第 9 章 e：方向导数与梯度

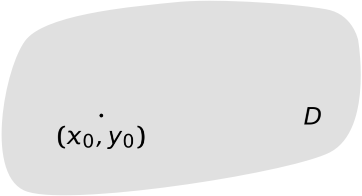
数学系　　梁卓滨

2016-2017 学年 II

提要

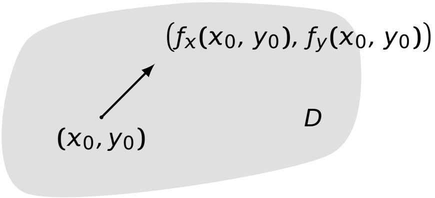
1. 二元函数的
    - 梯度
    - 等值线
    - 方向导数
2. 三元函数的
    - 梯度
    - 等值面
    - 方向导数

梯度



定义 设 $f(x, y)$ 在平面区域 D 内具有一阶连续偏导数，对于每一点 $p_0(x_0, y_0)$,

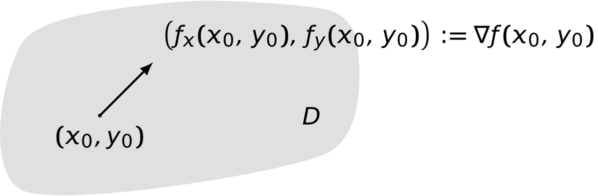
梯度



定义 设 $f(x, y)$ 在平面区域 D 内具有一阶连续偏导数，对于每一点 $p_0(x_0, y_0)$，定义向量

$$f_x(x_0, y_0)\overrightarrow{i} + f_y(x_0, y_0)\overrightarrow{j} = \left(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)\right),$$

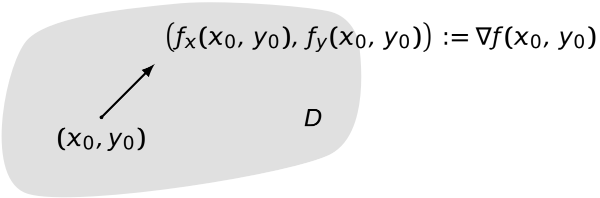
梯度



定义 设 $f(x, y)$ 在平面区域 D 内具有一阶连续偏导数，对于每一点 $p_0(x_0, y_0)$，定义向量

$$f_x(x_0, y_0)\overrightarrow{i} + f_y(x_0, y_0)\overrightarrow{j} = \big(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)\big),$$

梯度

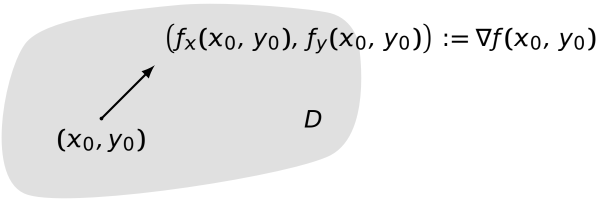


定义 设 $f(x, y)$ 在平面区域 D 内具有一阶连续偏导数，对于每一点 $p_0(x_0, y_0)$，定义向量

$$f_x(x_0, y_0)\overrightarrow{i} + f_y(x_0, y_0)\overrightarrow{j} = \big(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)\big),$$

称为 $f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处的梯度 ，

梯度



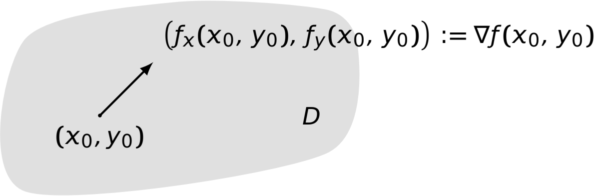
定义 设 $f(x, y)$ 在平面区域 D 内具有一阶连续偏导数，对于每一点 $p_0(x_0, y_0)$，定义向量

$$f_x(x_0, y_0)\overrightarrow{i} + f_y(x_0, y_0)\overrightarrow{j} = \big(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)\big),$$

称为 $f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处的梯度，记为

$$\operatorname{grad} f(x_0, y_0) \quad \text{或} \quad \nabla f(x_0, y_0)$$

梯度



定义 设 $f(x, y)$ 在平面区域 D 内具有一阶连续偏导数，对于每一点 $p_0(x_0, y_0)$，定义向量

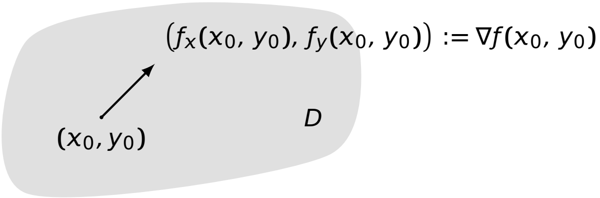
$$f_x(x_0, y_0)\overrightarrow{i} + f_y(x_0, y_0)\overrightarrow{j} = \big(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)\big),$$

称为 $f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处的梯度，记为

$$\operatorname{grad} f(x_0, y_0) \quad 或 \quad \nabla f(x_0, y_0)$$

例 设 $f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$，求 ∇f

梯度



定义 设 $f(x,y)$ 在平面区域 D 内具有一阶连续偏导数，对于每一点 $p_0(x_0,y_0)$，定义向量

$$f_x(x_0,y_0)\overrightarrow{i}+f_y(x_0,y_0)\overrightarrow{j}=\left(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0)\right),$$

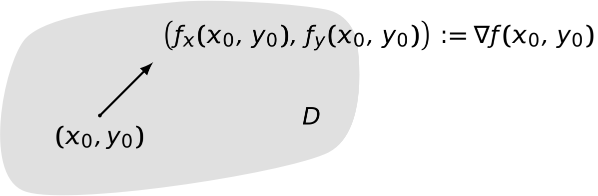
称为 $f(x,y)$ 在点 $p_0(x_0,y_0)$ 处的梯度，记为

$$\operatorname{grad} f(x_0,y_0) \quad 或 \quad \nabla f(x_0,y_0)$$

例 设 $f(x,y)=\frac{x^2}{4}+y^2$，求 ∇f

解 $\nabla f=(f_x,f_y)=(\quad,\quad)$

梯度



定义 设 $f(x, y)$ 在平面区域 D 内具有一阶连续偏导数，对于每一点 $p_0(x_0, y_0)$，定义向量

$$f_x(x_0, y_0)\overrightarrow{i} + f_y(x_0, y_0)\overrightarrow{j} = \big(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)\big),$$

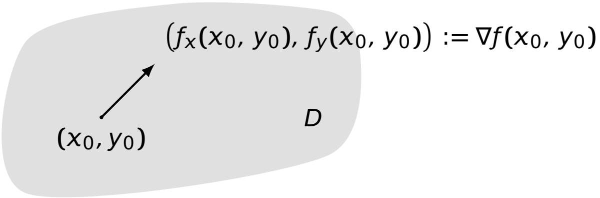
称为 $f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处的梯度，记为

$$\mathrm{grad}\, f(x_0, y_0) \quad \text{或} \quad \nabla f(x_0, y_0)$$

例 设 $f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$，求 ∇f

解 $\nabla f = (f_x, f_y) = \left(\frac{x}{2}, \qquad\right)$

梯度



定义 设 $f(x, y)$ 在平面区域 D 内具有一阶连续偏导数，对于每一点 $p_0(x_0, y_0)$，定义向量

$$f_x(x_0, y_0)\overrightarrow{i} + f_y(x_0, y_0)\overrightarrow{j} = \big(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)\big),$$

称为 $f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处的梯度，记为

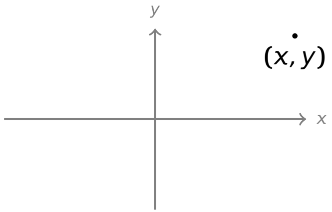
$$\mathrm{grad}\, f(x_0, y_0) \quad 或 \quad \nabla f(x_0, y_0)$$

例 设 $f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$，求 ∇f

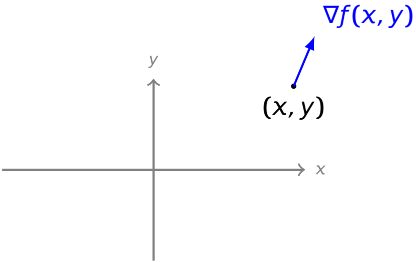
解 $\nabla f = (f_x, f_y) = \left(\frac{x}{2}, 2y\right)$

例 设 $f(x,y)=\frac{x^2}{4}+y^2$，则 $\nabla f(x,y)=(\frac{x}{2},2y)$

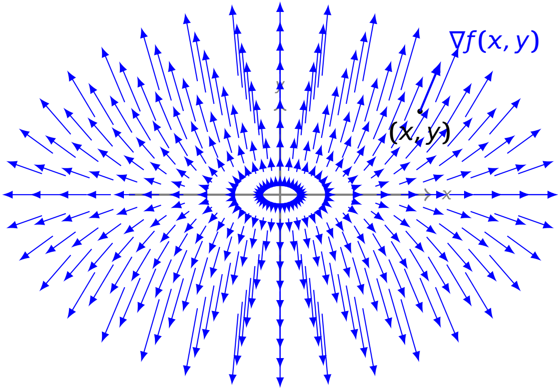
例 设 $f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$，则 $\nabla f(x, y) = (\frac{x}{2}, 2y)$



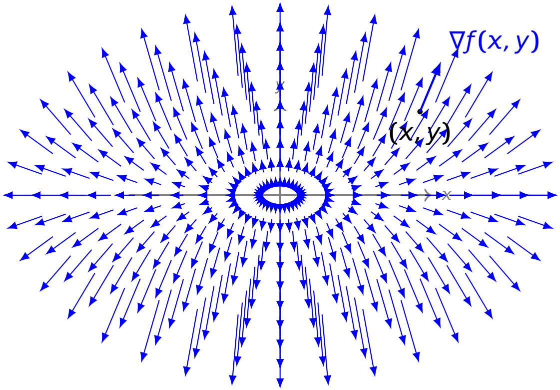
例 设 $f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$，则 $\nabla f(x, y) = (\frac{x}{2}, 2y)$



例 设 $f(x,y)=\frac{x^2}{4}+y^2$，则 $\nabla f(x,y)=(\frac{x}{2},2y)$

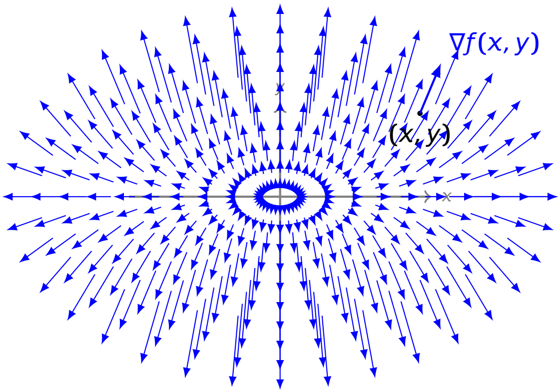


例 设 $f(x,y)=\frac{x^2}{4}+y^2$，则 $\nabla f(x,y)=(\frac{x}{2},2y)$



- 梯度 ∇f 是一个向量场

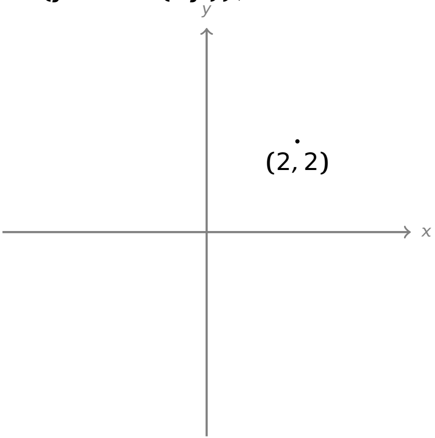
例 设 $f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$，则 $\nabla f(x, y) = (\frac{x}{2}, 2y)$



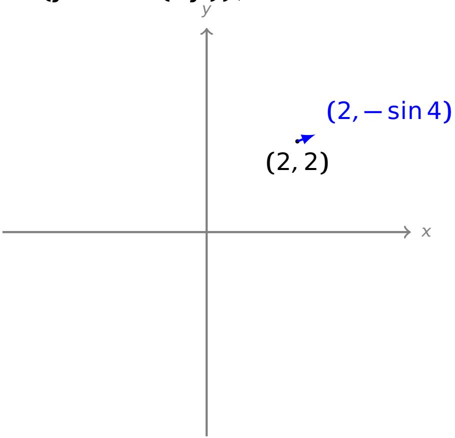
- 梯度 ∇f 是一个向量场
- 反过来，向量场并不总是某个函数的梯度！

例 向量场 $F(x, y) = (y, -\sin(xy))$，不是任何函数的梯度

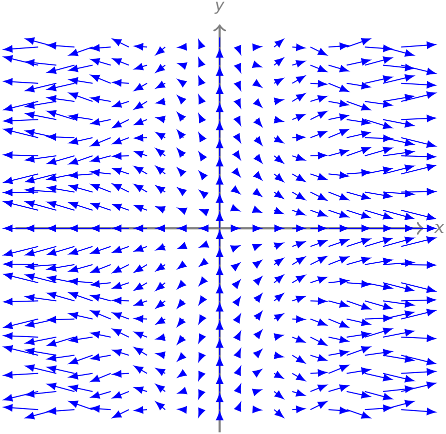
例 向量场 $F(x, y) = (y, -\sin(xy))$，不是任何函数的梯度



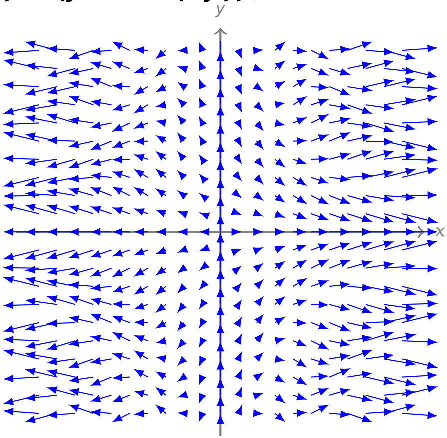
例 向量场 $F(x, y) = (y, -\sin(xy))$，不是任何函数的梯度



例 向量场 $F(x, y) = (y, -\sin(xy))$，不是任何函数的梯度

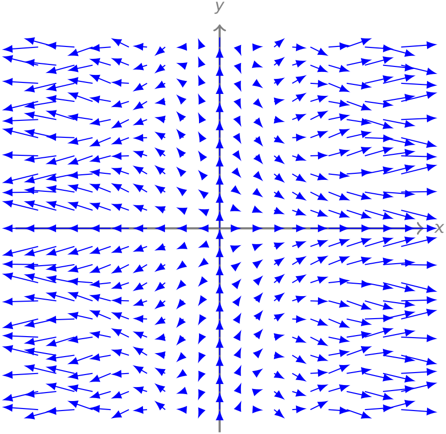


例 向量场 $F(x,y) = (y, -\sin(xy))$，不是任何函数的梯度



证明 若 $F(x,y) = (y, -\sin(xy)) = \nabla f = (f_x, f_y)$，则

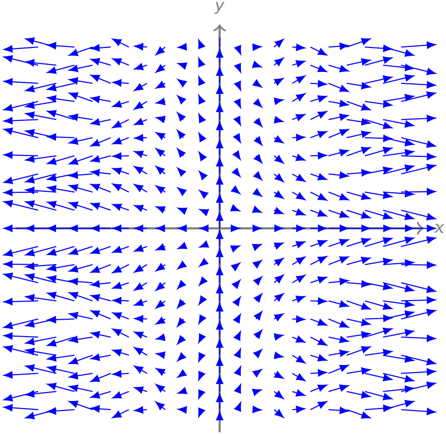
例 向量场 $F(x, y) = (y, -\sin(xy))$，不是任何函数的梯度



证明 若 $F(x, y) = (y, -\sin(xy)) = \nabla f = (f_x, f_y)$，则

$$f_x = y, \quad f_y = -\sin(xy)$$

例 向量场 $F(x,y)=(y,-\sin(xy))$，不是任何函数的梯度

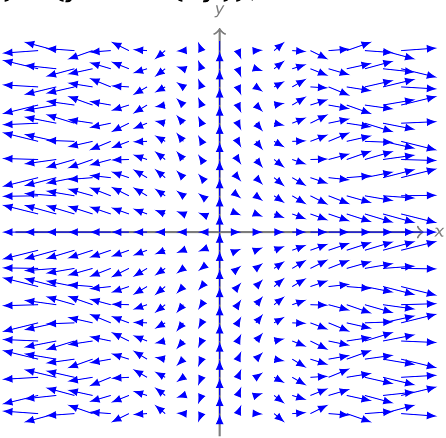


证明 若 $F(x,y)=(y,-\sin(xy))=\nabla f=(f_x,f_y)$，则

$$f_x=y,\quad f_y=-\sin(xy)$$

$$f_{xy}=\quad,\quad f_{yx}=$$

例 向量场 $F(x, y) = (y, -\sin(xy))$，不是任何函数的梯度

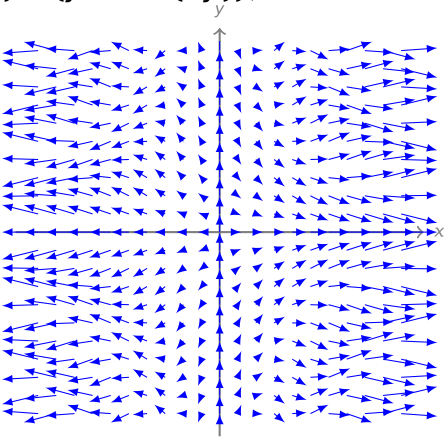


证明 若 $F(x, y) = (y, -\sin(xy)) = \nabla f = (f_x, f_y)$，则

$$f_x = y, \quad f_y = -\sin(xy)$$

$$f_{xy} = 1, \quad f_{yx} =$$

例 向量场 $F(x,y)=(y,-\sin(xy))$，不是任何函数的梯度

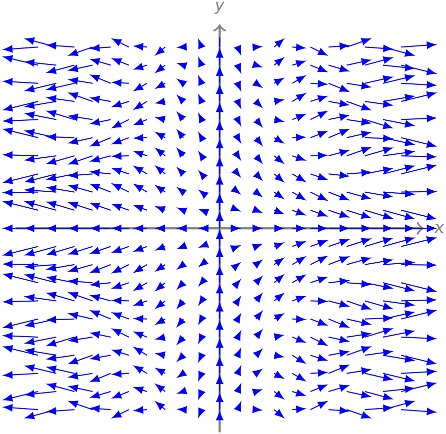


证明 若 $F(x,y)=(y,-\sin(xy))=\nabla f=(f_x,f_y)$，则

$$f_x=y,\quad f_y=-\sin(xy)$$

$$f_{xy}=1,\quad f_{yx}=-y\cos(xy)$$

例 向量场 $F(x,y)=(y,-\sin(xy))$，不是任何函数的梯度

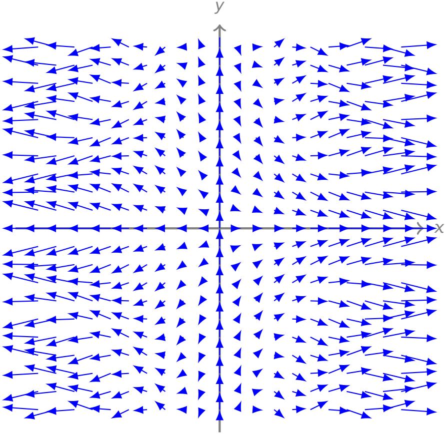


证明 若 $F(x,y)=(y,-\sin(xy))=\nabla f=(f_x,f_y)$，则

$$f_x=y,\quad f_y=-\sin(xy)$$

$$f_{xy}=1,\quad f_{yx}=-y\cos(xy)\quad\Rightarrow\quad f_{xy}\neq f_{yx}$$

例 向量场 $F(x,y)=(y,-\sin(xy))$，不是任何函数的梯度



证明 若 $F(x,y)=(y,-\sin(xy))=\nabla f=(f_x,f_y)$，则

$$f_x=y,\quad f_y=-\sin(xy)$$

$$f_{xy}=1,\quad f_{yx}=-y\cos(xy)\quad\Rightarrow\quad f_{xy}\neq f_{yx}$$

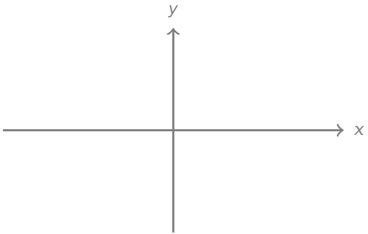
不可能

等值线与梯度

定义 设 c 为常数，定义域上满足 $f(x, y) = c$ 的点，构成“等值线”。

等值线与梯度

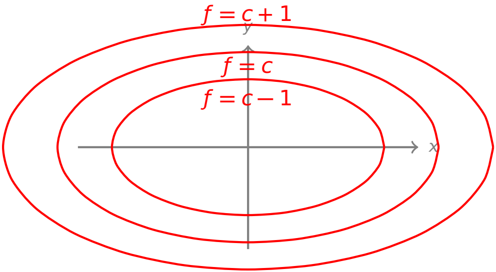
$f(x,y)=\frac{x^2}{4}+y^2$



定义 设 c 为常数，定义域上满足 $f(x, y) = c$ 的点，构成“等值线”。

等值线与梯度

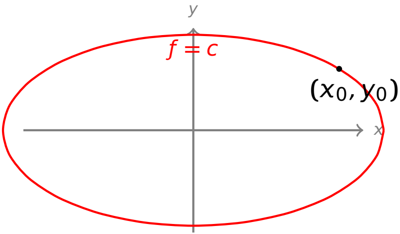
$f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$



定义 设 c 为常数，定义域上满足 $f(x, y) = c$ 的点，构成“等值线”。

等值线与梯度

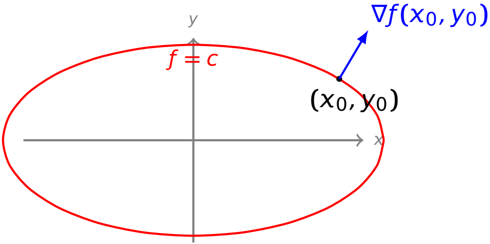
$f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$



定义 设 c 为常数，定义域上满足 $f(x, y) = c$ 的点，构成“等值线”。

等值线与梯度

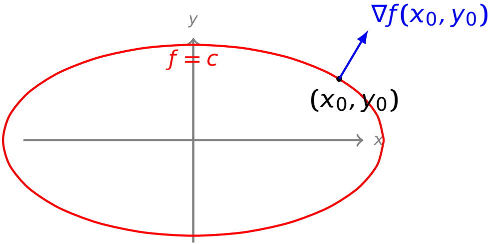
$f(x,y) = \frac{x^2}{4} + y^2$



定义 设 c 为常数，定义域上满足 $f(x, y) = c$ 的点，构成"等值线"。

等值线与梯度

$f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$

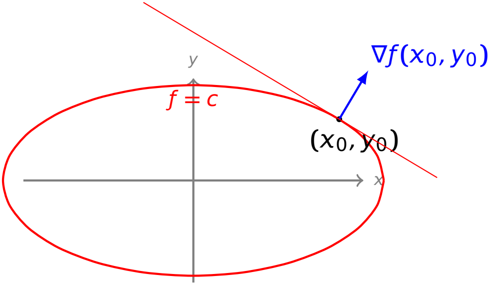


定义 设 c 为常数，定义域上满足 $f(x, y) = c$ 的点，构成 “等值线”。

性质 过点 $p_0(x_0, y_0)$ 处的梯度 $\nabla f(x_0, y_0)$，垂直于过该点的等值线。

等值线与梯度

$$f(x,y)=\frac{x^2}{4}+y^2$$

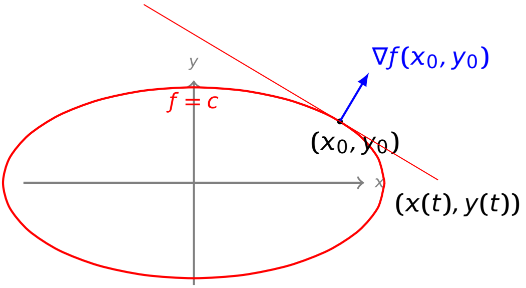


定义 设 c 为常数，定义域上满足 $f(x,y)=c$ 的点，构成 “等值线”。

性质 过点 $p_0(x_0,y_0)$ 处的梯度 $\nabla f(x_0,y_0)$，垂直于过该点的等值线。

等值线与梯度

$f(x,y) = \frac{x^2}{4} + y^2$



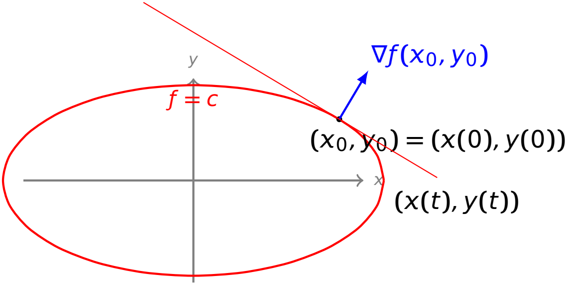
定义 设 c 为常数，定义域上满足 $f(x, y) = c$ 的点，构成“等值线”。

性质 过点 $p_0(x_0, y_0)$ 处的梯度 $\nabla f(x_0, y_0)$，垂直于过该点的等值线。

证明 设该等值线的参数方程为 $(x(t), y(t))$，

等值线与梯度

$$f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$$



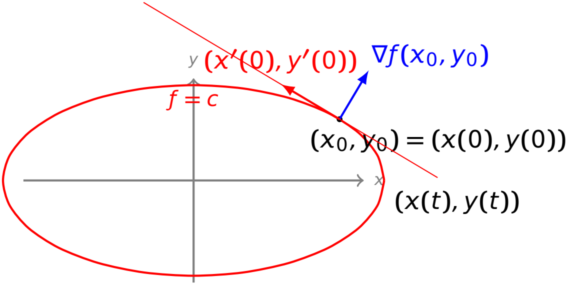
定义 设 c 为常数，定义域上满足 $f(x, y) = c$ 的点，构成“等值线”。

性质 过点 $p_0(x_0, y_0)$ 处的梯度 $\nabla f(x_0, y_0)$，垂直于过该点的等值线。

证明 设该等值线的参数方程为 $(x(t), y(t))$，

等值线与梯度

$$f(x,y)=\frac{x^2}{4}+y^2$$



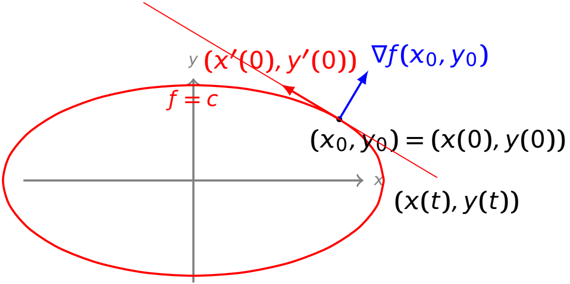
定义 设 c 为常数，定义域上满足 $f(x, y)=c$ 的点，构成 "等值线"。

性质 过点 $p_0(x_0, y_0)$ 处的梯度 $\nabla f(x_0, y_0)$，垂直于过该点的等值线。

证明 设该等值线的参数方程为 $(x(t), y(t))$，

等值线与梯度

$$f(x,y)=\frac{x^2}{4}+y^2$$



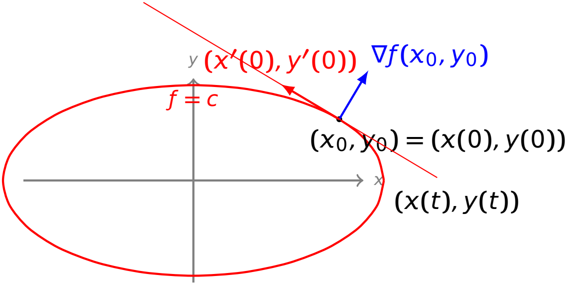
定义 设 c 为常数，定义域上满足 $f(x,y)=c$ 的点，构成“等值线”。

性质 过点 $p_0(x_0,y_0)$ 处的梯度 $\nabla f(x_0,y_0)$，垂直于过该点的等值线。

证明 设该等值线的参数方程为 $(x(t),y(t))$，由 $f(x(t),y(t))\equiv c$得：

等值线与梯度

$f(x,y) = \frac{x^2}{4} + y^2$



定义 设 c 为常数，定义域上满足 $f(x,y) = c$ 的点，构成 “等值线”。

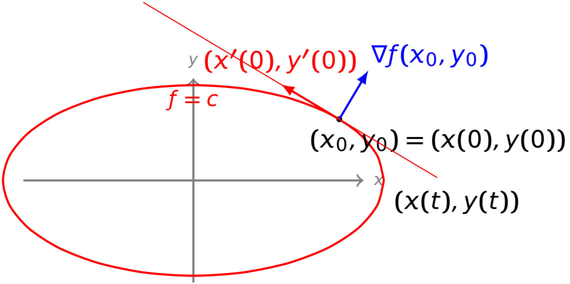
性质 过点 $p_0(x_0, y_0)$ 处的梯度 $\nabla f(x_0, y_0)$，垂直于过该点的等值线。

证明 设该等值线的参数方程为 $(x(t), y(t))$，由 $f(x(t), y(t)) \equiv c$得：

$$0 = \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) \Big|_{t=0}$$

等值线与梯度

$f(x,y)=\frac{x^2}{4}+y^2$



定义 设 c 为常数，定义域上满足 $f(x,y)=c$ 的点，构成“等值线”。

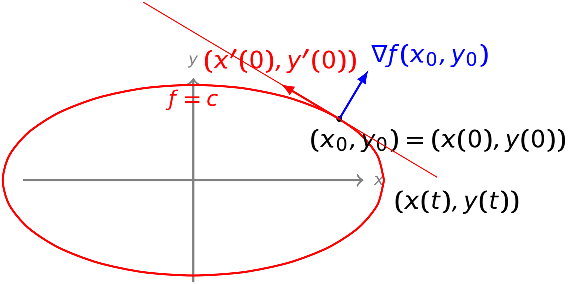
性质 过点 $p_0(x_0,y_0)$ 处的梯度 $\nabla f(x_0,y_0)$，垂直于过该点的等值线。

证明 设该等值线的参数方程为 $(x(t),y(t))$，由 $f(x(t),y(t))\equiv c$得：

$$0=\frac{d}{dt}f(x(t),y(t))\bigg|_{t=0}=f_x(x_0,y_0)x_0'(0)+f_y(x_0,y_0)y_0'(0)$$

等值线与梯度

$$f(x,y)=\frac{x^2}{4}+y^2$$



定义 设 c 为常数，定义域上满足 $f(x,y)=c$ 的点，构成“等值线”。

性质 过点 $p_0(x_0,y_0)$ 处的梯度 $\nabla f(x_0,y_0)$，垂直于过该点的等值线。

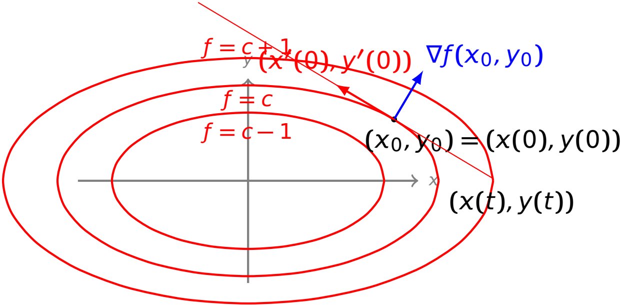
证明 设该等值线的参数方程为 $(x(t),y(t))$，由 $f(x(t),y(t))\equiv c$得：

$$0=\frac{d}{dt}f(x(t),y(t))\bigg|_{t=0}=f_x(x_0,y_0)x_0'(0)+f_y(x_0,y_0)y_0'(0)$$

$$=\nabla f(x_0,y_0)\cdot(x_0'(0),y_0'(0))$$

等值线与梯度

$f(x,y)=\frac{x^2}{4}+y^2$



定义 设 c 为常数，定义域上满足 $f(x,y)=c$ 的点，构成“等值线”。

性质 过点 $p_0(x_0,y_0)$ 处的梯度 $\nabla f(x_0,y_0)$，垂直于过该点的等值线。

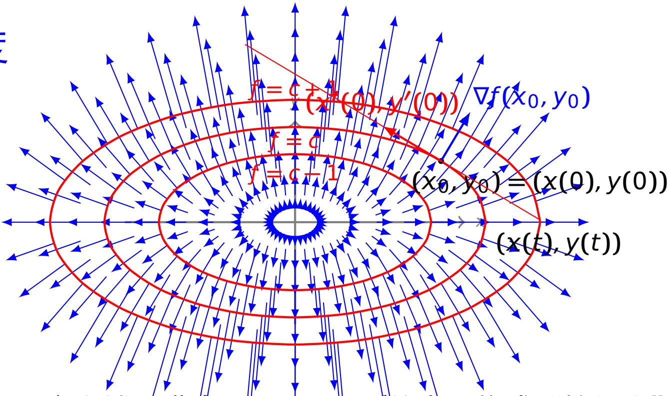
证明 设该等值线的参数方程为 $(x(t),y(t))$，由 $f(x(t),y(t))\equiv c$得：

$$0=\frac{d}{dt}f(x(t),y(t))\Big|_{t=0}=f_x(x_0,y_0)x_0'(0)+f_y(x_0,y_0)y_0'(0)$$

$$=\nabla f(x_0,y_0)\cdot(x_0'(0),y_0'(0))$$

等值线与梯度

$f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$



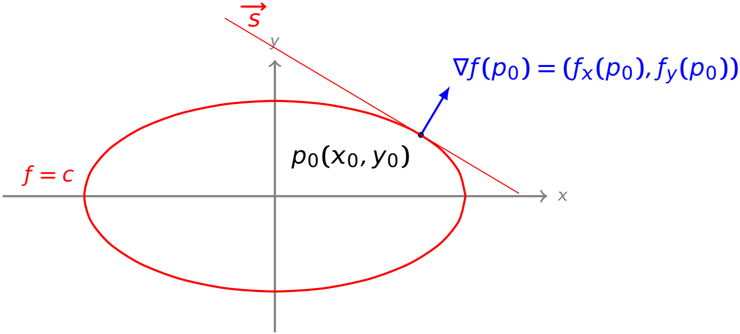
定义 设 c 为常数，定义域上满足 $f(x, y) = c$ 的点，构成“等值线”。

性质 过点 $p_0(x_0, y_0)$ 处的梯度 $\nabla f(x_0, y_0)$，垂直于过该点的等值线。

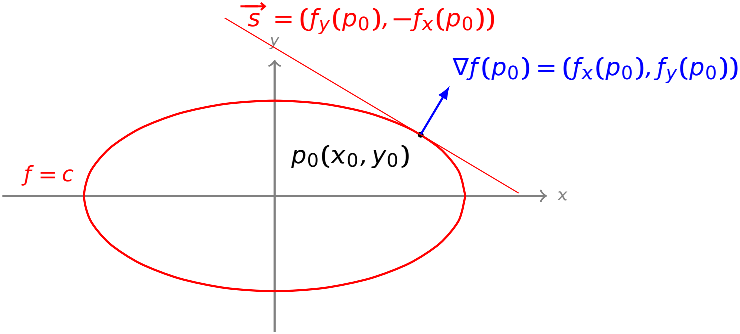
证明 设该等值线的参数方程为 $(x(t), y(t))$，由 $f(x(t), y(t)) \equiv c$得：

$$0 = \frac{d}{dt} f(x(t), y(t))\Big|_{t=0} = f_x(x_0, y_0)x_0'(0) + f_y(x_0, y_0)y_0'(0)$$

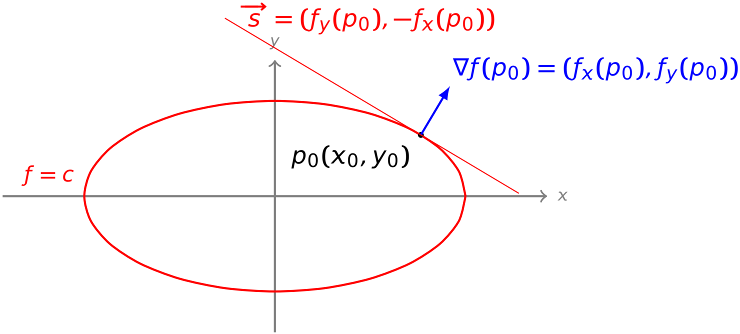
$$= \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x_0'(0), y_0'(0))$$



性质 设过点 $p_0(x_0, y_0)$ 处的梯度 $\nabla f(p_0) \neq 0$，则过该点的等值线，其切线的一个方向向量为 $\vec{s} =$ 。



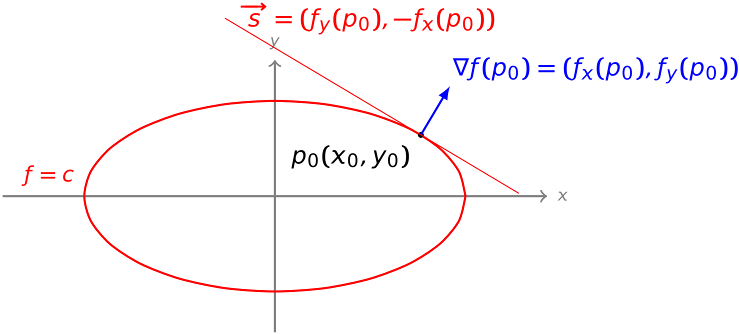
性质 设过点 $p_0(x_0, y_0)$ 处的梯度 $\nabla f(p_0) \neq 0$，则过该点的等值线，其切线的一个方向向量为 $\overrightarrow{s} = (f_y(p_0), -f_x(p_0))$。



性质 设过点 $p_0(x_0, y_0)$ 处的梯度 $\nabla f(p_0) \neq 0$，则过该点的等值线，其切线的一个方向向量为 $\overrightarrow{s} = (f_y(p_0), -f_x(p_0))$。

证明 验证：

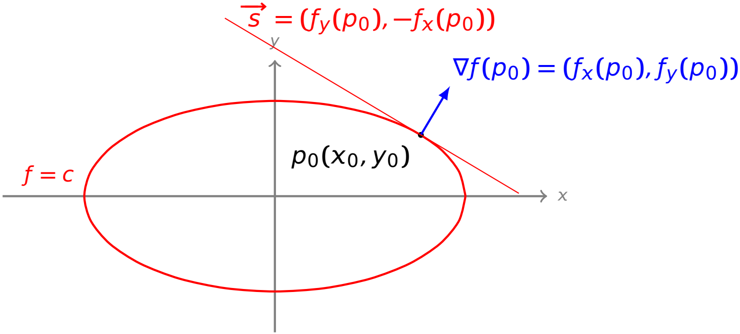
$$\overrightarrow{s} \cdot \nabla f(p_0) = \qquad\qquad 0$$



性质 设过点 $p_0(x_0, y_0)$ 处的梯度 $\nabla f(p_0) \neq 0$，则过该点的等值线，其切线的一个方向向量为 $\overrightarrow{s} = (f_y(p_0), -f_x(p_0))$。

证明 验证：

$$\overrightarrow{s} \cdot \nabla f(p_0) = (f_y(p_0), -f_x(p_0)) \cdot (f_x(p_0), f_y(p_0)) \quad 0$$

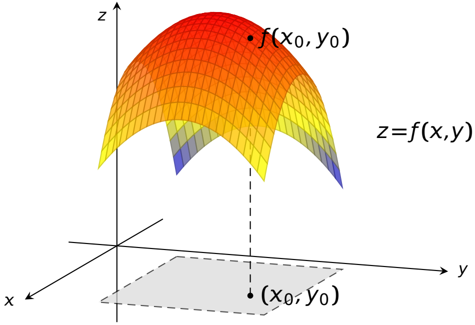


性质 设过点 $p_0(x_0, y_0)$ 处的梯度 $\nabla f(p_0) \neq 0$，则过该点的等值线，其切线的一个方向向量为 $\overrightarrow{s} = (f_y(p_0), -f_x(p_0))$。

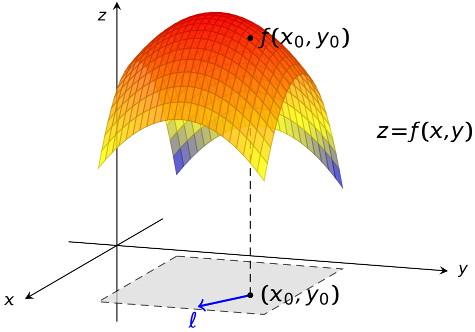
证明 验证：

$$\overrightarrow{s} \cdot \nabla f(p_0) = (f_y(p_0), -f_x(p_0)) \cdot (f_x(p_0), f_y(p_0)) = 0$$

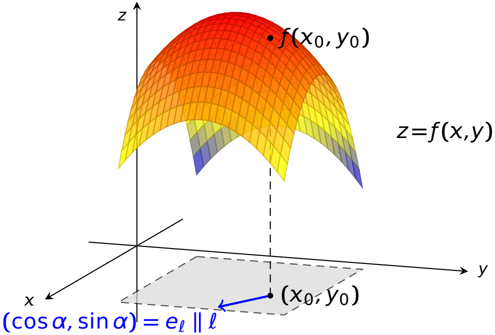
方向导数



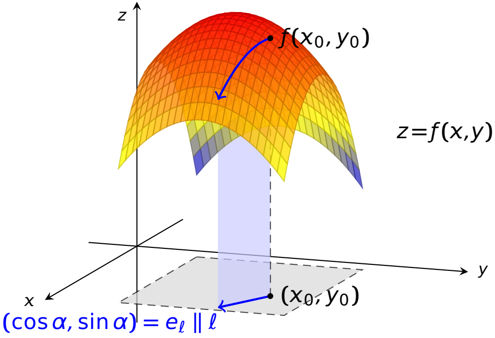
方向导数



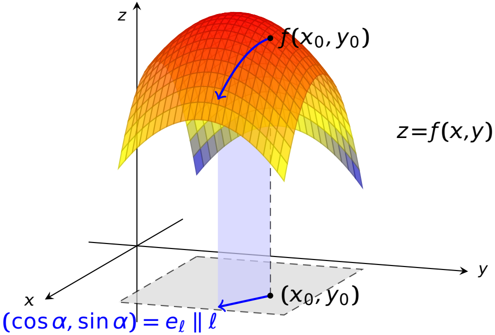
方向导数



方向导数



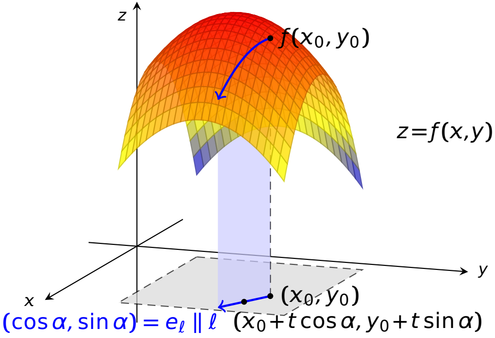
方向导数



$z = f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处沿方向 ℓ 的变化率，即方向导数：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0, y_0)} :=$$

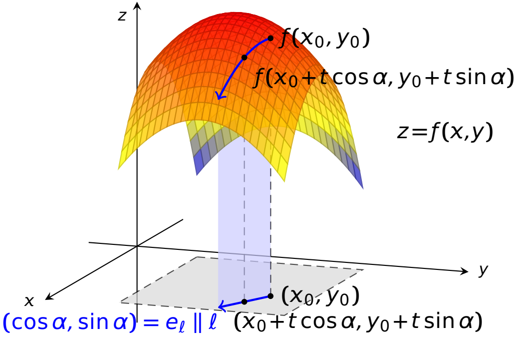
方向导数



$z = f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处沿方向 ℓ 的变化率，即方向导数 :

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0, y_0)} :=$$

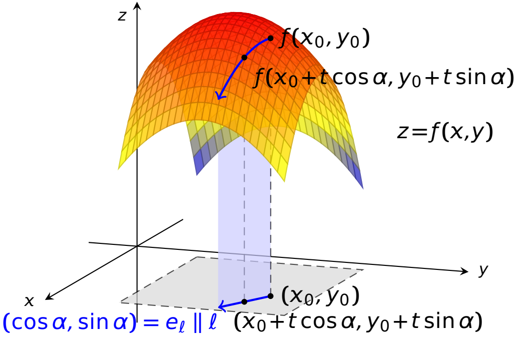
方向导数



$z = f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处沿方向 ℓ 的变化率，即方向导数：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0, y_0)} :=$$

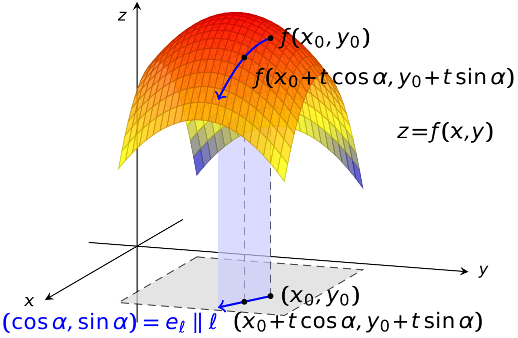
方向导数



$z = f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处沿方向 ℓ 的变化率，即方向导数：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0, y_0)} := \frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha) - f(x_0, y_0)}{t}$$

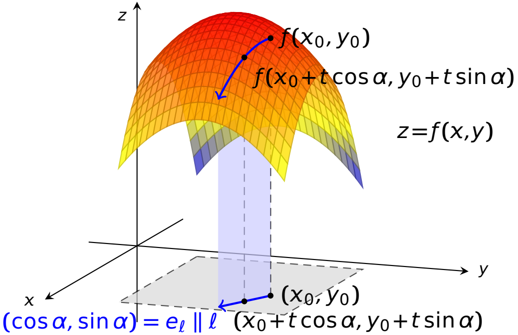
方向导数



$z = f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处沿方向 ℓ 的变化率，即方向导数：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0, y_0)} := \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha) - f(x_0, y_0)}{t}$$

方向导数

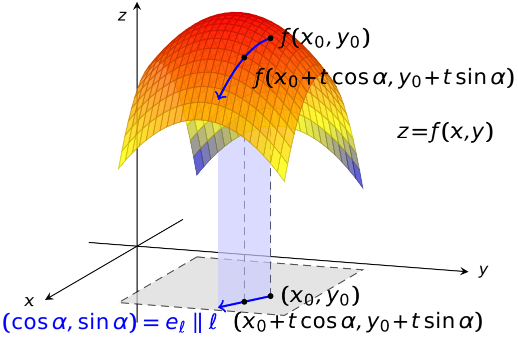


$z = f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处沿方向 ℓ 的变化率，即方向导数：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0)} := \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha) - f(x_0, y_0)}{t}$$

$$= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha)$$

方向导数



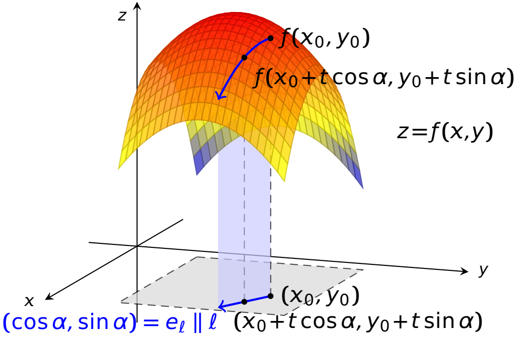
$z = f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处沿方向 ℓ 的变化率，即方向导数：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0, y_0)} := \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha) - f(x_0, y_0)}{t}$$

$$= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha)$$

$$= f_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f_y(x_0, y_0)\sin\alpha$$

方向导数



$z = f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处沿方向 ℓ 的变化率，即方向导数：

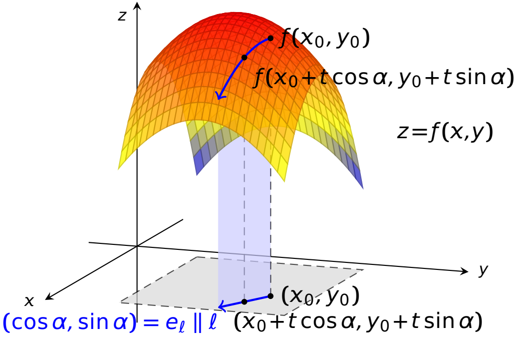
$$\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0, y_0)} := \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0 + t\cos\alpha,\, y_0 + t\sin\alpha) - f(x_0, y_0)}{t}$$

$$= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(x_0 + t\cos\alpha,\, y_0 + t\sin\alpha)$$

$$= f_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f_y(x_0, y_0)\sin\alpha$$

$$= \nabla f(x_0, y_0)\cdot e_\ell$$

方向导数



$z = f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处沿方向 ℓ 的变化率，即方向导数：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0, y_0)} := \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\sin\alpha) - f(x_0, y_0)}{t}$$

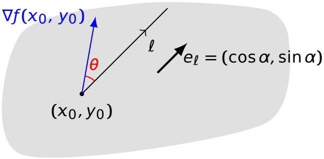
$$= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\sin\alpha)$$

$$= f_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f_y(x_0, y_0)\sin\alpha$$

$$= \nabla f(x_0, y_0)\cdot e_\ell = |\nabla f|\cos\theta$$

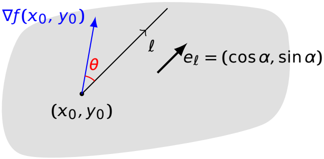
- $z = f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处沿方向 ℓ 的方向导数：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0, y_0)} = \nabla f(x_0, y_0) \cdot e_\ell = |\nabla f| \cos\theta$$

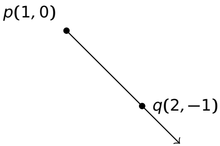


- $z = f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处沿方向 ℓ 的方向导数：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0, y_0)} = \nabla f(x_0, y_0) \cdot e_\ell = |\nabla f| \cos\theta$$

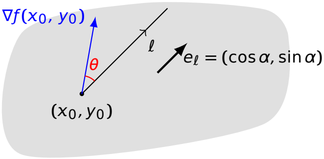


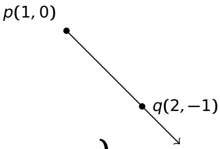
例 求 $z = xe^{2y}$ 在点 $p(1, 0)$ 处，往点 $q(2, -1)$ 方向上的方向导数。



- $z = f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处沿方向 ℓ 的方向导数：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0, y_0)} = \nabla f(x_0, y_0) \cdot e_\ell = |\nabla f| \cos\theta$$





例 求 $z = xe^{2y}$ 在点 $p(1, 0)$ 处，往点 $q(2, -1)$ 方向上的方向导数。

解 1. 方向 $\ell = \overrightarrow{pq} = ($ $)$，对应单位向量 $e_\ell = ($ $)$

2. 计算梯度

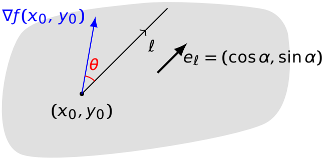
$$\nabla z = (z_x, z_y) =$$

3. 方向导数

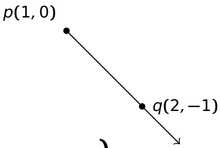
$$\left.\frac{\partial z}{\partial \ell}\right|_{(1,0)} = \nabla z(1, 0) \cdot e_\ell =$$

- $z = f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处沿方向 ℓ 的**方向导数**：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0)} = \nabla f(x_0, y_0)\cdot e_\ell = |\nabla f|\cos\theta$$



例 求 $z = xe^{2y}$ 在点 $p(1, 0)$ 处，往点 $q(2, -1)$ 方向上的方向导数。



解 1. 方向 $\ell = \overrightarrow{pq} = (1, -1)$，对应单位向量 $e_\ell = (\qquad\qquad)$

2. 计算梯度

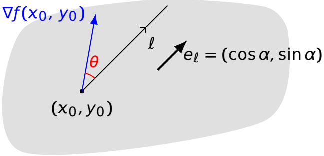
$$\nabla z = (z_x, z_y) =$$

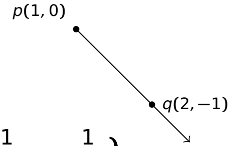
3. 方向导数

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \ell}\right|_{(1,0)} = \nabla z(1, 0)\cdot e_\ell =$$

- $z = f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处沿方向 ℓ 的方向导数：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0, y_0)} = \nabla f(x_0, y_0) \cdot e_\ell = |\nabla f| \cos\theta$$





例 求 $z = xe^{2y}$ 在点 $p(1, 0)$ 处，往点 $q(2, -1)$ 方向上的方向导数。

解 1. 方向 $\ell = \overrightarrow{pq} = (1, -1)$，对应单位向量 $e_\ell = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$

2. 计算梯度

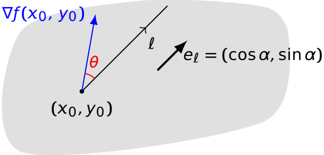
$$\nabla z = (z_x, z_y) =$$

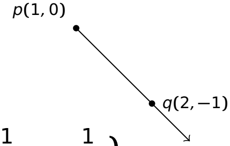
3. 方向导数

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \ell}\right|_{(1,0)} = \nabla z(1, 0) \cdot e_\ell =$$

- $z = f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处沿方向 ℓ 的方向导数：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0)} = \nabla f(x_0, y_0)\cdot e_\ell = |\nabla f|\cos\theta$$





例 求 $z = xe^{2y}$ 在点 $p(1, 0)$ 处，往点 $q(2, -1)$ 方向上的方向导数。

解 1. 方向 $\ell = \overrightarrow{pq} = (1, -1)$，对应单位向量 $e_\ell = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$

2. 计算梯度

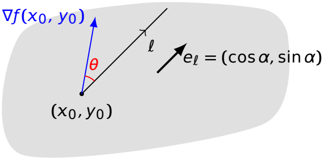
$$\nabla z = (z_x, z_y) = (e^{2y}, 2xe^{2y})$$

3. 方向导数

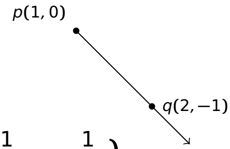
$$\left.\frac{\partial z}{\partial \ell}\right|_{(1,0)} = \nabla z(1, 0)\cdot e_\ell =$$

- $z = f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处沿方向 ℓ 的方向导数：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0, y_0)} = \nabla f(x_0, y_0) \cdot e_\ell = |\nabla f| \cos\theta$$



例 求 $z = xe^{2y}$ 在点 $p(1, 0)$ 处，往点 $q(2, -1)$ 方向上的方向导数。



解 1. 方向 $\ell = \overrightarrow{pq} = (1, -1)$，对应单位向量 $e_\ell = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$

2. 计算梯度

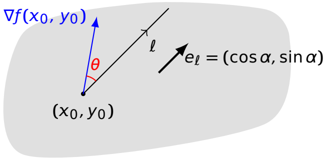
$$\nabla z = (z_x, z_y) = (e^{2y}, 2xe^{2y})$$

3. 方向导数

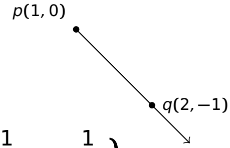
$$\left.\frac{\partial z}{\partial \ell}\right|_{(1,0)} = \nabla z(1, 0) \cdot e_\ell = (1, 2) \cdot (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$$

- $z = f(x, y)$ 在点 $p_0(x_0, y_0)$ 处沿方向 ℓ 的方向导数：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0, y_0)} = \nabla f(x_0, y_0) \cdot e_\ell = |\nabla f| \cos\theta$$



例 求 $z = xe^{2y}$ 在点 $p(1, 0)$ 处，往点 $q(2, -1)$ 方向上的方向导数。



解 1. 方向 $\ell = \overrightarrow{pq} = (1, -1)$，对应单位向量 $e_\ell = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$

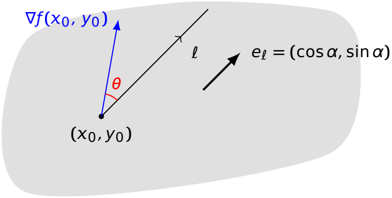
2. 计算梯度

$$\nabla z = (z_x, z_y) = (e^{2y}, 2xe^{2y})$$

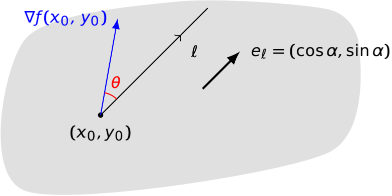
3. 方向导数

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \ell}\right|_{(1,0)} = \nabla z(1, 0) \cdot e_\ell = (1, 2) \cdot (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

- $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0)} = |\nabla f(x_0, y_0)| \cos\theta$



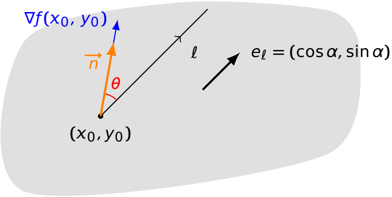
- $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0)} = |\nabla f(x_0, y_0)| \cos\theta$



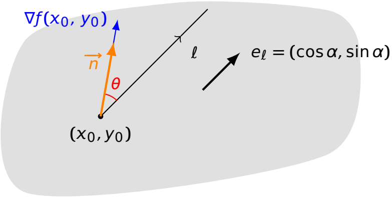
假设 $\nabla f \neq 0$,

- $\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0)} = |\nabla f(x_0, y_0)| \cos\theta$

假设 $\nabla f \neq 0$，令 $\overrightarrow{n} := \frac{1}{|\nabla f|}\nabla f$



- $\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0, y_0)} = |\nabla f(x_0, y_0)| \cos\theta$



假设 $\nabla f \neq 0$，令 $\overrightarrow{n} := \frac{1}{|\nabla f|}\nabla f$

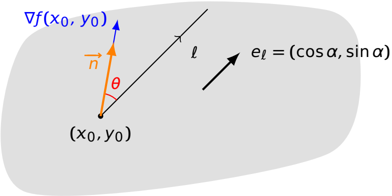
- 当 $\theta = 0$ 时，

- 当 $\theta = \pi$ 时，

- 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时，

- $\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0)} = |\nabla f(x_0, y_0)| \cos\theta$

假设 $\nabla f \neq 0$，令 $\overrightarrow{n} := \frac{1}{|\nabla f|}\nabla f$

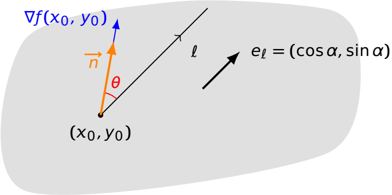


- 当 $\theta = 0$ 时，$e_\ell = \overrightarrow{n}$，

- 当 $\theta = \pi$ 时，

- 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时，

- $\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0)} = |\nabla f(x_0, y_0)| \cos\theta$

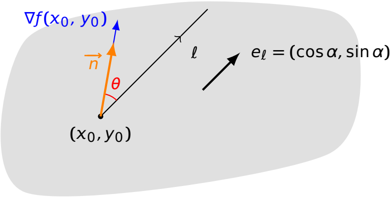


假设 $\nabla f \neq 0$，令 $\vec{n} := \frac{1}{|\nabla f|}\nabla f$

- 当 $\theta = 0$ 时，$e_\ell = \vec{n}$，并且方向导数达到最大值：
  $\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0)} = |\nabla f(x_0, y_0)| > 0$，
- 当 $\theta = \pi$ 时，
- 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时，

- $\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0)} = |\nabla f(x_0,y_0)|\cos\theta$

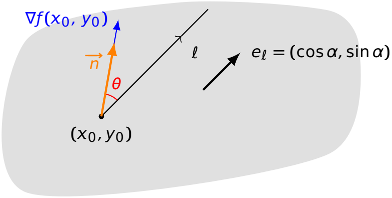
假设 $\nabla f \neq 0$，令 $\overrightarrow{n} := \frac{1}{|\nabla f|}\nabla f$



- 当 $\theta = 0$ 时，$e_\ell = \overrightarrow{n}$，并且方向导数达到最大值：
  $\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0)} = |\nabla f(x_0,y_0)| > 0$，说明沿梯度方向，函数增速最快
- 当 $\theta = \pi$ 时，
- 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时，

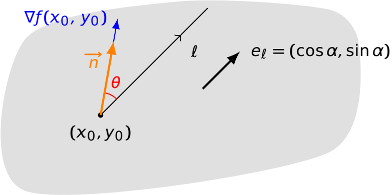
- $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0)} = |\nabla f(x_0, y_0)| \cos\theta$

假设 $\nabla f \neq 0$，令 $\overrightarrow{n} := \dfrac{1}{|\nabla f|}\nabla f$



- 当 $\theta = 0$ 时，$e_\ell = \overrightarrow{n}$，并且方向导数达到最大值：
  $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0)} = |\nabla f(x_0, y_0)| > 0$，说明沿梯度方向，函数增速最快
- 当 $\theta = \pi$ 时，$e_\ell = -\overrightarrow{n}$，
- 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时，

- $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0)} = |\nabla f(x_0,y_0)|\cos\theta$



假设 $\nabla f \neq 0$，令 $\vec{n} := \frac{1}{|\nabla f|}\nabla f$

- 当 $\theta = 0$ 时，$e_\ell = \vec{n}$，并且方向导数达到最大值：

  $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0)} = |\nabla f(x_0,y_0)| > 0$，说明沿梯度方向，函数增速最快

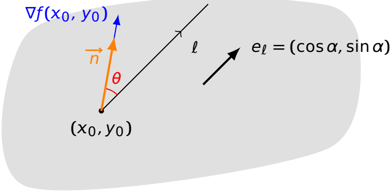
- 当 $\theta = \pi$ 时，$e_\ell = -\vec{n}$，并且方向导数达到最小值：

  $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0)} = -|\nabla f(x_0,y_0)| < 0$，

- 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时，

- $\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0)} = |\nabla f(x_0, y_0)| \cos\theta$

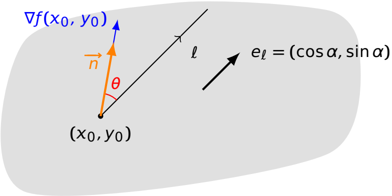
假设 $\nabla f \neq 0$，令 $\overrightarrow{n} := \frac{1}{|\nabla f|}\nabla f$



- 当 $\theta = 0$ 时，$e_\ell = \overrightarrow{n}$，并且方向导数达到最大值：
  $\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0)} = |\nabla f(x_0, y_0)| > 0$，说明沿梯度方向，函数增速最快
- 当 $\theta = \pi$ 时，$e_\ell = -\overrightarrow{n}$，并且方向导数达到最小值：
  $\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0)} = -|\nabla f(x_0, y_0)| < 0$，说明沿梯度反方向，函数减速最快
- 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时，

- $\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0)} = |\nabla f(x_0,y_0)|\cos\theta$

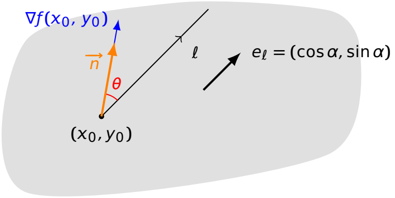
假设 $\nabla f \neq 0$，令 $\overrightarrow{n} := \frac{1}{|\nabla f|}\nabla f$



- 当 $\theta = 0$ 时，$e_\ell = \overrightarrow{n}$，并且方向导数达到最大值：
  $\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0)} = |\nabla f(x_0,y_0)| > 0$，说明沿梯度方向，函数增速最快
- 当 $\theta = \pi$ 时，$e_\ell = -\overrightarrow{n}$，并且方向导数达到最小值：
  $\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0)} = -|\nabla f(x_0,y_0)| < 0$，说明沿梯度反方向，函数减速最快
- 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时，$e_\ell \perp \overrightarrow{n}$，

- $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0)} = |\nabla f(x_0,y_0)|\cos\theta$

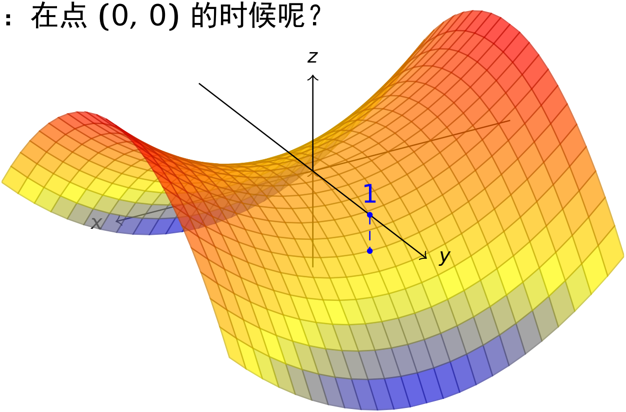
假设 $\nabla f \neq 0$，令 $\vec{n} := \frac{1}{|\nabla f|}\nabla f$



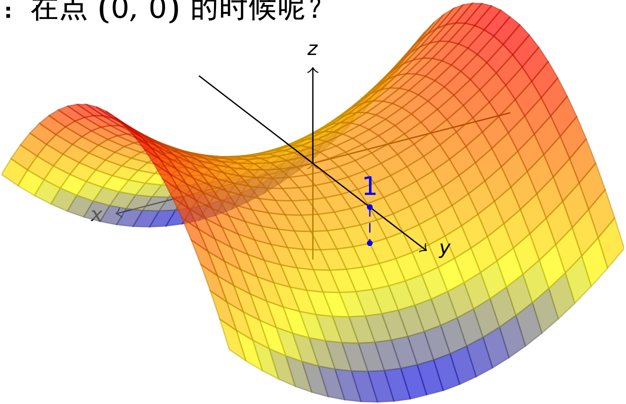
- 当 $\theta = 0$ 时，$e_\ell = \vec{n}$，并且方向导数达到最大值：
  $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0)} = |\nabla f(x_0,y_0)| > 0$，说明沿梯度方向，函数增速最快
- 当 $\theta = \pi$ 时，$e_\ell = -\vec{n}$，并且方向导数达到最小值：
  $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0)} = -|\nabla f(x_0,y_0)| < 0$，说明沿梯度反方向，函数减速最快
- 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时，$e_\ell \perp \vec{n}$，并且方向导数为零：$\left.\dfrac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0)} = 0$。

例 函数 $z = x^2 - y^2$ 在点 $(0, 1)$ 沿什么方向，其增加、减少的速度最大？并思考：在点 $(0, 0)$ 的时候呢？

例 函数 $z = x^2 - y^2$ 在点 $(0, 1)$ 沿什么方向，其增加、减少的速度最大？并思考：在点 $(0, 0)$ 的时候呢？

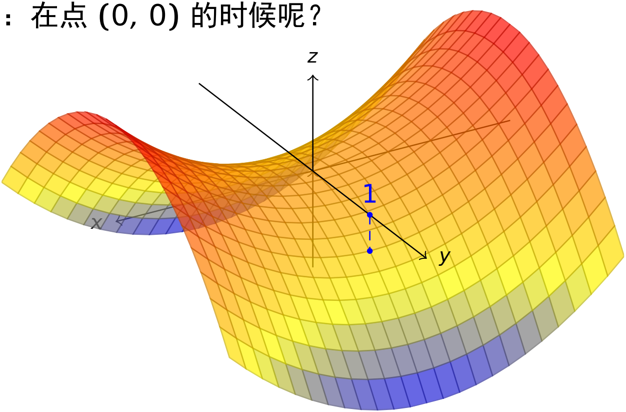


例 函数 $z = x^2 - y^2$ 在点 $(0, 1)$ 沿什么方向，其增加、减少的速度最大？并思考：在点 $(0, 0)$ 的时候呢？



解 梯度 $\nabla z = (2x, -2y)$，

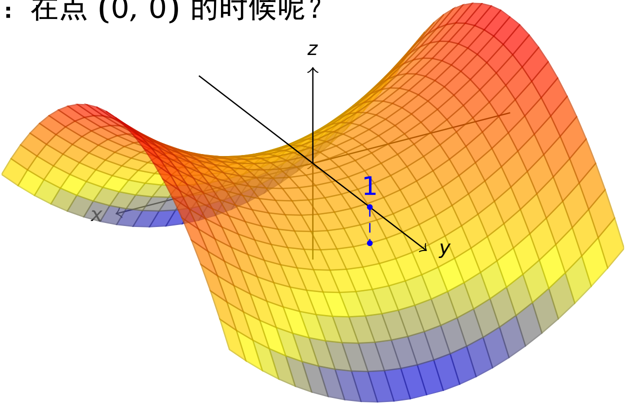
例 函数 $z = x^2 - y^2$ 在点 $(0, 1)$ 沿什么方向，其增加、减少的速度最大？并思考：在点 $(0, 0)$ 的时候呢？



解 梯度 $\nabla z = (2x, -2y)$,

- 沿方向 $\nabla z(0, 1) = ($ $\qquad$ $)$增加最快
- 沿方向 $-\nabla z(0, 1) = ($ $\qquad$ 减少最快

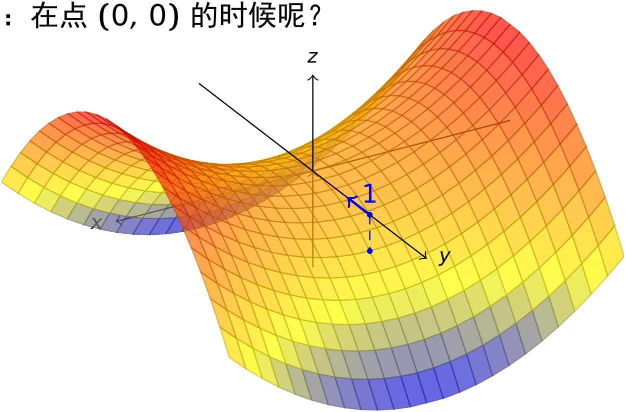
例 函数 $z = x^2 - y^2$ 在点 $(0, 1)$ 沿什么方向，其增加、减少的速度最大？并思考：在点 $(0, 0)$ 的时候呢？



解 梯度 $\nabla z = (2x, -2y)$，所以在点 $(0, 1)$ 时，

- 沿方向 $\nabla z(0, 1) = (0, -2)$增加最快
- 沿方向 $-\nabla z(0, 1) = (0, 2)$减少最快

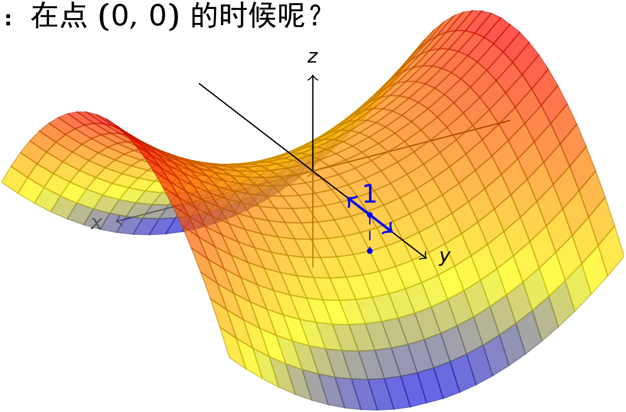
例 函数 $z = x^2 - y^2$ 在点 $(0, 1)$ 沿什么方向，其增加、减少的速度最大？并思考：在点 $(0, 0)$ 的时候呢？



解 梯度 $\nabla z = (2x, -2y)$，所以在点 $(0, 1)$ 时，

- 沿方向 $\nabla z(0, 1) = (0, -2)$增加最快
- 沿方向 $-\nabla z(0, 1) = (0, 2)$减少最快

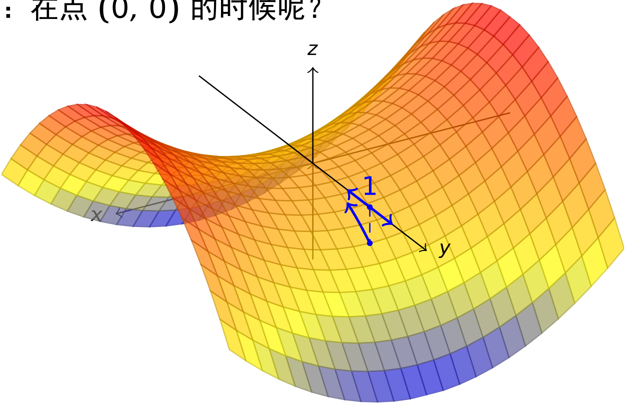
例 函数 $z = x^2 - y^2$ 在点 $(0, 1)$ 沿什么方向，其增加、减少的速度最大？并思考：在点 $(0, 0)$ 的时候呢？



解 梯度 $\nabla z = (2x, -2y)$，所以在点 $(0, 1)$ 时，

- 沿方向 $\nabla z(0, 1) = (0, -2)$增加最快
- 沿方向 $-\nabla z(0, 1) = (0, 2)$减少最快

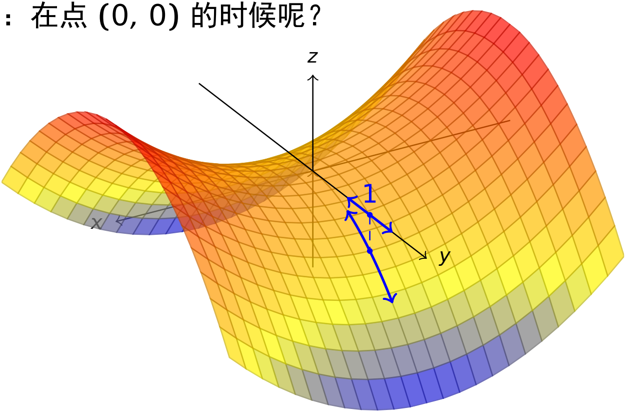
例 函数 $z = x^2 - y^2$ 在点 $(0, 1)$ 沿什么方向，其增加、减少的速度最大？并思考：在点 $(0, 0)$ 的时候呢？



解 梯度 $\nabla z = (2x, -2y)$，所以在点 $(0, 1)$ 时，

- 沿方向 $\nabla z(0, 1) = (0, -2)$增加最快
- 沿方向 $-\nabla z(0, 1) = (0, 2)$减少最快

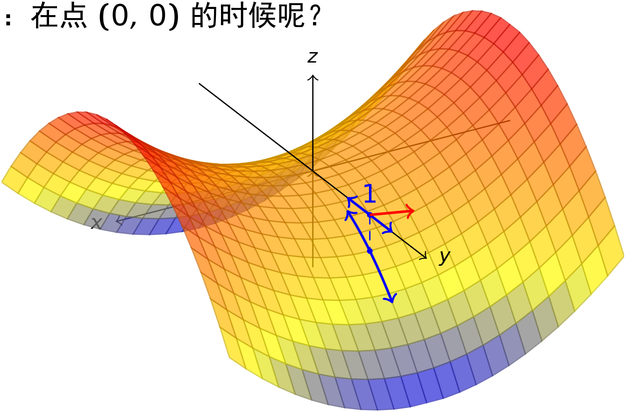
例 函数 $z = x^2 - y^2$ 在点 $(0, 1)$ 沿什么方向，其增加、减少的速度最大？并思考：在点 $(0, 0)$ 的时候呢？



解 梯度 $\nabla z = (2x, -2y)$，所以在点 $(0, 1)$ 时，

- 沿方向 $\nabla z(0, 1) = (0, -2)$增加最快
- 沿方向 $-\nabla z(0, 1) = (0, 2)$减少最快

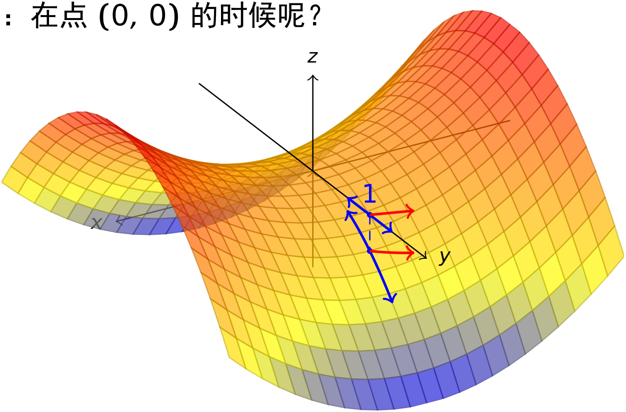
例 函数 $z = x^2 - y^2$ 在点 $(0, 1)$ 沿什么方向，其增加、减少的速度最大？并思考：在点 $(0, 0)$ 的时候呢？



解 梯度 $\nabla z = (2x, -2y)$，所以在点 $(0, 1)$ 时，

- 沿方向 $\nabla z(0, 1) = (0, -2)$增加最快
- 沿方向 $-\nabla z(0, 1) = (0, 2)$减少最快

例 函数 $z = x^2 - y^2$ 在点 $(0, 1)$ 沿什么方向，其增加、减少的速度最大？并思考：在点 $(0, 0)$ 的时候呢？



解 梯度 $\nabla z = (2x, -2y)$，所以在点 $(0, 1)$ 时，

- 沿方向 $\nabla z(0, 1) = (0, -2)$增加最快
- 沿方向 $-\nabla z(0, 1) = (0, 2)$减少最快

三元函数梯度

- 三元函数 $z=f(x,y,z)$ 在点 $p_0(x_0,y_0,z_0)$ 的梯度：

三元函数梯度

- 三元函数 $z = f(x, y, z)$ 在点 $p_0(x_0, y_0, z_0)$ 的梯度：

$$\Big(f_x(x_0, y_0, z_0), f_y(x_0, y_0, z_0), f_z(x_0, y_0, z_0)\Big)$$

三元函数梯度

- 三元函数 $z = f(x, y, z)$ 在点 $p_0(x_0, y_0, z_0)$ 的梯度：

$$f_x(x_0, y_0, z_0)\overrightarrow{i} + f_y(x_0, y_0, z_0)\overrightarrow{j} + f_z(x_0, y_0, z_0)\overrightarrow{k}$$

$$= \Big(f_x(x_0, y_0, z_0), f_y(x_0, y_0, z_0), f_z(x_0, y_0, z_0)\Big)$$

三元函数梯度

- 三元函数 $z = f(x, y, z)$ 在点 $p_0(x_0, y_0, z_0)$ 的梯度：

$$\operatorname{grad} f(x_0, y_0, z_0) \xlongequal{\text{或}} \nabla f(x_0, y_0, z_0)$$

$$= f_x(x_0, y_0, z_0)\overrightarrow{i} + f_y(x_0, y_0, z_0)\overrightarrow{j} + f_z(x_0, y_0, z_0)\overrightarrow{k}$$

$$= \Big(f_x(x_0, y_0, z_0), f_y(x_0, y_0, z_0), f_z(x_0, y_0, z_0)\Big)$$

三元函数梯度

- 三元函数 $z = f(x, y, z)$ 在点 $p_0(x_0, y_0, z_0)$ 的梯度：

$$\operatorname{grad} f(x_0, y_0, z_0) \xlongequal{\text{或}} \nabla f(x_0, y_0, z_0)$$
$$= f_x(x_0, y_0, z_0)\overrightarrow{i} + f_y(x_0, y_0, z_0)\overrightarrow{j} + f_z(x_0, y_0, z_0)\overrightarrow{k}$$
$$= \Big(f_x(x_0, y_0, z_0), f_y(x_0, y_0, z_0), f_z(x_0, y_0, z_0)\Big)$$

当 $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$ 时，则函数在点 (x_0, y_0) 处，

- 沿梯度方向，增加速度最快，
- 沿梯度反方向，减少速度最快，
- 梯度垂直方向，其改变率为零

三元函数梯度

- 三元函数 $z = f(x, y, z)$ 在点 $p_0(x_0, y_0, z_0)$ 的梯度：

$$\text{grad}\, f(x_0, y_0, z_0) \xlongequal{\text{或}} \nabla f(x_0, y_0, z_0)$$
$$= f_x(x_0, y_0, z_0)\overrightarrow{i} + f_y(x_0, y_0, z_0)\overrightarrow{j} + f_z(x_0, y_0, z_0)\overrightarrow{k}$$
$$= \Big(f_x(x_0, y_0, z_0), f_y(x_0, y_0, z_0), f_z(x_0, y_0, z_0)\Big)$$

当 $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$ 时，则函数在点 (x_0, y_0) 处，

- 沿梯度方向，增加速度最快，达到 $|\nabla f(x_0, y_0)|$
- 沿梯度反方向，减少速度最快，
- 梯度垂直方向，其改变率为零

三元函数梯度

- 三元函数 $z=f(x,y,z)$ 在点 $p_0(x_0,y_0,z_0)$ 的梯度：

$$\operatorname{grad} f(x_0,y_0,z_0) \xlongequal{\text{或}} \nabla f(x_0,y_0,z_0)$$

$$= f_x(x_0,y_0,z_0)\overrightarrow{i} + f_y(x_0,y_0,z_0)\overrightarrow{j} + f_z(x_0,y_0,z_0)\overrightarrow{k}$$

$$= \Big(f_x(x_0,y_0,z_0), f_y(x_0,y_0,z_0), f_z(x_0,y_0,z_0)\Big)$$

当 $\nabla f(x_0,y_0)\neq 0$ 时，则函数在点 (x_0,y_0) 处，

- 沿梯度方向，增加速度最快，达到 $|\nabla f(x_0,y_0)|$
- 沿梯度反方向，减少速度最快，达到 $-|\nabla f(x_0,y_0)|$
- 梯度垂直方向，其改变率为零

例 设 $f(x,y,z)=-x^3+xy^2+z$，$p_0(0.5,0.5,1)$。问：f 在 p_0 点沿什么方向变化最快，变化率是多少？

例 设 $f(x,y,z)=-x^3+xy^2+z$，$p_0(0.5,0.5,1)$。问：f 在 p_0 点沿什么方向变化最快，变化率是多少？

解 1. f 的梯度是

$$\nabla f=(f_x,f_y,f_z)=(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)$$

例 设 $f(x,y,z)=-x^3+xy^2+z$，$p_0(0.5,0.5,1)$。问：f 在 p_0 点沿什么方向变化最快，变化率是多少？

解 1. f 的梯度是

$$\nabla f=(f_x,f_y,f_z)=(-3x^2+y^2,\qquad\qquad)$$

例 设 $f(x,y,z)=-x^3+xy^2+z$，$p_0(0.5,0.5,1)$。问：f 在 p_0 点沿什么方向变化最快，变化率是多少？

解 1. f 的梯度是

$$\nabla f=(f_x,f_y,f_z)=(-3x^2+y^2,\ 2xy,\quad)$$

例 设 $f(x, y, z) = -x^3 + xy^2 + z$，$p_0(0.5, 0.5, 1)$。问：$f$ 在 p_0 点沿什么方向变化最快，变化率是多少？

解 1. f 的梯度是

$$\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = (-3x^2 + y^2, 2xy, 1)$$

例 设 $f(x, y, z) = -x^3 + xy^2 + z$，$p_0(0.5, 0.5, 1)$。问：$f$ 在 p_0 点沿什么方向变化最快，变化率是多少？

解 1. f 的梯度是

$$\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = (-3x^2 + y^2, 2xy, 1)$$

所以 $\nabla f(0.5, 0.5, 1) =$

例 设 $f(x, y, z) = -x^3 + xy^2 + z$，$p_0(0.5, 0.5, 1)$。问：$f$ 在 p_0 点沿什么方向变化最快，变化率是多少？

解 1. f 的梯度是

$$\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = (-3x^2 + y^2, 2xy, 1)$$

所以 $\nabla f(0.5, 0.5, 1) = (-0.5, 0.5, 1)$

例 设 $f(x, y, z) = -x^3 + xy^2 + z$，$p_0(0.5, 0.5, 1)$。问：$f$ 在 p_0 点沿什么方向变化最快，变化率是多少？

解 1. f 的梯度是

$$\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = (-3x^2 + y^2, 2xy, 1)$$

所以 $\nabla f(0.5, 0.5, 1) = (-0.5, 0.5, 1)$

2. 函数沿梯度方向 $\nabla f(1, 1, 0)$ ，增加速度最大，达到 $|\nabla f(x_0, y_0)|$

例 设 $f(x, y, z) = -x^3 + xy^2 + z$，$p_0(0.5, 0.5, 1)$。问：$f$ 在 p_0 点沿什么方向变化最快，变化率是多少？

解 1. f 的梯度是

$$\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = (-3x^2 + y^2, 2xy, 1)$$

所以 $\nabla f(0.5, 0.5, 1) = (-0.5, 0.5, 1)$

2. 函数沿梯度方向 $\nabla f(1, 1, 0) = (2, -2, -1)$，增加速度最大，达到 $|\nabla f(x_0, y_0)|$

例 设 $f(x, y, z) = -x^3 + xy^2 + z$，$p_0(0.5, 0.5, 1)$。问：$f$ 在 p_0 点沿什么方向变化最快，变化率是多少？

解 1. f 的梯度是

$$\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = (-3x^2 + y^2, 2xy, 1)$$

所以 $\nabla f(0.5, 0.5, 1) = (-0.5, 0.5, 1)$

2. 函数沿梯度方向 $\nabla f(1, 1, 0) = (2, -2, -1)$，增加速度最大，达到 $|\nabla f(x_0, y_0)| = 3$

例 设 $f(x, y, z) = -x^3 + xy^2 + z$，$p_0(0.5, 0.5, 1)$。问：$f$ 在 p_0 点沿什么方向变化最快，变化率是多少？

解 1. f 的梯度是

$$\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = (-3x^2 + y^2, 2xy, 1)$$

所以 $\nabla f(0.5, 0.5, 1) = (-0.5, 0.5, 1)$

2. 函数沿梯度方向 $\nabla f(1, 1, 0) = (2, -2, -1)$，增加速度最大，达到 $|\nabla f(x_0, y_0)| = 3$

3. 函数沿梯度反方向 $-\nabla f(1, 1, 0)$　　　　　　，减少速度最大，达到 $-|\nabla f(x_0, y_0)|$

例 设 $f(x, y, z) = -x^3 + xy^2 + z$，$p_0(0.5, 0.5, 1)$。问：$f$ 在 p_0 点沿什么方向变化最快，变化率是多少？

解 1. f 的梯度是

$$\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = (-3x^2 + y^2, 2xy, 1)$$

所以 $\nabla f(0.5, 0.5, 1) = (-0.5, 0.5, 1)$

2. 函数沿梯度方向 $\nabla f(1, 1, 0) = (2, -2, -1)$，增加速度最大，达到 $|\nabla f(x_0, y_0)| = 3$

3. 函数沿梯度反方向 $-\nabla f(1, 1, 0) = (-2, 2, 1)$，减少速度最大，达到 $-|\nabla f(x_0, y_0)|$

例 设 $f(x, y, z) = -x^3 + xy^2 + z$，$p_0(0.5, 0.5, 1)$。问：$f$ 在 p_0 点沿什么方向变化最快，变化率是多少？

解 1. f 的梯度是

$$\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = (-3x^2 + y^2, 2xy, 1)$$

所以 $\nabla f(0.5, 0.5, 1) = (-0.5, 0.5, 1)$

2. 函数沿梯度方向 $\nabla f(1, 1, 0) = (2, -2, -1)$，增加速度最大，达到 $|\nabla f(x_0, y_0)| = 3$

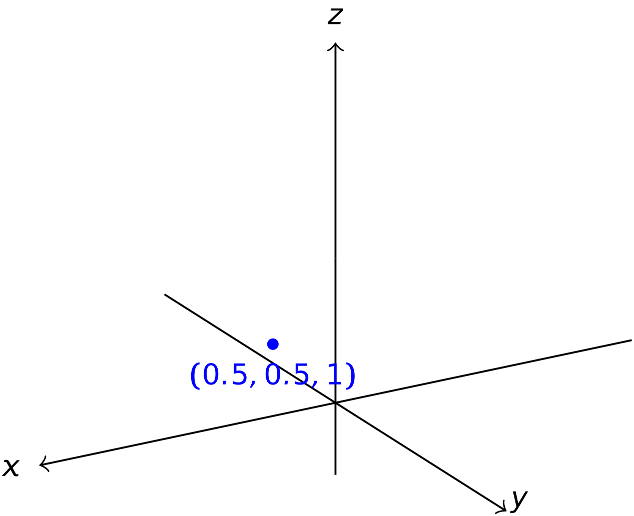
3. 函数沿梯度反方向 $-\nabla f(1, 1, 0) = (-2, 2, 1)$，减少速度最大，达到 $-|\nabla f(x_0, y_0)| = -3$

函数 $f(x, y, z) = -x^3 + xy^2 + z$

- 在点 $p_0(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ 的梯度
- 等值面与梯度向量场

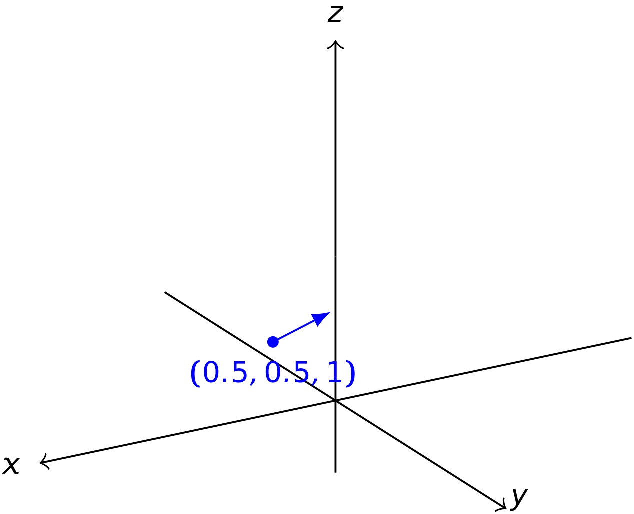
函数 $f(x, y, z) = -x^3 + xy^2 + z$

- 在点 $p_0(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ 的梯度
- 等值面与梯度向量场



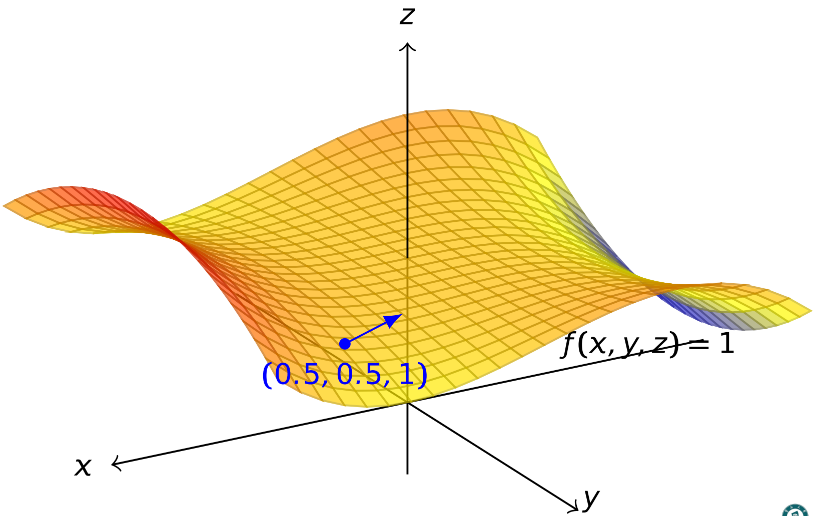
函数 $f(x, y, z) = -x^3 + xy^2 + z$

- 在点 $p_0(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ 的梯度
- 等值面与梯度向量场



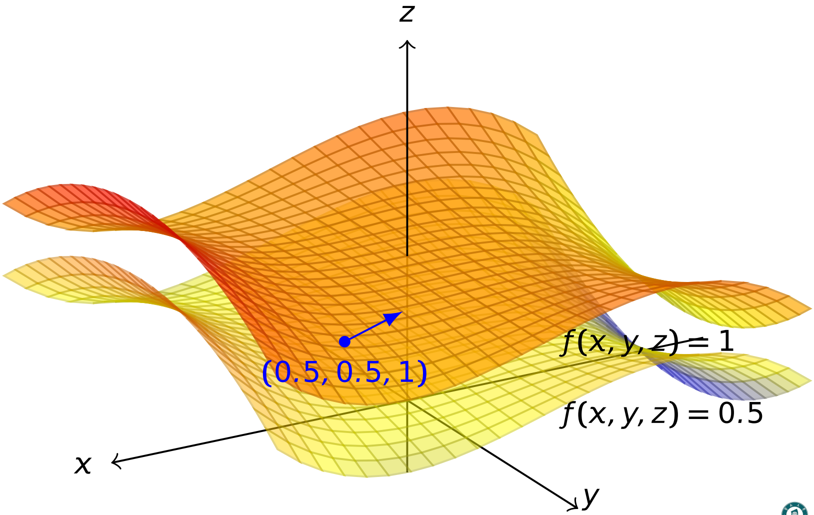
函数 $f(x,y,z) = -x^3 + xy^2 + z$

- 在点 $p_0(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ 的梯度
- 等值面与梯度向量场



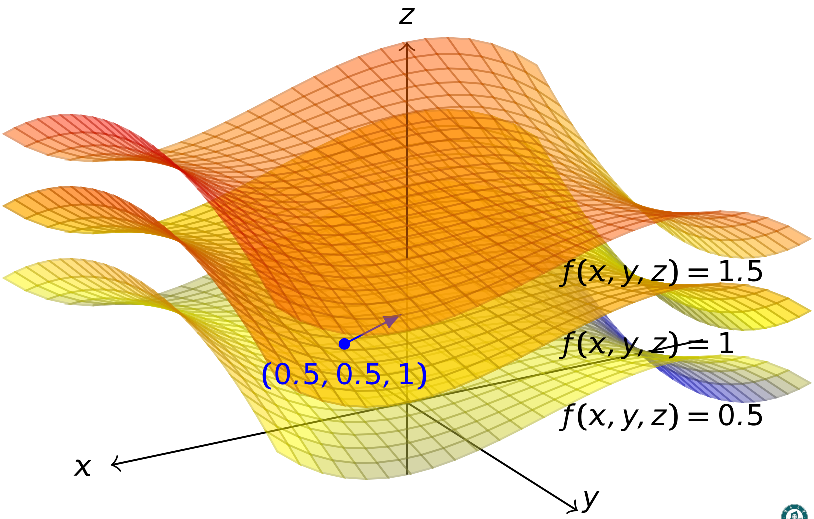
函数 $f(x, y, z) = -x^3 + xy^2 + z$

- 在点 $p_0(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ 的梯度
- 等值面与梯度向量场



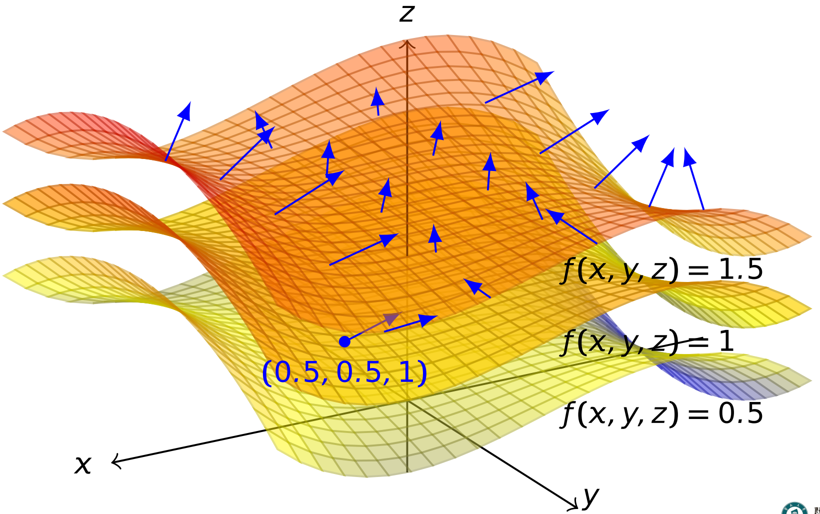
函数 $f(x, y, z) = -x^3 + xy^2 + z$

- 在点 $p_0(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ 的梯度
- 等值面与梯度向量场



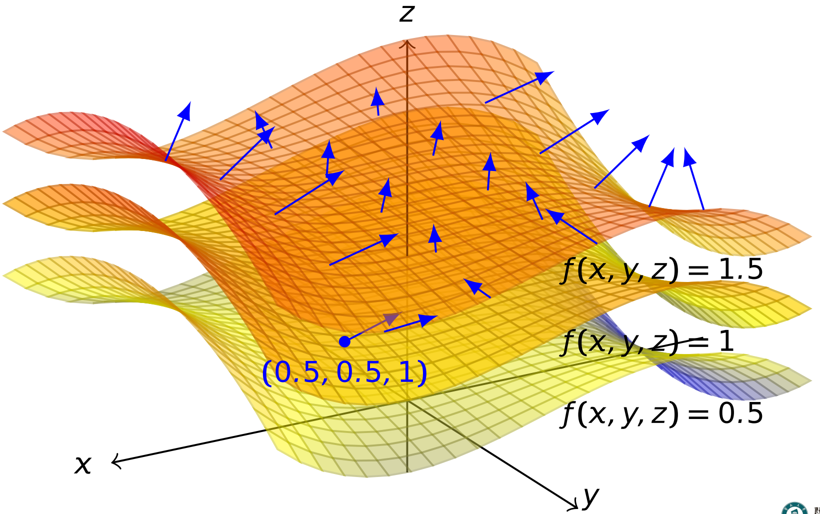
函数 $f(x, y, z) = -x^3 + xy^2 + z$

- 在点 $p_0(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ 的梯度
- 等值面与梯度向量场



函数 $f(x,y,z) = -x^3 + xy^2 + z$

- 在点 $p_0(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ 的梯度
- 等值面与梯度向量场（互相垂直）



设三元函数 $f(x, y, z)$ 在点 $p_0(x_0, y_0, z_0)$ 的一个邻域内有定义，设 ℓ 是从 p_0 出发的射线，方向向量为

$$e_\ell = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

设三元函数 $f(x, y, z)$ 在点 $p_0(x_0, y_0, z_0)$ 的一个邻域内有定义，设 ℓ 是从 p_0 出发的射线，方向向量为

$$e_\ell = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

则 $f(x, y, z)$ 在点 p_0 处沿方向 ℓ 的变化率，即方向导数 ，为

设三元函数 $f(x, y, z)$ 在点 $p_0(x_0, y_0, z_0)$ 的一个邻域内有定义，设 ℓ 是从 p_0 出发的射线，方向向量为

$$e_\ell = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

则 $f(x, y, z)$ 在点 p_0 处沿方向 ℓ 的变化率，即方向导数，为

$$\frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{t}$$

设三元函数 $f(x, y, z)$ 在点 $p_0(x_0, y_0, z_0)$ 的一个邻域内有定义，设 ℓ 是从 p_0 出发的射线，方向向量为

$$e_\ell = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

则 $f(x, y, z)$ 在点 p_0 处沿方向 ℓ 的变化率，即方向导数，为

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{t}$$

设三元函数 $f(x, y, z)$ 在点 $p_0(x_0, y_0, z_0)$ 的一个邻域内有定义，设 ℓ 是从 p_0 出发的射线，方向向量为

$$e_\ell = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

则 $f(x, y, z)$ 在点 p_0 处沿方向 ℓ 的变化率，即方向导数，为 $\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0, y_0, z_0)}$：

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{t}$$

设三元函数 $f(x,y,z)$ 在点 $p_0(x_0,y_0,z_0)$ 的一个邻域内有定义，设 ℓ 是从 p_0 出发的射线，方向向量为

$$e_\ell=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$$

则 $f(x,y,z)$ 在点 p_0 处沿方向 ℓ 的变化率，即方向导数 ，为 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}$:

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta,z_0+t\cos\gamma)-f(x_0,y_0,z_0)}{t}$$

$$=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta,z_0+t\cos\gamma)$$

设三元函数 $f(x, y, z)$ 在点 $p_0(x_0, y_0, z_0)$ 的一个邻域内有定义，设 ℓ 是从 p_0 出发的射线，方向向量为

$$e_\ell = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

则 $f(x, y, z)$ 在点 p_0 处沿方向 ℓ 的变化率，即方向导数，为 $\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0, y_0, z_0)}$:

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta, z_0+t\cos\gamma)-f(x_0, y_0, z_0)}{t}$$

$$= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta, z_0+t\cos\gamma)$$

$$= f_x(x_0, y_0, z_0)\cos\alpha + f_y(x_0, y_0, z_0)\cos\beta + f_z(x_0, y_0, z_0)\cos\gamma$$

设三元函数 $f(x,y,z)$ 在点 $p_0(x_0,y_0,z_0)$ 的一个邻域内有定义，设 ℓ 是从 p_0 出发的射线，方向向量为

$$e_\ell = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

则 $f(x,y,z)$ 在点 p_0 处沿方向 ℓ 的变化率，即方向导数，为 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}$：

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta, z_0+t\cos\gamma) - f(x_0,y_0,z_0)}{t}$$

$$= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta, z_0+t\cos\gamma)$$

$$= f_x(x_0,y_0,z_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0,z_0)\cos\beta + f_z(x_0,y_0,z_0)\cos\gamma$$

$$= \nabla f(x_0,y_0,z_0)\cdot e_\ell$$

设三元函数 $f(x, y, z)$ 在点 $p_0(x_0, y_0, z_0)$ 的一个邻域内有定义，设 ℓ 是从 p_0 出发的射线，方向向量为

$$e_\ell = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

则 $f(x, y, z)$ 在点 p_0 处沿方向 ℓ 的变化率，即方向导数，为 $\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{(x_0, y_0, z_0)}$：

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{t} \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma) \\
&= f_x(x_0, y_0, z_0)\cos\alpha + f_y(x_0, y_0, z_0)\cos\beta + f_z(x_0, y_0, z_0)\cos\gamma \\
&= \nabla f(x_0, y_0, z_0)\cdot e_\ell = |\nabla f|\cos\theta
\end{aligned}
$$

其中 θ 是 $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ 与 e_ℓ 的夹角