第 7 章 c：可降阶微分方程

数学系　　梁卓滨

2019-2020 学年 II

提要

假设 $y = y(x)$ 为未知函数，探讨如何求解以下三种类型的：

- $y^{(n)} = f(x)$
- $y'' = f(x, y')$
- $y'' = f(y, y')$

提要

假设 $y = y(x)$ 为未知函数，探讨如何求解以下三种类型的：

- $y^{(n)} = f(x)$
- $y'' = f(x, y')$
- $y'' = f(y, y')$

上述方程都是所谓 **可降阶微分方程**

Outline

♦ $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程

♣ $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程

♥ $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程

We are here now...

♦ $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程

♣ $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程

♥ $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程

$y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程

计算通解的方法：连续 n 次积分

$y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程

计算通解的方法：连续 n 次积分

$$y^{(n)} = f(x)$$

$$\xRightarrow{\text{两边积分}}$$

$y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程

计算通解的方法：连续 n 次积分

$$y^{(n)} = f(x)$$

$$\xRightarrow{\text{两边积分}} \quad y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1$$

$y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程

计算通解的方法：连续 n 次积分

$$y^{(n)} = f(x)$$

$$\xRightarrow{\text{两边积分}} \quad y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1$$

$$\xRightarrow{\text{两边积分}}$$

$y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程

计算通解的方法：连续 n 次积分

$$y^{(n)} = f(x)$$

$$\xRightarrow{\text{两边积分}} \quad y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1$$

$$\xRightarrow{\text{两边积分}} \quad y^{(n-2)} = \int \left[\int f(x)dx + C_1\right]dx + C_2$$

$$\cdots\cdots \cdots\cdots$$

$y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程

计算通解的方法：连续 n 次积分

$$y^{(n)} = f(x)$$

$$\xRightarrow{\text{两边积分}} \quad y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1$$

$$\xRightarrow{\text{两边积分}} \quad y^{(n-2)} = \int \left[\int f(x)dx + C_1 \right] dx + C_2$$

$$\cdots\cdots \quad \cdots\cdots$$

$$\xRightarrow{\text{两边积分}}$$

$y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程

计算通解的方法：连续 n 次积分

$$y^{(n)} = f(x)$$

$$\xrightarrow{\text{两边积分}} \quad y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1$$

$$\xrightarrow{\text{两边积分}} \quad y^{(n-2)} = \int \left[\int f(x)dx + C_1\right] dx + C_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\xrightarrow{\text{两边积分}} \quad y = \int \left\{ \cdots \int \left[\int f(x)dx + C_1\right] dx + C_2 \cdots \right\} dx + C_n$$

例 1 求 $y''' = e^{2x} - \cos x$ 的通解.

解

例 1 求 $y''' = e^{2x} - \cos x$ 的通解.

解 连续两边积分

$$y''' = e^{2x} - \cos x \quad \Rightarrow$$

例 1 求 $y''' = e^{2x} - \cos x$ 的通解.

解 连续两边积分

$$y''' = e^{2x} - \cos x \quad \Rightarrow \quad y'' =$$

例 1 求 $y''' = e^{2x} - \cos x$ 的通解.

解 连续两边积分

$$y''' = e^{2x} - \cos x \quad \Rightarrow \quad y'' = \frac{1}{2}e^{2x} -$$

例 1 求 $y''' = e^{2x} - \cos x$ 的通解.

解 连续两边积分

$$y''' = e^{2x} - \cos x \quad \Rightarrow \quad y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x$$

例 1 求 $y''' = e^{2x} - \cos x$ 的通解.

解 连续两边积分

$$y''' = e^{2x} - \cos x \quad \Rightarrow \quad y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1$$

例 1 求 $y''' = e^{2x} - \cos x$ 的通解.

解 连续两边积分

$$y''' = e^{2x} - \cos x \quad \Rightarrow \quad y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1$$

$$\Rightarrow \quad y' =$$

例 1 求 $y''' = e^{2x} - \cos x$ 的通解.

解 连续两边积分

$$y''' = e^{2x} - \cos x \quad \Rightarrow \quad y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{1}{4}e^{2x}$$

例 1 求 $y''' = e^{2x} - \cos x$ 的通解.

解 连续两边积分

$$y''' = e^{2x} - \cos x \quad \Rightarrow \quad y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x$$

例 1 求 $y''' = e^{2x} - \cos x$ 的通解.

解 连续两边积分

$$
\begin{aligned}
y''' = e^{2x} - \cos x \quad &\Rightarrow \quad y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1 \\
&\Rightarrow \quad y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1 x
\end{aligned}
$$

例 1 求 $y''' = e^{2x} - \cos x$ 的通解.

解 连续两边积分

$$
\begin{aligned}
y''' = e^{2x} - \cos x \quad &\Rightarrow \quad y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1 \\
&\Rightarrow \quad y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1 x + C_2
\end{aligned}
$$

例 1 求 $y''' = e^{2x} - \cos x$ 的通解.

解 连续两边积分

$$y''' = e^{2x} - \cos x \quad \Rightarrow \quad y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1 x + C_2$$

$$\Rightarrow \quad y =$$

例 1 求 $y''' = e^{2x} - \cos x$ 的通解.

解 连续两边积分

$$
\begin{aligned}
y''' = e^{2x} - \cos x \quad &\Rightarrow \quad y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1 \\
&\Rightarrow \quad y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1 x + C_2 \\
&\Rightarrow \quad y = \frac{1}{8}e^{2x}
\end{aligned}
$$

例 1 求 $y''' = e^{2x} - \cos x$ 的通解.

解 连续两边积分

$$
\begin{aligned}
y''' = e^{2x} - \cos x \quad & \Rightarrow \quad y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1 \\
& \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1 x + C_2 \\
& \Rightarrow \quad y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x
\end{aligned}
$$

例 1 求 $y''' = e^{2x} - \cos x$ 的通解.

解 连续两边积分

$$
\begin{aligned}
y''' = e^{2x} - \cos x \quad &\Rightarrow \quad y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1 \\
&\Rightarrow \quad y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1 x + C_2 \\
&\Rightarrow \quad y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + \frac{1}{2}C_1 x^2
\end{aligned}
$$

例 1 求 $y''' = e^{2x} - \cos x$ 的通解.

解 连续两边积分

$$
\begin{aligned}
y''' = e^{2x} - \cos x \quad & \Rightarrow \quad y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1 \\
& \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1 x + C_2 \\
& \Rightarrow \quad y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x
\end{aligned}
$$

例 1 求 $y''' = e^{2x} - \cos x$ 的通解.

解 连续两边积分

$$
\begin{aligned}
y''' = e^{2x} - \cos x \quad &\Rightarrow \quad y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1 \\
&\Rightarrow \quad y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1 x + C_2 \\
&\Rightarrow \quad y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3
\end{aligned}
$$

例 1 求 $y''' = e^{2x} - \cos x$ 的通解.

解 连续两边积分

$$
\begin{aligned}
y''' = e^{2x} - \cos x \quad &\Rightarrow \quad y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1 \\
&\Rightarrow \quad y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1 x + C_2 \\
&\Rightarrow \quad y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3
\end{aligned}
$$

例 2 求 $y''' = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 的通解.

例 1 求 $y''' = e^{2x} - \cos x$ 的通解.

解 连续两边积分

$$y''' = e^{2x} - \cos x \quad \Rightarrow \quad y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1 x + C_2$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

例 2 求 $y''' = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 的通解.

解 连续两边积分

$$y''' = x^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow$$

例 1 求 $y''' = e^{2x} - \cos x$ 的通解.

解 连续两边积分

$$y''' = e^{2x} - \cos x \quad \Rightarrow \quad y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1$$
$$\Rightarrow \quad y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1 x + C_2$$
$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

例 2 求 $y''' = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 的通解.

解 连续两边积分

$$y''' = x^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad y'' =$$

例 1 求 $y''' = e^{2x} - \cos x$ 的通解.

解 连续两边积分

$$y''' = e^{2x} - \cos x \quad \Rightarrow \quad y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1 x + C_2$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

例 2 求 $y''' = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 的通解.

解 连续两边积分

$$y''' = x^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad y'' = \quad x^{\frac{1}{2}}$$

例 1 求 $y''' = e^{2x} - \cos x$ 的通解.

解 连续两边积分

$$y''' = e^{2x} - \cos x \quad \Rightarrow \quad y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1 x + C_2$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

例 2 求 $y''' = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 的通解.

解 连续两边积分

$$y''' = x^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad y'' = 2x^{\frac{1}{2}}$$

暨南大学 JINAN UNIVERSITY

例 1 求 $y''' = e^{2x} - \cos x$ 的通解.

解 连续两边积分

$$
\begin{aligned}
y''' = e^{2x} - \cos x \quad &\Rightarrow \quad y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1 \\
&\Rightarrow \quad y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1 x + C_2 \\
&\Rightarrow \quad y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3
\end{aligned}
$$

例 2 求 $y''' = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 的通解.

解 连续两边积分

$$
y''' = x^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad y'' = 2x^{\frac{1}{2}} + C_1
$$

例 1 求 $y''' = e^{2x} - \cos x$ 的通解.

解 连续两边积分

$$
\begin{aligned}
y''' = e^{2x} - \cos x \quad &\Rightarrow \quad y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1 \\
&\Rightarrow \quad y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1 x + C_2 \\
&\Rightarrow \quad y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3
\end{aligned}
$$

例 2 求 $y''' = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 的通解.

解 连续两边积分

$$
y''' = x^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad y'' = 2x^{\frac{1}{2}} + C_1 \quad \Rightarrow \quad y' =
$$

例 1 求 $y''' = e^{2x} - \cos x$ 的通解.

解 连续两边积分

$$y''' = e^{2x} - \cos x \quad \Rightarrow \quad y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1 x + C_2$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

例 2 求 $y''' = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 的通解.

解 连续两边积分

$$y''' = x^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad y'' = 2x^{\frac{1}{2}} + C_1 \quad \Rightarrow \quad y' = \qquad x^{\frac{3}{2}}$$

例 1 求 $y''' = e^{2x} - \cos x$ 的通解.

解 连续两边积分

$$
\begin{aligned}
y''' = e^{2x} - \cos x \quad &\Rightarrow \quad y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1 \\
&\Rightarrow \quad y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1 x + C_2 \\
&\Rightarrow \quad y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3
\end{aligned}
$$

例 2 求 $y''' = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 的通解.

解 连续两边积分

$$
y''' = x^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad y'' = 2x^{\frac{1}{2}} + C_1 \quad \Rightarrow \quad y' = 2 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}
$$

例 1 求 $y''' = e^{2x} - \cos x$ 的通解.

解 连续两边积分

$$
\begin{aligned}
y''' = e^{2x} - \cos x \quad &\Rightarrow \quad y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1 \\
&\Rightarrow \quad y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1 x + C_2 \\
&\Rightarrow \quad y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3
\end{aligned}
$$

例 2 求 $y''' = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 的通解.

解 连续两边积分

$$
y''' = x^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad y'' = 2x^{\frac{1}{2}} + C_1 \quad \Rightarrow \quad y' = 2 \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C_1 x
$$

例 1 求 $y''' = e^{2x} - \cos x$ 的通解.

解 连续两边积分

$$y''' = e^{2x} - \cos x \quad \Rightarrow \quad y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1 x + C_2$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

例 2 求 $y''' = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 的通解.

解 连续两边积分

$$y''' = x^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad y'' = 2x^{\frac{1}{2}} + C_1 \quad \Rightarrow \quad y' = 2 \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C_1 x + C_2$$

例 1 求 $y''' = e^{2x} - \cos x$ 的通解.

解 连续两边积分

$$y''' = e^{2x} - \cos x \quad \Rightarrow \quad y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1 x + C_2$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

例 2 求 $y''' = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 的通解.

解 连续两边积分

$$y''' = x^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad y'' = 2x^{\frac{1}{2}} + C_1 \quad \Rightarrow \quad y' = 2 \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C_1 x + C_2$$

$$\Rightarrow \quad y =$$

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

例 1 求 $y''' = e^{2x} - \cos x$ 的通解.

解 连续两边积分

$$
\begin{aligned}
y''' = e^{2x} - \cos x \quad &\Rightarrow \quad y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1 \\
&\Rightarrow \quad y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1 x + C_2 \\
&\Rightarrow \quad y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3
\end{aligned}
$$

例 2 求 $y''' = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 的通解.

解 连续两边积分

$$
\begin{aligned}
y''' = x^{-\frac{1}{2}} \quad &\Rightarrow \quad y'' = 2x^{\frac{1}{2}} + C_1 \quad \Rightarrow \quad y' = 2 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C_1 x + C_2 \\
&\Rightarrow \quad y = \qquad\qquad x^{\frac{5}{2}}
\end{aligned}
$$

例 1 求 $y''' = e^{2x} - \cos x$ 的通解.

解 连续两边积分

$$y''' = e^{2x} - \cos x \quad \Rightarrow \quad y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1$$
$$\Rightarrow \quad y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1 x + C_2$$
$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

例 2 求 $y''' = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 的通解.

解 连续两边积分

$$y''' = x^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad y'' = 2x^{\frac{1}{2}} + C_1 \quad \Rightarrow \quad y' = 2 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C_1 x + C_2$$
$$\Rightarrow \quad y = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}}$$

暨南大学 JINAN UNIVERSITY

例 1 求 $y''' = e^{2x} - \cos x$ 的通解.

解 连续两边积分

$$y''' = e^{2x} - \cos x \quad \Rightarrow \quad y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1 x + C_2$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

例 2 求 $y''' = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 的通解.

解 连续两边积分

$$y''' = x^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad y'' = 2x^{\frac{1}{2}} + C_1 \quad \Rightarrow \quad y' = 2 \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C_1 x + C_2$$

$$\Rightarrow \quad y = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}C_1 x^2$$

例 1 求 $y''' = e^{2x} - \cos x$ 的通解.

解 连续两边积分

$$y''' = e^{2x} - \cos x \quad \Rightarrow \quad y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1$$
$$\Rightarrow \quad y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1 x + C_2$$
$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

例 2 求 $y''' = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 的通解.

解 连续两边积分

$$y''' = x^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad y'' = 2x^{\frac{1}{2}} + C_1 \quad \Rightarrow \quad y' = 2 \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C_1 x + C_2$$
$$\Rightarrow \quad y = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x$$

例 1 求 $y''' = e^{2x} - \cos x$ 的通解.

解 连续两边积分

$$y''' = e^{2x} - \cos x \quad \Rightarrow \quad y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1 x + C_2$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

例 2 求 $y''' = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 的通解.

解 连续两边积分

$$y''' = x^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad y'' = 2x^{\frac{1}{2}} + C_1 \quad \Rightarrow \quad y' = 2 \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C_1 x + C_2$$

$$\Rightarrow \quad y = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

下面考虑两类二阶微分方程：

- $y'' = f(x, y')$
- $y'' = f(y, y')$

下面考虑两类二阶微分方程：

- $y'' = f(x, y')$，特点：不含 y
- $y'' = f(y, y')$

下面考虑两类二阶微分方程：

- $y'' = f(x, y')$，特点：不含 y
- $y'' = f(y, y')$，特点：不含 x

下面考虑两类二阶微分方程：

- $y'' = f(x, y')$，特点：不含 y
- $y'' = f(y, y')$，特点：不含 x

这两类特殊类型的二阶微分方程，都可以通过变量代换，降阶成一阶微分方程。

We are here now...

♦ $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程

♣ $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程

♥ $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程

$y'' = f(x, y')$ 型的微分方程

将 $y'' = f(x, y')$ 看成关于 y' 的一阶微分方程.

计算通解的方法:

$y'' = f(x, y')$ 型的微分方程

将 $y'' = f(x, y')$ 看成关于 y' 的一阶微分方程.

计算通解的方法:

1. 作变量代换 $p = y'$，得

$y'' = f(x, y')$ 型的微分方程

将 $y'' = f(x, y')$ 看成关于 y' 的一阶微分方程.

计算通解的方法:

1. 作变量代换 $p = y'$，得

$$= f(x, p)$$

$y'' = f(x, y')$ 型的微分方程

将 $y'' = f(x, y')$ 看成关于 y' 的一阶微分方程.

计算通解的方法:

1. 作变量代换 $p = y'$，得

$$p' = f(x, p)$$

$y'' = f(x, y')$ 型的微分方程

将 $y'' = f(x, y')$ 看成关于 y' 的一阶微分方程.

计算通解的方法：

1. 作变量代换 $p = y'$，得

$$p' = f(x, p)$$

（降阶得到关于 p 的一阶微分方程）

$y'' = f(x, y')$ 型的微分方程

将 $y'' = f(x, y')$ 看成关于 y' 的一阶微分方程.

计算通解的方法:

1. 作变量代换 $p = y'$，得
$$p' = f(x, p)$$
（降阶得到关于 p 的一阶微分方程）
2. 利用求解一阶微分方程的方法，假设可求出通解

$y'' = f(x, y')$ 型的微分方程

将 $y'' = f(x, y')$ 看成关于 y' 的一阶微分方程.

计算通解的方法:

1. 作变量代换 $p = y'$，得
$$p' = f(x, p)$$
（降阶得到关于 p 的一阶微分方程）
2. 利用求解一阶微分方程的方法，假设可求出通解
$$p = \varphi(x, C_1)$$
3. 代回变量 $p = y'$ 得:

$y'' = f(x, y')$ 型的微分方程

将 $y'' = f(x, y')$ 看成关于 y' 的一阶微分方程.

计算通解的方法:

1. 作变量代换 $p = y'$，得
$$p' = f(x, p)$$
（降阶得到关于 p 的一阶微分方程）
2. 利用求解一阶微分方程的方法，假设可求出通解
$$p = \varphi(x, C_1)$$
3. 代回变量 $p = y'$ 得:
$$y' = \varphi(x, C_1)$$

$y'' = f(x, y')$ 型的微分方程

将 $y'' = f(x, y')$ 看成关于 y' 的一阶微分方程.

计算通解的方法:

1. 作变量代换 $p = y'$，得
$$p' = f(x, p)$$
（降阶得到关于 p 的一阶微分方程）
2. 利用求解一阶微分方程的方法，假设可求出通解
$$p = \varphi(x, C_1)$$
3. 代回变量 $p = y'$ 得:
$$y' = \varphi(x, C_1)$$
所以
$$y = \int \varphi(x, C_1) dx + C_2$$

例 1 求 $(1+x^2)y'' = 2xy'$ 的通解.

解

例 1 求 $(1+x^2)y'' = 2xy'$ 的通解.

解 1. 作变量代换 $p = y'$，得

例 1 求 $(1+x^2)y'' = 2xy'$ 的通解.

解 1. 作变量代换 $p = y'$，得

$$p' = \frac{2x}{1+x^2}p$$

例 1 求 $(1+x^2)y'' = 2xy'$ 的通解.

解 1. 作变量代换 $p = y'$，得

$$p' = \frac{2x}{1+x^2}p$$

2. 这是可分离变量微分方程

例 1 求 $(1+x^2)y'' = 2xy'$ 的通解.

解 1. 作变量代换 $p = y'$，得

$$p' = \frac{2x}{1+x^2}p$$

2. 这是可分离变量微分方程

$$\frac{1}{p}dp = \frac{2x}{1+x^2}dx$$

例 1 求 $(1+x^2)y'' = 2xy'$ 的通解.

解 1. 作变量代换 $p = y'$，得

$$p' = \frac{2x}{1+x^2}p$$

2. 这是可分离变量微分方程

$$\frac{1}{p}dp = \frac{2x}{1+x^2}dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{p}dp = \int \frac{2x}{1+x^2}dx$$

例 1 求 $(1+x^2)y''=2xy'$ 的通解.

解 1. 作变量代换 $p=y'$，得

$$p'=\frac{2x}{1+x^2}p$$

2. 这是可分离变量微分方程

$$\frac{1}{p}dp=\frac{2x}{1+x^2}dx \quad \Rightarrow \quad \int\frac{1}{p}dp=\int\frac{2x}{1+x^2}dx$$

$$\Rightarrow \quad \ln|p|=\ln(1+x^2)+C_1'$$

例 1 求 $(1+x^2)y'' = 2xy'$ 的通解.

解 1. 作变量代换 $p = y'$，得

$$p' = \frac{2x}{1+x^2} p$$

2. 这是可分离变量微分方程

$$\frac{1}{p}dp = \frac{2x}{1+x^2}dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{p}dp = \int \frac{2x}{1+x^2}dx$$

$$\Rightarrow \quad \ln|p| = \ln(1+x^2) + C_1'$$

$$\Rightarrow \quad p = C_1(1+x^2)$$

例 1 求 $(1+x^2)y'' = 2xy'$ 的通解.

解 1. 作变量代换 $p = y'$，得

$$p' = \frac{2x}{1+x^2}p$$

2. 这是可分离变量微分方程

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p}dp = \frac{2x}{1+x^2}dx \quad &\Rightarrow \quad \int \frac{1}{p}dp = \int \frac{2x}{1+x^2}dx \\
&\Rightarrow \quad \ln|p| = \ln(1+x^2) + C_1' \\
&\Rightarrow \quad p = C_1(1+x^2)
\end{aligned}$$

3. 还原变量

例 1 求 $(1+x^2)y'' = 2xy'$ 的通解.

解 1. 作变量代换 $p = y'$，得

$$p' = \frac{2x}{1+x^2}p$$

2. 这是可分离变量微分方程

$$\begin{aligned} \frac{1}{p}dp = \frac{2x}{1+x^2}dx \quad & \Rightarrow \quad \int \frac{1}{p}dp = \int \frac{2x}{1+x^2}dx \\ & \Rightarrow \quad \ln|p| = \ln(1+x^2) + C_1' \\ & \Rightarrow \quad p = C_1(1+x^2) \end{aligned}$$

3. 还原变量

$$y' = C_1(1+x^2)$$

例 1 求 $(1+x^2)y''=2xy'$ 的通解.

解 1. 作变量代换 $p=y'$，得

$$p'=\frac{2x}{1+x^2}p$$

2. 这是可分离变量微分方程

$$\frac{1}{p}dp=\frac{2x}{1+x^2}dx \quad \Rightarrow \quad \int\frac{1}{p}dp=\int\frac{2x}{1+x^2}dx$$

$$\Rightarrow \quad \ln|p|=\ln(1+x^2)+C_1'$$

$$\Rightarrow \quad p=C_1(1+x^2)$$

3. 还原变量，并两边积分

$$y'=C_1(1+x^2)$$

例 1 求 $(1+x^2)y'' = 2xy'$ 的通解.

解 1. 作变量代换 $p = y'$，得

$$p' = \frac{2x}{1+x^2}p$$

2. 这是可分离变量微分方程

$$\frac{1}{p}dp = \frac{2x}{1+x^2}dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{p}dp = \int \frac{2x}{1+x^2}dx$$

$$\Rightarrow \quad \ln|p| = \ln(1+x^2) + C_1'$$

$$\Rightarrow \quad p = C_1(1+x^2)$$

3. 还原变量，并两边积分

$$y' = C_1(1+x^2) \quad \Rightarrow \quad y = C_1\int(1+x^2)dx$$

例 1 求 $(1+x^2)y''=2xy'$ 的通解.

解 1. 作变量代换 $p=y'$，得

$$p'=\frac{2x}{1+x^2}p$$

2. 这是可分离变量微分方程

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}dp=\frac{2x}{1+x^2}dx \quad &\Rightarrow \quad \int\frac{1}{p}dp=\int\frac{2x}{1+x^2}dx\\ &\Rightarrow \quad \ln|p|=\ln(1+x^2)+C_1'\\ &\Rightarrow \quad p=C_1(1+x^2)\end{aligned}$$

3. 还原变量，并两边积分

$$y'=C_1(1+x^2) \quad \Rightarrow \quad y=C_1\int(1+x^2)dx=C_1\left(\frac{1}{3}x^3+x+C_2\right)$$

例 1 求 $(1+x^2)y'' = 2xy'$ 的通解.

解 1. 作变量代换 $p = y'$，得

$$p' = \frac{2x}{1+x^2}p$$

2. 这是可分离变量微分方程

$$\frac{1}{p}dp = \frac{2x}{1+x^2}dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{p}dp = \int \frac{2x}{1+x^2}dx$$

$$\Rightarrow \quad \ln|p| = \ln(1+x^2) + C_1'$$

$$\Rightarrow \quad p = C_1(1+x^2)$$

3. 还原变量，并两边积分

$$y' = C_1(1+x^2) \quad \Rightarrow \quad y = C_1\int(1+x^2)dx = C_1\left(\frac{1}{3}x^3 + x + C_2\right)$$

思考 求在初始条件 $y|_{x=0} = 1,\ y'|_{x=0} = 3$ 的特解.

例 2 求 $y'' = y' + x$ 的通解.

解

例 2 求 $y'' = y' + x$ 的通解.

解 1. 作变量代换 $p = y'$，得

例 2 求 $y'' = y' + x$ 的通解.

解 1. 作变量代换 $p = y'$，得

$$p' = p + x$$

例 2 求 $y'' = y' + x$ 的通解.

解 1. 作变量代换 $p = y'$，得

$$p' = p + x \quad \Rightarrow \quad p' - p = x$$

例 2 求 $y'' = y' + x$ 的通解.

解 1. 作变量代换 $p = y'$，得

$$p' = p + x \quad \Rightarrow \quad p' - p = x$$

2. 这是一阶线性微分方程

例 2 求 $y'' = y' + x$ 的通解.

解 1. 作变量代换 $p = y'$，得

$$p' = p + x \quad \Rightarrow \quad p' - p = x$$

2. 这是一阶线性微分方程

2.1 齐次部分

2.2 常数变易

例 2 求 $y'' = y' + x$ 的通解.

解 1. 作变量代换 $p = y'$，得

$$p' = p + x \quad \Rightarrow \quad p' - p = x$$

2. 这是一阶线性微分方程

2.1 齐次部分 $\quad p' - p = 0$

2.2 常数变易

例 2 求 $y'' = y' + x$ 的通解.

解 1. 作变量代换 $p = y'$，得

$$p' = p + x \quad \Rightarrow \quad p' - p = x$$

2. 这是一阶线性微分方程

2.1 齐次部分 $\quad p' - p = 0 \quad \Rightarrow \quad p = Ce^x$

2.2 常数变易

例 2 求 $y'' = y' + x$ 的通解.

解 1. 作变量代换 $p = y'$，得

$$p' = p + x \quad \Rightarrow \quad p' - p = x$$

2. 这是一阶线性微分方程

2.1 齐次部分 $p' - p = 0 \quad \Rightarrow \quad p = Ce^x$

2.2 常数变易 $p = u(x)e^x$

例 2 求 $y'' = y' + x$ 的通解.

解 1. 作变量代换 $p = y'$，得

$$p' = p + x \quad \Rightarrow \quad p' - p = x$$

2. 这是一阶线性微分方程

2.1 齐次部分 $\quad p' - p = 0 \quad \Rightarrow \quad p = Ce^x$

2.2 常数变易 $\quad p = u(x)e^x \quad \Rightarrow \quad u'e^x = x$

例 2 求 $y'' = y' + x$ 的通解.

解 1. 作变量代换 $p = y'$，得

$$p' = p + x \quad \Rightarrow \quad p' - p = x$$

2. 这是一阶线性微分方程

2.1 齐次部分 $p' - p = 0 \quad \Rightarrow \quad p = Ce^x$

2.2 常数变易 $p = u(x)e^x \quad \Rightarrow \quad u'e^x = x \quad \Rightarrow \quad u' = xe^{-x}$

例 2 求 $y'' = y' + x$ 的通解.

解 1. 作变量代换 $p = y'$，得

$$p' = p + x \quad \Rightarrow \quad p' - p = x$$

2. 这是一阶线性微分方程

2.1 齐次部分 $p' - p = 0 \quad \Rightarrow \quad p = Ce^x$

2.2 常数变易 $p = u(x)e^x \quad \Rightarrow \quad u'e^x = x \quad \Rightarrow \quad u' = xe^{-x}$

$$\Rightarrow \quad u = \int xe^{-x}dx =$$

例 2 求 $y'' = y' + x$ 的通解.

解 1. 作变量代换 $p = y'$，得

$$p' = p + x \quad \Rightarrow \quad p' - p = x$$

2. 这是一阶线性微分方程

2.1 齐次部分 $\quad p' - p = 0 \quad \Rightarrow \quad p = Ce^x$

2.2 常数变易 $\quad p = u(x)e^x \quad \Rightarrow \quad u'e^x = x \quad \Rightarrow \quad u' = xe^{-x}$

$$\Rightarrow \quad u = \int xe^{-x}dx = -(1+x)e^{-x} + C_1$$

例 2 求 $y'' = y' + x$ 的通解.

解 1. 作变量代换 $p = y'$，得

$$p' = p + x \quad \Rightarrow \quad p' - p = x$$

2. 这是一阶线性微分方程

2.1 齐次部分 $p' - p = 0 \quad \Rightarrow \quad p = Ce^x$

2.2 常数变易 $p = u(x)e^x \quad \Rightarrow \quad u'e^x = x \quad \Rightarrow \quad u' = xe^{-x}$

$$\Rightarrow \quad u = \int xe^{-x}dx = -(1+x)e^{-x} + C_1$$

$$\Rightarrow \quad p = -(1+x) + C_1e^x$$

例 2 求 $y'' = y' + x$ 的通解.

解 1. 作变量代换 $p = y'$，得

$$p' = p + x \quad \Rightarrow \quad p' - p = x$$

2. 这是一阶线性微分方程

2.1 齐次部分 $p' - p = 0 \quad \Rightarrow \quad p = Ce^{x}$

2.2 常数变易 $p = u(x)e^{x} \Rightarrow \quad u'e^{x} = x \quad \Rightarrow \quad u' = xe^{-x}$

$$\Rightarrow \quad u = \int xe^{-x}dx = -(1+x)e^{-x} + C_1$$

$$\Rightarrow \quad p = -(1+x) + C_1 e^{x}$$

3. 还原变量

$$y' = -(1+x) + C_1 e^{x}$$

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

例 2 求 $y'' = y' + x$ 的通解.

解 1. 作变量代换 $p = y'$，得

$$p' = p + x \quad \Rightarrow \quad p' - p = x$$

2. 这是一阶线性微分方程

2.1 齐次部分 $\quad p' - p = 0 \quad \Rightarrow \quad p = Ce^{x}$

2.2 常数变易 $\quad p = u(x)e^{x} \Rightarrow \quad u'e^{x} = x \quad \Rightarrow \quad u' = xe^{-x}$

$$\Rightarrow \quad u = \int xe^{-x}dx = -(1+x)e^{-x} + C_1$$

$$\Rightarrow \quad p = -(1+x) + C_1 e^{x}$$

3. 还原变量，并两边积分

$$y' = -(1+x) + C_1 e^{x}$$

例 2 求 $y'' = y' + x$ 的通解.

解 1. 作变量代换 $p = y'$，得

$$p' = p + x \quad \Rightarrow \quad p' - p = x$$

2. 这是一阶线性微分方程

2.1 齐次部分 $p' - p = 0 \quad \Rightarrow \quad p = Ce^x$

2.2 常数变易 $p = u(x)e^x \quad \Rightarrow \quad u'e^x = x \quad \Rightarrow \quad u' = xe^{-x}$

$$\Rightarrow \quad u = \int xe^{-x}dx = -(1+x)e^{-x} + C_1$$

$$\Rightarrow \quad p = -(1+x) + C_1e^x$$

3. 还原变量，并两边积分

$$y' = -(1+x) + C_1e^x \quad \Rightarrow \quad y = -x - \frac{1}{2}x^2 + C_1e^x + C_2$$

We are here now...

♦ $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程

♣ $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程

♥ $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程

$y'' = f(y, y')$ 型的微分方程

计算通解的方法：

$y'' = f(y, y')$ 型的微分方程

计算通解的方法：

1. 作变量代换 $p = y'$，得：

$y'' = f(y, y')$ 型的微分方程

计算通解的方法：

1. 作变量代换 $p = y'$，得：

$$= f(y, p)$$

$y'' = f(y, y')$ 型的微分方程

计算通解的方法：

1. 作变量代换 $p = y'$，得：

$$\frac{dp}{dx} = f(y, p)$$

$y'' = f(y, y')$ 型的微分方程

计算通解的方法：

1. 作变量代换 $p = y'$，得：
$$\frac{dp}{dx} = f(y, p)$$
2. 改写：$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$

$y'' = f(y, y')$ 型的微分方程

计算通解的方法：

1. 作变量代换 $p = y'$，得：
$$\frac{dp}{dx} = f(y, p)$$
2. 改写：$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$

$y'' = f(y, y')$ 型的微分方程

计算通解的方法：

1. 作变量代换 $p = y'$，得：
$$\frac{dp}{dx} = f(y, p)$$
2. 改写：$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$. 代入上式得：
$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p)$$

$y'' = f(y, y')$ 型的微分方程

计算通解的方法：

1. 作变量代换 $p = y'$，得：
$$\frac{dp}{dx} = f(y, p)$$
2. 改写：$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$. 代入上式得：
$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p)$$
（至此，降阶得到关于 p 的一阶微分方程，自变量为 y）

$y'' = f(y, y')$ 型的微分方程

计算通解的方法：

1. 作变量代换 $p = y'$，得：

$$\frac{dp}{dx} = f(y, p)$$

2. 改写：$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$. 代入上式得：

$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p)$$

（至此，降阶得到关于 p 的一阶微分方程，自变量为 y）

3. 假设可解得：

$$p = \varphi(y, C_1)$$

$y'' = f(y, y')$ 型的微分方程

计算通解的方法：

1. 作变量代换 $p = y'$，得：
$$\frac{dp}{dx} = f(y, p)$$
2. 改写：$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$. 代入上式得：
$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p)$$
（至此，降阶得到关于 p 的一阶微分方程，自变量为 y）
3. 假设可解得：
$$y' = p = \varphi(y, C_1)$$

$y'' = f(y, y')$ 型的微分方程

计算通解的方法：

1. 作变量代换 $p = y'$，得：
$$\frac{dp}{dx} = f(y, p)$$
2. 改写：$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$. 代入上式得：
$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p)$$
（至此，降阶得到关于 p 的一阶微分方程，自变量为 y）
3. 假设可解得：
$$y' = p = \varphi(y, C_1) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1)$$

$y'' = f(y, y')$ 型的微分方程

计算通解的方法：

1. 作变量代换 $p = y'$，得：
$$\frac{dp}{dx} = f(y, p)$$
2. 改写：$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$. 代入上式得：
$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p)$$
（至此，降阶得到关于 p 的一阶微分方程，自变量为 y）
3. 假设可解得：
$$y' = p = \varphi(y, C_1) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1)$$
所以
$$x = \int \frac{1}{\varphi(y, C_1)} dy + C_2$$

例 1 求微分方程 $yy'' - y'^2 = 0$ 的通解.

例 1 求微分方程 $yy'' - y'^2 = 0$ 的通解.

解 1. 作变量代换 $p = y'$:

例 1 求微分方程 $yy'' - y'^2 = 0$ 的通解.

解 1. 作变量代换 $p = y'$:

$$y\frac{dp}{dx} - p^2 = 0$$

例 1 求微分方程 $yy'' - y'^2 = 0$ 的通解.

解 1. 作变量代换 $p = y'$：

$$y\frac{dp}{dx} - p^2 = 0$$

2. 改写：$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$

例 1 求微分方程 $yy'' - y'^2 = 0$ 的通解.

解 1. 作变量代换 $p = y'$:

$$y\frac{dp}{dx} - p^2 = 0$$

2. 改写: $\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$

例 1 求微分方程 $yy'' - y'^2 = 0$ 的通解.

解 1. 作变量代换 $p = y'$:

$$y\frac{dp}{dx} - p^2 = 0$$

2. 改写: $\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$. 代入上式得:

例 1 求微分方程 $yy'' - y'^2 = 0$ 的通解.

解 1. 作变量代换 $p = y'$:

$$y\frac{dp}{dx} - p^2 = 0$$

2. 改写: $\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$. 代入上式得:

$$\Rightarrow \quad yp\frac{dp}{dy} - p^2 = 0$$

例 1 求微分方程 $yy'' - y'^2 = 0$ 的通解.

解 1. 作变量代换 $p = y'$:

$$y\frac{dp}{dx} - p^2 = 0$$

2. 改写: $\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$. 代入上式得:

$$\Rightarrow \quad yp\frac{dp}{dy} - p^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{p}dp = \frac{1}{y}dy$$

例 1 求微分方程 $yy'' - y'^2 = 0$ 的通解.

解 1. 作变量代换 $p = y'$:

$$y\frac{dp}{dx} - p^2 = 0$$

2. 改写: $\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$. 代入上式得:

$$\Rightarrow \quad yp\frac{dp}{dy} - p^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{p}dp = \frac{1}{y}dy$$

3. 这是分离变量方程，两边积分:

例 1 求微分方程 $yy'' - y'^2 = 0$ 的通解.

解 1. 作变量代换 $p = y'$：

$$y\frac{dp}{dx} - p^2 = 0$$

2. 改写：$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$. 代入上式得：

$$\Rightarrow \quad yp\frac{dp}{dy} - p^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{p}dp = \frac{1}{y}dy$$

3. 这是分离变量方程，两边积分：

$$\int \frac{1}{p}dp = \int \frac{1}{y}dy$$

例 1 求微分方程 $yy'' - y'^2 = 0$ 的通解.

解 1. 作变量代换 $p = y'$:

$$y\frac{dp}{dx} - p^2 = 0$$

2. 改写: $\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$. 代入上式得:

$$\Rightarrow \quad yp\frac{dp}{dy} - p^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{p}dp = \frac{1}{y}dy$$

3. 这是分离变量方程，两边积分:

$$\int \frac{1}{p}dp = \int \frac{1}{y}dy \quad \Rightarrow \quad \ln|p| = \ln|y| + C_1'$$

例 1 求微分方程 $yy'' - y'^2 = 0$ 的通解.

解 1. 作变量代换 $p = y'$:

$$y\frac{dp}{dx} - p^2 = 0$$

2. 改写: $\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$. 代入上式得:

$$\Rightarrow \quad yp\frac{dp}{dy} - p^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{p}dp = \frac{1}{y}dy$$

3. 这是分离变量方程，两边积分:

$$\int \frac{1}{p}dp = \int \frac{1}{y}dy \quad \Rightarrow \quad \ln|p| = \ln|y| + C_1' \quad \Rightarrow \quad p = C_1 y$$

例 1 求微分方程 $yy'' - y'^2 = 0$ 的通解.

解 1. 作变量代换 $p = y'$：

$$y\frac{dp}{dx} - p^2 = 0$$

2. 改写：$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$. 代入上式得：

$$\Rightarrow \quad yp\frac{dp}{dy} - p^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{p}dp = \frac{1}{y}dy$$

3. 这是分离变量方程，两边积分：

$$\int \frac{1}{p}dp = \int \frac{1}{y}dy \quad \Rightarrow \quad \ln|p| = \ln|y| + C_1' \quad \Rightarrow \quad p = C_1 y$$

4. 还原变量：

例 1 求微分方程 $yy'' - y'^2 = 0$ 的通解.

解 1. 作变量代换 $p = y'$：

$$y\frac{dp}{dx} - p^2 = 0$$

2. 改写：$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$. 代入上式得：

$$\Rightarrow \quad yp\frac{dp}{dy} - p^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{p}dp = \frac{1}{y}dy$$

3. 这是分离变量方程，两边积分：

$$\int \frac{1}{p}dp = \int \frac{1}{y}dy \quad \Rightarrow \quad \ln|p| = \ln|y| + C_1' \quad \Rightarrow \quad p = C_1 y$$

4. 还原变量：

$$\frac{dy}{dx} = C_1 y$$

例 1 求微分方程 $yy'' - y'^2 = 0$ 的通解.

解 1. 作变量代换 $p = y'$:

$$y\frac{dp}{dx} - p^2 = 0$$

2. 改写: $\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$. 代入上式得:

$$\Rightarrow \quad yp\frac{dp}{dy} - p^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{p}dp = \frac{1}{y}dy$$

3. 这是分离变量方程，两边积分:

$$\int \frac{1}{p}dp = \int \frac{1}{y}dy \quad \Rightarrow \quad \ln|p| = \ln|y| + C_1' \quad \Rightarrow \quad p = C_1 y$$

4. 还原变量:

$$\frac{dy}{dx} = C_1 y \quad \Rightarrow \quad y = C_2 e^{C_1 x}.$$

例 2 求 $y^3y'' + 1 = 0$ 在初始条件 $y|_{x=1} = 1$, $y'|_{x=1} = 0$ 下的特解.

例 2 求 $y^3y''+1=0$ 在初始条件 $y|_{x=1}=1,\ y'|_{x=1}=0$ 下的特解.

解 作变量代换 $p=y'$:

例 2 求 $y^3y''+1=0$ 在初始条件 $y|_{x=1}=1$, $y'|_{x=1}=0$ 下的特解.

解 作变量代换 $p=y'$:

$$y^3\frac{dp}{dx}+1=0$$

例 2 求 $y^3 y'' + 1 = 0$ 在初始条件 $y|_{x=1} = 1$, $y'|_{x=1} = 0$ 下的特解.

解 作变量代换 $p = y'$:

$$p\frac{dp}{dy} \qquad\qquad y^3\frac{dp}{dx} + 1 = 0$$

例 2 求 $y^3y'' + 1 = 0$ 在初始条件 $y|_{x=1} = 1$, $y'|_{x=1} = 0$ 下的特解.

解 作变量代换 $p = y'$:

$$y^3 p\frac{dp}{dy} + 1 = y^3\frac{dp}{dx} + 1 = 0$$

例 2 求 $y^3y''+1=0$ 在初始条件 $y|_{x=1}=1$, $y'|_{x=1}=0$ 下的特解.

解 作变量代换 $p=y'$:

$$y^3p\frac{dp}{dy}+1= \qquad 0$$

例 2 求 $y^3y''+1=0$ 在初始条件 $y|_{x=1}=1,\ y'|_{x=1}=0$ 下的特解.

解 作变量代换 $p=y'$:

$$y^3p\frac{dp}{dy}+1= \qquad\qquad 0$$

$$\Rightarrow \quad pdp=-y^{-3}dy$$

例 2 求 $y^3y''+1=0$ 在初始条件 $y|_{x=1}=1,\ y'|_{x=1}=0$ 下的特解.

解 作变量代换 $p=y'$:

$$y^3p\frac{dp}{dy}+1=0$$

$$\Rightarrow\quad pdp=-y^{-3}dy\quad\Rightarrow\quad\int pdp=-\int y^{-3}dy$$

例 2 求 $y^3y''+1=0$ 在初始条件 $y|_{x=1}=1,\ y'|_{x=1}=0$ 下的特解.

解 作变量代换 $p=y'$:

$$y^3p\frac{dp}{dy}+1=0$$

$$\Rightarrow\quad pdp=-y^{-3}dy\quad\Rightarrow\quad\int pdp=-\int y^{-3}dy$$

$$\Rightarrow\quad\frac{1}{2}p^2=\frac{1}{2}y^{-2}+C_1$$

例 2 求 $y^3y''+1=0$ 在初始条件 $y|_{x=1}=1,\ y'|_{x=1}=0$ 下的特解.

解 作变量代换 $p=y'$:

$$y^3p\frac{dp}{dy}+1=\qquad\qquad 0$$

$$\Rightarrow\quad pdp=-y^{-3}dy\quad\Rightarrow\quad\int pdp=-\int y^{-3}dy$$

$$\Rightarrow\quad\frac{1}{2}p^2=\frac{1}{2}y^{-2}+C_1\quad\xrightarrow[y=1,\,p=0]{x=1\text{时}}$$

例 2 求 $y^3y''+1=0$ 在初始条件 $y|_{x=1}=1,\ y'|_{x=1}=0$ 下的特解.

解 作变量代换 $p=y'$:

$$y^3 p\frac{dp}{dy}+1= \qquad 0$$

$$\Rightarrow \quad pdp=-y^{-3}dy \quad \Rightarrow \quad \int pdp=-\int y^{-3}dy$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}p^2=\frac{1}{2}y^{-2}+C_1 \quad \xRightarrow[y=1,\,p=0]{x=1\text{时}} \quad C_1=-\frac{1}{2},$$

例 2 求 $y^3y''+1=0$ 在初始条件 $y|_{x=1}=1,\ y'|_{x=1}=0$ 下的特解.

解 作变量代换 $p=y'$:

$$y^3p\frac{dp}{dy}+1= \qquad\qquad 0$$

$$\Rightarrow \quad pdp=-y^{-3}dy \quad \Rightarrow \quad \int pdp=-\int y^{-3}dy$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}p^2=\frac{1}{2}y^{-2}+C_1 \quad \xRightarrow[y=1,\,p=0]{x=1\text{时}} \quad C_1=-\frac{1}{2},\ p^2=y^{-2}-1$$

例 2 求 $y^3y''+1=0$ 在初始条件 $y|_{x=1}=1,\ y'|_{x=1}=0$ 下的特解.

解 作变量代换 $p=y'$：

$$y^3p\frac{dp}{dy}+1=0$$

$$\Rightarrow\quad pdp=-y^{-3}dy \quad\Rightarrow\quad \int pdp=-\int y^{-3}dy$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{2}p^2=\frac{1}{2}y^{-2}+C_1 \quad \xRightarrow[y=1,\,p=0]{x=1\text{时}} \quad C_1=-\frac{1}{2},\ p^2=y^{-2}-1$$

$$\Rightarrow\quad p=\pm\sqrt{y^{-2}-1}$$

例 2 求 $y^3y''+1=0$ 在初始条件 $y|_{x=1}=1,\ y'|_{x=1}=0$ 下的特解.

解 作变量代换 $p=y'$:

$$y^3p\frac{dp}{dy}+1=0$$

$$\Rightarrow\quad pdp=-y^{-3}dy \quad\Rightarrow\quad \int pdp=-\int y^{-3}dy$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{2}p^2=\frac{1}{2}y^{-2}+C_1 \quad\xRightarrow[y=1,\,p=0]{x=1\text{时}}\quad C_1=-\frac{1}{2},\ p^2=y^{-2}-1$$

$$\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=p=\pm\sqrt{y^{-2}-1}$$

例 2 求 $y^3y''+1=0$ 在初始条件 $y|_{x=1}=1,\ y'|_{x=1}=0$ 下的特解.

解 作变量代换 $p=y'$：

$$y^3p\frac{dp}{dy}+1= \qquad 0$$

$$\Rightarrow \quad pdp=-y^{-3}dy \quad \Rightarrow \quad \int pdp=-\int y^{-3}dy$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}p^2=\frac{1}{2}y^{-2}+C_1 \quad \xRightarrow[y=1,\,p=0]{x=1\text{时}} \quad C_1=-\frac{1}{2},\ p^2=y^{-2}-1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=p=\pm\sqrt{y^{-2}-1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}}=\pm dx$$

例 2 求 $y^3y''+1=0$ 在初始条件 $y|_{x=1}=1,\ y'|_{x=1}=0$ 下的特解.

解 作变量代换 $p=y'$:

$$y^3p\frac{dp}{dy}+1=0$$

$$\Rightarrow\quad pdp=-y^{-3}dy \quad\Rightarrow\quad \int pdp=-\int y^{-3}dy$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{2}p^2=\frac{1}{2}y^{-2}+C_1 \quad \xRightarrow[y=1,\,p=0]{x=1\text{时}} \quad C_1=-\frac{1}{2},\ p^2=y^{-2}-1$$

$$\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=p=\pm\sqrt{y^{-2}-1}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}}=\pm dx \quad\Rightarrow\quad -\sqrt{1-y^2}=\pm x+C_2$$

例 2 求 $y^3y''+1=0$ 在初始条件 $y|_{x=1}=1,\ y'|_{x=1}=0$ 下的特解.

解 作变量代换 $p=y'$:

$$y^3p\frac{dp}{dy}+1= \qquad 0$$

$$\Rightarrow \quad pdp=-y^{-3}dy \quad \Rightarrow \quad \int pdp=-\int y^{-3}dy$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}p^2=\frac{1}{2}y^{-2}+C_1 \quad \xRightarrow[y=1,\,p=0]{x=1\text{时}} \quad C_1=-\frac{1}{2},\ p^2=y^{-2}-1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=p=\pm\sqrt{y^{-2}-1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}}=\pm dx \quad \Rightarrow \quad -\sqrt{1-y^2}=\pm x+C_2$$

$$\Rightarrow \quad \xRightarrow[y=1]{x=1\text{时}}$$

例 2 求 $y^3y''+1=0$ 在初始条件 $y|_{x=1}=1,\ y'|_{x=1}=0$ 下的特解.

解 作变量代换 $p=y'$:

$$y^3p\frac{dp}{dy}+1=0$$

$$\Rightarrow\quad pdp=-y^{-3}dy\quad\Rightarrow\quad\int pdp=-\int y^{-3}dy$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{2}p^2=\frac{1}{2}y^{-2}+C_1\quad\xRightarrow[y=1,\,p=0]{x=1\text{时}}\quad C_1=-\frac{1}{2},\ p^2=y^{-2}-1$$

$$\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=p=\pm\sqrt{y^{-2}-1}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}}=\pm dx\quad\Rightarrow\quad -\sqrt{1-y^2}=\pm x+C_2$$

$$\Rightarrow\quad \xRightarrow[y=1]{x=1\text{时}}\quad C_2=\mp 1,$$

例 2 求 $y^3y''+1=0$ 在初始条件 $y|_{x=1}=1,\ y'|_{x=1}=0$ 下的特解.

解 作变量代换 $p=y'$:

$$y^3p\frac{dp}{dy}+1=0$$

$$\Rightarrow\quad pdp=-y^{-3}dy \quad\Rightarrow\quad \int pdp=-\int y^{-3}dy$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{2}p^2=\frac{1}{2}y^{-2}+C_1 \quad \xRightarrow[y=1,\,p=0]{x=1\text{时}} \quad C_1=-\frac{1}{2},\ p^2=y^{-2}-1$$

$$\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=p=\pm\sqrt{y^{-2}-1}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}}=\pm dx \quad\Rightarrow\quad -\sqrt{1-y^2}=\pm x+C_2$$

$$\Rightarrow\quad \xRightarrow[y=1]{x=1\text{时}} \quad C_2=\mp1,\ -\sqrt{1-y^2}=\pm x\mp1$$

例 2 求 $y^3y''+1=0$ 在初始条件 $y|_{x=1}=1,\ y'|_{x=1}=0$ 下的特解.

解 作变量代换 $p=y'$:

$$y^3p\frac{dp}{dy}+1=0$$

$$\Rightarrow\quad pdp=-y^{-3}dy\quad\Rightarrow\quad\int pdp=-\int y^{-3}dy$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{2}p^2=\frac{1}{2}y^{-2}+C_1\quad\xRightarrow[y=1,\,p=0]{x=1\text{时}}\quad C_1=-\frac{1}{2},\ p^2=y^{-2}-1$$

$$\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=p=\pm\sqrt{y^{-2}-1}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}}=\pm dx\quad\Rightarrow\quad -\sqrt{1-y^2}=\pm x+C_2$$

$$\Rightarrow\quad\xRightarrow[y=1]{x=1\text{时}}\quad C_2=\mp 1,\ -\sqrt{1-y^2}=\pm x\mp 1=\pm(x-1)$$

例 2 求 $y^3y''+1=0$ 在初始条件 $y|_{x=1}=1,\ y'|_{x=1}=0$ 下的特解.

解 作变量代换 $p=y'$:

$$y^3p\frac{dp}{dy}+1=0$$

$$\Rightarrow\quad pdp=-y^{-3}dy\quad\Rightarrow\quad\int pdp=-\int y^{-3}dy$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{2}p^2=\frac{1}{2}y^{-2}+C_1\quad\xRightarrow[y=1,\,p=0]{x=1\text{时}}\quad C_1=-\frac{1}{2},\ p^2=y^{-2}-1$$

$$\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=p=\pm\sqrt{y^{-2}-1}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}}=\pm dx\quad\Rightarrow\quad -\sqrt{1-y^2}=\pm x+C_2$$

$$\Rightarrow\quad \xRightarrow[y=1]{x=1\text{时}}\quad C_2=\mp1,\ -\sqrt{1-y^2}=\pm x\mp1=\pm(x-1)$$

$$\Rightarrow\quad 1-y^2=(x-1)^2$$

例 2 求 $y^3y''+1=0$ 在初始条件 $y|_{x=1}=1,\ y'|_{x=1}=0$ 下的特解.

解 作变量代换 $p=y'$:

$$y^3p\frac{dp}{dy}+1=\qquad 0$$

$$\Rightarrow\quad pdp=-y^{-3}dy\quad\Rightarrow\quad \int pdp=-\int y^{-3}dy$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{2}p^2=\frac{1}{2}y^{-2}+C_1\ \xRightarrow[y=1,\,p=0]{x=1\text{时}}\ C_1=-\frac{1}{2},\ p^2=y^{-2}-1$$

$$\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=p=\pm\sqrt{y^{-2}-1}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}}=\pm dx\quad\Rightarrow\quad -\sqrt{1-y^2}=\pm x+C_2$$

$$\Rightarrow\quad \xRightarrow[y=1]{x=1\text{时}}\quad C_2=\mp1,\ -\sqrt{1-y^2}=\pm x\mp1=\pm(x-1)$$

$$\Rightarrow\quad 1-y^2=(x-1)^2\quad\Rightarrow\quad y^2=2x-x^2$$