

第 12 章 b: 常数项级数的审敛法

数学系 梁卓滨

2016-2017 学年 II

Outline

1. 正项级数及其审敛法
2. 交错级数及其审敛法
3. 绝对收敛与条件收敛

We are here now...

1. 正项级数及其审敛法

2. 交错级数及其审敛法

3. 绝对收敛与条件收敛

正项级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 是指每一项 $u_n \geq 0$ 。

正项级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 是指每一项 $u_n \geq 0$ 。

定理 1 正项级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛的充分必要条件是：部分和 $\{s_n\}$ 有上界
(即, $\exists M$ 使得对 $\forall n$ 成立 $s_n \leq M$)

正项级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 是指每一项 $u_n \geq 0$ 。

定理 1 正项级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛的充分必要条件是：部分和 $\{s_n\}$ 有上界
(即, $\exists M$ 使得对 $\forall n$ 成立 $s_n \leq M$)

证明 注意到部分和 $\{s_n\}$ 是单增数列：

$$s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n \leq \cdots$$

正项级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 是指每一项 $u_n \geq 0$ 。

定理 1 正项级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛的充分必要条件是：部分和 $\{s_n\}$ 有上界
(即, $\exists M$ 使得对 $\forall n$ 成立 $s_n \leq M$)

证明 注意到部分和 $\{s_n\}$ 是单增数列：

$$s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n \leq \cdots$$

回忆 单调数列, 极限存在 \Leftrightarrow 数列有界。

正项级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 是指每一项 $u_n \geq 0$ 。

定理 1 正项级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛的充分必要条件是：部分和 $\{s_n\}$ 有上界
(即, $\exists M$ 使得对 $\forall n$ 成立 $s_n \leq M$)

证明 注意到部分和 $\{s_n\}$ 是单增数列：

$$s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n \leq \cdots$$

回忆 单调数列, 极限存在 \Leftrightarrow 数列有界。所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{收敛} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \text{收敛} \quad \Leftrightarrow \quad \{s_n\} \text{有上界}$$

正项级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 是指每一项 $u_n \geq 0$ 。

定理 1 正项级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛的充分必要条件是：部分和 $\{s_n\}$ 有上界
(即, $\exists M$ 使得对 $\forall n$ 成立 $s_n \leq M$)

证明 注意到部分和 $\{s_n\}$ 是单增数列：

$$s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n \leq \cdots$$

回忆 单调数列, 极限存在 \Leftrightarrow 数列有界。所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{收敛} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \text{收敛} \quad \Leftrightarrow \quad \{s_n\} \text{有上界}$$

注 设正项级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i = s$ (收敛), 则对任意 n 成立

$$s_n \leq s$$

正项级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 是指每一项 $u_n \geq 0$ 。

定理 1 正项级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛的充分必要条件是：部分和 $\{s_n\}$ 有上界
(即, $\exists M$ 使得对 $\forall n$ 成立 $s_n \leq M$)

证明 注意到部分和 $\{s_n\}$ 是单增数列：

$$s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n \leq \cdots$$

回忆 单调数列, 极限存在 \Leftrightarrow 数列有界。所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{收敛} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \text{收敛} \quad \Leftrightarrow \quad \{s_n\} \text{有上界}$$

注 设正项级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i = s$ (收敛), 则对任意 n 成立

$$s_n = \sum_{i=1}^n u_i \leq \sum_{i=1}^{\infty} u_i = s$$

例 p 级数 ($p > 0$) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$

例 p 级数 ($p > 0$) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$

- 当 $0 < p \leq 1$ 时, 级数发散。
- 当 $p > 1$ 时,

例 p 级数 ($p > 0$) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$

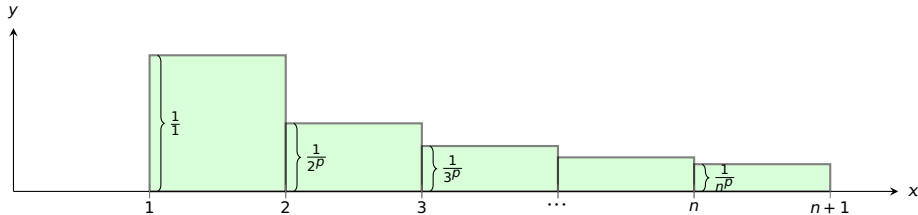
- 当 $0 < p \leq 1$ 时, 级数发散。
- 当 $p > 1$ 时,

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}$$

例 p 级数 ($p > 0$) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$

- 当 $0 < p \leq 1$ 时, 级数发散。
- 当 $p > 1$ 时,

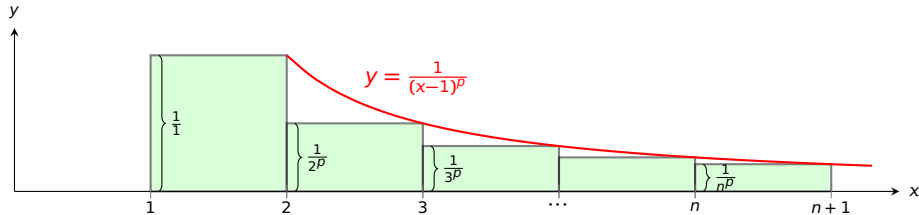
$$s_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}$$



例 p 级数 ($p > 0$) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$

- 当 $0 < p \leq 1$ 时, 级数发散。
- 当 $p > 1$ 时,

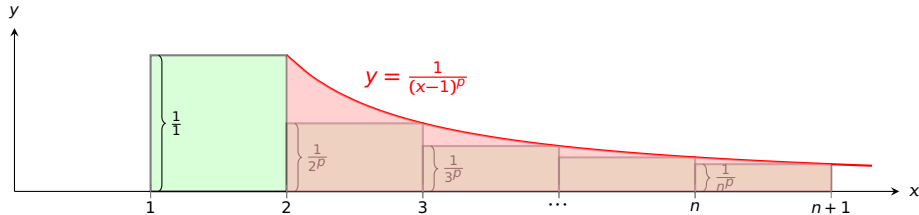
$$s_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}$$



例 p 级数 ($p > 0$) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$

- 当 $0 < p \leq 1$ 时, 级数发散。
- 当 $p > 1$ 时,

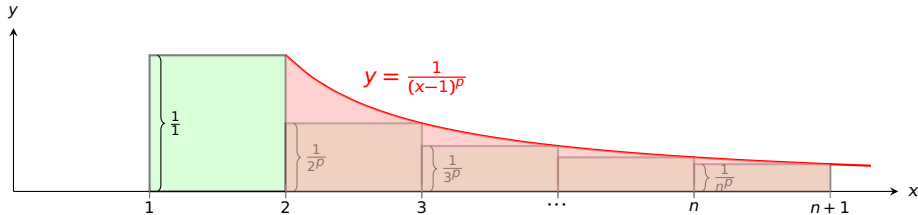
$$s_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}$$



例 p 级数 ($p > 0$) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$

- 当 $0 < p \leq 1$ 时, 级数发散。
- 当 $p > 1$ 时,

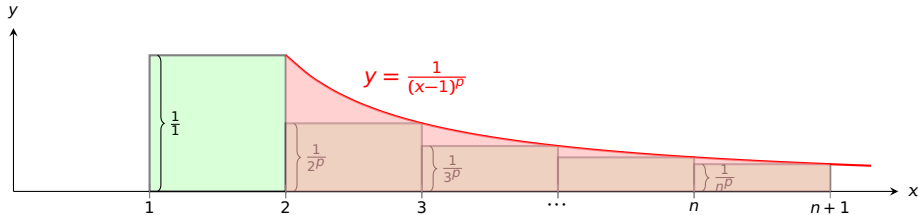
$$s_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} \qquad \int_2^{n+1} \frac{1}{(x-1)^p} dx$$



例 p 级数 ($p > 0$) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$

- 当 $0 < p \leq 1$ 时, 级数发散。
- 当 $p > 1$ 时,

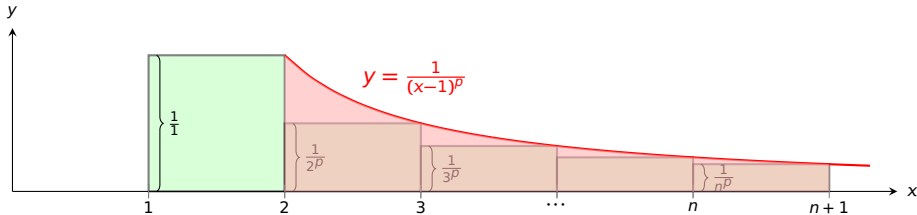
$$s_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} \leq 1 + \int_2^{n+1} \frac{1}{(x-1)^p} dx$$



例 p 级数 ($p > 0$) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$

- 当 $0 < p \leq 1$ 时, 级数发散。
- 当 $p > 1$ 时,

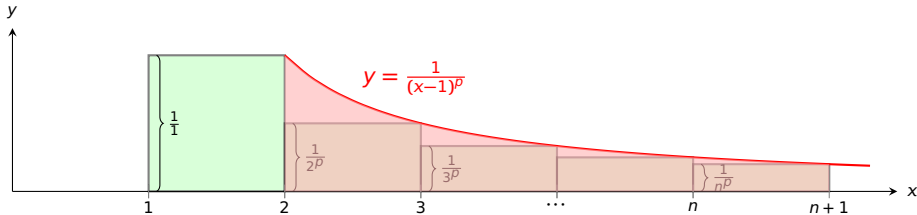
$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} \leq 1 + \int_2^{n+1} \frac{1}{(x-1)^p} dx \\ &= 1 + \frac{1}{1-p} \cdot (x-1)^{1-p} \Big|_2^{n+1} \end{aligned}$$



例 p 级数 ($p > 0$) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$

- 当 $0 < p \leq 1$ 时, 级数发散。
- 当 $p > 1$ 时,

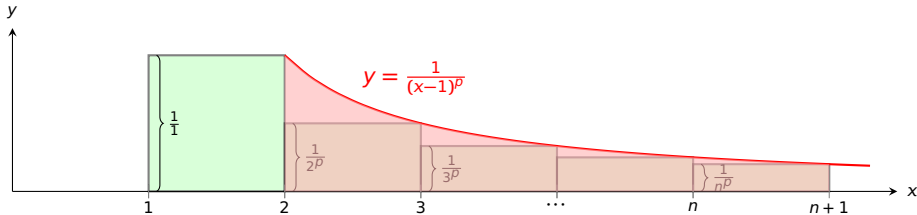
$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} \leq 1 + \int_2^{n+1} \frac{1}{(x-1)^p} dx \\ &= 1 + \frac{1}{1-p} \cdot (x-1)^{1-p} \Big|_2^{n+1} = 1 + \frac{1 - n^{1-p}}{p-1} \end{aligned}$$



例 p 级数 ($p > 0$) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$

- 当 $0 < p \leq 1$ 时, 级数发散。
- 当 $p > 1$ 时,

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} \leq 1 + \int_2^{n+1} \frac{1}{(x-1)^p} dx \\ &= 1 + \frac{1}{1-p} \cdot (x-1)^{1-p} \Big|_2^{n+1} = 1 + \frac{1 - n^{1-p}}{p-1} \leq \frac{p}{p-1} \end{aligned}$$

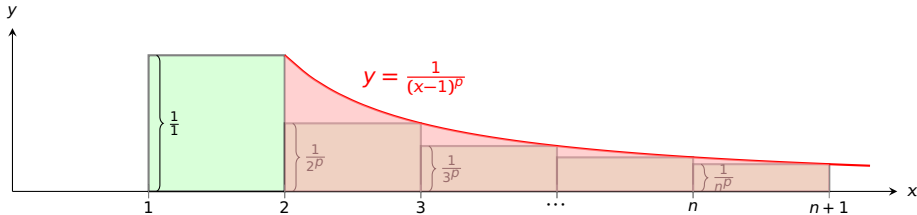


例 p 级数 ($p > 0$) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$

- 当 $0 < p \leq 1$ 时, 级数发散。
- 当 $p > 1$ 时,

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} \leq 1 + \int_2^{n+1} \frac{1}{(x-1)^p} dx \\ &= 1 + \frac{1}{1-p} \cdot (x-1)^{1-p} \Big|_2^{n+1} = 1 + \frac{1 - n^{1-p}}{p-1} \leq \frac{p}{p-1} \end{aligned}$$

所以 $\{s_n\}$ 有上界,

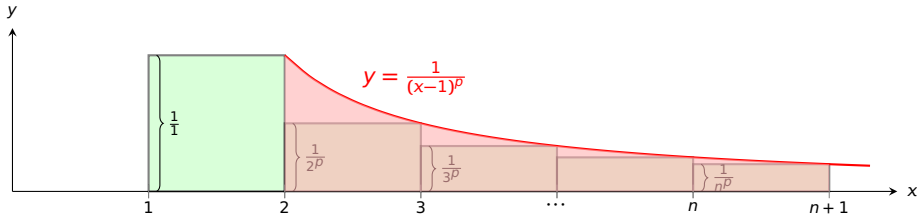


例 p 级数 ($p > 0$) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$

- 当 $0 < p \leq 1$ 时, 级数发散。
- 当 $p > 1$ 时,

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} \leq 1 + \int_2^{n+1} \frac{1}{(x-1)^p} dx \\ &= 1 + \frac{1}{1-p} \cdot (x-1)^{1-p} \Big|_2^{n+1} = 1 + \frac{1 - n^{1-p}}{p-1} \leq \frac{p}{p-1} \end{aligned}$$

所以 $\{s_n\}$ 有上界, 级数收敛。



定理 2 (比较审敛法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数, 且 $u_n \leq v_n$ 。则

1. $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散。

定理 2 (比较审敛法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数, 且 $u_n \leq v_n$ 。则

1. $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散。(即为上述结论的逆否命题)

定理 2 (比较审敛法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数, 且 $u_n \leq v_n$ 。则

1. $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散。(即为上述结论的逆否命题)

证明 设 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma$ (收敛), 则对任意的 n 成立

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma$$

定理 2 (比较审敛法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数, 且 $u_n \leq v_n$ 。则

1. $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散。(即为上述结论的逆否命题)

证明 设 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma$ (收敛), 则对任意的 n 成立

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n \leq v_1 + v_2 + \cdots + v_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma$$

定理 2 (比较审敛法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数, 且 $u_n \leq v_n$ 。则

1. $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散。(即为上述结论的逆否命题)

证明 设 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma$ (收敛), 则对任意的 n 成立

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n \leq v_1 + v_2 + \cdots + v_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma$$

说明 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和有上界, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

定理 2 (比较审敛法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数, 且 $u_n \leq v_n$ 。则

1. $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散。(即为上述结论的逆否命题)

证明 设 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma$ (收敛), 则对任意的 n 成立

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n \leq v_1 + v_2 + \cdots + v_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma$$

说明 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和有上界, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

注 运用比较审敛法时, 需使得选取已知敛散性的级数作为比较的基准

推论 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数。设 $k > 0$ 。设

$$u_n \leq k v_n, \quad \forall n \geq N.$$

则

1. $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散。(即为上述结论的逆否命题)

推论 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数。设 $k > 0$ 。设

$$u_n \leq k v_n, \quad \forall n \geq N.$$

则

1. $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散。(即为上述结论的逆否命题)

证明 这是

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} k v_n \text{ 收敛}$$

推论 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数。设 $k > 0$ 。设

$$u_n \leq k v_n, \quad \forall n \geq N.$$

则

1. $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散。(即为上述结论的逆否命题)

证明 这是

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} k v_n \text{ 收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛}$$

推论 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数。设 $k > 0$ 。设

$$u_n \leq k v_n, \quad \forall n \geq N.$$

则

1. $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散。(即为上述结论的逆否命题)

证明 这是

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} k v_n \text{ 收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛}$$

注

$$u_n \leq k v_n, \quad \forall n \geq N \quad \Leftrightarrow \quad \frac{u_n}{v_n} \leq k, \quad \forall n \geq N$$

定理 3 (比较审敛法的极限形式) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数。

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$ 。则成立:

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 发散} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 发散}。$$

定理 3 (比较审敛法的极限形式) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数。

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$ 。则成立:

1. 若 $0 \leq l < +\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;
2. 若 $0 < l \leq +\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

定理 3 (比较审敛法的极限形式) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数。

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$ 。则成立:

1. 若 $0 \leq l < +\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;
2. 若 $0 < l \leq +\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

证明 1. 分析 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$ 的定义可知:

$$\text{当 } n \text{ 充分大, } \frac{u_n}{v_n} \approx l$$

定理 3 (比较审敛法的极限形式) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数。

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$ 。则成立:

1. 若 $0 \leq l < +\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;
2. 若 $0 < l \leq +\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

证明 1. 分析 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$ 的定义可知:

$$\text{当 } n \text{ 充分大, } \frac{u_n}{v_n} \approx l \Rightarrow \text{当 } n \geq N \text{ 时, } \frac{u_n}{v_n} \leq l + 1$$

定理 3 (比较审敛法的极限形式) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数。

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$ 。则成立:

1. 若 $0 \leq l < +\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;
2. 若 $0 < l \leq +\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

证明 1. 分析 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$ 的定义可知:

$$\begin{aligned} \text{当 } n \text{ 充分大, } \frac{u_n}{v_n} \approx l &\Rightarrow \text{当 } n \geq N \text{ 时, } \frac{u_n}{v_n} \leq l + 1 \\ &\Rightarrow \text{当 } n \geq N \text{ 时, } u_n \leq (l + 1)v_n \end{aligned}$$

定理 3 (比较审敛法的极限形式) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数。

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$ 。则成立:

1. 若 $0 \leq l < +\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;
2. 若 $0 < l \leq +\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

证明 1. 分析 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$ 的定义可知:

$$\begin{aligned} \text{当 } n \text{ 充分大, } \frac{u_n}{v_n} \approx l &\Rightarrow \text{当 } n \geq N \text{ 时, } \frac{u_n}{v_n} \leq l + 1 \\ &\Rightarrow \text{当 } n \geq N \text{ 时, } u_n \leq (l + 1)v_n \end{aligned}$$

所以由比较审敛法知, 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛。

定理 3 (比较审敛法的极限形式) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数。

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$ 。则成立:

1. 若 $0 \leq l < +\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;
2. 若 $0 < l \leq +\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

定理 3 (比较审敛法的极限形式) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数。

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$ 。则成立:

1. 若 $0 \leq l < +\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;
2. 若 $0 < l \leq +\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

证明 2. 分析 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$ 的定义可知:

$$\text{当 } n \text{ 充分大, } \frac{u_n}{v_n} \approx l$$

定理 3 (比较审敛法的极限形式) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数。

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$ 。则成立:

1. 若 $0 \leq l < +\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;
2. 若 $0 < l \leq +\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

证明 2. 分析 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$ 的定义可知:

$$\text{当 } n \text{ 充分大, } \frac{u_n}{v_n} \approx l \Rightarrow \text{当 } n \geq N \text{ 时, } \frac{u_n}{v_n} \geq \frac{l}{2} > 0$$

定理 3 (比较审敛法的极限形式) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数。

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$ 。则成立:

1. 若 $0 \leq l < +\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;
2. 若 $0 < l \leq +\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

证明 2. 分析 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$ 的定义可知:

$$\begin{aligned} \text{当 } n \text{ 充分大, } \frac{u_n}{v_n} \approx l &\Rightarrow \text{当 } n \geq N \text{ 时, } \frac{u_n}{v_n} \geq \frac{l}{2} > 0 \\ &\Rightarrow \text{当 } n \geq N \text{ 时, } v_n \leq \frac{2}{l} u_n \end{aligned}$$

定理 3 (比较审敛法的极限形式) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数。

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$ 。则成立:

1. 若 $0 \leq l < +\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;
2. 若 $0 < l \leq +\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

证明 2. 分析 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$ 的定义可知:

$$\begin{aligned} \text{当 } n \text{ 充分大, } \frac{u_n}{v_n} \approx l &\Rightarrow \text{当 } n \geq N \text{ 时, } \frac{u_n}{v_n} \geq \frac{l}{2} > 0 \\ &\Rightarrow \text{当 } n \geq N \text{ 时, } v_n \leq \frac{2}{l} u_n \end{aligned}$$

所以由比较审敛法知, 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散。

定理 3 (比较审敛法的极限形式) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数。

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$ 。则成立:

1. 若 $0 \leq l < +\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;
2. 若 $0 < l \leq +\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

定理 3 (比较审敛法的极限形式) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数。

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$ 。则成立:

1. 若 $0 \leq l < +\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;
2. 若 $0 < l \leq +\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

注一. 简言之, 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l \in (0, +\infty)$,

则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的敛散性相同。

定理 3 (比较审敛法的极限形式) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数。

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$ 。则成立:

1. 若 $0 \leq l < +\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;
2. 若 $0 < l \leq +\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

注一. 简言之, 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l \in (0, +\infty)$,

则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的敛散性相同。

注二. 比较审敛法的极限形式, 比起前面形式的比较审敛法可能更好用:
特别是求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n}$ 比构造不等式 $u_n \leq v_n$ 更容易的时候。

回忆 p 级数 ($p > 0$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

当 $0 < p \leq 1$ 时, 发散; 当 $p > 1$ 时, 收敛。

回忆 p 级数 ($p > 0$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

当 $0 < p \leq 1$ 时, 发散; 当 $p > 1$ 时, 收敛。

例 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 的敛散性。

回忆 p 级数 ($p > 0$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

当 $0 < p \leq 1$ 时, 发散; 当 $p > 1$ 时, 收敛。

例 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 的敛散性。

解 与发散的调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 作比较:

回忆 p 级数 ($p > 0$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

当 $0 < p \leq 1$ 时, 发散; 当 $p > 1$ 时, 收敛。

例 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 的敛散性。

解 与发散的调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 作比较:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}}{\frac{1}{n}} =$$

回忆 p 级数 ($p > 0$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

当 $0 < p \leq 1$ 时, 发散; 当 $p > 1$ 时, 收敛。

例 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 的敛散性。

解 与发散的调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 作比较:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n(n+1)}} =$$

回忆 p 级数 ($p > 0$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

当 $0 < p \leq 1$ 时, 发散; 当 $p > 1$ 时, 收敛。

例 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 的敛散性。

解 与发散的调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 作比较:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n(n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} =$$

回忆 p 级数 ($p > 0$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

当 $0 < p \leq 1$ 时, 发散; 当 $p > 1$ 时, 收敛。

例 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 的敛散性。

解 与发散的调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 作比较:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n(n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = 1$$

回忆 p 级数 ($p > 0$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

当 $0 < p \leq 1$ 时, 发散; 当 $p > 1$ 时, 收敛。

例 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 的敛散性。

解 与发散的调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 作比较:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n(n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = 1$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 也是发散。

例 判断级数敛散性:

$$(1) \quad 1 + \frac{1+2}{1+2^2} + \frac{1+3}{1+3^2} + \cdots + \frac{1+n}{1+n^2} + \cdots$$

$$(2) \quad \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+4)} + \cdots$$

$$(3) \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2^2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2^3}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) + \cdots$$

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n} \quad (a > 0)$$

例 判断级数敛散性:

$$(1) \quad 1 + \frac{1+2}{1+2^2} + \frac{1+3}{1+3^2} + \cdots + \frac{1+n}{1+n^2} + \cdots$$

$$(2) \quad \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+4)} + \cdots$$

$$(3) \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2^2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2^3}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) + \cdots$$

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n} \quad (a > 0)$$

解 (1) 与发散的调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 作比较:

例 判断级数敛散性:

$$(1) \quad 1 + \frac{1+2}{1+2^2} + \frac{1+3}{1+3^2} + \cdots + \frac{1+n}{1+n^2} + \cdots$$

$$(2) \quad \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+4)} + \cdots$$

$$(3) \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2^2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2^3}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) + \cdots$$

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n} \quad (a > 0)$$

解 (1) 与发散的调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 作比较:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1+n}{1+n^2}}{\frac{1}{n}} =$$

例 判断级数敛散性:

$$(1) \quad 1 + \frac{1+2}{1+2^2} + \frac{1+3}{1+3^2} + \cdots + \frac{1+n}{1+n^2} + \cdots$$

$$(2) \quad \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+4)} + \cdots$$

$$(3) \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2^2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2^3}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) + \cdots$$

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n} \quad (a > 0)$$

解 (1) 与发散的调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 作比较:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1+n}{1+n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+n^2}{1+n^2} =$$

例 判断级数敛散性:

$$(1) \quad 1 + \frac{1+2}{1+2^2} + \frac{1+3}{1+3^2} + \cdots + \frac{1+n}{1+n^2} + \cdots$$

$$(2) \quad \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+4)} + \cdots$$

$$(3) \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2^2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2^3}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) + \cdots$$

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n} \quad (a > 0)$$

解 (1) 与发散的调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 作比较:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1+n}{1+n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+n^2}{1+n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} =$$

例 判断级数敛散性:

$$(1) \quad 1 + \frac{1+2}{1+2^2} + \frac{1+3}{1+3^2} + \cdots + \frac{1+n}{1+n^2} + \cdots$$

$$(2) \quad \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+4)} + \cdots$$

$$(3) \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2^2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2^3}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) + \cdots$$

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n} \quad (a > 0)$$

解 (1) 与发散的调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 作比较:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1+n}{1+n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+n^2}{1+n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} = 1$$

例 判断级数敛散性:

$$(1) \quad 1 + \frac{1+2}{1+2^2} + \frac{1+3}{1+3^2} + \cdots + \frac{1+n}{1+n^2} + \cdots$$

$$(2) \quad \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+4)} + \cdots$$

$$(3) \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2^2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2^3}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) + \cdots$$

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n} \quad (a > 0)$$

解 (1) 与发散的调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 作比较:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1+n}{1+n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+n^2}{1+n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} = 1$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}$ 也是发散。

例 判断级数敛散性:

$$(1) \quad 1 + \frac{1+2}{1+2^2} + \frac{1+3}{1+3^2} + \cdots + \frac{1+n}{1+n^2} + \cdots$$

$$(2) \quad \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+4)} + \cdots$$

$$(3) \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2^2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2^3}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) + \cdots$$

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$$

例 判断级数敛散性:

$$(1) \quad 1 + \frac{1+2}{1+2^2} + \frac{1+3}{1+3^2} + \cdots + \frac{1+n}{1+n^2} + \cdots$$

$$(2) \quad \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+4)} + \cdots$$

$$(3) \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2^2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2^3}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) + \cdots$$

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$$

解 (2) 与收敛的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 作比较:

例 判断级数敛散性:

$$(1) \quad 1 + \frac{1+2}{1+2^2} + \frac{1+3}{1+3^2} + \cdots + \frac{1+n}{1+n^2} + \cdots$$

$$(2) \quad \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+4)} + \cdots$$

$$(3) \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2^2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2^3}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) + \cdots$$

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$$

解 (2) 与收敛的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 作比较:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)(n+4)}}{\frac{1}{n^2}} =$$

例 判断级数敛散性:

$$(1) \quad 1 + \frac{1+2}{1+2^2} + \frac{1+3}{1+3^2} + \cdots + \frac{1+n}{1+n^2} + \cdots$$

$$(2) \quad \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+4)} + \cdots$$

$$(3) \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2^2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2^3}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) + \cdots$$

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$$

解 (2) 与收敛的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 作比较:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)(n+4)}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)(n+4)} =$$

例 判断级数敛散性:

$$(1) \quad 1 + \frac{1+2}{1+2^2} + \frac{1+3}{1+3^2} + \cdots + \frac{1+n}{1+n^2} + \cdots$$

$$(2) \quad \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+4)} + \cdots$$

$$(3) \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2^2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2^3}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) + \cdots$$

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$$

解 (2) 与收敛的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 作比较:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)(n+4)}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)(n+4)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{4}{n}\right)} =$$

例 判断级数敛散性:

$$(1) \quad 1 + \frac{1+2}{1+2^2} + \frac{1+3}{1+3^2} + \cdots + \frac{1+n}{1+n^2} + \cdots$$

$$(2) \quad \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+4)} + \cdots$$

$$(3) \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2^2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2^3}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) + \cdots$$

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$$

解 (2) 与收敛的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 作比较:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)(n+4)}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)(n+4)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{4}{n}\right)} = 1$$

例 判断级数敛散性:

$$(1) \quad 1 + \frac{1+2}{1+2^2} + \frac{1+3}{1+3^2} + \cdots + \frac{1+n}{1+n^2} + \cdots$$

$$(2) \quad \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+4)} + \cdots$$

$$(3) \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2^2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2^3}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) + \cdots$$

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$$

解 (2) 与收敛的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 作比较:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)(n+4)}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)(n+4)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{4}{n}\right)} = 1$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)}$ 也是收敛。

例 判断级数敛散性:

$$(1) \quad 1 + \frac{1+2}{1+2^2} + \frac{1+3}{1+3^2} + \cdots + \frac{1+n}{1+n^2} + \cdots$$

$$(2) \quad \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+4)} + \cdots$$

$$(3) \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2^2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2^3}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) + \cdots$$

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$$

例 判断级数敛散性:

$$(1) \quad 1 + \frac{1+2}{1+2^2} + \frac{1+3}{1+3^2} + \cdots + \frac{1+n}{1+n^2} + \cdots$$

$$(2) \quad \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+4)} + \cdots$$

$$(3) \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2^2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2^3}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) + \cdots$$

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$$

解 (3) 与收敛的等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2^n}$ 作比较:

例 判断级数敛散性:

$$(1) \quad 1 + \frac{1+2}{1+2^2} + \frac{1+3}{1+3^2} + \cdots + \frac{1+n}{1+n^2} + \cdots$$

$$(2) \quad \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+4)} + \cdots$$

$$(3) \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2^2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2^3}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) + \cdots$$

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$$

解 (3) 与收敛的等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2^n}$ 作比较:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{\frac{\pi}{2^n}}$$

例 判断级数敛散性:

$$(1) \quad 1 + \frac{1+2}{1+2^2} + \frac{1+3}{1+3^2} + \cdots + \frac{1+n}{1+n^2} + \cdots$$

$$(2) \quad \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+4)} + \cdots$$

$$(3) \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2^2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2^3}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) + \cdots$$

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$$

解 (3) 与收敛的等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2^n}$ 作比较:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{\frac{\pi}{2^n}} \stackrel{x=\frac{\pi}{2^n}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} =$$

例 判断级数敛散性:

$$(1) \quad 1 + \frac{1+2}{1+2^2} + \frac{1+3}{1+3^2} + \cdots + \frac{1+n}{1+n^2} + \cdots$$

$$(2) \quad \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+4)} + \cdots$$

$$(3) \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2^2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2^3}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) + \cdots$$

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$$

解 (3) 与收敛的等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2^n}$ 作比较:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{\frac{\pi}{2^n}} \stackrel{x=\frac{\pi}{2^n}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

例 判断级数敛散性:

$$(1) \quad 1 + \frac{1+2}{1+2^2} + \frac{1+3}{1+3^2} + \cdots + \frac{1+n}{1+n^2} + \cdots$$

$$(2) \quad \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+4)} + \cdots$$

$$(3) \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2^2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2^3}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) + \cdots$$

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$$

解 (3) 与收敛的等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2^n}$ 作比较:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{\frac{\pi}{2^n}} \stackrel{x=\frac{\pi}{2^n}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ 也是收敛。

例 判断级数敛散性:

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}, \quad \text{其中 } a > 0$$

例 判断级数敛散性:

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}, \quad \text{其中 } a > 0$$

解 (4) 分两种情况 $a > 1$ 及 $0 < a \leq 1$ 讨论:

- 当 $a > 1$ 时,

- 当 $0 < a \leq 1$ 时,

例 判断级数敛散性:

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}, \quad \text{其中 } a > 0$$

解 (4) 分两种情况 $a > 1$ 及 $0 < a \leq 1$ 讨论:

- 当 $a > 1$ 时, 与收敛的等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n}$ 作比较:

- 当 $0 < a \leq 1$ 时,

例 判断级数敛散性:

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}, \quad \text{其中 } a > 0$$

解 (4) 分两种情况 $a > 1$ 及 $0 < a \leq 1$ 讨论:

- 当 $a > 1$ 时, 与收敛的等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n}$ 作比较:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+a^n}}{\frac{1}{a^n}} =$$

- 当 $0 < a \leq 1$ 时,

例 判断级数敛散性:

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}, \quad \text{其中 } a > 0$$

解 (4) 分两种情况 $a > 1$ 及 $0 < a \leq 1$ 讨论:

- 当 $a > 1$ 时, 与收敛的等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n}$ 作比较:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+a^n}}{\frac{1}{a^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{1+a^n} =$$

- 当 $0 < a \leq 1$ 时,

例 判断级数敛散性:

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}, \quad \text{其中 } a > 0$$

解 (4) 分两种情况 $a > 1$ 及 $0 < a \leq 1$ 讨论:

- 当 $a > 1$ 时, 与收敛的等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n}$ 作比较:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+a^n}}{\frac{1}{a^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{1+a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+\frac{1}{a^n}} =$$

- 当 $0 < a \leq 1$ 时,

例 判断级数敛散性:

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}, \quad \text{其中 } a > 0$$

解 (4) 分两种情况 $a > 1$ 及 $0 < a \leq 1$ 讨论:

- 当 $a > 1$ 时, 与收敛的等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n}$ 作比较:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+a^n}}{\frac{1}{a^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{1+a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+\frac{1}{a^n}} = 1$$

所以此时 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$ 也是收敛。

- 当 $0 < a \leq 1$ 时,

例 判断级数敛散性:

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}, \quad \text{其中 } a > 0$$

解 (4) 分两种情况 $a > 1$ 及 $0 < a \leq 1$ 讨论:

- 当 $a > 1$ 时, 与收敛的等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n}$ 作比较:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+a^n}}{\frac{1}{a^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{1+a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+\frac{1}{a^n}} = 1$$

所以此时 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$ 也是收敛。

- 当 $0 < a \leq 1$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+a^n} \neq 0$$

例 判断级数敛散性:

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}, \quad \text{其中 } a > 0$$

解 (4) 分两种情况 $a > 1$ 及 $0 < a \leq 1$ 讨论:

- 当 $a > 1$ 时, 与收敛的等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n}$ 作比较:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+a^n}}{\frac{1}{a^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{1+a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+\frac{1}{a^n}} = 1$$

所以此时 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$ 也是收敛。

- 当 $0 < a \leq 1$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+a^n} \neq 0$$

所以此时 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$ 收敛。

例 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}$ 敛散性

例 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}$ 敛散性

注 与收敛的等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 作比较:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2+(-1)^n}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 + (-1)^n$$

例 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}$ 敛散性

注 与收敛的等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 作比较:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2+(-1)^n}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 + (-1)^n \text{ (极限不存在)}$$

例 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}$ 敛散性

注 与收敛的等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 作比较:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2+(-1)^n}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 + (-1)^n \text{ (极限不存在)}$$

解 与收敛的等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 作比较:

$$\frac{\frac{2+(-1)^n}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} = 2 + (-1)^n \leq 3 \Rightarrow$$

例 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}$ 敛散性

注 与收敛的等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 作比较:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2+(-1)^n}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 + (-1)^n \text{ (极限不存在)}$$

解 与收敛的等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 作比较:

$$\frac{\frac{2+(-1)^n}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} = 2 + (-1)^n \leq 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{2 + (-1)^n}{2^n} \leq 3 \cdot \frac{1}{2^n}$$

例 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}$ 敛散性

注 与收敛的等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 作比较:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2+(-1)^n}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 + (-1)^n \text{ (极限不存在)}$$

解 与收敛的等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 作比较:

$$\frac{\frac{2+(-1)^n}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} = 2 + (-1)^n \leq 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{2 + (-1)^n}{2^n} \leq 3 \cdot \frac{1}{2^n}$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}$ 也收敛。

定理 4 (比值审敛法, 达朗贝尔判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数, 又设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho. \text{ 则}$$

1. 若 $\rho \in [0, 1)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;
2. 若 $\rho \in (1, +\infty]$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散; (并且此时 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$)
3. 若 $\rho = 1$, 则此法失效, 级数可能收敛也可能发散。

定理 4 (比值审敛法, 达朗贝尔判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数, 又设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho. \text{ 则}$$

1. 若 $\rho \in [0, 1)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

定理 4 (比值审敛法, 达朗贝尔判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数, 又设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho. \text{ 则}$$

1. 若 $\rho \in [0, 1)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

证明 1. 分析 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \rho$ 的定义可知:

$$\text{当 } n \text{ 充分大, } \frac{u_{n+1}}{u_n} \approx \rho$$

定理 4 (比值审敛法, 达朗贝尔判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数, 又设

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$ 。则

1. 若 $\rho \in [0, 1)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

证明 1. 分析 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \rho$ 的定义可知:

$$\text{当 } n \text{ 充分大, } \frac{u_{n+1}}{u_n} \approx \rho \Rightarrow \text{当 } n \geq m \text{ 时, } \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{\rho + 1}{2}$$

定理 4 (比值审敛法, 达朗贝尔判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数, 又设

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$ 。则

1. 若 $\rho \in [0, 1)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

证明 1. 分析 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \rho$ 的定义可知:

$$\text{当 } n \text{ 充分大, } \frac{u_{n+1}}{u_n} \approx \rho \Rightarrow \text{当 } n \geq m \text{ 时, } \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{\rho + 1}{2} < 1$$

定理 4 (比值审敛法, 达朗贝尔判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数, 又设

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$ 。则

1. 若 $\rho \in [0, 1)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

证明 1. 分析 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \rho$ 的定义可知:

$$\text{当 } n \text{ 充分大, } \frac{u_{n+1}}{u_n} \approx \rho \Rightarrow \text{当 } n \geq m \text{ 时, } \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{\rho + 1}{2} < 1$$

$$\Rightarrow \text{当 } n \geq m \text{ 时, } u_{n+1} \leq \left(\frac{\rho + 1}{2} \right) u_n$$

定理 4 (比值审敛法, 达朗贝尔判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数, 又设

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$ 。则

1. 若 $\rho \in [0, 1)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

证明 1. 分析 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \rho$ 的定义可知:

$$\text{当 } n \text{ 充分大, } \frac{u_{n+1}}{u_n} \approx \rho \Rightarrow \text{当 } n \geq m \text{ 时, } \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{\rho + 1}{2} < 1$$

$$\Rightarrow \text{当 } n \geq m \text{ 时, } u_{n+1} \leq \left(\frac{\rho + 1}{2} \right) u_n$$

所以

$$u_1 + \cdots + u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + u_{m+3} + \cdots$$

定理 4 (比值审敛法, 达朗贝尔判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数, 又设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho. \text{ 则}$$

1. 若 $\rho \in [0, 1)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

证明 1. 分析 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \rho$ 的定义可知:

$$\text{当 } n \text{ 充分大, } \frac{u_{n+1}}{u_n} \approx \rho \Rightarrow \text{当 } n \geq m \text{ 时, } \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{\rho + 1}{2} < 1$$

$$\Rightarrow \text{当 } n \geq m \text{ 时, } u_{n+1} \leq \left(\frac{\rho + 1}{2} \right) u_n$$

所以

$$\begin{array}{ccccccc} & \left(\frac{\rho+1}{2} \right) u_m & \left(\frac{\rho+1}{2} \right) u_{m+1} & \left(\frac{\rho+1}{2} \right) u_{m+2} & \cdots \\ & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \\ u_1 + \cdots + u_m & + u_{m+1} & + u_{m+2} & + u_{m+3} + & \cdots \end{array}$$

定理 4 (比值审敛法, 达朗贝尔判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数, 又设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho. \text{ 则}$$

1. 若 $\rho \in [0, 1)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

证明 1. 分析 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \rho$ 的定义可知:

$$\text{当 } n \text{ 充分大, } \frac{u_{n+1}}{u_n} \approx \rho \Rightarrow \text{当 } n \geq m \text{ 时, } \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{\rho + 1}{2} < 1$$

$$\Rightarrow \text{当 } n \geq m \text{ 时, } u_{n+1} \leq \left(\frac{\rho + 1}{2} \right) u_n$$

所以

$$\begin{array}{ccccccc} \left(\frac{\rho+1}{2} \right) u_m & \left(\frac{\rho+1}{2} \right)^2 u_m & \left(\frac{\rho+1}{2} \right) u_{m+2} & \cdots \\ \underbrace{\phantom{\left(\frac{\rho+1}{2} \right) u_m}} & \underbrace{\phantom{\left(\frac{\rho+1}{2} \right)^2 u_m}} & \underbrace{\phantom{\left(\frac{\rho+1}{2} \right) u_{m+2}}} & \\ u_1 + \cdots + u_m & + u_{m+1} & + u_{m+2} & + u_{m+3} + \cdots \end{array}$$

定理 4 (比值审敛法, 达朗贝尔判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数, 又设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho. \text{ 则}$$

1. 若 $\rho \in [0, 1)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

证明 1. 分析 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \rho$ 的定义可知:

$$\text{当 } n \text{ 充分大, } \frac{u_{n+1}}{u_n} \approx \rho \Rightarrow \text{当 } n \geq m \text{ 时, } \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{\rho + 1}{2} < 1$$

$$\Rightarrow \text{当 } n \geq m \text{ 时, } u_{n+1} \leq \left(\frac{\rho + 1}{2} \right) u_n$$

所以

$$\begin{array}{ccccccc} \left(\frac{\rho+1}{2} \right) u_m & \left(\frac{\rho+1}{2} \right)^2 u_m & \left(\frac{\rho+1}{2} \right)^3 u_m & \cdots & & & \\ \underline{\quad \quad \quad} & \underline{\quad \quad \quad} & \underline{\quad \quad \quad} & & & & \\ u_1 + \cdots + u_m & + u_{m+1} & + u_{m+2} & + u_{m+3} + & \cdots & & \end{array}$$

定理 4 (比值审敛法, 达朗贝尔判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数, 又设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho. \text{ 则}$$

1. 若 $\rho \in [0, 1)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

证明 1. 分析 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \rho$ 的定义可知:

$$\text{当 } n \text{ 充分大, } \frac{u_{n+1}}{u_n} \approx \rho \Rightarrow \text{当 } n \geq m \text{ 时, } \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{\rho + 1}{2} < 1$$

$$\Rightarrow \text{当 } n \geq m \text{ 时, } u_{n+1} \leq \left(\frac{\rho + 1}{2} \right) u_n$$

所以

$$\begin{array}{ccccccc} \left(\frac{\rho+1}{2} \right) u_m & \left(\frac{\rho+1}{2} \right)^2 u_m & \left(\frac{\rho+1}{2} \right)^3 u_m & \cdots & \text{收敛} \\ \underline{\quad \quad \quad} & \underline{\quad \quad \quad} & \underline{\quad \quad \quad} & & \\ u_1 + \cdots + u_m & + u_{m+1} & + u_{m+2} & + u_{m+3} + & \cdots \end{array}$$

定理 4 (比值审敛法, 达朗贝尔判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数, 又设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho. \text{ 则}$$

1. 若 $\rho \in [0, 1)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

证明 1. 分析 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \rho$ 的定义可知:

$$\text{当 } n \text{ 充分大, } \frac{u_{n+1}}{u_n} \approx \rho \Rightarrow \text{当 } n \geq m \text{ 时, } \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{\rho + 1}{2} < 1$$

$$\Rightarrow \text{当 } n \geq m \text{ 时, } u_{n+1} \leq \left(\frac{\rho + 1}{2} \right) u_n$$

所以

$\left(\frac{\rho+1}{2} \right) u_m$	$\left(\frac{\rho+1}{2} \right)^2 u_m$	$\left(\frac{\rho+1}{2} \right)^3 u_m$	\cdots	收敛
$\underline{\quad}$	$\underline{\quad}$	$\underline{\quad}$		\downarrow
$u_1 + \cdots + u_m$	$+ u_{m+1}$	$+ u_{m+2}$	$+ u_{m+3} + \cdots$	收敛

定理 4 (比值审敛法, 达朗贝尔判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数, 又设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho. \text{ 则}$$

2. 若 $\rho \in (1, +\infty]$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 (并且此时 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$);

定理 4 (比值审敛法, 达朗贝尔判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数, 又设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho. \text{ 则}$$

2. 若 $\rho \in (1, +\infty]$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 (并且此时 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$);

证明 2. 分析 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \rho$ 的定义可知:

$$\text{当 } n \text{ 充分大, } \frac{u_{n+1}}{u_n} \approx \rho > 1$$

定理 4 (比值审敛法, 达朗贝尔判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数, 又设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho. \text{ 则}$$

2. 若 $\rho \in (1, +\infty]$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 (并且此时 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$);

证明 2. 分析 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \rho$ 的定义可知:

$$\text{当 } n \text{ 充分大, } \frac{u_{n+1}}{u_n} \approx \rho > 1 \Rightarrow \text{当 } n \geq m \text{ 时, } \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$$

定理 4 (比值审敛法, 达朗贝尔判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数, 又设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho. \text{ 则}$$

2. 若 $\rho \in (1, +\infty]$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 (并且此时 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$);

证明 2. 分析 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \rho$ 的定义可知:

$$\begin{aligned} \text{当 } n \text{ 充分大, } \frac{u_{n+1}}{u_n} \approx \rho > 1 &\Rightarrow \text{当 } n \geq m \text{ 时, } \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \\ &\Rightarrow \text{当 } n \geq m \text{ 时, } u_{n+1} > u_n \end{aligned}$$

定理 4 (比值审敛法, 达朗贝尔判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数, 又设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho. \text{ 则}$$

2. 若 $\rho \in (1, +\infty]$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 (并且此时 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$);

证明 2. 分析 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \rho$ 的定义可知:

$$\begin{aligned} \text{当 } n \text{ 充分大, } \frac{u_{n+1}}{u_n} \approx \rho > 1 &\Rightarrow \text{当 } n \geq m \text{ 时, } \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \\ &\Rightarrow \text{当 } n \geq m \text{ 时, } u_{n+1} > u_n \end{aligned}$$

一般项从第 m 项开始严格递增, 不趋于零, 所以级数发散

例 判断级数

$$10 + \frac{10^2}{1 \cdot 2} + \frac{10^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \frac{10^n}{n!} + \cdots$$

的敛散性。

例 判断级数

$$10 + \frac{10^2}{1 \cdot 2} + \frac{10^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \frac{10^n}{n!} + \cdots$$

的敛散性。

解 因为：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{10^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{10^n}{n!}} =$$

例 判断级数

$$10 + \frac{10^2}{1 \cdot 2} + \frac{10^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \frac{10^n}{n!} + \cdots$$

的敛散性。

解 因为：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{10^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{10^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot 10^{n+1}}{(n+1)! \cdot 10^n} =$$

例 判断级数

$$10 + \frac{10^2}{1 \cdot 2} + \frac{10^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \frac{10^n}{n!} + \cdots$$

的敛散性。

解 因为：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{10^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{10^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot 10^{n+1}}{(n+1)! \cdot 10^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10}{n+1} =$$

例 判断级数

$$10 + \frac{10^2}{1 \cdot 2} + \frac{10^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \frac{10^n}{n!} + \cdots$$

的敛散性。

解 因为：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{10^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{10^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot 10^{n+1}}{(n+1)! \cdot 10^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10}{n+1} = 0$$

例 判断级数

$$10 + \frac{10^2}{1 \cdot 2} + \frac{10^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \frac{10^n}{n!} + \cdots$$

的敛散性。

解 因为：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{10^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{10^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot 10^{n+1}}{(n+1)! \cdot 10^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10}{n+1} = 0$$

所以由比值审敛法知，级数收敛。

例 判断级数

$$10 + \frac{10^2}{1 \cdot 2} + \frac{10^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \frac{10^n}{n!} + \cdots$$

的敛散性。

解 因为：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{10^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{10^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot 10^{n+1}}{(n+1)! \cdot 10^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10}{n+1} = 0$$

所以由比值审敛法知，级数收敛。

例 判断级数

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} n \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$$

的敛散性。

例 判断级数 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} n \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ 的敛散性。

例 判断级数 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} n \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ 的敛散性。

解 (1) 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{3^n}{n^2}} =$$

例 判断级数 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} n \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ 的敛散性。

解 (1) 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{3^n}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 \cdot 3^{n+1}}{n^2 \cdot 3^n} =$$

例 判断级数 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} n \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ 的敛散性。

解 (1) 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{3^n}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 \cdot 3^{n+1}}{n^2 \cdot 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 =$$

例 判断级数 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} n \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ 的敛散性。

解 (1) 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{3^n}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 \cdot 3^{n+1}}{n^2 \cdot 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = 3$$

例 判断级数 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} n \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ 的敛散性。

解 (1) 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{3^n}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 \cdot 3^{n+1}}{n^2 \cdot 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = 3$$

所以由比值审敛法知，级数发散。

例 判断级数 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} n \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ 的敛散性。

解 (1) 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{3^n}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 \cdot 3^{n+1}}{n^2 \cdot 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = 3$$

所以由比值审敛法知，级数发散。

(2) 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}{n \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} =$$

例 判断级数 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} n \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ 的敛散性。

解 (1) 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{3^n}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 \cdot 3^{n+1}}{n^2 \cdot 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = 3$$

所以由比值审敛法知，级数发散。

(2) 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}{n \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}$$

例 判断级数 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} n \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ 的敛散性。

解 (1) 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{3^n}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 \cdot 3^{n+1}}{n^2 \cdot 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = 3$$

所以由比值审敛法知, 级数发散。

(2) 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}{n \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} \stackrel{x=\frac{\pi}{2^{n+2}}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\tan 2x}$$

例 判断级数 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} n \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ 的敛散性。

解 (1) 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{3^n}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 \cdot 3^{n+1}}{n^2 \cdot 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = 3$$

所以由比值审敛法知, 级数发散。

(2) 因为

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}{n \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} \stackrel{x=\frac{\pi}{2^{n+2}}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\tan 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan x)'}{(\tan 2x)'} = \end{aligned}$$

例 判断级数 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} n \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ 的敛散性。

解 (1) 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{3^n}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 \cdot 3^{n+1}}{n^2 \cdot 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = 3$$

所以由比值审敛法知, 级数发散。

(2) 因为

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}{n \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} \stackrel{x=\frac{\pi}{2^{n+2}}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\tan 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan x)'}{(\tan 2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{2 \cdot \frac{1}{\cos^2 2x}} = \end{aligned}$$

例 判断级数 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} n \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ 的敛散性。

解 (1) 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{3^n}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 \cdot 3^{n+1}}{n^2 \cdot 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = 3$$

所以由比值审敛法知, 级数发散。

(2) 因为

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}{n \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} \stackrel{x=\frac{\pi}{2^{n+2}}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\tan 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan x)'}{(\tan 2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{2 \cdot \frac{1}{\cos^2 2x}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

例 判断级数 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} n \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ 的敛散性。

解 (1) 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{3^n}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 \cdot 3^{n+1}}{n^2 \cdot 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = 3$$

所以由比值审敛法知, 级数发散。

(2) 因为

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}{n \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} \stackrel{x=\frac{\pi}{2^{n+2}}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\tan 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan x)'}{(\tan 2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{2 \cdot \frac{1}{\cos^2 2x}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

所以由比值审敛法知, 级数收敛。

定理 4 (根值审敛法, 柯西判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数, 如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$$

则

1. 若 $\rho \in [0, 1)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;
2. 若 $\rho \in (1, +\infty]$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 (并且此时 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty \neq 0$);
3. 若 $\rho = 1$, 则此法失效, 级数可能收敛也可能发散。

定理 4 (根值审敛法, 柯西判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数, 如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$$

则

1. 若 $\rho \in [0, 1)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;
2. 若 $\rho \in (1, +\infty]$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 (并且此时 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty \neq 0$);
3. 若 $\rho = 1$, 则此法失效, 级数可能收敛也可能发散。

大致解释

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho \Rightarrow u_n \approx \rho^n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 与 } \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \text{ 同敛散} \\ \Rightarrow \begin{cases} \text{收敛} & \rho < 1 \\ \text{发散} & \rho > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

例 判断级数 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$ 的敛散性

例 判断级数 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$ 的敛散性

解 (1) 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} =$$

例 判断级数 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$ 的敛散性

解 (1) 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} =$$

例 判断级数 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$ 的敛散性

解 (1) 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$$

例 判断级数 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$ 的敛散性

解 (1) 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$$

所以由根值审敛法知，级数收敛。

例 判断级数 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$ 的敛散性

解 (1) 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$$

所以由根值审敛法知，级数收敛。

(2) 因为

例 判断级数 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$ 的敛散性

解 (1) 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$$

所以由根值审敛法知, 级数收敛。

(2) 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}} =$$

例 判断级数 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$ 的敛散性

解 (1) 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$$

所以由根值审敛法知, 级数收敛。

(2) 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2-\frac{1}{n}}$$

例 判断级数 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$ 的敛散性

解 (1) 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$$

所以由根值审敛法知, 级数收敛。

(2) 因为

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2-\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3-\frac{1}{n}}\right)^{2-\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

例 判断级数 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$ 的敛散性

解 (1) 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$$

所以由根值审敛法知, 级数收敛。

(2) 因为

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2-\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3-\frac{1}{n}}\right)^{2-\frac{1}{n}} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

例 判断级数 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$ 的敛散性

解 (1) 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$$

所以由根值审敛法知, 级数收敛。

(2) 因为

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2-\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3-\frac{1}{n}}\right)^{2-\frac{1}{n}} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

所以由比值审敛法知, 级数收敛。

We are here now...

1. 正项级数及其审敛法

2. 交错级数及其审敛法

3. 绝对收敛与条件收敛

交错级数 是指各项是正负交错的级数。

交错级数 是指各项是正负交错的级数。即

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$$

$$-u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$$

其中 u_1, u_2, \cdots 都是正数 ($u_n > 0$)

交错级数 是指各项是正负交错的级数。即

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$$

$$-u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$$

其中 u_1, u_2, \cdots 都是正数 ($u_n > 0$)

例 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$

交错级数 是指各项是正负交错的级数。即

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$$

$$-u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$$

其中 u_1, u_2, \cdots 都是正数 ($u_n > 0$)

例 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$

莱布尼茨定理 若交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 满足:

1. $u_n \geq u_{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \cdots$);
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$,

则级数收敛

交错级数 是指各项是正负交错的级数。即

$$\begin{aligned} u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n \\ -u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \cdots &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n \end{aligned}$$

其中 u_1, u_2, \cdots 都是正数 ($u_n > 0$)

例 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$

莱布尼茨定理 若交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 满足:

1. $u_n \geq u_{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \cdots$);
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$,

则级数收敛, 且其和 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n \leq u_1$, 余项 r_n 成立 $|r_n| \leq u_{n+1}$

证明

目标一：证明部分和 $\{s_n\}$ 收敛。

证明

目标一：证明部分和 $\{s_n\}$ 收敛。

步骤：1. $\{s_{2n}\}$ 收敛；2. $\{s_{2n+1}\}$ 收敛，且 $\lim s_{2n+2} = \lim s_{2n+1}$

证明

目标一：证明部分和 $\{s_n\}$ 收敛。

步骤：1. $\{s_{2n}\}$ 收敛；2. $\{s_{2n+1}\}$ 收敛，且 $\lim s_{2n+2} = \lim s_{2n+1}$

1. 证明 $\{s_{2n}\}$ 收敛。这是因为：

1.1 $\{s_{2n}\}$ 是单调递增：

1.2 $\{s_{2n}\}$ 是有上界：

证明

目标一：证明部分和 $\{s_n\}$ 收敛。

步骤：1. $\{s_{2n}\}$ 收敛；2. $\{s_{2n+1}\}$ 收敛，且 $\lim s_{2n+2} = \lim s_{2n+1}$

1. 证明 $\{s_{2n}\}$ 收敛。这是因为：

1.1 $\{s_{2n}\}$ 是单调递增：

$$s_{2n+2}$$

$$s_{2n}$$

1.2 $\{s_{2n}\}$ 是有上界：

证明

目标一：证明部分和 $\{s_n\}$ 收敛。

步骤：1. $\{s_{2n}\}$ 收敛；2. $\{s_{2n+1}\}$ 收敛，且 $\lim s_{2n+2} = \lim s_{2n+1}$

1. 证明 $\{s_{2n}\}$ 收敛。这是因为：

1.1 $\{s_{2n}\}$ 是单调递增：

$$s_{2n+2} = u_1 - u_2 + \cdots + u_{2n-1} - u_{2n} + u_{2n+1} - u_{2n+2} \\ s_{2n}$$

1.2 $\{s_{2n}\}$ 是有上界：

证明

目标一：证明部分和 $\{s_n\}$ 收敛。

步骤：1. $\{s_{2n}\}$ 收敛；2. $\{s_{2n+1}\}$ 收敛，且 $\lim s_{2n+2} = \lim s_{2n+1}$

1. 证明 $\{s_{2n}\}$ 收敛。这是因为：

1.1 $\{s_{2n}\}$ 是单调递增：

$$s_{2n+2} = u_1 - u_2 + \cdots + u_{2n-1} - u_{2n} + u_{2n+1} - u_{2n+2}$$

$$u_1 - u_2 + \cdots + u_{2n-1} - u_{2n} = s_{2n}$$

1.2 $\{s_{2n}\}$ 是有上界：

证明

目标一：证明部分和 $\{s_n\}$ 收敛。

步骤：1. $\{s_{2n}\}$ 收敛；2. $\{s_{2n+1}\}$ 收敛，且 $\lim s_{2n+2} = \lim s_{2n+1}$

1. 证明 $\{s_{2n}\}$ 收敛。这是因为：

1.1 $\{s_{2n}\}$ 是单调递增：

$$\begin{aligned} s_{2n+2} &= u_1 - u_2 + \cdots + u_{2n-1} - u_{2n} + u_{2n+1} - u_{2n+2} \\ &\geq u_1 - u_2 + \cdots + u_{2n-1} - u_{2n} = s_{2n} \end{aligned}$$

1.2 $\{s_{2n}\}$ 是有上界：

证明

目标一：证明部分和 $\{s_n\}$ 收敛。

步骤：1. $\{s_{2n}\}$ 收敛；2. $\{s_{2n+1}\}$ 收敛，且 $\lim s_{2n+2} = \lim s_{2n+1}$

1. 证明 $\{s_{2n}\}$ 收敛。这是因为：

1.1 $\{s_{2n}\}$ 是单调递增：

$$\begin{aligned} s_{2n+2} &= u_1 - u_2 + \cdots + u_{2n-1} - u_{2n} + u_{2n+1} - u_{2n+2} \\ &\geq u_1 - u_2 + \cdots + u_{2n-1} - u_{2n} = s_{2n} \end{aligned}$$

1.2 $\{s_{2n}\}$ 是有上界：

$$s_{2n}$$

$$u_1$$

证明

目标一：证明部分和 $\{s_n\}$ 收敛。

步骤：1. $\{s_{2n}\}$ 收敛；2. $\{s_{2n+1}\}$ 收敛，且 $\lim s_{2n+2} = \lim s_{2n+1}$

1. 证明 $\{s_{2n}\}$ 收敛。这是因为：

1.1 $\{s_{2n}\}$ 是单调递增：

$$\begin{aligned} s_{2n+2} &= u_1 - u_2 + \cdots + u_{2n-1} - u_{2n} + u_{2n+1} - u_{2n+2} \\ &\geq u_1 - u_2 + \cdots + u_{2n-1} - u_{2n} = s_{2n} \end{aligned}$$

1.2 $\{s_{2n}\}$ 是有上界：

$$s_{2n} = u_1 - u_2 + \cdots + u_{2n-1} - u_{2n}$$

u_1

证明

目标一：证明部分和 $\{s_n\}$ 收敛。

步骤：1. $\{s_{2n}\}$ 收敛；2. $\{s_{2n+1}\}$ 收敛，且 $\lim s_{2n+2} = \lim s_{2n+1}$

1. 证明 $\{s_{2n}\}$ 收敛。这是因为：

1.1 $\{s_{2n}\}$ 是单调递增：

$$\begin{aligned} s_{2n+2} &= u_1 - u_2 + \cdots + u_{2n-1} - u_{2n} + u_{2n+1} - u_{2n+2} \\ &\geq u_1 - u_2 + \cdots + u_{2n-1} - u_{2n} = s_{2n} \end{aligned}$$

1.2 $\{s_{2n}\}$ 是有上界：

$$\begin{aligned} s_{2n} &= u_1 - u_2 + \cdots + u_{2n-1} - u_{2n} \\ &= u_1 + (-u_2 + u_3) + \cdots + (-u_{2n-2} + u_{2n-1}) - u_{2n} \quad u_1 \end{aligned}$$

证明

目标一：证明部分和 $\{s_n\}$ 收敛。

步骤：1. $\{s_{2n}\}$ 收敛；2. $\{s_{2n+1}\}$ 收敛，且 $\lim s_{2n+2} = \lim s_{2n+1}$

1. 证明 $\{s_{2n}\}$ 收敛。这是因为：

1.1 $\{s_{2n}\}$ 是单调递增：

$$\begin{aligned} s_{2n+2} &= u_1 - u_2 + \cdots + u_{2n-1} - u_{2n} + u_{2n+1} - u_{2n+2} \\ &\geq u_1 - u_2 + \cdots + u_{2n-1} - u_{2n} = s_{2n} \end{aligned}$$

1.2 $\{s_{2n}\}$ 是有上界：

$$\begin{aligned} s_{2n} &= u_1 - u_2 + \cdots + u_{2n-1} - u_{2n} \\ &= u_1 + (-u_2 + u_3) + \cdots + (-u_{2n-2} + u_{2n-1}) - u_{2n} \leq u_1 \end{aligned}$$

证明

目标一：证明部分和 $\{s_n\}$ 收敛。

步骤：1. $\{s_{2n}\}$ 收敛；2. $\{s_{2n+1}\}$ 收敛，且 $\lim s_{2n+2} = \lim s_{2n+1}$

1. 证明 $\{s_{2n}\}$ 收敛。这是因为：

1.1 $\{s_{2n}\}$ 是单调递增：

$$\begin{aligned} s_{2n+2} &= u_1 - u_2 + \cdots + u_{2n-1} - u_{2n} + u_{2n+1} - u_{2n+2} \\ &\geq u_1 - u_2 + \cdots + u_{2n-1} - u_{2n} = s_{2n} \end{aligned}$$

1.2 $\{s_{2n}\}$ 是有上界：

$$\begin{aligned} s_{2n} &= u_1 - u_2 + \cdots + u_{2n-1} - u_{2n} \\ &= u_1 + (-u_2 + u_3) + \cdots + (-u_{2n-2} + u_{2n-1}) - u_{2n} \leq u_1 \end{aligned}$$

所以 $\lim s_{2n}$ 存在，且 $\lim s_{2n} \leq u_1$

目标一：证明部分和 $\{s_n\}$ 收敛。

步骤：1. $\{s_{2n}\}$ 收敛；2. $\{s_{2n+1}\}$ 收敛，且 $\lim s_{2n+1} = \lim s_{2n}$

2. 证明 $\{s_{2n+1}\}$ 收敛，且 $\lim s_{2n+1} = \lim s_{2n}$ 。

目标一：证明部分和 $\{s_n\}$ 收敛。

步骤：1. $\{s_{2n}\}$ 收敛；2. $\{s_{2n+1}\}$ 收敛，且 $\lim s_{2n+1} = \lim s_{2n}$

2. 证明 $\{s_{2n+1}\}$ 收敛，且 $\lim s_{2n+1} = \lim s_{2n}$ 。这是因为：

$$\lim s_{2n+1} = \lim(s_{2n} + u_{2n+1}) =$$

目标一：证明部分和 $\{s_n\}$ 收敛。

步骤：1. $\{s_{2n}\}$ 收敛；2. $\{s_{2n+1}\}$ 收敛，且 $\lim s_{2n+1} = \lim s_{2n}$

2. 证明 $\{s_{2n+1}\}$ 收敛，且 $\lim s_{2n+1} = \lim s_{2n}$ 。这是因为：

$$\lim s_{2n+1} = \lim(s_{2n} + u_{2n+1}) = \lim s_{2n} + \lim u_{2n+1} =$$

目标一：证明部分和 $\{s_n\}$ 收敛。

步骤：1. $\{s_{2n}\}$ 收敛；2. $\{s_{2n+1}\}$ 收敛，且 $\lim s_{2n+1} = \lim s_{2n}$

2. 证明 $\{s_{2n+1}\}$ 收敛，且 $\lim s_{2n+1} = \lim s_{2n}$ 。这是因为：

$$\lim s_{2n+1} = \lim(s_{2n} + u_{2n+1}) = \lim s_{2n} + \lim u_{2n+1} = \lim s_{2n}.$$

目标一：证明部分和 $\{s_n\}$ 收敛。

步骤：1. $\{s_{2n}\}$ 收敛；2. $\{s_{2n+1}\}$ 收敛，且 $\lim s_{2n+1} = \lim s_{2n}$

2. 证明 $\{s_{2n+1}\}$ 收敛，且 $\lim s_{2n+1} = \lim s_{2n}$ 。这是因为：

$$\lim s_{2n+1} = \lim(s_{2n} + u_{2n+1}) = \lim s_{2n} + \lim u_{2n+1} = \lim s_{2n}.$$

目标二：证明项 r_n 的绝对值 $|r_n|$ ，成立 $|r_n| \leq u_{n+1}$ 。

目标一：证明部分和 $\{s_n\}$ 收敛。

步骤：1. $\{s_{2n}\}$ 收敛；2. $\{s_{2n+1}\}$ 收敛，且 $\lim s_{2n+1} = \lim s_{2n}$

2. 证明 $\{s_{2n+1}\}$ 收敛，且 $\lim s_{2n+1} = \lim s_{2n}$ 。这是因为：

$$\lim s_{2n+1} = \lim(s_{2n} + u_{2n+1}) = \lim s_{2n} + \lim u_{2n+1} = \lim s_{2n}.$$

目标二：证明项 r_n 的绝对值 $|r_n|$ ，成立 $|r_n| \leq u_{n+1}$ 。这是：

$$\because r_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} (-1)^{i-1} u_i$$

目标一：证明部分和 $\{s_n\}$ 收敛。

步骤：1. $\{s_{2n}\}$ 收敛；2. $\{s_{2n+1}\}$ 收敛，且 $\lim s_{2n+1} = \lim s_{2n}$

2. 证明 $\{s_{2n+1}\}$ 收敛，且 $\lim s_{2n+1} = \lim s_{2n}$ 。这是因为：

$$\lim s_{2n+1} = \lim(s_{2n} + u_{2n+1}) = \lim s_{2n} + \lim u_{2n+1} = \lim s_{2n}.$$

目标二：证明项 r_n 的绝对值 $|r_n|$ ，成立 $|r_n| \leq u_{n+1}$ 。这是：

$$\begin{aligned}\because r_n &= \sum_{i=n+1}^{\infty} (-1)^{i-1} u_i \\ &= (-1)^{n-1} (u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - u_{n+4} + \cdots)\end{aligned}$$

目标一：证明部分和 $\{s_n\}$ 收敛。

步骤：1. $\{s_{2n}\}$ 收敛；2. $\{s_{2n+1}\}$ 收敛，且 $\lim s_{2n+1} = \lim s_{2n}$

2. 证明 $\{s_{2n+1}\}$ 收敛，且 $\lim s_{2n+1} = \lim s_{2n}$ 。这是因为：

$$\lim s_{2n+1} = \lim(s_{2n} + u_{2n+1}) = \lim s_{2n} + \lim u_{2n+1} = \lim s_{2n}.$$

目标二：证明项 r_n 的绝对值 $|r_n|$ ，成立 $|r_n| \leq u_{n+1}$ 。这是：

$$\begin{aligned} \because r_n &= \sum_{i=n+1}^{\infty} (-1)^{i-1} u_i \\ &= (-1)^{n-1} \underbrace{(u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - u_{n+4} + \cdots)}_{\geq 0} \end{aligned}$$

目标一：证明部分和 $\{s_n\}$ 收敛。

步骤：1. $\{s_{2n}\}$ 收敛；2. $\{s_{2n+1}\}$ 收敛，且 $\lim s_{2n+1} = \lim s_{2n}$

2. 证明 $\{s_{2n+1}\}$ 收敛，且 $\lim s_{2n+1} = \lim s_{2n}$ 。这是因为：

$$\lim s_{2n+1} = \lim(s_{2n} + u_{2n+1}) = \lim s_{2n} + \lim u_{2n+1} = \lim s_{2n}.$$

目标二：证明项 r_n 的绝对值 $|r_n|$ ，成立 $|r_n| \leq u_{n+1}$ 。这是：

$$\begin{aligned}\because r_n &= \sum_{i=n+1}^{\infty} (-1)^{i-1} u_i \\ &= (-1)^{n-1} \underbrace{(u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - u_{n+4} + \cdots)}_{\geq 0}\end{aligned}$$

$$\therefore |r_n| = u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - u_{n+4} + u_{n+5} \cdots$$

目标一：证明部分和 $\{s_n\}$ 收敛。

步骤：1. $\{s_{2n}\}$ 收敛；2. $\{s_{2n+1}\}$ 收敛，且 $\lim s_{2n+1} = \lim s_{2n}$

2. 证明 $\{s_{2n+1}\}$ 收敛，且 $\lim s_{2n+1} = \lim s_{2n}$ 。这是因为：

$$\lim s_{2n+1} = \lim(s_{2n} + u_{2n+1}) = \lim s_{2n} + \lim u_{2n+1} = \lim s_{2n}.$$

目标二：证明项 r_n 的绝对值 $|r_n|$ ，成立 $|r_n| \leq u_{n+1}$ 。这是：

$$\begin{aligned}\because r_n &= \sum_{i=n+1}^{\infty} (-1)^{i-1} u_i \\ &= (-1)^{n-1} \underbrace{(u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - u_{n+4} + \cdots)}_{\geq 0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore |r_n| &= u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - u_{n+4} + u_{n+5} \cdots \\ &= u_{n+1} + (-u_{n+2} + u_{n+3}) + (-u_{n+4} + u_{n+5}) + \cdots\end{aligned}$$

目标一：证明部分和 $\{s_n\}$ 收敛。

步骤：1. $\{s_{2n}\}$ 收敛；2. $\{s_{2n+1}\}$ 收敛，且 $\lim s_{2n+1} = \lim s_{2n}$

2. 证明 $\{s_{2n+1}\}$ 收敛，且 $\lim s_{2n+1} = \lim s_{2n}$ 。这是因为：

$$\lim s_{2n+1} = \lim(s_{2n} + u_{2n+1}) = \lim s_{2n} + \lim u_{2n+1} = \lim s_{2n}.$$

目标二：证明项 r_n 的绝对值 $|r_n|$ ，成立 $|r_n| \leq u_{n+1}$ 。这是：

$$\begin{aligned}\because r_n &= \sum_{i=n+1}^{\infty} (-1)^{i-1} u_i \\ &= (-1)^{n-1} \underbrace{(u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - u_{n+4} + \cdots)}_{\geq 0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore |r_n| &= u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - u_{n+4} + u_{n+5} \cdots \\ &= u_{n+1} + (-u_{n+2} + u_{n+3}) + (-u_{n+4} + u_{n+5}) + \cdots \\ &\leq u_{n+1}\end{aligned}$$

例 判断下列级数敛散性

$$(1) \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \cdots$$

$$(2) \quad \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 5} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{\ln(n+1)} + \cdots$$

$$(3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n!}{2^{n^2}}$$

例 判断下列级数敛散性

$$(1) \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \cdots$$

$$(2) \quad \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 5} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{\ln(n+1)} + \cdots$$

$$(3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n!}{2^{n^2}}$$

解

(1) 这是交错级数, $u_n = \frac{1}{n}$, 单调递减, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

例 判断下列级数敛散性

$$(1) \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \cdots$$

$$(2) \quad \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 5} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{\ln(n+1)} + \cdots$$

$$(3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n!}{2^{n^2}}$$

解

(1) 这是交错级数, $u_n = \frac{1}{n}$, 单调递减, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 所以收敛

例 判断下列级数敛散性

$$(1) \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \cdots$$

$$(2) \quad \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 5} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{\ln(n+1)} + \cdots$$

$$(3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n!}{2^{n^2}}$$

解

(1) 这是交错级数, $u_n = \frac{1}{n}$, 单调递减, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 所以收敛

(2) 这是交错级数, $u_n = \frac{1}{\ln(n+1)}$, 单调递减, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

例 判断下列级数敛散性

$$(1) \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \cdots$$

$$(2) \quad \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 5} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{\ln(n+1)} + \cdots$$

$$(3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n!}{2^{n^2}}$$

解

(1) 这是交错级数, $u_n = \frac{1}{n}$, 单调递减, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 所以收敛

(2) 这是交错级数, $u_n = \frac{1}{\ln(n+1)}$, 单调递减, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 所以收敛

例 判断下列级数敛散性

$$(1) \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \cdots$$

$$(2) \quad \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 5} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{\ln(n+1)} + \cdots$$

$$(3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n!}{2^{n^2}}$$

解

(1) 这是交错级数, $u_n = \frac{1}{n}$, 单调递减, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 所以收敛

(2) 这是交错级数, $u_n = \frac{1}{\ln(n+1)}$, 单调递减, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 所以收敛

(3) 这是交错级数, $u_n = \frac{n!}{2^{n^2}}$, 单调递减 (?), $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ (?)

例 判断 (3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n!}{2^{n^2}}$ 级数敛散性

解 (续) (3) 这是交错级数, $u_n = \frac{n!}{2^{n^2}}$

1. 证明 u_n 是单调递减:

2. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$:

例 判断 (3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n!}{2^{n^2}}$ 级数敛散性

解 (续) (3) 这是交错级数, $u_n = \frac{n!}{2^{n^2}}$

1. 证明 u_n 是单调递减: 往证 $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

2. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$:

例 判断 (3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n!}{2^{n^2}}$ 级数敛散性

解 (续) (3) 这是交错级数, $u_n = \frac{n!}{2^{n^2}}$

1. 证明 u_n 是单调递减: 往证 $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, 这是

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{2^{(n+1)^2}}}{\frac{n!}{2^{n^2}}} =$$

2. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$:

例 判断 (3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n!}{2^{n^2}}$ 级数敛散性

解 (续) (3) 这是交错级数, $u_n = \frac{n!}{2^{n^2}}$

1. 证明 u_n 是单调递减: 往证 $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, 这是

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{2^{(n+1)^2}}}{\frac{n!}{2^{n^2}}} = \frac{(n+1)}{2^{2n+1}}$$

2. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$:

例 判断 (3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n!}{2^{n^2}}$ 级数敛散性

解 (续) (3) 这是交错级数, $u_n = \frac{n!}{2^{n^2}}$

1. 证明 u_n 是单调递减: 往证 $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, 这是

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{2^{(n+1)^2}}}{\frac{n!}{2^{n^2}}} = \frac{(n+1)}{2^{2n+1}} < \frac{2^{n+1}}{2^{2n+1}}$$

2. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$:

例 判断 (3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n!}{2^{n^2}}$ 级数敛散性

解 (续) (3) 这是交错级数, $u_n = \frac{n!}{2^{n^2}}$

1. 证明 u_n 是单调递减: 往证 $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, 这是

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{2^{(n+1)^2}}}{\frac{n!}{2^{n^2}}} = \frac{(n+1)}{2^{2n+1}} < \frac{2^{n+1}}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2}$$

2. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$:

例 判断 (3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n!}{2^{n^2}}$ 级数敛散性

解 (续) (3) 这是交错级数, $u_n = \frac{n!}{2^{n^2}}$

1. 证明 u_n 是单调递减: 往证 $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, 这是

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{2^{(n+1)^2}}}{\frac{n!}{2^{n^2}}} = \frac{(n+1)}{2^{2n+1}} < \frac{2^{n+1}}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2}$$

2. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$: 反复利用上述结论 $u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$,

例 判断 (3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n!}{2^{n^2}}$ 级数敛散性

解 (续) (3) 这是交错级数, $u_n = \frac{n!}{2^{n^2}}$

1. 证明 u_n 是单调递减: 往证 $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, 这是

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{2^{(n+1)^2}}}{\frac{n!}{2^{n^2}}} = \frac{(n+1)}{2^{2n+1}} < \frac{2^{n+1}}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2}$$

2. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$: 反复利用上述结论 $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$, 可得

$$u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 u_{n-1} \leq \cdots \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n u_1$$

例 判断 (3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n!}{2^{n^2}}$ 级数敛散性

解 (续) (3) 这是交错级数, $u_n = \frac{n!}{2^{n^2}}$

1. 证明 u_n 是单调递减: 往证 $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, 这是

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{2^{(n+1)^2}}}{\frac{n!}{2^{n^2}}} = \frac{(n+1)}{2^{2n+1}} < \frac{2^{n+1}}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2}$$

2. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$: 反复利用上述结论 $u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$, 可得

$$u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 u_{n-1} \leq \cdots \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n u_1$$

可见 $0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u_1 = 0$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ 。

例 判断 (3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n!}{2^{n^2}}$ 级数敛散性

解 (续) (3) 这是交错级数, $u_n = \frac{n!}{2^{n^2}}$

1. 证明 u_n 是单调递减: 往证 $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, 这是

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{2^{(n+1)^2}}}{\frac{n!}{2^{n^2}}} = \frac{(n+1)}{2^{2n+1}} < \frac{2^{n+1}}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2}$$

2. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$: 反复利用上述结论 $u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$, 可得

$$u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 u_{n-1} \leq \cdots \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n u_1$$

可见 $0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u_1 = 0$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ 。

3. 所以根据莱布尼茨判别法, 该交错级数收敛。

We are here now...

1. 正项级数及其审敛法

2. 交错级数及其审敛法

3. 绝对收敛与条件收敛

- 对一般的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

如果正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n| + \cdots$$

收敛，则称原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是绝对收敛。

- 对一般的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

如果正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n| + \cdots$$

收敛, 则称原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是绝对收敛。

定理 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 级数收敛。

定理 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

定理 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

证明

1.

2. 注意到

$$u_n = (u_n + |u_n|) - |u_n|$$

定理 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

证明

1.

2. 注意到

$$u_n = (u_n + |u_n|) - |u_n| =: v_n - |u_n|,$$

定理 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

证明

1.

2. 注意到

$$u_n = (u_n + |u_n|) - |u_n| =: v_n - |u_n|,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (v_n - |u_n|)$$

定理 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

证明

1.

2. 注意到

$$u_n = (u_n + |u_n|) - |u_n| =: v_n - |u_n|,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (v_n - |u_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n - \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|.$$

定理 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

证明

1. $v_n \triangleq u_n + |u_n| \Rightarrow 0 \leq v_n \leq 2|u_n|$

2. 注意到

$$u_n = (u_n + |u_n|) - |u_n| =: v_n - |u_n|,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (v_n - |u_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n - \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|.$$

定理 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

证明

1. $v_n \triangleq u_n + |u_n| \Rightarrow 0 \leq v_n \leq 2|u_n| \xrightarrow{\text{比较审敛法}} \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{收敛}$

2. 注意到

$$u_n = (u_n + |u_n|) - |u_n| =: v_n - |u_n|,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (v_n - |u_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n - \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|.$$

定理 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

证明

1. $v_n \triangleq u_n + |u_n| \Rightarrow 0 \leq v_n \leq 2|u_n| \xrightarrow{\text{比较审敛法}} \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{收敛}$

2. 注意到

$$u_n = (u_n + |u_n|) - |u_n| =: v_n - |u_n|,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (v_n - |u_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n - \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|.$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

注 但反过来, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 是不能断定 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性。

注 但反过来, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 是不能断定 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性。

- 例 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散的例子:
- 例 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的例子:

注 但反过来, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 是不能断定 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性。

- 例 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散的例子:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

- 例 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的例子:

注 但反过来, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 是不能断定 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性。

- 例 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散的例子:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

- 例 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的例子:

注 但反过来, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 是不能断定 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性。

- 例 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散的例子:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

- 例 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的例子:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \right|$$

注 但反过来, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 是不能断定 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性。

- 例 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散的例子:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

- 例 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的例子:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \right|$$

注 但反过来, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 是不能断定 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性。

- 例 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散的例子:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

- 例 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的例子:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \right| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

注 但反过来, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 是不能断定 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性。

- 例 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散的例子:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

- 例 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的例子:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \right| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \text{ (发散)}$$

注 但反过来, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 是不能断定 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性。

- 例 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散的例子:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

- 例 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的例子:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \right| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \text{ (发散)}$$

注 但反过来, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 是不能断定 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性。

- 例 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散的例子:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

- 例 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的例子:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \quad (\text{收敛})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \right| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \quad (\text{发散})$$

注 但反过来, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 是不能断定 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性。

- 例 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散的例子:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

- 例 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的例子:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \quad (\text{收敛})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \right| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \quad (\text{发散})$$

- 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛。

定理 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \rho \quad \text{或} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \rho$$

则成立:

1. 若 $\rho \in [0, 1)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛;
2. 若 $\rho \in (1, +\infty]$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 (并且此时 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$);
3. 若 $\rho = 1$, 则此法失效, 级数可能收敛也可能发散。

定理 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \rho \quad \text{或} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \rho$$

则成立:

1. 若 $\rho \in [0, 1)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛;
2. 若 $\rho \in (1, +\infty]$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 (并且此时 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$);
3. 若 $\rho = 1$, 则此法失效, 级数可能收敛也可能发散。

证明 对 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 应用比值审敛法或根植收敛:

定理 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \rho \quad \text{或} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \rho$$

则成立:

1. 若 $\rho \in [0, 1)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛;
2. 若 $\rho \in (1, +\infty]$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 (并且此时 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$);
3. 若 $\rho = 1$, 则此法失效, 级数可能收敛也可能发散。

证明 对 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 应用比值审敛法或根植收敛:

1. $\rho < 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛

定理 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \rho \quad \text{或} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \rho$$

则成立:

1. 若 $\rho \in [0, 1)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛;
2. 若 $\rho \in (1, +\infty]$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 (并且此时 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$);
3. 若 $\rho = 1$, 则此法失效, 级数可能收敛也可能发散。

证明 对 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 应用比值审敛法或根植收敛:

1. $\rho < 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛。

定理 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \rho \quad \text{或} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \rho$$

则成立:

1. 若 $\rho \in [0, 1)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛;
2. 若 $\rho \in (1, +\infty]$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 (并且此时 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$);
3. 若 $\rho = 1$, 则此法失效, 级数可能收敛也可能发散。

证明 对 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 应用比值审敛法或根植收敛:

1. $\rho < 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛。
2. $\rho > 1$ 是, $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| \neq 0$

定理 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \rho \quad \text{或} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \rho$$

则成立:

1. 若 $\rho \in [0, 1)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛;
2. 若 $\rho \in (1, +\infty]$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 (并且此时 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$);
3. 若 $\rho = 1$, 则此法失效, 级数可能收敛也可能发散。

证明 对 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 应用比值审敛法或根植收敛:

1. $\rho < 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛。
2. $\rho > 1$ 是, $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| \neq 0$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。