

第 9 章 g : 多元函数的极值

数学系 梁卓滨

2019-2020 学年 II

Outline

1. 多元函数的极值点
2. 条件极值
3. 求解多元函数的最值

We are here now...

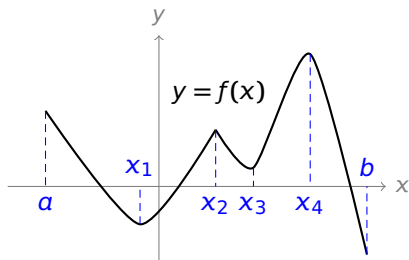
1. 多元函数的极值点

2. 条件极值

3. 求解多元函数的最值

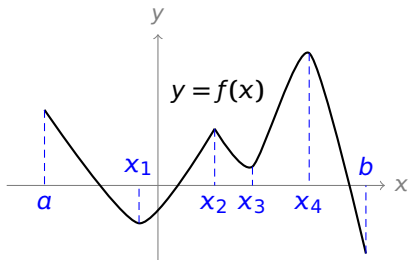
回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

假设 $y = f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上，如图



回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

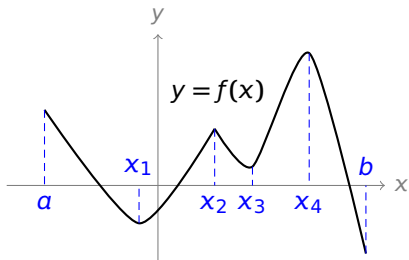
假设 $y = f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上, 如图



	极值点	驻点	最值点
a			
x_1			
x_2			
x_3			
x_4			
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

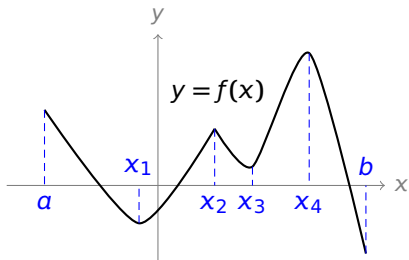
假设 $y = f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上, 如图



	极值点	驻点	最值点
a			
x_1	极小值点		
x_2			
x_3			
x_4			
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

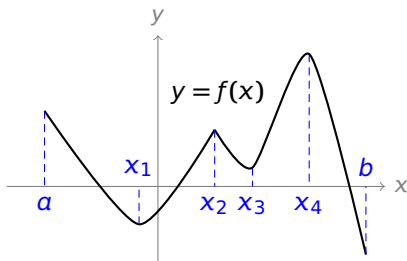
假设 $y = f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上, 如图



	极值点	驻点	最值点
a			
x_1	极小值点		
x_2	极大值点		
x_3			
x_4			
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

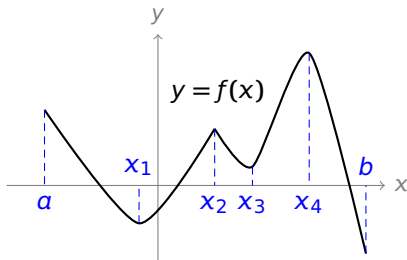
假设 $y = f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上, 如图



	极值点	驻点	最值点
a			
x_1	极小值点		
x_2	极大值点		
x_3	极小值点		
x_4			
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

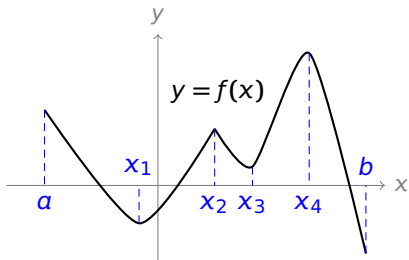
假设 $y = f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上, 如图



	极值点	驻点	最值点
a			
x_1	极小值点		
x_2	极大值点		
x_3	极小值点		
x_4	极大值点		
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

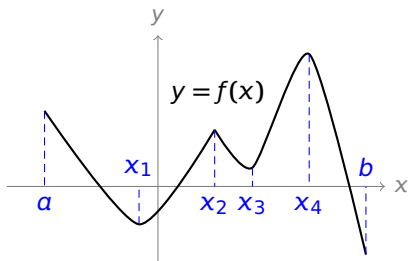
假设 $y = f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上, 如图



	极值点	驻点	最值点
a			
x_1	极小值点	✓	
x_2	极大值点		
x_3	极小值点		
x_4	极大值点		
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

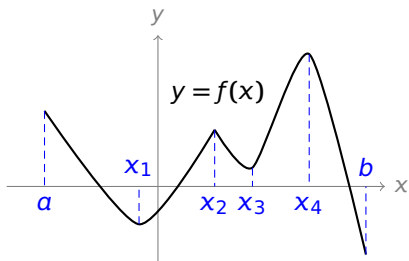
假设 $y = f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上, 如图



	极值点	驻点	最值点
a			
x_1	极小值点	✓	
x_2	极大值点	× (不可导)	
x_3	极小值点		
x_4	极大值点		
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

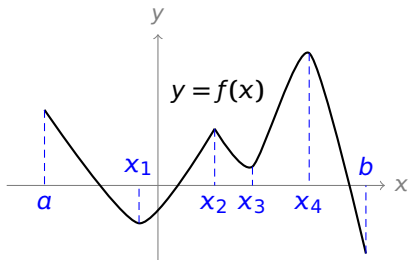
假设 $y = f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上, 如图



	极值点	驻点	最值点
a			
x_1	极小值点	✓	
x_2	极大值点	× (不可导)	
x_3	极小值点	✓	
x_4	极大值点		
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

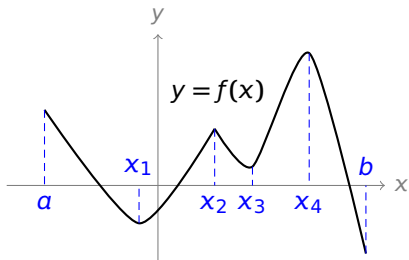
假设 $y = f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上, 如图



	极值点	驻点	最值点
a			
x_1	极小值点	✓	
x_2	极大值点	× (不可导)	
x_3	极小值点	✓	
x_4	极大值点	✓	
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

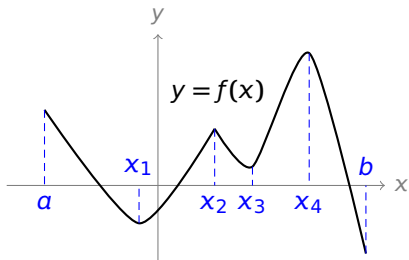
假设 $y = f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上, 如图



	极值点	驻点	最值点
a			×
x_1	极小值点	✓	
x_2	极大值点	× (不可导)	
x_3	极小值点	✓	
x_4	极大值点	✓	
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

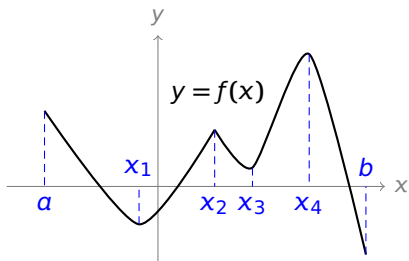
假设 $y = f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上, 如图



	极值点	驻点	最值点
a			×
x_1	极小值点	✓	×
x_2	极大值点	× (不可导)	
x_3	极小值点	✓	
x_4	极大值点	✓	
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

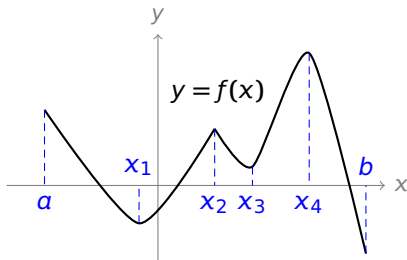
假设 $y = f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上, 如图



	极值点	驻点	最值点
a			×
x_1	极小值点	✓	×
x_2	极大值点	× (不可导)	×
x_3	极小值点	✓	
x_4	极大值点	✓	
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

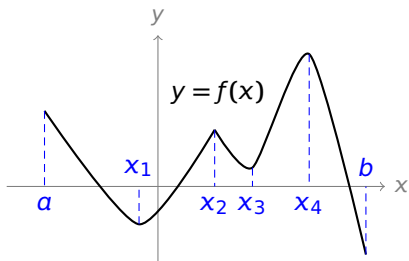
假设 $y = f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上, 如图



	极值点	驻点	最值点
a			×
x_1	极小值点	✓	×
x_2	极大值点	× (不可导)	×
x_3	极小值点	✓	×
x_4	极大值点	✓	
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

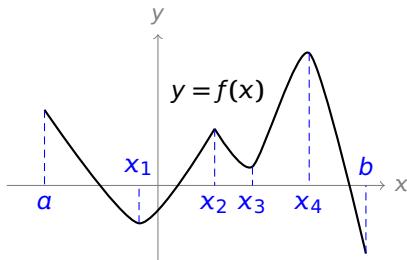
假设 $y = f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上, 如图



	极值点	驻点	最值点
a			×
x_1	极小值点	✓	×
x_2	极大值点	× (不可导)	×
x_3	极小值点	✓	×
x_4	极大值点	✓	最大值点
b			

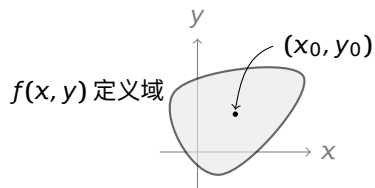
回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

假设 $y = f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上, 如图

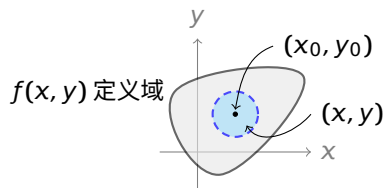


	极值点	驻点	最值点
a			×
x_1	极小值点	✓	×
x_2	极大值点	× (不可导)	×
x_3	极小值点	✓	×
x_4	极大值点	✓	最大值点
b			最小值点

多元函数的极值、极值点



多元函数的极值、极值点



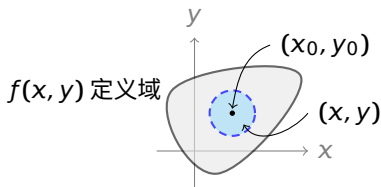
多元函数的极值、极值点

定义 在点 (x_0, y_0) 的某个邻域内

- 如果总是成立

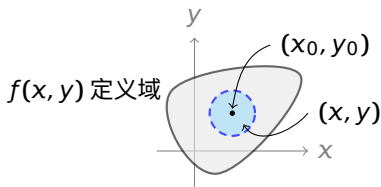
$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0), \quad \text{其中 } (x, y) \neq (x_0, y_0)$$

则称点 (x_0, y_0) 是函数 $f(x, y)$ **极大值点**， $f(x_0, y_0)$ 是**极大值**



多元函数的极值、极值点

定义 在点 (x_0, y_0) 的某个邻域内



- 如果总是成立

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0), \quad \text{其中}(x, y) \neq (x_0, y_0)$$

则称点 (x_0, y_0) 是函数 $f(x, y)$ **极大值点**， $f(x_0, y_0)$ 是**极大值**

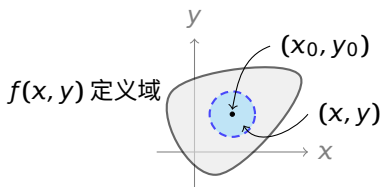
- 如果总是成立

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0), \quad \text{其中}(x, y) \neq (x_0, y_0)$$

则称点 (x_0, y_0) 是函数 $f(x, y)$ **极小值点**， $f(x_0, y_0)$ 是**极小值**

多元函数的极值、极值点

定义 在点 (x_0, y_0) 的某个邻域内



- 如果总是成立

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0), \quad \text{其中 } (x, y) \neq (x_0, y_0)$$

则称点 (x_0, y_0) 是函数 $f(x, y)$ **极大值点**， $f(x_0, y_0)$ 是**极大值**

- 如果总是成立

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0), \quad \text{其中 } (x, y) \neq (x_0, y_0)$$

则称点 (x_0, y_0) 是函数 $f(x, y)$ **极小值点**， $f(x_0, y_0)$ 是**极小值**

- 极大、极小值点统称**极值点**；极大、极小值统称**极值**。

例

- $z = x^2 + y^2$

点 $p_0(0, 0)$ 是

- $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$

点 $p_0(0, 0)$ 是

- $z = xy$

点 $p_0(0, 0)$ 是

例

- $z = x^2 + y^2$

点 $p_0(0, 0)$ 是极小值点;

- $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$

点 $p_0(0, 0)$ 是

- $z = xy$

点 $p_0(0, 0)$ 是

例

- $z = x^2 + y^2$

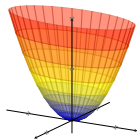
点 $p_0(0, 0)$ 是极小值点;

- $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$

点 $p_0(0, 0)$ 是

- $z = xy$

点 $p_0(0, 0)$ 是



例

- $z = x^2 + y^2$

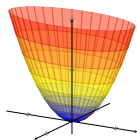
点 $p_0(0, 0)$ 是极小值点;

- $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$

点 $p_0(0, 0)$ 是极大值点;

- $z = xy$

点 $p_0(0, 0)$ 是



例

- $z = x^2 + y^2$

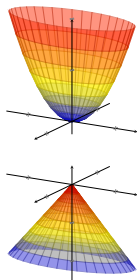
点 $p_0(0, 0)$ 是极小值点;

- $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$

点 $p_0(0, 0)$ 是极大值点;

- $z = xy$

点 $p_0(0, 0)$ 是



例

- $z = x^2 + y^2$

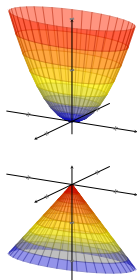
点 $p_0(0, 0)$ 是极小值点;

- $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$

点 $p_0(0, 0)$ 是极大值点;

- $z = xy$

点 $p_0(0, 0)$ 不是极值点.



例

- $z = x^2 + y^2$

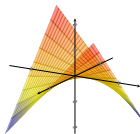
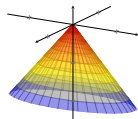
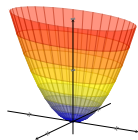
点 $p_0(0, 0)$ 是极小值点;

- $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$

点 $p_0(0, 0)$ 是极大值点;

- $z = xy$

点 $p_0(0, 0)$ 不是极值点.



例

- $z = x^2 + y^2$

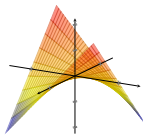
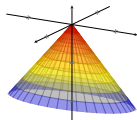
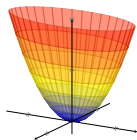
点 $p_0(0, 0)$ 是极小值点;

- $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$

点 $p_0(0, 0)$ 是极大值点;

- $z = xy$

点 $p_0(0, 0)$ 不是极值点.



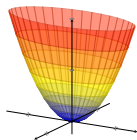
问题

- $z = xy$ 是否有极值点?

例

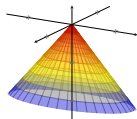
- $z = x^2 + y^2$

点 $p_0(0, 0)$ 是极小值点;



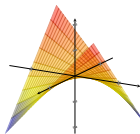
- $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$

点 $p_0(0, 0)$ 是极大值点;



- $z = xy$

点 $p_0(0, 0)$ 不是极值点.



问题

- $z = xy$ 是否有极值点?
- 是否有一般方法求出函数的极值点? 如:

$$z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$$

定理 设 $z = f(x, y)$ 在内点 (x_0, y_0) 处存在偏导数, 则 (x_0, y_0) 是极值点的必要条件是

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

定理 设 $z = f(x, y)$ 在内点 (x_0, y_0) 处存在偏导数, 则 (x_0, y_0) 是极值点的必要条件是

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

证明

1. 一元函数 $x \mapsto f(x, y_0)$

定理 设 $z = f(x, y)$ 在内点 (x_0, y_0) 处存在偏导数, 则 (x_0, y_0) 是极值点的必要条件是

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

证明

1. 一元函数 $x \mapsto f(x, y_0)$ 具有极值点 $x = x_0$,

定理 设 $z = f(x, y)$ 在内点 (x_0, y_0) 处存在偏导数, 则 (x_0, y_0) 是极值点的必要条件是

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

证明

1. 一元函数 $x \mapsto f(x, y_0)$ 具有极值点 $x = x_0$, 所以

$$\left. \frac{d}{dx} [f(x, y_0)] \right|_{x=x_0} = 0$$

定理 设 $z = f(x, y)$ 在内点 (x_0, y_0) 处存在偏导数, 则 (x_0, y_0) 是极值点的必要条件是

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

证明

1. 一元函数 $x \mapsto f(x, y_0)$ 具有极值点 $x = x_0$, 所以

$$f_x(x_0, y_0) = \left. \frac{d}{dx} [f(x, y_0)] \right|_{x=x_0} = 0$$

定理 设 $z = f(x, y)$ 在内点 (x_0, y_0) 处存在偏导数, 则 (x_0, y_0) 是极值点的必要条件是

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

证明

1. 一元函数 $x \mapsto f(x, y_0)$ 具有极值点 $x = x_0$, 所以

$$f_x(x_0, y_0) = \left. \frac{d}{dx} [f(x, y_0)] \right|_{x=x_0} = 0$$

2. 一元函数 $y \mapsto f(x_0, y)$ 具有极值点 $y = y_0$,

定理 设 $z = f(x, y)$ 在内点 (x_0, y_0) 处存在偏导数, 则 (x_0, y_0) 是极值点的必要条件是

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

证明

1. 一元函数 $x \mapsto f(x, y_0)$ 具有极值点 $x = x_0$, 所以

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{d}{dx} [f(x, y_0)] \Big|_{x=x_0} = 0$$

2. 一元函数 $y \mapsto f(x_0, y)$ 具有极值点 $y = y_0$, 所以

$$\frac{d}{dy} [f(x_0, y)] \Big|_{y=y_0} = 0$$

定理 设 $z = f(x, y)$ 在内点 (x_0, y_0) 处存在偏导数, 则 (x_0, y_0) 是极值点的必要条件是

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

证明

1. 一元函数 $x \mapsto f(x, y_0)$ 具有极值点 $x = x_0$, 所以

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{d}{dx} [f(x, y_0)] \Big|_{x=x_0} = 0$$

2. 一元函数 $y \mapsto f(x_0, y)$ 具有极值点 $y = y_0$, 所以

$$f_y(x_0, y_0) = \frac{d}{dy} [f(x_0, y)] \Big|_{y=y_0} = 0$$

定理 设 $z = f(x, y)$ 在内点 (x_0, y_0) 处存在偏导数, 则 (x_0, y_0) 是极值点的必要条件是

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

证明

1. 一元函数 $x \mapsto f(x, y_0)$ 具有极值点 $x = x_0$, 所以

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{d}{dx} [f(x, y_0)] \Big|_{x=x_0} = 0$$

2. 一元函数 $y \mapsto f(x_0, y)$ 具有极值点 $y = y_0$, 所以

$$f_y(x_0, y_0) = \frac{d}{dy} [f(x_0, y)] \Big|_{y=y_0} = 0$$

定义 使偏导数为零的点, 称为 **驻点**

定理 设 $z = f(x, y)$ 在内点 (x_0, y_0) 处存在偏导数, 则 (x_0, y_0) 是极值点的必要条件是

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

证明

1. 一元函数 $x \mapsto f(x, y_0)$ 具有极值点 $x = x_0$, 所以

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{d}{dx} [f(x, y_0)] \Big|_{x=x_0} = 0$$

2. 一元函数 $y \mapsto f(x_0, y)$ 具有极值点 $y = y_0$, 所以

$$f_y(x_0, y_0) = \frac{d}{dy} [f(x_0, y)] \Big|_{y=y_0} = 0$$

定义 使偏导数为零的点, 称为 **驻点**

注 如果函数存在偏导数, 则 $\{\text{极值点}\} \subset \{\text{驻点}\}$

例 1 点 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点，从而也是驻点.

例 1 点 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点, 从而也是驻点. 直接验证 $(0, 0)$ 是驻点, 则如下:

$$\begin{cases} z_x = \\ z_y = \end{cases}$$

例 1 点 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点，从而也是驻点. 直接验证 $(0, 0)$ 是驻点，则如下：

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases}$$

例 1 点 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点, 从而也是驻点. 直接验证 $(0, 0)$ 是驻点, 则如下:

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \implies \begin{cases} z_x(0, 0) = 0 \\ z_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

例 1 点 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点，从而也是驻点. 直接验证 $(0, 0)$ 是驻点，则如下：

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \implies \begin{cases} z_x(0, 0) = 0 \\ z_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

例 2 点 $(0, 0)$ 是 $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ 的极大值点，但不是驻点：

例 1 点 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点, 从而也是驻点. 直接验证 $(0, 0)$ 是驻点, 则如下:

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \implies \begin{cases} z_x(0, 0) = 0 \\ z_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

例 2 点 $(0, 0)$ 是 $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ 的极大值点, 但不是驻点: 一阶偏导

$$z_x(0, 0), \quad z_y(0, 0)$$

不存在.

例 1 点 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点, 从而也是驻点. 直接验证 $(0, 0)$ 是驻点, 则如下:

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \implies \begin{cases} z_x(0, 0) = 0 \\ z_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

例 2 点 $(0, 0)$ 是 $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ 的极大值点, 但不是驻点: 一阶偏导

$$z_x(0, 0), \quad z_y(0, 0)$$

不存在.

$$\left(\frac{d}{dx} z(x, 0) \Big|_{x=0} = \right)$$

例 1 点 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点, 从而也是驻点. 直接验证 $(0, 0)$ 是驻点, 则如下:

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \implies \begin{cases} z_x(0, 0) = 0 \\ z_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

例 2 点 $(0, 0)$ 是 $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ 的极大值点, 但不是驻点: 一阶偏导

$$z_x(0, 0), \quad z_y(0, 0)$$

不存在.

$$(z(x, 0) = \quad \quad \quad \frac{d}{dx} z(x, 0) \Big|_{x=0} = \quad \quad \quad)$$

例 1 点 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点, 从而也是驻点. 直接验证 $(0, 0)$ 是驻点, 则如下:

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \implies \begin{cases} z_x(0, 0) = 0 \\ z_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

例 2 点 $(0, 0)$ 是 $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ 的极大值点, 但不是驻点: 一阶偏导

$$z_x(0, 0), \quad z_y(0, 0)$$

不存在.

$$(z(x, 0) = -\sqrt{x^2} = \quad \quad \quad \frac{d}{dx} z(x, 0) \Big|_{x=0} = \quad \quad \quad)$$

例 1 点 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点, 从而也是驻点. 直接验证 $(0, 0)$ 是驻点, 则如下:

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \implies \begin{cases} z_x(0, 0) = 0 \\ z_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

例 2 点 $(0, 0)$ 是 $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ 的极大值点, 但不是驻点: 一阶偏导

$$z_x(0, 0), \quad z_y(0, 0)$$

不存在.

$$(z(x, 0) = -\sqrt{x^2} = -|x|, \quad \frac{d}{dx}z(x, 0)|_{x=0} = \quad)$$

例 1 点 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点, 从而也是驻点. 直接验证 $(0, 0)$ 是驻点, 则如下:

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \implies \begin{cases} z_x(0, 0) = 0 \\ z_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

例 2 点 $(0, 0)$ 是 $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ 的极大值点, 但不是驻点: 一阶偏导

$$z_x(0, 0), \quad z_y(0, 0)$$

不存在.

$$(z(x, 0) = -\sqrt{x^2} = -|x|, \quad \frac{d}{dx}z(x, 0)|_{x=0} = -\frac{d}{dx}|x||_{x=0} \quad)$$

例 1 点 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点, 从而也是驻点. 直接验证 $(0, 0)$ 是驻点, 则如下:

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \implies \begin{cases} z_x(0, 0) = 0 \\ z_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

例 2 点 $(0, 0)$ 是 $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ 的极大值点, 但不是驻点: 一阶偏导

$$z_x(0, 0), \quad z_y(0, 0)$$

不存在.

$$(z(x, 0) = -\sqrt{x^2} = -|x|, \quad \frac{d}{dx}z(x, 0)|_{x=0} = -\frac{d}{dx}|x||_{x=0} \text{ 不存在})$$

例 1 点 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点, 从而也是驻点. 直接验证 $(0, 0)$ 是驻点, 则如下:

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \implies \begin{cases} z_x(0, 0) = 0 \\ z_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

例 2 点 $(0, 0)$ 是 $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ 的极大值点, 但不是驻点: 一阶偏导

$$z_x(0, 0), \quad z_y(0, 0)$$

不存在.

$$(z(x, 0) = -\sqrt{x^2} = -|x|, \quad \frac{d}{dx}z(x, 0)|_{x=0} = -\frac{d}{dx}|x||_{x=0} \text{ 不存在})$$

例 3 (驻点不一定是极值点) 设 $z = xy$.

例 1 点 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点, 从而也是驻点. 直接验证 $(0, 0)$ 是驻点, 则如下:

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \implies \begin{cases} z_x(0, 0) = 0 \\ z_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

例 2 点 $(0, 0)$ 是 $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ 的极大值点, 但不是驻点: 一阶偏导

$$z_x(0, 0), \quad z_y(0, 0)$$

不存在.

$$(z(x, 0) = -\sqrt{x^2} = -|x|, \quad \frac{d}{dx}z(x, 0)|_{x=0} = -\frac{d}{dx}|x||_{x=0} \text{ 不存在})$$

例 3 (驻点不一定是极值点) 设 $z = xy$. 点 $(0, 0)$ 是驻点:

例 1 点 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点, 从而也是驻点. 直接验证 $(0, 0)$ 是驻点, 则如下:

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \implies \begin{cases} z_x(0, 0) = 0 \\ z_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

例 2 点 $(0, 0)$ 是 $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ 的极大值点, 但不是驻点: 一阶偏导

$$z_x(0, 0), \quad z_y(0, 0)$$

不存在.

$$(z(x, 0) = -\sqrt{x^2} = -|x|, \quad \frac{d}{dx}z(x, 0)|_{x=0} = -\frac{d}{dx}|x||_{x=0} \text{ 不存在})$$

例 3 (驻点不一定是极值点) 设 $z = xy$. 点 $(0, 0)$ 是驻点:

$$\begin{cases} z_x = y \\ z_y = x \end{cases}$$

例 1 点 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点, 从而也是驻点. 直接验证 $(0, 0)$ 是驻点, 则如下:

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \implies \begin{cases} z_x(0, 0) = 0 \\ z_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

例 2 点 $(0, 0)$ 是 $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ 的极大值点, 但不是驻点: 一阶偏导

$$z_x(0, 0), \quad z_y(0, 0)$$

不存在.

$$(z(x, 0) = -\sqrt{x^2} = -|x|, \quad \frac{d}{dx}z(x, 0)|_{x=0} = -\frac{d}{dx}|x||_{x=0} \text{ 不存在})$$

例 3 (驻点不一定是极值点) 设 $z = xy$. 点 $(0, 0)$ 是驻点:

$$\begin{cases} z_x = y \\ z_y = x \end{cases} \implies \begin{cases} z_x(0, 0) = 0 \\ z_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

例 1 点 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点, 从而也是驻点. 直接验证 $(0, 0)$ 是驻点, 则如下:

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \implies \begin{cases} z_x(0, 0) = 0 \\ z_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

例 2 点 $(0, 0)$ 是 $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ 的极大值点, 但不是驻点: 一阶偏导

$$z_x(0, 0), \quad z_y(0, 0)$$

不存在.

$$(z(x, 0) = -\sqrt{x^2} = -|x|, \quad \frac{d}{dx}z(x, 0)|_{x=0} = -\frac{d}{dx}|x||_{x=0} \text{ 不存在})$$

例 3 (驻点不一定是极值点) 设 $z = xy$. 点 $(0, 0)$ 是驻点:

$$\begin{cases} z_x = y \\ z_y = x \end{cases} \implies \begin{cases} z_x(0, 0) = 0 \\ z_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

但点 $(0, 0)$ 不是极值点.

例 1 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$, 求驻点.

例 1 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$, 求驻点.

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = \\ z_y = \end{cases}$$

例 1 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$, 求驻点.

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = \end{cases}$$

例 1 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$, 求驻点.

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

例 1 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$, 求驻点.

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases}$$

例 1 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$, 求驻点.

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \end{cases}$$

例 1 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$, 求驻点.

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(x+3)(x-1) = 0 \end{cases}$$

例 1 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$, 求驻点.

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 3(x+3)(x-1) = 0 \\ -3y(y-2) = 0 \end{cases}$$

例 1 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$, 求驻点.

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(x+3)(x-1) = 0 \\ -3y(y-2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \\ y = \end{cases}$$

例 1 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$, 求驻点.

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(x+3)(x-1) = 0 \\ -3y(y-2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3, 1 \\ y = \end{cases}$$

例 1 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$, 求驻点.

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(x+3)(x-1) = 0 \\ -3y(y-2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3, 1 \\ y = 0, 2 \end{cases}$$

例 1 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$, 求驻点.

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(x+3)(x-1) = 0 \\ -3y(y-2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3, 1 \\ y = 0, 2 \end{cases}$$

所以驻点为

$y = 2$		
$y = 0$		
	$x = -3$	$x = 1$

例 1 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$, 求驻点.

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(x+3)(x-1) = 0 \\ -3y(y-2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3, 1 \\ y = 0, 2 \end{cases}$$

所以驻点为

$y = 2$		
$y = 0$	$(-3, 0)$	
	$x = -3$	$x = 1$

例 1 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$, 求驻点.

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(x+3)(x-1) = 0 \\ -3y(y-2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3, 1 \\ y = 0, 2 \end{cases}$$

所以驻点为

$y = 2$	$(-3, 2)$	
$y = 0$	$(-3, 0)$	
	$x = -3$	$x = 1$

例 1 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$, 求驻点.

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(x+3)(x-1) = 0 \\ -3y(y-2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3, 1 \\ y = 0, 2 \end{cases}$$

所以驻点为

$y = 2$	$(-3, 2)$	
$y = 0$	$(-3, 0)$	$(1, 0)$
	$x = -3$	$x = 1$

例 1 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$, 求驻点.

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(x+3)(x-1) = 0 \\ -3y(y-2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3, 1 \\ y = 0, 2 \end{cases}$$

所以驻点为

$y = 2$	$(-3, 2)$	$(1, 2)$
$y = 0$	$(-3, 0)$	$(1, 0)$
	$x = -3$	$x = 1$

例 1 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$, 求驻点.

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

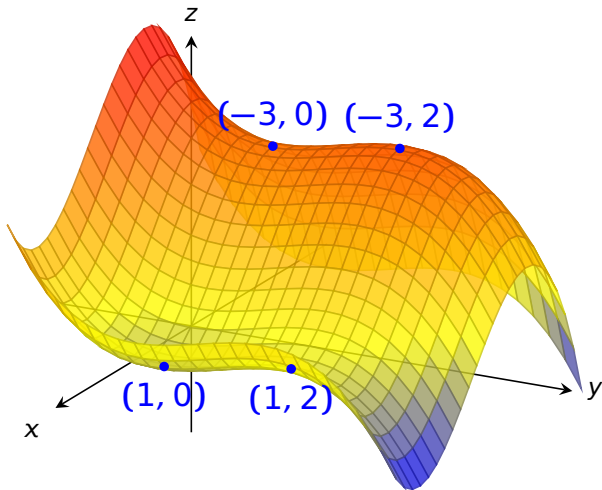
$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(x+3)(x-1) = 0 \\ -3y(y-2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3, 1 \\ y = 0, 2 \end{cases}$$

所以驻点为

$y = 2$	$(-3, 2)$	$(1, 2)$
$y = 0$	$(-3, 0)$	$(1, 0)$
	$x = -3$	$x = 1$

例 2 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$, 求驻点.

$$z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$$



例 2 设 $z = x^3 + y^3 - 3xy$, 求驻点.

例 2 设 $z = x^3 + y^3 - 3xy$, 求驻点.

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = \\ z_y = \end{cases}$$

例 2 设 $z = x^3 + y^3 - 3xy$, 求驻点.

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y \\ z_y = \end{cases}$$

例 2 设 $z = x^3 + y^3 - 3xy$, 求驻点.

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y \\ z_y = 3y^2 - 3x \end{cases}$$

例 2 设 $z = x^3 + y^3 - 3xy$, 求驻点.

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y \\ z_y = 3y^2 - 3x \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ z_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}$$

例 2 设 $z = x^3 + y^3 - 3xy$, 求驻点.

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y \\ z_y = 3y^2 - 3x \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ z_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \end{cases}$$

例 2 设 $z = x^3 + y^3 - 3xy$, 求驻点.

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y \\ z_y = 3y^2 - 3x \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ z_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = y \end{cases}$$

例 2 设 $z = x^3 + y^3 - 3xy$, 求驻点.

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y \\ z_y = 3y^2 - 3x \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ z_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases}$$

例 2 设 $z = x^3 + y^3 - 3xy$, 求驻点.

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y \\ z_y = 3y^2 - 3x \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ z_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases} \implies x^4 = x$$

例 2 设 $z = x^3 + y^3 - 3xy$, 求驻点.

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y \\ z_y = 3y^2 - 3x \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ z_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases} \implies x^4 = x \implies x = 0, 1$$

例 2 设 $z = x^3 + y^3 - 3xy$, 求驻点.

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y \\ z_y = 3y^2 - 3x \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{aligned} \begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ z_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} &\implies \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases} \implies x^4 = x \implies x = 0, 1 \\ &\implies \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

例 2 设 $z = x^3 + y^3 - 3xy$, 求驻点.

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y \\ z_y = 3y^2 - 3x \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ z_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases} \implies x^4 = x \implies x = 0, 1$$

$$\implies \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

例 2 设 $z = x^3 + y^3 - 3xy$, 求驻点.

解 求一阶偏导

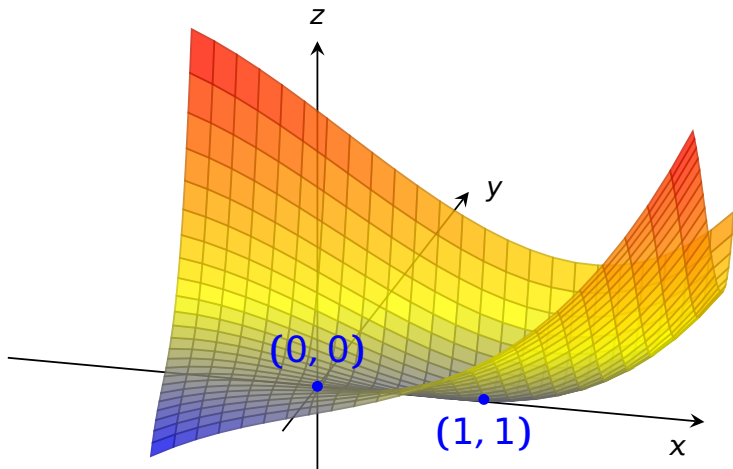
$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y \\ z_y = 3y^2 - 3x \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{aligned} \begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ z_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} &\implies \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases} \implies x^4 = x \implies x = 0, 1 \\ &\implies \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

所以驻点为 $(1, 1)$, $(0, 0)$

$$z = x^3 + y^3 - 3xy$$



- **问题** 如何从驻点中判别哪些是极值点？

- **问题** 如何从驻点中判别哪些是极值点？

定理（极值的充分条件） 设 $z = f(x, y)$ 具有直到二阶的连续偏导数， (x_0, y_0) 是驻点.

- **问题** 如何从驻点中判别哪些是极值点？

定理（极值的充分条件） 设 $z = f(x, y)$ 具有直到二阶的连续偏导数， (x_0, y_0) 是驻点. 定义判别式

$$P(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$$

结论是：

- **问题** 如何从驻点中判别哪些是极值点？

定理（极值的充分条件） 设 $z = f(x, y)$ 具有直到二阶的连续偏导数， (x_0, y_0) 是驻点. 定义判别式

$$P(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$$

结论是：

3. 若 $P(x_0, y_0) < 0$ ，则 (x_0, y_0) 一定不是极值点；

● **问题** 如何从驻点中判别哪些是极值点？

定理（极值的充分条件） 设 $z = f(x, y)$ 具有直到二阶的连续偏导数， (x_0, y_0) 是驻点. 定义判别式

$$P(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$$

结论是：

3. 若 $P(x_0, y_0) < 0$ ，则 (x_0, y_0) 一定不是极值点；
4. 若 $P(x_0, y_0) = 0$ ，则此判定法失效，结论不确定.

● **问题** 如何从驻点中判别哪些是极值点？

定理（极值的充分条件） 设 $z = f(x, y)$ 具有直到二阶的连续偏导数， (x_0, y_0) 是驻点. 定义判别式

$$P(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$$

结论是：

1. 若 $P(x_0, y_0) > 0$,
2. 若 $P(x_0, y_0) > 0$,
3. 若 $P(x_0, y_0) < 0$, 则 (x_0, y_0) 一定不是极值点；
4. 若 $P(x_0, y_0) = 0$, 则此判定法失效, 结论不确定.

● **问题** 如何从驻点中判别哪些是极值点？

定理（极值的充分条件） 设 $z = f(x, y)$ 具有直到二阶的连续偏导数， (x_0, y_0) 是驻点. 定义判别式

$$P(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$$

结论是：

1. 若 $P(x_0, y_0) > 0$ ，且 $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ ，则 (x_0, y_0) 是极大值点；
2. 若 $P(x_0, y_0) > 0$ ，
3. 若 $P(x_0, y_0) < 0$ ，则 (x_0, y_0) 一定不是极值点；
4. 若 $P(x_0, y_0) = 0$ ，则此判定法失效，结论不确定.

● **问题** 如何从驻点中判别哪些是极值点？

定理（极值的充分条件） 设 $z = f(x, y)$ 具有直到二阶的连续偏导数， (x_0, y_0) 是驻点. 定义判别式

$$P(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$$

结论是：

1. 若 $P(x_0, y_0) > 0$ ，且 $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ ，则 (x_0, y_0) 是极大值点；
2. 若 $P(x_0, y_0) > 0$ ，且 $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ ，则 (x_0, y_0) 是极小值点；
3. 若 $P(x_0, y_0) < 0$ ，则 (x_0, y_0) 一定不是极值点；
4. 若 $P(x_0, y_0) = 0$ ，则此判定法失效，结论不确定。

● **问题** 如何从驻点中判别哪些是极值点？

定理（极值的充分条件） 设 $z = f(x, y)$ 具有直到二阶的连续偏导数， (x_0, y_0) 是驻点. 定义判别式

$$P(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$$

结论是：

1. 若 $P(x_0, y_0) > 0$ ，且 $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ ，则 (x_0, y_0) 是极大值点；
2. 若 $P(x_0, y_0) > 0$ ，且 $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ ，则 (x_0, y_0) 是极小值点；
3. 若 $P(x_0, y_0) < 0$ ，则 (x_0, y_0) 一定不是极值点；
4. 若 $P(x_0, y_0) = 0$ ，则此判定法失效，结论不确定。

● **总结** 求 $z = f(x, y)$ 极值点的步骤：

1. 求驻点：

● **问题** 如何从驻点中判别哪些是极值点？

定理（极值的充分条件） 设 $z = f(x, y)$ 具有直到二阶的连续偏导数， (x_0, y_0) 是驻点. 定义判别式

$$P(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$$

结论是：

1. 若 $P(x_0, y_0) > 0$ ，且 $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ ，则 (x_0, y_0) 是极大值点；
2. 若 $P(x_0, y_0) > 0$ ，且 $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ ，则 (x_0, y_0) 是极小值点；
3. 若 $P(x_0, y_0) < 0$ ，则 (x_0, y_0) 一定不是极值点；
4. 若 $P(x_0, y_0) = 0$ ，则此判定法失效，结论不确定。

● **总结** 求 $z = f(x, y)$ 极值点的步骤：

1. 求驻点：解方程 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ ，设解为 (x_0, y_0)

● **问题** 如何从驻点中判别哪些是极值点？

定理（极值的充分条件） 设 $z = f(x, y)$ 具有直到二阶的连续偏导数， (x_0, y_0) 是驻点. 定义判别式

$$P(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$$

结论是：

1. 若 $P(x_0, y_0) > 0$ ，且 $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ ，则 (x_0, y_0) 是极大值点；
2. 若 $P(x_0, y_0) > 0$ ，且 $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ ，则 (x_0, y_0) 是极小值点；
3. 若 $P(x_0, y_0) < 0$ ，则 (x_0, y_0) 一定不是极值点；
4. 若 $P(x_0, y_0) = 0$ ，则此判定法失效，结论不确定.

● **总结** 求 $z = f(x, y)$ 极值点的步骤：

1. 求驻点：解方程 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ ，设解为 (x_0, y_0)
2. 通过 $P(x_0, y_0)$ 辨别驻点 (x_0, y_0) 是否极值点

例 1 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点.

例 1 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点.

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = \quad , \quad z_y =$$

例 1 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点.

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \quad z_y =$$

例 1 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点.

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \quad z_y = -3y^2 + 6y$$

例 1 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点.

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \quad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组
$$\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

例 1 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点.

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \quad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

例 1 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点.

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \quad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$P(x, y) =$$

例 1 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点.

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \quad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = \\ z_{xy} = \\ z_{yy} = \end{cases} \implies P(x, y) =$$

例 1 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点.

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \quad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = \\ z_{yy} = \end{cases} \Rightarrow P(x, y) =$$

例 1 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点.

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \quad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = \end{cases} \implies P(x, y) =$$

例 1 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点.

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \quad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = -6y + 6 \end{cases} \Rightarrow P(x, y) =$$

例 1 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点.

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \quad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = -6y + 6 \end{cases} \Rightarrow P(x, y) = -36(x + 1)(y - 1)$$

例 1 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点.

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \quad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = -6y + 6 \end{cases} \Rightarrow P(x, y) = -36(x+1)(y-1)$$

3. 结论

	$(-3, 0)$	$(-3, 2)$	$(1, 0)$	$(1, 2)$
$P(x_0, y_0)$				
$z_{xx}(x_0, y_0)$				
是否极值点				

例 1 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点.

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \quad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = -6y + 6 \end{cases} \Rightarrow P(x, y) = -36(x+1)(y-1)$$

3. 结论

	$(-3, 0)$	$(-3, 2)$	$(1, 0)$	$(1, 2)$
$P(x_0, y_0)$	$-72 < 0$			
$z_{xx}(x_0, y_0)$				
是否极值点				

例 1 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点.

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \quad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = -6y + 6 \end{cases} \Rightarrow P(x, y) = -36(x+1)(y-1)$$

3. 结论

	$(-3, 0)$	$(-3, 2)$	$(1, 0)$	$(1, 2)$
$P(x_0, y_0)$	$-72 < 0$			
$z_{xx}(x_0, y_0)$				
是否极值点	×			

例 1 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点.

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \quad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = -6y + 6 \end{cases} \Rightarrow P(x, y) = -36(x+1)(y-1)$$

3. 结论

	$(-3, 0)$	$(-3, 2)$	$(1, 0)$	$(1, 2)$
$P(x_0, y_0)$	$-72 < 0$	$72 > 0$		
$z_{xx}(x_0, y_0)$				
是否极值点	×			

例 1 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点.

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \quad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = -6y + 6 \end{cases} \Rightarrow P(x, y) = -36(x+1)(y-1)$$

3. 结论

	$(-3, 0)$	$(-3, 2)$	$(1, 0)$	$(1, 2)$
$P(x_0, y_0)$	$-72 < 0$	$72 > 0$		
$z_{xx}(x_0, y_0)$		$-12 < 0$		
是否极值点	×			

例 1 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点.

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \quad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = -6y + 6 \end{cases} \Rightarrow P(x, y) = -36(x+1)(y-1)$$

3. 结论

	$(-3, 0)$	$(-3, 2)$	$(1, 0)$	$(1, 2)$
$P(x_0, y_0)$	$-72 < 0$	$72 > 0$		
$z_{xx}(x_0, y_0)$		$-12 < 0$		
是否极值点	×	极大值点		

例 1 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点.

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \quad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = -6y + 6 \end{cases} \Rightarrow P(x, y) = -36(x+1)(y-1)$$

3. 结论

	$(-3, 0)$	$(-3, 2)$	$(1, 0)$	$(1, 2)$
$P(x_0, y_0)$	$-72 < 0$	$72 > 0$	$72 > 0$	
$z_{xx}(x_0, y_0)$		$-12 < 0$		
是否极值点	×	极大值点		

例 1 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点.

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \quad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = -6y + 6 \end{cases} \Rightarrow P(x, y) = -36(x+1)(y-1)$$

3. 结论

	$(-3, 0)$	$(-3, 2)$	$(1, 0)$	$(1, 2)$
$P(x_0, y_0)$	$-72 < 0$	$72 > 0$	$72 > 0$	
$z_{xx}(x_0, y_0)$		$-12 < 0$	$12 > 0$	
是否极值点	×	极大值点		

例 1 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点.

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \quad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = -6y + 6 \end{cases} \Rightarrow P(x, y) = -36(x+1)(y-1)$$

3. 结论

	$(-3, 0)$	$(-3, 2)$	$(1, 0)$	$(1, 2)$
$P(x_0, y_0)$	$-72 < 0$	$72 > 0$	$72 > 0$	
$z_{xx}(x_0, y_0)$		$-12 < 0$	$12 > 0$	
是否极值点	×	极大值点	极小值点	

例 1 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点.

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \quad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = -6y + 6 \end{cases} \Rightarrow P(x, y) = -36(x+1)(y-1)$$

3. 结论

	$(-3, 0)$	$(-3, 2)$	$(1, 0)$	$(1, 2)$
$P(x_0, y_0)$	$-72 < 0$	$72 > 0$	$72 > 0$	$-72 < 0$
$z_{xx}(x_0, y_0)$		$-12 < 0$	$12 > 0$	
是否极值点	×	极大值点	极小值点	

例 1 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点.

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \quad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

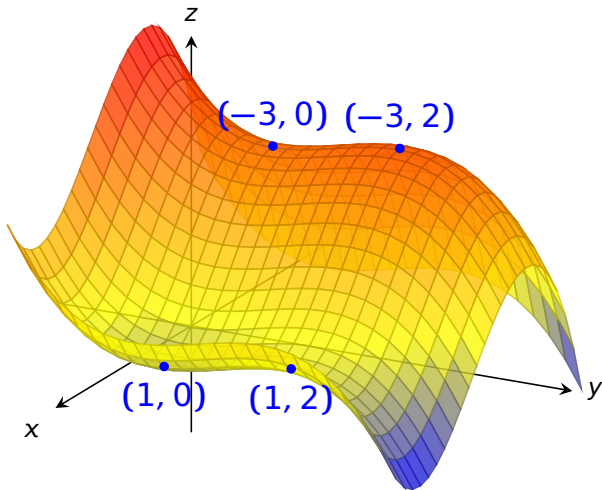
2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = -6y + 6 \end{cases} \Rightarrow P(x, y) = -36(x+1)(y-1)$$

3. 结论

	$(-3, 0)$	$(-3, 2)$	$(1, 0)$	$(1, 2)$
$P(x_0, y_0)$	$-72 < 0$	$72 > 0$	$72 > 0$	$-72 < 0$
$z_{xx}(x_0, y_0)$		$-12 < 0$	$12 > 0$	
是否极值点	×	极大值点	极小值点	×

$$z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$$



例 2 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点.

例 2 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点.

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = \quad , \quad z_y =$$

例 2 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点.

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \quad z_y =$$

例 2 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点.

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \quad z_y = 3y^2 - 3x$$

例 2 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点.

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \quad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组
$$\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

例 2 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点.

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \quad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(1, 1), (0, 0)$

例 2 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点.

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \quad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(1, 1), (0, 0)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$P(x, y) =$$

例 2 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点.

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \quad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(1, 1), (0, 0)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = \\ z_{xy} = \\ z_{yy} = \end{cases} \implies P(x, y) =$$

例 2 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点.

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \quad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(1, 1), (0, 0)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x \\ z_{xy} = \\ z_{yy} = \end{cases} \implies P(x, y) =$$

例 2 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点.

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \quad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(1, 1), (0, 0)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x \\ z_{xy} = -3 \\ z_{yy} = \end{cases} \implies P(x, y) =$$

例 2 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点.

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \quad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(1, 1), (0, 0)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x \\ z_{xy} = -3 \\ z_{yy} = 6y \end{cases} \implies P(x, y) =$$

例 2 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点.

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \quad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(1, 1), (0, 0)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x \\ z_{xy} = -3 \\ z_{yy} = 6y \end{cases} \implies P(x, y) = 36xy - 9$$

例 2 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点.

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \quad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(1, 1), (0, 0)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x \\ z_{xy} = -3 \\ z_{yy} = 6y \end{cases} \implies P(x, y) = 36xy - 9$$

3. 结论

	$(1, 1)$	$(0, 0)$
$P(x_0, y_0)$		
$z_{xx}(x_0, y_0)$		
是否极值点		

例 2 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点.

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \quad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(1, 1), (0, 0)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x \\ z_{xy} = -3 \\ z_{yy} = 6y \end{cases} \implies P(x, y) = 36xy - 9$$

3. 结论

	$(1, 1)$	$(0, 0)$
$P(x_0, y_0)$	$27 > 0$	
$z_{xx}(x_0, y_0)$		
是否极值点		

例 2 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点.

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \quad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(1, 1), (0, 0)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x \\ z_{xy} = -3 \\ z_{yy} = 6y \end{cases} \implies P(x, y) = 36xy - 9$$

3. 结论

	$(1, 1)$	$(0, 0)$
$P(x_0, y_0)$	$27 > 0$	
$z_{xx}(x_0, y_0)$	$6 > 0$	
是否极值点		

例 2 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点.

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \quad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(1, 1), (0, 0)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x \\ z_{xy} = -3 \\ z_{yy} = 6y \end{cases} \implies P(x, y) = 36xy - 9$$

3. 结论

	$(1, 1)$	$(0, 0)$
$P(x_0, y_0)$	$27 > 0$	
$z_{xx}(x_0, y_0)$	$6 > 0$	
是否极值点	极小值点	

例 2 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点.

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \quad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(1, 1), (0, 0)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x \\ z_{xy} = -3 \\ z_{yy} = 6y \end{cases} \implies P(x, y) = 36xy - 9$$

3. 结论

	$(1, 1)$	$(0, 0)$
$P(x_0, y_0)$	$27 > 0$	$-9 < 0$
$z_{xx}(x_0, y_0)$	$6 > 0$	
是否极值点	极小值点	

例 2 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点.

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \quad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $(1, 1), (0, 0)$

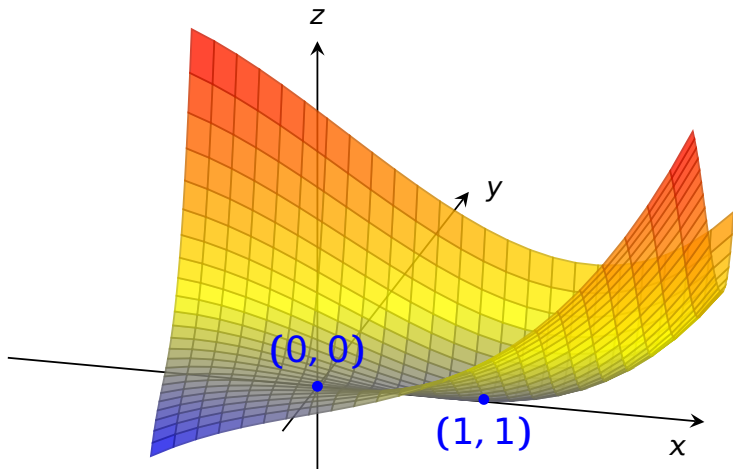
2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x \\ z_{xy} = -3 \\ z_{yy} = 6y \end{cases} \implies P(x, y) = 36xy - 9$$

3. 结论

	$(1, 1)$	$(0, 0)$
$P(x_0, y_0)$	$27 > 0$	$-9 < 0$
$z_{xx}(x_0, y_0)$	$6 > 0$	
是否极值点	极小值点	×

$$z = x^3 + y^3 - 3xy$$



三元函数的极值点

- 设 $u = f(x, y, z)$ 。
- (x_0, y_0, z_0) 是 **驻点** 指在该点处偏导数全为零：

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f_z(x_0, y_0, z_0) = 0$$

三元函数的极值点

- 设 $u = f(x, y, z)$ 。
- (x_0, y_0, z_0) 是 **驻点** 指在该点处偏导数全为零：

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f_z(x_0, y_0, z_0) = 0$$

- 设 (x_0, y_0, z_0) 是 $u = f(x, y, z)$ 的 **极值点**，则 (x_0, y_0, z_0) 一定是驻点

三元函数的极值点

- 设 $u = f(x, y, z)$ 。
- (x_0, y_0, z_0) 是 **驻点** 指在该点处偏导数全为零：

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f_z(x_0, y_0, z_0) = 0$$

- 设 (x_0, y_0, z_0) 是 $u = f(x, y, z)$ 的 **极值点**，则 (x_0, y_0, z_0) 一定是驻点
- 如何进一步判别哪些驻点为极值点？

三元函数的极值点

- 设 $u = f(x, y, z)$ 。
- (x_0, y_0, z_0) 是 **驻点** 指在该点处偏导数全为零：

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f_z(x_0, y_0, z_0) = 0$$

- 设 (x_0, y_0, z_0) 是 $u = f(x, y, z)$ 的 **极值点**，则 (x_0, y_0, z_0) 一定是驻点
- 如何进一步判别哪些驻点为极值点？考虑矩阵

$$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}_{(x_0, y_0, z_0)}$$

三元函数的极值点

- 设 $u = f(x, y, z)$ 。
- (x_0, y_0, z_0) 是 **驻点** 指在该点处偏导数全为零：

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f_z(x_0, y_0, z_0) = 0$$

- 设 (x_0, y_0, z_0) 是 $u = f(x, y, z)$ 的 **极值点**，则 (x_0, y_0, z_0) 一定是驻点
- 如何进一步判别哪些驻点为极值点？考虑矩阵

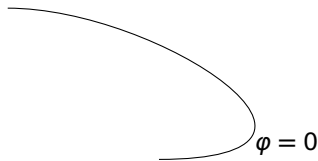
$$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}_{(x_0, y_0, z_0)}$$

- 如果是正定矩阵，则 (x_0, y_0, z_0) 是极小值点
- 如果是负定矩阵，则 (x_0, y_0, z_0) 是极大值点

We are here now...

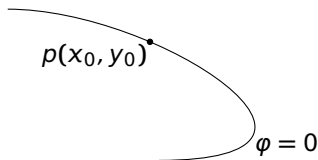
1. 多元函数的极值点
2. 条件极值
3. 求解多元函数的最值

给定函数 $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$. 设 $\nabla\varphi \neq 0$, 则 $\{\varphi = 0\}$ 是光滑曲线.



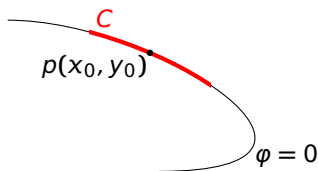
给定函数 $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$. 设 $\nabla\varphi \neq 0$, 则 $\{\varphi = 0\}$ 是光滑曲线.

定义 曲线上一一点 $p(x_0, y_0)$ 称为 $f(x, y)$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的
极大值点, 是指



给定函数 $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$. 设 $\nabla\varphi \neq 0$, 则 $\{\varphi = 0\}$ 是光滑曲线.

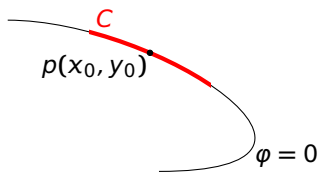
定义 曲线上一段 $p(x_0, y_0)$ 称为 $f(x, y)$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的
极大值点, 是指存在一小段曲线 C



给定函数 $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$. 设 $\nabla\varphi \neq 0$, 则 $\{\varphi = 0\}$ 是光滑曲线.

定义 曲线上一一点 $p(x_0, y_0)$ 称为 $f(x, y)$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的 **极大值点**, 是指存在一小段曲线 C 满足:

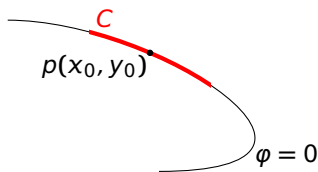
- $(x_0, y_0) \in C$
- $f(x_0, y_0) \geq f(x, y), \forall (x, y) \in C$



给定函数 $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$. 设 $\nabla\varphi \neq 0$, 则 $\{\varphi = 0\}$ 是光滑曲线.

定义 曲线上一小段 $p(x_0, y_0)$ 称为 $f(x, y)$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的 **极大值点**, 是指存在一小段曲线 C 满足:

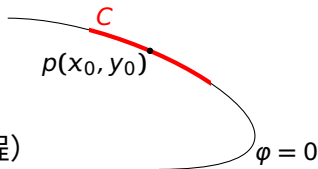
- $(x_0, y_0) \in C$
- $f(x_0, y_0) \geq f(x, y), \forall (x, y) \in C$



给定函数 $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$. 设 $\nabla\varphi \neq 0$, 则 $\{\varphi = 0\}$ 是光滑曲线.

定义 曲线上一点 $p(x_0, y_0)$ 称为 $f(x, y)$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的 **极大值点**, 是指存在一小段曲线 C 满足:

- $(x_0, y_0) \in C$
- $f(x_0, y_0) \geq f(x, y), \forall (x, y) \in C$

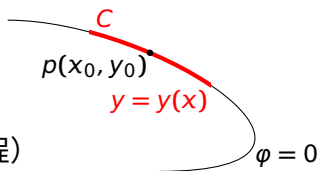


求解条件极值点 (列出 (x_0, y_0) 满足的方程)

给定函数 $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$. 设 $\nabla\varphi \neq 0$, 则 $\{\varphi = 0\}$ 是光滑曲线.

定义 曲线上一点 $p(x_0, y_0)$ 称为 $f(x, y)$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的 **极大值点**, 是指存在一小段曲线 C 满足:

- $(x_0, y_0) \in C$
- $f(x_0, y_0) \geq f(x, y), \forall (x, y) \in C$



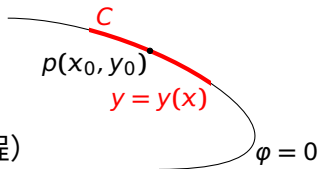
求解条件极值点 (列出 (x_0, y_0) 满足的方程)

不妨设 C 是 $y = y(x)$ 的图形,

给定函数 $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$. 设 $\nabla\varphi \neq 0$, 则 $\{\varphi = 0\}$ 是光滑曲线.

定义 曲线上一 $p(x_0, y_0)$ 称为 $f(x, y)$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的 **极大值点**, 是指存在一小段曲线 C 满足:

- $(x_0, y_0) \in C$
- $f(x_0, y_0) \geq f(x, y), \forall (x, y) \in C$



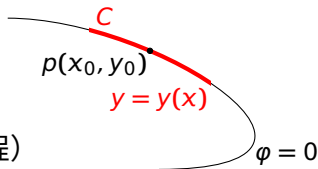
求解条件极值点 (列出 (x_0, y_0) 满足的方程)

不妨设 C 是 $y = y(x)$ 的图形, 则 $x = x_0$ 是 $f(x, y(x))$ 的极值点,

给定函数 $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$. 设 $\nabla\varphi \neq 0$, 则 $\{\varphi = 0\}$ 是光滑曲线.

定义 曲线上一点 $p(x_0, y_0)$ 称为 $f(x, y)$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的 **极大值点**, 是指存在一小段曲线 C 满足:

- $(x_0, y_0) \in C$
- $f(x_0, y_0) \geq f(x, y), \forall (x, y) \in C$



求解条件极值点 (列出 (x_0, y_0) 满足的方程)

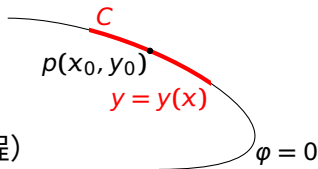
不妨设 C 是 $y = y(x)$ 的图形, 则 $x = x_0$ 是 $f(x, y(x))$ 的极值点, 所以

$$0 = \frac{d}{dx} f(x, y(x))|_{x=x_0}$$

给定函数 $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$. 设 $\nabla\varphi \neq 0$, 则 $\{\varphi = 0\}$ 是光滑曲线.

定义 曲线上一点 $p(x_0, y_0)$ 称为 $f(x, y)$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的 **极大值点**, 是指存在一小段曲线 C 满足:

- $(x_0, y_0) \in C$
- $f(x_0, y_0) \geq f(x, y), \forall (x, y) \in C$



求解条件极值点 (列出 (x_0, y_0) 满足的方程)

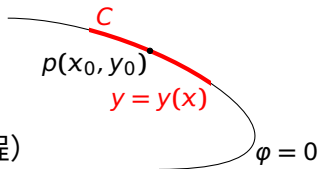
不妨设 C 是 $y = y(x)$ 的图形, 则 $x = x_0$ 是 $f(x, y(x))$ 的极值点, 所以

$$0 = \frac{d}{dx} f(x, y(x))|_{x=x_0} = f_x + f_y y'$$

给定函数 $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$. 设 $\nabla\varphi \neq 0$, 则 $\{\varphi = 0\}$ 是光滑曲线.

定义 曲线上一点 $p(x_0, y_0)$ 称为 $f(x, y)$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的 **极大值点**, 是指存在一小段曲线 C 满足:

- $(x_0, y_0) \in C$
- $f(x_0, y_0) \geq f(x, y), \forall (x, y) \in C$



求解条件极值点 (列出 (x_0, y_0) 满足的方程)

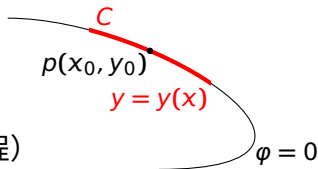
不妨设 C 是 $y = y(x)$ 的图形, 则 $x = x_0$ 是 $f(x, y(x))$ 的极值点, 所以

$$0 = \frac{d}{dx} f(x, y(x))|_{x=x_0} = f_x(p) + f_y(p)y'(x_0)$$

给定函数 $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$. 设 $\nabla\varphi \neq 0$, 则 $\{\varphi = 0\}$ 是光滑曲线.

定义 曲线上一点 $p(x_0, y_0)$ 称为 $f(x, y)$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的 **极大值点**, 是指存在一小段曲线 C 满足:

- $(x_0, y_0) \in C$
- $f(x_0, y_0) \geq f(x, y), \forall (x, y) \in C$



求解条件极值点 (列出 (x_0, y_0) 满足的方程)

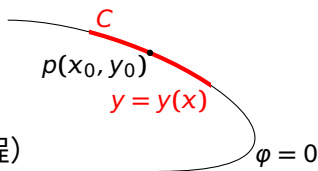
不妨设 C 是 $y = y(x)$ 的图形, 则 $x = x_0$ 是 $f(x, y(x))$ 的极值点, 所以

$$0 = \frac{d}{dx} f(x, y(x))|_{x=x_0} = f_x(p) + f_y(p)y'(x_0) = \nabla f(p) \cdot (1, y'(x_0))$$

给定函数 $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$. 设 $\nabla\varphi \neq 0$, 则 $\{\varphi = 0\}$ 是光滑曲线.

定义 曲线上一点 $p(x_0, y_0)$ 称为 $f(x, y)$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的 **极大值点**, 是指存在一小段曲线 C 满足:

- $(x_0, y_0) \in C$
- $f(x_0, y_0) \geq f(x, y), \forall (x, y) \in C$



求解条件极值点 (列出 (x_0, y_0) 满足的方程)

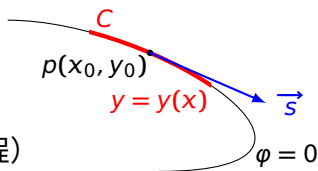
不妨设 C 是 $y = y(x)$ 的图形, 则 $x = x_0$ 是 $f(x, y(x))$ 的极值点, 所以

$$0 = \frac{d}{dx} f(x, y(x))|_{x=x_0} = f_x(p) + f_y(p)y'(x_0) = \nabla f(p) \cdot \underbrace{(1, y'(x_0))}_{\vec{s}}$$

给定函数 $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$. 设 $\nabla\varphi \neq 0$, 则 $\{\varphi = 0\}$ 是光滑曲线.

定义 曲线上一点 $p(x_0, y_0)$ 称为 $f(x, y)$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的 **极大值点**, 是指存在一小段曲线 C 满足:

- $(x_0, y_0) \in C$
- $f(x_0, y_0) \geq f(x, y), \forall (x, y) \in C$



求解条件极值点 (列出 (x_0, y_0) 满足的方程)

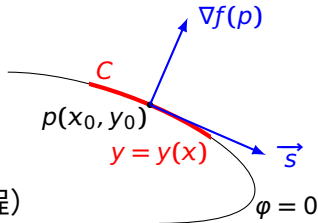
不妨设 C 是 $y = y(x)$ 的图形, 则 $x = x_0$ 是 $f(x, y(x))$ 的极值点, 所以

$$0 = \frac{d}{dx} f(x, y(x))|_{x=x_0} = f_x(p) + f_y(p)y'(x_0) = \nabla f(p) \cdot \underbrace{(1, y'(x_0))}_{\vec{s}}$$

给定函数 $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$. 设 $\nabla\varphi \neq 0$, 则 $\{\varphi = 0\}$ 是光滑曲线.

定义 曲线上一点 $p(x_0, y_0)$ 称为 $f(x, y)$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的 **极大值点**, 是指存在一小段曲线 C 满足:

- $(x_0, y_0) \in C$
- $f(x_0, y_0) \geq f(x, y), \forall (x, y) \in C$



求解条件极值点 (列出 (x_0, y_0) 满足的方程)

不妨设 C 是 $y = y(x)$ 的图形, 则 $x = x_0$ 是 $f(x, y(x))$ 的极值点, 所以

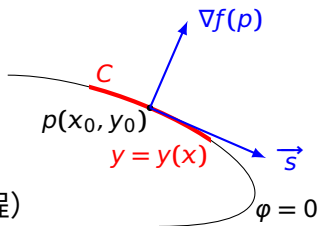
$$0 = \frac{d}{dx} f(x, y(x))|_{x=x_0} = f_x(p) + f_y(p)y'(x_0) = \nabla f(p) \cdot \underbrace{(1, y'(x_0))}_{\vec{s}}$$

$$\Rightarrow \nabla f(p) \perp \vec{s}$$

给定函数 $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$. 设 $\nabla\varphi \neq 0$, 则 $\{\varphi = 0\}$ 是光滑曲线.

定义 曲线上一点 $p(x_0, y_0)$ 称为 $f(x, y)$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的 **极大值点**, 是指存在一小段曲线 C 满足:

- 小
• $(x_0, y_0) \in C$
- $f(x_0, y_0) \geq f(x, y), \forall (x, y) \in C$
 \leq



求解条件极值点 (列出 (x_0, y_0) 满足的方程)

不妨设 C 是 $y = y(x)$ 的图形, 则 $x = x_0$ 是 $f(x, y(x))$ 的极值点, 所以

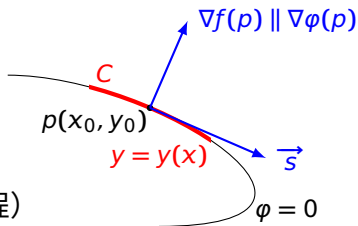
$$0 = \frac{d}{dx} f(x, y(x))|_{x=x_0} = f_x(p) + f_y(p)y'(x_0) = \nabla f(p) \cdot \underbrace{(1, y'(x_0))}_{\vec{s}}$$

$$\Rightarrow \nabla f(p) \perp \vec{s} \quad \xLeftrightarrow{\nabla\varphi(p) \perp \vec{s}}$$

给定函数 $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$. 设 $\nabla\varphi \neq 0$, 则 $\{\varphi = 0\}$ 是光滑曲线.

定义 曲线上一点 $p(x_0, y_0)$ 称为 $f(x, y)$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的 **极大值点**, 是指存在一小段曲线 C 满足:

- $(x_0, y_0) \in C$
- $f(x_0, y_0) \geq f(x, y), \forall (x, y) \in C$



求解条件极值点 (列出 (x_0, y_0) 满足的方程)

不妨设 C 是 $y = y(x)$ 的图形, 则 $x = x_0$ 是 $f(x, y(x))$ 的极值点, 所以

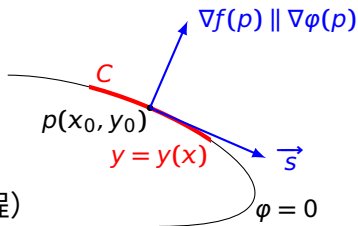
$$0 = \frac{d}{dx} f(x, y(x))|_{x=x_0} = f_x(p) + f_y(p)y'(x_0) = \nabla f(p) \cdot \underbrace{(1, y'(x_0))}_{\vec{s}}$$

$$\Rightarrow \nabla f(p) \perp \vec{s} \xrightarrow{\nabla\varphi(p) \perp \vec{s}} \nabla f(p) \parallel \nabla\varphi(p)$$

给定函数 $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$. 设 $\nabla\varphi \neq 0$, 则 $\{\varphi = 0\}$ 是光滑曲线.

定义 曲线上一点 $p(x_0, y_0)$ 称为 $f(x, y)$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的 **极大值点**, 是指存在一小段曲线 C 满足:

- $(x_0, y_0) \in C$
- $f(x_0, y_0) \geq f(x, y), \forall (x, y) \in C$



求解条件极值点 (列出 (x_0, y_0) 满足的方程)

不妨设 C 是 $y = y(x)$ 的图形, 则 $x = x_0$ 是 $f(x, y(x))$ 的极值点, 所以

$$0 = \frac{d}{dx} f(x, y(x))|_{x=x_0} = f_x(p) + f_y(p)y'(x_0) = \nabla f(p) \cdot \underbrace{(1, y'(x_0))}_{\vec{s}}$$

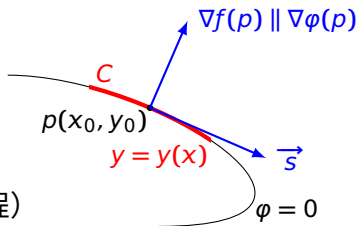
$$\Rightarrow \nabla f(p) \perp \vec{s} \xrightarrow{\nabla\varphi(p) \perp \vec{s}} \nabla f(p) \parallel \nabla\varphi(p)$$

$$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ s.t. } \nabla f(p) + \lambda \nabla\varphi(p) = 0$$

给定函数 $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$. 设 $\nabla\varphi \neq 0$, 则 $\{\varphi = 0\}$ 是光滑曲线.

定义 曲线上一点 $p(x_0, y_0)$ 称为 $f(x, y)$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的 **极大值点**, 是指存在一小段曲线 C 满足:

- $(x_0, y_0) \in C$
- $f(x_0, y_0) \geq f(x, y), \forall (x, y) \in C$



求解条件极值点 (列出 (x_0, y_0) 满足的方程)

不妨设 C 是 $y = y(x)$ 的图形, 则 $x = x_0$ 是 $f(x, y(x))$ 的极值点, 所以

$$0 = \frac{d}{dx} f(x, y(x))|_{x=x_0} = f_x(p) + f_y(p)y'(x_0) = \nabla f(p) \cdot \underbrace{(1, y'(x_0))}_{\vec{s}}$$

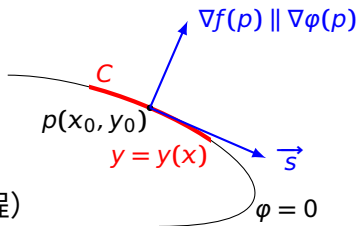
$$\Rightarrow \nabla f(p) \perp \vec{s} \xrightarrow{\nabla\varphi(p) \perp \vec{s}} \nabla f(p) \parallel \nabla\varphi(p)$$

$$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ s.t. } \nabla f(p) + \lambda \nabla\varphi(p) = 0 \Rightarrow \nabla(f + \lambda\varphi)(p) = 0$$

给定函数 $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$. 设 $\nabla\varphi \neq 0$, 则 $\{\varphi = 0\}$ 是光滑曲线.

定义 曲线上一点 $p(x_0, y_0)$ 称为 $f(x, y)$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的 **极大值点**, 是指存在一小段曲线 C 满足:

- 小
• $(x_0, y_0) \in C$
- $f(x_0, y_0) \geq f(x, y), \forall (x, y) \in C$
 \leq



求解条件极值点 (列出 (x_0, y_0) 满足的方程)

不妨设 C 是 $y = y(x)$ 的图形, 则 $x = x_0$ 是 $f(x, y(x))$ 的极值点, 所以

$$0 = \frac{d}{dx} f(x, y(x))|_{x=x_0} = f_x(p) + f_y(p)y'(x_0) = \nabla f(p) \cdot \underbrace{(1, y'(x_0))}_{\vec{s}}$$

$$\Rightarrow \nabla f(p) \perp \vec{s} \xrightarrow{\nabla\varphi(p) \perp \vec{s}} \nabla f(p) \parallel \nabla\varphi(p)$$

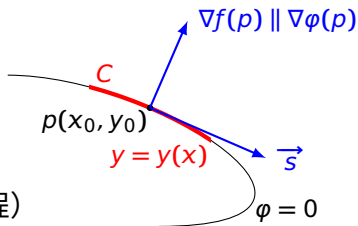
$$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ s.t. } \nabla f(p) + \lambda \nabla\varphi(p) = 0 \Rightarrow \nabla \underbrace{(f + \lambda\varphi)}(p) = 0$$

拉格朗日函数

给定函数 $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$. 设 $\nabla\varphi \neq 0$, 则 $\{\varphi = 0\}$ 是光滑曲线.

定义 曲线上一点 $p(x_0, y_0)$ 称为 $f(x, y)$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的 **极大值点**, 是指存在一小段曲线 C 满足:

- $(x_0, y_0) \in C$
- $f(x_0, y_0) \geq f(x, y), \forall (x, y) \in C$



求解条件极值点 (列出 (x_0, y_0) 满足的方程)

不妨设 C 是 $y = y(x)$ 的图形, 则 $x = x_0$ 是 $f(x, y(x))$ 的极值点, 所以

$$0 = \frac{d}{dx} f(x, y(x))|_{x=x_0} = f_x(p) + f_y(p)y'(x_0) = \nabla f(p) \cdot \underbrace{(1, y'(x_0))}_{\vec{s}}$$

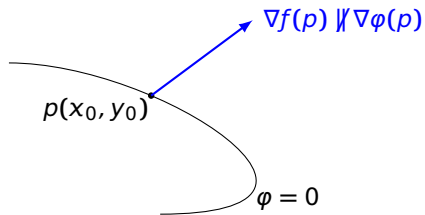
$$\Rightarrow \nabla f(p) \perp \vec{s} \xrightarrow{\nabla\varphi(p) \perp \vec{s}} \nabla f(p) \parallel \nabla\varphi(p)$$

$$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ s.t. } \nabla f(p) + \lambda \nabla\varphi(p) = 0 \Rightarrow \nabla(f + \lambda\varphi)(p) = 0$$

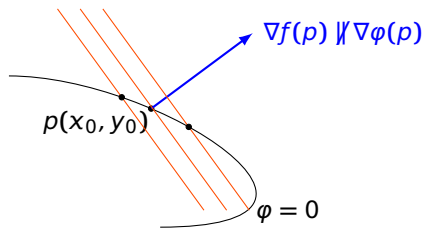
所以条件极值点 (x_0, y_0) 满足方程组 $\begin{cases} \nabla(f + \lambda\varphi) = 0 \\ \varphi = 0 \end{cases}$ **拉格朗日函数**

- $p(x_0, y_0)$ 为条件极值点 $\Rightarrow \nabla f(p) \parallel \nabla \phi(p)$ 。图示如下：

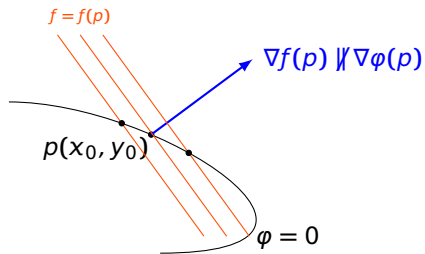
- $p(x_0, y_0)$ 为条件极值点 $\Rightarrow \nabla f(p) \parallel \nabla \varphi(p)$ 。图示如下：



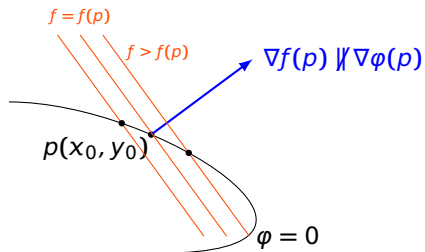
- $p(x_0, y_0)$ 为条件极值点 $\Rightarrow \nabla f(p) \parallel \nabla \varphi(p)$ 。图示如下：



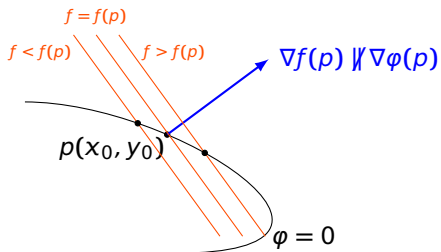
- $p(x_0, y_0)$ 为条件极值点 $\Rightarrow \nabla f(p) \parallel \nabla \varphi(p)$ 。图示如下：



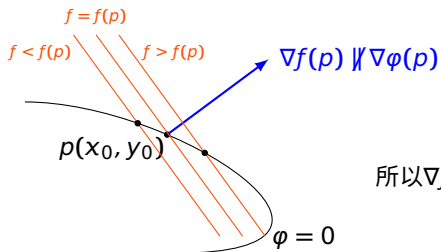
- $p(x_0, y_0)$ 为条件极值点 $\Rightarrow \nabla f(p) \parallel \nabla \varphi(p)$ 。图示如下：



- $p(x_0, y_0)$ 为条件极值点 $\Rightarrow \nabla f(p) \parallel \nabla \varphi(p)$ 。图示如下：

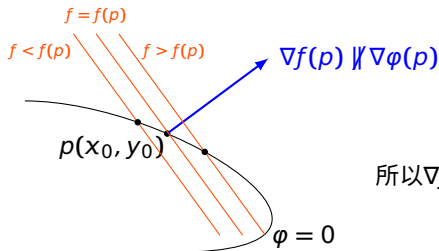


- $p(x_0, y_0)$ 为条件极值点 $\Rightarrow \nabla f(p) \parallel \nabla \varphi(p)$ 。图示如下：



所以 $\nabla f(p) \nparallel \nabla \varphi(p)$ 时, p 不是条件极值点

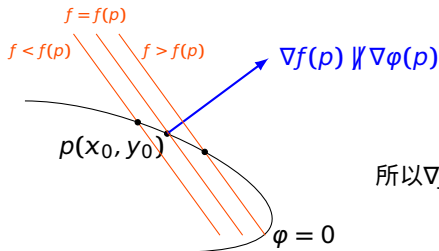
- $p(x_0, y_0)$ 为条件极值点 $\Rightarrow \nabla f(p) \parallel \nabla \varphi(p)$ 。图示如下：



所以 $\nabla f(p) \nparallel \nabla \varphi(p)$ 时, p 不是条件极值点

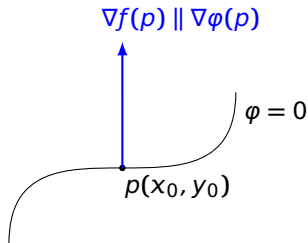
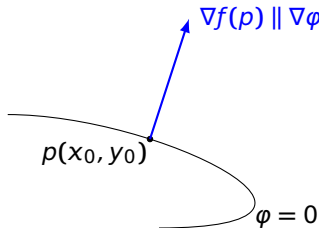
- 但反过来, $\nabla f(p) \parallel \nabla \varphi(p) \nRightarrow p(x_0, y_0)$ 为条件极值点, 图示如下:

- $p(x_0, y_0)$ 为条件极值点 $\Rightarrow \nabla f(p) \parallel \nabla \varphi(p)$ 。图示如下：

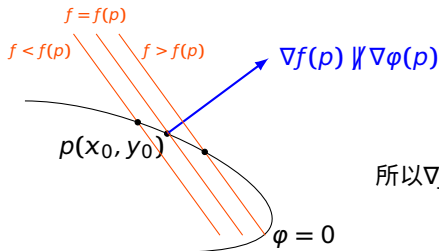


所以 $\nabla f(p) \nparallel \nabla \varphi(p)$ 时, p 不是条件极值点

- 但反过来, $\nabla f(p) \parallel \nabla \varphi(p) \nRightarrow p(x_0, y_0)$ 为条件极值点, 图示如下:

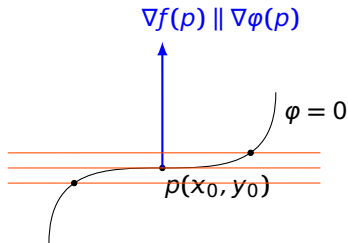
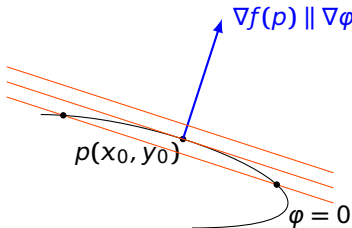


- $p(x_0, y_0)$ 为条件极值点 $\Rightarrow \nabla f(p) \parallel \nabla \varphi(p)$ 。图示如下：

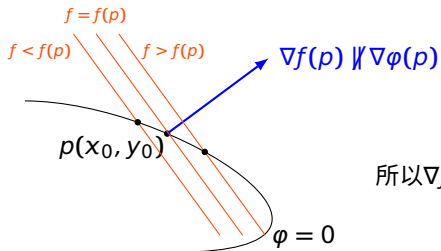


所以 $\nabla f(p) \nparallel \nabla \varphi(p)$ 时, p 不是条件极值点

- 但反过来, $\nabla f(p) \parallel \nabla \varphi(p) \nRightarrow p(x_0, y_0)$ 为条件极值点, 图示如下:

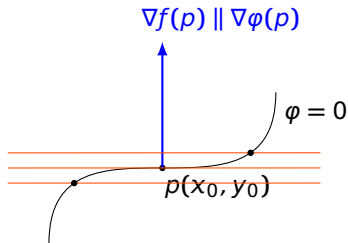
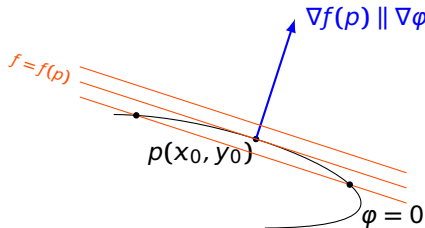


- $p(x_0, y_0)$ 为条件极值点 $\Rightarrow \nabla f(p) \parallel \nabla \varphi(p)$ 。图示如下：

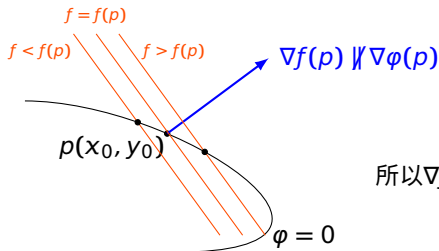


所以 $\nabla f(p) \parallel \nabla \varphi(p)$ 时, p 不是条件极值点

- 但反过来, $\nabla f(p) \parallel \nabla \varphi(p) \not\Rightarrow p(x_0, y_0)$ 为条件极值点, 图示如下:

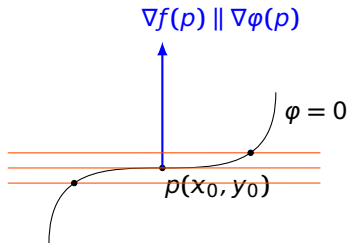
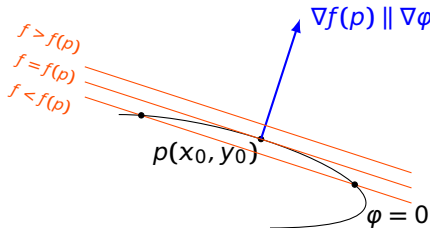


- $p(x_0, y_0)$ 为条件极值点 $\Rightarrow \nabla f(p) \parallel \nabla \varphi(p)$ 。图示如下：

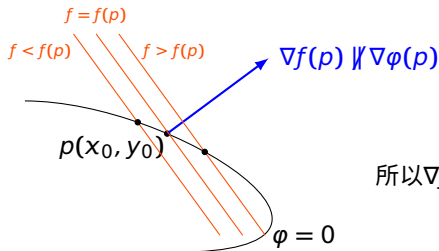


所以 $\nabla f(p) \nparallel \nabla \varphi(p)$ 时, p 不是条件极值点

- 但反过来, $\nabla f(p) \parallel \nabla \varphi(p) \nRightarrow p(x_0, y_0)$ 为条件极值点, 图示如下:

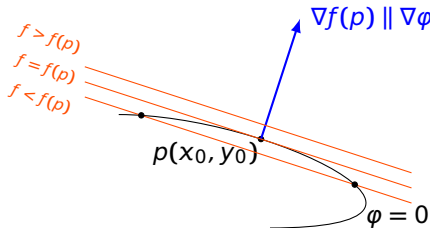


- $p(x_0, y_0)$ 为条件极值点 $\Rightarrow \nabla f(p) \parallel \nabla \varphi(p)$ 。图示如下：

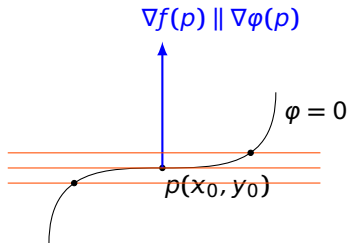


所以 $\nabla f(p) \nparallel \nabla \varphi(p)$ 时, p 不是条件极值点

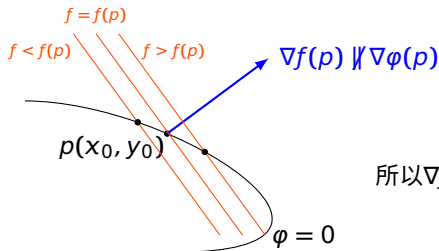
- 但反过来, $\nabla f(p) \parallel \nabla \varphi(p) \nRightarrow p(x_0, y_0)$ 为条件极值点, 图示如下:



p 是条件极 (大) 值点

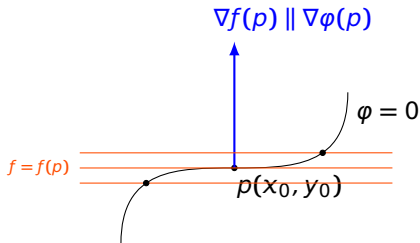
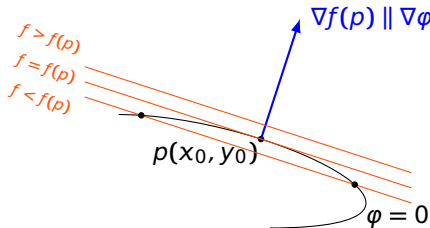


- $p(x_0, y_0)$ 为条件极值点 $\Rightarrow \nabla f(p) \parallel \nabla \varphi(p)$ 。图示如下：



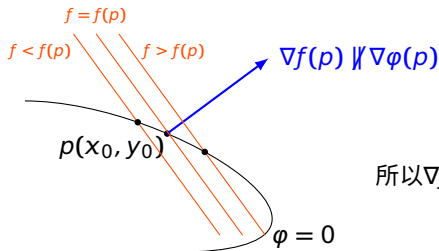
所以 $\nabla f(p) \nparallel \nabla \varphi(p)$ 时, p 不是条件极值点

- 但反过来, $\nabla f(p) \parallel \nabla \varphi(p) \nRightarrow p(x_0, y_0)$ 为条件极值点, 图示如下:



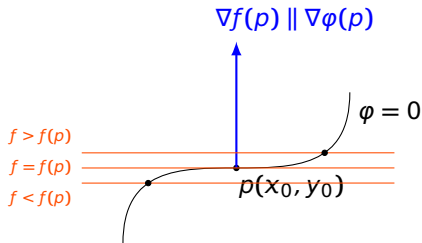
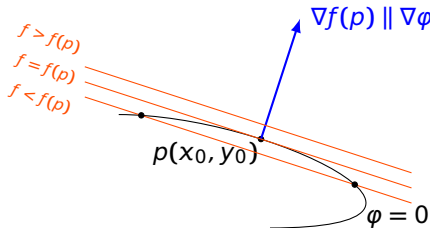
p 是条件极 (大) 值点

- $p(x_0, y_0)$ 为条件极值点 $\Rightarrow \nabla f(p) \parallel \nabla \varphi(p)$ 。图示如下：



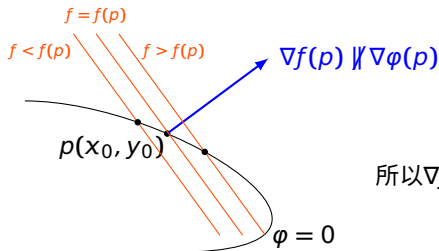
所以 $\nabla f(p) \nparallel \nabla \varphi(p)$ 时, p 不是条件极值点

- 但反过来, $\nabla f(p) \parallel \nabla \varphi(p) \nRightarrow p(x_0, y_0)$ 为条件极值点, 图示如下:



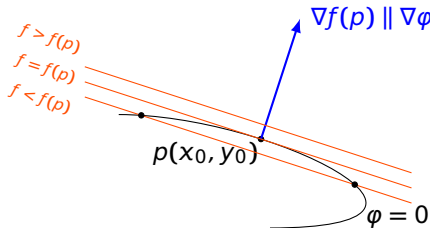
p 是条件极 (大) 值点

- $p(x_0, y_0)$ 为条件极值点 $\Rightarrow \nabla f(p) \parallel \nabla \varphi(p)$ 。图示如下：

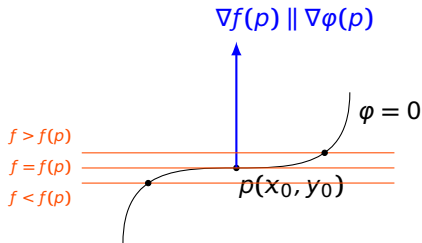


所以 $\nabla f(p) \nparallel \nabla \varphi(p)$ 时, p 不是条件极值点

- 但反过来, $\nabla f(p) \parallel \nabla \varphi(p) \nRightarrow p(x_0, y_0)$ 为条件极值点, 图示如下:



p 是条件极 (大) 值点



p 不是条件极值点

条件极值（二元函数 + 一个附加条件）求解

问题 求解二元函数 $u = f(x, y)$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的极值点.

求解步骤（拉格朗日乘数法）

1. 构造拉格朗日函数 $L = f + \lambda\varphi$, 其中 λ 是待定常数.
2. 求解方程组

$$\begin{cases} \nabla L = 0 \\ \varphi = 0 \end{cases}$$

3. 条件极值点（如果存在的话）包含在上述解 $\{(x, y)\}$ 中.
(至于如何判断解是否条件极值点, 需另行分析.)

条件极值（二元函数 + 一个附加条件）求解

问题 求解二元函数 $u = f(x, y)$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的极值点.

求解步骤（拉格朗日乘数法）

1. 构造拉格朗日函数 $L = f + \lambda\varphi$, 其中 λ 是待定常数.

2. 求解方程组

$$\begin{cases} \nabla L = 0 \\ \varphi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_x = f_x + \lambda\varphi_x = 0 \\ L_y = f_y + \lambda\varphi_y = 0 \\ \varphi = 0 \end{cases}$$

3. 条件极值点（如果存在的话）包含在上述解 $\{(x, y)\}$ 中.
(至于如何判断解是否条件极值点, 需另行分析.)

条件极值（二元函数 + 一个附加条件）求解

问题 求解二元函数 $u = f(x, y)$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的极值点.

求解步骤（拉格朗日乘数法）

1. 构造拉格朗日函数 $L = f + \lambda\varphi$ ，其中 λ 是待定常数.

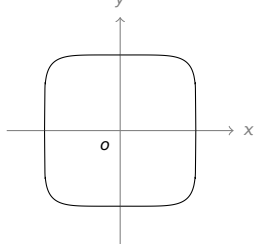
2. 求解方程组

$$\begin{cases} \nabla L = 0 \\ \varphi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_x = f_x + \lambda\varphi_x = 0 \\ L_y = f_y + \lambda\varphi_y = 0 \\ \varphi = 0 \end{cases}$$

3. 条件极值点（如果存在的话）包含在上述解 $\{(x, y)\}$ 中.
(至于如何判断解是否条件极值点，需另行分析.)

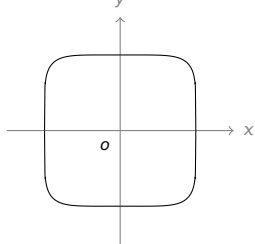
注 求最大、最小值时，只需要在条件极值点中挑选函数值最大、最小

例 1 求平面曲线 $x^6 + y^6 = 1$ 上的点，到原点的距离分别是最远和最近.



例 1 求平面曲线 $x^6 + y^6 = 1$ 上的点，到原点的距离分别是最远和最近.

解 等价求: $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ 在条件 $\varphi(x, y) = x^6 + y^6 - 1 = 0$ 下的最值.



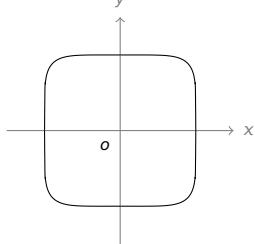
例 1 求平面曲线 $x^6 + y^6 = 1$ 上的点，到原点的距离分别是最远和最近.

解 等价求: $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ 在条件 $\varphi(x, y) = x^6 + y^6 - 1 = 0$ 下的最值.

1. 构造拉格朗日函数:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y) =$$

2. 求解方程组:
$$\begin{cases} L_x & = 0 \\ L_y & = 0 \\ \varphi = x^6 + y^6 - 1 = 0 \end{cases}$$



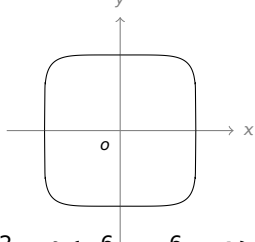
例 1 求平面曲线 $x^6 + y^6 = 1$ 上的点，到原点的距离分别是最远和最近.

解 等价求: $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ 在条件 $\varphi(x, y) = x^6 + y^6 - 1 = 0$ 下的最值.

1. 构造拉格朗日函数:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(x^6 + y^6 - 1)$$

2. 求解方程组:
$$\begin{cases} L_x &= 0 \\ L_y &= 0 \\ \varphi = x^6 + y^6 - 1 &= 0 \end{cases}$$



例 1 求平面曲线 $x^6 + y^6 = 1$ 上的点，到原点的距离分别是最远和最近.

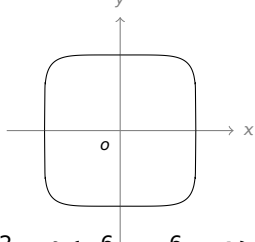
解 等价求： $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ 在条件 $\varphi(x, y) = x^6 + y^6 - 1 = 0$ 下的最值.

1. 构造拉格朗日函数：

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(x^6 + y^6 - 1)$$

2. 求解方程组：

$$\begin{cases} L_x = 2x + 6\lambda x^5 = 0 \\ L_y = 2y + 6\lambda y^5 = 0 \\ \varphi = x^6 + y^6 - 1 = 0 \end{cases}$$



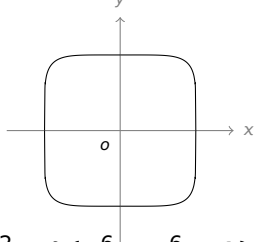
例 1 求平面曲线 $x^6 + y^6 = 1$ 上的点，到原点的距离分别是最远和最近.

解 等价求: $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ 在条件 $\varphi(x, y) = x^6 + y^6 - 1 = 0$ 下的最值.

1. 构造 **拉格朗日函数**:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(x^6 + y^6 - 1)$$

2. 求解方程组:
$$\begin{cases} L_x = 2x + 6\lambda x^5 = 0 \\ L_y = 2y + 6\lambda y^5 = 0 \\ \varphi = x^6 + y^6 - 1 = 0 \end{cases}$$



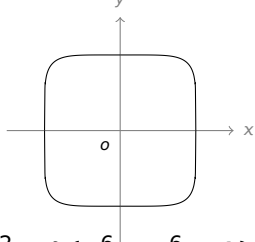
例 1 求平面曲线 $x^6 + y^6 = 1$ 上的点，到原点的距离分别是最远和最近.

解 等价求: $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ 在条件 $\varphi(x, y) = x^6 + y^6 - 1 = 0$ 下的最值.

1. 构造 **拉格朗日函数**:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(x^6 + y^6 - 1)$$

2. 求解方程组:
$$\begin{cases} L_x = 2x + 6\lambda x^5 = 0 \\ L_y = 2y + 6\lambda y^5 = 0 \\ \varphi = x^6 + y^6 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1 + 3\lambda x^4) = 0 \\ y(1 + 3\lambda y^4) = 0 \\ x^6 + y^6 - 1 = 0 \end{cases}$$



例 1 求平面曲线 $x^6 + y^6 = 1$ 上的点，到原点的距离分别是最远和最近.

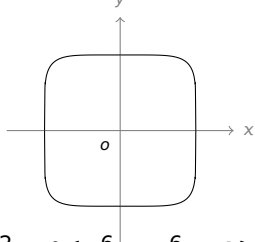
解 等价求: $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ 在条件 $\varphi(x, y) = x^6 + y^6 - 1 = 0$ 下的最值.

1. 构造拉格朗日函数:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(x^6 + y^6 - 1)$$

2. 求解方程组:
$$\begin{cases} L_x = 2x + 6\lambda x^5 = 0 \\ L_y = 2y + 6\lambda y^5 = 0 \\ \varphi = x^6 + y^6 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1 + 3\lambda x^4) = 0 \\ y(1 + 3\lambda y^4) = 0 \\ x^6 + y^6 - 1 = 0 \end{cases}$$

所以
$$\begin{cases} x = 0 \\ 1 + 3\lambda y^4 = 0 \\ y^6 - 1 = 0 \end{cases}$$



例 1 求平面曲线 $x^6 + y^6 = 1$ 上的点，到原点的距离分别是最远和最近.

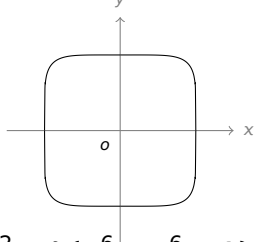
解 等价求: $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ 在条件 $\varphi(x, y) = x^6 + y^6 - 1 = 0$ 下的最值.

1. 构造拉格朗日函数:

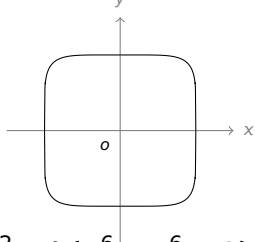
$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(x^6 + y^6 - 1)$$

2. 求解方程组:
$$\begin{cases} L_x = 2x + 6\lambda x^5 = 0 \\ L_y = 2y + 6\lambda y^5 = 0 \\ \varphi = x^6 + y^6 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1 + 3\lambda x^4) = 0 \\ y(1 + 3\lambda y^4) = 0 \\ x^6 + y^6 - 1 = 0 \end{cases}$$

所以
$$\begin{cases} x = 0 \\ 1 + 3\lambda y^4 = 0 \\ y^6 - 1 = 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} 1 + 3\lambda x^4 = 0 \\ y = 0 \\ x^6 - 1 = 0 \end{cases}$$



例 1 求平面曲线 $x^6 + y^6 = 1$ 上的点，到原点的距离分别是最远和最近.



解 等价求: $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ 在条件 $\varphi(x, y) = x^6 + y^6 - 1 = 0$ 下的最值.

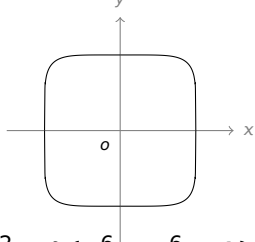
1. 构造拉格朗日函数:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(x^6 + y^6 - 1)$$

2. 求解方程组:
$$\begin{cases} L_x = 2x + 6\lambda x^5 = 0 \\ L_y = 2y + 6\lambda y^5 = 0 \\ \varphi = x^6 + y^6 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1 + 3\lambda x^4) = 0 \\ y(1 + 3\lambda y^4) = 0 \\ x^6 + y^6 - 1 = 0 \end{cases}$$

所以
$$\begin{cases} x = 0 \\ 1 + 3\lambda y^4 = 0 \\ y^6 - 1 = 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} 1 + 3\lambda x^4 = 0 \\ y = 0 \\ x^6 - 1 = 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} 1 + 3\lambda x^4 = 0 \\ 1 + 3\lambda y^4 = 0 \\ x^6 + y^6 - 1 = 0 \end{cases}$$

例 1 求平面曲线 $x^6 + y^6 = 1$ 上的点，到原点的距离分别是最远和最近。



解 等价求： $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ 在条件 $\varphi(x, y) = x^6 + y^6 - 1 = 0$ 下的最值。

1. 构造拉格朗日函数：

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(x^6 + y^6 - 1)$$

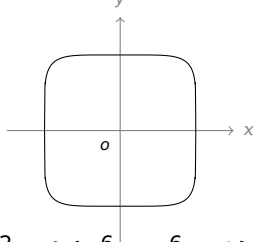
2. 求解方程组：

$$\begin{cases} L_x = 2x + 6\lambda x^5 = 0 \\ L_y = 2y + 6\lambda y^5 = 0 \\ \varphi = x^6 + y^6 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1 + 3\lambda x^4) = 0 \\ y(1 + 3\lambda y^4) = 0 \\ x^6 + y^6 - 1 = 0 \end{cases}$$

所以 $\begin{cases} x = 0 \\ 1 + 3\lambda y^4 = 0 \\ y^6 - 1 = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 1 + 3\lambda x^4 = 0 \\ y = 0 \\ x^6 - 1 = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 1 + 3\lambda x^4 = 0 \\ 1 + 3\lambda y^4 = 0 \\ x^6 + y^6 - 1 = 0 \end{cases}$

解 (x, y)			

例 1 求平面曲线 $x^6 + y^6 = 1$ 上的点，到原点的距离分别是最远和最近。



解 等价求： $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ 在条件 $\varphi(x, y) = x^6 + y^6 - 1 = 0$ 下的最值。

1. 构造拉格朗日函数：

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(x^6 + y^6 - 1)$$

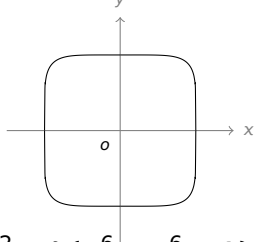
2. 求解方程组：

$$\begin{cases} L_x = 2x + 6\lambda x^5 = 0 \\ L_y = 2y + 6\lambda y^5 = 0 \\ \varphi = x^6 + y^6 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1 + 3\lambda x^4) = 0 \\ y(1 + 3\lambda y^4) = 0 \\ x^6 + y^6 - 1 = 0 \end{cases}$$

所以 $\begin{cases} x = 0 \\ 1 + 3\lambda y^4 = 0 \\ y^6 - 1 = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 1 + 3\lambda x^4 = 0 \\ y = 0 \\ x^6 - 1 = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 1 + 3\lambda x^4 = 0 \\ 1 + 3\lambda y^4 = 0 \\ x^6 + y^6 - 1 = 0 \end{cases}$

解 (x, y)	$(0, \pm 1)$		

例 1 求平面曲线 $x^6 + y^6 = 1$ 上的点，到原点的距离分别是最远和最近。



解 等价求： $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ 在条件 $\varphi(x, y) = x^6 + y^6 - 1 = 0$ 下的最值。

1. 构造拉格朗日函数：

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(x^6 + y^6 - 1)$$

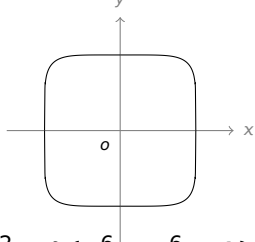
2. 求解方程组：

$$\begin{cases} L_x = 2x + 6\lambda x^5 = 0 \\ L_y = 2y + 6\lambda y^5 = 0 \\ \varphi = x^6 + y^6 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1 + 3\lambda x^4) = 0 \\ y(1 + 3\lambda y^4) = 0 \\ x^6 + y^6 - 1 = 0 \end{cases}$$

所以 $\begin{cases} x = 0 \\ 1 + 3\lambda y^4 = 0 \\ y^6 - 1 = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 1 + 3\lambda x^4 = 0 \\ y = 0 \\ x^6 - 1 = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 1 + 3\lambda x^4 = 0 \\ 1 + 3\lambda y^4 = 0 \\ x^6 + y^6 - 1 = 0 \end{cases}$

解 (x, y)	$(0, \pm 1)$	$(\pm 1, 0)$	

例 1 求平面曲线 $x^6 + y^6 = 1$ 上的点，到原点的距离分别是最远和最近。



解 等价求： $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ 在条件 $\varphi(x, y) = x^6 + y^6 - 1 = 0$ 下的最值。

1. 构造拉格朗日函数：

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(x^6 + y^6 - 1)$$

2. 求解方程组：

$$\begin{cases} L_x = 2x + 6\lambda x^5 = 0 \\ L_y = 2y + 6\lambda y^5 = 0 \\ \varphi = x^6 + y^6 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1 + 3\lambda x^4) = 0 \\ y(1 + 3\lambda y^4) = 0 \\ x^6 + y^6 - 1 = 0 \end{cases}$$

所以 $\begin{cases} x = 0 \\ 1 + 3\lambda y^4 = 0 \\ y^6 - 1 = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 1 + 3\lambda x^4 = 0 \\ y = 0 \\ x^6 - 1 = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 1 + 3\lambda x^4 = 0 \\ 1 + 3\lambda y^4 = 0 \\ x^6 + y^6 - 1 = 0 \end{cases}$

解 (x, y)	$(0, \pm 1)$	$(\pm 1, 0)$	$(\pm \sqrt[6]{1/2}, \pm \sqrt[6]{1/2})$

例 1 求平面曲线 $x^6 + y^6 = 1$ 上的点，到原点的距离分别是最远和最近。

解 等价求： $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ 在条件 $\varphi(x, y) = x^6 + y^6 - 1 = 0$ 下的最值。

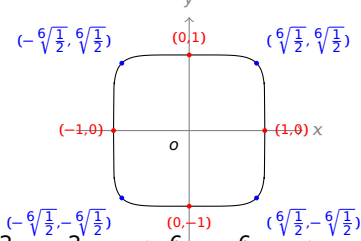
1. 构造拉格朗日函数：

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(x^6 + y^6 - 1)$$

2. 求解方程组：
$$\begin{cases} L_x = 2x + 6\lambda x^5 = 0 \\ L_y = 2y + 6\lambda y^5 = 0 \\ \varphi = x^6 + y^6 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1 + 3\lambda x^4) = 0 \\ y(1 + 3\lambda y^4) = 0 \\ x^6 + y^6 - 1 = 0 \end{cases}$$

所以 $\begin{cases} x = 0 \\ 1 + 3\lambda y^4 = 0 \\ y^6 - 1 = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 1 + 3\lambda x^4 = 0 \\ y = 0 \\ x^6 - 1 = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 1 + 3\lambda x^4 = 0 \\ 1 + 3\lambda y^4 = 0 \\ x^6 + y^6 - 1 = 0 \end{cases}$

解 (x, y)	$(0, \pm 1)$	$(\pm 1, 0)$	$(\pm \sqrt[6]{1/2}, \pm \sqrt[6]{1/2})$



例 1 求平面曲线 $x^6 + y^6 = 1$ 上的点，到原点的距离分别是最远和最近。

解 等价求： $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ 在条件 $\varphi(x, y) = x^6 + y^6 - 1 = 0$ 下的最值。

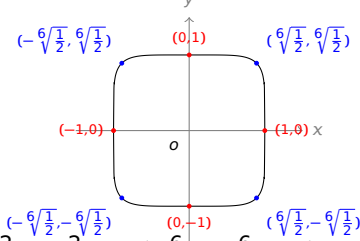
1. 构造拉格朗日函数：

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(x^6 + y^6 - 1)$$

2. 求解方程组：
$$\begin{cases} L_x = 2x + 6\lambda x^5 = 0 \\ L_y = 2y + 6\lambda y^5 = 0 \\ \varphi = x^6 + y^6 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1 + 3\lambda x^4) = 0 \\ y(1 + 3\lambda y^4) = 0 \\ x^6 + y^6 - 1 = 0 \end{cases}$$

所以 $\begin{cases} x = 0 \\ 1 + 3\lambda y^4 = 0 \\ y^6 - 1 = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 1 + 3\lambda x^4 = 0 \\ y = 0 \\ x^6 - 1 = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 1 + 3\lambda x^4 = 0 \\ 1 + 3\lambda y^4 = 0 \\ x^6 + y^6 - 1 = 0 \end{cases}$

解 (x, y)	$(0, \pm 1)$	$(\pm 1, 0)$	$(\pm \sqrt[6]{1/2}, \pm \sqrt[6]{1/2})$
函数值 $f(x, y)$	1	1	$2 \sqrt[3]{1/2}$



例 1 求平面曲线 $x^6 + y^6 = 1$ 上的点，到原点的距离分别是最远和最近。

解 等价求： $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ 在条件 $\varphi(x, y) = x^6 + y^6 - 1 = 0$ 下的最值。

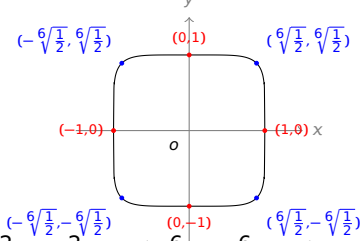
1. 构造拉格朗日函数：

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(x^6 + y^6 - 1)$$

2. 求解方程组：
$$\begin{cases} L_x = 2x + 6\lambda x^5 = 0 \\ L_y = 2y + 6\lambda y^5 = 0 \\ \varphi = x^6 + y^6 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1 + 3\lambda x^4) = 0 \\ y(1 + 3\lambda y^4) = 0 \\ x^6 + y^6 - 1 = 0 \end{cases}$$

所以 $\begin{cases} x = 0 \\ 1 + 3\lambda y^4 = 0 \\ y^6 - 1 = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 1 + 3\lambda x^4 = 0 \\ y = 0 \\ x^6 - 1 = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 1 + 3\lambda x^4 = 0 \\ 1 + 3\lambda y^4 = 0 \\ x^6 + y^6 - 1 = 0 \end{cases}$

解 (x, y)	$(0, \pm 1)$	$(\pm 1, 0)$	$(\pm \sqrt[6]{1/2}, \pm \sqrt[6]{1/2})$
函数值 $f(x, y)$	1	1	$2 \sqrt[3]{1/2} \approx 1.59$



条件极值（三元函数 + 一个附加条件）求解

问题 求三元函数 $u = f(x, y, z)$ 在附加条件 $\varphi(x, y, z) = 0$ 下的极值点.

求解步骤（拉格朗日乘数法）

1. 构造拉格朗日函数 $L = f + \lambda\varphi$, 其中 λ 是待定常数.
2. 求解方程组

$$\begin{cases} \nabla L = 0 \\ \varphi = 0 \end{cases}$$

3. 条件极值点（如果存在的话）包含在上述解 $\{(x, y, z)\}$ 中.
(至于如何判断解是否条件极值点, 需另行分析.)

条件极值（三元函数 + 一个附加条件）求解

问题 求三元函数 $u = f(x, y, z)$ 在附加条件 $\varphi(x, y, z) = 0$ 下的极值点.

求解步骤（拉格朗日乘数法）

1. 构造拉格朗日函数 $L = f + \lambda\varphi$ ，其中 λ 是待定常数.

2. 求解方程组

$$\begin{cases} \nabla L = 0 \\ \varphi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_x = f_x + \lambda\varphi_x = 0 \\ L_y = f_y + \lambda\varphi_y = 0 \\ L_z = f_z + \lambda\varphi_z = 0 \\ \varphi = 0 \end{cases}$$

3. 条件极值点（如果存在的话）包含在上述解 $\{(x, y, z)\}$ 中.
(至于如何判断解是否条件极值点，需另行分析.)

条件极值（三元函数 + 一个附加条件）求解

问题 求三元函数 $u = f(x, y, z)$ 在附加条件 $\varphi(x, y, z) = 0$ 下的极值点.

求解步骤（拉格朗日乘数法）

1. 构造拉格朗日函数 $L = f + \lambda\varphi$ ，其中 λ 是待定常数.

2. 求解方程组

$$\begin{cases} \nabla L = 0 \\ \varphi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_x = f_x + \lambda\varphi_x = 0 \\ L_y = f_y + \lambda\varphi_y = 0 \\ L_z = f_z + \lambda\varphi_z = 0 \\ \varphi = 0 \end{cases}$$

3. 条件极值点（如果存在的话）包含在上述解 $\{(x, y, z)\}$ 中.
(至于如何判断解是否条件极值点，需另行分析.)

注 求最大、最小值时，只需要在条件极值点中挑选函数值最大、最小

例 2 设球壳 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 的密度函数是 $\rho = 3 + xz + y^2$. 求出密度最大和最小的点.

例 2 设球壳 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 的密度函数是 $\rho = 3 + xz + y^2$. 求出密度最大和最小的点.

解 求: $\rho(x, y, z) = 3 + xz + y^2$ 在条件
 $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$ 下的最值.

例 2 设球壳 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 的密度函数是 $\rho = 3 + xz + y^2$. 求出密度最大和最小的点.

解 求: $\rho(x, y, z) = 3 + xz + y^2$ 在条件
 $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$ 下的最值.

1. **拉格朗日函数**: $L = \rho + \lambda\varphi =$

2. 求解:
$$\begin{cases} L_x &= 0 \\ L_y &= 0 \\ L_z &= 0 \\ \varphi = x^2 + y^2 + z^2 - 4 &= 0 \end{cases}$$

例 2 设球壳 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 的密度函数是 $\rho = 3 + xz + y^2$. 求出密度最大和最小的点.

解 求: $\rho(x, y, z) = 3 + xz + y^2$ 在条件
 $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$ 下的最值.

1. **拉格朗日函数**: $L = \rho + \lambda\varphi = 3 + xz + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 4)$

2. 求解:
$$\begin{cases} L_x &= 0 \\ L_y &= 0 \\ L_z &= 0 \\ \varphi = x^2 + y^2 + z^2 - 4 &= 0 \end{cases}$$

例 2 设球壳 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 的密度函数是 $\rho = 3 + xz + y^2$. 求出密度最大和最小的点.

解 求: $\rho(x, y, z) = 3 + xz + y^2$ 在条件
 $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$ 下的最值.

1. **拉格朗日函数**: $L = \rho + \lambda\varphi = 3 + xz + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 4)$

2. 求解:
$$\begin{cases} L_x = z + 2\lambda x = 0 \\ L_y = 2y = 0 \\ L_z = 2z + \lambda = 0 \\ \varphi = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

例 2 设球壳 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 的密度函数是 $\rho = 3 + xz + y^2$. 求出密度最大和最小的点.

解 求: $\rho(x, y, z) = 3 + xz + y^2$ 在条件
 $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$ 下的最值.

1. **拉格朗日函数**: $L = \rho + \lambda\varphi = 3 + xz + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 4)$

2. 求解:
$$\begin{cases} L_x = z + 2\lambda x = 0 \\ L_y = 2y + 2\lambda y = 0 \\ L_z = 0 \\ \varphi = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

例 2 设球壳 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 的密度函数是 $\rho = 3 + xz + y^2$. 求出密度最大和最小的点.

解 求: $\rho(x, y, z) = 3 + xz + y^2$ 在条件
 $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$ 下的最值.

1. **拉格朗日函数**: $L = \rho + \lambda\varphi = 3 + xz + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 4)$

2. 求解:
$$\begin{cases} L_x = z + 2\lambda x = 0 \\ L_y = 2y + 2\lambda y = 0 \\ L_z = x + 2\lambda z = 0 \\ \varphi = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

例 2 设球壳 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 的密度函数是 $\rho = 3 + xz + y^2$. 求出密度最大和最小的点.

解 求: $\rho(x, y, z) = 3 + xz + y^2$ 在条件
 $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$ 下的最值.

1. **拉格朗日函数**: $L = \rho + \lambda\varphi = 3 + xz + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 4)$

2. 求解:
$$\begin{cases} L_x = z + 2\lambda x = 0 \\ L_y = 2y + 2\lambda y = 0 \\ L_z = x + 2\lambda z = 0 \\ \varphi = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -2\lambda x \\ y(1 + \lambda) = 0 \\ x = -2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

例 2 设球壳 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 的密度函数是 $\rho = 3 + xz + y^2$. 求出密度最大和最小的点.

解 求: $\rho(x, y, z) = 3 + xz + y^2$ 在条件
 $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$ 下的最值.

1. **拉格朗日函数**: $L = \rho + \lambda\varphi = 3 + xz + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 4)$

2. 求解:
$$\begin{cases} L_x = z + 2\lambda x = 0 \\ L_y = 2y + 2\lambda y = 0 \\ L_z = x + 2\lambda z = 0 \\ \varphi = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -2\lambda x \Rightarrow z = 4\lambda^2 z \\ y(1 + \lambda) = 0 \\ x = -2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

例 2 设球壳 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 的密度函数是 $\rho = 3 + xz + y^2$. 求出密度最大和最小的点.

解 求: $\rho(x, y, z) = 3 + xz + y^2$ 在条件
 $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$ 下的最值.

1. **拉格朗日函数**: $L = \rho + \lambda\varphi = 3 + xz + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 4)$

2. 求解:
$$\begin{cases} L_x = z + 2\lambda x = 0 \\ L_y = 2y + 2\lambda y = 0 \\ L_z = x + 2\lambda z = 0 \\ \varphi = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -2\lambda x \Rightarrow z = 4\lambda^2 z \\ y(1 + \lambda) = 0 \\ x = -2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

● 若 $z = 0$, 则

例 2 设球壳 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 的密度函数是 $\rho = 3 + xz + y^2$. 求出密度最大和最小的点.

解 求: $\rho(x, y, z) = 3 + xz + y^2$ 在条件
 $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$ 下的最值.

1. **拉格朗日函数**: $L = \rho + \lambda\varphi = 3 + xz + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 4)$

2. 求解:
$$\begin{cases} L_x = z + 2\lambda x = 0 \\ L_y = 2y + 2\lambda y = 0 \\ L_z = x + 2\lambda z = 0 \\ \varphi = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -2\lambda x \Rightarrow z = 4\lambda^2 z \\ y(1 + \lambda) = 0 \\ x = -2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

● 若 $z = 0$, 则 $x = 0$,

例 2 设球壳 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 的密度函数是 $\rho = 3 + xz + y^2$. 求出密度最大和最小的点.

解 求: $\rho(x, y, z) = 3 + xz + y^2$ 在条件
 $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$ 下的最值.

1. **拉格朗日函数**: $L = \rho + \lambda\varphi = 3 + xz + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 4)$

2. 求解:
$$\begin{cases} L_x = z + 2\lambda x = 0 \\ L_y = 2y + 2\lambda y = 0 \\ L_z = x + 2\lambda z = 0 \\ \varphi = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -2\lambda x \Rightarrow z = 4\lambda^2 z \\ y(1 + \lambda) = 0 \\ x = -2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

● 若 $z = 0$, 则 $x = 0$, $y = \pm 2$,

例 2 设球壳 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 的密度函数是 $\rho = 3 + xz + y^2$. 求出密度最大和最小的点.

解 求: $\rho(x, y, z) = 3 + xz + y^2$ 在条件
 $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$ 下的最值.

1. **拉格朗日函数**: $L = \rho + \lambda\varphi = 3 + xz + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 4)$

2. 求解:
$$\begin{cases} L_x = z + 2\lambda x = 0 \\ L_y = 2y + 2\lambda y = 0 \\ L_z = x + 2\lambda z = 0 \\ \varphi = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -2\lambda x \Rightarrow z = 4\lambda^2 z \\ y(1 + \lambda) = 0 \\ x = -2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

● 若 $z = 0$, 则 $x = 0$, $y = \pm 2$, 所以此时 $(x, y, z) = (0, \pm 2, 0)$

例 2 设球壳 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 的密度函数是 $\rho = 3 + xz + y^2$. 求出密度最大和最小的点.

解 求: $\rho(x, y, z) = 3 + xz + y^2$ 在条件
 $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$ 下的最值.

1. **拉格朗日函数**: $L = \rho + \lambda\varphi = 3 + xz + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 4)$

2. 求解:
$$\begin{cases} L_x = z + 2\lambda x = 0 \\ L_y = 2y + 2\lambda y = 0 \\ L_z = x + 2\lambda z = 0 \\ \varphi = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -2\lambda x \Rightarrow z = 4\lambda^2 z \\ y(1 + \lambda) = 0 \\ x = -2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

- 若 $z = 0$, 则 $x = 0$, $y = \pm 2$, 所以此时 $(x, y, z) = (0, \pm 2, 0)$
- 若 $z \neq 0$, 则

例 2 设球壳 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 的密度函数是 $\rho = 3 + xz + y^2$. 求出密度最大和最小的点.

解 求: $\rho(x, y, z) = 3 + xz + y^2$ 在条件
 $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$ 下的最值.

1. **拉格朗日函数**: $L = \rho + \lambda\varphi = 3 + xz + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 4)$

2. 求解:
$$\begin{cases} L_x = z + 2\lambda x = 0 \\ L_y = 2y + 2\lambda y = 0 \\ L_z = x + 2\lambda z = 0 \\ \varphi = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -2\lambda x \Rightarrow z = 4\lambda^2 z \\ y(1 + \lambda) = 0 \\ x = -2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

- 若 $z = 0$, 则 $x = 0$, $y = \pm 2$, 所以此时 $(x, y, z) = (0, \pm 2, 0)$
- 若 $z \neq 0$, 则 $\lambda = \pm \frac{1}{2}$,

例 2 设球壳 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 的密度函数是 $\rho = 3 + xz + y^2$. 求出密度最大和最小的点.

解 求: $\rho(x, y, z) = 3 + xz + y^2$ 在条件
 $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$ 下的最值.

1. **拉格朗日函数**: $L = \rho + \lambda\varphi = 3 + xz + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 4)$

2. 求解:
$$\begin{cases} L_x = z + 2\lambda x = 0 \\ L_y = 2y + 2\lambda y = 0 \\ L_z = x + 2\lambda z = 0 \\ \varphi = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -2\lambda x \Rightarrow z = 4\lambda^2 z \\ y(1 + \lambda) = 0 \\ x = -2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

- 若 $z = 0$, 则 $x = 0$, $y = \pm 2$, 所以此时 $(x, y, z) = (0, \pm 2, 0)$
- 若 $z \neq 0$, 则 $\lambda = \pm \frac{1}{2}$, $y = 0$,

例 2 设球壳 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 的密度函数是 $\rho = 3 + xz + y^2$. 求出密度最大和最小的点.

解 求: $\rho(x, y, z) = 3 + xz + y^2$ 在条件
 $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$ 下的最值.

1. **拉格朗日函数**: $L = \rho + \lambda\varphi = 3 + xz + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 4)$

2. 求解:
$$\begin{cases} L_x = z + 2\lambda x = 0 \\ L_y = 2y + 2\lambda y = 0 \\ L_z = x + 2\lambda z = 0 \\ \varphi = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -2\lambda x \Rightarrow z = 4\lambda^2 z \\ y(1 + \lambda) = 0 \\ x = -2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

- 若 $z = 0$, 则 $x = 0$, $y = \pm 2$, 所以此时 $(x, y, z) = (0, \pm 2, 0)$
- 若 $z \neq 0$, 则 $\lambda = \pm \frac{1}{2}$, $y = 0$, $x = \mp z$,

例 2 设球壳 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 的密度函数是 $\rho = 3 + xz + y^2$. 求出密度最大和最小的点.

解 求: $\rho(x, y, z) = 3 + xz + y^2$ 在条件
 $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$ 下的最值.

1. **拉格朗日函数**: $L = \rho + \lambda\varphi = 3 + xz + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 4)$

2. 求解:
$$\begin{cases} L_x = z + 2\lambda x = 0 \\ L_y = 2y + 2\lambda y = 0 \\ L_z = x + 2\lambda z = 0 \\ \varphi = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -2\lambda x \Rightarrow z = 4\lambda^2 z \\ y(1 + \lambda) = 0 \\ x = -2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

- 若 $z = 0$, 则 $x = 0$, $y = \pm 2$, 所以此时 $(x, y, z) = (0, \pm 2, 0)$
- 若 $z \neq 0$, 则 $\lambda = \pm \frac{1}{2}$, $y = 0$, $x = \mp z$, 所以此时
 $(x, y, z) = (\pm\sqrt{2}, 0, \pm\sqrt{2}), (\pm\sqrt{2}, 0, \mp\sqrt{2})$

例 2 设球壳 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 的密度函数是 $\rho = 3 + xz + y^2$. 求出密度最大和最小的点.

解 求: $\rho(x, y, z) = 3 + xz + y^2$ 在条件 $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$ 下的最值.

1. **拉格朗日函数**: $L = \rho + \lambda\varphi = 3 + xz + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 4)$

2. 求解:
$$\begin{cases} L_x = z + 2\lambda x = 0 \\ L_y = 2y + 2\lambda y = 0 \\ L_z = x + 2\lambda z = 0 \\ \varphi = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -2\lambda x \Rightarrow z = 4\lambda^2 z \\ y(1 + \lambda) = 0 \\ x = -2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

- 若 $z = 0$, 则 $x = 0$, $y = \pm 2$, 所以此时 $(x, y, z) = (0, \pm 2, 0)$
- 若 $z \neq 0$, 则 $\lambda = \pm \frac{1}{2}$, $y = 0$, $x = \mp z$, 所以此时 $(x, y, z) = (\pm\sqrt{2}, 0, \pm\sqrt{2}), (\pm\sqrt{2}, 0, \mp\sqrt{2})$

解 (x, y, z)	$(0, \pm 2, 0)$	$(\pm\sqrt{2}, 0, \pm\sqrt{2})$	$(\pm\sqrt{2}, 0, \mp\sqrt{2})$
$\rho(x, y, z)$			

例 2 设球壳 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 的密度函数是 $\rho = 3 + xz + y^2$. 求出密度最大和最小的点.

解 求: $\rho(x, y, z) = 3 + xz + y^2$ 在条件 $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$ 下的最值.

1. **拉格朗日函数**: $L = \rho + \lambda\varphi = 3 + xz + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 4)$

2. 求解:
$$\begin{cases} L_x = z + 2\lambda x = 0 \\ L_y = 2y + 2\lambda y = 0 \\ L_z = x + 2\lambda z = 0 \\ \varphi = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -2\lambda x \Rightarrow z = 4\lambda^2 z \\ y(1 + \lambda) = 0 \\ x = -2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

- 若 $z = 0$, 则 $x = 0$, $y = \pm 2$, 所以此时 $(x, y, z) = (0, \pm 2, 0)$
- 若 $z \neq 0$, 则 $\lambda = \pm \frac{1}{2}$, $y = 0$, $x = \mp z$, 所以此时 $(x, y, z) = (\pm\sqrt{2}, 0, \pm\sqrt{2}), (\pm\sqrt{2}, 0, \mp\sqrt{2})$

解 (x, y, z)	$(0, \pm 2, 0)$	$(\pm\sqrt{2}, 0, \pm\sqrt{2})$	$(\pm\sqrt{2}, 0, \mp\sqrt{2})$
$\rho(x, y, z)$	7		

例 2 设球壳 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 的密度函数是 $\rho = 3 + xz + y^2$. 求出密度最大和最小的点.

解 求: $\rho(x, y, z) = 3 + xz + y^2$ 在条件 $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$ 下的最值.

1. **拉格朗日函数**: $L = \rho + \lambda\varphi = 3 + xz + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 4)$

2. 求解:
$$\begin{cases} L_x = z + 2\lambda x = 0 \\ L_y = 2y + 2\lambda y = 0 \\ L_z = x + 2\lambda z = 0 \\ \varphi = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -2\lambda x \Rightarrow z = 4\lambda^2 z \\ y(1 + \lambda) = 0 \\ x = -2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

- 若 $z = 0$, 则 $x = 0$, $y = \pm 2$, 所以此时 $(x, y, z) = (0, \pm 2, 0)$
- 若 $z \neq 0$, 则 $\lambda = \pm \frac{1}{2}$, $y = 0$, $x = \mp z$, 所以此时 $(x, y, z) = (\pm\sqrt{2}, 0, \pm\sqrt{2}), (\pm\sqrt{2}, 0, \mp\sqrt{2})$

解 (x, y, z)	$(0, \pm 2, 0)$	$(\pm\sqrt{2}, 0, \pm\sqrt{2})$	$(\pm\sqrt{2}, 0, \mp\sqrt{2})$
$\rho(x, y, z)$	7	5	

例 2 设球壳 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 的密度函数是 $\rho = 3 + xz + y^2$. 求出密度最大和最小的点.

解 求: $\rho(x, y, z) = 3 + xz + y^2$ 在条件 $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$ 下的最值.

1. **拉格朗日函数**: $L = \rho + \lambda\varphi = 3 + xz + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 4)$

2. 求解:
$$\begin{cases} L_x = z + 2\lambda x = 0 \\ L_y = 2y + 2\lambda y = 0 \\ L_z = x + 2\lambda z = 0 \\ \varphi = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -2\lambda x \Rightarrow z = 4\lambda^2 z \\ y(1 + \lambda) = 0 \\ x = -2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

- 若 $z = 0$, 则 $x = 0$, $y = \pm 2$, 所以此时 $(x, y, z) = (0, \pm 2, 0)$
- 若 $z \neq 0$, 则 $\lambda = \pm \frac{1}{2}$, $y = 0$, $x = \mp z$, 所以此时 $(x, y, z) = (\pm\sqrt{2}, 0, \pm\sqrt{2}), (\pm\sqrt{2}, 0, \mp\sqrt{2})$

解 (x, y, z)	$(0, \pm 2, 0)$	$(\pm\sqrt{2}, 0, \pm\sqrt{2})$	$(\pm\sqrt{2}, 0, \mp\sqrt{2})$
$\rho(x, y, z)$	7	5	1

条件极值（三元函数 + 两个附加条件）求解

问题 求三元函数 $u = f(x, y, z)$ 在附加条件 $\begin{cases} \varphi(x, y, z) = 0 \\ \psi(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 下的极值点.

求解步骤（拉格朗日乘法法）

1. 构造拉格朗日函数 $L = f + \lambda\varphi + \mu\psi$, 其中 λ, μ 是待定常数.

2. 求解方程组

$$\begin{cases} L_x = f_x + \lambda\varphi_x + \mu\psi_x = 0 \\ L_y = f_y + \lambda\varphi_y + \mu\psi_y = 0 \\ L_z = f_z + \lambda\varphi_z + \mu\psi_z = 0 \\ \varphi = 0 \\ \psi = 0 \end{cases}$$

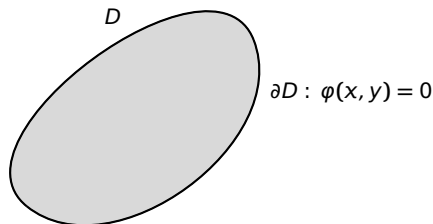
3. 条件极值点（如果存在的话）包含在上述解 $\{(x, y, z)\}$ 中.
(至于如何判断解是否条件极值点, 需另行分析.)

We are here now...

1. 多元函数的极值点
2. 条件极值
3. 求解多元函数的最值

计算二元函数的最大值和最小值

问题 寻找连续函数 $z = f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上的最大、最小值点.

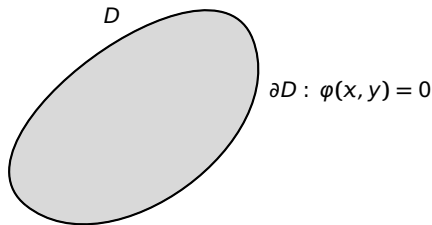


计算二元函数的最大值和最小值

问题 寻找连续函数 $z = f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上的最大、最小值点.

分析

- 连续函数在有界闭区域上一定能取到最大、最小值。所以最大、最小值点一定存在.

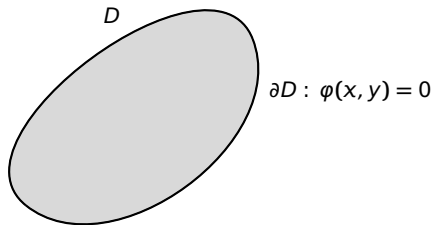


计算二元函数的最大值和最小值

问题 寻找连续函数 $z = f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上的最大、最小值点.

分析

- 连续函数在有界闭区域上一定能取到最大、最小值。所以最大、最小值点一定存在. 记 $p \in D$ 为最值点.

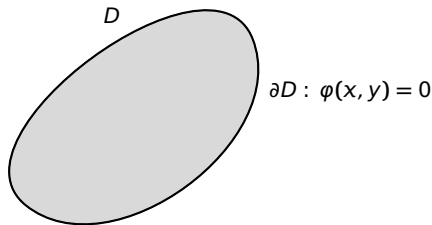


计算二元函数的最大值和最小值

问题 寻找连续函数 $z = f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上的最大、最小值点.

分析

- 连续函数在有界闭区域上一定能取到最大、最小值。所以最大、最小值点一定存在. 记 $p \in D$ 为最值点.
- 若 p 是 D 的内点,
- 若 p 是 D 的边界点,

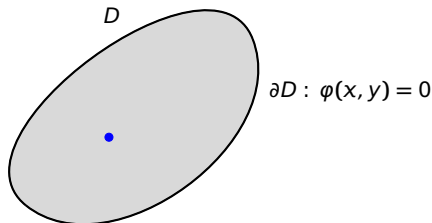


计算二元函数的最大值和最小值

问题 寻找连续函数 $z = f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上的最大、最小值点.

分析

- 连续函数在有界闭区域上一定能取到最大、最小值。所以最大、最小值点一定存在. 记 $p \in D$ 为最值点.
- 若 p 是 D 的内点,
- 若 p 是 D 的边界点,

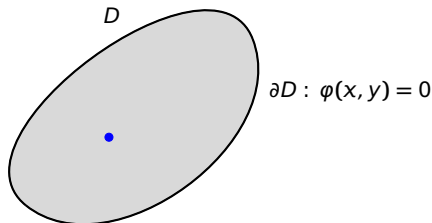


计算二元函数的最大值和最小值

问题 寻找连续函数 $z = f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上的最大、最小值点.

分析

- 连续函数在有界闭区域上一定能取到最大、最小值。所以最大、最小值点一定存在. 记 $p \in D$ 为最值点.
- 若 p 是 D 的内点, 则 p 是 $z = f(x, y)$ 的极值点,
- 若 p 是 D 的边界点,

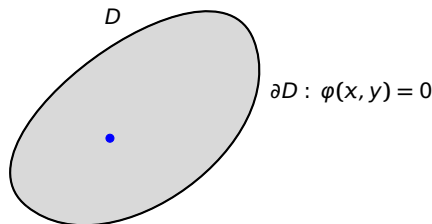


计算二元函数的最大值和最小值

问题 寻找连续函数 $z = f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上的最大、最小值点.

分析

- 连续函数在有界闭区域上一定能取到最大、最小值。所以最大、最小值点一定存在. 记 $p \in D$ 为最值点.
- 若 p 是 D 的内点, 则 p 是 $z = f(x, y)$ 的极值点, 从而是驻点:
 $f_x(p) = f_y(p) = 0$
- 若 p 是 D 的边界点,

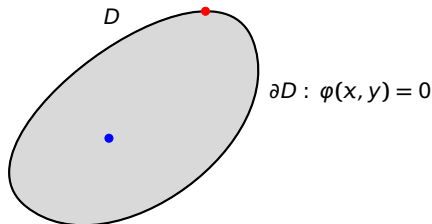


计算二元函数的最大值和最小值

问题 寻找连续函数 $z = f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上的最大、最小值点.

分析

- 连续函数在有界闭区域上一定能取到最大、最小值。所以最大、最小值点一定存在. 记 $p \in D$ 为最值点.
- 若 p 是 D 的内点, 则 p 是 $z = f(x, y)$ 的极值点, 从而是驻点:
 $f_x(p) = f_y(p) = 0$
- 若 p 是 D 的边界点,

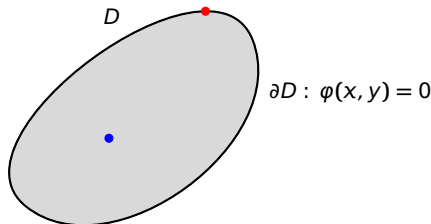


计算二元函数的最大值和最小值

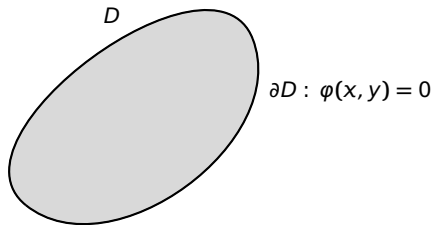
问题 寻找连续函数 $z = f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上的最大、最小值点.

分析

- 连续函数在有界闭区域上一定能取到最大、最小值。所以最大、最小值点一定存在. 记 $p \in D$ 为最值点.
- 若 p 是 D 的内点, 则 p 是 $z = f(x, y)$ 的极值点, 从而是驻点:
 $f_x(p) = f_y(p) = 0$
- 若 p 是 D 的边界点, 则 p 是 $z = f(x, y)$ 在条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的条件极值点

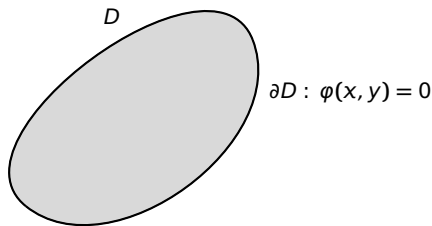


问题 寻找连续函数 $z = f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上的最大、最小值点.



求解步骤

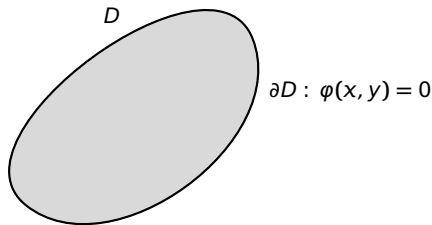
问题 寻找连续函数 $z = f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上的最大、最小值点.



求解步骤

1. 求驻点：
2. 求条件极值：

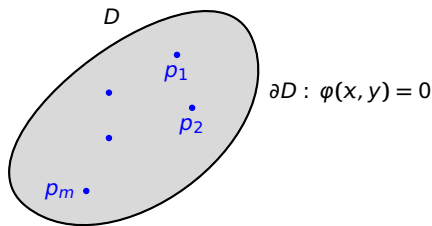
问题 寻找连续函数 $z = f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上的最大、最小值点.



求解步骤

1. 求驻点：在 D 内部求解方程组
$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases} .$$
2. 求条件极值：

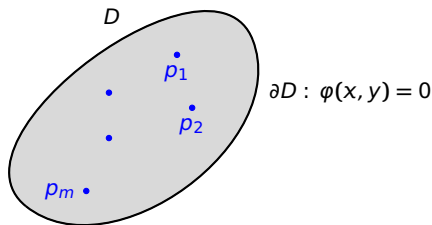
问题 寻找连续函数 $z = f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上的最大、最小值点.



求解步骤

1. 求驻点：在 D 内部求解方程组 $\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$.设驻点为 p_1, p_2, \dots, p_m
2. 求条件极值：

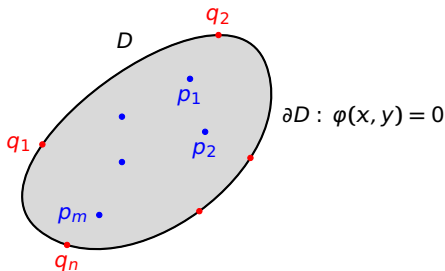
问题 寻找连续函数 $z = f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上的最大、最小值点.



求解步骤

1. 求驻点：在 D 内部求解方程组 $\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$.设驻点为 p_1, p_2, \dots, p_m
2. 求条件极值： $z = f(x, y)$ 在条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的条件极值.

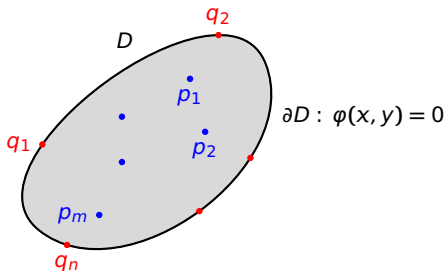
问题 寻找连续函数 $z = f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上的最大、最小值点.



求解步骤

1. 求驻点：在 D 内部求解方程组 $\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$. 设驻点为 p_1, p_2, \dots, p_m
2. 求条件极值： $z = f(x, y)$ 在条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的条件极值. 设条件极值点为 q_1, q_2, \dots, q_n

问题 寻找连续函数 $z = f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上的最大、最小值点.



求解步骤

1. 求驻点：在 D 内部求解方程组 $\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$. 设驻点为 p_1, p_2, \dots, p_m
2. 求条件极值： $z = f(x, y)$ 在条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的条件极值. 设条件极值点为 q_1, q_2, \dots, q_n
3. 比较 $p_1, p_2, \dots, p_m; q_1, q_2, \dots, q_n$ 的函数值，最大者对应最大值点，最小者对应最小值点.

例 1 求函数 $f(x, y) = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 在区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 3\}$ 内的最值.

例 1 求函数 $f(x, y) = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 在区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 3\}$ 内的最值.

解 1. 求驻点:

2. 求 $f = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$

在条件

$\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 3 = 0$ 下的条件极值:

3. 比较函数值:

例 1 求函数 $f(x, y) = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 在区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 3\}$ 内的最值.

解 1. 求驻点:

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases}$$

2. 求 $f = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$

在条件

$\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 3 = 0$ 下的条件极值:

3. 比较函数值:

例 1 求函数 $f(x, y) = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 在区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 3\}$ 内的最值.

解 1. 求驻点:

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (1, 0), (1, 2), (-3, 0), (-3, 2)$$

2. 求 $f = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 在条件 $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 3 = 0$ 下的条件极值:

3. 比较函数值:

例 1 求函数 $f(x, y) = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 在区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 3\}$ 内的最值.

解 1. 求驻点:

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (1, 0), (1, 2), (-3, 0), (-3, 2)$$

只有驻点 $(1, 0)$ 是 D 的内点.

2. 求 $f = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$

在条件

$\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 3 = 0$ 下的条件极值:

3. 比较函数值:

例 1 求函数 $f(x, y) = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 在区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 3\}$ 内的最值.

解 1. 求驻点:

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (1, 0), (1, 2), (-3, 0), (-3, 2)$$

只有驻点 $(1, 0)$ 是 D 的内点.

2. 求 $f = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x = x^3 - y^3 - 9x + 9$ 在条件 $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 3 = 0$ 下的条件极值:

3. 比较函数值:

例 1 求函数 $f(x, y) = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 在区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 3\}$ 内的最值.

解 1. 求驻点:

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (1, 0), (1, 2), (-3, 0), (-3, 2)$$

只有驻点 $(1, 0)$ 是 D 的内点.

2. 求 $f = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x = x^3 - y^3 - 9x + 9$ 在条件 $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 3 = 0$ 下的条件极值: 令 $L = f + \lambda\varphi$, 求解

3. 比较函数值:

例 1 求函数 $f(x, y) = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 在区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 3\}$ 内的最值.

解 1. 求驻点:

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (1, 0), (1, 2), (-3, 0), (-3, 2)$$

只有驻点 $(1, 0)$ 是 D 的内点.

2. 求 $f = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x = x^3 - y^3 - 9x + 9$ 在条件 $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 3 = 0$ 下的条件极值: 令 $L = f + \lambda\varphi$, 求解

$$\begin{cases} L_x = 3x^2 - 9 + 2\lambda x = 0 \\ L_y = -3y^2 + 2\lambda y = 0 \\ \varphi = x^2 + y^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

3. 比较函数值:

例 1 求函数 $f(x, y) = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 在区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 3\}$ 内的最值.

解 1. 求驻点:

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (1, 0), (1, 2), (-3, 0), (-3, 2)$$

只有驻点 $(1, 0)$ 是 D 的内点.

2. 求 $f = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x = x^3 - y^3 - 9x + 9$ 在条件 $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 3 = 0$ 下的条件极值: 令 $L = f + \lambda\varphi$, 求解

$$\begin{cases} L_x = 3x^2 - 9 + 2\lambda x = 0 \\ L_y = -3y^2 + 2\lambda y = 0 \\ \varphi = x^2 + y^2 - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (\pm\sqrt{3}, 0), (\sqrt{3/2}, \sqrt{3/2}), (-\sqrt{3/2}, -\sqrt{3/2})$$

3. 比较函数值:

例 1 求函数 $f(x, y) = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 在区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 3\}$ 内的最值.

解 1. 求驻点:

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (1, 0), (1, 2), (-3, 0), (-3, 2)$$

只有驻点 $(1, 0)$ 是 D 的内点.

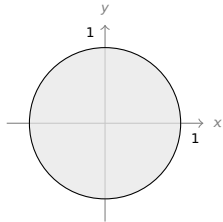
2. 求 $f = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x = x^3 - y^3 - 9x + 9$ 在条件 $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 3 = 0$ 下的条件极值: 令 $L = f + \lambda\varphi$, 求解

$$\begin{cases} L_x = 3x^2 - 9 + 2\lambda x = 0 \\ L_y = -3y^2 + 2\lambda y = 0 \\ \varphi = x^2 + y^2 - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (\pm\sqrt{3}, 0), (\sqrt{3/2}, \sqrt{3/2}), (-\sqrt{3/2}, -\sqrt{3/2})$$

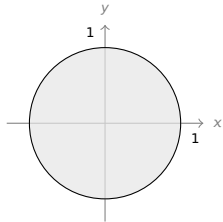
3. 比较函数值:

(x, y)	$(1, 0)$	$(\sqrt{3}, 0)$	$(-\sqrt{3}, 0)$	$(\sqrt{1.5}, \sqrt{1.5})$	$(-\sqrt{1.5}, -\sqrt{1.5})$
$f(x, y)$	-5	≈ -1.4	≈ 19.4	≈ 20.0	≈ -2.0

例 2 求 $z = (1 + 2x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2}$ 在 $\overline{D} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上的最大最小值.



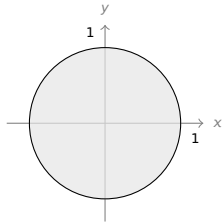
例 2 求 $z = (1 + 2x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2}$ 在 $\overline{D} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上的最大最小值.



解 1. 求驻点:

$$\begin{cases} z_x = \\ z_y = \end{cases}$$

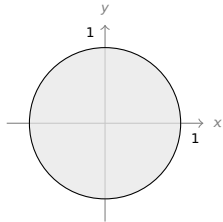
例 2 求 $z = (1 + 2x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2}$ 在 $\overline{D} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上的最大最小值.



解 1. 求驻点:

$$\begin{cases} z_x = 2x(1 - 2x^2 - 3y^2)e^{1-x^2-y^2} \\ z_y = \end{cases}$$

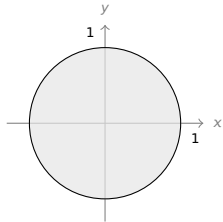
例 2 求 $z = (1 + 2x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2}$ 在 $\overline{D} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上的最大最小值.



解 1. 求驻点:

$$\begin{cases} z_x = 2x(1 - 2x^2 - 3y^2)e^{1-x^2-y^2} \\ z_y = 2y(2 - 2x^2 - 3y^2)e^{1-x^2-y^2} \end{cases}$$

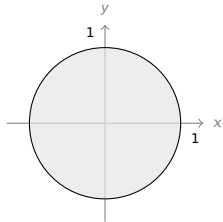
例 2 求 $z = (1 + 2x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2}$ 在 $\overline{D} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上的最大最小值.



解 1. 求驻点:

$$\begin{cases} z_x = 2x(1 - 2x^2 - 3y^2)e^{1-x^2-y^2} = 0 \\ z_y = 2y(2 - 2x^2 - 3y^2)e^{1-x^2-y^2} = 0 \end{cases}$$

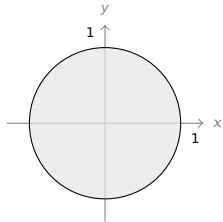
例 2 求 $z = (1 + 2x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2}$ 在 $\overline{D} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上的最大最小值.



解 1. 求驻点:

$$\begin{cases} z_x = 2x(1 - 2x^2 - 3y^2)e^{1-x^2-y^2} = 0 \\ z_y = 2y(2 - 2x^2 - 3y^2)e^{1-x^2-y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1 - 2x^2 - 3y^2) = 0 \\ y(2 - 2x^2 - 3y^2) = 0 \end{cases}$$

例 2 求 $z = (1 + 2x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2}$ 在 $\overline{D} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上的最大最小值.

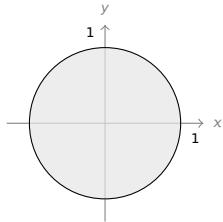


解 1. 求驻点:

$$\begin{cases} z_x = 2x(1 - 2x^2 - 3y^2)e^{1-x^2-y^2} = 0 \\ z_y = 2y(2 - 2x^2 - 3y^2)e^{1-x^2-y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1 - 2x^2 - 3y^2) = 0 \\ y(2 - 2x^2 - 3y^2) = 0 \end{cases}$$

所以有如下四种情况

例 2 求 $z = (1 + 2x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2}$ 在 $\overline{D} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上的最大最小值.



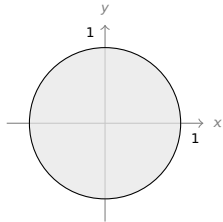
解 1. 求驻点:

$$\begin{cases} z_x = 2x(1 - 2x^2 - 3y^2)e^{1-x^2-y^2} = 0 \\ z_y = 2y(2 - 2x^2 - 3y^2)e^{1-x^2-y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1 - 2x^2 - 3y^2) = 0 \\ y(2 - 2x^2 - 3y^2) = 0 \end{cases}$$

所以有如下四种情况

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}, \begin{cases} x=0 \\ 2-2x^2-3y^2=0 \end{cases}, \begin{cases} 1-2x^2-3y^2=0 \\ y=0 \end{cases}, \begin{cases} 1-2x^2-3y^2=0 \\ 2-2x^2-3y^2=0 \end{cases}$$

例 2 求 $z = (1 + 2x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2}$ 在 $\overline{D} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上的最大最小值.



解 1. 求驻点:

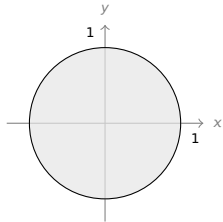
$$\begin{cases} z_x = 2x(1 - 2x^2 - 3y^2)e^{1-x^2-y^2} = 0 \\ z_y = 2y(2 - 2x^2 - 3y^2)e^{1-x^2-y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1 - 2x^2 - 3y^2) = 0 \\ y(2 - 2x^2 - 3y^2) = 0 \end{cases}$$

所以有如下四种情况

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}, \begin{cases} x=0 \\ 2-2x^2-3y^2=0 \end{cases}, \begin{cases} 1-2x^2-3y^2=0 \\ y=0 \end{cases}, \begin{cases} 1-2x^2-3y^2=0 \\ 2-2x^2-3y^2=0 \end{cases}$$

解得 $(x, y) = (0, 0)$

例 2 求 $z = (1 + 2x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2}$ 在 $\overline{D} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上的最大最小值.



解 1. 求驻点:

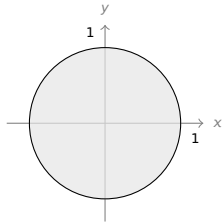
$$\begin{cases} z_x = 2x(1 - 2x^2 - 3y^2)e^{1-x^2-y^2} = 0 \\ z_y = 2y(2 - 2x^2 - 3y^2)e^{1-x^2-y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1 - 2x^2 - 3y^2) = 0 \\ y(2 - 2x^2 - 3y^2) = 0 \end{cases}$$

所以有如下四种情况

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}, \begin{cases} x=0 \\ 2-2x^2-3y^2=0 \end{cases}, \begin{cases} 1-2x^2-3y^2=0 \\ y=0 \end{cases}, \begin{cases} 1-2x^2-3y^2=0 \\ 2-2x^2-3y^2=0 \end{cases}$$

解得 $(x, y) = (0, 0)$ 或 $(0, \pm\sqrt{2/3})$

例 2 求 $z = (1 + 2x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2}$ 在 $\overline{D} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上的最大最小值.



解 1. 求驻点:

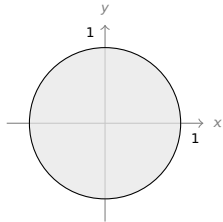
$$\begin{cases} z_x = 2x(1 - 2x^2 - 3y^2)e^{1-x^2-y^2} = 0 \\ z_y = 2y(2 - 2x^2 - 3y^2)e^{1-x^2-y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1 - 2x^2 - 3y^2) = 0 \\ y(2 - 2x^2 - 3y^2) = 0 \end{cases}$$

所以有如下四种情况

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}, \begin{cases} x=0 \\ 2-2x^2-3y^2=0 \end{cases}, \begin{cases} 1-2x^2-3y^2=0 \\ y=0 \end{cases}, \begin{cases} 1-2x^2-3y^2=0 \\ 2-2x^2-3y^2=0 \end{cases}$$

解得 $(x, y) = (0, 0)$ 或 $(0, \pm\sqrt{2/3})$ 或 $(\pm\sqrt{1/2}, 0)$

例 2 求 $z = (1 + 2x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2}$ 在 $\overline{D} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上的最大最小值.



解 1. 求驻点:

$$\begin{cases} z_x = 2x(1 - 2x^2 - 3y^2)e^{1-x^2-y^2} = 0 \\ z_y = 2y(2 - 2x^2 - 3y^2)e^{1-x^2-y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1 - 2x^2 - 3y^2) = 0 \\ y(2 - 2x^2 - 3y^2) = 0 \end{cases}$$

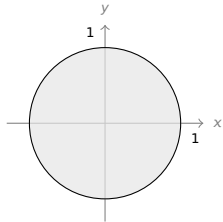
所以有如下四种情况

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}, \begin{cases} x=0 \\ 2-2x^2-3y^2=0 \end{cases}, \begin{cases} 1-2x^2-3y^2=0 \\ y=0 \end{cases}, \begin{cases} 1-2x^2-3y^2=0 \\ 2-2x^2-3y^2=0 \end{cases}$$

解得 $(x, y) = (0, 0)$ 或 $(0, \pm\sqrt{2/3})$ 或 $(\pm\sqrt{1/2}, 0)$

驻点 (x, y)	$(0, 0)$	$(0, \pm\sqrt{2/3})$	$(\pm\sqrt{1/2}, 0)$
函数值 $z(x, y)$			

例 2 求 $z = (1 + 2x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2}$ 在 $\overline{D} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上的最大最小值.



解 1. 求驻点:

$$\begin{cases} z_x = 2x(1 - 2x^2 - 3y^2)e^{1-x^2-y^2} = 0 \\ z_y = 2y(2 - 2x^2 - 3y^2)e^{1-x^2-y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1 - 2x^2 - 3y^2) = 0 \\ y(2 - 2x^2 - 3y^2) = 0 \end{cases}$$

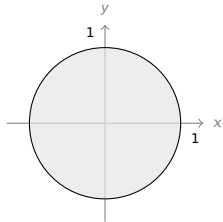
所以有如下四种情况

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}, \begin{cases} x=0 \\ 2-2x^2-3y^2=0 \end{cases}, \begin{cases} 1-2x^2-3y^2=0 \\ y=0 \end{cases}, \begin{cases} 1-2x^2-3y^2=0 \\ 2-2x^2-3y^2=0 \end{cases}$$

解得 $(x, y) = (0, 0)$ 或 $(0, \pm\sqrt{2/3})$ 或 $(\pm\sqrt{1/2}, 0)$

驻点 (x, y)	$(0, 0)$	$(0, \pm\sqrt{2/3})$	$(\pm\sqrt{1/2}, 0)$
函数值 $z(x, y)$	$e \approx 2.72$		

例 2 求 $z = (1 + 2x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2}$ 在 $\overline{D} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上的最大最小值.



解 1. 求驻点:

$$\begin{cases} z_x = 2x(1 - 2x^2 - 3y^2)e^{1-x^2-y^2} = 0 \\ z_y = 2y(2 - 2x^2 - 3y^2)e^{1-x^2-y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1 - 2x^2 - 3y^2) = 0 \\ y(2 - 2x^2 - 3y^2) = 0 \end{cases}$$

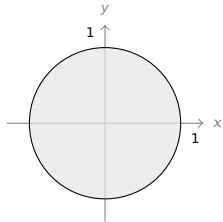
所以有如下四种情况

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}, \begin{cases} x=0 \\ 2-2x^2-3y^2=0 \end{cases}, \begin{cases} 1-2x^2-3y^2=0 \\ y=0 \end{cases}, \begin{cases} 1-2x^2-3y^2=0 \\ 2-2x^2-3y^2=0 \end{cases}$$

解得 $(x, y) = (0, 0)$ 或 $(0, \pm\sqrt{2/3})$ 或 $(\pm\sqrt{1/2}, 0)$

驻点 (x, y)	$(0, 0)$	$(0, \pm\sqrt{2/3})$	$(\pm\sqrt{1/2}, 0)$
函数值 $z(x, y)$	$e \approx 2.72$	$3e^{\frac{1}{3}} \approx 4.19$	

例 2 求 $z = (1 + 2x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2}$ 在 $\overline{D} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上的最大最小值.



解 1. 求驻点:

$$\begin{cases} z_x = 2x(1 - 2x^2 - 3y^2)e^{1-x^2-y^2} = 0 \\ z_y = 2y(2 - 2x^2 - 3y^2)e^{1-x^2-y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1 - 2x^2 - 3y^2) = 0 \\ y(2 - 2x^2 - 3y^2) = 0 \end{cases}$$

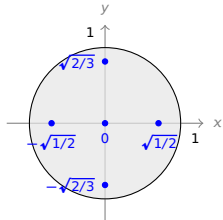
所以有如下四种情况

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}, \begin{cases} x=0 \\ 2-2x^2-3y^2=0 \end{cases}, \begin{cases} 1-2x^2-3y^2=0 \\ y=0 \end{cases}, \begin{cases} 1-2x^2-3y^2=0 \\ 2-2x^2-3y^2=0 \end{cases}$$

解得 $(x, y) = (0, 0)$ 或 $(0, \pm\sqrt{2/3})$ 或 $(\pm\sqrt{1/2}, 0)$

驻点 (x, y)	$(0, 0)$	$(0, \pm\sqrt{2/3})$	$(\pm\sqrt{1/2}, 0)$
函数值 $z(x, y)$	$e \approx 2.72$	$3e^{\frac{1}{3}} \approx 4.19$	$2e^{\frac{1}{2}} \approx 3.30$

例 2 求 $z = (1 + 2x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2}$ 在 $\overline{D} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上的最大最小值.



解 1. 求驻点:

$$\begin{cases} z_x = 2x(1 - 2x^2 - 3y^2)e^{1-x^2-y^2} = 0 \\ z_y = 2y(2 - 2x^2 - 3y^2)e^{1-x^2-y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1 - 2x^2 - 3y^2) = 0 \\ y(2 - 2x^2 - 3y^2) = 0 \end{cases}$$

所以有如下四种情况

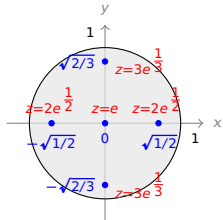
$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}, \begin{cases} x=0 \\ 2-2x^2-3y^2=0 \end{cases}, \begin{cases} 1-2x^2-3y^2=0 \\ y=0 \end{cases}, \begin{cases} 1-2x^2-3y^2=0 \\ 2-2x^2-3y^2=0 \end{cases}$$

解得 $(x, y) = (0, 0)$ 或 $(0, \pm\sqrt{2/3})$ 或 $(\pm\sqrt{1/2}, 0)$

驻点 (x, y)	$(0, 0)$	$(0, \pm\sqrt{2/3})$	$(\pm\sqrt{1/2}, 0)$
函数值 $z(x, y)$	$e \approx 2.72$	$3e^{\frac{1}{3}} \approx 4.19$	$2e^{\frac{1}{2}} \approx 3.30$



例 2 求 $z = (1 + 2x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2}$ 在 $\overline{D} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上的最大最小值.



解 1. 求驻点:

$$\begin{cases} z_x = 2x(1 - 2x^2 - 3y^2)e^{1-x^2-y^2} = 0 \\ z_y = 2y(2 - 2x^2 - 3y^2)e^{1-x^2-y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1 - 2x^2 - 3y^2) = 0 \\ y(2 - 2x^2 - 3y^2) = 0 \end{cases}$$

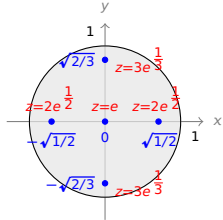
所以有如下四种情况

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}, \begin{cases} x=0 \\ 2-2x^2-3y^2=0 \end{cases}, \begin{cases} 1-2x^2-3y^2=0 \\ y=0 \end{cases}, \begin{cases} 1-2x^2-3y^2=0 \\ 2-2x^2-3y^2=0 \end{cases}$$

解得 $(x, y) = (0, 0)$ 或 $(0, \pm\sqrt{2/3})$ 或 $(\pm\sqrt{1/2}, 0)$

驻点 (x, y)	$(0, 0)$	$(0, \pm\sqrt{2/3})$	$(\pm\sqrt{1/2}, 0)$
函数值 $z(x, y)$	$e \approx 2.72$	$3e^{\frac{1}{3}} \approx 4.19$	$2e^{\frac{1}{2}} \approx 3.30$

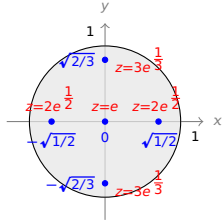
例 2 求 $z = (1 + 2x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2}$ 在 $\overline{D} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上的最大最小值.



解 1. 求驻点:

驻点 (x, y)	$(0, 0)$	$(0, \pm\sqrt{2/3})$	$(\pm\sqrt{1/2}, 0)$
函数值 $z(x, y)$	$e \approx 2.72$	$3e^{\frac{1}{3}} \approx 4.19$	$2e^{\frac{1}{2}} \approx 3.30$

例 2 求 $z = (1 + 2x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2}$ 在 $\overline{D} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上的最大最小值.

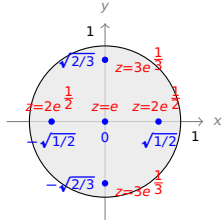


解 1. 求驻点:

驻点 (x, y)	$(0, 0)$	$(0, \pm\sqrt{2/3})$	$(\pm\sqrt{1/2}, 0)$
函数值 $z(x, y)$	$e \approx 2.72$	$3e^{\frac{1}{3}} \approx 4.19$	$2e^{\frac{1}{2}} \approx 3.30$

2. 求在边界 $x^2 + y^2 = 1$ 上的最值

例 2 求 $z = (1 + 2x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2}$ 在 $\overline{D} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上的最大最小值。



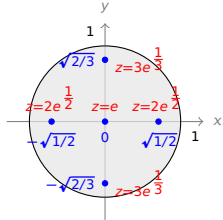
解 1. 求驻点：

驻点 (x, y)	$(0, 0)$	$(0, \pm\sqrt{2/3})$	$(\pm\sqrt{1/2}, 0)$
函数值 $z(x, y)$	$e \approx 2.72$	$3e^{\frac{1}{3}} \approx 4.19$	$2e^{\frac{1}{2}} \approx 3.30$

2. 求在边界 $x^2 + y^2 = 1$ 上的最值：此时

$$z = (1 + 2x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2}$$

例 2 求 $z = (1 + 2x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2}$ 在 $\overline{D} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上的最大最小值。



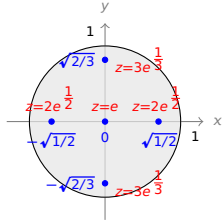
解 1. 求驻点：

驻点 (x, y)	$(0, 0)$	$(0, \pm\sqrt{2/3})$	$(\pm\sqrt{1/2}, 0)$
函数值 $z(x, y)$	$e \approx 2.72$	$3e^{\frac{1}{3}} \approx 4.19$	$2e^{\frac{1}{2}} \approx 3.30$

2. 求在边界 $x^2 + y^2 = 1$ 上的最值：此时

$$z = (1 + 2x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2} = 3 + y^2$$

例 2 求 $z = (1 + 2x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2}$ 在 $\overline{D} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上的最大最小值。



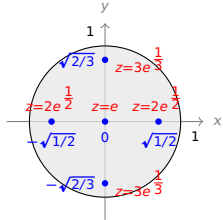
解 1. 求驻点：

驻点 (x, y)	$(0, 0)$	$(0, \pm\sqrt{2/3})$	$(\pm\sqrt{1/2}, 0)$
函数值 $z(x, y)$	$e \approx 2.72$	$3e^{\frac{1}{3}} \approx 4.19$	$2e^{\frac{1}{2}} \approx 3.30$

2. 求在边界 $x^2 + y^2 = 1$ 上的最值：此时

$$z = (1 + 2x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2} = 3 + y^2 \Rightarrow 3 \leq z \leq 4$$

例 2 求 $z = (1 + 2x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2}$ 在 $\overline{D} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上的最大最小值.



解 1. 求驻点:

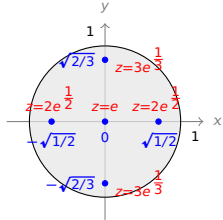
驻点 (x, y)	$(0, 0)$	$(0, \pm\sqrt{2/3})$	$(\pm\sqrt{1/2}, 0)$
函数值 $z(x, y)$	$e \approx 2.72$	$3e^{\frac{1}{3}} \approx 4.19$	$2e^{\frac{1}{2}} \approx 3.30$

2. 求在边界 $x^2 + y^2 = 1$ 上的最值: 此时

$$z = (1 + 2x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2} = 3 + y^2 \Rightarrow 3 \leq z \leq 4$$

可见在边界上, 在 $(\pm 1, 0)$ 处取得最小值 $z = 3$;

例 2 求 $z = (1 + 2x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2}$ 在 $\overline{D} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上的最大最小值.



解 1. 求驻点:

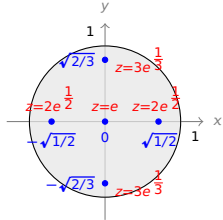
驻点 (x, y)	$(0, 0)$	$(0, \pm\sqrt{2/3})$	$(\pm\sqrt{1/2}, 0)$
函数值 $z(x, y)$	$e \approx 2.72$	$3e^{\frac{1}{3}} \approx 4.19$	$2e^{\frac{1}{2}} \approx 3.30$

2. 求在边界 $x^2 + y^2 = 1$ 上的最值: 此时

$$z = (1 + 2x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2} = 3 + y^2 \Rightarrow 3 \leq z \leq 4$$

可见在边界上, 在 $(\pm 1, 0)$ 处取得最小值 $z = 3$; 在 $(0, \pm 1)$ 处取得最大值 $z = 4$

例 2 求 $z = (1 + 2x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2}$ 在 $\overline{D} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上的最大最小值.



解 1. 求驻点:

驻点 (x, y)	$(0, 0)$	$(0, \pm\sqrt{2/3})$	$(\pm\sqrt{1/2}, 0)$
函数值 $z(x, y)$	$e \approx 2.72$	$3e^{\frac{1}{3}} \approx 4.19$	$2e^{\frac{1}{2}} \approx 3.30$

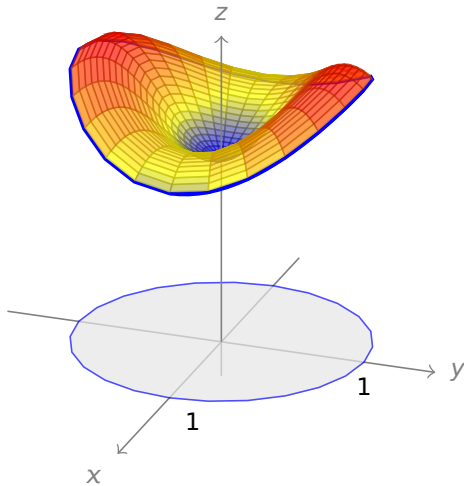
2. 求在边界 $x^2 + y^2 = 1$ 上的最值: 此时

$$z = (1 + 2x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2} = 3 + y^2 \Rightarrow 3 \leq z \leq 4$$

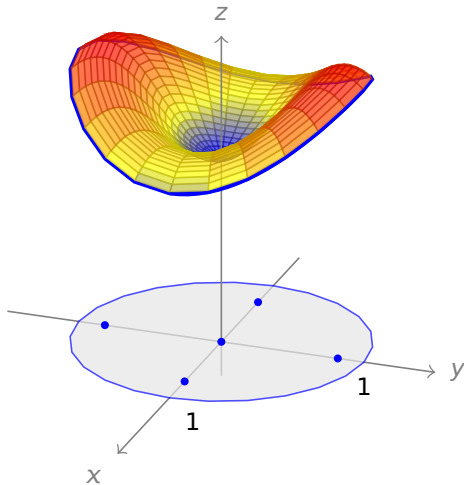
可见在边界上, 在 $(\pm 1, 0)$ 处取得最小值 $z = 3$; 在 $(0, \pm 1)$ 处取得最大值 $z = 4$

3. 点 $(0, 0)$ 处得最小值 $z = e$, 点 $(0, \pm\sqrt{2/3})$ 处得最大值 $z = 3e^{\frac{1}{3}}$

$$z=(1+2x^2+3y^2)e^{1-x^2-y^2}$$



$$z=(1+2x^2+3y^2)e^{1-x^2-y^2}$$



$$z=(1+2x^2+3y^2)e^{1-x^2-y^2}$$

