第 9 章 f：多元函数微分学的几何应用

数学系　梁卓滨

2019-2020 学年 II

Outline

1. 曲线的切线、法平面

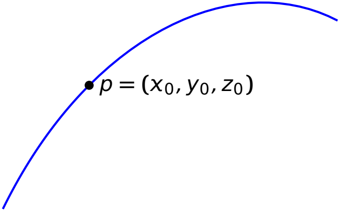
2. 曲面的切平面、法线

We are here now...

1. 曲线的切线、法平面

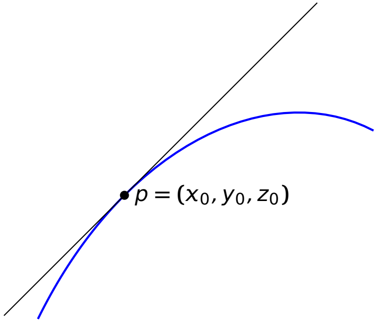
2. 曲面的切平面、法线

曲线的切线方程、法平面方程



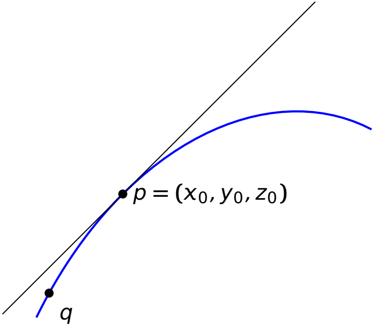
- 曲线的切线方程

曲线的切线方程、法平面方程



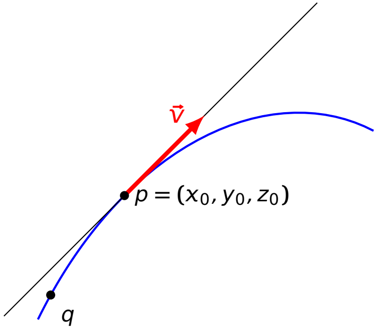
- 曲线的切线方程

曲线的切线方程、法平面方程



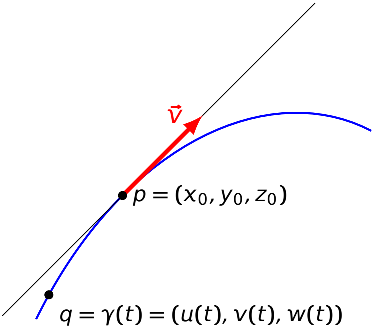
- 曲线的切线方程

曲线的切线方程、法平面方程



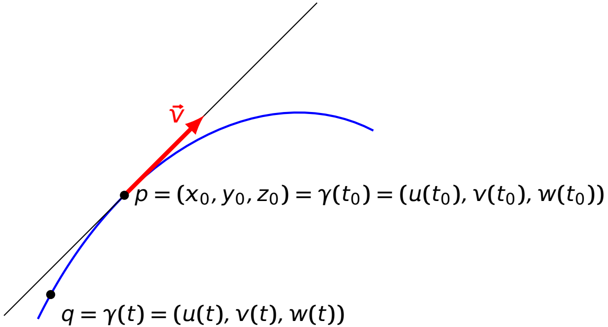
- 曲线的切线方程

曲线的切线方程、法平面方程



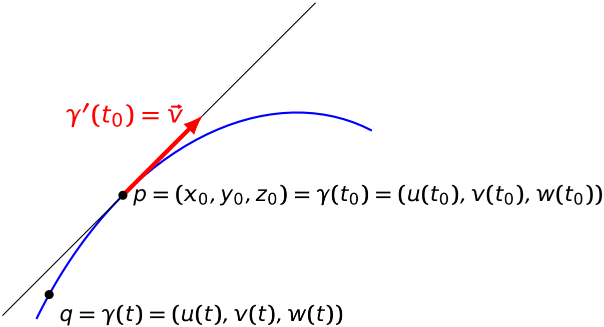
- 曲线的切线方程

曲线的切线方程、法平面方程



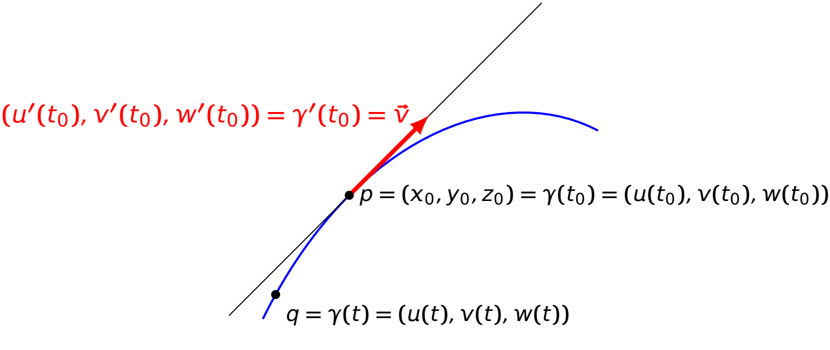
- 曲线的切线方程

曲线的切线方程、法平面方程



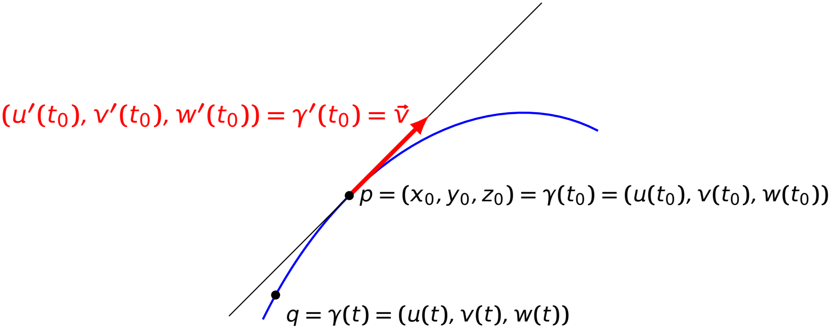
- 曲线的切线方程

曲线的切线方程、法平面方程



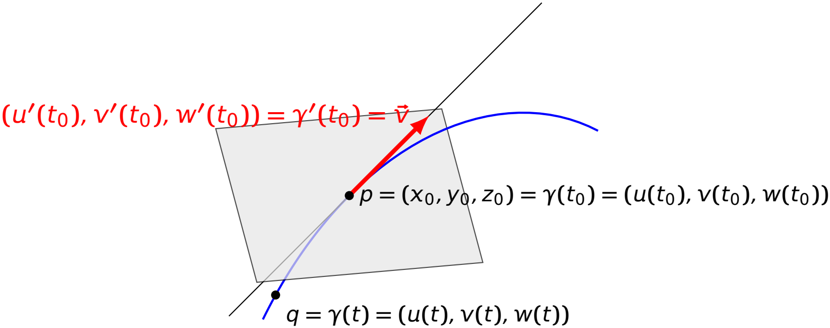
- 曲线的切线方程

曲线的切线方程、法平面方程



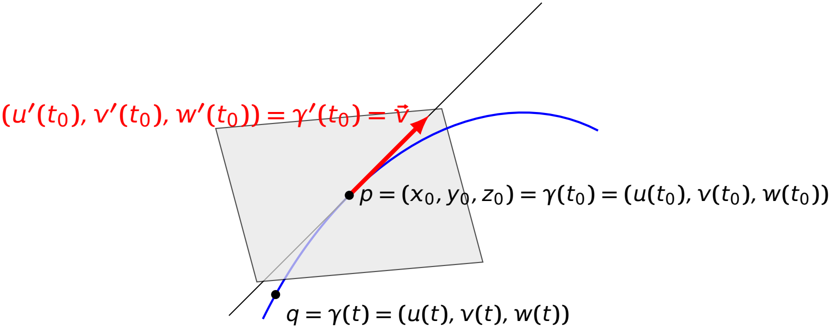
- 曲线的切线方程 $$\frac{x - x_0}{u'(t_0)} = \frac{y - y_0}{v'(t_0)} = \frac{z - z_0}{w'(t_0)}$$

曲线的切线方程、法平面方程



- 曲线的切线方程 $\dfrac{x - x_0}{u'(t_0)} = \dfrac{y - y_0}{v'(t_0)} = \dfrac{z - z_0}{w'(t_0)}$
- 曲线的法平面方程

曲线的切线方程、法平面方程



- 曲线的切线方程 $$\frac{x - x_0}{u'(t_0)} = \frac{y - y_0}{v'(t_0)} = \frac{z - z_0}{w'(t_0)}$$
- 曲线的法平面方程
$$u'(t_0)(x - x_0) + v'(t_0)(y - y_0) + w'(t_0)(z - z_0) = 0$$

例 求曲线 $\gamma(t)=(t,\, t^2,\, t^3)$ 在点 $(1,\,1,\,1)$（$t=1$）处的切线及法平面的方程.

例 求曲线 $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$ 在点 $(1, 1, 1)$（$t = 1$）处的切线及法平面的方程.

解

$$\gamma'(t) = (\qquad\qquad\qquad)$$

例 求曲线 $\gamma(t) = (t,\ t^2,\ t^3)$ 在点 $(1,\ 1,\ 1)$（$t = 1$）处的切线及法平面的方程.

解

$$\gamma'(t) = (1,\ 2t,\ 3t^2)$$

例 求曲线 $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$ 在点 $(1, 1, 1)$（$t = 1$）处的切线及法平面的方程.

解

$$\gamma'(t) = (1, 2t, 3t^2)$$

$$\gamma'(1) = (1, 2, 3)$$

例 求曲线 $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$ 在点 $(1, 1, 1)$（$t = 1$）处的切线及法平面的方程.

解

$$\gamma'(t) = (1, 2t, 3t^2)$$

$$\gamma'(1) = (1, 2, 3)$$

- 线的切线方程

- 曲线的法平面方程

例 求曲线 $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$ 在点 $(1, 1, 1)$（$t = 1$）处的切线及法平面的方程.

解

$$\gamma'(t) = (1, 2t, 3t^2)$$

$$\gamma'(1) = (1, 2, 3)$$

- 线的切线方程

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$$

- 曲线的法平面方程

例 求曲线 $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$ 在点 $(1, 1, 1)$（$t = 1$）处的切线及法平面的方程.

解

$$\gamma'(t) = (1, 2t, 3t^2)$$

$$\gamma'(1) = (1, 2, 3)$$

- 线的切线方程

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$$

- 曲线的法平面方程

$$1\cdot(x-1) + 2\cdot(y-1) + 3\cdot(z-1) = 0$$

例 求曲线 $\gamma(t)=(t,\ t^2,\ t^3)$ 在点 $(1,\ 1,\ 1)$（$t=1$）处的切线及法平面的方程.

解

$$\gamma'(t)=(1,\ 2t,\ 3t^2)$$

$$\gamma'(1)=(1,\ 2,\ 3)$$

- 线的切线方程

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$$

- 曲线的法平面方程

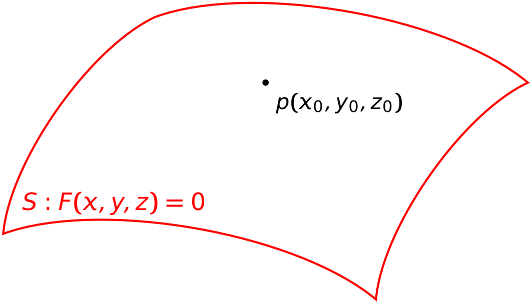
$$1\cdot(x-1)+2\cdot(y-1)+3\cdot(z-1)=0 \quad \Rightarrow \quad x+2y+3z-6=0$$

We are here now...

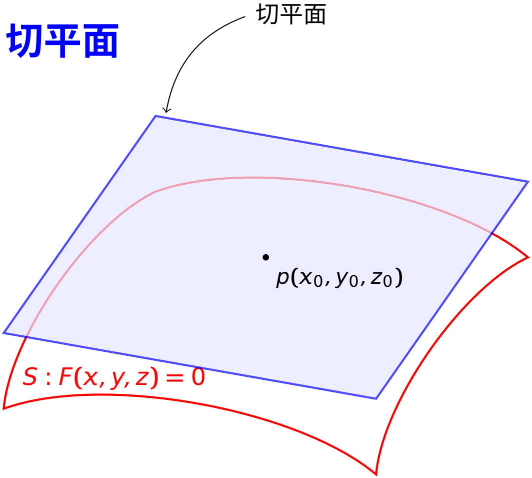
1. 曲线的切线、法平面

2. 曲面的切平面、法线

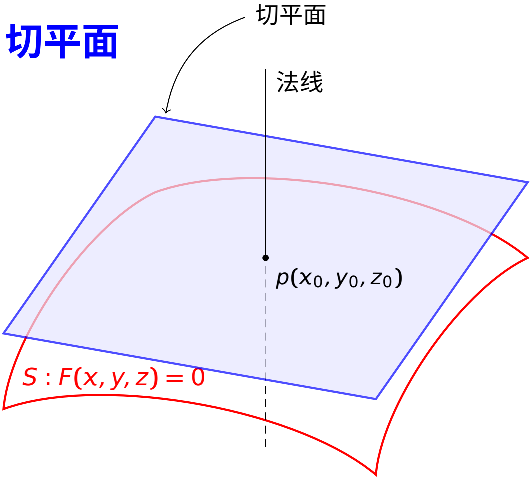
切平面



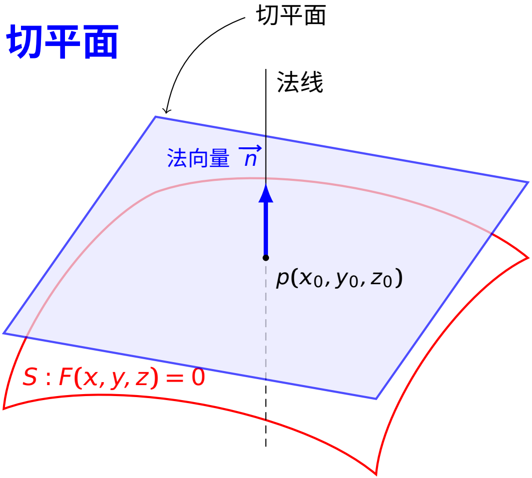
切平面



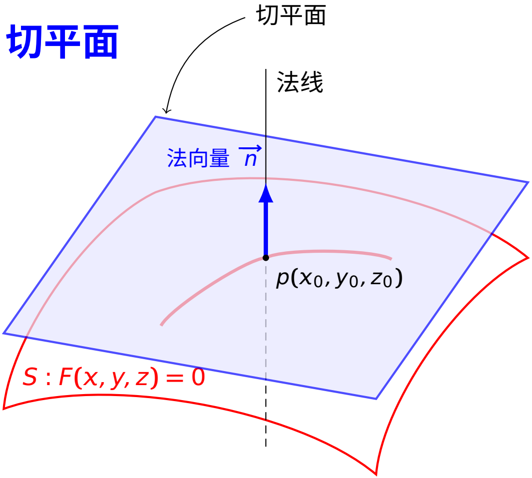
切平面



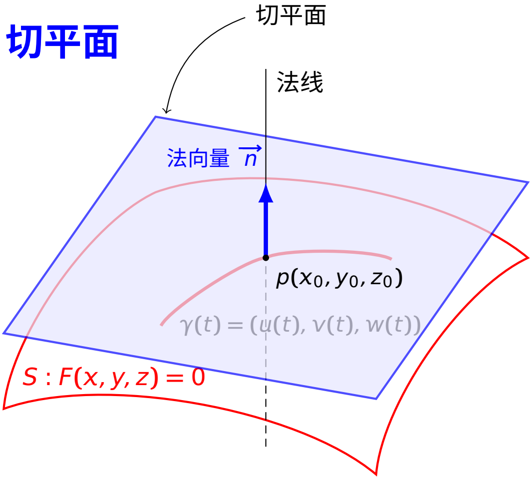
切平面



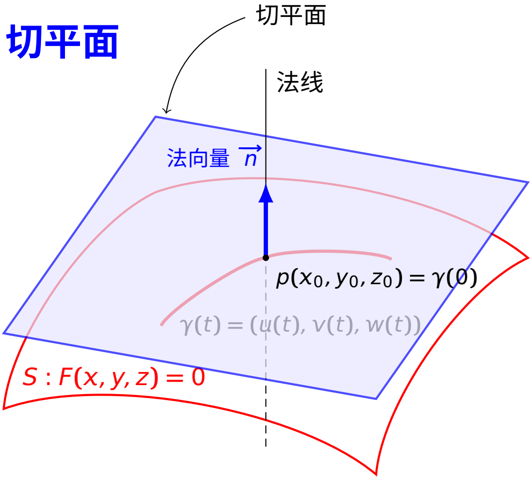
切平面



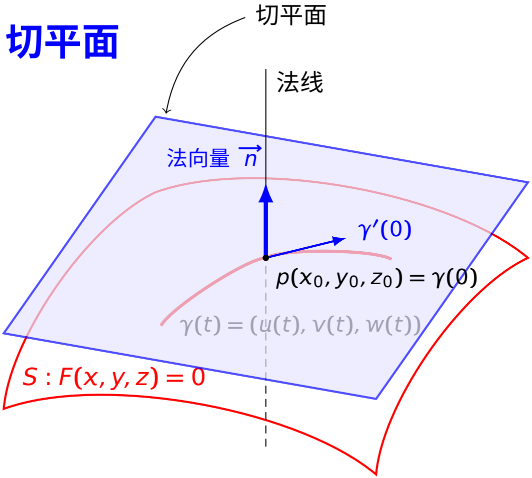
切平面



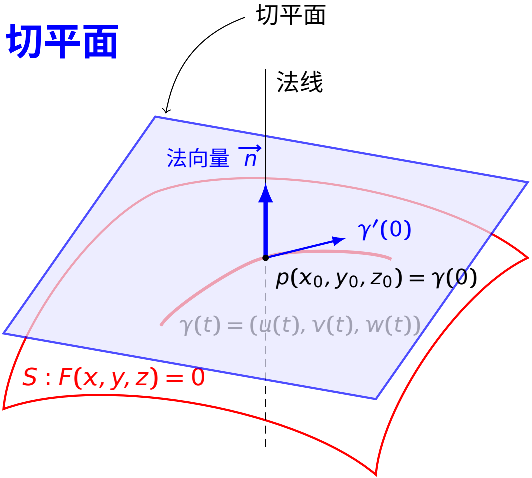
切平面


切平面
法线
法向量 $\overrightarrow{n}$
$p(x_0, y_0, z_0) = \gamma(0)$
$\gamma(t) = (u(t), v(t), w(t))$
$S : F(x, y, z) = 0$

切平面

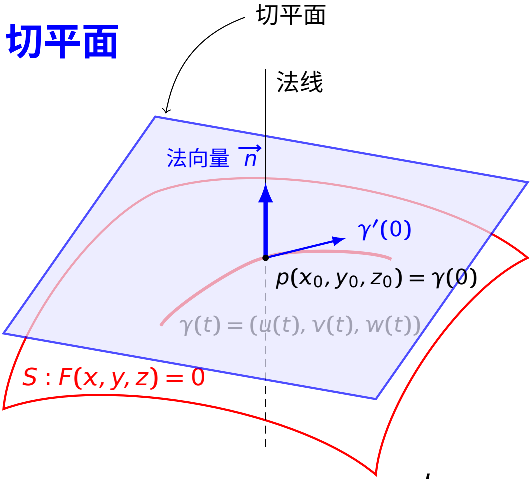


切平面



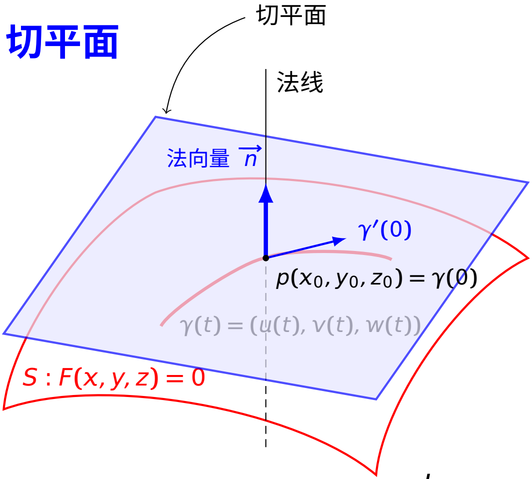
$$0 \equiv F(u(t), v(t), w(t))$$

切平面



$$0 \equiv F(u(t), v(t), w(t)) \Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} F(u(t), v(t), w(t))\Big|_{t=0}$$

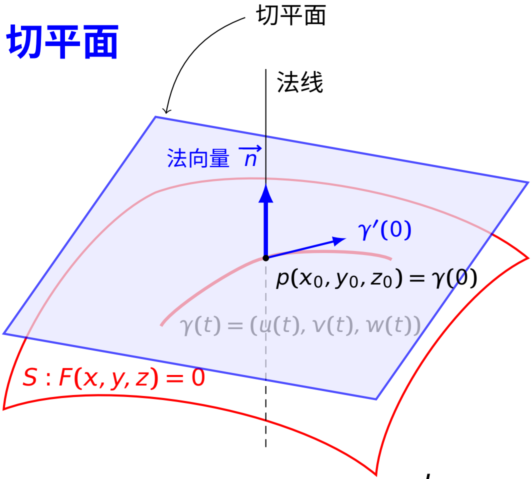
切平面



$$0 \equiv F(u(t), v(t), w(t)) \Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} F(u(t), v(t), w(t))\Big|_{t=0}$$

$$= F_x \quad \cdot u' \quad + F_y \quad \cdot v' \quad + F_z \quad \cdot w'$$

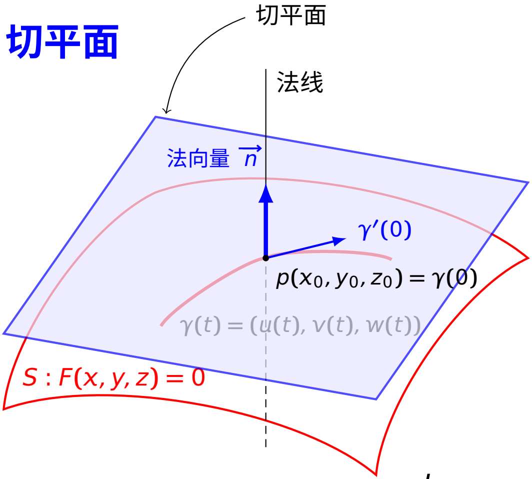
切平面



$$0 \equiv F(u(t), v(t), w(t)) \Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} F(u(t), v(t), w(t)) \Big|_{t=0}$$

$$= F_x(p) \cdot u' \quad + F_y(p) \cdot v' \quad + F_z(p) \cdot w'$$

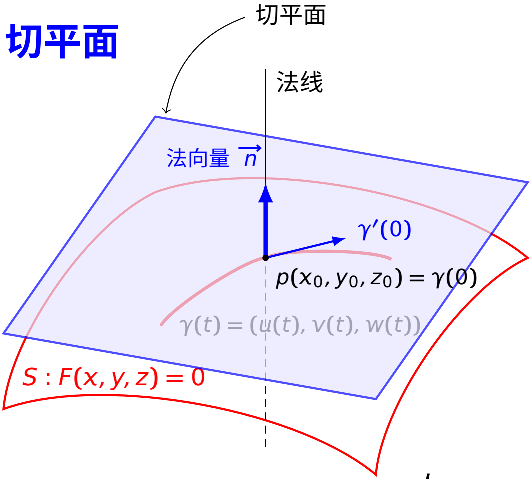
切平面



$$0 \equiv F(u(t), v(t), w(t)) \Rightarrow 0 = \frac{d}{dt}F(u(t), v(t), w(t))\bigg|_{t=0}$$

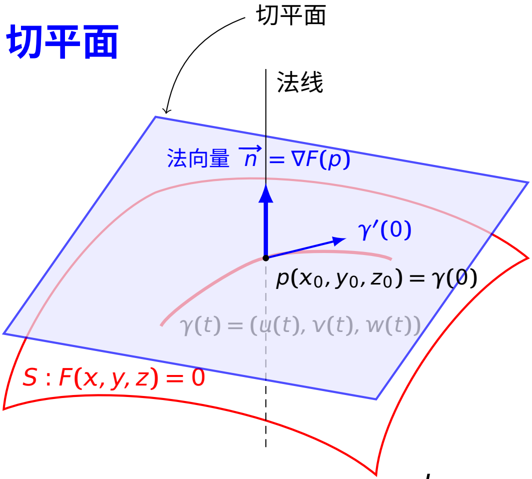
$$= F_x(p)\cdot u'(0) + F_y(p)\cdot v'(0) + F_z(p)\cdot w'(0)$$

切平面



$$
\begin{aligned}
0 \equiv F(u(t), v(t), w(t)) \Rightarrow 0 &= \frac{d}{dt} F(u(t), v(t), w(t)) \Big|_{t=0} \\
&= F_x(p) \cdot u'(0) + F_y(p) \cdot v'(0) + F_z(p) \cdot w'(0) \\
&= \nabla F(p) \cdot \gamma'(0)
\end{aligned}
$$

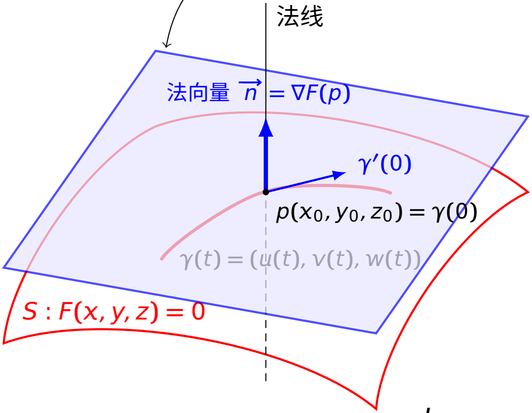
切平面



$$
\begin{aligned}
0 \equiv F(u(t), v(t), w(t)) \Rightarrow 0 &= \frac{d}{dt} F(u(t), v(t), w(t)) \Big|_{t=0} \\
&= F_x(p) \cdot u'(0) + F_y(p) \cdot v'(0) + F_z(p) \cdot w'(0) \\
&= \nabla F(p) \cdot \gamma'(0)
\end{aligned}
$$

切平面

切平面 $F_x(p)(x-x_0)+F_y(p)(y-y_0)+F_z(p)(z-z_0)=0$

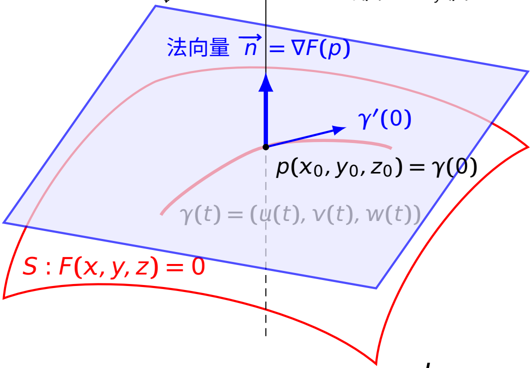


$$
\begin{aligned}
0\equiv F(u(t),v(t),w(t)) \Rightarrow 0 &= \frac{d}{dt}F(u(t),v(t),w(t))\Big|_{t=0}\\
&= F_x(p)\cdot u'(0)+F_y(p)\cdot v'(0)+F_z(p)\cdot w'(0)\\
&= \nabla F(p)\cdot\gamma'(0)
\end{aligned}
$$

切平面

切平面 $F_x(p)(x-x_0)+F_y(p)(y-y_0)+F_z(p)(z-z_0)=0$

法线 $\dfrac{x-x_0}{F_x(p)}=\dfrac{y-y_0}{F_y(p)}=\dfrac{z-z_0}{F_z(p)}$

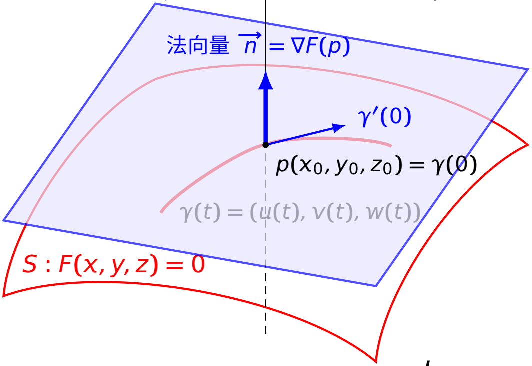


$$
\begin{aligned}
0\equiv F(u(t),v(t),w(t)) \Rightarrow 0 &= \frac{d}{dt}F(u(t),v(t),w(t))\Big|_{t=0}\\
&= F_x(p)\cdot u'(0)+F_y(p)\cdot v'(0)+F_z(p)\cdot w'(0)\\
&= \nabla F(p)\cdot\gamma'(0)
\end{aligned}
$$

切平面

切平面 $F_x(p)(x-x_0)+F_y(p)(y-y_0)+F_z(p)(z-z_0)=0$

法线 $\dfrac{x-x_0}{F_x(p)}=\dfrac{y-y_0}{F_y(p)}=\dfrac{z-z_0}{F_z(p)}$



例 求曲面 $3xy+z^2=4$ 在点 $(1,\,1,\,1)$ 处的切平面及法线的方程.

$$0\equiv F(u(t),v(t),w(t))\Rightarrow 0=\frac{d}{dt}F(u(t),v(t),w(t))\Big|_{t=0}$$
$$=F_x(p)\cdot u'(0)+F_y(p)\cdot v'(0)+F_z(p)\cdot w'(0)$$
$$=\nabla F(p)\cdot\gamma'(0)$$

例 求曲面 $3xy + z^2 = 4$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切平面及法线的方程.

例 求曲面 $3xy + z^2 = 4$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切平面及法线的方程.

解

$$F(x, y, z) = 3xy + z^2 - 4,$$

例 求曲面 $3xy + z^2 = 4$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切平面及法线的方程.

解

$$F(x, y, z) = 3xy + z^2 - 4,$$

$$\overrightarrow{n} = \nabla F = (F_x, F_y, F_z)$$

例 求曲面 $3xy + z^2 = 4$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切平面及法线的方程.

解

$$F(x, y, z) = 3xy + z^2 - 4,$$

$$\overrightarrow{n} = \nabla F = (F_x, F_y, F_z) = (3y, 3x, 2z),$$

例 求曲面 $3xy + z^2 = 4$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切平面及法线的方程.

解

$$F(x, y, z) = 3xy + z^2 - 4,$$

$$\overrightarrow{n} = \nabla F = (F_x, F_y, F_z) = (3y, 3x, 2z),$$

$$\overrightarrow{n}|_{(1,1,1)} = (3, 3, 2).$$

例 求曲面 $3xy + z^2 = 4$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切平面及法线的方程.

解

$$F(x, y, z) = 3xy + z^2 - 4,$$

$$\overrightarrow{n} = \nabla F = (F_x, F_y, F_z) = (3y, 3x, 2z),$$

$$\overrightarrow{n}|_{(1,1,1)} = (3, 3, 2).$$

所以在点处的切平面方程为

法线方程为

例 求曲面 $3xy + z^2 = 4$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切平面及法线的方程.

解

$$F(x, y, z) = 3xy + z^2 - 4,$$

$$\overrightarrow{n} = \nabla F = (F_x, F_y, F_z) = (3y, 3x, 2z),$$

$$\overrightarrow{n}|_{(1,1,1)} = (3, 3, 2).$$

所以在点处的切平面方程为

$$3(x-1) + 3(y-1) + 2(z-1) = 0$$

法线方程为

例 求曲面 $3xy+z^2=4$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切平面及法线的方程.

解

$$F(x, y, z)=3xy+z^2-4,$$

$$\overrightarrow{n}=\nabla F=(F_x, F_y, F_z)=(3y, 3x, 2z),$$

$$\overrightarrow{n}|_{(1,1,1)}=(3, 3, 2).$$

所以在点处的切平面方程为

$$3(x-1)+3(y-1)+2(z-1)=0 \quad \Rightarrow \quad 3x+3y+2z-8=0$$

法线方程为

例 求曲面 $3xy+z^2=4$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切平面及法线的方程.

解

$$F(x, y, z)=3xy+z^2-4,$$

$$\vec{n}=\nabla F=(F_x, F_y, F_z)=(3y, 3x, 2z),$$

$$\vec{n}|_{(1,1,1)}=(3, 3, 2).$$

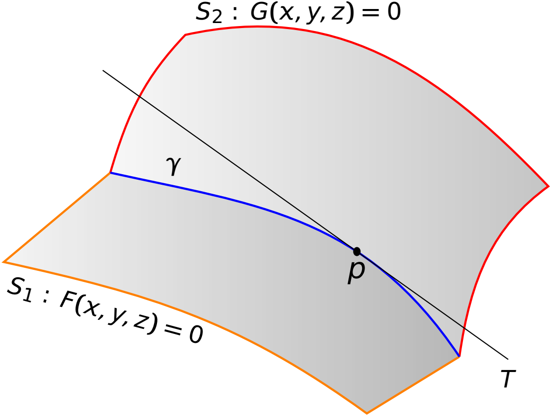
所以在点处的切平面方程为

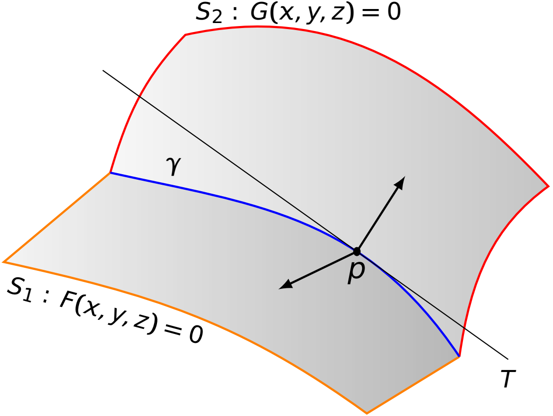
$$3(x-1)+3(y-1)+2(z-1)=0 \quad \Rightarrow \quad 3x+3y+2z-8=0$$

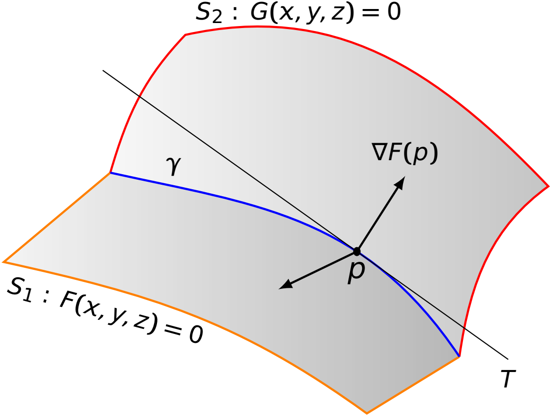
法线方程为

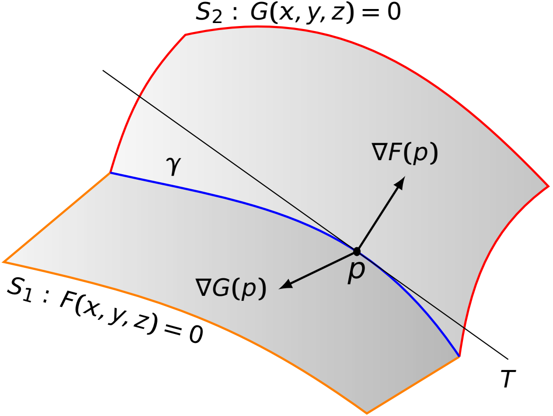
$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{2}$$

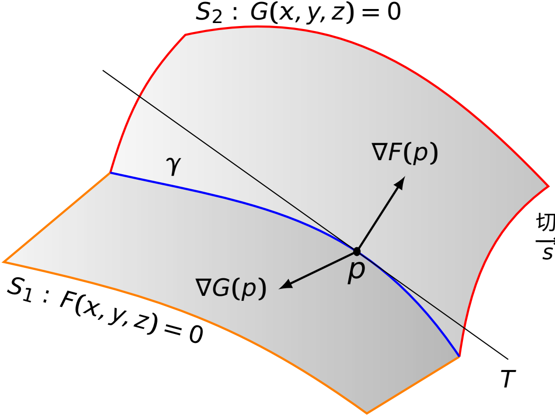
二元函数图形的切平面


$S_2 : G(x, y, z) = 0$
γ
p
$S_1 : F(x, y, z) = 0$
T

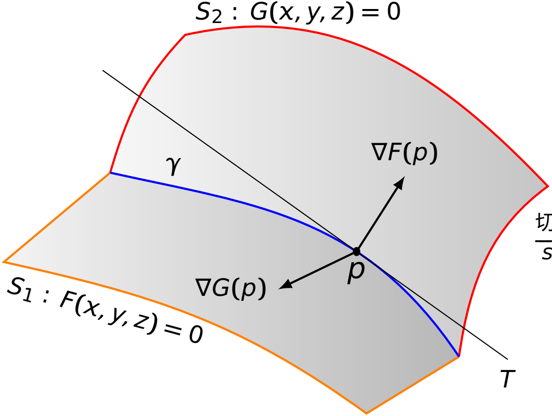

$S_2 : G(x, y, z) = 0$
γ
p
$S_1 : F(x, y, z) = 0$
T


$S_2 : G(x,y,z) = 0$
$\nabla F(p)$
γ
p
T
$S_1 : F(x,y,z) = 0$


$S_2 : G(x, y, z) = 0$
γ
$\nabla F(p)$
p
$\nabla G(p)$
$S_1 : F(x, y, z) = 0$
T



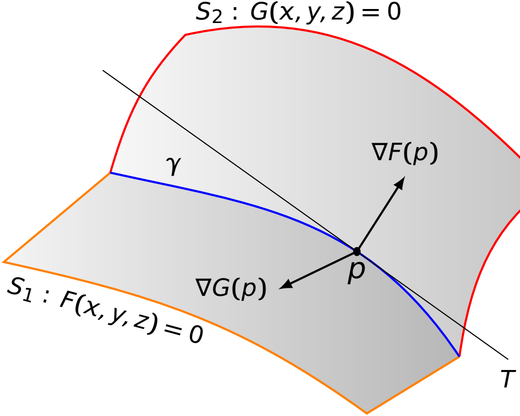
切线T的方向向量可取为
$\overrightarrow{s} = \nabla F(p) \times \nabla G(p)$



切线T的方向向量可取为

$$\vec{s} = \nabla F(p) \times \nabla G(p)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x(p) & F_y(p) & F_z(p) \\ G_x(p) & G_y(p) & G_z(p) \end{vmatrix}$$

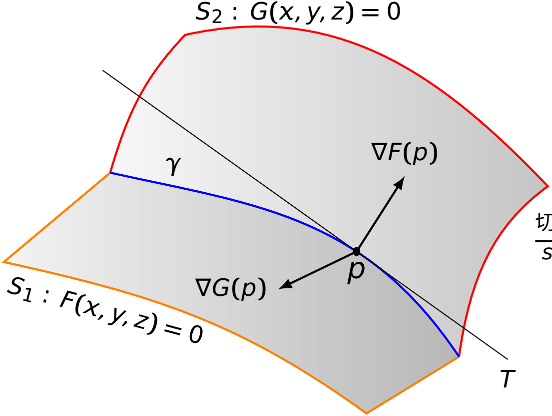


切线T的方向向量可取为

$$\vec{s}=\nabla F(p)\times\nabla G(p)$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ F_x(p) & F_y(p) & F_z(p)\\ G_x(p) & G_y(p) & G_z(p)\end{vmatrix}$$

$$=\left(\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}_p, -\begin{vmatrix}F_x & F_z\\ G_x & G_z\end{vmatrix}_p, \begin{vmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{vmatrix}_p\right)$$

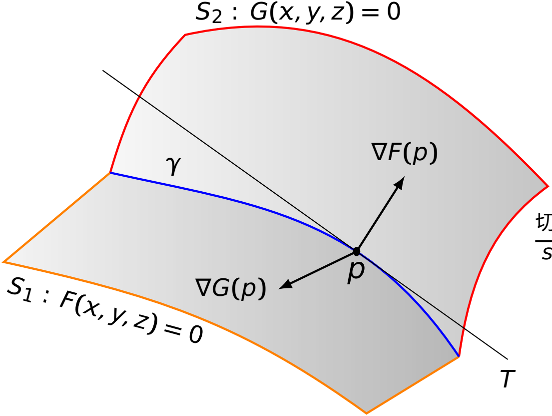


切线T的方向向量可取为

$$\vec{s} = \nabla F(p) \times \nabla G(p)$$
$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x(p) & F_y(p) & F_z(p) \\ G_x(p) & G_y(p) & G_z(p) \end{vmatrix}$$
$$= \left(\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_p, - \begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}_p, \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_p \right)$$

- 切线方程:

- 法平面方程:



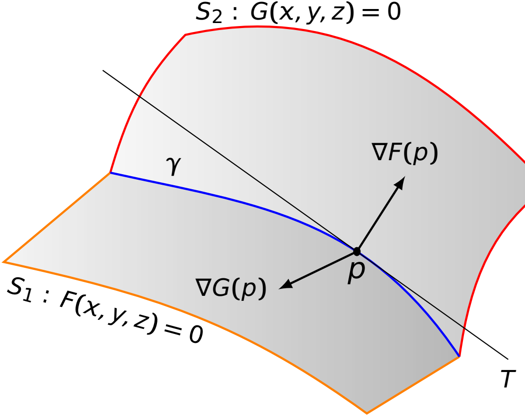
切线T的方向向量可取为

$$\vec{s} = \nabla F(p) \times \nabla G(p)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x(p) & F_y(p) & F_z(p) \\ G_x(p) & G_y(p) & G_z(p) \end{vmatrix}$$

$$= \left(\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_p, -\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}_p, \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_p \right)$$

- 切线方程: $\dfrac{x-x_0}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_p} = \dfrac{y-y_0}{-\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}_p} = \dfrac{z-z_0}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_p}$
- 法平面方程:



切线T的方向向量可取为

$$\vec{s} = \nabla F(p) \times \nabla G(p)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x(p) & F_y(p) & F_z(p) \\ G_x(p) & G_y(p) & G_z(p) \end{vmatrix}$$

$$= \left(\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_p, -\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}_p, \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_p \right)$$

- 切线方程: $\dfrac{x-x_0}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_p} = \dfrac{y-y_0}{-\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}_p} = \dfrac{z-z_0}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_p}$
- 法平面方程:

$$\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_p (x-x_0) - \begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}_p (y-y_0) + \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_p (z-z_0) = 0$$

小结 曲线 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 上一点 $p(x_0,y_0,z_0)$ 处

- 切方向可取为

$$\vec{s}=\nabla F(p)\times\nabla G(p)=\left.\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}\right|_p=\left(\left.\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}\right|_p,-\left.\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}\right|_p,\left.\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}\right|_p\right)$$

- 切线方程： $\dfrac{x-x_0}{\left.\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}\right|_p}=\dfrac{y-y_0}{-\left.\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}\right|_p}=\dfrac{z-z_0}{\left.\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}\right|_p}$

- 法平面方程：

$$0=\left.\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}\right|_p(x-x_0)-\left.\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}\right|_p(y-y_0)+\left.\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}\right|_p(z-z_0)$$

小结 曲线 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 上一点 $p(x_0,y_0,z_0)$ 处

- 切方向可取为

$$\vec{s}=\nabla F(p)\times\nabla G(p)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}_p=\left(\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_p,-\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}_p,\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_p\right)$$

- 切线方程: $\dfrac{x-x_0}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_p}=\dfrac{y-y_0}{-\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}_p}=\dfrac{z-z_0}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_p}$

- 法平面方程:

$$0=\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_p(x-x_0)-\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}_p(y-y_0)+\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_p(z-z_0)$$

$$=\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ F_x(p) & F_y(p) & F_z(p) \\ G_x(p) & G_y(p) & G_z(p) \end{vmatrix}$$

小结 曲线 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 上一点 $p(x_0,y_0,z_0)$ 处

- 切方向可取为

$$\vec{s}=\nabla F(p)\times\nabla G(p)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}_p=\left(\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_p, \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_p, \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_p\right)$$

- 切线方程: $\dfrac{x-x_0}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_p}=\dfrac{y-y_0}{-\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}_p}=\dfrac{z-z_0}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_p}$

- 法平面方程:

$$0=\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_p(x-x_0)-\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}_p(y-y_0)+\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_p(z-z_0)$$

$$=\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ F_x(p) & F_y(p) & F_z(p) \\ G_x(p) & G_y(p) & G_z(p) \end{vmatrix}$$

小结 曲线 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 上一点 $p(x_0,y_0,z_0)$ 处

- 切方向可取为

$$\vec{s}=\nabla F(p)\times\nabla G(p)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}_p=\left(\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_p, \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_p, \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_p\right)$$

- 切线方程: $\dfrac{x-x_0}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_p}=\dfrac{y-y_0}{\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_p}=\dfrac{z-z_0}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_p}$

- 法平面方程:

$$0=\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_p(x-x_0)-\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}_p(y-y_0)+\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_p(z-z_0)$$

$$=\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ F_x(p) & F_y(p) & F_z(p) \\ G_x(p) & G_y(p) & G_z(p) \end{vmatrix}$$

例 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线与法平面方程

例 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线与法平面方程

解 曲线在该点处的切线方向可取为

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}_p$$

例 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线与法平面方程

解 曲线在该点处的切线方向可取为

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}_p = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$$

例 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线与法平面方程

解 曲线在该点处的切线方向可取为

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}_p = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2x & 2y & 2z \\ & & \end{vmatrix}$$

例 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线与法平面方程

解 曲线在该点处的切线方向可取为

$$\left|\begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{array}\right|_p = \left|\begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right|$$

例 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线与法平面方程

解 曲线在该点处的切线方向可取为

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}_p = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{(1,-2,1)}$$

例 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线与法平面方程

解 曲线在该点处的切线方向可取为

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}_p = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{(1,-2,1)} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

例 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线与法平面方程

解 曲线在该点处的切线方向可取为

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}_p = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{(1,-2,1)} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-3,0,3)$$

例 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线与法平面方程

解 曲线在该点处的切线方向可取为

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}_p = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{(1,-2,1)} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-3,0,3)$$

简单计，又不妨取为

$$\vec{s} = (1,0,-1)$$

例 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线与法平面方程

解 曲线在该点处的切线方向可取为

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}_p = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{(1,-2,1)} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-3,0,3)$$

简单计，又不妨取为

$$\vec{s} = (1,0,-1)$$

所以

- 切线方程：
- 法平面方程：

例 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线与法平面方程

解 曲线在该点处的切线方向可取为

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}_p = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{(1,-2,1)} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-3,0,3)$$

简单计，又不妨取为

$$\vec{s} = (1,0,-1)$$

所以

- 切线方程：$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-1}{-1}$
- 法平面方程：

例 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线与法平面方程

解 曲线在该点处的切线方向可取为

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}_p = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{(1,-2,1)} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-3,0,3)$$

简单计，又不妨取为

$$\overrightarrow{s} = (1,0,-1)$$

所以

- 切线方程：$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-1}{-1}$
- 法平面方程：
  $1\cdot(x-1)+0\cdot(y+2)+(-1)\cdot(z-1)=0$

例 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线与法平面方程

解 曲线在该点处的切线方向可取为

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}_p = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{(1,-2,1)} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-3,0,3)$$

简单计，又不妨取为

$$\vec{s} = (1,0,-1)$$

所以

- 切线方程：$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-1}{-1}$
- 法平面方程：
  $1\cdot(x-1)+0\cdot(y+2)+(-1)\cdot(z-1)=0 \quad \Rightarrow \quad x-z=0$