第 02 周作业解答

练习 1. 求一曲线的方程，这曲线通过原点，并且曲线上任一点 (x, y) 处的斜率是 $3x+y$。

解 1. 假设曲线是函数 $y=f(x)$ 的图形。则 f 是如下微分方程的解：

$$\begin{cases} y' = 3x + y \\ y(0) = 0 \end{cases}.$$

这是一阶线性微分方程。

2. 求解齐次部分

$$\frac{dy}{dx} = y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = dx$$

两边积分

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = x + C_1 \quad \Rightarrow \quad y = Ce^x.$$

3. 常数变易。设 $y = u(x)e^x$，代入原方程得：

$$u' \cdot e^x = 3x \quad \Rightarrow \quad u = \int 3xe^{-x}dx \quad \Rightarrow \quad u = -3xe^{-x} - 3e^{-x} + C.$$

4. 所以原方程通解

$$y = (-3xe^{-x} - 3e^{-x} + C)e^x = Ce^x - 3x - 3.$$

5. 求积分常数，将初始条件代入：

$$0 = y(0) = Ce^x - 3x - 3\Big|_{x=0} = C - 3 \quad \Rightarrow \quad C = 3$$

6. 所以曲线方程是

$$y = 3e^x - 3x - 3.$$

注. 求积分 $\int xe^{-x}dx$ 的方法：

$$\int xe^{-x}dx = -\int xde^{-x} \xlongequal{\text{分部积分}} -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C.$$

练习 2. 求微分方程 $(y^2-4x)\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ 通解。

解假设 x, y 的关系可表示为 $x = x(y)$。将原方程改写：

$$(y^2-4x)dy + 2ydx = 0 \quad \Rightarrow \quad (y^2-4x) + 2y\frac{dx}{dy} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} + (-\frac{2x}{y}) = -\frac{y}{2}$$

这是关于未知函数 $x = x(y)$ 的一阶线性微分方程。

1. 求解齐次方程

$$\frac{dx}{dy} + (-\frac{2x}{y}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = \frac{2dy}{y} \quad \Rightarrow \ln|x| = 2\ln|y| + C_1 \quad \Rightarrow x = Cy^2$$

2. 常数变易。设 $x = u(y) \cdot y^2$，代入原方程

$$\frac{du}{dy} \cdot y^2 = -\frac{y}{2} \quad \Rightarrow \quad u = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{y}dy = -\frac{1}{2}\ln|y| + C.$$

3. 所以原方程通解

$$x = (-\frac{1}{2}\ln|y| + C) \cdot y^2 = Cy^2 - \frac{1}{2}y^2\ln|y|.$$

练习 3. 求解微分方程 $\begin{cases} y'' - 3y' - 4y = 0 \\ y(0) = 0,\, y'(0) = -5 \end{cases}$.

解 1. 特征方程为:

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

所以有两个互异的实根 $r_1 = 4, r_2 = -1$。所以通解是

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x}.$$

2. 代入初始条件

$$0 = y(0) = C_1 + C_2$$
$$-5 = y'(0) = 4C_1 - C_2$$

所以 $C_1 = -1, C_2 = 1$

3. 特解是

$$y = -e^{4x} + e^{-x}.$$

练习 4. 求解微分方程 $\begin{cases} y'' - 4y' + 13y = 0 \\ y(0) = 0,\, y'(0) = 3 \end{cases}$.

解 1. 特征方程为:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$$

所以有两个互异的复数根

$$r_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 13}}{2} = 2 \pm 3\sqrt{-1}$$

所以通解是

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

2. 代入初始条件

$$0 = y(0) = C_1$$

及

$$3 = y'(0) = C_2 (e^{2x} \sin 3x)'\big|_{x=0} = 3C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 1.$$

3. 特解是

$$y = e^{2x} \sin 3x.$$

练习 5. 求解微分方程 $\begin{cases} 4y'' + 4y' + y = 0 \\ y(0) = 2,\, y'(0) = 0 \end{cases}$.

解 1. 特征方程为:

$$4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0$$

有重根

$$r_{1,2} = -\frac{1}{2}$$

所以通解是

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{rx} = (C_1 + C_2 x)e^{-\frac{1}{2}x}.$$

2. 代入初始条件

$$2 = y(0) = C_1$$

及

$$0 = y'(0) = ((2 + C_2 x)e^{-\frac{1}{2}x})'\big|_{x=0} = -1 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 1.$$

3. 特解是

$$y = (2 + x)e^{-\frac{1}{2}x}.$$

练习 6. 填空，写出下列方程的一个特解。

1. $y'' + 4y' - y = 2e^x$
2. $y'' - 3y' + 2y = 5$
3. $y'' - 4y' = 5$
4. $y'' + 5y' + 4y = 3 - 2x$
5. $2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x - 2$

解

1. 设 $y = ke^x$，代入原方程得：$y'' + 4y' - y = (k + 4k - k)e^x = 4e^x$，所以 $k = \frac{1}{2}$，$y = \frac{1}{2}e^x$。
2. $y = \frac{5}{2}$
3. $y' = -\frac{5}{4}$，不妨取 $y = -\frac{5}{4}x$
4. 设 $y = ax + b$，代入方程：
$$y'' + 5y' + 4y = 5a + 4(ax + b) = 3 - 2x$$
所以 $4a = -2, 5a + 4b = 3$。所以 $a = -\frac{1}{2}$，$b = \frac{11}{8}$。所以 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{11}{8}$。
5. 设 $y' = ax^2 + bx + c$，代入方程：
$$2y'' + 5y' = 2(2ax + b) + 5(ax^2 + bx + c) = 5x^2 - 2x - 2$$
所以
$$\begin{cases} 5a = 5 \\ 5b + 4a = -2 \\ 2b + 5c = -2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -\frac{6}{5} \\ c = \frac{7}{25} \end{cases}$$
所以 $y' = x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{2}{25}$。不妨取 $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{2}{25}x$。

练习 7. 求微分方程 $y'' + 3y' + 2y = 3xe^{-x}$ 的通解

解 1. 特征方程 $r^2 + 3r + 2 = 0$，特征值为 $r_1 = -2$ 和 $r_2 = -1$。所以齐次的通解是：
$$C_1e^{-2x} + C_2e^{-x}.$$

2. 非齐次项 $f(x) = 3xe^{-x}$。其中 $\lambda = -1$，$P(x) = 3x$ 为一次多项式。因为 $\lambda = -1$ 是（一重）特征值。故设特解为
$$y^* = e^{\lambda x}R(x) = e^{-x}R(x)$$
其中 $R'(x)$ 为一次多项式，$R'(x) = ax + b$。将上式代入原方程，整理可得
$$R'' + (2\lambda + p)R' + \cancel{(\lambda^2 + p\lambda + q)}R = P \quad \Rightarrow \quad a + (ax + b) = 3x$$
所以
$$\begin{cases} a = 3 \\ a + b = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = 3 \\ b = -3 \end{cases} .$$
所以 $R'(x) = 3x - 3$，取 $R(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3x$。特解为
$$y^* = (\frac{3}{2}x^2 - 3x)e^{-x}.$$

3. 所以通解是
$$y = (\frac{3}{2}x^2 - 3x)e^{-x} + C_1e^{-2x} + C_2e^{-x}.$$

练习 8. 求微分方程 $y''+y=4xe^x$，$y(0)=0$，$y'(0)=1$ 的特解

解 1. 特征方程 $r^2+1=0$，特征值为 $r_1=-i$ 和 $r_2=i$。所以齐次的通解是：

$$C_1\cos x+C_2\sin x.$$

2. 非齐次项 $f(x)=4xe^x$。其中 $\lambda=1$，$P(x)=4x$ 为一次多项式。因为 $\lambda=1$ 不是特征值。故设特解为

$$y^*=e^{\lambda x}R(x)=e^xR(x)$$

其中 $R(x)$ 为一次多项式，$R(x)=ax+b$。将上式代入原方程，整理可得

$$R''+(2\lambda+p)R'+(\lambda^2+p\lambda+q)R=P \quad \Rightarrow \quad 2a+2(ax+b)=4x$$

所以

$$\begin{cases}2a=4\\2a+2b=0\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}a=2\\b=-2\end{cases}.$$

所以 $R(x)=2x-2$。特解为

$$y^*=(2x-2)e^x.$$

3. 所以通解是

$$y=(2x-2)e^x+C_1\cos x+C_2\sin x.$$

4. 将初始条件代入

$$y(0)=(2x-2)e^x+C_1\cos x+C_2\sin x\big|_{x=0}=-2+C_1=0$$

所以 $C_1=2$。

$$y'(0)=2xe^x-2\sin x+C_2\cos x\big|_{x=0}=C_2=1$$

即 $C_2=1$。所以

$$y=(2x-2)e^x+2\cos x+\sin x.$$

练习 9. 求微分方程 $y''+4y=x\cos x$ 的通解

解 1. 特征方程 $r^2+4r=0$，特征值为 $r_1=-2i$ 和 $r_2=2i$。所以齐次的通解是：

$$e^{0x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x.$$

2. 非齐次项 $f(x)=x\cos x$。其中 $\lambda=0$，$\omega=1$，$P(x)=x$ 为一次多项式。因为 $\lambda+i\omega=i$ 不是特征值。故设特解为

$$y^*=e^{\lambda x}\left[(ax+b)\cos\omega x+(cx+d)\sin\omega x\right]=(ax+b)\cos x+(cx+d)\sin x.$$

所以

$$\begin{aligned}y^{*\prime}&=(a+cx+d)\cos x+(c-ax-b)\sin x\\y^{*\prime\prime}&=(c+c-ax-b)\cos x+(-a-a-cx-d)\sin x\end{aligned}$$

代入原方程，得

$$\begin{aligned}y^{*\prime\prime}+4y^*&=(2c-ax-b+4ax+4b)\cos x+(-2a-cx-d+4cx+4d)\sin x\\&=(3ax+3b+2c)\cos x+(3cx+3d-2a)\sin x\\&=x\cos x\end{aligned}$$

所以

$$\begin{cases} 3a = 1 \\ 3b + 2c = 0 \\ 3c = 0 \\ 3d - 2a = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = \frac{2}{9} \end{cases} .$$

特解为

$$y^* = \frac{1}{3} x \cos x + \frac{2}{9} \sin x.$$

3. 所以通解是

$$y = y^* + C_1 y_1 + C_2 y_2 = \frac{1}{3} x \cos x + \frac{2}{9} \sin x + C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$