第 12 周作业

练习 1. 判断矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 可否对角化，说明理由。

练习 2. 设 3 阶方阵 A 的特征值为 $1, 2, 3$，求 $|A|$ 的值。

练习 3. 假设 3 阶方阵 A 的特征值为 $2, 1, -1$。求行列式 $|A^2 - 2I|$ 和 $|A^{-1} - 2I|$。

以下是附加题，做出来的同学下次课交，可以加分。注意解答过程要详细。

练习 4. 设 D 为平面三角形区域 $\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : 0 \leq x, 0 \leq y, x+y \leq 1\}$，设 $p = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ 为 D 中一点，设 $A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 \\ 0.6 & 0.7 \end{pmatrix}$。假设点 p 在平面上随时间运动，第 n 时刻的位置是 $p_n = A^n p$。

(a) 证明对任何时刻 $n \geq 0$，都有 $p_n \in D$。（即，点 p 的运动限制在区域 D 中。）

(b) 求 $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$。（即，求 p 点的最终位置）

设方阵 A 满足 $A^2 = I_n$。证明 A 的特征值只能是 1 或 -1。

练习 5. 设 u 是 n 维非零列向量，$A = uu^T$ 是 n 阶方阵。证明 $||u||^2$ 是 A 的一个特征值。

练习 6. 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 1$，对应的特征向量分别为 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$。求 A。

练习 7. 将下列向量组正交化

1. $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}$