第 14 周作业解答

练习 1. 判断下列级数的敛散性，并说明原因

1. $\frac{1^4}{1!}+\frac{2^4}{2!}+\frac{3^4}{3!}+\cdots+\frac{n^4}{n!}+\cdots$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{\pi}{3^n}$

解 1. 利用比值审敛法：因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^4}{(n+1)!}}{\frac{n^4}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^4\cdot\frac{1}{n+1}=0<1$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{n!}$ 收敛。

2. 利用比值审敛法：因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\sin\frac{\pi}{3^{n+1}}}{2^n\sin\frac{\pi}{3^n}}\xlongequal{x=\frac{\pi}{3^{n+1}}}2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin 3x}=2\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(\sin 3x)'}=2\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{3\cos 3x}=\frac{2}{3}<1$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$ 收敛。

练习 2. 判断下列级数是否收敛？若然，是绝对收敛还是条件收敛？

1. $\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 5}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{\ln(n+1)}+\cdots$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin\frac{\pi}{n+1}}{\pi^{n+1}}$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\ln\frac{n+1}{n}$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$

解 (1) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\ln(n+1)}$ 是交错级数，$u_n=\frac{1}{\ln(n+1)}$ 是单调减，且趋于 0，所以由莱布尼茨定理知交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\ln(n+1)}$ 收敛。

对于正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$，因为 $\frac{1}{\ln(n+1)}>\frac{1}{n}$（利用不等式 $\ln(1+x)<x$，其中 $x>0$），而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，所以有比较审敛法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$ 发散。

结论：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\ln(n+1)}$ 是条件收敛。

(2) 对于正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin\frac{\pi}{n+1}}{\pi^{n+1}}\right|$，因为 $\left|\frac{\sin\frac{\pi}{n+1}}{\pi^{n+1}}\right| < \frac{1}{\pi^n}$，而等比级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^n}$ 收敛，所以有比较审敛法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin\frac{\pi}{n+1}}{\pi^{n+1}}\right|$ 发散。

结论：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin\frac{\pi}{n+1}}{\pi^{n+1}}$ 是绝对收敛。

(3) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}$ 是交错级数，$u_n = \ln\frac{n+1}{n} = \ln(1+\frac{1}{n})$ 是单调减，且趋于 0，所以由莱布尼茨定理知交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}$ 收敛。

对于正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n}$，因为其部分和

$$s_n = \ln\frac{2}{1} + \ln\frac{3}{2} + \cdots + \ln\frac{n+1}{n} = \ln\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) \to +\infty$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n}$ 发散。

结论：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}$ 是条件收敛。

(4) 对于正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$，因为

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+2)!}{(n+1)^{n+2}}}{\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}\cdot(\frac{n}{n+1})^{n+1} = \lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1})^{n+1}\\ &\xlongequal{x=n+1}\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x = \lim_{x\to\infty}e^{x\ln(1-\frac{1}{x})}\xlongequal{t=\frac{1}{x}}e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1-t)}{t}}\xlongequal{\text{洛必达法则}}e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{-\frac{1}{1-t}}{1}} = e^{-1} < 1\end{aligned}$$

所以有比值审敛法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$ 收敛。

结论：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$ 是绝对收敛。

练习 3. 举例说明：$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，但 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 发散。

解令 $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，则由莱布尼茨判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，但 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是发散。

练习 4. 求下列级数的收敛域：

1. $1 - x + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^3}{3^2} + \cdots + (-1)^n\frac{x^n}{n^2} + \cdots$
2. $\frac{x}{1\cdot 4} + \frac{x^2}{2\cdot 4^2} + \frac{x^3}{3\cdot 4^3} + \cdots + \frac{x^n}{n\cdot 4^n} + \cdots$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^{3n-1}}{\sqrt{n}}$

解 (1) a. 确定收敛半径：

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)^2}}{(-1)^n\frac{1}{n^2}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = 1$$

所以收敛半径 $R = \frac{1}{\rho} = 1$，收敛区间 $(-1, 1)$。

b. 讨论 $x = \pm 1$ 时的敛散性。此时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{(\pm 1)^n}{n^2} \right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 是收敛，所以 $x = \pm 1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n^2}$ 是绝对收敛。

c. 结论：收敛域是 $[-1, 1]$。

(2) a. 确定收敛半径：

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)\cdot 4^{n+1}}}{\frac{1}{n\cdot 4^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{4(n+1)} = \frac{1}{4}$$

所以收敛半径 $R = \frac{1}{\rho} = 4$，收敛区间 $(-4, 4)$。

b. 讨论 $x = \pm 4$ 时的敛散性。

当 $x = 4$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\cdot 4^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散；

当 $x = -4$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\cdot 4^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^4}{n}$ 收敛（交错级数，同时满足莱布尼茨定理的条件）；

c. 结论：收敛域是 $[-4, 4)$。

(3) a. 直接计算

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \frac{x^{2(n+1)+1}}{2(n+1)+1}}{(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+3} \cdot x^2 = x^2$$

所以当 $|x| < 1$ 时收敛；当 $|x| > 1$ 时发散。

b. 讨论 $x = \pm 1$ 时的敛散性。

当 $x = 1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$，这是交错级数，且满足莱布尼茨定理的条件，所以收敛；

当 $x = -1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$，这是交错级数，且满足莱布尼茨定理的条件，所以收敛；

c. 结论：收敛域是 $[-1, 1]$。

(4) a. 直接计算

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(x-5)^{3(n+1)-1}}{\sqrt{n+1}}}{\frac{(x-5)^{3n-1}}{\sqrt{n}}} \right| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} \cdot |x-5|^3 = |x-5|^3$$

所以当 $|x-5| < 1$ 时收敛；当 $|x-5| > 1$ 时发散。

b. 讨论 $|x-5| = 1$ 时的敛散性。

当 $x = 6$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^{3n-1}}{\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$，这是 $p-$ 级数，$p = \frac{1}{2}$，所以发散；

当 $x = 4$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^{3n-1}}{\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$，这是交错级数，且满足莱布尼茨定理的条件，所以收敛；

c. 结论：收敛域是 $[4, 6)$。

练习 5. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$（不一定是正项级数）收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n} = 1$。问级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 是否也收敛？说明理由。

解不一定收敛。例子

$$u_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad v_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散。

下面证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散。反证法，假设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛。注意到 $v_n - u_n = \frac{1}{n}$，则由此推出

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} [v_n - u_n] = \sum_{n=1}^{\infty} v_n - \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

收敛。但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 显然是发散。矛盾。所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散。

练习 6. 利用逐项求导或逐项积分，求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2(n-1)}$ 的和函数。

解（1）1. 先求收敛域。直接计算

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{4(n+1)+1}}{4(n+1)+1}}{\frac{x^{4n+1}}{4n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+1}{4n+5}\cdot x^4=x^4$$

所以当 $|x|<1$ 时收敛；当 $|x|>1$ 时发散。收敛区间是 $(-1,1)$。

讨论 $x=\pm1$ 时的敛散性。

当 $x=1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+1}$，利用比较审敛法的极限形式，与发散调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 作比较，可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+1}$ 发散，所以 $x=1$ 是发散点；

当 $x=-1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{4n+1}=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+1}$，也是发散，所以 $x=-1$ 是发散点；

结论：收敛域是 $(-1,1)$。

2. 设

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1},\qquad x\in(-1,1).$$

在任意 $x\in(-1,1)$ 处，逐项求导可得

$$S'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n}=x^4+x^8+x^{12}+\cdots+x^{4n}+\cdots=\frac{1}{1-x^4}-1.$$

注意

$$\frac{1}{1-x^4}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{1+x^2}\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)+\frac{1}{1+x^2}\right]=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-x}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}.$$

所以

$$\begin{aligned}S(x)&=\int\left(\frac{1}{1-x^4}-1\right)dx=\int\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-x}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}-1\right)dx\\&=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x+C.\end{aligned}$$

显然 $S(0)=0$，所以 $C=0$，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x,\qquad x\in(-1,1).$$

（2）先求收敛域。直接计算

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{2(n+1)-1}{2^{n+1}}x^{2(n+1-1)}}{\frac{2n-1}{2^n}x^{2(n-1)}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2(2n-1)}\cdot x^2=\frac{1}{2}x^2\quad\begin{cases}<1 & \text{收敛}\\>1 & \text{发散}\end{cases}$$

所以当 $|x|<\sqrt{2}$ 时收敛；当 $|x|>\sqrt{2}$ 时发散。收敛区间是 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$。

讨论 $x=\pm\sqrt{2}$ 时的敛散性。
当 $x=\pm\sqrt{2}$ 时，$\frac{2n-1}{2^n}x^{2(n-1)}=\frac{2n-1}{2}\nrightarrow 0$，所以 $x=\pm\sqrt{2}$ 是发散点。
结论：收敛域是 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$。
2. 设

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2(n-1)}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}x^2+\frac{5}{2^3}x^4+\frac{7}{2^4}x^6+\cdots,\qquad x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2}).$$

在任意 $x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ 且 $x\neq 0$ 处，利用逐项求导公式可得

$$\begin{aligned}
S(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)x^{2n-2}}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{2n-1}}{2^n}\right)'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2^n}\right)'=\left(\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^n}\right)'\\
&=\left\{\frac{1}{x}\left[\frac{x^2}{2}+\left(\frac{x^2}{2}\right)^2+\left(\frac{x^2}{2}\right)^3+\left(\frac{x^2}{2}\right)^4+\cdots+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n+\cdots\right]\right\}'\\
&=\left\{\frac{1}{x}\left[\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}}-1\right]\right\}'=\left(\frac{2}{x(2-x^2)}-\frac{1}{x}\right)'\\
&=\frac{-2(2-3x^2)}{x^2(2-x^2)^2}+\frac{1}{x^2}=\frac{(2-x^2)^2-2(2-3x^2)}{x^2(2-x^2)^2}=\frac{x^2+2}{(2-x^2)^2}.
\end{aligned}$$

另外，显然 $S(0)=\frac{1}{2}$，所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2(n-1)}=\frac{x^2+2}{(2-x^2)^2}$$

对任何 $x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ 都成立。

练习 7. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$ 的值。

提示构造幂级数 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}=S(1)$；求解 $S(x)$；利用逐步求导公式，将 $S(x)$ 化为幂级数 $1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots=e^x$。

解 (1) 先求出级数级数 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^{n-1}$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}=S(1)$。
(2) 先求收敛域。直接计算

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}x^{n+1-1}}{\frac{n^2}{n!}x^{n-1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2}\cdot|x|=0$$

所以对任意 $x\in(-\infty,\infty)$，级数都是收敛，收敛域是 $(-\infty,\infty)$。
(3) 利用逐项求导公式，可得：

$$\begin{aligned}
S(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^n)'}{(n-1)!}=\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)!}\right]'\\
&=\left[x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right]'=\left[x\left(1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\cdots\right)\right]'\\
&=[xe^x]'=(1+x)e^x.
\end{aligned}$$

(4) 所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = S(1) = 2e.$$