第 01 周作业解答

练习 1. 1. $y^4 + y'' + 2x = 0$ 的阶是 $\underline{\quad 2 \quad}$。

2. $(7x-6)dy + (x+y)dx = 0$ 的阶是 $\underline{\quad 1 \quad}$。

练习 2. 验证 $y = Cx - \frac{1}{4}C^2$（C 为任意常数）是常微分方程 $y = xy' - \frac{1}{4}(y')^2$ 的通解。验证 $y = x^2$ 也是解，由此说明通解不一定包含所有解。

解：验证如下：$xy' - \frac{1}{4}(y')^2 = x(Cx - \frac{1}{4}C^2)' - \frac{1}{4}((Cx - \frac{1}{4}C^2)')^2 = xC^2 - \frac{1}{4}C^2 = y$，所是解。又因为包含一个任意常数，而方程是一阶，所以为通解。另一方面，直接可验证 $y = x^2$ 也是解，但不包含在通解 $y = Cx - \frac{1}{4}C^2$ 中。所以这里，通解并不包含所有解。

练习 3. 1. 假设 $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x)$ 是微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的解，判断 $y = C_1y_1 + C_2y_2$（其中 C_1, C_2 为任意常数）是否也是该方程的解？

2. 假设 $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x)$ 是微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的解，判断 $y = C_1y_1 + C_2y_2$（其中 C_1, C_2 为任意常数）是否也是该方程的解？

解：1. 是的。验证如下：

$$\begin{aligned} y'' + p(x)y' + q(x)y &= [C_1y_1 + C_2y_2]'' + p(x)\,[C_1y_1 + C_2y_2]' + q(x)\,[C_1y_1 + C_2y_2] \\ &= C_1\,[y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1] + C_2\,[y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2] \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

2. 一般而言不是（除非 $f(x) = 0$）。这是：

$$\begin{aligned} y'' + p(x)y' + q(x)y &= [C_1y_1 + C_2y_2]'' + p(x)\,[C_1y_1 + C_2y_2]' + q(x)\,[C_1y_1 + C_2y_2] \\ &= C_1\,[y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1] + C_2\,[y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2] \\ &= C_1f(x) + C_2f(x) = (C_1 + C_2)f(x) \neq f(x) \end{aligned}$$

练习 4. （关于半衰期）设 $M(t)$ 为某放射物质在时刻 t 的含量。已知任何时刻，该物质衰变速度与剩余含量之比为 $-\lambda$（λ 是正常数）。问需要经过多长时间，该物质含量减少为初始时刻 $t = 0$ 时含量的一半？

解：

$$\frac{M'(t)}{M(t)} = -\lambda \quad \Rightarrow \quad M'(t) = -\lambda M(t) \quad \Rightarrow \quad M(t) = M(0)e^{-\lambda t}$$

求解 t 满足

$$\frac{1}{2}M(0) = M(t) = M(0)e^{-\lambda t}$$

解得

$$t = \frac{1}{\lambda}\ln 2$$

注：从半衰期的表达式可见：半衰期与初始时刻物质的量没有关系。同一种物质，任何量开始衰变到剩余一半量，所需要的时间一样。

练习 5. 已知弹簧系统（详细见课件）满足方程

$$x'' + \frac{9}{4}x = 0$$

问该物体的运动周期是多少？假设物体的初始位置 $x(0) = 2$，初始速度 $x'(0) = -1$，求该物体的位置函数 $x(t)$。

解：通解是

$$x = C_1 \cos(\frac{3}{2}t) + C_2 \sin(\frac{3}{2}t).$$

所以运动周期是 $\frac{2\pi}{3/2} = \frac{4}{3}\pi$。

假设 $x(0) = 2$，$x'(0) = -1$，则

$$\begin{aligned} 2 = x(0) &= C_1 \cos(\frac{3}{2}t) + C_2 \sin(\frac{3}{2}t)\big|_{t=0} = C_1 \\ -1 = x'(0) &= -C_1 \cdot \frac{3}{2}\sin(\frac{3}{2}t) + C_2 \frac{3}{2} \cdot \cos(\frac{3}{2}t)\big|_{t=0} = \frac{3}{2}C_2 \end{aligned}$$

所以 $C_1 = 2, C_2 = -\frac{2}{3}$

$$x(t) = 2\cos(\frac{3}{2}t) - \frac{2}{3}\sin(\frac{3}{2}t).$$

注：$x(t)$ 可以进一步改写成

$$\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{2^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2}\left[\frac{2}{\sqrt{2^2 + (-\frac{2}{3})^2}}\cos(\frac{3}{2}t) + \frac{-\frac{2}{3}}{\sqrt{2^2 + (-\frac{2}{3})^2}}\sin(\frac{3}{2}t)\right] \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{10}\left[\sin\theta\cos(\frac{3}{2}t) + \cos\theta\sin(\frac{3}{2}t)\right] \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{10}\sin(\frac{3}{2}t + \theta) \end{aligned}$$

练习 6. 求出 $y' = x^2 y$ 的通解。

解这是可分离变量的微分方程。

$$\frac{dy}{dx} = x^2 y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = x^2 dx$$

两边积分

$$\int \frac{dy}{y} = \int x^2 dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \frac{1}{3}x^3 + C_1 \quad \Rightarrow \quad y = \pm e^{C_1} e^{\frac{1}{3}x^3}$$

所以通解是

$$y = Ce^{\frac{1}{3}x^3}.$$

练习 7. 求解初值问题 $\begin{cases} xydx + (x^2+1)dy = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$。

解这是可分离变量的微分方程。先求通解。

$$xydx + (x^2+1)dy = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -\frac{x}{1+x^2}dx$$

两边积分

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{x}{1+x^2}dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C_1$$

所以通解是

$$y = C(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

代入初值条件

$$1 = y(0) = C(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\big|_{x=0} = C$$

得 $C=1$。所以初值问题的解是

$$y = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

注. 1. 求积分 $\int \frac{x}{1+x^2}dx$ 的方法:

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx = \int \frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{1}{2}d(1+x^2) \xlongequal{u=1+x^2} \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

2. 下面这个公式直接用，可减少计算量:

$$\ln|a| = \ln|b| + C_1 \quad \Rightarrow \quad a = Cb$$

其中 $C = \pm e^{C_1}$。

练习 8. 求解初值问题 $\begin{cases}\cos y dx + (1+e^{-x})\sin y dy = 0 \\ y(0) = \frac{\pi}{4}\end{cases}$ 。

解这是可分离变量的微分方程。先求通解。

$$\cos y dx + (1+e^{-x})\sin y dy \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin y}{\cos y}dy = -\frac{1}{1+e^{-x}}dx$$

两边积分

$$\int \frac{\sin y}{\cos y}dy = -\int \frac{1}{1+e^{-x}}dx \quad \Rightarrow \quad -\ln|\cos y| = -\ln(e^x+1) + C_1$$

所以通解是

$$\cos y = C(e^x+1).$$

代入初值条件

$$\frac{\pi}{4} = y(0) \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} = \cos y(0) = C(e^x+1)\big|_{x=0} = 2C$$

得 $C = \frac{\sqrt{2}}{4}$。所以初值问题的解是

$$\cos y = \frac{\sqrt{2}}{4}(e^x+1).$$

注. 1. 求积分 $\int \frac{\sin y}{\cos y}dy$ 的方法:

$$\int \frac{\sin y}{\cos y}dy = \int \frac{1}{\cos y}\cdot(-1)d\cos y \xlongequal{u=\cos y} -\int \frac{1}{u}du = -\ln|u| + C = -\ln|\cos y| + C.$$

2. 求积分 $\int \frac{1}{1+e^{-x}}dx$ 的方法:

$$\int \frac{1}{1+e^{-x}}dx = \int \frac{e^x}{e^x+1}dx = \int \frac{1}{e^x+1}d(e^x+1) \xlongequal{u=e^x+1} \int \frac{1}{u}du = \ln|u| + C = \ln(e^x+1) + C.$$

练习 9. 求出 $(x^2+y^2)dx - xydy = 0$ 的通解。

解这是齐次方程。

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

令 $u = \frac{y}{x}$，则 $y = xu$，$y' = u + xu'$。代入上述方程，得

$$u + xu' = \frac{1}{u} + u \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{1}{xu} \quad \Rightarrow \quad udu = \frac{dx}{x}.$$

两边积分

$$\int udu = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}u^2 = \ln|x| + C$$

将 $u = \frac{y}{x}$ 回代，得

$$\frac{y^2}{2x^2} = \ln|x| + C \quad \Rightarrow \quad y^2 = 2x^2(\ln|x| + C).$$

练习 10. 求出 $y' - \frac{3y}{x} + \frac{1}{2}x = 0$ 的通解。

解这是一阶线性微分方程：

$$y' + (-\frac{3}{x})y = -\frac{x}{2}.$$

1. 求解齐次方程

$$y' + (-\frac{3}{x})y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = 3\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = 3\ln|x| + C_1 \quad \Rightarrow \quad y = Cx^3.$$

2. 常数变易。设 $y = u(x)x^3$，代入原方程得

$$u' \cdot x^3 = -\frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad u = -\int \frac{1}{2x^2}dx \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{2x} + C.$$

3. 所以原方程通解

$$y = (C + \frac{1}{2x})x^3 = Cx^3 + \frac{x^2}{2}.$$

练习 11. 求解微分方程 $\begin{cases} y' + y\cot x = 5e^{\cos x} \\ y(\frac{\pi}{2}) = -4 \end{cases}$.

解这是一阶线性微分方程：

$$y' + (\cot x)y = 5e^{\cos x}.$$

1. 求解齐次方程

$$y' + (\cot x)y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -\frac{\cos x}{\sin x}dx$$

两边积分得

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{\cos x}{\sin x}dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = -\ln|\sin x| + C_1 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{C}{\sin x}$$

2. 常数变易。设 $y = \frac{u(x)}{\sin x}$，代入原方程

$$\frac{u'}{\sin x} = 5e^{\cos x} \quad \Rightarrow \quad u = 5\int e^{\cos x}\sin x dx = -5\int e^{\cos x}d\cos x = -5e^{\cos x} + C.$$

3. 所以原方程通解

$$y = (-5e^{\cos x} + C) \cdot \frac{1}{\sin x} = \frac{C}{\sin x} - \frac{5e^{\cos x}}{\sin x}.$$

4. 将初始条件代入，得

$$-4 = y(\frac{\pi}{2}) = \frac{C}{\sin x} - \frac{5e^{\cos x}}{\sin x}\bigg|_{x=\frac{\pi}{2}} = C - 5 \quad \Rightarrow \quad C = 1.$$

所以

$$y = \frac{1 - 5e^{\cos x}}{\sin x}.$$

练习 12. 求一曲线的方程，这曲线通过原点，并且曲线上任一点 (x, y) 处的斜率是 $3x + y$。

解 1. 假设曲线是函数 $y = f(x)$ 的图形。则 f 是如下微分方程的解：

$$\begin{cases} y' = 3x + y \\ y(0) = 0 \end{cases}.$$

这是一阶线性微分方程。

2. 求解齐次部分

$$\frac{dy}{dx} = y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = dx$$

两边积分

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = x + C_1 \quad \Rightarrow \quad y = Ce^x.$$

3. 常数变易。设 $y = u(x)e^x$，代入原方程得：

$$u' \cdot e^x = 3x \quad \Rightarrow \quad u = \int 3xe^{-x}dx \quad \Rightarrow \quad u = -3xe^{-x} - 3e^{-x} + C.$$

4. 所以原方程通解

$$y = (-3xe^{-x} - 3e^{-x} + C)e^x = Ce^x - 3x - 3.$$

5. 求积分常数，将初始条件代入：

$$0 = y(0) = Ce^x - 3x - 3\big|_{x=0} = C - 3 \quad \Rightarrow \quad C = 3$$

6. 所以曲线方程是

$$y = 3e^x - 3x - 3.$$

注. 求积分 $\int xe^{-x}dx$ 的方法：

$$\int xe^{-x}dx = -\int xde^{-x} \xlongequal{\text{分部积分}} -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C.$$

练习 13. 设函数 $f(x)$ 满足方程 $f' = \gamma f$（γ 为常数）。证明：$\left(\frac{f(x)}{e^{\gamma x}}\right)' = 0$，从而 $f(x) = Ce^{\gamma x}$。（想想：为什么这就说明 $f' = \gamma f$ 的通解 $f(x) = Ce^{\gamma x}$ 包含了所有解）

解 $\left(\frac{f(x)}{e^{\gamma x}}\right)' = \frac{f' \cdot e^{\gamma x} - f \cdot (e^{\gamma x})'}{e^{2\gamma x}} = \frac{(f' - \gamma f)e^{\gamma x}}{e^{2\gamma x}} = \frac{f' - \gamma f}{e^{\gamma x}} = 0$。所以 $\frac{f(x)}{e^{\gamma x}}$ 恒为常数，即 $\frac{f(x)}{e^{\gamma x}} = C$。所以 $f(x) = Ce^{\gamma x}$。

练习 14. （一阶线性微分方程的另一种解法）

(1) 设 $y(x)$ 是可微函数，$p(x)$ 是连续函数，验证成立恒等式 $y' + p(x)y = e^{\int -p(x)dx}(e^{\int p(x)dx}y)'$。

(2) 设函数 $y(x)$ 满足方程 $y' + p(x)y = q(x)$。利用上述恒等式证明：$y(x) = \left[\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx + C\right]e^{\int p(x)dx}$。（想想：为什么这就说明一阶线性微分方程的通解等同于全部解）

解 (1) $y' + p(x)y = e^{\int -p(x)dx}\left[e^{\int p(x)dx}y' + e^{\int p(x)dx}p(x)y\right] = e^{\int -p(x)dx}\left[e^{\int p(x)dx}y' + (e^{\int p(x)dx})'y\right] = e^{\int -p(x)dx}(e^{\int p(x)dx}y)'$。

(2) 把 (1) 中恒等式带入方程，得 $e^{\int -p(x)dx}(e^{\int p(x)dx}y)' = q(x)$。所以 $(e^{\int p(x)dx}y)' = e^{\int p(x)dx}q(x)$，得 $e^{\int p(x)dx}y = \int e^{\int p(x)dx}q(x)dx + C$，得 $y(x) = \left[\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx + C\right]e^{\int p(x)dx}$。