

第 14 周作业

练习 1. 写出二次型 $f = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3$ 所对应的矩阵。

练习 2. 用配方法求以下二次型的标准型，写出所做的非退化线性变量代换 $y = Cx$ 是什么，并指出正、负惯性指标是多少。

1. $f = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$
2. $f = x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$

练习 3. t 为何值时, 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 是正定?

练习 4. 设 A, B 均是 n 阶正定矩阵, 证明 $A + B$ 也是正定矩阵。

练习 5. 设 n 阶对称矩阵 A 满足 $A^2 - 4A + 3I = 0$ 。证明 A 是正定矩阵。

以下是附加题，做出来的话下次交上来。

练习 6. 设 α 和 β 是两个非零 m 维列向量，令 $A = I - \alpha\beta^T$ 。

1. 证明 α 是 A 的一个特征向量。
2. 证明：若 $\beta^T\alpha \neq 0$ ，则 A 可对角化。
3. 求 $|A|$ 。
4. 问何时 A 可逆，并求出 A^{-1} （提示：参考式子 $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \cdots$ ）