一、选择（每空 2 分，共 20 分）

(1) 设矩阵 A 的列向量组可由矩阵 B 的列向量组线性表示，则以下 4 个说法
① 存在矩阵 C 使得 $AC = B$,
② 存在矩阵 C 使得 $BC = A$,
③ $r(A) \le r(B)$,
④ $r(B) \le r(A)$.
正确的是：(C)
(A) ① ③ (B) ① ④ (C) ② ③ (D) ② ④

(2) 对矩阵 $A_{m\times n}$，$B_{n\times p}$ 和 $C_{m\times p}$，以下运算可行的是（D）
(A) ABC (B) A^TCB (C) B^TAC (D) C^TAB

(3) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 1 \\ 8 & 5 & 2 \\ 9 & 4 & 3 \end{pmatrix}$，则伴随矩阵 A^* 的第 2 行第 3 列的元素等于（B）
(A) 6 (B) -6 (C) 26 (D) -26

(4) 设 A，B 为 n 阶对称矩阵，则以下矩阵不一定对称的是（A）
(A) AB (B) $2A - B^T$ (C) A^2 (D) BAB

(5) 设齐次线性方程组 $A_{5\times 6}x = 0$ 的基础解系由 2 个向量构成，则秩 $r(A) =$（C）
(A)2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

(6) 以下矩阵是正交矩阵的是（C）
(A) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

(7) 设矩阵 A 的秩为 r，则 A 的列向量组（A）
(A) 存在 r 个线性无关向量
(B) 存在 r 个线性相关向量
(C) 任意 r 个向量线性无关
(D) 任意 r 个向量线性相关

(8) 方阵 A 可对角化的一个充分条件是：(B）
(A) A 是满秩矩阵 (B) A 是对称矩阵 (C) A 是正交矩阵 (D) A 是阶梯形矩阵

(9) 设 A，B 是 n 阶可逆矩阵，则 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} =$（B）
(A) $\begin{pmatrix} O & A^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} O & -B^{-1} \\ -A^{-1} & O \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$

(10) 已知 $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ 可逆, 且 $A\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d-2g & e-2h & f-2i \\ g & h & i \end{pmatrix}$, 则 $A =$（C）
(A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

二、填空（每空 2 分，共 20 分）

(1) 已知 $\begin{pmatrix} -a & 1 & 0 \\ 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}$ 是正定矩阵, 则 a 的范围是 ____________.（$(-\infty,-1)$）

(2) 设 $\begin{pmatrix} -1 & k \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ 的一个特征值是 5，则 $k =$____________.（3）

(3) 方阵 A 满足 $A^2 + A - 2I = 0$，则 $A^{-1} =$____________.（$\frac{1}{2}(A+I)$）

(4) 向量 $\alpha = (1,k,1)$ 与 $\beta = (5,2,-3)$ 正交，则 α 的长度是 ____________.（$\sqrt{3}$）

(5) 设 A 和 B 为 3 阶方阵，$|A| = 2$，$|B| = 3$，则 $|3A^T B^{-1}| =$____________.（18）

(6) n 阶方阵 A 满足 $|3A + 2I| = 0$，则 A 必有的一个特征值是 ____________. （$-\frac{2}{3}$）

(7) 设 3 阶行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$,则 $\begin{vmatrix} a & b & -2c \\ g & h & -2i \\ -2d & -2e & 4f \end{vmatrix} =$____________.（$-8$）

(8) 向量组 $(1,0,1)$，$(2,k,-3)$，$(0,1,1)$ 线性相关，则 $k =$____________.（-5）

(9) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，成立 $2A - 3X = B$，则 $X =$____________. （$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$）

(10) 设 $A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.1 \\ 0.4 & 0.9 \end{pmatrix}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} A^n$ 相似于对角阵 ____________.（$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$）

设 $A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.1 \\ 0.4 & 0.9 \end{pmatrix}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} A^n =$____________.（$\begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.8 & 0.8 \end{pmatrix}$）

三、计算一（每题 8 分，共 40 分）

1. 计算 4 阶行列式阶 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & -5 & -2 \\ 3 & -3 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & -5 \end{vmatrix}$ 的值.

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & -5 & -2 \\ 3 & -3 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{r_3-3r_1 \\ r_4-2r_1}]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -5 & 1 \\ 0 & -9 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 3 & -11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -5 & 1 \\ -9 & -3 & -8 \\ 0 & 3 & -11 \end{vmatrix} \qquad (4分)$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & -5 & 1 \\ 1 & 22 & -13 \\ 0 & 3 & -11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 39 & -25 \\ 1 & 22 & -13 \\ 0 & 3 & -11 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 39 & -25 \\ 3 & -11 \end{vmatrix} = 354 \qquad (8分)$$

2. 计算 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2-r_1]{r_3-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \qquad (4分)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{6}\times r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}\right) \xrightarrow[r_2+2r_3]{r_1-r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}\right) \xrightarrow{r_1-r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}\right) \qquad (8分)$$

3. 求以下向量组的秩和一个极大无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示：

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}5\\-3\\2\\5\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}-2\\6\\6\\0\end{pmatrix}.$$

解

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&3&5&-2\\1&-1&-3&6\\2&2&2&6\\1&3&5&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-2r_1,r_4-r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&3&5&-2\\0&-4&-8&8\\0&-4&-8&10\\0&0&0&2\end{pmatrix}\xrightarrow[(-\frac{1}{2})\times r_2,\frac{1}{2}\times r_4]{(-\frac{1}{4})\times r_2}\begin{pmatrix}1&3&5&-2\\0&1&2&-2\\0&2&4&-5\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-2r_2}\begin{pmatrix}1&3&5&-2\\0&1&2&-2\\0&0&0&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&3&5&-2\\0&1&2&-2\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-3r_2}\begin{pmatrix}1&0&-1&4\\0&1&2&-2\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2+2r_3]{r_1-4r_3}\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&2&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad(3分)$$

可见向量组的秩是 3，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 构成一个极大无关组，$\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2$. (8 分)

4. 将下列向量组正交化：

$$\alpha_1=(1,1,1,1),\alpha_2=(3,-1,-1,3),\alpha_3=(-3,5,7,-1).$$

解 1. 利用施密特正交化方法：

$$\beta_1=\alpha_1=(1,1,1,1)\qquad(2分)$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{\alpha_2^T\beta_1}{\beta_1^T\beta_1}\beta_1=(3,-1,-1,3)-\frac{4}{4}(1,1,1,1)=(2,-2,-2,2)\qquad(5分)$$

$$\begin{aligned}\beta_3&=\alpha_3-\frac{\alpha_3^T\beta_1}{\beta_1^T\beta_1}\beta_1-\frac{\alpha_3^T\beta_2}{\beta_2^T\beta_2}\beta_2\\&=(-3,5,7,-1)-\frac{8}{4}(1,1,1,1)-\frac{-32}{16}(2,-2,-2,2)=(-1,-1,1,1)\qquad(8分)\end{aligned}$$

5. 求方程组 $\begin{cases}x_1+x_2-x_3-x_4=1\\3x_1+5x_2-5x_3-x_4=1\\-2x_1+4x_2-4x_3+8x_4=-8\end{cases}$ 通解.

解对增广矩阵进行初等行变换

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-1&-1&1\\3&5&-5&-1&1\\-2&4&-4&8&-8\end{array}\right)\xrightarrow[r_3+2r_1]{r_2-3r_1}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-1&-1&1\\0&2&-2&2&-2\\0&6&-6&6&-6\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-3r_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-1&-1&1\\0&2&-2&2&-2\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}\times r_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-1&-1&1\\0&1&-1&1&-1\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_1+r_3}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-2&2\\0&1&-1&1&-1\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\qquad(3分)$$

所以原方程组等价于

$$\begin{cases}x_1-2x_4=2\\x_2-x_3+x_4=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=2+2x_4\\x_2=-1+x_3-x_4\end{cases}.\qquad(5分)$$

取 x_3, x_4 作为自由变量，所以通解是

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (8分)$$

四、计算二（共 12 分）

1. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，求正交矩阵 Q，使得 $Q^T AQ$ 为对角阵. 写出二次型 $f(x) = x^T Ax$ 的标准型，指出 f 的秩与负惯性指标.

解 1.

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ 0 & -\lambda & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$
$$= \lambda \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-3).$$

所以特征值是 $\lambda_1 = 3$，$\lambda_2 = 0$（二重）.　　(3 分)

2. $\lambda_1 = 3$ 的特征向量:

$$\lambda_1 I - A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得线性无关特征向量 $(1,1,1)^{\mathrm{T}}$. 单位化得 $\gamma_1 = (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})^{\mathrm{T}}$.　　(2 分)

3. 求 $\lambda_2 = 0$ 的特征向量:

$$\lambda_2 I - A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得线性无关特征向量 $(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$ 和 $(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$. 正交化得 $(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$ 和 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1)^{\mathrm{T}}$. 再单位化得 $\gamma_2 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)^{\mathrm{T}}$ 和 $\gamma_3 = (\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3})^{\mathrm{T}}$.　　(3 分)

4. 令

$$Q = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix},$$

则 $Q^T AQ = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$.　　(1 分)

5. 作线性变换 $x = Qy$，则 $f = 3y_1^2$，为标准二次型. f 的秩为 1，负惯性指标为 0. (3 分)

五、解答题（8 分）

“四平方和定理” 是说任何一个正整数均可表示成四个平方数之和. 本题是关于此定理的部分证明. 设

$$A = \begin{pmatrix} p & -q & -r & -s \\ q & p & s & -r \\ r & -s & p & q \\ s & r & -q & p \end{pmatrix}$$

其中 p，q，r，s 是任意实数.

(1)（1 分）计算 $A^T A$.

(2)（1 分）p，q，r，s 为何值时，A 是可逆矩阵？并求出 A^{-1}.

(3)（1 分）计算行列式 $|A|$.

(4)（2 分）设 $v \in \mathbb{R}^4$ 为 4 维列向量，问 $\|v\|^2$ 与 $\|Av\|^2$ 有何联系？

(5)（3 分）尝试将 “2183” 写成四个整数的平方和.（提示：注意到 $2183 = 59 \times 37$，$59 = 3^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$，$37 = 1^2 + 2^2 + 4^2 + 4^2$，并利用第 (4) 小问.）

解 (1) $A^T A = (p^2 + q^2 + r^2 + s^2) I$.

(2) 当 p，q，r，s 不全为零时，A 可逆，并且 $A^{-1} = (p^2 + q^2 + r^2 + s^2)^{-1} A^T$.

(3) $|A| = (p^2 + q^2 + r^2 + s^2)^2$. 这是：设 $\kappa = p^2 + q^2 + r^2 + s^2$. 由 (1) 得 $|A|^2 = \kappa^4$，所以 $|A| = \pm\kappa^2$. 这不能去掉 $|A| = -\kappa^2$ 的情况. 由于 $A^* = |A| A^{-1}$，结合 (2) 可知 $A^* = \kappa^{-1} |A| A^T$. 比较两边第一行第一列的元素可知 $|A| = \kappa^2$.

(4) $\|Av\|^2 = v^T A^T A v = (p^2 + q^2 + r^2 + s^2) \|v\|^2$.

(5) 令 $v = (3, 3, 4, 5)^T$，以及

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & -4 \\ 2 & 1 & 4 & -4 \\ 4 & -4 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

一方面由 (4) 知 $\|Av\|^2 = (1^2 + 2^2 + 4^2 + 4^2) \|v\|^2 = (1^2 + 2^2 + 4^2 + 4^2)(3^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) = 37 \times 59 = 2183$. 另一方面 $Av = (-39, 5, 14, 21)^T$. 所以可知

$$2183 = 5^2 + 14^2 + 21^2 + 39^2.$$

(注：若令 $v = (1, 2, 4, 4)$，$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -4 & -5 \\ 3 & 3 & 5 & -4 \\ 4 & -5 & 3 & 3 \\ 5 & 4 & -3 & 3 \end{pmatrix}$. 则 $Av = (-39, 13, 18, 13)^T$. 从而得到另一分解 $2183 = 13^2 + 13^2 + 18^2 + 39^2$.)