第 10 章 c：三重积分

数学系　梁卓滨

2017-2018 学年 II

Outline

1. 三重积分的概念

2. 三重积分的计算：化为累次积分

3. 球面坐标

We are here now...

1. 三重积分的概念

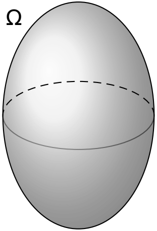
2. 三重积分的计算：化为累次积分

3. 球面坐标

三维物体的质量

假设

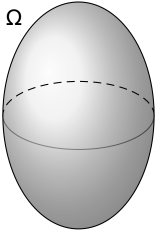
- Ω 为空间中三维闭区域
- 密度为 μ
- 质量为 m



三维物体的质量

假设

- Ω 为空间中三维闭区域
- 密度为 μ
- 质量为 m



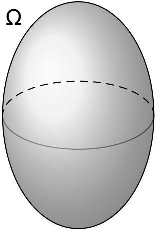
- 当材料均匀时（$\mu =$ 常数），

- 当材料非均匀时（$\mu = \mu(x, y, z)$ 为 Ω 上函数），

三维物体的质量

假设

- Ω 为空间中三维闭区域
- 密度为 μ
- 质量为 m



- 当材料均匀时（$\mu=$ 常数），

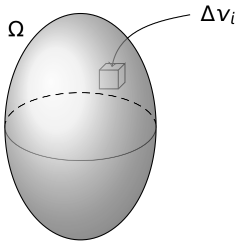
$$m=\mu\cdot\mathrm{Vol}(\Omega)$$

- 当材料非均匀时（$\mu=\mu(x,y,z)$ 为 Ω 上函数），

三维物体的质量

假设

- Ω 为空间中三维闭区域
- 密度为 μ
- 质量为 m



- 当材料均匀时（$\mu=$ 常数），

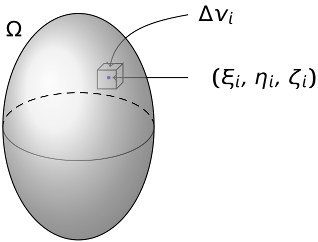
$$m=\mu\cdot\mathrm{Vol}(\Omega)$$

- 当材料非均匀时（$\mu=\mu(x,y,z)$ 为 Ω 上函数），利用微元法可知

三维物体的质量

假设

- Ω 为空间中三维闭区域
- 密度为 μ
- 质量为 m



- 当材料均匀时（$\mu =$ 常数），

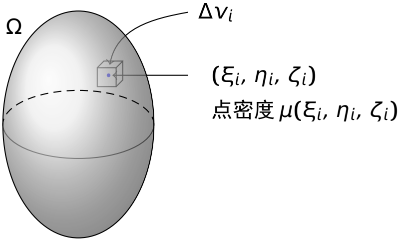
$$m = \mu \cdot \mathrm{Vol}(\Omega)$$

- 当材料非均匀时（$\mu = \mu(x, y, z)$ 为 Ω 上函数），利用微元法可知

三维物体的质量

假设

- Ω 为空间中三维闭区域
- 密度为 μ
- 质量为 m



- 当材料均匀时（$\mu =$ 常数），

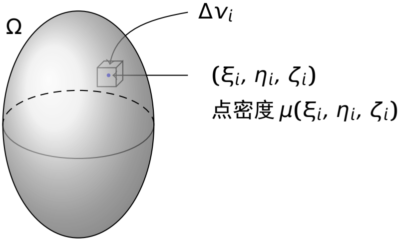
$$m = \mu \cdot \mathrm{Vol}(\Omega)$$

- 当材料非均匀时（$\mu = \mu(x, y, z)$ 为 Ω 上函数），利用微元法可知

三维物体的质量

假设

- Ω 为空间中三维闭区域
- 密度为 μ
- 质量为 m



- 当材料均匀时（$\mu =$ 常数），

$$m = \mu \cdot \mathrm{Vol}(\Omega)$$

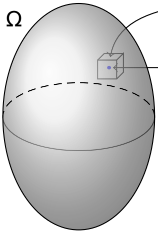
- 当材料非均匀时（$\mu = \mu(x, y, z)$ 为 Ω 上函数），利用微元法可知

$$\mu(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i$$

三维物体的质量

假设

- Ω 为空间中三维闭区域
- 密度为 μ
- 质量为 m



- 当材料均匀时（$\mu =$ 常数），

$$m = \mu \cdot \mathrm{Vol}(\Omega)$$

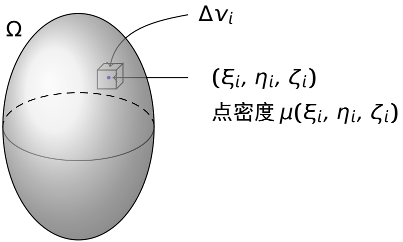
- 当材料非均匀时（$\mu = \mu(x, y, z)$ 为 Ω 上函数），利用微元法可知

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i$$

三维物体的质量

假设

- Ω 为空间中三维闭区域
- 密度为 μ
- 质量为 m



- 当材料均匀时（$\mu =$ 常数），

$$m = \mu \cdot \mathrm{Vol}(\Omega)$$

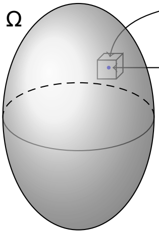
- 当材料非均匀时（$\mu = \mu(x, y, z)$ 为 Ω 上函数），利用微元法可知

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \mu(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$$

三维物体的质量

假设

- Ω 为空间中三维闭区域
- 密度为 μ
- 质量为 m



- 当材料均匀时（$\mu =$ 常数），

$$m = \mu \cdot \mathrm{Vol}(\Omega)$$

- 当材料非均匀时（$\mu = \mu(x, y, z)$ 为 Ω 上函数），利用微元法可知

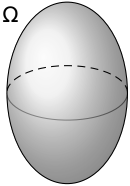
$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \mu(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$$

三重积分的定义

三重积分定义 设

- Ω 是空间中有界闭区域，
- $f(x, y, z)$ 是 Ω 上的有界函数，

若

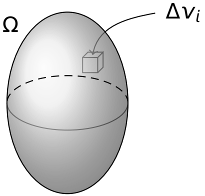


三重积分的定义

三重积分定义 设

- Ω 是空间中有界闭区域，
- $f(x, y, z)$ 是 Ω 上的有界函数，

若

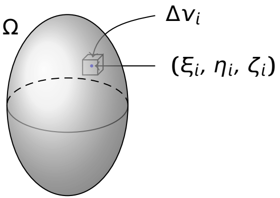


三重积分的定义

三重积分定义 设

- Ω 是空间中有界闭区域，
- $f(x, y, z)$ 是 Ω 上的有界函数，

若

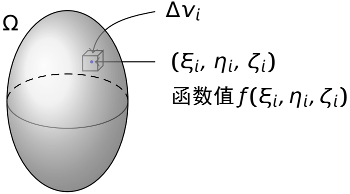


三重积分的定义

三重积分定义 设

- Ω 是空间中有界闭区域，
- $f(x, y, z)$ 是 Ω 上的有界函数，

若



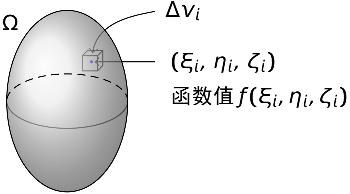
三重积分的定义

三重积分定义 设

- Ω 是空间中有界闭区域，
- $f(x, y, z)$ 是 Ω 上的有界函数，

若

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i$$



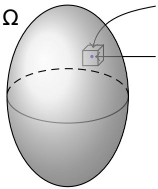
三重积分的定义

三重积分定义 设

- Ω 是空间中有界闭区域，
- $f(x, y, z)$ 是 Ω 上的有界函数，

若

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$$



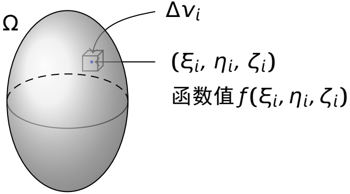
三重积分的定义

三重积分定义 设

- Ω 是空间中有界闭区域，
- $f(x, y, z)$ 是 Ω 上的有界函数，

若

- 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i$存在，



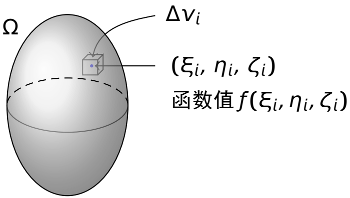
三重积分的定义

三重积分定义 设

- Ω 是空间中有界闭区域，
- $f(x, y, z)$ 是 Ω 上的有界函数，

若

- 极限 $\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i$存在，且极限
- 与上述 Ω 的划分、(ξ_i, η_i, ζ_i) 的选取无关，



三重积分的定义

三重积分定义 设

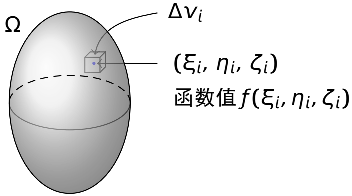
- Ω 是空间中有界闭区域，
- $f(x, y, z)$ 是 Ω 上的有界函数，

若

- 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i$存在，且极限
- 与上述 Ω 的划分、(ξ_i, η_i, ζ_i) 的选取无关，

则定义

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)dv = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i$$



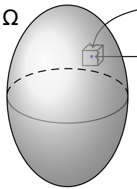
三重积分的定义

三重积分定义 设

- Ω 是空间中有界闭区域，
- $f(x,y,z)$ 是 Ω 上的有界函数，

若

- 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$存在，且极限
- 与上述 Ω 的划分、(ξ_i,η_i,ζ_i) 的选取无关，



则定义
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$$

称为 $f(x,y,z)$ 在 D 上的三重积分。

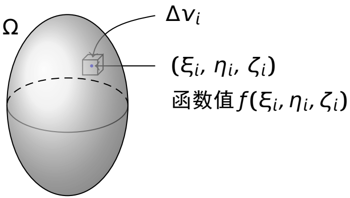
三重积分的定义

三重积分定义 设

- Ω 是空间中有界闭区域，
- $f(x,y,z)$ 是 Ω 上的有界函数，

若

- 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$存在，且极限
- 与上述 Ω 的划分、(ξ_i,η_i,ζ_i) 的选取无关，



则定义

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$$

称为 $f(x,y,z)$ 在 D 上的三重积分。dv 称为体积元素。

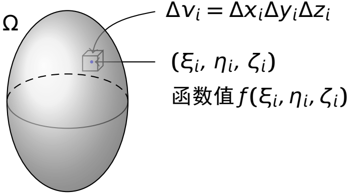
三重积分的定义

三重积分定义 设

- Ω 是空间中有界闭区域，
- $f(x,y,z)$ 是 Ω 上的有界函数，

若

- 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$存在，且极限
- 与上述 Ω 的划分、(ξ_i,η_i,ζ_i) 的选取无关，



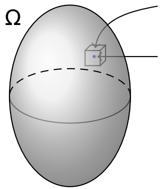
则定义
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$$

称为 $f(x,y,z)$ 在 D 上的三重积分。dv 称为体积元素。

三重积分的定义

三重积分定义 设

- Ω 是空间中有界闭区域，
- $f(x, y, z)$ 是 Ω 上的有界函数，



若

- 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i$ 存在，且极限
- 与上述 Ω 的划分、(ξ_i, η_i, ζ_i) 的选取无关，

则定义

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)dv = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i$$

称为 $f(x, y, z)$ 在 D 上的三重积分。dv 称为体积元素。$dv = dxdydz$

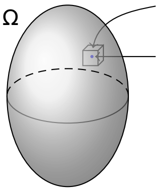
三重积分的定义

三重积分定义 设

- Ω 是空间中有界闭区域，
- $f(x,y,z)$ 是 Ω 上的有界函数，

若

- 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$存在，且极限
- 与上述 Ω 的划分、(ξ_i,η_i,ζ_i) 的选取无关，



则定义
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$$

称为 $f(x,y,z)$ 在 D 上的三重积分。dv 称为体积元素。$dv = dxdydz$

注 三重积分的定义式与二重积分的类似，故性质也类似

三重积分的性质

- 存在性 若 $f(x, y, z)$ 在空间有界闭区域 Ω 上连续，则

  $$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$$

  存在。

三重积分的性质

- 存在性 若 $f(x,y,z)$ 在空间有界闭区域 Ω 上连续，则
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv$$
存在。
- 线性性 $\iiint_{\Omega}(\alpha f+\beta g)dv=\alpha\iiint_{\Omega}fdv+\beta\iiint_{\Omega}gdv$

三重积分的性质

- 存在性 若 $f(x,y,z)$ 在空间有界闭区域 Ω 上连续，则
  $$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv$$
  存在。
- 线性性 $\iiint_{\Omega}(\alpha f+\beta g)dv=\alpha\iiint_{\Omega} f dv+\beta\iiint_{\Omega} g dv$
- 可加性
  $$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv=\iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)dv+\iiint_{\Omega_2} f(x,y,z)dv$$

三重积分的性质

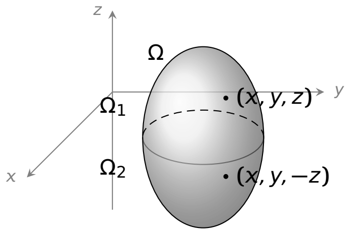
- 存在性 若 $f(x, y, z)$ 在空间有界闭区域 Ω 上连续，则
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$$
存在。
- 线性性 $\iiint_{\Omega}(\alpha f + \beta g) dv = \alpha \iiint_{\Omega} f dv + \beta \iiint_{\Omega} g dv$
- 可加性
$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \iiint_{\Omega_1} f(x, y, z) dv + \iiint_{\Omega_2} f(x, y, z) dv$
- $\iiint_{\Omega} 1 dv = \mathrm{Vol}(\Omega)$

三重积分的性质

- 存在性 若 $f(x, y, z)$ 在空间有界闭区域 Ω 上连续，则
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)dv$$
存在。
- 线性性 $\iiint_{\Omega}(\alpha f+\beta g)dv=\alpha\iiint_{\Omega} f dv+\beta\iiint_{\Omega} g dv$
- 可加性
$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv=\iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)dv+\iiint_{\Omega_2} f(x,y,z)dv$
- $\iiint_{\Omega} 1dv=\mathrm{Vol}(\Omega)$
- 若 $f(x,y,z)\le g(x,y,z)$，则
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv\le\iiint_{\Omega} g(x,y,z)dv$$

积分的对称性

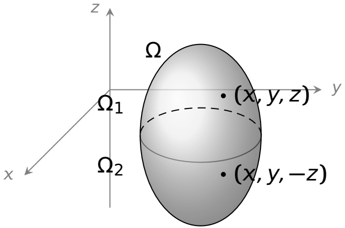
性质 设空间中三维闭区域 Ω 关于 xoy 坐标面对称，



积分的对称性

性质 设空间中三维闭区域 Ω 关于 xoy 坐标面对称，

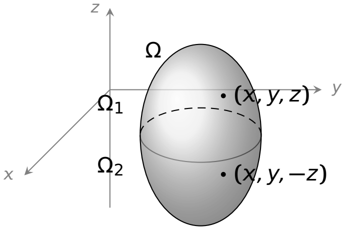
- 若 $f(x,y,z)$ 关于 z 是奇函数（即：$f(x,y,-z)=-f(x,y,z)$），则



积分的对称性

性质 设空间中三维闭区域 Ω 关于 xoy 坐标面对称，

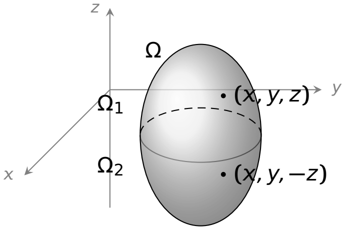
- 若 $f(x,y,z)$ 关于 z 是奇函数（即：$f(x,y,-z)=-f(x,y,z)$），则
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = 0$$



积分的对称性

性质 设空间中三维闭区域 Ω 关于 xoy 坐标面对称，

- 若 $f(x,y,z)$ 关于 z 是奇函数（即：$f(x,y,-z)=-f(x,y,z)$），则
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = 0$$
- 若 $f(x,y,z)$ 关于 z 是偶函数（即：$f(x,y,-z)=f(x,y,z)$），则



积分的对称性

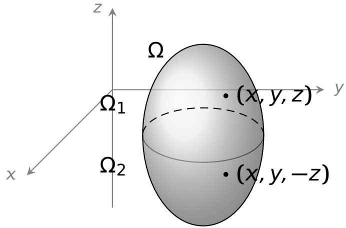
性质 设空间中三维闭区域 Ω 关于 xoy 坐标面对称，

- 若 $f(x,y,z)$ 关于 z 是奇函数（即：$f(x,y,-z)=-f(x,y,z)$），则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = 0$$

- 若 $f(x,y,z)$ 关于 z 是偶函数（即：$f(x,y,-z)=f(x,y,z)$），则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = 2\iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)dv = 2\iiint_{\Omega_2} f(x,y,z)dv$$



例 计算 $\iiint_\Omega \frac{z\ln(1+x^2+y^2)}{1+x^2+y^2+z^2}dz$，其中 Ω 为球体 $x^2+y^2+z^2 \leq 1$

例 计算 $\iiint_\Omega \frac{z\ln(1+x^2+y^2)}{1+x^2+y^2+z^2}dz$，其中 Ω 为球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$

解 因为

1. 被积函数函数关于变量 z 是奇函数；
2. 积分区域 Ω 关于 xoy 坐标面对称，

所以积分为 0

We are here now...

1. 三重积分的概念

2. 三重积分的计算：化为累次积分

3. 球面坐标

计算三重积分的基本做法：化为累次积分

- “先一后二”

- “先二后一”

计算三重积分的基本做法：化为累次积分

- “先一后二”

  1. $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iint_* \left[\int_*^* f(x,\, y,\, z)dz \right] dxdy$

- “先二后一”

计算三重积分的基本做法：化为累次积分

- “先一后二”
  1. $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iint_* \left[\int_*^* f(x,\ y,\ z)dz \right] dxdy$
  2. $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iint_* \left[\int_*^* f(x,\ y,\ z)dy \right] dxdz$

- “先二后一”

计算三重积分的基本做法：化为累次积分

- “先一后二”
  1. $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iint_* \left[\int_*^* f(x,\, y,\, z)dz \right] dxdy$
  2. $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iint_* \left[\int_*^* f(x,\, y,\, z)dy \right] dxdz$
  3. $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iint_* \left[\int_*^* f(x,\, y,\, z)dz \right] dxdy$
- “先二后一”

计算三重积分的基本做法：化为累次积分

- “先一后二”

1. $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iint_* \left[\int_*^* f(x,\ y,\ z)dz \right] dxdy$
2. $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iint_* \left[\int_*^* f(x,\ y,\ z)dy \right] dxdz$
3. $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iint_* \left[\int_*^* f(x,\ y,\ z)dz \right] dxdy$

- “先二后一”

1. $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \int_*^* \left[\iint_* f(x,\ y,\ z)dxdy \right] dz$

计算三重积分的基本做法：化为累次积分

- “先一后二”

1. $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{*}\left[\int_{*}^{*} f(x,\ y,\ z)dz\right]dxdy$
2. $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{*}\left[\int_{*}^{*} f(x,\ y,\ z)dy\right]dxdz$
3. $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{*}\left[\int_{*}^{*} f(x,\ y,\ z)dz\right]dxdy$

- “先二后一”

1. $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_{*}^{*}\left[\iint_{*} f(x,\ y,\ z)dxdy\right]dz$
2. $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_{*}^{*}\left[\iint_{*} f(x,\ y,\ z)dxdz\right]dy$

计算三重积分的基本做法：化为累次积分

- “先一后二”

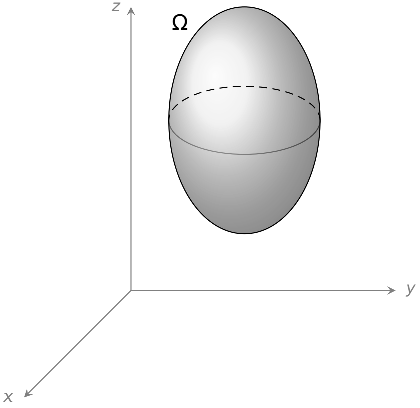
1. $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{*}\left[\int_{*}^{*} f(x,\ y,\ z)dz\right]dxdy$
2. $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{*}\left[\int_{*}^{*} f(x,\ y,\ z)dy\right]dxdz$
3. $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{*}\left[\int_{*}^{*} f(x,\ y,\ z)dz\right]dxdy$

- “先二后一”

1. $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_{*}^{*}\left[\iint_{*} f(x,\ y,\ z)dxdy\right]dz$
2. $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_{*}^{*}\left[\iint_{*} f(x,\ y,\ z)dxdz\right]dy$
3. $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_{*}^{*}\left[\iint_{*} f(x,\ y,\ z)dydz\right]dx$

投影法（“先一后二”）

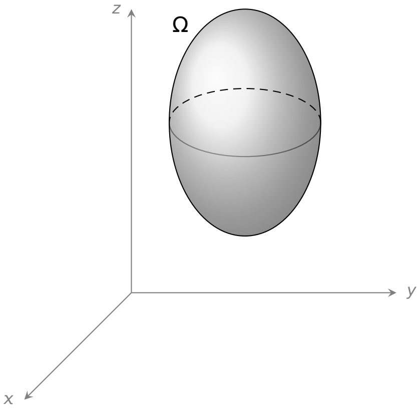
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$$



投影法（“先一后二”）

1. 先积 z，再积 xy

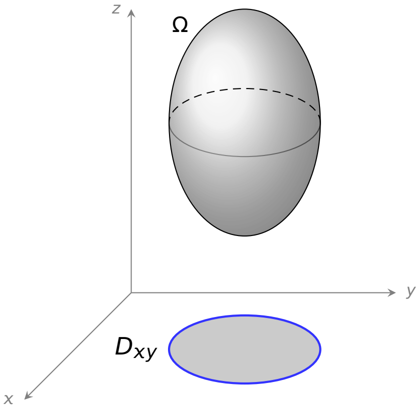
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint \left[\int \qquad f(x,\,y,\,z)dz \right] dxdy$$



投影法（“先一后二”）

1. 先积 z，再积 xy

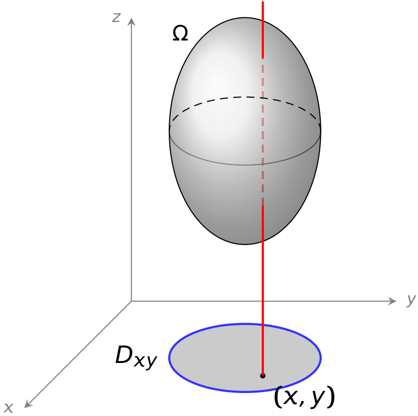
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint \left[\int \qquad f(x,\, y,\, z)dz \right] dxdy$$



投影法（“先一后二”）

1. 先积 z，再积 xy

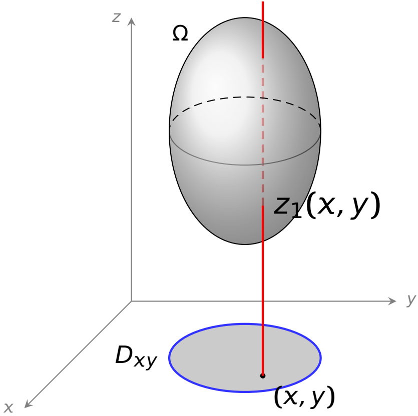
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint \left[\int \qquad f(x,\ y,\ z)dz\right]dxdy$$



投影法（“先一后二”）

1. 先积 z，再积 xy

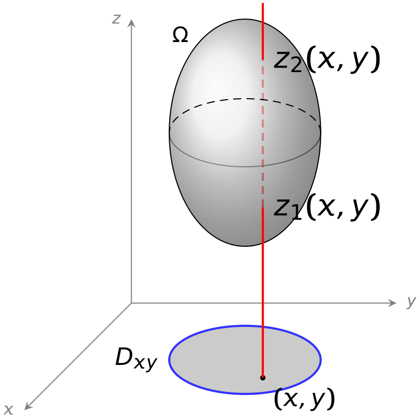
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint \left[\int \qquad f(x,y,z)dz\right]dxdy$$



投影法（“先一后二”）

1. 先积 z，再积 xy

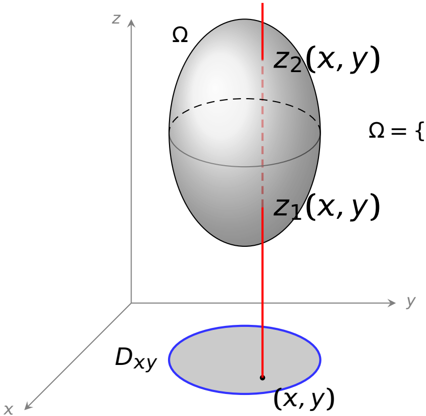
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint \left[\int f(x,\,y,\,z)dz\right]dxdy$$



投影法（“先一后二”）

1. 先积 z，再积 xy

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint \left[\int \qquad f(x,\,y,\,z)dz \right] dxdy$$

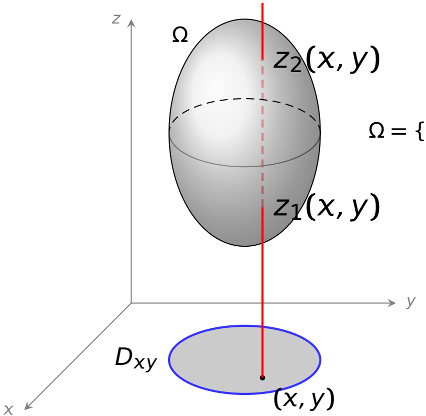


$$\Omega = \{(x,y,z) | z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y),\ (x,y) \in D_{xy}\}$$

投影法（“先一后二”）

1. 先积 z，再积 xy

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D_{xy}} \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dxdy$$

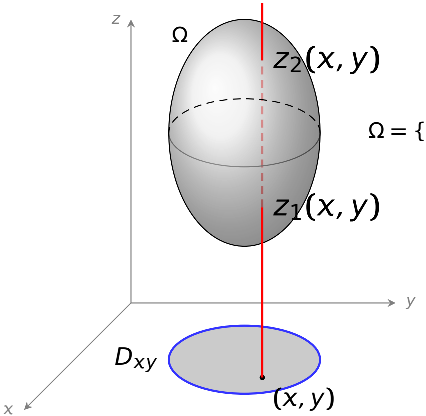


$$\Omega = \{(x,y,z) | z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y),\ (x,y) \in D_{xy}\}$$

投影法（“先一后二”）

1. 先积 z，再积 xy

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D_{xy}} \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,\ y,\ z)dz \right] dxdy$$



$$\Omega = \{(x,y,z) | z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y),\ (x,y) \in D_{xy}\}$$

投影法（“先一后二”）

1. 先积 z，再积 xy

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D_{xy}} \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,\ y,\ z)dz \right] dxdy$$

投影法（“先一后二”）

1. 先积 z，再积 xy

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D_{xy}} \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,\ y,\ z)dz \right] dxdy$$

类似地

2. 先积 x，再积 yz

3. 先积 y，再积 xz

投影法（“先一后二”）

1. 先积 z，再积 xy

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D_{xy}} \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dxdy$$

类似地

2. 先积 x，再积 yz

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint \left[\int f(x,y,z)dx \right] dydz$$

3. 先积 y，再积 xz

投影法（“先一后二”）

1. 先积 z，再积 xy

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D_{xy}} \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dxdy$$

类似地

2. 先积 x，再积 yz

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D_{yz}} \left[\int \qquad f(x,y,z)dx \right] dydz$$

3. 先积 y，再积 xz

投影法（“先一后二”）

1. 先积 z，再积 xy

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D_{xy}} \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,\ y,\ z)dz \right] dxdy$$

类似地

2. 先积 x，再积 yz

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D_{yz}} \left[\int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x,\ y,\ z)dx \right] dydz$$

3. 先积 y，再积 xz

投影法（“先一后二”）

1. 先积 z，再积 xy

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D_{xy}} \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,\ y,\ z)dz \right] dxdy$$

类似地

2. 先积 x，再积 yz

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D_{yz}} \left[\int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x,\ y,\ z)dx \right] dydz$$

3. 先积 y，再积 xz

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint \left[\int \qquad f(x,\ y,\ z)dy \right] dxdz$$

投影法（“先一后二”）

1. 先积 z，再积 xy

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D_{xy}} \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,\, y,\, z)dz \right] dxdy$$

类似地

2. 先积 x，再积 yz

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D_{yz}} \left[\int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x,\, y,\, z)dx \right] dydz$$

3. 先积 y，再积 xz

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D_{xz}} \left[\int \qquad f(x,\, y,\, z)dy \right] dxdz$$

暨南大学 JINAN UNIVERSITY

投影法（“先一后二”）

1. 先积 z，再积 xy

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D_{xy}} \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,\ y,\ z)dz \right] dxdy$$

类似地

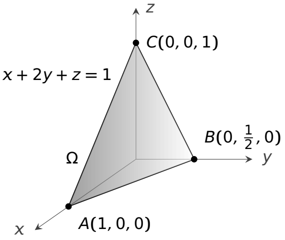
2. 先积 x，再积 yz

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D_{yz}} \left[\int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x,\ y,\ z)dx \right] dydz$$

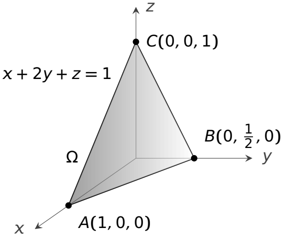
3. 先积 y，再积 xz

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D_{xz}} \left[\int_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x,\ y,\ z)dy \right] dxdz$$

例 1 计算 $\iiint_{\Omega} x dxdydz$，其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域。



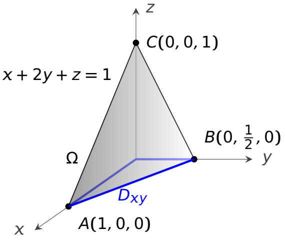
例 1 计算 $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$，其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域。



解

$$\text{原式} = \iint \left[\int \quad x dz \right] dx dy$$

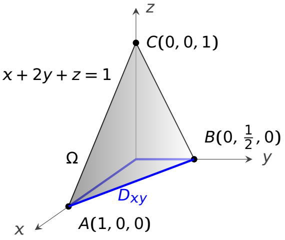
例 1 计算 $\iiint_\Omega x dxdydz$，其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域。

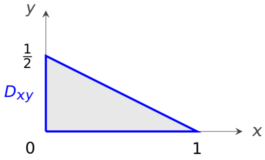


解

$$原式 = \iint \left[\int \quad x dz \right] dxdy$$

例 1 计算 $\iiint_{\Omega} x dxdydz$，其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域。

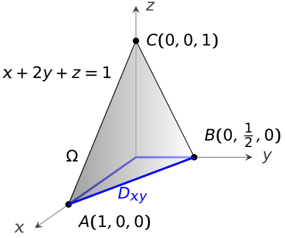


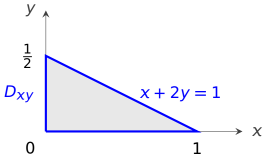


解

$$\text{原式} = \iint \Big[\int \quad x dz \Big] dxdy$$

例 1 计算 $\iiint_{\Omega} x\,dx\,dy\,dz$，其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域。

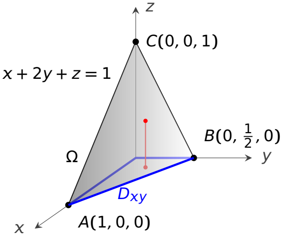


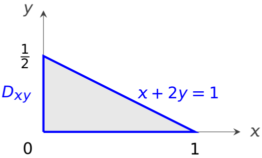


解

$$原式 = \iint \Big[\int \qquad x\,dz\Big]dx\,dy$$

例 1 计算 $\iiint_\Omega x dxdydz$，其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域。

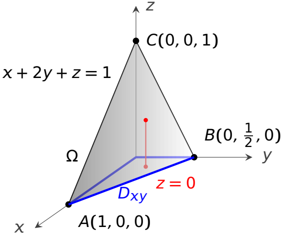


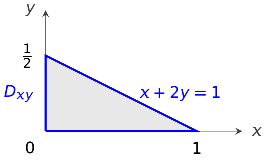


解

$$原式 = \iint \left[\int x dz\right] dxdy$$

例 1 计算 $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$，其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域。

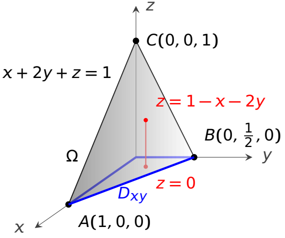


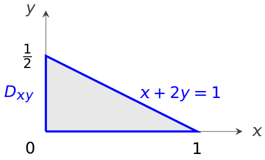


解

$$\text{原式} = \iint \Big[\int \quad x dz\Big] dx dy$$

例 1 计算 $\iiint_\Omega x\,dxdydz$，其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域。

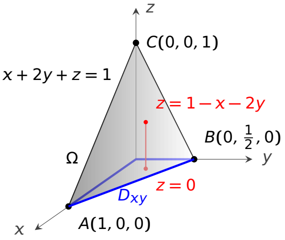


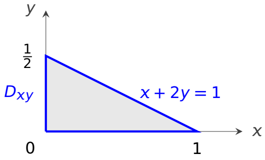


解

$$原式 = \iint \Big[\int \quad x\,dz \Big] dxdy$$

例 1 计算 $\iiint_\Omega x\,dx\,dy\,dz$，其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域。

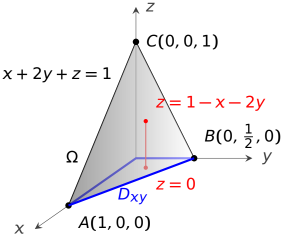


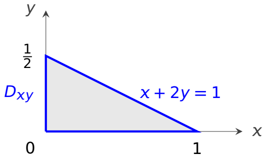


解

$$原式 = \iint_{D_{xy}} \left[\int \qquad x\,dz \right] dx\,dy$$

$\color{blue}{例\ 1}$ 计算 $\iiint_{\Omega} x\,dx\,dy\,dz$，其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域。

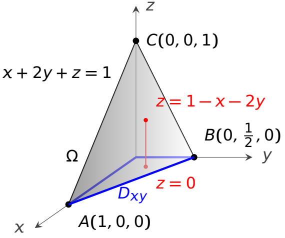


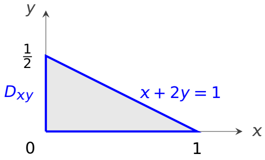


解

$$\text{原式} = \iint_{D_{xy}} \left[\int_0^{1-x-2y} x\,dz \right] dx\,dy$$

例 1 计算 $\iiint_\Omega x\,dxdydz$，其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域。

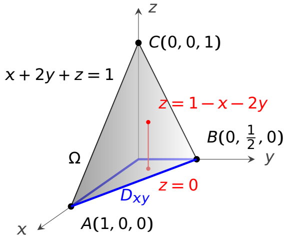


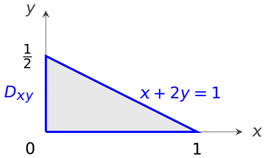


解

$$原式 = \iint_{D_{xy}} \left[\int_0^{1-x-2y} x\,dz\right] dxdy \qquad x(1-x-2y)$$

例 1 计算 $\iiint_{\Omega} x dxdydz$，其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域。

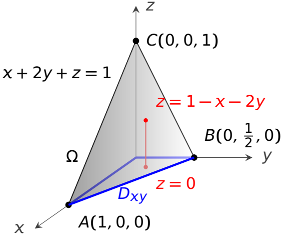


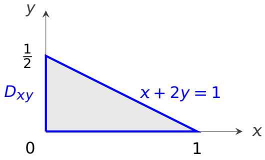


解

$$\text{原式} = \iint_{D_{xy}} \left[\int_0^{1-x-2y} x dz \right] dxdy = \iint_{D_{xy}} x(1-x-2y) dxdy$$

例 1 计算 $\iiint_\Omega x\,dxdydz$，其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域。



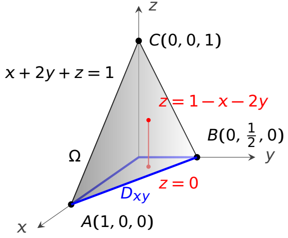


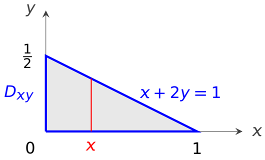
解

$$\text{原式} = \iint_{D_{xy}} \left[\int_0^{1-x-2y} x\,dz\right] dxdy = \iint_{D_{xy}} x(1-x-2y)\,dxdy$$

$$= \int \left[\int x(1-x-2y)\,dy\right] dx$$

例 1 计算 $\iiint_\Omega x\,dxdydz$，其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域。



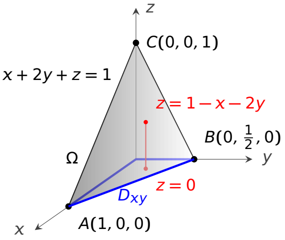


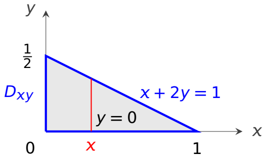
解

$$\text{原式} = \iint_{D_{xy}} \left[\int_0^{1-x-2y} x\,dz \right] dxdy = \iint_{D_{xy}} x(1-x-2y)\,dxdy$$

$$= \int \left[\int x(1-x-2y)\,dy \right] dx$$

例 1 计算 $\iiint_\Omega x\,dxdydz$，其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域。



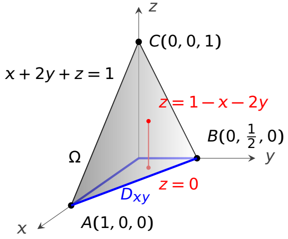


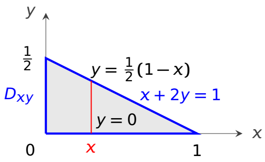
解

$$\text{原式} = \iint_{D_{xy}} \left[\int_0^{1-x-2y} x\,dz\right] dxdy = \iint_{D_{xy}} x(1-x-2y)\,dxdy$$

$$= \int \left[\int x(1-x-2y)\,dy\right] dx$$

例 1 计算 $\iiint_\Omega x\,dx\,dy\,dz$，其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域。



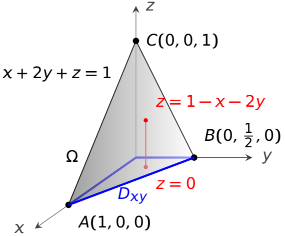


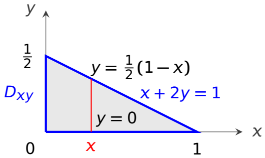
解

$$\text{原式} = \iint_{D_{xy}} \left[\int_0^{1-x-2y} x\,dz\right] dx\,dy = \iint_{D_{xy}} x(1-x-2y)\,dx\,dy$$

$$= \int \left[\int x(1-x-2y)\,dy\right] dx$$

例 1 计算 $\iiint_\Omega x\,dxdydz$，其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域。



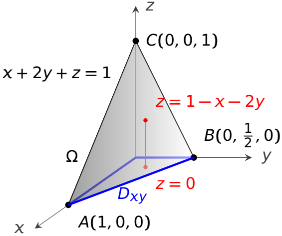


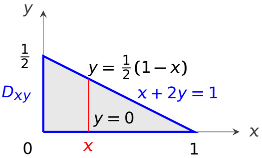
解

$$\text{原式} = \iint_{D_{xy}} \left[\int_0^{1-x-2y} x\,dz \right] dxdy = \iint_{D_{xy}} x(1-x-2y)\,dxdy$$

$$= \int_0^1 \left[\int \quad x(1-x-2y)\,dy \right] dx$$

例 1 计算 $\iiint_\Omega x dx dy dz$，其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域。



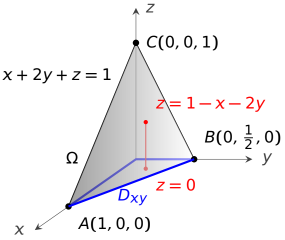


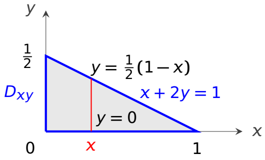
解

$$\text{原式} = \iint_{D_{xy}} \left[\int_0^{1-x-2y} x dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} x(1-x-2y) dx dy$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^{\frac{1-x}{2}} x(1-x-2y) dy \right] dx$$

例 1 计算 $\iiint_\Omega x dxdydz$，其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域。



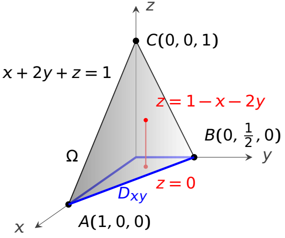


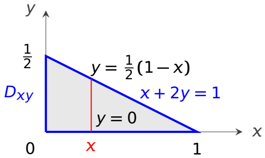
解

$$\text{原式} = \iint_{D_{xy}} \left[\int_0^{1-x-2y} x dz\right] dxdy = \iint_{D_{xy}} x(1-x-2y)dxdy$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^{\frac{1-x}{2}} x(1-x-2y)dy\right] dx = \int_0^1 \left[x\left[(1-x)y-y^2\right]\Big|_0^{\frac{1-x}{2}}\right] dx$$

例 1 计算 $\iiint_\Omega x\,dx\,dy\,dz$，其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域。





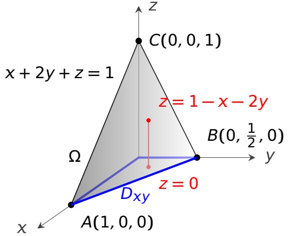
解

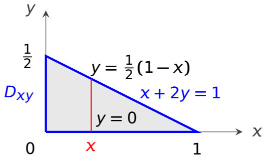
$$\text{原式}=\iint_{D_{xy}}\left[\int_0^{1-x-2y}x\,dz\right]dxdy=\iint_{D_{xy}}x(1-x-2y)dxdy$$

$$=\int_0^1\left[\int_0^{\frac{1-x}{2}}x(1-x-2y)dy\right]dx=\int_0^1\left[x\left[(1-x)y-y^2\right]\Big|_0^{\frac{1-x}{2}}\right]dx$$

$$=\int_0^1\left[\frac{1}{4}x(1-x)^2\right]dx$$

例 1 计算 $\iiint_\Omega x dx dy dz$，其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域。





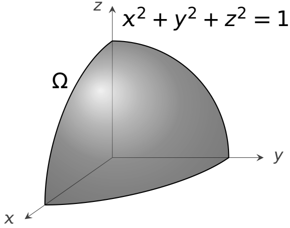
解

$$\text{原式} = \iint_{D_{xy}} \left[\int_0^{1-x-2y} x dz\right] dx dy = \iint_{D_{xy}} x(1-x-2y) dx dy$$

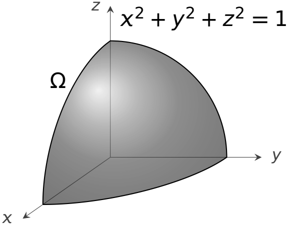
$$= \int_0^1 \left[\int_0^{\frac{1-x}{2}} x(1-x-2y) dy\right] dx = \int_0^1 \left[x\left[(1-x)y - y^2\right]\Big|_0^{\frac{1-x}{2}}\right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{4}x(1-x)^2\right] dx = \frac{1}{48}$$

例 2 计算 $\iiint_\Omega xyzdxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$ 在第一象限的部分。



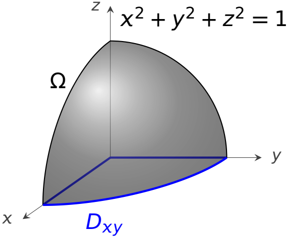
例 2 计算 $\iiint_\Omega xyzdxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$ 在第一象限的部分。



解

$$原式 = \iint \left[\int \qquad xyzdz\right]dxdy$$

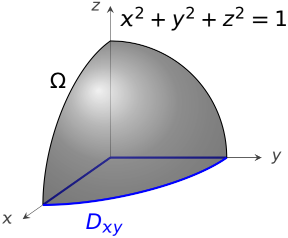
例 2 计算 $\iiint_\Omega xyzdxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2 \le 1$ 在第一象限的部分。

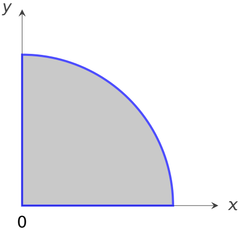


解

$$\text{原式} = \iint \Big[\int \qquad xyzdz \Big] dxdy$$

例 2 计算 $\iiint_\Omega xyzdxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$ 在第一象限的部分。

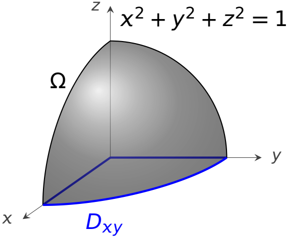


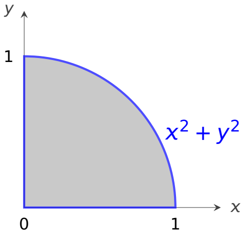


解

$$\text{原式}=\iint\left[\int \qquad xyzdz\right]dxdy$$

例 2 计算 $\iiint_\Omega xyzdxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$ 在第一象限的部分。

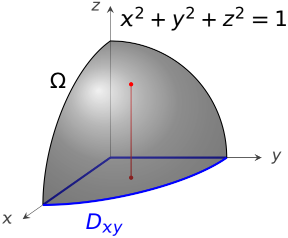


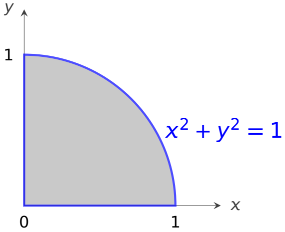


解

$$\text{原式}=\iint\left[\int\qquad xyzdz\right]dxdy$$

例 2 计算 $\iiint_\Omega xyzdxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$ 在第一象限的部分。

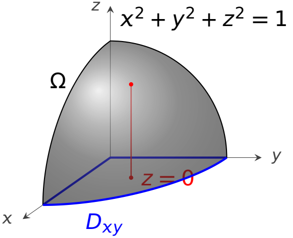


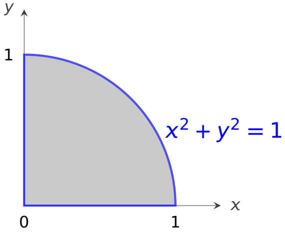


解

$$\text{原式}=\iint\left[\int xyzdz\right]dxdy$$

例 2 计算 $\iiint_\Omega xyz\,dxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$ 在第一象限的部分。

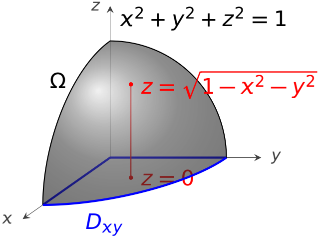


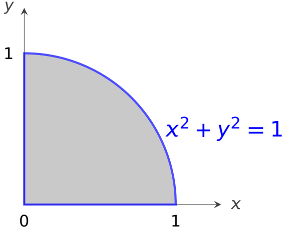


解

$$\text{原式}=\iint\left[\int\qquad xyz\,dz\right]dxdy$$

例 2 计算 $\iiint_\Omega xyzdxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$ 在第一象限的部分。

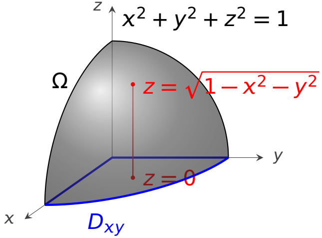


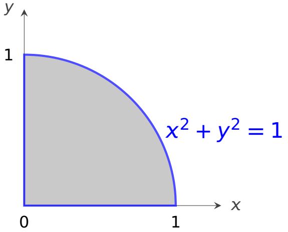


解

$$\text{原式}=\iint\left[\int\qquad xyzdz\right]dxdy$$

例 2 计算 $\iiint_\Omega xyzdxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$ 在第一象限的部分。

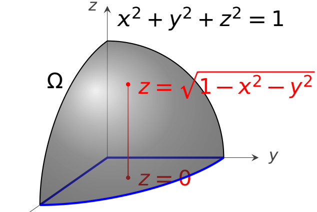


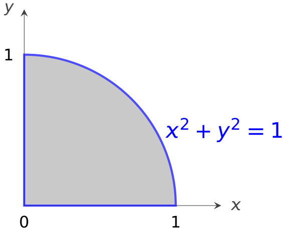


解

$$\text{原式}=\iint_{D_{xy}}\Big[\int \qquad xyzdz\Big]dxdy$$

例 2 计算 $\iiint_{\Omega} xyzdxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2 \le 1$ 在第一象限的部分。

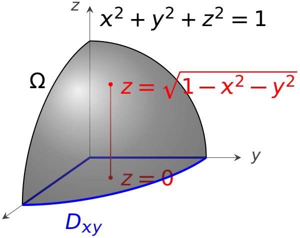


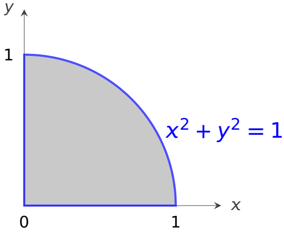


解

$$原式 = \iint_{D_{xy}} \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyzdz \right] dxdy$$

例 2 计算 $\iiint_\Omega xyz dxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$ 在第一象限的部分。



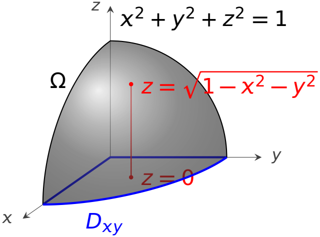


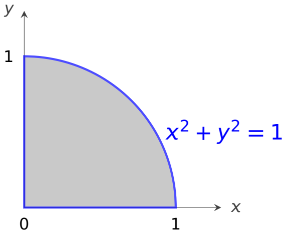
解

$$原式 = \iint_{D_{xy}}\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz dz\right]dxdy$$

$$\frac{1}{2}xy(1-x^2-y^2)$$

例 2 计算 $\iiint_\Omega xyz\,dxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2 \le 1$ 在第一象限的部分。

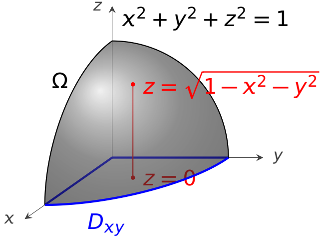


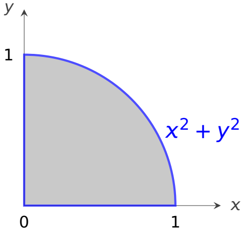


解

$$原式 = \iint_{D_{xy}} \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz\,dz \right] dxdy = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} xy(1-x^2-y^2)\,dxdy$$

例 2 计算 $\iiint_\Omega xyz dxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2 \le 1$ 在第一象限的部分。



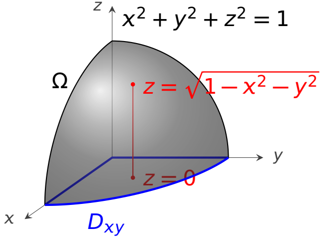


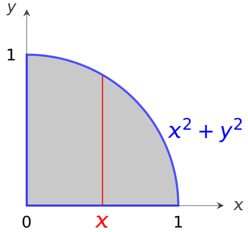
解

$$原式 = \iint_{D_{xy}} \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz dz \right] dxdy = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} xy(1-x^2-y^2) dxdy$$

$$= \int \left[\int \frac{1}{2} xy(1-x^2-y^2) dy \right] dx$$

例 2 计算 $\iiint_\Omega xyz\,dxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$ 在第一象限的部分。



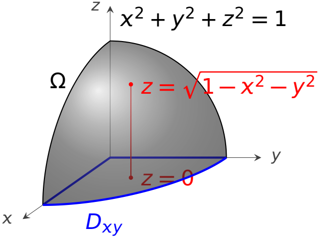


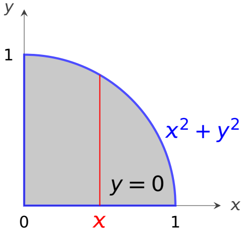
解

$$原式=\iint_{D_{xy}}\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz\,dz\right]dxdy=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{2}xy(1-x^2-y^2)dxdy$$

$$=\int\left[\int \frac{1}{2}xy(1-x^2-y^2)dy\right]dx$$

例 2 计算 $\iiint_{\Omega} xyz\,dxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$ 在第一象限的部分。



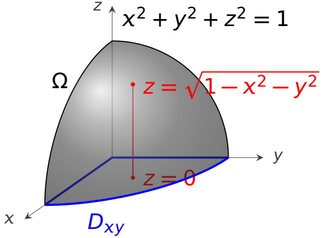


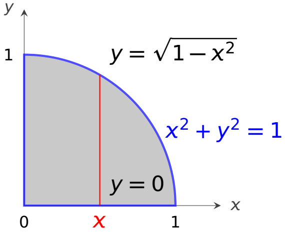
解

$$\text{原式}=\iint_{D_{xy}}\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz\,dz\right]dxdy=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{2}xy(1-x^2-y^2)\,dxdy$$

$$=\int\left[\int \qquad \frac{1}{2}xy(1-x^2-y^2)\,dy\right]dx$$

例 2 计算 $\iiint_\Omega xyz\,dxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$ 在第一象限的部分。



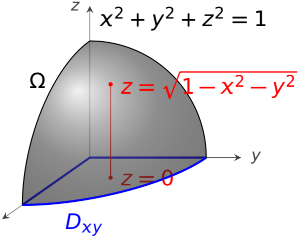


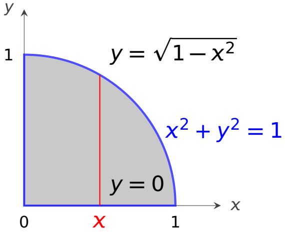
解

$$\text{原式}=\iint_{D_{xy}}\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz\,dz\right]dxdy=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{2}xy(1-x^2-y^2)\,dxdy$$

$$=\int\left[\int \frac{1}{2}xy(1-x^2-y^2)\,dy\right]dx$$

例 2 计算 $\iiint_\Omega xyz\,dxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$ 在第一象限的部分。



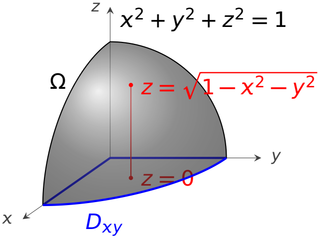


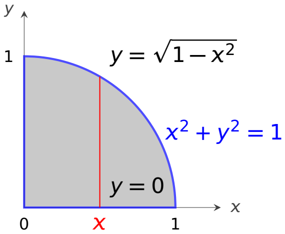
解

$$\text{原式}=\iint_{D_{xy}}\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz\,dz\right]dxdy=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{2}xy(1-x^2-y^2)\,dxdy$$

$$=\int_0^1\left[\int \quad \frac{1}{2}xy(1-x^2-y^2)\,dy\right]dx$$

例 2 计算 $\iiint_\Omega xyz dxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$ 在第一象限的部分。



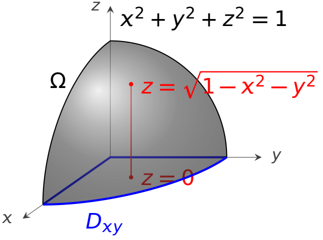


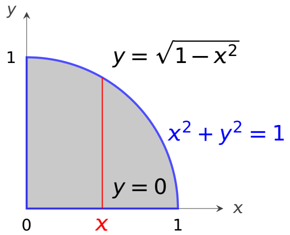
解

$$\text{原式} = \iint_{D_{xy}} \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz dz\right] dxdy = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} xy(1-x^2-y^2) dxdy$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{2} xy(1-x^2-y^2) dy\right] dx$$

例 2 计算 $\iiint_\Omega xyz\,dxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$ 在第一象限的部分。



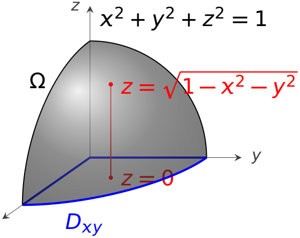


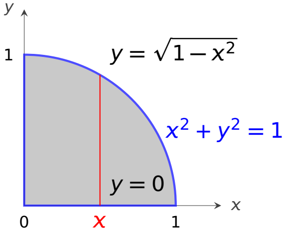
解

$$\text{原式}=\iint_{D_{xy}}\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz\,dz\right]dxdy=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{2}xy(1-x^2-y^2)\,dxdy$$

$$=\int_0^1\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{2}xy(1-x^2-y^2)\,dy\right]dx=\int_0^1\left[\frac{1}{8}x(1-x^2)^2\right]dx$$

例 2 计算 $\iiint_{\Omega} xyz\,dxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$ 在第一象限的部分。





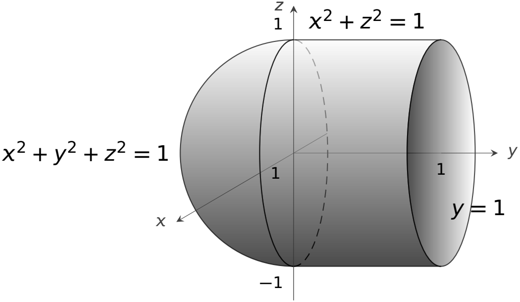
解

$$\text{原式}=\iint_{D_{xy}}\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz\,dz\right]dxdy=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{2}xy(1-x^2-y^2)dxdy$$

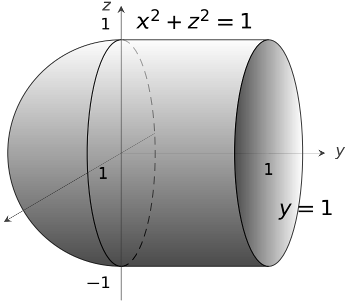
$$=\int_0^1\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{2}xy(1-x^2-y^2)dy\right]dx=\int_0^1\left[\frac{1}{8}x(1-x^2)^2\right]dx$$

$$=\frac{1}{48}$$

例 3 计算 $\iiint_{\Omega} y\sqrt{1-x^2}dxdydz$，其中 Ω 是如图的闭区域。



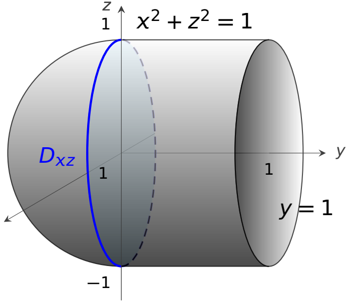
例 3 计算 $\iiint_\Omega y\sqrt{1-x^2}dxdydz$，其中 Ω 是如图的闭区域。



解

$$\text{原式} = \iint \left[\int \quad y\sqrt{1-x^2}dy\right]dxdz$$

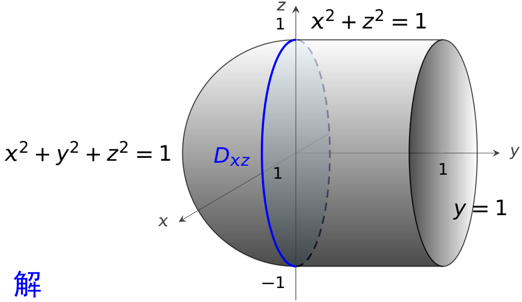
例 3 计算 $\iiint_\Omega y\sqrt{1-x^2}\,dxdydz$，其中 Ω 是如图的闭区域。

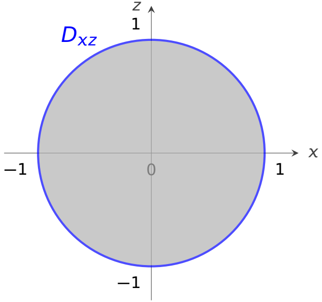


解

$$原式 = \iint \left[\int \quad y\sqrt{1-x^2}\,dy\right]dxdz$$

例 3 计算 $\iiint_\Omega y\sqrt{1-x^2}dxdydz$，其中 Ω 是如图的闭区域。

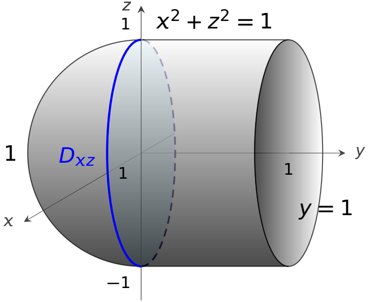


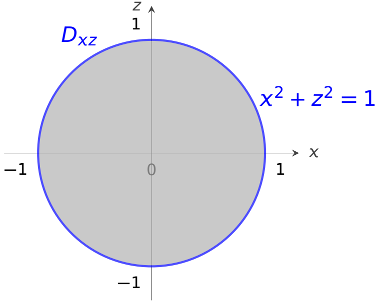


解

$$原式 = \iint \left[\int y\sqrt{1-x^2}dy\right]dxdz$$

例 3 计算 $\iiint_\Omega y\sqrt{1-x^2}dxdydz$，其中 Ω 是如图的闭区域。

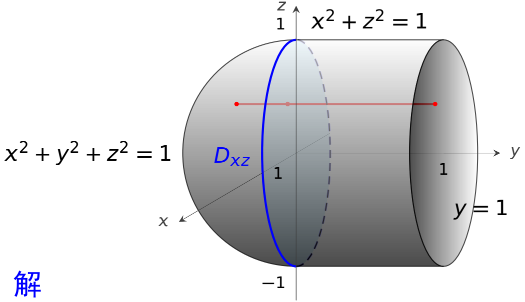


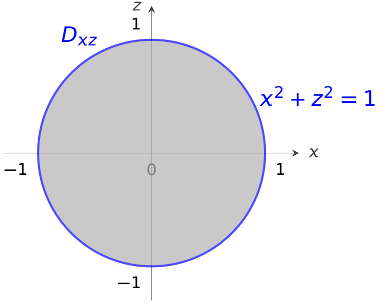


解

$$原式 = \iint \left[\int \quad y\sqrt{1-x^2}dy\right]dxdz$$

例 3 计算 $\iiint_\Omega y\sqrt{1-x^2}\,dxdydz$，其中 Ω 是如图的闭区域。

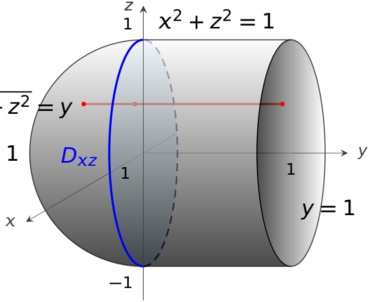


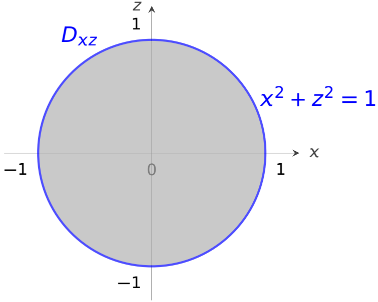


解

$$原式 = \iint \left[\int y\sqrt{1-x^2}\,dy\right]dxdz$$

例 3 计算 $\iiint_\Omega y\sqrt{1-x^2}dxdydz$，其中 Ω 是如图的闭区域。

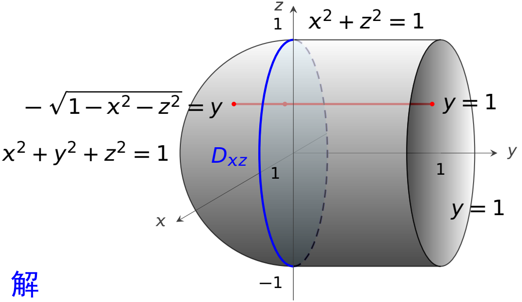


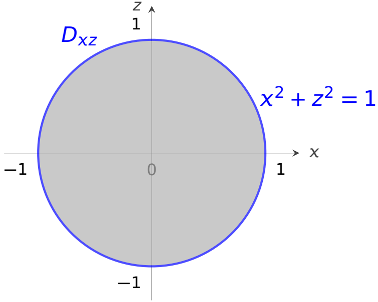


解

$$原式=\iint\left[\int y\sqrt{1-x^2}dy\right]dxdz$$

例 3 计算 $\iiint_\Omega y\sqrt{1-x^2}\,dxdydz$，其中 Ω 是如图的闭区域。

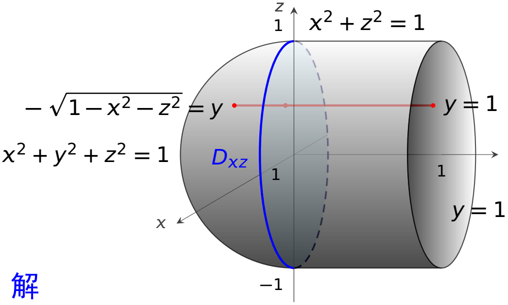


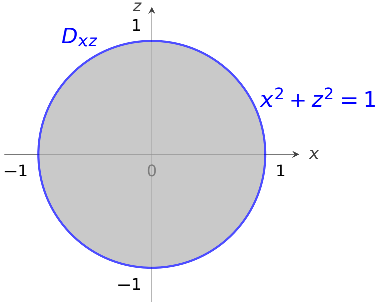


解

$$\text{原式}=\iint\left[\int y\sqrt{1-x^2}\,dy\right]dxdz$$

例 3 计算 $\iiint_{\Omega} y\sqrt{1-x^2}\,dxdydz$，其中 Ω 是如图的闭区域。

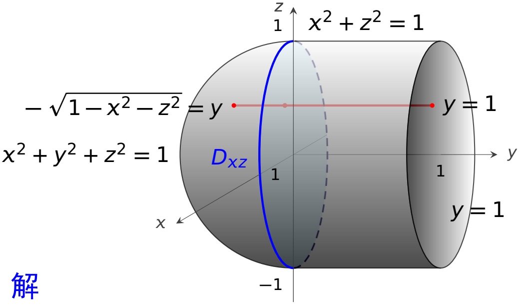


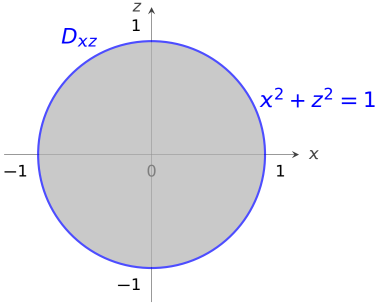


解

$$\text{原式} = \iint_{D_{xz}} \left[\int \quad y\sqrt{1-x^2}\,dy \right] dxdz$$

例 3 计算 $\iiint_\Omega y\sqrt{1-x^2}dxdydz$，其中 Ω 是如图的闭区域。

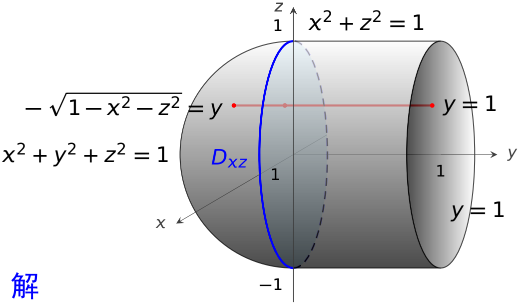


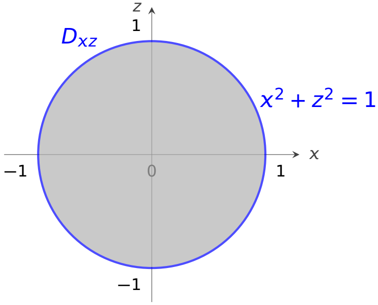


解

$$\text{原式}=\iint_{D_{xz}}\left[\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{1}y\sqrt{1-x^2}dy\right]dxdz$$

例 3 计算 $\iiint_\Omega y\sqrt{1-x^2}dxdydz$，其中 Ω 是如图的闭区域。

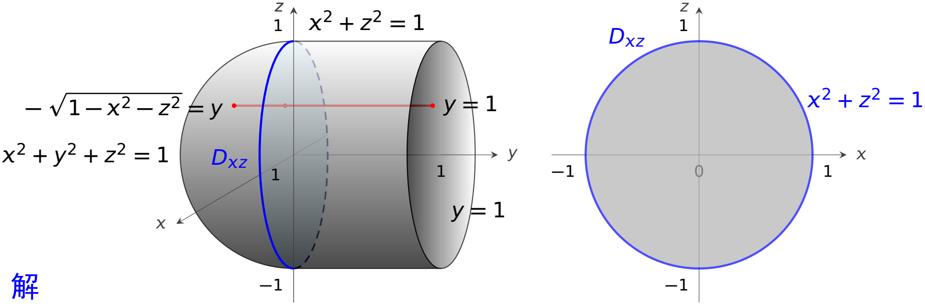




解

$$原式 = \iint_{D_{xz}}\left[\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{1} y\sqrt{1-x^2}dy\right]dxdz \qquad \sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{2}(x^2+z^2)$$

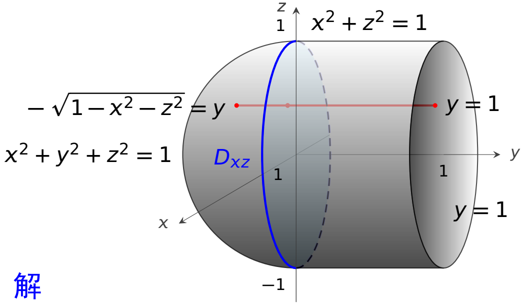
例 3 计算 $\iiint_\Omega y\sqrt{1-x^2}dxdydz$，其中 Ω 是如图的闭区域。

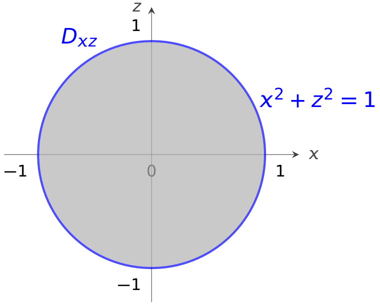


解

$$\text{原式}=\iint_{D_{xz}}\left[\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{1} y\sqrt{1-x^2}dy\right]dxdz=\iint_{D_{xz}}\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{2}(x^2+z^2)dxdz$$

例 3 计算 $\iiint_\Omega y\sqrt{1-x^2}dxdydz$，其中 Ω 是如图的闭区域。



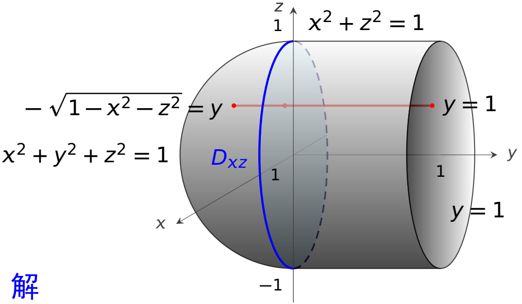


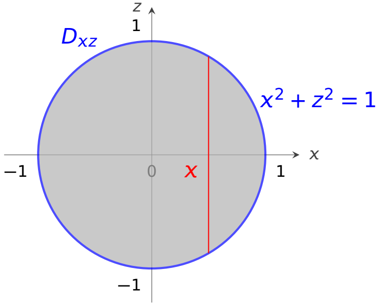
解

$$\text{原式}=\iint_{D_{xz}}\left[\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{1} y\sqrt{1-x^2}dy\right]dxdz=\iint_{D_{xz}}\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{2}(x^2+z^2)dxdz$$

$$=\int\left[\int\quad\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{2}(x^2+z^2)dz\right]dx$$

例 3 计算 $\iiint_{\Omega} y\sqrt{1-x^2}dxdydz$，其中 Ω 是如图的闭区域。



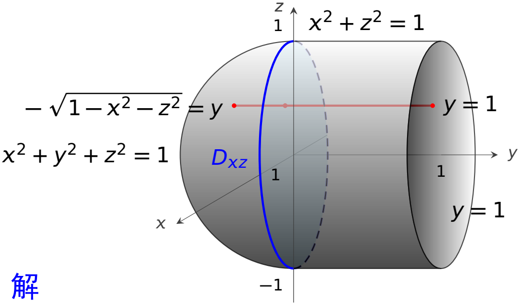


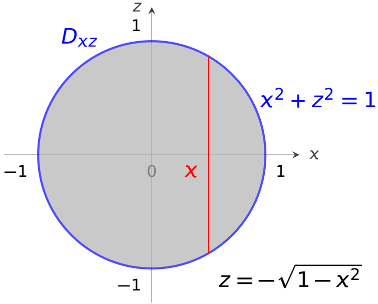
解

$$原式=\iint_{D_{xz}}\left[\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{1} y\sqrt{1-x^2}dy\right]dxdz=\iint_{D_{xz}}\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{2}(x^2+z^2)dxdz$$

$$=\int\left[\int \sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{2}(x^2+z^2)dz\right]dx$$

例 3 计算 $\iiint_\Omega y\sqrt{1-x^2}dxdydz$，其中 Ω 是如图的闭区域。



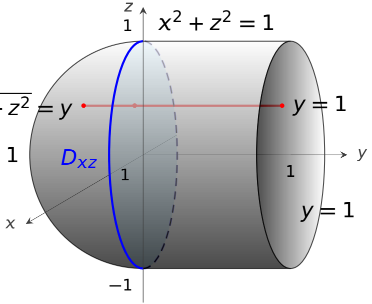


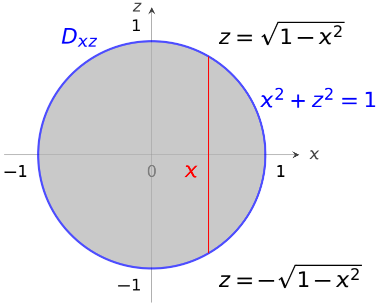
解

$$原式=\iint_{D_{xz}}\left[\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{1} y\sqrt{1-x^2}dy\right]dxdz=\iint_{D_{xz}}\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{2}(x^2+z^2)dxdz$$

$$=\int\left[\int \sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{2}(x^2+z^2)dz\right]dx$$

例 3 计算 $\iiint_\Omega y\sqrt{1-x^2}dxdydz$，其中 Ω 是如图的闭区域。



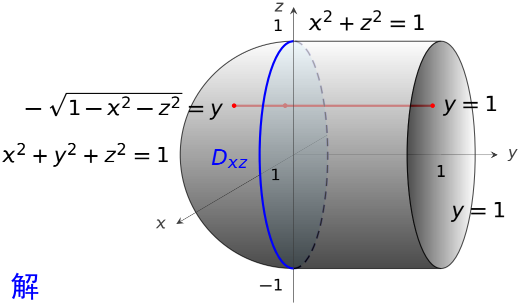


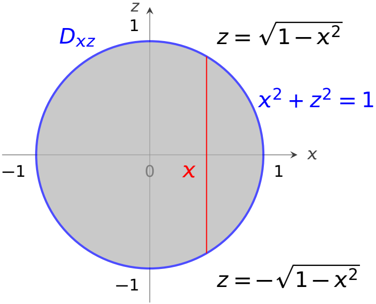
解

$$原式=\iint_{D_{xz}}\left[\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{1}y\sqrt{1-x^2}dy\right]dxdz=\iint_{D_{xz}}\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{2}(x^2+z^2)dxdz$$

$$=\int\left[\int\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{2}(x^2+z^2)dz\right]dx$$

例 3 计算 $\iiint_\Omega y\sqrt{1-x^2}dxdydz$，其中 Ω 是如图的闭区域。



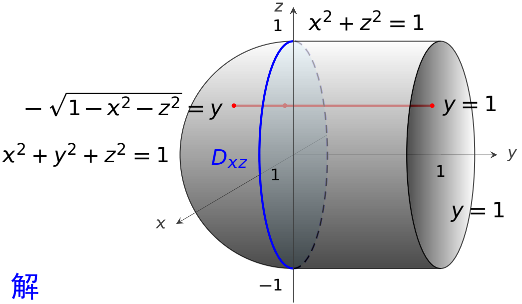


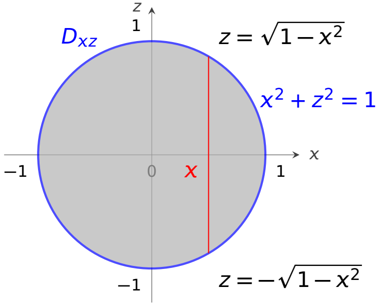
解

$$原式=\iint_{D_{xz}}\left[\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{1} y\sqrt{1-x^2}dy\right]dxdz=\iint_{D_{xz}}\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{2}(x^2+z^2)dxdz$$

$$=\int_{-1}^{1}\left[\int \sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{2}(x^2+z^2)dz\right]dx$$

例 3 计算 $\iiint_\Omega y\sqrt{1-x^2}dxdydz$，其中 Ω 是如图的闭区域。



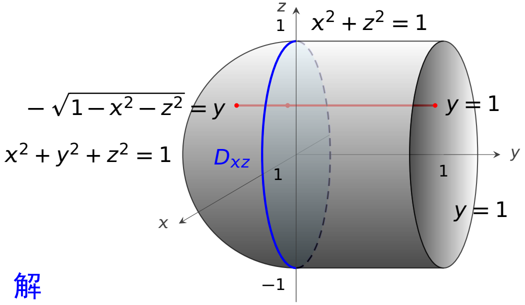


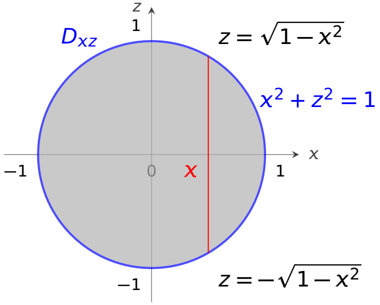
解

$$\text{原式}=\iint_{D_{xz}}\left[\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{1} y\sqrt{1-x^2}dy\right]dxdz=\iint_{D_{xz}}\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{2}(x^2+z^2)dxdz$$

$$=\int_{-1}^{1}\left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{2}(x^2+z^2)dz\right]dx$$

例 3 计算 $\iiint_\Omega y\sqrt{1-x^2}dxdydz$，其中 Ω 是如图的闭区域。





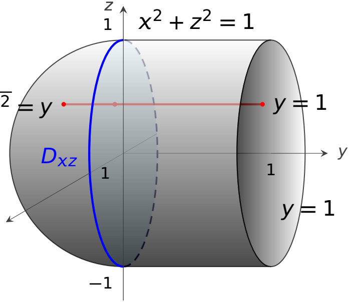
解

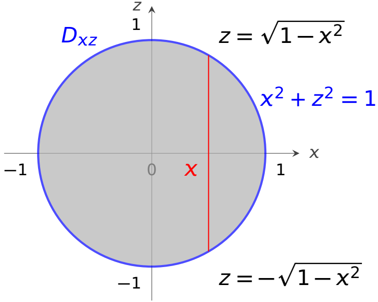
$$原式=\iint_{D_{xz}}\Big[\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{1}y\sqrt{1-x^2}dy\Big]dxdz=\iint_{D_{xz}}\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{2}(x^2+z^2)dxdz$$

$$=\int_{-1}^{1}\Big[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{2}(x^2+z^2)dz\Big]dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\Big[\frac{1}{3}(1+x^2-2x^4)\Big]dx$$

例 3 计算 $\iiint_\Omega y\sqrt{1-x^2}dxdydz$，其中 Ω 是如图的闭区域。





解

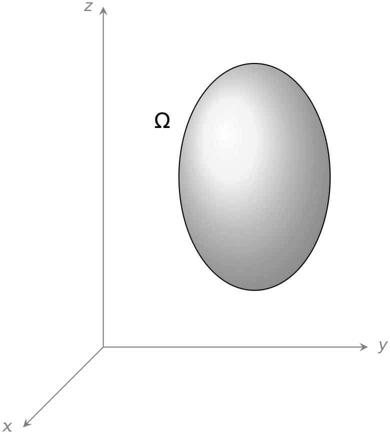
$$原式 = \iint_{D_{xz}}\left[\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{1} y\sqrt{1-x^2}dy\right]dxdz = \iint_{D_{xz}}\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{2}(x^2+z^2)dxdz$$

$$= \int_{-1}^{1}\left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{2}(x^2+z^2)dz\right]dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{3}(1+x^2-2x^4)\right]dx = \frac{28}{45}$$

截面法（“先二后一”）

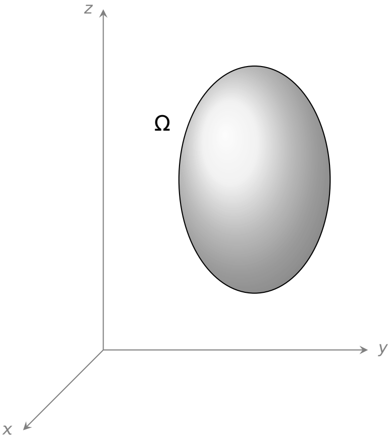
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$$



截面法（“先二后一”）

1. 先积 xy，再积 z

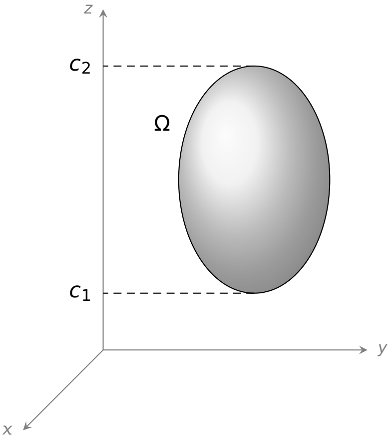
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int \left[\iint f(x,\ y,\ z)dxdy\right]dz$$



截面法（“先二后一”）

1. 先积 xy，再积 z

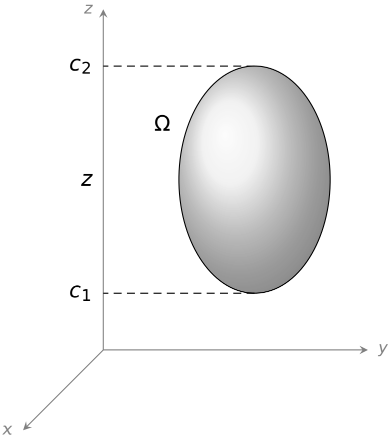
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int \left[\iint f(x,\, y,\, z)dxdy \right] dz$$



截面法（“先二后一”）

1. 先积 xy，再积 z

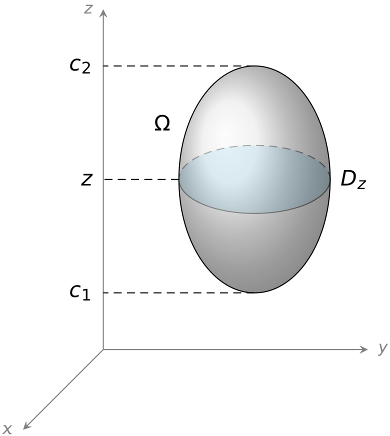
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int \left[\iint f(x, y, z)dxdy\right]dz$$



截面法（“先二后一”）

1. 先积 xy，再积 z

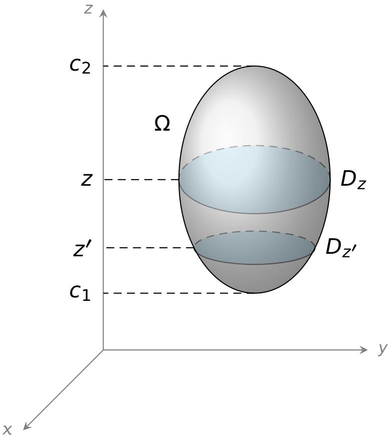
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int \left[\iint f(x, y, z)dxdy \right] dz$$



截面法（“先二后一”）

1. 先积 xy，再积 z

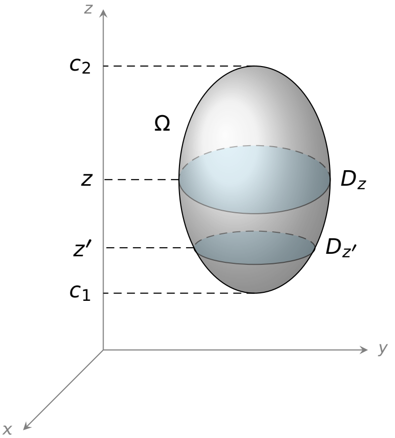
$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \int \left[\iint f(x,y,z)dxdy\right]dz$$



截面法（“先二后一”）

1. 先积 xy，再积 z

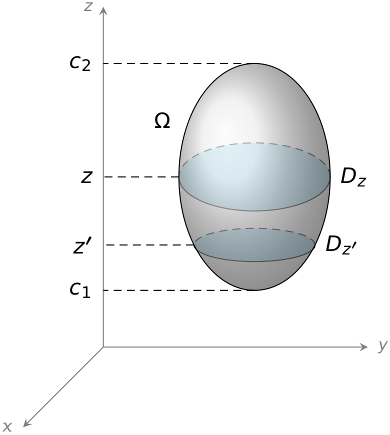
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_{c_1}^{c_2}\left[\iint f(x,\,y,\,z)dxdy\right]dz$$



截面法（“先二后一”）

1. 先积 xy，再积 z

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_{c_1}^{c_2}\left[\iint_{D_z} f(x,\ y,\ z)dxdy\right]dz$$



截面法（“先二后一”）

1. 先积 xy，再积 z

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_{c_1}^{c_2}\left[\iint_{D_z} f(x,\ y,\ z)dxdy\right]dz$$

截面法（“先二后一”）

1. 先积 xy，再积 z

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_{c_1}^{c_2}\left[\iint_{D_z} f(x,\ y,\ z)dxdy\right]dz$$

类似地

2. 先积 yz，再积 x

3. 先积 xz，再积 y

截面法（“先二后一”）

1. 先积 xy，再积 z

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_{c_1}^{c_2} \left[\iint_{D_z} f(x,\ y,\ z)dxdy \right] dz$$

类似地

2. 先积 yz，再积 x

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int \quad \left[\iint \quad f(x,\ y,\ z)dydz \right] dx$$

3. 先积 xz，再积 y

截面法（“先二后一”）

1. 先积 xy，再积 z

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_{c_1}^{c_2} \left[\iint_{D_z} f(x,\ y,\ z)dxdy \right] dz$$

类似地

2. 先积 yz，再积 x

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_{d_1}^{d_2} \left[\iint \quad f(x,\ y,\ z)dydz \right] dx$$

3. 先积 xz，再积 y

截面法（“先二后一”）

1. 先积 xy，再积 z

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_{c_1}^{c_2} \left[\iint_{D_z} f(x,\ y,\ z)dxdy \right] dz$$

类似地

2. 先积 yz，再积 x

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_{d_1}^{d_2} \left[\iint_{D_x} f(x,\ y,\ z)dydz \right] dx$$

3. 先积 xz，再积 y

截面法（“先二后一”）

1. 先积 xy，再积 z

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_{c_1}^{c_2}\left[\iint_{D_z} f(x,\ y,\ z)dxdy\right]dz$$

类似地

2. 先积 yz，再积 x

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_{d_1}^{d_2}\left[\iint_{D_x} f(x,\ y,\ z)dydz\right]dx$$

3. 先积 xz，再积 y

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int\left[\iint f(x,\ y,\ z)dxdz\right]dy$$

截面法（“先二后一”）

1. 先积 xy，再积 z

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_{c_1}^{c_2}\left[\iint_{D_z} f(x,\ y,\ z)dxdy\right]dz$$

类似地

2. 先积 yz，再积 x

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_{d_1}^{d_2}\left[\iint_{D_x} f(x,\ y,\ z)dydz\right]dx$$

3. 先积 xz，再积 y

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_{e_1}^{e_2}\left[\iint \quad f(x,\ y,\ z)dxdz\right]dy$$

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

截面法（“先二后一”）

1. 先积 xy，再积 z

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_{c_1}^{c_2} \left[\iint_{D_z} f(x,\ y,\ z)dxdy \right] dz$$

类似地

2. 先积 yz，再积 x

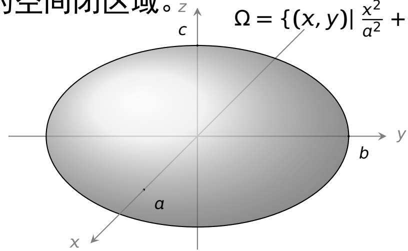
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_{d_1}^{d_2} \left[\iint_{D_x} f(x,\ y,\ z)dydz \right] dx$$

3. 先积 xz，再积 y

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_{e_1}^{e_2} \left[\iint_{D_y} f(x,\ y,\ z)dxdz \right] dy$$

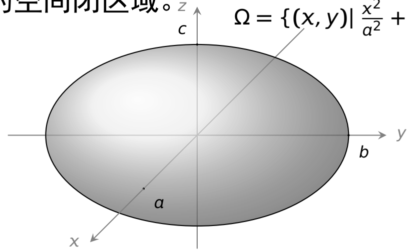
例 1 计算 $\iiint_\Omega z^2 dxdydz$，其中 Ω 是由椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所围成的空间闭区域。

$$\Omega=\{(x,y)|\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\}$$



例 1 计算 $\iiint_\Omega z^2 dxdydz$，其中 Ω 是由椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所围成的空间闭区域。

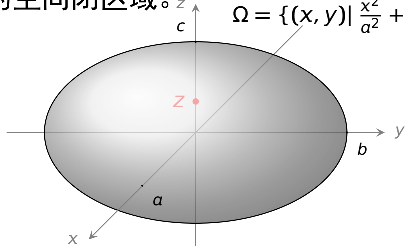
$$\Omega=\{(x,y)|\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\}$$



解

$$\text{原式}=\int\ \Big[\iint z^2 dxdy\Big]dz$$

例 1 计算 $\iiint_\Omega z^2dxdydz$，其中 Ω 是由椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所围成的空间闭区域。

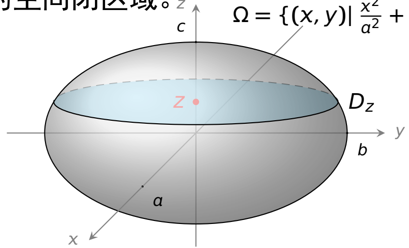


$$\Omega=\{(x,y)|\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\}$$

解

$$\text{原式}=\int\ \Big[\iint\ z^2dxdy\Big]dz$$

例 1 计算 $\iiint_\Omega z^2 dxdydz$，其中 Ω 是由椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所围成的空间闭区域。



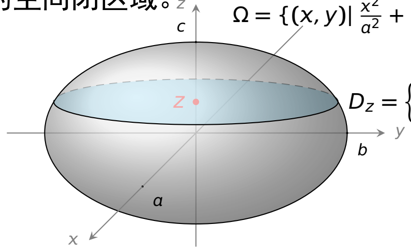
$$\Omega=\{(x,y)|\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\}$$

解

$$原式=\int\ \Big[\iint z^2 dxdy\Big]dz$$

例 1 计算 $\iiint_\Omega z^2 dxdydz$，其中 Ω 是由椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所围成的空间闭区域。

$$\Omega=\{(x,y)|\ \tfrac{x^2}{a^2}+\tfrac{y^2}{b^2}+\tfrac{z^2}{c^2}\le 1\}$$

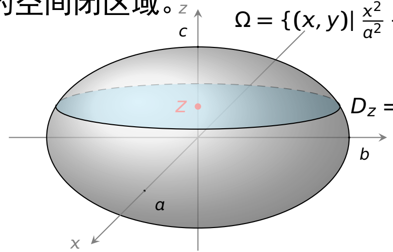


$$D_z=\left\{(x,y)\middle|\ \tfrac{x^2}{a^2}+\tfrac{y^2}{b^2}\le 1-\tfrac{z^2}{c^2}\right\}$$

解

$$\text{原式}=\int\ \Big[\iint z^2 dxdy\Big]dz$$

例 1 计算 $\iiint_\Omega z^2 dxdydz$，其中 Ω 是由椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所围成的空间闭区域。



$$\Omega=\{(x,y)|\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\}$$

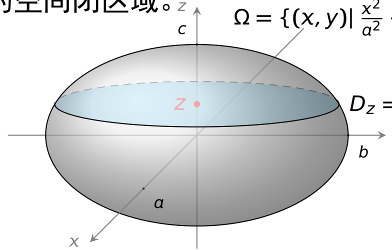
$$D_z=\left\{(x,y)\middle|\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1-\frac{z^2}{c^2}\right\}$$

$$=\left\{(x,y)\middle|\ \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2}\le 1\right\}$$

解

$$\text{原式}=\int\left[\iint z^2 dxdy\right]dz$$

例 1 计算 $\iiint_\Omega z^2 dxdydz$，其中 Ω 是由椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所围成的空间闭区域。



$$\Omega=\{(x,y)|\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\}$$

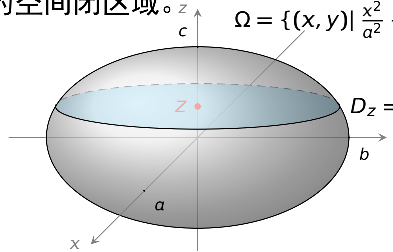
$$D_z=\left\{(x,y)\Big|\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1-\frac{z^2}{c^2}\right\}$$

$$=\left\{(x,y)\Bigg|\ \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2}\le 1\right\}$$

解

$$\text{原式}=\int_{-c}^{c}\left[\iint z^2 dxdy\right]dz$$

例 1 计算 $\iiint_\Omega z^2dxdydz$，其中 Ω 是由椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所围成的空间闭区域。



$$\Omega=\{(x,y)|\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\}$$

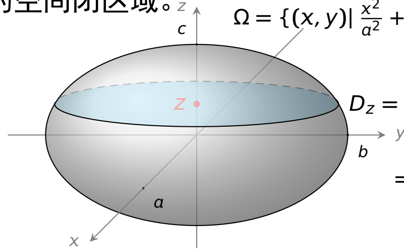
$$D_z=\left\{(x,y)\middle|\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1-\frac{z^2}{c^2}\right\}$$

$$=\left\{(x,y)\middle|\ \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2}\le 1\right\}$$

解

$$\text{原式}=\int_{-c}^{c}\left[\iint_{D_z}z^2dxdy\right]dz$$

例 1 计算 $\iiint_\Omega z^2 dxdydz$，其中 Ω 是由椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所围成的空间闭区域。



$$\Omega=\{(x,y)|\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\}$$

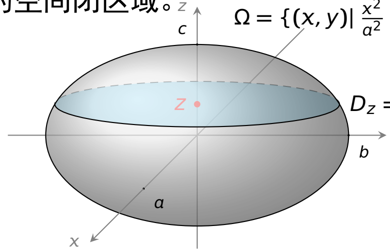
$$D_z=\left\{(x,y)\middle|\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1-\frac{z^2}{c^2}\right\}$$

$$=\left\{(x,y)\middle|\ \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2}\le 1\right\}$$

解

$$\text{原式}=\int_{-c}^{c}\Big[\iint_{D_z} z^2 dxdy\Big]dz=\int_{-c}^{c} z^2\Big[\iint_{D_z} dxdy\Big]dz$$

例 1 计算 $\iiint_\Omega z^2dxdydz$，其中 Ω 是由椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所围成的空间闭区域。



$$\Omega=\{(x,y)|\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\}$$

$$D_z=\left\{(x,y)\middle|\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1-\frac{z^2}{c^2}\right\}$$

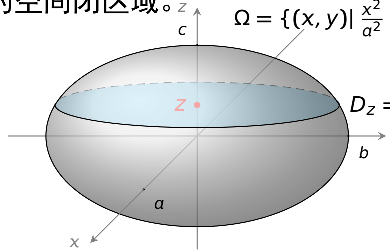
$$=\left\{(x,y)\middle|\ \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2}\le 1\right\}$$

解

$$\text{原式}=\int_{-c}^{c}\left[\iint_{D_z}z^2dxdy\right]dz=\int_{-c}^{c}z^2\left[\iint_{D_z}dxdy\right]dz$$

$$\pi\cdot ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)$$

例 1 计算 $\iiint_\Omega z^2 dxdydz$，其中 Ω 是由椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所围成的空间闭区域。



$$\Omega=\{(x,y)|\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\}$$

$$D_z=\left\{(x,y)\middle|\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1-\frac{z^2}{c^2}\right\}$$

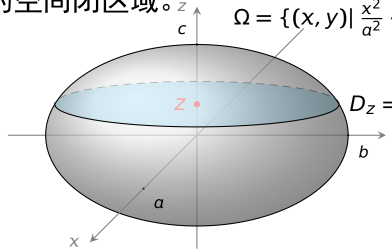
$$=\left\{(x,y)\middle|\ \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2}\le 1\right\}$$

解

$$原式=\int_{-c}^{c}\left[\iint_{D_z} z^2 dxdy\right]dz=\int_{-c}^{c} z^2\left[\iint_{D_z} dxdy\right]dz$$

$$=\int_{-c}^{c} z^2\left[\pi\cdot ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\right]dz$$

例 1 计算 $\iiint_\Omega z^2dxdydz$，其中 Ω 是由椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所围成的空间闭区域。



$$\Omega=\{(x,y)|\ \tfrac{x^2}{a^2}+\tfrac{y^2}{b^2}+\tfrac{z^2}{c^2}\le 1\}$$

$$D_z=\left\{(x,y)\middle|\ \tfrac{x^2}{a^2}+\tfrac{y^2}{b^2}\le 1-\tfrac{z^2}{c^2}\right\}$$

$$=\left\{(x,y)\middle|\ \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2}\le 1\right\}$$

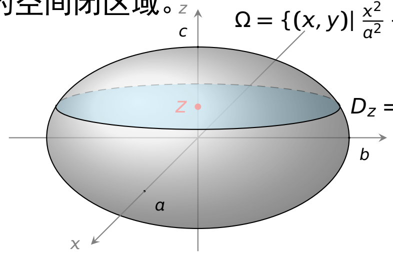
解

$$\text{原式}=\int_{-c}^{c}\left[\iint_{D_z}z^2dxdy\right]dz=\int_{-c}^{c}z^2\left[\iint_{D_z}dxdy\right]dz$$

$$=\int_{-c}^{c}z^2\left[\pi\cdot ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\right]dz$$

$$=\pi\cdot ab\int_{1}^{4}\left(z^2-\frac{z^4}{c^2}\right)dz$$

例 1 计算 $\iiint_\Omega z^2 dxdydz$，其中 Ω 是由椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所围成的空间闭区域。



$$\Omega = \{(x,y) \mid \tfrac{x^2}{a^2}+\tfrac{y^2}{b^2}+\tfrac{z^2}{c^2}\le 1\}$$

$$D_z = \left\{(x,y) \middle| \tfrac{x^2}{a^2}+\tfrac{y^2}{b^2}\le 1-\tfrac{z^2}{c^2}\right\}$$

$$= \left\{(x,y) \middle| \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2}\le 1\right\}$$

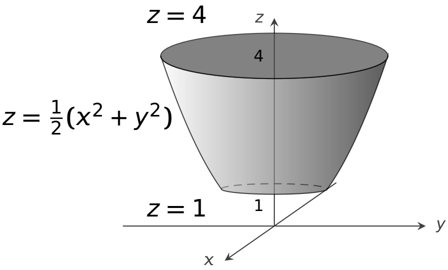
解

$$\text{原式} = \int_{-c}^{c}\left[\iint_{D_z} z^2 dxdy\right]dz = \int_{-c}^{c} z^2\left[\iint_{D_z} dxdy\right]dz$$

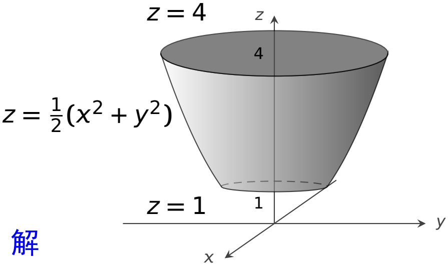
$$= \int_{-c}^{c} z^2\left[\pi\cdot ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\right]dz$$

$$= \pi\cdot ab\int_1^4\left(z^2-\frac{z^4}{c^2}\right)dz = \frac{4}{15}\pi abc^3$$

例 2 计算 $\iiint_\Omega (x^2+5xy^2\sin\sqrt{x^2+y^2})dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 与平面 $z=1$ 和 $z=4$ 所围成。



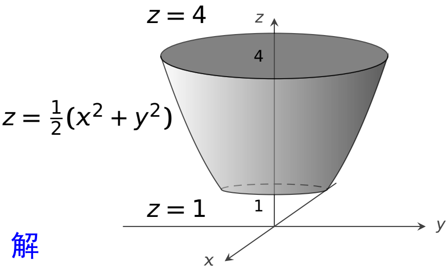
例 2 计算 $\iiint_\Omega (x^2+5xy^2\sin\sqrt{x^2+y^2})dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 与平面 $z=1$ 和 $z=4$ 所围成。



解

$$\text{原式} \xlongequal{\text{对称性}} \iiint_\Omega x^2 dxdydz$$

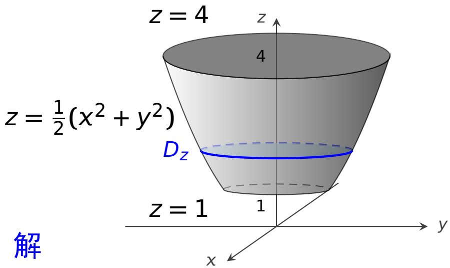
例 2 计算 $\iiint_\Omega (x^2 + 5xy^2 \sin\sqrt{x^2+y^2})dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 与平面 $z = 1$ 和 $z = 4$ 所围成。



解

$$\text{原式} \xlongequal{\text{对称性}} \iiint_\Omega x^2 dxdydz = \int \left[\iint x^2 dxdy\right] dz$$

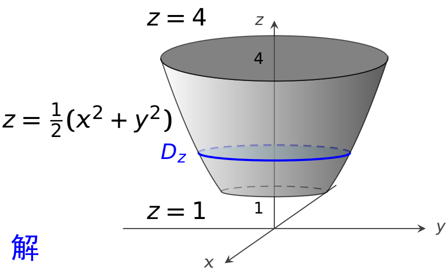
例 2 计算 $\iiint_\Omega (x^2 + 5xy^2 \sin\sqrt{x^2+y^2})dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 与平面 $z = 1$ 和 $z = 4$ 所围成。

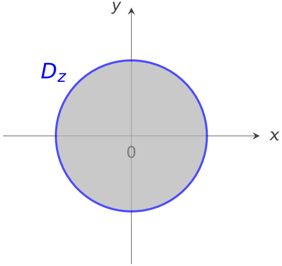


解

$$\text{原式} \xlongequal{\text{对称性}} \iiint_\Omega x^2 dxdydz = \int \left[\iint x^2 dxdy\right] dz$$

例 2 计算 $\iiint_\Omega (x^2+5xy^2\sin\sqrt{x^2+y^2})dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 与平面 $z=1$ 和 $z=4$ 所围成。

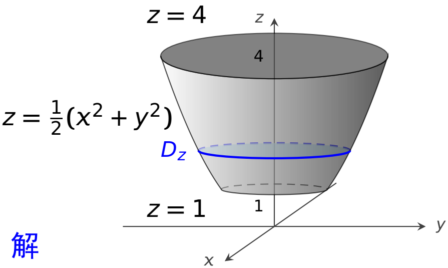


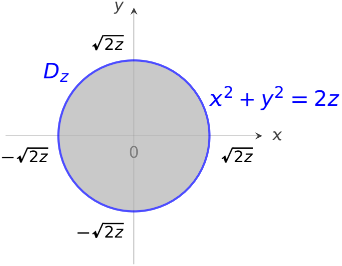


解

$$\text{原式} \xlongequal{\text{对称性}} \iiint_\Omega x^2 dxdydz = \int \Big[\iint x^2 dxdy\Big] dz$$

例 2 计算 $\iiint_\Omega (x^2 + 5xy^2 \sin\sqrt{x^2+y^2})dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 与平面 $z=1$ 和 $z=4$ 所围成。

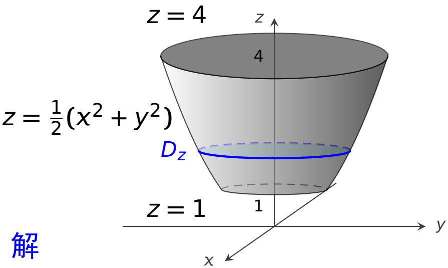


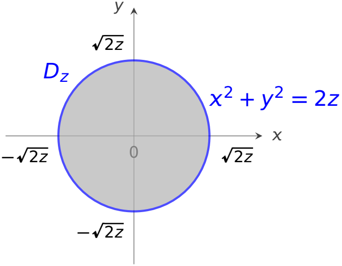


解

$$\text{原式} \xlongequal{\text{对称性}} \iiint_\Omega x^2 dxdydz = \int \left[\iint x^2 dxdy\right] dz$$

例 2 计算 $\iiint_\Omega (x^2 + 5xy^2 \sin\sqrt{x^2+y^2})dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 与平面 $z = 1$ 和 $z = 4$ 所围成。

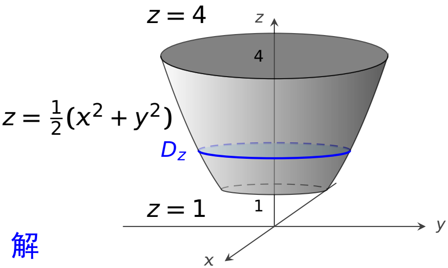


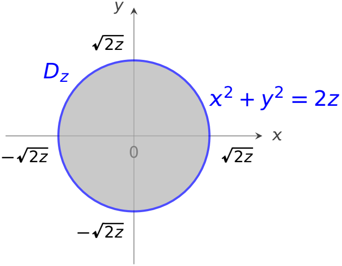


解

$$\text{原式} \xlongequal{\text{对称性}} \iiint_\Omega x^2 dxdydz = \int_1^4 \Big[\iint x^2 dxdy\Big] dz$$

例 2 计算 $\iiint_\Omega (x^2+5xy^2\sin\sqrt{x^2+y^2})dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 与平面 $z=1$ 和 $z=4$ 所围成。

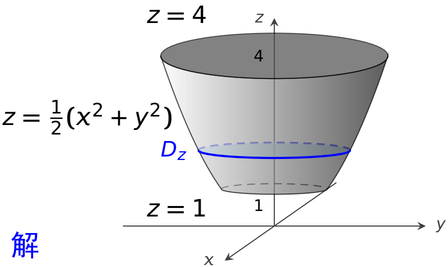


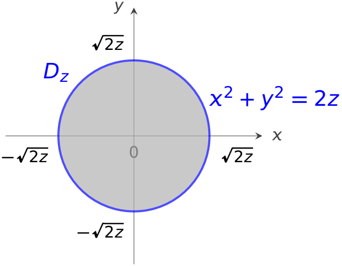


解

$$\text{原式} \xlongequal{\text{对称性}} \iiint_\Omega x^2dxdydz=\int_1^4\left[\iint_{D_z}x^2dxdy\right]dz$$

例 2 计算 $\iiint_\Omega (x^2+5xy^2\sin\sqrt{x^2+y^2})dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 与平面 $z=1$ 和 $z=4$ 所围成。



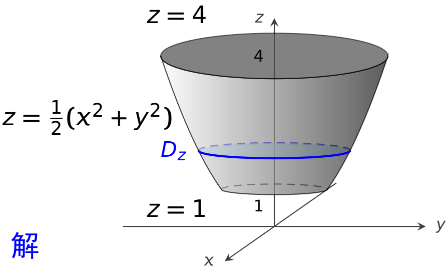


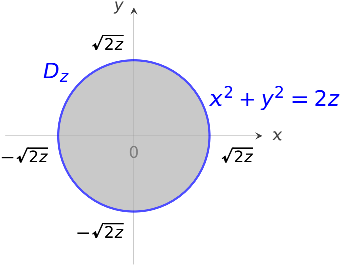
解

$$\text{原式} \xlongequal{\text{对称性}} \iiint_\Omega x^2dxdydz = \int_1^4 \left[\iint_{D_z} x^2dxdy\right]dz$$

$$\iint_{D_z} \frac{1}{2}(x^2+y^2)dxdy$$

例 2 计算 $\iiint_\Omega (x^2+5xy^2\sin\sqrt{x^2+y^2})dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 与平面 $z=1$ 和 $z=4$ 所围成。



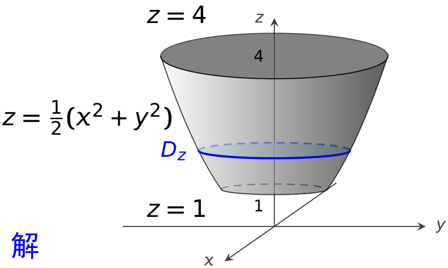


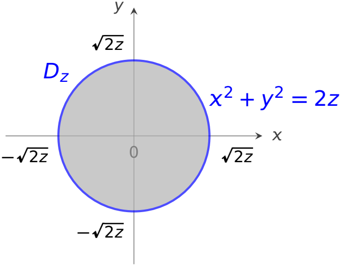
解

$$\text{原式} \xlongequal{\text{对称性}} \iiint_\Omega x^2dxdydz = \int_1^4\left[\iint_{D_z} x^2dxdy\right]dz$$

$$= \int_1^4\left[\iint_{D_z} \frac{1}{2}(x^2+y^2)dxdy\right]dz$$

例 2 计算 $\iiint_\Omega (x^2+5xy^2\sin\sqrt{x^2+y^2})dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 与平面 $z=1$ 和 $z=4$ 所围成。





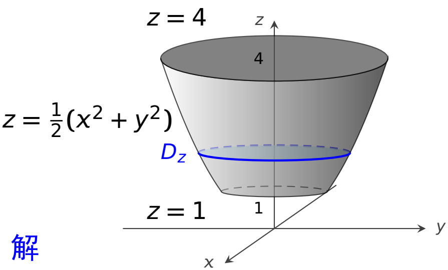
解

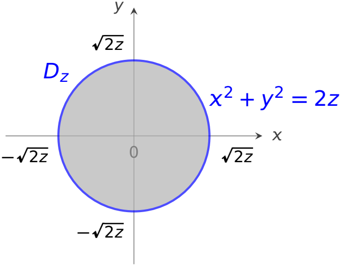
$$\text{原式} \xlongequal{\text{对称性}} \iiint_\Omega x^2 dxdydz = \int_1^4 \left[\iint_{D_z} x^2 dxdy\right] dz$$

$$= \int_1^4 \left[\iint_{D_z} \frac{1}{2}(x^2+y^2)dxdy\right] dz$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\sqrt{2z}} \rho^2\cdot\rho d\rho\right) d\theta$$

例 2 计算 $\iiint_\Omega (x^2 + 5xy^2 \sin\sqrt{x^2+y^2})dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 与平面 $z=1$ 和 $z=4$ 所围成。





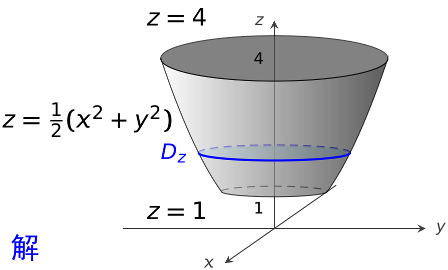
解

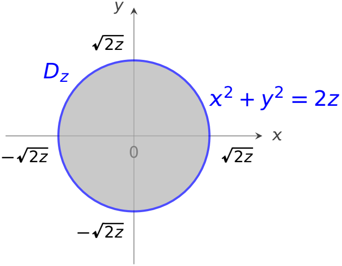
$$\text{原式} \xlongequal{\text{对称性}} \iiint_\Omega x^2 dxdydz = \int_1^4 \left[\iint_{D_z} x^2 dxdy\right] dz$$

$$= \int_1^4 \left[\iint_{D_z} \frac{1}{2}(x^2+y^2)dxdy\right] dz$$

$$= \int_1^4 \left[\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\sqrt{2z}} \rho^2 \cdot \rho d\rho\right) d\theta\right] dz$$

例 2 计算 $\iiint_\Omega (x^2+5xy^2\sin\sqrt{x^2+y^2})dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 与平面 $z=1$ 和 $z=4$ 所围成。





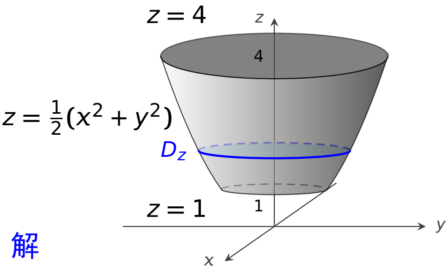
解

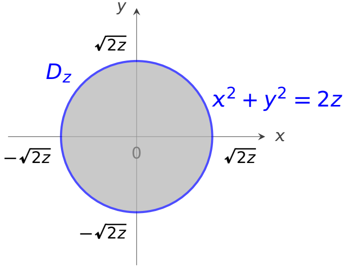
$$\text{原式} \xlongequal{\text{对称性}} \iiint_\Omega x^2dxdydz = \int_1^4\Big[\iint_{D_z} x^2dxdy\Big]dz$$

$$= \int_1^4\Big[\iint_{D_z} \frac{1}{2}(x^2+y^2)dxdy\Big]dz$$

$$= \int_1^4\Big[\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{\sqrt{2z}} \rho^2\cdot\rho d\rho\Big)d\theta\Big]dz = \pi\int_1^4 z^2dz$$

例 2 计算 $\iiint_\Omega (x^2 + 5xy^2 \sin\sqrt{x^2+y^2})dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 与平面 $z = 1$ 和 $z = 4$ 所围成。





解

$$\text{原式} \xlongequal{\text{对称性}} \iiint_\Omega x^2 dxdydz = \int_1^4 \Big[\iint_{D_z} x^2 dxdy\Big]dz$$

$$= \int_1^4 \Big[\iint_{D_z} \frac{1}{2}(x^2+y^2)dxdy\Big]dz$$

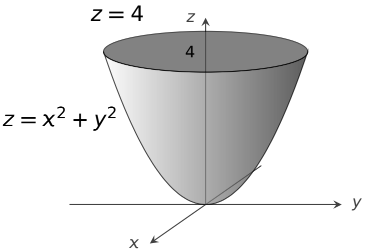
$$= \int_1^4 \Big[\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{\sqrt{2z}} \rho^2 \cdot \rho d\rho\Big)d\theta\Big]dz = \pi \int_1^4 z^2 dz = 21\pi$$

- 上述坐标 (ρ, θ, z) 称为柱面坐标
- 变换

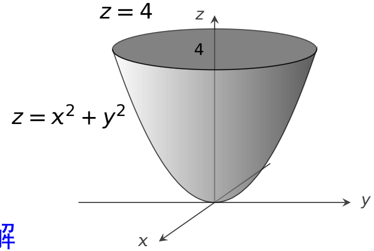
$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

柱面坐标变换

例 3 计算 $\iiint_{\Omega} z dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成的闭区域。



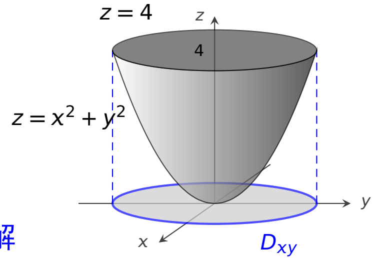
例 3 计算 $\iiint_\Omega z\,dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=4$ 所围成的闭区域。



解

$$\text{原式} = \iint \left[\int \quad z\,dz \right] dxdy$$

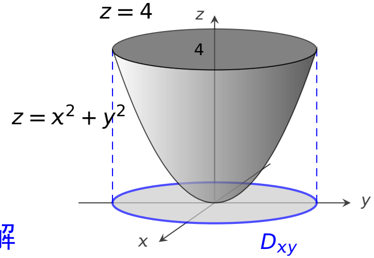
例 3 计算 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$，其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成的闭区域。

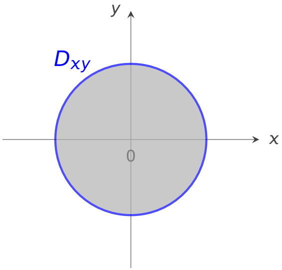


解

$$\text{原式} = \iint \left[\int \quad z dz \right] dx dy$$

例 3 计算 $\iiint_\Omega z dx dy dz$，其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成的闭区域。

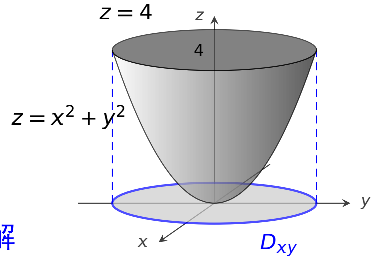


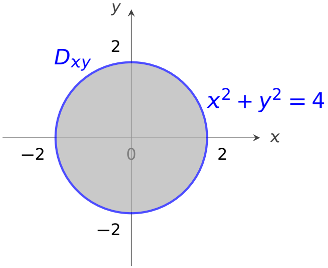


解

$$\text{原式} = \iint \left[\int \quad z dz \right] dx dy$$

例 3 计算 $\iiint_\Omega z\,dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成的闭区域。

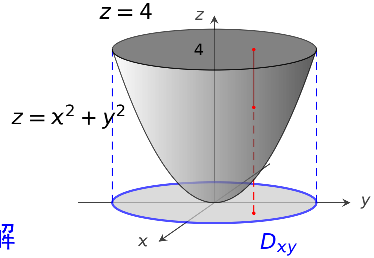


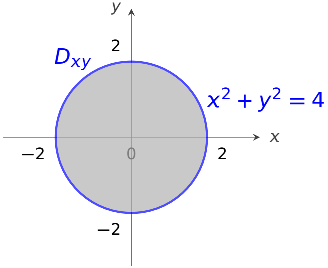


解

$$原式 = \iint \left[\int \quad z\,dz \right] dxdy$$

例 3 计算 $\iiint_\Omega z\,dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成的闭区域。

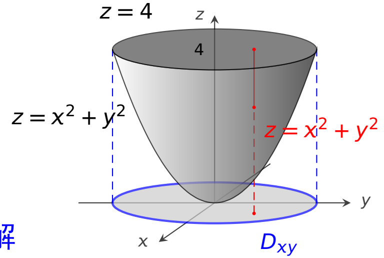


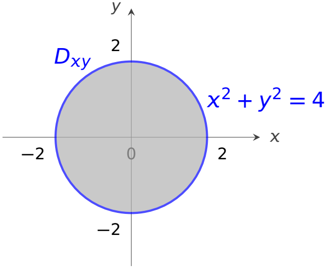


解

$$\text{原式} = \iint \left[\int zdz \right] dxdy$$

例 3 计算 $\iiint_\Omega z\,dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=4$ 所围成的闭区域。

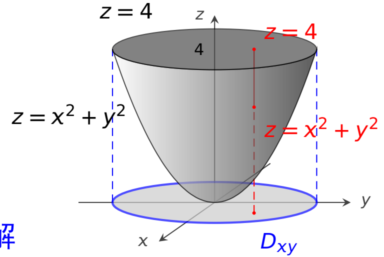


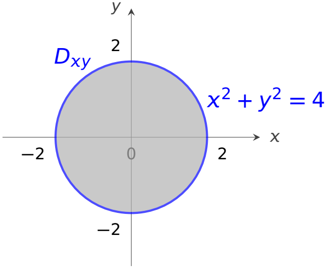


解

$$\text{原式} = \iint \left[\int \quad z\,dz \right] dxdy$$

例 3 计算 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$，其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成的闭区域。

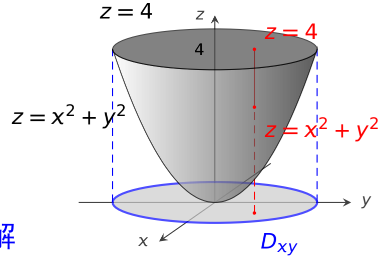


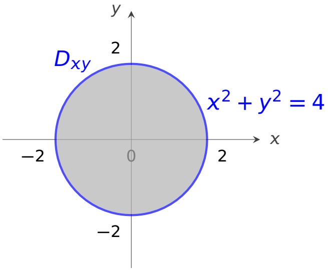


解

$$原式 = \iint \left[\int zdz \right] dxdy$$

例 3 计算 $\iiint_\Omega z dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成的闭区域。

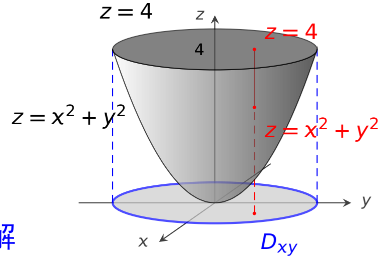


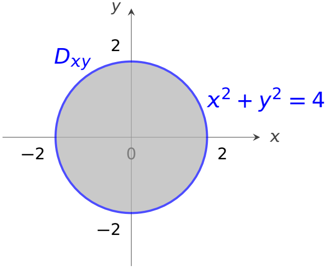


解

$$原式 = \iint_{D_{xy}} \left[\int \qquad zdz \right] dxdy$$

例 3 计算 $\iiint_\Omega zdxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成的闭区域。

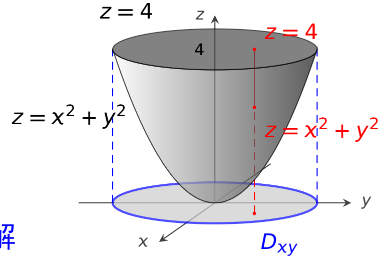


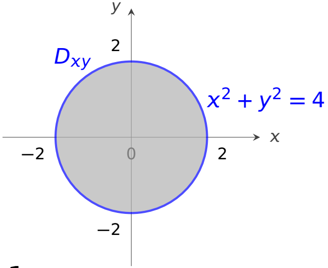


解

$$\text{原式} = \iint_{D_{xy}} \left[\int_{x^2+y^2}^{4} zdz \right] dxdy$$

例 3 计算 $\iiint_\Omega z dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成的闭区域。



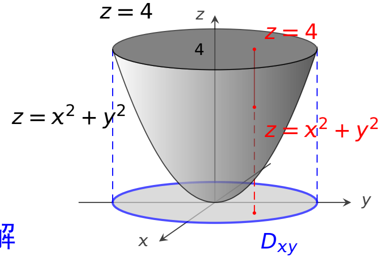


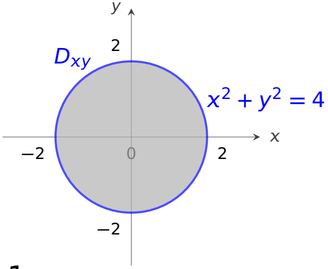
解

$$原式 = \iint_{D_{xy}} \left[\int_{x^2+y^2}^{4} z dz \right] dxdy$$

$$\frac{1}{2}\left[16 - (x^2 + y^2)^2\right]$$

例 3 计算 $\iiint_\Omega z dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成的闭区域。

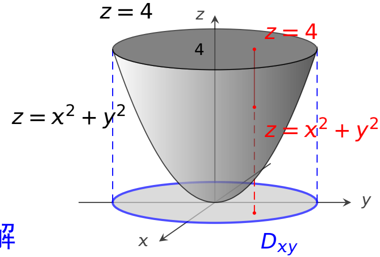


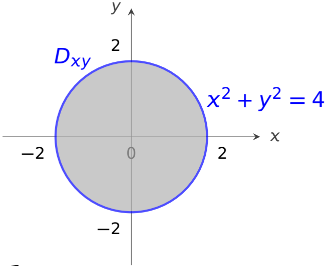


解

$$\text{原式} = \iint_{D_{xy}} \left[\int_{x^2+y^2}^{4} z dz\right] dxdy = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2}\left[16 - (x^2+y^2)^2\right] dxdy$$

例 3 计算 $\iiint_\Omega z dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=4$ 所围成的闭区域。



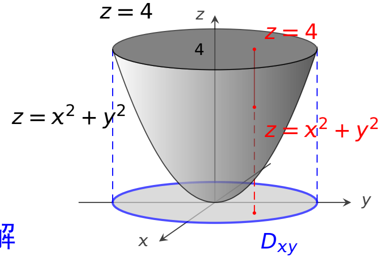


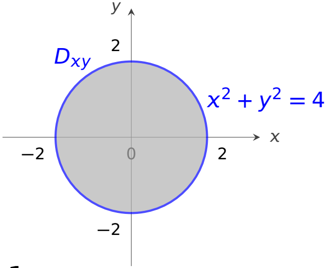
解

$$\text{原式}=\iint_{D_{xy}}\left[\int_{x^2+y^2}^{4} zdz\right]dxdy=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{2}\left[16-(x^2+y^2)^2\right]dxdy$$

$$\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}$$

例 3 计算 $\iiint_\Omega z dx dy dz$，其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成的闭区域。



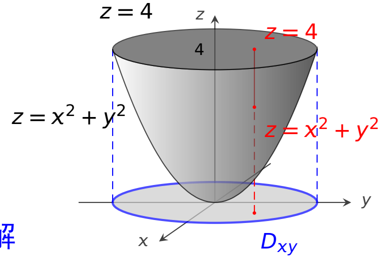


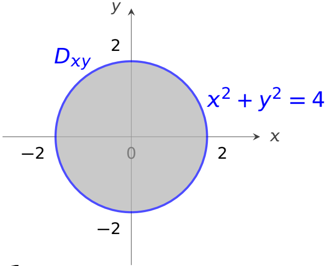
解

$$\text{原式} = \iint_{D_{xy}} \left[\int_{x^2+y^2}^{4} z dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} \left[16 - (x^2 + y^2)^2 \right] dx dy$$

$$\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} \left[16 - \rho^4 \right]$$

例 3 计算 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$，其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成的闭区域。



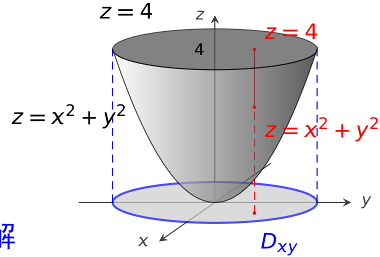


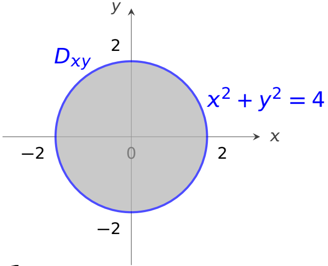
解

$$\text{原式} = \iint_{D_{xy}} \left[\int_{x^2+y^2}^{4} z dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} \left[16 - (x^2 + y^2)^2 \right] dx dy$$

$$\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} \left[16 - \rho^4 \right] \cdot \rho d\rho d\theta$$

例 3 计算 $\iiint_\Omega z\,dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=4$ 所围成的闭区域。





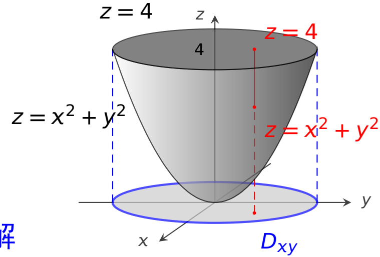
解

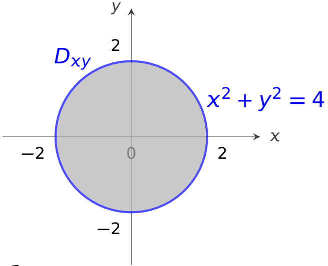
$$\text{原式}=\iint_{D_{xy}}\left[\int_{x^2+y^2}^{4} z\,dz\right]dxdy=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{2}\left[16-(x^2+y^2)^2\right]dxdy$$

$$\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}\iint_{D_{xy}}\frac{1}{2}\left[16-\rho^4\right]\cdot\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$=\int\left[\int\frac{1}{2}\left[16-\rho^4\right]\cdot\rho\,d\rho\right]d\theta$$

例 3 计算 $\iiint_\Omega z\,dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=4$ 所围成的闭区域。





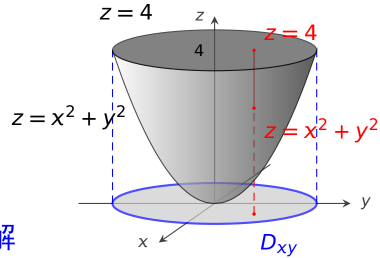
解

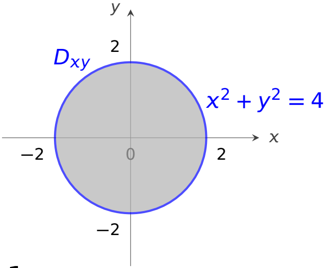
$$原式=\iint_{D_{xy}}\left[\int_{x^2+y^2}^{4} zdz\right]dxdy=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{2}\left[16-(x^2+y^2)^2\right]dxdy$$

$$\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}\iint_{D_{xy}}\frac{1}{2}\left[16-\rho^4\right]\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\int\ \frac{1}{2}\left[16-\rho^4\right]\cdot\rho d\rho\right]d\theta$$

例 3 计算 $\iiint_{\Omega} z\,dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=4$ 所围成的闭区域。





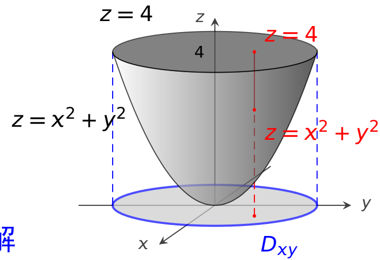
解

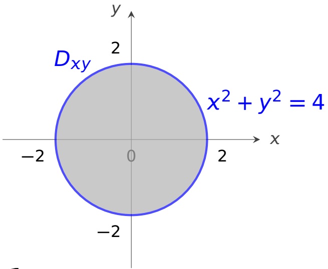
$$\text{原式}=\iint_{D_{xy}}\left[\int_{x^2+y^2}^{4} z\,dz\right]dxdy=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{2}\left[16-(x^2+y^2)^2\right]dxdy$$

$$\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}\iint_{D_{xy}}\frac{1}{2}\left[16-\rho^4\right]\cdot\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^2\frac{1}{2}\left[16-\rho^4\right]\cdot\rho\,d\rho\right]d\theta$$

例 3 计算 $\iiint_\Omega z\,dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=4$ 所围成的闭区域。





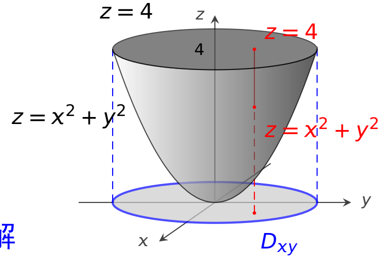
解

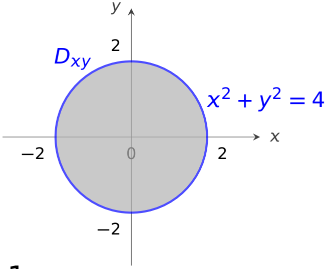
$$\text{原式}=\iint_{D_{xy}}\left[\int_{x^2+y^2}^{4} z\,dz\right]dxdy=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{2}\left[16-(x^2+y^2)^2\right]dxdy$$

$$\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}\iint_{D_{xy}}\frac{1}{2}\left[16-\rho^4\right]\cdot\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^2\frac{1}{2}\left[16-\rho^4\right]\cdot\rho\,d\rho\right]d\theta=\pi\int_0^2(16-\rho^4)\cdot\rho\,d\rho$$

例 3 计算 $\iiint_\Omega z\,dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=4$ 所围成的闭区域。





解

$$\text{原式}=\iint_{D_{xy}}\left[\int_{x^2+y^2}^{4} z\,dz\right]dxdy=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{2}\left[16-(x^2+y^2)^2\right]dxdy$$

$$\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}\iint_{D_{xy}}\frac{1}{2}\left[16-\rho^4\right]\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^2\frac{1}{2}\left[16-\rho^4\right]\cdot\rho d\rho\right]d\theta=\pi\int_0^2(16-\rho^4)\cdot\rho d\rho=\frac{64}{3}\pi$$

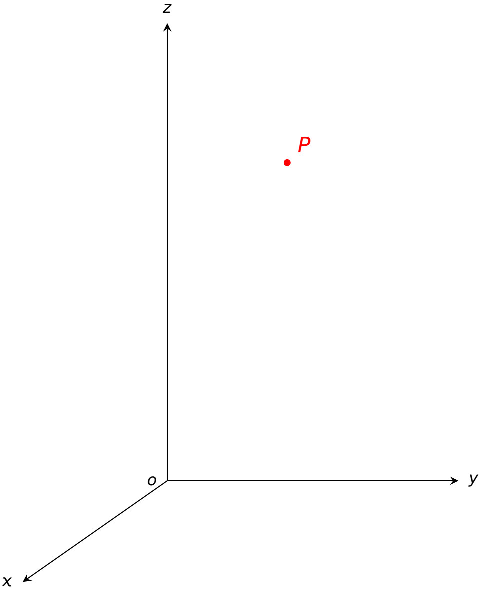
We are here now...

1. 三重积分的概念

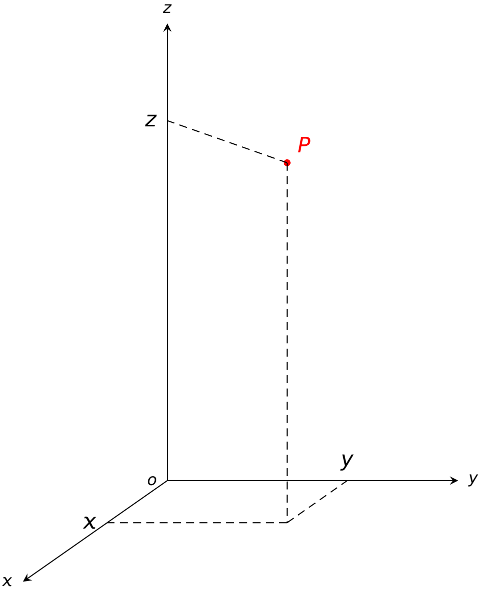
2. 三重积分的计算：化为累次积分

3. 球面坐标

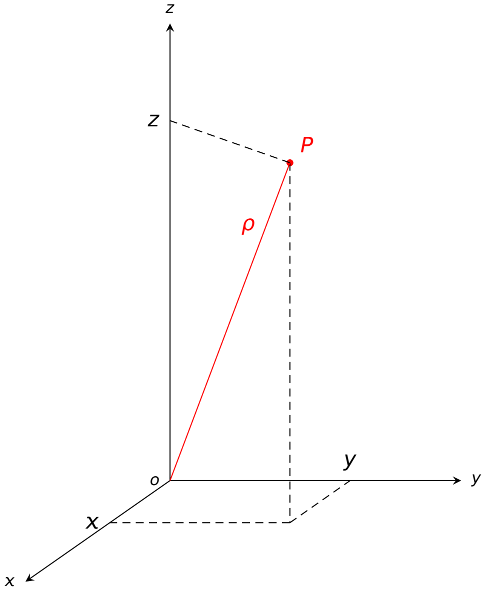
球面坐标



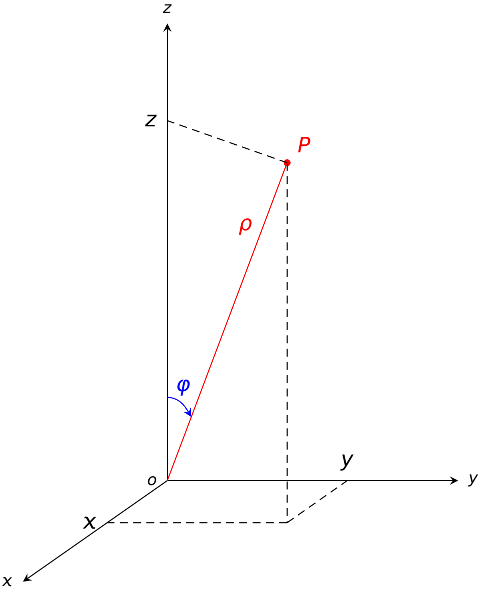
球面坐标



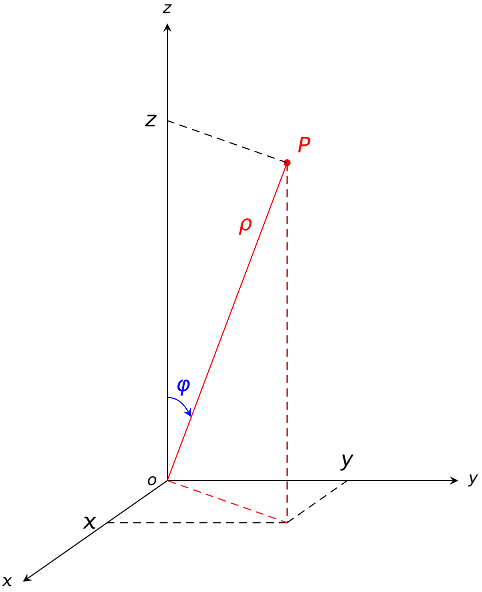
球面坐标



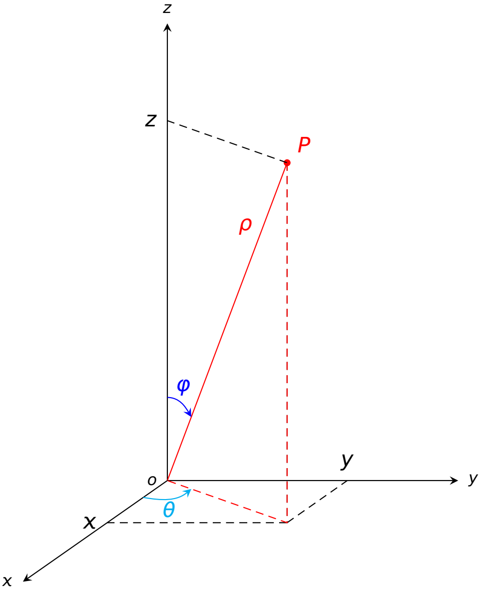
球面坐标



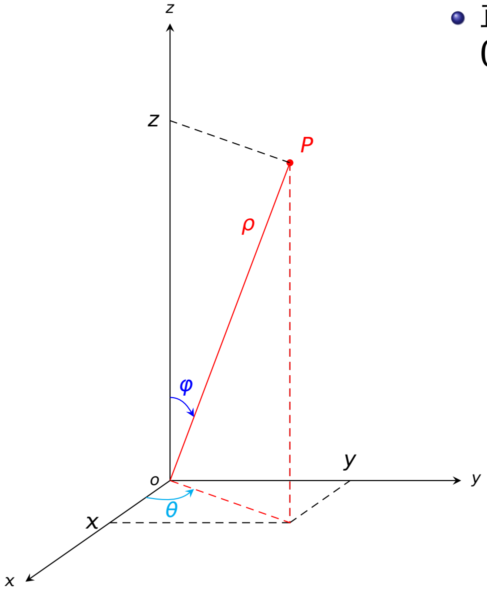
球面坐标



球面坐标

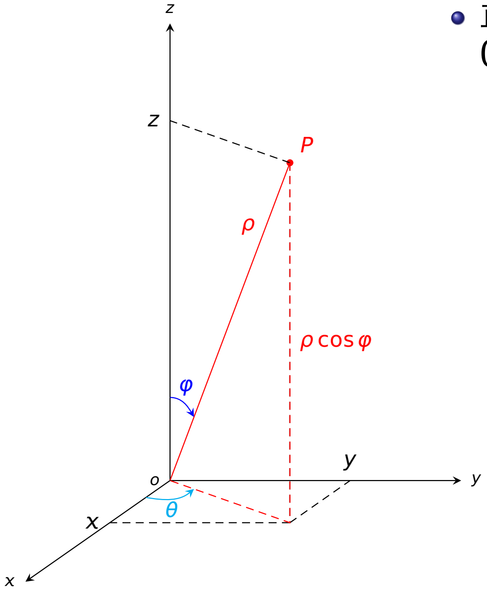


球面坐标



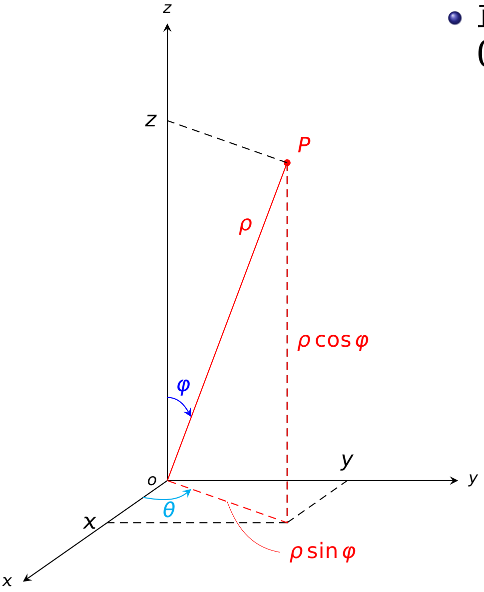
- 直角坐标 (x, y, z)，球面坐标 (ρ, φ, θ) 的转换：

球面坐标



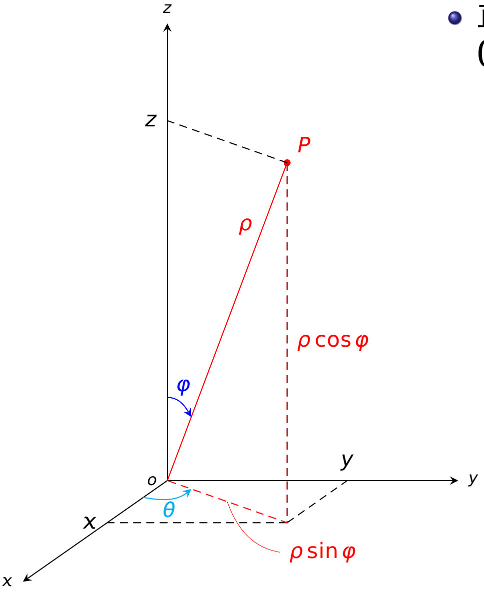
- 直角坐标 (x, y, z)，球面坐标 (ρ, φ, θ) 的转换：

球面坐标



- 直角坐标 (x, y, z)，球面坐标 (ρ, φ, θ) 的转换：

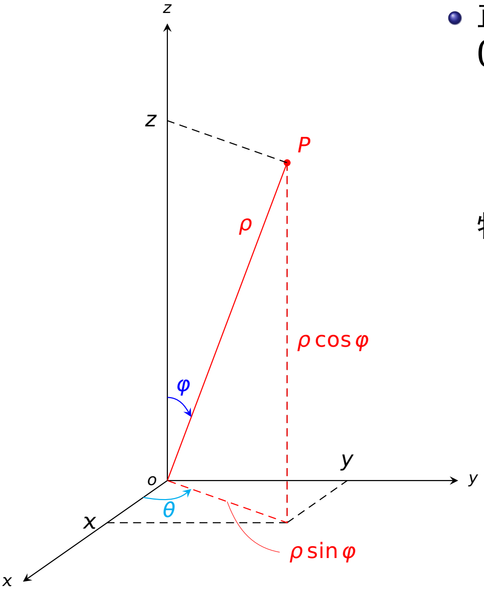
球面坐标



- 直角坐标 (x, y, z)，球面坐标 (ρ, φ, θ) 的转换：

$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

球面坐标

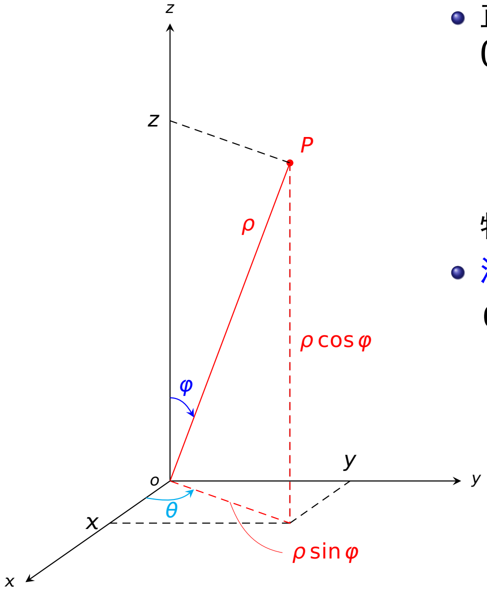


- 直角坐标 (x, y, z)，球面坐标 (ρ, φ, θ) 的转换：

$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

特别地，$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$

球面坐标



- 直角坐标 (x, y, z)，球面坐标 (ρ, φ, θ) 的转换：

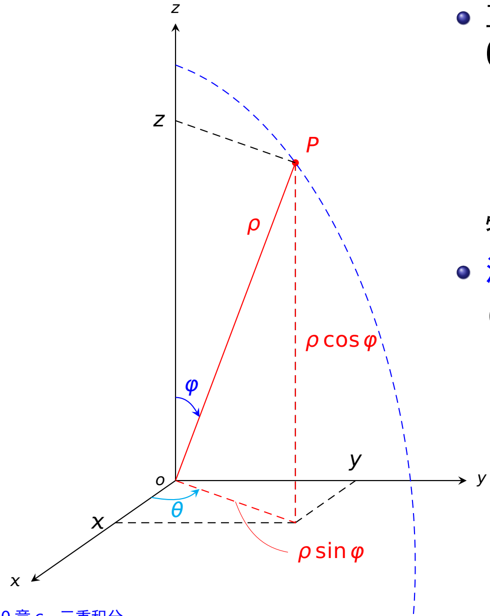
$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

特别地，$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$

- 注

$0 \leq \rho < \infty,$

球面坐标



- 直角坐标 (x, y, z)，球面坐标 (ρ, φ, θ) 的转换：

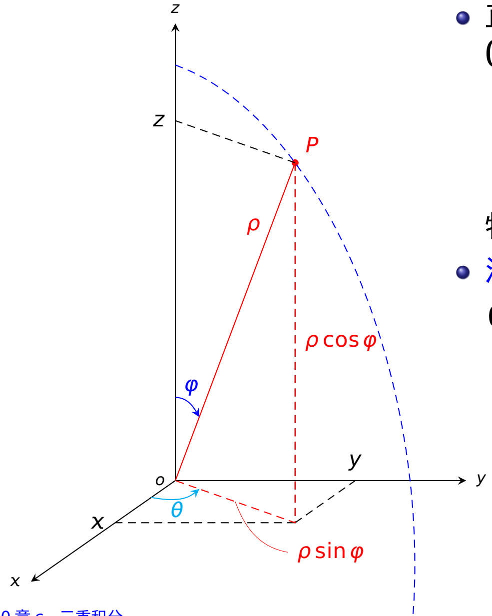
$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

特别地，$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$

- 注

$0 \le \rho < \infty,$

球面坐标



- 直角坐标 (x, y, z)，球面坐标 (ρ, φ, θ) 的转换：

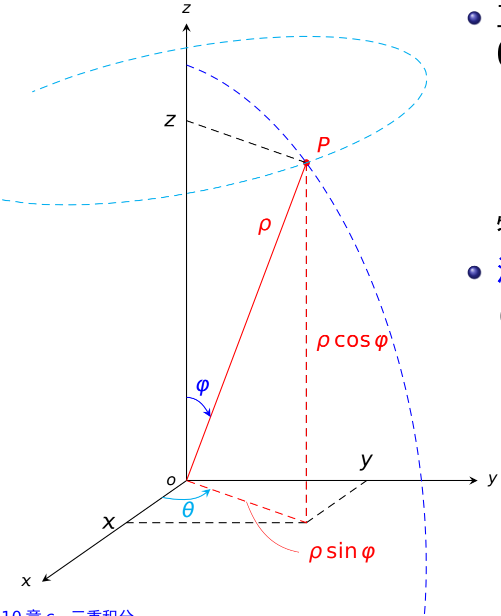
$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

特别地，$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$

- 注

$0 \le \rho < \infty$, $0 \le \varphi \le \pi$,

球面坐标



- 直角坐标 (x, y, z)，球面坐标 (ρ, φ, θ) 的转换：

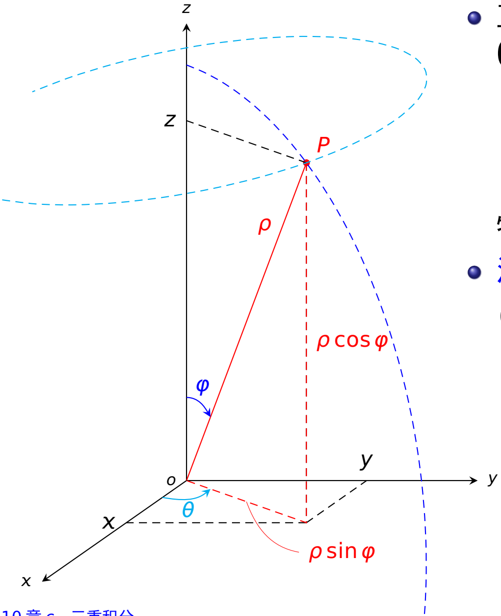
$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

特别地，$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$

- 注

$0 \le \rho < \infty,\ 0 \le \varphi \le \pi,$

球面坐标



- 直角坐标 (x, y, z)，球面坐标 (ρ, φ, θ) 的转换：

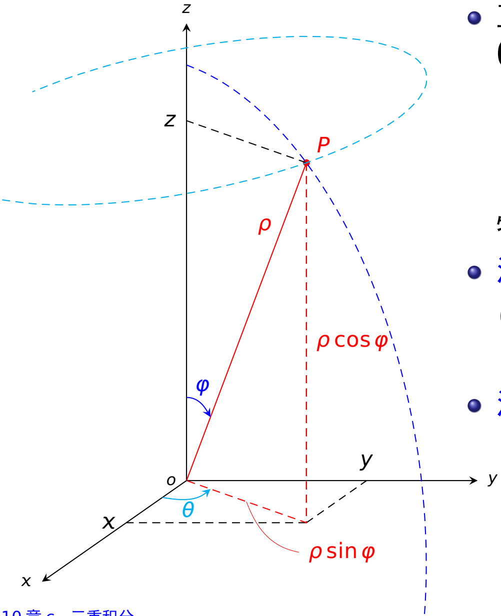
$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

特别地，$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$

- 注

$$0 \le \rho < \infty,\ 0 \le \varphi \le \pi,\ 0 \le \theta \le 2\pi$$

球面坐标



- 直角坐标 (x, y, z)，球面坐标 (ρ, φ, θ) 的转换：

$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

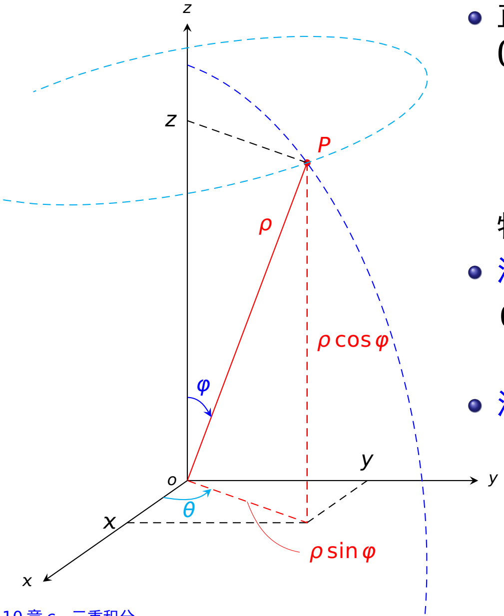
特别地，$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$

- 注

$$0 \le \rho < \infty,\ 0 \le \varphi \le \pi,\ 0 \le \theta \le 2\pi$$

- 注 三组坐标面
  - $\rho = \rho_0$:
  - $\varphi = \varphi_0$:
  - $\theta = \theta_0$:

球面坐标



- 直角坐标 (x, y, z)，球面坐标 (ρ, φ, θ) 的转换：

$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

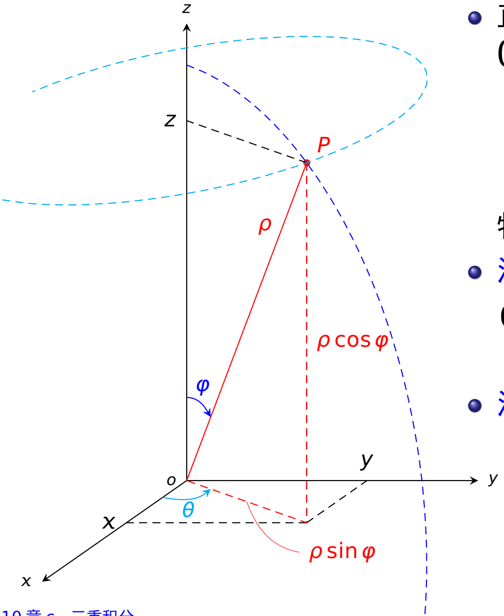
特别地，$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$

- 注

$0 \le \rho < \infty,\ 0 \le \varphi \le \pi,\ 0 \le \theta \le 2\pi$

- 注 三组坐标面
  - $\rho = \rho_0$：球面
  - $\varphi = \varphi_0$：
  - $\theta = \theta_0$：

球面坐标



- 直角坐标 (x, y, z)，球面坐标 (ρ, φ, θ) 的转换：

$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

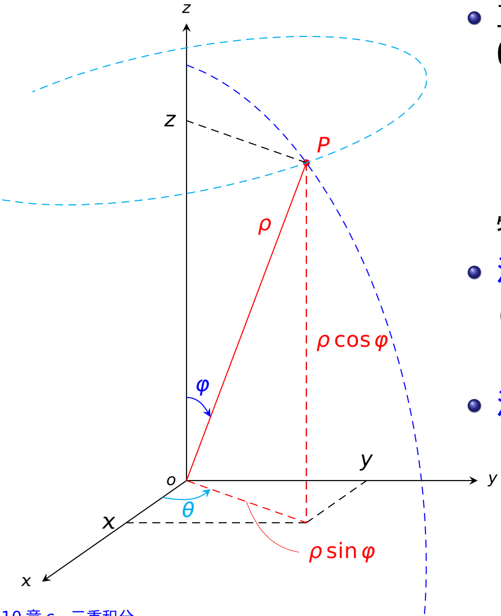
特别地，$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$

- 注

$$0 \le \rho < \infty,\ 0 \le \varphi \le \pi,\ 0 \le \theta \le 2\pi$$

- 注 三组坐标面
  - $\rho = \rho_0$：球面
  - $\varphi = \varphi_0$：以原点为顶点、z 轴为轴的圆锥面
  - $\theta = \theta_0$：

球面坐标



- 直角坐标 (x, y, z)，球面坐标 (ρ, φ, θ) 的转换：

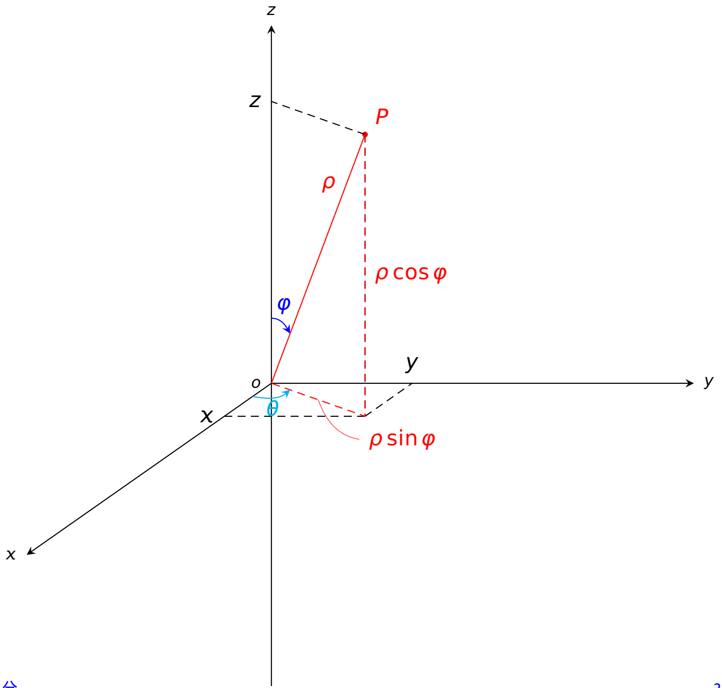
$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

特别地，$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$

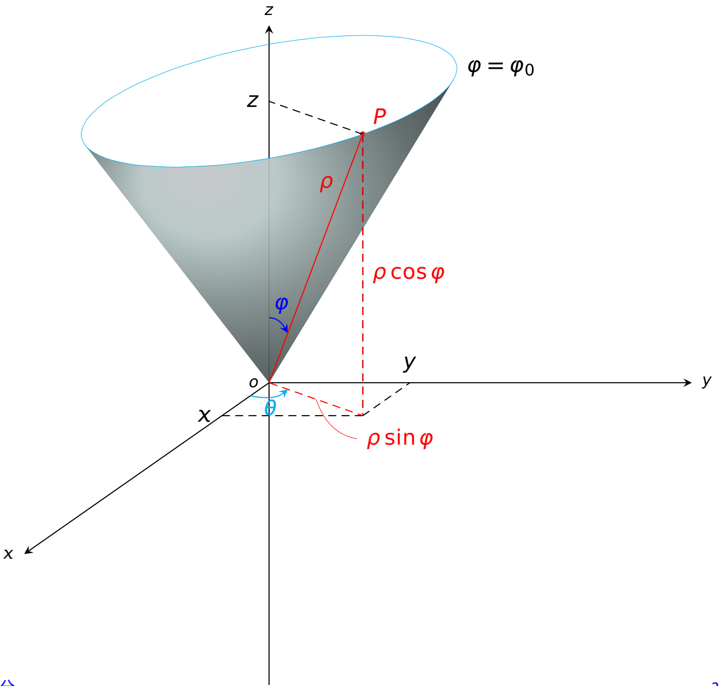
- 注

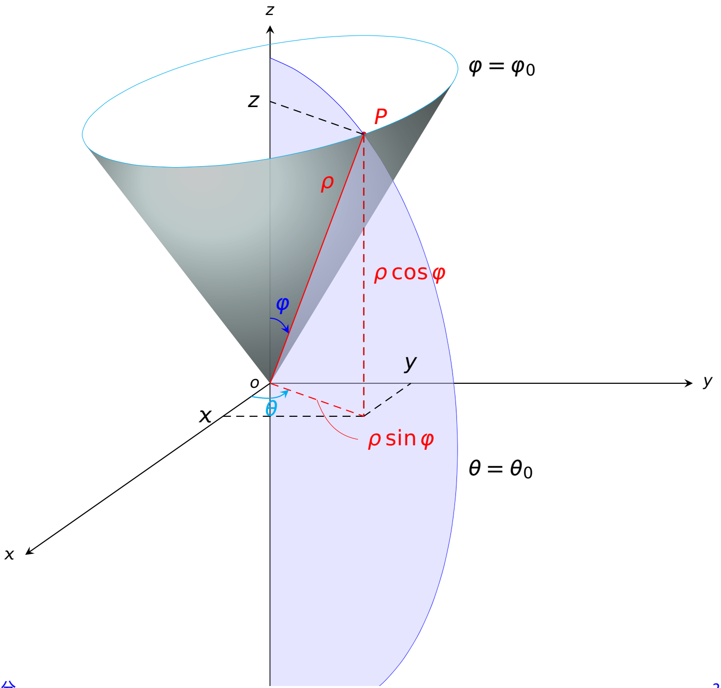
$0 \leq \rho < \infty,\ 0 \leq \varphi \leq \pi,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$

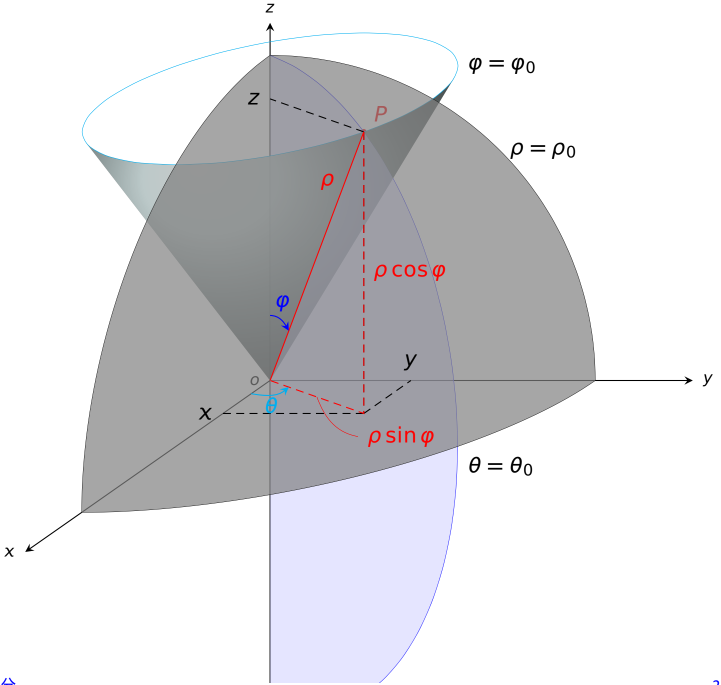
- 注 三组坐标面
  - $\rho = \rho_0$：球面
  - $\varphi = \varphi_0$：以原点为顶点、z 轴为轴的圆锥面
  - $\theta = \theta_0$：过 z 轴的半平面



z
z
P
ρ
ρ cos φ
φ
y
o
y
x
θ
ρ sin φ
x


z
$\varphi = \varphi_0$
z
P
ρ
ρ cos φ
φ
y
o
y
θ
x
ρ sin φ
x


z
$\varphi = \varphi_0$
z
P
ρ
$\rho \cos\varphi$
φ
y
o
y
x
θ
$\rho \sin\varphi$
$\theta = \theta_0$
x


z
$\varphi = \varphi_0$
z
P
$\rho = \rho_0$
ρ
$\rho\cos\varphi$
φ
y
o
y
x
θ
$\rho\sin\varphi$
$\theta = \theta_0$
x

例 函数 $f(x, y, z) = e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ 在球面坐标系下的表示是什么？

例 球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ 在球面坐标下的表示是什么？

例 函数 $f(x,y,z)=e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ 在球面坐标系下的表示是什么？

解 因为 $x^2+y^2+z^2=\rho^2$，所以 $f=e^{\rho^3}$

例 球体 $x^2+y^2+z^2\le a^2$ 在球面坐标下的表示是什么？

例 函数 $f(x, y, z) = e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ 在球面坐标系下的表示是什么？

解 因为 $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$，所以 $f = e^{\rho^3}$

例 球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ 在球面坐标下的表示是什么？

解 $\{0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$

球面坐标下计算三重积分

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv \xlongequal[y = \rho \sin\varphi \sin\theta]{x = \rho \sin\varphi \cos\theta}$$

$$z = \rho \cos\varphi$$

球面坐标下计算三重积分

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv \xlongequal[\substack{y=\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=\rho\cos\varphi}]{x=\rho\sin\varphi\cos\theta}$$

$$\iiint_\Omega f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\varphi)$$

球面坐标下计算三重积分

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv \xlongequal[\substack{y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi}]{x = \rho \sin\varphi \cos\theta}$$

$$\iiint_{\Omega} f(\rho \sin\varphi \cos\theta, \rho \sin\varphi \sin\theta, \rho \cos\varphi) \cdot \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

球面坐标下计算三重积分

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv \xlongequal[\substack{y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho\cos\varphi}]{x = \rho \sin\varphi \cos\theta}$$

$$\iiint_{\Omega} f(\rho \sin\varphi \cos\theta, \rho \sin\varphi \sin\theta, \rho\cos\varphi) \cdot \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$F(\rho, \varphi, \theta)$$

球面坐标下计算三重积分

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)dv \xlongequal[\substack{y=\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=\rho\cos\varphi}]{x=\rho\sin\varphi\cos\theta}$$

$$\iiint_\Omega f(\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi)\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$=\int \left\{\int \left[\int F(\rho, \varphi, \theta)\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho\right]d\varphi\right\}d\theta$$

球面坐标下计算三重积分

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv \xlongequal[\substack{y=\rho\sin\varphi\sin\theta\\ z=\rho\cos\varphi}]{x=\rho\sin\varphi\cos\theta}$$

$$\iiint_\Omega f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\varphi)\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$=\int\quad\left\{\int\quad\left[\int\quad F(\rho,\varphi,\theta)\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho\right]d\varphi\right\}d\theta$$

- 当 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le a^2$ 时，

球面坐标下计算三重积分

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv \xlongequal[\substack{y=\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=\rho\cos\varphi}]{x=\rho\sin\varphi\cos\theta}$$

$$\iiint_\Omega f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\varphi)\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$=\int\left\{\int\left[\int F(\rho,\varphi,\theta)\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho\right]d\varphi\right\}d\theta$$

- 当 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le a^2$ 时，

$$\Omega=\{0\le\rho\le a,\ 0\le\varphi\le\pi,\ 0\le\theta\le 2\pi\}$$

球面坐标下计算三重积分

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)dv \xlongequal[\substack{y=\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=\rho\cos\varphi}]{x=\rho\sin\varphi\cos\theta}$$

$$\iiint_{\Omega} f(\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi)\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$=\int \left\{\int \left[\int F(\rho, \varphi, \theta)\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho\right]d\varphi\right\}d\theta$$

- 当 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2 \leq a^2$ 时，

$$\Omega = \{0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

并且

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)dv = \int \left\{\int \left[\int F(\rho, \varphi, \theta)\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho\right]d\varphi\right\}d\theta$$

球面坐标下计算三重积分

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv \xlongequal[\substack{y=\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=\rho\cos\varphi}]{x=\rho\sin\varphi\cos\theta}$$

$$\iiint_{\Omega} f(\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi)\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$=\int \left\{\int \left[\int F(\rho,\varphi,\theta)\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho\right]d\varphi\right\}d\theta$$

- 当 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le a^2$ 时,

$$\Omega=\{0\le\rho\le a,\ 0\le\varphi\le\pi,\ 0\le\theta\le 2\pi\}$$

并且

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv=\int_0^{2\pi}\left\{\int \left[\int F(\rho,\varphi,\theta)\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho\right]d\varphi\right\}d\theta$$

球面坐标下计算三重积分

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)dv \xlongequal[\substack{y=\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=\rho\cos\varphi}]{x=\rho\sin\varphi\cos\theta}$$

$$\iiint_\Omega f(\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi)\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$=\int \left\{\int \left[\int F(\rho, \varphi, \theta)\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho\right]d\varphi\right\}d\theta$$

- 当 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le a^2$ 时,

$$\Omega=\{0\le\rho\le a,\ 0\le\varphi\le\pi,\ 0\le\theta\le 2\pi\}$$

并且

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)dv=\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{\pi}\left[\int F(\rho, \varphi, \theta)\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho\right]d\varphi\right\}d\theta$$

球面坐标下计算三重积分

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv \xlongequal[\substack{y=\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=\rho\cos\varphi}]{x=\rho\sin\varphi\cos\theta}$$

$$\iiint_{\Omega} f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\varphi)\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$=\int \left\{\int \left[\int F(\rho,\varphi,\theta)\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho\right]d\varphi\right\}d\theta$$

- 当 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le a^2$ 时，

$$\Omega=\{0\le\rho\le a,\ 0\le\varphi\le\pi,\ 0\le\theta\le 2\pi\}$$

并且

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv=\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{\pi}\left[\int_0^{a} F(\rho,\varphi,\theta)\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho\right]d\varphi\right\}d\theta$$

例 求 $\iiint_\Omega e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2 \le R^2$。

例 求 $\iiint_\Omega e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$。

解 引入球面坐标

$$原式 = \iiint_\Omega e^{\rho^3}$$

例 求 $\iiint_\Omega e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2 \le R^2$。

解 引入球面坐标

$$\text{原式} = \iiint_\Omega e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

例 求 $\iiint_\Omega e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2 \le R^2$。

解 引入球面坐标

$$\text{原式} = \iiint_\Omega e^{\rho^3}\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$= \int \left\{\int \left[\int e^{\rho^3}\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho\right]d\varphi\right\}d\theta$$

例 求 $\iiint_\Omega e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le R^2$。

解 引入球面坐标

$$\text{原式}=\iiint_\Omega e^{\rho^3}\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left\{\int\left[\int e^{\rho^3}\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho\right]d\varphi\right\}d\theta$$

例 求 $\iiint_\Omega e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2 \le R^2$。

解 引入球面坐标

$$\text{原式} = \iiint_\Omega e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \left[\int \quad e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin\varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta$$

例 求 $\iiint_\Omega e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2 \le R^2$。

解 引入球面坐标

$$\text{原式} = \iiint_\Omega e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \left[\int_0^{R} e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin\varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta$$

例 求 $\iiint_\Omega e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le R^2$。

解 引入球面坐标

$$原式 = \iiint_\Omega e^{\rho^3}\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{\pi}\left[\int_0^R e^{\rho^3}\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho\right]d\varphi\right\}d\theta$$

$$= 2\pi\cdot$$

例 求 $\iiint_{\Omega} e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2 \le R^2$。

解 引入球面坐标

$$\text{原式} = \iiint_{\Omega} e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \left[\int_0^{R} e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin\varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta$$

$$= 2\pi \cdot \left\{ \int_0^{\pi} \left[\int_0^{R} e^{\rho^3} \cdot \rho^2 d\rho \right] \sin\varphi d\varphi \right\}$$

例 求 $\iiint_\Omega e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2 \le R^2$。

解 引入球面坐标

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \iiint_\Omega e^{\rho^3}\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{\pi}\left[\int_0^R e^{\rho^3}\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho\right]d\varphi\right\}d\theta \\
&= 2\pi\cdot\left\{\int_0^{\pi}\left[\int_0^R e^{\rho^3}\cdot\rho^2 d\rho\right]\sin\varphi d\varphi\right\} \\
&= 2\pi\cdot\left[\int_0^R e^{\rho^3}\cdot\rho^2 d\rho\right]\cdot\left[\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\right]
\end{aligned}$$

例 求 $\iiint_\Omega e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le R^2$。

解 引入球面坐标

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \iiint_\Omega e^{\rho^3}\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{\pi}\left[\int_0^R e^{\rho^3}\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho\right]d\varphi\right\}d\theta \\
&= 2\pi\cdot\left\{\int_0^{\pi}\left[\int_0^R e^{\rho^3}\cdot\rho^2 d\rho\right]\sin\varphi d\varphi\right\} \\
&= 2\pi\cdot\left[\int_0^R e^{\rho^3}\cdot\rho^2 d\rho\right]\cdot\left[\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\right]
\end{aligned}
$$

$$\left(\frac{1}{3}e^{\rho^3}\right)$$

例 求 $\iiint_\Omega e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2 \le R^2$。

解 引入球面坐标

$$\text{原式} = \iiint_\Omega e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \left[\int_0^R e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin\varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta$$

$$= 2\pi \cdot \left\{ \int_0^{\pi} \left[\int_0^R e^{\rho^3} \cdot \rho^2 d\rho \right] \sin\varphi d\varphi \right\}$$

$$= 2\pi \cdot \left[\int_0^R e^{\rho^3} \cdot \rho^2 d\rho \right] \cdot \left[\int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \right]$$

$$\left(\frac{1}{3} e^{\rho^3} \right) \Big|_0^R$$

例 求 $\iiint_\Omega e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le R^2$。

解 引入球面坐标

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \iiint_\Omega e^{\rho^3}\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{\pi}\left[\int_0^R e^{\rho^3}\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho\right]d\varphi\right\}d\theta \\
&= 2\pi\cdot\left\{\int_0^{\pi}\left[\int_0^R e^{\rho^3}\cdot\rho^2 d\rho\right]\sin\varphi d\varphi\right\} \\
&= 2\pi\cdot\left[\int_0^R e^{\rho^3}\cdot\rho^2 d\rho\right]\cdot\left[\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\right] \\
&= 2\pi\cdot\left(\frac{1}{3}e^{\rho^3}\right)\Big|_0^R\cdot 2
\end{aligned}
$$

例 求 $\iiint_\Omega e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\leq R^2$。

解 引入球面坐标

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \iiint_\Omega e^{\rho^3}\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{\pi}\left[\int_0^R e^{\rho^3}\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho\right]d\varphi\right\}d\theta \\
&= 2\pi\cdot\left\{\int_0^{\pi}\left[\int_0^R e^{\rho^3}\cdot\rho^2 d\rho\right]\sin\varphi d\varphi\right\} \\
&= 2\pi\cdot\left[\int_0^R e^{\rho^3}\cdot\rho^2 d\rho\right]\cdot\left[\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\right] \\
&= 2\pi\cdot\left(\frac{1}{3}e^{\rho^3}\right)\Big|_0^R\cdot 2 = \frac{4}{3}\pi(e^{R^3}-1)
\end{aligned}
$$

例 计算球体 Ω： $x^2+y^2+z^2 \le R^2$ 的体积（利用球面坐标）。

例 计算球体 Ω ： $x^2+y^2+z^2\le R^2$ 的体积（利用球面坐标）。

解

$$\text{球体体积}=\iiint_\Omega 1dxdydz$$

例 计算球体 Ω： $x^2+y^2+z^2 \le R^2$ 的体积（利用球面坐标）。

解

$$\text{球体体积} = \iiint_{\Omega} 1 dxdydz = \iiint_{\Omega} 1 \cdot \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

例 计算球体 Ω： $x^2+y^2+z^2\le R^2$ 的体积（利用球面坐标）。

解

$$\text{球体体积} = \iiint_\Omega 1dxdydz = \iiint_\Omega 1\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$= \int \left\{ \int \left[\int \rho^2\sin\varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta$$

例 计算球体 Ω： $x^2+y^2+z^2 \le R^2$ 的体积（利用球面坐标）。

解

$$\text{球体体积} = \iiint_\Omega 1dxdydz = \iiint_\Omega 1\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left\{\int \quad \left[\int \quad \rho^2\sin\varphi d\rho\right]d\varphi\right\}d\theta$$

例 计算球体 Ω： $x^2+y^2+z^2 \le R^2$ 的体积（利用球面坐标）。

解

$$\text{球体体积} = \iiint_\Omega 1dxdydz = \iiint_\Omega 1\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{\pi}\left[\int \quad \rho^2\sin\varphi d\rho\right]d\varphi\right\}d\theta$$

例 计算球体 Ω： $x^2+y^2+z^2 \le R^2$ 的体积（利用球面坐标）。

解

$$\text{球体体积} = \iiint_\Omega 1 dxdydz = \iiint_\Omega 1 \cdot \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \left[\int_0^R \rho^2 \sin\varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta$$

例 计算球体 Ω： $x^2+y^2+z^2 \le R^2$ 的体积（利用球面坐标）。

解

$$球体体积 = \iiint_{\Omega} 1dxdydz = \iiint_{\Omega} 1 \cdot \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \left[\int_0^{R} \rho^2 \sin\varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta$$

$$= 2\pi \cdot$$

例 计算球体 Ω： $x^2+y^2+z^2 \le R^2$ 的体积（利用球面坐标）。

解

$$\text{球体体积} = \iiint_\Omega 1 dxdydz = \iiint_\Omega 1 \cdot \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \left[\int_0^R \rho^2 \sin\varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta$$

$$= 2\pi \cdot \left\{ \int_0^{\pi} \left[\int_0^R \rho^2 d\rho \right] \sin\varphi d\varphi \right\}$$

例 计算球体 Ω： $x^2+y^2+z^2 \le R^2$ 的体积（利用球面坐标）。

解

$$\text{球体体积} = \iiint_{\Omega} 1dxdydz = \iiint_{\Omega} 1\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{\pi}\left[\int_0^{R}\rho^2\sin\varphi d\rho\right]d\varphi\right\}d\theta$$

$$= 2\pi\cdot\left\{\int_0^{\pi}\left[\int_0^{R}\rho^2 d\rho\right]\sin\varphi d\varphi\right\}$$

$$= 2\pi\cdot\left[\int_0^{R}\rho^2 d\rho\right]\cdot\left[\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\right]$$

例 计算球体 Ω： $x^2+y^2+z^2\le R^2$ 的体积（利用球面坐标）。

解

$$\text{球体体积}=\iiint_{\Omega} 1dxdydz=\iiint_{\Omega} 1\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{\pi}\left[\int_0^R \rho^2\sin\varphi d\rho\right]d\varphi\right\}d\theta$$

$$=2\pi\cdot\left\{\int_0^{\pi}\left[\int_0^R \rho^2 d\rho\right]\sin\varphi d\varphi\right\}$$

$$=2\pi\cdot\left[\int_0^R \rho^2 d\rho\right]\cdot\left[\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\right]$$

$$\left(\frac{1}{3}\rho^3\right)$$

例 计算球体 Ω： $x^2+y^2+z^2 \le R^2$ 的体积（利用球面坐标）。

解

$$\text{球体体积} = \iiint_\Omega 1 dxdydz = \iiint_\Omega 1 \cdot \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \left[\int_0^{R} \rho^2 \sin\varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta$$

$$= 2\pi \cdot \left\{ \int_0^{\pi} \left[\int_0^{R} \rho^2 d\rho \right] \sin\varphi d\varphi \right\}$$

$$= 2\pi \cdot \left[\int_0^{R} \rho^2 d\rho \right] \cdot \left[\int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \right]$$

$$\left(\frac{1}{3}\rho^3 \right) \Big|_0^R$$

例 计算球体 Ω： $x^2+y^2+z^2\le R^2$ 的体积（利用球面坐标）。

解

$$球体体积=\iiint_\Omega 1dxdydz=\iiint_\Omega 1\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{\pi}\left[\int_0^R \rho^2\sin\varphi d\rho\right]d\varphi\right\}d\theta$$

$$=2\pi\cdot\left\{\int_0^{\pi}\left[\int_0^R \rho^2 d\rho\right]\sin\varphi d\varphi\right\}$$

$$=2\pi\cdot\left[\int_0^R \rho^2 d\rho\right]\cdot\left[\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\right]$$

$$=2\pi\cdot\left(\frac{1}{3}\rho^3\right)\Big|_0^R\cdot 2$$

例 计算球体 Ω： $x^2+y^2+z^2 \le R^2$ 的体积（利用球面坐标）。

解

$$\text{球体体积} = \iiint_\Omega 1dxdydz = \iiint_\Omega 1\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{\pi}\left[\int_0^R \rho^2\sin\varphi d\rho\right]d\varphi\right\}d\theta$$

$$= 2\pi\cdot\left\{\int_0^{\pi}\left[\int_0^R \rho^2 d\rho\right]\sin\varphi d\varphi\right\}$$

$$= 2\pi\cdot\left[\int_0^R \rho^2 d\rho\right]\cdot\left[\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\right]$$

$$= 2\pi\cdot\left(\frac{1}{3}\rho^3\right)\Big|_0^R\cdot 2 = \frac{4}{3}\pi R^3$$