第 11 周作业解答

练习 1. 计算

1. $\iint_\Sigma (x+y+z)dS$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 在 $z\ge h$ 的部分（$0<h<a$）。
2. $\iint_\Sigma (x^2+y^2)dS$，其中 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和平面 $z=1$ 所围成区域的整个的表面。

解 1. Σ 是二元函数 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, $(x,\,y)\in D_{xy}=\{(x,\,y)|\,x^2+y^2\le a^2-h^2\}$ 的图形，所以

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma (x+y+z)dS &\xlongequal{\text{对称性}} \iint_\Sigma zdS\\ &= \iint_{D_{xy}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy\\ &= \iint_{D_{xy}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy\\ &= a\iint_{D_{xy}} dxdy = a\mathrm{Area}(D_{xy}) = a(a^2-h^2)\pi\end{aligned}$$

2. Σ 由两部分 Σ_1 和 Σ_2 组成，其中 Σ_1 是二元函数 $z=f(x,y)=1$, $(x,\,y)\in D_{xy}=\{(x,\,y)|\,x^2+y^2\le 1\}$ 的图形，Σ_2 是二元函数 $z=g(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, $(x,\,y)\in D_{xy}=\{(x,\,y)|\,x^2+y^2\le 1\}$ 的图形，所以

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma (x^2+y^2)dS &= \iint_{\Sigma_1}(x^2+y^2)dS+\iint_{\Sigma_2}(x^2+y^2)dS\\ &= \iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\cdot\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}dxdy+\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\cdot\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}dxdy\\ &= \iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy+\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\cdot\sqrt{2}dxdy\\ &= (1+\sqrt{2})\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy\\ &= (1+\sqrt{2})\iint_{D_{xy}}\rho^2\cdot\rho d\rho d\theta\\ &= (1+\sqrt{2})\int_0^{2\pi}\left[\int_0^1\rho^3d\rho\right]d\theta = \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})\pi.\end{aligned}$$

练习 2. 计算 $\iint_\Sigma ydydz - xdzdx + zdxdy$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 在第一卦象的部分，取单位外法向量。

解注意到 Σ 是二元函数 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的图形，定义域为 $D_{xy}=\{(x,\,y):\,x^2+y^2\le 4,\,x\ge 0,\,y\ge 0\}$。

Σ 的单位外法向量是 $\overrightarrow{n} = \frac{1}{2}(x,\, y,\, z)$。所以

$$\begin{aligned}
\iint_\Sigma ydydz - xdzdx + zdxdy &= \iint_\Sigma (y,\, -x,\, z)\cdot \overrightarrow{n}\, dS \\
&= \frac{1}{2}\iint_\Sigma z^2 dS \\
&= \frac{1}{2}\iint_{D_{xy}} (4-x^2-y^2)\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy \\
&= \iint_{D_{xy}} \sqrt{4-x^2-y^2}dxdy \\
&\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_{D_{xy}} \sqrt{4-\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^2 \sqrt{4-\rho^2}\cdot\rho d\rho\right]d\theta \\
&= \frac{1}{2}\pi\int_0^2 \sqrt{4-\rho^2}\cdot\rho d\rho \\
&\xlongequal{u=\sqrt{4-\rho^2}} \frac{1}{2}\pi\int_2^0 u\cdot(-u)du \\
&= \frac{4}{3}\pi
\end{aligned}$$

练习 3. 计算 $\iint_\Sigma xy^2dydz + x^2ydzdx + ydxdy$，其中 Σ 是柱体 $\Omega:\ x^2+y^2\le 1,\, -1\le z\le 1$ 的表面，取单位外法向量。

解利用高斯公式

$$\begin{aligned}
\iint_\Sigma xy^2dydz + x^2ydzdx + ydz &= \iiint_\Omega \mathrm{div}\ (xy^2,\, x^2y,\, y)dv \\
&= \iiint_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x}(xy^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2y) + \frac{\partial}{\partial z}(y)\right]dv \\
&= \iiint_\Omega (x^2+y^2)dxdydz \\
&= \int_{-1}^1 \left[\iint_{\{x^2+y^2\le 1\}} x^2+y^2dxdy\right]dz \\
&= \int_{-1}^1 dz\cdot\iint_{\{x^2+y^2\le 1\}} x^2+y^2dxdy \\
&= 2\int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 \rho^2\cdot\rho d\rho\right]d\theta = \pi.
\end{aligned}$$

练习 4. 计算 $\iint_\Sigma xdydz + ydzdx + z^4dxdy$，其中 Σ 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=3^2,\, z\ge 0$，取单位外法向量。

解设 $\Sigma_0 = \{(x,\, y,\, z):\ x^2+y^2\le 3^2,\, z=0\}$，则 $\Sigma\cup\Sigma_0$ 构成一个封闭曲面。设 Ω 为 $\Sigma\cup\Sigma_0$ 所围成的立体区域。注意到

$$\iint_\Sigma xdydz + ydzdx + z^4dxdy = \iint_{\Sigma\cup\Sigma_0} xdydz + ydzdx + z^4dxdy - \iint_{\Sigma_0} xdydz + ydzdx + z^4dxdy$$

其中

$$\iint_{\Sigma_0} xdydz + ydzdx + z^4dxdy = \iint_{\Sigma_0} (x,\, y,\, z^4) \cdot \overrightarrow{n}\, dS \xlongequal{\overrightarrow{n}=(0,\,0,\,-1)} \iint_{\Sigma_0} -z^4 dS \xlongequal{z=0 \text{ on } \Sigma} 0$$

而利用高斯公式，成立：

$$\begin{aligned}
\iint_{\Sigma\cup\Sigma_0} xdydz + ydzdx + z^4dxdy &= \iint_{\Sigma} (x,\, y,\, z^4) \cdot \overrightarrow{n}\, dS \\
&= \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(x,\, y,\, z^4) dv \\
&= \iiint_{\Omega} (1 + 1 + 4z^3) dv \\
&= \iiint_{\Omega} (2 + 4z^3) dv \\
&= 2 \ \text{ Vol } \ (\Omega) + 4 \iiint_{\Omega} z^3 dxdydz \\
&= \frac{4}{3}\pi 3^3 + 4 \int_0^3 \left[\iint_{D_{xy}} z^3 dxdy \right] dz \\
&= 36\pi + 4 \int_0^3 z^3 |D_{xy}| dz \\
&= 36\pi + 4 \int_0^3 z^3 \cdot \pi(9 - z^2) dz \\
&= 279\pi.
\end{aligned}$$

所以

$$\iint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + z^4dxdy = \iint_{\Sigma\cup\Sigma_0} xdydz + ydzdx + z^4dxdy - \iint_{\Sigma_0} xdydz + ydzdx + z^4dxdy = 279\pi.$$