

第 01 周作业

应于 23-03-2017 提交

练习 1. 1. $y^4 + y'' + 2x = 0$ 的阶是 _____。

2. $(7x - 6)dy + (x + y)dx = 0$ 的阶是 _____。

练习 2. 验证 $y = Cx - \frac{1}{4}C^2$ (C 为任意常数) 是常微分方程 $y = xy' - \frac{1}{4}(y')^2$ 的通解。验证 $y = x^2$ 也是解, 由此说明通解不一定包含所有解。

练习 3. 1. 假设 $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$ 是微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的解, 判断 $y = C_1y_1 + C_2y_2$ (其中 C_1, C_2 为任意常数) 是否也是该方程的解?

2. 假设 $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$ 是微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的解, 判断 $y = C_1y_1 + C_2y_2$ (其中 C_1, C_2 为任意常数) 是否也是该方程的解?

练习 4. (关于半衰期) 设 $M(t)$ 为某放射物质在时刻 t 的含量。已知任何时刻, 该物质衰变速度与剩余含量之比为 $-\lambda$ (λ 是正常数)。问需要经过多长时间, 该物质含量减少为初始时刻 $t = 0$ 时含量的一半?

练习 5. 已知弹簧系统（详细见课件）满足方程

$$x'' + \frac{9}{4}x = 0$$

问该物体的运动周期是多少？假设物体的初始位置 $x(0) = 2$ ，初始速度 $x'(0) = -1$ ，求该物体的位置函数 $x(t)$ 。

练习 6. 求出 $y' = x^2y$ 的通解。

练习 7. 求解初值问题 $\begin{cases} xydx + (x^2 + 1)dy = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ 。

练习 8. 求解初值问题 $\begin{cases} \cos y dx + (1 + e^{-x}) \sin y dy = 0 \\ y(0) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$ 。

练习 9. 求出 $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$ 的通解。

练习 10. 求出 $y' - \frac{3y}{x} + \frac{1}{2}x = 0$ 的通解。

练习 11. 求解微分方程 $\begin{cases} y' + y \cot x = 5e^{\cos x} \\ y(\frac{\pi}{2}) = -4 \end{cases}$.