

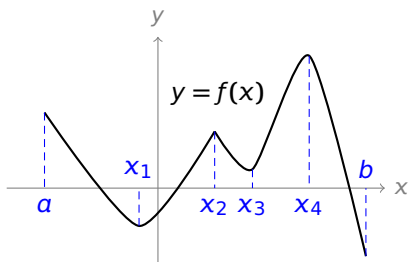
第 9 章 g : 多元函数的极值

数学系 梁卓滨

2017.07 暑期班

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

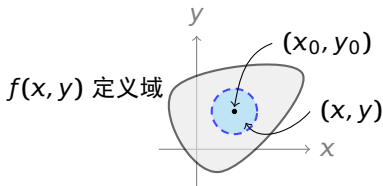
假设 $y = f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上, 如图



	极值点	驻点	最值点
a			×
x_1	极小值点	✓	×
x_2	极大值点	× (不可导)	×
x_3	极小值点	✓	×
x_4	极大值点	✓	最大值点
b			最小值点

多元函数的极值、极值点

定义 在点 (x_0, y_0) 的某个邻域内



- 如果总是成立

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0), \quad \text{其中 } (x, y) \neq (x_0, y_0)$$

则称点 (x_0, y_0) 是函数 $f(x, y)$ **极大值点**, $f(x_0, y_0)$ 是**极大值**

- 如果总是成立

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0), \quad \text{其中 } (x, y) \neq (x_0, y_0)$$

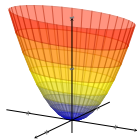
则称点 (x_0, y_0) 是函数 $f(x, y)$ **极小值点**, $f(x_0, y_0)$ 是**极小值**

- 极大、极小值点统称**极值点**; 极大、极小值统称**极值**。

例

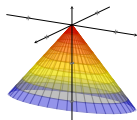
- $z = x^2 + y^2$

点 $p_0(0, 0)$ 是极小值点;



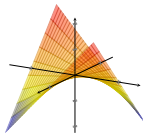
- $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$

点 $p_0(0, 0)$ 是极大值点;



- $z = xy$

点 $p_0(0, 0)$ 是不是极值点。



问题

- $z = xy$ 是否有极值点?
- 是否有一般方法求出函数的极值点? 如:

$$z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$$

定理 设 $z = f(x, y)$ 在内点 (x_0, y_0) 处存在偏导数, 则 (x_0, y_0) 是极值点的必要条件是

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

证明

1. 一元函数 $x \mapsto f(x, y_0)$ 具有极值点 $x = x_0$, 所以

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{d}{dx} [f(x, y_0)] \Big|_{x=x_0} = 0$$

2. 一元函数 $y \mapsto f(x_0, y)$ 具有极值点 $y = y_0$, 所以

$$f_y(x_0, y_0) = \frac{d}{dy} [f(x_0, y)] \Big|_{y=y_0} = 0$$

定义 使偏导数为零的点, 称为**驻点**

注 如果函数存在偏导数, 则 $\{\text{极值点}\} \subset \{\text{驻点}\}$

例 1 点 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点，从而也是驻点。直接验证 $(0, 0)$ 是驻点，则如下：

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \implies \begin{cases} z_x(0, 0) = 0 \\ z_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

例 2 点 $(0, 0)$ 是 $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ 的极大值点，但不是驻点：一阶偏导

$$z_x(0, 0), \quad z_y(0, 0)$$

不存在。

例 3（驻点不一定是极值点） 设 $z = xy$ 。点 $(0, 0)$ 是驻点：

$$\begin{cases} z_x = y \\ z_y = x \end{cases} \implies \begin{cases} z_x(0, 0) = 0 \\ z_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

但点 $(0, 0)$ 不是极值点。

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$, 求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

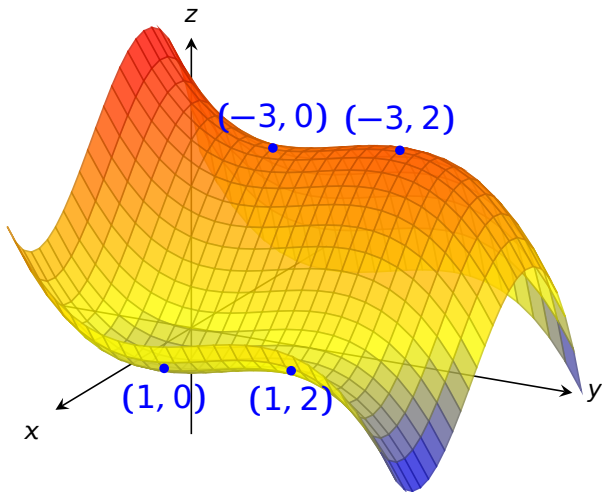
$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(x+3)(x-1) = 0 \\ -3y(y-2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3, 1 \\ y = 0, 2 \end{cases}$$

所以驻点为

$y = 2$	$(-3, 2)$	$(1, 2)$
$y = 0$	$(-3, 0)$	$(1, 0)$
	$x = -3$	$x = 1$

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$, 求驻点。

$$z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$$



例 设 $z = x^3 + y^3 - 3xy$, 求驻点。

解 求一阶偏导

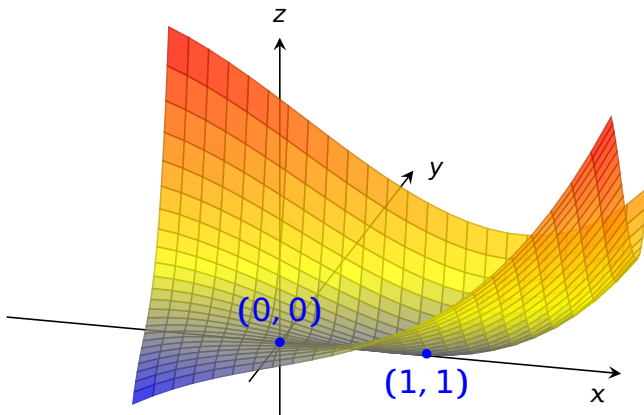
$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y \\ z_y = 3y^2 - 3x \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{aligned} \begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ z_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases} \Rightarrow x^4 = x \Rightarrow x = 0, 1 \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

所以驻点为 $(1, 1), (0, 0)$

$$z = x^3 + y^3 - 3xy$$



- **问题** 如何从驻点中判别哪些是极值点？

定理（极值的充分条件） 设 $z = f(x, y)$ 具有直到二阶的连续偏导数， (x_0, y_0) 是驻点。定义判别式

$$P(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$$

结论是：

1. 若 $P(x_0, y_0) > 0$ ，且 $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ ，则 (x_0, y_0) 是极大值点；
2. 若 $P(x_0, y_0) > 0$ ，且 $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ ，则 (x_0, y_0) 是极小值点；
3. 若 $P(x_0, y_0) < 0$ ，则 (x_0, y_0) 一定不是极值点；
4. 若 $P(x_0, y_0) = 0$ ，则此判定法失效，结论不确定。

-
- **总结** 求 $z = f(x, y)$ 极值点的步骤：

1. 求驻点：解方程 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ ，设解为 (x_0, y_0)
2. 通过 $P(x_0, y_0)$ 辨别驻点 (x_0, y_0) 是否极值点

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \quad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

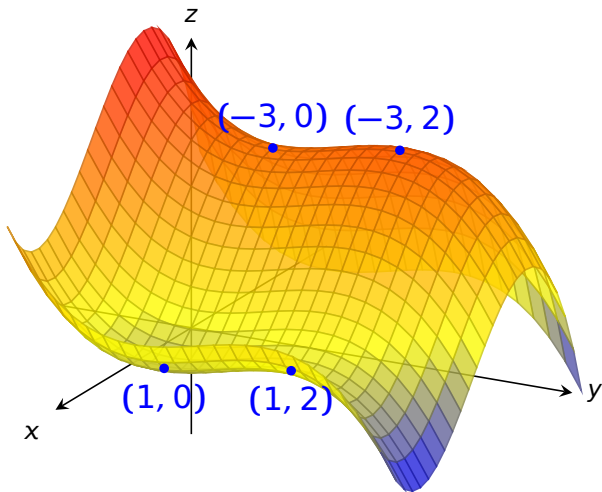
2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = -6y + 6 \end{cases} \Rightarrow P(x, y) = -36(x+1)(y-1)$$

3. 结论

	$(-3, 0)$	$(-3, 2)$	$(1, 0)$	$(1, 2)$
$P(x_0, y_0)$	$-72 < 0$	$72 > 0$	$72 > 0$	$-72 < 0$
$z_{xx}(x_0, y_0)$		$-12 < 0$	$12 > 0$	
是否极值点	×	极大值点	极小值点	×

$$z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$$



例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \quad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(1, 1), (0, 0)$

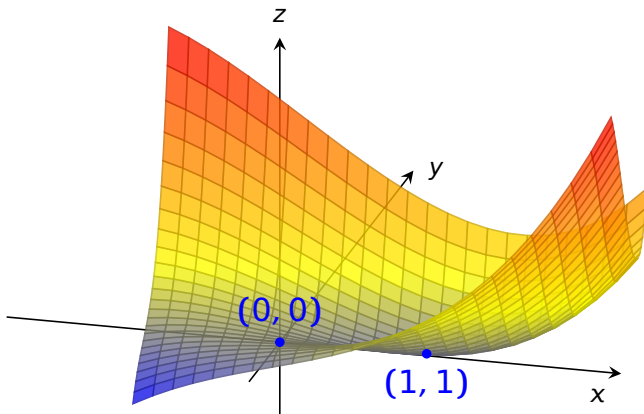
2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x \\ z_{xy} = -3 \\ z_{yy} = 6y \end{cases} \implies P(x, y) = 36xy - 9$$

3. 结论

	$(1, 1)$	$(0, 0)$
$P(x_0, y_0)$	$27 > 0$	$-9 < 0$
$z_{xx}(x_0, y_0)$	$6 > 0$	
是否极值点	极小值点	×

$$z = x^3 + y^3 - 3xy$$



三元函数的极值点

- 设 $u = f(x, y, z)$ 。
- (x_0, y_0, z_0) 是驻点指在该点处偏导数全为零：

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f_z(x_0, y_0, z_0) = 0$$

- 设 (x_0, y_0, z_0) 是 $u = f(x, y, z)$ 的极值点，则 (x_0, y_0, z_0) 一定是驻点
- 如何进一步判别哪些驻点为极值点？考虑矩阵

$$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}_{(x_0, y_0, z_0)}$$

- 如果是正定矩阵，则 (x_0, y_0, z_0) 是极小值点
- 如果是负定矩阵，则 (x_0, y_0, z_0) 是极大值点