

第 10 章 α : 重积分的概念和性质

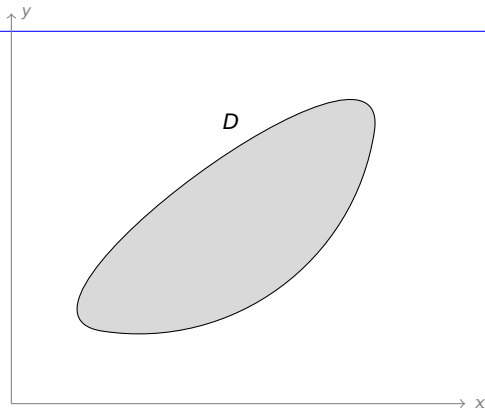
数学系 梁卓滨

2016-2017 学年 II

平面薄片的质量

假设

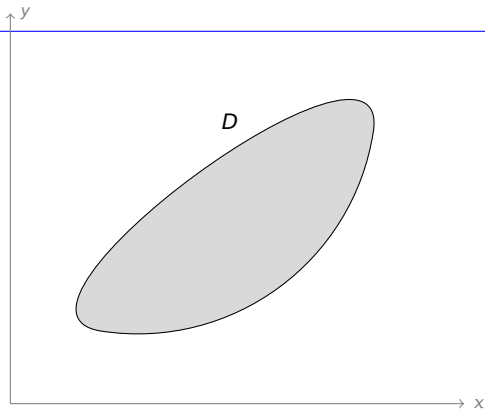
- 区域 D 为平面薄片
- 密度为 μ
- 质量为 m



平面薄片的质量

假设

- 区域 D 为平面薄片
- 密度为 μ
- 质量为 m

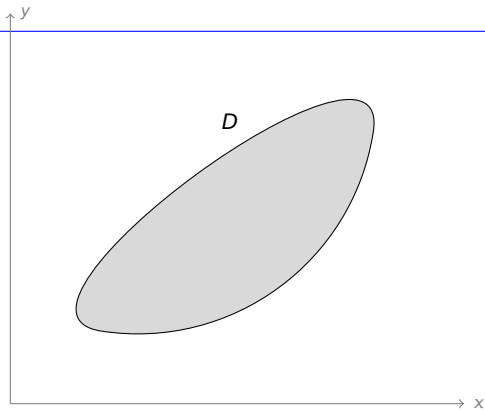


- 当薄片均匀时 ($\mu = \text{常数}$),
- 当薄片非均匀时 ($\mu = \mu(x, y)$ 为 D 上函数),

平面薄片的质量

假设

- 区域 D 为平面薄片
- 密度为 μ
- 质量为 m



- 当薄片均匀时 ($\mu = \text{常数}$),

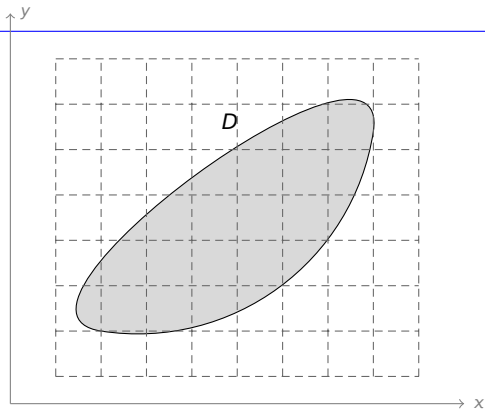
$$m = \mu \cdot \text{Area}(D)$$

- 当薄片非均匀时 ($\mu = \mu(x, y)$ 为 D 上函数),

平面薄片的质量

假设

- 区域 D 为平面薄片
- 密度为 μ
- 质量为 m



- 当薄片均匀时 ($\mu = \text{常数}$),

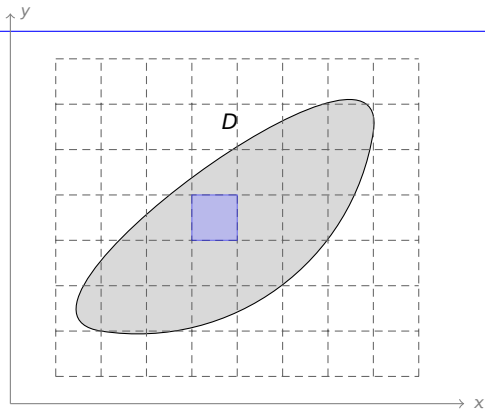
$$m = \mu \cdot \text{Area}(D)$$

- 当薄片非均匀时 ($\mu = \mu(x, y)$ 为 D 上函数), 利用微元法可知

平面薄片的质量

假设

- 区域 D 为平面薄片
- 密度为 μ
- 质量为 m



- 当薄片均匀时 ($\mu = \text{常数}$),

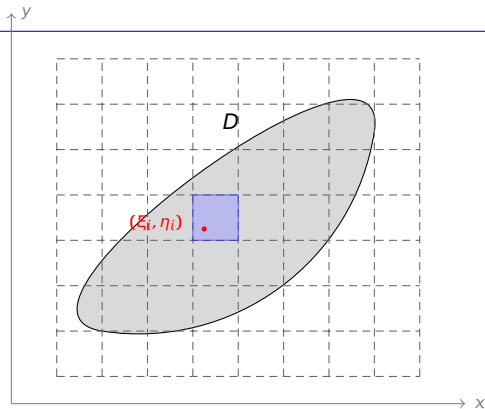
$$m = \mu \cdot \text{Area}(D)$$

- 当薄片非均匀时 ($\mu = \mu(x, y)$ 为 D 上函数), 利用微元法可知

平面薄片的质量

假设

- 区域 D 为平面薄片
- 密度为 μ
- 质量为 m



- 当薄片均匀时 ($\mu = \text{常数}$),

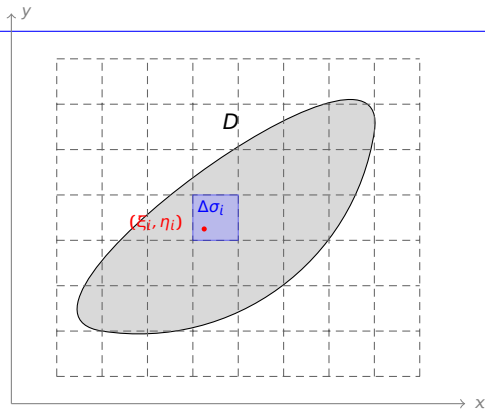
$$m = \mu \cdot \text{Area}(D)$$

- 当薄片非均匀时 ($\mu = \mu(x, y)$ 为 D 上函数), 利用微元法可知

平面薄片的质量

假设

- 区域 D 为平面薄片
- 密度为 μ
- 质量为 m



- 当薄片均匀时 ($\mu = \text{常数}$),

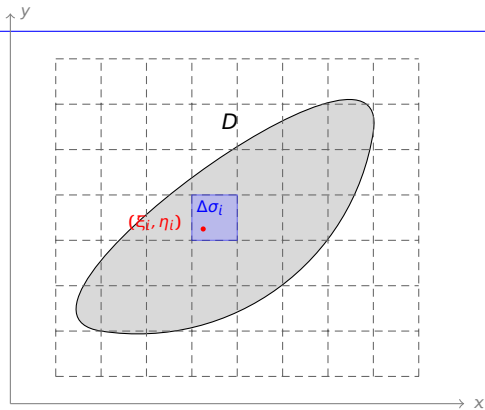
$$m = \mu \cdot \text{Area}(D)$$

- 当薄片非均匀时 ($\mu = \mu(x, y)$ 为 D 上函数), 利用微元法可知

平面薄片的质量

假设

- 区域 D 为平面薄片
- 密度为 μ
- 质量为 m



- 当薄片均匀时 ($\mu = \text{常数}$),

$$m = \mu \cdot \text{Area}(D)$$

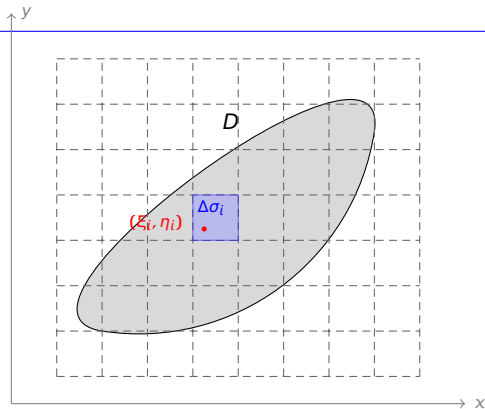
- 当薄片非均匀时 ($\mu = \mu(x, y)$ 为 D 上函数), 利用微元法可知

$$\mu(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

平面薄片的质量

假设

- 区域 D 为平面薄片
- 密度为 μ
- 质量为 m



- 当薄片均匀时 ($\mu = \text{常数}$),

$$m = \mu \cdot \text{Area}(D)$$

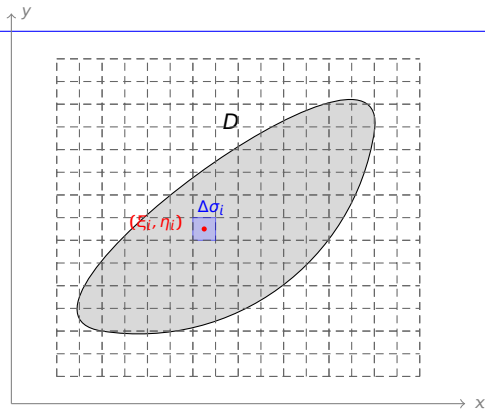
- 当薄片非均匀时 ($\mu = \mu(x, y)$ 为 D 上函数), 利用微元法可知

$$\sum_{i=1}^n \mu(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i$$

平面薄片的质量

假设

- 区域 D 为平面薄片
- 密度为 μ
- 质量为 m



- 当薄片均匀时 ($\mu = \text{常数}$),

$$m = \mu \cdot \text{Area}(D)$$

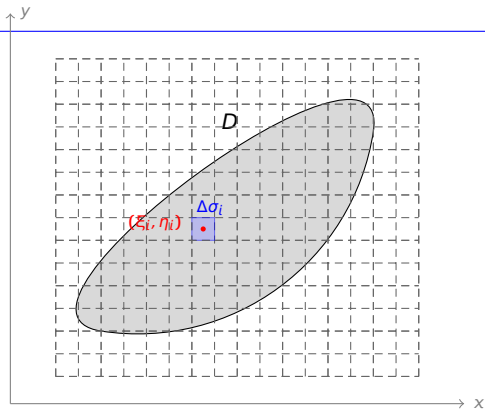
- 当薄片非均匀时 ($\mu = \mu(x, y)$ 为 D 上函数), 利用微元法可知

$$\sum_{i=1}^n \mu(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

平面薄片的质量

假设

- 区域 D 为平面薄片
- 密度为 μ
- 质量为 m



- 当薄片均匀时 ($\mu = \text{常数}$),

$$m = \mu \cdot \text{Area}(D)$$

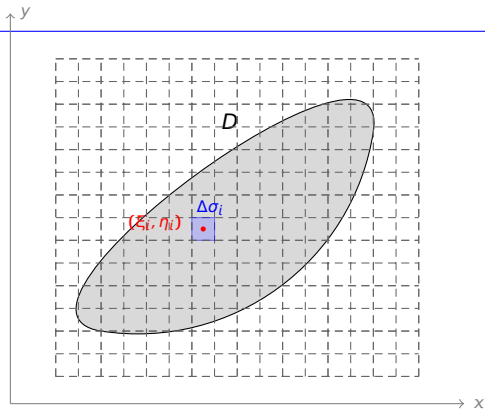
- 当薄片非均匀时 ($\mu = \mu(x, y)$ 为 D 上函数), 利用微元法可知

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mu(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i$$

平面薄片的质量

假设

- 区域 D 为平面薄片
- 密度为 μ
- 质量为 m



- 当薄片均匀时 ($\mu = \text{常数}$),

$$m = \mu \cdot \text{Area}(D)$$

- 当薄片非均匀时 ($\mu = \mu(x, y)$ 为 D 上函数), 利用微元法可知

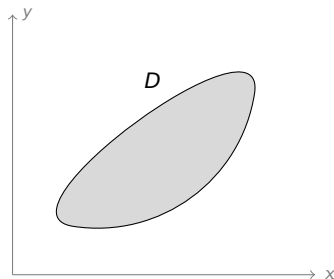
$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mu(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i$$

二重积分的定义

二重积分定义 设

- D 是平面上有界闭区域,
- $f(x, y)$ 是 D 上的有界函数,

若

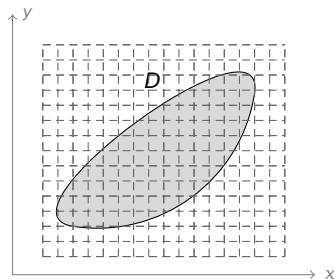


二重积分的定义

二重积分定义 设

- D 是平面上有界闭区域,
- $f(x, y)$ 是 D 上的有界函数,

若

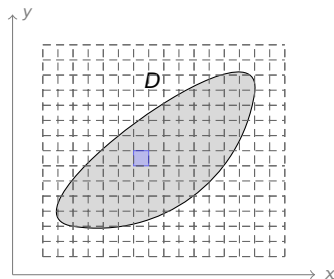


二重积分的定义

二重积分定义 设

- D 是平面上有界闭区域,
- $f(x, y)$ 是 D 上的有界函数,

若

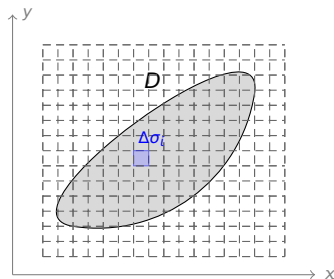


二重积分的定义

二重积分定义 设

- D 是平面上有界闭区域,
- $f(x, y)$ 是 D 上的有界函数,

若

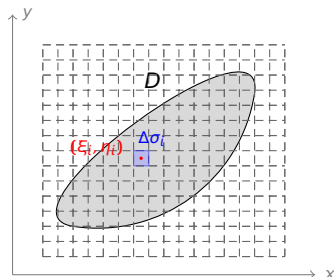


二重积分的定义

二重积分定义 设

- D 是平面上有界闭区域,
- $f(x, y)$ 是 D 上的有界函数,

若



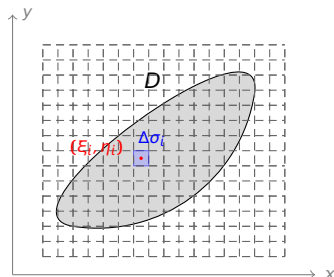
二重积分的定义

二重积分定义 设

- D 是平面上有界闭区域,
- $f(x, y)$ 是 D 上的有界函数,

若

$$f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$



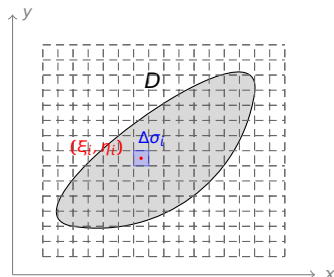
二重积分的定义

二重积分定义 设

- D 是平面上有界闭区域,
- $f(x, y)$ 是 D 上的有界函数,

若

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i$$



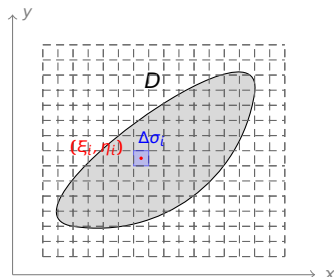
二重积分的定义

二重积分定义 设

- D 是平面上有界闭区域,
- $f(x, y)$ 是 D 上的有界函数,

若

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i$$



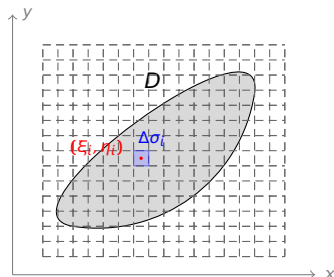
二重积分的定义

二重积分定义 设

- D 是平面上有界闭区域,
- $f(x, y)$ 是 D 上的有界函数,

若

- 极限 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i$ 存在,



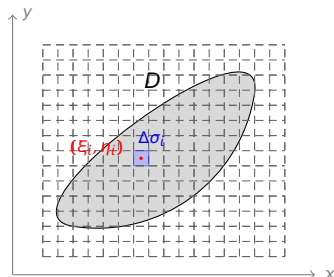
二重积分的定义

二重积分定义 设

- D 是平面上有界闭区域,
- $f(x, y)$ 是 D 上的有界函数,

若

- 极限 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i$ 存在, 且极限
- 与上述 D 的划分、 (ξ_i, η_i) 的选取无关,



二重积分的定义

二重积分定义 设

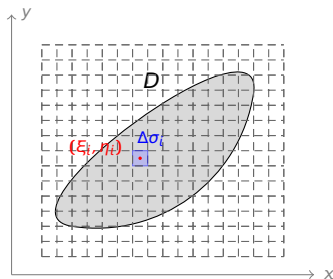
- D 是平面上有界闭区域,
- $f(x, y)$ 是 D 上的有界函数,

若

- 极限 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i$ 存在, 且极限
- 与上述 D 的划分、 (ξ_i, η_i) 的选取无关,

则定义

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i$$



二重积分的定义

二重积分定义 设

- D 是平面上有界闭区域,
- $f(x, y)$ 是 D 上的有界函数,

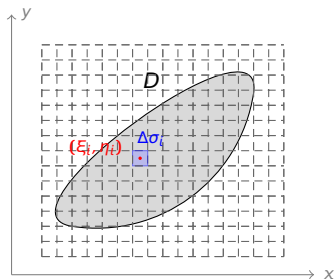
若

- 极限 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i$ 存在, 且极限
- 与上述 D 的划分、 (ξ_i, η_i) 的选取无关,

则定义

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i$$

称为 $f(x, y)$ 在 D 上的二重积分。



二重积分的定义

二重积分定义 设

- D 是平面上有界闭区域,
- $f(x, y)$ 是 D 上的有界函数,

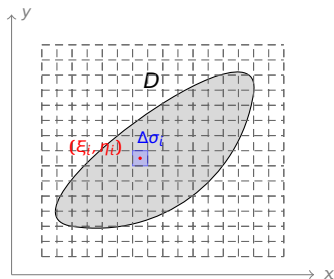
若

- 极限 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i$ 存在, 且极限
- 与上述 D 的划分、 (ξ_i, η_i) 的选取无关,

则定义

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i$$

称为 $f(x, y)$ 在 D 上的二重积分。 $d\sigma$ 称为面积元素。



二重积分的定义

二重积分定义 设

- D 是平面上有界闭区域,
- $f(x, y)$ 是 D 上的有界函数,

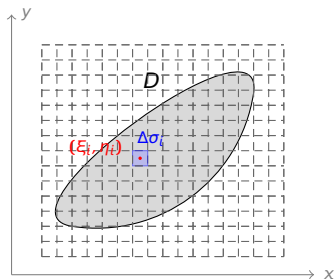
若

- 极限 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i$ 存在, 且极限
- 与上述 D 的划分、 (ξ_i, η_i) 的选取无关,

则定义

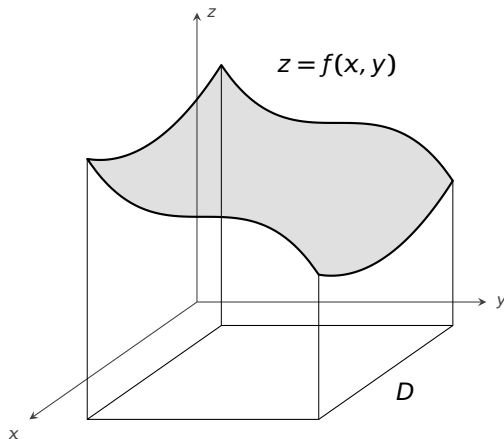
$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i$$

称为 $f(x, y)$ 在 D 上的二重积分。 $d\sigma$ 称为面积元素。



定理 若 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 则 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 存在。

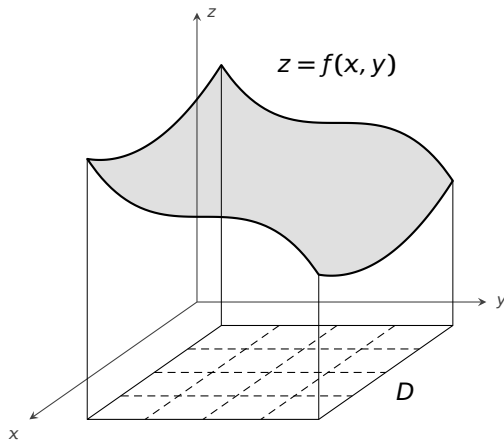
二重积分的几何意义



曲顶柱体的体积：

V

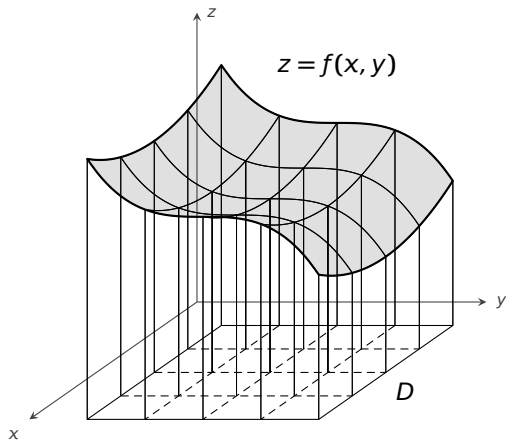
二重积分的几何意义



曲顶柱体的体积：

V

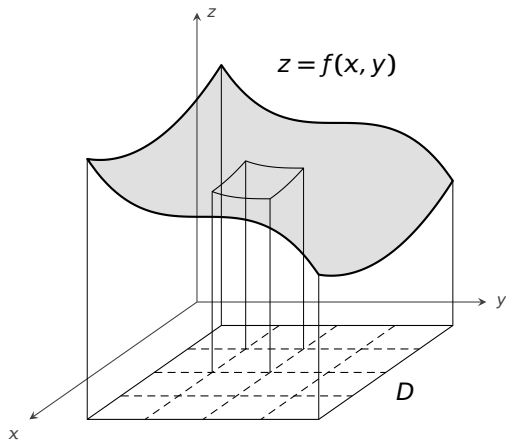
二重积分的几何意义



曲顶柱体的体积：

V

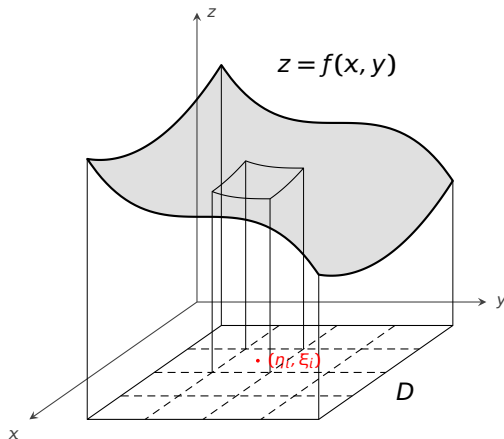
二重积分的几何意义



曲顶柱体的体积：

V

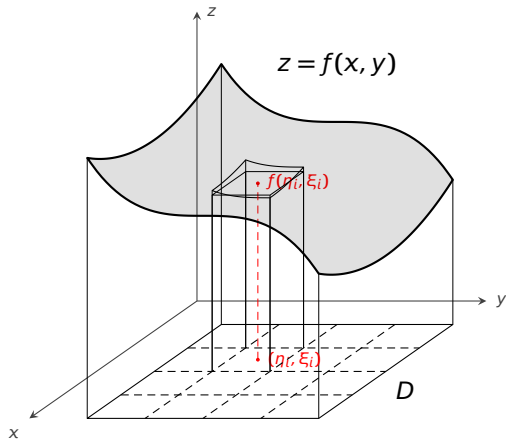
二重积分的几何意义



曲顶柱体的体积：

V

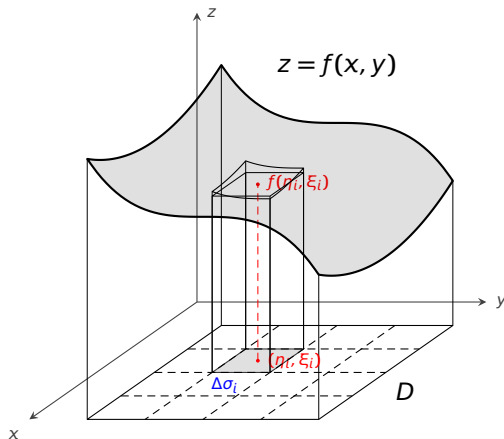
二重积分的几何意义



曲顶柱体的体积：

V

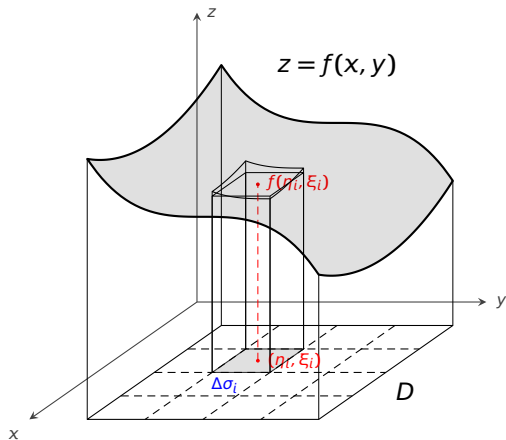
二重积分的几何意义



曲顶柱体的体积：

V

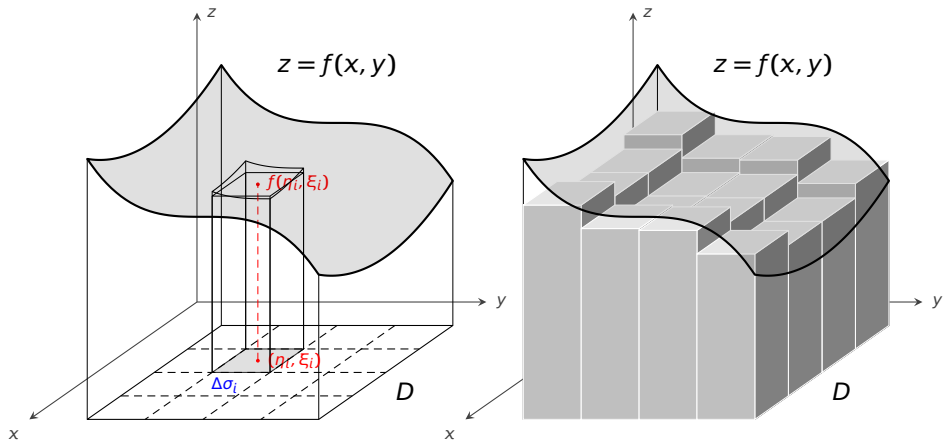
二重积分的几何意义



曲顶柱体的体积：

$$V = f(\eta_i, \xi_i)\Delta\sigma_i$$

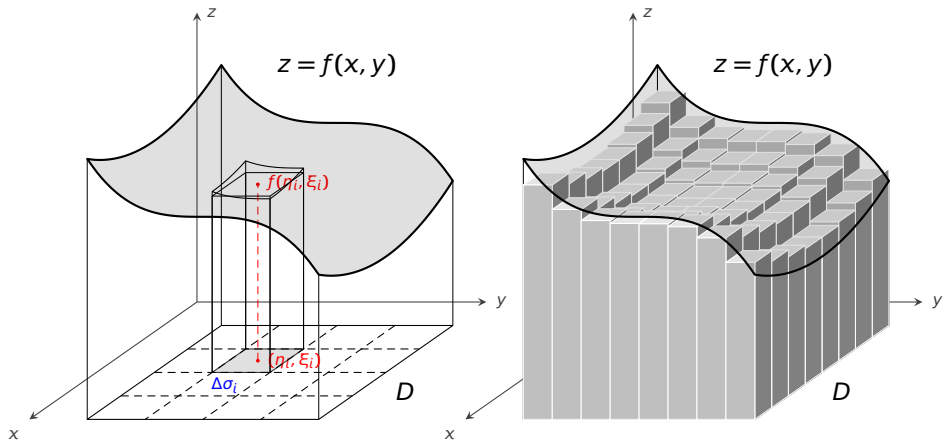
二重积分的几何意义



曲顶柱体的体积：

$$V = \sum_{i=1}^n f(\eta_i, \xi_i) \Delta\sigma_i$$

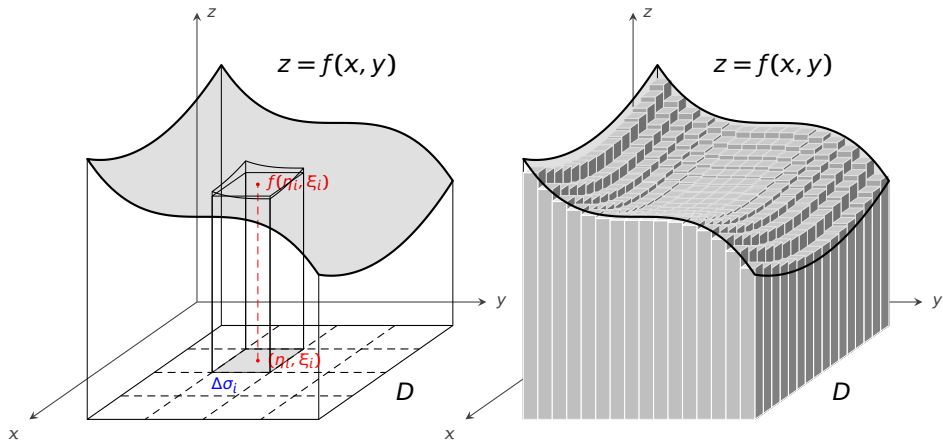
二重积分的几何意义



曲顶柱体的体积：

$$V = \sum_{i=1}^n f(\eta_i, \xi_i) \Delta\sigma_i$$

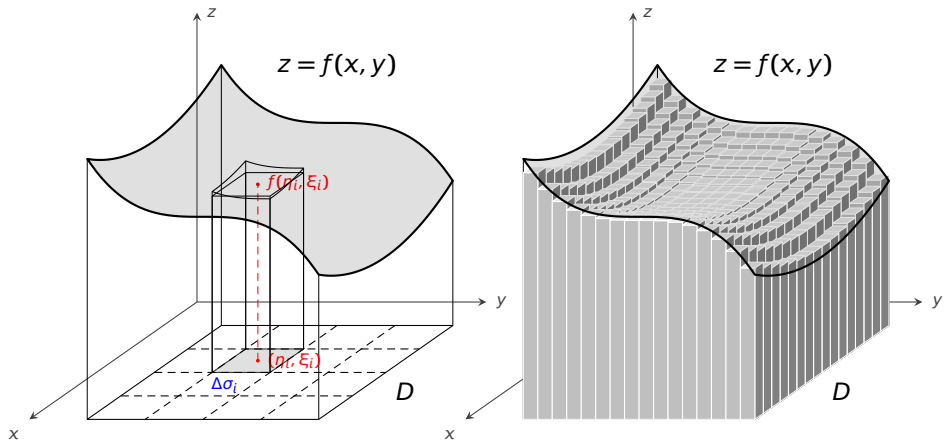
二重积分的几何意义



曲顶柱体的体积：

$$V = \sum_{i=1}^n f(\eta_i, \xi_i) \Delta\sigma_i$$

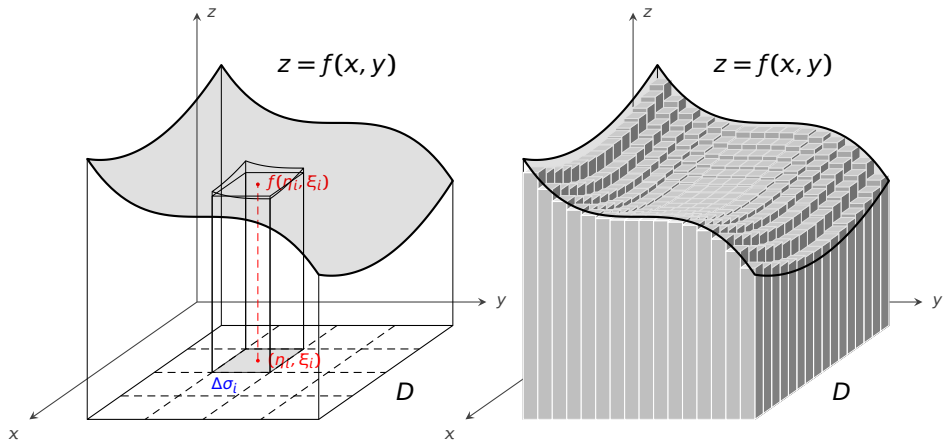
二重积分的几何意义



曲顶柱体的体积：

$$V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\eta_i, \xi_i) \Delta\sigma_i$$

二重积分的几何意义



曲顶柱体的体积：

$$V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\eta_i, \xi_i) \Delta\sigma_i = \iint_D f(x, y) d\sigma$$

二重积分的性质

性质 1 (线性性)

$$\iint_D \alpha f(x, y) + \beta g(x, y) d\sigma = \alpha \iint_D f(x, y) d\sigma + \beta \iint_D g(x, y) d\sigma,$$

其中 α, β 是常数。

二重积分的性质

性质 1 (线性性)

$$\iint_D \alpha f(x, y) + \beta g(x, y) d\sigma = \alpha \iint_D f(x, y) d\sigma + \beta \iint_D g(x, y) d\sigma,$$
其中 α, β 是常数。

证明

$$\begin{aligned} & \iint_D \alpha f(x, y) + \beta g(x, y) d\sigma \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [\alpha f(\xi_i, \eta_i) + \beta g(\xi_i, \eta_i)] \Delta\sigma_i \end{aligned}$$

二重积分的性质

性质 1 (线性性)

$$\iint_D \alpha f(x, y) + \beta g(x, y) d\sigma = \alpha \iint_D f(x, y) d\sigma + \beta \iint_D g(x, y) d\sigma,$$
其中 α, β 是常数。

证明

$$\begin{aligned} & \iint_D \alpha f(x, y) + \beta g(x, y) d\sigma \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [\alpha f(\xi_i, \eta_i) + \beta g(\xi_i, \eta_i)] \Delta\sigma_i \\ &= \alpha \cdot \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i + \beta \cdot \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i \end{aligned}$$

二重积分的性质

性质 1 (线性性)

$\iint_D \alpha f(x, y) + \beta g(x, y) d\sigma = \alpha \iint_D f(x, y) d\sigma + \beta \iint_D g(x, y) d\sigma$,
其中 α, β 是常数。

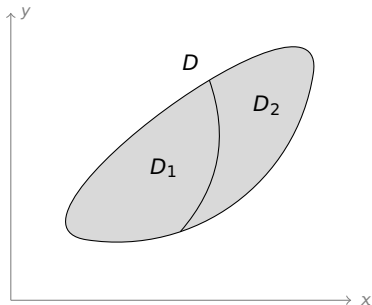
证明

$$\begin{aligned} & \iint_D \alpha f(x, y) + \beta g(x, y) d\sigma \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [\alpha f(\xi_i, \eta_i) + \beta g(\xi_i, \eta_i)] \Delta\sigma_i \\ &= \alpha \cdot \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i + \beta \cdot \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i \\ &= \alpha \iint_D f(x, y) d\sigma + \beta \iint_D g(x, y) d\sigma \end{aligned}$$

二重积分的性质 (Cont.)

性质 2 (积分可加性) 将 D 划分成两部分 D_1 和 D_2 , 则

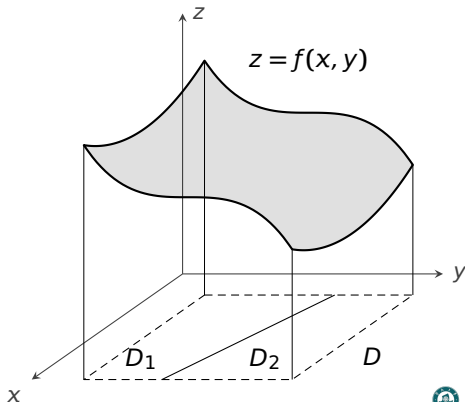
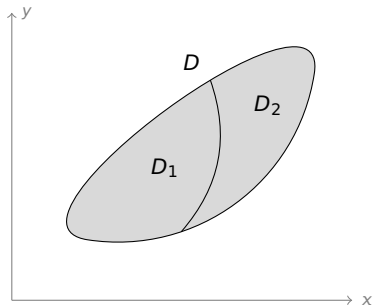
$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma$$



二重积分的性质 (Cont.)

性质 2 (积分可加性) 将 D 划分成两部分 D_1 和 D_2 , 则

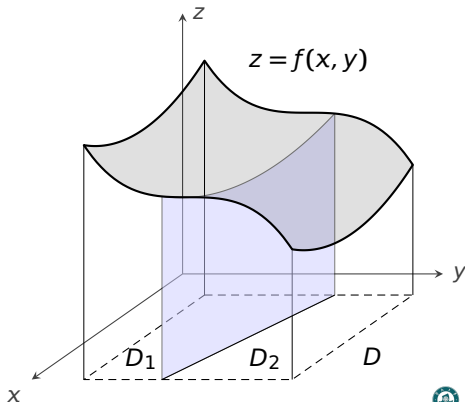
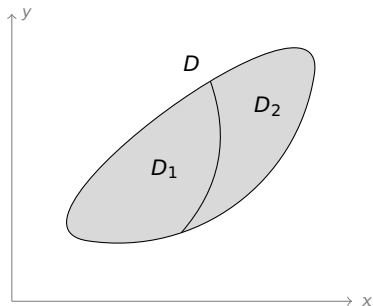
$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma$$



二重积分的性质 (Cont.)

性质 2 (积分可加性) 将 D 划分成两部分 D_1 和 D_2 , 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma$$

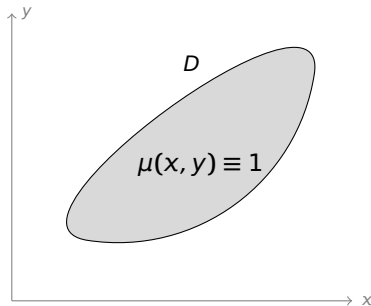


二重积分的性质 (Cont.)

性质 3 $\iint_D 1 d\sigma = |D|$ (D 的面积)。

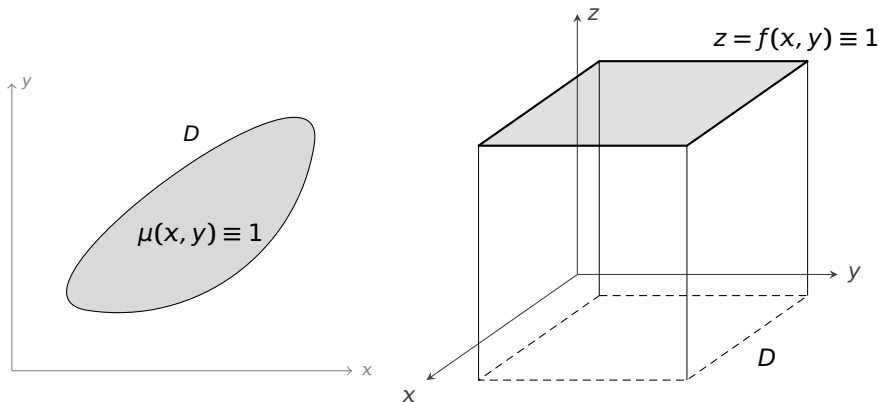
二重积分的性质 (Cont.)

性质 3 $\iint_D 1 d\sigma = |D|$ (D 的面积)。



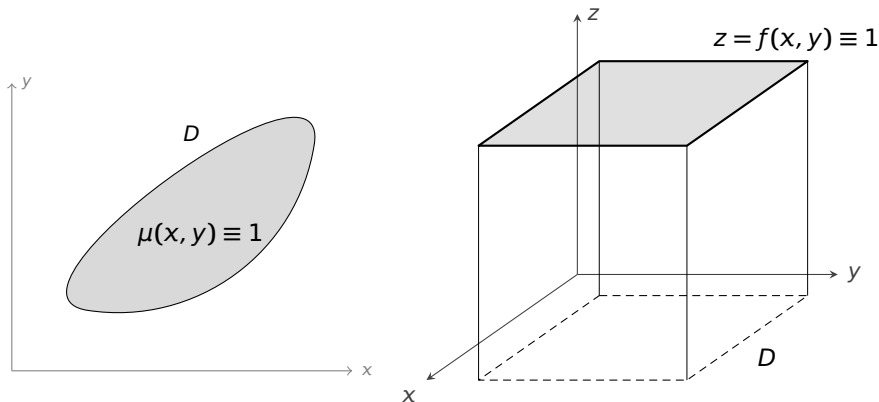
二重积分的性质 (Cont.)

性质 3 $\iint_D 1 d\sigma = |D|$ (D 的面积)。



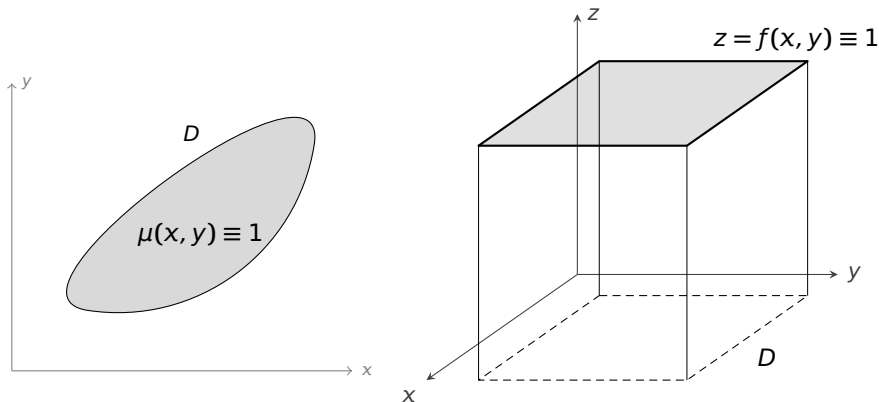
二重积分的性质 (Cont.)

性质 3 $\iint_D 1 d\sigma = |D|$ (D 的面积)。特别滴, $\iint_D k d\sigma =$ 。



二重积分的性质 (Cont.)

性质 3 $\iint_D 1 d\sigma = |D|$ (D 的面积)。特别滴, $\iint_D k d\sigma = k|D|$ 。



二重积分的性质 (Cont.)

性质 4 如果在 D 上成立 $f(x, y) \leq g(x, y)$, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma$$

二重积分的性质 (Cont.)

性质 4 如果在 D 上成立 $f(x, y) \leq g(x, y)$, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma$$

性质 5 假设在 D 上成立 $m \leq f(x, y) \leq M$, 则

$$m\sigma \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M\sigma,$$

二重积分的性质 (Cont.)

性质 4 如果在 D 上成立 $f(x, y) \leq g(x, y)$, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma$$

性质 5 假设在 D 上成立 $m \leq f(x, y) \leq M$, 则

$$m\sigma \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M\sigma, \quad (\sigma \text{ 为 } D \text{ 的面积})$$

二重积分的性质 (Cont.)

性质 4 如果在 D 上成立 $f(x, y) \leq g(x, y)$, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma$$

性质 5 假设在 D 上成立 $m \leq f(x, y) \leq M$, 则

$$m\sigma \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M\sigma, \quad (\sigma \text{ 为 } D \text{ 的面积})$$

证明

$$\iint_D m d\sigma \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D M d\sigma$$

二重积分的性质 (Cont.)

性质 4 如果在 D 上成立 $f(x, y) \leq g(x, y)$, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma$$

性质 5 假设在 D 上成立 $m \leq f(x, y) \leq M$, 则

$$m\sigma \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M\sigma, \quad (\sigma \text{ 为 } D \text{ 的面积})$$

证明

$$\iint_D m d\sigma \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D M d\sigma = M\sigma$$

二重积分的性质 (Cont.)

性质 4 如果在 D 上成立 $f(x, y) \leq g(x, y)$, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma$$

性质 5 假设在 D 上成立 $m \leq f(x, y) \leq M$, 则

$$m\sigma \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M\sigma, \quad (\sigma \text{ 为 } D \text{ 的面积})$$

证明

$$m\sigma = \iint_D m d\sigma \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D M d\sigma = M\sigma$$

例 估计下列积分值的范围

1. $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$, $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

2. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$, $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$, $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

例 估计下列积分值的范围

1. $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$, $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

2. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$, $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$, $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

1. $9 \leq x^2 + 4y^2 + 9$

例 估计下列积分值的范围

1. $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$, $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

2. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$, $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$, $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

1. $9 \leq x^2 + 4y^2 + 9 = (x^2 + y^2) + 3y^2 + 9$

例 估计下列积分值的范围

1. $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$, $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

2. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$, $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$, $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

1. $9 \leq x^2 + 4y^2 + 9 = (x^2 + y^2) + 3y^2 + 9 \leq 4 + 3 \cdot 4 + 9$

例 估计下列积分值的范围

1. $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$, $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

2. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$, $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$, $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

1. $9 \leq x^2 + 4y^2 + 9 = (x^2 + y^2) + 3y^2 + 9 \leq 4 + 3 \cdot 4 + 9 = 25$

例 估计下列积分值的范围

1. $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$, $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

2. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$, $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$, $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

1. $9 \leq x^2 + 4y^2 + 9 = (x^2 + y^2) + 3y^2 + 9 \leq 4 + 3 \cdot 4 + 9 = 25$

$$\Rightarrow 9|D| \leq I \leq 25|D|$$

例 估计下列积分值的范围

1. $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$, $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

2. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$, $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$, $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

1. $9 \leq x^2 + 4y^2 + 9 = (x^2 + y^2) + 3y^2 + 9 \leq 4 + 3 \cdot 4 + 9 = 25$

$$\Rightarrow 9|D| \leq I \leq 25|D| \xRightarrow{|D|=4\pi}$$

例 估计下列积分值的范围

1. $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$, $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

2. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$, $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$, $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

1. $9 \leq x^2 + 4y^2 + 9 = (x^2 + y^2) + 3y^2 + 9 \leq 4 + 3 \cdot 4 + 9 = 25$

$$\Rightarrow 9|D| \leq I \leq 25|D| \xrightarrow{|D|=4\pi} 36\pi \leq I \leq 100\pi$$

例 估计下列积分值的范围

1. $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9)d\sigma$, $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

2. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$, $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$, $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

1. $9 \leq x^2 + 4y^2 + 9 = (x^2 + y^2) + 3y^2 + 9 \leq 4 + 3 \cdot 4 + 9 = 25$

$$\Rightarrow 9|D| \leq I \leq 25|D| \xrightarrow{|D|=4\pi} 36\pi \leq I \leq 100\pi$$

2. $x^2 + y^2 + 2xy + 16$

例 估计下列积分值的范围

1. $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$, $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

2. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$, $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$, $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

1. $9 \leq x^2 + 4y^2 + 9 = (x^2 + y^2) + 3y^2 + 9 \leq 4 + 3 \cdot 4 + 9 = 25$

$$\Rightarrow 9|D| \leq I \leq 25|D| \xrightarrow{|D|=4\pi} 36\pi \leq I \leq 100\pi$$

2. $x^2 + y^2 + 2xy + 16 = (x + y)^2 + 16$

例 估计下列积分值的范围

1. $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$, $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

2. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$, $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$, $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

1. $9 \leq x^2 + 4y^2 + 9 = (x^2 + y^2) + 3y^2 + 9 \leq 4 + 3 \cdot 4 + 9 = 25$

$$\Rightarrow 9|D| \leq I \leq 25|D| \xrightarrow{|D|=4\pi} 36\pi \leq I \leq 100\pi$$

2. $16 \leq x^2 + y^2 + 2xy + 16 = (x + y)^2 + 16$

例 估计下列积分值的范围

1. $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma, D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

2. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}, D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}, D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

1. $9 \leq x^2 + 4y^2 + 9 = (x^2 + y^2) + 3y^2 + 9 \leq 4 + 3 \cdot 4 + 9 = 25$

$$\Rightarrow 9|D| \leq I \leq 25|D| \xrightarrow{|D|=4\pi} 36\pi \leq I \leq 100\pi$$

2. $16 \leq x^2 + y^2 + 2xy + 16 = (x + y)^2 + 16 \leq 3^2 + 16$

例 估计下列积分值的范围

1. $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$, $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

2. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$, $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$, $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

1. $9 \leq x^2 + 4y^2 + 9 = (x^2 + y^2) + 3y^2 + 9 \leq 4 + 3 \cdot 4 + 9 = 25$

$$\Rightarrow 9|D| \leq I \leq 25|D| \xrightarrow{|D|=4\pi} 36\pi \leq I \leq 100\pi$$

2. $16 \leq x^2 + y^2 + 2xy + 16 = (x + y)^2 + 16 \leq 3^2 + 16 = 25$

例 估计下列积分值的范围

1. $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$, $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

2. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$, $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$, $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

1. $9 \leq x^2 + 4y^2 + 9 = (x^2 + y^2) + 3y^2 + 9 \leq 4 + 3 \cdot 4 + 9 = 25$

$$\Rightarrow 9|D| \leq I \leq 25|D| \xrightarrow{|D|=4\pi} 36\pi \leq I \leq 100\pi$$

2. $16 \leq x^2 + y^2 + 2xy + 16 = (x + y)^2 + 16 \leq 3^2 + 16 = 25$

$$\Rightarrow \frac{1}{5} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}} \leq \frac{1}{4}$$

例 估计下列积分值的范围

1. $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$, $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

2. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$, $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$, $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

1. $9 \leq x^2 + 4y^2 + 9 = (x^2 + y^2) + 3y^2 + 9 \leq 4 + 3 \cdot 4 + 9 = 25$

$$\Rightarrow 9|D| \leq I \leq 25|D| \xrightarrow{|D|=4\pi} 36\pi \leq I \leq 100\pi$$

2. $16 \leq x^2 + y^2 + 2xy + 16 = (x + y)^2 + 16 \leq 3^2 + 16 = 25$

$$\Rightarrow \frac{1}{5} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}} \leq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5}|D| \leq I \leq \frac{1}{4}|D|$$

例 估计下列积分值的范围

1. $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$, $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

2. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$, $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$, $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

1. $9 \leq x^2 + 4y^2 + 9 = (x^2 + y^2) + 3y^2 + 9 \leq 4 + 3 \cdot 4 + 9 = 25$

$$\Rightarrow 9|D| \leq I \leq 25|D| \xrightarrow{|D|=4\pi} 36\pi \leq I \leq 100\pi$$

2. $16 \leq x^2 + y^2 + 2xy + 16 = (x + y)^2 + 16 \leq 3^2 + 16 = 25$

$$\Rightarrow \frac{1}{5} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}} \leq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5}|D| \leq I \leq \frac{1}{4}|D| \xrightarrow{|D|=2} \quad$$

例 估计下列积分值的范围

1. $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$, $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

2. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$, $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$, $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

1. $9 \leq x^2 + 4y^2 + 9 = (x^2 + y^2) + 3y^2 + 9 \leq 4 + 3 \cdot 4 + 9 = 25$

$$\Rightarrow 9|D| \leq I \leq 25|D| \xrightarrow{|D|=4\pi} 36\pi \leq I \leq 100\pi$$

2. $16 \leq x^2 + y^2 + 2xy + 16 = (x + y)^2 + 16 \leq 3^2 + 16 = 25$

$$\Rightarrow \frac{1}{5} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}} \leq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5}|D| \leq I \leq \frac{1}{4}|D| \xrightarrow{|D|=2} \frac{2}{5} \leq I \leq \frac{1}{2}$$

例 估计下列积分值的范围

1. $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$, $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

2. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$, $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$, $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解
3.

$$\frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$$

例 估计下列积分值的范围

1. $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$, $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

2. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$, $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$, $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解
3.

$$\frac{1}{102} \leq \frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$$

例 估计下列积分值的范围

1. $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$, $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

2. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$, $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$, $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

3.

$$\frac{1}{102} \leq \frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} \leq \frac{1}{100}$$

例 估计下列积分值的范围

1. $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$, $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

2. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$, $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$, $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

3.

$$\frac{1}{102} \leq \frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} \leq \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{102} |D| \leq I \leq \frac{1}{100} |D|$$

例 估计下列积分值的范围

1. $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$, $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

2. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$, $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$, $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

3.

$$\begin{aligned} \frac{1}{102} &\leq \frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} \leq \frac{1}{100} \\ \Rightarrow \frac{1}{102} |D| &\leq I \leq \frac{1}{100} |D| \quad \xrightarrow{|D|=200} \end{aligned}$$

例 估计下列积分值的范围

1. $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$, $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

2. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$, $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$, $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

3.

$$\begin{aligned} \frac{1}{102} &\leq \frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} \leq \frac{1}{100} \\ \Rightarrow \frac{1}{102} |D| &\leq I \leq \frac{1}{100} |D| \quad \xrightarrow{|D|=200} \quad \frac{50}{51} \leq I \leq 2 \end{aligned}$$

例 估计下列积分值的范围

1. $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$, $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

2. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$, $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

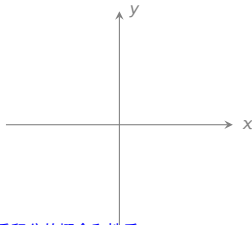
3. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$, $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

3.

$$\begin{aligned} \frac{1}{102} &\leq \frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} \leq \frac{1}{100} \\ \Rightarrow \frac{1}{102} |D| &\leq I \leq \frac{1}{100} |D| \quad \xrightarrow{|D|=200} \quad \frac{50}{51} \leq I \leq 2 \end{aligned}$$

画 $|x| + |y| = 10$



例 估计下列积分值的范围

1. $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$, $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

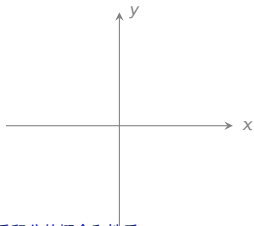
2. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$, $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$, $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

3.

$$\begin{aligned} \frac{1}{102} &\leq \frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} \leq \frac{1}{100} \\ \Rightarrow \frac{1}{102} |D| &\leq I \leq \frac{1}{100} |D| \xrightarrow{|D|=200} \frac{50}{51} \leq I \leq 2 \end{aligned}$$



画 $|x| + |y| = 10$

- $x \geq 0, y \geq 0$ 时,
- $x \geq 0, y \leq 0$ 时,
- $x \leq 0, y \geq 0$ 时,
- $x \leq 0, y \leq 0$ 时,

例 估计下列积分值的范围

1. $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$, $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

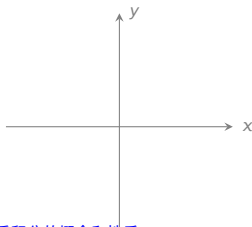
2. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$, $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$, $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

3.

$$\begin{aligned} \frac{1}{102} &\leq \frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} \leq \frac{1}{100} \\ \Rightarrow \frac{1}{102} |D| &\leq I \leq \frac{1}{100} |D| \quad \xrightarrow{|D|=200} \quad \frac{50}{51} \leq I \leq 2 \end{aligned}$$



画 $|x| + |y| = 10$

- $x \geq 0, y \geq 0$ 时, $x + y = 10$
- $x \geq 0, y \leq 0$ 时,
- $x \leq 0, y \geq 0$ 时,
- $x \leq 0, y \leq 0$ 时,

例 估计下列积分值的范围

1. $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$, $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

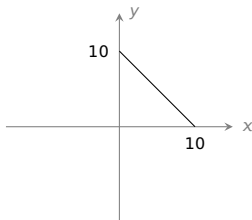
2. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$, $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$, $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

3.

$$\begin{aligned} \frac{1}{102} &\leq \frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} \leq \frac{1}{100} \\ \Rightarrow \frac{1}{102} |D| &\leq I \leq \frac{1}{100} |D| \quad \xrightarrow{|D|=200} \quad \frac{50}{51} \leq I \leq 2 \end{aligned}$$



画 $|x| + |y| = 10$

- $x \geq 0, y \geq 0$ 时, $x + y = 10$
- $x \geq 0, y \leq 0$ 时,
- $x \leq 0, y \geq 0$ 时,
- $x \leq 0, y \leq 0$ 时,

例 估计下列积分值的范围

1. $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$, $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

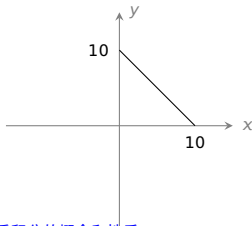
2. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$, $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$, $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

3.

$$\frac{1}{102} \leq \frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} \leq \frac{1}{100}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{102} |D| \leq I \leq \frac{1}{100} |D| \xrightarrow{|D|=200} \frac{50}{51} \leq I \leq 2$$



画 $|x| + |y| = 10$

- $x \geq 0, y \geq 0$ 时, $x + y = 10$
- $x \geq 0, y \leq 0$ 时, $x - y = 10$
- $x \leq 0, y \geq 0$ 时,
- $x \leq 0, y \leq 0$ 时,

例 估计下列积分值的范围

1. $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$, $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

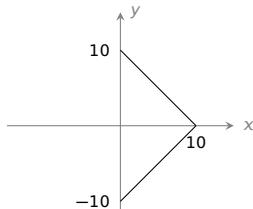
2. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$, $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$, $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

3.

$$\begin{aligned} \frac{1}{102} &\leq \frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} \leq \frac{1}{100} \\ \Rightarrow \frac{1}{102} |D| &\leq I \leq \frac{1}{100} |D| \quad \xrightarrow{|D|=200} \quad \frac{50}{51} \leq I \leq 2 \end{aligned}$$



画 $|x| + |y| = 10$

- $x \geq 0, y \geq 0$ 时, $x + y = 10$
- $x \geq 0, y \leq 0$ 时, $x - y = 10$
- $x \leq 0, y \geq 0$ 时,
- $x \leq 0, y \leq 0$ 时,

例 估计下列积分值的范围

1. $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$, $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

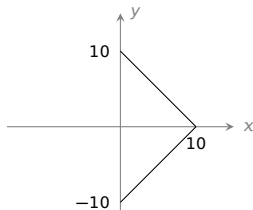
2. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$, $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$, $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

3.

$$\begin{aligned} \frac{1}{102} &\leq \frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} \leq \frac{1}{100} \\ \Rightarrow \frac{1}{102} |D| &\leq I \leq \frac{1}{100} |D| \quad \xrightarrow{|D|=200} \quad \frac{50}{51} \leq I \leq 2 \end{aligned}$$



画 $|x| + |y| = 10$

- $x \geq 0, y \geq 0$ 时, $x + y = 10$
- $x \geq 0, y \leq 0$ 时, $x - y = 10$
- $x \leq 0, y \geq 0$ 时, $-x + y = 10$
- $x \leq 0, y \leq 0$ 时,

例 估计下列积分值的范围

1. $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$, $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

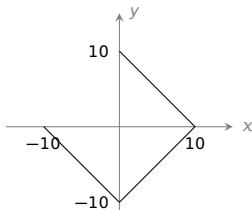
2. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$, $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$, $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

3.

$$\begin{aligned} \frac{1}{102} &\leq \frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} \leq \frac{1}{100} \\ \Rightarrow \frac{1}{102} |D| &\leq I \leq \frac{1}{100} |D| \quad \xrightarrow{|D|=200} \quad \frac{50}{51} \leq I \leq 2 \end{aligned}$$



画 $|x| + |y| = 10$

- $x \geq 0, y \geq 0$ 时, $x + y = 10$
- $x \geq 0, y \leq 0$ 时, $x - y = 10$
- $x \leq 0, y \geq 0$ 时, $-x + y = 10$
- $x \leq 0, y \leq 0$ 时,

例 估计下列积分值的范围

1. $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$, $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

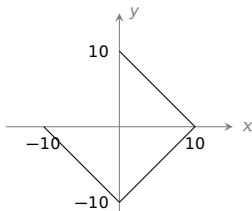
2. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$, $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$, $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

3.

$$\begin{aligned} \frac{1}{102} &\leq \frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} \leq \frac{1}{100} \\ \Rightarrow \frac{1}{102} |D| &\leq I \leq \frac{1}{100} |D| \quad \xrightarrow{|D|=200} \quad \frac{50}{51} \leq I \leq 2 \end{aligned}$$



画 $|x| + |y| = 10$

- $x \geq 0, y \geq 0$ 时, $x + y = 10$
- $x \geq 0, y \leq 0$ 时, $x - y = 10$
- $x \leq 0, y \geq 0$ 时, $-x + y = 10$
- $x \leq 0, y \leq 0$ 时, $-x - y = 10$

例 估计下列积分值的范围

1. $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$, $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

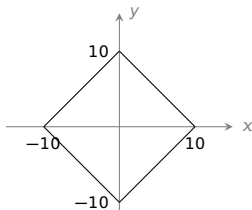
2. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$, $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$, $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

3.

$$\begin{aligned} \frac{1}{102} &\leq \frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} \leq \frac{1}{100} \\ \Rightarrow \frac{1}{102} |D| &\leq I \leq \frac{1}{100} |D| \quad \xrightarrow{|D|=200} \quad \frac{50}{51} \leq I \leq 2 \end{aligned}$$



画 $|x| + |y| = 10$

- $x \geq 0, y \geq 0$ 时, $x + y = 10$
- $x \geq 0, y \leq 0$ 时, $x - y = 10$
- $x \leq 0, y \geq 0$ 时, $-x + y = 10$
- $x \leq 0, y \leq 0$ 时, $-x - y = 10$

例 估计下列积分值的范围

1. $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$, $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

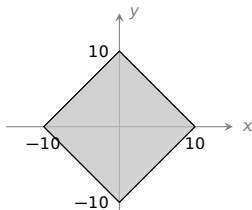
2. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$, $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

3. $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$, $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$

解

3.

$$\begin{aligned} \frac{1}{102} &\leq \frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} \leq \frac{1}{100} \\ \Rightarrow \frac{1}{102} |D| &\leq I \leq \frac{1}{100} |D| \quad \xrightarrow{|D|=200} \quad \frac{50}{51} \leq I \leq 2 \end{aligned}$$



画 $|x| + |y| = 10$

- $x \geq 0, y \geq 0$ 时, $x + y = 10$
- $x \geq 0, y \leq 0$ 时, $x - y = 10$
- $x \leq 0, y \geq 0$ 时, $-x + y = 10$
- $x \leq 0, y \leq 0$ 时, $-x - y = 10$

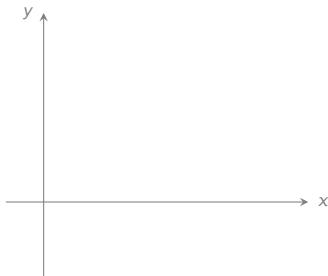
例 设 $D = \{(x, y) | (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 2\}$, 比较以下两个积分大小:

$$I_1 = \iint_D (x+y)^2 d\sigma, \quad I_2 = \iint_D (x+y)^3 d\sigma$$

例 设 $D = \{(x, y) | (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 2\}$, 比较以下两个积分大小:

$$I_1 = \iint_D (x+y)^2 d\sigma, \quad I_2 = \iint_D (x+y)^3 d\sigma$$

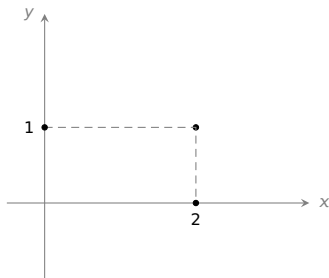
解



例 设 $D = \{(x, y) | (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 2\}$, 比较以下两个积分大小:

$$I_1 = \iint_D (x+y)^2 d\sigma, \quad I_2 = \iint_D (x+y)^3 d\sigma$$

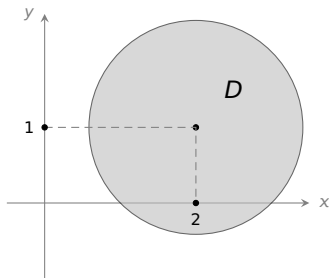
解



例 设 $D = \{(x, y) | (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 2\}$, 比较以下两个积分大小:

$$I_1 = \iint_D (x+y)^2 d\sigma, \quad I_2 = \iint_D (x+y)^3 d\sigma$$

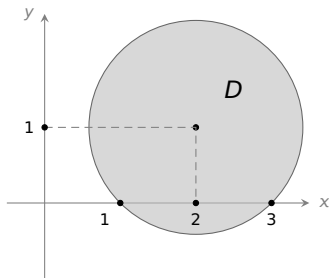
解



例 设 $D = \{(x, y) | (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 2\}$, 比较以下两个积分大小:

$$I_1 = \iint_D (x+y)^2 d\sigma, \quad I_2 = \iint_D (x+y)^3 d\sigma$$

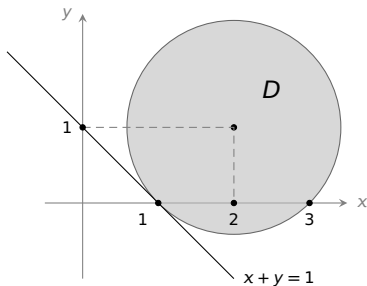
解



例 设 $D = \{(x, y) | (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 2\}$, 比较以下两个积分大小:

$$I_1 = \iint_D (x+y)^2 d\sigma, \quad I_2 = \iint_D (x+y)^3 d\sigma$$

解



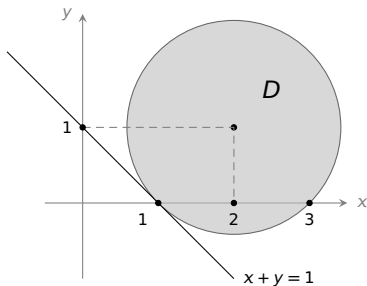
例 设 $D = \{(x, y) | (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 2\}$, 比较以下两个积分大小:

$$I_1 = \iint_D (x+y)^2 d\sigma, \quad I_2 = \iint_D (x+y)^3 d\sigma$$

解

如图, 在区域 D 上成立

$$x+y \geq 1$$



例 设 $D = \{(x, y) | (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 2\}$, 比较以下两个积分大小:

$$I_1 = \iint_D (x+y)^2 d\sigma, \quad I_2 = \iint_D (x+y)^3 d\sigma$$

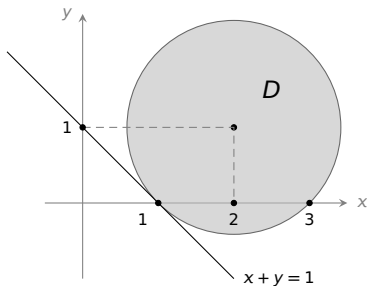
解

如图, 在区域 D 上成立

$$x+y \geq 1$$

所以

$$(x+y)^2 \leq (x+y)^3$$



例 设 $D = \{(x, y) | (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 2\}$, 比较以下两个积分大小:

$$I_1 = \iint_D (x+y)^2 d\sigma, \quad I_2 = \iint_D (x+y)^3 d\sigma$$

解

如图, 在区域 D 上成立

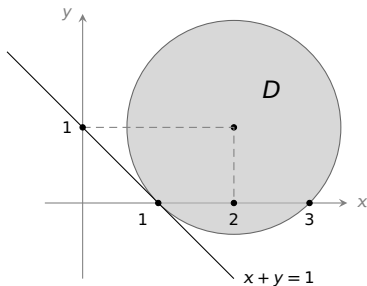
$$x+y \geq 1$$

所以

$$(x+y)^2 \leq (x+y)^3$$

所以

$$I_1 \leq I_2$$



二重积分的性质 (Cont.)

性质 6 (二重积分的中值定理) 设函数 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上连续, $|D|$ 是 D 的面积, 则在 D 上至少存在一点 (ξ, η) , 使得

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) \cdot |D|.$$

二重积分的性质 (Cont.)

性质 6 (二重积分的中值定理) 设函数 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上连续, $|D|$ 是 D 的面积, 则在 D 上至少存在一点 (ξ, η) , 使得

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) \cdot |D|.$$

证明

$$m \cdot |D| \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M \cdot |D|$$

二重积分的性质 (Cont.)

性质 6 (二重积分的中值定理) 设函数 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上连续, $|D|$ 是 D 的面积, 则在 D 上至少存在一点 (ξ, η) , 使得

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) \cdot |D|.$$

证明

$$m \cdot |D| \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M \cdot |D| \quad \Rightarrow \quad m \leq \frac{1}{|D|} \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M$$

二重积分的性质 (Cont.)

性质 6 (二重积分的中值定理) 设函数 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上连续, $|D|$ 是 D 的面积, 则在 D 上至少存在一点 (ξ, η) , 使得

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) \cdot |D|.$$

证明 因为

$$m \cdot |D| \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M \cdot |D| \quad \Rightarrow \quad m \leq \frac{1}{|D|} \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M$$

由闭区域上连续函数的中值定理可知: 存在 $(\xi, \eta) \in D$, 使得

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{|D|} \iint_D f(x, y) d\sigma,$$

二重积分的性质 (Cont.)

性质 6 (二重积分的中值定理) 设函数 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上连续, $|D|$ 是 D 的面积, 则在 D 上至少存在一点 (ξ, η) , 使得

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) \cdot |D|.$$

证明 因为

$$m \cdot |D| \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M \cdot |D| \Rightarrow m \leq \frac{1}{|D|} \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M$$

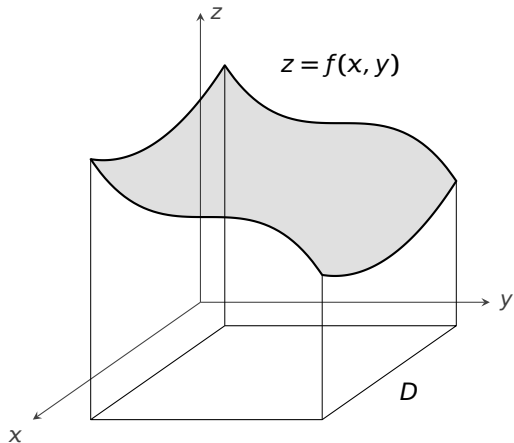
由闭区域上连续函数的中值定理可知: 存在 $(\xi, \eta) \in D$, 使得

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{|D|} \iint_D f(x, y) d\sigma,$$

即

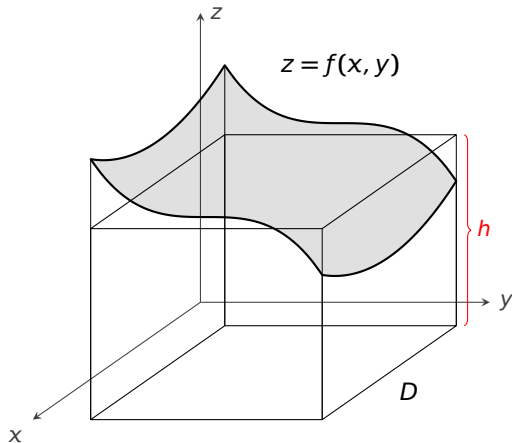
$$\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) \cdot |D|.$$

二重积分中值定理的几何直观



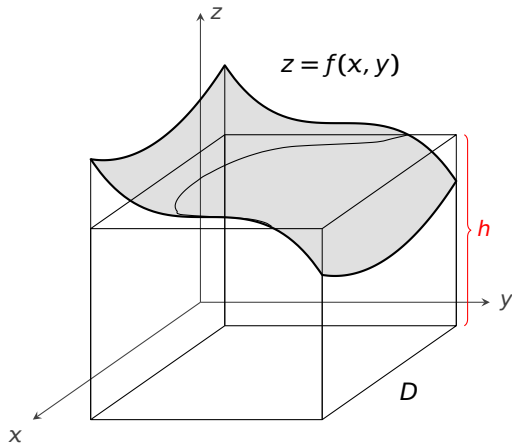
$$\iint_D f(x, y) d\sigma$$

二重积分中值定理的几何直观



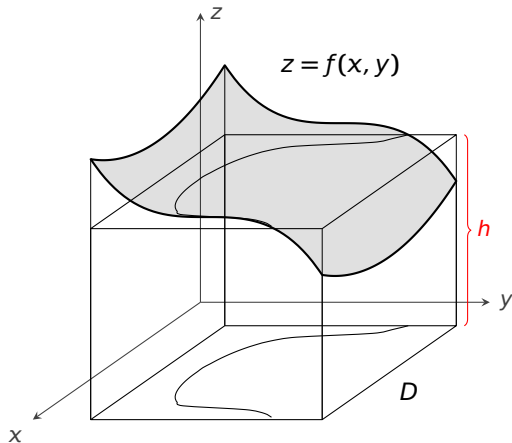
$$\iint_D f(x, y) d\sigma = h|D|$$

二重积分中值定理的几何直观



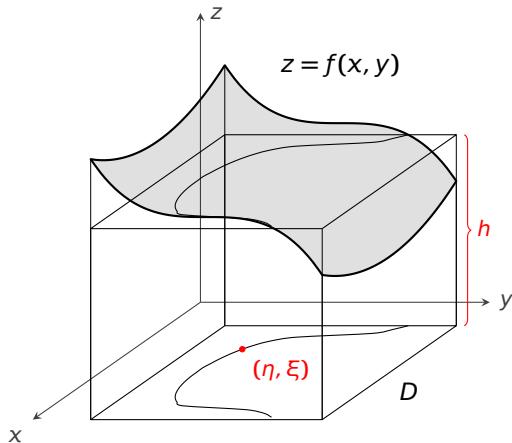
$$\iint_D f(x, y) d\sigma = h|D|$$

二重积分中值定理的几何直观



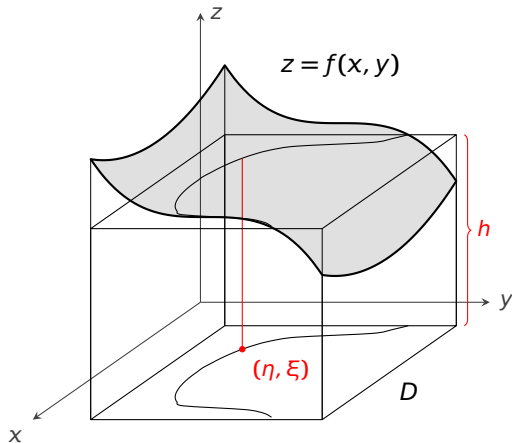
$$\iint_D f(x, y) d\sigma = h|D|$$

二重积分中值定理的几何直观



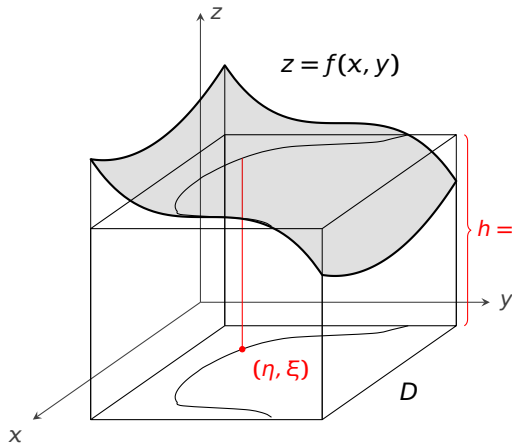
$$\iint_D f(x, y) d\sigma = h|D|$$

二重积分中值定理的几何直观



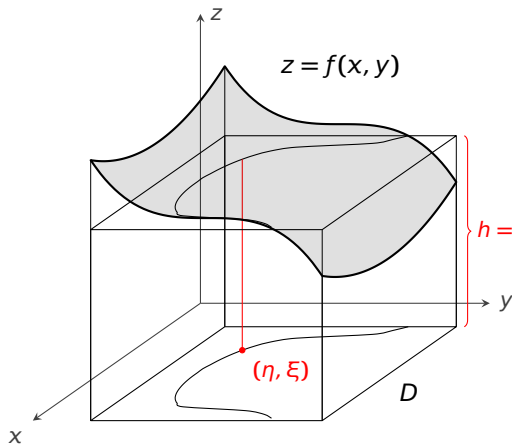
$$\iint_D f(x, y) d\sigma = h|D|$$

二重积分中值定理的几何直观



$$\iint_D f(x, y) d\sigma = h|D|$$

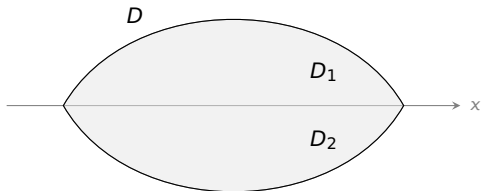
二重积分中值定理的几何直观



$$\iint_D f(x, y) d\sigma = h|D|$$
$$= f(\xi, \eta)|D|$$

积分的对称性

性质 设闭区域 D 关于 x 轴对称,



积分的对称性

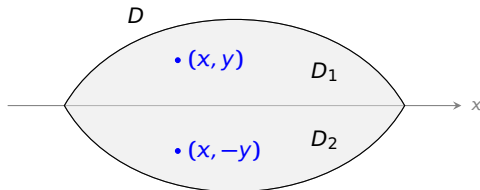
性质 设闭区域 D 关于 x 轴对称,



积分的对称性

性质 设闭区域 D 关于 x 轴对称,

- 若 $f(x, y)$ 关于 y 是奇函数 (即: $f(x, -y) = -f(x, y)$), 则

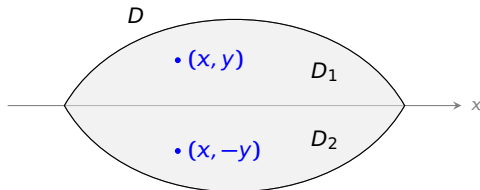


积分的对称性

性质 设闭区域 D 关于 x 轴对称,

- 若 $f(x, y)$ 关于 y 是奇函数 (即: $f(x, -y) = -f(x, y)$), 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = 0$$



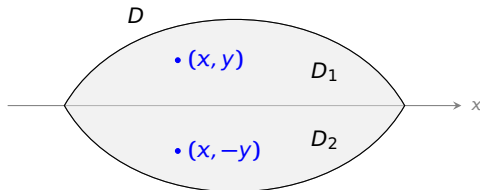
积分的对称性

性质 设闭区域 D 关于 x 轴对称,

- 若 $f(x, y)$ 关于 y 是奇函数 (即: $f(x, -y) = -f(x, y)$), 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = 0$$

- 若 $f(x, y)$ 关于 y 是偶函数 (即: $f(x, -y) = f(x, y)$), 则



积分的对称性

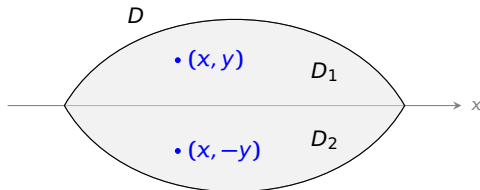
性质 设闭区域 D 关于 x 轴对称,

- 若 $f(x, y)$ 关于 y 是奇函数 (即: $f(x, -y) = -f(x, y)$), 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = 0$$

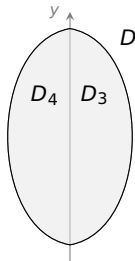
- 若 $f(x, y)$ 关于 y 是偶函数 (即: $f(x, -y) = f(x, y)$), 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = 2 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma = 2 \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma$$



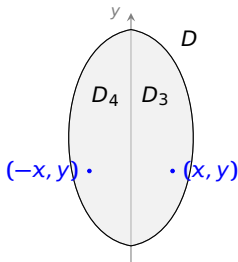
积分的对称性

性质 设闭区域 D 关于 y 轴对称,



积分的对称性

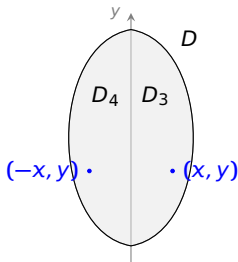
性质 设闭区域 D 关于 y 轴对称,



积分的对称性

性质 设闭区域 D 关于 y 轴对称,

- 若 $f(x, y)$ 关于 x 是奇函数 (即: $f(-x, y) = -f(x, y)$), 则

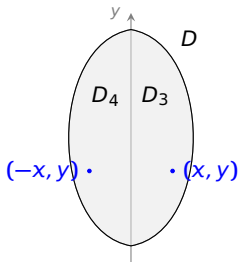


积分的对称性

性质 设闭区域 D 关于 y 轴对称,

- 若 $f(x, y)$ 关于 x 是奇函数 (即: $f(-x, y) = -f(x, y)$), 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = 0$$



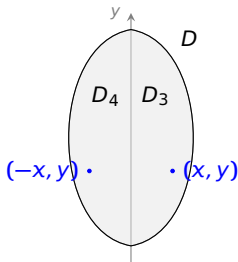
积分的对称性

性质 设闭区域 D 关于 y 轴对称,

- 若 $f(x, y)$ 关于 x 是奇函数 (即: $f(-x, y) = -f(x, y)$), 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = 0$$

- 若 $f(x, y)$ 关于 x 是偶函数 (即: $f(-x, y) = f(x, y)$), 则



积分的对称性

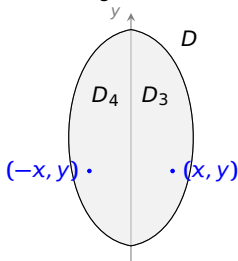
性质 设闭区域 D 关于 y 轴对称,

- 若 $f(x, y)$ 关于 x 是奇函数 (即: $f(-x, y) = -f(x, y)$), 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = 0$$

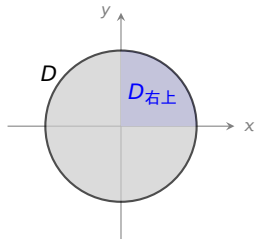
- 若 $f(x, y)$ 关于 x 是偶函数 (即: $f(-x, y) = f(x, y)$), 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = 2 \iint_{D_3} f(x, y) d\sigma = 2 \iint_{D_4} f(x, y) d\sigma$$



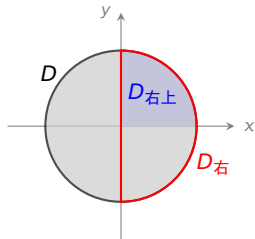
例 设 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$, 则

$$\iint_D x^2 + y^2 d\sigma = 4 \iint_{D_{\text{右上}}} x^2 + y^2 d\sigma$$



例 设 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$, 则

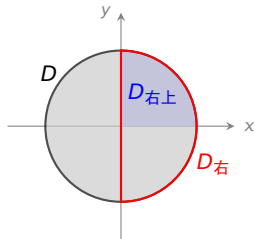
$$\iint_D x^2 + y^2 d\sigma = 4 \iint_{D_{\text{右上}}} x^2 + y^2 d\sigma$$



解 $\iint_D x^2 + y^2 d\sigma = 2 \iint_{D_{\text{右}}} x^2 + y^2 d\sigma$

例 设 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$, 则

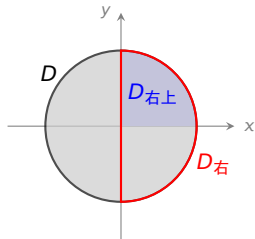
$$\iint_D x^2 + y^2 d\sigma = 4 \iint_{D_{\text{右上}}} x^2 + y^2 d\sigma$$



解 $\iint_D x^2 + y^2 d\sigma = 2 \iint_{D_{\text{右}}} x^2 + y^2 d\sigma = 2 \cdot 2 \iint_{D_{\text{右上}}} x^2 + y^2 d\sigma.$

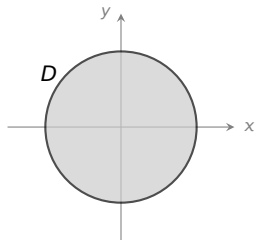
例 设 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$, 则

$$\iint_D x^2 + y^2 d\sigma = 4 \iint_{D_{\text{右上}}} x^2 + y^2 d\sigma$$



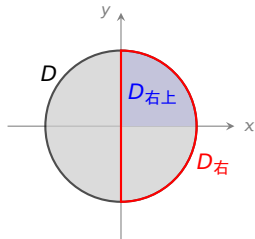
解 $\iint_D x^2 + y^2 d\sigma = 2 \iint_{D_{\text{右}}} x^2 + y^2 d\sigma = 2 \cdot 2 \iint_{D_{\text{右上}}} x^2 + y^2 d\sigma.$

例 计算 $\iint_D (2x + 3y\sqrt{1-x^2}) d\sigma$,
其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$



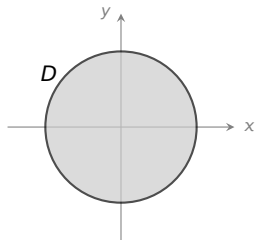
例 设 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$, 则

$$\iint_D x^2 + y^2 d\sigma = 4 \iint_{D_{\text{右上}}} x^2 + y^2 d\sigma$$



解 $\iint_D x^2 + y^2 d\sigma = 2 \iint_{D_{\text{右}}} x^2 + y^2 d\sigma = 2 \cdot 2 \iint_{D_{\text{右上}}} x^2 + y^2 d\sigma.$

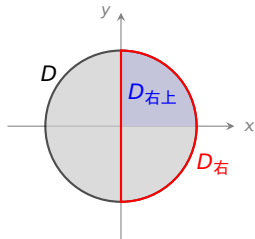
例 计算 $\iint_D (2x + 3y\sqrt{1-x^2}) d\sigma$,
其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$



解 原式 $= 2 \iint_D x d\sigma + 3 \iint_D y\sqrt{1-x^2} d\sigma$

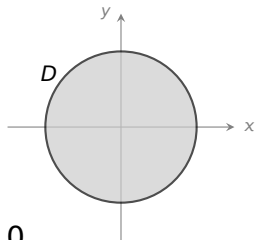
例 设 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$, 则

$$\iint_D x^2 + y^2 d\sigma = 4 \iint_{D_{\text{右上}}} x^2 + y^2 d\sigma$$



解 $\iint_D x^2 + y^2 d\sigma = 2 \iint_{D_{\text{右}}} x^2 + y^2 d\sigma = 2 \cdot 2 \iint_{D_{\text{右上}}} x^2 + y^2 d\sigma.$

例 计算 $\iint_D (2x + 3y\sqrt{1-x^2}) d\sigma$,
其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$



解 原式 $= 2 \iint_D x d\sigma + 3 \iint_D y\sqrt{1-x^2} d\sigma = 0.$