第 4 章 b：相似矩阵与矩阵对角化

数学系　梁卓滨

2019-2020 学年 I

相似矩阵

定义 设 A, B 是 n 阶方阵。若存在 n 阶可逆矩阵 P，满足

$$P^{-1}AP = B.$$

则称 A 与 B **相似**，记为 $A \sim B$。

相似矩阵

定义 设 A, B 是 n 阶方阵。若存在 n 阶可逆矩阵 P，满足

$$P^{-1}AP = B.$$

则称 A 与 B **相似**，记为 $A \sim B$。

注 $A \sim B \quad \Leftrightarrow \quad B \sim A$

相似矩阵

定义 设 A, B 是 n 阶方阵。若存在 n 阶可逆矩阵 P，满足

$$P^{-1}AP = B.$$

则称 A 与 B **相似**，记为 $A \sim B$。

注 $A \sim B \quad \Leftrightarrow \quad B \sim A$

这是：

$$A \sim B \ \Rightarrow \ P^{-1}AP = B \ \Rightarrow \qquad Q^{-1}BQ = A \ \Rightarrow \ B \sim A$$

相似矩阵

定义 设 A, B 是 n 阶方阵。若存在 n 阶可逆矩阵 P，满足

$$P^{-1}AP = B.$$

则称 A 与 B **相似**，记为 $A \sim B$。

注 $A \sim B \quad \Leftrightarrow \quad B \sim A$

这是：

$$A \sim B \ \Rightarrow \ P^{-1}AP = B \ \Rightarrow A = PBP^{-1} \qquad Q^{-1}BQ = A \ \Rightarrow \ B \sim A$$

相似矩阵

定义 设 A, B 是 n 阶方阵。若存在 n 阶可逆矩阵 P，满足

$$P^{-1}AP = B.$$

则称 A 与 B **相似**，记为 $A \sim B$。

注 $A \sim B \quad \Leftrightarrow \quad B \sim A$

这是：

$$A \sim B \;\Rightarrow\; P^{-1}AP = B \;\Rightarrow A = PBP^{-1} \xRightarrow{Q:=P^{-1}} Q^{-1}BQ = A \;\Rightarrow\; B \sim A$$

例

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 19 & 45 \\ -7 & -17 \end{pmatrix}}_{A} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}}_{B}$$

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \underbrace{\begin{pmatrix} 19 & 45 \\ -7 & -17 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}}_{B}$$

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \underbrace{\begin{pmatrix} 19 & 45 \\ -7 & -17 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}}_{B}$$

例

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 19 & 45 \\ -7 & -17 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}}_{P} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}}_{B}$$

例

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 19 & 45 \\ -7 & -17 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}}_{P} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}}_{B}$$

所以 $A \sim B$

例

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 19 & 45 \\ -7 & -17 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}}_{P} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}}_{B}$$

所以 $A \sim B$

问题 怎样有效判断两个矩阵是否相似?

例

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 19 & 45 \\ -7 & -17 \end{pmatrix}}_{A} \qquad\qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}}_{B}$$

所以 $A \sim B$

问题 怎样有效判断两个矩阵是否相似?

例

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 19 & 45 \\ -7 & -17 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}}_{P} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}}_{B}$$

所以 $A \sim B$

问题 怎样有效判断两个矩阵是否相似?

例

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 19 & 45 \\ -7 & -17 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}}_{P} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}}_{B}$$

所以 $A \sim B$

问题 怎样有效判断两个矩阵是否相似？

1. “λ 矩阵”的方法，但并不简单的。。。
2. 下面只给出两个矩阵相似的必要条件

两个矩阵相似的必要条件

定理 设 $A \sim B$，则

1. A 与 B 有相同特征值；
2. $r(A) = r(B)$；
3. $|A| = |B|$

两个矩阵相似的必要条件

定理 设 $A \sim B$，则

1. A 与 B 有相同特征值;
2. $r(A) = r(B)$;
3. $|A| = |B|$，特别地，A 与 B 同时可逆或不可逆

两个矩阵相似的必要条件

定理 设 $A \sim B$，则

1. A 与 B 有相同特征值;
2. $r(A) = r(B)$;
3. $|A| = |B|$，特别地，A 与 B 同时可逆或不可逆

证明 存在可逆矩阵 P，满足

$$P^{-1}AP = B$$

两个矩阵相似的必要条件

定理 设 $A \sim B$，则

1. A 与 B 有相同特征值；
2. $r(A) = r(B)$；
3. $|A| = |B|$，特别地，A 与 B 同时可逆或不可逆

证明 存在可逆矩阵 P，满足

$$P^{-1}AP = B$$

1. $|\lambda I - B| =$

$$|\lambda I - A|$$

两个矩阵相似的必要条件

定理 设 $A \sim B$，则

1. A 与 B 有相同特征值;
2. $r(A) = r(B)$;
3. $|A| = |B|$，特别地，A 与 B 同时可逆或不可逆

证明 存在可逆矩阵 P，满足

$$P^{-1}AP = B$$

1. $|\lambda I - B| = |\lambda P^{-1}IP - P^{-1}AP| =$
$$|\lambda I - A|$$

两个矩阵相似的必要条件

定理 设 $A \sim B$，则

1. A 与 B 有相同特征值；
2. $r(A) = r(B)$；
3. $|A| = |B|$，特别地，A 与 B 同时可逆或不可逆

证明 存在可逆矩阵 P，满足

$$P^{-1}AP = B$$

1. $|\lambda I - B| = |\lambda P^{-1}IP - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda I - A)P| = |\lambda I - A|$

两个矩阵相似的必要条件

定理 设 $A \sim B$，则

1. A 与 B 有相同特征值；
2. $r(A) = r(B)$；
3. $|A| = |B|$，特别地，A 与 B 同时可逆或不可逆

证明 存在可逆矩阵 P，满足

$$P^{-1}AP = B$$

1. $|\lambda I - B| = |\lambda P^{-1}IP - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda I - A)P| =$
   $|P^{-1}| \cdot |\lambda I - A| \cdot |P| \quad |\lambda I - A|$

两个矩阵相似的必要条件

定理 设 $A \sim B$，则

1. A 与 B 有相同特征值；
2. $r(A) = r(B)$；
3. $|A| = |B|$，特别地，A 与 B 同时可逆或不可逆

证明 存在可逆矩阵 P，满足

$$P^{-1}AP = B$$

1. $|\lambda I - B| = |\lambda P^{-1}IP - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda I - A)P| = |P^{-1}| \cdot |\lambda I - A| \cdot |P| = |\lambda I - A|$

两个矩阵相似的必要条件

定理 设 $A \sim B$，则

1. A 与 B 有相同特征值；
2. $r(A) = r(B)$；
3. $|A| = |B|$，特别地，A 与 B 同时可逆或不可逆

证明 存在可逆矩阵 P，满足

$$P^{-1}AP = B$$

1. $|\lambda I - B| = |\lambda P^{-1}IP - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda I - A)P| = |P^{-1}| \cdot |\lambda I - A| \cdot |P| = |\lambda I - A|$
2. $r(B) = r(P^{-1}AP) = r(A)$

两个矩阵相似的必要条件

定理 设 $A \sim B$，则

1. A 与 B 有相同特征值；
2. $r(A) = r(B)$；
3. $|A| = |B|$，特别地，A 与 B 同时可逆或不可逆

证明 存在可逆矩阵 P，满足

$$P^{-1}AP = B$$

1. $|\lambda I - B| = |\lambda P^{-1}IP - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda I - A)P| = |P^{-1}| \cdot |\lambda I - A| \cdot |P| = |\lambda I - A|$
2. $r(B) = r(P^{-1}AP) = r(A)$
3. $|B| = \qquad |A|$

两个矩阵相似的必要条件

定理 设 $A \sim B$，则

1. A 与 B 有相同特征值；
2. $r(A) = r(B)$；
3. $|A| = |B|$，特别地，A 与 B 同时可逆或不可逆

证明 存在可逆矩阵 P，满足

$$P^{-1}AP = B$$

1. $|\lambda I - B| = |\lambda P^{-1}IP - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda I - A)P| =$
   $|P^{-1}| \cdot |\lambda I - A| \cdot |P| = |\lambda I - A|$
2. $r(B) = r(P^{-1}AP) = r(A)$
3. $|B| = |P^{-1}AP| = \qquad |A|$

两个矩阵相似的必要条件

定理 设 $A \sim B$，则

1. A 与 B 有相同特征值;
2. $r(A) = r(B)$;
3. $|A| = |B|$，特别地，A 与 B 同时可逆或不可逆

证明 存在可逆矩阵 P，满足

$$P^{-1}AP = B$$

1. $|\lambda I - B| = |\lambda P^{-1}IP - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda I - A)P| = |P^{-1}| \cdot |\lambda I - A| \cdot |P| = |\lambda I - A|$
2. $r(B) = r(P^{-1}AP) = r(A)$
3. $|B| = |P^{-1}AP| = |P^{-1}| \cdot |A| \cdot |P| \quad |A|$

两个矩阵相似的必要条件

定理 设 $A \sim B$，则

1. A 与 B 有相同特征值；
2. $r(A) = r(B)$；
3. $|A| = |B|$，特别地，A 与 B 同时可逆或不可逆

证明 存在可逆矩阵 P，满足

$$P^{-1}AP = B$$

1. $|\lambda I - B| = |\lambda P^{-1}IP - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda I - A)P| = |P^{-1}| \cdot |\lambda I - A| \cdot |P| = |\lambda I - A|$
2. $r(B) = r(P^{-1}AP) = r(A)$
3. $|B| = |P^{-1}AP| = |P^{-1}| \cdot |A| \cdot |P| = |A|$

可对角化矩阵

定义 若方阵 $A_{n\times n}$ 与对角阵 $\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$ 相似，则称 A **可对角化**

可对角化矩阵

定义 若方阵 $A_{n\times n}$ 与对角阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 相似，则称 A **可对角化**

$P^{-1}AP = \Lambda$

可对角化矩阵

定义 若方阵 $A_{n\times n}$ 与对角阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 相似，则称 A **可对角化**

$P^{-1}AP = \Lambda \Leftrightarrow AP = P\Lambda$

可对角化矩阵

定义 若方阵 $A_{n\times n}$ 与对角阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 相似，则称 A **可对角化**

$P^{-1}AP = \Lambda \Leftrightarrow AP = P\Lambda$

$$\underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{P}$$

可对角化矩阵

定义 若方阵 $A_{n\times n}$ 与对角阵 $\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$ 相似，则称 A **可对角化**

$$P^{-1}AP=\Lambda \Leftrightarrow AP=P\Lambda$$

$$\Leftrightarrow A\underbrace{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)}_{P}=\underbrace{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

可对角化矩阵

定义 若方阵 $A_{n\times n}$ 与对角阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 相似，则称 A **可对角化**

$$P^{-1}AP = \Lambda \Leftrightarrow AP = P\Lambda$$

$$\Leftrightarrow A\underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{P} = \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

$$\Leftrightarrow (\qquad, \qquad, \ldots, \qquad) = (\qquad, \qquad, \ldots, \qquad)$$

可对角化矩阵

定义 若方阵 $A_{n\times n}$ 与对角阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 相似，则称 A **可对角化**

$P^{-1}AP = \Lambda \Leftrightarrow AP = P\Lambda$

$$\Leftrightarrow A\underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{P} = \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

$$\Leftrightarrow (A\alpha_1, \quad , \ldots, \quad) = (\quad , \quad , \ldots, \quad)$$

可对角化矩阵

定义 若方阵 $A_{n\times n}$ 与对角阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 相似，则称 A **可对角化**

$$P^{-1}AP = \Lambda \Leftrightarrow AP = P\Lambda$$

$$\Leftrightarrow A\underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{P} = \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

$$\Leftrightarrow (A\alpha_1, A\alpha_2, \ldots, \qquad) = (\qquad, \qquad, \ldots, \qquad)$$

可对角化矩阵

定义 若方阵 $A_{n\times n}$ 与对角阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 相似，则称 A **可对角化**

$$P^{-1}AP = \Lambda \Leftrightarrow AP = P\Lambda$$

$$\Leftrightarrow A\underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{P} = \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

$$\Leftrightarrow (A\alpha_1, A\alpha_2, \ldots, A\alpha_n) = (\qquad, \qquad, \ldots, \qquad)$$

可对角化矩阵

定义 若方阵 $A_{n\times n}$ 与对角阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 相似，则称 A **可对角化**

$$P^{-1}AP = \Lambda \Leftrightarrow AP = P\Lambda$$

$$\Leftrightarrow A\underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{P} = \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

$$\Leftrightarrow (A\alpha_1, A\alpha_2, \ldots, A\alpha_n) = (\lambda_1\alpha_1, \qquad , \ldots, \qquad)$$

可对角化矩阵

定义 若方阵 $A_{n\times n}$ 与对角阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 相似，则称 A **可对角化**

$P^{-1}AP = \Lambda \Leftrightarrow AP = P\Lambda$

$$\Leftrightarrow A\underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{P} = \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

$$\Leftrightarrow (A\alpha_1, A\alpha_2, \ldots, A\alpha_n) = (\lambda_1\alpha_1, \lambda_2\alpha_2, \ldots, \qquad)$$

可对角化矩阵

定义 若方阵 $A_{n\times n}$ 与对角阵 $\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$ 相似，则称 A **可对角化**

$$P^{-1}AP=\Lambda \Leftrightarrow AP=P\Lambda$$

$$\Leftrightarrow A\underbrace{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)}_{P}=\underbrace{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

$$\Leftrightarrow (A\alpha_1,A\alpha_2,\ldots,A\alpha_n)=(\lambda_1\alpha_1,\lambda_2\alpha_2,\ldots,\lambda_n\alpha_n)$$

可对角化矩阵

定义 若方阵 $A_{n\times n}$ 与对角阵 $\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$ 相似，则称 A **可对角化**

$P^{-1}AP=\Lambda \Leftrightarrow AP=P\Lambda$

$$\Leftrightarrow A\underbrace{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)}_{P}=\underbrace{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

$$\Leftrightarrow (A\alpha_1,A\alpha_2,\ldots,A\alpha_n)=(\lambda_1\alpha_1,\lambda_2\alpha_2,\ldots,\lambda_n\alpha_n)$$

$$\Leftrightarrow A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i$$

可对角化矩阵

定义 若方阵 $A_{n\times n}$ 与对角阵 $\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$ 相似，则称 A **可对角化**

$$P^{-1}AP=\Lambda \Leftrightarrow AP=P\Lambda$$

$$\Leftrightarrow A\underbrace{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)}_{P}=\underbrace{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

$$\Leftrightarrow (A\alpha_1,A\alpha_2,\ldots,A\alpha_n)=(\lambda_1\alpha_1,\lambda_2\alpha_2,\ldots,\lambda_n\alpha_n)$$

$$\Leftrightarrow A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i$$ （λ_i是特征值，α_i是特征向量）

可对角化矩阵

定义 若方阵 $A_{n\times n}$ 与对角阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 相似，则称 A **可对角化**

$$P^{-1}AP = \Lambda \Leftrightarrow AP = P\Lambda$$

$$\Leftrightarrow A\underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{P} = \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

$$\Leftrightarrow (A\alpha_1, A\alpha_2, \ldots, A\alpha_n) = (\lambda_1\alpha_1, \lambda_2\alpha_2, \ldots, \lambda_n\alpha_n)$$

$$\Leftrightarrow A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i \qquad (\lambda_i\text{是特征值，}\alpha_i\text{是特征向量})$$

定理 A 可对角化 $\Leftrightarrow A$ 有 n 个线性无关的特征向量

可对角化矩阵

定义 若方阵 $A_{n\times n}$ 与对角阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 相似，则称 A **可对角化**

$P^{-1}AP = \Lambda \Leftrightarrow AP = P\Lambda$

$$\Leftrightarrow A\underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{P} = \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

$$\Leftrightarrow (A\alpha_1, A\alpha_2, \ldots, A\alpha_n) = (\lambda_1\alpha_1, \lambda_2\alpha_2, \ldots, \lambda_n\alpha_n)$$

$$\Leftrightarrow A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i$$ （λ_i是特征值，α_i是特征向量）

定理 A 可对角化 $\Leftrightarrow A$ 有 n 个线性无关的特征向量

推论 若方阵 $A_{n\times n}$ 有 n 不同特征值，则 A 可对角化。

问题 判断 n 阶方阵 A 是否可以对角化？若能，确定可逆矩阵 P 及对角阵 Λ，使得 $P^{-1}AP = \Lambda$。

问题 判断 n 阶方阵 A 是否可以对角化？若能，确定可逆矩阵 P 及对角阵 Λ，使得 $P^{-1}AP = \Lambda$。

步骤

1. 求出 A 的所有特征值，及相应特征向量

问题 判断 n 阶方阵 A 是否可以对角化？若能，确定可逆矩阵 P 及对角阵 Λ，使得 $P^{-1}AP = \Lambda$。

步骤

1. 求出 A 的所有特征值，及相应特征向量
2. 若有 n 个线性无关特征向量，则 A 可对角化；否则，不能对角化

问题 判断 n 阶方阵 A 是否可以对角化？若能，确定可逆矩阵 P 及对角阵 Λ，使得 $P^{-1}AP = \Lambda$。

步骤

1. 求出 A 的所有特征值，及相应特征向量
2. 若有 n 个线性无关特征向量，则 A 可对角化；否则，不能对角化
3. 假设存在 n 个线性无关特征向量 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$，记对应特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$

问题 判断 n 阶方阵 A 是否可以对角化？若能，确定可逆矩阵 P 及对角阵 Λ，使得 $P^{-1}AP = \Lambda$。

步骤

1. 求出 A 的所有特征值，及相应特征向量
2. 若有 n 个线性无关特征向量，则 A 可对角化；否则，不能对角化
3. 假设存在 n 个线性无关特征向量 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$，记对应特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$

$$\underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{P}$$

问题 判断 n 阶方阵 A 是否可以对角化？若能，确定可逆矩阵 P 及对角阵 Λ，使得 $P^{-1}AP = \Lambda$。

步骤

1. 求出 A 的所有特征值，及相应特征向量
2. 若有 n 个线性无关特征向量，则 A 可对角化；否则，不能对角化
3. 假设存在 n 个线性无关特征向量 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$，记对应特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$

$$\underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{P} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

问题 判断 n 阶方阵 A 是否可以对角化？若能，确定可逆矩阵 P 及对角阵 Λ，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$。

步骤

1. 求出 A 的所有特征值，及相应特征向量
2. 若有 n 个线性无关特征向量，则 A 可对角化；否则，不能对角化
3. 假设存在 n 个线性无关特征向量 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$，记对应特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$

$$\underbrace{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)}_{P} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

$$\Rightarrow \quad P^{-1}AP=\Lambda$$

问题 判断 n 阶方阵 A 是否可以对角化？若能，确定可逆矩阵 P 及对角阵 Λ，使得 $P^{-1}AP = \Lambda$。

步骤

1. 求出 A 的所有特征值，及相应特征向量
2. 若有 n 个线性无关特征向量，则 A 可对角化；否则，不能对角化
3. 假设存在 n 个线性无关特征向量 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$，记对应特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$（即：$A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i$）则

$$\underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{P} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

$$\Rightarrow \quad P^{-1}AP = \Lambda$$

问题 判断 n 阶方阵 A 是否可以对角化？若能，确定可逆矩阵 P 及对角阵 Λ，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$。

步骤

1. 求出 A 的所有特征值，及相应特征向量
2. 若有 n 个线性无关特征向量，则 A 可对角化；否则，不能对角化
3. 假设存在 n 个线性无关特征向量 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$，记对应特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$（即：$A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i$）则

$$A\underbrace{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)}_{P}=\underbrace{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

$$\Rightarrow \quad P^{-1}AP=\Lambda$$

问题 判断 n 阶方阵 A 是否可以对角化？若能，确定可逆矩阵 P 及对角阵 Λ，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$。

步骤

1. 求出 A 的所有特征值，及相应特征向量
2. 若有 n 个线性无关特征向量，则 A 可对角化；否则，不能对角化
3. 假设存在 n 个线性无关特征向量 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$，记对应特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$（即：$A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i$）则

$$A\underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{P} = \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

$$\Rightarrow \quad AP=P\Lambda \quad \Rightarrow \quad P^{-1}AP=\Lambda$$

例 1 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

例 1 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

- 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 2)(\lambda - 4)$

例 1 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

- 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 2)(\lambda - 4)$
- 特征值 $\lambda_1 = 4$，
- 特征值 $\lambda_2 = -2$，

例 1 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

- 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 2)(\lambda - 4)$
- 特征值 $\lambda_1 = 4$，特征向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- 特征值 $\lambda_2 = -2$，

例 1 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

- 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 2)(\lambda - 4)$
- 特征值 $\lambda_1 = 4$，特征向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- 特征值 $\lambda_2 = -2$，特征向量 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

例 1 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

- 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 2)(\lambda - 4)$
- 特征值 $\lambda_1 = 4$，特征向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- 特征值 $\lambda_2 = -2$，特征向量 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

可见 A 有 2 个线性无关特征向量：α_1, α_2。所以 A 可以对角化。

例 1 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

- 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 2)(\lambda - 4)$
- 特征值 $\lambda_1 = 4$，特征向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- 特征值 $\lambda_2 = -2$，特征向量 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

可见 A 有 2 个线性无关特征向量：α_1, α_2。所以 A 可以对角化。令

$$P = (\qquad\qquad) \qquad , \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} \qquad & \qquad \end{pmatrix} \qquad ,$$

则

$$P^{-1}AP = \Lambda.$$

例 1 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

- 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 2)(\lambda - 4)$
- 特征值 $\lambda_1 = 4$，特征向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- 特征值 $\lambda_2 = -2$，特征向量 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

可见 A 有 2 个线性无关特征向量：α_1, α_2。所以 A 可以对角化。令

$$P = (\alpha_1, \alpha_2) \quad , \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad ,$$

则

$$P^{-1}AP = \Lambda.$$

例 1 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

- 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 2)(\lambda - 4)$
- 特征值 $\lambda_1 = 4$，特征向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- 特征值 $\lambda_2 = -2$，特征向量 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

可见 A 有 2 个线性无关特征向量：α_1, α_2。所以 A 可以对角化。令

$$P = (\alpha_1, \alpha_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

则

$$P^{-1}AP = \Lambda.$$

例 1 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

- 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 2)(\lambda - 4)$
- 特征值 $\lambda_1 = 4$，特征向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- 特征值 $\lambda_2 = -2$，特征向量 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

可见 A 有 2 个线性无关特征向量：α_1, α_2。所以 A 可以对角化。令

$$P = (\alpha_1, \alpha_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & \\ & -2 \end{pmatrix},$$

则

$$P^{-1}AP = \Lambda.$$

例 2 判断 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 是否能对角化？若能，写出 P 和 Λ

例 2 判断 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 是否能对角化？若能，写出 P 和 Λ

- 特征方程：$0=|\lambda I-A|$

例 2 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 是否能对角化？若能，写出 P 和 Λ

- 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 2)^2(\lambda - 6)$

例 2 判断 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 是否能对角化？若能，写出 P 和 Λ

- 特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-2)^2(\lambda-6)$
- 特征值 $\lambda_1=2$（二重）
- 特征值 $\lambda_2=6$

例 2 判断 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & 5\end{pmatrix}$ 是否能对角化？若能，写出 P 和 Λ

- 特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-2)^2(\lambda-6)$
- 特征值 $\lambda_1=2$（二重），特征向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$
- 特征值 $\lambda_2=6$

例 2 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 是否能对角化？若能，写出 P 和 Λ

- 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 2)^2(\lambda - 6)$
- 特征值 $\lambda_1 = 2$（二重），特征向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- 特征值 $\lambda_2 = 6$，特征向量 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

可见 A 有 3 个线性无关特征向量：$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$。所以 A 可以对角化。

例 2 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 是否能对角化？若能，写出 P 和 Λ

- 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 2)^2(\lambda - 6)$
- 特征值 $\lambda_1 = 2$（二重），特征向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- 特征值 $\lambda_2 = 6$，特征向量 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

可见 A 有 3 个线性无关特征向量：$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$。所以 A 可以对角化。

令

$$P = (\qquad\qquad) \qquad , \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} \qquad\qquad \\ \\ \\ \end{pmatrix} ,$$

则

$$P^{-1}AP = \Lambda.$$

例 2 判断 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 是否能对角化？若能，写出 P 和 Λ

- 特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-2)^2(\lambda-6)$
- 特征值 $\lambda_1=2$（二重），特征向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- 特征值 $\lambda_2=6$，特征向量 $\alpha_3=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

可见 A 有 3 个线性无关特征向量：$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$。所以 A 可以对角化。

令

$$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3), \quad \Lambda=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

则

$$P^{-1}AP=\Lambda.$$

例 2 判断 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & 5\end{pmatrix}$是否能对角化？若能，写出 P 和 Λ

- 特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-2)^2(\lambda-6)$
- 特征值 $\lambda_1=2$（二重），特征向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$
- 特征值 $\lambda_2=6$，特征向量 $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$

可见 A 有 3 个线性无关特征向量：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$。所以 A 可以对角化。

令

$$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix},\quad \Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix},$$

则

$$P^{-1}AP=\Lambda.$$

例 2 判断 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & 5\end{pmatrix}$ 是否能对角化？若能，写出 P 和 Λ

- 特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-2)^2(\lambda-6)$
- 特征值 $\lambda_1=2$（二重），特征向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$
- 特征值 $\lambda_2=6$，特征向量 $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 3\end{pmatrix}$

可见 A 有 3 个线性无关特征向量：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$。所以 A 可以对角化。

令

$$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix},\quad \Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & 6\end{pmatrix},$$

则

$$P^{-1}AP=\Lambda.$$

例 3 判断 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ 是否能对角化？若能，写出 P 和 Λ

例 3 判断 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -2 & 4 & -2\\ -2 & 2 & 0\end{pmatrix}$ 是否能对角化？若能，写出 P 和 Λ

- 特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$ Details
- 特征值 $\lambda_1=1$，特征向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ Details
- 特征值 $\lambda_2=2$(二重)，特征向量 $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ Det

例 3 判断 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ 是否能对角化？若能，写出 P 和 Λ

- 特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$ Details
- 特征值 $\lambda_1=1$，特征向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ Details
- 特征值 $\lambda_2=2$(二重)，特征向量 $\alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Det

可见 A 有 3 个线性无关特征向量：$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$。所以 A 可以对角化。

例 3 判断 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-2&4&-2\\-2&2&0\end{pmatrix}$ 是否能对角化？若能，写出 P 和 Λ

- 特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$ Details
- 特征值 $\lambda_1=1$，特征向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ Details
- 特征值 $\lambda_2=2$(二重)，特征向量 $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ Det

可见 A 有 3 个线性无关特征向量：$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$。所以 A 可以对角化。

令

$$P=(\qquad\qquad), \qquad \Lambda=\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix},$$

则

$$P^{-1}AP=\Lambda.$$

例 3 判断 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -2 & 4 & -2\\ -2 & 2 & 0\end{pmatrix}$ 是否能对角化？若能，写出 P 和 Λ

- 特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$ ▸ Details
- 特征值 $\lambda_1=1$，特征向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ ▸ Details
- 特征值 $\lambda_2=2$(二重)，特征向量 $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ ▸ Det

可见 A 有 3 个线性无关特征向量：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$。所以 A 可以对角化。

令

$$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\qquad,\qquad \Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix},$$

则

$$P^{-1}AP=\Lambda.$$

例 3 判断 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -2 & 4 & -2\\ -2 & 2 & 0\end{pmatrix}$ 是否能对角化？若能，写出 P 和 Λ

- 特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$ Details
- 特征值 $\lambda_1=1$，特征向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ Details
- 特征值 $\lambda_2=2$(二重)，特征向量 $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ Det

可见 A 有 3 个线性无关特征向量：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$。所以 A 可以对角化。

令

$$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad \Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix},$$

则

$$P^{-1}AP=\Lambda.$$

例 3 判断 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -2 & 4 & -2\\ -2 & 2 & 0\end{pmatrix}$ 是否能对角化？若能，写出 P 和 Λ

- 特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$ Details
- 特征值 $\lambda_1=1$，特征向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ Details
- 特征值 $\lambda_2=2$(二重)，特征向量 $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ Det

可见 A 有 3 个线性无关特征向量：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$。所以 A 可以对角化。

令

$$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad \Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 2\end{pmatrix},$$

则

$$P^{-1}AP=\Lambda.$$

例 3 判断 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 是否能对角化？若能，写出 P 和 Λ

例 3 判断 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 是否能对角化？若能，写出 P 和 Λ

- 特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda+1)^2(\lambda-5)$ Details
- 特征值 $\lambda_1=-1$(二重)，特征向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ Det
- 特征值 $\lambda_2=5$，特征向量 $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ Det

例 3 判断 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 是否能对角化？若能，写出 P 和 Λ

- 特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda+1)^2(\lambda-5)$ Details
- 特征值 $\lambda_1=-1$(二重)，特征向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ Det
- 特征值 $\lambda_2=5$，特征向量 $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ Det

可见 A 有 3 个线性无关特征向量：$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$。所以 A 可以对角化。

例 3 判断 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 是否能对角化？若能，写出 P 和 Λ

- 特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda+1)^2(\lambda-5)$ Details
- 特征值 $\lambda_1=-1$(二重)，特征向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ Det
- 特征值 $\lambda_2=5$，特征向量 $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ Det

可见 A 有 3 个线性无关特征向量：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$。所以 A 可以对角化。

令

$P=(\qquad\qquad)$，$\Lambda=\begin{pmatrix}\qquad\qquad\end{pmatrix}$，

则

$$P^{-1}AP=\Lambda.$$

例 3 判断 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 是否能对角化？若能，写出 P 和 Λ

- 特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda+1)^2(\lambda-5)$ Details
- 特征值 $\lambda_1=-1$(二重)，特征向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ Det
- 特征值 $\lambda_2=5$，特征向量 $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ Det

可见 A 有 3 个线性无关特征向量：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$。所以 A 可以对角化。

令

$$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),\qquad \Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{pmatrix},$$

则

$$P^{-1}AP=\Lambda.$$

例 3 判断 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 是否能对角化？若能，写出 P 和 Λ

- 特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda+1)^2(\lambda-5)$ ▸ Details
- 特征值 $\lambda_1=-1$(二重)，特征向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ ▸ Det
- 特征值 $\lambda_2=5$，特征向量 $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ ▸ Det

可见 A 有 3 个线性无关特征向量：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$。所以 A 可以对角化。

令

$$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix},\quad \Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{pmatrix},$$

则

$$P^{-1}AP=\Lambda.$$

例 3 判断 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 是否能对角化？若能，写出 P 和 Λ

- 特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda+1)^2(\lambda-5)$ Details
- 特征值 $\lambda_1=-1$(二重)，特征向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ Det
- 特征值 $\lambda_2=5$，特征向量 $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ Det

可见 A 有 3 个线性无关特征向量：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$。所以 A 可以对角化。

令

$$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix},\quad \Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&5\end{pmatrix},$$

则

$$P^{-1}AP=\Lambda.$$

定理 n 阶方阵 A 可对角化的充分必要条件是：每个 n_i 重的特征值 λ_i，矩阵 $\lambda_i I - A$ 的秩是 $n - n_i$。

定理 n 阶方阵 A 可对角化的充分必要条件是：每个 n_i 重的特征值 λ_i，矩阵 $\lambda_i I - A$ 的秩是 $n - n_i$。

图解如下：

不同特征值	重数	$(\lambda_i I - A)x = 0$ 基础解系/线性无关特征向量
λ_1	n_1	
λ_2	n_2	
$\vdots$	$\vdots$	
λ_s	n_s	
	共 n	

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda - \lambda_s)^{n_s}$$

定理 n 阶方阵 A 可对角化的充分必要条件是：每个 n_i 重的特征值 λ_i，矩阵 $\lambda_i I - A$ 的秩是 $n - n_i$。

图解如下：

不同特征值	重数		$(\lambda_i I - A)x = 0$ 基础解系/线性无关特征向量
λ_1	n_1	$r(\lambda_1 I - A) = n - n_1$	
λ_2	n_2		
$\vdots$	$\vdots$		
λ_s	n_s		
	共 n		

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda - \lambda_s)^{n_s}$$

定理 n 阶方阵 A 可对角化的充分必要条件是：每个 n_i 重的特征值 λ_i，矩阵 $\lambda_i I-A$ 的秩是 $n-n_i$。

图解如下：

不同特征值	重数			$(\lambda_i I-A)x=0$ 基础解系/线性无关特征向量
λ_1	n_1	$r(\lambda_1 I-A)=n-n_1$	$\Rightarrow$	$\alpha_1^{(1)},\alpha_2^{(1)},\cdots,\alpha_{n_1}^{(1)}$
λ_2	n_2			
$\vdots$	$\vdots$			
λ_s	n_s			
	共 n			

$$|\lambda I-A|=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s}$$

定理 n 阶方阵 A 可对角化的充分必要条件是：每个 n_i 重的特征值 λ_i，矩阵 $\lambda_i I - A$ 的秩是 $n - n_i$。

图解如下：

不同特征值	重数			$(\lambda_i I - A)x = 0$ 基础解系 /线性无关特征向量
λ_1	n_1	$r(\lambda_1 I - A) = n - n_1$	$\Rightarrow$	$\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \cdots, \alpha_{n_1}^{(1)}$
λ_2	n_2	$r(\lambda_2 I - A) = n - n_2$		
$\vdots$	$\vdots$			
λ_s	n_s			
	共 n			

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda - \lambda_s)^{n_s}$$

定理 n 阶方阵 A 可对角化的充分必要条件是：每个 n_i 重的特征值 λ_i，矩阵 $\lambda_i I - A$ 的秩是 $n - n_i$。

图解如下：

不同特征值	重数			$(\lambda_i I - A)x = 0$ 基础解系/线性无关特征向量
λ_1	n_1	$r(\lambda_1 I - A) = n - n_1$	$\Rightarrow$	$\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \cdots, \alpha_{n_1}^{(1)}$
λ_2	n_2	$r(\lambda_2 I - A) = n - n_2$	$\Rightarrow$	$\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \cdots, \alpha_{n_2}^{(2)}$
$\vdots$	$\vdots$			
λ_s	n_s			
	共 n			

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda - \lambda_s)^{n_s}$$

定理 n 阶方阵 A 可对角化的充分必要条件是：每个 n_i 重的特征值 λ_i，矩阵 $\lambda_i I - A$ 的秩是 $n - n_i$。

图解如下：

不同特征值	重数			$(\lambda_i I - A)x = 0$ 基础解系/线性无关特征向量
λ_1	n_1	$r(\lambda_1 I - A) = n - n_1$	$\Rightarrow$	$\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \cdots, \alpha_{n_1}^{(1)}$
λ_2	n_2	$r(\lambda_2 I - A) = n - n_2$	$\Rightarrow$	$\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \cdots, \alpha_{n_2}^{(2)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
λ_s	n_s	$r(\lambda_s I - A) = n - n_s$		
	共 n			

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda - \lambda_s)^{n_s}$$

定理 n 阶方阵 A 可对角化的充分必要条件是：每个 n_i 重的特征值 λ_i，矩阵 $\lambda_i I - A$ 的秩是 $n - n_i$。

图解如下：

不同特征值	重数			$(\lambda_i I - A)x = 0$ 基础解系/线性无关特征向量
λ_1	n_1	$r(\lambda_1 I - A) = n - n_1$	$\Rightarrow$	$\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \cdots, \alpha_{n_1}^{(1)}$
λ_2	n_2	$r(\lambda_2 I - A) = n - n_2$	$\Rightarrow$	$\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \cdots, \alpha_{n_2}^{(2)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
λ_s	n_s	$r(\lambda_s I - A) = n - n_s$	$\Rightarrow$	$\alpha_1^{(s)}, \alpha_2^{(s)}, \cdots, \alpha_{n_s}^{(s)}$
	共 n			

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda - \lambda_s)^{n_s}$$

定理 n 阶方阵 A 可对角化的充分必要条件是：每个 n_i 重的特征值 λ_i，矩阵 $\lambda_i I - A$ 的秩是 $n - n_i$。

图解如下：

不同特征值	重数			$(\lambda_i I - A)x = 0$ 基础解系 /线性无关特征向量
λ_1	n_1	$r(\lambda_1 I - A) = n - n_1$	$\Rightarrow$	$\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \cdots, \alpha_{n_1}^{(1)}$
λ_2	n_2	$r(\lambda_2 I - A) = n - n_2$	$\Rightarrow$	$\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \cdots, \alpha_{n_2}^{(2)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
λ_s	n_s	$r(\lambda_s I - A) = n - n_s$	$\Rightarrow$	$\alpha_1^{(s)}, \alpha_2^{(s)}, \cdots, \alpha_{n_s}^{(s)}$
	共 n			共 n 个无关特征向量

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda - \lambda_s)^{n_s}$$

例 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 能否对角化?

例 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 能否对角化?

$$A\ \text{可对角化} \quad \Longleftrightarrow \quad r(\lambda I-A)=n-\lambda\text{重数}$$

例 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 能否对角化?

解

- 特征方程 $0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\0&\lambda-2&-1\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}$

A 可对角化 $\iff$ $r(\lambda I-A)=n-\lambda$重数

例 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 能否对角化?

解

- 特征方程 $0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\0&\lambda-2&-1\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$

A 可对角化 $\quad\Longleftrightarrow\quad r(\lambda I-A)=n-\lambda$重数

例 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 能否对角化?

解

- 特征方程 $0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\0&\lambda-2&-1\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$
- 特征值 $\lambda_1=1$
- 特征值 $\lambda_2=2$

A 可对角化 $\quad\Longleftrightarrow\quad r(\lambda I-A)=n-\lambda$重数

例 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 能否对角化?

解

- 特征方程 $0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\0&\lambda-2&-1\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$
- 特征值 $\lambda_1=1$ （2 重根）
- 特征值 $\lambda_2=2$ （1 重根）

A 可对角化 $\iff$ $r(\lambda I-A)=n-\lambda$重数

例 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 能否对角化?

解

- 特征方程 $0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$

- 特征值 $\lambda_1 = 1$ （2 重根）

  $$\lambda_1 I - A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 特征值 $\lambda_2 = 2$ （1 重根）

A 可对角化 $\quad \Longleftrightarrow \quad r(\lambda I - A) = n - \lambda$重数

例 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 能否对角化?

解

- 特征方程 $0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\0&\lambda-2&-1\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$
- 特征值 $\lambda_1=1$ （2 重根）

$$\lambda_1 I - A=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

- 特征值 $\lambda_2=2$ （1 重根）

A 可对角化 $\iff$ $r(\lambda I-A)=n-\lambda$重数

例 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 能否对角化?

解

- 特征方程 $0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\0&\lambda-2&-1\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$
- 特征值 $\lambda_1=1$ （2 重根）

$$\lambda_1 I - A=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad r(\lambda_1 I - A)=2$$

- 特征值 $\lambda_2=2$ （1 重根）

A 可对角化 $\quad\Leftrightarrow\quad r(\lambda I-A)=n-\lambda$重数

例 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 能否对角化?

解

- 特征方程 $0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\0&\lambda-2&-1\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$
- 特征值 $\lambda_1=1$ （2 重根）

$$\lambda_1 I - A=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad r(\lambda_1 I - A)=2\neq 3-\text{重数}$$

- 特征值 $\lambda_2=2$ （1 重根）

A 可对角化 $\quad\Longleftrightarrow\quad r(\lambda I-A)=n-\lambda\text{重数}$

例 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 能否对角化?

解

- 特征方程 $0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\0&\lambda-2&-1\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$
- 特征值 $\lambda_1=1$ （2 重根）

$$\lambda_1 I - A=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad r(\lambda_1 I-A)=2\neq 3-\text{重数}$$

所以不能对角化

- 特征值 $\lambda_2=2$ （1 重根）

A 可对角化 $\Leftrightarrow$ $r(\lambda I-A)=n-\lambda$重数

例 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 能否对角化?

解

- 特征方程 $0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\0&\lambda-2&-1\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$
- 特征值 $\lambda_1=1$ （2 重根）

  $$\lambda_1 I - A=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad r(\lambda_1 I - A)=2\neq 3-\text{重数}$$

  所以不能对角化
- 特征值 $\lambda_2=2$ （1 重根）

  $$\lambda_2 I - A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

A 可对角化 $\quad\Leftrightarrow\quad r(\lambda I-A)=n-\lambda\text{重数}$

例 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 能否对角化?

解

- 特征方程 $0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\0&\lambda-2&-1\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$
- 特征值 $\lambda_1=1$ （2 重根）

$$\lambda_1 I - A=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad r(\lambda_1 I-A)=2\neq 3-\text{重数}$$

所以不能对角化

- 特征值 $\lambda_2=2$ （1 重根）

$$\lambda_2 I - A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

A 可对角化 $\iff$ $r(\lambda I-A)=n-\lambda\text{重数}$

例 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 能否对角化?

解

- 特征方程 $0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\0&\lambda-2&-1\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$
- 特征值 $\lambda_1=1$ （2 重根）

$$\lambda_1 I - A=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad r(\lambda_1 I-A)=2\neq 3-\text{重数}$$

所以不能对角化

- 特征值 $\lambda_2=2$ （1 重根）

$$\lambda_2 I - A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad r(\lambda_2 I-A)=2=3-\text{重数}$$

A 可对角化 $\quad\Leftrightarrow\quad r(\lambda I-A)=n-\lambda\text{重数}$

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 $\Longleftrightarrow$

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow$ A 可对角化

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow$ A 可对角化，$\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = 2$

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow$ A 可对角化，$\lambda_1 = 1$（二重），$\lambda_2 = 2$

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 相似?

$$A_1=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}\,A_2=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\,A_3=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\,A_4=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow$ A 可对角化，$\lambda_1=1$（二重），$\lambda_2=2$（一重）

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow$ A 可对角化，$\lambda_1 = 1$（二重），$\lambda_2 = 2$（一重）

$\Leftrightarrow$ $r(I - A) =$ 且 $r(2I - A) =$

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow$ A 可对角化，$\lambda_1 = 1$（二重），$\lambda_2 = 2$（一重）

$\Leftrightarrow$ $r(I - A) = 3 - 2 = 1$ 且 $r(2I - A) =$

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow$ A 可对角化，$\lambda_1 = 1$（二重），$\lambda_2 = 2$（一重）

$\Leftrightarrow$ $r(I - A) = 3 - 2 = 1$ 且 $r(2I - A) = 3 - 1 = 2$

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 相似?

$$A_1=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}\ A_2=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\ A_3=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\ A_4=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow$ A 可对角化，$\lambda_1=1$（二重），$\lambda_2=2$（一重）

$\Leftrightarrow\ r(I-A)=3-2=1$ 且 $r(2I-A)=3-1=2$

解

	A_1	A_2	A_3	A_4
$I-A$				
$r(I-A)$				
$2I-A$				
$r(2I-A)$				

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 相似?

$$A_1=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}\ A_2=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\ A_3=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\ A_4=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow$ A 可对角化，$\lambda_1=1$（二重），$\lambda_2=2$（一重）

$\Leftrightarrow\ r(I-A)=3-2=1$ 且 $r(2I-A)=3-1=2$

解

	A_1	A_2	A_3	A_4
$I-A$	$\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$			
$r(I-A)$				
$2I-A$				
$r(2I-A)$				

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow$ A 可对角化，$\lambda_1 = 1$（二重），$\lambda_2 = 2$（一重）

$\Leftrightarrow$ $r(I-A) = 3-2 = 1$ 且 $r(2I-A) = 3-1 = 2$

解

	A_1	A_2	A_3	A_4
$I-A$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$		
$r(I-A)$				
$2I-A$				
$r(2I-A)$				

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 相似?

$$A_1=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}\ A_2=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\ A_3=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\ A_4=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow$ A 可对角化，$\lambda_1=1$（二重），$\lambda_2=2$（一重）

$\Leftrightarrow\ r(I-A)=3-2=1$ 且 $r(2I-A)=3-1=2$

解

	A_1	A_2	A_3	A_4
$I-A$	$\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	
$r(I-A)$				
$2I-A$				
$r(2I-A)$				

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 相似?

$$A_1=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}\ A_2=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\ A_3=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\ A_4=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow$ A 可对角化，$\lambda_1=1$（二重），$\lambda_2=2$（一重）

$\Leftrightarrow\ r(I-A)=3-2=1$ 且 $r(2I-A)=3-1=2$

解

	A_1	A_2	A_3	A_4
$I-A$	$\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$
$r(I-A)$				
$2I-A$				
$r(2I-A)$				

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow$ A 可对角化，$\lambda_1 = 1$（二重），$\lambda_2 = 2$（一重）

$$\Leftrightarrow \ r(I-A) = 3-2 = 1 \text{ 且 } r(2I-A) = 3-1 = 2$$

解

	A_1	A_2	A_3	A_4
$I-A$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$r(I-A)$	2			
$2I-A$				
$r(2I-A)$				

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 相似?

$$A_1=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}\ A_2=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\ A_3=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\ A_4=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow$ A 可对角化，$\lambda_1=1$（二重），$\lambda_2=2$（一重）

$\Leftrightarrow$ $r(I-A)=3-2=1$ 且 $r(2I-A)=3-1=2$

解

	A_1	A_2	A_3	A_4
$I-A$	$\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$
$r(I-A)$	2	2		
$2I-A$				
$r(2I-A)$				

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow$ A 可对角化，$\lambda_1 = 1$（二重），$\lambda_2 = 2$（一重）

$\Leftrightarrow$ $r(I - A) = 3 - 2 = 1$ 且 $r(2I - A) = 3 - 1 = 2$

解

	A_1	A_2	A_3	A_4
$I - A$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$r(I - A)$	2	2	1	
$2I - A$				
$r(2I - A)$				

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow$ A 可对角化，$\lambda_1 = 1$（二重），$\lambda_2 = 2$（一重）

$\Leftrightarrow$ $r(I-A) = 3-2 = 1$ 且 $r(2I-A) = 3-1 = 2$

解

	A_1	A_2	A_3	A_4
$I-A$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$r(I-A)$	2	2	1	2
$2I-A$				
$r(2I-A)$				

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 相似?

$$A_1=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}\ A_2=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\ A_3=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\ A_4=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow$ A 可对角化，$\lambda_1=1$（二重），$\lambda_2=2$（一重）

$\Leftrightarrow\ r(I-A)=3-2=1$ 且 $r(2I-A)=3-1=2$

解

	A_1	A_2	A_3	A_4
$I-A$	$\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$
$r(I-A)$	2	2	1	2
$2I-A$			$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	
$r(2I-A)$				

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow$ A 可对角化，$\lambda_1 = 1$（二重），$\lambda_2 = 2$（一重）

$\Leftrightarrow$ $r(I - A) = 3 - 2 = 1$ 且 $r(2I - A) = 3 - 1 = 2$

解

	A_1	A_2	A_3	A_4
$I - A$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$r(I - A)$	2	2	1	2
$2I - A$			$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	
$r(2I - A)$			2	

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow$ A 可对角化，$\lambda_1 = 1$（二重），$\lambda_2 = 2$（一重）

$\Leftrightarrow$ $r(I - A) = 3 - 2 = 1$ 且 $r(2I - A) = 3 - 1 = 2$

解

	A_1	A_2	A_3	A_4
$I - A$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$r(I - A)$	2	2	1	2
$2I - A$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$r(2I - A)$			2	

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 相似?

$$A_1=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}\ A_2=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\ A_3=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\ A_4=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow$ A 可对角化，$\lambda_1=1$（二重），$\lambda_2=2$（一重）

$\Leftrightarrow\ r(I-A)=3-2=1$ 且 $r(2I-A)=3-1=2$

解

	A_1	A_2	A_3	A_4
$I-A$	$\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$
$r(I-A)$	2	2	1	2
$2I-A$	$\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$
$r(2I-A)$	2	2	2	2

应用

例 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$，求 A^n

应用

例 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$，求 A^n

解

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{pmatrix}$$

应用

例 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$，求 A^n

解

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A=P\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{pmatrix}P^{-1}$$

应用

例 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$，求 A^n

解

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A=P\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{pmatrix}P^{-1}=P\Lambda P^{-1}$$

应用

例 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$，求 A^n

解

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A=P\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{pmatrix}P^{-1}=P\Lambda P^{-1}$$

所以

$$A^n=$$

应用

例 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$，求 A^n

解

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A=P\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{pmatrix}P^{-1}=P\Lambda P^{-1}$$

所以

$$A^n=(P\Lambda P^{-1})\cdot(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})\cdots(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})$$

$$=$$

应用

例 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$，求 A^n

解

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A=P\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{pmatrix}P^{-1}=P\Lambda P^{-1}$$

所以

$$A^n=(P\Lambda P^{-1})\cdot(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})\cdots(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})$$

$$=P\Lambda\cdot\Lambda\cdot\cdots\cdot\Lambda P^{-1}$$

$$=$$

应用

例 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$，求 A^n

解

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A=P\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{pmatrix}P^{-1}=P\Lambda P^{-1}$$

所以

$$\begin{aligned} A^n &= (P\Lambda P^{-1})\cdot(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})\cdots(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1}) \\ &= P\Lambda\cdot\Lambda\cdot\cdots\cdot\Lambda P^{-1} \\ &= P\Lambda^n P^{-1} \\ \\ &= \end{aligned}$$

应用

例 设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&5\end{pmatrix}$，求 A^n

解

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&6\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad A=P\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&6\end{pmatrix}P^{-1}=P\Lambda P^{-1}$$

所以

$$\begin{aligned}A^n&=(P\Lambda P^{-1})\cdot(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})\cdots(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})\\&=P\Lambda\cdot\Lambda\cdot\cdots\cdot\Lambda P^{-1}\\&=P\Lambda^nP^{-1}\\&=\qquad\begin{pmatrix}2^n&&\\&2^n&\\&&6^n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

应用

例 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$，求 A^n

解

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A=P\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{pmatrix}P^{-1}=P\Lambda P^{-1}$$

所以

$$A^n=(P\Lambda P^{-1})\cdot(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})\cdots(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})$$

$$=P\Lambda\cdot\Lambda\cdot\cdots\cdot\Lambda P^{-1}$$

$$=P\Lambda^n P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & & \\ & 2^n & \\ & & 6^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$$

The End

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| =$$

Back

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 1 \\ 2 & \lambda - 4 & 2 \\ 2 & -2 & \lambda \end{vmatrix}$$

Back

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 1 \\ 2 & \lambda - 4 & 2 \\ 2 & -2 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{r_3 - r_2}}$$

Back

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 1 \\ 2 & \lambda - 4 & 2 \\ 2 & -2 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3 - r_2} \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 1 \\ 2 & \lambda - 4 & 2 \\ 0 & -\lambda + 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$$

Back

- 求解特征方程

$$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 1\\ 2 & \lambda-4 & 2\\ 2 & -2 & \lambda\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3-r_2}\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 1\\ 2 & \lambda-4 & 2\\ 0 & -\lambda+2 & \lambda-2\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 1\\ 2 & \lambda-4 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}$$

Back

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 1 \\ 2 & \lambda - 4 & 2 \\ 2 & -2 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3 - r_2} \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 1 \\ 2 & \lambda - 4 & 2 \\ 0 & -\lambda + 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 1 \\ 2 & \lambda - 4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2 + c_3}$$

Back

- 求解特征方程

$$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 1\\ 2 & \lambda-4 & 2\\ 2 & -2 & \lambda\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3-r_2}\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 1\\ 2 & \lambda-4 & 2\\ 0 & -\lambda+2 & \lambda-2\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 1\\ 2 & \lambda-4 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}\xlongequal{c_2+c_3}(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 1\\ 2 & \lambda-2 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

Back

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 1 \\ 2 & \lambda - 4 & 2 \\ 2 & -2 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3 - r_2} \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 1 \\ 2 & \lambda - 4 & 2 \\ 0 & -\lambda + 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 1 \\ 2 & \lambda - 4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2 + c_3} (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 1 \\ 2 & \lambda - 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$$

Back

- 求解特征方程

$$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 1\\ 2 & \lambda-4 & 2\\ 2 & -2 & \lambda\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3-r_2}\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 1\\ 2 & \lambda-4 & 2\\ 0 & -\lambda+2 & \lambda-2\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 1\\ 2 & \lambda-4 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}\xlongequal{c_2+c_3}(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 1\\ 2 & \lambda-2 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0\\ 2 & \lambda-2\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$$

Back

- 当 $\lambda_1 = 1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(1I - A \vdots 0) =$$

Back

- 当 $\lambda_1 = 1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(1I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Back

- 当 $\lambda_1 = 1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(1I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \longleftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Back

- 当 $\lambda_1 = 1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(1I - A \,\vdots\, 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \longleftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2 - r_1}$$

▸ Back

- 当 $\lambda_1 = 1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(1I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \longleftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Back

- 当 $\lambda_1 = 1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(1I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \longleftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Back

- 当 $\lambda_1 = 1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(1I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Back

- 当 $\lambda_1=1$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$：

$$(1I-A\vdots 0)=\left(\begin{array}{ccc|c}0&-1&1&0\\2&-3&2&0\\2&-2&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}2&-2&1&0\\2&-3&2&0\\0&-1&1&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}2&-2&1&0\\0&-1&1&0\\0&-1&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}2&-2&1&0\\0&-1&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1/2&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

所以 $$\begin{cases}x_1 \qquad -\frac{1}{2}x_3=0\\ \end{cases}$$

▸ Back

- 当 $\lambda_1 = 1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(1I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

所以
$$\begin{cases} x_1 \qquad - \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ \qquad x_2 - \quad x_3 = 0 \end{cases}$$

Back

- 当 $\lambda_1 = 1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(1I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

所以 $\begin{cases} x_1 \qquad - \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ \qquad x_2 - \quad x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$

Back

- 当 $\lambda_1 = 1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(1I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

所以 $\begin{cases} x_1 \qquad - \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ \qquad x_2 - \quad x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$

基础解系：$\alpha_1 = \begin{pmatrix} \\ \\ 2 \end{pmatrix}$

Back

- 当 $\lambda_1 = 1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(1I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

所以 $\begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$

基础解系：$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Back

- 当 $\lambda_2 = 2$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(2I - A \vdots 0) =$$

Back

- 当 $\lambda_2 = 2$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(2I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \to$$

Back

- 当 $\lambda_2 = 2$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(2I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

▸ Back

- 当 $\lambda_2 = 2$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(2I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

所以

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

Back

- 当 $\lambda_2=2$，求解 $(\lambda_2 I-A)x=0$：

$$(2I-A\vdots 0)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&0\\2&-2&2&0\\2&-2&2&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

所以

$$x_1-x_2+x_3=0\quad\Rightarrow\quad x_1=x_2-x_3$$

Back

- 当 $\lambda_2=2$，求解 $(\lambda_2 I-A)x=0$：

$$(2I-A\vdots 0)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&0\\2&-2&2&0\\2&-2&2&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

所以

$$x_1-x_2+x_3=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=x_2-x_3$$

基础解系：$\alpha_2=\begin{pmatrix} \\ 1\\0\end{pmatrix}$，$\quad\alpha_3=\begin{pmatrix} \\ 0\\1\end{pmatrix}$

Back

- 当 $\lambda_2 = 2$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(2I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

所以

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 - x_3$$

基础解系：$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Back

- 当 $\lambda_2 = 2$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(2I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

所以

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 - x_3$$

基础解系：$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$， $\alpha_3 = \begin{pmatrix} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Back

- 当 $\lambda_2 = 2$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(2I - A \,\vdots\, 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

所以

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 - x_3$$

基础解系：$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Back

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| =$$

▸ Back

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

Back

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{r_3-r_2}}$$

Back

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3-r_2} \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & -\lambda-1 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

Back

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_3-r_2}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & -\lambda-1 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+1)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

▸ Back

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3-r_2} \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & -\lambda-1 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+1) \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2+c_3}$$

Back

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3-r_2} \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & -\lambda-1 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+1) \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2+c_3} (\lambda+1) \begin{vmatrix} \lambda-1 & -4 & -2 \\ -2 & \lambda-3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Back

- 求解特征方程

$$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -2\\ -2 & \lambda-1 & -2\\ -2 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3-r_2}\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -2\\ -2 & \lambda-1 & -2\\ 0 & -\lambda-1 & \lambda+1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+1)\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -2\\ -2 & \lambda-1 & -2\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}\xlongequal{c_2+c_3}(\lambda+1)\begin{vmatrix}\lambda-1 & -4 & -2\\ -2 & \lambda-3 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+1)\begin{vmatrix}\lambda-1 & -4\\ -2 & \lambda-3\end{vmatrix}$$

Back

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3-r_2} \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & -\lambda-1 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+1)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2+c_3} (\lambda+1)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -4 & -2 \\ -2 & \lambda-3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+1)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -4 \\ -2 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+1)(\lambda^2 - 4\lambda - 5)$$

Back

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3 - r_2} \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ 0 & -\lambda - 1 & \lambda + 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda + 1) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2 + c_3} (\lambda + 1) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -4 & -2 \\ -2 & \lambda - 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda + 1) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -4 \\ -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda + 1)(\lambda^2 - 4\lambda - 5)$$

$$= (\lambda + 1)^2(\lambda - 5)$$

Back

- 当 $\lambda_1 = -1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(-I - A \vdots 0) =$$

▸ Back

- 当 $\lambda_1 = -1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(-I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

Back

- 当 $\lambda_1=-1$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$：

$$(-I-A\vdots 0)=\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

▸ Back

- 当 $\lambda_1 = -1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(-I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

所以

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Back

- 当 $\lambda_1=-1$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$：

$$(-I-A\,\vdots\,0)=\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

所以

$$x_1+x_2+x_3=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=-x_2-x_3$$

Back

- 当 $\lambda_1 = -1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(-I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

所以

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -x_2 - x_3$$

基础解系：$\alpha_1 = \begin{pmatrix} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\alpha_2 = \begin{pmatrix} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

▸ Back

- 当 $\lambda_1 = -1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(-I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

所以

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -x_2 - x_3$$

基础解系：$\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Back

- 当 $\lambda_1=-1$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$：

$$(-I-A\vdots 0)=\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

所以

$$x_1+x_2+x_3=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=-x_2-x_3$$

基础解系：$\alpha_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$， $\alpha_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Back

- 当 $\lambda_2 = 5$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(5I - A \,\vdots\, 0) =$$

Back

- 当 $\lambda_2 = 5$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(5I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

Back

- 当 $\lambda_2 = 5$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(5I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

▸ Back

- 当 $\lambda_2 = 5$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(5I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3}$$

Back

- 当 $\lambda_2 = 5$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(5I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Back

- 当 $\lambda_2 = 5$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(5I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Back

- 当 $\lambda_2 = 5$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(5I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Back

- 当 $\lambda_2 = 5$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(5I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Back

- 当 $\lambda_2 = 5$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(5I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

所以 $\begin{cases} x_1 \qquad - x_3 = 0 \\ \end{cases}$

Back

- 当 $\lambda_2 = 5$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(5I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

所以 $$\begin{cases} x_1 \qquad - x_3 = 0 \\ \qquad x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Back

- 当 $\lambda_2 = 5$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(5I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

所以 $\begin{cases} x_1 \qquad - x_3 = 0 \\ \qquad x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$

Back

- 当 $\lambda_2 = 5$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(5I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

所以 $\begin{cases} x_1 \quad\quad - x_3 = 0 \\ \quad\quad x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$

基础解系：$\alpha_3 = \begin{pmatrix} \\ \\ 1 \end{pmatrix}$

- 当 $\lambda_2 = 5$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(5I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

所以 $\begin{cases} x_1 \qquad - x_3 = 0 \\ \qquad x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$

基础解系：$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Back