第 5 章 e：定积分的应用

数学系　　梁卓滨

2019-2020 学年 I

Outline

1. 几何图形的面积

2. 截面法求体积

3. 曲线长度

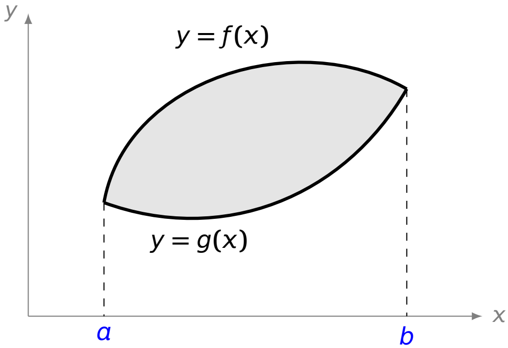
We are here now...

1. 几何图形的面积

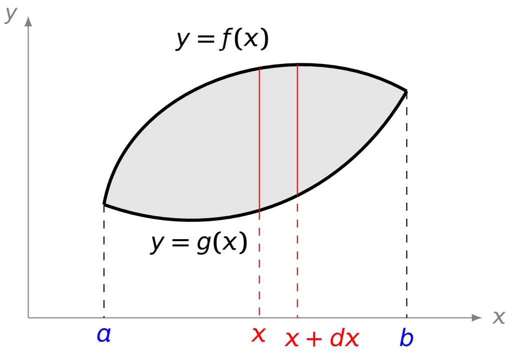
2. 截面法求体积

3. 曲线长度

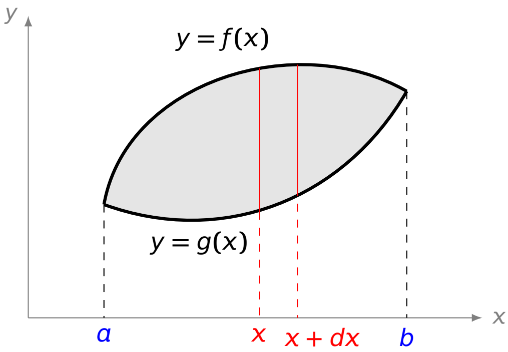
直角坐标系情形



直角坐标系情形

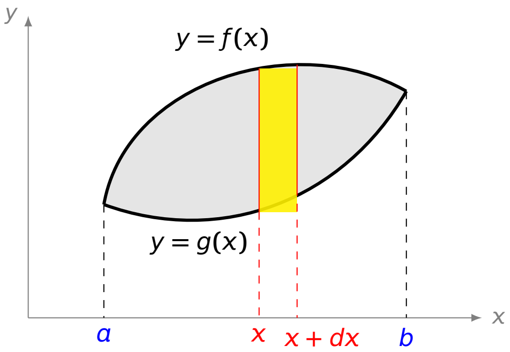


直角坐标系情形



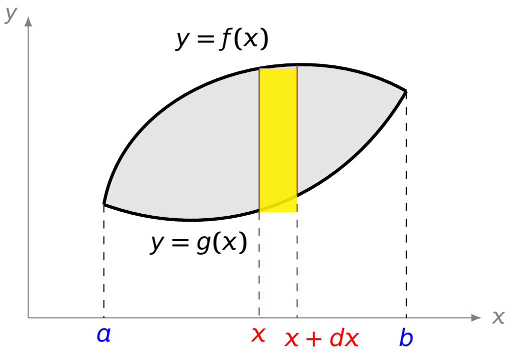
$$A = \int dA$$

直角坐标系情形



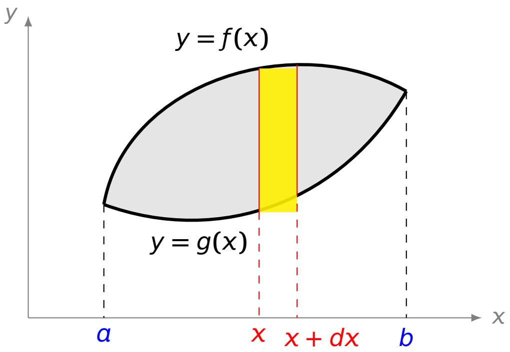
$$A = \int dA$$

直角坐标系情形



$$A = \int dA \qquad (f(x) - g(x))dx.$$

直角坐标系情形



$$A = \int dA = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

例 1 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $x + y = 2$ 围成区域的面积.

例 2 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = 2x + 3$ 围成区域的面积.

例 1 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $x + y = 2$ 围成区域的面积.

解

$$A =$$

例 2 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = 2x + 3$ 围成区域的面积.

例 1 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $x + y = 2$ 围成区域的面积.

解

$$A = \qquad \left((2 - x) - x^2\right) dx$$

例 2 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = 2x + 3$ 围成区域的面积.

例 1 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $x + y = 2$ 围成区域的面积.

解

$$A = \int_{-2}^{1} \left((2-x) - x^2\right) dx$$

例 2 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = 2x + 3$ 围成区域的面积.

例 1 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $x + y = 2$ 围成区域的面积.

解

$$A = \int_{-2}^{1} \left((2 - x) - x^2\right) dx = \left(2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)$$

例 2 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = 2x + 3$ 围成区域的面积.

例 1 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $x + y = 2$ 围成区域的面积.

解

$$A = \int_{-2}^{1} \left((2-x) - x^2\right) dx = \left(2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-2}^{1}$$

例 2 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = 2x + 3$ 围成区域的面积.

例 1 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $x + y = 2$ 围成区域的面积.

解

$$A = \int_{-2}^{1} \left((2-x)-x^2\right) dx = \left(2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-2}^{1}$$

$$= \frac{7}{6} - (-\frac{10}{3})$$

例 2 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = 2x + 3$ 围成区域的面积.

例 1 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $x + y = 2$ 围成区域的面积.

解

$$A = \int_{-2}^{1} \left((2-x) - x^2\right) dx = \left(2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-2}^{1}$$

$$= \frac{7}{6} - (-\frac{10}{3}) = \frac{9}{2}$$

例 2 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = 2x + 3$ 围成区域的面积.

例 1 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $x + y = 2$ 围成区域的面积.

解

$$A = \int_{-2}^{1} \left((2-x) - x^2\right) dx = \left(2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-2}^{1}$$

$$= \frac{7}{6} - (-\frac{10}{3}) = \frac{9}{2}$$

例 2 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = 2x + 3$ 围成区域的面积.

解

$$A =$$

例 1 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $x + y = 2$ 围成区域的面积.

解

$$A = \int_{-2}^{1} \left((2-x) - x^2\right) dx = \left(2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-2}^{1}$$

$$= \frac{7}{6} - (-\frac{10}{3}) = \frac{9}{2}$$

例 2 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = 2x + 3$ 围成区域的面积.

解

$$A = \qquad \left((2x+3) - x^2\right) dx$$

例 1 求曲线 $y=x^2$ 与直线 $x+y=2$ 围成区域的面积.

解

$$A=\int_{-2}^{1}\left((2-x)-x^2\right)dx=\left(2x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-2}^{1}$$

$$=\frac{7}{6}-(-\frac{10}{3})=\frac{9}{2}$$

例 2 求曲线 $y=x^2$ 与直线 $y=2x+3$ 围成区域的面积.

解

$$A=\int_{-1}^{3}\left((2x+3)-x^2\right)dx$$

例 1 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $x + y = 2$ 围成区域的面积.

解

$$A = \int_{-2}^{1} \left((2-x) - x^2\right) dx = \left(2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-2}^{1}$$

$$= \frac{7}{6} - \left(-\frac{10}{3}\right) = \frac{9}{2}$$

例 2 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = 2x + 3$ 围成区域的面积.

解

$$A = \int_{-1}^{3} \left((2x+3) - x^2\right) dx = \left(x^2 + 3x - \frac{1}{3}x^3\right)$$

例 1 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $x + y = 2$ 围成区域的面积.

解

$$A = \int_{-2}^{1} \left((2-x) - x^2\right) dx = \left(2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-2}^{1}$$

$$= \frac{7}{6} - (-\frac{10}{3}) = \frac{9}{2}$$

例 2 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = 2x + 3$ 围成区域的面积.

解

$$A = \int_{-1}^{3} \left((2x+3) - x^2\right) dx = \left(x^2 + 3x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^{3}$$

例 1 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $x + y = 2$ 围成区域的面积.

解

$$A = \int_{-2}^{1} \left((2 - x) - x^2\right) dx = \left(2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-2}^{1}$$

$$= \frac{7}{6} - (-\frac{10}{3}) = \frac{9}{2}$$

例 2 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = 2x + 3$ 围成区域的面积.

解

$$A = \int_{-1}^{3} \left((2x + 3) - x^2\right) dx = \left(x^2 + 3x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^{3}$$

$$= (\qquad\qquad) - (\qquad\qquad)$$

例 1 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $x + y = 2$ 围成区域的面积.

解

$$A = \int_{-2}^{1} \left((2 - x) - x^2\right) dx = \left(2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-2}^{1}$$

$$= \frac{7}{6} - \left(-\frac{10}{3}\right) = \frac{9}{2}$$

例 2 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = 2x + 3$ 围成区域的面积.

解

$$A = \int_{-1}^{3} \left((2x + 3) - x^2\right) dx = \left(x^2 + 3x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^{3}$$

$$= (9 + 9 - 9) - (\qquad\qquad)$$

例 1 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $x + y = 2$ 围成区域的面积.

解

$$A = \int_{-2}^{1} \left((2-x) - x^2\right) dx = \left(2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-2}^{1}$$

$$= \frac{7}{6} - (-\frac{10}{3}) = \frac{9}{2}$$

例 2 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = 2x + 3$ 围成区域的面积.

解

$$A = \int_{-1}^{3} \left((2x+3) - x^2\right) dx = \left(x^2 + 3x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^{3}$$

$$= (9 + 9 - 9) - (1 - 3 + \frac{1}{3})$$

例 1 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $x + y = 2$ 围成区域的面积.

解

$$A = \int_{-2}^{1} \left((2-x)-x^2\right) dx = \left(2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-2}^{1}$$

$$= \frac{7}{6} - (-\frac{10}{3}) = \frac{9}{2}$$

例 2 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = 2x + 3$ 围成区域的面积.

解

$$A = \int_{-1}^{3} \left((2x+3)-x^2\right) dx = \left(x^2 + 3x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^{3}$$

$$= (9+9-9)-(1-3+\frac{1}{3}) = \frac{32}{3}$$

例 3 求曲线 $y = \frac{1}{x}$ 与直线 $y = \frac{1}{4}x$，$x = 4$ 围成区域的面积.

例 4 求曲线 $y = x^3$ 和 $y = \sqrt[3]{x}$ 所围成图形的面积.

例 3 求曲线 $y = \frac{1}{x}$ 与直线 $y = \frac{1}{4}x$，$x = 4$ 围成区域的面积.

解

$$A =$$

例 4 求曲线 $y = x^3$ 和 $y = \sqrt[3]{x}$ 所围成图形的面积.

暨南大学 JINAN UNIVERSITY

例 3 求曲线 $y=\frac{1}{x}$ 与直线 $y=\frac{1}{4}x$，$x=4$ 围成区域的面积.

解

$$A=\qquad\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{x}\right)dx$$

例 4 求曲线 $y=x^3$ 和 $y=\sqrt[3]{x}$ 所围成图形的面积.

例 3 求曲线 $y = \frac{1}{x}$ 与直线 $y = \frac{1}{4}x$，$x = 4$ 围成区域的面积.

解

$$A = \int_2^4 \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{x} \right) dx$$

例 4 求曲线 $y = x^3$ 和 $y = \sqrt[3]{x}$ 所围成图形的面积.

例 3 求曲线 $y=\frac{1}{x}$ 与直线 $y=\frac{1}{4}x$，$x=4$ 围成区域的面积.

解

$$A=\int_2^4\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{x}\right)dx=\left(\frac{1}{8}x^2-\ln|x|\right)$$

例 4 求曲线 $y=x^3$ 和 $y=\sqrt[3]{x}$ 所围成图形的面积.

例 3 求曲线 $y=\frac{1}{x}$ 与直线 $y=\frac{1}{4}x$，$x=4$ 围成区域的面积.

解

$$A=\int_{2}^{4}\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{x}\right)dx=\left(\frac{1}{8}x^{2}-\ln|x|\right)\Big|_{2}^{4}$$

例 4 求曲线 $y=x^{3}$ 和 $y=\sqrt[3]{x}$ 所围成图形的面积.

例 3 求曲线 $y = \frac{1}{x}$ 与直线 $y = \frac{1}{4}x$，$x = 4$ 围成区域的面积.

解

$$A = \int_2^4 \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{x}\right) dx = \left(\frac{1}{8}x^2 - \ln|x|\right)\Big|_2^4$$

$$= (\qquad\qquad) - (\qquad\qquad)$$

例 4 求曲线 $y = x^3$ 和 $y = \sqrt[3]{x}$ 所围成图形的面积.

例 3 求曲线 $y=\frac{1}{x}$ 与直线 $y=\frac{1}{4}x$，$x=4$ 围成区域的面积.

解

$$A=\int_2^4\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{x}\right)dx=\left(\frac{1}{8}x^2-\ln|x|\right)\Big|_2^4$$

$$=(2-\ln 4)-(\qquad\qquad)$$

例 4 求曲线 $y=x^3$ 和 $y=\sqrt[3]{x}$ 所围成图形的面积.

例 3 求曲线 $y=\frac{1}{x}$ 与直线 $y=\frac{1}{4}x$，$x=4$ 围成区域的面积.

解

$$A=\int_2^4\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{x}\right)dx=\left(\frac{1}{8}x^2-\ln|x|\right)\Big|_2^4$$

$$=(2-\ln 4)-(\frac{1}{2}-\ln 2)$$

例 4 求曲线 $y=x^3$ 和 $y=\sqrt[3]{x}$ 所围成图形的面积.

例 3 求曲线 $y=\frac{1}{x}$ 与直线 $y=\frac{1}{4}x$，$x=4$ 围成区域的面积.

解

$$A=\int_2^4\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{x}\right)dx=\left(\frac{1}{8}x^2-\ln|x|\right)\Big|_2^4$$
$$=(2-\ln 4)-(\frac{1}{2}-\ln 2)=\frac{3}{2}-\ln 2$$

例 4 求曲线 $y=x^3$ 和 $y=\sqrt[3]{x}$ 所围成图形的面积.

例 3 求曲线 $y = \frac{1}{x}$ 与直线 $y = \frac{1}{4}x$，$x = 4$ 围成区域的面积.

解

$$A = \int_2^4 \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{x}\right) dx = \left(\frac{1}{8}x^2 - \ln|x|\right)\Big|_2^4$$

$$= (2 - \ln 4) - (\frac{1}{2} - \ln 2) = \frac{3}{2} - \ln 2$$

例 4 求曲线 $y = x^3$ 和 $y = \sqrt[3]{x}$ 所围成图形的面积.

解

$$A = 2$$

例 3 求曲线 $y=\frac{1}{x}$ 与直线 $y=\frac{1}{4}x$，$x=4$ 围成区域的面积.

解

$$A=\int_2^4\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{x}\right)dx=\left(\frac{1}{8}x^2-\ln|x|\right)\Big|_2^4$$

$$=(2-\ln 4)-(\frac{1}{2}-\ln 2)=\frac{3}{2}-\ln 2$$

例 4 求曲线 $y=x^3$ 和 $y=\sqrt[3]{x}$ 所围成图形的面积.

解

$$A=2\int_0^1\left(x^{\frac{1}{3}}-x^3\right)dx$$

例 3 求曲线 $y = \frac{1}{x}$ 与直线 $y = \frac{1}{4}x$，$x = 4$ 围成区域的面积.

解

$$A = \int_2^4 \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{x}\right) dx = \left(\frac{1}{8}x^2 - \ln|x|\right)\Big|_2^4$$

$$= (2 - \ln 4) - (\frac{1}{2} - \ln 2) = \frac{3}{2} - \ln 2$$

例 4 求曲线 $y = x^3$ 和 $y = \sqrt[3]{x}$ 所围成图形的面积.

解

$$A = 2\int_0^1 \left(x^{\frac{1}{3}} - x^3\right) dx = 2\left(\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^1$$

例 3 求曲线 $y=\frac{1}{x}$ 与直线 $y=\frac{1}{4}x$，$x=4$ 围成区域的面积.

解

$$A=\int_2^4\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{x}\right)dx=\left(\frac{1}{8}x^2-\ln|x|\right)\Big|_2^4$$

$$=(2-\ln 4)-(\frac{1}{2}-\ln 2)=\frac{3}{2}-\ln 2$$

例 4 求曲线 $y=x^3$ 和 $y=\sqrt[3]{x}$ 所围成图形的面积.

解

$$A=2\int_0^1\left(x^{\frac{1}{3}}-x^3\right)dx=2\left(\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^1=1$$

例 5 求曲线 $x = y^2$ 与直线 $y = x - 2$ 围成区域在 x 轴上方部分的面积.

例 6 求曲线 $x = -y^2$ 与直线 $y - x = 2$ 围成区域的面积.

例 5 求曲线 $x = y^2$ 与直线 $y = x - 2$ 围成区域在 x 轴上方部分的面积.

解

$$A =$$

例 6 求曲线 $x = -y^2$ 与直线 $y - x = 2$ 围成区域的面积.

例 5 求曲线 $x = y^2$ 与直线 $y = x - 2$ 围成区域在 x 轴上方部分的面积.

解

$$A = \quad [(y+2) - y^2]dy$$

例 6 求曲线 $x = -y^2$ 与直线 $y - x = 2$ 围成区域的面积.

例 5 求曲线 $x = y^2$ 与直线 $y = x - 2$ 围成区域在 x 轴上方部分的面积.

解

$$A = \int_0^2 [(y+2) - y^2] dy$$

例 6 求曲线 $x = -y^2$ 与直线 $y - x = 2$ 围成区域的面积.

例 5 求曲线 $x = y^2$ 与直线 $y = x - 2$ 围成区域在 x 轴上方部分的面积.

解

$$A = \int_0^2 [(y+2) - y^2]dy = \left(-\frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2 + 2y\right)$$

例 6 求曲线 $x = -y^2$ 与直线 $y - x = 2$ 围成区域的面积.

例 5 求曲线 $x=y^2$ 与直线 $y=x-2$ 围成区域在 x 轴上方部分的面积.

解

$$A=\int_0^2[(y+2)-y^2]dy=\left(-\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{2}y^2+2y\right)\Big|_0^2$$

例 6 求曲线 $x=-y^2$ 与直线 $y-x=2$ 围成区域的面积.

例 5 求曲线 $x = y^2$ 与直线 $y = x - 2$ 围成区域在 x 轴上方部分的面积.

解

$$A = \int_0^2 [(y+2) - y^2]dy = \left(-\frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2 + 2y\right)\Big|_0^2$$

$$= (\qquad\qquad\qquad) - (\quad)$$

例 6 求曲线 $x = -y^2$ 与直线 $y - x = 2$ 围成区域的面积.

例 5 求曲线 $x = y^2$ 与直线 $y = x - 2$ 围成区域在 x 轴上方部分的面积.

解

$$A = \int_0^2 [(y+2) - y^2]dy = \left(-\frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2 + 2y\right)\Big|_0^2$$

$$= (-\frac{8}{3} + 2 + 4) - (\quad)$$

例 6 求曲线 $x = -y^2$ 与直线 $y - x = 2$ 围成区域的面积.

例 5 求曲线 $x=y^2$ 与直线 $y=x-2$ 围成区域在 x 轴上方部分的面积.

解

$$A=\int_0^2 [(y+2)-y^2]dy=\left(-\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{2}y^2+2y\right)\Big|_0^2$$

$$=(-\frac{8}{3}+2+4)-(0)$$

例 6 求曲线 $x=-y^2$ 与直线 $y-x=2$ 围成区域的面积.

例 5 求曲线 $x = y^2$ 与直线 $y = x - 2$ 围成区域在 x 轴上方部分的面积.

解

$$A = \int_0^2 [(y+2) - y^2]dy = \left(-\frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2 + 2y\right)\Big|_0^2$$

$$= (-\frac{8}{3} + 2 + 4) - (0) = \frac{10}{3}$$

例 6 求曲线 $x = -y^2$ 与直线 $y - x = 2$ 围成区域的面积.

例 5 求曲线 $x = y^2$ 与直线 $y = x - 2$ 围成区域在 x 轴上方部分的面积.

解

$$A = \int_0^2 [(y+2) - y^2]dy = \left(-\frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2 + 2y\right)\Big|_0^2$$

$$= (-\frac{8}{3} + 2 + 4) - (0) = \frac{10}{3}$$

例 6 求曲线 $x = -y^2$ 与直线 $y - x = 2$ 围成区域的面积.

解

$$A =$$

例 5 求曲线 $x = y^2$ 与直线 $y = x - 2$ 围成区域在 x 轴上方部分的面积.

解

$$A = \int_0^2 [(y+2) - y^2]dy = \left(-\frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2 + 2y\right)\Big|_0^2$$

$$= (-\frac{8}{3} + 2 + 4) - (0) = \frac{10}{3}$$

例 6 求曲线 $x = -y^2$ 与直线 $y - x = 2$ 围成区域的面积.

解

$$A = \qquad [-y^2 - (y-2)]dy$$

例 5 求曲线 $x = y^2$ 与直线 $y = x - 2$ 围成区域在 x 轴上方部分的面积.

解

$$A = \int_0^2 [(y+2) - y^2]dy = \left(-\frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2 + 2y\right)\Big|_0^2$$

$$= (-\frac{8}{3} + 2 + 4) - (0) = \frac{10}{3}$$

例 6 求曲线 $x = -y^2$ 与直线 $y - x = 2$ 围成区域的面积.

解

$$A = \int_{-2}^{1} [-y^2 - (y-2)]dy$$

例 5 求曲线 $x = y^2$ 与直线 $y = x - 2$ 围成区域在 x 轴上方部分的面积.

解

$$A = \int_0^2 [(y+2) - y^2]dy = \left(-\frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2 + 2y\right)\Big|_0^2$$

$$= (-\frac{8}{3} + 2 + 4) - (0) = \frac{10}{3}$$

例 6 求曲线 $x = -y^2$ 与直线 $y - x = 2$ 围成区域的面积.

解

$$A = \int_{-2}^1 [-y^2 - (y-2)]dy = \left(-\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^2 + 2y\right)$$

例 5 求曲线 $x = y^2$ 与直线 $y = x - 2$ 围成区域在 x 轴上方部分的面积.

解

$$A = \int_0^2 [(y+2) - y^2]dy = \left(-\frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2 + 2y\right)\Big|_0^2$$

$$= (-\frac{8}{3} + 2 + 4) - (0) = \frac{10}{3}$$

例 6 求曲线 $x = -y^2$ 与直线 $y - x = 2$ 围成区域的面积.

解

$$A = \int_{-2}^1 [-y^2 - (y-2)]dy = \left(-\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^2 + 2y\right)\Big|_{-2}^1$$

例 5 求曲线 $x=y^2$ 与直线 $y=x-2$ 围成区域在 x 轴上方部分的面积.

解

$$A=\int_0^2[(y+2)-y^2]dy=\left(-\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{2}y^2+2y\right)\Big|_0^2$$

$$=(-\frac{8}{3}+2+4)-(0)=\frac{10}{3}$$

例 6 求曲线 $x=-y^2$ 与直线 $y-x=2$ 围成区域的面积.

解

$$A=\int_{-2}^1[-y^2-(y-2)]dy=\left(-\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{2}y^2+2y\right)\Big|_{-2}^1$$

$$=(\qquad\qquad)-(\qquad\qquad)$$

例 5 求曲线 $x=y^2$ 与直线 $y=x-2$ 围成区域在 x 轴上方部分的面积.

解

$$A=\int_0^2[(y+2)-y^2]dy=\left(-\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{2}y^2+2y\right)\Big|_0^2$$

$$=(-\frac{8}{3}+2+4)-(0)=\frac{10}{3}$$

例 6 求曲线 $x=-y^2$ 与直线 $y-x=2$ 围成区域的面积.

解

$$A=\int_{-2}^1[-y^2-(y-2)]dy=\left(-\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{2}y^2+2y\right)\Big|_{-2}^1$$

$$=(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2)-(\qquad\qquad)$$

例 5 求曲线 $x = y^2$ 与直线 $y = x - 2$ 围成区域在 x 轴上方部分的面积.

解

$$A = \int_0^2 [(y+2) - y^2]dy = \left(-\frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2 + 2y\right)\Big|_0^2$$

$$= (-\frac{8}{3} + 2 + 4) - (0) = \frac{10}{3}$$

例 6 求曲线 $x = -y^2$ 与直线 $y - x = 2$ 围成区域的面积.

解

$$A = \int_{-2}^1 [-y^2 - (y-2)]dy = \left(-\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^2 + 2y\right)\Big|_{-2}^1$$

$$= (-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2) - (\frac{8}{3} - 2 - 4)$$

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

例 5 求曲线 $x = y^2$ 与直线 $y = x - 2$ 围成区域在 x 轴上方部分的面积.

解

$$A = \int_0^2 [(y+2) - y^2]dy = \left(-\frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2 + 2y\right)\Big|_0^2$$

$$= (-\frac{8}{3} + 2 + 4) - (0) = \frac{10}{3}$$

例 6 求曲线 $x = -y^2$ 与直线 $y - x = 2$ 围成区域的面积.

解

$$A = \int_{-2}^1 [-y^2 - (y-2)]dy = \left(-\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^2 + 2y\right)\Big|_{-2}^1$$

$$= (-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2) - (\frac{8}{3} - 2 - 4) = \frac{9}{2}$$

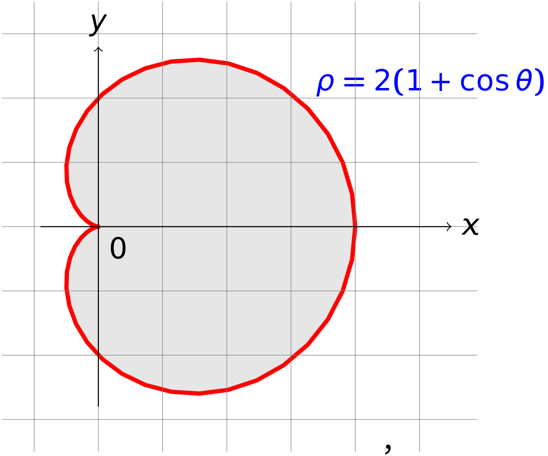
暨南大學 JINAN UNIVERSITY

极坐标情形

例 求心形线 $\rho = 2(1 + \cos\theta)$ 所围成图形的面积.

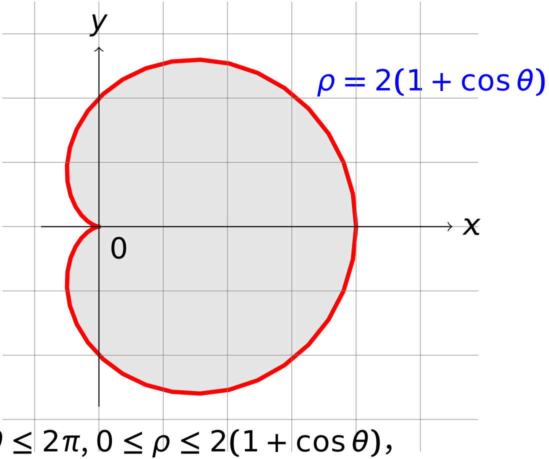
,

例 求心形线 $\rho = 2(1+\cos\theta)$ 所围成图形的面积.



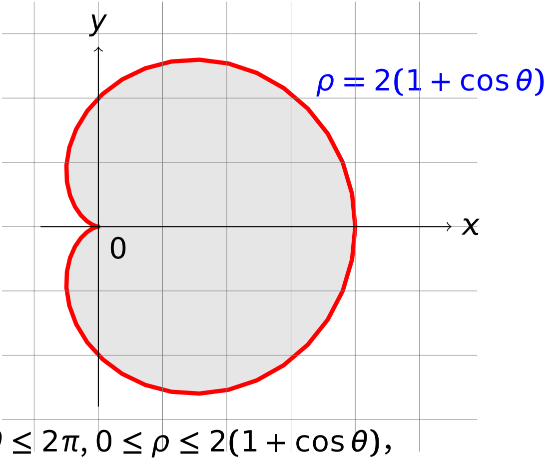
解 ,

例 求心形线 $\rho = 2(1+\cos\theta)$ 所围成图形的面积.



解 D 为 $0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \rho \le 2(1+\cos\theta)$,

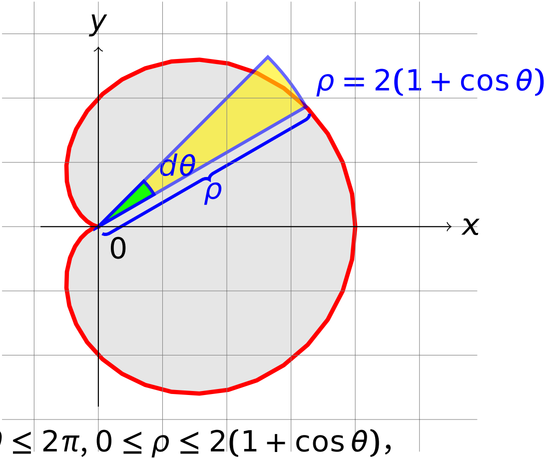
例 求心形线 $\rho = 2(1 + \cos\theta)$ 所围成图形的面积.



解 D 为 $0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \rho \le 2(1 + \cos\theta)$,

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\rho^2 d\theta$$

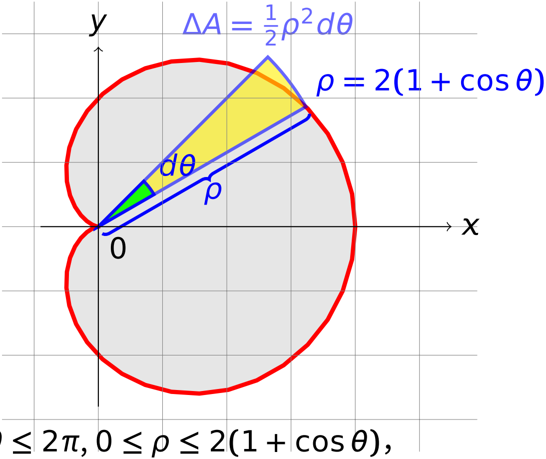
例 求心形线 $\rho = 2(1+\cos\theta)$ 所围成图形的面积.



解 D 为 $0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \rho \le 2(1+\cos\theta)$,

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\rho^2 d\theta$$

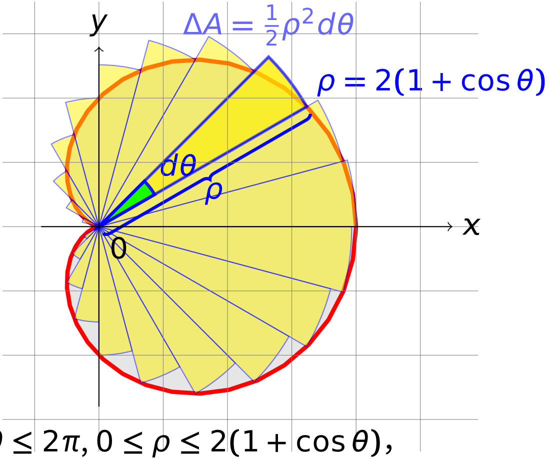
例 求心形线 $\rho = 2(1+\cos\theta)$ 所围成图形的面积.



解 D 为 $0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \rho \le 2(1+\cos\theta)$,

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\rho^2 d\theta$$

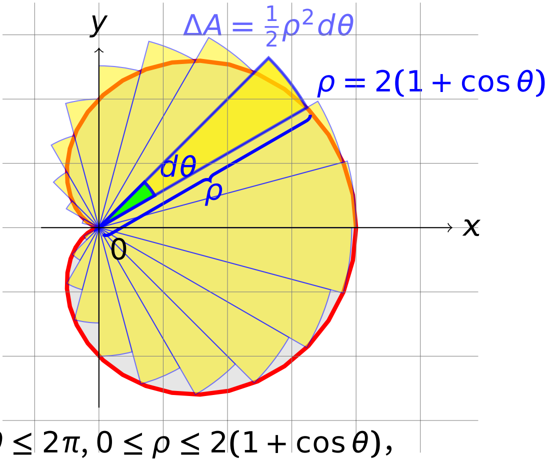
例 求心形线 $\rho = 2(1+\cos\theta)$ 所围成图形的面积.



解 D 为 $0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \rho \le 2(1+\cos\theta)$,

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\rho^2 d\theta$$

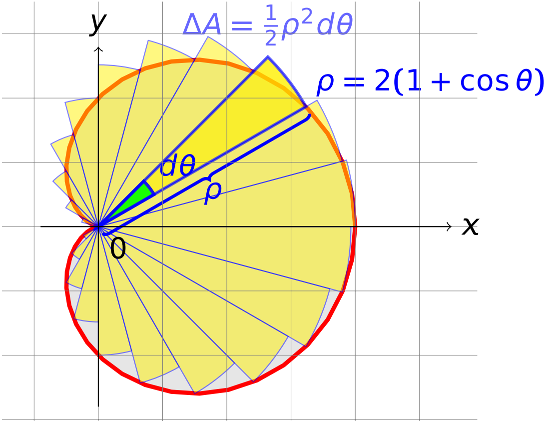
例 求心形线 $\rho = 2(1+\cos\theta)$ 所围成图形的面积.



解 D 为 $0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \rho \le 2(1+\cos\theta)$,

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\rho^2 d\theta = \int_0^{2\pi} 2(1+\cos\theta)^2 d\theta$$

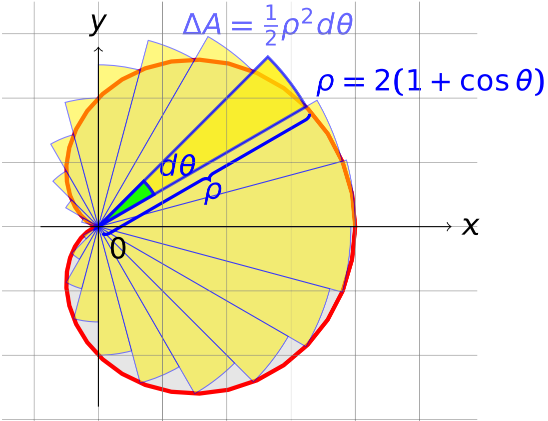
例 求心形线 $\rho = 2(1+\cos\theta)$ 所围成图形的面积.



解 D 为 $0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \rho \le 2(1+\cos\theta)$,

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\rho^2 d\theta = \int_0^{2\pi} 2(1+\cos\theta)^2 d\theta = 2\int_0^{2\pi} (1+2\cos\theta+\cos^2$$

例 求心形线 $\rho = 2(1+\cos\theta)$ 所围成图形的面积.

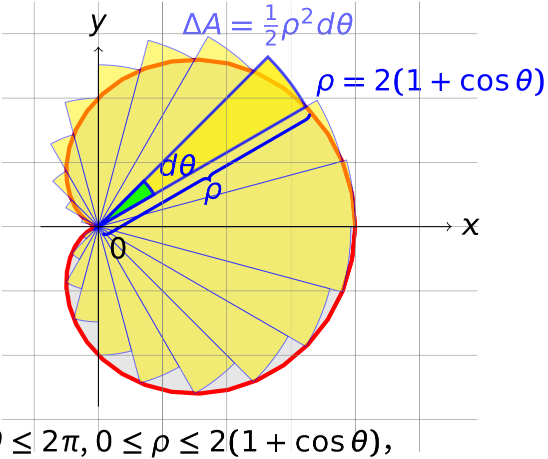


解 D 为 $0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \rho \le 2(1+\cos\theta)$,

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\rho^2 d\theta = \int_0^{2\pi} 2(1+\cos\theta)^2 d\theta = 2\int_0^{2\pi} (1+2\cos\theta+\cos^2$$

$$\overset{\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}}{=\!=\!=\!=\!=\!=}$$

例 求心形线 $\rho = 2(1+\cos\theta)$ 所围成图形的面积.

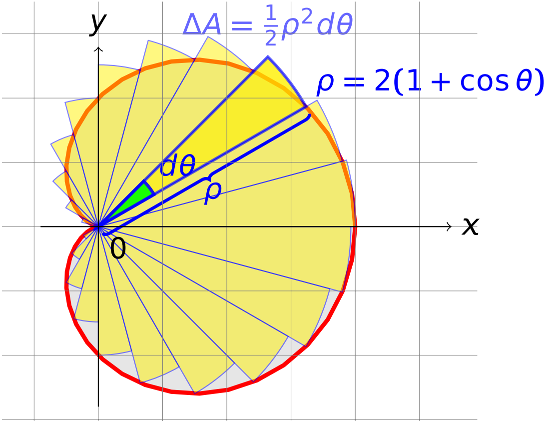


解 D 为 $0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \rho \le 2(1+\cos\theta)$,

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\rho^2 d\theta = \int_0^{2\pi} 2(1+\cos\theta)^2 d\theta = 2\int_0^{2\pi} (1+2\cos\theta+\cos^2$$

$$\xlongequal[\hspace{4cm}]{\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}} 2\int_0^{2\pi} (\frac{3}{2} + 2\cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta) d\theta$$

例 求心形线 $\rho = 2(1+\cos\theta)$ 所围成图形的面积.



解 D 为 $0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \rho \le 2(1+\cos\theta)$,

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\rho^2 d\theta = \int_0^{2\pi} 2(1+\cos\theta)^2 d\theta = 2\int_0^{2\pi} (1+2\cos\theta+\cos^2$$

$$\xlongequal{\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}} 2\int_0^{2\pi} (\frac{3}{2}+2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta)d\theta = 6\pi$$

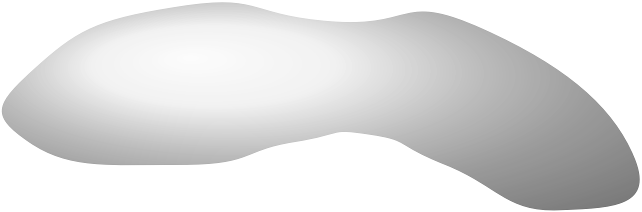
We are here now...

1. 几何图形的面积

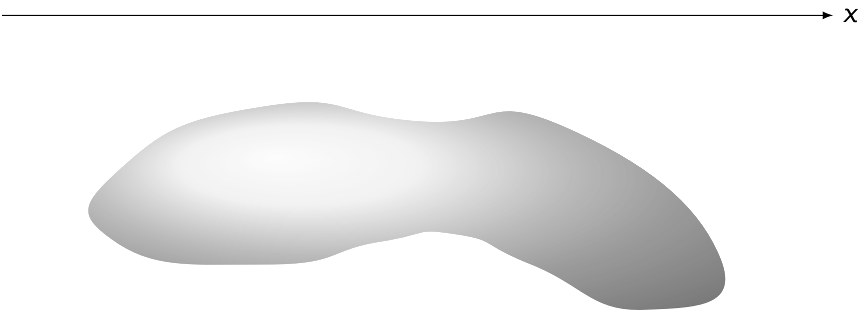
2. 截面法求体积

3. 曲线长度

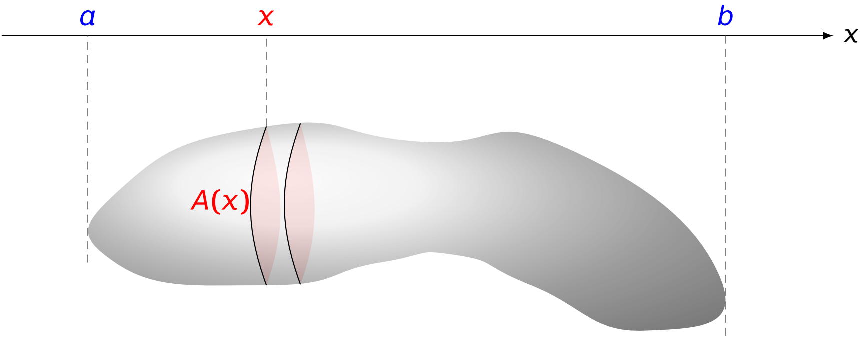
截面积法求体积



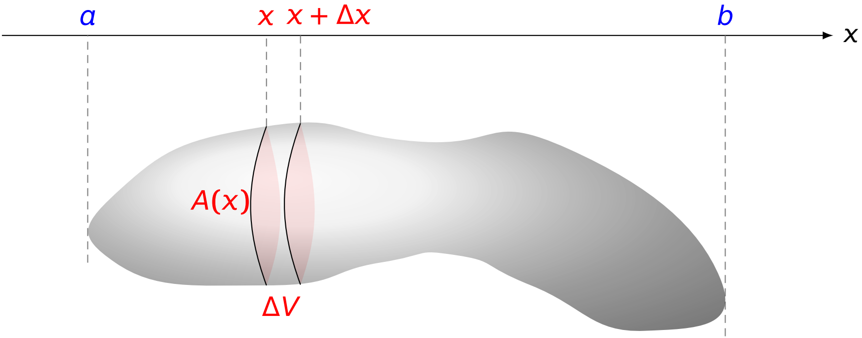
截面积法求体积



截面积法求体积

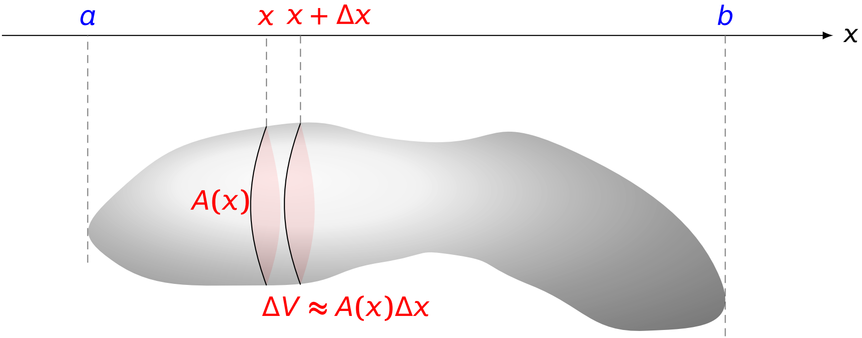


截面积法求体积



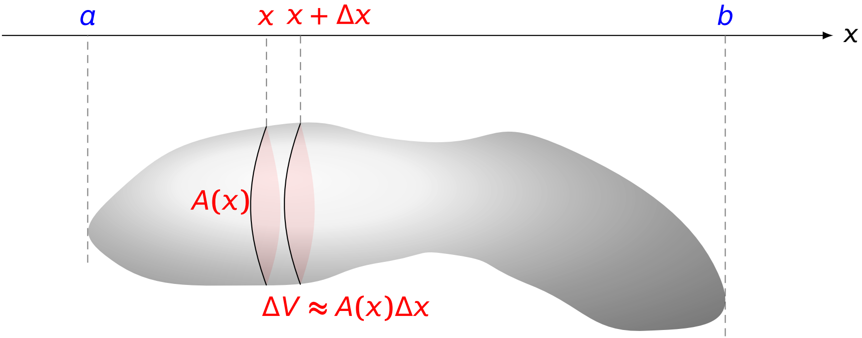
$$V = \int dV$$

截面积法求体积



$$V = \int dV$$

截面积法求体积



$$V = \int dV = \int_a^b A(x)dx$$

例 1 求以半径为 R 的圆为底、平行且等于底圆直径的线段为顶、高为 h 的正劈锥体的体积.

例 1 求以半径为 R 的圆为底、平行且等于底圆直径的线段为顶、高为 h 的正劈锥体的体积.

解 截面面积为

$$A(x) =$$

所以

$$V = \int_{-R}^{R} A(x)dx$$

例 1 求以半径为 R 的圆为底、平行且等于底圆直径的线段为顶、高为 h 的正劈锥体的体积.

解 截面面积为

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot h \cdot 2y =$$

所以

$$V = \int_{-R}^{R} A(x) dx$$

例 1 求以半径为 R 的圆为底、平行且等于底圆直径的线段为顶、高为 h 的正劈锥体的体积.

解 截面面积为

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot h \cdot 2y = h\sqrt{R^2 - x^2}.$$

所以

$$V = \int_{-R}^{R} A(x) dx$$

例 1 求以半径为 R 的圆为底、平行且等于底圆直径的线段为顶、高为 h 的正劈锥体的体积.

解 截面面积为

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot h \cdot 2y = h\sqrt{R^2 - x^2}.$$

所以

$$V = \int_{-R}^{R} A(x)dx = h\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}dx$$

例 1 求以半径为 R 的圆为底、平行且等于底圆直径的线段为顶、高为 h 的正劈锥体的体积.

解 截面面积为

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot h \cdot 2y = h\sqrt{R^2 - x^2}.$$

所以

$$V = \int_{-R}^{R} A(x)dx = h\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}dx \qquad \frac{1}{2}\pi R^2.$$

例 1 求以半径为 R 的圆为底、平行且等于底圆直径的线段为顶、高为 h 的正劈锥体的体积.

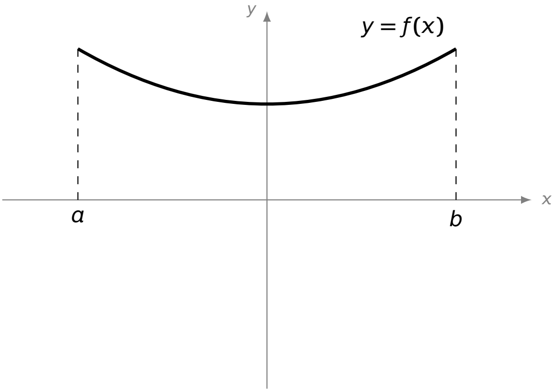
解 截面面积为

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot h \cdot 2y = h\sqrt{R^2 - x^2}.$$

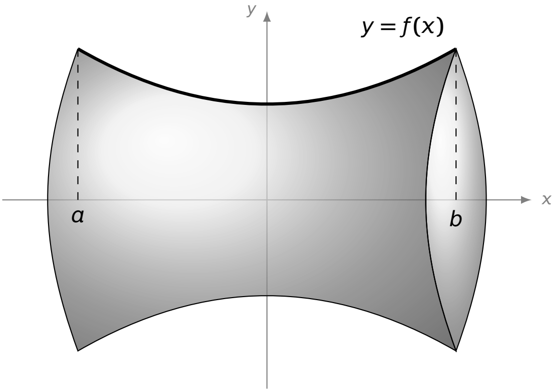
所以

$$V = \int_{-R}^{R} A(x)dx = h\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}dx = h \cdot \frac{1}{2}\pi R^2.$$

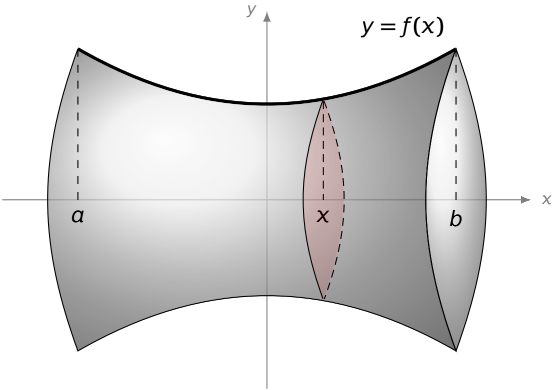
旋转体体积



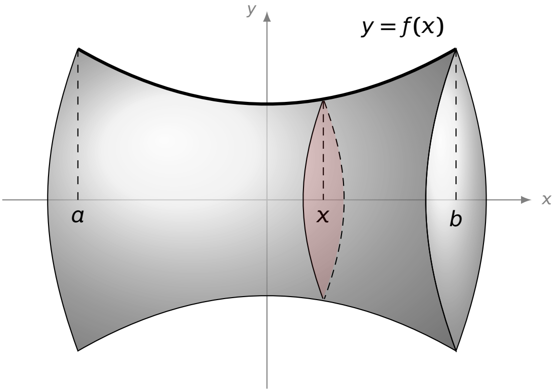
旋转体体积



旋转体体积

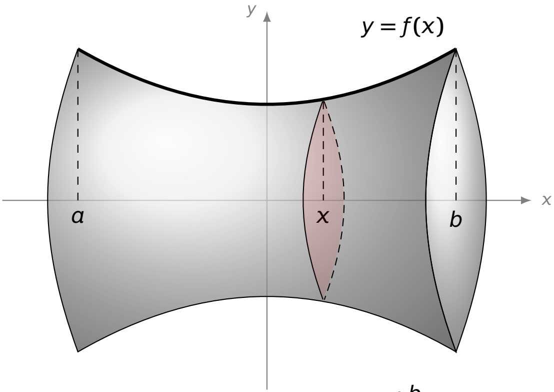


旋转体体积



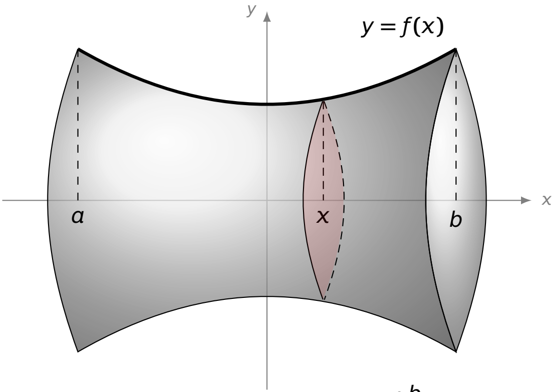
$$dV = \pi f(x)^2 dx$$

旋转体体积



$$dV = \pi f(x)^2 dx \quad \Rightarrow \quad V = \int_a^b \pi f(x)^2 dx$$

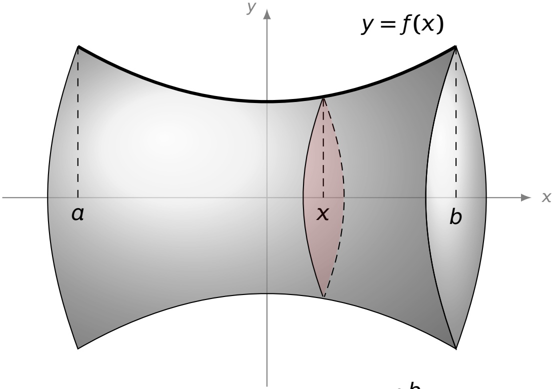
旋转体体积



$$dV = \pi f(x)^2 dx \quad \Rightarrow \quad V = \int_a^b \pi f(x)^2 dx$$

例 1 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 绕 x 轴旋转一周所得椭圆球的体积.

旋转体体积



$$dV = \pi f(x)^2 dx \quad \Rightarrow \quad V = \int_a^b \pi f(x)^2 dx$$

例 1 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 绕 x 轴旋转一周所得椭圆球的体积.

提示 $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$，$(-a \le x \le a)$

例 2 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 绕 x 轴旋转一周所得椭圆球的体积.

例 2 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 绕 x 轴旋转一周所得椭圆球的体积.

解 椭圆球可视为函数 $y=y(x)=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$,（$-a\leq x\leq a$）定义的曲线，绕 x 轴旋转一周所得.

例 2 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 绕 x 轴旋转一周所得椭圆球的体积.

解 椭圆球可视为函数 $y = y(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$,（$-a \le x \le a$）定义的曲线，绕 x 轴旋转一周所得. 所以

$$V = \int_{-a}^{a} \pi y(x)^2 dx$$

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

例 2 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 绕 x 轴旋转一周所得椭圆球的体积.

解 椭圆球可视为函数 $y=y(x)=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$,（$-a\le x\le a$）定义的曲线，绕 x 轴旋转一周所得. 所以

$$V=\int_{-a}^{a}\pi y(x)^2dx=\int_{-a}^{a}\pi b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx$$

例 2 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 绕 x 轴旋转一周所得椭圆球的体积.

解 椭圆球可视为函数 $y=y(x)=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$,（$-a\leq x\leq a$）定义的曲线，绕 x 轴旋转一周所得. 所以

$$V=\int_{-a}^{a}\pi y(x)^2dx=\int_{-a}^{a}\pi b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$

We are here now...

1. 几何图形的面积

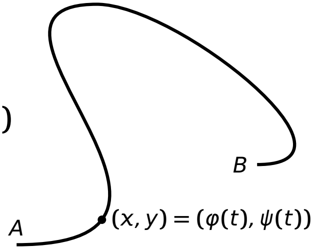
2. 截面法求体积

3. 曲线长度

平面曲线的弧长

设曲线由以下参数方程给出：

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

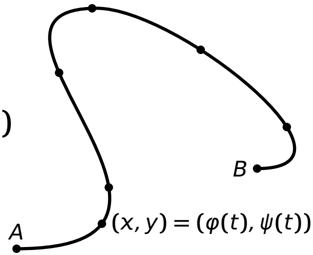


弧长公式推导：

平面曲线的弧长

设曲线由以下参数方程给出：

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

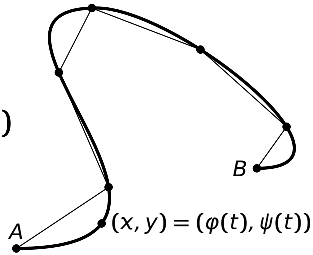


弧长公式推导：

平面曲线的弧长

设曲线由以下参数方程给出：

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

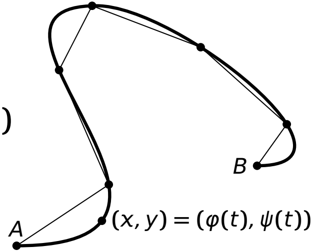


弧长公式推导：

平面曲线的弧长

设曲线由以下参数方程给出：

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$



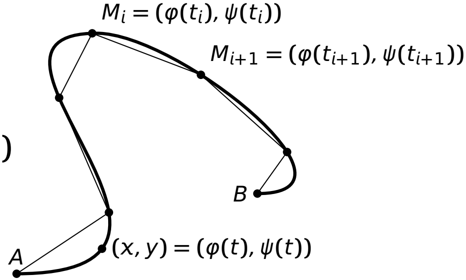
弧长公式推导：

(1) 对区间 $[\alpha, \beta]$ 分割：$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$

平面曲线的弧长

设曲线由以下参数方程给出：

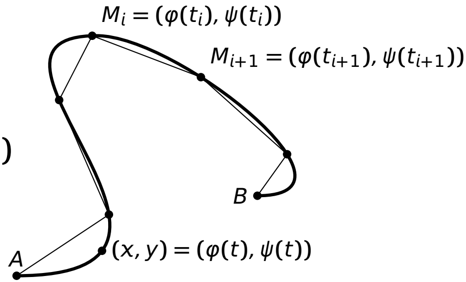
$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad (\alpha \le t \le \beta)$$



弧长公式推导：

(1) 对区间 $[\alpha, \beta]$ 分割：$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$

平面曲线的弧长



设曲线由以下参数方程给出：

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

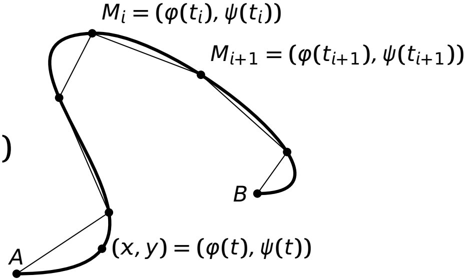
弧长公式推导：

(1) 对区间 $[\alpha, \beta]$ 分割：$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$

(2) 折线段逼近曲线

$|M_i M_{i+1}| =$

平面曲线的弧长



设曲线由以下参数方程给出：

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

弧长公式推导：

(1) 对区间 $[\alpha, \beta]$ 分割：$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$

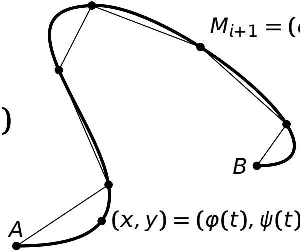
(2) 折线段逼近曲线

$$|M_iM_{i+1}| = \sqrt{(\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i))^2 + (\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i))^2}$$

平面曲线的弧长

设曲线由以下参数方程给出：

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad (\alpha \le t \le \beta)$$



弧长公式推导：

(1) 对区间 $[\alpha, \beta]$ 分割：$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$

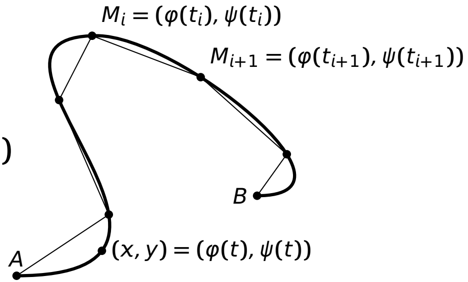
(2) 折线段逼近曲线

$$|M_iM_{i+1}| = \sqrt{(\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i))^2 + (\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i))^2} \approx \sqrt{\varphi'(t_i)^2 + \psi'(t_i)}\Delta t_i$$

平面曲线的弧长

设曲线由以下参数方程给出：

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad (\alpha \le t \le \beta)$$



弧长公式推导：

(1) 对区间 $[\alpha, \beta]$ 分割：$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$

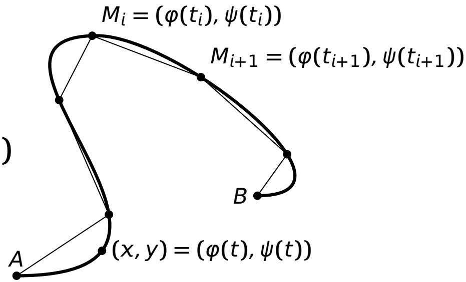
(2) 折线段逼近曲线

$$|M_iM_{i+1}| = \sqrt{(\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i))^2 + (\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i))^2} \approx \sqrt{\varphi'(t_i)^2 + \psi'(t_i)}\Delta t_i$$

(3) 取极限曲线弧长

$$s = \lim \sum_{i=0}^{n-1} |M_iM_{i+1}|$$

平面曲线的弧长



设曲线由以下参数方程给出：

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}, \quad (\alpha\le t\le\beta)$$

弧长公式推导：

(1) 对区间 $[\alpha,\beta]$ 分割：$\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta$

(2) 折线段逼近曲线

$$|M_iM_{i+1}|=\sqrt{(\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i))^2+(\psi(t_{i+1})-\psi(t_i))^2}\approx\sqrt{\varphi'(t_i)^2+\psi'(t_i)\Delta t_i}$$

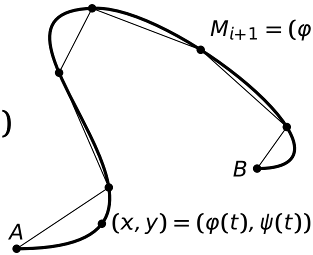
(3) 取极限曲线弧长

$$s=\lim\sum_{i=0}^{n-1}|M_iM_{i+1}|=\lim\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{\varphi'(t_i)^2+\psi'(t_i)}\Delta t_i$$

平面曲线的弧长

设曲线由以下参数方程给出：

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad (\alpha \le t \le \beta)$$



弧长公式推导：

(1) 对区间 $[\alpha, \beta]$ 分割：$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$

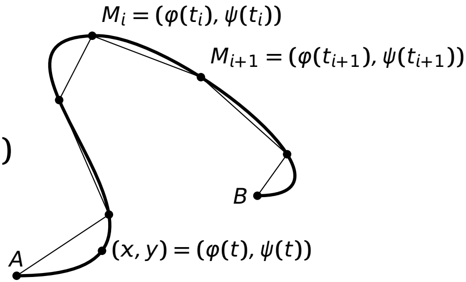
(2) 折线段逼近曲线

$$|M_iM_{i+1}| = \sqrt{(\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i))^2 + (\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i))^2} \approx \sqrt{\varphi'(t_i)^2 + \psi'(t_i)}\Delta t_i$$

(3) 取极限曲线弧长

$$s = \lim \sum_{i=0}^{n-1} |M_iM_{i+1}| = \lim \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\varphi'(t_i)^2 + \psi'(t_i)}\Delta t_i = \int_a^b \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt$$

平面曲线的弧长



设曲线由以下参数方程给出：

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

弧长公式推导：

(1) 对区间 $[\alpha, \beta]$ 分割：$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$

(2) 折线段逼近曲线

$$|M_i M_{i+1}| = \sqrt{(\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i))^2 + (\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i))^2} \approx \sqrt{\varphi'(t_i)^2 + \psi'(t_i)}\Delta t_i$$

(3) 取极限曲线弧长 $\sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}dt = ds$ 弧长元素

$$s = \lim \sum_{i=0}^{n-1} |M_i M_{i+1}| = \lim \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\varphi'(t_i)^2 + \psi'(t_i)}\Delta t_i = \int_a^b \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt$$

例 1 计算摆线 $\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$，$(0 \le \theta \le 2\pi)$ 的长度.

例 1 计算摆线 $\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$，$(0 \le \theta \le 2\pi)$ 的长度.

解

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2} d\theta$$

例 1 计算摆线 $\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$，$(0 \le \theta \le 2\pi)$ 的长度.

解 注意到

$$x'(\theta) =$$

$$y'(\theta) =$$

$$ds = \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2} d\theta$$

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2} d\theta$$

例 1 计算摆线 $\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$，$(0 \le \theta \le 2\pi)$ 的长度.

解 注意到

$$x'(\theta) = a(1 - \cos\theta),$$

$$y'(\theta) =$$

$$ds = \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2}d\theta$$

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2}d\theta$$

例 1 计算摆线 $\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$, $(0 \le \theta \le 2\pi)$ 的长度.

解 注意到

$$x'(\theta) = a(1 - \cos\theta),$$

$$y'(\theta) = a\sin\theta,$$

$$ds = \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2}d\theta$$

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2}d\theta$$

例 1 计算摆线 $\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1-\cos\theta) \end{cases}$，$(0 \le \theta \le 2\pi)$ 的长度.

解 注意到

$$x'(\theta) = a(1-\cos\theta),$$

$$y'(\theta) = a\sin\theta,$$

$$ds = \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2}d\theta = a\sqrt{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta}d\theta$$

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2}d\theta$$

例 1 计算摆线 $\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1-\cos\theta) \end{cases}$，$(0 \le \theta \le 2\pi)$ 的长度.

解 注意到

$$x'(\theta) = a(1-\cos\theta),$$

$$y'(\theta) = a\sin\theta,$$

$$ds = \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2}d\theta = a\sqrt{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta}d\theta$$

$$= a\sqrt{2(1-\cos\theta)}d\theta$$

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2}d\theta$$

例 1 计算摆线 $\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$，$(0 \le \theta \le 2\pi)$ 的长度.

解 注意到

$$x'(\theta) = a(1 - \cos\theta),$$

$$y'(\theta) = a\sin\theta,$$

$$ds = \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2}d\theta = a\sqrt{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta}d\theta$$

$$= a\sqrt{2(1-\cos\theta)}d\theta = 2a\sin\frac{\theta}{2}d\theta$$

$$s = \int_0^{2\pi}\sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2}d\theta$$

例 1 计算摆线 $\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1-\cos\theta) \end{cases}$，$(0 \le \theta \le 2\pi)$ 的长度.

解 注意到

$$x'(\theta) = a(1-\cos\theta),$$

$$y'(\theta) = a\sin\theta,$$

$$ds = \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2}d\theta = a\sqrt{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta}d\theta$$

$$= a\sqrt{2(1-\cos\theta)}d\theta = 2a\sin\frac{\theta}{2}d\theta$$

所以

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2}d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 2a\sin\frac{\theta}{2}d\theta$$

暨南大学 JINAN UNIVERSITY

例 1 计算摆线 $\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$，$(0 \le \theta \le 2\pi)$ 的长度.

解 注意到

$$x'(\theta) = a(1 - \cos\theta),$$

$$y'(\theta) = a\sin\theta,$$

$$ds = \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2}d\theta = a\sqrt{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta}d\theta$$

$$= a\sqrt{2(1-\cos\theta)}d\theta = 2a\sin\frac{\theta}{2}d\theta$$

所以

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2}d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 2a\sin\frac{\theta}{2}d\theta = -4a\cos\frac{\theta}{2}\Big|_0^{2\pi}$$

例 1 计算摆线 $\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1-\cos\theta) \end{cases}$，$(0 \le \theta \le 2\pi)$ 的长度.

解 注意到

$$x'(\theta) = a(1-\cos\theta),$$

$$y'(\theta) = a\sin\theta,$$

$$ds = \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2}d\theta = a\sqrt{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta}d\theta$$

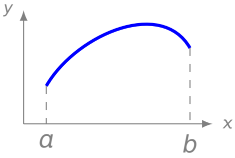
$$= a\sqrt{2(1-\cos\theta)}d\theta = 2a\sin\frac{\theta}{2}d\theta$$

所以

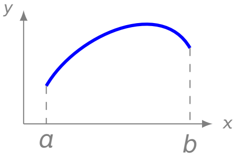
$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2}d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 2a\sin\frac{\theta}{2}d\theta = -4a\cos\frac{\theta}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8a.$$

性质 设曲线由函数 $y = f(x)$，$(a \le x \le b)$ 给出，则曲线的长度为

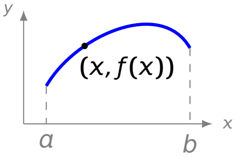


性质 设曲线由函数 $y = f(x)$，$(a \le x \le b)$ 给出，则曲线的长度为



$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}dx.$$

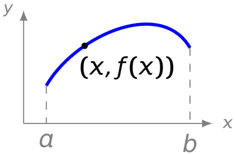
性质 设曲线由函数 $y = f(x)$，$(a \le x \le b)$ 给出，则曲线的长度为



$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx.$$

证明 曲线参数方程可取为 $\begin{cases} x = x \\ y = f(x) \end{cases}$，$(a \le x \le b)$，从而结论成立.

性质 设曲线由函数 $y=f(x)$，$(a\le x\le b)$ 给出，则曲线的长度为

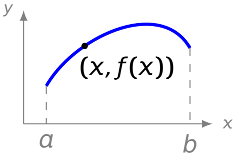


$$s=\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}dx.$$

证明 曲线参数方程可取为 $\begin{cases} x=x \\ y=f(x) \end{cases}$，$(a\le x\le b)$，从而结论成立.

例 2 计算曲线 $y=\frac{2}{3}x^{3/2}$ 上相应 $a\le x\le b$ 的一段弧的长度.

性质 设曲线由函数 $y = f(x)$，$(a \le x \le b)$ 给出，则曲线的长度为



$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx.$$

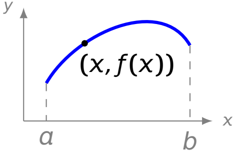
证明 曲线参数方程可取为 $\begin{cases} x = x \\ y = f(x) \end{cases}$，$(a \le x \le b)$，从而结论成立.

例 2 计算曲线 $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$ 上相应 $a \le x \le b$ 的一段弧的长度.

解

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2}\,dx$$

性质 设曲线由函数 $y = f(x)$，$(a \le x \le b)$ 给出，则曲线的长度为



$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx.$$

证明 曲线参数方程可取为 $\begin{cases} x = x \\ y = f(x) \end{cases}$，$(a \le x \le b)$，从而结论成立.

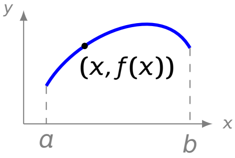
例 2 计算曲线 $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$ 上相应 $a \le x \le b$ 的一段弧的长度.

解

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2}\,dx$$

$$= \int_a^b \sqrt{1 + x}\,dx$$

性质 设曲线由函数 $y=f(x)$，$(a\le x\le b)$ 给出，则曲线的长度为



$$s=\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}dx.$$

证明 曲线参数方程可取为 $\begin{cases} x=x \\ y=f(x) \end{cases}$，$(a\le x\le b)$，从而结论成立.

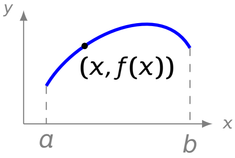
例 2 计算曲线 $y=\frac{2}{3}x^{3/2}$ 上相应 $a\le x\le b$ 的一段弧的长度.

解

$$s=\int_a^b \sqrt{1+y'(x)^2}dx$$

$$=\int_a^b \sqrt{1+x}dx=\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\Big|_a^b$$

性质 设曲线由函数 $y=f(x)$，$(a\le x\le b)$ 给出，则曲线的长度为



$$s=\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}dx.$$

证明 曲线参数方程可取为 $\begin{cases} x=x \\ y=f(x) \end{cases}$，$(a\le x\le b)$，从而结论成立.

例 2 计算曲线 $y=\frac{2}{3}x^{3/2}$ 上相应 $a\le x\le b$ 的一段弧的长度.

解

$$\begin{aligned} s&=\int_a^b\sqrt{1+y'(x)^2}dx \\ &=\int_a^b\sqrt{1+x}dx=\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\Big|_a^b=\frac{2}{3}[(1+b)^{3/2}-(1+a)^{3/2}]. \end{aligned}$$

性质 设曲线由极坐标方程 $\rho = \rho(\theta)$，$(\alpha \le \theta \le \beta)$ 给出，则曲线长度为

性质 设曲线由极坐标方程 $\rho = \rho(\theta)$，$(\alpha \le \theta \le \beta)$ 给出，则曲线长度为

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'(\theta)^2} d\theta.$$

性质 设曲线由极坐标方程 $\rho = \rho(\theta)$，$(\alpha \le \theta \le \beta)$ 给出，则曲线长度为

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'(\theta)^2} d\theta.$$

证明 曲线参数方程为 $\begin{cases} x = \rho(\theta)\cos\theta \\ y = \rho(\theta)\sin\theta \end{cases}$，$(\alpha \le \theta \le \beta)$，从而结论成立.

性质 设曲线由极坐标方程 $\rho=\rho(\theta)$，$(\alpha\le\theta\le\beta)$ 给出，则曲线长度为

$$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'(\theta)^2}d\theta.$$

证明 曲线参数方程为 $\begin{cases} x=\rho(\theta)\cos\theta \\ y=\rho(\theta)\sin\theta \end{cases}$，$(\alpha\le\theta\le\beta)$，从而结论成立.

例 3 计算螺旋线 $\rho=a\theta$（$a>0$）上相应 $0\le\theta\le 2\pi$ 的一段弧的长度.

性质 设曲线由极坐标方程 $\rho = \rho(\theta)$，$(\alpha \le \theta \le \beta)$ 给出，则曲线长度为

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'(\theta)^2} d\theta.$$

证明 曲线参数方程为 $\begin{cases} x = \rho(\theta)\cos\theta \\ y = \rho(\theta)\sin\theta \end{cases}$，$(\alpha \le \theta \le \beta)$，从而结论成立.

例 3 计算螺旋线 $\rho = a\theta$（$a > 0$）上相应 $0 \le \theta \le 2\pi$ 的一段弧的长度.

解

$$s = \int_{0}^{2\pi} \sqrt{(a\theta)^2 + (a\theta)'^2} d\theta$$

性质 设曲线由极坐标方程 $\rho = \rho(\theta)$，$(\alpha \le \theta \le \beta)$ 给出，则曲线长度为

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'(\theta)^2} d\theta.$$

证明 曲线参数方程为 $\begin{cases} x = \rho(\theta)\cos\theta \\ y = \rho(\theta)\sin\theta \end{cases}$，$(\alpha \le \theta \le \beta)$，从而结论成立.

例 3 计算螺旋线 $\rho = a\theta$（$a > 0$）上相应 $0 \le \theta \le 2\pi$ 的一段弧的长度.

解

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{(a\theta)^2 + (a\theta)'^2} d\theta$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{\theta^2 + 1} d\theta$$

性质 设曲线由极坐标方程 $\rho = \rho(\theta)$，$(\alpha \le \theta \le \beta)$ 给出，则曲线长度为

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'(\theta)^2} d\theta.$$

证明 曲线参数方程为 $\begin{cases} x = \rho(\theta)\cos\theta \\ y = \rho(\theta)\sin\theta \end{cases}$，$(\alpha \le \theta \le \beta)$，从而结论成立.

例 3 计算螺旋线 $\rho = a\theta$（$a > 0$）上相应 $0 \le \theta \le 2\pi$ 的一段弧的长度.

解

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{(a\theta)^2 + (a\theta)'^2} d\theta$$

$$= a \int_0^{2\pi} \sqrt{\theta^2 + 1} d\theta$$

$$= \frac{a}{2}\left[2\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2})\right].$$