

## 第 11 周作业解答

### 练习 1. 计算

1.  $\int_L (x+y)ds$ , 其中  $L$  是连接  $(1,0)$  及  $(0,1)$  两点的直线段;
2.  $\int_C xds$ , 其中  $C$  为直线  $y=x$  及抛物线  $y=x^2$  所围成区域的整个边界;
3.  $\int_L \frac{1}{x^2+y^2+z^2} ds$ , 其中  $L$  为曲线  $x=e^t \cos t, y=e^t \sin t, z=e^t$  上相应于  $t$  从 0 到 2 的这段弧。

解 1.  $L$  的参数方程为  $x=t, y=1-t, 0 \leq t \leq 1$ , 所以

$$\int_L (x+y)ds = \int_0^1 (t+1-t)\sqrt{[(t)']^2 + [(1-t)']^2}dt = \int_0^1 \sqrt{2}dt = \sqrt{2}.$$

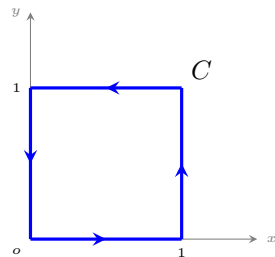
2.  $C$  可分成两段  $L_1$  和  $L_2$ , 其中  $L_1$  的参数方程为  $x=t, y=t^2, 0 \leq t \leq 1$ ,  $L_2$  的参数方程为  $x=t, y=t, 0 \leq t \leq 1$ , 所以

$$\begin{aligned} \int_C xds &= \int_{L_1} xds + \int_{L_2} xds \\ &= \int_0^1 t\sqrt{[(t)']^2 + [(t^2)']^2}dt + \int_0^1 t\sqrt{[(t)']^2 + [(t)']^2}dt \\ &= \int_0^1 t\sqrt{1+4t^2}dt + \int_0^1 t\sqrt{2}dt \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3}(1+4t^2)^{3/2} \Big|_0^1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1) + \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \int_L \frac{1}{x^2+y^2+z^2} ds &= \int_0^2 \frac{1}{(e^t \cos t)^2 + (e^t \sin t)^2 + (e^t)^2} \sqrt{[(e^t \cos t)']^2 + [(e^t \sin t)']^2 + [(e^t)']^2} dt \\ &= \int_0^2 \frac{1}{2} e^{-2t} \cdot e^t \sqrt{3} dt = \frac{\sqrt{3}}{2}(1-e^{-2}). \end{aligned}$$

练习 2. 计算  $\int_C x^2 dx + xy dy$ , 其中  $C$  是正方形  $[0,1] \times [0,1]$  边界, 逆时针方向。



解

$$\begin{aligned}
 \int_C x^2 dx + xy dy &= \int_{C_1} x^2 dx + xy dy + \int_{C_2} x^2 dx + xy dy + \int_{C_3} x^2 dx + xy dy + \int_{C_4} x^2 dx + xy dy \\
 &= \int_0^1 [t^2 \cdot (t)' + t \cdot 0 \cdot (0)'] dt + \int_0^1 [1^2 \cdot (1)' + 1 \cdot t \cdot (t)'] dt \\
 &\quad + \int_0^1 [(1-t)^2 \cdot (1-t)' + (1-t) \cdot 1 \cdot (1)'] dt + \int_0^1 [0^2 \cdot (0)' + 0 \cdot (1-t) \cdot (1-t)'] dt \\
 &= \int_0^1 [t^2] dt + \int_0^1 [t] dt + \int_0^1 [-(1-t)^2] dt \\
 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

练习 3. 计算

1.  $\int_L (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$ , 其中  $L$  是抛物线  $y = x^2$  上从点  $(-1, 1)$  到点  $(1, 1)$  的一段弧;
2.  $\int_L xdx + ydy + (x + y - 1)dz$ , 其中  $L$  是从点  $(1, 1, 1)$  到  $(2, 3, 4)$  的直线段。

解 1.  $L$  的参数方程为  $x = t, y = t^2, t: -1 \rightarrow 1$ , 所以

$$\begin{aligned}
 \int_L (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy &= \int_{-1}^1 [(t^2 - 2 \cdot t \cdot t^2)(t)' + (t^4 - 2 \cdot t \cdot t^2)(t^2)'] dt \\
 &= \int_{-1}^1 [t^2 - 2t^3 + 2t^5 - 4t^4] dt \\
 &= 2 \int_0^1 [t^2 - 4t^4] dt = 2\left(\frac{1}{3} - \frac{4}{5}\right) = -\frac{14}{15}.
 \end{aligned}$$

2.  $L$  的参数方程为  $x = 1 + t, y = 1 + 2t, z = 1 + 3t, t: 0 \rightarrow 1$ , 所以

$$\begin{aligned}
 \int_L xdx + ydy + (x + y - 1)dz &= \int_0^1 [(1+t)(1+t)' + (1+2t)(1+2t)' + (1+t+1+2t-1)(1+3t)'] dt \\
 &= \int_0^1 [6 + 14t] dt = 13.
 \end{aligned}$$

练习 4. 1. 计算  $\int_L (x + y + yz)ds$ , 其中曲线  $L$  是螺旋线  $\gamma(t) = (\sin t, \cos t, t), 0 \leq t \leq 2\pi$ 。

2. 计算  $\int_L xdx + ydy + zdz$ , 其中有向曲线  $L$  的参数方程是  $\gamma(t) = (e^t, t, t^2), 0 \leq t \leq 1$ 。

3. 计算  $\int_L (\sin z)dx + (\cos z)dy - (xy)^{1/3}dz$ , 其中有向曲线  $L$  的参数方程是  $\gamma(\theta) = (\cos^3 \theta, \sin^3 \theta, \theta), 0 \leq \theta \leq \frac{7}{2}\pi$ 。

解 1.

$$\begin{aligned}
 \int_L (x + y + yz)ds &= \int_0^{2\pi} (\sin t + \cos t + t \cos t) \sqrt{[(\sin t)']^2 + [(\cos t)']^2 + [(t)']^2} dt \\
 &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (\sin t + \cos t + t \cos t) dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} t \cos t dt = \sqrt{2} (t \sin t + \cos t) \Big|_0^{2\pi} = 0.
 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 \int_L xdx + ydy + zdz &= \int_0^1 [e^t \cdot (e^t)' + t \cdot (t)' + t^2 \cdot (t^2)'] dt \\
 &= \int_0^1 [e^{2t} + t + 2t^3] dt = \left(\frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t^4\right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
 \int_L (\sin z)dx + (\cos z)dy - (xy)^{1/3}dz &= \int_0^{\frac{7}{2}\pi} [\sin \theta \cdot (\cos^3 \theta)' + \cos \theta \cdot (\sin^3 \theta)' - (\cos^3 \theta \sin^3 \theta)^{1/3} \cdot (\theta)']d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{7}{2}\pi} [-3 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta - \cos \theta \sin \theta]d\theta \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{7}{2}\pi} \sin 2\theta d\theta = \frac{1}{4} \cos 2\theta \Big|_0^{\frac{7}{2}\pi} = -\frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

**练习 5.** 证明曲线积分  $\int_{(1,2)}^{(3,4)} (6xy^2 - y^3)dx + (6x^2y - 3xy^2)dy$  与路径无关, 并计算积分值。

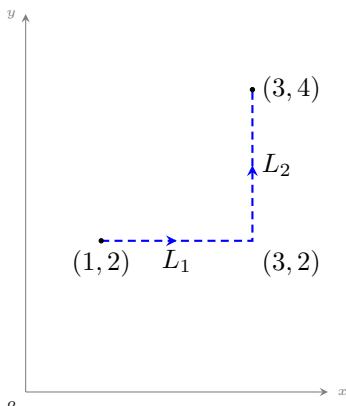
**证法一**注意到向量场  $F = (6xy^2 - y^3, 6x^2y - 3xy^2) = \nabla f$ , 这里  $f = 3x^2y^2 - xy^3$ 。所以  $F$  是梯度向量场, 故  $F$  的曲线积分与路径无关, 并且

$$\int_{(1,2)}^{(3,4)} (6xy^2 - y^3)dx + (6x^2y - 3xy^2)dy = f(3,4) - f(1,2) = (3 \cdot 144 - 3 \cdot 64) - (3 \cdot 4 - 8) = 236.$$

**证法二**因为在全平面上成立

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 6xy^2 - y^3 & 6x^2y - 3xy^2 \end{array} \right| = 0$$

并且全平面是单连通区域, 所以该曲线积分与路径无关。选择  $(1,2)$  到  $(3,4)$  的一条路径以计算该曲线积分: 令  $L_1: (t, 2), t: 1 \rightarrow 3$  及  $L_2: (3, t), t: 2 \rightarrow 4$ ,



所以

$$\begin{aligned}
 \int_{(1,2)}^{(3,4)} (6xy^2 - y^3)dx + (6x^2y - 3xy^2)dy &= \int_{L_1} (6xy^2 - y^3)dx + (6x^2y - 3xy^2)dy + \int_{L_2} (6xy^2 - y^3)dx + (6x^2y - 3xy^2)dy \\
 &= \int_1^3 (6t \cdot 2^2 - 2^3)dt + \int_2^4 (6 \cdot 3^2 \cdot t - 3 \cdot 3 \cdot t^2)dt \\
 &= (12t^2 - 8t) \Big|_1^3 + (27t^2 - 3t^3) \Big|_2^4 \\
 &= 236.
 \end{aligned}$$