§6.1， §6.2 定积分的概念、定义

2016-2017 学年 II

教学要求

◊

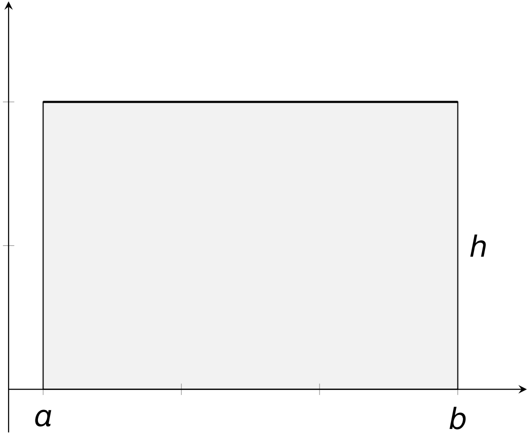
♣

♡

♠

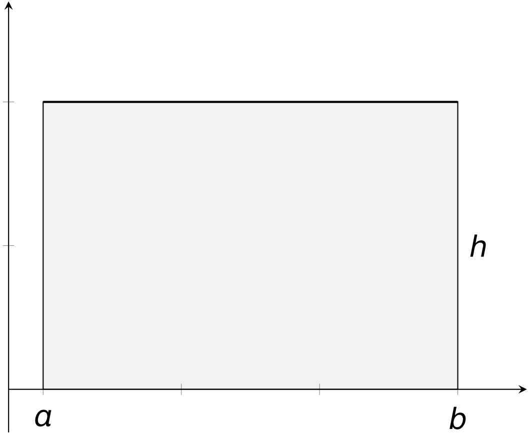
Outline of §6.1

矩形形面积



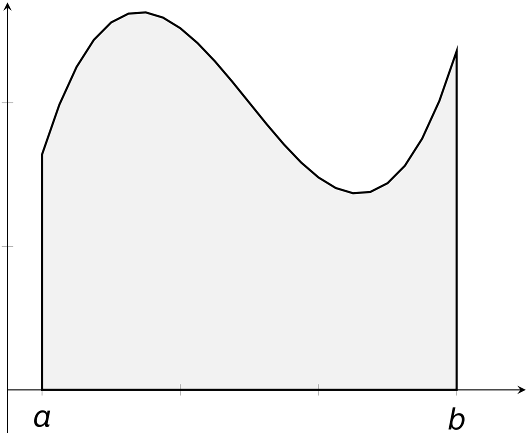
$A =$

矩形形面积



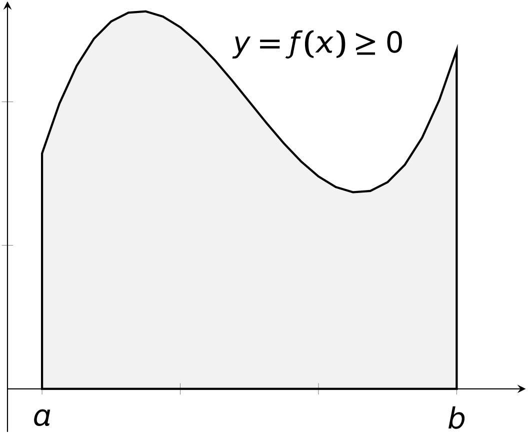
$$A = h(b-a)$$

曲边梯形面积



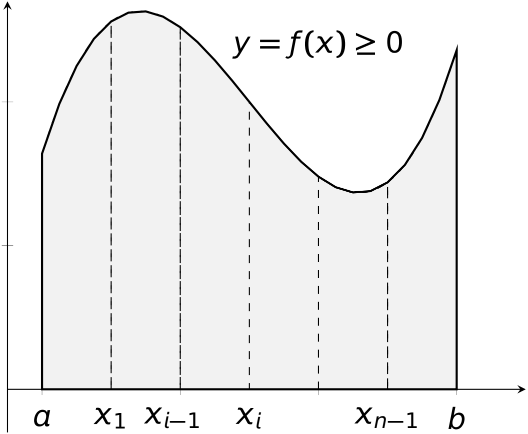
$A =$

曲边梯形面积



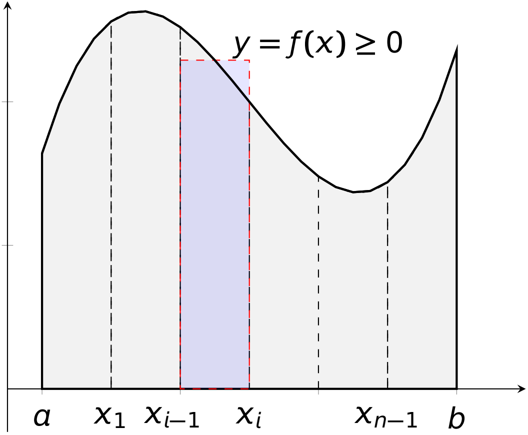
$A =$

曲边梯形面积



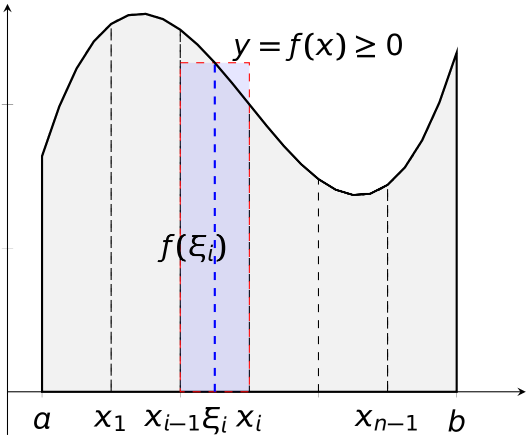
$$A = \sum_i \Delta A_i$$

曲边梯形面积



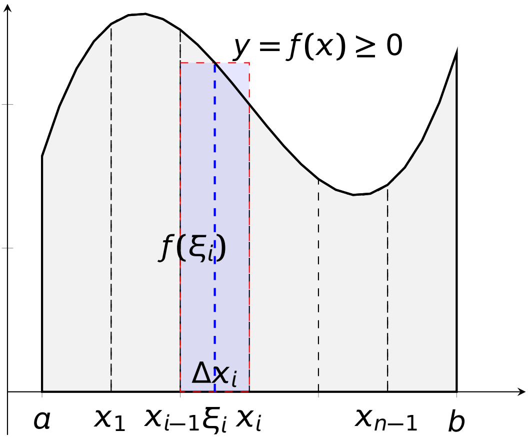
$$A = \sum_i \Delta A_i$$

曲边梯形面积



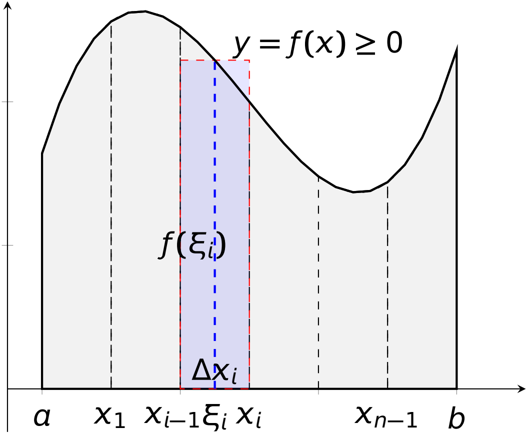
$$A=\sum_i \Delta A_i$$

曲边梯形面积



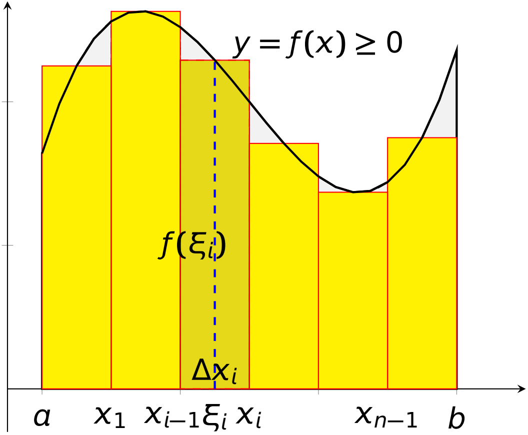
$$A = \sum_i \Delta A_i$$

曲边梯形面积



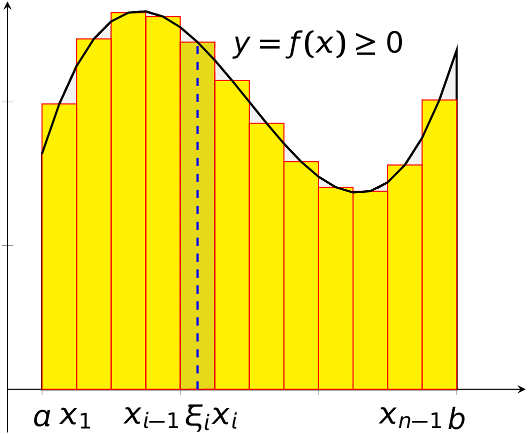
$$A = \sum_i \Delta A_i \qquad f(\xi_i)\Delta x_i$$

曲边梯形面积



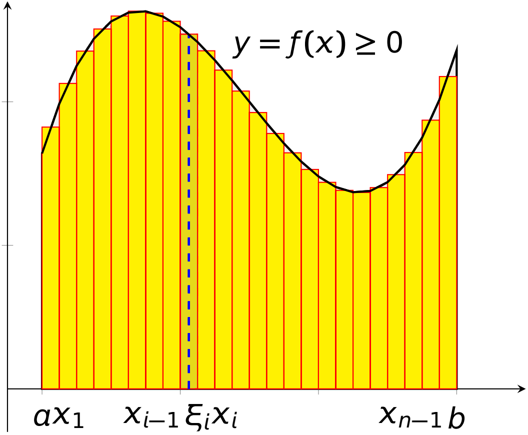
$$A = \sum_i \Delta A_i \approx \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$$

曲边梯形面积



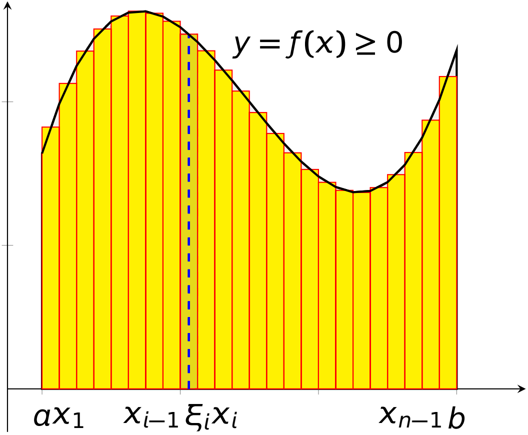
$$A = \sum_i \Delta A_i \approx \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$$

曲边梯形面积



$$A = \sum_i \Delta A_i \approx \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$$

曲边梯形面积



$$A=\sum_i \Delta A_i \approx \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$$

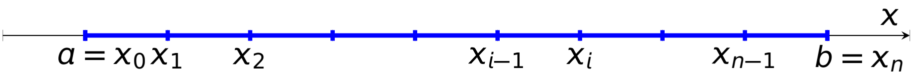
$$A=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$$

定积分的定义

定义 设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上的函数，

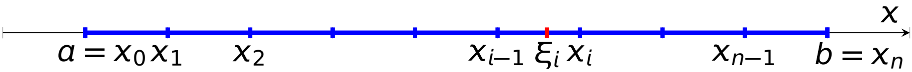
定积分的定义

定义 设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上的函数,



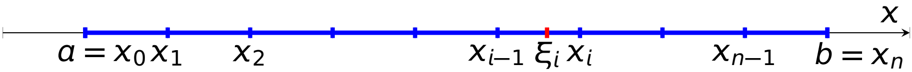
定积分的定义

定义 设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上的函数,



定积分的定义

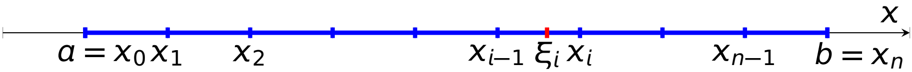
定义 设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上的函数，



$$f(\xi_i)\Delta x_i$$

定积分的定义

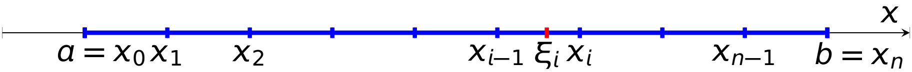
定义 设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上的函数，



$$\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$$

定积分的定义

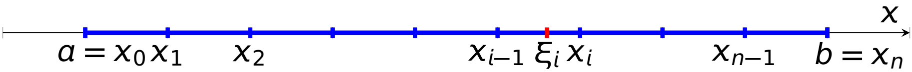
定义 设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上的函数，



$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f(\xi_i) \Delta x_i$$

定积分的定义

定义 设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上的函数，



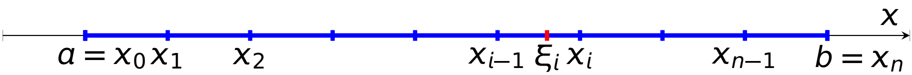
如果极限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f(\xi_i) \Delta x_i$$

存在，则称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，

定积分的定义

定义 设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上的函数，



如果极限

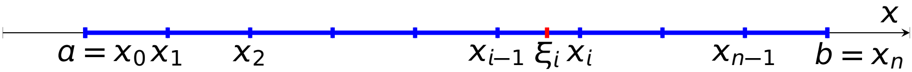
$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$$

存在，则称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，称为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的积分，

记作 $\int_a^b f(x)dx$，

定积分的定义

定义 设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上的函数，



如果极限

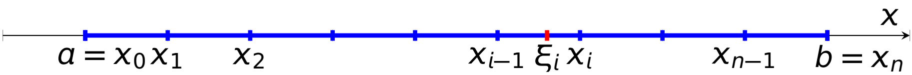
$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f(\xi_i) \Delta x_i$$

存在，则称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，称为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的积分，记作 $\int_a^b f(x) dx$，即

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f(\xi_i) \Delta x_i$$

定积分的定义

定义 设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上的函数，



如果极限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f(\xi_i) \Delta x_i$$

存在，则称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，称为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的积分，记作 $\int_a^b f(x)dx$，即

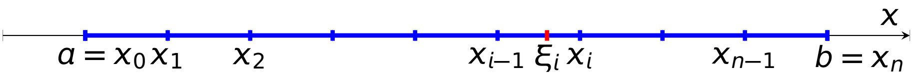
$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f(\xi_i) \Delta x_i$$

其中

- "$\int$"：积分号；"$f(x)$"：被积函数；"$f(x)dx$ "：被积表达式

定积分的定义

定义 设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上的函数，



如果极限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$$

存在，则称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，称为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的积分，记作 $\int_a^b f(x)dx$，即

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$$

其中

- "$\int$"：积分号；"$f(x)$"：被积函数；"$f(x)dx$ "：被积表达式
- "$[a, b]$ "：积分区间；"a"：积分下限；"b "：积分上限；
  "x "：积分变量

关于定积分的注记

- 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 是一个数

关于定积分的注记

- 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 是一个数，所以

$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x)dx =$$

关于定积分的注记

- 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 是一个数，所以

$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x)dx = 0.$$

关于定积分的注记

- 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 是一个数，所以
$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x)dx = 0.$$
区别不定积分 $\int f(x)dx$ 的导数
$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx =$$

关于定积分的注记

- 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 是一个数，所以
$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x)dx = 0.$$
区别不定积分 $\int f(x)dx$ 的导数
$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x).$$

- 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 中，$a < b$。

关于定积分的注记

- 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 是一个数，所以

$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x)dx = 0.$$

区别不定积分 $\int f(x)dx$ 的导数

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x).$$

- 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 中，$a < b$。规定

$$\int_b^a f(x)dx =$$

关于定积分的注记

- 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 是一个数，所以

$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x)dx = 0.$$

区别不定积分 $\int f(x)dx$ 的导数

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x).$$

- 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 中，$a < b$。规定

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

关于定积分的注记

- 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 是一个数，所以

$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x)dx = 0.$$

区别不定积分 $\int f(x)dx$ 的导数

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x).$$

- 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 中，$a < b$。规定

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

例如 $\int_{10}^3 f(x)dx =$

关于定积分的注记

- 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 是一个数，所以
$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x)dx = 0.$$
区别不定积分 $\int f(x)dx$ 的导数
$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x).$$

- 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 中，$a < b$。规定
$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$
例如 $\int_{10}^3 f(x)dx = -\int_3^{10} f(x)dx.$

关于定积分的注记

- 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 是一个数，所以

$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x)dx = 0.$$

区别不定积分 $\int f(x)dx$ 的导数

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x).$$

- 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 中，$a < b$。规定

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

例如 $\int_{10}^3 f(x)dx = -\int_3^{10} f(x)dx.$

- 规定：$\int_a^a f(x)dx = 0$

关于定积分的注记

- 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 是一个数，所以
$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x)dx = 0.$$
区别不定积分 $\int f(x)dx$ 的导数
$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x).$$

- 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 中，$a < b$。规定
$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$
例如 $\int_{10}^3 f(x)dx = -\int_3^{10} f(x)dx.$

- 规定：$\int_a^a f(x)dx = 0$，例如 $\int_2^2 f(x)dx = 0$

定积分的存在性

- 如果极限 $\lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$ 不存在，则定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 也就不存在！

定积分的存在性

- 如果极限 $\lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$ 不存在，则定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 也就不存在！

问题来了：

- 何时极限 $\lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$ 存在？

定积分的存在性

- 如果极限 $\lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$ 不存在，则定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 也就不存在！

问题来了：

- 何时极限 $\lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$ 存在？
- 或者说，何时定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 存在？（$f(x)$ 何时可积？）

定积分的存在性

- 如果极限 $\lim_{\Delta x\to 0}\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$ 不存在，则定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 也就不存在！

问题来了：

- 何时极限 $\lim_{\Delta x\to 0}\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$ 存在？
- 或者说，何时定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 存在？（$f(x)$ 何时可积？）

定理 如果函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则 $\int_a^b f(x)dx$ 存在。

定积分的存在性

- 如果极限 $\lim_{\Delta x\to 0}\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$ 不存在，则定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 也就不存在！

问题来了：

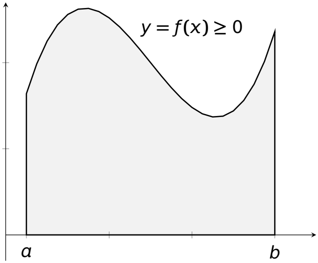
- 何时极限 $\lim_{\Delta x\to 0}\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$ 存在？
- 或者说，何时定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 存在？（$f(x)$ 何时可积？）

定理 如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\int_a^b f(x)dx$ 存在。

定理 如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，且除去有限个点外连续，则 $\int_a^b f(x)dx$ 存在。

定积分几何意义：曲边梯形面积

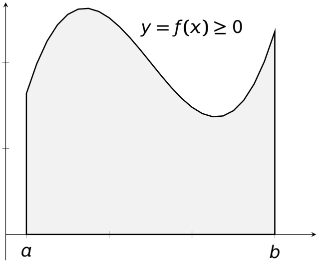
- 假设 $f(x) \geq 0$，$a \leq x \leq b$，



定积分几何意义：曲边梯形面积

- 假设 $f(x) \geq 0$，$a \leq x \leq b$，则

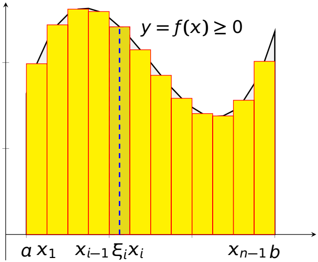
$$\left.\begin{array}{l} \text{曲线 } y = f(x) \\ \text{底边 } x \text{ 轴} \\ \text{侧边 } x = a,\ x = b \end{array}\right\} \text{围成曲边梯形}$$



定积分几何意义：曲边梯形面积

- 假设 $f(x) \geq 0$，$a \leq x \leq b$，则

$$\left.\begin{array}{l} \text{曲线 } y = f(x) \\ \text{底边 } x \text{ 轴} \\ \text{侧边 } x = a,\ x = b \end{array}\right\} \text{围成曲边梯形}$$



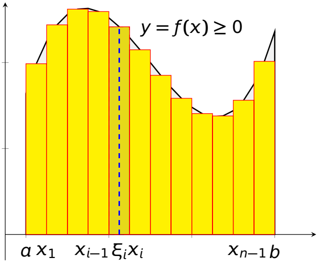
定积分几何意义：曲边梯形面积

- 假设 $f(x) \geq 0$，$a \leq x \leq b$，则

$$\left.\begin{array}{l} \text{曲线 } y = f(x) \\ \text{底边 } x \text{ 轴} \\ \text{侧边 } x = a,\ x = b \end{array}\right\} \text{围成曲边梯形}$$

面积为

$$A = \lim_{\Delta x \to \infty} \sum_i f(\xi_i) \Delta x_i$$



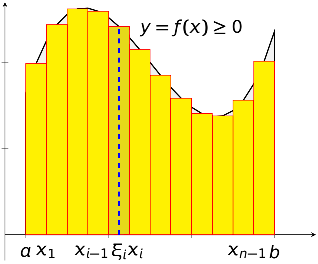
定积分几何意义：曲边梯形面积

- 假设 $f(x) \geq 0$，$a \leq x \leq b$，则

$$\left.\begin{array}{l}\text{曲线 } y = f(x) \\ \text{底边 } x \text{ 轴} \\ \text{侧边 } x = a,\ x = b\end{array}\right\}\text{围成曲边梯形}$$

面积为

$$A = \lim_{\Delta x \to \infty} \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$



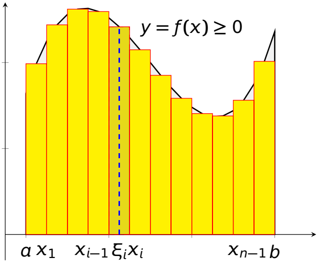
定积分几何意义：曲边梯形面积

- 假设 $f(x) \geq 0$，$a \leq x \leq b$，则

$$\left.\begin{array}{l} \text{曲线 } y = f(x) \\ \text{底边 } x \text{ 轴} \\ \text{侧边 } x = a,\ x = b \end{array}\right\} \text{围成曲边梯形}$$

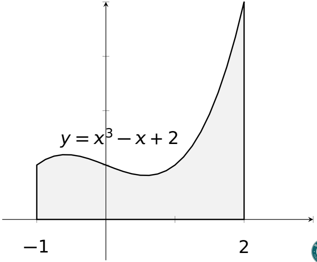
面积为

$$A = \lim_{\Delta x \to \infty} \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$



例 右图曲边梯形面积, 用定积分表示是

$$A =$$



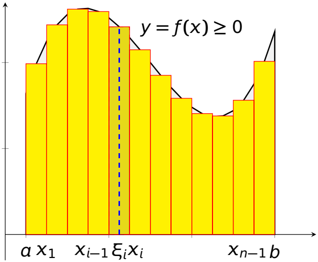
定积分几何意义：曲边梯形面积

- 假设 $f(x) \geq 0$，$a \leq x \leq b$，则

$$\left.\begin{array}{l} \text{曲线 } y = f(x) \\ \text{底边 } x \text{ 轴} \\ \text{侧边 } x = a,\ x = b \end{array}\right\} \text{围成曲边梯形}$$

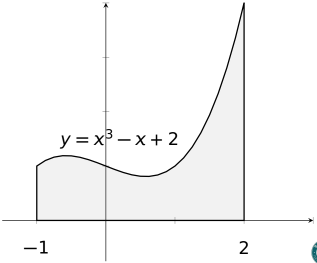
面积为

$$A = \lim_{\Delta x \to \infty} \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$



例 右图曲边梯形面积, 用定积分表示是

$$A = \int_{-1}^{2} (x^3 - x + 2)dx$$



例 计算 $\int_a^b 1dx$

例 计算 $\int_a^b 1dx$

方法一（定义）

$$\int_a^b 1dx$$

例 计算 $\int_a^b 1dx$

方法一（定义）

$$\int_a^b 1dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$$

例 计算 $\int_a^b 1dx$

方法一（定义）

$$\int_a^b 1dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$= \qquad 1 \cdot \Delta x_i$$

例 计算 $\int_a^b 1dx$

方法一（定义）

$$\int_a^b 1dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i 1 \cdot \Delta x_i =$$

例 计算 $\int_a^b 1dx$

方法一（定义）

$$\int_a^b 1dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i 1 \cdot \Delta x_i = \qquad (b-a)$$

例 计算 $\int_a^b 1dx$

方法一（定义）

$$\int_a^b 1dx = \lim_{\Delta x\to 0}\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\sum_i 1\cdot\Delta x_i = \lim_{\Delta x\to 0}(b-a) =$$

例 计算 $\int_a^b 1dx$

方法一（定义）

$$\int_a^b 1dx = \lim_{\Delta x\to 0}\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$$

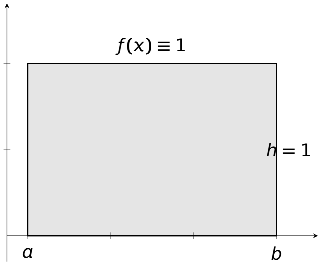
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\sum_i 1\cdot\Delta x_i = \lim_{\Delta x\to 0}(b-a) = b-a$$

例 计算 $\int_a^b 1dx$

方法一（定义）

$$\int_a^b 1dx = \lim_{\Delta x\to 0}\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\sum_i 1\cdot\Delta x_i = \lim_{\Delta x\to 0}(b-a) = b-a$$

方法二（几何）

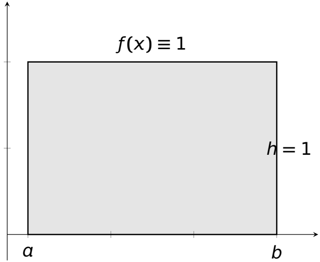


例 计算 $\int_a^b 1dx$

方法一（定义）

$$\int_a^b 1dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i 1 \cdot \Delta x_i = \lim_{\Delta x \to 0} (b-a) = b-a$$

方法二（几何）$\int_a^b 1dx$ 是右图矩形的面积，所以



例 计算 $\int_a^b 1dx$

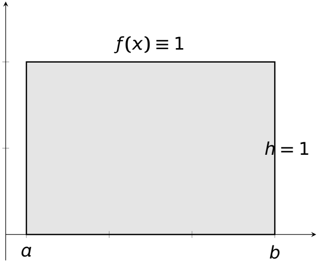
方法一（定义）

$$\int_a^b 1dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i 1 \cdot \Delta x_i = \lim_{\Delta x \to 0} (b-a) = b-a$$

方法二（几何）$\int_a^b 1dx$ 是右图矩形的面积，所以

$$\int_a^b 1dx = b-a$$

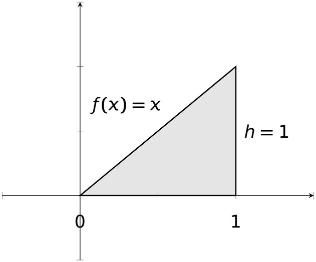


例 计算 $\int_0^1 x dx$

解

例 计算 $\int_0^1 x dx$

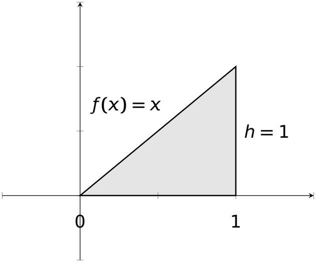
解（利用几何意义）



例 计算 $\int_0^1 x dx$

解（利用几何意义）

$\int_0^1 x dx$ 是右图三角形的面积，所以



例 计算 $\int_0^1 xdx$

解（利用几何意义）

$\int_0^1 xdx$ 是右图三角形的面积，所以

$$\int_0^1 xdx = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$$