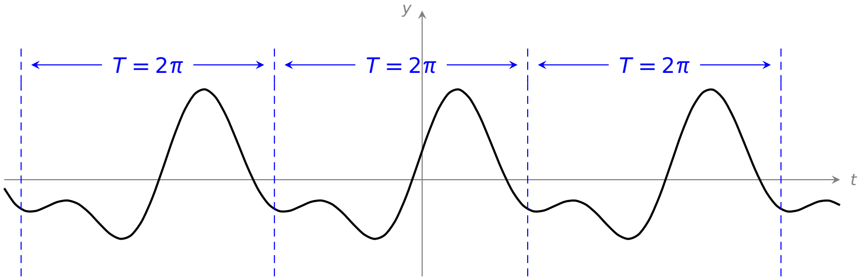
第 12 章 e：傅里叶级数

数学系　　梁卓滨

2017.07 暑期班

周期函数

假设 $f(t)$ 是定义域为 $\mathbb{R}$ 的周期函数，周期也是 $T=2\pi$。



问题 是否有如下展开

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

性质 三角函数系

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$$

在区间 $[-\pi, \pi]$ 上正交。即上述任意相异两个函数的乘积，在 $[-\pi, \pi]$ 上的积分为零：

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cdot \cos nx dx = 0 \qquad (k, n = 1, 2, 3, \cdots, k \neq n)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cdot \sin nx dx = 0 \qquad (k, n = 1, 2, 3, \cdots, k \neq n)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cdot \cos nx dx = 0 \qquad (k, n = 1, 2, 3, \cdots, k \neq n)$$

另外

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \pi \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

有理由认为 若假设

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

则

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

“形式推导” (1) 当 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ 时,

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx=\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)\right]\cos nx dx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}a_n\cos nx\cdot\cos nx dx=\pi a_n$$

有理由认为 若假设

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos nx+b_n\sin nx\Big)$$

则

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

“形式推导” (2) 当 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ 时,

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx=\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k\cos kx+b_k\sin kx\Big)\right]\sin nx dx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}b_n\sin nx\cdot\sin nx dx=\pi b_n$$

有理由认为 若假设

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)$$

则

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

“形式推导” (3)

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right)\right]dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx = \pi a_0$$

定义 $f(x)$ 的傅里叶级数定义为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right)$$

其中

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

问题 何时成立 $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right)$?

定理（收敛定理，狄利克雷充分条件）

定理（收敛定理，狄利克雷充分条件） 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，如果它满足：

1. 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点；
2. 在一个周期内至多只有有限个极值点，

那么 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛（但不一定绝对收敛），并且

- 当 x 是 $f(x)$ 的连续点时，

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right)$$

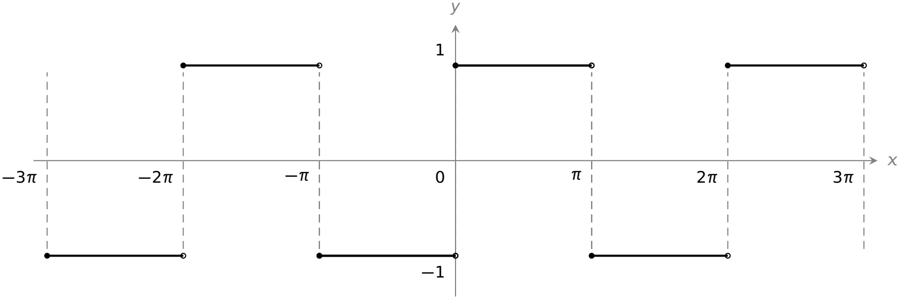
- 当 x 是 $f(x)$ 的间断点时，

$$\frac{1}{2}\Big[f(x^-) + f(x^+)\Big] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right)$$

例 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \le x < 0, \\ 1, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$$

求出 $f(x)$ 的傅里叶级数。



解 计算傅里叶系数如下：

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \xlongequal{\text{奇偶性}} 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \xlongequal{\text{奇偶性}} 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot(-1)\cdot\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{n\pi}\Big[1-\cos n\pi\Big] = \frac{2}{n\pi}\Big[1-(-1)^n\Big]$$

$$= \begin{cases} \frac{4}{n\pi}, & n = 1,\ 3,\ 5,\ \cdots \\ 0, & n = 2,\ 4,\ 6,\ \cdots. \end{cases}$$

所以傅里叶级数为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos nx + b_n\sin nx\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx$$

$$= \frac{4}{\pi}\Big[\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots\Big]$$

注 1 $f(x)$ 的傅里叶级数是 $\frac{4}{\pi}\left[\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\cdots\right]$，利用收敛定理分析可知：

- 当 $x\neq n\pi$ 时，是 f 的连续点，此时
$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left[\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\cdots\right]$$
- 当 $x=n\pi$ 是，是 f 的间断点，此时
$$\frac{4}{\pi}\left[\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\cdots\right]=\frac{1}{2}\left[f(x^-)+f(x^+)\right]=0$$
（显然，可直接看出当 $x=n\pi$ 时傅里叶级数的值为 0）

注 2 取 $x=\frac{\pi}{2}$，可得到
$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots=\frac{\pi}{4}$$

注 3 当 $x=\frac{\pi}{2}$，傅里叶级数仅仅是条件收敛

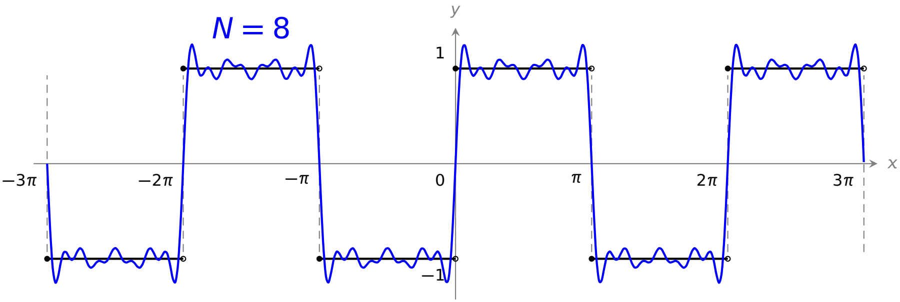
注 4 奇函数 $f(x)$ 的傅里叶级数是 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx$

$f(x)$ 的傅里叶级数是

$$\frac{4}{\pi}\left[\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\cdots\right]=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin[(2n-1)x]$$

考虑部分和

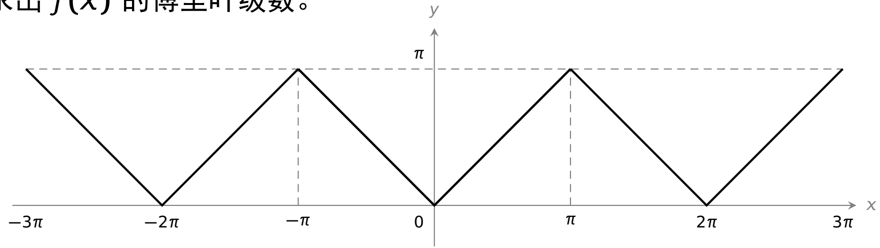
$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2n-1}\sin[(2n-1)x]$$



例 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为

$$f(x) = |x|$$

求出 $f(x)$ 的傅里叶级数。



解 计算傅里叶系数如下：

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \xlongequal{\text{奇偶性}} 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \xlongequal{\text{奇偶性}} 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx dx$$

$$= \frac{2}{n\pi}\int_{0}^{\pi} x d\sin nx = \frac{2}{n\pi}\left[x\sin nx\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin nx dx\right]$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[\frac{1}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}\right] = \frac{2}{n^2\pi}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} -\frac{4}{n^2\pi}, & n = 1, 3, 5, \cdots \\ 0, & n = 2, 4, 6, \cdots \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_0^{\pi} = \pi.$$

所以傅里叶级数为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \cdots\right]$$

注 1 $f(x)$ 的傅里叶级数是

$$\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\Big[\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\Big]$$

又因为 $f(x)$ 是连续函数，故利用收敛定理分析可知：

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\Big[\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\Big]$$

注 2 取 $x=0$，可得到

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$$

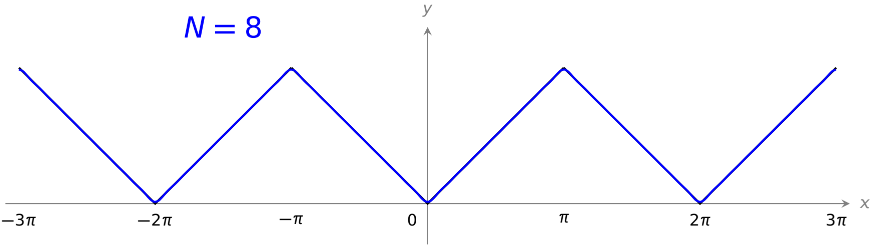
注 3 偶函数 $f(x)$ 的傅里叶级数是 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$

$f(x)$ 的傅里叶级数是

$$\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left[\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right]=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}$$

考虑部分和

$$\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos[(2n-1)x]$$



性质 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，

- 若 $f(x)$ 是奇函数，则傅里叶级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \qquad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx.$$

- 若 $f(x)$ 是偶函数，则傅里叶级数为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \qquad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx.$$

证明 (1) 假设 f 为奇函数，则

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \xlongequal{\text{奇偶性}} 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \xlongequal{\text{奇偶性}} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

性质 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，

- 若 $f(x)$ 是奇函数，则傅里叶级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \qquad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx.$$

- 若 $f(x)$ 是偶函数，则傅里叶级数为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \qquad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx.$$

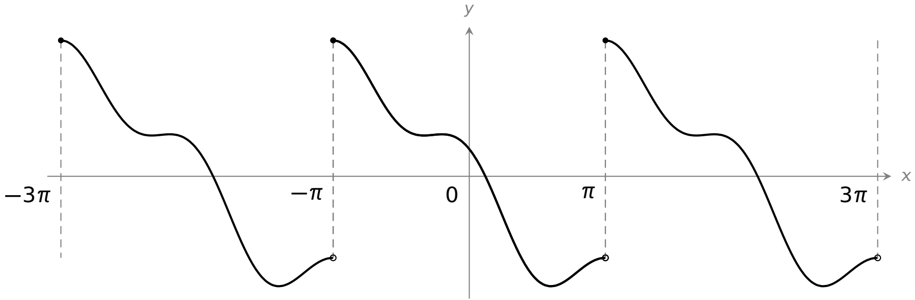
证明 (2) 假设 f 为偶函数，则

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \xlongequal{\text{奇偶性}} 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \xlongequal{\text{奇偶性}} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx$$

周期延拓

设 $f(x)$ 是定义在区间 $[-\pi, \pi)$（或 $(-\pi, \pi]$）上的函数，可以对其进行周期延拓，从而得到定义在 $\mathbb{R}$ 上的周期函数，如图：



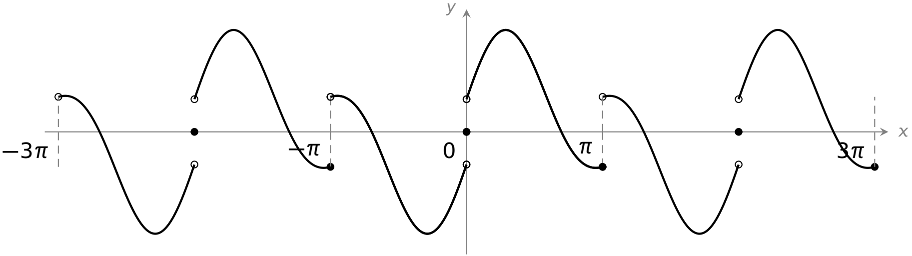
延拓后的周期函数任然记为 $f(x)$，此时可以进行傅里叶展开。

奇延拓

设 $f(x)$ 是定义在区间 $(0, \pi]$ 上的函数，可以对其进行奇延拓，从而得到定义在 $\mathbb{R}$ 上的周期奇函数。

奇延拓步骤：

- 定义 $f(0) = 0$；当 $x \in (-\pi, 0)$ 时，定义 $f(x) = -f(-x)$；（此时 f 在 $(-\pi, \pi]$ 上有定义，且在 $(-\pi, \pi)$ 上为奇函数）
- 周期延拓 f 在 $(-\pi, \pi]$ 上的取值。



偶延拓

设 $f(x)$ 是定义在区间 $[0, \pi]$ 上的函数，可以对其进行偶延拓，从而得到定义在 $\mathbb{R}$ 上的周期偶函数。

偶延拓步骤：

- 当 $x \in [-\pi, 0]$ 时，定义 $f(x) = f(-x)$；
  （此时 f 成为定义在 $[-\pi, \pi]$ 上为偶函数）
- 周期延拓 f 在 $[-\pi, \pi]$ 上的取值。