§3.1　线性方程组的消元解法

数学系　梁卓滨

2018 - 2019 学年上学期

简化的阶梯型矩阵

$$A \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_1 & \cdots & * & * & \cdots & * & * & \cdots\cdots & * & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b_2 & \cdots & * & * & \cdots\cdots & * & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b_3 & \cdots\cdots & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b_r & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

简化的阶梯型矩阵

$$
A \xrightarrow{\text{初等行变换}}
\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & * & * & \cdots & * & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & * & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & * & * & \cdots & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0
\end{pmatrix}
$$

简化的阶梯型矩阵

$$
A \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & * & 0 & \cdots & * & * & \cdots & \cdots & * & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & * & * & \cdots & \cdots & * & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & \cdots & * & * & \cdots & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0
\end{pmatrix}
$$

简化的阶梯型矩阵

$$
A \xrightarrow{\text{初等行变换}}
\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & * & 0 & \cdots & * & 0 & \cdots & \cdots & * & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & * & 0 & \cdots & \cdots & * & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & \cdots & * & * & \cdots & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0
\end{pmatrix}
$$

简化的阶梯型矩阵

$$
A \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & * & 0 & \cdots & * & 0 & \cdots\cdots & * & 0 & \cdots & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & * & 0 & \cdots\cdots & * & 0 & \cdots & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots\cdots & * & 0 & \cdots & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & 0 & 1 & \cdots & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0
\end{pmatrix}
$$

简化的阶梯型矩阵

$$A \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & * & 0 & \cdots & * & 0 & \cdots\cdots & * & 0 & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & * & 0 & \cdots\cdots & * & 0 & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots\cdots & * & 0 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

后者称为简化的阶梯型矩阵。

记号

考虑 n 个未知量 m 个方程的线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

记号

考虑 n 个未知量 m 个方程的线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

可以，等价地，改写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

记号

考虑 n 个未知量 m 个方程的线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

可以，等价地，改写成矩阵形式

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{b}$$

记号

考虑 n 个未知量 m 个方程的线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

可以，等价地，改写成矩阵形式

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{b} \quad \Rightarrow \quad Ax = b$$

记号

考虑 n 个未知量 m 个方程的线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

可以，等价地，改写成矩阵形式

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{b} \quad \Rightarrow \quad Ax = b$$

整个方程组的信息包含在：

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

记号

考虑 n 个未知量 m 个方程的线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

可以，等价地，改写成矩阵形式

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{b} \quad \Rightarrow \quad Ax = b$$

整个方程组的信息包含在：

增广矩阵 $$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

消元法求解线性方程组——示例

例 解方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \\ 4x_1 + 7x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

消元法求解线性方程组——示例

例 解方程组

$$\begin{cases} \boxed{x_1} + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \\ 4x_1 + 7x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

消元法求解线性方程组——示例

例 解方程组

$$\begin{cases} \boxed{x_1} + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \\ 4x_1 + 7x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases} \xrightarrow[\substack{(3)-4\times(1) \\ (4)-3\times(1)}]{(2)-(1)}$$

消元法求解线性方程组——示例

例 解方程组

$$\begin{cases} \boxed{x_1} + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \\ 4x_1 + 7x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases} \xrightarrow[\substack{(3)-4\times(1) \\ (4)-3\times(1)}]{(2)-(1)} \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = -3 \\ 3x_2 + 3x_3 = -9 \\ x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$$

消元法求解线性方程组——示例

例 解方程组

$$\begin{cases} \boxed{x_1} + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \\ 4x_1 + 7x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases} \xrightarrow[\substack{(3)-4\times(1) \\ (4)-3\times(1)}]{(2)-(1)} \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ \boxed{x_2} + x_3 = -3 \\ 3x_2 + 3x_3 = -9 \\ x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$$

消元法求解线性方程组——示例

例 解方程组

$$\begin{cases} \boxed{x_1} + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \\ 4x_1 + 7x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases} \xrightarrow[\substack{(3)-4\times(1) \\ (4)-3\times(1)}]{(2)-(1)} \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ \boxed{x_2} + x_3 = -3 \\ 3x_2 + 3x_3 = -9 \\ x_2 + x_3 = -3 \end{cases} \xrightarrow[\substack{(3)-3\times(2) \\ (4)-(2)}]{(1)-(2)}$$

消元法求解线性方程组——示例

例 解方程组

$$
\begin{cases}
\boxed{x_1} + x_2 - x_3 = 2 \\
x_1 + 2x_2 = -1 \\
4x_1 + 7x_2 - x_3 = -1 \\
3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 3
\end{cases}
\xrightarrow[\substack{(3)-4\times(1) \\ (4)-3\times(1)}]{(2)-(1)}
\begin{cases}
x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\
\boxed{x_2} + x_3 = -3 \\
3x_2 + 3x_3 = -9 \\
x_2 + x_3 = -3
\end{cases}
\xrightarrow[\substack{(3)-3\times(2) \\ (4)-(2)}]{(1)-(2)}
\begin{cases}
x_1 - 2x_3 = 5 \\
x_2 + x_3 = -3 \\
0 = 0 \\
0 = 0
\end{cases}
$$

消元法求解线性方程组——示例

例 解方程组

$$\begin{cases} \boxed{x_1} + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \\ 4x_1 + 7x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases} \xrightarrow[\substack{(3)-4\times(1) \\ (4)-3\times(1)}]{(2)-(1)} \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ \boxed{x_2} + x_3 = -3 \\ 3x_2 + 3x_3 = -9 \\ x_2 + x_3 = -3 \end{cases} \xrightarrow[\substack{(3)-3\times(2) \\ (4)-(2)}]{(1)-(2)} \begin{cases} x_1 - 2x_3 = 5 \\ x_2 + x_3 = -3 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

所以

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 5 \\ x_2 + x_3 = -3 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

消元法求解线性方程组——示例

例 解方程组

$$\begin{cases} \boxed{x_1} + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \\ 4x_1 + 7x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases} \xrightarrow[\substack{(3)-4\times(1) \\ (4)-3\times(1)}]{(2)-(1)} \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ \boxed{x_2} + x_3 = -3 \\ 3x_2 + 3x_3 = -9 \\ x_2 + x_3 = -3 \end{cases} \xrightarrow[\substack{(3)-3\times(2) \\ (4)-(2)}]{(1)-(2)} \begin{cases} x_1 - 2x_3 = 5 \\ x_2 + x_3 = -3 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

所以

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 5 \\ x_2 + x_3 = -3 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 + 2x_3 \\ x_2 = -3 - x_3 \end{cases}$$

消元法求解线性方程组——示例

例 解方程组

$$\begin{cases} \boxed{x_1} + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \\ 4x_1 + 7x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases} \xrightarrow[\substack{(3)-4\times(1) \\ (4)-3\times(1)}]{(2)-(1)} \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ \boxed{x_2} + x_3 = -3 \\ 3x_2 + 3x_3 = -9 \\ x_2 + x_3 = -3 \end{cases} \xrightarrow[\substack{(3)-3\times(2) \\ (4)-(2)}]{(1)-(2)} \begin{cases} x_1 - 2x_3 = 5 \\ x_2 + x_3 = -3 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 7 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

所以

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 5 \\ x_2 + x_3 = -3 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 + 2x_3 \\ x_2 = -3 - x_3 \end{cases}$$

消元法求解线性方程组——示例

例 解方程组

$$\begin{cases} \boxed{x_1}+x_2-x_3=2 \\ x_1+2x_2=-1 \\ 4x_1+7x_2-x_3=-1 \\ 3x_1+4x_2-2x_3=3 \end{cases} \xrightarrow[\substack{(3)-4\times(1) \\ (4)-3\times(1)}]{(2)-(1)} \begin{cases} x_1+x_2-x_3=2 \\ \boxed{x_2}+x_3=-3 \\ 3x_2+3x_3=-9 \\ x_2+x_3=-3 \end{cases} \xrightarrow[\substack{(3)-3\times(2) \\ (4)-(2)}]{(1)-(2)} \begin{cases} x_1-2x_3=5 \\ x_2+x_3=-3 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$(A\vdots b)=\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 7 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

所以

$$\begin{cases} x_1-2x_3=5 \\ x_2+x_3=-3 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=5+2x_3 \\ x_2=-3-x_3 \end{cases}$$

消元法求解线性方程组——示例

例 解方程组

$$\begin{cases} \boxed{x_1} + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \\ 4x_1 + 7x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases} \xrightarrow[\substack{(3)-4\times(1)\\(4)-3\times(1)}]{(2)-(1)} \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ \boxed{x_2} + x_3 = -3 \\ 3x_2 + 3x_3 = -9 \\ x_2 + x_3 = -3 \end{cases} \xrightarrow[\substack{(3)-3\times(2)\\(4)-(2)}]{(1)-(2)} \begin{cases} x_1 - 2x_3 = 5 \\ x_2 + x_3 = -3 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 7 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-4r_1\\r_4-3r_1}]{r_2-r_1}$$

所以

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 5 \\ x_2 + x_3 = -3 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 + 2x_3 \\ x_2 = -3 - x_3 \end{cases}$$

消元法求解线性方程组——示例

例 解方程组

$$
\begin{cases}
\boxed{x_1}+x_2-x_3=2\\
x_1+2x_2=-1\\
4x_1+7x_2-x_3=-1\\
3x_1+4x_2-2x_3=3
\end{cases}
\xrightarrow[\substack{(3)-4\times(1)\\(4)-3\times(1)}]{(2)-(1)}
\begin{cases}
x_1+x_2-x_3=2\\
\boxed{x_2}+x_3=-3\\
3x_2+3x_3=-9\\
x_2+x_3=-3
\end{cases}
\xrightarrow[\substack{(3)-3\times(2)\\(4)-(2)}]{(1)-(2)}
\begin{cases}
x_1-2x_3=5\\
x_2+x_3=-3\\
0=0\\
0=0
\end{cases}
$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$
(A\vdots b)=\left(\begin{array}{ccc|c}
\boxed{1} & 1 & -1 & 2\\
1 & 2 & 0 & -1\\
4 & 7 & -1 & -1\\
3 & 4 & 2 & 3
\end{array}\right)
\xrightarrow[\substack{r_3-4r_1\\r_4-3r_1}]{r_2-r_1}
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 1 & -1 & 2\\
0 & 1 & 1 & -3\\
0 & 3 & 3 & -9\\
0 & 1 & 1 & -3
\end{array}\right)
$$

所以

$$
\begin{cases}
x_1-2x_3=5\\
x_2+x_3=-3\\
0=0\\
0=0
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
x_1=5+2x_3\\
x_2=-3-x_3
\end{cases}
$$

消元法求解线性方程组——示例

例 解方程组

$$\begin{cases} \boxed{x_1} + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \\ 4x_1 + 7x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases} \xrightarrow[\substack{(3)-4\times(1) \\ (4)-3\times(1)}]{(2)-(1)} \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ \boxed{x_2} + x_3 = -3 \\ 3x_2 + 3x_3 = -9 \\ x_2 + x_3 = -3 \end{cases} \xrightarrow[\substack{(3)-3\times(2) \\ (4)-(2)}]{(1)-(2)} \begin{cases} x_1 - 2x_3 = 5 \\ x_2 + x_3 = -3 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 7 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-4r_1 \\ r_4-3r_1}]{r_2-r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

所以

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 5 \\ x_2 + x_3 = -3 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 + 2x_3 \\ x_2 = -3 - x_3 \end{cases}$$

消元法求解线性方程组——示例

例 解方程组

$$\begin{cases} \boxed{x_1} + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \\ 4x_1 + 7x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases} \xrightarrow[\substack{(3)-4\times(1) \\ (4)-3\times(1)}]{(2)-(1)} \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ \boxed{x_2} + x_3 = -3 \\ 3x_2 + 3x_3 = -9 \\ x_2 + x_3 = -3 \end{cases} \xrightarrow[\substack{(3)-3\times(2) \\ (4)-(2)}]{(1)-(2)} \begin{cases} x_1 - 2x_3 = 5 \\ x_2 + x_3 = -3 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 7 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-4r_1 \\ r_4-3r_1}]{r_2-r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-3r_2 \\ r_4-r_2}]{r_1-r_2}$$

所以

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 5 \\ x_2 + x_3 = -3 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 + 2x_3 \\ x_2 = -3 - x_3 \end{cases}$$

消元法求解线性方程组——示例

例 解方程组

$$\begin{cases} \boxed{x_1} + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \\ 4x_1 + 7x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases} \xrightarrow[\substack{(3)-4\times(1)\\(4)-3\times(1)}]{(2)-(1)} \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ \boxed{x_2} + x_3 = -3 \\ 3x_2 + 3x_3 = -9 \\ x_2 + x_3 = -3 \end{cases} \xrightarrow[\substack{(3)-3\times(2)\\(4)-(2)}]{(1)-(2)} \begin{cases} x_1 - 2x_3 = 5 \\ x_2 + x_3 = -3 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 7 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-4r_1\\r_4-3r_1}]{r_2-r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-3r_2\\r_4-r_2}]{r_1-r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

所以

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 5 \\ x_2 + x_3 = -3 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 + 2x_3 \\ x_2 = -3 - x_3 \end{cases}$$

消元法求解线性方程组——示例

例 解方程组

$$\begin{cases} \boxed{x_1}+x_2-x_3=2 \\ x_1+2x_2=-1 \\ 4x_1+7x_2-x_3=-1 \\ 3x_1+4x_2-2x_3=3 \end{cases} \xrightarrow[\substack{(3)-4\times(1) \\ (4)-3\times(1)}]{(2)-(1)} \begin{cases} x_1+x_2-x_3=2 \\ \boxed{x_2}+x_3=-3 \\ 3x_2+3x_3=-9 \\ x_2+x_3=-3 \end{cases} \xrightarrow[\substack{(3)-3\times(2) \\ (4)-(2)}]{(1)-(2)} \begin{cases} x_1-2x_3=5 \\ x_2+x_3=-3 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$(A\vdots b)=\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 7 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-4r_1 \\ r_4-3r_1}]{r_2-r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-3r_2 \\ r_4-r_2}]{r_1-r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

所以

$$\begin{cases} x_1-2x_3=5 \\ x_2+x_3=-3 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=5+2x_3 \\ x_2=-3-x_3 \end{cases}$$

消元法求解线性方程组——示例

例 解方程组

主元

$$\begin{cases} \boxed{x_1}+x_2-x_3=2 \\ x_1+2x_2=-1 \\ 4x_1+7x_2-x_3=-1 \\ 3x_1+4x_2-2x_3=3 \end{cases} \xrightarrow[\substack{(3)-4\times(1)\\(4)-3\times(1)}]{(2)-(1)} \begin{cases} x_1+x_2-x_3=2 \\ \boxed{x_2}+x_3=-3 \\ 3x_2+3x_3=-9 \\ x_2+x_3=-3 \end{cases} \xrightarrow[\substack{(3)-3\times(2)\\(4)-(2)}]{(1)-(2)} \begin{cases} x_1-2x_3=5 \\ x_2+x_3=-3 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$(A\vdots b)=\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 7 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-4r_1\\r_4-3r_1}]{r_2-r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-3r_2\\r_4-r_2}]{r_1-r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

所以

$$\begin{cases} x_1-2x_3=5 \\ x_2+x_3=-3 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=5+2x_3 \\ x_2=-3-x_3 \end{cases}$$

消元法求解线性方程组——示例

例 解方程组

主元　自由变量

$$\begin{cases} \boxed{x_1} + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \\ 4x_1 + 7x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases} \xrightarrow[\substack{(3)-4\times(1) \\ (4)-3\times(1)}]{(2)-(1)} \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ \boxed{x_2} + x_3 = -3 \\ 3x_2 + 3x_3 = -9 \\ x_2 + x_3 = -3 \end{cases} \xrightarrow[\substack{(3)-3\times(2) \\ (4)-(2)}]{(1)-(2)} \begin{cases} x_1 - 2x_3 = 5 \\ x_2 + x_3 = -3 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 7 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3 - 4r_1 \\ r_4 - 3r_1}]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3 - 3r_2 \\ r_4 - r_2}]{r_1 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

所以

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 5 \\ x_2 + x_3 = -3 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 + 2x_3 \\ x_2 = -3 - x_3 \end{cases}$$

消元法求解线性方程组——示例

例 解方程组

主元　自由变量

$$\begin{cases} \boxed{x_1}+x_2-x_3=2\\ x_1+2x_2=-1\\ 4x_1+7x_2-x_3=-1\\ 3x_1+4x_2-2x_3=3\end{cases} \xrightarrow[\substack{(3)-4\times(1)\\(4)-3\times(1)}]{(2)-(1)} \begin{cases} x_1+x_2-x_3=2\\ \boxed{x_2}+x_3=-3\\ 3x_2+3x_3=-9\\ x_2+x_3=-3\end{cases} \xrightarrow[\substack{(3)-3\times(2)\\(4)-(2)}]{(1)-(2)} \begin{cases} x_1-2x_3=5\\ x_2+x_3=-3\\ 0=0\\ 0=0\end{cases}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$(A\vdots b)=\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1}&1&-1&2\\ 1&2&0&-1\\ 4&7&-1&-1\\ 3&4&2&3\end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-4r_1\\r_4-3r_1}]{r_2-r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&-1&2\\ 0&\boxed{1}&1&-3\\ 0&3&3&-9\\ 0&1&1&-3\end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-3r_2\\r_4-r_2}]{r_1-r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&-2&5\\ 0&1&1&-3\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\end{array}\right)$$

所以

$$\begin{cases} x_1-2x_3=5\\ x_2+x_3=-3\\ 0=0\\ 0=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=5+2x_3\\ x_2=-3-x_3\end{cases}$$

- 解方程，等同于：增广矩阵 $\xrightarrow{\text{初等行变换}}$ 简化的阶梯型矩阵

消元法求解线性方程组——示例

例 解方程组

主元　自由变量

$$\begin{cases} \boxed{x_1} + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \\ 4x_1 + 7x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases} \xrightarrow[\substack{(3)-4\times(1)\\(4)-3\times(1)}]{(2)-(1)} \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ \boxed{x_2} + x_3 = -3 \\ 3x_2 + 3x_3 = -9 \\ x_2 + x_3 = -3 \end{cases} \xrightarrow[\substack{(3)-3\times(2)\\(4)-(2)}]{(1)-(2)} \begin{cases} x_1 - 2x_3 = 5 \\ x_2 + x_3 = -3 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$(A\,\vdots\,b) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 7 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-4r_1\\r_4-3r_1}]{r_2-r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-3r_2\\r_4-r_2}]{r_1-r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

所以

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 5 \\ x_2 + x_3 = -3 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 + 2x_3 \\ x_2 = -3 - x_3 \end{cases}$$

- 解方程，等同于：增广矩阵 $\xrightarrow{\text{初等行变换}}$ 简化的阶梯型矩阵
- 独立方程个数 = 阶梯型矩阵的非零行的行数

消元法求解线性方程组——示例

例 解方程组

主元　自由变量

$$
\begin{cases} \boxed{x_1}+x_2-x_3=2 \\ x_1+2x_2=-1 \\ 4x_1+7x_2-x_3=-1 \\ 3x_1+4x_2-2x_3=3 \end{cases}
\xrightarrow[\substack{(3)-4\times(1)\\(4)-3\times(1)}]{(2)-(1)}
\begin{cases} x_1+x_2-x_3=2 \\ \boxed{x_2}+x_3=-3 \\ 3x_2+3x_3=-9 \\ x_2+x_3=-3 \end{cases}
\xrightarrow[\substack{(3)-3\times(2)\\(4)-(2)}]{(1)-(2)}
\begin{cases} x_1-2x_3=5 \\ x_2+x_3=-3 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{cases}
$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$
(A\,\vdots\,b)=\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 7 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \end{array}\right)
\xrightarrow[\substack{r_3-4r_1\\r_4-3r_1}]{r_2-r_1}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right)
\xrightarrow[\substack{r_3-3r_2\\r_4-r_2}]{r_1-r_2}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

所以

$$
\begin{cases} x_1-2x_3=5 \\ x_2+x_3=-3 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases} x_1=5+2x_3 \\ x_2=-3-x_3 \end{cases}
$$

- 解方程，等同于：增广矩阵 $\xrightarrow{\text{初等行变换}}$ 简化的阶梯型矩阵
- 独立方程个数 = 阶梯型矩阵的非零行的行数
- 通解中，主元由自由变量表示，自由变量取任意常数

初等行变换求解线性方程组

步骤：

1. $Ax = b \quad \Longrightarrow \quad (A \vdots b) \xrightarrow{\text{初等行变换}}$ 简化的阶梯型矩阵
2. 确定主元、自由变量
3. 通解中，主元由自由变量表示，自由变量取任意常数

初等行变换求解线性方程组

步骤：

1. $Ax=b \quad \Longrightarrow \quad (A \vdots b) \xrightarrow{\text{初等行变换}}$ 简化的阶梯型矩阵

2. 确定主元、自由变量

3. 通解中，主元由自由变量表示，自由变量取任意常数

例如

$$(A \vdots b) \xrightarrow{\text{行变换}} \left(\begin{array}{cccccccccccccc|c}
0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & * & 0 & \cdots & * & 0 & \cdots\cdots & * & 0 & \cdots & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & * & 0 & \cdots\cdots & * & 0 & \cdots & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots\cdots & * & 0 & \cdots & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0
\end{array}\right)$$

初等行变换求解线性方程组

步骤：

1. $Ax = b \quad \Longrightarrow \quad (A \vdots b) \xrightarrow{\text{初等行变换}}$ 简化的阶梯型矩阵

2. 确定主元、自由变量

3. 通解中，主元由自由变量表示，自由变量取任意常数

例如

$$
(A \vdots b) \xrightarrow{\text{行变换}} \left(\begin{array}{ccccccccccccccc|c}
0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & * & 0 & \cdots & * & 0 & \cdots & \cdots & * & 0 & \cdots & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & * & 0 & \cdots & \cdots & * & 0 & \cdots & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & \cdots & * & 0 & \cdots & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0
\end{array}\right)
$$

初等行变换求解线性方程组

步骤：

1. $Ax = b \quad \Longrightarrow \quad (A \vdots b) \xrightarrow{\text{初等行变换}}$ 简化的阶梯型矩阵

2. 确定主元、自由变量

3. 通解中，主元由自由变量表示，自由变量取任意常数

例如

$$
(A \vdots b) \xrightarrow{\text{行变换}}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} \quad\quad\quad\quad & \text{主元} & \quad\quad & \text{主元} & \quad\quad & \text{主元} & \quad\quad\quad \text{主元} \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccccccccccccc|c}
0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & * & 0 & \cdots & * & 0 & \cdots\cdots & * & 0 & \cdots & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & \cdots & * & 0 & \cdots\cdots & * & 0 & \cdots & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & \cdots & * & 0 & \cdots & * \\
\vdots & & & & & & & & & & & & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & & & & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0
\end{array}\right)
\end{array}
$$

初等行变换求解线性方程组

步骤：

1. $Ax=b \quad \Longrightarrow \quad (A\,\vdots\,b) \xrightarrow{\text{初等行变换}}$ 简化的阶梯型矩阵

2. 确定主元、自由变量

3. 通解中，主元由自由变量表示，自由变量取任意常数

例如

$$
(A\,\vdots\,b)\xrightarrow{\text{行变换}}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc|c}
\overbrace{\quad}^{\text{自由变量}} & \text{主元} & \overbrace{\quad}^{\text{自由变量}} & \text{主元} & \overbrace{\quad}^{\text{自由变量}} & \text{主元} & \overbrace{\quad}^{\text{自由变量}} & \text{主元} & \overbrace{\quad}^{\text{自由变量}} & \\
\end{array}\\
\left(\begin{array}{ccccccccc|c}
0\cdots 0 & 1 & \cdots * & 0 & \cdots * & 0 & \cdots\cdots * & 0 & \cdots & * \\
0\cdots\cdots & \cdots & \cdots 0 & 1 & \cdots * & 0 & \cdots\cdots * & 0 & \cdots & * \\
0\cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots 0 & 1 & \cdots\cdots * & 0 & \cdots & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0\cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots 0 & 1 & \cdots & * \\
0\cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0\cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots & 0
\end{array}\right)
\end{array}
$$

初等行变换求解线性方程组

步骤：

1. $Ax=b \quad\Longrightarrow\quad (A\vdots b)\xrightarrow{\text{初等行变换}}$ 简化的阶梯型矩阵
2. 确定主元、自由变量（自由变量个数 = 变量个数 − 主元个数）
3. 通解中，主元由自由变量表示，自由变量取任意常数

例如

$$
(A\vdots b)\xrightarrow{\text{行变换}}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccc}
\overbrace{}^{\text{自由变量}} & \underset{\downarrow}{\text{主元}} & \overbrace{}^{\text{自由变量}} & \underset{\downarrow}{\text{主元}} & \overbrace{}^{\text{自由变量}} & \underset{\downarrow}{\text{主元}} & \overbrace{}^{\text{自由变量}} & \underset{\downarrow}{\text{主元}} & \overbrace{}^{\text{自由变量}} & &
\end{array}\\
\left(\begin{array}{cccccccccccccc|c}
0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & * & 0 & \cdots & * & 0 & \cdots\cdots & * & 0 & \cdots & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & * & 0 & \cdots\cdots & * & 0 & \cdots & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots\cdots & * & 0 & \cdots & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0
\end{array}\right)
\end{array}
$$

例 1 解方程组：$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = -5 \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$

例 1 解方程组：
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = -5 \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

解 $$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & -5 \\ -2 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

例 1 解方程组：$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = -5 \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$

解 $(A \vdots b) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & -5 \\ -2 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right)$

例 1 解方程组：
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = -5 \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

解 $$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & -5 \\ -2 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-2r_1 \\ r_4+2r_1}]{r_2-r_1}$$

例 1 解方程组：
$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=2 \\ x_1+2x_2=-1 \\ 2x_1+5x_2+x_3=-5 \\ -2x_1-3x_2+x_3=-1 \end{cases}$$

解
$$(A \vdots b)=\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & -5 \\ -2 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-2r_1 \\ r_4+2r_1}]{r_2-r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{array}\right)$$

例 1 解方程组：
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = -5 \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

解
$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & -5 \\ -2 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-2r_1 \\ r_4+2r_1}]{r_2-r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ & & & \\ & & & \end{array}\right)$$

例 1 解方程组：$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=2 \\ x_1+2x_2=-1 \\ 2x_1+5x_2+x_3=-5 \\ -2x_1-3x_2+x_3=-1 \end{cases}$

解 $(A \vdots b)=\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & -5 \\ -2 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-2r_1 \\ r_4+2r_1}]{r_2-r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & -9 \end{array}\right)$

例 1 解方程组：
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = -5 \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

解 $$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & -5 \\ -2 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-2r_1 \\ r_4+2r_1}]{r_2-r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & -9 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

例 1 解方程组：
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = -5 \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

解
$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & -5 \\ -2 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3 - 2r_1 \\ r_4 + 2r_1}]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & -9 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

例 1 解方程组：
$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=2 \\ x_1+2x_2=-1 \\ 2x_1+5x_2+x_3=-5 \\ -2x_1-3x_2+x_3=-1 \end{cases}$$

解
$$(A \vdots b)=\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & -5 \\ -2 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-2r_1 \\ r_4+2r_1}]{r_2-r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & -9 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3-3r_2 \\ r_4+r_2}]{r_1-r_2}$$

例 1 解方程组：$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = -5 \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$

解
$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & -5 \\ -2 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-2r_1 \\ r_4+2r_1}]{r_2-r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & -9 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3-3r_2 \\ r_4+r_2}]{r_1-r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & -3 \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{array}\right)$$

例 1 解方程组：$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = -5 \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$

解 $(A \vdots b) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & -5 \\ -2 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3 - 2r_1 \\ r_4 + 2r_1}]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & -9 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[\substack{r_3 - 3r_2 \\ r_4 + r_2}]{r_1 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ & & & \\ & & & \end{array}\right)$

例 1 解方程组：
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = -5 \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

解
$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & -5 \\ -2 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-2r_1 \\ r_4+2r_1}]{r_2-r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & -9 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3-3r_2 \\ r_4+r_2}]{r_1-r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \end{array}\right)$$

例 1 解方程组: $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = -5 \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$

解 $$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & -5 \\ -2 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-2r_1 \\ r_4+2r_1}]{r_2-r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & -9 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3-3r_2 \\ r_4+r_2}]{r_1-r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

例 1 解方程组：
$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=2 \\ x_1+2x_2=-1 \\ 2x_1+5x_2+x_3=-5 \\ -2x_1-3x_2+x_3=-1 \end{cases}$$

解
$$(A\,\vdots\,b)=\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & -5 \\ -2 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-2r_1\\ r_4+2r_1}]{r_2-r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & -9 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3-3r_2\\ r_4+r_2}]{r_1-r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

例 1 解方程组：
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = -5 \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

解
$$(A\,\vdots\,b) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & -5 \\ -2 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-2r_1 \\ r_4+2r_1}]{r_2-r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & -9 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3-3r_2 \\ r_4+r_2}]{r_1-r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

例 1 解方程组：$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = -5 \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$

解 $(A\vdots b) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & -5 \\ -2 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-2r_1 \\ r_4+2r_1}]{r_2-r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & -9 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[\substack{r_3-3r_2 \\ r_4+r_2}]{r_1-r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

x_1, x_2 为主元，x_3 为自由变量。

例 1 解方程组：$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = -5 \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$

解 $(A \vdots b) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & -5 \\ -2 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-2r_1 \\ r_4+2r_1}]{r_2-r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & -9 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[\substack{r_3-3r_2 \\ r_4+r_2}]{r_1-r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

x_1, x_2 为主元，x_3 为自由变量。所以原方程组等价于

$$\begin{cases} x_1 + \quad - 2x_3 = 5 \\ \qquad x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$$

例 1 解方程组：$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = -5 \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$

解
$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & -5 \\ -2 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-2r_1 \\ r_4+2r_1}]{r_2-r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & -9 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3-3r_2 \\ r_4+r_2}]{r_1-r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

x_1, x_2 为主元，x_3 为自由变量。所以原方程组等价于

$$\begin{cases} x_1 + \quad - 2x_3 = 5 \\ \quad x_2 + x_3 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + \quad = 5 + 2x_3 \\ \quad x_2 = -3 - x_3 \end{cases}$$

例 1 解方程组：$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = -5 \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$

解 $(A \vdots b) = \left(\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & -5 \\ -2 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-2r_1 \\ r_4+2r_1}]{r_2-r_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & -9 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[\substack{r_3-3r_2 \\ r_4+r_2}]{r_1-r_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

x_1, x_2 为主元，x_3 为自由变量。所以原方程组等价于

$$\begin{cases} x_1 + \quad - 2x_3 = 5 \\ \quad x_2 + x_3 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + \quad = 5 + 2x_3 \\ \quad x_2 = -3 - x_3 \end{cases}$$

所以通解是：$\begin{cases} \\ \\ x_3 = c_1 \end{cases}$ $(c_1$为任意常数$)$

例 1 解方程组：
$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=2 \\ x_1+2x_2=-1 \\ 2x_1+5x_2+x_3=-5 \\ -2x_1-3x_2+x_3=-1 \end{cases}$$

解 $$(A \vdots b)=\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & -5 \\ -2 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-2r_1 \\ r_4+2r_1}]{r_2-r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & -9 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3-3r_2 \\ r_4+r_2}]{r_1-r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

x_1,x_2 为主元，x_3 为自由变量。所以原方程组等价于

$$\begin{cases} x_1+\quad -2x_3=5 \\ x_2+x_3=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+\quad =5+2x_3 \\ x_2=-3-x_3 \end{cases}$$

所以通解是：
$$\begin{cases} x_1=5+2c_1 \\ x_3=c_1 \end{cases} \qquad (c_1\text{为任意常数})$$

例 1 解方程组：
$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=2 \\ x_1+2x_2=-1 \\ 2x_1+5x_2+x_3=-5 \\ -2x_1-3x_2+x_3=-1 \end{cases}$$

解
$$(A\vdots b)=\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & -5 \\ -2 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-2r_1 \\ r_4+2r_1}]{r_2-r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & -9 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3-3r_2 \\ r_4+r_2}]{r_1-r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

x_1, x_2 为主元，x_3 为自由变量。所以原方程组等价于

$$\begin{cases} x_1+\quad -2x_3=5 \\ x_2+x_3=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+\quad =5+2x_3 \\ x_2=-3-x_3 \end{cases}$$

所以通解是：
$$\begin{cases} x_1=5+2c_1 \\ x_2=-3-c_1 \\ x_3=c_1 \end{cases} \quad (c_1\text{为任意常数})$$

例 1 解方程组:
$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=2 \\ x_1+2x_2=-1 \\ 2x_1+5x_2+x_3=-5 \\ -2x_1-3x_2+x_3=-1 \end{cases}$$

解
$$(A \vdots b)=\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & -5 \\ -2 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-2r_1 \\ r_4+2r_1}]{r_2-r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & -9 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3-3r_2 \\ r_4+r_2}]{r_1-r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

独立方程数＝主元数

x_1, x_2 为主元，x_3 为自由变量。所以原方程组等价于

$$\begin{cases} x_1 \quad -2x_3=5 \\ x_2+x_3=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=5+2x_3 \\ x_2=-3-x_3 \end{cases}$$

所以通解是:
$$\begin{cases} x_1=5+2c_1 \\ x_2=-3-c_1 \\ x_3=c_1 \end{cases} \quad (c_1\text{为任意常数})$$

例 1 解方程组：
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = -5 \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

解
$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & -5 \\ -2 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3 - 2r_1 \\ r_4 + 2r_1}]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & -9 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3 - 3r_2 \\ r_4 + r_2}]{r_1 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

独立方程数 = 主元数 $\Leftrightarrow$ 存在解

x_1, x_2 为主元，x_3 为自由变量。所以原方程组等价于

$$\begin{cases} x_1 + \quad - 2x_3 = 5 \\ \quad x_2 + x_3 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5 + 2x_3 \\ x_2 = -3 - x_3 \end{cases}$$

所以通解是：
$$\begin{cases} x_1 = 5 + 2c_1 \\ x_2 = -3 - c_1 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \quad (c_1\text{为任意常数})$$

例 1 解方程组：
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = -5 \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

解
$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & -5 \\ -2 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-2r_1 \\ r_4+2r_1}]{r_2-r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & -9 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3-3r_2 \\ r_4+r_2}]{r_1-r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

独立方程数 = 主元数 $\Leftrightarrow$ 存在解

$<$ 变量数

x_1, x_2 为主元，x_3 为自由变量。所以原方程组等价于

$$\begin{cases} x_1 + \quad - 2x_3 = 5 \\ x_2 + x_3 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + \quad = 5 + 2x_3 \\ x_2 = -3 - x_3 \end{cases}$$

所以通解是：
$$\begin{cases} x_1 = 5 + 2c_1 \\ x_2 = -3 - c_1 \quad (c_1\text{为任意常数}) \\ x_3 = c_1 \end{cases}$$

例 1 解方程组：
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = -5 \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

解
$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & -5 \\ -2 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3 - 2r_1 \\ r_4 + 2r_1}]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & -9 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3 - 3r_2 \\ r_4 + r_2}]{r_1 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

独立方程数 = 主元数 $\Leftrightarrow$ 存在解

< 变量数 $\Leftrightarrow$ 无穷多解

x_1, x_2 为主元，x_3 为自由变量。所以原方程组等价于

$$\begin{cases} x_1 + \quad - 2x_3 = 5 \\ \quad x_2 + x_3 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + \quad = 5 + 2x_3 \\ \quad x_2 = -3 - x_3 \end{cases}$$

所以通解是：
$$\begin{cases} x_1 = 5 + 2c_1 \\ x_2 = -3 - c_1 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \quad (c_1\text{为任意常数})$$

例 2 解方程组:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 28 \\ -2x_1 - 3x_2 - 9x_3 = -53 \\ 3x_1 + 6x_2 + 13x_3 = 88 \\ 5x_1 + 9x_2 + 22x_3 = 141 \end{cases}$$

例 2 解方程组：
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 28 \\ -2x_1 - 3x_2 - 9x_3 = -53 \\ 3x_1 + 6x_2 + 13x_3 = 88 \\ 5x_1 + 9x_2 + 22x_3 = 141 \end{cases}$$

解

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 28 \\ -2 & -3 & -9 & -53 \\ 3 & 6 & 13 & 88 \\ 5 & 9 & 22 & 141 \end{array}\right)$$

例 2 解方程组：
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 28 \\ -2x_1 - 3x_2 - 9x_3 = -53 \\ 3x_1 + 6x_2 + 13x_3 = 88 \\ 5x_1 + 9x_2 + 22x_3 = 141 \end{cases}$$

解

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & 2 & 4 & 28 \\ -2 & -3 & -9 & -53 \\ 3 & 6 & 13 & 88 \\ 5 & 9 & 22 & 141 \end{array}\right)$$

例 2 解方程组：
$$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=28 \\ -2x_1-3x_2-9x_3=-53 \\ 3x_1+6x_2+13x_3=88 \\ 5x_1+9x_2+22x_3=141 \end{cases}$$

解

$$(A \vdots b)=\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 4 & 28 \\ -2 & -3 & -9 & -53 \\ 3 & 6 & 13 & 88 \\ 5 & 9 & 22 & 141 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-3r_1 \\ r_4-5r_1}]{r_2+2r_1}$$

例 2 解方程组：
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 28 \\ -2x_1 - 3x_2 - 9x_3 = -53 \\ 3x_1 + 6x_2 + 13x_3 = 88 \\ 5x_1 + 9x_2 + 22x_3 = 141 \end{cases}$$

解

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 4 & 28 \\ -2 & -3 & -9 & -53 \\ 3 & 6 & 13 & 88 \\ 5 & 9 & 22 & 141 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-3r_1 \\ r_4-5r_1}]{r_2+2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 28 \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{array}\right)$$

例 2 解方程组：
$$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=28 \\ -2x_1-3x_2-9x_3=-53 \\ 3x_1+6x_2+13x_3=88 \\ 5x_1+9x_2+22x_3=141 \end{cases}$$

解

$$(A\vdots b)=\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 4 & 28 \\ -2 & -3 & -9 & -53 \\ 3 & 6 & 13 & 88 \\ 5 & 9 & 22 & 141 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-3r_1 \\ r_4-5r_1}]{r_2+2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 28 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ & & & \\ & & & \end{array}\right)$$

例 2 解方程组：
$$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=28 \\ -2x_1-3x_2-9x_3=-53 \\ 3x_1+6x_2+13x_3=88 \\ 5x_1+9x_2+22x_3=141 \end{cases}$$

解

$$(A \vdots b)=\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 4 & 28 \\ -2 & -3 & -9 & -53 \\ 3 & 6 & 13 & 88 \\ 5 & 9 & 22 & 141 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-3r_1 \\ r_4-5r_1}]{r_2+2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 28 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ & & & \end{array}\right)$$

例 2 解方程组：
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 28 \\ -2x_1 - 3x_2 - 9x_3 = -53 \\ 3x_1 + 6x_2 + 13x_3 = 88 \\ 5x_1 + 9x_2 + 22x_3 = 141 \end{cases}$$

解

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 4 & 28 \\ -2 & -3 & -9 & -53 \\ 3 & 6 & 13 & 88 \\ 5 & 9 & 22 & 141 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-3r_1 \\ r_4-5r_1}]{r_2+2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 28 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

例 2 解方程组：$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=28 \\ -2x_1-3x_2-9x_3=-53 \\ 3x_1+6x_2+13x_3=88 \\ 5x_1+9x_2+22x_3=141 \end{cases}$

解

$$(A\vdots b)=\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 4 & 28 \\ -2 & -3 & -9 & -53 \\ 3 & 6 & 13 & 88 \\ 5 & 9 & 22 & 141 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-3r_1 \\ r_4-5r_1}]{r_2+2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 28 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

例 2 解方程组:
$$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=28 \\ -2x_1-3x_2-9x_3=-53 \\ 3x_1+6x_2+13x_3=88 \\ 5x_1+9x_2+22x_3=141 \end{cases}$$

解

$$(A\vdots b)=\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 4 & 28 \\ -2 & -3 & -9 & -53 \\ 3 & 6 & 13 & 88 \\ 5 & 9 & 22 & 141 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-3r_1 \\ r_4-5r_1}]{r_2+2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 28 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4+r_2]{r_1-2r_2}$$

例 2 解方程组：

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 28 \\ -2x_1 - 3x_2 - 9x_3 = -53 \\ 3x_1 + 6x_2 + 13x_3 = 88 \\ 5x_1 + 9x_2 + 22x_3 = 141 \end{cases}$$

解

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 4 & 28 \\ -2 & -3 & -9 & -53 \\ 3 & 6 & 13 & 88 \\ 5 & 9 & 22 & 141 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-3r_1 \\ r_4-5r_1}]{r_2+2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 28 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4+r_2]{r_1-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ & & & \\ & & & \end{array}\right)$$

例 2 解方程组：
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 28 \\ -2x_1 - 3x_2 - 9x_3 = -53 \\ 3x_1 + 6x_2 + 13x_3 = 88 \\ 5x_1 + 9x_2 + 22x_3 = 141 \end{cases}$$

解

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 4 & 28 \\ -2 & -3 & -9 & -53 \\ 3 & 6 & 13 & 88 \\ 5 & 9 & 22 & 141 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-3r_1 \\ r_4-5r_1}]{r_2+2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 28 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4+r_2]{r_1-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6 & 22 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ & & & \end{array}\right)$$

例 2 解方程组：
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 28 \\ -2x_1 - 3x_2 - 9x_3 = -53 \\ 3x_1 + 6x_2 + 13x_3 = 88 \\ 5x_1 + 9x_2 + 22x_3 = 141 \end{cases}$$

解

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 4 & 28 \\ -2 & -3 & -9 & -53 \\ 3 & 6 & 13 & 88 \\ 5 & 9 & 22 & 141 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-3r_1 \\ r_4-5r_1}]{r_2+2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 28 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4+r_2]{r_1-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6 & 22 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

例 2 解方程组：$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 28 \\ -2x_1 - 3x_2 - 9x_3 = -53 \\ 3x_1 + 6x_2 + 13x_3 = 88 \\ 5x_1 + 9x_2 + 22x_3 = 141 \end{cases}$

解

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 4 & 28 \\ -2 & -3 & -9 & -53 \\ 3 & 6 & 13 & 88 \\ 5 & 9 & 22 & 141 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-3r_1 \\ r_4-5r_1}]{r_2+2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 28 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4+r_2]{r_1-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6 & 22 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

例 2 解方程组：
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 28 \\ -2x_1 - 3x_2 - 9x_3 = -53 \\ 3x_1 + 6x_2 + 13x_3 = 88 \\ 5x_1 + 9x_2 + 22x_3 = 141 \end{cases}$$

解

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 4 & 28 \\ -2 & -3 & -9 & -53 \\ 3 & 6 & 13 & 88 \\ 5 & 9 & 22 & 141 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-3r_1 \\ r_4-5r_1}]{r_2+2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 28 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4+r_2]{r_1-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6 & 22 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_2+r_3 \\ r_4-r_3}]{r_1-6r_3}$$

例 2 解方程组：
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 28 \\ -2x_1 - 3x_2 - 9x_3 = -53 \\ 3x_1 + 6x_2 + 13x_3 = 88 \\ 5x_1 + 9x_2 + 22x_3 = 141 \end{cases}$$

解

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 4 & 28 \\ -2 & -3 & -9 & -53 \\ 3 & 6 & 13 & 88 \\ 5 & 9 & 22 & 141 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-3r_1 \\ r_4-5r_1}]{r_2+2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 28 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4+r_2]{r_1-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6 & 22 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_2+r_3 \\ r_4-r_3}]{r_1-6r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} & & & \\ & & & \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ & & & \end{array}\right)$$

例 2 解方程组：$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 28 \\ -2x_1 - 3x_2 - 9x_3 = -53 \\ 3x_1 + 6x_2 + 13x_3 = 88 \\ 5x_1 + 9x_2 + 22x_3 = 141 \end{cases}$

解

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 4 & 28 \\ -2 & -3 & -9 & -53 \\ 3 & 6 & 13 & 88 \\ 5 & 9 & 22 & 141 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3 - 3r_1 \\ r_4 - 5r_1}]{r_2 + 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 28 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4 + r_2]{r_1 - 2r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6 & 22 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_2 + r_3 \\ r_4 - r_3}]{r_1 - 6r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ & & & \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ & & & \end{array}\right)$$

例 2 解方程组：
$$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=28 \\ -2x_1-3x_2-9x_3=-53 \\ 3x_1+6x_2+13x_3=88 \\ 5x_1+9x_2+22x_3=141 \end{cases}$$

解

$$(A\vdots b)=\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 4 & 28 \\ -2 & -3 & -9 & -53 \\ 3 & 6 & 13 & 88 \\ 5 & 9 & 22 & 141 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-3r_1 \\ r_4-5r_1}]{r_2+2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 28 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4+r_2]{r_1-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6 & 22 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_2+r_3 \\ r_4-r_3}]{r_1-6r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ & & & \end{array}\right)$$

例 2 解方程组：$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=28 \\ -2x_1-3x_2-9x_3=-53 \\ 3x_1+6x_2+13x_3=88 \\ 5x_1+9x_2+22x_3=141 \end{cases}$

解

$$(A \vdots b)=\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 4 & 28 \\ -2 & -3 & -9 & -53 \\ 3 & 6 & 13 & 88 \\ 5 & 9 & 22 & 141 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-3r_1 \\ r_4-5r_1}]{r_2+2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 28 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4+r_2]{r_1-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6 & 22 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_2+r_3 \\ r_4-r_3}]{r_1-6r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

例 2 解方程组：
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 28 \\ -2x_1 - 3x_2 - 9x_3 = -53 \\ 3x_1 + 6x_2 + 13x_3 = 88 \\ 5x_1 + 9x_2 + 22x_3 = 141 \end{cases}$$

解

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 4 & 28 \\ -2 & -3 & -9 & -53 \\ 3 & 6 & 13 & 88 \\ 5 & 9 & 22 & 141 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-3r_1 \\ r_4-5r_1}]{r_2+2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 28 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4+r_2]{r_1-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6 & 22 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_2+r_3 \\ r_4-r_3}]{r_1-6r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

例 2 解方程组：
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 28 \\ -2x_1 - 3x_2 - 9x_3 = -53 \\ 3x_1 + 6x_2 + 13x_3 = 88 \\ 5x_1 + 9x_2 + 22x_3 = 141 \end{cases}$$

解

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 4 & 28 \\ -2 & -3 & -9 & -53 \\ 3 & 6 & 13 & 88 \\ 5 & 9 & 22 & 141 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-3r_1 \\ r_4-5r_1}]{r_2+2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 28 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4+r_2]{r_1-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6 & 22 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_2+r_3 \\ r_4-r_3}]{r_1-6r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

例 2 解方程组：$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=28 \\ -2x_1-3x_2-9x_3=-53 \\ 3x_1+6x_2+13x_3=88 \\ 5x_1+9x_2+22x_3=141 \end{cases}$

解

$$(A\,\vdots\,b)=\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 4 & 28 \\ -2 & -3 & -9 & -53 \\ 3 & 6 & 13 & 88 \\ 5 & 9 & 22 & 141 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-3r_1 \\ r_4-5r_1}]{r_2+2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 28 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4+r_2]{r_1-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6 & 22 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_2+r_3 \\ r_4-r_3}]{r_1-6r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

x_1, x_2, x_3 为主元，没有自由变量。

例 2 解方程组：$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 28 \\ -2x_1 - 3x_2 - 9x_3 = -53 \\ 3x_1 + 6x_2 + 13x_3 = 88 \\ 5x_1 + 9x_2 + 22x_3 = 141 \end{cases}$

解

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 4 & 28 \\ -2 & -3 & -9 & -53 \\ 3 & 6 & 13 & 88 \\ 5 & 9 & 22 & 141 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-3r_1 \\ r_4-5r_1}]{r_2+2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 28 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4+r_2]{r_1-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6 & 22 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_2+r_3 \\ r_4-r_3}]{r_1-6r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

x_1, x_2, x_3 为主元，没有自由变量。所以原方程组等价于

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad = -2 \\ \qquad x_2 \qquad = 7 \\ \qquad\qquad x_3 = 4 \end{cases}$$

例 2 解方程组：
$$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=28 \\ -2x_1-3x_2-9x_3=-53 \\ 3x_1+6x_2+13x_3=88 \\ 5x_1+9x_2+22x_3=141 \end{cases}$$

解

$$(A\vdots b)=\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 4 & 28 \\ -2 & -3 & -9 & -53 \\ 3 & 6 & 13 & 88 \\ 5 & 9 & 22 & 141 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-3r_1 \\ r_4-5r_1}]{r_2+2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 28 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4+r_2]{r_1-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6 & 22 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_2+r_3 \\ r_4-r_3}]{r_1-6r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

x_1,x_2,x_3 为主元，没有自由变量。所以原方程组等价于

$$\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 7 \\ x_3 = 4 \end{cases}$$

独立方程数 = 主元数

例 2 解方程组：
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 28 \\ -2x_1 - 3x_2 - 9x_3 = -53 \\ 3x_1 + 6x_2 + 13x_3 = 88 \\ 5x_1 + 9x_2 + 22x_3 = 141 \end{cases}$$

解

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 4 & 28 \\ -2 & -3 & -9 & -53 \\ 3 & 6 & 13 & 88 \\ 5 & 9 & 22 & 141 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-3r_1 \\ r_4-5r_1}]{r_2+2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 28 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4+r_2]{r_1-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6 & 22 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_2+r_3 \\ r_4-r_3}]{r_1-6r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

x_1, x_2, x_3 为主元，没有自由变量。所以原方程组等价于

$$\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 7 \\ x_3 = 4 \end{cases}$$

独立方程数 = 主元数 $\Leftrightarrow$ 存在解

例 2 解方程组：$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=28 \\ -2x_1-3x_2-9x_3=-53 \\ 3x_1+6x_2+13x_3=88 \\ 5x_1+9x_2+22x_3=141 \end{cases}$

解

$$(A\vdots b)=\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 4 & 28 \\ -2 & -3 & -9 & -53 \\ 3 & 6 & 13 & 88 \\ 5 & 9 & 22 & 141 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-3r_1 \\ r_4-5r_1}]{r_2+2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 28 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4+r_2]{r_1-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6 & 22 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_2+r_3 \\ r_4-r_3}]{r_1-6r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

x_1,x_2,x_3 为主元，没有自由变量。所以原方程组等价于

$$\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 7 \\ x_3 = 4 \end{cases}$$

$\underbrace{\text{独立方程数} = \text{主元数}}_{=\text{变量数}} \Leftrightarrow$ 存在解

例 2 解方程组：$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=28 \\ -2x_1-3x_2-9x_3=-53 \\ 3x_1+6x_2+13x_3=88 \\ 5x_1+9x_2+22x_3=141 \end{cases}$

解

$$(A \vdots b)=\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 4 & 28 \\ -2 & -3 & -9 & -53 \\ 3 & 6 & 13 & 88 \\ 5 & 9 & 22 & 141 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-3r_1 \\ r_4-5r_1}]{r_2+2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 28 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4+r_2]{r_1-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6 & 22 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_2+r_3 \\ r_4-r_3}]{r_1-6r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

x_1, x_2, x_3 为主元，没有自由变量。所以原方程组等价于

$$\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 7 \\ x_3 = 4 \end{cases}$$

独立方程数 = 主元数 $\Leftrightarrow$ 存在解
= 变量数 $\Leftrightarrow$ 唯一解

例 3 解方程组：
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 7x_3 = -3 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -1 \\ 5x_1 + 3x_2 - 11x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 2 \end{cases}$$

例 3 解方程组:
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 7x_3 = -3 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -1 \\ 5x_1 + 3x_2 - 11x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 2 \end{cases}$$

解

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -7 & -3 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ 5 & 3 & -11 & 2 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \end{array}\right)$$

例 3 解方程组：
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 7x_3 = -3 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -1 \\ 5x_1 + 3x_2 - 11x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 2 \end{cases}$$

解

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -7 & -3 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ 5 & 3 & -11 & 2 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4}$$

例 3 解方程组：
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 7x_3 = -3 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -1 \\ 5x_1 + 3x_2 - 11x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 2 \end{cases}$$

解

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -7 & -3 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ 5 & 3 & -11 & 2 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ 5 & 3 & -11 & 2 \\ 4 & 2 & -7 & -3 \end{array}\right)$$

例 3 解方程组：
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 7x_3 = -3 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -1 \\ 5x_1 + 3x_2 - 11x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 2 \end{cases}$$

解

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -7 & -3 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ 5 & 3 & -11 & 2 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ 5 & 3 & -11 & 2 \\ 4 & 2 & -7 & -3 \end{array}\right)$$

例 3 解方程组：
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 7x_3 = -3 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -1 \\ 5x_1 + 3x_2 - 11x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 2 \end{cases}$$

解

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -7 & -3 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ 5 & 3 & -11 & 2 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ 5 & 3 & -11 & 2 \\ 4 & 2 & -7 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3 - 5r_1 \\ r_4 - 4r_1}]{r_2 - 2r_1}$$

例 3 解方程组：
$$\begin{cases} 4x_1+2x_2-7x_3=-3 \\ 2x_1+x_2-4x_3=-1 \\ 5x_1+3x_2-11x_3=2 \\ x_1+x_2-4x_3=2 \end{cases}$$

解

$$(A\vdots b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -7 & -3 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ 5 & 3 & -11 & 2 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ 5 & 3 & -11 & 2 \\ 4 & 2 & -7 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-5r_1 \\ r_4-4r_1}]{r_2-2r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 2 \\ & & & \\ & & & \end{array}\right)$$

例 3 解方程组：$\begin{cases} 4x_1+2x_2-7x_3=-3 \\ 2x_1+x_2-4x_3=-1 \\ 5x_1+3x_2-11x_3=2 \\ x_1+x_2-4x_3=2 \end{cases}$

解

$$(A\vdots b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -7 & -3 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ 5 & 3 & -11 & 2 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_4} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ 5 & 3 & -11 & 2 \\ 4 & 2 & -7 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-5r_1 \\ r_4-4r_1}]{r_2-2r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & -5 \\ & & & \\ & & & \end{array}\right)$$

例 3 解方程组：$\begin{cases} 4x_1+2x_2-7x_3=-3 \\ 2x_1+x_2-4x_3=-1 \\ 5x_1+3x_2-11x_3=2 \\ x_1+x_2-4x_3=2 \end{cases}$

解

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -7 & -3 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ 5 & 3 & -11 & 2 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ 5 & 3 & -11 & 2 \\ 4 & 2 & -7 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-5r_1 \\ r_4-4r_1}]{r_2-2r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & -5 \\ 0 & -2 & 9 & -8 \\ & & & \end{array}\right)$$

例 3 解方程组:
$$\begin{cases} 4x_1+2x_2-7x_3=-3 \\ 2x_1+x_2-4x_3=-1 \\ 5x_1+3x_2-11x_3=2 \\ x_1+x_2-4x_3=2 \end{cases}$$

解

$$(A\,\vdots\,b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -7 & -3 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ 5 & 3 & -11 & 2 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_4} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ 5 & 3 & -11 & 2 \\ 4 & 2 & -7 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-5r_1\\ r_4-4r_1}]{r_2-2r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & -5 \\ 0 & -2 & 9 & -8 \\ 0 & -2 & 9 & -11 \end{array}\right)$$

例 3 解方程组：$\begin{cases} 4x_1+2x_2-7x_3=-3 \\ 2x_1+x_2-4x_3=-1 \\ 5x_1+3x_2-11x_3=2 \\ x_1+x_2-4x_3=2 \end{cases}$

解

$$(A \vdots b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -7 & -3 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ 5 & 3 & -11 & 2 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ 5 & 3 & -11 & 2 \\ 4 & 2 & -7 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-5r_1 \\ r_4-4r_1}]{r_2-2r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & \boxed{-1} & 4 & -5 \\ 0 & -2 & 9 & -8 \\ 0 & -2 & 9 & -11 \end{array}\right)$$

例 3 解方程组：$\begin{cases} 4x_1+2x_2-7x_3=-3 \\ 2x_1+x_2-4x_3=-1 \\ 5x_1+3x_2-11x_3=2 \\ x_1+x_2-4x_3=2 \end{cases}$

解

$$(A\vdots b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -7 & -3 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ 5 & 3 & -11 & 2 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ 5 & 3 & -11 & 2 \\ 4 & 2 & -7 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-5r_1 \\ r_4-4r_1}]{r_2-2r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & \boxed{-1} & 4 & -5 \\ 0 & -2 & 9 & -8 \\ 0 & -2 & 9 & -11 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3+2r_2 \\ r_4+2r_2}]{r_1+r_2}$$

例 3 解方程组：
$$\begin{cases} 4x_1+2x_2-7x_3=-3 \\ 2x_1+x_2-4x_3=-1 \\ 5x_1+3x_2-11x_3=2 \\ x_1+x_2-4x_3=2 \end{cases}$$

解

$$(A\vdots b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -7 & -3 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ 5 & 3 & -11 & 2 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_4} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ 5 & 3 & -11 & 2 \\ 4 & 2 & -7 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-5r_1 \\ r_4-4r_1}]{r_2-2r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & \boxed{-1} & 4 & -5 \\ 0 & -2 & 9 & -8 \\ 0 & -2 & 9 & -11 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3+2r_2 \\ r_4+2r_2}]{r_1+r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 4 & -5 \\ & & & \\ & & & \end{array}\right)$$

例 3 解方程组：
$$\begin{cases} 4x_1+2x_2-7x_3=-3 \\ 2x_1+x_2-4x_3=-1 \\ 5x_1+3x_2-11x_3=2 \\ x_1+x_2-4x_3=2 \end{cases}$$

解

$$(A\,\vdots\,b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -7 & -3 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ 5 & 3 & -11 & 2 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_4} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ 5 & 3 & -11 & 2 \\ 4 & 2 & -7 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-5r_1 \\ r_4-4r_1}]{r_2-2r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & \boxed{-1} & 4 & -5 \\ 0 & -2 & 9 & -8 \\ 0 & -2 & 9 & -11 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3+2r_2 \\ r_4+2r_2}]{r_1+r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 4 & -5 \\ & & & \\ & & & \end{array}\right)$$

例 3 解方程组：
$$\begin{cases} 4x_1+2x_2-7x_3=-3 \\ 2x_1+x_2-4x_3=-1 \\ 5x_1+3x_2-11x_3=2 \\ x_1+x_2-4x_3=2 \end{cases}$$

解

$$(A \vdots b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -7 & -3 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ 5 & 3 & -11 & 2 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ 5 & 3 & -11 & 2 \\ 4 & 2 & -7 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-5r_1 \\ r_4-4r_1}]{r_2-2r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & \boxed{-1} & 4 & -5 \\ 0 & -2 & 9 & -8 \\ 0 & -2 & 9 & -11 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3+2r_2 \\ r_4+2r_2}]{r_1+r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ & & & \end{array}\right)$$

例 3 解方程组：
$$\begin{cases} 4x_1+2x_2-7x_3=-3 \\ 2x_1+x_2-4x_3=-1 \\ 5x_1+3x_2-11x_3=2 \\ x_1+x_2-4x_3=2 \end{cases}$$

解

$$(A\vdots b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -7 & -3 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ 5 & 3 & -11 & 2 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_4} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ 5 & 3 & -11 & 2 \\ 4 & 2 & -7 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-5r_1 \\ r_4-4r_1}]{r_2-2r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & \boxed{-1} & 4 & -5 \\ 0 & -2 & 9 & -8 \\ 0 & -2 & 9 & -11 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3+2r_2 \\ r_4+2r_2}]{r_1+r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

例 3 解方程组：
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 7x_3 = -3 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -1 \\ 5x_1 + 3x_2 - 11x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 2 \end{cases}$$

解

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -7 & -3 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ 5 & 3 & -11 & 2 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ 5 & 3 & -11 & 2 \\ 4 & 2 & -7 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3 - 5r_1 \\ r_4 - 4r_1}]{r_2 - 2r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & \boxed{-1} & 4 & -5 \\ 0 & -2 & 9 & -8 \\ 0 & -2 & 9 & -11 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3 + 2r_2 \\ r_4 + 2r_2}]{r_1 + r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

例 3 解方程组：$\begin{cases} 4x_1+2x_2-7x_3=-3 \\ 2x_1+x_2-4x_3=-1 \\ 5x_1+3x_2-11x_3=2 \\ x_1+x_2-4x_3=2 \end{cases}$

解

$$(A\vdots b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -7 & -3 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ 5 & 3 & -11 & 2 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_4} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ 5 & 3 & -11 & 2 \\ 4 & 2 & -7 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-5r_1 \\ r_4-4r_1}]{r_2-2r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & \boxed{-1} & 4 & -5 \\ 0 & -2 & 9 & -8 \\ 0 & -2 & 9 & -11 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3+2r_2 \\ r_4+2r_2}]{r_1+r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

例 3 解方程组：$\begin{cases} 4x_1+2x_2-7x_3=-3 \\ 2x_1+x_2-4x_3=-1 \\ 5x_1+3x_2-11x_3=2 \\ x_1+x_2-4x_3=2 \end{cases}$

解

$$(A\vdots b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -7 & -3 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ 5 & 3 & -11 & 2 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_4} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ 5 & 3 & -11 & 2 \\ 4 & 2 & -7 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-5r_1 \\ r_4-4r_1}]{r_2-2r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & \boxed{-1} & 4 & -5 \\ 0 & -2 & 9 & -8 \\ 0 & -2 & 9 & -11 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3+2r_2 \\ r_4+2r_2}]{r_1+r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

例 3 解方程组：$\begin{cases} 4x_1+2x_2-7x_3=-3 \\ 2x_1+x_2-4x_3=-1 \\ 5x_1+3x_2-11x_3=2 \\ x_1+x_2-4x_3=2 \end{cases}$

解

$$(A\,\vdots\,b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -7 & -3 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ 5 & 3 & -11 & 2 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_4} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ 5 & 3 & -11 & 2 \\ 4 & 2 & -7 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-5r_1 \\ r_4-4r_1}]{r_2-2r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & \boxed{-1} & 4 & -5 \\ 0 & -2 & 9 & -8 \\ 0 & -2 & 9 & -11 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3+2r_2 \\ r_4+2r_2}]{r_1+r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

所以原方程组等价于

$$\begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 13 \\ x_3 = 2 \\ 0 = -3 \end{cases}$$

例 3 解方程组：
$$\begin{cases} 4x_1+2x_2-7x_3=-3 \\ 2x_1+x_2-4x_3=-1 \\ 5x_1+3x_2-11x_3=2 \\ x_1+x_2-4x_3=2 \end{cases}$$

解

$$(A\vdots b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -7 & -3 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ 5 & 3 & -11 & 2 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_4} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ 5 & 3 & -11 & 2 \\ 4 & 2 & -7 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-5r_1 \\ r_4-4r_1}]{r_2-2r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & \boxed{-1} & 4 & -5 \\ 0 & -2 & 9 & -8 \\ 0 & -2 & 9 & -11 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3+2r_2 \\ r_4+2r_2}]{r_1+r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

所以原方程组等价于

$$\begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 13 \\ x_3 = 2 \\ 0 = -3 \end{cases} \Rightarrow \quad \text{无解！}$$

例 3 解方程组：
$$\begin{cases} 4x_1+2x_2-7x_3=-3 \\ 2x_1+x_2-4x_3=-1 \\ 5x_1+3x_2-11x_3=2 \\ x_1+x_2-4x_3=2 \end{cases}$$

解

$$(A\vdots b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -7 & -3 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ 5 & 3 & -11 & 2 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_4} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ 5 & 3 & -11 & 2 \\ 4 & 2 & -7 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-5r_1 \\ r_4-4r_1}]{r_2-2r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & \boxed{-1} & 4 & -5 \\ 0 & -2 & 9 & -8 \\ 0 & -2 & 9 & -11 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3+2r_2 \\ r_4+2r_2}]{r_1+r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

所以原方程组等价于

$$\begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 13 \\ x_3 = 2 \\ 0 = -3 \end{cases} \Rightarrow$$

独立方程数 > 主元数

无解！

例 3 解方程组：$\begin{cases} 4x_1+2x_2-7x_3=-3 \\ 2x_1+x_2-4x_3=-1 \\ 5x_1+3x_2-11x_3=2 \\ x_1+x_2-4x_3=2 \end{cases}$

解

$$(A\,\vdots\,b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -7 & -3 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ 5 & 3 & -11 & 2 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_4} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ 5 & 3 & -11 & 2 \\ 4 & 2 & -7 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-5r_1 \\ r_4-4r_1}]{r_2-2r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & \boxed{-1} & 4 & -5 \\ 0 & -2 & 9 & -8 \\ 0 & -2 & 9 & -11 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3+2r_2 \\ r_4+2r_2}]{r_1+r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

所以原方程组等价于

$$\begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 13 \\ x_3 = 2 \\ 0 = -3 \end{cases} \Rightarrow \text{无解！}$$

独立方程数 $>$ 主元数 $\Leftrightarrow$ 无解

总结

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = -5 \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 28 \\ -2x_1 - 3x_2 - 9x_3 = -53 \\ 3x_1 + 6x_2 + 13x_3 = 88 \\ 5x_1 + 9x_2 + 22x_3 = 141 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 7x_3 = -3 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -1 \\ 5x_1 + 3x_2 - 11x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 2 \end{cases}$$

总结

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = -5 \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$(A \vdots b)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 28 \\ -2x_1 - 3x_2 - 9x_3 = -53 \\ 3x_1 + 6x_2 + 13x_3 = 88 \\ 5x_1 + 9x_2 + 22x_3 = 141 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$(A \vdots b)$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 7x_3 = -3 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -1 \\ 5x_1 + 3x_2 - 11x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$(A \vdots b)$$

总结

$$\begin{cases} x_1+ & x_2- & x_3 & =2 \\ x_1+ & 2x_2 & & =-1 \\ 2x_1+ & 5x_2+ & x_3 & =-5 \\ -2x_1- & 3x_2+ & x_3 & =-1 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$(A \vdots b)$$

初等 $\Downarrow$ 行变换

$$\begin{cases} x_1+ & 2x_2+ & 4x_3 = & 28 \\ -2x_1- & 3x_2- & 9x_3 = & -53 \\ 3x_1+ & 6x_2+ & 13x_3 = & 88 \\ 5x_1+ & 9x_2+ & 22x_3 = & 141 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$(A \vdots b)$$

初等 $\Downarrow$ 行变换

$$\begin{cases} 4x_1+ & 2x_2- & 7x_3 = & -3 \\ 2x_1+ & x_2- & 4x_3 = & -1 \\ 5x_1+ & 3x_2- & 11x_3 = & 2 \\ x_1+ & x_2- & 4x_3 = & 2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$(A \vdots b)$$

初等 $\Downarrow$ 行变换

总结

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=2\\ x_1+2x_2=-1\\ 2x_1+5x_2+x_3=-5\\ -2x_1-3x_2+x_3=-1 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$(A \vdots b)$$

初等 $\Downarrow$ 行变换

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 5\\ 0 & 1 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=28\\ -2x_1-3x_2-9x_3=-53\\ 3x_1+6x_2+13x_3=88\\ 5x_1+9x_2+22x_3=141 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$(A \vdots b)$$

初等 $\Downarrow$ 行变换

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 7\\ 0 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2-7x_3=-3\\ 2x_1+x_2-4x_3=-1\\ 5x_1+3x_2-11x_3=2\\ x_1+x_2-4x_3=2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$(A \vdots b)$$

初等 $\Downarrow$ 行变换

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 0 & 13\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

总结

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = -5 \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$(A \vdots b)$$

初等 $\Downarrow$ 行变换

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 28 \\ -2x_1 - 3x_2 - 9x_3 = -53 \\ 3x_1 + 6x_2 + 13x_3 = 88 \\ 5x_1 + 9x_2 + 22x_3 = 141 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$(A \vdots b)$$

初等 $\Downarrow$ 行变换

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 7x_3 = -3 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -1 \\ 5x_1 + 3x_2 - 11x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$(A \vdots b)$$

初等 $\Downarrow$ 行变换

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

总结

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=2 \\ x_1+2x_2=-1 \\ 2x_1+5x_2+x_3=-5 \\ -2x_1-3x_2+x_3=-1 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$(A \vdots b)$$

初等 ⇓ 行变换

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

无穷多解

$$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=28 \\ -2x_1-3x_2-9x_3=-53 \\ 3x_1+6x_2+13x_3=88 \\ 5x_1+9x_2+22x_3=141 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$(A \vdots b)$$

初等 ⇓ 行变换

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

唯一解

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2-7x_3=-3 \\ 2x_1+x_2-4x_3=-1 \\ 5x_1+3x_2-11x_3=2 \\ x_1+x_2-4x_3=2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$(A \vdots b)$$

初等 ⇓ 行变换

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

无解

总结

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=2 \\ x_1+2x_2=-1 \\ 2x_1+5x_2+x_3=-5 \\ -2x_1-3x_2+x_3=-1 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$(A \vdots b)$$

初等 $\Downarrow$ 行变换

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

无穷多解

主元数 = 独立方程数

$$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=28 \\ -2x_1-3x_2-9x_3=-53 \\ 3x_1+6x_2+13x_3=88 \\ 5x_1+9x_2+22x_3=141 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$(A \vdots b)$$

初等 $\Downarrow$ 行变换

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

唯一解

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2-7x_3=-3 \\ 2x_1+x_2-4x_3=-1 \\ 5x_1+3x_2-11x_3=2 \\ x_1+x_2-4x_3=2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$(A \vdots b)$$

初等 $\Downarrow$ 行变换

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

无解

总结

$$\begin{cases} x_1+ x_2- x_3 =2 \\ x_1+ 2x_2 =-1 \\ 2x_1+ 5x_2+ x_3 =-5 \\ -2x_1- 3x_2+ x_3 =-1 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$(A \vdots b)$$

初等 $\Downarrow$ 行变换

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

无穷多解

主元数 $=$ 独立方程数 $< n$

$$\begin{cases} x_1+ 2x_2+ 4x_3 = 28 \\ -2x_1- 3x_2- 9x_3 = -53 \\ 3x_1+ 6x_2+ 13x_3 = 88 \\ 5x_1+ 9x_2+ 22x_3 = 141 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$(A \vdots b)$$

初等 $\Downarrow$ 行变换

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

唯一解

$$\begin{cases} 4x_1+ 2x_2- 7x_3 = -3 \\ 2x_1+ x_2- 4x_3 = -1 \\ 5x_1+ 3x_2- 11x_3 = 2 \\ x_1+ x_2- 4x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$(A \vdots b)$$

初等 $\Downarrow$ 行变换

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

无解

总结

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = -5 \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$(A \vdots b)$$

初等 $\Downarrow$ 行变换

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

无穷多解

主元数 = 独立方程数 $< n$

$$r(A) = r(A \vdots b) < n$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 28 \\ -2x_1 - 3x_2 - 9x_3 = -53 \\ 3x_1 + 6x_2 + 13x_3 = 88 \\ 5x_1 + 9x_2 + 22x_3 = 141 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$(A \vdots b)$$

初等 $\Downarrow$ 行变换

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

唯一解

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 7x_3 = -3 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -1 \\ 5x_1 + 3x_2 - 11x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$(A \vdots b)$$

初等 $\Downarrow$ 行变换

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

无解

总结

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=2 \\ x_1+2x_2=-1 \\ 2x_1+5x_2+x_3=-5 \\ -2x_1-3x_2+x_3=-1 \end{cases} \Downarrow (A\vdots b) \text{ 初等}\Downarrow\text{行变换} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

无穷多解

主元数 = 独立方程数 $< n$

$$r(A)=r(A\vdots b)<n$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=28 \\ -2x_1-3x_2-9x_3=-53 \\ 3x_1+6x_2+13x_3=88 \\ 5x_1+9x_2+22x_3=141 \end{cases} \Downarrow (A\vdots b) \text{ 初等}\Downarrow\text{行变换} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

唯一解

主元数 = 独立方程数

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2-7x_3=-3 \\ 2x_1+x_2-4x_3=-1 \\ 5x_1+3x_2-11x_3=2 \\ x_1+x_2-4x_3=2 \end{cases} \Downarrow (A\vdots b) \text{ 初等}\Downarrow\text{行变换} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

无解

总结

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=2\\ x_1+2x_2=-1\\ 2x_1+5x_2+x_3=-5\\ -2x_1-3x_2+x_3=-1\end{cases}$$

$\Downarrow$

$(A \vdots b)$

初等 $\Downarrow$ 行变换

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 5\\ 0 & 1 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

无穷多解

主元数 $=$ 独立方程数 $< n$

$r(A)=r(A \vdots b)<n$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=28\\ -2x_1-3x_2-9x_3=-53\\ 3x_1+6x_2+13x_3=88\\ 5x_1+9x_2+22x_3=141\end{cases}$$

$\Downarrow$

$(A \vdots b)$

初等 $\Downarrow$ 行变换

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 7\\ 0 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

唯一解

主元数 $=$ 独立方程数 $= n$

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2-7x_3=-3\\ 2x_1+x_2-4x_3=-1\\ 5x_1+3x_2-11x_3=2\\ x_1+x_2-4x_3=2\end{cases}$$

$\Downarrow$

$(A \vdots b)$

初等 $\Downarrow$ 行变换

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 0 & 13\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -3\end{array}\right)$$

无解

总结

$$\begin{cases} x_1+ \ x_2- \ x_3 = 2 \\ x_1+ \ 2x_2 = -1 \\ 2x_1+ \ 5x_2+ \ x_3 = -5 \\ -2x_1- \ 3x_2+ \ x_3 = -1 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$(A \vdots b)$$

初等 $\Downarrow$ 行变换

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

无穷多解

主元数 = 独立方程数 $< n$

$$r(A) = r(A \vdots b) < n$$

$$\begin{cases} x_1+ \ 2x_2+ \ 4x_3 = 28 \\ -2x_1- \ 3x_2- \ 9x_3 = -53 \\ 3x_1+ \ 6x_2+ \ 13x_3 = 88 \\ 5x_1+ \ 9x_2+ \ 22x_3 = 141 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$(A \vdots b)$$

初等 $\Downarrow$ 行变换

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

唯一解

主元数 = 独立方程数 $= n$

$$r(A) = r(A \vdots b) = n$$

$$\begin{cases} 4x_1+ \ 2x_2- \ 7x_3 = -3 \\ 2x_1+ \ x_2- \ 4x_3 = -1 \\ 5x_1+ \ 3x_2- \ 11x_3 = 2 \\ x_1+ \ x_2- \ 4x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$(A \vdots b)$$

初等 $\Downarrow$ 行变换

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

无解

总结

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=2\\ x_1+2x_2=-1\\ 2x_1+5x_2+x_3=-5\\ -2x_1-3x_2+x_3=-1\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$(A \vdots b)$$

初等 $\Downarrow$ 行变换

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 5\\ 0 & 1 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

无穷多解

主元数 = 独立方程数 $< n$

$$r(A)=r(A \vdots b)<n$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=28\\ -2x_1-3x_2-9x_3=-53\\ 3x_1+6x_2+13x_3=88\\ 5x_1+9x_2+22x_3=141\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$(A \vdots b)$$

初等 $\Downarrow$ 行变换

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 7\\ 0 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

唯一解

主元数 = 独立方程数 $= n$

$$r(A)=r(A \vdots b)=n$$

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2-7x_3=-3\\ 2x_1+x_2-4x_3=-1\\ 5x_1+3x_2-11x_3=2\\ x_1+x_2-4x_3=2\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$(A \vdots b)$$

初等 $\Downarrow$ 行变换

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 0 & 13\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -3\end{array}\right)$$

无解

主元数 $<$ 独立方程数

总结

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=2 \\ x_1+2x_2=-1 \\ 2x_1+5x_2+x_3=-5 \\ -2x_1-3x_2+x_3=-1 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$(A \vdots b)$$

初等 $\Downarrow$ 行变换

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

无穷多解

主元数 $=$ 独立方程数 $< n$

$$r(A) = r(A \vdots b) < n$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=28 \\ -2x_1-3x_2-9x_3=-53 \\ 3x_1+6x_2+13x_3=88 \\ 5x_1+9x_2+22x_3=141 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$(A \vdots b)$$

初等 $\Downarrow$ 行变换

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

唯一解

主元数 $=$ 独立方程数 $= n$

$$r(A) = r(A \vdots b) = n$$

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2-7x_3=-3 \\ 2x_1+x_2-4x_3=-1 \\ 5x_1+3x_2-11x_3=2 \\ x_1+x_2-4x_3=2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$(A \vdots b)$$

初等 $\Downarrow$ 行变换

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

无解

主元数 $<$ 独立方程数

$$r(A) < r(A \vdots b)$$

总结

定理 方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Leftrightarrow Ax = b$$
的解有如下情形：

总结

定理 方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ $\Leftrightarrow Ax = b$ 的

解有如下情形：

1. 有解 $\Leftrightarrow$
   - 有无穷多解 $\Leftrightarrow$
   - 只有唯一解 $\Leftrightarrow$
2. 无解 $\Leftrightarrow$

总结

定理 方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ $\Leftrightarrow Ax = b$ 的

解有如下情形：

1. 有解 $\Leftrightarrow r(A) = r(A \vdots b)$
   - 有无穷多解 $\Leftrightarrow$
   - 只有唯一解 $\Leftrightarrow$
2. 无解 $\Leftrightarrow$ $r(A) \neq r(A \vdots b)$

总结

定理 方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ $\Leftrightarrow Ax = b$ 的

解有如下情形：

1. 有解 $\Leftrightarrow r(A) = r(A \vdots b)$
   - 有无穷多解 $\Leftrightarrow$
   - 只有唯一解 $\Leftrightarrow$
2. 无解 $\Leftrightarrow$ $r(A) \neq r(A \vdots b)$

注

- $r(A) =$ 主元数；$r(A \vdots b) =$ 独立方程数

总结

定理 方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ $\Leftrightarrow Ax = b$ 的

解有如下情形：

1. 有解 $\Leftrightarrow r(A) = r(A \vdots b)$ （主元数 $=$ 独立方程数）
   - 有无穷多解 $\Leftrightarrow$
   - 只有唯一解 $\Leftrightarrow$
2. 无解 $\Leftrightarrow$ $r(A) \neq r(A \vdots b)$ （主元数 $\neq$ 独立方程数）

注

- $r(A) =$ 主元数；$r(A \vdots b) =$ 独立方程数

总结

定理 方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \Leftrightarrow Ax=b \text{ 的}$$

解有如下情形：

1. 有解 $\Leftrightarrow r(A)=r(A\vdots b)$ （主元数 $=$ 独立方程数）
   - 有无穷多解 $\Leftrightarrow$
   - 只有唯一解 $\Leftrightarrow$
2. 无解 $\Leftrightarrow$ $r(A)\neq r(A\vdots b)$ $\Leftrightarrow$ $r(A)<r(A\vdots b)$（主元数 $\neq$ 独立方程数）

注

- $r(A)=$ 主元数；$r(A\vdots b)=$ 独立方程数

总结

定理 方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Leftrightarrow Ax = b$$ 的解有如下情形：

1. 有解 $\Leftrightarrow r(A) = r(A \vdots b)$ （主元数 = 独立方程数）
   - 有无穷多解 $\Leftrightarrow r(A) = r(A \vdots b) < n$
   - 只有唯一解 $\Leftrightarrow r(A) = r(A \vdots b) = n$
2. 无解 $\Leftrightarrow r(A) \neq r(A \vdots b) \Leftrightarrow r(A) < r(A \vdots b)$ （主元数 $\neq$ 独立方程数）

注

- $r(A) =$ 主元数；$r(A \vdots b) =$ 独立方程数

总结

定理 方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ $\Leftrightarrow Ax = b$ 的

解有如下情形：

1. 有解 $\Leftrightarrow r(A) = r(A \vdots b)$ （主元数 $=$ 独立方程数）
   - 有无穷多解 $\Leftrightarrow r(A) = r(A \vdots b) < n$
   - 只有唯一解 $\Leftrightarrow r(A) = r(A \vdots b) = n$
2. 无解 $\Leftrightarrow$ $r(A) \neq r(A \vdots b) \Leftrightarrow r(A) < r(A \vdots b)$ （主元数 $\neq$ 独立方程数）

注

- $r(A) =$ 主元数；$r(A \vdots b) =$ 独立方程数
- $n - r(A)$ 为自由变量的个数

总结

定理 方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ $\Leftrightarrow Ax = b$ 的

解有如下情形：

1. 有解 $\Leftrightarrow r(A) = r(A \vdots b)$ （主元数 = 独立方程数）
   - 有无穷多解 $\Leftrightarrow r(A) = r(A \vdots b) < n$ （自由变量数 ≥ 1）
   - 只有唯一解 $\Leftrightarrow r(A) = r(A \vdots b) = n$ （自由变量数 $= 0$）
2. 无解 $\Leftrightarrow r(A) \neq r(A \vdots b) \Leftrightarrow r(A) < r(A \vdots b)$（主元数 $\neq$ 独立方程数）

注

- $r(A) =$ 主元数；$r(A \vdots b) =$ 独立方程数
- $n - r(A)$ 为自由变量的个数

练习 1 求解 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 7 \\ 2x_3 + 5x_4 - 2x_5 = 9 \end{cases}$

练习 1 求解 $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ 2x_1+4x_2+3x_3+x_4+x_5=3 \\ -x_1-2x_2+x_3+3x_4-3x_5=7 \\ 2x_3+5x_4-2x_5=9 \end{cases}$

解

$$(A \vdots b)=\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 3 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & -2 & 9 \end{array}\right)$$

练习 1 求解
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 7 \\ 2x_3 + 5x_4 - 2x_5 = 9 \end{cases}$$

解

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 3 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & -2 & 9 \end{array}\right)$$

练习 1 求解 $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ 2x_1+4x_2+3x_3+x_4+x_5=3 \\ -x_1-2x_2+x_3+3x_4-3x_5=7 \\ 2x_3+5x_4-2x_5=9 \end{cases}$

解

$$(A \vdots b)=\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 3 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & -2 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1}$$

练习 1 求解 $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ 2x_1+4x_2+3x_3+x_4+x_5=3 \\ -x_1-2x_2+x_3+3x_4-3x_5=7 \\ 2x_3+5x_4-2x_5=9 \end{cases}$

解

$$(A \vdots b)=\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 3 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & -2 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & -2 & 9 \end{array}\right)$$

练习 1 求解 $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ 2x_1+4x_2+3x_3+x_4+x_5=3 \\ -x_1-2x_2+x_3+3x_4-3x_5=7 \\ 2x_3+5x_4-2x_5=9 \end{cases}$

解

$$(A\vdots b)=\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 3 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & -2 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & -2 & 9 \end{array}\right)$$

练习 1 求解 $\begin{cases} x_1+ 2x_2+ x_3+ x_4+ x_5 = 1 \\ 2x_1+ 4x_2+ 3x_3+ x_4+ x_5 = 3 \\ -x_1- 2x_2+ x_3+ 3x_4- 3x_5 = 7 \\ 2x_3+ 5x_4- 2x_5 = 9 \end{cases}$

解

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 3 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & -2 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & -2 & 9 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4-2r_2]{r_3-2r_2}$$

练习 1 求解 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 7 \\ 2x_3 + 5x_4 - 2x_5 = 9 \end{cases}$

解

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 3 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & -2 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & -2 & 9 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4-2r_2]{r_3-2r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 7 \end{array}\right)$$

练习 1 求解 $\begin{cases} x_1+ & 2x_2+ & x_3+ & x_4+ & x_5= & 1 \\ 2x_1+ & 4x_2+ & 3x_3+ & x_4+ & x_5= & 3 \\ -x_1- & 2x_2+ & x_3+ & 3x_4- & 3x_5= & 7 \\ & & 2x_3+ & 5x_4- & 2x_5= & 9 \end{cases}$

解

$$(A \vdots b)=\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 3 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & -2 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & -2 & 9 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4-2r_2]{r_3-2r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{6} & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 7 \end{array}\right)$$

练习 1 求解 $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ 2x_1+4x_2+3x_3+x_4+x_5=3 \\ -x_1-2x_2+x_3+3x_4-3x_5=7 \\ 2x_3+5x_4-2x_5=9 \end{cases}$

解

$$(A\vdots b)=\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 3 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & -2 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & -2 & 9 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4-2r_2]{r_3-2r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{6} & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{7}\times r_4]{\frac{1}{6}\times r_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

练习 1 求解 $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ 2x_1+4x_2+3x_3+x_4+x_5=3 \\ -x_1-2x_2+x_3+3x_4-3x_5=7 \\ 2x_3+5x_4-2x_5=9 \end{cases}$

解

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 3 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & -2 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & -2 & 9 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4-2r_2]{r_3-2r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{6} & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{7}\times r_4]{\frac{1}{6}\times r_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_4-r_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

练习 1 求解 $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ 2x_1+4x_2+3x_3+x_4+x_5=3 \\ -x_1-2x_2+x_3+3x_4-3x_5=7 \\ 2x_3+5x_4-2x_5=9 \end{cases}$

解

$$(A \vdots b)=\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 3 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & -2 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & -2 & 9 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4-2r_2]{r_3-2r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{6} & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{7}\times r_4]{\frac{1}{6}\times r_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_4-r_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_1-r_3]{r_2+r_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

练习 1 求解 $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ 2x_1+4x_2+3x_3+x_4+x_5=3 \\ -x_1-2x_2+x_3+3x_4-3x_5=7 \\ 2x_3+5x_4-2x_5=9 \end{cases}$

解

$$(A\vdots b)=\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 3 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & -2 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & -2 & 9 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4-2r_2]{r_3-2r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{6} & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{7}\times r_4]{\frac{1}{6}\times r_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_4-r_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_1-r_3]{r_2+r_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

练习 1 求解 $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ 2x_1+4x_2+3x_3+x_4+x_5=3 \\ -x_1-2x_2+x_3+3x_4-3x_5=7 \\ 2x_3+5x_4-2x_5=9 \end{cases}$

解

$$(A\vdots b)=\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 3 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & -2 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & -2 & 9 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4-2r_2]{r_3-2r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{6} & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{7}\times r_4]{\frac{1}{6}\times r_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_4-r_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_1-r_3]{r_2+r_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1-r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

练习 1 求解 $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ 2x_1+4x_2+3x_3+x_4+x_5=3 \\ -x_1-2x_2+x_3+3x_4-3x_5=7 \\ 2x_3+5x_4-2x_5=9 \end{cases}$

解

$$(A\,\vdots\,b)=\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 3 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & -2 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & -2 & 9 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4-2r_2]{r_3-2r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{6} & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{7}\times r_4]{\frac{1}{6}\times r_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_4-r_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_1-r_3]{r_2+r_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1-r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

解

$$(A \vdots b) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

解

$$(A \vdots b) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

解

$$(A \vdots b) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- 主元：x_1, x_3, x_4；自由变量：x_2, x_5。

解

$$(A \vdots b) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- 主元：x_1, x_3, x_4；自由变量：x_2, x_5。

（$r(A) = r(A \vdots b) = 3 < 5$，无穷多解）

解

$$(A\vdots b)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- 主元：x_1, x_3, x_4；自由变量：x_2, x_5。

  （$r(A) = r(A\vdots b) = 3 < 5$，无穷多解）

- 由既约阶梯形矩阵可知，原方程组等价于

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \quad\quad + 2x_5 = -2 \\ \quad\quad\quad x_3 \quad - \quad x_5 = 2 \\ \quad\quad\quad\quad x_4 \quad\quad\quad = 1 \end{cases}$$

解

$$(A \vdots b) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- 主元：x_1, x_3, x_4；自由变量：x_2, x_5。

  （$r(A) = r(A \vdots b) = 3 < 5$，无穷多解）

- 由既约阶梯形矩阵可知，原方程组等价于

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad + 2x_5 = -2 \\ \qquad\qquad x_3 - x_5 = 2 \\ \qquad\qquad x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 - 2x_2 - 2x_5 \\ x_3 = 2 + x_5 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

解

$$(A\vdots b)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccccc|c}1&2&0&0&2&-2\\0&0&1&0&-1&2\\0&0&0&1&0&1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

- 主元：x_1, x_3, x_4；自由变量：x_2, x_5。

 （$r(A)=r(A\vdots b)=3<5$，无穷多解）

- 由既约阶梯形矩阵可知，原方程组等价于

$$\begin{cases}x_1+2x_2 \qquad\quad +2x_5=-2\\ \qquad\qquad x_3 \quad - \quad x_5=2\\ \qquad\qquad\quad x_4 \qquad\quad =1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-2-2x_2-2x_5\\x_3=2+x_5\\x_4=1\end{cases}$$

所以通解是

$$\begin{cases}x_1=\\x_2=c_1\\x_3=\\x_4=\\x_5=c_2\end{cases}\qquad (c_1,\ c_2\text{为任意常数})$$

解

$$(A \vdots b) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- 主元：x_1, x_3, x_4；自由变量：x_2, x_5。

  （$r(A) = r(A \vdots b) = 3 < 5$，无穷多解）

- 由既约阶梯形矩阵可知，原方程组等价于

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad\qquad + 2x_5 = -2 \\ \qquad\qquad x_3 \quad - \quad x_5 = 2 \\ \qquad\qquad\quad x_4 \qquad\quad = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 - 2x_2 - 2x_5 \\ x_3 = 2 + x_5 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

所以通解是

$$\begin{cases} x_1 = -2 - 2c_1 - 2c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = \\ x_4 = \\ x_5 = c_2 \end{cases} \qquad (c_1, c_2\text{为任意常数})$$

解

$$(A \vdots b) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- 主元：x_1, x_3, x_4；自由变量：x_2, x_5。

  （$r(A) = r(A \vdots b) = 3 < 5$，无穷多解）

- 由既约阶梯形矩阵可知，原方程组等价于

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad + 2x_5 = -2 \\ \qquad x_3 \quad - \quad x_5 = 2 \\ \qquad\quad x_4 \qquad = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 - 2x_2 - 2x_5 \\ x_3 = 2 + x_5 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

所以通解是

$$\begin{cases} x_1 = -2 - 2c_1 - 2c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = 2 + c_2 \\ x_4 = \\ x_5 = c_2 \end{cases} \qquad (c_1, c_2\text{为任意常数})$$

解

$$(A \vdots b) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- 主元：x_1, x_3, x_4；自由变量：x_2, x_5。

  （$r(A) = r(A \vdots b) = 3 < 5$，无穷多解）

- 由既约阶梯形矩阵可知，原方程组等价于

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad + 2x_5 = -2 \\ \qquad\quad x_3 - x_5 = 2 \\ \qquad\quad\ x_4 \qquad = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 - 2x_2 - 2x_5 \\ x_3 = 2 + x_5 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

所以通解是

$$\begin{cases} x_1 = -2 - 2c_1 - 2c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = 2 + c_2 \\ x_4 = 1 \\ x_5 = c_2 \end{cases} \qquad (c_1, c_2 \text{为任意常数})$$

例 2 讨论 a, b 取何值时，方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$

有无穷解、唯一解，及无解？

例 2 讨论 a, b 取何值时，方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$

有无穷解、唯一解，及无解？

解

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 3 & 2 & 1 & a & -1 \end{array}\right)$$

例 2 讨论 a, b 取何值时，方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$

有无穷解、唯一解，及无解？

解

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 3 & 2 & 1 & a & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_4 - 3r_1}$$

例 2 讨论 a, b 取何值时，方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$

有无穷解、唯一解，及无解？

解

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 3 & 2 & 1 & a & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_4 - 3r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 0 & -1 & -2 & a-3 & -1 \end{array}\right)$$

例 2 讨论 a, b 取何值时，方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$

有无穷解、唯一解，及无解？

解

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 3 & 2 & 1 & a & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_4 - 3r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 0 & -1 & -2 & a-3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4 + r_2]{r_3 + r_2}$$

例 2 讨论 a, b 取何值时，方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$

有无穷解、唯一解，及无解？

解

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 3 & 2 & 1 & a & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_4 - 3r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 0 & -1 & -2 & a-3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4 + r_2]{r_3 + r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{array}\right)$$

例 2 讨论 a, b 取何值时，方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$

有无穷解、唯一解，及无解？

解

$$(A \vdots b) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{array}\right)$$

例 2 讨论 a, b 取何值时，方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$

有无穷解、唯一解，及无解？

解

$$(A \vdots b) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{array}\right)$$

- 当 $a \neq 1$ 时
- 当 $a = 1$ 时

例 2 讨论 a, b 取何值时，方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$

有无穷解、唯一解，及无解？

解

$$(A \vdots b) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{array}\right)$$

- 当 $a \neq 1$ 时
- 当 $a = 1$ 时

例 2 讨论 a, b 取何值时，方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$

有无穷解、唯一解，及无解？

解

$$(A \vdots b) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{array}\right)$$

- 当 $a \neq 1$ 时（b 为任意数），$r(A) = r(A \vdots b) = 4$，
- 当 $a = 1$ 时

例 2 讨论 a, b 取何值时，方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$

有无穷解、唯一解，及无解？

解

$$(A \vdots b) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{array}\right)$$

- 当 $a \neq 1$ 时（b 为任意数），$r(A) = r(A \vdots b) = 4$，有唯一解；
- 当 $a = 1$ 时

例 2 讨论 a, b 取何值时，方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$

有无穷解、唯一解，及无解？

解

$$(A \vdots b) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{array}\right)$$

- 当 $a \neq 1$ 时（b 为任意数），$r(A) = r(A \vdots b) = 4$，有唯一解；
- 当 $a = 1$ 时

例 2 讨论 a, b 取何值时，方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$

有无穷解、唯一解，及无解？

解

$$(A \vdots b) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{array}\right)$$

- 当 $a \neq 1$ 时（b 为任意数），$r(A) = r(A \vdots b) = 4$，有唯一解；
- 当 $a = 1$ 时

$$(A \vdots b) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

例 2 讨论 a, b 取何值时，方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$

有无穷解、唯一解，及无解？

解

$$(A \vdots b) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{array}\right)$$

- 当 $a \neq 1$ 时（b 为任意数），$r(A) = r(A \vdots b) = 4$，有唯一解；
- 当 $a = 1$ 时

$$(A \vdots b) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  - $a = 1, b = -1$ 时
  - $a = 1, b \neq -1$ 时

例 2 讨论 a, b 取何值时，方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_2+2x_3+2x_4=1 \\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1 \end{cases}$$

有无穷解、唯一解，及无解？

解

$$(A\vdots b)\longrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{array}\right)$$

- 当 $a\neq 1$ 时（b 为任意数），$r(A)=r(A\vdots b)=4$，有唯一解；
- 当 $a=1$ 时

$$(A\vdots b)\longrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  - $a=1, b=-1$ 时
  - $a=1, b\neq -1$ 时

例 2 讨论 a, b 取何值时，方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$

有无穷解、唯一解，及无解？

解

$$(A \vdots b) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{array}\right)$$

- 当 $a \neq 1$ 时（b 为任意数），$r(A) = r(A \vdots b) = 4$，有唯一解；
- 当 $a = 1$ 时

$$(A \vdots b) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  - $a = 1, b = -1$ 时，$r(A) = r(A \vdots b) = 2 < 4$,
  - $a = 1, b \neq -1$ 时

例 2 讨论 a, b 取何值时，方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$

有无穷解、唯一解，及无解？

解

$$(A \vdots b) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{array}\right)$$

- 当 $a \neq 1$ 时（b 为任意数），$r(A) = r(A \vdots b) = 4$，有唯一解；
- 当 $a = 1$ 时

$$(A \vdots b) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  - $a = 1, b = -1$ 时，$r(A) = r(A \vdots b) = 2 < 4$，有无穷多解
  - $a = 1, b \neq -1$ 时

例 2 讨论 a, b 取何值时，方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$

有无穷解、唯一解，及无解？

解

$$(A \vdots b) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{array}\right)$$

- 当 $a \neq 1$ 时（b 为任意数），$r(A) = r(A \vdots b) = 4$，有唯一解；
- 当 $a = 1$ 时

$$(A \vdots b) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  - $a = 1, b = -1$ 时，$r(A) = r(A \vdots b) = 2 < 4$，有无穷多解
  - $a = 1, b \neq -1$ 时

例 2 讨论 a, b 取何值时，方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_2+2x_3+2x_4=1 \\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1 \end{cases}$$

有无穷解、唯一解，及无解？

解

$$(A\vdots b)\longrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{array}\right)$$

- 当 $a\neq 1$ 时（b 为任意数），$r(A)=r(A\vdots b)=4$，有唯一解；
- 当 $a=1$ 时

$$(A\vdots b)\longrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  - $a=1, b=-1$ 时，$r(A)=r(A\vdots b)=2<4$，有无穷多解
  - $a=1, b\neq -1$ 时

例 2 讨论 a, b 取何值时，方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$

有无穷解、唯一解，及无解？

解

$$(A \vdots b) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 当 $a \neq 1$ 时（b 为任意数），$r(A) = r(A \vdots b) = 4$，有唯一解；
- 当 $a = 1$ 时

$$(A \vdots b) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  - $a = 1, b = -1$ 时，$r(A) = r(A \vdots b) = 2 < 4$，有无穷多解
  - $a = 1, b \neq -1$ 时，$r(A) = 2 < 3 = r(A \vdots b)$，

例 2 讨论 a, b 取何值时，方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$

有无穷解、唯一解，及无解？

解

$$(A \vdots b) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{array}\right)$$

- 当 $a \neq 1$ 时（b 为任意数），$r(A) = r(A \vdots b) = 4$，有唯一解；
- 当 $a = 1$ 时

$$(A \vdots b) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  - $a = 1, b = -1$ 时，$r(A) = r(A \vdots b) = 2 < 4$，有无穷多解
  - $a = 1, b \neq -1$ 时，$r(A) = 2 < 3 = r(A \vdots b)$，无解

例 3 讨论 a, b 取何值时，方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=1 \\ 2x_1+3x_2+5x_3=-1 \\ 3x_1+4x_2+ax_3=b \end{cases}$ 有无穷解、唯一解，及无解？

例 3 讨论 a, b 取何值时，方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + ax_3 = b \end{cases}$ 有无穷解、唯一解，及无解？

解

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & a & b \end{array}\right)$$

例 3 讨论 a, b 取何值时，方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=1 \\ 2x_1+3x_2+5x_3=-1 \\ 3x_1+4x_2+ax_3=b \end{cases}$ 有无穷解、唯一解，及无解？

解

$$(A \vdots b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & a & b \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}$$

例 3 讨论 a, b 取何值时，方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=1 \\ 2x_1+3x_2+5x_3=-1 \\ 3x_1+4x_2+ax_3=b \end{cases}$ 有无穷解、唯一解，及无解？

解

$$(A\vdots b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & a & b \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ & & & \\ & & & \end{array}\right)$$

例 3 讨论 a, b 取何值时，方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=1 \\ 2x_1+3x_2+5x_3=-1 \\ 3x_1+4x_2+ax_3=b \end{cases}$ 有无穷解、唯一解，及无解？

解

$$(A\vdots b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & a & b \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

例 3 讨论 a, b 取何值时，方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + ax_3 = b \end{cases}$ 有无穷解、唯一解，及无解？

解

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & a & b \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & a-9 & b-3 \end{array}\right)$$

例 3 讨论 a, b 取何值时，方程组 $\begin{cases} x_1+ & 2x_2+ & 3x_3 = & 1 \\ 2x_1+ & 3x_2+ & 5x_3 = & -1 \\ 3x_1+ & 4x_2+ & ax_3 = & b \end{cases}$ 有无穷解、唯一解，及无解？

解

$$(A\vdots b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & a & b \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & a-9 & b-3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3-2r_2}$$

例 3 讨论 a, b 取何值时，方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=1 \\ 2x_1+3x_2+5x_3=-1 \\ 3x_1+4x_2+ax_3=b \end{cases}$ 有无穷解、唯一解，及无解？

解

$$(A\vdots b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & a & b \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & a-9 & b-3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & a-7 & b+3 \end{array}\right)$$

例 3 讨论 a, b 取何值时，方程组 $\begin{cases} x_1+ & 2x_2+ & 3x_3 = & 1 \\ 2x_1+ & 3x_2+ & 5x_3 = & -1 \\ 3x_1+ & 4x_2+ & ax_3 = & b \end{cases}$ 有无穷解、唯一解，及无解？

解

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & a & b \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & a-9 & b-3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & a-7 & b+3 \end{array}\right)$$

- 当 $a \neq 7$ 时
- 当 $a = 7$ 时

例 3 讨论 a, b 取何值时，方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + ax_3 = b \end{cases}$ 有无穷解、唯一解，及无解？

解

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & a & b \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & a-9 & b-3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & a-7 & b+3 \end{array}\right)$$

- 当 $a \neq 7$ 时
- 当 $a = 7$ 时

例 3 讨论 a, b 取何值时，方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=1 \\ 2x_1+3x_2+5x_3=-1 \\ 3x_1+4x_2+ax_3=b \end{cases}$ 有无穷解、唯一解，及无解？

解

$$(A\vdots b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & a & b \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & a-9 & b-3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & a-7 & b+3 \end{array}\right)$$

- 当 $a \neq 7$ 时（b 为任意数），$r(A\vdots b)=r(A)=3$，
- 当 $a=7$ 时

例 3 讨论 a, b 取何值时，方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + ax_3 = b \end{cases}$ 有无穷解、唯一解，及无解？

解

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & a & b \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & a-9 & b-3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 - 2r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & a-7 & b+3 \end{array}\right)$$

- 当 $a \neq 7$ 时（b 为任意数），$r(A \vdots b) = r(A) = 3$，有唯一解；
- 当 $a = 7$ 时

例 3 讨论 a, b 取何值时，方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + ax_3 = b \end{cases}$ 有无穷解、唯一解，及无解？

解

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & a & b \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & a-9 & b-3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 - 2r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & a-7 & b+3 \end{array}\right)$$

- 当 $a \neq 7$ 时（b 为任意数），$r(A \vdots b) = r(A) = 3$，有唯一解；
- 当 $a = 7$ 时

例 3 讨论 a, b 取何值时，方程组 $\begin{cases} x_1+\ 2x_2+\ 3x_3 = 1 \\ 2x_1+\ 3x_2+\ 5x_3 = -1 \\ 3x_1+\ 4x_2+\ ax_3 = b \end{cases}$ 有无穷解、唯一解，及无解？

解

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & a & b \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & a-9 & b-3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & a-7 & b+3 \end{array}\right)$$

- 当 $a \neq 7$ 时（b 为任意数），$r(A \vdots b) = r(A) = 3$，有唯一解；
- 当 $a = 7$ 时

$$(A \vdots b) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & b+3 \end{array}\right)$$

例 3 讨论 a, b 取何值时，方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + ax_3 = b \end{cases}$ 有无穷解、唯一解，及无解？

解

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & a & b \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & a-9 & b-3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & a-7 & b+3 \end{array}\right)$$

- 当 $a \neq 7$ 时（b 为任意数），$r(A \vdots b) = r(A) = 3$，有唯一解；
- 当 $a = 7$ 时

$$(A \vdots b) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & b+3 \end{array}\right)$$

  - $a = 7, b = -3$ 时
  - $a = 7, b \neq -3$ 时

例 3 讨论 a, b 取何值时，方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + ax_3 = b \end{cases}$ 有无穷解、唯一解，及无解？

解

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & a & b \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & a-9 & b-3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & a-7 & b+3 \end{array}\right)$$

- 当 $a \neq 7$ 时（b 为任意数），$r(A \vdots b) = r(A) = 3$，有唯一解；
- 当 $a = 7$ 时

$$(A \vdots b) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & b+3 \end{array}\right)$$

  - $a = 7, b = -3$ 时
  - $a = 7, b \neq -3$ 时

例 3 讨论 a, b 取何值时，方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + ax_3 = b \end{cases}$ 有无穷解、唯一解，及无解？

解

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & a & b \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & a-9 & b-3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & a-7 & b+3 \end{array}\right)$$

- 当 $a \neq 7$ 时（b 为任意数），$r(A \vdots b) = r(A) = 3$，有唯一解；
- 当 $a = 7$ 时

$$(A \vdots b) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & b+3 \end{array}\right)$$

  - $a = 7, b = -3$ 时，$r(A \vdots b) = r(A) = 2 < 3$，
  - $a = 7, b \neq -3$ 时

例 3 讨论 a, b 取何值时，方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + ax_3 = b \end{cases}$ 有无穷解、唯一解，及无解？

解

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & a & b \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & a-9 & b-3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & a-7 & b+3 \end{array}\right)$$

- 当 $a \neq 7$ 时（b 为任意数），$r(A \vdots b) = r(A) = 3$，有唯一解；
- 当 $a = 7$ 时

$$(A \vdots b) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & b+3 \end{array}\right)$$

  - $a = 7, b = -3$ 时，$r(A \vdots b) = r(A) = 2 < 3$，有无穷多解
  - $a = 7, b \neq -3$ 时

例 3 讨论 a, b 取何值时，方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + ax_3 = b \end{cases}$ 有无穷解、唯一解，及无解？

解

$$(A\,\vdots\,b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & a & b \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & a-9 & b-3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & a-7 & b+3 \end{array}\right)$$

- 当 $a \neq 7$ 时（b 为任意数），$r(A\,\vdots\,b) = r(A) = 3$，有唯一解；
- 当 $a = 7$ 时
$$(A\,\vdots\,b) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & b+3 \end{array}\right)$$
  - $a = 7, b = -3$ 时，$r(A\,\vdots\,b) = r(A) = 2 < 3$，有无穷多解
  - $a = 7, b \neq -3$ 时

例 3 讨论 a, b 取何值时，方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + ax_3 = b \end{cases}$ 有无穷解、唯一解，及无解？

解

$$(A\vdots b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & a & b \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & a-9 & b-3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & a-7 & b+3 \end{array}\right)$$

- 当 $a \neq 7$ 时（b 为任意数），$r(A\vdots b) = r(A) = 3$，有唯一解；
- 当 $a = 7$ 时

$$(A\vdots b) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & b+3 \end{array}\right)$$

  - $a = 7, b = -3$ 时，$r(A\vdots b) = r(A) = 2 < 3$，有无穷多解
  - $a = 7, b \neq -3$ 时

例 3 讨论 a, b 取何值时，方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + ax_3 = b \end{cases}$ 有无穷解、唯一解，及无解？

解

$$(A\vdots b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & a & b \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & a-9 & b-3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & a-7 & b+3 \end{array}\right)$$

- 当 $a \neq 7$ 时（b 为任意数），$r(A\vdots b) = r(A) = 3$，有唯一解；
- 当 $a = 7$ 时

$$(A\vdots b) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & b+3 \end{array}\right)$$

  - $a = 7, b = -3$ 时，$r(A\vdots b) = r(A) = 2 < 3$，有无穷多解
  - $a = 7, b \neq -3$ 时，$r(A\vdots b) = 3 \neq 2 = r(A)$，

例 3 讨论 a, b 取何值时，方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=1 \\ 2x_1+3x_2+5x_3=-1 \\ 3x_1+4x_2+ax_3=b \end{cases}$ 有无穷解、唯一解，及无解？

解

$$(A\vdots b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & a & b \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & a-9 & b-3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & a-7 & b+3 \end{array}\right)$$

- 当 $a \neq 7$ 时（b 为任意数），$r(A\vdots b)=r(A)=3$，有唯一解；
- 当 $a=7$ 时

$$(A\vdots b) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & b+3 \end{array}\right)$$

  - $a=7, b=-3$ 时，$r(A\vdots b)=r(A)=2<3$，有无穷多解
  - $a=7, b\neq -3$ 时，$r(A\vdots b)=3\neq 2=r(A)$，无解

线性方程组解的分类

- 一般线性方程组 $A_{m\times n}x = b$（m 个方程，n 个未知量）

$Ax = b$	有无穷解	有唯一解	无解
	$r(A) = r(A \vdots b) < n$	$r(A) = r(A \vdots b) = n$	$r(A) < r(A \vdots b)$

线性方程组解的分类

- 一般线性方程组 $A_{m\times n}x=b$（m 个方程，n 个未知量）

$Ax=b$	有无穷解	有唯一解	无解
	$r(A)=r(A\vdots b)<n$	$r(A)=r(A\vdots b)=n$	$r(A)<r(A\vdots b)$

- 齐次线性方程组 $A_{m\times n}x=0$，一定有解（至少有零解），

  $r(A)=r(A\vdots 0)$

线性方程组解的分类

- 一般线性方程组 $A_{m\times n}x = b$（m 个方程，n 个未知量）

$Ax = b$	有无穷解	有唯一解	无解
	$r(A) = r(A \vdots b) < n$	$r(A) = r(A \vdots b) = n$	$r(A) < r(A \vdots b)$

- 齐次线性方程组 $A_{m\times n}x = 0$，一定有解（至少有零解），$r(A) = r(A \vdots 0)$

$Ax = 0$	有无穷解	有唯一解（零解）

线性方程组解的分类

- 一般线性方程组 $A_{m\times n}x=b$（m 个方程，n 个未知量）

$Ax=b$	有无穷解	有唯一解	无解
	$r(A)=r(A\vdots b)<n$	$r(A)=r(A\vdots b)=n$	$r(A)<r(A\vdots b)$

- 齐次线性方程组 $A_{m\times n}x=0$，一定有解（至少有零解），$r(A)=r(A\vdots 0)$

$Ax=0$	有无穷解	有唯一解（零解）
	$r(A)<n$	

线性方程组解的分类

- 一般线性方程组 $A_{m\times n}x = b$（m 个方程，n 个未知量）

$Ax = b$	有无穷解	有唯一解	无解
	$r(A) = r(A \vdots b) < n$	$r(A) = r(A \vdots b) = n$	$r(A) < r(A \vdots b)$

- 齐次线性方程组 $A_{m\times n}x = 0$，一定有解（至少有零解），$r(A) = r(A \vdots 0)$

$Ax = 0$	有无穷解	有唯一解（零解）
	$r(A) < n$	$r(A) = n$

例 解齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$

例 解齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$

解

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 8 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -9 & 7 & 0 \end{array}\right)$$

例 解齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$

解

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 8 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -9 & 7 & 0 \end{array}\right)$$

例 解齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$

解

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 8 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -9 & 7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3 - 3r_1 \\ r_4 - r_1}]{r_2 - r_1}$$

例 解齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$

解

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 8 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -9 & 7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3 - 3r_1 \\ r_4 - r_1}]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & -1 & 0 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{array}\right)$$

例 解齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$

解

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 8 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -9 & 7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-3r_1 \\ r_4-r_1}]{r_2-r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 4 & 0 \\ & & & & \\ & & & & \end{array}\right)$$

例 解齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$

解

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 8 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -9 & 7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3 - 3r_1 \\ r_4 - r_1}]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 4 & 0 \\ & & & & \end{array}\right)$$

例 解齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$

解

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 8 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -9 & 7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3 - 3r_1 \\ r_4 - r_1}]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -14 & 8 & 0 \end{array}\right)$$

例 解齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$

解

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 8 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -9 & 7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3 - 3r_1 \\ r_4 - r_1}]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & -7 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -14 & 8 & 0 \end{array}\right)$$

例 解齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$

解

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 8 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -9 & 7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-3r_1 \\ r_4-r_1}]{r_2-r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & -7 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -14 & 8 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4-2r_2]{r_3-r_2}$$

例 解齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$

解

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 8 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -9 & 7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3 - 3r_1 \\ r_4 - r_1}]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & -7 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -14 & 8 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4 - 2r_2]{r_3 - r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & -7 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

例 解齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$

解

$$(A\vdots b) = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 8 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -9 & 7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-3r_1 \\ r_4-r_1}]{r_2-r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & -7 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -14 & 8 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4-2r_2]{r_3-r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & -7 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}\times r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -7/2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

例 解齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$

解

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 8 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -9 & 7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-3r_1 \\ r_4-r_1}]{r_2-r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & -7 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -14 & 8 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4-2r_2]{r_3-r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & -7 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}\times r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -7/2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1+r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -7/2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

例 解齐次线性方程组
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$$

解

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 8 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -9 & 7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-3r_1 \\ r_4-r_1}]{r_2-r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & -7 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -14 & 8 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4-2r_2]{r_3-r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & -7 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}\times r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -7/2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1+r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -7/2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

例 解齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$

解

$$(A \vdots b) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -7/2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

例 解齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$

解

$$(A \vdots b) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -7/2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

例 解齐次线性方程组
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$$

解

$$(A \vdots b) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -7/2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

主元：x_1, x_2；自由变量：x_3, x_4。

例 解齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$

解

$$(A \vdots b) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -7/2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

主元：x_1, x_2；自由变量：x_3, x_4。原方程组等价于

$$\begin{cases} x_1 + \frac{3}{2}x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - \frac{7}{2}x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

例 解齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$

解

$$(A \vdots b) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -7/2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

主元：x_1, x_2；自由变量：x_3, x_4。原方程组等价于

$$\begin{cases} x_1 + \frac{3}{2}x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - \frac{7}{2}x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{3}{2}x_3 - x_4 \\ x_2 = \frac{7}{2}x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

例 解齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$

解

$$(A \vdots b) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -7/2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

主元：x_1, x_2；自由变量：x_3, x_4。原方程组等价于

$$\begin{cases} x_1 + \frac{3}{2}x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - \frac{7}{2}x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{3}{2}x_3 - x_4 \\ x_2 = \frac{7}{2}x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

所以 $\begin{cases} \\ \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$ （其中 c_1, c_2 为任意常数）

例 解齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$

解

$$(A \vdots b) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -7/2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

主元：x_1, x_2；自由变量：x_3, x_4。原方程组等价于

$$\begin{cases} x_1 + \frac{3}{2}x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - \frac{7}{2}x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{3}{2}x_3 - x_4 \\ x_2 = \frac{7}{2}x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

所以 $\begin{cases} x_1 = -\frac{3}{2}c_1 - c_2 \\ \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$ （其中 c_1, c_2 为任意常数）

例 解齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$

解

$$(A \vdots b) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -7/2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

主元：x_1, x_2；自由变量：x_3, x_4。原方程组等价于

$$\begin{cases} x_1 + \frac{3}{2}x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - \frac{7}{2}x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{3}{2}x_3 - x_4 \\ x_2 = \frac{7}{2}x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

所以 $\begin{cases} x_1 = -\frac{3}{2}c_1 - c_2 \\ x_2 = \frac{7}{2}c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$ （其中 c_1, c_2 为任意常数）