

第 15 周作业解答

练习 1. 用配方法求以下二次型的标准形, 写出所做的非退化线性变量代换 $y = Cx$ 是什么, 并指出正、负惯性指标是多少。

1. $f = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

2. $f = x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$

解

1.

$$\begin{aligned} f &= x_1^2 + 2x_1(2x_2 + x_3) + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_2x_3 \\ &= x_1^2 + 2x_1(2x_2 + x_3) + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_2x_3 \\ &= x_1^2 + 2x_1(2x_2 + x_3) + (2x_2 + x_3)^2 - (2x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_2x_3 \\ &= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 3x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2 \\ &= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 3 \left[x_2^2 + 2 \cdot x_2 \cdot \frac{1}{3}x_3 \right] + 2x_3^2 \\ &= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 3 \left[x_2^2 + 2 \cdot x_2 \cdot \frac{1}{3}x_3 + \left(\frac{1}{3}x_3 \right)^2 \right] + \frac{1}{3}x_3^2 + 2x_3^2 \\ &= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 3 \left(x_2 + \frac{1}{3}x_3 \right)^2 + \frac{7}{3}x_3^2. \end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 + \frac{1}{3}x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 - \frac{1}{3}y_3 \\ x_2 = y_2 - \frac{1}{3}y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y = Cy$$

则 $|C| = 1 \neq 0$ (说明为非退化线性变换), 且

$$f = y_1^2 - 3y_2^2 + \frac{7}{3}y_3^2.$$

正惯性指标为 2, 负惯性指标为 1。

2.

$$\begin{aligned} f &= x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3 \\ &= x_1^2 + 2x_1(-x_2 + x_3) - 3x_3^2 - 6x_2x_3 \\ &= x_1^2 + 2x_1(-x_2 + x_3) + (-x_2 + x_3)^2 - (-x_2 + x_3)^2 - 3x_3^2 - 6x_2x_3 \\ &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 - x_2^2 - 4x_2x_3 - 4x_3^2 \\ &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 - (x_2 + 2x_3)^2 \end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 + 2x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 - 3y_3 \\ x_2 = y_2 - 2y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y = Cy$$

则 $|C| = 1 \neq 0$ (说明为非退化线性变换)

$$f = y_1^2 - y_2^2.$$

正惯性指标为 1, 负惯性指标为 -1。

练习 2. t 为何值时, 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 是正定?

解 f 的系数矩阵是:

$$\begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}.$$

f 是正定当且仅当所以顺序主子式大于零, 所以

$$A_1 = t > 0,$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2 - 1 > 0 \Rightarrow t > 1 \quad \text{or} \quad t < -1 \xrightarrow{t>0} t > 1,$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3 - t \times r_1]{r_2 + r_1} \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ t+1 & t+1 & 0 \\ 1-t^2 & -1-t & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+1 & t+1 \\ 1-t^2 & -1-t \end{vmatrix} = (t+1)^2(t-2) > 0 \xrightarrow{t>1} t > 2.$$

所以 $t > 2$.

练习 3. 设 A, B 均是 n 阶正定矩阵, 证明 $A + B$ 也是正定矩阵。

证明 设 $x \neq 0$ 为 n 维列向量, 则

$$x^T(A+B)x = x^T Ax + x^T Bx > 0$$

其中最后一步用到 A, B 的正定性。所以 $A + B$ 为正定矩阵。