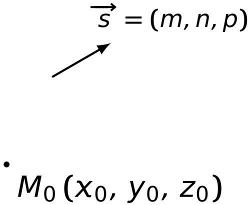
第 8 章 c：空间直线及其方程

数学系　梁卓滨

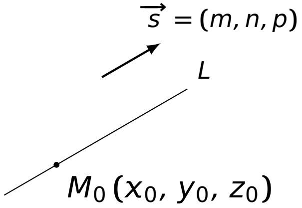
2019-2020 学年 II

Outline

空间直线的方程

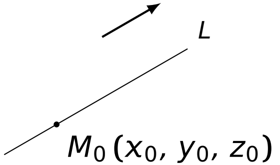


空间直线的方程



空间直线的方程

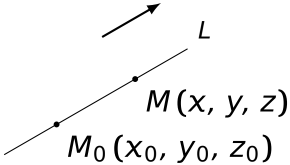
方向向量 $\vec{s} = (m, n, p)$



空间直线的方程

方向向量 $\vec{s} = (m, n, p)$

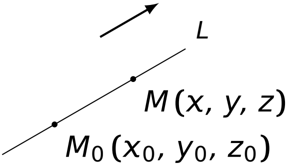
$M \in L$



空间直线的方程

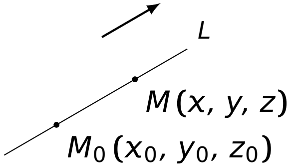
方向向量 $\vec{s} = (m, n, p)$

$$M \in L \iff \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$$



空间直线的方程

方向向量 $\vec{s} = (m, n, p)$

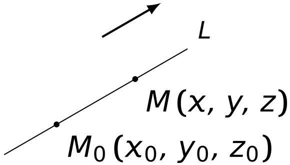


$$M \in L \iff \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$$

$$\iff \exists t \in \mathbb{R}, \text{使得 } \overrightarrow{M_0M} = t\,\vec{s}$$

空间直线的方程

方向向量 $\overrightarrow{s} = (m, n, p)$



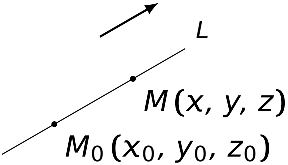
$$M \in L \iff \overrightarrow{M_0M} \parallel \overrightarrow{s}$$

$$\iff \exists t \in \mathbb{R},\ \text{使得}\ \overrightarrow{M_0M} = t\,\overrightarrow{s}$$

$$\iff (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(m, n, p)$$

空间直线的方程

方向向量 $\overrightarrow{s} = (m, n, p)$



$$M \in L \iff \overrightarrow{M_0M} \parallel \overrightarrow{s}$$

$$\iff \exists t \in \mathbb{R}, \text{使得 } \overrightarrow{M_0M} = t\,\overrightarrow{s}$$

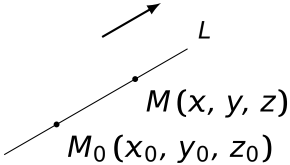
$$\iff (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(m, n, p)$$

所以

- $$\begin{cases} x - x_0 = tm \\ y - y_0 = tn \\ z - z_0 = tp \end{cases}$$

空间直线的方程

方向向量 $\vec{s}=(m,n,p)$



$$M\in L \iff \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$$

$$\iff \exists t\in\mathbb{R},\text{使得 } \overrightarrow{M_0M}=t\,\vec{s}$$

$$\iff (x-x_0,y-y_0,z-z_0)=t(m,n,p)$$

所以

- $\begin{cases} x-x_0=tm \\ y-y_0=tn \\ z-z_0=tp \end{cases}$，即：$\begin{cases} x=x_0+tm \\ y=y_0+tn \\ z=z_0+tp \end{cases}$

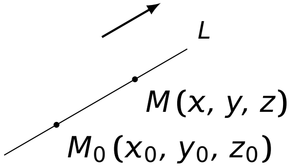
空间直线的方程

方向向量 $\vec{s} = (m, n, p)$

$$M \in L \iff \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$$

$$\iff \exists t \in \mathbb{R}, \text{使得 } \overrightarrow{M_0M} = t\,\vec{s}$$

$$\iff (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(m, n, p)$$

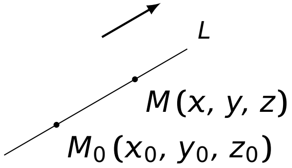


所以

- $\begin{cases} x - x_0 = tm \\ y - y_0 = tn \\ z - z_0 = tp \end{cases}$，即：$\begin{cases} x = x_0 + tm \\ y = y_0 + tn \\ z = z_0 + tp \end{cases}$ **参数方程**

空间直线的方程

方向向量 $\vec{s} = (m, n, p)$



$$M \in L \iff \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$$

$$\iff \exists t \in \mathbb{R},\ \text{使得}\ \overrightarrow{M_0M} = t\,\vec{s}$$

$$\iff (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(m, n, p)$$

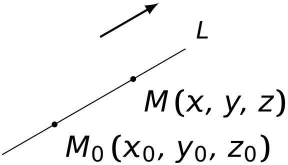
所以

- $\begin{cases} x - x_0 = tm \\ y - y_0 = tn \\ z - z_0 = tp \end{cases}$，即：$\begin{cases} x = x_0 + tm \\ y = y_0 + tn \\ z = z_0 + tp \end{cases}$ **参数方程**

- $\dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p}$

空间直线的方程

方向向量 $\vec{s} = (m, n, p)$



$$M \in L \iff \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$$

$$\iff \exists t \in \mathbb{R}, \text{使得 } \overrightarrow{M_0M} = t\,\vec{s}$$

$$\iff (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(m, n, p)$$

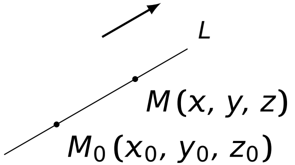
所以

- $\begin{cases} x - x_0 = tm \\ y - y_0 = tn \\ z - z_0 = tp \end{cases}$，即：$\begin{cases} x = x_0 + tm \\ y = y_0 + tn \\ z = z_0 + tp \end{cases}$ **参数方程**

- $\dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p}$ **对称式方程**

空间直线的方程

方向向量 $\vec{s} = (m, n, p)$



$$M \in L \iff \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$$

$$\iff \exists t \in \mathbb{R}, \text{使得 } \overrightarrow{M_0M} = t\,\vec{s}$$

$$\iff (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(m, n, p)$$

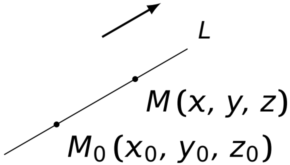
所以

- $\begin{cases} x - x_0 = tm \\ y - y_0 = tn \\ z - z_0 = tp \end{cases}$，即：$\begin{cases} x = x_0 + tm \\ y = y_0 + tn \\ z = z_0 + tp \end{cases}$ **参数方程**
- $\dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p}$ **对称式方程**

注 1 若 $m = 0$，则 $\frac{x-x_0}{0} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ 表示：

空间直线的方程

方向向量 $\vec{s}=(m,n,p)$



$$M\in L \iff \overrightarrow{M_0M}\parallel\vec{s}$$

$$\iff \exists t\in\mathbb{R},\ \text{使得}\ \overrightarrow{M_0M}=t\,\vec{s}$$

$$\iff (x-x_0,y-y_0,z-z_0)=t(m,n,p)$$

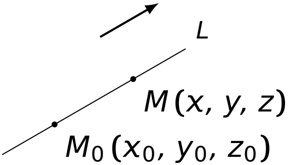
所以

- $\begin{cases} x-x_0=tm \\ y-y_0=tn \\ z-z_0=tp \end{cases}$，即：$\begin{cases} x=x_0+tm \\ y=y_0+tn \\ z=z_0+tp \end{cases}$ **参数方程**
- $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ **对称式方程**

注 1 若 $m=0$，则 $\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ 表示：$x=x_0$

空间直线的方程

方向向量 $\vec{s} = (m, n, p)$



$$M \in L \iff \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$$

$$\iff \exists t \in \mathbb{R}, \text{使得 } \overrightarrow{M_0M} = t\vec{s}$$

$$\iff (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(m, n, p)$$

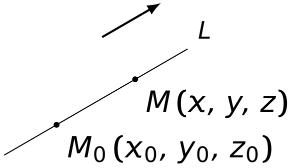
所以

- $\begin{cases} x - x_0 = tm \\ y - y_0 = tn \\ z - z_0 = tp \end{cases}$ ，即：$\begin{cases} x = x_0 + tm \\ y = y_0 + tn \\ z = z_0 + tp \end{cases}$ **参数方程**
- $\dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p}$ **对称式方程**

注 1 若 $m = 0$，则 $\frac{x-x_0}{0} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ 表示：$x = x_0$ 且 $\frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$

空间直线的方程

方向向量 $\vec{s}=(m,n,p)$



$$M\in L \iff \overrightarrow{M_0M}\parallel \vec{s}$$

$$\iff \exists t\in\mathbb{R},\text{ 使得 } \overrightarrow{M_0M}=t\vec{s}$$

$$\iff (x-x_0,y-y_0,z-z_0)=t(m,n,p)$$

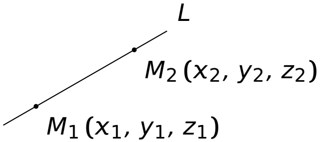
所以

- $\begin{cases} x-x_0=tm \\ y-y_0=tn \\ z-z_0=tp \end{cases}$，即：$\begin{cases} x=x_0+tm \\ y=y_0+tn \\ z=z_0+tp \end{cases}$ **参数方程**
- $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ **对称式方程**

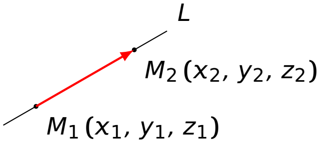
注 1 若 $m=0$，则 $\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ 表示：$x=x_0$ 且 $\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$

注 2 一般地，点向式用作“表示”，参数式用作具体计算

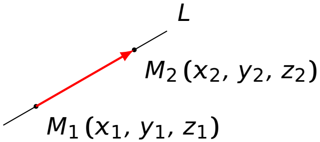
例 1 设直线过点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$，求直线方程.



例 1 设直线过点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$，求直线方程.



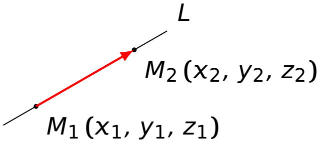
例 1 设直线过点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$，求直线方程.



解 取方向向量为

$$\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = (\qquad\quad, \qquad\quad, \qquad\quad)$$

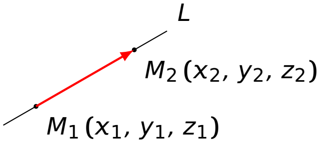
例 1 设直线过点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$，求直线方程.



解 取方向向量为

$$\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

例 1 设直线过点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$，求直线方程.



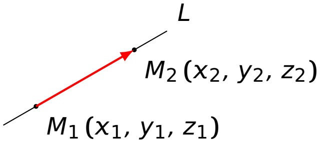
解 取方向向量为

$$\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

所以直线方程为

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

例 1 设直线过点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$，求直线方程.



解 取方向向量为

$$\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

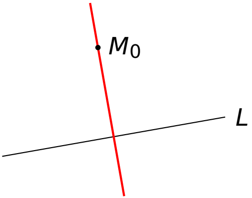
所以直线方程为

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

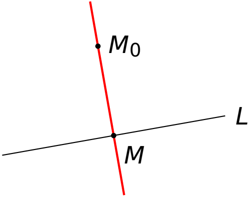
或等价地，

$$\frac{x - x_2}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_2}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_2}{z_2 - z_1}$$

例 2 求过点 $M_0(2, 1, 3)$ 且与直线 $L: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程.

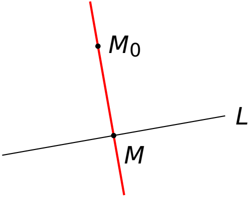


例 2 求过点 $M_0(2, 1, 3)$ 且与直线 $L: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程.



解 设垂足为 $M(x, y, z)$，则

例 2 求过点 $M_0(2, 1, 3)$ 且与直线 L：$\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程.

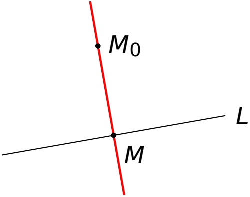


解 设垂足为 $M(x, y, z)$，则

$$M \in L \quad \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{M_0M} \perp L \quad \Rightarrow$$

例 2 求过点 $M_0(2, 1, 3)$ 且与直线 L：$\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程.

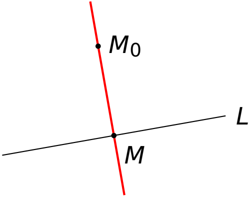


解 设垂足为 $M(x, y, z)$，则

$$M \in L \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + tm \\ y = y_0 + tn \\ z = z_0 + tp \end{cases}$$

$$\overrightarrow{M_0M} \perp L \quad \Rightarrow$$

例 2 求过点 $M_0(2,1,3)$ 且与直线 $L:\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程.

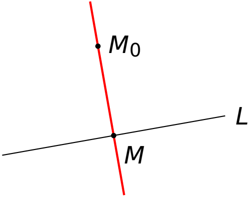


解 设垂足为 $M(x,y,z)$，则

$$M\in L \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x=x_0+tm=-1+3t \\ y=y_0+tn \\ z=z_0+tp \end{cases}$$

$$\overrightarrow{M_0M}\perp L \quad\Rightarrow$$

例 2 求过点 $M_0(2, 1, 3)$ 且与直线 L：$\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程.

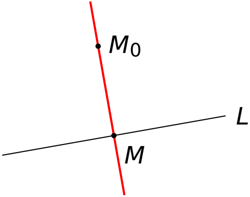


解 设垂足为 $M(x, y, z)$，则

$$M \in L \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + tm = -1 + 3t \\ y = y_0 + tn = 1 + 2t \\ z = z_0 + tp \end{cases}$$

$$\overrightarrow{M_0M} \perp L \quad \Rightarrow$$

例 2 求过点 $M_0(2, 1, 3)$ 且与直线 L : $\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程.

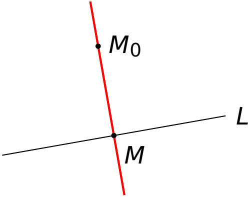


解 设垂足为 $M(x, y, z)$，则

$$M \in L \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + tm = -1 + 3t \\ y = y_0 + tn = 1 + 2t \\ z = z_0 + tp = -t \end{cases}$$

$$\overrightarrow{M_0M} \perp L \quad \Rightarrow$$

例 2 求过点 $M_0(2,1,3)$ 且与直线 $L:\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程.

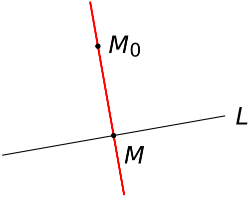


解 设垂足为 $M(x,y,z)$，则

$$M\in L \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x=x_0+tm=-1+3t \\ y=y_0+tn=1+2t \\ z=z_0+tp=-t \end{cases}$$

$$\overrightarrow{M_0M}\perp L \quad\Rightarrow\quad 0=\overrightarrow{M_0M}\cdot(3,2,-1)$$

例 2 求过点 $M_0(2,1,3)$ 且与直线 $L: \frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程.



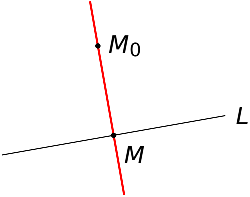
解 设垂足为 $M(x,y,z)$，则

$$M\in L \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=x_0+tm=-1+3t \\ y=y_0+tn=1+2t \\ z=z_0+tp=-t \end{cases}$$

$$\overrightarrow{M_0M}\perp L \quad \Rightarrow \quad 0=\overrightarrow{M_0M}\cdot(3,2,-1)$$

$$=(-3+3t) \qquad (2t) \qquad (-t-3)$$

例 2 求过点 $M_0(2, 1, 3)$ 且与直线 $L: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程.



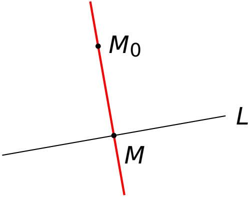
解 设垂足为 $M(x, y, z)$，则

$$M \in L \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + tm = -1 + 3t \\ y = y_0 + tn = 1 + 2t \\ z = z_0 + tp = -t \end{cases}$$

$$\overrightarrow{M_0M} \perp L \quad \Rightarrow \quad 0 = \overrightarrow{M_0M} \cdot (3, 2, -1)$$

$$= (-3 + 3t) \cdot 3 + (2t) \cdot 2 + (-t - 3) \cdot (-1)$$

例 2 求过点 $M_0(2, 1, 3)$ 且与直线 $L: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程.



解 设垂足为 $M(x, y, z)$，则

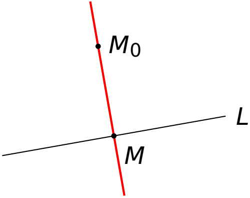
$$M \in L \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + tm = -1 + 3t \\ y = y_0 + tn = 1 + 2t \\ z = z_0 + tp = -t \end{cases}$$

$$\overrightarrow{M_0M} \perp L \quad \Rightarrow \quad 0 = \overrightarrow{M_0M} \cdot (3, 2, -1)$$

$$= (-3 + 3t) \cdot 3 + (2t) \cdot 2 + (-t - 3) \cdot (-1)$$

$$\Rightarrow \quad t = 3/7$$

例 2 求过点 $M_0\,(2,\,1,\,3)$ 且与直线 L : $\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程.



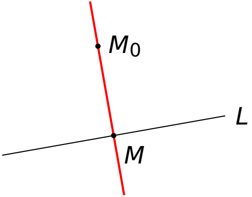
解 设垂足为 $M\,(x,\,y,\,z)$，则

$$M \in L \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + tm = -1 + 3t \\ y = y_0 + tn = 1 + 2t \\ z = z_0 + tp = -t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_0M} \perp L \quad &\Rightarrow \quad 0 = \overrightarrow{M_0M} \cdot (3,\,2,\,-1) \\ &\qquad\;\; = (-3+3t)\cdot 3 + (2t)\cdot 2 + (-t-3)\cdot(-1) \\ &\Rightarrow \quad t = 3/7 \end{aligned}$$

所以交点 $M = (\frac{2}{7},\,\frac{13}{7},\,-\frac{3}{7})$，

例 2 求过点 $M_0(2, 1, 3)$ 且与直线 $L: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程.



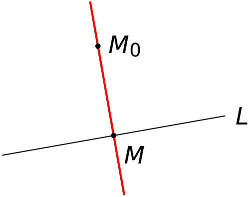
解 设垂足为 $M(x, y, z)$，则

$$M \in L \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + tm = -1 + 3t \\ y = y_0 + tn = 1 + 2t \\ z = z_0 + tp = -t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_0M} \perp L \quad &\Rightarrow \quad 0 = \overrightarrow{M_0M} \cdot (3, 2, -1) \\ &\qquad\;\; = (-3 + 3t) \cdot 3 + (2t) \cdot 2 + (-t - 3) \cdot (-1) \\ &\Rightarrow \quad t = 3/7 \end{aligned}$$

所以交点 $M = (\frac{2}{7}, \frac{13}{7}, -\frac{3}{7})$， 方向向量 $\overrightarrow{M_0M} = -\frac{6}{7}(2, -1, 4)$,

例 2 求过点 $M_0\,(2,\,1,\,3)$ 且与直线 L：$\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程.



解 设垂足为 $M\,(x,\,y,\,z)$，则

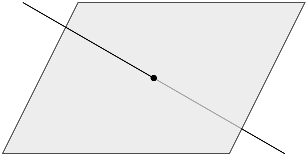
$$M\in L \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x=x_0+tm=-1+3t\\ y=y_0+tn=1+2t\\ z=z_0+tp=-t\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_0M}\perp L \quad\Rightarrow\quad 0&=\overrightarrow{M_0M}\cdot(3,\,2,\,-1)\\ &=(-3+3t)\cdot 3+(2t)\cdot 2+(-t-3)\cdot(-1)\\ \Rightarrow\quad t&=3/7\end{aligned}$$

所以交点 $M=(\frac{2}{7},\,\frac{13}{7},\,-\frac{3}{7})$，方向向量 $\overrightarrow{M_0M}=-\frac{6}{7}(2,\,-1,\,4)$，

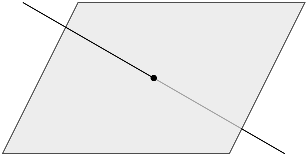
直线方程为 $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}$.

例 3 求直线 $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{2}$ 与平面 $2x+y+z-6=0$ 的交点.



例 3 求直线 $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{2}$ 与平面 $2x + y + z - 6 = 0$ 的交点.

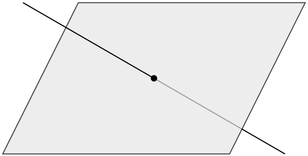
解 直线上点的坐标为



$$\begin{cases} x = x_0 + tm \\ y = y_0 + tn \\ z = z_0 + tp \end{cases}$$

例 3 求直线 $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{2}$ 与平面 $2x + y + z - 6 = 0$ 的交点.

解 直线上点的坐标为

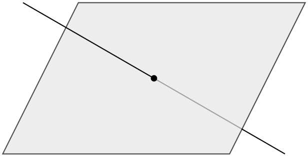


$$\begin{cases} x = x_0 + tm = 2 + t \\ y = y_0 + tn \\ z = z_0 + tp \end{cases}$$

例 3 求直线 $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{2}$ 与平面 $2x+y+z-6=0$ 的交点.

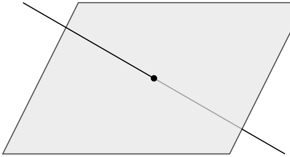
解 直线上点的坐标为

$$\begin{cases} x = x_0 + tm = 2 + t \\ y = y_0 + tn = 3 + t \\ z = z_0 + tp \end{cases}$$



例 3 求直线 $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{2}$ 与平面 $2x+y+z-6=0$ 的交点.

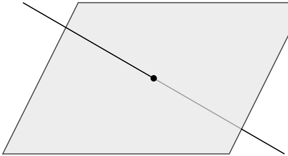
解 直线上点的坐标为



$$\begin{cases} x = x_0 + tm = 2 + t \\ y = y_0 + tn = 3 + t \\ z = z_0 + tp = 4 + 2t \end{cases}$$

例 3 求直线 $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{2}$ 与平面 $2x + y + z - 6 = 0$ 的交点.

解 直线上点的坐标为



$$\begin{cases} x = x_0 + tm = 2 + t \\ y = y_0 + tn = 3 + t \\ z = z_0 + tp = 4 + 2t \end{cases}$$

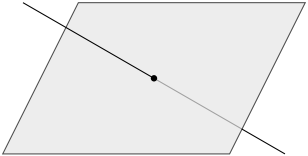
代入平面方程，得:

$$2(2 + t) + (3 + t) + (4 + 2t) - 6 = 0$$

例 3 求直线 $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{2}$ 与平面 $2x + y + z - 6 = 0$ 的交点.

解 直线上点的坐标为

$$\begin{cases} x = x_0 + tm = 2 + t \\ y = y_0 + tn = 3 + t \\ z = z_0 + tp = 4 + 2t \end{cases}$$

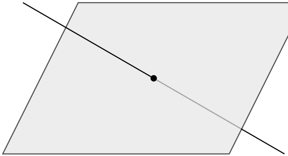


代入平面方程，得:

$$2(2+t) + (3+t) + (4+2t) - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -1$$

例 3 求直线 $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{2}$ 与平面 $2x+y+z-6=0$ 的交点.

解 直线上点的坐标为



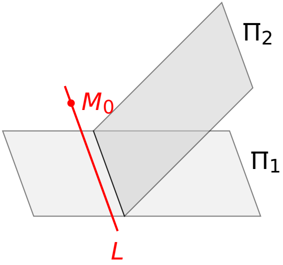
$$\begin{cases} x = x_0 + tm = 2 + t \\ y = y_0 + tn = 3 + t \\ z = z_0 + tp = 4 + 2t \end{cases}$$

代入平面方程，得:

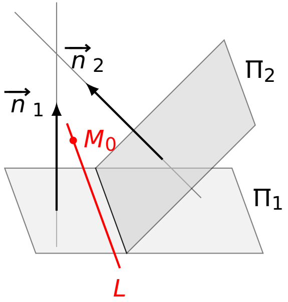
$$2(2+t)+(3+t)+(4+2t)-6=0 \quad \Rightarrow \quad t=-1$$

所以交点为 (1, 2, 2).

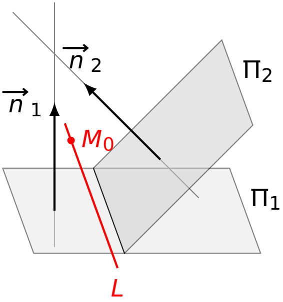
例 4 设直线 L 过点 $M_0(-3, 2, 5)$，且与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行，求 L 方程.



例 4 设直线 L 过点 $M_0(-3, 2, 5)$，且与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行，求 L 方程.



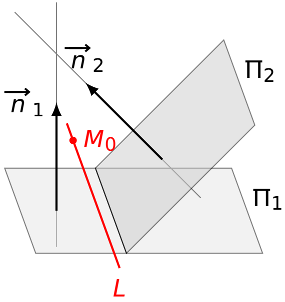
例 4 设直线 L 过点 $M_0(-3, 2, 5)$，且与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行，求 L 方程.



解 1. 取方向向量

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$$

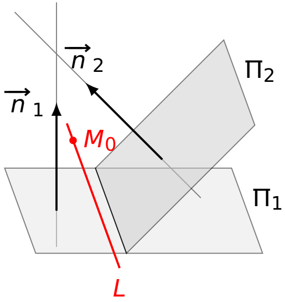
例 4 设直线 L 过点 $M_0(-3, 2, 5)$，且与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行，求 L 方程.



解 1. 取方向向量

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -4 \\ & & \end{vmatrix}$$

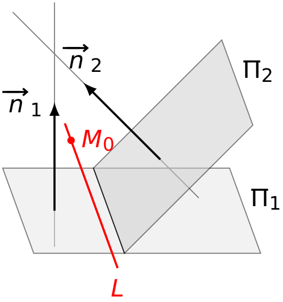
例 4 设直线 L 过点 $M_0(-3, 2, 5)$，且与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行，求 L 方程.



解 1. 取方向向量

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -4\\ 2 & -1 & -5\end{vmatrix}$$

例 4 设直线 L 过点 $M_0(-3, 2, 5)$，且与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行，求 L 方程.

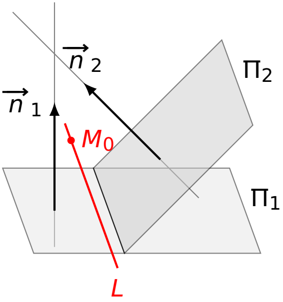


解 1. 取方向向量

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= \left|\qquad\qquad\right| \vec{i} - \left|\qquad\qquad\right| \vec{j} + \left|\qquad\qquad\right| \vec{k}$$

例 4 设直线 L 过点 $M_0(-3, 2, 5)$，且与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行，求 L 方程.

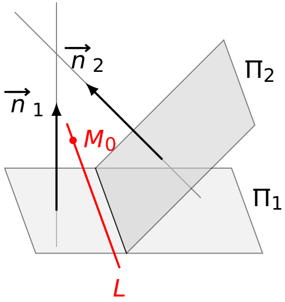


解 1. 取方向向量

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix} \vec{k}$$

例 4 设直线 L 过点 $M_0(-3, 2, 5)$，且与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行，求 L 方程.

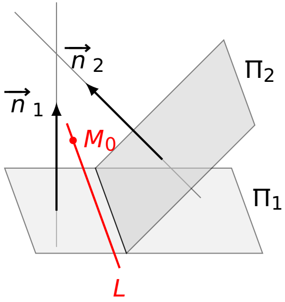


解 1. 取方向向量

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -4\\ 2 & -1 & -5\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}0 & -4\\ -1 & -5\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & -4\\ 2 & -5\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}\vec{k}$$

例 4 设直线 L 过点 $M_0(-3, 2, 5)$，且与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行，求 L 方程.

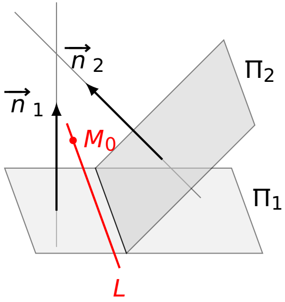


解 1. 取方向向量

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -4\\ 2 & -1 & -5\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}0 & -4\\ -1 & -5\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & -4\\ 2 & -5\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}\vec{k}$$

例 4 设直线 L 过点 $M_0(-3, 2, 5)$，且与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行，求 L 方程.



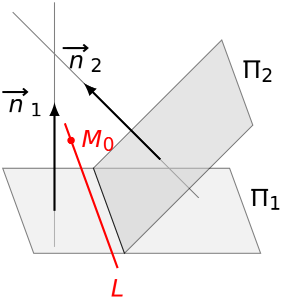
解 1. 取方向向量

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -4\\ 2 & -1 & -5\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}0 & -4\\ -1 & -5\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & -4\\ 2 & -5\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=-4\vec{i}-3\vec{j}-\vec{k}$$

例 4 设直线 L 过点 $M_0(-3, 2, 5)$，且与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行，求 L 方程.



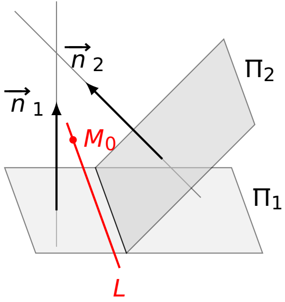
解 1. 取方向向量

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -4\\ 2 & -1 & -5\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}0 & -4\\ -1 & -5\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & -4\\ 2 & -5\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=-4\vec{i}-3\vec{j}-\vec{k}=(-4,-3,-1)$$

例 4 设直线 L 过点 $M_0(-3, 2, 5)$，且与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行，求 L 方程.



解 1. 取方向向量

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -4\\ 2 & -1 & -5\end{vmatrix}$$

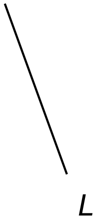
$$=\begin{vmatrix}0 & -4\\ -1 & -5\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & -4\\ 2 & -5\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=-4\vec{i}-3\vec{j}-\vec{k}=(-4,-3,-1)$$

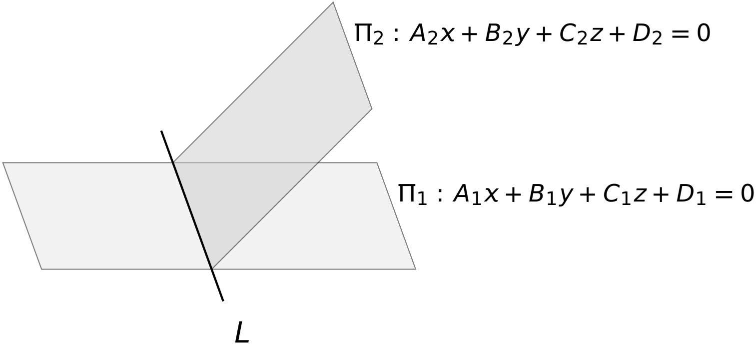
2. 点向式:

$$\frac{x+3}{-4}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-5}{-1}$$

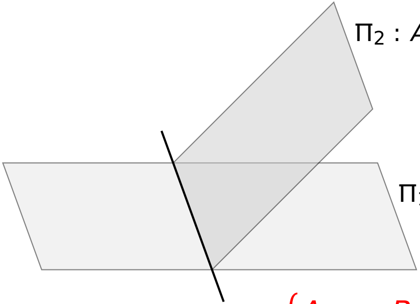
空间直线的一般方程



空间直线的一般方程

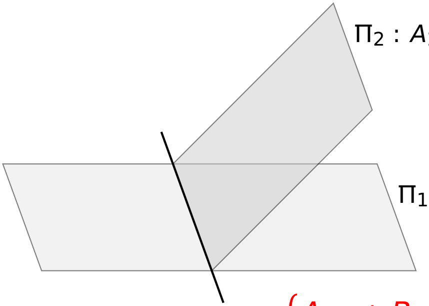


空间直线的一般方程



$$L: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

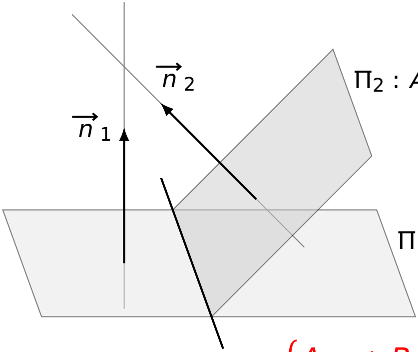
空间直线的一般方程



$$L : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

性质 L 的方向向量可取为 $\overrightarrow{s} =$

空间直线的一般方程



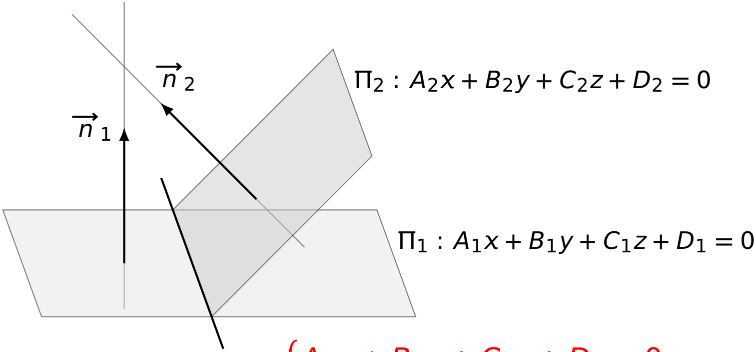
$\Pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

$\Pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

$$L: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

性质 L 的方向向量可取为 $\overrightarrow{s} =$

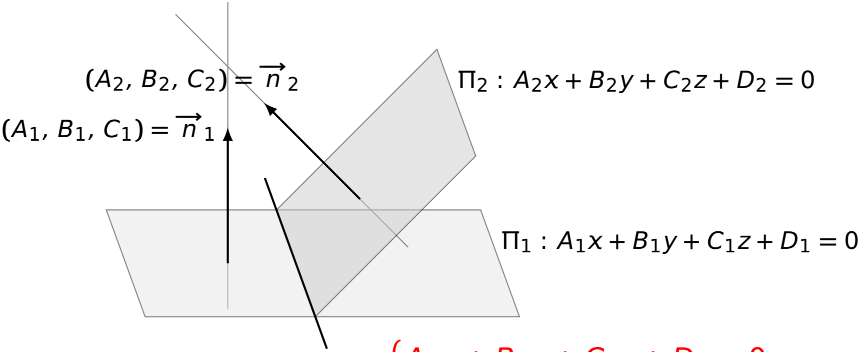
空间直线的一般方程



$$L : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

性质 L 的方向向量可取为 $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$

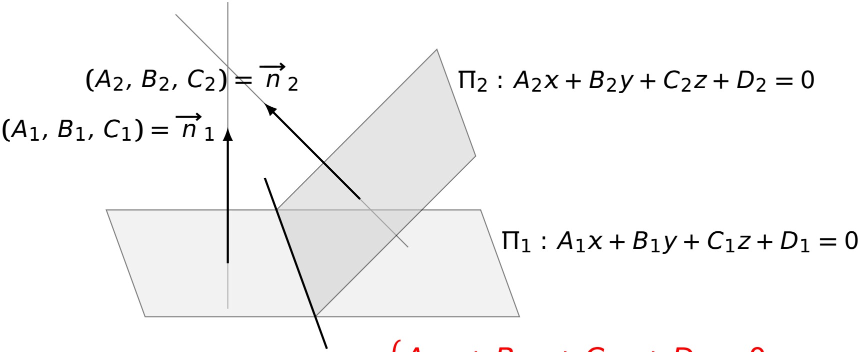
空间直线的一般方程



$$L : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

性质 L 的方向向量可取为 $\overrightarrow{s} = \overrightarrow{n}_1 \times \overrightarrow{n}_2$

空间直线的一般方程



$$L : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

性质 L 的方向向量可取为 $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$

例 求直线 $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$ 的一个方向向量，并求出点向式方程.

例 求直线 $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$ 的一个方向向量，并求出点向式方程.

解 1. 取方向向量

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$

2. 求直线上一点.

3. 点向式:

例 求直线 $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$ 的一个方向向量，并求出点向式方程.

解 1. 取方向向量

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$$

2. 求直线上一点.

3. 点向式:

例 求直线 $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+y+z=4 \end{cases}$ 的一个方向向量，并求出点向式方程.

解 1. 取方向向量

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ & & \end{vmatrix}$$

2. 求直线上一点.

3. 点向式:

例 求直线 $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+y+z=4 \end{cases}$ 的一个方向向量，并求出点向式方程.

解 1. 取方向向量

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

2. 求直线上一点.

3. 点向式:

例 求直线 $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$ 的一个方向向量，并求出点向式方程.

解 1. 取方向向量

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \left| \qquad \right| \vec{i} - \left| \qquad \right| \vec{j} + \left| \qquad \right| \vec{k}$$

2. 求直线上一点.

3. 点向式:

例 求直线 $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+y+z=4 \end{cases}$ 的一个方向向量，并求出点向式方程.

解 1. 取方向向量

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix} \vec{k}$$

2. 求直线上一点.

3. 点向式：

例 求直线 $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$ 的一个方向向量，并求出点向式方程.

解 1. 取方向向量

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix} \vec{k}$$

2. 求直线上一点.

3. 点向式:

例 求直线 $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+y+z=4 \end{cases}$ 的一个方向向量，并求出点向式方程.

解 1. 取方向向量

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}$$

2. 求直线上一点.

3. 点向式:

例 求直线 $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+y+z=4 \end{cases}$ 的一个方向向量，并求出点向式方程.

解 1. 取方向向量

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=-2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$$

2. 求直线上一点.

3. 点向式:

例 求直线 $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$ 的一个方向向量，并求出点向式方程.

解 1. 取方向向量

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= -2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} = (-2, 1, 3)$$

2. 求直线上一点.

3. 点向式:

例 求直线 $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+y+z=4 \end{cases}$ 的一个方向向量，并求出点向式方程.

解 1. 取方向向量

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=-2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}=(-2,1,3)$$

2. 求直线上一点.

不妨取 $x=0 \quad \Rightarrow$

3. 点向式:

例 求直线 $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$ 的一个方向向量，并求出点向式方程.

解 1. 取方向向量

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= -2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} = (-2, 1, 3)$$

2. 求直线上一点.

不妨取 $x = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -y + z = 1 \\ y + z = 4 \end{cases}$

3. 点向式:

例 求直线 $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$ 的一个方向向量，并求出点向式方程.

解 1. 取方向向量

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= -2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} = (-2, 1, 3)$$

2. 求直线上一点.

不妨取 $x = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -y + z = 1 \\ y + z = 4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = \frac{3}{2} \\ z = \frac{5}{2} \end{cases}$

3. 点向式:

例 求直线 $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$ 的一个方向向量，并求出点向式方程.

解 1. 取方向向量

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= -2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} = (-2, 1, 3)$$

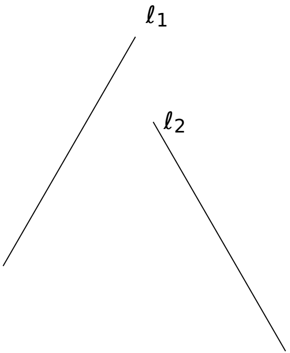
2. 求直线上一点.

不妨取 $x = 0 \Rightarrow \begin{cases} -y + z = 1 \\ y + z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{2} \\ z = \frac{5}{2} \end{cases}$

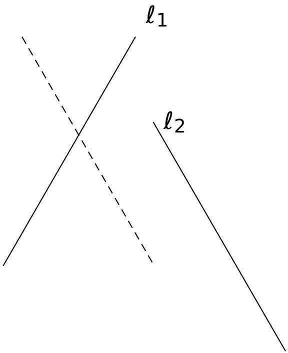
3. 点向式:

$$\frac{x}{-2} = \frac{y - \frac{3}{2}}{1} = \frac{z - \frac{5}{2}}{3}$$

直线与直线的夹角

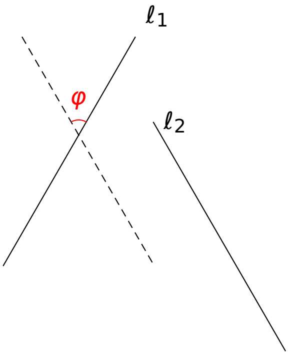


直线与直线的夹角



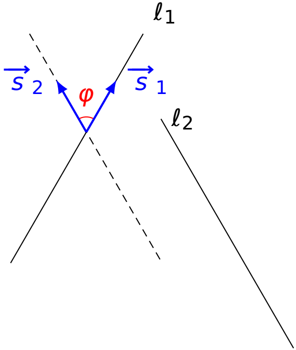
直线与直线的夹角

夹角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$，且



直线与直线的夹角

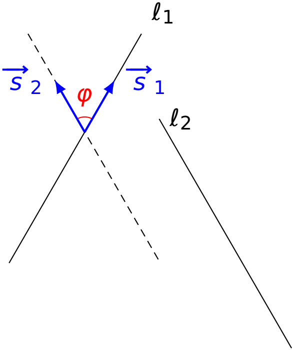
夹角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$，且



直线与直线的夹角

夹角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$，且

$$\cos\varphi = \cos(\angle(\overrightarrow{s}_1, \overrightarrow{s}_2))$$

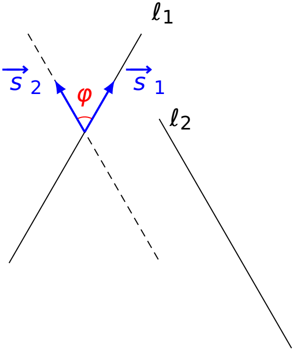


直线与直线的夹角

夹角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$，且

$$\cos\varphi = \cos(\angle(\overrightarrow{s}_1, \overrightarrow{s}_2))$$

$$= \frac{\overrightarrow{s}_1 \cdot \overrightarrow{s}_2}{|\overrightarrow{s}_1| \cdot |\overrightarrow{s}_2|}$$

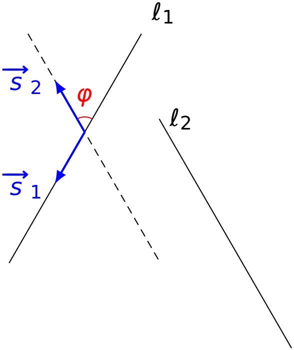


直线与直线的夹角

夹角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$，且

$$\cos\varphi = \cos(\angle(\overrightarrow{s}_1, \overrightarrow{s}_2))$$

$$= \frac{\overrightarrow{s}_1 \cdot \overrightarrow{s}_2}{|\overrightarrow{s}_1| \cdot |\overrightarrow{s}_2|}$$

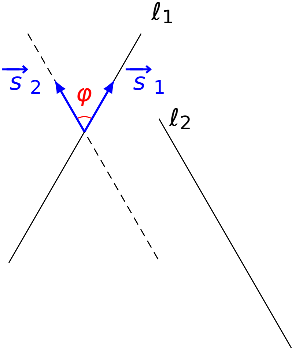


直线与直线的夹角

夹角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$，且

$$\cos\varphi = \cos(\angle(\overrightarrow{s}_1, \overrightarrow{s}_2))$$

$$= \frac{\overrightarrow{s}_1 \cdot \overrightarrow{s}_2}{|\overrightarrow{s}_1| \cdot |\overrightarrow{s}_2|}$$

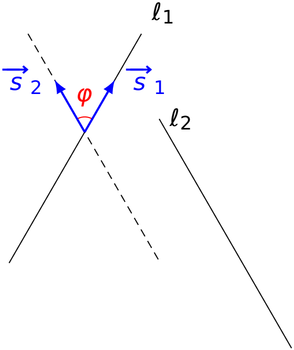


直线与直线的夹角

夹角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$，且

$$\cos\varphi = \left|\cos(\angle(\overrightarrow{s}_1, \overrightarrow{s}_2))\right|$$

$$= \frac{\overrightarrow{s}_1 \cdot \overrightarrow{s}_2}{|\overrightarrow{s}_1| \cdot |\overrightarrow{s}_2|}$$

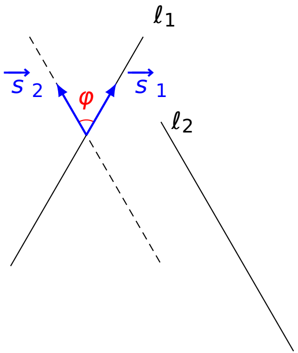


直线与直线的夹角

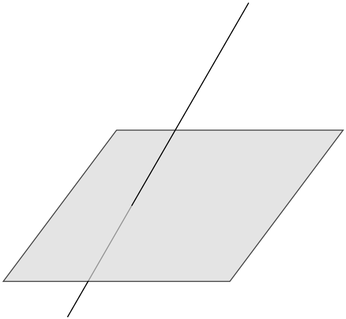
夹角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$，且

$$\cos\varphi = \left|\cos(\angle(\overrightarrow{s}_1, \overrightarrow{s}_2))\right|$$

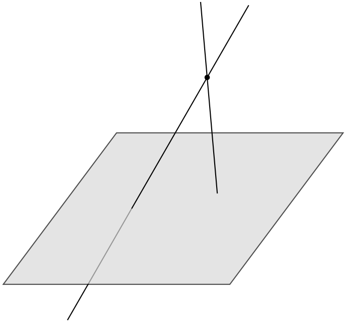
$$= \frac{|\overrightarrow{s}_1 \cdot \overrightarrow{s}_2|}{|\overrightarrow{s}_1| \cdot |\overrightarrow{s}_2|}$$



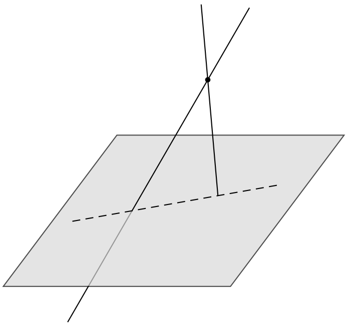
直线与平面的夹角



直线与平面的夹角

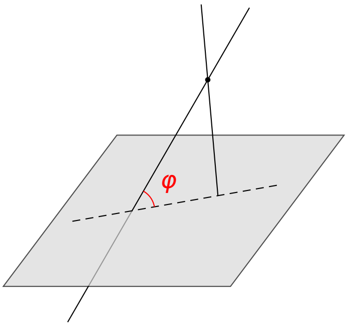


直线与平面的夹角



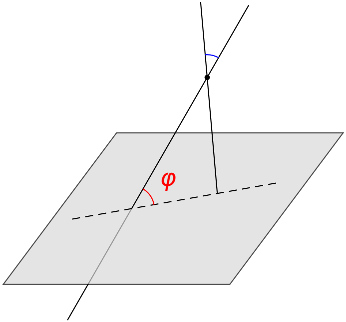
直线与平面的夹角

夹角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$，且



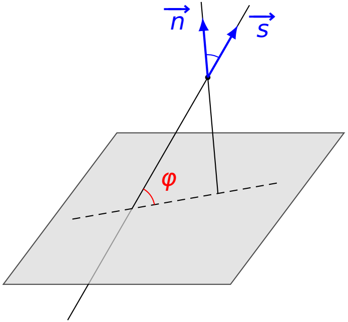
直线与平面的夹角

夹角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$，且



直线与平面的夹角

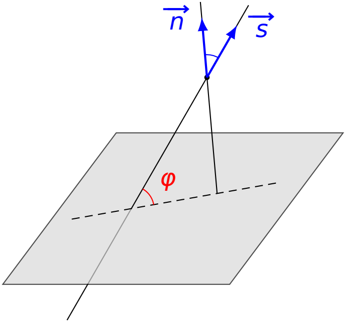
夹角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$，且



直线与平面的夹角

夹角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$，且

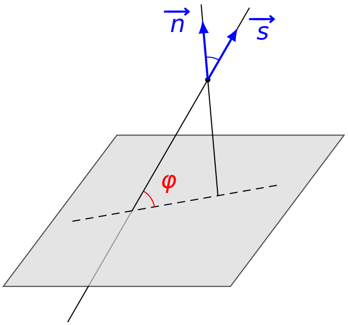
$$\cos(\angle(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{s}))$$



直线与平面的夹角

夹角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$，且

$$\sin\varphi = \cos(\angle(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{s}))$$

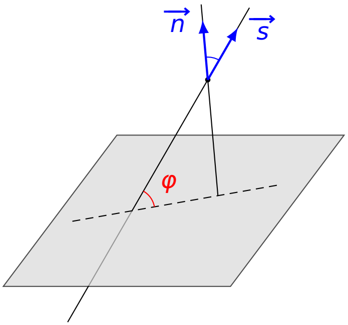


直线与平面的夹角

夹角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$，且

$$\sin\varphi = \cos(\angle(\vec{n}, \vec{s}))$$

$$= \frac{\vec{n} \cdot \vec{s}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|}$$

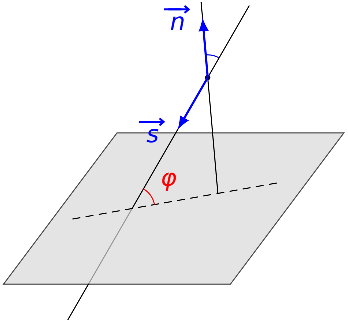


直线与平面的夹角

夹角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$，且

$$\sin\varphi = \cos(\angle(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{s}))$$

$$= \frac{\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{s}}{|\overrightarrow{n}| \cdot |\overrightarrow{s}|}$$

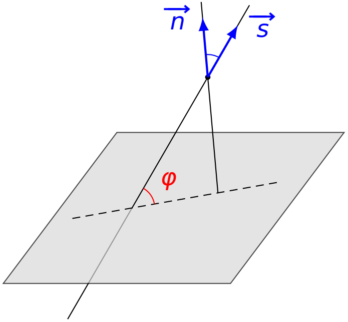


直线与平面的夹角

夹角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$，且

$$\sin\varphi = \cos(\angle(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{s}))$$

$$= \frac{\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{s}}{|\overrightarrow{n}| \cdot |\overrightarrow{s}|}$$

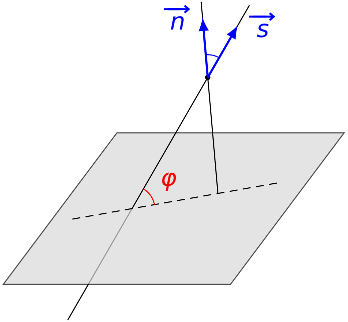


直线与平面的夹角

夹角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$，且

$$\sin\varphi = \left|\cos(\angle(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{s}))\right|$$

$$= \frac{\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{s}}{|\overrightarrow{n}| \cdot |\overrightarrow{s}|}$$

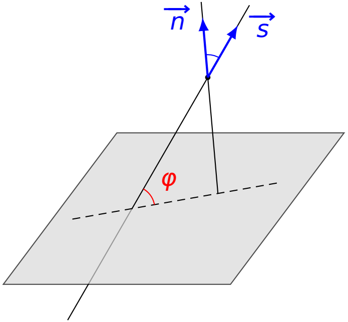


直线与平面的夹角

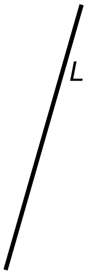
夹角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$，且

$$\sin\varphi = \left|\cos(\angle(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{s}))\right|$$

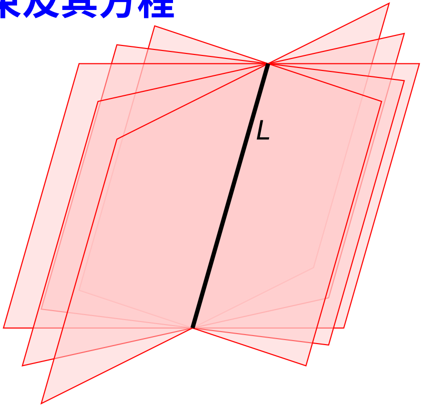
$$= \frac{|\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{s}|}{|\overrightarrow{n}| \cdot |\overrightarrow{s}|}$$



平面束及其方程

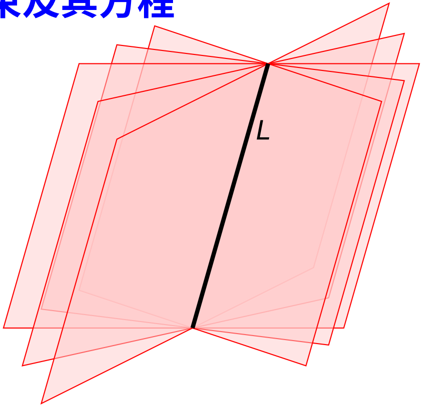


平面束及其方程



过定直线 L 的 平面束

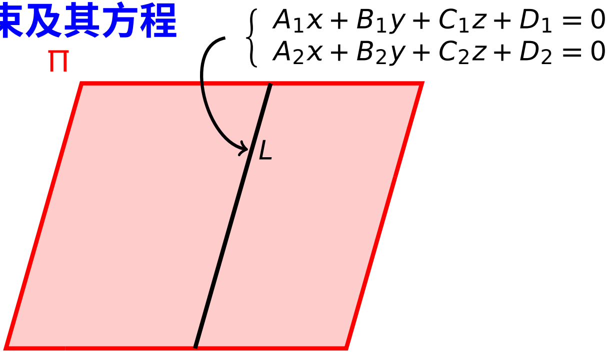
平面束及其方程



过定直线 L 的 平面束

问题　给出平面束中的平面，其方程的通式

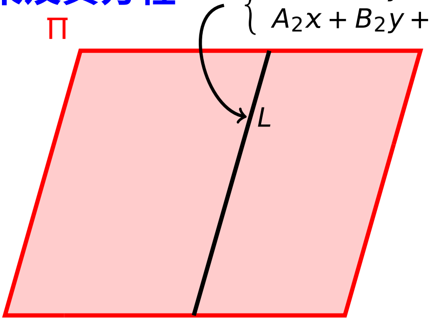
平面束及其方程



过直线 L 的平面 Π 的方程是什么？

平面束及其方程

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$



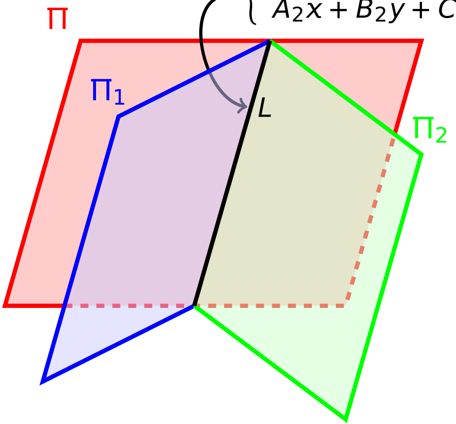
则过直线 L 的平面 Π 的方程为

$$\boxed{\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0}$$

其中 λ，μ 为（不全为零的）待定的常数.

平面束及其方程

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 & \longrightarrow \Pi_1 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 & \longrightarrow \Pi_2 \end{cases}$$

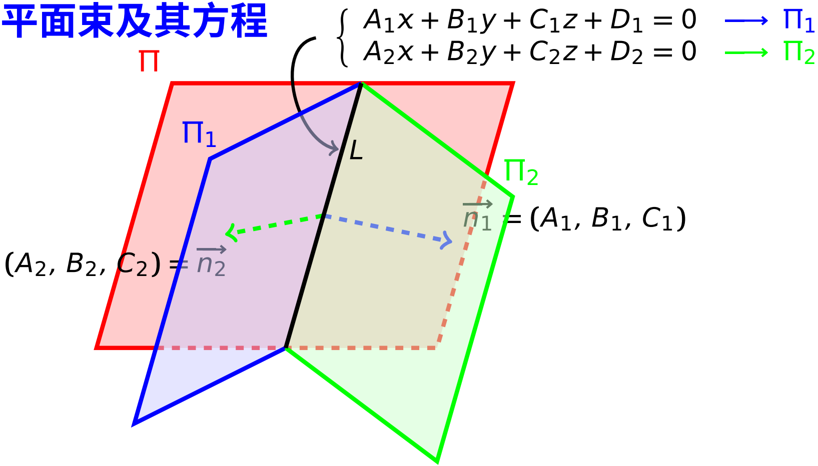


则过直线 L 的平面 Π 的方程为

$$\boxed{\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0}$$

其中 λ，μ 为（不全为零的）待定的常数.

平面束及其方程



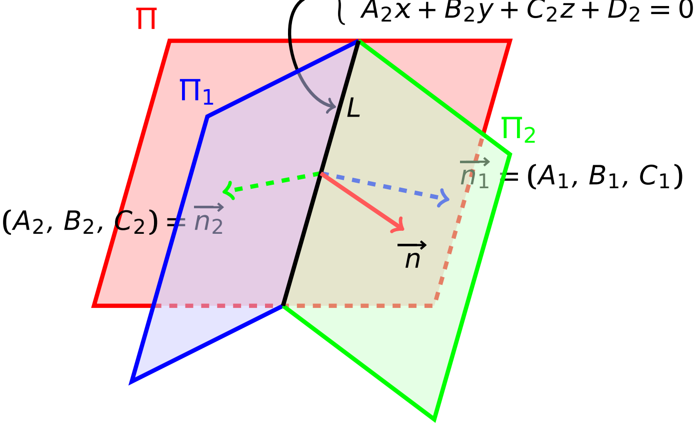
则过直线 L 的平面 Π 的方程为

$$\boxed{\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0}$$

其中 λ，μ 为（不全为零的）待定的常数.

平面束及其方程

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 & \longrightarrow \Pi_1 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 & \longrightarrow \Pi_2 \end{cases}$$



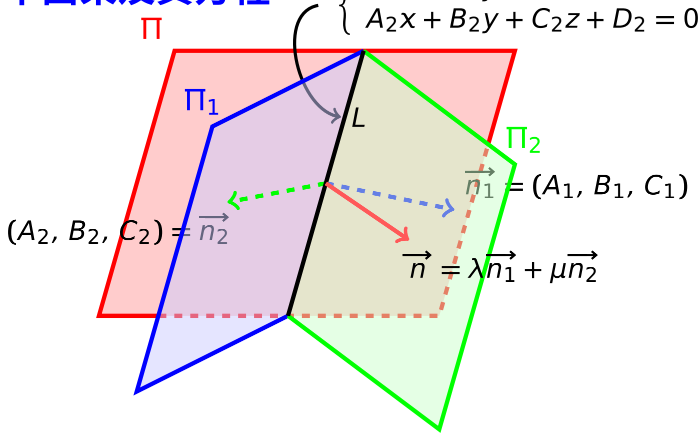
则过直线 L 的平面 Π 的方程为

$$\boxed{\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0}$$

其中 λ，μ 为（不全为零的）待定的常数.

平面束及其方程

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 & \longrightarrow \Pi_1 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 & \longrightarrow \Pi_2 \end{cases}$$



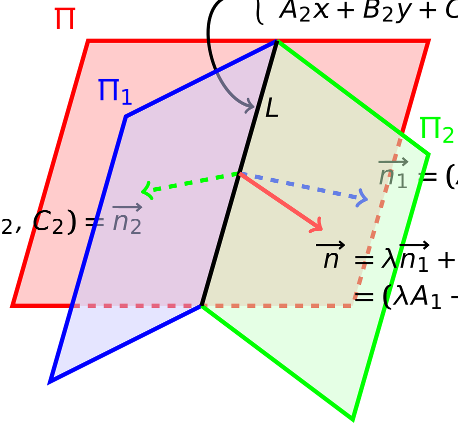
则过直线 L 的平面 Π 的方程为

$$\boxed{\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0}$$

其中 λ，μ 为（不全为零的）待定的常数.

平面束及其方程

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 & \longrightarrow \Pi_1 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 & \longrightarrow \Pi_2 \end{cases}$$



$$\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$$

$$(A_2,B_2,C_2)=\vec{n}_2$$

$$\vec{n}=\lambda\vec{n}_1+\mu\vec{n}_2$$
$$=(\lambda A_1+\mu A_2,\lambda B_1+\mu B_2,\lambda C_1+\mu C_2)$$

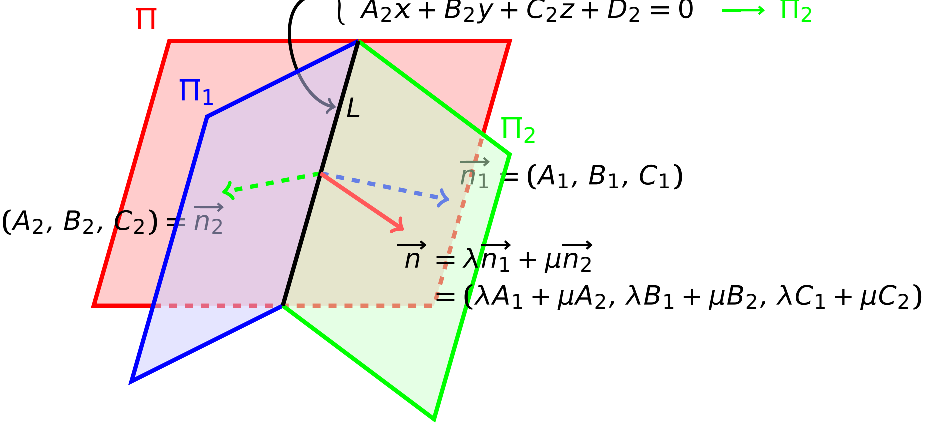
则过直线 L 的平面 Π 的方程为

$$\boxed{\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0}$$

其中 λ，μ 为（不全为零的）待定的常数.

平面束及其方程

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 & \longrightarrow \Pi_1 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 & \longrightarrow \Pi_2 \end{cases}$$



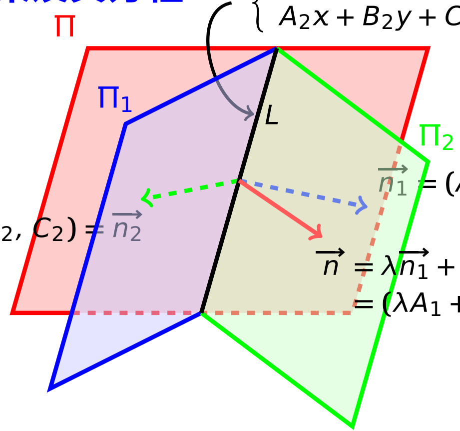
则过直线 L 的平面 Π 的方程为

$$\boxed{\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0} \quad \Pi'$$

其中 λ，μ 为（不全为零的）待定的常数.

平面束及其方程

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \longrightarrow \Pi_1 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \longrightarrow \Pi_2 \end{cases}$$



则过直线 L 的平面 Π 的方程为

$$\boxed{\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0}$$

$\Pi'=\Pi$

其中 λ，μ 为（不全为零的）待定的常数.

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

例 求过点 $M(1, 2, 3)$ 和直线 $\begin{cases} x - 4z = 3 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$ 的平面的方程.

利用平面束方程

例 求过点 $M(1, 2, 3)$ 和直线 $\begin{cases} x-4z=3 \\ 2y-z=0 \end{cases}$ 的平面的方程.

利用平面束方程

解 1. 过直线 $\begin{cases} x-4z-3=0 \\ 2y-z=0 \end{cases}$ 的平面可设为

例 求过点 $M(1, 2, 3)$ 和直线 $\begin{cases} x-4z=3 \\ 2y-z=0 \end{cases}$ 的平面的方程.

利用平面束方程

解 1. 过直线 $\begin{cases} x-4z-3=0 \\ 2y-z=0 \end{cases}$ 的平面可设为

$$\lambda(x-4z-3)+\mu(2y-z)=0$$

其中 λ 和 μ 是待定的常数。

例 求过点 $M(1, 2, 3)$ 和直线 $\begin{cases} x-4z=3 \\ 2y-z=0 \end{cases}$ 的平面的方程.

利用平面束方程

解 1. 过直线 $\begin{cases} x-4z-3=0 \\ 2y-z=0 \end{cases}$ 的平面可设为

$$\lambda(x-4z-3)+\mu(2y-z)=0$$

其中 λ 和 μ 是待定的常数。

2. 因为 $M(1, 2, 3)$ 在平面上，所以 $(1, 2, 3)$ 满足平面方程：

$$\lambda(1-4\cdot 3-3)+\mu(2\cdot 2-3)=0$$

例 求过点 $M(1, 2, 3)$ 和直线 $\begin{cases} x-4z=3 \\ 2y-z=0 \end{cases}$ 的平面的方程.

利用平面束方程

解 1. 过直线 $\begin{cases} x-4z-3=0 \\ 2y-z=0 \end{cases}$ 的平面可设为

$$\lambda(x-4z-3)+\mu(2y-z)=0$$

其中 λ 和 μ 是待定的常数。

2. 因为 $M(1, 2, 3)$ 在平面上，所以 $(1, 2, 3)$ 满足平面方程：

$$\lambda(1-4\cdot 3-3)+\mu(2\cdot 2-3)=0 \quad \Rightarrow \quad -14\lambda+\mu=0$$

例 求过点 $M(1, 2, 3)$ 和直线 $\begin{cases} x-4z=3 \\ 2y-z=0 \end{cases}$ 的平面的方程.

利用平面束方程

解 1. 过直线 $\begin{cases} x-4z-3=0 \\ 2y-z=0 \end{cases}$ 的平面可设为

$$\lambda(x-4z-3)+\mu(2y-z)=0$$

其中 λ 和 μ 是待定的常数。

2. 因为 $M(1, 2, 3)$ 在平面上，所以 $(1, 2, 3)$ 满足平面方程：

$$\lambda(1-4\cdot 3-3)+\mu(2\cdot 2-3)=0 \quad \Rightarrow \quad -14\lambda+\mu=0$$

不妨取 $\lambda=1$，$\mu=14$.

例 求过点 $M(1,\ 2,\ 3)$ 和直线 $\begin{cases} x-4z=3 \\ 2y-z=0 \end{cases}$ 的平面的方程.

利用平面束方程

解 1. 过直线 $\begin{cases} x-4z-3=0 \\ 2y-z=0 \end{cases}$ 的平面可设为

$$\lambda(x-4z-3)+\mu(2y-z)=0$$

其中 λ 和 μ 是待定的常数。

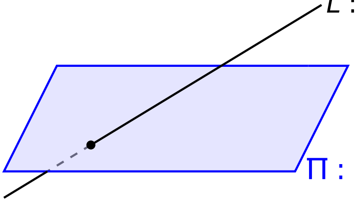
2. 因为 $M(1,\ 2,\ 3)$ 在平面上，所以 $(1,\ 2,\ 3)$ 满足平面方程：

$$\lambda(1-4\cdot 3-3)+\mu(2\cdot 2-3)=0 \quad \Rightarrow \quad -14\lambda+\mu=0$$

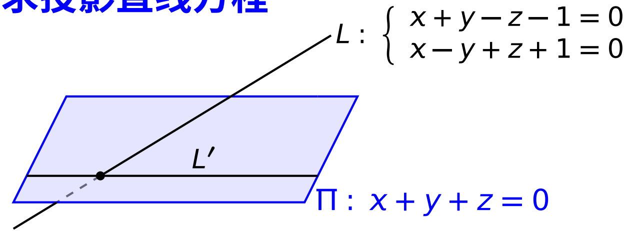
不妨取 $\lambda=1$，$\mu=14$. 所以平面方程是

$$x+28y-18z-3=0.$$

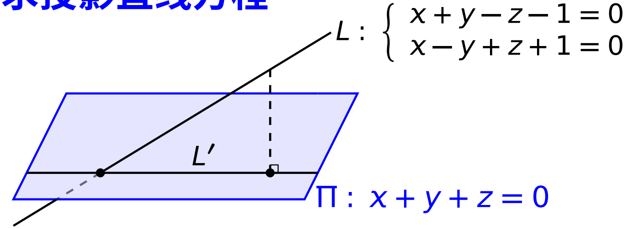
平面束方程应用：求投影直线方程



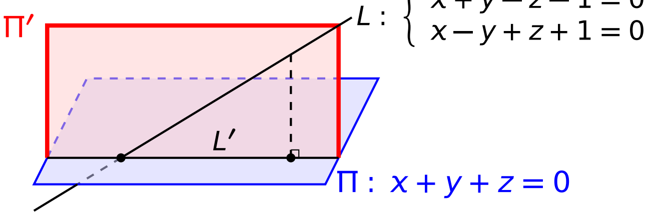
平面束方程应用：求投影直线方程



平面束方程应用：求投影直线方程



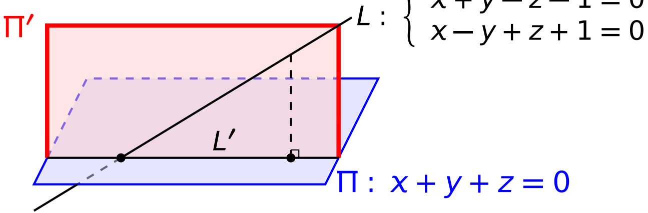
平面束方程应用：求投影直线方程



解：

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面.

平面束方程应用：求投影直线方程

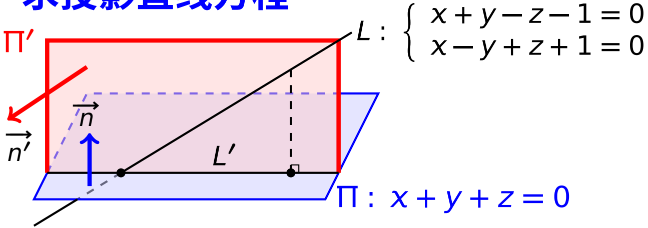


解：

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面.由于 Π' 过 L，可设 Π' 方程为

$$\lambda(x+y-z-1)+\mu(x-y+z+1)=0 \quad (\text{其中}\lambda,\mu\text{待定})$$

平面束方程应用：求投影直线方程

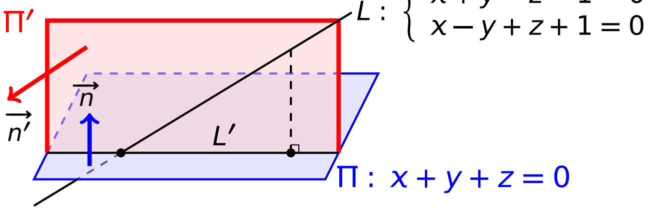


解：

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面.由于 Π' 过 L，可设 Π' 方程为

$$\lambda(x+y-z-1)+\mu(x-y+z+1)=0 \quad \text{（其中}\lambda, \mu\text{ 待定）}$$

平面束方程应用：求投影直线方程



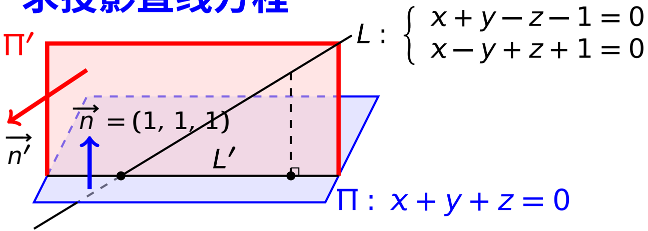
解：

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面.由于 Π' 过 L，可设 Π' 方程为

$$\lambda(x+y-z-1)+\mu(x-y+z+1)=0 \quad （其中\lambda, \mu 待定）$$

2. $\vec{n'} \perp \vec{n} \Rightarrow \vec{n'} \cdot \vec{n} = \qquad\qquad = 0$

平面束方程应用：求投影直线方程



解：

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面.由于 Π' 过 L，可设 Π' 方程为

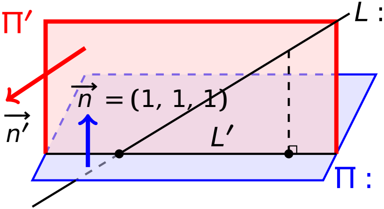
$$\lambda(x+y-z-1)+\mu(x-y+z+1)=0 \quad \text{（其中}\lambda, \mu\text{ 待定）}$$

2. $\overrightarrow{n'} \perp \overrightarrow{n} \ \Rightarrow\ \overrightarrow{n'} \cdot \overrightarrow{n} = \qquad\qquad = 0$

平面束方程应用：求投影直线方程

$L: \begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$

$(\lambda+\mu, \lambda-\mu, -\lambda+\mu) = \overrightarrow{n'}$



$\Pi: x+y+z=0$

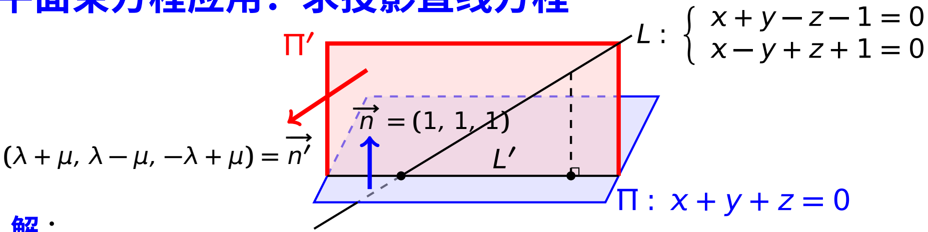
解：

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面.由于 Π' 过 L，可设 Π' 方程为

$$\lambda(x+y-z-1)+\mu(x-y+z+1)=0 \quad (\text{其中}\lambda, \mu\text{ 待定})$$

2. $\overrightarrow{n'} \perp \overrightarrow{n} \Rightarrow \overrightarrow{n'} \cdot \overrightarrow{n} = \qquad = 0$

平面束方程应用：求投影直线方程



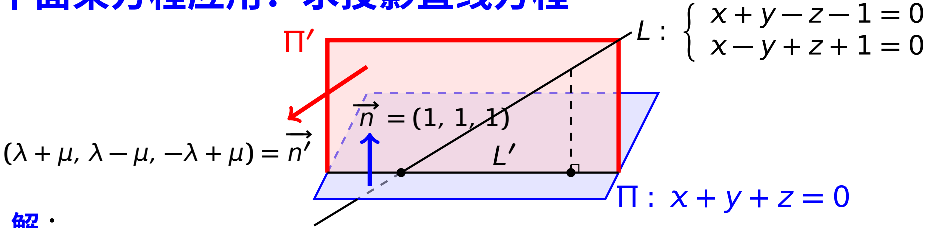
解：

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面.由于 Π' 过 L，可设 Π' 方程为

$$\lambda(x+y-z-1)+\mu(x-y+z+1)=0 \quad \text{（其中}\lambda,\mu\text{ 待定）}$$

2. $\vec{n'} \perp \vec{n} \quad \Rightarrow \quad \vec{n'}\cdot\vec{n} = 1\cdot(\lambda+\mu)+1\cdot(\lambda-\mu)+1\cdot(-\lambda+\mu)=0$

平面束方程应用：求投影直线方程



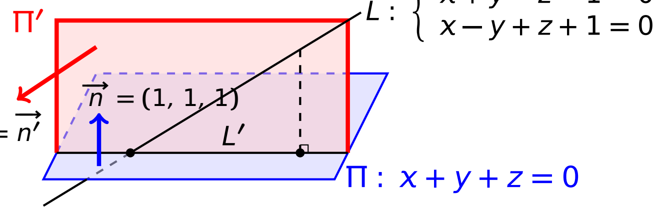
解：

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面.由于 Π' 过 L，可设 Π' 方程为

$$\lambda(x+y-z-1)+\mu(x-y+z+1)=0 \quad \text{（其中}\lambda, \mu\text{ 待定）}$$

2. $$\vec{n'} \perp \vec{n} \Rightarrow \vec{n'} \cdot \vec{n} = 1 \cdot (\lambda+\mu) + 1 \cdot (\lambda-\mu) + 1 \cdot (-\lambda+\mu) = 0$$
$$\Rightarrow \lambda+\mu=0$$

平面束方程应用：求投影直线方程



解：

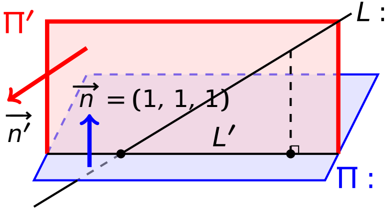
1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面.由于 Π' 过 L，可设 Π' 方程为

$$\lambda(x+y-z-1)+\mu(x-y+z+1)=0$$ （其中λ, μ 待定）

2. $\vec{n'} \perp \vec{n} \Rightarrow \vec{n'} \cdot \vec{n} = 1\cdot(\lambda+\mu)+1\cdot(\lambda-\mu)+1\cdot(-\lambda+\mu)=0$

$\Rightarrow \lambda+\mu=0$ 不妨取 $\lambda=1, \mu=-1$

平面束方程应用：求投影直线方程



解：

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面.由于 Π' 过 L，可设 Π' 方程为

$$\lambda(x+y-z-1)+\mu(x-y+z+1)=0 \quad \text{（其中}\lambda, \mu\text{ 待定）}$$

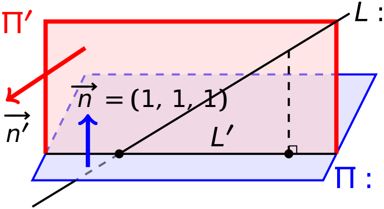
2. $\overrightarrow{n'} \perp \vec{n} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{n'}\cdot\vec{n} = 1\cdot(\lambda+\mu)+1\cdot(\lambda-\mu)+1\cdot(-\lambda+\mu)=0$

$\Rightarrow\; \lambda+\mu=0 \quad$ 不妨取 $\quad \lambda=1, \mu=-1$

$\Rightarrow\; \Pi'$的方程：$y-z-1=0$

平面束方程应用：求投影直线方程

$L: \begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$



解：

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面.由于 Π' 过 L，可设 Π' 方程为

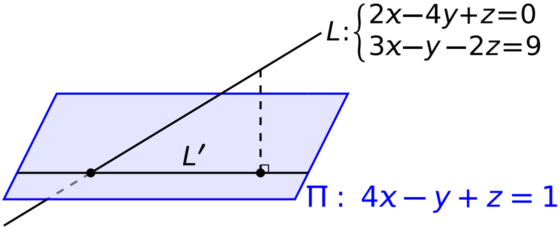
$$\lambda(x+y-z-1)+\mu(x-y+z+1)=0 \quad \text{（其中}\lambda,\mu\text{ 待定）}$$

2. $\vec{n'} \perp \vec{n} \Rightarrow \vec{n'}\cdot\vec{n} = 1\cdot(\lambda+\mu)+1\cdot(\lambda-\mu)+1\cdot(-\lambda+\mu)=0$

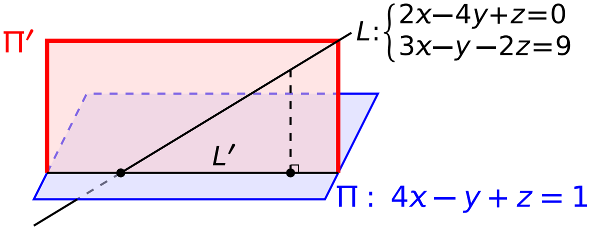
$\Rightarrow \lambda+\mu=0$ 不妨取 $\lambda=1, \mu=-1$

$\Rightarrow \Pi'$的方程：$y-z-1=0$

3. 投影直线 L' 的方程是 $\begin{cases} y-z-1=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

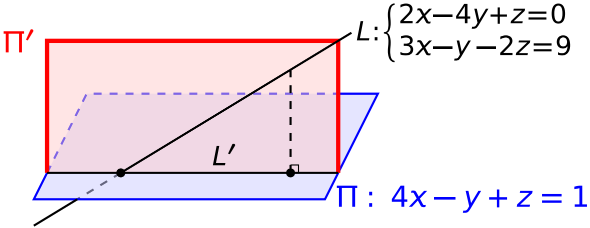


$L:\begin{cases}2x-4y+z=0\\3x-y-2z=9\end{cases}$
L'
$\Pi:\ 4x-y+z=1$



解：

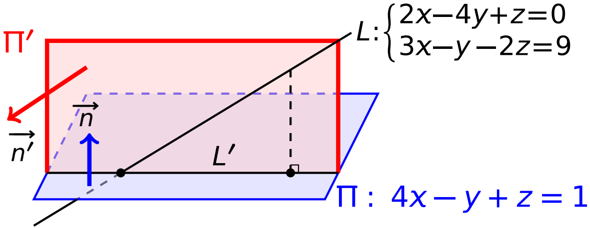
1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面.



解：

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面.由于 Π' 过 L，可设 Π' 方程为

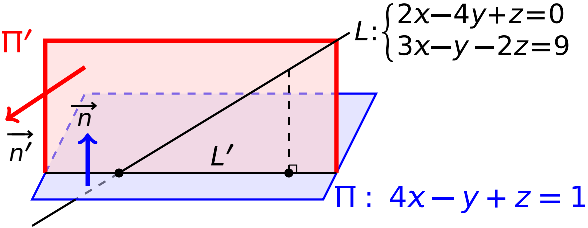
$$\lambda(2x-4y+z)+\mu(3x-y-2z-9)=0 \quad \text{（其中}\lambda, \mu\text{ 待定）}$$



解：

1. 记 Π′ 为 L 和 L' 张成平面.由于 Π′ 过 L，可设 Π′ 方程为

$$\lambda(2x-4y+z)+\mu(3x-y-2z-9)=0$$ （其中λ, μ 待定）

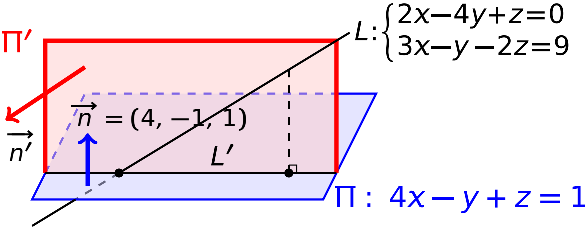


解：

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面.由于 Π' 过 L，可设 Π' 方程为

$$\lambda(2x-4y+z)+\mu(3x-y-2z-9)=0$$ （其中λ,μ 待定）

2. $\vec{n'} \perp \vec{n} \Rightarrow 0=\vec{n'}\cdot\vec{n}$



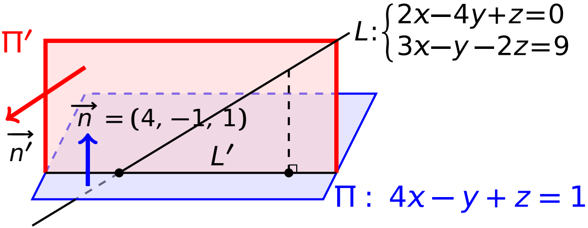
解：

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面.由于 Π' 过 L，可设 Π' 方程为

$$\lambda(2x-4y+z)+\mu(3x-y-2z-9)=0$$ （其中λ, μ 待定）

2. $\overrightarrow{n'} \perp \overrightarrow{n} \Rightarrow 0 = \overrightarrow{n'} \cdot \overrightarrow{n}$

$(2\lambda+3\mu,\ -4\lambda-\mu,\ \lambda-2\mu)=\overrightarrow{n'}$



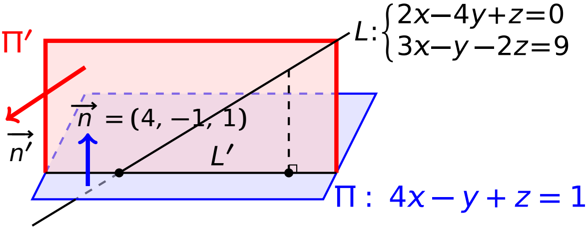
解：

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面.由于 Π' 过 L，可设 Π' 方程为

$$\lambda(2x-4y+z)+\mu(3x-y-2z-9)=0$$ （其中λ,μ 待定）

2. $\overrightarrow{n'}\perp\overrightarrow{n}\ \Rightarrow 0=\overrightarrow{n'}\cdot\overrightarrow{n}$

$(2\lambda+3\mu,\ -4\lambda-\mu,\ \lambda-2\mu)=\overrightarrow{n'}$



解：

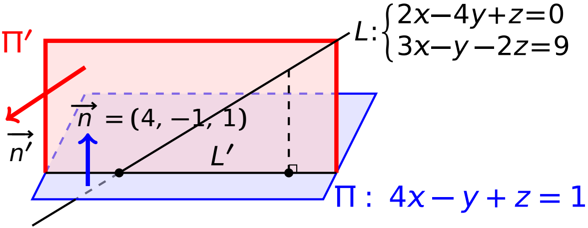
1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面.由于 Π' 过 L，可设 Π' 方程为

$$\lambda(2x-4y+z)+\mu(3x-y-2z-9)=0 \quad \text{（其中}\lambda,\mu\text{ 待定）}$$

2. $\overrightarrow{n'}\perp\overrightarrow{n} \;\Rightarrow 0=\overrightarrow{n'}\cdot\overrightarrow{n}$

$$=4\cdot(2\lambda+3\mu)+(-1)\cdot(-4\lambda-\mu)+1\cdot(\lambda-2\mu)$$

$(2\lambda+3\mu,\ -4\lambda-\mu,\ \lambda-2\mu)=\overrightarrow{n'}$



解：

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面.由于 Π' 过 L，可设 Π' 方程为

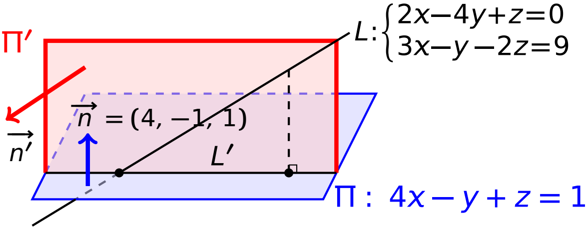
$$\lambda(2x-4y+z)+\mu(3x-y-2z-9)=0 \quad \text{（其中}\lambda,\mu\text{ 待定）}$$

2. $\overrightarrow{n'}\perp\vec{n} \ \Rightarrow 0=\overrightarrow{n'}\cdot\vec{n}$

$$=4\cdot(2\lambda+3\mu)+(-1)\cdot(-4\lambda-\mu)+1\cdot(\lambda-2\mu)$$

$$\Rightarrow 13\lambda+11\mu=0$$

$(2\lambda+3\mu,\ -4\lambda-\mu,\ \lambda-2\mu)=\overrightarrow{n'}$



解：

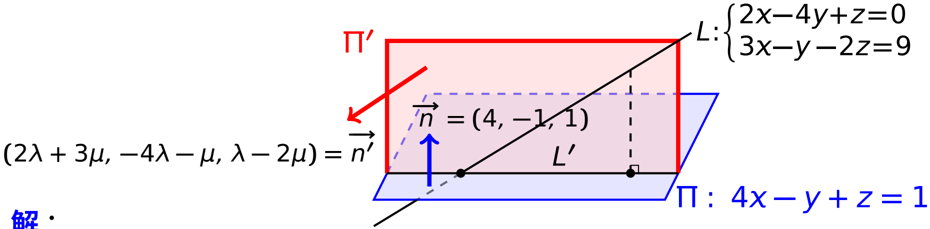
1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面.由于 Π' 过 L，可设 Π' 方程为

$$\lambda(2x-4y+z)+\mu(3x-y-2z-9)=0$$ （其中λ, μ 待定）

2. $\overrightarrow{n'}\perp\overrightarrow{n}\ \Rightarrow 0=\overrightarrow{n'}\cdot\overrightarrow{n}$

$$=4\cdot(2\lambda+3\mu)+(-1)\cdot(-4\lambda-\mu)+1\cdot(\lambda-2\mu)$$

$$\Rightarrow 13\lambda+11\mu=0$$ 不妨取 $\lambda=11,\ \mu=-13$



解：

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面.由于 Π' 过 L，可设 Π' 方程为

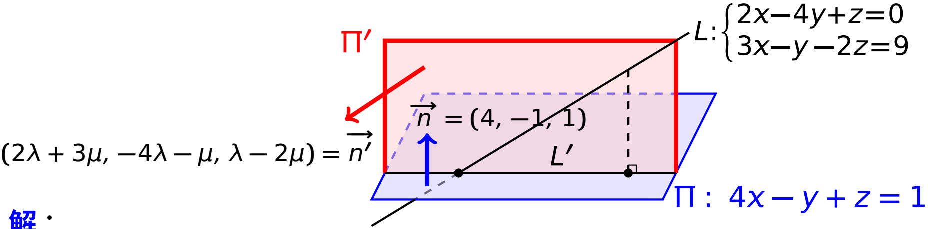
$$\lambda(2x - 4y + z) + \mu(3x - y - 2z - 9) = 0 \quad \text{（其中}\lambda, \mu\text{ 待定）}$$

2. $\vec{n'} \perp \vec{n} \Rightarrow 0 = \vec{n'} \cdot \vec{n}$

$$= 4 \cdot (2\lambda + 3\mu) + (-1) \cdot (-4\lambda - \mu) + 1 \cdot (\lambda - 2\mu)$$

$\Rightarrow 13\lambda + 11\mu = 0$ 不妨取 $\lambda = 11, \mu = -13$

$\Rightarrow \Pi'$的方程：$17x + 31y - 37z - 117 = 0$



解：

1. 记 Π' 为 L 和 L' 张成平面.由于 Π' 过 L，可设 Π' 方程为

$$\lambda(2x-4y+z)+\mu(3x-y-2z-9)=0$$ （其中λ, μ 待定）

2. $\overrightarrow{n'} \perp \overrightarrow{n} \Rightarrow 0 = \overrightarrow{n'} \cdot \overrightarrow{n}$

$$= 4\cdot(2\lambda+3\mu)+(-1)\cdot(-4\lambda-\mu)+1\cdot(\lambda-2\mu)$$

$\Rightarrow 13\lambda+11\mu=0$ 不妨取 $\lambda=11, \mu=-13$

$\Rightarrow \Pi'$的方程：$17x+31y-37z-117=0$

3. 投影直线 L' 的方程是 $\begin{cases} 17x+31y-37z-117=0 \\ 4x-y+z-1=0 \end{cases}$