

# 第 11 章 e: 对坐标的曲面积分

数学系 梁卓滨

2017.07 暑期班

# 定向曲面

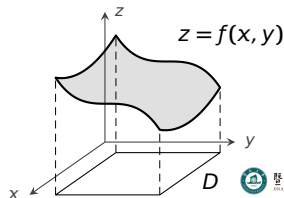
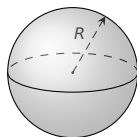
## 定义

- 一个曲面称为可定向，是指该曲面在整体上的具有两侧。
- 指定可定向曲面的定向是指：指定一侧为正侧，另一侧为负侧。
- 指定了定向的可定向曲面，称为定向曲面。

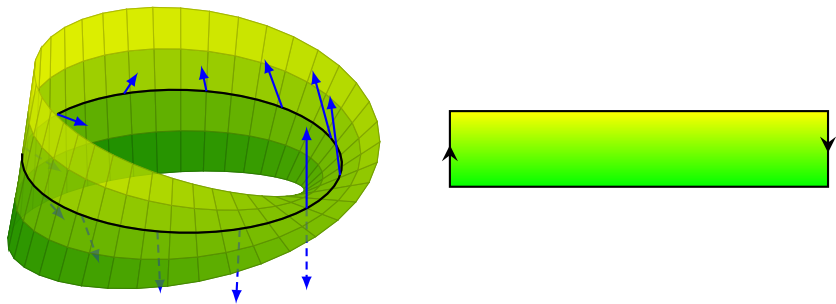
## 例

- 球面可定向，有内、外侧之分。  
两种定向：
  - 以外侧为正向的定向球面
  - 以内侧为正向的定向球面
- 二元函数图形可定向，有上、下侧之分。  
两种定向：
  - 以上侧为正向的定向函数图形
  - 以下侧为正向的定向函数图形

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$



## 例 不可定向的曲面：莫比乌斯曲面

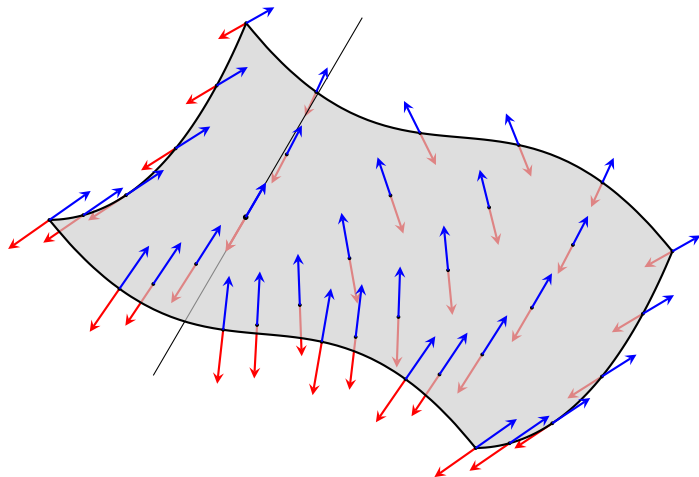


**制作方法** 将纸带旋转半周，再把两端粘合（如图，使得两端箭头重合）

**注** 如无特殊说明，下面出现的曲面都是可定向的曲面

# 定向与单位法向量场

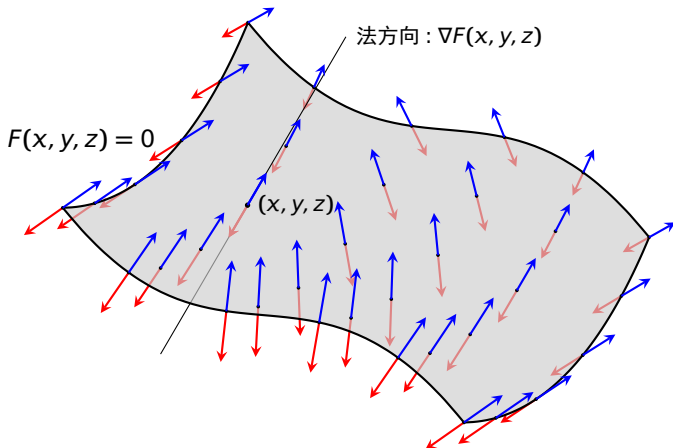
- 曲面上任一点，有两个单位法向量（方向相反），分别指向两侧。
- 给曲面定向，等价于指定其中一个单位法向量场  $\vec{n}(x, y, z)$



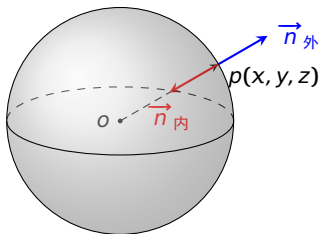
# 单位法向量场的计算

- 设曲面方程为  $F(x, y, z) = 0$ ，则两个单位法向量场为：

$$\frac{1}{|\nabla F|} \nabla F \quad \text{与} \quad -\frac{1}{|\nabla F|} \nabla F.$$



**例** 写出球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  的两个单位法向量场，并指出哪一个指向外侧，哪个指向内侧？



$\vec{n}_{\text{外}}$  与  $\vec{op}$  同向

$\vec{n}_{\text{内}}$  与  $\vec{op}$  反向

**解** 令  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$ ，则球面方程改写为  $F = 0$ 。计算

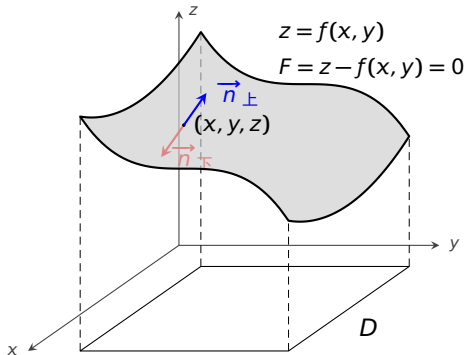
$$\nabla F = (2x, 2y, 2z), \quad |\nabla F| = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2R$$

所以两个单位法向量场为

$$\frac{1}{|\nabla F|} \nabla F = \frac{1}{R}(x, y, z), \quad -\frac{1}{|\nabla F|} \nabla F = -\frac{1}{R}(x, y, z)$$

前一个指向外侧，后一个指向内侧。

**例** 写出二元函数  $z = f(x, y)$  图形的两个单位法向量场，并指出哪一个指向上侧，哪个指向下侧？



**解** 令  $F(x, y, z) = z - f(x, y)$ ，则该图形方程改写为  $F = 0$ 。计算

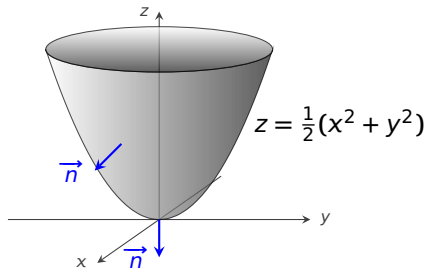
$$\nabla F = (-f_x, -f_y, 1), \quad |\nabla F| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$$

所以两个单位法向量场为

$$\frac{1}{|\nabla F|} \nabla F = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} (-f_x, -f_y, 1), \quad -\frac{1}{|\nabla F|} \nabla F = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} (f_x, f_y, -1)$$

前一个指向上侧，后一个指向下侧。

**例** 求抛物面  $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  指向外侧的单位法向量场。



**解** 该单位法向量场应取为

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}(z_x, z_y, -1) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}(x, y, -1)$$

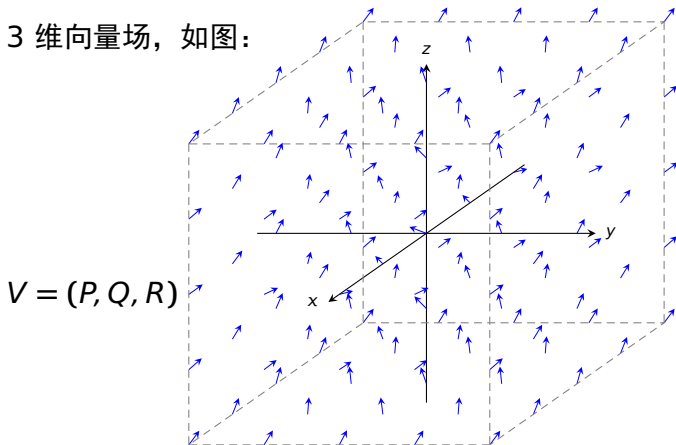


# 空间中向量场

设  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$  是三元函数, 则

$$V = (P, Q, R)$$

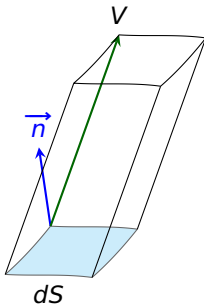
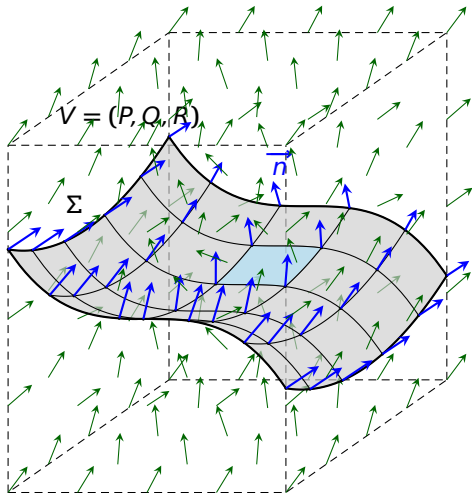
构成空间 3 维向量场, 如图:



**物理应用:** 向量场  $V = (P, Q, R)$  可表示流体在任一点处的速度

**物理应用** 流体  $V = (P, Q, R)$  在单位时间内流过曲面  $\Sigma$  一侧（单位法向量  $\vec{n}$  所指向的一侧）的流量是：

$$\Phi = \iint_{\Sigma} V \cdot \vec{n} dS$$



$$\begin{aligned} d\Phi &= \text{高} \times dS \\ &= V \cdot \vec{n} dS \end{aligned}$$

# 向量场在定向曲面的曲面积分

定义 假设

- $V = (P, Q, R)$  是空间某区域上的向量场;
- $\Sigma$  是定向曲面,  $\vec{n}$  是  $\Sigma$  上指定的单位法向量场;

则称

$$\iint_{\Sigma} V \cdot \vec{n} dS$$

为向量场  $V$  在定向曲面  $\Sigma$  上的曲面积分。令  $d\vec{S} = \vec{n} dS$ , 则记作

$$\iint_{\Sigma} V \cdot d\vec{S}$$

也记作

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

(此时也称为对坐标的曲面积分, 或第二类曲面积分)

**性质** 设  $\Sigma$  是定向曲面,  $\Sigma^-$  表示与取  $\Sigma$  相反侧的有向曲面, 则

$$\iint_{\Sigma^-} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy = - \iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy$$

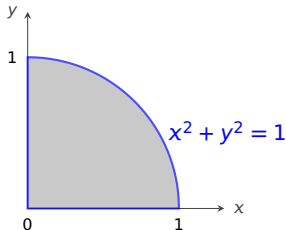
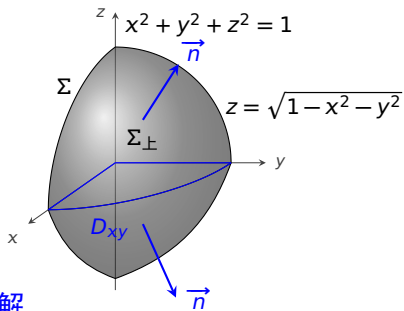
**物理解释** 流过负侧的流量 = - 流过正侧的流量

**证明** 设  $\vec{n}$  是与  $\Sigma$  定向相符的单位法向量场, 则  $-\vec{n}$  是与  $\Sigma^-$  定向相符的单位法向量场。

令  $V = (P, Q, R)$ 。则

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma^-} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy &= \iint_{\Sigma} V \cdot (-\vec{n}) dS \\ &= - \iint_{\Sigma} V \cdot \vec{n} dS \\ &= - \iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy\end{aligned}$$

例 计算  $\iint_{\Sigma} xyz dx dy$ , 其中定向曲面  $\Sigma$  如图:



解

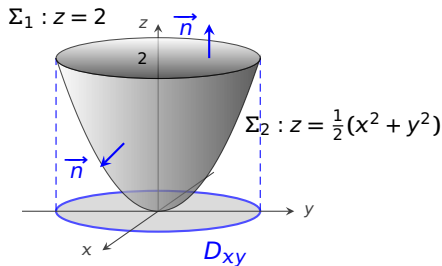
$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iint_{\Sigma} V \cdot \vec{n} dS \stackrel{\substack{V=(0,0,xyz) \\ \vec{n}=(x,y,z)}}{=} \iint_{\Sigma} xyz^2 dS = 2 \iint_{\Sigma_{\text{上}}} xyz^2 dS \\ &= \iint_{D_{xy}} xy(1-x^2-y^2) \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy \\ &= 2 \iint_{D_{xy}} xy(1-x^2-y^2) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \iint_{\Sigma} V \cdot \vec{n} dS \stackrel{\substack{V=(0,0,xyz) \\ \vec{n}=(x,y,z)}}{=} \iint_{\Sigma} xyz^2 dS = 2 \iint_{\Sigma_{\perp}} xyz^2 dS \\
&= \iint_{D_{xy}} xy(1-x^2-y^2) \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy \\
&= 2 \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy \\
&\stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} 2 \iint_{D_{xy}} \rho^2 \sin \theta \cos \theta \cdot \sqrt{1-\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta \\
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_0^1 \sin \theta \cos \theta \rho^3 \sqrt{1-\rho^2} d\rho \right] d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\theta) d\theta \cdot \int_0^1 \rho^2 \sqrt{1-\rho^2} \cdot \rho d\rho \\
&\stackrel{u=\sqrt{1-\rho^2}}{=} 1 \cdot \int_1^0 (1-u^2)u \cdot (-u du) = \frac{2}{15}
\end{aligned}$$

例 计算

$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz - z dx dy$$

其中定向曲面  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$  是三维区域的边界, 如图:



解

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\Sigma_1} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS + \iint_{\Sigma_2} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS,$$

$$\iint_{\Sigma_1} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS \stackrel{\substack{\mathbf{v}=(z^2+x, 0, -z) \\ \vec{n}=(0, 0, 1)}}}{=} \iint_{\Sigma_1} -z dS = \iint_{\Sigma_1} -2 dS = -2|\Sigma_1| = -8\pi,$$

$$\iint_{\Sigma_2} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS \stackrel{\substack{\mathbf{v}=(z^2+x, 0, -z) \\ \vec{n}=\frac{(x, y, -1)}{\sqrt{1+x^2+y^2}}}}{=} \iint_{D_{xy}} \frac{(z^2+x)x + z}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy$$

$$= \iint_{D_{xy}} (z^2+x)x + z dx dy \stackrel{\text{对称性}}{=} \iint_{D_{xy}} x^2 + z dx dy = \dots$$

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\Sigma_1} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS + \iint_{\Sigma_2} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS,$$

$$\iint_{\Sigma_1} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS \stackrel{\substack{V=(z^2+x, 0, -z) \\ \vec{n}=(0, 0, 1)}}{=} \iint_{\Sigma_1} -z dS \iint_{\Sigma_1} -2 dS = -2|\Sigma_1| = -8\pi,$$

$$\iint_{\Sigma_2} \mathbf{v} \cdot \vec{n} dS \stackrel{\substack{V=(z^2+x, 0, -z) \\ \vec{n}=\frac{(x, y, -1)}{\sqrt{1+x^2+y^2}}}}{=} \iint_{D_{xy}} \frac{(z^2+x)x+z}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy$$

$$= \iint_{D_{xy}} (z^2+x)x+z dx dy \stackrel{\text{对称性}}{=} \iint_{D_{xy}} x^2+z dx dy$$

$$\stackrel{z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{=} \frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} 3x^2+y^2 dx dy \stackrel{\text{对称性}}{=} 2 \iint_{D_{xy}} x^2 dx dy$$

$$\stackrel{\text{对称性}}{=} \iint_{D_{xy}} x^2+y^2 dx dy = \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^2 \rho^2 \cdot \rho d\rho \right] d\theta = 8\pi$$

$$\therefore \text{原式} = -8\pi + 8\pi = 0$$



**例** 设  $\Sigma$  是二元函数  $z = z(x, y)$ ,  $(x, y) \in D_{xy}$  的图形, 取朝上的单位法向量。则

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy.$$

**证明** 这是:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy &= \iint_{\Sigma} \mathbf{V} \cdot \vec{n} dS \\ &\stackrel{\mathbf{V}=(0,0,R)}{=} \iint_{\Sigma} R(x, y, z) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} dS \\ &\stackrel{\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}(-z_x, -z_y, 1)}{=} \iint_{\Sigma} R(x, y, z) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} dS \\ &= \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy \end{aligned}$$