第 11 章 c：积分路径无关；格林公式

数学系　梁卓滨

2016-2017 学年 II

Outline

1. 保守向量场；积分路径无关性

2. 格林公式

We are here now...

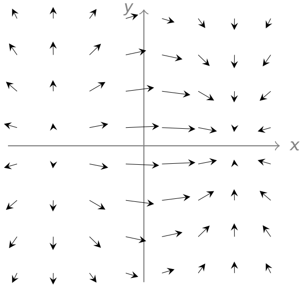
1. 保守向量场；积分路径无关性

2. 格林公式

保守场

定义 设向量场 $F = (P, Q)$ 定义在平面区域 D 上。

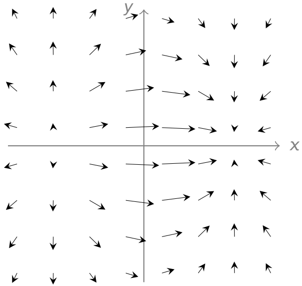
$F = (P, Q)$



保守场

定义 设向量场 $F=(P,Q)$ 定义在平面区域 D 上。称 F 为**保守场**，是指对 F 的曲线积分是与路径无关。

$F=(P,Q)$

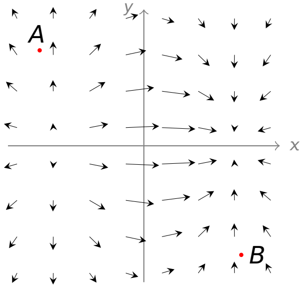


保守场

定义 设向量场 $F = (P, Q)$ 定义在平面区域 D 上。称 F 为保守场，是指对 F 的曲线积分是与路径无关。即：

- 对于 D 内任意指定的两点 A, B，以及

$F = (P, Q)$

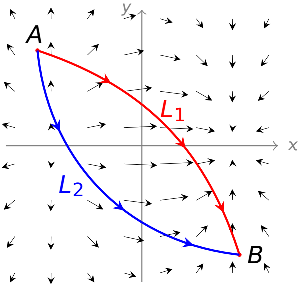


保守场

定义 设向量场 $F = (P, Q)$ 定义在平面区域 D 上。称 F 为**保守场**，是指对 F 的曲线积分是与路径无关。即：

- 对于 D 内任意指定的两点 A, B，以及
- D 内从点 A 到点 B 的任意两条有向曲线 L_1, L_2，

$F = (P, Q)$



保守场

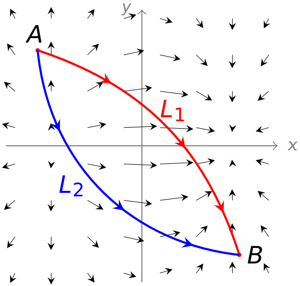
定义 设向量场 $F=(P,Q)$ 定义在平面区域 D 上。称 F 为保守场，是指对 F 的曲线积分是与路径无关。即：

- 对于 D 内任意指定的两点 A, B，以及
- D 内从点 A 到点 B 的任意两条有向曲线 L_1, L_2，

都成立

$$\int_{L_1} Pdx+Qdy=\int_{L_2} Pdx+Qdy.$$

$F=(P,Q)$



保守场

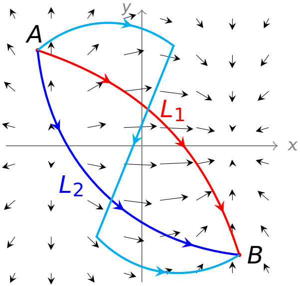
定义 设向量场 $F=(P,Q)$ 定义在平面区域 D 上。称 F 为保守场，是指对 F 的曲线积分是与路径无关。即：

- 对于 D 内任意指定的两点 A, B，以及
- D 内从点 A 到点 B 的任意两条有向曲线 L_1, L_2，

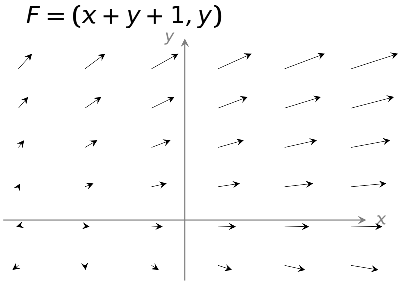
都成立

$$\int_{L_1} Pdx+Qdy=\int_{L_2} Pdx+Qdy.$$

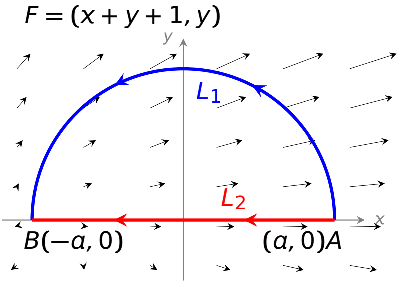
$F=(P,Q)$



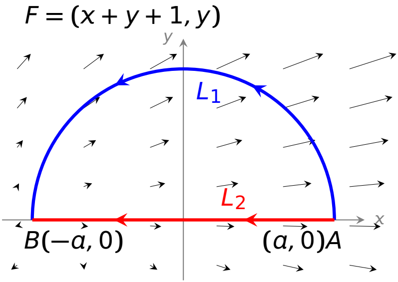
例 设 $F = (x + y + 1, y)$ 是平面上向量场，如图



例 设 $F=(x+y+1,\ y)$ 是平面上向量场，如图



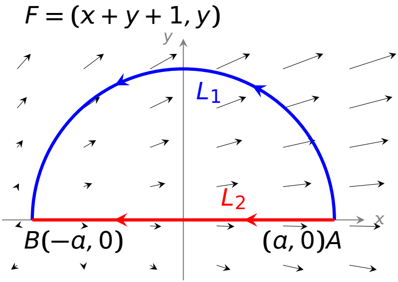
例 设 $F = (x + y + 1, y)$ 是平面上向量场，如图



考虑对向量场 F 的曲线积分

$$I_i = \int_{L_i} (x + y + 1)dx + ydy, \qquad (i = 1, 2)$$

例 设 $F=(x+y+1,\ y)$ 是平面上向量场，如图



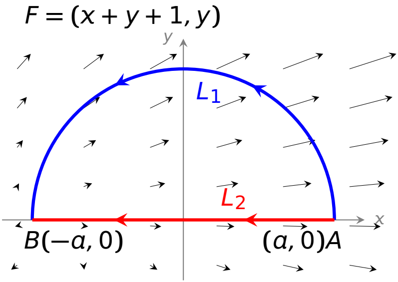
考虑对向量场 F 的曲线积分

$$I_i=\int_{L_i}(x+y+1)dx+ydy,\qquad (i=1,2)$$

计算知

$$I_1=-\frac{1}{2}\pi a^2-2a,\quad I_2=-2a$$

例 设 $F=(x+y+1,\ y)$ 是平面上向量场，如图



考虑对向量场 F 的曲线积分

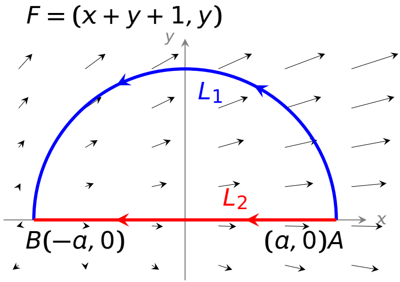
$$I_i=\int_{L_i}(x+y+1)dx+ydy, \qquad (i=1,2)$$

计算知

$$I_1=-\frac{1}{2}\pi a^2-2a, \quad I_2=-2a$$

可见 $I_1\neq I_2$。

例 设 $F=(x+y+1,\ y)$ 是平面上向量场，如图



考虑对向量场 F 的曲线积分

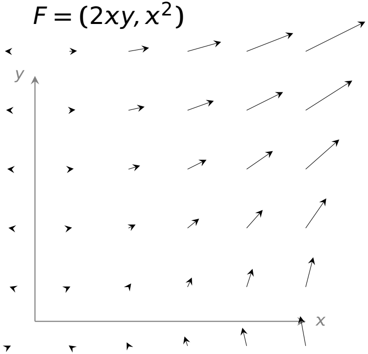
$$I_i=\int_{L_i}(x+y+1)dx+ydy,\qquad (i=1,2)$$

计算知

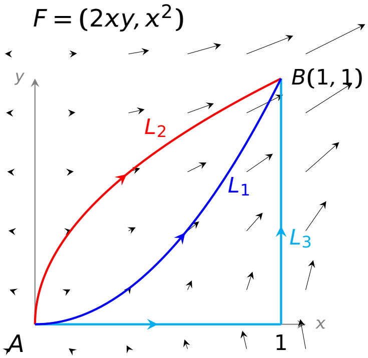
$$I_1=-\frac{1}{2}\pi a^2-2a,\quad I_2=-2a$$

可见 $I_1\neq I_2$。所以 F 不是保守场

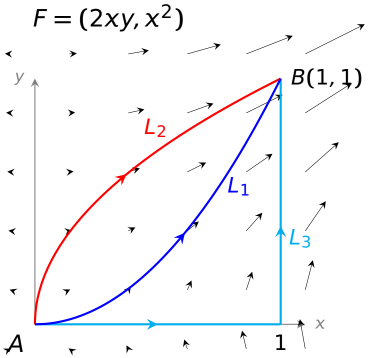
例 设 $F = (2xy, x^2)$ 是平面上向量场，如图



例 设 $F = (2xy, x^2)$ 是平面上向量场，如图



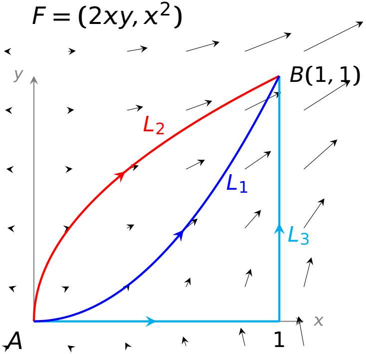
例 设 $F=(2xy,x^2)$ 是平面上向量场，如图



考虑对向量场 F 的曲线积分

$$I_i=\int_{L_i} 2xydx+x^2dy, \qquad (i=1,2,3)$$

例 设 $F = (2xy, x^2)$ 是平面上向量场，如图



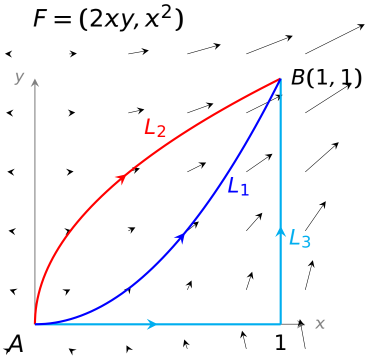
考虑对向量场 F 的曲线积分

$$I_i = \int_{L_i} 2xydx + x^2dy, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

计算知

$$I_1 = I_2 = I_3 = 1$$

例 设 $F=(2xy, x^2)$ 是平面上向量场，如图



考虑对向量场 F 的曲线积分

$$I_i=\int_{L_i} 2xydx+x^2dy, \qquad (i=1,2,3)$$

计算知

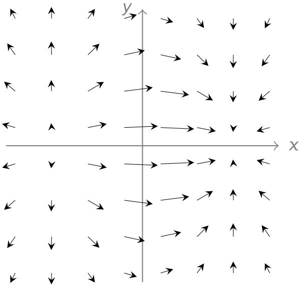
$$I_1=I_2=I_3=1$$

问题 F 是不是保守场？

定理 设 $f(x,y)$ 是定义在区域 D 上的可微函数，则梯度向量场

$$F=\nabla f=(f_x,f_y)$$

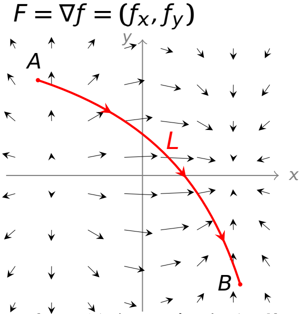
是保守场。



定理 设 $f(x,y)$ 是定义在区域 D 上的可微函数，则梯度向量场

$$F = \nabla f = (f_x, f_y)$$

是保守场。

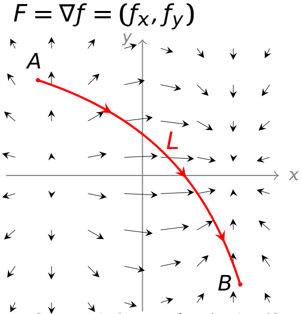


证明 设 A, B 是 D 中任意两点，L 是 D 中从 A 到 B 的任一条有向曲线。

定理 设 $f(x,y)$ 是定义在区域 D 上的可微函数，则梯度向量场

$$F = \nabla f = (f_x, f_y)$$

是保守场。



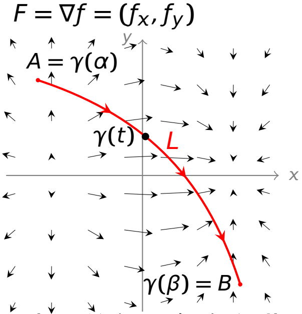
证明 设 A, B 是 D 中任意两点，L 是 D 中从 A 到 B 的任一条有向曲线。

$$\int_L f_x dx + f_y dy$$

定理 设 $f(x,y)$ 是定义在区域 D 上的可微函数，则梯度向量场

$$F = \nabla f = (f_x, f_y)$$

是保守场。



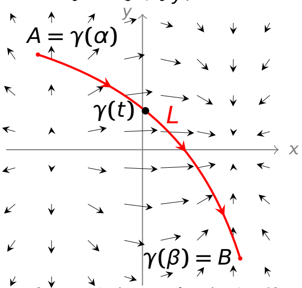
证明 设 A, B 是 D 中任意两点，L 是 D 中从 A 到 B 的任一条有向曲线。设 $\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$, $t : \alpha \to \beta$ 是 L 的参数方程，

$$\int_L f_x dx + f_y dy$$

定理 设 $f(x,y)$ 是定义在区域 D 上的可微函数，则梯度向量场

$$F = \nabla f = (f_x, f_y)$$

是保守场。



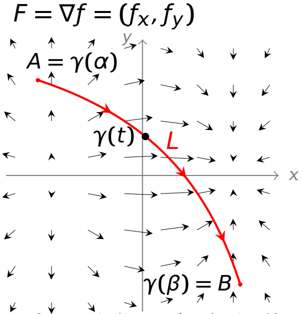
证明 设 A, B 是 D 中任意两点，L 是 D 中从 A 到 B 的任一条有向曲线。设 $\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t)), t : \alpha \to \beta$ 是 L 的参数方程，则

$$\int_L f_x dx + f_y dy = \int_\alpha^\beta \Big[f_x(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + f_y(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) \Big] dt$$

定理 设 $f(x,y)$ 是定义在区域 D 上的可微函数，则梯度向量场

$$F = \nabla f = (f_x, f_y)$$

是保守场。



证明 设 A, B 是 D 中任意两点，L 是 D 中从 A 到 B 的任一条有向曲线。设 $\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t)), t: \alpha \to \beta$ 是 L 的参数方程，则

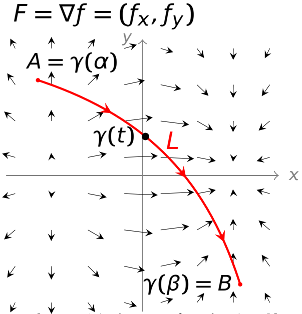
$$\int_L f_x dx + f_y dy = \int_\alpha^\beta \Big[f_x(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + f_y(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) \Big] dt$$

$$\frac{d}{dt} f(\varphi(t), \psi(t))$$

定理 设 $f(x,y)$ 是定义在区域 D 上的可微函数，则梯度向量场

$$F=\nabla f=(f_x,f_y)$$

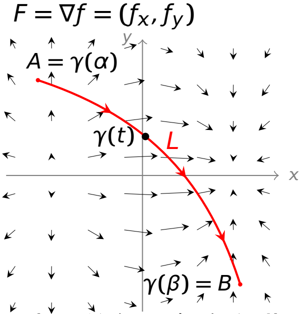
是保守场。



证明 设 A, B 是 D 中任意两点，L 是 D 中从 A 到 B 的任一条有向曲线。设 $\gamma(t)=(\varphi(t),\psi(t))$, $t:\alpha\to\beta$ 是 L 的参数方程，则

$$\int_L f_x dx+f_y dy=\int_\alpha^\beta\Big[f_x(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+f_y(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)\Big]dt$$

$$=\int_\alpha^\beta\Big[\frac{d}{dt}f(\varphi(t),\psi(t))\Big]dt$$



定理 设 $f(x,y)$ 是定义在区域 D 上的可微函数，则梯度向量场

$$F=\nabla f=(f_x,f_y)$$

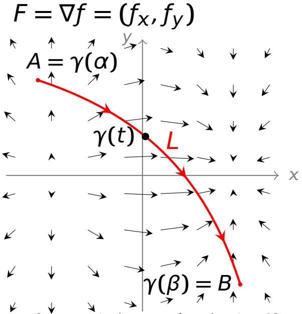
是保守场。

证明 设 A,B 是 D 中任意两点，L 是 D 中从 A 到 B 的任一条有向曲线。设 $\gamma(t)=(\varphi(t),\psi(t))$, $t:\alpha\to\beta$ 是 L 的参数方程，则

$$\int_L f_x dx+f_y dy=\int_\alpha^\beta\Big[f_x(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+f_y(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)\Big]dt$$

$$=\int_\alpha^\beta\Big[\frac{d}{dt}f(\varphi(t),\psi(t))\Big]dt$$

$$=f(\varphi(\beta),\psi(\beta))-f(\varphi(\alpha),\psi(\alpha))$$



定理 设 $f(x,y)$ 是定义在区域 D 上的可微函数，则梯度向量场

$$F=\nabla f=(f_x,f_y)$$

是保守场。

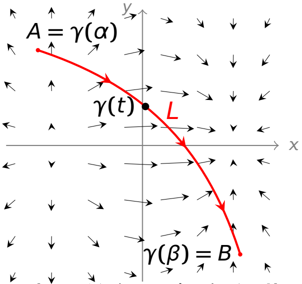
证明 设 A, B 是 D 中任意两点，L 是 D 中从 A 到 B 的任一条有向曲线。设 $\gamma(t)=(\varphi(t),\psi(t))$, $t:\alpha\to\beta$ 是 L 的参数方程，则

$$\begin{aligned}\int_L f_x dx+f_y dy&=\int_\alpha^\beta\Big[f_x(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+f_y(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)\Big]dt\\&=\int_\alpha^\beta\Big[\frac{d}{dt}f(\varphi(t),\psi(t))\Big]dt\\&=f(\varphi(\beta),\psi(\beta))-f(\varphi(\alpha),\psi(\alpha))=f(B)-f(A)\end{aligned}$$

定理 设 $f(x, y)$ 是定义在区域 D 上的可微函数，则梯度向量场

$$F = \nabla f = (f_x, f_y)$$

是保守场。



证明 设 A, B 是 D 中任意两点，L 是 D 中从 A 到 B 的任一条有向曲线。设 $\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$, $t : \alpha \to \beta$ 是 L 的参数方程，则

$$\int_L f_x dx + f_y dy = \int_\alpha^\beta \Big[f_x(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + f_y(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) \Big] dt$$

$$= \int_\alpha^\beta \Big[\frac{d}{dt} f(\varphi(t), \psi(t)) \Big] dt$$

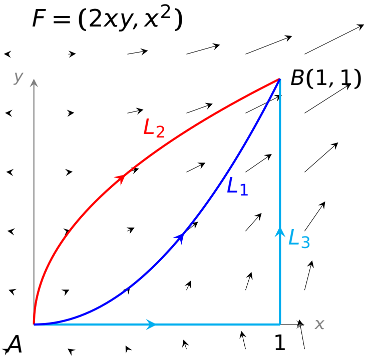
$$= f(\varphi(\beta), \psi(\beta)) - f(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)) = f(B) - f(A)$$

可见曲线积分与路径无关，所以 ∇f 是保守场。

例 设 $F=(2xy,x^2)$ 是平面上向量场，如图

- 向量场 F 的曲线积分
$$I_i=\int_{L_i}2xydx+x^2dy,\ (i=1,2,3)$$
成立 $I_1=I_2=I_3=1$

- **问题** F 是不是保守场？



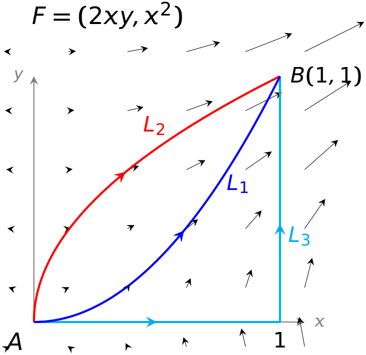
例 设 $F=(2xy,x^2)$ 是平面上向量场，如图

- 向量场 F 的曲线积分

  $$I_i=\int_{L_i}2xydx+x^2dy,\ (i=1,2,3)$$

  成立 $I_1=I_2=I_3=1$

- **问题** F 是不是保守场？



回答 事实上，F 是保守场，证明如下：

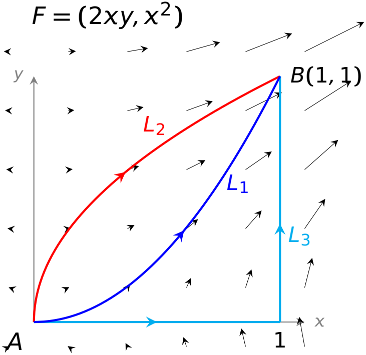
例 设 $F=(2xy,x^2)$ 是平面上向量场，如图

- 向量场 F 的曲线积分

$$I_i=\int_{L_i} 2xydx+x^2dy,\ (i=1,2,3)$$

成立 $I_1=I_2=I_3=1$

- **问题** F 是不是保守场？



回答 事实上，F 是保守场，证明如下：令 $f(x,y)=x^2y$，则

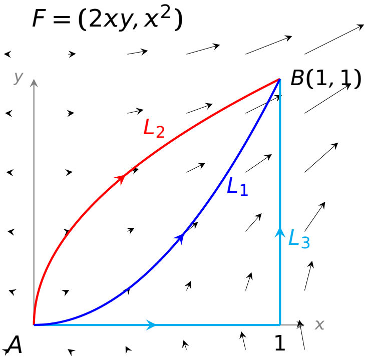
例 设 $F=(2xy,x^2)$ 是平面上向量场，如图

- 向量场 F 的曲线积分

  $$I_i=\int_{L_i}2xydx+x^2dy,\ (i=1,2,3)$$

  成立 $I_1=I_2=I_3=1$

- 问题 F 是不是保守场？



回答 事实上，F 是保守场，证明如下：令 $f(x,y)=x^2y$，则

$$\nabla f=(2xy,x^2)$$

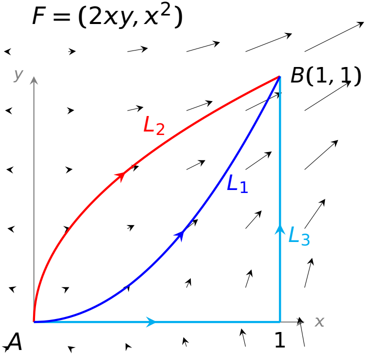
例 设 $F=(2xy, x^2)$ 是平面上向量场，如图

- 向量场 F 的曲线积分

  $$I_i=\int_{L_i} 2xydx+x^2dy,\ (i=1,2,3)$$

  成立 $I_1=I_2=I_3=1$

- **问题** F 是不是保守场？



回答 事实上，F 是保守场，证明如下：令 $f(x,y)=x^2y$，则

$$\nabla f=(2xy, x^2)=F$$

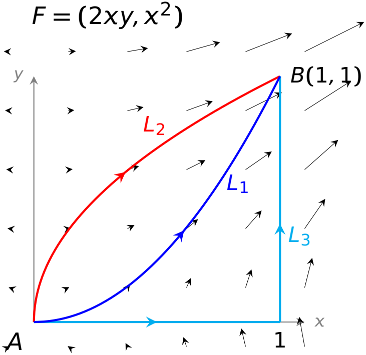
例 设 $F=(2xy, x^2)$ 是平面上向量场，如图

- 向量场 F 的曲线积分

$$I_i=\int_{L_i} 2xydx+x^2dy,\ (i=1,2,3)$$

成立 $I_1=I_2=I_3=1$

- **问题** F 是不是保守场？



回答 事实上，F 是保守场，证明如下：令 $f(x,y)=x^2y$，则

$$\nabla f=(2xy, x^2)=F$$

所以 F 是梯度向量场，从而是保守场。

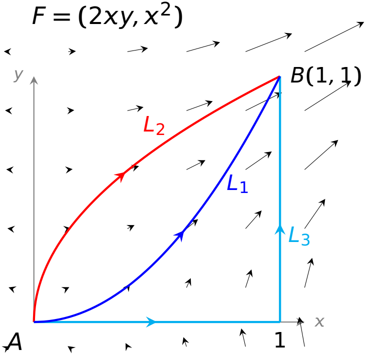
例 设 $F=(2xy,x^2)$ 是平面上向量场，如图

- 向量场 F 的曲线积分

$$I_i=\int_{L_i} 2xydx+x^2dy,\ (i=1,2,3)$$

成立 $I_1=I_2=I_3=1$

- **问题** F 是不是保守场？



回答 事实上，F 是保守场，证明如下：令 $f(x,y)=x^2y$，则

$$\nabla f=(2xy,x^2)=F$$

所以 F 是梯度向量场，从而是保守场。

注 由于 $F=\nabla f$，所以

$$\int_{L_i} 2xydx+x^2dy$$

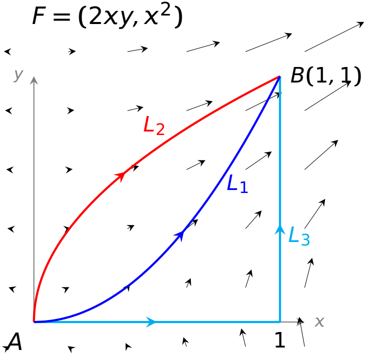
例 设 $F=(2xy,\, x^2)$ 是平面上向量场，如图

- 向量场 F 的曲线积分

$$I_i=\int_{L_i} 2xydx+x^2dy,\ (i=1,2,3)$$

成立 $I_1=I_2=I_3=1$

- **问题** F 是不是保守场？



回答 事实上，F 是保守场，证明如下：令 $f(x,\, y)=x^2y$，则

$$\nabla f=(2xy,\, x^2)=F$$

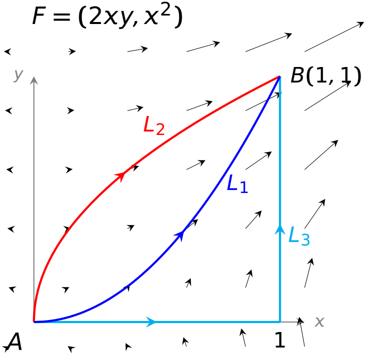
所以 F 是梯度向量场，从而是保守场。

注 由于 $F=\nabla f$，所以

$$\int_{L_i} 2xydx+x^2dy=f(B)-f(A)$$

例 设 $F=(2xy,x^2)$ 是平面上向量场，如图

- 向量场 F 的曲线积分
$$I_i=\int_{L_i} 2xydx+x^2dy,\ (i=1,2,3)$$
成立 $I_1=I_2=I_3=1$
- **问题** F 是不是保守场？



回答 事实上，F 是保守场，证明如下：令 $f(x,y)=x^2y$，则
$$\nabla f=(2xy,x^2)=F$$
所以 F 是梯度向量场，从而是保守场。

注 由于 $F=\nabla f$，所以
$$\int_{L_i} 2xydx+x^2dy=f(B)-f(A)=f(1,1)-f(0,0)$$

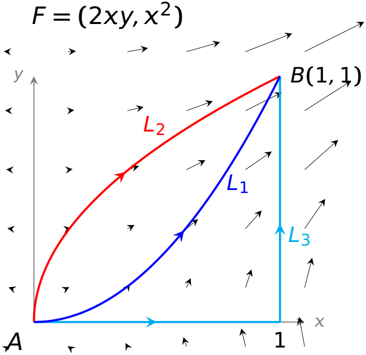
例 设 $F=(2xy,x^2)$ 是平面上向量场，如图

- 向量场 F 的曲线积分

  $$I_i=\int_{L_i}2xydx+x^2dy,\ (i=1,2,3)$$

  成立 $I_1=I_2=I_3=1$

- 问题 F 是不是保守场？



回答 事实上，F 是保守场，证明如下：令 $f(x,y)=x^2y$，则

$$\nabla f=(2xy,x^2)=F$$

所以 F 是梯度向量场，从而是保守场。

注 由于 $F=\nabla f$，所以

$$\int_{L_i}2xydx+x^2dy=f(B)-f(A)=f(1,1)-f(0,0)=1$$

例 计算 $\int_L ydx + xdy$，其中有向曲线 L 的参数方程是：$(t^9, \sin^9(\frac{\pi}{2}t)), t: 0 \to 1$。

例 计算 $\int_L ydx + xdy$，其中有向曲线 L 的参数方程是：
$(t^9, \sin^9(\frac{\pi}{2}t)), t: 0 \to 1$。

解 注意到向量场 $F = (y, x)$

例 计算 $\int_L y dx + x dy$，其中有向曲线 L 的参数方程是：$(t^9, \sin^9(\frac{\pi}{2}t)),\ t: 0 \to 1$。

解 注意到向量场 $F = (y, x)$是 $f(x, y) = xy$ 梯度向量：

$$F = \nabla f$$

例 计算 $\int_L ydx + xdy$，其中有向曲线 L 的参数方程是：$(t^9, \sin^9(\frac{\pi}{2}t))$, $t: 0 \to 1$。

解 注意到向量场 $F = (y, x)$是 $f(x, y) = xy$ 梯度向量：

$$F = \nabla f$$

$$\int_L ydx + xdy = f(\qquad) - f(\qquad)$$

例 计算 $\int_L ydx + xdy$，其中有向曲线 L 的参数方程是：$(t^9, \sin^9(\frac{\pi}{2}t))$, $t: 0 \to 1$。

解 注意到向量场 $F = (y, x)$是 $f(x, y) = xy$ 梯度向量：

$$F = \nabla f$$

而 L 是从点 $(0, 0)$ 到点 $(1, 1)$ 的曲线，所以

$$\int_L ydx + xdy = f(\qquad) - f(\qquad)$$

例 计算 $\int_L ydx + xdy$，其中有向曲线 L 的参数方程是：$(t^9, \sin^9(\frac{\pi}{2}t))$, $t: 0 \to 1$。

解 注意到向量场 $F = (y, x)$是 $f(x, y) = xy$ 梯度向量：

$$F = \nabla f$$

而 L 是从点 $(0, 0)$ 到点 $(1, 1)$ 的曲线，所以

$$\int_L ydx + xdy = f(1, 1) - f(0, 0)$$

例 计算 $\int_L ydx + xdy$，其中有向曲线 L 的参数方程是：$(t^9, \sin^9(\frac{\pi}{2}t)), t: 0 \to 1$。

解 注意到向量场 $F = (y, x)$是 $f(x, y) = xy$ 梯度向量：

$$F = \nabla f$$

而 L 是从点 $(0, 0)$ 到点 $(1, 1)$ 的曲线，所以

$$\int_L ydx + xdy = f(1, 1) - f(0, 0) = 1.$$

例 计算 $\int_L ydx + xdy$，其中有向曲线 L 的参数方程是：$(t^9, \sin^9(\frac{\pi}{2}t))$, $t: 0 \to 1$。

解 注意到向量场 $F = (y, x)$是 $f(x, y) = xy$ 梯度向量：

$$F = \nabla f$$

而 L 是从点 $(0, 0)$ 到点 $(1, 1)$ 的曲线，所以

$$\int_L ydx + xdy = f(1, 1) - f(0, 0) = 1.$$

定义 给定向量场 F，如果函数 $f(x, y)$ 满足 $F = \nabla f$，则称 f 为向量场 F 的一个势函数。

定理 设 $F=(P,Q)$ 是定义在区域 D 上的向量场，则以下等价：

(1) F 是保守场，

(2) F 是梯度向量场，即存在势函数 $f(x,y)$ 使得 $F=\nabla f$。

定理 设 $F = (P, Q)$ 是定义在区域 D 上的向量场，则以下等价：

(1) F 是保守场，

(2) F 是梯度向量场，即存在势函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$。

证明 “(2) $\Rightarrow$ (1) ” 已证，只需再证 “(1) $\Rightarrow$ (2) ” …

定理 设 $F=(P,Q)$ 是定义在区域 D 上的向量场，则以下等价：

(1) F 是保守场，

(2) F 是梯度向量场，即存在势函数 $f(x,y)$ 使得 $F=\nabla f$。

证明 “(2) $\Rightarrow$ (1) ” 已证，只需再证 “(1) $\Rightarrow$ (2) ” ...

推论 设 $F=(P,Q)$ 是保守场，则 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，

定理 设 $F = (P, Q)$ 是定义在区域 D 上的向量场，则以下等价：

(1) F 是保守场，

(2) F 是梯度向量场，即存在势函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$。

证明 “$(2) \Rightarrow (1)$ ” 已证，只需再证 “$(1) \Rightarrow (2)$ ” ...

推论 设 $F = (P, Q)$ 是保守场，则 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$，等价地，$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0$

定理 设 $F=(P,Q)$ 是定义在区域 D 上的向量场，则以下等价：

(1) F 是保守场，

(2) F 是梯度向量场，即存在势函数 $f(x,y)$ 使得 $F=\nabla f$。

证明 “$(2)\Rightarrow(1)$” 已证，只需再证 “$(1)\Rightarrow(2)$” …

推论 设 $F=(P,Q)$ 是保守场，则 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，等价地，$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix}=0$

证明 由定理，存在势函数 $f(x,y)$ 使得 $F=\nabla f$，所以

定理 设 $F=(P,Q)$ 是定义在区域 D 上的向量场，则以下等价：

(1) F 是保守场，

(2) F 是梯度向量场，即存在势函数 $f(x,y)$ 使得 $F=\nabla f$。

证明 “(2) ⇒ (1) ” 已证，只需再证 “(1) ⇒ (2) ” …

推论 设 $F=(P,Q)$ 是保守场，则 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，等价地，$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix}=0$

证明 由定理，存在势函数 $f(x,y)$ 使得 $F=\nabla f$，所以

$$P=f_x,\ Q=f_y$$

定理 设 $F = (P, Q)$ 是定义在区域 D 上的向量场，则以下等价：

(1) F 是保守场，

(2) F 是梯度向量场，即存在势函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$。

证明 “(2) $\Rightarrow$ (1) ” 已证，只需再证 “(1) $\Rightarrow$ (2) ” …

推论 设 $F = (P, Q)$ 是保守场，则 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$，等价地，$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0$

证明 由定理，存在势函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$，所以

$$P = f_x,\ Q = f_y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \qquad , \ \frac{\partial Q}{\partial x} =$$

定理 设 $F=(P,Q)$ 是定义在区域 D 上的向量场，则以下等价：

(1) F 是保守场，

(2) F 是梯度向量场，即存在势函数 $f(x,y)$ 使得 $F=\nabla f$。

证明 “(2) ⇒ (1) ” 已证，只需再证 “(1) ⇒ (2) ” …

推论 设 $F=(P,Q)$ 是保守场，则 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，等价地，$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix}=0$

证明 由定理，存在势函数 $f(x,y)$ 使得 $F=\nabla f$，所以

$$P=f_x,\ Q=f_y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y}=f_{xy},\ \frac{\partial Q}{\partial x}=$$

定理 设 $F=(P,Q)$ 是定义在区域 D 上的向量场，则以下等价：

(1) F 是保守场，

(2) F 是梯度向量场，即存在势函数 $f(x,y)$ 使得 $F=\nabla f$。

证明 "(2) $\Rightarrow$ (1)" 已证，只需再证 "(1) $\Rightarrow$ (2)" ...

推论 设 $F=(P,Q)$ 是保守场，则 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，等价地，$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix}=0$

证明 由定理，存在势函数 $f(x,y)$ 使得 $F=\nabla f$，所以

$$P=f_x,\ Q=f_y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y}=f_{xy},\ \frac{\partial Q}{\partial x}=f_{yx}$$

定理 设 $F=(P,Q)$ 是定义在区域 D 上的向量场，则以下等价：

(1) F 是保守场，

(2) F 是梯度向量场，即存在势函数 $f(x,y)$ 使得 $F=\nabla f$。

证明 “(2) ⇒ (1) ” 已证，只需再证 “(1) ⇒ (2) ” …

推论 设 $F=(P,Q)$ 是保守场，则 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，等价地，$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix}=0$

证明 由定理，存在势函数 $f(x,y)$ 使得 $F=\nabla f$，所以

$$P=f_x,\ Q=f_y \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial P}{\partial y}=f_{xy},\ \frac{\partial Q}{\partial x}=f_{yx} \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

定理 设 $F=(P,Q)$ 是定义在区域 D 上的向量场，则以下等价：

(1) F 是保守场，

(2) F 是梯度向量场，即存在势函数 $f(x,y)$ 使得 $F=\nabla f$。

证明 “(2) $\Rightarrow$ (1) ” 已证，只需再证 “(1) $\Rightarrow$ (2) ” …

推论 设 $F=(P,Q)$ 是保守场，则 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，等价地，$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix}=0$

证明 由定理，存在势函数 $f(x,y)$ 使得 $F=\nabla f$，所以

$$P=f_x,\ Q=f_y \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial P}{\partial y}=f_{xy},\ \frac{\partial Q}{\partial x}=f_{yx} \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

例 $F=(x+y+1,\ y)$ 不是保守场。

定理 设 $F=(P,Q)$ 是定义在区域 D 上的向量场，则以下等价：

(1) F 是保守场，

(2) F 是梯度向量场，即存在势函数 $f(x,y)$ 使得 $F=\nabla f$。

证明 “(2) ⇒ (1) ” 已证，只需再证 “(1) ⇒ (2) ” …

推论 设 $F=(P,Q)$ 是保守场，则 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，等价地，$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix}=0$

证明 由定理，存在势函数 $f(x,y)$ 使得 $F=\nabla f$，所以

$$P=f_x,\ Q=f_y \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial P}{\partial y}=f_{xy},\ \frac{\partial Q}{\partial x}=f_{yx} \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

例 $F=(x+y+1,y)$ 不是保守场。这是 $\frac{\partial}{\partial y}(x+y+1)$ $\quad\frac{\partial}{\partial x}(y)$

定理 设 $F=(P,Q)$ 是定义在区域 D 上的向量场，则以下等价：

(1) F 是保守场，

(2) F 是梯度向量场，即存在势函数 $f(x,y)$ 使得 $F=\nabla f$。

证明 "$(2)\Rightarrow(1)$" 已证，只需再证 "$(1)\Rightarrow(2)$" …

推论 设 $F=(P,Q)$ 是保守场，则 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，等价地，$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix}=0$

证明 由定理，存在势函数 $f(x,y)$ 使得 $F=\nabla f$，所以

$$P=f_x,\ Q=f_y \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial P}{\partial y}=f_{xy},\ \frac{\partial Q}{\partial x}=f_{yx} \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

例 $F=(x+y+1,y)$ 不是保守场。这是 $\frac{\partial}{\partial y}(x+y+1)\neq\frac{\partial}{\partial x}(y)$

定理 设 $F=(P,Q)$ 是定义在区域 D 上的向量场，则以下等价：

(1) F 是保守场，

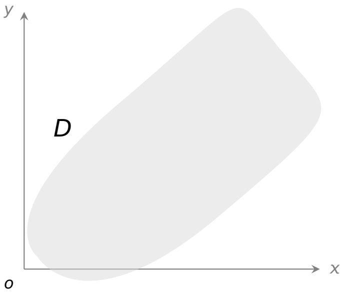
(2) F 是梯度向量场，即存在势函数 $f(x,y)$ 使得 $F=\nabla f$。

定理 设 $F=(P,Q)$ 是定义在区域 D 上的向量场，则以下等价：

(1) F 是保守场，

(2) F 是梯度向量场，即存在势函数 $f(x,y)$ 使得 $F=\nabla f$。

证明 下面证 “$(1)\Rightarrow(2)$”：

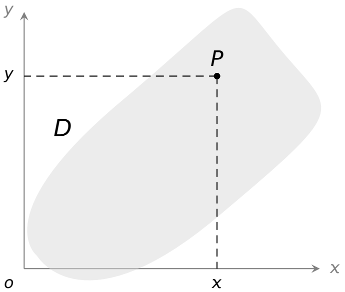


定理 设 $F=(P,Q)$ 是定义在区域 D 上的向量场，则以下等价：

(1) F 是保守场，

(2) F 是梯度向量场，即存在势函数 $f(x,y)$ 使得 $F=\nabla f$。

证明 下面证 “$(1)\Rightarrow(2)$”：如图，定义 D 中任意点 $P(x,y)$ 的函数值为

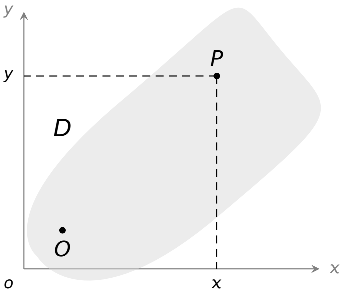


定理 设 $F = (P, Q)$ 是定义在区域 D 上的向量场，则以下等价：

(1) F 是保守场，

(2) F 是梯度向量场，即存在势函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$。

证明 下面证 "$(1) \Rightarrow (2)$"：如图，定义 D 中任意点 $P(x, y)$ 的函数值为

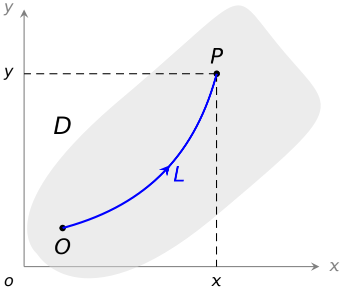


定理 设 $F = (P, Q)$ 是定义在区域 D 上的向量场，则以下等价：

(1) F 是保守场，

(2) F 是梯度向量场，即存在势函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$。

证明 下面证 “(1) $\Rightarrow$ (2)”：如图，定义 D 中任意点 $P(x, y)$ 的函数值为



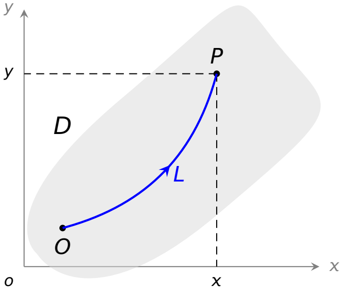
定理 设 $F=(P,Q)$ 是定义在区域 D 上的向量场，则以下等价：

(1) F 是保守场，

(2) F 是梯度向量场，即存在势函数 $f(x,y)$ 使得 $F=\nabla f$。

证明 下面证 "(1) ⇒ (2) "：如图，定义 D 中任意点 $P(x,y)$ 的函数值为

$$f(x,y)=\int_L Pdx+Qdy$$



定理 设 $F=(P,Q)$ 是定义在区域 D 上的向量场，则以下等价：

(1) F 是保守场，

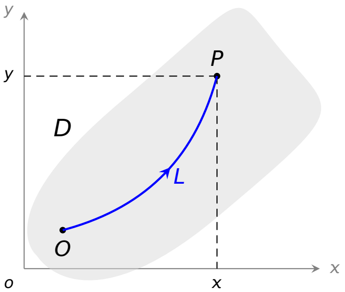
(2) F 是梯度向量场，即存在势函数 $f(x,y)$ 使得 $F=\nabla f$。

证明 下面证 “$(1)\Rightarrow(2)$”：如图，定义 D 中任意点 $P(x,y)$ 的函数值为

$$f(x,y)=\int_L Pdx+Qdy$$

所以

$$f_x(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$



定理 设 $F=(P,Q)$ 是定义在区域 D 上的向量场，则以下等价：

(1) F 是保守场，

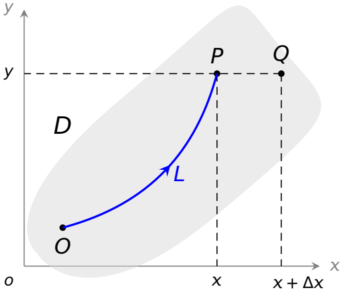
(2) F 是梯度向量场，即存在势函数 $f(x,y)$ 使得 $F=\nabla f$。

证明 下面证 “(1) ⇒ (2) ”：如图，定义 D 中任意点 $P(x,y)$ 的函数值为

$$f(x,y)=\int_L Pdx+Qdy$$

所以

$$f_x(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$



定理 设 $F=(P,Q)$ 是定义在区域 D 上的向量场，则以下等价：

(1) F 是保守场，

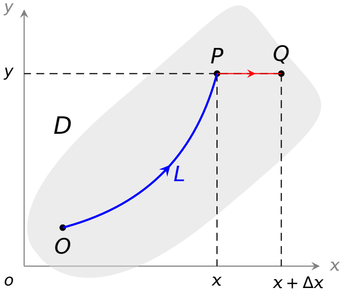
(2) F 是梯度向量场，即存在势函数 $f(x,y)$ 使得 $F=\nabla f$。

证明 下面证 “(1) ⇒ (2)”：如图，定义 D 中任意点 $P(x,y)$ 的函数值为

$$f(x,y)=\int_L Pdx+Qdy$$

所以

$$f_x(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$



定理 设 $F=(P,Q)$ 是定义在区域 D 上的向量场，则以下等价：

(1) F 是保守场，

(2) F 是梯度向量场，即存在势函数 $f(x,y)$ 使得 $F=\nabla f$。

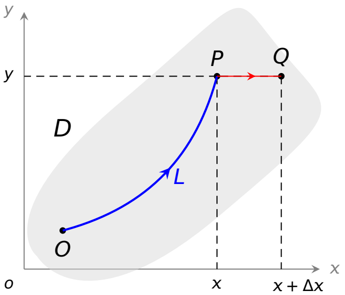
证明 下面证 “(1) ⇒ (2) ”：如图，定义 D 中任意点 $P(x,y)$ 的函数值为

$$f(x,y)=\int_L Pdx+Qdy$$

所以

$$f_x(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

$$\int_{\overrightarrow{PQ}} Pdx+Qdy$$



定理 设 $F = (P, Q)$ 是定义在区域 D 上的向量场，则以下等价：

(1) F 是保守场，

(2) F 是梯度向量场，即存在势函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$。

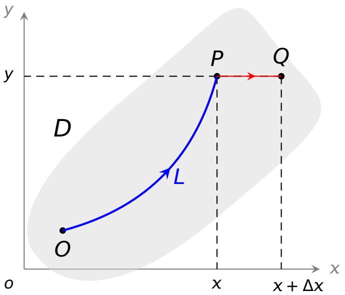
证明 下面证 "(1) ⇒ (2)"：如图，定义 D 中任意点 $P(x, y)$ 的函数值为

$$f(x, y) = \int_L P dx + Q dy$$

所以

$$f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{\overrightarrow{PQ}} P dx + Q dy$$



定理 设 $F=(P,Q)$ 是定义在区域 D 上的向量场，则以下等价：

(1) F 是保守场，

(2) F 是梯度向量场，即存在势函数 $f(x,y)$ 使得 $F=\nabla f$。

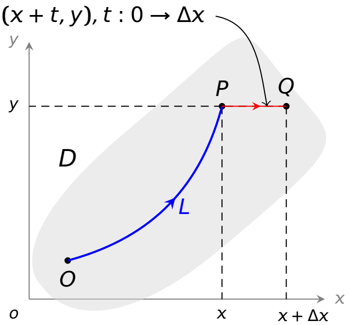
证明 下面证 “(1) $\Rightarrow$ (2) ”：如图，定义 D 中任意点 $P(x,y)$ 的函数值为

$$f(x,y)=\int_L Pdx+Qdy$$

所以

$$f_x(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_{\overrightarrow{PQ}} Pdx+Qdy$$



定理 设 $F=(P,Q)$ 是定义在区域 D 上的向量场，则以下等价：

(1) F 是保守场，

(2) F 是梯度向量场，即存在势函数 $f(x,y)$ 使得 $F=\nabla f$。

证明 下面证 "(1) $\Rightarrow$ (2)"：如图，定义 D 中任意点 $P(x,y)$ 的函数值为

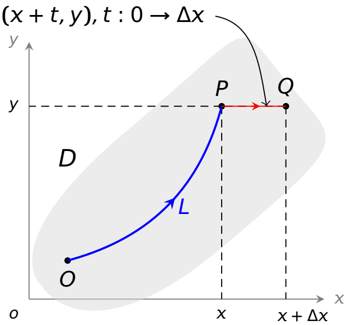
$$f(x,y)=\int_L Pdx+Qdy$$

所以

$$f_x(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_{\overrightarrow{PQ}}Pdx+Qdy$$

$$\int_0^{\Delta x}P(x+t,y)dt$$



定理 设 $F = (P, Q)$ 是定义在区域 D 上的向量场，则以下等价：

(1) F 是保守场，

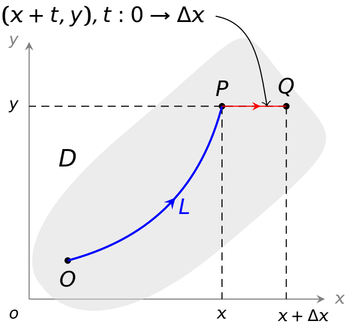
(2) F 是梯度向量场，即存在势函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$。

证明 下面证 "(1) ⇒ (2)"：如图，定义 D 中任意点 $P(x, y)$ 的函数值为

$$f(x, y) = \int_L Pdx + Qdy$$

所以

$$f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{\overrightarrow{PQ}} Pdx + Qdy = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x} P(x + t, y)dt$$



定理 设 $F = (P, Q)$ 是定义在区域 D 上的向量场，则以下等价：

(1) F 是保守场，

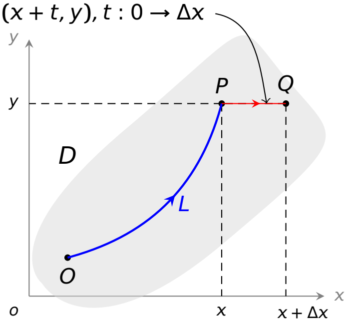
(2) F 是梯度向量场，即存在势函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$。

证明 下面证 "(1) $\Rightarrow$ (2)"：如图，定义 D 中任意点 $P(x, y)$ 的函数值为

$$f(x,y) = \int_L Pdx + Qdy$$

所以

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{\overrightarrow{PQ}} Pdx + Qdy \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x} P(x+t, y)dt \\ &= P(x,y) \end{aligned}$$



定理 设 $F = (P, Q)$ 是定义在区域 D 上的向量场，则以下等价：

(1) F 是保守场，

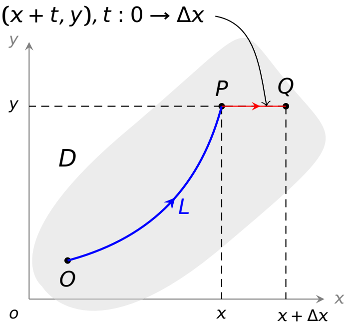
(2) F 是梯度向量场，即存在势函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$。

证明 下面证 "(1) ⇒ (2) "：如图，定义 D 中任意点 $P(x, y)$ 的函数值为

$$f(x,y) = \int_L Pdx + Qdy$$

所以

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{\overrightarrow{PQ}} Pdx + Qdy \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x} P(x+t, y)dt \\ &= P(x,y) \end{aligned}$$



同理可证，$f_y(x, y) = Q(x, y)$。所以 $F = (f_x, f_y)$。

注 设 $F=(P,Q)$ 是向量场，则

$$F\text{是保守向量场} \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0$$

注 设 $F=(P,Q)$ 是向量场，则

$$F\text{是保守向量场} \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0$$

但反过来不成立：

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0 \quad \not\Rightarrow \quad F\text{是保守向量场}$$

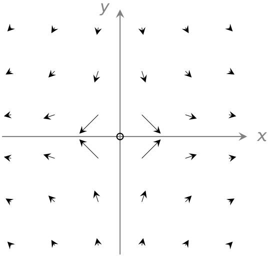
注 设 $F=(P,Q)$ 是向量场，则

$$F\text{是保守向量场} \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0$$

但反过来不成立：

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0 \quad \not\Rightarrow \quad F\text{是保守向量场}$$

例 设向量场 $F=(P,G)=\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$



注 设 $F=(P,Q)$ 是向量场，则

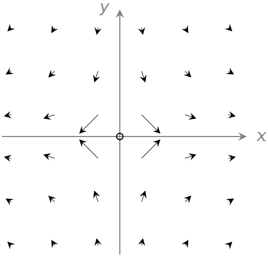
$$F\text{是保守向量场} \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0$$

但反过来不成立：

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0 \quad \not\Rightarrow \quad F\text{是保守向量场}$$

例 设向量场 $F=(P,G)=\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$

- 定义域 $D=\mathbb{R}^2\backslash(0,0)$



注 设 $F=(P,Q)$ 是向量场，则

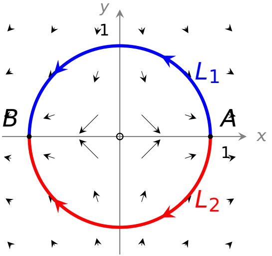
$$F\text{是保守向量场} \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0$$

但反过来不成立：

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0 \quad \not\Rightarrow \quad F\text{是保守向量场}$$

例 设向量场 $F=(P,G)=\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$

- 定义域 $D=\mathbb{R}^2\backslash(0,0)$



注 设 $F=(P,Q)$ 是向量场，则

$$F\text{是保守向量场} \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0$$

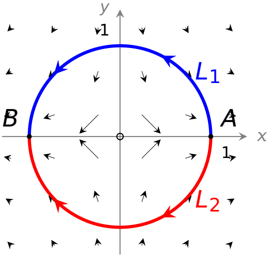
但反过来不成立：

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0 \quad \not\Rightarrow \quad F\text{是保守向量场}$$

例 设向量场 $F=(P,G)=\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$

- 定义域 $D=\mathbb{R}^2\backslash(0,0)$
- 曲线积分

$$I_i = \int_{L_i} \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}, \quad (i=1,2)$$



注 设 $F=(P,Q)$ 是向量场，则

$$F\text{是保守向量场} \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0$$

但反过来不成立：

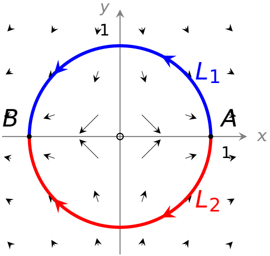
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0 \quad \not\Rightarrow \quad F\text{是保守向量场}$$

例 设向量场 $F=(P,G)=\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$

- 定义域 $D=\mathbb{R}^2\backslash(0,0)$
- 曲线积分

$$I_i = \int_{L_i} \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}, \quad (i=1,2)$$

的值是：$I_1=\pi$, $I_2=-\pi$。



注 设 $F=(P,Q)$ 是向量场，则

$$F\text{是保守向量场} \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0$$

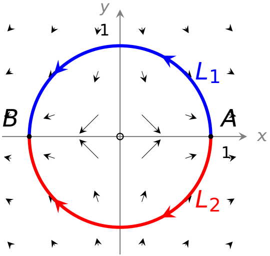
但反过来不成立：

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0 \quad \not\Rightarrow \quad F\text{是保守向量场}$$

例 设向量场 $F=(P,G)=\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$

- 定义域 $D=\mathbb{R}^2\backslash(0,0)$
- 曲线积分

$$I_i = \int_{L_i} \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}, \quad (i=1,2)$$



的值是：$I_1=\pi, I_2=-\pi$。故 F 不是保守场。

注 设 $F=(P,Q)$ 是向量场，则

$$F\text{是保守向量场} \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0$$

但反过来不成立：

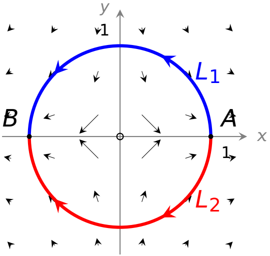
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0 \quad \not\Rightarrow \quad F\text{是保守向量场}$$

例 设向量场 $F=(P,G)=\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$

- 定义域 $D=\mathbb{R}^2\backslash(0,0)$
- 曲线积分

$$I_i=\int_{L_i}\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}, \quad (i=1,2)$$

的值是：$I_1=\pi, I_2=-\pi$。故 F 不是保守场。



- 而 $\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} =$

注 设 $F=(P,Q)$ 是向量场，则

$$F\text{是保守向量场} \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0$$

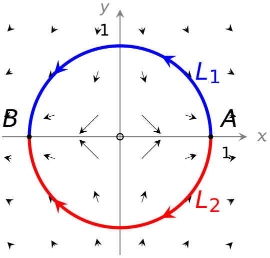
但反过来不成立：

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0 \quad \not\Rightarrow \quad F\text{是保守向量场}$$

例 设向量场 $F=(P,G)=\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$

- 定义域 $D=\mathbb{R}^2\backslash(0,0)$
- 曲线积分

$$I_i=\int_{L_i}\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}, \quad (i=1,2)$$



的值是：$I_1=\pi, I_2=-\pi$。故 F 不是保守场。

- 而 $\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}-\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}=$

注 设 $F=(P,Q)$ 是向量场，则

$$F\text{是保守向量场} \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0$$

但反过来不成立：

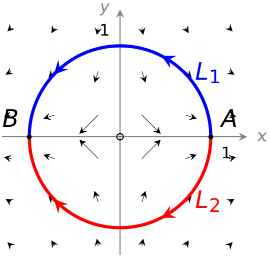
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0 \quad \not\Rightarrow \quad F\text{是保守向量场}$$

例 设向量场 $F=(P,G)=\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$

- 定义域 $D=\mathbb{R}^2\backslash(0,0)$
- 曲线积分

$$I_i=\int_{L_i}\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}, \quad (i=1,2)$$

的值是：$I_1=\pi$, $I_2=-\pi$。故 F 不是保守场。



- 而 $\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}-\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}=0$

定理 设平面区域 D 是单连通，$F=(P,Q)$ 是定义在 D 上的向量场。则

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad F\text{是保守向量场}$$

定理 设平面区域 D 是单连通，$F=(P,Q)$ 是定义在 D 上的向量场。则

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad F\text{是保守向量场}$$

（即此时存在 D 上二元函数 $f(x,y)$ 使得 $F=\nabla f$）

定理 设平面区域 D 是单连通，$F=(P,Q)$ 是定义在 D 上的向量场。则

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad F\text{是保守向量场}$$

（即此时存在 D 上二元函数 $f(x,y)$ 使得 $F=\nabla f$）

定义 平面区域 D 是单连通，是指：D 中任意一条闭曲线，都能在 D 中收缩成一点

定理 设平面区域 D 是单连通，$F=(P,Q)$ 是定义在 D 上的向量场。则

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad F\text{是保守向量场}$$

（即此时存在 D 上二元函数 $f(x,y)$ 使得 $F=\nabla f$）

定义 平面区域 D 是单连通，是指：D 中任意一条闭曲线，都能在 D 中收缩成一点（也就是，曲线在收缩过程保持在 D 中）。

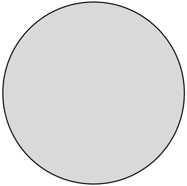
定理 设平面区域 D 是单连通，$F=(P,Q)$ 是定义在 D 上的向量场。则

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad F\text{是保守向量场}$$

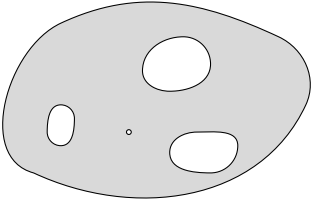
（即此时存在 D 上二元函数 $f(x,y)$ 使得 $F=\nabla f$）

定义 平面区域 D 是单连通，是指：D 中任意一条闭曲线，都能在 D 中收缩成一点（也就是，曲线在收缩过程保持在 D 中）。

例



D_1



D_2

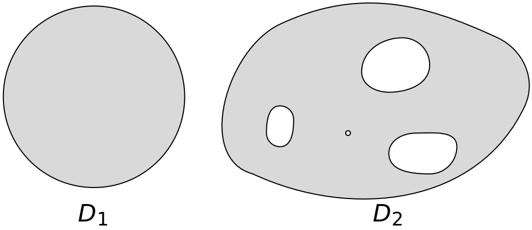
定理 设平面区域 D 是单连通，$F = (P, Q)$ 是定义在 D 上的向量场。则

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad F\text{是保守向量场}$$

（即此时存在 D 上二元函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$）

定义 平面区域 D 是单连通，是指：D 中任意一条闭曲线，都能在 D 中收缩成一点（也就是，曲线在收缩过程保持在 D 中）。

例 如图，D_1 是单连通，而 D_2 不是



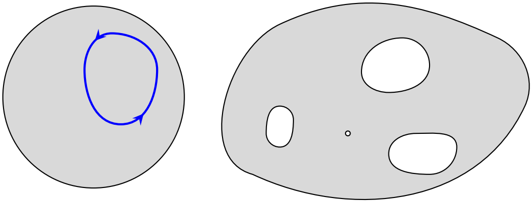
定理 设平面区域 D 是单连通，$F=(P,Q)$ 是定义在 D 上的向量场。则

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad F\text{是保守向量场}$$

（即此时存在 D 上二元函数 $f(x,y)$ 使得 $F=\nabla f$）

定义 平面区域 D 是单连通，是指：D 中任意一条闭曲线，都能在 D 中收缩成一点（也就是，曲线在收缩过程保持在 D 中）。

例 如图，D_1 是单连通，而 D_2 不是



D_1 D_2

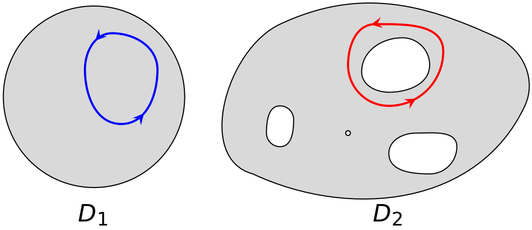
定理 设平面区域 D 是单连通，$F=(P,Q)$ 是定义在 D 上的向量场。则

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad F\text{是保守向量场}$$

（即此时存在 D 上二元函数 $f(x,y)$ 使得 $F=\nabla f$）

定义 平面区域 D 是单连通，是指：D 中任意一条闭曲线，都能在 D 中收缩成一点（也就是，曲线在收缩过程保持在 D 中）。

例 如图，D_1 是单连通，而 D_2 不是



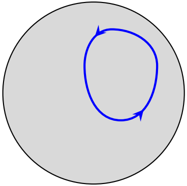
定理 设平面区域 D 是单连通，$F = (P, Q)$ 是定义在 D 上的向量场。则

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad F\text{是保守向量场}$$

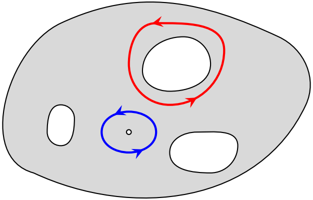
（即此时存在 D 上二元函数 $f(x, y)$ 使得 $F = \nabla f$）

定义 平面区域 D 是单连通，是指：D 中任意一条闭曲线，都能在 D 中收缩成一点（也就是，曲线在收缩过程保持在 D 中）。

例 如图，D_1 是单连通，而 D_2 不是



D_1



D_2

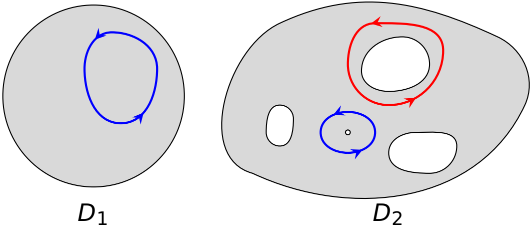
定理 设平面区域 D 是单连通，$F=(P,Q)$ 是定义在 D 上的向量场。则

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad F\text{是保守向量场}$$

（即此时存在 D 上二元函数 $f(x,y)$ 使得 $F=\nabla f$）

定义 平面区域 D 是单连通，是指：D 中任意一条闭曲线，都能在 D 中收缩成一点（也就是，曲线在收缩过程保持在 D 中）。

例 如图，D_1 是单连通，而 D_2 不是



注 直观上，单连通区域是指不含“洞”、“孔”的区域

定理 设平面区域 D 是单连通，$F=(P,Q)$ 是定义在 D 上的向量场。则

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad F\text{是保守向量场}$$

（即此时存在 D 上势函数 $f(x,y)$ 使得 $F=\nabla f$）

注 上述定理中条件“D 是单连通”是必须的。

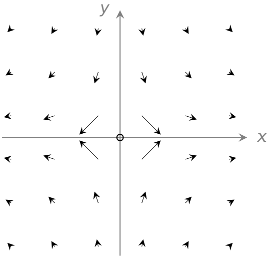
定理 设平面区域 D 是单连通，$F=(P,Q)$ 是定义在 D 上的向量场。则

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad F\text{是保守向量场}$$

（即此时存在 D 上势函数 $f(x,y)$ 使得 $F=\nabla f$）

注 上述定理中条件“D 是单连通”是必须的。

例 设向量场 $F=(P,G)=\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$



定理 设平面区域 D 是单连通，$F=(P,Q)$ 是定义在 D 上的向量场。则

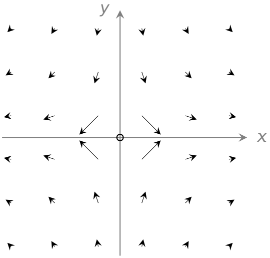
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad F\text{是保守向量场}$$

（即此时存在 D 上势函数 $f(x,y)$ 使得 $F=\nabla f$）

注 上述定理中条件“D 是单连通”是必须的。

例 设向量场 $F=(P,G)=\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$

- 定义域 $D=\mathbb{R}^2\backslash(0,0)$
- $\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} - \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} = 0$
- 但 F 不是保守场：



定理 设平面区域 D 是单连通，$F=(P,Q)$ 是定义在 D 上的向量场。则

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad F\text{是保守向量场}$$

（即此时存在 D 上势函数 $f(x,y)$ 使得 $F=\nabla f$）

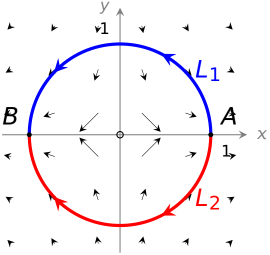
注 上述定理中条件“D 是单连通”是必须的。

例 设向量场 $F=(P,G)=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2}\right)$

- 定义域 $D=\mathbb{R}^2\backslash(0,0)$
- $\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}-\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}=0$
- 但 F 不是保守场：

$$I_i=\int_{L_i}\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}, \quad (i=1,2)$$

的值是：$I_1=\pi$, $I_2=-\pi$。



定理 设平面区域 D 是单连通，$F=(P,Q)$ 是定义在 D 上的向量场。则

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad F\text{是保守向量场}$$

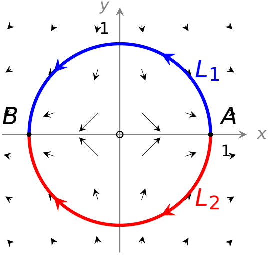
（即此时存在 D 上势函数 $f(x,y)$ 使得 $F=\nabla f$）

注 上述定理中条件“D 是单连通”是必须的。

例 设向量场 $F=(P,G)=\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$

- 定义域 $D=\mathbb{R}^2\backslash(0,0)$（并不是单连通）
- $\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} - \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} = 0$
- 但 F 不是保守场：

$$I_i = \int_{L_i} \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}, \quad (i=1,2)$$



的值是：$I_1=\pi$, $I_2=-\pi$。

补充

性质 设 $F = (P, Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场。则以下说法等价：

(1) F 是保守场

(2) F 在 D 中任意有向闭曲线 C 上的曲线积分为 0

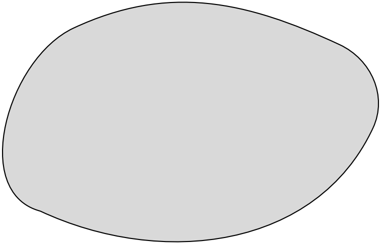
补充

性质 设 $F=(P,Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场。则以下说法等价：

(1) F 是保守场

(2) F 在 D 中任意有向闭曲线 C 上的曲线积分为 0

证明



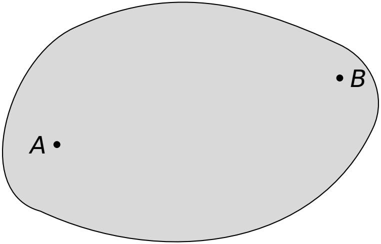
补充

性质 设 $F = (P, Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场。则以下说法等价：

(1) F 是保守场

(2) F 在 D 中任意有向闭曲线 C 上的曲线积分为 0

证明



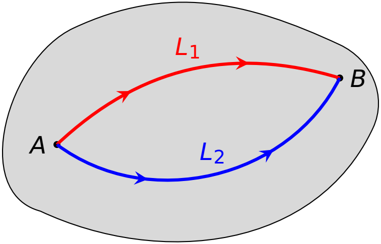
补充

性质 设 $F = (P, Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场。则以下说法等价：

(1) F 是保守场

(2) F 在 D 中任意有向闭曲线 C 上的曲线积分为 0

证明



补充

性质 设 $F=(P,Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场。则以下说法等价：

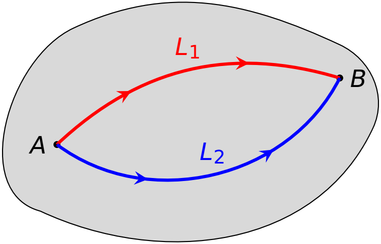
(1) F 是保守场

(2) F 在 D 中任意有向闭曲线 C 上的曲线积分为 0

证明

F是保守场

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx+Qdy=\int_{L_2} Pdx+Qdy$$



补充

性质 设 $F=(P,Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场。则以下说法等价：

(1) F 是保守场

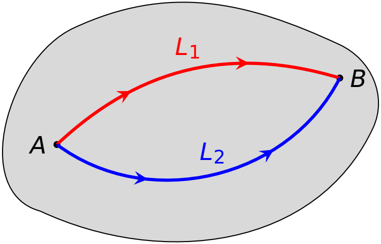
(2) F 在 D 中任意有向闭曲线 C 上的曲线积分为 0

证明

F是保守场

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx+Qdy=\int_{L_2} Pdx+Qdy$$

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx+Qdy-\int_{L_2} Pdx+Qdy=0$$



补充

性质 设 $F=(P,Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场。则以下说法等价：

(1) F 是保守场

(2) F 在 D 中任意有向闭曲线 C 上的曲线积分为 0

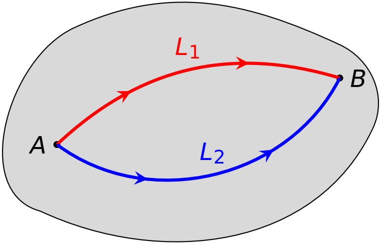
证明

F是保守场

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx+Qdy=\int_{L_2} Pdx+Qdy$$

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx+Qdy-\int_{L_2} Pdx+Qdy=0$$

$$\int_{-L_2} Pdx+Qdy$$



补充

性质 设 $F=(P,Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场。则以下说法等价：

(1) F 是保守场

(2) F 在 D 中任意有向闭曲线 C 上的曲线积分为 0

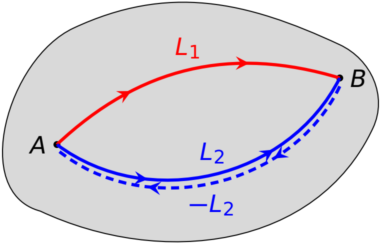
证明

F是保守场

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx+Qdy=\int_{L_2} Pdx+Qdy$$

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx+Qdy-\int_{L_2} Pdx+Qdy=0$$

$$\int_{-L_2} Pdx+Qdy$$



补充

性质 设 $F = (P, Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场。则以下说法等价：

(1) F 是保守场

(2) F 在 D 中任意有向闭曲线 C 上的曲线积分为 0

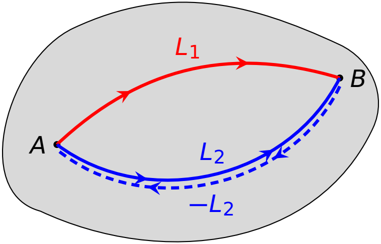
证明

F是保守场

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy$$

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx + Qdy - \int_{L_2} Pdx + Qdy = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx + Qdy + \int_{-L_2} Pdx + Qdy = 0$$



补充

性质 设 $F=(P,Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场。则以下说法等价：

(1) F 是保守场

(2) F 在 D 中任意有向闭曲线 C 上的曲线积分为 0

证明

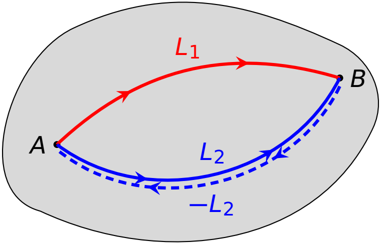
F是保守场

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx+Qdy=\int_{L_2} Pdx+Qdy$$

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx+Qdy-\int_{L_2} Pdx+Qdy=0$$

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx+Qdy+\int_{-L_2} Pdx+Qdy=0$$

$$\Leftrightarrow \int_{L_1+(-L_2)} Pdx+Qdy=0$$



补充

性质 设 $F=(P,Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场。则以下说法等价：

(1) F 是保守场

(2) F 在 D 中任意有向闭曲线 C 上的曲线积分为 0

证明

F是保守场

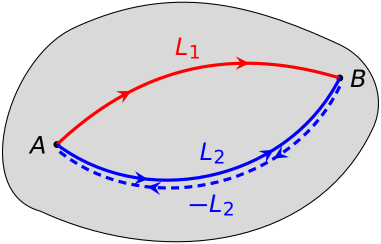
$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx+Qdy=\int_{L_2} Pdx+Qdy$$

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx+Qdy-\int_{L_2} Pdx+Qdy=0$$

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx+Qdy+\int_{-L_2} Pdx+Qdy=0$$

$$\Leftrightarrow \int_{L_1+(-L_2)} Pdx+Qdy=0$$

$$\Leftrightarrow \int_{C} Pdx+Qdy=0$$



小结

- 设 $F=(P,Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场，则

小结

- 设 $F=(P,Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场，则

$\boxed{F\text{是梯度向量场（势场），即 } F=\nabla f}$

$\boxed{F\text{是保守向量场}}$

$\boxed{F\text{在任意闭曲线上的曲线积分为}0}$

$$\boxed{\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0}$$

小结

- 设 $F = (P, Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场，则

$\boxed{F\text{是梯度向量场（势场），即 } F = \nabla f}$

$\boxed{F\text{是保守向量场}}$

$\boxed{F\text{在任意闭曲线上的曲线积分为}0}$

$$\boxed{\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0}$$

小结

- 设 $F = (P, Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场，则

F是保守向量场 $\longleftrightarrow$ F是梯度向量场（势场），即 $F = \nabla f$

F是保守向量场 $\longleftrightarrow$ F在任意闭曲线上的曲线积分为0

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0$$

小结

- 设 $F=(P,Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场，则

F是保守向量场 $\Longleftrightarrow$ F是梯度向量场（势场），即 $F=\nabla f$

F是保守向量场 $\Longleftrightarrow$ F在任意闭曲线上的曲线积分为0

F是保守向量场 $\Longrightarrow$ $\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0$

小结

- 设 $F = (P, Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场，则

F是梯度向量场（势场），即 $F = \nabla f$

F是保守向量场

F在任意闭曲线上的曲线积分为0

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0$$

D是单连通

小结

- 设 $F=(P,Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场，则

$$F\text{是保守向量场} \Longleftrightarrow F\text{是梯度向量场（势场），即 } F=\nabla f$$

$$F\text{是保守向量场} \Longleftrightarrow F\text{在任意闭曲线上的曲线积分为0}$$

$$F\text{是保守向量场} \Longrightarrow \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0 \xRightarrow{D\text{是单连通}} F\text{是保守向量场}$$

- 当 $F=(P,Q)$ 是保守场时，成立 $F=\nabla f$，

小结

- 设 $F=(P,Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场，则

F是保守向量场

F是梯度向量场（势场），即 $F=\nabla f$

F在任意闭曲线上的曲线积分为0

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0$$

D是单连通

- 当 $F=(P,Q)$ 是保守场时，成立 $F=\nabla f$，并且

$$\int_L Pdx+Qdy$$

小结

- 设 $F=(P,Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场，则

$$\boxed{F\text{是保守向量场}} \Longleftrightarrow \boxed{F\text{是梯度向量场（势场），即 } F=\nabla f}$$

$$\boxed{F\text{是保守向量场}} \Longleftrightarrow \boxed{F\text{在任意闭曲线上的曲线积分为}0}$$

$$\boxed{F\text{是保守向量场}} \Longrightarrow \boxed{\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0}$$

D是单连通

- 当 $F=(P,Q)$ 是保守场时，成立 $F=\nabla f$，并且

$$\int_L Pdx+Qdy=f(B)-f(A)$$

小结

- 设 $F=(P,Q)$ 是定义在平面区域 D 上的向量场，则

$$
\begin{tikzcd}
 & \boxed{F\text{是梯度向量场（势场），即 } F=\nabla f} \\
\boxed{F\text{是保守向量场}} \arrow[ur, leftrightarrow] \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dr] & \boxed{F\text{在任意闭曲线上的曲线积分为}0} \\
 & \boxed{\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0} \arrow[ul, dashed, bend left, "D\text{是单连通}"]
\end{tikzcd}
$$

- 当 $F=(P,Q)$ 是保守场时，成立 $F=\nabla f$，并且

$$\int_L Pdx+Qdy=f(B)-f(A)$$

这里 B 是有向曲线 L 的终点，A 是起点

有兴趣可以将以上的概念、性质推广到三维空间：

- 三维空间的向量场 $F = (P, Q, R)$

有兴趣可以将以上的概念、性质推广到三维空间：

- 三维空间的向量场 $F=(P,Q,R)$称为保守向量场，指其曲线积分与路径无关

有兴趣可以将以上的概念、性质推广到三维空间：

- 三维空间的向量场 $F=(P,Q,R)$称为保守向量场，指其曲线积分与路径无关
- $F=(P,Q,R)$ 是保守场，当且仅当 $\exists f(x,y,z)$ 使得 $F=\nabla f$，

有兴趣可以将以上的概念、性质推广到三维空间：

- 三维空间的向量场 $F=(P,\ Q,\ R)$称为保守向量场，指其曲线积分与路径无关
- $F=(P,\ Q,\ R)$ 是保守场，当且仅当 $\exists\, f(x,y,z)$ 使得 $F=\nabla f$，此时

$$\int_L Pdx+Qdy+Rdz=f(\text{终点})-f(\text{起点})$$

有兴趣可以将以上的概念、性质推广到三维空间：

- 三维空间的向量场 $F=(P, Q, R)$称为保守向量场，指其曲线积分与路径无关
- $F=(P, Q, R)$ 是保守场，当且仅当 $\exists f(x,y,z)$ 使得 $F=\nabla f$，此时

$$\int_L Pdx+Qdy+Rdz=f(\text{终点})-f(\text{起点})$$

- 如果 $F=(P, Q, R)$ 是保守向量场，则

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=0$$

有兴趣可以将以上的概念、性质推广到三维空间：

- 三维空间的向量场 $F=(P,Q,R)$称为保守向量场，指其曲线积分与路径无关
- $F=(P,Q,R)$ 是保守场，当且仅当 $\exists f(x,y,z)$ 使得 $F=\nabla f$，此时

$$\int_L Pdx+Qdy+Rdz=f(\text{终点})-f(\text{起点})$$

- 如果 $F=(P,Q,R)$ 是保守向量场，则

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=0$$

  但反过来不一定成立

有兴趣可以将以上的概念、性质推广到三维空间：

- 三维空间的向量场 $F=(P,Q,R)$称为保守向量场，指其曲线积分与路径无关
- $F=(P,Q,R)$ 是保守场，当且仅当 $\exists f(x,y,z)$ 使得 $F=\nabla f$，此时
$$\int_L Pdx+Qdy+Rdz=f(\text{终点})-f(\text{起点})$$
- 如果 $F=(P,Q,R)$ 是保守向量场，则
$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=0$$
但反过来不一定成立
- 如果 F 的定义域是单连通区域，则上述命题的逆命题也成立（从而是充分必要条件）

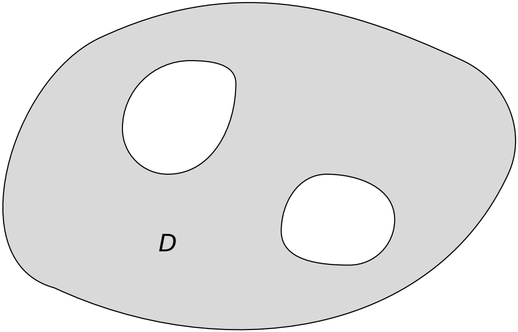
We are here now...

1. 保守向量场；积分路径无关性

2. 格林公式

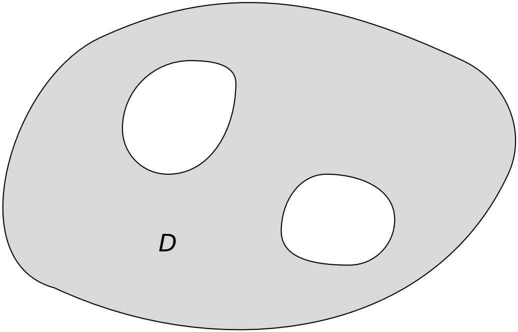
区域边界的定向

定义 假设曲线 C 是平面区域 D 的边界。



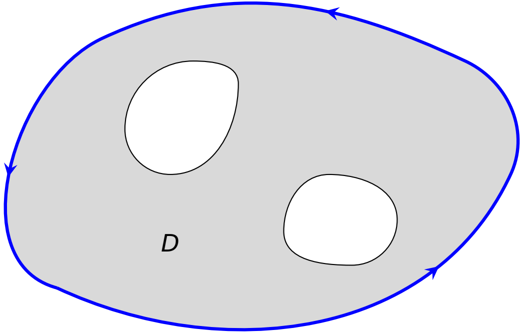
区域边界的定向

定义 假设曲线 C 是平面区域 D 的边界。规定 C 的正向如下：当观察者沿 C 的这个方向行走时，左手边在区域 D 内。



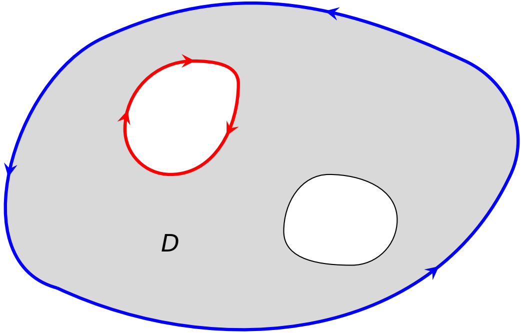
区域边界的定向

定义 假设曲线 C 是平面区域 D 的边界。规定 C 的**正向**如下：当观察者沿 C 的这个方向行走时，左手边在区域 D 内。



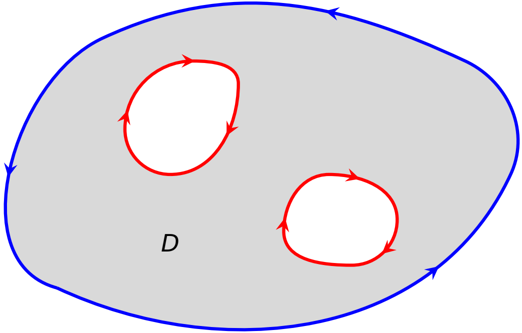
区域边界的定向

定义 假设曲线 C 是平面区域 D 的边界。规定 C 的正向如下：当观察者沿 C 的这个方向行走时，左手边在区域 D 内。



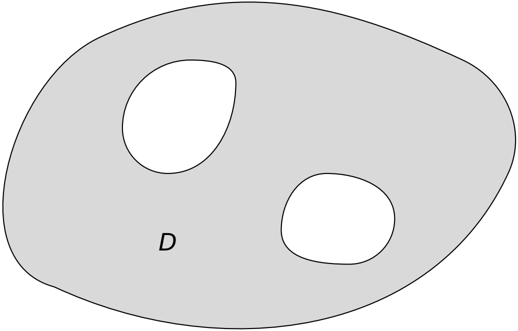
区域边界的定向

定义 假设曲线 C 是平面区域 D 的边界。规定 C 的正向如下：当观察者沿 C 的这个方向行走时，左手边在区域 D 内。



格林公式 设有界闭区域 D 是由分段光滑曲线 C 围成，若函数 $P(x, y)$ 及 $Q(x, y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数，则成立

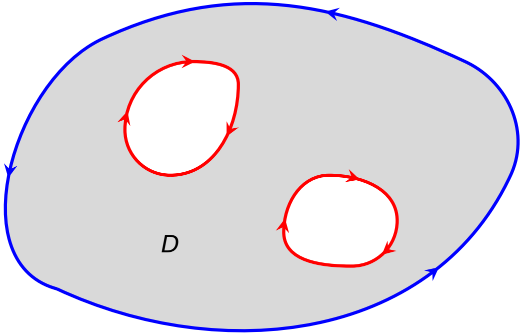
$$\iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} dxdy = \int_C Pdx + Qdy$$



格林公式 设有界闭区域 D 是由分段光滑曲线 C 围成，若函数 $P(x, y)$ 及 $Q(x, y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数，则成立

$$\iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} dxdy = \int_C Pdx + Qdy$$

其中 C 的定向取：作为区域 D 的边界的正向。



例 利用格林公式计算以下的曲线积分：

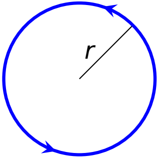
1. $\int_C y dx - x dy$，C 是半径为 r 的圆周，定向取逆时针方向
2. $\int_C (y^4 + x^3) dx + 2x^6 dy$，$C$ 是矩形 $[0,1] \times [0,1]$，逆时针方向

例 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1. $\int_C ydx - xdy$，C 是半径为 r 的圆周，定向取逆时针方向
2. $\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6 dy$，$C$ 是矩形 $[0,1] \times [0,1]$，逆时针方向

解 1.

$$\int_C ydx - xdy$$

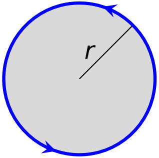


例 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1. $\int_C y dx - x dy$，C 是半径为 r 的圆周，定向取逆时针方向
2. $\int_C (y^4 + x^3) dx + 2x^6 dy$，$C$ 是矩形 $[0, 1] \times [0, 1]$，逆时针方向

解 1.

$$\int_C y dx - x dy$$

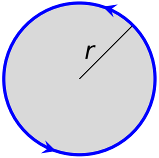


例 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1. $\int_C y dx - x dy$，C 是半径为 r 的圆周，定向取逆时针方向
2. $\int_C (y^4 + x^3) dx + 2x^6 dy$，$C$ 是矩形 $[0,1] \times [0,1]$，逆时针方向

解 1.

$$\int_C y dx - x dy = \iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ & \end{vmatrix} dxdy$$

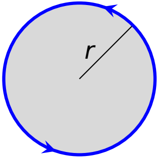


例 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1. $\int_C ydx - xdy$，C 是半径为 r 的圆周，定向取逆时针方向
2. $\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6 dy$，$C$ 是矩形 $[0,1] \times [0,1]$，逆时针方向

解 1.

$$\int_C ydx - xdy = \iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y & -x \end{vmatrix} dxdy$$



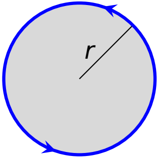
例 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1. $\int_C y dx - x dy$，C 是半径为 r 的圆周，定向取逆时针方向
2. $\int_C (y^4 + x^3) dx + 2x^6 dy$，$C$ 是矩形 $[0, 1] \times [0, 1]$，逆时针方向

解 1.

$$\int_C y dx - x dy = \iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y & -x \end{vmatrix} dx dy$$

$$= \iint_D -2 dx dy$$



例 利用格林公式计算以下的曲线积分：

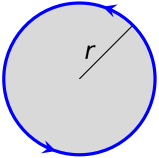
1. $\int_C ydx - xdy$，C 是半径为 r 的圆周，定向取逆时针方向
2. $\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy$，$C$ 是矩形 $[0,1]\times[0,1]$，逆时针方向

解 1.

$$\int_C ydx - xdy = \iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y & -x \end{vmatrix} dxdy$$

$$= \iint_D -2dxdy$$

$$= -2|D|$$



例 利用格林公式计算以下的曲线积分：

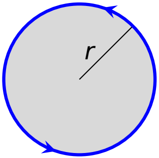
1. $\int_C y dx - x dy$，C 是半径为 r 的圆周，定向取逆时针方向
2. $\int_C (y^4 + x^3) dx + 2x^6 dy$，$C$ 是矩形 $[0, 1] \times [0, 1]$，逆时针方向

解 1.

$$\int_C y dx - x dy = \iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y & -x \end{vmatrix} dx dy$$

$$= \iint_D -2 dx dy$$

$$= -2|D| = -2\pi r^2$$

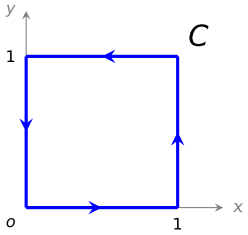


例 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1. $\int_C y dx - x dy$，C 是半径为 r 的圆周，定向取逆时针方向
2. $\int_C (y^4 + x^3) dx + 2x^6 dy$，$C$ 是矩形 $[0, 1] \times [0, 1]$，逆时针方向

解 2.

$$\int_C (y^4 + x^3) dx + 2x^6 dy$$

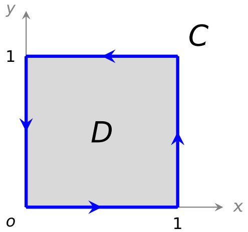


例 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1. $\int_C y dx - x dy$，C 是半径为 r 的圆周，定向取逆时针方向
2. $\int_C (y^4 + x^3) dx + 2x^6 dy$，$C$ 是矩形 $[0,1] \times [0,1]$，逆时针方向

解 2.

$$\int_C (y^4 + x^3) dx + 2x^6 dy$$



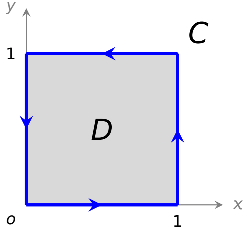
例 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1. $\int_C y dx - x dy$，C 是半径为 r 的圆周，定向取逆时针方向
2. $\int_C (y^4 + x^3) dx + 2x^6 dy$，$C$ 是矩形 $[0,1] \times [0,1]$，逆时针方向

解 2.

$$\int_C (y^4 + x^3) dx + 2x^6 dy$$

$$= \iint_D \begin{vmatrix} \quad \frac{\partial}{\partial x} \quad & \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \\ & \end{vmatrix} dx dy$$



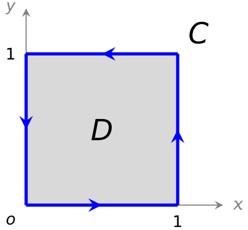
例 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1. $\int_C y dx - x dy$，C 是半径为 r 的圆周，定向取逆时针方向
2. $\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6 dy$，$C$ 是矩形 $[0,1]\times[0,1]$，逆时针方向

解 2.

$$\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6 dy$$

$$= \iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y^4 + x^3 & 2x^6 \end{vmatrix} dxdy$$



例 利用格林公式计算以下的曲线积分：

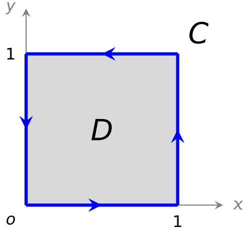
1. $\int_C y dx - x dy$，C 是半径为 r 的圆周，定向取逆时针方向
2. $\int_C (y^4 + x^3) dx + 2x^6 dy$，$C$ 是矩形 $[0,1]\times[0,1]$，逆时针方向

解 2.

$$\int_C (y^4 + x^3) dx + 2x^6 dy$$

$$= \iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y^4 + x^3 & 2x^6 \end{vmatrix} dxdy$$

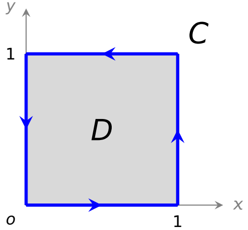
$$= \iint_D (12x^5 - 4y^3) dxdy$$



例 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1. $\int_C y dx - x dy$，C 是半径为 r 的圆周，定向取逆时针方向
2. $\int_C (y^4 + x^3) dx + 2x^6 dy$，$C$ 是矩形 $[0,1]\times[0,1]$，逆时针方向

解 2.



$$\int_C (y^4 + x^3) dx + 2x^6 dy$$

$$= \iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y^4 + x^3 & 2x^6 \end{vmatrix} dxdy$$

$$= \iint_D (12x^5 - 4y^3) dxdy = \int \left[\int (12x^5 - 4y^3) dx \right] dy$$

例 利用格林公式计算以下的曲线积分：

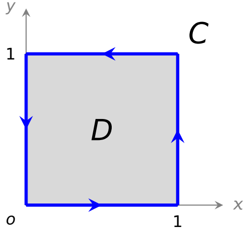
1. $\int_C ydx - xdy$，C 是半径为 r 的圆周，定向取逆时针方向
2. $\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy$，$C$ 是矩形 $[0,1]\times[0,1]$，逆时针方向

解 2.

$$\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6dy$$

$$= \iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y^4 + x^3 & 2x^6 \end{vmatrix} dxdy$$

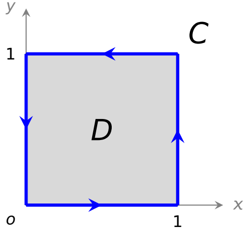
$$= \iint_D (12x^5 - 4y^3)dxdy = \int_0^1 \left[\int \quad (12x^5 - 4y^3)dx\right]dy$$



例 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1. $\int_C y dx - x dy$，C 是半径为 r 的圆周，定向取逆时针方向
2. $\int_C (y^4 + x^3) dx + 2x^6 dy$，$C$ 是矩形 $[0,1] \times [0,1]$，逆时针方向

解 2.



$$\int_C (y^4 + x^3) dx + 2x^6 dy$$

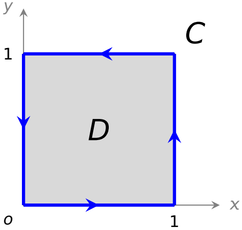
$$= \iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y^4 + x^3 & 2x^6 \end{vmatrix} dxdy$$

$$= \iint_D (12x^5 - 4y^3) dxdy = \int_0^1 \left[\int_0^1 (12x^5 - 4y^3) dx \right] dy$$

例 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1. $\int_C y dx - x dy$，C 是半径为 r 的圆周，定向取逆时针方向
2. $\int_C (y^4 + x^3) dx + 2x^6 dy$，$C$ 是矩形 $[0,1] \times [0,1]$，逆时针方向

解 2.



$$\int_C (y^4 + x^3) dx + 2x^6 dy$$

$$= \iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y^4 + x^3 & 2x^6 \end{vmatrix} dxdy$$

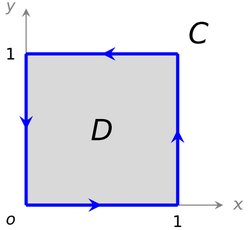
$$= \iint_D (12x^5 - 4y^3) dxdy = \int_0^1 \left[\int_0^1 (12x^5 - 4y^3) dx \right] dy$$

$$= \int_0^1 \left[2x^6 - 4y^3 x \Big|_0^1 \right] dy$$

例 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1. $\int_C ydx - xdy$，C 是半径为 r 的圆周，定向取逆时针方向
2. $\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6 dy$，$C$ 是矩形 $[0,1]\times[0,1]$，逆时针方向

解 2.



$$\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6 dy$$

$$= \iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y^4 + x^3 & 2x^6 \end{vmatrix} dxdy$$

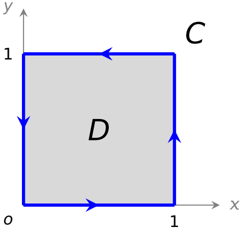
$$= \iint_D (12x^5 - 4y^3)dxdy = \int_0^1 \left[\int_0^1 (12x^5 - 4y^3)dx\right]dy$$

$$= \int_0^1 \left[2x^6 - 4y^3 x\Big|_0^1\right]dy = \int_0^1 \left[2 - 4y^3\right]dy$$

例 利用格林公式计算以下的曲线积分：

1. $\int_C y dx - x dy$，C 是半径为 r 的圆周，定向取逆时针方向
2. $\int_C (y^4 + x^3) dx + 2x^6 dy$，$C$ 是矩形 $[0,1] \times [0,1]$，逆时针方向

解 2.



$$\int_C (y^4 + x^3) dx + 2x^6 dy$$

$$= \iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y^4 + x^3 & 2x^6 \end{vmatrix} dxdy$$

$$= \iint_D (12x^5 - 4y^3) dxdy = \int_0^1 \left[\int_0^1 (12x^5 - 4y^3) dx \right] dy$$

$$= \int_0^1 \left[2x^6 - 4y^3 x \Big|_0^1 \right] dy = \int_0^1 \left[2 - 4y^3 \right] dy = 1$$

格林公式推论 设有界闭区域 D 是由分段光滑曲线 C 围成，则

$$D\text{的面积} = \frac{1}{2}\int_C -ydx + xdy$$

格林公式推论 设有界闭区域 D 是由分段光滑曲线 C 围成，则

$$D\text{的面积} = \frac{1}{2}\int_C -y\,dx + x\,dy$$

其中 C 的定向取：作为区域 D 的边界的正向。

格林公式推论 设有界闭区域 D 是由分段光滑曲线 C 围成，则

$$D\text{的面积} = \frac{1}{2}\int_C -ydx + xdy$$

其中 C 的定向取：作为区域 D 的边界的正向。

证明

$$\frac{1}{2}\int_C -ydx + xdy$$

格林公式推论 设有界闭区域 D 是由分段光滑曲线 C 围成，则

$$D\text{的面积} = \frac{1}{2}\int_C -ydx + xdy$$

其中 C 的定向取：作为区域 D 的边界的正向。

证明

$$\frac{1}{2}\int_C -ydx + xdy = \frac{1}{2}\iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{vmatrix} dxdy$$

格林公式推论 设有界闭区域 D 是由分段光滑曲线 C 围成，则

$$D\text{的面积} = \frac{1}{2}\int_C -ydx + xdy$$

其中 C 的定向取：作为区域 D 的边界的正向。

证明

$$\frac{1}{2}\int_C -ydx + xdy = \frac{1}{2}\iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ -y & x \end{vmatrix} dxdy$$

格林公式推论 设有界闭区域 D 是由分段光滑曲线 C 围成，则

$$D\text{的面积} = \frac{1}{2}\int_C -y dx + x dy$$

其中 C 的定向取：作为区域 D 的边界的正向。

证明

$$\frac{1}{2}\int_C -y dx + x dy = \frac{1}{2}\iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ -y & x \end{vmatrix} dx dy = \int_D 1 dx dy$$

格林公式推论 设有界闭区域 D 是由分段光滑曲线 C 围成，则

$$D\text{的面积} = \frac{1}{2}\int_C -y\,dx + x\,dy$$

其中 C 的定向取：作为区域 D 的边界的正向。

证明

$$\frac{1}{2}\int_C -y\,dx + x\,dy = \frac{1}{2}\iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ -y & x \end{vmatrix} dx\,dy = \int_D 1\,dx\,dy = D\text{的面积}$$

格林公式推论 设有界闭区域 D 是由分段光滑曲线 C 围成，则

$$D\text{的面积} = \frac{1}{2}\int_C -ydx + xdy$$

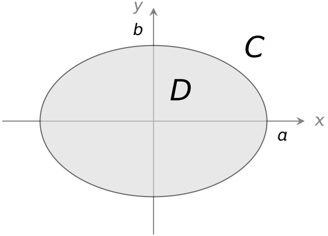
其中 C 的定向取：作为区域 D 的边界的正向。

证明

$$\frac{1}{2}\int_C -ydx + xdy = \frac{1}{2}\iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ -y & x \end{vmatrix} dxdy = \int_D 1dxdy = D\text{的面积}$$

例 利用上述公式计算椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 所围成的面积。

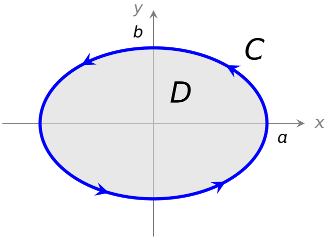
例 利用上述公式计算椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围成的面积。



解

$$D\text{的面积} = \frac{1}{2}\int_C -y\,dx + x\,dy$$

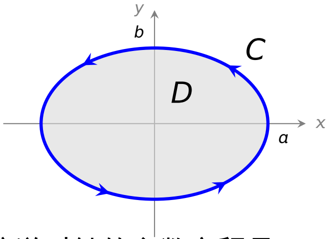
例 利用上述公式计算椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围成的面积。



解

$$D\text{的面积} = \frac{1}{2}\int_C -ydx + xdy$$

例 利用上述公式计算椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围成的面积。

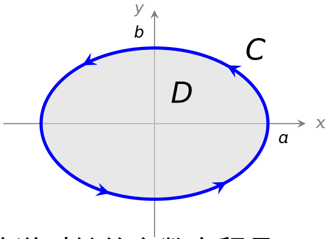


解 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 按逆时针的参数方程是

$$x=a\cos\theta,\quad y=b\sin\theta\quad(\theta:0\to 2\pi)$$

$$D\text{的面积}=\frac{1}{2}\int_C -ydx+xdy$$

例 利用上述公式计算椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围成的面积。



解 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 按逆时针的参数方程是

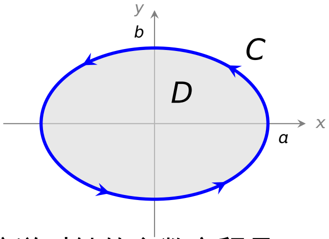
$$x=a\cos\theta,\quad y=b\sin\theta\quad(\theta:0\to 2\pi)$$

所以

$$D\text{的面积}=\frac{1}{2}\int_C -y\,dx+x\,dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\Big[(-b\sin\theta)(a\cos\theta)'+(a\cos\theta)(b\sin\theta)'\Big]d\theta$$

例 利用上述公式计算椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围成的面积。



解 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 按逆时针的参数方程是

$$x=a\cos\theta,\quad y=b\sin\theta\quad(\theta:0\to 2\pi)$$

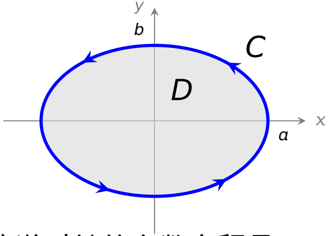
所以

$$D\text{的面积}=\frac{1}{2}\int_C -ydx+xdy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\Big[(-b\sin\theta)(a\cos\theta)'+(a\cos\theta)(b\sin\theta)'\Big]d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\Big[ab\Big]d\theta$$

例 利用上述公式计算椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围成的面积。



解 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 按逆时针的参数方程是

$$x=a\cos\theta,\quad y=b\sin\theta\quad(\theta:0\to 2\pi)$$

所以

$$D\text{的面积}=\frac{1}{2}\int_C -ydx+xdy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\Big[(-b\sin\theta)(a\cos\theta)'+(a\cos\theta)(b\sin\theta)'\Big]d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\Big[ab\Big]d\theta=ab\pi$$