第 07 周作业

练习 1. 将 4 阶方阵 M 作如下分块

$$M = \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A & O \\ I & -A \end{pmatrix}$$

请按此分块方式计算 M^2。

练习 2. 将矩阵 A, B 作如下分块

$$A = \left(\begin{array}{c:cc} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ \hdashline 3 & 1 & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_1 & 2I \\ 3 & A_2 \end{pmatrix}, \quad B = \left(\begin{array}{cc:cc} 2 & 7 & 0 & 0 \\ \hdashline -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} B_1 & O \\ -I & B_2 \end{pmatrix},$$

请按此分块方式计算乘积 AB。

练习 3. 设

$$M = \begin{pmatrix} O_{r\times s} & A_{r\times r} \\ B_{s\times s} & O_{s\times r} \end{pmatrix}$$

其中 A, B 分别为 r, s 阶可逆方阵，求 M 的逆矩阵 M^{-1}。

练习 4. 用初等变换将下列矩阵化为等价标准形：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

练习 5. 用<u>初等行变换</u>求下列矩阵 A, B, C, D 的逆矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

（其中 $a_i \neq 0$, $i = 1, 2, 3, 4$）

练习 6. 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

以下两题是附加题，做出来的同学下次课交，可以加分。注意解答过程要详细。

练习 7. 求出一个 2 阶方阵 A，满足 $A^{17} = I_2$，且 $A \neq I_2$。

练习 8. 设分块矩阵 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ 中子块 A_{11} 和 A_{22} 为方阵，并且 A_{11} 可逆。求出矩阵 X 和 Y 满足

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & O \\ X & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & \\ & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & Y \\ O & I \end{pmatrix}$$

其中 $S = A_{22} - A_{21}A_{22}^{-1}A_{21}$。

假设 S 也是可逆，导出用 S^{-1}，A_{11}^{-1} 及 A 的子块计算 A^{-1} 的一个公式。