第 04 周作业解答

练习 1. 设平面 Σ 过直线 ℓ_1: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{-1}$，且平行于直线 ℓ_2: $\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$，求出 Σ 的点法式方程。

解 1. 设平面的法向量 $\vec{n}=(A,\,B,\,C)$。ℓ_1 的方向向量为 $\vec{s}_1=(1,\,0,\,-1)$，ℓ_2 的方向向量为 $\vec{s}_2=(2,\,1,\,1)$。因为 $\vec{n}\perp\vec{s}_1$ 且 $\vec{n}\perp\vec{s}_2$，所以不妨取

$$\vec{n}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&0&-1\\2&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-1\\1&1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&-1\\2&1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&0\\2&1\end{vmatrix}\vec{k}=(1,\,-3,\,1)$$

2. $M_0(1,\,2,\,3)\in\ell_1\subset\Sigma$。所以 Σ 的点法式方程为

$$(x-1)-3(y-2)+(z-3)=0\qquad\Rightarrow\qquad x-3y+z+2=0$$

练习 2. 与平面 Σ_1: $4x-y+2z-8=0$ 垂直且过原点及点 $M_0(6,\,-3,\,2)$ 的平面方程是什么?

解 1. 设平面的法向量 $\vec{n}=(A,\,B,\,C)$。Σ_1 的法向量为 $\vec{n}_1=(4,\,-1,\,2)$。因为 $\vec{n}\perp\vec{n}_1$ 且 $\vec{n}\perp\overrightarrow{OM_0}$，所以不妨取

$$\vec{n}=\vec{n}_1\times\overrightarrow{OM_0}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\4&-1&2\\6&-3&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&2\\-3&2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}4&2\\6&2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}4&-1\\6&-3\end{vmatrix}\vec{k}=(4,\,4,\,-6)$$

2. 又因为过原点 $(0,\,0,\,0)$，所以点法式方程为

$$4x+4y-6z=0\qquad\Rightarrow\qquad 2x+2y-3z=0$$

练习 3. 过原点且与直线 ℓ_1: $\begin{cases}x=1\\y=-1+t\\z=2+t\end{cases}$ 与 ℓ_2: $\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{1}$ 都平行的平面方程是什么?

解 1. 设平面的法向量 $\vec{n}=(A,\,B,\,C)$。ℓ_1 的方向向量为 $\vec{s}_1=(0,\,1,\,1)$，ℓ_2 的方向向量为 $\vec{s}_2=(1,\,2,\,1)$。因为 $\vec{n}\perp\vec{s}_1$ 且 $\vec{n}\perp\vec{s}_2$，所以不妨取

$$\vec{n}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&1&1\\1&2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}0&1\\1&2\end{vmatrix}\vec{k}=(-1,\,1,\,-1)$$

2. 又因为过原点 $(0,\,0,\,0)$，所以点法式方程为

$$-x+y-z=0$$

练习 4. 设直线 ℓ 过点 $M_0(-1,\,2,\,3)$，且垂直于直线 ℓ_1: $\frac{x}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z}{6}$、平行于平面 Σ: $7x+8y+9z+10=0$。求直线 ℓ 的点向式方程。

解 1. ℓ_1 的方向向量是 $\vec{s}_1=(4,\,5,\,6)$，Σ 的法向量为 $\vec{n}=(7,\,8,\,9)$。设 ℓ 的方向向量为 $\vec{s}$，则 $\vec{s}\perp\vec{s}_1$ 及 $\vec{s}\perp\vec{n}$。故不妨取

$$\vec{s}=\vec{s}_1\times\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&6\\8&9\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}4&6\\7&9\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}4&5\\7&8\end{vmatrix}\vec{k}=(-3,\,6,\,-3)$$

2. 所以点法式为

$$\frac{x+1}{-3}=\frac{y-2}{6}=\frac{z-3}{-3}\qquad\Rightarrow\qquad\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{1}$$

练习 5. 设有两直线 $\ell_1:\ \frac{x-1}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z+8}{1}$ 及 $\ell_2:\ \begin{cases}x-y-6=0\\2y+z-3=0\end{cases}$。求 ℓ_2 的一个方向向量，及求 ℓ_1 与 ℓ_2 的夹角。

解 1. 设 ℓ_2 的方向向量为 $\vec{s}_2$，则

$$\vec{s}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&-1&0\\0&2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&0\\2&1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&-1\\0&2\end{vmatrix}\vec{k}=(-1,\,-1,\,2)$$

2. ℓ_1 的方向向量 $\vec{s}_1=(1,\,-2,\,1)$。ℓ_1 与 ℓ_2 的夹角 θ（$0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$）满足

$$\cos\theta=\frac{|\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2|}{|\vec{s}_1|\cdot|\vec{s}_2|}=\frac{|(-1)\cdot1+(-1)\cdot(-2)+2\cdot1|}{\sqrt{1+1+4}\cdot\sqrt{1+4+1}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

所以 $\theta=\frac{\pi}{3}$

练习 6. 求直线 $\ell_1:\ \begin{cases}x+y-z-1=0\\x-y+z+1=0\end{cases}$ 在平面 $\Sigma_1:\ x+y+z=0$ 上的投影直线 ℓ 的方程。

解 1. 设 Σ 为 ℓ 与 ℓ_1 张成的平面，则 ℓ 是 Σ 与 Σ_1 的交线，且 Σ 与 Σ_1 垂直。

2. 先求 Σ 的方程。由于 Σ 是过直线 ℓ_1 的平面，故可设 Σ 的方程为

$$(x+y-z-1)+\lambda\,(x-y+z+1)=0$$

其中 λ 待定。其法向量为 $\vec{n}=(1+\lambda,\,1-\lambda,\,-1+\lambda)$。

又因为 Σ 与 Σ_1 垂直，所以 $\vec{n}\perp\vec{n}_1=0$，其中 $\vec{n}_1=(1,\,1,\,1)$ 为 Σ_1 的法向量。所以

$$0=\vec{n}\cdot\vec{n}_1=1+\lambda+1-\lambda+-1+\lambda=1+\lambda\qquad\Rightarrow\qquad\lambda=-1$$

所以 Σ 的方程为

$$2y-2z-2=0\qquad\Rightarrow\qquad y-z-1=0$$

3. 因为 ℓ 是 Σ 与 Σ_1 的交线，所以 ℓ 的一般方程为

$$\begin{cases}x+y+z=0\\y-z-1=0\end{cases}$$

练习 7. 1. 建立以点 $(1,\,3,\,-2)$ 为球心，且通过坐标原点的球面方程。

2. 方程 $x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z=0$ 表示什么曲面。

解 1. 球面半径是 $(1,\ 3,\ -2)$ 到原点的距离，所以是 $\sqrt{1+9+4}=\sqrt{14}$。球面方程是

$$(x-1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=14$$

2. 方程 $x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z=0$ 可以改写成

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=6$$

所以这是一个以 $(1,\ -2,\ -1)$ 为球心，$R=\sqrt{6}$ 为半径的球面。

练习 8. 将 xoy 坐标面上的抛物线 $y=5x^2$ 绕 y 轴旋转一周，求所生成的旋转面的方程。

解 y 保持不变，将 x 换成 $\pm\sqrt{x^2+z^2}$，所以方程是

$$y=5\left(\pm\sqrt{x^2+z^2}\right)^2=5(x^2+z^2).$$

练习 9. 将 xoz 坐标面上的圆周 $x^2+(z-2)^2=1$ 绕 x 轴旋转一周，所生成的旋转面是一个环面，求该环面的方程。

解方程是

$$x^2+(\pm\sqrt{y^2+z^2}-2)^2=1$$

可进一步整理如下

$$\begin{aligned} x^2+(\pm\sqrt{y^2+z^2}-2)^2=1 \quad &\Rightarrow \quad x^2+y^2+z^2+3=\pm 4\sqrt{y^2+z^2} \\ &\Rightarrow \quad (x^2+y^2+z^2+3)^2=16(y^2+z^2) \end{aligned}$$

练习 10. 写出下列旋转曲面的旋转轴：

曲面	$z=2(x^2+y^2)$	$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{36}=1$	$z^2=3(x^2+y^2)$	$x^2-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{4}=1$
旋转轴	z 轴	y 轴	z 轴	x 轴