

第 1 章 b : 极限

数学系 梁卓滨

2019-2020 学年 I

Outline

1. 数列极限
2. 函数极限
3. 极限运算
4. 极限性质
5. 两个重要极限
6. 无穷大, 无穷小

We are here now...

1. 数列极限
2. 函数极限
3. 极限运算
4. 极限性质
5. 两个重要极限
6. 无穷大，无穷小

考察一个无穷数列 $\{x_n\}$:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

考察一个无穷数列 $\{x_n\}$:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

如果 n 无限增大时, x_n 无限接近一个数 a , 则称 $\{x_n\}$ 的“极限”为 a

考察一个无穷数列 $\{x_n\}$:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

如果 n 无限增大时, x_n 无限接近一个数 a , 则称 $\{x_n\}$ 的“极限”为 a
?

考察一个无穷数列 $\{x_n\}$:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

如果 n 无限增大时, x_n 无限接近一个数 a , 则称 $\{x_n\}$ 的“极限”为 a ?

定义 任意给定 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \varepsilon$, 则称 a 是 $\{x_n\}$ 的 **极限**

考察一个无穷数列 $\{x_n\}$:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

如果 n 无限增大时, x_n 无限接近一个数 a , 则称 $\{x_n\}$ 的“极限”为 a ?

$$x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

定义 任意给定 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \varepsilon$, 则称 a 是 $\{x_n\}$ 的 **极限**

考察一个无穷数列 $\{x_n\}$:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

如果 n 无限增大时, x_n 无限接近一个数 a , 则称 $\{x_n\}$ 的“极限”为 a ?



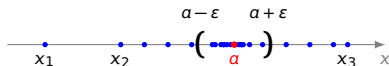
$$x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

定义 任意给定 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \varepsilon$, 则称 a 是 $\{x_n\}$ 的**极限**

考察一个无穷数列 $\{x_n\}$:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

如果 n 无限增大时, x_n 无限接近一个数 a , 则称 $\{x_n\}$ 的“极限”为 a ?



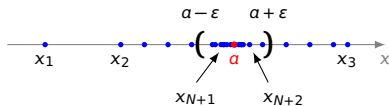
$$x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

定义 任意给定 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \varepsilon$, 则称 a 是 $\{x_n\}$ 的**极限**

考察一个无穷数列 $\{x_n\}$:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

如果 n 无限增大时, x_n 无限接近一个数 a , 则称 $\{x_n\}$ 的“极限”为 a ?



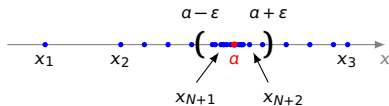
$$x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

定义 任意给定 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \varepsilon$, 则称 a 是 $\{x_n\}$ 的**极限**

考察一个无穷数列 $\{x_n\}$:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

如果 n 无限增大时, x_n 无限接近一个数 a , 则称 $\{x_n\}$ 的“极限”为 a ?



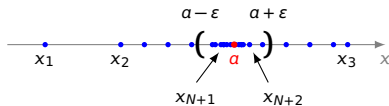
$$x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

定义 任意给定 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \varepsilon$, 则称 a 是 $\{x_n\}$ 的**极限**, 或称 $\{x_n\}$ **收敛于** a ,

考察一个无穷数列 $\{x_n\}$:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

如果 n 无限增大时, x_n 无限接近一个数 a , 则称 $\{x_n\}$ 的“极限”为 a ?



$$x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

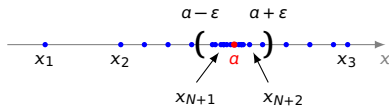
定义 任意给定 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \varepsilon$, 则称 a 是 $\{x_n\}$ 的**极限**, 或称 $\{x_n\}$ **收敛于** a , 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \text{或} \quad x_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty)$$

考察一个无穷数列 $\{x_n\}$:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

如果 n 无限增大时, x_n 无限接近一个数 a , 则称 $\{x_n\}$ 的“极限”为 a ?



$$x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

定义 任意给定 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \varepsilon$, 则称 a 是 $\{x_n\}$ 的**极限**, 或称 $\{x_n\}$ **收敛于** a , 记为

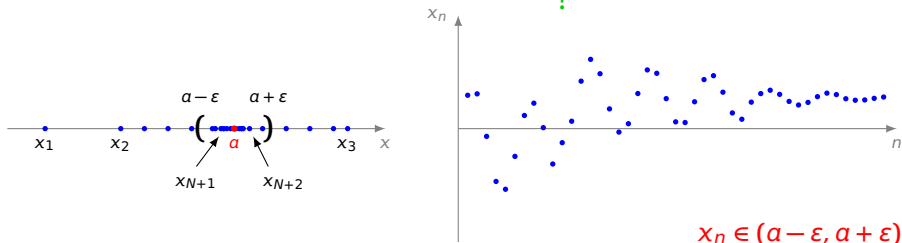
$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \text{或} \quad x_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty)$$

若不存在这样的数 a , 称为 $\{x_n\}$ **发散**, 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 不存在

考察一个无穷数列 $\{x_n\}$:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

如果 n 无限增大时, x_n 无限接近一个数 a , 则称 $\{x_n\}$ 的“极限”为 a ?



$$x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

定义 任意给定 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \varepsilon$, 则称 a 是 $\{x_n\}$ 的**极限**, 或称 $\{x_n\}$ **收敛于** a , 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \text{或} \quad x_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty)$$

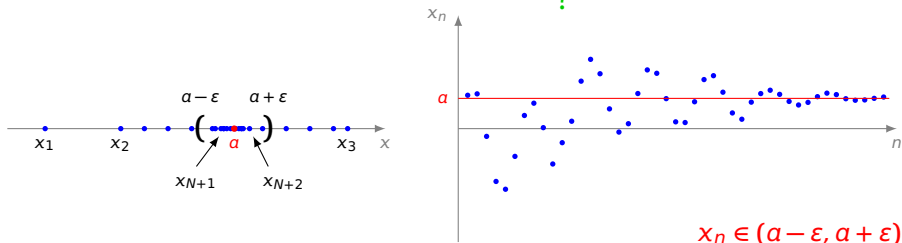
若不存在这样的数 a , 称为 $\{x_n\}$ **发散**, 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 不存在

考察一个无穷数列 $\{x_n\}$:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

如果 n 无限增大时, x_n 无限接近一个数 a , 则称 $\{x_n\}$ 的“极限”为 a

?



$$x_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$$

定义 任意给定 $\epsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \epsilon$, 则称 a 是 $\{x_n\}$ 的**极限**, 或称 $\{x_n\}$ **收敛于** a , 记为

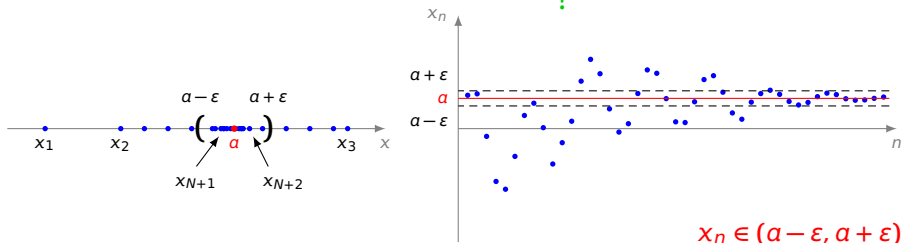
$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \text{或} \quad x_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty)$$

若不存在这样的数 a , 称为 $\{x_n\}$ **发散**, 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 不存在

考察一个无穷数列 $\{x_n\}$:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

如果 n 无限增大时, x_n 无限接近一个数 a , 则称 $\{x_n\}$ 的“极限”为 a ?



$$x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

定义 任意给定 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \varepsilon$, 则称 a 是 $\{x_n\}$ 的**极限**, 或称 $\{x_n\}$ **收敛于** a , 记为

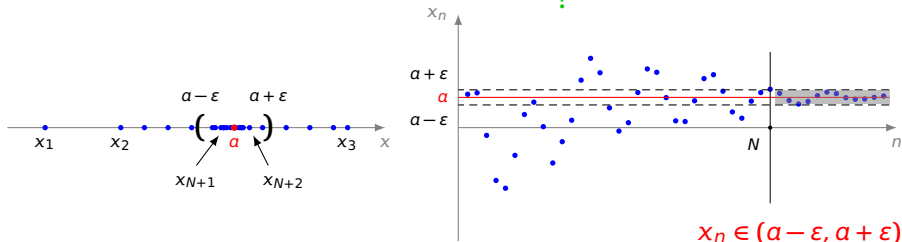
$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \text{或} \quad x_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty)$$

若不存在这样的数 a , 称为 $\{x_n\}$ **发散**, 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 不存在

考察一个无穷数列 $\{x_n\}$:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

如果 n 无限增大时, x_n 无限接近一个数 a , 则称 $\{x_n\}$ 的“极限”为 a ?



$$x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

定义 任意给定 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \varepsilon$, 则称 a 是 $\{x_n\}$ 的**极限**, 或称 $\{x_n\}$ **收敛于** a , 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \text{或} \quad x_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty)$$

若不存在这样的数 a , 称为 $\{x_n\}$ **发散**, 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 不存在

例 1 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

例 1 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N =$

, 则当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n - 0| < \varepsilon$$

例 1 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N =$

, 则当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n - 0| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

例 1 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N =$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n - 0| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

例 1 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N =$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n - 0| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

例 1 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = (\text{一个大于 } \frac{1}{\varepsilon} \text{ 的正整数})$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n - 0| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

例 1 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = (\text{一个大于 } \frac{1}{\varepsilon} \text{ 的正整数})$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n - 0| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

例 1 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = (\text{一个大于 } \frac{1}{\varepsilon} \text{ 的正整数})$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n - 0| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

例 2 证明数列 $2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}, \dots$ 的极限是 1

例 1 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = (\text{一个大于 } \frac{1}{\varepsilon} \text{ 的正整数})$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n - 0| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

例 2 证明数列 $2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}, \dots$ 的极限是 1

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N =$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n - 1| < \varepsilon$$

例 1 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = (\text{一个大于 } \frac{1}{\varepsilon} \text{ 的正整数})$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n - 0| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

例 2 证明数列 $2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}, \dots$ 的极限是 1

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N =$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n - 1| = \left| \frac{n + (-1)^{n-1}}{n} - 1 \right| < \varepsilon$$

例 1 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = (\text{一个大于 } \frac{1}{\varepsilon} \text{ 的正整数})$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n - 0| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

例 2 证明数列 $2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}, \dots$ 的极限是 1

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N =$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n - 1| = \left| \frac{n + (-1)^{n-1}}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

例 1 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = (\text{一个大于 } \frac{1}{\varepsilon} \text{ 的正整数})$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n - 0| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

例 2 证明数列 $2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}, \dots$ 的极限是 1

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N =$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n - 1| = \left| \frac{n + (-1)^{n-1}}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

例 1 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = (\text{一个大于 } \frac{1}{\varepsilon} \text{ 的正整数})$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n - 0| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

例 2 证明数列 $2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}, \dots$ 的极限是 1

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = (\text{一个大于 } \frac{1}{\varepsilon} \text{ 的正整数})$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n - 1| = \left| \frac{n + (-1)^{n-1}}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

例 1 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = (\text{一个大于 } \frac{1}{\varepsilon} \text{ 的正整数})$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n - 0| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

例 2 证明数列 $2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}, \dots$ 的极限是 1

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = (\text{一个大于 } \frac{1}{\varepsilon} \text{ 的正整数})$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n - 1| = \left| \frac{n + (-1)^{n-1}}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+(-1)^{n-1}}{n} = 1$.

例 3 设 $|q| < 1$, 证明等比数列 $1, q, q^2, \dots, q^{n-1}, \dots$ 的极限是 0

例 3 设 $|q| < 1$, 证明等比数列 $1, q, q^2, \dots, q^{n-1}, \dots$ 的极限是 0

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N =$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n - 0| < \varepsilon$$

例 3 设 $|q| < 1$, 证明等比数列 $1, q, q^2, \dots, q^{n-1}, \dots$ 的极限是 0

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N =$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n - 0| = |q^{n-1}| < \varepsilon$$

例 3 设 $|q| < 1$, 证明等比数列 $1, q, q^2, \dots, q^{n-1}, \dots$ 的极限是 0

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N =$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n - 0| = |q^{n-1}| \leq |q|^{n-1} < \varepsilon$$

例 3 设 $|q| < 1$ ，证明等比数列 $1, q, q^2, \dots, q^{n-1}, \dots$ 的极限是 0

证明 $\forall \varepsilon > 0$ ，取 $N =$ ，则当 $n > N$ 时，有

$$|x_n - 0| = |q^{n-1}| \leq |q|^{n-1} \leq |q|^N < \varepsilon$$

例 3 设 $|q| < 1$ ，证明等比数列 $1, q, q^2, \dots, q^{n-1}, \dots$ 的极限是 0

证明 $\forall \varepsilon > 0$ ，取 $N =$ ，则当 $n > N$ 时，有

$$|x_n - 0| = |q^{n-1}| \leq |q|^{n-1} \leq |q|^N < \varepsilon$$

例 3 设 $|q| < 1$ ，证明等比数列 $1, q, q^2, \dots, q^{n-1}, \dots$ 的极限是 0

证明 $\forall \varepsilon > 0$ ，取 $N =$ ，则当 $n > N$ 时，有

$$|x_n - 0| = |q^{n-1}| \leq |q|^{n-1} \leq |q|^N < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow N \ln |q| < \ln \varepsilon$$

例 3 设 $|q| < 1$, 证明等比数列 $1, q, q^2, \dots, q^{n-1}, \dots$ 的极限是 0

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N =$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n - 0| = |q^{n-1}| \leq |q|^{n-1} \leq |q|^N < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow N \ln |q| < \ln \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow N > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|}$$

例 3 设 $|q| < 1$, 证明等比数列 $1, q, q^2, \dots, q^{n-1}, \dots$ 的极限是 0

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = (\text{一个大于 } \frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|} \text{ 的正整数})$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n - 0| = |q^{n-1}| \leq |q|^{n-1} \leq |q|^N < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow N \ln |q| < \ln \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow N > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|}$$

例 3 设 $|q| < 1$, 证明等比数列 $1, q, q^2, \dots, q^{n-1}, \dots$ 的极限是 0

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = (\text{一个大于 } \frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|} \text{ 的正整数})$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n - 0| = |q^{n-1}| \leq |q|^{n-1} \leq |q|^N < \varepsilon$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n-1} = 0$.

$$\Leftrightarrow N \ln |q| < \ln \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow N > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|}$$

例 3 设 $|q| < 1$, 证明等比数列 $1, q, q^2, \dots, q^{n-1}, \dots$ 的极限是 0

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = (\text{一个大于 } \frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|} \text{ 的正整数})$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n - 0| = |q^{n-1}| \leq |q|^{n-1} \leq |q|^N < \varepsilon$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n-1} = 0$.

$$\Leftrightarrow N \ln |q| < \ln \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow N > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|}$$

例 4 设 $x_n = 0.\underbrace{33 \cdots 3}_{n \uparrow 3}$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{3}$

例 3 设 $|q| < 1$, 证明等比数列 $1, q, q^2, \dots, q^{n-1}, \dots$ 的极限是 0

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = (\text{一个大于 } \frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|} \text{ 的正整数})$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n - 0| = |q^{n-1}| \leq |q|^{n-1} \leq |q|^N < \varepsilon$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n-1} = 0$.

$$\Leftrightarrow N \ln |q| < \ln \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow N > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|}$$

例 4 设 $x_n = 0.\underbrace{33 \cdots 3}_{n \uparrow 3}$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{3}$

提示 $|x_n - \frac{1}{3}| = \frac{1}{3} |3x_n - 1| = \frac{1}{3} \times 10^{-n}$

例 3 设 $|q| < 1$, 证明等比数列 $1, q, q^2, \dots, q^{n-1}, \dots$ 的极限是 0

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = (\text{一个大于 } \frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|} \text{ 的正整数})$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n - 0| = |q^{n-1}| \leq |q|^{n-1} \leq |q|^N < \varepsilon$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n-1} = 0$.

$$\Leftrightarrow N \ln |q| < \ln \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow N > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|}$$

例 4 设 $x_n = 0.\underbrace{33 \cdots 3}_{n \uparrow 3}$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{3}$

提示 $|x_n - \frac{1}{3}| = \frac{1}{3}|3x_n - 1| = \frac{1}{3} \times 10^{-n}$

例 5 证明数列 $1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n-1}, \dots$ 是发散

例 5 证明数列 $1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n-1}, \dots$ 是发散

例 5 证明数列 $1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n-1}, \dots$ 是发散

证明 反证法. 假设数列收敛, 极限为 a .

例 5 证明数列 $1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n-1}, \dots$ 是发散

证明 反证法. 假设数列收敛, 极限为 a . 则对 $\varepsilon = \frac{1}{2}$, 存在正整数 N , 当 $n > N$ 时

$$|x_n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2}$$

例 5 证明数列 $1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n-1}, \dots$ 是发散

证明 反证法. 假设数列收敛, 极限为 a . 则对 $\varepsilon = \frac{1}{2}$, 存在正整数 N , 当 $n > N$ 时

$$|x_n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2}$$

从而有

$$|1 - a| < \frac{1}{2} \quad \text{并且} \quad |-1 - a| < \frac{1}{2}$$

例 5 证明数列 $1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n-1}, \dots$ 是发散

证明 反证法. 假设数列收敛, 极限为 a . 则对 $\varepsilon = \frac{1}{2}$, 存在正整数 N , 当 $n > N$ 时

$$|x_n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2}$$

从而有

$$|1 - a| < \frac{1}{2} \quad \text{并且} \quad |-1 - a| < \frac{1}{2}$$

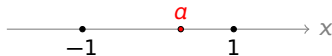
但上述两式不可能同时成立,

例 5 证明数列 $1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n-1}, \dots$ 是发散

证明 反证法. 假设数列收敛, 极限为 a . 则对 $\varepsilon = \frac{1}{2}$, 存在正整数 N , 当 $n > N$ 时

$$|x_n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2}$$

从而有



$$|1 - a| < \frac{1}{2} \quad \text{并且} \quad |-1 - a| < \frac{1}{2}$$

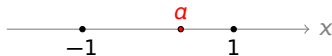
但上述两式不可能同时成立,

例 5 证明数列 $1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n-1}, \dots$ 是发散

证明 反证法. 假设数列收敛, 极限为 a . 则对 $\varepsilon = \frac{1}{2}$, 存在正整数 N , 当 $n > N$ 时

$$|x_n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2}$$

从而有



$$|1 - a| < \frac{1}{2} \quad \text{并且} \quad |-1 - a| < \frac{1}{2}$$

但上述两式不可能同时成立, 否则:

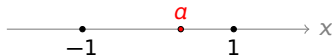
$$2 = (1 - a) + (1 + a)$$

例 5 证明数列 $1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n-1}, \dots$ 是发散

证明 反证法. 假设数列收敛, 极限为 a . 则对 $\varepsilon = \frac{1}{2}$, 存在正整数 N , 当 $n > N$ 时

$$|x_n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2}$$

从而有



$$|1 - a| < \frac{1}{2} \quad \text{并且} \quad |-1 - a| < \frac{1}{2}$$

但上述两式不可能同时成立, 否则:

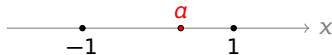
$$2 = (1 - a) + (1 + a) \leq |1 - a| + |1 + a|$$

例 5 证明数列 $1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n-1}, \dots$ 是发散

证明 反证法. 假设数列收敛, 极限为 a . 则对 $\varepsilon = \frac{1}{2}$, 存在正整数 N , 当 $n > N$ 时

$$|x_n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2}$$

从而有



$$|1 - a| < \frac{1}{2} \quad \text{并且} \quad |-1 - a| < \frac{1}{2}$$

但上述两式不可能同时成立, 否则:

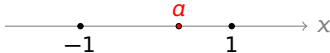
$$2 = (1 - a) + (1 + a) \leq |1 - a| + |1 + a| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

例 5 证明数列 $1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n-1}, \dots$ 是发散

证明 反证法. 假设数列收敛, 极限为 a . 则对 $\varepsilon = \frac{1}{2}$, 存在正整数 N , 当 $n > N$ 时

$$|x_n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2}$$

从而有



$$|1 - a| < \frac{1}{2} \quad \text{并且} \quad |-1 - a| < \frac{1}{2}$$

但上述两式不可能同时成立, 否则:

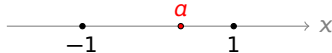
$$2 = (1 - a) + (1 + a) \leq |1 - a| + |1 + a| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

例 5 证明数列 $1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n-1}, \dots$ 是发散

证明 反证法. 假设数列收敛, 极限为 a . 则对 $\varepsilon = \frac{1}{2}$, 存在正整数 N , 当 $n > N$ 时

$$|x_n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2}$$

从而有



$$|1 - a| < \frac{1}{2} \quad \text{并且} \quad |-1 - a| < \frac{1}{2}$$

但上述两式不可能同时成立, 否则:

$$2 = (1 - a) + (1 + a) \leq |1 - a| + |1 + a| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

矛盾. 所以数列发散.

收敛数列的性质

性质 1 收敛数列的极限唯一.

收敛数列的性质

性质 1 收敛数列的极限唯一.

证明 反证法. 设 $\{x_n\}$ 有两个不同的极限 a, b .

收敛数列的性质

性质 1 收敛数列的极限唯一.



证明 反证法. 设 $\{x_n\}$ 有两个不同的极限 a, b .

收敛数列的性质

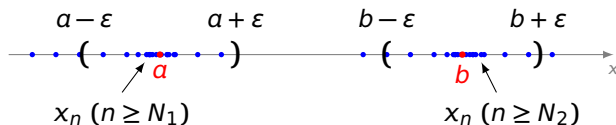
性质 1 收敛数列的极限唯一.



证明 反证法. 设 $\{x_n\}$ 有两个不同的极限 a, b .

收敛数列的性质

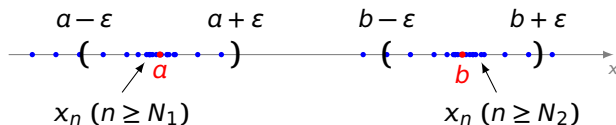
性质 1 收敛数列的极限唯一.



证明 反证法. 设 $\{x_n\}$ 有两个不同的极限 a, b .

收敛数列的性质

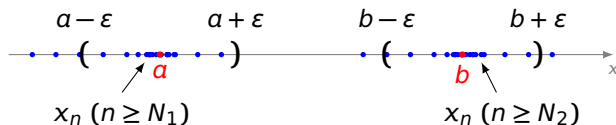
性质 1 收敛数列的极限唯一.



证明 反证法. 设 $\{x_n\}$ 有两个不同的极限 a, b . 取 $\varepsilon = \frac{1}{4}|a - b| > 0$.

收敛数列的性质

性质 1 收敛数列的极限唯一.

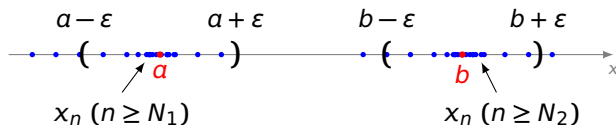


证明 反证法. 设 $\{x_n\}$ 有两个不同的极限 a, b . 取 $\varepsilon = \frac{1}{4}|a - b| > 0$.

• a 是 $\{x_n\}$ 极限 $\Rightarrow \exists N_1$, 当 $n > N_1$ 时, $|x_n - a| < \varepsilon$.

收敛数列的性质

性质 1 收敛数列的极限唯一.

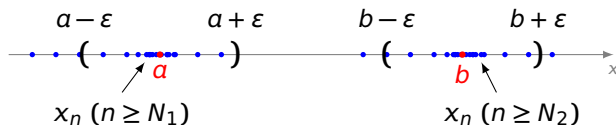


证明 反证法. 设 $\{x_n\}$ 有两个不同的极限 a, b . 取 $\varepsilon = \frac{1}{4}|a - b| > 0$.

- a 是 $\{x_n\}$ 极限 $\Rightarrow \exists N_1$, 当 $n > N_1$ 时, $|x_n - a| < \varepsilon$.
- b 是 $\{x_n\}$ 极限 $\Rightarrow \exists N_2$, 当 $n > N_2$ 时, $|x_n - b| < \varepsilon$.

收敛数列的性质

性质 1 收敛数列的极限唯一.



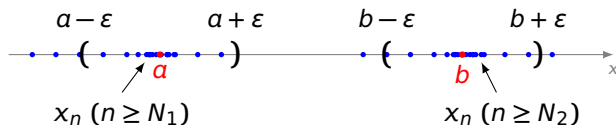
证明 反证法. 设 $\{x_n\}$ 有两个不同的极限 a, b . 取 $\varepsilon = \frac{1}{4}|a - b| > 0$.

- a 是 $\{x_n\}$ 极限 $\Rightarrow \exists N_1$, 当 $n > N_1$ 时, $|x_n - a| < \varepsilon$.
- b 是 $\{x_n\}$ 极限 $\Rightarrow \exists N_2$, 当 $n > N_2$ 时, $|x_n - b| < \varepsilon$.

当 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时, 上述两个不等式同时成立,

收敛数列的性质

性质 1 收敛数列的极限唯一.



证明 反证法. 设 $\{x_n\}$ 有两个不同的极限 a, b . 取 $\varepsilon = \frac{1}{4}|a - b| > 0$.

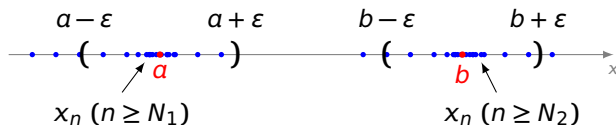
- a 是 $\{x_n\}$ 极限 $\Rightarrow \exists N_1$, 当 $n > N_1$ 时, $|x_n - a| < \varepsilon$.
- b 是 $\{x_n\}$ 极限 $\Rightarrow \exists N_2$, 当 $n > N_2$ 时, $|x_n - b| < \varepsilon$.

当 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时, 上述两个不等式同时成立, 从而

$$|a - b| = |a - x_n + x_n - b|$$

收敛数列的性质

性质 1 收敛数列的极限唯一.



证明 反证法. 设 $\{x_n\}$ 有两个不同的极限 a, b . 取 $\varepsilon = \frac{1}{4}|a - b| > 0$.

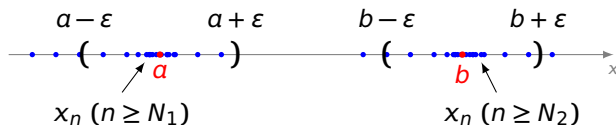
- a 是 $\{x_n\}$ 极限 $\Rightarrow \exists N_1$, 当 $n > N_1$ 时, $|x_n - a| < \varepsilon$.
- b 是 $\{x_n\}$ 极限 $\Rightarrow \exists N_2$, 当 $n > N_2$ 时, $|x_n - b| < \varepsilon$.

当 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时, 上述两个不等式同时成立, 从而

$$|a - b| = |a - x_n + x_n - b| \leq |a - x_n| + |x_n - b|$$

收敛数列的性质

性质 1 收敛数列的极限唯一.



证明 反证法. 设 $\{x_n\}$ 有两个不同的极限 a, b . 取 $\varepsilon = \frac{1}{4}|a - b| > 0$.

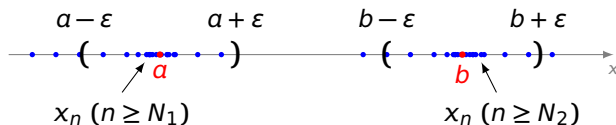
- a 是 $\{x_n\}$ 极限 $\Rightarrow \exists N_1$, 当 $n > N_1$ 时, $|x_n - a| < \varepsilon$.
- b 是 $\{x_n\}$ 极限 $\Rightarrow \exists N_2$, 当 $n > N_2$ 时, $|x_n - b| < \varepsilon$.

当 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时, 上述两个不等式同时成立, 从而

$$|a - b| = |a - x_n + x_n - b| \leq |a - x_n| + |x_n - b| < 2\varepsilon$$

收敛数列的性质

性质 1 收敛数列的极限唯一.



证明 反证法. 设 $\{x_n\}$ 有两个不同的极限 a, b . 取 $\varepsilon = \frac{1}{4}|a - b| > 0$.

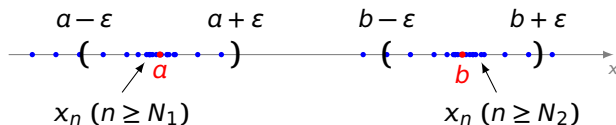
- a 是 $\{x_n\}$ 极限 $\Rightarrow \exists N_1$, 当 $n > N_1$ 时, $|x_n - a| < \varepsilon$.
- b 是 $\{x_n\}$ 极限 $\Rightarrow \exists N_2$, 当 $n > N_2$ 时, $|x_n - b| < \varepsilon$.

当 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时, 上述两个不等式同时成立, 从而

$$|a - b| = |a - x_n + x_n - b| \leq |a - x_n| + |x_n - b| < 2\varepsilon = \frac{1}{2}|a - b|$$

收敛数列的性质

性质 1 收敛数列的极限唯一.



证明 反证法. 设 $\{x_n\}$ 有两个不同的极限 a, b . 取 $\varepsilon = \frac{1}{4}|a - b| > 0$.

- a 是 $\{x_n\}$ 极限 $\Rightarrow \exists N_1$, 当 $n > N_1$ 时, $|x_n - a| < \varepsilon$.
- b 是 $\{x_n\}$ 极限 $\Rightarrow \exists N_2$, 当 $n > N_2$ 时, $|x_n - b| < \varepsilon$.

当 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时, 上述两个不等式同时成立, 从而

$$|a - b| = |a - x_n + x_n - b| \leq |a - x_n| + |x_n - b| < 2\varepsilon = \frac{1}{2}|a - b|$$

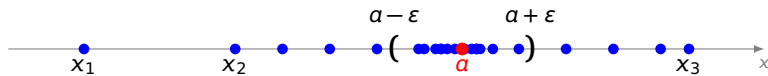
所以 $|a - b| < 0$, 不可能.

性质 2 收敛数列一定有界.

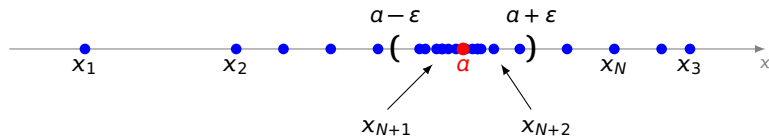
性质 2 收敛数列一定有界.



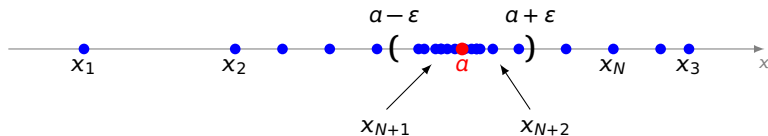
性质 2 收敛数列一定有界.



性质 2 收敛数列一定有界.



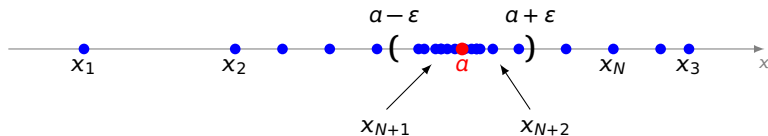
性质 2 收敛数列一定有界.



证明 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. 取 $\varepsilon = 1$, \exists 正整数 N , 当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n - a| < \varepsilon = 1.$$

性质 2 收敛数列一定有界.

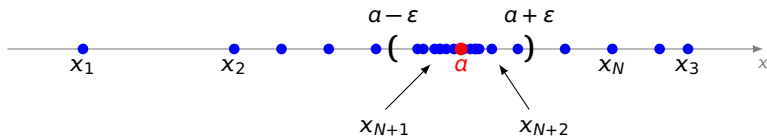


证明 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. 取 $\varepsilon = 1$, \exists 正整数 N , 当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n - a| < \varepsilon = 1.$$

从而 $|x_n| \leq |a| + 1$.

性质 2 收敛数列一定有界.



证明 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. 取 $\varepsilon = 1$, \exists 正整数 N , 当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n - a| < \varepsilon = 1.$$

从而 $|x_n| \leq |a| + 1$. 取

$$M = \max\{|x_1|, \dots, |x_N|, |a| + 1\}$$

则对所有 n , 成立

$$|x_n| \leq M.$$

性质 3 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

- 若 $a > 0$, 则 \exists 正整数 N , 当 $n > N$ 时, 都有 $x_n > 0$.

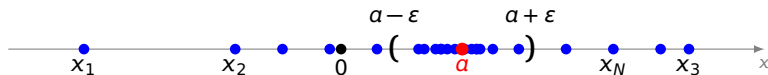
性质 3 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

- 若 $a > 0$, 则 \exists 正整数 N , 当 $n > N$ 时, 都有 $x_n > 0$.



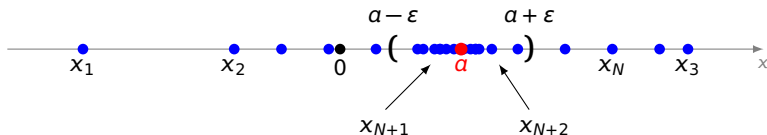
性质 3 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

- 若 $a > 0$, 则 \exists 正整数 N , 当 $n > N$ 时, 都有 $x_n > 0$.



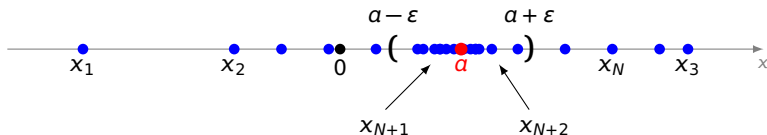
性质 3 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

- 若 $a > 0$, 则 \exists 正整数 N , 当 $n > N$ 时, 都有 $x_n > 0$.



性质 3 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

- 若 $a > 0$, 则 \exists 正整数 N , 当 $n > N$ 时, 都有 $x_n > 0$.

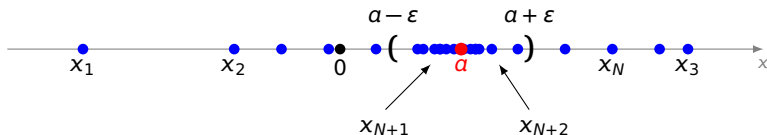


证明 设 $a > 0$, 取 $\varepsilon = \frac{1}{2}a > 0$, $\exists N$, 当 $n > N$ 时, 成立

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

性质 3 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

- 若 $a > 0$, 则 \exists 正整数 N , 当 $n > N$ 时, 都有 $x_n > 0$.

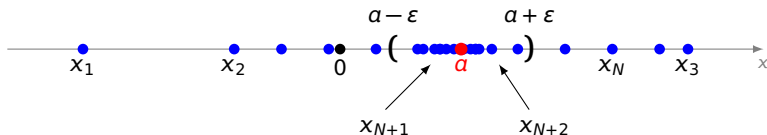


证明 设 $a > 0$, 取 $\varepsilon = \frac{1}{2}a > 0$, $\exists N$, 当 $n > N$ 时, 成立

$$|x_n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2}a$$

性质 3 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

- 若 $a > 0$, 则 \exists 正整数 N , 当 $n > N$ 时, 都有 $x_n > 0$.

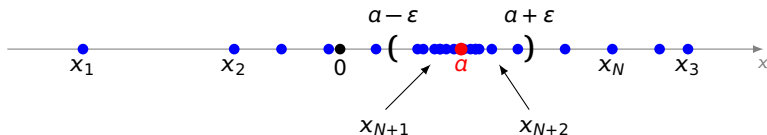


证明 设 $a > 0$, 取 $\epsilon = \frac{1}{2}a > 0$, $\exists N$, 当 $n > N$ 时, 成立

$$|x_n - a| < \epsilon = \frac{1}{2}a \quad \Rightarrow \quad x_n > a - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a > 0$$

性质 3 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

- 若 $a > 0$, 则 \exists 正整数 N , 当 $n > N$ 时, 都有 $x_n > 0$.
- 若 $a < 0$, 则 \exists 正整数 N , 当 $n > N$ 时, 都有 $x_n < 0$.

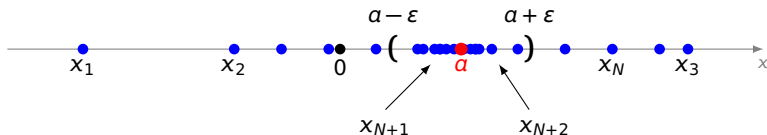


证明 设 $a > 0$, 取 $\varepsilon = \frac{1}{2}a > 0$, $\exists N$, 当 $n > N$ 时, 成立

$$|x_n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2}a \quad \Rightarrow \quad x_n > a - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a > 0$$

性质 3 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

- 若 $a > 0$, 则 \exists 正整数 N , 当 $n > N$ 时, 都有 $x_n > 0$.
- 若 $a < 0$, 则 \exists 正整数 N , 当 $n > N$ 时, 都有 $x_n < 0$.



证明 设 $a > 0$, 取 $\varepsilon = \frac{1}{2}a > 0$, $\exists N$, 当 $n > N$ 时, 成立

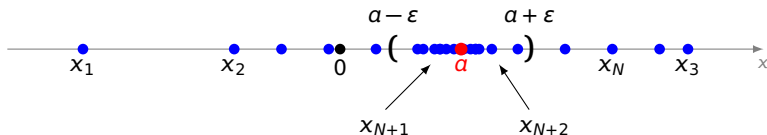
$$|x_n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2}a \quad \Rightarrow \quad x_n > a - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a > 0$$

推论 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

- 若从某一项开始 $x_n \geq 0$, 则 $a \geq 0$.

性质 3 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

- 若 $a > 0$, 则 \exists 正整数 N , 当 $n > N$ 时, 都有 $x_n > 0$.
- 若 $a < 0$, 则 \exists 正整数 N , 当 $n > N$ 时, 都有 $x_n < 0$.



证明 设 $a > 0$, 取 $\varepsilon = \frac{1}{2}a > 0$, $\exists N$, 当 $n > N$ 时, 成立

$$|x_n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2}a \quad \Rightarrow \quad x_n > a - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a > 0$$

推论 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

- 若从某一项开始 $x_n \geq 0$, 则 $a \geq 0$.
- 若从某一项开始 $x_n \leq 0$, 则 $a \leq 0$.

从数列 $\{x_n\}$ 中，依此抽取无穷多项出来：

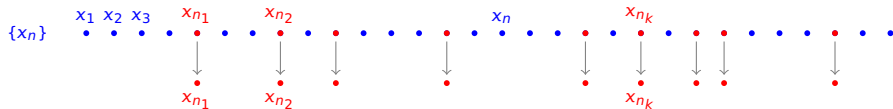
$\{x_n\}$ x_1 x_2 x_3 x_n



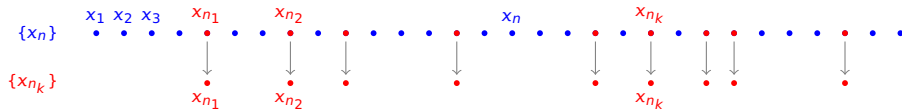
从数列 $\{x_n\}$ 中，依此抽取无穷多项出来：



从数列 $\{x_n\}$ 中，依此抽取无穷多项出来：

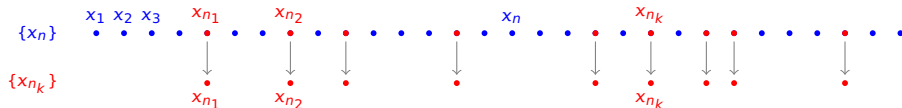


从数列 $\{x_n\}$ 中，依此抽取无穷多项出来：



所得到的 $\{x_{n_k}\}$ 称为 $\{x_n\}$ 的一个子列.

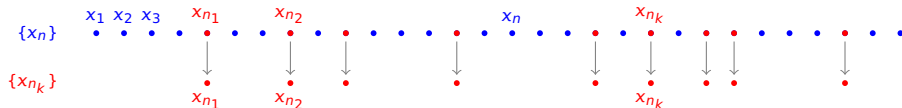
从数列 $\{x_n\}$ 中，依此抽取无穷多项出来：



所得到的 $\{x_{n_k}\}$ 称为 $\{x_n\}$ 的一个子列.

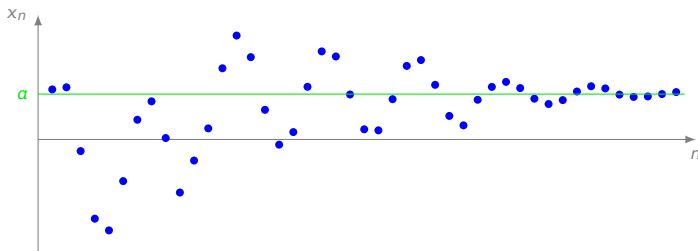
定理 “ $\{x_n\}$ 收敛于 a ” \Leftrightarrow “任意子列 $\{x_{n_k}\}$ 都收敛于同一个 a ” .

从数列 $\{x_n\}$ 中，依此抽取无穷多项出来：

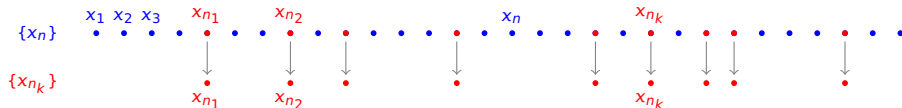


所得到的 $\{x_{n_k}\}$ 称为 $\{x_n\}$ 的一个子列.

定理 “ $\{x_n\}$ 收敛于 a ” \Leftrightarrow “任意子列 $\{x_{n_k}\}$ 都收敛于同一个 a ” .

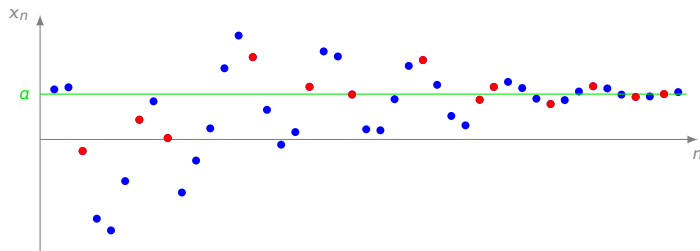


从数列 $\{x_n\}$ 中，依此抽取无穷多项出来：



所得到的 $\{x_{n_k}\}$ 称为 $\{x_n\}$ 的一个子列.

定理 “ $\{x_n\}$ 收敛于 a ” \Leftrightarrow “任意子列 $\{x_{n_k}\}$ 都收敛于同一个 a ” .



例 数列 $1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n-1}, \dots$ 发散.

例 数列 $1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n-1}, \dots$ 发散.

证明 偶数项构成子列

$$1, 1, \dots, 1, \dots$$

奇数项构成子列

$$-1, -1, \dots, -1, \dots$$

这两个子列的极限显然不等, 所以原数列发散.

We are here now...

1. 数列极限
2. 函数极限
3. 极限运算
4. 极限性质
5. 两个重要极限
6. 无穷大, 无穷小

函数极限，简单说就是，当自变量无限“趋近”某个量时，函数值是否“趋于”一致.

函数极限，简单说就是，当自变量无限“趋近”某个量时，函数值是否“趋于”一致.

下面将介绍以下的极限过程：

$$\begin{array}{ccc} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), & \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), & \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x), & \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), & \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \end{array}$$

“ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ”：如果 x 无限接近 x_0 时， $f(x)$ 无限接近一个数 A ，则称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时的“极限”为 A .

“ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ”：如果 x 无限接近 x_0 时， $f(x)$ 无限接近一个数 A ，则称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时的“极限”为 A 。

定义 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ ，使得 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，

“ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ”：如果 x 无限接近 x_0 时， $f(x)$ 无限接近一个数 A ，则称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时的“极限”为 A 。

定义 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ ，使得 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称 A 是 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow x_0)$$

“ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ”：如果 x 无限接近 x_0 时， $f(x)$ 无限接近一个数 A ，则称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时的“极限”为 A 。

定义 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ ，使得 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称 A 是 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow x_0)$$

若不存在这样的数 A ，称 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在

“ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ”：如果 x 无限接近 x_0 时， $f(x)$ 无限接近一个数 A ，则称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时的“极限”为 A 。

$\varepsilon - \delta$ 语言

定义 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ ，使得 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称 A 是 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow x_0)$$

若不存在这样的数 A ，称 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在

“ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ”：如果 x 无限接近 x_0 时， $f(x)$ 无限接近一个数 A ，则称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时的“极限”为 A 。

$\varepsilon - \delta$ 语言

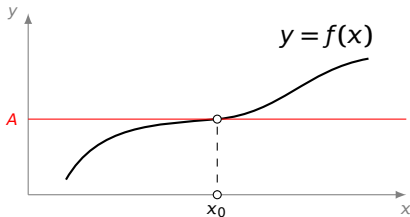
f 在 x_0 去心邻域有定义，
而不必在 x_0 处有定义

定义 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ ，使得 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称 A 是 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow x_0)$$

若不存在这样的数 A ，称 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在

“ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ”：如果 x 无限接近 x_0 时， $f(x)$ 无限接近一个数 A ，则称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时的“极限”为 A 。



f 在 x_0 去心邻域有定义，
而不必在 x_0 处有定义

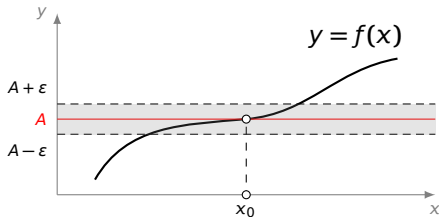
$\varepsilon - \delta$ 语言

定义 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ ，使得 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称 A 是 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow x_0)$$

若不存在这样的数 A ，称 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在

“ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ”：如果 x 无限接近 x_0 时， $f(x)$ 无限接近一个数 A ，则称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时的“极限”为 A 。



$\varepsilon - \delta$ 语言

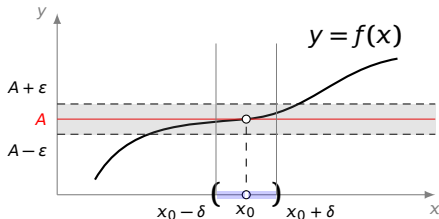
f 在 x_0 去心邻域有定义，
而不必在 x_0 处有定义

定义 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ ，使得 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称 A 是 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow x_0)$$

若不存在这样的数 A ，称 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在

“ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ”：如果 x 无限接近 x_0 时， $f(x)$ 无限接近一个数 A ，则称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时的“极限”为 A 。



f 在 x_0 去心邻域有定义，
而不必在 x_0 处有定义

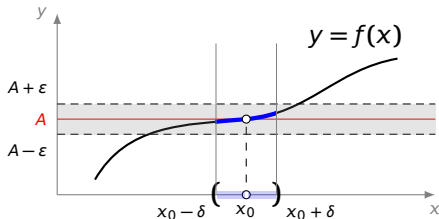
$\epsilon - \delta$ 语言

定义 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ ，使得 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - A| < \epsilon$ ，则称 A 是 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow x_0)$$

若不存在这样的数 A ，称 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在

“ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ”：如果 x 无限接近 x_0 时， $f(x)$ 无限接近一个数 A ，则称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时的“极限”为 A 。



f 在 x_0 去心邻域有定义，
而不必在 x_0 处有定义

$\epsilon - \delta$ 语言

定义 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ ，使得 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - A| < \epsilon$ ，则称 A 是 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow x_0)$$

若不存在这样的数 A ，称 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在

例 1 验证 $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$.

例 2 验证 $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$.

例 3 验证 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-2}{x-1} = 4$.

例 1 验证 $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$.

证明 这里 $f(x) \equiv c$ 是常值函数.

例 2 验证 $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$.

例 3 验证 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-2}{x-1} = 4$.

例 1 验证 $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$.

证明 这里 $f(x) \equiv c$ 是常值函数. $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta =$, 则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - c| < \varepsilon.$$

例 2 验证 $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$.

例 3 验证 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} = 4$.

例 1 验证 $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$.

证明 这里 $f(x) \equiv c$ 是常值函数. $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta =$, 则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

例 2 验证 $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$.

例 3 验证 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} = 4$.

例 1 验证 $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$.

证明 这里 $f(x) \equiv c$ 是常值函数. $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = 1$, 则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

例 2 验证 $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$.

例 3 验证 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} = 4$.

例 1 验证 $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$.

证明 这里 $f(x) \equiv c$ 是常值函数. $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = 1$, 则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

所以 $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$.

例 2 验证 $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$.

例 3 验证 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} = 4$.

例 1 验证 $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$.

证明 这里 $f(x) \equiv c$ 是常值函数. $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = 1$, 则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

所以 $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$.

例 2 验证 $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$.

证明 这里 $f(x) = x$.

例 3 验证 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} = 4$.

例 1 验证 $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$.

证明 这里 $f(x) \equiv c$ 是常值函数. $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = 1$, 则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

所以 $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$.

例 2 验证 $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$.

证明 这里 $f(x) = x$. $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon$, 则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - x_0| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon.$$

例 3 验证 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} = 4$.

例 1 验证 $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$.

证明 这里 $f(x) \equiv c$ 是常值函数. $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = 1$, 则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

所以 $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$.

例 2 验证 $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$.

证明 这里 $f(x) = x$. $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon$, 则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - x_0| = |x - x_0| < \varepsilon.$$

例 3 验证 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} = 4$.

例 1 验证 $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$.

证明 这里 $f(x) \equiv c$ 是常值函数. $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = 1$, 则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

所以 $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$.

例 2 验证 $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$.

证明 这里 $f(x) = x$. $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon$, 则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - x_0| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon.$$

例 3 验证 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} = 4$.

例 1 验证 $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$.

证明 这里 $f(x) \equiv c$ 是常值函数. $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = 1$, 则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

所以 $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$.

例 2 验证 $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$.

证明 这里 $f(x) = x$. $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon$, 则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - x_0| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon.$$

例 3 验证 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} = 4$.

例 1 验证 $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$.

证明 这里 $f(x) \equiv c$ 是常值函数. $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = 1$, 则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

所以 $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$.

例 2 验证 $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$.

证明 这里 $f(x) = x$. $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon$, 则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - x_0| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon.$$

所以 $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$.

例 3 验证 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} = 4$.

例 3 验证 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-2}{x-1} = 4$

例 3 验证 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-2}{x-1} = 4$

证明 在 $x \rightarrow 1$ 过程中, $x \neq 1$, 所以 $\frac{2x^2-2}{x-1}$ 有意义, 并且

例 3 验证 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-2}{x-1} = 4$

证明 在 $x \rightarrow 1$ 过程中, $x \neq 1$, 所以 $\frac{2x^2-2}{x-1}$ 有意义, 并且

$$\frac{2x^2-2}{x-1} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x-1}$$

例 3 验证 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-2}{x-1} = 4$

证明 在 $x \rightarrow 1$ 过程中, $x \neq 1$, 所以 $\frac{2x^2-2}{x-1}$ 有意义, 并且

$$\frac{2x^2-2}{x-1} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x-1} = 2x+2.$$

例 3 验证 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-2}{x-1} = 4$

证明 在 $x \rightarrow 1$ 过程中, $x \neq 1$, 所以 $\frac{2x^2-2}{x-1}$ 有意义, 并且

$$\frac{2x^2-2}{x-1} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x-1} = 2x+2.$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} 2x+2$$

例 3 验证 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-2}{x-1} = 4$

证明 在 $x \rightarrow 1$ 过程中, $x \neq 1$, 所以 $\frac{2x^2-2}{x-1}$ 有意义, 并且

$$\frac{2x^2-2}{x-1} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x-1} = 2x+2.$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} 2x+2$$

所以只需证明

$$\lim_{x \rightarrow 1} 2x+2 = 4 ?$$

例 3 验证 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-2}{x-1} = 4$

证明 在 $x \rightarrow 1$ 过程中, $x \neq 1$, 所以 $\frac{2x^2-2}{x-1}$ 有意义, 并且

$$\frac{2x^2-2}{x-1} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x-1} = 2x+2.$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} 2x+2$$

所以只需证明

$$\lim_{x \rightarrow 1} 2x+2 = 4 ?$$

$\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta =$, 则当 $0 < |x-1| < \delta$ 时, 有

$$|2x+2-4|$$

所以极限为 2.

例 3 验证 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-2}{x-1} = 4$

证明 在 $x \rightarrow 1$ 过程中, $x \neq 1$, 所以 $\frac{2x^2-2}{x-1}$ 有意义, 并且

$$\frac{2x^2-2}{x-1} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x-1} = 2x+2.$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} 2x+2$$

所以只需证明

$$\lim_{x \rightarrow 1} 2x+2 = 4 ?$$

$\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta =$, 则当 $0 < |x-1| < \delta$ 时, 有

$$|2x+2-4| = 2|x-1| < 2\delta$$

所以极限为 2.

例 3 验证 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-2}{x-1} = 4$

证明 在 $x \rightarrow 1$ 过程中, $x \neq 1$, 所以 $\frac{2x^2-2}{x-1}$ 有意义, 并且

$$\frac{2x^2-2}{x-1} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x-1} = 2x+2.$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} 2x+2$$

所以只需证明

$$\lim_{x \rightarrow 1} 2x+2 = 4 ?$$

$\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta =$, 则当 $0 < |x-1| < \delta$ 时, 有

$$|2x+2-4| = 2|x-1| < 2\delta = \varepsilon.$$

所以极限为 2.

例 3 验证 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-2}{x-1} = 4$

证明 在 $x \rightarrow 1$ 过程中, $x \neq 1$, 所以 $\frac{2x^2-2}{x-1}$ 有意义, 并且

$$\frac{2x^2-2}{x-1} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x-1} = 2x+2.$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} 2x+2$$

所以只需证明

$$\lim_{x \rightarrow 1} 2x+2 = 4 ?$$

$\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon > 0$, 则当 $0 < |x-1| < \delta$ 时, 有

$$|2x+2-4| = 2|x-1| < 2\delta = \varepsilon.$$

所以极限为 2.

- “ $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ ”:

- “ $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = B$ ”:

● “ $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ ”：当 x 从左边无限接近 x_0 时， $f(x)$ 无限接近数 A ,

● “ $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = B$ ”：

- “ $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ ”：当 x 从左边无限接近 x_0 时， $f(x)$ 无限接近数 A ，

则称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0^-$ 时的“左极限”为 A . 也记为 $f(x_0^-) = A$.

- “ $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = B$ ”：

- “ $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ ”：当 x 从左边无限接近 x_0 时， $f(x)$ 无限接近数 A ，
则称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0^-$ 时的“左极限”为 A 。也记为 $f(x_0^-) = A$ 。
- “ $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = B$ ”：当 x 从右边无限接近 x_0 时， $f(x)$ 无限接近数 B ，

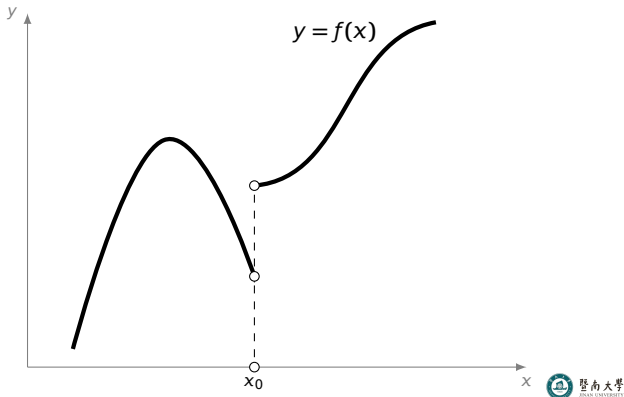
- “ $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ ”：当 x 从左边无限接近 x_0 时， $f(x)$ 无限接近数 A ，
则称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0^-$ 时的“左极限”为 A 。也记为 $f(x_0^-) = A$ 。
- “ $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = B$ ”：当 x 从右边无限接近 x_0 时， $f(x)$ 无限接近数 B ，
则称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0^+$ 时的“右极限”为 B 。也记为 $f(x_0^+) = B$ 。

- “ $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ ”：当 x 从左边无限接近 x_0 时， $f(x)$ 无限接近数 A ，

则称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0^-$ 时的“左极限”为 A 。也记为 $f(x_0^-) = A$ 。

- “ $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = B$ ”：当 x 从右边无限接近 x_0 时， $f(x)$ 无限接近数 B ，

则称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0^+$ 时的“右极限”为 B 。也记为 $f(x_0^+) = B$ 。

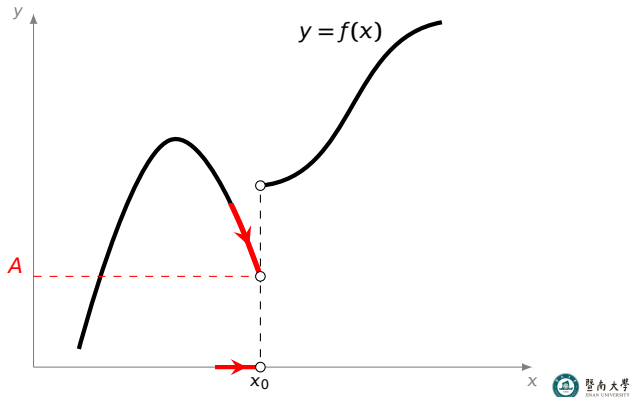


- “ $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ ”：当 x 从左边无限接近 x_0 时， $f(x)$ 无限接近数 A ，

则称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0^-$ 时的“左极限”为 A . 也记为 $f(x_0^-) = A$.

- “ $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = B$ ”：当 x 从右边无限接近 x_0 时， $f(x)$ 无限接近数 B ，

则称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0^+$ 时的“右极限”为 B . 也记为 $f(x_0^+) = B$.

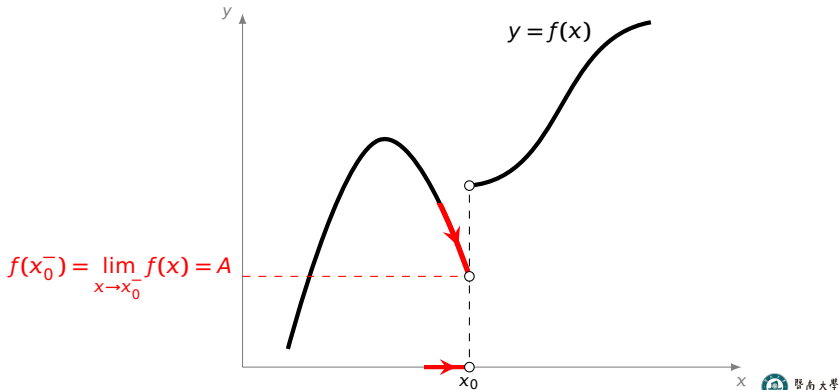


- “ $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ ”：当 x 从左边无限接近 x_0 时， $f(x)$ 无限接近数 A ，

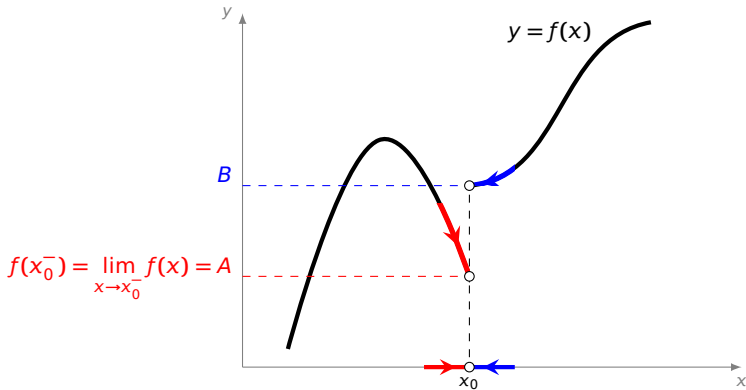
则称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0^-$ 时的“左极限”为 A . 也记为 $f(x_0^-) = A$.

- “ $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = B$ ”：当 x 从右边无限接近 x_0 时， $f(x)$ 无限接近数 B ，

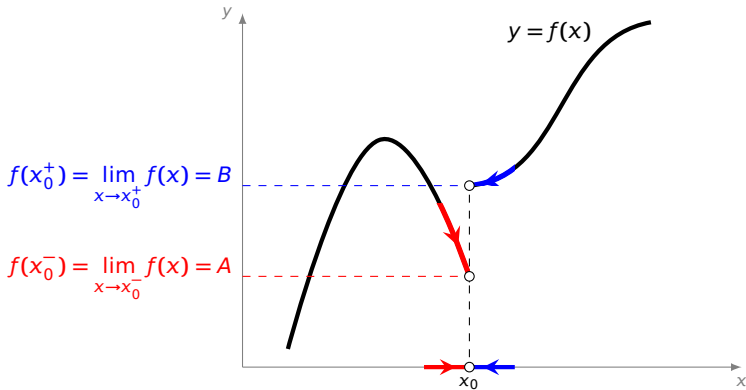
则称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0^+$ 时的“右极限”为 B . 也记为 $f(x_0^+) = B$.



- “ $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ ”：当 x 从左边无限接近 x_0 时， $f(x)$ 无限接近数 A ，
则称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0^-$ 时的“左极限”为 A 。也记为 $f(x_0^-) = A$ 。
- “ $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = B$ ”：当 x 从右边无限接近 x_0 时， $f(x)$ 无限接近数 B ，
则称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0^+$ 时的“右极限”为 B 。也记为 $f(x_0^+) = B$ 。



- “ $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ ”：当 x 从左边无限接近 x_0 时， $f(x)$ 无限接近数 A ，
则称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0^-$ 时的“左极限”为 A 。也记为 $f(x_0^-) = A$ 。
- “ $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = B$ ”：当 x 从右边无限接近 x_0 时， $f(x)$ 无限接近数 B ，
则称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0^+$ 时的“右极限”为 B 。也记为 $f(x_0^+) = B$ 。



性质 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 均存在并相等. 此时, 这三个极限相等.

性质 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 均存在并相等. 此时, 这三个极限相等.

例 设

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x + 1, & x > 0. \end{cases}$$

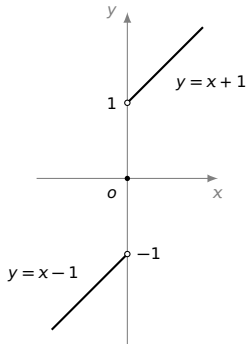
求出 $f(0^+)$ 和 $f(0^-)$, 并证明 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在.

性质 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 均存在并相等. 此时, 这三个极限相等.

例 设

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x + 1, & x > 0. \end{cases}$$

求出 $f(0^+)$ 和 $f(0^-)$, 并证明 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在.



性质 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 均存在并相等. 此时, 这三个极限相等.

例 设

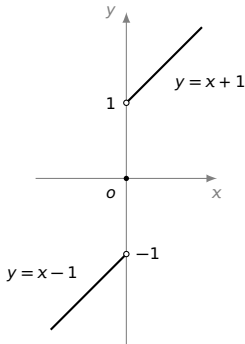
$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x + 1, & x > 0. \end{cases}$$

求出 $f(0^+)$ 和 $f(0^-)$, 并证明 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在.

解 由

$$f(0^-) =$$

$$f(0^+) =$$



性质 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 均存在并相等. 此时, 这三个极限相等.

例 设

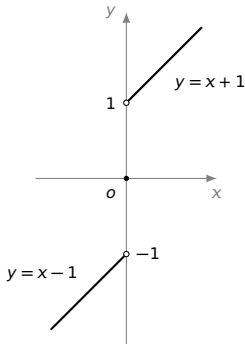
$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x + 1, & x > 0. \end{cases}$$

求出 $f(0^+)$ 和 $f(0^-)$, 并证明 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在.

解 由

$$f(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

$$f(0^+) =$$



性质 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 均存在并相等. 此时, 这三个极限相等.

例 设

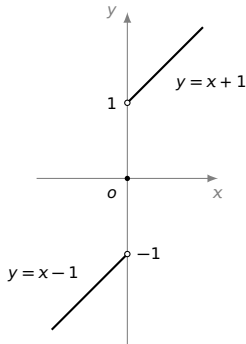
$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x + 1, & x > 0. \end{cases}$$

求出 $f(0^+)$ 和 $f(0^-)$, 并证明 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在.

解 由

$$f(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x - 1)$$

$$f(0^+) =$$



性质 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 均存在并相等. 此时, 这三个极限相等.

例 设

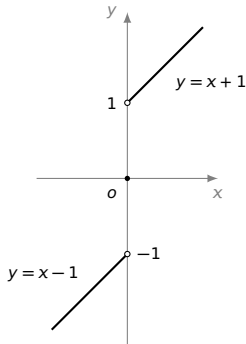
$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x + 1, & x > 0. \end{cases}$$

求出 $f(0^+)$ 和 $f(0^-)$, 并证明 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在.

解 由

$$f(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x - 1) \stackrel{\text{上述性质}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} (x - 1)$$

$$f(0^+) =$$



性质 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 均存在并相等. 此时, 这三个极限相等.

例 设

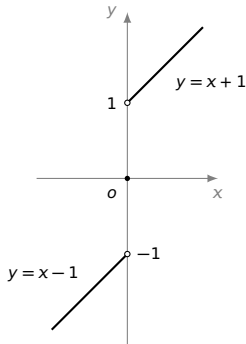
$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x + 1, & x > 0. \end{cases}$$

求出 $f(0^+)$ 和 $f(0^-)$, 并证明 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在.

解 由

$$f(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x - 1) \xlongequal{\text{上述性质}} \lim_{x \rightarrow 0} (x - 1) = -1$$

$$f(0^+) =$$

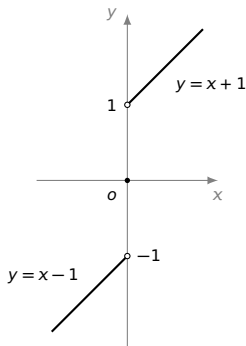


性质 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 均存在并相等. 此时, 这三个极限相等.

例 设

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x + 1, & x > 0. \end{cases}$$

求出 $f(0^+)$ 和 $f(0^-)$, 并证明 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在.



解 由

$$f(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x - 1) \xlongequal{\text{上述性质}} \lim_{x \rightarrow 0} (x - 1) = -1$$

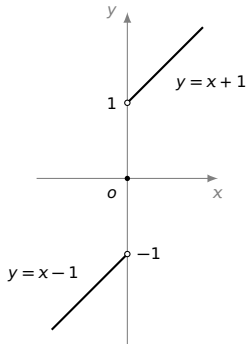
$$f(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1) \xlongequal{\text{上述性质}} \lim_{x \rightarrow 0} (x + 1) = 1$$

性质 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 均存在并相等. 此时, 这三个极限相等.

例 设

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x + 1, & x > 0. \end{cases}$$

求出 $f(0^+)$ 和 $f(0^-)$, 并证明 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在.



解 由

$$f(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x - 1) \xrightarrow{\text{上述性质}} \lim_{x \rightarrow 0} (x - 1) = -1$$

$$f(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1) \xrightarrow{\text{上述性质}} \lim_{x \rightarrow 0} (x + 1) = 1$$

知 $f(0^-) \neq f(0^+)$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在.

“ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ ”：当 $|x|$ 无限增大时， $f(x)$ 无限接近一个数 A .

“ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ ”：当 $|x|$ 无限增大时， $f(x)$ 无限接近一个数 A .

定义 任意给定 $\varepsilon > 0$ ，存在正数 X ，使得 $|x| > X$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，

“ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ ”：当 $|x|$ 无限增大时， $f(x)$ 无限接近一个数 A .

$$x \in (-\infty, -X) \cup (X, \infty)$$

定义 任意给定 $\varepsilon > 0$ ，存在正数 X ，使得 $|x| > X$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，

“ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ ”：当 $|x|$ 无限增大时， $f(x)$ 无限接近一个数 A .

$$x \in (-\infty, -X) \cup (X, \infty)$$

定义 任意给定 $\varepsilon > 0$ ，存在正数 X ，使得 $|x| > X$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称 A 是 $f(x)$ 在 $x \rightarrow \infty$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow \infty)$$

“ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ ”：当 $|x|$ 无限增大时， $f(x)$ 无限接近一个数 A .

$$x \in (-\infty, -X) \cup (X, \infty)$$

定义 任意给定 $\varepsilon > 0$ ，存在正数 X ，使得 $|x| > X$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称 A 是 $f(x)$ 在 $x \rightarrow \infty$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow \infty)$$

若不存在这样的数 A ，称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow \infty$ 时**发散**，或 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 不存在。

“ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ ”：当 $|x|$ 无限增大时， $f(x)$ 无限接近一个数 A .

$$x \in (-\infty, -X) \cup (X, \infty)$$

定义 任意给定 $\varepsilon > 0$ ，存在正数 X ，使得 $|x| > X$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称 A 是 $f(x)$ 在 $x \rightarrow \infty$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow \infty)$$

若不存在这样的数 A ，称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow \infty$ 时**发散**，或 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 不存在。

例 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$

“ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ ”：当 $|x|$ 无限增大时， $f(x)$ 无限接近一个数 A .

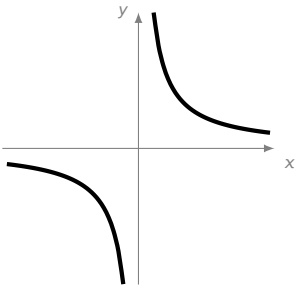
$$x \in (-\infty, -X) \cup (X, \infty)$$

定义 任意给定 $\varepsilon > 0$ ，存在正数 X ，使得 $|x| > X$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称 A 是 $f(x)$ 在 $x \rightarrow \infty$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow \infty)$$

若不存在这样的数 A ，称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow \infty$ 时**发散**，或 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 不存在。

例 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$.



“ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ ”：当 $|x|$ 无限增大时， $f(x)$ 无限接近一个数 A .

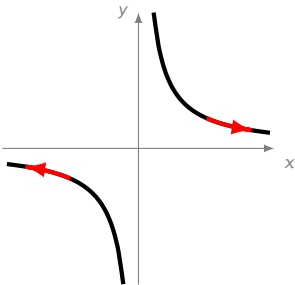
$$x \in (-\infty, -X) \cup (X, \infty)$$

定义 任意给定 $\varepsilon > 0$ ，存在正数 X ，使得 $|x| > X$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称 A 是 $f(x)$ 在 $x \rightarrow \infty$ 时的**极限**，记作

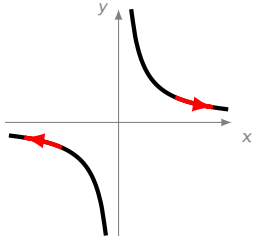
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow \infty)$$

若不存在这样的数 A ，称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow \infty$ 时**发散**，或 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 不存在。

例 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$.



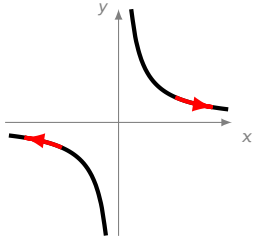
例 1 证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$



例 1 证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $X =$, 当 $|x| > X$ 时, 都有

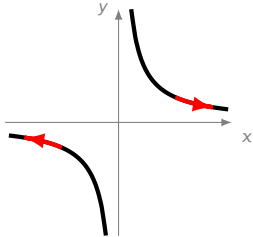
$$\left| \frac{1}{x} - 0 \right|$$



例 1 证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $X =$, 当 $|x| > X$ 时, 都有

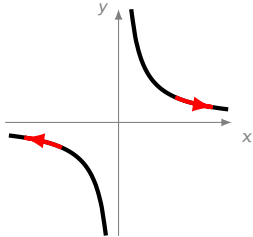
$$\left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \frac{1}{|x|}$$



例 1 证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $X =$, 当 $|x| > X$ 时, 都有

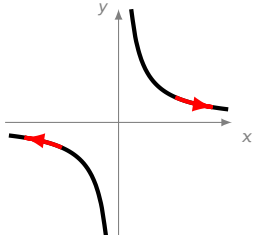
$$\left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \frac{1}{|x|} < \frac{1}{X}$$



例 1 证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $X = \frac{1}{\varepsilon} > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 都有

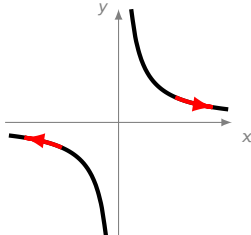
$$\left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \frac{1}{|x|} < \frac{1}{X} = \varepsilon.$$



例 1 证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $X = \frac{1}{\varepsilon} > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 都有

$$\left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \frac{1}{|x|} < \frac{1}{X} = \varepsilon.$$

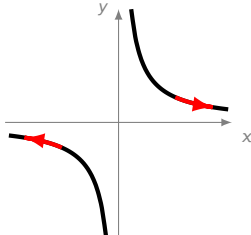


例 2 证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

例 1 证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $X = \frac{1}{\varepsilon} > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 都有

$$\left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \frac{1}{|x|} < \frac{1}{X} = \varepsilon.$$



例 2 证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

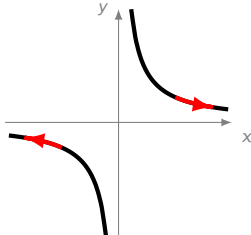
证明 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $X = \frac{1}{\varepsilon} > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 都有

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 0 \right|$$

例 1 证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $X = \frac{1}{\varepsilon} > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 都有

$$\left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \frac{1}{|x|} < \frac{1}{X} = \varepsilon.$$



例 2 证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

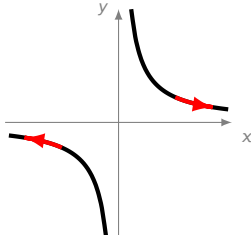
证明 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $X = \frac{1}{\varepsilon} > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 都有

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 0 \right| \leq \frac{1}{|x|}$$

例 1 证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $X = \frac{1}{\varepsilon} > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 都有

$$\left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \frac{1}{|x|} < \frac{1}{X} = \varepsilon.$$



例 2 证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

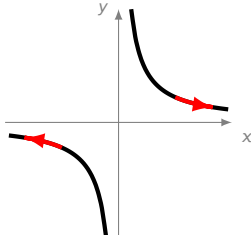
证明 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $X = \frac{1}{\varepsilon} > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 都有

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 0 \right| \leq \frac{1}{|x|} < \frac{1}{X}$$

例 1 证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $X = \frac{1}{\varepsilon} > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 都有

$$\left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \frac{1}{|x|} < \frac{1}{X} = \varepsilon.$$



例 2 证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $X = \frac{1}{\varepsilon} > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 都有

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 0 \right| \leq \frac{1}{|x|} < \frac{1}{X} = \varepsilon.$$

“ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ ”：如果 x 无限增大时， $f(x)$ 无限接近一个数 A ，则称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow +\infty$ 时的“极限”为 A 。

“ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ ”：如果 x 无限增大时， $f(x)$ 无限接近一个数 A ，则称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow +\infty$ 时的“极限”为 A 。

定义 任意给定 $\varepsilon > 0$ ，存在正数 X ，使得 $x > X$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，

“ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ ”：如果 x 无限增大时， $f(x)$ 无限接近一个数 A ，则称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow +\infty$ 时的“极限”为 A 。

定义 任意给定 $\varepsilon > 0$ ，存在正数 X ，使得 $x > X$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称 A 是 $f(x)$ 在 $x \rightarrow +\infty$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow +\infty)$$

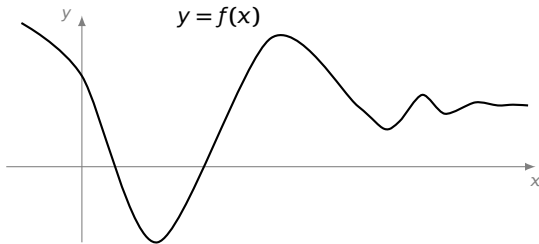
“ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ ”：如果 x 无限增大时， $f(x)$ 无限接近一个数 A ，则称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow +\infty$ 时的“极限”为 A 。

定义 任意给定 $\varepsilon > 0$ ，存在正数 X ，使得 $x > X$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称 A 是 $f(x)$ 在 $x \rightarrow +\infty$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow +\infty)$$

若不存在这样的数 A ，称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow +\infty$ 时**发散**，或 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 不存在

“ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ ”：如果 x 无限增大时， $f(x)$ 无限接近一个数 A ，则称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow +\infty$ 时的“极限”为 A 。

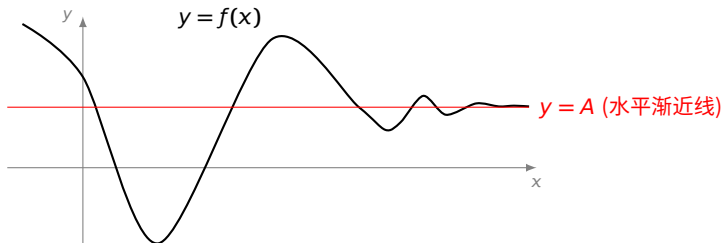


定义 任意给定 $\varepsilon > 0$ ，存在正数 X ，使得 $x > X$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称 A 是 $f(x)$ 在 $x \rightarrow +\infty$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow +\infty)$$

若不存在这样的数 A ，称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow +\infty$ 时**发散**，或 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 不存在

“ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ ”：如果 x 无限增大时， $f(x)$ 无限接近一个数 A ，则称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow +\infty$ 时的“极限”为 A 。

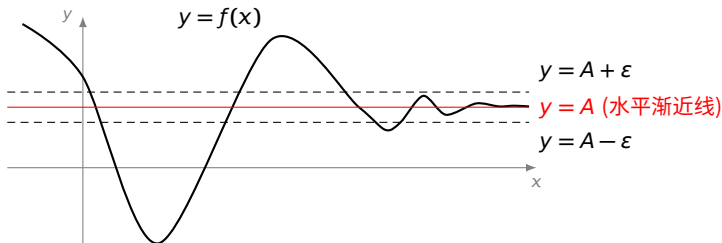


定义 任意给定 $\varepsilon > 0$ ，存在正数 X ，使得 $x > X$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称 A 是 $f(x)$ 在 $x \rightarrow +\infty$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow +\infty)$$

若不存在这样的数 A ，称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow +\infty$ 时**发散**，或 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 不存在

“ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ ”：如果 x 无限增大时， $f(x)$ 无限接近一个数 A ，则称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow +\infty$ 时的“极限”为 A 。

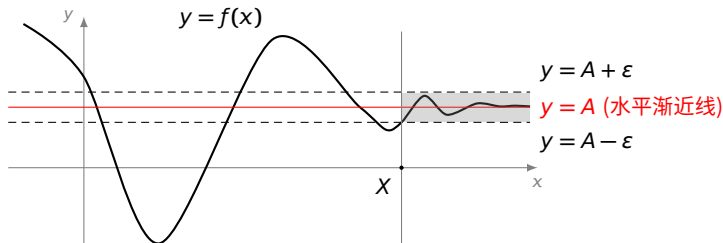


定义 任意给定 $\varepsilon > 0$ ，存在正数 X ，使得 $x > X$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称 A 是 $f(x)$ 在 $x \rightarrow +\infty$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow +\infty)$$

若不存在这样的数 A ，称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow +\infty$ 时**发散**，或 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 不存在

“ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ ”：如果 x 无限增大时， $f(x)$ 无限接近一个数 A ，则称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow +\infty$ 时的“极限”为 A 。



定义 任意给定 $\varepsilon > 0$ ，存在正数 X ，使得 $x > X$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称 A 是 $f(x)$ 在 $x \rightarrow +\infty$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow +\infty)$$

若不存在这样的数 A ，称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow +\infty$ 时**发散**，或 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 不存在

例 验证

1. $a > 1$ 时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^x} = 0.$

2. $0 < b < 1$ 时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} b^x = 0.$

例 验证

1. $a > 1$ 时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^x} = 0$.
2. $0 < b < 1$ 时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} b^x = 0$.

证明 1. $\forall \varepsilon \in (0, 1)$, 取 $X =$, 当 $x > X$ 时, 都有

$$\left| \frac{1}{a^x} - 0 \right| =$$

例 验证

1. $a > 1$ 时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^x} = 0$.
2. $0 < b < 1$ 时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} b^x = 0$.

证明 1. $\forall \varepsilon \in (0, 1)$, 取 $X =$, 当 $x > X$ 时, 都有

$$\left| \frac{1}{a^x} - 0 \right| = a^{-x}$$

例 验证

1. $a > 1$ 时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^x} = 0$.
2. $0 < b < 1$ 时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} b^x = 0$.

证明 1. $\forall \varepsilon \in (0, 1)$, 取 $X =$, 当 $x > X$ 时, 都有

$$\left| \frac{1}{a^x} - 0 \right| = a^{-x} = e^{\ln a^{-x}}$$

例 验证

1. $a > 1$ 时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^x} = 0$.
2. $0 < b < 1$ 时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} b^x = 0$.

证明 1. $\forall \varepsilon \in (0, 1)$, 取 $X =$, 当 $x > X$ 时, 都有

$$\left| \frac{1}{a^x} - 0 \right| = a^{-x} = e^{\ln a^{-x}}$$

例 验证

1. $a > 1$ 时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^x} = 0$.
2. $0 < b < 1$ 时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} b^x = 0$.

证明 1. $\forall \varepsilon \in (0, 1)$, 取 $X =$, 当 $x > X$ 时, 都有

$$\left| \frac{1}{a^x} - 0 \right| = a^{-x} = e^{\ln a^{-x}} = e^{-x \ln a}$$

例 验证

1. $a > 1$ 时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^x} = 0$.
2. $0 < b < 1$ 时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} b^x = 0$.

证明 1. $\forall \varepsilon \in (0, 1)$, 取 $X =$, 当 $x > X$ 时, 都有

$$\left| \frac{1}{a^x} - 0 \right| = a^{-x} = e^{\ln a^{-x}} = e^{-x \ln a} < e^{-X \ln a}$$

例 验证

1. $a > 1$ 时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^x} = 0$.
2. $0 < b < 1$ 时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} b^x = 0$.

证明 1. $\forall \varepsilon \in (0, 1)$, 取 $X = -\frac{\ln \varepsilon}{\ln a} > 0$, 当 $x > X$ 时, 都有

$$\left| \frac{1}{a^x} - 0 \right| = a^{-x} = e^{\ln a^{-x}} = e^{-x \ln a} < e^{-X \ln a} = e^{\ln \varepsilon}$$

例 验证

1. $a > 1$ 时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^x} = 0$.
2. $0 < b < 1$ 时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} b^x = 0$.

证明 1. $\forall \varepsilon \in (0, 1)$, 取 $X = -\frac{\ln \varepsilon}{\ln a} > 0$, 当 $x > X$ 时, 都有

$$\left| \frac{1}{a^x} - 0 \right| = a^{-x} = e^{\ln a^{-x}} = e^{-x \ln a} < e^{-X \ln a} = e^{\ln \varepsilon} = \varepsilon.$$

例 验证

1. $a > 1$ 时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^x} = 0$.

2. $0 < b < 1$ 时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} b^x = 0$.

证明 1. $\forall \varepsilon \in (0, 1)$, 取 $X = -\frac{\ln \varepsilon}{\ln a} > 0$, 当 $x > X$ 时, 都有

$$\left| \frac{1}{a^x} - 0 \right| = a^{-x} = e^{\ln a^{-x}} = e^{-x \ln a} < e^{-X \ln a} = e^{\ln \varepsilon} = \varepsilon.$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} b^x \quad \underline{\underline{a = \frac{1}{b} > 1}}$$

例 验证

1. $a > 1$ 时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^x} = 0$.

2. $0 < b < 1$ 时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} b^x = 0$.

证明 1. $\forall \varepsilon \in (0, 1)$, 取 $X = -\frac{\ln \varepsilon}{\ln a} > 0$, 当 $x > X$ 时, 都有

$$\left| \frac{1}{a^x} - 0 \right| = a^{-x} = e^{\ln a^{-x}} = e^{-x \ln a} < e^{-X \ln a} = e^{\ln \varepsilon} = \varepsilon.$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} b^x \stackrel{a=\frac{1}{b}>1}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^x$$

例 验证

1. $a > 1$ 时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^x} = 0$.

2. $0 < b < 1$ 时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} b^x = 0$.

证明 1. $\forall \varepsilon \in (0, 1)$, 取 $X = -\frac{\ln \varepsilon}{\ln a} > 0$, 当 $x > X$ 时, 都有

$$\left| \frac{1}{a^x} - 0 \right| = a^{-x} = e^{\ln a^{-x}} = e^{-x \ln a} < e^{-X \ln a} = e^{\ln \varepsilon} = \varepsilon.$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} b^x \stackrel{a=\frac{1}{b}>1}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^x = 0.$$

例 验证

1. $a > 1$ 时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^x} = 0$.

2. $0 < b < 1$ 时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} b^x = 0$.

证明 1. $\forall \varepsilon \in (0, 1)$, 取 $X = -\frac{\ln \varepsilon}{\ln a} > 0$, 当 $x > X$ 时, 都有

$$\left| \frac{1}{a^x} - 0 \right| = a^{-x} = e^{\ln a^{-x}} = e^{-x \ln a} < e^{-X \ln a} = e^{\ln \varepsilon} = \varepsilon.$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} b^x \stackrel{a=\frac{1}{b}>1}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^x = 0.$$

注 数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 可以归结成函数极限: 定义函数 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(n) = a_n$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

“ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ ”：如果 x 无限减少时， $f(x)$ 无限接近一个数 A ，则称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow -\infty$ 时的“极限”为 A 。

“ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ ”：如果 x 无限减少时， $f(x)$ 无限接近一个数 A ，则称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow -\infty$ 时的“极限”为 A 。

定义 任意给定 $\varepsilon > 0$ ，存在正数 X ，当 $x < -X$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，

“ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ ”：如果 x 无限减少时， $f(x)$ 无限接近一个数 A ，则称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow -\infty$ 时的“极限”为 A 。

定义 任意给定 $\varepsilon > 0$ ，存在正数 X ，当 $x < -X$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称 A 是 $f(x)$ 在 $x \rightarrow -\infty$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow -\infty)$$

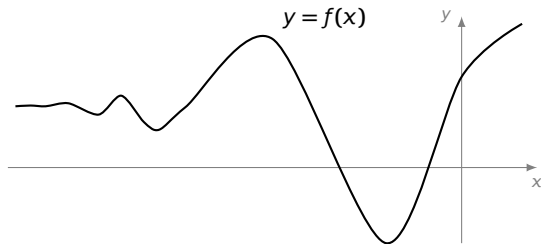
“ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ ”：如果 x 无限减少时， $f(x)$ 无限接近一个数 A ，则称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow -\infty$ 时的“极限”为 A 。

定义 任意给定 $\varepsilon > 0$ ，存在正数 X ，当 $x < -X$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称 A 是 $f(x)$ 在 $x \rightarrow -\infty$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow -\infty)$$

若不存在这样的数 A ，称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow -\infty$ 时**发散**，或 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 不存在

“ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ ”：如果 x 无限减少时， $f(x)$ 无限接近一个数 A ，则称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow -\infty$ 时的“极限”为 A 。

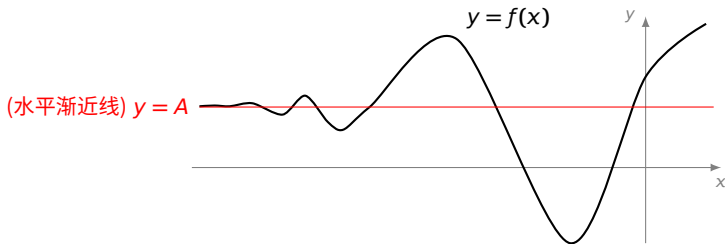


定义 任意给定 $\varepsilon > 0$ ，存在正数 X ，当 $x < -X$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称 A 是 $f(x)$ 在 $x \rightarrow -\infty$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow -\infty)$$

若不存在这样的数 A ，称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow -\infty$ 时**发散**，或 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 不存在

“ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ ”：如果 x 无限减少时， $f(x)$ 无限接近一个数 A ，则称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow -\infty$ 时的“极限”为 A 。

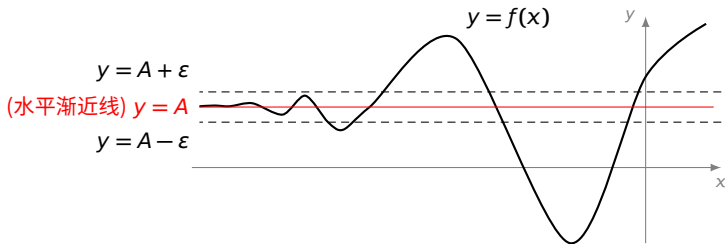


定义 任意给定 $\varepsilon > 0$ ，存在正数 X ，当 $x < -X$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称 A 是 $f(x)$ 在 $x \rightarrow -\infty$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow -\infty)$$

若不存在这样的数 A ，称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow -\infty$ 时**发散**，或 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 不存在

“ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ ”：如果 x 无限减少时， $f(x)$ 无限接近一个数 A ，则称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow -\infty$ 时的“极限”为 A 。

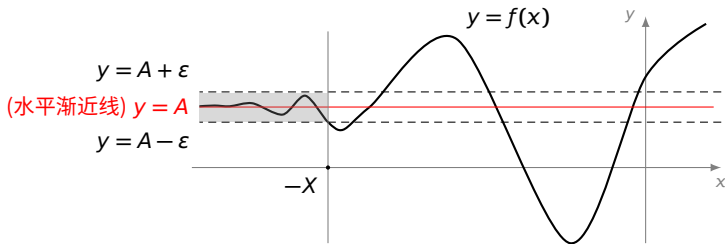


定义 任意给定 $\varepsilon > 0$ ，存在正数 X ，当 $x < -X$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称 A 是 $f(x)$ 在 $x \rightarrow -\infty$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow -\infty)$$

若不存在这样的数 A ，称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow -\infty$ 时**发散**，或 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 不存在

“ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ ”：如果 x 无限减少时， $f(x)$ 无限接近一个数 A ，则称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow -\infty$ 时的“极限”为 A 。



定义 任意给定 $\varepsilon > 0$ ，存在正数 X ，当 $x < -X$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称 A 是 $f(x)$ 在 $x \rightarrow -\infty$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow -\infty)$$

若不存在这样的数 A ，称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow -\infty$ 时**发散**，或 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 不存在

性质 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 均存在并相等. 此时, 这三个极限相等.

We are here now...

1. 数列极限
2. 函数极限
3. 极限运算
4. 极限性质
5. 两个重要极限
6. 无穷大, 无穷小

前面我们已经验证了一些特殊的极限，例如：

$$\lim_{x \rightarrow x_0} c = c, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0 \ (0 < a < 1), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^x} = 0 \ (a > 1)$$

前面我们已经**验证**了一些特殊的极限，例如：

$$\lim_{x \rightarrow x_0} c = c, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0 \ (0 < a < 1), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^x} = 0 \ (a > 1)$$

但实际中，我们需要的是**计算**极限，例如：

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}$$

为了计算一般式子的极限，我们需要知道极限的 **运算性质**。

前面我们已经**验证**了一些特殊的极限，例如：

$$\lim_{x \rightarrow x_0} c = c, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0 \ (0 < a < 1), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^x} = 0 \ (a > 1)$$

但实际中，我们需要的是**计算**极限，例如：

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}$$

为了计算一般式子的极限，我们需要知道极限的 **运算性质**。

这些运算性质一般与具体的极限过程无关：

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

因此叙述相关性质时，简单地用 “ **$\lim f(x)$** ” 表示上述任意的极限过程

定理（极限的四则运算） 设 $\lim f(x)$, $\lim g(x)$ 存在, $a, b \in \mathbb{R}$, 则

1. $\lim[af(x) + bg(x)] = a \lim f(x) + b \lim g(x)$

定理（极限的四则运算） 设 $\lim f(x)$, $\lim g(x)$ 存在, $a, b \in \mathbb{R}$, 则

1. $\lim[af(x) + bg(x)] = a \lim f(x) + b \lim g(x)$

(特别地, $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$)

定理（极限的四则运算） 设 $\lim f(x)$, $\lim g(x)$ 存在, $a, b \in \mathbb{R}$, 则

1. $\lim[af(x) + bg(x)] = a \lim f(x) + b \lim g(x)$

(特别地, $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$)

2. $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$

定理（极限的四则运算） 设 $\lim f(x)$, $\lim g(x)$ 存在, $a, b \in \mathbb{R}$, 则

1. $\lim[af(x) + bg(x)] = a \lim f(x) + b \lim g(x)$

(特别地, $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$)

2. $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$

(特别地, $\lim[f(x)^n] = [\lim f(x)]^n$)

定理（极限的四则运算） 设 $\lim f(x)$, $\lim g(x)$ 存在, $a, b \in \mathbb{R}$, 则

1. $\lim[af(x) + bg(x)] = a \lim f(x) + b \lim g(x)$

(特别地, $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$)

2. $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$

(特别地, $\lim[f(x)^n] = [\lim f(x)]^n$)

3. 若 $\lim g(x) \neq 0$, 则 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$

定理 (极限的四则运算) 设 $\lim f(x)$, $\lim g(x)$ 存在, $a, b \in \mathbb{R}$, 则

1. $\lim[af(x) + bg(x)] = a \lim f(x) + b \lim g(x)$

(特别地, $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$)

2. $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$

(特别地, $\lim[f(x)^n] = [\lim f(x)]^n$)

3. 若 $\lim g(x) \neq 0$, 则 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$

例 1 计算 $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 2x + 1)$

定理 (极限的四则运算) 设 $\lim f(x)$, $\lim g(x)$ 存在, $a, b \in \mathbb{R}$, 则

1. $\lim[af(x) + bg(x)] = a \lim f(x) + b \lim g(x)$

(特别地, $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$)

2. $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$

(特别地, $\lim[f(x)^n] = [\lim f(x)]^n$)

3. 若 $\lim g(x) \neq 0$, 则 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$

例 1 计算 $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 2x + 1)$

解 原式 $= 3 \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 2 \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 1 =$

定理 (极限的四则运算) 设 $\lim f(x)$, $\lim g(x)$ 存在, $a, b \in \mathbb{R}$, 则

1. $\lim[af(x) + bg(x)] = a \lim f(x) + b \lim g(x)$

(特别地, $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$)

2. $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$

(特别地, $\lim[f(x)^n] = [\lim f(x)]^n$)

3. 若 $\lim g(x) \neq 0$, 则 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$

例 1 计算 $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 2x + 1)$

解 原式 = $3 \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 2 \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 1 =$
 $= [\lim_{x \rightarrow 1} x]^2$

定理 (极限的四则运算) 设 $\lim f(x)$, $\lim g(x)$ 存在, $a, b \in \mathbb{R}$, 则

1. $\lim[af(x) + bg(x)] = a \lim f(x) + b \lim g(x)$

(特别地, $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$)

2. $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$

(特别地, $\lim[f(x)^n] = [\lim f(x)]^n$)

3. 若 $\lim g(x) \neq 0$, 则 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$

例 1 计算 $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 2x + 1)$

解 原式 = $3 \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 2 \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 1 =$
 $= [\lim_{x \rightarrow 1} x]^2 - 2 \lim_{x \rightarrow 1} x + 1$
 $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$

定理 (极限的四则运算) 设 $\lim f(x)$, $\lim g(x)$ 存在, $a, b \in \mathbb{R}$, 则

1. $\lim[af(x) + bg(x)] = a \lim f(x) + b \lim g(x)$

(特别地, $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$)

2. $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$

(特别地, $\lim[f(x)^n] = [\lim f(x)]^n$)

3. 若 $\lim g(x) \neq 0$, 则 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$

例 1 计算 $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 2x + 1)$

解 原式 = $3 \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 2 \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 1 =$
 $= [\lim_{x \rightarrow 1} x]^2 \quad \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0 \quad \lim_{x \rightarrow x_0} c = c$

定理 (极限的四则运算) 设 $\lim f(x)$, $\lim g(x)$ 存在, $a, b \in \mathbb{R}$, 则

1. $\lim[af(x) + bg(x)] = a \lim f(x) + b \lim g(x)$

(特别地, $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$)

2. $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$

(特别地, $\lim[f(x)^n] = [\lim f(x)]^n$)

3. 若 $\lim g(x) \neq 0$, 则 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$

例 1 计算 $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 2x + 1)$

解 原式 = $3 \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 2 \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 1 = 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 2$

$= [\lim_{x \rightarrow 1} x]^2 \quad \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0 \quad \lim_{x \rightarrow x_0} c = c$

定理 (极限的四则运算) 设 $\lim f(x)$, $\lim g(x)$ 存在, $a, b \in \mathbb{R}$, 则

1. $\lim[af(x) + bg(x)] = a \lim f(x) + b \lim g(x)$

(特别地, $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$)

2. $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$

(特别地, $\lim[f(x)^n] = [\lim f(x)]^n$)

3. 若 $\lim g(x) \neq 0$, 则 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$

例 1 计算 $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 2x + 1)$

解 原式 = $3 \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 2 \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 1 = \underline{3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 1} = 2$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = [\lim_{x \rightarrow 1} x]^2$ $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$

定理 (极限的四则运算) 设 $\lim f(x)$, $\lim g(x)$ 存在, $a, b \in \mathbb{R}$, 则

1. $\lim[af(x) + bg(x)] = a \lim f(x) + b \lim g(x)$

(特别地, $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$)

2. $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$

(特别地, $\lim[f(x)^n] = [\lim f(x)]^n$)

3. 若 $\lim g(x) \neq 0$, 则 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$

例 1 计算 $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 2x + 1)$

解 原式 = $3 \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 2 \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 1 = \underline{3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 1} = 2$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ $= [\lim_{x \rightarrow 1} x]^2$ $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ $f(1)$

定理 (极限的四则运算) 设 $\lim f(x)$, $\lim g(x)$ 存在, $a, b \in \mathbb{R}$, 则

1. $\lim[af(x) + bg(x)] = a \lim f(x) + b \lim g(x)$

(特别地, $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$)

2. $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$

(特别地, $\lim[f(x)^n] = [\lim f(x)]^n$)

3. 若 $\lim g(x) \neq 0$, 则 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$

例 1 计算 $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 2x + 1)$

解 原式 = $3 \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 2 \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 1 = \underline{3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 1} = 2$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ $= [\lim_{x \rightarrow 1} x]^2$ $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ $f(1)$

注 一般地, 对任意多项式 $f(x)$, 均成立 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

例 2 计算 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 9}$

例 3 计算 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}$

例 4 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 - 9}$

例 2 计算 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 9}$

解 原式 $= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 2x + 3}{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 + 9}$

例 3 计算 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}$

例 4 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 - 9}$

例 2 计算 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 9}$

解 原式 $= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 2x + 3}{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 + 9} = \frac{3^2 - 2 \cdot 3 + 3}{3^2 + 9}$

例 3 计算 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}$

例 4 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 - 9}$

例 2 计算 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 9}$

解 原式 $= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 2x + 3}{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 + 9} = \frac{3^2 - 2 \cdot 3 + 3}{3^2 + 9} = \frac{1}{3}$

例 3 计算 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}$

例 4 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 - 9}$

例 2 计算 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 9}$

解 原式 $= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 2x + 3}{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 + 9} = \frac{3^2 - 2 \cdot 3 + 3}{3^2 + 9} = \frac{1}{3}$

例 3 计算 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}$

解 原式 $= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 2x - 3}{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 9}$

例 4 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 - 9}$

例 2 计算 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 9}$

解 原式 $= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 2x + 3}{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 + 9} = \frac{3^2 - 2 \cdot 3 + 3}{3^2 + 9} = \frac{1}{3}$

例 3 计算 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}$

解 原式 $= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 2x - 3}{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 9}$

错误!

例 4 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 - 9}$

例 2 计算 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 9}$

解 原式 $= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 2x + 3}{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 + 9} = \frac{3^2 - 2 \cdot 3 + 3}{3^2 + 9} = \frac{1}{3}$

例 3 计算 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}$

解 原式 $= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 2x - 3}{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 9} = \frac{3^2 - 2 \cdot 3 - 3}{3^2 - 9} = \frac{0}{0}$ **错误!**

例 4 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 - 9}$

例 2 计算 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 9}$

解 原式 $= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 2x + 3}{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 + 9} = \frac{3^2 - 2 \cdot 3 + 3}{3^2 + 9} = \frac{1}{3}$

例 3 计算 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}$

解 原式 $= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 2x - 3}{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 9} = \frac{3^2 - 2 \cdot 3 - 3}{3^2 - 9} = \frac{0}{0}$ **错误!**

正解：原式

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+1)}{(x+3)(x-3)}$$

例 4 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 - 9}$

例 2 计算 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 9}$

解 原式 $= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 2x + 3}{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 + 9} = \frac{3^2 - 2 \cdot 3 + 3}{3^2 + 9} = \frac{1}{3}$

例 3 计算 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}$

解 原式 $= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 2x - 3}{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 9} = \frac{3^2 - 2 \cdot 3 - 3}{3^2 - 9} = \frac{0}{0}$

错误!

正解：原式

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+1)}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x+3}$$

例 4 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 - 9}$

例 2 计算 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 9}$

解 原式 $= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 2x + 3}{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 + 9} = \frac{3^2 - 2 \cdot 3 + 3}{3^2 + 9} = \frac{1}{3}$

例 3 计算 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}$

解 原式 $= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 2x - 3}{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 9} = \frac{3^2 - 2 \cdot 3 - 3}{3^2 - 9} = \frac{0}{0}$

错误!

正解：原式

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+1)}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x+3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x + 1}{\lim_{x \rightarrow 3} x + 3}$$

例 4 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 - 9}$

例 2 计算 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 9}$

解 原式 $= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 2x + 3}{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 + 9} = \frac{3^2 - 2 \cdot 3 + 3}{3^2 + 9} = \frac{1}{3}$

例 3 计算 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}$

解 原式 $= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 2x - 3}{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 9} = \frac{3^2 - 2 \cdot 3 - 3}{3^2 - 9} = \frac{0}{0}$ **错误!**

正解：原式

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+1)}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x+3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x+1}{\lim_{x \rightarrow 3} x+3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

例 4 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 - 9}$

例 4 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 - 9}$

例 5 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^3 - 9}$

例 4 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 - 9}$

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 2 \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{2 - 9 \cdot \frac{1}{x^2}}$

例 5 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^3 - 9}$

例 4 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 - 9}$

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 2 \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{2 - 9 \cdot \frac{1}{x^2}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 3 - 2 \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 2 - 9 \cdot \frac{1}{x^2}}$

例 5 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^3 - 9}$

例 4 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 - 9}$

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 2 \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{2 - 9 \cdot \frac{1}{x^2}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 3 - 2 \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 2 - 9 \cdot \frac{1}{x^2}} = \frac{3}{2}$

例 5 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^3 - 9}$

例 4 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 - 9}$

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 2 \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{2 - 9 \cdot \frac{1}{x^2}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 3 - 2 \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 2 - 9 \cdot \frac{1}{x^2}} = \frac{3}{2}$

例 5 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^3 - 9}$

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot \frac{1}{x} - 2 \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{2 - 9 \cdot \frac{1}{x^3}}$

例 4 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 - 9}$

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 2 \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{2 - 9 \cdot \frac{1}{x^2}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 3 - 2 \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 2 - 9 \cdot \frac{1}{x^2}} = \frac{3}{2}$

例 5 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^3 - 9}$

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot \frac{1}{x} - 2 \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{2 - 9 \cdot \frac{1}{x^3}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 3 \cdot \frac{1}{x} - 2 \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 2 - 9 \cdot \frac{1}{x^3}}$

例 4 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 - 9}$

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 2 \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{2 - 9 \cdot \frac{1}{x^2}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 3 - 2 \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 2 - 9 \cdot \frac{1}{x^2}} = \frac{3}{2}$

例 5 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^3 - 9}$

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot \frac{1}{x} - 2 \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{2 - 9 \cdot \frac{1}{x^3}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 3 \cdot \frac{1}{x} - 2 \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 2 - 9 \cdot \frac{1}{x^3}} = \frac{0}{2} = 0$

性质 设 $\lim f(x) = 0$ ，而 $g(x)$ 是有界函数，则 $\lim[f(x) \cdot g(x)] = 0$.
(证明作为练习)

性质 设 $\lim f(x) = 0$ ，而 $g(x)$ 是有界函数，则 $\lim[f(x) \cdot g(x)] = 0$ 。
(证明作为练习)

例 6 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$

性质 设 $\lim f(x) = 0$ ，而 $g(x)$ 是有界函数，则 $\lim[f(x) \cdot g(x)] = 0$ 。
(证明作为练习)

例 6 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$

错误解法 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x}{\lim_{x \rightarrow \infty} x}$

性质 设 $\lim f(x) = 0$, 而 $g(x)$ 是有界函数, 则 $\lim[f(x) \cdot g(x)] = 0$.
(证明作为练习)

例 6 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$

错误解法 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x}{\lim_{x \rightarrow \infty} x}$

正解 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$, 而 $\sin x$ 是有界函数 ($|\sin x| \leq 1$), 所以

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

性质 设 $\lim f(x) = 0$, 而 $g(x)$ 是有界函数, 则 $\lim[f(x) \cdot g(x)] = 0$.
(证明作为练习)

例 6 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$

错误解法 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x}{\lim_{x \rightarrow \infty} x}$

正解 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$, 而 $\sin x$ 是有界函数 ($|\sin x| \leq 1$), 所以

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

注 若 $\lim f(x) = 0$, 则称在该极限过程下, f 是**无穷小量**. 上述性质就是说, 无穷小量与有界量的乘积仍然是无穷小量.

问题 是否可以通过 **变量代换** 求极限?

问题 是否可以通过 **变量代换** 求极限？例如：

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

问题 是否可以通过 **变量代换** 求极限？例如：

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \xrightarrow{x=x_0+t}$$

问题 是否可以通过 **变量代换** 求极限？例如：

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \xrightarrow{x=x_0+t} \lim f(x_0 + t)$$

问题 是否可以通过 **变量代换** 求极限？例如：

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \xrightarrow{x=x_0+t} \lim_{t \rightarrow 0} f(x_0 + t)$$

问题 是否可以通过 **变量代换** 求极限？例如：

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \xrightarrow{x=x_0+t} \lim_{t \rightarrow 0} f(x_0 + t)$$

则前后两个极限是否相等？

问题 是否可以通过 **变量代换** 求极限？例如：

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \xrightarrow{x=x_0+t} \lim_{t \rightarrow 0} f(x_0 + t)$$

则前后两个极限是否相等？或者更复杂地，考虑

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

问题 是否可以通过 **变量代换** 求极限？例如：

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \xrightarrow{x=x_0+t} \lim_{t \rightarrow 0} f(x_0 + t)$$

则前后两个极限是否相等？或者更复杂地，考虑

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \xrightarrow{\text{假设 } x=g(t)}$$

问题 是否可以通过 **变量代换** 求极限？例如：

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \xrightarrow{x=x_0+t} \lim_{t \rightarrow 0} f(x_0 + t)$$

则前后两个极限是否相等？或者更复杂地，考虑

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \xrightarrow{\text{假设 } x=g(t)} \lim f[g(t)]$$

问题 是否可以通过 **变量代换** 求极限？例如：

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \xrightarrow{x=x_0+t} \lim_{t \rightarrow 0} f(x_0 + t)$$

则前后两个极限是否相等？或者更复杂地，考虑

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow x_0 \ (t \rightarrow t_0)}]{\text{假设 } x=g(t)} \lim f[g(t)]$$

问题 是否可以通过 **变量代换** 求极限？例如：

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \xrightarrow{x=x_0+t} \lim_{t \rightarrow 0} f(x_0 + t)$$

则前后两个极限是否相等？或者更复杂地，考虑

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \xrightarrow[\substack{\text{假设 } x=g(t) \\ x \rightarrow x_0 \ (t \rightarrow t_0)}]{t \rightarrow t_0} \lim_{t \rightarrow t_0} f[g(t)]$$

问题 是否可以通过 **变量代换** 求极限？例如：

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \xrightarrow{x=x_0+t} \lim_{t \rightarrow 0} f(x_0 + t)$$

则前后两个极限是否相等？或者更复杂地，考虑

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \xrightarrow[\substack{\text{假设 } x=g(t) \\ x \rightarrow x_0 \ (t \rightarrow t_0)}]{t \rightarrow t_0} \lim_{t \rightarrow t_0} f[g(t)]$$

事实上，上述“一般”情况都成立，称为 **复合函数的极限运算法则**

问题 是否可以通过 **变量代换** 求极限？例如：

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \xrightarrow{x=x_0+t} \lim_{t \rightarrow 0} f(x_0 + t)$$

则前后两个极限是否相等？或者更复杂地，考虑

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \xrightarrow[\substack{\text{假设 } x=g(t) \\ x \rightarrow x_0 \ (t \rightarrow t_0)}]{\text{假设 } x=g(t)} \lim_{t \rightarrow t_0} f[g(t)]$$

事实上，上述“一般”情况都成立，称为 **复合函数的极限运算法则**

例 假设已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ，求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$

问题 是否可以通过 **变量代换** 求极限？例如：

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \xrightarrow{x=x_0+t} \lim_{t \rightarrow 0} f(x_0 + t)$$

则前后两个极限是否相等？或者更复杂地，考虑

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \xrightarrow[\substack{\text{假设 } x=g(t) \\ x \rightarrow x_0 \ (t \rightarrow t_0)}]{\text{假设 } x=g(t)} \lim_{t \rightarrow t_0} f[g(t)]$$

事实上，上述“一般”情况都成立，称为 **复合函数的极限运算法则**

例 假设已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ，求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} \xrightarrow{x=\sin t}$$

问题 是否可以通过 **变量代换** 求极限？例如：

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \xrightarrow{x=x_0+t} \lim_{t \rightarrow 0} f(x_0 + t)$$

则前后两个极限是否相等？或者更复杂地，考虑

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \xrightarrow[\substack{\text{假设 } x=g(t) \\ x \rightarrow x_0 \ (t \rightarrow t_0)}]{\text{假设 } x=g(t)} \lim_{t \rightarrow t_0} f[g(t)]$$

事实上，上述“一般”情况都成立，称为 **复合函数的极限运算法则**

例 假设已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ，求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} \xrightarrow{x=\sin t} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t}$$

问题 是否可以通过 **变量代换** 求极限？例如：

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \xrightarrow{x=x_0+t} \lim_{t \rightarrow 0} f(x_0 + t)$$

则前后两个极限是否相等？或者更复杂地，考虑

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \xrightarrow[\substack{\text{假设 } x=g(t) \\ x \rightarrow x_0 (t \rightarrow t_0)}]{\text{假设 } x=g(t)} \lim_{t \rightarrow t_0} f[g(t)]$$

事实上，上述“一般”情况都成立，称为 **复合函数的极限运算法则**

例 假设已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ，求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} \xrightarrow{x=\sin t} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t}$$

问题 是否可以通过 **变量代换** 求极限？例如：

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \xrightarrow{x=x_0+t} \lim_{t \rightarrow 0} f(x_0 + t)$$

则前后两个极限是否相等？或者更复杂地，考虑

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \xrightarrow[\substack{\text{假设 } x=g(t) \\ x \rightarrow x_0 \ (t \rightarrow t_0)}]{\text{假设 } x=g(t)} \lim_{t \rightarrow t_0} f[g(t)]$$

事实上，上述“一般”情况都成立，称为 **复合函数的极限运算法则**

例 假设已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ，求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} \xrightarrow{x=\sin t} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = 1$$

We are here now...

1. 数列极限
2. 函数极限
3. 极限运算
4. 极限性质
5. 两个重要极限
6. 无穷大, 无穷小

函数极限的性质

定理 1 (唯一性) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 那么这极限唯一.

函数极限的性质

定理 1 (唯一性) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 那么这极限唯一.

定理 2 (有界性) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 存在, 那么 f 在 x_0 附近是有界

函数极限的性质

定理 1 (唯一性) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 那么这极限唯一.

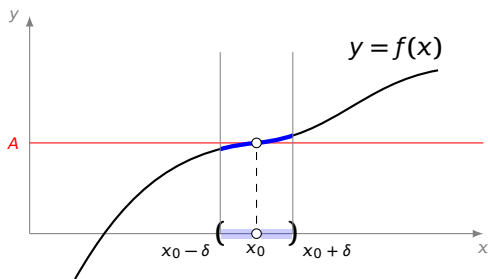
定理 2 (有界性) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 存在, 那么 f 在 x_0 附近是有界:
存在常数 $M > 0$ 和 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| \leq M$.

定理 3 (保号性) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$,

- 若 $A > 0$, 则 $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 都有 $f(x) > 0$.

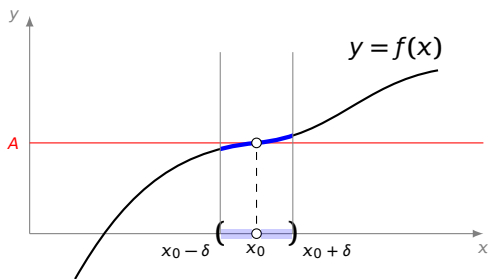
定理 3 (保号性) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$,

- 若 $A > 0$, 则 $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 都有 $f(x) > 0$.



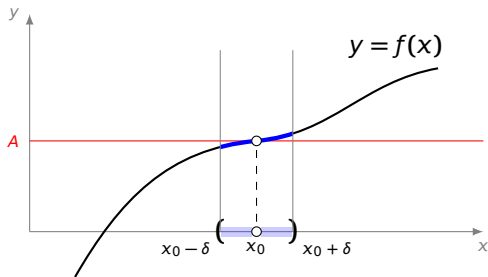
定理 3 (保号性) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$,

- 若 $A > 0$, 则 $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 都有 $f(x) > 0$.
- 若 $A < 0$, 则 $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 都有 $f(x) < 0$.



定理 3 (保号性) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$,

- 若 $A > 0$, 则 $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 都有 $f(x) > 0$.
- 若 $A < 0$, 则 $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 都有 $f(x) < 0$.

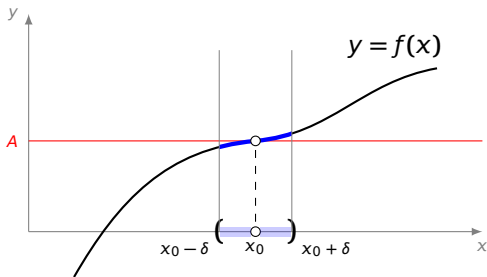


推论 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$,

- 若在 x_0 附近都有 $f(x) \geq 0$, 则 $A \geq 0$.

定理 3 (保号性) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$,

- 若 $A > 0$, 则 $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 都有 $f(x) > 0$.
- 若 $A < 0$, 则 $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 都有 $f(x) < 0$.



推论 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$,

- 若在 x_0 附近都有 $f(x) \geq 0$, 则 $A \geq 0$.
- 若在 x_0 附近都有 $f(x) \leq 0$, 则 $A \leq 0$.

We are here now...

1. 数列极限
2. 函数极限
3. 极限运算
4. 极限性质
5. 两个重要极限
6. 无穷大, 无穷小

两个重要极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

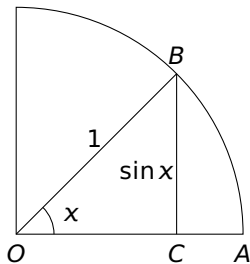
重要极限 I $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (也就是, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$)

重要极限 I $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (也就是, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$)

证明 只需证明 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$, 所以假设 $x > 0$.

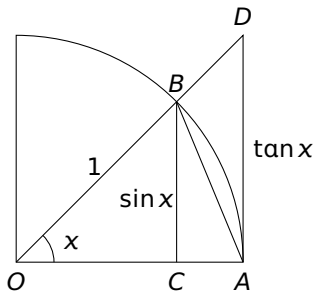
重要极限 I $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (也就是, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$)

证明 只需证明 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$, 所以假设 $x > 0$. 如图



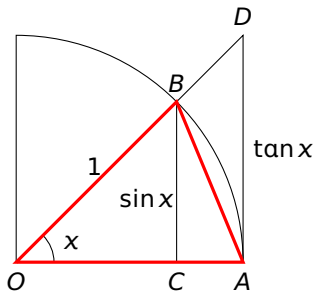
重要极限 I $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (也就是, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$)

证明 只需证明 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$, 所以假设 $x > 0$. 如图



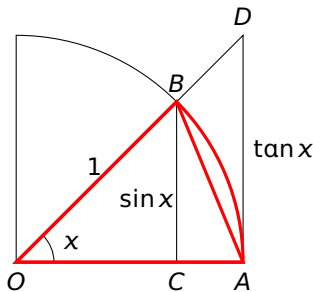
重要极限 I $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (也就是, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$)

证明 只需证明 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$, 所以假设 $x > 0$. 如图



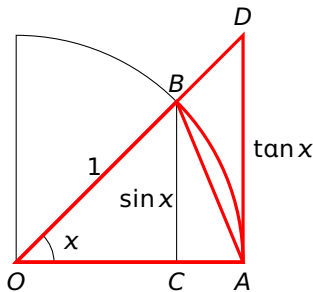
重要极限 I $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (也就是, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$)

证明 只需证明 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$, 所以假设 $x > 0$. 如图



重要极限 I $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (也就是, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$)

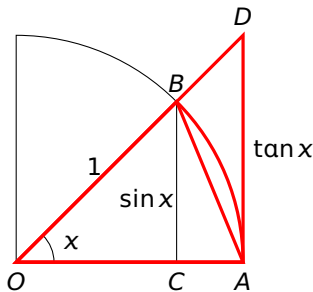
证明 只需证明 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$, 所以假设 $x > 0$. 如图



重要极限 I $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (也就是, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$)

证明 只需证明 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$, 所以假设 $x > 0$. 如图

ΔAOB 面积 $<$ 扇形 AOB 面积 $<$ ΔAOD 面积

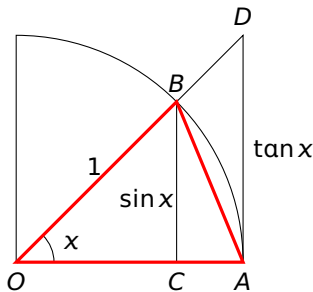


重要极限 I $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (也就是, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$)

证明 只需证明 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$, 所以假设 $x > 0$. 如图

$\triangle AOB$ 面积 $<$ 扇形 AOB 面积 $<$ $\triangle AOD$ 面积

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x$$



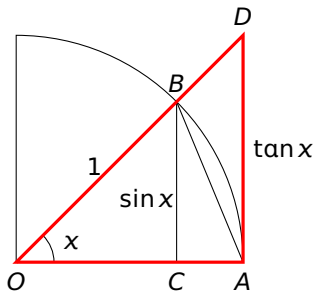
重要极限 I $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (也就是, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$)

证明 只需证明 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$, 所以假设 $x > 0$. 如图

$\triangle AOB$ 面积 $<$ 扇形 AOB 面积 $<$ $\triangle AOD$ 面积

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x$$

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x$$

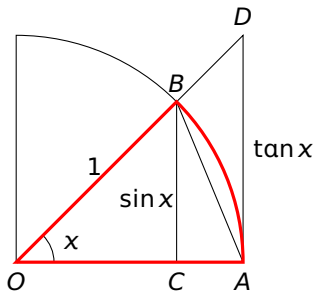


重要极限 I $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (也就是, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$)

证明 只需证明 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$, 所以假设 $x > 0$. 如图

ΔAOB 面积 $<$ 扇形 AOB 面积 $<$ ΔAOD 面积

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x \quad \frac{x}{2\pi} \cdot \pi \quad \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x$$

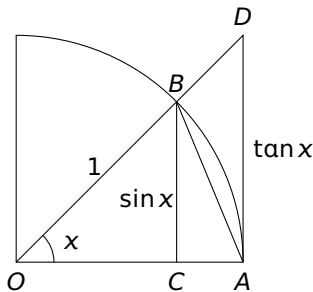


重要极限 I $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (也就是, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$)

证明 只需证明 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$, 所以假设 $x > 0$. 如图

ΔAOB 面积 $<$ 扇形 AOB 面积 $<$ ΔAOD 面积

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x < \frac{x}{2\pi} \cdot \pi < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x$$



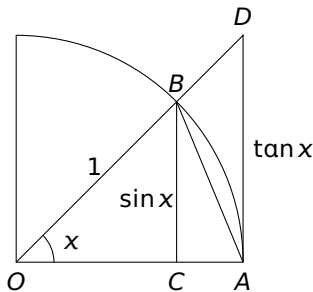
重要极限 I $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (也就是, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$)

证明 只需证明 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$, 所以假设 $x > 0$. 如图

ΔAOB 面积 $<$ 扇形 AOB 面积 $<$ ΔAOD 面积

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x < \frac{x}{2\pi} \cdot \pi < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x$$

$$\Rightarrow \sin x < x < \tan x$$



重要极限 I $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (也就是, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$)

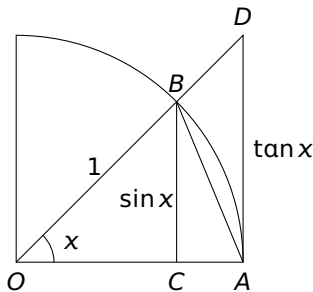
证明 只需证明 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$, 所以假设 $x > 0$. 如图

ΔAOB 面积 $<$ 扇形 AOB 面积 $<$ ΔAOD 面积

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x < \frac{x}{2\pi} \cdot \pi < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x$$

$$\Rightarrow \sin x < x < \tan x$$

$$\Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$



重要极限 I $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (也就是, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$)

证明 只需证明 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$, 所以假设 $x > 0$. 如图

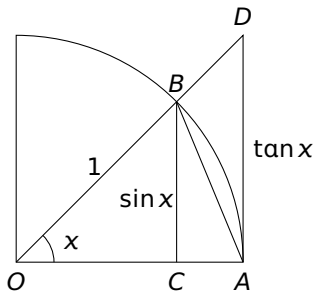
ΔAOB 面积 $<$ 扇形 AOB 面积 $<$ ΔAOD 面积

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x < \frac{x}{2\pi} \cdot \pi < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x$$

$$\Rightarrow \sin x < x < \tan x$$

$$\Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$$\Rightarrow 0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x$$



重要极限 I $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (也就是, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$)

证明 只需证明 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$, 所以假设 $x > 0$. 如图

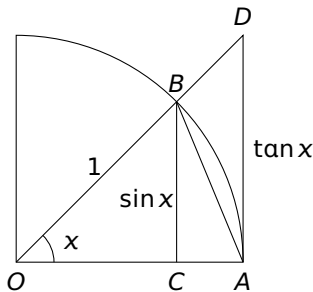
$\triangle AOB$ 面积 $<$ 扇形 AOB 面积 $<$ $\triangle AOD$ 面积

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x < \frac{x}{2\pi} \cdot \pi < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x$$

$$\Rightarrow \sin x < x < \tan x$$

$$\Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$$\Rightarrow 0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$



重要极限 I $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (也就是, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$)

证明 只需证明 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$, 所以假设 $x > 0$. 如图

ΔAOB 面积 $<$ 扇形 AOB 面积 $<$ ΔAOD 面积

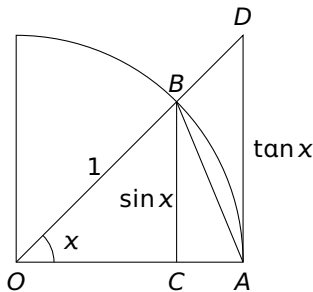
$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x < \frac{x}{2\pi} \cdot \pi < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x$$

$$\Rightarrow \sin x < x < \tan x$$

$$\Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$$\Rightarrow 0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

(利用 $\sin \frac{x}{2} < \frac{x}{2}$)



重要极限 I $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (也就是, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$)

证明 只需证明 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$, 所以假设 $x > 0$. 如图

ΔAOB 面积 $<$ 扇形 AOB 面积 $<$ ΔAOD 面积

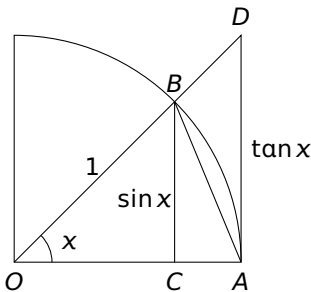
$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x < \frac{x}{2\pi} \cdot \pi < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x$$

$$\Rightarrow \sin x < x < \tan x$$

$$\Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$$\Rightarrow 0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} < \frac{x^2}{2}$$

(利用 $\sin \frac{x}{2} < \frac{x}{2}$)



重要极限 I $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (也就是, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$)

证明 只需证明 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$, 所以假设 $x > 0$. 如图

ΔAOB 面积 $<$ 扇形 AOB 面积 $<$ ΔAOD 面积

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x < \frac{x}{2\pi} \cdot \pi < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x$$

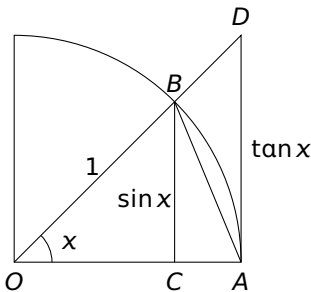
$$\Rightarrow \sin x < x < \tan x$$

$$\Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$$\Rightarrow 0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} < \frac{x^2}{2}$$

$$\text{可见 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

(利用 $\sin \frac{x}{2} < \frac{x}{2}$)



重要极限 I $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (也就是, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$)

证明 只需证明 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$, 所以假设 $x > 0$. 如图

ΔAOB 面积 $<$ 扇形 AOB 面积 $<$ ΔAOD 面积

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x < \frac{x}{2\pi} \cdot \pi < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x$$

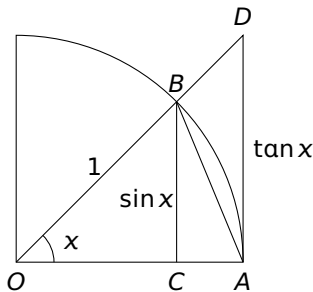
$$\Rightarrow \sin x < x < \tan x$$

$$\Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$$\Rightarrow 0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} < \frac{x^2}{2}$$

可见 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

注 1 重要不等式: $x > 0$ 时, 成立 $x < \sin x < \tan x$



(利用 $\sin \frac{x}{2} < \frac{x}{2}$)

重要极限 I $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (也就是, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$)

证明 只需证明 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$, 所以假设 $x > 0$. 如图

ΔAOB 面积 $<$ 扇形 AOB 面积 $<$ ΔAOD 面积

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x < \frac{x}{2\pi} \cdot \pi < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x$$

$$\Rightarrow \sin x < x < \tan x$$

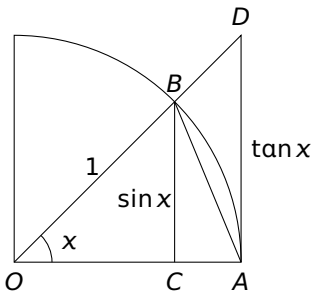
$$\Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$$\Rightarrow 0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} < \frac{x^2}{2}$$

可见 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

注 1 重要不等式: $x > 0$ 时, 成立 $x < \sin x < \tan x$

注 2 由证明可知: $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$



(利用 $\sin \frac{x}{2} < \frac{x}{2}$)

例 1 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

例 2 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 4x}$

例 3 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

例 1 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

解 原式 $= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x}$

例 2 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 4x}$

例 3 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

例 1 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

解 原式 $= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \xrightarrow{t=3x} 3 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t}$

例 2 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 4x}$

例 3 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

例 1 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

解 原式 $= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \xrightarrow{t=3x} 3 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t}$

例 2 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 4x}$

例 3 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

例 1 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

解 原式 $= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \stackrel{t=3x}{=} 3 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 3$

例 2 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 4x}$

例 3 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

例 1 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

解 原式 $= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \stackrel{t=3x}{=} 3 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 3$

例 2 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 4x}$

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{4x}{\sin 4x}$

例 3 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

例 1 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

解 原式 $= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \stackrel{t=3x}{=} 3 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 3$

例 2 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 4x}$

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{4x}{\sin 4x} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sin 4x}$

例 3 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

例 1 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

解 原式 $= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \xrightarrow{t=3x} 3 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 3$

例 2 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 4x}$

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{4x}{\sin 4x} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sin 4x} = \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{4}$

例 3 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

例 1 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

解 原式 $= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \stackrel{t=3x}{=} 3 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 3$

例 2 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 4x}$

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{4x}{\sin 4x} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sin 4x} = \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{4}$

例 3 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}$

例 1 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

解 原式 $= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \stackrel{t=3x}{=} 3 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 3$

例 2 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 4x}$

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{4x}{\sin 4x} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sin 4x} = \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{4}$

例 3 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x}$

例 1 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

解 原式 $= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \stackrel{t=3x}{=} 3 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 3$

例 2 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 4x}$

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{4x}{\sin 4x} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sin 4x} = \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{4}$

例 3 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1$

例 1 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

解 原式 $= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \stackrel{t=3x}{=} 3 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 3$

例 2 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 4x}$

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{4x}{\sin 4x} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sin 4x} = \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{4}$

例 3 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1$

例 4 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x}$

例 4 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x}$

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2} \quad \underline{\underline{t=x^2}}$$

例 4 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x}$

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2} \xrightarrow{t=x^2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{3t}$$

例 4 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x}$

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2} \xrightarrow{t=x^2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{3t}$$

例 4 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x}$

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2} \stackrel{t=x^2}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{3t} = \frac{2}{3}$$

例 4 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x}$

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2} \stackrel{t=x^2}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{3t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{2t} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

例 4 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x}$

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2} \stackrel{t=x^2}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{3t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{2t} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{5} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{5x}{\tan 5x}$$

例 4 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x}$

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2} \stackrel{t=x^2}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{3t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{2t} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{5} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{5x}{\tan 5x} = \frac{3}{5} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{3}{5}$$

例 4 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x}$

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2} \xrightarrow{t=x^2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{3t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{2t} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{5} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{5x}{\tan 5x} = \frac{3}{5} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x} \xrightarrow{t=\sqrt{x}}$$

例 4 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x}$

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2} \stackrel{t=x^2}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{3t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{2t} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{5} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{5x}{\tan 5x} = \frac{3}{5} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x} \stackrel{t=\sqrt{x}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t \tan t}{t^2}$$

例 4 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x}$

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2} \xrightarrow{t=x^2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{3t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{2t} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{5} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{5x}{\tan 5x} = \frac{3}{5} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x} \xrightarrow{t=\sqrt{x}} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t \tan t}{t^2}$$

例 4 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x}$

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2} \stackrel{t=x^2}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{3t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{2t} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{5} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{5x}{\tan 5x} = \frac{3}{5} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x} \stackrel{t=\sqrt{x}}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t \tan t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\tan t}{t}$$

例 4 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x}$

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2} \stackrel{t=x^2}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{3t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{2t} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{5} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{5x}{\tan 5x} = \frac{3}{5} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x} \stackrel{t=\sqrt{x}}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t \tan t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\tan t}{t} = 1$$

例 4 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x}$

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2} \stackrel{t=x^2}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{3t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{2t} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{5} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{5x}{\tan 5x} = \frac{3}{5} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x} \stackrel{t=\sqrt{x}}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t \tan t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\tan t}{t} = 1$$

例 5 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x}$

例 4 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x}$

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2} \xrightarrow{t=x^2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{3t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{2t} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{5} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{5x}{\tan 5x} = \frac{3}{5} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x} \xrightarrow{t=\sqrt{x}} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t \tan t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\tan t}{t} = 1$$

例 5 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x}$

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} \xrightarrow{x=\sin t}$$

例 4 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x}$

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2} \xrightarrow{t=x^2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{3t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{2t} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{5} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{5x}{\tan 5x} = \frac{3}{5} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x} \xrightarrow{t=\sqrt{x}} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t \tan t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\tan t}{t} = 1$$

例 5 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x}$

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} \xrightarrow{x=\sin t} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t}$$

例 4 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x}$

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2} \xrightarrow{t=x^2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{3t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{2t} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{5} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{5x}{\tan 5x} = \frac{3}{5} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x} \xrightarrow{t=\sqrt{x}} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t \tan t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\tan t}{t} = 1$$

例 5 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x}$

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} \xrightarrow{x=\sin t} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t}$$

例 4 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x}$

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2} \xrightarrow{t=x^2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{3t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{2t} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{5} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{5x}{\tan 5x} = \frac{3}{5} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x} \xrightarrow{t=\sqrt{x}} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t \tan t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\tan t}{t} = 1$$

例 5 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x}$

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} \xrightarrow{x=\sin t} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = 1,$$

例 4 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x}$

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2} \xrightarrow{t=x^2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{3t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{2t} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{5} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{5x}{\tan 5x} = \frac{3}{5} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x} \xrightarrow{t=\sqrt{x}} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t \tan t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\tan t}{t} = 1$$

例 5 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x}$

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} \xrightarrow{x=\sin t} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} \xrightarrow{x=\tan t}$$

例 4 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x}$

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2} \xrightarrow{t=x^2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{3t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{2t} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{5} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{5x}{\tan 5x} = \frac{3}{5} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x} \xrightarrow{t=\sqrt{x}} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t \tan t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\tan t}{t} = 1$$

例 5 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x}$

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} \xrightarrow{x=\sin t} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} \xrightarrow{x=\tan t} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\tan t}$$

例 4 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x}$

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2} \xrightarrow{t=x^2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{3t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{2t} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{5} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{5x}{\tan 5x} = \frac{3}{5} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x} \xrightarrow{t=\sqrt{x}} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t \tan t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\tan t}{t} = 1$$

例 5 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x}$

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} \xrightarrow{x=\sin t} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} \xrightarrow{x=\tan t} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\tan t}$$

例 4 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x}$

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2} \xrightarrow{t=x^2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{3t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{2t} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{5} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{5x}{\tan 5x} = \frac{3}{5} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x} \xrightarrow{t=\sqrt{x}} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t \tan t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\tan t}{t} = 1$$

例 5 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x}$

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} \xrightarrow{x=\sin t} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} \xrightarrow{x=\tan t} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\tan t} = 1$$

小结

我们已经得到了以下常用极限：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

重要极限 II $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

重要极限 II $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \xRightarrow{t=1/x} \quad \lim (1+t)^{1/t} = e$

重要极限 II $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \xRightarrow{t=1/x} \quad \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e$

重要极限 II $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \xRightarrow{t=1/x} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e$

例 1 计算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$$

重要极限 II $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \xRightarrow{t=1/x} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e$

例 1 计算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=2t}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$$

重要极限 II $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \xrightarrow{t=1/x} \quad \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e$

例 1 计算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=2t} \lim \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{2t}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$$

重要极限 II $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \xRightarrow{t=1/x} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e$

例 1 计算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x \xRightarrow{x=2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{2t}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$$

重要极限 II $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \xRightarrow{t=1/x} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e$

例 1 计算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x \xRightarrow{x=2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$$

重要极限 II $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \xRightarrow{t=1/x} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e$

例 1 计算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x \xRightarrow{x=2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^2 = e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$$

重要极限 II $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \xrightarrow{t=1/x} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e$

例 1 计算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^2 = e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=-2t}$$

重要极限 II $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \xrightarrow{t=1/x} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e$

例 1 计算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^2 = e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=-2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-2t}$$

重要极限 II $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \xRightarrow{t=1/x} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e$

例 1 计算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x \xRightarrow{x=2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^2 = e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x \xRightarrow{x=-2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-2t}$$

重要极限 II $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \xrightarrow{t=1/x} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e$

例 1 计算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^2 = e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=-2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^{-2} = e^{-2}$$

重要极限 II $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \xrightarrow{t=1/x} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e$

例 1 计算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^2 = e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=-2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^{-2} = e^{-2}$$

重要极限 II $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \xrightarrow{t=1/x} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e$

例 1 计算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^2 = e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=-2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^{-2} = e^{-2}$$

例 2 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

重要极限 II $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \xrightarrow{t=1/x} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e$

例 1 计算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^2 = e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=-2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^{-2} = e^{-2}$$

例 2 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{t=x/2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

重要极限 II $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \xrightarrow{t=1/x} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e$

例 1 计算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^2 = e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=-2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^{-2} = e^{-2}$$

例 2 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{t=x/2} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{2t}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

重要极限 II $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \xrightarrow{t=1/x} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e$

例 1 计算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^2 = e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=-2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^{-2} = e^{-2}$$

例 2 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{t=x/2} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{2t}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

重要极限 II $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \xrightarrow{t=1/x} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e$

例 1 计算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^2 = e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=-2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^{-2} = e^{-2}$$

例 2 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{t=x/2} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{2t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left[(1+t)^{1/t}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

重要极限 II $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \xrightarrow{t=1/x} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e$

例 1 计算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^2 = e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=-2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^{-2} = e^{-2}$$

例 2 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{t=x/2} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{2t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left[(1+t)^{1/t}\right]^{\frac{1}{2}} = e^{1/2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

重要极限 II $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \xrightarrow{t=1/x} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e$

例 1 计算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^2 = e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=-2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^{-2} = e^{-2}$$

例 2 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{t=x/2} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{2t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left[(1+t)^{1/t}\right]^{\frac{1}{2}} = e^{1/2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{t=-x/2}$$

重要极限 II $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \xrightarrow{t=1/x} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e$

例 1 计算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^2 = e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=-2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^{-2} = e^{-2}$$

例 2 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{t=x/2} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{2t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left[(1+t)^{1/t}\right]^{\frac{1}{2}} = e^{1/2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{t=-x/2} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{-\frac{1}{2t}}$$

重要极限 II $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \xrightarrow{t=1/x} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e$

例 1 计算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^2 = e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=-2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^{-2} = e^{-2}$$

例 2 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{t=x/2} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{2t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left[(1+t)^{1/t}\right]^{\frac{1}{2}} = e^{1/2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{t=-x/2} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{-\frac{1}{2t}}$$

重要极限 II $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \xrightarrow{t=1/x} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e$

例 1 计算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^2 = e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=-2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^{-2} = e^{-2}$$

例 2 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{t=x/2} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{2t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left[(1+t)^{1/t}\right]^{\frac{1}{2}} = e^{1/2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{t=-x/2} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{-\frac{1}{2t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^{-\frac{1}{2}}$$

重要极限 II $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \xrightarrow{t=1/x} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e$

例 1 计算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^2 = e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x \xrightarrow{x=-2t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^{-2} = e^{-2}$$

例 2 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{t=x/2} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{2t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left[(1+t)^{1/t}\right]^{\frac{1}{2}} = e^{1/2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{t=-x/2} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{-\frac{1}{2t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{t}}\right]^{-\frac{1}{2}} = e^{-1/2}$$

例 3 计算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^{x+1}$$

例 3 计算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1} \right)^x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^{x+1}$$

例 3 计算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1} \right)^x$$
$$\underline{\underline{t = \frac{x-1}{2}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^{x+1}$$

例 3 计算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1} \right)^x$$
$$\stackrel{t=\frac{x-1}{2}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{2t+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^{x+1}$$

例 3 计算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1} \right)^x$$
$$\stackrel{t=\frac{x-1}{2}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{2t+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^{x+1}$$

例 3 计算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1} \right)^x$$

$$\stackrel{t=\frac{x-1}{2}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{2t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{2t} \cdot \left(1 + \frac{1}{t} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^{x+1}$$

例 3 计算

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1} \right)^x \\ &\stackrel{t=\frac{x-1}{2}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{2t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{2t} \cdot \left(1 + \frac{1}{t} \right) = e^2\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^{x+1}$$

例 3 计算

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1} \right)^x \\ &\stackrel{t=\frac{x-1}{2}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{2t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{2t} \cdot \left(1 + \frac{1}{t} \right) = e^2\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{x+1}$$

例 3 计算

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1} \right)^x \\ &\stackrel{t=\frac{x-1}{2}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{2t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{2t} \cdot \left(1 + \frac{1}{t} \right) = e^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^{x+1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{x+1} \\ &\stackrel{t=-x}{=}\end{aligned}$$

例 3 计算

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1} \right)^x \\ &\stackrel{t=\frac{x-1}{2}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{2t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{2t} \cdot \left(1 + \frac{1}{t} \right) = e^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^{x+1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{x+1} \\ &\stackrel{t=-x}{=} \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{-t+1}\end{aligned}$$

例 3 计算

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1} \right)^x \\ &\stackrel{t=\frac{x-1}{2}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{2t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{2t} \cdot \left(1 + \frac{1}{t} \right) = e^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^{x+1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{x+1} \\ &\stackrel{t=-x}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{-t+1}\end{aligned}$$

例 3 计算

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1} \right)^x \\ &\stackrel{t=\frac{x-1}{2}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{2t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{2t} \cdot \left(1 + \frac{1}{t} \right) = e^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^{x+1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{x+1} \\ &\stackrel{t=-x}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{-t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{t} \right)^t} \cdot \left(1 + \frac{1}{t} \right)\end{aligned}$$

例 3 计算

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1} \right)^x \\ &\stackrel{t=\frac{x-1}{2}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{2t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{2t} \cdot \left(1 + \frac{1}{t} \right) = e^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^{x+1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{x+1} \\ &\stackrel{t=-x}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{-t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{t} \right)^t} \cdot \left(1 + \frac{1}{t} \right) = e^{-1}\end{aligned}$$

例 3 计算

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1} \right)^x \\ &\stackrel{t=\frac{x-1}{2}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{2t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{2t} \cdot \left(1 + \frac{1}{t} \right) = e^2 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^{x+1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{x+1} \\ &\stackrel{t=-x}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{-t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{t} \right)^t} \cdot \left(1 + \frac{1}{t} \right) = e^{-1}\end{aligned}$$

例 4 计算

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}}$$

例 3 计算

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1} \right)^x \\ &\stackrel{t=\frac{x-1}{2}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{2t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{2t} \cdot \left(1 + \frac{1}{t} \right) = e^2 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^{x+1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{x+1} \\ &\stackrel{t=-x}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{-t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{t} \right)^t} \cdot \left(1 + \frac{1}{t} \right) = e^{-1}\end{aligned}$$

例 4 计算

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}} \stackrel{t=x-1}{=}$$

例 3 计算

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1} \right)^x \\ &\stackrel{t=\frac{x-1}{2}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{2t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{2t} \cdot \left(1 + \frac{1}{t} \right) = e^2 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^{x+1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{x+1} \\ &\stackrel{t=-x}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{-t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{t} \right)^t} \cdot \left(1 + \frac{1}{t} \right) = e^{-1}\end{aligned}$$

例 4 计算

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}} \stackrel{t=x-1}{=} \lim_{t \rightarrow 0} (t+1)^{\frac{1}{t}}$$

例 3 计算

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1} \right)^x \\ &\stackrel{t=\frac{x-1}{2}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{2t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{2t} \cdot \left(1 + \frac{1}{t} \right) = e^2 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^{x+1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{x+1} \\ &\stackrel{t=-x}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{-t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{t} \right)^t} \cdot \left(1 + \frac{1}{t} \right) = e^{-1}\end{aligned}$$

例 4 计算

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}} \stackrel{t=x-1}{=} \lim_{t \rightarrow 0} (t+1)^{\frac{1}{t}}$$

例 3 计算

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1} \right)^x \\ &\stackrel{t=\frac{x-1}{2}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{2t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{2t} \cdot \left(1 + \frac{1}{t} \right) = e^2 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^{x+1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{x+1} \\ &\stackrel{t=-x}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{-t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{t} \right)^t} \cdot \left(1 + \frac{1}{t} \right) = e^{-1}\end{aligned}$$

例 4 计算

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}} \stackrel{t=x-1}{=} \lim_{t \rightarrow 0} (t+1)^{\frac{1}{t}} = e$$

例 5 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{\sin x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{4x}}$$

例 5 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{3x} \cdot \frac{3x}{\sin x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{4x}}$$

例 5 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{3x} \cdot \frac{3x}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + 3x)^{\frac{1}{3x}} \right]^{\frac{3x}{\sin x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{4x}}$$

例 5 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{3x} \cdot \frac{3x}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + 3x)^{\frac{1}{3x}} \right]^{\frac{3x}{\sin x}} = e^3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{4x}}$$

例 5 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{3x} \cdot \frac{3x}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + 3x)^{\frac{1}{3x}} \right]^{\frac{3x}{\sin x}} = e^3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{4x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{4x}}$$

例 5 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{3x} \cdot \frac{3x}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + 3x)^{\frac{1}{3x}} \right]^{\frac{3x}{\sin x}} = e^3$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{4x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{4x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 - \sin x)^{\frac{1}{\sin x}} \right]^{\frac{\sin x}{4x}} \end{aligned}$$

例 5 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{3x} \cdot \frac{3x}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + 3x)^{\frac{1}{3x}} \right]^{\frac{3x}{\sin x}} = e^3$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{4x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{4x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 - \sin x)^{\frac{1}{\sin x}} \right]^{\frac{\sin x}{4x}} \end{aligned}$$

(利用 $\lim_{t \rightarrow \infty} (1 - t)^{\frac{1}{t}} = e^{-1}$)

例 5 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{3x} \cdot \frac{3x}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + 3x)^{\frac{1}{3x}} \right]^{\frac{3x}{\sin x}} = e^3$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{4x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{4x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 - \sin x)^{\frac{1}{\sin x}} \right]^{\frac{\sin x}{4x}} = e^{-\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

(利用 $\lim_{t \rightarrow \infty} (1 - t)^{\frac{1}{t}} = e^{-1}$)

小结

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = e^{-1}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1 - t)^{\frac{1}{t}} = e^{-1}$$

We are here now...

1. 数列极限
2. 函数极限
3. 极限运算
4. 极限性质
5. 两个重要极限
6. 无穷大，无穷小

定义 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ (或 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$) , 则称 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的**无穷小**.

定义 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ (或 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$) , 则称 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的**无穷小**.

例 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$, 所以说 $\frac{1}{x}$ 为当 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷小.

定义 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ (或 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$) , 则称 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的**无穷小**.

例 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$, 所以说 $\frac{1}{x}$ 为当 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷小.

性质 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$, 其中 α 为当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小.

定义 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ (或 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$) , 则称 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的**无穷小**.

例 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$, 所以说 $\frac{1}{x}$ 为当 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷小.

性质 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$, 其中 α 为当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小.

证明

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - A] = 0$$

定义 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ (或 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$) , 则称 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的**无穷小**.

例 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$, 所以说 $\frac{1}{x}$ 为当 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷小.

性质 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$, 其中 α 为当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小.

证明

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - A] = 0 \\ &\Leftrightarrow f(x) - A \text{ 是无穷小}\end{aligned}$$

定义 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ (或 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$) , 则称 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的**无穷小**.

例 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$, 所以说 $\frac{1}{x}$ 为当 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷小.

性质 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$, 其中 α 为当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小.

证明

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - A] = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha := f(x) - A \text{ 是无穷小}\end{aligned}$$

定义 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ (或 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$) , 则称 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的**无穷小**.

例 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$, 所以说 $\frac{1}{x}$ 为当 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷小.

性质 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$, 其中 α 为当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小.

(把 $x \rightarrow x_0$ 换成 $x \rightarrow \infty$, 上述结论仍成立)

证明

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - A] = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha := f(x) - A \text{ 是无穷小}\end{aligned}$$

定义 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ (或 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$) , 则称 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的**无穷大**.

定义 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ (或 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$) , 则称 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的**无穷大**.

注 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ 指: $\forall M > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| > M$.

定义 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ (或 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$) , 则称 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的**无穷大**.

注 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ 指: $\forall M > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| > M$.

同理可定义 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

定义 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ (或 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$) , 则称 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的**无穷大**.

注 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ 指: $\forall M > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| > M$.

同理可定义 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

例 验证 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$, 所以说 $\frac{1}{x}$ 为当 $x \rightarrow 0$ 时的无穷大。

定义 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ (或 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$) , 则称 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的**无穷大**.

注 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ 指: $\forall M > 0, \exists \delta > 0$, 使得 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| > M$.

同理可定义 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

例 验证 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$, 所以说 $\frac{1}{x}$ 为当 $x \rightarrow 0$ 时的无穷大.

性质 假设 $f(x) \neq 0$, 则 $\lim f(x) = 0 \iff \lim \frac{1}{f(x)} = \infty$.

定义 设 α 和 β 都是无穷小.

- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 那么称 β 是比 α **高阶的无穷小**, 记作 $\beta = o(\alpha)$.

定义 设 α 和 β 都是无穷小.

- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 那么称 β 是比 α **高阶的无穷小**, 记作 $\beta = o(\alpha)$.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$, 那么称 β 是比 α **低阶的无穷小**.

定义 设 α 和 β 都是无穷小.

- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 那么称 β 是比 α **高阶的无穷小**, 记作 $\beta = o(\alpha)$.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$, 那么称 β 是比 α **低阶的无穷小**.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$, 那么称 β 与 α 是 **同阶无穷小**.

定义 设 α 和 β 都是无穷小.

- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 那么称 β 是比 α **高阶的无穷小**, 记作 $\beta = o(\alpha)$.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$, 那么称 β 是比 α **低阶的无穷小**.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$, 那么称 β 与 α 是 **同阶无穷小**.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, 那么称 β 与 α 是 **等价无穷小**, 记作 $\alpha \sim \beta$.

定义 设 α 和 β 都是无穷小.

- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 那么称 β 是比 α **高阶的无穷小**, 记作 $\beta = o(\alpha)$.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$, 那么称 β 是比 α **低阶的无穷小**.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$, 那么称 β 与 α 是 **同阶无穷小**.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, 那么称 β 与 α 是 **等价无穷小**, 记作 $\alpha \sim \beta$.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0$, 那么称 β 是关于 α 的 **k 阶的无穷小**.

定义 设 α 和 β 都是无穷小.

- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 那么称 β 是比 α **高阶的无穷小**, 记作 $\beta = o(\alpha)$.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$, 那么称 β 是比 α **低阶的无穷小**.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$, 那么称 β 与 α 是 **同阶无穷小**.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, 那么称 β 与 α 是 **等价无穷小**, 记作 $\alpha \sim \beta$.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0$, 那么称 β 是关于 α 的 **k 阶的无穷小**.

例

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{x} = 0$

定义 设 α 和 β 都是无穷小.

- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 那么称 β 是比 α **高阶的无穷小**, 记作 $\beta = o(\alpha)$.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$, 那么称 β 是比 α **低阶的无穷小**.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$, 那么称 β 与 α 是 **同阶无穷小**.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, 那么称 β 与 α 是 **等价无穷小**, 记作 $\alpha \sim \beta$.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0$, 那么称 β 是关于 α 的 **k 阶的无穷小**.

例

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{x} = 0 \Rightarrow$ 当 $x \rightarrow 0$ 时, $3x^2$ 是比 x 高阶的无穷小,

定义 设 α 和 β 都是无穷小.

- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 那么称 β 是比 α **高阶的无穷小**, 记作 $\beta = o(\alpha)$.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$, 那么称 β 是比 α **低阶的无穷小**.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$, 那么称 β 与 α 是 **同阶无穷小**.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, 那么称 β 与 α 是 **等价无穷小**, 记作 $\alpha \sim \beta$.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0$, 那么称 β 是关于 α 的 **k 阶的无穷小**.

例

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{x} = 0 \Rightarrow$ 当 $x \rightarrow 0$ 时, $3x^2$ 是比 x 高阶的无穷小, 记作
 $3x^2 = o(x) (x \rightarrow 0)$.

定义 设 α 和 β 都是无穷小.

- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 那么称 β 是比 α **高阶的无穷小**, 记作 $\beta = o(\alpha)$.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$, 那么称 β 是比 α **低阶的无穷小**.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$, 那么称 β 与 α 是 **同阶无穷小**.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, 那么称 β 与 α 是 **等价无穷小**, 记作 $\alpha \sim \beta$.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0$, 那么称 β 是关于 α 的 **k 阶的无穷小**.

例

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{x} = 0 \Rightarrow$ 当 $x \rightarrow 0$ 时, $3x^2$ 是比 x 高阶的无穷小, 记作
$$3x^2 = o(x) \ (x \rightarrow 0).$$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

定义 设 α 和 β 都是无穷小.

- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 那么称 β 是比 α **高阶的无穷小**, 记作 $\beta = o(\alpha)$.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$, 那么称 β 是比 α **低阶的无穷小**.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$, 那么称 β 与 α 是 **同阶无穷小**.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, 那么称 β 与 α 是 **等价无穷小**, 记作 $\alpha \sim \beta$.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0$, 那么称 β 是关于 α 的 **k 阶的无穷小**.

例

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{x} = 0 \Rightarrow$ 当 $x \rightarrow 0$ 时, $3x^2$ 是比 x 高阶的无穷小, 记作 $3x^2 = o(x) (x \rightarrow 0)$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ 当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x$ 与 x^2 是同阶无穷小,

定义 设 α 和 β 都是无穷小.

- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 那么称 β 是比 α **高阶的无穷小**, 记作 $\beta = o(\alpha)$.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$, 那么称 β 是比 α **低阶的无穷小**.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$, 那么称 β 与 α 是 **同阶无穷小**.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, 那么称 β 与 α 是 **等价无穷小**, 记作 $\alpha \sim \beta$.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0$, 那么称 β 是关于 α 的 **k 阶的无穷小**.

例

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{x} = 0 \Rightarrow$ 当 $x \rightarrow 0$ 时, $3x^2$ 是比 x 高阶的无穷小, 记作 $3x^2 = o(x) (x \rightarrow 0)$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ 当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x$ 与 x^2 是同阶无穷小, $1 - \cos x$ 是 x 的 2 阶无穷小,

定义 设 α 和 β 都是无穷小.

- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 那么称 β 是比 α **高阶的无穷小**, 记作 $\beta = o(\alpha)$.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$, 那么称 β 是比 α **低阶的无穷小**.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$, 那么称 β 与 α 是 **同阶无穷小**.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, 那么称 β 与 α 是 **等价无穷小**, 记作 $\alpha \sim \beta$.
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0$, 那么称 β 是关于 α 的 **k 阶的无穷小**.

例

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{x} = 0 \Rightarrow$ 当 $x \rightarrow 0$ 时, $3x^2$ 是比 x 高阶的无穷小, 记作 $3x^2 = o(x) (x \rightarrow 0)$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ 当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x$ 与 x^2 是同阶无穷小, $1 - \cos x$ 是 x 的 2 阶无穷小, $1 - \cos x$ 与 $\frac{1}{2}x^2$ 是等价无穷小.