第 07 周作业解答

练习 1. 靠近太阳的一艘飞船，船身正要融化。假设飞船坐标为 $(1, 1, 1)$，周围的温度分布函数为 $T = e^{-x^2-2y^2-3z^2}$。船长问此时应该转向哪一个方向，使得温度可以尽快降下来？写出该方向的单位方向向量。

解 1. 求梯度

$$\nabla T = (T_x, T_y, T_z) = (-2xe^{-x^2-2y^2-3z^2}, -4ye^{-x^2-2y^2-3z^2}, -6ze^{-x^2-2y^2-3z^2}).$$

所以

$$\nabla T(1, 1, 1) = (-2e^{-6}, -4e^{-6}, -6e^{-6}), \quad |\nabla T(1, 1, 1)| = 2e^{-6}\sqrt{14}.$$

2. 沿方向

$$\vec{s} = -\frac{\nabla T(1, 1, 1)}{|\nabla T(1, 1, 1)|} = (\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}})$$

温度下降最快。

练习 2. 计算曲面 $3xy + z^2 = 4$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切平面、法线的方程。

解 1. 令 $F(x, y, z) = 3xy + z^2 - 4$，则曲面方程为 $F(x, y, z) = 0$。曲面在点 $(1, 1, 1)$ 处的一个法向量可以取为：

$$\nabla F(1, 1, 1) = (3y, 3x, 2z)\Big|_{(1,1,1)} = (3, 3, 2).$$

2. 切平面方程：

$$3(x-1) + 3(y-1) + 2(z-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x + 3y + 2z - 8 = 0$$

3. 法线方程：

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{2}$$

练习 3. 计算二元函数 $z = xy$ 的图形在点 $(1, 1, 1)$ 处的切平面、法线的方程。

解 1. 令 $F(x, y, z) = z - xy$，则曲面方程为 $F(x, y, z) = 0$。曲面在点 $(1, 1, 1)$ 处的一个法向量可以取为：

$$\nabla F(1, 1, 1) = (-y, -x, 1)\Big|_{(1,1,1)} = (-1, -1, 1).$$

2. 切平面方程：

$$-(x-1) - (y-1) + (z-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x + y - z - 1 = 0$$

3. 法线方程：

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$$

练习 4. 计算螺旋线 $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$, $z = 3\theta$ 在点 $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\pi}{2})$ 处的切线、法平面的方程。

解 1. 该点对应参数 $\theta=\frac{\pi}{6}$，可取方向向量为

$$((\cos\theta)',\,(\sin\theta)',\,(3\theta)')\Big|_{\theta=\frac{\pi}{6}}=(-\sin\theta,\,\cos\theta,\,3)\Big|_{\theta=\frac{\pi}{6}}=(-\frac{1}{2},\,\frac{\sqrt{3}}{2},\,3).$$

2. 切线方程:

$$\frac{x-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}=\frac{y-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{z-\frac{\pi}{2}}{3}$$

3. 法平面方程:

$$-\frac{1}{2}(x-\frac{\sqrt{3}}{2})+\frac{\sqrt{3}}{2}(y-\frac{1}{2})+3(z-\frac{\pi}{2})=0 \quad\Rightarrow\quad x-\sqrt{3}y-6z+3\pi=0$$

练习 5. 计算曲线 $\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2-3x=0 \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{array}\right.$ 在点 $(1,\,1,\,1)$ 处的切线、法平面的方程。

解 1. 令 $F(x,\,y,\,z)=x^2+y^2+z^2-3x$, $G(x,\,y,\,z)=2x-3y+5z-4$，则该点处的一个方向向量可取为

$$\nabla F(1,\,1,\,1)\times\nabla G(1,\,1,\,1)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}_{(1,\,1,\,1)}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x-3 & 2y & 2z \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix}_{(1,\,1,\,1)}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix}=(16,\,9,\,-1)$$

2. 切线方程:

$$\frac{x-1}{16}=\frac{y-1}{9}=\frac{z-1}{-1}$$

3. 法平面的方程:

$$16(x-1)+9(y-1)-(z-1)=0 \quad\Rightarrow\quad 16x+9y-z-24=0$$

练习 6. 计算函数 $f(x,\,y)=x^3+3xy^2-15x-12y$ 的极值点。

解 1. 求驻点。求解方程组

$$\begin{cases} f_x=3x^2+3y^2-15=0 \\ f_y=6xy-12=0 \end{cases}$$

得 $(x,\,y)=(-2,\,-1),\,(-1,\,-2),\,(1,\,2),\,(2,\,1)$。

2. 判断驻点是否极值点。计算二阶偏导数

$$f_{xx}=6x,\quad f_{xy}=6y,\quad f_{yy}=6x$$

可求出判别式 $P(x,\,y)=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=36x^2-36y^2$。

	$(-2,\,-1)$	$(-1,\,-2)$	$(1,\,2)$	$(2,\,1)$
$P(x,\,y)$	$108>0$	$-108<0$	$-108<0$	$108>0$
f_{xx}	$-12<0$			$12>0$
是否极值点	极大值点	☹	☹	极小值点
极值 $f(x,\,y)$	28			-28

练习 7. 计算函数 $f(x,\,y)=e^{2x}(x+y^2+2y)$ 的极值点。

解 1. 求驻点。

$$z_x = e^{2x}(2x + 2y^2 + 4y + 1), \quad z_y = e^{2x}(x + 2y + 2).$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = e^{2x}(2x + 2y^2 + 4y + 1) = 0 \\ z_y = e^{2x}(2y + 2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y^2 + 4y + 1 = 0 & (1) \\ 2y + 2 = 0 & (2) \end{cases}$$

由 (2) 的 $y = -1$，再代入 (1) 得到 $x = \frac{1}{2}$。所以驻点只有一个：$(\frac{1}{2}, -1)$。

2. 判断驻点是否极值点。

$$z_{xx} = 4e^{2x}(x + y^2 + 2y + 1), \quad z_{xy} = 4e^{2x}(y + 1), \quad z_{yy} = 2e^{2x}$$

所以

$$P(x, y) = z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = 8e^{4x}(x + y^2 + 2y + 1) - 16e^{4x}(y + 1)^2 = 8e^{4x}(x - y^2 - 2y - 1).$$

驻点	$(\frac{1}{2}, -1)$
$P(x, y)$	$4e^2 > 0$
$z_{xx}(x, y)$	$2e > 0$
是否极值点	极小值点

3. 结论：只有一个极值点 $(\frac{1}{2}, -1)$，且为极小值点。

练习 8. 求函数 $f(x, y) = x + y$ 在条件 $x^2 + y^2 = 1$ 下的最大、最小值，并求出对应的最值点。(利用拉格朗日乘子法求解)。

解 1. 方程 $x^2 + y^2 = 1$ 表示平面上的圆周，是有界闭集。有连续函数的最值定理，f 在该圆周上一定能取得最值。对应的最值点是极值点。

2. 令 $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1$。构造拉格朗日函数 $L = f + \lambda\varphi = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$，求解方程组：

$$\begin{cases} L_x = 1 + 2\lambda x = 0 \\ L_y = 1 + 2\lambda y = 0 \\ \varphi = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

显然 $\lambda \neq 0$，所以从第 1，2 条方程可知 $x = y$。再结合第 3 条方程，得

$$(x, y) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \quad 或 \quad (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$$

3. 比较函数值。$f(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}$，$f(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\sqrt{2}$。说明 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 是最大值点，最大值是 $f(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}$；$(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ 是最小值点，最小值是 $f(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\sqrt{2}$。

练习 9. 利用拉格朗日乘数法求三元函数 $f = x^2 + y^2 + z^2$ 在附加条件 $\begin{cases} x^2 + y^2 + 4z^2 = 1 \\ x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$ 下的最大值和最小值。

解 1. 令 $\varphi = x^2 + y^2 + 4z^2 - 1$，$\psi = x + 3y + 2z$。拉格朗日函数为

$$L = f + \lambda\varphi + \mu\psi$$

其中 λ，μ 为待定参数。求解方程组

$$\begin{cases} L_x = 2x + 2\lambda x + \mu = 0 & (1) \\ L_y = 2y + 2\lambda y + 3\mu = 0 & (2) \\ L_z = 2z + 8\lambda z + 2\mu = 0 & (3) \\ \varphi = x^2 + y^2 + 4z^2 - 1 = 0 & (4) \\ \psi = x + 3y + 2z = 0 & (5) \end{cases}$$

$(2)-3\times(1)$ 可得

$$2(\lambda+1)(y-3x)=0.$$

所以 $\lambda=-1$ 或 $y=3x$。

情形一：$\lambda=-1$。

代入 (1) 可得 $\mu=0$。这时 (3) 化简为 $-6z=0$，所以 $z=0$。从而 (4)(5) 化为

$$\begin{cases} x^2+y^2-1=0 \\ x+3y=0 \end{cases}$$

解得：$(x,\, y)=\left(\frac{-3}{\sqrt{10}},\, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$ 或 $(x,\, y)=\left(\frac{3}{\sqrt{10}},\, \frac{-1}{\sqrt{10}}\right)$。

所以此时 $(x,\, y,\, z)=\left(\frac{-3}{\sqrt{10}},\, \frac{1}{\sqrt{10}},\, 0\right)$ 或 $(x,\, y,\, z)=\left(\frac{3}{\sqrt{10}},\, \frac{-1}{\sqrt{10}},\, 0\right)$。

情形二：$y=3x$。

此时 (4)(5) 化为

$$\begin{cases} 10x^2+4z^2=1 \\ 10x+2z=0 \end{cases}$$

解得：$(x,\, z)=\left(\frac{-1}{\sqrt{110}},\, \frac{5}{\sqrt{110}}\right)$ 或 $(x,\, z)=\left(\frac{1}{\sqrt{110}},\, \frac{-5}{\sqrt{110}}\right)$。

所以此时 $(x,\, y,\, z)=\left(\frac{-1}{\sqrt{110}},\, \frac{-3}{\sqrt{110}},\, \frac{5}{\sqrt{110}}\right)$ 或 $(x,\, y,\, z)=\left(\frac{1}{\sqrt{110}},\, \frac{3}{\sqrt{110}},\, \frac{-5}{\sqrt{110}}\right)$。

2. 从上述计算知，函数 f 在附加条件 $\varphi=0$ 和 $\psi=0$ 下的可能的极值点有四个，而问题存在最大值、最小值。所以最大值点和最小值点一定包含在这四个可能的极值点里。

分别计算这四个点的函数值

$(x,\, y,\, z)$	$\left(\frac{-3}{\sqrt{10}},\, \frac{1}{\sqrt{10}},\, 0\right)$	$\left(\frac{3}{\sqrt{10}},\, \frac{-1}{\sqrt{10}},\, 0\right)$	$\left(\frac{-1}{\sqrt{110}},\, \frac{-3}{\sqrt{110}},\, \frac{5}{\sqrt{110}}\right)$	$\left(\frac{1}{\sqrt{110}},\, \frac{3}{\sqrt{110}},\, \frac{-5}{\sqrt{110}}\right)$
f	1	1	$\frac{7}{22}$	$\frac{7}{22}$

可见函数 f 在 $\left(\frac{-3}{\sqrt{10}},\, \frac{1}{\sqrt{10}},\, 0\right)$ 和 $\left(\frac{3}{\sqrt{10}},\, \frac{-1}{\sqrt{10}},\, 0\right)$ 处取得最大值，最大值为 1；在 $\left(\frac{-1}{\sqrt{110}},\, \frac{-3}{\sqrt{110}},\, \frac{5}{\sqrt{110}}\right)$ 和 $\left(\frac{1}{\sqrt{110}},\, \frac{3}{\sqrt{110}},\, \frac{-5}{\sqrt{110}}\right)$ 处取得最小值，最小值为 $\frac{7}{22}$。

3. 附加的方程组 $\begin{cases} x^2+y^2+4z^2=1 \\ x+3y+2z=0 \end{cases}$，其图形是空间中的椭球面与平面的交线，是一条闭曲线。该条件极值问题其实是求 f 在该闭曲线上最大、最小值。