§2.1 矩阵的概念

数学系 梁卓滨

2018 - 2019 学年上学期

矩阵引入

线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ 3x_1 + 8x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 9x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7 \end{cases}$$

矩阵引入

线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ 3x_1 + 8x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 9x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7 \end{cases}$$

简写成

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -9 & 3 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

矩阵引入

线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ 3x_1 + 8x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 9x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7 \end{cases}$$

简写成

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -9 & 3 & 7 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{或} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -9 & 3 & 7 & 7 \end{array}\right)$$

矩阵引入

线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ 3x_1 + 8x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 9x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7 \end{cases}$$

简写成

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -9 & 3 & 7 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{或} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -9 & 3 & 7 & 7 \end{array}\right)$$

注 好处是：方程组的消元法过程，本质上是对“矩阵”作行变换

矩阵定义

定义 由 $m \times n$ 个数 a_{ij}（$i = 1, 2, \dots, m$；$j = 1, 2, \dots, n$）按一定次序排成的一个 m 行 n 列的矩形数表，

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵定义

定义 由 $m \times n$ 个数 a_{ij}（$i = 1, 2, ..., m$；$j = 1, 2, ..., n$）按一定次序排成的一个 m 行 n 列的矩形数表，

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为$m \times n$ 矩阵，简称矩阵。

矩阵定义

定义 由 $m \times n$ 个数 a_{ij}（$i = 1, 2, ..., m$；$j = 1, 2, ..., n$）按一定次序排成的一个 m 行 n 列的矩形数表，

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为$m \times n$ 矩阵，简称矩阵。其中 a_{ij} 称为矩阵第 i 行第 j 列的元素。

矩阵定义

定义 由 $m \times n$ 个数 a_{ij}（$i=1, 2, \ldots, m$；$j=1, 2, \ldots, n$）按一定次序排成的一个 m 行 n 列的矩形数表，

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 $m \times n$ 矩阵，简称矩阵。其中 a_{ij} 称为矩阵第 i 行第 j 列的元素。

注 通常表示矩阵的符号

1. 大写字母 A，B，C，$\cdots$

矩阵定义

定义 由 $m \times n$ 个数 a_{ij}（$i = 1, 2, ..., m$；$j = 1, 2, ..., n$）按一定次序排成的一个 m 行 n 列的矩形数表，

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为$m \times n$ 矩阵，简称矩阵。其中 a_{ij} 称为矩阵第 i 行第 j 列的元素。

注 通常表示矩阵的符号

1. 大写字母 A，B，C，$\cdots$
2. $A_{m\times n}$，$(a_{ij})_{m\times n}$

矩阵与行列式区别?

$$
矩阵 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad 行列式 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

矩阵与行列式区别?

$$\text{矩阵}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \text{行列式}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

”表格”

矩阵与行列式区别?

$$
\text{矩阵}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \text{行列式}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

”表格” vs. 数

矩阵与行列式区别?

矩阵 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, 行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

”表格” vs. 数

行数、列数可以不等

矩阵与行列式区别?

$$
矩阵 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad 行列式 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

”表格” vs. 数

行数、列数可以不等 vs. 行数、列数相等

定义 矩阵 A，B 相等是指

定义 矩阵 A，B 相等是指

- A，B 有相同的行数和列数（"同型"），

定义 矩阵 A，B 相等是指

- A，B 有相同的行数和列数（“同型”），

- 对应位置上的元素相等，

定义 矩阵 A，B 相等是指

- A，B 有相同的行数和列数（“同型”），即：

$$A = (a_{ij})_{m\times n},\ B = (b_{ij})_{m\times n}$$

- 对应位置上的元素相等，

定义 矩阵 A，B 相等是指

- A，B 有相同的行数和列数（“同型”），即：

$$A = (a_{ij})_{m\times n}, B = (b_{ij})_{m\times n}$$

- 对应位置上的元素相等，即：

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n$$

定义 矩阵 A，B 相等是指

- A，B 有相同的行数和列数（“同型”），即：

$$A=(a_{ij})_{m\times n},\ B=(b_{ij})_{m\times n}$$

- 对应位置上的元素相等，即：

$$a_{ij}=b_{ij}\quad \forall i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n$$

此时记为 $A=B$

定义 矩阵 A，B 相等是指

- A，B 有相同的行数和列数（“同型”），即：

$$A = (a_{ij})_{m\times n},\ B = (b_{ij})_{m\times n}$$

- 对应位置上的元素相等，即：

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i = 1, 2, \cdots, m;\ j = 1, 2, \cdots, n$$

此时记为 $A = B$

例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix},$$

定义 矩阵 A，B 相等是指

- A，B 有相同的行数和列数（“同型”），即：

$$A = (a_{ij})_{m\times n},\ B = (b_{ij})_{m\times n}$$

- 对应位置上的元素相等，即：

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i = 1, 2, \cdots, m;\ j = 1, 2, \cdots, n$$

此时记为 $A = B$

例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix},$$

定义 矩阵 A，B 相等是指

- A，B 有相同的行数和列数（“同型”），即：

$$A = (a_{ij})_{m\times n},\ B = (b_{ij})_{m\times n}$$

- 对应位置上的元素相等，即：

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i = 1, 2, \cdots, m;\ j = 1, 2, \cdots, n$$

此时记为 $A = B$

例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

定义 矩阵 A，B 相等是指

- A，B 有相同的行数和列数（“同型”），即：

$$A = (a_{ij})_{m\times n},\ B = (b_{ij})_{m\times n}$$

- 对应位置上的元素相等，即：

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i = 1, 2, \cdots, m;\ j = 1, 2, \cdots, n$$

此时记为 $A = B$

例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

定义 矩阵 A，B 相等是指

- A，B 有相同的行数和列数（“同型”），即：

$$A = (a_{ij})_{m\times n},\ B = (b_{ij})_{m\times n}$$

- 对应位置上的元素相等，即：

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n$$

此时记为 $A = B$

例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sin^2 t + \cos^2 t & -1 \\ 9 & 4 \\ 0 & \sqrt{t^2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 9 & 4 \\ 0 & |t| \end{pmatrix}$$

定义 矩阵 A，B 相等是指

- A，B 有相同的行数和列数（“同型”），即：

$$A = (a_{ij})_{m\times n},\ B = (b_{ij})_{m\times n}$$

- 对应位置上的元素相等，即：

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n$$

此时记为 $A = B$

例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sin^2 t + \cos^2 t & -1 \\ 9 & 4 \\ 0 & \sqrt{t^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 9 & 4 \\ 0 & |t| \end{pmatrix}$$

零矩阵、方阵

设 $A = (a_{ij})_{m\times n}$

- 若 $a_{ij} = 0$（$i = 1, 2, \ldots, m$；$j = 1, 2, \ldots, n$），则称 A 为 $m \times n$ 零矩阵，记为 $O_{m\times n}$ 或 O。例如：

$$O_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad O_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

零矩阵、方阵

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$

- 若 $a_{ij}=0$（$i=1,2,\ldots,m$；$j=1,2,\ldots,n$），则称 A 为 $m\times n$ 零矩阵，记为 $O_{m\times n}$ 或 O。例如：

$$O_{2\times 3}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad O_{3\times 2}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

- 若 $m=n$，即行数与列数相等：

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

则称 A 为n 阶方阵。

方阵的行列式

- 对 n 阶方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，可以计算其行列式 $|A|$。

方阵的行列式

- 对 n 阶方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，可以计算其行列式 $|A|$。例如

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

方阵的行列式

- 对 n 阶方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，可以计算其行列式 $|A|$。例如

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |A|$$

方阵的行列式

- 对 n 阶方阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$，可以计算其行列式 $|A|$。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

方阵的行列式

- 对 n 阶方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，可以计算其行列式 $|A|$。例如

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&0&5\\-1&0&6\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad|A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&0&5\\-1&0&6\end{vmatrix}=-58$$

方阵的行列式

- 对 n 阶方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，可以计算其行列式 $|A|$。例如

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&0&5\\-1&0&6\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad|A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&0&5\\-1&0&6\end{vmatrix}=-58$$

注

1. 若 $A=A_{m\times n}$ 非方阵（$m\neq n$），则不存在行列式 $|A|$

方阵的行列式

- 对 n 阶方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，可以计算其行列式 $|A|$。例如

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&0&5\\-1&0&6\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad|A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&0&5\\-1&0&6\end{vmatrix}=-58$$

注

1. 若 $A=A_{m\times n}$ 非方阵（$m\neq n$），则不存在行列式 $|A|$
2. 注意区分矩阵和行列式：

$$\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix},\qquad\begin{vmatrix}1&2\\0&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0\\0&3\end{vmatrix}=3$$

行矩阵和列矩阵

设 $A = (a_{ij})_{m\times n}$

- 若 $m = 1$，即只有一行：

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

行矩阵和列矩阵

设 $A = (a_{ij})_{m\times n}$

- 若 $m = 1$，即只有一行：

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

则称 A 为行矩阵 或 行向量

行矩阵和列矩阵

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$

- 若 $m=1$，即只有一行：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

  则称 A 为行矩阵 或 行向量

- 若 $n=1$，即只有一列：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

行矩阵和列矩阵

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$

- 若 $m=1$，即只有一行：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

则称 A 为行矩阵 或 行向量

- 若 $n=1$，即只有一列：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

则称 A 为列矩阵 或 列向量