

第 12 周作业

应于 24-05-2017 提交

练习 1. 计算 $\iint_{\Sigma} xy^2 dydz + x^2 y dzdx + y dx dy$, 其中 Σ 是柱体 $\Omega: x^2 + y^2 \leq 1, -1 \leq z \leq 1$ 的表面, 取单位外法向量。

练习 2. 设 V, A 分别表示半径为 R 的球的体积和表面积。在不算出 V, A 的确切值的情况下, 试利用高斯公式证明 $V = \frac{1}{3}RA$ 。

练习 3. 设一点电荷 Q 在 $(0, 0, 0)$ 处, 则其势函数为

$$\phi(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi r} = \frac{Q}{4\pi\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

电场为

$$E = -\nabla\phi = \frac{Q}{4\pi r^3}(x, y, z).$$

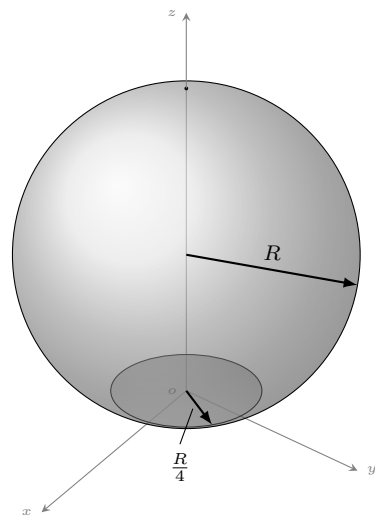
设 Ω 是空间中 3 维闭区域, 其表面曲面记为 $\partial\Omega$ 。证明: 当 $(0, 0, 0)$ 在 Ω 内部时, E 流出 Ω 的通量为 Q ; 当 $(0, 0, 0) \notin \Omega$ 时, E 流出 Ω 的通量为 0。。

练习 4. 设 Γ 是空间中一定向闭曲线，并且正好是某可定向曲面 Σ 的边界。计算 $\int_{\Gamma} ye^z dx + xe^z dy + xye^z dz$.

练习 5. 热气球的表面是半径为 R 球面的一部分，与 xoy 坐标面的交线是半径为 $\frac{R}{4}$ 的圆周，如图。假设热气的速度向量场为

$$V = \text{rot}(-y, x, 0).$$

问单位时间内有多少热气通过气球表面？



练习 6. 简要列举高斯的一些数学贡献，并引用名人对高斯的评价（5 条或以上，中英文皆可）。