第 06 周作业解答

练习 1. 设 A 为 n 阶方阵，分别解答：

1. 假设 $|A|=-2$，计算 $\left|2|A|A^T\right|$。
2. 假设 $AA^T=I_n$ 且 $|A|<0$，计算 $|A|$。

解 1. $\left|2|A|A^T\right|=(2|A|)^n|A^T|=(2|A|)^n|A|=2^n|A|^{n+1}=2^n(-2)^{n+1}=(-1)^{n+1}2^{2n+1}$。
2. 计算等式 $AA^T=I_n$ 两边的行列式：

$$1=|I_n|=|AA^T|=|A|\cdot|A^T|=|A|\cdot|A|$$

所以 $|A|=\pm1$。又因为 $|A|<0$，所以 $|A|=-1$。

练习 2. 判断 3 阶方阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&3\\1&-1&1\\1&4&-2\end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出逆矩阵。

解 1. 计算行列式：

$$D=\begin{vmatrix}2&1&3\\1&-1&1\\1&4&-2\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_2]{r_1-2r_2}\begin{vmatrix}0&3&1\\1&-1&1\\0&5&-3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}3&1\\5&-3\end{vmatrix}=14\neq0$$

所以 A 可逆。
2. 计算伴随矩阵：

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&14&4\\3&-7&1\\5&-7&-3\end{pmatrix}$$

3. 所以逆矩阵为

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}-2&14&4\\3&-7&1\\5&-7&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/7&1&2/7\\3/14&-1/2&1/14\\5/14&-1/2&-3/14\end{pmatrix}$$

练习 3. 判断 2 阶方阵 $A=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出逆矩阵。

解 1. 计算行列式：$|A|=\begin{vmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{vmatrix}=1\neq0$ 所以可逆。

2. 计算伴随矩阵：$A^*=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$。

3. 所以逆矩阵为：$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$。

练习 4. 设 A 为 4 阶方阵，满足 $|A|=\frac{1}{2}$，求 $\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|$ 的值。

解利用恒等式 $AA^* = |A|I$ 知：$A^* = \frac{1}{2}A^{-1}$。所以

$$\left|(3A)^{-1} - 2A^*\right| = \left|\frac{1}{3}A^{-1} - 2\cdot\frac{1}{2}A^{-1}\right| = \left|-\frac{2}{3}A^{-1}\right| = \left(-\frac{2}{3}\right)^4 \left|A^{-1}\right| = \left(-\frac{2}{3}\right)^4 |A|^{-1} = \left(-\frac{2}{3}\right)^4 \cdot 2 = \frac{32}{81}$$

练习 5. 设 A, B 为 n 阶对称方阵，证明方阵 $AB+BA$ 也是对称。

解因为

$$(AB+BA)^T = (AB)^T + (BA)^T = B^TA^T + A^TB^T = BA + AB = AB + BA$$

所以 $AB+BA$ 是对称。