第 03 周作业解答

练习 1. 利用降阶法计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3+3r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 5 & -1 \\ -4 & 15 & 16 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第四列展开}} (-1)\cdot(-1)^{2+4}\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -4 & 15 & 16 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3+c_1]{c_2-2c_1} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 23 & 12 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 23 & 12 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = -83$$

练习 2. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{依次将 2, 3, 4 列加到第 1 列}} \begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{r_3-r_1 \\ r_4-r_1}]{r_2-r_1} 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 12\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3+r_1]{r_2-r_1} 12\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 96$$

练习 3. 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$，求第四列各元素的余子式之和，即 $M_{14}+M_{24}+M_{34}+M_{44}$

解

$$
\begin{aligned}
M_{14}+M_{24}+M_{34}+M_{44} &= (-1)\cdot A_{14}+1\cdot A_{24}+(-1)\cdot A_{34}+1\cdot A_{44}\\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & -1\\ 2 & -1 & -1 & 1\\ 0 & -6 & 0 & -1\\ 2 & 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{r_3+r_2\\ r_4-r_2}]{r_1+r_2} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 & 0\\ 2 & -1 & -1 & 1\\ 2 & -7 & -1 & 0\\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{vmatrix}\\
&\xlongequal{\text{按第四列展开}} 1\cdot(-1)^{2+4}\cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3\\ 2 & -7 & -1\\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}\\
&\xlongequal{\text{按第三行展开}} 5\cdot(-1)^{3+2}\cdot \begin{vmatrix} 3 & 3\\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 45
\end{aligned}
$$

练习 4. 写出 7 阶排列 3712546 的所有逆序，并判断该排列的奇偶性。

解所有逆序为

$$(3,1),(3,2),(7,1),(7,2),(7,5),(7,4),(7,6),(5,4)$$

逆序数为 8，偶排列。

练习 5. 问 i, j 为何值时，6 级排列 $3i25j4$ 为奇排列?

解 i, j 的取值只有两种情况：$i=1, j=6$ 或者 $i=6, j=1$。

当 $i=1, j=6$ 时，排列为 312564，逆序为 $(3,1),(3,2),(5,4),(6,4)$，逆序数为 4，为偶排列。

当 $i=6, j=1$ 时，排列为 362514，逆序为 $(3,2),(3,1),(6,2),(6,5),(6,1),(6,4),(2,1),(5,1),(5,4)$，逆序数为 9，为奇排列。

所以只能是 $i=6, j=1$。

注：根据对换改变排列奇偶性的性质，当知道 312564 是偶排列时，即可判断 362514 奇排列，而无需再计算时逆序数。

练习 6. 判断行列式

$$
A=\begin{vmatrix} 1 & 1000 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 1000 & 7 & 8\\ 1000 & 9 & 8 & 7 & 6\\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1000\\ 1 & 2 & 3 & 1000 & 4 \end{vmatrix}
$$

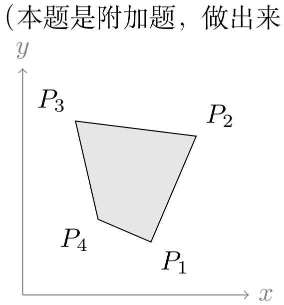
的值是正数还是负数？说明你的理由。

解由行列式的公式 $|A|=\sum(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，可见 $(-1)^{N(23154)}a_{12}a_{23}a_{31}a_{45}a_{54}=(-1)^{N(23154)}1000^4$ 远远超过其他项，所行列式的正负由该项的正负决定。因为 $N(23154)=3$，该项为负，所以行列式为负数。

练习 7. * 如图，假设平面上四边形的四个顶点为 $P_i(x_i, y_i)$，$i=1,2,3,4$。证明该四边形的面积为

$$
\frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} x_1 & x_2\\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_2 & x_3\\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_3 & x_4\\ y_3 & y_4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_4 & x_1\\ y_4 & y_1 \end{vmatrix}\right).
$$

（本题是附加题，做出来的同学下周交上来，可以加分）



解略

练习 8. 假设为 n 阶行列式 D 的对角线元素为奇数（$0, \pm 2, \pm 4, \cdots$），而其余元素为偶数（$\pm 1, \pm 3, \cdots$）。证明 $D \neq 0$。

解利用行列式的公式 $|D| = \sum (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 可知，只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 一项是奇数，其余项都是偶数，所以合起来不可能为零。