第 09 周作业解答

练习 1. 问 k 取何值时，方程组 $\begin{cases} x_1+ & x_2+ & kx_3 = & 4 \\ -x_1+ & kx_2+ & x_3 = & k^2 \\ x_1- & x_2+ & 2x_3 = & -4 \end{cases}$ 有唯一解、无穷多解、无解。并且有解时，求出全部解。

解对增广矩阵作初等行变换：

$$(A\vdots b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 4 \\ -1 & k & 1 & k^2 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2+r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 4 \\ 0 & k+1 & k+1 & k^2+4 \\ 0 & -2 & 2-k & -8 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 4 \\ 0 & -2 & 2-k & -8 \\ 0 & k+1 & k+1 & k^2+4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}\times r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 4 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}k-1 & 4 \\ 0 & k+1 & k+1 & k^2+4 \end{array}\right) \xrightarrow[r_1-r_2]{r_3-(k+1)\times r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2}k+1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}k-1 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(k+1)(4-k) & k(k-4) \end{array}\right)$$

- 当 $k \neq -1$ 且 $k \neq 4$ 时，$r(A) = r(A\vdots b) = 3 =$ 未知量个数，方程组有唯一解。此时

$$(A\vdots b) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2}k+1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}k-1 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(k+1)(4-k) & k(k-4) \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{2}{(k+1)(4-k)}\times r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2}k+1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}k-1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2k}{k+1} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2-(\frac{1}{2}k-1)\times r_3]{r_1-(\frac{1}{2}k+1)\times r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{k(k+2)}{k+1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{k^2+2k+4}{k+1} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2k}{k+1} \end{array}\right)$$

所以

$$\begin{cases} x_1 = \frac{k^2+2k}{k+1} \\ x_2 = \frac{k^2+2k+4}{k+1} \\ x_3 = -\frac{2k}{k+1} \end{cases}$$

- 当 $k = -1$ 时

$$(A\vdots b) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2}k+1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}k-1 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(k+1)(4-k) & k(k-4) \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

可见 $r(A) = 2 < 3 = r(A\vdots b)$，此时方程无解。

- 当 $k = 4$ 时

$$(A\vdots b) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2}k+1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}k-1 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(k+1)(4-k) & k(k-4) \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

可见 $r(A)=r(A\vdots b)=2<$ 未知量个数3，方程组有无穷多的解，包含 $3-2=1$ 个自由变量。事实上，通过上述简化的阶梯型矩阵，可知原方程等价于

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad + \quad 3x_3 = \quad 0 \\ \quad\quad x_2 + \quad x_3 = \quad 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3x_3 \\ x_3 = 4 - x_3 \end{cases}$$

所以通解是

$$\begin{cases} x_1 = -3c \\ x_2 = 4 - c \quad\quad (c\text{为任意常数}) \\ x_3 = c \end{cases}$$

用向量形式表示则是

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

练习 2. 问 $\beta=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 是否能由向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ 线性表示？若能，写出其中一个线性组合的表达式。

解

$$\left(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \mid \beta \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_4-5r_1 \\ r_5+r_1}]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -16 \\ 0 & 3 & -1 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{4}\times r_4]{r_2 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -6 \\ 0 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & -1 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_4+2r_2 \\ r_5-3r_2}]{r_3+3r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\frac{1}{3}\times r_4 \\ -\frac{1}{4}\times r_5}]{\frac{1}{4}\times r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{r_5-r_3 \\ r_2-r_3}]{r_4-r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

可见 $r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)=r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta)$，所以 β 能由 α_1, α_2, α_3。并且从最后简化的阶梯型矩阵容易看出：

$$\beta = -\alpha_1 + 2\alpha_2 + 0\alpha_3 = -\alpha_1 + 2\alpha_2.$$

练习 3. 问向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是否线性相关？若线性相关，写出它们的一个相关表达式。

解

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3+2r_1 \\ r_4+3r_1}]{r_2+3r_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{4}\times r_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-3r_2]{r_3-4r_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4-r_3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可见 $r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = 3 =$ 向量个数，所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关。

练习 4. 根据参数 a 的取值，讨论向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$ 何时线性相关，何时线性无关。

解作矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix},$$

则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关当且仅当 $|A| = 0$，线性无关当且仅当 $|A| \neq 0$。计算行列式：

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ a & 0 & a \end{vmatrix} \overset{c_1-c_3}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} \overset{\text{按第 3 行展开}}{=\!=\!=\!=\!=} (-1)^{3+3}a \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & a \end{vmatrix} = 2a(a-2).$$

所以

- $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关 $\Leftrightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow a = 0$ 或 $a = 2$
- $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关 $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$ 且 $a \neq 2$

练习 5. 设 α, β, γ 线性无关，证明：$\alpha, \alpha+\beta, \alpha+\beta+\gamma$ 也是线性无关。

证明设

$$\begin{aligned} 0 =& k_1\alpha + k_2(\alpha+\beta) + k_3(\alpha+\beta+\gamma) \\ =& (k_1+k_2+k_3)\alpha + (k_2+k_3)\beta + k_3\gamma \end{aligned}$$

因为 α, β, γ 线性无关，所以

$$\begin{cases} k_1+k_2+k_3 = 0 \\ \qquad k_2+k_3 = 0 \\ \qquad\quad k_3 = 0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad k_1 = k_2 = k_3 = 0$$

所以 $\alpha, \alpha+\beta, \alpha+\beta+\gamma$ 线性无关。

下一题是附加题，做出来的同学下周交上来，可以加分

练习 6. 先介绍“幂零”的概念：一个方阵 A 称为幂零是指存在正整数 m 使得 $A^m = O$。要注意的是幂零矩阵不一定是零矩阵。例如 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 不是零矩阵，但满足 $A^2 = O$。

现假设 n 阶方阵 A 是幂零，并假设 m 是最小的正整数满足 $A^m = O$。设 v 是 $\mathbb{R}^n$ 的向量，并且满足 $A^{m-1}v \neq 0$。证明：向量组 $v, Av, A^2v, \cdots, A^{m-1}v$ 是线性无关。

利用上述结论证明：如果 n 阶方阵 A 是幂零，则 $A^n = O$。

解设 $k_0v+k_1Av+k_2A^2v+\cdots+k_{m-1}A^{m-1}v=0$。等式两边左乘 A^{m-1}，得到 $k_0A^{m-1}v+k_1A^mv+k_2A^{m+1}v+\cdots+k_{m-1}A^{2m-2}v=0$。因为 $A^m=O$，前一个式子说明 $k_0A^{m-1}v=0$。又因为 $A^{m-1}v\neq 0$，所以 $k_0=0$。代入第一个式子，得 $k_1Av+k_2A^2v+\cdots+k_{m-1}A^{m-1}v=0$。对此两边左乘 A^{m-2}，类似地分析，可知 $k_1=0$。如此类推，可知 $k_0=k_1=\cdots=k_{m-1}=0$。所以是线性无关。

反证法，假设 $A^n\neq O$。因为 A 是幂零，可假设 m 是最小的正整数满足 $A^m=O$。因为 $A^n\neq O$，所以 $m>n$。注意到 $A^{m-1}\neq O$，所以可以找到一个向量 $v\in\mathbb{R}^n$ 满足 $A^{m-1}v\neq 0$。有上述证明的结论知: $v,Av,A^2v,\cdots,A^{m-1}v$ 是线性无关。从另外一方面看，该向量组维数为 n，向量个数大于 n，因此不可能线性相关，出现矛盾。所以应有 $A^n=O$。