第 13 周作业解答

练习 1. 求下列微分方程的通解，或在给定初始条件下的特解：

1. $xy' + y = 3$
2. $y' + y = e^{-x}$
3. $y' + 2xy = x$ 在初始条件 $y(0) = -\frac{1}{2}$ 下的特解

解：(1) 1. 这是一阶线性微分方程，标准形式为：

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = \frac{3}{x}$$

2. 先求解齐次部分：

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = 0$$

分离变量得：

$$\frac{1}{y}dy = -\frac{1}{x}dx$$

两边积分：

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y}dy = -\int \frac{1}{x}dx \quad &\Rightarrow \quad \ln|y| = -\ln|x| + C_1 \\ &\Rightarrow \quad \ln|xy| = C_1 \\ &\Rightarrow \quad xy = \pm e^{C_1} = C \end{aligned}$$

即齐次部分的通解是

$$y = \frac{C}{x}$$

3. 常数变易法：假设 $y = \frac{u(x)}{x}$，代入原方程得：

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = \frac{3}{x} \quad &\Rightarrow \quad \left(\frac{u}{x}\right)' + \frac{1}{x} \cdot \frac{u}{x} = \frac{3}{x} \\ &\Rightarrow \quad \frac{u'}{x} = \frac{3}{x} \\ &\Rightarrow \quad u' = 3 \\ &\Rightarrow \quad u = 3x + C \end{aligned}$$

所以

$$y = \frac{u(x)}{x} = \frac{3x + C}{x} = 3 + \frac{C}{x}$$

(2)1. 先求解齐次部分：

$$\frac{dy}{dx} + y = 0$$

分离变量得：

$$\frac{1}{y}dy = -dx$$

两边积分：

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{y}dy = -\int dx \quad &\Rightarrow \quad \ln|y| = -x + C_1 \\ &\Rightarrow \quad |y| = e^{-x+C_1} \\ &\Rightarrow \quad y = \pm e^{C_1} \cdot e^{-x} = Ce^{-x}\end{aligned}$$

即齐次部分的通解是

$$y = Ce^{-x}$$

2. 常数变易法：假设 $y = u(x)e^{-x}$，代入原方程得：

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} + y = e^{-x} \quad &\Rightarrow \quad \left(ue^{-x}\right)' + ue^{-x} = e^{-x} \\ &\Rightarrow \quad u'e^{-x} = e^{-x} \\ &\Rightarrow \quad u' = 1 \\ &\Rightarrow \quad u = x + C\end{aligned}$$

所以

$$y = u(x)e^{-x} = (x + C)e^{-x}$$

(3)1. 先求解齐次部分：

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 0$$

分离变量得：

$$\frac{1}{y}dy = -2xdx$$

两边积分：

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{y}dy = -\int 2xdx \quad &\Rightarrow \quad \ln|y| = -x^2 + C_1 \\ &\Rightarrow \quad |y| = e^{-x^2+C_1} \\ &\Rightarrow \quad y = \pm e^{C_1} \cdot e^{-x^2} = Ce^{-x^2}\end{aligned}$$

即齐次部分的通解是

$$y = Ce^{-x^2}$$

2. 常数变易法：假设 $y = u(x)e^{-x^2}$，代入原方程得：

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} + 2xy = x \quad &\Rightarrow \quad \left(ue^{-x^2}\right)' + 2x \cdot ue^{-x^2} = x \\ &\Rightarrow \quad u'e^{-x^2} = x \\ &\Rightarrow \quad u' = xe^{x^2} \\ &\Rightarrow \quad u = \int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}dx^2 = \frac{1}{2}e^{x^2} + C\end{aligned}$$

所以通解为

$$y = u(x)e^{-x^2} = (\frac{1}{2}e^{x^2} + C)e^{-x^2} = Ce^{-x^2} + \frac{1}{2}$$

先将 $x=0, y=-\frac{1}{2}$ 代入通解，得：

$$-\frac{1}{2}=Ce^0+\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad C=-1$$

所以特解是：

$$y=-e^{-x^2}+\frac{1}{2}$$