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[f_x(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) + f_y(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t) \right] dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[\frac{d}{dt} f(\varphi(t), \psi(t)) \right] dt \\ &= f(\varphi(\beta), \psi(\beta)) - f(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)) = f(B) - f(A) \end{aligned}$$

定理 设 $f(x, y)$ 是定义在区域 D 上的可微函数, 则梯度向量场

$$F = \nabla f = (f_x, f_y)$$

是保守场。



证明 设 A, B 是 D 中任意两点, L 是 D 中从 A 到 B 的任一条有向曲线。设 $\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$, $t: \alpha \rightarrow \beta$ 是 L 的参数方程, 则

$$\begin{aligned} \int_L f_x dx + f_y dy &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[f_x(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) + f_y(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t) \right] dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[\frac{d}{dt} f(\varphi(t), \psi(t)) \right] dt \\ &= f(\varphi(\beta), \psi(\beta)) - f(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)) = f(B) - f(A) \end{aligned}$$

可见曲线积分与路径无关, 所以 ∇f 是保守场。

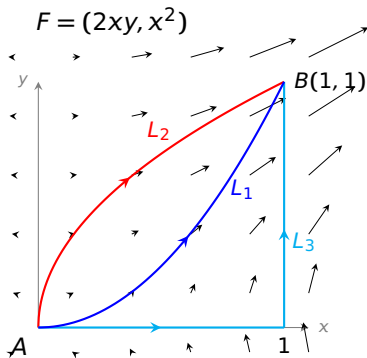
例 设 $F = (2xy, x^2)$ 是平面上向量场, 如图

- 向量场 F 的曲线积分

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy, (i = 1, 2, 3)$$

成立 $I_1 = I_2 = I_3 = 1$

- 问题 F 是不是保守场?



例 设 $F = (2xy, x^2)$ 是平面上向量场, 如图

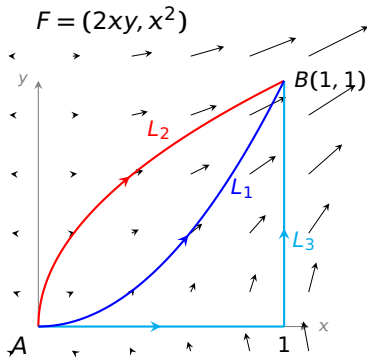
- 向量场 F 的曲线积分

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy, \quad (i = 1, 2, 3)$$

成立 $I_1 = I_2 = I_3 = 1$

- 问题 F 是不是保守场?

回答 事实上, F 是保守场, 证明如下:



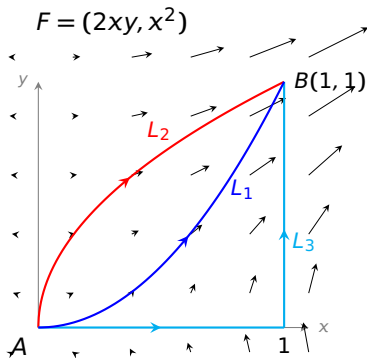
例 设 $F = (2xy, x^2)$ 是平面上向量场, 如图

- 向量场 F 的曲线积分

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy, (i = 1, 2, 3)$$

成立 $I_1 = I_2 = I_3 = 1$

- 问题 F 是不是保守场?



回答 事实上, F 是保守场, 证明如下: 令 $f(x, y) = x^2y$, 则

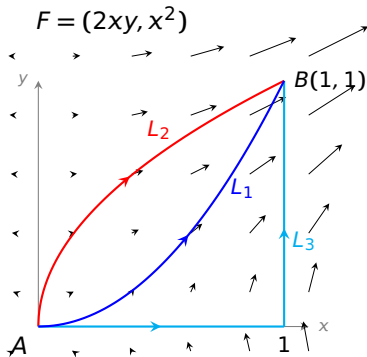
例 设 $F = (2xy, x^2)$ 是平面上向量场, 如图

- 向量场 F 的曲线积分

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy, (i = 1, 2, 3)$$

成立 $I_1 = I_2 = I_3 = 1$

- 问题 F 是不是保守场?



回答 事实上, F 是保守场, 证明如下: 令 $f(x, y) = x^2y$, 则

$$\nabla f = (2xy, x^2)$$

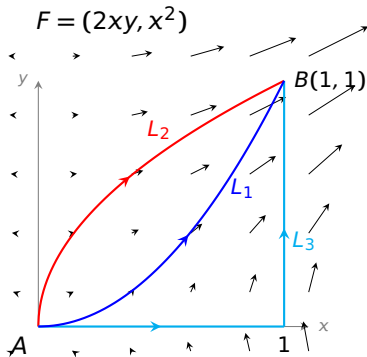
例 设 $F = (2xy, x^2)$ 是平面上向量场, 如图

- 向量场 F 的曲线积分

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy, (i = 1, 2, 3)$$

成立 $I_1 = I_2 = I_3 = 1$

- 问题 F 是不是保守场?



回答 事实上, F 是保守场, 证明如下: 令 $f(x, y) = x^2y$, 则

$$\nabla f = (2xy, x^2) = F$$

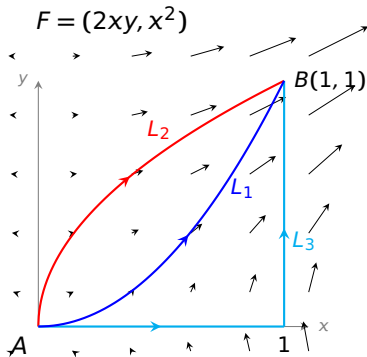
例 设 $F = (2xy, x^2)$ 是平面上向量场, 如图

- 向量场 F 的曲线积分

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy, (i = 1, 2, 3)$$

成立 $I_1 = I_2 = I_3 = 1$

- 问题 F 是不是保守场?



回答 事实上, F 是保守场, 证明如下: 令 $f(x, y) = x^2y$, 则

$$\nabla f = (2xy, x^2) = F$$

所以 F 是梯度向量场, 从而是保守场。

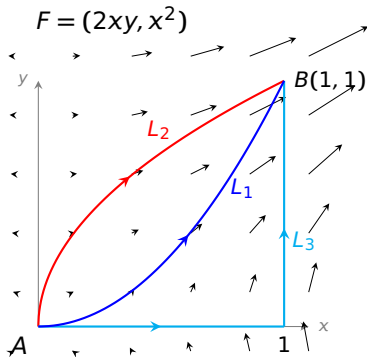
例 设 $F = (2xy, x^2)$ 是平面上向量场, 如图

- 向量场 F 的曲线积分

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy, (i = 1, 2, 3)$$

成立 $I_1 = I_2 = I_3 = 1$

- 问题 F 是不是保守场?



回答 事实上, F 是保守场, 证明如下: 令 $f(x, y) = x^2y$, 则

$$\nabla f = (2xy, x^2) = F$$

所以 F 是梯度向量场, 从而是保守场。

注 由于 $F = \nabla f$, 所以

$$\int_{L_i} 2xydx + x^2dy$$

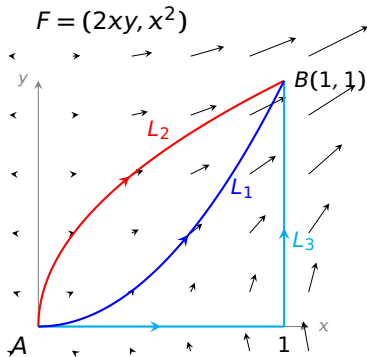
例 设 $F = (2xy, x^2)$ 是平面上向量场, 如图

- 向量场 F 的曲线积分

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy, \quad (i = 1, 2, 3)$$

成立 $I_1 = I_2 = I_3 = 1$

- 问题** F 是不是保守场?



回答 事实上, F 是保守场, 证明如下: 令 $f(x, y) = x^2y$, 则

$$\nabla f = (2xy, x^2) = F$$

所以 F 是梯度向量场, 从而是保守场。

注 由于 $F = \nabla f$, 所以

$$\int_{L_i} 2xydx + x^2dy = f(B) - f(A)$$

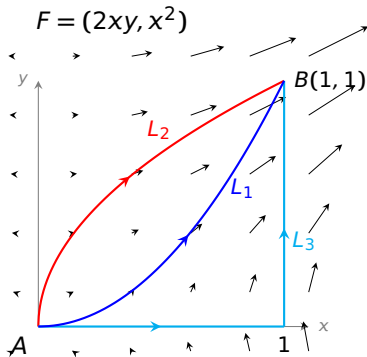
例 设 $F = (2xy, x^2)$ 是平面上向量场, 如图

- 向量场 F 的曲线积分

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy, (i = 1, 2, 3)$$

成立 $I_1 = I_2 = I_3 = 1$

- 问题 F 是不是保守场?



回答 事实上, F 是保守场, 证明如下: 令 $f(x, y) = x^2y$, 则

$$\nabla f = (2xy, x^2) = F$$

所以 F 是梯度向量场, 从而是保守场。

注 由于 $F = \nabla f$, 所以

$$\int_{L_i} 2xydx + x^2dy = f(B) - f(A) = f(1, 1) - f(0, 0)$$

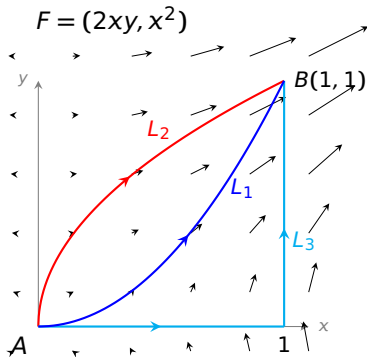
例 设 $F = (2xy, x^2)$ 是平面上向量场, 如图

- 向量场 F 的曲线积分

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy, \quad (i = 1, 2, 3)$$

成立 $I_1 = I_2 = I_3 = 1$

- 问题** F 是不是保守场?



回答 事实上, F 是保守场, 证明如下: 令 $f(x, y) = x^2y$, 则

$$\nabla f = (2xy, x^2) = F$$

所以 F 是梯度向量场, 从而是保守场。

注 由于 $F = \nabla f$, 所以

$$\int_{L_i} 2xydx + x^2dy = f(B) - f(A) = f(1, 1) - f(0, 0) = 1$$

例 计算 $\int_L ydx + xdy$, 其中有向曲线 L 的参数方程是:
 $(t^9, \sin^9(\frac{\pi}{2}t)), t: 0 \rightarrow 1$ 。

例 计算 $\int_L ydx + xdy$, 其中有向曲线 L 的参数方程是:
 $(t^9, \sin^9(\frac{\pi}{2}t)), t: 0 \rightarrow 1$ 。

解 注意到向量场 $F = (y, x)$

例 计算 $\int_L ydx + xdy$, 其中有向曲线 L 的参数方程是:
 $(t^9, \sin^9(\frac{\pi}{2}t)), t: 0 \rightarrow 1$ 。

解 注意到向量场 $F = (y, x)$ 是 $f(x, y) = xy$ 梯度向量:

$$F = \nabla f$$

例 计算 $\int_L ydx + xdy$, 其中有向曲线 L 的参数方程是:
 $(t^9, \sin^9(\frac{\pi}{2}t)), t: 0 \rightarrow 1$ 。

解 注意到向量场 $F = (y, x)$ 是 $f(x, y) = xy$ 梯度向量:

$$F = \nabla f$$

$$\int_L ydx + xdy = f(\quad) - f(\quad)$$

例 计算 $\int_L ydx + xdy$, 其中有向曲线 L 的参数方程是:
 $(t^9, \sin^9(\frac{\pi}{2}t)), t: 0 \rightarrow 1$ 。

解 注意到向量场 $F = (y, x)$ 是 $f(x, y) = xy$ 梯度向量:

$$F = \nabla f$$

而 L 是从点 $(0, 0)$ 到点 $(1, 1)$ 的曲线, 所以

$$\int_L ydx + xdy = f(\quad) - f(\quad)$$

例 计算 $\int_L ydx + xdy$, 其中有向曲线 L 的参数方程是:
 $(t^9, \sin^9(\frac{\pi}{2}t)), t: 0 \rightarrow 1$ 。

解 注意到向量场 $F = (y, x)$ 是 $f(x, y) = xy$ 梯度向量:

$$F = \nabla f$$

而 L 是从点 $(0, 0)$ 到点 $(1, 1)$ 的曲线, 所以

$$\int_L ydx + xdy = f(1, 1) - f(0, 0)$$

例 计算 $\int_L ydx + xdy$, 其中有向曲线 L 的参数方程是:
 $(t^9, \sin^9(\frac{\pi}{2}t)), t: 0 \rightarrow 1$ 。

解 注意到向量场 $F = (y, x)$ 是 $f(x, y) = xy$ 梯度向量:

$$F = \nabla f$$

而 L 是从点 $(0, 0)$ 到点 $(1, 1)$ 的曲线, 所以

$$\int_L ydx + xdy = f(1, 1) - f(0, 0) = 1.$$

例 计算 $\int_L ydx + xdy$, 其中有向曲线 L 的参数方程是:
 $(t^9, \sin^9(\frac{\pi}{2}t)), t: 0 \rightarrow 1$ 。

解 注意到向量场 $F = (y, x)$ 是 $f(x, y) = xy$ 梯度向量:

$$F = \nabla f$$

而 L 是从点 $(0, 0)$ 到点 $(1, 1)$ 的曲线, 所以

$$\int_L ydx + xdy = f(1, 1) - f(0, 0) = 1.$$

定义 给定向量场 F , 如果函数 $f(x, y)$ 满足 $F = \nabla f$, 则称 f 为向量场 F 的一个**势函数**。

定理 设 $F = (P, Q)$ 是定义在区域 D 上的向量场, 则以下等价:

(1) F 是保守场,

(2) F 是梯度向量场, 即存在势函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$ 。

定理 设 $F = (P, Q)$ 是定义在区域 D 上的向量场，则以下等价：

(1) F 是保守场，

(2) F 是梯度向量场，即存在势函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$ 。

证明 “(2) \Rightarrow (1)” 已证，只需再证 “(1) \Rightarrow (2)” ...

定理 设 $F = (P, Q)$ 是定义在区域 D 上的向量场，则以下等价：

(1) F 是保守场，

(2) F 是梯度向量场，即存在势函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$ 。

证明 “(2) \Rightarrow (1)” 已证，只需再证 “(1) \Rightarrow (2)” ...

推论 设 $F = (P, Q)$ 是保守场，则 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ，

定理 设 $F = (P, Q)$ 是定义在区域 D 上的向量场，则以下等价：

(1) F 是保守场，

(2) F 是梯度向量场，即存在势函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$ 。

证明 “(2) \Rightarrow (1)” 已证，只需再证 “(1) \Rightarrow (2)” ...

推论 设 $F = (P, Q)$ 是保守场，则 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ，等价地， $\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0$

定理 设 $F = (P, Q)$ 是定义在区域 D 上的向量场，则以下等价：

(1) F 是保守场，

(2) F 是梯度向量场，即存在势函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$ 。

证明 “(2) \Rightarrow (1)” 已证，只需再证 “(1) \Rightarrow (2)” ...

推论 设 $F = (P, Q)$ 是保守场，则 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ，等价地， $\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0$

证明 由定理，存在势函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$ ，所以

定理 设 $F = (P, Q)$ 是定义在区域 D 上的向量场，则以下等价：

(1) F 是保守场，

(2) F 是梯度向量场，即存在势函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$ 。

证明 “(2) \Rightarrow (1)” 已证，只需再证 “(1) \Rightarrow (2)” ...

推论 设 $F = (P, Q)$ 是保守场，则 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ，等价地， $\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0$

证明 由定理，存在势函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$ ，所以

$$P = f_x, \quad Q = f_y$$

定理 设 $F = (P, Q)$ 是定义在区域 D 上的向量场，则以下等价：

(1) F 是保守场，

(2) F 是梯度向量场，即存在势函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$ 。

证明 “(2) \Rightarrow (1)” 已证，只需再证 “(1) \Rightarrow (2)” ...

推论 设 $F = (P, Q)$ 是保守场，则 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ，等价地， $\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0$

证明 由定理，存在势函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$ ，所以

$$P = f_x, Q = f_y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

定理 设 $F = (P, Q)$ 是定义在区域 D 上的向量场，则以下等价：

(1) F 是保守场，

(2) F 是梯度向量场，即存在势函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$ 。

证明 “(2) \Rightarrow (1)” 已证，只需再证 “(1) \Rightarrow (2)” ...

推论 设 $F = (P, Q)$ 是保守场，则 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ，等价地， $\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0$

证明 由定理，存在势函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$ ，所以

$$P = f_x, Q = f_y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y} = f_{xy}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} =$$

定理 设 $F = (P, Q)$ 是定义在区域 D 上的向量场, 则以下等价:

(1) F 是保守场,

(2) F 是梯度向量场, 即存在势函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$.

证明 “(2) \Rightarrow (1)” 已证, 只需再证 “(1) \Rightarrow (2)” ...

推论 设 $F = (P, Q)$ 是保守场, 则 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, 等价地, $\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0$

证明 由定理, 存在势函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$, 所以

$$P = f_x, Q = f_y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y} = f_{xy}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = f_{yx}$$

定理 设 $F = (P, Q)$ 是定义在区域 D 上的向量场, 则以下等价:

(1) F 是保守场,

(2) F 是梯度向量场, 即存在势函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$.

证明 “(2) \Rightarrow (1)” 已证, 只需再证 “(1) \Rightarrow (2)” ...

推论 设 $F = (P, Q)$ 是保守场, 则 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, 等价地, $\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0$

证明 由定理, 存在势函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$, 所以

$$P = f_x, Q = f_y \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = f_{xy}, \frac{\partial Q}{\partial x} = f_{yx} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

定理 设 $F = (P, Q)$ 是定义在区域 D 上的向量场，则以下等价：

(1) F 是保守场，

(2) F 是梯度向量场，即存在势函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$ 。

证明 “(2) \Rightarrow (1)” 已证，只需再证 “(1) \Rightarrow (2)” ...

推论 设 $F = (P, Q)$ 是保守场，则 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ，等价地， $\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0$

证明 由定理，存在势函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$ ，所以

$$P = f_x, Q = f_y \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = f_{xy}, \frac{\partial Q}{\partial x} = f_{yx} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

例 $F = (x + y + 1, y)$ 不是保守场。

定理 设 $F = (P, Q)$ 是定义在区域 D 上的向量场, 则以下等价:

(1) F 是保守场,

(2) F 是梯度向量场, 即存在势函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$.

证明 “(2) \Rightarrow (1)” 已证, 只需再证 “(1) \Rightarrow (2)” ...

推论 设 $F = (P, Q)$ 是保守场, 则 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, 等价地, $\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0$

证明 由定理, 存在势函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$, 所以

$$P = f_x, Q = f_y \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = f_{xy}, \frac{\partial Q}{\partial x} = f_{yx} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

例 $F = (x + y + 1, y)$ 不是保守场。这是 $\frac{\partial}{\partial y}(x + y + 1) \neq \frac{\partial}{\partial x}(y)$

定理 设 $F = (P, Q)$ 是定义在区域 D 上的向量场, 则以下等价:

(1) F 是保守场,

(2) F 是梯度向量场, 即存在势函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$.

证明 “(2) \Rightarrow (1)” 已证, 只需再证 “(1) \Rightarrow (2)” ...

推论 设 $F = (P, Q)$ 是保守场, 则 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, 等价地, $\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0$

证明 由定理, 存在势函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$, 所以

$$P = f_x, Q = f_y \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = f_{xy}, \frac{\partial Q}{\partial x} = f_{yx} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

例 $F = (x + y + 1, y)$ 不是保守场。这是 $\frac{\partial}{\partial y}(x + y + 1) \neq \frac{\partial}{\partial x}(y)$

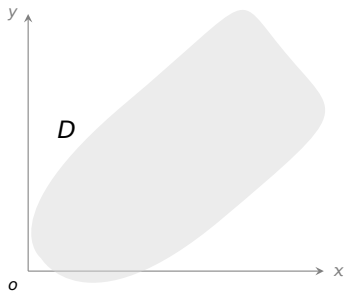
定理 设 $F = (P, Q)$ 是定义在区域 D 上的向量场，则以下等价：

- (1) F 是保守场，
- (2) F 是梯度向量场，即存在势函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$ 。

定理 设 $F = (P, Q)$ 是定义在区域 D 上的向量场，则以下等价：

- (1) F 是保守场，
- (2) F 是梯度向量场，即存在势函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$ 。

证明 下面证 “(1) \Rightarrow (2)”：

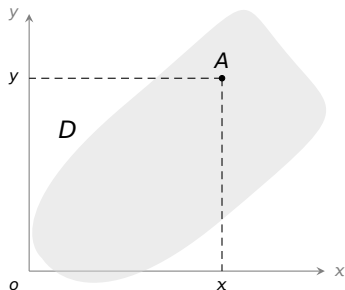


定理 设 $F = (P, Q)$ 是定义在区域 D 上的向量场，则以下等价：

(1) F 是保守场，

(2) F 是梯度向量场，即存在势函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$ 。

证明 下面证 “(1) \Rightarrow (2)”：如图，定义 D 中任意点 $A(x, y)$ 的函数值为

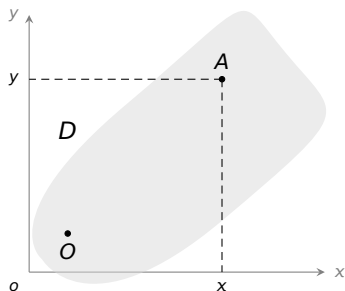


定理 设 $F = (P, Q)$ 是定义在区域 D 上的向量场，则以下等价：

(1) F 是保守场，

(2) F 是梯度向量场，即存在势函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$ 。

证明 下面证 “(1) \Rightarrow (2)”：如图，定义 D 中任意点 $A(x, y)$ 的函数值为

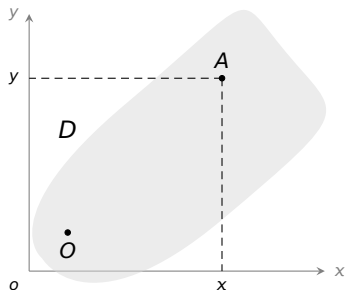


定理 设 $F = (P, Q)$ 是定义在区域 D 上的向量场，则以下等价：

- (1) F 是保守场，
- (2) F 是梯度向量场，即存在势函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$ 。

证明 下面证 “(1) \Rightarrow (2)”：如图，定义 D 中任意点 $A(x, y)$ 的函数值为

$$f(x, y) := F \text{ 从 } O \text{ 到 } A \text{ 的积分}$$



定理 设 $F = (P, Q)$ 是定义在区域 D 上的向量场，则以下等价：

(1) F 是保守场，

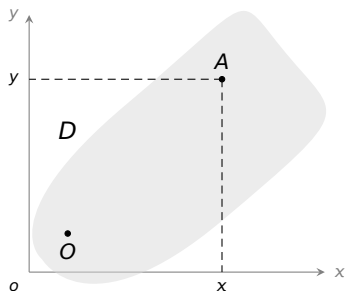
(2) F 是梯度向量场，即存在势函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$ 。

证明 下面证 “(1) \Rightarrow (2)”：如图，定义 D 中任意点 $A(x, y)$ 的函数值为

$$f(x, y) := F \text{ 从 } O \text{ 到 } A \text{ 的积分}$$

所以

$$f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$



定理 设 $F = (P, Q)$ 是定义在区域 D 上的向量场，则以下等价：

(1) F 是保守场，

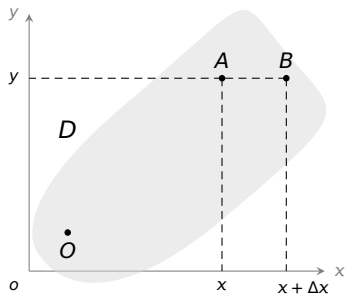
(2) F 是梯度向量场，即存在势函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$ 。

证明 下面证 “(1) \Rightarrow (2)”：如图，定义 D 中任意点 $A(x, y)$ 的函数值为

$$f(x, y) := F \text{ 从 } O \text{ 到 } A \text{ 的积分}$$

所以

$$f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$



定理 设 $F = (P, Q)$ 是定义在区域 D 上的向量场，则以下等价：

(1) F 是保守场，

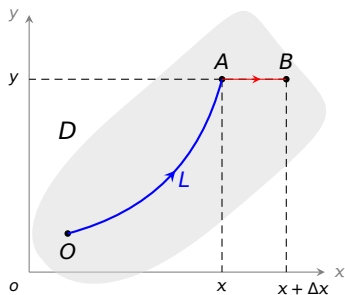
(2) F 是梯度向量场，即存在势函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$ 。

证明 下面证 “(1) \Rightarrow (2)”：如图，定义 D 中任意点 $A(x, y)$ 的函数值为

$$f(x, y) := F \text{ 从 } O \text{ 到 } A \text{ 的积分}$$

所以

$$f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$



定理 设 $F = (P, Q)$ 是定义在区域 D 上的向量场，则以下等价：

(1) F 是保守场，

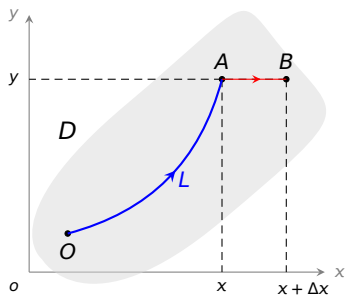
(2) F 是梯度向量场，即存在势函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$ 。

证明 下面证 “(1) \Rightarrow (2)”：如图，定义 D 中任意点 $A(x, y)$ 的函数值为

$$f(x, y) := F \text{ 从 } O \text{ 到 } A \text{ 的积分} = \int_L Pdx + Qdy$$

所以

$$f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$



定理 设 $F = (P, Q)$ 是定义在区域 D 上的向量场，则以下等价：

(1) F 是保守场，

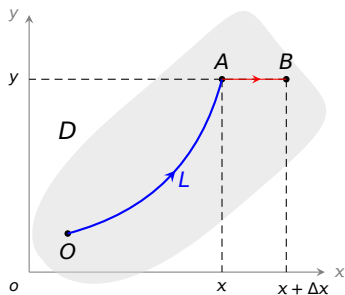
(2) F 是梯度向量场，即存在势函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$ 。

证明 下面证 “(1) \Rightarrow (2)”：如图，定义 D 中任意点 $A(x, y)$ 的函数值为

$$f(x, y) := F \text{ 从 } O \text{ 到 } A \text{ 的积分} = \int_L Pdx + Qdy$$

所以

$$f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \int_{\overrightarrow{PQ}} Pdx + Qdy$$



定理 设 $F = (P, Q)$ 是定义在区域 D 上的向量场，则以下等价：

(1) F 是保守场，

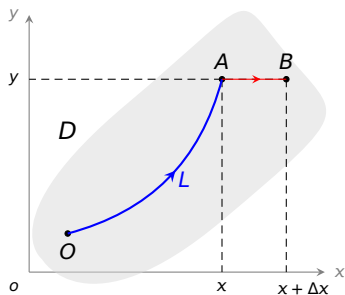
(2) F 是梯度向量场，即存在势函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$ 。

证明 下面证 “(1) \Rightarrow (2)”：如图，定义 D 中任意点 $A(x, y)$ 的函数值为

$$f(x, y) := F \text{ 从 } O \text{ 到 } A \text{ 的积分} = \int_L Pdx + Qdy$$

所以

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{\overrightarrow{PQ}} Pdx + Qdy \end{aligned}$$



定理 设 $F = (P, Q)$ 是定义在区域 D 上的向量场，则以下等价：

(1) F 是保守场，

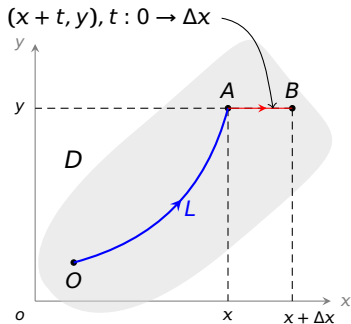
(2) F 是梯度向量场，即存在势函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$ 。

证明 下面证 “(1) \Rightarrow (2)”：如图，定义 D 中任意点 $A(x, y)$ 的函数值为

$$f(x, y) := F \text{ 从 } O \text{ 到 } A \text{ 的积分} = \int_L Pdx + Qdy$$

所以

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{\overrightarrow{PQ}} Pdx + Qdy \end{aligned}$$



定理 设 $F = (P, Q)$ 是定义在区域 D 上的向量场，则以下等价：

(1) F 是保守场，

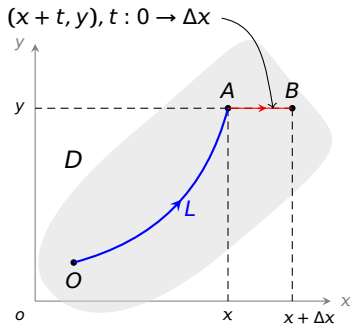
(2) F 是梯度向量场，即存在势函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$ 。

证明 下面证 “(1) \Rightarrow (2)”：如图，定义 D 中任意点 $A(x, y)$ 的函数值为

$$f(x, y) := F \text{ 从 } O \text{ 到 } A \text{ 的积分} = \int_L Pdx + Qdy$$

所以

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{\overrightarrow{PQ}} Pdx + Qdy \\ &\quad \int_0^{\Delta x} P(x + t, y) dt \end{aligned}$$



定理 设 $F = (P, Q)$ 是定义在区域 D 上的向量场，则以下等价：

(1) F 是保守场，

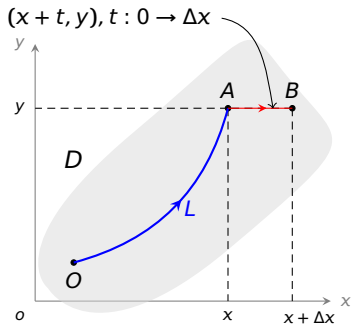
(2) F 是梯度向量场，即存在势函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$ 。

证明 下面证 “(1) \Rightarrow (2)”：如图，定义 D 中任意点 $A(x, y)$ 的函数值为

$$f(x, y) := F \text{ 从 } O \text{ 到 } A \text{ 的积分} = \int_L Pdx + Qdy$$

所以

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{\overrightarrow{PQ}} Pdx + Qdy \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x} P(x + t, y) dt \end{aligned}$$



定理 设 $F = (P, Q)$ 是定义在区域 D 上的向量场，则以下等价：

(1) F 是保守场，

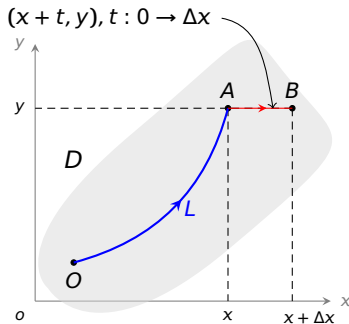
(2) F 是梯度向量场，即存在势函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$ 。

证明 下面证 “(1) \Rightarrow (2)”：如图，定义 D 中任意点 $A(x, y)$ 的函数值为

$$f(x, y) := F \text{ 从 } O \text{ 到 } A \text{ 的积分} = \int_L Pdx + Qdy$$

所以

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{\vec{PQ}} Pdx + Qdy \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x} P(x + t, y) dt \\ &= P(x, y) \end{aligned}$$



定理 设 $F = (P, Q)$ 是定义在区域 D 上的向量场，则以下等价：

(1) F 是保守场，

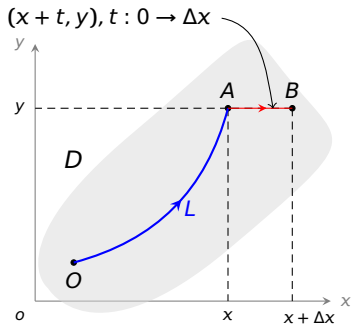
(2) F 是梯度向量场，即存在势函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$ 。

证明 下面证 “(1) \Rightarrow (2)”：如图，定义 D 中任意点 $A(x, y)$ 的函数值为

$$f(x, y) := F \text{ 从 } O \text{ 到 } A \text{ 的积分} = \int_L Pdx + Qdy$$

所以

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{\vec{PQ}} Pdx + Qdy \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x} P(x + t, y) dt \\ &= P(x, y) \end{aligned}$$



同理可证， $f_y(x, y) = Q(x, y)$ 。所以 $F = (f_x, f_y)$ 。

注 设 $F = (P, Q)$ 是向量场, 则

$$F \text{ 是保守向量场} \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0$$

注 设 $F = (P, Q)$ 是向量场, 则

$$F \text{ 是保守向量场} \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0$$

但反过来不成立:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0 \not\Rightarrow F \text{ 是保守向量场}$$

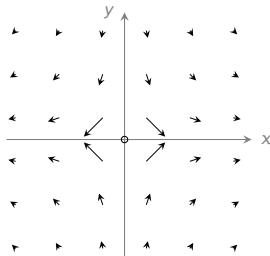
注 设 $F = (P, Q)$ 是向量场, 则

$$F \text{ 是保守向量场} \Rightarrow \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0$$

但反过来不成立:

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0 \not\Rightarrow F \text{ 是保守向量场}$$

例 设向量场 $F = (P, G) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right)$



注 设 $F = (P, Q)$ 是向量场, 则

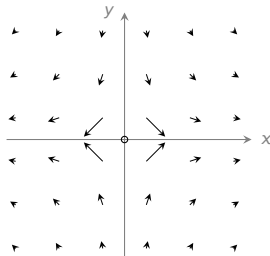
$$F \text{ 是保守向量场} \Rightarrow \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0$$

但反过来不成立:

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0 \not\Rightarrow F \text{ 是保守向量场}$$

例 设向量场 $F = (P, G) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right)$

- 定义域 $D = \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$



注 设 $F = (P, Q)$ 是向量场, 则

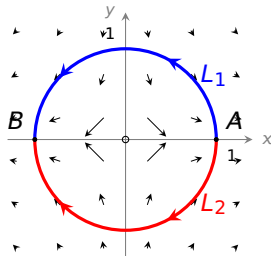
$$F \text{ 是保守向量场} \Rightarrow \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0$$

但反过来不成立:

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0 \not\Rightarrow F \text{ 是保守向量场}$$

例 设向量场 $F = (P, G) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right)$

- 定义域 $D = \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$



注 设 $F = (P, Q)$ 是向量场, 则

$$F \text{ 是保守向量场} \Rightarrow \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0$$

但反过来不成立:

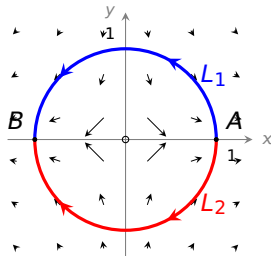
$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0 \not\Rightarrow F \text{ 是保守向量场}$$

例 设向量场 $F = (P, G) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right)$

- 定义域 $D = \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$

- 曲线积分

$$I_i = \int_{L_i} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}, \quad (i = 1, 2)$$



注 设 $F = (P, Q)$ 是向量场, 则

$$F \text{ 是保守向量场} \Rightarrow \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0$$

但反过来不成立:

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0 \not\Rightarrow F \text{ 是保守向量场}$$

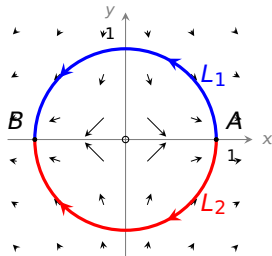
例 设向量场 $F = (P, G) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right)$

- 定义域 $D = \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$

- 曲线积分

$$I_i = \int_{L_i} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}, \quad (i = 1, 2)$$

的值是: $I_1 = \pi, I_2 = -\pi$.



注 设 $F = (P, Q)$ 是向量场, 则

$$F \text{ 是保守向量场} \Rightarrow \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0$$

但反过来不成立:

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0 \not\Rightarrow F \text{ 是保守向量场}$$

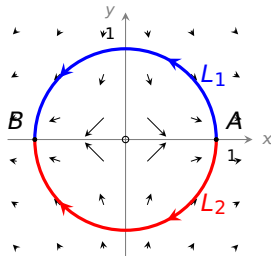
例 设向量场 $F = (P, G) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right)$

- 定义域 $D = \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$

- 曲线积分

$$I_i = \int_{L_i} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}, \quad (i = 1, 2)$$

的值是: $I_1 = \pi, I_2 = -\pi$ 。故 F 不是保守场。



注 设 $F = (P, Q)$ 是向量场, 则

$$F \text{ 是保守向量场} \Rightarrow \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0$$

但反过来不成立:

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0 \not\Rightarrow F \text{ 是保守向量场}$$

例 设向量场 $F = (P, G) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right)$

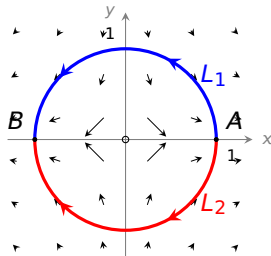
- 定义域 $D = \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$

- 曲线积分

$$I_i = \int_{L_i} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}, \quad (i = 1, 2)$$

的值是: $I_1 = \pi, I_2 = -\pi$ 。故 F 不是保守场。

- 而 $\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} =$



注 设 $F = (P, Q)$ 是向量场, 则

$$F \text{ 是保守向量场} \Rightarrow \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0$$

但反过来不成立:

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0 \not\Rightarrow F \text{ 是保守向量场}$$

例 设向量场 $F = (P, G) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right)$

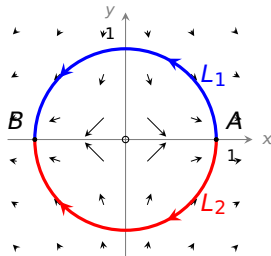
- 定义域 $D = \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$

- 曲线积分

$$I_i = \int_{L_i} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}, \quad (i = 1, 2)$$

的值是: $I_1 = \pi, I_2 = -\pi$ 。故 F 不是保守场。

- 而 $\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} - \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} =$



注 设 $F = (P, Q)$ 是向量场, 则

$$F \text{ 是保守向量场} \Rightarrow \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0$$

但反过来不成立:

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0 \not\Rightarrow F \text{ 是保守向量场}$$

例 设向量场 $F = (P, G) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right)$

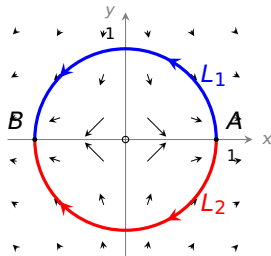
- 定义域 $D = \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$

- 曲线积分

$$I_i = \int_{L_i} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}, \quad (i = 1, 2)$$

的值是: $I_1 = \pi, I_2 = -\pi$ 。故 F 不是保守场。

- 而 $\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} - \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} = 0$



定理 设平面区域 D 是单连通， $F = (P, Q)$ 是定义在 D 上的向量场。则

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0 \quad \Rightarrow \quad F \text{ 是保守向量场}$$

定理 设平面区域 D 是单连通, $F = (P, Q)$ 是定义在 D 上的向量场。则

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0 \quad \Rightarrow \quad F \text{ 是保守向量场}$$

(即此时存在 D 上二元函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$)

定理 设平面区域 D 是单连通， $F = (P, Q)$ 是定义在 D 上的向量场。则

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0 \Rightarrow F \text{ 是保守向量场}$$

(即此时存在 D 上二元函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$)

定义 平面区域 D 是单连通，是指： D 中任意一条闭曲线，都能在 D 中收缩成一点

定理 设平面区域 D 是单连通， $F = (P, Q)$ 是定义在 D 上的向量场。则

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0 \Rightarrow F \text{ 是保守向量场}$$

(即此时存在 D 上二元函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$)

定义 平面区域 D 是单连通，是指： D 中任意一条闭曲线，都能在 D 中收缩成一点（也就是，曲线在收缩过程保持在 D 中）。

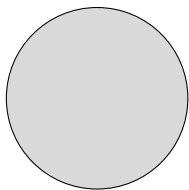
定理 设平面区域 D 是单连通， $F = (P, Q)$ 是定义在 D 上的向量场。则

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0 \Rightarrow F \text{ 是保守向量场}$$

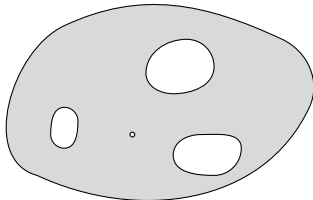
(即此时存在 D 上二元函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$)

定义 平面区域 D 是单连通，是指： D 中任意一条闭曲线，都能在 D 中收缩成一点（也就是，曲线在收缩过程保持在 D 中）。

例



D_1



D_2

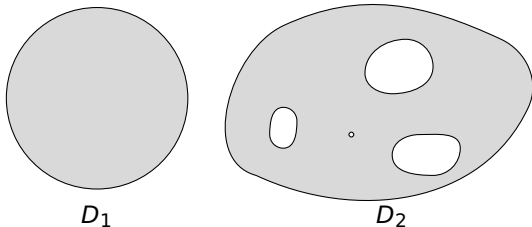
定理 设平面区域 D 是单连通， $F = (P, Q)$ 是定义在 D 上的向量场。则

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0 \Rightarrow F \text{ 是保守向量场}$$

(即此时存在 D 上二元函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$)

定义 平面区域 D 是单连通，是指： D 中任意一条闭曲线，都能在 D 中收缩成一点（也就是，曲线在收缩过程保持在 D 中）。

例 如图， D_1 是单连通，而 D_2 不是



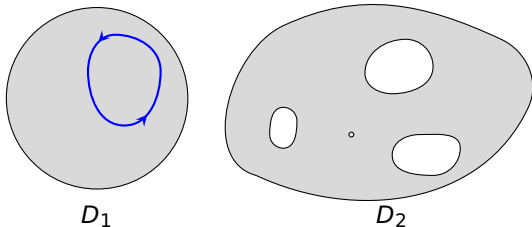
定理 设平面区域 D 是单连通， $F = (P, Q)$ 是定义在 D 上的向量场。则

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0 \Rightarrow F \text{ 是保守向量场}$$

(即此时存在 D 上二元函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$)

定义 平面区域 D 是单连通，是指： D 中任意一条闭曲线，都能在 D 中收缩成一点（也就是，曲线在收缩过程保持在 D 中）。

例 如图， D_1 是单连通，而 D_2 不是



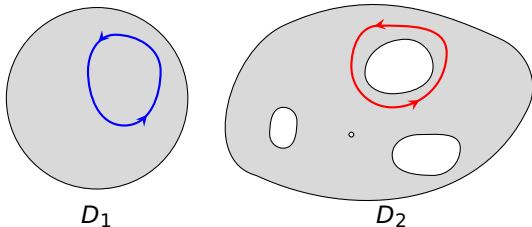
定理 设平面区域 D 是单连通， $F = (P, Q)$ 是定义在 D 上的向量场。则

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0 \Rightarrow F \text{ 是保守向量场}$$

(即此时存在 D 上二元函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$)

定义 平面区域 D 是单连通，是指： D 中任意一条闭曲线，都能在 D 中收缩成一点（也就是，曲线在收缩过程保持在 D 中）。

例 如图， D_1 是单连通，而 D_2 不是



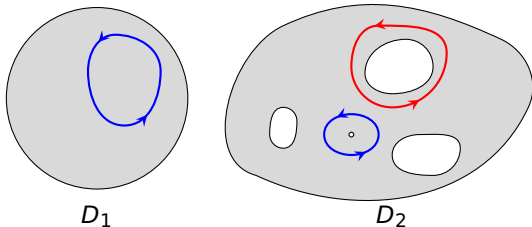
定理 设平面区域 D 是单连通， $F = (P, Q)$ 是定义在 D 上的向量场。则

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0 \Rightarrow F \text{ 是保守向量场}$$

(即此时存在 D 上二元函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$)

定义 平面区域 D 是单连通，是指： D 中任意一条闭曲线，都能在 D 中收缩成一点（也就是，曲线在收缩过程保持在 D 中）。

例 如图， D_1 是单连通，而 D_2 不是



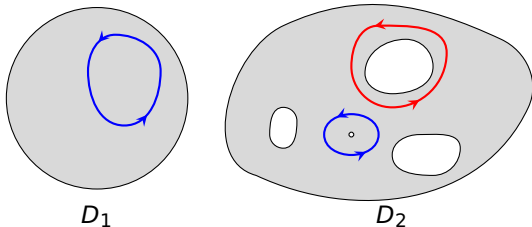
定理 设平面区域 D 是单连通， $F = (P, Q)$ 是定义在 D 上的向量场。则

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0 \Rightarrow F \text{ 是保守向量场}$$

(即此时存在 D 上二元函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$)

定义 平面区域 D 是单连通，是指： D 中任意一条闭曲线，都能在 D 中收缩成一点（也就是，曲线在收缩过程保持在 D 中）。

例 如图， D_1 是单连通，而 D_2 不是



注 直观上，单连通区域是指不含“洞”、“孔”的区域

定理 设平面区域 D 是单连通, $F = (P, Q)$ 是定义在 D 上的向量场。则

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0 \Rightarrow F \text{ 是保守向量场}$$

(即此时存在 D 上势函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$)

注 上述定理中条件“ D 是单连通”是必须的。

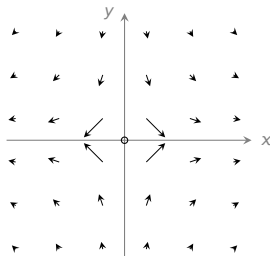
定理 设平面区域 D 是单连通， $F = (P, Q)$ 是定义在 D 上的向量场。则

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0 \Rightarrow F \text{ 是保守向量场}$$

(即此时存在 D 上势函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$)

注 上述定理中条件“ D 是单连通”是必须的。

例 设向量场 $F = (P, G) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right)$



定理 设平面区域 D 是单连通, $F = (P, Q)$ 是定义在 D 上的向量场。则

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0 \Rightarrow F \text{ 是保守向量场}$$

(即此时存在 D 上势函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$)

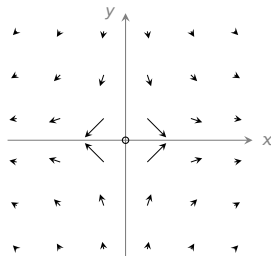
注 上述定理中条件“ D 是单连通”是必须的。

例 设向量场 $F = (P, G) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right)$

- 定义域 $D = \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$

- $\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} - \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} = 0$

- 但 F 不是保守场:



定理 设平面区域 D 是单连通, $F = (P, Q)$ 是定义在 D 上的向量场。则

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0 \Rightarrow F \text{ 是保守向量场}$$

(即此时存在 D 上势函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$)

注 上述定理中条件“ D 是单连通”是必须的。

例 设向量场 $F = (P, G) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right)$

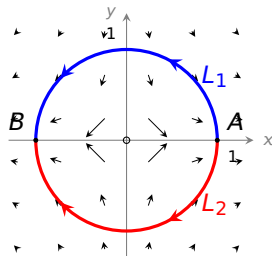
- 定义域 $D = \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$

- $\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} - \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} = 0$

- 但 F 不是保守场:

$$I_i = \int_{L_i} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}, \quad (i = 1, 2)$$

的值是: $I_1 = \pi, I_2 = -\pi$ 。



定理 设平面区域 D 是单连通, $F = (P, Q)$ 是定义在 D 上的向量场。则

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0 \Rightarrow F \text{ 是保守向量场}$$

(即此时存在 D 上势函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$)

注 上述定理中条件“ D 是单连通”是必须的。

例 设向量场 $F = (P, G) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right)$

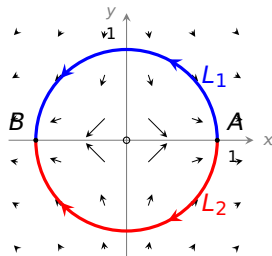
• 定义域 $D = \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ (并不是单连通)

$$\bullet \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} - \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} = 0$$

• 但 F 不是保守场:

$$I_i = \int_{L_i} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}, \quad (i = 1, 2)$$

的值是: $I_1 = \pi, I_2 = -\pi$ 。



补充

性质 设 $F = (P, Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场。则以下说法等价：

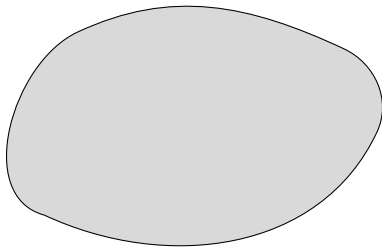
- (1) F 是保守场
- (2) F 在 D 中任意有向闭曲线 C 上的曲线积分为 0

补充

性质 设 $F = (P, Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场。则以下说法等价：

- (1) F 是保守场
- (2) F 在 D 中任意有向闭曲线 C 上的曲线积分为 0

证明

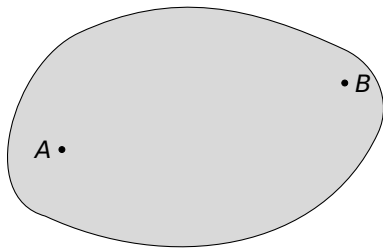


补充

性质 设 $F = (P, Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场。则以下说法等价：

- (1) F 是保守场
- (2) F 在 D 中任意有向闭曲线 C 上的曲线积分为 0

证明

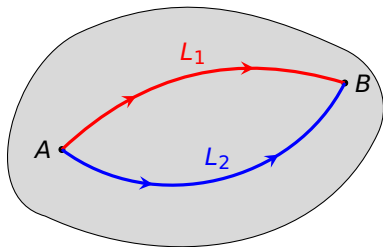


补充

性质 设 $F = (P, Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场。则以下说法等价：

- (1) F 是保守场
- (2) F 在 D 中任意有向闭曲线 C 上的曲线积分为 0

证明



补充

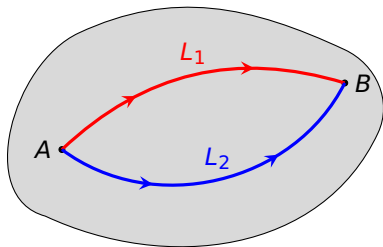
性质 设 $F = (P, Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场。则以下说法等价：

- (1) F 是保守场
- (2) F 在 D 中任意有向闭曲线 C 上的曲线积分为 0

证明

F 是保守场

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy$$



补充

性质 设 $F = (P, Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场。则以下说法等价：

(1) F 是保守场

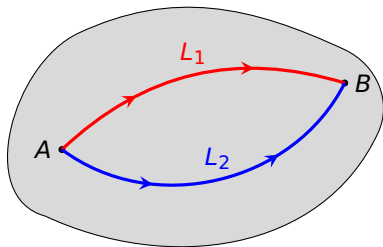
(2) F 在 D 中任意有向闭曲线 C 上的曲线积分为 0

证明

F 是保守场

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy$$

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx + Qdy - \int_{L_2} Pdx + Qdy = 0$$



补充

性质 设 $F = (P, Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场。则以下说法等价：

(1) F 是保守场

(2) F 在 D 中任意有向闭曲线 C 上的曲线积分为 0

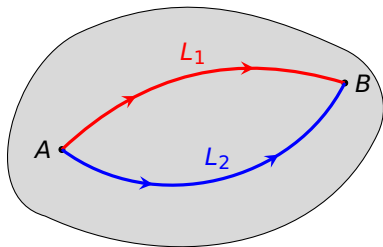
证明

F 是保守场

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy$$

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx + Qdy - \int_{L_2} Pdx + Qdy = 0$$

$$\int_{-L_2} Pdx + Qdy$$



补充

性质 设 $F = (P, Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场。则以下说法等价：

(1) F 是保守场

(2) F 在 D 中任意有向闭曲线 C 上的曲线积分为 0

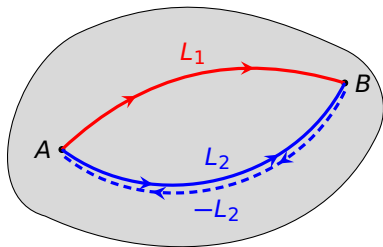
证明

F 是保守场

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy$$

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx + Qdy - \int_{L_2} Pdx + Qdy = 0$$

$$\int_{-L_2} Pdx + Qdy$$



补充

性质 设 $F = (P, Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场。则以下说法等价：

(1) F 是保守场

(2) F 在 D 中任意有向闭曲线 C 上的曲线积分为 0

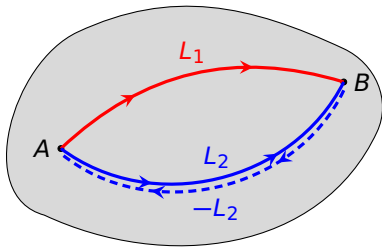
证明

F 是保守场

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy$$

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx + Qdy - \int_{L_2} Pdx + Qdy = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx + Qdy + \int_{-L_2} Pdx + Qdy = 0$$



补充

性质 设 $F = (P, Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场。则以下说法等价：

(1) F 是保守场

(2) F 在 D 中任意有向闭曲线 C 上的曲线积分为 0

证明

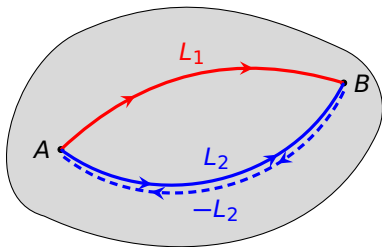
F 是保守场

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy$$

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx + Qdy - \int_{L_2} Pdx + Qdy = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx + Qdy + \int_{-L_2} Pdx + Qdy = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{L_1 + (-L_2)} Pdx + Qdy = 0$$



补充

性质 设 $F = (P, Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场。则以下说法等价：

(1) F 是保守场

(2) F 在 D 中任意有向闭曲线 C 上的曲线积分为 0

证明

F 是保守场

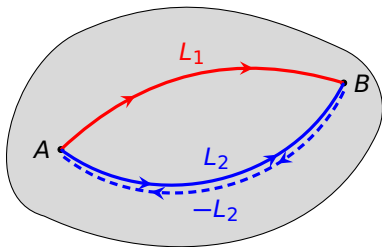
$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy$$

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx + Qdy - \int_{L_2} Pdx + Qdy = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx + Qdy + \int_{-L_2} Pdx + Qdy = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{L_1 + (-L_2)} Pdx + Qdy = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_C Pdx + Qdy = 0$$



小结

- 设 $F = (P, Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场, 则

小结

- 设 $F = (P, Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场, 则

F 是梯度向量场 (势场), 即 $F = \nabla f$

F 是保守向量场

F 在任意闭曲线上的曲线积分为 0

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0$$

小结

- 设 $F = (P, Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场，则

F 是保守向量场

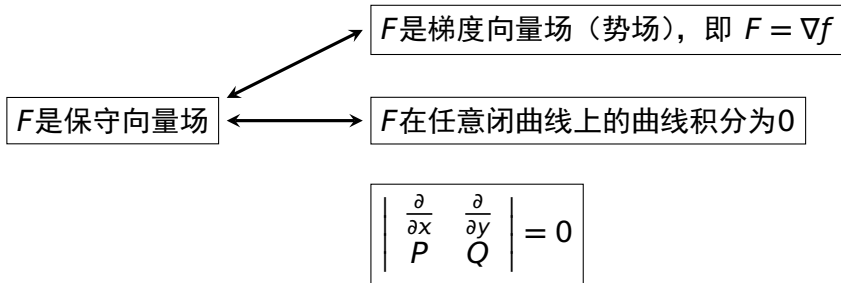
F 是梯度向量场（势场），即 $F = \nabla f$

F 在任意闭曲线上的曲线积分为 0

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0$$

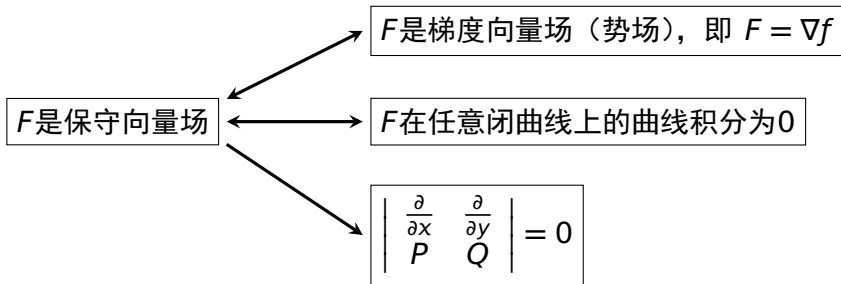
小结

- 设 $F = (P, Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场，则



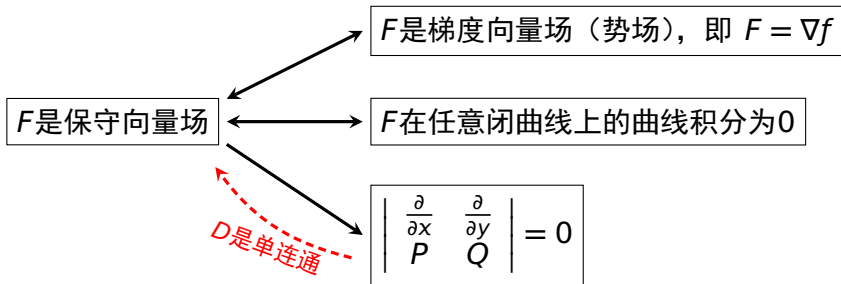
小结

- 设 $F = (P, Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场，则



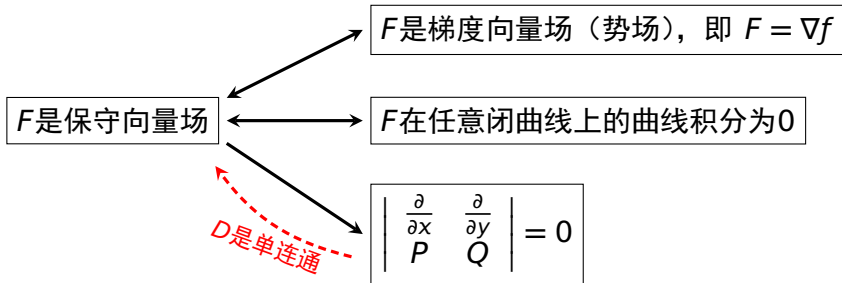
小结

- 设 $F = (P, Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场，则



小结

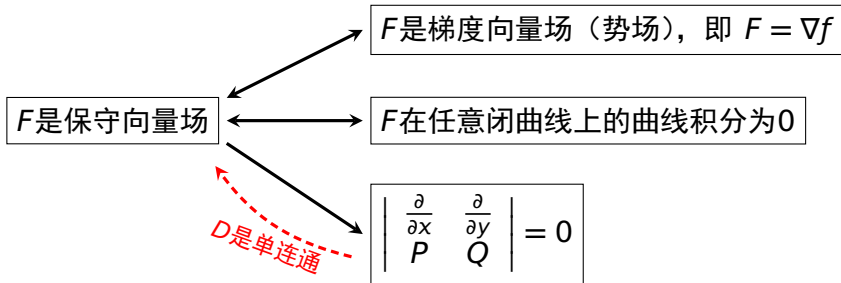
- 设 $F = (P, Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场，则



- 当 $F = (P, Q)$ 是保守场时，成立 $F = \nabla f$ ，

小结

- 设 $F = (P, Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场，则

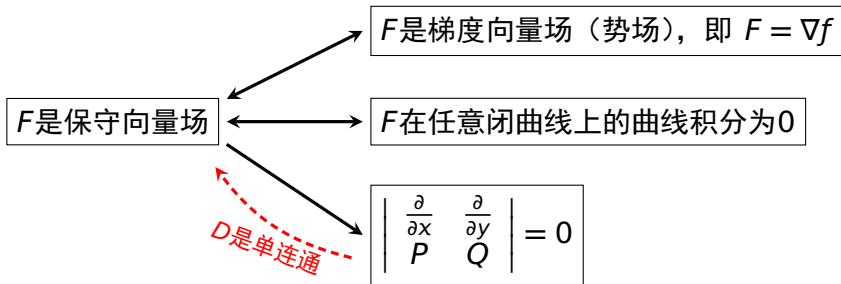


- 当 $F = (P, Q)$ 是保守场时, 成立 $F = \nabla f$, 并且

$$\int_L Pdx + Qdy$$

小结

- 设 $F = (P, Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场，则

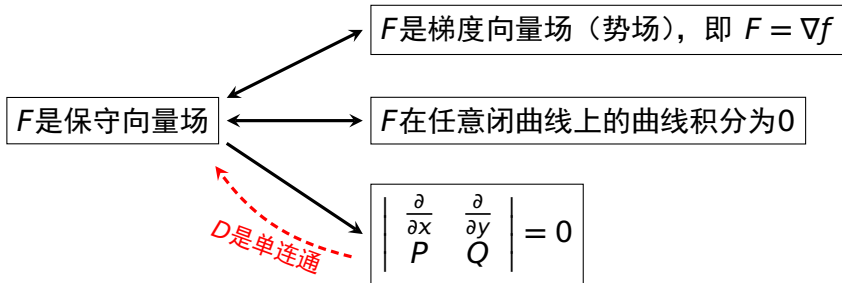


- 当 $F = (P, Q)$ 是保守场时，成立 $F = \nabla f$ ，并且

$$\int_L P dx + Q dy = f(B) - f(A)$$

小结

- 设 $F = (P, Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场，则



- 当 $F = (P, Q)$ 是保守场时，成立 $F = \nabla f$ ，并且

$$\int_L P dx + Q dy = f(B) - f(A)$$

这里 B 是有向曲线 L 的终点， A 是起点

有兴趣可以将以上的概念、性质推广到三维空间：

- 三维空间的向量场 $F = (P, Q, R)$

有兴趣可以将以上的概念、性质推广到三维空间：

- 三维空间的向量场 $F = (P, Q, R)$ 称为保守向量场，指其曲线积分与路径无关

有兴趣可以将以上的概念、性质推广到三维空间：

- 三维空间的向量场 $F = (P, Q, R)$ 称为保守向量场，指其曲线积分与路径无关
- $F = (P, Q, R)$ 是保守场，当且仅当 $\exists f(x, y, z)$ 使得 $F = \nabla f$,

有兴趣可以将以上的概念、性质推广到三维空间：

- 三维空间的向量场 $F = (P, Q, R)$ 称为保守向量场，指其曲线积分与路径无关
- $F = (P, Q, R)$ 是保守场，当且仅当 $\exists f(x, y, z)$ 使得 $F = \nabla f$ ，此时

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz = f(\text{终点}) - f(\text{起点})$$

有兴趣可以将以上的概念、性质推广到三维空间：

- 三维空间的向量场 $F = (P, Q, R)$ 称为保守向量场，指其曲线积分与路径无关

- $F = (P, Q, R)$ 是保守场，当且仅当 $\exists f(x, y, z)$ 使得 $F = \nabla f$ ，此时

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz = f(\text{终点}) - f(\text{起点})$$

- 如果 $F = (P, Q, R)$ 是保守向量场，则

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = 0$$

有兴趣可以将以上的概念、性质推广到三维空间：

- 三维空间的向量场 $F = (P, Q, R)$ 称为保守向量场，指其曲线积分与路径无关

- $F = (P, Q, R)$ 是保守场，当且仅当 $\exists f(x, y, z)$ 使得 $F = \nabla f$ ，此时

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz = f(\text{终点}) - f(\text{起点})$$

- 如果 $F = (P, Q, R)$ 是保守向量场，则

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = 0$$

但反过来不一定成立

有兴趣可以将以上的概念、性质推广到三维空间：

- 三维空间的向量场 $F = (P, Q, R)$ 称为保守向量场，指其曲线积分与路径无关

- $F = (P, Q, R)$ 是保守场，当且仅当 $\exists f(x, y, z)$ 使得 $F = \nabla f$ ，此时

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz = f(\text{终点}) - f(\text{起点})$$

- 如果 $F = (P, Q, R)$ 是保守向量场，则

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = 0$$

但反过来不一定成立

- 如果 F 的定义域是单连通区域，则上述命题的逆命题也成立（从而充分必要条件）

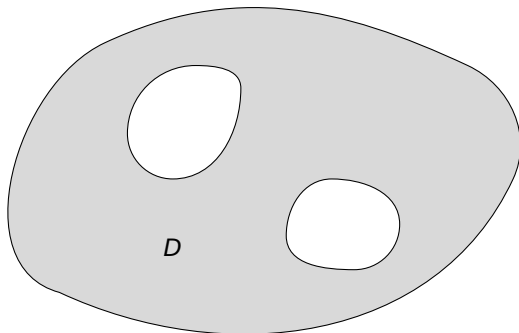
We are here now...

1. 保守向量场；积分路径无关性

2. 格林公式

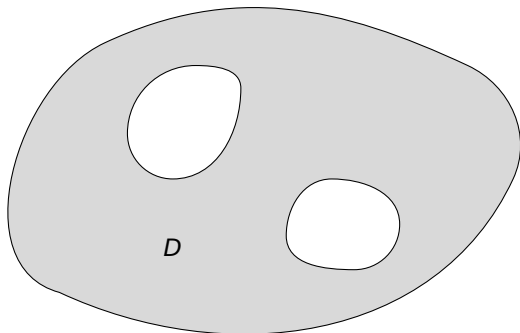
区域边界的定向

定义 假设曲线 C 是平面区域 D 的边界。



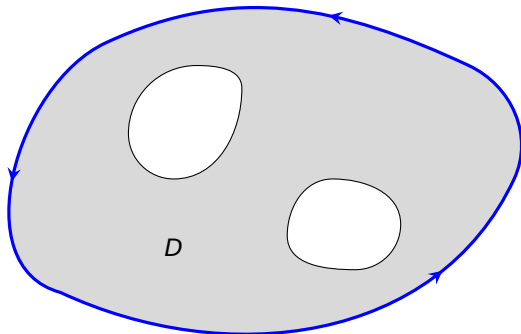
区域边界的定向

定义 假设曲线 C 是平面区域 D 的边界。规定 C 的**正向**如下：当观察者沿 C 的这个方向行走时，左手边在区域 D 内。



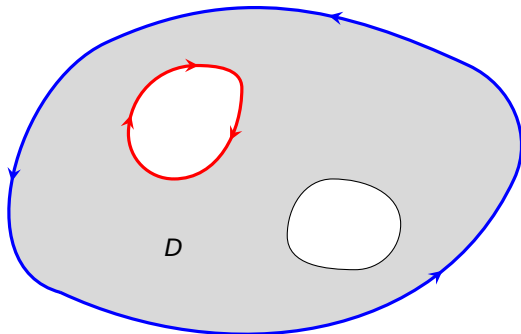
区域边界的定向

定义 假设曲线 C 是平面区域 D 的边界。规定 C 的**正向**如下：当观察者沿 C 的这个方向行走时，左手边在区域 D 内。



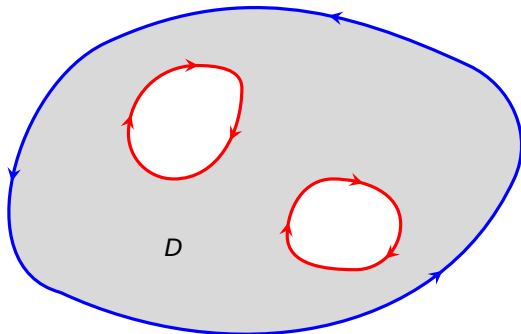
区域边界的定向

定义 假设曲线 C 是平面区域 D 的边界。规定 C 的**正向**如下：当观察者沿 C 的这个方向行走时，左手边在区域 D 内。



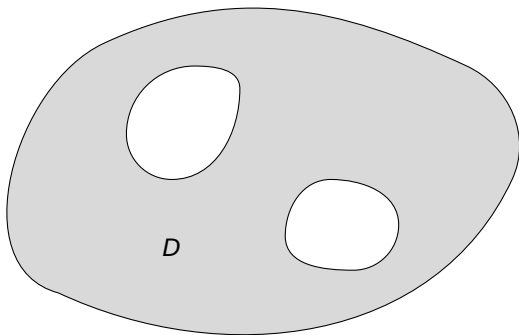
区域边界的定向

定义 假设曲线 C 是平面区域 D 的边界。规定 C 的**正向**如下：当观察者沿 C 的这个方向行走时，左手边在区域 D 内。



格林公式 设有界闭区域 D 是由分段光滑曲线 C 围成, 若函数 $P(x, y)$ 及 $Q(x, y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数, 则成立

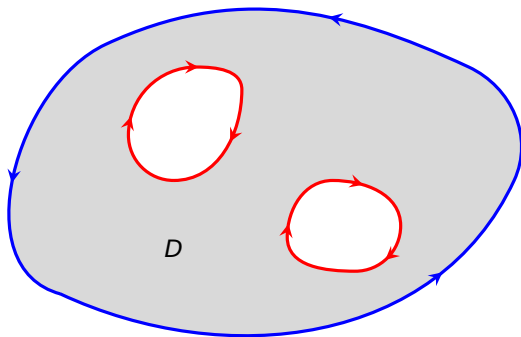
$$\iint_D \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| dx dy = \int_C P dx + Q dy$$



格林公式 设有界闭区域 D 是由分段光滑曲线 C 围成, 若函数 $P(x, y)$ 及 $Q(x, y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数, 则成立

$$\iint_D \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| dx dy = \int_C P dx + Q dy$$

其中 C 的定向取: 作为区域 D 的边界的正向。



例 利用格林公式计算以下的曲线积分：

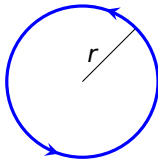
1. $\int_C ydx - xdy$, C 是半径为 r 的圆周, 定向取逆时针方向
2. $\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy$, C 是矩形 $[0, 1] \times [0, 1]$, 逆时针方向

例 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1. $\int_C ydx - xdy$, C 是半径为 r 的圆周, 定向取逆时针方向
2. $\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy$, C 是矩形 $[0, 1] \times [0, 1]$, 逆时针方向

解 1.

$$\int_C ydx - xdy$$

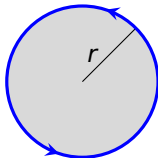


例 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1. $\int_C ydx - xdy$, C 是半径为 r 的圆周, 定向取逆时针方向
2. $\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy$, C 是矩形 $[0, 1] \times [0, 1]$, 逆时针方向

解 1.

$$\int_C ydx - xdy$$

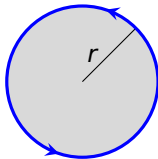


例 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1. $\int_C ydx - xdy$, C 是半径为 r 的圆周, 定向取逆时针方向
2. $\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy$, C 是矩形 $[0, 1] \times [0, 1]$, 逆时针方向

解 1.

$$\int_C ydx - xdy = \iint_D \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{array} \right| dx dy$$

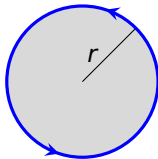


例 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1. $\int_C ydx - xdy$, C 是半径为 r 的圆周, 定向取逆时针方向
2. $\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy$, C 是矩形 $[0, 1] \times [0, 1]$, 逆时针方向

解 1.

$$\int_C ydx - xdy = \iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y & -x \end{vmatrix} dxdy$$

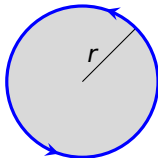


例 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1. $\int_C ydx - xdy$, C 是半径为 r 的圆周, 定向取逆时针方向
2. $\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy$, C 是矩形 $[0, 1] \times [0, 1]$, 逆时针方向

解 1.

$$\begin{aligned}\int_C ydx - xdy &= \iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y & -x \end{vmatrix} dxdy \\ &= \iint_D -2dxdy\end{aligned}$$

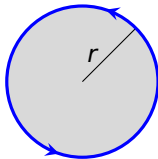


例 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1. $\int_C ydx - xdy$, C 是半径为 r 的圆周, 定向取逆时针方向
2. $\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy$, C 是矩形 $[0, 1] \times [0, 1]$, 逆时针方向

解 1.

$$\begin{aligned}\int_C ydx - xdy &= \iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y & -x \end{vmatrix} dxdy \\ &= \iint_D -2dxdy \\ &= -2|D|\end{aligned}$$

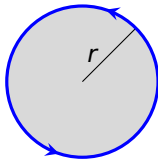


例 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1. $\int_C ydx - xdy$, C 是半径为 r 的圆周，定向取逆时针方向
2. $\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy$, C 是矩形 $[0, 1] \times [0, 1]$ ，逆时针方向

解 1.

$$\begin{aligned}\int_C ydx - xdy &= \iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y & -x \end{vmatrix} dxdy \\ &= \iint_D -2dxdy \\ &= -2|D| = -2\pi r^2\end{aligned}$$

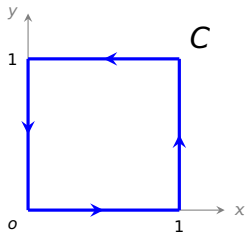


例 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1. $\int_C ydx - xdy$, C 是半径为 r 的圆周，定向取逆时针方向
2. $\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy$, C 是矩形 $[0, 1] \times [0, 1]$ ，逆时针方向

解 2.

$$\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy$$

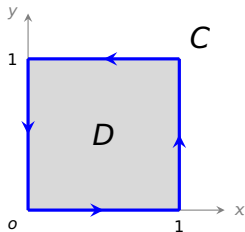


例 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1. $\int_C ydx - xdy$, C 是半径为 r 的圆周, 定向取逆时针方向
2. $\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy$, C 是矩形 $[0, 1] \times [0, 1]$, 逆时针方向

解 2.

$$\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy$$

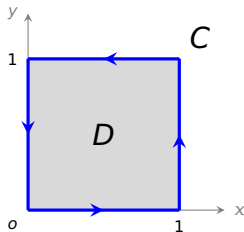


例 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1. $\int_C ydx - xdy$, C 是半径为 r 的圆周, 定向取逆时针方向
2. $\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy$, C 是矩形 $[0, 1] \times [0, 1]$, 逆时针方向

解 2.

$$\begin{aligned} & \int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy \\ &= \iint_D \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{array} \right| dx dy \end{aligned}$$

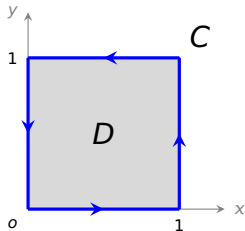


例 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1. $\int_C ydx - xdy$, C 是半径为 r 的圆周, 定向取逆时针方向
2. $\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy$, C 是矩形 $[0, 1] \times [0, 1]$, 逆时针方向

解 2.

$$\begin{aligned} & \int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy \\ &= \iint_D \left| \begin{array}{cc} y^4 + x^3 & 2x^6 \end{array} \right| dx dy \end{aligned}$$

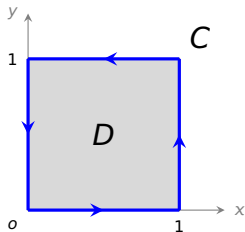


例 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1. $\int_C ydx - xdy$, C 是半径为 r 的圆周, 定向取逆时针方向
2. $\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy$, C 是矩形 $[0, 1] \times [0, 1]$, 逆时针方向

解 2.

$$\begin{aligned} & \int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy \\ &= \iint_D \left| \begin{array}{cc} y^4 + x^3 & 2x^6 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{array} \right| dx dy \\ &= \iint_D (12x^5 - 4y^3) dx dy \end{aligned}$$

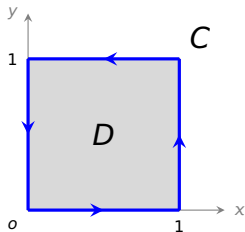


例 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1. $\int_C ydx - xdy$, C 是半径为 r 的圆周, 定向取逆时针方向
2. $\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy$, C 是矩形 $[0, 1] \times [0, 1]$, 逆时针方向

解 2.

$$\begin{aligned} & \int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy \\ &= \iint_D \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y^4 + x^3 & 2x^6 \end{array} \right| dx dy \\ &= \iint_D (12x^5 - 4y^3) dx dy = \int \left[\int (12x^5 - 4y^3) dx \right] dy \end{aligned}$$

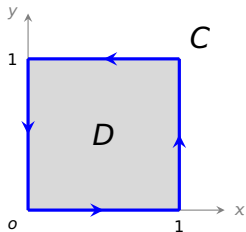


例 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1. $\int_C ydx - xdy$, C 是半径为 r 的圆周, 定向取逆时针方向
2. $\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy$, C 是矩形 $[0, 1] \times [0, 1]$, 逆时针方向

解 2.

$$\begin{aligned} & \int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy \\ &= \iint_D \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y^4 + x^3 & 2x^6 \end{array} \right| dx dy \\ &= \iint_D (12x^5 - 4y^3) dx dy = \int_0^1 \left[\int (12x^5 - 4y^3) dx \right] dy \end{aligned}$$

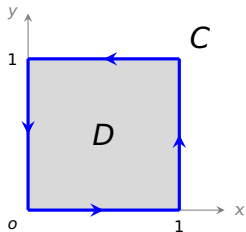


例 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1. $\int_C ydx - xdy$, C 是半径为 r 的圆周, 定向取逆时针方向
2. $\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy$, C 是矩形 $[0, 1] \times [0, 1]$, 逆时针方向

解 2.

$$\begin{aligned} & \int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy \\ &= \iint_D \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y^4 + x^3 & 2x^6 \end{array} \right| dx dy \\ &= \iint_D (12x^5 - 4y^3) dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^1 (12x^5 - 4y^3) dx \right] dy \end{aligned}$$

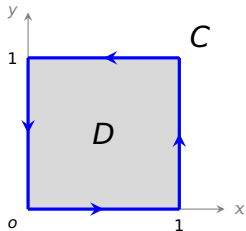


例 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1. $\int_C ydx - xdy$, C 是半径为 r 的圆周, 定向取逆时针方向
2. $\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy$, C 是矩形 $[0, 1] \times [0, 1]$, 逆时针方向

解 2.

$$\begin{aligned} & \int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy \\ &= \iint_D \begin{vmatrix} y^4 + x^3 & 2x^6 \end{vmatrix} dx dy \\ &= \iint_D (12x^5 - 4y^3)dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^1 (12x^5 - 4y^3)dx \right] dy \\ &= \int_0^1 \left[2x^6 - 4y^3x \Big|_0^1 \right] dy \end{aligned}$$

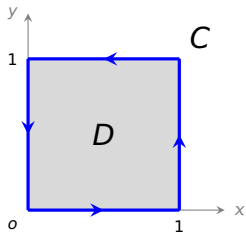


例 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1. $\int_C ydx - xdy$, C 是半径为 r 的圆周, 定向取逆时针方向
2. $\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy$, C 是矩形 $[0, 1] \times [0, 1]$, 逆时针方向

解 2.

$$\begin{aligned} & \int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy \\ &= \iint_D \begin{vmatrix} y^4 + x^3 & 2x^6 \end{vmatrix} dx dy \\ &= \iint_D (12x^5 - 4y^3) dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^1 (12x^5 - 4y^3) dx \right] dy \\ &= \int_0^1 \left[2x^6 - 4y^3 x \Big|_0^1 \right] dy = \int_0^1 [2 - 4y^3] dy \end{aligned}$$

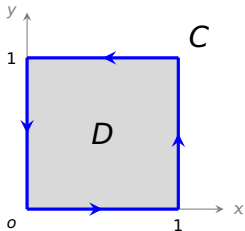


例 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1. $\int_C ydx - xdy$, C 是半径为 r 的圆周, 定向取逆时针方向
2. $\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy$, C 是矩形 $[0, 1] \times [0, 1]$, 逆时针方向

解 2.

$$\begin{aligned} & \int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy \\ &= \iint_D \begin{vmatrix} y^4 + x^3 & 2x^6 \end{vmatrix} dx dy \\ &= \iint_D (12x^5 - 4y^3) dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^1 (12x^5 - 4y^3) dx \right] dy \\ &= \int_0^1 \left[2x^6 - 4y^3 x \Big|_0^1 \right] dy = \int_0^1 [2 - 4y^3] dy = 1 \end{aligned}$$



格林公式推论 设有界闭区域 D 是由分段光滑曲线 C 围成, 则

$$D \text{ 的面积} = \frac{1}{2} \int_C -y dx + x dy$$

格林公式推论 设有界闭区域 D 是由分段光滑曲线 C 围成, 则

$$D \text{ 的面积} = \frac{1}{2} \int_C -y dx + x dy$$

其中 C 的定向取: 作为区域 D 的边界的正向。

格林公式推论 设有界闭区域 D 是由分段光滑曲线 C 围成, 则

$$D \text{ 的面积} = \frac{1}{2} \int_C -ydx + xdy$$

其中 C 的定向取: 作为区域 D 的边界的正向。

证明

$$\frac{1}{2} \int_C -ydx + xdy$$

格林公式推论 设有界闭区域 D 是由分段光滑曲线 C 围成, 则

$$D \text{ 的面积} = \frac{1}{2} \int_C -ydx + xdy$$

其中 C 的定向取: 作为区域 D 的边界的正向。

证明

$$\frac{1}{2} \int_C -ydx + xdy = \frac{1}{2} \iint_D \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{array} \right| dx dy$$

格林公式推论 设有界闭区域 D 是由分段光滑曲线 C 围成, 则

$$D \text{ 的面积} = \frac{1}{2} \int_C -y dx + x dy$$

其中 C 的定向取: 作为区域 D 的边界的正向。

证明

$$\frac{1}{2} \int_C -y dx + x dy = \frac{1}{2} \iint_D \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ -y & x \end{array} \right| dx dy$$

格林公式推论 设有界闭区域 D 是由分段光滑曲线 C 围成, 则

$$D \text{ 的面积} = \frac{1}{2} \int_C -y dx + x dy$$

其中 C 的定向取: 作为区域 D 的边界的正向。

证明

$$\frac{1}{2} \int_C -y dx + x dy = \frac{1}{2} \iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ -y & x \end{vmatrix} dx dy = \iint_D 1 dx dy$$

格林公式推论 设有界闭区域 D 是由分段光滑曲线 C 围成, 则

$$D \text{ 的面积} = \frac{1}{2} \int_C -y dx + x dy$$

其中 C 的定向取: 作为区域 D 的边界的正向。

证明

$$\frac{1}{2} \int_C -y dx + x dy = \frac{1}{2} \iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ -y & x \end{vmatrix} dx dy = \iint_D 1 dx dy = D \text{ 的面积}$$

格林公式推论 设有界闭区域 D 是由分段光滑曲线 C 围成, 则

$$D \text{ 的面积} = \frac{1}{2} \int_C -y dx + x dy$$

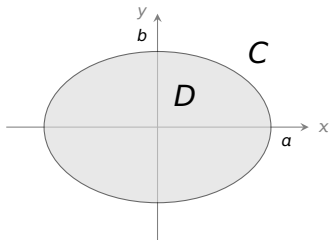
其中 C 的定向取: 作为区域 D 的边界的正向。

证明

$$\frac{1}{2} \int_C -y dx + x dy = \frac{1}{2} \iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ -y & x \end{vmatrix} dx dy = \iint_D 1 dx dy = D \text{ 的面积}$$

例 利用上述公式计算椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 所围成的面积。

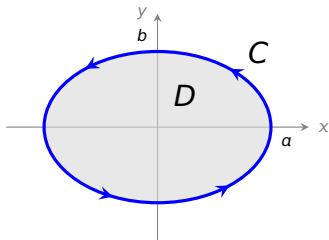
例 利用上述公式计算椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 所围成的面积。



解

$$D \text{ 的面积} = \frac{1}{2} \int_C -y dx + x dy$$

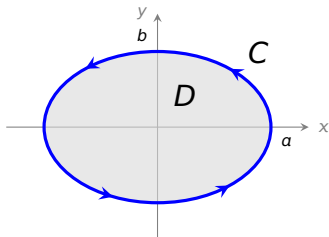
例 利用上述公式计算椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 所围成的面积。



解

$$D \text{ 的面积} = \frac{1}{2} \int_C -y dx + x dy$$

例 利用上述公式计算椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 所围成的面积。

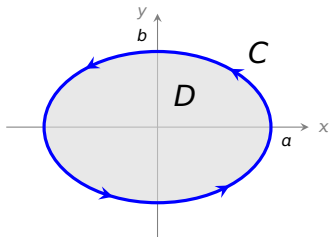


解 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 按逆时针的参数方程是

$$x = a \cos \theta, \quad y = b \sin \theta \quad (\theta : 0 \rightarrow 2\pi)$$

$$D \text{ 的面积} = \frac{1}{2} \int_C -y dx + x dy$$

例 利用上述公式计算椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 所围成的面积。



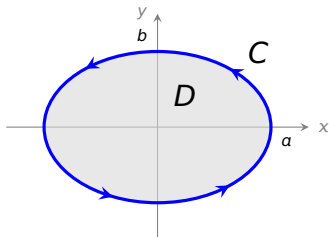
解 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 按逆时针的参数方程是

$$x = a \cos \theta, \quad y = b \sin \theta \quad (\theta: 0 \rightarrow 2\pi)$$

所以

$$\begin{aligned} D \text{ 的面积} &= \frac{1}{2} \int_C -y dx + x dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[(-b \sin \theta)(a \cos \theta)' + (a \cos \theta)(b \sin \theta)' \right] d\theta \end{aligned}$$

例 利用上述公式计算椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 所围成的面积。



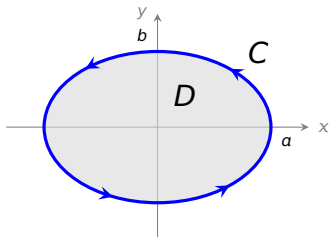
解 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 按逆时针的参数方程是

$$x = a \cos \theta, \quad y = b \sin \theta \quad (\theta: 0 \rightarrow 2\pi)$$

所以

$$\begin{aligned} D \text{ 的面积} &= \frac{1}{2} \int_C -y dx + x dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[(-b \sin \theta)(a \cos \theta)' + (a \cos \theta)(b \sin \theta)' \right] d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [ab] d\theta \end{aligned}$$

例 利用上述公式计算椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 所围成的面积。



解 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 按逆时针的参数方程是

$$x = a \cos \theta, \quad y = b \sin \theta \quad (\theta: 0 \rightarrow 2\pi)$$

所以

$$\begin{aligned} D \text{ 的面积} &= \frac{1}{2} \int_C -y dx + x dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[(-b \sin \theta)(a \cos \theta)' + (a \cos \theta)(b \sin \theta)' \right] d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [ab] d\theta = ab\pi \end{aligned}$$