

§2.1 矩阵的概念

数学系 梁卓滨

2018 - 2019 学年上学期

矩阵引入

线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ 3x_1 + 8x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 9x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7 \end{cases}$$

矩阵引入

线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ 3x_1 + 8x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 9x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7 \end{cases}$$

简写成

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -9 & 3 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

矩阵引入

线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ 3x_1 + 8x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 9x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7 \end{cases}$$

简写成

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -9 & 3 & 7 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{或} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -9 & 3 & 7 & 7 \end{array} \right)$$

矩阵引入

线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ 3x_1 + 8x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 9x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7 \end{cases}$$

简写成

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -9 & 3 & 7 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{或} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -9 & 3 & 7 & 7 \end{array} \right)$$

注 好处是：方程组的消元法过程，本质上是对“矩阵”作行变换

矩阵定义

定义 由 $m \times n$ 个数 a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) 按一定次序排成的一个 m 行 n 列的矩形数表,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵定义

定义 由 $m \times n$ 个数 a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) 按一定次序排成的一个 m 行 n 列的矩形数表,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 $m \times n$ 矩阵, 简称矩阵。

矩阵定义

定义 由 $m \times n$ 个数 a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) 按一定次序排成的一个 m 行 n 列的矩形数表,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 $m \times n$ 矩阵, 简称矩阵。其中 a_{ij} 称为矩阵第 i 行第 j 列的元素。

矩阵定义

定义 由 $m \times n$ 个数 a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) 按一定次序排成的一个 m 行 n 列的矩形数表,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 $m \times n$ 矩阵, 简称矩阵。其中 a_{ij} 称为矩阵第 i 行第 j 列的元素。

注 通常表示矩阵的符号

1. 大写字母 A, B, C, \dots

矩阵定义

定义 由 $m \times n$ 个数 a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) 按一定次序排成的一个 m 行 n 列的矩形数表,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 $m \times n$ 矩阵, 简称矩阵。其中 a_{ij} 称为矩阵第 i 行第 j 列的元素。

注 通常表示矩阵的符号

1. 大写字母 A, B, C, \dots
2. $A_{m \times n}, (a_{ij})_{m \times n}$

矩阵与行列式区别?

矩阵 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$

行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

矩阵与行列式区别?

矩阵 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$

行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$



”表格”

矩阵与行列式区别?

矩阵 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$

行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

“表格” vs. 数

矩阵与行列式区别?

矩阵 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$

行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

“表格” vs. 数

行数、列数可以不等

矩阵与行列式区别?

矩阵 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$

行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

“表格” vs. 数

行数、列数可以不等 vs. 行数、列数相等

定义 矩阵 A , B 相等是指

定义 矩阵 A , B 相等是指

- A , B 有相同的行数和列数 (“同型”),

定义 矩阵 A , B 相等是指

- A , B 有相同的行数和列数 (“同型”),
- 对应位置上的元素相等,

定义 矩阵 A , B 相等是指

- A , B 有相同的行数和列数 (“同型”), 即:

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, B = (b_{ij})_{m \times n}$$

- 对应位置上的元素相等,

定义 矩阵 A, B 相等是指

- A, B 有相同的行数和列数 (“同型”), 即:

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, B = (b_{ij})_{m \times n}$$

- 对应位置上的元素相等, 即:

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

定义 矩阵 A , B 相等是指

- A , B 有相同的行数和列数 (“同型”), 即:

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, B = (b_{ij})_{m \times n}$$

- 对应位置上的元素相等, 即:

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

此时记为 $A = B$

定义 矩阵 A, B 相等是指

- A, B 有相同的行数和列数 (“同型”), 即:

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, B = (b_{ij})_{m \times n}$$

- 对应位置上的元素相等, 即:

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

此时记为 $A = B$

例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix},$$

定义 矩阵 A, B 相等是指

- A, B 有相同的行数和列数 (“同型”), 即:

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, B = (b_{ij})_{m \times n}$$

- 对应位置上的元素相等, 即:

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

此时记为 $A = B$

例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix},$$

定义 矩阵 A, B 相等是指

- A, B 有相同的行数和列数 (“同型”), 即:

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, B = (b_{ij})_{m \times n}$$

- 对应位置上的元素相等, 即:

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

此时记为 $A = B$

例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

定义 矩阵 A, B 相等是指

- A, B 有相同的行数和列数 (“同型”), 即:

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, B = (b_{ij})_{m \times n}$$

- 对应位置上的元素相等, 即:

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

此时记为 $A = B$

例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

定义 矩阵 A, B 相等是指

- A, B 有相同的行数和列数 (“同型”), 即:

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, B = (b_{ij})_{m \times n}$$

- 对应位置上的元素相等, 即:

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

此时记为 $A = B$

例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sin^2 t + \cos^2 t & -1 \\ 9 & 4 \\ 0 & \sqrt{t^2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 9 & 4 \\ 0 & |t| \end{pmatrix}$$

定义 矩阵 A, B 相等是指

- A, B 有相同的行数和列数 (“同型”), 即:

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, B = (b_{ij})_{m \times n}$$

- 对应位置上的元素相等, 即:

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

此时记为 $A = B$

例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sin^2 t + \cos^2 t & -1 \\ 9 & 4 \\ 0 & \sqrt{t^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 9 & 4 \\ 0 & |t| \end{pmatrix}$$

零矩阵、方阵

设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$

- 若 $a_{ij} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$), 则称 A 为 $m \times n$ 零矩阵, 记为 $O_{m \times n}$ 或 O 。例如:

$$O_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad O_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

零矩阵、方阵

设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$

- 若 $a_{ij} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$), 则称 A 为 $m \times n$ 零矩阵, 记为 $O_{m \times n}$ 或 O 。例如:

$$O_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad O_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 若 $m = n$, 即行数与列数相等:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则称 A 为 n 阶方阵。

方阵的行列式

- 对 n 阶方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 可以计算其行列式 $|A|$ 。

方阵的行列式

- 对 n 阶方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 可以计算其行列式 $|A|$ 。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

方阵的行列式

- 对 n 阶方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 可以计算其行列式 $|A|$ 。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow |A|$$

方阵的行列式

- 对 n 阶方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 可以计算其行列式 $|A|$ 。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

方阵的行列式

- 对 n 阶方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 可以计算其行列式 $|A|$ 。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -58$$

方阵的行列式

- 对 n 阶方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 可以计算其行列式 $|A|$ 。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -58$$

注

- 若 $A = A_{m \times n}$ 非方阵 ($m \neq n$), 则不存在行列式 $|A|$

方阵的行列式

- 对 n 阶方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 可以计算其行列式 $|A|$ 。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -58$$

注

- 若 $A = A_{m \times n}$ 非方阵 ($m \neq n$), 则不存在行列式 $|A|$
- 注意区分矩阵和行列式:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

行矩阵和列矩阵

设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$

- 若 $m = 1$, 即只有一行:

$$A = (a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n})$$

行矩阵和列矩阵

设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$

- 若 $m = 1$, 即只有一行:

$$A = (a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n})$$

则称 A 为行矩阵 或 行向量

行矩阵和列矩阵

设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$

- 若 $m = 1$, 即只有一行:

$$A = (a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n})$$

则称 A 为行矩阵 或 行向量

- 若 $n = 1$, 即只有一列:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

行矩阵和列矩阵

设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$

- 若 $m = 1$, 即只有一行:

$$A = (a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n})$$

则称 A 为行矩阵 或 行向量

- 若 $n = 1$, 即只有一列:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

则称 A 为列矩阵 或 列向量