第 08 周作业解答

练习 1. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ 的秩。

解

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 8 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3-3r_1 \\ r_4-4r_1}]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以 $r(A) = 3$

练习 2. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & a & 2 & -1 \\ 3 & 1 & b & 5 \end{pmatrix}$。对参数 (a, b) 的每种取值，求出相应的秩 $r(A)$。

解

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & a & 2 & -1 \\ 3 & 1 & b & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & a-1 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & b-6 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2 \leftrightarrow c_4} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & a-1 \\ 0 & -4 & b-6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & a-1 \\ 0 & 0 & b+2 & 2a+2 \end{pmatrix}$$

- 若 $b \neq -2$ 或 $a \neq -1$，则最终的阶梯型矩阵有 3 行非零行，此时 $r(A) = 3$。
- 若 $b = -2$ 且 $a = -1$，则最终的阶梯型矩阵只有 2 行非零行，此时 $r(A) = 2$。

练习 3. 求解线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 7 \\ 2x_3 + 5x_4 - 2x_5 = 9 \end{cases}$

解对增广矩阵作初等行变换：

$$
(A\,\vdots\,b)=\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 3 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & -2 & 9 \end{array}\right)
\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1}
\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & -2 & 9 \end{array}\right)
\xrightarrow[r_4-2r_2]{r_3-2r_2}
\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 7 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[\frac{1}{7}\times r_4]{\frac{1}{6}\times r_3}
\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)
\xrightarrow{r_4-r_3}
\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
\xrightarrow[r_1-r_3]{r_2+r_3}
\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{r_1-r_2}
\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

可见 $r(A)=r(A\,\vdots\,b)=3<5$，所以原方程组有无穷多的解，包含 $5-3=2$ 个自由变量。事实上，通过上述简化的阶梯型矩阵，可知原方程等价于

$$
\left\{\begin{array}{rrrrr} x_1+ & 2x_2 & & + & 2x_5 = & -2 \\ & & x_3 & - & x_5 = & 2 \\ & & & x_4 & = & 1 \end{array}\right.
\quad\Rightarrow\quad
\begin{cases} x_1=-2-2x_2-2x_5 \\ x_3=2+x_5 \\ x_4=1 \end{cases}
$$

所以通解是

$$
\begin{cases} x_1=-2-2c_1-2c_2 \\ x_2=c_1 \\ x_3=2+c_2 \\ x_4=1 \\ x_5=c_2 \end{cases}
\qquad (c_1,\,c_2\text{为任意常数})
$$

用向量形式表示则是

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

练习 4. 证明：对线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$，当 $m<n$ 时，不可能有唯一解。

解方程组 $A_{m\times n}x=b$ 有唯一解的充分必要条件是：$r(A)=r(A\,\vdots\,b)=n$。但 $m<n$ 时，$r(A)\le m<n$。所以不可能有唯一解。

练习 5. 问 k 取何值时，方程组 $\left\{\begin{array}{rrrr} x_1+ & x_2+ & kx_3 = & 4 \\ -x_1+ & kx_2+ & x_3 = & k^2 \\ x_1- & x_2+ & 2x_3 = & -4 \end{array}\right.$ 有唯一解、无穷多解、无解。并且有解时，求出全部解。

解对增广矩阵作初等行变换：

$$(A\vdots b)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&k&4\\-1&k&1&k^2\\1&-1&2&-4\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2+r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&k&4\\0&k+1&k+1&k^2+4\\0&-2&2-k&-8\end{array}\right)\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&k&4\\0&-2&2-k&-8\\0&k+1&k+1&k^2+4\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}\times r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&k&4\\0&1&\frac{1}{2}k-1&4\\0&k+1&k+1&k^2+4\end{array}\right)\xrightarrow[r_1-r_2]{r_3-(k+1)\times r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&\frac{1}{2}k+1&0\\0&1&\frac{1}{2}k-1&4\\0&0&\frac{1}{2}(k+1)(4-k)&k(k-4)\end{array}\right)$$

- 当 $k\neq-1$ 且 $k\neq4$ 时，$r(A)=r(A\vdots b)=3=$ 未知量个数，方程组有唯一解。此时

$$(A\vdots b)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&\frac{1}{2}k+1&0\\0&1&\frac{1}{2}k-1&4\\0&0&\frac{1}{2}(k+1)(4-k)&k(k-4)\end{array}\right)\xrightarrow{\frac{2}{(k+1)(4-k)}\times r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&\frac{1}{2}k+1&0\\0&1&\frac{1}{2}k-1&4\\0&0&1&-\frac{2k}{k+1}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2-(\frac{1}{2}k-1)\times r_3]{r_1-(\frac{1}{2}k+1)\times r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&\frac{k(k+2)}{k+1}\\0&1&0&\frac{k^2+2k+4}{k+1}\\0&0&1&-\frac{2k}{k+1}\end{array}\right)$$

所以

$$\begin{cases}x_1=\frac{k^2+2k}{k+1}\\x_2=\frac{k^2+2k+4}{k+1}\\x_3=-\frac{2k}{k+1}\end{cases}$$

- 当 $k=-1$ 时

$$(A\vdots b)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&\frac{1}{2}k+1&0\\0&1&\frac{1}{2}k-1&4\\0&0&\frac{1}{2}(k+1)(4-k)&k(k-4)\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&\frac{1}{2}&0\\0&1&-\frac{3}{2}&4\\0&0&0&5\end{array}\right)$$

可见 $r(A)=2<3=r(A\vdots b)$，此时方程无解。

- 当 $k=4$ 时

$$(A\vdots b)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&\frac{1}{2}k+1&0\\0&1&\frac{1}{2}k-1&4\\0&0&\frac{1}{2}(k+1)(4-k)&k(k-4)\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&3&0\\0&1&1&4\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

可见 $r(A)=r(A\vdots b)=2<$ 未知量个数3，方程组有无穷多的解，包含 $3-2=1$ 个自由变量。事实上，通过上述简化的阶梯型矩阵，可知原方程等价于

$$\left\{\begin{array}{rrrr}x_1&+&3x_3=&0\\&x_2+&x_3=&4\end{array}\right.\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x_1=-3x_3\\x_3=4-x_3\end{cases}$$

所以通解是

$$\begin{cases}x_1=-3c\\x_2=4-c\qquad(c\text{为任意常数})\\x_3=c\end{cases}$$

用向量形式表示则是

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}$$