§2.3 特殊矩阵

数学系　梁卓滨

2017 - 2018 学年 I

提要

- 单位矩阵　数量矩阵　对角矩阵　三角矩阵

提要

- 单位矩阵 $\subset$ 数量矩阵 $\subset$ 对角矩阵 $\subset$ 三角矩阵

提要

- 单位矩阵 $\subset$ 数量矩阵 $\subset$ 对角矩阵 $\subset$ 三角矩阵
- 对称矩阵

单位矩阵

定义 对角线元素都是 1，其余元素均为 0 的 n 阶矩阵称为单位矩阵，记为 I_n（有时简记为 I），即

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

单位矩阵

定义 对角线元素都是 1，其余元素均为 0 的 n 阶矩阵称为单位矩阵，记为 I_n（有时简记为 I），即

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

性质 对任意 n 阶方阵 A，都有

$$I_nA = AI_n = A$$

$$I_nA=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&\cdots&a_{2n}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&\cdots&\vdots\\\vdots&\vdots&\cdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

$$I_nA=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&\cdots&a_{2n}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&\cdots&\vdots\\\vdots&\vdots&\cdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&\cdots&a_{2n}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&\cdots&\vdots\\\vdots&\vdots&\cdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}_{n\times n}$$

数量矩阵

定义 对角线元素都是同一个数 k，其余元素均为 0 的 n 阶矩阵称为数量矩阵

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n\times n}$$

数量矩阵

定义 对角线元素都是同一个数 k，其余元素均为 0 的 n 阶矩阵称为数量矩阵，即

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n\times n} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

数量矩阵

定义 对角线元素都是同一个数 k，其余元素均为 0 的 n 阶矩阵称为**数量矩阵**，即

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n\times n} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n\times n} = kI_n$$

数量矩阵

定义 对角线元素都是同一个数 k，其余元素均为 0 的 n 阶矩阵称为**数量矩阵**，即

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n\times n} = k\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n\times n} = kI_n$$

可见，数量矩阵可表示为 kI_n。

数量矩阵

定义 对角线元素都是同一个数 k，其余元素均为 0 的 n 阶矩阵称为数量矩阵，即

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n\times n} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n\times n} = kI_n$$

可见，数量矩阵可表示为 kI_n。

性质 两个数量矩阵的和、差、乘积仍是数量矩阵

数量矩阵

定义 对角线元素都是同一个数 k，其余元素均为 0 的 n 阶矩阵称为**数量矩阵**，即

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n\times n} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n\times n} = kI_n$$

可见，数量矩阵可表示为 kI_n。

性质 两个数量矩阵的和、差、乘积仍是数量矩阵，例如

1. $kI_n + lI_n =$

数量矩阵

定义 对角线元素都是同一个数 k，其余元素均为 0 的 n 阶矩阵称为**数量矩阵**，即

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n\times n} = k\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n\times n} = kI_n$$

可见，数量矩阵可表示为 kI_n。

性质 两个数量矩阵的和、差、乘积仍是数量矩阵，例如

1. $kI_n + lI_n = (k+l)I_n$

数量矩阵

定义 对角线元素都是同一个数 k，其余元素均为 0 的 n 阶矩阵称为数量矩阵，即

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n\times n} = k\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n\times n} = kI_n$$

可见，数量矩阵可表示为 kI_n。

性质 两个数量矩阵的和、差、乘积仍是数量矩阵，例如

1. $kI_n + lI_n = (k+l)I_n$，$kI_n - lI_n =$

数量矩阵

定义 对角线元素都是同一个数 k，其余元素均为 0 的 n 阶矩阵称为数量矩阵，即

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n\times n} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n\times n} = kI_n$$

可见，数量矩阵可表示为 kI_n。

性质 两个数量矩阵的和、差、乘积仍是数量矩阵，例如

1. $kI_n + lI_n = (k+l)I_n$，$kI_n - lI_n = (k-l)I_n$

数量矩阵

定义 对角线元素都是同一个数 k，其余元素均为 0 的 n 阶矩阵称为数量矩阵，即

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n\times n} = k\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n\times n} = kI_n$$

可见，数量矩阵可表示为 kI_n。

性质 两个数量矩阵的和、差、乘积仍是数量矩阵，例如

1. $kI_n + lI_n = (k+l)I_n$，$kI_n - lI_n = (k-l)I_n$
2. $(kI_n)(lI_n) =$

数量矩阵

定义 对角线元素都是同一个数 k，其余元素均为 0 的 n 阶矩阵称为数量矩阵，即

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n\times n} = k\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n\times n} = kI_n$$

可见，数量矩阵可表示为 kI_n。

性质 两个数量矩阵的和、差、乘积仍是数量矩阵，例如

1. $kI_n + lI_n = (k+l)I_n$，$kI_n - lI_n = (k-l)I_n$
2. $(kI_n)(lI_n) = (kl)I_nI_n =$

数量矩阵

定义 对角线元素都是同一个数 k，其余元素均为 0 的 n 阶矩阵称为**数量矩阵**，即

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n\times n} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n\times n} = kI_n$$

可见，数量矩阵可表示为 kI_n。

性质 两个数量矩阵的和、差、乘积仍是数量矩阵，例如

1. $kI_n + lI_n = (k+l)I_n$，$kI_n - lI_n = (k-l)I_n$
2. $(kI_n)(lI_n) = (kl)I_nI_n = (kl)I_n$

对角矩阵

定义 除了对角线，其余位置都是 0 的 n 阶矩阵，称为对角矩阵，即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}$$

对角矩阵

定义 除了对角线，其余位置都是 0 的 n 阶矩阵，称为对角矩阵，即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n} \xlongequal{\text{或写成}} \begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & & \\ & & a_{33} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

对角矩阵

定义 除了对角线，其余位置都是 0 的 n 阶矩阵，称为**对角矩阵**，即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n} \xlongequal{\text{或写成}} \begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & & \\ & & a_{33} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

性质 两个对角矩阵的和、差、乘积仍是对角矩阵

对角矩阵的和、差

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & & & \\ & a_{22}+b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}$$

对角矩阵的和、差

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & & & \\ & a_{22} - b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} - b_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

对角矩阵的和、差

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & & & \\ & a_{22} \pm b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \pm b_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}$$

对角矩阵的乘积

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

对角矩阵的乘积

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}_{n\times n}$$

对角矩阵的乘积

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}_{n\times n}$$

对角矩阵的乘积

$$
\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & & & \\ & a_{22}b_{22} & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}_{n\times n}
$$

对角矩阵的乘积

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & & & \\ & a_{22}b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \end{pmatrix}_{n\times n}$$

对角矩阵的乘积

$$
\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & & & \\ & a_{22}b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}
$$

三角矩阵

- 上三角矩阵 $$\begin{pmatrix} a_{11} & * & * & \cdots & * \\ & a_{22} & * & \cdots & * \\ & & a_{33} & \cdots & * \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

三角矩阵

- 上三角矩阵 $\begin{pmatrix} a_{11} & * & * & \cdots & * \\ & a_{22} & * & \cdots & * \\ & & a_{33} & \cdots & * \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$

- 下三角矩阵 $\begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ * & a_{22} & & & \\ * & * & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ * & * & * & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

三角矩阵

- 上三角矩阵 $\begin{pmatrix} a_{11} & * & * & \cdots & * \\ & a_{22} & * & \cdots & * \\ & & a_{33} & \cdots & * \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$

- 下三角矩阵 $\begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ * & a_{22} & & & \\ * & * & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ * & * & * & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

性质 两个上（下）三角矩阵的和、差、乘积仍是上（下）三角矩阵

三角矩阵的和、差

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ & a_{22} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & * & \cdots & * \\ & b_{22} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & * & \cdots & * \\ & a_{22}+b_{22} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}$$

三角矩阵的和、差

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ & a_{22} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & * & \cdots & * \\ & b_{22} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & * & \cdots & * \\ & a_{22}-b_{22} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}-b_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}$$

三角矩阵的和、差

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ & a_{22} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & * & \cdots & * \\ & b_{22} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & * & \cdots & * \\ & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \pm b_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}$$

三角矩阵的乘积

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ & a_{22} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & * & \cdots & * \\ & b_{22} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

三角矩阵的乘积

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ & a_{22} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & * & \cdots & * \\ & b_{22} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}_{n\times n}$$

三角矩阵的乘积

$$
\begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ & a_{22} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & * & \cdots & * \\ & b_{22} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & * & \cdots & * \\ & a_{22}b_{22} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}
$$

对称矩阵

定义 如果 n 阶矩阵 $A = (a_{ij})$ 满足

$$a_{ij} = a_{ji}, \qquad \forall i, j = 1, 2, \ldots n$$

则称为对称矩阵 。

对称矩阵

定义 如果 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 满足

$$a_{ij}=a_{ji}, \qquad \forall i, j=1, 2, \dots n$$

则称为对称矩阵 。

例 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

对称矩阵

定义 如果 n 阶矩阵 $A = (a_{ij})$ 满足

$$a_{ij} = a_{ji}, \qquad \forall i, j = 1, 2, \ldots n$$

则称为对称矩阵 。

例 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$都是对称矩阵。

对称矩阵

定义 如果 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 满足

$$a_{ij}=a_{ji}, \qquad \forall i,j=1,2,\ldots n$$

则称为对称矩阵 。

例 $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 4 & 5\\ 4 & 2 & 6\\ 5 & 6 & 3\end{pmatrix}$都是对称矩阵。

注 方阵 A 对称，等价于它满足 $A^T=A$。

对称矩阵

定义 如果 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 满足

$$a_{ij}=a_{ji},\qquad \forall i,j=1,2,\ldots n$$

则称为对称矩阵 。

例 $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 4 & 5\\ 4 & 2 & 6\\ 5 & 6 & 3\end{pmatrix}$都是对称矩阵。

注 方阵 A 对称，等价于它满足 $A^T=A$。这是：

	A	A^T
位置 (i,j) 上的元素		

对称矩阵

定义 如果 n 阶矩阵 $A = (a_{ij})$ 满足

$$a_{ij} = a_{ji}, \qquad \forall i, j = 1, 2, \ldots n$$

则称为对称矩阵 。

例 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$都是对称矩阵。

注 方阵 A 对称，等价于它满足 $A^T = A$。这是：

	A	A^T
位置 (i, j) 上的元素	a_{ij}	

对称矩阵

定义 如果 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 满足

$$a_{ij}=a_{ji}, \qquad \forall i,j=1,2,\ldots n$$

则称为对称矩阵 。

例 $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 4 & 5\\ 4 & 2 & 6\\ 5 & 6 & 3\end{pmatrix}$都是对称矩阵。

注 方阵 A 对称，等价于它满足 $A^T=A$。这是：

	A	A^T
位置 (i,j) 上的元素	a_{ij}	a_{ji}

性质

1. 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，则 $A \pm B, kA$ 也是 n 阶对称矩阵。

性质

1. 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，则 $A \pm B$, kA 也是 n 阶对称矩阵。

证明

1. $(A \pm B)^T =$

性质

1. 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，则 $A \pm B$, kA 也是 n 阶对称矩阵。

证明

1. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T =$

性质

1. 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，则 $A \pm B, kA$ 也是 n 阶对称矩阵。

证明

1. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$

性质

1. 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，则 $A \pm B, kA$ 也是 n 阶对称矩阵。

证明

1. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$，所以 $A \pm B$ 对称

性质

1. 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，则 $A \pm B, kA$ 也是 n 阶对称矩阵。

证明

1. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$，所以 $A \pm B$ 对称

   $(kA)^T =$

性质

1. 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，则 $A \pm B, kA$ 也是 n 阶对称矩阵。

证明

1. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$，所以 $A \pm B$ 对称
   $(kA)^T = kA^T =$

性质

1. 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，则 $A \pm B, kA$ 也是 n 阶对称矩阵。

证明

1. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$，所以 $A \pm B$ 对称

   $(kA)^T = kA^T = kA$

性质

1. 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，则 $A \pm B, kA$ 也是 n 阶对称矩阵。

证明

1. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$，所以 $A \pm B$ 对称
   $(kA)^T = kA^T = kA$，所以 kA 对称

性质

1. 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，则 $A \pm B, kA$ 也是 n 阶对称矩阵。
2. 设 C 为任一 n 阶方阵，则 $C + C^T$ 为 n 阶对称矩阵。

证明

1. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$，所以 $A \pm B$ 对称

   $(kA)^T = kA^T = kA$，所以 kA 对称

性质

1. 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，则 $A \pm B$, kA 也是 n 阶对称矩阵。
2. 设 C 为任一 n 阶方阵，则 $C + C^T$ 为 n 阶对称矩阵。

证明

1. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$，所以 $A \pm B$ 对称

   $(kA)^T = kA^T = kA$，所以 kA 对称
2. $(C + C^T)^T =$

性质

1. 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，则 $A \pm B, kA$ 也是 n 阶对称矩阵。
2. 设 C 为任一 n 阶方阵，则 $C + C^T$ 为 n 阶对称矩阵。

证明

1. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$，所以 $A \pm B$ 对称

   $(kA)^T = kA^T = kA$，所以 kA 对称
2. $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T =$

性质

1. 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，则 $A \pm B$, kA 也是 n 阶对称矩阵。
2. 设 C 为任一 n 阶方阵，则 $C + C^T$ 为 n 阶对称矩阵。

证明

1. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$，所以 $A \pm B$ 对称

   $(kA)^T = kA^T = kA$，所以 kA 对称
2. $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C =$

性质

1. 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，则 $A \pm B, kA$ 也是 n 阶对称矩阵。
2. 设 C 为任一 n 阶方阵，则 $C + C^T$ 为 n 阶对称矩阵。

证明

1. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$，所以 $A \pm B$ 对称
   $(kA)^T = kA^T = kA$，所以 kA 对称
2. $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C = C + C^T$

性质

1. 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，则 $A \pm B, kA$ 也是 n 阶对称矩阵。
2. 设 C 为任一 n 阶方阵，则 $C + C^T$ 为 n 阶对称矩阵。

证明

1. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$，所以 $A \pm B$ 对称
   $(kA)^T = kA^T = kA$，所以 kA 对称
2. $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C = C + C^T$，所以 $C + C^T$ 对称

性质

1. 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，则 $A \pm B, kA$ 也是 n 阶对称矩阵。
2. 设 C 为任一 n 阶方阵，则 $C + C^T$ 为 n 阶对称矩阵。
3. 设 D 为任一 $m \times n$ 矩阵，则 DD^T 为 m 阶对称方阵；D^TD 为 n 阶对称方阵

证明

1. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$，所以 $A \pm B$ 对称
   $(kA)^T = kA^T = kA$，所以 kA 对称
2. $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C = C + C^T$，所以 $C + C^T$ 对称

性质

1. 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，则 $A \pm B, kA$ 也是 n 阶对称矩阵。
2. 设 C 为任一 n 阶方阵，则 $C + C^T$ 为 n 阶对称矩阵。
3. 设 D 为任一 $m \times n$ 矩阵，则 DD^T 为 m 阶对称方阵；D^TD 为 n 阶对称方阵

证明

1. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$，所以 $A \pm B$ 对称
   $(kA)^T = kA^T = kA$，所以 kA 对称
2. $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C = C + C^T$，所以 $C + C^T$ 对称
3. D 为 $m \times n$，D^T 为 $n \times m$，所以 DD^T 为 ，D^TD 为

性质

1. 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，则 $A \pm B, kA$ 也是 n 阶对称矩阵。
2. 设 C 为任一 n 阶方阵，则 $C + C^T$ 为 n 阶对称矩阵。
3. 设 D 为任一 $m \times n$ 矩阵，则 DD^T 为 m 阶对称方阵；D^TD 为 n 阶对称方阵

证明

1. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$，所以 $A \pm B$ 对称
   $(kA)^T = kA^T = kA$，所以 kA 对称
2. $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C = C + C^T$，所以 $C + C^T$ 对称
3. D 为 $m \times n$，D^T 为 $n \times m$，所以 DD^T 为 $m \times m$，D^TD 为

性质

1. 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，则 $A \pm B, kA$ 也是 n 阶对称矩阵。
2. 设 C 为任一 n 阶方阵，则 $C + C^T$ 为 n 阶对称矩阵。
3. 设 D 为任一 $m \times n$ 矩阵，则 DD^T 为 m 阶对称方阵；D^TD 为 n 阶对称方阵

证明

1. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$，所以 $A \pm B$ 对称
   $(kA)^T = kA^T = kA$，所以 kA 对称
2. $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C = C + C^T$，所以 $C + C^T$ 对称
3. D 为 $m \times n$，D^T 为 $n \times m$，所以 DD^T 为 $m \times m$，D^TD 为 $n \times n$

性质

1. 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，则 $A \pm B$, kA 也是 n 阶对称矩阵。
2. 设 C 为任一 n 阶方阵，则 $C + C^T$ 为 n 阶对称矩阵。
3. 设 D 为任一 $m \times n$ 矩阵，则 DD^T 为 m 阶对称方阵；$D^T D$ 为 n 阶对称方阵

证明

1. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$，所以 $A \pm B$ 对称
   $(kA)^T = kA^T = kA$，所以 kA 对称
2. $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C = C + C^T$，所以 $C + C^T$ 对称
3. D 为 $m \times n$，D^T 为 $n \times m$，所以 DD^T 为 $m \times m$，$D^T D$ 为 $n \times n$。
   此外：

$$(DD^T)^T =$$

性质

1. 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，则 $A \pm B$, kA 也是 n 阶对称矩阵。
2. 设 C 为任一 n 阶方阵，则 $C + C^T$ 为 n 阶对称矩阵。
3. 设 D 为任一 $m \times n$ 矩阵，则 DD^T 为 m 阶对称方阵；D^TD 为 n 阶对称方阵

证明

1. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$，所以 $A \pm B$ 对称
   $(kA)^T = kA^T = kA$，所以 kA 对称
2. $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C = C + C^T$，所以 $C + C^T$ 对称
3. D 为 $m \times n$，D^T 为 $n \times m$，所以 DD^T 为 $m \times m$，D^TD 为 $n \times n$。
   此外：
   $$(DD^T)^T = (D^T)^T D^T =$$

性质

1. 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，则 $A \pm B, kA$ 也是 n 阶对称矩阵。
2. 设 C 为任一 n 阶方阵，则 $C + C^T$ 为 n 阶对称矩阵。
3. 设 D 为任一 $m \times n$ 矩阵，则 DD^T 为 m 阶对称方阵；D^TD 为 n 阶对称方阵

证明

1. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$，所以 $A \pm B$ 对称
   $(kA)^T = kA^T = kA$，所以 kA 对称
2. $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C = C + C^T$，所以 $C + C^T$ 对称
3. D 为 $m \times n$，D^T 为 $n \times m$，所以 DD^T 为 $m \times m$，D^TD 为 $n \times n$。
   此外：
   $$(DD^T)^T = (D^T)^T D^T = DD^T$$

性质

1. 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，则 $A \pm B, kA$ 也是 n 阶对称矩阵。
2. 设 C 为任一 n 阶方阵，则 $C + C^T$ 为 n 阶对称矩阵。
3. 设 D 为任一 $m \times n$ 矩阵，则 DD^T 为 m 阶对称方阵；D^TD 为 n 阶对称方阵

证明

1. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$，所以 $A \pm B$ 对称
   $(kA)^T = kA^T = kA$，所以 kA 对称
2. $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C = C + C^T$，所以 $C + C^T$ 对称
3. D 为 $m \times n$，D^T 为 $n \times m$，所以 DD^T 为 $m \times m$，D^TD 为 $n \times n$。
   此外：
   $$(DD^T)^T = (D^T)^TD^T = DD^T$$
   $$(D^TD)^T =$$

性质

1. 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，则 $A \pm B$, kA 也是 n 阶对称矩阵。
2. 设 C 为任一 n 阶方阵，则 $C + C^T$ 为 n 阶对称矩阵。
3. 设 D 为任一 $m \times n$ 矩阵，则 DD^T 为 m 阶对称方阵；D^TD 为 n 阶对称方阵

证明

1. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$，所以 $A \pm B$ 对称
   $(kA)^T = kA^T = kA$，所以 kA 对称
2. $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C = C + C^T$，所以 $C + C^T$ 对称
3. D 为 $m \times n$，D^T 为 $n \times m$，所以 DD^T 为 $m \times m$，D^TD 为 $n \times n$。
   此外：
   $$(DD^T)^T = (D^T)^T D^T = DD^T$$
   $$(D^TD)^T = D^T(D^T)^T =$$

性质

1. 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，则 $A \pm B, kA$ 也是 n 阶对称矩阵。
2. 设 C 为任一 n 阶方阵，则 $C + C^T$ 为 n 阶对称矩阵。
3. 设 D 为任一 $m \times n$ 矩阵，则 DD^T 为 m 阶对称方阵；D^TD 为 n 阶对称方阵

证明

1. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$，所以 $A \pm B$ 对称
   $(kA)^T = kA^T = kA$，所以 kA 对称
2. $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C = C + C^T$，所以 $C + C^T$ 对称
3. D 为 $m \times n$，D^T 为 $n \times m$，所以 DD^T 为 $m \times m$，D^TD 为 $n \times n$。
   此外：
   $$(DD^T)^T = (D^T)^T D^T = DD^T$$
   $$(D^TD)^T = D^T(D^T)^T = D^TD$$

性质

1. 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，则 $A \pm B$, kA 也是 n 阶对称矩阵。
2. 设 C 为任一 n 阶方阵，则 $C + C^T$ 为 n 阶对称矩阵。
3. 设 D 为任一 $m \times n$ 矩阵，则 DD^T 为 m 阶对称方阵；D^TD 为 n 阶对称方阵

证明

1. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$，所以 $A \pm B$ 对称
   $(kA)^T = kA^T = kA$，所以 kA 对称
2. $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C = C + C^T$，所以 $C + C^T$ 对称
3. D 为 $m \times n$，D^T 为 $n \times m$，所以 DD^T 为 $m \times m$，D^TD 为 $n \times n$。
   此外：
   $$(DD^T)^T = (D^T)^T D^T = DD^T$$
   $$(D^TD)^T = D^T(D^T)^T = D^TD$$
   所以 DD^T，D^TD 均对称。

对称矩阵

注 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，然而 AB 未必对称。

对称矩阵

注 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，然而 AB 未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

对称矩阵

注 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，然而 AB 未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

对称矩阵

注 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，然而 AB 未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

对称矩阵

注 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，然而 AB 未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ 却不是对称。

对称矩阵

注 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，然而 AB 未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ 却不是对称。

性质 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，则 AB 对称的充分必要条件是交换（i.e. $AB = BA$）。

对称矩阵

注 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，然而 AB 未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ 却不是对称。

性质 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，则 AB 对称的充分必要条件是交换（i.e. $AB = BA$）。

证明

$$AB\text{对称}$$

对称矩阵

注 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，然而 AB 未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ 却不是对称。

性质 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，则 AB 对称的充分必要条件是交换（i.e. $AB = BA$）。

证明

$$AB\text{对称} \quad \Longrightarrow \quad AB = (AB)^T =$$

对称矩阵

注 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，然而 AB 未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ 却不是对称。

性质 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，则 AB 对称的充分必要条件是交换（i.e. $AB = BA$）。

证明

$$AB\text{对称} \quad \Longrightarrow \quad AB = (AB)^T = B^T A^T =$$

对称矩阵

注 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，然而 AB 未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$ 却不是对称。

性质 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，则 AB 对称的充分必要条件是交换（i.e. $AB = BA$）。

证明

$$AB\text{对称} \quad \Longrightarrow \quad AB = (AB)^T = B^T A^T = BA$$

对称矩阵

注 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，然而 AB 未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ 却不是对称。

性质 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，则 AB 对称的充分必要条件是交换（i.e. $AB = BA$）。

证明

$$AB\text{对称} \quad \Longrightarrow \quad AB = (AB)^T = B^T A^T = BA$$

反之，

$$AB = BA \quad \Longrightarrow$$

对称矩阵

注 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，然而 AB 未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$却不是对称。

性质 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，则 AB 对称的充分必要条件是交换（i.e. $AB = BA$）。

证明

$$AB\text{对称} \quad \Longrightarrow \quad AB = (AB)^T = B^T A^T = BA$$

反之，

$$AB = BA \quad \Longrightarrow \quad (AB)^T = \qquad\qquad\qquad AB,$$

对称矩阵

注 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，然而 AB 未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$却不是对称。

性质 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，则 AB 对称的充分必要条件是交换（i.e. $AB = BA$）。

证明

$$AB\text{对称} \quad \Longrightarrow \quad AB = (AB)^T = B^TA^T = BA$$

反之，

$$AB = BA \quad \Longrightarrow \quad (AB)^T = B^TA^T = \qquad AB,$$

对称矩阵

注 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，然而 AB 未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$却不是对称。

性质 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，则 AB 对称的充分必要条件是交换（i.e. $AB = BA$）。

证明

$$AB\text{对称} \quad \Longrightarrow \quad AB = (AB)^T = B^T A^T = BA$$

反之，

$$AB = BA \quad \Longrightarrow \quad (AB)^T = B^T A^T = BA \quad AB,$$

对称矩阵

注 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，然而 AB 未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ 却不是对称。

性质 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，则 AB 对称的充分必要条件是交换（i.e. $AB = BA$）。

证明

$$AB\text{对称} \quad \Longrightarrow \quad AB = (AB)^T = B^T A^T = BA$$

反之，

$$AB = BA \quad \Longrightarrow \quad (AB)^T = B^T A^T = BA = AB,$$

对称矩阵

注 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，然而 AB 未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$ 却不是对称。

性质 设 A, B 为 n 阶对称矩阵，则 AB 对称的充分必要条件是交换（i.e. $AB = BA$）。

证明

$$AB\text{对称} \implies AB = (AB)^T = B^T A^T = BA$$

反之，

$$AB = BA \implies (AB)^T = B^T A^T = BA = AB, \quad \Rightarrow \quad AB\text{对称}$$