暨 南 大 学 考 试 试 卷

得分	评阅人

一、填空题（共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

1．已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 0, -2, 3, 且矩阵 A 与 B 相似， 则 $|B+I|=$______.

2．若 3 维列向量 α,β 满足 $\alpha^T\beta=2$，则矩阵 $\beta\alpha^T$ 的非零特征值为______.

3．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, 则 $r(A^3)=$___________.

4．设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 3 维列向量，记矩阵

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)，B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3).$$

若 $|A|=1$, 则 $|B|=$____________.

5．设 2 阶实对称矩阵 A 的特征值为 1, 2．若向量 $(1,2)^T$ 是 A 对应于特征值 1 的特征向量, 则 A 对应于特征值 2 的全部特征向量为______________________.

6．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}$, 矩阵 B 满足 $BA=B+2I$，则 $|B|=$ ____________.

7．设 A 为 2 阶矩阵，将 A 的第 2 列的-2 倍加到第 1 列得到矩阵 B． 若 $B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, 则

$A=$ ______________ .

8．设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\end{pmatrix}$, 则 $A^2-2A+I=$ ________________ .

9．若齐次线性方程 $\begin{cases}ax_1+x_2+x_3=0\\x_1+ax_2+x_3=0\\x_1+x_2+ax_3=0\end{cases}$ 有非零解，则 a 的值为 _______________.

10.设对称矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$, 则与 A 对应的二次型 $f(x_1,x_2)=$_______________.

得分	评阅人

二、选择题（共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

1．行列式$\left|a_{ij}\right|=\begin{vmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}$中元素$a_{21}$的代数余子式为　　　　(　　　)

(a) −2　　(b) −1　　(c) 1　　(d) 2

2．设n阶矩阵A,B,C可逆且满足$ABC=I$，则B^{-1}为　　　　(　　　)

(a) $A^{-1}C^{-1}$　　(b) $C^{-1}A^{-1}$　　(c) AC　　(d) CA

3．设矩阵$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，则$A$与$B$　　　　(　　　)

(a) 合同且相似　　(b) 合同但不相似

(c) 不合同但相似　　(d) 既不合同也不相似

4．设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关，则下面陈述正确的是　　　　(　　　)

(a) 必有一个向量可以表示为其余向量的线性组合

(b) 必有两个向量可以表示为其余向量的线性组合

(c) 必有三个向量可以表示为其余向量的线性组合

(d) 每个向量可以表示为其余向量的线性组合

5．设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是齐次线性方程组$Ax=0$的一个基础解系，则下面向量组中，可以作为$Ax=0$的基础解系的是　　　　(　　　)

(a) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2$　　(b) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1-\alpha_2$

(c) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$　　(d) $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$

6．设 n阶矩阵A满足$|2A-3I|=0$，则A必有特征值为　　　　(　　　)

(a) −3/2　　(b) −2/3　　(c) 2/3　　(d) 3/2

7．设A,B 为 2 阶矩阵，若$|A|=2,|B|=3$，则分块矩阵$\begin{pmatrix}O & A\\ B & O\end{pmatrix}$的伴随矩阵为(　　　)

(a) $\begin{pmatrix}O & 3B^*\\ 2A^* & O\end{pmatrix}$　　(b) $\begin{pmatrix}O & 2B^*\\ 3A^* & O\end{pmatrix}$　　(c) $\begin{pmatrix}O & 3A^*\\ 2B^* & O\end{pmatrix}$　　(d) $\begin{pmatrix}O & 2A^*\\ 3B^* & O\end{pmatrix}$

8．设A 为n阶矩阵，若$A^3=O$，则下面陈述正确的是　　　　(　　　)

(a) $I-A$不可逆，$I+A$不可逆　　(b) $I-A$不可逆，$I+A$可逆

(c) $I-A$可逆，$I+A$不可逆　　(d) $I-A$可逆，$I+A$可逆

9．设λ_1,λ_2是矩阵A的两个不同特征值，对应的特征向量分别为α_1，α_2， 则α_1，

$A(\alpha_1+\alpha_2)$ 线性无关的充分必要条件是　　　（　　）

(a) $\lambda_1 \neq 0$　　(b) $\lambda_1 = 0$　　(c) $\lambda_2 \neq 0$　　(d) $\lambda_2 = 0$

10．设 A, B 均是 $m\times n$ 矩阵, 现有 4 个命题

① 若 $Ax=0$ 的解均是 $Bx=0$ 的解，则 $r(A)\geq r(B)$

② 若 $r(A)\geq r(B)$，则 $Ax=0$ 的解均是 $Bx=0$ 的解

③ 若 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解，则 $r(A)=r(B)$

④ 若 $r(A)=r(B)$，则 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解

以上命题中正确的是　　　（　　）

(a) ① ②　　(b) ① ③　　(c) ② ④　　(d) ② ③

得分	评阅人

三、计算题（共 4 小题，每小题 8 分，共 32 分）

1．计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1+a \\ 1 & 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1+a & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

2. 求向量组 $\alpha_1=(1,1,1,3)^T, \alpha_2=(-1,-3,5,1)^T, \alpha_3=(3,2,-1,4)^T, \alpha_4=(-2,-6,10,2)^T$ 的一个极大无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示.

3．求一非退化线性变换，化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = -4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

为标准型.

4．求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

得分	评阅人

四、计算题（共 2 小题，每小题 11 分，共 22 分）

1．设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求正交矩阵 Q，使 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵.

2．用基础解系表示如下线性方程组的全部解.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

得分	评阅人

五、证明题（共 1 小题，每小题 6 分，共 6 分）

1. 设α,β是n维列向量，矩阵$A=\alpha\beta^T+\beta\alpha^T$．证明$A$的列向量组可由$\alpha,\beta$线性表示．

答案

一 填空

1. -4　2. 2　3. 0　4. 2　5. c(2, -1), $c \neq 0$　6. 2

7. $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}$　8. $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$　9. -2 或 1　10. $2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$

二 选择

1. c　2. d　3. b　4. a　5. c　6. d　7. b　8. d　9. c　10. b

三 计算

1. 原式 $\underline{\underline{\begin{matrix} r1+r2 \\ r1+r3 \\ r1+r4 \end{matrix}}} \begin{pmatrix} 4+a & 4+a & 4+a & 4+a \\ 1 & 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1+a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ --------------------------------------3

$= (4+a)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1+a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ --------------------------------------4

$\underline{\underline{\begin{matrix} r2-r1 \\ r3-r1 \\ r4-r1 \end{matrix}}} (4+a)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ---5

$\underline{\underline{\begin{matrix} c1 \leftrightarrow c4 \\ c2 \leftrightarrow c4 \end{matrix}}} (4+a)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ ---7

$= a^3(4+a)$.---8

2. 对矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 仅施以初等行变换：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 2 & -6 \\ 1 & 5 & -1 & 10 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 6 & -4 & 12 \\ 0 & 4 & -8 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & -2\\ 0 & -2 & -1 & -4\\ 0 & 0 & -7 & 0\\ 0 & 0 & -10 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & -2\\ 0 & -2 & 0 & -4\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$ --4

由最后一个矩阵可知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为一个极大无关组，且-------------------------6

$\alpha_4 = 0\cdot\alpha_1 + 2\alpha_2 + 0\cdot\alpha_3$.--8

3. 此二次型对应的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}0 & -2 & 1\\ -2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$ --1

$$\begin{pmatrix}A\\ \hline I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2 & 1\\ -2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ -1 & -1/2 & 1\\ 1 & 3/2 & 0\\ 1 & 1/2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1/2 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & -1/2 & 3/2\\ 1 & 3/2 & 0\\ 1 & 1/2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1/2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -1/2 & 3/2\\ 1 & 3/2 & -1/2\\ 1 & 1/2 & -1/2\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1/2 & 1/2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -1/2 & 3/2\\ 0 & 3/2 & -1/2\\ 1 & 1/2 & -1/2\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1/2 & 1/2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1/2&0\\0&3/2&4\\1&1/2&1\\0&1&3\\1&1/2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1/2&0\\0&0&4\\1&1/2&1\\0&1&3\\1&1/2&2\end{pmatrix}\text{--}4$$

所以

$$C=\begin{pmatrix}1&1/2&1\\0&1&3\\1&1/2&2\end{pmatrix},\quad \begin{vmatrix}1&1/2&1\\0&1&3\\1&1/2&2\end{vmatrix}=1\neq 0\text{-----------------------------------}5$$

令

$$\begin{cases}x_1=y_1-1/2y_2+y_3\\x_2=\qquad\quad y_2+3y_3\\x_3=y_1+1/2y_2+2y_3\end{cases}\text{---}6$$

代入原二次型可得标准型

$$f=2y_1^2-1/2y_2^2+4y_3^2.\text{---}8$$

4.　对矩阵 $(A\ \ I_3)$ 仅施以初等行变换：

$$(A\ \ I_3)=\begin{pmatrix}1&4&3&1&0&0\\-1&-2&0&0&1&0\\2&2&3&0&0&1\end{pmatrix}\text{---}2$$

$$\to\begin{pmatrix}1&4&3&1&0&0\\0&2&3&1&1&0\\0&-6&-3&-2&0&1\end{pmatrix}\text{--}3$$

$$\to\begin{pmatrix}1&4&3&1&0&0\\0&2&3&1&1&0\\0&0&6&1&3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&4&3&1&0&0\\0&2&3&1&1&0\\0&0&1&1/6&1/2&1/6\end{pmatrix}\text{--------------}4$$

$$\to\begin{pmatrix}1&4&0&1/2&-3/2&-1/2\\0&2&0&1/2&-1/2&-1/2\\0&0&1&1/6&1/2&1/6\end{pmatrix}\text{---}5$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&-1/2&-1/2&1/2\\0&2&0&1/2&-1/2&-1/2\\0&0&1&1/6&1/2&1/6\end{pmatrix}\text{--------------------------------------}6$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 & 1/2\\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & -1/4 & -1/4\\ 0 & 0 & 1 & 1/6 & 1/2 & 1/6\end{pmatrix}$$ --7

于是得

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-1/2 & -1/2 & 1/2\\ 1/4 & -1/4 & -1/4\\ 1/6 & 1/2 & 1/6\end{pmatrix}.$$ --8

四 计算

1. A 的特征方程为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & -1\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)^2=0$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1=0,\quad \lambda_2=\lambda_3=2$.--4

当 $\lambda_1=0$ 时，解齐次方程组 $-Ax=0$ 得基础解系 $\alpha_1=(1\quad 0\quad -1)^T$，单位化得

$$\gamma_1=\frac{1}{\|\alpha_1\|}\alpha_1=(\sqrt{2}/2\quad 0\quad -\sqrt{2}/2\,)^T.$$ ---6

当 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 时，解齐次方程组 $(2I-A)x=0$ 得基础解系

$$\alpha_2=(0\quad 1\quad 0)^T,\alpha_3=(1\quad 0\quad 1)^T.$$

利用施密特正交化方法， 将 α_2,α_3 正交化:

令 $\beta_2=\alpha_2=(0\quad 1\quad 0)^T$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{\beta_2^T\alpha_3}{\beta_2^T\beta_2}\alpha_2=(1\quad 0\quad 1)^T$$

再将 β_2,β_3 正交化，得

$$\gamma_2=(0\quad 1\quad 0)^T,\quad \gamma_3=(\sqrt{2}/2\quad 0\quad \sqrt{2}/2\,)^T.$$ ---9

令 $$Q=(\gamma_1\quad \gamma_2\quad \gamma_3)=\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2\\ 0 & 1 & 0\\ -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2\end{pmatrix},$$ ---10

则有 $Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.--11

2. 作方程组的增广矩阵 $(A\vdots b)$， 并对它施以初等行变换：

$$(A\vdots b)=\left(\begin{array}{cccc:c}2&1&-1&1&1\\4&2&-2&1&2\\2&1&-1&-1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}2&1&-1&1&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&1/2&-1/2&0&1/2\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

--3

即原方程组与方程组

$$\begin{cases}x_1=-1/2\ x_2+1/2\ x_3+1/2\\x_4=0\end{cases}$$

同解，其中 x_2,x_3 是自由变量.

让自由未知量 $\begin{pmatrix}x_2\\x_3\end{pmatrix}$ 取值 $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, 得特解 $\eta=\begin{pmatrix}1/2\\0\\0\\0\end{pmatrix}$.--6

原方程组的导出解与方程组

$$\begin{cases}x_1=-1/2\ x_2+1/2\ x_3\\x_4=0\end{cases}$$

同解，其中 x_2,x_3 是自由变量.

对自由未知量 $\begin{pmatrix}x_2\\x_3\end{pmatrix}$ 取值 $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$, 即得导出组的基础解系

$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\0\end{pmatrix}$,　$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}$ ---10

因此所给方程的全部解为

$$x=\eta+c_1\xi_1+c_2\xi_2$$

其中 c_1,c_2 可为任意常数.--11

五 证明

1. 设$\alpha=(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n)^T$，$\beta=(b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n)^T$，则------------------------------------1

$$A=\alpha\beta^T+\beta\alpha^T$$

$$=\alpha(b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n)+\beta(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n)$$

$$=(b_1\alpha \quad b_2\alpha \quad \cdots \quad b_n\alpha)+(a_1\beta \quad a_2\beta \quad \cdots \quad a_n\beta)$$

$$=(b_1\alpha+a_1\beta \quad b_2\alpha+a_2\beta \quad \cdots \quad b_n\alpha+a_n\beta)$$ --5

所以A的列向量组可由α，β线性表示.---6