第 5 章 b：二次型与对称矩阵的正定性

数学系　梁卓滨

2019-2020 学年 I

- 二次型：$f(x)=x^TAx$，$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$
- n 阶对称矩阵：A

- 二次型：$f(x) = x^T A x$，$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
- n 阶对称矩阵：A

定义

1. 若 $f(x) = x^T A x > 0$，$\forall x \neq 0$

- 二次型：$f(x)=x^TAx$，$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$
- n 阶对称矩阵：A

定义

1. 若 $f(x)=x^TAx>0$，$\forall x\neq 0$

则称 f 是**正定二次型**

- 二次型：$f(x)=x^TAx$，$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$
- n 阶对称矩阵：A

定义

1. 若 $f(x)=x^TAx>0$，$\forall x\neq 0$

则称 f 是**正定二次型**，A 是**正定矩阵**

- 二次型：$f(x)=x^TAx$，$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$
- n 阶对称矩阵：A

定义

1. 若 $f(x)=x^TAx>0$，$\forall x\neq 0$

   则称 f 是**正定二次型**，A 是**正定矩阵**

2. 若 $f(x)=x^TAx<0$，$\forall x\neq 0$

- 二次型：$f(x)=x^TAx$，$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$
- n 阶对称矩阵：A

定义

1. 若 $f(x)=x^TAx>0$，$\forall x\neq 0$

   则称 f 是**正定二次型**，A 是**正定矩阵**

2. 若 $f(x)=x^TAx<0$，$\forall x\neq 0$

   则称 f 是**负定二次型**

- 二次型：$f(x) = x^T A x$，$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
- n 阶对称矩阵：A

定义

1. 若 $f(x) = x^T A x > 0$，$\forall x \neq 0$
   则称 f 是**正定二次型**，A 是**正定矩阵**
2. 若 $f(x) = x^T A x < 0$，$\forall x \neq 0$
   则称 f 是**负定二次型**，A 是**负定矩阵**

- 二次型：$f(x) = x^T A x$，$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
- n 阶对称矩阵：A

定义

1. 若 $f(x) = x^T A x > 0$，$\forall x \neq 0$

   则称 f 是**正定二次型**，A 是**正定矩阵**

2. 若 $f(x) = x^T A x < 0$，$\forall x \neq 0$

   则称 f 是**负定二次型**，A 是**负定矩阵**

3. 若 $f(x) = x^T A x \geq 0$，$\forall x \neq 0$

- 二次型：$f(x)=x^TAx$，$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$
- n 阶对称矩阵：A

定义

1. 若 $f(x)=x^TAx>0$，$\forall x\neq 0$
   则称 f 是**正定二次型**，A 是**正定矩阵**
2. 若 $f(x)=x^TAx<0$，$\forall x\neq 0$
   则称 f 是**负定二次型**，A 是**负定矩阵**
3. 若 $f(x)=x^TAx\geq 0$，$\forall x\neq 0$
   则称 f 是**半正定二次型**

- 二次型：$f(x)=x^TAx$，$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$
- n 阶对称矩阵：A

定义

1. 若 $f(x)=x^TAx>0$，$\forall x\neq 0$

   则称 f 是**正定二次型**，A 是**正定矩阵**

2. 若 $f(x)=x^TAx<0$，$\forall x\neq 0$

   则称 f 是**负定二次型**，A 是**负定矩阵**

3. 若 $f(x)=x^TAx\geq 0$，$\forall x\neq 0$

   则称 f 是**半正定二次型**，A 是**半正定矩阵**

- 二次型：$f(x)=x^TAx$，$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$
- n 阶对称矩阵：A

定义

1. 若 $f(x)=x^TAx>0$，$\forall x\neq 0$
   则称 f 是**正定二次型**，A 是**正定矩阵**
2. 若 $f(x)=x^TAx<0$，$\forall x\neq 0$
   则称 f 是**负定二次型**，A 是**负定矩阵**
3. 若 $f(x)=x^TAx\geq 0$，$\forall x\neq 0$
   则称 f 是**半正定二次型**，A 是**半正定矩阵**
4. 若 $f(x)=x^TAx\leq 0$，$\forall x\neq 0$

- 二次型：$f(x) = x^T A x$，$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
- n 阶对称矩阵：A

定义

1. 若 $f(x) = x^T A x > 0$，$\forall x \neq 0$
   则称 f 是**正定二次型**，A 是**正定矩阵**
2. 若 $f(x) = x^T A x < 0$，$\forall x \neq 0$
   则称 f 是**负定二次型**，A 是**负定矩阵**
3. 若 $f(x) = x^T A x \geq 0$，$\forall x \neq 0$
   则称 f 是**半正定二次型**，A 是**半正定矩阵**
4. 若 $f(x) = x^T A x \leq 0$，$\forall x \neq 0$
   则称 f 是**半负定二次型**

- 二次型：$f(x) = x^T A x$，$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
- n 阶对称矩阵：A

定义

1. 若 $f(x) = x^T A x > 0$，$\forall x \neq 0$
   则称 f 是**正定二次型**，A 是**正定矩阵**
2. 若 $f(x) = x^T A x < 0$，$\forall x \neq 0$
   则称 f 是**负定二次型**，A 是**负定矩阵**
3. 若 $f(x) = x^T A x \geq 0$，$\forall x \neq 0$
   则称 f 是**半正定二次型**，A 是**半正定矩阵**
4. 若 $f(x) = x^T A x \leq 0$，$\forall x \neq 0$
   则称 f 是**半负定二次型**，A 是**半负定矩阵**

- 二次型：$f(x) = x^T A x$，$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
- n 阶对称矩阵：A

定义

1. 若 $f(x) = x^T A x > 0$，$\forall x \neq 0$
   则称 f 是**正定二次型**，A 是**正定矩阵**
2. 若 $f(x) = x^T A x < 0$，$\forall x \neq 0$
   则称 f 是**负定二次型**，A 是**负定矩阵**
3. 若 $f(x) = x^T A x \geq 0$，$\forall x \neq 0$
   则称 f 是**半正定二次型**，A 是**半正定矩阵**
4. 若 $f(x) = x^T A x \leq 0$，$\forall x \neq 0$
   则称 f 是**半负定二次型**，A 是**半负定矩阵**

四类情况统称**有定**

- 二次型：$f(x) = x^T A x$，$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
- n 阶对称矩阵：A

定义

1. 若 $f(x) = x^T A x > 0$，$\forall x \neq 0$
   则称 f 是**正定二次型**，A 是**正定矩阵**
2. 若 $f(x) = x^T A x < 0$，$\forall x \neq 0$
   则称 f 是**负定二次型**，A 是**负定矩阵**
3. 若 $f(x) = x^T A x \geq 0$，$\forall x \neq 0$
   则称 f 是**半正定二次型**，A 是**半正定矩阵**
4. 若 $f(x) = x^T A x \leq 0$，$\forall x \neq 0$
   则称 f 是**半负定二次型**，A 是**半负定矩阵**

四类情况统称**有定**；否则称 f 和 A 为**不定**

例 二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ 是正定。

例 二次型 $f(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ 是正定。

这是当 $x \neq 0$ 时，$f(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 > 0$。

例 二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ 是正定。

这是当 $x \neq 0$ 时，$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 > 0$。

例 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + d_3x_3^2$

例 二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ 是正定。

这是当 $x \neq 0$ 时，$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 > 0$。

例 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + d_3x_3^2$

- $d_1, d_2, d_3 > 0$
- $d_1, d_2, d_3 < 0$
- $d_1, d_2, d_3 \geq 0$
- $d_1, d_2, d_3 \leq 0$
- 其余情况

例 二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ 是正定。

这是当 $x \neq 0$ 时，$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 > 0$。

例 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + d_3x_3^2$

- $d_1, d_2, d_3 > 0$，正定
- $d_1, d_2, d_3 < 0$
- $d_1, d_2, d_3 \geq 0$
- $d_1, d_2, d_3 \leq 0$
- 其余情况

例 二次型 $f(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ 是正定。

这是当 $x \neq 0$ 时，$f(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 > 0$。

例 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + d_3x_3^2$

- $d_1, d_2, d_3 > 0$，正定
- $d_1, d_2, d_3 < 0$，负定
- $d_1, d_2, d_3 \geq 0$
- $d_1, d_2, d_3 \leq 0$
- 其余情况

例 二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ 是正定。

这是当 $x \neq 0$ 时，$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 > 0$。

例 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + d_3x_3^2$

- $d_1, d_2, d_3 > 0$，正定
- $d_1, d_2, d_3 < 0$，负定，如 $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 4x_2^2 - x_3^2$
- $d_1, d_2, d_3 \geq 0$
- $d_1, d_2, d_3 \leq 0$
- 其余情况

例 二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ 是正定。

这是当 $x \neq 0$ 时，$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 > 0$。

例 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + d_3x_3^2$

- $d_1, d_2, d_3 > 0$，正定
- $d_1, d_2, d_3 < 0$，负定，如 $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 4x_2^2 - x_3^2$
- $d_1, d_2, d_3 \geq 0$，半正定
- $d_1, d_2, d_3 \leq 0$
- 其余情况

例 二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ 是正定。

这是当 $x \neq 0$ 时，$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 > 0$。

例 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + d_3x_3^2$

- $d_1, d_2, d_3 > 0$，正定
- $d_1, d_2, d_3 < 0$，负定，如 $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 4x_2^2 - x_3^2$
- $d_1, d_2, d_3 \geq 0$，半正定，如 $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + x_3^2$
- $d_1, d_2, d_3 \leq 0$
- 其余情况

例 二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ 是正定。

这是当 $x \neq 0$ 时，$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 > 0$。

例 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + d_3x_3^2$

- $d_1, d_2, d_3 > 0$，正定
- $d_1, d_2, d_3 < 0$，负定，如 $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 4x_2^2 - x_3^2$
- $d_1, d_2, d_3 \geq 0$，半正定，如 $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + x_3^2$
- $d_1, d_2, d_3 \leq 0$，半负定
- 其余情况

例 二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ 是正定。

这是当 $x \neq 0$ 时，$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 > 0$。

例 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + d_3x_3^2$

- $d_1, d_2, d_3 > 0$，正定
- $d_1, d_2, d_3 < 0$，负定，如 $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 4x_2^2 - x_3^2$
- $d_1, d_2, d_3 \geq 0$，半正定，如 $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + x_3^2$
- $d_1, d_2, d_3 \leq 0$，半负定，如 $f(x_1, x_2, x_3) = -x_2^2 - 4x_3^2$
- 其余情况

例 二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ 是正定。

这是当 $x \neq 0$ 时，$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 > 0$。

例 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + d_3x_3^2$

- $d_1, d_2, d_3 > 0$，正定
- $d_1, d_2, d_3 < 0$，负定，如 $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 4x_2^2 - x_3^2$
- $d_1, d_2, d_3 \geq 0$，半正定，如 $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + x_3^2$
- $d_1, d_2, d_3 \leq 0$，半负定，如 $f(x_1, x_2, x_3) = -x_2^2 - 4x_3^2$
- 其余情况是不定

例 二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ 是正定。

这是当 $x \neq 0$ 时，$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 > 0$。

例 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + d_3x_3^2$

- $d_1, d_2, d_3 > 0$，正定
- $d_1, d_2, d_3 < 0$，负定，如 $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 4x_2^2 - x_3^2$
- $d_1, d_2, d_3 \geq 0$，半正定，如 $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + x_3^2$
- $d_1, d_2, d_3 \leq 0$，半负定，如 $f(x_1, x_2, x_3) = -x_2^2 - 4x_3^2$
- 其余情况是不定，如 $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_2^2 - x_3^2$

例 二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 + 4x_2x_3 - 4x_3^2$$

例 二次型

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) &= -x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 + 4x_2x_3 - 4x_3^2 \\
&= -(x_1 + x_2 - 2x_3)^2
\end{aligned}
$$

例 二次型

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) &= -x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 + 4x_2x_3 - 4x_3^2 \\
&= -(x_1 + x_2 - 2x_3)^2
\end{aligned}
$$

是半负定

例 二次型

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) &= -x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 + 4x_2x_3 - 4x_3^2 \\
&= -(x_1 + x_2 - 2x_3)^2
\end{aligned}
$$

是半负定，但不是负定。

例 二次型

$$f(x_1,x_2,x_3) = -x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 + 4x_2x_3 - 4x_3^2$$
$$= -(x_1 + x_2 - 2x_3)^2$$

是半负定，但不是负定。

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

例 二次型

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) &= -x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 + 4x_2x_3 - 4x_3^2 \\
&= -(x_1 + x_2 - 2x_3)^2
\end{aligned}
$$

是半负定，但不是负定。

从而，对应的对称矩阵

$$
\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}
$$

是半负定，但不是负定。

定理 $D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$ 是正定矩阵 $\Leftrightarrow d_i > 0$（$i = 1, 2, \ldots, n$）

定理 $D=\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$ 是正定矩阵 $\Leftrightarrow d_i>0$（$i=1,2,\ldots,n$）

证明 D 对应的二次型为：

$$f(x)=d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2$$

定理 $D=\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$ 是正定矩阵 $\Leftrightarrow d_i>0$（$i=1,2,\dots,n$）

证明 D 对应的二次型为：

$$f(x)=d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2$$

显然，

$$d_1>0,\ d_2>0,\ \dots,\ d_n>0$$

定理 $D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$ 是正定矩阵 $\Leftrightarrow d_i > 0$（$i = 1, 2, \ldots, n$）

证明 D 对应的二次型为：

$$f(x) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \cdots + d_n x_n^2$$

显然，

$$d_1 > 0, d_2 > 0, \ldots, d_n > 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$$

定理 $D=\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$ 是正定矩阵 $\Leftrightarrow d_i>0$（$i=1,2,\ldots,n$）

证明 D 对应的二次型为：

$$f(x)=d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2$$

显然，

$$\begin{aligned} d_1>0, d_2>0, \ldots, d_n>0 \quad &\Leftrightarrow \quad f(x)>0 \quad \forall x\neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad f \text{ 正定} \end{aligned}$$

定理 $D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$ 是正定矩阵 $\Leftrightarrow d_i > 0$ （$i = 1, 2, \ldots, n$）

证明 D 对应的二次型为：

$$f(x) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \cdots + d_n x_n^2$$

显然，

$$\begin{aligned} d_1 > 0, d_2 > 0, \ldots, d_n > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad f \text{ 正定} \\ &\Leftrightarrow \quad D \text{ 正定} \end{aligned}$$

定理 $D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$ 是正定矩阵 $\Leftrightarrow d_i > 0$（$i = 1, 2, \ldots, n$）

证明 D 对应的二次型为：

$$f(x) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \cdots + d_n x_n^2$$

显然，

$$\begin{aligned} d_1 > 0, d_2 > 0, \ldots, d_n > 0 \quad & \Leftrightarrow \quad f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0 \\ & \Leftrightarrow \quad f \text{ 正定} \\ & \Leftrightarrow \quad D \text{ 正定} \end{aligned}$$

定理 设 $A \simeq B$。若 A 是正定矩阵，则 B 也是正定矩阵。

定理 $D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$ 是正定矩阵 $\Leftrightarrow d_i > 0$（$i = 1, 2, \dots, n$）

证明 D 对应的二次型为：

$$f(x) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \cdots + d_n x_n^2$$

显然，

$$\begin{aligned} d_1 > 0, d_2 > 0, \dots, d_n > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad f \text{ 正定} \\ &\Leftrightarrow \quad D \text{ 正定} \end{aligned}$$

定理 设 $A \simeq B$。若 A 是正定矩阵，则 B 也是正定矩阵。

证明 对 $\forall x \neq 0$，有

$$x^T B x \qquad > 0$$

定理 $D=\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$ 是正定矩阵 $\Leftrightarrow d_i>0$（$i=1,2,\ldots,n$）

证明 D 对应的二次型为：

$$f(x)=d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2$$

显然，

$$\begin{aligned} d_1>0, d_2>0, \ldots, d_n>0 \quad &\Leftrightarrow \quad f(x)>0 \quad \forall x\neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad f \text{ 正定} \\ &\Leftrightarrow \quad D \text{ 正定} \end{aligned}$$

定理 设 $A\simeq B$。若 A 是正定矩阵，则 B 也是正定矩阵。

证明 由 $A\simeq B$，知存在可逆矩阵 C，使 $C^TAC=B$。对 $\forall x\neq 0$，有

$$x^TBx \qquad\qquad > 0$$

定理 $D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$ 是正定矩阵 $\Leftrightarrow d_i > 0$（$i = 1, 2, \ldots, n$）

证明 D 对应的二次型为：

$$f(x) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \cdots + d_nx_n^2$$

显然，

$$\begin{aligned} d_1 > 0, d_2 > 0, \ldots, d_n > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad f \text{ 正定} \\ &\Leftrightarrow \quad D \text{ 正定} \end{aligned}$$

定理 设 $A \simeq B$。若 A 是正定矩阵，则 B 也是正定矩阵。

证明 由 $A \simeq B$，知存在可逆矩阵 C，使 $C^TAC = B$。对 $\forall x \neq 0$，有

$$x^TBx = x^TC^TACx = \qquad\qquad > 0$$

定理 $D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$ 是正定矩阵 $\Leftrightarrow d_i > 0$（$i = 1, 2, \ldots, n$）

证明 D 对应的二次型为：

$$f(x) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \cdots + d_nx_n^2$$

显然，

$$\begin{aligned} d_1 > 0, d_2 > 0, \ldots, d_n > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad f \text{ 正定} \\ &\Leftrightarrow \quad D \text{ 正定} \end{aligned}$$

定理 设 $A \simeq B$。若 A 是正定矩阵，则 B 也是正定矩阵。

证明 由 $A \simeq B$，知存在可逆矩阵 C，使 $C^TAC = B$。对 $\forall x \neq 0$，有

$$x^TBx = x^TC^TACx = (Cx)^T \qquad > 0$$

定理 $D=\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$ 是正定矩阵 $\Leftrightarrow d_i > 0$（$i=1,2,\ldots,n$）

证明 D 对应的二次型为：

$$f(x)=d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2$$

显然，

$$\begin{aligned} d_1>0,\, d_2>0,\, \ldots,\, d_n>0 \quad &\Leftrightarrow \quad f(x)>0 \quad \forall x\neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad f \text{ 正定} \\ &\Leftrightarrow \quad D \text{ 正定} \end{aligned}$$

定理 设 $A\simeq B$。若 A 是正定矩阵，则 B 也是正定矩阵。

证明 由 $A\simeq B$，知存在可逆矩阵 C，使 $C^TAC=B$。对 $\forall x\neq 0$，有

$$x^TBx=x^TC^TACx=(Cx)^TA(Cx)>0$$

定理 $D=\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$ 是正定矩阵 $\Leftrightarrow d_i>0$（$i=1,2,\ldots,n$）

证明 D 对应的二次型为：

$$f(x)=d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2$$

显然，

$$\begin{aligned} d_1>0,\, d_2>0,\,\ldots,\, d_n>0 \quad & \Leftrightarrow \quad f(x)>0 \quad \forall x\neq 0 \\ & \Leftrightarrow \quad f \text{ 正定} \\ & \Leftrightarrow \quad D \text{ 正定} \end{aligned}$$

定理 设 $A\simeq B$。若 A 是正定矩阵，则 B 也是正定矩阵。

证明 由 $A\simeq B$，知存在可逆矩阵 C，使 $C^TAC=B$。对 $\forall x\neq 0$，有

$$x^TBx=x^TC^TACx=(Cx)^TA(\underbrace{Cx}_{\neq 0})>0$$

定理 $D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$ 是正定矩阵 $\Leftrightarrow d_i > 0$（$i = 1, 2, \ldots, n$）

证明 D 对应的二次型为：

$$f(x) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \cdots + d_n x_n^2$$

显然，

$$\begin{aligned} d_1 > 0, d_2 > 0, \ldots, d_n > 0 \quad & \Leftrightarrow \quad f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0 \\ & \Leftrightarrow \quad f \text{ 正定} \\ & \Leftrightarrow \quad D \text{ 正定} \end{aligned}$$

定理 设 $A \simeq B$。若 A 是正定矩阵，则 B 也是正定矩阵。

证明 由 $A \simeq B$，知存在可逆矩阵 C，使 $C^T AC = B$。对 $\forall x \neq 0$，有

$$x^T Bx = x^T C^T ACx = (Cx)^T A(\underbrace{Cx}_{\neq 0}) > 0$$

所以 B 正定。

定理 设 A 是 n 阶对称方阵，则

$$
\begin{aligned}
A\text{是正定} \quad &\Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow
\end{aligned}
$$

定理 设 A 是 n 阶对称方阵，则

$$
\begin{aligned}
A\text{是正定} \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{正惯性指标 } p = n \\
&\Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow
\end{aligned}
$$

定理 设 A 是 n 阶对称方阵，则

$$A\text{是正定} \iff \text{正惯性指标 } p = n$$
$$\iff A \simeq I_n$$
$$\iff$$

定理 设 A 是 n 阶对称方阵，则

$$
\begin{aligned}
A\text{是正定} \quad &\Leftrightarrow \quad \text{正惯性指标 } p = n \\
&\Leftrightarrow \quad A \simeq I_n \\
&\Leftrightarrow \quad \text{存在可逆矩阵 } C \text{ 使得 } A = C^T C
\end{aligned}
$$

定理 设 A 是 n 阶对称方阵，则

$$\begin{aligned} A\text{是正定} \quad &\Leftrightarrow \quad \text{正惯性指标 } p = n \\ &\Leftrightarrow \quad A \simeq I_n \\ &\Leftrightarrow \quad \text{存在可逆矩阵 } C \text{ 使得 } A = C^T C \end{aligned}$$

证明 一般地，

$$A \simeq \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$$

定理 设 A 是 n 阶对称方阵，则

$$
\begin{aligned}
A\text{是正定} \quad &\Leftrightarrow \quad \text{正惯性指标 } p = n \\
&\Leftrightarrow \quad A \simeq I_n \\
&\Leftrightarrow \quad \text{存在可逆矩阵 } C \text{ 使得 } A = C^T C
\end{aligned}
$$

证明 一般地，

$$A \simeq \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix} = D$$

定理 设 A 是 n 阶对称方阵，则

$$\begin{aligned} A\text{是正定} \quad &\Leftrightarrow \quad \text{正惯性指标 } p = n \\ &\Leftrightarrow \quad A \simeq I_n \\ &\Leftrightarrow \quad \text{存在可逆矩阵 } C \text{ 使得 } A = C^T C \end{aligned}$$

证明 一般地，

$$A \simeq \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix} = D$$

所以

$$A\text{是正定} \quad \Leftrightarrow$$

定理 设 A 是 n 阶对称方阵，则

$$
\begin{aligned}
A\text{是正定} \quad &\Leftrightarrow \quad \text{正惯性指标 } p = n \\
&\Leftrightarrow \quad A \simeq I_n \\
&\Leftrightarrow \quad \text{存在可逆矩阵 } C \text{ 使得 } A = C^T C
\end{aligned}
$$

证明 一般地，

$$
A \simeq \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix} = D
$$

所以

$$
\begin{aligned}
A\text{是正定} \quad &\Leftrightarrow \quad D\text{是正定} \\
&\Leftrightarrow
\end{aligned}
$$

定理 设 A 是 n 阶对称方阵，则

$$\begin{aligned} A\text{是正定} &\Leftrightarrow \text{正惯性指标 } p = n \\ &\Leftrightarrow A \simeq I_n \\ &\Leftrightarrow \text{存在可逆矩阵 } C \text{ 使得 } A = C^T C \end{aligned}$$

证明 一般地，

$$A \simeq \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix} = D$$

所以

$$\begin{aligned} A\text{是正定} &\Leftrightarrow D\text{是正定} \\ &\Leftrightarrow \text{正惯性指标 } p = n \\ &\Leftrightarrow \end{aligned}$$

定理 设 A 是 n 阶对称方阵，则

$$
\begin{aligned}
A\text{是正定} \quad &\Leftrightarrow \quad \text{正惯性指标 } p = n \\
&\Leftrightarrow \quad A \simeq I_n \\
&\Leftrightarrow \quad \text{存在可逆矩阵 } C \text{ 使得 } A = C^T C
\end{aligned}
$$

证明 一般地，

$$
A \simeq \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix} = D
$$

所以

$$
\begin{aligned}
A\text{是正定} \quad &\Leftrightarrow \quad D\text{是正定} \\
&\Leftrightarrow \quad \text{正惯性指标 } p = n \\
&\Leftrightarrow \quad D = I_n \\
&\Leftrightarrow
\end{aligned}
$$

定理 设 A 是 n 阶对称方阵，则

$$\begin{aligned} A\text{是正定} &\iff \text{正惯性指标 } p = n \\ &\iff A \simeq I_n \\ &\iff \text{存在可逆矩阵 } C \text{ 使得 } A = C^T C \end{aligned}$$

证明 一般地，

$$A \simeq \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix} = D$$

所以

$$\begin{aligned} A\text{是正定} &\iff D\text{是正定} \\ &\iff \text{正惯性指标 } p = n \\ &\iff D = I_n \\ &\iff A \simeq I_n \\ &\iff \end{aligned}$$

定理 设 A 是 n 阶对称方阵，则

$$\begin{aligned} A\text{是正定} \quad &\Leftrightarrow \quad \text{正惯性指标 } p=n \\ &\Leftrightarrow \quad A \simeq I_n \\ &\Leftrightarrow \quad \text{存在可逆矩阵 } C \text{ 使得 } A = C^T C \end{aligned}$$

证明 一般地，

$$A \simeq \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix} = D$$

所以

$$\begin{aligned} A\text{是正定} \quad &\Leftrightarrow \quad D\text{是正定} \\ &\Leftrightarrow \quad \text{正惯性指标 } p=n \\ &\Leftrightarrow \quad D = I_n \\ &\Leftrightarrow \quad A \simeq I_n \\ &\Leftrightarrow \quad \text{存在可逆矩阵 } C \text{ 使得 } A = C^T I_n C \end{aligned}$$

定理 设 A 是 n 阶对称方阵，则

$$\begin{aligned} A\text{是正定} &\iff \text{正惯性指标 } p = n \\ &\iff A \simeq I_n \\ &\iff \text{存在可逆矩阵 } C \text{ 使得 } A = C^T C \end{aligned}$$

证明 一般地，

$$A \simeq \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix} = D$$

所以

$$\begin{aligned} A\text{是正定} &\iff D\text{是正定} \\ &\iff \text{正惯性指标 } p = n \\ &\iff D = I_n \\ &\iff A \simeq I_n \\ &\iff \text{存在可逆矩阵 } C \text{ 使得 } A = C^T I_n C = C^T C \end{aligned}$$

推论 设 A 正定矩阵，则 $|A| > 0$

推论 设 A 正定矩阵，则 $|A| > 0$

证明 由 A 是正定矩阵，知存在可逆矩阵 C，使得

$$A = C^T C$$

推论 设 A 正定矩阵，则 $|A| > 0$

证明 由 A 是正定矩阵，知存在可逆矩阵 C，使得

$$A = C^T C$$

所以

$$|A| = |C^T C| =$$

推论 设 A 正定矩阵，则 $|A| > 0$

证明 由 A 是正定矩阵，知存在可逆矩阵 C，使得

$$A = C^T C$$

所以

$$|A| = |C^T C| = |C^T| \cdot |C| =$$

推论 设 A 正定矩阵，则 $|A| > 0$

证明 由 A 是正定矩阵，知存在可逆矩阵 C，使得

$$A = C^T C$$

所以

$$|A| = |C^T C| = |C^T| \cdot |C| = |C|^2$$

推论 设 A 正定矩阵，则 $|A| > 0$

证明 由 A 是正定矩阵，知存在可逆矩阵 C，使得

$$A = C^T C$$

所以

$$|A| = |C^T C| = |C^T| \cdot |C| = |C|^2 > 0$$

推论 设 A 正定矩阵，则 $|A| > 0$

证明 由 A 是正定矩阵，知存在可逆矩阵 C，使得

$$A = C^T C$$

所以

$$|A| = |C^T C| = |C^T| \cdot |C| = |C|^2 > 0$$

定理 设 A 是 n 阶对称方阵，则

推论 设 A 正定矩阵，则 $|A| > 0$

证明 由 A 是正定矩阵，知存在可逆矩阵 C，使得

$$A = C^T C$$

所以

$$|A| = |C^T C| = |C^T| \cdot |C| = |C|^2 > 0$$

定理 设 A 是 n 阶对称方阵，则

$$A\text{是正定矩阵} \quad \Longleftrightarrow \quad A\text{所有特征值}\lambda_i > 0$$

推论 设 A 正定矩阵，则 $|A| > 0$

证明 由 A 是正定矩阵，知存在可逆矩阵 C，使得

$$A = C^T C$$

所以

$$|A| = |C^T C| = |C^T| \cdot |C| = |C|^2 > 0$$

定理 设 A 是 n 阶对称方阵，则

$$A\text{是正定矩阵} \quad \Leftrightarrow \quad A\text{所有特征值}\lambda_i > 0$$

证明 由 A 是对称矩阵，知存在正交矩阵 Q，使得

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

推论 设 A 正定矩阵，则 $|A| > 0$

证明 由 A 是正定矩阵，知存在可逆矩阵 C，使得

$$A = C^T C$$

所以

$$|A| = |C^T C| = |C^T| \cdot |C| = |C|^2 > 0$$

定理 设 A 是 n 阶对称方阵，则

$$A\text{是正定矩阵} \quad \Longleftrightarrow \quad A\text{所有特征值}\lambda_i > 0$$

证明 由 A 是对称矩阵，知存在正交矩阵 Q，使得

$$Q^T A Q = Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

推论 设 A 正定矩阵，则 $|A| > 0$

证明 由 A 是正定矩阵，知存在可逆矩阵 C，使得

$$A = C^T C$$

所以

$$|A| = |C^T C| = |C^T| \cdot |C| = |C|^2 > 0$$

定理 设 A 是 n 阶对称方阵，则

$$A\text{是正定矩阵} \quad \Longleftrightarrow \quad A\text{所有特征值}\lambda_i > 0$$

证明 由 A 是对称矩阵，知存在正交矩阵 Q，使得

$$Q^T A Q = Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A \simeq \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

推论 设 A 正定矩阵，则 $|A| > 0$

证明 由 A 是正定矩阵，知存在可逆矩阵 C，使得

$$A = C^T C$$

所以

$$|A| = |C^T C| = |C^T| \cdot |C| = |C|^2 > 0$$

定理 设 A 是 n 阶对称方阵，则

$$A\text{是正定矩阵} \quad \Leftrightarrow \quad A\text{所有特征值}\lambda_i > 0$$

证明 由 A 是对称矩阵，知存在正交矩阵 Q，使得

$$Q^T A Q = Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A \simeq \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

所以

$$A\text{正定} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}\text{正定} \quad \Leftrightarrow \quad \text{所有特征值}\,\lambda_i > 0$$

顺序主子式

设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

顺序主子式

设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称

$$|A_k| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

顺序主子式

设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称

$$|A_k| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

为 A 的 k 阶 **顺序主子式**

顺序主子式

设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称

$$|A_k|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

为 A 的 k 阶**顺序主子式**

注 $k=1,2,\ldots,n$，故共有 n 个顺序主子式

顺序主子式

例 设 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，则全部的顺序主子式是

顺序主子式

例 设 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，则全部的顺序主子式是

$|A_1| =$

$|A_2| =$

$|A_3| =$

顺序主子式

例 设 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，则全部的顺序主子式是

$$|A_1| = -1$$

$$|A_2| =$$

$$|A_3| =$$

顺序主子式

例 设 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，则全部的顺序主子式是

$$|A_1| = -1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|A_3| =$$

顺序主子式

例 设 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，则全部的顺序主子式是

$$|A_1| = -1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

$$|A_3| =$$

顺序主子式

例 设 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，则全部的顺序主子式是

$$|A_1| = -1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

顺序主子式

例 设 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，则全部的顺序主子式是

$$|A_1| = -1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1-2c_3}$$

顺序主子式

例 设 $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$，则全部的顺序主子式是

$$|A_1| = -1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix} = -4$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix}-1 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix} \xlongequal{c_1-2c_3} \begin{vmatrix}-7 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{vmatrix} =$$

顺序主子式

例 设 $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$，则全部的顺序主子式是

$$|A_1| = -1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix} = -4$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix}-1 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix} \xlongequal{c_1-2c_3} \begin{vmatrix}-7 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}-7 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}$$

顺序主子式

例 设 $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$，则全部的顺序主子式是

$$|A_1| = -1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix} = -4$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix}-1 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix} \xlongequal{c_1-2c_3} \begin{vmatrix}-7 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}-7 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix} = 5$$

顺序主子式

定理 设 A 是 n 阶对称方阵，则

$$A\text{正定} \quad \Longleftrightarrow$$

顺序主子式

定理 设 A 是 n 阶对称方阵，则

$$A\text{正定} \quad \Longleftrightarrow \quad |A_k| > 0,\ \forall k = 1, 2, \ldots, n$$

假设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ 为正定，则

- $|A_1| > 0$

- $|A_2| > 0$

- $|A_3| > 0$

假设 $A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{matrix}} \end{pmatrix}$ 为正定，则

- $|A_1| > 0$

- $|A_2| > 0$

- $|A_3| > 0$

假设 $A=\left(\boxed{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{matrix}}\right)$ 为正定，则

- $|A_1| > 0$

- $|A_2| > 0$

- $|A_3| > 0$：A 正定 $\Rightarrow |A| > 0$

假设 $A = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ 为正定，则

- $|A_1| > 0$：

  $|A_1| = a_{11}$

- $|A_2| > 0$

- $|A_3| > 0$：A 正定 $\Rightarrow |A| > 0$

假设 $A = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ 为正定，则

- $|A_1| > 0$：

  $$|A_1| = a_{11} = (1, 0, 0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

- $|A_2| > 0$

- $|A_3| > 0$：A 正定 $\Rightarrow |A| > 0$

假设 $A = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ 为正定，则

- $|A_1| > 0$：

  $$|A_1| = a_{11} = (1,\ 0,\ 0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = f(1, 0, 0)$$

- $|A_2| > 0$

- $|A_3| > 0$：A 正定 $\Rightarrow |A| > 0$

假设 $A = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ 为正定，则

- $|A_1| > 0$：

  $$|A_1| = a_{11} = (1,\ 0,\ 0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = f(1, 0, 0) > 0$$

- $|A_2| > 0$

- $|A_3| > 0$：A 正定 $\Rightarrow |A| > 0$

假设 $A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{matrix}} & \begin{matrix} a_{13} \\ a_{23} \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_{13} & a_{23} \end{matrix} & a_{33} \end{pmatrix}$ 为正定，则

- $|A_1| > 0$：

  $$|A_1| = a_{11} = (1,\ 0,\ 0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = f(1,0,0) > 0$$

- $|A_2| > 0$

  $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

- $|A_3| > 0$：A 正定 $\Rightarrow |A| > 0$

假设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ 为正定，则

- $|A_1| > 0$：

  $$|A_1| = a_{11} = (1,\ 0,\ 0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = f(1, 0, 0) > 0$$

- $|A_2| > 0$

  $$(x_1, x_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- $|A_3| > 0$：A 正定 $\Rightarrow |A| > 0$

假设 $A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{matrix}} & \begin{matrix} a_{13} \\ a_{23} \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_{13} & a_{23} \end{matrix} & a_{33} \end{pmatrix}$ 为正定，则

- $|A_1| > 0$：

  $$|A_1| = a_{11} = (1,\ 0,\ 0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = f(1, 0, 0) > 0$$

- $|A_2| > 0$：取 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq 0$，则

  $$(x_1,\ x_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- $|A_3| > 0$：A 正定 $\Rightarrow |A| > 0$

假设 $A=\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{matrix}} & \begin{matrix} a_{13} \\ a_{23} \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_{13} & a_{23} \end{matrix} & a_{33} \end{pmatrix}$ 为正定，则

- $|A_1|>0$：

  $$|A_1|=a_{11}=(1,\,0,\,0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=f(1,0,0)>0$$

- $|A_2|>0$：取 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\neq 0$，则

  $$(x_1,\,x_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

  $$=(x_1,\,x_2,\,0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}=$$

- $|A_3|>0$：A 正定 $\Rightarrow |A|>0$

假设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ 为正定，则

- $|A_1| > 0$：

  $$|A_1| = a_{11} = (1,\ 0,\ 0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = f(1,0,0) > 0$$

- $|A_2| > 0$：取 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq 0$，则

  $$(x_1,\ x_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

  $$= (x_1,\ x_2,\ 0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = f(x_1, x_2, 0)$$

- $|A_3| > 0$：A 正定 $\Rightarrow |A| > 0$

假设 $A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{matrix}} & \begin{matrix} a_{13} \\ a_{23} \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_{13} & a_{23} \end{matrix} & a_{33} \end{pmatrix}$ 为正定，则

- $|A_1| > 0$：

  $$|A_1| = a_{11} = (1,\ 0,\ 0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = f(1, 0, 0) > 0$$

- $|A_2| > 0$：取 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq 0$，则

  $$(x_1,\ x_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

  $$= (x_1,\ x_2,\ 0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = f(x_1, x_2, 0) > 0$$

- $|A_3| > 0$：A 正定 $\Rightarrow |A| > 0$

假设 $A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{matrix}} & \begin{matrix} a_{13} \\ a_{23} \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_{13} & a_{23} \end{matrix} & a_{33} \end{pmatrix}$ 为正定，则

- $|A_1| > 0$：

  $$|A_1| = a_{11} = (1,\ 0,\ 0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = f(1, 0, 0) > 0$$

- $|A_2| > 0$：取 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq 0$，则

  $$(x_1,\ x_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

  $$= (x_1,\ x_2,\ 0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = f(x_1, x_2, 0) > 0$$

  说明 $A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ 为正定，从而 $|A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$

- $|A_3| > 0$：A 正定 $\Rightarrow |A| > 0$

例 1 t 为何值时，$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$ 是正定矩阵?

例 1 t 为何值时，$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$ 是正定矩阵?

解 正定的充分必要条件是顺序主子式 > 0：

例 1 t 为何值时，$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$ 是正定矩阵?

解 正定的充分必要条件是顺序主子式 > 0：

$|A_1| =$

$|A_2| =$

$|A_3| =$

例 1 t 为何值时，$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$ 是正定矩阵?

解 正定的充分必要条件是顺序主子式 > 0：

$|A_1| = 1$

$|A_2| =$

$|A_3| =$

例 1 t 为何值时，$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$ 是正定矩阵?

解 正定的充分必要条件是顺序主子式 > 0：

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} =$$

$$|A_3| =$$

例 1 t 为何值时，$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$ 是正定矩阵?

解 正定的充分必要条件是顺序主子式 > 0：

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} =$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix}$$

例 1 t 为何值时，$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$ 是正定矩阵?

解 正定的充分必要条件是顺序主子式 > 0：

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t - 1$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix}$$

例 1 t 为何值时，$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$ 是正定矩阵?

解 正定的充分必要条件是顺序主子式 > 0：

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t - 1 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix}$$

例 1 t 为何值时，$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$ 是正定矩阵？

解 正定的充分必要条件是顺序主子式 >0：

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t-1>0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1}$$

例 1 t 为何值时，$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$ 是正定矩阵?

解 正定的充分必要条件是顺序主子式 >0：

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t-1 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & t-1 & -2 \\ 0 & -2 & t-1 \end{vmatrix}$$

例 1 t 为何值时，$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$ 是正定矩阵?

解 正定的充分必要条件是顺序主子式 > 0：

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t - 1 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} \overset{r_2 - r_1}{\underset{r_3 - r_1}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & t-1 & -2 \\ 0 & -2 & t-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & -2 \\ -2 & t-1 \end{vmatrix}$$

例 1 t 为何值时，$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$ 是正定矩阵?

解 正定的充分必要条件是顺序主子式 > 0：

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t - 1 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} \xlongequal[r_3 - r_1]{r_2 - r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & t-1 & -2 \\ 0 & -2 & t-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & -2 \\ -2 & t-1 \end{vmatrix}$$

$$= (t-1)^2 - 4 =$$

例 1 t 为何值时，$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$ 是正定矩阵?

解 正定的充分必要条件是顺序主子式 > 0：

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t - 1 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} \xlongequal[r_3 - r_1]{r_2 - r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & t-1 & -2 \\ 0 & -2 & t-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & -2 \\ -2 & t-1 \end{vmatrix}$$

$$= (t-1)^2 - 4 = (t-3)(t+1)$$

例 1 t 为何值时，$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$ 是正定矩阵?

解 正定的充分必要条件是顺序主子式 > 0：

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t - 1 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} \xlongequal[r_3 - r_1]{r_2 - r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & t-1 & -2 \\ 0 & -2 & t-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & -2 \\ -2 & t-1 \end{vmatrix}$$

$$= (t-1)^2 - 4 = (t-3)(t+1) > 0$$

例 1 t 为何值时，$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$ 是正定矩阵？

解 正定的充分必要条件是顺序主子式 > 0：

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t - 1 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & t-1 & -2 \\ 0 & -2 & t-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & -2 \\ -2 & t-1 \end{vmatrix}$$

$$= (t-1)^2 - 4 = (t-3)(t+1) > 0$$

所以 $t > 3$

例 2 λ 为何值时，二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2$ 是正定?

例 2 λ 为何值时，二次型
$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

例 2 λ 为何值时，二次型
$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$，只需判断何时 A 是正定矩阵：

例 2 λ 为何值时，二次型
$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$，只需判断何时 A 是正定矩阵：

例 2 λ 为何值时，二次型
$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & \end{pmatrix}$，只需判断何时 A 是正定矩阵：

例 2 λ 为何值时，二次型
$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$，只需判断何时 A 是正定矩阵：

例 2 λ 为何值时，二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 2 & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$，只需判断何时 A 是正定矩阵：

例 2 λ 为何值时，二次型
$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ & 2 & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$，只需判断何时 A 是正定矩阵:

例 2 λ 为何值时，二次型
$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ & 2 & 3 \\ & & \lambda \end{pmatrix}$，只需判断何时 A 是正定矩阵:

例 2 λ 为何值时，二次型
$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{pmatrix}$，只需判断何时 A 是正定矩阵：

例 2 λ 为何值时，二次型
$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{pmatrix}$，只需判断何时 A 是正定矩阵:

$$|A_1| =$$

$$|A_2| =$$

$$|A_3| =$$

例 2 λ 为何值时，二次型
$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{pmatrix}$，只需判断何时 A 是正定矩阵:

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| =$$

$$|A_3| =$$

例 2 λ 为何值时，二次型
$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{pmatrix}$，只需判断何时 A 是正定矩阵:

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$|A_3| =$$

例 2 λ 为何值时，二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{pmatrix}$，只需判断何时 A 是正定矩阵：

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{vmatrix}$$

例 2 λ 为何值时，二次型
$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{pmatrix}$，只需判断何时 A 是正定矩阵：

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{vmatrix}$$

例 2 λ 为何值时，二次型
$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{pmatrix}$，只需判断何时 A 是正定矩阵:

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{vmatrix}$$

例 2 λ 为何值时，二次型
$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{pmatrix}$，只需判断何时 A 是正定矩阵:

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-2r_1]{r_2-r_1}$$

例 2 λ 为何值时，二次型
$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{pmatrix}$，只需判断何时 A 是正定矩阵：

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-2r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-4 \end{vmatrix}$$

例 2 λ 为何值时，二次型
$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{pmatrix}$，只需判断何时 A 是正定矩阵:

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-2r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda-4 \end{vmatrix}$$

例 2 λ 为何值时，二次型
$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{pmatrix}$，只需判断何时 A 是正定矩阵:

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{vmatrix} \overset{r_2 - r_1}{\underset{r_3 - 2r_1}{=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 4 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda - 5$$

例 2 λ 为何值时，二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{pmatrix}$，只需判断何时 A 是正定矩阵:

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-2r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda-4 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda - 5 > 0$$

例 2 λ 为何值时，二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{pmatrix}$，只需判断何时 A 是正定矩阵:

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-2r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda-4 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda - 5 > 0$$

所以 $\lambda > 5$

例 3 t 为何值时，二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 是正定?

例 3 t 为何值时，二次型
$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

例 3 t 为何值时，二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$，只需判断何时 A 是正定

矩阵：

例 3 t 为何值时，二次型
$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} t & & \\ & t & \\ & & t \end{pmatrix}$，只需判断何时 A 是正定

矩阵：

例 3 t 为何值时，二次型
$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} t & 1 & \\ & t & \\ & & t \end{pmatrix}$，只需判断何时 A 是正定

矩阵：

例 3 t 为何值时，二次型
$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ & t & \\ & & t \end{pmatrix}$，只需判断何时 A 是正定矩阵：

例 3 t 为何值时，二次型
$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ & t & -1 \\ & & t \end{pmatrix}$，只需判断何时 A 是正定

矩阵：

例 3 t 为何值时，二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$，只需判断何时 A 是正定矩阵：

例 3 t 为何值时，二次型

$f(x_1,x_2,x_3)=t(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A=\begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$，只需判断何时 A 是正定矩阵:

$|A_1|=$

$|A_2|=$

$|A_3|=$

例 3 t 为何值时，二次型
$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$，只需判断何时 A 是正定

矩阵:

$$|A_1| = t$$

$$|A_2| =$$

$$|A_3| =$$

例 3 t 为何值时，二次型
$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$，只需判断何时 A 是正定

矩阵:

$$|A_1| = t$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} =$$

$$|A_3| =$$

例 3 t 为何值时，二次型
$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$，只需判断何时 A 是正定

矩阵:

$$|A_1| = t$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} =$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix}$$

例 3 t 为何值时，二次型
$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$，只需判断何时 A 是正定

矩阵:

$$|A_1| = t > 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} =$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix}$$

例 3 t 为何值时，二次型
$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$，只需判断何时 A 是正定

矩阵:

$$|A_1| = t > 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2 - 1$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix}$$

例 3 t 为何值时，二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$，只需判断何时 A 是正定

矩阵：

$$|A_1| = t > 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2 - 1 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix}$$

例 3 t 为何值时，二次型
$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$，只需判断何时 A 是正定矩阵：

$$|A_1| = t > 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2 - 1 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} \xlongequal{r_3 - r_2}$$

例 3 t 为何值时，二次型
$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$，只需判断何时 A 是正定

矩阵:

$$|A_1| = t > 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2 - 1 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} \xlongequal{r_3 - r_2} \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & -1-t & t+1 \end{vmatrix}$$

例 3 t 为何值时，二次型
$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$，只需判断何时 A 是正定矩阵：

$$|A_1| = t > 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2 - 1 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} \xlongequal{r_3 - r_2} \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & -1-t & t+1 \end{vmatrix} = (t+1) \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

例 3 t 为何值时，二次型
$f(x_1,x_2,x_3)=t(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A=\begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$，只需判断何时 A 是正定矩阵:

$$|A_1|=t>0$$

$$|A_2|=\begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix}=t^2-1>0$$

$$|A_3|=\begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} \overset{r_3-r_2}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & -1-t & t+1 \end{vmatrix}=(t+1)\begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_2+c_3}{=\!=\!=}$$

例 3 t 为何值时，二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$，只需判断何时 A 是正定

矩阵:

$$|A_1| = t > 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2 - 1 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} \xlongequal{r_3-r_2} \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & -1-t & t+1 \end{vmatrix} = (t+1)\begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2+c_3} (t+1)\begin{vmatrix} t & 2 & 1 \\ 1 & t-1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

例 3 t 为何值时，二次型
$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$，只需判断何时 A 是正定

矩阵:

$$|A_1| = t > 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2 - 1 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} \xlongequal{r_3 - r_2} \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & -1-t & t+1 \end{vmatrix} = (t+1) \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2 + c_3} (t+1) \begin{vmatrix} t & 2 & 1 \\ 1 & t-1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (t+1) \begin{vmatrix} t & 2 \\ 1 & t-1 \end{vmatrix}$$

例 3 t 为何值时，二次型
$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$，只需判断何时 A 是正定矩阵：

$$|A_1| = t > 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2 - 1 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} \xlongequal{r_3 - r_2} \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & -1-t & t+1 \end{vmatrix} = (t+1)\begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2 + c_3} (t+1)\begin{vmatrix} t & 2 & 1 \\ 1 & t-1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (t+1)\begin{vmatrix} t & 2 \\ 1 & t-1 \end{vmatrix}$$

$$= (t+1)(t^2 - t - 2)$$

例 3 t 为何值时，二次型

$f(x_1,x_2,x_3)=t(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A=\begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$，只需判断何时 A 是正定

矩阵：

$$|A_1|=t>0$$

$$|A_2|=\begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix}=t^2-1>0$$

$$|A_3|=\begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} \xlongequal{r_3-r_2} \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & -1-t & t+1 \end{vmatrix}=(t+1)\begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2+c_3}(t+1)\begin{vmatrix} t & 2 & 1 \\ 1 & t-1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(t+1)\begin{vmatrix} t & 2 \\ 1 & t-1 \end{vmatrix}$$

$$=(t+1)(t^2-t-2)=(t+1)^2(t-2)$$

例 3 t 为何值时，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=t(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A=\begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$，只需判断何时 A 是正定矩阵:

$$|A_1|=t>0$$

$$|A_2|=\begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix}=t^2-1>0$$

$$|A_3|=\begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} \xlongequal{r_3-r_2} \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & -1-t & t+1 \end{vmatrix} = (t+1)\begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2+c_3} (t+1)\begin{vmatrix} t & 2 & 1 \\ 1 & t-1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (t+1)\begin{vmatrix} t & 2 \\ 1 & t-1 \end{vmatrix}$$

$$=(t+1)(t^2-t-2)=(t+1)^2(t-2)>0$$

例 3 t 为何值时，二次型
$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 是正定?

解 二次型 f 对应的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$，只需判断何时 A 是正定

矩阵：

$$|A_1| = t > 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2 - 1 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} \xlongequal{r_3 - r_2} \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & -1-t & t+1 \end{vmatrix} = (t+1) \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2 + c_3} (t+1) \begin{vmatrix} t & 2 & 1 \\ 1 & t-1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (t+1) \begin{vmatrix} t & 2 \\ 1 & t-1 \end{vmatrix}$$

$$= (t+1)(t^2 - t - 2) = (t+1)^2(t-2) > 0$$

所以 $t > 2$