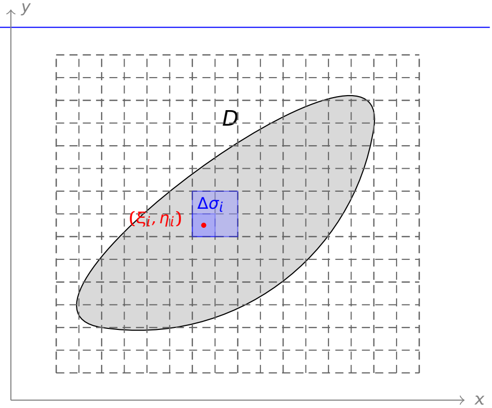
第 10 章 α：重积分的概念和性质

数学系　　梁卓滨

2017.07 暑期班

平面薄片的质量



假设

- 区域 D 为平面薄片
- 密度为 μ
- 质量为 m

- 当薄片均匀时（$\mu =$ 常数），

$$m = \mu \cdot \mathrm{Area}(D)$$

- 当薄片非均匀时（$\mu = \mu(x, y)$ 为 D 上函数），利用微元法可知

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \mu(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

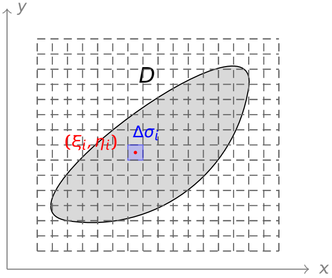
二重积分的定义

二重积分定义 设

- D 是平面上有界闭区域，
- $f(x, y)$ 是 D 上的有界函数，

若

- 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$存在，且极限
- 与上述 D 的划分、(ξ_i, η_i) 的选取无关，



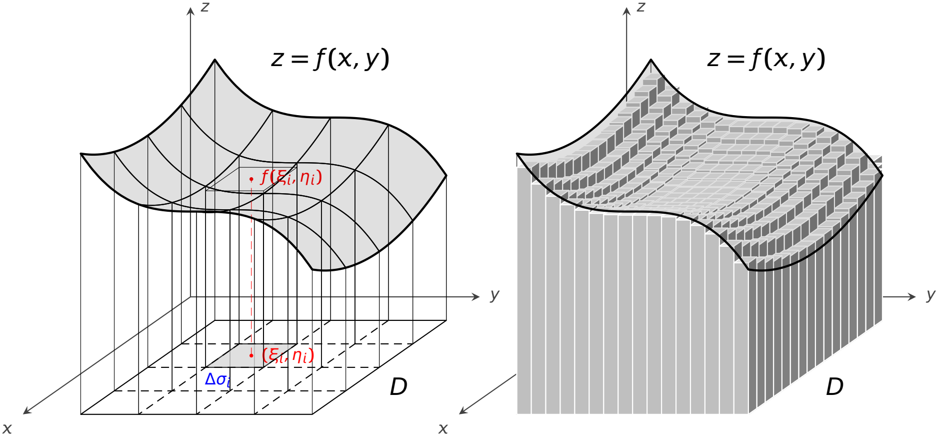
则定义

$$\iint_D f(x, y)d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

称为 $f(x, y)$ 在 D 上的二重积分。$d\sigma$ 称为面积元素。

定理 若 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则 $\iint_D f(x, y)d\sigma$ 存在。

二重积分的几何意义



曲顶柱体的体积：

$$V=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\ \eta_i)\Delta\sigma_i=\iint_D f(x,\ y)d\sigma$$

二重积分的性质

性质 1（线性性）

$\iint_D \alpha f(x,y)+\beta g(x,y)d\sigma = \alpha\iint_D f(x,y)d\sigma + \beta\iint_D g(x,y)d\sigma$，
其中 α, β 是常数。

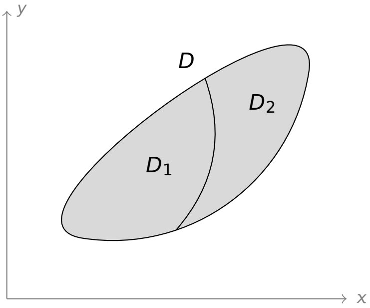
证明

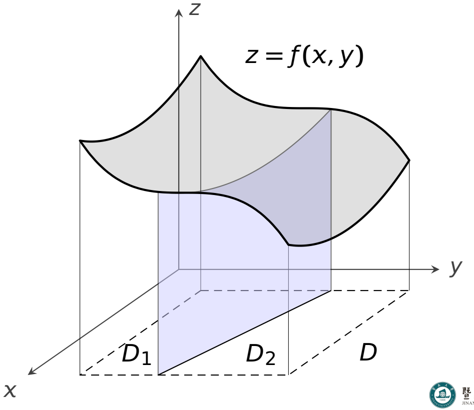
$$\begin{aligned}
&\iint_D \alpha f(x,y)+\beta g(x,y)d\sigma \\
&= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left[\alpha f(\xi_i,\eta_i)+\beta g(\xi_i,\eta_i)\right]\Delta\sigma_i \\
&= \alpha\cdot\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i + \beta\cdot\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i \\
&= \alpha\iint_D f(x,y)d\sigma + \beta\iint_D g(x,y)d\sigma
\end{aligned}$$

二重积分的性质 (Cont.)

性质 2（积分可加性） 将 D 划分成两部分 D_1 和 D_2，则

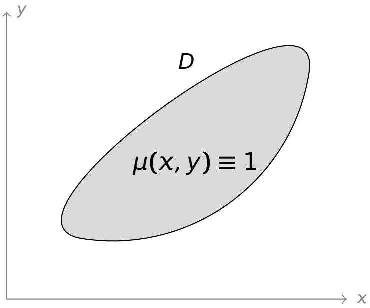
$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)d\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)d\sigma$$

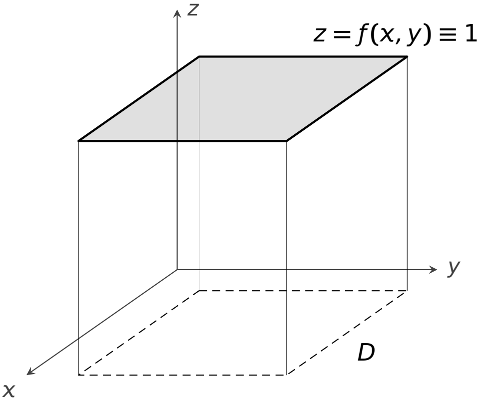




二重积分的性质 (Cont.)

性质 3 $\iint_D 1 d\sigma = |D|$（D 的面积）。特别滴，$\iint_D k d\sigma = k|D|$。





性质 4 如果在 D 上成立 $f(x,y) \le g(x,y)$，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma \le \iint_D g(x,y)d\sigma$$

性质 5 假设在 D 上成立 $m \le f(x,y) \le M$，则

$$m\sigma \le \iint_D f(x,y)d\sigma \le M\sigma, \qquad （\sigma\text{为}D\text{的面积}）$$

证明

$$m\sigma = \iint_D m d\sigma \le \iint_D f(x,y)d\sigma \le \iint_D M d\sigma = M\sigma$$

例 估计下列积分值的范围

1. $I=\iint_D (x^2+4y^2+9)d\sigma$, $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$
2. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$, $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$
3. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$, $D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 10\}$

解

1. $$9\le x^2+4y^2+9=(x^2+y^2)+3y^2+9\le 4+3\cdot 4+9=25$$

$$\Rightarrow\quad 9|D|\le I\le 25|D| \xRightarrow{|D|=4\pi} 36\pi\le I\le 100\pi$$

2. $$16\le x^2+y^2+2xy+16=(x+y)^2+16\le 3^2+16=25$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{5}\le \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}\le \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{5}|D|\le I\le \frac{1}{4}|D| \xRightarrow{|D|=2} \frac{2}{5}\le I\le \frac{1}{2}$$

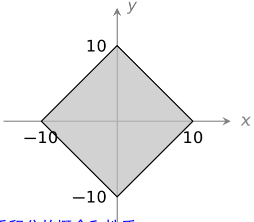
例 估计下列积分值的范围

1. $I=\iint_D (x^2+4y^2+9)d\sigma$, $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$
2. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$, $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$
3. $I=\iint_D \frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$, $D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 10\}$

解

3.
$$\frac{1}{102}\le \frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\le \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{102}|D|\le I\le \frac{1}{100}|D| \quad \xRightarrow{|D|=200} \quad \frac{50}{51}\le I\le 2$$



画 $|x|+|y|=10$

- $x\ge 0,\ y\ge 0$ 时，$x+y=10$
- $x\ge 0,\ y\le 0$ 时，$x-y=10$
- $x\le 0,\ y\ge 0$ 时，$-x+y=10$
- $x\le 0,\ y\le 0$ 时，$-x-y=10$

例 设 $D=\{(x,y)|(x-2)^2+(y-1)^2\le 2\}$，比较以下两个积分大小：

$$I_1=\iint_D (x+y)^2 d\sigma, \qquad I_2=\iint_D (x+y)^3 d\sigma$$

解

如图，在比区域 D 上成立

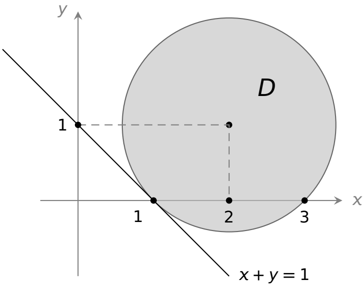
$$x+y\ge 1$$

所以

$$(x+y)^2\le (x+y)^3$$

所以

$$I_1\le I_2$$



二重积分的性质 (Cont.)

性质 6（二重积分的中值定理） 设函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，$|D|$ 是 D 的面积，则在 D 上至少存在一点 (ξ,η)，使得

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)\cdot|D|.$$

证明 因为

$$m\cdot|D| \le \iint_D f(x,y)d\sigma \le M\cdot|D| \quad \Rightarrow \quad m \le \frac{1}{|D|}\iint_D f(x,y)d\sigma \le M$$

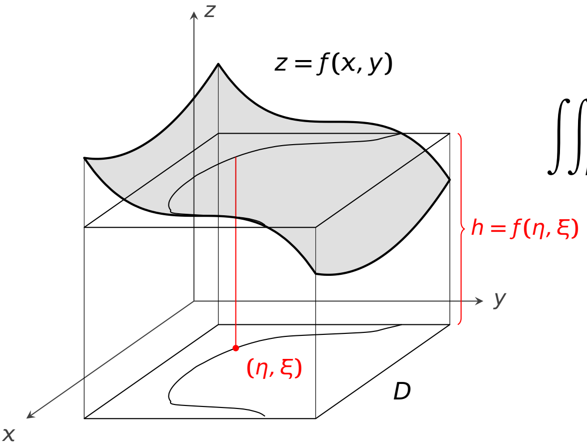
由闭区域上连续函数的中值定理可知：存在 $(\xi,\eta)\in D$，使得

$$f(\xi,\eta) = \frac{1}{|D|}\iint_D f(x,y)d\sigma,$$

即

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)\cdot|D|.$$

二重积分中值定理的几何直观

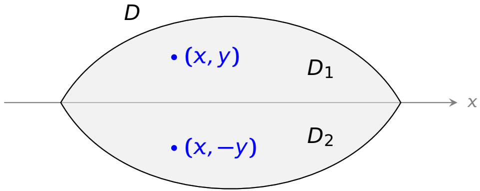


$$\iint_D f(x,y)d\sigma = h|D|$$
$$= f(\xi,\eta)|D|$$

积分的对称性

性质 设闭区域 D 关于 x 轴对称，

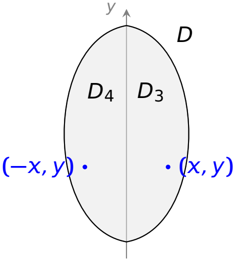
- 若 $f(x,y)$ 关于 y 是奇函数（即：$f(x,-y)=-f(x,y)$），则
$$\iint_D f(x,y)d\sigma = 0$$
- 若 $f(x,y)$ 关于 y 是偶函数（即：$f(x,-y)=f(x,y)$），则
$$\iint_D f(x,y)d\sigma = 2\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma = 2\iint_{D_2} f(x,y)d\sigma$$



积分的对称性

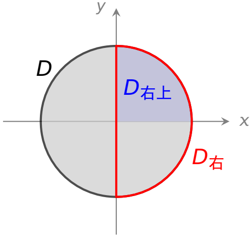
性质 设闭区域 D 关于 y 轴对称，

- 若 $f(x, y)$ 关于 x 是奇函数（即：$f(-x, y) = -f(x, y)$），则
$$\iint_D f(x, y)d\sigma = 0$$
- 若 $f(x, y)$ 关于 x 是偶函数（即：$f(-x, y) = f(x, y)$），则
$$\iint_D f(x, y)d\sigma = 2\iint_{D_3} f(x, y)d\sigma = 2\iint_{D_4} f(x, y)d\sigma$$



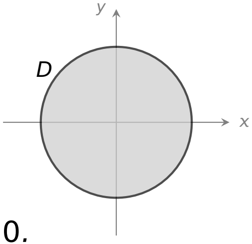
例 设 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$，则

$$\iint_D x^2+y^2 d\sigma = 4\iint_{D_{右上}} x^2+y^2 d\sigma$$



解 $\iint_D x^2+y^2 d\sigma = 2\iint_{D_{右}} x^2+y^2 d\sigma = 2\cdot 2\iint_{D_{右上}} x^2+y^2 d\sigma.$

例 计算 $\iint_D (2x+3y\sqrt{1-x^2})d\sigma$，
其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$



解 原式 $=2\iint_D x d\sigma + 3\iint_D y\sqrt{1-x^2} d\sigma = 0.$