第 02 周作业解答

练习 1. 求解微分方程 $\begin{cases} y'' - 3y' - 4y = 0 \\ y(0) = 0,\ y'(0) = -5 \end{cases}$.

解 1. 特征方程为:
$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$
所以有两个互异的实根 $r_1 = 4,\ r_2 = -1$。所以通解是
$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x}.$$

2. 代入初始条件
$$0 = y(0) = C_1 + C_2$$
$$-5 = y'(0) = 4C_1 - C_2$$
所以 $C_1 = -1,\ C_2 = 1$

3. 特解是
$$y = -e^{4x} + e^{-x}.$$

练习 2. 求解微分方程 $\begin{cases} y'' - 4y' + 13y = 0 \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 3 \end{cases}$.

解 1. 特征方程为:
$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$$
所以有两个互异的复数根
$$r_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 13}}{2} = 2 \pm 3\sqrt{-1}$$
所以通解是
$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

2. 代入初始条件
$$0 = y(0) = C_1$$
及
$$3 = y'(0) = C_2 (e^{2x} \sin 3x)'\big|_{x=0} = 3C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 1.$$

3. 特解是
$$y = e^{2x} \sin 3x.$$

练习 3. 求解微分方程 $\begin{cases} 4y'' + 4y' + y = 0 \\ y(0) = 2,\ y'(0) = 0 \end{cases}$.

解 1. 特征方程为:

$$4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0$$

有重根

$$r_{1,\,2} = -\frac{1}{2}$$

所以通解是

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{rx} = (C_1 + C_2 x)e^{-\frac{1}{2}x}.$$

2. 代入初始条件

$$2 = y(0) = C_1$$

及

$$0 = y'(0) = ((2 + C_2 x)e^{-\frac{1}{2}x})'\big|_{x=0} = -1 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 1.$$

3. 特解是

$$y = (2 + x)e^{-\frac{1}{2}x}.$$

练习 4. 填空，写出下列方程的一个特解。（不必严格按之前求解的套路，这些题可以比较容易地猜出来的）

1. $y'' + 4y' - y = 2e^x$
2. $y'' - 3y' + 2y = 5$
3. $y'' - 4y' = 5$
4. $y'' + 5y' + 4y = 3 - 2x$
5. $2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x - 2$

解

1. 设 $y = ke^x$，代入原方程得：$y'' + 4y' - y = (k + 4k - k)e^x = 4e^x$，所以 $k = \frac{1}{2}$，$y = \frac{1}{2}e^x$。
2. $y = \frac{5}{2}$
3. $y' = -\frac{5}{4}$，不妨取 $y = -\frac{5}{4}x$
4. 设 $y = ax + b$，代入方程:

   $$y'' + 5y' + 4y = 5a + 4(ax + b) = 3 - 2x$$

   所以 $4a = -2, 5a + 4b = 3$。所以 $a = -\frac{1}{2}$，$b = \frac{11}{8}$。所以 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{11}{8}$。
5. 设 $y' = ax^2 + bx + c$，代入方程:

   $$2y'' + 5y' = 2(2ax + b) + 5(ax^2 + bx + c) = 5x^2 - 2x - 2$$

   所以

   $$\begin{cases} 5a = 5 \\ 5b + 4a = -2 \\ 2b + 5c = -2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -\frac{6}{5} \\ c = \frac{7}{25} \end{cases}$$

   所以 $y' = x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{2}{25}$。不妨取 $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{2}{25}x$。

练习 5. 求微分方程 $y'' + 3y' + 2y = 3xe^{-x}$ 的通解

解 1. 特征方程 $r^2+3r+2=0$，特征值为 $r_1=-2$ 和 $r_2=-1$。所以齐次的通解是:

$$C_1e^{-2x}+C_2e^{-x}.$$

2. 非齐次项 $f(x)=3xe^{-x}$。其中 $\lambda=-1$，$P(x)=3x$ 为一次多项式。因为 $\lambda=-1$ 是（一重）特征值。故设特解为

$$y^*=e^{\lambda x}R(x)=e^{-x}R(x)$$

其中 $R'(x)$ 为一次多项式，$R'(x)=ax+b$。将上式代入原方程，整理可得

$$R''+(2\lambda+p)R'+\cancel{(\lambda^2+p\lambda+q)}R=P \quad\Rightarrow\quad a+(ax+b)=3x$$

所以

$$\begin{cases}a=3\\a+b=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}a=3\\b=-3\end{cases}.$$

所以 $R'(x)=3x-3$，取 $R(x)=\frac{3}{2}x^2-3x$。特解为

$$y^*=(\frac{3}{2}x^2-3x)e^{-x}.$$

3. 所以通解是

$$y=(\frac{3}{2}x^2-3x)e^{-x}+C_1e^{-2x}+C_2e^{-x}.$$

练习 6. 求微分方程 $y''+y=4xe^x$，$y(0)=0$，$y'(0)=1$ 的特解

解 1. 特征方程 $r^2+1=0$，特征值为 $r_1=-i$ 和 $r_2=i$。所以齐次的通解是:

$$C_1\cos x+C_2\sin x.$$

2. 非齐次项 $f(x)=4xe^x$。其中 $\lambda=1$，$P(x)=4x$ 为一次多项式。因为 $\lambda=1$ 不是特征值。故设特解为

$$y^*=e^{\lambda x}R(x)=e^xR(x)$$

其中 $R(x)$ 为一次多项式，$R(x)=ax+b$。将上式代入原方程，整理可得

$$R''+(2\lambda+p)R'+(\lambda^2+p\lambda+q)R=P \quad\Rightarrow\quad 2a+2(ax+b)=4x$$

所以

$$\begin{cases}2a=4\\2a+2b=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}a=2\\b=-2\end{cases}.$$

所以 $R(x)=2x-2$。特解为

$$y^*=(2x-2)e^x.$$

3. 所以通解是

$$y=(2x-2)e^x+C_1\cos x+C_2\sin x.$$

4. 将初始条件代入

$$y(0)=(2x-2)e^x+C_1\cos x+C_2\sin x\big|_{x=0}=-2+C_1=0$$

所以 $C_1=2$。

$$y'(0)=2xe^x-2\sin x+C_2\cos x\big|_{x=0}=C_2=1$$

即 $C_2=1$。所以

$$y=(2x-2)e^x+2\cos x+\sin x.$$

练习 7. 求微分方程 $y''+4y=x\cos x$ 的通解

解 1. 特征方程 $r^2+4r=0$，特征值为 $r_1=-2i$ 和 $r_2=2i$。所以齐次的通解是:

$$e^{0x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x.$$

2. 非齐次项 $f(x)=x\cos x$。其中 $\lambda=0$，$\omega=1$，$P(x)=x$ 为一次多项式。因为 $\lambda+i\omega=i$ 不是特征值。故设特解为

$$y^*=e^{\lambda x}\left[(ax+b)\cos\omega x+(cx+d)\sin\omega x\right]=(ax+b)\cos x+(cx+d)\sin x.$$

所以

$$\begin{aligned}y^{*\prime}&=(a+cx+d)\cos x+(c-ax-b)\sin x\\ y^{*\prime\prime}&=(c+c-ax-b)\cos x+(-a-a-cx-d)\sin x\end{aligned}$$

代入原方程，得

$$\begin{aligned}y^{*\prime\prime}+4y^*&=(2c-ax-b+4ax+4b)\cos x+(-2a-cx-d+4cx+4d)\sin x\\&=(3ax+3b+2c)\cos x+(3cx+3d-2a)\sin x\\&=x\cos x\end{aligned}$$

所以

$$\begin{cases}3a=1\\3b+2c=0\\3c=0\\3d-2a=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}a=\frac{1}{3}\\b=0\\c=0\\d=\frac{2}{9}\end{cases}.$$

特解为

$$y^*=\frac{1}{3}x\cos x+\frac{2}{9}\sin x.$$

3. 所以通解是

$$y=y^*+C_1y_1+C_2y_2=\frac{1}{3}x\cos x+\frac{2}{9}\sin x+C_1\cos 2x+C_2\sin 2x.$$

练习 8. （共振问题）假设弹簧系统的固有频率是 ω，并且受到频率为 Ω 的外力 $F=F_0\cos(\Omega t)$ 作用（ω, Ω 均为常数，F_0 是常数，$F_0\neq 0$）。所以物体运动的方程为

$$x''+\omega^2x=F_0\cos(\Omega t).$$

1. 设 $\omega\neq\Omega$，求出物体运动的通解 $x=x(t)$，并回答：当 Ω 越接近 ω 时，物体的振幅有什么变化?
2. 设 $\omega=\Omega$，求出物体运动的通解 $x=x(t)$，并回答：随时间 t 的变化，物体的振幅有什么变化?。

解

1. 假设 $\omega\neq\Omega$。特征方程为 $r^2+\omega^2=0$，特征值 $r_{1,2}=\pm\omega i$，齐次部分 $x''+\omega^2x=0$ 的通解是

$$C_1\cos(\omega t)+C_2\sin(\omega t).$$

非齐次项为 $f(t)=F_0\cos(\Omega t)$。因为 Ωi 不是特征值，所以设特解 $x^*=a\cos(\Omega t)+b\sin(\Omega t)$（其中 a, b 为待定系数）。代入原方程得

$$x^{*\prime\prime}+\omega^2x^*=a(\omega^2-\Omega^2)\cos(\Omega t)+b(\omega^2-\Omega^2)\sin(\Omega t)=F_0\cos(\Omega t).$$

所以

$$\begin{cases} a(\omega^2-\Omega^2)=F_0 \\ b(\omega^2-\Omega^2)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{F_0}{\omega^2-\Omega^2} \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow x^*=\frac{F_0}{\omega^2-\Omega^2}\cos(\Omega t).$$

所以通解是

$$x=\frac{F_0}{\omega^2-\Omega^2}\cos(\Omega t)+C_1\cos(\omega t)+C_2\sin(\omega t).$$

可见当 $\omega\to\Omega$ 时，x 振幅（主要由 $\frac{F_0}{\omega^2-\Omega^2}$ 贡献）趋于无穷大。

2. 假设 $\omega=\Omega$。特征方程为 $r^2+\omega^2=0$，特征值 $r_{1,2}=\pm\omega i$，齐次部分 $x''+\omega^2x=0$ 的通解是

$$C_1\cos(\omega t)+C_2\sin(\omega t).$$

非齐次项为 $f(t)=F_0\cos(\Omega t)=F_0\cos(\omega t)$。因为 ωi 不是特征值，所以设特解 $x^*=t\left[a\cos(\omega t)+b\sin(\omega t)\right]$（其中 a,b 为待定系数）。代入原方程得

$$x^{*\prime\prime}+\omega^2x^*=2b\omega\cos(\omega t)-2a\omega\sin(\omega t)=F_0\cos(\omega t).$$

所以

$$\begin{cases} a=0 \\ b=\frac{F_0}{2\omega} \end{cases} \Rightarrow x^*=\frac{F_0}{2\omega}t\sin(\omega t).$$

所以通解是

$$x=\frac{F_0}{2\omega}t\sin(\omega t)+C_1\cos(\omega t)+C_2\sin(\omega t).$$

可见当 $t\to+\infty$ 时，x 振幅（主要由 $\frac{F_0}{2\omega}t$ 贡献）趋于无穷大。

练习 9. 1. 写出具有特解 $y_1=xe^{-x}$ 和 $y_2=e^{-x}$ 的二阶常系数齐次线性微分方程。

2. 写出具有特解 $y_1=e^{-x}\cos 2x$ 和 $y_2=e^{-x}\sin 2x$ 的二阶常系数齐次线性微分方程。

解

1. 设方程为

$$y''+py'+q=0$$

特征方程为 r^2+pr+q 具有重根 $r_1=r_2=-1$，所以

$$r^2+pr+q=(r+1)^2=r^2+2r+1$$

所以 $p=-2,\ q=-3$，方程为

$$y''+2y'+y=0.$$

2. 设方程为

$$y''+py'+q=0$$

特征方程为 r^2+pr+q 具有复数根 $r_1=-1+2i,\ r_2=-1-2i$，所以

$$r^2+pr+q=(r-r_1)(r-r_2)=r^2-(r_1+r_2)r+r_1r_2=r^2+2r+5$$

所以 $p=2,\ q=5$，方程为

$$y''+2y'+5y=0.$$

练习 10. 求解常系数线性微分方程 $y'''+4y''+y'-6y=0$ 的通解。（提示：寻找形如 $y=e^{rx}$ 的特解）

解设 $y=e^{rx}$，带入原方程得：$e^{rx}(r^3+4r^2+r-6)=0$。所以 $r^3+4r^2+r-6=0$。解得 $r_1=-3$, $r_2=-2$, $r_3=1$，得到三个特解 $y_1=e^{-3x}$, $y_2=e^{-2x}$, $y_3=e^x$。这三个特解是线性无关，所以通解是 $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{-2x}+C_3e^x$。

下面是附加题，做出来的同学下周一交上来，可以适当加分。注意解答过程要清楚。

练习 11.（关于复数）三次方程

$$x^3=px+q$$

的费罗-塔尔塔利亚-卡尔达诺解为

$$x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

当 $\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3<0$ 时，这个公式不可避免出现负数的开方。然而，这时我们不能再以无解为理由而对它不予理睬，因为一个三次方程永远至少有一个实根（尝试用微积分的理论说明这一点）。以下是一个例子：考虑一元三次方程 $x^3=15x+4$ 。

1. 用微积分的办法证明该方程有三个实根.
2. 根据费罗-塔尔塔利亚-卡尔达诺公式，该方程的一个根是:

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}.$$

这时不能简单地认为公式中出现 $\sqrt{-121}$ 无意义而无解。这就需要引入复数并研究它的性质。试利用复数的性质说明上述解等于哪个实数？并进一步求出该方程全部的根。

（关于复数更多的历史与评论，请看《数学及其历史》（John Stillwell 著，袁向东，冯绪宁译）相关章节）

证明 1. 令 $f(x)=x^3-15x-4$. 由 $f'(x)=0$ 解得 $x=\pm\sqrt{5}$. 注意到 $f(\sqrt{5})<0$, $f(-\sqrt{5})>0$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=+\infty$. 所以区间 $(-\infty,-\sqrt{5})$, $(-\sqrt{5},\sqrt{5})$ 和 $(\sqrt{5},\infty)$ 上都有实根.

2. 提示：$\sqrt[3]{2\pm\sqrt{-121}}=(2\pm\sqrt{-1})^3$, 所以对应方程的根为 4. 进而, $x^3-15x-4=(x-4)(x^2+ax+b)$. 不难知道 $x^3-15x-4=(x-4)(x^2+4x-1)$. 所以全部解为 $4,-2\pm\sqrt{5}$.