第 02 周作业解答

练习 1. 通过化为三角化行列式，计算 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$，以及 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$。

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{r_3-2r_1 \\ r_4-2r_1}]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_2]{r_3-2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -11 \\ 0 & 0 & 2 & -7 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4-\frac{2}{5}r_3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{13}{5} \end{vmatrix} = -13.$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-2r_1]{r_2+3r_1} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4+2r_2]{r_3-r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4-3r_3} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 22 \end{vmatrix} = -22.$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-4r_1]{r_3-2r_1} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4+6r_2]{r_3+r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4+r_3} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{vmatrix} = 96.$$

练习 2. 把行列式 $\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -7 & -3 & -1 \end{vmatrix}$ 按第 3 列展开，从而算出行列式的值。

解

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -7 & -3 & -1 \end{vmatrix} &= 1 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -7 & -3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -7 & -3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 8 - 11 - 10 = -13. \end{aligned}$$

练习 3. 计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \iddots & & \\ 1 & & & \end{vmatrix}$。

解 $\begin{vmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \iddots & & \\ 1 & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)n}.$

这是：令该 n 阶行列式为 D_n。将 D_n 按第一行展开，可得 $D_n = (-1)^{n-1}D_{n-1}$。重复上述过程可得：$D_n = (-1)^{n-1}(-1)^{n-2}\cdots(-1)^2 D_2$。因为 $D_2 = \begin{vmatrix} & 1 \\ 1 & \end{vmatrix} = -1$，所以 $D_n = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)n}$。

练习 4. * 计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} x & & & & -a_0 \\ -1 & x & & & -a_1 \\ & -1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & x & -a_{n-2} \\ & & & -1 & x - a_{n-1} \end{vmatrix}$。

解行列式的值为 $x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \cdots - a_1 x - a_0$。（提示：归纳法，按第一行展开）

练习 5. 设 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$，$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$，$\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ 为空间中的向量。回忆高等数学里学过的向量积和数量积。证明

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

证明

$$\begin{aligned} \vec{b} \times \vec{c} &= \left(\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \right) \\ \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$