

§5.2 二次型与对称矩阵的正定性

数学系 梁卓滨

2017 - 2018 学年 I

- 二次型: $f(x) = x^T A x$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

- n 阶对称矩阵: A

- 二次型: $f(x) = x^T A x$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

定义

1. 若 $f(x) = x^T A x > 0$, $\forall x \neq 0$

- n 阶对称矩阵: A

- 二次型: $f(x) = x^T A x$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

定义

- n 阶对称矩阵: A

- 若 $f(x) = x^T A x > 0$, $\forall x \neq 0$

则称 f 是正定二次型

- 二次型: $f(x) = x^T A x$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

定义

- n 阶对称矩阵: A

- 若 $f(x) = x^T A x > 0$, $\forall x \neq 0$

则称 f 是正定二次型, A 是正定矩阵

- 二次型: $f(x) = x^T A x$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

定义

- n 阶对称矩阵: A

- 若 $f(x) = x^T A x > 0$, $\forall x \neq 0$

则称 f 是正定二次型, A 是正定矩阵

- 若 $f(x) = x^T A x < 0$, $\forall x \neq 0$

• 二次型: $f(x) = x^T A x$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

• n 阶对称矩阵: A

定义

1. 若 $f(x) = x^T A x > 0$, $\forall x \neq 0$

则称 f 是正定二次型, A 是正定矩阵

2. 若 $f(x) = x^T A x < 0$, $\forall x \neq 0$

则称 f 是负定二次型

• 二次型: $f(x) = x^T A x$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

• n 阶对称矩阵: A

定义

1. 若 $f(x) = x^T A x > 0$, $\forall x \neq 0$

则称 f 是正定二次型, A 是正定矩阵

2. 若 $f(x) = x^T A x < 0$, $\forall x \neq 0$

则称 f 是负定二次型, A 是负定矩阵

• 二次型: $f(x) = x^T A x$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

• n 阶对称矩阵: A

定义

1. 若 $f(x) = x^T A x > 0$, $\forall x \neq 0$

则称 f 是正定二次型, A 是正定矩阵

2. 若 $f(x) = x^T A x < 0$, $\forall x \neq 0$

则称 f 是负定二次型, A 是负定矩阵

3. 若 $f(x) = x^T A x \geq 0$, $\forall x \neq 0$

• 二次型: $f(x) = x^T A x$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

• n 阶对称矩阵: A

定义

1. 若 $f(x) = x^T A x > 0$, $\forall x \neq 0$

则称 f 是正定二次型, A 是正定矩阵

2. 若 $f(x) = x^T A x < 0$, $\forall x \neq 0$

则称 f 是负定二次型, A 是负定矩阵

3. 若 $f(x) = x^T A x \geq 0$, $\forall x \neq 0$

则称 f 是半正定二次型

• 二次型: $f(x) = x^T A x$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

• n 阶对称矩阵: A

定义

1. 若 $f(x) = x^T A x > 0$, $\forall x \neq 0$

则称 f 是正定二次型, A 是正定矩阵

2. 若 $f(x) = x^T A x < 0$, $\forall x \neq 0$

则称 f 是负定二次型, A 是负定矩阵

3. 若 $f(x) = x^T A x \geq 0$, $\forall x \neq 0$

则称 f 是半正定二次型, A 是半正定矩阵

• 二次型: $f(x) = x^T A x$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

• n 阶对称矩阵: A

定义

1. 若 $f(x) = x^T A x > 0$, $\forall x \neq 0$

则称 f 是正定二次型, A 是正定矩阵

2. 若 $f(x) = x^T A x < 0$, $\forall x \neq 0$

则称 f 是负定二次型, A 是负定矩阵

3. 若 $f(x) = x^T A x \geq 0$, $\forall x \neq 0$

则称 f 是半正定二次型, A 是半正定矩阵

4. 若 $f(x) = x^T A x \leq 0$, $\forall x \neq 0$

• 二次型: $f(x) = x^T A x$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

• n 阶对称矩阵: A

定义

1. 若 $f(x) = x^T A x > 0$, $\forall x \neq 0$

则称 f 是正定二次型, A 是正定矩阵

2. 若 $f(x) = x^T A x < 0$, $\forall x \neq 0$

则称 f 是负定二次型, A 是负定矩阵

3. 若 $f(x) = x^T A x \geq 0$, $\forall x \neq 0$

则称 f 是半正定二次型, A 是半正定矩阵

4. 若 $f(x) = x^T A x \leq 0$, $\forall x \neq 0$

则称 f 是半负定二次型

• 二次型: $f(x) = x^T A x$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

• n 阶对称矩阵: A

定义

1. 若 $f(x) = x^T A x > 0$, $\forall x \neq 0$

则称 f 是正定二次型, A 是正定矩阵

2. 若 $f(x) = x^T A x < 0$, $\forall x \neq 0$

则称 f 是负定二次型, A 是负定矩阵

3. 若 $f(x) = x^T A x \geq 0$, $\forall x \neq 0$

则称 f 是半正定二次型, A 是半正定矩阵

4. 若 $f(x) = x^T A x \leq 0$, $\forall x \neq 0$

则称 f 是半负定二次型, A 是半负定矩阵

• 二次型: $f(x) = x^T A x$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

• n 阶对称矩阵: A

定义

1. 若 $f(x) = x^T A x > 0$, $\forall x \neq 0$

则称 f 是正定二次型, A 是正定矩阵

2. 若 $f(x) = x^T A x < 0$, $\forall x \neq 0$

则称 f 是负定二次型, A 是负定矩阵

3. 若 $f(x) = x^T A x \geq 0$, $\forall x \neq 0$

则称 f 是半正定二次型, A 是半正定矩阵

4. 若 $f(x) = x^T A x \leq 0$, $\forall x \neq 0$

则称 f 是半负定二次型, A 是半负定矩阵

四类情况统称有定

• 二次型: $f(x) = x^T A x$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

• n 阶对称矩阵: A

定义

1. 若 $f(x) = x^T A x > 0$, $\forall x \neq 0$

则称 f 是正定二次型, A 是正定矩阵

2. 若 $f(x) = x^T A x < 0$, $\forall x \neq 0$

则称 f 是负定二次型, A 是负定矩阵

3. 若 $f(x) = x^T A x \geq 0$, $\forall x \neq 0$

则称 f 是半正定二次型, A 是半正定矩阵

4. 若 $f(x) = x^T A x \leq 0$, $\forall x \neq 0$

则称 f 是半负定二次型, A 是半负定矩阵

四类情况统称有定; 否则称 f 和 A 为不定

例 二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ 是正定。

例 二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ 是正定。

这是当 $x \neq 0$ 时, $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 > 0$ 。

例 二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ 是正定。

这是当 $x \neq 0$ 时, $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 > 0$ 。

例 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + d_3x_3^2$

例 二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ 是正定。

这是当 $x \neq 0$ 时, $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 > 0$ 。

例 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + d_3x_3^2$

- $d_1, d_2, d_3 > 0$
- $d_1, d_2, d_3 < 0$
- $d_1, d_2, d_3 \geq 0$
- $d_1, d_2, d_3 \leq 0$
- 其余情况

例 二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ 是正定。

这是当 $x \neq 0$ 时, $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 > 0$ 。

例 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + d_3x_3^2$

- $d_1, d_2, d_3 > 0$, 正定
- $d_1, d_2, d_3 < 0$
- $d_1, d_2, d_3 \geq 0$
- $d_1, d_2, d_3 \leq 0$
- 其余情况

例 二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ 是正定。

这是当 $x \neq 0$ 时, $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 > 0$ 。

例 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + d_3x_3^2$

- $d_1, d_2, d_3 > 0$, 正定
- $d_1, d_2, d_3 < 0$, 负定
- $d_1, d_2, d_3 \geq 0$
- $d_1, d_2, d_3 \leq 0$
- 其余情况

例 二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ 是正定。

这是当 $x \neq 0$ 时, $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 > 0$ 。

例 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + d_3x_3^2$

- $d_1, d_2, d_3 > 0$, 正定
- $d_1, d_2, d_3 < 0$, 负定, 如 $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 4x_2^2 - x_3^2$
- $d_1, d_2, d_3 \geq 0$
- $d_1, d_2, d_3 \leq 0$
- 其余情况

例 二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ 是正定。

这是当 $x \neq 0$ 时, $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 > 0$ 。

例 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + d_3x_3^2$

- $d_1, d_2, d_3 > 0$, 正定
- $d_1, d_2, d_3 < 0$, 负定, 如 $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 4x_2^2 - x_3^2$
- $d_1, d_2, d_3 \geq 0$, 半正定
- $d_1, d_2, d_3 \leq 0$
- 其余情况

例 二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ 是正定。

这是当 $x \neq 0$ 时, $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 > 0$ 。

例 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + d_3x_3^2$

- $d_1, d_2, d_3 > 0$, 正定
- $d_1, d_2, d_3 < 0$, 负定, 如 $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 4x_2^2 - x_3^2$
- $d_1, d_2, d_3 \geq 0$, 半正定, 如 $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + x_3^2$
- $d_1, d_2, d_3 \leq 0$
- 其余情况

例 二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ 是正定。

这是当 $x \neq 0$ 时, $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 > 0$ 。

例 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + d_3x_3^2$

- $d_1, d_2, d_3 > 0$, 正定
- $d_1, d_2, d_3 < 0$, 负定, 如 $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 4x_2^2 - x_3^2$
- $d_1, d_2, d_3 \geq 0$, 半正定, 如 $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + x_3^2$
- $d_1, d_2, d_3 \leq 0$, 半负定
- 其余情况

例 二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ 是正定。

这是当 $x \neq 0$ 时, $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 > 0$ 。

例 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + d_3x_3^2$

- $d_1, d_2, d_3 > 0$, 正定
- $d_1, d_2, d_3 < 0$, 负定, 如 $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 4x_2^2 - x_3^2$
- $d_1, d_2, d_3 \geq 0$, 半正定, 如 $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + x_3^2$
- $d_1, d_2, d_3 \leq 0$, 半负定, 如 $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 4x_3^2$
- 其余情况

例 二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ 是正定。

这是当 $x \neq 0$ 时, $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 > 0$ 。

例 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + d_3x_3^2$

- $d_1, d_2, d_3 > 0$, 正定
- $d_1, d_2, d_3 < 0$, 负定, 如 $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 4x_2^2 - x_3^2$
- $d_1, d_2, d_3 \geq 0$, 半正定, 如 $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + x_3^2$
- $d_1, d_2, d_3 \leq 0$, 半负定, 如 $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 4x_3^2$
- 其余情况是不定

例 二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ 是正定。

这是当 $x \neq 0$ 时, $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 > 0$ 。

例 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + d_3x_3^2$

- $d_1, d_2, d_3 > 0$, 正定
- $d_1, d_2, d_3 < 0$, 负定, 如 $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 4x_2^2 - x_3^2$
- $d_1, d_2, d_3 \geq 0$, 半正定, 如 $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + x_3^2$
- $d_1, d_2, d_3 \leq 0$, 半负定, 如 $f(x_1, x_2, x_3) = -x_2^2 - 4x_3^2$
- 其余情况是不定, 如 $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_2^2 - x_3^2$

例 二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 + 4x_2x_3 - 4x_3^2$$

例 二次型

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2, x_3) &= -x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 + 4x_2x_3 - 4x_3^2 \\&= -(x_1 + x_2 - 2x_3)^2\end{aligned}$$

例 二次型

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2, x_3) &= -x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 + 4x_2x_3 - 4x_3^2 \\&= -(x_1 + x_2 - 2x_3)^2\end{aligned}$$

是半负定

例 二次型

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2, x_3) &= -x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 + 4x_2x_3 - 4x_3^2 \\&= -(x_1 + x_2 - 2x_3)^2\end{aligned}$$

是半负定，但不是负定。

例 二次型

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2, x_3) &= -x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 + 4x_2x_3 - 4x_3^2 \\&= -(x_1 + x_2 - 2x_3)^2\end{aligned}$$

是半负定，但不是负定。

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

例 二次型

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2, x_3) &= -x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 + 4x_2x_3 - 4x_3^2 \\&= -(x_1 + x_2 - 2x_3)^2\end{aligned}$$

是半负定，但不是负定。

从而，对应的对称矩阵

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

是半负定，但不是负定。

定理 $D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & \ddots \\ & & & d_n \end{pmatrix}$ 是正定矩阵 $\Leftrightarrow d_i > 0 \ (i = 1, 2, \dots, n)$

定理 $D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & \ddots \\ & & & d_n \end{pmatrix}$ 是正定矩阵 $\Leftrightarrow d_i > 0 \ (i = 1, 2, \dots, n)$

证明 A 对应的二次型为:

$$f(x) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \cdots + d_n x_n^2$$

定理 $D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & \ddots \\ & & & d_n \end{pmatrix}$ 是正定矩阵 $\Leftrightarrow d_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$)

证明 A 对应的二次型为:

显然,
$$f(x) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \cdots + d_n x_n^2$$

$$d_1 > 0, d_2 > 0, \dots, d_n > 0$$

定理 $D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & \ddots \\ & & & d_n \end{pmatrix}$ 是正定矩阵 $\Leftrightarrow d_i > 0 \ (i = 1, 2, \dots, n)$

证明 A 对应的二次型为:

显然,
$$f(x) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \dots + d_n x_n^2$$

$$d_1 > 0, d_2 > 0, \dots, d_n > 0 \rightarrow f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$$

定理 $D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & \ddots \\ & & & d_n \end{pmatrix}$ 是正定矩阵 $\Leftrightarrow d_i > 0 \ (i = 1, 2, \dots, n)$

证明 A 对应的二次型为:

显然,
$$f(x) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \dots + d_n x_n^2$$

$$\begin{aligned} d_1 > 0, d_2 > 0, \dots, d_n > 0 &\rightarrow f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0 \\ &\rightarrow f \text{ 正定} \end{aligned}$$

定理 $D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & \ddots \\ & & & d_n \end{pmatrix}$ 是正定矩阵 $\Leftrightarrow d_i > 0 \ (i = 1, 2, \dots, n)$

证明 A 对应的二次型为:

显然,
$$f(x) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \dots + d_n x_n^2$$

$$d_1 > 0, d_2 > 0, \dots, d_n > 0 \rightarrow f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$$

$\rightarrow f$ 正定

$\rightarrow A$ 正定

定理 $D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & \ddots \\ & & & d_n \end{pmatrix}$ 是正定矩阵 $\Leftrightarrow d_i > 0 \ (i = 1, 2, \dots, n)$

证明 A 对应的二次型为:

显然,
$$f(x) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \dots + d_n x_n^2$$

$$d_1 > 0, d_2 > 0, \dots, d_n > 0 \rightarrow f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$$

$\rightarrow f$ 正定

$\Leftrightarrow A$ 正定

定理 $D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & \ddots \\ & & & d_n \end{pmatrix}$ 是正定矩阵 $\Leftrightarrow d_i > 0 \ (i = 1, 2, \dots, n)$

证明 A 对应的二次型为:

显然,
$$f(x) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \dots + d_n x_n^2$$

$$d_1 > 0, d_2 > 0, \dots, d_n > 0 \rightarrow f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow f \text{ 正定}$$

$$\Leftrightarrow A \text{ 正定}$$

定理 $D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & \ddots \\ & & & d_n \end{pmatrix}$ 是正定矩阵 $\Leftrightarrow d_i > 0 \ (i = 1, 2, \dots, n)$

证明 A 对应的二次型为:

显然,
$$f(x) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \dots + d_n x_n^2$$

$$d_1 > 0, d_2 > 0, \dots, d_n > 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow f \text{ 正定}$$

$$\Leftrightarrow A \text{ 正定}$$

定理 $D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & \ddots \\ & & & d_n \end{pmatrix}$ 是正定矩阵 $\Leftrightarrow d_i > 0 \ (i = 1, 2, \dots, n)$

证明 A 对应的二次型为:

显然,
$$f(x) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \dots + d_n x_n^2$$

$$d_1 > 0, d_2 > 0, \dots, d_n > 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow f \text{ 正定}$$

$$\Leftrightarrow A \text{ 正定}$$

定理 设 $A \simeq B$ 。若 A 是正定矩阵, 则 B 也是正定矩阵。

定理 $D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & \ddots \\ & & & d_n \end{pmatrix}$ 是正定矩阵 $\Leftrightarrow d_i > 0 \ (i = 1, 2, \dots, n)$

证明 A 对应的二次型为:

显然, $f(x) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \dots + d_n x_n^2$

$$d_1 > 0, d_2 > 0, \dots, d_n > 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow f \text{ 正定}$$

$$\Leftrightarrow A \text{ 正定}$$

定理 设 $A \simeq B$ 。若 A 是正定矩阵, 则 B 也是正定矩阵。

证明 对 $\forall x \neq 0$, 有

$$x^T B x > 0$$

定理 $D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & \ddots \\ & & & d_n \end{pmatrix}$ 是正定矩阵 $\Leftrightarrow d_i > 0 \ (i = 1, 2, \dots, n)$

证明 A 对应的二次型为:

显然,
$$f(x) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \cdots + d_n x_n^2$$

$$d_1 > 0, d_2 > 0, \dots, d_n > 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad f \text{ 正定}$$

$$\Leftrightarrow \quad A \text{ 正定}$$

定理 设 $A \simeq B$ 。若 A 是正定矩阵, 则 B 也是正定矩阵。

证明 由 $A \simeq B$, 知存在可逆矩阵 C , 使 $C^T A C = B$ 。对 $\forall x \neq 0$, 有

$$x^T B x > 0$$

定理 $D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & \ddots \\ & & & d_n \end{pmatrix}$ 是正定矩阵 $\Leftrightarrow d_i > 0 \ (i = 1, 2, \dots, n)$

证明 A 对应的二次型为:

显然, $f(x) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \dots + d_n x_n^2$

$$d_1 > 0, d_2 > 0, \dots, d_n > 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow f \text{ 正定}$$

$$\Leftrightarrow A \text{ 正定}$$

定理 设 $A \simeq B$ 。若 A 是正定矩阵, 则 B 也是正定矩阵。

证明 由 $A \simeq B$, 知存在可逆矩阵 C , 使 $C^T A C = B$ 。对 $\forall x \neq 0$, 有

$$x^T B x = x^T C^T A C x = \quad \quad \quad > 0$$

定理 $D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & \ddots \\ & & & d_n \end{pmatrix}$ 是正定矩阵 $\Leftrightarrow d_i > 0 \ (i = 1, 2, \dots, n)$

证明 A 对应的二次型为:

显然, $f(x) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \dots + d_n x_n^2$

$$d_1 > 0, d_2 > 0, \dots, d_n > 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow f \text{ 正定}$$

$$\Leftrightarrow A \text{ 正定}$$

定理 设 $A \simeq B$ 。若 A 是正定矩阵, 则 B 也是正定矩阵。

证明 由 $A \simeq B$, 知存在可逆矩阵 C , 使 $C^T A C = B$ 。对 $\forall x \neq 0$, 有

$$x^T B x = x^T C^T A C x = (C x)^T \quad > 0$$

定理 $D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & \ddots \\ & & & d_n \end{pmatrix}$ 是正定矩阵 $\Leftrightarrow d_i > 0 \ (i = 1, 2, \dots, n)$

证明 A 对应的二次型为:

显然, $f(x) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \dots + d_n x_n^2$

$$d_1 > 0, d_2 > 0, \dots, d_n > 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow f \text{ 正定}$$

$$\Leftrightarrow A \text{ 正定}$$

定理 设 $A \simeq B$ 。若 A 是正定矩阵, 则 B 也是正定矩阵。

证明 由 $A \simeq B$, 知存在可逆矩阵 C , 使 $C^T A C = B$ 。对 $\forall x \neq 0$, 有

$$x^T B x = x^T C^T A C x = (C x)^T A (C x) > 0$$

定理 $D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & \ddots \\ & & & d_n \end{pmatrix}$ 是正定矩阵 $\Leftrightarrow d_i > 0 \ (i = 1, 2, \dots, n)$

证明 A 对应的二次型为:

显然, $f(x) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \dots + d_n x_n^2$

$$d_1 > 0, d_2 > 0, \dots, d_n > 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow f \text{ 正定}$$

$$\Leftrightarrow A \text{ 正定}$$

定理 设 $A \simeq B$ 。若 A 是正定矩阵, 则 B 也是正定矩阵。

证明 由 $A \simeq B$, 知存在可逆矩阵 C , 使 $C^T A C = B$ 。对 $\forall x \neq 0$, 有

$$x^T B x = x^T C^T A C x = (Cx)^T A \underbrace{(Cx)}_{\neq 0} > 0$$

定理 $D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & \ddots \\ & & & d_n \end{pmatrix}$ 是正定矩阵 $\Leftrightarrow d_i > 0 \ (i = 1, 2, \dots, n)$

证明 A 对应的二次型为:

显然, $f(x) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \dots + d_n x_n^2$

$$d_1 > 0, d_2 > 0, \dots, d_n > 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow f \text{ 正定}$$

$$\Leftrightarrow A \text{ 正定}$$

定理 设 $A \simeq B$ 。若 A 是正定矩阵, 则 B 也是正定矩阵。

证明 由 $A \simeq B$, 知存在可逆矩阵 C , 使 $C^T A C = B$ 。对 $\forall x \neq 0$, 有

$$x^T B x = x^T C^T A C x = (Cx)^T A \underbrace{(Cx)}_{\neq 0} > 0$$

所以 B 正定。

定理 设 A 是 n 阶对称方阵, 则

A 是正定 \iff

\iff

\iff

定理 设 A 是 n 阶对称方阵, 则

A 是正定 \iff 正惯性指标 $p = n$

\iff

\iff

定理 设 A 是 n 阶对称方阵, 则

A 是正定 \Leftrightarrow 正惯性指标 $p = n$

$\Leftrightarrow A \simeq I_n$

\Leftrightarrow

定理 设 A 是 n 阶对称方阵, 则

A 是正定 \Leftrightarrow 正惯性指标 $p = n$

$\Leftrightarrow A \simeq I_n$

\Leftrightarrow 存在可逆矩阵 C 使得 $A = C^T C$

定理 设 A 是 n 阶对称方阵, 则

A 是正定 \Leftrightarrow 正惯性指标 $p = n$

$\Leftrightarrow A \simeq I_n$

\Leftrightarrow 存在可逆矩阵 C 使得 $A = C^T C$

证明 一般地,

$$A \simeq \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$$

定理 设 A 是 n 阶对称方阵, 则

A 是正定 \Leftrightarrow 正惯性指标 $p = n$

$\Leftrightarrow A \simeq I_n$

\Leftrightarrow 存在可逆矩阵 C 使得 $A = C^T C$

证明 一般地,

$$A \simeq \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix} = D$$

定理 设 A 是 n 阶对称方阵, 则

$$A \text{ 是正定} \iff \text{正惯性指标 } p = n$$

$$\iff A \simeq I_n$$

$$\iff \text{存在可逆矩阵 } C \text{ 使得 } A = C^T C$$

证明 一般地,

$$A \simeq \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix} = D$$

所以

$$A \text{ 是正定} \iff$$

定理 设 A 是 n 阶对称方阵, 则

$$A \text{ 是正定} \iff \text{正惯性指标 } p = n$$

$$\iff A \simeq I_n$$

$$\iff \text{存在可逆矩阵 } C \text{ 使得 } A = C^T C$$

证明 一般地,

$$A \simeq \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix} = D$$

所以

$$A \text{ 是正定} \iff D \text{ 是正定}$$

$$\iff$$

定理 设 A 是 n 阶对称方阵, 则

$$A \text{ 是正定} \iff \text{正惯性指标 } p = n$$

$$\iff A \simeq I_n$$

$$\iff \text{存在可逆矩阵 } C \text{ 使得 } A = C^T C$$

证明 一般地,

$$A \simeq \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix} = D$$

所以

$$A \text{ 是正定} \iff D \text{ 是正定}$$

$$\iff \text{正惯性指标 } p = n$$

$$\iff$$

定理 设 A 是 n 阶对称方阵, 则

$$A \text{ 是正定} \iff \text{正惯性指标 } p = n$$

$$\iff A \simeq I_n$$

$$\iff \text{存在可逆矩阵 } C \text{ 使得 } A = C^T C$$

证明 一般地,

$$A \simeq \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix} = D$$

所以

$$A \text{ 是正定} \iff D \text{ 是正定}$$

$$\iff \text{正惯性指标 } p = n$$

$$\iff D = I_n$$

$$\iff$$

定理 设 A 是 n 阶对称方阵, 则

$$A \text{ 是正定} \iff \text{正惯性指标 } p = n$$

$$\iff A \simeq I_n$$

$$\iff \text{存在可逆矩阵 } C \text{ 使得 } A = C^T C$$

证明 一般地,

$$A \simeq \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix} = D$$

所以

$$A \text{ 是正定} \iff D \text{ 是正定}$$

$$\iff \text{正惯性指标 } p = n$$

$$\iff D = I_n$$

$$\iff A \simeq I_n$$

$$\iff$$

定理 设 A 是 n 阶对称方阵, 则

$$A \text{ 是正定} \iff \text{正惯性指标 } p = n$$

$$\iff A \simeq I_n$$

$$\iff \text{存在可逆矩阵 } C \text{ 使得 } A = C^T C$$

证明 一般地,

$$A \simeq \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix} = D$$

所以

$$A \text{ 是正定} \iff D \text{ 是正定}$$

$$\iff \text{正惯性指标 } p = n$$

$$\iff D = I_n$$

$$\iff A \simeq I_n$$

$$\iff \text{存在可逆矩阵 } C \text{ 使得 } A = C^T I_n C$$

定理 设 A 是 n 阶对称方阵, 则

$$A \text{ 是正定} \iff \text{正惯性指标 } p = n$$

$$\iff A \simeq I_n$$

$$\iff \text{存在可逆矩阵 } C \text{ 使得 } A = C^T C$$

证明 一般地,

$$A \simeq \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix} = D$$

所以

$$A \text{ 是正定} \iff D \text{ 是正定}$$

$$\iff \text{正惯性指标 } p = n$$

$$\iff D = I_n$$

$$\iff A \simeq I_n$$

$$\iff \text{存在可逆矩阵 } C \text{ 使得 } A = C^T I_n C = C^T C$$

推论 设 A 正定矩阵, 则 $|A| > 0$

推论 设 A 正定矩阵, 则 $|A| > 0$

证明 由 A 是正定矩阵, 知存在可逆矩阵 C , 使得

$$A = C^T C$$

推论 设 A 正定矩阵, 则 $|A| > 0$

证明 由 A 是正定矩阵, 知存在可逆矩阵 C , 使得

$$A = C^T C$$

所以

$$|A| = |C^T C| =$$

推论 设 A 正定矩阵, 则 $|A| > 0$

证明 由 A 是正定矩阵, 知存在可逆矩阵 C , 使得

$$A = C^T C$$

所以

$$|A| = |C^T C| = |C^T| \cdot |C| =$$

推论 设 A 正定矩阵, 则 $|A| > 0$

证明 由 A 是正定矩阵, 知存在可逆矩阵 C , 使得

$$A = C^T C$$

所以

$$|A| = |C^T C| = |C^T| \cdot |C| = |C|^2$$

推论 设 A 正定矩阵, 则 $|A| > 0$

证明 由 A 是正定矩阵, 知存在可逆矩阵 C , 使得

$$A = C^T C$$

所以

$$|A| = |C^T C| = |C^T| \cdot |C| = |C|^2 > 0$$

推论 设 A 正定矩阵, 则 $|A| > 0$

证明 由 A 是正定矩阵, 知存在可逆矩阵 C , 使得

$$A = C^T C$$

所以

$$|A| = |C^T C| = |C^T| \cdot |C| = |C|^2 > 0$$

定理 设 A 是 n 阶对称方阵, 则

推论 设 A 正定矩阵, 则 $|A| > 0$

证明 由 A 是正定矩阵, 知存在可逆矩阵 C , 使得

$$A = C^T C$$

所以

$$|A| = |C^T C| = |C^T| \cdot |C| = |C|^2 > 0$$

定理 设 A 是 n 阶对称方阵, 则

$$A \text{ 是正定矩阵} \iff A \text{ 所有特征值 } \lambda_i > 0$$

推论 设 A 正定矩阵, 则 $|A| > 0$

证明 由 A 是正定矩阵, 知存在可逆矩阵 C , 使得

$$A = C^T C$$

所以

$$|A| = |C^T C| = |C^T| \cdot |C| = |C|^2 > 0$$

定理 设 A 是 n 阶对称方阵, 则

$$A \text{ 是正定矩阵} \iff A \text{ 所有特征值 } \lambda_i > 0$$

证明 由 A 是对称矩阵, 知存在正交矩阵 Q , 使得

$$Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

推论 设 A 正定矩阵, 则 $|A| > 0$

证明 由 A 是正定矩阵, 知存在可逆矩阵 C , 使得

$$A = C^T C$$

所以

$$|A| = |C^T C| = |C^T| \cdot |C| = |C|^2 > 0$$

定理 设 A 是 n 阶对称方阵, 则

$$A \text{ 是正定矩阵} \iff A \text{ 所有特征值 } \lambda_i > 0$$

证明 由 A 是对称矩阵, 知存在正交矩阵 Q , 使得

$$Q^T A Q = Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

推论 设 A 正定矩阵, 则 $|A| > 0$

证明 由 A 是正定矩阵, 知存在可逆矩阵 C , 使得

$$A = C^T C$$

所以

$$|A| = |C^T C| = |C^T| \cdot |C| = |C|^2 > 0$$

定理 设 A 是 n 阶对称方阵, 则

$$A \text{ 是正定矩阵} \iff A \text{ 所有特征值 } \lambda_i > 0$$

证明 由 A 是对称矩阵, 知存在正交矩阵 Q , 使得

$$Q^T A Q = Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow A \simeq \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

推论 设 A 正定矩阵, 则 $|A| > 0$

证明 由 A 是正定矩阵, 知存在可逆矩阵 C , 使得

$$A = C^T C$$

所以

$$|A| = |C^T C| = |C^T| \cdot |C| = |C|^2 > 0$$

定理 设 A 是 n 阶对称方阵, 则

$$A \text{ 是正定矩阵} \iff A \text{ 所有特征值 } \lambda_i > 0$$

证明 由 A 是对称矩阵, 知存在正交矩阵 Q , 使得

$$Q^T A Q = Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow A \simeq \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

所以 $A \text{ 正定} \iff \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ 正定} \iff \text{所有特征值 } \lambda_i > 0$

顺序主子式

设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

顺序主子式

设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称

$$|A_k| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

顺序主子式

设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称

$$|A_k| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

为 A 的 k 阶顺序主子式

顺序主子式

设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称

$$|A_k| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

为 A 的 k 阶顺序主子式

注 $k = 1, 2, \dots, n$, 故共有 n 个顺序主子式

顺序主子式

例 设 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 则全部的顺序主子式是

顺序主子式

例 设 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 则全部的顺序主子式是

$$|A_1| =$$

$$|A_2| =$$

$$|A_3| =$$

顺序主子式

例 设 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 则全部的顺序主子式是

$$|A_1| = -1$$

$$|A_2| =$$

$$|A_3| =$$

顺序主子式

例 设 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 则全部的顺序主子式是

$$|A_1| = -1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|A_3| =$$

顺序主子式

例 设 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 则全部的顺序主子式是

$$|A_1| = -1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$|A_3| =$$

顺序主子式

例 设 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 则全部的顺序主子式是

$$|A_1| = -1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

顺序主子式

例 设 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 则全部的顺序主子式是

$$|A_1| = -1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{C_1 - C_3}}}$$

顺序主子式

例 设 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 则全部的顺序主子式是

$$|A_1| = -1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1 - c_3} \begin{vmatrix} -7 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

顺序主子式

例 设 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 则全部的顺序主子式是

$$|A_1| = -1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1 - c_3} \begin{vmatrix} -7 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -7 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

顺序主子式

例 设 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 则全部的顺序主子式是

$$|A_1| = -1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1 - c_3} \begin{vmatrix} -7 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -7 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

顺序主子式

定理 设 A 是 n 阶对称方阵, 则

$$A \text{ 正定} \iff$$

顺序主子式

定理 设 A 是 n 阶对称方阵, 则

$$A \text{ 正定} \iff |A_k| > 0, \forall k = 1, 2, \dots, n$$

假设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ 为正定, 则

- $|A_1| > 0$

- $|A_2| > 0$

- $|A_3| > 0$

假设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ 为正定, 则

- $|A_1| > 0$

- $|A_2| > 0$

- $|A_3| > 0$

假设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ 为正定, 则

- $|A_1| > 0$

- $|A_2| > 0$

- $|A_3| > 0$: A 正定 $\Rightarrow |A| > 0$

假设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ 为正定, 则

- $|A_1| > 0$

- $|A_2| > 0$

- $|A_3| > 0$: A 正定 $\Rightarrow |A| > 0$

假设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ 为正定, 则

- $|A_1| > 0$:

$$|A_1| = a_{11}$$

- $|A_2| > 0$

- $|A_3| > 0$: A 正定 $\Rightarrow |A| > 0$

假设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ 为正定, 则

- $|A_1| > 0$:

$$|A_1| = a_{11} = (1, 0, 0) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $|A_2| > 0$

- $|A_3| > 0$: A 正定 $\Rightarrow |A| > 0$

假设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ 为正定, 则 $(x^T A x > 0 \quad \forall x \neq 0)$

- $|A_1| > 0$:

$$|A_1| = a_{11} = (1, 0, 0) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $|A_2| > 0$

- $|A_3| > 0$: A 正定 $\Rightarrow |A| > 0$

假设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ 为正定, 则 $(x^T A x > 0 \quad \forall x \neq 0)$

- $|A_1| > 0$:

$$|A_1| = a_{11} = (1, 0, 0) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} > 0$$

- $|A_2| > 0$

- $|A_3| > 0$: A 正定 $\Rightarrow |A| > 0$

假设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ 为正定, 则 $(x^T A x > 0 \quad \forall x \neq 0)$

- $|A_1| > 0$:

$$|A_1| = a_{11} = (1, 0, 0) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} > 0$$

- $|A_2| > 0$

- $|A_3| > 0$: A 正定 $\Rightarrow |A| > 0$

假设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ 为正定, 则 $(x^T A x > 0 \quad \forall x \neq 0)$

- $|A_1| > 0$:

$$|A_1| = a_{11} = (1, 0, 0) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} > 0$$

- $|A_2| > 0$: 取 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq 0$, 则

$$(x_1, x_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- $|A_3| > 0$: A 正定 $\Rightarrow |A| > 0$

假设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ 为正定, 则 $(x^T A x > 0 \quad \forall x \neq 0)$

- $|A_1| > 0$:

$$|A_1| = a_{11} = (1, 0, 0) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} > 0$$

- $|A_2| > 0$: 取 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq 0$, 则

$$\begin{aligned} & (x_1, x_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= (x_1, x_2, 0) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- $|A_3| > 0$: A 正定 $\Rightarrow |A| > 0$

假设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ 为正定, 则 $(x^T A x > 0 \quad \forall x \neq 0)$

- $|A_1| > 0$:

$$|A_1| = a_{11} = (1, 0, 0) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} > 0$$

- $|A_2| > 0$: 取 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq 0$, 则

$$\begin{aligned} & (x_1, x_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= (x_1, x_2, 0) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} > 0 \end{aligned}$$

- $|A_3| > 0$: A 正定 $\Rightarrow |A| > 0$

假设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ 为正定, 则 $(x^T A x > 0 \quad \forall x \neq 0)$

- $|A_1| > 0$:

$$|A_1| = a_{11} = (1, 0, 0) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} > 0$$

- $|A_2| > 0$: 取 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq 0$, 则

$$\begin{aligned} & (x_1, x_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= (x_1, x_2, 0) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} > 0 \end{aligned}$$

说明 $A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ 为正定, 从而 $|A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$

- $|A_3| > 0$: A 正定 $\Rightarrow |A| > 0$

例 t 为何值时, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$ 是正定矩阵?

例 t 为何值时, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$ 是正定矩阵?

解 正定的充分必要条件是顺序主子式 > 0 :

例 t 为何值时, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$ 是正定矩阵?

解 正定的充分必要条件是顺序主子式 > 0 :

$$|A_1| =$$

$$|A_2| =$$

$$|A_3| =$$

例 t 为何值时, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$ 是正定矩阵?

解 正定的充分必要条件是顺序主子式 > 0 :

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| =$$

$$|A_3| =$$

例 t 为何值时, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$ 是正定矩阵?

解 正定的充分必要条件是顺序主子式 > 0 :

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} =$$

$$|A_3| =$$

例 t 为何值时, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$ 是正定矩阵?

解 正定的充分必要条件是顺序主子式 > 0 :

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} =$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix}$$

例 t 为何值时, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$ 是正定矩阵?

解 正定的充分必要条件是顺序主子式 > 0 :

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t - 1$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix}$$

例 t 为何值时, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$ 是正定矩阵?

解 正定的充分必要条件是顺序主子式 > 0 :

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t - 1 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix}$$

例 t 为何值时, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$ 是正定矩阵?

解 正定的充分必要条件是顺序主子式 > 0 :

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t - 1 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}$$

例 t 为何值时, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$ 是正定矩阵?

解 正定的充分必要条件是顺序主子式 > 0 :

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t - 1 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & t-1 & -2 \\ 0 & -2 & t-1 \end{vmatrix}$$

例 t 为何值时, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$ 是正定矩阵?

解 正定的充分必要条件是顺序主子式 > 0 :

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t - 1 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & t-1 & -2 \\ 0 & -2 & t-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & -2 \\ -2 & t-1 \end{vmatrix}$$

例 t 为何值时, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$ 是正定矩阵?

解 正定的充分必要条件是顺序主子式 > 0 :

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t - 1 > 0$$

$$\begin{aligned} |A_3| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & t-1 & -2 \\ 0 & -2 & t-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & -2 \\ -2 & t-1 \end{vmatrix} \\ &= (t-1)^2 - 4 = \end{aligned}$$

例 t 为何值时, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$ 是正定矩阵?

解 正定的充分必要条件是顺序主子式 > 0 :

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t - 1 > 0$$

$$\begin{aligned} |A_3| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & t-1 & -2 \\ 0 & -2 & t-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & -2 \\ -2 & t-1 \end{vmatrix} \\ &= (t-1)^2 - 4 = (t-3)(t+1) \end{aligned}$$

例 t 为何值时, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$ 是正定矩阵?

解 正定的充分必要条件是顺序主子式 > 0 :

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t - 1 > 0$$

$$\begin{aligned} |A_3| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & t-1 & -2 \\ 0 & -2 & t-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & -2 \\ -2 & t-1 \end{vmatrix} \\ &= (t-1)^2 - 4 = (t-3)(t+1) > 0 \end{aligned}$$

例 t 为何值时, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$ 是正定矩阵?

解 正定的充分必要条件是顺序主子式 > 0 :

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t - 1 > 0$$

$$\begin{aligned} |A_3| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & t-1 & -2 \\ 0 & -2 & t-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & -2 \\ -2 & t-1 \end{vmatrix} \\ &= (t-1)^2 - 4 = (t-3)(t+1) > 0 \end{aligned}$$

所以

$$t > 3$$

例 λ 为何值时, 二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2 \text{ 是正定?}$$

例 λ 为何值时, 二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2 \text{ 是正定?}$$

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

例 λ 为何值时, 二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2 \text{ 是正定?}$$

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$, 只需判断何时 A 是正定矩阵:

例 λ 为何值时, 二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2 \text{ 是正定?}$$

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$, 只需判断何时 A 是正定矩阵:

例 λ 为何值时, 二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2 \text{ 是正定?}$$

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & \end{pmatrix}$, 只需判断何时 A 是正定矩

阵:

例 λ 为何值时, 二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2 \text{ 是正定?}$$

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$, 只需判断何时 A 是正定矩

阵:

例 λ 为何值时, 二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2 \text{ 是正定?}$$

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ & 2 & 3 \\ & & \lambda \end{pmatrix}$, 只需判断何时 A 是正定矩

阵:

例 λ 为何值时, 二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2 \text{ 是正定?}$$

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ & 2 & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$, 只需判断何时 A 是正定矩

阵:

例 λ 为何值时, 二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2 \text{ 是正定?}$$

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ & 2 & 3 \\ & & \lambda \end{pmatrix}$, 只需判断何时 A 是正定矩

阵:

例 λ 为何值时, 二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2 \text{ 是正定?}$$

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{pmatrix}$, 只需判断何时 A 是正定矩

阵:

例 λ 为何值时, 二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2 \text{ 是正定?}$$

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{pmatrix}$, 只需判断何时 A 是正定矩

阵:

$$|A_1| =$$

$$|A_2| =$$

$$|A_3| =$$

例 λ 为何值时, 二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2 \text{ 是正定?}$$

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{pmatrix}$, 只需判断何时 A 是正定矩

阵:

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| =$$

$$|A_3| =$$

例 λ 为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{pmatrix}$, 只需判断何时 A 是正定矩

阵:

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$|A_3| =$$

例 λ 为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{pmatrix}$, 只需判断何时 A 是正定矩

阵:

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{vmatrix}$$

例 λ 为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{pmatrix}$, 只需判断何时 A 是正定矩

阵:

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{vmatrix}$$

例 λ 为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{pmatrix}$, 只需判断何时 A 是正定矩

阵:

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{vmatrix}$$

例 λ 为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{pmatrix}$, 只需判断何时 A 是正定矩

阵:

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}$$

例 λ 为何值时, 二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2 \text{ 是正定?}$$

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{pmatrix}$, 只需判断何时 A 是正定矩

阵:

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda - 4 \end{vmatrix}$$

例 λ 为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{pmatrix}$, 只需判断何时 A 是正定矩

阵:

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 4 \end{vmatrix}$$

例 λ 为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{pmatrix}$, 只需判断何时 A 是正定矩

阵:

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

$$\begin{aligned} |A_3| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} \\ &= \lambda - 5 \end{aligned}$$

例 λ 为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{pmatrix}$, 只需判断何时 A 是正定矩

阵:

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

$$\begin{aligned} |A_3| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} \\ &= \lambda - 5 > 0 \end{aligned}$$

例 λ 为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{pmatrix}$, 只需判断何时 A 是正定矩

阵:

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

$$\begin{aligned} |A_3| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda-4 \end{vmatrix} \\ &= \lambda - 5 > 0 \end{aligned}$$

所以

$$\lambda > 5$$

例 t 为何值时, 二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 \text{ 是正定?}$$

例 t 为何值时, 二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 \text{ 是正定?}$$

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

例 t 为何值时, 二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 \text{ 是正定?}$$

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$, 只需判断何时 A 是正定矩阵:

例 t 为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} t & & \\ & t & \\ & & t \end{pmatrix}$, 只需判断何时 A 是正定矩阵:

例 t 为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$, 只需判断何时 A 是正定矩阵:

例 t 为何值时, 二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 \text{ 是正定?}$$

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ & t & \\ & & t \end{pmatrix}$, 只需判断何时 A 是正定矩阵:

例 t 为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ & t & -1 \\ & & t \end{pmatrix}$, 只需判断何时 A 是正定

矩阵:

例 t 为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$, 只需判断何时 A 是正定

矩阵:

例 t 为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$, 只需判断何时 A 是正定

矩阵:

$$|A_1| =$$

$$|A_2| =$$

$$|A_3| =$$

例 t 为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$, 只需判断何时 A 是正定

矩阵:

$$|A_1| = t$$

$$|A_2| =$$

$$|A_3| =$$

例 t 为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$, 只需判断何时 A 是正定

矩阵:

$$|A_1| = t$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} =$$

$$|A_3| =$$

例 t 为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$, 只需判断何时 A 是正定

矩阵:

$$|A_1| = t$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} =$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix}$$

例 t 为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$, 只需判断何时 A 是正定

矩阵:

$$|A_1| = t > 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} =$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix}$$

例 t 为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$, 只需判断何时 A 是正定

矩阵:

$$|A_1| = t > 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2 - 1$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix}$$

例 t 为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$, 只需判断何时 A 是正定

矩阵:

$$|A_1| = t > 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2 - 1 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix}$$

例 t 为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$, 只需判断何时 A 是正定

矩阵:

$$|A_1| = t > 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2 - 1 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_2}$$

例 t 为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$, 只需判断何时 A 是正定

矩阵:

$$|A_1| = t > 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2 - 1 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & -1 - t & t + 1 \end{vmatrix}$$

例 t 为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$, 只需判断何时 A 是正定

矩阵:

$$|A_1| = t > 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2 - 1 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & -1 - t & t + 1 \end{vmatrix} = (t + 1) \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

例 t 为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$, 只需判断何时 A 是正定

矩阵:

$$|A_1| = t > 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2 - 1 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & -1-t & t+1 \end{vmatrix} = (t+1) \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$\xrightarrow{C_2+C_3}$$

例 t 为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$, 只需判断何时 A 是正定

矩阵:

$$|A_1| = t > 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2 - 1 > 0$$

$$\begin{aligned} |A_3| &= \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & -1-t & t+1 \end{vmatrix} = (t+1) \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow{c_2+c_3} (t+1) \begin{vmatrix} t & 2 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

例 t 为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$, 只需判断何时 A 是正定

矩阵:

$$|A_1| = t > 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2 - 1 > 0$$

$$\begin{aligned} |A_3| &= \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & -1-t & t+1 \end{vmatrix} = (t+1) \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow{c_2+c_3} (t+1) \begin{vmatrix} t & 2 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (t+1) \begin{vmatrix} t & 2 \\ 1 & t-1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

例 t 为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$, 只需判断何时 A 是正定

矩阵:

$$|A_1| = t > 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2 - 1 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & -1-t & t+1 \end{vmatrix} = (t+1) \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2+c_3} (t+1) \begin{vmatrix} t & 2 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (t+1) \begin{vmatrix} t & 2 \\ 1 & t-1 \end{vmatrix}$$

$$= (t+1)(t^2 - t - 2)$$

例 t 为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$, 只需判断何时 A 是正定

矩阵:

$$|A_1| = t > 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2 - 1 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & -1-t & t+1 \end{vmatrix} = (t+1) \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2+c_3} (t+1) \begin{vmatrix} t & 2 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (t+1) \begin{vmatrix} t & 2 \\ 1 & t-1 \end{vmatrix}$$

$$= (t+1)(t^2 - t - 2) = (t+1)^2(t-2)$$

例 t 为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$, 只需判断何时 A 是正定

矩阵:

$$|A_1| = t > 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2 - 1 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & -1-t & t+1 \end{vmatrix} = (t+1) \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2+c_3} (t+1) \begin{vmatrix} t & 2 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (t+1) \begin{vmatrix} t & 2 \\ 1 & t-1 \end{vmatrix}$$

$$= (t+1)(t^2 - t - 2) = (t+1)^2(t-2) > 0$$

例 t 为何值时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$, 只需判断何时 A 是正定

矩阵:

$$|A_1| = t > 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2 - 1 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & -1-t & t+1 \end{vmatrix} = (t+1) \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2+c_3} (t+1) \begin{vmatrix} t & 2 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (t+1) \begin{vmatrix} t & 2 \\ 1 & t-1 \end{vmatrix}$$

$$= (t+1)(t^2 - t - 2) = (t+1)^2(t-2) > 0$$

所以

$$t > 2$$