第 01 周作业解答

练习 1. 利用公式

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

求解二元线性方程

$$\begin{cases} 2x & +5y & = 1 \\ 3x & +7y & = 2 \end{cases}$$

解

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{-3}{-1} = 3, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{1}{-1} = -1$$

练习 2. 行列式 $\begin{vmatrix} k-1 & 2 \\ 2 & k-1 \end{vmatrix} \neq 0$ 的充分必要条件是 k 满足什么条件?

解利用

$$\begin{vmatrix} k-1 & 2 \\ 2 & k-1 \end{vmatrix} = (k-1)^2 - 4 = k^2 - 2k - 3 = (k+1)(k-3) \neq 0$$

所以 $k \neq -1$ 且 $k \neq 3$。

练习 3. 按下列步骤求解三元线性方程组

$$\begin{cases} x & +y & +z & = 6 & \qquad (1) \\ x & +2y & -z & = 2 & \qquad (2) \\ 2x & -3y & -z & = -7 & \qquad (3) \end{cases}$$

1. 计算三阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix}$ 及 $D_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -7 & -3 & -1 \end{vmatrix}$，再利用 $x = \frac{D_1}{D}$ 求出 x。

2. 将第一步求解出的 x，代入方程 (1)、(2)，得到关于 y, z 的二元线性方程组。此时利用**练习 1** 的公式，求解 y 和 z。

解 (1)

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = (-2) + (-2) + (-3) - 3 - (-1) - 4 = -13$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -7 & -3 & -1 \end{vmatrix} = (-12) + 7 + (-6) - 18 - (-2) - (-14) = -13$$

所以 $x=1$。

(2) 将 $x=1$ 代入方程 (1)、(2) 得:

$$\begin{cases} \ \ y & +z & =5 \\ 2y & -z & =1 \end{cases}$$

所以

$$y=\frac{\begin{vmatrix}5 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}}=\frac{-6}{-3}=2,\qquad z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 5\\ 2 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 5\\ 3 & 7\end{vmatrix}}=\frac{-9}{-3}=3$$

总结 $x=1$, $y=2$, $z=3$。

练习 4. 设三阶行列式 $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=6$。利用行列式的性质计算：以下两个行列式分别是多少?

$$D_1=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}-2a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{23}-2a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{33}-2a_{31} & a_{32}\end{vmatrix},\qquad D_2=\begin{vmatrix}a_{11} & 2a_{12} & a_{13}\\ 3a_{21} & 6a_{22} & 3a_{23}\\ a_{31} & 2a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

解利用行列式的基本性质，可得:

$$D_1=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}-2a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{23}-2a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{33}-2a_{31} & a_{32}\end{vmatrix} \xlongequal{\text{可加性}} \begin{vmatrix}a_{11} & a_{13} & a_{12}\\ a_{21} & a_{23} & a_{22}\\ a_{31} & a_{33} & a_{32}\end{vmatrix}+\underbrace{\cancel{\begin{vmatrix}a_{11} & -2a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & -2a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & -2a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}}}_{\text{两列成比例，故为零}} \xlongequal{\text{交换2,3列}} -\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=-6$$

以及

$$D_2=\begin{vmatrix}a_{11} & 2a_{12} & a_{13}\\ 3a_{21} & 6a_{22} & 3a_{23}\\ a_{31} & 2a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} \xlongequal{\text{数乘性}} 3\begin{vmatrix}a_{11} & 2a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & 2a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & 2a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} \xlongequal{\text{数乘性}} 3\cdot 2\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=3\cdot 2\cdot 6=36$$

练习 5. 化行列式 $\begin{vmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 0 & 2\\ 2 & 2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1 & 1\end{vmatrix}$ 为三角行列式，从而算出行列式的值。

解

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 0 & 2\\ 2 & 2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1 & 1\end{vmatrix} \xlongequal[\substack{r_3-2r_1\\ r_4-2r_1}]{r_2+r_1} \begin{vmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 4\\ 0 & 2 & 3 & -3\\ 0 & 1 & 1 & -3\end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_2]{r_3-2r_2} \begin{vmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 5 & -11\\ 0 & 0 & 2 & -7\end{vmatrix} \xlongequal{r_4-\frac{2}{5}r_3} \begin{vmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 5 & -11\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{13}{5}\end{vmatrix}=-13.$$

练习 6. 思考题

利用定理“满足规范性、反称性、数乘性、可加性的对 n 行 n 列数的运算是唯一”证明:

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}.$$

再利用这一结论证明

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

(这些等式，以及不难想到的其他类似的等式，表明行列式是可以**降阶**的。这是化简行列式的一种重要方法。后面学习行列式展开式时会再详讲。)

证明 1. 定义一种运算：

$$\left\| \begin{matrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{matrix} \right\| \xlongequal{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix}.$$

验证这种运算满足规范性、反称性、数乘性、可加性：

- 规范性：

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

- 反称性：比如，

$$\left\| \begin{matrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{matrix} \right\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & x & y & z \\ 0 & u & v & w \end{vmatrix} - \left\| \begin{matrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{matrix} \right\|.$$

- 数乘性：比如，

$$\left\| \begin{matrix} a & b & c \\ ku & kv & kw \\ x & y & z \end{matrix} \right\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & ku & kv & kw \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} = k \left\| \begin{matrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{matrix} \right\|$$

- 可加性：比如，

$$\left\| \begin{matrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x+p & y+q & z+r \end{matrix} \right\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x+p & y+q & z+r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & p & q & r \end{vmatrix} = \left\| \begin{matrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} a & b & c \\ u & v & w \\ p & q & r \end{matrix} \right\|.$$

所以：

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & u & v & w \\ 0 & x & y & z \end{vmatrix} = \left\| \begin{matrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{matrix} \right\| \xlongequal{\text{唯一性}} \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{vmatrix}.$$

2.

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{12} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{r_3 - a_{32} r_1 \\ r_4 - a_{42} r_1}]{r_2 - a_{22} r_1} a_{12} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & 0 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & 0 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= -a_{12} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = -a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$