第3章e:线性方程组解的结构

数学系 梁卓滨

2019-2020 学年 I

例 解齐次线性方程组:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

解结构 1/16 < ▷ △ ▽

例 解齐次线性方程组: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

例 解齐次线性方程组: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

⇒
$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{775}}$$

1/16 < ▷ △ ▽

例 解齐次线性方程组: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta} \neq 0} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

1/16 < ▷ △ ▽

例 解齐次线性方程组: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\text{roph}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

解结构 1/16 ▽ ▷ △ ▽

例 解齐次线性方程组: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

自由变量 X_3, X_4

例 解齐次线性方程组: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

⇒
$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta} \not\equiv} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$
 $r(A) = 2$
⇒ $\begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$

1/16 ▽ ▷ ○ ▽

例 解齐次线性方程组: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

⇒
$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta} \not\equiv} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$
 $r(A) = 2$

⇒ $\begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{cases}$ $\exists \text{hero} \vec{\sqsubseteq}$

 $\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$ \text{\text{\text{eligible}}} \text{\text{\$\text{\$\zero}}} \text{\$\text{\$\zero}\$}

解结构 1/16 ▽ ▷ △ ▽

例 解齐次线性方程组: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

⇒
$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta g}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$
 $r(A) = 2$

⇒ $\begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$ ⇒ $\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$ $\stackrel{\triangle}{\eta g}$

1/16 ▽ ▷ ○ ▽

例 解齐次线性方程组: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

⇒
$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta g}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_3 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_3 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \\ x_2 = \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$

解结构 1/16 < ▷ △ ▽

例 解齐次线性方程组: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

⇒
$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\text{treph}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

⇒ $\begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$ ⇒ $\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$ \text{\text{alimits}} \text{\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\t

解结构 1/16 ⊲ ▷ △ ▽

例 解齐次线性方程组: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta} \neq +} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \qquad \text{althous}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$

¥ 指构 1/16 ⊲ ▷ △ ▽

例 解齐次线性方程组: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

⇒
$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\text{Tre}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$

1/16 < ▷ △ ▽

例 解齐次线性方程组: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta} \not \oplus} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \xrightarrow{\text{Elino}} \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c_1 \\ c_1 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3c_2 \\ -2c_2 \\ 0 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

¥ 指构 1/16 ⊲ ▷ △ ▽

例 解齐次线性方程组: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta} \not \oplus} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1/16 ▽ ▷ ○ ▽

例 解齐次线性方程组: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\eta \not \Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \xrightarrow{\text{Elito}} \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x \end{cases} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

1/16 < ▷ △ ▽

 $\Rightarrow x = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$

例 解齐次线性方程组: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{righ}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_1 + 3x_2 \\ x_2 = x_1 - 2x_2 + 3x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_1 + 3x_2 \\ x_2 = x_2 - 2x_1 + 3x_2 \\ x_3 = x_1 - 2x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ x_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_1 + 3x_2 \\ x_2 = x_1 - 2x_2 \\ x_3 = x_1 \\ x_4 = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_4 + 3x_4 \\ x_3 = x_4$$

1/16 ⊲ ⊳ ∆ ⊽

例 解齐次线性方程组: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{7freph}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \xrightarrow{\text{Eline Eline Eline$$

1/16 々 ▷ △ ▽

 ξ_1 , ξ_2 基础解系

例 解齐次线性方程组: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\eta \neq +} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \xrightarrow{k=0} \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_4 + 3x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases}$$

 ξ_1 , ξ_2 基础解系

解结构

 $\Rightarrow x = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$

例 解齐次线性方程组: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\text{freph}}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

例 解齐次线性方程组: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta g_{+}}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

自由变量

X₂, X₄

解结构 2/16 < ▷ △ ▽

例 解齐次线性方程组: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

⇒
$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta g}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$r(A) = 2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 & + x_4 = 0 \end{cases}$$

 $\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ x_2, x_4 \end{cases}$ 自由变量

解结构 2/16 ▷ △ ▽

例 解齐次线性方程组: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

⇒
$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{775}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$
 $r(A) = 2$

⇒ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 & + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 & x_3 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 & + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 & x_3 = 0 \end{cases}$

 $\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$ X_2, X_4

2/16 ⊲ ⊳ ∆ ⊽

例 解齐次线性方程组: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

2/16 ⊲ ▷ △ ▽

例 解齐次线性方程组: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A : 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta} \Rightarrow \phi} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 & + x_4 = 0 \\ - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \qquad \text{althous}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

解结构 2/16 ⊲ ▷ △ ▽

例 解齐次线性方程组: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

⇒
$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\text{righ}}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{1} + 2x_{2} & + x_{4} = 0 \\ - x_{2} + x_{3} - 2x_{4} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} = -2x_{2} - x_{4} \\ x_{3} = x_{2} + 2x_{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{1} = -2c_{1} - c_{2} \\ x_{2} = c_{1} \\ x_{3} = x_{4} = c_{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{1} = -2c_{1} - c_{2} \\ x_{2} = c_{1} \end{cases}$$

2/16 ◀ ▷ △ ▼

例 解齐次线性方程组: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

⇒
$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta} \not \oplus} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{1} + 2x_{2} & + x_{4} = 0 \\ - x_{2} + x_{3} - 2x_{4} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} = -2x_{2} - x_{4} \\ x_{3} = x_{2} + 2x_{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{1} = -2c_{1} - c_{2} \\ x_{2} = c_{1} \\ x_{3} = c_{1} + 2c_{2} \\ x_{4} = c_{2} \end{cases}$$

2/16 ⊲ ▷ △ ▽

例 解齐次线性方程组: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

⇒
$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\text{trew}}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{1} + 2x_{2} & + x_{4} = 0 \\ - x_{2} + x_{3} - 2x_{4} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} = -2x_{2} - x_{4} \\ x_{3} = x_{2} + 2x_{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} = -2c_{1} - c_{2} \\ x_{2} = c_{1} \\ x_{3} = c_{1} + 2c_{2} \\ x_{4} = c_{2} \end{cases}$$

解结构 2/16 ◁ ▷ △ ▽

例 解齐次线性方程组: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta g g}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 & + x_4 = 0 \\ - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \qquad \text{althous}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_1 + 2c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 = c_1 \end{cases} = \begin{pmatrix} -2c_1 \\ c_1 \\ c_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c_2 \\ 0 \\ 2c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

2/16 < ▷ △ ▽

例 解齐次线性方程组: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{7free}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 & + x_4 = 0 \\ - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4$$

2/16 < ▶ △ ▽

例 解齐次线性方程组: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\eta \neq +} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 & + x_4 = 0 \\ - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \qquad \text{althous}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_1 + 2c_2 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x \end{cases} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

2/16 < ▷ △ ▽

 $\Rightarrow x = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$

例 解齐次线性方程组: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\eta \not \oplus} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 & + x_4 = 0 \\ - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \qquad \text{alterial} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2$$

解结构 2/16 ◁ ▷ △ ▼

 $\Rightarrow x = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$

例 解齐次线性方程组: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A : 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\eta \not \Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 & + x_4 = 0 \\ - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \qquad \text{alterial}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_1 + 2c_2 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_1 + 2c_2 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

 ξ_1 , ξ_2 基础解系

 $\Rightarrow x = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$

例 解齐次线性方程组: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta g g}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 & + x_4 = 0 \\ - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \qquad \text{althous}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_1 + 2c_2 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

结构 2/16 ∢ ▷ △ ▽

 ξ_1, ξ_2 基础解系

齐次线性方程组的基础解系

定义 如果 ξ_1 , ξ_2 , ..., ξ_s 是齐次线性方程组

Ax = 0

的解,线性无关,并且任意解均可表示成它们的线性组合,则称

 $\xi_1,\,\xi_2,\,\ldots,\,\xi_s$

是齐次方程组的一个基础解系。

齐次线性方程组的基础解系

定义 如果 $ξ_1$, $ξ_2$, ..., $ξ_s$ 是齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

的解,线性无关,并且任意解均可表示成它们的线性组合,则称

$$\xi_1, \, \xi_2, \, \ldots, \, \xi_s$$

是齐次方程组的一个基础解系。

定理 若齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

满足

$$r(A) = r < n$$

则方程组的基础解系存在,且每个基础解系恰恰有 n-r 个向量组成:

$$\xi_1, \, \xi_2, \, \ldots, \, \xi_s, \, (s = n - r)$$

齐次线性方程组的基础解系

定义 如果 $ξ_1$, $ξ_2$, ..., $ξ_s$ 是齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

的解,线性无关,并且任意解均可表示成它们的线性组合,则称

$$\xi_1, \, \xi_2, \, \ldots, \, \xi_s$$

是齐次方程组的一个基础解系。

定理 若齐次线性方程组

Ax = 0

满足

$$r(A) = r < n$$

也是自由变量个数

则方程组的基础解系存在,且每个基础解系恰恰有n-r个向量组成:

$$\xi_1, \, \xi_2, \, \ldots, \, \xi_s, \, (s = n - r)$$

齐次线性方程组的基础解系

定义 如果 $ξ_1$, $ξ_2$, ..., $ξ_s$ 是齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

的解,线性无关,并且任意解均可表示成它们的线性组合,则称

$$\xi_1, \, \xi_2, \, \ldots, \, \xi_s$$

是齐次方程组的一个基础解系。

定理 若齐次线性方程组

Ax = 0

满足

$$r(A) = r < n$$

也是自由变量个数

则方程组的基础解系存在,且每个基础解系恰恰有 $\binom{r}{n-r}$ 个向量组成: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_s, \qquad (s=n-r)$

并且,方程组的任意解x,均可由基础解系线性表示:

$$x = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \cdots + c_s \xi_s$$

- 1. (A:0) ^{初等行变换} 简化的阶梯型矩阵;
- 2. 确定自由变量,写出同解的方程组;
- 3. 求基础解系:

4. 通解就是:基础解系的线性组合

解结构 4/16 < ▷ △ ▽

- 1. (A:0) ^{初等行变换} 简化的阶梯型矩阵;
- 2. 确定自由变量,写出同解的方程组;
- 3. 求基础解系:
 - 将一个自由变量取值为 1, 其余取 0, 得到一个解向量;
 - 对所有 n-r(A) 个自由变量作类似操作,便得 n-r(A) 个解向量,构成基础解系
- 4. 诵解就是: 基础解系的线性组合

4/16 < ▷ △ ▽

- 1. (A:0) ^{初等行变换} 简化的阶梯型矩阵;
- 2. 确定自由变量,写出同解的方程组;
- 3. 求基础解系:
 - 将一个自由变量取值为 1, 其余取 0, 得到一个解向量;
 - 对所有 n-r(A) 个自由变量作类似操作,便得 n-r(A) 个解向量,构成基础解系
- 4. 诵解就是: 基础解系的线性组合

例

1. 假设自由变量为 x_3 , x_4 , 写出同解方程组: $\begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

解结构 4/16 < ▷ △ ▽

- 1. (A:0) ^{初等行变换} 简化的阶梯型矩阵;
- 2. 确定自由变量,写出同解的方程组;
- 3. 求基础解系:
 - 将一个自由变量取值为 1, 其余取 0, 得到一个解向量;
 - 对所有 n-r(A) 个自由变量作类似操作,便得 n-r(A) 个解向量,构成基础解系
- 4. 诵解就是: 基础解系的线性组合

例

1. 假设自由变量为 x_3 , x_4 , 写出同解方程组: $\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$

¥/16 ✓ ▷ △ ▽

- 1. (A:0) ^{初等行变换} 简化的阶梯型矩阵;
- 2. 确定自由变量,写出同解的方程组;
- 3. 求基础解系:
 - 将一个自由变量取值为 1, 其余取 0, 得到一个解向量;
 - 对所有 n-r(A) 个自由变量作类似操作,便得 n-r(A) 个解向量,构成基础解系
- 4. 通解就是: 基础解系的线性组合

例

1. 假设自由变量为 x_3 , x_4 , 写出同解方程组: $\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$

2. 基础解系
$$\xi_1$$
, ξ_2 : $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- 1. (A:0) ^{初等行变换} 简化的阶梯型矩阵;
- 2. 确定自由变量,写出同解的方程组;
- 3. 求基础解系:
 - 将一个自由变量取值为 1, 其余取 0, 得到一个解向量;
 - 对所有 n-r(A) 个自由变量作类似操作,便得 n-r(A) 个解向量,构成基础解系
- 4. 通解就是: 基础解系的线性组合

例

1. 假设自由变量为 x_3 , x_4 , 写出同解方程组: $\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$

2. 基础解系
$$\xi_1$$
, ξ_2 : $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- 1. (A:0) ^{初等行变换} 简化的阶梯型矩阵;
- 2. 确定自由变量,写出同解的方程组;
- 3. 求基础解系:
 - 将一个自由变量取值为 1, 其余取 0, 得到一个解向量;
 - 对所有 n-r(A) 个自由变量作类似操作,便得 n-r(A) 个解向量,构成基础解系
- 4. 通解就是: 基础解系的线性组合

例

1. 假设自由变量为 x_3 , x_4 , 写出同解方程组: $\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$

2. 基础解系
$$\xi_1$$
, ξ_2 : $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- 1. (A:0) ^{初等行变换} 简化的阶梯型矩阵;
- 2. 确定自由变量,写出同解的方程组;
- 3. 求基础解系:
 - 将一个自由变量取值为 1, 其余取 0, 得到一个解向量;
 - 对所有 n-r(A) 个自由变量作类似操作,便得 n-r(A) 个解向量,构成基础解系
- 4. 诵解就是: 基础解系的线性组合

例

1. 假设自由变量为 x_3 , x_4 , 写出同解方程组: $\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$

2. 基础解系
$$\xi_1$$
, ξ_2 : $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- 1. (A:0) ^{初等行变换} 简化的阶梯型矩阵;
- 2. 确定自由变量,写出同解的方程组;
- 3. 求基础解系:
 - 将一个自由变量取值为 1, 其余取 0, 得到一个解向量;
 - 对所有 n-r(A) 个自由变量作类似操作,便得 n-r(A) 个解向量,构成基础解系
- 4. 通解就是: 基础解系的线性组合

例

1. 假设自由变量为 x_3 , x_4 , 写出同解方程组: $\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$

2. 基础解系
$$\xi_1$$
, ξ_2 : $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

4/16 ⊲ ⊳ ∆ ▽

- 1. (A:0) ^{初等行变换} 简化的阶梯型矩阵;
- 2. 确定自由变量,写出同解的方程组;
- 3. 求基础解系:
 - 将一个自由变量取值为 1, 其余取 0, 得到一个解向量;
 - 对所有 n-r(A) 个自由变量作类似操作,便得 n-r(A) 个解向量,构成基础解系
- 4. 通解就是:基础解系的线性组合

例

1. 假设自由变量为 x_3 , x_4 , 写出同解方程组: $\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$

2. 基础解系
$$\xi_1$$
, ξ_2 : $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. 通解: $x = c_1\xi_1 + c_2\xi_2$

例1 用基础解系表示 $\begin{cases} x_{1}+&x_{2}+&4x_{3}-&3x_{4}=0\\ 2x_{1}+&3x_{2}+&5x_{3}-&5x_{4}=0\\ 3x_{1}+&5x_{2}+&6x_{3}-&7x_{4}=0 \end{cases}$

解结构 5/16 < ▷ △ ▽

$$(A:0) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \frac{1}{r_3 - 3r_1}$$

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

解

$$(A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$r_1-r_2$$

解结构

解

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 - 2r_2]{r_3 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解结构 5/16 < ▷ △ ▽

解

$$(A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

自由变量 x_3, x_4 ,

解

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

自由变量 x_3 , x_4 ,所以同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + & 7x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$$

解

$$(A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

自由变量 x_3 , x_4 ,所以同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + & 7x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

解

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

自由变量 x_3 , x_4 ,所以同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + & 7x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -7x_3 + 4x_4 \\ x_2 = 3x_3 - x_4 \end{cases}$$

解结构 5/16 < ▷ △ ▽

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. 自由变量
$$x_3$$
, x_4 , 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -7x_3 + 4x_4 \\ x_2 = 3x_3 - x_4 \end{cases}$

解结构 6/16 ◁ ▷ △ ▽

 $(A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. 自由变量
$$x_3$$
, x_4 , 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -7x_3 + 4x_4 \\ x_2 = 3x_3 - x_4 \end{cases}$

基础解系 ξ₁, ξ₂:

$$(A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 1. 自由变量 x_3 , x_4 , 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -7x_3 + 4x_4 \\ x_2 = 3x_3 x_4 \end{cases}$
- 2. 基础解系 ξ_1 , ξ_2 : $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

胜结构

例1 用基础解系表示 $\begin{cases} x_{1}+&x_{2}+&4x_{3}-&3x_{4}=0\\ 2x_{1}+&3x_{2}+&5x_{3}-&5x_{4}=0\\ 3x_{1}+&5x_{2}+&6x_{3}-&7x_{4}=0 \end{cases}$

$$(A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 1. 自由变量 x_3 , x_4 , 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -7x_3 + 4x_4 \\ x_2 = 3x_3 x_4 \end{cases}$
- 2. 基础解系 ξ_1 , ξ_2 : $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

6/16 ⊲ ⊳ ∆ ⊽

$$(A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 1. 自由变量 x_3 , x_4 , 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -7x_3 + 4x_4 \\ x_2 = 3x_3 x_4 \end{cases}$
- 2. 基础解系 ξ_1 , ξ_2 : $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

解结构 6/16 < ▷ △ ▽

$$(A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 1. 自由变量 x_3 , x_4 , 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -7x_3 + 4x_4 \\ x_2 = 3x_3 x_4 \end{cases}$
- 2. 基础解系 ξ_1 , ξ_2 : $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

解结构

$$(A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. 自由变量 x_3 , x_4 , 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -7x_3 + 4x_4 \\ x_2 = 3x_3 - x_4 \end{cases}$

2. 基础解系
$$\xi_1$$
, ξ_2 : $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

解结构 6/16 < ▷ △ ▽

例1 用基础解系表示
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$
的通解
$$3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 7x_4 = 0$$

$$(A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. 自由变量
$$x_3$$
, x_4 , 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -7x_3 + 4x_4 \\ x_2 = 3x_3 - x_4 \end{cases}$

2. 基础解系
$$\xi_1$$
, ξ_2 : $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. 通解: $x = c_1\xi_1 + c_2\xi_2$

解结构 7/16 < ▶ △ ▼

$$(A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{array}\right)$$

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \xrightarrow{r_3 - 3r_1}$$

解

$$(A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

解结构 7/16 < ▷ △ ▽

解

$$(A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$r_1+r_2$$

解结构 7/16 < ▷ △ ▽

解

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解结构 7/16 ✓ ▷ △ ▽

解

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

自由变量 x_2, x_4 ,

例 2 用基础解系表示
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$$
的通解
$$3x_1 + 6x_2 - x_3 - 11x_4 = 0$$

解

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

自由变量 x_2, x_4 ,所以同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_4 = 0 \end{cases}$$

解

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

自由变量 x_2, x_4 ,所以同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

例2 用基础解系表示
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$$
的通解
$$3x_1 + 6x_2 - x_3 - 11x_4 = 0$$

解

$$(A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

自由变量 x_2 , x_4 , 所以同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 & -4x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$$

解结构

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & | & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & | & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & | & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

1. 自由变量 x_2 , x_4 , 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$

解结构 8/16 < ▷ △ ▽

$$(A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. 自由变量
$$x_2$$
, x_4 , 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$

2. 基础解系 ξ₁, ξ₂:

解结构 8/16 < ▶ △ ▼

$$(A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & | & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & | & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & | & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

- 1. 自由变量 x_2 , x_4 , 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$
- 2. 基础解系 ξ_1 , ξ_2 : $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

解结构 8/16 ◁ ▷ △ ▽

$$(A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 1. 自由变量 x_2 , x_4 , 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$
- 2. 基础解系 ξ_1 , ξ_2 : $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

解结构 8/16 ◁ ▷ △ ▽

$$(A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & | & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & | & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & | & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

- 1. 自由变量 x_2 , x_4 , 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$
- 2. 基础解系 ξ_1 , ξ_2 : $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

解结构 8/16 < ▷ △ ▽

$$(A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & | & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & | & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & | & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

- 1. 自由变量 x_2 , x_4 , 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$
- 2. 基础解系 ξ_1 , ξ_2 : $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

解结构 8/16 ◁ ▷ △ ▽

$$(A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 1. 自由变量 x_2 , x_4 , 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$
- 2. 基础解系 ξ_1 , ξ_2 : $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

解结构 8/16 < ▶ △ ▼

$$(A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 1. 自由变量 x_2 , x_4 , 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$
- 2. 基础解系 ξ_1 , ξ_2 : $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

解结构 8/16 < ▶ △ ▼

$$(A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & | & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & | & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & | & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

- 1. 自由变量 x_2 , x_4 , 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$
- 2. 基础解系 ξ_1 , ξ_2 : $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- 3. 通解: $x = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$

$$Ax = 0$$

的解有下列性质:

1. 若 ξ_1 , ξ_2 是解,则 $\xi_1 + \xi_2$ 也是解

$$Ax = 0$$

- 1. 若 ξ_1 , ξ_2 是解,则 $\xi_1 + \xi_2$ 也是解
- 2. 若 ξ 是解,则对 $\forall c \in \mathbb{R}$,cξ 也是解

$$Ax = 0$$

的解有下列性质:

- 1. 若 $ξ_1$, $ξ_2$ 是解,则 $ξ_1 + ξ_2$ 也是解
- 2. 若 ξ 是解,则对 $\forall c \in \mathbb{R}$,cξ 也是解
- 3. 更一般地,若 ξ_1 , ξ_2 , ..., ξ_s 是解, c_1 , c_2 , ..., c_s 是任意常数,则解的线性组合

$$\xi = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_s \xi_s$$

也是解

$$Ax = 0$$

的解有下列性质:

- 1. 若 ξ_1 , ξ_2 是解,则 ξ_1 + ξ_2 也是解
- 2. 若 ξ 是解,则对 $\forall c \in \mathbb{R}$,cξ 也是解
- 3. 更一般地,若 ξ_1 , ξ_2 , . . . , ξ_s 是解, c_1 , c_2 , . . . , c_s 是任意常数, 则解的线性组合

$$\xi = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \cdots + c_s \xi_s$$
乜是解

也是解

证明

Αξ

= 0

$$Ax = 0$$

的解有下列性质:

- 1. 若 $ξ_1$, $ξ_2$ 是解,则 $ξ_1 + ξ_2$ 也是解
- 2. 若 ξ 是解,则对 $\forall c \in \mathbb{R}$,cξ 也是解
- 3. 更一般地,若 ξ_1 , ξ_2 , ..., ξ_s 是解, c_1 , c_2 , ..., c_s 是任意常数,则解的线性组合

$$\xi = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_s \xi_s$$

也是解

证明
$$A\xi = A(c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_s\xi_s)$$

$$Ax = 0$$

- 1. 若 $ξ_1$, $ξ_2$ 是解,则 $ξ_1 + ξ_2$ 也是解
- 2. 若 ξ 是解,则对 $\forall c \in \mathbb{R}$,cξ 也是解
- 3. 更一般地,若 ξ_1 , ξ_2 , ..., ξ_s 是解, c_1 , c_2 , ..., c_s 是任意常数,则解的线性组合

$$\xi = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_s \xi_s$$

$$A\xi = A(c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \dots + c_s\xi_s)$$

= $c_1A\xi_1 + c_2A\xi_2 + \dots + c_sA\xi_s$

$$Ax = 0$$

- 1. 若 $ξ_1$, $ξ_2$ 是解,则 $ξ_1 + ξ_2$ 也是解
- 2. 若 ξ 是解,则对 $\forall c \in \mathbb{R}$,cξ 也是解
- 3. 更一般地,若 ξ_1 , ξ_2 , . . . , ξ_s 是解, c_1 , c_2 , . . . , c_s 是任意常数,则解的线性组合

$$\xi = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_s \xi_s$$

$$A\xi = A(c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \dots + c_s\xi_s)$$

= $c_1A\xi_1 + c_2A\xi_2 + \dots + c_sA\xi_s$
= $c_10 + c_20 + \dots + c_s0$

$$Ax = 0$$

- 1. 若 $ξ_1$, $ξ_2$ 是解,则 $ξ_1 + ξ_2$ 也是解
- 2. 若 ξ 是解,则对 $\forall c \in \mathbb{R}$,cξ 也是解
- 3. 更一般地,若 ξ_1 , ξ_2 , . . . , ξ_s 是解, c_1 , c_2 , . . . , c_s 是任意常数,则解的线性组合

$$\xi = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_s \xi_s$$

$$A\xi = A(c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \dots + c_s\xi_s)$$

= $c_1A\xi_1 + c_2A\xi_2 + \dots + c_sA\xi_s$
= $c_10 + c_20 + \dots + c_s0 = 0$

- 1. ξ_1 , $\xi_2 + \xi_3$
- 2. ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 , $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3$
- 3. $\xi_1 \xi_2$, $\xi_2 \xi_3$, $\xi_1 \xi_3$
- 4. $\xi_1 + \xi_2$, $\xi_2 + \xi_3$, $\xi_3 + \xi_1$

解结构

- 1. ξ_1 , $\xi_2 + \xi_3$
- 2. ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 , $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3$
- 3. $\xi_1 \xi_2$, $\xi_2 \xi_3$, $\xi_1 \xi_3$
- 4. $\xi_1 + \xi_2$, $\xi_2 + \xi_3$, $\xi_3 + \xi_1$

提示 判断

1. 是否为解

10/16 < ▷ △ ▽

- 1. ξ_1 , $\xi_2 + \xi_3$
- 2. ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 , $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3$
- 3. $\xi_1 \xi_2$, $\xi_2 \xi_3$, $\xi_1 \xi_3$
- 4. $\xi_1 + \xi_2$, $\xi_2 + \xi_3$, $\xi_3 + \xi_1$

提示 判断

- 1. 是否为解
- 2. 是否包含 3 个解(基础解系包含向量的个数是定值)

解结构 10/16 < ▷ △ ▽

- 1. ξ_1 , $\xi_2 + \xi_3$
- 2. ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 , $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3$
- 3. $\xi_1 \xi_2$, $\xi_2 \xi_3$, $\xi_1 \xi_3$
- 4. $\xi_1 + \xi_2$, $\xi_2 + \xi_3$, $\xi_3 + \xi_1$

提示 判断

- 1. 是否为解
- 2. 是否包含 3 个解(基础解系包含向量的个数是定值)
- 3. 是否为线性无关

10/16 < ▷ △ ▽

$$\Rightarrow (A : b) = \begin{pmatrix} 111 - 1 & 2 \\ 231 & 0 & -1 \\ 351 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

⇒
$$(A : b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{inspec}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

⇒
$$(A:b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$
 $\xrightarrow{\text{775}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $r(A) = r(A:b)$ = 2

解结构 11/16 < ▷ △ ▽

$$\Rightarrow (A : b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{inspan}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} r(A) = r(A : b)$$

自由变量 *X*₃, *X*₄

⇒
$$(A:b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta} \neq +} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} r(A) = r(A:b)$$

$$= 2$$
⇒ $\begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 7 \end{cases}$

$$\stackrel{\text{eleogy}}{\Rightarrow} \begin{cases} x_2 & x_4 \\ x_3 & x_4 \end{cases}$$

 X_3, X_4

⇒
$$(A : b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{iff}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} r(A) = r(A : b)$$

$$= 2$$
⇒ $\begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 7 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases}$

$$\stackrel{\text{lenge}}{=} x_3, x_4$$

解结构 11/16 < ▷ △ ▽

⇒
$$(A:b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{775}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} r(A) = r(A:b)$$

$$= 2$$
⇒ $\begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{cases}$ ⇒ $\begin{cases} x_1 = 7 - 2x_3 + 3x_4 \text{ 自由变} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{cases}$

 $\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 7 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 2x_3 + 3x_4 & \text{ elip} \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 & x_3, x_4 \end{cases}$

11/16⊲ ⊳ △ ▽

⇒
$$(A:b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\eta \neq} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} r(A) = r(A:b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 7 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 2x_3 + 3x_4 & \text{lehoelly} \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 & x_3, x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$

11/16⊲ ⊳ △ ▽

$$\Rightarrow (A:b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\eta \neq +} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} r(A) = r(A:b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = & 7 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = & 7 - 2x_3 + 3x_4 & \text{lehe}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = & 7 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2c_1 \\ c_1 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3c_2 \\ -2c_2 \\ 0 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

11/16 < ▷ △ ▽

$$\Rightarrow (A : b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\eta \neq +} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} r(A) = r(A : b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 7 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 2x_3 + 3x_4 & \text{lehege} \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 & x_3, x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

11/16 ⊲ ▷ △ ▽

$$\Rightarrow (A:b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\eta \not \ni} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} r(A) = r(A:b) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 7 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 2x_3 + 3x_4 & \text{lehoe} \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 & x_3, x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ x \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

解结构 11/16 < ▶ △ ▼

$$\Rightarrow (A : b) = \begin{pmatrix} 1111 - 1 & 2 \\ 2310 & -1 \\ 3511 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\eta \not \Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 102 - 3 & 7 \\ 01 - 12 & -5 \\ 0000 & 0 & 0 \end{pmatrix} r(A) = r(A : b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 7 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 2x_3 + 3x_4 & \text{lehoe} \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 & x_3, x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 = c_2 \end{cases} + c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ x_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = \eta + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$$

解结构 11/16 < ▶ △ ▼

$$\Rightarrow (A \vdots b) = \begin{pmatrix} 1111-1 & 2 \\ 231 & 0 & -1 \\ 351 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\eta \neq +} \begin{pmatrix} 10 & 2 & -3 & 7 \\ 01-1 & 2 & -5 \\ 00 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} r(A) = r(A \vdots b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 7 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 2x_3 + 3x_4 & \text{lehoe} = 2 \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 & x_3, x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

n : *Ax* = *b*一个解

解结构

 $\Rightarrow x = \eta + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$

$$\Rightarrow (A : b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\eta \not \Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} r(A) = r(A : b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 7 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 2x_3 + 3x_4 & \text{lehoe} \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 & x_3, x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ x_1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ \xi_1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = \eta + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$$

11/16 ▽ △ ▽

 $\eta: Ax = b$ 一个解

11/16 ▽ △ ▽

$$\Rightarrow (A:b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\eta \neq 0} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} r(A) = r(A:b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 7 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 2x_3 + 3x_4 & \text{lehoely left} \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 & x_3, x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 2x_3 + 3x_4 & \text{lehoely left} \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 & x_3, x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 2x_3 + 3x_4 & \text{lehoely left} \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 & x_3, x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_1 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_$$

解结构 11/16 ◁ ▷ △ ▽

 $\xi_1, \, \xi_2$:

 $\eta: Ax = b$ 一个解

$$\Rightarrow (A:b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\eta \neq +} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} r(A) = r(A:b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 7 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 2x_3 + 3x_4 \text{ and } \frac{1}{2} \frac{1}{2}$$

解结构 11/16 ◁ ▷ △ ▽

 $\xi_1, \, \xi_2$:

$$\Rightarrow (A:b) = \begin{pmatrix} 111-1 & 2 \\ 231 & 0 & -1 \\ 351 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\eta \not\in } \begin{pmatrix} 10 & 2 & -3 & 7 \\ 01-1 & 2 & -5 \\ 00 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} r(A) = r(A:b) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 7 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 2x_3 + 3x_4 & \text{lehoe} \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 & x_3, x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = \eta + c_1\xi_1 + c_2\xi_2$$

$$\eta : Ax = b - \uparrow M$$

11/16 < ▷ △ ▽

 $\xi_1, \, \xi_2$:

解结构 11/16 ⊲ ▷ △ ▽

 $\xi_1, \, \xi_2$:

$$\Rightarrow (A : b) = \begin{pmatrix} 111 - 1 & 2 \\ 231 & 0 & -1 \\ 351 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{7iff}} \begin{pmatrix} 10 & 2 & -3 & 7 \\ 01 - 1 & 2 & -5 \\ 00 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} r(A) = r(A : b) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 7 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 2x_3 + 3x_4 & \text{12 line} \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 & x_3, x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

 $\eta: Ax = b$ 一个解 $\xi_1, \, \xi_2: Ax = 0$ 基础解系

解结构 11/16 < ▷ △ ▽

 $\Rightarrow x = \eta + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$

定义 在非齐次线性方程组

$$Ax = b$$

中,用0代替b,所得到的齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

称为原方程组 Ax = b 的导出组。

定义 在非齐次线性方程组

$$Ax = b$$

中,用0代替b,所得到的齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

称为原方程组 Ax = b 的 导出组。

如
$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & +4x_3 & -7x_4 & = 1 \\ 2x_1 & +x_2 & -2x_3 & +x_4 & = 4 & \text{的导出组是} \\ 3x_1 & -x_2 & +2x_3 & -6x_4 & = -9 \end{cases}$$

解结构 12/16 < ▷ △ ▽

定义 在非齐次线性方程组

$$Ax = b$$

中,用 0 代替 b,所得到的齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

称为原方程组 Ax = b 的 导出组。

如
$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & +4x_3 & -7x_4 & = 1 \\ 2x_1 & +x_2 & -2x_3 & +x_4 & = 4 & \text{的导出组是} \\ 3x_1 & -x_2 & +2x_3 & -6x_4 & = -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & +4x_3 & -7x_4 & = 0 \\ 2x_1 & +x_2 & -2x_3 & +x_4 & = 0 \\ 3x_1 & -x_2 & +2x_3 & -6x_4 & = 0 \end{cases}$$

$$Ax = b$$

的一个解,则原方程组的任意解 x 可以表示成

$$x = \eta + \xi$$

其中 ξ 是导出组 Ax = 0 的解。

$$Ax = b$$

的一个解,则原方程组的任意解 x 可以表示成

$$x = \eta + \xi$$

其中 ξ 是导出组 Ax = 0 的解。

进一步,设导出组 Ax = 0 的基础解系是

$$\xi_1, \, \xi_2, \, \ldots, \, \xi_s$$

$$Ax = b$$

的一个解,则原方程组的任意解 x 可以表示成

$$x = \eta + \xi$$

其中 ξ 是导出组 Ax = 0 的解。

进一步,设导出组 Ax = 0 的基础解系是

$$\xi_1, \, \xi_2, \, \ldots, \, \xi_s$$

$$\underline{\xi} \qquad \underline{c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_s \xi_s}$$

$$Ax = b$$

的一个解,则原方程组的任意解 x 可以表示成

$$x = \eta + \xi$$

其中 ξ 是导出组 Ax = 0 的解。

进一步,设导出组 Ax = 0 的基础解系是

$$\xi_1, \, \xi_2, \, \ldots, \, \xi_s$$

$$x = \eta + \underline{\xi} = \eta + \underline{c_1}\xi_1 + \underline{c_2}\xi_2 + \dots + \underline{c_s}\xi_s$$

$$Ax = b$$

的一个解,则原方程组的任意解 x 可以表示成

$$x = \eta + \xi$$

其中 ξ 是导出组 Ax = 0 的解。

进一步,设导出组 Ax = 0 的基础解系是

$$\xi_1, \, \xi_2, \, \ldots, \, \xi_s$$

$$x = \eta + \underline{\xi} = \eta + \underline{c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_s \xi_s}$$

证明
$$Ax = b$$
, $A\eta = b$

$$Ax = b$$

的一个解,则原方程组的任意解 x 可以表示成

$$x = \eta + \xi$$

其中 ξ 是导出组 Ax = 0 的解。

进一步,设导出组 Ax = 0 的基础解系是

$$\xi_1, \, \xi_2, \, \ldots, \, \xi_s$$

$$x = \eta + \underline{\xi} = \eta + \underline{c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \dots + c_s\xi_s}$$

证明
$$Ax = b$$
, $A\eta = b$ \Rightarrow $A(x - \eta) = Ax - A\eta = b - b = 0$

$$Ax = b$$

的一个解,则原方程组的任意解 x 可以表示成

$$x = \eta + \xi$$

其中 ξ 是导出组 Ax = 0 的解。

进一步,设导出组 Ax = 0 的基础解系是

$$\xi_1, \, \xi_2, \, \ldots, \, \xi_s$$

$$x = \eta + \underline{\xi} = \eta + \underline{c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_s \xi_s}$$

证明
$$Ax = b$$
, $A\eta = b$ \Rightarrow $A(x - \eta) = Ax - A\eta = b - b = 0$
 \Rightarrow $x - \eta = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_s \xi_s$

$$Ax = b$$

的一个解,则原方程组的任意解 x 可以表示成

$$x = \eta + \xi$$

其中 ξ 是导出组 Ax = 0 的解。

进一步,设导出组 Ax = 0 的基础解系是

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$$

$$x = \eta + \underline{\xi} = \eta + \underline{c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \dots + c_s\xi_s}$$

证明
$$Ax = b$$
, $A\eta = b$ \Rightarrow $A(x - \eta) = Ax - A\eta = b - b = 0$

$$\Rightarrow \quad x - \eta = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_s \xi_s$$

⇒
$$x - \eta$$
是导出组 $Ax = 0$ 的解

用基础解系表示 Ax = b 通解

先是

- 将增广矩阵 (A, b) 化为简化的阶梯形矩阵;
- 确定自由变量,写出同解方程组;

然后

- 求出一个特解 η: 可取自由未知量全为 0 得到
- 求出导出组 Ax = 0 的基础解系: $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$

则 Ax = b 的通解是

解结构 14/16 < ▷ △ ▽

用基础解系表示 Ax = b 通解

先是

- 将增广矩阵 (A, b) 化为简化的阶梯形矩阵;
- 确定自由变量,写出同解方程组;

然后

- 求出一个特解 η: 可取自由未知量全为 0 得到
- 求出导出组 Ax = 0 的基础解系: ξ₁, ξ₂,..., ξ_s

则 Ax = b 的通解是

$$x = \eta + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_s \xi_s$$

例 用 "特解+基础解系的线性组合"的形式,求出 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$ 的通解。 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 3 \end{cases}$

例 用"特解+基础解系的线性组合"的形式,求出 $\left\{ \begin{array}{cccccc} x_1+ & 2x_2+ & x_3+ & x_4- & x_5=1\\ & x_2+ & x_3+ & x_4 & =1 & \text{的通解},\\ 2x_1+ & 3x_2+ & x_3+ & 2x_4- & x_5=3 \end{array} \right.$

$$\begin{pmatrix} A \mid b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \mid 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \mid 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 \mid 3 \end{pmatrix}$$

例 用"特解+基础解系的线性组合"的形式,求出 $\left\{ \begin{array}{cccccc} x_1+ & 2x_2+ & x_3+ & x_4- & x_5=1 \\ & x_2+ & x_3+ & x_4 & =1 & \text{的通解}. \\ 2x_1+ & 3x_2+ & x_3+ & 2x_4- & x_5=3 \end{array} \right.$

$$\begin{pmatrix} A \mid b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \mid 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \mid 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 \mid 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_1}$$

$$\begin{pmatrix} A \mid b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \mid 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \mid 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 \mid 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \mid 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \mid 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \mid 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A \mid b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \mid 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \mid 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 \mid 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \mid 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \mid 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \mid 1 \end{pmatrix}$$

$$r_3+r_2$$

$$\begin{pmatrix} A \mid b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2} \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & 2 \end{array} \right)$$

例 用"特解+基础解系的线性组合"的形式,求出 $\begin{cases} x_1+&2x_2+&x_3+&x_4-&x_5=1\\ &x_2+&x_3+&x_4&=1\\ 2x_1+&3x_2+&x_3+&2x_4-&x_5=3 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} A \mid b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \mid 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \mid 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 \mid 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \mid 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \mid 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \mid 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2} \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2-r_3} r_1-r_3$$

$$\begin{pmatrix}
A \mid b
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
1 & 2 & 1 & 1 & -1 \mid 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 \mid 1 \\
2 & 3 & 1 & 2 & -1 \mid 3
\end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix}
1 & 2 & 1 & 1 & -1 \mid 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 \mid 1 \\
0 & -1 & -1 & 0 & 1 \mid 1
\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix}
1 & 2 & 1 & 1 & -1 \mid 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 \mid 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 \mid 2
\end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_3} \begin{pmatrix}
1 & 2 & 1 & 0 & -2 \mid -1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & -1 \mid -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 \mid 2
\end{pmatrix}$$

解结构 15/16 < ▷ △ ▽

$$\begin{pmatrix}
A \mid b
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
1 & 2 & 1 & 1 & -1 & | & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & | & 1 \\
2 & 3 & 1 & 2 & -1 & | & 3
\end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix}
1 & 2 & 1 & 1 & -1 & | & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & | & 1 \\
0 & -1 & -1 & 0 & 1 & | & 1
\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix}
1 & 2 & 1 & 1 & -1 & | & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & | & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & 2
\end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_3} \begin{pmatrix}
1 & 2 & 1 & 0 & -2 & | & -1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & -1 & | & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & 2
\end{pmatrix}$$

$$r_1 - 2r_2$$

$$\begin{pmatrix}
A \mid b
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
1 & 2 & 1 & 1 & -1 & | & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & | & 1 \\
2 & 3 & 1 & 2 & -1 & | & 3
\end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix}
1 & 2 & 1 & 1 & -1 & | & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & | & 1 \\
0 & -1 & -1 & 0 & 1 & | & 1
\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix}
1 & 2 & 1 & 1 & -1 & | & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & | & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & 2
\end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_3} \begin{pmatrix}
1 & 2 & 1 & 0 & -2 & | & -1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & -1 & | & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & 2
\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-2r_2} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\begin{pmatrix}
A \mid b
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
1 & 2 & 1 & 1 & -1 & | & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & | & 1 \\
2 & 3 & 1 & 2 & -1 & | & 3
\end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix}
1 & 2 & 1 & 1 & -1 & | & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & | & 1 \\
0 & -1 & -1 & 0 & 1 & | & 1
\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix}
1 & 2 & 1 & 1 & -1 & | & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & | & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & 2
\end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_3} \begin{pmatrix}
1 & 2 & 1 & 0 & -2 & | & -1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & -1 & | & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & 2
\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\begin{pmatrix}
A \mid b
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
1 & 2 & 1 & 1 & -1 & | & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & | & 1 \\
2 & 3 & 1 & 2 & -1 & | & 3
\end{pmatrix}
\xrightarrow{r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix}
1 & 2 & 1 & 1 & -1 & | & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & | & 1 \\
0 & -1 & -1 & 0 & 1 & | & 1
\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix}
1 & 2 & 1 & 1 & -1 & | & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & | & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & 2
\end{pmatrix}
\xrightarrow{r_2 - r_3} \begin{pmatrix}
1 & 2 & 1 & 0 & -2 & | & -1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & -1 & | & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & 2
\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 - 2r_2} \begin{pmatrix}
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & | & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & -1 & | & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & 2
\end{pmatrix}$$

1. 自由变量: *x*₃, *x*₅;

例 用"特解+基础解系的线性组合"的形式,求出 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 \text{ bima}, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 3 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix}
A \mid b
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
2 & 3 & 1 & 2 & -1 & 3
\end{pmatrix}
\xrightarrow{r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix}
1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1
\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix}
1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2
\end{pmatrix}
\xrightarrow{r_2 - r_3} \begin{pmatrix}
1 & 2 & 1 & 0 & -2 & -1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2
\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 - 2r_2} \begin{pmatrix}
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2
\end{pmatrix}$$

1. 自由变量: x₃, x₅; 方程同解于:

$$\begin{cases} x_1 & -x_3 & = 1 \\ x_2 & +x_3 & -x_5 & = -1 \\ x_4 & +x_5 & = 2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}
A \mid b
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
2 & 3 & 1 & 2 & -1 & 3
\end{pmatrix}
\xrightarrow{r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix}
1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1
\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix}
1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2
\end{pmatrix}
\xrightarrow{r_2 - r_3} \begin{pmatrix}
1 & 2 & 1 & 0 & -2 & -1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2
\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 - 2r_2} \begin{pmatrix}
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2
\end{pmatrix}$$

1. 自由变量: *x*₃, *x*₅; 方程同解于:

$$\begin{cases} x_1 & -x_3 & = 1 \\ x_2 & +x_3 & -x_5 & = -1 \\ x_4 & +x_5 & = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 + x_5 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$$

1. 自由变量: x_3, x_5 ; 原方程组同解于:

$$\begin{cases} x_1 & -x_3 & = 1 \\ x_2 & +x_3 & -x_5 & = -1 \\ x_4 & +x_5 & = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 + x_5 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$$

1. 自由变量: x_3, x_5 ; 原方程组同解于:

$$\begin{cases} x_1 & -x_3 & = 1 \\ x_2 & +x_3 & -x_5 & = -1 \\ x_4 & +x_5 & = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 + x_5 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$$

2. 原方程组特解:取自由变量
$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
,

1. 自由变量: x₃, x₅; 原方程组同解于:

$$\begin{cases} x_1 & -x_3 & = 1 \\ x_2 & +x_3 & -x_5 & = -1 \\ x_4 & +x_5 & = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 + x_5 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$$

2. 原方程组特解: 取自由变量
$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
,得特解 $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 。

1. 自由变量: x_3, x_5 ; 原方程组同解于:

$$\begin{cases} x_1 & -x_3 & = 1 \\ x_2 & +x_3 & -x_5 & = -1 \\ x_4 & +x_5 & = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 + x_5 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$$

2. 原方程组特解: 取自由变量
$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
,得特解 $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 。

3. 导出组 Ax = 0

1. 自由变量: x_3, x_5 ; 原方程组同解于:

$$\begin{cases} x_1 & -x_3 & = 1 \\ x_2 & +x_3 & -x_5 & = -1 \\ x_4 & +x_5 & = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 + x_5 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$$

2. 原方程组特解: 取自由变量 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,得特解 $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 。

3. 导出组
$$Ax = 0$$
同解于
$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_3 + x_5 \\ x_4 = -x_5 \end{cases}$$

1. 自由变量: x₃, x₅; 原方程组同解于:

$$\begin{cases} x_1 & -x_3 & = 1 \\ x_2 & +x_3 & -x_5 & = -1 \\ x_4 & +x_5 & = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 + x_5 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$$

2. 原方程组特解: 取自由变量 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,得特解 $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 。

3. 导出组
$$Ax = 0$$
同解于
$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_3 + x_5 \\ x_4 = -x_5 \end{cases}$$
 .分别取
$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
 和

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, 得基础解系 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$$

解结构 16/16 ⊲ ▷ △ ▽

1. 自由变量: x₃, x₅; 原方程组同解于:

$$\begin{cases} x_1 & -x_3 & = 1 \\ x_2 & +x_3 & -x_5 & = -1 \\ x_4 & +x_5 & = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 + x_5 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$$

2. 原方程组特解: 取自由变量 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,得特解 $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 。

3. 导出组
$$Ax = 0$$
同解于
$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_3 + x_5 \\ x_4 = -x_5 \end{cases}$$
 .分别取
$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
 和

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, 得基础解系 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$$

4. 通解: $x = \eta + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$ 其中 c_1 , c_2 为任意常数。