§5.1　二次型与对称矩阵

数学系　　梁卓滨

2018 - 2019 学年上学期

本节内容

◇ 二次型，二次型与对称矩阵一一对应

♣ 二次型的标准型、规范型

♡ 矩阵的合同关系

二次型：引例

二元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 4x_1 x_2 - 2x_2^2$$

二次型：引例

二元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

二元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

一般地，

$$f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

二次型：引例

二元二次齐次多项式
$$f(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

一般地，
$$f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$
$$= (x_1, x_2)\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

二元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

一般地，

$$f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

$$= (x_1, x_2) \begin{pmatrix} a_{11} & \\ & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

二元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

一般地，

$$f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

$$= (x_1, x_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

二元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

一般地，

$$f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

$$= \underbrace{(x_1, x_2)}_{x^T}\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{x}$$

二次型：引例

二元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

一般地，

$$f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

$$= \underbrace{(x_1, x_2)}_{x^T}\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{x} = x^T A x$$

二次型：引例

二元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

一般地，

$$f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

$$= \underbrace{(x_1, x_2)}_{x^T}\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{x} = x^T A x$$

例

$$f(x_1, x_2) = -3x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 =$$

二次型：引例

二元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

一般地，

$$f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

$$= \underbrace{(x_1, x_2)}_{x^T}\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{x} = x^T A x$$

例

$$f(x_1, x_2) = -3x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

二元二次齐次多项式
$$f(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

一般地，
$$f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$
$$= \underbrace{(x_1, x_2)}_{x^T}\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{x} = x^T A x$$

例
$$f(x_1, x_2) = -3x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} -3 & \\ & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

二元二次齐次多项式
$$f(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

一般地，
$$f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$
$$= \underbrace{(x_1, x_2)}_{x^T}\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{x} = x^T A x$$

例
$$f(x_1, x_2) = -3x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2$$
$$+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2$$
$$+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$$

$$= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2$$
$$+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$$

$$= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2$$
$$+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$$

$$= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \\ & a_{22} & \\ & & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2$$
$$+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$$

$$= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{22} & \\ & & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2$$
$$+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$$

$$= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{22} & a_{23} \\ & & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2$$
$$+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$$

$$= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2$$
$$+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$$

$$= \underbrace{(x_1, x_2, x_3)}_{x^T} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x}$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2$$
$$+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$$

$$= \underbrace{(x_1, x_2, x_3)}_{x^T} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x} = x^T A x$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2$$
$$+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$$

$$= \underbrace{(x_1, x_2, x_3)}_{x^T} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x} = x^T A x$$

例 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_3^2 - 2x_2x_3$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2$$
$$+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$$

$$= \underbrace{(x_1, x_2, x_3)}_{x^T} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x} = x^T A x$$

例 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_3^2 - 2x_2x_3$

$$= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2$$
$$+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$$

$$= \underbrace{(x_1, x_2, x_3)}_{x^T} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x} = x^T A x$$

例 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_3^2 - 2x_2x_3$

$$= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 0 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2$$
$$+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$$

$$= \underbrace{(x_1, x_2, x_3)}_{x^T} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x} = x^T A x$$

例 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_3^2 - 2x_2x_3$

$$= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 \\ + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$$

$$= \underbrace{(x_1, x_2, x_3)}_{x^T} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x} = x^T A x$$

例　$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_3^2 - 2x_2x_3$$

$$= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2$$
$$+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$$

$$= \underbrace{(x_1, x_2, x_3)}_{x^T} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x} = x^T A x$$

例

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_3^2 - 2x_2x_3$$

$$= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \\ & 0 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2$$
$$+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$$

$$= \underbrace{(x_1, x_2, x_3)}_{x^T} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x} = x^T A x$$

例 $\quad f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_3^2 - 2x_2x_3$

$$= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ & 0 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 \\ + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$$

$$= \underbrace{(x_1, x_2, x_3)}_{x^T} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x} = x^T A x$$

例 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_3^2 - 2x_2x_3$

$$= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ & 0 & -1 \\ & & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

三元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2$$
$$+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$$

$$= \underbrace{(x_1, x_2, x_3)}_{x^T} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x} = x^T A x$$

例 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_3^2 - 2x_2x_3$

$$= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

二次型：引例

例 1 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

二次型：引例

例 1 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

例 2 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= $$

二次型：引例

例 1 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

例 2 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$=$$

二次型：引例

例 1 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

例 2 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$=$$

二次型：引例

例1 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

例2 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$=$$

二次型：引例

例 1 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1 x_2 + 3x_1 x_3 + 2x_2^2 + 4x_2 x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

例 2 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$=$$

二次型：引例

例 1 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

例 2 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$=$$

二次型：引例

例 1 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1 x_2 + 3x_1 x_3 + 2x_2^2 + 4x_2 x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

例 2 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$=$$

二次型：引例

例 1 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1 x_2 + 3x_1 x_3 + 2x_2^2 + 4x_2 x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ & 2 & 2 \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

例 2 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$=$$

二次型：引例

例 1 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1 x_2 + 3x_1 x_3 + 2x_2^2 + 4x_2 x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

例 2 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$=$$

二次型：引例

例 1 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1 x_2 + 3x_1 x_3 + 2x_2^2 + 4x_2 x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

例 2 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\quad} x_1^2 + \underline{\ } x_2^2 + \underline{\ } x_3^2 + 2\underline{\quad} x_1 x_2 + 2\underline{\quad} x_1 x_3 + 2\underline{\quad} x_2 x_3$$

二次型：引例

例 1 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

例 2 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{-1}x_1^2 + \underline{}x_2^2 + \underline{}x_3^2 + 2\underline{}x_1x_2 + 2\underline{}x_1x_3 + 2\underline{}x_2x_3$$

二次型：引例

例 1 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

例 2 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{-1}x_1^2 + \underline{2}x_2^2 + \underline{\quad}x_3^2 + 2\underline{\quad\quad}x_1x_2 + 2\underline{\quad\quad}x_1x_3 + 2\underline{\quad\quad}x_2x_3$$

二次型：引例

例 1 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

例 2 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{-1}x_1^2 + \underline{2}x_2^2 + \underline{0}x_3^2 + 2\underline{\quad}x_1x_2 + 2\underline{\quad}x_1x_3 + 2\underline{\quad}x_2x_3$$

二次型：引例

例 1 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

例 2 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{-1}x_1^2 + \underline{2}x_2^2 + \underline{0}x_3^2 + 2\underline{\cdot 1 \cdot}x_1x_2 + 2\underline{\quad}x_1x_3 + 2\underline{\quad}x_2x_3$$

二次型：引例

例 1 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

例 2 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{-1}x_1^2 + \underline{2}x_2^2 + \underline{0}x_3^2 + 2\underline{\cdot 1 \cdot}x_1x_2 + 2\cdot\underline{\frac{1}{2}\cdot}x_1x_3 + 2\underline{\quad}x_2x_3$$

二次型：引例

例1 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

例2 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{-1}x_1^2 + \underline{2}x_2^2 + \underline{0}x_3^2 + 2\underline{\cdot 1 \cdot} x_1x_2 + 2\cdot\underline{\frac{1}{2}}\cdot x_1x_3 + 2\underline{\cdot 0 \cdot} x_2x_3$$

二次型：引例

例 1 给定二次型，写出对称矩阵 A：

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

例 2 给定对称矩阵 A，写出相应二次型：

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{-1}x_1^2 + \underline{2}x_2^2 + \underline{0}x_3^2 + 2\underline{\cdot 1} \cdot x_1x_2 + 2 \cdot \underline{\tfrac{1}{2}} \cdot x_1x_3 + 2\underline{\cdot 0} \cdot x_2x_3$$

$$= -x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_3 + x_1x_3$$

二次型

定义 n 元二次型

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) =\ & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 \quad\ \ + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
& + \cdots\cdots \\
& \qquad\qquad\qquad\quad\ + a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

二次型

n 元二次型

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = {} & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 \quad\ + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
& + \cdots\cdots \\
& \qquad\qquad\qquad + a_{nn}x_n^2 \\
= {} & (x_1, x_2, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

二次型

定义 n 元二次型

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = & \, a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 \quad\;\; + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
& + \cdots\cdots \\
& \qquad\qquad\qquad\quad + a_{nn}x_n^2 \\
= & \, (x_1, x_2, \ldots, x_n)
\begin{pmatrix}
a_{11} & & & \\
& a_{22} & & \\
& & \ddots & \\
& & & a_{nn}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
x_1 \\
x_2 \\
\vdots \\
x_n
\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

二次型

n 元二次型

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) =\ & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 \quad\ \, + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
& + \cdots\cdots \\
& \qquad\qquad\qquad\quad\ + a_{nn}x_n^2 \\
=\ & (x_1, x_2, \ldots, x_n)
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & & \\
& a_{22} & & \\
& & \ddots & \\
& & & a_{nn}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
x_1 \\
x_2 \\
\vdots \\
x_n
\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

二次型

定义 n 元二次型

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n$$

$$+ a_{22}x_2^2 \quad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n$$

$$+ \cdots \cdots$$

$$+ a_{nn}x_n^2$$

$$= (x_1, x_2, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

二次型

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 \quad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
& + \cdots\cdots \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad + a_{nn}x_n^2
\end{aligned}$$

$$= (x_1, x_2, \ldots, x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

二次型

定义 n 元二次型

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 \quad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
& + \cdots\cdots \\
& \qquad\qquad\qquad + a_{nn}x_n^2 \\
= & (x_1, x_2, \ldots, x_n)
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
x_1 \\
x_2 \\
\vdots \\
x_n
\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

二次型

定义 n 元二次型

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 \quad\quad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
& + \cdots\cdots \\
& \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad + a_{nn}x_n^2 \\
= & \underbrace{(x_1, x_2, \ldots, x_n)}_{x^T} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x}
\end{aligned}
$$

二次型

n 元二次型

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) =& a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 \qquad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
& + \cdots\cdots \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad + a_{nn}x_n^2 \\
=& \underbrace{(x_1, x_2, \ldots, x_n)}_{x^T} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x} \\
=& x^T A x
\end{aligned}
$$

二次型

定义 n 元二次型

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = {} & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 \qquad\; + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
& + \cdots\cdots \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad + a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

$$
= \underbrace{(x_1, x_2, \ldots, x_n)}_{x^T} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x}
$$

$$
= x^T A x
$$

注 n 元二次型与对称矩阵, 是一一对应

给定二次型

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n$$
$$+ a_{22}x_2^2 \quad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n$$
$$+ \cdots\cdots$$
$$+ a_{nn}x_n^2$$

给定二次型

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n$$
$$+ a_{22}x_2^2 \quad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n$$
$$+ \cdots\cdots$$
$$+ a_{nn}x_n^2$$

作线性变量代换：

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + \cdots + c_{1n}y_n \\ \vdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

给定二次型

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n$$
$$+ a_{22}x_2^2 \quad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n$$
$$+ \cdots\cdots$$
$$+ a_{nn}x_n^2$$

作线性变量代换:

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + \cdots + c_{1n}y_n \\ \vdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

代入二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 得

$$f = b_{11}y_1^2 + 2b_{12}y_1y_2 + \cdots \qquad (\text{关于}y_1, \cdots, y_n \text{ 的二次型})$$

给定二次型

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 \quad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
& + \cdots\cdots \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad + a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

作线性变量代换：

$$
\begin{cases}
x_1 = c_{11}y_1 + \cdots + c_{1n}y_n \\
\vdots \\
x_n = c_{n1}y_1 + \cdots + c_{nn}y_n
\end{cases}
$$

代入二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 得

$$
f = b_{11}y_1^2 + 2b_{12}y_1y_2 + \cdots \qquad (\text{关于} y_1, \cdots, y_n \text{ 的二次型})
$$

问题：如何选择适当的变量代换 $y_1, y_2, \cdots, y_n$，把 f 化简？

给定二次型

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n$$
$$+ a_{22}x_2^2 \quad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n$$
$$+ \cdots\cdots$$
$$+ a_{nn}x_n^2$$

作线性变量代换：（要求 $C = (c_{ij})$ 可逆矩阵，这样可以反解出 y　　　）

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + \cdots + c_{1n}y_n \\ \vdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

代入二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 得

$$f = b_{11}y_1^2 + 2b_{12}y_1y_2 + \cdots \qquad \text{(关于} y_1, \cdots, y_n \text{ 的二次型)}$$

问题：如何选择适当的变量代换 $y_1, y_2, \cdots, y_n$，把 f 化简？

给定二次型

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n$$
$$+ a_{22}x_2^2 \quad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n$$
$$+ \cdots\cdots$$
$$+ a_{nn}x_n^2$$

作线性变量代换：（要求 $C = (c_{ij})$ 可逆矩阵，这样可以反解出 y ）

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + \cdots + c_{1n}y_n \\ \vdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

代入二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 得

$$f = b_{11}y_1^2 + 2b_{12}y_1y_2 + \cdots \qquad \text{(关于}y_1, \cdots, y_n \text{ 的二次型)}$$

问题：如何选择适当的变量代换 $y_1, y_2, \cdots, y_n$，把 f 化简？

给定二次型

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n$$
$$+ a_{22}x_2^2 \quad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n$$
$$+ \cdots\cdots$$
$$+ a_{nn}x_n^2$$

作线性变量代换：（要求 $C = (c_{ij})$ 可逆矩阵，这样可以反解出 y ）

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + \cdots + c_{1n}y_n \\ \vdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow x = Cy$$

代入二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 得

$$f = b_{11}y_1^2 + 2b_{12}y_1y_2 + \cdots \quad \text{(关于} y_1, \cdots, y_n \text{ 的二次型)}$$

问题：如何选择适当的变量代换 $y_1, y_2, \cdots, y_n$，把 f 化简？

给定二次型

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n$$
$$+ a_{22}x_2^2 \quad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n$$
$$+ \cdots\cdots$$
$$+ a_{nn}x_n^2$$

作线性变量代换：（要求 $C = (c_{ij})$ 可逆矩阵，这样可以反解出 $y = C^{-1}x$）

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + \cdots + c_{1n}y_n \\ \vdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow x = Cy$$

代入二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 得

$$f = b_{11}y_1^2 + 2b_{12}y_1y_2 + \cdots \quad \text{（关于} y_1, \cdots, y_n \text{ 的二次型）}$$

问题：如何选择适当的变量代换 $y_1, y_2, \cdots, y_n$，把 f 化简？

问题：如何选择适当的变量代换 $y_1, y_2, \cdots, y_n$（$x = Cy$），把 f 化简？

问题：如何选择适当的变量代换 $y_1, y_2, \cdots, y_n$（$x = Cy$），把 f 化简？

注意到：
$$f = x^T A x \xrightarrow{\ \ x = Cy\ \ }$$

问题：如何选择适当的变量代换 $y_1, y_2, \cdots, y_n$（$x = Cy$），把 f 化简？

注意到：
$$f = x^T A x \xrightarrow{x=Cy} (Cy)^T A (Cy)$$

问题：如何选择适当的变量代换 $y_1, y_2, \cdots, y_n$（$x = Cy$），把 f 化简？

注意到：
$$f = x^T A x \xrightarrow{\ x=Cy\ } (Cy)^T A (Cy) = y^T C^T$$

问题：如何选择适当的变量代换 $y_1, y_2, \cdots, y_n$（$x = Cy$），把 f 化简？

注意到：
$$f = x^T A x \xmapsto{\ x=Cy\ } (Cy)^T A (Cy) = y^T C^T A C y$$

问题：如何选择适当的变量代换 $y_1, y_2, \cdots, y_n$（$x = Cy$），把 f 化简？

注意到：

$$f = x^T A x \xrightarrow{x = Cy} (Cy)^T A (Cy) = y^T C^T A C y$$

所以上述问题等价于以下问题：

问题′：给定对称矩阵 A，尝试找出可逆矩阵 C 使得

$$C^T A C$$

尽可能简单？

问题：如何选择适当的变量代换 $y_1, y_2, \cdots, y_n$（$x = Cy$），把 f 化简？

注意到：

$$f = x^T A x \xrightarrow{x=Cy} (Cy)^T A(Cy) = y^T C^T A C y$$

所以上述问题等价于以下问题：

问题′：给定对称矩阵 A，尝试找出可逆矩阵 C 使得

$$C^T A C$$

尽可能简单？

回忆：

定理 任意对称矩阵 A，都存在正交矩阵 Q，使得 $Q^T A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

问题：如何选择适当的变量代换 $y_1, y_2, \cdots, y_n$（$x = Cy$），把 f 化简？

注意到：

$$f = x^T A x \xrightarrow{\ x = Cy\ } (Cy)^T A (Cy) = y^T C^T A C y$$

所以上述问题等价于以下问题：

问题$'$：给定对称矩阵 A，尝试找出可逆矩阵 C 使得

$$C^T A C$$

尽可能简单？

回忆：

定理 任意对称矩阵 A，都存在正交矩阵 Q，使得 $Q^T A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

推论 任意二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，都存在非退化线性变换 $x = Qy$，使得

问题：如何选择适当的变量代换 $y_1, y_2, \cdots, y_n$（$x = Cy$），把 f 化简？

注意到：

$$f = x^T A x \xrightarrow{x=Cy} (Cy)^T A (Cy) = y^T C^T A C y$$

所以上述问题等价于以下问题：

问题$'$：给定对称矩阵 A，尝试找出可逆矩阵 C 使得

$$C^T A C$$

尽可能简单？

回忆：

定理 任意对称矩阵 A，都存在正交矩阵 Q，使得 $Q^T A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

推论 任意二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，都存在非退化线性变换 $x = Qy$，使得

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

二次型的标准型

定义 二次型 f 称为标准型，是指

$$f = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_r y_r^2$$

二次型的标准型

定义 二次型 f 称为标准型，是指

$$f = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_r y_r^2$$

其中 $0 \leq r \leq n$,

二次型的标准型

定义 二次型 f 称为标准型，是指

$$f = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_r y_r^2$$

其中 $0 \le r \le n$，$d_1, d_2, \ldots, d_r \ne 0$。

二次型的标准型

定义 二次型 f 称为标准型，是指

$$f = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_r y_r^2$$

其中 $0 \le r \le n$，$d_1, d_2, \ldots, d_r \ne 0$。

注 标准型不唯一。换言之，同一个二次型 f，可以化出不同的标准型。

例 化二次型 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 为标准型

例 化二次型 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 为标准型

解

- f 系数所构成的对称矩阵是：$A = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

例 化二次型 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 为标准型

解

- f 系数所构成的对称矩阵是：$A = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 5 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$

例 化二次型 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 为标准型

解

- f 系数所构成的对称矩阵是: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & \\ & 5 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$

例 化二次型 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 为标准型

解

- f 系数所构成的对称矩阵是：$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ & 5 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$

例 化二次型 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 为标准型

解

- f 系数所构成的对称矩阵是：$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ & 5 & -4 \\ & & 5 \end{pmatrix}$

例 化二次型 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 为标准型

解

- f 系数所构成的对称矩阵是：$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

例 化二次型 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 为标准型

解

- f 系数所构成的对称矩阵是：$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

- 特征方程：$0 = |\lambda I - A|$

例 化二次型 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 为标准型

解

- f 系数所构成的对称矩阵是：$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

- 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 1)^2(\lambda - 10)$

例 化二次型 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 为标准型

解

- f 系数所构成的对称矩阵是：$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

- 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 1)^2(\lambda - 10)$

- $\lambda_1 = 1$（二重）

- $\lambda_3 = 10$

例 化二次型 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 为标准型

解

- f 系数所构成的对称矩阵是：$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

- 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 1)^2(\lambda - 10)$

- $\lambda_1 = 1$（二重）

- $\lambda_3 = 10$

- $x = Qy$，则 $f = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2$

例 化二次型 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 为标准型

解

- f 系数所构成的对称矩阵是：$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

- 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 1)^2(\lambda - 10)$

- $\lambda_1 = 1$（二重），特征向量

$$\begin{cases} \alpha_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\[2em] \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- $\lambda_3 = 10$

- $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x = Qy$，则 $f = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2$

例 化二次型 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 为标准型

解

- f 系数所构成的对称矩阵是：$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

- 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 1)^2 (\lambda - 10)$

- $\lambda_1 = 1$（二重），特征向量

$$
\begin{cases}
\alpha_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\\
\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{cases}
\xrightarrow{\text{正交化}}
\begin{cases}
\beta_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\\
\beta_2 = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 4/5 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{cases}
$$

- $\lambda_3 = 10$

- $\qquad\qquad\qquad\qquad x = Qy，则 f = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2$

例 化二次型 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 为标准型

解

- f 系数所构成的对称矩阵是：$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

- 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 1)^2(\lambda - 10)$

- $\lambda_1 = 1$（二重），特征向量

$$\begin{cases} \alpha_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \xrightarrow{\text{正交化}} \begin{cases} \beta_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \beta_2 = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 4/5 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \xrightarrow{\text{单位化}} \begin{cases} \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \gamma_2 = \frac{5}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2/5 \\ 4/5 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- $\lambda_3 = 10$

- $x = Qy$，则 $f = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2$

例 化二次型 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 为标准型

解

- f 系数所构成的对称矩阵是：$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

- 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 1)^2 (\lambda - 10)$

- $\lambda_1 = 1$（二重），特征向量

$$
\begin{cases} \alpha_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \\ \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \xrightarrow{\text{正交化}} \begin{cases} \beta_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \\ \beta_2 = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 4/5 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \xrightarrow{\text{单位化}} \begin{cases} \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \\ \gamma_2 = \frac{5}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2/5 \\ 4/5 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}
$$

- $\lambda_3 = 10$，特征向量 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

- $\qquad\qquad\qquad\qquad x = Qy$，则 $f = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2$

例 化二次型 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 为标准型

解

- f 系数所构成的对称矩阵是：$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

- 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 1)^2(\lambda - 10)$

- $\lambda_1 = 1$（二重），特征向量

$$\begin{cases} \alpha_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \xrightarrow{\text{正交化}} \begin{cases} \beta_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \beta_2 = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 4/5 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \xrightarrow{\text{单位化}} \begin{cases} \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \gamma_2 = \frac{5}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2/5 \\ 4/5 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- $\lambda_3 = 10$，特征向量 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{单位化}} \gamma_3 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$

- $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x = Qy$，则 $f = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2$

例 化二次型 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 为标准型

解

- f 系数所构成的对称矩阵是：$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

- 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 1)^2(\lambda - 10)$

- $\lambda_1 = 1$（二重），特征向量

$$\begin{cases} \alpha_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \xrightarrow{\text{正交化}} \begin{cases} \beta_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \beta_2 = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 4/5 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \xrightarrow{\text{单位化}} \begin{cases} \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \gamma_2 = \frac{5}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2/5 \\ 4/5 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- $\lambda_3 = 10$，特征向量 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{单位化}} \gamma_3 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$

- 令 $Q = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & 1/3 \\ 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & 2/3 \\ 0 & \sqrt{5}/3 & -2/3 \end{pmatrix}$，$x = Qy$，则 $f = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2$

例 化二次型 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 为标准型

解

- f 系数所构成的对称矩阵是：$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

- 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 1)^2(\lambda - 10)$

- $\lambda_1 = 1$（二重），特征向量

$$\begin{cases} \alpha_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \xrightarrow{\text{正交化}} \begin{cases} \beta_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \beta_2 = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 4/5 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \xrightarrow{\text{单位化}} \begin{cases} \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \gamma_2 = \frac{5}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2/5 \\ 4/5 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- $\lambda_3 = 10$，特征向量 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{单位化}} \gamma_3 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$

- 令 $Q = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & 1/3 \\ 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & 2/3 \\ 0 & \sqrt{5}/3 & -2/3 \end{pmatrix}$，$x = Qy$，则 $f = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2$
  $(y = Q^T x)$

化二次型为标准型的另一方法：配方法

- 想法： $a^2 + 2ab =$

化二次型为标准型的另一方法：配方法

- 想法： $a^2 + 2ab = a^2 + 2ab + b^2 - b^2 =$

化二次型为标准型的另一方法：配方法

- 想法：$a^2 + 2ab = a^2 + 2ab + b^2 - b^2 = (a+b)^2 - b^2$

化二次型为标准型的另一方法：配方法

- 想法： $a^2 + 2ab = a^2 + 2ab + b^2 - b^2 = (a + b)^2 - b^2$

  $a^2 + 2ab + 2ac =$

化二次型为标准型的另一方法：配方法

- 想法： $a^2 + 2ab = a^2 + 2ab + b^2 - b^2 = (a+b)^2 - b^2$

$$a^2 + 2ab + 2ac = a^2 + 2a(b+c)$$

$$=$$

化二次型为标准型的另一方法：配方法

- 想法： $a^2 + 2ab = a^2 + 2ab + b^2 - b^2 = (a+b)^2 - b^2$

$$a^2 + 2ab + 2ac = a^2 + 2a(b+c)$$
$$= a^2 + 2a(b+c) + (b+c)^2 - (b+c)^2$$
$$=$$

化二次型为标准型的另一方法：配方法

- 想法：
$$a^2 + 2ab = a^2 + 2ab + b^2 - b^2 = (a+b)^2 - b^2$$

$$
\begin{aligned}
a^2 + 2ab + 2ac &= a^2 + 2a(b+c) \\
&= a^2 + 2a(b+c) + (b+c)^2 - (b+c)^2 \\
&= (a+b+c)^2 - (b+c)^2
\end{aligned}
$$

化二次型为标准型的另一方法：配方法

- 想法：

$$a^2 + 2ab = a^2 + 2ab + b^2 - b^2 = (a+b)^2 - b^2$$

$$
\begin{aligned}
a^2 + 2ab + 2ac &= a^2 + 2a(b+c) \\
&= a^2 + 2a(b+c) + (b+c)^2 - (b+c)^2 \\
&= (a+b+c)^2 - (b+c)^2
\end{aligned}
$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$=$$

化二次型为标准型的另一方法：配方法

- 想法：
$$a^2 + 2ab = a^2 + 2ab + b^2 - b^2 = (a+b)^2 - b^2$$

$$a^2 + 2ab + 2ac = a^2 + 2a(b+c)$$
$$= a^2 + 2a(b+c) + (b+c)^2 - (b+c)^2$$
$$= (a+b+c)^2 - (b+c)^2$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$
$$= x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3)$$

化二次型为标准型的另一方法：配方法

- 想法：$a^2 + 2ab = a^2 + 2ab + b^2 - b^2 = (a+b)^2 - b^2$

$$a^2 + 2ab + 2ac = a^2 + 2a(b+c)$$
$$= a^2 + 2a(b+c) + (b+c)^2 - (b+c)^2$$
$$= (a+b+c)^2 - (b+c)^2$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$
$$= x_1^2 + 2x_1(x_2+x_3) + (x_2+x_3)^2 - (x_2+x_3)^2$$

化二次型为标准型的另一方法：配方法

- 想法： $a^2 + 2ab = a^2 + 2ab + b^2 - b^2 = (a + b)^2 - b^2$

$$a^2 + 2ab + 2ac = a^2 + 2a(b + c)$$
$$= a^2 + 2a(b + c) + (b + c)^2 - (b + c)^2$$
$$= (a + b + c)^2 - (b + c)^2$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$
$$= x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3) + (x_2 + x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$
$$=$$

化二次型为标准型的另一方法：配方法

- 想法：
$$a^2 + 2ab = a^2 + 2ab + b^2 - b^2 = (a+b)^2 - b^2$$

$$a^2 + 2ab + 2ac = a^2 + 2a(b+c)$$
$$= a^2 + 2a(b+c) + (b+c)^2 - (b+c)^2$$
$$= (a+b+c)^2 - (b+c)^2$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$
$$= x_1^2 + 2x_1(x_2+x_3) + (x_2+x_3)^2 - (x_2+x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$
$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 +$$

化二次型为标准型的另一方法：配方法

- 想法：
$$a^2 + 2ab = a^2 + 2ab + b^2 - b^2 = (a+b)^2 - b^2$$

$$a^2 + 2ab + 2ac = a^2 + 2a(b+c)$$
$$= a^2 + 2a(b+c) + (b+c)^2 - (b+c)^2$$
$$= (a+b+c)^2 - (b+c)^2$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$
$$= x_1^2 + 2x_1(x_2+x_3) + (x_2+x_3)^2 - (x_2+x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$
$$= (x_1+x_2+x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3$$
$$=$$

化二次型为标准型的另一方法：配方法

- 想法：
$$a^2 + 2ab = a^2 + 2ab + b^2 - b^2 = (a+b)^2 - b^2$$

$$a^2 + 2ab + 2ac = a^2 + 2a(b+c)$$
$$= a^2 + 2a(b+c) + (b+c)^2 - (b+c)^2$$
$$= (a+b+c)^2 - (b+c)^2$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$
$$= x_1^2 + 2x_1(x_2+x_3) + (x_2+x_3)^2 - (x_2+x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$
$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3$$
$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2$$
$$=$$

化二次型为标准型的另一方法：配方法

- 想法： $a^2 + 2ab = a^2 + 2ab + b^2 - b^2 = (a+b)^2 - b^2$

$$a^2 + 2ab + 2ac = a^2 + 2a(b+c)$$
$$= a^2 + 2a(b+c) + (b+c)^2 - (b+c)^2$$
$$= (a+b+c)^2 - (b+c)^2$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$
$$= x_1^2 + 2x_1(x_2+x_3) + (x_2+x_3)^2 - (x_2+x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$
$$= (x_1+x_2+x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3$$
$$= (x_1+x_2+x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2$$
$$= (x_1+x_2+x_3)^2 + (x_2+x_3)^2 - x_3^2$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= x_1^2 + 2x_1(x_2+x_3) + (x_2+x_3)^2 - (x_2+x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= x_1^2 + 2x_1(x_2+x_3) + (x_2+x_3)^2 - (x_2+x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = \qquad x_2 + x_3 \\ y_3 = \qquad\qquad x_3 \end{cases}$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3) + (x_2 + x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = \quad\ x_2 + x_3 \\ y_3 = \qquad\quad x_3 \end{cases}$$

则

$$f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= x_1^2 + 2x_1(x_2+x_3) + (x_2+x_3)^2 - (x_2+x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = \qquad x_2 + x_3 \\ y_3 = \qquad\qquad x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \\ x_2 = \\ x_3 = \end{cases}$$

则

$$f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= x_1^2 + 2x_1(x_2+x_3) + (x_2+x_3)^2 - (x_2+x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = \quad\quad x_2 + x_3 \\ y_3 = \quad\quad\quad\quad x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \\ x_2 = \\ x_3 = \quad\quad\quad\quad y_3 \end{cases}$$

则

$$f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= x_1^2 + 2x_1(x_2+x_3) + (x_2+x_3)^2 - (x_2+x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = \qquad x_2 + x_3 \\ y_3 = \qquad\quad x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \\ x_2 = \qquad y_2 - y_3 \\ x_3 = \qquad\qquad y_3 \end{cases}$$

则

$$f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

例1 配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= x_1^2 + 2x_1(x_2+x_3) + (x_2+x_3)^2 - (x_2+x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 + x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_2 - y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

则

$$f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= x_1^2 + 2x_1(x_2+x_3) + (x_2+x_3)^2 - (x_2+x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1+x_2+x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3$$

$$= (x_1+x_2+x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2$$

$$= (x_1+x_2+x_3)^2 + (x_2+x_3)^2 - x_3^2$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = \quad\;\; x_2 + x_3 \\ y_3 = \quad\qquad x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = \quad\;\; y_2 - y_3 \\ x_3 = \quad\qquad y_3 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} y$$

则

$$f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3) + (x_2 + x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = \quad\quad x_2 + x_3 \\ y_3 = \quad\quad\quad\quad x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = \quad\quad y_2 - y_3 \\ x_3 = \quad\quad\quad\quad y_3 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ & & \\ & & \end{pmatrix} y$$

则

$$f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

例1 配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3) + (x_2 + x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = \quad\;\; x_2 + x_3 \\ y_3 = \quad\quad\quad\; x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = \quad\quad y_2 - y_3 \\ x_3 = \quad\quad\quad\; y_3 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} y$$

则

$$f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3) + (x_2 + x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = \quad\quad x_2 + x_3 \\ y_3 = \quad\quad\quad x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = \quad\quad y_2 - y_3 \\ x_3 = \quad\quad\quad y_3 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y$$

则

$$f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3) + (x_2 + x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 + x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_2 - y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C: \ 可逆} y$$

则

$$f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

例 1 配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= x_1^2 + 2x_1(x_2+x_3) + (x_2+x_3)^2 - (x_2+x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = \quad\;\; x_2 + x_3 \\ y_3 = \quad\quad\quad\;\; x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = \quad\;\; y_2 - y_3 \\ x_3 = \quad\quad\quad\;\; y_3 \end{cases} \Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C:\ 可逆} y$$

则

$$f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

例 2 配方法化 $f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$ 为标准型

例 2 配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

$$=$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

$$= x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3)$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

$$= x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

$$= x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2$$

$$+ 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

$$= x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2$$

$$+ 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

$$= x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2$$

$$+ 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

$$= x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2$$

$$\quad + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ y_2 = \quad\quad x_2 \end{cases}$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

$$= x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2$$

$$+ 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ y_2 = \qquad x_2 \end{cases}$$

则

$$f = y_1^2 - 2y_2^2$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

$$= x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2$$

$$+ 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ y_2 = \quad\quad x_2 \\ y_3 = \quad\quad\quad\quad x_3 \end{cases}$$

则

$$f = y_1^2 - 2y_2^2$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

$$= x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2$$

$$\quad + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ y_2 = \qquad x_2 \\ y_3 = \qquad\qquad x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \\ \\ \end{cases}$$

则

$$f = y_1^2 - 2y_2^2$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

$$= x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2$$

$$\quad + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ y_2 = \quad\quad x_2 \\ y_3 = \quad\quad\quad\quad x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \\ x_3 = \quad\quad\quad\quad y_3 \end{cases}$$

则

$$f = y_1^2 - 2y_2^2$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

$$= x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2$$

$$\quad + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ y_2 = \quad\quad x_2 \\ y_3 = \quad\quad\quad\quad x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \quad\quad\quad y_2 \\ x_3 = \quad\quad\quad\quad\quad y_3 \end{cases}$$

则

$$f = y_1^2 - 2y_2^2$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

$$= x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2$$

$$+ 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 - 2y_3 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

则

$$f = y_1^2 - 2y_2^2$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

$$= x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2$$

$$+ 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 - 2y_3 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C：可逆} y$$

则

$$f = y_1^2 - 2y_2^2$$

例 2 配方法化二次型为标准型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

$$= x_1^2 + 2x_1 \cdot (2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2$$

$$\quad + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ y_2 = \quad\quad x_2 \\ y_3 = \quad\quad\quad\quad x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 - 2y_3 \\ x_2 = \quad\quad y_2 \\ x_3 = \quad\quad\quad\quad y_3 \end{cases} \Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C:\ 可逆} y$$

则
$$f = y_1^2 - 2y_2^2$$

例 3 配方法化 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 为标准型

例 3 配方法化二次型为标准型

$f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$

$= $

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

$$=$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\big[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) \qquad\qquad \big]$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right]$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$+ 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$\quad + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$\quad + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$+ 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$+ 3\left[x_2^2 - 2x_2 \cdot \frac{2}{3}x_3 \qquad\qquad\right]$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$\quad + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$\quad + 3\left[x_2^2 - 2x_2 \cdot \frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2\right]$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$\quad + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$\quad\quad + 3\left[x_2^2 - 2x_2 \cdot \frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2\right] - 3(\frac{2}{3}x_3)^2$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$\quad + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$\qquad + 3[x_2^2 - 2x_2 \cdot \frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2] - 3(\frac{2}{3}x_3)^2 + 3x_3^2$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\big[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\big] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$\quad + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\big[x_2^2 - 2x_2 \cdot \frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2\big] - 3(\frac{2}{3}x_3)^2 + 3x_3^2$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$\quad + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3[x_2^2 - 2x_2 \cdot \frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2] - 3(\frac{2}{3}x_3)^2 + 3x_3^2$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

$$= 2[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2] - 2(x_2 - x_3)^2$$
$$\quad + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left[x_2^2 - 2x_2 \cdot \frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2\right] - 3(\frac{2}{3}x_3)^2 + 3x_3^2$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left(x_2 - \frac{2}{3}x_3\right)^2$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$\quad + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left[x_2^2 - 2x_2 \cdot \frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2\right] - 3(\frac{2}{3}x_3)^2 + 3x_3^2$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left(x_2 - \frac{2}{3}x_3\right)^2 + \frac{5}{3}x_3^2$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$
$$\quad + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left[x_2^2 - 2x_2 \cdot \frac{2}{3}x_3 + \left(\frac{2}{3}x_3\right)^2\right] - 3\left(\frac{2}{3}x_3\right)^2 + 3x_3^2$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left(x_2 - \frac{2}{3}x_3\right)^2 + \frac{5}{3}x_3^2$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = \qquad x_2 - \frac{2}{3}x_3 \\ y_3 = \qquad\qquad x_3 \end{cases}$$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$+ 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left[x_2^2 - 2x_2 \cdot \frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2\right] - 3(\frac{2}{3}x_3)^2 + 3x_3^2$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left(x_2 - \frac{2}{3}x_3\right)^2 + \frac{5}{3}x_3^2$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = \quad\ \ x_2 - \frac{2}{3}x_3 \\ y_3 = \qquad\qquad x_3 \end{cases}$$

则 $f = 2y_1^2 + 3y_2^2 + \frac{5}{3}y_3^2$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\big[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\big] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$\quad + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\big[x_2^2 - 2x_2 \cdot \frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2\big] - 3(\frac{2}{3}x_3)^2 + 3x_3^2$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\big(x_2 - \frac{2}{3}x_3\big)^2 + \frac{5}{3}x_3^2$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = \quad\;\; x_2 - \frac{2}{3}x_3 \\ y_3 = \quad\quad\;\; x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \\ \\ x_3 = \quad\quad\quad y_3 \end{cases}$$

则 $f = 2y_1^2 + 3y_2^2 + \frac{5}{3}y_3^2$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$\quad + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left[x_2^2 - 2x_2 \cdot \frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2\right] - 3(\frac{2}{3}x_3)^2 + 3x_3^2$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left(x_2 - \frac{2}{3}x_3\right)^2 + \frac{5}{3}x_3^2$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = \quad\quad x_2 - \frac{2}{3}x_3 \\ y_3 = \quad\quad\quad x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \quad\quad y_2 + \frac{2}{3}y_3 \\ x_3 = \quad\quad\quad y_3 \end{cases}$$

则 $f = 2y_1^2 + 3y_2^2 + \frac{5}{3}y_3^2$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\left[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$\qquad + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left[x_2^2 - 2x_2 \cdot \frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2\right] - 3(\frac{2}{3}x_3)^2 + 3x_3^2$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left(x_2 - \frac{2}{3}x_3\right)^2 + \frac{5}{3}x_3^2$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = \quad\;\; x_2 - \frac{2}{3}x_3 \\ y_3 = \qquad\qquad x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + \frac{1}{3}y_3 \\ x_2 = \quad\;\; y_2 + \frac{2}{3}y_3 \\ x_3 = \qquad\qquad y_3 \end{cases}$$

则 $f = 2y_1^2 + 3y_2^2 + \frac{5}{3}y_3^2$

例 3 配方法化二次型为标准型

$$f = \underline{2x_1^2} + 5x_2^2 + 5x_3^2 + \underline{4x_1x_2 - 4x_1x_3} - 8x_2x_3$$

$$= 2\big[x_1^2 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\big] - 2(x_2 - x_3)^2$$

$$\quad + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\big[x_2^2 - 2x_2 \cdot \frac{2}{3}x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2\big] - 3(\frac{2}{3}x_3)^2 + 3x_3^2$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\big(x_2 - \frac{2}{3}x_3\big)^2 + \frac{5}{3}x_3^2$$

作线性变量代换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = \quad\quad x_2 - \frac{2}{3}x_3 \\ y_3 = \quad\quad\quad x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + \frac{1}{3}y_3 \\ x_2 = \quad\quad y_2 + \frac{2}{3}y_3 \\ x_3 = \quad\quad\quad y_3 \end{cases} \Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C:\ 可逆} y$$

则 $f = 2y_1^2 + 3y_2^2 + \frac{5}{3}y_3^2$

对 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 采取两种方法化为标准型：

对 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 采取两种方法化为标准型：

- **方法一**：求系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值（$\lambda = 1, 1, 10$）、

  特征向量

对 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 采取两种方法化为标准型:

- **方法一**:求系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值($\lambda = 1, 1, 10$)、

  特征向量 $\xrightarrow{\text{单位正交化}}$

对 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 采取两种方法化为标准型：

- **方法一**：求系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值（$\lambda = 1,\, 1,\, 10$）、

  特征向量 $\xrightarrow{\text{单位正交化}}$ 得到正交矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & 1/3 \\ 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & 2/3 \\ 0 & \sqrt{5}/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

对 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 采取两种方法化为标准型：

- **方法一**：求系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值（$\lambda = 1,\ 1,\ 10$）、

  特征向量 $\xrightarrow{\text{单位正交化}}$ 得到正交矩阵

  $$Q = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & 1/3 \\ 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & 2/3 \\ 0 & \sqrt{5}/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

  令 $x = Qy$，则

对 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 采取两种方法化为标准型：

- **方法一**：求系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值（$\lambda = 1, 1, 10$）、

  特征向量 $\xrightarrow{\text{单位正交化}}$ 得到正交矩阵

  $$Q = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & 1/3 \\ 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & 2/3 \\ 0 & \sqrt{5}/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

  令 $x = Qy$，则

  $$f = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2$$

对 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 采取两种方法化为标准型：

- **方法一**：求系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值（$\lambda = 1,\ 1,\ 10$）、

  特征向量 $\xrightarrow{\text{单位正交化}}$ 得到正交矩阵

  $$Q = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & 1/3 \\ 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & 2/3 \\ 0 & \sqrt{5}/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

  令 $x = Qy$，则

  $$f = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2$$

- **方法二**：配方法

对 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 采取两种方法化为标准型：

- **方法一**：求系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值（$\lambda = 1,\ 1,\ 10$）、

  特征向量 $\xrightarrow{\text{单位正交化}}$ 得到正交矩阵

  $$Q = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & 1/3 \\ 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & 2/3 \\ 0 & \sqrt{5}/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

  令 $x = Qy$，则

  $$f = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2$$

- **方法二**：配方法

  $$f = 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left(x_2 - \frac{2}{3}x_3\right)^2 + \frac{5}{3}x_3^2$$

对 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 采取两种方法化为标准型：

- **方法一**：求系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值（$\lambda = 1,\, 1,\, 10$）、

  特征向量 $\xrightarrow{\text{单位正交化}}$ 得到正交矩阵

  $$Q = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & 1/3 \\ 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & 2/3 \\ 0 & \sqrt{5}/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

  令 $x = Qy$，则

  $$f = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2$$

- **方法二**：配方法

  $$f = 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left(x_2 - \frac{2}{3}x_3\right)^2 + \frac{5}{3}x_3^2 = 2y_1^2 + 3y_2^2 + \frac{5}{3}y_3^2$$

对 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 采取两种方法化为标准型：

- **方法一**：求系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值（$\lambda = 1, 1, 10$）、

  特征向量 $\xrightarrow{\text{单位正交化}}$ 得到正交矩阵

  $$Q = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & 1/3 \\ 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & 2/3 \\ 0 & \sqrt{5}/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

  令 $x = Qy$，则

  $$f = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2$$

- **方法二**：配方法

  $$f = 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left(x_2 - \frac{2}{3}x_3\right)^2 + \frac{5}{3}x_3^2 = 2y_1^2 + 3y_2^2 + \frac{5}{3}y_3^2$$

注 标准型不唯一

设二次型

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n$$
$$+ a_{22}x_2^2 \quad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n$$
$$+ \cdots\cdots$$
$$+ a_{nn}x_n^2$$

的一个标准型是

$$f = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ry_r^2$$

其中 $0 \le r \le n$，$d_1, d_2, \ldots, d_r \ne 0$。

设二次型

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n$$
$$+ a_{22}x_2^2 \quad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n$$
$$+ \cdots\cdots$$
$$+ a_{nn}x_n^2$$

的一个标准型是

$$f = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ry_r^2$$

其中 $0 \le r \le n$，$d_1, d_2, \ldots, d_r \ne 0$。则：

定理 $r = r(A)$

设二次型

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n$$
$$+ a_{22}x_2^2 \quad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n$$
$$+ \cdots\cdots$$
$$+ a_{nn}x_n^2$$

的一个标准型是

$$f = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ry_r^2$$

其中 $0 \le r \le n$，$d_1, d_2, \ldots, d_r \ne 0$。则：

定理 $r = r(A)$

证明

$$A \qquad \begin{pmatrix} d_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

设二次型

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n$$
$$+ a_{22}x_2^2 \quad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n$$
$$+ \cdots\cdots$$
$$+ a_{nn}x_n^2$$

的一个标准型是

$$f = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_r y_r^2$$

其中 $0 \le r \le n$，$d_1, d_2, \ldots, d_r \ne 0$。则：

定理 $r = r(A)$

证明 设该非退化线性变换为 $x = Cy$，其中 C 是可逆矩阵。

$$A \qquad \begin{pmatrix} d_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

设二次型

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n$$
$$+ a_{22}x_2^2 \quad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n$$
$$+ \cdots\cdots$$
$$+ a_{nn}x_n^2$$

的一个标准型是

$$f = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ry_r^2$$

其中 $0 \leq r \leq n$, $d_1, d_2, \ldots, d_r \neq 0$。则：

定理 $r = r(A)$

证明 设该非退化线性变换为 $x = Cy$，其中 C 是可逆矩阵。注意到

$$C^T A C = \begin{pmatrix} d_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

设二次型

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n$$
$$+ a_{22}x_2^2 \quad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n$$
$$+ \cdots\cdots$$
$$+ a_{nn}x_n^2$$

的一个标准型是

$$f = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ry_r^2$$

其中 $0 \le r \le n$，$d_1, d_2, \ldots, d_r \ne 0$。则：

定理 $r = r(A)$

证明 设该非退化线性变换为 $x = Cy$，其中 C 是可逆矩阵。注意到

$$C^TAC = \begin{pmatrix} d_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} =: D$$

设二次型

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n$$
$$+ a_{22}x_2^2 \quad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n$$
$$+ \cdots\cdots$$
$$+ a_{nn}x_n^2$$

的一个标准型是

$$f = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ry_r^2$$

其中 $0 \le r \le n$，$d_1, d_2, \ldots, d_r \ne 0$。则：

定理 $r = r(A)$

证明 设该非退化线性变换为 $x = Cy$，其中 C 是可逆矩阵。注意到

$$C^T A C = \begin{pmatrix} d_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} =: D$$

所以 $r(A) = r(D)$

设二次型

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n$$
$$+ a_{22}x_2^2 \quad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n$$
$$+ \cdots\cdots$$
$$+ a_{nn}x_n^2$$

的一个标准型是

$$f = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ry_r^2$$

其中 $0 \le r \le n$，$d_1, d_2, \ldots, d_r \ne 0$。则：

定理 $r = r(A)$

证明 设该非退化线性变换为 $x = Cy$，其中 C 是可逆矩阵。注意到

$$C^T A C = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & d_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} =: D$$

所以 $r(A) = r(D) = r$

设二次型

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n$$
$$+ a_{22}x_2^2 \quad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n$$
$$+ \cdots\cdots$$
$$+ a_{nn}x_n^2$$

的一个标准型是

$$f = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ry_r^2$$

其中 $0 \le r \le n$，$d_1, d_2, \ldots, d_r \neq 0$。则：

定理 $r = r(A)$，并且 $d_1, \ldots, d_r$ 中正、负数的个数唯一。

证明 设该非退化线性变换为 $x = Cy$，其中 C 是可逆矩阵。注意到

$$C^T A C = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & d_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} =: D$$

所以 $r(A) = r(D) = r$

暨南大学
JINAN UNIVERSITY

设二次型

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n$$
$$+ a_{22}x_2^2 \quad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n$$
$$+ \cdots\cdots$$
$$+ a_{nn}x_n^2$$

的一个标准型是

$$f = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_r y_r^2$$

其中 $0 \le r \le n$, $d_1, d_2, \ldots, d_r \ne 0$。则:

定理 $r = r(A)$,并且 $d_1, \ldots, d_r$ 中正、负数的个数唯一。

证明 设该非退化线性变换为 $x = Cy$,其中 C 是可逆矩阵。注意到

$$C^T A C = \begin{pmatrix} d_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} =: D$$

所以 $r(A) = r(D) = r$。(第二个结论证明略)

设二次型

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n$$
$$+ a_{22}x_2^2 \quad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n$$
$$+ \cdots\cdots$$
$$+ a_{nn}x_n^2$$

的一个标准型是

$$f = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ry_r^2$$

其中 $0 \le r \le n$，$d_1, d_2, \ldots, d_r \ne 0$。则：

定理 $r = r(A)$，并且 $d_1, \ldots, d_r$ 中正、负数的个数唯一。

设二次型

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n$$
$$+ a_{22}x_2^2 \quad + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n$$
$$+ \cdots\cdots$$
$$+ a_{nn}x_n^2$$

的一个标准型是

$$f = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ry_r^2$$

其中 $0 \le r \le n$，$d_1, d_2, \ldots, d_r \ne 0$。则：

定理 $r = r(A)$，并且 $d_1, \ldots, d_r$ 中正、负数的个数唯一。

定义

1. 正惯性指标：$d_1, \ldots, d_r$ 中正数的个数

2. 负惯性指标：$d_1, \ldots, d_r$ 中负数的个数

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

正惯性指标 = __；负惯性指标 = __

例 2

$$f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

正惯性指标 = __；负惯性指标 = __

例 1

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$
$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2$$

正惯性指标 = _；负惯性指标 = _

例 2

$$f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

正惯性指标 = _；负惯性指标 = _

例 1

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2$$

$$= y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

正惯性指标 = __；负惯性指标 = __

例 2

$$f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

正惯性指标 = __；负惯性指标 = __

例 1

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2$$

$$= y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

所以正惯性指标 = $\underline{2}$；负惯性指标 = ＿

例 2

$$f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

正惯性指标 = ＿；负惯性指标 = ＿

例 1

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$
$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2$$
$$= y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

所以正惯性指标 = $\underline{2}$；负惯性指标 = $\underline{1}$

例 2

$$f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

正惯性指标 = __；负惯性指标 = __

例 1

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$
$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2$$
$$= y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

所以正惯性指标 = 2；负惯性指标 = 1

例 2

$$f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$
$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

正惯性指标 = ＿；负惯性指标 = ＿

例 1

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$
$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2$$
$$= y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

所以正惯性指标 $= \underline{2}$；负惯性指标 $= \underline{1}$

例 2

$$f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$
$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$
$$= y_1^2 - 2y_2^2$$

正惯性指标 $= \underline{}$；负惯性指标 $= \underline{}$

例 1

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$
$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2$$
$$= y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

所以正惯性指标 = $\underline{2}$；负惯性指标 = $\underline{1}$

例 2

$$f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$
$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$
$$= y_1^2 - 2y_2^2$$

所以正惯性指标 = $\underline{1}$；负惯性指标 = $\underline{\ \ }$

例 1

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$
$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2$$
$$= y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

所以正惯性指标 $= \underline{2}$; 负惯性指标 $= \underline{1}$

例 2

$$f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$
$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$
$$= y_1^2 - 2y_2^2$$

所以正惯性指标 $= \underline{1}$; 负惯性指标 $= \underline{1}$

二次型的规范型

定理 任意二次型 $f(x_1, \ldots, x_n)$ 都可以通过非退化线性变换

$$x = Cy$$

化为

$$f = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_r y_r^2$$

二次型的规范型

定理 任意二次型 $f(x_1, \ldots, x_n)$ 都可以通过非退化线性变换

$$x = Cy$$

化为

$$f = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2$$

二次型的规范型

定理 任意二次型 $f(x_1, \ldots, x_n)$ 都可以通过非退化线性变换

$$x = Cy$$

化为

$$f = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2$$

$$\begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$$

二次型的规范型

定理 任意二次型 $f(x_1, \ldots, x_n)$ 都可以通过非退化线性变换

$$x = Cy$$

化为

$$f = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2$$

$$A \qquad \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$$

二次型的规范型

定理 任意二次型 $f(x_1, \ldots, x_n)$ 都可以通过非退化线性变换

$$x = Cy$$

化为

$$f = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2$$

$$C^T A C = \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$$

二次型的规范型

定理 任意二次型 $f(x_1, \ldots, x_n)$ 都可以通过非退化线性变换

$$x = Cy$$

化为

$$f = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2$$

也就是，任意对称矩阵 A，都存在可逆矩阵 C，使得

$$C^T A C = \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$$

二次型的规范型

定理 任意二次型 $f(x_1, \ldots, x_n)$ 都可以通过非退化线性变换

$$x = Cy$$

化为

$$f = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2 \qquad \text{(规范型)}$$

也就是，任意对称矩阵 A，都存在可逆矩阵 C，使得

$$C^T A C = \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$$

二次型的规范型

定理 任意二次型 $f(x_1, \ldots, x_n)$ 都可以通过非退化线性变换

$$x = Cy$$

化为

$$f = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2 \qquad \text{(规范型)}$$

也就是，任意对称矩阵 A，都存在可逆矩阵 C，使得

$$C^T A C = \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$$

注
- $r = r(A)$，$p =$ 正惯性指标，$r - p =$ 负惯性指标

二次型的规范型

定理 任意二次型 $f(x_1, \ldots, x_n)$ 都可以通过非退化线性变换

$$x = Cy$$

化为

$$f = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2 \qquad (\text{规范型})$$

也就是，任意对称矩阵 A，都存在可逆矩阵 C，使得

$$C^T A C = \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$$

注
- $r = r(A)$，$p = $ 正惯性指标，$r - p = $ 负惯性指标
- p 是由 A 唯一确定的

二次型的规范型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

配方法

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

二次型的规范型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

配方法

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

$$(\sqrt{2}x_2)^2$$

二次型的规范型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

配方法

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - (\sqrt{2}x_2)^2$$

二次型的规范型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

配方法

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - (\sqrt{2}x_2)^2$$

$$= y_1^2 - y_2^2$$

二次型的规范型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

配方法

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - (\sqrt{2}x_2)^2$$

变量代换 $y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x$

$$= y_1^2 - y_2^2$$

二次型的规范型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

配方法

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - (\sqrt{2}x_2)^2$$

变量代换 $y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -2 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y$

$$= y_1^2 - y_2^2$$

二次型的规范型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

配方法

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - (\sqrt{2}x_2)^2$$

变量代换 $y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x \Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -2 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C} y$

$$= y_1^2 - y_2^2$$

二次型的规范型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

配方法

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - (\sqrt{2}x_2)^2$$

变量代换 $y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x \Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -2 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C} y$

$$= y_1^2 - y_2^2$$

注

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

二次型的规范型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

配方法

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - (\sqrt{2}x_2)^2$$

变量代换 $y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x \Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -2 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C} y$$

$$= y_1^2 - y_2^2$$

注

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \qquad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

二次型的规范型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

配方法

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - (\sqrt{2}x_2)^2$$

变量代换 $y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x \Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -2 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C} y$

$$= y_1^2 - y_2^2$$

注

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C^T} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -2 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

二次型的规范型

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$$

配方法

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - (\sqrt{2}x_2)^2$$

变量代换 $y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x \Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -2 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C} y$

$$= y_1^2 - y_2^2$$

注 特别地，找到了可逆阵 C，使得

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C^T} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -2 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

二次型的规范型

$$f = x_1 x_2 - x_1 x_3 + 2 x_2 x_3 + x_3^2$$

配方法

$$= \frac{3}{4} x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 + (-\frac{1}{2} x_1 + x_2 + x_3)^2$$

二次型的规范型

$$f = x_1 x_2 - x_1 x_3 + 2x_2 x_3 + x_3^2$$

配方法

$$= \frac{3}{4}x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 + (-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3)^2$$

$$= (\frac{\sqrt{3}}{2}x_1)^2$$

二次型的规范型

$$f = x_1 x_2 - x_1 x_3 + 2x_2 x_3 + x_3^2$$

配方法

$$= \frac{3}{4} x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 + (-\frac{1}{2} x_1 + x_2 + x_3)^2$$

$$= (\frac{\sqrt{3}}{2} x_1)^2 + (-\frac{1}{2} x_1 + x_2 + x_3)^2$$

二次型的规范型

$$f = x_1 x_2 - x_1 x_3 + 2x_2 x_3 + x_3^2$$

配方法

$$= \frac{3}{4} x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 + (-\frac{1}{2} x_1 + x_2 + x_3)^2$$

$$= (\frac{\sqrt{3}}{2} x_1)^2 + (-\frac{1}{2} x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_1 - x_2)^2$$

二次型的规范型

$$f = x_1 x_2 - x_1 x_3 + 2x_2 x_3 + x_3^2$$

配方法

$$= \frac{3}{4} x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 + (-\frac{1}{2} x_1 + x_2 + x_3)^2$$

$$= (\frac{\sqrt{3}}{2} x_1)^2 + (-\frac{1}{2} x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_1 - x_2)^2 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

二次型的规范型

$$f = x_1 x_2 - x_1 x_3 + 2x_2 x_3 + x_3^2$$

配方法

$$= \frac{3}{4} x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 + (-\frac{1}{2} x_1 + x_2 + x_3)^2$$

$$= (\frac{\sqrt{3}}{2} x_1)^2 + (-\frac{1}{2} x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_1 - x_2)^2 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

变量代换 $y = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x$

二次型的规范型

$$f = x_1 x_2 - x_1 x_3 + 2x_2 x_3 + x_3^2$$

配方法

$$= \frac{3}{4} x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 + (-\frac{1}{2} x_1 + x_2 + x_3)^2$$

$$= (\frac{\sqrt{3}}{2} x_1)^2 + (-\frac{1}{2} x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_1 - x_2)^2 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

变量代换 $y = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 2/\sqrt{3} & 0 & -1 \\ -1/\sqrt{3} & 1 & 1 \end{pmatrix} y$

二次型的规范型

$$f = x_1 x_2 - x_1 x_3 + 2x_2 x_3 + x_3^2$$

配方法

$$= \frac{3}{4} x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 + (-\frac{1}{2} x_1 + x_2 + x_3)^2$$

$$= (\frac{\sqrt{3}}{2} x_1)^2 + (-\frac{1}{2} x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_1 - x_2)^2 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

变量代换 $y = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x \Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} 2/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 2/\sqrt{3} & 0 & -1 \\ -1/\sqrt{3} & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{C} y$

二次型的规范型

$$f = x_1 x_2 - x_1 x_3 + 2x_2 x_3 + x_3^2$$

配方法

$$= \frac{3}{4}x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 + (-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3)^2$$

$$= (\frac{\sqrt{3}}{2}x_1)^2 + (-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_1 - x_2)^2 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

变量代换 $y = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x \Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} 2/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 2/\sqrt{3} & 0 & -1 \\ -1/\sqrt{3} & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{C} y$

注

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

二次型的规范型

$f = x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$

配方法

$$= \frac{3}{4}x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 + (-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3)^2$$

$$= (\frac{\sqrt{3}}{2}x_1)^2 + (-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_1 - x_2)^2 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

变量代换 $y = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x \Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} 2/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 2/\sqrt{3} & 0 & -1 \\ -1/\sqrt{3} & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{C} y$

注

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \qquad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

二次型的规范型

$f = x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$

配方法

$$= \frac{3}{4}x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 + (-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3)^2$$

$$= (\frac{\sqrt{3}}{2}x_1)^2 + (-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_1 - x_2)^2 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

变量代换 $y = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x \Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} 2/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 2/\sqrt{3} & 0 & -1 \\ -1/\sqrt{3} & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{C} y$

注

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{3} \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{C^T} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 2/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{3} & -1 & 1 \\ 2/\sqrt{3} & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{C} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

二次型的规范型

$f = x_1 x_2 - x_1 x_3 + 2 x_2 x_3 + x_3^2$

配方法

$$= \frac{3}{4} x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 + (-\frac{1}{2} x_1 + x_2 + x_3)^2$$

$$= (\frac{\sqrt{3}}{2} x_1)^2 + (-\frac{1}{2} x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_1 - x_2)^2 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

变量代换 $y = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x \Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} 2/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 2/\sqrt{3} & 0 & -1 \\ -1/\sqrt{3} & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{C} y$

注 特别地，找到了可逆阵 C，使得

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{3} \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{C^T} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 2/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{3} & -1 & 1 \\ 2/\sqrt{3} & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{C} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

合同，合同的等价条件

定义 设 A, B 为两个 n 阶方阵，若存在可逆 n 阶方阵 C，使得

$$C^T A C = B$$

则称 A 合同于 B，记为 $A \simeq B$

合同，合同的等价条件

定义 设 A, B 为两个 n 阶方阵，若存在可逆 n 阶方阵 C，使得

$$C^T A C = B$$

则称 A 合同于 B，记为 $A \simeq B$

定理 任意对称矩阵 A，都成立

$$A \simeq \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$$

合同，合同的等价条件

定义 设 A, B 为两个 n 阶方阵，若存在可逆 n 阶方阵 C，使得

$$C^T A C = B$$

则称 A 合同于 B，记为 $A \simeq B$

定理 任意对称矩阵 A，都成立

$$A \simeq \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$$

定理 设 A, B 为对称矩阵，则 $A \simeq B$ 的充分必要条件是 A, B 具有相同的规范形（也就是，秩、正惯性指标都相等）

合同，合同的等价条件

定义 设 A, B 为两个 n 阶方阵，若存在可逆 n 阶方阵 C，使得

$$C^T A C = B$$

则称 A 合同于 B，记为 $A \simeq B$

定理 任意对称矩阵 A，都成立

$$A \simeq \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$$

定理 设 A, B 为对称矩阵，则 $A \simeq B$ 的充分必要条件是 A, B 具有相同的规范形（也就是，秩、正惯性指标都相等）

证明 （练习）