线性代数（内外招） **姓名**：

2019-2020 学年（上） **专业**：

学号：

第 06 周作业解答

练习 1. 将 4 阶方阵 M 作如下分块

$$M = \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A & O \\ I & -A \end{pmatrix}$$

请按此分块方式计算 M^2。

解

$$M^2 = \begin{pmatrix} A & O \\ I & -A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & O \\ I & -A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA + OI & AO + O(-A) \\ IA + (-A)I & IO + (-A)(-A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^2 & O \\ O & A^2 \end{pmatrix}$$

而

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

所以

$$M = \begin{pmatrix} I & O \\ O & I \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

练习 2. 将矩阵 A, B 作如下分块

$$A = \left(\begin{array}{c:cc} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ \hdashline 3 & 1 & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_1 & 2I \\ 3 & A_2 \end{pmatrix}, \quad B = \left(\begin{array}{cc:cc} 2 & 7 & 0 & 0 \\ \hdashline -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} B_1 & O \\ -I & B_2 \end{pmatrix},$$

请按此分块方式计算乘积 AB。

解

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 & 2I \\ 3 & A_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & O \\ -I & B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1B_1 + 2I(-I) & A_1O + 2IB_2 \\ 3B_1 + A_2(-I) & 3O + A_2B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1B_1 - 2I & 2B_2 \\ 3B_1 - A_2 & A_2B_2 \end{pmatrix}$$

其中

$$A_1B_1 - 2I = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 7 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 35 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_2B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}$$

所以

$$M = \left(\begin{array}{cc:cc} 8 & 35 & 2 & 8 \\ 0 & -2 & 4 & 10 \\ \hdashline 5 & 21 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

练习 3. 设

$$M = \begin{pmatrix} O_{r\times s} & A_{r\times r} \\ B_{s\times s} & O_{s\times r} \end{pmatrix}$$

其中 A, B 分别为 r, s 阶可逆方阵，求 M 的逆矩阵 M^{-1}。

解设

$$M^{-1}=\begin{pmatrix}U_{s\times r} & V_{s\times s}\\ W_{r\times r} & X_{r\times s}\end{pmatrix}$$

应有

$$MM^{-1}=\begin{pmatrix}O_{r\times s} & A_{r\times r}\\ B_{s\times s} & O_{s\times r}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U_{s\times r} & V_{s\times s}\\ W_{r\times r} & X_{r\times s}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}OU+AW & OV+AX\\ BU+OW & BV+OX\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}AW & AX\\ BU & BV\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_r & O_{r\times s}\\ O_{s\times r} & I_s\end{pmatrix}$$

故须

$$AW=I,\quad AX=O,\quad BU=O,\quad BV=I$$

利用 A, B 可逆条件，可解出

$$W=A^{-1},\quad X=O,\quad U=O,\quad V=B^{-1}$$

所以

$$M^{-1}=\begin{pmatrix}O & B^{-1}\\ A^{-1} & O\end{pmatrix}$$

练习 4. 用初等变换将下列矩阵化为等价标准形：

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & -3 & 1\\ -2 & 2 & -4\end{pmatrix}$$

解

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & -3 & 1\\ -2 & 2 & -4\end{pmatrix}\xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -3 & 3\\ -4 & 2 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-r_1\\ r_4+4r_1}]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & -3 & 3\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+2r_2]{r_3-3r_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{c_3+c_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{(-1)\times c_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

练习 5. 用<u>初等行变换</u>求下列矩阵 A, B, C, D 的逆矩阵：

$$A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 3\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}0 & a_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a_2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & a_3\\ a_4 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\qquad D=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

（其中 $a_i\neq 0$, $i=1, 2, 3, 4$）

解

$$
(A\vdots I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&2&3&1&0&0\\3&1&3&0&1&0\\-1&2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1&2&1&0&0&1\\3&1&3&0&1&0\\2&2&3&1&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{(-1)\times r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&-1&0&0&-1\\3&1&3&0&1&0\\2&2&3&1&0&0\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-3r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&-1&0&0&-1\\0&7&6&0&1&3\\0&6&5&1&0&2\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&-1&0&0&-1\\0&1&1&-1&1&1\\0&6&5&1&0&2\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{r_3-6r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&-1&0&0&-1\\0&1&1&-1&1&1\\0&0&-1&7&-6&-4\end{array}\right)\xrightarrow{(-1)\times r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&-1&0&0&-1\\0&1&1&-1&1&1\\0&0&1&-7&6&4\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[r_1+r_3]{r_2-r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&0&-7&6&3\\0&1&0&6&-5&-3\\0&0&1&-7&6&4\end{array}\right)\xrightarrow{r_1+2r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&5&-4&-3\\0&1&0&6&-5&-3\\0&0&1&-7&6&4\end{array}\right)
$$

所以 $A^{-1}=\begin{pmatrix}5&-4&-3\\6&-5&-3\\-7&6&4\end{pmatrix}$。

$$
(B\vdots I)=\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&1&1&0&0&0\\-1&1&1&1&0&1&0&0\\-1&-1&1&1&0&0&1&0\\-1&-1&-1&1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{r_3+r_2\\r_4+r_3}]{r_2+r_1}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&1&1&0&0&0\\0&2&2&2&1&1&0&0\\0&0&2&2&1&0&1&0\\0&0&0&2&1&0&0&1\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{\frac{1}{2}\times r_4}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&1&1&0&0&0\\0&2&2&2&1&1&0&0\\0&0&2&2&1&0&1&0\\0&0&0&1&\frac{1}{2}&0&0&\frac{1}{2}\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{r_2-2r_4\\r_1-r_4}]{r_3-2r_4}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&0&\frac{1}{2}&0&0&-\frac{1}{2}\\0&2&2&0&0&1&0&-1\\0&0&2&0&0&0&1&-1\\0&0&0&1&\frac{1}{2}&0&0&\frac{1}{2}\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{\frac{1}{2}\times r_3}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&0&\frac{1}{2}&0&0&-\frac{1}{2}\\0&2&2&0&0&1&0&-1\\0&0&1&0&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&0&1&\frac{1}{2}&0&0&\frac{1}{2}\end{array}\right)\xrightarrow[r_1-r_3]{r_2-2r_3}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&0&0&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}&0\\0&2&0&0&0&1&-1&0\\0&0&1&0&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&0&1&\frac{1}{2}&0&0&\frac{1}{2}\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{\frac{1}{2}\times r_2}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&0&0&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}&0\\0&1&0&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1&0&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&0&1&\frac{1}{2}&0&0&\frac{1}{2}\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-r_2}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&0\\0&1&0&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1&0&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&0&1&\frac{1}{2}&0&0&\frac{1}{2}\end{array}\right)
$$

所以 $B^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$。

$$
(C\vdots I)=\left(\begin{array}{cccc|cccc}0&a_1&0&0&1&0&0&0\\0&0&a_2&0&0&1&0&0\\0&0&0&a_3&0&0&1&0\\a_4&0&0&0&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_4\leftrightarrow r_3}*\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_2}*\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_1}\left(\begin{array}{cccc|cccc}a_4&0&0&0&0&0&0&1\\0&a_1&0&0&1&0&0&0\\0&0&a_2&0&0&1&0&0\\0&0&0&a_3&0&0&1&0\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[\substack{\frac{1}{a_1}\times r_2\\\frac{1}{a_2}\times r_3\\\frac{1}{a_3}\times r_4}]{\frac{1}{a_4}\times r_1}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{a_4}\\0&1&0&0&\frac{1}{a_1}&0&0&0\\0&0&1&0&0&\frac{1}{a_2}&0&0\\0&0&0&1&0&0&\frac{1}{a_3}&0\end{array}\right)
$$

所以 $C^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_4} \\ \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_3} & 0 \end{pmatrix}$

$$(D\vdots I)=\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_2-3\times r_4 \\ r_3-2\times r_4}]{r_1-4\times r_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2-2\times r_3]{r_1-3\times r_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1-2\times r_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

所以 $D^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$。

练习 6. 求 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

解

$$(A\vdots I)=\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 01 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-r_1,\cdots,r_n-r_1]{r_2-r_1} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 3 & \cdots & 0 & -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \cdots & n & -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4-r_2,\cdots,r_n-r_2]{r_3-r_2} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & n & 0 & -1 & 0 & \cdots & 01 \end{array}\right) \cdots \to \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{3}\times r_3,\cdots,\frac{1}{n}\times r_n]{\frac{1}{2}\times r_2} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n} \end{array}\right)$$

所以

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{n} & \frac{1}{n} \end{pmatrix}.$$

以下两题是附加题，做出来的同学下次课交，可以加分。注意解答过程要详细。

练习 7. 求出一个 2 阶方阵 A，满足 $A^{17}=I_2$，且 $A\neq I_2$。

解 $A=\begin{pmatrix}\cos\frac{2\pi}{17} & -\sin\frac{2\pi}{17}\\ \sin\frac{2\pi}{17} & \cos\frac{2\pi}{17}\end{pmatrix}$。(回忆：$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix}$)

练习 8. 设分块矩阵 $A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}$ 中子块 A_{11} 和 A_{22} 为方阵，并且 A_{11} 可逆。求出矩阵 X 和 Y 满足

$$\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I & O\\ X & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11} & \\ & S\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & Y\\ O & I\end{pmatrix}$$

其中 $S=A_{22}-A_{21}A_{22}^{-1}A_{21}$。

假设 S 也是可逆，导出用 S^{-1}，A_{11}^{-1} 及 A 的子块计算 A^{-1} 的一个公式。

解设

$$\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I & O\\ A_{21}A_{11}^{-1} & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11} & \\ & S\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & A_{11}^{-1}A_{12}\\ O & I\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}^{-1}&=\begin{pmatrix}I & A_{11}^{-1}A_{12}\\ O & I\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}A_{11} & \\ & S\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}I & O\\ A_{21}A_{11}^{-1} & I\end{pmatrix}^{-1}\\ &=\begin{pmatrix}I & -A_{11}^{-1}A_{12}\\ O & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11}^{-1} & \\ & S^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & O\\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I\end{pmatrix}\end{aligned}$$

练习 9. （关于纠错码）在这个练习中，我们不使用实数，而使用二进制数字 0 和 1。在这种数字系统中，加法、减法、乘法定义为：$1+1=0$，$1+0=1$，$0-1=1$，$1\cdot 1=1$，$0\cdot 1=0$ 等等。用 $\mathbb{F}$ 表示这种数字系统，即 $\mathbb{F}=\{0,1\}$。(题外话，实数系统则记为 $\mathbb{R}$。)

把分量均为 $\mathbb{F}$ 中的 0 和 1 的 n 维向量的全体，定义为 $\mathbb{F}^n$。不难知道，$\mathbb{F}^n$ 只包含 2^n 个向量。在信息通信中，$\mathbb{F}^8$ 中的一个向量就是一个字节（byte）。例如，向量

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

就是一个字节。

计算机中信息储存的形式是 0 和 1 的字符串。例如

$$\cdots 101100011110010010101110\cdots$$

通常把该字符串以 8 个数字为一段加以断开。例如上述字符串就断开成：

$$\cdots\,\big|\,10110001\,\big|\,11100100\,\big|\,10101110\,\big|\,\cdots$$

这样，每一段的 8 个数字正好构成 1 个字节，也就是 $\mathbb{F}^8$ 中的一个向量。通信时，每次传输 1 字节的信息。

通信的过程有时会出错，例如，把字节 10110001 发送出去，但接受方可能收到的是字节 10110101。那么，有没有一种办法，让接收方**自行**判断收到的字节是否正确？这是有的，其中一种办法是采用“纠错码”。这种方法会涉及到线性代数中矩阵的乘积。以上就是本题的背景和说明。

下面介绍纠错码时，我们假设字符串是以 4 个数字为一段进行断开，而不是通常的 8 个数字。这样做是为了叙述简单。

首先给出一些定义。定义矩阵

$$H=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

该矩阵称为 Hamming 矩阵。定义 $\mathbb{F}^7$ 中四个向量：

$$v_1=\begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1\\0\\0\\0 \end{pmatrix},\quad v_2=\begin{pmatrix} 0\\1\\1\\0\\1\\0\\0 \end{pmatrix},\quad v_3=\begin{pmatrix} 1\\0\\1\\0\\0\\1\\0 \end{pmatrix},\quad v_4=\begin{pmatrix} 1\\1\\0\\0\\0\\0\\1 \end{pmatrix}$$

验证：乘积 Hv_1, Hv_2, Hv_3, Hv_4 均为 $\mathbb{F}^3$ 中的零向量。

定义矩阵

$$M=(v_1, v_2, v_3, v_4).$$

（即：矩阵 M 为 7×4 矩阵，各列依次为：v_1, v_2, v_3, v_4）则上述所验证的结论说明 $HM=O$。

现在假设 Coco 要发送信息 $u\in\mathbb{F}^4$ 给 Cici。纠错码的办法是：

1. 首先 Coco 计算乘积 $v:=Mu$。（注意 $v\in\mathbb{F}^7$。）**验证**：v 的后四位数字正好就是 u。

2. 然后，Coco 把 v 发送给 Cici。（注意不是发送原信息 u。）

3. 假设 Cici 收到的信息是 $w\in\mathbb{F}^7$。（如果 $w\neq v$，则说明发送过程出错。但 Cici 现在还不知道收到的 w 究竟有错没错。）

4. 假设传输过程信息**最多出错一个数字**。例如，假设发送的是 $v=\begin{pmatrix} 0\\0\\1\\1\\1\\1\\0 \end{pmatrix}$，那么收到的可能是 $w=\begin{pmatrix} 0\\1\\1\\1\\1\\1\\0 \end{pmatrix}$（第 2 位数字出错）或者 $w=\begin{pmatrix} 0\\0\\1\\1\\1\\0\\0 \end{pmatrix}$（第 6 位数字出错）等等，但不可能收到 $w=\begin{pmatrix} 0\\1\\1\\1\\1\\0\\0 \end{pmatrix}$（第 2，6 位数字同时出错）。

4. Cici 开始验证了：计算乘积 Hw。请你**验证**：如果 $Hw=0$，则说明传输过程没错，即 $w=u$。这时 w 的后 4 位数字正好就是原信息 u。如果 $Hw\neq 0$，则说明传输过程出错，即 $w\neq v$。

5. 即便传输过程出错，也是有办法在错误中把原信息恢复出来。请你以这个例子想一想：假设收到 $w=\begin{pmatrix} 0\\0\\1\\1\\0\\1\\0 \end{pmatrix}$，那么原信息 u 是什么？

最后，想一想“纠错码”体现在哪里？

提示原信息 $u=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$。注意到 $Hw=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\neq 0$，说明 w 是错误信息。注意到 $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ 是 H 的第 5 列，说明 w 的第 5 位数字出错。所以发送的信息是 $v=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$。由于 v 的后 4 位数字为 u，所以 $u=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$。

一般地，如果 $Hw=0$，则说明 $w=v$，接收到的信息没有错。如果 $Hw\neq 0$，则 $w\neq v$，接收到的信息有误，这时：Hw 一定等于 H 的某一列，如果是第 i 列，则 w 的第 i 位数字出错。