§5.1　二次型与对称矩阵

数学系　梁卓滨

2017 - 2018 学年 I

本节内容

- ◇ 二次型，二次型与对称矩阵一一对应
- ♣ 二次型的标准型、规范型
- ♡ 矩阵的合同关系

二次型：引例

二元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2$$

二次型：引例

二元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

二元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= (6x_1 + 2x_2, 2x_1 - 2x_2)$$

二次型：引例

二元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= (6x_1 + 2x_2, 2x_1 - 2x_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

二元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

二元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

一般地，

$$f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

二次型：引例

二元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

一般地，

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \\ &= (x_1, x_2)\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

二次型：引例

二元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

一般地，

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \\ &= (x_1, x_2)\begin{pmatrix} a_{11} & \\ & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

二次型：引例

二元二次齐次多项式

$$f(x_1,x_2)=6x_1^2+4x_1x_2-2x_2^2=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}6&2\\2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

一般地，

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2)&=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2\\&=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{12}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

二次型：引例

二元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

一般地，

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \\ &= (x_1, x_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2, a_{12}x_1 + a_{22}x_2) \end{aligned}$$

二次型：引例

二元二次齐次多项式

$$f(x_1,x_2)=6x_1^2+4x_1x_2-2x_2^2=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}6&2\\2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

一般地，

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2)&=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2\\&=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{12}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\\&=(a_{11}x_1+a_{12}x_2,\ a_{12}x_1+a_{22}x_2)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

二次型：引例

二元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

一般地，

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \\ &= (x_1, x_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

二次型：引例

二元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

一般地，

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \\ &= \underbrace{(x_1, x_2)}_{x^T}\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{x} \end{aligned}$$

二次型：引例

二元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

一般地，

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \\ &= \underbrace{(x_1, x_2)}_{x^T}\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{x} = x^TAx \end{aligned}$$

二次型：引例

二元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

一般地，

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \\ &= \underbrace{(x_1, x_2)}_{x^T}\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{x} = x^TAx \end{aligned}$$

例

$$f(x_1, x_2) = -3x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 =$$

二次型：引例

二元二次齐次多项式

$$f(x_1,x_2)=6x_1^2+4x_1x_2-2x_2^2=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}6&2\\2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

一般地，

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2)&=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2\\&=\underbrace{(x_1,x_2)}_{x^T}\underbrace{\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{12}&a_{22}\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}}_{x}=x^TAx\end{aligned}$$

例

$$f(x_1,x_2)=-3x_1^2+2x_1x_2+5x_2^2=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}\quad&\quad\\\quad&\quad\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

二次型：引例

二元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

一般地，

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \\ &= \underbrace{(x_1, x_2)}_{x^T}\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{x} = x^TAx \end{aligned}$$

例

$$f(x_1, x_2) = -3x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} -3 & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

二元二次齐次多项式

$$f(x_1,x_2)=6x_1^2+4x_1x_2-2x_2^2=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}6 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

一般地，

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2)&=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2\\ &=\underbrace{(x_1,x_2)}_{x^T}\underbrace{\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}}_{x}=x^TAx\end{aligned}$$

例

$$f(x_1,x_2)=-3x_1^2+2x_1x_2+5x_2^2=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}-3 & \\ & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

二次型：引例

二元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

一般地，

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \\ &= \underbrace{(x_1, x_2)}_{x^T}\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{x} = x^TAx \end{aligned}$$

例

$$f(x_1, x_2) = -3x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 \\
+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3
\end{aligned}
$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 \\
+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3
\end{aligned}
$$

$$
= (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}
$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$$

$$= (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$f(x_1,x_2,x_3)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2$$
$$+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3$$

$$=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \\ & a_{22} & \\ & & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 \\
&\quad + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 \\
&= (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{22} & \\ & & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 \\
&\quad + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 \\
&= (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{22} & a_{23} \\ & & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) = {} & a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 \\
& + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 \\
& = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) = {} & a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 \\
& + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 \\
= {} & \underbrace{(x_1, x_2, x_3)}_{x^T} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x}
\end{aligned}
$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 \\
&\quad + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 \\
&= \underbrace{(x_1, x_2, x_3)}_{x^T} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x} = x^T A x
\end{aligned}
$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$f(x_1,x_2,x_3)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2$$
$$+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3$$

$$=\underbrace{(x_1,x_2,x_3)}_{x^T}\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x}=x^TAx$$

例 $$f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3+2x_3^2-2x_2x_3$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$f(x_1,x_2,x_3)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2$$
$$+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3$$

$$=\underbrace{(x_1,x_2,x_3)}_{x^T}\underbrace{\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}}_{x}=x^TAx$$

例 $$f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3+2x_3^2-2x_2x_3$$

$$=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$$

$$= \underbrace{(x_1, x_2, x_3)}_{x^T} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x} = x^T Ax$$

例 $$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_3^2 - 2x_2x_3$$

$$= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 0 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$f(x_1,x_2,x_3)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2 \\ +2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3$$

$$=\underbrace{(x_1,x_2,x_3)}_{x^T}\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x}=x^TAx$$

例

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3+2x_3^2-2x_2x_3$$

$$=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$f(x_1,x_2,x_3)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2 \\ +2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3$$

$$=\underbrace{(x_1,x_2,x_3)}_{x^T}\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x}=x^TAx$$

例

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3+2x_3^2-2x_2x_3$$

$$=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$f(x_1,x_2,x_3)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2$$
$$+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3$$

$$=\underbrace{(x_1,x_2,x_3)}_{x^T}\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3\end{pmatrix}}_{x}=x^TAx$$

例 $$f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3+2x_3^2-2x_2x_3$$

$$=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \\ & 0 & \\ & & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3\end{pmatrix}$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$$

$$= \underbrace{(x_1, x_2, x_3)}_{x^T} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x} = x^T A x$$

例 $$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_3^2 - 2x_2x_3$$

$$= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ & 0 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$f(x_1,x_2,x_3)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2$$
$$+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3$$

$$=\underbrace{(x_1,x_2,x_3)}_{x^T}\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x}=x^TAx$$

例 $$f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3+2x_3^2-2x_2x_3$$

$$=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ & 0 & -1 \\ & & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$f(x_1,x_2,x_3)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2$$
$$+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3$$

$$=\underbrace{(x_1,x_2,x_3)}_{x^T}\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x}=x^TAx$$

例 $$f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3+2x_3^2-2x_2x_3$$

$$=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

例 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

二次型：引例

例 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

例 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$f(x_1,x_2,x_3) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$=$$

二次型：引例

例 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_1x_2+3x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$$

$$=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

例 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}-1&1&\frac{1}{2}\\1&2&0\\\frac{1}{2}&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$=$$

二次型：引例

例 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

例 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$=$$

二次型：引例

例 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_1x_2+3x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$$

$$=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

例 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}-1 & 1 & \frac{1}{2}\\ 1 & 2 & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$=$$

二次型：引例

例 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

例 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$f(x_1,x_2,x_3) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$=$$

二次型：引例

例 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

例 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$=$$

二次型：引例

例 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_1x_2+3x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$$

$$=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

例 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$=$$

二次型：引例

例 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ & 2 & 2 \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

例 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$=$$

二次型：引例

例 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

例 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$=$$

二次型：引例

例 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

例 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \_\_\_\_ x_1^2 + \_\_ x_2^2 + \_\_ x_3^2 + 2\_\_\_\_ x_1x_2 + 2\_\_\_\_ x_1x_3 + 2\_\_\_\_ x_2x_3$$

二次型：引例

例 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

例 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{-1}x_1^2 + \underline{\quad}x_2^2 + \underline{\quad}x_3^2 + 2\underline{\qquad}x_1x_2 + 2\underline{\qquad}x_1x_3 + 2\underline{\qquad}x_2x_3$$

二次型：引例

例 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

例 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\ -1\ }x_1^2 + \underline{2}x_2^2 + \underline{\ \ }x_3^2 + 2\underline{\qquad}x_1x_2 + 2\underline{\qquad}x_1x_3 + 2\underline{\qquad}x_2x_3$$

二次型：引例

例 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_1x_2+3x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$$

$$=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2}&2&2\\ \frac{3}{2}&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

例 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}-1&1&\frac{1}{2}\\ 1&2&0\\ \frac{1}{2}&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

$$=\underline{-1}x_1^2+\underline{2}x_2^2+\underline{0}x_3^2+2\underline{\qquad}x_1x_2+2\underline{\qquad}x_1x_3+2\underline{\qquad}x_2x_3$$

二次型：引例

例 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

例 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{-1}x_1^2 + \underline{2}x_2^2 + \underline{0}x_3^2 + 2\underline{\cdot 1 \cdot}x_1x_2 + 2\underline{\qquad}x_1x_3 + 2\underline{\qquad}x_2x_3$$

二次型：引例

例 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

例 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$f(x_1,x_2,x_3) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{-1}x_1^2 + \underline{2}x_2^2 + \underline{0}x_3^2 + 2\underline{\cdot 1 \cdot}x_1x_2 + 2\underline{\cdot \frac{1}{2} \cdot}x_1x_3 + 2\underline{\qquad}x_2x_3$$

二次型：引例

例 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

例 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{-1}x_1^2 + \underline{2}x_2^2 + \underline{0}x_3^2 + 2\underline{\cdot 1 \cdot}x_1x_2 + 2\underline{\cdot \frac{1}{2} \cdot}x_1x_3 + 2\underline{\cdot 0 \cdot}x_2x_3$$

二次型：引例

例 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

例 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{-1}x_1^2 + \underline{2}x_2^2 + \underline{0}x_3^2 + 2\underline{\cdot 1 \cdot}x_1x_2 + 2\underline{\cdot \frac{1}{2} \cdot}x_1x_3 + 2\underline{\cdot 0 \cdot}x_2x_3$$

$$= -x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_3 + x_1x_3$$

二次型

定义 n 元二次型

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 \qquad\quad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
& + \cdots\cdots \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\quad + a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

二次型

定义 n 元二次型

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 \qquad\quad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
& + \cdots\cdots \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\quad + a_{nn}x_n^2 \\
= & (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} \phantom{a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}} \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

二次型

定义 n 元二次型

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) =& a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 \qquad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
& + \cdots\cdots \\
& \qquad\qquad + a_{nn}x_n^2 \\
=& (x_1, x_2, \ldots, x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

二次型

定义 n 元二次型

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 \qquad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
& + \cdots\cdots \\
& \qquad\qquad + a_{nn}x_n^2 \\
= & (x_1, x_2, \ldots, x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

二次型

定义 n 元二次型

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 \qquad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
& + \cdots\cdots \\
& \qquad\qquad + a_{nn}x_n^2 \\
= & (x_1, x_2, \dots, x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

二次型

定义 n 元二次型

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 \qquad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
& + \cdots\cdots \\
& \qquad\qquad\qquad + a_{nn}x_n^2 \\
= & (x_1, x_2, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

二次型

定义 n 元二次型

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 \qquad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
& + \cdots\cdots \\
& \qquad\qquad + a_{nn}x_n^2 \\
= & (x_1, x_2, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

二次型

定义 n 元二次型

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 \qquad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
& + \cdots\cdots \\
& \qquad\qquad + a_{nn}x_n^2 \\
= & \underbrace{(x_1, x_2, \ldots, x_n)}_{x^T} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x}
\end{aligned}
$$

二次型

定义 n 元二次型

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 \qquad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
& + \cdots\cdots \\
& \qquad\qquad + a_{nn}x_n^2 \\
= & \underbrace{(x_1, x_2, \ldots, x_n)}_{x^T} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x} \\
= & x^T A x
\end{aligned}
$$

二次型

定义 n 元二次型

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 \qquad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
& + \cdots\cdots \\
& \qquad\qquad\qquad + a_{nn}x_n^2 \\
= & \underbrace{(x_1, x_2, \ldots, x_n)}_{x^T} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x} \\
= & x^T A x
\end{aligned}
$$

注 n 元二次型与对称矩阵，是一一对应

给定二次型

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 \qquad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
& + \cdots\cdots \\
& \qquad\qquad\qquad + a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

给定二次型

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 \qquad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
& + \cdots\cdots \\
& \qquad\qquad\qquad + a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

作变量代换：

$$
\begin{cases}
x_1 = c_{11}y_1 + \cdots + c_{1n}y_n \\
\vdots \\
x_n = c_{n1}y_1 + \cdots + c_{nn}y_n
\end{cases}
$$

给定二次型

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 \qquad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
& + \cdots\cdots \\
& \qquad\qquad + a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

作变量代换：

$$
\begin{cases}
x_1 = c_{11}y_1 + \cdots + c_{1n}y_n \\
\vdots \\
x_n = c_{n1}y_1 + \cdots + c_{nn}y_n
\end{cases}
$$

代入二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 得

$$f = b_{11}y_1^2 + 2b_{12}y_1y_2 + \cdots \qquad (\text{关于} y_1, \cdots, y_n \text{ 的二次型})$$

给定二次型

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 \qquad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
& + \cdots\cdots \\
& \qquad\qquad + a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

作变量代换：

$$
\begin{cases}
x_1 = c_{11}y_1 + \cdots + c_{1n}y_n \\
\vdots \\
x_n = c_{n1}y_1 + \cdots + c_{nn}y_n
\end{cases}
$$

代入二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 得

$$
f = b_{11}y_1^2 + 2b_{12}y_1y_2 + \cdots \qquad (\text{关于} y_1, \cdots, y_n \text{ 的二次型})
$$

问题：在新变量 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 下，f 能化简到怎样的程度？

给定二次型

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 &+ 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
&+ a_{22}x_2^2 \qquad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
&+ \cdots\cdots \\
&\qquad\qquad\qquad + a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

作变量代换：（要求 $C = (c_{ij})$ 是可逆矩阵，所以可以反解出 y ）

$$
\begin{cases}
x_1 = c_{11}y_1 + \cdots + c_{1n}y_n \\
\vdots \\
x_n = c_{n1}y_1 + \cdots + c_{nn}y_n
\end{cases}
$$

代入二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 得

$$f = b_{11}y_1^2 + 2b_{12}y_1y_2 + \cdots \qquad (\text{关于} y_1, \cdots, y_n \text{ 的二次型})$$

问题：在新变量 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 下，f 能化简到怎样的程度？

给定二次型

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 \qquad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & + \cdots\cdots \\ & \qquad\qquad\qquad + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

作变量代换：（要求 $C = (c_{ij})$ 是可逆矩阵，所以可以反解出 y ）

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + \cdots + c_{1n}y_n \\ \vdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

代入二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 得

$$f = b_{11}y_1^2 + 2b_{12}y_1y_2 + \cdots \qquad (\text{关于} y_1, \cdots, y_n \text{ 的二次型})$$

问题：在新变量 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 下，f 能化简到怎样的程度？

给定二次型

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 \qquad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & + \cdots\cdots \\ & \qquad\qquad + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

作变量代换：（要求 $C = (c_{ij})$ 是可逆矩阵，所以可以反解出 y ）

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + \cdots + c_{1n}y_n \\ \vdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x = Cy$$

代入二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 得

$$f = b_{11}y_1^2 + 2b_{12}y_1y_2 + \cdots \qquad (\text{关于} y_1, \cdots, y_n \text{ 的二次型})$$

问题：在新变量 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 下，f 能化简到怎样的程度？

给定二次型

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 \qquad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & + \cdots\cdots \\ & \qquad\qquad + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

作变量代换：（要求 $C = (c_{ij})$ 是可逆矩阵，所以可以反解出 $y = C^{-1}x$）

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + \cdots + c_{1n}y_n \\ \vdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x = Cy$$

代入二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 得

$$f = b_{11}y_1^2 + 2b_{12}y_1y_2 + \cdots \qquad (\text{关于} y_1, \cdots, y_n \text{ 的二次型})$$

问题：在新变量 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 下，f 能化简到怎样的程度？

问题：在新变量 $y_1, y_2, \cdots, y_n$（$x = Cy$）下，f 能化简到怎样的程度？

问题：在新变量 $y_1, y_2, \cdots, y_n$（$x = Cy$）下，f 能化简到怎样的程度？

注意到：

$$f = x^TAx \overset{x=Cy}{=\!=\!=\!=}$$

问题：在新变量 $y_1, y_2, \cdots, y_n$（$x = Cy$）下，f 能化简到怎样的程度？

注意到：

$$f = x^T A x \xlongequal{x=Cy} (Cy)^T A (Cy)$$

问题：在新变量 $y_1, y_2, \cdots, y_n$（$x = Cy$）下，f 能化简到怎样的程度？

注意到：

$$f = x^T A x \overset{x=Cy}{=\!=\!=\!=} (Cy)^T A (Cy) = y^T C^T$$

问题：在新变量 $y_1, y_2, \cdots, y_n$（$x = Cy$）下，f 能化简到怎样的程度？

注意到：

$$f = x^T A x \xlongequal{x=Cy} (Cy)^T A (Cy) = y^T C^T A C y$$

问题：在新变量 $y_1, y_2, \cdots, y_n$（$x = Cy$）下，f 能化简到怎样的程度？

注意到：

$$f = x^T A x \xlongequal{x=Cy} (Cy)^T A (Cy) = y^T C^T A C y$$

所以上述问题等价于以下问题：

问题′：给定对称矩阵 A，尝试找出可逆矩阵 C 使得

$$C^T A C$$

尽可能简单？

问题：在新变量 $y_1, y_2, \cdots, y_n$（$x = Cy$）下，f 能化简到怎样的程度？

注意到：

$$f = x^T A x \xlongequal{x=Cy} (Cy)^T A (Cy) = y^T C^T A C y$$

所以上述问题等价于以下问题：

问题′：给定对称矩阵 A，尝试找出可逆矩阵 C 使得

$$C^T A C$$

尽可能简单？

回忆：

定理 任意对称矩阵 A，都存在正交矩阵 Q，使得 $Q^T A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

问题：在新变量 $y_1, y_2, \cdots, y_n$（$x = Cy$）下，f 能化简到怎样的程度？

注意到：

$$f = x^T A x \xlongequal{x=Cy} (Cy)^T A (Cy) = y^T C^T A C y$$

所以上述问题等价于以下问题：

问题$'$：给定对称矩阵 A，尝试找出可逆矩阵 C 使得

$$C^T A C$$

尽可能简单？

回忆：

定理 任意对称矩阵 A，都存在正交矩阵 Q，使得 $Q^T A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

推论 任意二次型$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,都存在非退化线性变换$x = Qy$,使得

问题：在新变量 $y_1, y_2, \cdots, y_n$（$x = Cy$）下，f 能化简到怎样的程度？

注意到：

$$f = x^T A x \xlongequal{x=Cy} (Cy)^T A (Cy) = y^T C^T A C y$$

所以上述问题等价于以下问题：

问题′：给定对称矩阵 A，尝试找出可逆矩阵 C 使得

$$C^T A C$$

尽可能简单？

回忆：

定理 任意对称矩阵 A，都存在正交矩阵 Q，使得 $Q^T A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

推论 任意二次型$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,都存在非退化线性变换$x = Qy$,使得

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

暨南大学 JINAN UNIVERSITY

二次型的标准型

定义 二次型 f 称为**标准型**，是指

$$f = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_r y_r^2$$

二次型的标准型

定义 二次型 f 称为标准型，是指

$$f = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_r y_r^2$$

其中 $0 \le r \le n$，

二次型的标准型

定义 二次型 f 称为标准型，是指

$$f = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_r y_r^2$$

其中 $0 \le r \le n$，$d_1, d_2, \ldots, d_r \neq 0$。

二次型的标准型

定义 二次型 f 称为标准型，是指

$$f = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_r y_r^2$$

其中 $0 \le r \le n$，$d_1, d_2, \ldots, d_r \neq 0$。

注 标准型不唯一。换言之，同一个二次型 f，可以化出不同的标准型。

例 化二次型 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 为标准型

例 化二次型 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 为标准型

解

- f 系数所构成的对称矩阵是：$A = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

例 化二次型 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 为标准型

解

- f 系数所构成的对称矩阵是：$A = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 5 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$

例 化二次型 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 为标准型

解

- f 系数所构成的对称矩阵是：$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & \\ & 5 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$

例 化二次型 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 为标准型

解

- f 系数所构成的对称矩阵是：$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ & 5 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$

例 化二次型 $f=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$ 为标准型

解

- f 系数所构成的对称矩阵是：$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ & 5 & -4 \\ & & 5 \end{pmatrix}$

例 化二次型 $f=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$ 为标准型

解

- f 系数所构成的对称矩阵是：$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

例 化二次型 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 为标准型

解

- f 系数所构成的对称矩阵是：$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$
- 特征方程：$0 = |\lambda I - A|$

例 化二次型 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 为标准型

解

- f 系数所构成的对称矩阵是：$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$
- 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 1)^2(\lambda - 10)$

例 化二次型 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 为标准型

解

- f 系数所构成的对称矩阵是：$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$
- 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 1)^2(\lambda - 10)$
- $\lambda_1 = 1$（二重）
- $\lambda_3 = 10$

例 化二次型 $f=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$ 为标准型

解

- f 系数所构成的对称矩阵是：$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$
- 特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$
- $\lambda_1=1$（二重）
- $\lambda_3=10$
- $x=Qy$，则 $f=y_1^2+y_2^2+10y_3^2$

例 化二次型 $f=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$ 为标准型

解

- f 系数所构成的对称矩阵是：$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$
- 特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$
- $\lambda_1=1$（二重），特征向量

$$\begin{cases} \alpha_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \alpha_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- $\lambda_3=10$
- $x=Qy$，则 $f=y_1^2+y_2^2+10y_3^2$

例 化二次型 $f=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$ 为标准型

解

- f 系数所构成的对称矩阵是：$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$
- 特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$
- $\lambda_1=1$（二重），特征向量

$$\begin{cases} \alpha_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \alpha_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \xrightarrow{\text{正交化}} \begin{cases} \beta_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \beta_2=\begin{pmatrix} 2/5 \\ 4/5 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- $\lambda_3=10$
- $x=Qy$，则 $f=y_1^2+y_2^2+10y_3^2$

例 化二次型 $f=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$ 为标准型

解

- f 系数所构成的对称矩阵是：$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$
- 特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$
- $\lambda_1=1$（二重），特征向量

$$\begin{cases} \alpha_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \alpha_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \xrightarrow{\text{正交化}} \begin{cases} \beta_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \beta_2=\begin{pmatrix} 2/5 \\ 4/5 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \xrightarrow{\text{单位化}} \begin{cases} \gamma_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \gamma_2=\frac{5}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2/5 \\ 4/5 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- $\lambda_3=10$

- $x=Qy$，则 $f=y_1^2+y_2^2+10y_3^2$

例 化二次型 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 为标准型

解

- f 系数所构成的对称矩阵是：$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$
- 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 1)^2(\lambda - 10)$
- $\lambda_1 = 1$（二重），特征向量

$$\begin{cases} \alpha_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \xrightarrow{\text{正交化}} \begin{cases} \beta_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \beta_2 = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 4/5 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \xrightarrow{\text{单位化}} \begin{cases} \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \gamma_2 = \frac{5}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2/5 \\ 4/5 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- $\lambda_3 = 10$，特征向量 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$
- $x = Qy$，则 $f = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2$

例 化二次型 $f=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$ 为标准型

解

- f 系数所构成的对称矩阵是：$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$
- 特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$
- $\lambda_1=1$（二重），特征向量

$$\begin{cases} \alpha_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} \\ \alpha_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \end{cases} \xrightarrow{\text{正交化}} \begin{cases} \beta_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} \\ \beta_2=\begin{pmatrix}2/5\\4/5\\1\end{pmatrix} \end{cases} \xrightarrow{\text{单位化}} \begin{cases} \gamma_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} \\ \gamma_2=\frac{5}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2/5\\4/5\\1\end{pmatrix} \end{cases}$$

- $\lambda_3=10$，特征向量 $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{单位化}} \gamma_3=\begin{pmatrix}1/3\\2/3\\-2/3\end{pmatrix}$
- $x=Qy$，则 $f=y_1^2+y_2^2+10y_3^2$

例 化二次型 $f=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$ 为标准型

解

- f 系数所构成的对称矩阵是：$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$
- 特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$
- $\lambda_1=1$（二重），特征向量

$$\begin{cases} \alpha_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \alpha_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \xrightarrow{\text{正交化}} \begin{cases} \beta_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \beta_2=\begin{pmatrix} 2/5 \\ 4/5 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \xrightarrow{\text{单位化}} \begin{cases} \gamma_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \gamma_2=\frac{5}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2/5 \\ 4/5 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- $\lambda_3=10$，特征向量 $\alpha_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{单位化}} \gamma_3=\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$
- 令 $Q=\begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & 1/3 \\ 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & 2/3 \\ 0 & \sqrt{5}/3 & -2/3 \end{pmatrix}$，$x=Qy$，则 $f=y_1^2+y_2^2+10y_3^2$

例 化二次型$f=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$为标准型

解

- f 系数所构成的对称矩阵是：$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$
- 特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$
- $\lambda_1=1$（二重），特征向量

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} \\ \alpha_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \end{array}\right. \xrightarrow{\text{正交化}} \left\{\begin{array}{l} \beta_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} \\ \beta_2=\begin{pmatrix}2/5\\4/5\\1\end{pmatrix} \end{array}\right. \xrightarrow{\text{单位化}} \left\{\begin{array}{l} \gamma_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} \\ \gamma_2=\frac{5}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2/5\\4/5\\1\end{pmatrix} \end{array}\right.$$

- $\lambda_3=10$，特征向量$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{单位化}} \gamma_3=\begin{pmatrix}1/3\\2/3\\-2/3\end{pmatrix}$
- 令 $Q=\begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & 1/3 \\ 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & 2/3 \\ 0 & \sqrt{5}/3 & -2/3 \end{pmatrix}$，$x=Qy$，则$f=y_1^2+y_2^2+10y_3^2$
  $(y=Q^Tx)$

化二次型为标准型的另一方法：配方法

- 想法：　$a^2 + 2ab =$

化二次型为标准型的另一方法：配方法

- 想法： $a^2 + 2ab = a^2 + 2ab + b^2 - b^2 =$

化二次型为标准型的另一方法：配方法

- 想法： $a^2 + 2ab = a^2 + 2ab + b^2 - b^2 = (a+b)^2 - b^2$

化二次型为标准型的另一方法：配方法

- 想法： $a^2 + 2ab = a^2 + 2ab + b^2 - b^2 = (a+b)^2 - b^2$

  $a^2 + 2ab + 2ac =$

化二次型为标准型的另一方法：配方法

- 想法： $a^2+2ab=a^2+2ab+b^2-b^2=(a+b)^2-b^2$

$$a^2+2ab+2ac=a^2+2a(b+c)$$

$$=$$

化二次型为标准型的另一方法：配方法

- 想法： $$a^2+2ab=a^2+2ab+b^2-b^2=(a+b)^2-b^2$$

$$\begin{aligned}a^2+2ab+2ac &= a^2+2a(b+c)\\ &= a^2+2a(b+c)+(b+c)^2-(b+c)^2\\ &=\end{aligned}$$

化二次型为标准型的另一方法：配方法

- 想法： $a^2+2ab=a^2+2ab+b^2-b^2=(a+b)^2-b^2$

$$
\begin{aligned}
a^2+2ab+2ac &= a^2+2a(b+c) \\
&= a^2+2a(b+c)+(b+c)^2-(b+c)^2 \\
&= (a+b+c)^2-(b+c)^2
\end{aligned}
$$

化二次型为标准型的另一方法：配方法

- 想法： $a^2+2ab=a^2+2ab+b^2-b^2=(a+b)^2-b^2$

$$\begin{aligned} a^2+2ab+2ac &= a^2+2a(b+c) \\ &= a^2+2a(b+c)+(b+c)^2-(b+c)^2 \\ &= (a+b+c)^2-(b+c)^2 \end{aligned}$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$f=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$$

$$=$$

化二次型为标准型的另一方法：配方法

- 想法： $a^2+2ab=a^2+2ab+b^2-b^2=(a+b)^2-b^2$

$$
\begin{aligned}
a^2+2ab+2ac &= a^2+2a(b+c) \\
&= a^2+2a(b+c)+(b+c)^2-(b+c)^2 \\
&= (a+b+c)^2-(b+c)^2
\end{aligned}
$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f &= x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2 \\
&= x_1^2+2x_1(x_2+x_3)
\end{aligned}
$$

化二次型为标准型的另一方法：配方法

- 想法：$$a^2+2ab=a^2+2ab+b^2-b^2=(a+b)^2-b^2$$

$$\begin{aligned} a^2+2ab+2ac &= a^2+2a(b+c) \\ &= a^2+2a(b+c)+(b+c)^2-(b+c)^2 \\ &= (a+b+c)^2-(b+c)^2 \end{aligned}$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned} f &= x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2 \\ &= x_1^2+2x_1(x_2+x_3)+(x_2+x_3)^2-(x_2+x_3)^2 \end{aligned}$$

化二次型为标准型的另一方法：配方法

- 想法： $a^2+2ab=a^2+2ab+b^2-b^2=(a+b)^2-b^2$

$$
\begin{aligned}
a^2+2ab+2ac &= a^2+2a(b+c) \\
&= a^2+2a(b+c)+(b+c)^2-(b+c)^2 \\
&= (a+b+c)^2-(b+c)^2
\end{aligned}
$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f &= x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2 \\
&= x_1^2+2x_1(x_2+x_3)+(x_2+x_3)^2-(x_2+x_3)^2+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2 \\
&=
\end{aligned}
$$

化二次型为标准型的另一方法：配方法

- 想法： $a^2+2ab=a^2+2ab+b^2-b^2=(a+b)^2-b^2$

$$\begin{aligned}a^2+2ab+2ac&=a^2+2a(b+c)\\&=a^2+2a(b+c)+(b+c)^2-(b+c)^2\\&=(a+b+c)^2-(b+c)^2\end{aligned}$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned}f&=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2\\&=x_1^2+2x_1(x_2+x_3)+(x_2+x_3)^2-(x_2+x_3)^2+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2\\&=(x_1+x_2+x_3)^2+\end{aligned}$$

化二次型为标准型的另一方法：配方法

- 想法： $a^2+2ab=a^2+2ab+b^2-b^2=(a+b)^2-b^2$

$$\begin{aligned} a^2+2ab+2ac &= a^2+2a(b+c) \\ &= a^2+2a(b+c)+(b+c)^2-(b+c)^2 \\ &= (a+b+c)^2-(b+c)^2 \end{aligned}$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned} f &= x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2 \\ &= x_1^2+2x_1(x_2+x_3)+(x_2+x_3)^2-(x_2+x_3)^2+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2 \\ &= (x_1+x_2+x_3)^2+x_2^2+2x_2x_3 \\ &= \end{aligned}$$

化二次型为标准型的另一方法：配方法

- 想法： $a^2+2ab=a^2+2ab+b^2-b^2=(a+b)^2-b^2$

$$
\begin{aligned}
a^2+2ab+2ac &= a^2+2a(b+c) \\
&= a^2+2a(b+c)+(b+c)^2-(b+c)^2 \\
&= (a+b+c)^2-(b+c)^2
\end{aligned}
$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f &= x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2 \\
&= x_1^2+2x_1(x_2+x_3)+(x_2+x_3)^2-(x_2+x_3)^2+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2 \\
&= (x_1+x_2+x_3)^2+x_2^2+2x_2x_3 \\
&= (x_1+x_2+x_3)^2+x_2^2+2x_2x_3+x_3^2-x_3^2 \\
&=
\end{aligned}
$$

化二次型为标准型的另一方法：配方法

- 想法： $$a^2+2ab=a^2+2ab+b^2-b^2=(a+b)^2-b^2$$

$$\begin{aligned} a^2+2ab+2ac &= a^2+2a(b+c) \\ &= a^2+2a(b+c)+(b+c)^2-(b+c)^2 \\ &= (a+b+c)^2-(b+c)^2 \end{aligned}$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned} f &= x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2 \\ &= x_1^2+2x_1(x_2+x_3)+(x_2+x_3)^2-(x_2+x_3)^2+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2 \\ &= (x_1+x_2+x_3)^2+x_2^2+2x_2x_3 \\ &= (x_1+x_2+x_3)^2+x_2^2+2x_2x_3+x_3^2-x_3^2 \\ &= (x_1+x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2-x_3^2 \end{aligned}$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f =& x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\
=& x_1^2+2x_1(x_2+x_3)+(x_2+x_3)^2-(x_2+x_3)^2+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2
\end{aligned}
$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\
&= x_1^2 + 2x_1(x_2+x_3) + (x_2+x_3)^2 - (x_2+x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\
&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 \\
&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2 \\
&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2
\end{aligned}
$$

作线性变量代换

$$
\begin{cases}
y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\
y_2 = \qquad\ \ x_2 + x_3 \\
y_3 = \qquad\qquad\ \ x_3
\end{cases}
$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$
$$= x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3) + (x_2 + x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$
$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3$$
$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2$$
$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = \quad\quad x_2 + x_3 \\ y_3 = \quad\quad\quad\quad x_3 \end{cases}$$

则

$$f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f =& x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\
=& x_1^2+2x_1(x_2+x_3)+(x_2+x_3)^2-(x_2+x_3)^2+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2
\end{aligned}
$$

作线性变量代换

$$
\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = \phantom{x_1 + {}} x_2 + x_3 \\ y_3 = \phantom{x_1 + x_2 + {}} x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \\ x_2 = \\ x_3 = \end{cases}
$$

则

$$f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f =& x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\
=& x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3) + (x_2 + x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2
\end{aligned}
$$

作线性变量代换

$$
\begin{cases}
y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\
y_2 = \qquad x_2 + x_3 \\
y_3 = \qquad\qquad x_3
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
x_1 = \\
x_2 = \\
x_3 = \qquad\qquad y_3
\end{cases}
$$

则

$$f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f =& x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\
=& x_1^2+2x_1(x_2+x_3)+(x_2+x_3)^2-(x_2+x_3)^2+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2
\end{aligned}
$$

作线性变量代换

$$
\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = \quad\ \ x_2 + x_3 \\ y_3 = \qquad\quad x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \\ x_2 = \quad y_2 - y_3 \\ x_3 = \qquad\ \ y_3 \end{cases}
$$

则

$$
f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2
$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f =& x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\
=& x_1^2 + 2x_1(x_2+x_3) + (x_2+x_3)^2 - (x_2+x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\
=& (x_1+x_2+x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 \\
=& (x_1+x_2+x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2 \\
=& (x_1+x_2+x_3)^2 + (x_2+x_3)^2 - x_3^2
\end{aligned}
$$

作线性变量代换

$$
\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = \quad\;\; x_2 + x_3 \\ y_3 = \qquad\quad\; x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = \quad\;\; y_2 - y_3 \\ x_3 = \qquad\quad\; y_3 \end{cases}
$$

则

$$
f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2
$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f =& x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\
=& x_1^2 + 2x_1(x_2+x_3) + (x_2+x_3)^2 - (x_2+x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2
\end{aligned}
$$

作线性变量代换

$$
\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = \qquad x_2 + x_3 \\ y_3 = \qquad\qquad x_3 \end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = \qquad y_2 - y_3 \\ x_3 = \qquad\qquad y_3 \end{cases}
\Rightarrow x = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} y
$$

则

$$
f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2
$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f =& x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\
=& x_1^2 + 2x_1(x_2+x_3) + (x_2+x_3)^2 - (x_2+x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2 \\
=& (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2
\end{aligned}
$$

作线性变量代换

$$
\begin{cases}
y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\
y_2 = \qquad x_2 + x_3 \\
y_3 = \qquad\qquad x_3
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
x_1 = y_1 - y_2 \\
x_2 = \qquad y_2 - y_3 \\
x_3 = \qquad\qquad y_3
\end{cases}
\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ & & \\ & & \end{pmatrix} y
$$

则

$$f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= x_1^2 + 2x_1(x_2+x_3) + (x_2+x_3)^2 - (x_2+x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1+x_2+x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3$$

$$= (x_1+x_2+x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2$$

$$= (x_1+x_2+x_3)^2 + (x_2+x_3)^2 - x_3^2$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = \qquad x_2 + x_3 \\ y_3 = \qquad\qquad x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = \qquad y_2 - y_3 \\ x_3 = \qquad\qquad y_3 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} y$$

则

$$f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\
&= x_1^2 + 2x_1(x_2+x_3) + (x_2+x_3)^2 - (x_2+x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\
&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 \\
&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2 \\
&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2
\end{aligned}
$$

作线性变量代换

$$
\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = \quad\;\; x_2 + x_3 \\ y_3 = \qquad\quad\; x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = \quad\;\; y_2 - y_3 \\ x_3 = \qquad\quad\; y_3 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y
$$

则

$$
f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2
$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\
&= x_1^2 + 2x_1(x_2+x_3) + (x_2+x_3)^2 - (x_2+x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\
&= (x_1+x_2+x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 \\
&= (x_1+x_2+x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2 \\
&= (x_1+x_2+x_3)^2 + (x_2+x_3)^2 - x_3^2
\end{aligned}
$$

作线性变量代换

$$
\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = \quad\quad x_2 + x_3 \\ y_3 = \quad\quad\quad\quad x_3 \end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = \quad\quad y_2 - y_3 \\ x_3 = \quad\quad\quad\quad y_3 \end{cases}
\Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C\text{：可逆}} y
$$

则

$$
f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2
$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$\begin{aligned}
f &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\
&= x_1^2 + 2x_1(x_2+x_3) + (x_2+x_3)^2 - (x_2+x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\
&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 \\
&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2 \\
&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2
\end{aligned}$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = \quad\quad x_2 + x_3 \\ y_3 = \quad\quad\quad\quad x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = \quad\quad y_2 - y_3 \\ x_3 = \quad\quad\quad\quad y_3 \end{cases} \Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C\text{：可逆}} y$$

则

$$f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

例 2 配方法化 $f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$ 为标准型

例 2 配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

$$=$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f =& x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\
=& x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3)
\end{aligned}
$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f =& x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\
=& x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2
\end{aligned}
$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f =& x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\
=& x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2 \\
& + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2
\end{aligned}
$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

$$= x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2$$

$$+ 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f =& x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\
=& x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2 \\
& + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\
=& (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2
\end{aligned}
$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f &= x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\
&= x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2 \\
&\quad + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\
&= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2
\end{aligned}
$$

作线性变量代换

$$
\begin{cases}
y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\
y_2 = x_2 \\
\end{cases}
$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

$$= x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2$$

$$+ 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ y_2 = \qquad\quad x_2 \\ \end{cases}$$

则

$$f = y_1^2 - 2y_2^2$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f =& x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\
=& x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2 \\
& + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\
=& (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2
\end{aligned}
$$

作线性变量代换

$$
\begin{cases}
y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\
y_2 = \quad\quad\; x_2 \\
y_3 = \quad\quad\quad\quad\; x_3
\end{cases}
$$

则

$$f = y_1^2 - 2y_2^2$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

$$= x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2$$

$$+ 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ y_2 = \qquad\quad x_2 \\ y_3 = \qquad\qquad\quad x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \\ \\ \\ \end{cases}$$

则

$$f = y_1^2 - 2y_2^2$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f &= x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\
&= x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2 \\
&\quad + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\
&= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2
\end{aligned}
$$

作线性变量代换

$$
\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ y_2 = \qquad\quad x_2 \\ y_3 = \qquad\qquad\quad x_3 \end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases} \\ \\ x_3 = \qquad\qquad\qquad y_3 \end{cases}
$$

则

$$f = y_1^2 - 2y_2^2$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

$$= x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2$$

$$+ 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

则

$$f = y_1^2 - 2y_2^2$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f &= x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\
&= x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2 \\
&\quad + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\
&= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2
\end{aligned}
$$

作线性变量代换

$$
\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ y_2 = \quad\quad x_2 \\ y_3 = \quad\quad\quad\quad x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 - 2y_3 \\ x_2 = \quad\quad y_2 \\ x_3 = \quad\quad\quad\quad y_3 \end{cases}
$$

则

$$
f = y_1^2 - 2y_2^2
$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$
$$= x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2$$
$$+ 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$
$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ y_2 = \qquad\quad x_2 \\ y_3 = \qquad\qquad\quad x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 - 2y_3 \\ x_2 = \qquad\quad y_2 \\ x_3 = \qquad\qquad\quad y_3 \end{cases} \Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C\text{：可逆}} y$$

则

$$f = y_1^2 - 2y_2^2$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$
\begin{aligned}
f =& x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\
=& x_1^2 + 2x_1\cdot(2x_2+2x_3) + (2x_2+2x_3)^2 - (2x_2+2x_3)^2 \\
& + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\
=& (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2
\end{aligned}
$$

作线性变量代换

$$
\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 - 2y_3 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C\text{：可逆}} y
$$

则

$$
f = y_1^2 - 2y_2^2
$$

例 3 配方法化 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 为标准型

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

$$=$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$=$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) \qquad\qquad\qquad\qquad \right]$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right]$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$+ 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$+ 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$+ 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1\cdot(x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$+ 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$+ 3\left[x_2^2 - 2x_2\cdot\frac{2}{3}x_3 \qquad\qquad\qquad \right]$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$+ 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$+ 3\left[x_2^2 - 2x_2 \cdot \frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2\right]$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$+ 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$+ 3\left[x_2^2 - 2x_2 \cdot \frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2\right] - 3(\frac{2}{3}x_3)^2$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1\cdot(x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$+ 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$+ 3\left[x_2^2 - 2x_2\cdot\frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2\right] - 3(\frac{2}{3}x_3)^2 + 3x_3^2$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$+ 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left[x_2^2 - 2x_2 \cdot \frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2\right] - 3(\frac{2}{3}x_3)^2 + 3x_3^2$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f=\underline{2x_1^2}+5x_2^2+5x_3^2+\underline{4x_1x_2-4x_1x_3}-8x_2x_3$$

$$=2\left[x_1^2+2x_1\cdot(x_2-x_3)+(x_2-x_3)^2\right]-2(x_2-x_3)^2$$

$$+5x_2^2+5x_3^2-8x_2x_3$$

$$=2(x_1+x_2-x_3)^2+3x_2^2+3x_3^2-4x_2x_3$$

$$=2(x_1+x_2-x_3)^2+3\left[x_2^2-2x_2\cdot\frac{2}{3}x_3+(\frac{2}{3}x_3)^2\right]-3(\frac{2}{3}x_3)^2+3x_3^2$$

$$=2(x_1+x_2-x_3)^2$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$+ 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left[x_2^2 - 2x_2 \cdot \frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2\right] - 3(\frac{2}{3}x_3)^2 + 3x_3^2$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left(x_2 - \frac{2}{3}x_3\right)^2$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$+ 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left[x_2^2 - 2x_2 \cdot \frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2\right] - 3(\frac{2}{3}x_3)^2 + 3x_3^2$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left(x_2 - \frac{2}{3}x_3\right)^2 + \frac{5}{3}x_3^2$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f=\underline{2x_1^2}+5x_2^2+5x_3^2+\underline{4x_1x_2-4x_1x_3}-8x_2x_3$$

$$=2\left[x_1^2+2x_1\cdot(x_2-x_3)+(x_2-x_3)^2\right]-2(x_2-x_3)^2$$

$$+5x_2^2+5x_3^2-8x_2x_3$$

$$=2(x_1+x_2-x_3)^2+3x_2^2+3x_3^2-4x_2x_3$$

$$=2(x_1+x_2-x_3)^2+3\left[x_2^2-2x_2\cdot\frac{2}{3}x_3+(\frac{2}{3}x_3)^2\right]-3(\frac{2}{3}x_3)^2+3x_3^2$$

$$=2(x_1+x_2-x_3)^2+3\left(x_2-\frac{2}{3}x_3\right)^2+\frac{5}{3}x_3^2$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1=x_1+x_2-x_3 \\ y_2=\qquad x_2-\frac{2}{3}x_3 \\ y_3=\qquad\qquad x_3 \end{cases}$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1\cdot(x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$+ 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left[x_2^2 - 2x_2\cdot\frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2\right] - 3(\frac{2}{3}x_3)^2 + 3x_3^2$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left(x_2 - \frac{2}{3}x_3\right)^2 + \frac{5}{3}x_3^2$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = \qquad x_2 - \frac{2}{3}x_3 \\ y_3 = \qquad\qquad x_3 \end{cases}$$

则 $f = 2y_1^2 + 3y_2^2 + \frac{5}{3}y_3^2$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$+ 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left[x_2^2 - 2x_2 \cdot \frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2\right] - 3(\frac{2}{3}x_3)^2 + 3x_3^2$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left(x_2 - \frac{2}{3}x_3\right)^2 + \frac{5}{3}x_3^2$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = \quad\quad x_2 - \frac{2}{3}x_3 \\ y_3 = \quad\quad\quad\quad x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \\ \\ x_3 = \quad\quad\quad\quad y_3 \end{cases}$$

则 $f = 2y_1^2 + 3y_2^2 + \frac{5}{3}y_3^2$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$+ 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left[x_2^2 - 2x_2 \cdot \frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2\right] - 3(\frac{2}{3}x_3)^2 + 3x_3^2$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left(x_2 - \frac{2}{3}x_3\right)^2 + \frac{5}{3}x_3^2$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = \qquad x_2 - \frac{2}{3}x_3 \\ y_3 = \qquad\qquad x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \\ x_2 = \qquad y_2 + \frac{2}{3}y_3 \\ x_3 = \qquad\qquad y_3 \end{cases}$$

则 $f = 2y_1^2 + 3y_2^2 + \frac{5}{3}y_3^2$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$+ 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left[x_2^2 - 2x_2 \cdot \frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2\right] - 3(\frac{2}{3}x_3)^2 + 3x_3^2$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left(x_2 - \frac{2}{3}x_3\right)^2 + \frac{5}{3}x_3^2$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = \quad\quad x_2 - \frac{2}{3}x_3 \\ y_3 = \quad\quad\quad\quad x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + \frac{1}{3}y_3 \\ x_2 = \quad\quad y_2 + \frac{2}{3}y_3 \\ x_3 = \quad\quad\quad\quad y_3 \end{cases}$$

则 $f = 2y_1^2 + 3y_2^2 + \frac{5}{3}y_3^2$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1\cdot(x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$+ 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left[x_2^2 - 2x_2\cdot\frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2\right] - 3(\frac{2}{3}x_3)^2 + 3x_3^2$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left(x_2 - \frac{2}{3}x_3\right)^2 + \frac{5}{3}x_3^2$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = \quad\quad x_2 - \frac{2}{3}x_3 \\ y_3 = \quad\quad\quad\quad x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + \frac{1}{3}y_3 \\ x_2 = \quad\quad y_2 + \frac{2}{3}y_3 \\ x_3 = \quad\quad\quad\quad y_3 \end{cases} \Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C\text{：可逆}} y$$

则 $f = 2y_1^2 + 3y_2^2 + \frac{5}{3}y_3^2$

对 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 采取两种方法化为标准型：

对 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 采取两种方法化为标准型：

- 方法一：求系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值（$\lambda = 1, 1, 10$）、特征向量

对 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 采取两种方法化为标准型：

- 方法一：求系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值（$\lambda = 1, 1, 10$）、特征向量 $\xrightarrow{\text{单位正交化}}$

对 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 采取两种方法化为标准型：

- 方法一：求系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值（$\lambda = 1,\ 1,\ 10$）、特征向量 $\xrightarrow{\text{单位正交化}}$ 得到正交矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & 1/3 \\ 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & 2/3 \\ 0 & \sqrt{5}/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

对 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 采取两种方法化为标准型：

- 方法一：求系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值（$\lambda = 1, 1, 10$）、

  特征向量 $\xrightarrow{\text{单位正交化}}$ 得到正交矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & 1/3 \\ 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & 2/3 \\ 0 & \sqrt{5}/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

  令 $x = Qy$，则

对 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 采取两种方法化为标准型：

- 方法一：求系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值（$\lambda = 1, 1, 10$）、

  特征向量 $\xrightarrow{\text{单位正交化}}$ 得到正交矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & 1/3 \\ 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & 2/3 \\ 0 & \sqrt{5}/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

  令 $x = Qy$，则

$$f = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2$$

对 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 采取两种方法化为标准型：

- 方法一：求系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值（$\lambda = 1, 1, 10$）、

  特征向量 $\xrightarrow{\text{单位正交化}}$ 得到正交矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & 1/3 \\ 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & 2/3 \\ 0 & \sqrt{5}/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

  令 $x = Qy$，则

$$f = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2$$

- 方法二：配方法

对 $f=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$ 采取两种方法化为标准型：

- 方法一：求系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$ 的特征值（$\lambda=1,1,10$）、特征向量 $\xrightarrow{\text{单位正交化}}$ 得到正交矩阵

$$Q=\begin{pmatrix}-2/\sqrt{5}&2/3\sqrt{5}&1/3\\1/\sqrt{5}&4/3\sqrt{5}&2/3\\0&\sqrt{5}/3&-2/3\end{pmatrix}$$

令 $x=Qy$，则

$$f=y_1^2+y_2^2+10y_3^2$$

- 方法二：配方法

$$f=2(x_1+x_2-x_3)^2+3\left(x_2-\frac{2}{3}x_3\right)^2+\frac{5}{3}x_3^2$$

对 $f=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$ 采取两种方法化为标准型：

- 方法一：求系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$ 的特征值（$\lambda=1,1,10$）、

  特征向量 $\xrightarrow{\text{单位正交化}}$ 得到正交矩阵

$$Q=\begin{pmatrix}-2/\sqrt{5}&2/3\sqrt{5}&1/3\\1/\sqrt{5}&4/3\sqrt{5}&2/3\\0&\sqrt{5}/3&-2/3\end{pmatrix}$$

  令 $x=Qy$，则

$$f=y_1^2+y_2^2+10y_3^2$$

- 方法二：配方法

$$f=2(x_1+x_2-x_3)^2+3\left(x_2-\frac{2}{3}x_3\right)^2+\frac{5}{3}x_3^2=2y_1^2+3y_2^2+\frac{5}{3}y_3^2$$

对 $f=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$ 采取两种方法化为标准型：

- 方法一：求系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$ 的特征值（$\lambda=1,1,10$）、

  特征向量 $\xrightarrow{\text{单位正交化}}$ 得到正交矩阵

$$Q=\begin{pmatrix}-2/\sqrt{5}&2/3\sqrt{5}&1/3\\1/\sqrt{5}&4/3\sqrt{5}&2/3\\0&\sqrt{5}/3&-2/3\end{pmatrix}$$

  令 $x=Qy$，则

$$f=y_1^2+y_2^2+10y_3^2$$

- 方法二：配方法

$$f=2(x_1+x_2-x_3)^2+3\left(x_2-\frac{2}{3}x_3\right)^2+\frac{5}{3}x_3^2=2y_1^2+3y_2^2+\frac{5}{3}y_3^2$$

注 标准型不唯一

设二次型

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 \qquad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
& + \cdots\cdots \\
& \qquad\qquad + a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

的一个标准型是

$$f = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ry_r^2$$

其中 $0 \leq r \leq n$，$d_1, d_2, \ldots, d_r \neq 0$。

设二次型

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 \qquad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
& + \cdots\cdots \\
& \qquad\qquad + a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

的一个标准型是

$$f = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ry_r^2$$

其中 $0 \leq r \leq n$，$d_1, d_2, \ldots, d_r \neq 0$。则：

定理 $r = r(A)$

设二次型

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 \qquad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
& + \cdots\cdots \\
& \qquad + a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

的一个标准型是

$$f = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ry_r^2$$

其中 $0 \leq r \leq n$，$d_1, d_2, \ldots, d_r \neq 0$。则：

定理 $r = r(A)$

证明

$$A \qquad \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & d_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

设二次型

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 \qquad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & + \cdots\cdots \\ & \qquad\qquad\qquad + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

的一个标准型是

$$f = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ry_r^2$$

其中 $0 \le r \le n$，$d_1, d_2, \ldots, d_r \neq 0$。则：

定理 $r = r(A)$

证明 设该非退化线性变换为 $x = Cy$，其中 C 是可逆矩阵。

$$A \qquad \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & d_r & 0 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

设二次型

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 \qquad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & + \cdots\cdots \\ & \qquad\qquad + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

的一个标准型是

$$f = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ry_r^2$$

其中 $0 \le r \le n$，$d_1, d_2, \ldots, d_r \neq 0$。则：

定理 $r = r(A)$

证明 设该非退化线性变换为 $x = Cy$，其中 C 是可逆矩阵。注意到

$$C^TAC = \begin{pmatrix} d_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

设二次型

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 &+ 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
&+ a_{22}x_2^2 \qquad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
&+ \cdots\cdots \\
&\qquad\qquad\qquad + a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

的一个标准型是

$$f = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ry_r^2$$

其中 $0 \leq r \leq n$，$d_1, d_2, \ldots, d_r \neq 0$。则：

定理 $r = r(A)$

证明 设该非退化线性变换为 $x = Cy$，其中 C 是可逆矩阵。注意到

$$C^TAC = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & d_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} =: D$$

设二次型

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 \qquad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
& + \cdots\cdots \\
& \qquad\qquad + a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

的一个标准型是

$$f = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ry_r^2$$

其中 $0 \le r \le n$，$d_1, d_2, \ldots, d_r \ne 0$。则：

定理 $r = r(A)$

证明 设该非退化线性变换为 $x = Cy$，其中 C 是可逆矩阵。注意到

$$C^TAC = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & d_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} =: D$$

所以 $r(A) = r(D)$

设二次型

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 \qquad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
& + \cdots\cdots \\
& \qquad\qquad + a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

的一个标准型是

$$f = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ry_r^2$$

其中 $0 \leq r \leq n$，$d_1, d_2, \ldots, d_r \neq 0$。则：

定理 $r = r(A)$

证明 设该非退化线性变换为 $x = Cy$，其中 C 是可逆矩阵。注意到

$$C^TAC = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & d_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} =: D$$

所以 $r(A) = r(D) = r$

设二次型

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 \qquad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
& + \cdots\cdots \\
& \qquad\qquad + a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

的一个标准型是

$$
f = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ry_r^2
$$

其中 $0 \leq r \leq n$，$d_1, d_2, \ldots, d_r \neq 0$。则：

定理 $r = r(A)$，并且 $d_1, \ldots, d_r$ 中正、负数的个数唯一。

证明 设该非退化线性变换为 $x = Cy$，其中 C 是可逆矩阵。注意到

$$
C^TAC = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & d_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} =: D
$$

所以 $r(A) = r(D) = r$

设二次型

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 \qquad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
& + \cdots\cdots \\
& \qquad\qquad + a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

的一个标准型是

$$f = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ry_r^2$$

其中 $0 \le r \le n$，$d_1, d_2, \ldots, d_r \neq 0$。则：

定理 $r = r(A)$，并且 $d_1, \ldots, d_r$ 中正、负数的个数唯一。

证明 设该非退化线性变换为 $x = Cy$，其中 C 是可逆矩阵。注意到

$$C^TAC = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & d_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} =: D$$

所以 $r(A) = r(D) = r$。（第二个结论证明略）

设二次型

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 \qquad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
& + \cdots\cdots \\
& \qquad\qquad\qquad + a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

的一个标准型是

$$f = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ry_r^2$$

其中 $0 \le r \le n$，$d_1, d_2, \ldots, d_r \neq 0$。则：

定理 $r = r(A)$，并且 $d_1, \ldots, d_r$ 中正、负数的个数**唯一**。

设二次型

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 \qquad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
& + \cdots\cdots \\
& \qquad\qquad\qquad + a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

的一个标准型是

$$f = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ry_r^2$$

其中 $0 \le r \le n$，$d_1, d_2, \ldots, d_r \neq 0$。则：

定理 $r = r(A)$，并且 $d_1, \ldots, d_r$ 中正、负数的个数**唯一**。

定义

1. **正惯性指标**：$d_1, \ldots, d_r$ 中正数的个数
2. **负惯性指标**：$d_1, \ldots, d_r$ 中负数的个数

例 1

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

正惯性指标 = _；负惯性指标 = _

例 2

$$f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

正惯性指标 = _；负惯性指标 = _

例 1

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$
$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2$$

正惯性指标 = _； 负惯性指标 = _

例 2

$$f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

正惯性指标 = _； 负惯性指标 = _

例 1

$$
\begin{aligned}
f &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\
&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2 \\
&= y_1^2 + y_2^2 - y_3^2
\end{aligned}
$$

正惯性指标 = _；负惯性指标 = _

例 2

$$f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

正惯性指标 = _；负惯性指标 = _

例 1

$$
\begin{aligned}
f &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\
&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2 \\
&= y_1^2 + y_2^2 - y_3^2
\end{aligned}
$$

所以正惯性指标 = $\underline{2}$；负惯性指标 = _

例 2

$$
f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3
$$

正惯性指标 = _；负惯性指标 = _

例 1

$$
\begin{aligned}
f &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\
&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2 \\
&= y_1^2 + y_2^2 - y_3^2
\end{aligned}
$$

所以正惯性指标 $= \underline{2}$；负惯性指标 $= \underline{1}$

例 2

$$f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

正惯性指标 = _；负惯性指标 = _

例 1

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$
$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2$$
$$= y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

所以正惯性指标 = $\underline{2}$；负惯性指标 = $\underline{1}$

例 2

$$f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$
$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

正惯性指标 = _；负惯性指标 = _

例 1

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$
$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2$$
$$= y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

所以正惯性指标 $= \underline{2}$；负惯性指标 $= \underline{1}$

例 2

$$f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$
$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$
$$= y_1^2 - 2y_2^2$$

正惯性指标 = _；负惯性指标 = _

例 1

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$
$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2$$
$$= y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

所以正惯性指标 $= \underline{2}$；负惯性指标 $= \underline{1}$

例 2

$$f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$
$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$
$$= y_1^2 - 2y_2^2$$

所以正惯性指标 $= \underline{1}$；负惯性指标 $= \underline{\quad}$

例 1

$$\begin{aligned} f &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2 \\ &= y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 \end{aligned}$$

所以正惯性指标 $= \underline{2}$；负惯性指标 $= \underline{1}$

例 2

$$\begin{aligned} f &= 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3 \\ &= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2 \\ &= y_1^2 - 2y_2^2 \end{aligned}$$

所以正惯性指标 $= \underline{1}$；负惯性指标 $= \underline{1}$

二次型的规范型

定理 任意二次型 $f(x_1, ..., x_n)$ 都可以通过非退化线性变换

$$x = Cy$$

化为

$$f = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_r y_r^2$$

二次型的规范型

定理 任意二次型 $f(x_1, \dots, x_n)$ 都可以通过非退化线性变换

$$x = Cy$$

化为

$$f = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2$$

二次型的规范型

定理 任意二次型 $f(x_1, \ldots, x_n)$ 都可以通过非退化线性变换

$$x = Cy$$

化为

$$f = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2$$

$$\begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$$

二次型的规范型

定理 任意二次型 $f(x_1, ..., x_n)$ 都可以通过非退化线性变换

$$x = Cy$$

化为

$$f = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2$$

$$A \qquad \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$$

二次型的规范型

定理 任意二次型 $f(x_1, \ldots, x_n)$ 都可以通过非退化线性变换

$$x = Cy$$

化为

$$f = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2$$

$$C^T A C = \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$$

二次型的规范型

定理 任意二次型 $f(x_1,\dots,x_n)$ 都可以通过非退化线性变换

$$x = Cy$$

化为

$$f = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2$$

也就是，任意对称矩阵 A，都存在可逆矩阵 C，使得

$$C^TAC = \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$$

二次型的规范型

定理 任意二次型 $f(x_1, \ldots, x_n)$ 都可以通过非退化线性变换

$$x = Cy$$

化为

$$f = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2 \qquad (\text{规范型})$$

也就是，任意对称矩阵 A，都存在可逆矩阵 C，使得

$$C^T A C = \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$$

二次型的规范型

定理 任意二次型 $f(x_1,...,x_n)$ 都可以通过非退化线性变换

$$x = Cy$$

化为

$$f = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2 \qquad \text{(规范型)}$$

也就是，任意对称矩阵 A，都存在可逆矩阵 C，使得

$$C^T AC = \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$$

注

- $r = r(A)$，$p =$ 正惯性指标，$r - p =$ 负惯性指标

二次型的规范型

定理 任意二次型 $f(x_1, ..., x_n)$ 都可以通过非退化线性变换

$$x = Cy$$

化为

$$f = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2 \qquad \text{(规范型)}$$

也就是，任意对称矩阵 A，都存在可逆矩阵 C，使得

$$C^T A C = \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$$

注

- $r = r(A)$，$p =$ 正惯性指标，$r - p =$ 负惯性指标
- p 是由 A 唯一确定的

二次型的规范型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

配方法

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

二次型的规范型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

配方法

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

$$(\sqrt{2}x_2)^2$$

二次型的规范型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

配方法

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - (\sqrt{2}x_2)^2$$

二次型的规范型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

配方法

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - (\sqrt{2}x_2)^2$$

$$= y_1^2 - y_2^2$$

二次型的规范型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

配方法

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - (\sqrt{2}x_2)^2$$

变量代换 $y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x$

$$= y_1^2 - y_2^2$$

二次型的规范型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

配方法

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - (\sqrt{2}x_2)^2$$

变量代换 $y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -2 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y$

$$= y_1^2 - y_2^2$$

二次型的规范型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

配方法

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - (\sqrt{2}x_2)^2$$

变量代换 $y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x \Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -2 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C} y$

$$= y_1^2 - y_2^2$$

二次型的规范型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

配方法

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - (\sqrt{2}x_2)^2$$

变量代换 $y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x \Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -2 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C} y$

$$= y_1^2 - y_2^2$$

注

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

二次型的规范型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

配方法

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - (\sqrt{2}x_2)^2$$

变量代换 $y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x \Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -2 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C} y$

$$= y_1^2 - y_2^2$$

注

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \qquad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

二次型的规范型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

配方法

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - (\sqrt{2}x_2)^2$$

变量代换 $y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x \Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -2 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C} y$

$$= y_1^2 - y_2^2$$

注

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C^T} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -2 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

二次型的规范型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

配方法

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - (\sqrt{2}x_2)^2$$

变量代换 $y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x \Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -2 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C} y$

$$= y_1^2 - y_2^2$$

注 特别地，找到了可逆阵 C，使得

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C^T} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -2 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

二次型的规范型

$$f = x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$$

配方法

$$= \frac{3}{4}x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 + (-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3)^2$$

二次型的规范型

$$f = x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$$

配方法

$$= \frac{3}{4}x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 + (-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3)^2$$

$$= (\frac{\sqrt{3}}{2}x_1)^2$$

二次型的规范型

$$f = x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$$

配方法

$$= \frac{3}{4}x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 + (-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3)^2$$

$$= (\frac{\sqrt{3}}{2}x_1)^2 + (-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3)^2$$

二次型的规范型

$$f = x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$$

配方法

$$= \frac{3}{4}x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 + (-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3)^2$$

$$= (\frac{\sqrt{3}}{2}x_1)^2 + (-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_1 - x_2)^2$$

二次型的规范型

$$f = x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$$

配方法

$$= \frac{3}{4}x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 + (-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3)^2$$

$$= (\frac{\sqrt{3}}{2}x_1)^2 + (-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_1 - x_2)^2 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

二次型的规范型

$$f = x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$$

配方法

$$= \frac{3}{4}x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 + (-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3)^2$$

$$= (\frac{\sqrt{3}}{2}x_1)^2 + (-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_1 - x_2)^2 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

变量代换 $y = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x$

二次型的规范型

$$f = x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$$

配方法

$$= \frac{3}{4}x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 + (-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3)^2$$

$$= (\frac{\sqrt{3}}{2}x_1)^2 + (-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_1 - x_2)^2 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

变量代换 $y = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 2/\sqrt{3} & 0 & -1 \\ -1/\sqrt{3} & 1 & 1 \end{pmatrix} y$

二次型的规范型

$$f = x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$$

配方法

$$= \frac{3}{4}x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 + (-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3)^2$$

$$= (\frac{\sqrt{3}}{2}x_1)^2 + (-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_1 - x_2)^2 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

变量代换 $y = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x \Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} 2/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 2/\sqrt{3} & 0 & -1 \\ -1/\sqrt{3} & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{C} y$

二次型的规范型

$$f = x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$$

配方法

$$= \frac{3}{4}x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 + (-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3)^2$$

$$= (\frac{\sqrt{3}}{2}x_1)^2 + (-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_1 - x_2)^2 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

变量代换 $y = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x \Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} 2/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 2/\sqrt{3} & 0 & -1 \\ -1/\sqrt{3} & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{C} y$

注

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

二次型的规范型

$$f = x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$$

配方法

$$= \frac{3}{4}x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 + (-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3)^2$$

$$= (\frac{\sqrt{3}}{2}x_1)^2 + (-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_1 - x_2)^2 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

变量代换 $y = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x \Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} 2/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 2/\sqrt{3} & 0 & -1 \\ -1/\sqrt{3} & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{C} y$

注

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \qquad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

二次型的规范型

$$f = x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$$

配方法

$$= \frac{3}{4}x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 + (-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3)^2$$

$$= (\frac{\sqrt{3}}{2}x_1)^2 + (-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_1 - x_2)^2 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

变量代换 $y = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x \Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} 2/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 2/\sqrt{3} & 0 & -1 \\ -1/\sqrt{3} & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{C} y$

注

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{3} \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{C^T} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 2/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{3} & -1 & 1 \\ 2/\sqrt{3} & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{C} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

二次型的规范型

$$f = x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$$

配方法

$$= \frac{3}{4}x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 + (-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3)^2$$

$$= (\frac{\sqrt{3}}{2}x_1)^2 + (-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_1 - x_2)^2 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

变量代换 $y = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x \Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} 2/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 2/\sqrt{3} & 0 & -1 \\ -1/\sqrt{3} & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{C} y$

注 特别地，找到了可逆阵 C，使得

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{3} \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{C^T} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 2/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{3} & -1 & 1 \\ 2/\sqrt{3} & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{C} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

合同，合同的等价条件

定义 设 A, B 为两个 n 阶方阵，若存在可逆 n 阶方阵 C，使得

$$C^T A C = B$$

则称 A 合同于 B，记为 $A \simeq B$

合同，合同的等价条件

定义 设 A, B 为两个 n 阶方阵，若存在可逆 n 阶方阵 C，使得

$$C^T AC = B$$

则称 A合同于B，记为 $A \simeq B$

定理 任意对称矩阵 A，都成立

$$A \simeq \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$$

合同，合同的等价条件

定义 设 A, B 为两个 n 阶方阵，若存在可逆 n 阶方阵 C，使得

$$C^T AC = B$$

则称 A 合同于 B，记为 $A \simeq B$

定理 任意对称矩阵 A，都成立

$$A \simeq \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$$

定理 设 A, B 为对称矩阵，则 $A \simeq B$ 的充分必要条件是 A, B 具有相同的规范形（也就是，秩、正惯性指标都相等）

合同，合同的等价条件

定义 设 A, B 为两个 n 阶方阵，若存在可逆 n 阶方阵 C，使得

$$C^T A C = B$$

则称 A 合同于 B，记为 $A \simeq B$

定理 任意对称矩阵 A，都成立

$$A \simeq \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$$

定理 设 A, B 为对称矩阵，则 $A \simeq B$ 的充分必要条件是 A, B 具有相同的规范形（也就是，秩、正惯性指标都相等）

证明 （练习）