第 12 章 c：幂级数

数学系　梁卓滨

2017-2018 学年 II

Outline

1. 函数项级数的概念

2. 幂级数及其收敛性

3. 幂级数的运算

We are here now...

1. 函数项级数的概念

2. 幂级数及其收敛性

3. 幂级数的运算

- 设 $$u_0(x), u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots$$

  是定义在区间 I 上的函数列，则称

  $$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

  为定义在区间 I 上的（函数项）（无穷）级数。

- 设 $$u_0(x), u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots$$

  是定义在区间 I 上的函数列，则称

  $$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

  为定义在区间 I 上的（函数项）（无穷）级数。

- 如果 $x \in I$ 使得 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ 收敛，则称 x 是函数项级数的收敛点，全体收敛点构成的集合称为收敛域；

- 设 $$u_0(x), u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots$$
  是定义在区间 I 上的函数列，则称
  $$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$
  为定义在区间 I 上的（函数项）（无穷）级数。
- 如果 $x \in I$ 使得 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ 收敛，则称 x 是函数项级数的收敛点，全体收敛点构成的集合称为收敛域；
- 如果 $x \in I$ 使得 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ 发散，则称 x 是函数项级数的发散点，全体发散点构成的集合称为发散域；

- 设 $$u_0(x), u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots$$
  是定义在区间 I 上的函数列，则称
  $$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$
  为定义在区间 I 上的（函数项）（无穷）级数。
- 如果 $x \in I$ 使得 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ 收敛，则称 x 是函数项级数的收敛点，全体收敛点构成的集合称为收敛域；
- 如果 $x \in I$ 使得 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ 发散，则称 x 是函数项级数的发散点，全体发散点构成的集合称为发散域；
- 函数项级数 $$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$
  可为视为定义在收敛域上的函数，也称为函数项级数的和函数。

We are here now...

1. 函数项级数的概念

2. 幂级数及其收敛性

3. 幂级数的运算

- 形如
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$
的函数项级数称为幂级数。

- 形如 $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$
  的函数项级数称为幂级数。

- 如果函数项级数是形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

- 形如
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$
的函数项级数称为幂级数。

- 如果函数项级数是形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

则通过变量代换 $t = x - x_0$，可得到前述的幂级数形式：

- 形如
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$
的函数项级数称为幂级数。

- 如果函数项级数是形如
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots$$
则通过变量代换 $t = x - x_0$，可得到前述的幂级数形式：
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n + \cdots$$

- 形如
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$
的函数项级数称为幂级数。

- 如果函数项级数是形如
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$
则通过变量代换 $t = x - x_0$，可得到前述的幂级数形式：
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n + \cdots$$

问题 如何确定幂级数的收敛域？

- 形如
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$
的函数项级数称为幂级数。

- 如果函数项级数是形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

则通过变量代换 $t = x - x_0$，可得到前述的幂级数形式：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n + \cdots$$

问题 如何确定幂级数的收敛域？

- 尝试先用比值审敛法的极限形式 或者 根值审敛法

例 1 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 + \cdots$ 的收敛域

例 1 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}x^n = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n+1}x^{n+1}}{\frac{1}{n}x^n} \right| =$$

例 1 计算函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}x^n = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n+1}x^{n+1}}{\frac{1}{n}x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}x\right| =$$

例 1 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n+1} x^{n+1}}{\frac{1}{n} x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{n+1} x \right| = |x|$$

例 1 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n+1} x^{n+1}}{\frac{1}{n} x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{n+1} x \right| = |x|$$

- 当 $|x| < 1$ 时，收敛；$|x| > 1$ 时，发散；$x = \pm 1$ 时，另外讨论

例 1 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 + \cdots$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n+1} x^{n+1}}{\frac{1}{n} x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{n+1} x \right| = |x|$$

- 当 $|x| < 1$ 时，收敛；$|x| > 1$ 时，发散；$x = \pm 1$ 时，另外讨论
- 当 $x = 1$ 时，
- 当 $x = -1$ 时，

例 1 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}x^n = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n+1}x^{n+1}}{\frac{1}{n}x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{n+1}x \right| = |x|$$

- 当 $|x| < 1$ 时，收敛；$|x| > 1$ 时，发散；$x = \pm 1$ 时，另外讨论
- 当 $x = 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$
- 当 $x = -1$ 时，

例 1 计算函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n = x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n+1}x^{n+1}}{\frac{1}{n}x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}x\right| = |x|$$

- 当 $|x|<1$ 时，收敛；$|x|>1$ 时，发散；$x=\pm1$ 时，另外讨论
- 当 $x=1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散
- 当 $x=-1$ 时，

例 1 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}x^n = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n+1}x^{n+1}}{\frac{1}{n}x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}x\right| = |x|$$

- 当 $|x| < 1$ 时，收敛；$|x| > 1$ 时，发散；$x = \pm 1$ 时，另外讨论
- 当 $x = 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散
- 当 $x = -1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

例 1 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 + \cdots$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n+1} x^{n+1}}{\frac{1}{n} x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{n+1} x \right| = |x|$$

- 当 $|x| < 1$ 时，收敛；$|x| > 1$ 时，发散；$x = \pm 1$ 时，另外讨论
- 当 $x = 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散
- 当 $x = -1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛

例 1 计算函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}x^n = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n+1}x^{n+1}}{\frac{1}{n}x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}x\right| = |x|$$

- 当 $|x|<1$ 时，收敛；$|x|>1$ 时，发散；$x=\pm1$ 时，另外讨论
- 当 $x=1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散
- 当 $x=-1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛

所以收敛域是 $[-1, 1)$.

例 1 计算函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}x^n = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n+1}x^{n+1}}{\frac{1}{n}x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{n+1}x \right| = |x|$$

- 当 $|x| < 1$ 时，收敛；$|x| > 1$ 时，发散；$x = \pm 1$ 时，另外讨论
- 当 $x = 1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散
- 当 $x = -1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛

所以收敛域是 $[-1, 1)$.

注 1 当 $x \in (-1, 1)$时，级数绝对收敛；$x = -1$ 是，级数条件收敛.

例 1 计算函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}x^n = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n+1}x^{n+1}}{\frac{1}{n}x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{n+1}x \right| = |x|$$

- 当 $|x| < 1$ 时，收敛；$|x| > 1$ 时，发散；$x = \pm 1$ 时，另外讨论
- 当 $x = 1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散
- 当 $x = -1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛

所以收敛域是 $[-1, 1)$.

注 1 当 $x \in (-1, 1)$时，级数绝对收敛；$x = -1$ 是，级数条件收敛.

注 2 当 $x \in [-1, 1)$时：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}x^n = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots = -\ln(1-x)$.

例 1 计算函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}x^n = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$ 的收敛域

例 1 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 + \cdots$ 的收敛域

另解 注意到

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n} x^n\right|} =$$

例 1 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$ 的收敛域

另解 注意到

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n}x^n\right|} = \lim_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{n}} |x| =$$

例 1 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n = x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots$ 的收敛域

另解 注意到

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n}x^n\right|} = \lim_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{n}}|x| = |x|$$

例 1 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}x^n = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$ 的收敛域

另解 注意到

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n}x^n\right|} = \lim_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{n}} |x| = |x|$$

- 当 $|x| < 1$ 时，收敛；$|x| > 1$ 时，发散；$x = \pm 1$ 时，另外讨论
- 当 $x = 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散
- 当 $x = -1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛

所以收敛域是 $[-1, 1)$

例 2 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$ 的收敛域

例 2 计算函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}}{\frac{x^n}{n\cdot 2^n}} \right| =$$

例 2 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}}{\frac{x^n}{n\cdot 2^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2(n+1)} |x| =$$

例 2 计算函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}}{\frac{x^n}{n\cdot 2^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2(n+1)} |x| = \frac{1}{2} |x|$$

例 2 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\cdot 2^n}$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}}{\frac{x^n}{n\cdot 2^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2(n+1)} |x| = \frac{1}{2} |x|$$

- 当 $|x| < 2$ 时，收敛；$|x| > 2$ 时，发散；$x = \pm 2$ 时，另外讨论

例 2 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\cdot 2^n}$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}}{\frac{x^n}{n\cdot 2^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+1)}|x| = \frac{1}{2}|x|$$

- 当 $|x|<2$ 时，收敛；$|x|>2$ 时，发散；$x=\pm 2$ 时，另外讨论
- 当 $x=2$ 时，
- 当 $x=-2$ 时，

例 2 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}}{\frac{x^n}{n\cdot 2^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+1)}|x| = \frac{1}{2}|x|$$

- 当 $|x| < 2$ 时，收敛；$|x| > 2$ 时，发散；$x = \pm 2$ 时，另外讨论
- 当 $x = 2$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$
- 当 $x = -2$ 时，

例 2 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}}{\frac{x^n}{n\cdot 2^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2(n+1)} |x| = \frac{1}{2} |x|$$

- 当 $|x| < 2$ 时，收敛；$|x| > 2$ 时，发散；$x = \pm 2$ 时，另外讨论
- 当 $x = 2$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散
- 当 $x = -2$ 时，

例 2 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\cdot 2^n}$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}}{\frac{x^n}{n\cdot 2^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+1)}|x| = \frac{1}{2}|x|$$

- 当 $|x| < 2$ 时，收敛；$|x| > 2$ 时，发散；$x = \pm 2$ 时，另外讨论
- 当 $x = 2$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散
- 当 $x = -2$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

例 2 计算函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}}{\frac{x^n}{n\cdot 2^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2(n+1)} |x| = \frac{1}{2} |x|$$

- 当 $|x| < 2$ 时，收敛；$|x| > 2$ 时，发散；$x = \pm 2$ 时，另外讨论
- 当 $x = 2$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\cdot 2^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散
- 当 $x = -2$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\cdot 2^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛

例 2 计算函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}}{\frac{x^n}{n\cdot 2^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2(n+1)} |x| = \frac{1}{2} |x|$$

- 当 $|x| < 2$ 时，收敛；$|x| > 2$ 时，发散；$x = \pm 2$ 时，另外讨论
- 当 $x = 2$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\cdot 2^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散
- 当 $x = -2$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\cdot 2^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛

所以收敛域是 $[-2, 2)$

例 2 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}}{\frac{x^n}{n\cdot 2^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2(n+1)} |x| = \frac{1}{2} |x|$$

- 当 $|x| < 2$ 时，收敛；$|x| > 2$ 时，发散；$x = \pm 2$ 时，另外讨论
- 当 $x = 2$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散
- 当 $x = -2$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛

所以收敛域是 $[-2, 2)$

注 1 当 $x \in (-2, 2)$时，级数绝对收敛；$x = -2$ 时，级数条件收敛.

例 2 计算函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$ 的收敛域

例 2 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$ 的收敛域

另解 注意到

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{x^n}{n \cdot 2^n} \right|} =$$

例 2 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\cdot 2^n}$ 的收敛域

另解 注意到

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{n\cdot 2^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} (n+1)^{-\frac{1}{n}} \frac{1}{2} |x| =$$

例 2 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$ 的收敛域

另解 注意到

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{n \cdot 2^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} (n+1)^{-\frac{1}{n}} \frac{1}{2} |x| = \frac{1}{2} |x|$$

例 2 计算函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$ 的收敛域

另解 注意到

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{n \cdot 2^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} (n+1)^{-\frac{1}{n}} \frac{1}{2}|x| = \frac{1}{2}|x|$$

- 当 $|x| < 2$ 时，收敛；$|x| > 2$ 时，发散；$x = \pm 2$ 时，另外讨论
- 当 $x = 2$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散
- 当 $x = -2$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛

所以收敛域是 $[-2, 2)$

例 3 计算函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! \cdot x^n$ 的收敛域

例 4 计算函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 的收敛域

例 3 计算函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! \cdot x^n$ 的收敛域

解 注意到当 $x \neq 0$ 时都有

例 4 计算函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 的收敛域

例 3 计算函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! \cdot x^n$ 的收敛域

解 注意到当 $x \neq 0$ 时都有

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)! \cdot x^n}{n! \cdot x^n} \right| =$$

例 4 计算函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 的收敛域

例 3 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot x^n$ 的收敛域

解 注意到当 $x \neq 0$ 时都有

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)! \cdot x^n}{n! \cdot x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} (n+1)\,|x| =$$

例 4 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 的收敛域

例 3 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot x^n$ 的收敛域

解 注意到当 $x \neq 0$ 时都有

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)! \cdot x^n}{n! \cdot x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} (n+1)\,|x| = \infty > 1$$

例 4 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 的收敛域

例 3 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot x^n$ 的收敛域

解 注意到当 $x \neq 0$ 时都有

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)! \cdot x^n}{n! \cdot x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} (n+1)\,|x| = \infty > 1$$

说明 $x \neq 0$ 时，函数项级数都发散。

例 4 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 的收敛域

例 3 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot x^n$ 的收敛域

解 注意到当 $x \neq 0$ 时都有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)! \cdot x^n}{n! \cdot x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1)\,|x| = \infty > 1$$

说明 $x \neq 0$ 时，函数项级数都发散。所以收敛域是 $\{0\}$。

例 4 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 的收敛域

例 3 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot x^n$ 的收敛域

解 注意到当 $x \neq 0$ 时都有

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)! \cdot x^n}{n! \cdot x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} (n+1)\,|x| = \infty > 1$$

说明 $x \neq 0$ 时，函数项级数都发散。所以收敛域是 $\{0\}$。

例 4 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| =$$

例 3 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot x^n$ 的收敛域

解 注意到当 $x \neq 0$ 时都有

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)! \cdot x^n}{n! \cdot x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} (n+1)\,|x| = \infty > 1$$

说明 $x \neq 0$ 时，函数项级数都发散。所以收敛域是 $\{0\}$。

例 4 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} =$$

例 3 计算函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! \cdot x^n$ 的收敛域

解 注意到当 $x \neq 0$ 时都有

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)! \cdot x^n}{n! \cdot x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} (n+1)\,|x| = \infty > 1$$

说明 $x \neq 0$ 时，函数项级数都发散。所以收敛域是 $\{0\}$。

例 4 计算函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$$

例 3 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot x^n$ 的收敛域

解 注意到当 $x \neq 0$ 时都有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!\cdot x^n}{n!\cdot x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1)\,|x| = \infty > 1$$

说明 $x \neq 0$ 时，函数项级数都发散。所以收敛域是 $\{0\}$。

例 4 计算函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$$

说明对任何 x，函数项级数都绝对收敛。

例 3 计算函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! \cdot x^n$ 的收敛域

解 注意到当 $x \neq 0$ 时都有

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)! \cdot x^n}{n! \cdot x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} (n+1)\,|x| = \infty > 1$$

说明 $x \neq 0$ 时，函数项级数都发散。所以收敛域是 $\{0\}$。

例 4 计算函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 的收敛域

解 注意到

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$$

说明对任何 x，函数项级数都绝对收敛。所以收敛域是 $(-\infty, \infty)$。

定理 假设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的系数满足条件：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho \qquad \text{或} \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho.$$

则成立：

定理 假设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的系数满足条件：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho \quad \text{或} \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho.$$

则成立：

- 若 $\rho \neq 0$，
- 若 $\rho = 0$，
- 若 $\rho = \infty$，

定理 假设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的系数满足条件：

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho \qquad 或 \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho.$$

则成立：

- 若 $\rho \neq 0$，则当 $|x| < \frac{1}{\rho}$ 时级数绝对收敛，
- 若 $\rho = 0$，
- 若 $\rho = \infty$，

定理 假设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的系数满足条件：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho \qquad \text{或} \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho.$$

则成立：

- 若 $\rho \neq 0$，则当 $|x| < \frac{1}{\rho}$ 时级数绝对收敛，$|x| > \frac{1}{\rho}$ 时级数发散，
- 若 $\rho = 0$，
- 若 $\rho = \infty$，

定理 假设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的系数满足条件：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho \qquad \text{或} \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho.$$

则成立：

- 若 $\rho \neq 0$，则当 $|x| < \frac{1}{\rho}$ 时级数绝对收敛，$|x| > \frac{1}{\rho}$ 时级数发散，$x = \pm\frac{1}{\rho}$ 时不确定（需具体问题具体分析）；
- 若 $\rho = 0$，
- 若 $\rho = \infty$，

定理 假设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的系数满足条件：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho \qquad 或 \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho.$$

则成立：

- 若 $\rho \neq 0$，则当 $|x| < \frac{1}{\rho}$ 时级数绝对收敛，$|x| > \frac{1}{\rho}$ 时级数发散，$x = \pm\frac{1}{\rho}$ 时不确定（需具体问题具体分析）；
- 若 $\rho = 0$，则对任意 $x \in \mathbb{R}$，级数绝对收敛；
- 若 $\rho = \infty$，

定理 假设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的系数满足条件：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho \qquad \text{或} \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho.$$

则成立：

- 若 $\rho \neq 0$，则当 $|x| < \frac{1}{\rho}$ 时级数绝对收敛，$|x| > \frac{1}{\rho}$ 时级数发散，$x = \pm\frac{1}{\rho}$ 时不确定（需具体问题具体分析）；
- 若 $\rho = 0$，则对任意 $x \in \mathbb{R}$，级数绝对收敛；
- 若 $\rho = \infty$，则只有当 $x = 0$ 时级数收敛，$x \neq 0$ 时，级数发散。

定理 假设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的系数满足条件：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho \qquad \text{或} \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho.$$

则成立：

- 若 $\rho \neq 0$，则当 $|x| < \frac{1}{\rho}$ 时级数绝对收敛，$|x| > \frac{1}{\rho}$ 时级数发散，$x = \pm\frac{1}{\rho}$ 时不确定（需具体问题具体分析）；
- 若 $\rho = 0$，则对任意 $x \in \mathbb{R}$，级数绝对收敛；
- 若 $\rho = \infty$，则只有当 $x = 0$ 时级数收敛，$x \neq 0$ 时，级数发散。

证明 运用比值审敛法的极限形式和根值审敛法。

定理 假设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的系数满足条件：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho \qquad 或 \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho.$$

则成立：

- 若 $\rho \neq 0$，则当 $|x| < \frac{1}{\rho}$ 时级数绝对收敛，$|x| > \frac{1}{\rho}$ 时级数发散，$x = \pm\frac{1}{\rho}$ 时不确定（需具体问题具体分析）；
- 若 $\rho = 0$，则对任意 $x \in \mathbb{R}$，级数绝对收敛；
- 若 $\rho = \infty$，则只有当 $x = 0$ 时级数收敛，$x \neq 0$ 时，级数发散。

证明 运用比值审敛法的极限形式和根值审敛法。因为

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \qquad 或 \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n x^n|} =$$

定理 假设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的系数满足条件：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho \qquad 或 \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho.$$

则成立：

- 若 $\rho \neq 0$，则当 $|x| < \frac{1}{\rho}$ 时级数绝对收敛，$|x| > \frac{1}{\rho}$ 时级数发散，$x = \pm\frac{1}{\rho}$ 时不确定（需具体问题具体分析）；
- 若 $\rho = 0$，则对任意 $x \in \mathbb{R}$，级数绝对收敛；
- 若 $\rho = \infty$，则只有当 $x = 0$ 时级数收敛，$x \neq 0$ 时，级数发散。

证明 运用比值审敛法的极限形式和根值审敛法。因为

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \rho|x| \quad 或 \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n x^n|} =$$

定理 假设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的系数满足条件：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho \qquad \text{或} \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho.$$

则成立：

- 若 $\rho \neq 0$，则当 $|x| < \frac{1}{\rho}$ 时级数绝对收敛，$|x| > \frac{1}{\rho}$ 时级数发散，$x = \pm\frac{1}{\rho}$ 时不确定（需具体问题具体分析）；
- 若 $\rho = 0$，则对任意 $x \in \mathbb{R}$，级数绝对收敛；
- 若 $\rho = \infty$，则只有当 $x = 0$ 时级数收敛，$x \neq 0$ 时，级数发散。

证明 运用比值审敛法的极限形式和根值审敛法。因为

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \rho|x| \quad \text{或} \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n x^n|} = \rho|x|$$

定理 假设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的系数满足条件：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho \qquad 或 \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho.$$

则成立：

- 若 $\rho \neq 0$，则当 $|x| < \frac{1}{\rho}$ 时级数绝对收敛，$|x| > \frac{1}{\rho}$ 时级数发散，$x = \pm\frac{1}{\rho}$ 时不确定（需具体问题具体分析）；
- 若 $\rho = 0$，则对任意 $x \in \mathbb{R}$，级数绝对收敛；
- 若 $\rho = \infty$，则只有当 $x = 0$ 时级数收敛，$x \neq 0$ 时，级数发散。

证明 运用比值审敛法的极限形式和根值审敛法。因为

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \rho|x| \quad 或 \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n x^n|} = \rho|x|$$

所以 $|x| < \frac{1}{\rho}$ 时，级数（绝对）收敛；$|x| > \frac{1}{\rho}$ 时，级数发散。

如果极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ 不存在，则需另觅方法。

如果极限 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 和 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ 不存在，则需另觅方法。

定理 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域一定是如下几种情况之一：

- 收敛域是单点集 $\{0\}$；
- 收敛域是全部实数 $(-\infty, \infty)$；
- 收敛域是如下四种可能的有限区间：

$$(-R, R), \quad [-R, R), \quad (-R, R], \quad [-R, R]$$

其中 $0 < R < \infty$。

如果极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ 不存在，则需另觅方法。

定理 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域一定是如下几种情况之一：

- 收敛域是单点集 $\{0\}$；
- 收敛域是全部实数 $(-\infty, \infty)$；
- 收敛域是如下四种可能的有限区间：

$$(-R, R), \quad [-R, R), \quad (-R, R], \quad [-R, R]$$

其中 $0 < R < \infty$。

注

- R 称为收敛半径。

如果极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ 不存在，则需另觅方法。

定理 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域一定是如下几种情况之一：

- 收敛域是单点集 $\{0\}$； （收敛半径 $R=0$）
- 收敛域是全部实数 $(-\infty,\infty)$； （收敛半径 $R=\infty$）
- 收敛域是如下四种可能的有限区间： （收敛半径 R 有限）

$$(-R,R),\quad [-R,R),\quad (-R,R],\quad [-R,R]$$

  其中 $0<R<\infty$。

注

- R 称为收敛半径。

如果极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ 不存在，则需另觅方法。

定理 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域一定是如下几种情况之一：

- 收敛域是单点集 $\{0\}$；（收敛半径 $R=0$）
- 收敛域是全部实数 $(-\infty, \infty)$；（收敛半径 $R=\infty$）
- 收敛域是如下四种可能的有限区间：（收敛半径 R 有限）

$$(-R, R), \quad [-R, R), \quad (-R, R], \quad [-R, R]$$

其中 $0 < R < \infty$。

注

- R 称为收敛半径。
- $(-R, R)$ 称为收敛区间。

如果极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ 不存在，则需另觅方法。

定理 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域一定是如下几种情况之一：

- 收敛域是单点集 $\{0\}$；（收敛半径 $R=0$）
- 收敛域是全部实数 $(-\infty, \infty)$；（收敛半径 $R=\infty$）
- 收敛域是如下四种可能的有限区间：（收敛半径 R 有限）

$$(-R, R),\quad [-R, R),\quad (-R, R],\quad [-R, R]$$

  其中 $0 < R < \infty$。

注

- R 称为收敛半径。
- $(-R, R)$ 称为收敛区间。收敛区间 $\subseteq$ 收敛域。

如果极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ 不存在，则需另觅方法。

定理 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域一定是如下几种情况之一：

- 收敛域是单点集 $\{0\}$； （收敛半径 $R=0$）
- 收敛域是全部实数 $(-\infty,\infty)$； （收敛半径 $R=\infty$）
- 收敛域是如下四种可能的有限区间： （收敛半径 R 有限）

$$(-R,R),\quad [-R,R),\quad (-R,R],\quad [-R,R]$$

  其中 $0<R<\infty$。

注

- R 称为收敛半径。
- $(-R,R)$ 称为收敛区间。收敛区间 $\subseteq$ 收敛域。
- 可以证明在收敛区间 $(-R,R)$ 内，级数绝对收敛。

例 假设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的系数满足条件：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho \qquad \text{或} \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho$$

则收敛半径

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, & \rho \neq 0, \\ +\infty, & \rho = 0, \\ 0, & \rho = +\infty. \end{cases}$$

例 假设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的系数满足条件：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho \qquad \text{或} \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho$$

则收敛半径

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, & \rho \neq 0, \\ +\infty, & \rho = 0, \\ 0, & \rho = +\infty. \end{cases}$$

证明 这是由比值审敛法的极限形式和根值审敛法知：$|x| < \frac{1}{\rho}$ 时，级数（绝对）收敛；$|x| > \frac{1}{\rho}$ 时，级数发散。

例 假设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的系数满足条件：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho \qquad \text{或} \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho$$

则收敛半径

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, & \rho \neq 0, \\ +\infty, & \rho = 0, \\ 0, & \rho = +\infty. \end{cases}$$

证明 这是由比值审敛法的极限形式和根值审敛法知：$|x| < \frac{1}{\rho}$ 时，级数（绝对）收敛；$|x| > \frac{1}{\rho}$ 时，级数发散。所以收敛半径 $R = \frac{1}{\rho}$。

例 假设有幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$，及在 $x_0 \neq 0$。那么

- 若 x_0 是收敛点，则对所有满足 $|x| < |x_0|$ 的 x，级数均绝对收敛。
- 若 x_0 是发散点，则对所有满足 $|x| > |x_0|$ 的 x，级数均发散。

例 假设有幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$，及在 $x_0 \neq 0$。那么

- 若 x_0 是收敛点，则对所有满足 $|x| < |x_0|$ 的 x，级数均绝对收敛。
- 若 x_0 是发散点，则对所有满足 $|x| > |x_0|$ 的 x，级数均发散。

证明 设该幂级数的收敛半径为 R，则：

例 假设有幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$，及在 $x_0 \neq 0$。那么

- 若 x_0 是收敛点，则对所有满足 $|x| < |x_0|$ 的 x，级数均绝对收敛。
- 若 x_0 是发散点，则对所有满足 $|x| > |x_0|$ 的 x，级数均发散。

证明 设该幂级数的收敛半径为 R，则：

$$x_0\text{是收敛点} \quad \Rightarrow \quad |x_0| \leq R$$

例 假设有幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$，及在 $x_0 \neq 0$。那么

- 若 x_0 是收敛点，则对所有满足 $|x| < |x_0|$ 的 x，级数均绝对收敛。
- 若 x_0 是发散点，则对所有满足 $|x| > |x_0|$ 的 x，级数均发散。

证明 设该幂级数的收敛半径为 R，则：

$$x_0\text{是收敛点} \quad \Rightarrow \quad |x_0| \leq R \quad \Rightarrow \quad |x| < R$$

例 假设有幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$，及在 $x_0 \neq 0$。那么

- 若 x_0 是收敛点，则对所有满足 $|x| < |x_0|$ 的 x，级数均绝对收敛。
- 若 x_0 是发散点，则对所有满足 $|x| > |x_0|$ 的 x，级数均发散。

证明 设该幂级数的收敛半径为 R，则：

x_0是收敛点 $\Rightarrow$ $|x_0| \leq R$ $\Rightarrow$ $|x| < R$ $\Rightarrow$ 级数在x处绝对收敛

例 假设有幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$，及在 $x_0 \neq 0$。那么

- 若 x_0 是收敛点，则对所有满足 $|x| < |x_0|$ 的 x，级数均绝对收敛。
- 若 x_0 是发散点，则对所有满足 $|x| > |x_0|$ 的 x，级数均发散。

证明 设该幂级数的收敛半径为 R，则：

x_0是收敛点 $\Rightarrow$ $|x_0| \leq R$ $\Rightarrow$ $|x| < R$ $\Rightarrow$ 级数在x处绝对收敛

x_0是发散点 $\Rightarrow$ $|x_0| \geq R$

例 假设有幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$，及在 $x_0 \neq 0$。那么

- 若 x_0 是收敛点，则对所有满足 $|x| < |x_0|$ 的 x，级数均绝对收敛。
- 若 x_0 是发散点，则对所有满足 $|x| > |x_0|$ 的 x，级数均发散。

证明 设该幂级数的收敛半径为 R，则：

x_0是收敛点 $\Rightarrow$ $|x_0| \leq R$ $\Rightarrow$ $|x| < R$ $\Rightarrow$ 级数在x处绝对收敛

x_0是发散点 $\Rightarrow$ $|x_0| \geq R$ $\Rightarrow$ $|x| > R$

例 假设有幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$，及在 $x_0 \neq 0$。那么

- 若 x_0 是收敛点，则对所有满足 $|x| < |x_0|$ 的 x，级数均绝对收敛。
- 若 x_0 是发散点，则对所有满足 $|x| > |x_0|$ 的 x，级数均发散。

证明 设该幂级数的收敛半径为 R，则：

x_0是收敛点 $\Rightarrow$ $|x_0| \leq R$ $\Rightarrow$ $|x| < R$ $\Rightarrow$ 级数在x处绝对收敛

x_0是发散点 $\Rightarrow$ $|x_0| \geq R$ $\Rightarrow$ $|x| > R$ $\Rightarrow$ 级数在x处发散

We are here now...

1. 函数项级数的概念

2. 幂级数及其收敛性

3. 幂级数的运算

性质 1 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域 I 上是连续函数。

性质 1 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域 I 上是连续函数。

性质 2 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域 I 上可积，并成立逐项积分公式：

性质 1 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域 I 上是连续函数。

性质 2 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域 I 上可积，并成立逐项积分公式：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

性质 1 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域 I 上是连续函数。

性质 2 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域 I 上可积，并成立逐项积分公式：

$$\int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right] dt \qquad (x \in I)$$

性质 1 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域 I 上是连续函数。

性质 2 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域 I 上可积，并成立逐项积分公式：

$$\int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right] dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt \qquad (x \in I)$$

性质 1 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域 I 上是连续函数。

性质 2 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域 I 上可积，并成立逐项积分公式：

$$\int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right] dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \qquad (x \in I)$$

性质 1 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域 I 上是连续函数。

性质 2 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域 I 上可积，并成立逐项积分公式：

$$\int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right] dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \qquad (x \in I)$$

性质 1 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域 I 上是连续函数。

性质 2 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域 I 上可积，并成立逐项积分公式：

$$\int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right] dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \qquad (x \in I)$$

逐项积分后的幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 与原级数有相同收敛半径，

性质 1 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域 I 上是连续函数。

性质 2 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域 I 上可积，并成立逐项积分公式：

$$\int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right] dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \qquad (x \in I)$$

逐项积分后的幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 与原级数有相同收敛半径， 但收敛域不一定相同。

性质 1 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域 I 上是连续函数。

性质 2 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域 I 上可积，并成立逐项积分公式：

$$\int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right] dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \qquad (x \in I)$$

逐项积分后的幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 与原级数有相同收敛半径， 但收敛域不一定相同。

例 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$

性质 1 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域 I 上是连续函数。

性质 2 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域 I 上可积，并成立逐项积分公式：

$$\int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right] dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \qquad (x \in I)$$

逐项积分后的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 与原级数有相同收敛半径， 但收敛域不一定相同。

例 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 的收敛域是 $(-1, 1)$，

性质 1 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域 I 上是连续函数。

性质 2 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域 I 上可积，并成立逐项积分公式：

$$\int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right] dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \qquad (x \in I)$$

逐项积分后的幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 与原级数有相同收敛半径， 但收敛域不一定相同。

例 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ 的收敛域是 $(-1, 1)$，而逐项积分后的幂级数是

性质 1 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域 I 上是连续函数。

性质 2 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域 I 上可积，并成立逐项积分公式：

$$\int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right] dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \qquad (x \in I)$$

逐项积分后的幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 与原级数有相同收敛半径， 但收敛域不一定相同。

例 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ 的收敛域是 $(-1, 1)$，而逐项积分后的幂级数是

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

性质 1 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域 I 上是连续函数。

性质 2 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域 I 上可积，并成立逐项积分公式：

$$\int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right] dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \qquad (x \in I)$$

逐项积分后的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 与原级数有相同收敛半径， 但收敛域不一定相同。

例 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 的收敛域是 $(-1, 1)$，而逐项积分后的幂级数是

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

其收敛域是 $[-1, 1)$。

逐项积分公式的应用

例 对级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 运用逐项积分公式：

逐项积分公式的应用

例 对级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 运用逐项积分公式：

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

逐项积分公式的应用

例 对级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 运用逐项积分公式：

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt \qquad x \in (-1, 1)$$

逐项积分公式的应用

例 对级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ 运用逐项积分公式：

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n dt \qquad x \in (-1, 1)$$

逐项积分公式的应用

例 对级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 运用逐项积分公式：

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}, \qquad x \in (-1, 1)$$

逐项积分公式的应用

例 对级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ 运用逐项积分公式：

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}, \qquad x \in (-1, 1)$$

另一方面 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$，所以

逐项积分公式的应用

例 对级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 运用逐项积分公式：

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}, \qquad x \in (-1, 1)$$

另一方面 $\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$，所以

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt \qquad x \in (-1, 1)$$

逐项积分公式的应用

例 对级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 运用逐项积分公式：

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}, \qquad x \in (-1, 1)$$

另一方面 $\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$，所以

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-t)\Big|_0^x \qquad x \in (-1, 1)$$

逐项积分公式的应用

例 对级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 运用逐项积分公式：

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}, \qquad x \in (-1, 1)$$

另一方面 $\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$，所以

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-t)\Big|_0^x = -\ln(1-x), \qquad x \in (-1, 1)$$

逐项积分公式的应用

例 对级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 运用逐项积分公式：

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}, \qquad x \in (-1, 1)$$

另一方面 $\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$，所以

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-t)\Big|_0^x = -\ln(1-x), \qquad x \in (-1, 1)$$

综上两式，得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = -\ln(1-x), \quad x \in (-1, 1)$$

逐项积分公式的应用

例 对级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 运用逐项积分公式：

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}, \qquad x \in (-1, 1)$$

另一方面 $\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$，所以

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-t)\Big|_0^x = -\ln(1-x), \qquad x \in (-1, 1)$$

综上两式，得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = -\ln(1-x), \quad x \in (-1, 1) \xRightarrow{\text{连续性}} x \in [-1, 1)$$

逐项积分公式的应用

例 对级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ 运用逐项积分公式：

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}, \qquad x \in (-1, 1)$$

另一方面 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$，所以

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-t)\Big|_0^x = -\ln(1-x), \qquad x \in (-1, 1)$$

综上两式，得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = -\ln(1-x), \quad x \in (-1, 1) \xRightarrow{\text{连续性}} x \in [-1, 1)$$

（记 $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}$，则 $S(-1) =$ ）

逐项积分公式的应用

例 对级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 运用逐项积分公式：

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}, \qquad x \in (-1, 1)$$

另一方面 $\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$，所以

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-t)\Big|_0^x = -\ln(1-x), \qquad x \in (-1, 1)$$

综上两式，得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = -\ln(1-x), \quad x \in (-1, 1) \xRightarrow{\text{连续性}} x \in [-1, 1)$$

（记 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}$，则 $S(-1) = \lim_{x \to (-1)^+} S(x)$ ）

逐项积分公式的应用

例 对级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ 运用逐项积分公式：

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}, \qquad x \in (-1,1)$$

另一方面 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$，所以

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-t)\Big|_0^x = -\ln(1-x), \qquad x \in (-1,1)$$

综上两式，得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = -\ln(1-x), \quad x \in (-1,\ 1) \xRightarrow{\text{连续性}} x \in [-1,\ 1)$$

（记 $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}$，则 $S(-1) = \lim\limits_{x \to (-1)^+} S(x) = \lim\limits_{x \to (-1)^+} -\ln(1-x)$ ）

逐项积分公式的应用

例 对级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ 运用逐项积分公式：

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}, \qquad x \in (-1, 1)$$

另一方面 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$，所以

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-t)\Big|_0^x = -\ln(1-x), \qquad x \in (-1, 1)$$

综上两式，得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = -\ln(1-x), \quad x \in (-1,\ 1) \xrightarrow{\text{连续性}} x \in [-1,\ 1)$$

（记 $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}$，则 $S(-1) = \lim\limits_{x\to(-1)^+} S(x) = \lim\limits_{x\to(-1)^+} -\ln(1-x) = -\ln 2$）

性质 3 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R，则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R, R)$ 上可导，

性质 3 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R, R)$ 上可导，并成立逐项求导公式：

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' \qquad\qquad x \in (-R, R)$$

性质 3 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R, R)$ 上可导，并成立逐项求导公式：

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' \qquad x \in (-R, R)$$

性质 3 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R, R)$ 上可导，并成立逐项求导公式：

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \qquad n a_n x^{n-1}, \qquad x \in (-R, R)$$

性质 3 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R, R)$ 上可导，并成立逐项求导公式：

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \qquad x \in (-R, R)$$

性质 3 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R, R)$ 上可导，并成立逐项求导公式：

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \qquad x \in (-R, R)$$

逐项求导后的幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 与原级数有相同收敛半径。

性质 3 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R, R)$ 上可导，并成立逐项求导公式：

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \qquad x \in (-R, R)$$

逐项求导后的幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 与原级数有相同收敛半径。

推论 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R, R)$ 上具有任意阶的导数，并成立逐项求导公式：

$$\frac{d^k}{dx^k}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^k}{dx^k}(a_n x^n), \qquad x \in (-R, R)$$

逐项求导后的幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{d^k}{dx^k}(a_n x^n)$ 与原级数有相同收敛半径。

利用逐项求导、或逐项积分，把级数化为简单的级数，从而求出原级数。

例 1 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的和函数。

例 1 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的和函数。

解 Step 1. 求收敛域：

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

例 1 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的和函数。

解 Step 1. 求收敛域：

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

$$\therefore R = \frac{1}{\rho} = 1, \qquad \text{收敛区间}(-1, 1)$$

例 1 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的和函数。

解 Step 1. 求收敛域：

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

$$\therefore\ R = \frac{1}{\rho} = 1, \qquad \text{收敛区间}(-1, 1)$$

$$\text{当}x = 1\text{ 时，}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}\ \text{发散}$$

例 1 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的和函数。

解 Step 1. 求收敛域：

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

$$\therefore R = \frac{1}{\rho} = 1, \qquad \text{收敛区间}(-1, 1)$$

当 $x = 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ 发散

当 $x = -1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ 收敛

例 1 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的和函数。

解 Step 1. 求收敛域：

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

$$\therefore\ R = \frac{1}{\rho} = 1, \qquad \text{收敛区间}(-1,1)$$

当 $x = 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ 发散

当 $x = -1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ 收敛

$\therefore$ 收敛域$[-1,1)$

例 1 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的和函数。

解 Step 2. 记 $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}, \quad x \in [-1, 1),$

例 1 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的和函数。

解 Step 2. 记 $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}, \quad x \in [-1, 1)$，则：

$$xS(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad x \in [-1, 1)$$

例 1 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的和函数。

解 Step 2. 记 $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}, \quad x \in [-1, 1)$，则：

$$xS(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad x \in [-1, 1)$$

当 $x \in (-1, 1)$ 时，两边求导可得：

$$[xS(x)]' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)'$$

例 1 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的和函数。

解 Step 2. 记 $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}, \quad x \in [-1, 1)$，则：

$$xS(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad x \in [-1, 1)$$

当 $x \in (-1, 1)$ 时，两边求导可得：

$$[xS(x)]' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \right)'$$

例 1 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的和函数。

解 Step 2. 记 $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}, \quad x \in [-1, 1)$，则：

$$xS(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad x \in [-1, 1)$$

当 $x \in (-1, 1)$ 时，两边求导可得：

$$[xS(x)]' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

例 1 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的和函数。

解 Step 2. 记 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$, $\quad x \in [-1, 1)$，则：

$$xS(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad x \in [-1, 1)$$

当 $x \in (-1, 1)$ 时，两边求导可得：

$$[xS(x)]' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

例 1 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的和函数。

解 Step 2. 记 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$, $x \in [-1, 1)$，则：

$$xS(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad x \in [-1, 1)$$

当 $x \in (-1, 1)$ 时，两边求导可得：

$$[xS(x)]' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

所以

$$xS(x) = \int \frac{1}{1-x} dx$$

例 1 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ 的和函数。

解 Step 2. 记 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$, $\quad x\in[-1,1)$，则：

$$xS(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1},\qquad x\in[-1,1)$$

当 $x\in(-1,1)$ 时，两边求导可得：

$$[xS(x)]'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$$

所以

$$xS(x)=\int\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-x)+C,$$

例 1 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的和函数。

解 Step 2. 记 $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}, \quad x \in [-1, 1)$，则：

$$xS(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad x \in [-1, 1)$$

当 $x \in (-1, 1)$ 时，两边求导可得：

$$[xS(x)]' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

所以

$$xS(x) = \int \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-x) + C, \quad x \in (-1, 1)$$

例 1 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的和函数。

解 Step 2. 记 $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}, \quad x \in [-1, 1)$，则：

$$xS(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad x \in [-1, 1)$$

当 $x \in (-1, 1)$ 时，两边求导可得：

$$[xS(x)]' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

所以

$$xS(x) = \int \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-x) + C, \quad x \in (-1, 1)$$

上式取 $x = 0$ 时，可得 $C = 0$，所以

例 1 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的和函数。

解 Step 2. 记 $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$, $\quad x \in [-1, 1)$，则：

$$xS(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad x \in [-1, 1)$$

当 $x \in (-1, 1)$ 时，两边求导可得：

$$[xS(x)]' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

所以

$$xS(x) = \int \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-x) + C, \quad x \in (-1, 1)$$

上式取 $x = 0$ 时，可得 $C = 0$，所以

$$xS(x) = -\ln(1-x), \quad x \in (-1, 1).$$

例 1 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的和函数。

解 Step 3. 至此已知：$S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的收敛域是 $x \in [-1, 1)$，而

$$xS(x) = -\ln(1-x), \quad x \in (-1, 1)$$

例 1 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ 的和函数。

解 Step 3. 至此已知：$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ 的收敛域是 $x\in[-1,\,1)$，而

$$xS(x)=-\ln(1-x),\quad x\in(-1,\,1)$$

- 当 $x\in(-1,\,0)\cup(0,\,1)$ 时，$S(x)=-\frac{1}{x}\ln(1-x)$

例 1 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的和函数。

解 Step 3. 至此已知：$S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的收敛域是 $x \in [-1, 1)$，而

$$xS(x) = -\ln(1-x), \quad x \in (-1, 1)$$

- 当 $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ 时，$S(x) = -\frac{1}{x}\ln(1-x)$
- 当 $x = 0$ 时，$S(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n+1} = 1$
- 当 $x = -1$ 时，由连续性

例 1 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n+1}$ 的和函数。

解 Step 3. 至此已知：$S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n+1}$ 的收敛域是 $x \in [-1, 1)$，而

$$xS(x) = -\ln(1-x), \quad x \in (-1, 1)$$

- 当 $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ 时，$S(x) = -\frac{1}{x}\ln(1-x)$
- 当 $x = 0$ 时，$S(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{0^n}{n+1} = 1$
- 当 $x = -1$ 时，由连续性

$$S(-1) = \lim_{x \to (-1)^+} S(x)$$

例 1 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的和函数。

解 Step 3. 至此已知：$S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的收敛域是 $x \in [-1, 1)$，而

$$xS(x) = -\ln(1-x), \quad x \in (-1, 1)$$

- 当 $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ 时，$S(x) = -\frac{1}{x}\ln(1-x)$
- 当 $x = 0$ 时，$S(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n+1} = 1$
- 当 $x = -1$ 时，由连续性

$$S(-1) = \lim_{x \to (-1)^+} S(x) = \lim_{x \to (-1)^+} -\frac{1}{x}\ln(1-x)$$

例 1 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的和函数。

解 Step 3. 至此已知：$S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的收敛域是 $x \in [-1, 1)$，而

$$xS(x) = -\ln(1-x), \quad x \in (-1, 1)$$

- 当 $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ 时，$S(x) = -\frac{1}{x}\ln(1-x)$
- 当 $x = 0$ 时，$S(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n+1} = 1$
- 当 $x = -1$ 时，由连续性

$$S(-1) = \lim_{x\to(-1)^+} S(x) = \lim_{x\to(-1)^+} -\frac{1}{x}\ln(1-x) = -\frac{1}{x}\ln(1-x)\Big|_{x=-1}$$

例 1 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ 的和函数。

解 Step 3. 至此已知：$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ 的收敛域是 $x\in[-1,1)$，而

$$xS(x)=-\ln(1-x),\quad x\in(-1,1)$$

- 当 $x\in(-1,0)\cup(0,1)$ 时，$S(x)=-\frac{1}{x}\ln(1-x)$
- 当 $x=0$ 时，$S(0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{0^n}{n+1}=1$
- 当 $x=-1$ 时，由连续性

$$S(-1)=\lim_{x\to(-1)^+}S(x)=\lim_{x\to(-1)^+}-\frac{1}{x}\ln(1-x)=-\frac{1}{x}\ln(1-x)\Big|_{x=-1}$$

综上

$$S(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x}\ln(1-x) & x\in[-1,1)\backslash\{0\},\\ 1 & x=0.\end{cases}$$

注 在等式

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \begin{cases} -\frac{1}{x}\ln(1-x) & x \in [-1, 1)\setminus\{0\}, \\ 1 & x = 0. \end{cases}$$

注 在等式

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \begin{cases} -\frac{1}{x}\ln(1-x) & x \in [-1, 1)\backslash\{0\}, \\ 1 & x = 0. \end{cases}$$

中取 $x = -1$，可得

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \cdots$$

注 在等式

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=\begin{cases}-\frac{1}{x}\ln(1-x) & x\in[-1,1)\setminus\{0\},\\ 1 & x=0.\end{cases}$$

中取 $x=-1$，可得

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\cdots=\ln 2.$$

例 2 求幂级数 $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots$ 的和函数。

例 2 求幂级数 $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots$ 的和函数。

解 Step 1. 求收敛域：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{2n+1}}{2n+1}}{\frac{x^{2n-1}}{2n-1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}|x|^2=|x|^2$$

例 2 求幂级数 $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots$ 的和函数。

解 Step 1. 求收敛域：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{2n+1}}{2n+1}}{\frac{x^{2n-1}}{2n-1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}|x|^2=|x|^2$$

$\therefore\ |x|^2<1 \qquad \Rightarrow \qquad$ 收敛区间$(-1,1)$

例 2 求幂级数 $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots$ 的和函数。

解 Step 1. 求收敛域：

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{2n+1}}{2n+1}}{\frac{x^{2n-1}}{2n-1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2n+1}|x|^2 = |x|^2$$

$\therefore\ |x|^2 < 1 \qquad \Rightarrow \qquad$ 收敛区间$(-1, 1)$

当$x = 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ 发散（比较审敛法）

例 2 求幂级数 $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots$ 的和函数。

解 Step 1. 求收敛域：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{2n+1}}{2n+1}}{\frac{x^{2n-1}}{2n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}|x|^2 = |x|^2$$

$$\therefore\ |x|^2 < 1 \qquad \Rightarrow \qquad \text{收敛区间}(-1, 1)$$

当$x = 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ 发散（比较审敛法）

当$x = -1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{2n-1}$ 发散

例 2 求幂级数 $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots$ 的和函数。

解 Step 1. 求收敛域：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{2n+1}}{2n+1}}{\frac{x^{2n-1}}{2n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}|x|^2 = |x|^2$$

$\therefore\ |x|^2 < 1 \quad \Rightarrow \quad$ 收敛区间$(-1, 1)$

当$x = 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ 发散（比较审敛法）

当$x = -1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}}{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{2n-1}$ 发散

$\therefore$ 收敛域$(-1, 1)$

例 2 求幂级数 $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots$ 的和函数。

解 Step 2. 记 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \quad x\in(-1,1)$

例 2 求幂级数 $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots$ 的和函数。

解 Step 2. 记 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, $\quad x\in(-1,1)$，两边求导可得：

$$S'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)'$$

例 2 求幂级数 $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots$ 的和函数。

解 Step 2. 记 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, $\quad x \in (-1, 1)$，两边求导可得：

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)'$$

例 2 求幂级数 $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots$ 的和函数。

解 Step 2. 记 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, $\quad x\in(-1,1)$，两边求导可得：

$$S'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}$$

例 2 求幂级数 $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots$ 的和函数。

解 Step 2. 记 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, $x\in(-1,1)$，两边求导可得：

$$S'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}$$

$$=1+x^2+x^4+x^6+\cdots$$

例 2 求幂级数 $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots$ 的和函数。

解 Step 2. 记 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$,　$x\in(-1,1)$，两边求导可得：

$$S'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}$$

$$=1+x^2+x^4+x^6+\cdots=\frac{1}{1-x^2}$$

例 2 求幂级数 $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots$ 的和函数。

解 Step 2. 记 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \quad x\in(-1,1)$，两边求导可得：

$$S'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}$$

$$=1+x^2+x^4+x^6+\cdots=\frac{1}{1-x^2}$$

所以

$$S(x)=\int\frac{1}{1-x^2}dx$$

例 2 求幂级数 $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots$ 的和函数。

解 Step 2. 记 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, $\quad x\in(-1,1)$，两边求导可得：

$$S'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}$$

$$=1+x^2+x^4+x^6+\cdots=\frac{1}{1-x^2}$$

所以

$$S(x)=\int\frac{1}{1-x^2}dx=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+C,$$

例 2 求幂级数 $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots$ 的和函数。

解 Step 2. 记 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, $\quad x \in (-1, 1)$，两边求导可得：

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-2}$$

$$= 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots = \frac{1}{1-x^2}$$

所以

$$S(x) = \int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + C, \quad x \in (-1, 1)$$

例 2 求幂级数 $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots$ 的和函数。

解 Step 2. 记 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$， $x\in(-1,1)$，两边求导可得：

$$S'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}$$

$$=1+x^2+x^4+x^6+\cdots=\frac{1}{1-x^2}$$

所以

$$S(x)=\int\frac{1}{1-x^2}dx=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+C,\quad x\in(-1,1)$$

上式取 $x=0$ 时，可得 $C=0$

例 2 求幂级数 $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots$ 的和函数。

解 Step 2. 记 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1},\quad x\in(-1,1)$，两边求导可得：

$$S'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}$$

$$=1+x^2+x^4+x^6+\cdots=\frac{1}{1-x^2}$$

所以

$$S(x)=\int\frac{1}{1-x^2}dx=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+C,\quad x\in(-1,1)$$

上式取 $x=0$ 时，可得 $C=0$，所以

$$S(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\quad x\in(-1,1)$$

例 3 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n+1}$ 的和函数。

例 3 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1}$ 的和函数。

解 Step 1. 求收敛域：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)x^{n+2}}{nx^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}|x| = |x|$$

例 3 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1}$ 的和函数。

解 Step 1. 求收敛域：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)x^{n+2}}{nx^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}|x| = |x|$$

$$\therefore\ |x|<1 \qquad \Rightarrow \qquad \text{收敛区间}(-1,1)$$

例 3 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n+1}$ 的和函数。

解 Step 1. 求收敛域：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)x^{n+2}}{nx^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}|x| = |x|$$

$\therefore\ |x| < 1 \qquad \Rightarrow \qquad$ 收敛区间$(-1, 1)$

当$x = \pm 1$ 时，一般项$nx^{n+1} = n(\pm 1)^{n+1} \not\to 0$，级数发散

例 3 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1}$ 的和函数。

解 Step 1. 求收敛域：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)x^{n+2}}{nx^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}|x| = |x|$$

$\therefore\ |x| < 1 \qquad \Rightarrow \qquad$ 收敛区间$(-1, 1)$

当$x = \pm 1$ 时，一般项$nx^{n+1} = n(\pm 1)^{n+1} \not\to 0$，级数发散

$\therefore$ 收敛域$(-1, 1)$

例 3 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n+1}$ 的和函数。

解 Step 1. 求收敛域：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)x^{n+2}}{nx^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}|x| = |x|$$

$\therefore\ |x| < 1 \qquad \Rightarrow \qquad$ 收敛区间$(-1, 1)$

当$x = \pm 1$ 时，一般项$nx^{n+1} = n(\pm 1)^{n+1} \not\to 0$，级数发散

$\therefore$ 收敛域$(-1, 1)$

Step 2. 记 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n+1} \qquad x \in (-1, 1)$,

例 3 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n+1}$ 的和函数。

解 Step 1. 求收敛域：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)x^{n+2}}{nx^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}|x| = |x|$$

$\therefore\ |x| < 1 \quad \Rightarrow \quad$ 收敛区间$(-1, 1)$

当$x = \pm 1$ 时，一般项$nx^{n+1} = n(\pm 1)^{n+1} \not\to 0$，级数发散

$\therefore$ 收敛域$(-1, 1)$

Step 2. 记 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n+1} = x^2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \quad x \in (-1, 1),$

例 3 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n+1}$ 的和函数。

解 Step 1. 求收敛域：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)x^{n+2}}{nx^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}|x| = |x|$$

$\therefore\ |x| < 1 \qquad \Rightarrow \qquad$ 收敛区间$(-1, 1)$

当$x = \pm 1$ 时，一般项$nx^{n+1} = n(\pm 1)^{n+1} \not\to 0$，级数发散

$\therefore$ 收敛域$(-1, 1)$

Step 2. 记 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n+1} = x^2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \quad x \in (-1, 1)$，则：

$S(x)$

例 3 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n+1}$ 的和函数。

解 Step 1. 求收敛域：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)x^{n+2}}{nx^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}|x| = |x|$$

$\therefore\ |x| < 1 \quad \Rightarrow \quad$ 收敛区间$(-1, 1)$

当$x = \pm 1$ 时，一般项$nx^{n+1} = n(\pm 1)^{n+1} \not\to 0$，级数发散

$\therefore$ 收敛域$(-1, 1)$

Step 2. 记 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n+1} = x^2\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \quad x \in (-1, 1)$，则：

$$S(x) = x^2\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'$$

例 3 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n+1}$ 的和函数。

解 Step 1. 求收敛域：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)x^{n+2}}{nx^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}|x| = |x|$$

$\therefore\ |x| < 1 \quad \Rightarrow \quad$ 收敛区间$(-1, 1)$

当$x = \pm 1$ 时，一般项$nx^{n+1} = n(\pm 1)^{n+1} \not\to 0$，级数发散

$\therefore$ 收敛域$(-1, 1)$

Step 2. 记 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n+1} = x^2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \quad x \in (-1, 1)$，则：

$$S(x) = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = x^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)'$$

例 3 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n+1}$ 的和函数。

解 Step 1. 求收敛域：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)x^{n+2}}{nx^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}|x| = |x|$$

$\therefore\ |x| < 1 \qquad \Rightarrow \qquad$ 收敛区间$(-1,\ 1)$

当$x=\pm1$ 时，一般项$nx^{n+1} = n(\pm1)^{n+1} \not\to 0$，级数发散

$\therefore$ 收敛域$(-1,\ 1)$

Step 2. 记 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n+1} = x^2\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1},\quad x\in(-1,\ 1)$，则：

$$S(x) = x^2\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)' = x^2\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)' = x^2\left(\frac{1}{1-x}-1\right)'$$

例 3 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n+1}$ 的和函数。

解 Step 1. 求收敛域：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)x^{n+2}}{nx^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}|x| = |x|$$

$\therefore\ |x| < 1 \quad \Rightarrow \quad$ 收敛区间$(-1, 1)$

当$x = \pm 1$ 时，一般项$nx^{n+1} = n(\pm 1)^{n+1} \not\to 0$，级数发散

$\therefore$ 收敛域$(-1, 1)$

Step 2. 记 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n+1} = x^2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \quad x \in (-1, 1)$，则：

$$S(x) = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = x^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = x^2\left(\frac{1}{1-x} - 1\right)' = \frac{x^2}{(1-x)^2}$$

注 等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1} = \frac{x^2}{(1-x)^2}, \quad x \in (-1, 1)$$

推出

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad x \in (-1, 1)$$

注 等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1} = \frac{x^2}{(1-x)^2}, \quad x \in (-1, 1)$$

推出

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad x \in (-1, 1)$$

中取 $x = \frac{1}{2}$，可得

$$1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \frac{5}{2^4} + \cdots$$

注 等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1} = \frac{x^2}{(1-x)^2}, \quad x \in (-1, 1)$$

推出

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad x \in (-1, 1)$$

中取 $x = \frac{1}{2}$，可得

$$1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \frac{5}{2^4} + \cdots = 4.$$