

# 第 5 章 $b$ : 二次型与对称矩阵的正定性

数学系 梁卓滨

2020-2021 学年 I

- 二次型:  $f(x) = x^T A x$ ,  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

- $n$  阶对称矩阵:  $A$

- 二次型:  $f(x) = x^T A x$ ,  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

## 定义

- 若  $f(x) = x^T A x > 0$ ,  $\forall x \neq 0$

- $n$  阶对称矩阵:  $A$

• 二次型:  $f(x) = x^T A x$ ,  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

•  $n$  阶对称矩阵:  $A$

## 定义

1. 若  $f(x) = x^T A x > 0$ ,  $\forall x \neq 0$

则称  $f$  是 **正定二次型**

● 二次型:  $f(x) = x^T A x$ ,  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

●  $n$  阶对称矩阵:  $A$

## 定义

1. 若  $f(x) = x^T A x > 0$ ,  $\forall x \neq 0$

则称  $f$  是 **正定二次型**,  $A$  是 **正定矩阵**

● 二次型:  $f(x) = x^T A x$ ,  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

●  $n$  阶对称矩阵:  $A$

## 定义

1. 若  $f(x) = x^T A x > 0$ ,  $\forall x \neq 0$

则称  $f$  是 **正定二次型**,  $A$  是 **正定矩阵**

2. 若  $f(x) = x^T A x < 0$ ,  $\forall x \neq 0$

● 二次型:  $f(x) = x^T A x$ ,  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

●  $n$  阶对称矩阵:  $A$

## 定义

1. 若  $f(x) = x^T A x > 0$ ,  $\forall x \neq 0$

则称  $f$  是 **正定二次型**,  $A$  是 **正定矩阵**

2. 若  $f(x) = x^T A x < 0$ ,  $\forall x \neq 0$

则称  $f$  是 **负定二次型**

● 二次型:  $f(x) = x^T A x$ ,  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

●  $n$  阶对称矩阵:  $A$

## 定义

1. 若  $f(x) = x^T A x > 0$ ,  $\forall x \neq 0$

则称  $f$  是 **正定二次型**,  $A$  是 **正定矩阵**

2. 若  $f(x) = x^T A x < 0$ ,  $\forall x \neq 0$

则称  $f$  是 **负定二次型**,  $A$  是 **负定矩阵**



● 二次型:  $f(x) = x^T A x$ ,  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

●  $n$  阶对称矩阵:  $A$

## 定义

1. 若  $f(x) = x^T A x > 0$ ,  $\forall x \neq 0$

则称  $f$  是 **正定二次型**,  $A$  是 **正定矩阵**

2. 若  $f(x) = x^T A x < 0$ ,  $\forall x \neq 0$

则称  $f$  是 **负定二次型**,  $A$  是 **负定矩阵**

3. 若  $f(x) = x^T A x \geq 0$ ,  $\forall x \neq 0$

● 二次型:  $f(x) = x^T A x$ ,  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

●  $n$  阶对称矩阵:  $A$

## 定义

1. 若  $f(x) = x^T A x > 0$ ,  $\forall x \neq 0$

则称  $f$  是 **正定二次型**,  $A$  是 **正定矩阵**

2. 若  $f(x) = x^T A x < 0$ ,  $\forall x \neq 0$

则称  $f$  是 **负定二次型**,  $A$  是 **负定矩阵**

3. 若  $f(x) = x^T A x \geq 0$ ,  $\forall x \neq 0$

则称  $f$  是 **半正定二次型**

● 二次型:  $f(x) = x^T A x$ ,  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

●  $n$  阶对称矩阵:  $A$

## 定义

1. 若  $f(x) = x^T A x > 0$ ,  $\forall x \neq 0$

则称  $f$  是 **正定二次型**,  $A$  是 **正定矩阵**

2. 若  $f(x) = x^T A x < 0$ ,  $\forall x \neq 0$

则称  $f$  是 **负定二次型**,  $A$  是 **负定矩阵**

3. 若  $f(x) = x^T A x \geq 0$ ,  $\forall x \neq 0$

则称  $f$  是 **半正定二次型**,  $A$  是 **半正定矩阵**

● 二次型:  $f(x) = x^T A x$ ,  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

●  $n$  阶对称矩阵:  $A$

## 定义

1. 若  $f(x) = x^T A x > 0$ ,  $\forall x \neq 0$

则称  $f$  是 **正定二次型**,  $A$  是 **正定矩阵**

2. 若  $f(x) = x^T A x < 0$ ,  $\forall x \neq 0$

则称  $f$  是 **负定二次型**,  $A$  是 **负定矩阵**

3. 若  $f(x) = x^T A x \geq 0$ ,  $\forall x \neq 0$

则称  $f$  是 **半正定二次型**,  $A$  是 **半正定矩阵**

4. 若  $f(x) = x^T A x \leq 0$ ,  $\forall x \neq 0$

● 二次型:  $f(x) = x^T A x$ ,  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

●  $n$  阶对称矩阵:  $A$

## 定义

1. 若  $f(x) = x^T A x > 0$ ,  $\forall x \neq 0$

则称  $f$  是 **正定二次型**,  $A$  是 **正定矩阵**

2. 若  $f(x) = x^T A x < 0$ ,  $\forall x \neq 0$

则称  $f$  是 **负定二次型**,  $A$  是 **负定矩阵**

3. 若  $f(x) = x^T A x \geq 0$ ,  $\forall x \neq 0$

则称  $f$  是 **半正定二次型**,  $A$  是 **半正定矩阵**

4. 若  $f(x) = x^T A x \leq 0$ ,  $\forall x \neq 0$

则称  $f$  是 **半负定二次型**

● 二次型:  $f(x) = x^T A x$ ,  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

●  $n$  阶对称矩阵:  $A$

## 定义

1. 若  $f(x) = x^T A x > 0$ ,  $\forall x \neq 0$

则称  $f$  是 **正定二次型**,  $A$  是 **正定矩阵**

2. 若  $f(x) = x^T A x < 0$ ,  $\forall x \neq 0$

则称  $f$  是 **负定二次型**,  $A$  是 **负定矩阵**

3. 若  $f(x) = x^T A x \geq 0$ ,  $\forall x \neq 0$

则称  $f$  是 **半正定二次型**,  $A$  是 **半正定矩阵**

4. 若  $f(x) = x^T A x \leq 0$ ,  $\forall x \neq 0$

则称  $f$  是 **半负定二次型**,  $A$  是 **半负定矩阵**

● 二次型:  $f(x) = x^T A x$ ,  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

●  $n$  阶对称矩阵:  $A$

## 定义

1. 若  $f(x) = x^T A x > 0$ ,  $\forall x \neq 0$

则称  $f$  是 **正定二次型**,  $A$  是 **正定矩阵**

2. 若  $f(x) = x^T A x < 0$ ,  $\forall x \neq 0$

则称  $f$  是 **负定二次型**,  $A$  是 **负定矩阵**

3. 若  $f(x) = x^T A x \geq 0$ ,  $\forall x \neq 0$

则称  $f$  是 **半正定二次型**,  $A$  是 **半正定矩阵**

4. 若  $f(x) = x^T A x \leq 0$ ,  $\forall x \neq 0$

则称  $f$  是 **半负定二次型**,  $A$  是 **半负定矩阵**

四类情况统称 **有定**

● 二次型:  $f(x) = x^T A x$ ,  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

●  $n$  阶对称矩阵:  $A$

## 定义

1. 若  $f(x) = x^T A x > 0$ ,  $\forall x \neq 0$

则称  $f$  是 **正定二次型**,  $A$  是 **正定矩阵**

2. 若  $f(x) = x^T A x < 0$ ,  $\forall x \neq 0$

则称  $f$  是 **负定二次型**,  $A$  是 **负定矩阵**

3. 若  $f(x) = x^T A x \geq 0$ ,  $\forall x \neq 0$

则称  $f$  是 **半正定二次型**,  $A$  是 **半正定矩阵**

4. 若  $f(x) = x^T A x \leq 0$ ,  $\forall x \neq 0$

则称  $f$  是 **半负定二次型**,  $A$  是 **半负定矩阵**

四类情况统称 **有定**; 否则称  $f$  和  $A$  为 **不定**



**例** 二次型  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$  是正定。

**例** 二次型  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$  是正定。

这是当  $x \neq 0$  时,  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 > 0$ 。

**例** 二次型  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$  是正定。

这是当  $x \neq 0$  时,  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 > 0$ 。

**例** 二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + d_3x_3^2$

**例** 二次型  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$  是正定。

这是当  $x \neq 0$  时,  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 > 0$ 。

**例** 二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + d_3x_3^2$

- $d_1, d_2, d_3 > 0$
- $d_1, d_2, d_3 < 0$
- $d_1, d_2, d_3 \geq 0$
- $d_1, d_2, d_3 \leq 0$
- 其余情况

**例** 二次型  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$  是正定。

这是当  $x \neq 0$  时,  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 > 0$ 。

**例** 二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + d_3x_3^2$

- $d_1, d_2, d_3 > 0$ , 正定
- $d_1, d_2, d_3 < 0$
- $d_1, d_2, d_3 \geq 0$
- $d_1, d_2, d_3 \leq 0$
- 其余情况

**例** 二次型  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$  是正定。

这是当  $x \neq 0$  时,  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 > 0$ 。

**例** 二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + d_3x_3^2$

- $d_1, d_2, d_3 > 0$ , 正定
- $d_1, d_2, d_3 < 0$ , 负定
- $d_1, d_2, d_3 \geq 0$
- $d_1, d_2, d_3 \leq 0$
- 其余情况

**例** 二次型  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$  是正定。

这是当  $x \neq 0$  时,  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 > 0$ 。

**例** 二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + d_3x_3^2$

- $d_1, d_2, d_3 > 0$ , 正定
- $d_1, d_2, d_3 < 0$ , 负定, 如  $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 4x_2^2 - x_3^2$
- $d_1, d_2, d_3 \geq 0$
- $d_1, d_2, d_3 \leq 0$
- 其余情况

**例** 二次型  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$  是正定。

这是当  $x \neq 0$  时,  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 > 0$ 。

**例** 二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + d_3x_3^2$

- $d_1, d_2, d_3 > 0$ , 正定
- $d_1, d_2, d_3 < 0$ , 负定, 如  $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 4x_2^2 - x_3^2$
- $d_1, d_2, d_3 \geq 0$ , 半正定
- $d_1, d_2, d_3 \leq 0$
- 其余情况



**例** 二次型  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$  是正定。

这是当  $x \neq 0$  时,  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 > 0$ 。

**例** 二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + d_3x_3^2$

- $d_1, d_2, d_3 > 0$ , 正定
- $d_1, d_2, d_3 < 0$ , 负定, 如  $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 4x_2^2 - x_3^2$
- $d_1, d_2, d_3 \geq 0$ , 半正定, 如  $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + x_3^2$
- $d_1, d_2, d_3 \leq 0$
- 其余情况

**例** 二次型  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$  是正定。

这是当  $x \neq 0$  时,  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 > 0$ 。

**例** 二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + d_3x_3^2$

- $d_1, d_2, d_3 > 0$ , 正定
- $d_1, d_2, d_3 < 0$ , 负定, 如  $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 4x_2^2 - x_3^2$
- $d_1, d_2, d_3 \geq 0$ , 半正定, 如  $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + x_3^2$
- $d_1, d_2, d_3 \leq 0$ , 半负定
- 其余情况

**例** 二次型  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$  是正定。

这是当  $x \neq 0$  时,  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 > 0$ 。

**例** 二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + d_3x_3^2$

- $d_1, d_2, d_3 > 0$ , 正定
- $d_1, d_2, d_3 < 0$ , 负定, 如  $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 4x_2^2 - x_3^2$
- $d_1, d_2, d_3 \geq 0$ , 半正定, 如  $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + x_3^2$
- $d_1, d_2, d_3 \leq 0$ , 半负定, 如  $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 4x_2^2$
- 其余情况

**例** 二次型  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$  是正定。

这是当  $x \neq 0$  时,  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 > 0$ 。

**例** 二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + d_3x_3^2$

- $d_1, d_2, d_3 > 0$ , 正定
- $d_1, d_2, d_3 < 0$ , 负定, 如  $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 4x_2^2 - x_3^2$
- $d_1, d_2, d_3 \geq 0$ , 半正定, 如  $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + x_3^2$
- $d_1, d_2, d_3 \leq 0$ , 半负定, 如  $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 4x_3^2$
- 其余情况是不定

**例** 二次型  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$  是正定。

这是当  $x \neq 0$  时,  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 > 0$ 。

**例** 二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + d_3x_3^2$

- $d_1, d_2, d_3 > 0$ , 正定
- $d_1, d_2, d_3 < 0$ , 负定, 如  $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 4x_2^2 - x_3^2$
- $d_1, d_2, d_3 \geq 0$ , 半正定, 如  $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + x_3^2$
- $d_1, d_2, d_3 \leq 0$ , 半负定, 如  $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 4x_2^2$
- 其余情况是不定, 如  $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 - x_3^2$

### 例 二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 + 4x_2x_3 - 4x_3^2$$

例 二次型

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= -x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 + 4x_2x_3 - 4x_3^2 \\ &= -(x_1 + x_2 - 2x_3)^2 \end{aligned}$$

例 二次型

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= -x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 + 4x_2x_3 - 4x_3^2 \\ &= -(x_1 + x_2 - 2x_3)^2 \end{aligned}$$

是半负定



例 二次型

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= -x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 + 4x_2x_3 - 4x_3^2 \\ &= -(x_1 + x_2 - 2x_3)^2 \end{aligned}$$

是半负定，但不是负定。

例 二次型

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2, x_3) &= -x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 + 4x_2x_3 - 4x_3^2 \\&= -(x_1 + x_2 - 2x_3)^2\end{aligned}$$

是半负定，但不是负定。

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

### 例 二次型

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= -x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 + 4x_2x_3 - 4x_3^2 \\ &= -(x_1 + x_2 - 2x_3)^2 \end{aligned}$$

是半负定，但不是负定。

从而，对应的对称矩阵

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

是半负定，但不是负定。

**定理**  $D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & \ddots \\ & & & d_n \end{pmatrix}$  是正定矩阵  $\Leftrightarrow d_i > 0 \ (i = 1, 2, \dots, n)$

**定理**  $D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & \ddots \\ & & & d_n \end{pmatrix}$  是正定矩阵  $\Leftrightarrow d_i > 0 \ (i = 1, 2, \dots, n)$

**证明**  $D$  对应的二次型为：

$$f(x) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \cdots + d_n x_n^2$$

**定理**  $D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & \ddots \\ & & & d_n \end{pmatrix}$  是正定矩阵  $\Leftrightarrow d_i > 0 \ (i = 1, 2, \dots, n)$

**证明**  $D$  对应的二次型为：

$$f(x) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \cdots + d_n x_n^2$$

显然，

$$d_1 > 0, d_2 > 0, \dots, d_n > 0$$

**定理**  $D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & \ddots \\ & & & d_n \end{pmatrix}$  是正定矩阵  $\Leftrightarrow d_i > 0 \ (i = 1, 2, \dots, n)$

**证明**  $D$  对应的二次型为：

$$f(x) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \cdots + d_n x_n^2$$

显然，

$$d_1 > 0, d_2 > 0, \dots, d_n > 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$$

**定理**  $D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & \ddots \\ & & & d_n \end{pmatrix}$  是正定矩阵  $\Leftrightarrow d_i > 0 \ (i = 1, 2, \dots, n)$

**证明**  $D$  对应的二次型为：

$$f(x) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \cdots + d_n x_n^2$$

显然，

$$\begin{aligned} d_1 > 0, d_2 > 0, \dots, d_n > 0 &\Leftrightarrow f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow f \text{ 正定} \end{aligned}$$



**定理**  $D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & \ddots \\ & & & d_n \end{pmatrix}$  是正定矩阵  $\Leftrightarrow d_i > 0 \ (i = 1, 2, \dots, n)$

**证明**  $D$  对应的二次型为：

$$f(x) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \cdots + d_n x_n^2$$

显然，

$$\begin{aligned} d_1 > 0, d_2 > 0, \dots, d_n > 0 &\Leftrightarrow f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow f \text{ 正定} \\ &\Leftrightarrow D \text{ 正定} \end{aligned}$$

**定理**  $D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & \ddots \\ & & & d_n \end{pmatrix}$  是正定矩阵  $\Leftrightarrow d_i > 0 \ (i = 1, 2, \dots, n)$

**证明**  $D$  对应的二次型为：

$$f(x) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \cdots + d_n x_n^2$$

显然，

$$\begin{aligned} d_1 > 0, d_2 > 0, \dots, d_n > 0 &\Leftrightarrow f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow f \text{ 正定} \\ &\Leftrightarrow D \text{ 正定} \end{aligned}$$

**定理** 设  $A \simeq B$ 。若  $A$  是正定矩阵，则  $B$  也是正定矩阵。

**定理**  $D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & \ddots \\ & & & d_n \end{pmatrix}$  是正定矩阵  $\Leftrightarrow d_i > 0 \ (i = 1, 2, \dots, n)$

**证明**  $D$  对应的二次型为：

$$f(x) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \cdots + d_n x_n^2$$

显然，

$$\begin{aligned} d_1 > 0, d_2 > 0, \dots, d_n > 0 &\Leftrightarrow f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow f \text{ 正定} \\ &\Leftrightarrow D \text{ 正定} \end{aligned}$$

**定理** 设  $A \simeq B$ 。若  $A$  是正定矩阵，则  $B$  也是正定矩阵。

**证明** 对  $\forall x \neq 0$ ，有

$$x^T B x > 0$$

**定理**  $D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & \ddots \\ & & & d_n \end{pmatrix}$  是正定矩阵  $\Leftrightarrow d_i > 0 \ (i = 1, 2, \dots, n)$

**证明**  $D$  对应的二次型为：

$$f(x) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \dots + d_n x_n^2$$

显然，

$$\begin{aligned} d_1 > 0, d_2 > 0, \dots, d_n > 0 &\Leftrightarrow f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow f \text{ 正定} \\ &\Leftrightarrow D \text{ 正定} \end{aligned}$$

**定理** 设  $A \simeq B$ 。若  $A$  是正定矩阵，则  $B$  也是正定矩阵。

**证明** 由  $A \simeq B$ ，知存在可逆矩阵  $C$ ，使  $C^T A C = B$ 。对  $\forall x \neq 0$ ，有

$$x^T B x > 0$$

**定理**  $D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & \ddots \\ & & & d_n \end{pmatrix}$  是正定矩阵  $\Leftrightarrow d_i > 0 \ (i = 1, 2, \dots, n)$

**证明**  $D$  对应的二次型为：

$$f(x) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \cdots + d_n x_n^2$$

显然，

$$\begin{aligned} d_1 > 0, d_2 > 0, \dots, d_n > 0 &\Leftrightarrow f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow f \text{ 正定} \\ &\Leftrightarrow D \text{ 正定} \end{aligned}$$

**定理** 设  $A \simeq B$ 。若  $A$  是正定矩阵，则  $B$  也是正定矩阵。

**证明** 由  $A \simeq B$ ，知存在可逆矩阵  $C$ ，使  $C^T A C = B$ 。对  $\forall x \neq 0$ ，有

$$x^T B x = x^T C^T A C x = \quad > 0$$

**定理**  $D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & \ddots \\ & & & d_n \end{pmatrix}$  是正定矩阵  $\Leftrightarrow d_i > 0 \ (i = 1, 2, \dots, n)$

**证明**  $D$  对应的二次型为：

$$f(x) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \dots + d_n x_n^2$$

显然，

$$\begin{aligned} d_1 > 0, d_2 > 0, \dots, d_n > 0 &\Leftrightarrow f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow f \text{ 正定} \\ &\Leftrightarrow D \text{ 正定} \end{aligned}$$

**定理** 设  $A \simeq B$ 。若  $A$  是正定矩阵，则  $B$  也是正定矩阵。

**证明** 由  $A \simeq B$ ，知存在可逆矩阵  $C$ ，使  $C^T A C = B$ 。对  $\forall x \neq 0$ ，有

$$x^T B x = x^T C^T A C x = (C x)^T \quad > 0$$

**定理**  $D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & \ddots \\ & & & d_n \end{pmatrix}$  是正定矩阵  $\Leftrightarrow d_i > 0 \ (i = 1, 2, \dots, n)$

**证明**  $D$  对应的二次型为：

$$f(x) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \cdots + d_n x_n^2$$

显然，

$$\begin{aligned} d_1 > 0, d_2 > 0, \dots, d_n > 0 &\Leftrightarrow f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow f \text{ 正定} \\ &\Leftrightarrow D \text{ 正定} \end{aligned}$$

**定理** 设  $A \simeq B$ 。若  $A$  是正定矩阵，则  $B$  也是正定矩阵。

**证明** 由  $A \simeq B$ ，知存在可逆矩阵  $C$ ，使  $C^T A C = B$ 。对  $\forall x \neq 0$ ，有

$$x^T B x = x^T C^T A C x = (C x)^T A (C x) > 0$$

**定理**  $D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & \ddots \\ & & & d_n \end{pmatrix}$  是正定矩阵  $\Leftrightarrow d_i > 0 \ (i = 1, 2, \dots, n)$

**证明**  $D$  对应的二次型为：

$$f(x) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \cdots + d_n x_n^2$$

显然，

$$d_1 > 0, d_2 > 0, \dots, d_n > 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow f \text{ 正定}$$

$$\Leftrightarrow D \text{ 正定}$$

**定理** 设  $A \simeq B$ 。若  $A$  是正定矩阵，则  $B$  也是正定矩阵。

**证明** 由  $A \simeq B$ ，知存在可逆矩阵  $C$ ，使  $C^T A C = B$ 。对  $\forall x \neq 0$ ，有

$$x^T B x = x^T C^T A C x = (Cx)^T A \underbrace{(Cx)}_{\neq 0} > 0$$



**定理**  $D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & \ddots \\ & & & d_n \end{pmatrix}$  是正定矩阵  $\Leftrightarrow d_i > 0 \ (i = 1, 2, \dots, n)$

**证明**  $D$  对应的二次型为：

$$f(x) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \dots + d_n x_n^2$$

显然，

$$d_1 > 0, d_2 > 0, \dots, d_n > 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow f \text{ 正定}$$

$$\Leftrightarrow D \text{ 正定}$$

**定理** 设  $A \simeq B$ 。若  $A$  是正定矩阵，则  $B$  也是正定矩阵。

**证明** 由  $A \simeq B$ ，知存在可逆矩阵  $C$ ，使  $C^T A C = B$ 。对  $\forall x \neq 0$ ，有

$$x^T B x = x^T C^T A C x = (Cx)^T A \underbrace{(Cx)}_{\neq 0} > 0$$

所以  $B$  正定。

**定理** 设  $A$  是  $n$  阶对称方阵, 则

$A$  是正定  $\iff$

$\iff$

$\iff$

**定理** 设  $A$  是  $n$  阶对称方阵, 则

$A$  是正定  $\iff$  正惯性指标  $p = n$

$\iff$

$\iff$

**定理** 设  $A$  是  $n$  阶对称方阵, 则

$$A \text{ 是正定} \iff \text{正惯性指标 } p = n$$

$$\iff A \simeq I_n$$

$$\iff$$

**定理** 设  $A$  是  $n$  阶对称方阵, 则

$A$  是正定  $\iff$  正惯性指标  $p = n$

$\iff A \simeq I_n$

$\iff$  存在可逆矩阵  $C$  使得  $A = C^T C$

**定理** 设  $A$  是  $n$  阶对称方阵, 则

$A$  是正定  $\iff$  正惯性指标  $p = n$

$\iff A \simeq I_n$

$\iff$  存在可逆矩阵  $C$  使得  $A = C^T C$

**证明** 一般地,

$$A \simeq \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$$

**定理** 设  $A$  是  $n$  阶对称方阵, 则

$$A \text{ 是正定} \iff \text{正惯性指标 } p = n$$

$$\iff A \simeq I_n$$

$$\iff \text{存在可逆矩阵 } C \text{ 使得 } A = C^T C$$

**证明** 一般地,

$$A \simeq \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix} = D$$

**定理** 设  $A$  是  $n$  阶对称方阵, 则

$$A \text{ 是正定} \iff \text{正惯性指标 } p = n$$

$$\iff A \simeq I_n$$

$$\iff \text{存在可逆矩阵 } C \text{ 使得 } A = C^T C$$

**证明** 一般地,

$$A \simeq \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix} = D$$

所以

$$A \text{ 是正定} \iff$$



**定理** 设  $A$  是  $n$  阶对称方阵, 则

$$A \text{ 是正定} \iff \text{正惯性指标 } p = n$$

$$\iff A \simeq I_n$$

$$\iff \text{存在可逆矩阵 } C \text{ 使得 } A = C^T C$$

**证明** 一般地,

$$A \simeq \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix} = D$$

所以

$$A \text{ 是正定} \iff D \text{ 是正定}$$

$$\iff$$

**定理** 设  $A$  是  $n$  阶对称方阵, 则

$$A \text{ 是正定} \iff \text{正惯性指标 } p = n$$

$$\iff A \simeq I_n$$

$$\iff \text{存在可逆矩阵 } C \text{ 使得 } A = C^T C$$

**证明** 一般地,

$$A \simeq \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix} = D$$

所以

$$A \text{ 是正定} \iff D \text{ 是正定}$$

$$\iff \text{正惯性指标 } p = n$$

$$\iff$$

**定理** 设  $A$  是  $n$  阶对称方阵, 则

$$A \text{ 是正定} \iff \text{正惯性指标 } p = n$$

$$\iff A \simeq I_n$$

$$\iff \text{存在可逆矩阵 } C \text{ 使得 } A = C^T C$$

**证明** 一般地,

$$A \simeq \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix} = D$$

所以

$$A \text{ 是正定} \iff D \text{ 是正定}$$

$$\iff \text{正惯性指标 } p = n$$

$$\iff D = I_n$$

$$\iff$$

**定理** 设  $A$  是  $n$  阶对称方阵, 则

$$A \text{ 是正定} \iff \text{正惯性指标 } p = n$$

$$\iff A \simeq I_n$$

$$\iff \text{存在可逆矩阵 } C \text{ 使得 } A = C^T C$$

**证明** 一般地,

$$A \simeq \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix} = D$$

所以

$$A \text{ 是正定} \iff D \text{ 是正定}$$

$$\iff \text{正惯性指标 } p = n$$

$$\iff D = I_n$$

$$\iff A \simeq I_n$$

$$\iff$$

**定理** 设  $A$  是  $n$  阶对称方阵, 则

$$A \text{ 是正定} \iff \text{正惯性指标 } p = n$$

$$\iff A \simeq I_n$$

$$\iff \text{存在可逆矩阵 } C \text{ 使得 } A = C^T C$$

**证明** 一般地,

$$A \simeq \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix} = D$$

所以

$$A \text{ 是正定} \iff D \text{ 是正定}$$

$$\iff \text{正惯性指标 } p = n$$

$$\iff D = I_n$$

$$\iff A \simeq I_n$$

$$\iff \text{存在可逆矩阵 } C \text{ 使得 } A = C^T I_n C$$

**定理** 设  $A$  是  $n$  阶对称方阵, 则

$$A \text{ 是正定} \iff \text{正惯性指标 } p = n$$

$$\iff A \simeq I_n$$

$$\iff \text{存在可逆矩阵 } C \text{ 使得 } A = C^T C$$

**证明** 一般地,

$$A \simeq \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix} = D$$

所以

$$A \text{ 是正定} \iff D \text{ 是正定}$$

$$\iff \text{正惯性指标 } p = n$$

$$\iff D = I_n$$

$$\iff A \simeq I_n$$

$$\iff \text{存在可逆矩阵 } C \text{ 使得 } A = C^T I_n C = C^T C$$

**推论** 设  $A$  正定矩阵, 则  $|A| > 0$

**推论** 设  $A$  正定矩阵, 则  $|A| > 0$

**证明** 由  $A$  是正定矩阵, 知存在可逆矩阵  $C$ , 使得

$$A = C^T C$$



**推论** 设  $A$  正定矩阵, 则  $|A| > 0$

**证明** 由  $A$  是正定矩阵, 知存在可逆矩阵  $C$ , 使得

$$A = C^T C$$

所以

$$|A| = |C^T C| =$$

**推论** 设  $A$  正定矩阵, 则  $|A| > 0$

**证明** 由  $A$  是正定矩阵, 知存在可逆矩阵  $C$ , 使得

$$A = C^T C$$

所以

$$|A| = |C^T C| = |C^T| \cdot |C| =$$

**推论** 设  $A$  正定矩阵, 则  $|A| > 0$

**证明** 由  $A$  是正定矩阵, 知存在可逆矩阵  $C$ , 使得

$$A = C^T C$$

所以

$$|A| = |C^T C| = |C^T| \cdot |C| = |C|^2$$

**推论** 设  $A$  正定矩阵, 则  $|A| > 0$

**证明** 由  $A$  是正定矩阵, 知存在可逆矩阵  $C$ , 使得

$$A = C^T C$$

所以

$$|A| = |C^T C| = |C^T| \cdot |C| = |C|^2 > 0$$

**推论** 设  $A$  正定矩阵, 则  $|A| > 0$

**证明** 由  $A$  是正定矩阵, 知存在可逆矩阵  $C$ , 使得

$$A = C^T C$$

所以

$$|A| = |C^T C| = |C^T| \cdot |C| = |C|^2 > 0$$

---

**定理** 设  $A$  是  $n$  阶对称方阵, 则

**推论** 设  $A$  正定矩阵, 则  $|A| > 0$

**证明** 由  $A$  是正定矩阵, 知存在可逆矩阵  $C$ , 使得

$$A = C^T C$$

所以

$$|A| = |C^T C| = |C^T| \cdot |C| = |C|^2 > 0$$

---

**定理** 设  $A$  是  $n$  阶对称方阵, 则

$$A \text{ 是正定矩阵} \iff A \text{ 所有特征值 } \lambda_i > 0$$

**推论** 设  $A$  正定矩阵, 则  $|A| > 0$

**证明** 由  $A$  是正定矩阵, 知存在可逆矩阵  $C$ , 使得

$$A = C^T C$$

所以

$$|A| = |C^T C| = |C^T| \cdot |C| = |C|^2 > 0$$

---

**定理** 设  $A$  是  $n$  阶对称方阵, 则

$A$  是正定矩阵  $\iff A$  所有特征值  $\lambda_i > 0$

**证明** 由  $A$  是对称矩阵, 知存在正交矩阵  $Q$ , 使得

$$Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

**推论** 设  $A$  正定矩阵, 则  $|A| > 0$

**证明** 由  $A$  是正定矩阵, 知存在可逆矩阵  $C$ , 使得

$$A = C^T C$$

所以

$$|A| = |C^T C| = |C^T| \cdot |C| = |C|^2 > 0$$

---

**定理** 设  $A$  是  $n$  阶对称方阵, 则

$A$  是正定矩阵  $\iff A$  所有特征值  $\lambda_i > 0$

**证明** 由  $A$  是对称矩阵, 知存在正交矩阵  $Q$ , 使得

$$Q^T A Q = Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$



**推论** 设  $A$  正定矩阵, 则  $|A| > 0$

**证明** 由  $A$  是正定矩阵, 知存在可逆矩阵  $C$ , 使得

$$A = C^T C$$

所以

$$|A| = |C^T C| = |C^T| \cdot |C| = |C|^2 > 0$$

---

**定理** 设  $A$  是  $n$  阶对称方阵, 则

$$A \text{ 是正定矩阵} \iff A \text{ 所有特征值 } \lambda_i > 0$$

**证明** 由  $A$  是对称矩阵, 知存在正交矩阵  $Q$ , 使得

$$Q^T A Q = Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow A \simeq \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

**推论** 设  $A$  正定矩阵, 则  $|A| > 0$

**证明** 由  $A$  是正定矩阵, 知存在可逆矩阵  $C$ , 使得

$$A = C^T C$$

所以

$$|A| = |C^T C| = |C^T| \cdot |C| = |C|^2 > 0$$

---

**定理** 设  $A$  是  $n$  阶对称方阵, 则

$$A \text{ 是正定矩阵} \iff A \text{ 所有特征值 } \lambda_i > 0$$

**证明** 由  $A$  是对称矩阵, 知存在正交矩阵  $Q$ , 使得

$$Q^T A Q = Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow A \simeq \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

所以

$$A \text{ 正定} \iff \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ 正定} \iff \text{所有特征值 } \lambda_i > 0$$

# 顺序主子式

设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

# 顺序主子式

设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称

$$|A_k| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

# 顺序主子式

设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称

$$|A_k| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

为  $A$  的  $k$  阶顺序主子式

# 顺序主子式

设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称

$$|A_k| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

为  $A$  的  $k$  阶 **顺序主子式**

**注**  $k = 1, 2, \dots, n$ , 故共有  $n$  个顺序主子式

## 顺序主子式

**例** 设  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ , 则全部的顺序主子式是

## 顺序主子式

例 设  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ , 则全部的顺序主子式是

$$|A_1| =$$

$$|A_2| =$$

$$|A_3| =$$



## 顺序主子式

例 设  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ , 则全部的顺序主子式是

$$|A_1| = -1$$

$$|A_2| =$$

$$|A_3| =$$

## 顺序主子式

例 设  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ , 则全部的顺序主子式是

$$|A_1| = -1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|A_3| =$$

## 顺序主子式

例 设  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ , 则全部的顺序主子式是

$$|A_1| = -1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

$$|A_3| =$$

## 顺序主子式

例 设  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ , 则全部的顺序主子式是

$$|A_1| = -1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

## 顺序主子式

例 设  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ , 则全部的顺序主子式是

$$|A_1| = -1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{c_1 - 2c_3}}}$$

## 顺序主子式

例 设  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ , 则全部的顺序主子式是

$$|A_1| = -1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1 - 2c_3} \begin{vmatrix} -7 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

## 顺序主子式

例 设  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ , 则全部的顺序主子式是

$$|A_1| = -1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1 - 2c_3} \begin{vmatrix} -7 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -7 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

## 顺序主子式

例 设  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ , 则全部的顺序主子式是

$$|A_1| = -1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1 - 2c_3} \begin{vmatrix} -7 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -7 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5$$



# 顺序主子式

**定理** 设  $A$  是  $n$  阶对称方阵, 则

$$A \text{ 正定} \iff$$

# 顺序主子式

**定理** 设  $A$  是  $n$  阶对称方阵, 则

$$A \text{ 正定} \iff |A_k| > 0, \forall k = 1, 2, \dots, n$$

假设  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$  为正定, 则

- $|A_1| > 0$

- $|A_2| > 0$

- $|A_3| > 0$

假设  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$  为正定, 则

- $|A_1| > 0$

- $|A_2| > 0$

- $|A_3| > 0$

假设  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$  为正定, 则

- $|A_1| > 0$

- $|A_2| > 0$

- $|A_3| > 0$ :  $A$  正定  $\Rightarrow |A| > 0$

假设  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$  为正定, 则

- $|A_1| > 0$ :

$$|A_1| = a_{11}$$

- $|A_2| > 0$

- $|A_3| > 0$ :  $A$  正定  $\Rightarrow |A| > 0$

假设  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$  为正定, 则

- $|A_1| > 0$ :

$$|A_1| = a_{11} = (1, 0, 0) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

- $|A_2| > 0$

- $|A_3| > 0$ :  $A$  正定  $\Rightarrow |A| > 0$

假设  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$  为正定, 则

- $|A_1| > 0$ :

$$|A_1| = a_{11} = (1, 0, 0) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = f(1, 0, 0)$$

- $|A_2| > 0$

- $|A_3| > 0$ :  $A$  正定  $\Rightarrow |A| > 0$



假设  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$  为正定, 则

- $|A_1| > 0$ :

$$|A_1| = a_{11} = (1, 0, 0) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = f(1, 0, 0) > 0$$

- $|A_2| > 0$

- $|A_3| > 0$ :  $A$  正定  $\Rightarrow |A| > 0$

假设  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$  为正定, 则

- $|A_1| > 0$ :

$$|A_1| = a_{11} = (1, 0, 0) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = f(1, 0, 0) > 0$$

- $|A_2| > 0$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

- $|A_3| > 0$ :  $A$  正定  $\Rightarrow |A| > 0$

假设  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$  为正定, 则

- $|A_1| > 0$ :

$$|A_1| = a_{11} = (1, 0, 0) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = f(1, 0, 0) > 0$$

- $|A_2| > 0$

$$(x_1, x_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- $|A_3| > 0$ :  $A$  正定  $\Rightarrow |A| > 0$

假设  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$  为正定, 则

- $|A_1| > 0$ :

$$|A_1| = a_{11} = (1, 0, 0) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = f(1, 0, 0) > 0$$

- $|A_2| > 0$ : 取  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq 0$ , 则

$$(x_1, x_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- $|A_3| > 0$ :  $A$  正定  $\Rightarrow |A| > 0$

假设  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$  为正定, 则

- $|A_1| > 0$ :

$$|A_1| = a_{11} = (1, 0, 0) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = f(1, 0, 0) > 0$$

- $|A_2| > 0$ : 取  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq 0$ , 则

$$\begin{aligned} & (x_1, x_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= (x_1, x_2, 0) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

- $|A_3| > 0$ :  $A$  正定  $\Rightarrow |A| > 0$

假设  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$  为正定, 则

- $|A_1| > 0$ :

$$|A_1| = a_{11} = (1, 0, 0) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = f(1, 0, 0) > 0$$

- $|A_2| > 0$ : 取  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq 0$ , 则

$$\begin{aligned} & (x_1, x_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= (x_1, x_2, 0) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = f(x_1, x_2, 0) \end{aligned}$$

- $|A_3| > 0$ :  $A$  正定  $\Rightarrow |A| > 0$

假设  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$  为正定, 则

- $|A_1| > 0$ :

$$|A_1| = a_{11} = (1, 0, 0) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = f(1, 0, 0) > 0$$

- $|A_2| > 0$ : 取  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq 0$ , 则

$$\begin{aligned} & (x_1, x_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= (x_1, x_2, 0) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = f(x_1, x_2, 0) > 0 \end{aligned}$$

- $|A_3| > 0$ :  $A$  正定  $\Rightarrow |A| > 0$

假设  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$  为正定, 则

- $|A_1| > 0$ :

$$|A_1| = a_{11} = (1, 0, 0) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = f(1, 0, 0) > 0$$

- $|A_2| > 0$ : 取  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq 0$ , 则

$$\begin{aligned} & (x_1, x_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= (x_1, x_2, 0) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = f(x_1, x_2, 0) > 0 \end{aligned}$$

说明  $A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$  为正定, 从而  $|A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$

- $|A_3| > 0$ :  $A$  正定  $\Rightarrow |A| > 0$



**例 1**  $t$  为何值时,  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$  是正定矩阵?

**例 1**  $t$  为何值时,  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$  是正定矩阵?

**解** 正定的充分必要条件是顺序主子式  $> 0$ :

**例 1**  $t$  为何值时,  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$  是正定矩阵?

**解** 正定的充分必要条件是顺序主子式  $> 0$ :

$$|A_1| =$$

$$|A_2| =$$

$$|A_3| =$$

**例 1**  $t$  为何值时,  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$  是正定矩阵?

**解** 正定的充分必要条件是顺序主子式  $> 0$ :

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| =$$

$$|A_3| =$$

**例 1**  $t$  为何值时,  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$  是正定矩阵?

**解** 正定的充分必要条件是顺序主子式  $> 0$ :

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} =$$

$$|A_3| =$$

**例 1**  $t$  为何值时,  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$  是正定矩阵?

**解** 正定的充分必要条件是顺序主子式  $> 0$ :

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} =$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix}$$

**例 1**  $t$  为何值时,  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$  是正定矩阵?

**解** 正定的充分必要条件是顺序主子式  $> 0$ :

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t - 1$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix}$$

**例 1**  $t$  为何值时,  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$  是正定矩阵?

**解** 正定的充分必要条件是顺序主子式  $> 0$ :

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t - 1 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix}$$



**例 1**  $t$  为何值时,  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$  是正定矩阵?

**解** 正定的充分必要条件是顺序主子式  $> 0$ :

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t - 1 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}$$

**例 1**  $t$  为何值时,  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$  是正定矩阵?

**解** 正定的充分必要条件是顺序主子式  $> 0$ :

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t - 1 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & t-1 & -2 \\ 0 & -2 & t-1 \end{vmatrix}$$

**例 1**  $t$  为何值时,  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$  是正定矩阵?

**解** 正定的充分必要条件是顺序主子式  $> 0$ :

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t - 1 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & t-1 & -2 \\ 0 & -2 & t-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & -2 \\ -2 & t-1 \end{vmatrix}$$

**例 1**  $t$  为何值时,  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$  是正定矩阵?

**解** 正定的充分必要条件是顺序主子式  $> 0$ :

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t - 1 > 0$$

$$\begin{aligned} |A_3| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & t-1 & -2 \\ 0 & -2 & t-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & -2 \\ -2 & t-1 \end{vmatrix} \\ &= (t-1)^2 - 4 = \end{aligned}$$

**例 1**  $t$  为何值时,  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$  是正定矩阵?

**解** 正定的充分必要条件是顺序主子式  $> 0$ :

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t - 1 > 0$$

$$\begin{aligned} |A_3| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & t-1 & -2 \\ 0 & -2 & t-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & -2 \\ -2 & t-1 \end{vmatrix} \\ &= (t-1)^2 - 4 = (t-3)(t+1) \end{aligned}$$

**例 1**  $t$  为何值时,  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$  是正定矩阵?

**解** 正定的充分必要条件是顺序主子式  $> 0$ :

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t - 1 > 0$$

$$\begin{aligned} |A_3| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & t-1 & -2 \\ 0 & -2 & t-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & -2 \\ -2 & t-1 \end{vmatrix} \\ &= (t-1)^2 - 4 = (t-3)(t+1) > 0 \end{aligned}$$

**例 1**  $t$  为何值时,  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$  是正定矩阵?

**解** 正定的充分必要条件是顺序主子式  $> 0$ :

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t - 1 > 0$$

$$\begin{aligned} |A_3| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & t-1 & -2 \\ 0 & -2 & t-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & -2 \\ -2 & t-1 \end{vmatrix} \\ &= (t-1)^2 - 4 = (t-3)(t+1) > 0 \end{aligned}$$

所以  $t > 3$

**例 2**  $\lambda$  为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2$  是正定?



**例 2**  $\lambda$  为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2$  是正定?

**解** 二次型  $f$  对应的矩阵是  $A = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

**例 2**  $\lambda$  为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2$  是正定?

**解** 二次型  $f$  对应的矩阵是  $A = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$ , 只需判断何时  $A$  是正定矩

阵:

**例 2**  $\lambda$  为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2$  是正定?

**解** 二次型  $f$  对应的矩阵是  $A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$ , 只需判断何时  $A$  是正定矩阵:

**例 2**  $\lambda$  为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2$  是正定?

**解** 二次型  $f$  对应的矩阵是  $A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & \end{pmatrix}$ , 只需判断何时  $A$  是正定矩阵:

**例 2**  $\lambda$  为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2$  是正定?

**解** 二次型  $f$  对应的矩阵是  $A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$ , 只需判断何时  $A$  是正定矩

阵:

**例 2**  $\lambda$  为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2$  是正定?

**解** 二次型  $f$  对应的矩阵是  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ & 2 & 3 \\ & & \lambda \end{pmatrix}$ , 只需判断何时  $A$  是正定矩

阵:

**例 2**  $\lambda$  为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2$  是正定?

**解** 二次型  $f$  对应的矩阵是  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ & 2 & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$ , 只需判断何时  $A$  是正定矩

阵:

**例 2**  $\lambda$  为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2$  是正定?

**解** 二次型  $f$  对应的矩阵是  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ & 2 & 3 \\ & & \lambda \end{pmatrix}$ , 只需判断何时  $A$  是正定矩

阵:



**例 2**  $\lambda$  为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2$  是正定?

**解** 二次型  $f$  对应的矩阵是  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{pmatrix}$ , 只需判断何时  $A$  是正定矩

阵:

**例 2**  $\lambda$  为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2$  是正定?

**解** 二次型  $f$  对应的矩阵是  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{pmatrix}$ , 只需判断何时  $A$  是正定矩

阵:

$$|A_1| =$$

$$|A_2| =$$

$$|A_3| =$$

**例 2**  $\lambda$  为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2$  是正定?

**解** 二次型  $f$  对应的矩阵是  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{pmatrix}$ , 只需判断何时  $A$  是正定矩

阵:

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| =$$

$$|A_3| =$$

**例 2**  $\lambda$  为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2$  是正定?

**解** 二次型  $f$  对应的矩阵是  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{pmatrix}$ , 只需判断何时  $A$  是正定矩

阵:

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$|A_3| =$$

**例 2**  $\lambda$  为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2$  是正定?

**解** 二次型  $f$  对应的矩阵是  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{pmatrix}$ , 只需判断何时  $A$  是正定矩

阵:

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{vmatrix}$$

**例 2**  $\lambda$  为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2$  是正定?

**解** 二次型  $f$  对应的矩阵是  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{pmatrix}$ , 只需判断何时  $A$  是正定矩

阵:

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{vmatrix}$$

**例 2**  $\lambda$  为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2$  是正定?

**解** 二次型  $f$  对应的矩阵是  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{pmatrix}$ , 只需判断何时  $A$  是正定矩

阵:

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{vmatrix}$$

**例 2**  $\lambda$  为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2$  是正定?

**解** 二次型  $f$  对应的矩阵是  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{pmatrix}$ , 只需判断何时  $A$  是正定矩

阵:

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1}$$



**例 2**  $\lambda$  为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2$  是正定?

**解** 二次型  $f$  对应的矩阵是  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{pmatrix}$ , 只需判断何时  $A$  是正定矩

阵:

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda - 4 \end{vmatrix}$$

**例 2**  $\lambda$  为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2$  是正定?

**解** 二次型  $f$  对应的矩阵是  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{pmatrix}$ , 只需判断何时  $A$  是正定矩

阵:

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 4 \end{vmatrix}$$

**例 2**  $\lambda$  为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2$  是正定?

**解** 二次型  $f$  对应的矩阵是  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{pmatrix}$ , 只需判断何时  $A$  是正定矩

阵:

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

$$\begin{aligned} |A_3| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda-4 \end{vmatrix} \\ &= \lambda - 5 \end{aligned}$$

**例 2**  $\lambda$  为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2$  是正定?

**解** 二次型  $f$  对应的矩阵是  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{pmatrix}$ , 只需判断何时  $A$  是正定矩

阵:

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

$$\begin{aligned} |A_3| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} \\ &= \lambda - 5 > 0 \end{aligned}$$

**例 2**  $\lambda$  为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2$  是正定?

**解** 二次型  $f$  对应的矩阵是  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{pmatrix}$ , 只需判断何时  $A$  是正定矩

阵:

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

$$\begin{aligned} |A_3| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda-4 \end{vmatrix} \\ &= \lambda - 5 > 0 \end{aligned}$$

所以  $\lambda > 5$

**例 3**  $t$  为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$  是正定?

**例 3**  $t$  为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$  是正定?

**解** 二次型  $f$  对应的矩阵是  $A = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

**例 3**  $t$  为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$  是正定?

**解** 二次型  $f$  对应的矩阵是  $A = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$ , 只需判断何时  $A$  是正定

矩阵:



**例 3**  $t$  为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$  是正定?

**解** 二次型  $f$  对应的矩阵是  $A = \begin{pmatrix} t & & \\ & t & \\ & & t \end{pmatrix}$ , 只需判断何时  $A$  是正定矩阵:

**例 3**  $t$  为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$  是正定?

**解** 二次型  $f$  对应的矩阵是  $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ & t & -1 \\ & & t \end{pmatrix}$ , 只需判断何时  $A$  是正定

矩阵:

**例 3**  $t$  为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$  是正定?

**解** 二次型  $f$  对应的矩阵是  $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ & t & \\ & & t \end{pmatrix}$ , 只需判断何时  $A$  是正定

矩阵:

**例 3**  $t$  为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$  是正定?

**解** 二次型  $f$  对应的矩阵是  $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ & t & -1 \\ & & t \end{pmatrix}$ , 只需判断何时  $A$  是正定

矩阵:

**例 3**  $t$  为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$  是正定?

**解** 二次型  $f$  对应的矩阵是  $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$ , 只需判断何时  $A$  是正定

矩阵:

**例 3**  $t$  为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$  是正定?

**解** 二次型  $f$  对应的矩阵是  $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$ , 只需判断何时  $A$  是正定

矩阵:

$$|A_1| =$$

$$|A_2| =$$

$$|A_3| =$$

**例 3**  $t$  为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$  是正定?

**解** 二次型  $f$  对应的矩阵是  $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$ , 只需判断何时  $A$  是正定

矩阵:

$$|A_1| = t$$

$$|A_2| =$$

$$|A_3| =$$

**例 3**  $t$  为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$  是正定?

**解** 二次型  $f$  对应的矩阵是  $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$ , 只需判断何时  $A$  是正定

矩阵:

$$|A_1| = t$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} =$$

$$|A_3| =$$



**例 3**  $t$  为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$  是正定?

**解** 二次型  $f$  对应的矩阵是  $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$ , 只需判断何时  $A$  是正定

矩阵:

$$|A_1| = t$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} =$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix}$$

**例 3**  $t$  为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$  是正定?

**解** 二次型  $f$  对应的矩阵是  $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$ , 只需判断何时  $A$  是正定

矩阵:

$$|A_1| = t > 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} =$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix}$$

**例 3**  $t$  为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$  是正定?

**解** 二次型  $f$  对应的矩阵是  $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$ , 只需判断何时  $A$  是正定

矩阵:

$$|A_1| = t > 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2 - 1$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix}$$

**例 3**  $t$  为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$  是正定?

**解** 二次型  $f$  对应的矩阵是  $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$ , 只需判断何时  $A$  是正定

矩阵:

$$|A_1| = t > 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2 - 1 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix}$$

**例 3**  $t$  为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$  是正定?

**解** 二次型  $f$  对应的矩阵是  $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$ , 只需判断何时  $A$  是正定

矩阵:

$$|A_1| = t > 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2 - 1 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_2}$$

**例 3**  $t$  为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$  是正定?

**解** 二次型  $f$  对应的矩阵是  $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$ , 只需判断何时  $A$  是正定

矩阵:

$$|A_1| = t > 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2 - 1 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & -1 - t & t + 1 \end{vmatrix}$$

**例 3**  $t$  为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$  是正定?

**解** 二次型  $f$  对应的矩阵是  $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$ , 只需判断何时  $A$  是正定

矩阵:

$$|A_1| = t > 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2 - 1 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & -1 - t & t + 1 \end{vmatrix} = (t + 1) \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

**例 3**  $t$  为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$  是正定?

**解** 二次型  $f$  对应的矩阵是  $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$ , 只需判断何时  $A$  是正定

矩阵:

$$|A_1| = t > 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2 - 1 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & -1-t & t+1 \end{vmatrix} = (t+1) \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_2+C_3}$$



**例 3**  $t$  为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$  是正定?

**解** 二次型  $f$  对应的矩阵是  $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$ , 只需判断何时  $A$  是正定

矩阵:

$$|A_1| = t > 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2 - 1 > 0$$

$$\begin{aligned} |A_3| &= \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & -1-t & t+1 \end{vmatrix} = (t+1) \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow{c_2+c_3} (t+1) \begin{vmatrix} t & 2 & 1 \\ 1 & t-1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

**例 3**  $t$  为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$  是正定?

**解** 二次型  $f$  对应的矩阵是  $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$ , 只需判断何时  $A$  是正定

矩阵:

$$|A_1| = t > 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2 - 1 > 0$$

$$\begin{aligned} |A_3| &= \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & -1-t & t+1 \end{vmatrix} = (t+1) \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow{c_2+c_3} (t+1) \begin{vmatrix} t & 2 & 1 \\ 1 & t-1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (t+1) \begin{vmatrix} t & 2 \\ 1 & t-1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

**例 3**  $t$  为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$  是正定?

**解** 二次型  $f$  对应的矩阵是  $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$ , 只需判断何时  $A$  是正定

矩阵:

$$|A_1| = t > 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2 - 1 > 0$$

$$\begin{aligned} |A_3| &= \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & -1-t & t+1 \end{vmatrix} = (t+1) \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow{c_2+c_3} (t+1) \begin{vmatrix} t & 2 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (t+1) \begin{vmatrix} t & 2 \\ 1 & t-1 \end{vmatrix} \\ &= (t+1)(t^2 - t - 2) \end{aligned}$$

**例 3**  $t$  为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$  是正定?

**解** 二次型  $f$  对应的矩阵是  $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$ , 只需判断何时  $A$  是正定

矩阵:

$$|A_1| = t > 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2 - 1 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & -1-t & t+1 \end{vmatrix} = (t+1) \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2+c_3} (t+1) \begin{vmatrix} t & 2 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (t+1) \begin{vmatrix} t & 2 \\ 1 & t-1 \end{vmatrix}$$

$$= (t+1)(t^2 - t - 2) = (t+1)^2(t-2)$$

**例 3**  $t$  为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$  是正定?

**解** 二次型  $f$  对应的矩阵是  $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$ , 只需判断何时  $A$  是正定

矩阵:

$$|A_1| = t > 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2 - 1 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & -1-t & t+1 \end{vmatrix} = (t+1) \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2+c_3} (t+1) \begin{vmatrix} t & 2 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (t+1) \begin{vmatrix} t & 2 \\ 1 & t-1 \end{vmatrix}$$

$$= (t+1)(t^2 - t - 2) = (t+1)^2(t-2) > 0$$

**例 3**  $t$  为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$  是正定?

**解** 二次型  $f$  对应的矩阵是  $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$ , 只需判断何时  $A$  是正定

矩阵:

$$|A_1| = t > 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2 - 1 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & -1-t & t+1 \end{vmatrix} = (t+1) \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2+c_3} (t+1) \begin{vmatrix} t & 2 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (t+1) \begin{vmatrix} t & 2 \\ 1 & t-1 \end{vmatrix}$$

$$= (t+1)(t^2 - t - 2) = (t+1)^2(t-2) > 0$$

所以  $t > 2$