第 09 周作业解答

练习 1. 计算 $\iint_D |x^2+y^2-4|d\sigma$，其中 D 为圆盘 $x^2+y^2 \le 16$。

解在极坐标下 $D = \{(\rho,\theta)|\, 0 \le \rho \le 4,\, 0 \le \theta \le 2\pi\}$，所以

$$\begin{aligned}\iint_D |x^2+y^2-4|d\sigma &= \iint_D |\rho^2-4|\rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^4 |\rho^2-4|\rho d\rho\right]d\theta = 2\pi\left[\int_0^4 |\rho^2-4|\rho d\rho\right] \\ &= 2\pi\left[\int_0^2 |\rho^2-4|\rho d\rho + \int_2^4 |\rho^2-4|\rho d\rho\right] = 2\pi\left[\int_0^2 (4-\rho^2)\rho d\rho + \int_2^4 (\rho^2-4)\rho d\rho\right] \\ &= 2\pi\left[\left(2\rho^2-\frac{1}{4}\rho^4\right)\Big|_0^2 + \left(\frac{1}{4}\rho^4-2\rho^2\right)\Big|_2^4\right] = 80\pi.\end{aligned}$$

练习 2. 计算 $D = \iint_D \arctan\frac{y}{x}d\sigma$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$，$x^2+y^2=1$ 及直线 $y=0$，$y=x$ 所围成的在第一象限内的闭区域。

解在极坐标下 $D = \{(\rho,\theta)|\, 1 \le \rho \le 2,\, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}\}$，$\arctan\frac{y}{x} = \theta$，所以

$$\begin{aligned}\iint_D \arctan\frac{y}{x}d\sigma &= \iint_D \theta\rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\frac{1}{4}\pi}\left[\int_1^2 \rho\theta d\rho\right]d\theta = \int_0^{\frac{1}{4}\pi}\left(\frac{1}{2}\theta\rho^2\right)\Big|_1^2 d\theta \\ &= \int_0^{\frac{1}{4}\pi}\frac{3}{2}\theta d\theta = \frac{3}{4}\theta^2\Big|_0^{\frac{1}{4}\pi} = \frac{3}{64}\pi^2.\end{aligned}$$

练习 3. 计算以 xoy 面上的圆周 $x^2+y^2=ax$（$a>0$）围成的闭区域为底，而以曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 为顶的曲顶柱体的体积。

解即要求二重积分 $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}d\sigma$，其中 $D = \{(x,y)|\, x^2+y^2 \le ax\}$。
在极坐标下 $D = \{(\rho,\theta)|\, 0 \le \rho \le a\cos\theta,\, -\frac{1}{2}\pi \le \theta \le \frac{1}{2}\pi\}$，所以

$$\begin{aligned}\iint_D \sqrt{x^2+y^2}d\sigma &= \iint_D \rho\cdot\rho d\rho d\theta \\ &= \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\left[\int_0^{a\cos\theta}\rho^2 d\rho\right]d\theta = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\left(\frac{1}{3}\rho^3\right)\Big|_0^{a\cos\theta}d\theta \\ &= \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\frac{1}{3}a^3\cos^3\theta d\theta = \frac{1}{3}a^3\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\cos^2\theta d\sin\theta \\ &\xlongequal{u=\sin\theta} \frac{1}{3}a^3\int_{-1}^{1} 1-u^2du = \frac{1}{3}a^3\left(u-\frac{1}{3}u^3\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{4}{9}a^3.\end{aligned}$$

练习 4. 设 D 是平面上由直线 $y=2x$、x 轴和 $x=\frac{\pi}{2}$ 所围成的闭区域。求函数 $f(x,y)=e^{1-\cos 2x}\cos y + xy$, $(x,y)\in D$ 的图像，其下方的体积 V。

解将 D 视为 X 型区域：$D=\{(x,\,y)|\,0\le y\le 2x,\,0\le x\le \frac{\pi}{2}\}$。所以

$$V=\iint_D f(x,\,y)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^{2x}\left(e^{1-\cos 2x}\cos y+xy\right)dy\right]dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\left(e^{1-\cos 2x}\sin y+\frac{1}{2}xy^2\right)\Big|_0^{2x}\right]dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[e^{1-\cos 2x}\sin(2x)+2x^3\right]dx=\frac{1}{2}\left(e^{1-\cos 2x}+x^4\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left[e^2+\left(\frac{\pi}{2}\right)^4-1\right].$$

练习 5. 设 D 是平面上由抛物线 $x=4-y^2$ 与 y 轴所围成的闭区域。设函数 $f(x,\,y)=2x+1$ 和 $g(x,\,y)=-x-3y-6$ 定义在 D 上。求 $f(x,\,y)$ 和 $g(x,\,y)$ 的图像所围成三维区域的体积 V。

解将 D 视为 Y 型区域：$D=\{(x,\,y)|\,0\le x\le 4-y^2,\,-2\le y\le 2\}$。所以

$$V=\iint_D\left[f(x,\,y)-g(x,\,y)\right]dxdy=\iint_D(3x+3y+7)\,dxdy=\int_{-2}^{2}\left[\int_0^{4-y^2}(3x+3y+7)\,dx\right]dy$$
$$=\int_{-2}^{2}\left[\left(\frac{3}{2}x^2+3xy+7x\right)\Big|_0^{4-y^2}\right]dy=\int_{-2}^{2}\left[\left(\frac{3}{2}x^2+3xy+7x\right)\Big|_0^{4-y^2}\right]dy$$
$$=\int_{-2}^{2}\left[\frac{3}{2}y^4-3y^3-19y^2+12y+52\right]dy=2\int_0^{2}\left[\frac{3}{2}y^4-19y^2+52\right]dy$$
$$=2\left(\frac{3}{10}y^5-\frac{19}{3}y^3+52y\right)\Big|_0^{2}=\frac{1888}{15}.$$

练习 6. 求圆锥面 $z^2=x^2+y^2$ 在区域 $x\ge 0,\,y\ge 0,\,0\le z\le 1$ 的部分的面积 A。

解设 $D=\{(x,\,y)|\,0\le x,\,0\le y,\,x^2+y^2\le 1\}=\{(\rho,\,\theta)|\,0\le\rho\le 1,\,0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\}$，$z=f(x,\,y)=\sqrt{x^2+y^2}$。所以 A 等于函数 $f(x,\,y),\,(x,\,y)\in D$ 图形面积：

$$A=\iint_D\sqrt{1+(f_x)^2+(f_y)^2}dxdy=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}dxdy$$
$$=\sqrt{2}\iint_D dxdy=\sqrt{2}|D|=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi.$$