第 09 周作业解答

练习 1. 根据参数 a 的取值，讨论向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$ 何时线性相关，何时线性无关。

解作矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix},$$

则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关当且仅当 $|A| = 0$，线性无关当且仅当 $|A| \neq 0$。计算行列式：

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ a & 0 & a \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 - c_3} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第 3 行展开}} (-1)^{3+3} a \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & a \end{vmatrix} = 2a(a-2).$$

所以

- $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关 $\Leftrightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow a = 0$ 或 $a = 2$
- $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关 $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$ 且 $a \neq 2$

练习 2. 设 α, β, γ 线性无关，证明：$\alpha, \alpha+\beta, \alpha+\beta+\gamma$ 也是线性无关。

证明设

$$\begin{aligned} 0 =& k_1\alpha + k_2(\alpha+\beta) + k_3(\alpha+\beta+\gamma) \\ =& (k_1+k_2+k_3)\alpha + (k_2+k_3)\beta + k_3\gamma \end{aligned}$$

因为 α, β, γ 线性无关，所以

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ \qquad k_2 + k_3 = 0 \\ \qquad\qquad k_3 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad k_1 = k_2 = k_3 = 0$$

所以 $\alpha, \alpha+\beta, \alpha+\beta+\gamma$ 线性无关。

练习 3. 求向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 7 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ 的一组极大无关组，并将其余向量表示成极大无关组的线性组合。

解

$$
\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ -1 & -3 & -5 & -2 \\ 2 & -1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ -1 & -3 & -5 & -2 \\ 2 & -1 & -4 & -3 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[\substack{r_4+r_1 \\ r_5-2r_1}]{\substack{r_2+2r_1 \\ r_3-3r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 10 & 5 \\ 0 & -4 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -14 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{-\frac{1}{4}\times r_3 \\ -\frac{1}{7}\times r_5}]{\frac{1}{5}\times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[r_5-r_2]{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

可见

- $r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4) = 2$，说明极大无关组应含 2 个向量；
- 从最后简化的阶梯型矩阵容易看出：α_1, α_2 线性无关，所以 α_1, α_2 构成一极大无关组；
- 也是从最后简化的阶梯型矩阵看出：

$$
\alpha_3 = -\alpha_1 + 2\alpha_2, \qquad \alpha_4 = -\alpha_1 + \alpha_2.
$$

下一题是附加题，做出来的同学下周交上来，可以加分

练习 4. 先介绍“幂零”的概念：一个方阵 A 称为幂零是指存在正整数 m 使得 $A^m = O$。要注意的是幂零矩阵不一定是零矩阵。例如 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 不是零矩阵，但满足 $A^2 = O$。

现假设 n 阶方阵 A 是幂零，并假设 m 是最小的正整数满足 $A^m = O$。设 v 是 $\mathbb{R}^n$ 的向量，并且满足 $A^{m-1}v \neq 0$。证明：向量组 $v, Av, A^2v, \cdots, A^{m-1}v$ 是线性无关。

利用上述结论证明：如果 n 阶方阵 A 是幂零，则 $A^n = O$。

解设 $k_0v + k_1Av + k_2A^2v + \cdots + k_{m-1}A^{m-1}v = 0$。等式两边左乘 A^{m-1}，得到 $k_0A^{m-1}v + k_1A^mv + k_2A^{m+1}v + \cdots + k_{m-1}A^{2m-2}v = 0$。因为 $A^m = O$，所以前一个式子说明 $k_0A^{m-1}v = 0$。又因为 $A^{m-1}v \neq 0$，所以 $k_0 = 0$。代入第一个式子，得 $k_1Av + k_2A^2v + \cdots + k_{m-1}A^{m-1}v = 0$。对此两边左乘 A^{m-2}，类似地分析，可知 $k_1 = 0$。如此类推，可知 $k_0 = k_1 = \cdots = k_{m-1} = 0$。所以是线性无关。

反证法，假设 $A^n \neq O$。因为 A 是幂零，可假设 m 是最小的正整数满足 $A^m = O$。因为 $A^n \neq O$，所以 $m > n$。注意到 $A^{m-1} \neq O$，所以可以找到一个向量 $v \in \mathbb{R}^n$ 满足 $A^{m-1}v \neq 0$。有上述证明的结论知：$v, Av, A^2v, \cdots, A^{m-1}v$ 是线性无关。从另外一方面看，该向量组维数为 n，向量个数 m 大于 n，因此不可能线性相关，出现矛盾。所以应有 $A^n = O$。