线性代数小测

2017.12.13

问题 1. (9 分) 设 $A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\2&-5&12\\0&2&-10\end{pmatrix}$。

(1)(2 分) 通过初等行变换把 A 化为上三角矩阵 $\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&-1&6\\0&0&2\end{pmatrix}$。

(2)(3 分) 求初等矩阵 P_1, P_2 使得 $P_2P_1A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&-1&6\\0&0&2\end{pmatrix}$。

(3)(4 分) 将 A 作 “LU 分解”，即：求出一个下三角形矩阵 L，及一个上三角形矩阵 U，使得 $A=LU$。

问题 2. (5 分) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}k&1&1&1\\1&k&1&1\\1&1&k&1\\1&1&1&k\end{pmatrix}$，且 $r(A)=3$，求 k 的值。

问题 3. (8 分) A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times m$ 矩阵。证明：
(1)(4 分) 若 $m>n$，则 $|AB|=0$。
(2)(4 分) 若 $|AB|\neq 0$，则 B 的列向量组线性无关。

问题 4. (5 分) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\x&1&y\\1&0&0\end{pmatrix}$ 可对角化，求 x, y 满足的条件。

问题 5. (12 分) 按下列步骤求出斐波那契数列 $x_{n+2}=x_{n+1}+x_n$（$n\geq 0$，$x_0=x_1=1$）的通项公式。
(1)(3 分) 令 $\alpha_n=\begin{pmatrix}x_{n+1}\\x_n\end{pmatrix}$，证明 $\alpha_{n+1}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\alpha_n$，及 $\alpha_n=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}^n\alpha_0$。
(2)(6 分) 将 $\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$ 对角化，并求出 $\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}^n$。
(3)(3 分) 求出 x_n 的通项公式。

问题 6. (6 分) 设 3 阶方阵 A 满足条件：(i) 有特征值 $-1, 2$；(ii) 特征值 -1 有特征向量 $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$；(iii) 特征值 2 有特征向量 $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ 及 $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$。求 $|A|$ 和 A。

问题 7. (6 分) 设 A 是 n 阶非零方阵，假设存在正整数 m 使得 $A^m=0$，证明 A 的所有特征值为零，且 A 不能对角化。

问题 8. (6 分) 设 A 是二阶方阵，且 $|A|<0$。判断 A 能否对角化。若能，证明之；不能，则给出例子。

问题 9. (12 分) 设 A 是方阵。证明或否证：
(1)(6 分) 如果 A 可对角化，则 A^2 也可以对角化。
(2)(6 分) 如果 A^2 可对角化，则 A 也可以对角化。

问题 10. (25 分) 设 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ 是单位向量。令 $A = I - 2\alpha\alpha^T$。

(1)(5 分) 证明 α 是 A 的一个特征向量。
(2)(5 分) 证明存在 $m-1$ 个线性无关 m 维列向量与 α 垂直。
(3)(5 分) 证明 A 可对角化。
(4)(5 分) 计算特征多项式 $|\lambda I - A|$，及计算行列式 $|A|$ 的值。
(5)(5 分) 验证 A 是正交矩阵，并求出 A^{-1}。

问题 11. (6 分) 设 A 是 n 阶正定矩阵，证明 $|A+I| > 1$。