

## 第 2 章 $g$ : 矩阵的秩

数学系 梁卓滨

2019-2020 学年 I

## 子式——引例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$$

## 子式——引例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$$

- 取第 1, 3 行, 2, 4 列:

## 子式——引例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$$

- 取第 1, 3 行, 2, 4 列:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

## 子式——引例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$$

- 取第 1, 3 行, 2, 4 列:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$$

## 子式——引例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$$

- 取第 1, 3 行, 2, 4 列:

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{-1} & 2 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & \boxed{5} & -4 & \boxed{-2} & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$$

2 阶子式

## 子式——引例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$$

- 取第 1, 3 行, 2, 4 列:

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{-1} & 2 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & \boxed{5} & -4 & \boxed{-2} & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -3$$

2 阶子式

## 子式——引例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$$

- 取第 1, 3 行, 2, 4 列:

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{-1} & 2 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & \boxed{5} & -4 & \boxed{-2} & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -3$$

2 阶子式

- 取第 1, 2, 4 行, 2, 3, 5 列:



## 子式——引例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$$

- 取第 1, 3 行, 2, 4 列:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -3$$

2 阶子式

- 取第 1, 2, 4 行, 2, 3, 5 列:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

## 子式——引例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$$

- 取第 1, 3 行, 2, 4 列:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -3$$

2 阶子式

- 取第 1, 2, 4 行, 2, 3, 5 列:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

## 子式——引例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$$

- 取第 1, 3 行, 2, 4 列:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -3$$

2 阶子式

- 取第 1, 2, 4 行, 2, 3, 5 列:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

3 阶子式

## 子式——引例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$$

- 取第 1, 3 行, 2, 4 列:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -3$$

2 阶子式

- 取第 1, 2, 4 行, 2, 3, 5 列:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

3 阶子式

## 子式——引例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$$

- 计算第 1, 4 行, 3, 5 列, 所构成的 2 阶子式:
- 计算第 2, 3, 4 行, 1, 3, 5 列, 所构成的 3 阶子式:
- 计算第 3 行, 4 列, 所构成的 1 阶子式:

## 子式——引例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$$

- 计算第 1, 4 行, 3, 5 列, 所构成的 2 阶子式:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \boxed{2} & 1 & \boxed{0} \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & \boxed{2} & 1 & \boxed{2} \end{pmatrix}$$

- 计算第 2, 3, 4 行, 1, 3, 5 列, 所构成的 3 阶子式:

- 计算第 3 行, 4 列, 所构成的 1 阶子式:

## 子式——引例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$$

- 计算第 1, 4 行, 3, 5 列, 所构成的 2 阶子式:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \boxed{2} & 1 & \boxed{0} \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & \boxed{2} & 1 & \boxed{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

- 计算第 2, 3, 4 行, 1, 3, 5 列, 所构成的 3 阶子式:

- 计算第 3 行, 4 列, 所构成的 1 阶子式:

## 子式——引例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$$

- 计算第 1, 4 行, 3, 5 列, 所构成的 2 阶子式:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \boxed{2} & 1 & \boxed{0} \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & \boxed{2} & 1 & \boxed{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

- 计算第 2, 3, 4 行, 1, 3, 5 列, 所构成的 3 阶子式:

- 计算第 3 行, 4 列, 所构成的 1 阶子式:



## 子式——引例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$$

- 计算第 1, 4 行, 3, 5 列, 所构成的 2 阶子式:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \boxed{2} & 1 & \boxed{0} \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & \boxed{2} & 1 & \boxed{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

- 计算第 2, 3, 4 行, 1, 3, 5 列, 所构成的 3 阶子式:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- 计算第 3 行, 4 列, 所构成的 1 阶子式:

## 子式——引例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$$

- 计算第 1, 4 行, 3, 5 列, 所构成的 2 阶子式:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \boxed{2} & 1 & \boxed{0} \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & \boxed{2} & 1 & \boxed{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

- 计算第 2, 3, 4 行, 1, 3, 5 列, 所构成的 3 阶子式:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & \boxed{2} & 1 & \boxed{0} \\ \boxed{0} & 3 & \boxed{0} & 0 & \boxed{1} \\ \boxed{-2} & 5 & \boxed{-4} & -2 & \boxed{1} \\ \boxed{1} & 5 & \boxed{2} & 1 & \boxed{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

- 计算第 3 行, 4 列, 所构成的 1 阶子式:

# 子式——引例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$$

- 计算第 1, 4 行, 3, 5 列, 所构成的 2 阶子式:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \boxed{2} & 1 & \boxed{0} \\ 0 & 3 & \boxed{0} & 0 & \boxed{1} \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & \boxed{2} & 1 & \boxed{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

- 计算第 2, 3, 4 行, 1, 3, 5 列, 所构成的 3 阶子式:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & \boxed{2} & 1 & \boxed{0} \\ \boxed{0} & 3 & \boxed{0} & 0 & \boxed{1} \\ \boxed{-2} & 5 & \boxed{-4} & -2 & \boxed{1} \\ \boxed{1} & 5 & \boxed{2} & 1 & \boxed{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

- 计算第 3 行, 4 列, 所构成的 1 阶子式:

## 子式——引例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$$

- 计算第 1, 4 行, 3, 5 列, 所构成的 2 阶子式:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \boxed{2} & 1 & \boxed{0} \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & \boxed{2} & 1 & \boxed{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

- 计算第 2, 3, 4 行, 1, 3, 5 列, 所构成的 3 阶子式:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & \boxed{2} & 1 & \boxed{0} \\ \boxed{0} & 3 & \boxed{0} & 0 & \boxed{1} \\ \boxed{-2} & 5 & \boxed{-4} & -2 & \boxed{1} \\ \boxed{1} & 5 & \boxed{2} & 1 & \boxed{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

- 计算第 3 行, 4 列, 所构成的 1 阶子式:  $(-2)$

## 子式——引例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$$

- 计算第 1, 4 行, 3, 5 列, 所构成的 2 阶子式:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \boxed{2} & 1 & \boxed{0} \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & \boxed{2} & 1 & \boxed{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

- 计算第 2, 3, 4 行, 1, 3, 5 列, 所构成的 3 阶子式:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & \boxed{2} & 1 & \boxed{0} \\ \boxed{0} & 3 & \boxed{0} & 0 & \boxed{1} \\ \boxed{-2} & 5 & \boxed{-4} & -2 & \boxed{1} \\ \boxed{1} & 5 & \boxed{2} & 1 & \boxed{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

- 计算第 3 行, 4 列, 所构成的 1 阶子式:  $(-2) \Rightarrow -2$

# 子式——引例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$$

- 1 阶子式共有 \_\_\_\_\_ 个
- 2 阶子式共有 \_\_\_\_\_ 个
- 3 阶子式共有 \_\_\_\_\_ 个
- 4 阶子式共有 \_\_\_\_\_ 个

## 子式——引例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$$

- 1 阶子式共有 \_\_\_\_\_ 个 (4 行任取 1 行, 5 列任取 1 列)
- 2 阶子式共有 \_\_\_\_\_ 个
- 3 阶子式共有 \_\_\_\_\_ 个
- 4 阶子式共有 \_\_\_\_\_ 个

## 子式——引例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$$

- 1 阶子式共有  $4 \times 5 = 20$  个 (4 行任取 1 行, 5 列任取 1 列)
- 2 阶子式共有 \_\_\_\_\_ 个
- 3 阶子式共有 \_\_\_\_\_ 个
- 4 阶子式共有 \_\_\_\_\_ 个



## 子式——引例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$$

- 1 阶子式共有  $4 \times 5 = 20$  个 (4 行任取 1 行, 5 列任取 1 列)
- 2 阶子式共有 \_\_\_\_\_ 个 (4 行任取 2 行, 5 列任取 2 列)
- 3 阶子式共有 \_\_\_\_\_ 个
- 4 阶子式共有 \_\_\_\_\_ 个

## 子式——引例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$$

- 1 阶子式共有  $4 \times 5 = 20$  个 (4 行任取 1 行, 5 列任取 1 列)
- 2 阶子式共有  $6 \times 10 = 60$  个 (4 行任取 2 行, 5 列任取 2 列)
- 3 阶子式共有 \_\_\_\_\_ 个
- 4 阶子式共有 \_\_\_\_\_ 个

## 子式——引例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$$

- 1 阶子式共有  $4 \times 5 = 20$  个 (4 行任取 1 行, 5 列任取 1 列)
- 2 阶子式共有  $6 \times 10 = 60$  个 (4 行任取 2 行, 5 列任取 2 列)
- 3 阶子式共有 \_\_\_\_\_ 个 (4 行任取 3 行, 5 列任取 3 列)
- 4 阶子式共有 \_\_\_\_\_ 个

## 子式——引例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$$

- 1 阶子式共有  $4 \times 5 = 20$  个 (4 行任取 1 行, 5 列任取 1 列)
- 2 阶子式共有  $6 \times 10 = 60$  个 (4 行任取 2 行, 5 列任取 2 列)
- 3 阶子式共有  $4 \times 10 = 40$  个 (4 行任取 3 行, 5 列任取 3 列)
- 4 阶子式共有 \_\_\_\_\_ 个

## 子式——引例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$$

- 1 阶子式共有  $4 \times 5 = 20$  个 (4 行任取 1 行, 5 列任取 1 列)
- 2 阶子式共有  $6 \times 10 = 60$  个 (4 行任取 2 行, 5 列任取 2 列)
- 3 阶子式共有  $4 \times 10 = 40$  个 (4 行任取 3 行, 5 列任取 3 列)
- 4 阶子式共有 \_\_\_\_\_ 个 (4 行任取 4 行, 5 列任取 4 列)

## 子式——引例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$$

- 1 阶子式共有  $4 \times 5 = 20$  个 (4 行任取 1 行, 5 列任取 1 列)
- 2 阶子式共有  $6 \times 10 = 60$  个 (4 行任取 2 行, 5 列任取 2 列)
- 3 阶子式共有  $4 \times 10 = 40$  个 (4 行任取 3 行, 5 列任取 3 列)
- 4 阶子式共有  $1 \times 5 = 5$  个 (4 行任取 4 行, 5 列任取 4 列)

## 子式——引例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$$

- 1 阶子式共有  $\underline{4 \times 5 = 20}$  个 (4 行任取 1 行, 5 列任取 1 列)
- 2 阶子式共有  $\underline{6 \times 10 = 60}$  个 (4 行任取 2 行, 5 列任取 2 列)
- 3 阶子式共有  $\underline{4 \times 10 = 40}$  个 (4 行任取 3 行, 5 列任取 3 列)
- 4 阶子式共有  $\underline{1 \times 5 = 5}$  个 (4 行任取 4 行, 5 列任取 4 列)
- 5 阶或以上的子式没有!

# 子式，秩

定义 设

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} * & * & * & \cdots & * & * \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ * & * & * & \cdots & * & * \end{pmatrix}_{m \times n}$$



# 子式, 秩

定义 设

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} * & * & * & \cdots & * & * \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ * & * & * & \cdots & * & * \end{pmatrix}_{m \times n}$$

从中任取  $k$  行  $k$  列 ( $1 \leq k \leq \min(m, n)$ ), 其相交处的  $k \times k$  个元素,

# 子式, 秩

定义 设

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} * & * & * & \cdots & * & * \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ * & * & * & \cdots & * & * \end{pmatrix}_{m \times n}$$

从中任取  $k$  行  $k$  列 ( $1 \leq k \leq \min(m, n)$ ), 其相交处的  $k \times k$  个元素,

# 子式, 秩

定义 设

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} * & * & * & \cdots & * & * \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ * & * & * & \cdots & * & * \end{pmatrix}_{m \times n}$$

从中任取  $k$  行  $k$  列 ( $1 \leq k \leq \min(m, n)$ ), 其相交处的  $k \times k$  个元素, 所构成的行列式, 称为的一个  $k$  阶子式。

# 子式, 秩

定义 设

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} * & * & * & \cdots & * & * \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ * & * & * & \cdots & * & * \end{pmatrix}_{m \times n}$$

从中任取  $k$  行  $k$  列 ( $1 \leq k \leq \min(m, n)$ ), 其相交处的  $k \times k$  个元素, 所构成的行列式, 称为的一个  $k$  阶子式。

注 若  $A$  中所有  $k_0$  阶子式为零, 则所有  $k \geq k_0$  阶子式也为零。

# 子式, 秩

定义 设

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} * & * & * & \cdots & * & * \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ * & * & * & \cdots & * & * \end{pmatrix}_{m \times n}$$

从中任取  $k$  行  $k$  列 ( $1 \leq k \leq \min(m, n)$ ), 其相交处的  $k \times k$  个元素, 所构成的行列式, 称为的一个  $k$  阶子式。

注 若  $A$  中所有  $k_0$  阶子式为零, 则所有  $k \geq k_0$  阶子式也为零。

定义 若  $A_{m \times n}$  中所有  $r + 1$  阶子式为零

# 子式, 秩

定义 设

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} * & * & * & \cdots & * & * \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ * & * & * & \cdots & * & * \end{pmatrix}_{m \times n}$$

从中任取  $k$  行  $k$  列 ( $1 \leq k \leq \min(m, n)$ ), 其相交处的  $k \times k$  个元素, 所构成的行列式, 称为的一个  $k$  阶子式。

注 若  $A$  中所有  $k_0$  阶子式为零, 则所有  $k \geq k_0$  阶子式也为零。

定义 若  $A_{m \times n}$  中所有  $r + 1$  阶子式为零 (从而所有更高阶子式也为零),

# 子式, 秩

定义 设

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} * & * & * & \cdots & * & * \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ * & * & * & \cdots & * & * \end{pmatrix}_{m \times n}$$

从中任取  $k$  行  $k$  列 ( $1 \leq k \leq \min(m, n)$ ), 其相交处的  $k \times k$  个元素, 所构成的行列式, 称为的一个  $k$  阶子式。

注 若  $A$  中所有  $k_0$  阶子式为零, 则所有  $k \geq k_0$  阶子式也为零。

定义 若  $A_{m \times n}$  中所有  $r + 1$  阶子式为零 (从而所有更高阶子式也为零), 而存在某个  $r$  阶子式不为零,

# 子式, 秩

定义 设

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} \boxed{*} & * & \boxed{*} & \cdots & \boxed{*} & * \\ \boxed{*} & * & \boxed{*} & \cdots & \boxed{*} & * \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ \boxed{*} & * & \boxed{*} & \cdots & \boxed{*} & * \end{pmatrix}_{m \times n}$$

从中任取  $k$  行  $k$  列 ( $1 \leq k \leq \min(m, n)$ ), 其相交处的  $k \times k$  个元素, 所构成的行列式, 称为的一个  $k$  阶子式。

注 若  $A$  中所有  $k_0$  阶子式为零, 则所有  $k \geq k_0$  阶子式也为零。

定义 若  $A_{m \times n}$  中所有  $r+1$  阶子式为零 (从而所有更高阶子式也为零), 而存在某个  $r$  阶子式不为零, 则称  $r$  为矩阵  $A$  的秩,



# 子式, 秩

定义 设

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} * & * & * & \cdots & * & * \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ * & * & * & \cdots & * & * \end{pmatrix}_{m \times n}$$

从中任取  $k$  行  $k$  列 ( $1 \leq k \leq \min(m, n)$ ), 其相交处的  $k \times k$  个元素, 所构成的行列式, 称为的一个  $k$  阶子式。

注 若  $A$  中所有  $k_0$  阶子式为零, 则所有  $k \geq k_0$  阶子式也为零。

定义 若  $A_{m \times n}$  中所有  $r+1$  阶子式为零 (从而所有更高阶子式也为零), 而存在某个  $r$  阶子式不为零, 则称  $r$  为矩阵  $A$  的秩, 记作

$$r(A) = r$$

**例** 计算矩阵的秩:  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$

例 计算矩阵的秩:  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$

- 有非零 1 阶子式,

例 计算矩阵的秩:  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$

- 有非零 1 阶子式, 所以  $r(A) \geq 1$

例 计算矩阵的秩:  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$

- 有非零 1 阶子式, 所以  $r(A) \geq 1$
- 有非零 2 阶子式

例 计算矩阵的秩:  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$

- 有非零 1 阶子式, 所以  $r(A) \geq 1$
- 有非零 2 阶子式, 如第 1, 2 行, 1, 2 列, 所构成的 2 阶子式:

例 计算矩阵的秩:  $A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{-1} & 2 & 1 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{3} & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$

- 有非零 1 阶子式, 所以  $r(A) \geq 1$
- 有非零 2 阶子式, 如第 1, 2 行, 1, 2 列, 所构成的 2 阶子式:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3,$$

例 计算矩阵的秩:  $A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{-1} & 2 & 1 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{3} & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$

- 有非零 1 阶子式, 所以  $r(A) \geq 1$
- 有非零 2 阶子式, 如第 1, 2 行, 1, 2 列, 所构成的 2 阶子式:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3, \text{ 所以 } r(A) \geq 2$$



例 计算矩阵的秩:  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$

- 有非零 1 阶子式, 所以  $r(A) \geq 1$
- 有非零 2 阶子式, 如第 1, 2 行, 1, 2 列, 所构成的 2 阶子式:  
 $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$ , 所以  $r(A) \geq 2$
- 是否有非零 3 阶子式?

例 计算矩阵的秩:  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$

- 有非零 1 阶子式, 所以  $r(A) \geq 1$
- 有非零 2 阶子式, 如第 1, 2 行, 1, 2 列, 所构成的 2 阶子式:  
 $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$ , 所以  $r(A) \geq 2$
- 是否有非零 3 阶子式?
  - 第 2, 3, 4 行, 1, 3, 5 列, 所构成的 3 阶子式:

例 计算矩阵的秩:  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$

- 有非零 1 阶子式, 所以  $r(A) \geq 1$
- 有非零 2 阶子式, 如第 1, 2 行, 1, 2 列, 所构成的 2 阶子式:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3, \text{ 所以 } r(A) \geq 2$$

- 是否有非零 3 阶子式?

- 第 2, 3, 4 行, 1, 3, 5 列, 所构成的 3 阶子式:  $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$

例 计算矩阵的秩:  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$

- 有非零 1 阶子式, 所以  $r(A) \geq 1$
- 有非零 2 阶子式, 如第 1, 2 行, 1, 2 列, 所构成的 2 阶子式:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3, \text{ 所以 } r(A) \geq 2$$

- 是否有非零 3 阶子式?

- 第 2, 3, 4 行, 1, 3, 5 列, 所构成的 3 阶子式:  $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$

- 第 1, 2, 4 行, 2, 3, 5 列, 所构成的 3 阶子式:

**例** 计算矩阵的秩:  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$

- 有非零 1 阶子式, 所以  $r(A) \geq 1$
- 有非零 2 阶子式, 如第 1, 2 行, 1, 2 列, 所构成的 2 阶子式:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3, \text{ 所以 } r(A) \geq 2$$

- 是否有非零 3 阶子式?

- 第 2, 3, 4 行, 1, 3, 5 列, 所构成的 3 阶子式:  $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$

- 第 1, 2, 4 行, 2, 3, 5 列, 所构成的 3 阶子式:  $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$

例 计算矩阵的秩:  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$

- 有非零 1 阶子式, 所以  $r(A) \geq 1$
- 有非零 2 阶子式, 如第 1, 2 行, 1, 2 列, 所构成的 2 阶子式:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3, \text{ 所以 } r(A) \geq 2$$

- 是否有非零 3 阶子式?

- 第 2, 3, 4 行, 1, 3, 5 列, 所构成的 3 阶子式:  $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$

- 第 1, 2, 4 行, 2, 3, 5 列, 所构成的 3 阶子式:  $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$

- 其余的  $40 - 2 = 38$  个 3 阶子式等于零!

**例** 计算矩阵的秩:  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$

- 有非零 1 阶子式, 所以  $r(A) \geq 1$
- 有非零 2 阶子式, 如第 1, 2 行, 1, 2 列, 所构成的 2 阶子式:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3, \text{ 所以 } r(A) \geq 2$$

- 是否有非零 3 阶子式?

- 第 2, 3, 4 行, 1, 3, 5 列, 所构成的 3 阶子式:  $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$

- 第 1, 2, 4 行, 2, 3, 5 列, 所构成的 3 阶子式:  $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$

- 其余的  $40 - 2 = 38$  个 3 阶子式等于零! 🤖

例 计算矩阵的秩:  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$

- 有非零 1 阶子式, 所以  $r(A) \geq 1$
- 有非零 2 阶子式, 如第 1, 2 行, 1, 2 列, 所构成的 2 阶子式:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3, \text{ 所以 } r(A) \geq 2$$

- 是否有非零 3 阶子式?

- 第 2, 3, 4 行, 1, 3, 5 列, 所构成的 3 阶子式:  $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$

- 第 1, 2, 4 行, 2, 3, 5 列, 所构成的 3 阶子式:  $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$

- 其余的  $40 - 2 = 38$  个 3 阶子式等于零! 🤖

所以  $r(A) = 2$ 。



# 阶梯型矩阵的秩的计算

例 1 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

# 阶梯型矩阵的秩的计算

例 1 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 有非零 2 阶子式,

# 阶梯型矩阵的秩的计算

例 1 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 有非零 2 阶子式，如第 1, 2 行，1, 2 列，所构成的 2 阶子式：

# 阶梯型矩阵的秩的计算

例 1 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 有非零 2 阶子式，如第 1, 2 行，1, 2 列，所构成的 2 阶子式：

# 阶梯型矩阵的秩的计算

例 1 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 有非零 2 阶子式，如第 1, 2 行，1, 2 列，所构成的 2 阶子式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = -7,$$

# 阶梯型矩阵的秩的计算

例 1 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 有非零 2 阶子式，如第 1, 2 行，1, 2 列，所构成的 2 阶子式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = -7, \text{ 所以 } r(A) \geq 2.$$

# 阶梯型矩阵的秩的计算

例 1 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 有非零 2 阶子式，如第 1, 2 行，1, 2 列，所构成的 2 阶子式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = -7, \text{ 所以 } r(A) \geq 2.$$

# 阶梯型矩阵的秩的计算

例 1 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 有非零 2 阶子式，如第 1, 2 行，1, 2 列，所构成的 2 阶子式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = -7, \text{ 所以 } r(A) \geq 2.$$

- 任意 3 阶子式均为零！



# 阶梯型矩阵的秩的计算

例 1 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 有非零 2 阶子式，如第 1, 2 行，1, 2 列，所构成的 2 阶子式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = -7, \text{ 所以 } r(A) \geq 2.$$

- 任意 3 阶子式均为零！所以  $r(A) = 2$ 。

# 阶梯型矩阵的秩的计算

例 1 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 有非零 2 阶子式，如第 1, 2 行，1, 2 列，所构成的 2 阶子式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = -7, \text{ 所以 } r(A) \geq 2.$$

- 任意 3 阶子式均为零！所以  $r(A) = 2$ 。

例 2 计算  $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 & -2 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

# 阶梯型矩阵的秩的计算

例 1 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 有非零 2 阶子式，如第 1, 2 行，1, 2 列，所构成的 2 阶子式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = -7, \text{ 所以 } r(A) \geq 2.$$

- 任意 3 阶子式均为零！所以  $r(A) = 2$ 。

例 2 计算  $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 & -2 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 有非零 3 阶子式，

# 阶梯型矩阵的秩的计算

例 1 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 有非零 2 阶子式，如第 1, 2 行，1, 2 列，所构成的 2 阶子式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = -7, \text{ 所以 } r(A) \geq 2.$$

- 任意 3 阶子式均为零！所以  $r(A) = 2$ 。

例 2 计算  $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 & -2 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 有非零 3 阶子式，如 1, 2, 3 行，2, 4, 6 列，所构成的 3 阶子式：

# 阶梯型矩阵的秩的计算

例 1 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 有非零 2 阶子式，如第 1, 2 行，1, 2 列，所构成的 2 阶子式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = -7, \text{ 所以 } r(A) \geq 2.$$

- 任意 3 阶子式均为零！所以  $r(A) = 2$ 。

例 2 计算  $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 & -2 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 有非零 3 阶子式，如 1, 2, 3 行，2, 4, 6 列，所构成的 3 阶子式：

# 阶梯型矩阵的秩的计算

例 1 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 有非零 2 阶子式，如第 1, 2 行，1, 2 列，所构成的 2 阶子式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = -7, \text{ 所以 } r(A) \geq 2.$$

- 任意 3 阶子式均为零！所以  $r(A) = 2$ 。

例 2 计算  $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 & -2 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 有非零 3 阶子式，如 1, 2, 3 行，2, 4, 6 列，所构成的 3 阶子式：

$$\begin{vmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 45,$$

# 阶梯型矩阵的秩的计算

例 1 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 有非零 2 阶子式，如第 1, 2 行，1, 2 列，所构成的 2 阶子式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = -7, \text{ 所以 } r(A) \geq 2.$$

- 任意 3 阶子式均为零！所以  $r(A) = 2$ 。

例 2 计算  $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 & -2 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 有非零 3 阶子式，如 1, 2, 3 行，2, 4, 6 列，所构成的 3 阶子式：

$$\begin{vmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 45, \text{ 所以 } r \geq 3.$$

# 阶梯型矩阵的秩的计算

例 1 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 有非零 2 阶子式, 如第 1, 2 行, 1, 2 列, 所构成的 2 阶子式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = -7, \text{ 所以 } r(A) \geq 2.$$

- 任意 3 阶子式均为零! 所以  $r(A) = 2$ 。

例 2 计算  $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 & -2 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 有非零 3 阶子式, 如 1, 2, 3 行, 2, 4, 6 列, 所构成的 3 阶子式:

$$\begin{vmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 45, \text{ 所以 } r \geq 3.$$



# 阶梯型矩阵的秩的计算

例 1 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 有非零 2 阶子式, 如第 1, 2 行, 1, 2 列, 所构成的 2 阶子式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = -7, \text{ 所以 } r(A) \geq 2.$$

- 任意 3 阶子式均为零! 所以  $r(A) = 2$ 。

例 2 计算  $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 & -2 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 有非零 3 阶子式, 如 1, 2, 3 行, 2, 4, 6 列, 所构成的 3 阶子式:

$$\begin{vmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 45, \text{ 所以 } r \geq 3.$$

- 任意 4 阶子式均为零!

# 阶梯型矩阵的秩的计算

例 1 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 有非零 2 阶子式, 如第 1, 2 行, 1, 2 列, 所构成的 2 阶子式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = -7, \text{ 所以 } r(A) \geq 2.$$

- 任意 3 阶子式均为零! 所以  $r(A) = 2$ 。

例 2 计算  $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 & -2 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 有非零 3 阶子式, 如 1, 2, 3 行, 2, 4, 6 列, 所构成的 3 阶子式:

$$\begin{vmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 45, \text{ 所以 } r \geq 3.$$

- 任意 4 阶子式均为零! 所以  $r(A) = 3$ 。

# 阶梯型矩阵的秩的计算

例 1 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 有非零 2 阶子式, 如第 1, 2 行, 1, 2 列, 所构成的 2 阶子式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = -7, \text{ 所以 } r(A) \geq 2.$$

- 任意 3 阶子式均为零! 所以  $r(A) = 2$ 。

例 2 计算  $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 & -2 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 有非零 3 阶子式, 如 1, 2, 3 行, 2, 4, 6 列, 所构成的 3 阶子式:

$$\begin{vmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 45, \text{ 所以 } r \geq 3.$$

- 任意 4 阶子式均为零! 所以  $r(A) = 3$ 。

# 阶梯型矩阵的秩

形如：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b_1 & \dots & * & * & \dots & * & * & \dots & \dots & * & * & \dots & * \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & b_2 & \dots & * & * & \dots & \dots & * & * & \dots & * \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & b_3 & \dots & \dots & * & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & b_r & \dots & * \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

的矩阵，其中  $b_1, b_2, \dots, b_r \neq 0$ ，称为**阶梯型矩阵**。

# 阶梯型矩阵的秩

形如：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b_1 & \dots & * & * & \dots & * & * & \dots & \dots & * & * & \dots & * \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & b_2 & \dots & * & * & \dots & \dots & * & * & \dots & * \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & b_3 & \dots & \dots & * & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & b_r & \dots & * \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

的矩阵，其中  $b_1, b_2, \dots, b_r \neq 0$ ，称为**阶梯型矩阵**。

# 阶梯型矩阵的秩

形如：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_1 & \cdots & * & * & \cdots & * & * & \cdots & \cdots & * & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b_2 & \cdots & * & * & \cdots & \cdots & * & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b_3 & \cdots & \cdots & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b_r & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

的矩阵，其中  $b_1, b_2, \dots, b_r \neq 0$ ，称为**阶梯型矩阵**。

**性质** 对上述阶梯型矩阵  $A$ ，其秩为：

$$r(A) = r = \text{阶梯形矩阵非零行的行数}$$

# 阶梯型矩阵的秩

形如：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_1 & \cdots & * & * & \cdots & * & * & \cdots & \cdots & * & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b_2 & \cdots & * & * & \cdots & \cdots & * & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b_3 & \cdots & \cdots & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b_r & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

的矩阵，其中  $b_1, b_2, \dots, b_r \neq 0$ ，称为**阶梯型矩阵**。

**性质** 对上述阶梯型矩阵  $A$ ，其秩为：

$$r(A) = r = \text{阶梯形矩阵非零行的行数}$$

**注** 任意矩阵，都可通过初等 **行** 变换，化为阶梯型矩阵！

# 秩的计算

**定理** 矩阵作初等变换后，其秩保持不变。



# 秩的计算

**定理** 矩阵作初等变换后，其秩保持不变。

**启发** 计算矩阵  $A$  的秩  $r(A)$  的技巧：

# 秩的计算

**定理** 矩阵作初等变换后，其秩保持不变。

**启发** 计算矩阵  $A$  的秩  $r(A)$  的技巧：

$$A_{m \times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} \text{阶梯形矩阵}$$

# 秩的计算

**定理** 矩阵作初等变换后，其秩保持不变。

**启发** 计算矩阵  $A$  的秩  $r(A)$  的技巧：

$$A_{m \times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} \text{阶梯形矩阵}$$

从而

$$r(A) = \text{对应阶梯形矩阵非零行的行数}$$

# 秩的计算

**定理** 矩阵作初等变换后，其秩保持不变。

**启发** 计算矩阵  $A$  的秩  $r(A)$  的技巧：

$$A_{m \times n} \xrightarrow[\text{(通常是初等行变换)}]{\text{一系列初等变换}} \text{阶梯形矩阵}$$

从而

$$r(A) = \text{对应阶梯形矩阵非零行的行数}$$

**例 1** 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}_{4 \times 4}$  的秩

**例 1** 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}_{4 \times 4}$  的秩

**解**

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

**例 1** 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}_{4 \times 4}$  的秩

**解**

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1}$$

**例 1** 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}_{4 \times 4}$  的秩

**解**

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ & & & \end{pmatrix}$$



**例 1** 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}_{4 \times 4}$  的秩

**解**

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

**例 1** 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}_{4 \times 4}$  的秩

**解**

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \\ 0 & -7 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

**例 1** 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}_{4 \times 4}$  的秩

**解**

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

**例 1** 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}_{4 \times 4}$  的秩

**解**

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 - r_1]{\begin{matrix} r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 3r_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

**例 1** 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}_{4 \times 4}$  的秩

**解**

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 - r_1]{\begin{matrix} r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 3r_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

**例 1** 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}_{4 \times 4}$  的秩

**解**

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 - r_1]{\begin{matrix} r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 3r_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 - r_2}$$

**例 1** 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}_{4 \times 4}$  的秩

**解**

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 - r_1]{\begin{matrix} r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 3r_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

**例 1** 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}_{4 \times 4}$  的秩

**解**

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 - r_1]{\begin{matrix} r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 3r_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



**例 1** 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}_{4 \times 4}$  的秩

**解**

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 - r_1]{\begin{matrix} r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 3r_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[r_4 - r_2]{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**例 1** 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}_{4 \times 4}$  的秩

**解**

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 - r_1]{\begin{matrix} r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 3r_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[r_4 - r_2]{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**例 1** 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}_{4 \times 4}$  的秩

**解**

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 - r_1]{\begin{matrix} r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 3r_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[r_4 - r_2]{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**例 1** 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}_{4 \times 4}$  的秩

**解**

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 - r_1]{\begin{matrix} r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 3r_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[r_4 - r_2]{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以  $r(A) = 2$

**例 1** 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}_{4 \times 4}$  的秩

**解**

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 - r_1]{\begin{matrix} r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 3r_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[r_4 - r_2]{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以  $r(A) = 2$

**例 2** 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$  的秩

**例 3** 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$  的秩

**例 3** 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$  的秩

**解**

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

**例 3** 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$  的秩

**解**

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_1}$$



**例 3** 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$  的秩

**解**

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ & & & & \\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**例 3** 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$  的秩

**解**

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**例 3** 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$  的秩

**解**

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**例 3** 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$  的秩

**解**

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

**例 3** 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$  的秩

**解**

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4+r_1]{\begin{matrix} r_2-r_1 \\ r_3-2r_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

**例 3** 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$  的秩

**解**

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4+r_1]{\begin{matrix} r_2-r_1 \\ r_3-2r_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

例3 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$  的秩

解

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4+r_1]{\begin{matrix} r_2-r_1 \\ r_3-2r_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_4}$$

**例 3** 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$  的秩

**解**

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4+r_1]{\begin{matrix} r_2-r_1 \\ r_3-2r_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



**例 3** 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$  的秩

**解**

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4+r_1]{\begin{matrix} r_2-r_1 \\ r_3-2r_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2}$$

**例 3** 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$  的秩

**解**

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4+r_1]{r_2-r_1, r_3-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**例 3** 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$  的秩

**解**

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4+r_1]{r_2-r_1, r_3-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**例 3** 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$  的秩

**解**

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4+r_1]{r_2-r_1, r_3-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以  $r(A) = 3$

**例 4** 计算  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$  的秩

**例 4** 计算  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$  的秩

**解**

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

**例 4** 计算  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$  的秩

**解**

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3}$$

**例 4** 计算  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$  的秩

**解**

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



**例 4** 计算  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$  的秩

**解**

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3}$$

**例 4** 计算  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$  的秩

**解**

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

**例 4** 计算  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$  的秩

**解**

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{r_3 - r_1}$$

**例 4** 计算  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$  的秩

**解**

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda - 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**例 4** 计算  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$  的秩

**解**

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda - 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \end{aligned}$$

**例 4** 计算  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$  的秩

**解**

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda - 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**例 4** 计算  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$  的秩

**解**

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda - 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- 当  $\lambda = 2$  时,
- 当  $\lambda \neq 2$  时,

**例 4** 计算  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$  的秩

**解**

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda - 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- 当  $\lambda = 2$  时,  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- 当  $\lambda \neq 2$  时,



**例 4** 计算  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$  的秩

**解**

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda - 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

• 当  $\lambda = 2$  时,  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

• 当  $\lambda \neq 2$  时,

**例 4** 计算  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$  的秩

**解**

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda - 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

• 当  $\lambda = 2$  时,  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 此时  $r(A) = 2$

• 当  $\lambda \neq 2$  时,

**例 4** 计算  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$  的秩

**解**

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda - 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- 当  $\lambda = 2$  时,  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 此时  $r(A) = 2$
- 当  $\lambda \neq 2$  时,  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{pmatrix}$

**例 4** 计算  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$  的秩

**解**

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda - 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

• 当  $\lambda = 2$  时,  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 此时  $r(A) = 2$

• 当  $\lambda \neq 2$  时,  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{pmatrix}$

**例 4** 计算  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$  的秩

**解**

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda - 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- 当  $\lambda = 2$  时,  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 此时  $r(A) = 2$
- 当  $\lambda \neq 2$  时,  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{pmatrix}$ , 此时  $r(A) = 3$

**例 5** 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda + 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$  的秩

**例 5** 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda + 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$  的秩

**解**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda + 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

**例 5** 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda + 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$  的秩

**解**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda + 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_3}$$



**例 5** 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda + 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$  的秩

**解**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda + 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & \lambda + 1 \end{pmatrix}$$

**例 5** 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda + 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$  的秩

**解**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda + 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & \lambda + 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1}$$

**例 5** 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda + 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$  的秩

**解**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda + 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & \lambda + 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & \lambda + 1 \end{pmatrix}$$

**例 5** 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda + 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$  的秩

**解**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda + 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & \lambda + 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

**例 5** 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda + 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$  的秩

**解**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda + 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & \lambda + 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda - 2 \end{pmatrix}$$

**例 5** 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda + 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$  的秩

**解**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda + 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & \lambda + 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_2}$$

**例 5** 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda + 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$  的秩

**解**

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda + 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} &\xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & \lambda + 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**例 5** 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda + 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$  的秩

**解**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda + 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & \lambda + 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

- 当  $\lambda = 1$  时,
- 当  $\lambda \neq 1$  时,



**例 5** 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda + 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$  的秩

**解**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda + 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & \lambda + 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

- 当  $\lambda = 1$  时,  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda + 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- 当  $\lambda \neq 1$  时,

**例 5** 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda + 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$  的秩

**解**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda + 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & \lambda + 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

• 当  $\lambda = 1$  时,  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda + 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

• 当  $\lambda \neq 1$  时,

**例 5** 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda + 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$  的秩

**解**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda + 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & \lambda + 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

• 当  $\lambda = 1$  时,  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda + 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 此时  $r(A) = 2$

• 当  $\lambda \neq 1$  时,

**例 5** 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda + 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$  的秩

**解**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda + 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & \lambda + 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

- 当  $\lambda = 1$  时,  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda + 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 此时  $r(A) = 2$
- 当  $\lambda \neq 1$  时,  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda + 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$

**例 5** 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda + 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$  的秩

**解**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda + 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & \lambda + 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

• 当  $\lambda = 1$  时,  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda + 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 此时  $r(A) = 2$

• 当  $\lambda \neq 1$  时,  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda + 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$

**例 5** 计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda + 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$  的秩

**解**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda + 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & \lambda + 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

- 当  $\lambda = 1$  时,  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda + 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 此时  $r(A) = 2$
- 当  $\lambda \neq 1$  时,  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda + 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$ , 此时  $r(A) = 3$

# 关于秩的结论

回忆 对任意矩阵  $A$ :

$$A_{m \times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D_{m \times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{m \times n}$$

# 关于秩的结论

**回忆** 对任意矩阵  $A$ :

$$A_{m \times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D_{m \times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{m \times n}$$

**定理** 任一矩阵  $A$ , 其等价标准形中的  $r$ , 正好是  $A$  的秩; 即  $r(A) = r$ 。



# 关于秩的结论

**回忆** 对任意矩阵  $A$ :

$$A_{m \times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D_{m \times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{m \times n}$$

**定理** 任一矩阵  $A$ , 其等价标准形中的  $r$ , 正好是  $A$  的秩; 即  $r(A) = r$ 。  
特别地, 每个矩阵的等价标准形是唯一的。

# 关于秩的结论

**回忆** 对任意矩阵  $A$ :

$$A_{m \times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D_{m \times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{m \times n}$$

**定理** 任一矩阵  $A$ , 其等价标准形中的  $r$ , 正好是  $A$  的秩; 即  $r(A) = r$ 。  
特别地, 每个矩阵的等价标准形是唯一的。

**定理** 设  $B_{n \times n}$  为非奇异矩阵,  $A = A_{m \times n}$ , 则  $r(AB) = r(A)$ 。

# 关于秩的结论

**回忆** 对任意矩阵  $A$ :

$$A_{m \times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D_{m \times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{m \times n}$$

**定理** 任一矩阵  $A$ , 其等价标准形中的  $r$ , 正好是  $A$  的秩; 即  $r(A) = r$ 。  
特别地, 每个矩阵的等价标准形是唯一的。

**定理** 设  $B_{n \times n}$  为非奇异矩阵,  $A = A_{m \times n}$ , 则  $r(AB) = r(A)$ 。

**证明**  $B$  可写成一些初等矩阵的乘积:  $B = P_1 P_2 \cdots P_s$ 。

# 关于秩的结论

**回忆** 对任意矩阵  $A$ :

$$A_{m \times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D_{m \times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{m \times n}$$

**定理** 任一矩阵  $A$ , 其等价标准形中的  $r$ , 正好是  $A$  的秩; 即  $r(A) = r$ 。  
特别地, 每个矩阵的等价标准形是唯一的。

**定理** 设  $B_{n \times n}$  为非奇异矩阵,  $A = A_{m \times n}$ , 则  $r(AB) = r(A)$ 。

**证明**  $B$  可写成一些初等矩阵的乘积:  $B = P_1 P_2 \cdots P_s$ 。所以

$$AB = AP_1 P_2 \cdots P_s$$

# 关于秩的结论

**回忆** 对任意矩阵  $A$ :

$$A_{m \times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D_{m \times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{m \times n}$$

**定理** 任一矩阵  $A$ , 其等价标准形中的  $r$ , 正好是  $A$  的秩; 即  $r(A) = r$ 。  
特别地, 每个矩阵的等价标准形是唯一的。

**定理** 设  $B_{n \times n}$  为非奇异矩阵,  $A = A_{m \times n}$ , 则  $r(AB) = r(A)$ 。

**证明**  $B$  可写成一些初等矩阵的乘积:  $B = P_1 P_2 \cdots P_s$ 。所以

$$AB = AP_1 P_2 \cdots P_s$$

为  $A$  作一系列初等列变换得到,

# 关于秩的结论

**回忆** 对任意矩阵  $A$ :

$$A_{m \times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D_{m \times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{m \times n}$$

**定理** 任一矩阵  $A$ , 其等价标准形中的  $r$ , 正好是  $A$  的秩; 即  $r(A) = r$ 。  
特别地, 每个矩阵的等价标准形是唯一的。

**定理** 设  $B_{n \times n}$  为非奇异矩阵,  $A = A_{m \times n}$ , 则  $r(AB) = r(A)$ 。

**证明**  $B$  可写成一些初等矩阵的乘积:  $B = P_1 P_2 \cdots P_s$ 。所以

$$AB = AP_1 P_2 \cdots P_s$$

为  $A$  作一系列初等列变换得到, 其秩仍与  $A$  相等。

# 关于秩的结论

**定义** 设  $A$  为  $n$  阶方阵，若  $r(A) = n$ ，则称  $A$  为 **满秩** 矩阵。

# 关于秩的结论

**定义** 设  $A$  为  $n$  阶方阵, 若  $r(A) = n$ , 则称  $A$  为 **满秩** 矩阵。

**定理** 设  $A$  为  $n$  阶方阵, 则  $A$  可逆  $\Leftrightarrow A$  满秩 ( $r(A) = n$ )。



# 关于秩的结论

**定义** 设  $A$  为  $n$  阶方阵, 若  $r(A) = n$ , 则称  $A$  为 **满秩** 矩阵。

**定理** 设  $A$  为  $n$  阶方阵, 则  $A$  可逆  $\Leftrightarrow A$  满秩 ( $r(A) = n$ )。

**证明**

$$A_{n \times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D_{n \times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{n \times n} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

# 关于秩的结论

**定义** 设  $A$  为  $n$  阶方阵, 若  $r(A) = n$ , 则称  $A$  为 **满秩** 矩阵。

**定理** 设  $A$  为  $n$  阶方阵, 则  $A$  可逆  $\Leftrightarrow A$  满秩 ( $r(A) = n$ )。

**证明**

$$A_{n \times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D_{n \times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{n \times n} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

则:

$$A \text{ 可逆} \iff D = I_n$$

# 关于秩的结论

**定义** 设  $A$  为  $n$  阶方阵, 若  $r(A) = n$ , 则称  $A$  为 **满秩** 矩阵。

**定理** 设  $A$  为  $n$  阶方阵, 则  $A$  可逆  $\Leftrightarrow A$  满秩 ( $r(A) = n$ )。

**证明**

$$A_{n \times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D_{n \times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{n \times n} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

则:

$$A \text{ 可逆} \iff D = I_n \iff r = n$$

# 关于秩的结论

**定义** 设  $A$  为  $n$  阶方阵, 若  $r(A) = n$ , 则称  $A$  为 **满秩** 矩阵。

**定理** 设  $A$  为  $n$  阶方阵, 则  $A$  可逆  $\Leftrightarrow A$  满秩 ( $r(A) = n$ )。

**证明**

$$A_{n \times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D_{n \times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{n \times n} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

则:

$$A \text{ 可逆} \iff D = I_n \iff r = n \iff r(A) = n$$