

# 第 10 章 c: 三重积分

数学系 梁卓滨

2016-2017 学年 II

# Outline

---

1. 三重积分的概念
2. 三重积分的计算：化为累次积分
3. 球面坐标

# We are here now...

---

1. 三重积分的概念

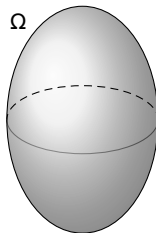
2. 三重积分的计算：化为累次积分

3. 球面坐标

# 三维物体的质量

假设

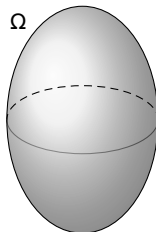
- $\Omega$  为空间中三维闭区域
- 密度为  $\mu$
- 质量为  $m$



# 三维物体的质量

假设

- $\Omega$  为空间中三维闭区域
- 密度为  $\mu$
- 质量为  $m$

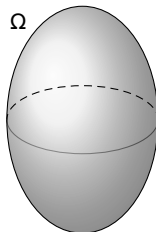


- 当材料均匀时 ( $\mu = \text{常数}$ ),
- 当材料非均匀时 ( $\mu = \mu(x, y, z)$  为  $\Omega$  上函数),

# 三维物体的质量

假设

- $\Omega$  为空间中三维闭区域
- 密度为  $\mu$
- 质量为  $m$



- 当材料均匀时 ( $\mu = \text{常数}$ ),

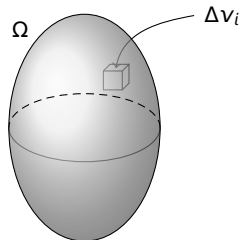
$$m = \mu \cdot \text{Vol}(\Omega)$$

- 当材料非均匀时 ( $\mu = \mu(x, y, z)$  为  $\Omega$  上函数),

# 三维物体的质量

假设

- $\Omega$  为空间中三维闭区域
- 密度为  $\mu$
- 质量为  $m$



- 当材料均匀时 ( $\mu = \text{常数}$ ),

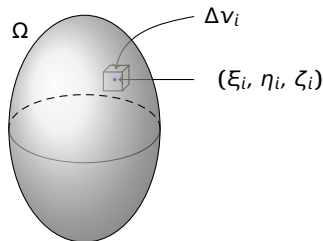
$$m = \mu \cdot \text{Vol}(\Omega)$$

- 当材料非均匀时 ( $\mu = \mu(x, y, z)$  为  $\Omega$  上函数), 利用微元法可知

# 三维物体的质量

假设

- $\Omega$  为空间中三维闭区域
- 密度为  $\mu$
- 质量为  $m$



- 当材料均匀时 ( $\mu = \text{常数}$ ),

$$m = \mu \cdot \text{Vol}(\Omega)$$

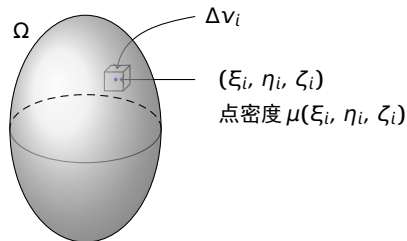
- 当材料非均匀时 ( $\mu = \mu(x, y, z)$  为  $\Omega$  上函数), 利用微元法可知



# 三维物体的质量

假设

- $\Omega$  为空间中三维闭区域
- 密度为  $\mu$
- 质量为  $m$



- 当材料均匀时 ( $\mu = \text{常数}$ ),

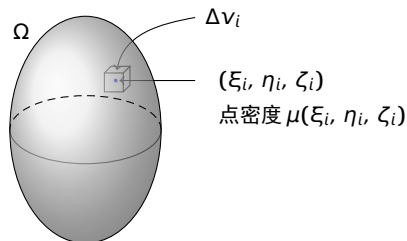
$$m = \mu \cdot \text{Vol}(\Omega)$$

- 当材料非均匀时 ( $\mu = \mu(x, y, z)$  为  $\Omega$  上函数), 利用微元法可知

# 三维物体的质量

假设

- $\Omega$  为空间中三维闭区域
- 密度为  $\mu$
- 质量为  $m$



- 当材料均匀时 ( $\mu = \text{常数}$ ),

$$m = \mu \cdot \text{Vol}(\Omega)$$

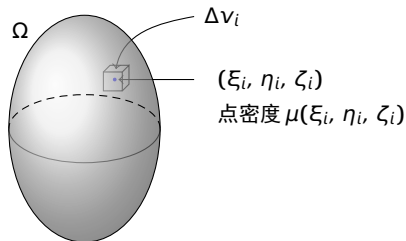
- 当材料非均匀时 ( $\mu = \mu(x, y, z)$  为  $\Omega$  上函数), 利用微元法可知

$$\mu(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$$

# 三维物体的质量

假设

- $\Omega$  为空间中三维闭区域
- 密度为  $\mu$
- 质量为  $m$



- 当材料均匀时 ( $\mu = \text{常数}$ ),

$$m = \mu \cdot \text{Vol}(\Omega)$$

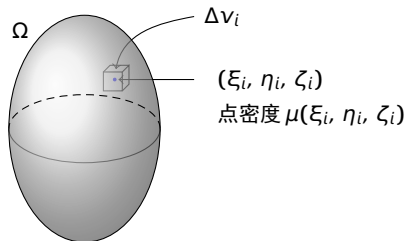
- 当材料非均匀时 ( $\mu = \mu(x, y, z)$  为  $\Omega$  上函数), 利用微元法可知

$$\sum_{i=1}^n \mu(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$$

# 三维物体的质量

假设

- $\Omega$  为空间中三维闭区域
- 密度为  $\mu$
- 质量为  $m$



- 当材料均匀时 ( $\mu = \text{常数}$ ),

$$m = \mu \cdot \text{Vol}(\Omega)$$

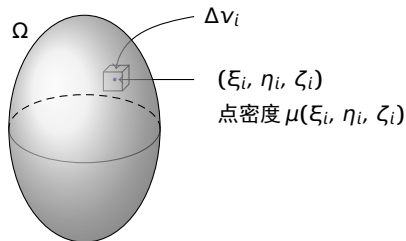
- 当材料非均匀时 ( $\mu = \mu(x, y, z)$  为  $\Omega$  上函数), 利用微元法可知

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mu(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$$

# 三维物体的质量

假设

- $\Omega$  为空间中三维闭区域
- 密度为  $\mu$
- 质量为  $m$



- 当材料均匀时 ( $\mu = \text{常数}$ ),

$$m = \mu \cdot \text{Vol}(\Omega)$$

- 当材料非均匀时 ( $\mu = \mu(x, y, z)$  为  $\Omega$  上函数), 利用微元法可知

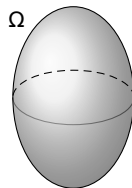
$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mu(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$$

# 三重积分的定义

## 三重积分定义 设

- $\Omega$  是空间中有界闭区域,
- $f(x, y, z)$  是  $\Omega$  上的有界函数,

若

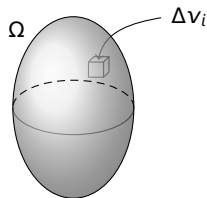


# 三重积分的定义

## 三重积分定义 设

- $\Omega$  是空间中有界闭区域,
- $f(x, y, z)$  是  $\Omega$  上的有界函数,

若

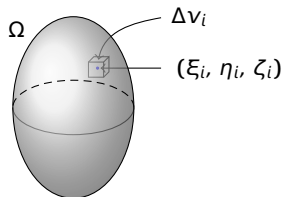


# 三重积分的定义

## 三重积分定义 设

- $\Omega$  是空间中有界闭区域,
- $f(x, y, z)$  是  $\Omega$  上的有界函数,

若



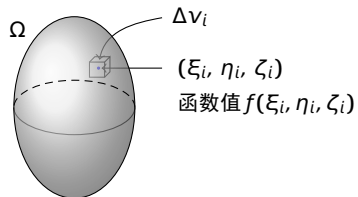


# 三重积分的定义

## 三重积分定义 设

- $\Omega$  是空间中有界闭区域,
- $f(x, y, z)$  是  $\Omega$  上的有界函数,

若



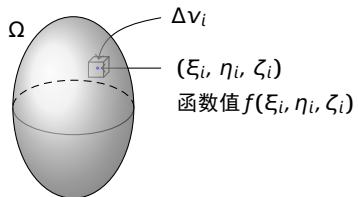
# 三重积分的定义

## 三重积分定义 设

- $\Omega$  是空间中有界闭区域,
- $f(x, y, z)$  是  $\Omega$  上的有界函数,

若

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$$



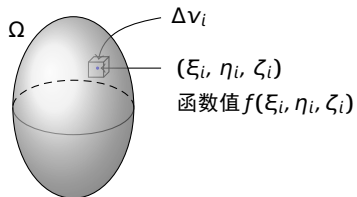
# 三重积分的定义

## 三重积分定义 设

- $\Omega$  是空间中有界闭区域,
- $f(x, y, z)$  是  $\Omega$  上的有界函数,

若

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$$



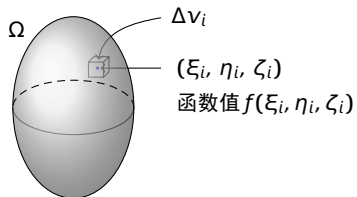
# 三重积分的定义

## 三重积分定义 设

- $\Omega$  是空间中有界闭区域,
- $f(x, y, z)$  是  $\Omega$  上的有界函数,

若

- 极限  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$  存在,



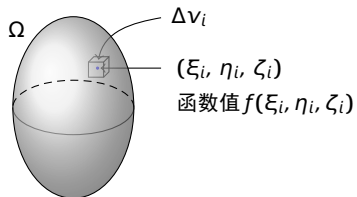
# 三重积分的定义

## 三重积分定义 设

- $\Omega$  是空间中有界闭区域,
- $f(x, y, z)$  是  $\Omega$  上的有界函数,

若

- 极限  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$  存在, 且  
极限
- 与上述  $\Omega$  的划分、 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  的选取  
无关,



# 三重积分的定义

## 三重积分定义 设

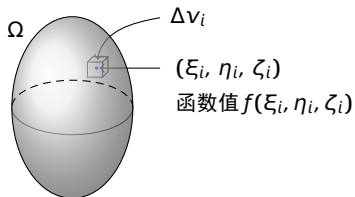
- $\Omega$  是空间中有界闭区域,
- $f(x, y, z)$  是  $\Omega$  上的有界函数,

若

- 极限  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$  存在, 且  
极限
- 与上述  $\Omega$  的划分、 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  的选取  
无关,

则定义

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$$



# 三重积分的定义

## 三重积分定义 设

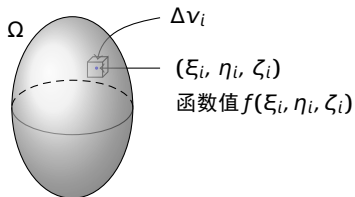
- $\Omega$  是空间中有界闭区域,
- $f(x, y, z)$  是  $\Omega$  上的有界函数,

若

- 极限  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$  存在, 且  
极限
- 与上述  $\Omega$  的划分、 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  的选取  
无关,

则定义 
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$$

称为  $f(x, y, z)$  在  $D$  上的三重积分。



# 三重积分的定义

## 三重积分定义 设

- $\Omega$  是空间中有界闭区域,
- $f(x, y, z)$  是  $\Omega$  上的有界函数,

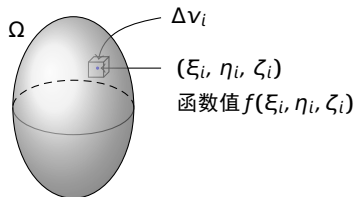
若

- 极限  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$  存在, 且  
极限
- 与上述  $\Omega$  的划分、 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  的选取  
无关,

则定义

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$$

称为  $f(x, y, z)$  在  $D$  上的三重积分。 $dv$  称为体积元素。





# 三重积分的定义

## 三重积分定义 设

- $\Omega$  是空间中有界闭区域,
- $f(x, y, z)$  是  $\Omega$  上的有界函数,

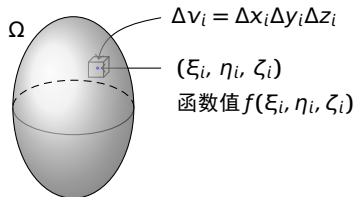
若

- 极限  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$  存在, 且  
极限
- 与上述  $\Omega$  的划分、 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  的选取  
无关,

则定义

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$$

称为  $f(x, y, z)$  在  $D$  上的三重积分。 $dv$  称为体积元素。



# 三重积分的定义

## 三重积分定义 设

- $\Omega$  是空间中有界闭区域,
- $f(x, y, z)$  是  $\Omega$  上的有界函数,

若

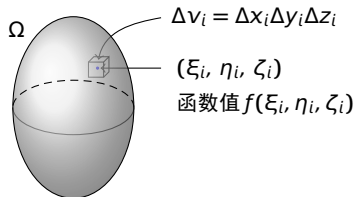
- 极限  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$  存在, 且  
极限
- 与上述  $\Omega$  的划分、 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  的选取  
无关,

则定义

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$$

称为  $f(x, y, z)$  在  $D$  上的三重积分。 $dv$  称为体积元素。

$$dv = dx dy dz.$$



# 三重积分的定义

## 三重积分定义 设

- $\Omega$  是空间中有界闭区域,
- $f(x, y, z)$  是  $\Omega$  上的有界函数,

若

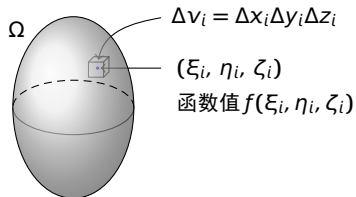
- 极限  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$  存在, 且  
极限
- 与上述  $\Omega$  的划分、 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  的选取  
无关,

则定义

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$$

称为  $f(x, y, z)$  在  $D$  上的三重积分。 $dv$  称为体积元素。

$$dv = dx dy dz.$$



**注** 三重积分的定义式与二重积分的类似, 故性质也类似

# 三重积分的性质

- **存在性** 若  $f(x, y, z)$  在空间有界闭区域  $\Omega$  上连续, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$$

存在。

# 三重积分的性质

- **存在性** 若  $f(x, y, z)$  在空间有界闭区域  $\Omega$  上连续, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$$

存在。

- **线性性**  $\iiint_{\Omega} (\alpha f + \beta g) dv = \alpha \iiint_{\Omega} f dv + \beta \iiint_{\Omega} g dv$

## 三重积分的性质

- **存在性** 若  $f(x, y, z)$  在空间有界闭区域  $\Omega$  上连续, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$$

存在。

- **线性性**  $\iiint_{\Omega} (\alpha f + \beta g) dv = \alpha \iiint_{\Omega} f dv + \beta \iiint_{\Omega} g dv$

- **可加性**

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \iiint_{\Omega_1} f(x, y, z) dv + \iiint_{\Omega_2} f(x, y, z) dv$$

# 三重积分的性质

- **存在性** 若  $f(x, y, z)$  在空间有界闭区域  $\Omega$  上连续, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$$

存在。

- **线性性**  $\iiint_{\Omega} (\alpha f + \beta g) dv = \alpha \iiint_{\Omega} f dv + \beta \iiint_{\Omega} g dv$

- **可加性**

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \iiint_{\Omega_1} f(x, y, z) dv + \iiint_{\Omega_2} f(x, y, z) dv$$

- $\iiint_{\Omega} 1 dv = \text{Vol}(\Omega)$

## 三重积分的性质

- **存在性** 若  $f(x, y, z)$  在空间有界闭区域  $\Omega$  上连续, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$$

存在。

- **线性性**  $\iiint_{\Omega} (\alpha f + \beta g) dv = \alpha \iiint_{\Omega} f dv + \beta \iiint_{\Omega} g dv$

- **可加性**

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \iiint_{\Omega_1} f(x, y, z) dv + \iiint_{\Omega_2} f(x, y, z) dv$$

- $\iiint_{\Omega} 1 dv = \text{Vol}(\Omega)$

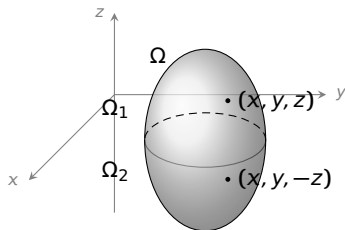
- 若  $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$ , 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv \leq \iiint_{\Omega} g(x, y, z) dv$$



# 积分的对称性

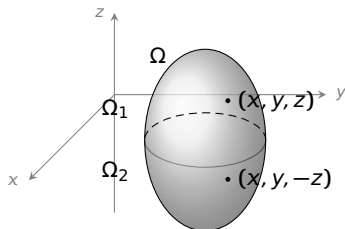
性质 设闭区域  $D$  关于  $xoy$  坐标面对称,



# 积分的对称性

性质 设闭区域  $D$  关于  $xoy$  坐标面对称,

- 若  $f(x, y, z)$  关于  $z$  是奇函数 (即:  $f(x, y, -z) = -f(x, y, z)$ ), 则

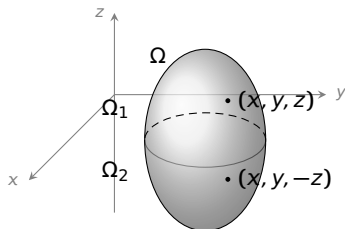


# 积分的对称性

性质 设闭区域  $D$  关于  $xoy$  坐标面对称,

- 若  $f(x, y, z)$  关于  $z$  是奇函数 (即:  $f(x, y, -z) = -f(x, y, z)$ ), 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = 0$$



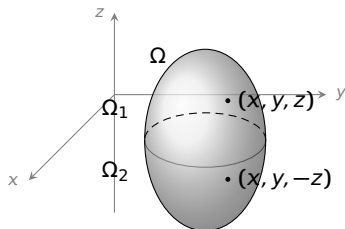
# 积分的对称性

**性质** 设闭区域  $D$  关于  $xoy$  坐标面对称,

- 若  $f(x, y, z)$  关于  $z$  是奇函数 (即:  $f(x, y, -z) = -f(x, y, z)$ ), 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = 0$$

- 若  $f(x, y, z)$  关于  $z$  是偶函数 (即:  $f(x, y, -z) = f(x, y, z)$ ), 则



# 积分的对称性

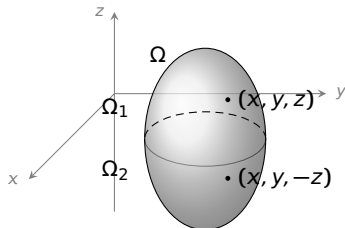
**性质** 设闭区域  $D$  关于  $xoy$  坐标面对称,

- 若  $f(x, y, z)$  关于  $z$  是奇函数 (即:  $f(x, y, -z) = -f(x, y, z)$ ), 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = 0$$

- 若  $f(x, y, z)$  关于  $z$  是偶函数 (即:  $f(x, y, -z) = f(x, y, z)$ ), 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = 2 \iiint_{\Omega_1} f(x, y, z) dv = 2 \iiint_{\Omega_2} f(x, y, z) dv$$



例 计算  $\iiint_{\Omega} \frac{z \ln(1+x^2+y^2)}{1+x^2+y^2+z^2} dz$ , 其中  $\Omega$  为球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

例 计算  $\iiint_{\Omega} \frac{z \ln(1+x^2+y^2)}{1+x^2+y^2+z^2} dz$ , 其中  $\Omega$  为球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

解 因为

1. 被积函数关于变量  $z$  是奇函数;
2. 积分区域  $\Omega$  关于  $xoy$  坐标面对称,

所以积分为 0

# We are here now...

---

1. 三重积分的概念

2. 三重积分的计算：化为累次积分

3. 球面坐标



## 计算三重积分的基本做法：化为累次积分

- “先一后二”

- “先二后一”

## 计算三重积分的基本做法：化为累次积分

- “先一后二”

1. 
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{*} \left[ \int_{*}^{*} f(x, y, z) dz \right] dx dy$$

- “先二后一”

## 计算三重积分的基本做法：化为累次积分

- “先一后二”

1. 
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{*} \left[ \int_{*}^{*} f(x, y, z) dz \right] dx dy$$

2. 
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{*} \left[ \int_{*}^{*} f(x, y, z) dy \right] dx dz$$

- “先二后一”

## 计算三重积分的基本做法：化为累次积分

- “先一后二”

1. 
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{*} \left[ \int_{*}^{*} f(x, y, z) dz \right] dx dy$$

2. 
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{*} \left[ \int_{*}^{*} f(x, y, z) dy \right] dx dz$$

3. 
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{*} \left[ \int_{*}^{*} f(x, y, z) dx \right] dy dz$$

- “先二后一”

## 计算三重积分的基本做法：化为累次积分

- “先一后二”

1. 
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{*} \left[ \int_{*}^{*} f(x, y, z) dz \right] dx dy$$

2. 
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{*} \left[ \int_{*}^{*} f(x, y, z) dy \right] dx dz$$

3. 
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{*} \left[ \int_{*}^{*} f(x, y, z) dx \right] dy dz$$

- “先二后一”

1. 
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{*}^{*} \left[ \iint_{*} f(x, y, z) dx dy \right] dz$$

## 计算三重积分的基本做法：化为累次积分

- “先一后二”

1. 
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{*} \left[ \int_{*}^{*} f(x, y, z) dz \right] dx dy$$

2. 
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{*} \left[ \int_{*}^{*} f(x, y, z) dy \right] dx dz$$

3. 
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{*} \left[ \int_{*}^{*} f(x, y, z) dz \right] dx dy$$

- “先二后一”

1. 
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{*}^{*} \left[ \iint_{*} f(x, y, z) dx dy \right] dz$$

2. 
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{*}^{*} \left[ \iint_{*} f(x, y, z) dx dz \right] dy$$

## 计算三重积分的基本做法：化为累次积分

- “先一后二”

1. 
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{*} \left[ \int_{*}^{*} f(x, y, z) dz \right] dx dy$$

2. 
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{*} \left[ \int_{*}^{*} f(x, y, z) dy \right] dx dz$$

3. 
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{*} \left[ \int_{*}^{*} f(x, y, z) dx \right] dy dz$$

- “先二后一”

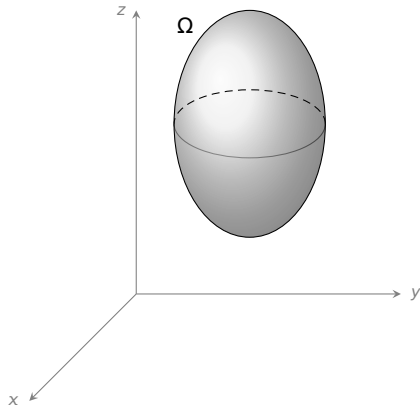
1. 
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{*}^{*} \left[ \iint_{*} f(x, y, z) dx dy \right] dz$$

2. 
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{*}^{*} \left[ \iint_{*} f(x, y, z) dx dz \right] dy$$

3. 
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{*}^{*} \left[ \iint_{*} f(x, y, z) dy dz \right] dx$$

# 投影法 (“先一后二”)

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$$

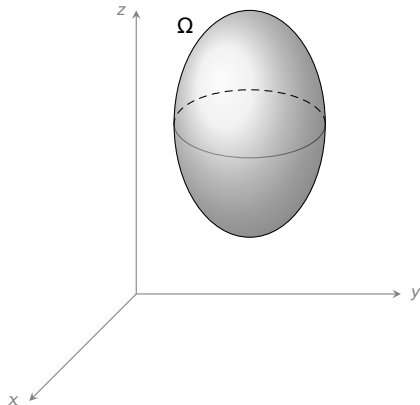




# 投影法 (“先一后二”)

1. 先积  $z$ , 再积  $xy$

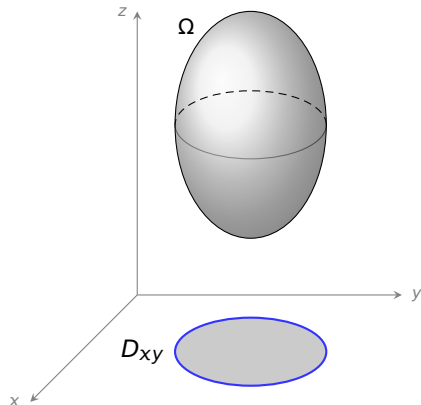
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint \left[ \int f(x, y, z) dz \right] dx dy$$



# 投影法 (“先一后二”)

1. 先积  $z$ , 再积  $xy$

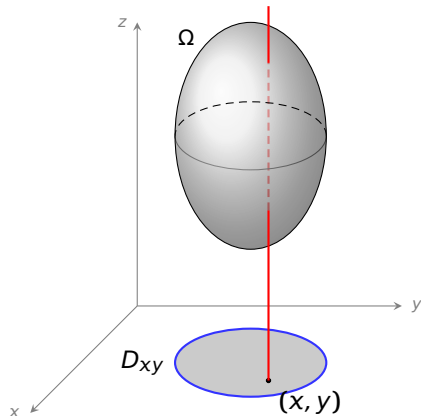
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint \left[ \int f(x, y, z) dz \right] dx dy$$



# 投影法 (“先一后二”)

## 1. 先积 $z$ , 再积 $xy$

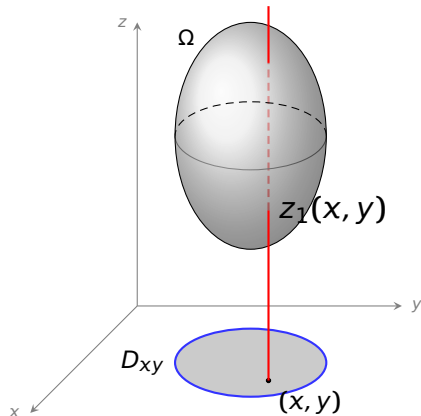
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint \left[ \int f(x, y, z) dz \right] dx dy$$



# 投影法 (“先一后二”)

1. 先积  $z$ , 再积  $xy$

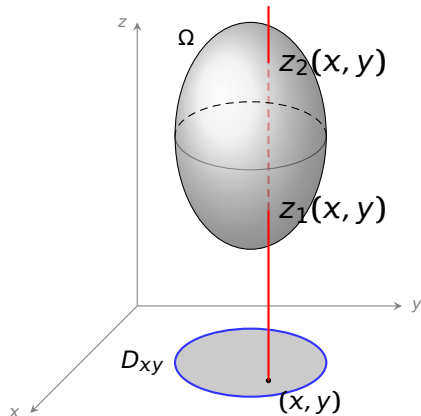
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint \left[ \int f(x, y, z) dz \right] dx dy$$



# 投影法 (“先一后二”)

## 1. 先积 $z$ , 再积 $xy$

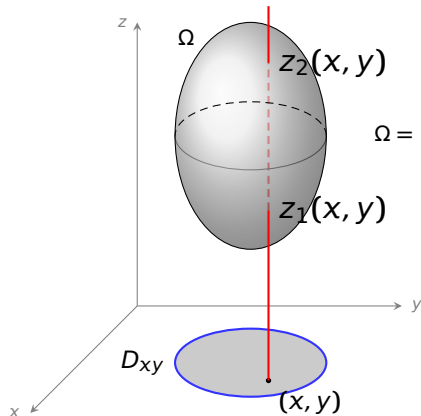
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint \left[ \int f(x, y, z) dz \right] dx dy$$



# 投影法 (“先一后二”)

## 1. 先积 $z$ , 再积 $xy$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint \left[ \int f(x, y, z) dz \right] dx dy$$

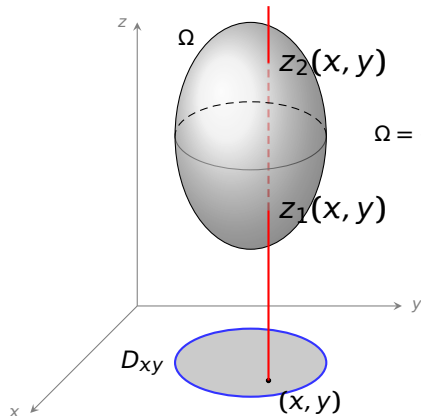


$$\Omega = \{(x, y, z) | z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), (x, y) \in D_{xy}\}$$

# 投影法 (“先一后二”)

## 1. 先积 $z$ , 再积 $xy$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{xy}} \left[ \int f(x, y, z) dz \right] dx dy$$

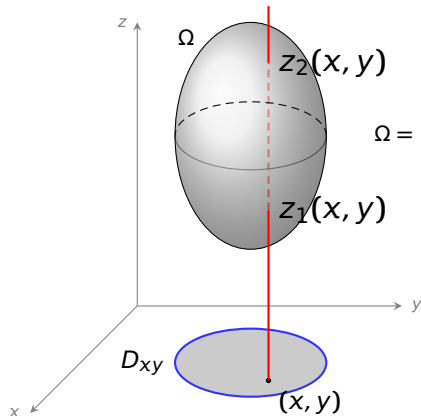


$$\Omega = \{(x, y, z) | z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), (x, y) \in D_{xy}\}$$

# 投影法 (“先一后二”)

## 1. 先积 $z$ , 再积 $xy$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{xy}} \left[ \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy$$



$$\Omega = \{(x, y, z) | z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), (x, y) \in D_{xy}\}$$



# 投影法 (“先一后二”)

1. 先积  $z$ , 再积  $xy$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{xy}} \left[ \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy$$

# 投影法 (“先一后二”)

1. 先积  $z$ , 再积  $xy$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{xy}} \left[ \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy$$

类似地

2. 先积  $x$ , 再积  $yz$

3. 先积  $y$ , 再积  $xz$

# 投影法 (“先一后二”)

1. 先积  $z$ , 再积  $xy$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{xy}} \left[ \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy$$

类似地

2. 先积  $x$ , 再积  $yz$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint \left[ \int f(x, y, z) dx \right] dy dz$$

3. 先积  $y$ , 再积  $xz$

# 投影法 (“先一后二”)

1. 先积  $z$ , 再积  $xy$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{xy}} \left[ \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy$$

类似地

2. 先积  $x$ , 再积  $yz$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{yz}} \left[ \int f(x, y, z) dx \right] dy dz$$

3. 先积  $y$ , 再积  $xz$

# 投影法 (“先一后二”)

1. 先积  $z$ , 再积  $xy$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{xy}} \left[ \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy$$

类似地

2. 先积  $x$ , 再积  $yz$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{yz}} \left[ \int_{x_1(y, z)}^{x_2(y, z)} f(x, y, z) dx \right] dy dz$$

3. 先积  $y$ , 再积  $xz$

# 投影法 (“先一后二”)

1. 先积  $z$ , 再积  $xy$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{xy}} \left[ \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy$$

类似地

2. 先积  $x$ , 再积  $yz$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{yz}} \left[ \int_{x_1(y, z)}^{x_2(y, z)} f(x, y, z) dx \right] dy dz$$

3. 先积  $y$ , 再积  $xz$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint \left[ \int f(x, y, z) dy \right] dx dz$$

# 投影法 (“先一后二”)

1. 先积  $z$ , 再积  $xy$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{xy}} \left[ \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy$$

类似地

2. 先积  $x$ , 再积  $yz$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{yz}} \left[ \int_{x_1(y, z)}^{x_2(y, z)} f(x, y, z) dx \right] dy dz$$

3. 先积  $y$ , 再积  $xz$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{xz}} \left[ \int f(x, y, z) dy \right] dx dz$$

# 投影法 (“先一后二”)

1. 先积  $z$ , 再积  $xy$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{xy}} \left[ \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy$$

类似地

2. 先积  $x$ , 再积  $yz$

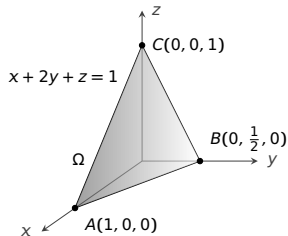
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{yz}} \left[ \int_{x_1(y, z)}^{x_2(y, z)} f(x, y, z) dx \right] dy dz$$

3. 先积  $y$ , 再积  $xz$

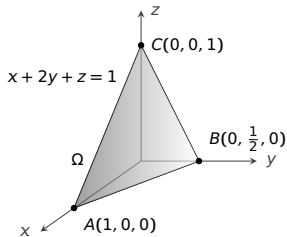
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{xz}} \left[ \int_{y_1(x, z)}^{y_2(x, z)} f(x, y, z) dy \right] dx dz$$



例 计算  $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是三个坐标面及平面  $x + 2y + z = 1$  所围成的闭区域。



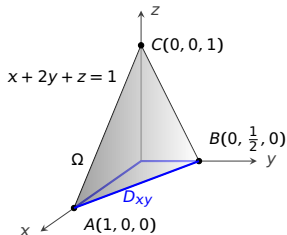
**例** 计算  $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是三个坐标面及平面  $x + 2y + z = 1$  所围成的闭区域。



**解**

$$\text{原式} = \iiint \left[ \int x dz \right] dx dy$$

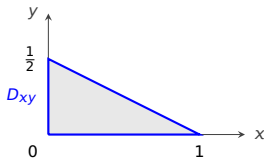
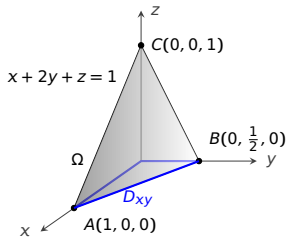
**例** 计算  $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是三个坐标面及平面  $x + 2y + z = 1$  所围成的闭区域。



**解**

$$\text{原式} = \iiint \left[ \int x dz \right] dx dy$$

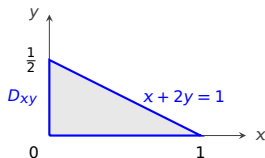
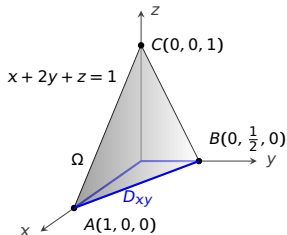
**例** 计算  $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是三个坐标面及平面  $x + 2y + z = 1$  所围成的闭区域。



**解**

$$\text{原式} = \iiint \left[ \int x dz \right] dx dy$$

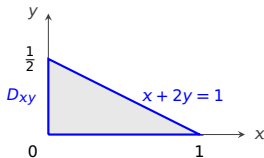
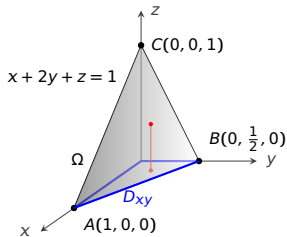
**例** 计算  $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是三个坐标面及平面  $x + 2y + z = 1$  所围成的闭区域。



**解**

$$\text{原式} = \iiint \left[ \int x dz \right] dx dy$$

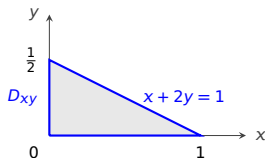
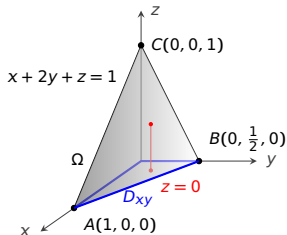
**例** 计算  $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是三个坐标面及平面  $x + 2y + z = 1$  所围成的闭区域。



**解**

$$\text{原式} = \iiint \left[ \int x dz \right] dx dy$$

**例** 计算  $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是三个坐标面及平面  $x + 2y + z = 1$  所围成的闭区域。



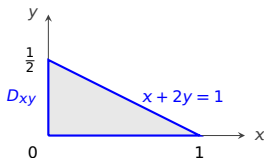
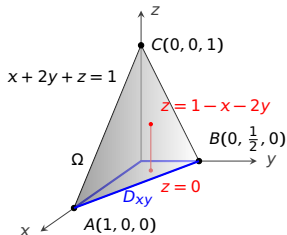
**解**

$$\text{原式} = \iiint \left[ \int x dz \right] dx dy$$





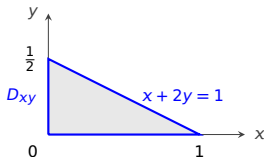
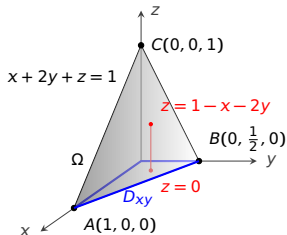
**例** 计算  $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是三个坐标面及平面  $x + 2y + z = 1$  所围成的闭区域。



**解**

$$\text{原式} = \iiint_{D_{xy}} \left[ \int x dz \right] dx dy$$

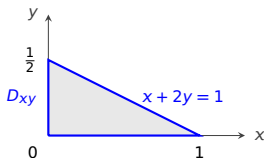
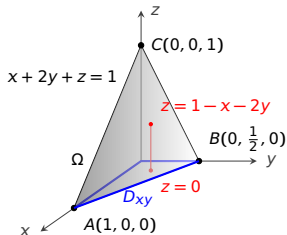
**例** 计算  $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是三个坐标面及平面  $x + 2y + z = 1$  所围成的闭区域。



**解**

$$\text{原式} = \iiint_{D_{xy}} \left[ \int_0^{1-x-2y} x dz \right] dx dy$$

**例** 计算  $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是三个坐标面及平面  $x + 2y + z = 1$  所围成的闭区域。

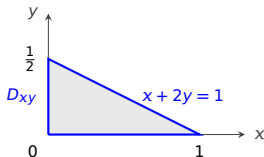
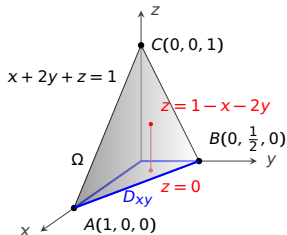


**解**

$$\text{原式} = \iint_{D_{xy}} \left[ \int_0^{1-x-2y} x dz \right] dx dy$$

$$x(1-x-2y)$$

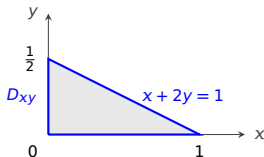
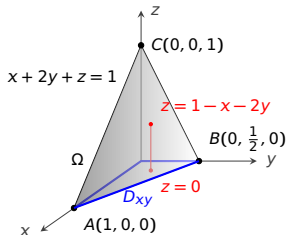
**例** 计算  $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是三个坐标面及平面  $x + 2y + z = 1$  所围成的闭区域。



**解**

$$\text{原式} = \iiint_{D_{xy}} \left[ \int_0^{1-x-2y} x dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} x(1-x-2y) dx dy$$

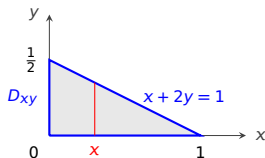
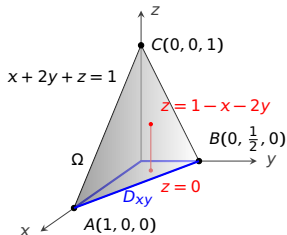
**例** 计算  $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是三个坐标面及平面  $x + 2y + z = 1$  所围成的闭区域。



**解**

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iiint_{D_{xy}} \left[ \int_0^{1-x-2y} x dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} x(1-x-2y) dx dy \\
 &= \int \left[ \int x(1-x-2y) dy \right] dx
 \end{aligned}$$

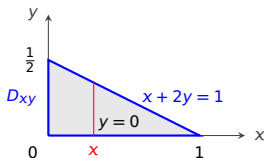
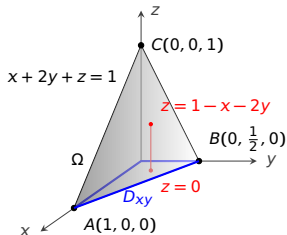
**例** 计算  $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是三个坐标面及平面  $x + 2y + z = 1$  所围成的闭区域。



**解**

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint_{D_{xy}} \left[ \int_0^{1-x-2y} x dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} x(1-x-2y) dx dy \\ &= \int \left[ \int x(1-x-2y) dy \right] dx \end{aligned}$$

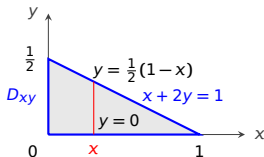
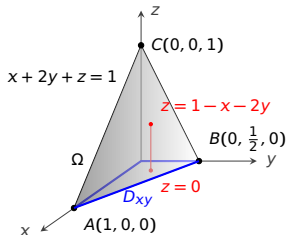
**例** 计算  $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是三个坐标面及平面  $x + 2y + z = 1$  所围成的闭区域。



**解**

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint_{D_{xy}} \left[ \int_0^{1-x-2y} x dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} x(1-x-2y) dx dy \\ &= \int \left[ \int x(1-x-2y) dy \right] dx \end{aligned}$$

**例** 计算  $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是三个坐标面及平面  $x + 2y + z = 1$  所围成的闭区域。

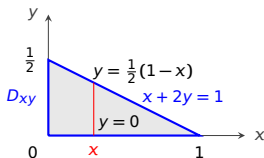
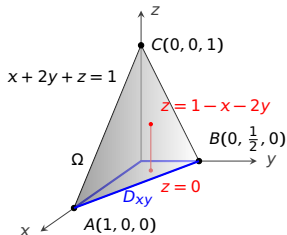


**解**

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint_{D_{xy}} \left[ \int_0^{1-x-2y} x dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} x(1-x-2y) dx dy \\ &= \int \left[ \int x(1-x-2y) dy \right] dx \end{aligned}$$



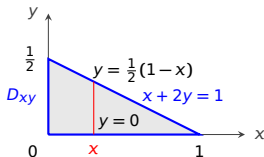
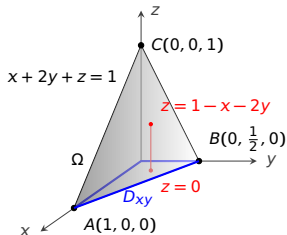
**例** 计算  $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是三个坐标面及平面  $x + 2y + z = 1$  所围成的闭区域。



**解**

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iiint_{D_{xy}} \left[ \int_0^{1-x-2y} x dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} x(1-x-2y) dx dy \\
 &= \int_0^1 \left[ \int_0^{\frac{1-x}{2}} x(1-x-2y) dy \right] dx
 \end{aligned}$$

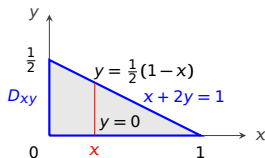
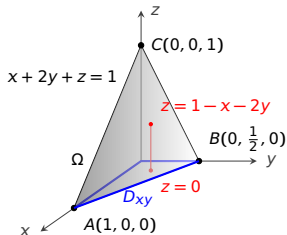
**例** 计算  $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是三个坐标面及平面  $x + 2y + z = 1$  所围成的闭区域。



**解**

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint_{D_{xy}} \left[ \int_0^{1-x-2y} x dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} x(1-x-2y) dx dy \\ &= \int_0^1 \left[ \int_0^{\frac{1-x}{2}} x(1-x-2y) dy \right] dx \end{aligned}$$

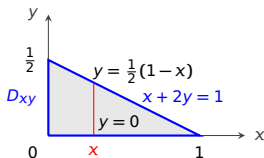
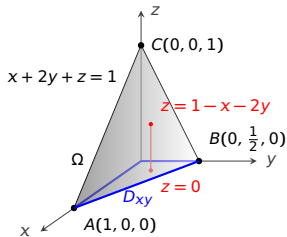
**例** 计算  $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是三个坐标面及平面  $x + 2y + z = 1$  所围成的闭区域。



**解**

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iiint_{D_{xy}} \left[ \int_0^{1-x-2y} x dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} x(1-x-2y) dx dy \\
 &= \int_0^1 \left[ \int_0^{\frac{1-x}{2}} x(1-x-2y) dy \right] dx = \int_0^1 \left[ x \left[ (1-x)y - y^2 \right] \Big|_0^{\frac{1-x}{2}} \right] dx
 \end{aligned}$$

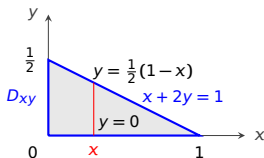
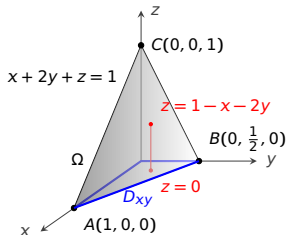
**例** 计算  $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是三个坐标面及平面  $x + 2y + z = 1$  所围成的闭区域。



**解**

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iiint_{D_{xy}} \left[ \int_0^{1-x-2y} x dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} x(1-x-2y) dx dy \\
 &= \int_0^1 \left[ \int_0^{\frac{1-x}{2}} x(1-x-2y) dy \right] dx = \int_0^1 \left[ x \left[ (1-x)y - y^2 \right] \Big|_0^{\frac{1-x}{2}} \right] dx \\
 &= \int_0^1 \left[ \frac{1}{4} x(1-x)^2 \right] dx
 \end{aligned}$$

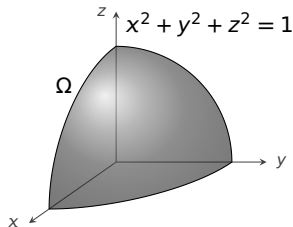
**例** 计算  $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是三个坐标面及平面  $x + 2y + z = 1$  所围成的闭区域。



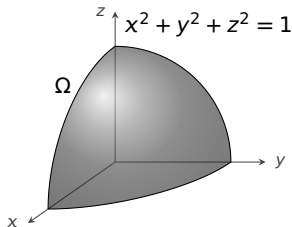
**解**

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iiint_{D_{xy}} \left[ \int_0^{1-x-2y} x dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} x(1-x-2y) dx dy \\
 &= \int_0^1 \left[ \int_0^{\frac{1-x}{2}} x(1-x-2y) dy \right] dx = \int_0^1 \left[ x \left[ (1-x)y - y^2 \right] \Big|_0^{\frac{1-x}{2}} \right] dx \\
 &= \int_0^1 \left[ \frac{1}{4} x(1-x)^2 \right] dx = \frac{1}{48}
 \end{aligned}$$

例 计算  $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$  在第一象限的部分。



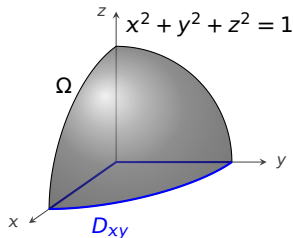
例 计算  $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$  在第一象限的部分。



解

$$\text{原式} = \iiint \left[ \int xyz dz \right] dx dy$$

例 计算  $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$  在第一象限的部分。

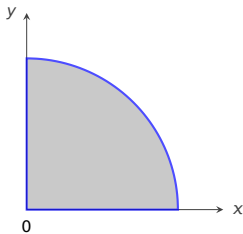
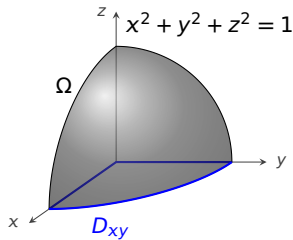


解

$$\text{原式} = \iiint \left[ \int xyz dz \right] dx dy$$



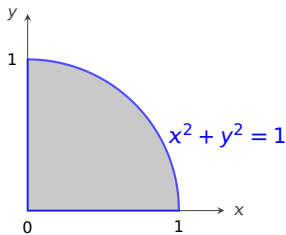
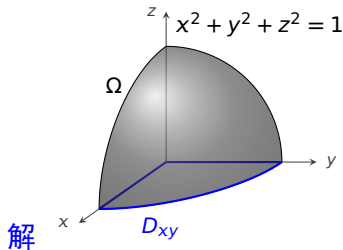
例 计算  $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$  在第一象限的部分。



解

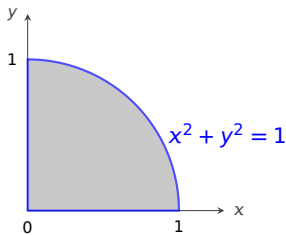
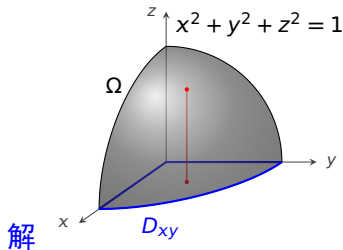
$$\text{原式} = \iint \left[ \int xyz dz \right] dx dy$$

例 计算  $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$  在第一象限的部分。



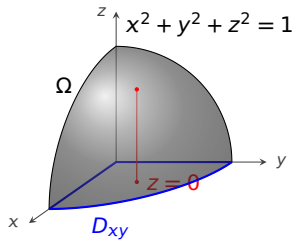
$$\text{原式} = \iiint \left[ \int \quad \quad \quad xyz dz \right] dx dy$$

例 计算  $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$  在第一象限的部分。

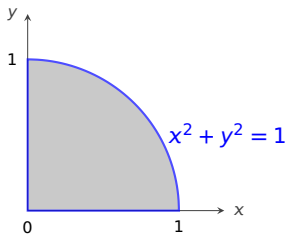


$$\text{原式} = \iint \left[ \int xyz dz \right] dx dy$$

例 计算  $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$  在第一象限的部分。

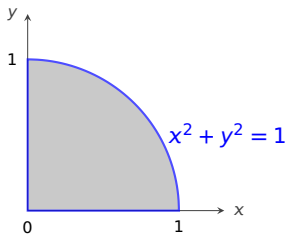
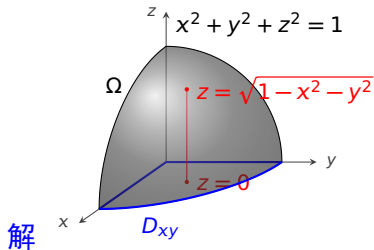


解



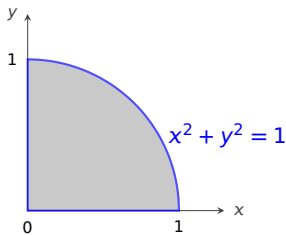
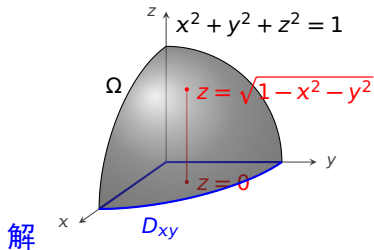
$$\text{原式} = \iiint \left[ \int \quad \quad \quad xyz dz \right] dx dy$$

例 计算  $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$  在第一象限的部分。



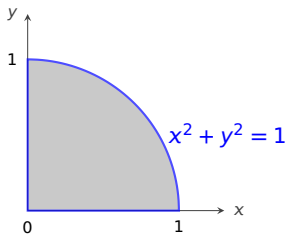
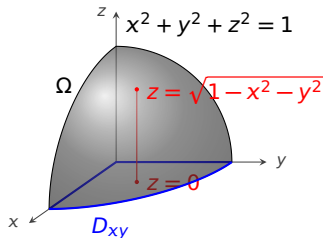
$$\text{原式} = \iiint \left[ \int \quad \quad \quad xyz dz \right] dx dy$$

例 计算  $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$  在第一象限的部分。



$$\text{原式} = \iiint_{D_{xy}} \left[ \int_{z=0}^{z=\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz dz \right] dx dy$$

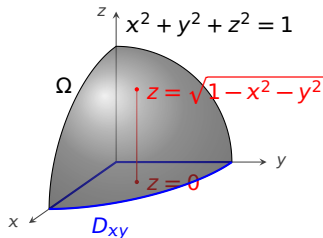
例 计算  $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$  在第一象限的部分。



解

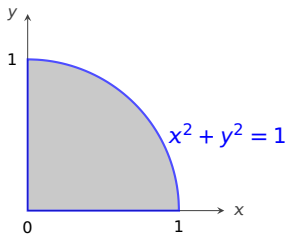
$$\text{原式} = \iiint_{D_{xy}} \left[ \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz dz \right] dx dy$$

例 计算  $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$  在第一象限的部分。



解

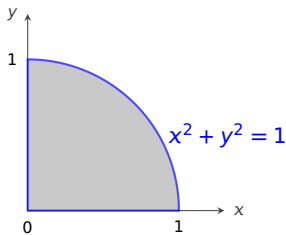
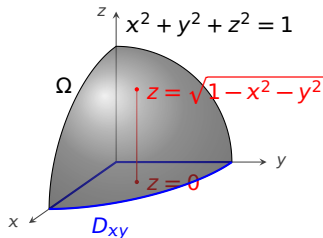
$$\text{原式} = \iiint_{D_{xy}} \left[ \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz dz \right] dx dy$$



$$\frac{1}{2} xy(1 - x^2 - y^2)$$



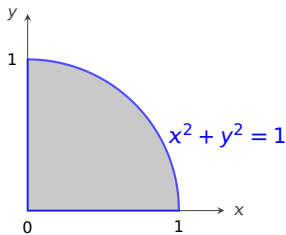
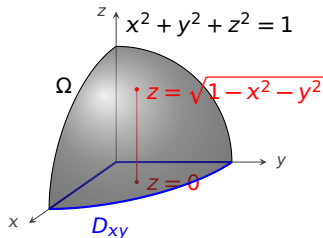
例 计算  $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$  在第一象限的部分。



解

$$\text{原式} = \iiint_{D_{xy}} \left[ \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} xy (1 - x^2 - y^2) dx dy$$

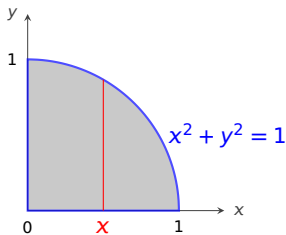
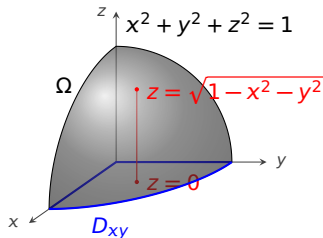
例 计算  $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$  在第一象限的部分。



解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint_{D_{xy}} \left[ \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} xy (1 - x^2 - y^2) dx dy \\ &= \int \left[ \int \frac{1}{2} xy (1 - x^2 - y^2) dy \right] dx \end{aligned}$$

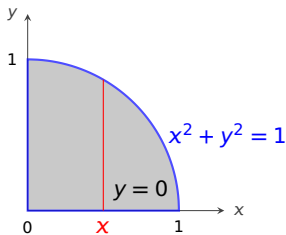
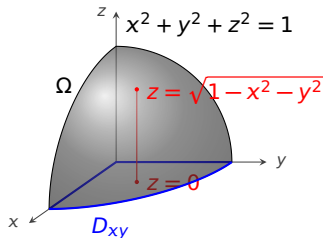
例 计算  $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$  在第一象限的部分。



解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint_{D_{xy}} \left[ \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} xy (1 - x^2 - y^2) dx dy \\ &= \int \left[ \int \frac{1}{2} xy (1 - x^2 - y^2) dy \right] dx \end{aligned}$$

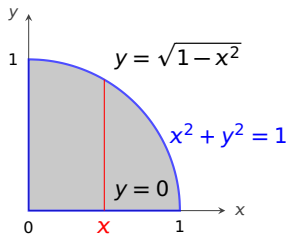
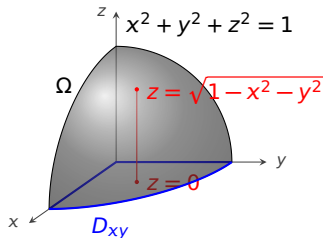
例 计算  $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$  在第一象限的部分。



解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint_{D_{xy}} \left[ \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} xy (1 - x^2 - y^2) dx dy \\ &= \int \left[ \int \frac{1}{2} xy (1 - x^2 - y^2) dy \right] dx \end{aligned}$$

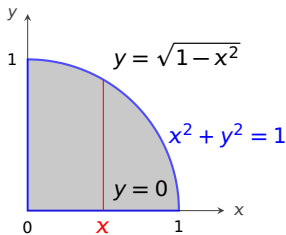
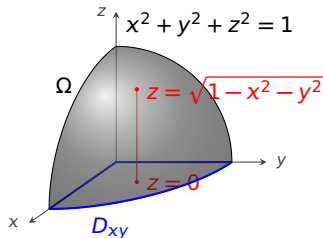
例 计算  $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$  在第一象限的部分。



解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iiint_{D_{xy}} \left[ \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} xy (1 - x^2 - y^2) dx dy \\
 &= \int \left[ \int \frac{1}{2} xy (1 - x^2 - y^2) dy \right] dx
 \end{aligned}$$

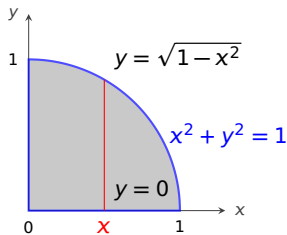
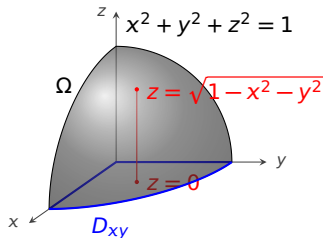
例 计算  $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$  在第一象限的部分。



解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint_{D_{xy}} \left[ \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} xy (1 - x^2 - y^2) dx dy \\ &= \int_0^1 \left[ \int \frac{1}{2} xy (1 - x^2 - y^2) dy \right] dx \end{aligned}$$

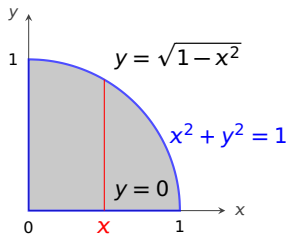
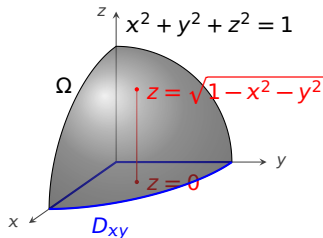
例 计算  $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$  在第一象限的部分。



解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint_{D_{xy}} \left[ \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} xy (1 - x^2 - y^2) dx dy \\ &= \int_0^1 \left[ \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{2} xy (1 - x^2 - y^2) dy \right] dx \end{aligned}$$

例 计算  $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$  在第一象限的部分。

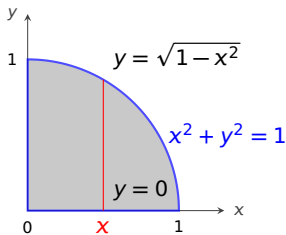
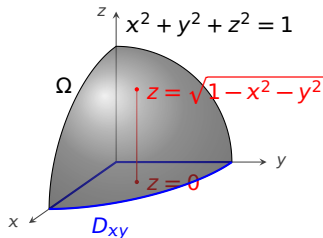


解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iiint_{D_{xy}} \left[ \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} xy (1 - x^2 - y^2) dx dy \\
 &= \int_0^1 \left[ \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{2} xy (1 - x^2 - y^2) dy \right] dx = \int_0^1 \left[ \frac{1}{8} x (1 - x^2)^2 \right] dx
 \end{aligned}$$



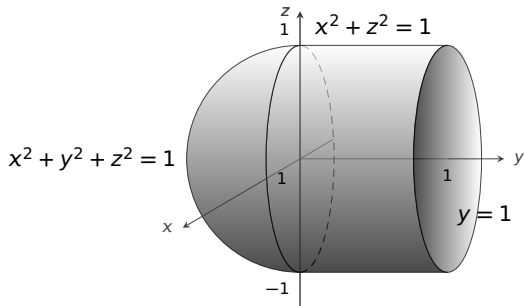
例 计算  $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$  在第一象限的部分。



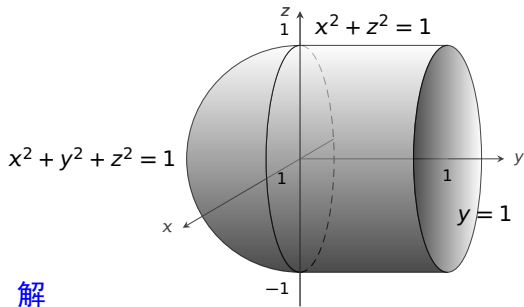
解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iiint_{D_{xy}} \left[ \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} xy (1 - x^2 - y^2) dx dy \\
 &= \int_0^1 \left[ \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{2} xy (1 - x^2 - y^2) dy \right] dx = \int_0^1 \left[ \frac{1}{8} x (1 - x^2)^2 \right] dx \\
 &= \frac{1}{48}
 \end{aligned}$$

例 计算  $\iiint_{\Omega} y\sqrt{1-x^2}dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是如图的闭区域。



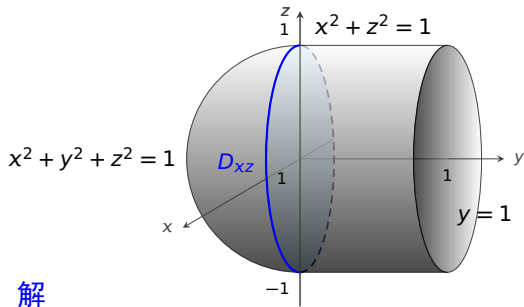
例 计算  $\iiint_{\Omega} y\sqrt{1-x^2}dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是如图的闭区域。



解

$$\text{原式} = \iint \left[ \int y\sqrt{1-x^2} dy \right] dx dz$$

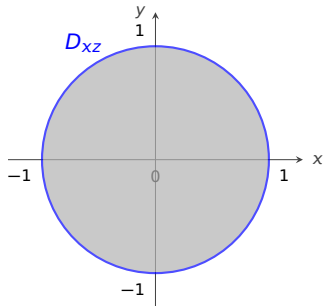
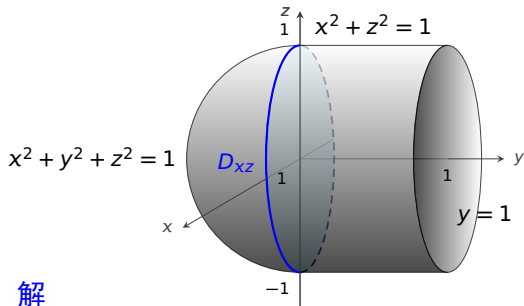
例 计算  $\iiint_{\Omega} y\sqrt{1-x^2}dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是如图的闭区域。



解

$$\text{原式} = \iint \left[ \int y\sqrt{1-x^2} dy \right] dx dz$$

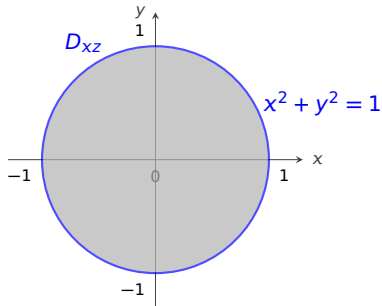
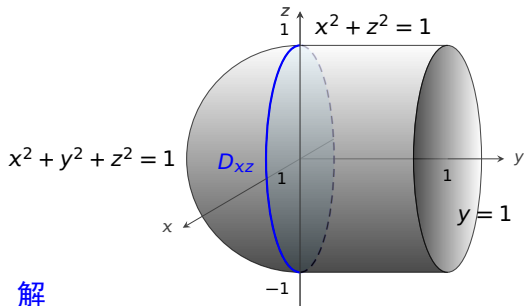
例 计算  $\iiint_{\Omega} y\sqrt{1-x^2}dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是如图的闭区域。



解

$$\text{原式} = \iint \left[ \int y\sqrt{1-x^2} dy \right] dx dz$$

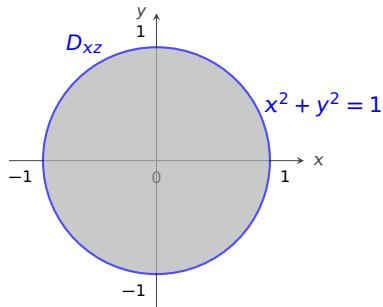
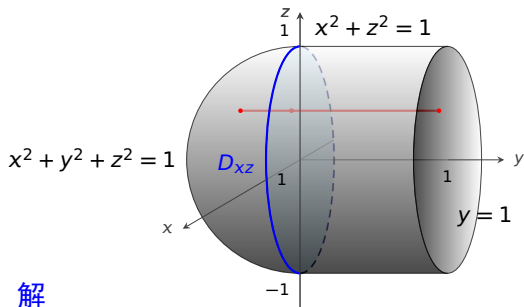
例 计算  $\iiint_{\Omega} y\sqrt{1-x^2}dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是如图的闭区域。



解

$$\text{原式} = \iint \left[ \int y\sqrt{1-x^2} dy \right] dx dz$$

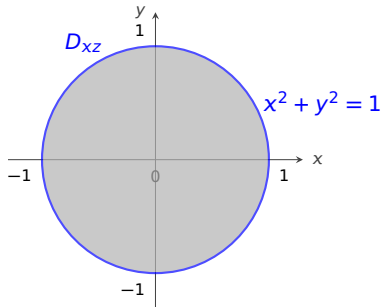
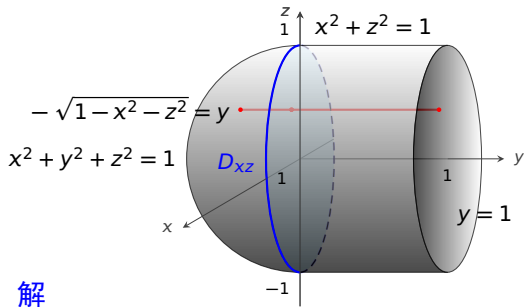
例 计算  $\iiint_{\Omega} y\sqrt{1-x^2}dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是如图的闭区域。



解

$$\text{原式} = \iint \left[ \int y\sqrt{1-x^2} dy \right] dx dz$$

例 计算  $\iiint_{\Omega} y\sqrt{1-x^2}dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是如图的闭区域。

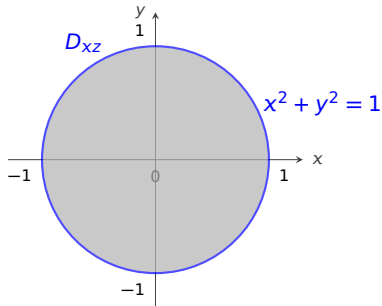
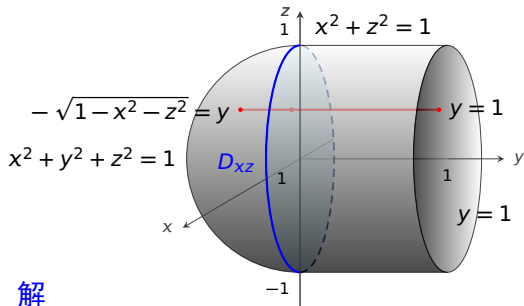


解

$$\text{原式} = \iint \left[ \int y\sqrt{1-x^2} dy \right] dx dz$$



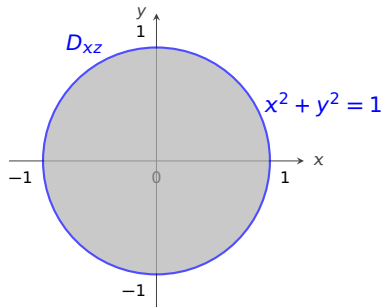
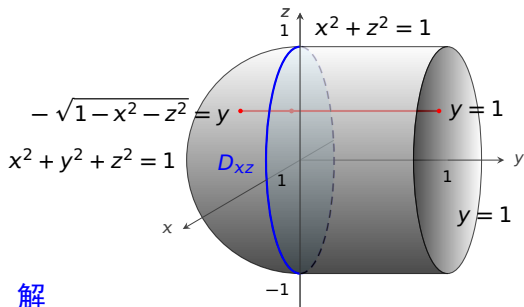
例 计算  $\iiint_{\Omega} y\sqrt{1-x^2}dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是如图的闭区域。



解

$$\text{原式} = \iint \left[ \int y\sqrt{1-x^2} dy \right] dx dz$$

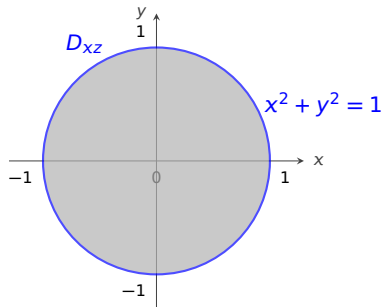
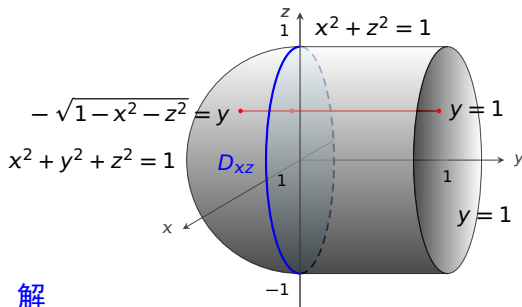
例 计算  $\iiint_{\Omega} y\sqrt{1-x^2}dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是如图的闭区域。



解

$$\text{原式} = \iint_{D_{xz}} \left[ \int y\sqrt{1-x^2} dy \right] dx dz$$

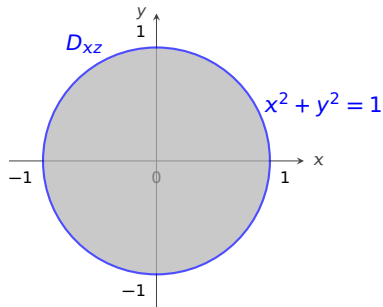
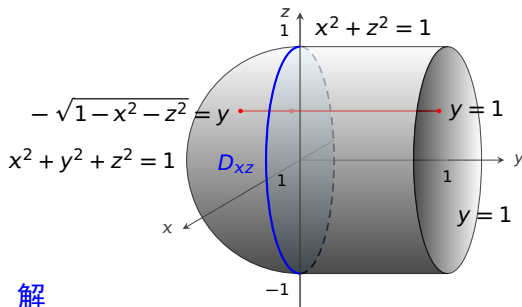
例 计算  $\iiint_{\Omega} y\sqrt{1-x^2}dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是如图的闭区域。



解

$$\text{原式} = \iint_{D_{xz}} \left[ \int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^1 y\sqrt{1-x^2} dy \right] dx dz$$

例 计算  $\iiint_{\Omega} y\sqrt{1-x^2}dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是如图的闭区域。

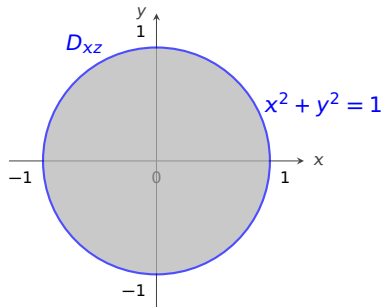
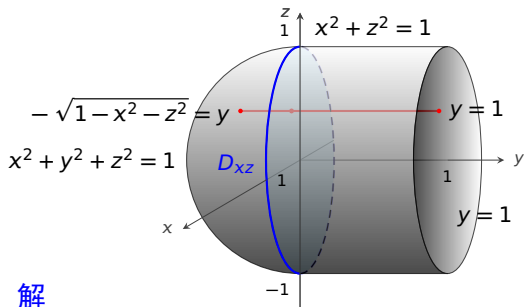


解

$$\text{原式} = \iiint_{D_{xz}} \left[ \int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^1 y\sqrt{1-x^2} dy \right] dx dz$$

$$\sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{2}(x^2 + z^2)$$

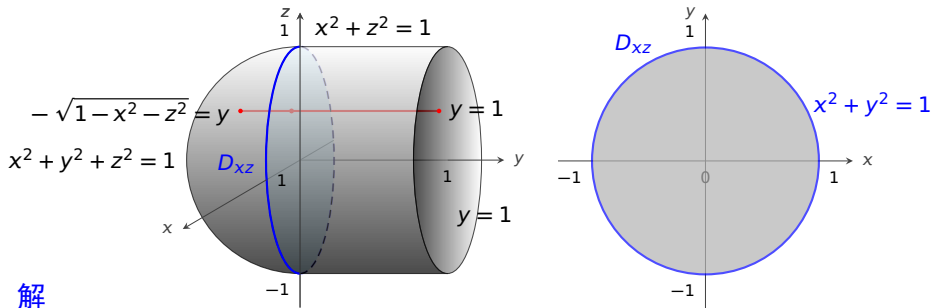
例 计算  $\iiint_{\Omega} y\sqrt{1-x^2}dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是如图的闭区域。



解

$$\text{原式} = \iiint_{D_{xz}} \left[ \int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^1 y\sqrt{1-x^2} dy \right] dx dz = \iint_{D_{xz}} \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{2}(x^2 + z^2) dx dz$$

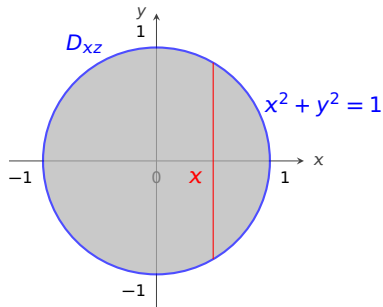
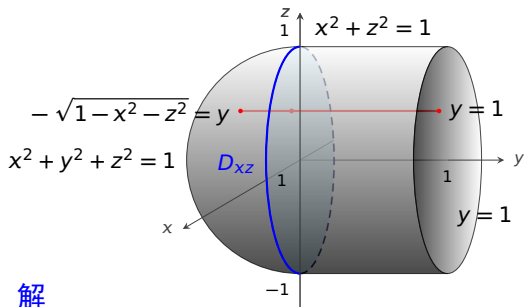
**例** 计算  $\iiint_{\Omega} y\sqrt{1-x^2}dxdydz$ , 其中  $\Omega$  是如图的闭区域。



**解**

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iiint_{D_{xz}} \left[ \int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^1 y\sqrt{1-x^2}dy \right] dx dz = \iint_{D_{xz}} \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{2}(x^2+z^2) dx dz \\
 &= \int \left[ \int \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{2}(x^2+z^2) dz \right] dx
 \end{aligned}$$

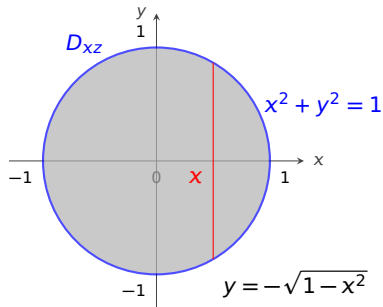
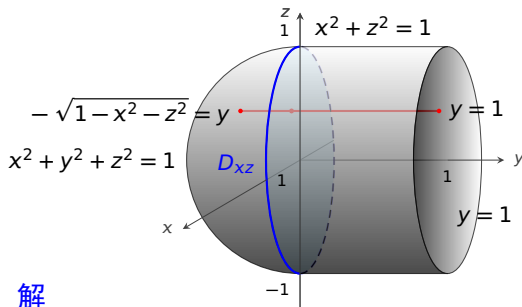
**例** 计算  $\iiint_{\Omega} y\sqrt{1-x^2}dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是如图的闭区域。



**解**

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint_{D_{xz}} \left[ \int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^1 y\sqrt{1-x^2} dy \right] dx dz = \iint_{D_{xz}} \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{2}(x^2 + z^2) dx dz \\ &= \int \left[ \int \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{2}(x^2 + z^2) dz \right] dx \end{aligned}$$

**例** 计算  $\iiint_{\Omega} y\sqrt{1-x^2}dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是如图的闭区域。

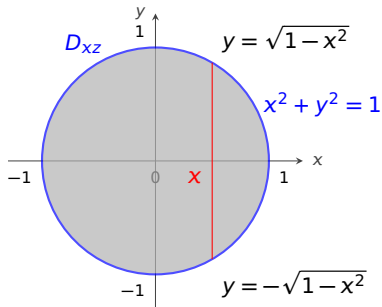
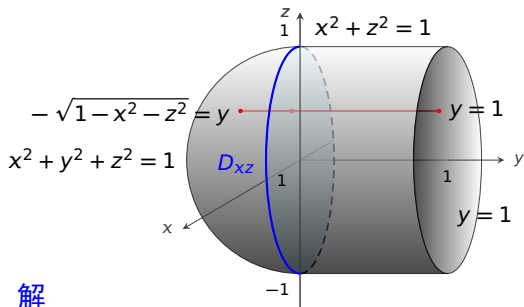


**解**

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint_{D_{xz}} \left[ \int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^1 y\sqrt{1-x^2} dy \right] dx dz = \iint_{D_{xz}} \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{2}(x^2 + z^2) dx dz \\ &= \int \left[ \int \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{2}(x^2 + z^2) dz \right] dx \end{aligned}$$



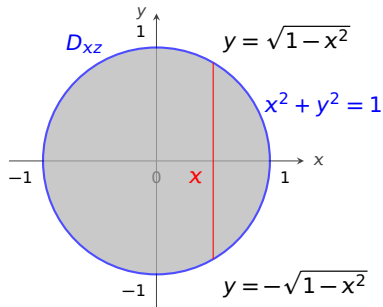
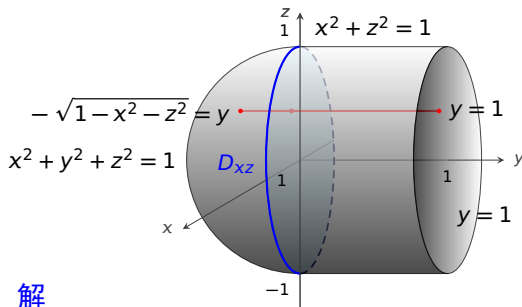
**例** 计算  $\iiint_{\Omega} y\sqrt{1-x^2}dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是如图的闭区域。



**解**

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint_{D_{xz}} \left[ \int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^1 y\sqrt{1-x^2} dy \right] dx dz = \iint_{D_{xz}} \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{2}(x^2 + z^2) dx dz \\ &= \int \left[ \int \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{2}(x^2 + z^2) dz \right] dx \end{aligned}$$

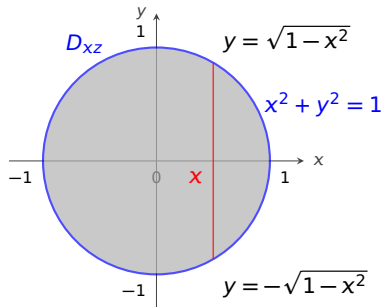
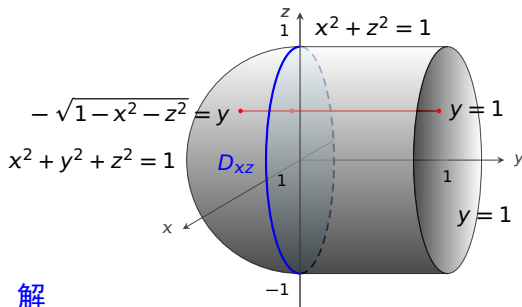
**例** 计算  $\iiint_{\Omega} y\sqrt{1-x^2}dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是如图的闭区域。



**解**

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iint_{D_{xz}} \left[ \int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^1 y\sqrt{1-x^2} dy \right] dx dz = \iint_{D_{xz}} \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{2}(x^2 + z^2) dx dz \\
 &= \int_{-1}^1 \left[ \int \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{2}(x^2 + z^2) dz \right] dx
 \end{aligned}$$

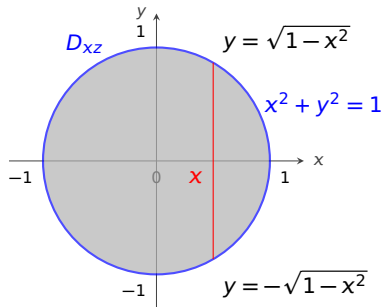
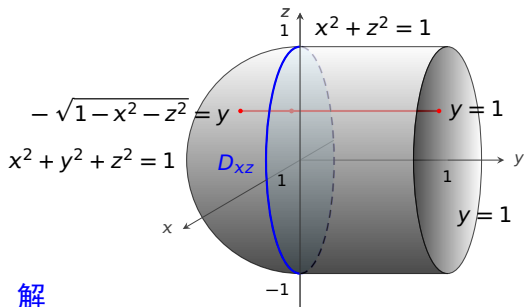
**例** 计算  $\iiint_{\Omega} y\sqrt{1-x^2}dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是如图的闭区域。



**解**

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iint_{D_{xz}} \left[ \int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^1 y\sqrt{1-x^2} dy \right] dx dz = \iint_{D_{xz}} \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{2}(x^2 + z^2) dx dz \\
 &= \int_{-1}^1 \left[ \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{2}(x^2 + z^2) dz \right] dx
 \end{aligned}$$

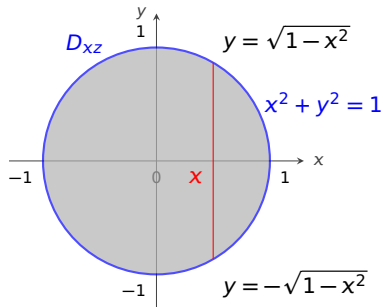
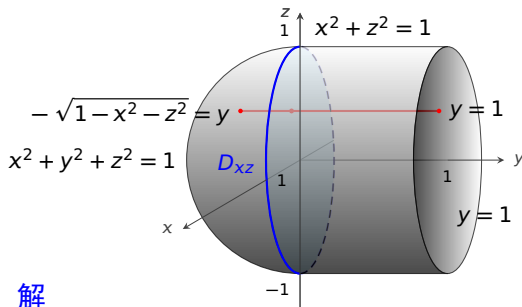
**例** 计算  $\iiint_{\Omega} y\sqrt{1-x^2}dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是如图的闭区域。



**解**

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iiint_{D_{xz}} \left[ \int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^1 y\sqrt{1-x^2} dy \right] dx dz = \iint_{D_{xz}} \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{2}(x^2 + z^2) dx dz \\
 &= \int_{-1}^1 \left[ \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{2}(x^2 + z^2) dz \right] dx \\
 &= \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{3}(1 + x^2 - 2x^4) \right] dx
 \end{aligned}$$

**例** 计算  $\iiint_{\Omega} y\sqrt{1-x^2}dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是如图的闭区域。

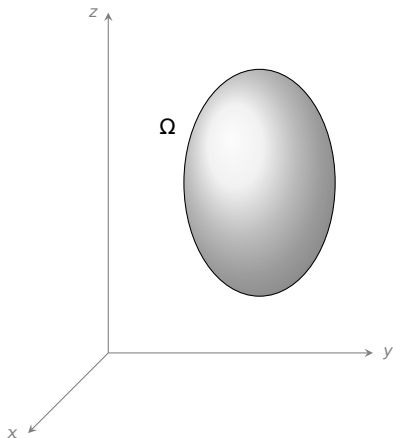


**解**

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iiint_{D_{xz}} \left[ \int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^1 y\sqrt{1-x^2} dy \right] dx dz = \iint_{D_{xz}} \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{2}(x^2 + z^2) dx dz \\
 &= \int_{-1}^1 \left[ \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{2}(x^2 + z^2) dz \right] dx \\
 &= \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{3}(1 + x^2 - 2x^4) \right] dx = \frac{28}{45}
 \end{aligned}$$

# 截面法 (“先二后一”)

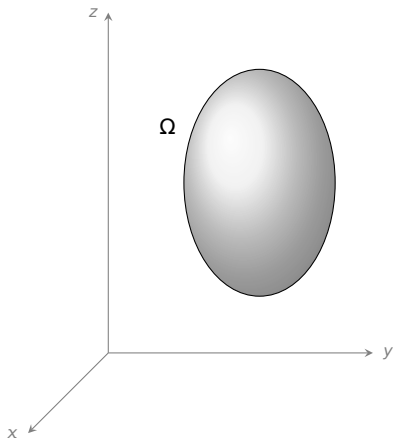
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$$



# 截面法 (“先二后一”)

1. 先积  $xy$ , 再积  $z$

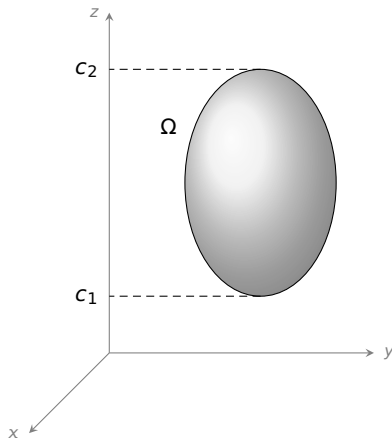
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int \left[ \iint f(x, y, z) dx dy \right] dz$$



# 截面法 (“先二后一”)

1. 先积  $xy$ , 再积  $z$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int \left[ \iint f(x, y, z) dx dy \right] dz$$

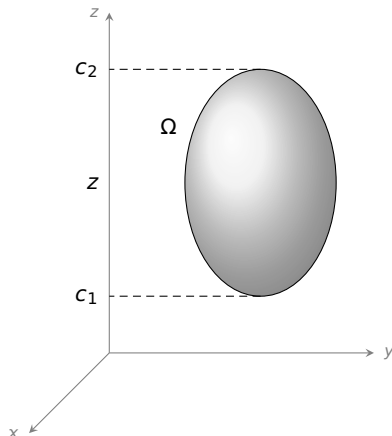




# 截面法 (“先二后一”)

1. 先积  $xy$ , 再积  $z$

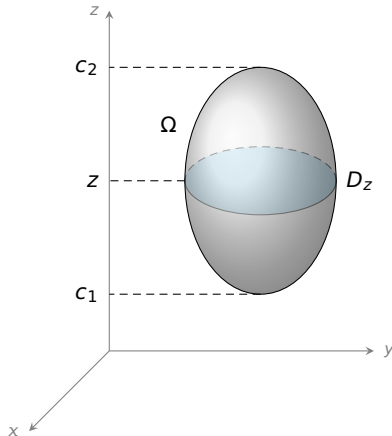
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int \left[ \iint f(x, y, z) dx dy \right] dz$$



# 截面法 (“先二后一”)

1. 先积  $xy$ , 再积  $z$

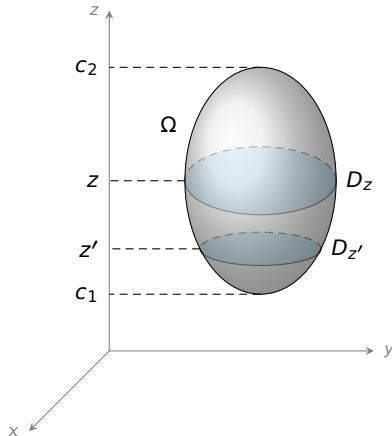
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int \left[ \iint f(x, y, z) dx dy \right] dz$$



# 截面法 (“先二后一”)

1. 先积  $xy$ , 再积  $z$

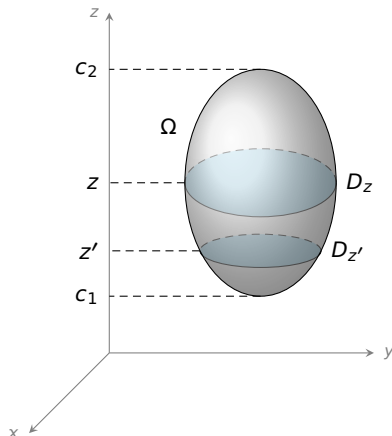
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int \left[ \iint f(x, y, z) dx dy \right] dz$$



# 截面法 (“先二后一”)

1. 先积  $xy$ , 再积  $z$

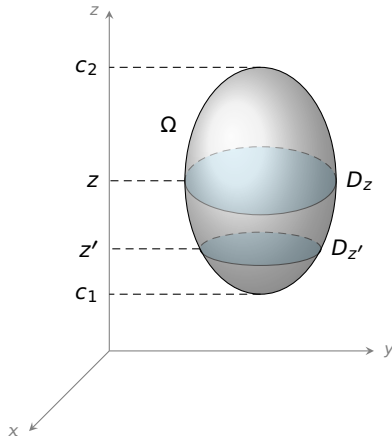
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{c_1}^{c_2} \left[ \iint f(x, y, z) dx dy \right] dz$$



# 截面法 (“先二后一”)

1. 先积  $xy$ , 再积  $z$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{c_1}^{c_2} \left[ \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right] dz$$



## 截面法 (“先二后一”)

---

1. 先积  $xy$ , 再积  $z$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{c_1}^{c_2} \left[ \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right] dz$$

## 截面法 (“先二后一”)

---

1. 先积  $xy$ , 再积  $z$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{c_1}^{c_2} \left[ \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right] dz$$

类似地

2. 先积  $yz$ , 再积  $x$

3. 先积  $xz$ , 再积  $y$

## 截面法 (“先二后一”)

1. 先积  $xy$ , 再积  $z$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{c_1}^{c_2} \left[ \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right] dz$$

类似地

2. 先积  $yz$ , 再积  $x$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int \left[ \iint f(x, y, z) dy dz \right] dx$$

3. 先积  $xz$ , 再积  $y$



## 截面法 (“先二后一”)

1. 先积  $xy$ , 再积  $z$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{c_1}^{c_2} \left[ \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right] dz$$

类似地

2. 先积  $yz$ , 再积  $x$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{d_1}^{d_2} \left[ \iint f(x, y, z) dy dz \right] dx$$

3. 先积  $xz$ , 再积  $y$

## 截面法 (“先二后一”)

1. 先积  $xy$ , 再积  $z$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{c_1}^{c_2} \left[ \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right] dz$$

类似地

2. 先积  $yz$ , 再积  $x$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{d_1}^{d_2} \left[ \iint_{D_x} f(x, y, z) dy dz \right] dx$$

3. 先积  $xz$ , 再积  $y$

## 截面法 (“先二后一”)

1. 先积  $xy$ , 再积  $z$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{c_1}^{c_2} \left[ \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right] dz$$

类似地

2. 先积  $yz$ , 再积  $x$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{d_1}^{d_2} \left[ \iint_{D_x} f(x, y, z) dy dz \right] dx$$

3. 先积  $xz$ , 再积  $y$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int \left[ \iint f(x, y, z) dx dz \right] dy$$

## 截面法 (“先二后一”)

1. 先积  $xy$ , 再积  $z$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{c_1}^{c_2} \left[ \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right] dz$$

类似地

2. 先积  $yz$ , 再积  $x$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{d_1}^{d_2} \left[ \iint_{D_x} f(x, y, z) dy dz \right] dx$$

3. 先积  $xz$ , 再积  $y$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{e_1}^{e_2} \left[ \iint f(x, y, z) dx dz \right] dy$$

## 截面法 (“先二后一”)

1. 先积  $xy$ , 再积  $z$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{c_1}^{c_2} \left[ \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right] dz$$

类似地

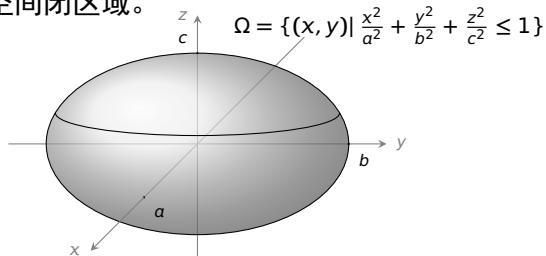
2. 先积  $yz$ , 再积  $x$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{d_1}^{d_2} \left[ \iint_{D_x} f(x, y, z) dy dz \right] dx$$

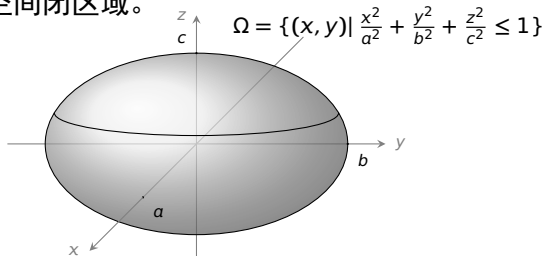
3. 先积  $xz$ , 再积  $y$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{e_1}^{e_2} \left[ \iint_{D_y} f(x, y, z) dx dz \right] dy$$

**例** 计算  $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  所围成的空间闭区域。



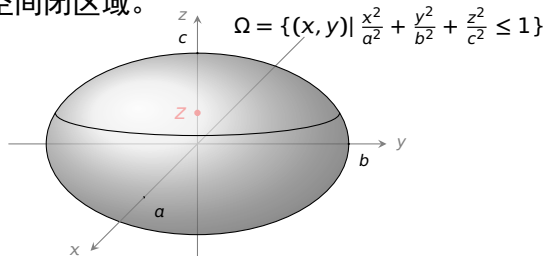
例 计算  $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  所围成的空间闭区域。



解

$$\text{原式} = \int \left[ \iint z^2 dx dy \right] dz$$

例 计算  $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  所围成的空间闭区域。

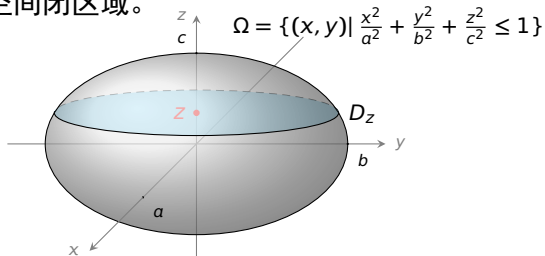


解

$$\text{原式} = \int \left[ \iint z^2 dx dy \right] dz$$



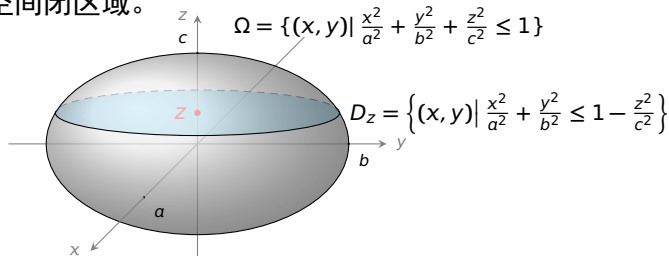
例 计算  $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  所围成的空间闭区域。



解

$$\text{原式} = \int \left[ \iint z^2 dx dy \right] dz$$

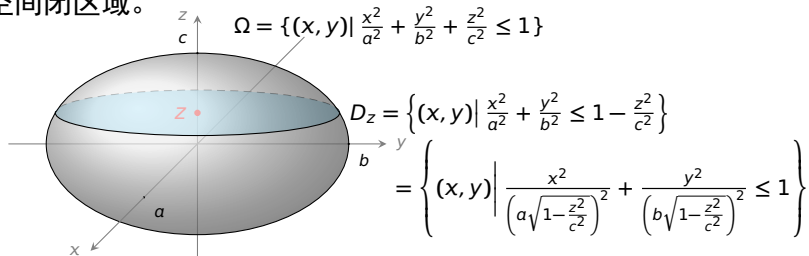
例 计算  $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  所围成的空间闭区域。



解

$$\text{原式} = \int \left[ \iint z^2 dx dy \right] dz$$

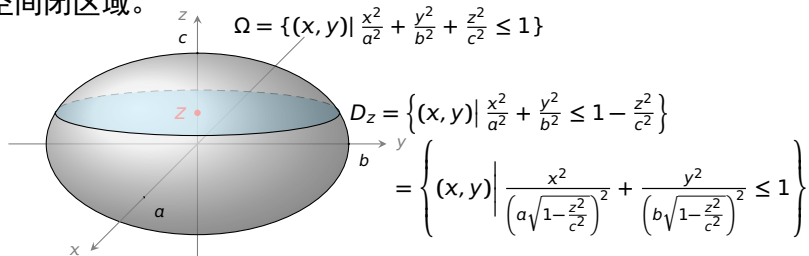
**例** 计算  $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  所围成的空间闭区域。



**解**

$$\text{原式} = \int \left[ \iint z^2 dx dy \right] dz$$

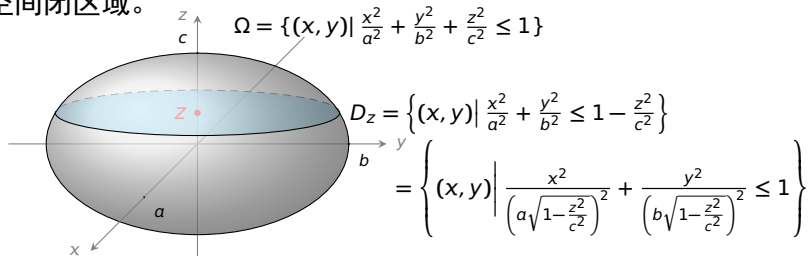
例 计算  $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  所围成的空间闭区域。



解

$$\text{原式} = \int_{-c}^c \left[ \iint z^2 dx dy \right] dz$$

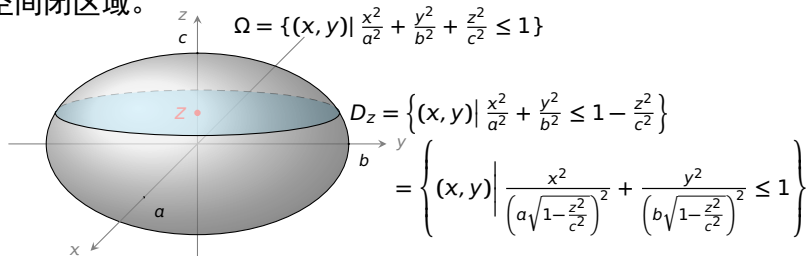
**例** 计算  $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  所围成的空间闭区域。



**解**

$$\text{原式} = \int_{-c}^c \left[ \iint_{D_z} z^2 dx dy \right] dz$$

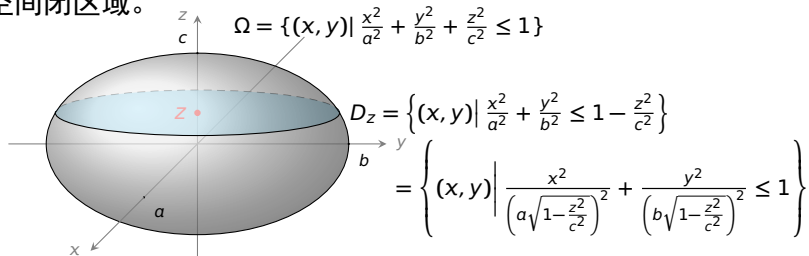
例 计算  $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  所围成的空间闭区域。



解

$$\text{原式} = \int_{-c}^c \left[ \iint_{D_z} z^2 dx dy \right] dz = \int_{-c}^c z^2 \left[ \iint_{D_z} dx dy \right] dz$$

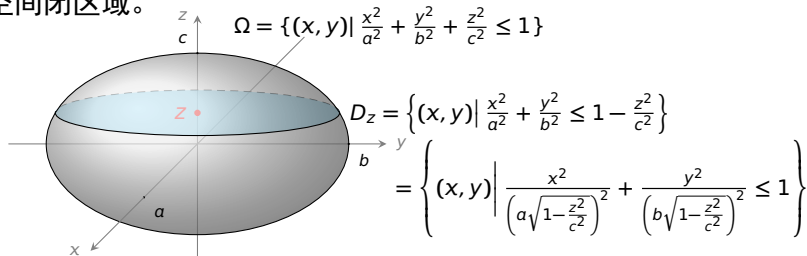
例 计算  $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  所围成的空间闭区域。



解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_{-c}^c \left[ \iint_{D_z} z^2 dx dy \right] dz = \int_{-c}^c z^2 \left[ \iint_{D_z} dx dy \right] dz \\ &\quad \pi \cdot ab \left( 1 - \frac{z^2}{c^2} \right) \end{aligned}$$

例 计算  $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  所围成的空间闭区域。

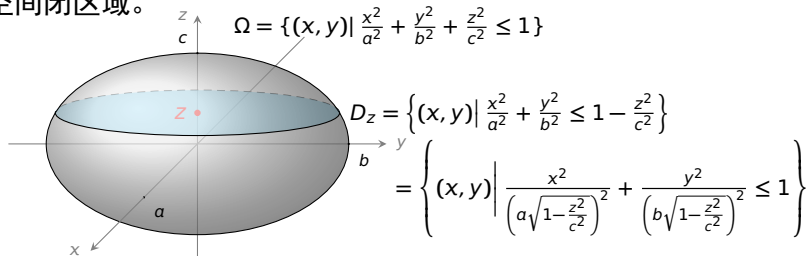


解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_{-c}^c \left[ \iint_{D_z} z^2 dx dy \right] dz = \int_{-c}^c z^2 \left[ \iint_{D_z} dx dy \right] dz \\ &= \int_{-c}^c z^2 \left[ \pi \cdot ab \left( 1 - \frac{z^2}{c^2} \right) \right] dz \end{aligned}$$



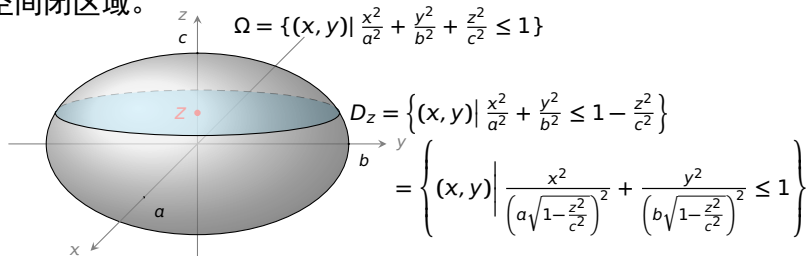
例 计算  $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  所围成的空间闭区域。



解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_{-c}^c \left[ \iint_{D_z} z^2 dx dy \right] dz = \int_{-c}^c z^2 \left[ \iint_{D_z} dx dy \right] dz \\ &= \int_{-c}^c z^2 \left[ \pi \cdot ab \left( 1 - \frac{z^2}{c^2} \right) \right] dz \\ &= \pi \cdot ab \int_{-c}^c \left( z^2 - \frac{z^4}{c^2} \right) dz \end{aligned}$$

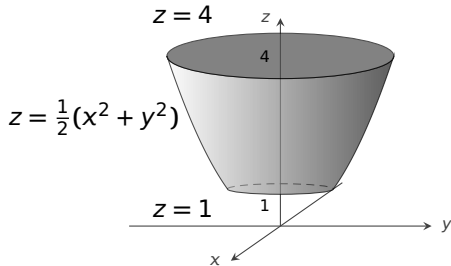
例 计算  $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  所围成的空间闭区域。



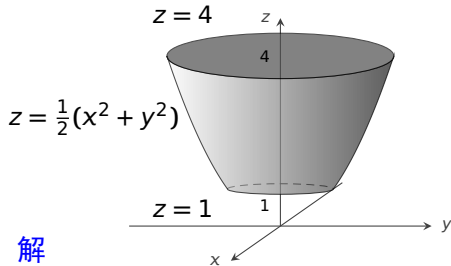
解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int_{-c}^c \left[ \iint_{D_z} z^2 dx dy \right] dz = \int_{-c}^c z^2 \left[ \iint_{D_z} dx dy \right] dz \\
 &= \int_{-c}^c z^2 \left[ \pi \cdot ab \left( 1 - \frac{z^2}{c^2} \right) \right] dz \\
 &= \pi \cdot ab \int_{-c}^c \left( z^2 - \frac{z^4}{c^2} \right) dz = \frac{4}{15} \pi abc^3
 \end{aligned}$$

例 计算  $\iiint_{\Omega} (x^2 + 5xy^2 \sin \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由曲面  $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  与平面  $z = 1$  和  $z = 4$  所围成。



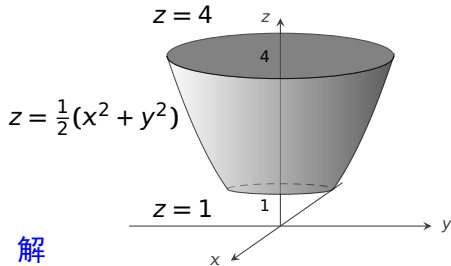
**例** 计算  $\iiint_{\Omega} (x^2 + 5xy^2 \sin \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由曲面  $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  与平面  $z = 1$  和  $z = 4$  所围成。



**解**

$$\text{原式} \xrightarrow{\text{对称性}} \iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz$$

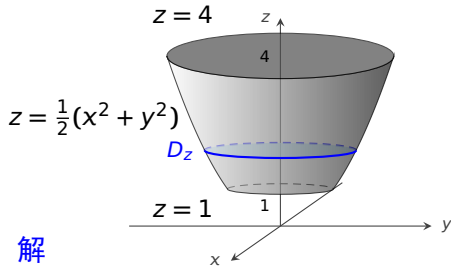
**例** 计算  $\iiint_{\Omega} (x^2 + 5xy^2 \sin \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由曲面  $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  与平面  $z = 1$  和  $z = 4$  所围成。



**解**

$$\text{原式} \xrightarrow{\text{对称性}} \iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz = \int \left[ \iint x^2 dx dy \right] dz$$

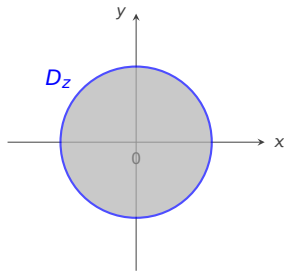
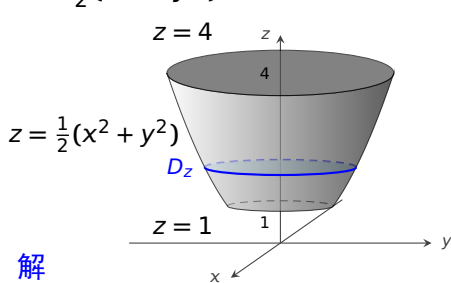
**例** 计算  $\iiint_{\Omega} (x^2 + 5xy^2 \sin \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由曲面  $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  与平面  $z = 1$  和  $z = 4$  所围成。



**解**

$$\text{原式} \xrightarrow{\text{对称性}} \iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz = \int \left[ \iint x^2 dx dy \right] dz$$

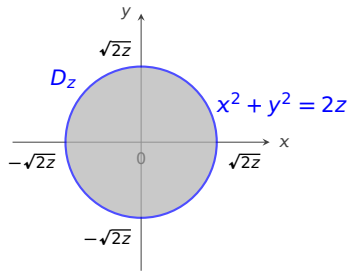
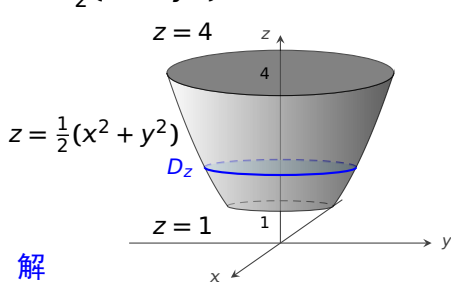
**例** 计算  $\iiint_{\Omega} (x^2 + 5xy^2 \sin \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由曲面  $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  与平面  $z = 1$  和  $z = 4$  所围成。



**解**

$$\text{原式} \xrightarrow{\text{对称性}} \iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz = \int \left[ \iint x^2 dx dy \right] dz$$

**例** 计算  $\iiint_{\Omega} (x^2 + 5xy^2 \sin \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由曲面  $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  与平面  $z = 1$  和  $z = 4$  所围成。

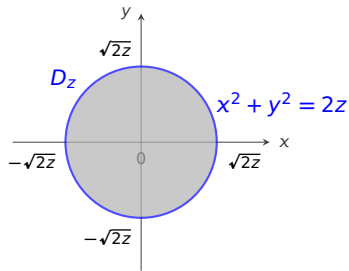
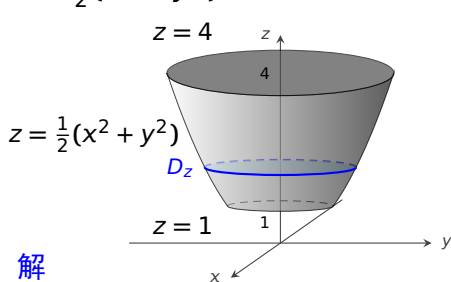


**解**

$$\text{原式} \xrightarrow{\text{对称性}} \iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz = \int \left[ \iint x^2 dx dy \right] dz$$



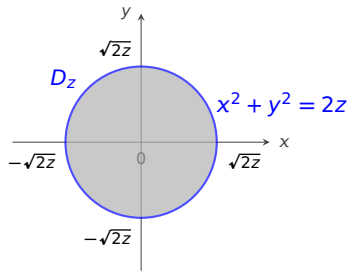
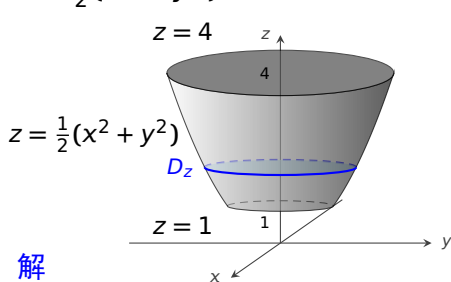
**例** 计算  $\iiint_{\Omega} (x^2 + 5xy^2 \sin \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由曲面  $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  与平面  $z = 1$  和  $z = 4$  所围成。



**解**

$$\text{原式} \xrightarrow{\text{对称性}} \iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz = \int_1^4 \left[ \iint x^2 dx dy \right] dz$$

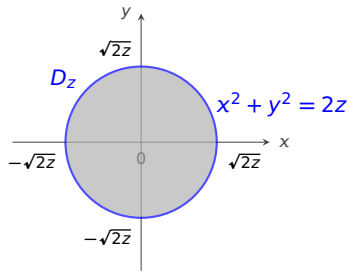
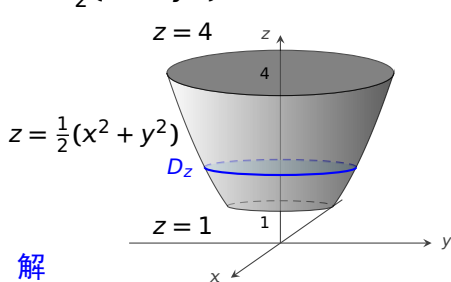
**例** 计算  $\iiint_{\Omega} (x^2 + 5xy^2 \sin \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由曲面  $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  与平面  $z = 1$  和  $z = 4$  所围成。



**解**

$$\text{原式} \stackrel{\text{对称性}}{=} \iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz = \int_1^4 \left[ \iint_{D_z} x^2 dx dy \right] dz$$

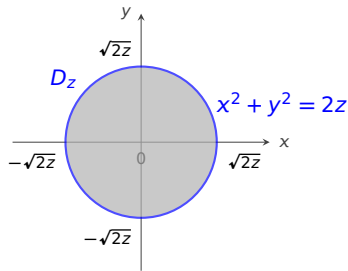
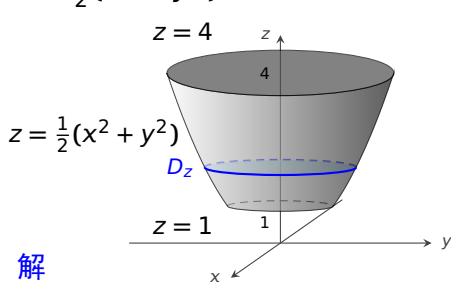
**例** 计算  $\iiint_{\Omega} (x^2 + 5xy^2 \sin \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由曲面  $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  与平面  $z = 1$  和  $z = 4$  所围成。



**解**

$$\begin{aligned} \text{原式} &\stackrel{\text{对称性}}{=} \iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz = \int_1^4 \left[ \iint_{D_z} x^2 dx dy \right] dz \\ &\quad \iint_{D_z} \frac{1}{2}(x^2 + y^2) dx dy \end{aligned}$$

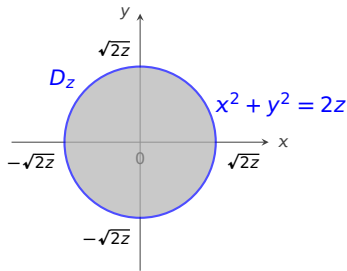
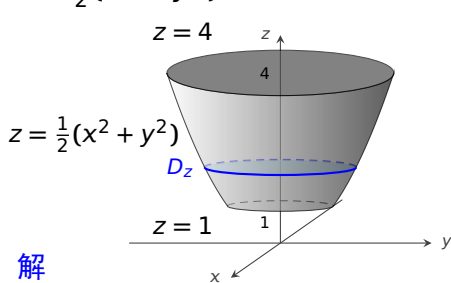
**例** 计算  $\iiint_{\Omega} (x^2 + 5xy^2 \sin \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由曲面  $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  与平面  $z = 1$  和  $z = 4$  所围成。



**解**

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &\stackrel{\text{对称性}}{=} \iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz = \int_1^4 \left[ \iint_{D_z} x^2 dx dy \right] dz \\
 &= \int_1^4 \left[ \iint_{D_z} \frac{1}{2}(x^2 + y^2) dx dy \right] dz
 \end{aligned}$$

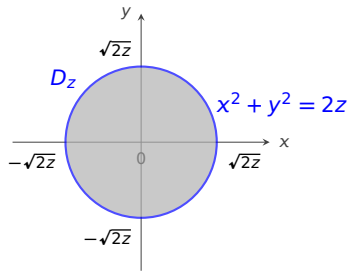
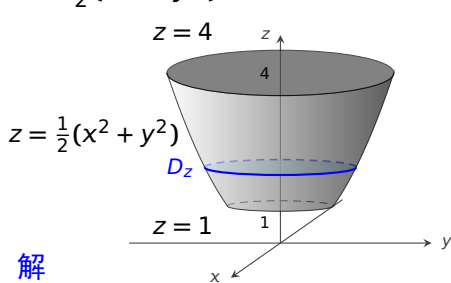
例 计算  $\iiint_{\Omega} (x^2 + 5xy^2 \sin \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由曲面  $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  与平面  $z = 1$  和  $z = 4$  所围成。



解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &\stackrel{\text{对称性}}{=} \iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz = \int_1^4 \left[ \iint_{D_z} x^2 dx dy \right] dz \\
 &= \int_1^4 \left[ \iint_{D_z} \frac{1}{2}(x^2 + y^2) dx dy \right] dz \\
 &\quad \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\sqrt{2z}} \rho^2 \cdot \rho d\rho \right) d\theta
 \end{aligned}$$

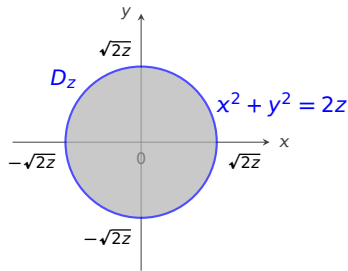
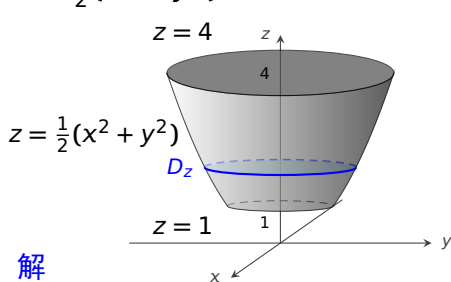
**例** 计算  $\iiint_{\Omega} (x^2 + 5xy^2 \sin \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由曲面  $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  与平面  $z = 1$  和  $z = 4$  所围成。



**解**

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &\stackrel{\text{对称性}}{=} \iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz = \int_1^4 \left[ \iint_{D_z} x^2 dx dy \right] dz \\
 &= \int_1^4 \left[ \iint_{D_z} \frac{1}{2}(x^2 + y^2) dx dy \right] dz \\
 &= \int_1^4 \left[ \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\sqrt{2z}} \rho^2 \cdot \rho d\rho \right) d\theta \right] dz
 \end{aligned}$$

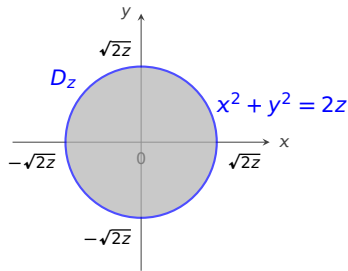
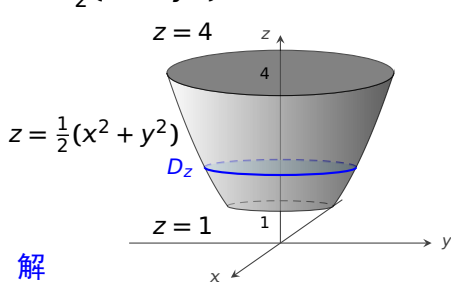
**例** 计算  $\iiint_{\Omega} (x^2 + 5xy^2 \sin \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由曲面  $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  与平面  $z = 1$  和  $z = 4$  所围成。



**解**

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &\stackrel{\text{对称性}}{=} \iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz = \int_1^4 \left[ \iint_{D_z} x^2 dx dy \right] dz \\
 &= \int_1^4 \left[ \iint_{D_z} \frac{1}{2}(x^2 + y^2) dx dy \right] dz \\
 &= \int_1^4 \left[ \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\sqrt{2z}} \rho^2 \cdot \rho d\rho \right) d\theta \right] dz = \pi \int_1^4 z^2 dz
 \end{aligned}$$

**例** 计算  $\iiint_{\Omega} (x^2 + 5xy^2 \sin \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由曲面  $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  与平面  $z = 1$  和  $z = 4$  所围成。



**解**

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &\stackrel{\text{对称性}}{=} \iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz = \int_1^4 \left[ \iint_{D_z} x^2 dx dy \right] dz \\
 &= \int_1^4 \left[ \iint_{D_z} \frac{1}{2}(x^2 + y^2) dx dy \right] dz \\
 &= \int_1^4 \left[ \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\sqrt{2z}} \rho^2 \cdot \rho d\rho \right) d\theta \right] dz = \pi \int_1^4 z^2 dz = 21\pi
 \end{aligned}$$

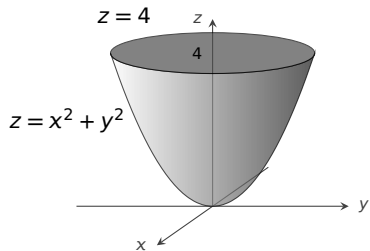


- 上述坐标  $(\rho, \theta, z)$  称为柱面坐标
- 变换

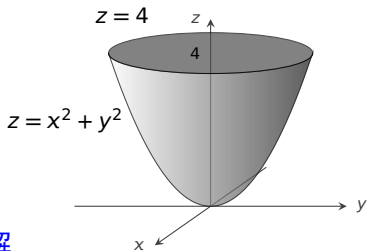
$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

柱面坐标变换

例 计算  $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由曲面  $z = x^2 + y^2$  与平面  $z = 4$  所围成的闭区域。



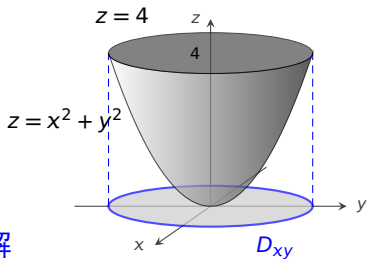
**例** 计算  $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由曲面  $z = x^2 + y^2$  与平面  $z = 4$  所围成的闭区域。



**解**

$$\text{原式} = \iiint \left[ \int z dz \right] dx dy$$

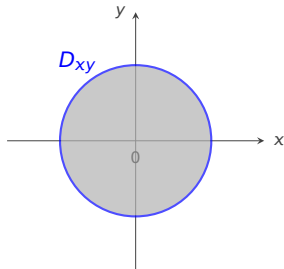
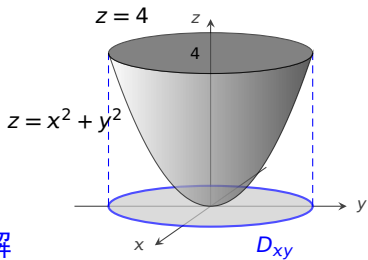
**例** 计算  $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由曲面  $z = x^2 + y^2$  与平面  $z = 4$  所围成的闭区域。



**解**

$$\text{原式} = \iiint \left[ \int z dz \right] dx dy$$

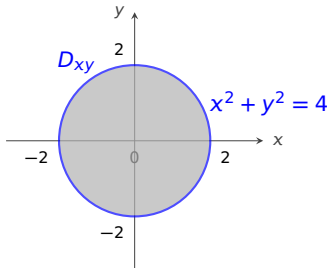
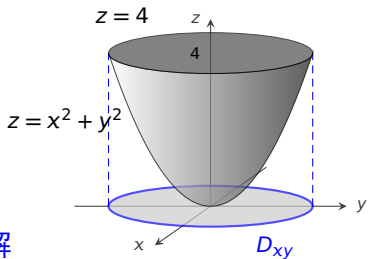
**例** 计算  $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由曲面  $z = x^2 + y^2$  与平面  $z = 4$  所围成的闭区域。



**解**

$$\text{原式} = \iiint \left[ \int z dz \right] dx dy$$

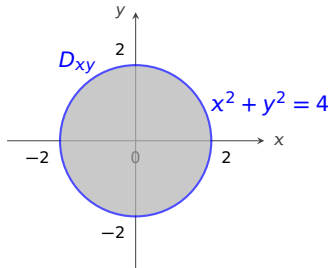
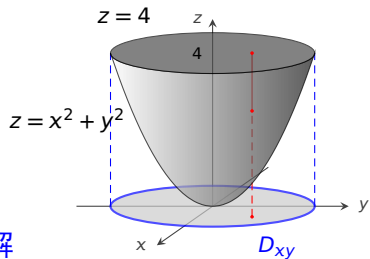
例 计算  $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由曲面  $z = x^2 + y^2$  与平面  $z = 4$  所围成的闭区域。



解

$$\text{原式} = \iiint_{\Omega} z dx dy dz = \iint_{D_{xy}} \left[ \int_{z=x^2+y^2}^{z=4} z dz \right] dx dy$$

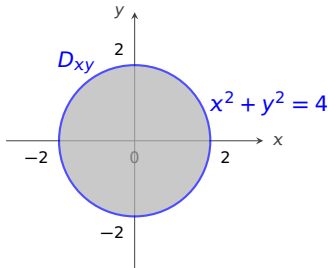
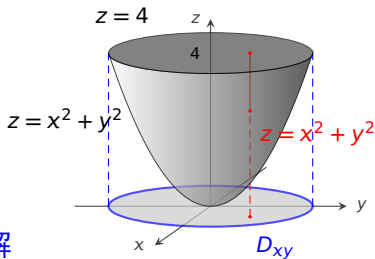
例 计算  $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由曲面  $z = x^2 + y^2$  与平面  $z = 4$  所围成的闭区域。



解

$$\text{原式} = \iiint_{\Omega} z dx dy dz = \iint_{D_{xy}} \left[ \int_{z=x^2+y^2}^4 z dz \right] dx dy$$

例 计算  $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由曲面  $z = x^2 + y^2$  与平面  $z = 4$  所围成的闭区域。

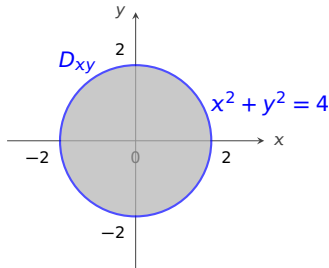
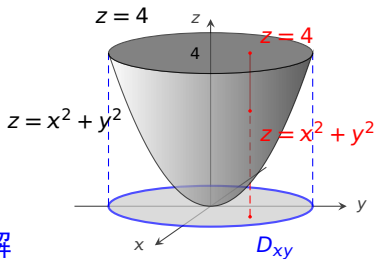


解

$$\text{原式} = \iiint_{\Omega} z dx dy dz = \iint_{D_{xy}} \left[ \int_{z=x^2+y^2}^{z=4} z dz \right] dx dy$$



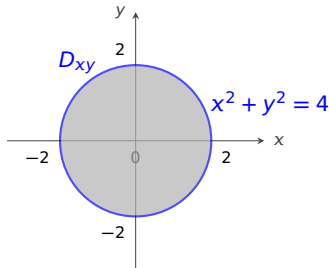
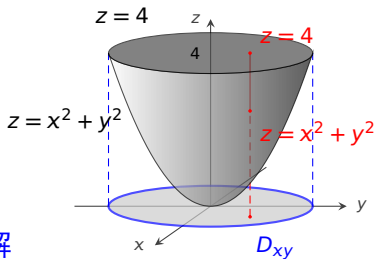
例 计算  $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由曲面  $z = x^2 + y^2$  与平面  $z = 4$  所围成的闭区域。



解

$$\text{原式} = \iiint_{\Omega} z dx dy dz = \iint_{D_{xy}} \left[ \int_{z=x^2+y^2}^{z=4} z dz \right] dx dy$$

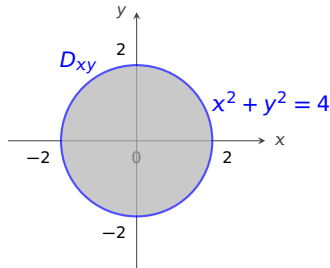
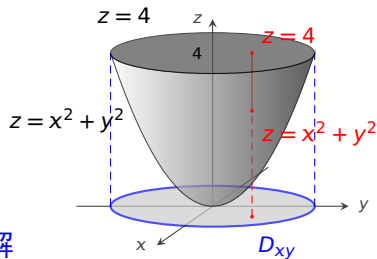
例 计算  $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由曲面  $z = x^2 + y^2$  与平面  $z = 4$  所围成的闭区域。



解

$$\text{原式} = \iiint_{D_{xy}} \left[ \int_{z=x^2+y^2}^{z=4} z dz \right] dx dy$$

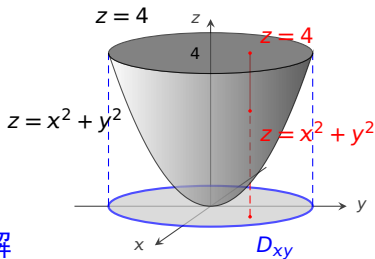
例 计算  $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由曲面  $z = x^2 + y^2$  与平面  $z = 4$  所围成的闭区域。



解

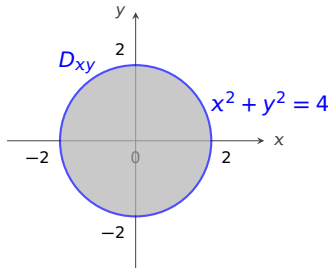
$$\text{原式} = \iiint_{D_{xy}} \left[ \int_{x^2+y^2}^4 z dz \right] dx dy$$

例 计算  $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由曲面  $z = x^2 + y^2$  与平面  $z = 4$  所围成的闭区域。



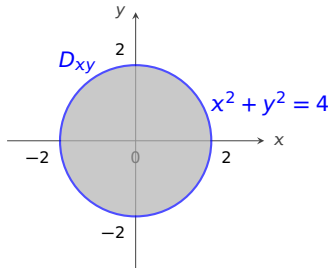
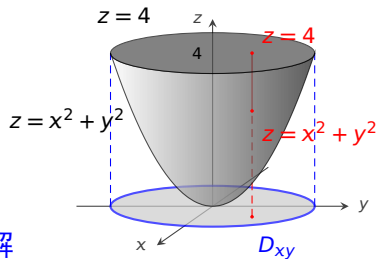
解

$$\text{原式} = \iiint_{D_{xy}} \left[ \int_{x^2+y^2}^4 z dz \right] dx dy$$



$$\frac{1}{2} [16 - (x^2 + y^2)^2]$$

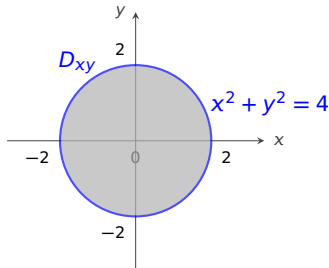
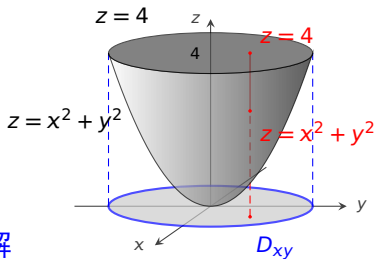
例 计算  $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由曲面  $z = x^2 + y^2$  与平面  $z = 4$  所围成的闭区域。



解

$$\text{原式} = \iiint_{D_{xy}} \left[ \int_{x^2+y^2}^4 z dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} [16 - (x^2 + y^2)^2] dx dy$$

例 计算  $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由曲面  $z = x^2 + y^2$  与平面  $z = 4$  所围成的闭区域。

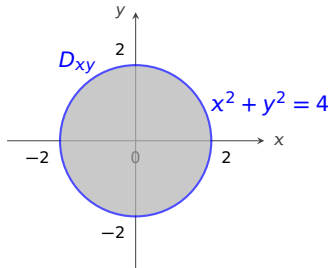
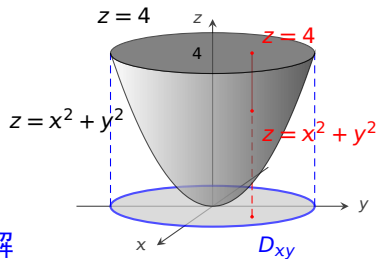


解

$$\text{原式} = \iiint_{D_{xy}} \left[ \int_{x^2+y^2}^4 z dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} [16 - (x^2 + y^2)^2] dx dy$$

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta \\ y &= \rho \sin \theta \end{aligned}$$

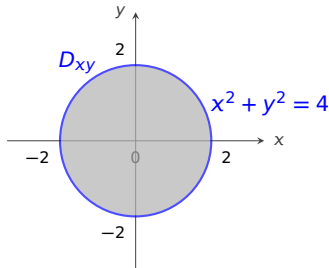
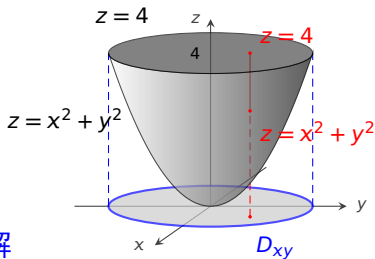
例 计算  $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由曲面  $z = x^2 + y^2$  与平面  $z = 4$  所围成的闭区域。



解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint_{D_{xy}} \left[ \int_{x^2+y^2}^4 z dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} [16 - (x^2 + y^2)^2] dx dy \\ &\stackrel{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{=} \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} [16 - \rho^4] \end{aligned}$$

例 计算  $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由曲面  $z = x^2 + y^2$  与平面  $z = 4$  所围成的闭区域。



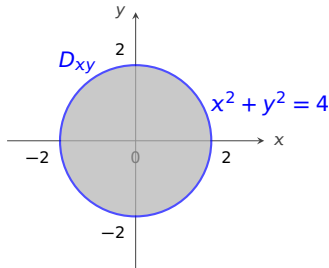
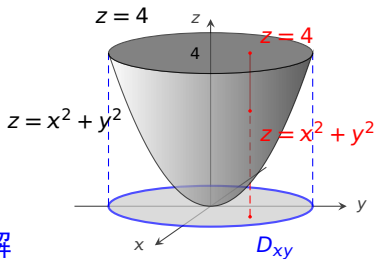
解

$$\text{原式} = \iiint_{D_{xy}} \left[ \int_{x^2+y^2}^4 z dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} [16 - (x^2 + y^2)^2] dx dy$$

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{matrix} \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} [16 - \rho^4] \cdot \rho d\rho d\theta \end{aligned}$$



**例** 计算  $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由曲面  $z = x^2 + y^2$  与平面  $z = 4$  所围成的闭区域。



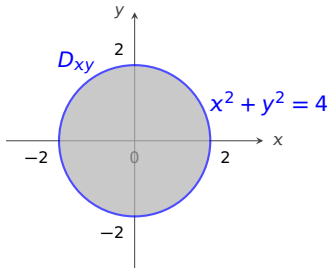
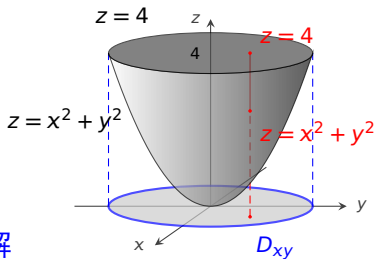
**解**

$$\text{原式} = \iiint_{D_{xy}} \left[ \int_{x^2+y^2}^4 z dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} [16 - (x^2 + y^2)^2] dx dy$$

$$\begin{matrix} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{matrix} \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} [16 - \rho^4] \cdot \rho d\rho d\theta$$

$$= \int \left[ \int \frac{1}{2} [16 - \rho^4] \cdot \rho d\rho \right] d\theta$$

例 计算  $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由曲面  $z = x^2 + y^2$  与平面  $z = 4$  所围成的闭区域。



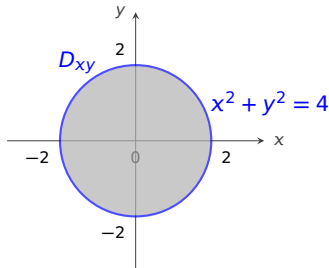
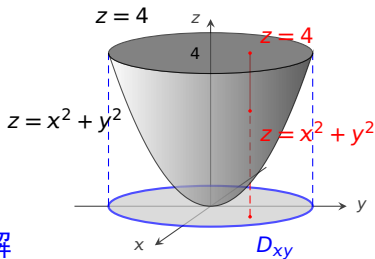
解

$$\text{原式} = \iiint_{D_{xy}} \left[ \int_{x^2+y^2}^4 z dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} [16 - (x^2 + y^2)^2] dx dy$$

$$\begin{matrix} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{matrix} \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} [16 - \rho^4] \cdot \rho d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[ \int \frac{1}{2} [16 - \rho^4] \cdot \rho d\rho \right] d\theta$$

例 计算  $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由曲面  $z = x^2 + y^2$  与平面  $z = 4$  所围成的闭区域。



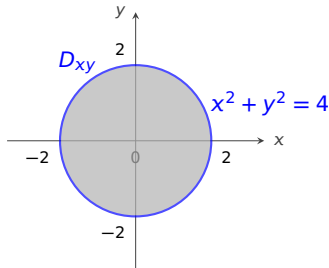
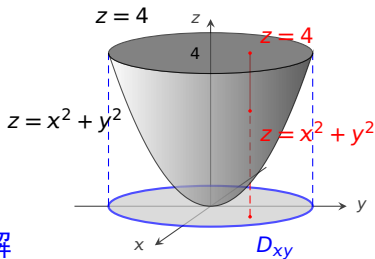
解

$$\text{原式} = \iiint_{D_{xy}} \left[ \int_{x^2+y^2}^4 z dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} [16 - (x^2 + y^2)^2] dx dy$$

$$\begin{matrix} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{matrix} \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} [16 - \rho^4] \cdot \rho d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^2 \frac{1}{2} [16 - \rho^4] \cdot \rho d\rho \right] d\theta$$

例 计算  $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由曲面  $z = x^2 + y^2$  与平面  $z = 4$  所围成的闭区域。



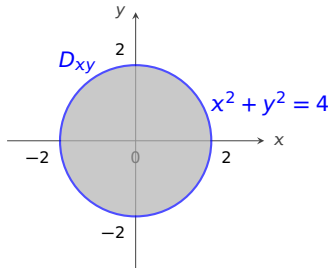
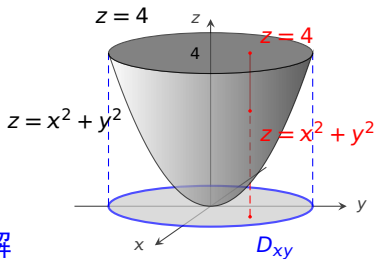
解

$$\text{原式} = \iiint_{D_{xy}} \left[ \int_{x^2+y^2}^4 z dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} [16 - (x^2 + y^2)^2] dx dy$$

$$\begin{matrix} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{matrix} \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} [16 - \rho^4] \cdot \rho d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^2 \frac{1}{2} [16 - \rho^4] \cdot \rho d\rho \right] d\theta = \pi \int_0^2 (16 - \rho^4) \cdot \rho d\rho$$

例 计算  $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由曲面  $z = x^2 + y^2$  与平面  $z = 4$  所围成的闭区域。



解

$$\text{原式} = \iiint_{D_{xy}} \left[ \int_{x^2+y^2}^4 z dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} [16 - (x^2 + y^2)^2] dx dy$$

$$\begin{matrix} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{matrix} \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} [16 - \rho^4] \cdot \rho d\rho d\theta$$

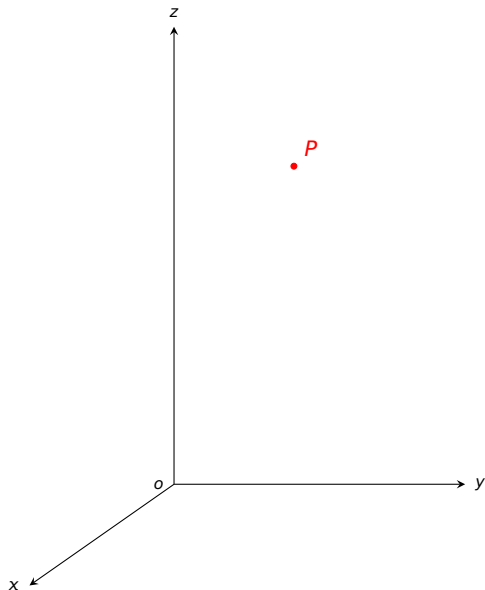
$$= \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^2 \frac{1}{2} [16 - \rho^4] \cdot \rho d\rho \right] d\theta = \pi \int_0^2 (16 - \rho^4) \cdot \rho d\rho = \frac{64}{3} \pi$$

# We are here now...

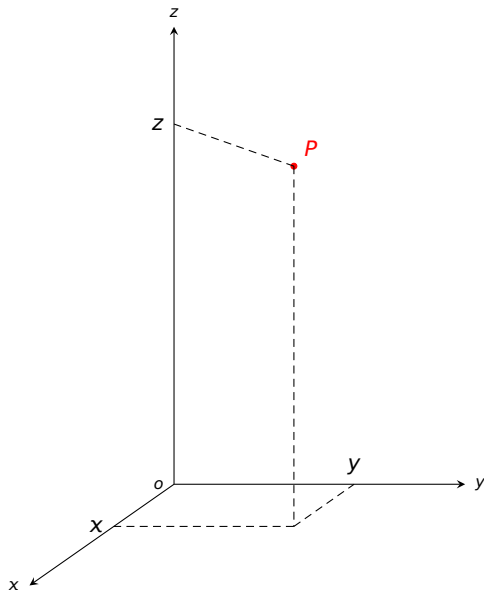
---

1. 三重积分的概念
2. 三重积分的计算：化为累次积分
3. 球面坐标

# 球面坐标

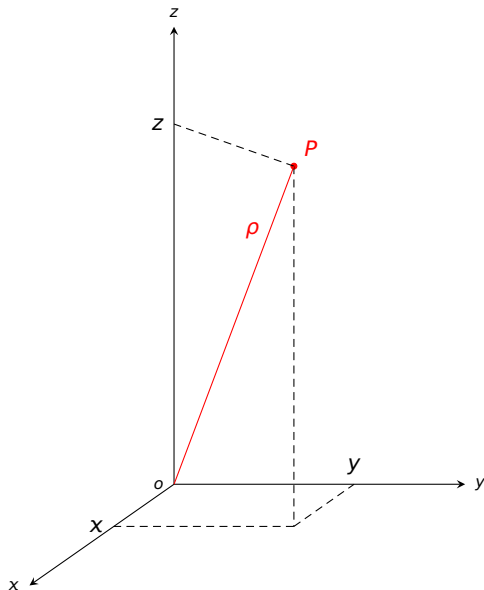


# 球面坐标

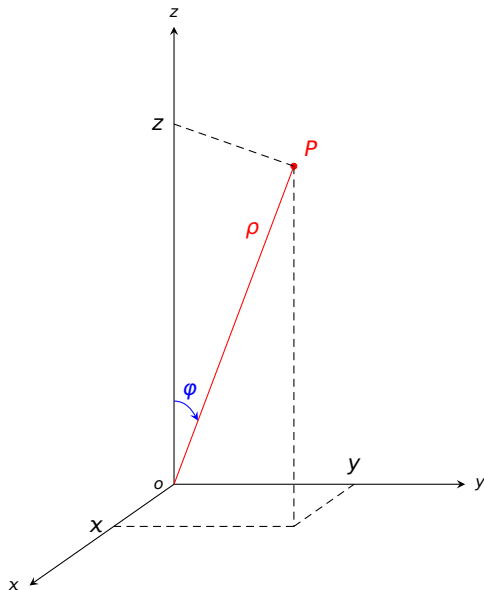




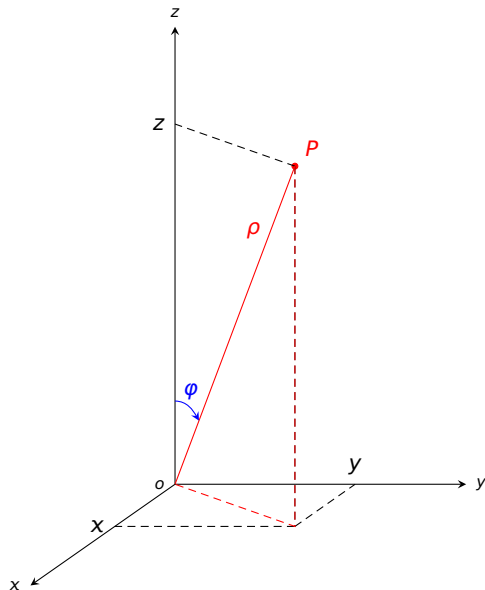
# 球面坐标



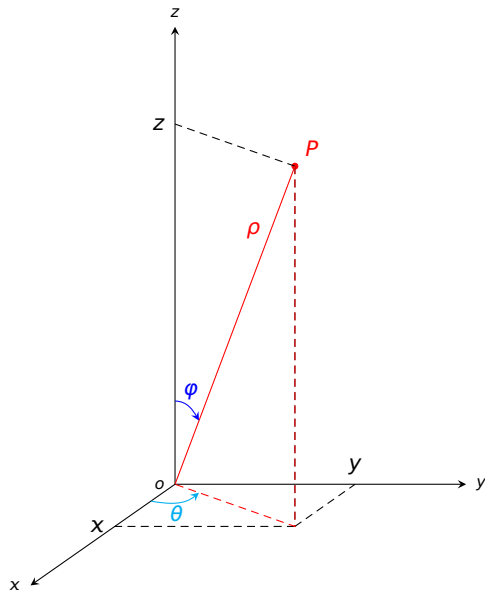
# 球面坐标



# 球面坐标

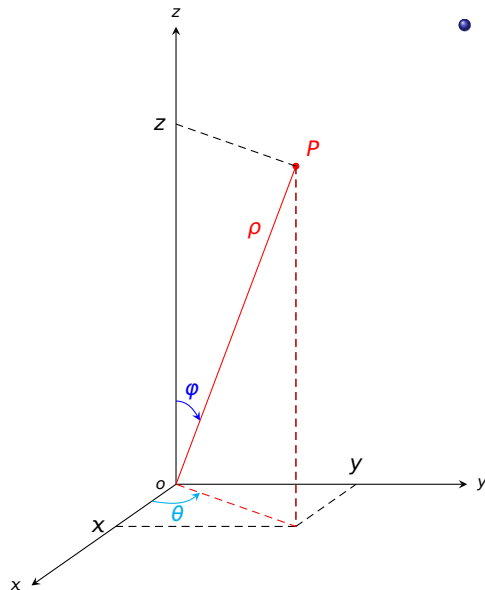


# 球面坐标



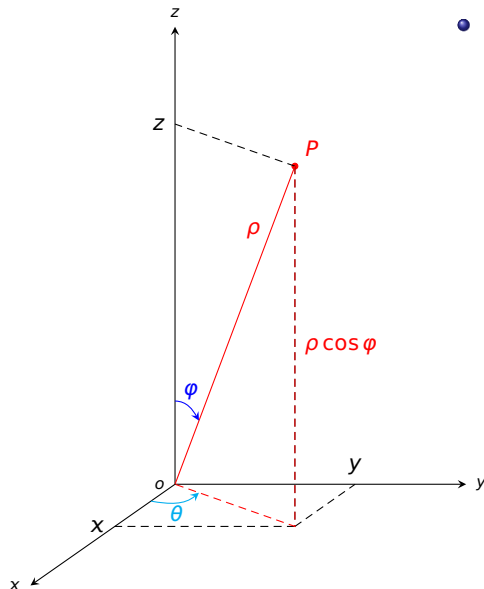
# 球面坐标

- 直角坐标  $(x, y, z)$ , 球面坐标  $(\rho, \varphi, \theta)$  的转换:



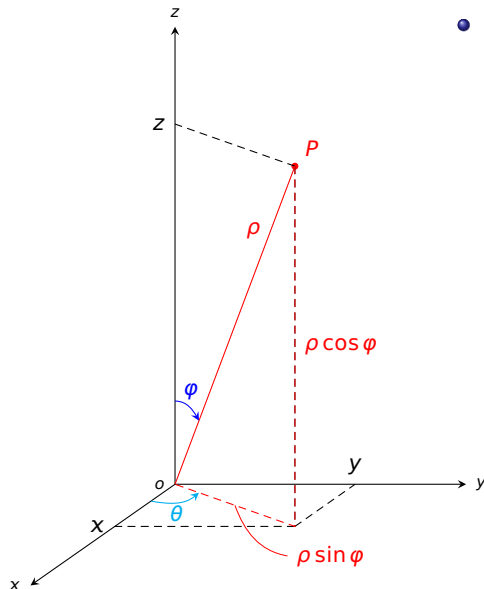
# 球面坐标

- 直角坐标  $(x, y, z)$ , 球面坐标  $(\rho, \varphi, \theta)$  的转换:

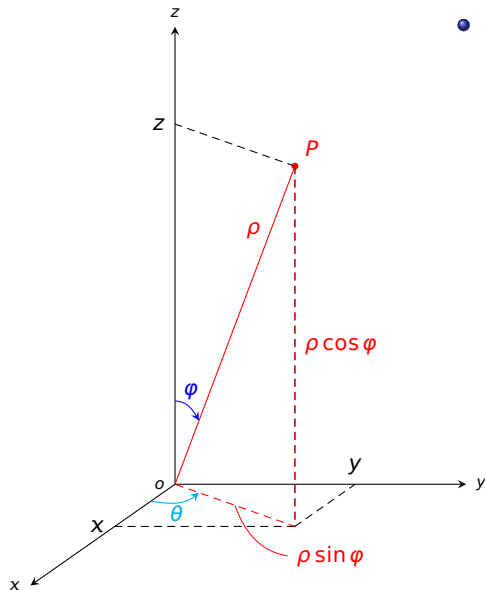


# 球面坐标

- 直角坐标  $(x, y, z)$ , 球面坐标  $(\rho, \varphi, \theta)$  的转换:



# 球面坐标

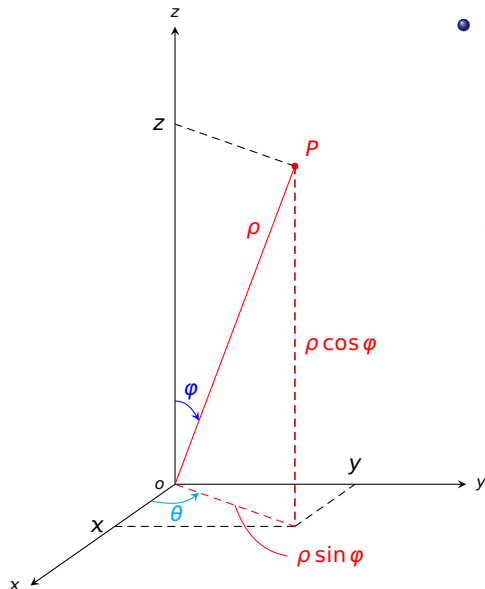


- 直角坐标  $(x, y, z)$ , 球面坐标  $(\rho, \varphi, \theta)$  的转换:

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$



# 球面坐标

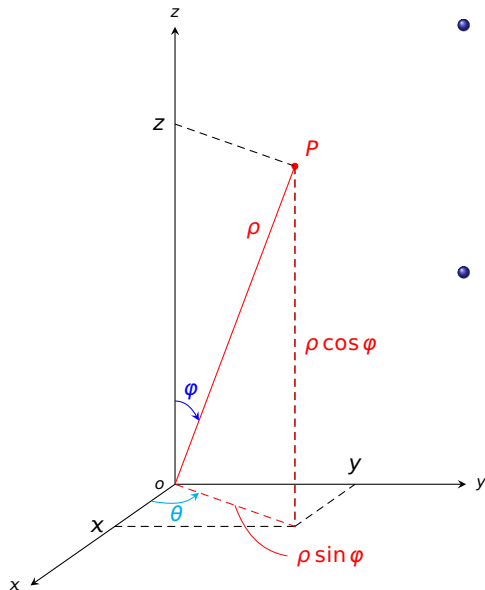


- 直角坐标  $(x, y, z)$ , 球面坐标  $(\rho, \varphi, \theta)$  的转换:

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

特别地,  $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$

# 球面坐标



- 直角坐标  $(x, y, z)$ , 球面坐标  $(\rho, \varphi, \theta)$  的转换:

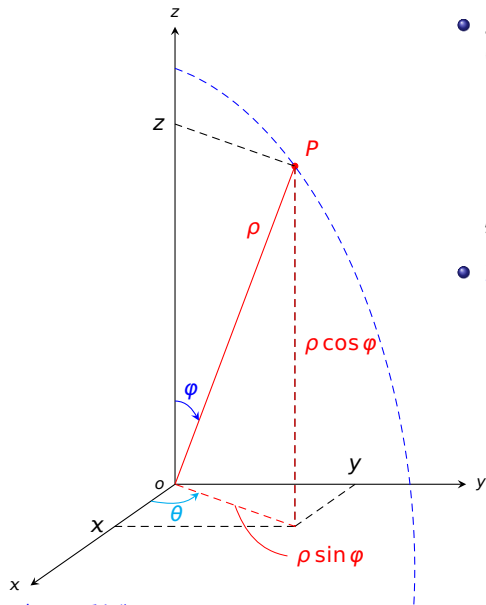
$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

特别地,  $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$

- 注

$$0 \leq \rho < \infty,$$

# 球面坐标



- 直角坐标  $(x, y, z)$ , 球面坐标  $(\rho, \varphi, \theta)$  的转换:

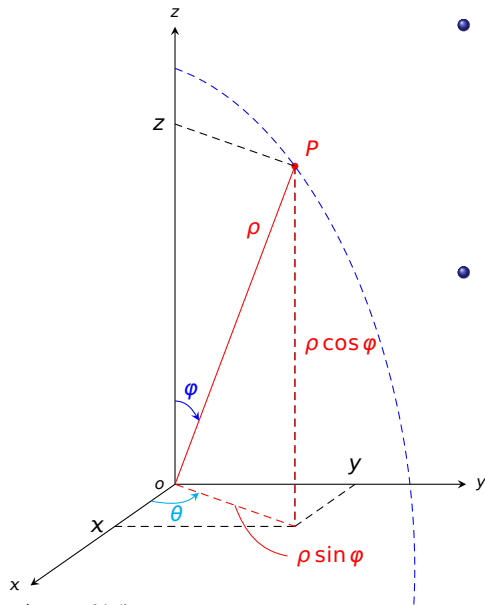
$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

特别地,  $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$

- 注

$$0 \leq \rho < \infty,$$

# 球面坐标



- 直角坐标  $(x, y, z)$ , 球面坐标  $(\rho, \varphi, \theta)$  的转换:

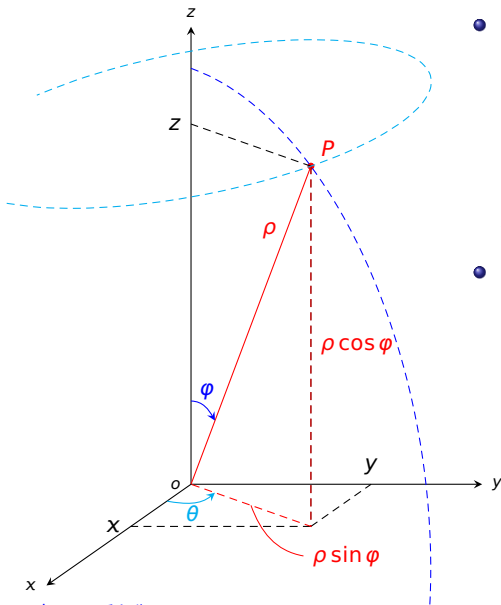
$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

特别地,  $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$

- 注

$$0 \leq \rho < \infty, 0 \leq \varphi \leq \pi,$$

# 球面坐标



- 直角坐标  $(x, y, z)$ , 球面坐标  $(\rho, \varphi, \theta)$  的转换:

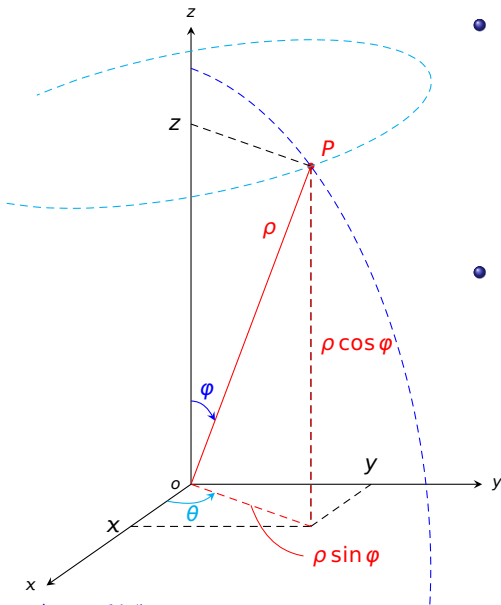
$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

特别地,  $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$

- 注

$$0 \leq \rho < \infty, 0 \leq \varphi \leq \pi,$$

# 球面坐标



- 直角坐标  $(x, y, z)$ , 球面坐标  $(\rho, \varphi, \theta)$  的转换:

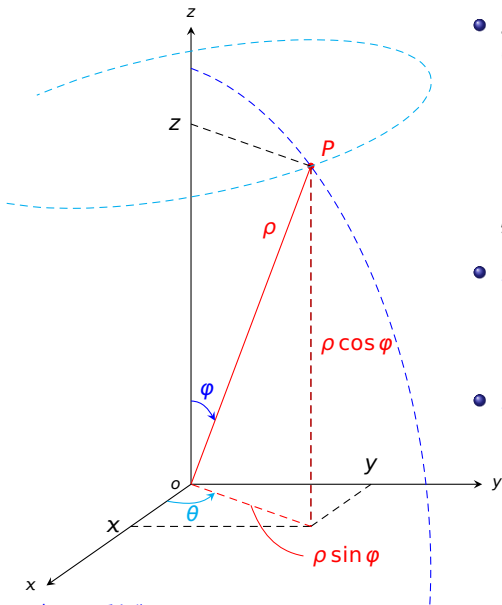
$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

特别地,  $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$

- 注

$$0 \leq \rho < \infty, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

# 球面坐标



- 直角坐标  $(x, y, z)$ , 球面坐标  $(\rho, \varphi, \theta)$  的转换:

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

特别地,  $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$

- 注

$$0 \leq \rho < \infty, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

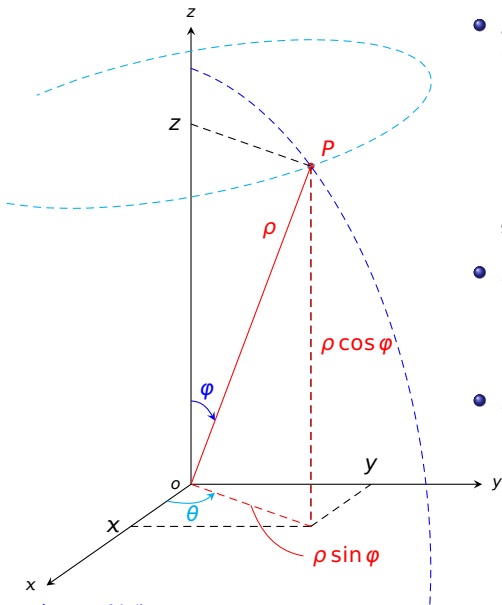
- 注 三组坐标面

- $\rho = \rho_0$ :

- $\varphi = \varphi_0$ :

- $\theta = \theta_0$ :

# 球面坐标



- 直角坐标  $(x, y, z)$ , 球面坐标  $(\rho, \varphi, \theta)$  的转换:

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

特别地,  $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$

- 注

$$0 \leq \rho < \infty, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

- 注 三组坐标面

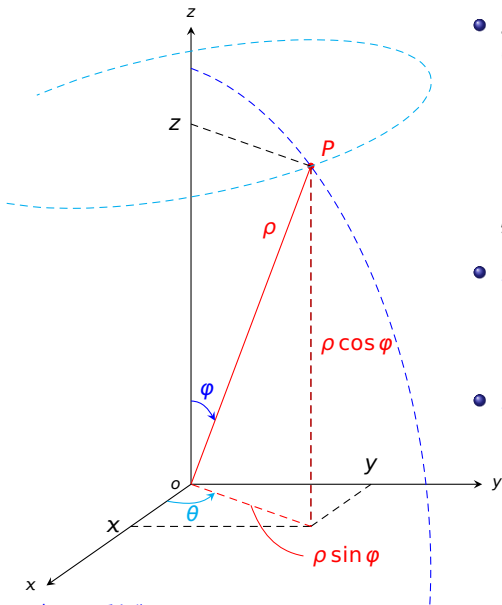
- $\rho = \rho_0$ : 球面

- $\varphi = \varphi_0$ :

- $\theta = \theta_0$ :



# 球面坐标



- 直角坐标  $(x, y, z)$ , 球面坐标  $(\rho, \varphi, \theta)$  的转换:

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

特别地,  $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$

- 注

$$0 \leq \rho < \infty, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

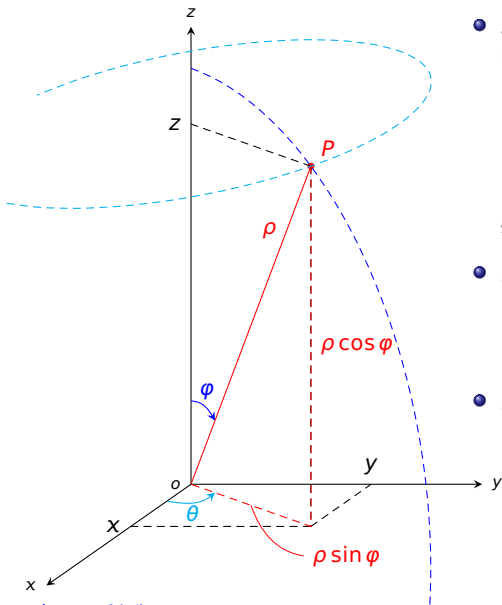
- 注 三组坐标面

- $\rho = \rho_0$ : 球面

- $\varphi = \varphi_0$ : 以原点为顶点、 $z$  轴为轴的圆锥面

- $\theta = \theta_0$ :

# 球面坐标



- 直角坐标  $(x, y, z)$ , 球面坐标  $(\rho, \varphi, \theta)$  的转换:

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

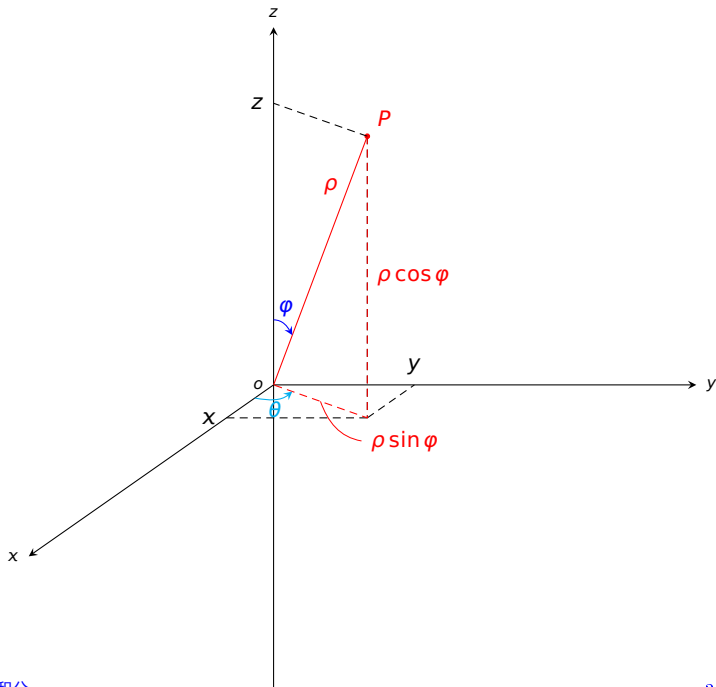
特别地,  $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$

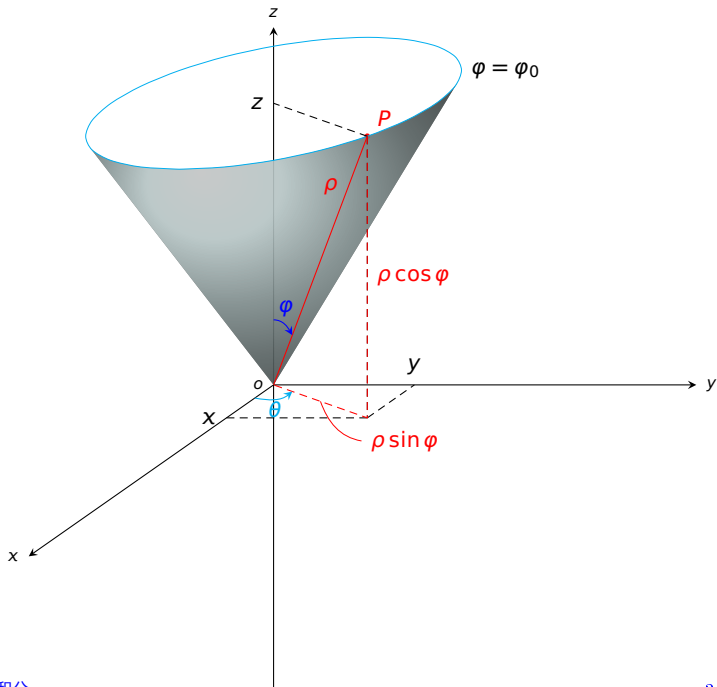
- 注

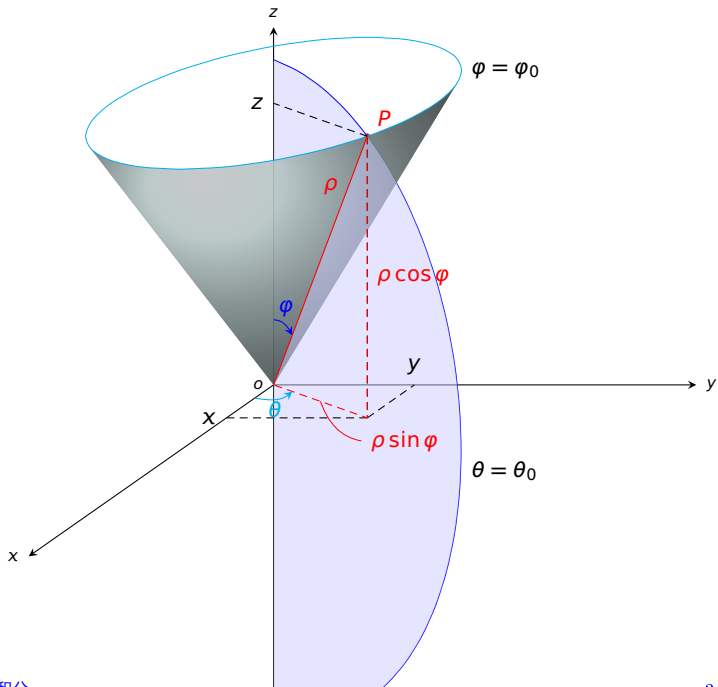
$$0 \leq \rho < \infty, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

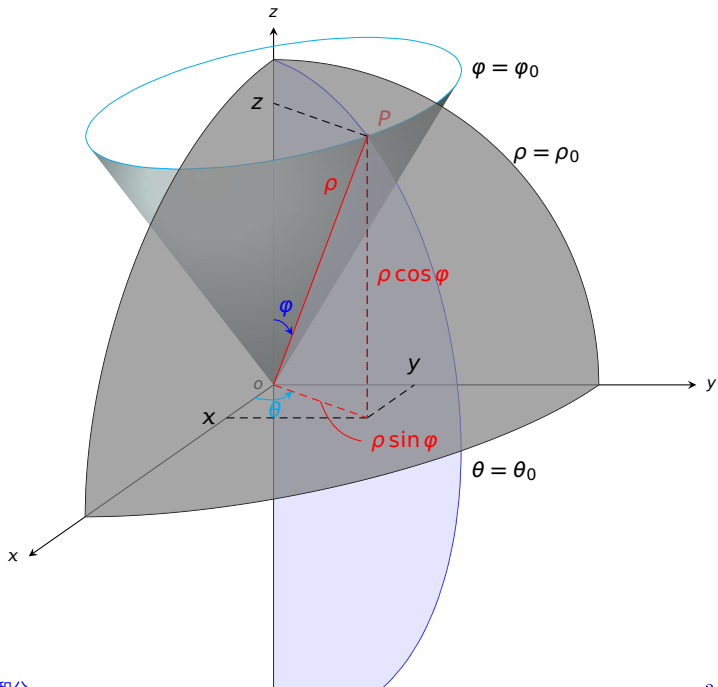
- 注 三组坐标面

- $\rho = \rho_0$ : 球面
- $\varphi = \varphi_0$ : 以原点为顶点、 $z$  轴为轴的圆锥面
- $\theta = \theta_0$ : 过  $z$  轴的半平面









例 函数  $f(x, y, z) = e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$  在球面坐标系下的表示是什么？

例 球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$  在球面坐标下的表示是什么？

例 函数  $f(x, y, z) = e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$  在球面坐标系下的表示是什么？

解 因为  $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$ ，所以  $f = e^{\rho^3}$

例 球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$  在球面坐标下的表示是什么？



例 函数  $f(x, y, z) = e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$  在球面坐标系下的表示是什么?

解 因为  $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$ , 所以  $f = e^{\rho^3}$

例 球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$  在球面坐标下的表示是什么?

解  $\{0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$

## 球面坐标下计算三重积分

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv \quad \begin{array}{l} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{array}$$

## 球面坐标下计算三重积分

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv \quad \begin{array}{l} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{array}$$

$$\iiint_{\Omega} f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi)$$

## 球面坐标下计算三重积分

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv \quad \begin{array}{l} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{array}$$

$$\iiint_{\Omega} f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta$$

## 球面坐标下计算三重积分

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv \quad \begin{array}{l} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{array}$$

$$\iiint_{\Omega} f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$F(\rho, \varphi, \theta)$$

## 球面坐标下计算三重积分

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv \quad \begin{array}{l} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{array}$$

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int \left\{ \int \left[ \int F(\rho, \varphi, \theta) \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta \end{aligned}$$

## 球面坐标下计算三重积分

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv \quad \begin{array}{l} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{array}$$

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int \left\{ \int \left[ \int F(\rho, \varphi, \theta) \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta \end{aligned}$$

- 当  $\Omega$  是球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$  时,

## 球面坐标下计算三重积分

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv \quad \begin{array}{l} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{array}$$

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int \left\{ \int \left[ \int F(\rho, \varphi, \theta) \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta \end{aligned}$$

- 当  $\Omega$  是球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$  时,

$$\Omega = \{0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$



## 球面坐标下计算三重积分

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv \quad \begin{array}{l} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{array}$$

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int \left\{ \int \left[ \int F(\rho, \varphi, \theta) \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta \end{aligned}$$

- 当  $\Omega$  是球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$  时,

$$\Omega = \{0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

并且

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \int \left\{ \int \left[ \int F(\rho, \varphi, \theta) \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta$$

## 球面坐标下计算三重积分

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv \quad \begin{array}{l} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{array}$$

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int \left\{ \int \left[ \int F(\rho, \varphi, \theta) \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta \end{aligned}$$

- 当  $\Omega$  是球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$  时,

$$\Omega = \{0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

并且

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \int_0^{2\pi} \left\{ \int \left[ \int F(\rho, \varphi, \theta) \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta$$

## 球面坐标下计算三重积分

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv \quad \begin{array}{l} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{array}$$

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int \left\{ \int \left[ \int F(\rho, \varphi, \theta) \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta \end{aligned}$$

- 当  $\Omega$  是球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$  时,

$$\Omega = \{0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

并且

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \left[ \int F(\rho, \varphi, \theta) \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta$$

## 球面坐标下计算三重积分

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv \quad \begin{array}{l} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{array}$$

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int \left\{ \int \left[ \int F(\rho, \varphi, \theta) \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta \end{aligned}$$

- 当  $\Omega$  是球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$  时,

$$\Omega = \{0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

并且

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \left[ \int_0^a F(\rho, \varphi, \theta) \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta$$

例 求  $\iiint_{\Omega} e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ 。

例 求  $\iiint_{\Omega} e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ 。

解 引入球面坐标

$$\text{原式} = \iiint_{\Omega} e^{\rho^3}$$

例 求  $\iiint_{\Omega} e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ 。

解 引入球面坐标

$$\text{原式} = \iiint_{\Omega} e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta$$

例 求  $\iiint_{\Omega} e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ 。

解 引入球面坐标

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint_{\Omega} e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int \left\{ \int \left[ \int e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta \end{aligned}$$



例 求  $\iiint_{\Omega} e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ 。

解 引入球面坐标

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint_{\Omega} e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{ \int \left[ \int e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta \end{aligned}$$

例 求  $\iiint_{\Omega} e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ 。

解 引入球面坐标

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint_{\Omega} e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \left[ \int e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta \end{aligned}$$

例 求  $\iiint_{\Omega} e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ 。

解 引入球面坐标

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint_{\Omega} e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \left[ \int_0^a e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta \end{aligned}$$

例 求  $\iiint_{\Omega} e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ 。

解 引入球面坐标

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint_{\Omega} e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \left[ \int_0^a e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta \\ &= 2\pi \cdot \end{aligned}$$

例 求  $\iiint_{\Omega} e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ 。

解 引入球面坐标

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint_{\Omega} e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \left[ \int_0^a e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta \\ &= 2\pi \cdot \left\{ \int_0^{\pi} \left[ \int_0^a e^{\rho^3} \cdot \rho^2 d\rho \right] \sin \varphi d\varphi \right\} \end{aligned}$$



例 求  $\iiint_{\Omega} e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ 。

解 引入球面坐标

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint_{\Omega} e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \left[ \int_0^a e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta \\ &= 2\pi \cdot \left\{ \int_0^{\pi} \left[ \int_0^a e^{\rho^3} \cdot \rho^2 d\rho \right] \sin \varphi d\varphi \right\} \\ &= 2\pi \cdot \left[ \int_0^a e^{\rho^3} \cdot \rho^2 d\rho \right] \cdot \left[ \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \right] \\ &\quad \left( \frac{1}{3} e^{\rho^3} \right) \end{aligned}$$

例 求  $\iiint_{\Omega} e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ 。

解 引入球面坐标

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint_{\Omega} e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \left[ \int_0^a e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta \\ &= 2\pi \cdot \left\{ \int_0^{\pi} \left[ \int_0^a e^{\rho^3} \cdot \rho^2 d\rho \right] \sin \varphi d\varphi \right\} \\ &= 2\pi \cdot \left[ \int_0^a e^{\rho^3} \cdot \rho^2 d\rho \right] \cdot \left[ \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \right] \\ &\quad \left( \frac{1}{3} e^{\rho^3} \right) \Big|_0^a \end{aligned}$$



例 求  $\iiint_{\Omega} e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ 。

解 引入球面坐标

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint_{\Omega} e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \left[ \int_0^a e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta \\ &= 2\pi \cdot \left\{ \int_0^{\pi} \left[ \int_0^a e^{\rho^3} \cdot \rho^2 d\rho \right] \sin \varphi d\varphi \right\} \\ &= 2\pi \cdot \left[ \int_0^a e^{\rho^3} \cdot \rho^2 d\rho \right] \cdot \left[ \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \right] \\ &= 2\pi \cdot \left( \frac{1}{3} e^{\rho^3} \right) \Big|_0^a \cdot 2 \end{aligned}$$

例 求  $\iiint_{\Omega} e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ 。

解 引入球面坐标

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint_{\Omega} e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \left[ \int_0^a e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta \\ &= 2\pi \cdot \left\{ \int_0^{\pi} \left[ \int_0^a e^{\rho^3} \cdot \rho^2 d\rho \right] \sin \varphi d\varphi \right\} \\ &= 2\pi \cdot \left[ \int_0^a e^{\rho^3} \cdot \rho^2 d\rho \right] \cdot \left[ \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \right] \\ &= 2\pi \cdot \left( \frac{1}{3} e^{\rho^3} \right) \Big|_0^a \cdot 2 = \frac{4}{3} \pi (e^{a^3} - 1) \end{aligned}$$

例 计算球体  $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$  的体积（利用球面坐标）。

例 计算球体  $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$  的体积（利用球面坐标）。

解

$$\text{球体体积} = \iiint_{\Omega} 1 dx dy dz$$

例 计算球体  $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$  的体积 (利用球面坐标)。

解

$$\text{球体体积} = \iiint_{\Omega} 1 dx dy dz = \iiint_{\Omega} 1 \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta$$

例 计算球体  $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$  的体积 (利用球面坐标)。

解

$$\begin{aligned}\text{球体体积} &= \iiint_{\Omega} 1 dx dy dz = \iiint_{\Omega} 1 \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int \left\{ \int \left[ \int \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta\end{aligned}$$

例 计算球体  $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$  的体积 (利用球面坐标)。

解

$$\begin{aligned}\text{球体体积} &= \iiint_{\Omega} 1 dx dy dz = \iiint_{\Omega} 1 \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{ \int \left[ \int \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta\end{aligned}$$

例 计算球体  $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$  的体积 (利用球面坐标)。

解

$$\begin{aligned}\text{球体体积} &= \iiint_{\Omega} 1 dx dy dz = \iiint_{\Omega} 1 \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \left[ \int \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta\end{aligned}$$



例 计算球体  $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$  的体积 (利用球面坐标)。

解

$$\begin{aligned}\text{球体体积} &= \iiint_{\Omega} 1 dx dy dz = \iiint_{\Omega} 1 \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \left[ \int_0^a \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta\end{aligned}$$

例 计算球体  $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$  的体积 (利用球面坐标)。

解

$$\begin{aligned}\text{球体体积} &= \iiint_{\Omega} 1 dx dy dz = \iiint_{\Omega} 1 \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \left[ \int_0^a \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta \\ &= 2\pi \cdot\end{aligned}$$

例 计算球体  $\Omega$ :  $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$  的体积 (利用球面坐标)。

解

$$\begin{aligned}\text{球体体积} &= \iiint_{\Omega} 1 dx dy dz = \iiint_{\Omega} 1 \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \left[ \int_0^a \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta \\ &= 2\pi \cdot \left\{ \int_0^{\pi} \left[ \int_0^a \rho^2 d\rho \right] \sin \varphi d\varphi \right\}\end{aligned}$$

例 计算球体  $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$  的体积 (利用球面坐标)。

解

$$\begin{aligned}\text{球体体积} &= \iiint_{\Omega} 1 dx dy dz = \iiint_{\Omega} 1 \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\&= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \left[ \int_0^a \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta \\&= 2\pi \cdot \left\{ \int_0^{\pi} \left[ \int_0^a \rho^2 d\rho \right] \sin \varphi d\varphi \right\} \\&= 2\pi \cdot \left[ \int_0^a \rho^2 d\rho \right] \cdot \left[ \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \right]\end{aligned}$$

例 计算球体  $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$  的体积 (利用球面坐标)。

解

$$\begin{aligned}\text{球体体积} &= \iiint_{\Omega} 1 dx dy dz = \iiint_{\Omega} 1 \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\&= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \left[ \int_0^a \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta \\&= 2\pi \cdot \left\{ \int_0^{\pi} \left[ \int_0^a \rho^2 d\rho \right] \sin \varphi d\varphi \right\} \\&= 2\pi \cdot \left[ \int_0^a \rho^2 d\rho \right] \cdot \left[ \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \right] \\&\quad \left( \frac{1}{3} \rho^3 \right)\end{aligned}$$

例 计算球体  $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$  的体积 (利用球面坐标)。

解

$$\begin{aligned}\text{球体体积} &= \iiint_{\Omega} 1 dx dy dz = \iiint_{\Omega} 1 \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\&= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \left[ \int_0^a \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta \\&= 2\pi \cdot \left\{ \int_0^{\pi} \left[ \int_0^a \rho^2 d\rho \right] \sin \varphi d\varphi \right\} \\&= 2\pi \cdot \left[ \int_0^a \rho^2 d\rho \right] \cdot \left[ \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \right] \\&\quad \left( \frac{1}{3} \rho^3 \right) \Big|_0^a\end{aligned}$$

例 计算球体  $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$  的体积 (利用球面坐标)。

解

$$\begin{aligned}\text{球体体积} &= \iiint_{\Omega} 1 dx dy dz = \iiint_{\Omega} 1 \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\&= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \left[ \int_0^a \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta \\&= 2\pi \cdot \left\{ \int_0^{\pi} \left[ \int_0^a \rho^2 d\rho \right] \sin \varphi d\varphi \right\} \\&= 2\pi \cdot \left[ \int_0^a \rho^2 d\rho \right] \cdot \left[ \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \right] \\&= 2\pi \cdot \left( \frac{1}{3} \rho^3 \right) \Big|_0^a \cdot 2\end{aligned}$$

例 计算球体  $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$  的体积 (利用球面坐标)。

解

$$\begin{aligned}\text{球体体积} &= \iiint_{\Omega} 1 dx dy dz = \iiint_{\Omega} 1 \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\&= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \left[ \int_0^a \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta \\&= 2\pi \cdot \left\{ \int_0^{\pi} \left[ \int_0^a \rho^2 d\rho \right] \sin \varphi d\varphi \right\} \\&= 2\pi \cdot \left[ \int_0^a \rho^2 d\rho \right] \cdot \left[ \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \right] \\&= 2\pi \cdot \left( \frac{1}{3} \rho^3 \right) \Big|_0^a \cdot 2 = \frac{4}{3} \pi a^3\end{aligned}$$