

第 8 章 d : 空间曲面及曲线

数学系 梁卓滨

2016-2017 学年 II

曲面、曲线的一般方程

旋转面；柱面

二次曲面

空间曲线的一般方程

空间曲线的参数方程

空间曲线的投影

We are here now...

曲面、曲线的一般方程

旋转面；柱面

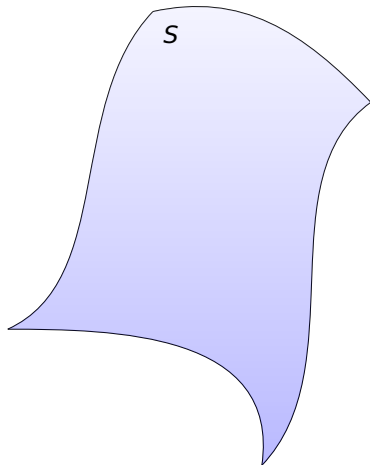
二次曲面

空间曲线的一般方程

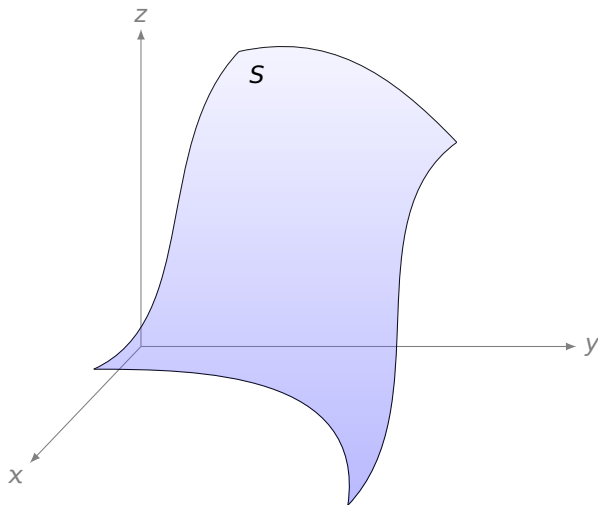
空间曲线的参数方程

空间曲线的投影

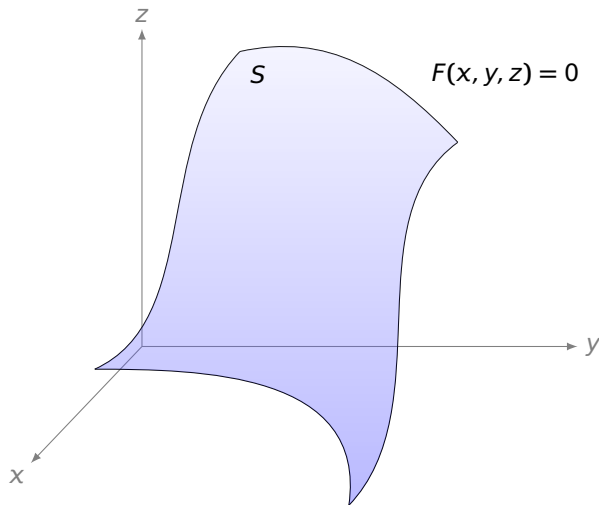
曲面及其方程



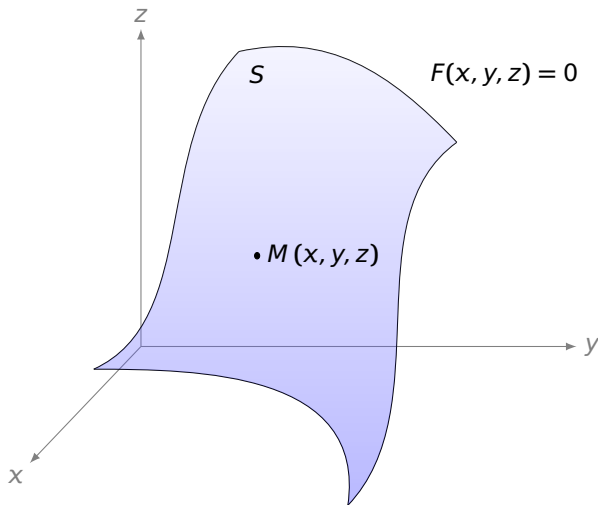
曲面及其方程



曲面及其方程



曲面及其方程



例 建立球心在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 半径为 R 的球面的方程。

例 建立球心在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 半径为 R 的球面的方程。

解 设 $M(x, y, z)$ 是球面上任意一点, 则

例 建立球心在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 半径为 R 的球面的方程。

解 设 $M(x, y, z)$ 是球面上任意一点, 则

$$R = |M_0M|$$

例 建立球心在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 半径为 R 的球面的方程。

解 设 $M(x, y, z)$ 是球面上任意一点, 则

$$R = |M_0M| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$$

例 建立球心在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 半径为 R 的球面的方程。

解 设 $M(x, y, z)$ 是球面上任意一点, 则

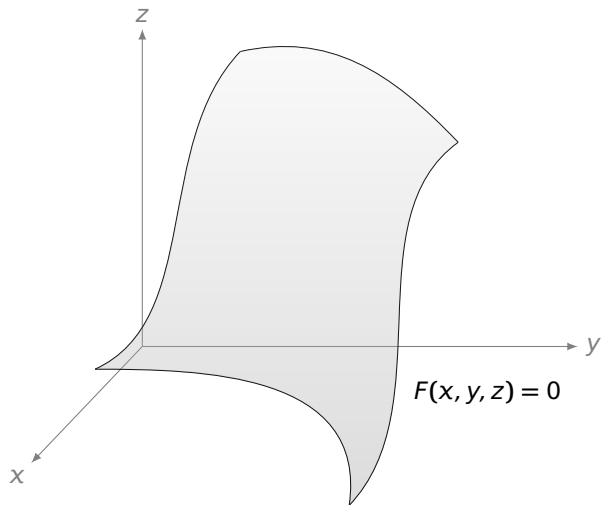
$$\begin{aligned} R &= |M_0M| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} \\ \Rightarrow (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 &= R^2 \end{aligned}$$

例 建立球心在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 半径为 R 的球面的方程。

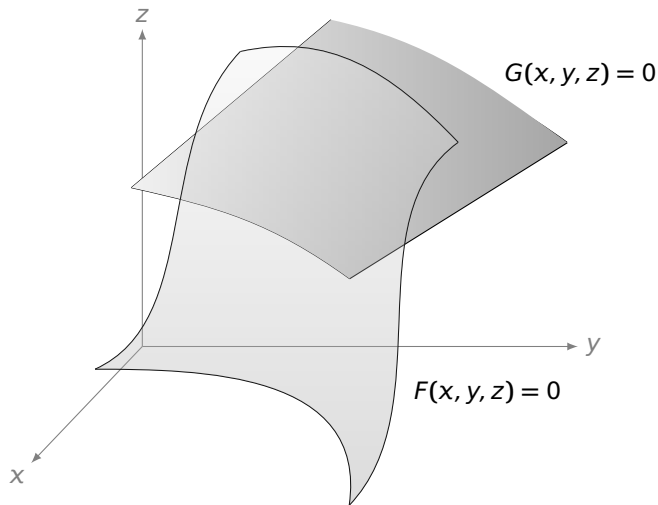
解 设 $M(x, y, z)$ 是球面上任意一点, 则

$$\begin{aligned} R &= |M_0M| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} \\ \Rightarrow (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 &= R^2 (\text{球面方程}) \end{aligned}$$

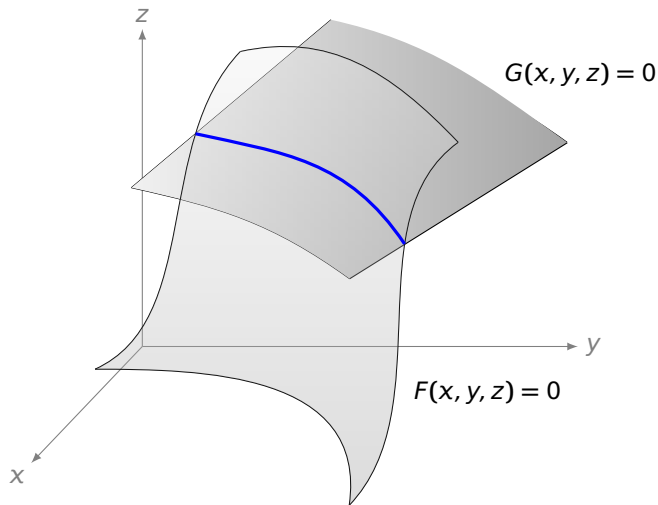
空间曲线的一般方程



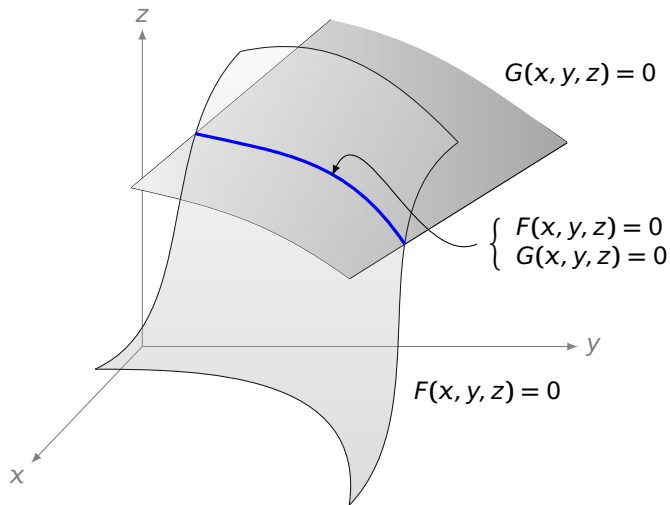
空间曲线的一般方程



空间曲线的一般方程



空间曲线的一般方程



We are here now...

曲面、曲线的一般方程

旋转面；柱面

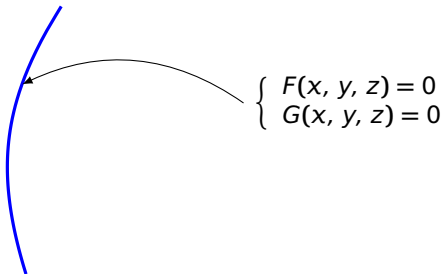
二次曲面

空间曲线的一般方程

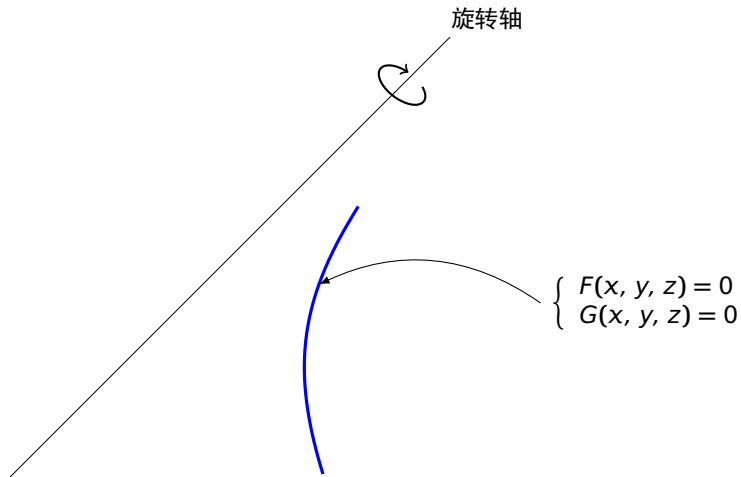
空间曲线的参数方程

空间曲线的投影

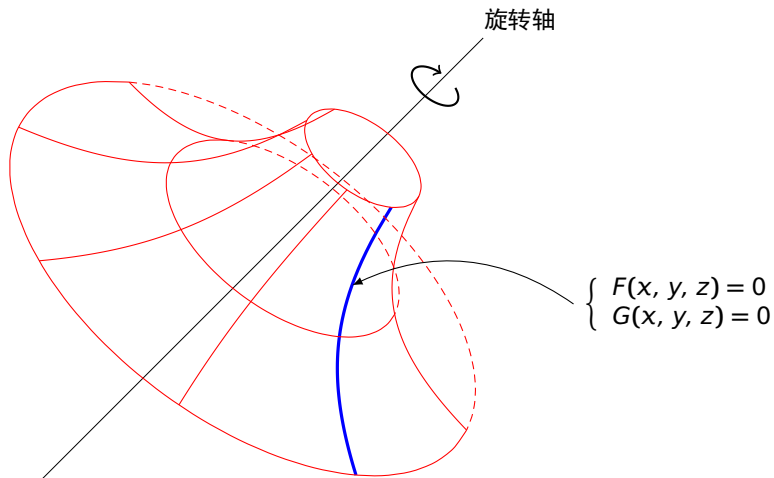
旋转曲面



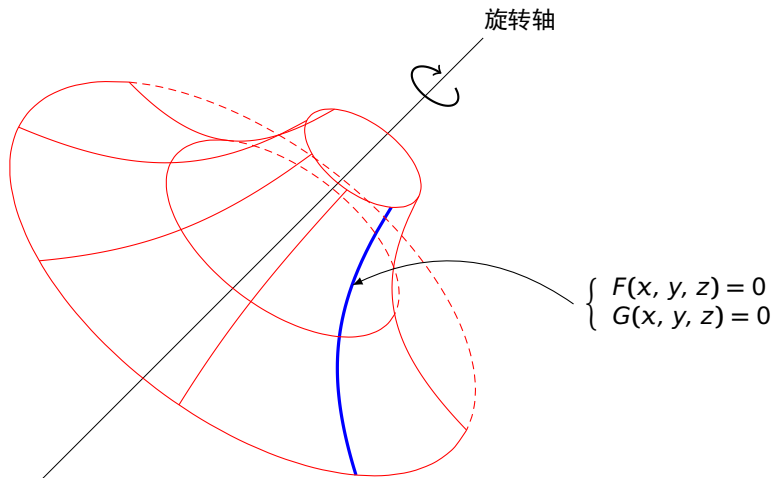
旋转曲面



旋转曲面

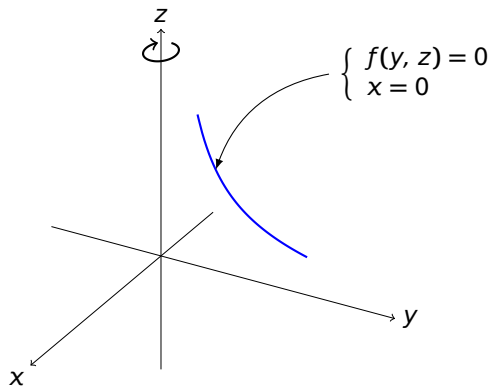


旋转曲面

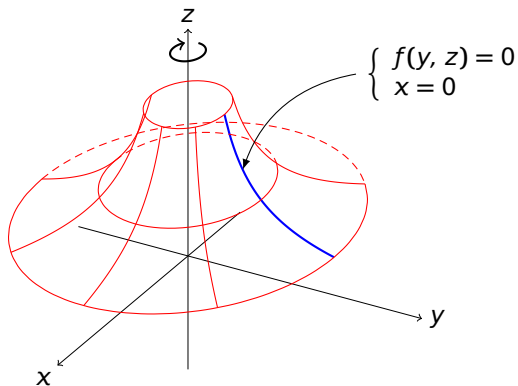


问题 如何计算旋转面的方程?

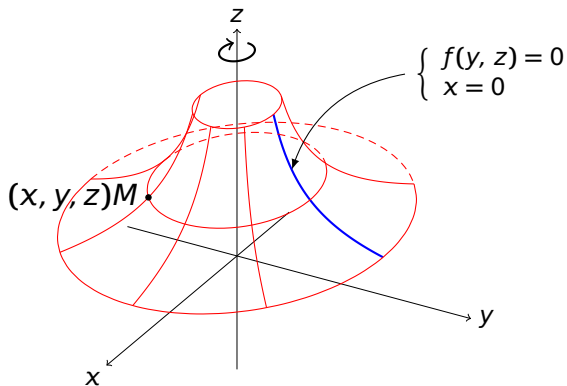
旋转曲面：特殊情况



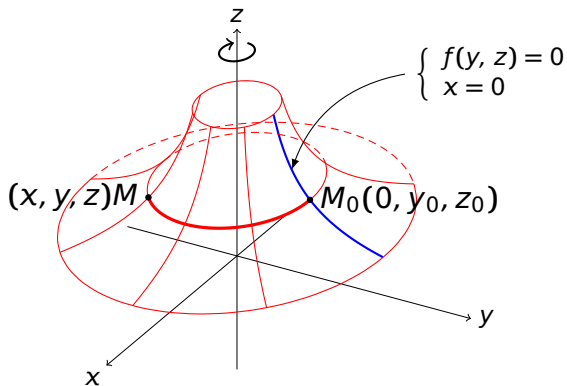
旋转曲面：特殊情况



旋转曲面：特殊情况

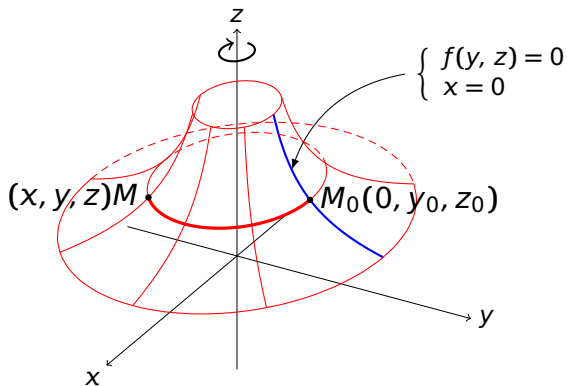


旋转曲面：特殊情况



旋转曲面：特殊情况

- $z = z_0$

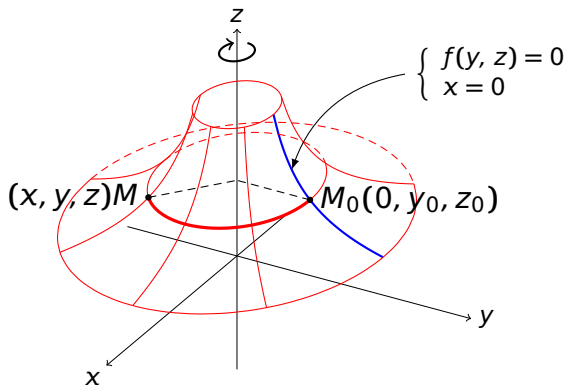


旋转曲面：特殊情况

- $z = z_0$



(M 到 z 轴距离 =
 M_0 到 z 轴距离)

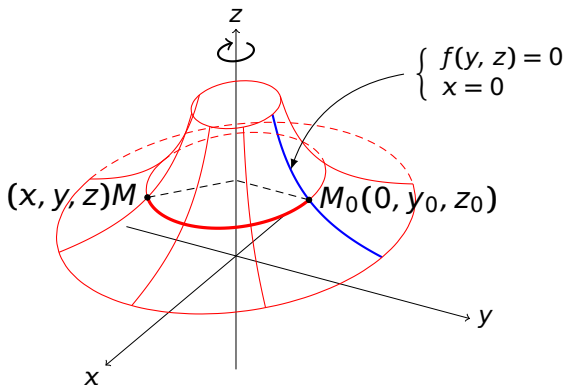


旋转曲面：特殊情况

- $z = z_0$

- $\sqrt{x^2 + y^2} = |y_0|$

(M 到 z 轴距离 =
 M_0 到 z 轴距离)



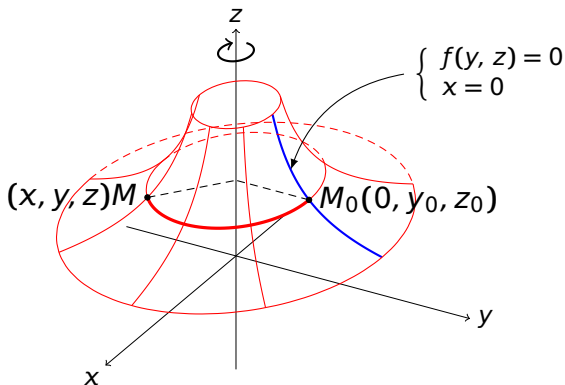
旋转曲面：特殊情况

- $z = z_0$

- $\sqrt{x^2 + y^2} = |y_0|$

(M 到 z 轴距离 =
 M_0 到 z 轴距离)

- $f(y_0, z_0) = 0$



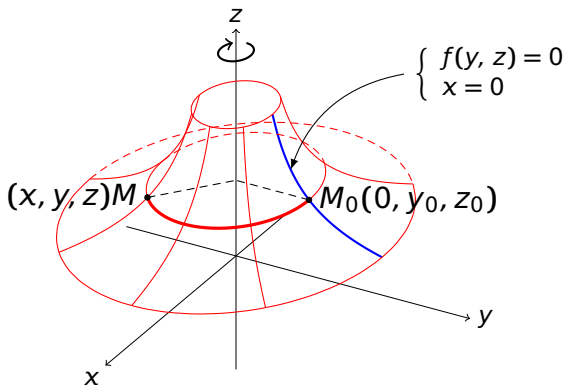
旋转曲面：特殊情况

- $z = z_0$

- $\sqrt{x^2 + y^2} = |y_0|$

(M 到 z 轴距离 =
 M_0 到 z 轴距离)

- $f(y_0, z_0) = 0$



所以旋转面方程是

$$f\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0$$

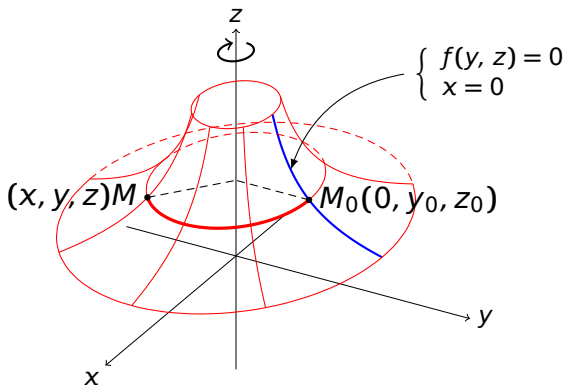
旋转曲面：特殊情况

- $z = z_0$

- $\sqrt{x^2 + y^2} = |y_0|$

(M 到 z 轴距离 =
 M_0 到 z 轴距离)

- $f(y_0, z_0) = 0$



所以旋转面方程是

$$f\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0$$

(yoz 上的平面曲线绕 z 轴旋转所得的旋转面方程)

- yoz 上的平面曲线 $\begin{cases} f(y, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

- 绕 z 轴旋转所得的旋转面方程:

$$f\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z\right)=0$$

- yoz 上的平面曲线 $\begin{cases} f(y, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

- 绕 z 轴旋转所得的旋转面方程:

$$f\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0$$

- 绕 y 轴旋转所得的旋转面方程:

- yoz 上的平面曲线 $\begin{cases} f(y, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

- 绕 z 轴旋转所得的旋转面方程:

$$f\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0$$

- 绕 y 轴旋转所得的旋转面方程:

$$f\left(\quad\quad\quad\right) = 0$$

- yoz 上的平面曲线 $\begin{cases} f(y, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

- 绕 z 轴旋转所得的旋转面方程:

$$f\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0$$

- 绕 y 轴旋转所得的旋转面方程:

$$f\left(y, \quad \quad \quad \right) = 0$$

- yoz 上的平面曲线 $\begin{cases} f(y, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

- 绕 z 轴旋转所得的旋转面方程:

$$f\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0$$

- 绕 y 轴旋转所得的旋转面方程:

$$f\left(y, \pm\sqrt{x^2 + z^2}\right) = 0$$

- xOz 上的平面曲线 $\begin{cases} g(x, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

- 绕 x 轴旋转所得的旋转面方程:

- 绕 z 轴旋转所得的旋转面方程:

- xOz 上的平面曲线 $\begin{cases} g(x, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

- 绕 x 轴旋转所得的旋转面方程:

$$g\left(\quad\right) = 0$$

- 绕 z 轴旋转所得的旋转面方程:

- xOz 上的平面曲线 $\begin{cases} g(x, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

- 绕 x 轴旋转所得的旋转面方程:

$$g\left(x, \quad \right) = 0$$

- 绕 z 轴旋转所得的旋转面方程:

- xOz 上的平面曲线 $\begin{cases} g(x, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

- 绕 x 轴旋转所得的旋转面方程:

$$g\left(x, \pm \sqrt{y^2 + z^2}\right) = 0$$

- 绕 z 轴旋转所得的旋转面方程:

- xOz 上的平面曲线 $\begin{cases} g(x, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

- 绕 x 轴旋转所得的旋转面方程:

$$g\left(x, \pm \sqrt{y^2 + z^2}\right) = 0$$

- 绕 z 轴旋转所得的旋转面方程:

$$g\left(\right) = 0$$

- xOz 上的平面曲线 $\begin{cases} g(x, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

- 绕 x 轴旋转所得的旋转面方程:

$$g\left(x, \pm \sqrt{y^2 + z^2}\right) = 0$$

- 绕 z 轴旋转所得的旋转面方程:

$$g\left(\quad, z\right) = 0$$

- xOz 上的平面曲线 $\begin{cases} g(x, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

- 绕 x 轴旋转所得的旋转面方程:

$$g\left(x, \pm \sqrt{y^2 + z^2}\right) = 0$$

- 绕 z 轴旋转所得的旋转面方程:

$$g\left(\pm \sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0$$

- xOz 上的平面曲线 $\begin{cases} g(x, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

- 绕 x 轴旋转所得的旋转面方程:

$$g\left(x, \pm \sqrt{y^2 + z^2}\right) = 0$$

- 绕 z 轴旋转所得的旋转面方程:

$$g\left(\pm \sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0$$

- xOy 上的平面曲线 $\begin{cases} h(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

- 绕 x 轴旋转所得的旋转面方程:

- 绕 y 轴旋转所得的旋转面方程:

- xOz 上的平面曲线 $\begin{cases} g(x, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

- 绕 x 轴旋转所得的旋转面方程:

$$g\left(x, \pm \sqrt{y^2 + z^2}\right) = 0$$

- 绕 z 轴旋转所得的旋转面方程:

$$g\left(\pm \sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0$$

- xOy 上的平面曲线 $\begin{cases} h(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

- 绕 x 轴旋转所得的旋转面方程:

$$h\left(\begin{array}{c} \\ \end{array}\right) = 0$$

- 绕 y 轴旋转所得的旋转面方程:

- xOz 上的平面曲线 $\begin{cases} g(x, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

- 绕 x 轴旋转所得的旋转面方程:

$$g\left(x, \pm \sqrt{y^2 + z^2}\right) = 0$$

- 绕 z 轴旋转所得的旋转面方程:

$$g\left(\pm \sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0$$

- xOy 上的平面曲线 $\begin{cases} h(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

- 绕 x 轴旋转所得的旋转面方程:

$$h\left(x, \right) = 0$$

- 绕 y 轴旋转所得的旋转面方程:

- xOz 上的平面曲线 $\begin{cases} g(x, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

- 绕 x 轴旋转所得的旋转面方程:

$$g\left(x, \pm \sqrt{y^2 + z^2}\right) = 0$$

- 绕 z 轴旋转所得的旋转面方程:

$$g\left(\pm \sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0$$

- xOy 上的平面曲线 $\begin{cases} h(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

- 绕 x 轴旋转所得的旋转面方程:

$$h\left(x, \pm \sqrt{y^2 + z^2}\right) = 0$$

- 绕 y 轴旋转所得的旋转面方程:

- xOz 上的平面曲线 $\begin{cases} g(x, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

- 绕 x 轴旋转所得的旋转面方程:

$$g\left(x, \pm \sqrt{y^2 + z^2}\right) = 0$$

- 绕 z 轴旋转所得的旋转面方程:

$$g\left(\pm \sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0$$

- xOy 上的平面曲线 $\begin{cases} h(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

- 绕 x 轴旋转所得的旋转面方程:

$$h\left(x, \pm \sqrt{y^2 + z^2}\right) = 0$$

- 绕 y 轴旋转所得的旋转面方程:

$$h\left(\quad\quad\quad\right) = 0$$

- xOz 上的平面曲线 $\begin{cases} g(x, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

- 绕 x 轴旋转所得的旋转面方程:

$$g\left(x, \pm \sqrt{y^2 + z^2}\right) = 0$$

- 绕 z 轴旋转所得的旋转面方程:

$$g\left(\pm \sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0$$

- xOy 上的平面曲线 $\begin{cases} h(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

- 绕 x 轴旋转所得的旋转面方程:

$$h\left(x, \pm \sqrt{y^2 + z^2}\right) = 0$$

- 绕 y 轴旋转所得的旋转面方程:

$$h\left(\quad, y\right) = 0$$

- xOz 上的平面曲线 $\begin{cases} g(x, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

- 绕 x 轴旋转所得的旋转面方程:

$$g\left(x, \pm \sqrt{y^2 + z^2}\right) = 0$$

- 绕 z 轴旋转所得的旋转面方程:

$$g\left(\pm \sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0$$

- xOy 上的平面曲线 $\begin{cases} h(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

- 绕 x 轴旋转所得的旋转面方程:

$$h\left(x, \pm \sqrt{y^2 + z^2}\right) = 0$$

- 绕 y 轴旋转所得的旋转面方程:

$$h\left(\pm \sqrt{x^2 + z^2}, y\right) = 0$$

例 将 xOz 坐标面上的双曲线

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

分别绕 z 轴和 x 轴旋转一周, 求所生成的旋转面的方程。

例 将 xOz 坐标面上的双曲线

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

分别绕 z 轴和 x 轴旋转一周，求所生成的旋转面的方程。

解：

- 绕 z 轴：

- 绕 x 轴：

例 将 xOz 坐标面上的双曲线

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

分别绕 z 轴和 x 轴旋转一周, 求所生成的旋转面的方程。

解:

• 绕 z 轴:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

• 绕 x 轴:

例 将 xOz 坐标面上的双曲线

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

分别绕 z 轴和 x 轴旋转一周, 求所生成的旋转面的方程。

解:

• 绕 z 轴:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

• 绕 x 轴:

例 将 xOz 坐标面上的双曲线

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

分别绕 z 轴和 x 轴旋转一周, 求所生成的旋转面的方程。

解:

- 绕 z 轴:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

- 绕 x 轴:

例 将 xOz 坐标面上的双曲线

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

分别绕 z 轴和 x 轴旋转一周, 求所生成的旋转面的方程。

解:

• 绕 z 轴:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

• 绕 x 轴:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

例 将 xOz 坐标面上的双曲线

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

分别绕 z 轴和 x 轴旋转一周, 求所生成的旋转面的方程。

解:

• 绕 z 轴:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

• 绕 x 轴:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{c^2} = 1$$

例 将 xOz 坐标面上的双曲线

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

分别绕 z 轴和 x 轴旋转一周, 求所生成的旋转面的方程。

解:

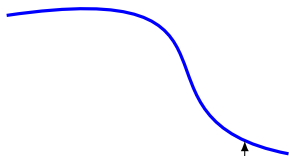
• 绕 z 轴:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

• 绕 x 轴:

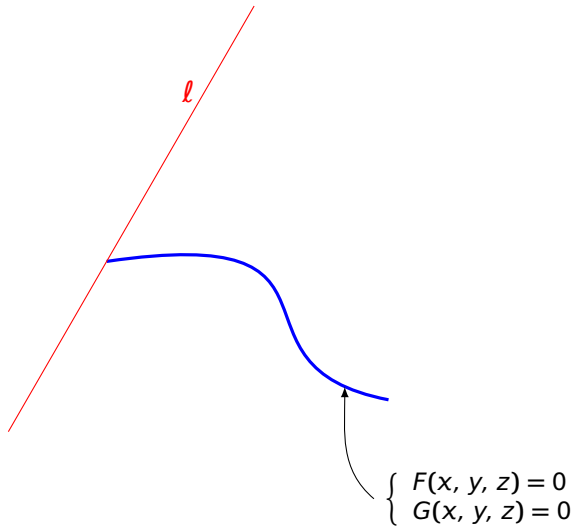
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{c^2} = 1$$

柱面

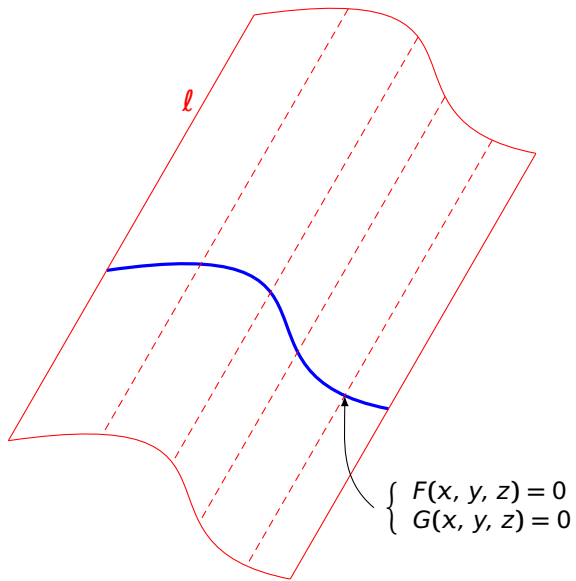


$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

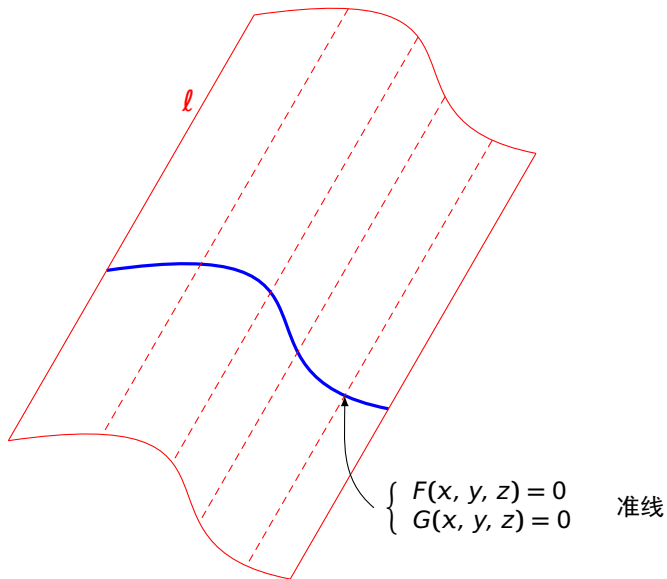
柱面



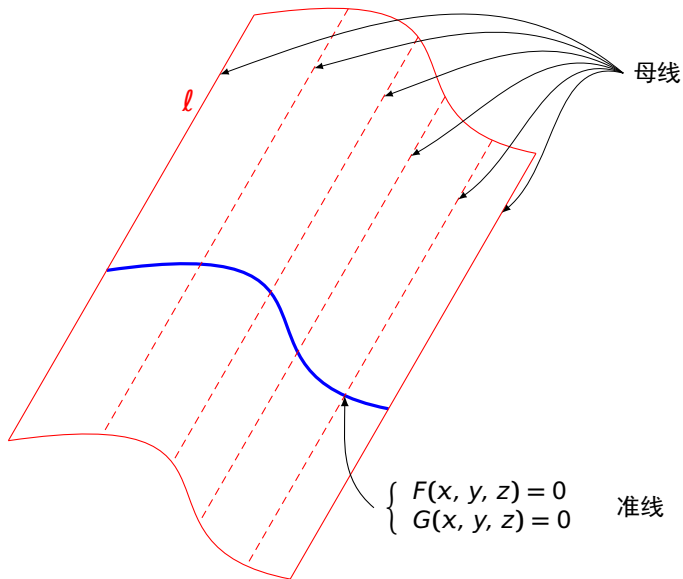
柱面



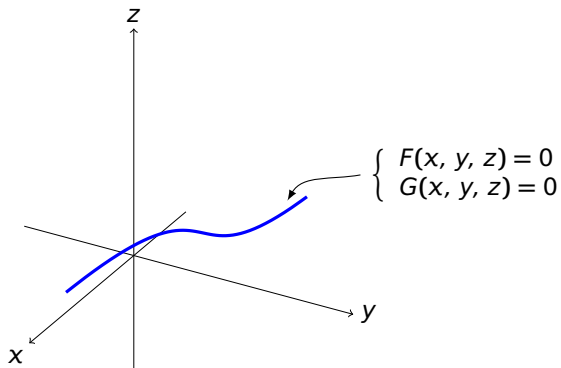
柱面



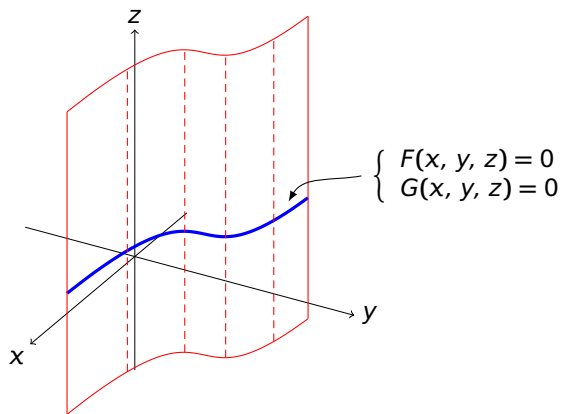
柱面



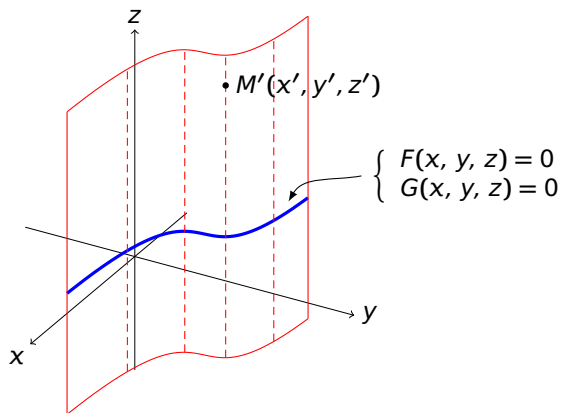
柱面：母线平行于坐标轴



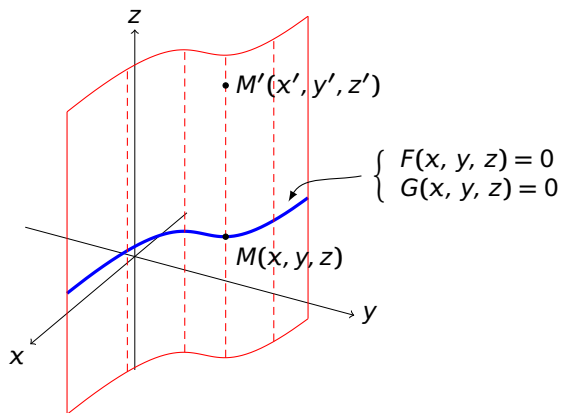
柱面：母线平行于坐标轴



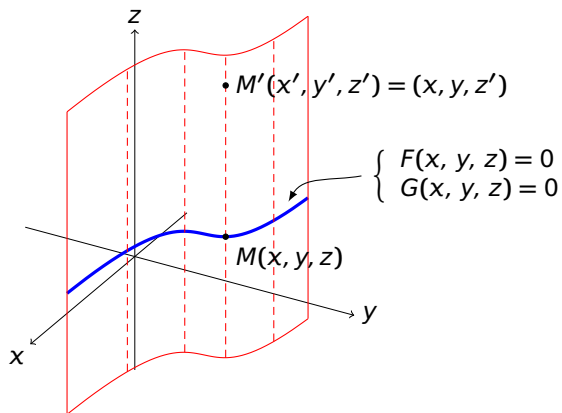
柱面：母线平行于坐标轴



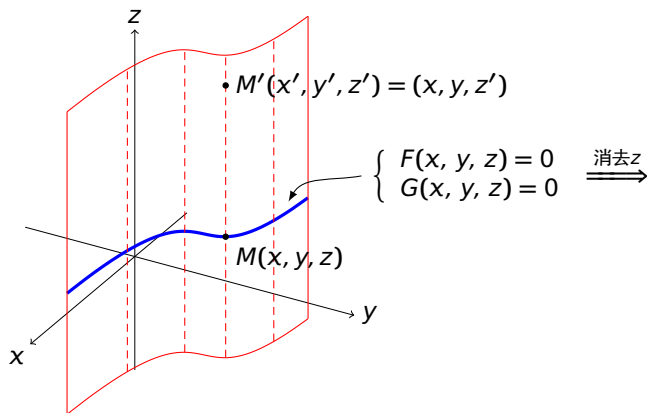
柱面：母线平行于坐标轴



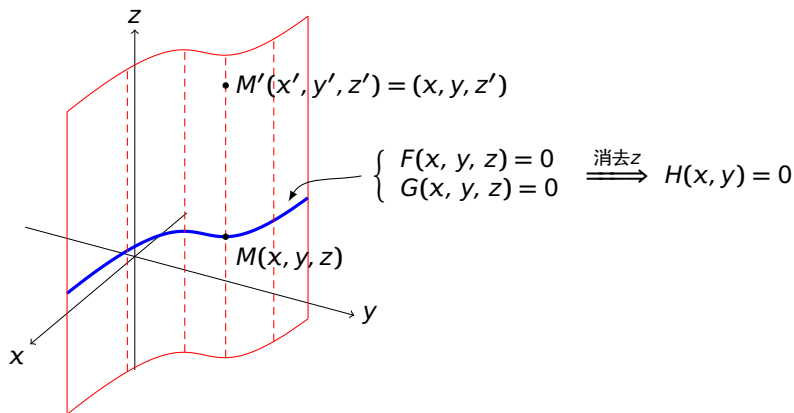
柱面：母线平行于坐标轴



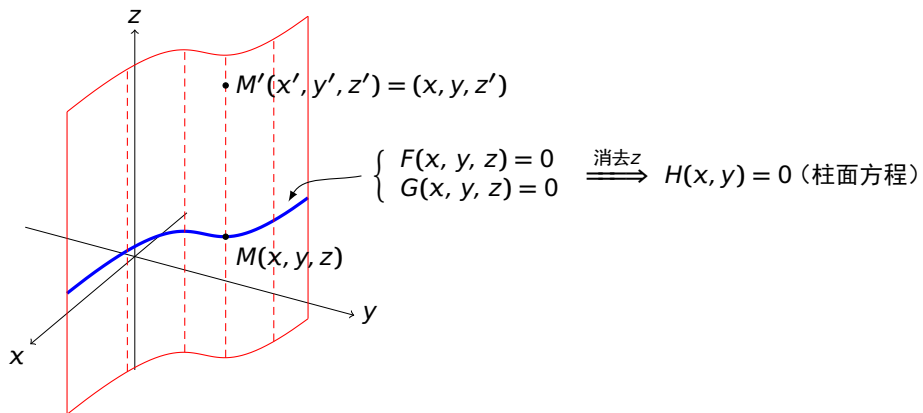
柱面：母线平行于坐标轴



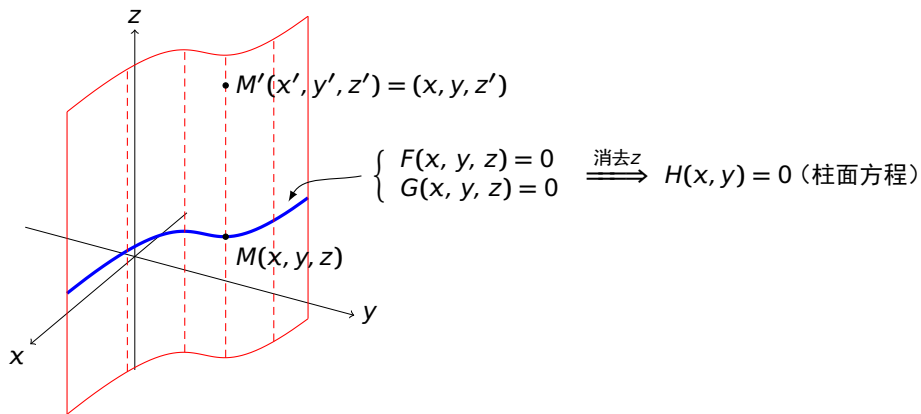
柱面：母线平行于坐标轴



柱面：母线平行于坐标轴

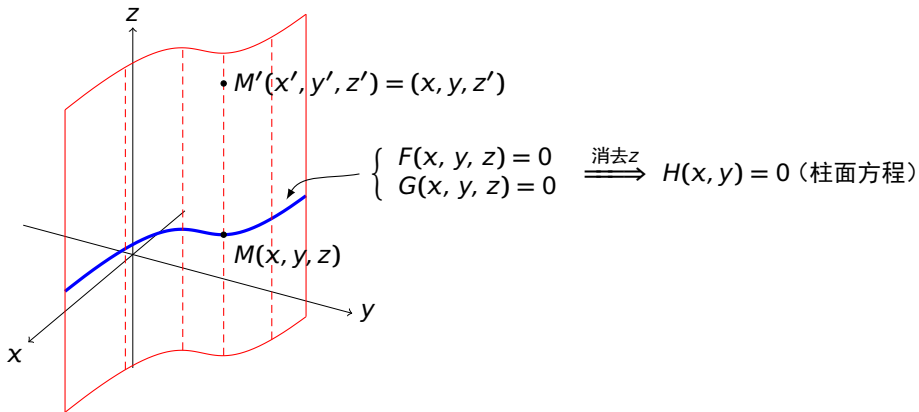


柱面：母线平行于坐标轴



例 求母线平行于 z 轴，且过曲线 $\begin{cases} 2x^2 + y^2 + z^2 = 16 \\ x^2 - y^2 + z^2 = 0 \end{cases}$ 的柱面方程。

柱面：母线平行于坐标轴



例 求母线平行于 z 轴，且过曲线 $\begin{cases} 2x^2 + y^2 + z^2 = 16 \\ x^2 - y^2 + z^2 = 0 \end{cases}$ 的柱面方程。

解 从方程组消去 z ，得 $x^2 + 2y^2 = 16$ ，这就是该柱面的方程。

柱面：母线平行于坐标轴

设空间曲线的一般方程为 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ ，则

- $\xrightarrow{\text{消去}z} H(x, y) = 0$ ，这是：过该曲线且母线平行于 z 轴的柱面方程

柱面：母线平行于坐标轴

设空间曲线的一般方程为 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ ，则

- $\xrightarrow{\text{消去}z} H(x, y) = 0$ ，这是：过该曲线且母线平行于 z 轴的柱面方程
- $\xrightarrow{\text{消去}y} K(x, z) = 0$ ，这是：
- $\xrightarrow{\text{消去}x} H(y, z) = 0$ ，这是：

柱面：母线平行于坐标轴

设空间曲线的一般方程为 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ ，则

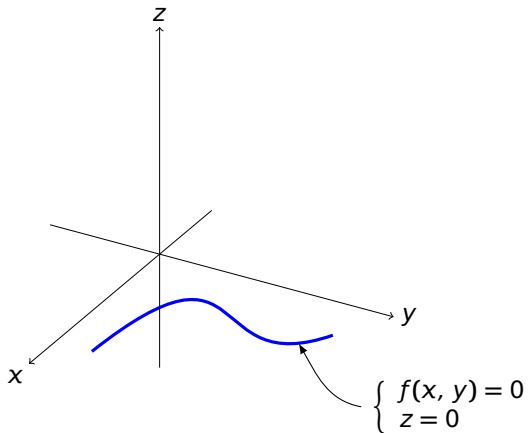
- $\xrightarrow{\text{消去}z} H(x, y) = 0$ ，这是：过该曲线且母线平行于 z 轴的柱面方程
- $\xrightarrow{\text{消去}y} K(x, z) = 0$ ，这是：过该曲线且母线平行于 y 轴的柱面方程
- $\xrightarrow{\text{消去}x} L(y, z) = 0$ ，这是：

柱面：母线平行于坐标轴

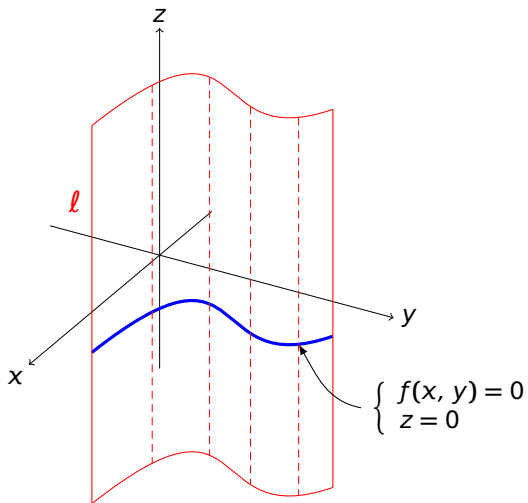
设空间曲线的一般方程为 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ ，则

- $\xrightarrow{\text{消去}z} H(x, y) = 0$ ，这是：过该曲线且母线平行于 z 轴的柱面方程
- $\xrightarrow{\text{消去}y} K(x, z) = 0$ ，这是：过该曲线且母线平行于 y 轴的柱面方程
- $\xrightarrow{\text{消去}x} L(y, z) = 0$ ，这是：过该曲线且母线平行于 x 轴的柱面方程

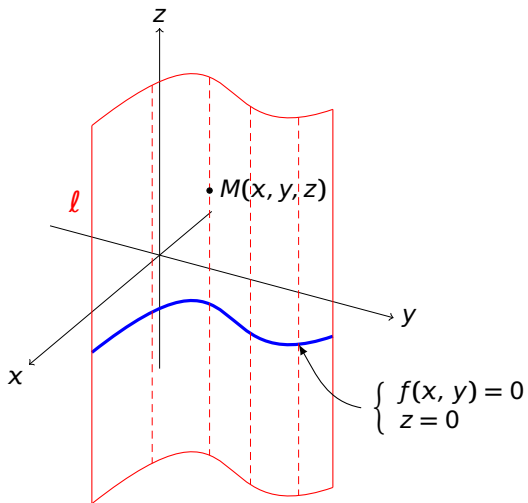
柱面：更特殊情形



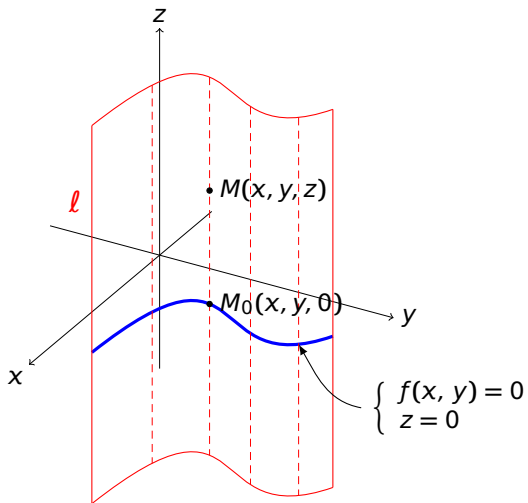
柱面：更特殊情形



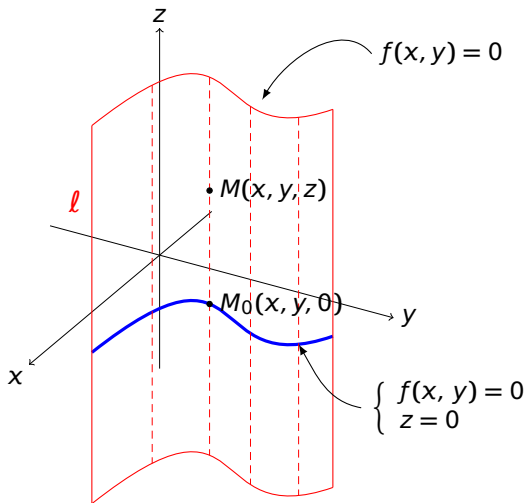
柱面：更特殊情形



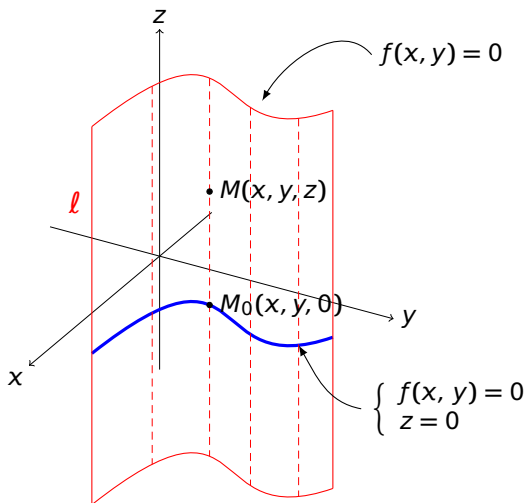
柱面：更特殊情形



柱面：更特殊情形



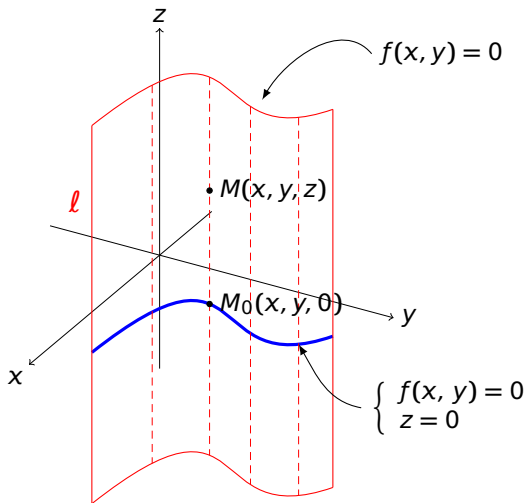
柱面：更特殊情形



反过来,

- 方程 $f(x, y) = 0$ 表示柱面

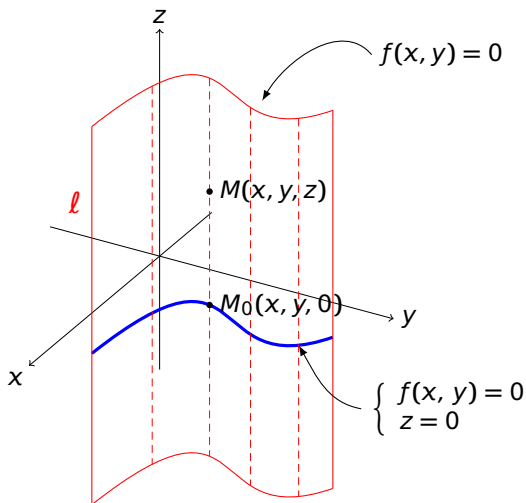
柱面：更特殊情形



反过来,

- 方程 $f(x, y) = 0$ 表示柱面, 母线平行于 z 轴

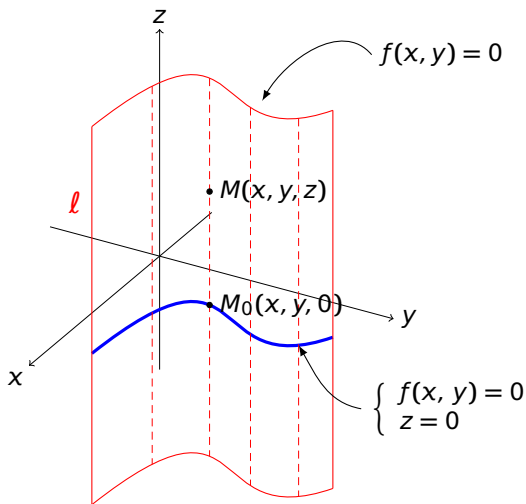
柱面：更特殊情形



反过来,

- 方程 $f(x, y) = 0$ 表示柱面, 母线平行于 z 轴
- 方程 $g(y, z) = 0$ 表示柱面
- 方程 $h(x, z) = 0$ 表示柱面

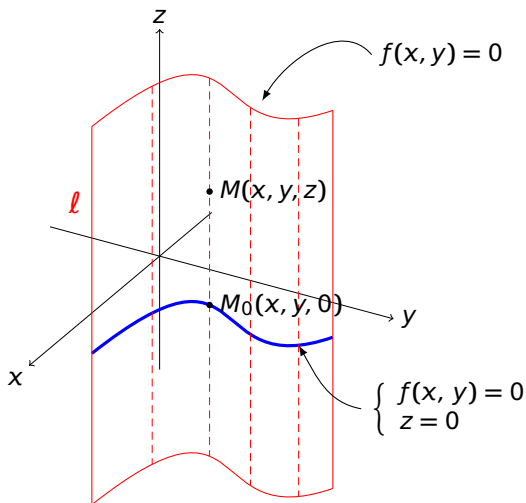
柱面：更特殊情形



反过来,

- 方程 $f(x, y) = 0$ 表示柱面, 母线平行于 z 轴
- 方程 $g(y, z) = 0$ 表示柱面, 母线平行于 x 轴
- 方程 $h(x, z) = 0$ 表示柱面

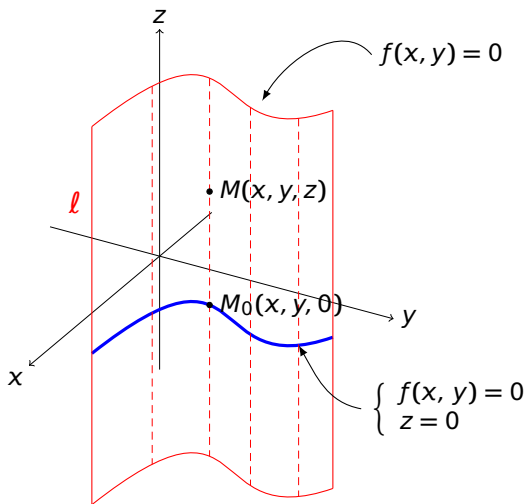
柱面：更特殊情形



反过来,

- 方程 $f(x, y) = 0$ 表示柱面, 母线平行于 z 轴
- 方程 $g(y, z) = 0$ 表示柱面, 母线平行于 x 轴
- 方程 $h(x, z) = 0$ 表示柱面, 母线平行于 y 轴

柱面：更特殊情形



反过来,

- 方程 $f(x, y) = 0$ 表示柱面, 母线平行于 z 轴
- 方程 $g(y, z) = 0$ 表示柱面, 母线平行于 x 轴
- 方程 $h(x, z) = 0$ 表示柱面, 母线平行于 y 轴

例 画出柱面 $x^2 + y^2 = x$

We are here now...

曲面、曲线的一般方程

旋转面；柱面

二次曲面

空间曲线的一般方程

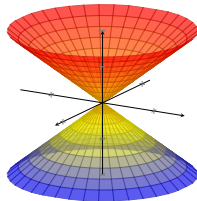
空间曲线的参数方程

空间曲线的投影

二次曲面

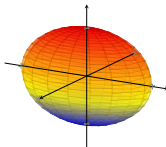
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$$

椭圆锥面



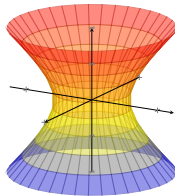
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

椭圆面



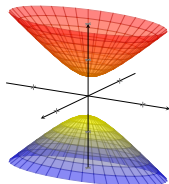
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

单叶双曲面



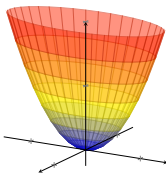
$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

双叶双曲面



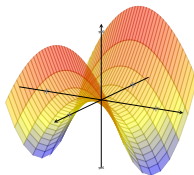
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$$

椭圆抛物面



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$$

双曲抛物面



We are here now...

曲面、曲线的一般方程

旋转面；柱面

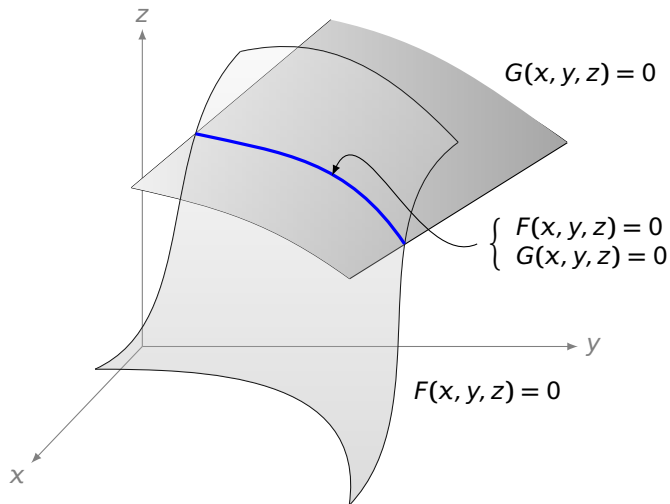
二次曲面

空间曲线的一般方程

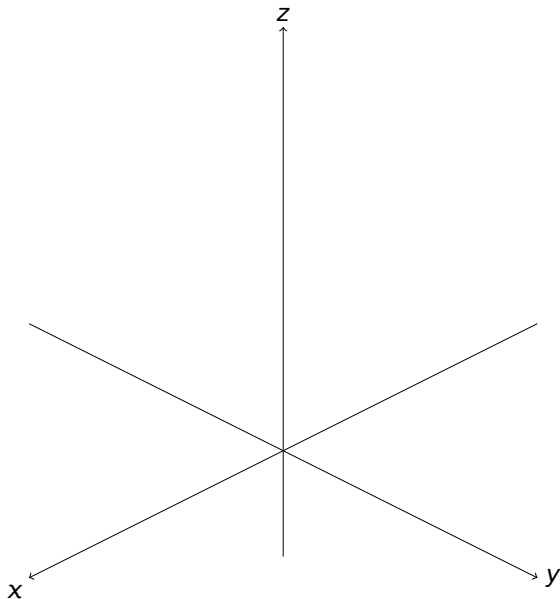
空间曲线的参数方程

空间曲线的投影

空间曲线的一般方程

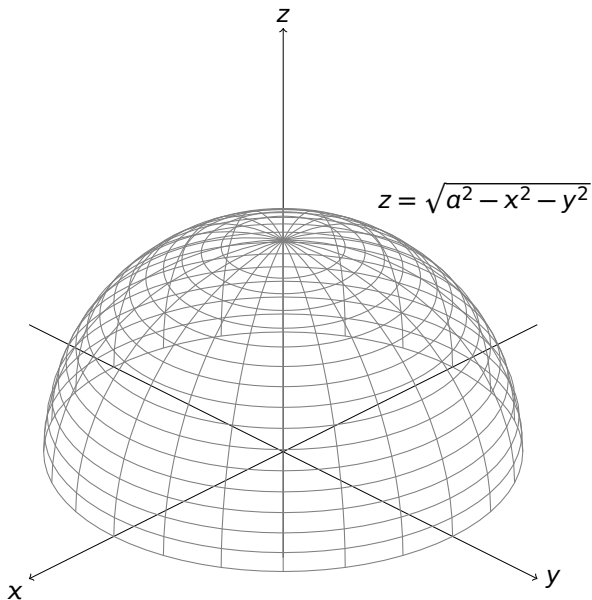


例 画出曲面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 和 $x^2 + y^2 = ax$ 的交线。



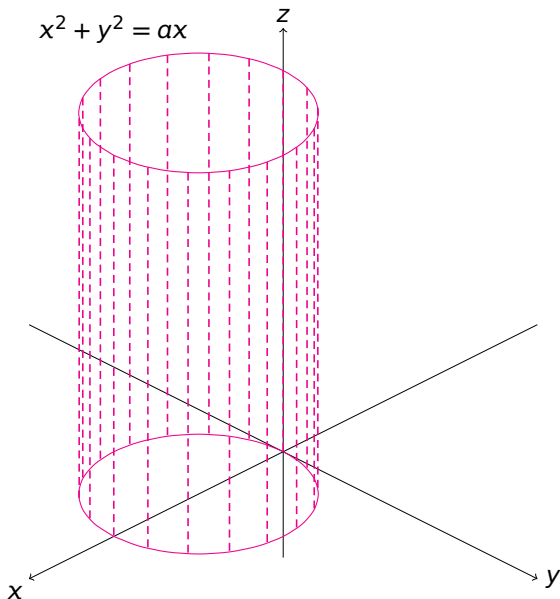
例 画出曲面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 和 $x^2 + y^2 = ax$ 的交线。

解



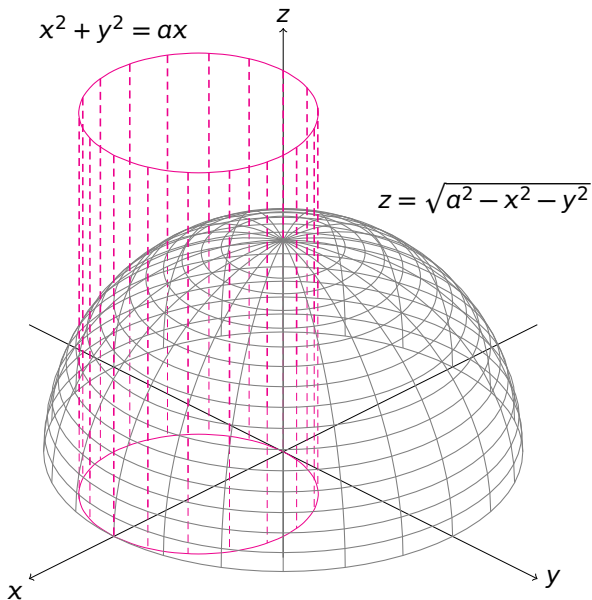
例 画出曲面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 和 $x^2 + y^2 = ax$ 的交线。

解



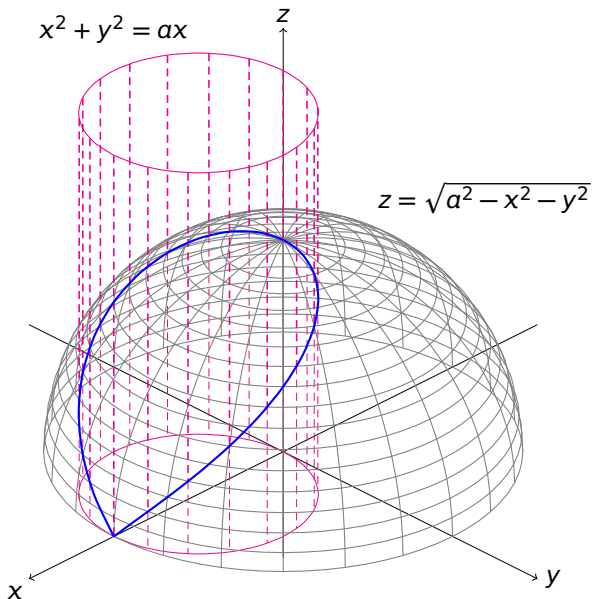
例 画出曲面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 和 $x^2 + y^2 = ax$ 的交线。

解



例 画出曲面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 和 $x^2 + y^2 = ax$ 的交线。

解



We are here now...

曲面、曲线的一般方程

旋转面；柱面

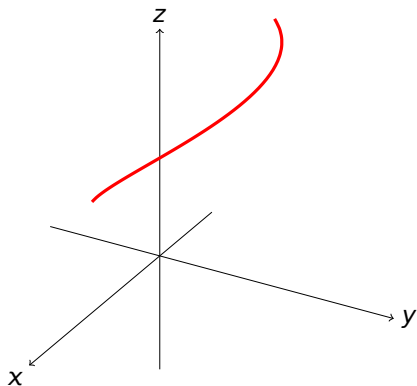
二次曲面

空间曲线的一般方程

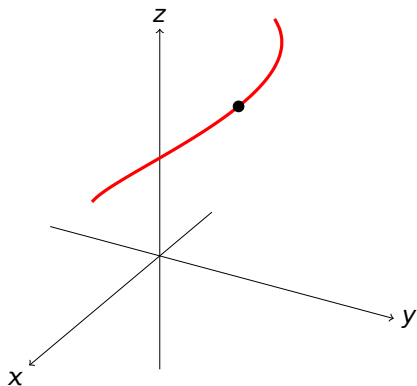
空间曲线的参数方程

空间曲线的投影

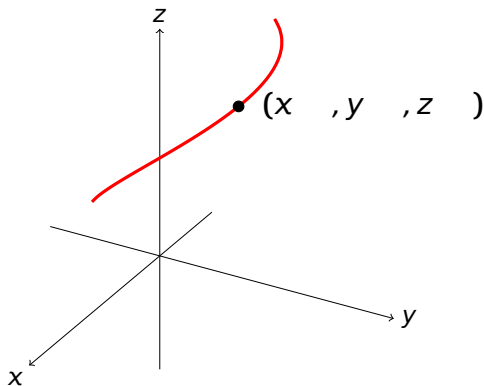
空间曲线的参数方程



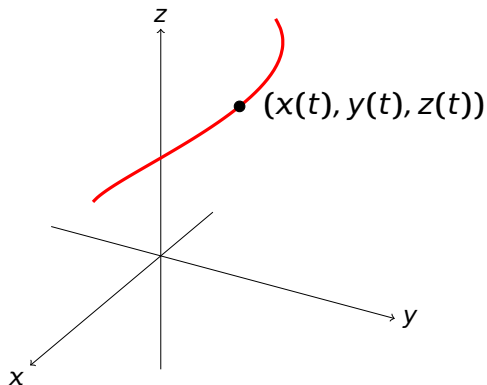
空间曲线的参数方程



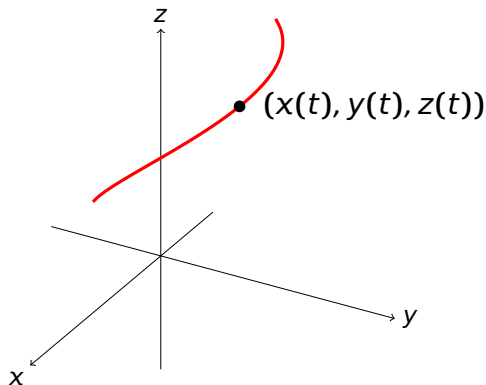
空间曲线的参数方程



空间曲线的参数方程



空间曲线的参数方程



空间中的曲线一般可以用所谓的“参数方程”表示：

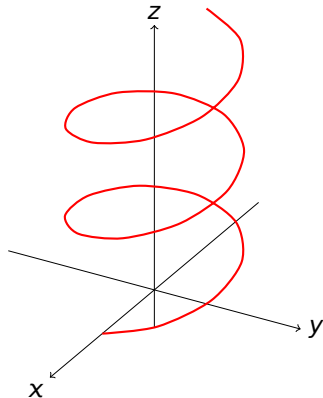
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

例 画出曲线

$$\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin t \\ z = 0.1t \end{cases}, (0 \leq t \leq 5\pi)$$

例 画出曲线

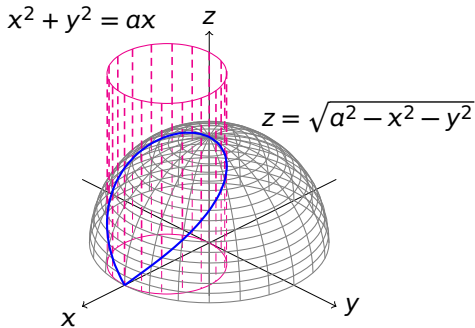
$$\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin t \\ z = 0.1t \end{cases}, (0 \leq t \leq 5\pi)$$



例 计算曲线

$$\begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 = ax \end{cases}$$

的参数方程。



$$x^2 + y^2 = ax$$

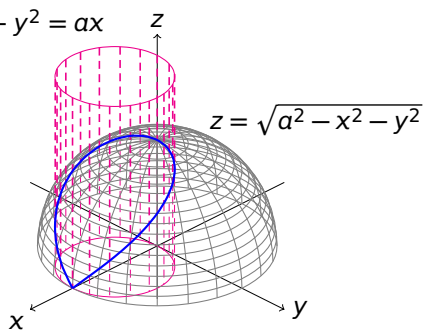
例 计算曲线

$$\begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 = ax \end{cases}$$

的参数方程。

解

$$x^2 + y^2 = ax$$



$$x^2 + y^2 = ax$$

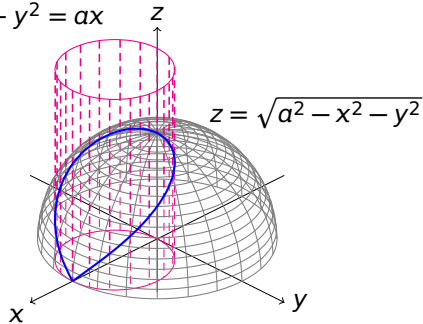
例 计算曲线

$$\begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 = ax \end{cases}$$

的参数方程。

解

$$x^2 + y^2 = ax \Rightarrow \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

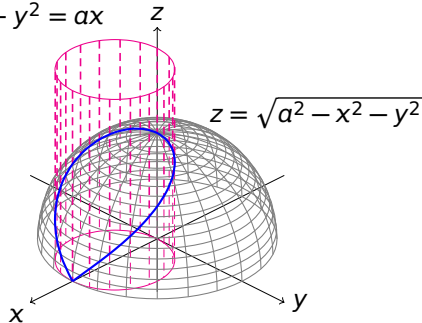


$$x^2 + y^2 = ax$$

例 计算曲线

$$\begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 = ax \end{cases}$$

的参数方程。



解

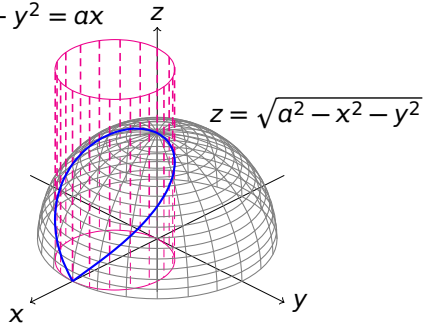
$$x^2 + y^2 = ax \Rightarrow \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos t \\ y = \frac{a}{2} \sin t \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = ax$$

例 计算曲线

$$\begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 = ax \end{cases}$$

的参数方程。



解

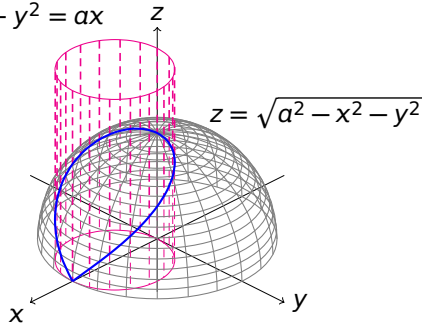
$$x^2 + y^2 = ax \Rightarrow \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos t \\ y = \frac{a}{2} \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

$$x^2 + y^2 = ax$$

例 计算曲线

$$\begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 = ax \end{cases}$$

的参数方程。



解

$$x^2 + y^2 = ax \Rightarrow \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos t \\ y = \frac{a}{2} \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

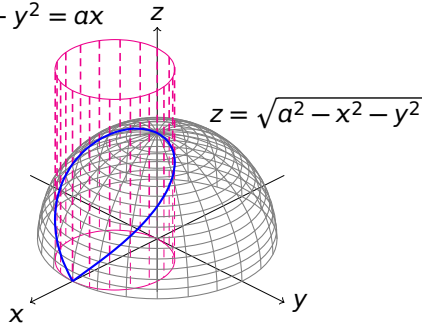
$$\underline{\underline{z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}}$$

$$x^2 + y^2 = ax$$

例 计算曲线

$$\begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 = ax \end{cases}$$

的参数方程。



解

$$x^2 + y^2 = ax \Rightarrow \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos t \\ y = \frac{a}{2} \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

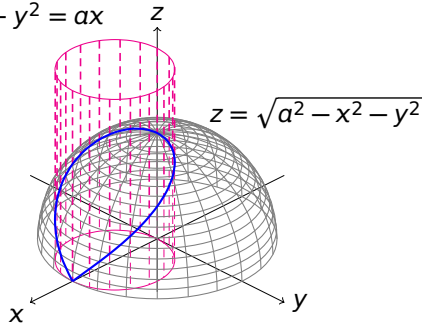
$$\xrightarrow{z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} z = \frac{a}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \cos t}$$

$$x^2 + y^2 = ax$$

例 计算曲线

$$\begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 = ax \end{cases}$$

的参数方程。



解

$$x^2 + y^2 = ax \Rightarrow \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos t \\ y = \frac{a}{2} \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

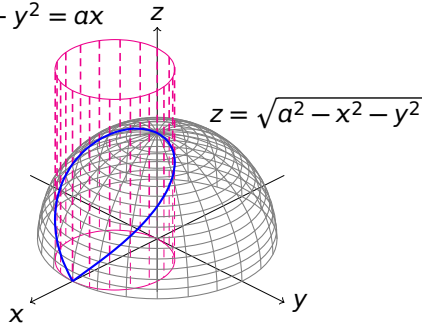
$$\xrightarrow{z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} z = \frac{a}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \cos t} = a \sin(t/2)$$

$$x^2 + y^2 = ax$$

例 计算曲线

$$\begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 = ax \end{cases}$$

的参数方程。



解

$$x^2 + y^2 = ax \Rightarrow \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos t \\ y = \frac{a}{2} \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

$$\xrightarrow{z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} z = \frac{a}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \cos t} = a \sin(t/2)$$

所以参数方程为：

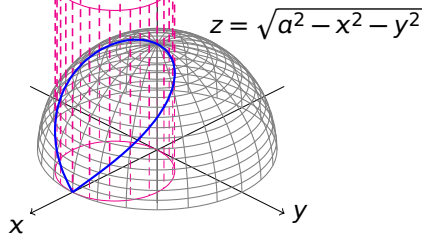
$$\begin{cases} x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos t \\ y = \frac{a}{2} \sin t \\ z = a \sin(t/2) \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = ax$$

例 计算曲线

$$\begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 = ax \end{cases}$$

的参数方程。



解

$$x^2 + y^2 = ax \Rightarrow \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos t \\ y = \frac{a}{2} \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

$$\xrightarrow{z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} z = \frac{a}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \cos t} = a \sin(t/2)$$

所以参数方程为：

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos t \\ y = \frac{a}{2} \sin t \\ z = a \sin(t/2) \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

We are here now...

曲面、曲线的一般方程

旋转面；柱面

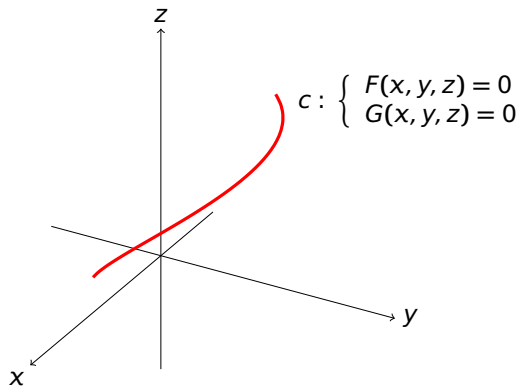
二次曲面

空间曲线的一般方程

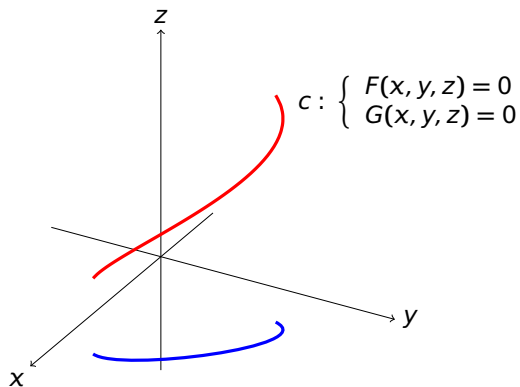
空间曲线的参数方程

空间曲线的投影

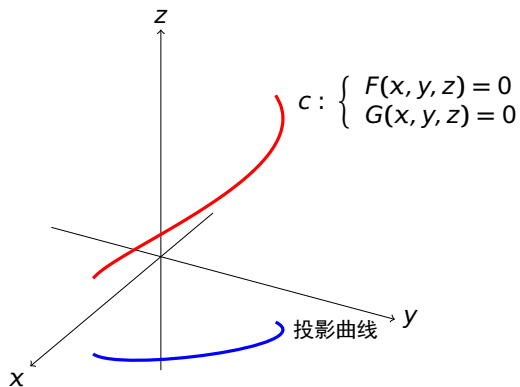
空间曲线在坐标面上的投影



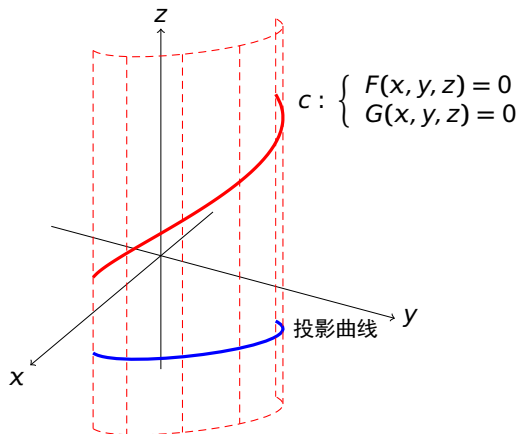
空间曲线在坐标面上的投影



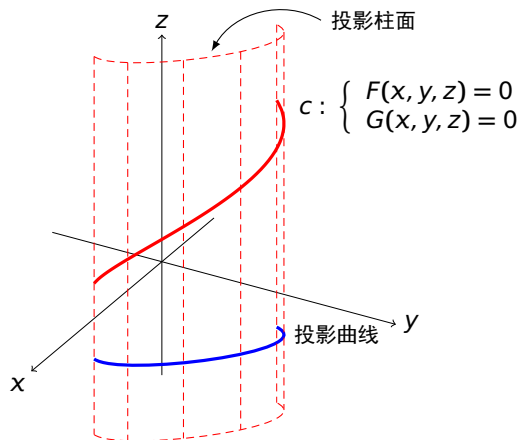
空间曲线在坐标面上的投影



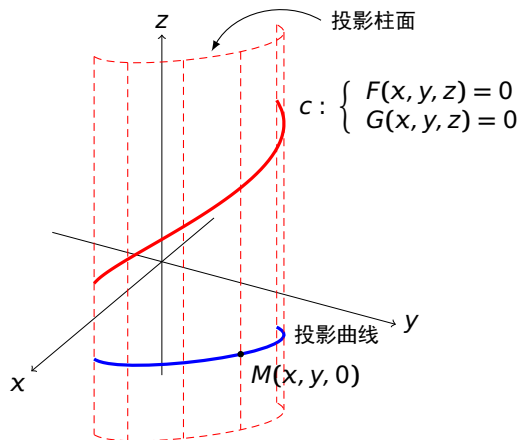
空间曲线在坐标面上的投影



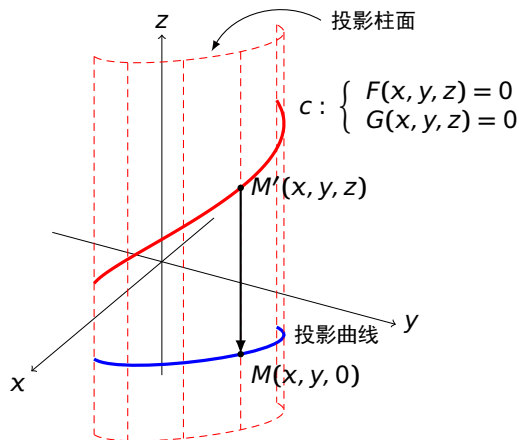
空间曲线在坐标面上的投影



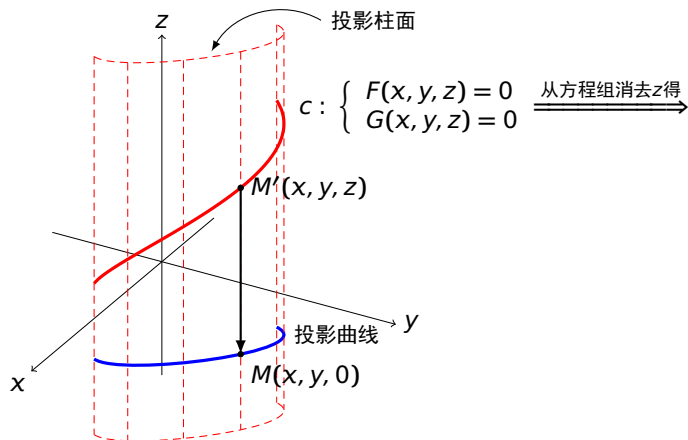
空间曲线在坐标面上的投影



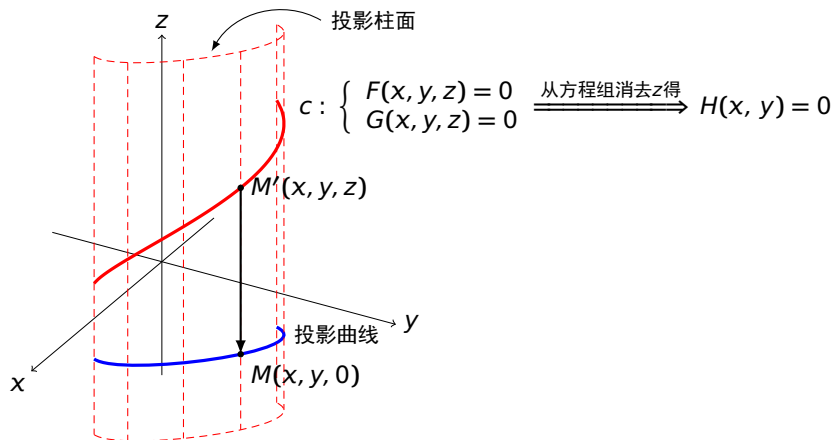
空间曲线在坐标面上的投影



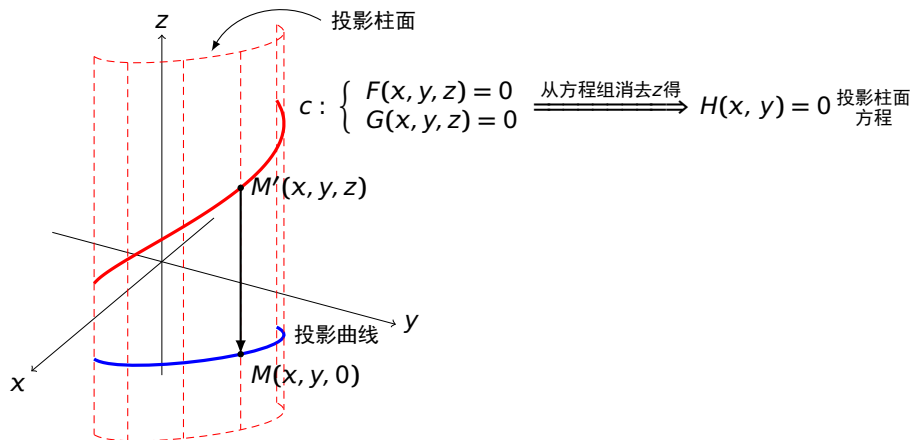
空间曲线在坐标面上的投影



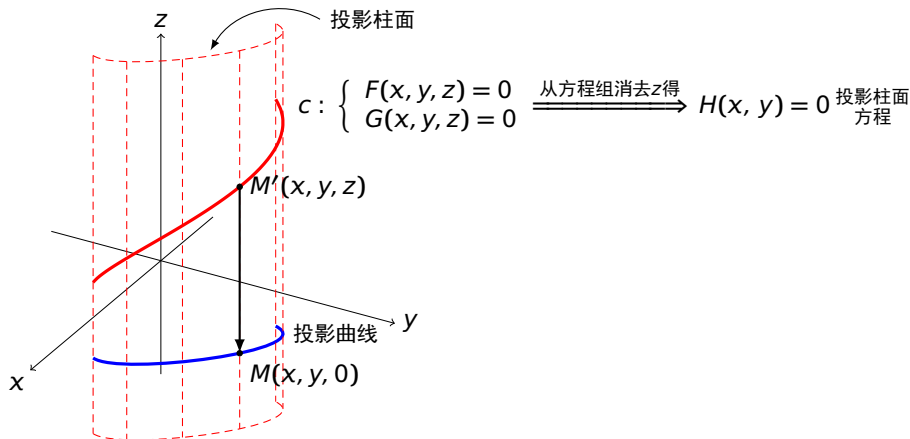
空间曲线在坐标面上的投影



空间曲线在坐标面上的投影



空间曲线在坐标面上的投影



所以该曲线在 xoy 面上的投影为
$$\begin{cases} H(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

空间曲线在坐标面上的投影

$$\text{曲线} \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

- 消去 z 得 $H(x, y)$, 则曲线在 xoy 面上的投影为

$$\begin{cases} H(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

空间曲线在坐标面上的投影

$$\text{曲线} \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

- 消去 z 得 $H(x, y)$, 则曲线在 xoy 面上的投影为

$$\begin{cases} H(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

- 曲线在 zox 面上的投影为

- 曲线在 yoz 面上的投影为

空间曲线在坐标面上的投影

$$\text{曲线} \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

- 消去 z 得 $H(x, y)$, 则曲线在 xoy 面上的投影为

$$\begin{cases} H(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

- 消去 y 得 $K(x, z)$, 则曲线在 zox 面上的投影为

- 曲线在 yoz 面上的投影为

空间曲线在坐标面上的投影

$$\text{曲线} \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

- 消去 z 得 $H(x, y)$, 则曲线在 xoy 面上的投影为

$$\begin{cases} H(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

- 消去 y 得 $K(x, z)$, 则曲线在 zox 面上的投影为

$$\begin{cases} K(x, z) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

- 曲线在 yoz 面上的投影为

空间曲线在坐标面上的投影

$$\text{曲线} \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

- 消去 z 得 $H(x, y)$, 则曲线在 xoy 面上的投影为

$$\begin{cases} H(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

- 消去 y 得 $K(x, z)$, 则曲线在 zox 面上的投影为

$$\begin{cases} K(x, z) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

- 消去 x 得 $L(y, z)$, 则曲线在 yoz 面上的投影为

空间曲线在坐标面上的投影

$$\text{曲线} \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

- 消去 z 得 $H(x, y)$, 则曲线在 xoy 面上的投影为

$$\begin{cases} H(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

- 消去 y 得 $K(x, z)$, 则曲线在 zox 面上的投影为

$$\begin{cases} K(x, z) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

- 消去 x 得 $L(y, z)$, 则曲线在 yoz 面上的投影为

$$\begin{cases} L(y, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

例 求两球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 和 $x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 4$ 的交线在 xoy 面上的投影方程。

例 求两球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 和 $x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 4$ 的交线在 xoy 面上的投影方程。

解 交线方程

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 & (1) \\ x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 4 & (2) \end{cases}$$

例 求两球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 和 $x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 4$ 的交线在 xoy 面上的投影方程。

解 交线方程

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 & (1) \\ x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 4 & (2) \end{cases}$$

可按如下方式消去 z :

$$(1) - (2) \Rightarrow$$

例 求两球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 和 $x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 4$ 的交线在 xoy 面上的投影方程。

解 交线方程

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 & (1) \\ x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 4 & (2) \end{cases}$$

可按如下方式消去 z :

$$(1) - (2) \Rightarrow 2y + 4z = 2$$

例 求两球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 和 $x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 4$ 的交线在 xoy 面上的投影方程。

解 交线方程

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 & (1) \\ x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 4 & (2) \end{cases}$$

可按如下方式消去 z :

$$(1) - (2) \Rightarrow 2y + 4z = 2 \Rightarrow z = \frac{1-y}{2}$$

例 求两球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 和 $x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 4$ 的交线在 xoy 面上的投影方程。

解 交线方程

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 & (1) \\ x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 4 & (2) \end{cases}$$

可按如下方式消去 z :

$$(1) - (2) \Rightarrow 2y + 4z = 2 \Rightarrow z = \frac{1-y}{2}$$

$$\text{代入(1)} \Rightarrow x^2 + y^2 + \left(\frac{1-y}{2}\right)^2 = 1$$

例 求两球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 和 $x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 4$ 的交线在 xoy 面上的投影方程。

解 交线方程

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 & (1) \\ x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 4 & (2) \end{cases}$$

可按如下方式消去 z :

$$(1) - (2) \Rightarrow 2y + 4z = 2 \Rightarrow z = \frac{1-y}{2}$$

$$\text{代入(1)} \Rightarrow x^2 + y^2 + \left(\frac{1-y}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow 4x^2 + 5y^2 - 2y = 3$$

例 求两球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 和 $x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 4$ 的交线在 xoy 面上的投影方程。

解 交线方程

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 & (1) \\ x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 4 & (2) \end{cases}$$

可按如下方式消去 z :

$$(1) - (2) \Rightarrow 2y + 4z = 2 \Rightarrow z = \frac{1-y}{2}$$

$$\text{代入(1)} \Rightarrow x^2 + y^2 + \left(\frac{1-y}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow 4x^2 + 5y^2 - 2y = 3$$

所以投影方程为

$$\begin{cases} 4x^2 + 5y^2 - 2y = 3 \\ z = 0 \end{cases}$$

例 求两球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 和 $x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 4$ 的交线在 xoy 面上的投影方程。

解 交线方程

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 & (1) \\ x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 4 & (2) \end{cases}$$

可按如下方式消去 z :

$$(1) - (2) \Rightarrow 2y + 4z = 2 \Rightarrow z = \frac{1-y}{2}$$

$$\text{代入(1)} \Rightarrow x^2 + y^2 + \left(\frac{1-y}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow 4x^2 + 5y^2 - 2y = 3$$

所以投影方程为

$$\begin{cases} 4x^2 + 5y^2 - 2y = 3 \\ z = 0 \end{cases}$$

注 该投影是 xoy 面上的一个椭圆

例 求两球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 和 $x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 4$ 的交线在 xoy 面上的投影方程。

解 交线方程

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 & (1) \\ x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 4 & (2) \end{cases}$$

可按如下方式消去 z :

$$(1) - (2) \Rightarrow 2y + 4z = 2 \Rightarrow z = \frac{1-y}{2}$$

$$\text{代入(1)} \Rightarrow x^2 + y^2 + \left(\frac{1-y}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow 4x^2 + 5y^2 - 2y = 3$$

所以投影方程为

$$\begin{cases} 4x^2 + 5y^2 - 2y = 3 \\ z = 0 \end{cases}$$

注 该投影是 xoy 面上的一个椭圆: $4x^2 + 5(y - \frac{1}{5})^2 = (\frac{4}{\sqrt{5}})^2$ 。