第 4 章 α：矩阵的特征值与特征向量

数学系　梁卓滨

2019-2020 学年 I

定义 设 A 是 n 阶方阵。

$$A\alpha = \lambda\alpha$$

定义 设 A 是 n 阶方阵。若存在数 λ 及非零 n 维向量 α，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha$$

定义 设 A 是 n 阶方阵。若存在数 λ 及非零 n 维向量 α，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha$$

则称 λ 是一个**特征值**，α 为对应特征值 λ 的**特征向量**。

定义 设 A 是 n 阶方阵。若存在数 λ 及非零 n 维向量 α，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha$$

则称 λ 是一个**特征值**，α 为对应特征值 λ 的**特征向量**。

例 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & b & -1 \end{pmatrix}$，$\lambda$ 为特征值，$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 为相应的特征向量，求 a, b 和 λ。

定义 设 A 是 n 阶方阵。若存在数 λ 及非零 n 维向量 α，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha$$

则称 λ 是一个**特征值**，α 为对应特征值 λ 的**特征向量**。

例 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & b & -1 \end{pmatrix}$，$\lambda$ 为特征值，$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 为相应的特征向量，求 a, b 和 λ。

解

$A\alpha = \lambda\alpha \Rightarrow$

定义 设 A 是 n 阶方阵。若存在数 λ 及非零 n 维向量 α，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha$$

则称 λ 是一个**特征值**，α 为对应特征值 λ 的**特征向量**。

例 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & b & -1 \end{pmatrix}$，$\lambda$ 为特征值，$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 为相应的特征向量，求 a, b 和 λ。

解

$$A\alpha = \lambda\alpha \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & b & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

定义 设 A 是 n 阶方阵。若存在数 λ 及非零 n 维向量 α，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha$$

则称 λ 是一个**特征值**，α 为对应特征值 λ 的**特征向量**。

例 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & b & -1 \end{pmatrix}$, λ 为特征值，$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 为相应的特征向量，求 a, b 和 λ。

解

$$A\alpha = \lambda\alpha \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & b & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 \\ a+10 \\ -2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ -2\lambda \\ 3\lambda \end{pmatrix}$$

定义 设 A 是 n 阶方阵。若存在数 λ 及非零 n 维向量 α，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha$$

则称 λ 是一个**特征值**，α 为对应特征值 λ 的**特征向量**。

例 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & b & -1 \end{pmatrix}$，$\lambda$ 为特征值，$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 为相应的特征向量，求 a, b 和 λ。

解

$$A\alpha = \lambda\alpha \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & b & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 \\ a+10 \\ -2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ -2\lambda \\ 3\lambda \end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{cases} \lambda = -4 \\ a = \\ b = \end{cases}.$$

定义 设 A 是 n 阶方阵。若存在数 λ 及非零 n 维向量 α，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha$$

则称 λ 是一个**特征值**，α 为对应特征值 λ 的**特征向量**。

例 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & b & -1 \end{pmatrix}$，$\lambda$ 为特征值，$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 为相应的特征向量，求 a, b 和 λ。

解

$$A\alpha = \lambda\alpha \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & b & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 \\ a+10 \\ -2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ -2\lambda \\ 3\lambda \end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{cases} \lambda = -4 \\ a = -2 \\ b = \end{cases}.$$

定义 设 A 是 n 阶方阵。若存在数 λ 及非零 n 维向量 α，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha$$

则称 λ 是一个**特征值**，α 为对应特征值 λ 的**特征向量**。

例 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & b & -1 \end{pmatrix}$, λ 为特征值，$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 为相应的特征向量，求 a, b 和 λ。

解

$$A\alpha = \lambda\alpha \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & b & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 \\ a+10 \\ -2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ -2\lambda \\ 3\lambda \end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{cases} \lambda = -4 \\ a = -2 \\ b = 6 \end{cases}.$$

特征值与特征向量的求解

定义 设 A 是 n 阶方阵。若存在数 λ 及非零 n 维向量 α，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha$$

则称 λ 是一个**特征值**，α 为对应特征值 λ 的**特征向量**。

特征值与特征向量的求解

定义 设 A 是 n 阶方阵。若存在数 λ 及非零 n 维向量 α，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha$$

则称 λ 是一个**特征值**，α 为对应特征值 λ 的**特征向量**。

求解 λ, α 步骤

特征值与特征向量的求解

定义 设 A 是 n 阶方阵。若存在数 λ 及非零 n 维向量 α，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha \qquad \left(\Rightarrow \lambda\alpha - A\alpha = 0 \qquad\qquad\qquad \right)$$

则称 λ 是一个**特征值**，α 为对应特征值 λ 的**特征向量**。

求解 λ, α 步骤

特征值与特征向量的求解

定义 设 A 是 n 阶方阵。若存在数 λ 及非零 n 维向量 α，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha \qquad \Big(\Rightarrow \lambda\alpha - A\alpha = 0 \Longrightarrow (\lambda I - A)\alpha = 0 \Big)$$

则称 λ 是一个**特征值**，α 为对应特征值 λ 的**特征向量**。

求解 λ, α 步骤

特征值与特征向量的求解

定义 设 A 是 n 阶方阵。若存在数 λ 及非零 n 维向量 α，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha \qquad \left(\Rightarrow \lambda\alpha - A\alpha = 0 \xRightarrow{\text{”变量分离”}} (\lambda I - A)\alpha = 0 \right)$$

则称 λ 是一个**特征值**，α 为对应特征值 λ 的**特征向量**。

求解 λ, α 步骤

特征值与特征向量的求解

定义 设 A 是 n 阶方阵。若存在数 λ 及非零 n 维向量 α，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha \qquad \left(\Rightarrow \lambda\alpha - A\alpha = 0 \xrightarrow{\text{"变量分离"}} \boxed{(\lambda I - A)\alpha = 0} \right)$$

则称 λ 是一个**特征值**，α 为对应特征值 λ 的**特征向量**。

求解 λ, α 步骤

特征值与特征向量的求解

定义 设 A 是 n 阶方阵。若存在数 λ 及非零 n 维向量 α，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha \qquad \left(\Rightarrow \lambda\alpha - A\alpha = 0 \xRightarrow{\text{”变量分离”}} \boxed{(\lambda I - A)\alpha = 0} \right)$$

则称 λ 是一个**特征值**，α 为对应特征值 λ 的**特征向量**。

$\boxed{\alpha \text{ 是} (\lambda I - A)x = 0 \text{ 的非零解}}$

求解 λ, α 步骤

特征值与特征向量的求解

定义 设 A 是 n 阶方阵。若存在数 λ 及非零 n 维向量 α，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha \qquad \left(\Rightarrow \lambda\alpha - A\alpha = 0 \xrightarrow{\text{"变量分离"}} \boxed{(\lambda I - A)\alpha = 0} \right)$$

则称 λ 是一个**特征值**，α 为对应特征值 λ 的**特征向量**。

$\boxed{\alpha \text{ 是} (\lambda I - A)x = 0 \text{ 的非零解}}$

求解 λ, α 步骤

$$|\lambda I - A| = 0$$

特征值与特征向量的求解

定义 设 A 是 n 阶方阵。若存在数 λ 及非零 n 维向量 α，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha \qquad \left(\Rightarrow \lambda\alpha - A\alpha = 0 \xRightarrow{\text{"变量分离"}} \boxed{(\lambda I - A)\alpha = 0} \right)$$

则称 λ 是一个**特征值**，α 为对应特征值 λ 的**特征向量**。

α 是$(\lambda I - A)x = 0$ 的非零解

求解 λ, α 步骤

特征方程

$$\boxed{|\lambda I - A| = 0}$$

特征值与特征向量的求解

定义 设 A 是 n 阶方阵。若存在数 λ 及非零 n 维向量 α，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha \qquad \left(\Rightarrow \lambda\alpha - A\alpha = 0 \xrightarrow{\text{"变量分离"}} \boxed{(\lambda I - A)\alpha = 0} \right)$$

则称 λ 是一个**特征值**，α 为对应特征值 λ 的**特征向量**。

α 是$(\lambda I - A)x = 0$ 的非零解

求解 λ, α 步骤

1. 先求解特征值 λ：等价于求解

特征方程

$$\boxed{|\lambda I - A| = 0}$$

特征值与特征向量的求解

定义 设 A 是 n 阶方阵。若存在数 λ 及非零 n 维向量 α，满足

$$A\alpha=\lambda\alpha \qquad \left(\Rightarrow \lambda\alpha - A\alpha = 0 \xrightarrow{\text{”变量分离”}} \boxed{(\lambda I - A)\alpha = 0}\right)$$

则称 λ 是一个**特征值**，α 为对应特征值 λ 的**特征向量**。

α 是$(\lambda I-A)x=0$ 的非零解

求解 λ, α 步骤

1. 先求解特征值 λ：等价于求解

$$\boxed{|\lambda I - A| = 0}$$

特征方程

2. 再求解对应 λ 的特征向量 α：

特征值与特征向量的求解

定义 设 A 是 n 阶方阵。若存在数 λ 及非零 n 维向量 α，满足

$$A\alpha = \lambda\alpha \qquad \left(\Rightarrow \lambda\alpha - A\alpha = 0 \xRightarrow{\text{"变量分离"}} \boxed{(\lambda I - A)\alpha = 0} \right)$$

则称 λ 是一个**特征值**，α 为对应特征值 λ 的**特征向量**。

$\boxed{\alpha \text{ 是} (\lambda I - A)x = 0 \text{ 的非零解}}$

求解 λ, α 步骤

1. 先求解特征值 λ：等价于求解

$$\boxed{|\lambda I - A| = 0}$$

特征方程

2. 再求解对应 λ 的特征向量 α：等价于求解

$$(\lambda I - A)x = 0$$

的所有非零解。

特征值与特征向量的求解

定义 设 A 是 n 阶方阵。若存在数 λ 及非零 n 维向量 α，满足

$$A\alpha=\lambda\alpha \qquad \left(\Rightarrow \lambda\alpha-A\alpha=0 \xRightarrow{\text{"变量分离"}} \boxed{(\lambda I-A)\alpha=0}\right)$$

则称 λ 是一个**特征值**，α 为对应特征值 λ 的**特征向量**。

α 是$(\lambda I-A)x=0$ 的非零解

求解 λ, α 步骤

1. 先求解特征值 λ：等价于求解

特征方程

$$\boxed{|\lambda I-A|=0}$$

2. 再求解对应 λ 的特征向量 α：等价于求解

$$(\lambda I-A)x=0$$

的所有非零解。设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 是基础解系，则

$$\alpha=c_1\alpha_1+\cdots+c_s\alpha_s, \quad \left(c_1,\cdots,c_s\text{不全为零}\right)$$

例 1 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

例 1 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & -1\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程：$0=|\lambda I-A|$

例 1 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & -1\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程：$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -1\\ -5 & \lambda+1\end{vmatrix}=$

例 1 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & -1\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程：$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -1\\ -5 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda+1)-5$

例 1 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程：$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -5 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 8$

例 1 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & -1\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程：$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -1\\ -5 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda+2)$

例 1 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程：$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -5 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda + 2)$

  所以 $\lambda_1 = -2$，$\lambda_2 = 4$。

例 1 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & -1\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程：$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -1\\ -5 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda+2)$
  所以 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=4$。
- 当 $\lambda_1=-2$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$：
- 当 $\lambda_2=4$，求解 $(\lambda_2 I-A)x=0$：

例 1 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & -1\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程：$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -1\\ -5 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda+2)$

  所以 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=4$。
- 当 $\lambda_1=-2$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$：

$$(-2I-A\,\vdots\,0)=\left(\begin{array}{cc|c}-5 & -1 & 0\\ -5 & -1 & 0\end{array}\right)$$

- 当 $\lambda_2=4$，求解 $(\lambda_2 I-A)x=0$：

例 1 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&1\\5&-1\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程：$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-1\\-5&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda+2)$

  所以 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=4$。

- 当 $\lambda_1=-2$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$：

$$(-2I-A\vdots 0)=\left(\begin{array}{cc|c}-5&-1&0\\-5&-1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}5&1&0\\0&0&0\end{array}\right)$$

- 当 $\lambda_2=4$，求解 $(\lambda_2 I-A)x=0$：

例 1 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & -1\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程：$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -1\\ -5 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda+2)$

  所以 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=4$。
- 当 $\lambda_1=-2$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$：

$$(-2I-A\vdots 0)=\left(\begin{array}{cc|c}-5 & -1 & 0\\ -5 & -1 & 0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}5 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$5x_1+x_2=0$

- 当 $\lambda_2=4$，求解 $(\lambda_2 I-A)x=0$：

例 1 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&1\\5&-1\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程：$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-1\\-5&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda+2)$

  所以 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=4$。
- 当 $\lambda_1=-2$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$：

$$(-2I-A\,\vdots\,0)=\left(\begin{array}{cc|c}-5&-1&0\\-5&-1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}5&1&0\\0&0&0\end{array}\right)$$

$$5x_1+x_2=0$$
$$\Downarrow$$
$$x_2=-5x_1$$

- 当 $\lambda_2=4$，求解 $(\lambda_2 I-A)x=0$：

例 1 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\5 & -1\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程：$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -1\\-5 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda+2)$

  所以 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=4$。

- 当 $\lambda_1=-2$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$：

$$(-2I-A\vdots 0)=\left(\begin{array}{cc|c}-5 & -1 & 0\\-5 & -1 & 0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}5 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$5x_1+x_2=0$$
$$\Downarrow$$
$$x_2=-5x_1$$

  基础解系：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$。

- 当 $\lambda_2=4$，求解 $(\lambda_2 I-A)x=0$：

例 1 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&1\\5&-1\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程：$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-1\\-5&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda+2)$

  所以 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=4$。

- 当 $\lambda_1=-2$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$：

$$(-2I-A\,\vdots\,0)=\left(\begin{array}{cc|c}-5&-1&0\\-5&-1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}5&1&0\\0&0&0\end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c}5x_1+x_2=0\\ \Downarrow\\ x_2=-5x_1\end{array}$$

  基础解系：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$。 $c_1\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$

- 当 $\lambda_2=4$，求解 $(\lambda_2 I-A)x=0$：

例 1 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & -1\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程：$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -1\\ -5 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda+2)$

  所以 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=4$。

- 当 $\lambda_1=-2$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$：

$$(-2I-A\,\vdots\,0)=\left(\begin{array}{cc|c}-5 & -1 & 0\\ -5 & -1 & 0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}5 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$5x_1+x_2=0$$
$$\Downarrow$$
$$x_2=-5x_1$$

  基础解系：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\ -5\end{pmatrix}$。特征向量：$c_1\begin{pmatrix}1\\ -5\end{pmatrix}$，其中 $c_1\neq 0$

- 当 $\lambda_2=4$，求解 $(\lambda_2 I-A)x=0$：

例 1 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&1\\5&-1\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程：$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-1\\-5&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda+2)$

  所以 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=4$。

- 当 $\lambda_1=-2$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$：

$$(-2I-A\vdots 0)=\left(\begin{array}{cc|c}-5&-1&0\\-5&-1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}5&1&0\\0&0&0\end{array}\right)$$

$$5x_1+x_2=0 \quad\Downarrow\quad x_2=-5x_1$$

  基础解系：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$。特征向量：$c_1\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$，其中 $c_1\neq 0$

- 当 $\lambda_2=4$，求解 $(\lambda_2 I-A)x=0$：

$$(4I-A\vdots 0)=\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&0\\-5&5&0\end{array}\right)$$

例 1 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & -1\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程：$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -1\\ -5 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda+2)$

  所以 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=4$。

- 当 $\lambda_1=-2$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$：

$$(-2I-A\,\vdots\,0)=\left(\begin{array}{cc|c}-5 & -1 & 0\\ -5 & -1 & 0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}5 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$5x_1+x_2=0$$
$$\Downarrow$$
$$x_2=-5x_1$$

  基础解系：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\ -5\end{pmatrix}$。特征向量：$c_1\begin{pmatrix}1\\ -5\end{pmatrix}$，其中 $c_1\neq 0$

- 当 $\lambda_2=4$，求解 $(\lambda_2 I-A)x=0$：

$$(4I-A\,\vdots\,0)=\left(\begin{array}{cc|c}1 & -1 & 0\\ -5 & 5 & 0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

例 1 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&1\\5&-1\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程：$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-1\\-5&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda+2)$

  所以 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=4$。

- 当 $\lambda_1=-2$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$：

  $$(-2I-A\,\vdots\,0)=\left(\begin{array}{cc|c}-5&-1&0\\-5&-1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}5&1&0\\0&0&0\end{array}\right)\qquad \begin{array}{c}5x_1+x_2=0\\ \Downarrow\\ x_2=-5x_1\end{array}$$

  基础解系：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$。特征向量：$c_1\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$，其中 $c_1\neq 0$

- 当 $\lambda_2=4$，求解 $(\lambda_2 I-A)x=0$：

  $$(4I-A\,\vdots\,0)=\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&0\\-5&5&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&0\\0&0&0\end{array}\right)\qquad x_1-x_2=0$$

例 1 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&1\\5&-1\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程：$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-1\\-5&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda+2)$

  所以 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=4$。
- 当 $\lambda_1=-2$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$：

$$(-2I-A\,\vdots\,0)=\left(\begin{array}{cc|c}-5&-1&0\\-5&-1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}5&1&0\\0&0&0\end{array}\right)\qquad\begin{array}{c}5x_1+x_2=0\\\Downarrow\\x_2=-5x_1\end{array}$$

  基础解系：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$。特征向量：$c_1\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$，其中 $c_1\neq0$
- 当 $\lambda_2=4$，求解 $(\lambda_2 I-A)x=0$：

$$(4I-A\,\vdots\,0)=\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&0\\-5&5&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&0\\0&0&0\end{array}\right)\qquad\begin{array}{c}x_1-x_2=0\\\Downarrow\\x_1=x_2\end{array}$$

例 1 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&1\\5&-1\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程：$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-1\\-5&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda+2)$

  所以 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=4$。

- 当 $\lambda_1=-2$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$：

$$(-2I-A\,\vdots\,0)=\left(\begin{array}{cc|c}-5&-1&0\\-5&-1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}5&1&0\\0&0&0\end{array}\right)\qquad \begin{array}{c}5x_1+x_2=0\\ \Downarrow\\ x_2=-5x_1\end{array}$$

  基础解系：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$。特征向量：$c_1\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$，其中 $c_1\neq 0$

- 当 $\lambda_2=4$，求解 $(\lambda_2 I-A)x=0$：

$$(4I-A\,\vdots\,0)=\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&0\\-5&5&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&0\\0&0&0\end{array}\right)\qquad \begin{array}{c}x_1-x_2=0\\ \Downarrow\\ x_1=x_2\end{array}$$

  基础解系：$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$。

例 1 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & -1\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程：$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -1\\ -5 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda+2)$

  所以 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=4$。

- 当 $\lambda_1=-2$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$：

$$(-2I-A\,\vdots\,0)=\left(\begin{array}{cc|c}-5 & -1 & 0\\ -5 & -1 & 0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}5 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)\qquad \begin{array}{c}5x_1+x_2=0\\ \Downarrow\\ x_2=-5x_1\end{array}$$

  基础解系：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\ -5\end{pmatrix}$。特征向量：$c_1\begin{pmatrix}1\\ -5\end{pmatrix}$，其中 $c_1\neq 0$

- 当 $\lambda_2=4$，求解 $(\lambda_2 I-A)x=0$：

$$(4I-A\,\vdots\,0)=\left(\begin{array}{cc|c}1 & -1 & 0\\ -5 & 5 & 0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)\qquad \begin{array}{c}x_1-x_2=0\\ \Downarrow\\ x_1=x_2\end{array}$$

  基础解系：$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$。 $c_2\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$

例 1 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & -1\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程：$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -1\\ -5 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda+2)$

  所以 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=4$。

- 当 $\lambda_1=-2$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$：

$$(-2I-A\,\vdots\,0)=\left(\begin{array}{cc|c}-5 & -1 & 0\\ -5 & -1 & 0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}5 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)\qquad \begin{array}{c}5x_1+x_2=0\\ \Downarrow\\ x_2=-5x_1\end{array}$$

  基础解系：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\ -5\end{pmatrix}$。特征向量：$c_1\begin{pmatrix}1\\ -5\end{pmatrix}$，其中 $c_1\neq 0$

- 当 $\lambda_2=4$，求解 $(\lambda_2 I-A)x=0$：

$$(4I-A\,\vdots\,0)=\left(\begin{array}{cc|c}1 & -1 & 0\\ -5 & 5 & 0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)\qquad \begin{array}{c}x_1-x_2=0\\ \Downarrow\\ x_1=x_2\end{array}$$

  基础解系：$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$。特征向量：$c_2\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$，其中 $c_2\neq 0$

例 1 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&1\\5&-1\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程：$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-1\\-5&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda+2)$

  所以 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=4$。

- 当 $\boxed{\lambda_1=-2,}$ 求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$：

$$(-2I-A\,\vdots\,0)=\left(\begin{array}{cc|c}-5&-1&0\\-5&-1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}5&1&0\\0&0&0\end{array}\right)\qquad\begin{array}{c}5x_1+x_2=0\\\Downarrow\\x_2=-5x_1\end{array}$$

  基础解系：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$。特征向量：$\boxed{c_1\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix},}$ 其中 $c_1\neq 0$

- 当 $\boxed{\lambda_2=4,}$ 求解 $(\lambda_2 I-A)x=0$：

$$(4I-A\,\vdots\,0)=\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&0\\-5&5&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&0\\0&0&0\end{array}\right)\qquad\begin{array}{c}x_1-x_2=0\\\Downarrow\\x_1=x_2\end{array}$$

  基础解系：$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$。特征向量：$\boxed{c_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},}$ 其中 $c_2\neq 0$

例 2 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

例 2 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程：$0 = |\lambda I - A|$

例 2 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程：$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} =$

例 2 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程：$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1\\-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-2)-1$

例 2 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程：$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1\\ -1 & \lambda-2\end{vmatrix}=\lambda^2-4\lambda+3$

例 2 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程：$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 \\ -1 & \lambda-2 \end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)$

例 2 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程：$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$

  所以 $\lambda_1 = 1$，$\lambda_2 = 3$。

例 2 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程：$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1\\-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)$

  所以 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=3$。
- 当 $\lambda_1=1$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$：
- 当 $\lambda_2=3$，求解 $(\lambda_2 I-A)x=0$：

例 2 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程：$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1\\-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)$

  所以 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=3$。

- 当 $\lambda_1=1$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$：

$$(1I-A\vdots 0)=\left(\begin{array}{cc|c}-1&-1&0\\-1&-1&0\end{array}\right)$$

- 当 $\lambda_2=3$，求解 $(\lambda_2 I-A)x=0$：

例 2 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程：$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1\\-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)$

  所以 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=3$。

- 当 $\lambda_1=1$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$：

$$(1I-A\,\vdots\,0)=\left(\begin{array}{cc|c}-1&-1&0\\-1&-1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&1&0\\0&0&0\end{array}\right)$$

- 当 $\lambda_2=3$，求解 $(\lambda_2 I-A)x=0$：

例 2 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程：$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 \\ -1 & \lambda-2 \end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)$

  所以 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=3$。

- 当 $\lambda_1=1$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$：

$$(1I-A\,\vdots\,0)=\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\qquad x_1+x_2=0$$

- 当 $\lambda_2=3$，求解 $(\lambda_2 I-A)x=0$：

例 2 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程：$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1\\-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)$

  所以 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=3$。

- 当 $\lambda_1=1$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$：

$$(1I-A\,\vdots\,0)=\left(\begin{array}{cc|c}-1&-1&0\\-1&-1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&1&0\\0&0&0\end{array}\right)$$

$$x_1+x_2=0$$
$$\Downarrow$$
$$x_1=-x_2$$

- 当 $\lambda_2=3$，求解 $(\lambda_2 I-A)x=0$：

例 2 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程：$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1\\-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)$

  所以 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=3$。

- 当 $\lambda_1=1$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$：

$$(1I-A\,\vdots\,0)=\left(\begin{array}{cc|c}-1&-1&0\\-1&-1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&1&0\\0&0&0\end{array}\right)$$

$$x_1+x_2=0$$
$$\Downarrow$$
$$x_1=-x_2$$

  基础解系：$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$。

- 当 $\lambda_2=3$，求解 $(\lambda_2 I-A)x=0$：

例 2 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程：$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1\\-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)$

  所以 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=3$。
- 当 $\lambda_1=1$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$：

$$(1I-A\,\vdots\,0)=\left(\begin{array}{cc|c}-1&-1&0\\-1&-1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&1&0\\0&0&0\end{array}\right)\qquad \begin{array}{c}x_1+x_2=0\\ \Downarrow\\ x_1=-x_2\end{array}$$

  基础解系：$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$。 $c_1\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$
- 当 $\lambda_2=3$，求解 $(\lambda_2 I-A)x=0$：

例 2 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程：$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1\\-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)$

  所以 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=3$。

- 当 $\lambda_1=1$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$：

$$(1I-A\,\vdots\,0)=\left(\begin{array}{cc|c}-1&-1&0\\-1&-1&0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}1&1&0\\0&0&0\end{array}\right)\qquad \begin{array}{c}x_1+x_2=0\\ \Downarrow\\ x_1=-x_2\end{array}$$

  基础解系：$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$。特征向量：$c_1\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$，其中 $c_1\neq 0$

- 当 $\lambda_2=3$，求解 $(\lambda_2 I-A)x=0$：

例 2 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程：$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1\\-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)$

  所以 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=3$。

- 当 $\lambda_1=1$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$：

$$(1I-A\,\vdots\,0)=\left(\begin{array}{cc|c}-1&-1&0\\-1&-1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&1&0\\0&0&0\end{array}\right)\qquad \begin{array}{c}x_1+x_2=0\\\Downarrow\\x_1=-x_2\end{array}$$

  基础解系：$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$。特征向量：$c_1\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$，其中 $c_1\neq0$

- 当 $\lambda_2=3$，求解 $(\lambda_2 I-A)x=0$：

$$(3I-A\,\vdots\,0)=\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&0\\-1&1&0\end{array}\right)$$

例 2 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程：$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1\\-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)$

  所以 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=3$。
- 当 $\lambda_1=1$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$：

$$(1I-A\vdots 0)=\left(\begin{array}{cc|c}-1&-1&0\\-1&-1&0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}1&1&0\\0&0&0\end{array}\right)\qquad \begin{array}{c}x_1+x_2=0\\ \Downarrow\\ x_1=-x_2\end{array}$$

  基础解系：$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$。特征向量：$c_1\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$，其中 $c_1\neq 0$
- 当 $\lambda_2=3$，求解 $(\lambda_2 I-A)x=0$：

$$(3I-A\vdots 0)=\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&0\\-1&1&0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&0\\0&0&0\end{array}\right)$$

例 2 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程：$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1\\-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)$

  所以 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=3$。

- 当 $\lambda_1=1$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$：

$$(1I-A\vdots 0)=\left(\begin{array}{cc|c}-1&-1&0\\-1&-1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&1&0\\0&0&0\end{array}\right)\qquad \begin{array}{c}x_1+x_2=0\\ \Downarrow\\ x_1=-x_2\end{array}$$

  基础解系：$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$。特征向量：$c_1\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$，其中 $c_1\neq 0$

- 当 $\lambda_2=3$，求解 $(\lambda_2 I-A)x=0$：

$$(3I-A\vdots 0)=\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&0\\-1&1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&0\\0&0&0\end{array}\right)\qquad x_1-x_2=0$$

例 2 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程：$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1\\-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)$

  所以 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=3$。

- 当 $\lambda_1=1$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$：

$$(1I-A\,\vdots\,0)=\left(\begin{array}{cc|c}-1&-1&0\\-1&-1&0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}1&1&0\\0&0&0\end{array}\right)\qquad \begin{array}{c}x_1+x_2=0\\ \Downarrow\\ x_1=-x_2\end{array}$$

  基础解系：$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$。特征向量：$c_1\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$，其中 $c_1\neq 0$

- 当 $\lambda_2=3$，求解 $(\lambda_2 I-A)x=0$：

$$(3I-A\,\vdots\,0)=\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&0\\-1&1&0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&0\\0&0&0\end{array}\right)\qquad \begin{array}{c}x_1-x_2=0\\ \Downarrow\\ x_1=x_2\end{array}$$

例 2 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程：$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1\\-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)$

  所以 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=3$。

- 当 $\lambda_1=1$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$：

$$(1I-A\,\vdots\,0)=\left(\begin{array}{cc|c}-1&-1&0\\-1&-1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&1&0\\0&0&0\end{array}\right)\qquad \begin{array}{c}x_1+x_2=0\\ \Downarrow\\ x_1=-x_2\end{array}$$

  基础解系：$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$。特征向量：$c_1\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$，其中 $c_1\neq 0$

- 当 $\lambda_2=3$，求解 $(\lambda_2 I-A)x=0$：

$$(3I-A\,\vdots\,0)=\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&0\\-1&1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&0\\0&0&0\end{array}\right)\qquad \begin{array}{c}x_1-x_2=0\\ \Downarrow\\ x_1=x_2\end{array}$$

  基础解系：$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$。

例 2 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程：$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1\\-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)$

  所以 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=3$。

- 当 $\lambda_1=1$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$：

$$(1I-A\,\vdots\,0)=\left(\begin{array}{cc|c}-1&-1&0\\-1&-1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&1&0\\0&0&0\end{array}\right)\qquad \begin{array}{c}x_1+x_2=0\\ \Downarrow\\ x_1=-x_2\end{array}$$

  基础解系：$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$。特征向量：$c_1\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$，其中 $c_1\neq 0$

- 当 $\lambda_2=3$，求解 $(\lambda_2 I-A)x=0$：

$$(3I-A\,\vdots\,0)=\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&0\\-1&1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&0\\0&0&0\end{array}\right)\qquad \begin{array}{c}x_1-x_2=0\\ \Downarrow\\ x_1=x_2\end{array}$$

  基础解系：$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$。 $c_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

例 2 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程：$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1\\-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)$

  所以 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=3$。

- 当 $\lambda_1=1$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$：

$$(1I-A\,\vdots\,0)=\left(\begin{array}{cc|c}-1&-1&0\\-1&-1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&1&0\\0&0&0\end{array}\right)\qquad \begin{array}{c}x_1+x_2=0\\ \Downarrow\\ x_1=-x_2\end{array}$$

  基础解系：$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$。特征向量：$c_1\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$，其中 $c_1\neq 0$

- 当 $\lambda_2=3$，求解 $(\lambda_2 I-A)x=0$：

$$(3I-A\,\vdots\,0)=\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&0\\-1&1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&0\\0&0&0\end{array}\right)\qquad \begin{array}{c}x_1-x_2=0\\ \Downarrow\\ x_1=x_2\end{array}$$

  基础解系：$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$。特征向量：$c_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，其中 $c_2\neq 0$

例 2 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解特征方程：$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1\\-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)$

  所以 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=3$。

- 当 $\boxed{\lambda_1=1,}$ 求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$：

$$(1I-A\,\vdots\,0)=\left(\begin{array}{cc|c}-1&-1&0\\-1&-1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&1&0\\0&0&0\end{array}\right)\qquad \begin{array}{c}x_1+x_2=0\\\Downarrow\\x_1=-x_2\end{array}$$

  基础解系：$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$。特征向量：$\boxed{c_1\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix},}$ 其中 $c_1\neq 0$

- 当 $\boxed{\lambda_2=3,}$ 求解 $(\lambda_2 I-A)x=0$：

$$(3I-A\,\vdots\,0)=\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&0\\-1&1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&0\\0&0&0\end{array}\right)\qquad \begin{array}{c}x_1-x_2=0\\\Downarrow\\x_1=x_2\end{array}$$

  基础解系：$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$。特征向量：$\boxed{c_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},}$ 其中 $c_2\neq 0$

例 3 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

例 3 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解 $0=|\lambda I-A|$

例 3 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解 $0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 1)^2(\lambda - 8)$ Details

例 3 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解 $0 = |\lambda I - A| = (\lambda+1)^2(\lambda-8)$ Details 得：

$$\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 = 8$$

例 3 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解 $0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 1)^2(\lambda - 8)$ Details 得：

$$\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 = 8$$

- 当 $\lambda_1 = -1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$ Details

- 当 $\lambda_2 = 8$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$ Details

例 3 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解 $0=|\lambda I-A|=(\lambda+1)^2(\lambda-8)$ Details 得：

$$\lambda_1=-1, \qquad \lambda_2=8$$

- 当 $\lambda_1=-1$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$ Details

  得基础解系：$\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2=\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$。

- 当 $\lambda_2=8$，求解 $(\lambda_2 I-A)x=0$ Details

例 3 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&2&4\\2&0&2\\4&2&3\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解 $0=|\lambda I-A|=(\lambda+1)^2(\lambda-8)$ Details 得：

$$\lambda_1=-1,\qquad \lambda_2=8$$

- 当 $\lambda_1=-1$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$ Details

  得基础解系：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$。

$$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2$$

- 当 $\lambda_2=8$，求解 $(\lambda_2 I-A)x=0$ Details

例 3 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解 $0=|\lambda I-A|=(\lambda+1)^2(\lambda-8)$ Details 得：
$$\lambda_1=-1, \qquad \lambda_2=8$$
- 当 $\lambda_1=-1$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$ Details
  得基础解系：$\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\quad \alpha_2=\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$。
  对应 $\lambda_1=-1$ 特征向量：$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2$，其中 c_1, c_2 不全为零。
- 当 $\lambda_2=8$，求解 $(\lambda_2 I-A)x=0$ Details

例 3 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&2&4\\2&0&2\\4&2&3\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解 $0=|\lambda I-A|=(\lambda+1)^2(\lambda-8)$ Details 得：
$$\lambda_1=-1,\qquad \lambda_2=8$$
- 当 $\lambda_1=-1$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$ Details

  得基础解系：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$。

  对应 $\lambda_1=-1$ 特征向量：$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2$，其中 c_1, c_2 不全为零。
- 当 $\lambda_2=8$，求解 $(\lambda_2 I-A)x=0$ Details

  得基础解系：$\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$。

例 3 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&2&4\\2&0&2\\4&2&3\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解 $0=|\lambda I-A|=(\lambda+1)^2(\lambda-8)$ Details 得:

$$\lambda_1=-1,\qquad \lambda_2=8$$

- 当 $\lambda_1=-1$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$ Details

  得基础解系：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$。

  对应 $\lambda_1=-1$ 特征向量：$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2$，其中 c_1, c_2 不全为零。

- 当 $\lambda_2=8$，求解 $(\lambda_2 I-A)x=0$ Details

  得基础解系：$\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$。

$$c_3\alpha_3$$

例 3 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解 $0=|\lambda I-A|=(\lambda+1)^2(\lambda-8)$ Details 得：

$$\lambda_1=-1, \qquad \lambda_2=8$$

- 当 $\lambda_1=-1$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$ Details

  得基础解系：$\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$。

  对应 $\lambda_1=-1$ 特征向量：$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2$，其中 c_1, c_2 不全为零。

- 当 $\lambda_2=8$，求解 $(\lambda_2 I-A)x=0$ Details

  得基础解系：$\alpha_3=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$。

  对应 $\lambda_2=8$ 特征向量：$c_3\alpha_3$，其中 $c_3\neq 0$。

例 3 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&2&4\\2&0&2\\4&2&3\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

$\lambda_1=-1$ 二重特征值
$\lambda_2=8$ 一重特征值

- 求解 $0=|\lambda I-A|=\boxed{(\lambda+1)^2(\lambda-8)}$ Details 得：

$$\lambda_1=-1,\qquad \lambda_2=8$$

- 当 $\lambda_1=-1$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$ Details

  得基础解系：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$。

  对应 $\lambda_1=-1$ 特征向量：$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2$，其中 c_1, c_2 不全为零。

- 当 $\lambda_2=8$，求解 $(\lambda_2 I-A)x=0$ Details

  得基础解系：$\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$。

  对应 $\lambda_2=8$ 特征向量：$c_3\alpha_3$，其中 $c_3\neq 0$。

例 4 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

例 4 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解 $0=|\lambda I-A|$

例 4 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解 $0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 2)^2(\lambda - 6)$ ▸ Details

例 4 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解 $0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 2)^2(\lambda - 6)$ Details 得:

$$\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_2 = 6$$

例 4 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解 $0=|\lambda I-A|=(\lambda-2)^2(\lambda-6)$ Details 得：

$$\lambda_1=2, \qquad \lambda_2=6$$

- 当 $\lambda_1=2$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$ Details

- 当 $\lambda_2=6$，求解 $(\lambda_2 I-A)x=0$ Details

例 4 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & 5\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解 $0=|\lambda I-A|=(\lambda-2)^2(\lambda-6)$ Details 得：

$$\lambda_1=2, \qquad \lambda_2=6$$

- 当 $\lambda_1=2$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$ Details

  得基础解系：$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$。

- 当 $\lambda_2=6$，求解 $(\lambda_2 I-A)x=0$ Details

例 4 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&5\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解 $0=|\lambda I-A|=(\lambda-2)^2(\lambda-6)$ Details 得：
$$\lambda_1=2,\qquad \lambda_2=6$$
- 当 $\lambda_1=2$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$ Details
得基础解系：$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$。
$$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2$$
- 当 $\lambda_2=6$，求解 $(\lambda_2 I-A)x=0$ Details

例 4 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解 $0=|\lambda I-A|=(\lambda-2)^2(\lambda-6)$ Details 得：
$$\lambda_1=2, \qquad \lambda_2=6$$
- 当 $\lambda_1=2$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$ Details

  得基础解系：$\alpha_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$。

  对应 $\lambda_1=2$ 特征向量：$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2$，其中 c_1, c_2 不全为零。

- 当 $\lambda_2=6$，求解 $(\lambda_2 I-A)x=0$ Details

例 4 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & 5\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解 $0=|\lambda I-A|=(\lambda-2)^2(\lambda-6)$ Details 得：
$$\lambda_1=2,\qquad \lambda_2=6$$
- 当 $\lambda_1=2$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$ Details
得基础解系：$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$。
对应 $\lambda_1=2$ 特征向量：$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2$，其中 c_1, c_2 不全为零。
- 当 $\lambda_2=6$，求解 $(\lambda_2 I-A)x=0$ Details
得基础解系：$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 3\end{pmatrix}$。

例 4 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解 $0=|\lambda I-A|=(\lambda-2)^2(\lambda-6)$ Details 得：

$$\lambda_1=2, \qquad \lambda_2=6$$

- 当 $\lambda_1=2$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$ Details

  得基础解系：$\alpha_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$。

  对应 $\lambda_1=2$ 特征向量：$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2$，其中 c_1, c_2 不全为零。

- 当 $\lambda_2=6$，求解 $(\lambda_2 I-A)x=0$ Details

  得基础解系：$\alpha_3=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$。

$$c_3\alpha_3$$

例 4 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 求解 $0=|\lambda I-A|=(\lambda-2)^2(\lambda-6)$ Details 得：

$$\lambda_1=2, \qquad \lambda_2=6$$

- 当 $\lambda_1=2$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$ Details

  得基础解系：$\alpha_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$。

  对应 $\lambda_1=2$ 特征向量：$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2$，其中 c_1, c_2 不全为零。

- 当 $\lambda_2=6$，求解 $(\lambda_2 I-A)x=0$ Details

  得基础解系：$\alpha_3=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$。

  对应 $\lambda_2=6$ 特征向量：$c_3\alpha_3$，其中 $c_3\neq 0$。

例 4 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

$\lambda_1 = 2$ 二重特征值
$\lambda_2 = 6$ 一重特征值

- 求解 $0 = |\lambda I - A| = \boxed{(\lambda - 2)^2(\lambda - 6)}$ Details 得：

$$\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_2 = 6$$

- 当 $\lambda_1 = 2$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$ Details

  得基础解系：$\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$。

  对应 $\lambda_1 = 2$ 特征向量：$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$，其中 c_1, c_2 不全为零。

- 当 $\lambda_2 = 6$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$ Details

  得基础解系：$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$。

  对应 $\lambda_2 = 6$ 特征向量：$c_3\alpha_3$，其中 $c_3 \neq 0$。

例 5 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

例 5 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 解 $0=|\lambda I-A|$

例 5 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 解 $0 = |\lambda I - A| = \lambda(\lambda - 3)(\lambda - 4)$ Details

例 5 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 解 $0=|\lambda I-A|=\lambda(\lambda-3)(\lambda-4)$ Details 得:

$$\lambda_1=0, \quad \lambda_2=3, \quad \lambda_3=4$$

例 5 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 解 $0 = |\lambda I - A| = \lambda(\lambda - 3)(\lambda - 4)$ Details 得:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 4$$

- 当 $\lambda_1 = 0$，解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$ Details

- 当 $\lambda_2 = 3$，解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$ Details

- 当 $\lambda_3 = 4$，解 $(\lambda_3 I - A)x = 0$ Details

例 5 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 解 $0 = |\lambda I - A| = \lambda(\lambda - 3)(\lambda - 4)$ Details 得：
$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 4$$
- 当 $\lambda_1 = 0$，解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$ Details 基础解系：$\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- 当 $\lambda_2 = 3$，解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$ Details
- 当 $\lambda_3 = 4$，解 $(\lambda_3 I - A)x = 0$ Details

例 5 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 解 $0=|\lambda I-A|=\lambda(\lambda-3)(\lambda-4)$ Details 得:

$$\lambda_1=0, \quad \lambda_2=3, \quad \lambda_3=4$$

- 当 $\lambda_1=0$，解 $(\lambda_1 I-A)x=0$ Details 基础解系：$\alpha_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$c_1\alpha_1$$

- 当 $\lambda_2=3$，解 $(\lambda_2 I-A)x=0$ Details

- 当 $\lambda_3=4$，解 $(\lambda_3 I-A)x=0$ Details

例 5 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 解 $0=|\lambda I-A|=\lambda(\lambda-3)(\lambda-4)$ Details 得：

$$\lambda_1=0, \quad \lambda_2=3, \quad \lambda_3=4$$

- 当 $\lambda_1=0$，解 $(\lambda_1 I-A)x=0$ Details 基础解系：$\alpha_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

  对应 $\lambda_1=0$ 的特征向量：$c_1\alpha_1$，其中 $c_1\neq 0$。

- 当 $\lambda_2=3$，解 $(\lambda_2 I-A)x=0$ Details

- 当 $\lambda_3=4$，解 $(\lambda_3 I-A)x=0$ Details

例 5 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&3&0\\2&0&2\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 解 $0=|\lambda I-A|=\lambda(\lambda-3)(\lambda-4)$ Details 得：

$$\lambda_1=0,\quad \lambda_2=3,\quad \lambda_3=4$$

- 当 $\lambda_1=0$，解 $(\lambda_1 I-A)x=0$ Details 基础解系：$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

  对应 $\lambda_1=0$ 的特征向量：$c_1\alpha_1$，其中 $c_1\neq 0$。

- 当 $\lambda_2=3$，解 $(\lambda_2 I-A)x=0$ Details 基础解系：$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

- 当 $\lambda_3=4$，解 $(\lambda_3 I-A)x=0$ Details

例 5 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 解 $0 = |\lambda I - A| = \lambda(\lambda-3)(\lambda-4)$ Details 得：
$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 4$$
- 当 $\lambda_1 = 0$，解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$ Details 基础解系：$\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

  对应 $\lambda_1 = 0$ 的特征向量：$c_1\alpha_1$，其中 $c_1 \neq 0$。
- 当 $\lambda_2 = 3$，解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$ Details 基础解系：$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$$c_2\alpha_2$$
- 当 $\lambda_3 = 4$，解 $(\lambda_3 I - A)x = 0$ Details

例 5 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 解 $0 = |\lambda I - A| = \lambda(\lambda-3)(\lambda-4)$ Details 得：
$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 4$$
- 当 $\lambda_1 = 0$，解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$ Details 基础解系：$\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

  对应 $\lambda_1 = 0$ 的特征向量：$c_1\alpha_1$，其中 $c_1 \neq 0$。
- 当 $\lambda_2 = 3$，解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$ Details 基础解系：$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

  对应 $\lambda_2 = 3$ 特征向量：$c_2\alpha_2$，其中 $c_2 \neq 0$。
- 当 $\lambda_3 = 4$，解 $(\lambda_3 I - A)x = 0$ Details

例 5 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 解 $0=|\lambda I-A|=\lambda(\lambda-3)(\lambda-4)$ Details 得：
$$\lambda_1=0,\quad \lambda_2=3,\quad \lambda_3=4$$
- 当 $\lambda_1=0$，解 $(\lambda_1 I-A)x=0$ Details 基础解系：$\alpha_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

  对应 $\lambda_1=0$ 的特征向量：$c_1\alpha_1$，其中 $c_1\neq 0$。
- 当 $\lambda_2=3$，解 $(\lambda_2 I-A)x=0$ Details 基础解系：$\alpha_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

  对应 $\lambda_2=3$ 特征向量：$c_2\alpha_2$，其中 $c_2\neq 0$。
- 当 $\lambda_3=4$，解 $(\lambda_3 I-A)x=0$ Details 基础解系：$\alpha_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

例 5 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 解 $0=|\lambda I-A|=\lambda(\lambda-3)(\lambda-4)$ Details 得：
$$\lambda_1=0, \quad \lambda_2=3, \quad \lambda_3=4$$
- 当 $\lambda_1=0$，解 $(\lambda_1 I-A)x=0$ Details 基础解系：$\alpha_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

  对应 $\lambda_1=0$ 的特征向量：$c_1\alpha_1$，其中 $c_1\neq 0$。
- 当 $\lambda_2=3$，解 $(\lambda_2 I-A)x=0$ Details 基础解系：$\alpha_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

  对应 $\lambda_2=3$ 特征向量：$c_2\alpha_2$，其中 $c_2\neq 0$。
- 当 $\lambda_3=4$，解 $(\lambda_3 I-A)x=0$ Details 基础解系：$\alpha_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$c_3\alpha_3$$

例 5 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解

- 解 $0=|\lambda I-A|=\lambda(\lambda-3)(\lambda-4)$ Details 得：

$$\lambda_1=0, \quad \lambda_2=3, \quad \lambda_3=4$$

- 当 $\lambda_1=0$，解 $(\lambda_1 I-A)x=0$ Details 基础解系：$\alpha_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

  对应 $\lambda_1=0$ 的特征向量：$c_1\alpha_1$，其中 $c_1\neq 0$。

- 当 $\lambda_2=3$，解 $(\lambda_2 I-A)x=0$ Details 基础解系：$\alpha_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

  对应 $\lambda_2=3$ 特征向量：$c_2\alpha_2$，其中 $c_2\neq 0$。

- 当 $\lambda_3=4$，解 $(\lambda_3 I-A)x=0$ Details 基础解系：$\alpha_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

  对应 $\lambda_3=4$ 特征向量：$c_3\alpha_3$，其中 $c_3\neq 0$。

例 5 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&3&0\\2&0&2\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

$\lambda_1=0$ 一重特征值
$\lambda_2=3$ 一重特征值
$\lambda_3=4$ 一重特征值

解

- 解 $0=|\lambda I-A|=\boxed{\lambda(\lambda-3)(\lambda-4)}$ Details 得：

$$\lambda_1=0,\quad \lambda_2=3,\quad \lambda_3=4$$

- 当 $\lambda_1=0$，解 $(\lambda_1 I-A)x=0$ Details 基础解系：$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

  对应 $\lambda_1=0$ 的特征向量：$c_1\alpha_1$，其中 $c_1\neq 0$。

- 当 $\lambda_2=3$，解 $(\lambda_2 I-A)x=0$ Details 基础解系：$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

  对应 $\lambda_2=3$ 特征向量：$c_2\alpha_2$，其中 $c_2\neq 0$。

- 当 $\lambda_3=4$，解 $(\lambda_3 I-A)x=0$ Details 基础解系：$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

  对应 $\lambda_3=4$ 特征向量：$c_3\alpha_3$，其中 $c_3\neq 0$。

例 6 n 阶矩阵 A 是奇异 $\Leftrightarrow 0$ 是 A 的一个特征值。

例 6 n 阶矩阵 A 是奇异 $\Leftrightarrow 0$ 是 A 的一个特征值。

证明

$\lambda = 0$是A 的特征值 $\quad \Leftrightarrow$

例 6 n 阶矩阵 A 是奇异 $\Leftrightarrow 0$ 是 A 的一个特征值。

证明

$$\lambda = 0 \text{是} A \text{ 的特征值} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 0 \text{ 是 } |\lambda I - A| = 0 \text{ 的解}$$

例 6 n 阶矩阵 A 是奇异 $\Leftrightarrow 0$ 是 A 的一个特征值。

证明

$$
\begin{aligned}
\lambda = 0 \text{是} A \text{ 的特征值} \quad &\Leftrightarrow \quad \lambda = 0 \text{ 是 } |\lambda I - A| = 0 \text{ 的解} \\
&\Leftrightarrow \quad |-A| = 0
\end{aligned}
$$

例 6 n 阶矩阵 A 是奇异 $\Leftrightarrow 0$ 是 A 的一个特征值。

证明

$\lambda = 0$是A 的特征值 $\quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 0$ 是 $|\lambda I - A| = 0$ 的解

$\quad \Leftrightarrow \quad |-A| = 0 \qquad |-A| = |(-1)A|$

例 6 n 阶矩阵 A 是奇异 $\Leftrightarrow 0$ 是 A 的一个特征值。

证明

$$\lambda = 0 \text{是} A \text{ 的特征值} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 0 \text{ 是 } |\lambda I - A| = 0 \text{ 的解}$$

$$\Leftrightarrow \quad |-A| = 0$$

$$|-A| = |(-1)A| = (-1)^n|A|$$

例 6 n 阶矩阵 A 是奇异 $\Leftrightarrow 0$ 是 A 的一个特征值。

证明

$$\begin{aligned}
\lambda = 0 \text{是} A \text{ 的特征值} \quad &\Leftrightarrow \quad \lambda = 0 \text{ 是 } |\lambda I - A| = 0 \text{ 的解} \\
&\Leftrightarrow \quad |-A| = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad |A| = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|-A| &= |(-1)A| \\
&= (-1)^n|A|
\end{aligned}$$

例 6 n 阶矩阵 A 是奇异 $\Leftrightarrow$ 0 是 A 的一个特征值。

证明

$$\begin{aligned}
\lambda = 0\text{是}A\text{ 的特征值} \quad &\Leftrightarrow \quad \lambda = 0 \text{ 是 } |\lambda I - A| = 0 \text{ 的解} \\
&\Leftrightarrow \quad |-A| = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad |A| = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad A\text{是奇异}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|-A| &= |(-1)A| \\ &= (-1)^n|A|\end{aligned}$$

例 6 n 阶矩阵 A 是奇异 $\Leftrightarrow 0$ 是 A 的一个特征值。

证明

$$
\begin{aligned}
\lambda = 0 \text{是} A \text{ 的特征值} \quad &\Leftrightarrow \quad \lambda = 0 \text{ 是 } |\lambda I - A| = 0 \text{ 的解} \\
&\Leftrightarrow \quad |-A| = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad |A| = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad A \text{是奇异}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|-A| &= |(-1)A| \\
&= (-1)^n |A|
\end{aligned}
$$

注 0 不是 A 的特征值 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

例 6 n 阶矩阵 A 是奇异 $\Leftrightarrow 0$ 是 A 的一个特征值。

证明

$$
\begin{aligned}
\lambda = 0 \text{是} A \text{ 的特征值} \quad &\Leftrightarrow \quad \lambda = 0 \text{ 是 } |\lambda I - A| = 0 \text{ 的解} \\
&\Leftrightarrow \quad |-A| = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad |A| = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad A \text{是奇异}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|-A| &= |(-1)A| \\
&= (-1)^n |A|
\end{aligned}
$$

注 0 不是 A 的特征值 $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A$ 可逆

例 7 设 n 阶方阵 A 有特征值 λ，则

1. A^2 有特征值 λ^2;

例 7 设 n 阶方阵 A 有特征值 λ，则

1. A^2 有特征值 λ^2；

证明 设 α 是 A 的对应特征值 λ 的特征向量（$\alpha \neq 0$），即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

例 7 设 n 阶方阵 A 有特征值 λ，则

1. A^2 有特征值 λ^2；

证明 设 α 是 A 的对应特征值 λ 的特征向量（$\alpha \neq 0$），即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证：

$$A^2 \boxed{} \qquad\qquad = \lambda^2 \boxed{}$$

例 7 设 n 阶方阵 A 有特征值 λ，则

1. A^2 有特征值 λ^2；

证明 设 α 是 A 的对应特征值 λ 的特征向量（$\alpha \neq 0$），即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证：

$$A^2 \boxed{\alpha} \qquad = \lambda^2 \boxed{}$$

例 7 设 n 阶方阵 A 有特征值 λ，则

1. A^2 有特征值 λ^2；

证明 设 α 是 A 的对应特征值 λ 的特征向量（$\alpha \neq 0$），即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证：

$$A^2 \boxed{\alpha} = A(A\alpha) \qquad = \lambda^2 \boxed{}$$

例 7 设 n 阶方阵 A 有特征值 λ，则

1. A^2 有特征值 λ^2；

证明 设 α 是 A 的对应特征值 λ 的特征向量（$\alpha \neq 0$），即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证：

$$A^2\boxed{\alpha} = A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) \qquad\qquad = \lambda^2\boxed{}$$

例 7 设 n 阶方阵 A 有特征值 λ，则

1. A^2 有特征值 λ^2；

证明 设 α 是 A 的对应特征值 λ 的特征向量（$\alpha \neq 0$），即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证：

$$A^2 \boxed{\alpha} = A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha \qquad = \lambda^2 \boxed{}$$

例 7 设 n 阶方阵 A 有特征值 λ，则

1. A^2 有特征值 λ^2；

证明 设 α 是 A 的对应特征值 λ 的特征向量（$\alpha \neq 0$），即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证：

$$A^2 \boxed{\alpha} = A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda \cdot \lambda\alpha = \lambda^2 \boxed{\quad}$$

例 7 设 n 阶方阵 A 有特征值 λ，则

1. A^2 有特征值 λ^2；

证明 设 α 是 A 的对应特征值 λ 的特征向量（$\alpha \neq 0$），即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证：

$$A^2\boxed{\alpha} = A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda \cdot \lambda\alpha = \lambda^2\boxed{\alpha}$$

例 7 设 n 阶方阵 A 有特征值 λ，则

1. A^2 有特征值 λ^2；一般地，$bA^2+cA+dI$ 有特征值 $b\lambda^2+c\lambda+d$

证明 设 α 是 A 的对应特征值 λ 的特征向量（$\alpha \neq 0$），即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证：

$$A^2\boxed{\alpha} = A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda \cdot \lambda\alpha = \lambda^2\boxed{\alpha}$$

例 7 设 n 阶方阵 A 有特征值 λ，则

1. A^2 有特征值 λ^2；一般地，$bA^2+cA+dI$ 有特征值 $b\lambda^2+c\lambda+d$

证明 设 α 是 A 的对应特征值 λ 的特征向量（$\alpha \neq 0$），即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证：

$$A^2 \boxed{\alpha} = A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda \cdot \lambda\alpha = \lambda^2 \boxed{\alpha}$$

$$(bA^2 + cA + dI)\boxed{}$$

$$= (b\lambda^2 + c\lambda + d)\boxed{}$$

例 7 设 n 阶方阵 A 有特征值 λ，则

1. A^2 有特征值 λ^2；一般地，$bA^2+cA+dI$ 有特征值 $b\lambda^2+c\lambda+d$

证明 设 α 是 A 的对应特征值 λ 的特征向量（$\alpha \neq 0$），即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证：

$$A^2 \boxed{\alpha} = A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda \cdot \lambda\alpha = \lambda^2 \boxed{\alpha}$$

$$(bA^2 + cA + dI)\boxed{\alpha}$$

$$= (b\lambda^2 + c\lambda + d)\boxed{}$$

例 7 设 n 阶方阵 A 有特征值 λ，则

1. A^2 有特征值 λ^2；一般地，$bA^2+cA+dI$ 有特征值 $b\lambda^2+c\lambda+d$

证明 设 α 是 A 的对应特征值 λ 的特征向量（$\alpha \neq 0$），即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证：

$$A^2 \boxed{\alpha} = A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda \cdot \lambda\alpha = \lambda^2 \boxed{\alpha}$$

$$(bA^2 + cA + dI) \boxed{\alpha} = bA^2\alpha + cA\alpha + dI\alpha =$$

$$= (b\lambda^2 + c\lambda + d) \boxed{}$$

例 7 设 n 阶方阵 A 有特征值 λ，则

1. A^2 有特征值 λ^2；一般地，$bA^2+cA+dI$ 有特征值 $b\lambda^2+c\lambda+d$

证明 设 α 是 A 的对应特征值 λ 的特征向量（$\alpha \neq 0$），即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证：

$$A^2\boxed{\alpha} = A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda \cdot \lambda\alpha = \lambda^2\boxed{\alpha}$$

$$(bA^2+cA+dI)\boxed{\alpha} = bA^2\alpha + cA\alpha + dI\alpha = b\lambda^2\alpha +$$

$$= (b\lambda^2 + c\lambda + d)\boxed{\quad}$$

例 7 设 n 阶方阵 A 有特征值 λ，则

1. A^2 有特征值 λ^2；一般地，$bA^2+cA+dI$ 有特征值 $b\lambda^2+c\lambda+d$

证明 设 α 是 A 的对应特征值 λ 的特征向量（$\alpha \neq 0$），即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证：

$$A^2\boxed{\alpha} = A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda \cdot \lambda\alpha = \lambda^2\boxed{\alpha}$$

$$(bA^2+cA+dI)\boxed{\alpha} = bA^2\alpha + cA\alpha + dI\alpha = b\lambda^2\alpha + c\lambda\alpha +$$

$$= (b\lambda^2 + c\lambda + d)\boxed{}$$

例 7 设 n 阶方阵 A 有特征值 λ，则

1. A^2 有特征值 λ^2；一般地，$bA^2+cA+dI$ 有特征值 $b\lambda^2+c\lambda+d$

证明 设 α 是 A 的对应特征值 λ 的特征向量（$\alpha\neq 0$），即

$$A\alpha=\lambda\alpha.$$

1. 验证：

$$A^2\boxed{\alpha}=A(A\alpha)=A(\lambda\alpha)=\lambda A\alpha=\lambda\cdot\lambda\alpha=\lambda^2\boxed{\alpha}$$

$$\begin{aligned}(bA^2+cA+dI)\boxed{\alpha}&=bA^2\alpha+cA\alpha+dI\alpha=b\lambda^2\alpha+c\lambda\alpha+d\alpha\\&=(b\lambda^2+c\lambda+d)\boxed{}\end{aligned}$$

例 7 设 n 阶方阵 A 有特征值 λ，则

1. A^2 有特征值 λ^2；一般地，$bA^2+cA+dI$ 有特征值 $b\lambda^2+c\lambda+d$

证明 设 α 是 A 的对应特征值 λ 的特征向量（$\alpha \neq 0$），即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证：

$$A^2 \boxed{\alpha} = A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda \cdot \lambda\alpha = \lambda^2 \boxed{\alpha}$$

$$(bA^2 + cA + dI) \boxed{\alpha} = bA^2\alpha + cA\alpha + dI\alpha = b\lambda^2\alpha + c\lambda\alpha + d\alpha$$

$$= (b\lambda^2 + c\lambda + d) \boxed{\alpha}$$

例 7 设 n 阶方阵 A 有特征值 λ，则

1. A^2 有特征值 λ^2；一般地，$bA^2+cA+dI$ 有特征值 $b\lambda^2+c\lambda+d$
2. 若 A 可逆，则 A^* 有特征值 $\frac{1}{\lambda}|A|$。

证明 设 α 是 A 的对应特征值 λ 的特征向量（$\alpha \neq 0$），即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证：

$$A^2 \boxed{\alpha} = A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda \cdot \lambda\alpha = \lambda^2 \boxed{\alpha}$$

$$(bA^2 + cA + dI) \boxed{\alpha} = bA^2\alpha + cA\alpha + dI\alpha = b\lambda^2\alpha + c\lambda\alpha + d\alpha$$

$$= (b\lambda^2 + c\lambda + d) \boxed{\alpha}$$

例 7 设 n 阶方阵 A 有特征值 λ，则

1. A^2 有特征值 λ^2；一般地，$bA^2+cA+dI$ 有特征值 $b\lambda^2+c\lambda+d$
2. 若 A 可逆，则 A^* 有特征值 $\frac{1}{\lambda}|A|$。

证明 设 α 是 A 的对应特征值 λ 的特征向量（$\alpha \neq 0$），即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证：

$$A^2 \boxed{\alpha} = A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda \cdot \lambda\alpha = \lambda^2 \boxed{\alpha}$$

$$(bA^2 + cA + dI)\boxed{\alpha} = bA^2\alpha + cA\alpha + dI\alpha = b\lambda^2\alpha + c\lambda\alpha + d\alpha$$

$$= (b\lambda^2 + c\lambda + d)\boxed{\alpha}$$

2. 验证：

$$A^* \boxed{} = \frac{|A|}{\lambda} \boxed{}$$

例 7 设 n 阶方阵 A 有特征值 λ，则

1. A^2 有特征值 λ^2；一般地，$bA^2+cA+dI$ 有特征值 $b\lambda^2+c\lambda+d$
2. 若 A 可逆，则 A^* 有特征值 $\frac{1}{\lambda}|A|$。

证明 设 α 是 A 的对应特征值 λ 的特征向量（$\alpha\neq 0$），即

$$A\alpha=\lambda\alpha.$$

1. 验证：

$$A^2\boxed{\alpha}=A(A\alpha)=A(\lambda\alpha)=\lambda A\alpha=\lambda\cdot\lambda\alpha=\lambda^2\boxed{\alpha}$$

$$(bA^2+cA+dI)\boxed{\alpha}=bA^2\alpha+cA\alpha+dI\alpha=b\lambda^2\alpha+c\lambda\alpha+d\alpha$$

$$=(b\lambda^2+c\lambda+d)\boxed{\alpha}$$

2. 验证：

$$A^*A\quad=|A|I \qquad\qquad A^*\boxed{}=\frac{|A|}{\lambda}\boxed{}$$

例 7 设 n 阶方阵 A 有特征值 λ，则

1. A^2 有特征值 λ^2；一般地，$bA^2+cA+dI$ 有特征值 $b\lambda^2+c\lambda+d$
2. 若 A 可逆，则 A^* 有特征值 $\frac{1}{\lambda}|A|$。

证明 设 α 是 A 的对应特征值 λ 的特征向量（$\alpha \neq 0$），即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证：

$$A^2\boxed{\alpha} = A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda \cdot \lambda\alpha = \lambda^2\boxed{\alpha}$$

$$(bA^2 + cA + dI)\boxed{\alpha} = bA^2\alpha + cA\alpha + dI\alpha = b\lambda^2\alpha + c\lambda\alpha + d\alpha$$

$$= (b\lambda^2 + c\lambda + d)\boxed{\alpha}$$

2. 验证：

$$A^*A\alpha = |A|I\alpha \qquad A^*\boxed{} = \frac{|A|}{\lambda}\boxed{}$$

例 7 设 n 阶方阵 A 有特征值 λ，则

1. A^2 有特征值 λ^2；一般地，$bA^2+cA+dI$ 有特征值 $b\lambda^2+c\lambda+d$
2. 若 A 可逆，则 A^* 有特征值 $\frac{1}{\lambda}|A|$。

证明 设 α 是 A 的对应特征值 λ 的特征向量（$\alpha \neq 0$），即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证：

$$A^2 \boxed{\alpha} = A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda \cdot \lambda\alpha = \lambda^2 \boxed{\alpha}$$

$$(bA^2 + cA + dI) \boxed{\alpha} = bA^2\alpha + cA\alpha + dI\alpha = b\lambda^2\alpha + c\lambda\alpha + d\alpha$$

$$= (b\lambda^2 + c\lambda + d) \boxed{\alpha}$$

2. 验证：

$$A^*A\alpha = |A|I\alpha = |A|\alpha \qquad A^* \boxed{} = \frac{|A|}{\lambda} \boxed{}$$

例 7 设 n 阶方阵 A 有特征值 λ，则

1. A^2 有特征值 λ^2；一般地，$bA^2+cA+dI$ 有特征值 $b\lambda^2+c\lambda+d$
2. 若 A 可逆，则 A^* 有特征值 $\frac{1}{\lambda}|A|$。

证明 设 α 是 A 的对应特征值 λ 的特征向量（$\alpha \neq 0$），即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证：

$$A^2\boxed{\alpha} = A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda\cdot\lambda\alpha = \lambda^2\boxed{\alpha}$$

$$(bA^2+cA+dI)\boxed{\alpha} = bA^2\alpha + cA\alpha + dI\alpha = b\lambda^2\alpha + c\lambda\alpha + d\alpha$$

$$= (b\lambda^2 + c\lambda + d)\boxed{\alpha}$$

2. 验证：

$$A^*(\lambda\alpha) = A^*A\alpha = |A|I\alpha = |A|\alpha \qquad A^*\boxed{} = \frac{|A|}{\lambda}\boxed{}$$

例 7 设 n 阶方阵 A 有特征值 λ，则

1. A^2 有特征值 λ^2；一般地，$bA^2+cA+dI$ 有特征值 $b\lambda^2+c\lambda+d$
2. 若 A 可逆，则 A^* 有特征值 $\frac{1}{\lambda}|A|$。

证明 设 α 是 A 的对应特征值 λ 的特征向量（$\alpha \neq 0$），即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证：

$$A^2 \boxed{\alpha} = A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda \cdot \lambda\alpha = \lambda^2 \boxed{\alpha}$$

$$\begin{aligned}(bA^2 + cA + dI)\boxed{\alpha} &= bA^2\alpha + cA\alpha + dI\alpha = b\lambda^2\alpha + c\lambda\alpha + d\alpha \\ &= (b\lambda^2 + c\lambda + d)\boxed{\alpha}\end{aligned}$$

2. 验证：

$$A^*(\lambda\alpha) = A^*A\alpha = |A|I\alpha = |A|\alpha \quad \Rightarrow \quad A^*\boxed{\alpha} = \frac{|A|}{\lambda}\boxed{\alpha}$$

例 7 设 n 阶方阵 A 有特征值 λ，则

1. A^2 有特征值 λ^2；一般地，$bA^2+cA+dI$ 有特征值 $b\lambda^2+c\lambda+d$
2. 若 A 可逆，则 A^* 有特征值 $\frac{1}{\lambda}|A|$。

证明 设 α 是 A 的对应特征值 λ 的特征向量（$\alpha \neq 0$），即

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

1. 验证：

$$A^2\boxed{\alpha} = A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda \cdot \lambda\alpha = \lambda^2\boxed{\alpha}$$

$$(bA^2+cA+dI)\boxed{\alpha} = bA^2\alpha + cA\alpha + dI\alpha = b\lambda^2\alpha + c\lambda\alpha + d\alpha$$

$$= (b\lambda^2 + c\lambda + d)\boxed{\alpha}$$

2. 验证：

$$A^*(\lambda\alpha) = A^*A\alpha = |A|I\alpha = |A|\alpha \quad \Rightarrow \quad A^*\boxed{\alpha} = \frac{|A|}{\lambda}\boxed{\alpha}$$

（用到 A可逆 $\Rightarrow \lambda \neq 0$）

特征值与特征向量的基本性质

定理 n 阶方阵 A 与其转置矩阵 A^T 有相同特征值

特征值与特征向量的基本性质

定理 n 阶方阵 A 与其转置矩阵 A^T 有相同特征值

证明 由于

$$|\lambda I - A| \qquad\qquad\qquad\qquad |\lambda I - A^T|$$

特征值与特征向量的基本性质

定理 n 阶方阵 A 与其转置矩阵 A^T 有相同特征值

证明 由于

$$|\lambda I - A| = |(\lambda I - A)^T| \qquad |\lambda I - A^T|$$

特征值与特征向量的基本性质

定理 n 阶方阵 A 与其转置矩阵 A^T 有相同特征值

证明 由于

$$|\lambda I - A| = |(\lambda I - A)^T| = |\lambda I^T - A^T| \quad |\lambda I - A^T|$$

特征值与特征向量的基本性质

定理 n 阶方阵 A 与其转置矩阵 A^T 有相同特征值

证明 由于

$$|\lambda I - A| = |(\lambda I - A)^T| = |\lambda I^T - A^T| = |\lambda I - A^T|$$

特征值与特征向量的基本性质

定理 n 阶方阵 A 与其转置矩阵 A^T 有相同特征值

证明 由于

$$|\lambda I - A| = |(\lambda I - A)^T| = |\lambda I^T - A^T| = |\lambda I - A^T|$$

所以

$$\lambda \text{ 是 } A \text{ 特征值} \quad \Leftrightarrow \quad |\lambda I - A| = 0$$

特征值与特征向量的基本性质

定理 n 阶方阵 A 与其转置矩阵 A^T 有相同特征值

证明 由于

$$|\lambda I - A| = |(\lambda I - A)^T| = |\lambda I^T - A^T| = |\lambda I - A^T|$$

所以

$$\begin{aligned} \lambda \text{ 是 } A \text{ 特征值} \quad &\Leftrightarrow \quad |\lambda I - A| = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad |\lambda I - A^T| = 0 \end{aligned}$$

特征值与特征向量的基本性质

定理 n 阶方阵 A 与其转置矩阵 A^T 有相同特征值

证明 由于

$$|\lambda I - A| = |(\lambda I - A)^T| = |\lambda I^T - A^T| = |\lambda I - A^T|$$

所以

$$\begin{aligned} \lambda \text{ 是 } A \text{ 特征值} &\Leftrightarrow |\lambda I - A| = 0 \\ &\Leftrightarrow |\lambda I - A^T| = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda \text{ 是 } A^T \text{ 特征值} \end{aligned}$$

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$，其对应的特征向量 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 线性无关。

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, ..., \lambda_m$，其对应的特征向量 $\alpha_1, ..., \alpha_m$ 线性无关。

证明 以 $m = 2$ 为例进行证明。假设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = 0$$

$\underline{k_1 = k_2 = 0}$

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$，其对应的特征向量 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 以 $m = 2$ 为例进行证明。假设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = 0$$

两边左乘 A，得

$$k_1 A\alpha_1 + k_2 A\alpha_2 = 0$$

$$\underline{k_1 = k_2 = 0}$$

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, ..., \lambda_m$，其对应的特征向量 $\alpha_1, ..., \alpha_m$ 线性无关。

证明 以 $m=2$ 为例进行证明。假设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = 0$$

两边左乘 A，得

$$k_1 A\alpha_1 + k_2 A\alpha_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1\lambda_1\alpha_1 + k_2\lambda_2\alpha_2 = 0$$

$$\underline{k_1 = k_2 = 0}$$

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$，其对应的特征向量 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 以 $m = 2$ 为例进行证明。假设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = 0 \quad \xRightarrow{\times\lambda_1}$$

两边左乘 A，得

$$k_1A\alpha_1 + k_2A\alpha_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1\lambda_1\alpha_1 + k_2\lambda_2\alpha_2 = 0$$

$$\underline{k_1 = k_2 = 0}$$

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, ..., \lambda_m$，其对应的特征向量 $\alpha_1, ..., \alpha_m$ 线性无关。

证明 以 $m = 2$ 为例进行证明。假设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = 0 \quad \xRightarrow{\times\lambda_1} \quad k_1\lambda_1\alpha_1 + k_2\lambda_1\alpha_2 = 0$$

两边左乘 A，得

$$k_1A\alpha_1 + k_2A\alpha_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1\lambda_1\alpha_1 + k_2\lambda_2\alpha_2 = 0$$

$$\underline{k_1 = k_2 = 0}$$

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$，其对应的特征向量 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 以 $m = 2$ 为例进行证明。假设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = 0 \quad \xRightarrow{\times\lambda_1} \quad k_1\lambda_1\alpha_1 + k_2\lambda_1\alpha_2 = 0$$

两边左乘 A，得

$$k_1A\alpha_1 + k_2A\alpha_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1\lambda_1\alpha_1 + k_2\lambda_2\alpha_2 = 0$$

两式相减得：

$$\underline{k_1 = k_2 = 0}$$

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$，其对应的特征向量 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 以 $m = 2$ 为例进行证明。假设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = 0 \quad \xRightarrow{\times\lambda_1} \quad k_1\lambda_1\alpha_1 + k_2\lambda_1\alpha_2 = 0$$

两边左乘 A，得

$$k_1A\alpha_1 + k_2A\alpha_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1\lambda_1\alpha_1 + k_2\lambda_2\alpha_2 = 0$$

两式相减得：

$$k_2(\lambda_1 - \lambda_2)\alpha_2 = 0$$

$$\underline{k_1 = k_2 = 0}$$

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$，其对应的特征向量 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 以 $m=2$ 为例进行证明。假设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = 0 \quad \xRightarrow{\times\lambda_1} \quad k_1\lambda_1\alpha_1 + k_2\lambda_1\alpha_2 = 0$$

两边左乘 A，得

$$k_1A\alpha_1 + k_2A\alpha_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1\lambda_1\alpha_1 + k_2\lambda_2\alpha_2 = 0$$

两式相减得：

$$k_2(\lambda_1 - \lambda_2)\alpha_2 = 0$$

因为 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，$\alpha_2 \neq 0$，所以 $k_2 = 0$。

$\underline{k_1 = k_2 = 0}$

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$，其对应的特征向量 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 以 $m = 2$ 为例进行证明。假设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = 0 \quad \xRightarrow{\times\lambda_1} \quad k_1\lambda_1\alpha_1 + k_2\lambda_1\alpha_2 = 0$$

两边左乘 A，得

$$k_1A\alpha_1 + k_2A\alpha_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1\lambda_1\alpha_1 + k_2\lambda_2\alpha_2 = 0$$

两式相减得：

$$k_2(\lambda_1 - \lambda_2)\alpha_2 = 0$$

因为 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，$\alpha_2 \neq 0$，所以 $k_2 = 0$。

代回（1）式，得 $k_1\alpha_1 = 0$，所以 $k_1 = 0$。

$\underline{k_1 = k_2 = 0}$

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$，其对应的特征向量 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 以 $m=2$ 为例进行证明。假设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = 0 \quad \xRightarrow{\times\lambda_1} \quad k_1\lambda_1\alpha_1 + k_2\lambda_1\alpha_2 = 0$$

两边左乘 A，得

$$k_1A\alpha_1 + k_2A\alpha_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1\lambda_1\alpha_1 + k_2\lambda_2\alpha_2 = 0$$

两式相减得：

$$k_2(\lambda_1 - \lambda_2)\alpha_2 = 0$$

因为 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，$\alpha_2 \neq 0$，所以 $k_2 = 0$。

代回（1）式，得 $k_1\alpha_1 = 0$，所以 $k_1 = 0$。

所以 $\underline{k_1 = k_2 = 0}$，$\alpha_1, \alpha_2$ 线性无关。

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$，其对应的特征向量 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 线性无关。

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, ..., \lambda_m$，其对应的特征向量 $\alpha_1, ..., \alpha_m$ 线性无关。

证明 数学归纳法。

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, ..., \lambda_m$，其对应的特征向量 $\alpha_1, ..., \alpha_m$ 线性无关。

证明 数学归纳法。$m = 1$ 时，

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, ..., \lambda_m$，其对应的特征向量 $\alpha_1, ..., \alpha_m$ 线性无关。

证明 数学归纳法。$m = 1$ 时，显然。

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, ..., \lambda_m$，其对应的特征向量 $\alpha_1, ..., \alpha_m$ 线性无关。

证明 数学归纳法。$m = 1$ 时，显然。假设结论对 $m - 1$ 成立。

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$，其对应的特征向量 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 数学归纳法。$m = 1$ 时，显然。假设结论对 $m - 1$ 成立。

假设

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\alpha_m = 0 \quad (1)$$

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$，其对应的特征向量 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 数学归纳法。$m = 1$ 时，显然。假设结论对 $m - 1$ 成立。

假设

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\alpha_m = 0 \quad (1)$$

$$\underline{k_1 = \cdots = k_{m-1} = k_m = 0}$$

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$，其对应的特征向量 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 数学归纳法。$m = 1$ 时，显然。假设结论对 $m - 1$ 成立。

假设

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\alpha_m = 0 \quad (1)$$

两边左乘 A，得

$$\underline{k_1 = \cdots = k_{m-1} = k_m = 0}$$

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$，其对应的特征向量 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 数学归纳法。$m = 1$ 时，显然。假设结论对 $m - 1$ 成立。

假设

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\alpha_m = 0 \quad (1)$$

两边左乘 A，得

$$k_1A\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}A\alpha_{m-1} + k_mA\alpha_m = 0$$

$$\underline{k_1 = \cdots = k_{m-1} = k_m = 0}$$

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, ..., \lambda_m$，其对应的特征向量 $\alpha_1, ..., \alpha_m$ 线性无关。

证明 数学归纳法。$m = 1$ 时，显然。假设结论对 $m - 1$ 成立。

假设

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\alpha_m = 0 \quad (1)$$

两边左乘 A，得

$$k_1A\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}A\alpha_{m-1} + k_mA\alpha_m = 0$$

$$\lambda_1\alpha_1$$

$$\underline{k_1 = \cdots = k_{m-1} = k_m = 0}$$

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$，其对应的特征向量 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 数学归纳法。$m = 1$ 时，显然。假设结论对 $m - 1$ 成立。

假设

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\alpha_m = 0 \quad (1)$$

两边左乘 A，得

$$k_1A\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}A\alpha_{m-1} + k_mA\alpha_m = 0$$

$$\lambda_1\alpha_1 \qquad\qquad \lambda_{m-1}\alpha_{m-1}$$

$$\underline{k_1 = \cdots = k_{m-1} = k_m = 0}$$

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$，其对应的特征向量 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 数学归纳法。$m = 1$ 时，显然。假设结论对 $m - 1$ 成立。

假设

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\alpha_m = 0 \quad (1)$$

两边左乘 A，得

$$k_1A\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}A\alpha_{m-1} + k_mA\alpha_m = 0$$

$$\lambda_1\alpha_1 \qquad\qquad \lambda_{m-1}\alpha_{m-1} \qquad \lambda_m\alpha_m$$

$$\underline{k_1 = \cdots = k_{m-1} = k_m = 0}$$

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$，其对应的特征向量 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 数学归纳法。$m = 1$ 时，显然。假设结论对 $m - 1$ 成立。

假设

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\alpha_m = 0 \quad (1)$$

两边左乘 A，得

$$k_1A\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}A\alpha_{m-1} + k_mA\alpha_m = 0$$

$$\Rightarrow \quad k_1\lambda_1\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}\lambda_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\lambda_m\alpha_m = 0 \quad (2)$$

$$\underline{k_1 = \cdots = k_{m-1} = k_m = 0}$$

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$，其对应的特征向量 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 数学归纳法。$m = 1$ 时，显然。假设结论对 $m-1$ 成立。

假设

$$\boxed{k_1\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\alpha_m = 0 \quad (1)}$$

两边左乘 A，得

$$k_1A\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}A\alpha_{m-1} + k_mA\alpha_m = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{k_1\lambda_1\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}\lambda_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\lambda_m\alpha_m = 0 \quad (2)}$$

$$\underline{k_1 = \cdots = k_{m-1} = k_m = 0}$$

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$，其对应的特征向量 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 数学归纳法。$m = 1$ 时，显然。假设结论对 $m - 1$ 成立。

假设

$$\boxed{k_1\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\alpha_m = 0 \quad (1)}$$

两边左乘 A，得

$$k_1A\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}A\alpha_{m-1} + k_mA\alpha_m = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{k_1\lambda_1\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}\lambda_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\lambda_m\alpha_m = 0 \quad (2)}$$

$\lambda_m \times (1) - (2)$ 得:

$$\underline{k_1 = \cdots = k_{m-1} = k_m = 0}$$

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$，其对应的特征向量 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 数学归纳法。$m = 1$ 时，显然。假设结论对 $m-1$ 成立。

假设

$$\boxed{k_1\lambda_m\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}\lambda_m\alpha_{m-1} + k_m\lambda_m\alpha_m = 0 \quad (1)}$$

两边左乘 A，得

$$k_1A\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}A\alpha_{m-1} + k_mA\alpha_m = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{k_1\lambda_1\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}\lambda_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\lambda_m\alpha_m = 0 \quad (2)}$$

$\lambda_m \times (1) - (2)$ 得：

$$\underline{k_1 = \cdots = k_{m-1} = k_m = 0}$$

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$，其对应的特征向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 数学归纳法。$m = 1$ 时，显然。假设结论对 $m-1$ 成立。

假设

$$\boxed{k_1\lambda_m\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}\lambda_m\alpha_{m-1} + k_m\lambda_m\alpha_m = 0 \quad (1)}$$

两边左乘 A，得

$$k_1A\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}A\alpha_{m-1} + k_mA\alpha_m = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{k_1\lambda_1\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}\lambda_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\lambda_m\alpha_m = 0 \quad (2)}$$

$\lambda_m \times (1) - (2)$ 得:

$$k_1(\lambda_m - \lambda_1)\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1})\alpha_{m-1} = 0$$

$$\underline{k_1 = \cdots = k_{m-1} = k_m = 0}$$

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$，其对应的特征向量 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 数学归纳法。$m=1$ 时，显然。假设结论对 $m-1$ 成立。

假设

$$\boxed{k_1\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\alpha_m = 0 \quad (1)}$$

两边左乘 A，得

$$k_1A\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}A\alpha_{m-1} + k_mA\alpha_m = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{k_1\lambda_1\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}\lambda_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\lambda_m\alpha_m = 0 \quad (2)}$$

$\lambda_m \times (1) - (2)$ 得：

$$k_1(\lambda_m - \lambda_1)\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1})\alpha_{m-1} = 0$$

由归纳假设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$ 线性无关，所以

$$\underline{k_1 = \cdots = k_{m-1} = k_m = 0}$$

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$，其对应的特征向量 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 数学归纳法。$m = 1$ 时，显然。假设结论对 $m-1$ 成立。

假设

$$\boxed{k_1\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\alpha_m = 0 \quad (1)}$$

两边左乘 A，得

$$k_1A\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}A\alpha_{m-1} + k_mA\alpha_m = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{k_1\lambda_1\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}\lambda_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\lambda_m\alpha_m = 0 \quad (2)}$$

$\lambda_m \times (1) - (2)$ 得：

$$k_1(\lambda_m - \lambda_1)\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1})\alpha_{m-1} = 0$$

由归纳假设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$ 线性无关，所以

$k_1(\lambda_m - \lambda_1) = \cdots = k_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1}) = 0$

$$\underline{k_1 = \cdots = k_{m-1} = k_m = 0}$$

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$，其对应的特征向量 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 数学归纳法。$m=1$ 时，显然。假设结论对 $m-1$ 成立。

假设

$$\boxed{k_1\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\alpha_m = 0 \quad (1)}$$

两边左乘 A，得

$$k_1A\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}A\alpha_{m-1} + k_mA\alpha_m = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{k_1\lambda_1\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}\lambda_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\lambda_m\alpha_m = 0 \quad (2)}$$

$\lambda_m \times (1) - (2)$ 得：

$$k_1(\lambda_m - \lambda_1)\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1})\alpha_{m-1} = 0$$

由归纳假设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$ 线性无关，所以

$$k_1(\lambda_m-\lambda_1)=\cdots=k_{m-1}(\lambda_m-\lambda_{m-1})=0 \quad \Rightarrow \quad k_1=\cdots=k_{m-1}=0$$

$$\underline{k_1 = \cdots = k_{m-1} = k_m = 0}$$

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$，其对应的特征向量 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 数学归纳法。$m = 1$ 时，显然。假设结论对 $m - 1$ 成立。

假设

$$\boxed{k_1\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\alpha_m = 0 \quad (1)}$$

两边左乘 A，得

$$k_1 A\alpha_1 + \cdots + k_{m-1} A\alpha_{m-1} + k_m A\alpha_m = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{k_1\lambda_1\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}\lambda_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\lambda_m\alpha_m = 0 \quad (2)}$$

$\lambda_m \times (1) - (2)$ 得:

$$k_1(\lambda_m - \lambda_1)\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1})\alpha_{m-1} = 0$$

由归纳假设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$ 线性无关，所以

$$k_1(\lambda_m - \lambda_1) = \cdots = k_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1}) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = \cdots = k_{m-1} = 0$$

进而

$$k_m\alpha_m = 0$$

$$\underline{k_1 = \cdots = k_{m-1} = k_m = 0}$$

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$，其对应的特征向量 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 数学归纳法。$m = 1$ 时，显然。假设结论对 $m-1$ 成立。

假设

$$\boxed{k_1\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\alpha_m = 0 \quad (1)}$$

两边左乘 A，得

$$k_1A\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}A\alpha_{m-1} + k_mA\alpha_m = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{k_1\lambda_1\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}\lambda_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\lambda_m\alpha_m = 0 \quad (2)}$$

$\lambda_m \times (1) - (2)$ 得：

$$k_1(\lambda_m - \lambda_1)\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1})\alpha_{m-1} = 0$$

由归纳假设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$ 线性无关，所以

$$k_1(\lambda_m - \lambda_1) = \cdots = k_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1}) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = \cdots = k_{m-1} = 0$$

进而

$$k_m\alpha_m = 0 \quad \Rightarrow \quad k_m = 0$$

$$\underline{k_1 = \cdots = k_{m-1} = k_m = 0}$$

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$，其对应的特征向量 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 数学归纳法。$m = 1$ 时，显然。假设结论对 $m-1$ 成立。

假设

$$\boxed{k_1\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\alpha_m = 0 \quad (1)}$$

两边左乘 A，得

$$k_1A\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}A\alpha_{m-1} + k_mA\alpha_m = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{k_1\lambda_1\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}\lambda_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\lambda_m\alpha_m = 0 \quad (2)}$$

$\lambda_m \times (1) - (2)$ 得：

$$k_1(\lambda_m - \lambda_1)\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1})\alpha_{m-1} = 0$$

由归纳假设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$ 线性无关，所以

$$k_1(\lambda_m - \lambda_1) = \cdots = k_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1}) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = \cdots = k_{m-1} = 0$$

进而

$$k_m\alpha_m = 0 \quad \Rightarrow \quad k_m = 0$$

所以$\underline{k_1 = \cdots = k_{m-1} = k_m = 0}$

定理 n 阶方阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$，其对应的特征向量 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 线性无关。

证明 数学归纳法。$m = 1$ 时，显然。假设结论对 $m-1$ 成立。

假设

$$\boxed{k_1\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\alpha_m = 0 \quad (1)}$$

两边左乘 A，得

$$k_1A\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}A\alpha_{m-1} + k_mA\alpha_m = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{k_1\lambda_1\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}\lambda_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\lambda_m\alpha_m = 0 \quad (2)}$$

$\lambda_m \times (1) - (2)$ 得：

$$k_1(\lambda_m - \lambda_1)\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1})\alpha_{m-1} = 0$$

由归纳假设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$ 线性无关，所以

$$k_1(\lambda_m - \lambda_1) = \cdots = k_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1}) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = \cdots = k_{m-1} = 0$$

进而

$$k_m\alpha_m = 0 \quad \Rightarrow \quad k_m = 0$$

所以$\underline{k_1 = \cdots = k_{m-1} = k_m = 0}$，$\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 线性无关。

特征值与矩阵元素关系（$n = 3$）

设 $A = (a_{ij})_{3\times 3}$，则

特征值与矩阵元素关系（$n = 3$）

设 $A = (a_{ij})_{3\times 3}$，则

$$\boxed{\begin{aligned} &\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a_{11} + a_{22} + a_{33} \\ &\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = |A| \end{aligned}}$$

特征值与矩阵元素关系（$n=3$）

设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$，则

$$\boxed{\begin{array}{l}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a_{11}+a_{22}+a_{33}\\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3=|A|\end{array}}$$

这是：

$$|\lambda I-A|=$$

特征值与矩阵元素关系（$n=3$）

设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$，则

$$\boxed{\begin{aligned}&\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a_{11}+a_{22}+a_{33}\\&\lambda_1\lambda_2\lambda_3=|A|\end{aligned}}$$

这是:

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & -a_{13}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & -a_{23}\\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda-a_{33}\end{vmatrix}$$

特征值与矩阵元素关系（$n=3$）

设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$，则

$$\boxed{\begin{aligned}&\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a_{11}+a_{22}+a_{33}\\&\lambda_1\lambda_2\lambda_3=|A|\end{aligned}}$$

这是：

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & -a_{13}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & -a_{23}\\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda-a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^3-(a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2+$$

特征值与矩阵元素关系（$n=3$）

设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$，则

$$\boxed{\begin{aligned}&\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a_{11}+a_{22}+a_{33}\\&\lambda_1\lambda_2\lambda_3=|A|\end{aligned}}$$

这是：

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & -a_{13}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & -a_{23}\\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda-a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^3-(a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2+$$

$$+(-1)^2\left(\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}\right)\lambda$$

特征值与矩阵元素关系（$n = 3$）

设 $A = (a_{ij})_{3\times 3}$，则

$$\boxed{\begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a_{11} + a_{22} + a_{33} \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = |A| \end{array}}$$

这是：

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 +$$

$$+ (-1)^2 \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \right) \lambda$$

$$+ (-1)^3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

特征值与矩阵元素关系（$n=3$）

设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$，则

$$\boxed{\begin{aligned}&\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a_{11}+a_{22}+a_{33}\\&\lambda_1\lambda_2\lambda_3=|A|\end{aligned}}$$

这是：

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & -a_{13}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & -a_{23}\\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda-a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^3-(a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2+$$

$$+(-1)^2\left(\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}\right)\lambda$$

$$+(-1)^3\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

另一方面，

$$|\lambda I-A|=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)$$

特征值与矩阵元素关系（$n=3$）

设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$，则

$$\boxed{\begin{array}{l}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a_{11}+a_{22}+a_{33}\\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3=|A|\end{array}}$$

这是：

$$\begin{aligned}|\lambda I-A| &= \begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & -a_{13}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & -a_{23}\\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda-a_{33}\end{vmatrix}\\ &= \lambda^3-(a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2+\\ &\quad +(-1)^2\left(\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}\right)\lambda\\ &\quad +(-1)^3\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\end{aligned}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}|\lambda I-A| &= (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)\\ &= \lambda^3-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\lambda^2+(-1)^2(\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3)\lambda+(-1)^3\lambda_1\lambda_2\lambda_3\end{aligned}$$

特征值与矩阵元素关系（$n=3$）

设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$，则

$$\boxed{\begin{aligned}&\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a_{11}+a_{22}+a_{33}\\&\lambda_1\lambda_2\lambda_3=|A|\end{aligned}}$$

这是：

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & -a_{13}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & -a_{23}\\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda-a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^3-\underline{(a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2}+$$

$$+(-1)^2\left(\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}\right)\lambda$$

$$+(-1)^3\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

另一方面，

$$|\lambda I-A|=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)$$

$$=\lambda^3-\underline{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}\lambda^2+(-1)^2(\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3)\lambda+(-1)^3\lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

特征值与矩阵元素关系（$n=3$）

设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$，则

$$\boxed{\begin{aligned}&\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a_{11}+a_{22}+a_{33}\\&\lambda_1\lambda_2\lambda_3=|A|\end{aligned}}$$

这是：

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & -a_{13}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & -a_{23}\\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda-a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^3-\underline{(a_{11}+a_{22}+a_{33})}\lambda^2+$$

$$+(-1)^2\left(\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}\right)\lambda$$

$$+\underline{(-1)^3\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}}$$

另一方面，

$$|\lambda I-A|=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)$$

$$=\lambda^3-\underline{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\lambda^2}+(-1)^2(\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3)\lambda+(-1)^3\underline{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}$$

特征值与矩阵元素关系

设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$，则

特征值与矩阵元素关系

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，则

$$\boxed{\begin{array}{l}\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}\\ \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|\end{array}}$$

特征值与矩阵元素关系

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，则

$$\boxed{\begin{aligned}&\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}\\&\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|\end{aligned}}$$

这是：

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$$

特征值与矩阵元素关系

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，则

$$\boxed{\begin{array}{l}\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}\\ \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|\end{array}}$$

这是：

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+*\lambda+|-A|$$

特征值与矩阵元素关系

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，则

$$\boxed{\begin{array}{l}\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}\\ \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|\end{array}}$$

这是：

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+*\lambda+\underbrace{|-A|}_{(-1)^n|A|}$$

特征值与矩阵元素关系

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，则

$$\boxed{\begin{array}{l}\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}\\ \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|\end{array}}$$

这是:

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+*\lambda+\underbrace{|-A|}_{(-1)^n|A|}$$

另一方面，

$$|\lambda I-A|=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$$

特征值与矩阵元素关系

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，则

$$\boxed{\begin{array}{l}\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}\\ \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|\end{array}}$$

这是：

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+*\lambda+\underbrace{|-A|}_{(-1)^n|A|}$$

另一方面，

$$|\lambda I-A|=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$$

$$=\lambda^n-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)\lambda^{n-1}+\cdots+*\lambda+(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

例 1 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & x & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，已知 A 有特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$，求 x 的值，及另外一个特征值 λ_3。

例 1 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & x & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，已知 A 有特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$，求 x 的值，及另外一个特征值 λ_3。

解 由特征值与矩阵系数关系：

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + x + 1 \\ \\ \end{cases}$$

例 1 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & x & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，已知 A 有特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$，求 x 的值，及另外一个特征值 λ_3。

解 由特征值与矩阵系数关系：

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + x + 1 \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & x & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} \end{cases}$$

例 1 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & x & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，已知 A 有特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$，求 x 的值，及另外一个特征值 λ_3。

解 由特征值与矩阵系数关系：

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + x + 1 \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & x & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & x \end{vmatrix} \end{cases}$$

例 1 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & x & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，已知 A 有特征值 $\lambda_1=1, \lambda_2=2$，求 x 的值，及另外一个特征值 λ_3。

解 由特征值与矩阵系数关系：

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 1+x+1 \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & x & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & x \end{vmatrix} = x+2 \end{cases}$$

例 1 设 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & x & 0\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix}$，已知 A 有特征值 $\lambda_1=1, \lambda_2=2$，求 x 的值，及另外一个特征值 λ_3。

解 由特征值与矩阵系数关系：

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1+x+1\\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & x & 0\\ 4 & 2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & x\end{vmatrix}=x+2\end{cases}$$

所以

$$\begin{cases}1+2+\lambda_3=2+x\\ 1\cdot 2\cdot\lambda_3=x+2\end{cases}$$

例 1 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & x & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，已知 A 有特征值 $\lambda_1=1, \lambda_2=2$，求 x 的值，及另外一个特征值 λ_3。

解 由特征值与矩阵系数关系：

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1+x+1 \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & x & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & x \end{vmatrix}=x+2 \end{cases}$$

所以

$$\begin{cases} 1+2+\lambda_3=2+x \\ 1\cdot 2\cdot \lambda_3=x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_3-x=-1 \\ 2\lambda_3-x=2 \end{cases}$$

例 1 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & x & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，已知 A 有特征值 $\lambda_1=1, \lambda_2=2$，求 x 的值，及另外一个特征值 λ_3。

解 由特征值与矩阵系数关系：

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1+x+1 \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & x & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & x \end{vmatrix}=x+2 \end{cases}$$

所以

$$\begin{cases} 1+2+\lambda_3=2+x \\ 1\cdot 2\cdot \lambda_3=x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_3-x=-1 \\ 2\lambda_3-x=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_3=3 \\ x=4 \end{cases}$$

例 2 已知 $A=\begin{pmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 有特征值 2, 6，求 x 的值。

例 2 已知 $A=\begin{pmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 有特征值 2, 6，求 x 的值。

解 设 A 的第三个特征值为 λ，由特征值与矩阵系数关系：

例 2 已知 $A = \begin{pmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 有特征值 2, 6，求 x 的值。

解 设 A 的第三个特征值为 λ，由特征值与矩阵系数关系：

$$\begin{cases} 2 + 6 + \lambda_3 = x + 4 + 5 \\ \\ \end{cases}$$

例 2 已知 $A=\begin{pmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 有特征值 2, 6，求 x 的值。

解 设 A 的第三个特征值为 λ，由特征值与矩阵系数关系：

$$\begin{cases} 2+6+\lambda_3 = x+4+5 \\ 2\cdot 6\cdot \lambda_3 = \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{vmatrix} \end{cases}$$

例 2 已知 $A=\begin{pmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 有特征值 2, 6，求 x 的值。

解 设 A 的第三个特征值为 λ，由特征值与矩阵系数关系：

$$\begin{cases} 2+6+\lambda_3 = x+4+5 \\ 2\cdot 6\cdot \lambda_3 = \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{vmatrix} \end{cases}$$

其中

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{vmatrix} \overset{r_2+2r_1}{\underset{r_3-5r_1}{=\!=\!=}}$$

例 2 已知 $A=\begin{pmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 有特征值 2, 6，求 x 的值。

解 设 A 的第三个特征值为 λ，由特征值与矩阵系数关系：

$$\begin{cases} 2+6+\lambda_3 = x+4+5 \\ 2\cdot 6\cdot \lambda_3 = \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{vmatrix} \end{cases}$$

其中

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{vmatrix} \overset{r_2+2r_1}{\underset{r_3-5r_1}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2+2x & 2 & 0 \\ -3-5x & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

例 2 已知 $A=\begin{pmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 有特征值 2, 6，求 x 的值。

解 设 A 的第三个特征值为 λ，由特征值与矩阵系数关系：

$$\begin{cases} 2+6+\lambda_3 = x+4+5 \\ 2\cdot 6\cdot \lambda_3 = \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{vmatrix} \end{cases}$$

其中

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-5r_1]{r_2+2r_1} \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2+2x & 2 & 0 \\ -3-5x & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+2x & 2 \\ -3-5x & 2 \end{vmatrix}$$

例 2 已知 $A=\begin{pmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 有特征值 2, 6，求 x 的值。

解 设 A 的第三个特征值为 λ，由特征值与矩阵系数关系：

$$\begin{cases} 2+6+\lambda_3 = x+4+5 \\ 2\cdot 6\cdot \lambda_3 = \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{vmatrix} \end{cases}$$

其中

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-5r_1]{r_2+2r_1} \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2+2x & 2 & 0 \\ -3-5x & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+2x & 2 \\ -3-5x & 2 \end{vmatrix} = 2(7x+5)$$

例 2 已知 $A=\begin{pmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 有特征值 2, 6，求 x 的值。

解 设 A 的第三个特征值为 λ，由特征值与矩阵系数关系：

$$\begin{cases} 2+6+\lambda_3 = x+4+5 \\ 2\cdot 6\cdot \lambda_3 = \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{vmatrix} \end{cases}$$

其中

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-5r_1]{r_2+2r_1} \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2+2x & 2 & 0 \\ -3-5x & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+2x & 2 \\ -3-5x & 2 \end{vmatrix} = 2(7x+5)$$

所以

$$\begin{cases} \lambda_3 - x = 1 \\ 6\lambda_3 - 7x = 5 \end{cases}$$

例 2 已知 $A=\begin{pmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 有特征值 2, 6，求 x 的值。

解 设 A 的第三个特征值为 λ，由特征值与矩阵系数关系：

$$\begin{cases} 2+6+\lambda_3 = x+4+5 \\ 2\cdot 6\cdot \lambda_3 = \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{vmatrix} \end{cases}$$

其中

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-5r_1]{r_2+2r_1} \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2+2x & 2 & 0 \\ -3-5x & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+2x & 2 \\ -3-5x & 2 \end{vmatrix} = 2(7x+5)$$

所以

$$\begin{cases} \lambda_3 - x = 1 \\ 6\lambda_3 - 7x = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_3 = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$