第 13 周作业解答

练习 1. 已知对称矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&2&4\\2&0&2\\4&2&3\end{pmatrix}$，求正交矩阵 Q，使得 Q^TAQ 为对角矩阵。

解

- 解特征方程 $|\lambda I-A|=0$。

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&-4\\-2&\lambda&-2\\-4&-2&\lambda-3\end{vmatrix}\xlongequal{r_3-2r_2}\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&-4\\-2&\lambda&-2\\0&-2\lambda-2&\lambda+1\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda+1)\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&-4\\-2&\lambda&-2\\0&-2&1\end{vmatrix}\xlongequal{c_2+2c_3}(\lambda+1)\begin{vmatrix}\lambda-3&-10&-4\\-2&\lambda-4&-2\\0&0&1\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda+1)\begin{vmatrix}\lambda-3&-10\\-2&\lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda^2-7\lambda-8)=(\lambda+1)^2(\lambda-8)$$

所以特征值为 $\lambda_1=-1$（二重特征值），$\lambda_2=8$。

- 关于特征值 $\lambda_1=-1$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$。

$$(-I-A\,\vdots\,0)=\left(\begin{array}{ccc|c}-4&-2&-4&0\\-2&-1&-2&0\\-4&-2&-4&0\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&2&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

同解方程组为

$$2x_1+x_2+2x_3=0\qquad\Rightarrow\qquad x_2=-2x_1-2x_3$$

自由变量取为 x_1,x_3。分别取 $\begin{pmatrix}x_1\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，得基础解系

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix},\qquad\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

  - 下面将 α_1,α_2 正交化：

$$\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$$
$$\beta_2=\alpha_2-\frac{\alpha_2^T\beta_1}{\beta_1^T\beta_1}\beta_1=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}-\frac{4}{5}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{5}\\-\frac{2}{5}\\1\end{pmatrix}$$

  - 下面将 β_1,β_2 单位化：

$$\gamma_1=\frac{1}{||\beta_1||}\beta_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix},\quad\gamma_2=\frac{1}{||\beta_2||}\beta_2=\frac{1}{\sqrt{45}}\begin{pmatrix}-2\\-4\\5\end{pmatrix}=\frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-4\\-2\\5\end{pmatrix}$$

- 关于特征值 $\lambda_2 = 8$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$。

$$(8I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -4 & 0 \\ -2 & 8 & -2 & 0 \\ -4 & -2 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{-\frac{1}{3}\times r_2 \\ -\frac{1}{6}\times r_3}]{-\frac{1}{2}\times r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -4 & 0 \\ -4 & -2 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3+4r_1]{r_2-5r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 18 & -9 & 0 \\ 0 & -18 & 9 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1+r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(-1)\times r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ x_3 = 2x_2 \end{cases}$$

自由变量取为 x_2。取 $x_2 = 1$，得基础解系

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

  - 将 α_3 单位化得：

$$\gamma_3 = \frac{1}{||\alpha_3||}\alpha_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- 令

$$Q = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \end{array}$$

则 Q 为正交矩阵，且

$$Q^T A Q = Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 8 \end{pmatrix}.$$

练习 2. 设 α 和 β 是两个非零 m 维列向量，令 $A = I - \alpha\beta^T$。
1. 证明 α 是 A 的一个特征向量。
2. 证明：若 $\beta^T\alpha \neq 0$，则 A 可对角化。
3. 求 $|A|$。
4. 问何时 A 可逆，并求出 A^{-1}（提示：参考式子 $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \cdots$）

解 (1) 注意到

$$A\alpha = (I - \alpha\beta^T)\alpha = \alpha - \alpha\beta^T\alpha = (1 - \beta^T\alpha)\alpha,$$

并且 $\alpha \neq 0$，所以 α 是 A 的一个特征向量，对应特征值为 $1 - \beta^T\alpha$.

(2) 齐次线性方程组 $\beta^T x = 0$ 的基础解系包含 $n - r(\beta^T) = n - 1$ 个向量，记为：$\xi_1, \cdots, \xi_{n-1}$。有题设，$1 - \beta^T\alpha \neq 1$，说明 α 与 ξ_i 是不同特征值的特征向量，进而 $\alpha, \xi_1, \cdots, \xi_{n-1}$ 线性无关。

注意到

$$A\xi_i = (I - \alpha\beta^T)\xi_i = \xi_i.$$

所以 $\xi_1, \cdots, \xi_{n-1}$ 均为 A 的特征向量，对应特征值为 1.

所以 A 有 n 个线性无关向量 $\alpha, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$。所以 A 可对角化。

(3) 假设 $\beta^T\alpha \neq 0$。由上一步可知 A 相似于 $\begin{pmatrix} 1-\beta^T\alpha & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$，所以

$$|A| = 1 - \beta^T\alpha.$$

现在讨论 $\beta^T\alpha = 0$ 的情况。令 $\alpha_k = \alpha + \frac{1}{k}\beta$（$k$ 为任意正整数）。则 $\beta^T\alpha_k = \beta^T\alpha + \frac{1}{k}\beta^T\beta = \frac{1}{k}\beta^T\beta \neq 0$。所以对 $I - \alpha_k\beta^T$ 可应用上述结论，得

$$|I - \alpha_k\beta^T| = 1 - \beta^T\alpha_k.$$

在上式中取极限 $k \to \infty$，即可得

$$|I - \alpha\beta^T| = 1 - \beta^T\alpha.$$

(4) 当 $1 - \beta^T\alpha \neq 0$ 时，A 可逆，此时 $A^{-1} = I + \frac{1}{1-\beta^T\alpha}\alpha\beta^T$。（猜测 A^{-1} 的过程：联想到 $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \cdots$，张冠李戴之下，尝试

$$\begin{aligned}
(I - \beta^T\alpha)^{-1} &= I + \beta^T\alpha + (\beta^T\alpha)^2 + (\beta^T\alpha)^3 + \cdots \\
&= I + \beta^T\alpha + \beta^T\alpha\beta^T\alpha + \beta^T\alpha\beta^T\alpha\beta^T\alpha + \cdots \\
&= I + \beta^T\alpha + (\beta^T\alpha)\alpha\beta^T + (\beta^T\alpha)^2\alpha\beta^T + \cdots \\
&= I + [1 + \beta^T\alpha + (\beta^T\alpha)^2 + \cdots]\alpha\beta^T \\
&= I + \frac{1}{1-\beta^T\alpha}\alpha\beta^T.
\end{aligned}$$

直接验证 $(I - \alpha\beta^T)(I + \frac{1}{1-\beta^T\alpha}\alpha\beta^T) = I$，所以确实为所求。）