第 09 周作业解答

练习 1. 设 D 是平面上由直线 $y=2x$、x 轴和 $x=\frac{\pi}{2}$ 所围成的闭区域。求函数 $f(x,\,y)=e^{1-\cos 2x}\cos y+xy,\,(x,y)\in D$ 的图像，其下方的体积 V。

解将 D 视为 X 型区域：$D=\{(x,\,y)|\,0\le y\le 2x,\,0\le x\le\frac{\pi}{2}\}$。所以

$$V=\iint_D f(x,\,y)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^{2x}\left(e^{1-\cos 2x}\cos y+xy\right)dy\right]dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\left(e^{1-\cos 2x}\sin y+\frac{1}{2}xy^2\right)\Big|_0^{2x}\right]dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[e^{1-\cos 2x}\sin(2x)+2x^3\right]dx=\frac{1}{2}\left(e^{1-\cos 2x}+x^4\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left[e^2+\left(\frac{\pi}{2}\right)^4-1\right].$$

练习 2. 设 D 是平面上由抛物线 $x=4-y^2$ 与 y 轴所围成的闭区域。设函数 $f(x,\,y)=2x+1$ 和 $g(x,\,y)=-x-3y-6$ 定义在 D 上。求 $f(x,\,y)$ 和 $g(x,\,y)$ 的图像所围成三维区域的体积 V。

解将 D 视为 Y 型区域：$D=\{(x,\,y)|\,0\le x\le 4-y^2,\,-2\le y\le 2\}$。所以

$$V=\iint_D[f(x,\,y)-g(x,\,y)]\,dxdy=\iint_D(3x+3y+7)\,dxdy=\int_{-2}^{2}\left[\int_0^{4-y^2}(3x+3y+7)\,dx\right]dy$$
$$=\int_{-2}^{2}\left[\left(\frac{3}{2}x^2+3xy+7x\right)\Big|_0^{4-y^2}\right]dy=\int_{-2}^{2}\left[\left(\frac{3}{2}x^2+3xy+7x\right)\Big|_0^{4-y^2}\right]dy$$
$$=\int_{-2}^{2}\left[\frac{3}{2}y^4-3y^3-19y^2+12y+52\right]dy=2\int_0^2\left[\frac{3}{2}y^4-19y^2+52\right]dy$$
$$=2\left(\frac{3}{10}y^5-\frac{19}{3}y^3+52y\right)\Big|_0^2=\frac{1888}{15}.$$

练习 3. 求圆锥面 $z^2=x^2+y^2$ 在区域 $x\ge 0,\,y\ge 0,\,0\le z\le 1$ 的部分的面积 A。

解设 $D=\{(x,\,y)|\,0\le x,\,0\le y,\,x^2+y^2\le 1\}=\{(\rho,\,\theta)|\,0\le\rho\le 1,\,0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\}$，$z=f(x,\,y)=\sqrt{x^2+y^2}$。所以 A 等于函数 $f(x,\,y),\,(x,\,y)\in D$ 图形面积：

$$A=\iint_D\sqrt{1+(f_x)^2+(f_y)^2}dxdy=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}dxdy$$
$$=\sqrt{2}\iint_D dxdy=\sqrt{2}|D|=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi.$$

练习 4. 计算 $\iiint_\Omega zdv$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域。分别用“先一后二”及“先二后一”的两种方法化为累次积分进行计算。

解 “先一后二”法：Ω 在 xoy 坐标面上的投影是 $D_{xy}=\{(x,\,y)|\,x^2+y^2\le 1\}$，

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega zdv &= \iint_{D_{xy}}\left[\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} zdz\right]dxdy = \iint_{D_{xy}}\left[\frac{1}{2}z^2\Big|_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}\right]dxdy\\ &= \frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}\left[2-x^2-y^2-(x^2+y^2)^2\right]dxdy\\ &\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}\left[2-\rho^2-\rho^4\right]\cdot\rho d\rho d\theta\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^1\left[2-\rho^2-\rho^4\right]\cdot\rho d\rho\right\}d\theta = \pi\int_0^1\left[2\rho-\rho^3-\rho^5\right]d\rho\\ &= \pi\left(\rho^2-\frac{1}{4}\rho^4-\frac{1}{6}\rho^6\right)\Big|_0^1 = \frac{7}{12}\pi\end{aligned}$$

“先二后一”法：$0\le z\le\sqrt{2}$。当 $0\le z\le 1$ 时，截面 $D_z=\{(x,\,y)|\,x^2+y^2\le z\}$；当 $1\le z\le\sqrt{2}$ 时，截面 $D_z=\{(x,\,y)|\,x^2+y^2\le 2-z^2\}$。

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega zdv &= \int_0^{\sqrt{2}}\left[\iint_{D_z} zdxdy\right]dz = \int_0^{\sqrt{2}} z\left[\iint_{D_z} dxdy\right]dz = \int_0^{\sqrt{2}} z|D_z|dz\\ &= \int_0^1 z|D_z|dz + \int_1^{\sqrt{2}} z|D_z|dz\\ &= \int_0^1 z(\pi z)dz + \int_1^{\sqrt{2}} z\pi(2-z^2)dz\\ &= \frac{1}{3}\pi z^3\Big|_0^1 + \pi(z^2-\frac{1}{4}z^4)\Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{7}{12}\pi\end{aligned}$$

练习 5. 计算 $\iiint_\Omega x^2\cos zdv$，其中 Ω 是由 $z=0,\,z=\frac{\pi}{2},\,y=0,\,y=1,\,x=0$ 及 $x+y=1$ 所围成的闭区域。

解 “先一后二”法：Ω 在 xoy 坐标面上的投影是 $D_{xy}=\{(x,\,y)|\,0\le x,\,0\le y,\,x+y\le 1\}$。$\Omega=\{(x,\,y,\,z)|\,0\le z\le\frac{\pi}{2},\,(x,\,y)\in D_{xy}\}$。

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega x^2\cos zdv &= \iint_{D_{xy}}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos zdz\right]dxdy = \iint_{D_{xy}}\left[x^2\sin z\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right]dxdy\\ &= \iint_{D_{xy}} x^2dxdy = \int_0^1\left[\int_0^{1-x} x^2dy\right]dx = \int_0^1\left[x^2(1-x)\right]dx\\ &= \left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{12}.\end{aligned}$$

练习 6. 计算 $\iiint_\Omega xdv$，其中 Ω 是由 $x=0,\,y=0,\,z=2$ 及 $z=x^2+y^2$ 在第一卦象所围成的闭区域。

解 “先一后二”法：Ω 在 xoy 坐标面上的投影是 $D_{xy} = \{(x,\,y)|\,0 \le x,\,0 \le y,\,x^2+y^2 \le 2\}$。

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega x dv &= \iint_{D_{xy}} \left[\int_{x^2+y^2}^{2} xdz\right] dxdy = \iint_{D_{xy}} \left[x(2-x^2-y^2)\right] dxdy \\ &\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \iint_{D_{xy}} \rho\cos\theta\cdot(2-\rho^2)\cdot\rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{\sqrt{2}} (2\rho^2-\rho^4)\cos\theta d\rho\right] d\theta = \left[\int_0^{\sqrt{2}} (2\rho^2-\rho^4) d\rho\right]\cdot\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta\right] \\ &= \frac{8}{15}\sqrt{2}.\end{aligned}$$

练习 7. 计算 $\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)dxdydz$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2 \le 1$。

解 用球面坐标计算：

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)dxdydz &= \int_0^{2\pi} \left\{\int_0^{\pi} \left[\int_0^1 \rho^2\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho\right] d\varphi\right\} d\theta \\ &= 2\pi\left[\int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi\right]\cdot\left[\int_0^1 \rho^4 d\rho\right] \\ &= 2\pi\cdot 2\cdot\frac{1}{5} = \frac{4}{5}\pi\end{aligned}$$