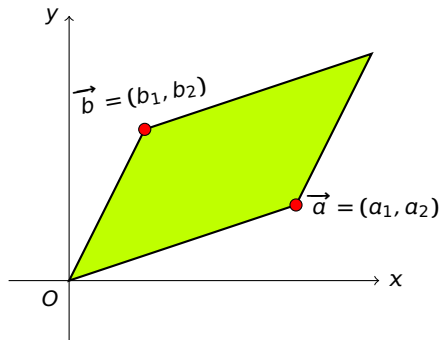


§1.5 行列式的几何意义

数学系 梁卓滨

2017 - 2018 学年 I

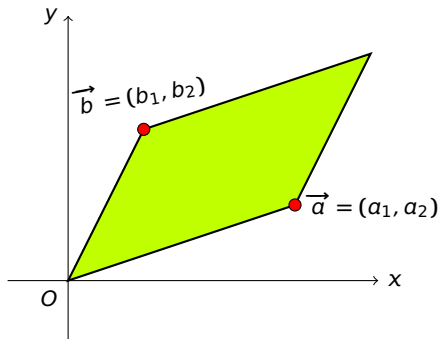
二阶行列式的几何意义



二阶行列式的几何意义

平行四边形的面积等于行列式

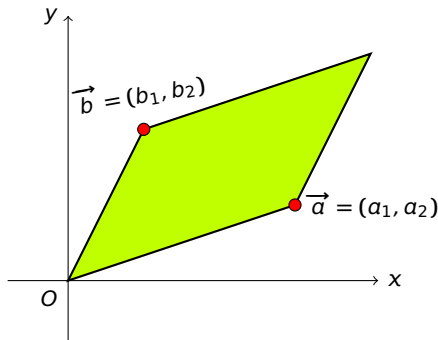
$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ 的绝对值



二阶行列式的几何意义

平行四边形的面积等于行列式

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ 的绝对值



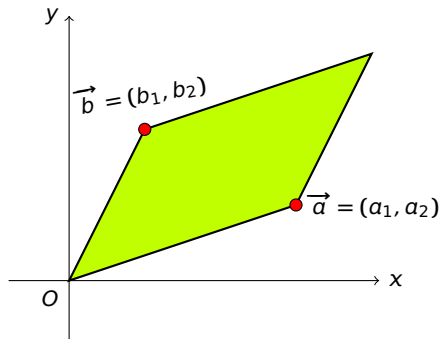
验证:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

二阶行列式的几何意义

平行四边形的面积等于行列式

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ 的绝对值



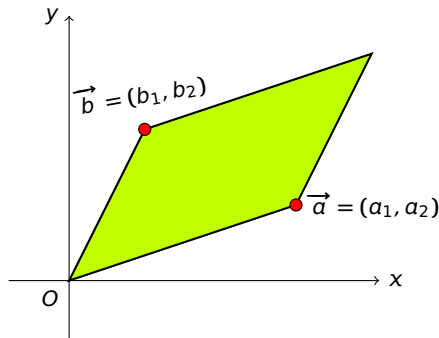
验证:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = (a_1, a_2) \cdot (b_2, -b_1)$$

二阶行列式的几何意义

平行四边形的面积等于行列式

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ 的绝对值



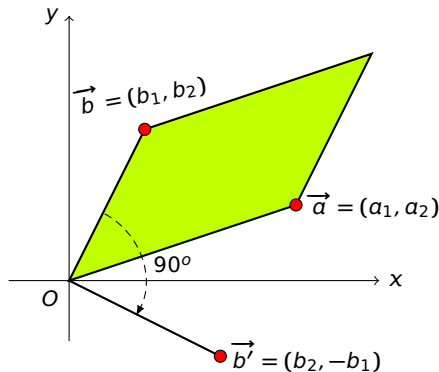
验证:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} &= a_1 b_2 - a_2 b_1 = (a_1, a_2) \cdot (b_2, -b_1) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{b}' \end{aligned}$$

二阶行列式的几何意义

平行四边形的面积等于行列式

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ 的绝对值



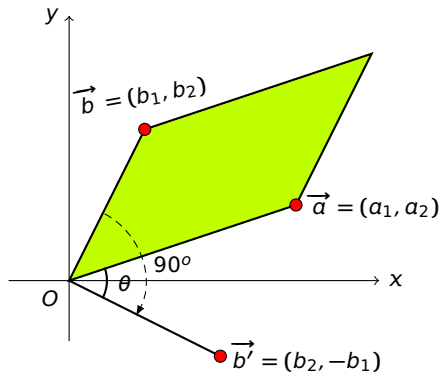
验证:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} &= a_1 b_2 - a_2 b_1 = (a_1, a_2) \cdot (b_2, -b_1) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{b}' \end{aligned}$$

二阶行列式的几何意义

平行四边形的面积等于行列式

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ 的绝对值



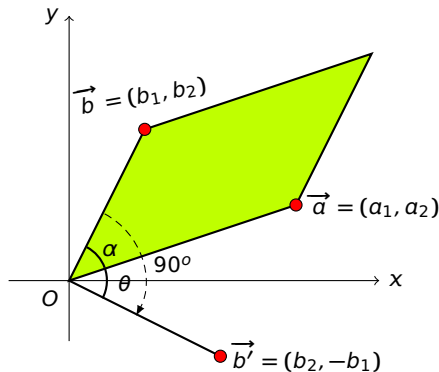
验证:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} &= a_1 b_2 - a_2 b_1 = (a_1, a_2) \cdot (b_2, -b_1) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{b}' = |\vec{a}| |\vec{b}'| \cos \theta \end{aligned}$$

二阶行列式的几何意义

平行四边形的面积等于行列式

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ 的绝对值



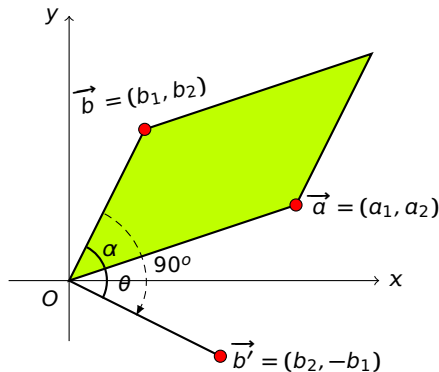
验证:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} &= a_1 b_2 - a_2 b_1 = (a_1, a_2) \cdot (b_2, -b_1) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{b}' = |\vec{a}| |\vec{b}'| \cos \theta \end{aligned}$$

二阶行列式的几何意义

平行四边形的面积等于行列式

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ 的绝对值



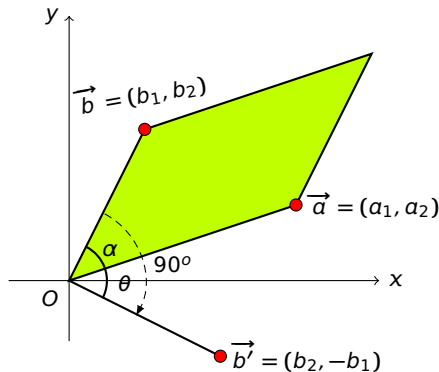
验证:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} &= a_1 b_2 - a_2 b_1 = (a_1, a_2) \cdot (b_2, -b_1) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{b}' = |\vec{a}| |\vec{b}'| \cos \theta = \sin \alpha \end{aligned}$$

二阶行列式的几何意义

平行四边形的面积等于行列式

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ 的绝对值



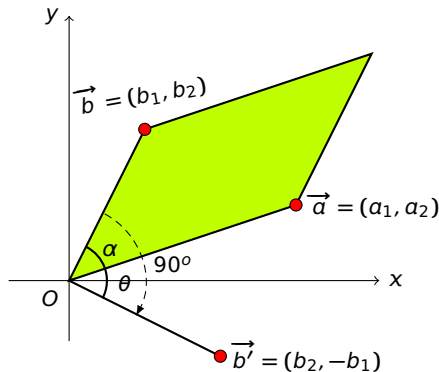
验证:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} &= a_1 b_2 - a_2 b_1 = (a_1, a_2) \cdot (b_2, -b_1) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{b}' = |\vec{a}| |\vec{b}'| \cos \theta = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha \end{aligned}$$

二阶行列式的几何意义

平行四边形的面积等于行列式

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ 的绝对值



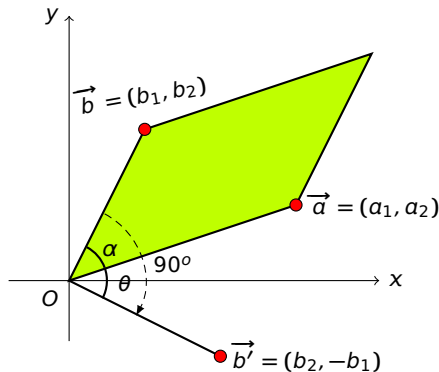
验证:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} &= a_1 b_2 - a_2 b_1 = (a_1, a_2) \cdot (b_2, -b_1) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{b}' = |\vec{a}| |\vec{b}'| \cos \theta = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha = S_{\square \vec{a} \vec{b}} \end{aligned}$$

二阶行列式的几何意义

平行四边形的面积等于行列式

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ 的绝对值



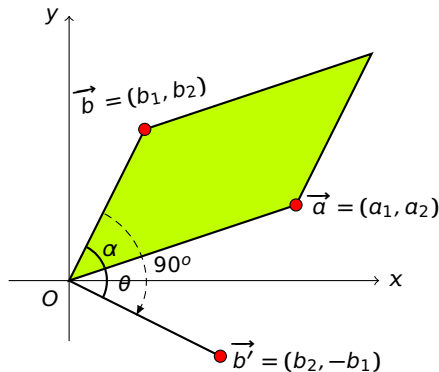
验证:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} &= a_1 b_2 - a_2 b_1 = (a_1, a_2) \cdot (b_2, -b_1) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{b}' = |\vec{a}| |\vec{b}'| \cos \theta = \pm |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha = S_{\square \vec{a} \vec{b}} \end{aligned}$$

二阶行列式的几何意义

平行四边形的面积等于行列式

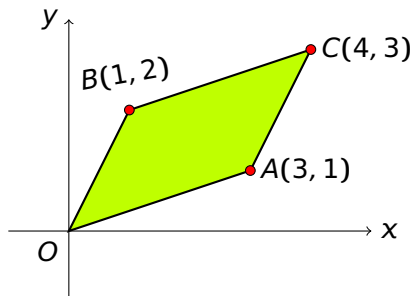
$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ 的绝对值



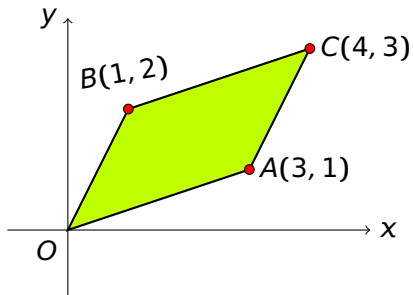
验证:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} &= a_1 b_2 - a_2 b_1 = (a_1, a_2) \cdot (b_2, -b_1) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{b}' = |\vec{a}| |\vec{b}'| \cos \theta = \pm |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha = \pm S_{\square \vec{a} \vec{b}} \end{aligned}$$

练习 求如下平行四边形的面积

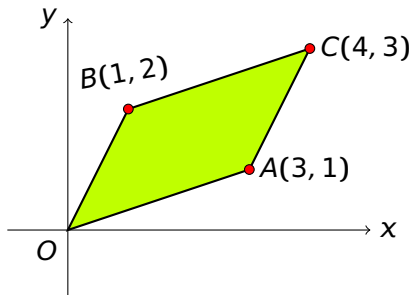


练习 求如下平行四边形的面积



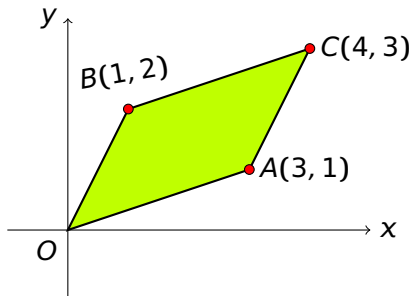
解 平行四边形面积为 2 阶行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ 的绝对值

练习 求如下平行四边形的面积



解 平行四边形面积为 2 阶行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$ 的绝对值，即面积为 5。

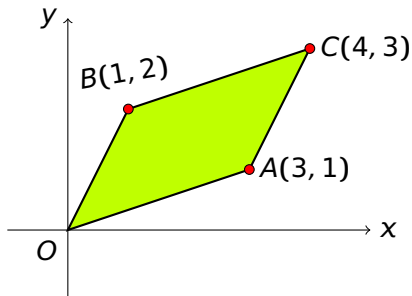
练习 求如下平行四边形的面积



解 平行四边形面积为 2 阶行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$ 的绝对值，即面积为 5。

性质 向量 $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ 不平行的充分必要条件是：

练习 求如下平行四边形的面积



解 平行四边形面积为 2 阶行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$ 的绝对值，即面积为 5。

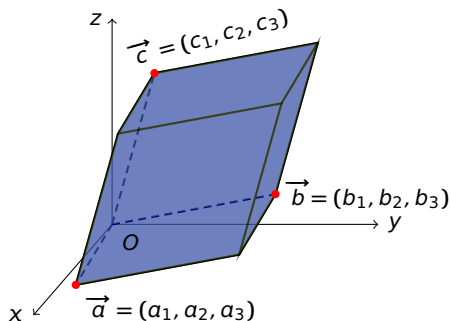
性质 向量 $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ 不平行的充分必要条件是：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

三阶行列式的几何意义

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 张成平行六面体的体积

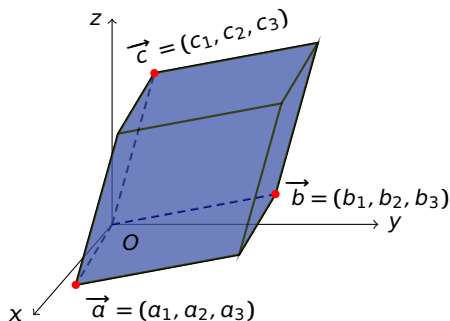
=



三阶行列式的几何意义

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 张成平行六面体的体积

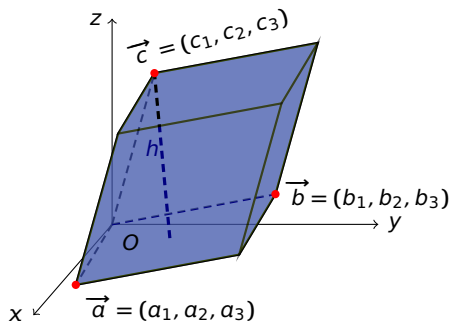
$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \text{ 的绝对值}$$



三阶行列式的几何意义

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 张成平行六面体的体积

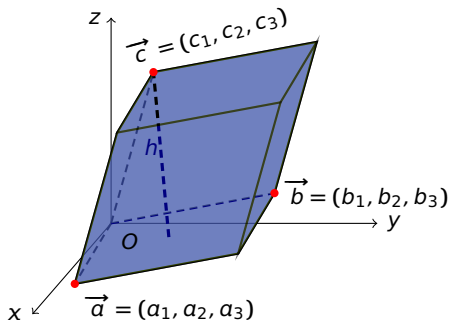
$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \text{ 的绝对值}$$



三阶行列式的几何意义

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 张成平行六面体的体积

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \text{ 的绝对值}$$

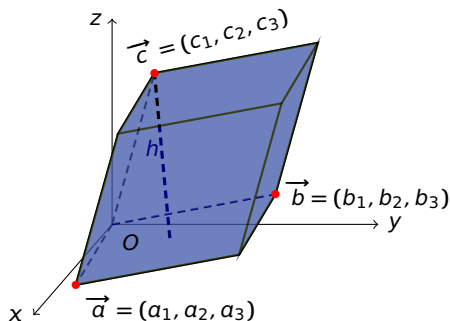


$$\text{六面体的体积} = S_{\square \vec{a} \vec{b}} \cdot h$$

三阶行列式的几何意义

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 张成平行六面体的体积

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \text{ 的绝对值}$$

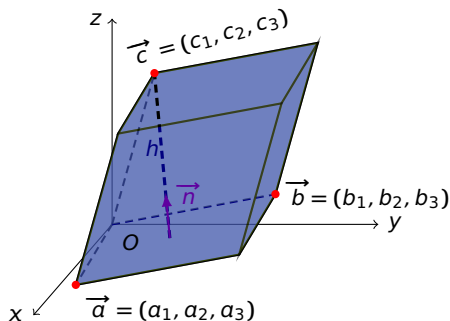


$$\text{六面体的体积} = S_{\square \vec{a} \vec{b}} \cdot h = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}|$$

三阶行列式的几何意义

\vec{a} , \vec{b} , \vec{c} 张成平行六面体的体积

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \text{ 的绝对值}$$

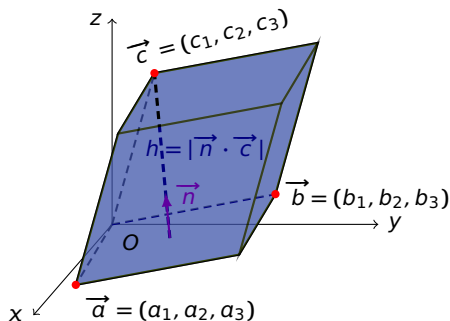


$$\text{六面体的体积} = S_{\square \vec{a} \vec{b}} \cdot h = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

三阶行列式的几何意义

\vec{a} , \vec{b} , \vec{c} 张成平行六面体的体积

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \text{ 的绝对值}$$

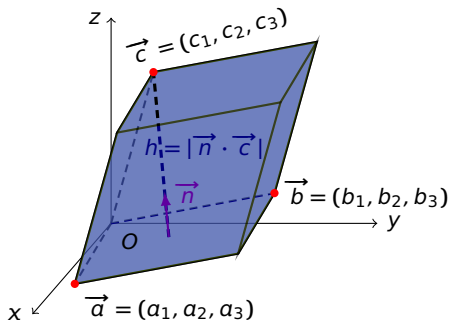


$$\text{六面体的体积} = S_{\square \vec{a} \vec{b}} \cdot h = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}|$$

三阶行列式的几何意义

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 张成平行六面体的体积

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \text{ 的绝对值}$$

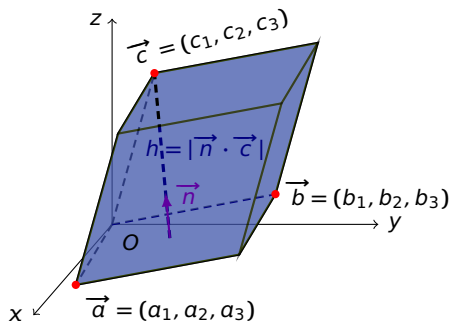


$$\text{六面体的体积} = S_{\square \vec{a} \vec{b}} \cdot h = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{n} \cdot \vec{c}|$$

三阶行列式的几何意义

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 张成平行六面体的体积

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \text{ 的绝对值}$$

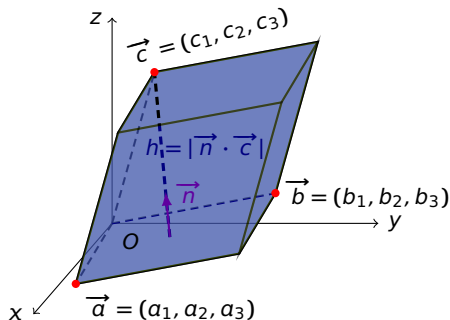


$$\text{六面体的体积} = S_{\square \vec{a} \vec{b}} \cdot h = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{n} \cdot \vec{c}| = ||\vec{a} \times \vec{b}| \vec{n} \cdot \vec{c}|$$

三阶行列式的几何意义

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 张成平行六面体的体积

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \text{ 的绝对值}$$

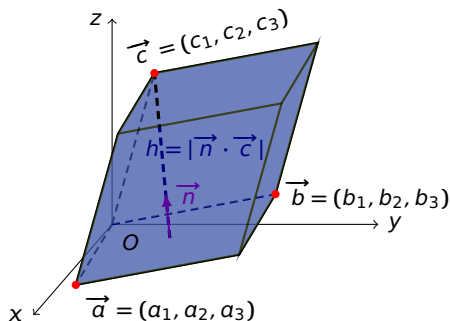


$$\begin{aligned} \text{六面体的体积} &= S_{\square \vec{a} \vec{b}} \cdot h = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{n} \cdot \vec{c}| = ||\vec{a} \times \vec{b}| \vec{n} \cdot \vec{c}| \\ &\quad \pm \vec{a} \times \vec{b} \end{aligned}$$

三阶行列式的几何意义

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 张成平行六面体的体积

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \text{ 的绝对值}$$

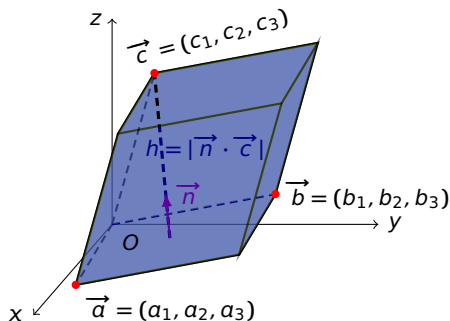


$$\begin{aligned} \text{六面体的体积} &= S_{\square \vec{a} \vec{b}} \cdot h = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{n} \cdot \vec{c}| = ||\vec{a} \times \vec{b}| \vec{n} \cdot \vec{c}| \\ &= |(\pm \vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| \end{aligned}$$

三阶行列式的几何意义

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 张成平行六面体的体积

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \text{ 的绝对值}$$

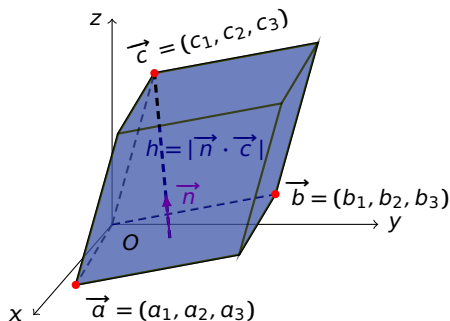


$$\begin{aligned} \text{六面体的体积} &= S_{\square \vec{a} \vec{b}} \cdot h = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{n} \cdot \vec{c}| = ||\vec{a} \times \vec{b}| \vec{n} \cdot \vec{c}| \\ &= |(\pm \vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| \end{aligned}$$

三阶行列式的几何意义

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 张成平行六面体的体积

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \text{ 的绝对值}$$



$$\begin{aligned} \text{六面体的体积} &= S_{\square \vec{a} \vec{b}} \cdot h = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{n} \cdot \vec{c}| = ||\vec{a} \times \vec{b}| \vec{n} \cdot \vec{c}| \\ &= |(\pm \vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \text{ 的绝对值} \end{aligned}$$

性质 向量 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ 不共面的充分必要条件是:

性质 向量 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ 不共面的充分必要条件是:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

性质 向量 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ 不共面的充分必要条件是:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

定义 假设 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$ 不共面, 若

- $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} > 0,$

- $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} < 0,$

性质 向量 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ 不共面的充分必要条件是:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

定义 假设 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$ 不共面, 若

- $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} > 0$, 则称有序向量组 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 符合右手规则;
- $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} < 0$,

性质 向量 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ 不共面的充分必要条件是:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

定义 假设 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$ 不共面, 若

- $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} > 0$, 则称有序向量组 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 符合右手规则;
- $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} < 0$, 则称有序向量组 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 符合左手规则;