第 8 章 α：向量的基本概念

数学系　梁卓滨

2017-2018 学年 II

提要

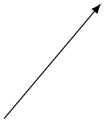
- 向量的基本概念
  - 向量的线性运算
  - 向量的长度
  - 向量间的夹角
  - 向量的投影
- 向量的坐标表示、计算
  - 计算向量的线性运算、长度、夹角、投影
- 向量的数量积
- 向量的向量积

We are here now...

- ♦ 向量的基本概念
- ♣ 向量的坐标表示
- ♥ 向量的数量积
- ♠ 向量的向量积

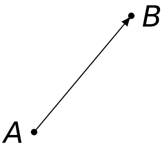
- 具有长度（大小）及方向的物理量：如力、速度等等

- 具有长度（大小）及方向的物理量：如力、速度等等



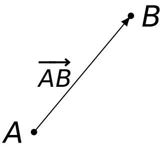
- 向量的定义：“箭头”。

- 具有长度（大小）及方向的物理量：如力、速度等等



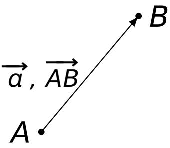
- 向量的定义："箭头"。

- 具有长度（大小）及方向的物理量：如力、速度等等



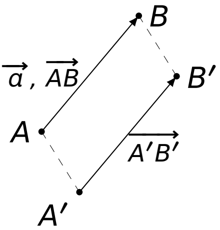
- 向量的定义："箭头"。向量的表示：$\overrightarrow{AB}$

- 具有长度（大小）及方向的物理量：如力、速度等等



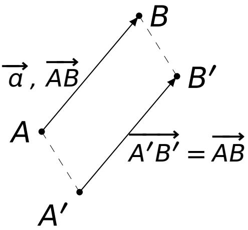
- 向量的定义："箭头"。向量的表示：$\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$

- 具有长度（大小）及方向的物理量：如力、速度等等



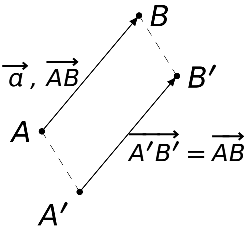
- 向量的定义："箭头"。向量的表示：$\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$

- 具有长度（大小）及方向的物理量：如力、速度等等



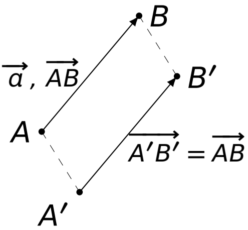
- 向量的定义："箭头"。向量的表示：$\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$
- 注 向量与位置无关：通过平移能够重合的"箭头"，视为同一向量。

- 具有长度（大小）及方向的物理量：如力、速度等等



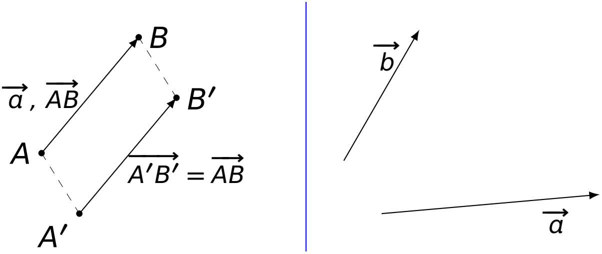
- 向量的定义：“箭头”。向量的表示：$\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$
- 注 向量与位置无关：通过平移能够重合的“箭头”，视为同一向量。
- 零向量：$\vec{0}$。

- 具有长度（大小）及方向的物理量：如力、速度等等



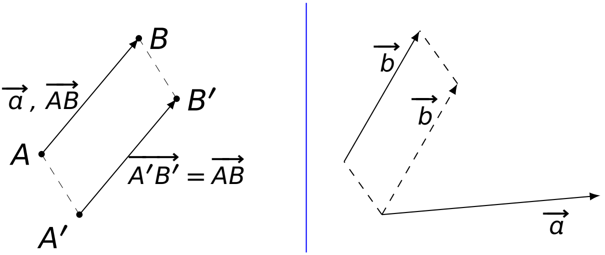
- 向量的定义：“箭头”。向量的表示：$\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$
- 注 向量与位置无关：通过平移能够重合的“箭头”，视为同一向量。
- 零向量：$\vec{0}$。单位向量 $\vec{a}$：$|\vec{a}| = 1$。

- 具有长度（大小）及方向的物理量：如力、速度等等



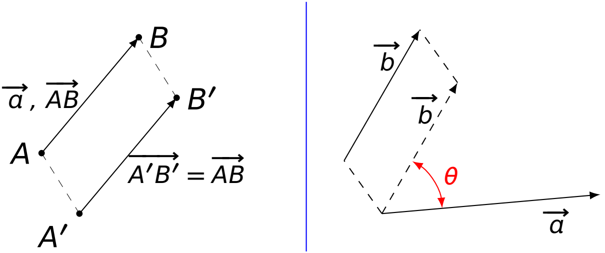
- 向量的定义：“箭头”。向量的表示：$\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$
- 注 向量与位置无关：通过平移能够重合的“箭头”，视为同一向量。
- 零向量：$\vec{0}$。单位向量 $\vec{a}$：$|\vec{a}| = 1$。
- 向量的夹角 θ：

- 具有长度（大小）及方向的物理量：如力、速度等等



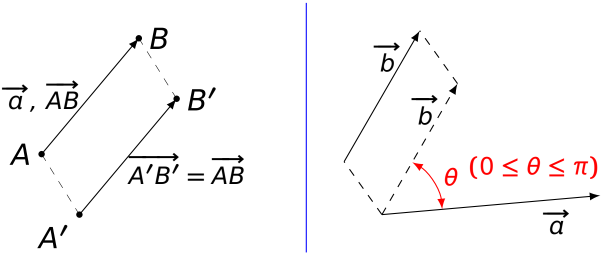
- 向量的定义："箭头"。向量的表示：$\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$
- 注 向量与位置无关：通过平移能够重合的"箭头"，视为同一向量。
- 零向量：$\vec{0}$。单位向量 $\vec{a}$：$|\vec{a}| = 1$。
- 向量的夹角 θ：

- 具有长度（大小）及方向的物理量：如力、速度等等



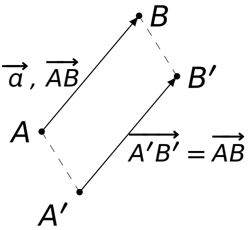
- 向量的定义：“箭头”。向量的表示：$\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$
- 注 向量与位置无关：通过平移能够重合的“箭头”，视为同一向量。
- 零向量：$\vec{0}$。单位向量 $\vec{a}$：$|\vec{a}| = 1$。
- 向量的夹角 θ：

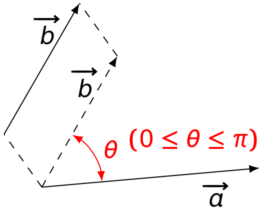
- 具有长度（大小）及方向的物理量：如力、速度等等



- 向量的定义：“箭头”。向量的表示：$\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$
- 注 向量与位置无关：通过平移能够重合的“箭头”，视为同一向量。
- 零向量：$\vec{0}$。单位向量 $\vec{a}$：$|\vec{a}| = 1$。
- 向量的夹角 θ：

- 具有长度（大小）及方向的物理量：如力、速度等等





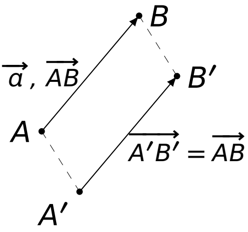
- 向量的定义：“箭头”。向量的表示：$\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$
- 注 向量与位置无关：通过平移能够重合的“箭头”，视为同一向量。
- 零向量：$\vec{0}$。单位向量 $\vec{a}$：$|\vec{a}| = 1$。
- 向量的夹角 θ：

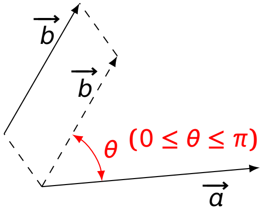
$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta = 0$$

$$\theta = \pi$$

- 具有长度（大小）及方向的物理量：如力、速度等等





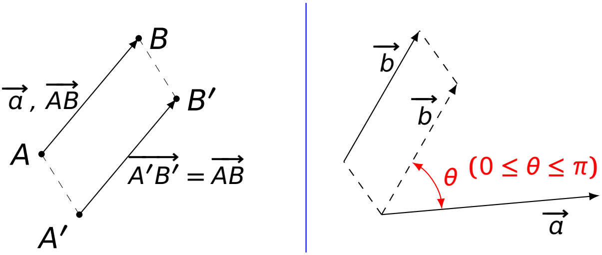
- 向量的定义：“箭头”。向量的表示：$\overrightarrow{AB}$，$\vec{a}$
- 注 向量与位置无关：通过平移能够重合的“箭头”，视为同一向量。
- 零向量：$\vec{0}$。单位向量 $\vec{a}$：$|\vec{a}| = 1$。
- 向量的夹角 θ：

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$\theta = 0$$

$$\theta = \pi$$

- 具有长度（大小）及方向的物理量：如力、速度等等



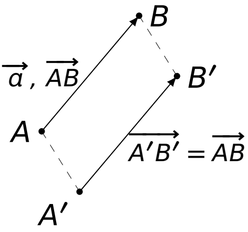
- 向量的定义：“箭头”。向量的表示：$\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$
- 注 向量与位置无关：通过平移能够重合的“箭头”，视为同一向量。
- 零向量：$\vec{0}$。单位向量 $\vec{a}$：$|\vec{a}| = 1$。
- 向量的夹角 θ：

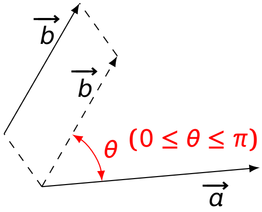
$$\theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$\theta = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \ \vec{b} \text{ 同向}$$

$$\theta = \pi$$

- 具有长度（大小）及方向的物理量：如力、速度等等





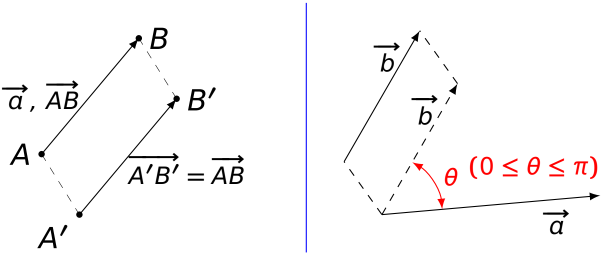
- 向量的定义：“箭头”。向量的表示：$\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$
- 注 向量与位置无关：通过平移能够重合的“箭头”，视为同一向量。
- 零向量：$\vec{0}$。单位向量 $\vec{a}$：$|\vec{a}| = 1$。
- 向量的夹角 θ：

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$\theta = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \ \vec{b} \text{ 同向}$$

$$\theta = \pi \Leftrightarrow \vec{a}, \ \vec{b} \text{ 反向}$$

- 具有长度（大小）及方向的物理量：如力、速度等等



- 向量的定义：“箭头”。向量的表示：$\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$
- 注 向量与位置无关：通过平移能够重合的“箭头”，视为同一向量。
- 零向量：$\vec{0}$。单位向量 $\vec{a}$：$|\vec{a}| = 1$。
- 向量的夹角 θ： $\theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

$$\left.\begin{array}{l} \theta = 0 \Leftrightarrow \vec{a},\ \vec{b}\ \text{同向} \\ \theta = \pi \Leftrightarrow \vec{a},\ \vec{b}\ \text{反向} \end{array}\right\} \vec{a} \parallel \vec{b}$$

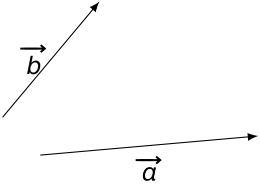
向量的线性运算：加法、数乘

加法：$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$

数乘：$\lambda\overrightarrow{a}\quad(\lambda\in\mathbb{R})$

向量的线性运算：加法、数乘

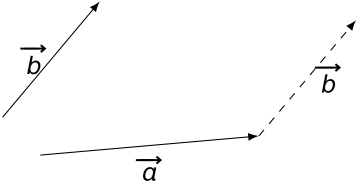
加法：$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$



数乘：$\lambda\overrightarrow{a} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

向量的线性运算：加法、数乘

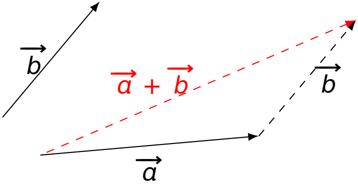
加法：$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$



数乘：$\lambda\overrightarrow{a} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

向量的线性运算：加法、数乘

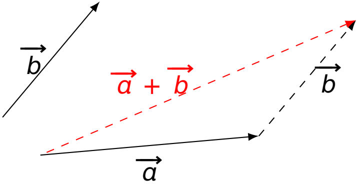
加法：$\vec{a} + \vec{b}$



数乘：$\lambda \vec{a} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

向量的线性运算：加法、数乘

加法：$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$

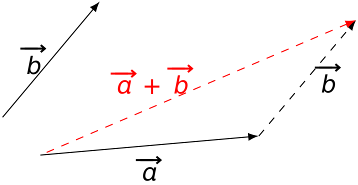


数乘：$\lambda \overrightarrow{a} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

- $\lambda \overrightarrow{a}$ 的方向：
- $\lambda \overrightarrow{a}$ 的长度：

向量的线性运算：加法、数乘

加法：$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$

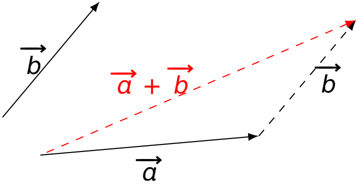


数乘：$\lambda \overrightarrow{a} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

- $\lambda \overrightarrow{a}$ 的方向：
- $\lambda \overrightarrow{a}$ 的长度：$|\lambda \overrightarrow{a}| = |\lambda| \cdot |\overrightarrow{a}|$

向量的线性运算：加法、数乘

加法：$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$

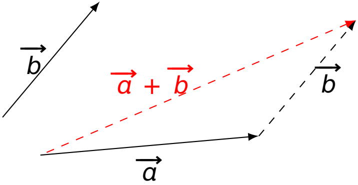


数乘：$\lambda \overrightarrow{a} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

- $\lambda \overrightarrow{a}$ 的方向：
$$\begin{cases} \lambda \geq 0, \\ \lambda < 0, \end{cases}$$
- $\lambda \overrightarrow{a}$ 的长度：$|\lambda \overrightarrow{a}| = |\lambda| \cdot |\overrightarrow{a}|$

向量的线性运算：加法、数乘

加法：$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$

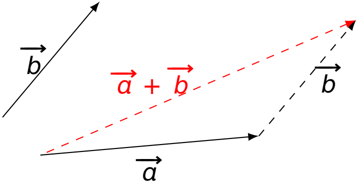


数乘：$\lambda\overrightarrow{a} \quad (\lambda\in\mathbb{R})$

- $\lambda\overrightarrow{a}$ 的方向：
$$\begin{cases}\lambda\geq 0, & \lambda\overrightarrow{a}\text{与}\overrightarrow{a}\text{同向}\\ \lambda<0, & \end{cases}$$
- $\lambda\overrightarrow{a}$ 的长度：$|\lambda\overrightarrow{a}|=|\lambda|\cdot|\overrightarrow{a}|$

向量的线性运算：加法、数乘

加法：$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$



数乘：$\lambda \overrightarrow{a} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

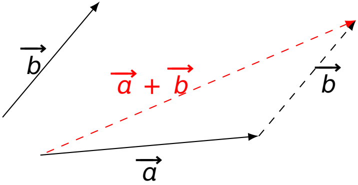
- $\lambda \overrightarrow{a}$ 的方向：

$$\begin{cases} \lambda \geq 0, & \lambda \overrightarrow{a} \text{与} \overrightarrow{a} \text{同向} \\ \lambda < 0, & \lambda \overrightarrow{a} \text{与} \overrightarrow{a} \text{反向} \end{cases}$$

- $\lambda \overrightarrow{a}$ 的长度：$|\lambda \overrightarrow{a}| = |\lambda| \cdot |\overrightarrow{a}|$

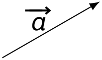
向量的线性运算：加法、数乘

加法：$\vec{a} + \vec{b}$



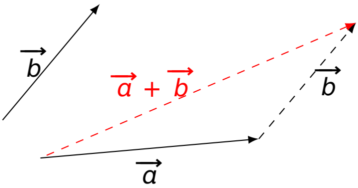
数乘：$\lambda\vec{a} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

- $\lambda\vec{a}$ 的方向：
$$\begin{cases} \lambda \geq 0, & \lambda\vec{a}\text{与}\vec{a}\text{同向} \\ \lambda < 0, & \lambda\vec{a}\text{与}\vec{a}\text{反向} \end{cases}$$
- $\lambda\vec{a}$ 的长度：$|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$



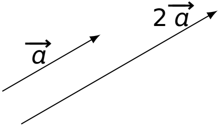
向量的线性运算：加法、数乘

加法：$\vec{a} + \vec{b}$



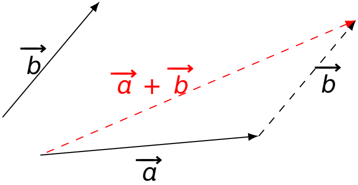
数乘：$\lambda\vec{a} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

- $\lambda\vec{a}$ 的方向：
$$\begin{cases} \lambda \geq 0, & \lambda\vec{a}\text{与}\vec{a}\text{同向} \\ \lambda < 0, & \lambda\vec{a}\text{与}\vec{a}\text{反向} \end{cases}$$
- $\lambda\vec{a}$ 的长度：$|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$



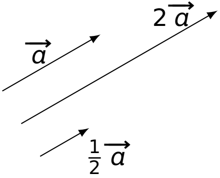
向量的线性运算：加法、数乘

加法：$\vec{a} + \vec{b}$



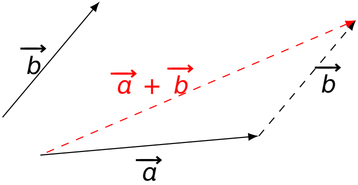
数乘：$\lambda \vec{a} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

- $\lambda \vec{a}$ 的方向：
$$\begin{cases} \lambda \geq 0, & \lambda \vec{a} \text{与} \vec{a} \text{同向} \\ \lambda < 0, & \lambda \vec{a} \text{与} \vec{a} \text{反向} \end{cases}$$
- $\lambda \vec{a}$ 的长度：$|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$



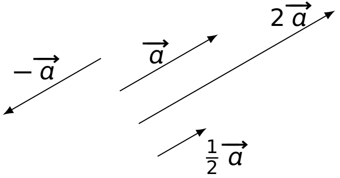
向量的线性运算：加法、数乘

加法：$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$



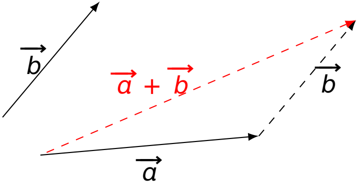
数乘：$\lambda\overrightarrow{a}\quad(\lambda\in\mathbb{R})$

- $\lambda\overrightarrow{a}$ 的方向：
$$\begin{cases}\lambda\geq 0, & \lambda\overrightarrow{a}\text{与}\overrightarrow{a}\text{同向}\\ \lambda<0, & \lambda\overrightarrow{a}\text{与}\overrightarrow{a}\text{反向}\end{cases}$$
- $\lambda\overrightarrow{a}$ 的长度：$|\lambda\overrightarrow{a}|=|\lambda|\cdot|\overrightarrow{a}|$



向量的线性运算：加法、数乘

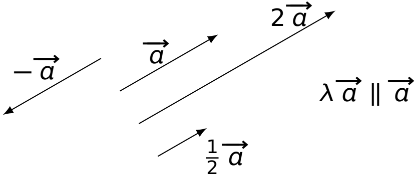
加法：$\vec{a} + \vec{b}$



数乘：$\lambda \vec{a} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

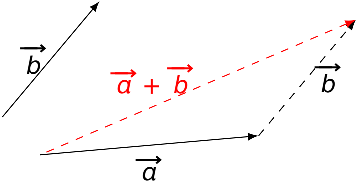
- $\lambda \vec{a}$ 的方向：
$$\begin{cases} \lambda \geq 0, & \lambda \vec{a} \text{与} \vec{a} \text{同向} \\ \lambda < 0, & \lambda \vec{a} \text{与} \vec{a} \text{反向} \end{cases}$$

- $\lambda \vec{a}$ 的长度：$|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$



向量的线性运算：加法、数乘

加法：$\vec{a}+\vec{b}$



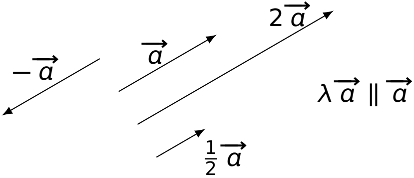
运算律 设为 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 为向量，$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$，则

数乘：$\lambda\vec{a} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

- $\lambda\vec{a}$ 的方向：

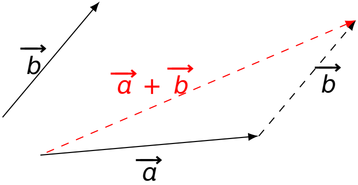
$$\begin{cases} \lambda \geq 0, & \lambda\vec{a}\text{与}\vec{a}\text{同向} \\ \lambda < 0, & \lambda\vec{a}\text{与}\vec{a}\text{反向} \end{cases}$$

- $\lambda\vec{a}$ 的长度：$|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$



向量的线性运算：加法、数乘

加法：$\vec{a}+\vec{b}$

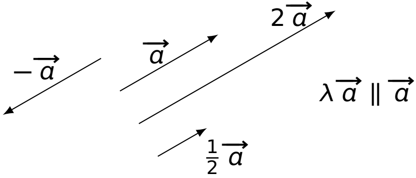


运算律 设为 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 为向量，$\lambda,\mu\in\mathbb{R}$，则

- $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;

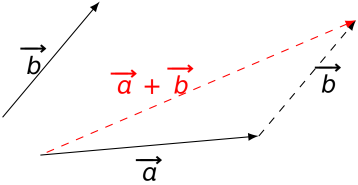
数乘：$\lambda\vec{a}\quad(\lambda\in\mathbb{R})$

- $\lambda\vec{a}$ 的方向：
$$\begin{cases}\lambda\geq 0, & \lambda\vec{a}\text{与}\vec{a}\text{同向}\\ \lambda<0, & \lambda\vec{a}\text{与}\vec{a}\text{反向}\end{cases}$$
- $\lambda\vec{a}$ 的长度：$|\lambda\vec{a}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$



向量的线性运算：加法、数乘

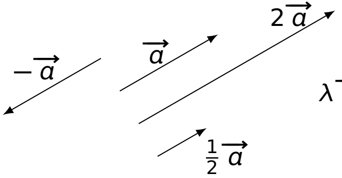
加法：$\vec{a}+\vec{b}$



数乘：$\lambda\vec{a}\quad(\lambda\in\mathbb{R})$

- $\lambda\vec{a}$ 的方向：
$$\begin{cases}\lambda\geq 0, & \lambda\vec{a}\text{与}\vec{a}\text{同向}\\ \lambda<0, & \lambda\vec{a}\text{与}\vec{a}\text{反向}\end{cases}$$

- $\lambda\vec{a}$ 的长度：$|\lambda\vec{a}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$



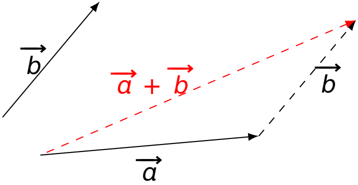
$\lambda\vec{a}\parallel\vec{a}$

运算律 设为 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 为向量，$\lambda,\mu\in\mathbb{R}$，则

- $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;
- $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$;

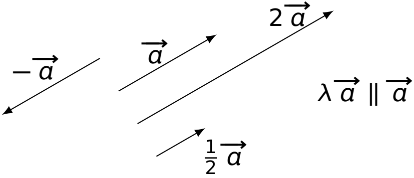
向量的线性运算：加法、数乘

加法：$\vec{a}+\vec{b}$



数乘：$\lambda\vec{a}\quad(\lambda\in\mathbb{R})$

- $\lambda\vec{a}$ 的方向：
$$\begin{cases}\lambda\geq 0, & \lambda\vec{a}\text{与}\vec{a}\text{同向}\\ \lambda<0, & \lambda\vec{a}\text{与}\vec{a}\text{反向}\end{cases}$$
- $\lambda\vec{a}$ 的长度：$|\lambda\vec{a}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$

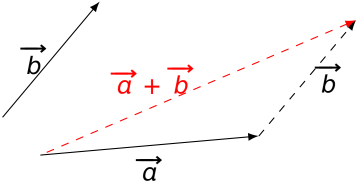


运算律 设为 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 为向量，$\lambda,\mu\in\mathbb{R}$，则

- $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;
- $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$;
- $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$;

向量的线性运算：加法、数乘

加法：$\vec{a}+\vec{b}$

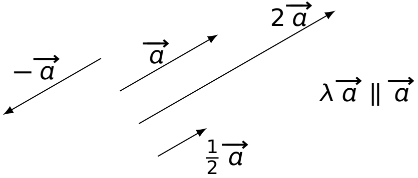


数乘：$\lambda\vec{a}\quad(\lambda\in\mathbb{R})$

- $\lambda\vec{a}$ 的方向：

$$\begin{cases}\lambda\geq 0, & \lambda\vec{a}\text{与}\vec{a}\text{同向}\\ \lambda<0, & \lambda\vec{a}\text{与}\vec{a}\text{反向}\end{cases}$$

- $\lambda\vec{a}$ 的长度：$|\lambda\vec{a}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$

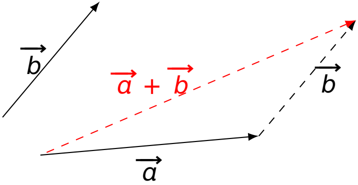


运算律 设为 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 为向量，$\lambda,\mu\in\mathbb{R}$，则

- $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;
- $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$;
- $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$;
- $\mu(\lambda\vec{a})=(\mu\lambda)\vec{a}$;

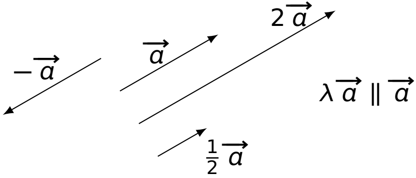
向量的线性运算：加法、数乘

加法：$\vec{a}+\vec{b}$



数乘：$\lambda\vec{a}\quad(\lambda\in\mathbb{R})$

- $\lambda\vec{a}$ 的方向：
$$\begin{cases}\lambda\ge 0, & \lambda\vec{a}\text{与}\vec{a}\text{同向}\\ \lambda<0, & \lambda\vec{a}\text{与}\vec{a}\text{反向}\end{cases}$$
- $\lambda\vec{a}$ 的长度：$|\lambda\vec{a}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$

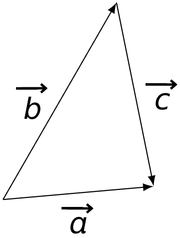


运算律 设为 $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ 为向量，$\lambda,\mu\in\mathbb{R}$，则

- $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;
- $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$;
- $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$;
- $\mu(\lambda\vec{a})=(\mu\lambda)\vec{a}$;
- $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$; $\qquad 0\cdot\vec{a}=\vec{0}$.

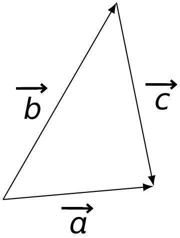
例 如图，用另外两向量表示第三个向量：

- $\overrightarrow{a} =$
- $\overrightarrow{b} =$
- $\overrightarrow{c} =$



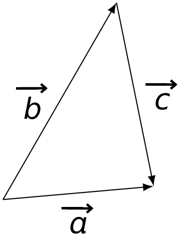
例 如图，用另外两向量表示第三个向量：

- $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$
- $\overrightarrow{b} =$
- $\overrightarrow{c} =$



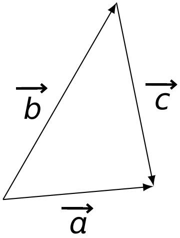
例 如图，用另外两向量表示第三个向量：

- $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$
- $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{c}$
- $\overrightarrow{c} =$



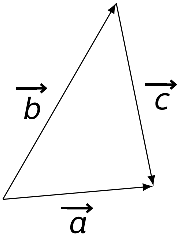
例 如图，用另外两向量表示第三个向量：

- $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$
- $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{c}$
- $\overrightarrow{c} = -\overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$



例 如图，用另外两向量表示第三个向量：

- $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$
- $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{c}$
- $\overrightarrow{c} = -\overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$

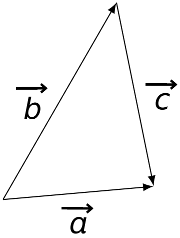


例 验证对任何三点 A, B, C，总成立

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}, \qquad \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$$

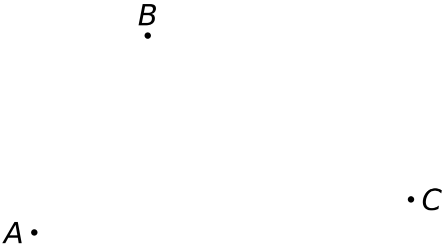
例 如图，用另外两向量表示第三个向量：

- $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$
- $\vec{b} = \vec{a} - \vec{c}$
- $\vec{c} = -\vec{b} + \vec{a}$



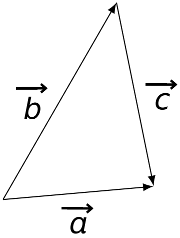
例 验证对任何三点 A, B, C，总成立

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}, \qquad \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$$



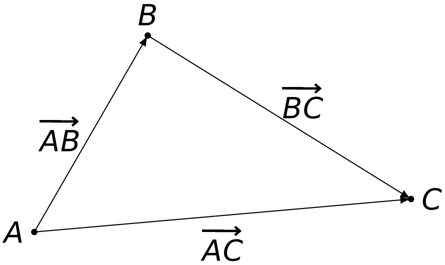
例 如图，用另外两向量表示第三个向量：

- $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$
- $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{c}$
- $\overrightarrow{c} = -\overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$



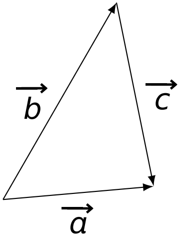
例 验证对任何三点 A, B, C，总成立

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}, \qquad \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$$



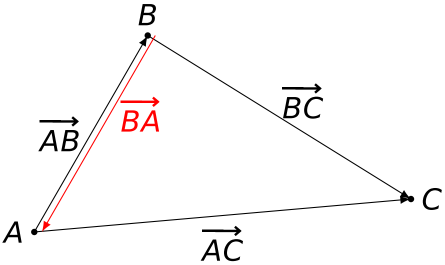
例 如图，用另外两向量表示第三个向量：

- $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$
- $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{c}$
- $\overrightarrow{c} = -\overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$

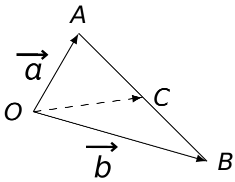


例 验证对任何三点 A, B, C，总成立

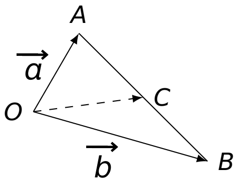
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}, \qquad \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$$



例 如图，设 C 是线段 $\overline{AB}$ 的二等分点，试用 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 表示 $\overrightarrow{OC}$



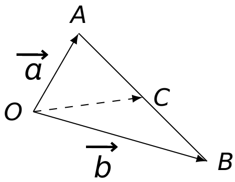
例 如图，设 C 是线段 $\overline{AB}$ 的二等分点，试用 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 表示 $\overrightarrow{OC}$



解

$$\overrightarrow{OC} =$$

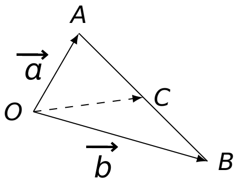
例 如图，设 C 是线段 $\overline{AB}$ 的二等分点，试用 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 表示 $\overrightarrow{OC}$



解

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$$

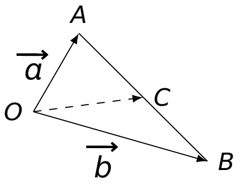
例 如图，设 C 是线段 $\overline{AB}$ 的二等分点，试用 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 表示 $\overrightarrow{OC}$



解

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{a} +$$

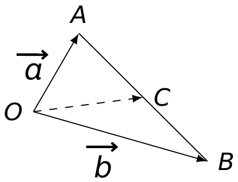
例 如图，设 C 是线段 $\overline{AB}$ 的二等分点，试用 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 表示 $\overrightarrow{OC}$



解

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

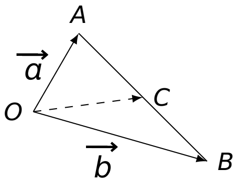
例 如图，设 C 是线段 $\overline{AB}$ 的二等分点，试用 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 表示 $\overrightarrow{OC}$



解

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \qquad \frac{1}{2}(-\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})$$

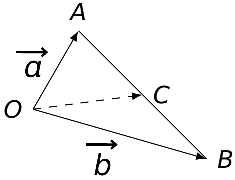
例 如图，设 C 是线段 $\overline{AB}$ 的二等分点，试用 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 表示 $\overrightarrow{OC}$



解

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}+\frac{1}{2}(-\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})$$

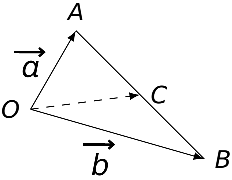
例 如图，设 C 是线段 $\overline{AB}$ 的二等分点，试用 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 表示 $\overrightarrow{OC}$



解

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}+\frac{1}{2}(-\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})=\frac{1}{2}\overrightarrow{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{b}$$

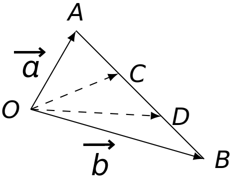
例 如图，设 C 是线段 $\overline{AB}$ 的二等分点，试用 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{OC}$



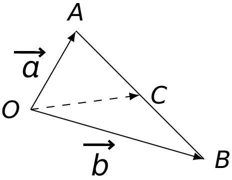
解

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\vec{a}+\frac{1}{2}(-\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$$

例 如图，设 C, D 是线段 $\overline{AB}$ 的三等分点，试用 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$



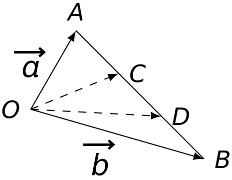
例 如图，设 C 是线段 $\overline{AB}$ 的二等分点，试用 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{OC}$



解

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\vec{a}+\frac{1}{2}(-\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$$

例 如图，设 C, D 是线段 $\overline{AB}$ 的三等分点，试用 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$

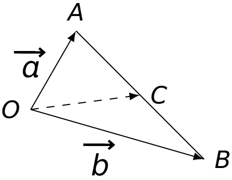


解

$$\overrightarrow{OC}=$$

$$\overrightarrow{OD}=$$

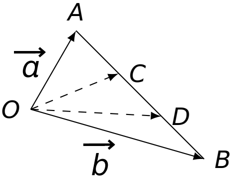
例 如图，设 C 是线段 $\overline{AB}$ 的二等分点，试用 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{OC}$



解

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

例 如图，设 C, D 是线段 $\overline{AB}$ 的三等分点，试用 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$

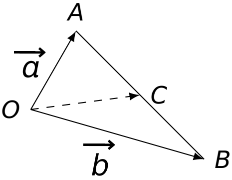


解

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{OD} =$$

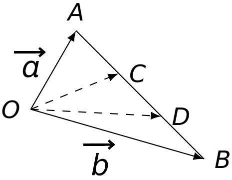
例 如图，设 C 是线段 $\overline{AB}$ 的二等分点，试用 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{OC}$



解

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

例 如图，设 C, D 是线段 $\overline{AB}$ 的三等分点，试用 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$

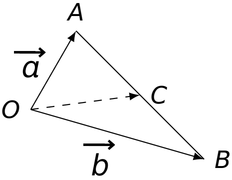


解

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \vec{a} +$$

$$\overrightarrow{OD} =$$

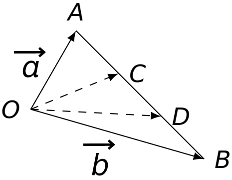
例 如图，设 C 是线段 $\overline{AB}$ 的二等分点，试用 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{OC}$



解

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

例 如图，设 C, D 是线段 $\overline{AB}$ 的三等分点，试用 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$

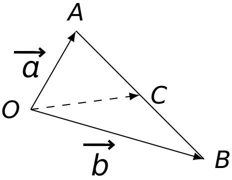


解

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \vec{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{OD} =$$

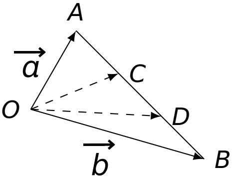
例 如图，设 C 是线段 $\overline{AB}$ 的二等分点，试用 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{OC}$



解

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

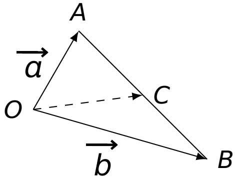
例 如图，设 C, D 是线段 $\overline{AB}$ 的三等分点，试用 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$



解

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \vec{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \qquad \frac{1}{3}(-\vec{a} + \vec{b})$$

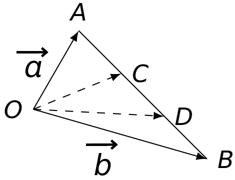
$$\overrightarrow{OD} =$$



例 如图，设 C 是线段 $\overline{AB}$ 的二等分点，试用 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{OC}$

解

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\vec{a}+\frac{1}{2}(-\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$$



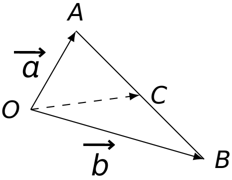
例 如图，设 C, D 是线段 $\overline{AB}$ 的三等分点，试用 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$

解

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\vec{a}+\frac{1}{3}(-\vec{a}+\vec{b})$$

$$\overrightarrow{OD}=$$

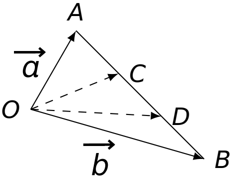
例 如图，设 C 是线段 $\overline{AB}$ 的二等分点，试用 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{OC}$



解

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\vec{a}+\frac{1}{2}(-\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$$

例 如图，设 C, D 是线段 $\overline{AB}$ 的三等分点，试用 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$

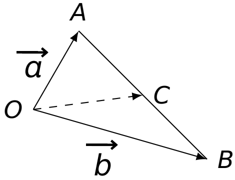


解

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\vec{a}+\frac{1}{3}(-\vec{a}+\vec{b})=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{OD}=$$

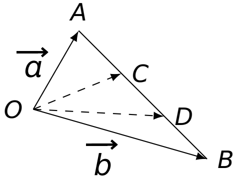
例 如图，设 C 是线段 $\overline{AB}$ 的二等分点，试用 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{OC}$



解

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\vec{a}+\frac{1}{2}(-\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$$

例 如图，设 C, D 是线段 $\overline{AB}$ 的三等分点，试用 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}$

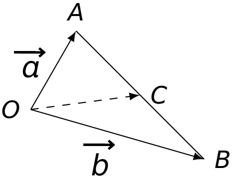


解

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\vec{a}+\frac{1}{3}(-\vec{a}+\vec{b})=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}$$

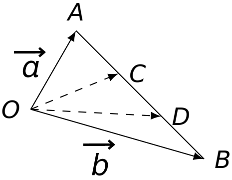
例 如图，设 C 是线段 $\overline{AB}$ 的二等分点，试用 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{OC}$



解

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

例 如图，设 C, D 是线段 $\overline{AB}$ 的三等分点，试用 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$

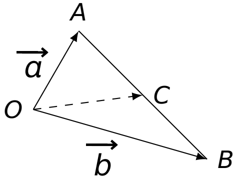


解

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \vec{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \frac{1}{3}(-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \vec{a} +$$

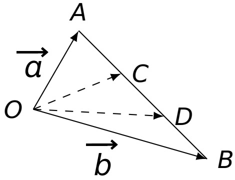
例 如图，设 C 是线段 $\overline{AB}$ 的二等分点，试用 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 表示 $\overrightarrow{OC}$



解

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a} + \frac{1}{2}(-\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b}$$

例 如图，设 C, D 是线段 $\overline{AB}$ 的三等分点，试用 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 表示 $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$

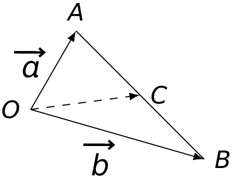


解

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a} + \frac{1}{3}(-\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{b}$$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{a} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

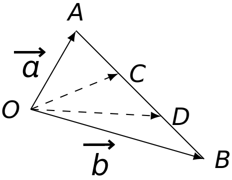
例 如图，设 C 是线段 $\overline{AB}$ 的二等分点，试用 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ 表示 $\overrightarrow{OC}$



解

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}+\frac{1}{2}(-\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})=\frac{1}{2}\overrightarrow{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{b}$$

例 如图，设 C, D 是线段 $\overline{AB}$ 的三等分点，试用 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ 表示 $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$

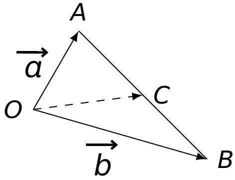


解

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{a}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}+\frac{1}{3}(-\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})=\frac{2}{3}\overrightarrow{a}+\frac{1}{3}\overrightarrow{b}$$

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{a}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\qquad\qquad\frac{2}{3}(-\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})$$

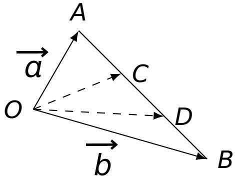
例 如图，设 C 是线段 $\overline{AB}$ 的二等分点，试用 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 表示 $\overrightarrow{OC}$



解

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a} + \frac{1}{2}(-\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b}$$

例 如图，设 C, D 是线段 $\overline{AB}$ 的三等分点，试用 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 表示 $\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}$

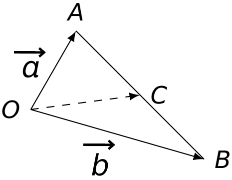


解

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a} + \frac{1}{3}(-\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{b}$$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{a} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a} + \frac{2}{3}(-\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$$

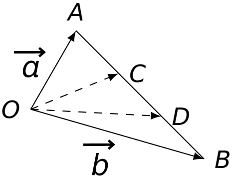
例 如图，设 C 是线段 $\overline{AB}$ 的二等分点，试用 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{OC}$



解

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\vec{a}+\frac{1}{2}(-\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$$

例 如图，设 C, D 是线段 $\overline{AB}$ 的三等分点，试用 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$

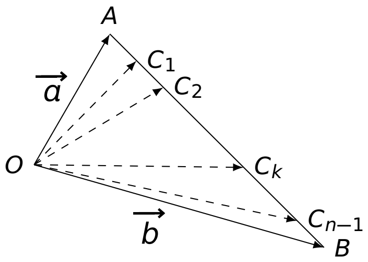


解

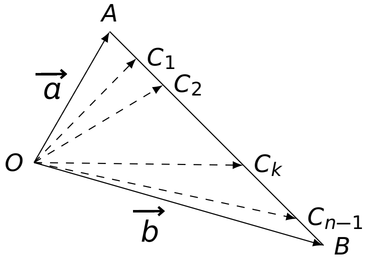
$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\vec{a}+\frac{1}{3}(-\vec{a}+\vec{b})=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\vec{a}+\frac{2}{3}(-\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$$

如图，设 $C_1, C_2, \cdots, C_{n-1}$ 是线段 $\overline{AB}$ 的 n 等分点，试用 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 表示其中任意等分点 C_k



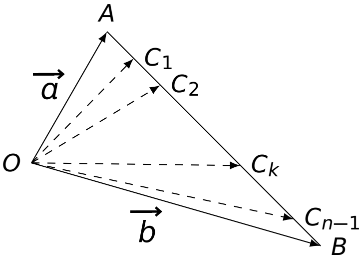
如图，设 $C_1, C_2, \cdots, C_{n-1}$ 是线段 $\overline{AB}$ 的 n 等分点，试用 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ 表示其中任意等分点 C_k



解

$$\overrightarrow{OC_k} =$$

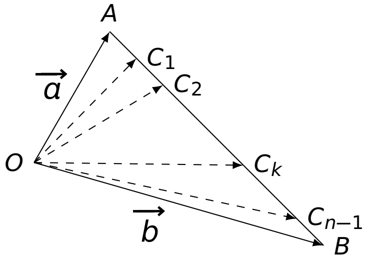
如图，设 $C_1, C_2, \cdots, C_{n-1}$ 是线段 $\overline{AB}$ 的 n 等分点，试用 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 表示其中任意等分点 C_k



解

$$\overrightarrow{OC_k} = \qquad \overrightarrow{a} + \quad \overrightarrow{b}$$

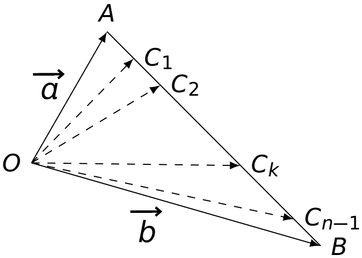
如图，设 $C_1, C_2, \cdots, C_{n-1}$ 是线段 $\overline{AB}$ 的 n 等分点，试用 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 表示其中任意等分点 C_k



解

$$\overrightarrow{OC_k} = \frac{\qquad}{n}\vec{a} + \frac{\ }{n}\vec{b}$$

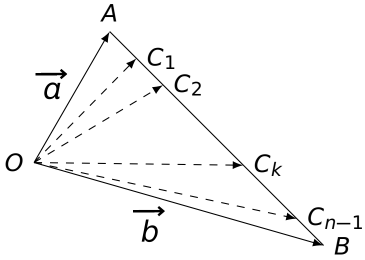
如图，设 $C_1, C_2, \cdots, C_{n-1}$ 是线段 $\overline{AB}$ 的 n 等分点，试用 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 表示其中任意等分点 C_k



解

$$\overrightarrow{OC_k} = \frac{n-k}{n}\overrightarrow{a} + \frac{}{n}\overrightarrow{b}$$

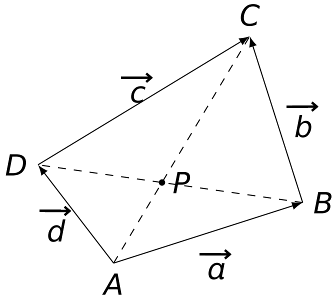
如图，设 $C_1, C_2, \cdots, C_{n-1}$ 是线段 $\overline{AB}$ 的 n 等分点，试用 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 表示其中任意等分点 C_k



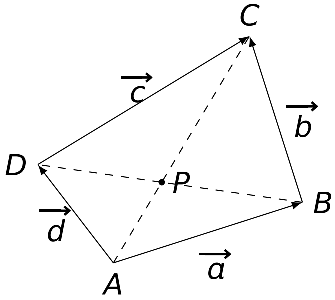
解

$$\overrightarrow{OC_k} = \frac{n-k}{n}\overrightarrow{a} + \frac{k}{n}\overrightarrow{b}$$

例 如图，设该四边形对角线互相平分，证明该四边形为平行四边形。

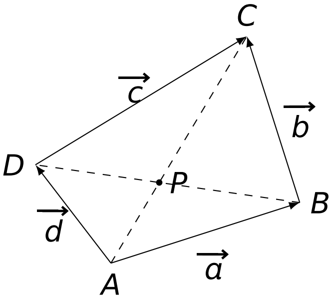


例 如图，设该四边形对角线互相平分，证明该四边形为平行四边形。



证明 往证：$\vec{a} = \vec{c}$。

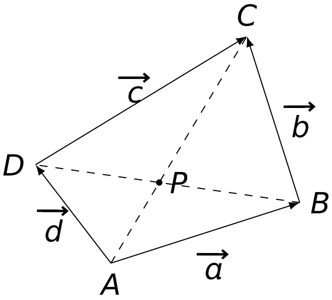
例 如图，设该四边形对角线互相平分，证明该四边形为平行四边形。



证明 往证：$\vec{a} = \vec{c}$。这是：

$$\vec{a} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB}$$

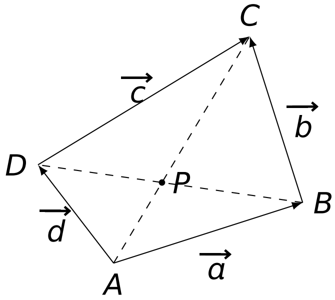
例 如图，设该四边形对角线互相平分，证明该四边形为平行四边形。



证明 往证：$\vec{a} = \vec{c}$。这是：

$$\vec{a} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC} +$$

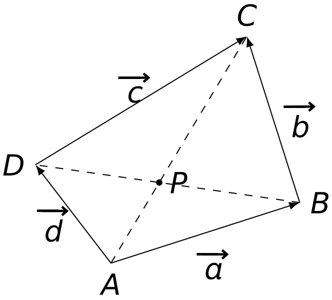
例 如图，设该四边形对角线互相平分，证明该四边形为平行四边形。



证明 往证：$\vec{a} = \vec{c}$。这是：

$$\vec{a} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{DP}$$

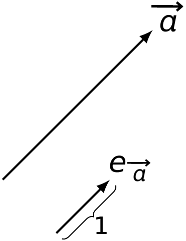
例 如图，设该四边形对角线互相平分，证明该四边形为平行四边形。



证明 往证：$\vec{a} = \vec{c}$。这是：

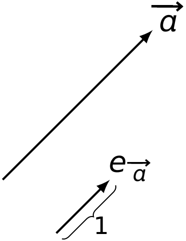
$$\vec{a} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{DP} = \vec{c}.$$

方向向量



方向向量

$$e_{\vec{a}} := \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}.$$

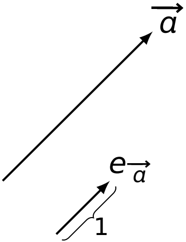


方向向量

性质 设 $\overrightarrow{a} \neq 0$，则

$$e_{\overrightarrow{a}} := \frac{1}{|\overrightarrow{a}|}\overrightarrow{a}.$$

是与 $\overrightarrow{a}$ 同向的单位向量。

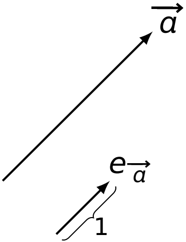


方向向量

性质 设 $\overrightarrow{a} \neq 0$，则

$$e_{\overrightarrow{a}} := \frac{1}{|\overrightarrow{a}|}\overrightarrow{a}.$$

是与 $\overrightarrow{a}$ 同向的单位向量。



证明

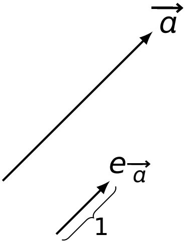
- 因为 $\frac{1}{|\overrightarrow{a}|} > 0$，所以 $e_{\overrightarrow{a}}$ 与 $\overrightarrow{a}$ 同向。

方向向量

性质 设 $\overrightarrow{a} \neq 0$，则

$$e_{\overrightarrow{a}} := \frac{1}{|\overrightarrow{a}|}\overrightarrow{a}.$$

是与 $\overrightarrow{a}$ 同向的单位向量。



证明

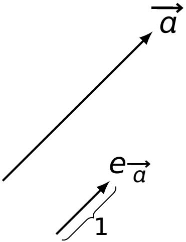
- 因为 $\frac{1}{|\overrightarrow{a}|} > 0$，所以 $e_{\overrightarrow{a}}$ 与 $\overrightarrow{a}$ 同向。
- $|e_{\overrightarrow{a}}| =$

方向向量

性质 设 $\vec{a} \neq 0$，则

$$e_{\vec{a}} := \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}.$$

是与 $\vec{a}$ 同向的单位向量。



证明

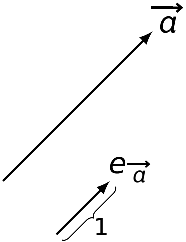
- 因为 $\frac{1}{|\vec{a}|} > 0$，所以 $e_{\vec{a}}$ 与 $\vec{a}$ 同向。
- $|e_{\vec{a}}| = \left|\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}\right| =$

方向向量

性质 设 $\vec{a} \neq 0$，则

$$e_{\vec{a}} := \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}.$$

是与 $\vec{a}$ 同向的单位向量。



证明

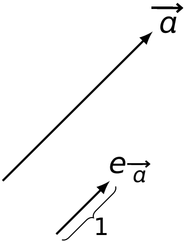
- 因为 $\frac{1}{|\vec{a}|} > 0$，所以 $e_{\vec{a}}$ 与 $\vec{a}$ 同向。
- $|e_{\vec{a}}| = \left|\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}\right| = \left|\frac{1}{|\vec{a}|}\right| \cdot |\vec{a}| =$

方向向量

性质 设 $\overrightarrow{a} \neq 0$，则

$$e_{\overrightarrow{a}} := \frac{1}{|\overrightarrow{a}|}\overrightarrow{a}.$$

是与 $\overrightarrow{a}$ 同向的单位向量。



证明

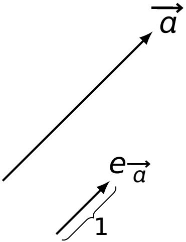
- 因为 $\frac{1}{|\overrightarrow{a}|} > 0$，所以 $e_{\overrightarrow{a}}$ 与 $\overrightarrow{a}$ 同向。
- $|e_{\overrightarrow{a}}| = \left|\frac{1}{|\overrightarrow{a}|}\overrightarrow{a}\right| = \left|\frac{1}{|\overrightarrow{a}|}\right| \cdot |\overrightarrow{a}| = \frac{1}{|\overrightarrow{a}|} \cdot |\overrightarrow{a}| =$

方向向量

性质 设 $\vec{a} \neq 0$，则

$$e_{\vec{a}} := \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}.$$

是与 $\vec{a}$ 同向的单位向量。



证明

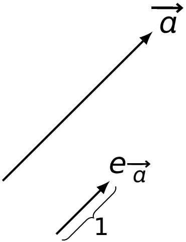
- 因为 $\frac{1}{|\vec{a}|} > 0$，所以 $e_{\vec{a}}$ 与 $\vec{a}$ 同向。
- $|e_{\vec{a}}| = \left|\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}\right| = \left|\frac{1}{|\vec{a}|}\right| \cdot |\vec{a}| = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| = 1$。

方向向量

性质 设 $\overrightarrow{a} \neq 0$，则

$$e_{\overrightarrow{a}} := \frac{1}{|\overrightarrow{a}|}\overrightarrow{a}.$$

是与 $\overrightarrow{a}$ 同向的单位向量。



证明

- 因为 $\frac{1}{|\overrightarrow{a}|} > 0$，所以 $e_{\overrightarrow{a}}$ 与 $\overrightarrow{a}$ 同向。
- $|e_{\overrightarrow{a}}| = \left|\frac{1}{|\overrightarrow{a}|}\overrightarrow{a}\right| = \left|\frac{1}{|\overrightarrow{a}|}\right| \cdot |\overrightarrow{a}| = \frac{1}{|\overrightarrow{a}|} \cdot |\overrightarrow{a}| = 1$。

注 $e_{\overrightarrow{a}}$ 也称为 $\overrightarrow{a}$ 的单位化向量，或方向向量。

平行向量

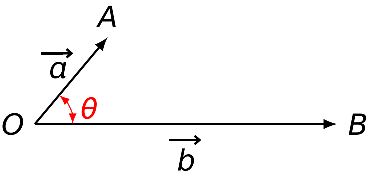
性质 设有两向量 $\overrightarrow{a} \neq 0$ 及 $\overrightarrow{b}$，则

$$\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 存在\lambda \in \mathbb{R},\ 使得\ \overrightarrow{b} = \lambda \overrightarrow{a}$$

向量夹角

性质 设 θ 是向量 $\overrightarrow{a}$ 和 $\overrightarrow{b}$ 夹角，则

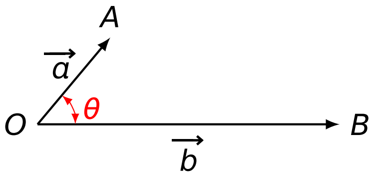
$$\cos\theta$$



向量夹角

性质 设 θ 是向量 $\overrightarrow{a}$ 和 $\overrightarrow{b}$ 夹角，则

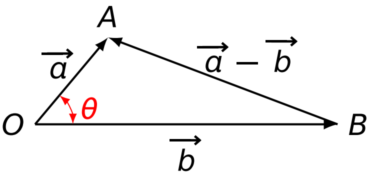
$$\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{a}|^2 + |\overrightarrow{b}|^2 - |\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|^2}{2|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|}$$



向量夹角

性质 设 θ 是向量 $\overrightarrow{a}$ 和 $\overrightarrow{b}$ 夹角，则

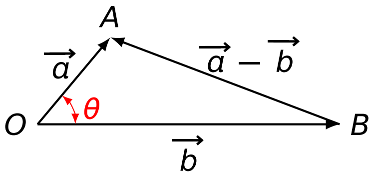
$$\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{a}|^2 + |\overrightarrow{b}|^2 - |\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|^2}{2|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|}$$



向量夹角

性质 设 θ 是向量 $\overrightarrow{a}$ 和 $\overrightarrow{b}$ 夹角，则

$$\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{a}|^2 + |\overrightarrow{b}|^2 - |\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|^2}{2|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|}$$



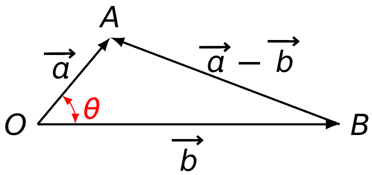
证明 这是由三角形的余弦定理：

$$|BA|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 - 2|OA| \cdot |OB| \cdot \cos\theta$$

向量夹角

性质 设 θ 是向量 $\overrightarrow{a}$ 和 $\overrightarrow{b}$ 夹角，则

$$\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{a}|^2 + |\overrightarrow{b}|^2 - |\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|^2}{2|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|}$$



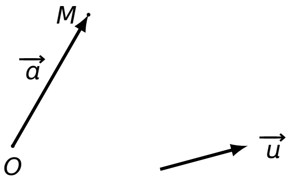
证明 这是由三角形的余弦定理：

$$|BA|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 - 2|OA| \cdot |OB| \cdot \cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad |\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|^2 = |\overrightarrow{a}|^2 + |\overrightarrow{b}|^2 - 2|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \cos\theta$$

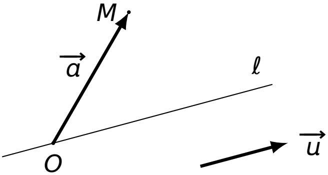
向量的投影

如图，



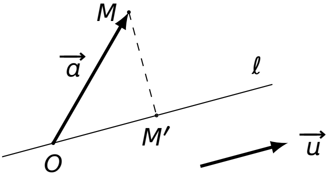
向量的投影

如图，



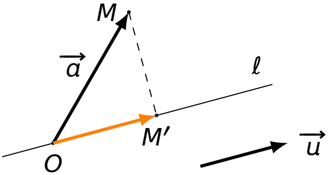
向量的投影

如图，



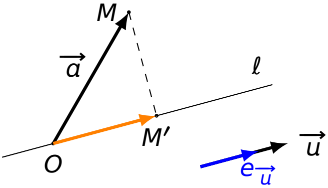
向量的投影

如图，



向量的投影

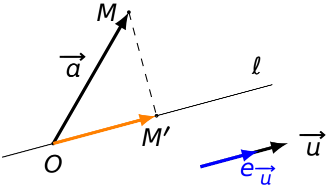
如图，



向量的投影

如图，存在唯一的数 λ，使得：

$$\overrightarrow{OM'} = \lambda e_{\vec{u}}$$

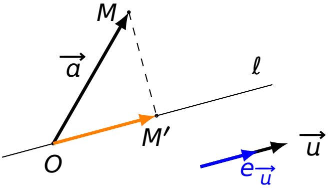


向量的投影

如图，存在唯一的数 λ，使得：

$$\overrightarrow{OM'} = \lambda e_{\vec{u}}$$

该 λ 称为 $\vec{a}$ 在 $\vec{u}$ 方向上的投影，记为：



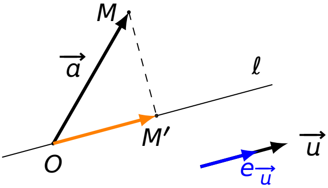
向量的投影

如图，存在唯一的数 λ，使得：

$$\overrightarrow{OM'} = \lambda e_{\vec{u}}$$

该 λ 称为 $\vec{a}$ 在 $\vec{u}$ 方向上的投影，记为：

$$\lambda = \mathrm{Prj}_{\vec{u}}\,\vec{a}$$



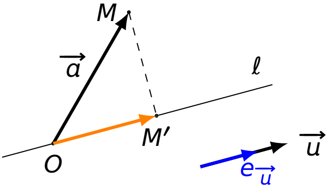
向量的投影

如图，存在唯一的数 λ，使得：

$$\overrightarrow{OM'} = \lambda e_{\vec{u}}$$

该 λ 称为 $\vec{a}$ 在 $\vec{u}$ 方向上的投影，记为：

$$\lambda = \mathrm{Prj}_{\vec{u}}\,\vec{a}$$



性质 设 θ 为 $\vec{a}$ 和 $\vec{u}$ 的夹角，则成立

$$\mathrm{Prj}_{\vec{u}}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos\theta,$$

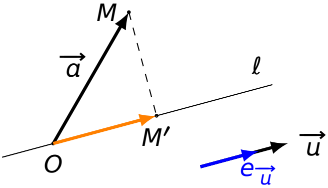
向量的投影

如图，存在唯一的数 λ，使得：

$$\overrightarrow{OM'} = \lambda e_{\vec{u}}$$

该 λ 称为 $\vec{a}$ 在 $\vec{u}$ 方向上的投影，记为：

$$\lambda = \mathrm{Prj}_{\vec{u}}\,\vec{a}$$



性质 设 θ 为 $\vec{a}$ 和 $\vec{u}$ 的夹角，则成立

$$\mathrm{Prj}_{\vec{u}}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos\theta, \qquad \overrightarrow{OM'} = \left(|\vec{a}|\cos\theta\right) e_{\vec{u}}.$$

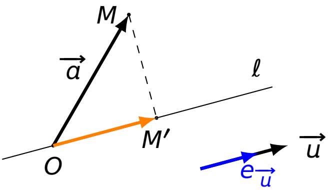
向量的投影

如图，存在唯一的数 λ，使得：

$$\overrightarrow{OM'} = \lambda e_{\vec{u}}$$

该 λ 称为 $\vec{a}$ 在 $\vec{u}$ 方向上的投影，记为：

$$\lambda = \mathrm{Prj}_{\vec{u}}\, \vec{a}$$



性质 设 θ 为 $\vec{a}$ 和 $\vec{u}$ 的夹角，则成立

$$\mathrm{Prj}_{\vec{u}}\, \vec{a} = |\vec{a}|\cos\theta, \qquad \overrightarrow{OM'} = \left(|\vec{a}|\cos\theta\right) e_{\vec{u}}.$$

证明 只需证 $\overrightarrow{OM'}$ 和 $\left(|\vec{a}|\cos\theta\right) e_{\vec{u}}$ 既同向，也同长度。

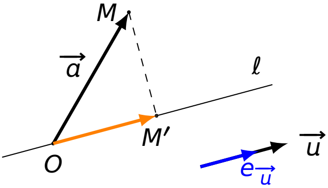
向量的投影

如图，存在唯一的数 λ，使得：

$$\overrightarrow{OM'} = \lambda e_{\vec{u}}$$

该 λ 称为 $\vec{a}$ 在 $\vec{u}$ 方向上的投影，记为：

$$\lambda = \mathrm{Prj}_{\vec{u}}\, \vec{a}$$



性质 设 θ 为 $\vec{a}$ 和 $\vec{u}$ 的夹角，则成立

$$\mathrm{Prj}_{\vec{u}}\, \vec{a} = |\vec{a}|\cos\theta, \qquad \overrightarrow{OM'} = \big(|\vec{a}|\cos\theta\big)e_{\vec{u}}.$$

证明 只需证 $\overrightarrow{OM'}$ 和 $\big(|\vec{a}|\cos\theta\big)e_{\vec{u}}$ 既同向，也同长度。分情况：

- $\theta \le \frac{\pi}{2}$
- $\theta \ge \frac{\pi}{2}$

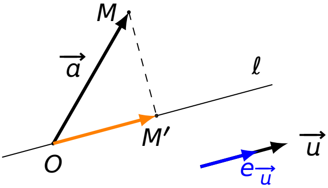
向量的投影

如图，存在唯一的数 λ，使得：

$$\overrightarrow{OM'} = \lambda e_{\vec{u}}$$

该 λ 称为 $\vec{a}$ 在 $\vec{u}$ 方向上的投影，记为：

$$\lambda = \mathrm{Prj}_{\vec{u}}\, \vec{a}$$

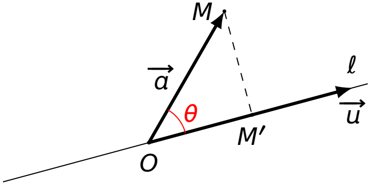


性质 设 θ 为 $\vec{a}$ 和 $\vec{u}$ 的夹角，则成立

$$\mathrm{Prj}_{\vec{u}}\, \vec{a} = |\vec{a}|\cos\theta, \qquad \overrightarrow{OM'} = \Big(|\vec{a}|\cos\theta\Big) e_{\vec{u}}.$$

证明 只需证 $\overrightarrow{OM'}$ 和 $\Big(|\vec{a}|\cos\theta\Big) e_{\vec{u}}$ 既同向，也同长度。分情况：

- $\theta \le \frac{\pi}{2}$
- $\theta \ge \frac{\pi}{2}$



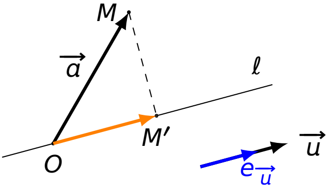
向量的投影

如图，存在唯一的数 λ，使得：

$$\overrightarrow{OM'} = \lambda e_{\vec{u}}$$

该 λ 称为 $\vec{a}$ 在 $\vec{u}$ 方向上的投影，记为：

$$\lambda = \mathrm{Prj}_{\vec{u}}\, \vec{a}$$

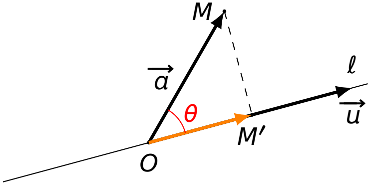


性质 设 θ 为 $\vec{a}$ 和 $\vec{u}$ 的夹角，则成立

$$\mathrm{Prj}_{\vec{u}}\, \vec{a} = |\vec{a}|\cos\theta, \qquad \overrightarrow{OM'} = \left(|\vec{a}|\cos\theta\right) e_{\vec{u}}.$$

证明 只需证 $\overrightarrow{OM'}$ 和 $\left(|\vec{a}|\cos\theta\right) e_{\vec{u}}$ 既同向，也同长度。分情况：

- $\theta \le \frac{\pi}{2}$
- $\theta \ge \frac{\pi}{2}$



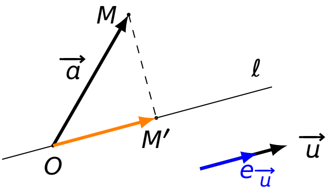
向量的投影

如图，存在唯一的数 λ，使得：

$$\overrightarrow{OM'} = \lambda e_{\vec{u}}$$

该 λ 称为 $\vec{a}$ 在 $\vec{u}$ 方向上的投影，记为：

$$\lambda = \mathrm{Prj}_{\vec{u}}\,\vec{a}$$

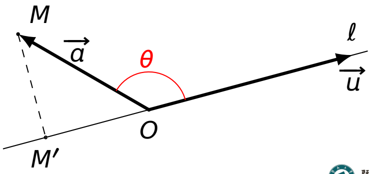


性质 设 θ 为 $\vec{a}$ 和 $\vec{u}$ 的夹角，则成立

$$\mathrm{Prj}_{\vec{u}}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos\theta, \qquad \overrightarrow{OM'} = \Big(|\vec{a}|\cos\theta\Big)e_{\vec{u}}.$$

证明 只需证 $\overrightarrow{OM'}$ 和 $\Big(|\vec{a}|\cos\theta\Big)e_{\vec{u}}$ 既同向，也同长度。分情况：

- $\theta \le \frac{\pi}{2}$
- $\theta \ge \frac{\pi}{2}$



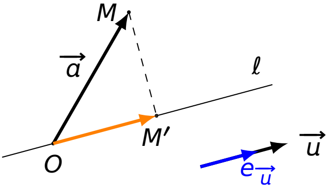
向量的投影

如图，存在唯一的数 λ，使得：

$$\overrightarrow{OM'} = \lambda e_{\vec{u}}$$

该 λ 称为 $\vec{a}$ 在 $\vec{u}$ 方向上的投影，记为：

$$\lambda = \mathrm{Prj}_{\vec{u}}\,\vec{a}$$

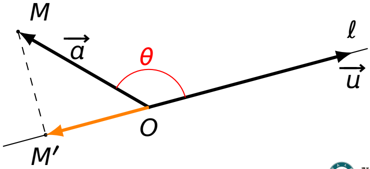


性质 设 θ 为 $\vec{a}$ 和 $\vec{u}$ 的夹角，则成立

$$\mathrm{Prj}_{\vec{u}}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos\theta, \qquad \overrightarrow{OM'} = \big(|\vec{a}|\cos\theta\big)e_{\vec{u}}.$$

证明 只需证 $\overrightarrow{OM'}$ 和 $\big(|\vec{a}|\cos\theta\big)e_{\vec{u}}$ 既同向，也同长度。分情况：

- $\theta \le \frac{\pi}{2}$
- $\theta \ge \frac{\pi}{2}$



We are here now...

♦ 向量的基本概念

♣ 向量的坐标表示

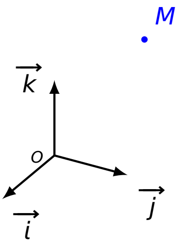
♥ 向量的数量积

♠ 向量的向量积

点、向量的坐标表示

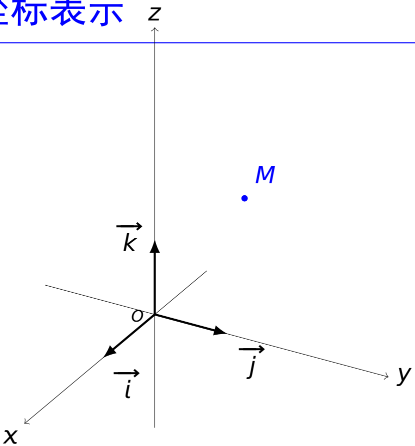
- 点 M $\longleftrightarrow$ 三元数组 (x, y, z)：以 (x, y, z) 作为点 M 的坐标

点、向量的坐标表示



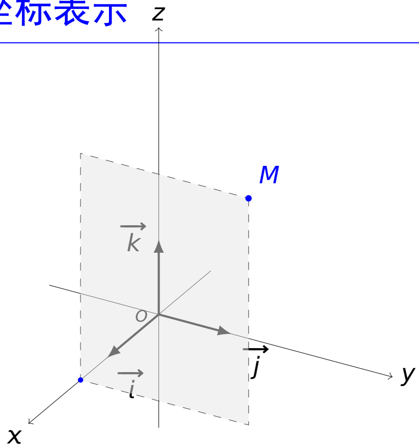
- 点 M $\longleftrightarrow$ 三元数组 (x, y, z)：以 (x, y, z) 作为点 M 的坐标

点、向量的坐标表示



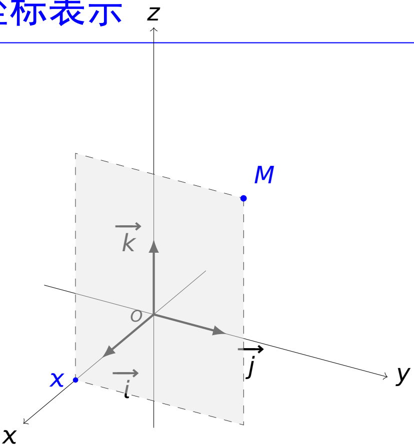
- 点 M $\longleftrightarrow$ 三元数组 (x, y, z)：以 (x, y, z) 作为点 M 的坐标

点、向量的坐标表示



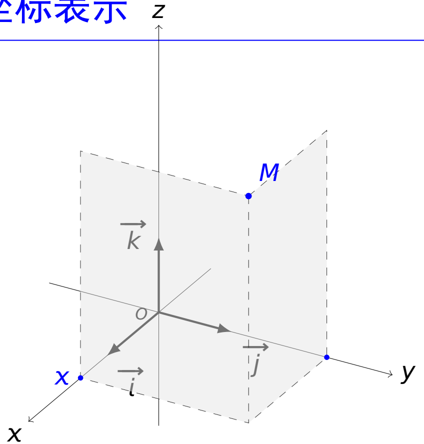
- 点 M $\longleftrightarrow$ 三元数组 (x, y, z)：以 (x, y, z) 作为点 M 的坐标

点、向量的坐标表示



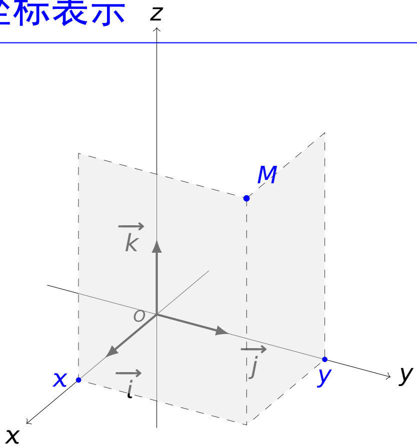
- 点 $M \longleftrightarrow$ 三元数组 (x, y, z)：以 (x, y, z) 作为点 M 的坐标

点、向量的坐标表示



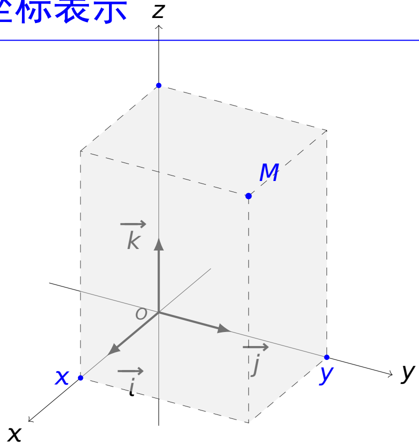
- 点 M $\longleftrightarrow$ 三元数组 (x, y, z)：以 (x, y, z) 作为点 M 的坐标

点、向量的坐标表示



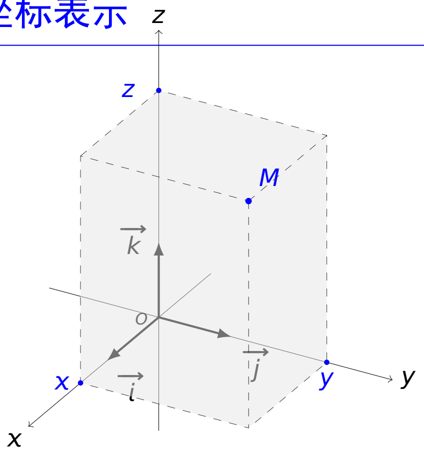
- 点 $M \longleftrightarrow$ 三元数组 (x, y, z)：以 (x, y, z) 作为点 M 的坐标

点、向量的坐标表示



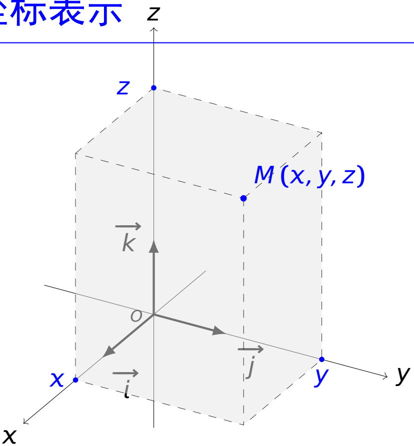
- 点 $M \longleftrightarrow$ 三元数组 (x, y, z)：以 (x, y, z) 作为点 M 的坐标

点、向量的坐标表示



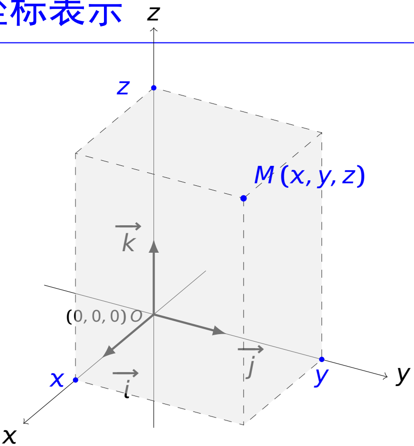
- 点 $M \longleftrightarrow$ 三元数组 (x, y, z)：以 (x, y, z) 作为点 M 的坐标

点、向量的坐标表示



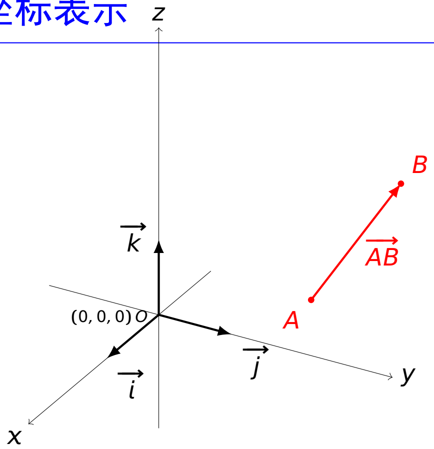
- 点 M $\longleftrightarrow$ 三元数组 (x, y, z)：以 (x, y, z) 作为点 M 的坐标

点、向量的坐标表示



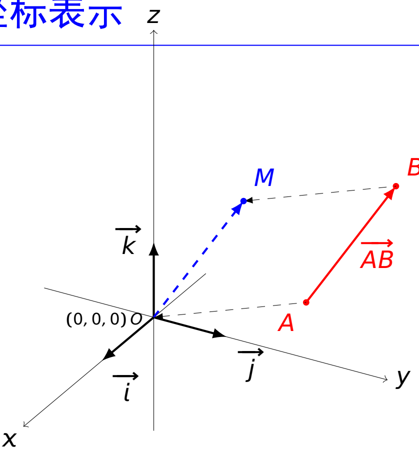
- 点 M $\longleftrightarrow$ 三元数组 (x, y, z)：以 (x, y, z) 作为点 M 的坐标

点、向量的坐标表示



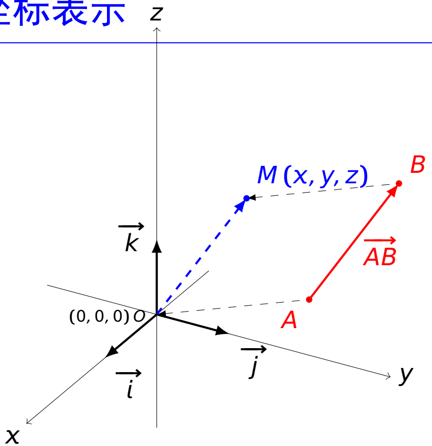
- 点 M $\longleftrightarrow$ 三元数组 (x, y, z)：以 (x, y, z) 作为点 M 的坐标
- $\overrightarrow{AB}$

点、向量的坐标表示



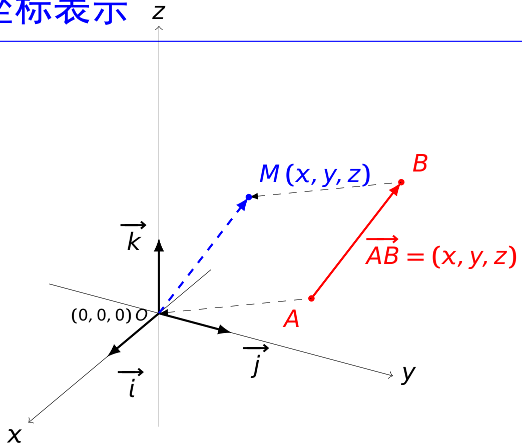
- 点 $M \longleftrightarrow$ 三元数组 (x, y, z)：以 (x, y, z) 作为点 M 的坐标
- $\overrightarrow{AB} \overset{\text{平移}}{\longleftrightarrow} \overrightarrow{OM}$

点、向量的坐标表示



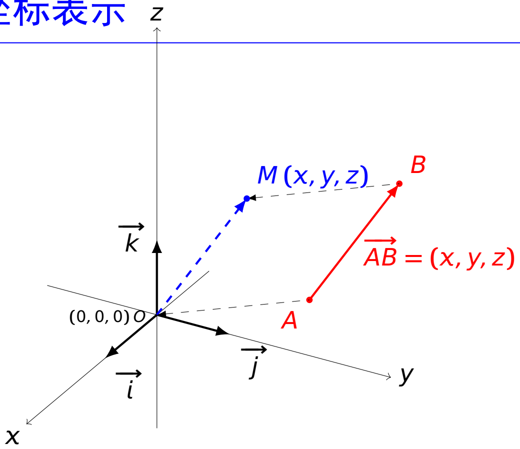
- 点 $M \longleftrightarrow$ 三元数组 (x, y, z)：以 (x, y, z) 作为点 M 的坐标
- $\overrightarrow{AB} \overset{\text{平移}}{\longleftrightarrow} \overrightarrow{OM}$

点、向量的坐标表示



- 点 M $\longleftrightarrow$ 三元数组 (x, y, z)：以 (x, y, z) 作为点 M 的坐标
- $\overrightarrow{AB} \xleftrightarrow{\text{平移}} \overrightarrow{OM}$：以 (x, y, z) 作为向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标

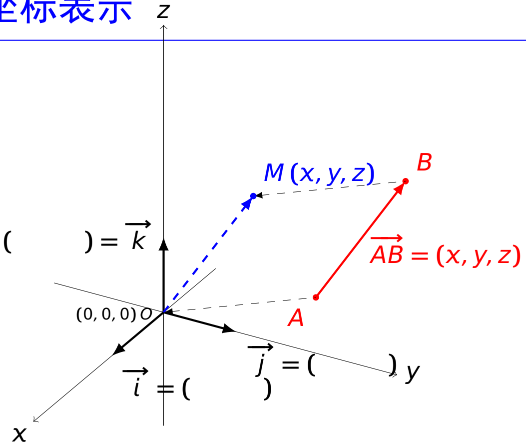
点、向量的坐标表示



- 点 M $\longleftrightarrow$ 三元数组 (x, y, z)：以 (x, y, z) 作为点 M 的坐标
- $\overrightarrow{AB} \xleftrightarrow{\text{平移}} \overrightarrow{OM}$：以 (x, y, z) 作为向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标

注 三元数组 (x, y, z) 同时作为点 M 和向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标

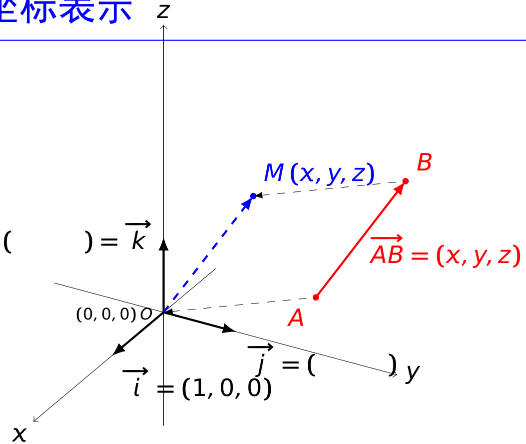
点、向量的坐标表示



- 点 M $\longleftrightarrow$ 三元数组 (x, y, z)：以 (x, y, z) 作为点 M 的坐标
- $\overrightarrow{AB} \overset{\text{平移}}{\longleftrightarrow} \overrightarrow{OM}$：以 (x, y, z) 作为向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标

注 三元数组 (x, y, z) 同时作为点 M 和向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标

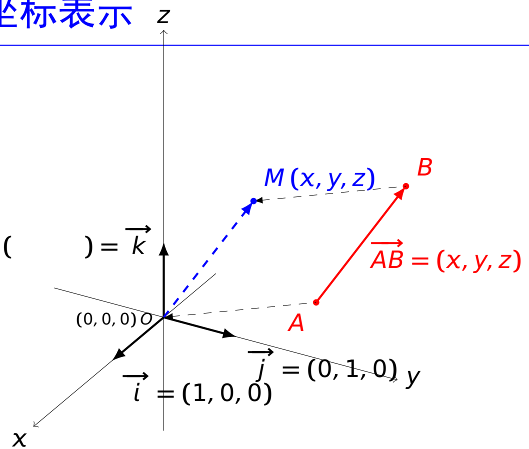
点、向量的坐标表示



- 点 $M \longleftrightarrow$ 三元数组 (x, y, z)：以 (x, y, z) 作为点 M 的坐标
- $\overrightarrow{AB} \overset{平移}{\longleftrightarrow} \overrightarrow{OM}$：以 (x, y, z) 作为向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标

注 三元数组 (x, y, z) 同时作为点 M 和向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标

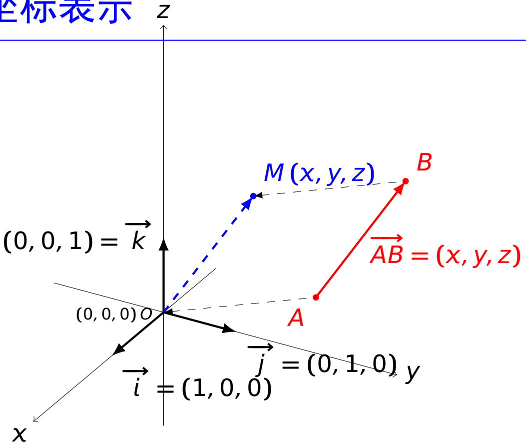
点、向量的坐标表示



- 点 $M \longleftrightarrow$ 三元数组 (x, y, z)：以 (x, y, z) 作为点 M 的坐标
- $\overrightarrow{AB} \xleftrightarrow{\text{平移}} \overrightarrow{OM}$：以 (x, y, z) 作为向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标

注 三元数组 (x, y, z) 同时作为点 M 和向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标

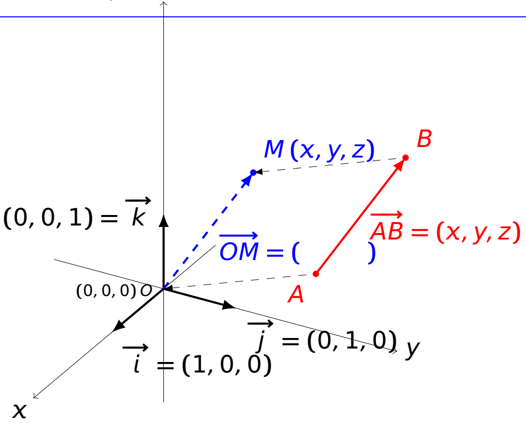
点、向量的坐标表示



- 点 $M \longleftrightarrow$ 三元数组 (x, y, z)：以 (x, y, z) 作为点 M 的坐标
- $\overrightarrow{AB} \overset{\text{平移}}{\longleftrightarrow} \overrightarrow{OM}$：以 (x, y, z) 作为向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标

注 三元数组 (x, y, z) 同时作为点 M 和向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标

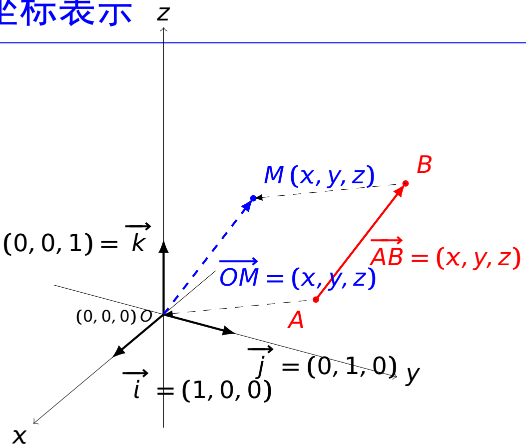
点、向量的坐标表示



- 点 $M \longleftrightarrow$ 三元数组 (x, y, z)：以 (x, y, z) 作为点 M 的坐标
- $\overrightarrow{AB} \xleftrightarrow{\text{平移}} \overrightarrow{OM}$：以 (x, y, z) 作为向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标

注 三元数组 (x, y, z) 同时作为点 M 和向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标

点、向量的坐标表示



- 点 $M \longleftrightarrow$ 三元数组 (x, y, z)：以 (x, y, z) 作为点 M 的坐标
- $\overrightarrow{AB} \overset{\text{平移}}{\longleftrightarrow} \overrightarrow{OM}$：以 (x, y, z) 作为向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标

注 三元数组 (x, y, z) 同时作为点 M 和向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标

性质 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标为 (x, y, z) 当且仅当 $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$。

性质 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标为 (x, y, z) 当且仅当 $\overrightarrow{AB} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$。即

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$$

性质 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标为 (x, y, z) 当且仅当 $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$。即

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$

证明

- 必要性

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$$

$$?\Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$

性质 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标为 (x, y, z) 当且仅当 $\overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$。即

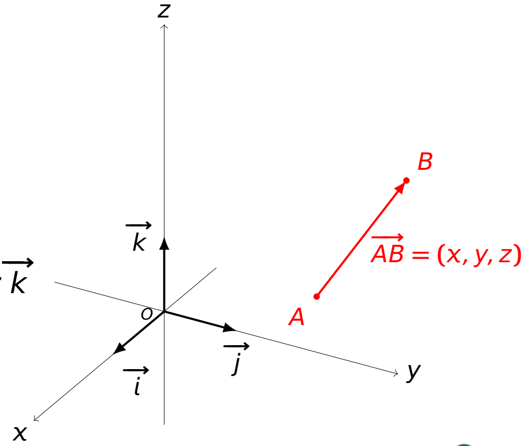
$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

证明

- 必要性

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$$

$$? \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$



性质 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标为 (x, y, z) 当且仅当 $\overrightarrow{AB} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$。即

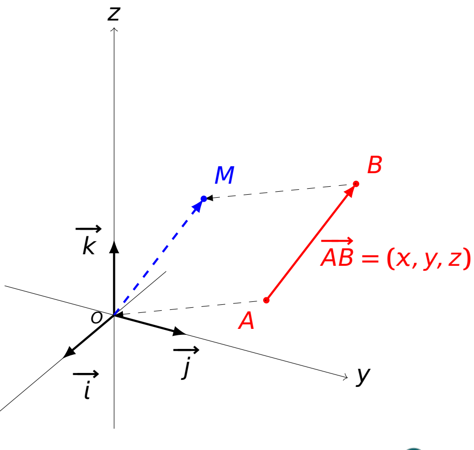
$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

证明

- 必要性

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$$

$$?\Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$



性质 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标为 (x, y, z) 当且仅当 $\overrightarrow{AB} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$。即

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

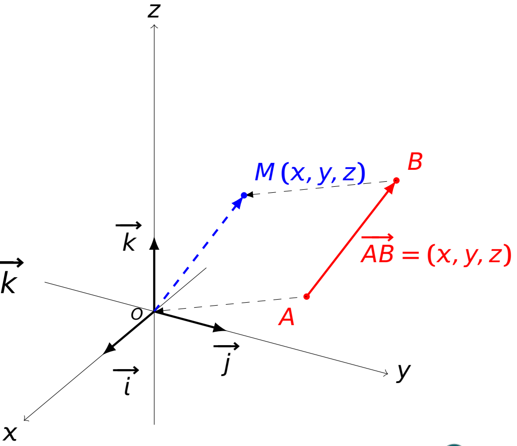
证明

- 必要性

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$$

$\Rightarrow$ 点M坐标为(x, y, z)

$?\Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$



性质 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标为 (x, y, z) 当且仅当 $\overrightarrow{AB} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$。即

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$$

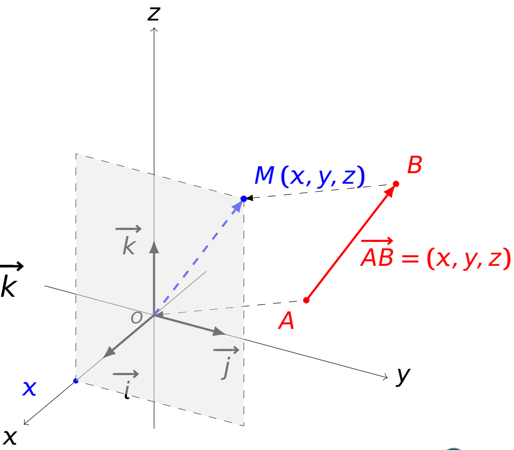
证明

- 必要性

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$$

$\Rightarrow$ 点M坐标为(x, y, z)

$?\Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$



性质 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标为 (x, y, z) 当且仅当 $\overrightarrow{AB} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$。即

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$$

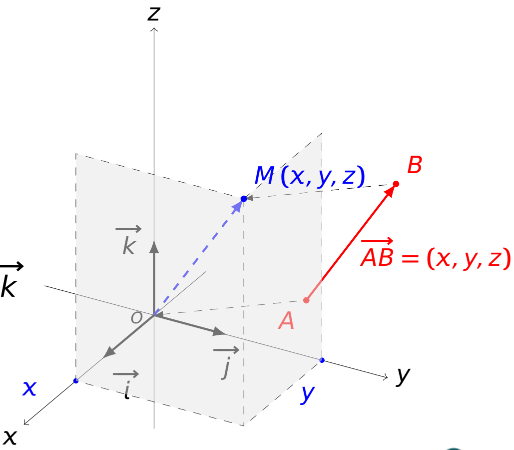
证明

- 必要性

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$$

$\Rightarrow$ 点M坐标为(x, y, z)

$?\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$



性质 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标为 (x, y, z) 当且仅当 $\overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$。即

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

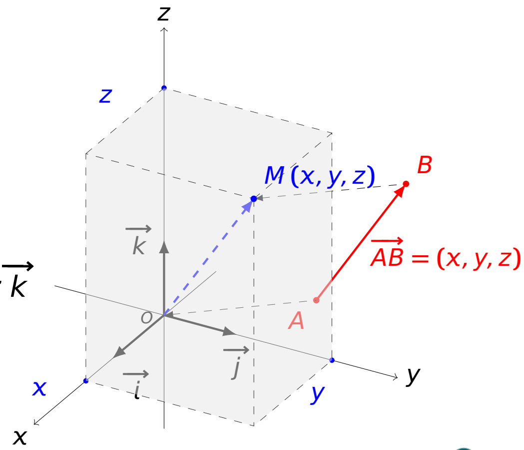
证明

- 必要性

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$$

$$\Rightarrow \quad \text{点}M\text{坐标为}(x, y, z)$$

$$?\Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$



性质 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标为 (x, y, z) 当且仅当 $\overrightarrow{AB} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$。即

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$$

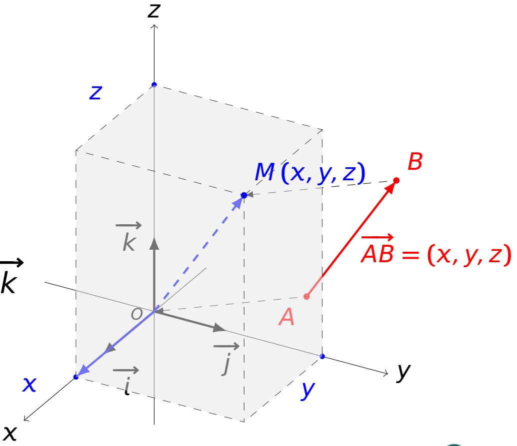
证明

- 必要性

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$$

$$\Rightarrow \quad \text{点}M\text{坐标为}(x, y, z)$$

$$?\Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$$



性质 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标为 (x, y, z) 当且仅当 $\overrightarrow{AB} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$。即

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$$

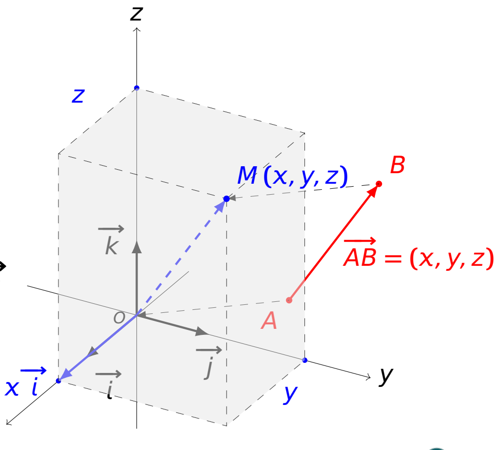
证明

- 必要性

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$$

$$\Rightarrow \quad \text{点}M\text{坐标为}(x, y, z)$$

$$?\Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$$



性质 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标为 (x, y, z) 当且仅当 $\overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$。即

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

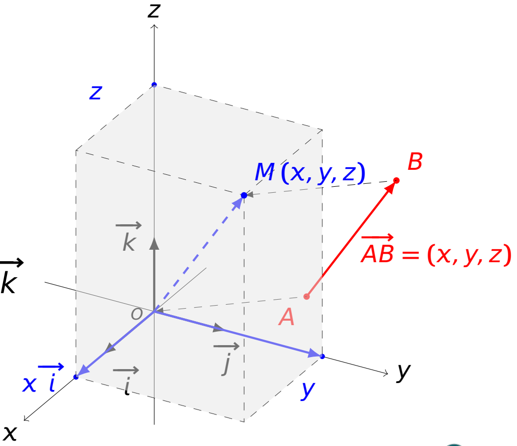
证明

- 必要性

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$$

$\Rightarrow$ 点M坐标为(x, y, z)

$?\Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$



性质 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标为 (x, y, z) 当且仅当 $\overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$。即

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

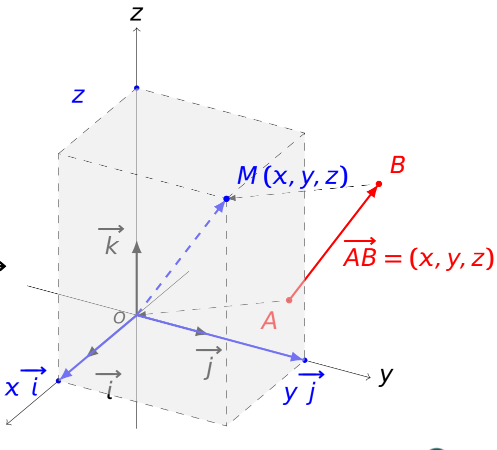
证明

- 必要性

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$$

$$\Rightarrow \quad \text{点}M\text{坐标为}(x, y, z)$$

$$?\Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$



性质 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标为 (x, y, z) 当且仅当 $\overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$。即

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

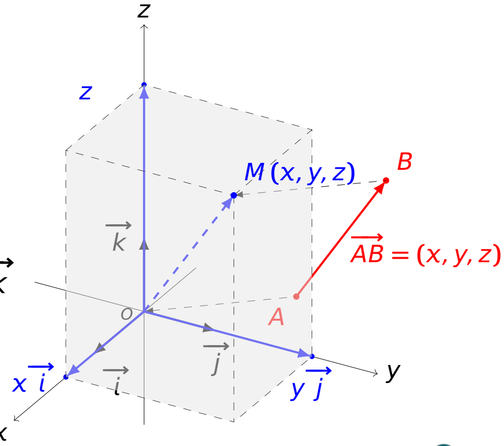
证明

- 必要性

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$$

$$\Rightarrow \quad \text{点}M\text{坐标为}(x, y, z)$$

$$?\Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$



性质 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标为 (x, y, z) 当且仅当 $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$。即

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$

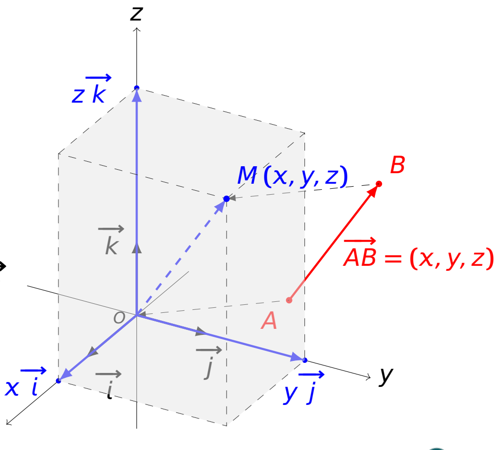
证明

- 必要性

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$$

$$\Rightarrow \quad 点M坐标为(x, y, z)$$

$$? \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$



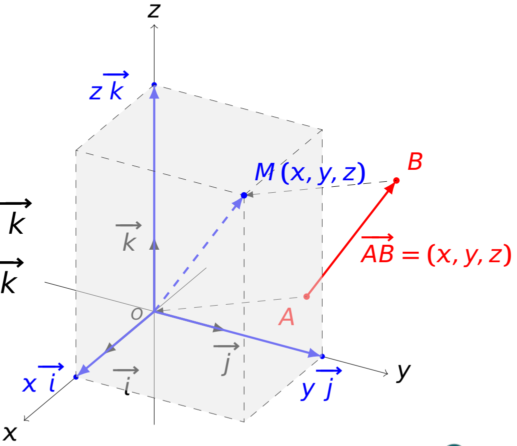
性质 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标为 (x, y, z) 当且仅当 $\overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$。即

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

证明

- 必要性

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{AB} = (x, y, z) \\ \Rightarrow \quad & \text{点}M\text{坐标为}(x, y, z) \\ \Rightarrow \quad & \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ ?\Rightarrow \quad & \overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \end{aligned}$$



性质 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标为 (x, y, z) 当且仅当 $\overrightarrow{AB} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$。即

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

证明

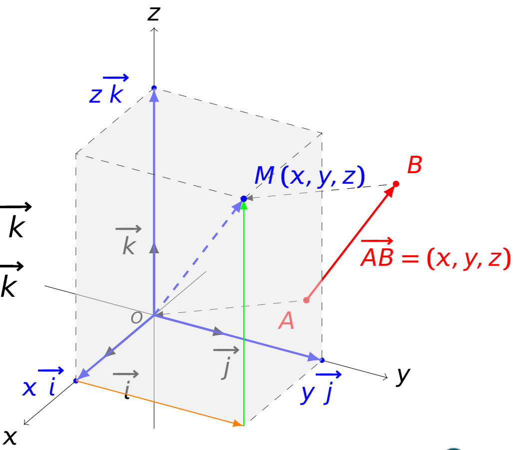
- 必要性

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$$

$\Rightarrow$ 点M坐标为(x, y, z)

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$

$?\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$



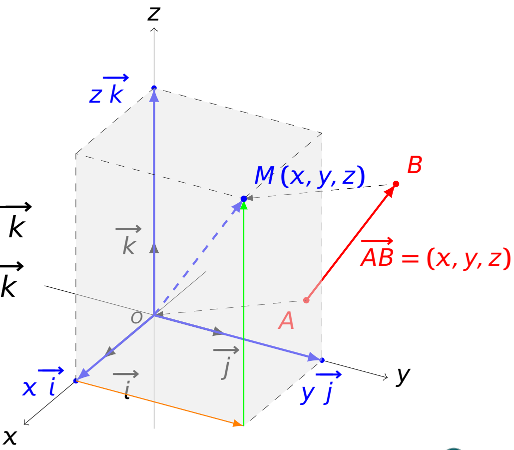
性质 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标为 (x, y, z) 当且仅当 $\overrightarrow{AB} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$。即

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

证明

- 必要性

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{AB} = (x, y, z) \\ \Rightarrow \quad & \text{点}M\text{坐标为}(x, y, z) \\ \Rightarrow \quad & \overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} \\ \Rightarrow \quad & \overrightarrow{AB} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} \end{aligned}$$



性质 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标为 (x, y, z) 当且仅当 $\overrightarrow{AB} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$。即

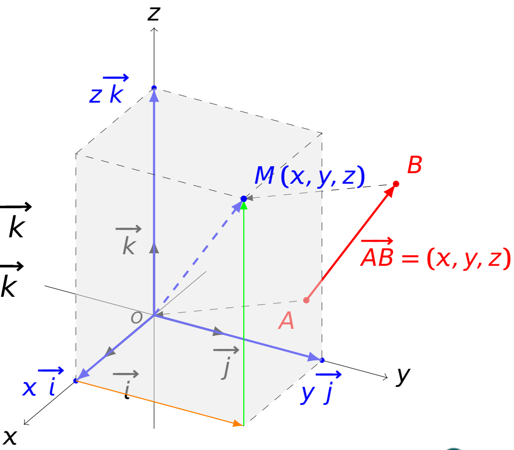
$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

证明

- 必要性

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{AB} = (x, y, z) \\ \Rightarrow\quad & \text{点}M\text{坐标为}(x, y, z) \\ \Rightarrow\quad & \overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} \\ \Rightarrow\quad & \overrightarrow{AB} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} \end{aligned}$$

- 充分性：略



性质 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标为 (x, y, z) 当且仅当 $\overrightarrow{AB} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$。即

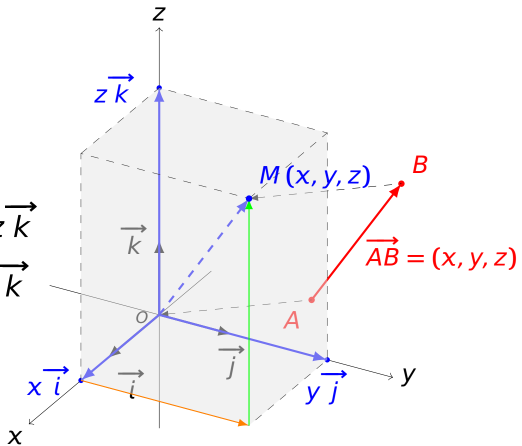
$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

注 以后直接写：$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$

证明

- 必要性

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$$
$$\Rightarrow \quad 点M坐标为(x, y, z)$$
$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$
$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$



- 充分性：略

例 设有两点 $A=(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B=(x_2, y_2, z_2)$，则

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$$

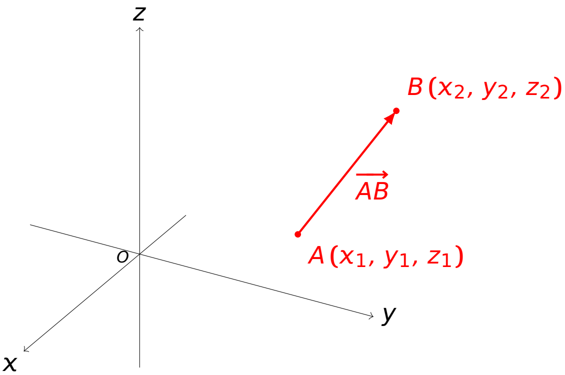
O

例 设有两点 $A=(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B=(x_2, y_2, z_2)$，则

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$$

证明 这是

$\overrightarrow{AB}=$

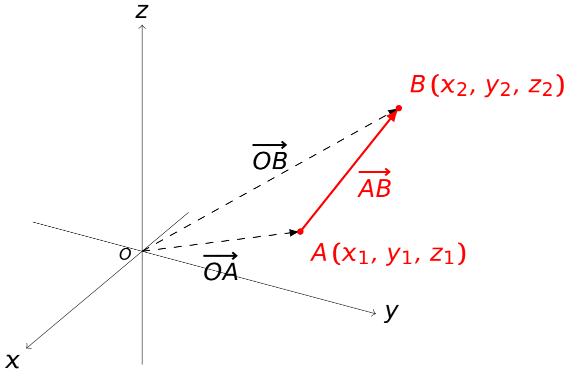


例 设有两点 $A=(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B=(x_2, y_2, z_2)$，则

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$$

证明 这是

$$\overrightarrow{AB}=$$

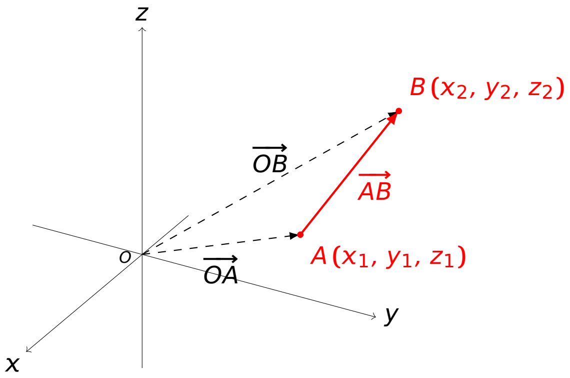


例 设有两点 $A=(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B=(x_2, y_2, z_2)$，则

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$$

证明 这是

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$

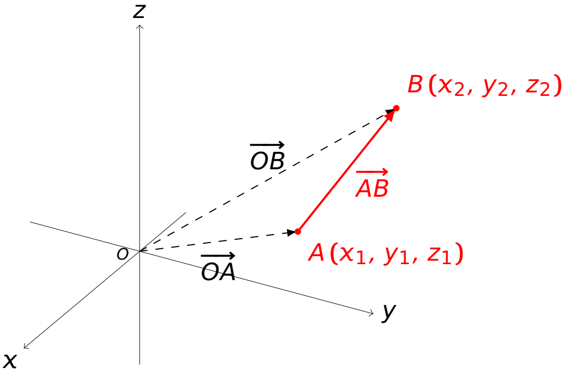


例 设有两点 $A=(x_1,y_1,z_1)$ 和 $B=(x_2,y_2,z_2)$，则

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$$

证明 这是

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\left(x_2\,\overrightarrow{i}+y_2\,\overrightarrow{j}+z_2\,\overrightarrow{k}\right)-\left(\qquad\qquad\qquad\right)$$

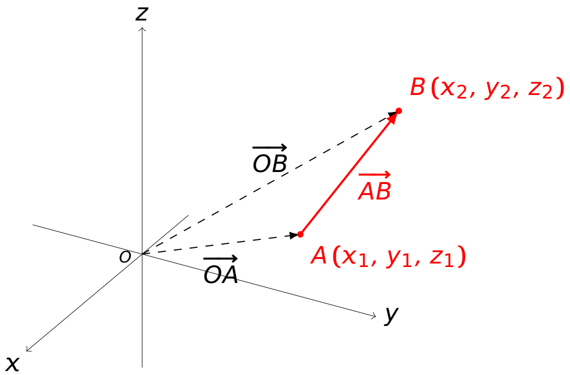


例 设有两点 $A=(x_1,y_1,z_1)$ 和 $B=(x_2,y_2,z_2)$，则

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,\,y_2-y_1,\,z_2-z_1)$$

证明 这是

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\left(x_2\,\overrightarrow{i}+y_2\,\overrightarrow{j}+z_2\,\overrightarrow{k}\right)-\left(x_1\,\overrightarrow{i}+y_1\,\overrightarrow{j}+z_1\,\overrightarrow{k}\right)$$



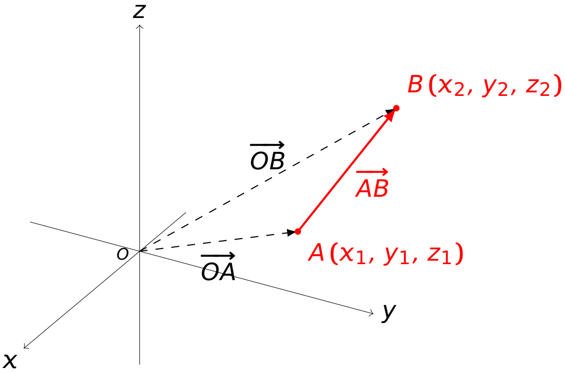
例 设有两点 $A=(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B=(x_2, y_2, z_2)$，则

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$$

证明 这是

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\left(x_2\,\vec{i}+y_2\,\vec{j}+z_2\,\vec{k}\right)-\left(x_1\,\vec{i}+y_1\,\vec{j}+z_1\,\vec{k}\right)$$

$$=(x_2-x_1)\,\vec{i}+(y_2-y_1)\,\vec{j}+(z_2-z_1)\,\vec{k}$$



利用坐标值，可以方便地计算：

- 向量的线性运算
- 向量的长度
- 向量间的夹角
- 向量的投影

利用坐标值计算向量的线性运算

性质 设向量 $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\overrightarrow{b} = (b_x, b_y, b_z)$，设 $\lambda \in \mathbb{R}$，则

$$\overrightarrow{a} \pm \overrightarrow{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$$

$$\lambda \overrightarrow{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

利用坐标值计算向量的线性运算

性质 设向量 $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\overrightarrow{b} = (b_x, b_y, b_z)$，设 $\lambda \in \mathbb{R}$，则

$$\overrightarrow{a} \pm \overrightarrow{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$$

$$\lambda \overrightarrow{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

证明 这是

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} =$$

$$\lambda \overrightarrow{a} =$$

利用坐标值计算向量的线性运算

性质 设向量 $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\overrightarrow{b} = (b_x, b_y, b_z)$，设 $\lambda \in \mathbb{R}$，则

$$\overrightarrow{a} \pm \overrightarrow{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$$

$$\lambda \overrightarrow{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

证明 这是

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = (a_x, a_y, a_z) + (b_x, b_y, b_z)$$

$$\lambda \overrightarrow{a} =$$

利用坐标值计算向量的线性运算

性质 设向量 $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\overrightarrow{b} = (b_x, b_y, b_z)$，设 $\lambda \in \mathbb{R}$，则

$$\overrightarrow{a} \pm \overrightarrow{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$$

$$\lambda \overrightarrow{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

证明 这是

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = (a_x, a_y, a_z) + (b_x, b_y, b_z)$$

$$= \left(a_x \overrightarrow{i} + a_y \overrightarrow{j} + a_z \overrightarrow{k}\right) + \left(b_x \overrightarrow{i} + b_y \overrightarrow{j} + b_z \overrightarrow{k}\right)$$

$$\lambda \overrightarrow{a} =$$

利用坐标值计算向量的线性运算

性质 设向量 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$ 和 $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$，设 $\lambda\in\mathbb{R}$，则

$$\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x,\ a_y\pm b_y,\ a_z\pm b_z)$$

$$\lambda\vec{a}=(\lambda a_x,\ \lambda a_y,\ \lambda a_z)$$

证明 这是

$$\begin{aligned}\vec{a}+\vec{b}&=(a_x,a_y,a_z)+(b_x,b_y,b_z)\\&=\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)+\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)\\&=(a_x+b_x)\vec{i}+(a_y+b_y)\vec{j}+(a_z+b_z)\vec{k}\end{aligned}$$

$$\lambda\vec{a}=$$

利用坐标值计算向量的线性运算

性质 设向量 $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\overrightarrow{b} = (b_x, b_y, b_z)$，设 $\lambda \in \mathbb{R}$，则

$$\overrightarrow{a} \pm \overrightarrow{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$$

$$\lambda \overrightarrow{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

证明 这是

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} &= (a_x, a_y, a_z) + (b_x, b_y, b_z) \\ &= \left(a_x \overrightarrow{i} + a_y \overrightarrow{j} + a_z \overrightarrow{k}\right) + \left(b_x \overrightarrow{i} + b_y \overrightarrow{j} + b_z \overrightarrow{k}\right) \\ &= (a_x + b_x) \overrightarrow{i} + (a_y + b_y) \overrightarrow{j} + (a_z + b_z) \overrightarrow{k} \\ &= (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)\end{aligned}$$

$$\lambda \overrightarrow{a} =$$

利用坐标值计算向量的线性运算

性质 设向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$，设 $\lambda \in \mathbb{R}$，则

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

证明 这是

$$\begin{aligned}
\vec{a} + \vec{b} &= (a_x, a_y, a_z) + (b_x, b_y, b_z) \\
&= \left(a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}\right) + \left(b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}\right) \\
&= (a_x + b_x) \vec{i} + (a_y + b_y) \vec{j} + (a_z + b_z) \vec{k} \\
&= (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)
\end{aligned}$$

$$\lambda \vec{a} = \lambda (a_x, a_y, a_z)$$

利用坐标值计算向量的线性运算

性质 设向量 $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\overrightarrow{b} = (b_x, b_y, b_z)$，设 $\lambda \in \mathbb{R}$，则

$$\overrightarrow{a} \pm \overrightarrow{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$$

$$\lambda \overrightarrow{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

证明 这是

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} &= (a_x, a_y, a_z) + (b_x, b_y, b_z) \\
&= \left(a_x \overrightarrow{i} + a_y \overrightarrow{j} + a_z \overrightarrow{k}\right) + \left(b_x \overrightarrow{i} + b_y \overrightarrow{j} + b_z \overrightarrow{k}\right) \\
&= (a_x + b_x) \overrightarrow{i} + (a_y + b_y) \overrightarrow{j} + (a_z + b_z) \overrightarrow{k} \\
&= (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)
\end{aligned}$$

$$\lambda \overrightarrow{a} = \lambda(a_x, a_y, a_z) = \lambda\left(a_x \overrightarrow{i} + a_y \overrightarrow{j} + a_z \overrightarrow{k}\right)$$

利用坐标值计算向量的线性运算

性质 设向量 $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\overrightarrow{b} = (b_x, b_y, b_z)$，设 $\lambda \in \mathbb{R}$，则

$$\overrightarrow{a} \pm \overrightarrow{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$$

$$\lambda \overrightarrow{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

证明 这是

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} &= (a_x, a_y, a_z) + (b_x, b_y, b_z) \\
&= \left(a_x \overrightarrow{i} + a_y \overrightarrow{j} + a_z \overrightarrow{k}\right) + \left(b_x \overrightarrow{i} + b_y \overrightarrow{j} + b_z \overrightarrow{k}\right) \\
&= (a_x + b_x) \overrightarrow{i} + (a_y + b_y) \overrightarrow{j} + (a_z + b_z) \overrightarrow{k} \\
&= (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda \overrightarrow{a} = \lambda(a_x, a_y, a_z) &= \lambda\left(a_x \overrightarrow{i} + a_y \overrightarrow{j} + a_z \overrightarrow{k}\right) \\
&= \lambda a_x \overrightarrow{i} + \lambda a_y \overrightarrow{j} + \lambda a_z \overrightarrow{k}
\end{aligned}$$

利用坐标值计算向量的线性运算

性质 设向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$，设 $\lambda \in \mathbb{R}$，则

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

证明 这是

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= (a_x, a_y, a_z) + (b_x, b_y, b_z)\\ &= \left(a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}\right) + \left(b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}\right)\\ &= (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k}\\ &= (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda \vec{a} &= \lambda(a_x, a_y, a_z) = \lambda\left(a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}\right)\\ &= \lambda a_x \vec{i} + \lambda a_y \vec{j} + \lambda a_z \vec{k} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)\end{aligned}$$

例 设向量 $\overrightarrow{a}=(7,-1,10)$, $\overrightarrow{b}=(2,1,2)$，向量 $\overrightarrow{x}$ 满足 $\overrightarrow{a}=2\overrightarrow{b}-3\overrightarrow{x}$。求 $\overrightarrow{x}$

例 设向量 $\overrightarrow{a} = (7, -1, 10)$，$\overrightarrow{b} = (2, 1, 2)$，向量 $\overrightarrow{x}$ 满足 $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{b} - 3\overrightarrow{x}$。求 $\overrightarrow{x}$

解

$$\overrightarrow{x} = \frac{1}{3}(2\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a})$$

例 设向量 $\overrightarrow{a} = (7, -1, 10)$, $\overrightarrow{b} = (2, 1, 2)$，向量 $\overrightarrow{x}$ 满足 $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{b} - 3\overrightarrow{x}$。求 $\overrightarrow{x}$

解

$$\overrightarrow{x} = \frac{1}{3}(2\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}) = \frac{1}{3}[(4, 2, 4) - (7, -1, 10)]$$

例 设向量 $\overrightarrow{a}=(7,-1,10)$, $\overrightarrow{b}=(2,1,2)$，向量 $\overrightarrow{x}$ 满足 $\overrightarrow{a}=2\overrightarrow{b}-3\overrightarrow{x}$。求 $\overrightarrow{x}$

解

$$\overrightarrow{x}=\frac{1}{3}(2\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a})=\frac{1}{3}[(4,2,4)-(7,-1,10)]$$
$$=\frac{1}{3}(-3,3,-6)$$

例 设向量 $\overrightarrow{a}=(7,-1,10)$, $\overrightarrow{b}=(2,1,2)$，向量 $\overrightarrow{x}$ 满足 $\overrightarrow{a}=2\overrightarrow{b}-3\overrightarrow{x}$。求 $\overrightarrow{x}$

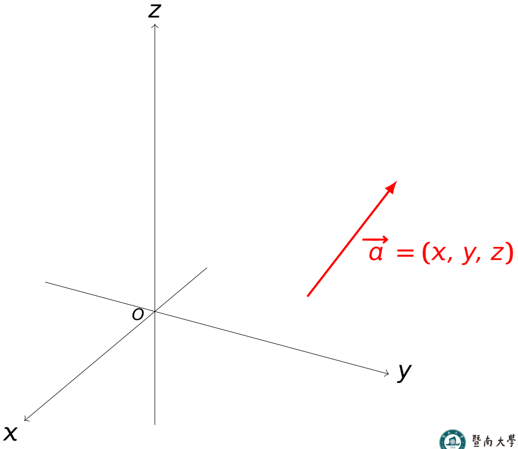
解

$$\overrightarrow{x}=\frac{1}{3}(2\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a})=\frac{1}{3}[(4,2,4)-(7,-1,10)]$$
$$=\frac{1}{3}(-3,3,-6)=(-1,1,-2)$$

利用坐标值计算向量的长度

性质 向量 $\overrightarrow{a} = (x, y, z)$ 的长度是

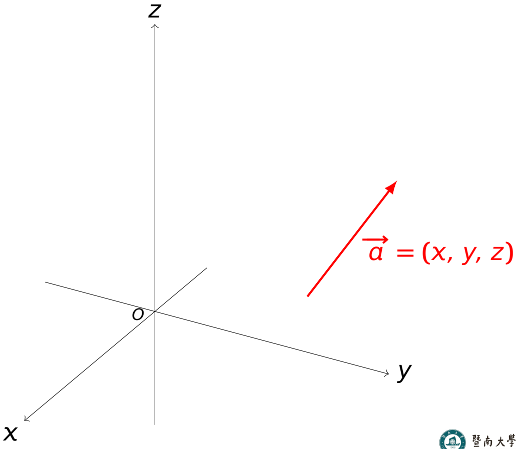
$$|\overrightarrow{a}| =$$



利用坐标值计算向量的长度

性质 向量 $\overrightarrow{a}=(x,y,z)$ 的长度是

$$|\overrightarrow{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

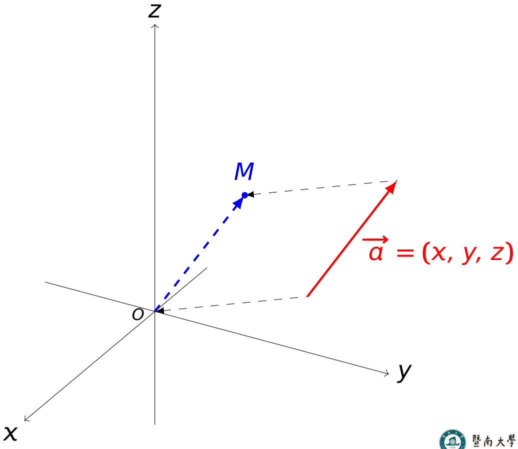


利用坐标值计算向量的长度

性质 向量 $\overrightarrow{a} = (x, y, z)$ 的长度是

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

证明 如图, 平移 $\overrightarrow{a}$ 得 $\overrightarrow{OM}$,



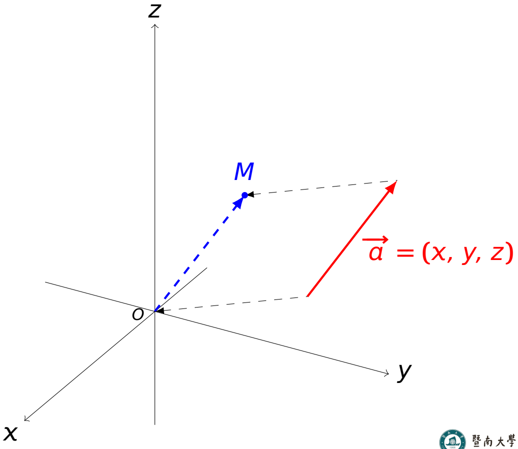
利用坐标值计算向量的长度

性质 向量 $\overrightarrow{a}=(x, y, z)$ 的长度是

$$|\overrightarrow{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

证明 如图, 平移 $\overrightarrow{a}$ 得 $\overrightarrow{OM}$, 则

$$|\overrightarrow{a}|^2=\left|\overrightarrow{OM}\right|^2$$



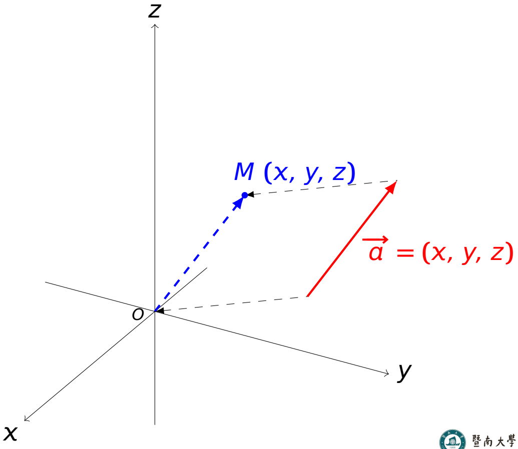
利用坐标值计算向量的长度

性质 向量 $\overrightarrow{a} = (x, y, z)$ 的长度是

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

证明 如图, 平移 $\overrightarrow{a}$ 得 $\overrightarrow{OM}$, 则

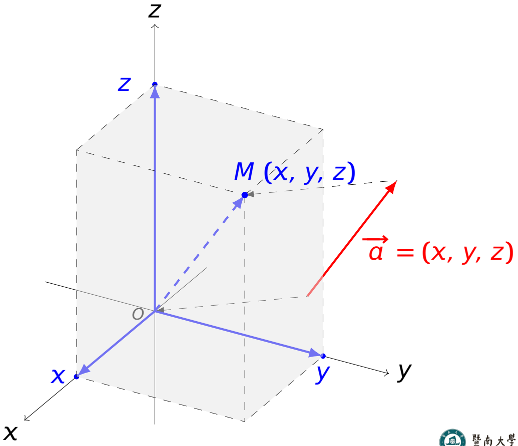
$$|\overrightarrow{a}|^2 = \left|\overrightarrow{OM}\right|^2$$



利用坐标值计算向量的长度

性质 向量 $\overrightarrow{a} = (x, y, z)$ 的长度是

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$



证明 如图, 平移 $\overrightarrow{a}$ 得 $\overrightarrow{OM}$, 则

$$|\overrightarrow{a}|^2 = \left|\overrightarrow{OM}\right|^2$$

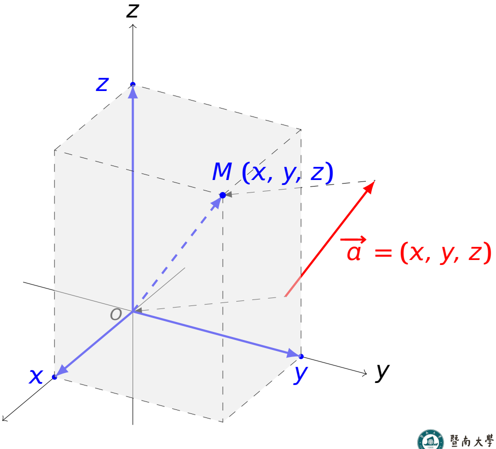
利用坐标值计算向量的长度

性质 向量 $\overrightarrow{a} = (x, y, z)$ 的长度是

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

证明 如图, 平移 $\overrightarrow{a}$ 得 $\overrightarrow{OM}$, 则

$$|\overrightarrow{a}|^2 = \left|\overrightarrow{OM}\right|^2 = x^2 + y^2 + z^2$$



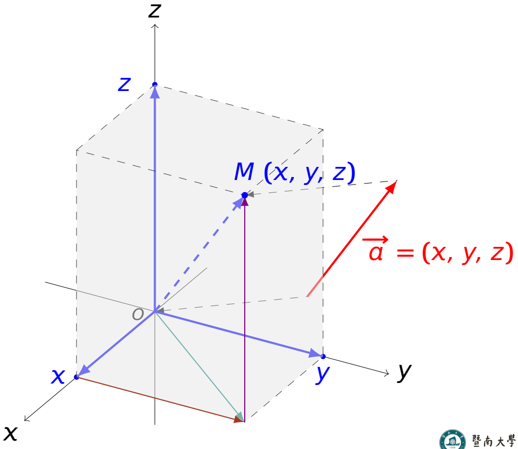
利用坐标值计算向量的长度

性质 向量 $\overrightarrow{a} = (x, y, z)$ 的长度是

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

证明 如图, 平移 $\overrightarrow{a}$ 得 $\overrightarrow{OM}$, 则

$$|\overrightarrow{a}|^2 = \left|\overrightarrow{OM}\right|^2 = x^2 + y^2 + z^2$$



性质 设点 $A\,(x_1,\,y_1,\,z_1)$ 和 $B\,(x_2,\,y_2,\,z_2)$，则

$$|\overrightarrow{AB}| =$$

性质 设点 $A\,(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B\,(x_2, y_2, z_2)$，则

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

性质 设点 $A\,(x_1,\,y_1,\,z_1)$ 和 $B\,(x_2,\,y_2,\,z_2)$，则

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

证明 这是

$$\overrightarrow{AB} =$$

性质 设点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$，则

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

证明 这是

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

性质 设点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$，则

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

证明 这是

$$\overrightarrow{AB} = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$$

$$\Rightarrow \quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

性质 设点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$，则

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

证明 这是

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\Rightarrow \quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

例 设点 $A(4, 0, 5)$ 和 $B(7, 1, 3)$，求 $|\overrightarrow{AB}|$ 及 $e_{\overrightarrow{AB}}$。

性质 设点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$，则

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

证明 这是

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\Rightarrow \quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

例 设点 $A(4, 0, 5)$ 和 $B(7, 1, 3)$，求 $|\overrightarrow{AB}|$ 及 $e_{\overrightarrow{AB}}$。

解

$$\overrightarrow{AB} =$$

$$|\overrightarrow{AB}| =$$

$$e_{\overrightarrow{AB}} =$$

性质 设点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$，则

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

证明 这是

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\Rightarrow \quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

例 设点 $A(4, 0, 5)$ 和 $B(7, 1, 3)$，求 $|\overrightarrow{AB}|$ 及 $e_{\overrightarrow{AB}}$。

解

$$\overrightarrow{AB} = (7 - 4, 1 - 0, 3 - 5)$$

$$|\overrightarrow{AB}| =$$

$$e_{\overrightarrow{AB}} =$$

性质 设点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$，则

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

证明 这是

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\Rightarrow \quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

例 设点 $A(4, 0, 5)$ 和 $B(7, 1, 3)$，求 $|\overrightarrow{AB}|$ 及 $e_{\overrightarrow{AB}}$。

解

$$\overrightarrow{AB} = (7 - 4, 1 - 0, 3 - 5) = (3, 1, -2)$$

$$|\overrightarrow{AB}| =$$

$$e_{\overrightarrow{AB}} =$$

性质 设点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$，则

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

证明 这是

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\Rightarrow \quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

例 设点 $A(4, 0, 5)$ 和 $B(7, 1, 3)$，求 $|\overrightarrow{AB}|$ 及 $e_{\overrightarrow{AB}}$。

解

$$\overrightarrow{AB} = (7 - 4, 1 - 0, 3 - 5) = (3, 1, -2)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2}$$

$$e_{\overrightarrow{AB}} =$$

性质 设点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$，则

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

证明 这是

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\Rightarrow \quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

例 设点 $A(4, 0, 5)$ 和 $B(7, 1, 3)$，求 $|\overrightarrow{AB}|$ 及 $e_{\overrightarrow{AB}}$。

解

$$\overrightarrow{AB} = (7-4, 1-0, 3-5) = (3, 1, -2)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$$

$$e_{\overrightarrow{AB}} =$$

性质 设点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$，则

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

证明 这是

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\Rightarrow \quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

例 设点 $A(4, 0, 5)$ 和 $B(7, 1, 3)$，求 $|\overrightarrow{AB}|$ 及 $e_{\overrightarrow{AB}}$。

解

$$\overrightarrow{AB} = (7-4, 1-0, 3-5) = (3, 1, -2)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$$

$$e_{\overrightarrow{AB}} = \frac{1}{|\overrightarrow{AB}|}\overrightarrow{AB}$$

性质 设点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$，则

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

证明 这是

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\Rightarrow \quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

例 设点 $A(4, 0, 5)$ 和 $B(7, 1, 3)$，求 $|\overrightarrow{AB}|$ 及 $e_{\overrightarrow{AB}}$。

解

$$\overrightarrow{AB} = (7 - 4, 1 - 0, 3 - 5) = (3, 1, -2)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$$

$$e_{\overrightarrow{AB}} = \frac{1}{|\overrightarrow{AB}|}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{\sqrt{14}}(3, 1, -2)$$

性质 设点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$，则

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

证明 这是

$$\overrightarrow{AB} = (x_2-x_1,\, y_2-y_1,\, z_2-z_1)$$

$$\Rightarrow \quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

例 设点 $A(4, 0, 5)$ 和 $B(7, 1, 3)$，求 $|\overrightarrow{AB}|$ 及 $e_{\overrightarrow{AB}}$。

解

$$\overrightarrow{AB} = (7-4,\, 1-0,\, 3-5) = (3,\, 1,\, -2)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2+1^2+(-2)^2} = \sqrt{14}$$

$$e_{\overrightarrow{AB}} = \frac{1}{|\overrightarrow{AB}|}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{\sqrt{14}}(3,\, 1,\, -2) = \left(\frac{3}{\sqrt{14}},\, \frac{1}{\sqrt{14}},\, \frac{-2}{\sqrt{14}}\right)$$

暨南大学 JINAN UNIVERSITY

利用坐标值计算向量的夹角

性质 设 θ 为向量 $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\overrightarrow{b} = (b_x, b_y, b_z)$ 的夹角，则

$$\cos\theta =$$

利用坐标值计算向量的夹角

性质 设 θ 为向量 $\overrightarrow{a}=(a_x, a_y, a_z)$ 和 $\overrightarrow{b}=(b_x, b_y, b_z)$ 的夹角，则

$$\cos\theta=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|}.$$

利用坐标值计算向量的夹角

性质 设 θ 为向量 $\overrightarrow{a}=(a_x, a_y, a_z)$ 和 $\overrightarrow{b}=(b_x, b_y, b_z)$ 的夹角，则

$$\cos\theta=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|}.$$

证明 由三角形余弦定理，成立

$$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{a}|^2+|\overrightarrow{b}|^2-|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|^2}{2|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|}$$

利用坐标值计算向量的夹角

性质 设 θ 为向量 $\overrightarrow{a}=(a_x,a_y,a_z)$ 和 $\overrightarrow{b}=(b_x,b_y,b_z)$ 的夹角，则

$$\cos\theta=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|}.$$

证明 由三角形余弦定理，成立

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{|\overrightarrow{a}|^2+|\overrightarrow{b}|^2-|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|^2}{2|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|}\\ &= \frac{\left(\qquad\qquad\right)+\left(\qquad\qquad\right)-\left[\qquad\qquad\qquad\qquad\right]}{2|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|}\end{aligned}$$

利用坐标值计算向量的夹角

性质 设 θ 为向量 $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\overrightarrow{b} = (b_x, b_y, b_z)$ 的夹角，则

$$\cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|}.$$

证明 由三角形余弦定理，成立

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{|\overrightarrow{a}|^2 + |\overrightarrow{b}|^2 - |\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|^2}{2|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|} \\ &= \frac{\left(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2\right) + \left(\qquad\qquad\right) - \left[\qquad\qquad\qquad\qquad\right]}{2|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|}\end{aligned}$$

利用坐标值计算向量的夹角

性质 设 θ 为向量 $\overrightarrow{a}=(a_x,a_y,a_z)$ 和 $\overrightarrow{b}=(b_x,b_y,b_z)$ 的夹角，则

$$\cos\theta=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|}.$$

证明 由三角形余弦定理，成立

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{|\overrightarrow{a}|^2+|\overrightarrow{b}|^2-|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|^2}{2|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|}\\ &= \frac{\left(a_x^2+a_y^2+a_z^2\right)+\left(b_x^2+b_y^2+b_z^2\right)-\left[\qquad\qquad\right]}{2|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|}\end{aligned}$$

利用坐标值计算向量的夹角

性质 设 θ 为向量 $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\overrightarrow{b} = (b_x, b_y, b_z)$ 的夹角，则

$$\cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|}.$$

证明 由三角形余弦定理，成立

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{|\overrightarrow{a}|^2 + |\overrightarrow{b}|^2 - |\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|^2}{2|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|} \\ &= \frac{\left(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2\right) + \left(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2\right) - \left[(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 + (a_z - b_z)^2\right]}{2|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|}\end{aligned}$$

利用坐标值计算向量的夹角

性质 设 θ 为向量 $\overrightarrow{a}=(a_x, a_y, a_z)$ 和 $\overrightarrow{b}=(b_x, b_y, b_z)$ 的夹角，则

$$\cos\theta=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|}.$$

证明 由三角形余弦定理，成立

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{|\overrightarrow{a}|^2+|\overrightarrow{b}|^2-|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|^2}{2|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|}\\ &= \frac{\left(a_x^2+a_y^2+a_z^2\right)+\left(b_x^2+b_y^2+b_z^2\right)-\left[(a_x-b_x)^2+(a_y-b_y)^2+(a_z-b_z)^2\right]}{2|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|}\\ &= \frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|}\end{aligned}$$

利用坐标值计算向量的夹角

性质 设 θ 为向量 $\overrightarrow{a}=(a_x, a_y, a_z)$ 和 $\overrightarrow{b}=(b_x, b_y, b_z)$ 的夹角，则

$$\cos\theta=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|}.$$

证明 由三角形余弦定理，成立

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{|\overrightarrow{a}|^2+|\overrightarrow{b}|^2-|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|^2}{2|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|}\\ &= \frac{\left(a_x^2+a_y^2+a_z^2\right)+\left(b_x^2+b_y^2+b_z^2\right)-\left[(a_x-b_x)^2+(a_y-b_y)^2+(a_z-b_z)^2\right]}{2|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|}\\ &= \frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|}\end{aligned}$$

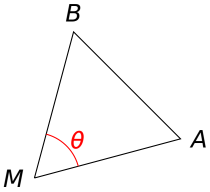
例 设有三点 $M(1, 1, 1)$, $A(2, 2, 1)$, $B(2, 1, 2)$，计算角 $\theta=\angle AMB$。

利用坐标值计算向量的夹角

性质 设 θ 为向量 $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\overrightarrow{b} = (b_x, b_y, b_z)$ 的夹角，则

$$\cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|}.$$

例 设有三点 $M(1, 1, 1)$, $A(2, 2, 1)$, $B(2, 1, 2)$，计算角 $\theta = \angle AMB$。

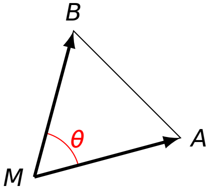


利用坐标值计算向量的夹角

性质 设 θ 为向量 $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\overrightarrow{b} = (b_x, b_y, b_z)$ 的夹角，则

$$\cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|}.$$

例 设有三点 $M(1, 1, 1)$, $A(2, 2, 1)$, $B(2, 1, 2)$，计算角 $\theta = \angle AMB$。

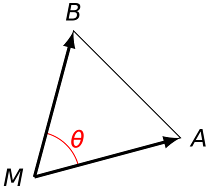


利用坐标值计算向量的夹角

性质 设 θ 为向量 $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\overrightarrow{b} = (b_x, b_y, b_z)$ 的夹角，则

$$\cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|}.$$

例 设有三点 $M(1, 1, 1)$, $A(2, 2, 1)$, $B(2, 1, 2)$，计算角 $\theta = \angle AMB$。



解

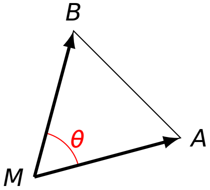
$$\overrightarrow{MA} = (\qquad\qquad), \qquad \overrightarrow{MB} = (\qquad\qquad)$$

利用坐标值计算向量的夹角

性质 设 θ 为向量 $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\overrightarrow{b} = (b_x, b_y, b_z)$ 的夹角，则

$$\cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|}.$$

例 设有三点 $M(1, 1, 1)$, $A(2, 2, 1)$, $B(2, 1, 2)$，计算角 $\theta = \angle AMB$。



解

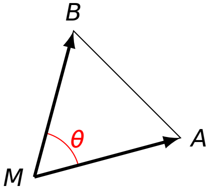
$$\overrightarrow{MA} = (1, 1, 0), \qquad \overrightarrow{MB} = (\qquad\qquad)$$

利用坐标值计算向量的夹角

性质 设 θ 为向量 $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\overrightarrow{b} = (b_x, b_y, b_z)$ 的夹角，则

$$\cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|}.$$

例 设有三点 $M(1, 1, 1)$, $A(2, 2, 1)$, $B(2, 1, 2)$，计算角 $\theta = \angle AMB$。



解

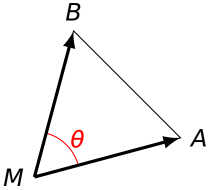
$$\overrightarrow{MA} = (1, 1, 0), \qquad \overrightarrow{MB} = (1, 0, 1)$$

利用坐标值计算向量的夹角

性质 设 θ 为向量 $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\overrightarrow{b} = (b_x, b_y, b_z)$ 的夹角，则

$$\cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|}.$$

例 设有三点 $M(1, 1, 1)$, $A(2, 2, 1)$, $B(2, 1, 2)$，计算角 $\theta = \angle AMB$。



解

$$\overrightarrow{MA} = (1, 1, 0), \qquad \overrightarrow{MB} = (1, 0, 1)$$

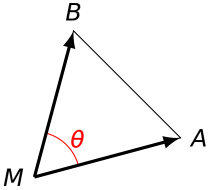
$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \underline{\hspace{10cm}}$$

利用坐标值计算向量的夹角

性质 设 θ 为向量 $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\overrightarrow{b} = (b_x, b_y, b_z)$ 的夹角，则

$$\cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|}.$$

例 设有三点 $M(1, 1, 1)$, $A(2, 2, 1)$, $B(2, 1, 2)$，计算角 $\theta = \angle AMB$。



解

$$\overrightarrow{MA} = (1, 1, 0), \qquad \overrightarrow{MB} = (1, 0, 1)$$

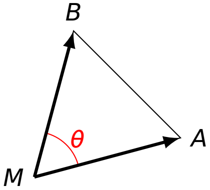
$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1}{}$$

利用坐标值计算向量的夹角

性质 设 θ 为向量 $\overrightarrow{a}=(a_x,a_y,a_z)$ 和 $\overrightarrow{b}=(b_x,b_y,b_z)$ 的夹角，则

$$\cos\theta=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|}.$$

例 设有三点 $M(1,1,1)$, $A(2,2,1)$, $B(2,1,2)$，计算角 $\theta=\angle AMB$。



解

$$\overrightarrow{MA}=(1,1,0),\qquad \overrightarrow{MB}=(1,0,1)$$

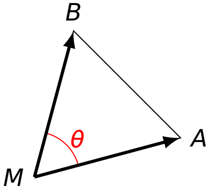
$$\Rightarrow\quad \cos\theta=\frac{1\cdot1+1\cdot0+0\cdot1}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\cdot}$$

利用坐标值计算向量的夹角

性质 设 θ 为向量 $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\overrightarrow{b} = (b_x, b_y, b_z)$ 的夹角，则

$$\cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|}.$$

例 设有三点 $M(1, 1, 1)$, $A(2, 2, 1)$, $B(2, 1, 2)$，计算角 $\theta = \angle AMB$。



解

$$\overrightarrow{MA} = (1, 1, 0), \qquad \overrightarrow{MB} = (1, 0, 1)$$

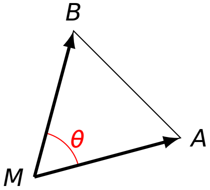
$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+1^2}}$$

利用坐标值计算向量的夹角

性质 设 θ 为向量 $\overrightarrow{a}=(a_x, a_y, a_z)$ 和 $\overrightarrow{b}=(b_x, b_y, b_z)$ 的夹角，则

$$\cos\theta=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|}.$$

例 设有三点 $M(1, 1, 1)$, $A(2, 2, 1)$, $B(2, 1, 2)$，计算角 $\theta=\angle AMB$。



解

$$\overrightarrow{MA}=(1, 1, 0), \qquad \overrightarrow{MB}=(1, 0, 1)$$

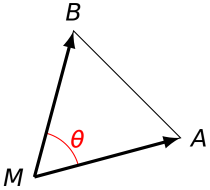
$$\Rightarrow \quad \cos\theta=\frac{1\cdot1+1\cdot0+0\cdot1}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\frac{1}{2}$$

利用坐标值计算向量的夹角

性质 设 θ 为向量 $\overrightarrow{a}=(a_x, a_y, a_z)$ 和 $\overrightarrow{b}=(b_x, b_y, b_z)$ 的夹角，则

$$\cos\theta=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|}.$$

例 设有三点 $M(1, 1, 1)$, $A(2, 2, 1)$, $B(2, 1, 2)$，计算角 $\theta=\angle AMB$。



解

$$\overrightarrow{MA}=(1, 1, 0), \qquad \overrightarrow{MB}=(1, 0, 1)$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta=\frac{1\cdot1+1\cdot0+0\cdot1}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad \theta=\frac{\pi}{3}$$

利用坐标值计算向量的投影

性质 设向量 $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\overrightarrow{b} = (b_x, b_y, b_z)$，则

$$\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a} =$$

利用坐标值计算向量的投影

性质 设向量 $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\overrightarrow{b} = (b_x, b_y, b_z)$，则

$$\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{b}}\,\overrightarrow{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\overrightarrow{b}|}.$$

利用坐标值计算向量的投影

性质 设向量 $\overrightarrow{a}=(a_x, a_y, a_z)$ 和 $\overrightarrow{b}=(b_x, b_y, b_z)$，则

$$\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{|\overrightarrow{b}|}.$$

证明 这是

$$\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a}=|\overrightarrow{a}|\cdot\cos\theta$$

利用坐标值计算向量的投影

性质 设向量 $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\overrightarrow{b} = (b_x, b_y, b_z)$，则

$$\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\overrightarrow{b}|}.$$

证明 这是

$$\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}| \cdot \cos\theta = |\overrightarrow{a}| \cdot \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|}$$

利用坐标值计算向量的投影

性质 设向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$，则

$$\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\,\vec{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{b}|}.$$

证明 这是

$$\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\,\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\theta = |\vec{a}| \cdot \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{b}|}.$$

利用坐标值计算向量的投影

性质 设向量 $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\overrightarrow{b} = (b_x, b_y, b_z)$，则

$$\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{b}}\,\overrightarrow{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\overrightarrow{b}|}.$$

证明 这是

$$\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{b}}\,\overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}| \cdot \cos\theta = |\overrightarrow{a}| \cdot \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\overrightarrow{b}|}.$$

例 设 $\overrightarrow{a} = (1, -3, 2)$，$\overrightarrow{b} = (-2, 0, 3)$，计算投影 $\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{b}}\,\overrightarrow{a}$。

利用坐标值计算向量的投影

性质 设向量 $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\overrightarrow{b} = (b_x, b_y, b_z)$，则

$$\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{b}}\,\overrightarrow{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\overrightarrow{b}|}.$$

证明 这是

$$\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{b}}\,\overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}| \cdot \cos\theta = |\overrightarrow{a}| \cdot \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\overrightarrow{b}|}.$$

例 设 $\overrightarrow{a} = (1, -3, 2)$, $\overrightarrow{b} = (-2, 0, 3)$，计算投影 $\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{b}}\,\overrightarrow{a}$。

解

$$\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{b}}\,\overrightarrow{a} = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

利用坐标值计算向量的投影

性质 设向量 $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\overrightarrow{b} = (b_x, b_y, b_z)$，则

$$\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\overrightarrow{b}|}.$$

证明 这是

$$\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}| \cdot \cos\theta = |\overrightarrow{a}| \cdot \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\overrightarrow{b}|}.$$

例 设 $\overrightarrow{a} = (1, -3, 2)$, $\overrightarrow{b} = (-2, 0, 3)$，计算投影 $\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a}$。

解

$$\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a} = \frac{1 \cdot (-2) + (-3) \cdot 0 + 2 \cdot 3}{}$$

利用坐标值计算向量的投影

性质 设向量 $\overrightarrow{a}=(a_x, a_y, a_z)$ 和 $\overrightarrow{b}=(b_x, b_y, b_z)$，则

$$\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{|\overrightarrow{b}|}.$$

证明 这是

$$\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a}=|\overrightarrow{a}|\cdot\cos\theta=|\overrightarrow{a}|\cdot\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{|\overrightarrow{b}|}.$$

例 设 $\overrightarrow{a}=(1, -3, 2)$，$\overrightarrow{b}=(-2, 0, 3)$，计算投影 $\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a}$。

解

$$\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a}=\frac{1\cdot(-2)+(-3)\cdot 0+2\cdot 3}{\sqrt{(-2)^2+0^2+3^2}}$$

利用坐标值计算向量的投影

性质 设向量 $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\overrightarrow{b} = (b_x, b_y, b_z)$，则

$$\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{b}}\,\overrightarrow{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\overrightarrow{b}|}.$$

证明 这是

$$\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{b}}\,\overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}| \cdot \cos\theta = |\overrightarrow{a}| \cdot \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\overrightarrow{b}|}.$$

例 设 $\overrightarrow{a} = (1, -3, 2)$, $\overrightarrow{b} = (-2, 0, 3)$，计算投影 $\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{b}}\,\overrightarrow{a}$。

解

$$\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{b}}\,\overrightarrow{a} = \frac{1 \cdot (-2) + (-3) \cdot 0 + 2 \cdot 3}{\sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 3^2}} = \frac{4}{\sqrt{13}}.$$

We are here now...

- ♦ 向量的基本概念
- ♣ 向量的坐标表示
- ♥ 向量的数量积
- ♠ 向量的向量积

向量的数量积

$$\cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|}$$

$$\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{b}} \overrightarrow{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\overrightarrow{b}|}$$

向量的数量积

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

$$\cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|}$$

$$\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{b}}\, \overrightarrow{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\overrightarrow{b}|}$$

向量的数量积

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

注 求夹角、投影的公式可以改写为

$$\cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|} = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|}$$

$$\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{b}}\, \overrightarrow{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\overrightarrow{b}|}$$

向量的数量积

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

注 求夹角、投影的公式可以改写为

$$\cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\text{Prj}_{\vec{b}}\, \vec{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$$

向量的数量积

定义 设向量 $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\overrightarrow{b} = (b_x, b_y, b_z)$，定义 $\overrightarrow{a}$ 和 $\overrightarrow{b}$ **数量积**为：

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

注 求夹角、投影的公式可以改写为

$$\cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|} = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|}$$

$$\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{b}} \overrightarrow{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\overrightarrow{b}|} = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|}$$

向量的数量积

定义 设向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$，定义 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ **数量积**为：

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

注 求夹角、投影的公式可以改写为

$$\cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\,\vec{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \vec{a} \cdot e_{\vec{b}}$$

向量的数量积

定义 设向量 $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\overrightarrow{b} = (b_x, b_y, b_z)$，定义 $\overrightarrow{a}$ 和 $\overrightarrow{b}$ 数量积为：

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

注 求夹角、投影的公式可以改写为

$$\cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|} = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|}$$

$$\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{b}} \overrightarrow{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\overrightarrow{b}|} = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|} = \overrightarrow{a} \cdot e_{\overrightarrow{b}}$$

性质 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \cos\theta$

向量的数量积

定义 设向量 $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\overrightarrow{b} = (b_x, b_y, b_z)$，定义 $\overrightarrow{a}$ 和 $\overrightarrow{b}$ 数量积为：

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

注 求夹角、投影的公式可以改写为

$$\cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|} = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|}$$

$$\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{b}} \overrightarrow{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\overrightarrow{b}|} = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|} = \overrightarrow{a} \cdot e_{\overrightarrow{b}}$$

性质 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \cos\theta$，特别地

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} =$$

向量的数量积

定义 设向量 $\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$ 和 $\vec{b}=(b_x, b_y, b_z)$，定义 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ **数量积**为：

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

注 求夹角、投影的公式可以改写为

$$\cos\theta=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

$$\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\,\vec{a}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{|\vec{b}|}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=\vec{a}\cdot e_{\vec{b}}$$

性质 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta$，特别地

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$$

向量的数量积

定义 设向量 $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\overrightarrow{b} = (b_x, b_y, b_z)$，定义 $\overrightarrow{a}$ 和 $\overrightarrow{b}$ 数量积为：

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

注 求夹角、投影的公式可以改写为

$$\cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|} = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|}$$

$$\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{b}} \overrightarrow{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\overrightarrow{b}|} = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|} = \overrightarrow{a} \cdot e_{\overrightarrow{b}}$$

性质 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \cos\theta$，特别地

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}|^2 \qquad \overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b} \iff \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$$

向量的数量积

定义 设向量 $\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$ 和 $\vec{b}=(b_x, b_y, b_z)$，定义 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 数量积为：

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z.$$

注 求夹角、投影的公式可以改写为

$$\cos\theta=\frac{a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

$$\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z}{|\vec{b}|}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=\vec{a}\cdot e_{\vec{b}}$$

性质 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta$，特别地

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2,\qquad \vec{a}\perp\vec{b}\quad\Leftrightarrow\quad\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

例 设空间中三个点 $C(1, -1, 2)$，$A(3, 3, 1)$，$B(3, 1, 3)$。令 $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{CA}$，$\vec{b} = \overrightarrow{CB}$，$\theta = \angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$。求 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$，$\theta$，$\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{b}} \overrightarrow{a}$。

例 设空间中三个点 $C(1, -1, 2)$，$A(3, 3, 1)$，$B(3, 1, 3)$。令 $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{CA}$，$\vec{b} = \overrightarrow{CB}$，$\theta = \angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$。求 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$，$\theta$，$\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{b}} \overrightarrow{a}$。

解 1. $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{CA} = (2, 4, -1)$，$\overrightarrow{b} = \overrightarrow{CB} = (2, 2, 1)$

例 设空间中三个点 $C(1, -1, 2)$，$A(3, 3, 1)$，$B(3, 1, 3)$。令 $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{CA}$，$\vec{b} = \overrightarrow{CB}$，$\theta = \angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$。求 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$，$\theta$，$\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{b}} \overrightarrow{a}$。

解 1. $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{CA} = (2, 4, -1)$，$\overrightarrow{b} = \overrightarrow{CB} = (2, 2, 1)$

2. $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} =$

3. $\cos\theta =$

4. $\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{b}} \overrightarrow{a} =$

例 设空间中三个点 $C(1,-1,2)$，$A(3,3,1)$，$B(3,1,3)$。令 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{CA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{CB}$，$\theta=\angle(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})$。求 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$，$\theta$，$\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a}$。

解 1. $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{CA}=(2,4,-1)$，$\overrightarrow{b}=\overrightarrow{CB}=(2,2,1)$

2. $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=2\cdot2+4\cdot2+(-1)\cdot1=11$

3. $\cos\theta=$

4. $\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a}=$

例 设空间中三个点 $C(1, -1, 2)$，$A(3, 3, 1)$，$B(3, 1, 3)$。令 $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$，$\vec{b} = \overrightarrow{CB}$，$\theta = \angle(\vec{a}, \vec{b})$。求 $\vec{a} \cdot \vec{b}$，θ，$\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\vec{a}$。

解 1. $\vec{a} = \overrightarrow{CA} = (2, 4, -1)$，$\vec{b} = \overrightarrow{CB} = (2, 2, 1)$

2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 = 11$

3. $\cos\theta = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

4. $\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\vec{a} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$

例 设空间中三个点 $C(1,-1,2)$，$A(3,3,1)$，$B(3,1,3)$。令 $\vec{a}=\overrightarrow{CA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{CB}$，$\theta=\angle(\vec{a},\vec{b})$。求 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，θ，$\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\,\vec{a}$。

解 1. $\vec{a}=\overrightarrow{CA}=(2,4,-1)$， $\vec{b}=\overrightarrow{CB}=(2,2,1)$

2. $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot 2+4\cdot 2+(-1)\cdot 1=11$

3. $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{11}{3\sqrt{21}}$

4. $\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\,\vec{a}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

例 设空间中三个点 $C(1,-1,2)$，$A(3,3,1)$，$B(3,1,3)$。令 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{CA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{CB}$，$\theta=\angle(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})$。求 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$，$\theta$，$\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a}$。

解 1. $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{CA}=(2,4,-1)$，$\overrightarrow{b}=\overrightarrow{CB}=(2,2,1)$

2. $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=2\cdot 2+4\cdot 2+(-1)\cdot 1=11$

3. $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|}=\dfrac{11}{3\sqrt{21}}$

4. $\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a}=\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|}=\dfrac{11}{3}$

例 设空间中三个点 $C(1,-1,2)$，$A(3,3,1)$，$B(3,1,3)$。令 $\vec{a}=\overrightarrow{CA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{CB}$，$\theta=\angle(\vec{a},\vec{b})$。求 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，θ，$\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\,\vec{a}$。

解 1. $\vec{a}=\overrightarrow{CA}=(2,4,-1)$，$\vec{b}=\overrightarrow{CB}=(2,2,1)$

2. $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot 2+4\cdot 2+(-1)\cdot 1=11$

3. $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{11}{3\sqrt{21}}$，所以 $\theta=\arccos\dfrac{11}{3\sqrt{21}}\approx 36.9^\circ$

4. $\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\,\vec{a}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=\dfrac{11}{3}$

数量积的运算律

交换律 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}$

分配律 $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c}$

结合律 $(\lambda \overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \cdot (\lambda \overrightarrow{b}) = \lambda(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})$

数量积的运算律

交换律 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}$

分配律 $(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}+\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}$

结合律 $(\lambda\overrightarrow{a})\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a}\cdot(\lambda\overrightarrow{b})=\lambda(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})$

证明 设 $\overrightarrow{a}=(a_x, a_y, a_z)$, $\overrightarrow{b}=(b_x, b_y, b_z)$, $\overrightarrow{c}=(c_x, c_y, c_z)$，则

数量积的运算律

交换律 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

分配律 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

结合律 $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$

证明 设 $\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b}=(b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c}=(c_x, c_y, c_z)$，则

$\vec{a}\cdot\vec{b}$ $\vec{b}\cdot\vec{a}$

数量积的运算律

交换律 $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

分配律 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

结合律 $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$

证明 设 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$，则

$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$ $\vec{b}\cdot\vec{a}$

数量积的运算律

交换律 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

分配律 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

结合律 $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$

证明 设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, $\vec{c}=(c_x,c_y,c_z)$，则

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z \quad b_xa_x+b_ya_y+b_za_z=\vec{b}\cdot\vec{a}$$

数量积的运算律

交换律 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}$

分配律 $(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}+\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}$

结合律 $(\lambda\overrightarrow{a})\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a}\cdot(\lambda\overrightarrow{b})=\lambda(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})$

证明 设 $\overrightarrow{a}=(a_x, a_y, a_z)$, $\overrightarrow{b}=(b_x, b_y, b_z)$, $\overrightarrow{c}=(c_x, c_y, c_z)$，则

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=b_xa_x+b_ya_y+b_za_z=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}$$

数量积的运算律

交换律 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

分配律 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

结合律 $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$

证明 设 $\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b}=(b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c}=(c_x, c_y, c_z)$，则

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=b_xa_x+b_ya_y+b_za_z=\vec{b}\cdot\vec{a}$$

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}$

$$\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$$

数量积的运算律

交换律 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

分配律 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

结合律 $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$

证明 设 $\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b}=(b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c}=(c_x, c_y, c_z)$，则

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=b_xa_x+b_ya_y+b_za_z=\vec{b}\cdot\vec{a}$$

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}$

$$a_xc_x+a_yc_y+a_zc_z+b_xc_x+b_yc_y+b_zc_z$$

$$=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$$

数量积的运算律

交换律 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

分配律 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

结合律 $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$

证明 设 $\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b}=(b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c}=(c_x, c_y, c_z)$，则

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=b_xa_x+b_ya_y+b_za_z=\vec{b}\cdot\vec{a}$$

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=(a_x+b_x, a_y+b_y, a_z+b_z)\cdot(c_x, c_y, c_z)$$

$$a_xc_x+a_yc_y+a_zc_z+b_xc_x+b_yc_y+b_zc_z$$

$$=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$$

数量积的运算律

交换律 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

分配律 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

结合律 $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$

证明 设 $\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b}=(b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c}=(c_x, c_y, c_z)$，则

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=b_xa_x+b_ya_y+b_za_z=\vec{b}\cdot\vec{a}$$

$$\begin{aligned}(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}&=(a_x+b_x, a_y+b_y, a_z+b_z)\cdot(c_x, c_y, c_z)\\&=(a_x+b_x)c_x+(a_y+b_y)c_y+(a_z+b_z)c_z\\&\quad a_xc_x+a_yc_y+a_zc_z+b_xc_x+b_yc_y+b_zc_z\\&=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}\end{aligned}$$

数量积的运算律

交换律 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

分配律 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

结合律 $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$

证明 设 $\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b}=(b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c}=(c_x, c_y, c_z)$，则

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=b_xa_x+b_ya_y+b_za_z=\vec{b}\cdot\vec{a}$$

$$\begin{aligned}(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}&=(a_x+b_x, a_y+b_y, a_z+b_z)\cdot(c_x, c_y, c_z)\\&=(a_x+b_x)c_x+(a_y+b_y)c_y+(a_z+b_z)c_z\\&=a_xc_x+a_yc_y+a_zc_z+b_xc_x+b_yc_y+b_zc_z\\&=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}\end{aligned}$$

例 已知 $|\overrightarrow{a}|=2$，$|\overrightarrow{b}|=4$，若 $\overrightarrow{a}+\lambda\overrightarrow{b}$ 与 $\overrightarrow{a}-\lambda\overrightarrow{b}$ 互相垂直，则 $\lambda=$ ________。

例 已知 $|\overrightarrow{a}|=2$，$|\overrightarrow{b}|=4$，若 $\overrightarrow{a}+\lambda\overrightarrow{b}$ 与 $\overrightarrow{a}-\lambda\overrightarrow{b}$ 互相垂直，则 $\lambda=$ ________。

解

$$0=(\overrightarrow{a}+\lambda\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{a}-\lambda\overrightarrow{b})$$

例 已知 $|\overrightarrow{a}| = 2$，$|\overrightarrow{b}| = 4$，若 $\overrightarrow{a} + \lambda\overrightarrow{b}$ 与 $\overrightarrow{a} - \lambda\overrightarrow{b}$ 互相垂直，则 $\lambda =$ ________。

解

$$
\begin{aligned}
0 &= (\overrightarrow{a} + \lambda\overrightarrow{b}) \cdot (\overrightarrow{a} - \lambda\overrightarrow{b}) \\
&= \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} + \overrightarrow{a} \cdot (-\lambda\overrightarrow{b}) + (\lambda\overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{a} + (\lambda\overrightarrow{b}) \cdot (-\lambda\overrightarrow{b})
\end{aligned}
$$

例 已知 $|\overrightarrow{a}|=2$，$|\overrightarrow{b}|=4$，若 $\overrightarrow{a}+\lambda\overrightarrow{b}$ 与 $\overrightarrow{a}-\lambda\overrightarrow{b}$ 互相垂直，则 $\lambda=$ ________。

解

$$
\begin{aligned}
0 &= (\overrightarrow{a}+\lambda\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{a}-\lambda\overrightarrow{b}) \\
&= \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}+\overrightarrow{a}\cdot(-\lambda\overrightarrow{b})+(\lambda\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{a}+(\lambda\overrightarrow{b})\cdot(-\lambda\overrightarrow{b}) \\
&= \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}-\lambda\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\lambda\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}-\lambda^2\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{b}
\end{aligned}
$$

例 已知 $|\overrightarrow{a}|=2$，$|\overrightarrow{b}|=4$，若 $\overrightarrow{a}+\lambda\overrightarrow{b}$ 与 $\overrightarrow{a}-\lambda\overrightarrow{b}$ 互相垂直，则 $\lambda=$ ________。

解

$$
\begin{aligned}
0 &= (\overrightarrow{a}+\lambda\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{a}-\lambda\overrightarrow{b}) \\
&= \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}+\overrightarrow{a}\cdot(-\lambda\overrightarrow{b})+(\lambda\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{a}+(\lambda\overrightarrow{b})\cdot(-\lambda\overrightarrow{b}) \\
&= \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}-\lambda\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\lambda\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}-\lambda^2\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{b} \\
&= |\overrightarrow{a}|^2-\lambda^2|\overrightarrow{b}|^2
\end{aligned}
$$

例 已知 $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=4$，若 $\vec{a}+\lambda\vec{b}$ 与 $\vec{a}-\lambda\vec{b}$ 互相垂直，则 $\lambda=$ ________。

解

$$
\begin{aligned}
0 &= (\vec{a}+\lambda\vec{b})\cdot(\vec{a}-\lambda\vec{b}) \\
&= \vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot(-\lambda\vec{b})+(\lambda\vec{b})\cdot\vec{a}+(\lambda\vec{b})\cdot(-\lambda\vec{b}) \\
&= \vec{a}\cdot\vec{a}-\lambda\vec{a}\cdot\vec{b}+\lambda\vec{b}\cdot\vec{a}-\lambda^2\vec{b}\cdot\vec{b} \\
&= |\vec{a}|^2-\lambda^2|\vec{b}|^2
\end{aligned}
$$

所以

$$
\lambda^2=\frac{|\vec{a}|^2}{|\vec{b}|^2}
$$

例 已知 $|\vec{a}| = 2$，$|\vec{b}| = 4$，若 $\vec{a} + \lambda\vec{b}$ 与 $\vec{a} - \lambda\vec{b}$ 互相垂直，则 $\lambda =$ ________。

解

$$
\begin{aligned}
0 &= (\vec{a} + \lambda\vec{b})\cdot(\vec{a} - \lambda\vec{b}) \\
&= \vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot(-\lambda\vec{b}) + (\lambda\vec{b})\cdot\vec{a} + (\lambda\vec{b})\cdot(-\lambda\vec{b}) \\
&= \vec{a}\cdot\vec{a} - \lambda\vec{a}\cdot\vec{b} + \lambda\vec{b}\cdot\vec{a} - \lambda^2\vec{b}\cdot\vec{b} \\
&= |\vec{a}|^2 - \lambda^2|\vec{b}|^2
\end{aligned}
$$

所以

$$
\lambda^2 = \frac{|\vec{a}|^2}{|\vec{b}|^2} = \frac{2^2}{4^2} = \frac{1}{4}
$$

例 已知 $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=4$，若 $\vec{a}+\lambda\vec{b}$ 与 $\vec{a}-\lambda\vec{b}$ 互相垂直，则 $\lambda=$ ________。

解

$$
\begin{aligned}
0 &= (\vec{a}+\lambda\vec{b})\cdot(\vec{a}-\lambda\vec{b}) \\
&= \vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot(-\lambda\vec{b})+(\lambda\vec{b})\cdot\vec{a}+(\lambda\vec{b})\cdot(-\lambda\vec{b}) \\
&= \vec{a}\cdot\vec{a}-\lambda\vec{a}\cdot\vec{b}+\lambda\vec{b}\cdot\vec{a}-\lambda^2\vec{b}\cdot\vec{b} \\
&= |\vec{a}|^2-\lambda^2|\vec{b}|^2
\end{aligned}
$$

所以

$$\lambda^2=\frac{|\vec{a}|^2}{|\vec{b}|^2}=\frac{2^2}{4^2}=\frac{1}{4} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda=\pm\frac{1}{2}.$$

方向角

定义 向量 $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 的三个方向角：

α:

β:

γ:

方向角

定义 向量 $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 的三个方向角：

α: $\overrightarrow{a}$ 与 x 轴正向的夹角，

β:

γ:

方向角

定义 向量 $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 的三个方向角：

α: $\overrightarrow{a}$ 与 x 轴正向的夹角，

β: $\overrightarrow{a}$ 与 y 轴正向的夹角，

γ:

方向角

定义 向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 的三个方向角：

α: $\vec{a}$ 与 x 轴正向的夹角，

β: $\vec{a}$ 与 y 轴正向的夹角，

γ: $\vec{a}$ 与 z 轴正向的夹角，

方向角

定义 向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 的三个方向角：

α:　$\vec{a}$ 与 x 轴正向的夹角，即 $\alpha = \angle(\vec{a}, \vec{i})$

β:　$\vec{a}$ 与 y 轴正向的夹角，即 $\beta = \angle(\vec{a}, \vec{j})$

γ:　$\vec{a}$ 与 z 轴正向的夹角，即 $\gamma = \angle(\vec{a}, \vec{k})$

方向角

定义 向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 的三个方向角：

α: $\vec{a}$ 与 x 轴正向的夹角，即 $\alpha = \angle(\vec{a}, \vec{i})$

β: $\vec{a}$ 与 y 轴正向的夹角，即 $\beta = \angle(\vec{a}, \vec{j})$

γ: $\vec{a}$ 与 z 轴正向的夹角，即 $\gamma = \angle(\vec{a}, \vec{k})$

方向角的计算

$\cos\alpha =$

$\cos\beta =$

$\cos\gamma =$

方向角

定义 向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 的三个方向角：

α: $\vec{a}$ 与 x 轴正向的夹角，即 $\alpha = \angle(\vec{a}, \vec{i})$

β: $\vec{a}$ 与 y 轴正向的夹角，即 $\beta = \angle(\vec{a}, \vec{j})$

γ: $\vec{a}$ 与 z 轴正向的夹角，即 $\gamma = \angle(\vec{a}, \vec{k})$

方向角的计算

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{i}|} \qquad \cos\beta =$$

$$\cos\gamma =$$

方向角

定义 向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 的三个方向角：

α: $\vec{a}$ 与 x 轴正向的夹角，即 $\alpha = \angle(\vec{a}, \vec{i})$

β: $\vec{a}$ 与 y 轴正向的夹角，即 $\beta = \angle(\vec{a}, \vec{j})$

γ: $\vec{a}$ 与 z 轴正向的夹角，即 $\gamma = \angle(\vec{a}, \vec{k})$

方向角的计算

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{i}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{i}|} \qquad \cos\beta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{j}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{j}|}$$

$$\cos\gamma =$$

方向角

定义 向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 的三个方向角：

α: $\vec{a}$ 与 x 轴正向的夹角，即 $\alpha = \angle(\vec{a}, \vec{i})$

β: $\vec{a}$ 与 y 轴正向的夹角，即 $\beta = \angle(\vec{a}, \vec{j})$

γ: $\vec{a}$ 与 z 轴正向的夹角，即 $\gamma = \angle(\vec{a}, \vec{k})$

方向角的计算

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{i}|} \qquad \cos\beta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{j}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{j}|}$$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{k}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{k}|}$$

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

方向角

定义 向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 的三个方向角：

α: $\vec{a}$ 与 x 轴正向的夹角，即 $\alpha = \angle(\vec{a}, \vec{i})$

β: $\vec{a}$ 与 y 轴正向的夹角，即 $\beta = \angle(\vec{a}, \vec{j})$

γ: $\vec{a}$ 与 z 轴正向的夹角，即 $\gamma = \angle(\vec{a}, \vec{k})$

方向角的计算

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{i}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{i}|} = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \qquad \cos\beta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{j}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{j}|}$$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{a}\cdot\vec{k}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{k}|}$$

方向角

定义 向量 $\overrightarrow{a}=(a_x, a_y, a_z)$ 的三个方向角：

α: $\overrightarrow{a}$ 与 x 轴正向的夹角，即 $\alpha=\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{i})$

β: $\overrightarrow{a}$ 与 y 轴正向的夹角，即 $\beta=\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{j})$

γ: $\overrightarrow{a}$ 与 z 轴正向的夹角，即 $\gamma=\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{k})$

方向角的计算

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{i}}{|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{i}|}=\frac{a_x}{|\overrightarrow{a}|},\qquad \cos\beta=\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{j}}{|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{j}|}=\frac{a_y}{|\overrightarrow{a}|},$$

$$\cos\gamma=\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{k}}{|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{k}|}$$

方向角

定义 向量 $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 的三个方向角：

α: $\overrightarrow{a}$ 与 x 轴正向的夹角，即 $\alpha = \angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{i})$

β: $\overrightarrow{a}$ 与 y 轴正向的夹角，即 $\beta = \angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{j})$

γ: $\overrightarrow{a}$ 与 z 轴正向的夹角，即 $\gamma = \angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{k})$

方向角的计算

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{i}}{|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{i}|} = \frac{a_x}{|\overrightarrow{a}|}, \qquad \cos\beta = \frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{j}}{|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{j}|} = \frac{a_y}{|\overrightarrow{a}|},$$

$$\cos\gamma = \frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{k}}{|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{k}|} = \frac{a_z}{|\overrightarrow{a}|}.$$

方向角

定义 向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 的三个方向角：

α: $\vec{a}$ 与 x 轴正向的夹角，即 $\alpha = \angle(\vec{a}, \vec{i})$

β: $\vec{a}$ 与 y 轴正向的夹角，即 $\beta = \angle(\vec{a}, \vec{j})$

γ: $\vec{a}$ 与 z 轴正向的夹角，即 $\gamma = \angle(\vec{a}, \vec{k})$

方向角的计算

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{i}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{i}|} = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \qquad \cos\beta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{j}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{j}|} = \frac{a_y}{|\vec{a}|},$$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{a}\cdot\vec{k}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{k}|} = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

可见

$$e_{\vec{a}} = \frac{1}{|\vec{a}|}(a_x, a_y, a_z)$$

方向角

定义 向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 的三个方向角：

α: $\vec{a}$ 与 x 轴正向的夹角，即 $\alpha = \angle(\vec{a}, \vec{i})$

β: $\vec{a}$ 与 y 轴正向的夹角，即 $\beta = \angle(\vec{a}, \vec{j})$

γ: $\vec{a}$ 与 z 轴正向的夹角，即 $\gamma = \angle(\vec{a}, \vec{k})$

方向角的计算

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{i}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{i}|} = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \qquad \cos\beta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{j}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{j}|} = \frac{a_y}{|\vec{a}|},$$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{a}\cdot\vec{k}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{k}|} = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

可见

$$e_{\vec{a}} = \frac{1}{|\vec{a}|}(a_x, a_y, a_z) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

We are here now...

- ♦ 向量的基本概念
- ♣ 向量的坐标表示
- ♥ 向量的数量积
- ♠ 向量的向量积

二阶行列式

- 定义 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$ ，称为 二阶行列式

二阶行列式

- 定义 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，称为 二阶行列式

二阶行列式

- 定义 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，称为 二阶行列式
- 例 $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$

二阶行列式

- 定义 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，称为 二阶行列式
- 例 $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 1 - 2\cdot 3$

二阶行列式

- 定义 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，称为 二阶行列式
- 例 $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 1 - 2\cdot 3 = -7$

二阶行列式

- 定义 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，称为 二阶行列式
- 例 $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 1 - 2\cdot 3 = -7$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

二阶行列式

- 定义 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，称为 二阶行列式
- 例 $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 1 - 2\cdot 3 = -7$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

二阶行列式

- 定义 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，称为 二阶行列式
- 例 $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 1 - 2\cdot 3 = -7$，$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$
- 反称性 $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}$

二阶行列式

- 定义 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，称为 二阶行列式
- 例 $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 1 - 2\cdot 3 = -7$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$
- 反称性 $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}$

二阶行列式

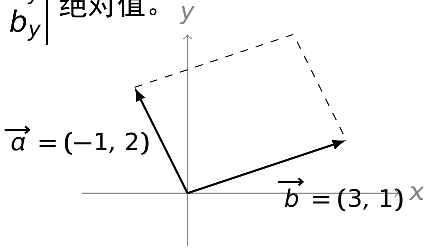
- 定义 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，称为 二阶行列式
- 例 $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 1 - 2\cdot 3 = -7$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$
- 反称性 $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

二阶行列式

- 定义 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，称为 二阶行列式
- 例 $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 1 - 2 \cdot 3 = -7$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$
- 反称性 $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$
- 几何意义 平面向量 $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y)$, $\overrightarrow{b} = (b_x, b_y)$ 所张成平行四边形面积为的 $\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$ 绝对值。

二阶行列式

- **定义** $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，称为 二阶行列式
- **例** $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 1 - 2\cdot 3 = -7$， $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$
- **反称性** $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$
- **几何意义** 平面向量 $\vec{a} = (a_x, a_y)$, $\vec{b} = (b_x, b_y)$ 所张成平行四边形面积为的 $\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$ 绝对值。



三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \qquad\qquad - a_{12} \qquad\qquad + a_{13}$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix}$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} \qquad\qquad & \\ & \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} \qquad\qquad & \\ & \end{vmatrix}$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix}$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} \quad \end{vmatrix}$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\left| \qquad \right|$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix}$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix}$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix}$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix}$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix}$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix}$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix}$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}
$$

例 计算 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$$
\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix}
$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$$= 4\cdot \qquad - 3\cdot \quad + 2\cdot$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix}$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$$= 4\cdot(-5) - 3\cdot \quad + 2\cdot$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix}$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$$= 4\cdot(-5) - 3\cdot 5 + 2\cdot$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix}$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$$= 4\cdot(-5) - 3\cdot 5 + 2\cdot 5$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix}$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$$= 4\cdot(-5) - 3\cdot 5 + 2\cdot 5 = -25$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix}$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$$= 4\cdot(-5) - 3\cdot 5 + 2\cdot 5 = -25$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix}$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$$= 4\cdot(-5) - 3\cdot 5 + 2\cdot 5 = -25$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -9 & 16 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix}$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$$= 4\cdot(-5) - 3\cdot 5 + 2\cdot 5 = -25$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -9 & 16 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$$= 4\cdot(-5) - 3\cdot 5 + 2\cdot 5 = -25$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -9 & 16 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -9 \end{vmatrix}$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$$= 4\cdot(-5) - 3\cdot 5 + 2\cdot 5 = -25$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -9 & 16 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -9 \end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot \qquad + 1\cdot \qquad + 1\cdot$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$$= 4\cdot(-5) - 3\cdot 5 + 2\cdot 5 = -25$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -9 & 16 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -9 \end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot(-12) + 1\cdot \quad + 1\cdot$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 4\cdot(-5) - 3\cdot 5 + 2\cdot 5 = -25$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -9 & 16 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -9 \end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot(-12) + 1\cdot 16 + 1\cdot$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$$= 4\cdot(-5) - 3\cdot 5 + 2\cdot 5 = -25$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -9 & 16 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -9 \end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot(-12) + 1\cdot 16 + 1\cdot(-6)$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$$= 4\cdot(-5) - 3\cdot 5 + 2\cdot 5 = -25$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -9 & 16 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -9 \end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot(-12) + 1\cdot 16 + 1\cdot(-6) = -2$$

三阶行列式

三阶行列式 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例 计算 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$$= 4\cdot(-5) - 3\cdot 5 + 2\cdot 5 = -25$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 16 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -9 & 16 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -9 \end{vmatrix}$$

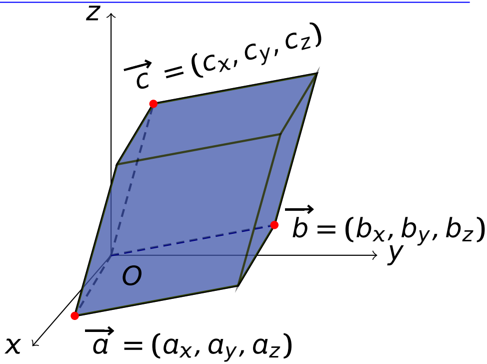
$$= 1\cdot(-12) + 1\cdot 16 + 1\cdot(-6) = -2$$

性质 交换行列式的两行、或两列，行列式的值变号。

三阶行列式的几何意义

$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ 张成平行六面体的体积

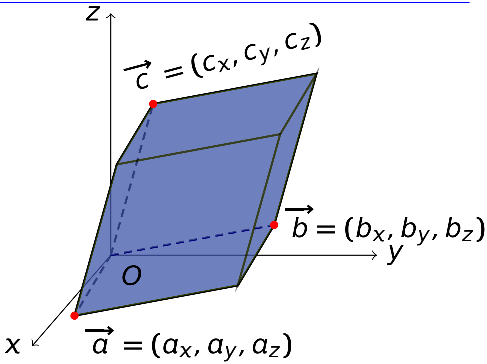
$=$



三阶行列式的几何意义

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$张成平行六面体的体积

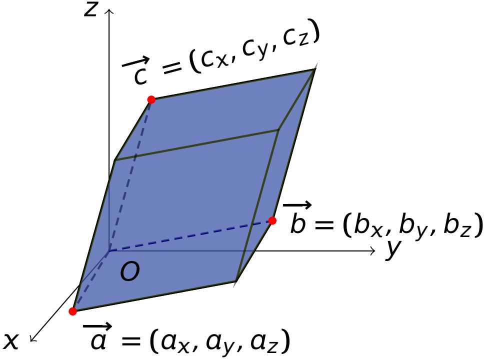
$$= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \text{的绝对值}$$



三阶行列式的几何意义

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 张成平行六面体的体积

$$= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \text{的绝对值}$$

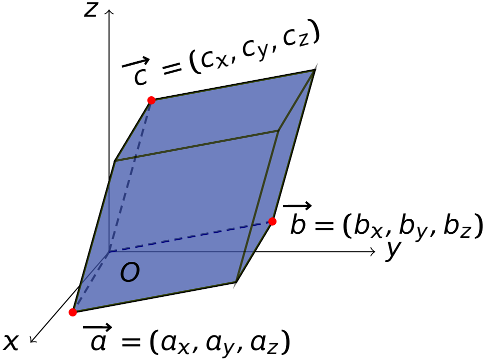


性质 向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$ 不共面的充分必要条件是:

三阶行列式的几何意义

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$张成平行六面体的体积

$= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$的绝对值



性质 向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$ 不共面的充分必要条件是：

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \neq 0$$

右手规则

定义 假设 $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\overrightarrow{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\overrightarrow{c} = (c_x, c_y, c_z)$ 不共面，若

- $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} > 0$,
- $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} < 0$,

右手规则

定义 假设 $\overrightarrow{a}=(a_x, a_y, a_z)$, $\overrightarrow{b}=(b_x, b_y, b_z)$, $\overrightarrow{c}=(c_x, c_y, c_z)$ 不共面，若

- $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} > 0$，则称有序向量组 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ 符合右手规则；
- $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} < 0$，

右手规则

定义 假设 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$ 不共面，若

- $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} > 0$，则称有序向量组 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 符合右手规则；
- $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} < 0$，则称有序向量组 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 符合左手规则；

例

1. $\overrightarrow{i} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{j} = (0, 1, 0)$, $\overrightarrow{k} = (0, 0, 1)$ 符合 　手规则；
2. $\overrightarrow{a} = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{b} = (2, 3, 4)$, $\overrightarrow{c} = (4, 9, 16)$ 符合 　手规则；

例

1. $\overrightarrow{i} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{j} = (0, 1, 0)$, $\overrightarrow{k} = (0, 0, 1)$ 符合　手规则；
2. $\overrightarrow{a} = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{b} = (2, 3, 4)$, $\overrightarrow{c} = (4, 9, 16)$ 符合　手规则；

解 这是因为 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0,\qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = 2 > 0$

例

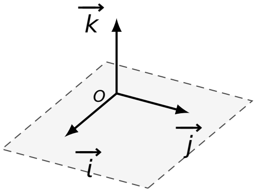
1. $\overrightarrow{i}=(1,0,0)$, $\overrightarrow{j}=(0,1,0)$, $\overrightarrow{k}=(0,0,1)$ 符合右手规则；
2. $\overrightarrow{a}=(1,1,1)$, $\overrightarrow{b}=(2,3,4)$, $\overrightarrow{c}=(4,9,16)$ 符合右手规则；

解 这是因为 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0,\qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = 2 > 0$

例

1. $\overrightarrow{i}=(1,0,0)$, $\overrightarrow{j}=(0,1,0)$, $\overrightarrow{k}=(0,0,1)$ 符合右手规则；
2. $\overrightarrow{a}=(1,1,1)$, $\overrightarrow{b}=(2,3,4)$, $\overrightarrow{c}=(4,9,16)$ 符合右手规则；

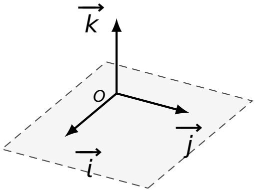
解 这是因为 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1>0,\qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}=2>0$

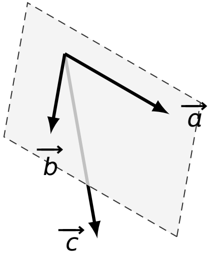


例

1. $\overrightarrow{i} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{j} = (0, 1, 0)$, $\overrightarrow{k} = (0, 0, 1)$ 符合右手规则；
2. $\overrightarrow{a} = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{b} = (2, 3, 4)$, $\overrightarrow{c} = (4, 9, 16)$ 符合右手规则；

解 这是因为 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = 2 > 0$

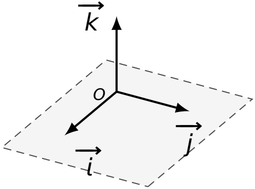


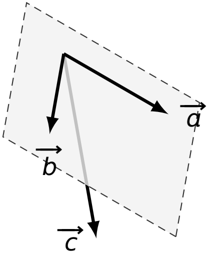


例

1. $\overrightarrow{i}=(1,0,0)$, $\overrightarrow{j}=(0,1,0)$, $\overrightarrow{k}=(0,0,1)$ 符合右手规则；
2. $\overrightarrow{a}=(1,1,1)$, $\overrightarrow{b}=(2,3,4)$, $\overrightarrow{c}=(4,9,16)$ 符合右手规则；

解 这是因为 $\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1>0$, $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 4\\ 4 & 9 & 16\end{vmatrix}=2>0$





注 若 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ 符合右手规则，则张开的右手手指可做如下指向：

$$\text{食指} \to \overrightarrow{a};\quad \text{中指} \to \overrightarrow{b};\quad \text{拇指} \to \overrightarrow{c}$$

性质 假设 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ 符合右手规则，则有序向量组

$$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{b} \quad \text{及} \quad \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, -\overrightarrow{c} \quad \text{符合左手规则}$$

性质 假设 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 符合右手规则，则有序向量组

$$\vec{a}, \vec{c}, \vec{b} \quad 及 \quad \vec{a}, \vec{b}, -\vec{c} \quad 符合左手规则$$

证明 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 符合右手规则 $\Rightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} > 0$，所以

性质 假设 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 符合右手规则，则有序向量组

$$\vec{a}, \vec{c}, \vec{b} \quad 及 \quad \vec{a}, \vec{b}, -\vec{c} \quad 符合左手规则$$

证明 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 符合右手规则 $\Rightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} > 0$，所以

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ -c_x & -c_y & -c_z \end{vmatrix}$$

性质 假设 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 符合右手规则，则有序向量组

$$\vec{a}, \vec{c}, \vec{b} \quad 及 \quad \vec{a}, \vec{b}, -\vec{c} \quad 符合左手规则$$

证明 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 符合右手规则 $\Rightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} > 0$，所以

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} < 0$$

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ -c_x & -c_y & -c_z \end{vmatrix}$$

性质 假设 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 符合右手规则，则有序向量组

$$\vec{a}, \vec{c}, \vec{b} \quad 及 \quad \vec{a}, \vec{b}, -\vec{c} \quad 符合左手规则$$

证明 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 符合右手规则 $\Rightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} > 0$，所以

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} < 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}, \vec{c}, \vec{b} \quad 符合左手规则$$

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ -c_x & -c_y & -c_z \end{vmatrix}$$

性质 假设 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 符合右手规则，则有序向量组

$$\vec{a}, \vec{c}, \vec{b} \quad 及 \quad \vec{a}, \vec{b}, -\vec{c} \quad 符合左手规则$$

证明 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 符合右手规则 $\Rightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} > 0$，所以

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} < 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}, \vec{c}, \vec{b} \quad 符合左手规则$$

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ -c_x & -c_y & -c_z \end{vmatrix} < 0$$

性质 假设 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 符合右手规则，则有序向量组

$$\vec{a}, \vec{c}, \vec{b} \quad 及 \quad \vec{a}, \vec{b}, -\vec{c} \quad 符合左手规则$$

证明 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 符合右手规则 $\Rightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} > 0$，所以

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} < 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}, \vec{c}, \vec{b} \quad 符合左手规则$$

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ -c_x & -c_y & -c_z \end{vmatrix} < 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}, \vec{b}, -\vec{c} \quad 符合左手规则$$

性质 假设 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 符合右手规则，则有序向量组

$$\vec{a}, \vec{c}, \vec{b} \quad 及 \quad \vec{a}, \vec{b}, -\vec{c} \quad 符合左手规则$$

证明 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 符合右手规则 $\Rightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} > 0$，所以

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} < 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}, \vec{c}, \vec{b} \quad 符合左手规则$$

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ -c_x & -c_y & -c_z \end{vmatrix} < 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}, \vec{b}, -\vec{c} \quad 符合左手规则$$

注 假设 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 不共面，则任意交换两个向量的次序，或者对任一个向量添加负号，

性质 假设 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 符合右手规则，则有序向量组

$$\vec{a}, \vec{c}, \vec{b} \quad \text{及} \quad \vec{a}, \vec{b}, -\vec{c} \quad \text{符合左手规则}$$

证明 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 符合右手规则 $\Rightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} > 0$，所以

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} < 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}, \vec{c}, \vec{b} \quad \text{符合左手规则}$$

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ -c_x & -c_y & -c_z \end{vmatrix} < 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}, \vec{b}, -\vec{c} \quad \text{符合左手规则}$$

注 假设 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 不共面，则任意交换两个向量的次序，或者对任一个向量添加负号，新的有序向量组“手性”相反。

向量积

定义 设有向量 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$，现按如下方式定义第三个向量 $\overrightarrow{c}$：

方向

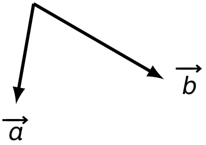
长度

向量积

定义 设有向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$，现按如下方式定义第三个向量 $\vec{c}$：

方向

长度

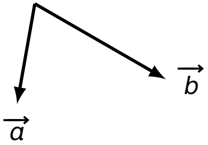


向量积

定义 设有向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$，现按如下方式定义第三个向量 $\vec{c}$：

方向　$\vec{c}$ 与 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 均垂直，

长度

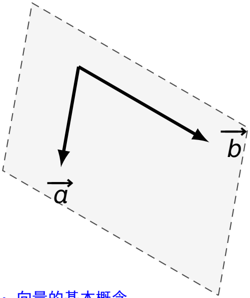


向量积

定义 设有向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$，现按如下方式定义第三个向量 $\vec{c}$：

方向　$\vec{c}$ 与 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 均垂直，

长度

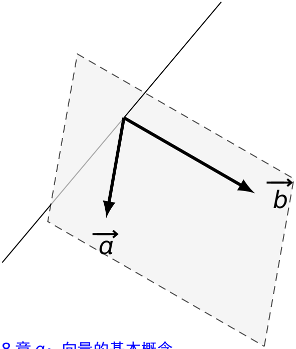


向量积

定义 设有向量 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$，现按如下方式定义第三个向量 $\overrightarrow{c}$：

方向 $\overrightarrow{c}$ 与 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ 均垂直，

长度

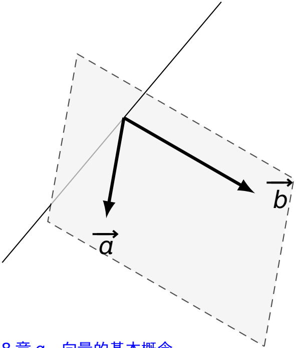


向量积

定义 设有向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$，现按如下方式定义第三个向量 $\vec{c}$：

方向 $\vec{c}$ 与 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 均垂直，且 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 满足右手规则

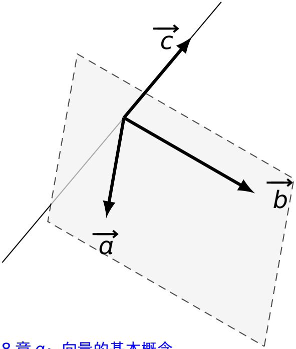
长度



向量积

定义 设有向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$，现按如下方式定义第三个向量 $\vec{c}$：

- **方向** $\vec{c}$ 与 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 均垂直，且 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 满足右手规则
- **长度**

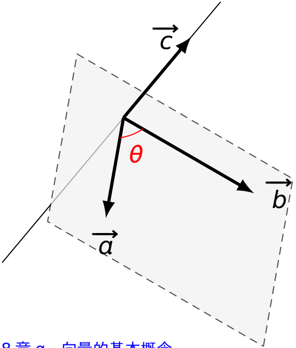


向量积

定义 设有向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$，现按如下方式定义第三个向量 $\vec{c}$：

方向 $\vec{c}$ 与 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 均垂直，且 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 满足右手规则

长度 $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\theta$，其中 $\theta = \angle(\vec{a}, \vec{b})$



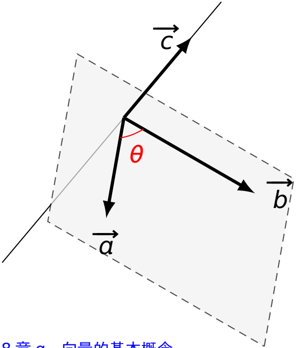
向量积

定义 设有向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$，现按如下方式定义第三个向量 $\vec{c}$：

方向　$\vec{c}$ 与 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 均垂直，且 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 满足右手规则

长度　$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\theta$，其中 $\theta = \angle(\vec{a}, \vec{b})$

称 $\vec{c}$ 为 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的向量积，记作 $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$。

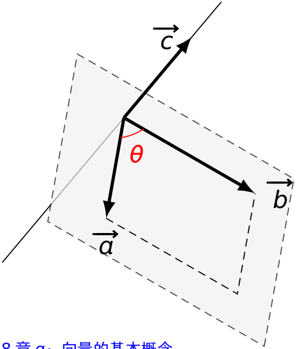


向量积

定义 设有向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，现按如下方式定义第三个向量 $\vec{c}$：

- **方向** $\vec{c}$ 与 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 均垂直，且 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 满足右手规则
- **长度** $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\theta$，其中 $\theta = \angle(\vec{a}, \vec{b})$

称 $\vec{c}$ 为 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的向量积，记作 $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$。



注 1

$|\vec{a} \times \vec{b}| =$ $\vec{a}$，$\vec{b}$ 张成平行四边形面积

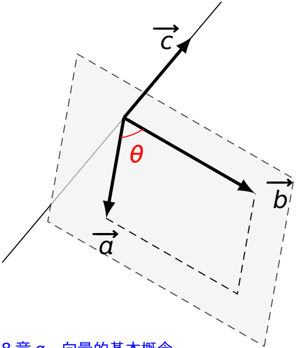
向量积

定义 设有向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$，现按如下方式定义第三个向量 $\vec{c}$：

方向　$\vec{c}$ 与 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 均垂直，且 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 满足右手规则

长度　$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\theta$，其中 $\theta = \angle(\vec{a}, \vec{b})$

称 $\vec{c}$ 为 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的向量积，记作 $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$。



注 1

$|\vec{a} \times \vec{b}| =$ $\vec{a}$, $\vec{b}$ 张成平行四边形面积

注 2

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow$$

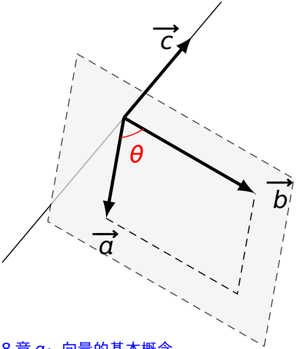
向量积

定义 设有向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$，现按如下方式定义第三个向量 $\vec{c}$：

方向 $\vec{c}$ 与 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 均垂直，且 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 满足右手规则

长度 $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\theta$，其中 $\theta = \angle(\vec{a}, \vec{b})$

称 $\vec{c}$ 为 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的向量积，记作 $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$。



注 1

$|\vec{a} \times \vec{b}| = \vec{a}$, $\vec{b}$ 张成平行四边形面积

注 2

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \parallel \vec{b}$$

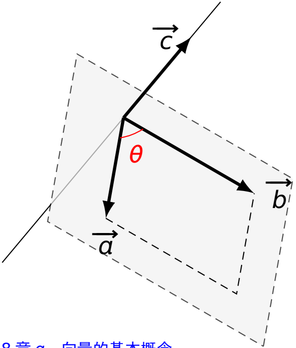
向量积

定义 设有向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$，现按如下方式定义第三个向量 $\vec{c}$：

方向　$\vec{c}$ 与 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 均垂直，且 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 满足右手规则

长度　$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\theta$，其中 $\theta = \angle(\vec{a}, \vec{b})$

称 $\vec{c}$ 为 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的向量积，记作 $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$。



注 1

$|\vec{a} \times \vec{b}| = \vec{a}$, $\vec{b}$ 张成平行四边形面积

注 2

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{a} \parallel \vec{b}$$

特别地，$\vec{a} \times \vec{a} =$

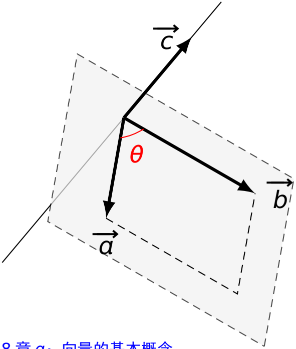
向量积

定义 设有向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$，现按如下方式定义第三个向量 $\vec{c}$：

方向 $\vec{c}$ 与 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 均垂直，且 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 满足右手规则

长度 $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\theta$，其中 $\theta = \angle(\vec{a}, \vec{b})$

称 $\vec{c}$ 为 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的向量积，记作 $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$。



注 1

$|\vec{a} \times \vec{b}| = \vec{a}$, $\vec{b}$ 张成平行四边形面积

注 2

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \parallel \vec{b}$$

特别地，$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

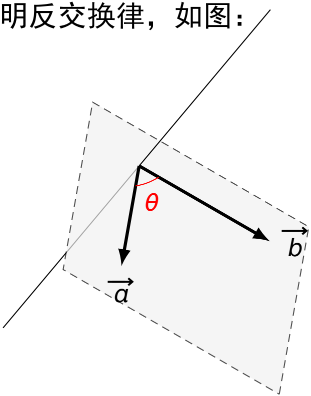
向量积的运算律

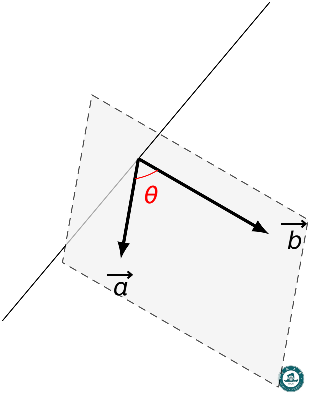
反交换 $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$

向量积的运算律

反交换 $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

证明反交换律，如图：

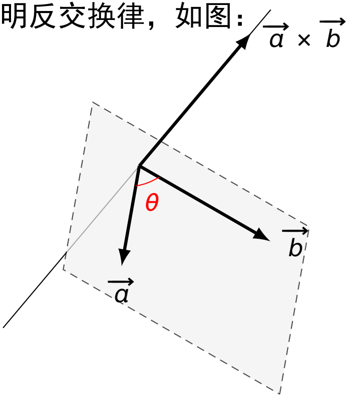


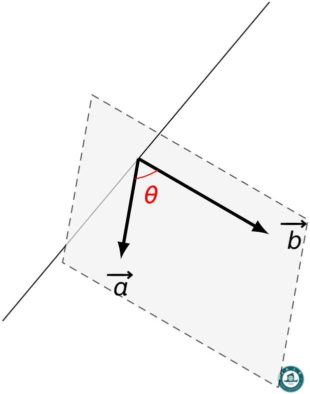


向量积的运算律

反交换 $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

证明反交换律，如图：

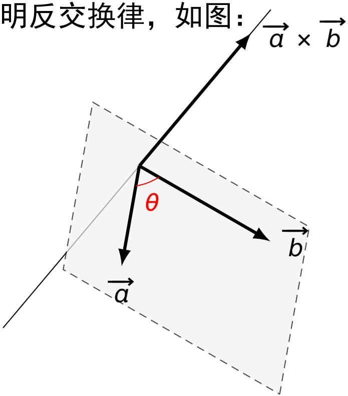


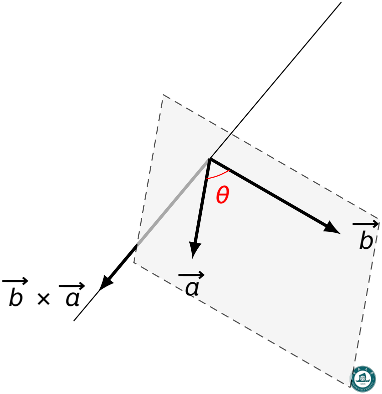


向量积的运算律

反交换 $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

证明反交换律，如图：



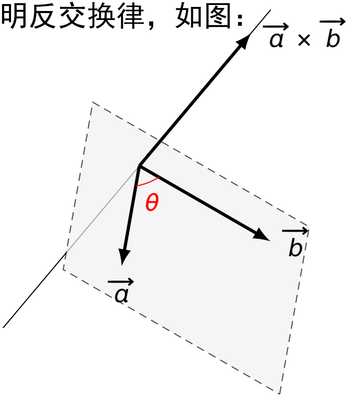


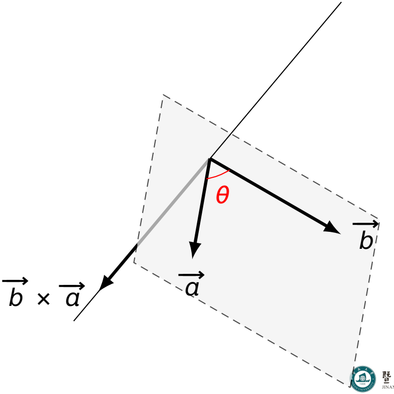
向量积的运算律

反交换 $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

分配律 $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

证明反交换律，如图：





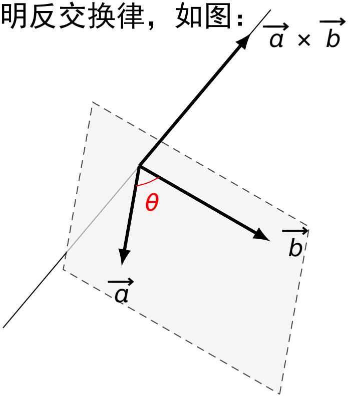
向量积的运算律

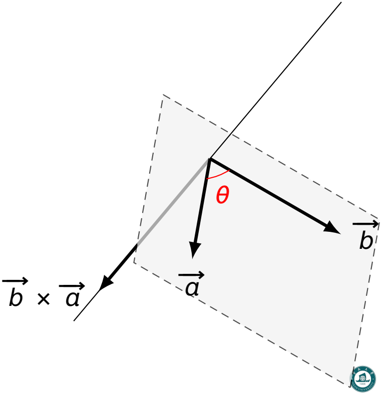
反交换 $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

分配律 $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

结合律 $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$

证明反交换律，如图：





性质 对于 $\overrightarrow{i}=(1,0,0)$, $\overrightarrow{j}=(0,1,0)$, $\overrightarrow{k}=(0,0,1)$，成立

$$\begin{cases} \overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j}=\overrightarrow{k}, \qquad \overrightarrow{j}\times\overrightarrow{k}=\overrightarrow{i}, \qquad \overrightarrow{k}\times\overrightarrow{i}=\overrightarrow{j}, \\ \\ \end{cases}$$

性质 对于 $\overrightarrow{i}=(1,0,0)$, $\overrightarrow{j}=(0,1,0)$, $\overrightarrow{k}=(0,0,1)$，成立

$$\begin{cases} \overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j}=\overrightarrow{k}, & \overrightarrow{j}\times\overrightarrow{k}=\overrightarrow{i}, & \overrightarrow{k}\times\overrightarrow{i}=\overrightarrow{j}, \\ \overrightarrow{j}\times\overrightarrow{i}=-\overrightarrow{k}, & \overrightarrow{k}\times\overrightarrow{j}=-\overrightarrow{i}, & \overrightarrow{i}\times\overrightarrow{k}=-\overrightarrow{j}, \\ & & \end{cases}$$

性质 对于 $\overrightarrow{i}=(1,0,0)$, $\overrightarrow{j}=(0,1,0)$, $\overrightarrow{k}=(0,0,1)$，成立

$$\begin{cases}\overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j}=\overrightarrow{k}, & \overrightarrow{j}\times\overrightarrow{k}=\overrightarrow{i}, & \overrightarrow{k}\times\overrightarrow{i}=\overrightarrow{j}, \\ \overrightarrow{j}\times\overrightarrow{i}=-\overrightarrow{k}, & \overrightarrow{k}\times\overrightarrow{j}=-\overrightarrow{i}, & \overrightarrow{i}\times\overrightarrow{k}=-\overrightarrow{j}, \\ \overrightarrow{i}\times\overrightarrow{i}=\overrightarrow{j}\times\overrightarrow{j}=\overrightarrow{k}\times\overrightarrow{k}=0. \end{cases}$$

性质 对于 $\overrightarrow{i}=(1,0,0), \overrightarrow{j}=(0,1,0), \overrightarrow{k}=(0,0,1)$，成立

$$\begin{cases} \overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j}=\overrightarrow{k}, \quad \overrightarrow{j}\times\overrightarrow{k}=\overrightarrow{i}, \quad \overrightarrow{k}\times\overrightarrow{i}=\overrightarrow{j}, \\ \overrightarrow{j}\times\overrightarrow{i}=-\overrightarrow{k}, \quad \overrightarrow{k}\times\overrightarrow{j}=-\overrightarrow{i}, \quad \overrightarrow{i}\times\overrightarrow{k}=-\overrightarrow{j}, \\ \overrightarrow{i}\times\overrightarrow{i}=\overrightarrow{j}\times\overrightarrow{j}=\overrightarrow{k}\times\overrightarrow{k}=0. \end{cases}$$

证明 以为 $\overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j}=\overrightarrow{k}$ 例证明：

$$|\overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j}|=$$

性质 对于 $\overrightarrow{i}=(1,0,0)$, $\overrightarrow{j}=(0,1,0)$, $\overrightarrow{k}=(0,0,1)$，成立

$$\begin{cases} \overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j}=\overrightarrow{k}, & \overrightarrow{j}\times\overrightarrow{k}=\overrightarrow{i}, & \overrightarrow{k}\times\overrightarrow{i}=\overrightarrow{j}, \\ \overrightarrow{j}\times\overrightarrow{i}=-\overrightarrow{k}, & \overrightarrow{k}\times\overrightarrow{j}=-\overrightarrow{i}, & \overrightarrow{i}\times\overrightarrow{k}=-\overrightarrow{j}, \\ \overrightarrow{i}\times\overrightarrow{i}=\overrightarrow{j}\times\overrightarrow{j}=\overrightarrow{k}\times\overrightarrow{k}=0. \end{cases}$$

证明 以为 $\overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j}=\overrightarrow{k}$ 例证明：

$$|\overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j}|=|\overrightarrow{i}|\cdot|\overrightarrow{j}|\cdot\sin\tfrac{\pi}{2}$$

性质 对于 $\overrightarrow{i}=(1,0,0)$, $\overrightarrow{j}=(0,1,0)$, $\overrightarrow{k}=(0,0,1)$，成立

$$\begin{cases} \overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j}=\overrightarrow{k}, & \overrightarrow{j}\times\overrightarrow{k}=\overrightarrow{i}, & \overrightarrow{k}\times\overrightarrow{i}=\overrightarrow{j}, \\ \overrightarrow{j}\times\overrightarrow{i}=-\overrightarrow{k}, & \overrightarrow{k}\times\overrightarrow{j}=-\overrightarrow{i}, & \overrightarrow{i}\times\overrightarrow{k}=-\overrightarrow{j}, \\ \overrightarrow{i}\times\overrightarrow{i}=\overrightarrow{j}\times\overrightarrow{j}=\overrightarrow{k}\times\overrightarrow{k}=0. \end{cases}$$

证明 以为 $\overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j}=\overrightarrow{k}$ 例证明：

$$|\overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j}|=|\overrightarrow{i}|\cdot|\overrightarrow{j}|\cdot\sin\frac{\pi}{2}=1$$

性质 对于 $\vec{i}=(1,0,0),\ \vec{j}=(0,1,0),\ \vec{k}=(0,0,1)$，成立

$$\begin{cases} \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}, & \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}, & \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}, \\ \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}, & \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}, & \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}, \\ \vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0. \end{cases}$$

证明 以为 $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$ 例证明：

$$|\vec{i}\times\vec{j}|=|\vec{i}|\cdot|\vec{j}|\cdot\sin\frac{\pi}{2}=1=|\vec{k}|$$

性质 对于 $\overrightarrow{i}=(1,0,0)$, $\overrightarrow{j}=(0,1,0)$, $\overrightarrow{k}=(0,0,1)$，成立

$$\begin{cases} \overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j}=\overrightarrow{k}, & \overrightarrow{j}\times\overrightarrow{k}=\overrightarrow{i}, \quad \overrightarrow{k}\times\overrightarrow{i}=\overrightarrow{j}, \\ \overrightarrow{j}\times\overrightarrow{i}=-\overrightarrow{k}, & \overrightarrow{k}\times\overrightarrow{j}=-\overrightarrow{i}, \quad \overrightarrow{i}\times\overrightarrow{k}=-\overrightarrow{j}, \\ \overrightarrow{i}\times\overrightarrow{i}=\overrightarrow{j}\times\overrightarrow{j}=\overrightarrow{k}\times\overrightarrow{k}=0. \end{cases}$$

证明 以为 $\overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j}=\overrightarrow{k}$ 例证明：

$$|\overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j}|=|\overrightarrow{i}|\cdot|\overrightarrow{j}|\cdot\sin\frac{\pi}{2}=1=|\overrightarrow{k}|$$

$\overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ 均垂直于 $\overrightarrow{i}$ 和 $\overrightarrow{j}$ $\Rightarrow$

性质 对于 $\overrightarrow{i}=(1,0,0)$, $\overrightarrow{j}=(0,1,0)$, $\overrightarrow{k}=(0,0,1)$，成立

$$\begin{cases} \overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j}=\overrightarrow{k}, & \overrightarrow{j}\times\overrightarrow{k}=\overrightarrow{i}, & \overrightarrow{k}\times\overrightarrow{i}=\overrightarrow{j}, \\ \overrightarrow{j}\times\overrightarrow{i}=-\overrightarrow{k}, & \overrightarrow{k}\times\overrightarrow{j}=-\overrightarrow{i}, & \overrightarrow{i}\times\overrightarrow{k}=-\overrightarrow{j}, \\ \overrightarrow{i}\times\overrightarrow{i}=\overrightarrow{j}\times\overrightarrow{j}=\overrightarrow{k}\times\overrightarrow{k}=0. \end{cases}$$

证明 以为 $\overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j}=\overrightarrow{k}$ 例证明：

$$|\overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j}|=|\overrightarrow{i}|\cdot|\overrightarrow{j}|\cdot\sin\frac{\pi}{2}=1=|\overrightarrow{k}|$$

$\overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ 均垂直于 $\overrightarrow{i}$ 和 $\overrightarrow{j}$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j}\parallel\overrightarrow{k}$

性质 对于 $\overrightarrow{i}=(1,0,0)$, $\overrightarrow{j}=(0,1,0)$, $\overrightarrow{k}=(0,0,1)$，成立

$$\begin{cases} \overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j}=\overrightarrow{k}, & \overrightarrow{j}\times\overrightarrow{k}=\overrightarrow{i}, & \overrightarrow{k}\times\overrightarrow{i}=\overrightarrow{j}, \\ \overrightarrow{j}\times\overrightarrow{i}=-\overrightarrow{k}, & \overrightarrow{k}\times\overrightarrow{j}=-\overrightarrow{i}, & \overrightarrow{i}\times\overrightarrow{k}=-\overrightarrow{j}, \\ \overrightarrow{i}\times\overrightarrow{i}=\overrightarrow{j}\times\overrightarrow{j}=\overrightarrow{k}\times\overrightarrow{k}=0. \end{cases}$$

证明 以为 $\overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j}=\overrightarrow{k}$ 例证明：

$$\left.\begin{array}{r} |\overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j}|=|\overrightarrow{i}|\cdot|\overrightarrow{j}|\cdot\sin\frac{\pi}{2}=1=|\overrightarrow{k}| \\ \\ \overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{k}\text{ 均垂直于 }\overrightarrow{i}\text{ 和 }\overrightarrow{j}\ \Rightarrow\ \overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j}\parallel\overrightarrow{k} \end{array}\right\}\Rightarrow$$

性质 对于 $\overrightarrow{i}=(1,0,0)$, $\overrightarrow{j}=(0,1,0)$, $\overrightarrow{k}=(0,0,1)$，成立

$$\begin{cases} \overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j}=\overrightarrow{k}, & \overrightarrow{j}\times\overrightarrow{k}=\overrightarrow{i}, & \overrightarrow{k}\times\overrightarrow{i}=\overrightarrow{j}, \\ \overrightarrow{j}\times\overrightarrow{i}=-\overrightarrow{k}, & \overrightarrow{k}\times\overrightarrow{j}=-\overrightarrow{i}, & \overrightarrow{i}\times\overrightarrow{k}=-\overrightarrow{j}, \\ \overrightarrow{i}\times\overrightarrow{i}=\overrightarrow{j}\times\overrightarrow{j}=\overrightarrow{k}\times\overrightarrow{k}=0. \end{cases}$$

证明 以为 $\overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j}=\overrightarrow{k}$ 例证明：

$$\left.\begin{array}{r} |\overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j}|=|\overrightarrow{i}|\cdot|\overrightarrow{j}|\cdot\sin\frac{\pi}{2}=1=|\overrightarrow{k}| \\ \overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{k}\text{ 均垂直于 }\overrightarrow{i}\text{ 和 }\overrightarrow{j}\ \Rightarrow\ \overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j}\parallel\overrightarrow{k} \end{array}\right\}\Rightarrow\ \overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j}=\pm\overrightarrow{k}$$

性质 对于 $\overrightarrow{i}=(1,0,0)$, $\overrightarrow{j}=(0,1,0)$, $\overrightarrow{k}=(0,0,1)$，成立

$$\begin{cases} \overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j}=\overrightarrow{k}, & \overrightarrow{j}\times\overrightarrow{k}=\overrightarrow{i}, & \overrightarrow{k}\times\overrightarrow{i}=\overrightarrow{j}, \\ \overrightarrow{j}\times\overrightarrow{i}=-\overrightarrow{k}, & \overrightarrow{k}\times\overrightarrow{j}=-\overrightarrow{i}, & \overrightarrow{i}\times\overrightarrow{k}=-\overrightarrow{j}, \\ \overrightarrow{i}\times\overrightarrow{i}=\overrightarrow{j}\times\overrightarrow{j}=\overrightarrow{k}\times\overrightarrow{k}=0. \end{cases}$$

证明 以为 $\overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j}=\overrightarrow{k}$ 例证明：

$$\left.\begin{array}{r} |\overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j}|=|\overrightarrow{i}|\cdot|\overrightarrow{j}|\cdot\sin\frac{\pi}{2}=1=|\overrightarrow{k}| \\ \overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{k}\text{ 均垂直于 }\overrightarrow{i}\text{ 和 }\overrightarrow{j}\ \Rightarrow\ \overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j}\parallel\overrightarrow{k} \end{array}\right\}\Rightarrow\ \overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j}=\pm\overrightarrow{k}$$

$$\xRightarrow{\overrightarrow{i},\,\overrightarrow{j},\,\overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j}\text{ 符合右手规则}}$$

性质 对于 $\overrightarrow{i}=(1,0,0)$, $\overrightarrow{j}=(0,1,0)$, $\overrightarrow{k}=(0,0,1)$，成立

$$\begin{cases} \overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j}=\overrightarrow{k}, & \overrightarrow{j}\times\overrightarrow{k}=\overrightarrow{i}, & \overrightarrow{k}\times\overrightarrow{i}=\overrightarrow{j}, \\ \overrightarrow{j}\times\overrightarrow{i}=-\overrightarrow{k}, & \overrightarrow{k}\times\overrightarrow{j}=-\overrightarrow{i}, & \overrightarrow{i}\times\overrightarrow{k}=-\overrightarrow{j}, \\ \overrightarrow{i}\times\overrightarrow{i}=\overrightarrow{j}\times\overrightarrow{j}=\overrightarrow{k}\times\overrightarrow{k}=0. \end{cases}$$

证明 以为 $\overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j}=\overrightarrow{k}$ 例证明：

$$\left.\begin{array}{r} |\overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j}|=|\overrightarrow{i}|\cdot|\overrightarrow{j}|\cdot\sin\frac{\pi}{2}=1=|\overrightarrow{k}| \\ \overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{k}\text{ 均垂直于 }\overrightarrow{i}\text{ 和 }\overrightarrow{j}\ \Rightarrow\ \overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j}\parallel\overrightarrow{k} \end{array}\right\}\Rightarrow\ \overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j}=\pm\overrightarrow{k}$$

$$\xRightarrow{\overrightarrow{i},\,\overrightarrow{j},\,\overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j}\text{ 符合右手规则}}\ \overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j}=\overrightarrow{k}$$

性质 设 $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\overrightarrow{b} = (b_x, b_y, b_z)$，则

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = (\qquad\qquad , \qquad\qquad , \qquad\qquad)$$

性质 设 $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\overrightarrow{b} = (b_x, b_y, b_z)$，则

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = (a_y b_z - a_z b_y, \qquad\qquad , \qquad\qquad)$$

性质 设 $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\overrightarrow{b} = (b_x, b_y, b_z)$，则

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, \qquad)$$

性质 设 $\overrightarrow{a}=(a_x, a_y, a_z)$, $\overrightarrow{b}=(b_x, b_y, b_z)$，则

$$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=(a_yb_z-a_zb_y, a_zb_x-a_xb_z, a_xb_y-a_yb_x)$$

性质 设 $\overrightarrow{a}=(a_x, a_y, a_z)$, $\overrightarrow{b}=(b_x, b_y, b_z)$，则

$$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=(a_yb_z-a_zb_y,\ a_zb_x-a_xb_z,\ a_xb_y-a_yb_x)$$

证明

$$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\left(a_x\overrightarrow{i}+a_y\overrightarrow{j}+a_z\overrightarrow{k}\right)\times\left(b_x\overrightarrow{i}+b_y\overrightarrow{j}+b_z\overrightarrow{k}\right)$$

性质 设 $\overrightarrow{a}=(a_x, a_y, a_z)$, $\overrightarrow{b}=(b_x, b_y, b_z)$，则

$$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=(a_yb_z-a_zb_y,\ a_zb_x-a_xb_z,\ a_xb_y-a_yb_x)$$

证明

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b} &= \left(a_x\overrightarrow{i}+a_y\overrightarrow{j}+a_z\overrightarrow{k}\right)\times\left(b_x\overrightarrow{i}+b_y\overrightarrow{j}+b_z\overrightarrow{k}\right)\\ &= a_xb_x(\overrightarrow{i}\times\overrightarrow{i})+a_xb_y(\overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j})+a_xb_z(\overrightarrow{i}\times\overrightarrow{k})+\\ &\quad a_yb_x(\overrightarrow{j}\times\overrightarrow{i})+a_yb_y(\overrightarrow{j}\times\overrightarrow{j})+a_yb_z(\overrightarrow{j}\times\overrightarrow{k})+\\ &\quad a_zb_x(\overrightarrow{k}\times\overrightarrow{i})+a_zb_y(\overrightarrow{k}\times\overrightarrow{j})+a_zb_z(\overrightarrow{k}\times\overrightarrow{k})\end{aligned}$$

性质 设 $\overrightarrow{a}=(a_x, a_y, a_z)$, $\overrightarrow{b}=(b_x, b_y, b_z)$，则

$$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=(a_yb_z-a_zb_y,\ a_zb_x-a_xb_z,\ a_xb_y-a_yb_x)$$

证明

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}&=\left(a_x\overrightarrow{i}+a_y\overrightarrow{j}+a_z\overrightarrow{k}\right)\times\left(b_x\overrightarrow{i}+b_y\overrightarrow{j}+b_z\overrightarrow{k}\right)\\&=a_xb_x(\overrightarrow{i}\times\overrightarrow{i})+a_xb_y(\overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j})+a_xb_z(\overrightarrow{i}\times\overrightarrow{k})+\\&\quad a_yb_x(\overrightarrow{j}\times\overrightarrow{i})+a_yb_y(\overrightarrow{j}\times\overrightarrow{j})+a_yb_z(\overrightarrow{j}\times\overrightarrow{k})+\\&\quad a_zb_x(\overrightarrow{k}\times\overrightarrow{i})+a_zb_y(\overrightarrow{k}\times\overrightarrow{j})+a_zb_z(\overrightarrow{k}\times\overrightarrow{k})\end{aligned}$$

性质 设 $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\overrightarrow{b} = (b_x, b_y, b_z)$，则

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = (a_y b_z - a_z b_y,\ a_z b_x - a_x b_z,\ a_x b_y - a_y b_x)$$

证明

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \left(a_x \overrightarrow{i} + a_y \overrightarrow{j} + a_z \overrightarrow{k}\right) \times \left(b_x \overrightarrow{i} + b_y \overrightarrow{j} + b_z \overrightarrow{k}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= a_x b_x(\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{i}) + a_x b_y(\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j}) + a_x b_z(\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{k}) + \\
&\quad a_y b_x(\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{i}) + a_y b_y(\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{j}) + a_y b_z(\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{k}) + \\
&\quad a_z b_x(\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{i}) + a_z b_y(\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{j}) + a_z b_z(\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{k}) \\
&= (\qquad\qquad)\overrightarrow{i} + (\qquad\qquad)\overrightarrow{j} + (\qquad\qquad)\overrightarrow{k}
\end{aligned}$$

性质 设 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$，则

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y,\ a_z b_x - a_x b_z,\ a_x b_y - a_y b_x)$$

证明

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}\right) \times \left(b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}\right)$$

$$= a_x b_x(\vec{i} \times \vec{i}) + a_x b_y(\vec{i} \times \vec{j}) + a_x b_z(\vec{i} \times \vec{k}) +$$

$$a_y b_x(\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_y(\vec{j} \times \vec{j}) + a_y b_z(\vec{j} \times \vec{k}) +$$

$$a_z b_x(\vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y(\vec{k} \times \vec{j}) + a_z b_z(\vec{k} \times \vec{k})$$

$$= (\qquad\qquad)\vec{i} + (\qquad\qquad)\vec{j} + (\qquad\qquad)\vec{k}$$

性质 设 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$，则

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y,\ a_z b_x - a_x b_z,\ a_x b_y - a_y b_x)$$

证明

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}\right) \times \left(b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}\right)$$

$$= a_x b_x(\vec{i} \times \vec{i}) + a_x b_y(\vec{i} \times \vec{j}) + a_x b_z(\vec{i} \times \vec{k}) +$$

$$a_y b_x(\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_y(\vec{j} \times \vec{j}) + a_y b_z(\vec{j} \times \vec{k}) +$$

$$a_z b_x(\vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y(\vec{k} \times \vec{j}) + a_z b_z(\vec{k} \times \vec{k})$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (\qquad\qquad)\vec{j} + (\qquad\qquad)\vec{k}$$

性质 设 $\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b}=(b_x, b_y, b_z)$，则

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_yb_z-a_zb_y,\ a_zb_x-a_xb_z,\ a_xb_y-a_yb_x)$$

证明

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\times\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)$$

$$=a_xb_x(\vec{i}\times\vec{i})+a_xb_y(\vec{i}\times\vec{j})+a_xb_z(\vec{i}\times\vec{k})+$$

$$a_yb_x(\vec{j}\times\vec{i})+a_yb_y(\vec{j}\times\vec{j})+a_yb_z(\vec{j}\times\vec{k})+$$

$$a_zb_x(\vec{k}\times\vec{i})+a_zb_y(\vec{k}\times\vec{j})+a_zb_z(\vec{k}\times\vec{k})$$

$$=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}+(\qquad\qquad)\vec{j}+(\qquad\qquad)\vec{k}$$

性质 设 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$，则

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

证明

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}\right) \times \left(b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}\right)$$

$$= a_x b_x (\vec{i} \times \vec{i}) + a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x b_z (\vec{i} \times \vec{k}) +$$

$$a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j} \times \vec{j}) + a_y b_z (\vec{j} \times \vec{k}) +$$

$$a_z b_x (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z b_z (\vec{k} \times \vec{k})$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (\qquad\qquad) \vec{k}$$

性质 设 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$，则

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

证明

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}\right) \times \left(b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}\right)$$

$$= a_x b_x(\vec{i} \times \vec{i}) + a_x b_y(\vec{i} \times \vec{j}) + a_x b_z(\vec{i} \times \vec{k}) +$$

$$a_y b_x(\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_y(\vec{j} \times \vec{j}) + a_y b_z(\vec{j} \times \vec{k}) +$$

$$a_z b_x(\vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y(\vec{k} \times \vec{j}) + a_z b_z(\vec{k} \times \vec{k})$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (\qquad\qquad)\vec{k}$$

性质 设 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$，则

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

证明

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}\right) \times \left(b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}\right)$$

$$= a_x b_x(\vec{i} \times \vec{i}) + a_x b_y(\vec{i} \times \vec{j}) + a_x b_z(\vec{i} \times \vec{k}) +$$

$$a_y b_x(\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_y(\vec{j} \times \vec{j}) + a_y b_z(\vec{j} \times \vec{k}) +$$

$$a_z b_x(\vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y(\vec{k} \times \vec{j}) + a_z b_z(\vec{k} \times \vec{k})$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}$$

性质 设 $\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b}=(b_x, b_y, b_z)$，则

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_yb_z-a_zb_y,\ a_zb_x-a_xb_z,\ a_xb_y-a_yb_x)$$

证明

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\times\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)$$

$$\begin{aligned}&=a_xb_x(\vec{i}\times\vec{i})+a_xb_y(\vec{i}\times\vec{j})+a_xb_z(\vec{i}\times\vec{k})+\\&\quad a_yb_x(\vec{j}\times\vec{i})+a_yb_y(\vec{j}\times\vec{j})+a_yb_z(\vec{j}\times\vec{k})+\\&\quad a_zb_x(\vec{k}\times\vec{i})+a_zb_y(\vec{k}\times\vec{j})+a_zb_z(\vec{k}\times\vec{k})\\&=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}\end{aligned}$$

注

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left|\quad\right|\vec{i}-\left|\quad\right|\vec{j}+\left|\quad\right|\vec{k}$$

性质 设 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$，则

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y,\ a_z b_x - a_x b_z,\ a_x b_y - a_y b_x)$$

证明

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}\right) \times \left(b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}\right)$$

$$= a_x b_x(\vec{i} \times \vec{i}) + a_x b_y(\vec{i} \times \vec{j}) + a_x b_z(\vec{i} \times \vec{k}) +$$

$$a_y b_x(\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_y(\vec{j} \times \vec{j}) + a_y b_z(\vec{j} \times \vec{k}) +$$

$$a_z b_x(\vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y(\vec{k} \times \vec{j}) + a_z b_z(\vec{k} \times \vec{k})$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}$$

注

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} \vec{k}$$

性质 设 $\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b}=(b_x, b_y, b_z)$，则

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_yb_z-a_zb_y,\ a_zb_x-a_xb_z,\ a_xb_y-a_yb_x)$$

证明

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\times\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)$$

$$=a_xb_x(\vec{i}\times\vec{i})+a_xb_y(\vec{i}\times\vec{j})+a_xb_z(\vec{i}\times\vec{k})+$$

$$a_yb_x(\vec{j}\times\vec{i})+a_yb_y(\vec{j}\times\vec{j})+a_yb_z(\vec{j}\times\vec{k})+$$

$$a_zb_x(\vec{k}\times\vec{i})+a_zb_y(\vec{k}\times\vec{j})+a_zb_z(\vec{k}\times\vec{k})$$

$$=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}$$

注

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}\vec{k}$$

性质 设 $\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b}=(b_x, b_y, b_z)$，则

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_yb_z-a_zb_y,\ a_zb_x-a_xb_z,\ a_xb_y-a_yb_x)$$

证明

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\times\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)$$

$$=a_xb_x(\vec{i}\times\vec{i})+a_xb_y(\vec{i}\times\vec{j})+a_xb_z(\vec{i}\times\vec{k})+$$

$$a_yb_x(\vec{j}\times\vec{i})+a_yb_y(\vec{j}\times\vec{j})+a_yb_z(\vec{j}\times\vec{k})+$$

$$a_zb_x(\vec{k}\times\vec{i})+a_zb_y(\vec{k}\times\vec{j})+a_zb_z(\vec{k}\times\vec{k})$$

$$=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}$$

注

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\vec{k}$$

性质 设 $\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b}=(b_x, b_y, b_z)$，则

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_yb_z-a_zb_y,\ a_zb_x-a_xb_z,\ a_xb_y-a_yb_x)$$

证明

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\times\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)$$

$$=a_xb_x(\vec{i}\times\vec{i})+a_xb_y(\vec{i}\times\vec{j})+a_xb_z(\vec{i}\times\vec{k})+$$

$$a_yb_x(\vec{j}\times\vec{i})+a_yb_y(\vec{j}\times\vec{j})+a_yb_z(\vec{j}\times\vec{k})+$$

$$a_zb_x(\vec{k}\times\vec{i})+a_zb_y(\vec{k}\times\vec{j})+a_zb_z(\vec{k}\times\vec{k})$$

$$=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}$$

注

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\vec{k}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

例 设 $\overrightarrow{a} = (2, 1, -1)$, $\overrightarrow{b} = (1, -1, 2)$，计算 $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$

例 设 $\overrightarrow{a}=(2,1,-1)$, $\overrightarrow{b}=(1,-1,2)$，计算 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$

解

$$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$$

例 设 $\overrightarrow{a} = (2, 1, -1)$, $\overrightarrow{b} = (1, -1, 2)$，计算 $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$

解

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ & & \end{vmatrix}$$

例 设 $\overrightarrow{a}=(2,1,-1)$, $\overrightarrow{b}=(1,-1,2)$，计算 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$

解

$$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

例 设 $\overrightarrow{a} = (2, 1, -1)$, $\overrightarrow{b} = (1, -1, 2)$，计算 $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$

解

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \left| \qquad \right| \overrightarrow{i} - \left| \qquad \right| \overrightarrow{j} + \left| \qquad \right| \overrightarrow{k}$$

例 设 $\vec{a}=(2,1,-1)$，$\vec{b}=(1,-1,2)$，计算 $\vec{a}\times\vec{b}$

解

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}\vec{k}$$

例 设 $\overrightarrow{a}=(2,1,-1)$, $\overrightarrow{b}=(1,-1,2)$，计算 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$

解

$$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}\overrightarrow{i}-\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\overrightarrow{j}+\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}\overrightarrow{k}$$

例 设 $\overrightarrow{a} = (2, 1, -1)$, $\overrightarrow{b} = (1, -1, 2)$，计算 $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$

解

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \overrightarrow{k}$$

例 设 $\overrightarrow{a}=(2,1,-1)$, $\overrightarrow{b}=(1,-1,2)$，计算 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$

解

$$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}\overrightarrow{i}-\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\overrightarrow{j}+\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}\overrightarrow{k}$$

$$=\overrightarrow{i}-5\overrightarrow{j}-3\overrightarrow{k}$$

例 设 $\overrightarrow{a}=(2,1,-1)$, $\overrightarrow{b}=(1,-1,2)$，计算 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$

解

$$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}\overrightarrow{i}-\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\overrightarrow{j}+\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}\overrightarrow{k}$$

$$=\overrightarrow{i}-5\overrightarrow{j}-3\overrightarrow{k}=(1,-5,-3)$$

例 设空间中三个点 $C(1, -1, 2)$，$A(3, 3, 1)$，$B(3, 1, 3)$。令 $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$，$\vec{b} = \overrightarrow{CB}$。求 $\vec{a} \times \vec{b}$ 及三角形 ΔABC 面积。

例 设空间中三个点 $C(1, -1, 2)$，$A(3, 3, 1)$，$B(3, 1, 3)$。令 $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{b} = \overrightarrow{CB}$。求 $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ 及三角形 ΔABC 面积。

解

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{CA} = (\qquad\qquad),$$

$$\overrightarrow{b} = \overrightarrow{CB} = (\qquad\qquad),$$

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$$

ΔABC面积 $=$

例 设空间中三个点 $C(1,-1,2)$，$A(3,3,1)$，$B(3,1,3)$。令 $\vec{a}=\overrightarrow{CA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{CB}$。求 $\vec{a}\times\vec{b}$ 及三角形 ΔABC 面积。

解 $$\vec{a}=\overrightarrow{CA}=(\qquad\qquad),$$

$$\vec{b}=\overrightarrow{CB}=(\qquad\qquad),$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ & & \\ & & \end{vmatrix}$$

$$\Delta ABC\text{面积}=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$$

例 设空间中三个点 $C(1, -1, 2)$，$A(3, 3, 1)$，$B(3, 1, 3)$。令 $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$，$\vec{b} = \overrightarrow{CB}$。求 $\vec{a} \times \vec{b}$ 及三角形 ΔABC 面积。

解
$$\vec{a} = \overrightarrow{CA} = (2, 4, -1),$$
$$\vec{b} = \overrightarrow{CB} = (\qquad\qquad),$$
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$$

$$\Delta ABC\text{面积} = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$$

例 设空间中三个点 $C(1, -1, 2)$，$A(3, 3, 1)$，$B(3, 1, 3)$。令 $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$，$\vec{b} = \overrightarrow{CB}$。求 $\vec{a} \times \vec{b}$ 及三角形 ΔABC 面积。

解

$$\vec{a} = \overrightarrow{CA} = (2, 4, -1),$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{CB} = (2, 2, 1),$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$$

$$\Delta ABC\text{面积} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

例 设空间中三个点 $C(1, -1, 2)$，$A(3, 3, 1)$，$B(3, 1, 3)$。令 $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$，$\vec{b} = \overrightarrow{CB}$。求 $\vec{a} \times \vec{b}$ 及三角形 ΔABC 面积。

解

$$\vec{a} = \overrightarrow{CA} = (2, 4, -1),$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{CB} = (2, 2, 1),$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta ABC\text{面积} = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$$

例 设空间中三个点 $C(1,-1,2)$，$A(3,3,1)$，$B(3,1,3)$。令 $\vec{a}=\overrightarrow{CA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{CB}$。求 $\vec{a}\times\vec{b}$ 及三角形 ΔABC 面积。

解

$$\vec{a}=\overrightarrow{CA}=(2,4,-1),$$

$$\vec{b}=\overrightarrow{CB}=(2,2,1),$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 4 & -1\\ 2 & 2 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}4 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & 4\\ 2 & 2\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$\Delta ABC\text{面积}=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$$

例 设空间中三个点 $C(1,-1,2)$，$A(3,3,1)$，$B(3,1,3)$。令 $\vec{a}=\overrightarrow{CA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{CB}$。求 $\vec{a}\times\vec{b}$ 及三角形 ΔABC 面积。

解

$$\vec{a}=\overrightarrow{CA}=(2,4,-1),$$

$$\vec{b}=\overrightarrow{CB}=(2,2,1),$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 4 & -1\\ 2 & 2 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}4 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & 4\\ 2 & 2\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=6\vec{i}-4\vec{j}-4\vec{k}$$

$$\Delta ABC\text{面积}=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$$

例 设空间中三个点 $C(1,-1,2)$，$A(3,3,1)$，$B(3,1,3)$。令 $\vec{a}=\overrightarrow{CA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{CB}$。求 $\vec{a}\times\vec{b}$ 及三角形 ΔABC 面积。

解

$$\vec{a}=\overrightarrow{CA}=(2,4,-1),$$

$$\vec{b}=\overrightarrow{CB}=(2,2,1),$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 4 & -1\\ 2 & 2 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}4 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & 4\\ 2 & 2\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=6\vec{i}-4\vec{j}-4\vec{k}=(6,-4,-4)$$

$$\Delta ABC\text{面积}=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$$

例 设空间中三个点 $C(1,-1,2)$，$A(3,3,1)$，$B(3,1,3)$。令 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{b}=\overrightarrow{CB}$。求 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 及三角形 ΔABC 面积。

解
$$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{CA}=(2,4,-1),$$
$$\overrightarrow{b}=\overrightarrow{CB}=(2,2,1),$$
$$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 2 & 4 & -1\\ 2 & 2 & 1\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}4 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}\overrightarrow{i}-\begin{vmatrix}2 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}\overrightarrow{j}+\begin{vmatrix}2 & 4\\ 2 & 2\end{vmatrix}\overrightarrow{k}$$
$$=6\overrightarrow{i}-4\overrightarrow{j}-4\overrightarrow{k}=(6,-4,-4)$$
$$\Delta ABC\text{面积}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|=\frac{1}{2}\sqrt{6^2+(-4)^2+(-4)^2}$$

例 设空间中三个点 $C(1,-1,2)$，$A(3,3,1)$，$B(3,1,3)$。令 $\vec{a}=\overrightarrow{CA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{CB}$。求 $\vec{a}\times\vec{b}$ 及三角形 ΔABC 面积。

解

$$\vec{a}=\overrightarrow{CA}=(2,4,-1),$$

$$\vec{b}=\overrightarrow{CB}=(2,2,1),$$

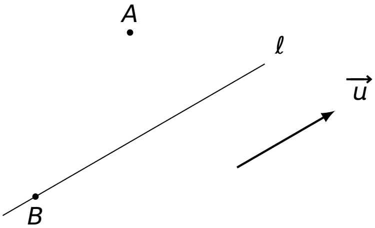
$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 4 & -1\\ 2 & 2 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}4 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & 4\\ 2 & 2\end{vmatrix}\vec{k}$$

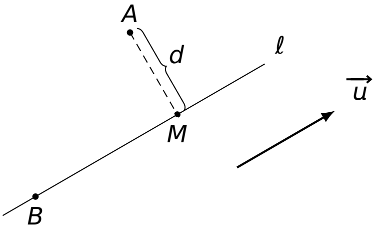
$$=6\vec{i}-4\vec{j}-4\vec{k}=(6,-4,-4)$$

$$\Delta ABC\text{面积}=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|=\frac{1}{2}\sqrt{6^2+(-4)^2+(-4)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{68}=\sqrt{17}$$

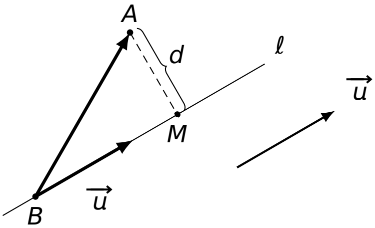
例 设 ℓ 是过点 $B(-1, 2, -1)$ 的直线，且与 $\overrightarrow{u} = (1, 1, 1)$ 平行。
求点 $A(2, 3, 1)$ 到直线 ℓ 的距离 d。



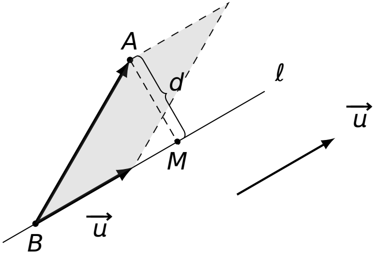
例 设 ℓ 是过点 $B(-1, 2, -1)$ 的直线，且与 $\overrightarrow{u} = (1, 1, 1)$ 平行。
求点 $A(2, 3, 1)$ 到直线 ℓ 的距离 d。



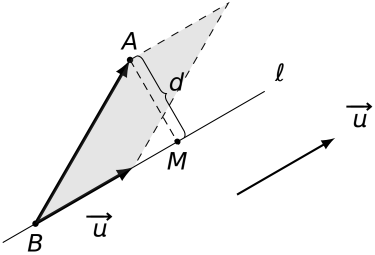
例 设 ℓ 是过点 $B(-1, 2, -1)$ 的直线，且与 $\overrightarrow{u} = (1, 1, 1)$ 平行。
求点 $A(2, 3, 1)$ 到直线 ℓ 的距离 d。



例 设 ℓ 是过点 $B(-1, 2, -1)$ 的直线，且与 $\overrightarrow{u} = (1, 1, 1)$ 平行。
求点 $A(2, 3, 1)$ 到直线 ℓ 的距离 d。



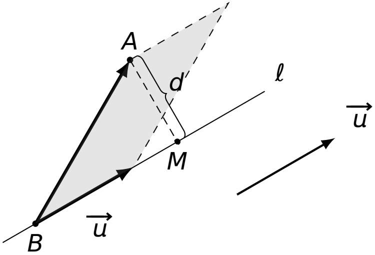
例 设 ℓ 是过点 $B(-1, 2, -1)$ 的直线，且与 $\overrightarrow{u}=(1, 1, 1)$ 平行。
求点 $A(2, 3, 1)$ 到直线 ℓ 的距离 d。



解

$$d=\frac{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{u}\text{ 张成平行四边形面积}}{|\overrightarrow{u}|}$$

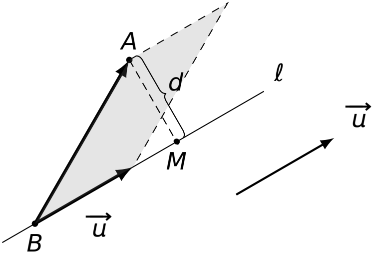
例 设 ℓ 是过点 $B(-1, 2, -1)$ 的直线，且与 $\overrightarrow{u} = (1, 1, 1)$ 平行。
求点 $A(2, 3, 1)$ 到直线 ℓ 的距离 d。



解

$$d = \frac{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{u}\ \text{张成平行四边形面积}}{|\overrightarrow{u}|} = \frac{|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{u}|}{|\overrightarrow{u}|}$$

例 设 ℓ 是过点 $B(-1, 2, -1)$ 的直线，且与 $\overrightarrow{u} = (1, 1, 1)$ 平行。
求点 $A(2, 3, 1)$ 到直线 ℓ 的距离 d。

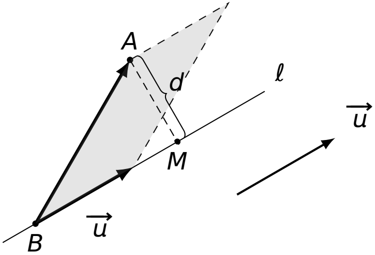


解 $\overrightarrow{BA} =$

$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{u} =$

$$d = \frac{\overrightarrow{BA},\ \overrightarrow{u}\ \text{张成平行四边形面积}}{|\overrightarrow{u}|} = \frac{|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{u}|}{|\overrightarrow{u}|}$$

例 设 ℓ 是过点 $B(-1, 2, -1)$ 的直线，且与 $\overrightarrow{u} = (1, 1, 1)$ 平行。
求点 $A(2, 3, 1)$ 到直线 ℓ 的距离 d。

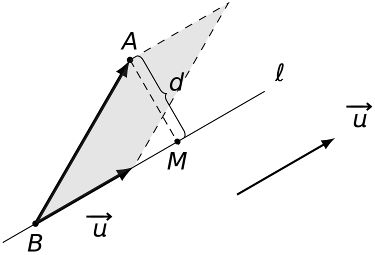


解 $\overrightarrow{BA} = (3, 1, 2)$

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{u} =$$

$$d = \frac{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{u} \text{ 张成平行四边形面积}}{|\overrightarrow{u}|} = \frac{|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{u}|}{|\overrightarrow{u}|}$$

例 设 ℓ 是过点 $B(-1, 2, -1)$ 的直线，且与 $\overrightarrow{u} = (1, 1, 1)$ 平行。
求点 $A(2, 3, 1)$ 到直线 ℓ 的距离 d。

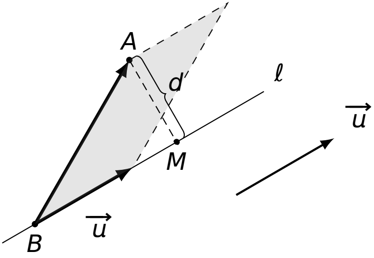


解 $\overrightarrow{BA} = (3, 1, 2)$

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{u} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$d = \frac{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{u}\text{ 张成平行四边形面积}}{|\overrightarrow{u}|} = \frac{|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{u}|}{|\overrightarrow{u}|}$$

例 设 ℓ 是过点 $B(-1, 2, -1)$ 的直线，且与 $\overrightarrow{u} = (1, 1, 1)$ 平行。
求点 $A(2, 3, 1)$ 到直线 ℓ 的距离 d。



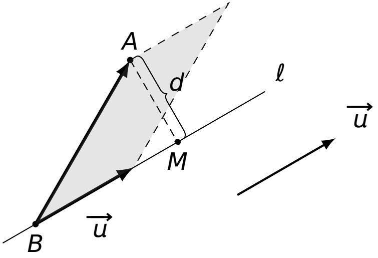
解 $\overrightarrow{BA} = (3, 1, 2)$

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{u} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= = \left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right)$$

$$d = \frac{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{u} \text{张成平行四边形面积}}{|\overrightarrow{u}|} = \frac{|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{u}|}{|\overrightarrow{u}|}$$

例 设 ℓ 是过点 $B(-1, 2, -1)$ 的直线，且与 $\overrightarrow{u} = (1, 1, 1)$ 平行。
求点 $A(2, 3, 1)$ 到直线 ℓ 的距离 d。



解

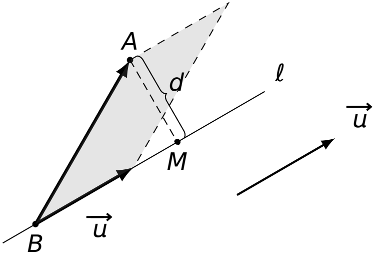
$$\overrightarrow{BA} = (3, 1, 2)$$

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{u} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= = \left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-1, -1, 2)$$

$$d = \frac{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{u}\text{ 张成平行四边形面积}}{|\overrightarrow{u}|} = \frac{|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{u}|}{|\overrightarrow{u}|}$$

例 设 ℓ 是过点 $B(-1,2,-1)$ 的直线，且与 $\overrightarrow{u}=(1,1,1)$ 平行。
求点 $A(2,3,1)$ 到直线 ℓ 的距离 d。



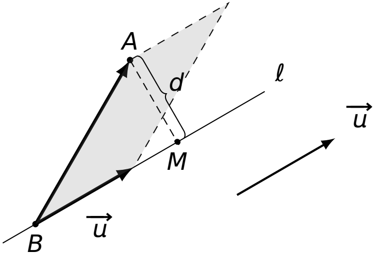
解 $\overrightarrow{BA}=(3,1,2)$

$$\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{u}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$==\left(\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\right)=(-1,-1,2)$$

$$d=\frac{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{u}\text{张成平行四边形面积}}{|\overrightarrow{u}|}=\frac{|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{u}|}{|\overrightarrow{u}|}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$$

例 设 ℓ 是过点 $B(-1, 2, -1)$ 的直线，且与 $\overrightarrow{u} = (1, 1, 1)$ 平行。
求点 $A(2, 3, 1)$ 到直线 ℓ 的距离 d。



解 $\overrightarrow{BA} = (3, 1, 2)$

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{u} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= = \left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-1, -1, 2)$$

$$d = \frac{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{u}\text{张成平行四边形面积}}{|\overrightarrow{u}|} = \frac{|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{u}|}{|\overrightarrow{u}|} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$$