第 1 章 c：连续函数

数学系　　梁卓滨

2019-2020 学年 I

Outline

1. 连续函数

2. 函数的间断点

3. 闭区间上连续函数的性质

We are here now...

1. 连续函数

2. 函数的间断点

3. 闭区间上连续函数的性质

定义 设 $y = f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 处**连续**.

定义 设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 处**连续**.

注 简单地说，

- 当 x 接近 x_0 时，$f(x)$ 也接近 $f(x_0)$

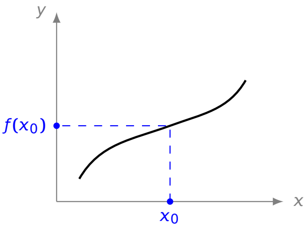
定义 设 $y = f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

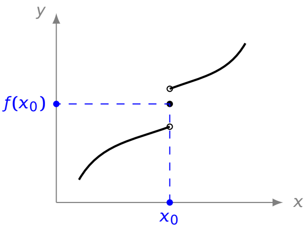
则称 $f(x)$ 在点 x_0 处**连续**.

注 简单地说，

- 当 x 接近 x_0 时，$f(x)$ 也接近 $f(x_0)$

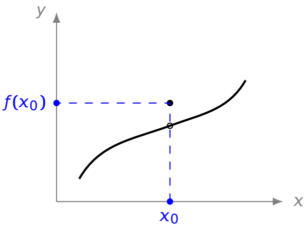


f 在 x_0 处连续



f 在 x_0 处不连续

$\lim_{x \to x_0} f(x)$ 不存在



f 在 x_0 处不连续

$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

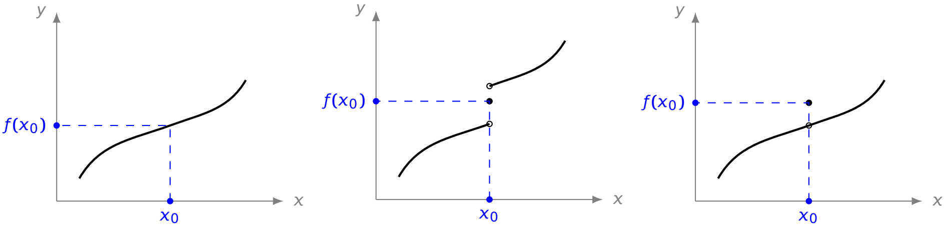
定义 设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \quad \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=0$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 处**连续**.

注 简单地说，

- 当 x 接近 x_0 时，$f(x)$ 也接近 $f(x_0)$



f 在 x_0 处连续

f 在 x_0 处不连续

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在

f 在 x_0 处不连续

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$

定义 设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，如果

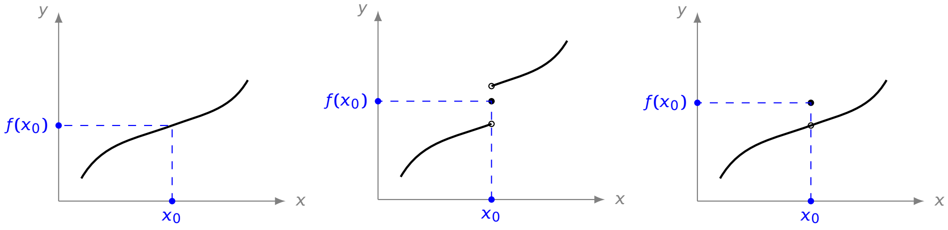
$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \iff \lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=0$$

$$\iff f(x)-f(x_0)\to 0\,(\text{当}\,x-x_0\to 0)$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 处**连续**.

注 简单地说，

- 当 x 接近 x_0 时，$f(x)$ 也接近 $f(x_0)$



f 在 x_0 处连续

f 在 x_0 处不连续
$\lim_{x\to x_0} f(x)$ 不存在

f 在 x_0 处不连续
$\lim_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$

定义 设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，如果

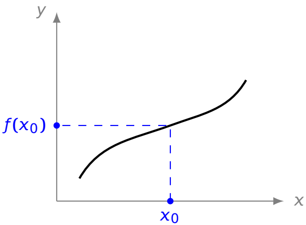
$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \iff \lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=0$$

$$\iff \underbrace{f(x)-f(x_0)}_{\Delta y}\to 0\,(\text{当}\,\underbrace{x-x_0}_{\Delta x}\to 0)$$

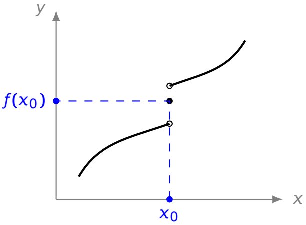
则称 $f(x)$ 在点 x_0 处**连续**.

注 简单地说，

- 当 x 接近 x_0 时，$f(x)$ 也接近 $f(x_0)$

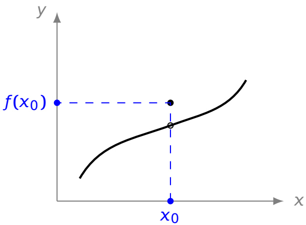


f 在 x_0 处连续



f 在 x_0 处不连续

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在



f 在 x_0 处不连续

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$

定义 设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \iff \lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=0$$

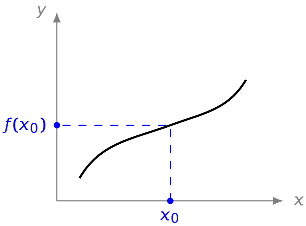
$$\iff \underbrace{f(x)-f(x_0)}_{\Delta y}\to 0\,(\text{当}\,\underbrace{x-x_0}_{\Delta x}\to 0)$$

$$\iff \Delta y\to 0\quad(\text{当}\,\Delta x\to 0)$$

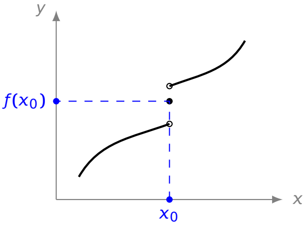
则称 $f(x)$ 在点 x_0 处**连续**.

注 简单地说，

- 当 x 接近 x_0 时，$f(x)$ 也接近 $f(x_0)$

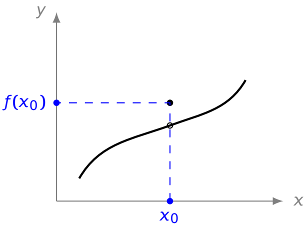


f 在 x_0 处连续



f 在 x_0 处不连续

$\lim_{x\to x_0} f(x)$ 不存在



f 在 x_0 处不连续

$\lim_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$

定义 设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \iff \lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=0$$

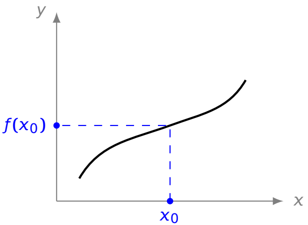
$$\iff \underbrace{f(x)-f(x_0)}_{\Delta y}\to 0\,(\text{当}\,\underbrace{x-x_0}_{\Delta x}\to 0)$$

$$\iff \Delta y\to 0 \quad (\text{当}\Delta x\to 0)$$

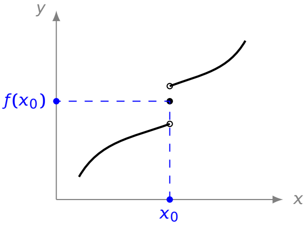
则称 $f(x)$ 在点 x_0 处**连续**.

注 简单地说，

- 当 x 接近 x_0 时，$f(x)$ 也接近 $f(x_0)$
- 当 x 是 x_0 的微小改变时，$f(x)$ 也是 $f(x_0)$ 的微小改变

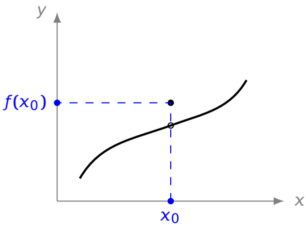


f 在 x_0 处连续



f 在 x_0 处不连续

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在



f 在 x_0 处不连续

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

定义 设 $y=f(x)$ 定义在开区间 (a,b) 上，$x_0\in(a,b)$. 如果

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 处**连续**.

定义 设 $y=f(x)$ 定义在开区间 (a,b) 上，$x_0\in(a,b)$. 如果

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 处**连续**.

定义 设 $y=f(x)$ 定义在闭区间 $[a,b]$ 上.

定义 设 $y=f(x)$ 定义在开区间 (a,b) 上，$x_0\in(a,b)$. 如果

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 处**连续**.

定义 设 $y=f(x)$ 定义在闭区间 $[a,b]$ 上. 如果

$$f(a^+)=f(a)$$

则称 $f(x)$ 在左端点 a 处**连续**.

定义 设 $y = f(x)$ 定义在开区间 (a, b) 上，$x_0 \in (a, b)$. 如果

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 处**连续**.

定义 设 $y = f(x)$ 定义在闭区间 $[a, b]$ 上. 如果

$$f(a^+) = f(a)$$

则称 $f(x)$ 在左端点 a 处**连续**. 如果

$$f(b^-) = f(b)$$

则称 $f(x)$ 在右端点 b 处**连续**.

定义 设 $y=f(x)$ 定义在开区间 (a,b) 上，$x_0\in(a,b)$. 如果

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 处**连续**.

定义 设 $y=f(x)$ 定义在闭区间 $[a,b]$ 上. 如果

$$f(a^+)=f(a)$$

则称 $f(x)$ 在左端点 a 处**连续**. 如果

$$f(b^-)=f(b)$$

则称 $f(x)$ 在右端点 b 处**连续**.

定义 如果 $f(x)$ 在区间 I 的每一点都连续，则称 $f(x)$ 在区间 I 上**连续**，或称 $f(x)$ 是区间上的**连续函数**.

定义 设 $y = f(x)$ 定义在开区间 (a, b) 上，$x_0 \in (a, b)$. 如果

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 处**连续**.

定义 设 $y = f(x)$ 定义在闭区间 $[a, b]$ 上. 如果

$$f(a^+) = f(a)$$

则称 $f(x)$ 在左端点 a 处**连续**. 如果

$$f(b^-) = f(b)$$

则称 $f(x)$ 在右端点 b 处**连续**.

定义 如果 $f(x)$ 在区间 I 的每一点都连续，则称 $f(x)$ 在区间 I 上**连续**，或称 $f(x)$ 是区间上的**连续函数**.

注 连续函数的图形是一条连续不间断的曲线.

连续函数的运算

性质 设 f 和 g 是连续函数，则

- 四则运算 $f+g$，$f-g$，$f\cdot g$，$\dfrac{f}{g}$ 在其定义域内也还是连续函数.
- 假设复合函数 $f[g(x)]$ 有意义，则该复合函数也是连续函数.

连续函数的运算

性质 设 f 和 g 是连续函数，则

- 四则运算 $f+g$，$f-g$，$f\cdot g$，$\frac{f}{g}$ 在其定义域内也还是连续函数.
- 假设复合函数 $f[g(x)]$ 有意义，则该复合函数也是连续函数.

例 讨论 $y=\sin\frac{1}{x}$ 的连续性.

连续函数的运算

性质 设 f 和 g 是连续函数，则

- 四则运算 $f+g$，$f-g$，$f\cdot g$，$\frac{f}{g}$ 在其定义域内也还是连续函数.
- 假设复合函数 $f[g(x)]$ 有意义，则该复合函数也是连续函数.

例 讨论 $y=\sin\frac{1}{x}$ 的连续性.

解 $y=\sin\frac{1}{x}$ 可看作连续函数 $y=\sin u$ 复合上连续函数 $u=\frac{1}{x}$，所以 $y=\sin\frac{1}{x}$ 在定义域 $x\in(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ 上连续.

连续函数的运算

性质 设 f 和 g 是连续函数，则

- 四则运算 $f+g$，$f-g$，$f\cdot g$，$\frac{f}{g}$ 在其定义域内也还是连续函数.
- 假设复合函数 $f[g(x)]$ 有意义，则该复合函数也是连续函数.

例 讨论 $y=\sin\frac{1}{x}$ 的连续性.

解 $y=\sin\frac{1}{x}$ 可看作连续函数 $y=\sin u$ 复合上连续函数 $u=\frac{1}{x}$，所以 $y=\sin\frac{1}{x}$ 在定义域 $x\in(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ 上连续.

回忆 **初等函数** 指幂函数、指数函数、对数函数、（反）三角函数进过有限次的四则运算和复合所构成的函数.

连续函数的运算

性质 设 f 和 g 是连续函数，则

- 四则运算 $f+g$，$f-g$，$f\cdot g$，$\frac{f}{g}$ 在其定义域内也还是连续函数.
- 假设复合函数 $f[g(x)]$ 有意义，则该复合函数也是连续函数.

例 讨论 $y=\sin\frac{1}{x}$ 的连续性.

解 $y=\sin\frac{1}{x}$ 可看作连续函数 $y=\sin u$ 复合上连续函数 $u=\frac{1}{x}$，所以 $y=\sin\frac{1}{x}$ 在定义域 $x\in(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ 上连续.

回忆 **初等函数** 指幂函数、指数函数、对数函数、（反）三角函数进过有限次的四则运算和复合所构成的函数.

性质 一切初等函数在其定义区间内都是连续.

例 1 求 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2-2x+5}$

例 1 求 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2-2x+5}$

解 $f(x)=\sqrt{x^2-2x+5}$ 是初等函数，因此连续. 并且 $x=0$ 在 $f(x)$ 的定义域中，所以

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x^2-2x+5}=f(0)$$

例 1 求 $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x^2 - 2x + 5}$

解 $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$ 是初等函数，因此连续. 并且 $x = 0$ 在 $f(x)$ 的定义域中，所以

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x^2 - 2x + 5} = f(0) = \sqrt{5}.$$

例 1 求 $\lim_{x\to 0}\sqrt{x^2-2x+5}$

解 $f(x)=\sqrt{x^2-2x+5}$ 是初等函数，因此连续. 并且 $x=0$ 在 $f(x)$ 的定义域中，所以

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x^2-2x+5}=f(0)=\sqrt{5}.$$

例 2 求 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}$

例 1 求 $\lim_{x\to 0}\sqrt{x^2-2x+5}$

解 $f(x)=\sqrt{x^2-2x+5}$ 是初等函数，因此连续. 并且 $x=0$ 在 $f(x)$ 的定义域中，所以

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x^2-2x+5}=f(0)=\sqrt{5}.$$

例 2 求 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}$

解 $f(x)=(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}$ 是初等函数，因此连续. 并且 $x=\frac{\pi}{2}$ 在 $f(x)$ 的定义域中，所以

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}=f(\frac{\pi}{2})$$

例 1 求 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2-2x+5}$

解 $f(x)=\sqrt{x^2-2x+5}$ 是初等函数，因此连续. 并且 $x=0$ 在 $f(x)$ 的定义域中，所以

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x^2-2x+5}=f(0)=\sqrt{5}.$$

例 2 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}$

解 $f(x)=(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}$ 是初等函数，因此连续. 并且 $x=\frac{\pi}{2}$ 在 $f(x)$ 的定义域中，所以

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}=f(\frac{\pi}{2})=(1+\pi)^3.$$

例 1 求 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2-2x+5}$

解 $f(x)=\sqrt{x^2-2x+5}$ 是初等函数，因此连续. 并且 $x=0$ 在 $f(x)$ 的定义域中，所以

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x^2-2x+5}=f(0)=\sqrt{5}.$$

例 2 求 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}$

解 $f(x)=(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}$ 是初等函数，因此连续. 并且 $x=\frac{\pi}{2}$ 在 $f(x)$ 的定义域中，所以

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}=f(\frac{\pi}{2})=(1+\pi)^3.$$

注 $(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}=e^{\ln(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}}=e^{\frac{3}{\sin x}\ln(1+2x)}$ 是初等函数.

例 1 求 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2-2x+5}$

解 $f(x)=\sqrt{x^2-2x+5}$ 是初等函数，因此连续. 并且 $x=0$ 在 $f(x)$ 的定义域中，所以

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x^2-2x+5}=f(0)=\sqrt{5}.$$

例 2 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}$

解 $f(x)=(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}$ 是初等函数，因此连续. 并且 $x=\frac{\pi}{2}$ 在 $f(x)$ 的定义域中，所以

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}=f(\frac{\pi}{2})=(1+\pi)^3.$$

注 $(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}=e^{\ln(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}}=e^{\frac{3}{\sin x}\ln(1+2x)}$ 是初等函数.

例 3 求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}$

例 3 求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}$

例 3 求 $\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}$

解

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{3}{\sin x}\ln(1+2x)}$$

例 3 求 $\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}$

解

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{3}{\sin x}\ln(1+2x)}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{\sin x}\ln(1+2x)}$$

例 3 求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}$

解

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{3}{\sin x}\ln(1+2x)}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{\sin x}\ln(1+2x)}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0} 6\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{\ln(1+2x)}{2x}}$$

例 3 求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}$

解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}} &= \lim_{x\to 0} e^{\frac{3}{\sin x}\ln(1+2x)} \\ &= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{\sin x}\ln(1+2x)} \\ &= e^{\lim\limits_{x\to 0} 6\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{\ln(1+2x)}{2x}} \\ &= e^6.\end{aligned}$$

We are here now...

定义 设 $f(x)$ 在 x_0 的邻域上有定义，如果 x_0 不是 $f(x)$ 的连续点，则称为**间断点**.

定义 设 $f(x)$ 在 x_0 的邻域上有定义，如果 x_0 不是 $f(x)$ 的连续点，则称为 **间断点**.

也就是，x_0 为间断点 $\Leftrightarrow$ 不成立 “$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$”.

定义 设 $f(x)$ 在 x_0 的邻域上有定义，如果 x_0 不是 $f(x)$ 的连续点，则称为**间断点**.

也就是，x_0 为间断点 $\Leftrightarrow$ 不成立 "$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$".分以下几种情形：

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在

定义 设 $f(x)$ 在 x_0 的邻域上有定义，如果 x_0 不是 $f(x)$ 的连续点，则称为 **间断点**.

也就是，x_0 为间断点 $\Leftrightarrow$ 不成立 "$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$".分以下几种情形：

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$. 这时称 x_0 为 **可去间断点**
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在

定义 设 $f(x)$ 在 x_0 的邻域上有定义，如果 x_0 不是 $f(x)$ 的连续点，则称为**间断点**.

也就是，x_0 为间断点 $\Leftrightarrow$ 不成立 "$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$".分以下几种情形：

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$. 这时称 x_0 为**可去间断点**
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在
  - $f(x_0^+)$ 和 $f(x_0^-)$ 均存在，但 $f(x_0^+) \neq f(x_0^-)$.
  - $f(x_0^+)$ 和 $f(x_0^-)$ 至少有一个不存在.

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

定义 设 $f(x)$ 在 x_0 的邻域上有定义，如果 x_0 不是 $f(x)$ 的连续点，则称为 **间断点** .

也就是，x_0 为间断点 $\Leftrightarrow$ 不成立 "$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$".分以下几种情形：

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$. 这时称 x_0 为 **可去间断点**
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在
  - $f(x_0^+)$ 和 $f(x_0^-)$ 均存在，但 $f(x_0^+) \neq f(x_0^-)$. 这时称 x_0 为 **跳跃间断点**
  - $f(x_0^+)$ 和 $f(x_0^-)$ 至少有一个不存在.

定义 设 $f(x)$ 在 x_0 的邻域上有定义，如果 x_0 不是 $f(x)$ 的连续点，则称为 **间断点**.

也就是，x_0 为间断点 $\Leftrightarrow$ 不成立 “$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$”.分以下几种情形：

- $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$. 这时称 x_0 为 **可去间断点**
- $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 不存在
  - $f(x_0^+)$ 和 $f(x_0^-)$ 均存在，但 $f(x_0^+) \neq f(x_0^-)$. 这时称 x_0 为 **跳跃间断点**
  - $f(x_0^+)$ 和 $f(x_0^-)$ 至少有一个不存在. 这时称 x_0 为 **第二类间断点**

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

定义 设 $f(x)$ 在 x_0 的邻域上有定义，如果 x_0 不是 $f(x)$ 的连续点，则称为 **间断点**.

也就是，x_0 为间断点 $\Leftrightarrow$ 不成立 “$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$”.分以下几种情形：

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$. 这时称 x_0 为 **可去间断点**
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 不存在
  - $f(x_0^+)$ 和 $f(x_0^-)$ 均存在，但 $f(x_0^+) \neq f(x_0^-)$. 这时称 x_0 为 **跳跃间断点**
  - $f(x_0^+)$ 和 $f(x_0^-)$ 至少有一个不存在. 这时称 x_0 为 **第二类间断点**

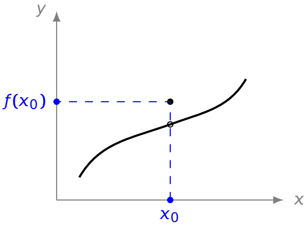
第一类间断点

定义 设 $f(x)$ 在 x_0 的邻域上有定义，如果 x_0 不是 $f(x)$ 的连续点，则称为 **间断点**.

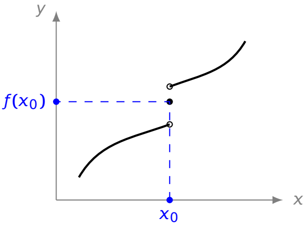
也就是，x_0 为间断点 $\Leftrightarrow$ 不成立 “$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$”.分以下几种情形：

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$. 这时称 x_0 为 **可去间断点**
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在
  - $f(x_0^+)$ 和 $f(x_0^-)$ 均存在，但 $f(x_0^+) \neq f(x_0^-)$. 这时称 x_0 为 **跳跃间断点**
  - $f(x_0^+)$ 和 $f(x_0^-)$ 至少有一个不存在. 这时称 x_0 为 **第二类间断点**

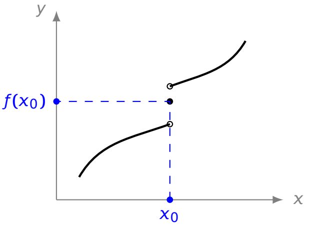
第一类间断点



可去间断点



跳跃间断点



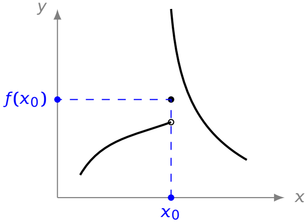
第二类间断点
无穷间断点

定义 设 $f(x)$ 在 x_0 的邻域上有定义，如果 x_0 不是 $f(x)$ 的连续点，则称为 **间断点**.

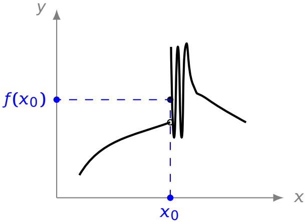
也就是，x_0 为间断点 $\Leftrightarrow$ 不成立 "$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$". 分以下几种情形：

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$. 这时称 x_0 为 **可去间断点**
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在
  - $f(x_0^+)$ 和 $f(x_0^-)$ 均存在，但 $f(x_0^+)\neq f(x_0^-)$. 这时称 x_0 为 **跳跃间断点**
  - $f(x_0^+)$ 和 $f(x_0^-)$ 至少有一个不存在. 这时称 x_0 为 **第二类间断点**

第一类间断点



第二类间断点
无穷间断点



第二类间断点
震荡间断点

例 指出下列函数的间断点，并判别类型：

$$f_1(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}, \quad f_3(x) = \frac{1}{x} \quad f_4(x) = \sin\frac{1}{x}$$

例 指出下列函数的间断点，并判别类型：

$$f_1(x)=\begin{cases} x+1, & x\neq 1 \\ 1, & x=1 \end{cases},\quad f_2(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases},\quad f_3(x)=\frac{1}{x} \quad f_4(x)=\sin\frac{1}{x}$$

解 **(1)** $\lim\limits_{x\to 1} f_1(x)$ $\qquad\qquad$ $f_1(1)$,

暨南大学 JINAN UNIVERSITY

例 指出下列函数的间断点，并判别类型：

$$f_1(x)=\begin{cases} x+1, & x\neq 1 \\ 1, & x=1 \end{cases},\quad f_2(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases},\quad f_3(x)=\frac{1}{x},\quad f_4(x)=\sin\frac{1}{x}$$

解 (1) $\lim\limits_{x\to 1} f_1(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)\qquad f_1(1)$，

例 指出下列函数的间断点，并判别类型：

$$f_1(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}, \quad f_3(x) = \frac{1}{x} \quad f_4(x) = \sin\frac{1}{x}$$

解 **(1)** $\lim\limits_{x\to 1} f_1(x) = \lim\limits_{x\to 1}(x+1) = 2 \quad f_1(1)$,

例 指出下列函数的间断点，并判别类型：

$$f_1(x)=\begin{cases} x+1, & x\neq 1 \\ 1, & x=1 \end{cases},\quad f_2(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases},\quad \begin{array}{l} f_3(x)=\frac{1}{x} \\ f_4(x)=\sin\frac{1}{x} \end{array}$$

解 **(1)** $\lim\limits_{x\to 1} f_1(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2\neq f_1(1)$，

例 指出下列函数的间断点，并判别类型：

$$f_1(x)=\begin{cases} x+1, & x\neq 1 \\ 1, & x=1 \end{cases},\quad f_2(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases},\quad f_3(x)=\frac{1}{x}\quad f_4(x)=\sin\frac{1}{x}$$

解 (1) $\lim\limits_{x\to 1} f_1(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2\neq f_1(1)$，故 $x=1$ 是可去间断点.

例 指出下列函数的间断点，并判别类型：

$$f_1(x)=\begin{cases} x+1, & x\neq 1 \\ 1, & x=1 \end{cases},\quad f_2(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases},\quad f_3(x)=\frac{1}{x} \quad f_4(x)=\sin\frac{1}{x}$$

解 **(1)** $\lim\limits_{x\to 1} f_1(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2\neq f_1(1)$，故 $x=1$ 是可去间断点.

(2)

$$f_2(0^+)=$$

$$f_2(0^-)=$$

例 指出下列函数的间断点，并判别类型：

$$f_1(x)=\begin{cases} x+1, & x\neq 1 \\ 1, & x=1 \end{cases},\quad f_2(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases},\quad f_3(x)=\frac{1}{x} \quad f_4(x)=\sin\frac{1}{x}$$

解 **(1)** $\lim\limits_{x\to 1} f_1(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2\neq f_1(1)$，故 $x=1$ 是可去间断点.

(2)

$$f_2(0^+)=\lim_{x\to 0^+} f_2(x)$$

$$f_2(0^-)=$$

例 指出下列函数的间断点，并判别类型：

$$f_1(x)=\begin{cases} x+1, & x\neq 1 \\ 1, & x=1 \end{cases},\quad f_2(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases},\quad \begin{array}{l} f_3(x)=\frac{1}{x} \\ f_4(x)=\sin\frac{1}{x} \end{array}$$

解 (1) $\lim_{x\to 1} f_1(x)=\lim_{x\to 1}(x+1)=2\neq f_1(1)$，故 $x=1$ 是可去间断点.

(2)

$$f_2(0^+)=\lim_{x\to 0^+} f_2(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+1)$$

$$f_2(0^-)=$$

例 指出下列函数的间断点，并判别类型：

$$f_1(x)=\begin{cases} x+1, & x\neq 1 \\ 1, & x=1 \end{cases},\quad f_2(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases},\quad \begin{array}{l} f_3(x)=\frac{1}{x} \\ f_4(x)=\sin\frac{1}{x} \end{array}$$

解 **(1)** $\lim\limits_{x\to 1} f_1(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2\neq f_1(1)$，故 $x=1$ 是可去间断点.

(2)

$$f_2(0^+)=\lim_{x\to 0^+} f_2(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+1)=1$$

$$f_2(0^-)=$$

例 指出下列函数的间断点，并判别类型：

$$f_1(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}, \quad f_3(x) = \frac{1}{x} \quad f_4(x) = \sin\frac{1}{x}$$

解 **(1)** $\lim\limits_{x\to 1} f_1(x) = \lim\limits_{x\to 1}(x+1) = 2 \neq f_1(1)$，故 $x = 1$ 是可去间断点.

(2)

$$f_2(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f_2(x) = \lim_{x\to 0^+}(x+1) = 1$$

$$f_2(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f_2(x)$$

例 指出下列函数的间断点，并判别类型：

$$f_1(x)=\begin{cases} x+1, & x\neq 1 \\ 1, & x=1 \end{cases},\quad f_2(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases},\quad f_3(x)=\frac{1}{x} \quad f_4(x)=\sin\frac{1}{x}$$

解 **(1)** $\lim\limits_{x\to 1} f_1(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2\neq f_1(1)$，故 $x=1$ 是可去间断点.

(2)

$$f_2(0^+)=\lim_{x\to 0^+} f_2(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+1)=1$$

$$f_2(0^-)=\lim_{x\to 0^-} f_2(x)=\lim_{x\to 0^-}(x-1)$$

例 指出下列函数的间断点，并判别类型：

$$f_1(x)=\begin{cases} x+1, & x\neq 1 \\ 1, & x=1 \end{cases},\quad f_2(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases},\quad f_3(x)=\frac{1}{x} \quad f_4(x)=\sin\frac{1}{x}$$

解 **(1)** $\lim\limits_{x\to 1} f_1(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2\neq f_1(1)$，故 $x=1$ 是可去间断点.

(2)

$$f_2(0^+)=\lim_{x\to 0^+} f_2(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+1)=1$$

$$f_2(0^-)=\lim_{x\to 0^-} f_2(x)=\lim_{x\to 0^-}(x-1)=-1$$

例 指出下列函数的间断点，并判别类型：

$$f_1(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}, \quad f_3(x) = \frac{1}{x} \quad f_4(x) = \sin\frac{1}{x}$$

解 **(1)** $\lim\limits_{x\to 1} f_1(x) = \lim\limits_{x\to 1}(x+1) = 2 \neq f_1(1)$，故 $x=1$ 是可去间断点.

(2)

$$f_2(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f_2(x) = \lim_{x\to 0^+}(x+1) = 1$$

$$f_2(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f_2(x) = \lim_{x\to 0^-}(x-1) = -1$$

两者不等，所以 $x=0$ 是跳跃间断点.

例 指出下列函数的间断点，并判别类型：

$$f_1(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}, \quad f_3(x) = \frac{1}{x} \quad f_4(x) = \sin\frac{1}{x}$$

解 **(1)** $\lim\limits_{x\to 1} f_1(x) = \lim\limits_{x\to 1}(x+1) = 2 \neq f_1(1)$，故 $x=1$ 是可去间断点.

(2)

$$f_2(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f_2(x) = \lim_{x\to 0^+}(x+1) = 1$$

$$f_2(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f_2(x) = \lim_{x\to 0^-}(x-1) = -1$$

两者不等，所以 $x=0$ 是跳跃间断点.

(3) $f_3(0^+)$，$f_3(0^-)$ 均不存在，故 $x=0$ 为第二类间断点.

例 指出下列函数的间断点，并判别类型：

$$f_1(x)=\begin{cases} x+1, & x\neq 1 \\ 1, & x=1 \end{cases},\quad f_2(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases},\quad f_3(x)=\frac{1}{x},\quad f_4(x)=\sin\frac{1}{x}$$

解 **(1)** $\lim\limits_{x\to 1} f_1(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2\neq f_1(1)$，故 $x=1$ 是可去间断点.

(2)

$$f_2(0^+)=\lim_{x\to 0^+} f_2(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+1)=1$$

$$f_2(0^-)=\lim_{x\to 0^-} f_2(x)=\lim_{x\to 0^-}(x-1)=-1$$

两者不等，所以 $x=0$ 是跳跃间断点.

(3) $f_3(0^+)$，$f_3(0^-)$ 均不存在，故 $x=0$ 为第二类间断点. 因为 $f_3(0^+)$，$f_3(0^-)$ 为 ∞，所以 $x=0$ 还是无穷间断点.

例 指出下列函数的间断点，并判别类型：

$$f_1(x)=\begin{cases} x+1, & x\neq 1\\ 1, & x=1\end{cases},\quad f_2(x)=\begin{cases} x-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ x+1, & x>0\end{cases},\quad f_3(x)=\frac{1}{x},\quad f_4(x)=\sin\frac{1}{x}$$

解 **(1)** $\lim\limits_{x\to 1} f_1(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2\neq f_1(1)$，故 $x=1$ 是可去间断点.

(2)

$$f_2(0^+)=\lim_{x\to 0^+} f_2(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+1)=1$$

$$f_2(0^-)=\lim_{x\to 0^-} f_2(x)=\lim_{x\to 0^-}(x-1)=-1$$

两者不等，所以 $x=0$ 是跳跃间断点.

(3) $f_3(0^+)$，$f_3(0^-)$ 均不存在，故 $x=0$ 为第二类间断点. 因为 $f_3(0^+)$，$f_3(0^-)$ 为 ∞，所以 $x=0$ 还是无穷间断点.

(4) $f_3(0^+)$，$f_3(0^-)$ 均不存在，故 $x=0$ 为第二类间断点.

例 指出下列函数的间断点，并判别类型：

$$f_1(x)=\begin{cases} x+1, & x\neq 1 \\ 1, & x=1 \end{cases},\quad f_2(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases},\quad f_3(x)=\frac{1}{x},\quad f_4(x)=\sin\frac{1}{x}$$

解 **(1)** $\lim\limits_{x\to 1} f_1(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2\neq f_1(1)$，故 $x=1$ 是可去间断点.

(2)

$$f_2(0^+)=\lim_{x\to 0^+} f_2(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+1)=1$$

$$f_2(0^-)=\lim_{x\to 0^-} f_2(x)=\lim_{x\to 0^-}(x-1)=-1$$

两者不等，所以 $x=0$ 是跳跃间断点.

(3) $f_3(0^+)$，$f_3(0^-)$ 均不存在，故 $x=0$ 为第二类间断点. 因为 $f_3(0^+)$，$f_3(0^-)$ 为 ∞，所以 $x=0$ 还是无穷间断点.

(4) $f_3(0^+)$，$f_3(0^-)$ 均不存在，故 $x=0$ 为第二类间断点. 进一步可知是震荡间断点.

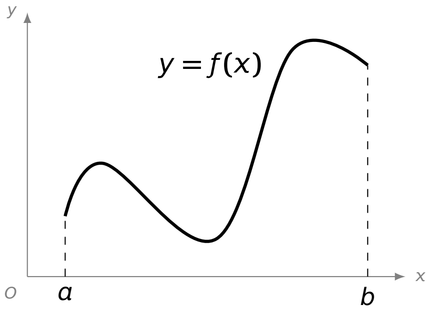
We are here now...

1. 连续函数

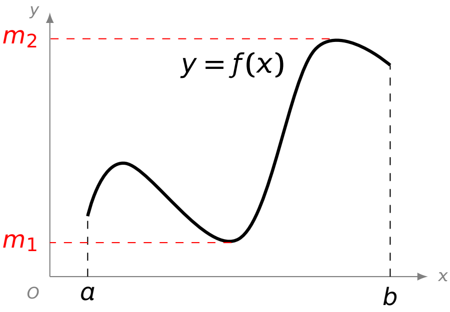
2. 函数的间断点

3. 闭区间上连续函数的性质

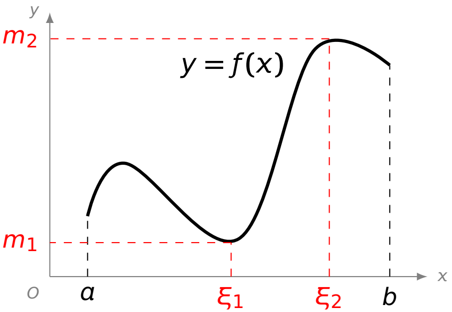
连续函数最值定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在该区间上有界，并且能取到最大值 M 和最小值 m.



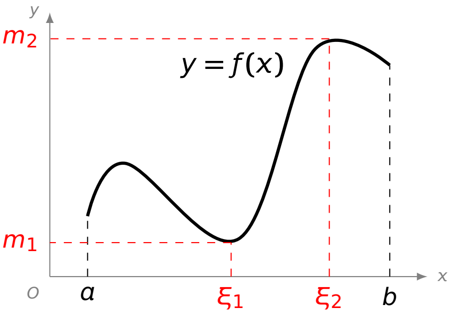
连续函数最值定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在该区间上有界，并且能取到最大值 M 和最小值 m.



连续函数最值定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在该区间上有界，并且能取到最大值 M 和最小值 m.

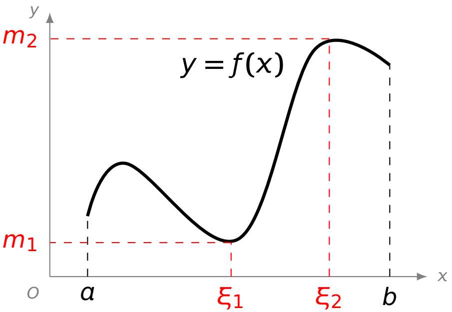


连续函数最值定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在该区间上有界，并且能取到最大值 M 和最小值 m.



注 定理中"闭区间 $[a,b]$"不能换成"开区间 (a,b)"，否则结论不再成立.

连续函数最值定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在该区间上有界，并且能取到最大值 M 和最小值 m.

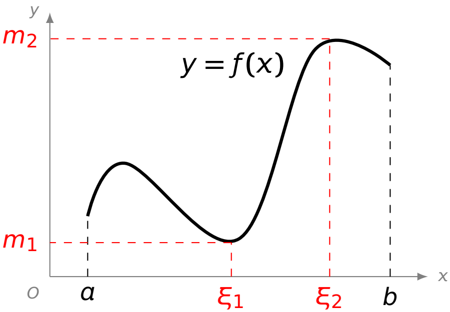


注 定理中“闭区间 $[a,b]$”不能换成“开区间 (a,b)”，否则结论不再成立. 例如:

$$f(x) = \arctan x$$

在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上连续，

连续函数最值定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在该区间上有界，并且能取到最大值 M 和最小值 m.

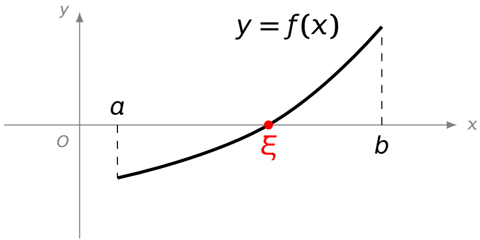


注 定理中 "闭区间 $[a,b]$" 不能换成 "开区间 (a,b)"，否则结论不再成立. 例如:

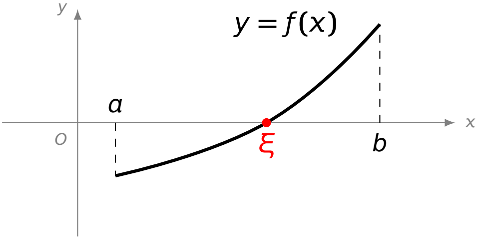
$$f(x)=\arctan x$$

在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 上连续，但 $f(x)$ 是无界函数，更取不到最大最小值.

连续函数零点定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a)$ 和 $f(b)$ 异号，则在开区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi) = 0$.

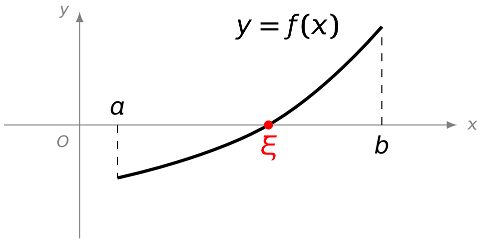


连续函数零点定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 和 $f(b)$ 异号，则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$.



例 1 证明方程 $x^3-3x^2+1=0$ 在区间 $(-1,0)$，$(0,1)$，$(1,3)$ 内各有一个实根.

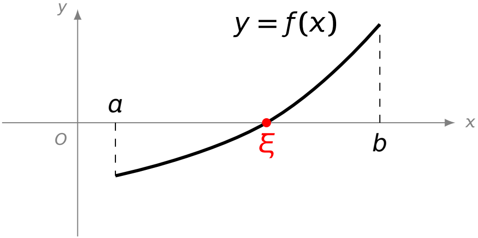
连续函数零点定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 和 $f(b)$ 异号，则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$.



例 1 证明方程 $x^3-3x^2+1=0$ 在区间 $(-1,0)$，$(0,1)$，$(1,3)$ 内各有一个实根.

证明 $f(x)=x^3-3x^2+1$ 是闭区间 $[-1,0]$ 上的连续函数，$f(-1)<0<f(0)$，所以 $f(x)$ 在开区间 $(-1,0)$ 内有实数解.

连续函数零点定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a)$ 和 $f(b)$ 异号，则在开区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi) = 0$.

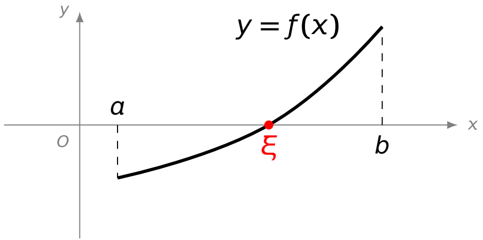


例 1 证明方程 $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ 在区间 $(-1, 0)$，$(0, 1)$，$(1, 3)$ 内各有一个实根.

证明 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ 是闭区间 $[-1, 0]$ 上的连续函数，$f(-1) < 0 < f(0)$，所以 $f(x)$ 在开区间 $(-1, 0)$ 内有实数解.

其它情形证明类似.

连续函数零点定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 和 $f(b)$ 异号，则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$.



例 1 证明方程 $x^3-3x^2+1=0$ 在区间 $(-1,0)$，$(0,1)$，$(1,3)$ 内各有一个实根.

证明 $f(x)=x^3-3x^2+1$ 是闭区间 $[-1,0]$ 上的连续函数，$f(-1)<0<f(0)$，所以 $f(x)$ 在开区间 $(-1,0)$ 内有实数解.

其它情形证明类似.

例 2 证明方程 $3\sin x=x+1$ 有一个实数解.

例 2 证明方程 $3\sin x = x + 1$ 有一个实数解.

例 2 证明方程 $3\sin x = x + 1$ 有一个实数解.

证明 令 $f(x) = x + 1 - 3\sin x$，则 $f(-3) < 0 < f(0)$，

例 2 证明方程 $3\sin x = x + 1$ 有一个实数解.

证明 令 $f(x) = x + 1 - 3\sin x$，则 $f(-3) < 0 < f(0)$，并且 $f(x)$ 是闭区间 $[-3, 0]$ 上的连续函数，所以 $f(x)$ 在开区间 $(-3, 0)$ 内有实数解.

连续函数介值定理 是 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a) = A$ 和 $f(b) = B$ 不相等，则对于 A 与 B 之间的任何数 C，在开区间内 (a, b) 至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi) = C$.

连续函数介值定理 是 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a) = A$ 和 $f(b) = B$ 不相等，则对于 A 与 B 之间的任何数 C，在开区间内 (a, b) 至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi) = C$.

注 C 介于 A 与 B 之间指：$A < C < B$ 或者 $B < C < A$.

连续函数介值定理 是 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=A$ 和 $f(b)=B$ 不相等，则对于 A 与 B 之间的任何数 C，在开区间内 (a,b) 至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=C$.

注 C 介于 A 与 B 之间指：$A<C<B$ 或者 $B<C<A$.

证明 不妨设 $A<C<B$.

令 $g(x)=f(x)-C$,

连续函数介值定理 是 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=A$ 和 $f(b)=B$ 不相等，则对于 A 与 B 之间的任何数 C，在开区间内 (a,b) 至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=C$.

注 C 介于 A 与 B 之间指：$A<C<B$ 或者 $B<C<A$.

证明 不妨设 $A<C<B$.

令 $g(x)=f(x)-C$，则 $g(a)<0<g(b)$，且 g 是闭区间 $[A,B]$ 上的连续函数.

连续函数介值定理 是 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=A$ 和 $f(b)=B$ 不相等，则对于 A 与 B 之间的任何数 C，在开区间内 (a,b) 至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=C$.

注 C 介于 A 与 B 之间指：$A<C<B$ 或者 $B<C<A$.

证明 不妨设 $A<C<B$.

令 $g(x)=f(x)-C$，则 $g(a)<0<g(b)$，且 g 是闭区间 $[A,B]$ 上的连续函数.

所以由零点定理可知，$g(x)$ 在开区间 (a,b) 内有实数解.

连续函数介值定理 是 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=A$ 和 $f(b)=B$ 不相等，则对于 A 与 B 之间的任何数 C，在开区间内 (a,b) 至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=C$.

注 C 介于 A 与 B 之间指：$A<C<B$ 或者 $B<C<A$.

证明 不妨设 $A<C<B$.

令 $g(x)=f(x)-C$，则 $g(a)<0<g(b)$，且 g 是闭区间 $[A,B]$ 上的连续函数.

所以由零点定理可知，$g(x)$ 在开区间 (a,b) 内有实数解.

也就是，$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $0=g(\xi)=f(\xi)-C$.