

第 2 章 f : 矩阵的初等变换

数学系 梁卓滨

2019-2020 学年 I

We are here now...

1. 初等变换，初等矩阵

2. 等价标准形

3. 初等行变换求逆矩阵

矩阵的初等变换

初等行变换

初等列变换

矩阵的初等变换

初等行变换

- 交换第 i 行和第 j 行:
- 第 i 行乘以 k 倍 ($k \neq 0$):
- 第 i 行加上第 j 行的 l 倍:

初等列变换

矩阵的初等变换

初等行变换

- 交换第 i 行和第 j 行:
- 第 i 行乘以 k 倍 ($k \neq 0$):
- 第 i 行加上第 j 行的 l 倍:

初等列变换

- 交换第 i 列和第 j 列:
- 第 i 列乘以 k 倍 ($k \neq 0$):
- 第 i 列加上第 j 列的 l 倍:

矩阵的初等变换

初等行变换

- 交换第 i 行和第 j 行: $r_i \leftrightarrow r_j$
- 第 i 行乘以 k 倍 ($k \neq 0$):
- 第 i 行加上第 j 行的 l 倍:

初等列变换

- 交换第 i 列和第 j 列:
- 第 i 列乘以 k 倍 ($k \neq 0$):
- 第 i 列加上第 j 列的 l 倍:

矩阵的初等变换

初等行变换

- 交换第 i 行和第 j 行: $r_i \leftrightarrow r_j$
- 第 i 行乘以 k 倍 ($k \neq 0$): $k \times r_i$
- 第 i 行加上第 j 行的 l 倍:

初等列变换

- 交换第 i 列和第 j 列:
- 第 i 列乘以 k 倍 ($k \neq 0$):
- 第 i 列加上第 j 列的 l 倍:

矩阵的初等变换

初等行变换

- 交换第 i 行和第 j 行: $r_i \leftrightarrow r_j$
- 第 i 行乘以 k 倍 ($k \neq 0$): $k \times r_i$
- 第 i 行加上第 j 行的 l 倍: $r_i + lr_j$

初等列变换

- 交换第 i 列和第 j 列:
- 第 i 列乘以 k 倍 ($k \neq 0$):
- 第 i 列加上第 j 列的 l 倍:

矩阵的初等变换

初等行变换

- 交换第 i 行和第 j 行: $r_i \leftrightarrow r_j$
- 第 i 行乘以 k 倍 ($k \neq 0$): $k \times r_i$
- 第 i 行加上第 j 行的 l 倍: $r_i + lr_j$

初等列变换

- 交换第 i 列和第 j 列: $c_i \leftrightarrow c_j$
- 第 i 列乘以 k 倍 ($k \neq 0$):
- 第 i 列加上第 j 列的 l 倍:

矩阵的初等变换

初等行变换

- 交换第 i 行和第 j 行: $r_i \leftrightarrow r_j$
- 第 i 行乘以 k 倍 ($k \neq 0$): $k \times r_i$
- 第 i 行加上第 j 行的 l 倍: $r_i + lr_j$

初等列变换

- 交换第 i 列和第 j 列: $c_i \leftrightarrow c_j$
- 第 i 列乘以 k 倍 ($k \neq 0$): $k \times c_i$
- 第 i 列加上第 j 列的 l 倍:

矩阵的初等变换

初等行变换

- 交换第 i 行和第 j 行: $r_i \leftrightarrow r_j$
- 第 i 行乘以 k 倍 ($k \neq 0$): $k \times r_i$
- 第 i 行加上第 j 行的 l 倍: $r_i + lr_j$

初等列变换

- 交换第 i 列和第 j 列: $c_i \leftrightarrow c_j$
- 第 i 列乘以 k 倍 ($k \neq 0$): $k \times c_i$
- 第 i 列加上第 j 列的 l 倍: $c_i + lc_j$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{c_2 - c_3}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{c_2 - c_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{c_2 - c_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注 变换前后是两个不同的矩阵，故用“ \rightarrow ”，而不用“ $=$ ”。

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{c_2 - c_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注 变换前后是两个不同的矩阵，故用“ \rightarrow ”，而不用“ $=$ ”。区别行列式的变换：

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{c_2 - c_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注 变换前后是两个不同的矩阵，故用“ \rightarrow ”，而不用“ $=$ ”。区别行列式的变换：

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{r_1 \leftrightarrow r_2}}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{c_2 - c_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注 变换前后是两个不同的矩阵，故用“ \rightarrow ”，而不用“ $=$ ”。区别行列式的变换：

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{r_1 \leftrightarrow r_2}}} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{c_2 - c_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注 变换前后是两个不同的矩阵，故用“ \rightarrow ”，而不用“ $=$ ”。区别行列式的变换：

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{r_1 \leftrightarrow r_2}}} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{r_2 - 3r_1}}}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{c_2 - c_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注 变换前后是两个不同的矩阵，故用“ \rightarrow ”，而不用“ $=$ ”。区别行列式的变换：

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{r_1 \leftrightarrow r_2}}} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{r_2 - 3r_1}}} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{c_2 - c_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注 变换前后是两个不同的矩阵，故用“ \rightarrow ”，而不用“ $=$ ”。区别行列式的变换：

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{r_1 \leftrightarrow r_2}}} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{r_2 - 3r_1}}} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \xrightarrow{\underline{\underline{c_2 - c_3}}} - \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{c_2 - c_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注 变换前后是两个不同的矩阵，故用“ \rightarrow ”，而不用“ $=$ ”。区别行列式的变换：

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{r_1 \leftrightarrow r_2}}} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{r_2 - 3r_1}}} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \xrightarrow{\underline{\underline{c_2 - c_3}}} - \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{c_2 - c_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注 变换前后是两个不同的矩阵，故用“ \rightarrow ”，而不用“ $=$ ”。区别行列式的变换：

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{r_1 \leftrightarrow r_2}}} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{r_2 - 3r_1}}} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \xrightarrow{\underline{\underline{c_2 - c_3}}} - \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -8$$

初等矩阵

定义 对 n 阶单位矩阵 I 施以一次初等变换得到的矩阵，称为 **初等矩阵**。

初等矩阵

定义 对 n 阶单位矩阵 I 施以一次初等变换得到的矩阵，称为 **初等矩阵**。
具体地，有如下的初等矩阵：

- 对 I 施以第一种初等变换 ($r_i \leftrightarrow r_j$ 或 $c_i \leftrightarrow c_j$) 得到的矩阵；

初等矩阵

定义 对 n 阶单位矩阵 I 施以一次初等变换得到的矩阵，称为 **初等矩阵**。
具体地，有如下的初等矩阵：

- 对 I 施以第一种初等变换 ($r_i \leftrightarrow r_j$ 或 $c_i \leftrightarrow c_j$) 得到的矩阵；
- 对 I 施以第二种初等变换 ($k \times r_i$ 或 $k \times c_i$) 得到的矩阵；

初等矩阵

定义 对 n 阶单位矩阵 I 施以一次初等变换得到的矩阵，称为**初等矩阵**。
具体地，有如下的初等矩阵：

- 对 I 施以第一种初等变换 ($r_i \leftrightarrow r_j$ 或 $c_i \leftrightarrow c_j$) 得到的矩阵；
- 对 I 施以第二种初等变换 ($k \times r_i$ 或 $k \times c_i$) 得到的矩阵；
- 对 I 施以第三种初等变换 ($r_i + lr_j$ 或 $c_i + lc_j$) 得到的矩阵。

初等矩阵

定义 对 n 阶单位矩阵 I 施以一次初等变换得到的矩阵，称为**初等矩阵**。
具体地，有如下的初等矩阵：

- 对 I 施以第一种初等变换 ($r_i \leftrightarrow r_j$ 或 $c_i \leftrightarrow c_j$) 得到的矩阵；
- 对 I 施以第二种初等变换 ($k \times r_i$ 或 $k \times c_i$) 得到的矩阵；
- 对 I 施以第三种初等变换 ($r_i + lr_j$ 或 $c_i + lc_j$) 得到的矩阵。

下面我们以 3 阶初等矩阵为例，进行讨论。

确定全部的 3 阶初等矩阵。

确定全部的 3 阶初等矩阵。

- 对 3 阶单位矩阵施以第一种初等变换：

确定全部的 3 阶初等矩阵。

- 对 3 阶单位矩阵施以第一种初等变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3}$$

确定全部的 3 阶初等矩阵。

- 对 3 阶单位矩阵施以第一种初等变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3}$$

确定全部的 3 阶初等矩阵。

- 对 3 阶单位矩阵施以第一种初等变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3}$$

确定全部的 3 阶初等矩阵。

- 对 3 阶单位矩阵施以第一种初等变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

确定全部的 3 阶初等矩阵。

- 对 3 阶单位矩阵施以第一种初等变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1 \leftrightarrow r_2 \text{ 或 } c_1 \leftrightarrow c_2]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

确定全部的 3 阶初等矩阵。

- 对 3 阶单位矩阵施以第一种初等变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } c_1 \leftrightarrow c_2]{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } c_2 \leftrightarrow c_3]{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

确定全部的 3 阶初等矩阵。

- 对 3 阶单位矩阵施以第一种初等变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } c_1 \leftrightarrow c_2]{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } c_2 \leftrightarrow c_3]{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } c_1 \leftrightarrow c_3]{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

确定全部的 3 阶初等矩阵。

- 对 3 阶单位矩阵施以第一种初等变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } c_1 \leftrightarrow c_2]{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I(12)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } c_2 \leftrightarrow c_3]{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } c_1 \leftrightarrow c_3]{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

确定全部的 3 阶初等矩阵。

- 对 3 阶单位矩阵施以第一种初等变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } c_1 \leftrightarrow c_2]{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I(12)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } c_2 \leftrightarrow c_3]{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = I(23)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } c_1 \leftrightarrow c_3]{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

确定全部的 3 阶初等矩阵。

- 对 3 阶单位矩阵施以第一种初等变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } c_1 \leftrightarrow c_2]{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I(12)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } c_2 \leftrightarrow c_3]{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = I(23)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } c_1 \leftrightarrow c_3]{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I(13)$$

- 对 3 阶单位矩阵施以第二种初等变换：

- 对 3 阶单位矩阵施以第二种初等变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{k \times r_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{k \times r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{k \times r_3}$$

- 对 3 阶单位矩阵施以第二种初等变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{k \times r_1} \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{k \times r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{k \times r_3}$$

- 对 3 阶单位矩阵施以第二种初等变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{k \times r_1} \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{k \times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{k \times r_3}$$

- 对 3 阶单位矩阵施以第二种初等变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{k \times r_1} \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{k \times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{k \times r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

- 对 3 阶单位矩阵施以第二种初等变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[k \times c_1]{k \times r_1} \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{k \times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{k \times r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

- 对 3 阶单位矩阵施以第二种初等变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[k \times c_1]{k \times r_1} \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[k \times c_2]{k \times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{k \times r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

- 对 3 阶单位矩阵施以第二种初等变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } k \times c_1]{k \times r_1} \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } k \times c_2]{k \times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } k \times c_3]{k \times r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

- 对 3 阶单位矩阵施以第二种初等变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } k \times c_1]{k \times r_1} \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I(1(k))$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } k \times c_2]{k \times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } k \times c_3]{k \times r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

- 对 3 阶单位矩阵施以第二种初等变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } k \times c_1]{k \times r_1} \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I(1(k))$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } k \times c_2]{k \times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I(2(k))$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } k \times c_3]{k \times r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

- 对 3 阶单位矩阵施以第二种初等变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } k \times c_1]{k \times r_1} \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I(1(k))$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } k \times c_2]{k \times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I(2(k))$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } k \times c_3]{k \times r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = I(3(k))$$

- 对 3 阶单位矩阵施以第三种初等变换：

- 对 3 阶单位矩阵施以第三种初等变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+l_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+l_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+l_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+l_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+l_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+l_2}$$

- 对 3 阶单位矩阵施以第三种初等变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + lr_2} \begin{pmatrix} 1 & l & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + lr_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 + lr_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 + lr_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + lr_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + lr_2}$$

- 对 3 阶单位矩阵施以第三种初等变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + lr_2} \begin{pmatrix} 1 & l & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + lr_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 + lr_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 + lr_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + lr_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + lr_2}$$

- 对 3 阶单位矩阵施以第三种初等变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + lr_2} \begin{pmatrix} 1 & l & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + lr_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 + lr_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 + lr_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + lr_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + lr_2}$$

- 对 3 阶单位矩阵施以第三种初等变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + lr_2} \begin{pmatrix} 1 & l & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + lr_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 + lr_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 + lr_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + lr_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + lr_2}$$

- 对 3 阶单位矩阵施以第三种初等变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + lr_2} \begin{pmatrix} 1 & l & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + lr_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 + lr_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 + lr_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + lr_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ l & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + lr_2}$$

- 对 3 阶单位矩阵施以第三种初等变换:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + lr_2} \begin{pmatrix} 1 & l & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + lr_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 + lr_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 + lr_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + lr_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ l & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + lr_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & l & 1 \end{pmatrix}$$

- 对 3 阶单位矩阵施以第三种初等变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } c_2 + lc_1]{r_1 + lr_2} \begin{pmatrix} 1 & l & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } c_3 + lc_1]{r_1 + lr_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } c_1 + lc_2]{r_2 + lr_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } c_3 + lc_2]{r_2 + lr_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } c_1 + lc_3]{r_3 + lr_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ l & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } c_2 + lc_3]{r_3 + lr_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & l & 1 \end{pmatrix}$$

- 对 3 阶单位矩阵施以第三种初等变换:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } c_2 + lc_1]{r_1 + lr_2} \begin{pmatrix} 1 & l & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I(12(l))$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } c_3 + lc_1]{r_1 + lr_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } c_1 + lc_2]{r_2 + lr_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } c_3 + lc_2]{r_2 + lr_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } c_1 + lc_3]{r_3 + lr_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ l & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } c_2 + lc_3]{r_3 + lr_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & l & 1 \end{pmatrix}$$

- 对 3 阶单位矩阵施以第三种初等变换:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } c_2 + lc_1]{r_1 + lr_2} \begin{pmatrix} 1 & l & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I(12(l))$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } c_3 + lc_1]{r_1 + lr_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I(13(l))$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } c_1 + lc_2]{r_2 + lr_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } c_3 + lc_2]{r_2 + lr_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } c_1 + lc_3]{r_3 + lr_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ l & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } c_2 + lc_3]{r_3 + lr_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & l & 1 \end{pmatrix}$$

- 对 3 阶单位矩阵施以第三种初等变换:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } c_2 + lc_1]{r_1 + lr_2} \begin{pmatrix} 1 & l & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I(12(l))$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } c_3 + lc_1]{r_1 + lr_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I(13(l))$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } c_1 + lc_2]{r_2 + lr_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I(21(l))$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } c_3 + lc_2]{r_2 + lr_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I(23(l))$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } c_1 + lc_3]{r_3 + lr_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ l & 0 & 1 \end{pmatrix} = I(31(l))$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{或 } c_2 + lc_3]{r_3 + lr_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & l & 1 \end{pmatrix} = I(32(l))$$

初等矩阵与初等变换关系

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 则

初等矩阵与初等变换关系

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 则

性质 1 对 A 作初等 **行** 变换等价于对 A **左乘** 相应种类的初等矩阵

性质 2 对 A 作初等 **列** 变换等价于对 A **右乘** 相应种类的初等矩阵

初等矩阵与初等变换关系

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 则

性质 1 对 A 作初等 **行** 变换等价于对 A **左乘** 相应种类的初等矩阵:

$$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j}, \quad A \xrightarrow{k \times r_i}, \quad A \xrightarrow{r_i + l r_j}$$

性质 2 对 A 作初等 **列** 变换等价于对 A **右乘** 相应种类的初等矩阵

初等矩阵与初等变换关系

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 则

性质 1 对 A 作初等 **行** 变换等价于对 A **左乘** 相应种类的初等矩阵:

$$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} I(ij)A, \quad A \xrightarrow{k \times r_i} \quad , \quad A \xrightarrow{r_i + lr_j}$$

性质 2 对 A 作初等 **列** 变换等价于对 A **右乘** 相应种类的初等矩阵

初等矩阵与初等变换关系

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 则

性质 1 对 A 作初等 **行** 变换等价于对 A **左乘** 相应种类的初等矩阵:

$$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} I(ij)A, \quad A \xrightarrow{k \times r_i} I(i(k))A, \quad A \xrightarrow{r_i + lr_j}$$

性质 2 对 A 作初等 **列** 变换等价于对 A **右乘** 相应种类的初等矩阵

初等矩阵与初等变换关系

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 则

性质 1 对 A 作初等 **行** 变换等价于对 A **左乘** 相应种类的初等矩阵:

$$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} I(ij)A, \quad A \xrightarrow{k \times r_i} I(i(k))A, \quad A \xrightarrow{r_i + lr_j} I(ij(l))A$$

性质 2 对 A 作初等 **列** 变换等价于对 A **右乘** 相应种类的初等矩阵

初等矩阵与初等变换关系

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 则

性质 1 对 A 作初等 **行** 变换等价于对 A **左乘** 相应种类的初等矩阵:

$$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} I(ij)A, \quad A \xrightarrow{k \times r_i} I(i(k))A, \quad A \xrightarrow{r_i + lr_j} I(ij(l))A$$

性质 2 对 A 作初等 **列** 变换等价于对 A **右乘** 相应种类的初等矩阵:

$$A \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j}, \quad A \xrightarrow{k \times c_i}, \quad A \xrightarrow{c_j + lc_i}$$

初等矩阵与初等变换关系

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 则

性质 1 对 A 作初等 **行** 变换等价于对 A **左乘** 相应种类的初等矩阵:

$$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} I(ij)A, \quad A \xrightarrow{k \times r_i} I(i(k))A, \quad A \xrightarrow{r_i + lr_j} I(ij(l))A$$

性质 2 对 A 作初等 **列** 变换等价于对 A **右乘** 相应种类的初等矩阵:

$$A \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} AI(ij), \quad A \xrightarrow{k \times c_i} \quad , \quad A \xrightarrow{c_j + lc_i}$$

初等矩阵与初等变换关系

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 则

性质 1 对 A 作初等 **行** 变换等价于对 A **左乘** 相应种类的初等矩阵:

$$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} I(ij)A, \quad A \xrightarrow{k \times r_i} I(i(k))A, \quad A \xrightarrow{r_i + lr_j} I(ij(l))A$$

性质 2 对 A 作初等 **列** 变换等价于对 A **右乘** 相应种类的初等矩阵:

$$A \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} AI(ij), \quad A \xrightarrow{k \times c_i} AI(i(k)), \quad A \xrightarrow{c_j + lc_i} AI(ij(l))$$

初等矩阵与初等变换关系

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 则

性质 1 对 A 作初等 **行** 变换等价于对 A **左乘** 相应种类的初等矩阵:

$$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} I(ij)A, \quad A \xrightarrow{k \times r_i} I(i(k))A, \quad A \xrightarrow{r_i + lr_j} I(ij(l))A$$

性质 2 对 A 作初等 **列** 变换等价于对 A **右乘** 相应种类的初等矩阵:

$$A \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} AI(ij), \quad A \xrightarrow{k \times c_i} AI(i(k)), \quad A \xrightarrow{c_j + lc_i} AI(ij(l))$$

初等矩阵与初等变换关系

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 则

性质 1 对 A 作初等 **行** 变换等价于对 A **左乘** 相应种类的初等矩阵:

$$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} I(ij)A, \quad A \xrightarrow{k \times r_i} I(i(k))A, \quad A \xrightarrow{r_i + lr_j} I(ij(l))A$$

性质 2 对 A 作初等 **列** 变换等价于对 A **右乘** 相应种类的初等矩阵:

$$A \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} AI(ij), \quad A \xrightarrow{k \times c_i} AI(i(k)), \quad A \xrightarrow{c_j + lc_i} AI(ij(l))$$

注 性质 1 中的初等矩阵是 $m \times m$, 而性质 2 中的初等矩阵是 $n \times n$

例 以 3 阶方阵 A 为例，验证对 A 做初等行变换 $r_1 \leftrightarrow r_2$ 的结果，等于乘积 $I(12)A$ 。

例 以 3 阶方阵 A 为例，验证对 A 做初等行变换 $r_1 \leftrightarrow r_2$ 的结果，等于乘积 $I(12)A$ 。

验证

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

例 以 3 阶方阵 A 为例，验证对 A 做初等行变换 $r_1 \leftrightarrow r_2$ 的结果，等于乘积 $I(12)A$ 。

验证

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2}$$

$I(12)A$

例 以 3 阶方阵 A 为例, 验证对 A 做初等行变换 $r_1 \leftrightarrow r_2$ 的结果, 等于乘积 $I(12)A$ 。

验证

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$I(12)A$

例 以 3 阶方阵 A 为例, 验证对 A 做初等行变换 $r_1 \leftrightarrow r_2$ 的结果, 等于乘积 $I(12)A$ 。

验证

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$I(12)A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

例 以 3 阶方阵 A 为例, 验证对 A 做初等行变换 $r_1 \leftrightarrow r_2$ 的结果, 等于乘积 $I(12)A$ 。

验证

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$I(12)A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

例 以 3 阶方阵 A 为例, 验证对 A 做初等行变换 $r_1 \leftrightarrow r_2$ 的结果, 等于乘积 $I(12)A$ 。

验证

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$I(12)A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

例 以 3 阶方阵 A 为例, 验证对 A 做初等行变换 $r_1 \leftrightarrow r_2$ 的结果, 等于乘积 $I(12)A$ 。

验证

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$I(12)A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

例 以 3 阶方阵 A 为例, 验证对 A 做初等行变换 $r_1 \leftrightarrow r_2$ 的结果, 等于乘积 $I(12)A$ 。

验证

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$I(12)A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$, 其中 $(k \neq 0)$
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$, 其中 $(i \neq j)$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$, 其中 $(k \neq 0)$
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$, 其中 $(i \neq j)$

证明

- $I(ij)I(ij) =$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$, 其中 $(k \neq 0)$
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$, 其中 $(i \neq j)$

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) =$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$, 其中 $(k \neq 0)$
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$, 其中 $(i \neq j)$

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$, 其中 $(k \neq 0)$
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$, 其中 $(i \neq j)$

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$, 这是利用：

$$I \xrightarrow{C_i \leftrightarrow C_j} * \xrightarrow{C_i \leftrightarrow C_j}$$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$, 其中 $(k \neq 0)$
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$, 其中 $(i \neq j)$

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$, 这是利用：

$$I \xrightarrow{C_i \leftrightarrow C_j} * \xrightarrow{C_i \leftrightarrow C_j} I$$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$, 其中 $(k \neq 0)$
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$, 其中 $(i \neq j)$

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$, 这是利用：

$$I \xrightarrow{C_i \leftrightarrow C_j} * \xrightarrow{C_i \leftrightarrow C_j} I$$

- $I(i(k))I(i(\frac{1}{k})) =$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$, 其中 $(k \neq 0)$
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$, 其中 $(i \neq j)$

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$, 这是利用：

$$I \xrightarrow{C_i \leftrightarrow C_j} * \xrightarrow{C_i \leftrightarrow C_j} I$$

- $I(i(k))I(i(\frac{1}{k})) = I \cdot I(i(k)) \cdot I(i(\frac{1}{k})) =$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$, 其中 $(k \neq 0)$
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$, 其中 $(i \neq j)$

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$, 这是利用：

$$I \xrightarrow{C_i \leftrightarrow C_j} * \xrightarrow{C_i \leftrightarrow C_j} I$$

- $I(i(k))I(i(\frac{1}{k})) = I \cdot I(i(k)) \cdot I(i(\frac{1}{k})) = I$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$, 其中 $(k \neq 0)$
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$, 其中 $(i \neq j)$

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$, 这是利用：

$$I \xrightarrow{C_i \leftrightarrow C_j} * \xrightarrow{C_i \leftrightarrow C_j} I$$

- $I(i(k))I(i(\frac{1}{k})) = I \cdot I(i(k)) \cdot I(i(\frac{1}{k})) = I$, 这是利用：

$$I \xrightarrow{k \times C_i} * \xrightarrow{\frac{1}{k} \times C_i} I$$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$, 其中 $(k \neq 0)$
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$, 其中 $(i \neq j)$

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$, 这是利用：

$$I \xrightarrow{C_i \leftrightarrow C_j} * \xrightarrow{C_i \leftrightarrow C_j} I$$

- $I(i(k))I(i(\frac{1}{k})) = I \cdot I(i(k)) \cdot I(i(\frac{1}{k})) = I$, 这是利用：

$$I \xrightarrow{k \times C_i} * \xrightarrow{\frac{1}{k} \times C_i} I$$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$, 其中 $(k \neq 0)$
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$, 其中 $(i \neq j)$

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$, 这是利用：

$$I \xrightarrow{C_i \leftrightarrow C_j} * \xrightarrow{C_i \leftrightarrow C_j} I$$

- $I(i(k))I(i(\frac{1}{k})) = I \cdot I(i(k)) \cdot I(i(\frac{1}{k})) = I$, 这是利用：

$$I \xrightarrow{k \times C_i} * \xrightarrow{\frac{1}{k} \times C_i} I$$

- $I(ij(l))I(ij(-l)) =$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$, 其中 $(k \neq 0)$
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$, 其中 $(i \neq j)$

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$, 这是利用：

$$I \xrightarrow{C_i \leftrightarrow C_j} * \xrightarrow{C_i \leftrightarrow C_j} I$$

- $I(i(k))I(i(\frac{1}{k})) = I \cdot I(i(k)) \cdot I(i(\frac{1}{k})) = I$, 这是利用：

$$I \xrightarrow{k \times C_i} * \xrightarrow{\frac{1}{k} \times C_i} I$$

- $I(ij(l))I(ij(-l)) = I \cdot I(ij(l)) \cdot I(ij(-l)) =$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$, 其中 $(k \neq 0)$
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$, 其中 $(i \neq j)$

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$, 这是利用：

$$I \xrightarrow{C_i \leftrightarrow C_j} * \xrightarrow{C_i \leftrightarrow C_j} I$$

- $I(i(k))I(i(\frac{1}{k})) = I \cdot I(i(k)) \cdot I(i(\frac{1}{k})) = I$, 这是利用：

$$I \xrightarrow{k \times C_i} * \xrightarrow{\frac{1}{k} \times C_i} I$$

- $I(ij(l))I(ij(-l)) = I \cdot I(ij(l)) \cdot I(ij(-l)) = I$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$, 其中 $(k \neq 0)$
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$, 其中 $(i \neq j)$

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$, 这是利用：

$$I \xrightarrow{C_i \leftrightarrow C_j} * \xrightarrow{C_i \leftrightarrow C_j} I$$

- $I(i(k))I(i(\frac{1}{k})) = I \cdot I(i(k)) \cdot I(i(\frac{1}{k})) = I$, 这是利用：

$$I \xrightarrow{k \times C_i} * \xrightarrow{\frac{1}{k} \times C_i} I$$

- $I(ij(l))I(ij(-l)) = I \cdot I(ij(l)) \cdot I(ij(-l)) = I$, 这是利用：

$$I \xrightarrow{C_j + lC_i} * \xrightarrow{C_j - lC_i} I$$

初等矩阵的逆

性质 初等矩阵都是可逆，且其逆矩阵仍为初等矩阵。事实上：

- $I(ij)^{-1} = I(ij)$
- $I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$, 其中 $(k \neq 0)$
- $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$, 其中 $(i \neq j)$

证明

- $I(ij)I(ij) = I \cdot I(ij) \cdot I(ij) = I$, 这是利用：

$$I \xrightarrow{C_i \leftrightarrow C_j} * \xrightarrow{C_i \leftrightarrow C_j} I$$

- $I(i(k))I(i(\frac{1}{k})) = I \cdot I(i(k)) \cdot I(i(\frac{1}{k})) = I$, 这是利用：

$$I \xrightarrow{k \times C_i} * \xrightarrow{\frac{1}{k} \times C_i} I$$

- $I(ij(l))I(ij(-l)) = I \cdot I(ij(l)) \cdot I(ij(-l)) = I$, 这是利用：

$$I \xrightarrow{C_j + lC_i} * \xrightarrow{C_j - lC_i} I$$

We are here now...

1. 初等变换，初等矩阵

2. 等价标准形

3. 初等行变换求逆矩阵

矩阵的等价标准形

定理 任何矩阵 $A_{m \times n}$ ，经过有限次初等变换后，总可以化为如下形式的矩阵：

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \end{pmatrix}_{m \times n}$$

矩阵的等价标准形

定理 任何矩阵 $A_{m \times n}$ ，经过有限次初等变换后，总可以化为如下形式的矩阵：

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{m \times n}$$

即，除左上角为 r 阶单位矩阵，其余元素均为零。

矩阵的等价标准形

定理 任何矩阵 $A_{m \times n}$ ，经过有限次初等变换后，总可以化为如下形式的矩阵：

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{m \times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

即，除左上角为 r 阶单位矩阵，其余元素均为零。

矩阵的等价标准形

定理 任何矩阵 $A_{m \times n}$ ，经过有限次初等变换后，总可以化为如下形式的矩阵：

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{m \times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

即，除左上角为 r 阶单位矩阵，其余元素均为零。该形式称为 A 的**等价标准形**。

矩阵的等价标准形

定理 任何矩阵 $A_{m \times n}$, 经过有限次初等变换后, 总可以化为如下形式的矩阵:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{m \times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

即, 除左上角为 r 阶单位矩阵, 其余元素均为零。该形式称为 A 的 **等价标准形**。

注 r 取值范围:

矩阵的等价标准形

定理 任何矩阵 $A_{m \times n}$ ，经过有限次初等变换后，总可以化为如下形式的矩阵：

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{m \times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

即，除左上角为 r 阶单位矩阵，其余元素均为零。该形式称为 A 的**等价标准形**。

注 r 取值范围： $0 \leq r$,

矩阵的等价标准形

定理 任何矩阵 $A_{m \times n}$ ，经过有限次初等变换后，总可以化为如下形式的矩阵：

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{m \times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

即，除左上角为 r 阶单位矩阵，其余元素均为零。该形式称为 A 的**等价标准形**。

注 r 取值范围： $0 \leq r, r \leq m$

矩阵的等价标准形

定理 任何矩阵 $A_{m \times n}$, 经过有限次初等变换后, 总可以化为如下形式的矩阵:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{m \times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

即, 除左上角为 r 阶单位矩阵, 其余元素均为零。该形式称为 A 的**等价标准形**。

注 r 取值范围: $0 \leq r, r \leq m$ 且 $r \leq n$

例 1 4×3 矩阵 $\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ 所有可能的等价标准形是什么？

例 1 4×3 矩阵 $\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ 所有可能的等价标准形是什么?

4×3 矩阵等价标准形的一般形式是

$$D = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}_{4 \times 3}$$

例 1 4×3 矩阵 $\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ 所有可能的等价标准形是什么?

4×3 矩阵等价标准形的一般形式是

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \end{pmatrix}_{4 \times 3} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

例 1 4×3 矩阵 $\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ 所有可能的等价标准形是什么?

4×3 矩阵等价标准形的一般形式是

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \end{pmatrix}_{4 \times 3} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

其中 $0 \leq r \leq 3$

例 1 4×3 矩阵 $\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ 所有可能的等价标准形是什么?

4×3 矩阵等价标准形的一般形式是

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \end{pmatrix}_{4 \times 3} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

其中 $0 \leq r \leq 3$, 所以全部可能是:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

例 1 4×3 矩阵 $\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ 所有可能的等价标准形是什么?

4×3 矩阵等价标准形的一般形式是

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \end{pmatrix}_{4 \times 3} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

其中 $0 \leq r \leq 3$, 所以全部可能是:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

例 1 4×3 矩阵 $\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ 所有可能的等价标准形是什么?

4×3 矩阵等价标准形的一般形式是

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \end{pmatrix}_{4 \times 3} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

其中 $0 \leq r \leq 3$, 所以全部可能是:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

例 1 4×3 矩阵 $\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ 所有可能的等价标准形是什么?

4×3 矩阵等价标准形的一般形式是

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \end{pmatrix}_{4 \times 3} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

其中 $0 \leq r \leq 3$, 所以全部可能是:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 2 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

例 2 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

例 2 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1}$$

例 2 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

例 2 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

例 2 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

例 2 通过初等变换, 求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-\frac{1}{2}c_1}$$

例 2 通过初等变换, 求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-\frac{1}{2}c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

例 2 通过初等变换, 求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_3-c_1]{c_2-\frac{1}{2}c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

例 2 通过初等变换, 求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_3-c_1]{c_2-\frac{1}{2}c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

例 2 通过初等变换, 求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_4-\frac{3}{2}c_1]{c_2-\frac{1}{2}c_1, c_3-c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

例 2 通过初等变换, 求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_4-\frac{3}{2}c_1]{c_2-\frac{1}{2}c_1, c_3-c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

例 2 通过初等变换, 求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_4-\frac{3}{2}c_1]{c_2-\frac{1}{2}c_1, c_3-c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{\frac{1}{2} \times r_1}$$

例 2 通过初等变换, 求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_4-\frac{3}{2}c_1]{c_2-\frac{1}{2}c_1, c_3-c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{\frac{1}{2} \times r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

例 2 通过初等变换, 求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_4-\frac{3}{2}c_1]{c_2-\frac{1}{2}c_1, c_3-c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{\frac{1}{2} \times r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2}$$

例 2 通过初等变换, 求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_4-\frac{3}{2}c_1]{c_2-\frac{1}{2}c_1, c_3-c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{\frac{1}{2} \times r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 2 通过初等变换, 求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_4-\frac{3}{2}c_1]{c_2-\frac{1}{2}c_1, c_3-c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{\frac{1}{2} \times r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{c_3-c_2}$$

例 2 通过初等变换, 求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} &\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_4-\frac{3}{2}c_1]{c_2-\frac{1}{2}c_1, c_3-c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\frac{1}{2}\times r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{c_3-c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & -1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例 2 通过初等变换, 求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} &\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_4-\frac{3}{2}c_1]{c_2-\frac{1}{2}c_1, c_3-c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\frac{1}{2}\times r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[c_4-c_2]{c_3-c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例 2 通过初等变换, 求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} &\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_4-\frac{3}{2}c_1]{c_2-\frac{1}{2}c_1, c_3-c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\frac{1}{2}\times r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[c_4-c_2]{c_3-c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例 2 通过初等变换, 求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} &\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_4-\frac{3}{2}c_1]{c_2-\frac{1}{2}c_1, c_3-c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\frac{1}{2}\times r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[c_4-c_2]{c_3-c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)\times r_2} \end{aligned}$$

例 2 通过初等变换, 求出 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} &\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_4-\frac{3}{2}c_1]{c_2-\frac{1}{2}c_1, c_3-c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\frac{1}{2}\times r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[c_4-c_2]{c_3-c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)\times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例 3 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

例 3 通过初等变换, 求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

例 3 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2}$$

例 3 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

例 3 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1}$$

例 3 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

例 3 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{c_2 - 4c_1}$$

例 3 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{c_2 - 4c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -10 & -17 \\ 0 & 2 & -10 & -17 \\ 0 & -2 & -10 & -17 \end{pmatrix}$$

例 3 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[\substack{c_2 - 4c_1 \\ c_3 - 3c_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & -7 \\ 0 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

例 3 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[\substack{c_2 - 4c_1 \\ c_3 - 3c_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

例 3 通过初等变换, 求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{\begin{matrix} c_2 - 4c_1 \\ c_3 - 3c_1 \\ c_4 - 5c_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

例 3 通过初等变换, 求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{\begin{matrix} c_2 - 4c_1 \\ c_3 - 3c_1 \\ c_4 - 5c_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

例 3 通过初等变换, 求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{\begin{matrix} c_2 - 4c_1 \\ c_3 - 3c_1 \\ c_4 - 5c_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2}$$

例 3 通过初等变换, 求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{\begin{matrix} c_2 - 4c_1 \\ c_3 - 3c_1 \\ c_4 - 5c_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 3 通过初等变换, 求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{\begin{matrix} c_2 - 4c_1 \\ c_3 - 3c_1 \\ c_4 - 5c_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{c_3 - c_2} \rightarrow$$

例 3 通过初等变换, 求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} &\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[\substack{c_3 - 3c_1 \\ c_4 - 5c_1}]{c_2 - 4c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{c_3 - c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例 3 通过初等变换, 求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} &\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[\substack{c_3 - 3c_1 \\ c_4 - 5c_1}]{c_2 - 4c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[\substack{c_4 - \frac{3}{2}c_2}]{c_3 - c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例 3 通过初等变换, 求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} &\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[\substack{c_3 - 3c_1 \\ c_4 - 5c_1}]{c_2 - 4c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[\substack{c_4 - \frac{3}{2}c_2}]{c_3 - c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例 3 通过初等变换, 求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} &\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[\substack{c_3 - 3c_1 \\ c_4 - 5c_1}]{c_2 - 4c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[\substack{c_4 - \frac{3}{2}c_2}]{c_3 - c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2} \times r_2} \end{aligned}$$

例 3 通过初等变换, 求出 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} &\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[\substack{c_3 - 3c_1 \\ c_4 - 5c_1}]{c_2 - 4c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[\substack{c_4 - \frac{3}{2}c_2}]{c_3 - c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2} \times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例 4 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

例 4 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

例 4 通过初等变换，求出 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+r_1}$$

例 4 通过初等变换, 求出 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

例 4 通过初等变换, 求出 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

例 4 通过初等变换, 求出 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

例 4 通过初等变换, 求出 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-3c_1}$$

例 4 通过初等变换, 求出 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-3c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

例 4 通过初等变换, 求出 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-3c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3}$$

例 4 通过初等变换, 求出 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-3c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 4 通过初等变换, 求出 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-3c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{5} \times r_2}$$

例 4 通过初等变换, 求出 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-3c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{5} \times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

We are here now...

1. 初等变换，初等矩阵

2. 等价标准形

3. 初等行变换求逆矩阵

性质 任意 n 阶可逆方阵，都可通过有限次初等 **行** 变换化为单位矩阵。

性质 任意 n 阶可逆方阵，都可通过有限次初等 **行** 变换化为单位矩阵。

例 用初等行变换，把 3 阶可逆矩阵化为单位矩阵。

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

性质 任意 n 阶可逆方阵，都可通过有限次初等 **行** 变换化为单位矩阵。

例 用初等行变换，把 3 阶可逆矩阵化为单位矩阵。通常的步骤是：

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

性质 任意 n 阶可逆方阵，都可通过有限次初等 **行** 变换化为单位矩阵。

例 用初等行变换，把 3 阶可逆矩阵化为单位矩阵。通常的步骤是：

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

性质 任意 n 阶可逆方阵，都可通过有限次初等 **行** 变换化为单位矩阵。

例 用初等行变换，把 3 阶可逆矩阵化为单位矩阵。通常的步骤是：

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

性质 任意 n 阶可逆方阵，都可通过有限次初等 **行** 变换化为单位矩阵。

例 用初等行变换，把 3 阶可逆矩阵化为单位矩阵。通常的步骤是：

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$

性质 任意 n 阶可逆方阵，都可通过有限次初等 **行** 变换化为单位矩阵。

例 用初等行变换，把 3 阶可逆矩阵化为单位矩阵。通常的步骤是：

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$

性质 任意 n 阶可逆方阵，都可通过有限次初等 **行** 变换化为单位矩阵。

例 用初等行变换，把 3 阶可逆矩阵化为单位矩阵。通常的步骤是：

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

性质 任意 n 阶可逆方阵，都可通过有限次初等 **行** 变换化为单位矩阵。

例 用初等行变换，把 3 阶可逆矩阵化为单位矩阵。通常的步骤是：

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

性质 任意 n 阶可逆方阵，都可通过有限次初等 **行** 变换化为单位矩阵。

例 用初等行变换，把 3 阶可逆矩阵化为单位矩阵。通常的步骤是：

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

性质 任意 n 阶可逆方阵，都可通过有限次初等 **行** 变换化为单位矩阵。

例 用初等行变换，把 3 阶可逆矩阵化为单位矩阵。通常的步骤是：

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

性质 任意 n 阶可逆方阵，都可通过有限次初等 **行** 变换化为单位矩阵。

例 用初等行变换，把 3 阶可逆矩阵化为单位矩阵。通常的步骤是：

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

性质 任意 n 阶可逆方阵，都可通过有限次初等 **行** 变换化为单位矩阵。

例 用初等行变换，把 3 阶可逆矩阵化为单位矩阵。通常的步骤是：

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

初等行变换求逆矩阵的步骤 设 $A_{n \times n}$ 是可逆方阵

$$(A : I)$$

性质 任意 n 阶可逆方阵，都可通过有限次初等 **行** 变换化为单位矩阵。

例 用初等行变换，把 3 阶可逆矩阵化为单位矩阵。通常的步骤是：

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

初等行变换求逆矩阵的步骤 设 $A_{n \times n}$ 是可逆方阵

$$(A : I) \xrightarrow{\text{一系列初等行变换}}$$

性质 任意 n 阶可逆方阵，都可通过有限次初等 **行** 变换化为单位矩阵。

例 用初等行变换，把 3 阶可逆矩阵化为单位矩阵。通常的步骤是：

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

初等行变换求逆矩阵的步骤 设 $A_{n \times n}$ 是可逆方阵

$$(A : I) \xrightarrow{\text{一系列初等行变换}} (I : B)$$

性质 任意 n 阶可逆方阵，都可通过有限次初等 **行** 变换化为单位矩阵。

例 用初等行变换，把 3 阶可逆矩阵化为单位矩阵。通常的步骤是：

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

初等行变换求逆矩阵的步骤 设 $A_{n \times n}$ 是可逆方阵

$$(A : I) \xrightarrow{\text{一系列初等行变换}} (I : B)$$

则此时 B 就是逆矩阵 A^{-1}

初等行变换求逆矩阵的原理 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

初等行变换求逆矩阵的原理 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

初等行变换求逆矩阵的原理 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\Downarrow r_3 - 2r_1$$

初等行变换求逆矩阵的原理 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$\Downarrow r_3 - 2r_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

初等行变换求逆矩阵的原理 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$\Downarrow r_3 - 2r_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$\Downarrow r_2 - r_3$

初等行变换求逆矩阵的原理 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$\Downarrow r_3 - 2r_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$\Downarrow r_2 - r_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

初等行变换求逆矩阵的原理 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$\Downarrow r_3 - 2r_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$\Downarrow r_2 - r_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

则 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

初等行变换求逆矩阵的原理 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \Longrightarrow \quad (A:I)$$

$\Downarrow r_3 - 2r_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$\Downarrow r_2 - r_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

则 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

初等行变换求逆矩阵的原理 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \Longrightarrow \quad (A : I)$$

$\Downarrow r_3 - 2r_1$

\Downarrow

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \Longrightarrow \quad (P_1 A : P_1 I)$$

$\Downarrow r_2 - r_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

则 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

初等行变换求逆矩阵的原理 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \Longrightarrow \quad (A : I)$$

$\Downarrow r_3 - 2r_1$

\Downarrow

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \Longrightarrow \quad (P_1 A : P_1 I) = (P_1 A : P_1)$$

$\Downarrow r_2 - r_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

则 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

初等行变换求逆矩阵的原理 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \Longrightarrow \quad (A : I)$$

$\Downarrow r_3 - 2r_1$

\Downarrow

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \Longrightarrow \quad (P_1 A : P_1 I) = (P_1 A : P_1)$$

$\Downarrow r_2 - r_3$

\Downarrow

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \Longrightarrow \quad (P_2 P_1 A : P_2 P_1 I)$$

则 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

初等行变换求逆矩阵的原理 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \Longrightarrow \quad (A : I)$$

$\Downarrow r_3 - 2r_1$

\Downarrow

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \Longrightarrow \quad (P_1 A : P_1 I) = (P_1 A : P_1)$$

$\Downarrow r_2 - r_3$

\Downarrow

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \Longrightarrow \quad (P_2 P_1 A : P_2 P_1 I) = (I : P_2 P_1)$$

则 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

初等行变换求逆矩阵的原理 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \Longrightarrow \quad (A : I)$$

$\Downarrow_{r_3-2r_1}$

\Downarrow

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \Longrightarrow \quad (P_1 A : P_1 I) = (P_1 A : P_1)$$

$\Downarrow_{r_2-r_3}$

\Downarrow

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \Longrightarrow \quad (\underbrace{P_2 P_1 A}_{A^{-1}} : P_2 P_1 I) = (I : P_2 P_1)$$

$$\text{则 } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

初等行变换求逆矩阵的原理 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \Longrightarrow \quad (A : I)$$

$\Downarrow_{r_3-2r_1}$

\Downarrow

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \Longrightarrow \quad (P_1 A : P_1 I) = (P_1 A : P_1)$$

$\Downarrow_{r_2-r_3}$

\Downarrow

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \Longrightarrow \quad (\underbrace{P_2 P_1 A}_{A^{-1}} : \underbrace{P_2 P_1 I}_{A^{-1}}) = (I : P_2 P_1)$$

$$\text{则 } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例 1 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

例 1 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

例 1 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_2 - 2r_1}$$

例 1 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

例 1 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

例 1 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

例 1 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3-2r_2}$$

例 1 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

例 1 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}r_3}$$

例 1 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 & -1 & 1/2 \end{array} \right)$$

例 1 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 & -1 & 1/2 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2+2r_3}$$

例 1 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 & -1 & 1/2 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2+2r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 & -1 & 1/2 \end{array} \right)$$

例 1 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 & -1 & 1/2 \end{array} \right) \xrightarrow[r_1-r_3]{r_2+2r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 7/2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 & -1 & 1/2 \end{array} \right)$$

例 1 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 & -1 & 1/2 \end{array} \right) \xrightarrow[r_1-r_3]{r_2+2r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 & -1 & 1/2 \end{array} \right)$$

例 1 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 & -1 & 1/2 \end{array} \right) \xrightarrow[r_1-r_3]{r_2+2r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 & -1 & 1/2 \end{array} \right)$$

$$\text{所以 } A^{-1} = \begin{pmatrix} -5/2 & 1 & -1/2 \\ 5 & -1 & 1 \\ 7/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

例 2 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

例 2 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

例 2 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_2 - r_1}$$

例 2 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$
$$\xrightarrow{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

例 2 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$
$$\xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

例 2 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

例 2 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1) \times r_3}$$

例 2 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1) \times r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

例 2 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1) \times r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_2 + r_3}$$

例 2 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1) \times r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_2 + r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

例 2 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1) \times r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_1 - 2r_3]{r_2 + r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

例 2 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1) \times r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_1 - 2r_3]{r_2 + r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

例 2 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1) \times r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_1 - 2r_3]{r_2 + r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

$$\text{所以 } A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

例 3 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

例 3 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

例 3 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 - 2r_1}$$

例 3 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

例 3 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

例 3 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

例 3 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_2 - 2r_3}$$

例 3 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$
$$\xrightarrow{r_2 - 2r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

例 3 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$\begin{aligned} (A : I) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{r_2 - 2r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 + 2r_2} \end{aligned}$$

例 3 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$\begin{aligned} (A : I) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{r_2 - 2r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 + 2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 2 & -3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

例 3 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$\begin{aligned}(A : I) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{r_2 - 2r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 + 2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 2 & -3 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\frac{1}{5} \times r_3} \end{aligned}$$

例 3 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$\begin{aligned}(A : I) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{r_2 - 2r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 + 2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 2 & -3 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\frac{1}{5} \times r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 2/5 & -3/5 \end{array} \right)\end{aligned}$$

例 3 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$\begin{aligned}(A : I) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{r_2 - 2r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 + 2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 2 & -3 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\frac{1}{5} \times r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 2/5 & -3/5 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 - 4r_3} \end{aligned}$$

例 3 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_2 - 2r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 + 2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 2 & -3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5} \times r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 2/5 & -3/5 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 - 4r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & -3/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 2/5 & -3/5 \end{array} \right)$$

例 3 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$\begin{aligned}(A : I) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \\&\xrightarrow{r_2 - 2r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 + 2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 2 & -3 \end{array} \right) \\&\xrightarrow{\frac{1}{5} \times r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 2/5 & -3/5 \end{array} \right) \xrightarrow[r_1 - 2r_3]{r_2 - 4r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & -3/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 2/5 & -3/5 \end{array} \right)\end{aligned}$$

例 3 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$\begin{aligned}(A : I) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \\&\xrightarrow{r_2 - 2r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 + 2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 2 & -3 \end{array} \right) \\&\xrightarrow{\frac{1}{5} \times r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 2/5 & -3/5 \end{array} \right) \xrightarrow[r_1 - 2r_3]{r_2 - 4r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1/5 & -4/5 & 6/5 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & -3/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 2/5 & -3/5 \end{array} \right)\end{aligned}$$

例 3 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_2 - 2r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 + 2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 2 & -3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5} \times r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 2/5 & -3/5 \end{array} \right) \xrightarrow[r_1 - 2r_3]{r_2 - 4r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1/5 & -4/5 & 6/5 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & -3/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 2/5 & -3/5 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_1 - 2r_2}$$

例 3 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_2-2r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3+2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 2 & -3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5} \times r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 2/5 & -3/5 \end{array} \right) \xrightarrow[r_1-2r_3]{r_2-4r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1/5 & -4/5 & 6/5 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & -3/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 2/5 & -3/5 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_1-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3/5 & 2/5 & 2/5 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & -3/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 2/5 & -3/5 \end{array} \right)$$

例 3 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解

$$\begin{aligned}(A : I) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \\&\xrightarrow{r_2 - 2r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 + 2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 2 & -3 \end{array} \right) \\&\xrightarrow{\frac{1}{5} \times r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 2/5 & -3/5 \end{array} \right) \xrightarrow[r_1 - 2r_3]{r_2 - 4r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1/5 & -4/5 & 6/5 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & -3/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 2/5 & -3/5 \end{array} \right) \\&\xrightarrow{r_1 - 2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3/5 & 2/5 & 2/5 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & -3/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 2/5 & -3/5 \end{array} \right), \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -3/5 & 2/5 & 2/5 \\ 2/5 & -3/5 & 2/5 \\ 2/5 & 2/5 & -3/5 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

例 4 求 $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵, 其中 a_i 都不为 0。

例 4 求 $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵, 其中 a_i 都不为 0。

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

例 4 求 $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵, 其中 a_i 都不为 0。

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_4 \leftrightarrow r_3} * \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_2} * \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_1} *$$

例 4 求 $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵, 其中 a_i 都不为 0。

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_4 \leftrightarrow r_3} * \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_2} * \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_1} *$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

例 4 求 $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵，其中 a_i 都不为 0。

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_4 \leftrightarrow r_3} * \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_2} * \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} \frac{1}{a_4} \times r_1 \\ \frac{1}{a_1} \times r_2 \\ \frac{1}{a_2} \times r_3 \\ \frac{1}{a_3} \times r_4 \end{array}}$$

例 4 求 $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵, 其中 a_i 都不为 0。

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_4 \leftrightarrow r_3} * \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_2} * \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_1} *$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\frac{1}{a_3} \times r_4]{\begin{array}{l} \frac{1}{a_4} \times r_1 \\ \frac{1}{a_1} \times r_2 \\ \frac{1}{a_2} \times r_3 \end{array}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a_3} & 0 \end{array} \right)$$

例 4 求 $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵, 其中 a_i 都不为 0。

解

$$(A : I) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_4 \leftrightarrow r_3} * \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_2} * \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{\frac{1}{a_1} \times r_2 \\ \frac{1}{a_2} \times r_3 \\ \frac{1}{a_3} \times r_4}]{\frac{1}{a_4} \times r_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a_3} & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{所以 } A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_4} \\ \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_3} & 0 \end{pmatrix}$$