第 4 章 a：不定积分的概念与性质

数学系　　梁卓滨

2019-2020 学年 I

Outline

1. “原函数”与“不定积分”的概念

2. 不定积分的性质

3. 不定积分的几何意义

4. 利用基本积分表求积分

We are here now...

1. “原函数”与“不定积分”的概念
2. 不定积分的性质
3. 不定积分的几何意义
4. 利用基本积分表求积分

复习：求导

求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法，隐函数法

复习：求导

求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法，隐函数法

1. $(x^3)' = \_\_\_\_\_$; $(x^{7/5})' = \_\_\_\_\_$; $(x^{-1/2})' = \_\_\_\_\_\_\_$;
2. $(x^\alpha)' = \_\_\_\_\_$;

复习：求导

求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法，隐函数法

1. $(x^3)' = $ _____; $(x^{7/5})' = $ _____; $(x^{-1/2})' = $ _______;
2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{?}}$;

复习：求导

求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法，隐函数法

1. $(x^3)' =$ _____; $(x^{7/5})' =$ _____; $(x^{-1/2})' =$ _____;
2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$;

复习：求导

求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法，隐函数法

1. $(x^3)' = \underline{3x^?}$; $(x^{7/5})' = \underline{\qquad}$; $(x^{-1/2})' = \underline{\qquad\quad}$;
2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$;

复习：求导

求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法，隐函数法

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$； $(x^{7/5})' = \underline{\qquad\quad}$； $(x^{-1/2})' = \underline{\qquad\qquad}$；
2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$；

复习：求导

求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法，隐函数求法

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$； $(x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^{?}}$； $(x^{-1/2})' = \underline{\qquad\qquad}$；
2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$；

复习：求导

求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法，隐函数法

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$； $(x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}$； $(x^{-1/2})' = \underline{\qquad\qquad}$；
2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$；

复习：求导

求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法，隐函数法

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$; $(x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}$; $(x^{-1/2})' = \underline{-\frac{1}{2}x^{?}}$;
2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$;

复习：求导

求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法，隐函数法

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$;　$(x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}$;　$(x^{-1/2})' = \underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}$;
2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$;

复习：求导

求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法，隐函数求导法

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$；　$(x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}$；　$(x^{-1/2})' = \underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}$；
2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$；
3. $(\sin x)' = \underline{\qquad}$；　$(\cos x)' = \underline{\qquad}$；
   $(\tan x)' = \underline{\qquad}$；　$(\cot x)' = \underline{\qquad}$；
4. $(\arcsin x)' = \underline{\qquad}$；　$(\arctan x)' = \underline{\qquad}$；

暨南大学 JINAN UNIVERSITY

复习：求导

求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法，隐函数求导法

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$； $(x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}$； $(x^{-1/2})' = \underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}$；
2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$；
3. $(\sin x)' = \underline{\cos x}$； $(\cos x)' = \underline{\qquad\qquad}$；

   $(\tan x)' = \underline{\qquad\qquad}$； $(\cot x)' = \underline{\qquad\qquad}$；
4. $(\arcsin x)' = \underline{\qquad\qquad}$； $(\arctan x)' = \underline{\qquad\qquad}$；

复习：求导

求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法，隐函数数法

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$; $(x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}$; $(x^{-1/2})' = \underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}$;
2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$;
3. $(\sin x)' = \underline{\cos x}$; $(\cos x)' = \underline{-\sin x}$;

   $(\tan x)' = \underline{\qquad}$; $(\cot x)' = \underline{\qquad}$;
4. $(\arcsin x)' = \underline{\qquad}$; $(\arctan x)' = \underline{\qquad}$;

复习：求导

求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法，隐函数法

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$； $(x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}$； $(x^{-1/2})' = \underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}$；
2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$；
3. $(\sin x)' = \underline{\cos x}$； $(\cos x)' = \underline{-\sin x}$；

   $(\tan x)' = \underline{\frac{1}{\cos^2 x}}$； $(\cot x)' = \underline{\qquad\qquad}$；
4. $(\arcsin x)' = \underline{\qquad\qquad}$； $(\arctan x)' = \underline{\qquad\qquad}$；

复习：求导

求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法，隐函数法

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$；　$(x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}$；　$(x^{-1/2})' = \underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}$；
2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$；
3. $(\sin x)' = \underline{\cos x}$；　$(\cos x)' = \underline{-\sin x}$；

   $(\tan x)' = \underline{\frac{1}{\cos^2 x}}$；　$(\cot x)' = \underline{-\frac{1}{\sin^2 x}}$；
4. $(\arcsin x)' = \underline{\qquad\qquad}$；　$(\arctan x)' = \underline{\qquad\quad}$；

复习：求导

求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法，隐函数法

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$; $(x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}$; $(x^{-1/2})' = \underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}$;
2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$;
3. $(\sin x)' = \underline{\cos x}$; $(\cos x)' = \underline{-\sin x}$;

   $(\tan x)' = \underline{\frac{1}{\cos^2 x}}$; $(\cot x)' = \underline{-\frac{1}{\sin^2 x}}$;
4. $(\arcsin x)' = \underline{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$; $(\arctan x)' = \underline{\qquad}$;

暨南大学 JINAN UNIVERSITY

复习：求导

求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法，隐函数法

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$; $(x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}$; $(x^{-1/2})' = \underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}$;
2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$;
3. $(\sin x)' = \underline{\cos x}$; $(\cos x)' = \underline{-\sin x}$;
   $(\tan x)' = \underline{\frac{1}{\cos^2 x}}$; $(\cot x)' = \underline{-\frac{1}{\sin^2 x}}$;
4. $(\arcsin x)' = \underline{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$; $(\arctan x)' = \underline{\frac{1}{1+x^2}}$;

复习：求导

求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法，隐函数法

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$; $(x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}$; $(x^{-1/2})' = \underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}$;
2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$;
3. $(\sin x)' = \underline{\cos x}$; $(\cos x)' = \underline{-\sin x}$;

   $(\tan x)' = \underline{\frac{1}{\cos^2 x}}$; $(\cot x)' = \underline{-\frac{1}{\sin^2 x}}$;
4. $(\arcsin x)' = \underline{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$; $(\arctan x)' = \underline{\frac{1}{1+x^2}}$;
5. $(e^x)' = \_\_\_$; $(a^x)' = \_\_\_\_\_\_ (a > 0)$; $(5^x)' = \_\_\_\_\_\_$;
6. $(\ln x)' = \_\_ (x > 0)$; $\left(\ln(1+x^2)\right)' = \_\_\_\_$.

复习：求导

求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法，隐函数法

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$; $(x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}$; $(x^{-1/2})' = \underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}$;
2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$;
3. $(\sin x)' = \underline{\cos x}$; $(\cos x)' = \underline{-\sin x}$;

   $(\tan x)' = \underline{\frac{1}{\cos^2 x}}$; $(\cot x)' = \underline{-\frac{1}{\sin^2 x}}$;
4. $(\arcsin x)' = \underline{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$; $(\arctan x)' = \underline{\frac{1}{1+x^2}}$;
5. $(e^x)' = \underline{e^x}$; $(a^x)' =$ ______ $(a > 0)$; $(5^x)' =$ ______;
6. $(\ln x)' =$ __ $(x > 0)$; $\left(\ln(1+x^2)\right)' =$ _____.

复习：求导

求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法，隐函数法

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$; $(x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}$; $(x^{-1/2})' = \underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}$;
2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$;
3. $(\sin x)' = \underline{\cos x}$; $(\cos x)' = \underline{-\sin x}$;
   $(\tan x)' = \underline{\frac{1}{\cos^2 x}}$; $(\cot x)' = \underline{-\frac{1}{\sin^2 x}}$;
4. $(\arcsin x)' = \underline{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$; $(\arctan x)' = \underline{\frac{1}{1+x^2}}$;
5. $(e^x)' = \underline{e^x}$; $(a^x)' = \underline{a^x \ln a}$ $(a > 0)$; $(5^x)' = $ ______;
6. $(\ln x)' = $ __ $(x > 0)$; $\left(\ln(1 + x^2)\right)' = $ _____.

复习：求导

求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法，隐函数法

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$; $(x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}$; $(x^{-1/2})' = \underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}$;
2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$;
3. $(\sin x)' = \underline{\cos x}$; $(\cos x)' = \underline{-\sin x}$;
   $(\tan x)' = \underline{\frac{1}{\cos^2 x}}$; $(\cot x)' = \underline{-\frac{1}{\sin^2 x}}$;
4. $(\arcsin x)' = \underline{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$; $(\arctan x)' = \underline{\frac{1}{1+x^2}}$;
5. $(e^x)' = \underline{e^x}$; $(a^x)' = \underline{a^x \ln a}\ (a > 0)$; $(5^x)' = \underline{5^x \ln 5}$;
6. $(\ln x)' = \underline{\quad}\ (x > 0)$; $\left(\ln(1+x^2)\right)' = \underline{\qquad}$.

复习：求导

求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法，隐函数法

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$; $(x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}$; $(x^{-1/2})' = \underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}$;
2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$;
3. $(\sin x)' = \underline{\cos x}$; $(\cos x)' = \underline{-\sin x}$;
   $(\tan x)' = \underline{\frac{1}{\cos^2 x}}$; $(\cot x)' = \underline{-\frac{1}{\sin^2 x}}$;
4. $(\arcsin x)' = \underline{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$; $(\arctan x)' = \underline{\frac{1}{1+x^2}}$;
5. $(e^x)' = \underline{e^x}$; $(a^x)' = \underline{a^x \ln a}$ $(a > 0)$; $(5^x)' = \underline{5^x \ln 5}$;
6. $(\ln x)' = \underline{\frac{1}{x}}$ $(x > 0)$; $\left(\ln(1 + x^2)\right)' = \underline{\qquad}$.

复习：求导

求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法，隐函数法

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$; $(x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}$; $(x^{-1/2})' = \underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}$;
2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$;
3. $(\sin x)' = \underline{\cos x}$; $(\cos x)' = \underline{-\sin x}$;
   $(\tan x)' = \underline{\frac{1}{\cos^2 x}}$; $(\cot x)' = \underline{-\frac{1}{\sin^2 x}}$;
4. $(\arcsin x)' = \underline{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$; $(\arctan x)' = \underline{\frac{1}{1+x^2}}$;
5. $(e^x)' = \underline{e^x}$; $(a^x)' = \underline{a^x \ln a}$ $(a > 0)$; $(5^x)' = \underline{5^x \ln 5}$;
6. $(\ln x)' = \underline{\frac{1}{x}}$ $(x > 0)$; $\left(\ln(1+x^2)\right)' = \underline{\frac{2x}{1+x^2}}$.

复习：求导

求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法，隐函数法

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$; $(x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}$; $(x^{-1/2})' = \underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}$;
2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$;
3. $(\sin x)' = \underline{\cos x}$; $(\cos x)' = \underline{-\sin x}$;
   $(\tan x)' = \underline{\frac{1}{\cos^2 x}}$; $(\cot x)' = \underline{-\frac{1}{\sin^2 x}}$;
4. $(\arcsin x)' = \underline{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$; $(\arctan x)' = \underline{\frac{1}{1+x^2}}$;
5. $(e^x)' = \underline{e^x}$; $(a^x)' = \underline{a^x \ln a}\ (a>0)$; $(5^x)' = \underline{5^x \ln 5}$;
6. $(\ln x)' = \underline{\frac{1}{x}}\ (x>0)$; $\left(\ln(1+x^2)\right)' = \underline{\frac{2x}{1+x^2}}$.
7. $d\left(\ln(1+x^2)\right) = \underline{\qquad\qquad}\, dx$

复习：求导

求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法，隐函数法

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$; $\quad (x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}$; $\quad (x^{-1/2})' = \underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}$;
2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$;
3. $(\sin x)' = \underline{\cos x}$; $\quad (\cos x)' = \underline{-\sin x}$;

   $(\tan x)' = \underline{\frac{1}{\cos^2 x}}$; $\quad (\cot x)' = \underline{-\frac{1}{\sin^2 x}}$;
4. $(\arcsin x)' = \underline{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$; $\quad (\arctan x)' = \underline{\frac{1}{1+x^2}}$;
5. $(e^x)' = \underline{e^x}$; $\quad (a^x)' = \underline{a^x \ln a}\ (a > 0)$; $\quad (5^x)' = \underline{5^x \ln 5}$;
6. $(\ln x)' = \underline{\frac{1}{x}}\ (x > 0)$; $\quad \left(\ln(1 + x^2)\right)' = \underline{\frac{2x}{1+x^2}}$.
7. $d\left(\ln(1 + x^2)\right) = \underline{\left(\ln(1 + x^2)\right)'}\, dx$

复习：求导

求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法，隐函数法

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$; $\quad (x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}$; $\quad (x^{-1/2})' = \underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}$;
2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$;
3. $(\sin x)' = \underline{\cos x}$; $\quad (\cos x)' = \underline{-\sin x}$;
   $(\tan x)' = \underline{\frac{1}{\cos^2 x}}$; $\quad (\cot x)' = \underline{-\frac{1}{\sin^2 x}}$;
4. $(\arcsin x)' = \underline{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$; $\quad (\arctan x)' = \underline{\frac{1}{1+x^2}}$;
5. $(e^x)' = \underline{e^x}$; $\quad (a^x)' = \underline{a^x \ln a}$ $(a > 0)$; $\quad (5^x)' = \underline{5^x \ln 5}$;
6. $(\ln x)' = \underline{\frac{1}{x}}$ $(x > 0)$; $\quad \left(\ln(1+x^2)\right)' = \underline{\frac{2x}{1+x^2}}$.
7. $d\left(\ln(1+x^2)\right) = \underline{\left(\ln(1+x^2)\right)'}\,dx = \underline{\frac{2x}{1+x^2}}\,dx$

复习：求导

求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法，隐函数法

1. $(\quad)' = \underline{3x^2}$；　$(\qquad)' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}$；　$(\qquad\quad)' = \underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}$；

2. $(\quad)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$；

3. $(\qquad)' = \underline{\cos x}$；　$(\qquad)' = \underline{-\sin x}$；

   $(\qquad)' = \underline{\frac{1}{\cos^2 x}}$；　$(\qquad)' = \underline{-\frac{1}{\sin^2 x}}$；

4. $(\qquad\qquad)' = \underline{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$；　$(\qquad\qquad)' = \underline{\frac{1}{1+x^2}}$；

5. $(\quad)' = \underline{e^x}$；　$(\quad)' = \underline{a^x \ln a}\ (a > 0)$；　$(\quad)' = \underline{5^x \ln 5}$；

6. $(\qquad = \underline{\frac{1}{x}}\ (x > 0)$；　$\left(\qquad\qquad\right)' = \underline{\frac{2x}{1+x^2}}$.

7. $d\left(\qquad\qquad\right) = \underline{\left(\ln(1+x^2)\right)' dx} = \underline{\frac{2x}{1+x^2}} dx$

原函数的定义

定义 设函数 $f(x)$ 定义在区间 (a, b) 上，如果存在一个函数 $F(x)$ 满足:

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b)$$

则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在该区间上的一个**原函数**.

原函数的定义

定义 设函数 $f(x)$ 定义在区间 (a, b) 上，如果存在一个函数 $F(x)$ 满足:

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b)$$

则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在该区间上的一个**原函数**.

例 设路程函数为 $s = s(t)$，速度函数为 $v = v(t)$，则

$$s'(t) = v(t).$$

原函数的定义

定义 设函数 $f(x)$ 定义在区间 (a, b) 上，如果存在一个函数 $F(x)$ 满足:

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b)$$

则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在该区间上的一个**原函数**.

例 设路程函数为 $s = s(t)$，速度函数为 $v = v(t)$，则

$$s'(t) = v(t).$$

所以 $v(t)$ 是 $s(t)$ 的导数，$s(t)$ 是 $v(t)$ 的原函数.

现阶段求原函数：猜

例 求下列函数的一个原函数：

1. $f(x) = x^2, \quad x \in (-\infty, +\infty)$
2. $f(x) = \sin x, \quad x \in (-\infty, +\infty)$
3. $f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

现阶段求原函数：猜

例 求下列函数的一个原函数：

1. $f(x) = x^2, \quad x \in (-\infty, +\infty)$
2. $f(x) = \sin x, \quad x \in (-\infty, +\infty)$
3. $f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

利用求导基本公式去“猜”

现阶段求原函数：猜

例 求下列函数的一个原函数：

1. $f(x) = x^2, \quad x \in (-\infty, +\infty)$
2. $f(x) = \sin x, \quad x \in (-\infty, +\infty)$
3. $f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

利用求导基本公式去“猜”

1. $\left(\qquad \right)' = x^2$

现阶段求原函数：猜

例 求下列函数的一个原函数：

1. $f(x) = x^2, \quad x \in (-\infty, +\infty)$
2. $f(x) = \sin x, \quad x \in (-\infty, +\infty)$
3. $f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

利用求导基本公式去“猜”

1. $(x^3)' = 3x^2 \qquad \Big(\qquad \Big)' = x^2$

现阶段求原函数：猜

例 求下列函数的一个原函数：

1. $f(x) = x^2, \quad x \in (-\infty, +\infty)$
2. $f(x) = \sin x, \quad x \in (-\infty, +\infty)$
3. $f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

利用求导基本公式去“猜”

1. $(x^3)' = 3x^2 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$

现阶段求原函数：猜

例 求下列函数的一个原函数：

1. $f(x) = x^2, \quad x \in (-\infty, +\infty)$
2. $f(x) = \sin x, \quad x \in (-\infty, +\infty)$
3. $f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

利用求导基本公式去“猜”

1. $(x^3)' = 3x^2 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$，所以 $\frac{1}{3}x^3$ 是 x^2 的一个原函数；

现阶段求原函数：猜

例 求下列函数的一个原函数：

1. $f(x) = x^2, \quad x \in (-\infty, +\infty)$
2. $f(x) = \sin x, \quad x \in (-\infty, +\infty)$
3. $f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

利用求导基本公式去“猜”

1. $(x^3)' = 3x^2 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$，所以 $\frac{1}{3}x^3$ 是 x^2 的一个原函数；
2. $(\qquad\qquad)' = \sin x$

现阶段求原函数：猜

例 求下列函数的一个原函数：

1. $f(x)=x^2, \quad x\in(-\infty,+\infty)$
2. $f(x)=\sin x, \quad x\in(-\infty,+\infty)$
3. $f(x)=\frac{1}{x}, \quad x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

利用求导基本公式去“猜”

1. $(x^3)'=3x^2 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}x^3\right)'=x^2$，所以 $\frac{1}{3}x^3$ 是 x^2 的一个原函数；
2. $(\cos x)'=-\sin x \qquad (\qquad\qquad)'=\sin x$

现阶段求原函数：猜

例 求下列函数的一个原函数：

1. $f(x)=x^2,\quad x\in(-\infty,+\infty)$
2. $f(x)=\sin x,\quad x\in(-\infty,+\infty)$
3. $f(x)=\frac{1}{x},\quad x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

利用求导基本公式去“猜”

1. $(x^3)'=3x^2 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}x^3\right)'=x^2$，所以 $\frac{1}{3}x^3$ 是 x^2 的一个原函数；
2. $(\cos x)'=-\sin x \Rightarrow (-\cos x)'=\sin x$

现阶段求原函数：猜

例 求下列函数的一个原函数：

1. $f(x) = x^2, \quad x \in (-\infty, +\infty)$
2. $f(x) = \sin x, \quad x \in (-\infty, +\infty)$
3. $f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

利用求导基本公式去“猜”

1. $(x^3)' = 3x^2 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$，所以 $\frac{1}{3}x^3$ 是 x^2 的一个原函数；
2. $(\cos x)' = -\sin x \Rightarrow (-\cos x)' = \sin x$，
   所以 $-\cos x$ 是 $\sin x$ 的一个原函数；

现阶段求原函数：猜

例 求下列函数的一个原函数：

1. $f(x) = x^2, \quad x \in (-\infty, +\infty)$
2. $f(x) = \sin x, \quad x \in (-\infty, +\infty)$
3. $f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

利用求导基本公式去“猜”

1. $(x^3)' = 3x^2 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$，所以 $\frac{1}{3}x^3$ 是 x^2 的一个原函数；
2. $(\cos x)' = -\sin x \Rightarrow (-\cos x)' = \sin x$，
   所以 $-\cos x$ 是 $\sin x$ 的一个原函数；
3. 直接验证 $\ln|x|$ 是 $\frac{1}{x}$ 的一个原函数。

验证 $\ln|x|$ 是 $\frac{1}{x}$ 的一个原函数，$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

验证

验证 $\ln|x|$ 是 $\frac{1}{x}$ 的一个原函数，$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

验证

- 当 $x > 0$ 时,

$$(\ln|x|)' =$$

- 当 $x < 0$ 时,

$$(\ln|x|)' =$$

验证 $\ln|x|$ 是 $\frac{1}{x}$ 的一个原函数，$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

验证

- 当 $x > 0$ 时，

$$(\ln|x|)' = (\ln x)' =$$

- 当 $x < 0$ 时，

$$(\ln|x|)' =$$

验证 $\ln|x|$ 是 $\frac{1}{x}$ 的一个原函数，$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

验证

- 当 $x > 0$ 时，

$$(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

- 当 $x < 0$ 时，

$$(\ln|x|)' =$$

验证 $\ln|x|$ 是 $\frac{1}{x}$ 的一个原函数，$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

验证

- 当 $x > 0$ 时，

$$(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

- 当 $x < 0$ 时，

$$(\ln|x|)' = (\ln(-x))' =$$

验证 $\ln|x|$ 是 $\frac{1}{x}$ 的一个原函数，$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

验证

- 当 $x > 0$ 时,

$$(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

- 当 $x < 0$ 时,

$$(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-x)' =$$

验证 $\ln|x|$ 是 $\frac{1}{x}$ 的一个原函数，$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

验证

- 当 $x > 0$ 时，

$$(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

- 当 $x < 0$ 时，

$$(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-x)' = \frac{1}{-x}(-1) =$$

验证 $\ln|x|$ 是 $\frac{1}{x}$ 的一个原函数，$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

验证

- 当 $x > 0$ 时，

$$(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

- 当 $x < 0$ 时，

$$(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-x)' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$$

验证 $\ln|x|$ 是 $\frac{1}{x}$ 的一个原函数，$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

验证

- 当 $x > 0$ 时，

$$(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

- 当 $x < 0$ 时，

$$(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-x)' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$$

总之，$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$，$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

验证 $\ln|x|$ 是 $\frac{1}{x}$ 的一个原函数，$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

验证

- 当 $x > 0$ 时，

$$(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

- 当 $x < 0$ 时，

$$(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-x)' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$$

总之，$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$，$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

所以，$\ln|x|$ 是 $\frac{1}{x}$ 的一个原函数.

练习

1. 求 x^α 的一个原函数，其中 $\alpha \neq -1$.
2. 求 e^{2x+1} 的一个原函数?

练习

1. 求 x^{α} 的一个原函数，其中 $\alpha \neq -1$.
2. 求 e^{2x+1} 的一个原函数?

解

练习

1. 求 x^α 的一个原函数，其中 $\alpha \neq -1$.
2. 求 e^{2x+1} 的一个原函数?

解

1. $$\Big(\qquad\qquad \Big)' = x^\alpha$$

练习

1. 求 x^{α} 的一个原函数，其中 $\alpha \neq -1$.
2. 求 e^{2x+1} 的一个原函数?

解

1. $\left(x^{\alpha+1}\right)'$ $\qquad\qquad\qquad \Bigg(\qquad\qquad\qquad\Bigg)' = x^{\alpha}$

练习

1. 求 x^{α} 的一个原函数，其中 $\alpha \neq -1$.
2. 求 e^{2x+1} 的一个原函数?

解

1. $\left(x^{\alpha+1}\right)' = (\alpha+1)x^{\alpha}$ $\qquad \left(\qquad\qquad\right)' = x^{\alpha}$

练习

1. 求 x^α 的一个原函数，其中 $\alpha \neq -1$.
2. 求 e^{2x+1} 的一个原函数?

解

1. $\left(x^{\alpha+1}\right)' = (\alpha+1)x^\alpha \Rightarrow \left(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right)' = x^\alpha$

练习

1. 求 x^α 的一个原函数，其中 $\alpha \neq -1$.
2. 求 e^{2x+1} 的一个原函数?

解

1. $\left(x^{\alpha+1}\right)' = (\alpha+1)x^\alpha \Rightarrow \left(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right)' = x^\alpha$,

   所以 $\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ 是 x^α 的一个原函数.

练习

1. 求 x^α 的一个原函数，其中 $\alpha \neq -1$.
2. 求 e^{2x+1} 的一个原函数?

解

1. $\left(x^{\alpha+1}\right)' = (\alpha+1)x^\alpha \Rightarrow \left(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right)' = x^\alpha$,

   所以 $\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ 是 x^α 的一个原函数.

2. $\left(\qquad\right)' = e^{2x+1}$

练习

1. 求 x^α 的一个原函数，其中 $\alpha \neq -1$.
2. 求 e^{2x+1} 的一个原函数?

解

1. $\left(x^{\alpha+1}\right)' = (\alpha+1)x^\alpha \Rightarrow \left(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right)' = x^\alpha$,
   所以 $\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ 是 x^α 的一个原函数.
2. $\left(e^{2x+1}\right)'$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\left(\qquad\qquad\right)' = e^{2x+1}$

练习

1. 求 x^α 的一个原函数，其中 $\alpha \neq -1$.
2. 求 e^{2x+1} 的一个原函数?

解

1. $\left(x^{\alpha+1}\right)' = (\alpha+1)x^\alpha \;\Rightarrow\; \left(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right)' = x^\alpha$,

   所以 $\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ 是 x^α 的一个原函数.

2. $\left(e^{2x+1}\right)' = 2e^{2x+1} \qquad \left(\qquad\qquad\right)' = e^{2x+1}$

练习

1. 求 x^{α} 的一个原函数，其中 $\alpha \neq -1$.
2. 求 e^{2x+1} 的一个原函数?

解

1. $\left(x^{\alpha+1}\right)' = (\alpha+1)x^{\alpha} \Rightarrow \left(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right)' = x^{\alpha}$,

   所以 $\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ 是 x^{α} 的一个原函数.

2. $\left(e^{2x+1}\right)' = 2e^{2x+1} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}e^{2x+1}\right)' = e^{2x+1}$

练习

1. 求 x^{α} 的一个原函数，其中 $\alpha \neq -1$.
2. 求 e^{2x+1} 的一个原函数?

解

1. $\left(x^{\alpha+1}\right)' = (\alpha+1)x^{\alpha} \Rightarrow \left(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right)' = x^{\alpha}$,

   所以 $\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ 是 x^{α} 的一个原函数.

2. $\left(e^{2x+1}\right)' = 2e^{2x+1} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}e^{2x+1}\right)' = e^{2x+1}$,

   所以 $\frac{1}{2}e^{2x+1}$ 是 e^{2x+1} 的一个原函数.

练习

1. 求 x^{α} 的一个原函数，其中 $\alpha \neq -1$.
2. 求 e^{2x+1} 的一个原函数?

解

1. $\left(x^{\alpha+1}\right)' = (\alpha+1)x^{\alpha} \Rightarrow \left(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right)' = x^{\alpha}$,
   所以 $\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ 是 x^{α} 的一个原函数.

2. $\left(e^{2x+1}\right)' = 2e^{2x+1} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}e^{2x+1}\right)' = e^{2x+1}$,
   所以 $\frac{1}{2}e^{2x+1}$ 是 e^{2x+1} 的一个原函数.

注 $\left(\qquad\qquad\right)' = e^{kx+b}$，$(k \neq 0)$

练习

1. 求 x^α 的一个原函数，其中 $\alpha \neq -1$.
2. 求 e^{2x+1} 的一个原函数?

解

1. $\left(x^{\alpha+1}\right)' = (\alpha+1)x^\alpha \Rightarrow \left(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right)' = x^\alpha$,

   所以 $\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ 是 x^α 的一个原函数.

2. $\left(e^{2x+1}\right)' = 2e^{2x+1} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}e^{2x+1}\right)' = e^{2x+1}$,

   所以 $\frac{1}{2}e^{2x+1}$ 是 e^{2x+1} 的一个原函数.

注 $\left(e^{kx+b}\right)' = e^{kx+b}$，$(k \neq 0)$

练习

1. 求 x^α 的一个原函数，其中 $\alpha \neq -1$.
2. 求 e^{2x+1} 的一个原函数?

解

1. $\left(x^{\alpha+1}\right)' = (\alpha+1)x^\alpha \Rightarrow \left(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right)' = x^\alpha$,

   所以 $\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ 是 x^α 的一个原函数.

2. $\left(e^{2x+1}\right)' = 2e^{2x+1} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}e^{2x+1}\right)' = e^{2x+1}$,

   所以 $\frac{1}{2}e^{2x+1}$ 是 e^{2x+1} 的一个原函数.

注 $\left(\frac{1}{k}e^{kx+b}\right)' = e^{kx+b}$，$(k \neq 0)$

练习

1. 求 x^α 的一个原函数，其中 $\alpha \neq -1$.
2. 求 e^{2x+1} 的一个原函数?

解

1. $\left(x^{\alpha+1}\right)' = (\alpha+1)x^\alpha \Rightarrow \left(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right)' = x^\alpha$,

   所以 $\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ 是 x^α 的一个原函数.

2. $\left(e^{2x+1}\right)' = 2e^{2x+1} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}e^{2x+1}\right)' = e^{2x+1}$,

   所以 $\frac{1}{2}e^{2x+1}$ 是 e^{2x+1} 的一个原函数.

注 $\left(\frac{1}{k}e^{kx+b}\right)' = e^{kx+b}$，$(k \neq 0)$

练习 问 $e^{\sin x}$ 是哪个函数的原函数?

练习

1. 求 x^α 的一个原函数，其中 $\alpha \neq -1$.
2. 求 e^{2x+1} 的一个原函数?

解

1. $\left(x^{\alpha+1}\right)' = (\alpha+1)x^\alpha \Rightarrow \left(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right)' = x^\alpha$,

   所以 $\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ 是 x^α 的一个原函数.

2. $\left(e^{2x+1}\right)' = 2e^{2x+1} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}e^{2x+1}\right)' = e^{2x+1}$,

   所以 $\frac{1}{2}e^{2x+1}$ 是 e^{2x+1} 的一个原函数.

注 $\left(\frac{1}{k}e^{kx+b}\right)' = e^{kx+b}$，（$k \neq 0$）

练习 问 $e^{\sin x}$ 是哪个函数的原函数?

解 $e^{\sin x}$ 是$(e^{\sin x})'$ 的原函数.

练习

1. 求 x^α 的一个原函数，其中 $\alpha \neq -1$.
2. 求 e^{2x+1} 的一个原函数?

解

1. $\left(x^{\alpha+1}\right)' = (\alpha+1)x^\alpha \Rightarrow \left(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right)' = x^\alpha$,

   所以 $\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ 是 x^α 的一个原函数.

2. $\left(e^{2x+1}\right)' = 2e^{2x+1} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}e^{2x+1}\right)' = e^{2x+1}$,

   所以 $\frac{1}{2}e^{2x+1}$ 是 e^{2x+1} 的一个原函数.

注 $\left(\frac{1}{k}e^{kx+b}\right)' = e^{kx+b}$，（$k \neq 0$）

练习 问 $e^{\sin x}$ 是哪个函数的原函数?

解 $e^{\sin x}$ 是$(e^{\sin x})' = e^{\sin x}\cos x$的原函数.

注

$$\frac{1}{3}x^3$$

是 x^2 的原函数.

注

$$\frac{1}{3}x^3, \quad \frac{1}{3}x^3 - 1$$

是 x^2 的原函数.

注

$$\frac{1}{3}x^3, \quad \frac{1}{3}x^3 - 1, \quad \frac{1}{3}x^3 + \pi$$

是 x^2 的原函数.

注

$$\frac{1}{3}x^3, \quad \frac{1}{3}x^3 - 1, \quad \frac{1}{3}x^3 + \pi, \quad \frac{1}{3}x^3 + C, \ldots$$

都是 x^2 的原函数.

注

$$\frac{1}{3}x^3, \quad \frac{1}{3}x^3 - 1, \quad \frac{1}{3}x^3 + \pi, \quad \frac{1}{3}x^3 + C, \ldots$$

都是 x^2 的原函数.

问题 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 不唯一，如何求出全部原函数?

注

$$\frac{1}{3}x^3, \quad \frac{1}{3}x^3-1, \quad \frac{1}{3}x^3+\pi, \quad \frac{1}{3}x^3+C, \ldots$$

都是 x^2 的原函数.

问题 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 不唯一，如何求出全部原函数?

性质 设函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f(x)$ 的**所有**原函数是

$$F(x)+C$$

C 为任意常数.

注
$$\frac{1}{3}x^3,\quad \frac{1}{3}x^3-1,\quad \frac{1}{3}x^3+\pi,\quad \frac{1}{3}x^3+C,\ldots$$

都是 x^2 的原函数.

问题 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 不唯一，如何求出全部原函数?

性质 设函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f(x)$ 的**所有**原函数是
$$F(x)+C$$
C 为任意常数.

证明

- 设函数 $G(x)$ 也是 $f(x)$ 的一个原函数，则

注

$$\frac{1}{3}x^3, \quad \frac{1}{3}x^3 - 1, \quad \frac{1}{3}x^3 + \pi, \quad \frac{1}{3}x^3 + C, \ldots$$

都是 x^2 的原函数.

问题 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 不唯一，如何求出全部原函数?

性质 设函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f(x)$ 的**所有**原函数是

$$F(x) + C$$

C 为任意常数.

证明

- 设函数 $G(x)$ 也是 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$(G(x) - F(x))' =$$

注

$$\frac{1}{3}x^3,\quad \frac{1}{3}x^3-1,\quad \frac{1}{3}x^3+\pi,\quad \frac{1}{3}x^3+C,\ldots$$

都是 x^2 的原函数.

问题 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 不唯一，如何求出全部原函数?

性质 设函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f(x)$ 的**所有**原函数是

$$F(x)+C$$

C 为任意常数.

证明

- 设函数 $G(x)$ 也是 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$(G(x)-F(x))'=G'(x)-F'(x)=$$

注

$$\frac{1}{3}x^3,\quad \frac{1}{3}x^3-1,\quad \frac{1}{3}x^3+\pi,\quad \frac{1}{3}x^3+C,\ldots$$

都是 x^2 的原函数.

问题 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 不唯一，如何求出全部原函数?

性质 设函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f(x)$ 的**所有**原函数是

$$F(x)+C$$

C 为任意常数.

证明

- 设函数 $G(x)$ 也是 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$(G(x)-F(x))'=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0.$$

注

$$\frac{1}{3}x^3, \quad \frac{1}{3}x^3-1, \quad \frac{1}{3}x^3+\pi, \quad \frac{1}{3}x^3+C, \ldots$$

都是 x^2 的原函数.

问题 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 不唯一，如何求出全部原函数?

性质 设函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f(x)$ 的**所有**原函数是

$$F(x)+C$$

C 为任意常数.

证明

- 设函数 $G(x)$ 也是 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$(G(x)-F(x))' = G'(x)-F'(x) = f(x)-f(x) = 0.$$

- 所以利用拉格朗日中值定理的推论得到

$$G(x)-F(x) = C.$$

注

$$\frac{1}{3}x^3,\quad \frac{1}{3}x^3-1,\quad \frac{1}{3}x^3+\pi,\quad \frac{1}{3}x^3+C,\ldots$$

都是 x^2 的原函数.

问题 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 不唯一，如何求出全部原函数?

性质 设函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f(x)$ 的**所有**原函数是

$$F(x)+C$$

C 为任意常数.

证明

- 设函数 $G(x)$ 也是 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$(G(x)-F(x))'=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0.$$

- 所以利用拉格朗日中值定理的推论得到

$$G(x)-F(x)=C.$$

所以 $G(x)=F(x)+C$

不定积分

不定积分

- 符号“$\int f(x)dx$”表示：$f(x)$ 的任意一个原函数

不定积分

- 符号“$\int f(x)dx$”表示：$f(x)$ 的任意一个原函数

  读作：$f(x)$ 的**不定积分**

不定积分

- 符号 “$\int f(x)dx$” 表示：$f(x)$ 的任意一个原函数

  读作：$f(x)$ 的**不定积分**

- “$\int$”：**积分号**；

不定积分

- 符号"$\int f(x)dx$"表示：$f(x)$ 的任意一个原函数

  读作：$f(x)$ 的**不定积分**
- "$\int$"：**积分号**；$f(x)$：**被积函数**；

不定积分

- 符号“$\int f(x)dx$”表示：$f(x)$ 的任意一个原函数

  读作：$f(x)$ 的**不定积分**

- “$\int$”：**积分号**；$f(x)$：**被积函数**；$f(x)dx$：**被积表达式** (微分形式)

不定积分

- 符号“$\int f(x)dx$”表示：$f(x)$ 的任意一个原函数

  读作：$f(x)$ 的**不定积分**

- “$\int$”：**积分号**；$f(x)$：**被积函数**；$f(x)dx$：**被积表达式**(微分形式)

如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$\int f(x)dx =$$

不定积分

- 符号 “$\int f(x)dx$” 表示：$f(x)$ 的任意一个原函数

  读作：$f(x)$ 的**不定积分**

- “$\int$”：**积分号**；$f(x)$：**被积函数**；$f(x)dx$：**被积表达式** (微分形式)

如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

不定积分

- 符号"$\int f(x)dx$"表示：$f(x)$ 的任意一个原函数

  读作：$f(x)$ 的**不定积分**

- "$\int$"：**积分号**；$f(x)$：**被积函数**；$f(x)dx$：**被积表达式**(微分形式)

如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

其中 C 是任意常数，称为**积分常数**.

不定积分

- 符号 “$\int f(x)dx$” 表示：$f(x)$ 的任意一个原函数

  读作：$f(x)$ 的 **不定积分**

- “$\int$”：**积分号**；$f(x)$：**被积函数**；$f(x)dx$：**被积表达式** (微分形式)

如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

其中 C 是任意常数，称为 **积分常数**.

总结 求不定积分 $\int f(x)dx$ 的步骤：

不定积分

- 符号"$\int f(x)dx$"表示：$f(x)$ 的任意一个原函数

  读作：$f(x)$ 的**不定积分**

- "$\int$"：**积分号**；$f(x)$：**被积函数**；$f(x)dx$：**被积表达式**(微分形式)

如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

其中 C 是任意常数，称为**积分常数**.

总结 求不定积分 $\int f(x)dx$ 的步骤：

1. 求出一个原函数 $F(x)$;
2. $\int f(x)dx = F(x) + C$

不定积分例子

例 求下列不定积分：

$$(1)\ \int x^2 dx; \qquad (2)\ \int \sin x dx; \qquad (3)\ \int \frac{1}{x} dx$$

不定积分例子

例 求下列不定积分：

$$(1)\ \int x^2 dx; \qquad (2)\ \int \sin x dx; \qquad (3)\ \int \frac{1}{x} dx$$

解

1. 因为 $(\qquad)' = x^2$,

不定积分例子

例 求下列不定积分：

$$(1)\ \int x^2 dx; \qquad (2)\ \int \sin x dx; \qquad (3)\ \int \frac{1}{x} dx$$

解

1. 因为 $\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$,

不定积分例子

例 求下列不定积分：

$$(1)\ \int x^2dx; \qquad (2)\ \int \sin x dx; \qquad (3)\ \int \frac{1}{x}dx$$

解

1. 因为 $\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$，所以

$$\int x^2dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

不定积分例子

例 求下列不定积分：

$$(1)\ \int x^2 dx; \qquad (2)\ \int \sin x dx; \qquad (3)\ \int \frac{1}{x} dx$$

解

1. 因为 $\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$，所以
$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$
2. 因为 $(\qquad\qquad)' = \sin x$，

不定积分例子

例 求下列不定积分：

$$(1)\ \int x^2 dx; \qquad (2)\ \int \sin x dx; \qquad (3)\ \int \frac{1}{x} dx$$

解

1. 因为 $\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$，所以
$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$
2. 因为 $\left(-\cos x\right)' = \sin x$，

不定积分例子

例 求下列不定积分：

$$(1)\ \int x^2 dx; \qquad (2)\ \int \sin x dx; \qquad (3)\ \int \frac{1}{x} dx$$

解

1. 因为 $\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$，所以
$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

2. 因为 $(-\cos x)' = \sin x$，所以
$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

不定积分例子

例 求下列不定积分：

$$(1)\ \int x^2dx; \qquad (2)\ \int \sin x dx; \qquad (3)\ \int \frac{1}{x}dx$$

解

1. 因为 $\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$，所以
$$\int x^2dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

2. 因为 $(-\cos x)' = \sin x$，所以
$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

3. 因为 $(\qquad)' = \frac{1}{x}$，

不定积分例子

例 求下列不定积分：

$$(1)\ \int x^2 dx; \qquad (2)\ \int \sin x dx; \qquad (3)\ \int \frac{1}{x} dx$$

解

1. 因为 $\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$，所以
$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

2. 因为 $\left(-\cos x\right)' = \sin x$，所以
$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

3. 因为 $\left(\ln|x|\right)' = \frac{1}{x}$，

不定积分例子

例 求下列不定积分：

$$(1)\ \int x^2 dx; \qquad (2)\ \int \sin x dx; \qquad (3)\ \int \frac{1}{x} dx$$

解

1. 因为 $\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$，所以
$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$
2. 因为 $\left(-\cos x\right)' = \sin x$，所以
$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$
3. 因为 $\left(\ln|x|\right)' = \frac{1}{x}$，所以
$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

不定积分练习

练习 求下列不定积分：

(1) $\int x^\alpha dx \quad (\alpha \neq -1)$;　　(2) $\int e^{3x} dx$;　　(3) $\int 0 dx$

不定积分练习

练习 求下列不定积分：

$$(1)\ \int x^{\alpha}dx \quad (\alpha \neq -1); \qquad (2)\ \int e^{3x}dx; \qquad (3)\ \int 0dx$$

解

1. 因为 $(\qquad\qquad)' = x^{\alpha}$，

不定积分练习

练习 求下列不定积分：

$$(1)\ \int x^{\alpha}dx \quad (\alpha \neq -1); \qquad (2)\ \int e^{3x}dx; \qquad (3)\ \int 0dx$$

解

1. 因为 $\left(\qquad x^{\alpha+1}\right)' = x^{\alpha}$,

不定积分练习

练习 求下列不定积分：

$$(1)\ \int x^{\alpha}dx \quad (\alpha \neq -1); \qquad (2)\ \int e^{3x}dx; \qquad (3)\ \int 0dx$$

解

1. 因为 $\left(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right)' = x^{\alpha}$,

不定积分练习

练习 求下列不定积分：

(1) $\int x^\alpha dx \quad (\alpha \neq -1)$;　　(2) $\int e^{3x} dx$;　　(3) $\int 0 dx$

解

1. 因为 $\left(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right)' = x^\alpha$，所以

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$$

不定积分练习

练习 求下列不定积分：

(1) $\int x^{\alpha} dx \quad (\alpha \neq -1)$; (2) $\int e^{3x} dx$; (3) $\int 0 dx$

解

1. 因为 $\left(\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}\right)' = x^{\alpha}$，所以
$$\int x^{\alpha} dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$$

2. 因为 $(\qquad)' = e^{3x}$,

不定积分练习

练习 求下列不定积分：

(1) $\int x^\alpha dx \quad (\alpha \neq -1)$; (2) $\int e^{3x} dx$; (3) $\int 0 dx$

解

1. 因为 $\left(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right)' = x^\alpha$，所以

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$$

2. 因为 $\left(\quad e^{3x}\right)' = e^{3x}$，

不定积分练习

练习 求下列不定积分：

$$(1)\ \int x^\alpha dx \quad (\alpha \neq -1); \qquad (2)\ \int e^{3x} dx; \qquad (3)\ \int 0 dx$$

解

1. 因为 $\left(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right)' = x^\alpha$，所以
$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$$

2. 因为 $\left(\frac{1}{3}e^{3x}\right)' = e^{3x}$，

暨南大学 JINAN UNIVERSITY

不定积分练习

练习 求下列不定积分：

(1) $\int x^{\alpha}dx \quad (\alpha \neq -1)$; (2) $\int e^{3x}dx$; (3) $\int 0dx$

解

1. 因为 $\left(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right)' = x^{\alpha}$，所以
$$\int x^{\alpha}dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$$

2. 因为 $\left(\frac{1}{3}e^{3x}\right)' = e^{3x}$，所以
$$\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} + C$$

不定积分练习

练习 求下列不定积分：

(1) $\int x^{\alpha}dx \quad (\alpha \neq -1)$;　　(2) $\int e^{3x}dx$;　　(3) $\int 0dx$

解

1. 因为 $\left(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right)' = x^{\alpha}$，所以
$$\int x^{\alpha}dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$$

2. 因为 $\left(\frac{1}{3}e^{3x}\right)' = e^{3x}$，所以
$$\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} + C$$

3. 因为 $(\quad)' = 0$，

不定积分练习

练习 求下列不定积分：

(1) $\int x^{\alpha}dx \quad (\alpha \neq -1)$; **(2)** $\int e^{3x}dx$; **(3)** $\int 0dx$

解

1. 因为 $\left(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right)' = x^{\alpha}$，所以
$$\int x^{\alpha}dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$$
2. 因为 $\left(\frac{1}{3}e^{3x}\right)' = e^{3x}$，所以
$$\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} + C$$
3. 因为 $(0)' = 0$，

不定积分练习

练习 求下列不定积分：

(1) $\int x^{\alpha}dx \quad (\alpha \neq -1)$; (2) $\int e^{3x}dx$; (3) $\int 0dx$

解

1. 因为 $\left(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right)' = x^{\alpha}$，所以
$$\int x^{\alpha}dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$$
2. 因为 $\left(\frac{1}{3}e^{3x}\right)' = e^{3x}$，所以
$$\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} + C$$
3. 因为 $(0)' = 0$，所以
$$\int 0dx = 0 + C = C$$

We are here now...

1. “原函数”与“不定积分”的概念
2. 不定积分的性质
3. 不定积分的几何意义
4. 利用基本积分表求积分

不定积分与微分/导数关系：互为逆运算

- $\int f(x)dx$ 是 $f(x)$ 的（任意一个）原函数，所以

$$\left[\int f(x)dx\right]'$$

;

;

.

不定积分与微分/导数关系：互为逆运算

- $\int f(x)dx$ 是 $f(x)$ 的（任意一个）原函数，所以

$$\left[\int f(x)dx\right]' = f(x)$$

;

;

.

不定积分与微分/导数关系：互为逆运算

- $\int f(x)dx$ 是 $f(x)$ 的（任意一个）原函数，所以

$$\boxed{\left[\int f(x)dx\right]' = f(x) \qquad \text{or} \qquad d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx}$$

;

;

.

不定积分与微分/导数关系：互为逆运算

- $\int f(x)dx$ 是 $f(x)$ 的（任意一个）原函数，所以

$$\left[\int f(x)dx\right]' = f(x) \qquad \text{or} \qquad d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx$$

- $F(x)$ 是 $F'(x)$ 的原函数，所以

$$\int F'(x)dx =$$

;

;

不定积分与微分/导数关系：互为逆运算

- $\int f(x)dx$ 是 $f(x)$ 的（任意一个）原函数，所以

$$\left[\int f(x)dx\right]' = f(x) \qquad \text{or} \qquad d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx$$

- $F(x)$ 是 $F'(x)$ 的原函数，所以

$$\int F'(x)dx = F(x)$$

;

;

不定积分与微分/导数关系：互为逆运算

- $\int f(x)dx$ 是 $f(x)$ 的（任意一个）原函数，所以

$$\left[\int f(x)dx\right]' = f(x) \quad \text{or} \quad d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx$$

- $F(x)$ 是 $F'(x)$ 的原函数，所以

$$\int F'(x)dx = F(x) + C$$

;

;

不定积分与微分/导数关系：互为逆运算

- $\int f(x)dx$ 是 $f(x)$ 的（任意一个）原函数，所以

$$\boxed{\left[\int f(x)dx\right]' = f(x) \quad \text{or} \quad d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx}$$

- $F(x)$ 是 $F'(x)$ 的原函数，所以

$$\boxed{\int F'(x)dx = F(x) + C \quad \text{or} \quad \int dF(x) = F(x) + C}$$

;

;

.

不定积分与微分/导数关系：互为逆运算

- $\int f(x)dx$ 是 $f(x)$ 的（任意一个）原函数，所以

$$\left[\int f(x)dx\right]' = f(x) \quad \text{or} \quad d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx$$

- $F(x)$ 是 $F'(x)$ 的原函数，所以

$$\int F'(x)dx = F(x) + C \quad \text{or} \quad \int dF(x) = F(x) + C$$

例 (1) $\left(\int e^{\sin x}dx\right)' =$ ________;

(2) $\int d\arcsin(\sqrt{x}) =$ ________________;

(3) 若 $\int f(x)dx = x^2e^{3x} + C$，则 $f(x) =$ ________________.

暨南大学 JINAN UNIVERSITY

不定积分与微分/导数关系：互为逆运算

- $\int f(x)dx$ 是 $f(x)$ 的（任意一个）原函数，所以

$$\left[\int f(x)dx\right]' = f(x) \qquad \text{or} \qquad d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx$$

- $F(x)$ 是 $F'(x)$ 的原函数，所以

$$\int F'(x)dx = F(x) + C \qquad \text{or} \qquad \int dF(x) = F(x) + C$$

例 (1) $\left(\int e^{\sin x}dx\right)' = \underline{\quad e^{\sin x} \quad}$;

(2) $\int d\arcsin(\sqrt{x}) = \underline{\qquad\qquad\qquad}$;

(3) 若 $\int f(x)dx = x^2e^{3x} + C$，则 $f(x) = \underline{\qquad\qquad\qquad}$.

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

不定积分与微分/导数关系：互为逆运算

- $\int f(x)dx$ 是 $f(x)$ 的（任意一个）原函数，所以

$$\left[\int f(x)dx\right]' = f(x) \quad \text{or} \quad d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx$$

- $F(x)$ 是 $F'(x)$ 的原函数，所以

$$\int F'(x)dx = F(x) + C \quad \text{or} \quad \int dF(x) = F(x) + C$$

例 (1) $\left(\int e^{\sin x}dx\right)' = \underline{\quad e^{\sin x} \quad}$；

(2) $\int d\arcsin(\sqrt{x}) = \underline{\quad \arcsin(\sqrt{x}) \quad}$；

(3) 若 $\int f(x)dx = x^2e^{3x} + C$，则 $f(x) = \underline{\qquad\qquad}$.

暨南大学 JINAN UNIVERSITY

不定积分与微分/导数关系：互为逆运算

- $\int f(x)dx$ 是 $f(x)$ 的（任意一个）原函数，所以

$$\boxed{\left[\int f(x)dx\right]' = f(x) \quad \text{or} \quad d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx}$$

- $F(x)$ 是 $F'(x)$ 的原函数，所以

$$\boxed{\int F'(x)dx = F(x) + C \quad \text{or} \quad \int dF(x) = F(x) + C}$$

例 (1) $\left(\int e^{\sin x}dx\right)' = \underline{\quad e^{\sin x} \quad}$；

(2) $\int d\arcsin(\sqrt{x}) = \underline{\quad \arcsin(\sqrt{x}) + C \quad}$；

(3) 若 $\int f(x)dx = x^2e^{3x} + C$，则 $f(x) = \underline{\qquad\qquad\qquad}$.

暨南大学 JINAN UNIVERSITY

不定积分与微分/导数关系：互为逆运算

- $\int f(x)dx$ 是 $f(x)$ 的（任意一个）原函数，所以

$$\left[\int f(x)dx\right]' = f(x) \quad \text{or} \quad d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx$$

- $F(x)$ 是 $F'(x)$ 的原函数，所以

$$\int F'(x)dx = F(x) + C \quad \text{or} \quad \int dF(x) = F(x) + C$$

例 (1) $\left(\int e^{\sin x}dx\right)' = \underline{\quad e^{\sin x} \quad}$;

(2) $\int d\arcsin(\sqrt{x}) = \underline{\quad \arcsin(\sqrt{x}) + C \quad}$;

(3) 若 $\int f(x)dx = x^2e^{3x} + C$，则 $f(x) = \underline{2xe^{3x} + 3x^2e^{3x}}$.

不定积分的线性运算性质

性质 1 $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$，$k \neq 0$ 为常数

性质 2 $\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$（多个函数也成立）

不定积分的线性运算性质

性质 1 $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$，$k \neq 0$ 为常数

性质 2 $\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$（多个函数也成立）

例 1 求不定积分 $\int \left(2\cos x - \frac{1}{3x} + e^x\right)dx$

不定积分的线性运算性质

性质 1 $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$，$k \neq 0$ 为常数

性质 2 $\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$（多个函数也成立）

例 1 求不定积分 $\int \left(2\cos x - \frac{1}{3x} + e^x\right)dx$

解 $$\int \left(2\cos x - \frac{1}{3x} + e^x\right)dx$$

$=$

不定积分的线性运算性质

性质 1 $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$，$k \neq 0$ 为常数

性质 2 $\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$（多个函数也成立）

例 1 求不定积分 $\int \left(2\cos x - \frac{1}{3x} + e^x\right)dx$

解 $$\int \left(2\cos x - \frac{1}{3x} + e^x\right)dx$$

$$= \int 2\cos x dx - \int \frac{1}{3x}dx + \int e^x dx =$$

不定积分的线性运算性质

性质 1 $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$，$k \neq 0$ 为常数

性质 2 $\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$（多个函数也成立）

例 1 求不定积分 $\int \left(2\cos x - \frac{1}{3x} + e^x\right) dx$

解 $\displaystyle\int \left(2\cos x - \frac{1}{3x} + e^x\right) dx$

$$= \int 2\cos x dx - \int \frac{1}{3x} dx + \int e^x dx = 2\int \cos x dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x} dx + \int e^x dx$$

$=$

不定积分的线性运算性质

性质 1 $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$，$k \neq 0$ 为常数

性质 2 $\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$（多个函数也成立）

例 1 求不定积分 $\int \left(2\cos x - \frac{1}{3x} + e^x\right)dx$

解 $$\int \left(2\cos x - \frac{1}{3x} + e^x\right)dx$$

$$= \int 2\cos x dx - \int \frac{1}{3x}dx + \int e^x dx = 2\int \cos x dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x}dx + \int e^x dx$$

$$= 2\left(\qquad\qquad \right) - \frac{1}{3}\left(\qquad\qquad \right) + \left(\qquad\qquad \right)$$

不定积分的线性运算性质

性质 1 $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$，$k \neq 0$ 为常数

性质 2 $\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$（多个函数也成立）

例 1 求不定积分 $\int \left(2\cos x - \frac{1}{3x} + e^x\right) dx$

解 $$\int \left(2\cos x - \frac{1}{3x} + e^x\right) dx$$

$$= \int 2\cos x dx - \int \frac{1}{3x} dx + \int e^x dx = 2\int \cos x dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x} dx + \int e^x dx$$

$$= 2(\sin x + C_1) - \frac{1}{3}(\qquad\qquad) + (\qquad\qquad)$$

不定积分的线性运算性质

性质 1 $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$，$k \neq 0$ 为常数

性质 2 $\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$（多个函数也成立）

例 1 求不定积分 $\int \left(2\cos x - \frac{1}{3x} + e^x\right) dx$

解

$$\int \left(2\cos x - \frac{1}{3x} + e^x\right) dx$$

$$= \int 2\cos x dx - \int \frac{1}{3x} dx + \int e^x dx = 2\int \cos x dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x} dx + \int e^x dx$$

$$= 2(\sin x + C_1) - \frac{1}{3}(\ln|x| + C_2) + (\qquad\qquad)$$

不定积分的线性运算性质

性质 1 $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$，$k \neq 0$ 为常数

性质 2 $\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$（多个函数也成立）

例 1 求不定积分 $\int \left(2\cos x - \frac{1}{3x} + e^x\right)dx$

解 $$\int \left(2\cos x - \frac{1}{3x} + e^x\right)dx$$

$$= \int 2\cos x dx - \int \frac{1}{3x}dx + \int e^x dx = 2\int \cos x dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x}dx + \int e^x dx$$

$$= 2(\sin x + C_1) - \frac{1}{3}(\ln|x| + C_2) + \left(e^x + C_3\right)$$

$$=$$

不定积分的线性运算性质

性质 1 $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$，$k \neq 0$ 为常数

性质 2 $\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$（多个函数也成立）

例 1 求不定积分 $\int \left(2\cos x - \frac{1}{3x} + e^x\right)dx$

解 $$\int \left(2\cos x - \frac{1}{3x} + e^x\right)dx$$

$$= \int 2\cos x dx - \int \frac{1}{3x}dx + \int e^x dx = 2\int \cos x dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x}dx + \int e^x dx$$

$$= 2\,(\sin x + C_1) - \frac{1}{3}\,(\ln|x| + C_2) + \left(e^x + C_3\right)$$

$$= 2\sin x - \frac{1}{3}\ln|x| + e^x + \left(2C_1 - \frac{1}{3}C_2 + C_3\right)$$

不定积分的线性运算性质

性质 1 $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$，$k \neq 0$ 为常数

性质 2 $\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$（多个函数也成立）

例 1 求不定积分 $\int \left(2\cos x - \frac{1}{3x} + e^x\right)dx$

解

$$\int \left(2\cos x - \frac{1}{3x} + e^x\right)dx$$

$$= \int 2\cos x dx - \int \frac{1}{3x}dx + \int e^x dx = 2\int \cos x dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x}dx + \int e^x dx$$

$$= 2(\sin x + C_1) - \frac{1}{3}(\ln|x| + C_2) + \left(e^x + C_3\right)$$

$$= 2\sin x - \frac{1}{3}\ln|x| + e^x + \left(2C_1 - \frac{1}{3}C_2 + C_3\right) = 2\sin x - \frac{1}{3}\ln|x| + e^x + C$$

暨南大学 JINAN UNIVERSITY

例 2 求不定积分 $\int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{3\cos^2 x} + \frac{6}{\sqrt{x}} \right) dx$

例 2 求不定积分 $\int\left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{1}{3\cos^2 x}+\frac{6}{\sqrt{x}}\right)dx$

解

$$\int\left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{1}{3\cos^2 x}+\frac{6}{\sqrt{x}}\right)dx$$
$$=2\int\frac{1}{1+x^2}dx-\frac{1}{3}\int\frac{1}{\cos^2 x}dx+6\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

例 2 求不定积分 $\int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{3\cos^2 x} + \frac{6}{\sqrt{x}} \right) dx$

解

$$\int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{3\cos^2 x} + \frac{6}{\sqrt{x}} \right) dx$$

$$= 2 \int \frac{1}{1+x^2} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + 6 \int x^{-\frac{1}{2}} dx$$

例 2 求不定积分 $\int\left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{1}{3\cos^2 x}+\frac{6}{\sqrt{x}}\right)dx$

解

$$\int\left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{1}{3\cos^2 x}+\frac{6}{\sqrt{x}}\right)dx$$

$$=2\int\frac{1}{1+x^2}dx-\frac{1}{3}\int\frac{1}{\cos^2 x}dx+6\int x^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$=\quad\arctan x$$

例 2 求不定积分 $\int\left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{1}{3\cos^2 x}+\frac{6}{\sqrt{x}}\right)dx$

解

$$\int\left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{1}{3\cos^2 x}+\frac{6}{\sqrt{x}}\right)dx$$

$$=2\int\frac{1}{1+x^2}dx-\frac{1}{3}\int\frac{1}{\cos^2 x}dx+6\int x^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$=2\arctan x$$

例 2 求不定积分 $\int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{3\cos^2 x} + \frac{6}{\sqrt{x}} \right) dx$

解

$$\int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{3\cos^2 x} + \frac{6}{\sqrt{x}} \right) dx$$
$$= 2\int \frac{1}{1+x^2} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + 6 \int x^{-\frac{1}{2}} dx$$
$$= 2\arctan x \qquad \tan x$$

例 2 求不定积分 $\int\left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{1}{3\cos^2 x}+\frac{6}{\sqrt{x}}\right)dx$

解

$$\int\left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{1}{3\cos^2 x}+\frac{6}{\sqrt{x}}\right)dx$$

$$=2\int\frac{1}{1+x^2}dx-\frac{1}{3}\int\frac{1}{\cos^2 x}dx+6\int x^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$=2\arctan x-\frac{1}{3}\tan x$$

例 2 求不定积分 $\int\left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{1}{3\cos^2 x}+\frac{6}{\sqrt{x}}\right)dx$

解

$$\int\left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{1}{3\cos^2 x}+\frac{6}{\sqrt{x}}\right)dx$$

$$=2\int\frac{1}{1+x^2}dx-\frac{1}{3}\int\frac{1}{\cos^2 x}dx+6\int x^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$=2\arctan x-\frac{1}{3}\tan x \qquad\qquad x^{\frac{1}{2}}$$

例 2 求不定积分 $\int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{3\cos^2 x} + \frac{6}{\sqrt{x}} \right) dx$

解

$$\int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{3\cos^2 x} + \frac{6}{\sqrt{x}} \right) dx$$

$$= 2\int \frac{1}{1+x^2} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + 6 \int x^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= 2\arctan x - \frac{1}{3} \tan x \qquad 2x^{\frac{1}{2}}$$

例 2 求不定积分 $\int\left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{1}{3\cos^2 x}+\frac{6}{\sqrt{x}}\right)dx$

解

$$\begin{aligned}&\int\left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{1}{3\cos^2 x}+\frac{6}{\sqrt{x}}\right)dx\\=&2\int\frac{1}{1+x^2}dx-\frac{1}{3}\int\frac{1}{\cos^2 x}dx+6\int x^{-\frac{1}{2}}dx\\=&2\arctan x-\frac{1}{3}\tan x+6\cdot 2x^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

例 2 求不定积分 $\int\left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{1}{3\cos^2 x}+\frac{6}{\sqrt{x}}\right)dx$

解

$$\int\left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{1}{3\cos^2 x}+\frac{6}{\sqrt{x}}\right)dx$$

$$=2\int\frac{1}{1+x^2}dx-\frac{1}{3}\int\frac{1}{\cos^2 x}dx+6\int x^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$=2\arctan x-\frac{1}{3}\tan x+6\cdot 2x^{\frac{1}{2}}+C$$

例 2 求不定积分 $\int\left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{1}{3\cos^2 x}+\frac{6}{\sqrt{x}}\right)dx$

解

$$\begin{aligned}
&\int\left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{1}{3\cos^2 x}+\frac{6}{\sqrt{x}}\right)dx\\
&=2\int\frac{1}{1+x^2}dx-\frac{1}{3}\int\frac{1}{\cos^2 x}dx+6\int x^{-\frac{1}{2}}dx\\
&=2\arctan x-\frac{1}{3}\tan x+6\cdot 2x^{\frac{1}{2}}+C\\
&=2\arctan x-\frac{1}{3}\tan x+12x^{\frac{1}{2}}+C
\end{aligned}$$

补充：不定积分的存在性

性质 如果 $f(x)$ 是连续函数，则 $f(x)$ 一定存在原函数，从而不定积分 $\int f(x)dx$ 也一定存在.

问题 如何把 $\int f(x)dx$ 求出来?

We are here now...

1. “原函数”与“不定积分”的概念

2. 不定积分的性质

3. 不定积分的几何意义

4. 利用基本积分表求积分

例 设 $y = f(x)$ 的图形经过点 $(1, 3)$，并且其切线的斜率为 $2x$，试求出 $f(x)$.

例 设 $y = f(x)$ 的图形经过点 $(1, 3)$，并且其切线的斜率为 $2x$，试求出 $f(x)$.

解

$$f'(x) = 2x$$

例 设 $y = f(x)$ 的图形经过点 $(1, 3)$，并且其切线的斜率为 $2x$，试求出 $f(x)$.

解

$$f'(x) = 2x \quad \Longrightarrow \quad f(x) = x^2 + C$$

例 设 $y = f(x)$ 的图形经过点 $(1, 3)$，并且其切线的斜率为 $2x$，试求出 $f(x)$.

解

$$f'(x) = 2x \quad \Longrightarrow \quad f(x) = x^2 + C$$

又因为 $f(1) = 3$，所以

例 设 $y = f(x)$ 的图形经过点 $(1, 3)$，并且其切线的斜率为 $2x$，试求出 $f(x)$.

解

$$f'(x) = 2x \quad \Longrightarrow \quad f(x) = x^2 + C$$

又因为 $f(1) = 3$，所以 $3 = f(1) = 1^2 + C$，

例 设 $y=f(x)$ 的图形经过点 $(1, 3)$，并且其切线的斜率为 $2x$，试求出 $f(x)$.

解

$$f'(x)=2x \quad \Longrightarrow \quad f(x)=x^2+C$$

又因为 $f(1)=3$，所以 $3=f(1)=1^2+C$，$C=2$。所以

例 设 $y = f(x)$ 的图形经过点 $(1, 3)$，并且其切线的斜率为 $2x$，试求出 $f(x)$.

解

$$f'(x) = 2x \quad \Longrightarrow \quad f(x) = x^2 + C$$

又因为 $f(1) = 3$，所以 $3 = f(1) = 1^2 + C$，$C = 2$。所以

$$f(x) = x^2 + 2.$$

We are here now...

1. “原函数”与“不定积分”的概念

2. 不定积分的性质

3. 不定积分的几何意义

4. 利用基本积分表求积分

基本积分表

基本初等函数的导数公式 $\longrightarrow$ 基本的积分公式

基本积分表

基本初等函数的导数公式 $\longrightarrow$ 基本的积分公式

- ◇ $\int 0dx = C$
- ◇ $\int x^{\alpha}dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C, \ (\alpha \neq -1)$
- ◇ $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$

基本积分表

基本初等函数的导数公式 $\longrightarrow$ 基本的积分公式

- ◇ $\int 0 dx = C$
- ◇ $\int x^{\alpha} dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C, \ (\alpha \neq -1)$
- ◇ $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
- ♣ $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$
- ♣ $\int e^x dx = e^x + C$

基本积分表

基本初等函数的导数公式 $\longrightarrow$ 基本的积分公式

- ◇ $\int 0dx = C$
- ◇ $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C, \ (\alpha \neq -1)$
- ◇ $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$
- ♣ $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C$
- ♣ $\int e^x dx = e^x + C$
- ♡ $\int \sin x dx = -\cos x + C$
- ♡ $\int \cos x dx = \sin x + C$
- ♡ $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \frac{\sin x}{\cos x} + C = \tan x + C$
- ♡ $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\frac{\cos x}{\sin x} + C = -\cot x + C$

基本积分表

基本初等函数的导数公式 $\longrightarrow$ 基本的积分公式

- ♢ $\int 0dx = C$
- ♢ $\int x^{\alpha}dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1)$
- ♢ $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$
- ♣ $\int a^{x}dx = \frac{1}{\ln a}a^{x} + C$
- ♣ $\int e^{x}dx = e^{x} + C$
- ♡ $\int \sin x dx = -\cos x + C$
- ♡ $\int \cos x dx = \sin x + C$
- ♡ $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \frac{\sin x}{\cos x} + C = \tan x + C$
- ♡ $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\frac{\cos x}{\sin x} + C = -\cot x + C$
- ♠ $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$
- ♠ $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C$

求不定积分 I ——“直接”利用基本积分公式

例 1 求不定积分 $\int\left(\frac{2}{t}-3\cos t-\csc^2 t+\frac{2}{\sqrt{1-t^2}}-5^t\right)dt$

解 $\csc t=\frac{1}{\sin t}$

求不定积分 I ——“直接”利用基本积分公式

例 1 求不定积分 $\int\left(\frac{2}{t}-3\cos t-\csc^2 t+\frac{2}{\sqrt{1-t^2}}-5^t\right)dt$

解 $\csc t=\frac{1}{\sin t}$

$$\int\left(\frac{2}{t}-3\cos t-\csc^2 t+\frac{2}{\sqrt{1-t^2}}-5^t\right)dt$$

$$=$$

求不定积分 I ——“直接”利用基本积分公式

例 1 求不定积分 $\int\left(\frac{2}{t}-3\cos t-\csc^2 t+\frac{2}{\sqrt{1-t^2}}-5^t\right)dt$

解 $\csc t=\frac{1}{\sin t}$

$$\int\left(\frac{2}{t}-3\cos t-\csc^2 t+\frac{2}{\sqrt{1-t^2}}-5^t\right)dt$$

$$=\int\frac{2}{t}dt-\int 3\cos t dt-\int\csc^2 t dt+\int\frac{2}{\sqrt{1-t^2}}dt-\int 5^t dt$$

$$=$$

求不定积分 I ——"直接"利用基本积分公式

例 1 求不定积分 $\int\left(\frac{2}{t}-3\cos t-\csc^2 t+\frac{2}{\sqrt{1-t^2}}-5^t\right)dt$

解 $\csc t=\frac{1}{\sin t}$

$$\int\left(\frac{2}{t}-3\cos t-\csc^2 t+\frac{2}{\sqrt{1-t^2}}-5^t\right)dt$$

$$=\int\frac{2}{t}dt-\int 3\cos t dt-\int\csc^2 t dt+\int\frac{2}{\sqrt{1-t^2}}dt-\int 5^t dt$$

$$=2\int\frac{1}{t}dt-3\int\cos t dt-\int\frac{1}{\sin^2 t}dt+2\int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt-\int 5^t dt$$

$$=$$

求不定积分 I ——“直接”利用基本积分公式

例 1 求不定积分 $\int \left(\frac{2}{t} - 3\cos t - \csc^2 t + \frac{2}{\sqrt{1-t^2}} - 5^t \right) dt$

解 $\csc t = \frac{1}{\sin t}$

$$\int \left(\frac{2}{t} - 3\cos t - \csc^2 t + \frac{2}{\sqrt{1-t^2}} - 5^t \right) dt$$

$$= \int \frac{2}{t} dt - \int 3\cos t dt - \int \csc^2 t dt + \int \frac{2}{\sqrt{1-t^2}} dt - \int 5^t dt$$

$$= 2\int \frac{1}{t} dt - 3\int \cos t dt - \int \frac{1}{\sin^2 t} dt + 2\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt - \int 5^t dt$$

$$= 2\ln|t|$$

求不定积分 I ——“直接”利用基本积分公式

例 1 求不定积分 $\int \left(\frac{2}{t} - 3\cos t - \csc^2 t + \frac{2}{\sqrt{1-t^2}} - 5^t\right) dt$

解 $\csc t = \frac{1}{\sin t}$

$$\int \left(\frac{2}{t} - 3\cos t - \csc^2 t + \frac{2}{\sqrt{1-t^2}} - 5^t\right) dt$$

$$= \int \frac{2}{t} dt - \int 3\cos t dt - \int \csc^2 t dt + \int \frac{2}{\sqrt{1-t^2}} dt - \int 5^t dt$$

$$= 2\int \frac{1}{t} dt - 3\int \cos t dt - \int \frac{1}{\sin^2 t} dt + 2\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt - \int 5^t dt$$

$$= 2\ln|t| - 3\sin t$$

求不定积分 I ——“直接”利用基本积分公式

例 1 求不定积分 $\int \left(\frac{2}{t} - 3\cos t - \csc^2 t + \frac{2}{\sqrt{1-t^2}} - 5^t\right) dt$

解 $\csc t = \frac{1}{\sin t}$

$$\int \left(\frac{2}{t} - 3\cos t - \csc^2 t + \frac{2}{\sqrt{1-t^2}} - 5^t\right) dt$$

$$= \int \frac{2}{t} dt - \int 3\cos t dt - \int \csc^2 t dt + \int \frac{2}{\sqrt{1-t^2}} dt - \int 5^t dt$$

$$= 2\int \frac{1}{t} dt - 3\int \cos t dt - \int \frac{1}{\sin^2 t} dt + 2\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt - \int 5^t dt$$

$$= 2\ln|t| - 3\sin t + \cot t$$

求不定积分 I ——“直接”利用基本积分公式

例 1 求不定积分 $\int\left(\frac{2}{t}-3\cos t-\csc^2 t+\frac{2}{\sqrt{1-t^2}}-5^t\right)dt$

解 $\csc t=\frac{1}{\sin t}$

$$\int\left(\frac{2}{t}-3\cos t-\csc^2 t+\frac{2}{\sqrt{1-t^2}}-5^t\right)dt$$

$$=\int\frac{2}{t}dt-\int 3\cos t dt-\int\csc^2 t dt+\int\frac{2}{\sqrt{1-t^2}}dt-\int 5^t dt$$

$$=2\int\frac{1}{t}dt-3\int\cos t dt-\int\frac{1}{\sin^2 t}dt+2\int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt-\int 5^t dt$$

$$=2\ln|t|-3\sin t+\cot t+2\arcsin t$$

求不定积分 I ——“直接”利用基本积分公式

例 1 求不定积分 $\int\left(\frac{2}{t}-3\cos t-\csc^2 t+\frac{2}{\sqrt{1-t^2}}-5^t\right)dt$

解 $\csc t=\frac{1}{\sin t}$

$$\int\left(\frac{2}{t}-3\cos t-\csc^2 t+\frac{2}{\sqrt{1-t^2}}-5^t\right)dt$$

$$=\int\frac{2}{t}dt-\int 3\cos t dt-\int\csc^2 t dt+\int\frac{2}{\sqrt{1-t^2}}dt-\int 5^t dt$$

$$=2\int\frac{1}{t}dt-3\int\cos t dt-\int\frac{1}{\sin^2 t}dt+2\int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt-\int 5^t dt$$

$$=2\ln|t|-3\sin t+\cot t+2\arcsin t-\frac{1}{\ln 5}5^t$$

求不定积分 I ——“直接”利用基本积分公式

例 1 求不定积分 $\int\left(\frac{2}{t}-3\cos t-\csc^2 t+\frac{2}{\sqrt{1-t^2}}-5^t\right)dt$

解 $\csc t=\frac{1}{\sin t}$

$$\int\left(\frac{2}{t}-3\cos t-\csc^2 t+\frac{2}{\sqrt{1-t^2}}-5^t\right)dt$$

$$=\int\frac{2}{t}dt-\int 3\cos t dt-\int\csc^2 t dt+\int\frac{2}{\sqrt{1-t^2}}dt-\int 5^t dt$$

$$=2\int\frac{1}{t}dt-3\int\cos t dt-\int\frac{1}{\sin^2 t}dt+2\int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt-\int 5^t dt$$

$$=2\ln|t|-3\sin t+\cot t+2\arcsin t-\frac{1}{\ln 5}5^t+C$$

求不定积分 I ——“直接”利用基本积分公式 (Cont.)

熟练计算 $\int x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C, & \alpha \neq -1 \\ \ln|x| + C, & \alpha = -1 \end{cases}$

求不定积分 I ——“直接” 利用基本积分公式 (Cont.)

熟练计算 $\int x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C, & \alpha \neq -1 \\ \ln|x| + C, & \alpha = -1 \end{cases}$

例 2 求不定积分 $\int \sqrt{x^5}dx$，$\int \frac{1}{\sqrt{x^3}}dx$

求不定积分 I ——“直接”利用基本积分公式 (Cont.)

熟练计算 $\int x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C, & \alpha \neq -1 \\ \ln|x| + C, & \alpha = -1 \end{cases}$

例 2 求不定积分 $\int \sqrt{x^5}dx$，$\int \frac{1}{\sqrt{x^3}}dx$

解

$$\int \sqrt{x^5}dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^3}}dx$$

求不定积分 I ——“直接” 利用基本积分公式 (Cont.)

熟练计算 $\int x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C, & \alpha \neq -1 \\ \ln|x|+C, & \alpha = -1 \end{cases}$

例 2 求不定积分 $\int \sqrt{x^5}dx$，$\int \frac{1}{\sqrt{x^3}}dx$

解

$$\int \sqrt{x^5}dx = \int \left(x^5\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^3}}dx$$

求不定积分 I ——“直接”利用基本积分公式 (Cont.)

熟练计算 $\int x^{\alpha}dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C, & \alpha \neq -1 \\ \ln|x| + C, & \alpha = -1 \end{cases}$

例 2 求不定积分 $\int \sqrt{x^5}dx$，$\int \frac{1}{\sqrt{x^3}}dx$

解

$$\int \sqrt{x^5}dx = \int \left(x^5\right)^{\frac{1}{2}}dx = \int x^{5/2}dx =$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^3}}dx$$

求不定积分 I ——“直接”利用基本积分公式 (Cont.)

熟练计算 $\int x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C, & \alpha \neq -1 \\ \ln|x| + C, & \alpha = -1 \end{cases}$

例 2 求不定积分 $\int \sqrt{x^5}dx$，$\int \frac{1}{\sqrt{x^3}}dx$

解

$$\int \sqrt{x^5}dx = \int \left(x^5\right)^{\frac{1}{2}}dx = \int x^{5/2}dx = \qquad x^{\frac{5}{2}+1}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^3}}dx$$

求不定积分 I ——“直接”利用基本积分公式 (Cont.)

熟练计算 $\int x^{\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C, & \alpha \neq -1 \\ \ln|x| + C, & \alpha = -1 \end{cases}$

例 2 求不定积分 $\int \sqrt{x^5} dx$，$\int \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx$

解

$$\int \sqrt{x^5} dx = \int \left(x^5\right)^{\frac{1}{2}} dx = \int x^{5/2} dx = \frac{1}{\frac{5}{2}+1} x^{\frac{5}{2}+1}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx$$

求不定积分 I ——“直接”利用基本积分公式 (Cont.)

熟练计算 $\int x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C, & \alpha \neq -1 \\ \ln|x| + C, & \alpha = -1 \end{cases}$

例 2 求不定积分 $\int \sqrt{x^5} dx$，$\int \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx$

解

$$\int \sqrt{x^5} dx = \int \left(x^5\right)^{\frac{1}{2}} dx = \int x^{5/2} dx = \frac{1}{\frac{5}{2}+1} x^{\frac{5}{2}+1} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx$$

求不定积分 I ——“直接”利用基本积分公式 (Cont.)

熟练计算 $\int x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C, & \alpha \neq -1 \\ \ln|x|+C, & \alpha=-1 \end{cases}$

例 2 求不定积分 $\int \sqrt{x^5}dx$，$\int \frac{1}{\sqrt{x^3}}dx$

解

$$\int \sqrt{x^5}dx = \int \left(x^5\right)^{\frac{1}{2}}dx = \int x^{5/2}dx = \frac{1}{\frac{5}{2}+1}x^{\frac{5}{2}+1}+C = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^3}}dx$$

求不定积分 I ——“直接”利用基本积分公式 (Cont.)

熟练计算 $\int x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C, & \alpha \neq -1 \\ \ln|x|+C, & \alpha = -1 \end{cases}$

例 2 求不定积分 $\int \sqrt{x^5}dx$，$\int \frac{1}{\sqrt{x^3}}dx$

解

$$\int \sqrt{x^5}dx = \int \left(x^5\right)^{\frac{1}{2}}dx = \int x^{5/2}dx = \frac{1}{\frac{5}{2}+1}x^{\frac{5}{2}+1}+C = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^3}}dx = \int \frac{1}{x^{3/2}}dx$$

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

求不定积分 I ——“直接”利用基本积分公式 (Cont.)

熟练计算 $\int x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C, & \alpha \neq -1 \\ \ln|x| + C, & \alpha = -1 \end{cases}$

例 2 求不定积分 $\int \sqrt{x^5}dx$，$\int \frac{1}{\sqrt{x^3}}dx$

解

$$\int \sqrt{x^5}dx = \int \left(x^5\right)^{\frac{1}{2}}dx = \int x^{5/2}dx = \frac{1}{\frac{5}{2}+1}x^{\frac{5}{2}+1} + C = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^3}}dx = \int \frac{1}{x^{3/2}}dx = \int x^{-3/2}dx$$

$$=$$

求不定积分 I ——“直接”利用基本积分公式 (Cont.)

熟练计算 $\int x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C, & \alpha \neq -1 \\ \ln|x| + C, & \alpha = -1 \end{cases}$

例 2 求不定积分 $\int \sqrt{x^5}dx$，$\int \frac{1}{\sqrt{x^3}}dx$

解

$$\int \sqrt{x^5}dx = \int \left(x^5\right)^{\frac{1}{2}}dx = \int x^{5/2}dx = \frac{1}{\frac{5}{2}+1}x^{\frac{5}{2}+1} + C = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^3}}dx = \int \frac{1}{x^{3/2}}dx = \int x^{-3/2}dx$$

$$= \qquad x^{-\frac{3}{2}+1}$$

求不定积分 I ——“直接”利用基本积分公式 (Cont.)

熟练计算 $\int x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C, & \alpha \neq -1 \\ \ln|x| + C, & \alpha = -1 \end{cases}$

例 2 求不定积分 $\int \sqrt{x^5}dx$，$\int \frac{1}{\sqrt{x^3}}dx$

解

$$\int \sqrt{x^5}dx = \int \left(x^5\right)^{\frac{1}{2}}dx = \int x^{5/2}dx = \frac{1}{\frac{5}{2}+1}x^{\frac{5}{2}+1} + C = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^3}}dx = \int \frac{1}{x^{3/2}}dx = \int x^{-3/2}dx$$

$$= \frac{1}{-\frac{3}{2}+1}x^{-\frac{3}{2}+1}$$

求不定积分 I ——"直接"利用基本积分公式 (Cont.)

熟练计算 $\int x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C, & \alpha \neq -1 \\ \ln|x| + C, & \alpha = -1 \end{cases}$

例 2 求不定积分 $\int \sqrt{x^5}dx$，$\int \frac{1}{\sqrt{x^3}}dx$

解

$$\int \sqrt{x^5}dx = \int \left(x^5\right)^{\frac{1}{2}}dx = \int x^{5/2}dx = \frac{1}{\frac{5}{2}+1}x^{\frac{5}{2}+1} + C = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^3}}dx = \int \frac{1}{x^{3/2}}dx = \int x^{-3/2}dx$$

$$= \frac{1}{-\frac{3}{2}+1}x^{-\frac{3}{2}+1} + C$$

求不定积分 I ——“直接”利用基本积分公式 (Cont.)

熟练计算 $\int x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C, & \alpha \neq -1 \\ \ln|x| + C, & \alpha = -1 \end{cases}$

例 2 求不定积分 $\int \sqrt{x^5}dx$，$\int \frac{1}{\sqrt{x^3}}dx$

解

$$\int \sqrt{x^5}dx = \int (x^5)^{\frac{1}{2}}dx = \int x^{5/2}dx = \frac{1}{\frac{5}{2}+1}x^{\frac{5}{2}+1} + C = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^3}}dx = \int \frac{1}{x^{3/2}}dx = \int x^{-3/2}dx$$

$$= \frac{1}{-\frac{3}{2}+1}x^{-\frac{3}{2}+1} + C = -2x^{-1/2} + C$$

求不定积分 I ——“直接”利用基本积分公式 (Cont.)

熟练计算 $\int x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C, & \alpha \neq -1 \\ \ln|x| + C, & \alpha = -1 \end{cases}$

例 2 求不定积分 $\int \sqrt{x^5}dx$，$\int \frac{1}{\sqrt{x^3}}dx$

解

$$\int \sqrt{x^5}dx = \int \left(x^5\right)^{\frac{1}{2}}dx = \int x^{5/2}dx = \frac{1}{\frac{5}{2}+1}x^{\frac{5}{2}+1} + C = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^3}}dx = \int \frac{1}{x^{3/2}}dx = \int x^{-3/2}dx$$

$$= \frac{1}{-\frac{3}{2}+1}x^{-\frac{3}{2}+1} + C = -2x^{-1/2} + C = -\frac{2}{\sqrt{x}} + C$$

求不定积分 II：化为 $\int x^{\alpha} dx$

例 3 求不定积分 $\int \frac{x}{\sqrt{x^5}} dx$, $\int \frac{(3-x\sqrt{x})^2}{x} dx$, $\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x} dx$

求不定积分 II：化为 $\int x^\alpha dx$

例 3 求不定积分 $\int \frac{x}{\sqrt{x^5}}dx$, $\int \frac{(3-x\sqrt{x})^2}{x}dx$, $\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x}dx$

提示 整理被积函数，化不定积分为 $\int x^\alpha dx$ 形式

求不定积分 II：化为 $\int x^\alpha dx$

例 3 求不定积分 $\int \frac{x}{\sqrt{x^5}}dx$, $\int \frac{(3-x\sqrt{x})^2}{x}dx$, $\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x}dx$

提示 整理被积函数，化不定积分为 $\int x^\alpha dx$ 形式

解 $$\int \frac{x}{\sqrt{x^5}}dx =$$

求不定积分 II：化为 $\int x^{\alpha}dx$

例 3 求不定积分 $\int \frac{x}{\sqrt{x^5}}dx$, $\int \frac{(3-x\sqrt{x})^2}{x}dx$, $\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x}dx$

提示 整理被积函数，化不定积分为 $\int x^{\alpha}dx$ 形式

解
$$\int \frac{x}{\sqrt{x^5}}dx = \int \frac{x}{x^{5/2}}dx =$$

求不定积分 II：化为 $\int x^{\alpha}dx$

例 3 求不定积分 $\int \frac{x}{\sqrt{x^5}}dx$, $\int \frac{(3-x\sqrt{x})^2}{x}dx$, $\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x}dx$

提示 整理被积函数，化不定积分为 $\int x^{\alpha}dx$ 形式

解 $$\int \frac{x}{\sqrt{x^5}}dx = \int \frac{x}{x^{5/2}}dx = \int x^{1-5/2}dx =$$

求不定积分 II：化为 $\int x^{\alpha} dx$

例 3 求不定积分 $\int \frac{x}{\sqrt{x^5}} dx$, $\int \frac{(3-x\sqrt{x})^2}{x} dx$, $\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x} dx$

提示 整理被积函数，化不定积分为 $\int x^{\alpha} dx$ 形式

解
$$\int \frac{x}{\sqrt{x^5}} dx = \int \frac{x}{x^{5/2}} dx = \int x^{1-5/2} dx = \int x^{-3/2} dx$$

求不定积分 II：化为 $\int x^{\alpha} dx$

例 3 求不定积分 $\int \frac{x}{\sqrt{x^5}} dx$, $\int \frac{(3-x\sqrt{x})^2}{x} dx$, $\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x} dx$

提示 整理被积函数，化不定积分为 $\int x^{\alpha} dx$ 形式

解
$$\int \frac{x}{\sqrt{x^5}} dx = \int \frac{x}{x^{5/2}} dx = \int x^{1-5/2} dx = \int x^{-3/2} dx = \qquad x^{-\frac{1}{2}}$$

求不定积分 II：化为 $\int x^\alpha dx$

例 3 求不定积分 $\int \frac{x}{\sqrt{x^5}}dx$, $\int \frac{(3-x\sqrt{x})^2}{x}dx$, $\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x}dx$

提示 整理被积函数，化不定积分为 $\int x^\alpha dx$ 形式

解
$$\int \frac{x}{\sqrt{x^5}}dx = \int \frac{x}{x^{5/2}}dx = \int x^{1-5/2}dx = \int x^{-3/2}dx = -2x^{-\frac{1}{2}}$$

求不定积分 II：化为 $\int x^{\alpha}dx$

例 3 求不定积分 $\int \frac{x}{\sqrt{x^5}}dx,\quad \int \frac{(3-x\sqrt{x})^2}{x}dx,\quad \int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x}dx$

提示 整理被积函数，化不定积分为 $\int x^{\alpha}dx$ 形式

解

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^5}}dx = \int \frac{x}{x^{5/2}}dx = \int x^{1-5/2}dx = \int x^{-3/2}dx = -2x^{-\frac{1}{2}}+C$$

求不定积分 II：化为 $\int x^\alpha dx$

例 3 求不定积分 $\int \frac{x}{\sqrt{x^5}}dx,\quad \int \frac{(3-x\sqrt{x})^2}{x}dx,\quad \int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x}dx$

提示 整理被积函数，化不定积分为 $\int x^\alpha dx$ 形式

解 $$\int \frac{x}{\sqrt{x^5}}dx = \int \frac{x}{x^{5/2}}dx = \int x^{1-5/2}dx = \int x^{-3/2}dx = -2x^{-\frac{1}{2}} + C$$

$$\int \frac{(3-x\sqrt{x})^2}{x}dx =$$

求不定积分 II : 化为 $\int x^\alpha dx$

例 3 求不定积分 $\int \frac{x}{\sqrt{x^5}}dx$, $\int \frac{(3-x\sqrt{x})^2}{x}dx$, $\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x}dx$

提示 整理被积函数，化不定积分为 $\int x^\alpha dx$ 形式

解
$$\int \frac{x}{\sqrt{x^5}}dx = \int \frac{x}{x^{5/2}}dx = \int x^{1-5/2}dx = \int x^{-3/2}dx = -2x^{-\frac{1}{2}} + C$$

$$\int \frac{(3-x\sqrt{x})^2}{x}dx = \int \frac{(3-x^{\frac{3}{2}})^2}{x}dx =$$

求不定积分 II：化为 $\int x^\alpha dx$

例 3 求不定积分 $\int \frac{x}{\sqrt{x^5}}dx$, $\int \frac{(3-x\sqrt{x})^2}{x}dx$, $\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x}dx$

提示 整理被积函数，化不定积分为 $\int x^\alpha dx$ 形式

解

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^5}}dx = \int \frac{x}{x^{5/2}}dx = \int x^{1-5/2}dx = \int x^{-3/2}dx = -2x^{-\frac{1}{2}}+C$$

$$\int \frac{(3-x\sqrt{x})^2}{x}dx = \int \frac{(3-x^{\frac{3}{2}})^2}{x}dx = \int \frac{9-6x^{\frac{3}{2}}+x^3}{x}dx$$

$$=$$

求不定积分 II：化为 $\int x^\alpha dx$

例 3 求不定积分 $\int \frac{x}{\sqrt{x^5}}dx$, $\int \frac{(3-x\sqrt{x})^2}{x}dx$, $\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x}dx$

提示 整理被积函数，化不定积分为 $\int x^\alpha dx$ 形式

解
$$\int \frac{x}{\sqrt{x^5}}dx = \int \frac{x}{x^{5/2}}dx = \int x^{1-5/2}dx = \int x^{-3/2}dx = -2x^{-\frac{1}{2}}+C$$

$$\int \frac{(3-x\sqrt{x})^2}{x}dx = \int \frac{(3-x^{\frac{3}{2}})^2}{x}dx = \int \frac{9-6x^{\frac{3}{2}}+x^3}{x}dx$$

$$= \int \frac{9}{x} - 6x^{\frac{1}{2}} + x^2 dx =$$

求不定积分 II：化为 $\int x^\alpha dx$

例 3 求不定积分 $\int \frac{x}{\sqrt{x^5}}dx$, $\int \frac{(3-x\sqrt{x})^2}{x}dx$, $\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x}dx$

提示 整理被积函数，化不定积分为 $\int x^\alpha dx$ 形式

解
$$\int \frac{x}{\sqrt{x^5}}dx = \int \frac{x}{x^{5/2}}dx = \int x^{1-5/2}dx = \int x^{-3/2}dx = -2x^{-\frac{1}{2}}+C$$

$$\int \frac{(3-x\sqrt{x})^2}{x}dx = \int \frac{(3-x^{\frac{3}{2}})^2}{x}dx = \int \frac{9-6x^{\frac{3}{2}}+x^3}{x}dx$$

$$= \int \frac{9}{x} - 6x^{\frac{1}{2}} + x^2 dx = 9\ln|x|$$

求不定积分 II：化为 $\int x^\alpha dx$

例 3 求不定积分 $\int \frac{x}{\sqrt{x^5}}dx,\quad \int \frac{(3-x\sqrt{x})^2}{x}dx,\quad \int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x}dx$

提示 整理被积函数，化不定积分为 $\int x^\alpha dx$ 形式

解

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^5}}dx = \int \frac{x}{x^{5/2}}dx = \int x^{1-5/2}dx = \int x^{-3/2}dx = -2x^{-\frac{1}{2}}+C$$

$$\int \frac{(3-x\sqrt{x})^2}{x}dx = \int \frac{(3-x^{\frac{3}{2}})^2}{x}dx = \int \frac{9-6x^{\frac{3}{2}}+x^3}{x}dx$$

$$= \int \frac{9}{x} - 6x^{\frac{1}{2}} + x^2 dx = 9\ln|x| \qquad x^{\frac{3}{2}}$$

求不定积分 II：化为 $\int x^\alpha dx$

例 3 求不定积分 $\int \frac{x}{\sqrt{x^5}}dx$, $\int \frac{(3-x\sqrt{x})^2}{x}dx$, $\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x}dx$

提示 整理被积函数，化不定积分为 $\int x^\alpha dx$ 形式

解

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^5}}dx = \int \frac{x}{x^{5/2}}dx = \int x^{1-5/2}dx = \int x^{-3/2}dx = -2x^{-\frac{1}{2}}+C$$

$$\int \frac{(3-x\sqrt{x})^2}{x}dx = \int \frac{(3-x^{\frac{3}{2}})^2}{x}dx = \int \frac{9-6x^{\frac{3}{2}}+x^3}{x}dx$$

$$= \int \frac{9}{x} - 6x^{\frac{1}{2}} + x^2 dx = 9\ln|x| - 4x^{\frac{3}{2}}$$

求不定积分 II：化为 $\int x^\alpha dx$

例 3 求不定积分 $\int \frac{x}{\sqrt{x^5}}dx$, $\int \frac{(3-x\sqrt{x})^2}{x}dx$, $\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x}dx$

提示 整理被积函数，化不定积分为 $\int x^\alpha dx$ 形式

解

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^5}}dx = \int \frac{x}{x^{5/2}}dx = \int x^{1-5/2}dx = \int x^{-3/2}dx = -2x^{-\frac{1}{2}}+C$$

$$\int \frac{(3-x\sqrt{x})^2}{x}dx = \int \frac{(3-x^{\frac{3}{2}})^2}{x}dx = \int \frac{9-6x^{\frac{3}{2}}+x^3}{x}dx$$

$$= \int \frac{9}{x} - 6x^{\frac{1}{2}} + x^2 dx = 9\ln|x| - 4x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}x^3$$

求不定积分 II：化为 $\int x^\alpha dx$

例 3 求不定积分 $\int \frac{x}{\sqrt{x^5}}dx$, $\int \frac{(3-x\sqrt{x})^2}{x}dx$, $\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x}dx$

提示 整理被积函数，化不定积分为 $\int x^\alpha dx$ 形式

解

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^5}}dx = \int \frac{x}{x^{5/2}}dx = \int x^{1-5/2}dx = \int x^{-3/2}dx = -2x^{-\frac{1}{2}}+C$$

$$\int \frac{(3-x\sqrt{x})^2}{x}dx = \int \frac{(3-x^{\frac{3}{2}})^2}{x}dx = \int \frac{9-6x^{\frac{3}{2}}+x^3}{x}dx$$

$$= \int \frac{9}{x} - 6x^{\frac{1}{2}} + x^2 dx = 9\ln|x| - 4x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}x^3 + C$$

求不定积分 II：化为 $\int x^\alpha dx$

例 3 求不定积分 $\int \frac{x}{\sqrt{x^5}}dx$, $\int \frac{(3-x\sqrt{x})^2}{x}dx$, $\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x}dx$

提示 整理被积函数，化不定积分为 $\int x^\alpha dx$ 形式

解
$$\int \frac{x}{\sqrt{x^5}}dx = \int \frac{x}{x^{5/2}}dx = \int x^{1-5/2}dx = \int x^{-3/2}dx = -2x^{-\frac{1}{2}}+C$$

$$\int \frac{(3-x\sqrt{x})^2}{x}dx = \int \frac{(3-x^{\frac{3}{2}})^2}{x}dx = \int \frac{9-6x^{\frac{3}{2}}+x^3}{x}dx$$

$$= \int \frac{9}{x} - 6x^{\frac{1}{2}} + x^2 dx = 9\ln|x| - 4x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}x^3 + C$$

$$\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x}dx =$$

求不定积分 II：化为 $\int x^\alpha dx$

例 3 求不定积分 $\int \frac{x}{\sqrt{x^5}}dx$, $\int \frac{(3-x\sqrt{x})^2}{x}dx$, $\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x}dx$

提示 整理被积函数，化不定积分为 $\int x^\alpha dx$ 形式

解

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^5}}dx = \int \frac{x}{x^{5/2}}dx = \int x^{1-5/2}dx = \int x^{-3/2}dx = -2x^{-\frac{1}{2}}+C$$

$$\int \frac{(3-x\sqrt{x})^2}{x}dx = \int \frac{(3-x^{\frac{3}{2}})^2}{x}dx = \int \frac{9-6x^{\frac{3}{2}}+x^3}{x}dx$$

$$= \int \frac{9}{x} - 6x^{\frac{1}{2}} + x^2 dx = 9\ln|x| - 4x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}x^3 + C$$

$$\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x}dx = \int \frac{(1-x^{\frac{1}{2}})^2}{x}dx =$$

求不定积分 II：化为 $\int x^\alpha dx$

例 3 求不定积分 $\int \frac{x}{\sqrt{x^5}}dx$, $\int \frac{(3-x\sqrt{x})^2}{x}dx$, $\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x}dx$

提示 整理被积函数，化不定积分为 $\int x^\alpha dx$ 形式

解
$$\int \frac{x}{\sqrt{x^5}}dx = \int \frac{x}{x^{5/2}}dx = \int x^{1-5/2}dx = \int x^{-3/2}dx = -2x^{-\frac{1}{2}}+C$$

$$\int \frac{(3-x\sqrt{x})^2}{x}dx = \int \frac{(3-x^{\frac{3}{2}})^2}{x}dx = \int \frac{9-6x^{\frac{3}{2}}+x^3}{x}dx$$

$$= \int \frac{9}{x} - 6x^{\frac{1}{2}} + x^2 dx = 9\ln|x| - 4x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}x^3 + C$$

$$\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x}dx = \int \frac{(1-x^{\frac{1}{2}})^2}{x}dx = \int \frac{1-2x^{\frac{1}{2}}+x}{x}dx$$

$$=$$

求不定积分 II：化为 $\int x^{\alpha} dx$

例 3 求不定积分 $\int \frac{x}{\sqrt{x^5}} dx$, $\int \frac{(3-x\sqrt{x})^2}{x} dx$, $\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x} dx$

提示 整理被积函数，化不定积分为 $\int x^{\alpha} dx$ 形式

解

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^5}} dx = \int \frac{x}{x^{5/2}} dx = \int x^{1-5/2} dx = \int x^{-3/2} dx = -2x^{-\frac{1}{2}} + C$$

$$\int \frac{(3-x\sqrt{x})^2}{x} dx = \int \frac{(3-x^{\frac{3}{2}})^2}{x} dx = \int \frac{9-6x^{\frac{3}{2}}+x^3}{x} dx$$

$$= \int \frac{9}{x} - 6x^{\frac{1}{2}} + x^2 dx = 9\ln|x| - 4x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}x^3 + C$$

$$\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x} dx = \int \frac{(1-x^{\frac{1}{2}})^2}{x} dx = \int \frac{1-2x^{\frac{1}{2}}+x}{x} dx$$

$$= \int \frac{1}{x} - 2x^{-\frac{1}{2}} + 1 dx =$$

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

求不定积分 II：化为 $\int x^{\alpha} dx$

例 3 求不定积分 $\int \frac{x}{\sqrt{x^5}} dx$, $\int \frac{(3-x\sqrt{x})^2}{x} dx$, $\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x} dx$

提示 整理被积函数，化不定积分为 $\int x^{\alpha} dx$ 形式

解
$$\int \frac{x}{\sqrt{x^5}} dx = \int \frac{x}{x^{5/2}} dx = \int x^{1-5/2} dx = \int x^{-3/2} dx = -2x^{-\frac{1}{2}} + C$$

$$\int \frac{(3-x\sqrt{x})^2}{x} dx = \int \frac{(3-x^{\frac{3}{2}})^2}{x} dx = \int \frac{9-6x^{\frac{3}{2}}+x^3}{x} dx$$

$$= \int \frac{9}{x} - 6x^{\frac{1}{2}} + x^2 dx = 9\ln|x| - 4x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}x^3 + C$$

$$\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x} dx = \int \frac{(1-x^{\frac{1}{2}})^2}{x} dx = \int \frac{1-2x^{\frac{1}{2}}+x}{x} dx$$

$$= \int \frac{1}{x} - 2x^{-\frac{1}{2}} + 1 dx = \ln|x|$$

求不定积分 II：化为 $\int x^\alpha dx$

例 3 求不定积分 $\int \frac{x}{\sqrt{x^5}}dx$, $\int \frac{(3-x\sqrt{x})^2}{x}dx$, $\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x}dx$

提示 整理被积函数，化不定积分为 $\int x^\alpha dx$ 形式

解
$$\int \frac{x}{\sqrt{x^5}}dx = \int \frac{x}{x^{5/2}}dx = \int x^{1-5/2}dx = \int x^{-3/2}dx = -2x^{-\frac{1}{2}}+C$$

$$\int \frac{(3-x\sqrt{x})^2}{x}dx = \int \frac{(3-x^{\frac{3}{2}})^2}{x}dx = \int \frac{9-6x^{\frac{3}{2}}+x^3}{x}dx$$

$$= \int \frac{9}{x} - 6x^{\frac{1}{2}} + x^2 dx = 9\ln|x| - 4x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}x^3 + C$$

$$\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x}dx = \int \frac{(1-x^{\frac{1}{2}})^2}{x}dx = \int \frac{1-2x^{\frac{1}{2}}+x}{x}dx$$

$$= \int \frac{1}{x} - 2x^{-\frac{1}{2}} + 1dx = \ln|x| \qquad x^{\frac{1}{2}}$$

求不定积分 II：化为 $\int x^\alpha dx$

例 3 求不定积分 $\int \frac{x}{\sqrt{x^5}}dx$, $\int \frac{(3-x\sqrt{x})^2}{x}dx$, $\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x}dx$

提示 整理被积函数，化不定积分为 $\int x^\alpha dx$ 形式

解

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^5}}dx = \int \frac{x}{x^{5/2}}dx = \int x^{1-5/2}dx = \int x^{-3/2}dx = -2x^{-\frac{1}{2}}+C$$

$$\int \frac{(3-x\sqrt{x})^2}{x}dx = \int \frac{(3-x^{\frac{3}{2}})^2}{x}dx = \int \frac{9-6x^{\frac{3}{2}}+x^3}{x}dx$$

$$= \int \frac{9}{x}-6x^{\frac{1}{2}}+x^2dx = 9\ln|x|-4x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}x^3+C$$

$$\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x}dx = \int \frac{(1-x^{\frac{1}{2}})^2}{x}dx = \int \frac{1-2x^{\frac{1}{2}}+x}{x}dx$$

$$= \int \frac{1}{x}-2x^{-\frac{1}{2}}+1dx = \ln|x|-4x^{\frac{1}{2}}$$

求不定积分 II：化为 $\int x^\alpha dx$

例 3 求不定积分 $\int \frac{x}{\sqrt{x^5}}dx$, $\int \frac{(3-x\sqrt{x})^2}{x}dx$, $\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x}dx$

提示 整理被积函数，化不定积分为 $\int x^\alpha dx$ 形式

解

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^5}}dx = \int \frac{x}{x^{5/2}}dx = \int x^{1-5/2}dx = \int x^{-3/2}dx = -2x^{-\frac{1}{2}}+C$$

$$\int \frac{(3-x\sqrt{x})^2}{x}dx = \int \frac{(3-x^{\frac{3}{2}})^2}{x}dx = \int \frac{9-6x^{\frac{3}{2}}+x^3}{x}dx$$

$$= \int \frac{9}{x} - 6x^{\frac{1}{2}} + x^2 dx = 9\ln|x| - 4x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}x^3 + C$$

$$\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x}dx = \int \frac{(1-x^{\frac{1}{2}})^2}{x}dx = \int \frac{1-2x^{\frac{1}{2}}+x}{x}dx$$

$$= \int \frac{1}{x} - 2x^{-\frac{1}{2}} + 1dx = \ln|x| - 4x^{\frac{1}{2}} + x$$

求不定积分 II：化为 $\int x^\alpha dx$

例 3 求不定积分 $\int \frac{x}{\sqrt{x^5}}dx, \quad \int \frac{(3-x\sqrt{x})^2}{x}dx, \quad \int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x}dx$

提示 整理被积函数，化不定积分为 $\int x^\alpha dx$ 形式

解 $$\int \frac{x}{\sqrt{x^5}}dx = \int \frac{x}{x^{5/2}}dx = \int x^{1-5/2}dx = \int x^{-3/2}dx = -2x^{-\frac{1}{2}} + C$$

$$\int \frac{(3-x\sqrt{x})^2}{x}dx = \int \frac{(3-x^{\frac{3}{2}})^2}{x}dx = \int \frac{9-6x^{\frac{3}{2}}+x^3}{x}dx$$

$$= \int \frac{9}{x} - 6x^{\frac{1}{2}} + x^2 dx = 9\ln|x| - 4x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}x^3 + C$$

$$\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x}dx = \int \frac{(1-x^{\frac{1}{2}})^2}{x}dx = \int \frac{1-2x^{\frac{1}{2}}+x}{x}dx$$

$$= \int \frac{1}{x} - 2x^{-\frac{1}{2}} + 1 dx = \ln|x| - 4x^{\frac{1}{2}} + x + C$$

求不定积分 III: 形如 $\int \frac{\text{Ìá½»½ó¸¢È}}{\text{×ª·¢: Ñ§ÆÚÌõ}} dx$

提示 将分式“$\frac{\text{Ìá½»½ó¸¢È}}{\text{×ª·¢: Ñ§ÆÚÌõ}}$”拆成两个（或多个）简单的式子/分式

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

求不定积分 III: 形如 $\int \frac{\text{Ìá½»½ó¸¢È}}{\text{×ª·¢: Ñ§ÆÚÌÕ}} dx$

提示 将分式“$\frac{\text{Ìá½»½ó¸¢È}}{\text{×ª·¢: Ñ§ÆÚÌÕ}}$”拆成两个（或多个）简单的式子/分式

例 4 求不定积分 $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx, \quad \int \frac{3+x^2}{1+x^2} dx$

解

求不定积分 III: 形如 $\int \frac{\text{Ìá½»½ó¸¢È}}{\text{×ª·¢: Ñ§ÆÚÌõ}} dx$

提示 将分式“$\frac{\text{Ìá½»½ó¸¢È}}{\text{×ª·¢: Ñ§ÆÚÌõ}}$”拆成两个（或多个）简单的式子/分式

例 4 求不定积分 $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$, $\int \frac{3+x^2}{1+x^2} dx$

解

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx =$$

求不定积分 III: 形如 $\int \frac{\text{Ìá½»½ó¸¢È}}{\text{×ª·¢: Ñ§ÆÚÌõ}} dx$

提示 将分式“$\frac{\text{Ìá½»½ó¸¢È}}{\text{×ª·¢: Ñ§ÆÚÌõ}}$”拆成两个（或多个）简单的式子/分式

例 4 求不定积分 $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$, $\int \frac{3+x^2}{1+x^2} dx$

解

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx =$$

求不定积分 III: 形如 $\int \frac{\text{Ìá½»½ó¸¢È}}{\text{×ª·¢: Ñ§ÆÚÌõ}} dx$

提示 将分式“$\frac{\text{Ìá½»½ó¸¢È}}{\text{×ª·¢: Ñ§ÆÚÌõ}}$”拆成两个（或多个）简单的式子/分式

例 4 求不定积分 $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$, $\int \frac{3+x^2}{1+x^2} dx$

解

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int 1 - \frac{1}{1+x^2} dx =$$

求不定积分 III: 形如 $\int \frac{\text{Ìá½»½ó¸¢È}}{\text{×ª·¢: Ñ§ÆÚÌõ}} dx$

提示 将分式“$\frac{\text{Ìá½»½ó¸¢È}}{\text{×ª·¢: Ñ§ÆÚÌõ}}$”拆成两个（或多个）简单的式子/分式

例 4 求不定积分 $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$, $\int \frac{3+x^2}{1+x^2} dx$

解

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int 1 - \frac{1}{1+x^2} dx = x -$$

求不定积分 III: 形如 $\int \frac{\text{Ìá½»½ó¸¢È}}{\text{×ª·¢: Ñ§ÆÚÌÕ}} dx$

提示 将分式“$\frac{\text{Ìá½»½ó¸¢È}}{\text{×ª·¢: Ñ§ÆÚÌÕ}}$”拆成两个（或多个）简单的式子/分式

例 4 求不定积分 $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$, $\int \frac{3+x^2}{1+x^2} dx$

解

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int 1 - \frac{1}{1+x^2} dx = x - \arctan x$$

求不定积分 III: 形如 $\int \frac{\text{Ìá½»½ó¸¢È}}{\text{×ª·¢: Ñ§ÆÚÌÕ}}dx$

提示 将分式“$\frac{\text{Ìá½»½ó¸¢È}}{\text{×ª·¢: Ñ§ÆÚÌÕ}}$”拆成两个（或多个）简单的式子/分式

例 4 求不定积分 $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$, $\int \frac{3+x^2}{1+x^2}dx$

解

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int 1 - \frac{1}{1+x^2}dx = x - \arctan x + C$$

求不定积分 III: 形如 $\int \frac{\text{Ìá½»½ó¸¢È}}{\text{×ª·¢: Ñ§ÆÚÌõ}} dx$

提示 将分式“$\frac{\text{Ìá½»½ó¸¢È}}{\text{×ª·¢: Ñ§ÆÚÌõ}}$”拆成两个（或多个）简单的式子/分式

例 4 求不定积分 $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$, $\int \frac{3+x^2}{1+x^2} dx$

解

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int 1 - \frac{1}{1+x^2} dx = x - \arctan x + C$$

$$\int \frac{3+x^2}{1+x^2} dx =$$

求不定积分 III: 形如 $\int \frac{\text{Ìá½»½ó¸¢È}}{\text{×ª·¢: Ñ§ÆÚÌÕ}} dx$

提示 将分式“$\frac{\text{Ìá½»½ó¸¢È}}{\text{×ª·¢: Ñ§ÆÚÌÕ}}$”拆成两个（或多个）简单的式子/分式

例 4 求不定积分 $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$, $\int \frac{3+x^2}{1+x^2} dx$

解

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int 1 - \frac{1}{1+x^2} dx = x - \arctan x + C$$

$$\int \frac{3+x^2}{1+x^2} dx = \int \frac{1+x^2+2}{1+x^2} dx =$$

求不定积分 III: 形如 $\int \frac{\text{Ìá½»½ó¸¢È}}{\text{×ª·¢: Ñ§ÆÚÌÕ}} dx$

提示 将分式“$\frac{\text{Ìá½»½ó¸¢È}}{\text{×ª·¢: Ñ§ÆÚÌÕ}}$”拆成两个（或多个）简单的式子/分式

例 4 求不定积分 $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$, $\int \frac{3+x^2}{1+x^2} dx$

解

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int 1 - \frac{1}{1+x^2} dx = x - \arctan x + C$$

$$\int \frac{3+x^2}{1+x^2} dx = \int 1 + \frac{2}{1+x^2} dx =$$

求不定积分 III: 形如 $\int \frac{\text{Ìá½»½ó¸¢È}}{\text{×ª·¢: Ñ§ÆÚÌÕ}} dx$

提示 将分式“$\frac{\text{Ìá½»½ó¸¢È}}{\text{×ª·¢: Ñ§ÆÚÌÕ}}$”拆成两个（或多个）简单的式子/分式

例 4 求不定积分 $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx, \quad \int \frac{3+x^2}{1+x^2} dx$

解

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int 1 - \frac{1}{1+x^2} dx = x - \arctan x + C$$

$$\int \frac{3+x^2}{1+x^2} dx = \int 1 + \frac{2}{1+x^2} dx = x +$$

求不定积分 III: 形如 $\int \frac{\text{Ìá½»½ó¸¢È}}{\text{×ª·¢: Ñ§ÆÚÌÕ}} dx$

提示 将分式“$\frac{\text{Ìá½»½ó¸¢È}}{\text{×ª·¢: Ñ§ÆÚÌÕ}}$”拆成两个（或多个）简单的式子/分式

例 4 求不定积分 $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$, $\int \frac{3+x^2}{1+x^2} dx$

解

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int 1 - \frac{1}{1+x^2} dx = x - \arctan x + C$$

$$\int \frac{3+x^2}{1+x^2} dx = \int 1 + \frac{2}{1+x^2} dx = x + 2\arctan x$$

求不定积分 III: 形如 $\int \frac{\text{Ìá½»½ó¸¢È}}{\text{×ª·¢: Ñ§ÆÚÌÕ}} dx$

提示 将分式“$\frac{\text{Ìá½»½ó¸¢È}}{\text{×ª·¢: Ñ§ÆÚÌÕ}}$”拆成两个（或多个）简单的式子/分式

例 4 求不定积分 $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$, $\int \frac{3+x^2}{1+x^2} dx$

解

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int 1 - \frac{1}{1+x^2} dx = x - \arctan x + C$$

$$\int \frac{3+x^2}{1+x^2} dx = \int 1 + \frac{2}{1+x^2} dx = x + 2\arctan x + C$$

求不定积分 III: 形如 $\int \frac{\text{Ìá½»½ó¸¢È}}{\text{×ª·¢: Ñ§ÆÚÌõ}} dx$

提示 将分式“$\frac{\text{Ìá½»½ó¸¢È}}{\text{×ª·¢: Ñ§ÆÚÌõ}}$”拆成两个（或多个）简单的式子/分式

例 4 求不定积分 $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$, $\int \frac{3+x^2}{1+x^2} dx$

解

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int 1 - \frac{1}{1+x^2} dx = x - \arctan x + C$$

$$\int \frac{3+x^2}{1+x^2} dx = \int 1 + \frac{2}{1+x^2} dx = x + 2\arctan x + C$$

例 5 求不定积分 $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx$, $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x+1} dx$

解

求不定积分 III: 形如 $\int \frac{\text{Ìá½»½ó¸¢È}}{\text{×ª·¢: Ñ§ÆÚÌõ}} dx$

提示 将分式“$\frac{\text{Ìá½»½ó¸¢È}}{\text{×ª·¢: Ñ§ÆÚÌõ}}$”拆成两个（或多个）简单的式子/分式

例 4 求不定积分 $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$, $\int \frac{3+x^2}{1+x^2} dx$

解

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int 1 - \frac{1}{1+x^2} dx = x - \arctan x + C$$

$$\int \frac{3+x^2}{1+x^2} dx = \int 1 + \frac{2}{1+x^2} dx = x + 2\arctan x + C$$

例 5 求不定积分 $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx$, $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x+1} dx$

解

$$\int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx =$$

求不定积分 III: 形如 $\int \frac{\text{Ìá½»½ó¸¢È}}{\text{×ª·¢: Ñ§ÆÚÌÕ}} dx$

提示 将分式“$\frac{\text{Ìá½»½ó¸¢È}}{\text{×ª·¢: Ñ§ÆÚÌÕ}}$”拆成两个（或多个）简单的式子/分式

例 4 求不定积分 $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx, \quad \int \frac{3+x^2}{1+x^2} dx$

解

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int 1 - \frac{1}{1+x^2} dx = x - \arctan x + C$$

$$\int \frac{3+x^2}{1+x^2} dx = \int 1 + \frac{2}{1+x^2} dx = x + 2\arctan x + C$$

例 5 求不定积分 $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx, \quad \int \frac{e^{2x}-1}{e^x+1} dx$

解

$$\int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} dx =$$

求不定积分 III: 形如 $\int \frac{\text{Ìá½»½ó¸¢È}}{\text{×ª·¢: Ñ§ÆÚÌõ}} dx$

提示 将分式“$\frac{\text{Ìá½»½ó¸¢È}}{\text{×ª·¢: Ñ§ÆÚÌõ}}$”拆成两个（或多个）简单的式子/分式

例 4 求不定积分 $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$, $\int \frac{3+x^2}{1+x^2} dx$

解

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int 1 - \frac{1}{1+x^2} dx = x - \arctan x + C$$

$$\int \frac{3+x^2}{1+x^2} dx = \int 1 + \frac{2}{1+x^2} dx = x + 2\arctan x + C$$

例 5 求不定积分 $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx$, $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x+1} dx$

解

$$\int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} dx = -\frac{1}{x}$$

求不定积分 III: 形如 $\int \frac{\text{Ìá½»½ó¸¢È}}{\text{×ª·¢: Ñ§ÆÚÌÕ}} dx$

提示 将分式“$\frac{\text{Ìá½»½ó¸¢È}}{\text{×ª·¢: Ñ§ÆÚÌÕ}}$”拆成两个（或多个）简单的式子/分式

例 4 求不定积分 $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$, $\quad \int \frac{3+x^2}{1+x^2} dx$

解

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int 1 - \frac{1}{1+x^2} dx = x - \arctan x + C$$

$$\int \frac{3+x^2}{1+x^2} dx = \int 1 + \frac{2}{1+x^2} dx = x + 2\arctan x + C$$

例 5 求不定积分 $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx$, $\quad \int \frac{e^{2x}-1}{e^x+1} dx$

解

$$\int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} dx = -\frac{1}{x} - \arctan x$$

求不定积分 III: 形如 $\int \frac{\text{Ìá½»½ó¸¢È}}{\text{×ª·¢: Ñ§ÆÚÌÕ}} dx$

提示 将分式 “$\frac{\text{Ìá½»½ó¸¢È}}{\text{×ª·¢: Ñ§ÆÚÌÕ}}$” 拆成两个（或多个）简单的式子/分式

例 4 求不定积分 $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx, \quad \int \frac{3+x^2}{1+x^2}dx$

解

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int 1 - \frac{1}{1+x^2}dx = x - \arctan x + C$$

$$\int \frac{3+x^2}{1+x^2}dx = \int 1 + \frac{2}{1+x^2}dx = x + 2\arctan x + C$$

例 5 求不定积分 $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)}dx, \quad \int \frac{e^{2x}-1}{e^x+1}dx$

解

$$\int \frac{1}{x^2(1+x^2)}dx = \int \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}dx = -\frac{1}{x} - \arctan x + C$$

求不定积分 III: 形如 $\int \frac{\text{Ìá½»½ó¸¢È}}{\text{×ª·¢: Ñ§ÆÚÌÕ}} dx$

提示 将分式“$\frac{\text{Ìá½»½ó¸¢È}}{\text{×ª·¢: Ñ§ÆÚÌÕ}}$”拆成两个（或多个）简单的式子/分式

例 4 求不定积分 $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx, \quad \int \frac{3+x^2}{1+x^2} dx$

解

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int 1 - \frac{1}{1+x^2} dx = x - \arctan x + C$$

$$\int \frac{3+x^2}{1+x^2} dx = \int 1 + \frac{2}{1+x^2} dx = x + 2\arctan x + C$$

例 5 求不定积分 $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx, \quad \int \frac{e^{2x}-1}{e^x+1} dx$

解

$$\int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} dx = -\frac{1}{x} - \arctan x + C$$

$$\int \frac{e^{2x}-1}{e^x+1} dx =$$

求不定积分 III: 形如 $\int \frac{\text{Ìá½»½ó¸¢È}}{\text{×ª·¢: Ñ§ÆÚÌÕ}} dx$

提示 将分式“$\frac{\text{Ìá½»½ó¸¢È}}{\text{×ª·¢: Ñ§ÆÚÌÕ}}$”拆成两个（或多个）简单的式子/分式

例 4 求不定积分 $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx, \quad \int \frac{3+x^2}{1+x^2} dx$

解

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int 1 - \frac{1}{1+x^2} dx = x - \arctan x + C$$

$$\int \frac{3+x^2}{1+x^2} dx = \int 1 + \frac{2}{1+x^2} dx = x + 2\arctan x + C$$

例 5 求不定积分 $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx, \quad \int \frac{e^{2x}-1}{e^x+1} dx$

解

$$\int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} dx = -\frac{1}{x} - \arctan x + C$$

$$\int \frac{e^{2x}-1}{e^x+1} dx = \int \frac{(e^x+1)(e^x-1)}{e^x+1} dx =$$

求不定积分 III: 形如 ∫ Ìá½»½ó¸¢È / ×ª·¢: ÑßÆÚÌõ dx

提示 将分式“Ìá½»½ó¸¢È / ×ª·¢: ÑßÆÚÌõ”拆成两个（或多个）简单的式子/分式

例 4 求不定积分 $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$, $\int \frac{3+x^2}{1+x^2}dx$

解

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int 1 - \frac{1}{1+x^2}dx = x - \arctan x + C$$

$$\int \frac{3+x^2}{1+x^2}dx = \int 1 + \frac{2}{1+x^2}dx = x + 2\arctan x + C$$

例 5 求不定积分 $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)}dx$, $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x+1}dx$

解

$$\int \frac{1}{x^2(1+x^2)}dx = \int \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}dx = -\frac{1}{x} - \arctan x + C$$

$$\int \frac{e^{2x}-1}{e^x+1}dx = \int e^x - 1dx =$$

求不定积分 III: 形如 $\int \frac{\text{Ìá½»½ó¸¢È}}{\text{×ª·¢: Ñ§ÆÚÌÕ}} dx$

提示 将分式 "$\frac{\text{Ìá½»½ó¸¢È}}{\text{×ª·¢: Ñ§ÆÚÌÕ}}$" 拆成两个（或多个）简单的式子/分式

例 4 求不定积分 $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$, $\quad \int \frac{3+x^2}{1+x^2} dx$

解

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int 1 - \frac{1}{1+x^2} dx = x - \arctan x + C$$

$$\int \frac{3+x^2}{1+x^2} dx = \int 1 + \frac{2}{1+x^2} dx = x + 2\arctan x + C$$

例 5 求不定积分 $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx$, $\quad \int \frac{e^{2x}-1}{e^x+1} dx$

解

$$\int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} dx = -\frac{1}{x} - \arctan x + C$$

$$\int \frac{e^{2x}-1}{e^x+1} dx = \int e^x - 1 dx = e^x$$

求不定积分 III: 形如 $\int \frac{\text{Ìá½»½ó¸¢È}}{\text{×ª·¢: Ñ§ÆÚÌÕ}} dx$

提示 将分式 “$\frac{\text{Ìá½»½ó¸¢È}}{\text{×ª·¢: Ñ§ÆÚÌÕ}}$” 拆成两个（或多个）简单的式子/分式

例 4 求不定积分 $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$, $\int \frac{3+x^2}{1+x^2} dx$

解

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int 1 - \frac{1}{1+x^2} dx = x - \arctan x + C$$

$$\int \frac{3+x^2}{1+x^2} dx = \int 1 + \frac{2}{1+x^2} dx = x + 2\arctan x + C$$

例 5 求不定积分 $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx$, $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x+1} dx$

解

$$\int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} dx = -\frac{1}{x} - \arctan x + C$$

$$\int \frac{e^{2x}-1}{e^x+1} dx = \int e^x - 1 dx = e^x - x$$

求不定积分 III: 形如 $\int \frac{\text{Ìá½»½ó¸¢È}}{\text{×ª•¢: Ñ§ÆÚÌÕ}} dx$

提示 将分式“$\frac{\text{Ìá½»½ó¸¢È}}{\text{×ª•¢: Ñ§ÆÚÌÕ}}$”拆成两个（或多个）简单的式子/分式

例 4 求不定积分 $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx, \quad \int \frac{3+x^2}{1+x^2} dx$

解

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int 1 - \frac{1}{1+x^2} dx = x - \arctan x + C$$

$$\int \frac{3+x^2}{1+x^2} dx = \int 1 + \frac{2}{1+x^2} dx = x + 2\arctan x + C$$

例 5 求不定积分 $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx, \quad \int \frac{e^{2x}-1}{e^x+1} dx$

解

$$\int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} dx = -\frac{1}{x} - \arctan x + C$$

$$\int \frac{e^{2x}-1}{e^x+1} dx = \int e^x - 1 dx = e^x - x + C$$

求不定积分 IV: 化为 $\int a^x dx$

掌握 $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C, (a > 0)$

例 6 求不定积分 $\int 3^x e^x dx$，$\int 5^{-x} e^x dx$

求不定积分 IV: 化为 $\int a^x dx$

掌握 $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C, (a > 0)$

例 6 求不定积分 $\int 3^x e^x dx$，$\int 5^{-x} e^x dx$

解

$$\int 3^x e^x dx =$$

求不定积分 IV: 化为 $\int a^x dx$

掌握 $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C, (a > 0)$

例 6 求不定积分 $\int 3^x e^x dx$，$\int 5^{-x} e^x dx$

解

$$\int 3^x e^x dx = \int (3e)^x dx =$$

求不定积分 IV: 化为 $\int a^x dx$

掌握 $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C, (a > 0)$

例 6 求不定积分 $\int 3^x e^x dx$， $\int 5^{-x} e^x dx$

解

$$\int 3^x e^x dx = \int (3e)^x dx = \frac{1}{\ln(3e)} (3e)^x + C$$

求不定积分 IV: 化为 $\int a^x dx$

掌握 $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C, (a > 0)$

例 6 求不定积分 $\int 3^x e^x dx$，$\int 5^{-x} e^x dx$

解

$$\int 3^x e^x dx = \int (3e)^x dx = \frac{1}{\ln(3e)} (3e)^x + C = \frac{3^x e^x}{1 + \ln 3} + C$$

求不定积分 IV: 化为 $\int a^x dx$

掌握 $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C, (a > 0)$

例 6 求不定积分 $\int 3^x e^x dx$，$\int 5^{-x} e^x dx$

解

$$\int 3^x e^x dx = \int (3e)^x dx = \frac{1}{\ln(3e)} (3e)^x + C = \frac{3^x e^x}{1 + \ln 3} + C$$

$$\int 5^{-x} e^x dx =$$

求不定积分 IV: 化为 $\int a^x dx$

掌握 $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C, (a > 0)$

例 6 求不定积分 $\int 3^x e^x dx$， $\int 5^{-x} e^x dx$

解

$$\int 3^x e^x dx = \int (3e)^x dx = \frac{1}{\ln(3e)} (3e)^x + C = \frac{3^x e^x}{1 + \ln 3} + C$$

$$\int 5^{-x} e^x dx = \int \left(\frac{1}{5}\right)^x e^x dx =$$

求不定积分 IV: 化为 $\int a^x dx$

掌握 $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C, (a > 0)$

例 6 求不定积分 $\int 3^x e^x dx$，$\int 5^{-x} e^x dx$

解

$$\int 3^x e^x dx = \int (3e)^x dx = \frac{1}{\ln(3e)} (3e)^x + C = \frac{3^x e^x}{1 + \ln 3} + C$$

$$\int 5^{-x} e^x dx = \int \left(\frac{1}{5}\right)^x e^x dx = \int \left(\frac{1}{5} e\right)^x dx$$

求不定积分 IV: 化为 $\int a^x dx$

掌握 $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C, (a > 0)$

例 6 求不定积分 $\int 3^x e^x dx$，$\int 5^{-x} e^x dx$

解

$$\int 3^x e^x dx = \int (3e)^x dx = \frac{1}{\ln(3e)} (3e)^x + C = \frac{3^x e^x}{1 + \ln 3} + C$$

$$\int 5^{-x} e^x dx = \int \left(\frac{1}{5}\right)^x e^x dx = \int \left(\frac{1}{5} e\right)^x dx$$

$$= \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{5} e\right)} \left(\frac{1}{5} e\right)^x + C$$

求不定积分 IV: 化为 $\int a^x dx$

掌握 $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C, (a > 0)$

例 6 求不定积分 $\int 3^x e^x dx$，$\int 5^{-x} e^x dx$

解

$$\int 3^x e^x dx = \int (3e)^x dx = \frac{1}{\ln(3e)} (3e)^x + C = \frac{3^x e^x}{1 + \ln 3} + C$$

$$\int 5^{-x} e^x dx = \int \left(\frac{1}{5}\right)^x e^x dx = \int \left(\frac{1}{5} e\right)^x dx$$

$$= \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{5} e\right)} \left(\frac{1}{5} e\right)^x + C = \frac{e^x}{(1 - \ln 5) 5^x} + C$$

求不定积分 V: $\int$ ”triangle functions” dx

求不定积分

$$(1)\int \tan^2 x dx, \quad \int \cot^2 x dx$$

$$(2)\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$$

$$(3)\int \sin^2 \frac{x}{2} dx, \quad \int \cos^2 \frac{x}{2} dx$$

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

求不定积分 V: $\int$ ”triangle functions” dx

求不定积分

$$(1)\ \int \tan^2 x dx, \quad \int \cot^2 x dx$$

$$(2)\ \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$$

$$(3)\ \int \sin^2 \frac{x}{2} dx, \quad \int \cos^2 \frac{x}{2} dx$$

提示 利用“三角恒等式”

平方关系 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

倍角公式 $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

求不定积分 V: $\int$ ”triangle functions” dx

求不定积分

$$(1)\ \int \tan^2 x dx, \quad \int \cot^2 x dx$$

$$(2)\ \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$$

$$(3)\ \int \sin^2 \frac{x}{2} dx, \quad \int \cos^2 \frac{x}{2} dx$$

提示 利用“三角恒等式”

平方关系 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

倍角公式 $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

求不定积分 V: $\int$ "triangle functions" dx

求不定积分

$$(1)\ \int \tan^2 x dx,\quad \int \cot^2 x dx$$

$$(2)\ \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx,\quad \int \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$$

$$(3)\ \int \sin^2 \frac{x}{2} dx,\quad \int \cos^2 \frac{x}{2} dx$$

提示 利用"三角恒等式"

平方关系 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

倍角公式 $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

求不定积分 V: $\int$ "triangle functions" dx (Cont.)

利用：$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

例 7 求不定积分 $\int \tan^2 x dx, \quad \int \cot^2 x dx$

求不定积分 V: $\int$ "triangle functions" dx (Cont.)

利用：$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

例 7 求不定积分 $\int \tan^2 x dx, \quad \int \cot^2 x dx$

解 因为

$$\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1,$$

求不定积分 V: $\int$ ”triangle functions” dx (Cont.)

利用：$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

例 7 求不定积分 $\int \tan^2 x dx$, $\quad \int \cot^2 x dx$

解 因为

$$\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1,$$

$$\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

求不定积分 V: $\int$ "triangle functions" dx (Cont.)

利用：$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

例 7 求不定积分 $\int \tan^2 x dx, \quad \int \cot^2 x dx$

解 因为

$$\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1,$$

$$\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}$$

求不定积分 V: $\int$ "triangle functions" dx (Cont.)

利用：$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

例 7 求不定积分 $\int \tan^2 x dx, \quad \int \cot^2 x dx$

解 因为

$$\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1,$$

$$\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

求不定积分 V: $\int$ "triangle functions" dx (Cont.)

利用：$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

例 7 求不定积分 $\int \tan^2 x dx, \quad \int \cot^2 x dx$

解 因为

$$\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1,$$

所以

$$\int \tan^2 x dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} - 1 dx =$$

$$\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

求不定积分 V: $\int$ "triangle functions" dx (Cont.)

利用：$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

例 7 求不定积分 $\int \tan^2 x dx, \quad \int \cot^2 x dx$

解 因为

$$\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1,$$

所以

$$\int \tan^2 x dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} - 1 dx = \tan x$$

$$\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

求不定积分 V: $\int$ "triangle functions" dx (Cont.)

利用：$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

例 7 求不定积分 $\int \tan^2 x dx$, $\int \cot^2 x dx$

解 因为

$$\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1,$$

所以

$$\int \tan^2 x dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} - 1 dx = \tan x - x$$

$$\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

求不定积分 V: $\int$ "triangle functions" dx (Cont.)

利用：$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

例 7 求不定积分 $\int \tan^2 x dx, \quad \int \cot^2 x dx$

解 因为

$$\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1,$$

所以

$$\int \tan^2 x dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} - 1 dx = \tan x - x + C$$

$$\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

求不定积分 V: $\int$ "triangle functions" dx (Cont.)

利用：$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

例 7 求不定积分 $\int \tan^2 x dx, \quad \int \cot^2 x dx$

解 因为

$$\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1,$$

所以

$$\int \tan^2 x dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} - 1 dx = \tan x - x + C$$

同样，

$$\int \cot^2 x dx =$$

求不定积分 V: $\int$ "triangle functions" dx (Cont.)

利用：$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

例 7 求不定积分 $\int \tan^2 x dx,\quad \int \cot^2 x dx$

解 因为

$$\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1, \qquad \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$$

所以

$$\int \tan^2 x dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} - 1 dx = \tan x - x + C$$

同样，

$$\int \cot^2 x dx =$$

求不定积分 V: $\int$ "triangle functions" dx (Cont.)

利用：$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

例 7 求不定积分 $\int \tan^2 x dx$, $\quad \int \cot^2 x dx$

解 因为

$$\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1, \qquad \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$$

所以

$$\int \tan^2 x dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} - 1 dx = \tan x - x + C$$

同样，

$$\int \cot^2 x dx =$$

$$\cot^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$$

求不定积分 V: $\int$ "triangle functions" dx (Cont.)

利用：$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

例 7 求不定积分 $\int \tan^2 x dx$, $\int \cot^2 x dx$

解 因为

$$\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1, \qquad \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$$

所以

$$\int \tan^2 x dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} - 1 dx = \tan x - x + C$$

同样，

$$\int \cot^2 x dx =$$

$$\cot^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x}$$

求不定积分 V: $\int$ "triangle functions" dx (Cont.)

利用：$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

例 7 求不定积分 $\int \tan^2 x dx, \quad \int \cot^2 x dx$

解 因为

$$\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1, \qquad \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$$

所以

$$\int \tan^2 x dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} - 1 dx = \tan x - x + C$$

同样，

$$\int \cot^2 x dx =$$

$$\cot^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$$

求不定积分 V: $\int$ ”triangle functions” dx (Cont.)

利用：$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

例 7 求不定积分 $\int \tan^2 x dx, \quad \int \cot^2 x dx$

解 因为

$$\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1, \qquad \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$$

所以

$$\int \tan^2 x dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} - 1 dx = \tan x - x + C$$

同样，

$$\int \cot^2 x dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} - 1 dx$$

$$\cot^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$$

求不定积分 V: $\int$ "triangle functions" dx (Cont.)

利用：$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

例 7 求不定积分 $\int \tan^2 x dx, \quad \int \cot^2 x dx$

解 因为

$$\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1, \qquad \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$$

所以

$$\int \tan^2 x dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} - 1 dx = \tan x - x + C$$

同样，

$$\int \cot^2 x dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} - 1 dx = -\cot x$$

$$\cot^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$$

求不定积分 V: $\int$ "triangle functions" dx (Cont.)

利用：$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

例 7 求不定积分 $\int \tan^2 x dx$, $\quad \int \cot^2 x dx$

解 因为

$$\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1, \qquad \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$$

所以

$$\int \tan^2 x dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} - 1 dx = \tan x - x + C$$

同样，

$$\int \cot^2 x dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} - 1 dx = -\cot x - x$$

$$\cot^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$$

求不定积分 V: $\int$ "triangle functions" dx (Cont.)

利用：$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

例 7 求不定积分 $\int \tan^2 x dx, \quad \int \cot^2 x dx$

解 因为

$$\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1, \qquad \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$$

所以

$$\int \tan^2 x dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} - 1 dx = \tan x - x + C$$

同样，

$$\int \cot^2 x dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} - 1 dx = -\cot x - x + C.$$

$$\cot^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$$

求不定积分 V: $\int$ "triangle functions" dx (Cont.)

利用：$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

例 8 求不定积分 $\int \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$

求不定积分 V: $\int$ "triangle functions" dx (Cont.)

利用：$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

例 8 求不定积分 $\int \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$

解

$$\int \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$$

求不定积分 V: $\int$ ”triangle functions” dx (Cont.)

利用：$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

例 8 求不定积分 $\int \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$

解

$$\int \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$$

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

求不定积分 V: $\int$ ”triangle functions” dx (Cont.)

利用：$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

例 8 求不定积分 $\int \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$

解

$$\int \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} dx$$

求不定积分 V: $\int$ ”triangle functions” dx (Cont.)

利用：$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

例 8 求不定积分 $\int \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$

解

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} dx &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx \\ &= \int \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} dx \\ &= \tan x\end{aligned}$$

求不定积分 V: $\int$ "triangle functions" dx (Cont.)

利用：$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

例 8 求不定积分 $\int \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$

解

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} dx &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx \\ &= \int \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} dx \\ &= \tan x - \cot x\end{aligned}$$

求不定积分 V: $\int$ "triangle functions" dx (Cont.)

利用：$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

例 8 求不定积分 $\int \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$

解

$$\int \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$$
$$= \int \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} dx$$
$$= \tan x - \cot x + C$$

求不定积分 V: $\int$ "triangle functions" dx (Cont.)

利用"倍角公式"

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

例 9 求不定积分 $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx, \quad \int \sin^2 \frac{x}{2} dx$

求不定积分 V: $\int$ "triangle functions" dx (Cont.)

利用"倍角公式"

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

例 9 求不定积分 $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx, \quad \int \sin^2 \frac{x}{2} dx$

求不定积分 V: $\int$ ”triangle functions” dx (Cont.)

利用“倍角公式”

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

例 9 求不定积分 $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx, \quad \int \sin^2 \frac{x}{2} dx$

求不定积分 V: $\int$ "triangle functions" dx (Cont.)

利用"倍角公式"

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\therefore \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2},$$

例 9 求不定积分 $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx, \quad \int \sin^2 \frac{x}{2} dx$

求不定积分 V: $\int$ "triangle functions" dx (Cont.)

利用"倍角公式"

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\therefore \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

例 9 求不定积分 $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx, \quad \int \sin^2 \frac{x}{2} dx$

求不定积分 V: $\int$ ”triangle functions” dx (Cont.)

利用“倍角公式”

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\therefore \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

例 9 求不定积分 $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx, \quad \int \sin^2 \frac{x}{2} dx$

解

$$\int \cos^2 \frac{x}{2} dx =$$

$$\int \sin^2 \frac{x}{2} dx =$$

求不定积分 V: $\int$ "triangle functions" dx (Cont.)

利用“倍角公式”

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\therefore \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

例 9 求不定积分 $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx, \quad \int \sin^2 \frac{x}{2} dx$

解

$$\int \cos^2 \frac{x}{2} dx = \int \frac{1+\cos x}{2} dx =$$

$$\int \sin^2 \frac{x}{2} dx =$$

求不定积分 V: $\int$ "triangle functions" dx (Cont.)

利用"倍角公式"

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\therefore \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

例 9 求不定积分 $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx, \quad \int \sin^2 \frac{x}{2} dx$

解

$$\int \cos^2 \frac{x}{2} dx = \int \frac{1+\cos x}{2} dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x + C$$

$$\int \sin^2 \frac{x}{2} dx =$$

求不定积分 V: $\int$ "triangle functions" dx (Cont.)

利用“倍角公式”

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\therefore \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

例 9 求不定积分 $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx, \quad \int \sin^2 \frac{x}{2} dx$

解

$$\int \cos^2 \frac{x}{2} dx = \int \frac{1+\cos x}{2} dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x + C$$

$$\int \sin^2 \frac{x}{2} dx = \int \frac{1-\cos x}{2} dx =$$

求不定积分 V: $\int$ ”triangle functions” dx (Cont.)

利用“倍角公式”

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\therefore \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

例 9 求不定积分 $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx, \quad \int \sin^2 \frac{x}{2} dx$

解

$$\int \cos^2 \frac{x}{2} dx = \int \frac{1+\cos x}{2} dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x + C$$

$$\int \sin^2 \frac{x}{2} dx = \int \frac{1-\cos x}{2} dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x + C$$

求不定积分 V: $\int$ "triangle functions" dx (Cont.)

利用“倍角公式”

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

例 10 求不定积分 $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$

求不定积分 V: $\int$ "triangle functions" dx (Cont.)

利用"倍角公式"

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

例 10 求不定积分 $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$

解

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$$

求不定积分 V: $\int$ ”triangle functions” dx (Cont.)

利用“倍角公式”

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

例 10 求不定积分 $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$

解

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$$

$$= \int \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$$

求不定积分 V: $\int$ "triangle functions" dx (Cont.)

利用"倍角公式"

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

例 10 求不定积分 $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$

解

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx &= \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx \\
&= \int \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx \\
&= \int \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} dx
\end{aligned}$$

求不定积分 V: $\int$ "triangle functions" dx (Cont.)

利用“倍角公式”

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

例 10 求不定积分 $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$

解

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx &= \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx \\
&= \int \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx \\
&= \int \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} dx \\
&= -\cot x
\end{aligned}$$

求不定积分 V: $\int$ "triangle functions" dx (Cont.)

利用"倍角公式"

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

例 10 求不定积分 $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$

解

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx &= \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx \\
&= \int \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx \\
&= \int \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} dx \\
&= -\cot x - \tan x
\end{aligned}$$

求不定积分 V: $\int$ "triangle functions" dx (Cont.)

利用"倍角公式"

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

例 10 求不定积分 $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$

解

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx &= \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx \\
&= \int \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx \\
&= \int \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} dx \\
&= -\cot x - \tan x + C
\end{aligned}$$