

## 第 7 章 d: 二阶线性常系数微分方程

数学系 梁卓滨

2018-2019 学年 II

# We are here now...

---

◆ 复数简介

♣ 二阶线性微分方程

♥ 二阶常系数齐次线性微分方程

♠ 二阶常系数非齐次线性微分方程

# 复数简介

---

引入动机 希望方程  $x^2 = -1$  有解。方法：扩充数域

# 复数简介

引入动机 希望方程  $x^2 = -1$  有解。方法：扩充数域

## 复数定义

- 引入“虚数单位”，用符号“ $i$ ”（或者“ $\sqrt{-1}$ ”）表示，满足

$$i^2 = -1$$

# 复数简介

引入动机 希望方程  $x^2 = -1$  有解。方法：扩充数域

## 复数定义

- 引入“虚数单位”，用符号“ $i$ ”（或者“ $\sqrt{-1}$ ”）表示，满足

$$i^2 = -1$$

- 复数： $a + bi$ （其中  $a, b$  为实数；

# 复数简介

引入动机 希望方程  $x^2 = -1$  有解。方法：扩充数域

## 复数定义

- 引入“虚数单位”，用符号“ $i$ ”（或者“ $\sqrt{-1}$ ”）表示，满足

$$i^2 = -1$$

- 复数： $a + bi$ （其中  $a, b$  为实数； $a$  称为实部， $b$  称为虚部）

# 复数简介

引入动机 希望方程  $x^2 = -1$  有解。方法：扩充数域

## 复数定义

- 引入“虚数单位”，用符号“ $i$ ”（或者“ $\sqrt{-1}$ ”）表示，满足

$$i^2 = -1$$

- 复数：  $a + bi$ （其中  $a, b$  为实数； $a$  称为实部， $b$  称为虚部）

## 复数运算

$$(a + bi) + (c + di) =$$

$$(a + bi) - (c + di) =$$

$$(a + bi)(c + di) =$$

# 复数简介

引入动机 希望方程  $x^2 = -1$  有解。方法：扩充数域

## 复数定义

- 引入“虚数单位”，用符号“ $i$ ”（或者“ $\sqrt{-1}$ ”）表示，满足

$$i^2 = -1$$

- 复数：  $a + bi$ （其中  $a, b$  为实数； $a$  称为实部， $b$  称为虚部）

## 复数运算

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) =$$

$$(a + bi)(c + di) =$$



# 复数简介

引入动机 希望方程  $x^2 = -1$  有解。方法：扩充数域

## 复数定义

- 引入“虚数单位”，用符号“ $i$ ”（或者“ $\sqrt{-1}$ ”）表示，满足

$$i^2 = -1$$

- 复数：  $a + bi$ （其中  $a, b$  为实数； $a$  称为实部， $b$  称为虚部）

## 复数运算

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

$$(a + bi)(c + di) =$$

# 复数简介

引入动机 希望方程  $x^2 = -1$  有解。方法：扩充数域

## 复数定义

- 引入“虚数单位”，用符号“ $i$ ”（或者“ $\sqrt{-1}$ ”）表示，满足

$$i^2 = -1$$

- 复数：  $a + bi$ （其中  $a, b$  为实数； $a$  称为实部， $b$  称为虚部）

## 复数运算

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

$$(a + bi)(c + di) = a \cdot c + a \cdot di + bi \cdot c + bi \cdot di$$

# 复数简介

引入动机 希望方程  $x^2 = -1$  有解。方法：扩充数域

## 复数定义

- 引入“虚数单位”，用符号“ $i$ ”（或者“ $\sqrt{-1}$ ”）表示，满足

$$i^2 = -1$$

- 复数： $a + bi$ （其中  $a, b$  为实数； $a$  称为实部， $b$  称为虚部）

## 复数运算

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

$$(a + bi)(c + di) = a \cdot c + a \cdot di + bi \cdot c + bi \cdot di$$

$$= (ac - bd) + (ad + bc)i$$

例 计算  $(1 + 2i) - 3(5 - 2i)$  及  $(2 + i)^2$ 。

解

$$(1 + 2i) - 3(5 - 2i) =$$

$$(2 + i)^2 =$$

例 计算  $(1 + 2i) - 3(5 - 2i)$  及  $(2 + i)^2$ 。

解

$$(1 + 2i) - 3(5 - 2i) = (1 + 2i) - (15 - 6i)$$

$$(2 + i)^2 =$$

例 计算  $(1 + 2i) - 3(5 - 2i)$  及  $(2 + i)^2$ 。

解

$$(1 + 2i) - 3(5 - 2i) = (1 + 2i) - (15 - 6i) = -14 + 8i,$$
$$(2 + i)^2 =$$

例 计算  $(1 + 2i) - 3(5 - 2i)$  及  $(2 + i)^2$ 。

解

$$(1 + 2i) - 3(5 - 2i) = (1 + 2i) - (15 - 6i) = -14 + 8i,$$

$$(2 + i)^2 = (2 + i)(2 + i)$$

例 计算  $(1 + 2i) - 3(5 - 2i)$  及  $(2 + i)^2$ 。

解

$$(1 + 2i) - 3(5 - 2i) = (1 + 2i) - (15 - 6i) = -14 + 8i,$$

$$(2 + i)^2 = (2 + i)(2 + i)$$

$$= 2 \cdot 2 + 2 \cdot i + i \cdot 2 + i \cdot i$$



例 计算  $(1 + 2i) - 3(5 - 2i)$  及  $(2 + i)^2$ 。

解

$$(1 + 2i) - 3(5 - 2i) = (1 + 2i) - (15 - 6i) = -14 + 8i,$$

$$(2 + i)^2 = (2 + i)(2 + i)$$

$$= 2 \cdot 2 + 2 \cdot i + i \cdot 2 + i \cdot i = 3 + 4i.$$

# 一元二次方程求解

---

例 方程  $x^2 + 1 = 0$

# 一元二次方程求解

---

例 方程  $x^2 + 1 = 0$  在复数范围内有两个根

# 一元二次方程求解

---

例 方程  $x^2 + 1 = 0$  在复数范围内有两个根  $r_1 = i$  和  $r_2 =$

# 一元二次方程求解

---

例 方程  $x^2 + 1 = 0$  在复数范围内有两个根  $r_1 = i$  和  $r_2 = -i$

# 一元二次方程求解

---

例 方程  $x^2 + 1 = 0$  在复数范围内有两个根  $r_1 = i$  和  $r_2 = -i$

一元二次方程求根公式：

$$ar^2 + br + c = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = \text{—————}$$

# 一元二次方程求解

---

例 方程  $x^2 + 1 = 0$  在复数范围内有两个根  $r_1 = i$  和  $r_2 = -i$

一元二次方程求根公式：

$$ar^2 + br + c = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

# 一元二次方程求解

例 方程  $x^2 + 1 = 0$  在复数范围内有两个根  $r_1 = i$  和  $r_2 = -i$

一元二次方程求根公式：

$$ar^2 + br + c = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



# 一元二次方程求解

例 方程  $x^2 + 1 = 0$  在复数范围内有两个根  $r_1 = i$  和  $r_2 = -i$

一元二次方程求根公式：

$$ar^2 + br + c = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- 当  $b^2 - 4ac > 0$  时,
- 当  $b^2 - 4ac = 0$  时,
- 当  $b^2 - 4ac < 0$  时,

# 一元二次方程求解

例 方程  $x^2 + 1 = 0$  在复数范围内有两个根  $r_1 = i$  和  $r_2 = -i$

一元二次方程求根公式：

$$ar^2 + br + c = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- 当  $b^2 - 4ac > 0$  时，有两个互异实根；
- 当  $b^2 - 4ac = 0$  时，
- 当  $b^2 - 4ac < 0$  时，

# 一元二次方程求解

例 方程  $x^2 + 1 = 0$  在复数范围内有两个根  $r_1 = i$  和  $r_2 = -i$

一元二次方程求根公式：

$$ar^2 + br + c = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- 当  $b^2 - 4ac > 0$  时，有两个互异实根；
- 当  $b^2 - 4ac = 0$  时，有唯一实根
- 当  $b^2 - 4ac < 0$  时，

# 一元二次方程求解

例 方程  $x^2 + 1 = 0$  在复数范围内有两个根  $r_1 = i$  和  $r_2 = -i$

一元二次方程求根公式：

$$ar^2 + br + c = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- 当  $b^2 - 4ac > 0$  时，有两个互异实根；
- 当  $b^2 - 4ac = 0$  时，有唯一实根
- 当  $b^2 - 4ac < 0$  时，有两个互异复根：

# 一元二次方程求解

例 方程  $x^2 + 1 = 0$  在复数范围内有两个根  $r_1 = i$  和  $r_2 = -i$

一元二次方程求根公式：

$$ar^2 + br + c = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- 当  $b^2 - 4ac > 0$  时，有两个互异实根；
- 当  $b^2 - 4ac = 0$  时，有唯一实根
- 当  $b^2 - 4ac < 0$  时，有两个互异复根：

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

# 一元二次方程求解

例 方程  $x^2 + 1 = 0$  在复数范围内有两个根  $r_1 = i$  和  $r_2 = -i$

一元二次方程求根公式：

$$ar^2 + br + c = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- 当  $b^2 - 4ac > 0$  时，有两个互异实根；
- 当  $b^2 - 4ac = 0$  时，有唯一实根
- 当  $b^2 - 4ac < 0$  时，有两个互异复根：

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{(4ac - b^2) \cdot (-1)}}{2a}$$

# 一元二次方程求解

例 方程  $x^2 + 1 = 0$  在复数范围内有两个根  $r_1 = i$  和  $r_2 = -i$

一元二次方程求根公式：

$$ar^2 + br + c = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- 当  $b^2 - 4ac > 0$  时，有两个互异实根；
- 当  $b^2 - 4ac = 0$  时，有唯一实根
- 当  $b^2 - 4ac < 0$  时，有两个互异复根：

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2} \cdot \sqrt{-1}}{2a}$$

# 一元二次方程求解

例 方程  $x^2 + 1 = 0$  在复数范围内有两个根  $r_1 = i$  和  $r_2 = -i$

一元二次方程求根公式：

$$ar^2 + br + c = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- 当  $b^2 - 4ac > 0$  时，有两个互异实根；
- 当  $b^2 - 4ac = 0$  时，有唯一实根
- 当  $b^2 - 4ac < 0$  时，有两个互异复根：

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2}i}{2a}$$



# 一元二次方程求解

例 方程  $x^2 + 1 = 0$  在复数范围内有两个根  $r_1 = i$  和  $r_2 = -i$

一元二次方程求根公式：

$$ar^2 + br + c = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- 当  $b^2 - 4ac > 0$  时，有两个互异实根；
- 当  $b^2 - 4ac = 0$  时，有唯一实根
- 当  $b^2 - 4ac < 0$  时，有两个互异复根：

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}i$$

# 一元二次方程求解

例 方程  $x^2 + 1 = 0$  在复数范围内有两个根  $r_1 = i$  和  $r_2 = -i$

一元二次方程求根公式：

$$ar^2 + br + c = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- 当  $b^2 - 4ac > 0$  时，有两个互异实根；
- 当  $b^2 - 4ac = 0$  时，有唯一实根
- 当  $b^2 - 4ac < 0$  时，有两个互异复根：

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \underbrace{-\frac{b}{2a}}_{\alpha} \pm \underbrace{\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}}_{\beta} i$$

# 一元二次方程求解

例 方程  $x^2 + 1 = 0$  在复数范围内有两个根  $r_1 = i$  和  $r_2 = -i$

一元二次方程求根公式：

$$ar^2 + br + c = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- 当  $b^2 - 4ac > 0$  时，有两个互异实根；
- 当  $b^2 - 4ac = 0$  时，有唯一实根
- 当  $b^2 - 4ac < 0$  时，有两个互异复根：

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \underbrace{-\frac{b}{2a}}_{\alpha} \pm \underbrace{\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}}_{\beta} i = \alpha \pm \beta i$$

# 一元二次方程求解

例 方程  $x^2 + 1 = 0$  在复数范围内有两个根  $r_1 = i$  和  $r_2 = -i$

一元二次方程求根公式：

$$ar^2 + br + c = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- 当  $b^2 - 4ac > 0$  时，有两个互异实根；
- 当  $b^2 - 4ac = 0$  时，有唯一实根（二重根）；
- 当  $b^2 - 4ac < 0$  时，有两个互异复根：

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \underbrace{-\frac{b}{2a}}_{\alpha} \pm \underbrace{\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}}_{\beta} i = \alpha \pm \beta i$$

# 一元二次方程求解

例 方程  $x^2 + 1 = 0$  在复数范围内有两个根  $r_1 = i$  和  $r_2 = -i$

一元二次方程求根公式：

$$ar^2 + br + c = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- 当  $b^2 - 4ac > 0$  时，有两个互异实根；
- 当  $b^2 - 4ac = 0$  时，有唯一实根（二重根）；
- 当  $b^2 - 4ac < 0$  时，有两个互异复根：

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \underbrace{-\frac{b}{2a}}_{\alpha} \pm \underbrace{\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}}_{\beta} i = \alpha \pm \beta i$$

例 求  $2r^2 - 3r + 1 = 0$ ,  $r^2 - 4r + 4 = 0$ ,  $r^2 + 2r + 2 = 0$  的根

例 求  $2r^2 - 3r + 1 = 0$ ,  $r^2 - 4r + 4 = 0$ ,  $r^2 + 2r + 2 = 0$  的根  
解

例 求  $2r^2 - 3r + 1 = 0$ ,  $r^2 - 4r + 4 = 0$ ,  $r^2 + 2r + 2 = 0$  的根

解

$$2r^2 - 3r + 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2}$$

例 求  $2r^2 - 3r + 1 = 0$ ,  $r^2 - 4r + 4 = 0$ ,  $r^2 + 2r + 2 = 0$  的根

解

$$2r^2 - 3r + 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = 1 \text{ or } \frac{1}{2}$$



例 求  $2r^2 - 3r + 1 = 0$ ,  $r^2 - 4r + 4 = 0$ ,  $r^2 + 2r + 2 = 0$  的根

解

$$2r^2 - 3r + 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = 1 \text{ or } \frac{1}{2}$$

$$r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$$

例 求  $2r^2 - 3r + 1 = 0$ ,  $r^2 - 4r + 4 = 0$ ,  $r^2 + 2r + 2 = 0$  的根

解

$$2r^2 - 3r + 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = 1 \text{ or } \frac{1}{2}$$

$$r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = 2$$

例 求  $2r^2 - 3r + 1 = 0$ ,  $r^2 - 4r + 4 = 0$ ,  $r^2 + 2r + 2 = 0$  的根

解

$$2r^2 - 3r + 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = 1 \text{ or } \frac{1}{2}$$

$$r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = 2$$

$$r^2 + 2r + 2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$$

例 求  $2r^2 - 3r + 1 = 0$ ,  $r^2 - 4r + 4 = 0$ ,  $r^2 + 2r + 2 = 0$  的根

解

$$2r^2 - 3r + 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = 1 \text{ or } \frac{1}{2}$$

$$r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = 2$$

$$\begin{aligned} r^2 + 2r + 2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} \end{aligned}$$

例 求  $2r^2 - 3r + 1 = 0$ ,  $r^2 - 4r + 4 = 0$ ,  $r^2 + 2r + 2 = 0$  的根

解

$$2r^2 - 3r + 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = 1 \text{ or } \frac{1}{2}$$

$$r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = 2$$

$$\begin{aligned} r^2 + 2r + 2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm i \end{aligned}$$

例 求  $2r^2 - 3r + 1 = 0$ ,  $r^2 - 4r + 4 = 0$ ,  $r^2 + 2r + 2 = 0$  的根

解

$$2r^2 - 3r + 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = 1 \text{ or } \frac{1}{2}$$

$$r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = 2$$

$$\begin{aligned} r^2 + 2r + 2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm i \end{aligned}$$

注 也可以用配方法：

例 求  $2r^2 - 3r + 1 = 0$ ,  $r^2 - 4r + 4 = 0$ ,  $r^2 + 2r + 2 = 0$  的根

解

$$2r^2 - 3r + 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = 1 \text{ or } \frac{1}{2}$$

$$r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = 2$$

$$\begin{aligned} r^2 + 2r + 2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm i \end{aligned}$$

注 也可以用配方法:

$$r^2 + 2r + 2 = 0 \Rightarrow (r + 1)^2 = -1$$

例 求  $2r^2 - 3r + 1 = 0$ ,  $r^2 - 4r + 4 = 0$ ,  $r^2 + 2r + 2 = 0$  的根

解

$$2r^2 - 3r + 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = 1 \text{ or } \frac{1}{2}$$

$$r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = 2$$

$$\begin{aligned} r^2 + 2r + 2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm i \end{aligned}$$

注 也可以用配方法:

$$r^2 + 2r + 2 = 0 \Rightarrow (r+1)^2 = -1 \Rightarrow r+1 = \pm\sqrt{-1}$$



例 求  $2r^2 - 3r + 1 = 0$ ,  $r^2 - 4r + 4 = 0$ ,  $r^2 + 2r + 2 = 0$  的根

解

$$2r^2 - 3r + 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = 1 \text{ or } \frac{1}{2}$$

$$r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = 2$$

$$\begin{aligned} r^2 + 2r + 2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm i \end{aligned}$$

注 也可以用配方法:

$$r^2 + 2r + 2 = 0 \Rightarrow (r+1)^2 = -1 \Rightarrow r+1 = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$

例 求  $2r^2 - 3r + 1 = 0$ ,  $r^2 - 4r + 4 = 0$ ,  $r^2 + 2r + 2 = 0$  的根

解

$$2r^2 - 3r + 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = 1 \text{ or } \frac{1}{2}$$

$$r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = 2$$

$$\begin{aligned} r^2 + 2r + 2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm i \end{aligned}$$

注 也可以用配方法:

$$\begin{aligned} r^2 + 2r + 2 = 0 &\Rightarrow (r+1)^2 = -1 \Rightarrow r+1 = \pm\sqrt{-1} = \pm i \\ &\Rightarrow r = -1 \pm i \end{aligned}$$

- 复数和平面上的点一一对应

$$z = a + bi$$

•

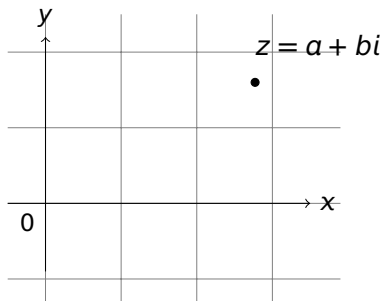
$$z = a + bi$$

•

- 复数和平面上的点一一对应

$$z \longleftrightarrow (a, b)$$

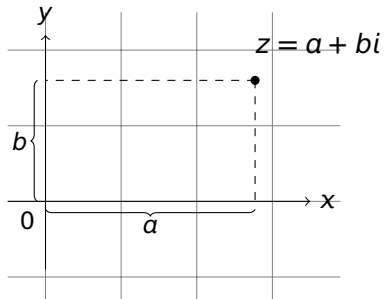
直角坐标



- 复数和平面上的点一一对应

$$z \leftrightarrow (a, b)$$

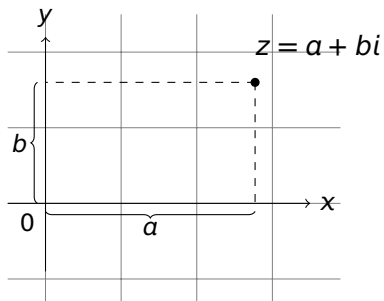
直角坐标



- 复数和平面上的点一一对应

$$z \leftrightarrow (a, b)$$

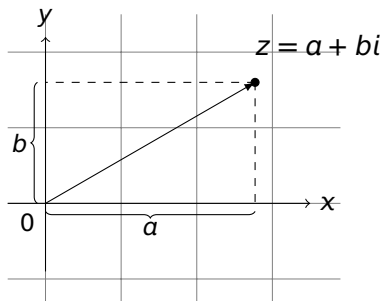
直角坐标



- 复数和平面上的点一一对应

$$z \leftrightarrow (a, b) \leftrightarrow (r, \theta)$$

直角坐标          极坐标

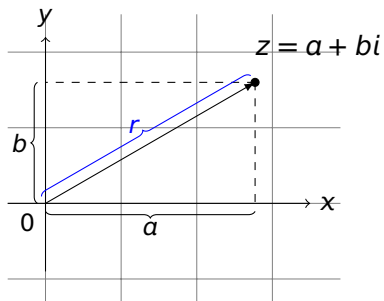


- 复数和平面上的点一一对应

$$z \leftrightarrow (a, b) \leftrightarrow (r, \theta)$$

直角坐标          极坐标

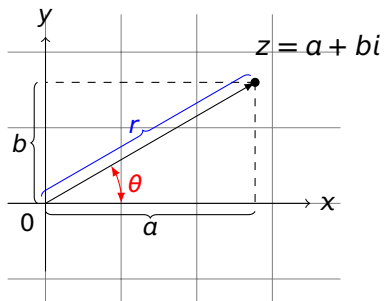




• 复数和平面上的点一一对应

$$z \leftrightarrow (a, b) \leftrightarrow (r, \theta)$$

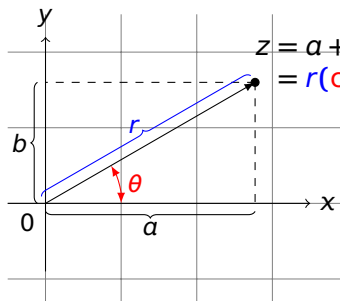
直角坐标                  极坐标



- 复数和平面上的点一一对应

$$z \leftrightarrow (a, b) \leftrightarrow (r, \theta)$$

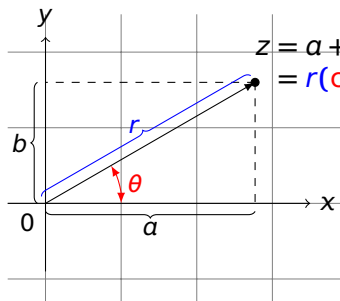
直角坐标                  极坐标



- 复数和平面上的点一一对应

$$z \leftrightarrow (a, b) \leftrightarrow (r, \theta)$$

直角坐标                  极坐标



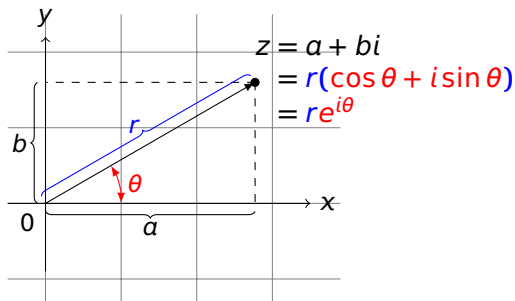
- 复数和平面上的点一一对应

$$z \leftrightarrow (a, b) \leftrightarrow (r, \theta)$$

直角坐标                  极坐标

- “定义”:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$



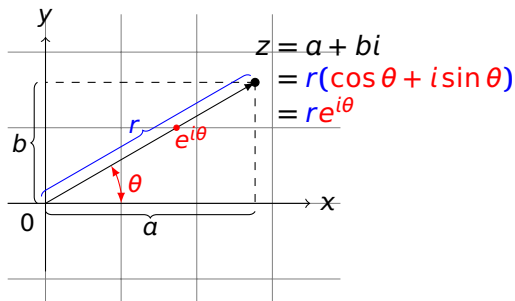
- 复数和平面上的点一一对应

$$z \leftrightarrow (a, b) \leftrightarrow (r, \theta)$$

直角坐标          极坐标

- “定义”:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$



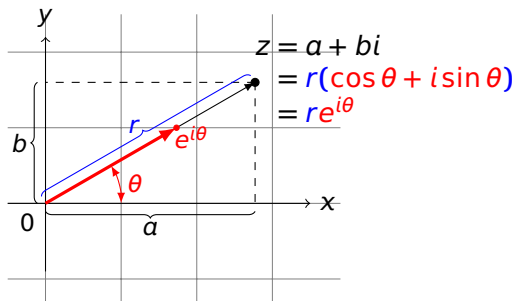
- 复数和平面上的点一一对应

$$z \leftrightarrow (a, b) \leftrightarrow (r, \theta)$$

直角坐标          极坐标

- “定义”:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$



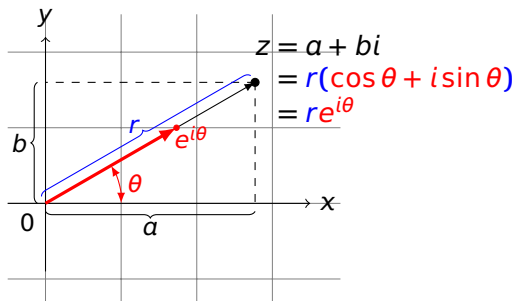
- 复数和平面上的点一一对应

$$z \leftrightarrow (a, b) \leftrightarrow (r, \theta)$$

直角坐标                  极坐标

- “定义”:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$



- 复数和平面上的点一一对应

$$z \leftrightarrow (a, b) \leftrightarrow (r, \theta)$$

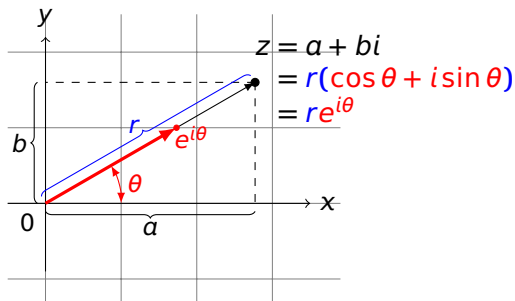
直角坐标                  极坐标

- “定义”:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

(注:  $e^{i\pi} =$  )





- 复数和平面上的点一一对应

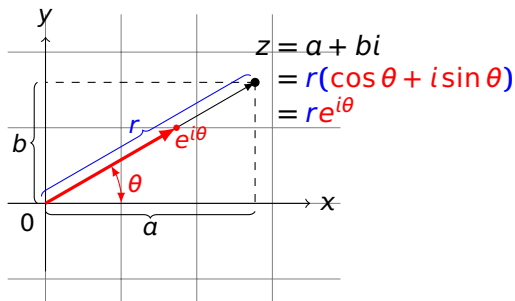
$$z \leftrightarrow (a, b) \leftrightarrow (r, \theta)$$

直角坐标                  极坐标

- “定义”:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

(注:  $e^{i\pi} = -1$ )



- 复数和平面上的点一一对应

$$z \leftrightarrow (a, b) \leftrightarrow (r, \theta)$$

直角坐标          极坐标

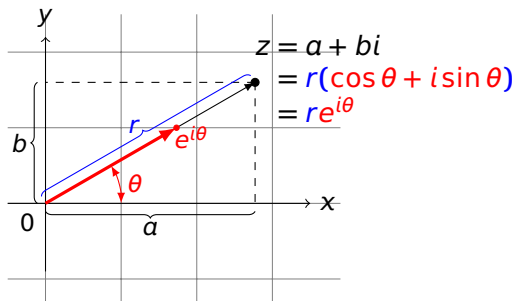
- “定义”:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

(注:  $e^{i\pi} = -1$ )

定义 设  $z = \alpha + i\beta$ , 定义

$$e^z$$



- 复数和平面上的点一一对应

$$z \leftrightarrow (a, b) \leftrightarrow (r, \theta)$$

直角坐标                  极坐标

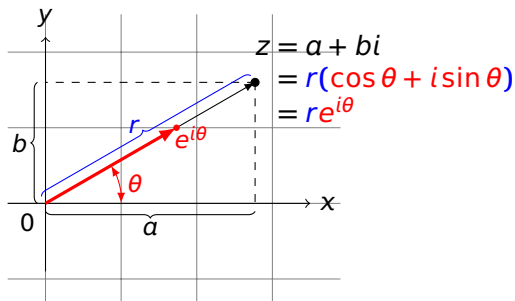
- “定义”:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

(注:  $e^{i\pi} = -1$ )

定义 设  $z = \alpha + i\beta$ , 定义

$$e^z := e^{\alpha + i\beta}$$



- 复数和平面上的点一一对应

$$z \leftrightarrow (a, b) \leftrightarrow (r, \theta)$$

直角坐标          极坐标

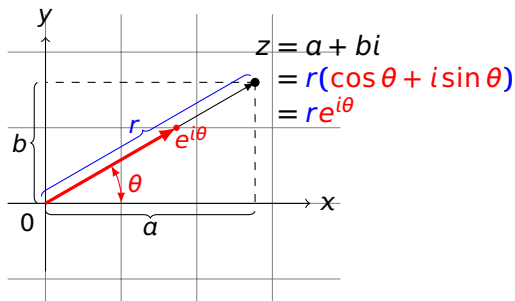
- “定义”:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

(注:  $e^{i\pi} = -1$ )

定义 设  $z = \alpha + i\beta$ , 定义

$$e^z := e^{\alpha + i\beta} := e^{\alpha} \cdot e^{i\beta}$$



- 复数和平面上的点一一对应

$$z \leftrightarrow (a, b) \leftrightarrow (r, \theta)$$

直角坐标          极坐标

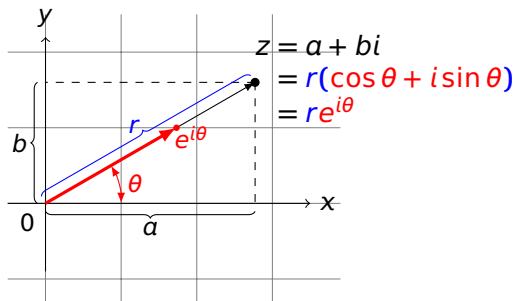
- “定义”:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

(注:  $e^{i\pi} = -1$ )

定义 设  $z = \alpha + i\beta$ , 定义

$$e^z := e^{\alpha + i\beta} := e^{\alpha} \cdot e^{i\beta} = e^{\alpha} (\cos \beta + i \sin \beta)$$



- 复数和平面上的点一一对应

$$z \leftrightarrow (a, b) \leftrightarrow (r, \theta)$$

直角坐标          极坐标

- “定义”:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

(注:  $e^{i\pi} = -1$ )

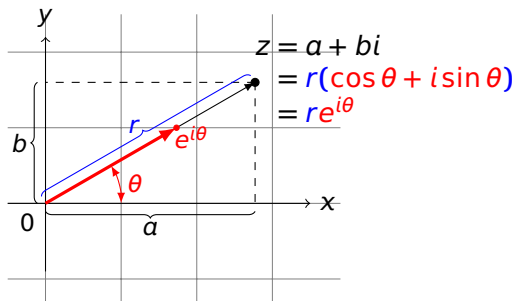
定义 设  $z = \alpha + i\beta$ , 定义

$$e^z := e^{\alpha + i\beta} := e^\alpha \cdot e^{i\beta} = e^\alpha (\cos \beta + i \sin \beta)$$

考虑取值为复数的函数

$$e^{zx}$$

$$x \in \mathbb{R}$$



- 复数和平面上的点一一对应

$$z \leftrightarrow (a, b) \leftrightarrow (r, \theta)$$

直角坐标          极坐标

- “定义”:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

(注:  $e^{i\pi} = -1$ )

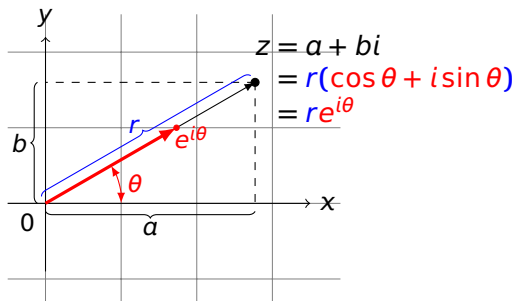
**定义** 设  $z = \alpha + i\beta$ , 定义

$$e^z := e^{\alpha + i\beta} := e^{\alpha} \cdot e^{i\beta} = e^{\alpha} (\cos \beta + i \sin \beta)$$

考虑取值为复数的函数 ( $zx = (\alpha + i\beta)x$ )

$$e^{zx}$$

$$x \in \mathbb{R}$$



- 复数和平面上的点一一对应

$$z \leftrightarrow (a, b) \leftrightarrow (r, \theta)$$

直角坐标          极坐标

- “定义”:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

(注:  $e^{i\pi} = -1$ )

**定义** 设  $z = \alpha + i\beta$ , 定义

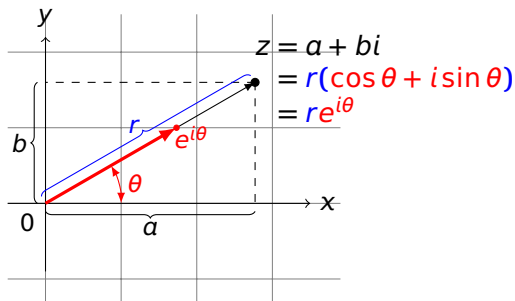
$$e^z := e^{\alpha + i\beta} := e^\alpha \cdot e^{i\beta} = e^\alpha (\cos \beta + i \sin \beta)$$

考虑取值为复数的函数 ( $zx = (\alpha + i\beta)x = \alpha x + i\beta x$ )

$$e^{zx}$$

$$x \in \mathbb{R}$$





- 复数和平面上的点一一对应

$$z \leftrightarrow (a, b) \leftrightarrow (r, \theta)$$

直角坐标          极坐标

- “定义”:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

(注:  $e^{i\pi} = -1$ )

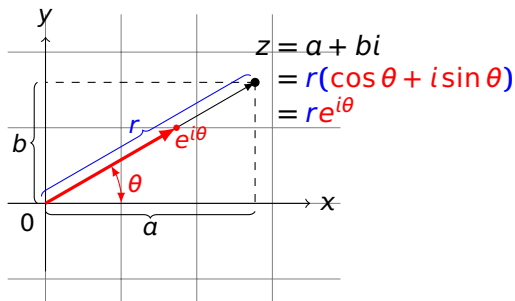
**定义** 设  $z = \alpha + i\beta$ , 定义

$$e^z := e^{\alpha + i\beta} := e^{\alpha} \cdot e^{i\beta} = e^{\alpha} (\cos \beta + i \sin \beta)$$

考虑取值为复数的函数 ( $zx = (\alpha + i\beta)x = \alpha x + i\beta x$ )

$$e^{zx} = e^{\alpha x + i\beta x}$$

$$x \in \mathbb{R}$$



- 复数和平面上的点一一对应

$$z \leftrightarrow (a, b) \leftrightarrow (r, \theta)$$

直角坐标          极坐标

- “定义”:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

(注:  $e^{i\pi} = -1$ )

**定义** 设  $z = \alpha + i\beta$ , 定义

$$e^z := e^{\alpha + i\beta} := e^{\alpha} \cdot e^{i\beta} = e^{\alpha} (\cos \beta + i \sin \beta)$$

考虑取值为复数的函数 ( $zx = (\alpha + i\beta)x = \alpha x + i\beta x$ )

$$e^{zx} = e^{\alpha x + i\beta x} = e^{\alpha x} [\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)], \quad x \in \mathbb{R}$$

性质 设  $z = \alpha + \beta i$  为复数,  $x \in \mathbb{R}$ , 成立

$$\frac{d}{dx} e^{zx} = z e^{zx}$$

证明

性质 设  $z = \alpha + \beta i$  为复数,  $x \in \mathbb{R}$ , 成立

$$\frac{d}{dx} e^{zx} = z e^{zx}$$

证明 这是

$$\frac{d}{dx} e^{zx}$$

$$= z e^{zx}$$

性质 设  $z = \alpha + \beta i$  为复数,  $x \in \mathbb{R}$ , 成立

$$\frac{d}{dx} e^{zx} = z e^{zx}$$

证明 这是

$$\frac{d}{dx} e^{zx} = \frac{d}{dx} [e^{\alpha x} (\cos(\beta x) + i \sin(\beta x))]$$

$$= z e^{zx}$$

性质 设  $z = \alpha + \beta i$  为复数,  $x \in \mathbb{R}$ , 成立

$$\frac{d}{dx} e^{zx} = z e^{zx}$$

证明 这是

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} e^{zx} &= \frac{d}{dx} [e^{\alpha x} (\cos(\beta x) + i \sin(\beta x))] \\ &= \frac{d}{dx} [e^{\alpha x} \cos(\beta x) + i e^{\alpha x} \sin(\beta x)] \\ &= z e^{zx} \end{aligned}$$

性质 设  $z = \alpha + \beta i$  为复数,  $x \in \mathbb{R}$ , 成立

$$\frac{d}{dx} e^{zx} = z e^{zx}$$

证明 这是

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} e^{zx} &= \frac{d}{dx} [e^{\alpha x} (\cos(\beta x) + i \sin(\beta x))] \\ &= \frac{d}{dx} [e^{\alpha x} \cos(\beta x) + i e^{\alpha x} \sin(\beta x)] \\ &= \frac{d}{dx} [e^{\alpha x} \cos(\beta x)] + i \frac{d}{dx} [e^{\alpha x} \sin(\beta x)] \\ &= z e^{zx} \end{aligned}$$

性质 设  $z = \alpha + \beta i$  为复数,  $x \in \mathbb{R}$ , 成立

$$\frac{d}{dx} e^{zx} = z e^{zx}$$

证明 这是

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} e^{zx} &= \frac{d}{dx} [e^{\alpha x} (\cos(\beta x) + i \sin(\beta x))] \\ &= \frac{d}{dx} [e^{\alpha x} \cos(\beta x) + i e^{\alpha x} \sin(\beta x)] \\ &= \frac{d}{dx} [e^{\alpha x} \cos(\beta x)] + i \frac{d}{dx} [e^{\alpha x} \sin(\beta x)] \\ &= (\alpha + \beta i) e^{\alpha x} [\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)] \\ &= z e^{zx} \end{aligned}$$



性质 设  $z = \alpha + \beta i$  为复数,  $x \in \mathbb{R}$ , 成立

$$\frac{d}{dx} e^{zx} = z e^{zx}$$

证明 这是

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} e^{zx} &= \frac{d}{dx} [e^{\alpha x} (\cos(\beta x) + i \sin(\beta x))] \\ &= \frac{d}{dx} [e^{\alpha x} \cos(\beta x) + i e^{\alpha x} \sin(\beta x)] \\ &= \frac{d}{dx} [e^{\alpha x} \cos(\beta x)] + i \frac{d}{dx} [e^{\alpha x} \sin(\beta x)] \\ &\vdots \\ &= (\alpha + \beta i) e^{\alpha x} [\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)] \\ &= z e^{zx} \end{aligned}$$

# We are here now...

---

◆ 复数简介

♣ 二阶线性微分方程

♥ 二阶常系数齐次线性微分方程

♠ 二阶常系数非齐次线性微分方程

# 二阶线性微分方程

---

- 二阶齐次线性微分方程：

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

- 二阶非齐次线性微分方程：

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

# 二阶线性微分方程

- 二阶齐次线性微分方程：

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

- 二阶非齐次线性微分方程：

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

问题 这些方程的通解有怎样的“结构”？

## 二阶齐次线性微分方程的解的结构

定理 设  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个特解, 则

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

也是解, 其中  $C_1, C_2$  是任意常数。

## 二阶齐次线性微分方程的解的结构

**定理** 设  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个特解, 则

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

也是解, 其中  $C_1, C_2$  是任意常数。

**证明** 直接代入验证

$$\begin{aligned} & y'' + P(x)y' + Q(x)y \\ &= [C_1 y_1 + C_2 y_2]'' + P(x)[C_1 y_1 + C_2 y_2]' + Q(x)[C_1 y_1 + C_2 y_2] \end{aligned}$$

## 二阶齐次线性微分方程的解的结构

**定理** 设  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个特解, 则

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

也是解, 其中  $C_1, C_2$  是任意常数。

**证明** 直接代入验证

$$\begin{aligned} & y'' + P(x)y' + Q(x)y \\ &= [C_1 y_1 + C_2 y_2]'' + P(x)[C_1 y_1 + C_2 y_2]' + Q(x)[C_1 y_1 + C_2 y_2] \\ &= C_1 \left[ \quad \quad \quad \right] + C_2 \left[ \quad \quad \quad \right] \end{aligned}$$

## 二阶齐次线性微分方程的解的结构

**定理** 设  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个特解, 则

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

也是解, 其中  $C_1, C_2$  是任意常数。

**证明** 直接代入验证

$$\begin{aligned} & y'' + P(x)y' + Q(x)y \\ &= [C_1 y_1 + C_2 y_2]'' + P(x)[C_1 y_1 + C_2 y_2]' + Q(x)[C_1 y_1 + C_2 y_2] \\ &= C_1 [y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1] + C_2 [ \end{aligned}$$



## 二阶齐次线性微分方程的解的结构

**定理** 设  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个特解, 则

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

也是解, 其中  $C_1, C_2$  是任意常数。

**证明** 直接代入验证

$$\begin{aligned} & y'' + P(x)y' + Q(x)y \\ &= [C_1 y_1 + C_2 y_2]'' + P(x)[C_1 y_1 + C_2 y_2]' + Q(x)[C_1 y_1 + C_2 y_2] \\ &= C_1 [y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1] + C_2 [y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2] \end{aligned}$$

## 二阶齐次线性微分方程的解的结构

定理 设  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个特解, 则

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

也是解, 其中  $C_1, C_2$  是任意常数。

证明 直接代入验证

$$\begin{aligned} & y'' + P(x)y' + Q(x)y \\ &= [C_1 y_1 + C_2 y_2]'' + P(x)[C_1 y_1 + C_2 y_2]' + Q(x)[C_1 y_1 + C_2 y_2] \\ &= C_1 [y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1] + C_2 [y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2] \\ &= 0 + 0 \end{aligned}$$

## 二阶齐次线性微分方程的解的结构

**定理** 设  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个特解, 则

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

也是解, 其中  $C_1, C_2$  是任意常数。

**证明** 直接代入验证

$$\begin{aligned} & y'' + P(x)y' + Q(x)y \\ &= [C_1 y_1 + C_2 y_2]'' + P(x)[C_1 y_1 + C_2 y_2]' + Q(x)[C_1 y_1 + C_2 y_2] \\ &= C_1 [y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1] + C_2 [y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2] \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

## 二阶齐次线性微分方程的解的结构

定理 设  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个（特解），则

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

也是解，其中  $C_1$ ,  $C_2$  是任意常数。

推论

## 二阶齐次线性微分方程的解的结构

**定理** 设  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个（特解），则

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

也是解，其中  $C_1$ ,  $C_2$  是任意常数。

**推论** 若该特解  $y_1$  和  $y_2$  不是成比例（线性无关；即  $\frac{y_1}{y_2} \neq \text{常数}$ ），则齐次线性方程  $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$  的通解是

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

## 二阶齐次线性微分方程的解的结构

**定理** 设  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个（特解），则

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

也是解，其中  $C_1, C_2$  是任意常数。

**推论** 若该特解  $y_1$  和  $y_2$  不是成比例（线性无关；即  $\frac{y_1}{y_2} \neq \text{常数}$ ），则齐次线性方程  $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$  的通解是

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

也就是说，求通解，只需找到两个线性无关的特解！

## 二阶非齐次线性微分方程的解的结构

---

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \quad (*)$$

## 二阶非齐次线性微分方程的解的结构

---

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \quad (*)$$



## 二阶非齐次线性微分方程的解的结构

定理 设  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个线性无关特解,

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \quad (*)$$

## 二阶非齐次线性微分方程的解的结构

定理 设  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个线性无关特解,  $y^*(x)$  是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \quad (*)$$

的一个特解,

## 二阶非齐次线性微分方程的解的结构

定理 设  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个线性无关特解,  $y^*(x)$  是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \quad (*)$$

的一个特解, 则

$$y = y^* + C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

是非齐次线性微分方程  $(*)$  的通解, 其中  $C_1, C_2$  是任意常数。

## 二阶非齐次线性微分方程的解的结构

定理 设  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个线性无关特解,  $y^*(x)$  是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \quad (*)$$

的一个特解, 则

$$y = y^* + \overbrace{C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)}^{Y(x)}$$

是非齐次线性微分方程  $(*)$  的通解, 其中  $C_1, C_2$  是任意常数。

## 二阶非齐次线性微分方程的解的结构

定理 设  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个线性无关特解,  $y^*(x)$  是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \quad (*)$$

的一个特解, 则

$$y = y^* + \overbrace{C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)}^{Y(x)}$$

是非齐次线性微分方程  $(*)$  的通解, 其中  $C_1, C_2$  是任意常数。

证明 只需验证  $y = y^*(x) + Y(x)$  是解:

## 二阶非齐次线性微分方程的解的结构

**定理** 设  $y_1(x), y_2(x)$  是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个线性无关特解,  $y^*(x)$  是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \quad (*)$$

的一个特解, 则

$$y = y^* + \overbrace{C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)}^{Y(x)}$$

是非齐次线性微分方程  $(*)$  的通解, 其中  $C_1, C_2$  是任意常数。

**证明** 只需验证  $y = y^*(x) + Y(x)$  是解:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = [y^* + Y]'' + P[y^* + Y]' + Q[y^* + Y]$$

## 二阶非齐次线性微分方程的解的结构

**定理** 设  $y_1(x), y_2(x)$  是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个线性无关特解,  $y^*(x)$  是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \quad (*)$$

的一个特解, 则

$$y = y^* + \overbrace{C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)}^{Y(x)}$$

是非齐次线性微分方程  $(*)$  的通解, 其中  $C_1, C_2$  是任意常数。

**证明** 只需验证  $y = y^*(x) + Y(x)$  是解:

$$\begin{aligned} y'' + P(x)y' + Q(x)y &= [y^* + Y]'' + P[y^* + Y]' + Q[y^* + Y] \\ &= [ \quad ] + [ \quad ] \end{aligned}$$

## 二阶非齐次线性微分方程的解的结构

**定理** 设  $y_1(x), y_2(x)$  是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个线性无关特解,  $y^*(x)$  是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \quad (*)$$

的一个特解, 则

$$y = y^* + \overbrace{C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)}^{Y(x)}$$

是非齐次线性微分方程  $(*)$  的通解, 其中  $C_1, C_2$  是任意常数。

**证明** 只需验证  $y = y^*(x) + Y(x)$  是解:

$$\begin{aligned} y'' + P(x)y' + Q(x)y &= [y^* + Y]'' + P[y^* + Y]' + Q[y^* + Y] \\ &= [y^{*''} + Py^{*'} + Qy^*] + [ \end{aligned}$$



## 二阶非齐次线性微分方程的解的结构

定理 设  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个线性无关特解,  $y^*(x)$  是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \quad (*)$$

的一个特解, 则

$$y = y^* + \overbrace{C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)}^{Y(x)}$$

是非齐次线性微分方程  $(*)$  的通解, 其中  $C_1, C_2$  是任意常数。

证明 只需验证  $y = y^*(x) + Y(x)$  是解:

$$\begin{aligned} y'' + P(x)y' + Q(x)y &= [y^* + Y]'' + P[y^* + Y]' + Q[y^* + Y] \\ &= [y^{*''} + Py^{*'} + Qy^*] + [Y'' + PY' + QY] \end{aligned}$$

## 二阶非齐次线性微分方程的解的结构

**定理** 设  $y_1(x), y_2(x)$  是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个线性无关特解,  $y^*(x)$  是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \quad (*)$$

的一个特解, 则

$$y = y^* + \overbrace{C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)}^{Y(x)}$$

是非齐次线性微分方程  $(*)$  的通解, 其中  $C_1, C_2$  是任意常数。

**证明** 只需验证  $y = y^*(x) + Y(x)$  是解:

$$\begin{aligned} y'' + P(x)y' + Q(x)y &= [y^* + Y]'' + P[y^* + Y]' + Q[y^* + Y] \\ &= [y^{*''} + Py^{*'} + Qy^*] + [Y'' + PY' + QY] \\ &= f(x) + 0 \end{aligned}$$

## 二阶非齐次线性微分方程的解的结构

**定理** 设  $y_1(x), y_2(x)$  是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个线性无关特解,  $y^*(x)$  是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \quad (*)$$

的一个特解, 则

$$y = y^* + \overbrace{C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)}^{Y(x)}$$

是非齐次线性微分方程  $(*)$  的通解, 其中  $C_1, C_2$  是任意常数。

**证明** 只需验证  $y = y^*(x) + Y(x)$  是解:

$$\begin{aligned} y'' + P(x)y' + Q(x)y &= [y^* + Y]'' + P[y^* + Y]' + Q[y^* + Y] \\ &= [y^{*''} + Py^{*'} + Qy^*] + [Y'' + PY' + QY] \\ &= f(x) + 0 = f(x) \end{aligned}$$

# We are here now...

---

◆ 复数简介

♣ 二阶线性微分方程

♥ 二阶常系数齐次线性微分方程

♠ 二阶常系数非齐次线性微分方程

## 二阶线性常系数微分方程——特解

---

**目标** 找出  $y'' + py' + qy = 0$  的两个线性无关的特解  $y_1, y_2$ 。

## 二阶线性常系数微分方程——特解

**目标** 找出  $y'' + py' + qy = 0$  的两个线性无关的特解  $y_1, y_2$ 。

**做法** 尝试寻找形如

$$y = e^{rx}$$

的特解。

## 二阶线性常系数微分方程——特解

**目标** 找出  $y'' + py' + qy = 0$  的两个线性无关的特解  $y_1, y_2$ 。

**做法** 尝试寻找形如

$$y = e^{rx}$$

的特解。代入方程：

$$y'' + py' + qy = (e^{rx})'' + p(e^{rx})' + qy =$$

## 二阶线性常系数微分方程——特解

**目标** 找出  $y'' + py' + qy = 0$  的两个线性无关的特解  $y_1, y_2$ 。

**做法** 尝试寻找形如

$$y = e^{rx}$$

的特解。代入方程：

$$y'' + py' + qy = (e^{rx})'' + p(e^{rx})' + qy = \quad + qe^{rx}$$



## 二阶线性常系数微分方程——特解

**目标** 找出  $y'' + py' + qy = 0$  的两个线性无关的特解  $y_1, y_2$ 。

**做法** 尝试寻找形如

$$y = e^{rx}$$

的特解。代入方程：

$$y'' + py' + q = (e^{rx})'' + p(e^{rx})' + qy = \quad + pre^{rx} + qe^{rx}$$

## 二阶线性常系数微分方程——特解

**目标** 找出  $y'' + py' + qy = 0$  的两个线性无关的特解  $y_1, y_2$ 。

**做法** 尝试寻找形如

$$y = e^{rx}$$

的特解。代入方程：

$$y'' + py' + qy = (e^{rx})'' + p(e^{rx})' + qy = r^2 e^{rx} + pre^{rx} + qe^{rx}$$

## 二阶线性常系数微分方程——特解

**目标** 找出  $y'' + py' + qy = 0$  的两个线性无关的特解  $y_1, y_2$ 。

**做法** 尝试寻找形如

$$y = e^{rx}$$

的特解。代入方程：

$$y'' + py' + qy = (e^{rx})'' + p(e^{rx})' + qy = (r^2 + pr + q)e^{rx}$$

## 二阶线性常系数微分方程——特解

**目标** 找出  $y'' + py' + qy = 0$  的两个线性无关的特解  $y_1, y_2$ 。

**做法** 尝试寻找形如

$$y = e^{rx}$$

的特解。代入方程：

$$y'' + py' + q = (e^{rx})'' + p(e^{rx})' + qy = (r^2 + pr + q)e^{rx}$$

所以

$$y'' + py' + q = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 + pr + q = 0$$

## 二阶线性常系数微分方程——特解

**目标** 找出  $y'' + py' + qy = 0$  的两个线性无关的特解  $y_1, y_2$ 。

**做法** 尝试寻找形如

$$y = e^{rx}$$

的特解。代入方程：

$$y'' + py' + qy = (e^{rx})'' + p(e^{rx})' + qy = (r^2 + pr + q)e^{rx}$$

所以

$$y'' + py' + qy = 0 \iff r^2 + pr + q = 0$$

所以

- $p^2 - 4q > 0$  时,
- $p^2 - 4q = 0$  时,
- $p^2 - 4q < 0$  时,

## 二阶线性常系数微分方程——特解

**目标** 找出  $y'' + py' + qy = 0$  的两个线性无关的特解  $y_1, y_2$ 。

**做法** 尝试寻找形如

$$y = e^{rx}$$

的特解。代入方程：

$$y'' + py' + qy = (e^{rx})'' + p(e^{rx})' + qy = (r^2 + pr + q)e^{rx}$$

所以

$$y'' + py' + qy = 0 \iff r^2 + pr + q = 0$$

所以

- $p^2 - 4q > 0$  时,  $r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$
- $p^2 - 4q = 0$  时,
- $p^2 - 4q < 0$  时,

## 二阶线性常系数微分方程——特解

**目标** 找出  $y'' + py' + qy = 0$  的两个线性无关的特解  $y_1, y_2$ 。

**做法** 尝试寻找形如

$$y = e^{rx}$$

的特解。代入方程：

$$y'' + py' + qy = (e^{rx})'' + p(e^{rx})' + qy = (r^2 + pr + q)e^{rx}$$

所以

$$y'' + py' + qy = 0 \iff r^2 + pr + q = 0$$

所以

- $p^2 - 4q > 0$  时,  $r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \Rightarrow y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}$
- $p^2 - 4q = 0$  时,
- $p^2 - 4q < 0$  时,

## 二阶线性常系数微分方程——特解

**目标** 找出  $y'' + py' + qy = 0$  的两个线性无关的特解  $y_1, y_2$ 。

**做法** 尝试寻找形如

$$y = e^{rx}$$

的特解。代入方程：

$$y'' + py' + qy = (e^{rx})'' + p(e^{rx})' + qy = (r^2 + pr + q)e^{rx}$$

所以

$$y'' + py' + qy = 0 \iff r^2 + pr + q = 0$$

所以

- $p^2 - 4q > 0$  时,  $r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \Rightarrow y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}$
- $p^2 - 4q = 0$  时,  $r_{1,2} = \frac{-p}{2}$
- $p^2 - 4q < 0$  时,



## 二阶线性常系数微分方程——特解

**目标** 找出  $y'' + py' + qy = 0$  的两个线性无关的特解  $y_1, y_2$ 。

**做法** 尝试寻找形如

$$y = e^{rx}$$

的特解。代入方程：

$$y'' + py' + qy = (e^{rx})'' + p(e^{rx})' + qy = (r^2 + pr + q)e^{rx}$$

所以

$$y'' + py' + qy = 0 \iff r^2 + pr + q = 0$$

所以

- $p^2 - 4q > 0$  时,  $r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \Rightarrow y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}$
- $p^2 - 4q = 0$  时,  $r_{1,2} = \frac{-p}{2} \Rightarrow y_1 = e^{r_1 x};$
- $p^2 - 4q < 0$  时,

## 二阶线性常系数微分方程——特解

**目标** 找出  $y'' + py' + qy = 0$  的两个线性无关的特解  $y_1, y_2$ 。

**做法** 尝试寻找形如

$$y = e^{rx}$$

的特解。代入方程：

$$y'' + py' + qy = (e^{rx})'' + p(e^{rx})' + qy = (r^2 + pr + q)e^{rx}$$

所以

$$y'' + py' + qy = 0 \iff r^2 + pr + q = 0$$

所以

- $p^2 - 4q > 0$  时,  $r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \Rightarrow y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}$
- $p^2 - 4q = 0$  时,  $r_{1,2} = \frac{-p}{2} \Rightarrow y_1 = e^{r_1 x}$ ; 验证  $y_2 = xe^{r_1 x}$  也是解
- $p^2 - 4q < 0$  时,

## 二阶线性常系数微分方程——特解

**目标** 找出  $y'' + py' + qy = 0$  的两个线性无关的特解  $y_1, y_2$ 。

**做法** 尝试寻找形如

$$y = e^{rx}$$

的特解。代入方程：

$$y'' + py' + qy = (e^{rx})'' + p(e^{rx})' + qy = (r^2 + pr + q)e^{rx}$$

所以

$$y'' + py' + qy = 0 \iff r^2 + pr + q = 0$$

所以

- $p^2 - 4q > 0$  时,  $r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \Rightarrow y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}$
- $p^2 - 4q = 0$  时,  $r_{1,2} = \frac{-p}{2} \Rightarrow y_1 = e^{r_1 x}$ ; 验证  $y_2 = xe^{r_1 x}$  也是解
- $p^2 - 4q < 0$  时,  $r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$

## 二阶线性常系数微分方程——特解

**目标** 找出  $y'' + py' + qy = 0$  的两个线性无关的特解  $y_1, y_2$ 。

**做法** 尝试寻找形如

$$y = e^{rx}$$

的特解。代入方程：

$$y'' + py' + qy = (e^{rx})'' + p(e^{rx})' + qy = (r^2 + pr + q)e^{rx}$$

所以

$$y'' + py' + qy = 0 \iff r^2 + pr + q = 0$$

所以

- $p^2 - 4q > 0$  时,  $r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \Rightarrow y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}$
- $p^2 - 4q = 0$  时,  $r_{1,2} = \frac{-p}{2} \Rightarrow y_1 = e^{r_1 x}$ ; 验证  $y_2 = xe^{r_1 x}$  也是解
- $p^2 - 4q < 0$  时,  $r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2}i$

## 二阶线性常系数微分方程——特解

**目标** 找出  $y'' + py' + qy = 0$  的两个线性无关的特解  $y_1, y_2$ 。

**做法** 尝试寻找形如

$$y = e^{rx}$$

的特解。代入方程：

$$y'' + py' + qy = (e^{rx})'' + p(e^{rx})' + qy = (r^2 + pr + q)e^{rx}$$

所以

$$y'' + py' + qy = 0 \iff r^2 + pr + q = 0$$

所以

- $p^2 - 4q > 0$  时,  $r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \Rightarrow y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}$
- $p^2 - 4q = 0$  时,  $r_{1,2} = \frac{-p}{2} \Rightarrow y_1 = e^{r_1 x}$ ; 验证  $y_2 = xe^{r_1 x}$  也是解
- $p^2 - 4q < 0$  时,  $r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2}i = \alpha \pm \beta i$

## 二阶线性常系数微分方程——特解

**目标** 找出  $y'' + py' + qy = 0$  的两个线性无关的特解  $y_1, y_2$ 。

**做法** 尝试寻找形如

$$y = e^{rx}$$

的特解。代入方程：

$$y'' + py' + qy = (e^{rx})'' + p(e^{rx})' + qy = (r^2 + pr + q)e^{rx}$$

所以

$$y'' + py' + qy = 0 \iff r^2 + pr + q = 0$$

所以

- $p^2 - 4q > 0$  时,  $r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \Rightarrow y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}$
- $p^2 - 4q = 0$  时,  $r_{1,2} = -\frac{p}{2} \Rightarrow y_1 = e^{r_1 x}$ ; 验证  $y_2 = xe^{r_1 x}$  也是解
- $p^2 - 4q < 0$  时,  $r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2}i = \alpha \pm \beta i$   
 $\Rightarrow y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}$

## 二阶线性常系数微分方程——特解

---

**目标** 找出  $y'' + py' + qy = 0$  的两个线性无关的特解  $y_1, y_2$ 。

## 二阶线性常系数微分方程——特解

**目标** 找出  $y'' + py' + qy = 0$  的两个线性无关的特解  $y_1, y_2$ 。

**结论** 求解方程  $r^2 + pr + q = 0$  的根  $r_{1,2}$ , 则

$p^2 - 4q > 0$	$r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$	$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x}$
$p^2 - 4q = 0$	$r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$	$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = x e^{r_1 x}$
$p^2 - 4q < 0$	$r_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2} i$ $= \alpha \pm \beta i$	$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x}$



## 二阶线性常系数微分方程——特解

**目标** 找出  $y'' + py' + qy = 0$  的两个线性无关的特解  $y_1, y_2$ 。

**结论** 求解方程  $r^2 + pr + q = 0$  的根  $r_{1,2}$ , 则

$p^2 - 4q > 0$	$r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$	$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x}$
$p^2 - 4q = 0$	$r_1 = r_2 = \frac{-p}{2}$	$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = x e^{r_1 x}$
$p^2 - 4q < 0$	$r_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2} i$ $= \alpha \pm \beta i$	$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x}$

**注**  $p^2 - 4q < 0$  时, 特解

$$y_1 = e^{r_1 x}$$

## 二阶线性常系数微分方程——特解

**目标** 找出  $y'' + py' + qy = 0$  的两个线性无关的特解  $y_1, y_2$ 。

**结论** 求解方程  $r^2 + pr + q = 0$  的根  $r_{1,2}$ , 则

$p^2 - 4q > 0$	$r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$	$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x}$
$p^2 - 4q = 0$	$r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$	$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = x e^{r_1 x}$
$p^2 - 4q < 0$	$r_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2} i$ $= \alpha \pm \beta i$	$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x}$

**注**  $p^2 - 4q < 0$  时, 特解

$$y_1 = e^{r_1 x} = e^{(\alpha + \beta i)x}$$

## 二阶线性常系数微分方程——特解

**目标** 找出  $y'' + py' + qy = 0$  的两个线性无关的特解  $y_1, y_2$ 。

**结论** 求解方程  $r^2 + pr + q = 0$  的根  $r_{1,2}$ , 则

$p^2 - 4q > 0$	$r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$	$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x}$
$p^2 - 4q = 0$	$r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$	$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = x e^{r_1 x}$
$p^2 - 4q < 0$	$r_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2} i$ $= \alpha \pm \beta i$	$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x}$

**注**  $p^2 - 4q < 0$  时, 特解

$$y_1 = e^{r_1 x} = e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x} [\cos(\beta x) + \sin(\beta x)i]$$

## 二阶线性常系数微分方程——特解

**目标** 找出  $y'' + py' + qy = 0$  的两个线性无关的特解  $y_1, y_2$ 。

**结论** 求解方程  $r^2 + pr + q = 0$  的根  $r_{1,2}$ , 则

$p^2 - 4q > 0$	$r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$	$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x}$
$p^2 - 4q = 0$	$r_1 = r_2 = \frac{-p}{2}$	$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = x e^{r_1 x}$
$p^2 - 4q < 0$	$r_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2} i$ $= \alpha \pm \beta i$	$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x}$

**注**  $p^2 - 4q < 0$  时, 特解

$$y_1 = e^{r_1 x} = e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x} [\cos(\beta x) + \sin(\beta x)i]$$

的实部、虚部所构成的函数

## 二阶线性常系数微分方程——特解

**目标** 找出  $y'' + py' + qy = 0$  的两个线性无关的特解  $y_1, y_2$ 。

**结论** 求解方程  $r^2 + pr + q = 0$  的根  $r_{1,2}$ , 则

$p^2 - 4q > 0$	$r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$	$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x}$
$p^2 - 4q = 0$	$r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$	$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = x e^{r_1 x}$
$p^2 - 4q < 0$	$r_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2} i$ $= \alpha \pm \beta i$	$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x}$

**注**  $p^2 - 4q < 0$  时, 特解

$$y_1 = e^{r_1 x} = e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x} [\cos(\beta x) + \sin(\beta x)i]$$

的实部、虚部所构成的函数

$$e^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

## 二阶线性常系数微分方程——特解

**目标** 找出  $y'' + py' + qy = 0$  的两个线性无关的特解  $y_1, y_2$ 。

**结论** 求解方程  $r^2 + pr + q = 0$  的根  $r_{1,2}$ , 则

$p^2 - 4q > 0$	$r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$	$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x}$
$p^2 - 4q = 0$	$r_1 = r_2 = \frac{-p}{2}$	$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = x e^{r_1 x}$
$p^2 - 4q < 0$	$r_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2} i$ $= \alpha \pm \beta i$	$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x}$

**注**  $p^2 - 4q < 0$  时, 特解

$$y_1 = e^{r_1 x} = e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x} [\cos(\beta x) + \sin(\beta x)i]$$

的实部、虚部所构成的函数

$$e^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

也是两个线性无关特解!

## 二阶线性常系数微分方程——通解

性质 在  $p^2 - 4q < 0$  情形中,  $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ 。可以证明

$$e^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

也是两个线性无关特解。

## 二阶线性常系数微分方程——通解

性质 在  $p^2 - 4q < 0$  情形中,  $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ 。可以证明  
 $e^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad e^{\alpha x} \sin(\beta x)$

也是两个线性无关特解。

证明 当  $p^2 - 4q < 0$  时, 有特解  
 $y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x}$



## 二阶线性常系数微分方程——通解

性质 在  $p^2 - 4q < 0$  情形中,  $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ 。可以证明  
 $e^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad e^{\alpha x} \sin(\beta x)$

也是两个线性无关特解。

证明 当  $p^2 - 4q < 0$  时, 有特解

$$y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x} \cos(\beta x) + e^{\alpha x} \sin(\beta x)i$$

## 二阶线性常系数微分方程——通解

性质 在  $p^2 - 4q < 0$  情形中,  $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ 。可以证明

$$e^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

也是两个线性无关特解。

证明 当  $p^2 - 4q < 0$  时, 有特解

$$y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x} \cos(\beta x) + e^{\alpha x} \sin(\beta x)i =: s + ti$$

## 二阶线性常系数微分方程——通解

性质 在  $p^2 - 4q < 0$  情形中,  $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ 。可以证明

$$e^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

也是两个线性无关特解。

证明 当  $p^2 - 4q < 0$  时, 有特解

$$y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x} \cos(\beta x) + e^{\alpha x} \sin(\beta x)i =: s + ti$$

所以

$$0 = y_1'' + py_1' + qy_1$$

## 二阶线性常系数微分方程——通解

性质 在  $p^2 - 4q < 0$  情形中,  $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ 。可以证明

$$e^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

也是两个线性无关特解。

证明 当  $p^2 - 4q < 0$  时, 有特解

$$y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x} \cos(\beta x) + e^{\alpha x} \sin(\beta x)i =: s + ti$$

所以

$$0 = y_1'' + py_1' + qy_1 = (s + ti)'' + p(s + ti)' + q(s + ti)$$

## 二阶线性常系数微分方程——通解

性质 在  $p^2 - 4q < 0$  情形中,  $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ 。可以证明

$$e^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

也是两个线性无关特解。

证明 当  $p^2 - 4q < 0$  时, 有特解

$$y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x} \cos(\beta x) + e^{\alpha x} \sin(\beta x)i =: s + ti$$

所以

$$\begin{aligned} 0 &= y_1'' + py_1' + qy_1 = (s + ti)'' + p(s + ti)' + q(s + ti) \\ &= (s'' + t''i) + p(s' + t'i) + q(s + ti) \end{aligned}$$

## 二阶线性常系数微分方程——通解

**性质** 在  $p^2 - 4q < 0$  情形中,  $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ 。可以证明

$$e^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

也是两个线性无关特解。

**证明** 当  $p^2 - 4q < 0$  时, 有特解

所以  $y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x} \cos(\beta x) + e^{\alpha x} \sin(\beta x)i =: s + ti$

$$0 = y_1'' + py_1' + qy_1 = (s + ti)'' + p(s + ti)' + q(s + ti)$$

$$= (s'' + t''i) + p(s' + t'i) + q(s + ti)$$

$$= (s'' + ps' + qs) + (t'' + pt' + qt)i$$

## 二阶线性常系数微分方程——通解

**性质** 在  $p^2 - 4q < 0$  情形中,  $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ 。可以证明

$$e^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

也是两个线性无关特解。

**证明** 当  $p^2 - 4q < 0$  时, 有特解

所以 
$$y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x} \cos(\beta x) + e^{\alpha x} \sin(\beta x)i =: s + ti$$

$$0 = y_1'' + py_1' + qy_1 = (s + ti)'' + p(s + ti)' + q(s + ti)$$

$$= (s'' + t''i) + p(s' + t'i) + q(s + ti)$$

$$= (s'' + ps' + qs) + (t'' + pt' + qt)i$$

所以 
$$s'' + ps' + qs = 0 \quad \text{且} \quad t'' + pt' + qt = 0$$

## 二阶线性常系数微分方程——通解

**性质** 在  $p^2 - 4q < 0$  情形中,  $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ 。可以证明

$$e^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

也是两个线性无关特解。

**证明** 当  $p^2 - 4q < 0$  时, 有特解

所以  $y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x} \cos(\beta x) + e^{\alpha x} \sin(\beta x)i =: s + ti$

$$0 = y_1'' + py_1' + qy_1 = (s + ti)'' + p(s + ti)' + q(s + ti)$$

$$= (s'' + t''i) + p(s' + t'i) + q(s + ti)$$

$$= (s'' + ps' + qs) + (t'' + pt' + qt)i$$

所以  $s'' + ps' + qs = 0$  且  $t'' + pt' + qt = 0$

所以  $s = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$  及  $t = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$  为特解。



## 二阶线性常系数微分方程——通解

性质 在  $p^2 - 4q < 0$  情形中,  $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ 。可以证明

$$e^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

也是两个线性无关特解。

证明 当  $p^2 - 4q < 0$  时, 有特解

所以  $y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x} \cos(\beta x) + e^{\alpha x} \sin(\beta x)i =: s + ti$

$$\begin{aligned} 0 &= y_1'' + py_1' + qy_1 = (s + ti)'' + p(s + ti)' + q(s + ti) \\ &= (s'' + t''i) + p(s' + t'i) + q(s + ti) \\ &= (s'' + ps' + qs) + (t'' + pt' + qt)i \end{aligned}$$

所以  $s'' + ps' + qs = 0$  且  $t'' + pt' + qt = 0$

所以  $s = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$  及  $t = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$  为特解。

$\frac{e^{\alpha x} \cos(\beta x)}{e^{\alpha x} \sin(\beta x)}$  不是常数  $\Rightarrow$  线性无关性。

## 二阶线性常系数微分方程的解

**目标** 找出  $y'' + py' + qy = 0$  的两个线性无关的特解  $y_1, y_2$ 。

**结论** 求解特征方程  $r^2 + pr + q = 0$  的根  $r_{1,2}$ , 则

- $p^2 - 4q > 0$  时,  $r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$ 
  - 特解:  $y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}$
- $p^2 - 4q = 0$  时,  $r_1 = r_2 = \frac{-p}{2}$ 
  - 特解:  $y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = x e^{r_2 x}$
- $p^2 - 4q < 0$  时,  $r_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2} i = \alpha \pm \beta i$ 
  - 特解:  $y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x), y_2 = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$

## 二阶线性常系数微分方程的解

**目标** 找出  $y'' + py' + qy = 0$  的两个线性无关的特解  $y_1, y_2$ 。

**结论** 求解特征方程  $r^2 + pr + q = 0$  的根  $r_{1,2}$ , 则

- $p^2 - 4q > 0$  时,  $r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$ 
  - 特解:  $y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}$
  - 通解:
- $p^2 - 4q = 0$  时,  $r_1 = r_2 = \frac{-p}{2}$ 
  - 特解:  $y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = x e^{r_2 x}$
  - 通解:
- $p^2 - 4q < 0$  时,  $r_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2} i = \alpha \pm \beta i$ 
  - 特解:  $y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x), y_2 = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$
  - 通解:

## 二阶线性常系数微分方程的解

**目标** 找出  $y'' + py' + qy = 0$  的两个线性无关的特解  $y_1, y_2$ 。

**结论** 求解特征方程  $r^2 + pr + q = 0$  的根  $r_{1,2}$ , 则

- $p^2 - 4q > 0$  时,  $r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$ 
  - 特解:  $y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}$
  - 通解:  $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
- $p^2 - 4q = 0$  时,  $r_1 = r_2 = \frac{-p}{2}$ 
  - 特解:  $y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = x e^{r_2 x}$
  - 通解:
- $p^2 - 4q < 0$  时,  $r_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2} i = \alpha \pm \beta i$ 
  - 特解:  $y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x), y_2 = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$
  - 通解:

## 二阶线性常系数微分方程的解

**目标** 找出  $y'' + py' + qy = 0$  的两个线性无关的特解  $y_1, y_2$ 。

**结论** 求解特征方程  $r^2 + pr + q = 0$  的根  $r_{1,2}$ , 则

- $p^2 - 4q > 0$  时,  $r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$ 
  - 特解:  $y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}$
  - 通解:  $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
- $p^2 - 4q = 0$  时,  $r_1 = r_2 = \frac{-p}{2}$ 
  - 特解:  $y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = x e^{r_2 x}$
  - 通解:  $y = (C_1 + C_2 x) e^{r_2 x}$
- $p^2 - 4q < 0$  时,  $r_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2} i = \alpha \pm \beta i$ 
  - 特解:  $y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x), y_2 = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$
  - 通解:

## 二阶线性常系数微分方程的解

**目标** 找出  $y'' + py' + qy = 0$  的两个线性无关的特解  $y_1, y_2$ 。

**结论** 求解特征方程  $r^2 + pr + q = 0$  的根  $r_{1,2}$ , 则

- $p^2 - 4q > 0$  时,  $r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$ 
  - 特解:  $y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}$
  - 通解:  $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
- $p^2 - 4q = 0$  时,  $r_1 = r_2 = \frac{-p}{2}$ 
  - 特解:  $y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = x e^{r_2 x}$
  - 通解:  $y = (C_1 + C_2 x) e^{r_2 x}$
- $p^2 - 4q < 0$  时,  $r_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2} i = \alpha \pm \beta i$ 
  - 特解:  $y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x), y_2 = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$
  - 通解:  $y = e^{\alpha x} [C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)]$

例 求微分方程的通解：

$$y'' - 4y' + 3y = 0; \quad y'' + 4y' + 4y = 0; \quad y'' - 2y' + 5y = 0$$

例 求微分方程的通解：

$$y'' - 4y' + 3y = 0; \quad y'' + 4y' + 4y = 0; \quad y'' - 2y' + 5y = 0$$

解

$$y'' - 4y' + 3y = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 - 4r + 3 = 0$$



例 求微分方程的通解：

$$y'' - 4y' + 3y = 0; \quad y'' + 4y' + 4y = 0; \quad y'' - 2y' + 5y = 0$$

解

$$y'' - 4y' + 3y = 0 \Rightarrow r^2 - 4r + 3 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = 3$$

例 求微分方程的通解：

$$y'' - 4y' + 3y = 0; \quad y'' + 4y' + 4y = 0; \quad y'' - 2y' + 5y = 0$$

解

$$y'' - 4y' + 3y = 0 \Rightarrow r^2 - 4r + 3 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = 3$$

$e^x \qquad e^{3x}$

例 求微分方程的通解：

$$y'' - 4y' + 3y = 0; \quad y'' + 4y' + 4y = 0; \quad y'' - 2y' + 5y = 0$$

解

$$\begin{aligned} y'' - 4y' + 3y = 0 &\Rightarrow r^2 - 4r + 3 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = 3 \\ &\Rightarrow y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}. \end{aligned}$$

例 求微分方程的通解：

$$y'' - 4y' + 3y = 0; \quad y'' + 4y' + 4y = 0; \quad y'' - 2y' + 5y = 0$$

解

$$\begin{aligned} y'' - 4y' + 3y = 0 &\Rightarrow r^2 - 4r + 3 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = 3 \\ &\Rightarrow y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}. \end{aligned}$$

$$y'' + 4y' + 4y = 0 \Rightarrow r^2 + 4r + 4 = 0$$

例 求微分方程的通解：

$$y'' - 4y' + 3y = 0; \quad y'' + 4y' + 4y = 0; \quad y'' - 2y' + 5y = 0$$

解

$$\begin{aligned} y'' - 4y' + 3y = 0 &\Rightarrow r^2 - 4r + 3 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = 3 \\ &\Rightarrow y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}. \end{aligned}$$

$$y'' + 4y' + 4y = 0 \Rightarrow r^2 + 4r + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = -2$$

例 求微分方程的通解：

$$y'' - 4y' + 3y = 0; \quad y'' + 4y' + 4y = 0; \quad y'' - 2y' + 5y = 0$$

解

$$\begin{aligned} y'' - 4y' + 3y = 0 &\Rightarrow r^2 - 4r + 3 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = 3 \\ &\Rightarrow y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' + 4y' + 4y = 0 &\Rightarrow r^2 + 4r + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = -2 \\ &\Rightarrow y = (C_1 + C_2 x) e^{-2x}. \end{aligned}$$

例 求微分方程的通解：

$$y'' - 4y' + 3y = 0; \quad y'' + 4y' + 4y = 0; \quad y'' - 2y' + 5y = 0$$

解

$$\begin{aligned} y'' - 4y' + 3y = 0 &\Rightarrow r^2 - 4r + 3 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = 3 \\ &\Rightarrow y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' + 4y' + 4y = 0 &\Rightarrow r^2 + 4r + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = -2 \\ &\Rightarrow y = (C_1 + C_2 x) e^{-2x}. \end{aligned}$$

$$y'' - 2y' + 5y = 0$$

例 求微分方程的通解：

$$y'' - 4y' + 3y = 0; \quad y'' + 4y' + 4y = 0; \quad y'' - 2y' + 5y = 0$$

解

$$\begin{aligned} y'' - 4y' + 3y = 0 &\Rightarrow r^2 - 4r + 3 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = 3 \\ &\Rightarrow y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' + 4y' + 4y = 0 &\Rightarrow r^2 + 4r + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = -2 \\ &\Rightarrow y = (C_1 + C_2 x) e^{-2x}. \end{aligned}$$

$$y'' - 2y' + 5y = 0 \Rightarrow r^2 - 2r + 5 = 0$$



例 求微分方程的通解：

$$y'' - 4y' + 3y = 0; \quad y'' + 4y' + 4y = 0; \quad y'' - 2y' + 5y = 0$$

解

$$\begin{aligned} y'' - 4y' + 3y = 0 &\Rightarrow r^2 - 4r + 3 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = 3 \\ &\Rightarrow y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' + 4y' + 4y = 0 &\Rightarrow r^2 + 4r + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = -2 \\ &\Rightarrow y = (C_1 + C_2 x) e^{-2x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' - 2y' + 5y = 0 &\Rightarrow r^2 - 2r + 5 = 0 \\ &\Rightarrow r_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2} \end{aligned}$$

例 求微分方程的通解：

$$y'' - 4y' + 3y = 0; \quad y'' + 4y' + 4y = 0; \quad y'' - 2y' + 5y = 0$$

解

$$\begin{aligned} y'' - 4y' + 3y = 0 &\Rightarrow r^2 - 4r + 3 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = 3 \\ &\Rightarrow y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' + 4y' + 4y = 0 &\Rightarrow r^2 + 4r + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = -2 \\ &\Rightarrow y = (C_1 + C_2 x) e^{-2x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' - 2y' + 5y = 0 &\Rightarrow r^2 - 2r + 5 = 0 \\ &\Rightarrow r_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2} = 1 \pm 2i \end{aligned}$$

例 求微分方程的通解：

$$y'' - 4y' + 3y = 0; \quad y'' + 4y' + 4y = 0; \quad y'' - 2y' + 5y = 0$$

解

$$\begin{aligned} y'' - 4y' + 3y = 0 &\Rightarrow r^2 - 4r + 3 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = 3 \\ &\Rightarrow y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' + 4y' + 4y = 0 &\Rightarrow r^2 + 4r + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = -2 \\ &\Rightarrow y = (C_1 + C_2 x) e^{-2x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' - 2y' + 5y = 0 &\Rightarrow r^2 - 2r + 5 = 0 \\ &\Rightarrow r_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2} = 1 \pm 2i \\ &\Rightarrow y = e^x [C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)]. \end{aligned}$$

# We are here now...

---

◆ 复数简介

♣ 二阶线性微分方程

♥ 二阶常系数齐次线性微分方程

♠ 二阶常系数非齐次线性微分方程

## 二阶常系数非齐次线性微分方程

---

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

## 二阶常系数非齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

通解的求解步骤：

1. 求解齐次部分

$$y'' + py' + qy = 0$$

的通解

$$C_1y_1 + C_2y_2$$

2. 求出原方程的一个特解  $y^*$

3. 则原方程的通解为

$$y = y^* + C_1y_1 + C_2y_2$$

## 二阶常系数非齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

通解的求解步骤：

1. 求解齐次部分

$$y'' + py' + qy = 0$$

的通解

$$C_1y_1 + C_2y_2$$

2. 求出原方程的一个特解  $y^*$

3. 则原方程的通解为

$$y = y^* + C_1y_1 + C_2y_2$$

**注** 关键是求出一个特解

## 二阶常系数非齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

通解的求解步骤：

1. 求解齐次部分

$$y'' + py' + qy = 0$$

的通解

$$C_1y_1 + C_2y_2$$

2. 求出原方程的一个特解  $y^*$

3. 则原方程的通解为

$$y = y^* + C_1y_1 + C_2y_2$$

**注** 关键是求出一个特解，方法基本靠猜！



## 二阶常系数非齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

通解的求解步骤：

1. 求解齐次部分

$$y'' + py' + qy = 0$$

的通解

$$C_1y_1 + C_2y_2$$

2. 求出原方程的一个特解  $y^*$

3. 则原方程的通解为

$$y = y^* + C_1y_1 + C_2y_2$$

**注** 关键是求出一个特解，方法基本靠猜！（待定系数法）

例 求出下列方程的一个特解：

(1)  $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$ ; (2)  $y'' - 6y' + 9y = 5$ ; (3)  $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解

例 求出下列方程的一个特解：

(1)  $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$ ; (2)  $y'' - 6y' + 9y = 5$ ; (3)  $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解

1. 猜  $y^* = ax + b$ , 其中  $a, b$  待定。

例 求出下列方程的一个特解：

(1)  $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$ ; (2)  $y'' - 6y' + 9y = 5$ ; (3)  $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解

1. 猜  $y^* = ax + b$ ，其中  $a, b$  待定。代入方程得：

$$y^{*''} + 2y^{*'} + 4y^* =$$

例 求出下列方程的一个特解：

(1)  $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$ ; (2)  $y'' - 6y' + 9y = 5$ ; (3)  $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解

1. 猜  $y^* = ax + b$ ，其中  $a, b$  待定。代入方程得：

$$y^{*''} + 2y^{*'} + 4y^* = 0 +$$

例 求出下列方程的一个特解：

(1)  $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$ ; (2)  $y'' - 6y' + 9y = 5$ ; (3)  $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解

1. 猜  $y^* = ax + b$ ，其中  $a, b$  待定。代入方程得：

$$y^{*''} + 2y^{*'} + 4y^* = 0 + 2a$$

例 求出下列方程的一个特解：

(1)  $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$ ; (2)  $y'' - 6y' + 9y = 5$ ; (3)  $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解

1. 猜  $y^* = ax + b$ ，其中  $a, b$  待定。代入方程得：

$$y^{*''} + 2y^{*'} + 4y^* = 0 + 2a + 4(ax + b)$$

例 求出下列方程的一个特解：

(1)  $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$ ; (2)  $y'' - 6y' + 9y = 5$ ; (3)  $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解

1. 猜  $y^* = ax + b$ ，其中  $a, b$  待定。代入方程得：

$$y^{*''} + 2y^{*'} + 4y^* = 0 + 2a + 4(ax + b) = 2a + 4b + 4ax$$



例 求出下列方程的一个特解：

(1)  $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$ ; (2)  $y'' - 6y' + 9y = 5$ ; (3)  $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解

1. 猜  $y^* = ax + b$ ，其中  $a, b$  待定。代入方程得：

$$\begin{aligned} y^{*''} + 2y^{*'} + 4y^* &= 0 + 2a + 4(ax + b) = 2a + 4b + 4ax \\ &= 3 - 2x \end{aligned}$$

例 求出下列方程的一个特解：

(1)  $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$ ; (2)  $y'' - 6y' + 9y = 5$ ; (3)  $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解

1. 猜  $y^* = ax + b$ ，其中  $a, b$  待定。代入方程得：

$$\begin{aligned} y^{*''} + 2y^{*'} + 4y^* &= 0 + 2a + 4(ax + b) = 2a + 4b + 4ax \\ &= 3 - 2x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + 4b = 3 \\ 4a = -2 \end{cases}$$

例 求出下列方程的一个特解：

(1)  $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$ ; (2)  $y'' - 6y' + 9y = 5$ ; (3)  $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解

1. 猜  $y^* = ax + b$ ，其中  $a, b$  待定。代入方程得：

$$\begin{aligned} y^{*''} + 2y^{*'} + 4y^* &= 0 + 2a + 4(ax + b) = 2a + 4b + 4ax \\ &= 3 - 2x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + 4b = 3 \\ 4a = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

例 求出下列方程的一个特解：

(1)  $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$ ; (2)  $y'' - 6y' + 9y = 5$ ; (3)  $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解

1. 猜  $y^* = ax + b$ ，其中  $a, b$  待定。代入方程得：

$$\begin{aligned} y^{*''} + 2y^{*'} + 4y^* &= 0 + 2a + 4(ax + b) = 2a + 4b + 4ax \\ &= 3 - 2x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + 4b = 3 \\ 4a = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow y^* = -\frac{1}{2}x + 1$$

例 求出下列方程的一个特解：

(1)  $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$ ; (2)  $y'' - 6y' + 9y = 5$ ; (3)  $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解

1. 猜  $y^* = ax + b$ ，其中  $a, b$  待定。代入方程得：

$$\begin{aligned} y^{*''} + 2y^{*'} + 4y^* &= 0 + 2a + 4(ax + b) = 2a + 4b + 4ax \\ &= 3 - 2x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + 4b = 3 \\ 4a = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow y^* = -\frac{1}{2}x + 1$$

2. 显然  $y^* = \frac{5}{9}$

例 求出下列方程的一个特解：

(1)  $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$ ; (2)  $y'' - 6y' + 9y = 5$ ; (3)  $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解

1. 猜  $y^* = ax + b$ , 其中  $a, b$  待定。代入方程得：

$$\begin{aligned} y^{*''} + 2y^{*'} + 4y^* &= 0 + 2a + 4(ax + b) = 2a + 4b + 4ax \\ &= 3 - 2x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + 4b = 3 \\ 4a = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow y^* = -\frac{1}{2}x + 1$$

2. 显然  $y^* = \frac{5}{9}$

3. 猜  $y^* = ae^x$ , 其中  $a$  待定。

例 求出下列方程的一个特解：

(1)  $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$ ; (2)  $y'' - 6y' + 9y = 5$ ; (3)  $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解

1. 猜  $y^* = ax + b$ , 其中  $a, b$  待定。代入方程得：

$$\begin{aligned} y^{*''} + 2y^{*'} + 4y^* &= 0 + 2a + 4(ax + b) = 2a + 4b + 4ax \\ &= 3 - 2x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + 4b = 3 \\ 4a = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow y^* = -\frac{1}{2}x + 1$$

2. 显然  $y^* = \frac{5}{9}$

3. 猜  $y^* = ae^x$ , 其中  $a$  待定。代入方程

$$y^{*''} + 4y^{*'} - y^* =$$

例 求出下列方程的一个特解：

(1)  $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$ ; (2)  $y'' - 6y' + 9y = 5$ ; (3)  $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解

1. 猜  $y^* = ax + b$ , 其中  $a, b$  待定。代入方程得：

$$\begin{aligned} y^{*''} + 2y^{*'} + 4y^* &= 0 + 2a + 4(ax + b) = 2a + 4b + 4ax \\ &= 3 - 2x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + 4b = 3 \\ 4a = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow y^* = -\frac{1}{2}x + 1$$

2. 显然  $y^* = \frac{5}{9}$

3. 猜  $y^* = ae^x$ , 其中  $a$  待定。代入方程

$$y^{*''} + 4y^{*'} - y^* = ae^x$$



例 求出下列方程的一个特解：

(1)  $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$ ; (2)  $y'' - 6y' + 9y = 5$ ; (3)  $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解

1. 猜  $y^* = ax + b$ , 其中  $a, b$  待定。代入方程得：

$$\begin{aligned} y^{*''} + 2y^{*'} + 4y^* &= 0 + 2a + 4(ax + b) = 2a + 4b + 4ax \\ &= 3 - 2x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + 4b = 3 \\ 4a = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow y^* = -\frac{1}{2}x + 1$$

2. 显然  $y^* = \frac{5}{9}$

3. 猜  $y^* = ae^x$ , 其中  $a$  待定。代入方程

$$y^{*''} + 4y^{*'} - y^* = ae^x + 4ae^x$$

例 求出下列方程的一个特解：

(1)  $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$ ; (2)  $y'' - 6y' + 9y = 5$ ; (3)  $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解

1. 猜  $y^* = ax + b$ , 其中  $a, b$  待定。代入方程得：

$$\begin{aligned} y^{*''} + 2y^{*'} + 4y^* &= 0 + 2a + 4(ax + b) = 2a + 4b + 4ax \\ &= 3 - 2x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + 4b = 3 \\ 4a = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow y^* = -\frac{1}{2}x + 1$$

2. 显然  $y^* = \frac{5}{9}$

3. 猜  $y^* = ae^x$ , 其中  $a$  待定。代入方程

$$y^{*''} + 4y^{*'} - y^* = ae^x + 4ae^x - ae^x$$

例 求出下列方程的一个特解：

(1)  $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$ ; (2)  $y'' - 6y' + 9y = 5$ ; (3)  $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解

1. 猜  $y^* = ax + b$ , 其中  $a, b$  待定。代入方程得：

$$\begin{aligned} y^{*''} + 2y^{*'} + 4y^* &= 0 + 2a + 4(ax + b) = 2a + 4b + 4ax \\ &= 3 - 2x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + 4b = 3 \\ 4a = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow y^* = -\frac{1}{2}x + 1$$

2. 显然  $y^* = \frac{5}{9}$

3. 猜  $y^* = ae^x$ , 其中  $a$  待定。代入方程

$$y^{*''} + 4y^{*'} - y^* = ae^x + 4ae^x - ae^x = 4ae^x$$

例 求出下列方程的一个特解:

(1)  $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$ ; (2)  $y'' - 6y' + 9y = 5$ ; (3)  $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解

1. 猜  $y^* = ax + b$ , 其中  $a, b$  待定。代入方程得:

$$\begin{aligned} y^{*''} + 2y^{*'} + 4y^* &= 0 + 2a + 4(ax + b) = 2a + 4b + 4ax \\ &= 3 - 2x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + 4b = 3 \\ 4a = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow y^* = -\frac{1}{2}x + 1$$

2. 显然  $y^* = \frac{5}{9}$

3. 猜  $y^* = ae^x$ , 其中  $a$  待定。代入方程

$$y^{*''} + 4y^{*'} - y^* = ae^x + 4ae^x - ae^x = 4ae^x = 2e^x$$

例 求出下列方程的一个特解:

(1)  $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$ ; (2)  $y'' - 6y' + 9y = 5$ ; (3)  $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解

1. 猜  $y^* = ax + b$ , 其中  $a, b$  待定。代入方程得:

$$\begin{aligned} y^{*''} + 2y^{*'} + 4y^* &= 0 + 2a + 4(ax + b) = 2a + 4b + 4ax \\ &= 3 - 2x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + 4b = 3 \\ 4a = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow y^* = -\frac{1}{2}x + 1$$

2. 显然  $y^* = \frac{5}{9}$

3. 猜  $y^* = ae^x$ , 其中  $a$  待定。代入方程

$$y^{*''} + 4y^{*'} - y^* = ae^x + 4ae^x - ae^x = 4ae^x = 2e^x$$

$$\text{所以 } a = \frac{1}{2}, y^* = \frac{1}{2}e^x$$

例 求出下列方程的通解：

(1)  $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$ ; (2)  $y'' - 6y' + 9y = 5$ ; (3)  $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解

例 求出下列方程的通解：

(1)  $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$ ; (2)  $y'' - 6y' + 9y = 5$ ; (3)  $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解 (1) Step 1 求其次部分的通解

$$y'' + 2y' + 4y = 0$$

例 求出下列方程的通解：

(1)  $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$ ; (2)  $y'' - 6y' + 9y = 5$ ; (3)  $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解 (1) Step 1 求其次部分的通解

$$y'' + 2y' + 4y = 0$$

$$\Rightarrow r^2 + 2r + 4 = 0$$



例 求出下列方程的通解：

(1)  $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$ ; (2)  $y'' - 6y' + 9y = 5$ ; (3)  $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解 (1) Step 1 求其次部分的通解

$$y'' + 2y' + 4y = 0$$

$$\Rightarrow r^2 + 2r + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2}$$

例 求出下列方程的通解：

(1)  $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$ ; (2)  $y'' - 6y' + 9y = 5$ ; (3)  $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解 (1) Step 1 求其次部分的通解

$$y'' + 2y' + 4y = 0$$

$$\Rightarrow r^2 + 2r + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}i$$

例 求出下列方程的通解：

(1)  $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$ ; (2)  $y'' - 6y' + 9y = 5$ ; (3)  $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解 (1) Step 1 求其次部分的通解

$$y'' + 2y' + 4y = 0$$

$$\Rightarrow r^2 + 2r + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}i$$

$$\Rightarrow \text{齐次的通解是 } e^{-x} [C_1 \cos(\sqrt{3}x) + C_2 \sin(\sqrt{3}x)]$$

例 求出下列方程的通解：

(1)  $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$ ; (2)  $y'' - 6y' + 9y = 5$ ; (3)  $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解 (1) Step 1 求其次部分的通解

$$y'' + 2y' + 4y = 0$$

$$\Rightarrow r^2 + 2r + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}i$$

$$\Rightarrow \text{齐次的通解是 } e^{-x} [C_1 \cos(\sqrt{3}x) + C_2 \sin(\sqrt{3}x)i]$$

Step 2 原方程的一个特解是  $y^* = -\frac{1}{2}x + 1$

例 求出下列方程的通解：

(1)  $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$ ; (2)  $y'' - 6y' + 9y = 5$ ; (3)  $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解 (1) Step 1 求其次部分的通解

$$y'' + 2y' + 4y = 0$$

$$\Rightarrow r^2 + 2r + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}i$$

$$\Rightarrow \text{齐次的通解是 } e^{-x} [C_1 \cos(\sqrt{3}x) + C_2 \sin(\sqrt{3}x)i]$$

Step 2 原方程的一个特解是  $y^* = -\frac{1}{2}x + 1$

Step 3 所以原方程的通解是

例 求出下列方程的通解:

(1)  $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$ ; (2)  $y'' - 6y' + 9y = 5$ ; (3)  $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解 (1) Step 1 求其次部分的通解

$$y'' + 2y' + 4y = 0$$

$$\Rightarrow r^2 + 2r + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}i$$

$$\Rightarrow \text{齐次的通解是 } e^{-x} [C_1 \cos(\sqrt{3}x) + C_2 \sin(\sqrt{3}x)i]$$

Step 2 原方程的一个特解是  $y^* = -\frac{1}{2}x + 1$

Step 3 所以原方程的通解是

$$y = -\frac{1}{2}x + 1 + e^{-x} [C_1 \cos(\sqrt{3}x) + C_2 \sin(\sqrt{3}x)i]$$

例 求出下列方程的通解：

(1)  $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$ ; (2)  $y'' - 6y' + 9y = 5$ ; (3)  $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解

例 求出下列方程的通解：

(1)  $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$ ; (2)  $y'' - 6y' + 9y = 5$ ; (3)  $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解 (2) Step 1 求其次部分的通解

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$



例 求出下列方程的通解：

(1)  $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$ ; (2)  $y'' - 6y' + 9y = 5$ ; (3)  $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解 (2) Step 1 求其次部分的通解

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

$$\Rightarrow r^2 - 6r + 9 = 0$$

例 求出下列方程的通解：

(1)  $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$ ; (2)  $y'' - 6y' + 9y = 5$ ; (3)  $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解 (2) Step 1 求其次部分的通解

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

$$\Rightarrow r^2 - 6r + 9 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 3$$

例 求出下列方程的通解：

(1)  $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$ ; (2)  $y'' - 6y' + 9y = 5$ ; (3)  $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解 (2) Step 1 求其次部分的通解

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

$$\Rightarrow r^2 - 6r + 9 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 3$$

$$\Rightarrow \text{齐次的通解是 } (C_1 + C_2x)e^{3x}$$

例 求出下列方程的通解：

(1)  $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$ ; (2)  $y'' - 6y' + 9y = 5$ ; (3)  $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解 (2) Step 1 求其次部分的通解

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

$$\Rightarrow r^2 - 6r + 9 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 3$$

$$\Rightarrow \text{齐次的通解是 } (C_1 + C_2x)e^{3x}$$

Step 2 原方程的一个特解是  $y^* = \frac{5}{9}$

例 求出下列方程的通解：

(1)  $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$ ; (2)  $y'' - 6y' + 9y = 5$ ; (3)  $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解 (2) Step 1 求其次部分的通解

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

$$\Rightarrow r^2 - 6r + 9 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 3$$

$$\Rightarrow \text{齐次的通解是 } (C_1 + C_2x)e^{3x}$$

Step 2 原方程的一个特解是  $y^* = \frac{5}{9}$

Step 3 所以原方程的通解是

$$y = \frac{5}{9} + (C_1 + C_2x)e^{3x}$$

例 求出下列方程的通解：

(1)  $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$ ; (2)  $y'' - 6y' + 9y = 5$ ; (3)  $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解

例 求出下列方程的通解：

(1)  $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$ ; (2)  $y'' - 6y' + 9y = 5$ ; (3)  $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解 (3) Step 1 求其次部分的通解

$$y'' + 4y' - y = 0$$

例 求出下列方程的通解：

(1)  $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$ ; (2)  $y'' - 6y' + 9y = 5$ ; (3)  $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解 (3) Step 1 求其次部分的通解

$$y'' + 4y' - y = 0$$

$$\Rightarrow r^2 + 4r - 1 = 0$$



例 求出下列方程的通解：

(1)  $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$ ; (2)  $y'' - 6y' + 9y = 5$ ; (3)  $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解 (3) Step 1 求其次部分的通解

$$y'' + 4y' - y = 0$$

$$\Rightarrow r^2 + 4r - 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4}}{2}$$

例 求出下列方程的通解：

(1)  $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$ ; (2)  $y'' - 6y' + 9y = 5$ ; (3)  $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解 (3) Step 1 求其次部分的通解

$$y'' + 4y' - y = 0$$

$$\Rightarrow r^2 + 4r - 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4}}{2} = -2 \pm \sqrt{5}$$

例 求出下列方程的通解：

(1)  $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$ ; (2)  $y'' - 6y' + 9y = 5$ ; (3)  $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解 (3) Step 1 求其次部分的通解

$$y'' + 4y' - y = 0$$

$$\Rightarrow r^2 + 4r - 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4}}{2} = -2 \pm \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \text{齐次的通解是 } C_1 e^{(-2+\sqrt{5})x} + C_2 e^{(-2-\sqrt{5})x}$$

例 求出下列方程的通解：

(1)  $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$ ; (2)  $y'' - 6y' + 9y = 5$ ; (3)  $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解 (3) Step 1 求其次部分的通解

$$y'' + 4y' - y = 0$$

$$\Rightarrow r^2 + 4r - 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4}}{2} = -2 \pm \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \text{齐次的通解是 } C_1 e^{(-2+\sqrt{5})x} + C_2 e^{(-2-\sqrt{5})x}$$

Step 2 原方程的一个特解是  $y^* = \frac{1}{2}e^x$

例 求出下列方程的通解：

(1)  $y'' + 2y' + 4y = 3 - 2x$ ; (2)  $y'' - 6y' + 9y = 5$ ; (3)  $y'' + 4y' - y = 2e^x$

解 (3) Step 1 求其次部分的通解

$$y'' + 4y' - y = 0$$

$$\Rightarrow r^2 + 4r - 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4}}{2} = -2 \pm \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \text{齐次的通解是 } C_1 e^{(-2+\sqrt{5})x} + C_2 e^{(-2-\sqrt{5})x}$$

Step 2 原方程的一个特解是  $y^* = \frac{1}{2}e^x$

Step 3 所以原方程的通解是

$$y = \frac{1}{2}e^x + C_1 e^{(-2+\sqrt{5})x} + C_2 e^{(-2-\sqrt{5})x}$$

## 二阶常系数非齐次线性微分方程

回忆

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

的通解是

$$y = y^* + C_1y_1 + C_2y_2$$

## 二阶常系数非齐次线性微分方程

回忆

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

原方程的一个特解

的通解是

$$y = \boxed{y^*} + C_1y_1 + C_2y_2$$

## 二阶常系数非齐次线性微分方程

回忆

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

的通解是

原方程的一个特解

齐次部分  $y'' + py' + qy = 0$   
的两个线性无关特解

$$y = \boxed{y^*} + C_1 \boxed{y_1} + C_2 \boxed{y_2}$$



## 二阶常系数非齐次线性微分方程

回忆

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

的通解是

原方程的一个特解

齐次部分  $y'' + py' + qy = 0$  的两个线性无关特解

$$y = \boxed{y^*} + C_1 \boxed{y_1} + C_2 \boxed{y_2}$$

**目标** 对如下类型的  $f(x)$ ，掌握求方程特解的方法

- $f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$
- $f(x) = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos(\omega x) + Q_n(x) \sin(\omega x)]$

## 二阶常系数非齐次线性微分方程

回忆

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

的通解是

原方程的一个特解

齐次部分  $y'' + py' + qy = 0$  的两个线性无关特解

$$y = \boxed{y^*} + C_1 \boxed{y_1} + C_2 \boxed{y_2}$$

**目标** 对如下类型的  $f(x)$ ，掌握求方程特解的方法

- $f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$
- $f(x) = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos(\omega x) + Q_n(x) \sin(\omega x)]$

(其中  $P_m, P_l, Q_n$  分别为  $m, l, n$  次多项式)

## 二阶常系数非齐次线性微分方程

回忆

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

的通解是

原方程的一个特解

齐次部分  $y'' + py' + qy = 0$  的两个线性无关特解

$$y = \boxed{y^*} + C_1 \boxed{y_1} + C_2 \boxed{y_2}$$

**目标** 对如下类型的  $f(x)$ ，掌握求方程特解的方法（待定系数法）

- $f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$
- $f(x) = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos(\omega x) + Q_n(x) \sin(\omega x)]$

（其中  $P_m, P_l, Q_n$  分别为  $m, l, n$  次多项式）

目标 计算以下方程的一个特解  $y^*$  :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x)$$

计算步骤

目标 计算以下方程的一个特解  $y^*$  :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x)$$

## 计算步骤

1. 设  $y^* = e^{\lambda x} R(x)$  ( $R(x)$  为待定多项式)

目标 计算以下方程的一个特解  $y^*$  :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x)$$

## 计算步骤

1. 设  $y^* = e^{\lambda x} R(x)$  ( $R(x)$  为待定多项式), 代入原方程  
 $y'' + py' + qy$

目标 计算以下方程的一个特解  $y^*$  :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x)$$

## 计算步骤

1. 设  $y^* = e^{\lambda x} R(x)$  ( $R(x)$  为待定多项式), 代入原方程, 整理可得:

$$\begin{aligned} & y'' + py' + qy \\ &= e^{\lambda x} [R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x)] \end{aligned}$$

目标 计算以下方程的一个特解  $y^*$  :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x)$$

## 计算步骤

1. 设  $y^* = e^{\lambda x} R(x)$  ( $R(x)$  为待定多项式), 代入原方程, 整理可得:

$$\begin{aligned} & y'' + py' + qy \\ &= e^{\lambda x} [R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x)] = e^{\lambda x} P_m(x) \end{aligned}$$



目标 计算以下方程的一个特解  $y^*$  :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x)$$

## 计算步骤

1. 设  $y^* = e^{\lambda x} R(x)$  ( $R(x)$  为待定多项式), 代入原方程, 整理可得:

$$\begin{aligned} & y'' + py' + qy \\ &= e^{\lambda x} [R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x)] = e^{\lambda x} P_m(x) \end{aligned}$$

目标 计算以下方程的一个特解  $y^*$  :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x)$$

## 计算步骤

1. 设  $y^* = e^{\lambda x} R(x)$  ( $R(x)$  为待定多项式), 代入原方程, 整理可得:

$$[R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x)] = P_m(x)$$

目标 计算以下方程的一个特解  $y^*$  :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x)$$

## 计算步骤

1. 设  $y^* = e^{\lambda x} R(x)$  ( $R(x)$  为待定多项式), 代入原方程, 整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_m(x)$$

目标 计算以下方程的一个特解  $y^*$  :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x)$$

## 计算步骤

1. 设  $y^* = e^{\lambda x} R(x)$  ( $R(x)$  为待定多项式), 代入原方程, 整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_m(x)$$

2. 确定多项式  $R(x)$ :

目标 计算以下方程的一个特解  $y^*$  :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x)$$

## 计算步骤

1. 设  $y^* = e^{\lambda x} R(x)$  ( $R(x)$  为待定多项式), 代入原方程, 整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_m(x)$$

2. 确定多项式  $R(x)$ :

- $\lambda^2 + p\lambda + q \neq 0$

- $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$  但  $2\lambda + p \neq 0$

- $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$  且  $2\lambda + p = 0$

目标 计算以下方程的一个特解  $y^*$  :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x)$$

## 计算步骤

1. 设  $y^* = e^{\lambda x} R(x)$  ( $R(x)$  为待定多项式), 代入原方程, 整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_m(x)$$

2. 确定多项式  $R(x)$ :

- $\lambda^2 + p\lambda + q \neq 0$ , 则

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_m(x)$$

- $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$  但  $2\lambda + p \neq 0$

- $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$  且  $2\lambda + p = 0$

目标 计算以下方程的一个特解  $y^*$  :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x)$$

## 计算步骤

1. 设  $y^* = e^{\lambda x} R(x)$  ( $R(x)$  为待定多项式), 代入原方程, 整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_m(x)$$

2. 确定多项式  $R(x)$ :

- $\lambda^2 + p\lambda + q \neq 0$ , 则

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_m(x) \quad (R \text{ 为 } m \text{ 次})$$

- $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$  但  $2\lambda + p \neq 0$

- $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$  且  $2\lambda + p = 0$

目标 计算以下方程的一个特解  $y^*$  :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x)$$

## 计算步骤

1. 设  $y^* = e^{\lambda x} R(x)$  ( $R(x)$  为待定多项式), 代入原方程, 整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_m(x)$$

2. 确定多项式  $R(x)$ :

- $\lambda^2 + p\lambda + q \neq 0$ , 则

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_m(x) \quad (R \text{ 为 } m \text{ 次})$$

- $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$  但  $2\lambda + p \neq 0$ , 则

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) = P_m(x)$$

- $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$  且  $2\lambda + p = 0$



目标 计算以下方程的一个特解  $y^*$  :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x)$$

## 计算步骤

1. 设  $y^* = e^{\lambda x} R(x)$  ( $R(x)$  为待定多项式), 代入原方程, 整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_m(x)$$

2. 确定多项式  $R(x)$ :

- $\lambda^2 + p\lambda + q \neq 0$ , 则

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_m(x) \quad (R \text{ 为 } m \text{ 次})$$

- $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$  但  $2\lambda + p \neq 0$ , 则

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) = P_m(x) \quad (R' \text{ 为 } m \text{ 次})$$

- $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$  且  $2\lambda + p = 0$

目标 计算以下方程的一个特解  $y^*$  :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x)$$

## 计算步骤

1. 设  $y^* = e^{\lambda x} R(x)$  ( $R(x)$  为待定多项式), 代入原方程, 整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_m(x)$$

2. 确定多项式  $R(x)$ :

- $\lambda^2 + p\lambda + q \neq 0$ , 则

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_m(x) \quad (R \text{ 为 } m \text{ 次})$$

- $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$  但  $2\lambda + p \neq 0$ , 则

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) = P_m(x) \quad (R' \text{ 为 } m \text{ 次})$$

- $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$  且  $2\lambda + p = 0$ , 则

$$R''(x) = P_m(x)$$

目标 计算以下方程的一个特解  $y^*$  :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x)$$

## 计算步骤

1. 设  $y^* = e^{\lambda x} R(x)$  ( $R(x)$  为待定多项式), 代入原方程, 整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_m(x)$$

2. 确定多项式  $R(x)$ :

- $\lambda^2 + p\lambda + q \neq 0$ , 则

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_m(x) \quad (R \text{ 为 } m \text{ 次})$$

- $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$  但  $2\lambda + p \neq 0$ , 则

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) = P_m(x) \quad (R' \text{ 为 } m \text{ 次})$$

- $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$  且  $2\lambda + p = 0$ , 则

$$R''(x) = P_m(x) \quad (R'' \text{ 为 } m \text{ 次})$$

目标 计算以下方程的一个特解  $y^*$  :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x)$$

## 计算步骤

1. 设  $y^* = e^{\lambda x} R(x)$  ( $R(x)$  为待定多项式), 代入原方程, 整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_m(x)$$

2. 确定多项式  $R(x)$ :

- 若  $\lambda$  非特征方程的根:  $\lambda^2 + p\lambda + q \neq 0$ , 则

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_m(x) \quad (R \text{ 为 } m \text{ 次})$$

- $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$  但  $2\lambda + p \neq 0$ , 则

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) = P_m(x) \quad (R' \text{ 为 } m \text{ 次})$$

- $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$  且  $2\lambda + p = 0$ , 则

$$R''(x) = P_m(x) \quad (R'' \text{ 为 } m \text{ 次})$$

目标 计算以下方程的一个特解  $y^*$  :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x)$$

## 计算步骤

1. 设  $y^* = e^{\lambda x} R(x)$  ( $R(x)$  为待定多项式), 代入原方程, 整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_m(x)$$

2. 确定多项式  $R(x)$ :

- 若  $\lambda$  非特征方程的根:  $\lambda^2 + p\lambda + q \neq 0$ , 则

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_m(x) \quad (R \text{ 为 } m \text{ 次})$$

- 若  $\lambda$  为特征方程的单根:  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$  但  $2\lambda + p \neq 0$ , 则

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) = P_m(x) \quad (R' \text{ 为 } m \text{ 次})$$

- $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$  且  $2\lambda + p = 0$ , 则

$$R''(x) = P_m(x) \quad (R'' \text{ 为 } m \text{ 次})$$

目标 计算以下方程的一个特解  $y^*$  :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x)$$

## 计算步骤

1. 设  $y^* = e^{\lambda x} R(x)$  ( $R(x)$  为待定多项式), 代入原方程, 整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_m(x)$$

2. 确定多项式  $R(x)$ :

- 若  $\lambda$  非特征方程的根:  $\lambda^2 + p\lambda + q \neq 0$ , 则

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_m(x) \quad (R \text{ 为 } m \text{ 次})$$

- 若  $\lambda$  为特征方程的单根:  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$  但  $2\lambda + p \neq 0$ , 则

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) = P_m(x) \quad (R' \text{ 为 } m \text{ 次})$$

- 若  $\lambda$  为特征方程的重根:  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$  且  $2\lambda + p = 0$ , 则

$$R''(x) = P_m(x) \quad (R'' \text{ 为 } m \text{ 次})$$

例 计算  $y'' - 2y' - y = (3x + 1)e^{2x}$  的一个特解。

例 计算  $y'' - 2y' - y = (3x + 1)e^{2x}$  的一个特解。

解  $f(x) = (3x + 1)e^{2x} = P_m e^{\lambda x}$ ,



例 计算  $y'' - 2y' - y = (3x + 1)e^{2x}$  的一个特解。

解  $f(x) = (3x + 1)e^{2x} = P_m e^{\lambda x}$ ,  $\lambda = 2$ ,

例 计算  $y'' - 2y' - y = (3x + 1)e^{2x}$  的一个特解。

解  $f(x) = (3x + 1)e^{2x} = P_m e^{\lambda x}$ ,  $\lambda = 2$ ,  $P_m = P_1 = 3x + 1$ 。

例 计算  $y'' - 2y' - y = (3x + 1)e^{2x}$  的一个特解。

解  $f(x) = (3x + 1)e^{2x} = P_m e^{\lambda x}$ ,  $\lambda = 2$ ,  $P_m = P_1 = 3x + 1$ 。

1. 设  $y^* = e^{\lambda x} R(x)$  ( $R(x)$  为待定多项式)

例 计算  $y'' - 2y' - y = (3x + 1)e^{2x}$  的一个特解。

解  $f(x) = (3x + 1)e^{2x} = P_m e^{\lambda x}$ ,  $\lambda = 2$ ,  $P_m = P_1 = 3x + 1$ 。

1. 设  $y^* = e^{\lambda x} R(x)$  ( $R(x)$  为待定多项式), 代入原方程整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_1(x)$$

例 计算  $y'' - 2y' - y = (3x + 1)e^{2x}$  的一个特解。

解  $f(x) = (3x + 1)e^{2x} = P_m e^{\lambda x}$ ,  $\lambda = 2$ ,  $P_m = P_1 = 3x + 1$ 。

1. 设  $y^* = e^{\lambda x} R(x)$  ( $R(x)$  为待定多项式), 代入原方程整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_1(x)$$

$$\Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 2)R'(x) + (\lambda^2 - 2\lambda - 1)R(x) = 3x + 1$$

例 计算  $y'' - 2y' - y = (3x + 1)e^{2x}$  的一个特解。

解  $f(x) = (3x + 1)e^{2x} = P_m e^{\lambda x}$ ,  $\lambda = 2$ ,  $P_m = P_1 = 3x + 1$ 。

1. 设  $y^* = e^{\lambda x} R(x)$  ( $R(x)$  为待定多项式), 代入原方程整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_1(x)$$

$$\Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 2)R'(x) + (\lambda^2 - 2\lambda - 1)R(x) = 3x + 1$$

$$\Rightarrow R''(x) + 2R'(x) - R(x) = 3x + 1$$

例 计算  $y'' - 2y' - y = (3x + 1)e^{2x}$  的一个特解。

解  $f(x) = (3x + 1)e^{2x} = P_m e^{\lambda x}$ ,  $\lambda = 2$ ,  $P_m = P_1 = 3x + 1$ 。

1. 设  $y^* = e^{\lambda x} R(x)$  ( $R(x)$  为待定多项式), 代入原方程整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_1(x)$$

$$\Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 2)R'(x) + (\lambda^2 - 2\lambda - 1)R(x) = 3x + 1$$

$$\Rightarrow R''(x) + 2R'(x) - R(x) = 3x + 1 \quad (R(x) \text{ 为 1 次多项式})$$

例 计算  $y'' - 2y' - y = (3x + 1)e^{2x}$  的一个特解。

解  $f(x) = (3x + 1)e^{2x} = P_m e^{\lambda x}$ ,  $\lambda = 2$ ,  $P_m = P_1 = 3x + 1$ 。

1. 设  $y^* = e^{\lambda x} R(x)$  ( $R(x)$  为待定多项式), 代入原方程整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_1(x)$$

$$\Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 2)R'(x) + (\lambda^2 - 2\lambda - 1)R(x) = 3x + 1$$

$$\Rightarrow R''(x) + 2R'(x) - R(x) = 3x + 1 \quad (R(x) \text{ 为 1 次多项式})$$

2. 设  $R(x) = ax + b$



例 计算  $y'' - 2y' - y = (3x + 1)e^{2x}$  的一个特解。

解  $f(x) = (3x + 1)e^{2x} = P_m e^{\lambda x}$ ,  $\lambda = 2$ ,  $P_m = P_1 = 3x + 1$ 。

1. 设  $y^* = e^{\lambda x} R(x)$  ( $R(x)$  为待定多项式), 代入原方程整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_1(x)$$

$$\Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 2)R'(x) + (\lambda^2 - 2\lambda - 1)R(x) = 3x + 1$$

$$\Rightarrow R''(x) + 2R'(x) - R(x) = 3x + 1 \quad (R(x) \text{ 为 1 次多项式})$$

2. 设  $R(x) = ax + b$ , 则

$$R''(x) + 2R'(x) - R(x) =$$

例 计算  $y'' - 2y' - y = (3x + 1)e^{2x}$  的一个特解。

解  $f(x) = (3x + 1)e^{2x} = P_m e^{\lambda x}$ ,  $\lambda = 2$ ,  $P_m = P_1 = 3x + 1$ 。

1. 设  $y^* = e^{\lambda x} R(x)$  ( $R(x)$  为待定多项式), 代入原方程整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_1(x)$$

$$\Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 2)R'(x) + (\lambda^2 - 2\lambda - 1)R(x) = 3x + 1$$

$$\Rightarrow R''(x) + 2R'(x) - R(x) = 3x + 1 \quad (R(x) \text{ 为 1 次多项式})$$

2. 设  $R(x) = ax + b$ , 则

$$R''(x) + 2R'(x) - R(x) = 2a$$

例 计算  $y'' - 2y' - y = (3x + 1)e^{2x}$  的一个特解。

解  $f(x) = (3x + 1)e^{2x} = P_m e^{\lambda x}$ ,  $\lambda = 2$ ,  $P_m = P_1 = 3x + 1$ 。

1. 设  $y^* = e^{\lambda x} R(x)$  ( $R(x)$  为待定多项式), 代入原方程整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_1(x)$$

$$\Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 2)R'(x) + (\lambda^2 - 2\lambda - 1)R(x) = 3x + 1$$

$$\Rightarrow R''(x) + 2R'(x) - R(x) = 3x + 1 \quad (R(x) \text{ 为 1 次多项式})$$

2. 设  $R(x) = ax + b$ , 则

$$R''(x) + 2R'(x) - R(x) = 2a - (ax + b)$$

例 计算  $y'' - 2y' - y = (3x + 1)e^{2x}$  的一个特解。

解  $f(x) = (3x + 1)e^{2x} = P_m e^{\lambda x}$ ,  $\lambda = 2$ ,  $P_m = P_1 = 3x + 1$ 。

1. 设  $y^* = e^{\lambda x} R(x)$  ( $R(x)$  为待定多项式), 代入原方程整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_1(x)$$

$$\Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 2)R'(x) + (\lambda^2 - 2\lambda - 1)R(x) = 3x + 1$$

$$\Rightarrow R''(x) + 2R'(x) - R(x) = 3x + 1 \quad (R(x) \text{ 为 1 次多项式})$$

2. 设  $R(x) = ax + b$ , 则

$$R''(x) + 2R'(x) - R(x) = 2a - (ax + b) = -ax + 2a - b$$

例 计算  $y'' - 2y' - y = (3x + 1)e^{2x}$  的一个特解。

解  $f(x) = (3x + 1)e^{2x} = P_m e^{\lambda x}$ ,  $\lambda = 2$ ,  $P_m = P_1 = 3x + 1$ 。

1. 设  $y^* = e^{\lambda x} R(x)$  ( $R(x)$  为待定多项式), 代入原方程整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_1(x)$$

$$\Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 2)R'(x) + (\lambda^2 - 2\lambda - 1)R(x) = 3x + 1$$

$$\Rightarrow R''(x) + 2R'(x) - R(x) = 3x + 1 \quad (R(x) \text{ 为 1 次多项式})$$

2. 设  $R(x) = ax + b$ , 则

$$R''(x) + 2R'(x) - R(x) = 2a - (ax + b) = -ax + 2a - b = 3x + 1$$

例 计算  $y'' - 2y' - y = (3x + 1)e^{2x}$  的一个特解。

解  $f(x) = (3x + 1)e^{2x} = P_m e^{\lambda x}$ ,  $\lambda = 2$ ,  $P_m = P_1 = 3x + 1$ 。

1. 设  $y^* = e^{\lambda x} R(x)$  ( $R(x)$  为待定多项式), 代入原方程整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_1(x)$$

$$\Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 2)R'(x) + (\lambda^2 - 2\lambda - 1)R(x) = 3x + 1$$

$$\Rightarrow R''(x) + 2R'(x) - R(x) = 3x + 1 \quad (R(x) \text{ 为 1 次多项式})$$

2. 设  $R(x) = ax + b$ , 则

$$R''(x) + 2R'(x) - R(x) = 2a - (ax + b) = -ax + 2a - b = 3x + 1$$

所以 
$$\begin{cases} -a = 3 \\ 2a - b = 1 \end{cases}$$

例 计算  $y'' - 2y' - y = (3x + 1)e^{2x}$  的一个特解。

解  $f(x) = (3x + 1)e^{2x} = P_m e^{\lambda x}$ ,  $\lambda = 2$ ,  $P_m = P_1 = 3x + 1$ 。

1. 设  $y^* = e^{\lambda x} R(x)$  ( $R(x)$  为待定多项式), 代入原方程整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_1(x)$$

$$\Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 2)R'(x) + (\lambda^2 - 2\lambda - 1)R(x) = 3x + 1$$

$$\Rightarrow R''(x) + 2R'(x) - R(x) = 3x + 1 \quad (R(x) \text{ 为 1 次多项式})$$

2. 设  $R(x) = ax + b$ , 则

$$R''(x) + 2R'(x) - R(x) = 2a - (ax + b) = -ax + 2a - b = 3x + 1$$

所以

$$\begin{cases} -a = 3 \\ 2a - b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -7 \end{cases}$$

例 计算  $y'' - 2y' - y = (3x + 1)e^{2x}$  的一个特解。

解  $f(x) = (3x + 1)e^{2x} = P_m e^{\lambda x}$ ,  $\lambda = 2$ ,  $P_m = P_1 = 3x + 1$ 。

1. 设  $y^* = e^{\lambda x} R(x)$  ( $R(x)$  为待定多项式), 代入原方程整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_1(x)$$

$$\Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 2)R'(x) + (\lambda^2 - 2\lambda - 1)R(x) = 3x + 1$$

$$\Rightarrow R''(x) + 2R'(x) - R(x) = 3x + 1 \quad (R(x) \text{ 为 1 次多项式})$$

2. 设  $R(x) = ax + b$ , 则

$$R''(x) + 2R'(x) - R(x) = 2a - (ax + b) = -ax + 2a - b = 3x + 1$$

所以 
$$\begin{cases} -a = 3 \\ 2a - b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -7 \end{cases} \Rightarrow R(x) = -3x - 7$$



例 计算  $y'' - 2y' - y = (3x + 1)e^{2x}$  的一个特解。

解  $f(x) = (3x + 1)e^{2x} = P_m e^{\lambda x}$ ,  $\lambda = 2$ ,  $P_m = P_1 = 3x + 1$ 。

1. 设  $y^* = e^{\lambda x} R(x)$  ( $R(x)$  为待定多项式), 代入原方程整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_1(x)$$

$$\Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 2)R'(x) + (\lambda^2 - 2\lambda - 1)R(x) = 3x + 1$$

$$\Rightarrow R''(x) + 2R'(x) - R(x) = 3x + 1 \quad (R(x) \text{ 为 1 次多项式})$$

2. 设  $R(x) = ax + b$ , 则

$$R''(x) + 2R'(x) - R(x) = 2a - (ax + b) = -ax + 2a - b = 3x + 1$$

$$\text{所以} \quad \begin{cases} -a = 3 \\ 2a - b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -7 \end{cases} \Rightarrow R(x) = -3x - 7$$

$$\text{所以 } y^* = (-3x - 7)e^{2x}$$

例 计算  $y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$  的一个特解。

例 计算  $y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$  的一个特解。

解  $f(x) = xe^{2x} = P_me^{\lambda x}$ ,

例 计算  $y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$  的一个特解。

解  $f(x) = xe^{2x} = P_m e^{\lambda x}$ ,  $\lambda = 2$ ,

例 计算  $y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$  的一个特解。

解  $f(x) = xe^{2x} = P_m e^{\lambda x}$ ,  $\lambda = 2$ ,  $P_m = P_1 = x$ 。

例 计算  $y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$  的一个特解。

解  $f(x) = xe^{2x} = P_m e^{\lambda x}$ ,  $\lambda = 2$ ,  $P_m = P_1 = x$ 。

1. 设  $y^* = e^{\lambda x} R(x)$  ( $R(x)$  为待定多项式)

例 计算  $y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$  的一个特解。

解  $f(x) = xe^{2x} = P_me^{\lambda x}$ ,  $\lambda = 2$ ,  $P_m = P_1 = x$ 。

1. 设  $y^* = e^{\lambda x}R(x)$  ( $R(x)$  为待定多项式), 代入原方程整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_1(x)$$

例 计算  $y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$  的一个特解。

解  $f(x) = xe^{2x} = P_m e^{\lambda x}$ ,  $\lambda = 2$ ,  $P_m = P_1 = x$ 。

1. 设  $y^* = e^{\lambda x} R(x)$  ( $R(x)$  为待定多项式), 代入原方程整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_1(x)$$

$$\Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 5)R'(x) + (\lambda^2 - 5\lambda + 6)R(x) = x$$



例 计算  $y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$  的一个特解。

解  $f(x) = xe^{2x} = P_m e^{\lambda x}$ ,  $\lambda = 2$ ,  $P_m = P_1 = x$ 。

1. 设  $y^* = e^{\lambda x} R(x)$  ( $R(x)$  为待定多项式), 代入原方程整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_1(x)$$

$$\Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 5)R'(x) + (\lambda^2 - 5\lambda + 6)R(x) = x$$

$$\Rightarrow R''(x) - R'(x) = x$$

例 计算  $y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$  的一个特解。

解  $f(x) = xe^{2x} = P_m e^{\lambda x}$ ,  $\lambda = 2$ ,  $P_m = P_1 = x$ 。

1. 设  $y^* = e^{\lambda x} R(x)$  ( $R(x)$  为待定多项式), 代入原方程整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_1(x)$$

$$\Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 5)R'(x) + (\lambda^2 - 5\lambda + 6)R(x) = x$$

$$\Rightarrow R''(x) - R'(x) = x \quad (R'(x) \text{ 为 1 次多项式})$$

例 计算  $y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$  的一个特解。

解  $f(x) = xe^{2x} = P_m e^{\lambda x}$ ,  $\lambda = 2$ ,  $P_m = P_1 = x$ 。

1. 设  $y^* = e^{\lambda x} R(x)$  ( $R(x)$  为待定多项式), 代入原方程整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_1(x)$$

$$\Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 5)R'(x) + (\lambda^2 - 5\lambda + 6)R(x) = x$$

$$\Rightarrow R''(x) - R'(x) = x \quad (R'(x) \text{ 为 1 次多项式})$$

2. 设  $R'(x) = ax + b$

例 计算  $y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$  的一个特解。

解  $f(x) = xe^{2x} = P_m e^{\lambda x}$ ,  $\lambda = 2$ ,  $P_m = P_1 = x$ 。

1. 设  $y^* = e^{\lambda x} R(x)$  ( $R(x)$  为待定多项式), 代入原方程整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_1(x)$$

$$\Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 5)R'(x) + (\lambda^2 - 5\lambda + 6)R(x) = x$$

$$\Rightarrow R''(x) - R'(x) = x \quad (R'(x) \text{ 为 1 次多项式})$$

2. 设  $R'(x) = ax + b$ , 则

$$R''(x) - R'(x) =$$

例 计算  $y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$  的一个特解。

解  $f(x) = xe^{2x} = P_m e^{\lambda x}$ ,  $\lambda = 2$ ,  $P_m = P_1 = x$ 。

1. 设  $y^* = e^{\lambda x} R(x)$  ( $R(x)$  为待定多项式), 代入原方程整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_1(x)$$

$$\Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 5)R'(x) + (\lambda^2 - 5\lambda + 6)R(x) = x$$

$$\Rightarrow R''(x) - R'(x) = x \quad (R'(x) \text{ 为 1 次多项式})$$

2. 设  $R'(x) = ax + b$ , 则

$$R''(x) - R'(x) = a$$

例 计算  $y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$  的一个特解。

解  $f(x) = xe^{2x} = P_m e^{\lambda x}$ ,  $\lambda = 2$ ,  $P_m = P_1 = x$ 。

1. 设  $y^* = e^{\lambda x} R(x)$  ( $R(x)$  为待定多项式), 代入原方程整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_1(x)$$

$$\Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 5)R'(x) + (\lambda^2 - 5\lambda + 6)R(x) = x$$

$$\Rightarrow R''(x) - R'(x) = x \quad (R'(x) \text{ 为 1 次多项式})$$

2. 设  $R'(x) = ax + b$ , 则

$$R''(x) - R'(x) = a - (ax + b)$$

例 计算  $y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$  的一个特解。

解  $f(x) = xe^{2x} = P_me^{\lambda x}$ ,  $\lambda = 2$ ,  $P_m = P_1 = x$ 。

1. 设  $y^* = e^{\lambda x}R(x)$  ( $R(x)$  为待定多项式), 代入原方程整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_1(x)$$

$$\Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 5)R'(x) + (\lambda^2 - 5\lambda + 6)R(x) = x$$

$$\Rightarrow R''(x) - R'(x) = x \quad (R'(x) \text{ 为 1 次多项式})$$

2. 设  $R'(x) = ax + b$ , 则

$$R''(x) - R'(x) = a - (ax + b) = -ax + a - b$$

例 计算  $y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$  的一个特解。

解  $f(x) = xe^{2x} = P_me^{\lambda x}$ ,  $\lambda = 2$ ,  $P_m = P_1 = x$ 。

1. 设  $y^* = e^{\lambda x}R(x)$  ( $R(x)$  为待定多项式), 代入原方程整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_1(x)$$

$$\Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 5)R'(x) + (\lambda^2 - 5\lambda + 6)R(x) = x$$

$$\Rightarrow R''(x) - R'(x) = x \quad (R'(x) \text{ 为 1 次多项式})$$

2. 设  $R'(x) = ax + b$ , 则

$$R''(x) - R'(x) = a - (ax + b) = -ax + a - b = x$$



例 计算  $y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$  的一个特解。

解  $f(x) = xe^{2x} = P_me^{\lambda x}$ ,  $\lambda = 2$ ,  $P_m = P_1 = x$ 。

1. 设  $y^* = e^{\lambda x}R(x)$  ( $R(x)$  为待定多项式), 代入原方程整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_1(x)$$

$$\Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 5)R'(x) + (\lambda^2 - 5\lambda + 6)R(x) = x$$

$$\Rightarrow R''(x) - R'(x) = x \quad (R'(x) \text{ 为 1 次多项式})$$

2. 设  $R'(x) = ax + b$ , 则

$$R''(x) - R'(x) = a - (ax + b) = -ax + a - b = x$$

所以 
$$\begin{cases} -a = 1 \\ a - b = 0 \end{cases}$$

例 计算  $y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$  的一个特解。

解  $f(x) = xe^{2x} = P_me^{\lambda x}$ ,  $\lambda = 2$ ,  $P_m = P_1 = x$ 。

1. 设  $y^* = e^{\lambda x}R(x)$  ( $R(x)$  为待定多项式), 代入原方程整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_1(x)$$

$$\Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 5)R'(x) + (\lambda^2 - 5\lambda + 6)R(x) = x$$

$$\Rightarrow R''(x) - R'(x) = x \quad (R'(x) \text{ 为 1 次多项式})$$

2. 设  $R'(x) = ax + b$ , 则

$$R''(x) - R'(x) = a - (ax + b) = -ax + a - b = x$$

所以

$$\begin{cases} -a = 1 \\ a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$$

例 计算  $y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$  的一个特解。

解  $f(x) = xe^{2x} = P_me^{\lambda x}$ ,  $\lambda = 2$ ,  $P_m = P_1 = x$ 。

1. 设  $y^* = e^{\lambda x}R(x)$  ( $R(x)$  为待定多项式), 代入原方程整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_1(x)$$

$$\Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 5)R'(x) + (\lambda^2 - 5\lambda + 6)R(x) = x$$

$$\Rightarrow R''(x) - R'(x) = x \quad (R'(x) \text{ 为 1 次多项式})$$

2. 设  $R'(x) = ax + b$ , 则

$$R''(x) - R'(x) = a - (ax + b) = -ax + a - b = x$$

所以 
$$\begin{cases} -a = 1 \\ a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow R'(x) = -x - 1$$

例 计算  $y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$  的一个特解。

解  $f(x) = xe^{2x} = P_m e^{\lambda x}$ ,  $\lambda = 2$ ,  $P_m = P_1 = x$ 。

1. 设  $y^* = e^{\lambda x} R(x)$  ( $R(x)$  为待定多项式), 代入原方程整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_1(x)$$

$$\Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 5)R'(x) + (\lambda^2 - 5\lambda + 6)R(x) = x$$

$$\Rightarrow R''(x) - R'(x) = x \quad (R'(x) \text{ 为 1 次多项式})$$

2. 设  $R'(x) = ax + b$ , 则

$$R''(x) - R'(x) = a - (ax + b) = -ax + a - b = x$$

$$\text{所以} \quad \begin{cases} -a = 1 \\ a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow R'(x) = -x - 1$$

不妨取  $R(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x$ ,

**例** 计算  $y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$  的一个特解。

**解**  $f(x) = xe^{2x} = P_me^{\lambda x}$ ,  $\lambda = 2$ ,  $P_m = P_1 = x$ 。

1. 设  $y^* = e^{\lambda x}R(x)$  ( $R(x)$  为待定多项式), 代入原方程整理可得:

$$\begin{aligned} R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) &= P_1(x) \\ \Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 5)R'(x) + (\lambda^2 - 5\lambda + 6)R(x) &= x \\ \Rightarrow R''(x) - R'(x) &= x \quad (R'(x) \text{ 为 1 次多项式}) \end{aligned}$$

2. 设  $R'(x) = ax + b$ , 则

$$R''(x) - R'(x) = a - (ax + b) = -ax + a - b = x$$

所以 
$$\begin{cases} -a = 1 \\ a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow R'(x) = -x - 1$$

不妨取  $R(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x$ , 所以  $y^* = (-\frac{1}{2}x^2 - x)e^{2x}$

例 计算  $y'' - 6y' + 9y = (x + 1)e^{3x}$  的一个特解。

例 计算  $y'' - 6y' + 9y = (x + 1)e^{3x}$  的一个特解。

解  $f(x) = (x + 1)e^{3x} = P_m e^{\lambda x},$

例 计算  $y'' - 6y' + 9y = (x + 1)e^{3x}$  的一个特解。

解  $f(x) = (x + 1)e^{3x} = P_m e^{\lambda x}$ ,  $\lambda = 3$ ,



例 计算  $y'' - 6y' + 9y = (x + 1)e^{3x}$  的一个特解。

解  $f(x) = (x + 1)e^{3x} = P_m e^{\lambda x}$ ,  $\lambda = 3$ ,  $P_m = P_1 = (x + 1)$ 。

例 计算  $y'' - 6y' + 9y = (x + 1)e^{3x}$  的一个特解。

解  $f(x) = (x + 1)e^{3x} = P_m e^{\lambda x}$ ,  $\lambda = 3$ ,  $P_m = P_1 = (x + 1)$ 。

1. 设  $y^* = e^{\lambda x} R(x)$  ( $R(x)$  为待定多项式)

例 计算  $y'' - 6y' + 9y = (x + 1)e^{3x}$  的一个特解。

解  $f(x) = (x + 1)e^{3x} = P_m e^{\lambda x}$ ,  $\lambda = 3$ ,  $P_m = P_1 = (x + 1)$ 。

1. 设  $y^* = e^{\lambda x} R(x)$  ( $R(x)$  为待定多项式), 代入原方程整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_1(x)$$

例 计算  $y'' - 6y' + 9y = (x + 1)e^{3x}$  的一个特解。

解  $f(x) = (x + 1)e^{3x} = P_m e^{\lambda x}$ ,  $\lambda = 3$ ,  $P_m = P_1 = (x + 1)$ 。

1. 设  $y^* = e^{\lambda x} R(x)$  ( $R(x)$  为待定多项式), 代入原方程整理可得:

$$\begin{aligned} R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) &= P_1(x) \\ \Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 6)R'(x) + (\lambda^2 - 6\lambda + 9)R(x) &= x + 1 \end{aligned}$$

例 计算  $y'' - 6y' + 9y = (x + 1)e^{3x}$  的一个特解。

解  $f(x) = (x + 1)e^{3x} = P_m e^{\lambda x}$ ,  $\lambda = 3$ ,  $P_m = P_1 = (x + 1)$ 。

1. 设  $y^* = e^{\lambda x} R(x)$  ( $R(x)$  为待定多项式), 代入原方程整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_1(x)$$

$$\Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 6)R'(x) + (\lambda^2 - 6\lambda + 9)R(x) = x + 1$$

$$\Rightarrow R''(x) = x + 1$$

例 计算  $y'' - 6y' + 9y = (x + 1)e^{3x}$  的一个特解。

解  $f(x) = (x + 1)e^{3x} = P_m e^{\lambda x}$ ,  $\lambda = 3$ ,  $P_m = P_1 = (x + 1)$ 。

1. 设  $y^* = e^{\lambda x} R(x)$  ( $R(x)$  为待定多项式), 代入原方程整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_1(x)$$

$$\Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 6)R'(x) + (\lambda^2 - 6\lambda + 9)R(x) = x + 1$$

$$\Rightarrow R''(x) = x + 1$$

2. 不妨取  $R'(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$ ,

例 计算  $y'' - 6y' + 9y = (x + 1)e^{3x}$  的一个特解。

解  $f(x) = (x + 1)e^{3x} = P_m e^{\lambda x}$ ,  $\lambda = 3$ ,  $P_m = P_1 = (x + 1)$ 。

1. 设  $y^* = e^{\lambda x} R(x)$  ( $R(x)$  为待定多项式), 代入原方程整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_1(x)$$

$$\Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 6)R'(x) + (\lambda^2 - 6\lambda + 9)R(x) = x + 1$$

$$\Rightarrow R''(x) = x + 1$$

2. 不妨取  $R'(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$ ,  $R(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2$ ,

例 计算  $y'' - 6y' + 9y = (x + 1)e^{3x}$  的一个特解。

解  $f(x) = (x + 1)e^{3x} = P_m e^{\lambda x}$ ,  $\lambda = 3$ ,  $P_m = P_1 = (x + 1)$ 。

1. 设  $y^* = e^{\lambda x} R(x)$  ( $R(x)$  为待定多项式), 代入原方程整理可得:

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_1(x)$$

$$\Rightarrow R''(x) + (2\lambda - 6)R'(x) + (\lambda^2 - 6\lambda + 9)R(x) = x + 1$$

$$\Rightarrow R''(x) = x + 1$$

2. 不妨取  $R'(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$ ,  $R(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2$ , 所以

$$y^* = \left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)e^{3x}$$



目标 计算以下方程的一个特解  $y^*$  :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos(\omega x) + Q_n(x) \sin(\omega x)]$$

计算步骤 设  
 $y^* =$

目标 计算以下方程的一个特解  $y^*$  :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos(\omega x) + Q_n(x) \sin(\omega x)]$$

计算步骤 设

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos(\omega x) + R_m^{(2)}(x) \sin(\omega x)]$$

目标 计算以下方程的一个特解  $y^*$  :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos(\omega x) + Q_n(x) \sin(\omega x)]$$

计算步骤 设

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos(\omega x) + R_m^{(2)}(x) \sin(\omega x)]$$

$$k = \begin{cases} 0 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 非特征值} \\ 1 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 为特征值} \end{cases}$$

目标 计算以下方程的一个特解  $y^*$  :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos(\omega x) + Q_n(x) \sin(\omega x)]$$

计算步骤 设

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos(\omega x) + R_m^{(2)}(x) \sin(\omega x)]$$

$$k = \begin{cases} 0 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 非特征值} \\ 1 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 为特征值} \end{cases}$$

$R_m^{(1)}, R_m^{(2)}$  为  $m$  次待定多项式  
 $m = \max\{l, n\}$

目标 计算以下方程的一个特解  $y^*$  :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos(\omega x) + Q_n(x) \sin(\omega x)]$$

计算步骤 设

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos(\omega x) + R_m^{(2)}(x) \sin(\omega x)]$$

$$k = \begin{cases} 0 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 非特征值} \\ 1 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 为特征值} \end{cases}$$

$R_m^{(1)}, R_m^{(2)}$  为  $m$  次待定多项式  
 $m = \max\{l, n\}$

---

例 计算  $y'' - y = e^x \cos(2x)$  的通解。

目标 计算以下方程的一个特解  $y^*$  :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos(\omega x) + Q_n(x) \sin(\omega x)]$$

计算步骤 设

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos(\omega x) + R_m^{(2)}(x) \sin(\omega x)]$$

$$k = \begin{cases} 0 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 非特征值} \\ 1 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 为特征值} \end{cases}$$

$R_m^{(1)}, R_m^{(2)}$  为  $m$  次待定多项式  
 $m = \max\{l, n\}$

例 计算  $y'' - y = e^x \cos(2x)$  的通解。

解 1. 特征方程:  $r^2 - 1 = 0$ ,

**目标** 计算以下方程的一个特解  $y^*$  :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos(\omega x) + Q_n(x) \sin(\omega x)]$$

**计算步骤** 设

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos(\omega x) + R_m^{(2)}(x) \sin(\omega x)]$$

$$k = \begin{cases} 0 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 非特征值} \\ 1 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 为特征值} \end{cases}$$

$R_m^{(1)}, R_m^{(2)}$  为  $m$  次待定多项式  
 $m = \max\{l, n\}$

---

**例** 计算  $y'' - y = e^x \cos(2x)$  的通解。

**解 1.** 特征方程:  $r^2 - 1 = 0$ , 特征值:  $r_{1,2} = \pm 1$ ,

**目标** 计算以下方程的一个特解  $y^*$  :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos(\omega x) + Q_n(x) \sin(\omega x)]$$

**计算步骤** 设

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos(\omega x) + R_m^{(2)}(x) \sin(\omega x)]$$

$$k = \begin{cases} 0 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 非特征值} \\ 1 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 为特征值} \end{cases}$$

$R_m^{(1)}, R_m^{(2)}$  为  $m$  次待定多项式  
 $m = \max\{l, n\}$

**例** 计算  $y'' - y = e^x \cos(2x)$  的通解。

**解 1.** 特征方程:  $r^2 - 1 = 0$ , 特征值:  $r_{1,2} = \pm 1$ , 齐次部分  $y'' - y = 0$  的通解是  $C_1 e^x + C_2 e^{-x}$



**目标** 计算以下方程的一个特解  $y^*$  :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos(\omega x) + Q_n(x) \sin(\omega x)]$$

**计算步骤** 设

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos(\omega x) + R_m^{(2)}(x) \sin(\omega x)]$$

$$k = \begin{cases} 0 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 非特征值} \\ 1 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 为特征值} \end{cases}$$

$R_m^{(1)}, R_m^{(2)}$  为  $m$  次待定多项式  
 $m = \max\{l, n\}$

**例** 计算  $y'' - y = e^x \cos(2x)$  的通解。

**解 1.** 特征方程:  $r^2 - 1 = 0$ , 特征值:  $r_{1,2} = \pm 1$ , 齐次部分  $y'' - y = 0$  的通解是  $C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

**2.**  $\lambda =$  ,  $\omega =$  ,

**目标** 计算以下方程的一个特解  $y^*$  :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos(\omega x) + Q_n(x) \sin(\omega x)]$$

**计算步骤** 设

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos(\omega x) + R_m^{(2)}(x) \sin(\omega x)]$$

$$k = \begin{cases} 0 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 非特征值} \\ 1 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 为特征值} \end{cases}$$

$R_m^{(1)}, R_m^{(2)}$  为  $m$  次待定多项式  
 $m = \max\{l, n\}$

**例** 计算  $y'' - y = e^x \cos(2x)$  的通解。

**解 1.** 特征方程:  $r^2 - 1 = 0$ , 特征值:  $r_{1,2} = \pm 1$ , 齐次部分  $y'' - y = 0$  的通解是  $C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

**2.**  $\lambda = 1, \omega = 2$ ,

**目标** 计算以下方程的一个特解  $y^*$  :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos(\omega x) + Q_n(x) \sin(\omega x)]$$

**计算步骤** 设

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos(\omega x) + R_m^{(2)}(x) \sin(\omega x)]$$

$$k = \begin{cases} 0 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 非特征值} \\ 1 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 为特征值} \end{cases}$$

$R_m^{(1)}, R_m^{(2)}$  为  $m$  次待定多项式  
 $m = \max\{l, n\}$

**例** 计算  $y'' - y = e^x \cos(2x)$  的通解。

**解 1.** 特征方程:  $r^2 - 1 = 0$ , 特征值:  $r_{1,2} = \pm 1$ , 齐次部分  $y'' - y = 0$  的通解是  $C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

**2.**  $\lambda = 1, \omega = 2,$

**目标** 计算以下方程的一个特解  $y^*$  :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos(\omega x) + Q_n(x) \sin(\omega x)]$$

**计算步骤** 设

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos(\omega x) + R_m^{(2)}(x) \sin(\omega x)]$$

$$k = \begin{cases} 0 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 非特征值} \\ 1 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 为特征值} \end{cases}$$

$R_m^{(1)}, R_m^{(2)}$  为  $m$  次待定多项式  
 $m = \max\{l, n\}$

---

**例** 计算  $y'' - y = e^x \cos(2x)$  的通解。

**解 1.** 特征方程:  $r^2 - 1 = 0$ , 特征值:  $r_{1,2} = \pm 1$ , 齐次部分  $y'' - y = 0$  的通解是  $C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

**2.**  $\lambda = 1, \omega = 2, \lambda + i\omega = 1 + 2i$

**目标** 计算以下方程的一个特解  $y^*$  :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos(\omega x) + Q_n(x) \sin(\omega x)]$$

**计算步骤** 设

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos(\omega x) + R_m^{(2)}(x) \sin(\omega x)]$$

$$k = \begin{cases} 0 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 非特征值} \\ 1 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 为特征值} \end{cases}$$

$R_m^{(1)}, R_m^{(2)}$  为  $m$  次待定多项式  
 $m = \max\{l, n\}$

**例** 计算  $y'' - y = e^x \cos(2x)$  的通解。

**解 1.** 特征方程:  $r^2 - 1 = 0$ , 特征值:  $r_{1,2} = \pm 1$ , 齐次部分  $y'' - y = 0$  的通解是  $C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

**2.**  $\lambda = 1$ ,  $\omega = 2$ ,  $\lambda + i\omega = 1 + 2i$  不是特征值,

**目标** 计算以下方程的一个特解  $y^*$  :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos(\omega x) + Q_n(x) \sin(\omega x)]$$

**计算步骤** 设

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos(\omega x) + R_m^{(2)}(x) \sin(\omega x)]$$

$$k = \begin{cases} 0 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 非特征值} \\ 1 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 为特征值} \end{cases}$$

$R_m^{(1)}, R_m^{(2)}$  为  $m$  次待定多项式  
 $m = \max\{l, n\}$

**例** 计算  $y'' - y = e^x \cos(2x)$  的通解。

**解 1.** 特征方程:  $r^2 - 1 = 0$ , 特征值:  $r_{1,2} = \pm 1$ , 齐次部分  $y'' - y = 0$  的通解是  $C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

**2.**  $\lambda = 1, \omega = 2, \lambda + i\omega = 1 + 2i$  不是特征值, 故设

$$y^* = e^x [a \cos(2x) + b \sin(2x)]$$

例 计算  $y'' - y = e^x \cos(2x)$  的通解。

解 1. 特征方程:  $r^2 - 1 = 0$ , 特征值:  $r_{1,2} = \pm 1$ , 齐次部分  $y'' - y = 0$  的通解是  $C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

2.  $\lambda = 1$ ,  $\omega = 2$ ,  $\lambda + i\omega = 1 + 2i$  不是特征值, 故设

$$y^* = e^x [a \cos(2x) + b \sin(2x)]$$

例 计算  $y'' - y = e^x \cos(2x)$  的通解。

解 1. 特征方程:  $r^2 - 1 = 0$ , 特征值:  $r_{1,2} = \pm 1$ , 齐次部分  $y'' - y = 0$  的通解是  $C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

2.  $\lambda = 1$ ,  $\omega = 2$ ,  $\lambda + i\omega = 1 + 2i$  不是特征值, 故设

$$y^* = e^x [a \cos(2x) + b \sin(2x)]$$

代入原方程, 有

$$y^{*''} - y^*$$



例 计算  $y'' - y = e^x \cos(2x)$  的通解。

解 1. 特征方程:  $r^2 - 1 = 0$ , 特征值:  $r_{1,2} = \pm 1$ , 齐次部分  $y'' - y = 0$  的通解是  $C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

2.  $\lambda = 1$ ,  $\omega = 2$ ,  $\lambda + i\omega = 1 + 2i$  不是特征值, 故设

$$y^* = e^x [a \cos(2x) + b \sin(2x)]$$

代入原方程, 有

$$y^{*''} - y^* = e^x [(-4a + 4b) \cos(2x) + (-4a - 4b) \sin(2x)]$$

例 计算  $y'' - y = e^x \cos(2x)$  的通解。

解 1. 特征方程:  $r^2 - 1 = 0$ , 特征值:  $r_{1,2} = \pm 1$ , 齐次部分  $y'' - y = 0$  的通解是  $C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

2.  $\lambda = 1$ ,  $\omega = 2$ ,  $\lambda + i\omega = 1 + 2i$  不是特征值, 故设

$$y^* = e^x [a \cos(2x) + b \sin(2x)]$$

代入原方程, 有

$$\begin{aligned} y^{*''} - y^* &= e^x [(-4a + 4b) \cos(2x) + (-4a - 4b) \sin(2x)] \\ &= e^x \cos(2x) \end{aligned}$$

例 计算  $y'' - y = e^x \cos(2x)$  的通解。

解 1. 特征方程:  $r^2 - 1 = 0$ , 特征值:  $r_{1,2} = \pm 1$ , 齐次部分  $y'' - y = 0$  的通解是  $C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

2.  $\lambda = 1$ ,  $\omega = 2$ ,  $\lambda + i\omega = 1 + 2i$  不是特征值, 故设

$$y^* = e^x [a \cos(2x) + b \sin(2x)]$$

代入原方程, 有

$$\begin{aligned} y^{*''} - y^* &= e^x [(-4a + 4b) \cos(2x) + (-4a - 4b) \sin(2x)] \\ &= e^x \cos(2x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4a + 4b = 1 \\ -4a - 4b = 0 \end{cases}$$

例 计算  $y'' - y = e^x \cos(2x)$  的通解。

解 1. 特征方程:  $r^2 - 1 = 0$ , 特征值:  $r_{1,2} = \pm 1$ , 齐次部分  $y'' - y = 0$  的通解是  $C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

2.  $\lambda = 1$ ,  $\omega = 2$ ,  $\lambda + i\omega = 1 + 2i$  不是特征值, 故设

$$y^* = e^x [a \cos(2x) + b \sin(2x)]$$

代入原方程, 有

$$\begin{aligned} y^{*''} - y^* &= e^x [(-4a + 4b) \cos(2x) + (-4a - 4b) \sin(2x)] \\ &= e^x \cos(2x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4a + 4b = 1 \\ -4a - 4b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{8} \\ b = \frac{1}{8} \end{cases}$$

例 计算  $y'' - y = e^x \cos(2x)$  的通解。

解 1. 特征方程:  $r^2 - 1 = 0$ , 特征值:  $r_{1,2} = \pm 1$ , 齐次部分  $y'' - y = 0$  的通解是  $C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

2.  $\lambda = 1$ ,  $\omega = 2$ ,  $\lambda + i\omega = 1 + 2i$  不是特征值, 故设

$$y^* = e^x [a \cos(2x) + b \sin(2x)]$$

代入原方程, 有

$$\begin{aligned} y^{*''} - y^* &= e^x [(-4a + 4b) \cos(2x) + (-4a - 4b) \sin(2x)] \\ &= e^x \cos(2x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4a + 4b = 1 \\ -4a - 4b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{8} \\ b = \frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow y^* = \frac{1}{8} e^x [-\cos(2x) + \sin(2x)]$$

例 计算  $y'' - y = e^x \cos(2x)$  的通解。

解 1. 特征方程:  $r^2 - 1 = 0$ , 特征值:  $r_{1,2} = \pm 1$ , 齐次部分  $y'' - y = 0$  的通解是  $C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

2.  $\lambda = 1$ ,  $\omega = 2$ ,  $\lambda + i\omega = 1 + 2i$  不是特征值, 故设

$$y^* = e^x [a \cos(2x) + b \sin(2x)]$$

代入原方程, 有

$$\begin{aligned} y^{*''} - y^* &= e^x [(-4a + 4b) \cos(2x) + (-4a - 4b) \sin(2x)] \\ &= e^x \cos(2x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4a + 4b = 1 \\ -4a - 4b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{8} \\ b = \frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow y^* = \frac{1}{8} e^x [-\cos(2x) + \sin(2x)]$$

3. 通解是

$$y = \frac{1}{8} e^x [-\cos(2x) + \sin(2x)] + C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

**目标** 计算以下方程的一个特解  $y^*$  :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos(\omega x) + Q_n(x) \sin(\omega x)]$$

**计算步骤** 设

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos(\omega x) + R_m^{(2)}(x) \sin(\omega x)]$$

$$k = \begin{cases} 0 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 非特征值} \\ 1 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 为特征值} \end{cases}$$

$R_m^{(1)}, R_m^{(2)}$  为  $m$  次待定多项式  
 $m = \max\{l, n\}$

**例** 计算  $y'' + y = \cos x$  的通解。

**目标** 计算以下方程的一个特解  $y^*$  :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos(\omega x) + Q_n(x) \sin(\omega x)]$$

**计算步骤** 设

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos(\omega x) + R_m^{(2)}(x) \sin(\omega x)]$$

$$k = \begin{cases} 0 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 非特征值} \\ 1 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 为特征值} \end{cases}$$

$R_m^{(1)}, R_m^{(2)}$  为  $m$  次待定多项式  
 $m = \max\{l, n\}$

**例** 计算  $y'' + y = \cos x$  的通解。

**解 1.** 特征方程:  $r^2 + 1 = 0$ ,



**目标** 计算以下方程的一个特解  $y^*$  :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos(\omega x) + Q_n(x) \sin(\omega x)]$$

**计算步骤** 设

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos(\omega x) + R_m^{(2)}(x) \sin(\omega x)]$$

$$k = \begin{cases} 0 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 非特征值} \\ 1 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 为特征值} \end{cases}$$

$R_m^{(1)}, R_m^{(2)}$  为  $m$  次待定多项式  
 $m = \max\{l, n\}$

**例** 计算  $y'' + y = \cos x$  的通解。

**解 1.** 特征方程:  $r^2 + 1 = 0$ , 特征值:  $r_{1,2} = \pm i$ ,

**目标** 计算以下方程的一个特解  $y^*$  :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos(\omega x) + Q_n(x) \sin(\omega x)]$$

**计算步骤** 设

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos(\omega x) + R_m^{(2)}(x) \sin(\omega x)]$$

$$k = \begin{cases} 0 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 非特征值} \\ 1 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 为特征值} \end{cases}$$

$R_m^{(1)}, R_m^{(2)}$  为  $m$  次待定多项式  
 $m = \max\{l, n\}$

**例** 计算  $y'' + y = \cos x$  的通解。

**解 1.** 特征方程:  $r^2 + 1 = 0$ , 特征值:  $r_{1,2} = \pm i$ , 齐次部分  $y'' + y = 0$  的通解是  $C_1 \cos x + C_2 \sin x$

**目标** 计算以下方程的一个特解  $y^*$  :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos(\omega x) + Q_n(x) \sin(\omega x)]$$

**计算步骤** 设

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos(\omega x) + R_m^{(2)}(x) \sin(\omega x)]$$

$$k = \begin{cases} 0 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 非特征值} \\ 1 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 为特征值} \end{cases}$$

$R_m^{(1)}, R_m^{(2)}$  为  $m$  次待定多项式  
 $m = \max\{l, n\}$

**例** 计算  $y'' + y = \cos x$  的通解。

**解 1.** 特征方程:  $r^2 + 1 = 0$ , 特征值:  $r_{1,2} = \pm i$ , 齐次部分  $y'' + y = 0$  的通解是  $C_1 \cos x + C_2 \sin x$

**2.**  $\lambda =$  ,  $\omega =$  ,

**目标** 计算以下方程的一个特解  $y^*$  :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos(\omega x) + Q_n(x) \sin(\omega x)]$$

**计算步骤** 设

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos(\omega x) + R_m^{(2)}(x) \sin(\omega x)]$$

$$k = \begin{cases} 0 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 非特征值} \\ 1 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 为特征值} \end{cases}$$

$R_m^{(1)}, R_m^{(2)}$  为  $m$  次待定多项式  
 $m = \max\{l, n\}$

**例** 计算  $y'' + y = \cos x$  的通解。

**解 1.** 特征方程:  $r^2 + 1 = 0$ , 特征值:  $r_{1,2} = \pm i$ , 齐次部分  $y'' + y = 0$  的通解是  $C_1 \cos x + C_2 \sin x$

**2.**  $\lambda = 0$ ,  $\omega = 1$ ,

**目标** 计算以下方程的一个特解  $y^*$  :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos(\omega x) + Q_n(x) \sin(\omega x)]$$

**计算步骤** 设

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos(\omega x) + R_m^{(2)}(x) \sin(\omega x)]$$

$$k = \begin{cases} 0 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 非特征值} \\ 1 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 为特征值} \end{cases}$$

$R_m^{(1)}, R_m^{(2)}$  为  $m$  次待定多项式  
 $m = \max\{l, n\}$

**例** 计算  $y'' + y = \cos x$  的通解。

**解 1.** 特征方程:  $r^2 + 1 = 0$ , 特征值:  $r_{1,2} = \pm i$ , 齐次部分  $y'' + y = 0$  的通解是  $C_1 \cos x + C_2 \sin x$

**2.**  $\lambda = 0, \omega = 1,$

**目标** 计算以下方程的一个特解  $y^*$  :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos(\omega x) + Q_n(x) \sin(\omega x)]$$

**计算步骤** 设

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos(\omega x) + R_m^{(2)}(x) \sin(\omega x)]$$

$$k = \begin{cases} 0 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 非特征值} \\ 1 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 为特征值} \end{cases}$$

$R_m^{(1)}, R_m^{(2)}$  为  $m$  次待定多项式  
 $m = \max\{l, n\}$

**例** 计算  $y'' + y = \cos x$  的通解。

**解 1.** 特征方程:  $r^2 + 1 = 0$ , 特征值:  $r_{1,2} = \pm i$ , 齐次部分  $y'' + y = 0$  的通解是  $C_1 \cos x + C_2 \sin x$

**2.**  $\lambda = 0$ ,  $\omega = 1$ ,  $\lambda + i\omega = i$

**目标** 计算以下方程的一个特解  $y^*$  :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos(\omega x) + Q_n(x) \sin(\omega x)]$$

**计算步骤** 设

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos(\omega x) + R_m^{(2)}(x) \sin(\omega x)]$$

$$k = \begin{cases} 0 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 非特征值} \\ 1 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 为特征值} \end{cases}$$

$R_m^{(1)}, R_m^{(2)}$  为  $m$  次待定多项式  
 $m = \max\{l, n\}$

**例** 计算  $y'' + y = \cos x$  的通解。

**解 1.** 特征方程:  $r^2 + 1 = 0$ , 特征值:  $r_{1,2} = \pm i$ , 齐次部分  $y'' + y = 0$  的通解是  $C_1 \cos x + C_2 \sin x$

**2.**  $\lambda = 0$ ,  $\omega = 1$ ,  $\lambda + i\omega = i$  是特征值,

**目标** 计算以下方程的一个特解  $y^*$  :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos(\omega x) + Q_n(x) \sin(\omega x)]$$

**计算步骤** 设

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos(\omega x) + R_m^{(2)}(x) \sin(\omega x)]$$

$$k = \begin{cases} 0 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 非特征值} \\ 1 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 为特征值} \end{cases}$$

$R_m^{(1)}, R_m^{(2)}$  为  $m$  次待定多项式  
 $m = \max\{l, n\}$

**例** 计算  $y'' + y = \cos x$  的通解。

**解 1.** 特征方程:  $r^2 + 1 = 0$ , 特征值:  $r_{1,2} = \pm i$ , 齐次部分  $y'' + y = 0$  的通解是  $C_1 \cos x + C_2 \sin x$

**2.**  $\lambda = 0$ ,  $\omega = 1$ ,  $\lambda + i\omega = i$  是特征值, 故设

$$y^* = x e^{0 \cdot x} (a \cos x + b \sin x)$$



**目标** 计算以下方程的一个特解  $y^*$  :

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos(\omega x) + Q_n(x) \sin(\omega x)]$$

**计算步骤** 设

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos(\omega x) + R_m^{(2)}(x) \sin(\omega x)]$$

$$k = \begin{cases} 0 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 非特征值} \\ 1 & \text{若 } \lambda + i\omega \text{ 为特征值} \end{cases}$$

$R_m^{(1)}, R_m^{(2)}$  为  $m$  次待定多项式  
 $m = \max\{l, n\}$

**例** 计算  $y'' + y = \cos x$  的通解。

**解 1.** 特征方程:  $r^2 + 1 = 0$ , 特征值:  $r_{1,2} = \pm i$ , 齐次部分  $y'' + y = 0$  的通解是  $C_1 \cos x + C_2 \sin x$

**2.**  $\lambda = 0$ ,  $\omega = 1$ ,  $\lambda + i\omega = i$  是特征值, 故设

$$y^* = x e^{0 \cdot x} (a \cos x + b \sin x) = x(a \cos x + b \sin x)$$

例 计算  $y'' + y = \cos x$  的通解。

解 1. 特征方程:  $r^2 + 1 = 0$ , 特征值:  $r_{1,2} = \pm i$ , 齐次部分  $y'' + y = 0$  的通解是  $C_1 \cos x + C_2 \sin x$

2.  $\lambda = 0$ ,  $\omega = 1$ ,  $\lambda + i\omega = i$  是特征值, 故设

$$y^* = x(a \cos x + b \sin x)$$

例 计算  $y'' + y = \cos x$  的通解。

解 1. 特征方程:  $r^2 + 1 = 0$ , 特征值:  $r_{1,2} = \pm i$ , 齐次部分  $y'' + y = 0$  的通解是  $C_1 \cos x + C_2 \sin x$

2.  $\lambda = 0$ ,  $\omega = 1$ ,  $\lambda + i\omega = i$  是特征值, 故设

$$y^* = x(a \cos x + b \sin x)$$

代入原方程, 有

$$y^{*''} + y^*$$

例 计算  $y'' + y = \cos x$  的通解。

解 1. 特征方程:  $r^2 + 1 = 0$ , 特征值:  $r_{1,2} = \pm i$ , 齐次部分  $y'' + y = 0$  的通解是  $C_1 \cos x + C_2 \sin x$

2.  $\lambda = 0$ ,  $\omega = 1$ ,  $\lambda + i\omega = i$  是特征值, 故设

$$y^* = x(a \cos x + b \sin x)$$

代入原方程, 有

$$y^{*''} + y^* = 2b \cos x - 2a \sin x$$

例 计算  $y'' + y = \cos x$  的通解。

解 1. 特征方程:  $r^2 + 1 = 0$ , 特征值:  $r_{1,2} = \pm i$ , 齐次部分  $y'' + y = 0$  的通解是  $C_1 \cos x + C_2 \sin x$

2.  $\lambda = 0$ ,  $\omega = 1$ ,  $\lambda + i\omega = i$  是特征值, 故设

$$y^* = x(a \cos x + b \sin x)$$

代入原方程, 有

$$y^{*''} + y^* = 2b \cos x - 2a \sin x = \cos x$$

例 计算  $y'' + y = \cos x$  的通解。

解 1. 特征方程:  $r^2 + 1 = 0$ , 特征值:  $r_{1,2} = \pm i$ , 齐次部分  $y'' + y = 0$  的通解是  $C_1 \cos x + C_2 \sin x$

2.  $\lambda = 0$ ,  $\omega = 1$ ,  $\lambda + i\omega = i$  是特征值, 故设

$$y^* = x(a \cos x + b \sin x)$$

代入原方程, 有

$$y^{*''} + y^* = 2b \cos x - 2a \sin x = \cos x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

例 计算  $y'' + y = \cos x$  的通解。

解 1. 特征方程:  $r^2 + 1 = 0$ , 特征值:  $r_{1,2} = \pm i$ , 齐次部分  $y'' + y = 0$  的通解是  $C_1 \cos x + C_2 \sin x$

2.  $\lambda = 0$ ,  $\omega = 1$ ,  $\lambda + i\omega = i$  是特征值, 故设

$$y^* = x(a \cos x + b \sin x)$$

代入原方程, 有

$$y^{*''} + y^* = 2b \cos x - 2a \sin x = \cos x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow y^* = \frac{1}{2}x \sin x$$

例 计算  $y'' + y = \cos x$  的通解。

解 1. 特征方程:  $r^2 + 1 = 0$ , 特征值:  $r_{1,2} = \pm i$ , 齐次部分  $y'' + y = 0$  的通解是  $C_1 \cos x + C_2 \sin x$

2.  $\lambda = 0$ ,  $\omega = 1$ ,  $\lambda + i\omega = i$  是特征值, 故设

$$y^* = x(a \cos x + b \sin x)$$

代入原方程, 有

$$y^{*''} + y^* = 2b \cos x - 2a \sin x = \cos x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow y^* = \frac{1}{2}x \sin x$$

3. 通解是

$$y = \frac{1}{2}x \sin x + C_1 \cos x + C_2 \sin x$$