填空

(1) 曲线 $\begin{cases} y^2 - z^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周所得旋转面的方程是 ________________.

(2) 设 $\overrightarrow{a} = (4, 5, 6)$，$\overrightarrow{b} = (7, 8, 9)$，则 $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} =$ ________________.

(3) 设 $F = e^{-x^2-2y^2-3z^2}$，则梯度 $\nabla F =$ ________________.

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} dy \int_y^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{x} dx =$ ________________.

(5) 设 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$，则 $\iint_\Sigma xyz dS =$ ________________.

微分方程

（1）求微分方程 $y' + y = e^{-x}$，$y(0) = 1$ 的特解。

（2）求微分方程 $y'' + y = 2xe^x$ 的通解。

几何

(1) 求直线 $\left\{ \begin{array}{l} x + y - z - 1 = 0 \\ x - y + z + 1 = 0 \end{array} \right.$ 在平面 $x + y + z = 0$ 上的投影直线的方程。

(2) 将曲线 $y = \frac{1}{x}$，$1 \leq x < \infty$ 绕 x 轴旋转一周，求旋转面的面积，以及所围三维区域的体积。

微分

(1) 设 $z = x \ln(xy)$，求 $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ 及 $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$。

(2) 设连续可微函数 $z = z(x, y)$ 满足方程 $F(xz - y, x - yz) = 0$（其中 $F(u, v)$ 具有连续偏导数）唯一确定，计算 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$。并由此计算 $2z^2 + 2(xz + y)z_x + 2(yz + x)z_y$。

(3) 计算函数 $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y + 3$ 的极值点。

(4) 计算曲面 $3xy + z^2 = 4$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切平面、法线的方程。

积分

(1) 证明曲线积分 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} (6xy^2 - y^3)dx + (6x^2y - 3xy^2)dy$ 与路径无关，并计算积分值。

(2) 计算 $\iint_\Sigma (x^2 + y^2)dS$，其中 Σ 是锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在 $0 \leq x^2 + y^2 \leq 1$ 的部分。

(3) 计算 $\iint_\Sigma xy^2 dydz + x^2 y dzdx + y dxdy$，其中 Σ 是柱体 Ω：$x^2 + y^2 \leq 1, -1 \leq z \leq 1$ 的表面，取单位外法向量。

级数

(1) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (n + 3)x^n$ 的收敛域及和函数。

(2) 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 2x, & -\pi \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < \pi, \end{array} \right.$$

画出 $f(x)$ 的图形，求解 $f(x)$ 的傅里叶级数，并且问傅里叶级数分别在点 $x = \frac{3}{2}\pi, 2\pi, \frac{5}{2}\pi$ 处的取值。