1 填空题

1. 已知 $|A_{3\times3}| = 2$，则 $|2A| =$ ________________

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，则 $A^2 =$ ________________

3. 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ 的秩是 ________________

4. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & t & t \\ 1 & t & 0 & 1 \end{pmatrix}$。已知齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系由 2 个解向量构成，则 $t =$ ________________

5. 已知方阵 A 的一个特征值是 2，则 $A^2 - 3A + I$ 必有的一个特征值是 ________________

6. 向量 $\alpha = (1, 2, 1)$ 与 $\beta = (-1, 2, 1-2t)$ 正交，则 $t =$ ________________

7. 已知矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & x & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 5 & & \\ & y & \\ & & -4 \end{pmatrix}$ 相似，则 $x =$ ________________

8. 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 能否对角化？________________（填“能”或“不能”）

9. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 的系数矩阵是：________________

10. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & x & 1 \\ x & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1-x \end{pmatrix}$ 是正定矩阵，则 x 的取值范围是 ________________

2 解答题 a

1. 计算 4 阶行列式阶 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -4 & -5 & -6 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & -1 \end{vmatrix}$ 的值。

2. 计算 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

3. 用基础解系表示以下方程组的通解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + 5x_2 - 5x_3 - x_4 = 1 \\ -2x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 8x_4 = -8 \end{cases}$$

4. 求以下向量组的秩和一个极大无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示：

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5. 将向量组

$$\alpha_1 = (1, 1, 1, 1), \alpha_2 = (3, -1, -1, 3), \alpha_3 = (-3, 5, 7, -1)$$

单位正交化。

6. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & -4 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量；并说明 A 能否对角化，为什么？

7. 按下列步骤求出斐波那契数列 $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$（$n \geq 0$，$x_0 = x_1 = 1$）的通项公式。

(1) 令 $\alpha_n = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix}$，证明 $\alpha_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \alpha_n$，及 $\alpha_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \alpha_0$。

(2) 将 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 对角化，并求出 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$。

(3) 求出 x_n 的通项公式。

3 解答题 b

1. 设 α 和 β 是两个非零 m 维列向量，令 $A = I - \alpha\beta^T$。

(1). 证明 α 是 A 的一个特征向量。

(2). 证明：若 α 和 β 不垂直，则 A 可对角化。

(3). 求 $|A|$。

(4). 问何时 A 可逆，并求出 A^{-1}

2. 设 A 是 n 阶非零方阵，假设存在正整数 m 使得 $A^m = 0$，证明 A 的所有特征值为零，且 A 不能对角化。

3. 设 A 是 n 阶正定矩阵，证明 $|A + I| > 1$。