

一、单选题（在每小题的备选答案中选出一个正确的答案，并将正确答案的号码填在题干的括号内。共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. 函数 $y = \frac{\cos(\sin x)}{x}$ 是_____ - _____ 函数.

2. 函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\arcsin x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 那么函数在 $x = 0$ 处_____. _____.

- A. 连续且可导
 - B. 连续但不可导
 - C. 可导但不连续
 - D. 不连续也不可导

3. 设 m, n 为正整数, 那么 $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx} = \underline{\hspace{2cm}} \quad \underline{\hspace{2cm}}$.

- A. $(-1)^{m-n} \frac{m}{n}$ B. $\frac{m}{n}$ C. $-\frac{m}{n}$ D. 不存在

4. 下列函数在指定区间上满足罗尔定理条件的是_____.

A $f(x) = x^2 - 1, \quad x \in [0,1]$

B $f(x) = \sin x, \quad x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

C $f(x) = |x|, \quad x \in [-1,1]$

D $f(x) = \ln(1 + x^2), \quad x \in [-1,1]$

5. 5. 设 $f(x)$ 连续, 且 $\int_0^{x^2-1} f(t)dt = x^4 - 1$, 则 $f(8) = \underline{\hspace{2cm}}$

A 108

B 48

C 18

D 8

二、填空题 (将题目的正确答案填写在相应题目划线空白处。共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分.)

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{x}{x+2})^x = \underline{\hspace{2cm}}$

2. 当 $a = -\frac{3}{2}, b = \frac{9}{2}$, 点 $(1, 3)$ 是曲线 $y = ax^3 + bx^2$ 的拐点.

3. 求积分 $\int_0^1 \sqrt[5]{x} \ln x dx = \underline{\hspace{2cm}}$

4. $x^3 + y^2 \sin x - y = 1$, 那么 $dy = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 计算曲线 $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 从 $x = 0$ 到 $x = 1$ 的那一段弧长 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、计算题（共 6 题，每小题 7 分，共 42 分）

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{\tan(x^3)}$

解：

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right)$

解： 1

3 求函数 $y = \sqrt{\frac{(x-1)(x+4)^3}{\sqrt{x+2}\sqrt[3]{x-9}}}$ 导数

解：

4. 已知 $y = x^2 e^{2x}$, 求 $y^{(10)}$.

解：

5. 计算积分 $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx$

解:

6. 求 $\int_2^3 \frac{1}{x(x-1)^2} dx$

解:

四、综合计算题（共 3 题，每小题 8 分，共 24 分）

1. 求椭圆 $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 在第一象限的部分与 X 轴所围成图形绕 Y 轴旋转，计算所得旋转体的体积。

解:

2. 研究函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 点是否可导.

解:

3. 设火车每小时所耗燃料费用与火车速度的立方成正比，其他费用每小时 200 元。已知当速度为 20km/h, 每小时的燃料费用为 40 元，求最经济的行驶速度。

解:

五、证明题 (4 分)

设 $f(x)$ 在 $[0,10]$ 上连续， $f(10) - f(0) = 100$ ，证明存在 $\xi \in [0,9]$ ，使得
 $f(\xi + 1) - f(\xi) = 10$ 成立。