第 12 章 d：函数展开成幂级数

数学系　　梁卓滨

2017.07 暑期班

暨南大學
JINAN UNIVERSITY

问题 给定函数 $f(x)$，设 x_0 属于定义域，问 $f(x)$ 能否展成以下幂级数？

$$f(x) \overset{?}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

性质 若 $f(x)$ 能展成上述幂级数，则

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

证明 逐项求 k 次导得：

$$f^{(k)}(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right]^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n(x-x_0)^n\right]^{(k)}$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) \cdot (x-x_0)^{n-k}$$

$$= a_k \cdot k! + a_{k+1} \cdot (k+1) \cdots 2 \cdot (x-x_0)$$

$$+ a_{k+2} \cdot (k+2) \cdots 3 \cdot (x-x_0)^2 + \cdots$$

取 $x = x_0$ 得 $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)$

问题 给定函数 $f(x)$，设 x_0 属于定义域，问 $f(x)$ 能否展成以下幂级数？

$$f(x) \overset{?}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

性质 若 $f(x)$ 能展成上述幂级数，则

$$a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0).$$

注 1 也就是，$f(x)$ 至多能展成如下形式的幂级数：

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\cdots$$

- 此级数称为 $f(x)$ 在 x_0 处的 泰勒级数。

例 求 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数。

解 取 $x_0=0$ 时，泰勒级数是

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

当 $f(x)=e^x$ 时，

$$f(x)=f'(x)=f''(x)=f'''(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=e^x$$

$$\Rightarrow \quad f(0)=f'(0)=f''(0)=f'''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=1$$

$\Rightarrow$ 泰勒级数：$1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$

例 求 $f(x) = \sin x$ 在 $x = 0$ 处的泰勒级数。

解 取 $x_0 = 0$ 时，泰勒级数是

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

当 $f(x) = \sin x$ 时，

	$f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n}{2}\pi)$	$f^{(n)}(0) = \sin(\frac{n}{2}\pi)$
$n = 0, 4, 8 \ldots$	$\sin x$	0
$n = 1, 5, 9 \ldots$	$\cos x$	1
$n = 2, 6, 10 \ldots$	$-\sin x$	0
$n = 3, 7, 11 \ldots$	$-\cos x$	-1

所以泰勒级数是

$$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{11!}x^{11} + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \cdots$$

例 求 $f(x)=\cos x$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数。

解 取 $x_0=0$ 时，泰勒级数是

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

当 $f(x)=\cos x$ 时，

	$f^{(n)}(x)=\cos(x+\frac{n}{2}\pi)$	$f^{(n)}(0)=\cos(\frac{n}{2}\pi)$
$n=0,4,8\ldots$	$\cos x$	1
$n=1,5,9\ldots$	$-\sin x$	0
$n=2,6,10\ldots$	$-\cos x$	-1
$n=3,7,11\ldots$	$\sin x$	0

所以泰勒级数是

$$1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\frac{1}{8!}x^8-\frac{1}{10!}x^{10}+\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m)!}x^{2m}+\cdots$$

例 求 $f(x)=\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处泰勒级数。

解 取 $x_0=0$ 时，泰勒级数是

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

当 $f(x)=\ln(1+x)$ 时，

$$f=\ln(1+x),\quad f'=\frac{1}{1+x},\quad f''=\frac{(-1)}{(1+x)^2},\quad f'''=\frac{2}{(1+x)^3},$$

$$f^{(4)}=\frac{-2\cdot 3}{(1+x)^4},\quad f^{(5)}=\frac{2\cdot 3\cdot 4}{(1+x)^5},\ \ldots,\ f^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n},\ \cdots$$

所以 $\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$，泰勒级数是

$$x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+\cdots$$

例 求 $f(x)=(1+x)^\alpha$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数。

解 取 $x_0=0$ 时，泰勒级数是

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

当 $f(x)=(1+x)^\alpha$ 时,

$$f=(1+x)^\alpha,\quad f'=\alpha(1+x)^{\alpha-1},\quad f''=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},$$

$$\ldots,\ f^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},\ \cdots$$

所以 $\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$，泰勒级数是

$$1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

- 可以证明 e^x，$\sin x$，$\cos x$ 以及 $\frac{1}{1+x}$，等于其泰勒级数，即

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

$$\sin x = x - \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{5!}x^5 - \tfrac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^n \tfrac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots, x \in (-\infty, \infty)$$

$$\cos x = 1 - \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{4!}x^4 - \tfrac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^n \tfrac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, x \in (-1, 1)$$

- 利用上述结果，及逐项积分公式，可进一步求出

$$\ln(1+x), \quad \arctan x$$

的幂级数展开。

性质 成立

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+\cdots,\quad x\in(-1,1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $(-1, 1]$，故上式至多对 $x\in(-1, 1]$ 成立。

2. 当 $x\in(-1, 1)$ 时，利用逐项积分可得

$$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{1}{1+t}dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^n dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$$

3. 注意到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ 收敛域是 $(-1, 1]$，由连续性，当 $x=1$ 时也成立

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n.$$

（这是 $f(1)=\lim\limits_{x\to1^-}\ln(1+x)=\lim\limits_{x\to1^-}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=\lim\limits_{x\to1^-}S(x)=S(1)$）

性质 成立

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots, x \in [-1, 1].$$

证明 1. 幂级数的收敛域是 $[-1, 1]$，故上式至多对 $x \in [-1, 1]$ 成立。

2. 当 $x \in (-1, 1)$ 时，利用逐项积分可得

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^{2n}dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$$

3. 注意到 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ 收敛域是 $[-1, 1]$，由连续性，当 $x = \pm 1$ 时也有

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1}.$$

（如$f(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} \arctan x = \lim\limits_{x\to 1^-} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} = \lim\limits_{x\to 1^-} S(x) = S(1)$）

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

性质 成立

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots, \quad x \in [-1, 1]$$

注 取 $x = 1$，则得到

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

- 至此，得出如下常用函数的幂级数展开式：

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots, \ x \in (-\infty, \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots, \ x \in (-\infty, \infty)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, \ x \in (-1, 1)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1]$$

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots, \ x \in [-1, 1]$$

- 用上述结果, 及逐项求导、积分公式, 可求更多函数的泰勒级数展开

例 把函数 $f(x)=(1-x)\ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数。

解 利用

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+\cdots,\quad x\in(-1,1].$$

所以当 $x\in(-1,1]$ 时,

$$\begin{aligned}(1-x)\ln(1+x)&=(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^{n+1}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n-\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-2}\frac{1}{n-1}x^n\\&=x+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n-\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-2}\frac{1}{n-1}x^n\\&=x+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n}-\frac{(-1)^n}{n-1}\right)x^n\end{aligned}$$

例 把函数 $f(x)=\cos^2 x$ 展开成 x 的幂级数。

解 利用

$$\cos t = 1-\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{4!}t^4-\frac{1}{6!}t^6+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}t^{2n}+\cdots,\ t\in(-\infty,\infty)$$

所以当 $x\in(-\infty,\infty)$ 时，

$$\begin{aligned}\cos^2 x &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}(2x)^{2n}\\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!}x^{2n}\\ &= 1+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!}x^{2n}\end{aligned}$$

例 把函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数。

解 1. 注意到 $\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$.

2. 利用 $\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+t^3+\cdots+t^n+\cdots,\ t\in(-1,1)$

将 $\frac{1}{x+1}$, $\frac{1}{x+2}$ 分别展开成 $(x+4)$ 的幂级数：令 $t=x+4$，则

$$* \quad \frac{1}{x+1}=\frac{1}{t-3}=\frac{1}{-3}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{3^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{3^{n+1}}$$

其中 $|\frac{x+4}{3}|=|\frac{t}{3}|<1$，即 $-7<x<-1$。

$$* \quad \frac{1}{x+2}=\frac{1}{t-2}=\frac{1}{-2}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{2^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{2^{n+1}}$$

其中 $|\frac{x+4}{2}|=|\frac{t}{2}|<1$，即 $-6<x<-2$。

3. 所以 $-6<x<-2$ 时

$$\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n.$$