第 04 周作业解答

练习 1. 设 $A=\begin{pmatrix}1&-4&2\\-1&4&-2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\\5&-2\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}2&2\\1&-1\\1&-3\end{pmatrix}$，计算 $B+C$，AB，BA，AC，CA 和 $A(2B-3C)$。

解

$$B+C=\begin{pmatrix}3&4\\0&2\\6&-5\end{pmatrix},\qquad AB=\begin{pmatrix}15&-14\\-15&14\end{pmatrix},\qquad BA=\begin{pmatrix}-1&4&-2\\-4&16&-8\\7&-28&14\end{pmatrix}$$

$$AC=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\qquad CA=\begin{pmatrix}0&0&0\\2&-8&4\\4&-16&8\end{pmatrix},\qquad A(2B-3C)=\begin{pmatrix}30&-28\\-30&28\end{pmatrix}$$

练习 2. 设 A 为 n 阶方阵，分别解答：

1. 假设 $|A|=-2$，计算 $\left|2|A|A^T\right|$。
2. 假设 $AA^T=I_n$ 且 $|A|<0$，计算 $|A|$。

解 1. $\left|2|A|A^T\right|=(2|A|)^n|A^T|=(2|A|)^n|A|=2^n|A|^{n+1}=2^n(-2)^{n+1}=(-1)^{n+1}2^{2n+1}$。
2. 计算等式 $AA^T=I_n$ 两边的行列式：

$$1=|I_n|=|AA^T|=|A|\cdot|A^T|=|A|\cdot|A|$$

所以 $|A|=\pm1$。又因为 $|A|<0$，所以 $|A|=-1$。

练习 3. 令 $A=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$，$v=\begin{pmatrix}\cos\alpha\\\sin\alpha\end{pmatrix}$。证明 $Av=\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\theta)\\\sin(\alpha+\theta)\end{pmatrix}$，并计算 A^n。

解

$$Av=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha\\\sin\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta\cos\alpha-\sin\theta\sin\alpha\\\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\theta)\\\sin(\alpha+\theta)\end{pmatrix},$$

$$A^n=\begin{pmatrix}\cos n\theta&-\sin n\theta\\\sin n\theta&\cos n\theta\end{pmatrix}$$

练习 4. 求满足 $A^2=O$ 的所有 2×2 矩阵 A。

解 $\begin{pmatrix}a&b\\c&-a\end{pmatrix}$ 此处 b 与 c 任意，a 满足 $a^2=-bc$。

练习 5. 设 A,B 为 n 阶方阵，证明 $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ 的充分必要条件是 $AB=BA$。

解 $(A+B)(A-B)=(A+B)A-(A+B)B=A^2+BA-AB-B^2$，可见 $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ 的充分必要条件是 $BA-AB=0$（零矩阵）。