

第 1 章 c : 连续函数

数学系 梁卓滨

2019-2020 学年 I

Outline

1. 连续函数
2. 函数的间断点
3. 闭区间上连续函数的性质

We are here now...

1. 连续函数

2. 函数的间断点

3. 闭区间上连续函数的性质

定义 设 $y = f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 处**连续**。

定义 设 $y = f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 处 **连续**。

注 简单地说，

- 当 x 接近 x_0 时， $f(x)$ 也接近 $f(x_0)$

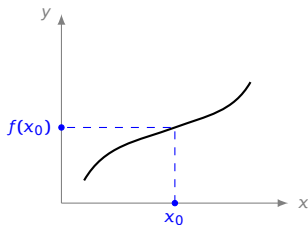
定义 设 $y = f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

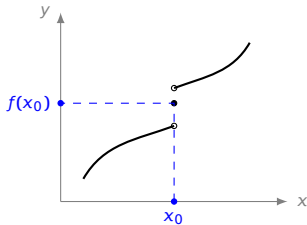
则称 $f(x)$ 在点 x_0 处 **连续**。

注 简单地说，

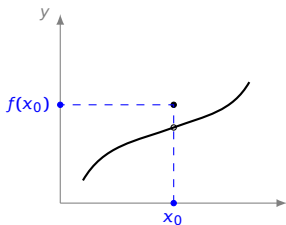
- 当 x 接近 x_0 时， $f(x)$ 也接近 $f(x_0)$



f 在 x_0 处连续



f 在 x_0 处不连续



f 在 x_0 处不连续

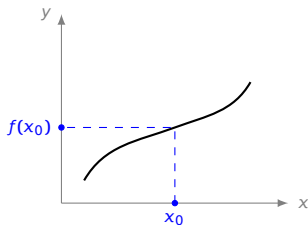
定义 设 $y = f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

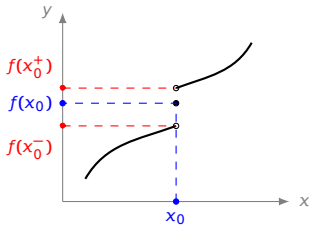
则称 $f(x)$ 在点 x_0 处 **连续**。

注 简单地说，

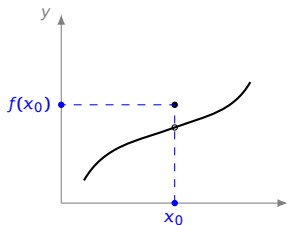
- 当 x 接近 x_0 时， $f(x)$ 也接近 $f(x_0)$



f 在 x_0 处连续



f 在 x_0 处不连续
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在



f 在 x_0 处不连续

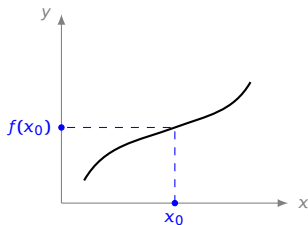
定义 设 $y = f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

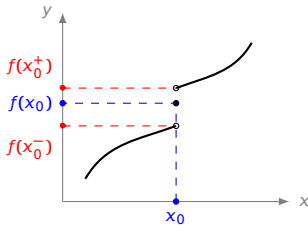
则称 $f(x)$ 在点 x_0 处 **连续**。

注 简单地说，

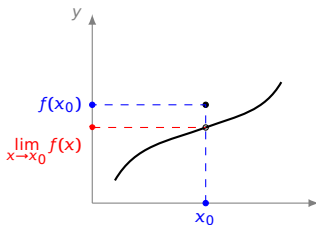
- 当 x 接近 x_0 时， $f(x)$ 也接近 $f(x_0)$



f 在 x_0 处连续



f 在 x_0 处不连续
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在



f 在 x_0 处不连续
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$

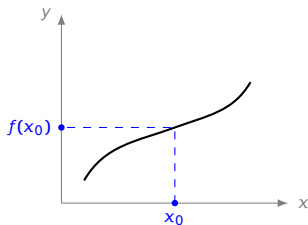
定义 设 $y = f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$$

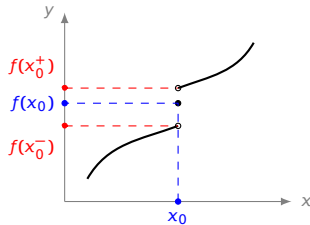
则称 $f(x)$ 在点 x_0 处 **连续**。

注 简单地说，

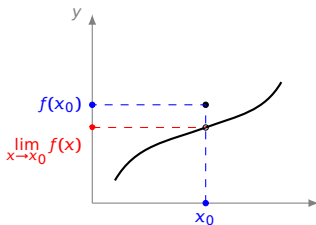
- 当 x 接近 x_0 时， $f(x)$ 也接近 $f(x_0)$



f 在 x_0 处连续



f 在 x_0 处不连续
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在



f 在 x_0 处不连续
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$

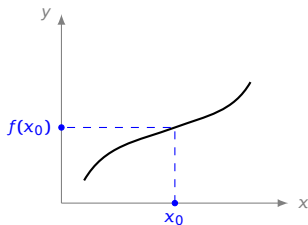
定义 设 $y = f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义, 如果

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$$
$$\Leftrightarrow f(x) - f(x_0) \rightarrow 0 \text{ (当 } x - x_0 \rightarrow 0 \text{)}$$

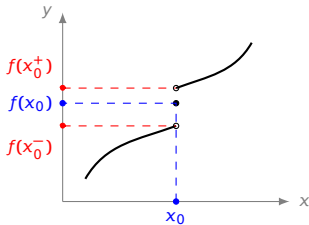
则称 $f(x)$ 在点 x_0 处 **连续**.

注 简单地说,

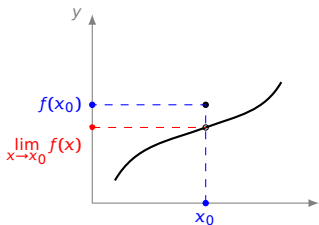
- 当 x 接近 x_0 时, $f(x)$ 也接近 $f(x_0)$



f 在 x_0 处连续



f 在 x_0 处不连续
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在



f 在 x_0 处不连续
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$

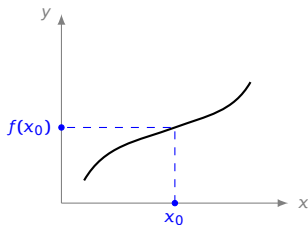
定义 设 $y = f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，如果

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0 \\ &\Leftrightarrow \underbrace{f(x) - f(x_0)}_{\Delta y} \rightarrow 0 \quad (\text{当 } \underbrace{x - x_0}_{\Delta x} \rightarrow 0)\end{aligned}$$

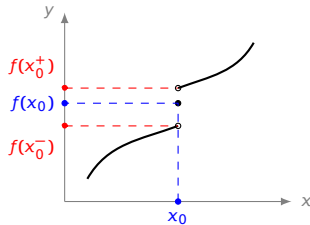
则称 $f(x)$ 在点 x_0 处**连续**.

注 简单地说，

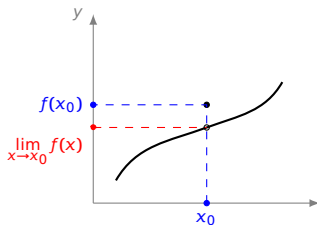
- 当 x 接近 x_0 时， $f(x)$ 也接近 $f(x_0)$



f 在 x_0 处连续



f 在 x_0 处不连续
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在



f 在 x_0 处不连续
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$

定义 设 $y = f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$$

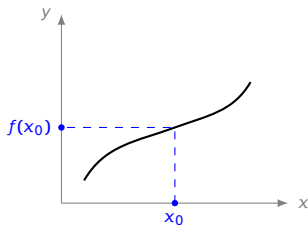
$$\Leftrightarrow \underbrace{f(x) - f(x_0)}_{\Delta y} \rightarrow 0 \quad (\text{当 } \underbrace{x - x_0}_{\Delta x} \rightarrow 0)$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 处**连续**.

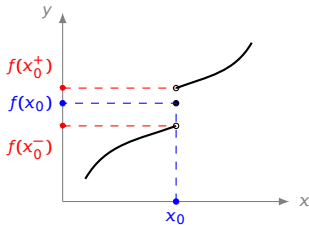
注 简单地说，

$$\Leftrightarrow \Delta y \rightarrow 0 \quad (\text{当 } \Delta x \rightarrow 0)$$

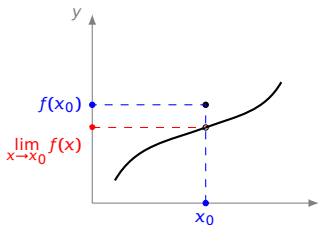
- 当 x 接近 x_0 时， $f(x)$ 也接近 $f(x_0)$



f 在 x_0 处连续



f 在 x_0 处不连续
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在



f 在 x_0 处不连续
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$

定义 设 $y = f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$$

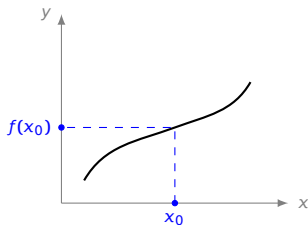
$$\Leftrightarrow \underbrace{f(x) - f(x_0)}_{\Delta y} \rightarrow 0 \quad (\text{当 } \underbrace{x - x_0}_{\Delta x} \rightarrow 0)$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 处**连续**.

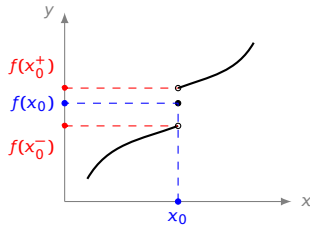
注 简单地说，

$$\Leftrightarrow \Delta y \rightarrow 0 \quad (\text{当 } \Delta x \rightarrow 0)$$

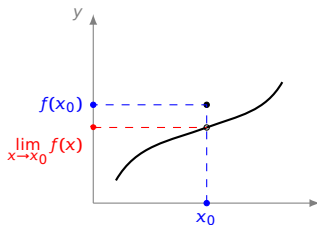
- 当 x 接近 x_0 时， $f(x)$ 也接近 $f(x_0)$
- 当 x 是 x_0 的微小改变时， $f(x)$ 也是 $f(x_0)$ 的微小改变



f 在 x_0 处连续



f 在 x_0 处不连续
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在



f 在 x_0 处不连续
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$

定义 设 $y = f(x)$ 定义在开区间 (a, b) 上, $x_0 \in (a, b)$. 如果

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 处 **连续**.

定义 设 $y = f(x)$ 定义在开区间 (a, b) 上, $x_0 \in (a, b)$. 如果

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 处 **连续**.

定义 设 $y = f(x)$ 定义在闭区间 $[a, b]$ 上.

定义 设 $y = f(x)$ 定义在开区间 (a, b) 上, $x_0 \in (a, b)$. 如果

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 处 **连续**.

定义 设 $y = f(x)$ 定义在闭区间 $[a, b]$ 上. 如果

$$f(a^+) = f(a)$$

则称 $f(x)$ 在左端点 a 处 **连续**.

定义 设 $y = f(x)$ 定义在开区间 (a, b) 上, $x_0 \in (a, b)$. 如果

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 处 **连续**.

定义 设 $y = f(x)$ 定义在闭区间 $[a, b]$ 上. 如果

$$f(a^+) = f(a)$$

则称 $f(x)$ 在左端点 a 处 **连续**. 如果

$$f(b^-) = f(b)$$

则称 $f(x)$ 在右端点 b 处 **连续**.

定义 设 $y = f(x)$ 定义在开区间 (a, b) 上, $x_0 \in (a, b)$. 如果

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 处 **连续**.

定义 设 $y = f(x)$ 定义在闭区间 $[a, b]$ 上. 如果

$$f(a^+) = f(a)$$

则称 $f(x)$ 在左端点 a 处 **连续**. 如果

$$f(b^-) = f(b)$$

则称 $f(x)$ 在右端点 b 处 **连续**.

定义 如果 $f(x)$ 在区间 I 的每一点都连续, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上 **连续**, 或称 $f(x)$ 是区间上的 **连续函数**.

定义 设 $y = f(x)$ 定义在开区间 (a, b) 上, $x_0 \in (a, b)$. 如果

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 处 **连续**.

定义 设 $y = f(x)$ 定义在闭区间 $[a, b]$ 上. 如果

$$f(a^+) = f(a)$$

则称 $f(x)$ 在左端点 a 处 **连续**. 如果

$$f(b^-) = f(b)$$

则称 $f(x)$ 在右端点 b 处 **连续**.

定义 如果 $f(x)$ 在区间 I 的每一点都连续, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上 **连续**, 或称 $f(x)$ 是区间上的 **连续函数**.

注 连续函数的图形是一条连续不间断的曲线.

连续函数的运算

性质 设 f 和 g 是连续函数, 则

- 四则运算 $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ 在其定义域内也还是连续函数.
- 假设复合函数 $f[g(x)]$ 有意义, 则该复合函数也是连续函数.

连续函数的运算

性质 设 f 和 g 是连续函数, 则

- 四则运算 $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ 在其定义域内也还是连续函数.
- 假设复合函数 $f[g(x)]$ 有意义, 则该复合函数也是连续函数.

例 讨论 $y = \sin \frac{1}{x}$ 的连续性.

连续函数的运算

性质 设 f 和 g 是连续函数, 则

- 四则运算 $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ 在其定义域内也还是连续函数.
- 假设复合函数 $f[g(x)]$ 有意义, 则该复合函数也是连续函数.

例 讨论 $y = \sin \frac{1}{x}$ 的连续性.

解 $y = \sin \frac{1}{x}$ 可看作连续函数 $y = \sin u$ 复合上连续函数 $u = \frac{1}{x}$, 所以 $y = \sin \frac{1}{x}$ 在定义域 $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ 上连续.

连续函数的运算

性质 设 f 和 g 是连续函数, 则

- 四则运算 $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ 在其定义域内也还是连续函数.
- 假设复合函数 $f[g(x)]$ 有意义, 则该复合函数也是连续函数.

例 讨论 $y = \sin \frac{1}{x}$ 的连续性.

解 $y = \sin \frac{1}{x}$ 可看作连续函数 $y = \sin u$ 复合上连续函数 $u = \frac{1}{x}$, 所以 $y = \sin \frac{1}{x}$ 在定义域 $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ 上连续.

回忆 初等函数 指幂函数、指数函数、对数函数、(反)三角函数进过有限次的四则运算和复合所构成的函数.

连续函数的运算

性质 设 f 和 g 是连续函数, 则

- 四则运算 $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ 在其定义域内也还是连续函数.
- 假设复合函数 $f[g(x)]$ 有意义, 则该复合函数也是连续函数.

例 讨论 $y = \sin \frac{1}{x}$ 的连续性.

解 $y = \sin \frac{1}{x}$ 可看作连续函数 $y = \sin u$ 复合上连续函数 $u = \frac{1}{x}$, 所以 $y = \sin \frac{1}{x}$ 在定义域 $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ 上连续.

回忆 初等函数 指幂函数、指数函数、对数函数、(反)三角函数进过有限次的四则运算和复合所构成的函数.

性质 一切初等函数在其定义区间内都是连续.

例 1 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 - 2x + 5}$

例 1 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 - 2x + 5}$

解 $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$ 是初等函数, 因此连续. 并且 $x = 0$ 在 $f(x)$ 的定义域中, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 - 2x + 5} = f(0)$$

例 1 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 - 2x + 5}$

解 $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$ 是初等函数, 因此连续. 并且 $x = 0$ 在 $f(x)$ 的定义域中, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 - 2x + 5} = f(0) = \sqrt{5}.$$

例 1 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 - 2x + 5}$

解 $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$ 是初等函数, 因此连续. 并且 $x = 0$ 在 $f(x)$ 的定义域中, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 - 2x + 5} = f(0) = \sqrt{5}.$$

例 2 求 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + 2x)^{\frac{3}{\sin x}}$

例 1 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 - 2x + 5}$

解 $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$ 是初等函数, 因此连续. 并且 $x = 0$ 在 $f(x)$ 的定义域中, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 - 2x + 5} = f(0) = \sqrt{5}.$$

例 2 求 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + 2x)^{\frac{3}{\sin x}}$

解 $f(x) = (1 + 2x)^{\frac{3}{\sin x}}$ 是初等函数, 因此连续. 并且 $x = \frac{\pi}{2}$ 在 $f(x)$ 的定义域中, 所以

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + 2x)^{\frac{3}{\sin x}} = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

例 1 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 - 2x + 5}$

解 $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$ 是初等函数, 因此连续. 并且 $x = 0$ 在 $f(x)$ 的定义域中, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 - 2x + 5} = f(0) = \sqrt{5}.$$

例 2 求 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + 2x)^{\frac{3}{\sin x}}$

解 $f(x) = (1 + 2x)^{\frac{3}{\sin x}}$ 是初等函数, 因此连续. 并且 $x = \frac{\pi}{2}$ 在 $f(x)$ 的定义域中, 所以

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + 2x)^{\frac{3}{\sin x}} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = (1 + \pi)^3.$$

例 1 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 - 2x + 5}$

解 $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$ 是初等函数, 因此连续. 并且 $x = 0$ 在 $f(x)$ 的定义域中, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 - 2x + 5} = f(0) = \sqrt{5}.$$

例 2 求 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + 2x)^{\frac{3}{\sin x}}$

解 $f(x) = (1 + 2x)^{\frac{3}{\sin x}}$ 是初等函数, 因此连续. 并且 $x = \frac{\pi}{2}$ 在 $f(x)$ 的定义域中, 所以

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + 2x)^{\frac{3}{\sin x}} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = (1 + \pi)^3.$$

注 $(1 + 2x)^{\frac{3}{\sin x}} = e^{\ln(1+2x) \frac{3}{\sin x}} = e^{\frac{3}{\sin x} \ln(1+2x)}$ 是初等函数.

例 1 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 - 2x + 5}$

解 $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$ 是初等函数, 因此连续. 并且 $x = 0$ 在 $f(x)$ 的定义域中, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 - 2x + 5} = f(0) = \sqrt{5}.$$

例 2 求 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + 2x)^{\frac{3}{\sin x}}$

解 $f(x) = (1 + 2x)^{\frac{3}{\sin x}}$ 是初等函数, 因此连续. 并且 $x = \frac{\pi}{2}$ 在 $f(x)$ 的定义域中, 所以

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + 2x)^{\frac{3}{\sin x}} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = (1 + \pi)^3.$$

注 $(1 + 2x)^{\frac{3}{\sin x}} = e^{\ln(1+2x) \cdot \frac{3}{\sin x}} = e^{\frac{3}{\sin x} \ln(1+2x)}$ 是初等函数.

例 3 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{3}{\sin x}}$

例 3 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{3}{\sin x}}$

例3 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{3}{\sin x}}$

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{3}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{3}{\sin x} \ln(1+2x)}$$

例 3 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{3}{\sin x}}$

解

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{3}{\sin x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{3}{\sin x} \ln(1+2x)} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{\sin x} \ln(1+2x)}\end{aligned}$$

例3 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{3}{\sin x}}$

解

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{3}{\sin x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{3}{\sin x} \ln(1+2x)} \\&= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{\sin x} \ln(1+2x)} \\&= e^{\lim_{x \rightarrow 0} 6 \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{\ln(1+2x)}{2x}}\end{aligned}$$

例 3 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{3}{\sin x}}$

解

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{3}{\sin x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{3}{\sin x} \ln(1+2x)} \\&= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{\sin x} \ln(1+2x)} \\&= e^{\lim_{x \rightarrow 0} 6 \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{\ln(1+2x)}{2x}} \\&= e^6.\end{aligned}$$

We are here now...

1. 连续函数

2. 函数的间断点

3. 闭区间上连续函数的性质

定义 设 $f(x)$ 在 x_0 的邻域上有定义，如果 x_0 不是 $f(x)$ 的连续点，则称为**间断点**。

定义 设 $f(x)$ 在 x_0 的邻域上有定义，如果 x_0 不是 $f(x)$ 的连续点，则称为**间断点**。

也就是， x_0 为间断点 \Leftrightarrow 不成立 “ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ”。

定义 设 $f(x)$ 在 x_0 的邻域上有定义, 如果 x_0 不是 $f(x)$ 的连续点, 则称为 **间断点**.

也就是, x_0 为间断点 \Leftrightarrow 不成立 “ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ”. 分以下几种情形:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在

定义 设 $f(x)$ 在 x_0 的邻域上有定义, 如果 x_0 不是 $f(x)$ 的连续点, 则称为**间断点**.

也就是, x_0 为间断点 \Leftrightarrow 不成立 “ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ”. 分以下几种情形:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$. 这时称 x_0 为**可去间断点**
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在

定义 设 $f(x)$ 在 x_0 的邻域上有定义, 如果 x_0 不是 $f(x)$ 的连续点, 则称为 **间断点**.

也就是, x_0 为间断点 \Leftrightarrow 不成立 “ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ”. 分以下几种情形:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$. 这时称 x_0 为 **可去间断点**
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在
 - * $f(x_0^+)$ 和 $f(x_0^-)$ 均存在, 但 $f(x_0^+) \neq f(x_0^-)$.
 - * $f(x_0^+)$ 和 $f(x_0^-)$ 至少有一个不存在.

定义 设 $f(x)$ 在 x_0 的邻域上有定义, 如果 x_0 不是 $f(x)$ 的连续点, 则称为**间断点**.

也就是, x_0 为间断点 \Leftrightarrow 不成立 “ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ”. 分以下几种情形:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$. 这时称 x_0 为**可去间断点**
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在
 - * $f(x_0^+)$ 和 $f(x_0^-)$ 均存在, 但 $f(x_0^+) \neq f(x_0^-)$. 这时称 x_0 为**跳跃间断点**
 - * $f(x_0^+)$ 和 $f(x_0^-)$ 至少有一个不存在.

定义 设 $f(x)$ 在 x_0 的邻域上有定义, 如果 x_0 不是 $f(x)$ 的连续点, 则称为**间断点**.

也就是, x_0 为间断点 \Leftrightarrow 不成立 “ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ”. 分以下几种情形:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$. 这时称 x_0 为**可去间断点**
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在
 - * $f(x_0^+)$ 和 $f(x_0^-)$ 均存在, 但 $f(x_0^+) \neq f(x_0^-)$. 这时称 x_0 为**跳跃间断点**
 - * $f(x_0^+)$ 和 $f(x_0^-)$ 至少有一个不存在. 这时称 x_0 为**第二类间断点**

定义 设 $f(x)$ 在 x_0 的邻域上有定义, 如果 x_0 不是 $f(x)$ 的连续点, 则称为**间断点**.

也就是, x_0 为间断点 \Leftrightarrow 不成立 “ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ”. 分以下几种情形:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$. 这时称 x_0 为**可去间断点**
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在
 - * $f(x_0^+)$ 和 $f(x_0^-)$ 均存在, 但 $f(x_0^+) \neq f(x_0^-)$. 这时称 x_0 为**跳跃间断点**
 - * $f(x_0^+)$ 和 $f(x_0^-)$ 至少有一个不存在. 这时称 x_0 为**第二类间断点**

第一类间断点

跳跃间断点

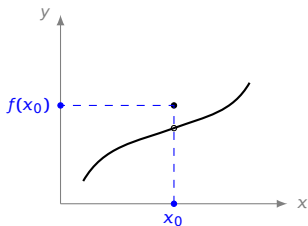
第二类间断点

定义 设 $f(x)$ 在 x_0 的邻域上有定义, 如果 x_0 不是 $f(x)$ 的连续点, 则称为**间断点**.

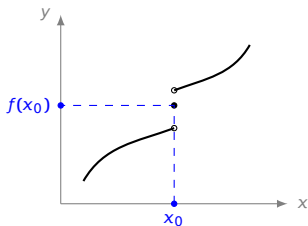
也就是, x_0 为间断点 \Leftrightarrow 不成立 “ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ”. 分以下几种情形:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$. 这时称 x_0 为**可去间断点**
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在
 - * $f(x_0^+)$ 和 $f(x_0^-)$ 均存在, 但 $f(x_0^+) \neq f(x_0^-)$. 这时称 x_0 为**跳跃间断点**
 - * $f(x_0^+)$ 和 $f(x_0^-)$ 至少有一个不存在. 这时称 x_0 为**第二类间断点**

第一类间断点



可去间断点



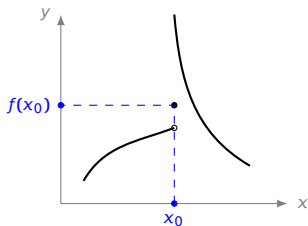
跳跃间断点

定义 设 $f(x)$ 在 x_0 的邻域上有定义, 如果 x_0 不是 $f(x)$ 的连续点, 则称为**间断点**.

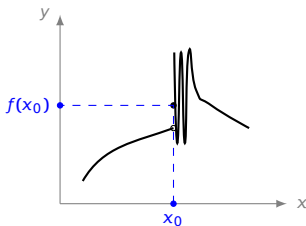
也就是, x_0 为间断点 \Leftrightarrow 不成立 “ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ”. 分以下几种情形:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$. 这时称 x_0 为**可去间断点**
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在
 - * $f(x_0^+)$ 和 $f(x_0^-)$ 均存在, 但 $f(x_0^+) \neq f(x_0^-)$. 这时称 x_0 为**跳跃间断点**
 - * $f(x_0^+)$ 和 $f(x_0^-)$ 至少有一个不存在. 这时称 x_0 为**第二类间断点**

第一类间断点



第二类间断点
无穷间断点



第二类间断点
震荡间断点

例 指出下列函数的间断点，并判别类型：

$$f_1(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}, \quad f_3(x) = \frac{1}{x}$$
$$f_4(x) = \sin \frac{1}{x}$$

例 指出下列函数的间断点，并判别类型：

$$f_1(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}, \quad f_3(x) = \frac{1}{x} \\ f_4(x) = \sin \frac{1}{x}$$

解 (1) $\lim_{x \rightarrow 1} f_1(x) \qquad f_1(1),$

例 指出下列函数的间断点，并判别类型：

$$f_1(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}, \quad f_3(x) = \frac{1}{x} \\ f_4(x) = \sin \frac{1}{x}$$

解 (1) $\lim_{x \rightarrow 1} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) \quad f_1(1),$

例 指出下列函数的间断点，并判别类型：

$$f_1(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}, \quad f_3(x) = \frac{1}{x} \\ f_4(x) = \sin \frac{1}{x}$$

解 (1) $\lim_{x \rightarrow 1} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2 \neq f_1(1),$

例 指出下列函数的间断点，并判别类型：

$$f_1(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}, \quad f_3(x) = \frac{1}{x} \\ f_4(x) = \sin \frac{1}{x}$$

解 (1) $\lim_{x \rightarrow 1} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2 \neq f_1(1),$

例 指出下列函数的间断点，并判别类型：

$$f_1(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}, \quad f_3(x) = \frac{1}{x} \\ f_4(x) = \sin \frac{1}{x}$$

解 (1) $\lim_{x \rightarrow 1} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2 \neq f_1(1)$, 故 $x = 1$ 是可去间断点.

例 指出下列函数的间断点，并判别类型：

$$f_1(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}, \quad f_3(x) = \frac{1}{x} \\ f_4(x) = \sin \frac{1}{x}$$

解 (1) $\lim_{x \rightarrow 1} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2 \neq f_1(1)$ ，故 $x = 1$ 是可去间断点。

(2) $f_2(0^+) =$

$$f_2(0^-) =$$

例 指出下列函数的间断点，并判别类型：

$$f_1(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}, \quad f_3(x) = \frac{1}{x} \\ f_4(x) = \sin \frac{1}{x}$$

解 (1) $\lim_{x \rightarrow 1} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2 \neq f_1(1)$ ，故 $x = 1$ 是可去间断点。

(2)

$$f_2(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f_2(x)$$

$$f_2(0^-) =$$

例 指出下列函数的间断点，并判别类型：

$$f_1(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}, \quad f_3(x) = \frac{1}{x} \\ f_4(x) = \sin \frac{1}{x}$$

解 (1) $\lim_{x \rightarrow 1} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2 \neq f_1(1)$ ，故 $x = 1$ 是可去间断点。

(2)

$$f_2(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1)$$
$$f_2(0^-) =$$

例 指出下列函数的间断点，并判别类型：

$$f_1(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}, \quad f_3(x) = \frac{1}{x} \\ f_4(x) = \sin \frac{1}{x}$$

解 (1) $\lim_{x \rightarrow 1} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2 \neq f_1(1)$ ，故 $x = 1$ 是可去间断点。

(2)

$$f_2(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1$$
$$f_2(0^-) =$$

例 指出下列函数的间断点，并判别类型：

$$f_1(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}, \quad f_3(x) = \frac{1}{x} \\ f_4(x) = \sin \frac{1}{x}$$

解 (1) $\lim_{x \rightarrow 1} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2 \neq f_1(1)$ ，故 $x=1$ 是可去间断点。

(2)

$$f_2(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1$$
$$f_2(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f_2(x)$$

例 指出下列函数的间断点，并判别类型：

$$f_1(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}, \quad f_3(x) = \frac{1}{x} \\ f_4(x) = \sin \frac{1}{x}$$

解 (1) $\lim_{x \rightarrow 1} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2 \neq f_1(1)$ ，故 $x = 1$ 是可去间断点。

(2)

$$f_2(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1$$
$$f_2(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-1)$$

例 指出下列函数的间断点，并判别类型：

$$f_1(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}, \quad f_3(x) = \frac{1}{x} \\ f_4(x) = \sin \frac{1}{x}$$

解 (1) $\lim_{x \rightarrow 1} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2 \neq f_1(1)$, 故 $x=1$ 是可去间断点.

(2)

$$f_2(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1$$
$$f_2(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-1) = -1$$

例 指出下列函数的间断点，并判别类型：

$$f_1(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}, \quad f_3(x) = \frac{1}{x} \\ f_4(x) = \sin \frac{1}{x}$$

解 (1) $\lim_{x \rightarrow 1} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2 \neq f_1(1)$ ，故 $x = 1$ 是可去间断点。

(2)

$$f_2(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1$$
$$f_2(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-1) = -1$$

两者不等，所以 $x = 0$ 是跳跃间断点。

例 指出下列函数的间断点，并判别类型：

$$f_1(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}, \quad f_3(x) = \frac{1}{x} \\ f_4(x) = \sin \frac{1}{x}$$

解 (1) $\lim_{x \rightarrow 1} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2 \neq f_1(1)$ ，故 $x = 1$ 是可去间断点。

(2)

$$f_2(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1$$
$$f_2(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-1) = -1$$

两者不等，所以 $x = 0$ 是跳跃间断点。

(3) $f_3(0^+)$, $f_3(0^-)$ 均不存在，故 $x = 0$ 为第二类间断点。

例 指出下列函数的间断点，并判别类型：

$$f_1(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}, \quad f_3(x) = \frac{1}{x} \\ f_4(x) = \sin \frac{1}{x}$$

解 (1) $\lim_{x \rightarrow 1} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2 \neq f_1(1)$ ，故 $x = 1$ 是可去间断点。

(2)

$$f_2(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1$$
$$f_2(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-1) = -1$$

两者不等，所以 $x = 0$ 是跳跃间断点。

(3) $f_3(0^+)$, $f_3(0^-)$ 均不存在，故 $x = 0$ 为第二类间断点。因为 $f_3(0^+)$, $f_3(0^-)$ 为 ∞ ，所以 $x = 0$ 还是无穷间断点。

例 指出下列函数的间断点，并判别类型：

$$f_1(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}, \quad f_3(x) = \frac{1}{x} \\ f_4(x) = \sin \frac{1}{x}$$

解 (1) $\lim_{x \rightarrow 1} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2 \neq f_1(1)$ ，故 $x = 1$ 是可去间断点。

(2)

$$f_2(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1$$
$$f_2(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-1) = -1$$

两者不等，所以 $x = 0$ 是跳跃间断点。

(3) $f_3(0^+)$, $f_3(0^-)$ 均不存在，故 $x = 0$ 为第二类间断点。因为 $f_3(0^+)$, $f_3(0^-)$ 为 ∞ ，所以 $x = 0$ 还是无穷间断点。

(4) $f_3(0^+)$, $f_3(0^-)$ 均不存在，故 $x = 0$ 为第二类间断点。

例 指出下列函数的间断点，并判别类型：

$$f_1(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}, \quad f_3(x) = \frac{1}{x} \\ f_4(x) = \sin \frac{1}{x}$$

解 (1) $\lim_{x \rightarrow 1} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2 \neq f_1(1)$ ，故 $x = 1$ 是可去间断点。

(2)

$$f_2(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1$$
$$f_2(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-1) = -1$$

两者不等，所以 $x = 0$ 是跳跃间断点。

(3) $f_3(0^+)$, $f_3(0^-)$ 均不存在，故 $x = 0$ 为第二类间断点. 因为 $f_3(0^+)$, $f_3(0^-)$ 为 ∞ ，所以 $x = 0$ 还是无穷间断点。

(4) $f_3(0^+)$, $f_3(0^-)$ 均不存在，故 $x = 0$ 为第二类间断点. 进一步可知是震荡间断点。

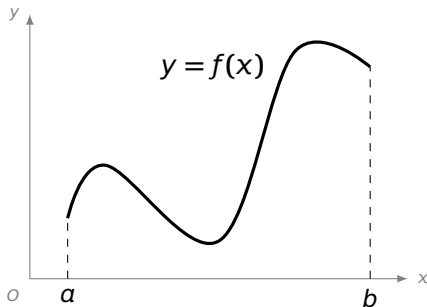
We are here now...

1. 连续函数

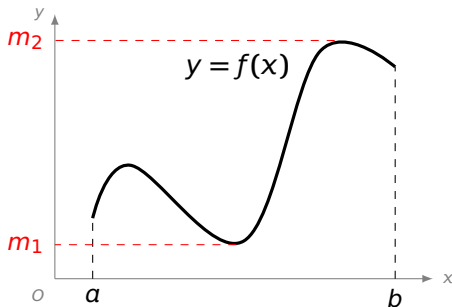
2. 函数的间断点

3. 闭区间上连续函数的性质

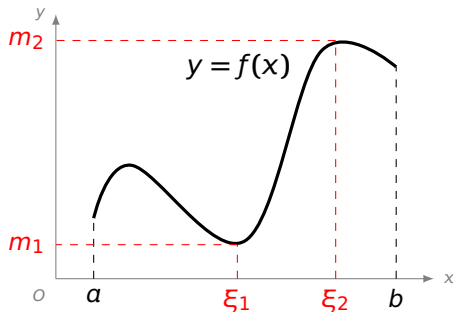
连续函数最值定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在该区间上有界, 并且能取到最大值 M 和最小值 m .



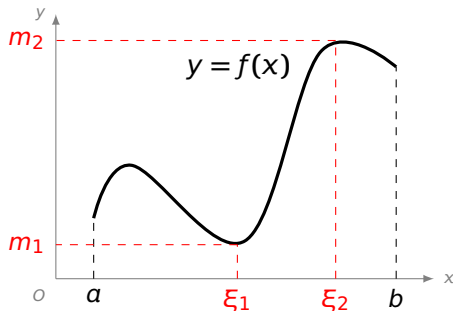
连续函数最值定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在该区间上有界, 并且能取到最大值 M 和最小值 m .



连续函数最值定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在该区间上有界, 并且能取到最大值 M 和最小值 m .

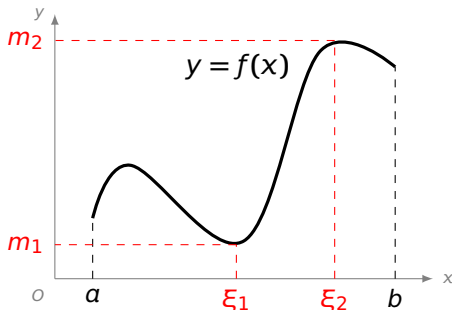


连续函数最值定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在该区间上有界, 并且能取到最大值 M 和最小值 m .



注 定理中“闭区间 $[a, b]$ ”不能换成“开区间 (a, b) ”, 否则结论不再成立.

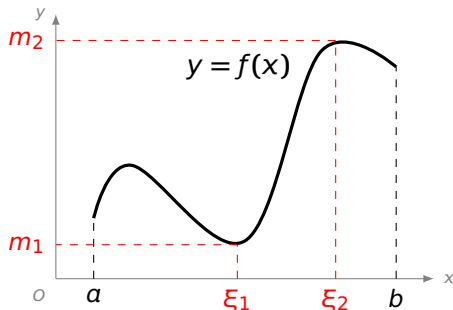
连续函数最值定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在该区间上有界, 并且能取到最大值 M 和最小值 m .



注 定理中“闭区间 $[a, b]$ ”不能换成“开区间 (a, b) ”, 否则结论不再成立. 例如:

- $f(x) = \tan x$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上连续, 为无界函数, 取不到最大最小值.

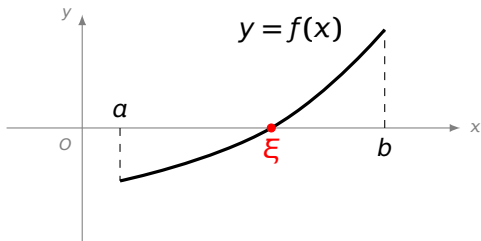
连续函数最值定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在该区间上有界, 并且能取到最大值 M 和最小值 m .



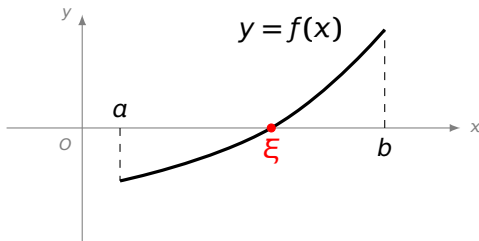
注 定理中“闭区间 $[a, b]$ ”不能换成“开区间 (a, b) ”, 否则结论不再成立. 例如:

- $f(x) = \tan x$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上连续, 为无界函数, 取不到最大最小值.
- $f(x) = x$ 在 $(-1, 1)$ 上取不到最大最小值.

连续函数零点定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a)$ 和 $f(b)$ 异号, 则在开区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $f(\xi) = 0$.

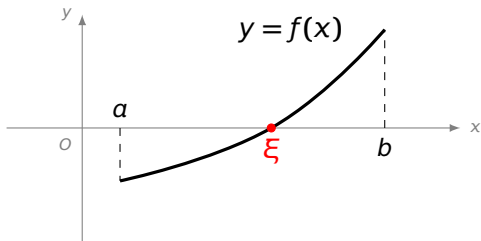


连续函数零点定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a)$ 和 $f(b)$ 异号, 则在开区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $f(\xi) = 0$.



例 1 证明方程 $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ 在区间 $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 3)$ 内各有一个实根.

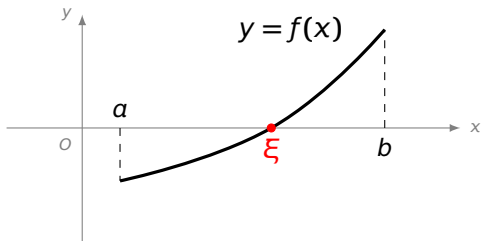
连续函数零点定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a)$ 和 $f(b)$ 异号, 则在开区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $f(\xi) = 0$.



例 1 证明方程 $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ 在区间 $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 3)$ 内各有一个实根.

证明 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ 是闭区间 $[-1, 0]$ 上的连续函数, $f(-1) < 0 < f(0)$, 所以 $f(x)$ 在开区间 $(-1, 0)$ 内有实数解.

连续函数零点定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a)$ 和 $f(b)$ 异号, 则在开区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $f(\xi) = 0$.

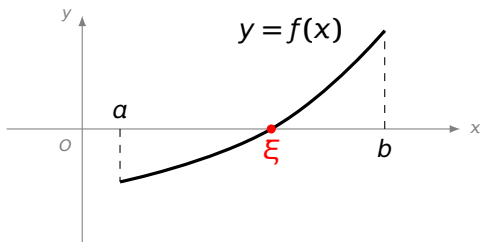


例 1 证明方程 $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ 在区间 $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 3)$ 内各有一个实根.

证明 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ 是闭区间 $[-1, 0]$ 上的连续函数, $f(-1) < 0 < f(0)$, 所以 $f(x)$ 在开区间 $(-1, 0)$ 内有实数解.

其它情形证明类似.

连续函数零点定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a)$ 和 $f(b)$ 异号, 则在开区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $f(\xi) = 0$.



例 1 证明方程 $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ 在区间 $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 3)$ 内各有一个实根.

证明 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ 是闭区间 $[-1, 0]$ 上的连续函数, $f(-1) < 0 < f(0)$, 所以 $f(x)$ 在开区间 $(-1, 0)$ 内有实数解.

其它情形证明类似.

例 2 证明方程 $3 \sin x = x + 1$ 有一个实数解.

例 2 证明方程 $3 \sin x = x + 1$ 有一个实数解.

例 2 证明方程 $3 \sin x = x + 1$ 有一个实数解.

证明 令 $f(x) = x + 1 - 3 \sin x$, 则 $f(-3) < 0 < f(0)$,

例 2 证明方程 $3 \sin x = x + 1$ 有一个实数解.

证明 令 $f(x) = x + 1 - 3 \sin x$, 则 $f(-3) < 0 < f(0)$, 并且 $f(x)$ 是闭区间 $[-3, 0]$ 上的连续函数, 所以 $f(x)$ 在开区间 $(-3, 0)$ 内有实数解.

连续函数介值定理 是 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a) = A$ 和 $f(b) = B$ 不相等，则对于 A 与 B 之间的任何数 C ，在开区间内 (a, b) 至少存在一点 ξ ，使得 $f(\xi) = C$.

连续函数介值定理 是 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) = A$ 和 $f(b) = B$ 不相等, 则对于 A 与 B 之间的任何数 C , 在开区间内 (a, b) 至少存在一点 ξ , 使得 $f(\xi) = C$.

注 C 介于 A 与 B 之间指: $A < C < B$ 或者 $B < C < A$.

连续函数介值定理 是 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) = A$ 和 $f(b) = B$ 不相等, 则对于 A 与 B 之间的任何数 C , 在开区间内 (a, b) 至少存在一点 ξ , 使得 $f(\xi) = C$.

注 C 介于 A 与 B 之间指: $A < C < B$ 或者 $B < C < A$.

证明 不妨设 $A < C < B$.

令 $g(x) = f(x) - C$,

连续函数介值定理 是 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) = A$ 和 $f(b) = B$ 不相等, 则对于 A 与 B 之间的任何数 C , 在开区间内 (a, b) 至少存在一点 ξ , 使得 $f(\xi) = C$.

注 C 介于 A 与 B 之间指: $A < C < B$ 或者 $B < C < A$.

证明 不妨设 $A < C < B$.

令 $g(x) = f(x) - C$, 则 $g(a) < 0 < g(b)$, 且 g 是闭区间 $[A, B]$ 上的连续函数.

连续函数介值定理 是 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) = A$ 和 $f(b) = B$ 不相等, 则对于 A 与 B 之间的任何数 C , 在开区间内 (a, b) 至少存在一点 ξ , 使得 $f(\xi) = C$.

注 C 介于 A 与 B 之间指: $A < C < B$ 或者 $B < C < A$.

证明 不妨设 $A < C < B$.

令 $g(x) = f(x) - C$, 则 $g(a) < 0 < g(b)$, 且 g 是闭区间 $[A, B]$ 上的连续函数.

所以由零点定理可知, $g(x)$ 在开区间 (a, b) 内有实数解.

连续函数介值定理 是 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) = A$ 和 $f(b) = B$ 不相等, 则对于 A 与 B 之间的任何数 C , 在开区间内 (a, b) 至少存在一点 ξ , 使得 $f(\xi) = C$.

注 C 介于 A 与 B 之间指: $A < C < B$ 或者 $B < C < A$.

证明 不妨设 $A < C < B$.

令 $g(x) = f(x) - C$, 则 $g(a) < 0 < g(b)$, 且 g 是闭区间 $[A, B]$ 上的连续函数.

所以由零点定理可知, $g(x)$ 在开区间 (a, b) 内有实数解.

也就是, $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $0 = g(\xi) = f(\xi) - C$.