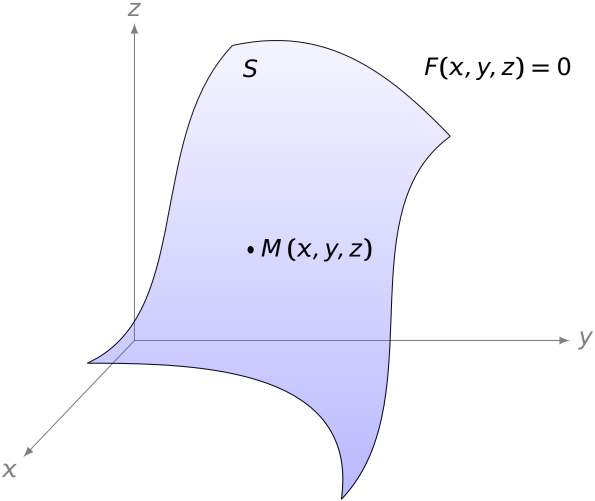
第 8 章 d：空间曲面及曲线

数学系　　梁卓滨

2017.07 暑期班

曲面及其方程



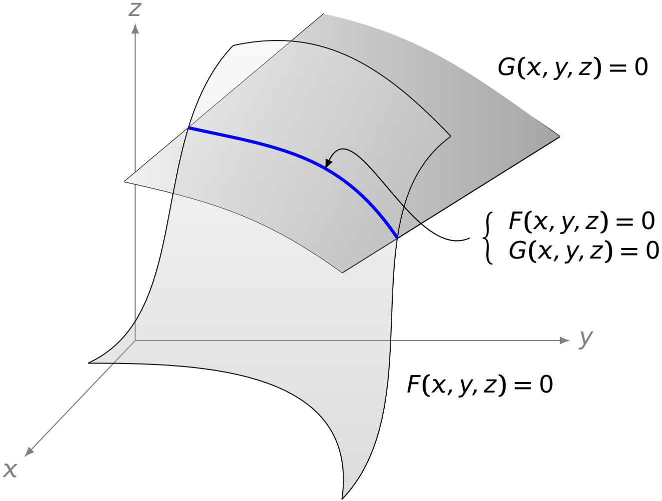
例 建立球心在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，半径为 R 的球面的方程。

解 设 $M(x, y, z)$ 是球面上任意一点，则

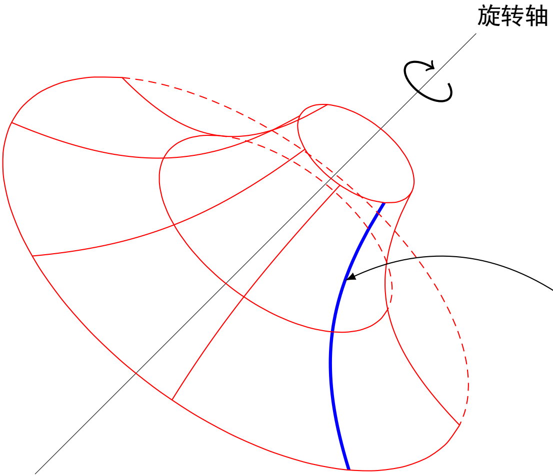
$$R = |M_0M| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$$

$$\Rightarrow \quad (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2 \text{（球面方程）}$$

空间曲线的一般方程



旋转曲面



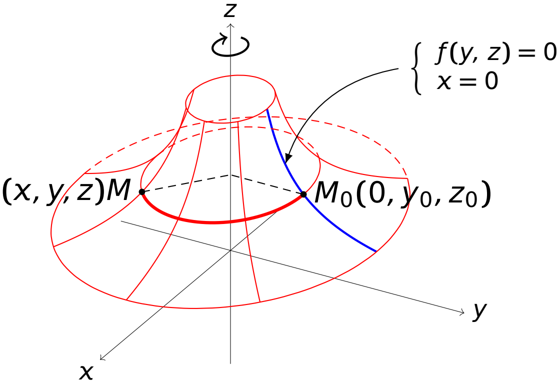
$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

问题 如何计算旋转面的方程？

旋转曲面：特殊情况

- $z = z_0$
- $\sqrt{x^2 + y^2} = |y_0|$

  （M到z轴距离 = M_0到z轴距离）
- $f(y_0, z_0) = 0$



所以旋转面方程是

$$f\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0$$

（yoz 上的平面曲线绕 z 轴旋转所得的旋转面方程）

- yoz 上的平面曲线 $\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$
    - 绕 z 轴旋转所得的旋转面方程：

$$f\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},\, z\right)=0$$

    - 绕 y 轴旋转所得的旋转面方程：

$$f\left(y,\ \pm\sqrt{x^2+z^2}\right)=0$$

- xoz 上的平面曲线 $\begin{cases} g(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$
  - 绕 x 轴旋转所得的旋转面方程：

$$g\left(x,\ \pm\sqrt{y^2+z^2}\right)=0$$

  - 绕 z 轴旋转所得的旋转面方程：

$$g\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},\ z\right)=0$$

- xoy 上的平面曲线 $\begin{cases} h(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$
  - 绕 x 轴旋转所得的旋转面方程：

$$h\left(x,\ \pm\sqrt{y^2+z^2}\right)=0$$

  - 绕 y 轴旋转所得的旋转面方程：

$$h\left(\pm\sqrt{x^2+z^2},\ y\right)=0$$

例 将 xoz 坐标面上的双曲线

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

分别绕 z 轴和 x 轴旋转一周，求所生成的旋转面的方程。

解：

- 绕 z 轴：
$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

- 绕 x 轴：
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1$$

注 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 的图形称为单叶双曲面；$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 的图形称为双叶双曲面。

例 画出 $z=x^2+y^2$ 及 $z^2=x^2+y^2$ 的图形，分析是否旋转面？

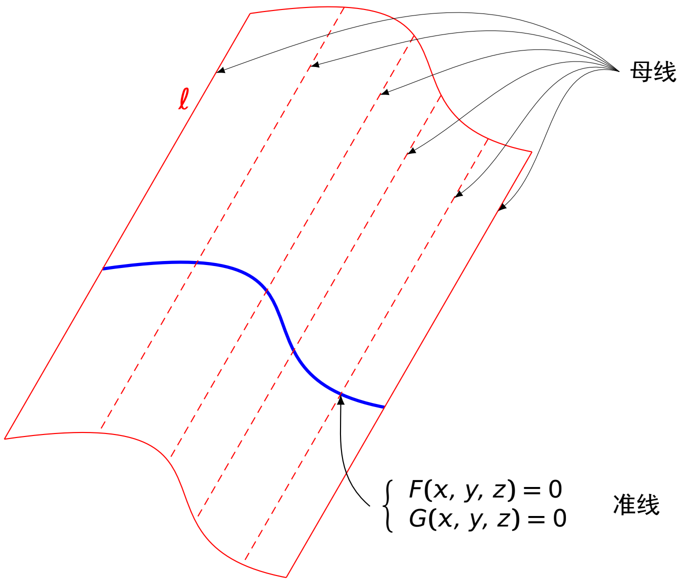
例 画出 $z = x^2 + y^2$ 及 $z^2 = x^2 + y^2$ 的图形，分析是否旋转面？

解

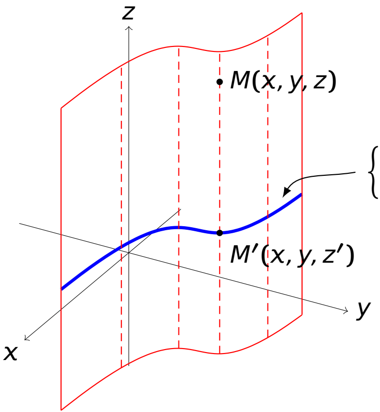
- $z = x^2 + y^2$ 的图形是zoy 平面上的抛物线$\begin{cases} z = y^2 \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周的旋转面。
- $z^2 = x^2 + y^2$ 的图形是zoy 平面上的直线$\begin{cases} z^2 = y^2 \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周的旋转面。

注 $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ 的图形称为椭圆抛物面；$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ 的图形称为椭圆锥面。

柱面



柱面：母线平行于坐标轴



$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{消去}z} H(x,y)=0 \text{（柱面方程）}$$

例 求母线平行于 z 轴，且过曲线 $\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=16 \\ x^2-y^2+z^2=0 \end{cases}$ 的柱面方程。

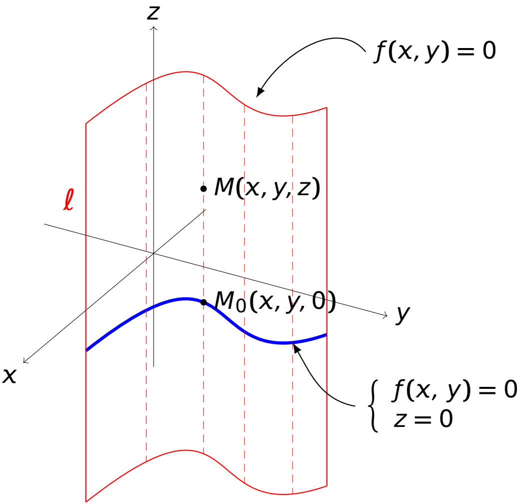
解 从方程组消去 z，得 $x^2+2y^2=16$，这就是该柱面的方程。

柱面：母线平行于坐标轴

设空间曲线的一般方程为 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ ，则

- $\xRightarrow{\text{消去}z} H(x, y) = 0$，这是：过该曲线且母线平行于 z 轴的柱面方程
- $\xRightarrow{\text{消去}y} K(x, z) = 0$，这是：过该曲线且母线平行于 y 轴的柱面方程
- $\xRightarrow{\text{消去}x} H(y, z) = 0$，这是：过该曲线且母线平行于 x 轴的柱面方程

柱面：更特殊情形



反过来，

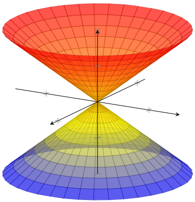
- 方程 $f(x, y) = 0$ 表示柱面，母线平行于 z 轴
- 方程 $g(y, z) = 0$ 表示柱面，母线平行于 x 轴
- 方程 $h(x, z) = 0$ 表示柱面，母线平行于 y 轴

例 画出柱面 $x^2 + y^2 = x$

二次曲面

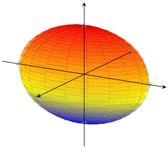
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$$

椭圆锥面



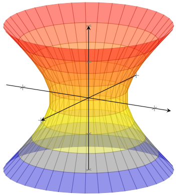
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

椭圆面



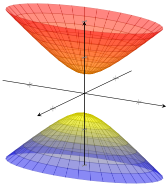
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

单叶双曲面



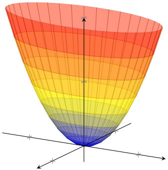
$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

双叶双曲面



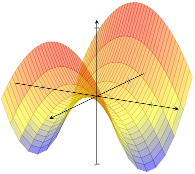
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$$

椭圆抛物面

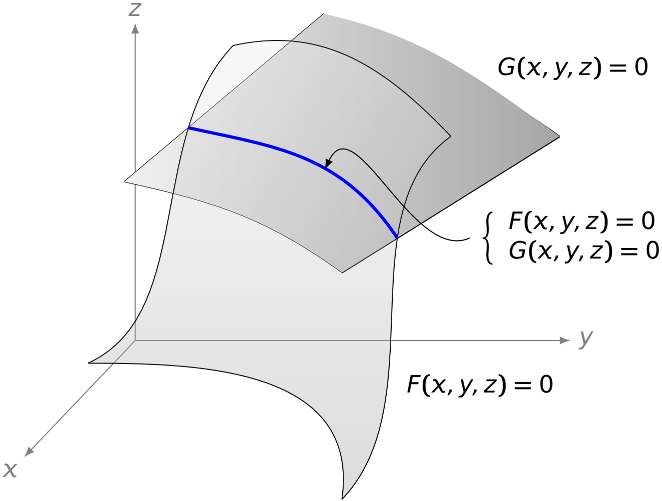


$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$$

双曲抛物面

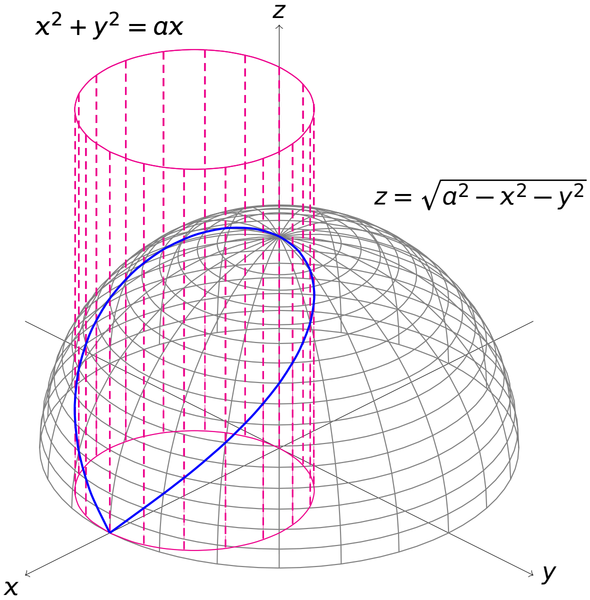


空间曲线的一般方程

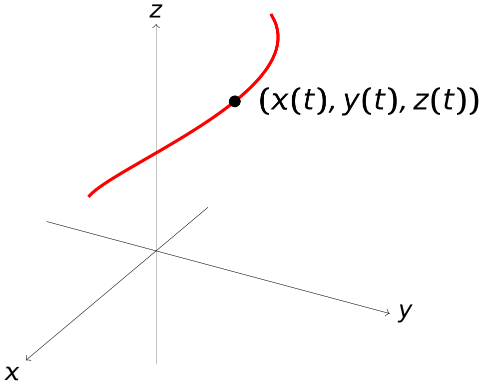


例 画出曲面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 和 $x^2+y^2=ax$（$a>0$）的交线。

解



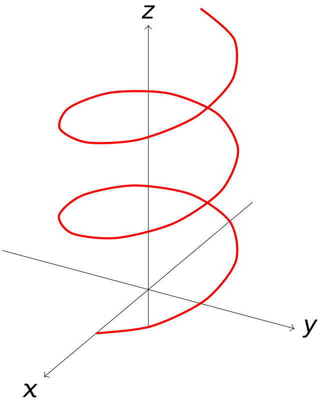
空间曲线的参数方程



空间中的曲线一般可以用所谓的“参数方程”表示：$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$

例 画出曲线

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \\ z = 0.1t \end{cases}, (0 \le t \le 5\pi)$$



例 设 $p(1, 3, -3)$，$q(-2, 1, 3)$ 为空间中两点。写出线段 $\overline{pq}$ 的参数方程。

解

$$(1-t)p+tq=(1-t)(1, 3, -3)+t(-2, 1, 3)=(1-3t, 3-2t, -3+6t)$$

其中 $t \in [0, 1]$。也就是

$$\begin{cases} x=1-3t \\ y=3-2t \\ z=-3+6t \end{cases}, (0 \le t \le 1).$$

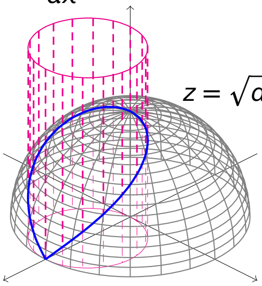
注 参数方程不唯一：

$$\begin{cases} x=1-3\sin\theta \\ y=3-2\sin\theta \\ z=-3+6\sin\theta \end{cases}, (0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}).$$

例 计算曲线

$$\begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 = ax \end{cases}$$

（$a > 0$）的参数方程。



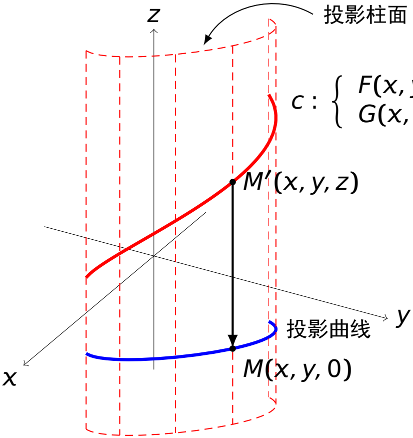
解

$$x^2 + y^2 = ax \Rightarrow (x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = (\frac{a}{2})^2 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos t \\ y = \frac{a}{2}\sin t \quad (0 \le t \le 2\pi) \end{cases}$$

$$\xRightarrow{z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}} z = \frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \cos t} = a\sin(t/2)$$

所以参数方程为：$\begin{cases} x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos t \\ y = \frac{a}{2}\sin t \qquad (0 \le t \le 2\pi) \\ z = a\sin(t/2) \end{cases}$

空间曲线在坐标面上的投影



$$c: \begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases} \xRightarrow{\text{从方程组消去}z\text{得}} H(x,\ y)=0 \ \text{投影柱面方程}$$

所以该曲线在 xoy 面上的投影为 $\begin{cases} H(x,\ y)=0 \\ z=0 \end{cases}$

空间曲线在坐标面上的投影

曲线 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$

- 消去 z 得 $H(x, y)$，则曲线在 xoy 面上的投影为

$$\begin{cases} H(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

- 消去 y 得 $K(x, z)$，则曲线在 zox 面上的投影为

$$\begin{cases} K(x, z) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

- 消去 x 得 $L(y, z)$，则曲线在 yoz 面上的投影为

$$\begin{cases} L(y, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

例 求两球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 和 $x^2+(y-1)^2+(z-2)^2=4$ 的交线在 xoy 面上的投影方程。

解 交线方程

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 & (1) \\ x^2+(y-1)^2+(z-2)^2=4 & (2) \end{cases}$$

可按如下方式消去 z：

$$(1)-(2) \quad \Rightarrow \quad 2y+4z=2 \quad \Rightarrow \quad z=\frac{1-y}{2}$$

$$\text{代入}(1) \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2+\left(\frac{1-y}{2}\right)^2=1 \quad \Rightarrow \quad 4x^2+5y^2-2y=3$$

所以投影方程为

$$\begin{cases} 4x^2+5y^2-2y=3 \\ z=0 \end{cases}$$

注 该投影是 xoy 面上的一个椭圆：$4x^2+5(y-\frac{1}{5})^2=(\frac{4}{\sqrt{5}})^2$。