

第 12 周作业解答

练习 1. 设 Γ 是空间中一定向闭曲线, 并且正好是某可定向曲面 Σ 的边界. 计算 $\int_{\Gamma} ye^z dx + xe^z dy + xye^z dz$.

解 设向量场 $F = (ye^z, xe^z, xye^z)$. 设 \vec{n} 是 Σ 上的单位向量场, 与 Γ 的定向符合右手规则. 注意到

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ye^z & xe^z & xye^z \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xe^z & xye^z \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ye^z & xye^z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ ye^z & xe^z \end{vmatrix} \right) = (0, 0, 0)$$

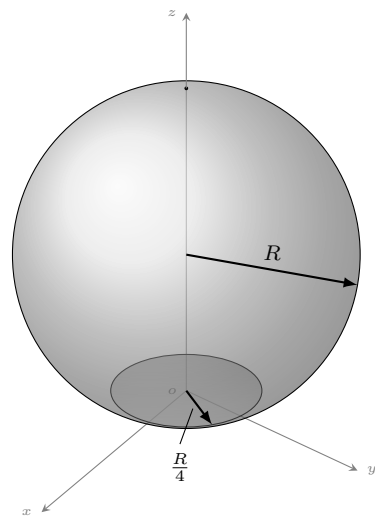
所以利用斯托克斯公式可得:

$$\int_{\Gamma} ye^z dx + xe^z dy + xye^z dz = \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot \vec{n} dS = 0.$$

练习 2. 热气球的表面是半径为 R 球面的一部分, 与 xoy 坐标面的交线是半径为 $\frac{R}{4}$ 的圆周, 如图. 假设热气的速度向量场为

$$V = \operatorname{rot} (-y, x, 0).$$

问单位时间内有多少热气通过气球表面?



解 热气球表面 Σ 选取单位外法向量 \vec{n} ; 边界圆周 Γ 是 $\begin{cases} x^2 + y^2 = (R/4)^2 \\ z = 0 \end{cases}$, 选取逆时针方向, 相应的参数方程是: $x = \frac{R}{4} \cos \theta, y = \frac{R}{4} \sin \theta, \theta: 0 \rightarrow 2\pi$. 应用斯托克斯公式, 得:

$$\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} (-y, x, 0) \cdot \vec{n} dS = \int_{\Gamma} -y dx + x dy + 0 dz = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{R}{4} \sin \theta \cdot \left(\frac{R}{4} \cos \theta \right)' + \frac{R}{4} \cos \theta \cdot \left(\frac{R}{4} \sin \theta \right)' \right] d\theta = \frac{1}{8} \pi R^2.$$

单位时间有 $\frac{1}{8} \pi R^2$ 单位热气通过气球表面。

练习 3. 讨论旋度 $\operatorname{rot} F$ 的物理意义。

解.

练习 4. 判断下列级数的敛散性, 并说明原因

1. $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3n} + \cdots$
2. $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + (\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}) + (\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}) + \cdots + (\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}) + \cdots$
3. $\cos(\frac{\pi}{6}) + \cos(\frac{2\pi}{6}) + \cdots + \cos(\frac{n\pi}{6}) + \cdots$

解 1. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n}$ 是发散。可以利用“比较审敛法的极限形式”, 与发散的调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 比较。因为 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{3n}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{3}$, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n}$ 是发散。

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n})$ 是收敛, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}) = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$ 。这是因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$ 。

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\frac{n\pi}{6})$ 是发散。这是 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(\frac{n\pi}{6}) \neq 0$ (事实上 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(\frac{n\pi}{6})$ 不存在, 这里不证明): 对任意的 $N > 0$, 可取 $n = 12N > N$, 则

$$\cos\left(\frac{(12N)\pi}{6}\right) = \cos(2N\pi) = 1$$

这就说明了 $\{\cos(\frac{n\pi}{6})\}$ 不可能趋于 0。

练习 5. 判断下列级数的敛散性:

1. $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{2a+b} + \frac{1}{3a+b} + \cdots + \frac{1}{na+b} + \cdots$ (其中 $a > 0, b > 0$)
2. $\frac{1^4}{1!} + \frac{2^4}{2!} + \frac{3^4}{3!} + \cdots + \frac{n^4}{n!} + \cdots$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}$

解 (1) 利用比较审敛法的极限形式, 与发散的调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 作比较: 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{na+b}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{na+b} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a + \frac{b}{n}} = \frac{1}{a} < +\infty$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{na+b}$ 发散。

(2) 利用比值审敛法: 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^4}{(n+1)!}}{\frac{n^4}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^4 \cdot \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n!}$ 收敛。

(3) 利用比值审敛法: 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} \sin \frac{\pi}{3^{n+1}}}{2^n \sin \frac{\pi}{3^n}} \stackrel{x = \frac{\pi}{3^{n+1}}}{=} 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 3x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(\sin 3x)'} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{3 \cos 3x} = \frac{2}{3} < 1$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}$ 收敛。

练习 6. 判断下列级数是否收敛? 若然, 是绝对收敛还是条件收敛?

1. $\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 5} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{\ln(n+1)} + \cdots$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin \frac{\pi}{n+1}}{\pi^{n+1}}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n+1}{n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$

解 (1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\ln(n+1)}$ 是交错级数, $u_n = \frac{1}{\ln(n+1)}$ 是单调减, 且趋于 0, 所以由莱布尼茨定理知交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\ln(n+1)}$ 收敛。

对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$, 因为 $\frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{n}$ (利用不等式 $\ln(1+x) < x$, 其中 $x > 0$), 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 所以有比较审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$ 发散。

结论: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\ln(n+1)}$ 是条件收敛。

(2) 对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin \frac{\pi}{n+1}}{\pi^{n+1}} \right|$, 因为 $\left| \frac{\sin \frac{\pi}{n+1}}{\pi^{n+1}} \right| < \frac{1}{\pi^n}$, 而等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^n}$ 收敛, 所以有比较审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin \frac{\pi}{n+1}}{\pi^{n+1}} \right|$ 收敛。

结论: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin \frac{\pi}{n+1}}{\pi^{n+1}}$ 是绝对收敛。

(3) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n+1}{n}$ 是交错级数, $u_n = \ln \frac{n+1}{n} = \ln(1 + \frac{1}{n})$ 是单调减, 且趋于 0, 所以由莱布尼茨定理知交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n+1}{n}$ 收敛。

对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}$, 因为其部分和

$$s_n = \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \cdots + \ln \frac{n+1}{n} = \ln \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \cdots \cdot \frac{n+1}{n} \right) = \ln(n+1) \rightarrow +\infty$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}$ 发散。

结论: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n+1}{n}$ 是条件收敛。

(4) 对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$, 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+2)!}{(n+1)^{n+2}}}{\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1}$$

$$\stackrel{x=n+1}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \ln(1 - \frac{1}{x})} \stackrel{t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(1-t)}{t}} \stackrel{\text{洛必达法则}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{1-t}}{1} = e^{-1} < 1$$

所以有比值审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$ 收敛。

结论: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$ 是绝对收敛。

练习 7. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (不一定是正项级数) 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n} = 1$ 。问级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是否也收敛? 说明理由。

解不一定收敛。例子

$$u_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad v_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散。

下面证明 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散。反证法, 假设 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛。注意到 $v_n - u_n = \frac{1}{n}$, 则由此推出

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} [v_n - u_n] = \sum_{n=1}^{\infty} v_n - \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

收敛。但 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 显然是发散。矛盾。所以 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散。