# 第 11 周作业解答

**练习 1.** 请利用拉格朗日乘数法求解下列最优方案：

| 工厂 | 产量 | 总成本 | 总生产任务 |
|---|---|---|---|
| A | $x$ | $f(x, y) = x^2 + 3y^2 + x + y + 15$ | 1000 |
| B | $y$ | | |

如何分配工厂生产任务，使总成本最少？

解：问题是求 $f(x, y) = x^2 + 3y^2 + x + y + 15$ 在条件 $x + y = 1000$ 下的最小值点。

1. 构造拉格朗日函数

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = x^2 + 3y^2 + x + y + 15 + \lambda(x + y - 1000)$$

2. 求解方程组

$$\begin{cases} F_x(x, y, \lambda) = 2x + 1 + \lambda = 0 \\ F_y(x, y, \lambda) = 6y + 1 + \lambda = 0 \\ x + y - 1000 = 0 \end{cases}$$

只有唯一解 $(x, y) = (750, 250)$。

3. 讨论：问题有最优方案，即最小值点；而上述方程组只有唯一解，所以恰好就是最优方案。因此，当 A 生产 750，B 生产 250 时，总成本最小。

**练习 2.** 假设产量 $Q$，劳动力 $L$，以及资本 $K$ 的关系为 $Q = L^{\frac{2}{3}}K^{\frac{1}{3}}$，并假设劳动力的单位价格是 2，资本的单位价格是 1。请利用拉格朗日乘数法求解下列最优方案：

1. 计划在劳动力和资本上一共投入 3000，问此时应在 $K$ 和 $L$ 上各投入多少，可使产量 $Q$ 最大？
2. 计划产量 $Q$ 达到 800，问此时应在 $K$ 和 $L$ 上各投入多少，使得成本最少？

解：（1）问题是求 $Q(K, L) = L^{\frac{2}{3}}K^{\frac{1}{3}}$ 在条件 $2L + K = 3000$ 下的最大值点。

1. 构造拉格朗日函数

$$F(K, L, \lambda) = Q(K, L) + \lambda g(K, L) = L^{\frac{2}{3}}K^{\frac{1}{3}} + \lambda(2L + K - 3000)$$

2. 求解方程组

$$\begin{cases} F_K(K, L, \lambda) = \frac{1}{3}L^{\frac{2}{3}}K^{-\frac{2}{3}} + \lambda = 0 \\ F_L(K, L, \lambda) = \frac{2}{3}L^{-\frac{1}{3}}K^{\frac{1}{3}} + 2\lambda = 0 \\ 2L + K - 3000 = 0 \end{cases}$$

只有唯一解 $(K, L) = (1000, 1000)$。

3. 讨论：问题有最优方案，即最大值点；而上述方程组只有唯一解，所以恰好就是最优方案。因此，当在 $K$ 上投入 1000，在 $L$ 上投入 1000 时，产量最大。

（2）问题是求 $C(K, L) = 2L + K$ 在条件 $L^{\frac{2}{3}}K^{\frac{1}{3}} = 800$ 下的最小值点。

1. 构造拉格朗日函数

$$F(K, L, \lambda) = C(K, L) + \lambda g(K, L) = 2L + K + \lambda(L^{\frac{2}{3}}K^{\frac{1}{3}} - 800)$$

2. 求解方程组

$$\begin{cases} F_K(K,\, L,\, \lambda) = 1 + \frac{1}{3}\lambda L^{\frac{2}{3}} K^{-\frac{2}{3}} = 0 \\ F_L(K,\, L,\, \lambda) = 2 + \frac{2}{3}\lambda L^{-\frac{1}{3}} K^{\frac{1}{3}} = 0 \\ L^{\frac{2}{3}} K^{\frac{1}{3}} - 800 = 0 \end{cases}$$

只有唯一解 $(K,\, L) = (800,\, 800)$。

3. 讨论：问题有最优方案，即最小值点；而上述方程组只有唯一解，所以恰好就是最优方案。因此，当在 $K$ 上投入 800，在 $L$ 上投入 800 时，成本最小。

**练习 3.** 先画出区域 $D$，再求二重积分：

1. $\iint_D x + 2y dxdy$，其中 $D$ 是由曲线 $y = 1 - x^2$ 及 $y = x^2 - 1$ 所围成的区域

2. $\iint_D \frac{x^2}{y^2} dxdy$，其中 $D$ 是由双曲线 $xy = 1$ 及直线 $y = x$，$x = 2$ 所围成的区域

解：1. 画出 $D$

可见 $D = \{(x,\, y) | -1 \le x \le 1,\, 1 - x^2 \le y \le x^2 - 1\}$ 是 $X$-型区域。所以

$$\begin{aligned} \iint_D x + 2y dxdy &= \int_{-1}^{1} \left[ \int_{1-x^2}^{x^2-1} x + 2y dy \right] dx \\ &= \int_{-1}^{1} \left[ \left(xy + y^2\right)\Big|_{1-x^2}^{x^2-1} \right] dx \\ &= \int_{-1}^{1} \left[ \left(x(x^2-1) + (x^2-1)^2\right) - \left(x(1-x^2) + (1-x^2)^2\right) \right] dx \\ &= \int_{-1}^{1} 2x(x^2-1) dx \\ &= (\frac{1}{2}x^4 - x^2)\Big|_{-1}^{1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. 1. 画出 $D$

可见 $D = \{(x,\, y) | 1 \le x \le 2,\, \frac{1}{x} \le y \le x\}$ 是 $X$-型区域。所以

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{x^2}{y^2} dxdy &= \int_{1}^{2} \left[ \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2} dy \right] dx \\ &= \int_{1}^{2} \left[ \left( -\frac{x^2}{y} \right)\Big|_{\frac{1}{x}}^{x} \right] dx \\ &= \int_{1}^{2} \left[ -x + x^3 \right] dx \\ &= (-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4)\Big|_{1}^{2} \\ &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$