第 9 章 g：多元函数的极值

数学系　　梁卓滨

2017-2018 学年 II

Outline

1. 多元函数的极值点

2. 条件极值

3. 求解多元函数的最值

We are here now...

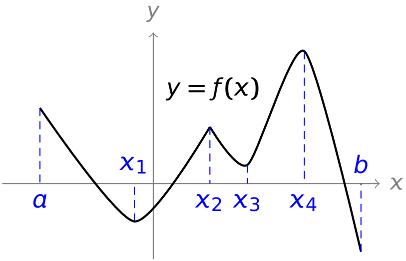
1. 多元函数的极值点

2. 条件极值

3. 求解多元函数的最值

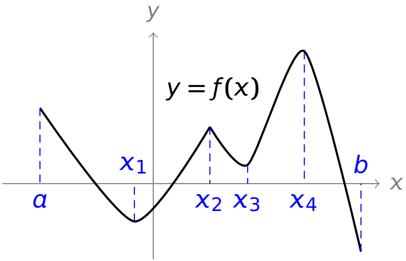
回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

假设 $y = f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上，如图



回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

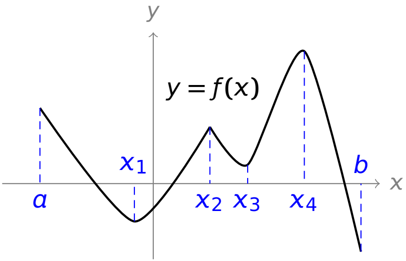
假设 $y = f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上，如图



	极值点	驻点	最值点
a			
x_1			
x_2			
x_3			
x_4			
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

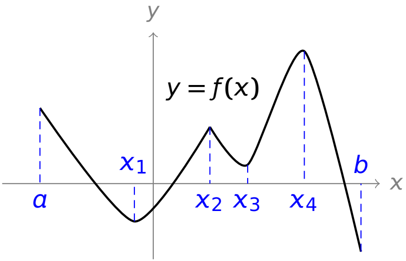
假设 $y = f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上，如图



	极值点	驻点	最值点
a			
x_1	极小值点		
x_2			
x_3			
x_4			
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

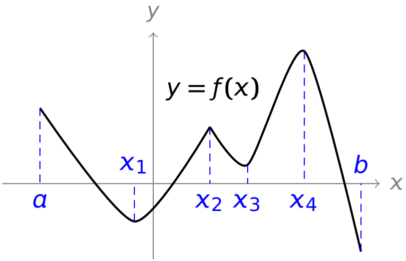
假设 $y=f(x)$ 定义在区间 $[a,b]$ 上，如图



	极值点	驻点	最值点
a			
x_1	极小值点		
x_2	极大值点		
x_3			
x_4			
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

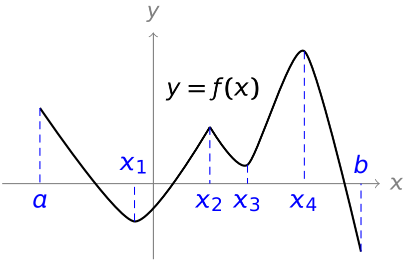
假设 $y = f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上，如图



	极值点	驻点	最值点
a			
x_1	极小值点		
x_2	极大值点		
x_3	极小值点		
x_4			
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

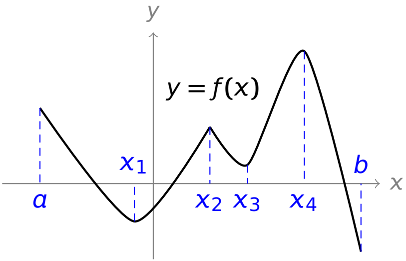
假设 $y = f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上，如图



	极值点	驻点	最值点
a			
x_1	极小值点		
x_2	极大值点		
x_3	极小值点		
x_4	极大值点		
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

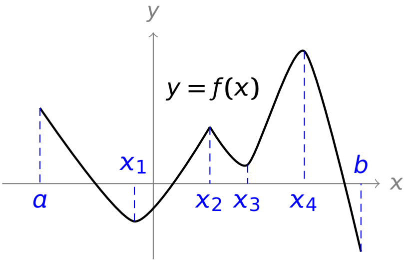
假设 $y = f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上，如图



	极值点	驻点	最值点
a			
x_1	极小值点	✓	
x_2	极大值点		
x_3	极小值点		
x_4	极大值点		
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

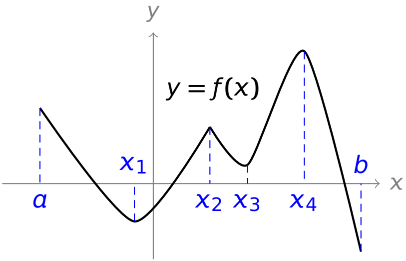
假设 $y=f(x)$ 定义在区间 $[a,b]$ 上，如图



	极值点	驻点	最值点
a			
x_1	极小值点	✓	
x_2	极大值点	×(不可导)	
x_3	极小值点		
x_4	极大值点		
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

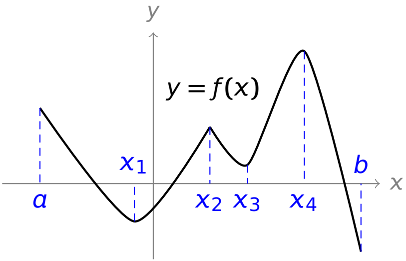
假设 $y=f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上，如图



	极值点	驻点	最值点
a			
x_1	极小值点	$\checkmark$	
x_2	极大值点	$\times$(不可导)	
x_3	极小值点	$\checkmark$	
x_4	极大值点		
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

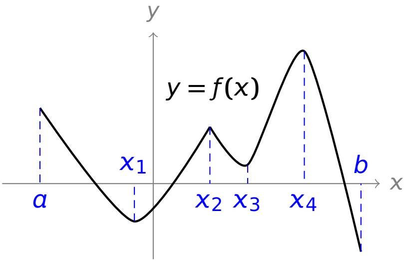
假设 $y = f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上，如图



	极值点	驻点	最值点
a			
x_1	极小值点	√	
x_2	极大值点	×(不可导)	
x_3	极小值点	√	
x_4	极大值点	√	
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

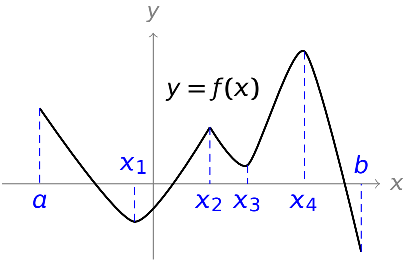
假设 $y=f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上，如图



	极值点	驻点	最值点
a			×
x_1	极小值点	√	
x_2	极大值点	×(不可导)	
x_3	极小值点	√	
x_4	极大值点	√	
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

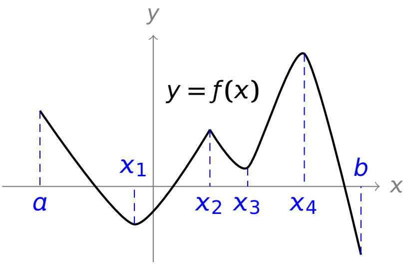
假设 $y=f(x)$ 定义在区间 $[a,b]$ 上，如图



	极值点	驻点	最值点
a			×
x_1	极小值点	√	×
x_2	极大值点	×(不可导)	
x_3	极小值点	√	
x_4	极大值点	√	
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

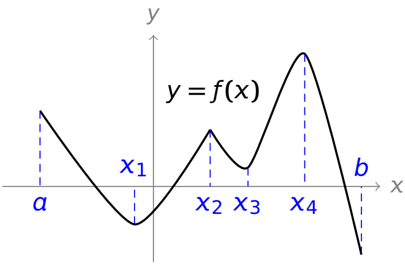
假设 $y=f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上，如图



	极值点	驻点	最值点
a			×
x_1	极小值点	✓	×
x_2	极大值点	×(不可导)	×
x_3	极小值点	✓	
x_4	极大值点	✓	
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

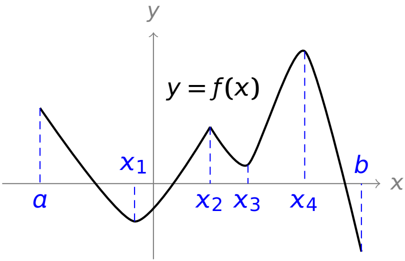
假设 $y=f(x)$ 定义在区间 $[a,b]$ 上，如图



	极值点	驻点	最值点
a			×
x_1	极小值点	√	×
x_2	极大值点	×(不可导)	×
x_3	极小值点	√	×
x_4	极大值点	√	
b			

回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

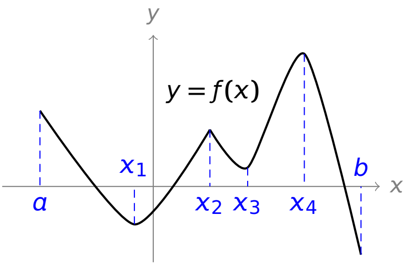
假设 $y=f(x)$ 定义在区间 $[a,b]$ 上，如图



	极值点	驻点	最值点
a			×
x_1	极小值点	√	×
x_2	极大值点	×(不可导)	×
x_3	极小值点	√	×
x_4	极大值点	√	最大值点
b			

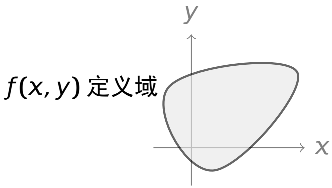
回忆一元函数的极值点、驻点、最值点

假设 $y=f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上，如图

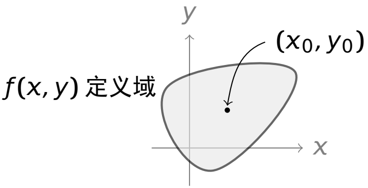


	极值点	驻点	最值点
a			×
x_1	极小值点	√	×
x_2	极大值点	×(不可导)	×
x_3	极小值点	√	×
x_4	极大值点	√	最大值点
b			最小值点

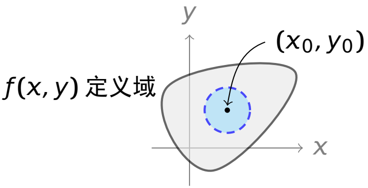
多元函数的极值、极值点



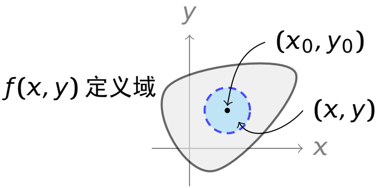
多元函数的极值、极值点



多元函数的极值、极值点



多元函数的极值、极值点



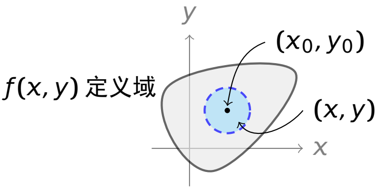
定义 在点 (x_0, y_0) 的某个邻域内

- 如果总是成立

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0), \quad \text{其中}(x, y) \neq (x_0, y_0)$$

多元函数的极值、极值点

定义 在点 (x_0, y_0) 的某个邻域内

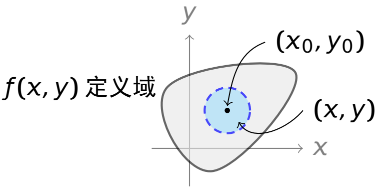


- 如果总是成立

$$f(x, y) \le f(x_0, y_0), \quad \text{其中}(x, y) \neq (x_0, y_0)$$

则称点 (x_0, y_0) 是函数 $f(x, y)$ 极大值点，

多元函数的极值、极值点



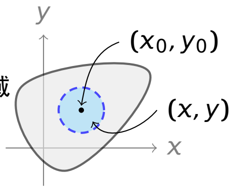
定义 在点 (x_0, y_0) 的某个邻域内

- 如果总是成立

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0), \quad \text{其中}(x, y) \neq (x_0, y_0)$$

则称点 (x_0, y_0) 是函数 $f(x, y)$ 极大值点，$f(x_0, y_0)$ 是极大值

多元函数的极值、极值点



定义 在点 (x_0, y_0) 的某个邻域内

- 如果总是成立

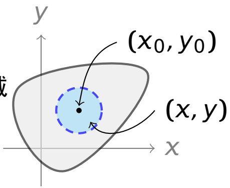
$$f(x, y) \le f(x_0, y_0), \quad 其中 (x, y) \neq (x_0, y_0)$$

则称点 (x_0, y_0) 是函数 $f(x, y)$ 极大值点，$f(x_0, y_0)$ 是极大值

- 如果总是成立

$$f(x, y) \ge f(x_0, y_0), \quad 其中 (x, y) \neq (x_0, y_0)$$

多元函数的极值、极值点



定义 在点 (x_0, y_0) 的某个邻域内

- 如果总是成立

$$f(x, y) \le f(x_0, y_0), \quad 其中 (x, y) \ne (x_0, y_0)$$

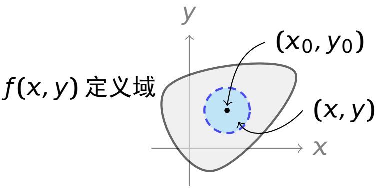
则称点 (x_0, y_0) 是函数 $f(x, y)$ 极大值点，$f(x_0, y_0)$ 是极大值

- 如果总是成立

$$f(x, y) \ge f(x_0, y_0), \quad 其中 (x, y) \ne (x_0, y_0)$$

则称点 (x_0, y_0) 是函数 $f(x, y)$ 极小值点，

多元函数的极值、极值点



定义 在点 (x_0, y_0) 的某个邻域内

- 如果总是成立

$$f(x, y) \le f(x_0, y_0), \quad 其中 (x, y) \neq (x_0, y_0)$$

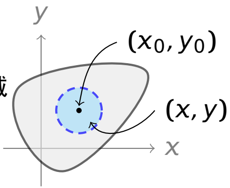
则称点 (x_0, y_0) 是函数 $f(x, y)$ 极大值点，$f(x_0, y_0)$ 是极大值

- 如果总是成立

$$f(x, y) \ge f(x_0, y_0), \quad 其中 (x, y) \neq (x_0, y_0)$$

则称点 (x_0, y_0) 是函数 $f(x, y)$ 极小值点，$f(x_0, y_0)$ 是极小值

多元函数的极值、极值点



定义 在点 (x_0, y_0) 的某个邻域内

- 如果总是成立

$$f(x, y) \le f(x_0, y_0), \quad 其中 (x, y) \ne (x_0, y_0)$$

则称点 (x_0, y_0) 是函数 $f(x, y)$ 极大值点，$f(x_0, y_0)$ 是极大值

- 如果总是成立

$$f(x, y) \ge f(x_0, y_0), \quad 其中 (x, y) \ne (x_0, y_0)$$

则称点 (x_0, y_0) 是函数 $f(x, y)$ 极小值点，$f(x_0, y_0)$ 是极小值

- 极大、极小值点统称极值点；极大、极小值统称极值。

例

- $z = x^2 + y^2$

  点 $p_0(0, 0)$ 是

- $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$

  点 $p_0(0, 0)$ 是

- $z = xy$

  点 $p_0(0, 0)$ 是

例

- $z = x^2 + y^2$

  点 $p_0(0, 0)$ 是极小值点；

- $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$

  点 $p_0(0, 0)$ 是

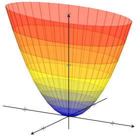
- $z = xy$

  点 $p_0(0, 0)$ 是

例

- $z = x^2 + y^2$

  点 $p_0(0, 0)$ 是极小值点；



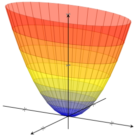
- $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$

  点 $p_0(0, 0)$ 是

- $z = xy$

  点 $p_0(0, 0)$ 是

例



- $z = x^2 + y^2$

  点 $p_0(0, 0)$ 是极小值点；

- $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$

  点 $p_0(0, 0)$ 是极大值点；

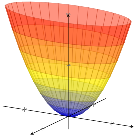
- $z = xy$

  点 $p_0(0, 0)$ 是

例

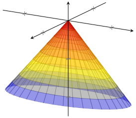
- $z = x^2 + y^2$

  点 $p_0(0, 0)$ 是极小值点；



- $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$

  点 $p_0(0, 0)$ 是极大值点；



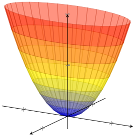
- $z = xy$

  点 $p_0(0, 0)$ 是

例

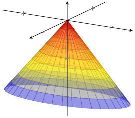
- $z = x^2 + y^2$

  点 $p_0(0, 0)$ 是极小值点；



- $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$

  点 $p_0(0, 0)$ 是极大值点；



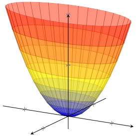
- $z = xy$

  点 $p_0(0, 0)$ 不是极值点。

例

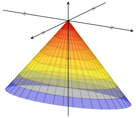
- $z = x^2 + y^2$

  点 $p_0(0, 0)$ 是极小值点；



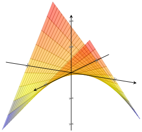
- $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$

  点 $p_0(0, 0)$ 是极大值点；



- $z = xy$

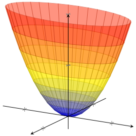
  点 $p_0(0, 0)$ 不是极值点。



例

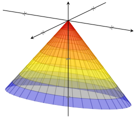
- $z = x^2 + y^2$

  点 $p_0(0, 0)$ 是极小值点；



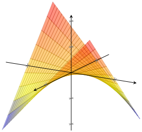
- $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$

  点 $p_0(0, 0)$ 是极大值点；



- $z = xy$

  点 $p_0(0, 0)$ 不是极值点。



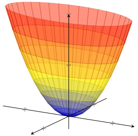
问题

- $z = xy$ 是否有极值点？

例

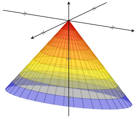
- $z = x^2 + y^2$

  点 $p_0(0, 0)$ 是极小值点；



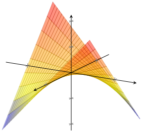
- $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$

  点 $p_0(0, 0)$ 是极大值点；



- $z = xy$

  点 $p_0(0, 0)$ 不是极值点。



问题

- $z = xy$ 是否有极值点？
- 是否有一般方法求出函数的极值点？如：

$$z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$$

定理 设 $z = f(x, y)$ 在内点 (x_0, y_0) 处存在偏导数，则 (x_0, y_0) 是极值点的必要条件是

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

定理 设 $z=f(x,y)$ 在内点 (x_0,y_0) 处存在偏导数，则 (x_0,y_0) 是极值点的必要条件是

$$f_x(x_0,y_0)=0,\quad f_y(x_0,y_0)=0.$$

证明

1. 一元函数 $x\mapsto f(x,y_0)$

定理 设 $z = f(x, y)$ 在内点 (x_0, y_0) 处存在偏导数，则 (x_0, y_0) 是极值点的必要条件是

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

证明

1. 一元函数 $x \mapsto f(x, y_0)$具有极值点 $x = x_0$，

定理 设 $z = f(x, y)$ 在内点 (x_0, y_0) 处存在偏导数，则 (x_0, y_0) 是极值点的必要条件是

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

证明

1. 一元函数 $x \mapsto f(x, y_0)$具有极值点 $x = x_0$，所以

$$\frac{d}{dx}\left[f(x, y_0)\right]\Big|_{x=x_0} = 0$$

定理 设 $z=f(x,y)$ 在内点 (x_0,y_0) 处存在偏导数，则 (x_0,y_0) 是极值点的必要条件是

$$f_x(x_0,y_0)=0,\quad f_y(x_0,y_0)=0.$$

证明

1. 一元函数 $x\mapsto f(x,y_0)$具有极值点 $x=x_0$，所以

$$f_x(x_0,y_0)=\frac{d}{dx}\left[f(x,y_0)\right]\Big|_{x=x_0}=0$$

定理 设 $z = f(x, y)$ 在内点 (x_0, y_0) 处存在偏导数，则 (x_0, y_0) 是极值点的必要条件是

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

证明

1. 一元函数 $x \mapsto f(x, y_0)$具有极值点 $x = x_0$，所以
$$f_x(x_0, y_0) = \frac{d}{dx}\left[f(x, y_0)\right]\Big|_{x=x_0} = 0$$
2. 一元函数 $y \mapsto f(x_0, y)$ 具有极值点 $y = y_0$，

定理 设 $z=f(x,y)$ 在内点 (x_0,y_0) 处存在偏导数，则 (x_0,y_0) 是极值点的必要条件是

$$f_x(x_0,y_0)=0,\quad f_y(x_0,y_0)=0.$$

证明

1. 一元函数 $x\mapsto f(x,y_0)$具有极值点 $x=x_0$，所以
$$f_x(x_0,y_0)=\frac{d}{dx}[f(x,y_0)]\Big|_{x=x_0}=0$$
2. 一元函数 $y\mapsto f(x_0,y)$ 具有极值点 $y=y_0$，所以
$$\frac{d}{dy}[f(x_0,y)]\Big|_{y=y_0}=0$$

定理 设 $z = f(x, y)$ 在内点 (x_0, y_0) 处存在偏导数，则 (x_0, y_0) 是极值点的必要条件是

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

证明

1. 一元函数 $x \mapsto f(x, y_0)$具有极值点 $x = x_0$，所以
$$f_x(x_0, y_0) = \frac{d}{dx}[f(x, y_0)]\Big|_{x=x_0} = 0$$
2. 一元函数 $y \mapsto f(x_0, y)$ 具有极值点 $y = y_0$，所以
$$f_y(x_0, y_0) = \frac{d}{dy}[f(x_0, y)]\Big|_{y=y_0} = 0$$

定理 设 $z = f(x, y)$ 在内点 (x_0, y_0) 处存在偏导数，则 (x_0, y_0) 是极值点的必要条件是

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

证明

1. 一元函数 $x \mapsto f(x, y_0)$具有极值点 $x = x_0$，所以

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{d}{dx}[f(x, y_0)]\Big|_{x=x_0} = 0$$

2. 一元函数 $y \mapsto f(x_0, y)$ 具有极值点 $y = y_0$，所以

$$f_y(x_0, y_0) = \frac{d}{dy}[f(x_0, y)]\Big|_{y=y_0} = 0$$

定义 使偏导数为零的点，称为驻点

定理 设 $z=f(x,y)$ 在内点 (x_0,y_0) 处存在偏导数，则 (x_0,y_0) 是极值点的必要条件是

$$f_x(x_0,y_0)=0,\quad f_y(x_0,y_0)=0.$$

证明

1. 一元函数 $x\mapsto f(x,y_0)$具有极值点 $x=x_0$，所以
$$f_x(x_0,y_0)=\frac{d}{dx}[f(x,y_0)]\Big|_{x=x_0}=0$$
2. 一元函数 $y\mapsto f(x_0,y)$ 具有极值点 $y=y_0$，所以
$$f_y(x_0,y_0)=\frac{d}{dy}[f(x_0,y)]\Big|_{y=y_0}=0$$

定义 使偏导数为零的点，称为驻点

注 如果函数存在偏导数，则 $\{极值点\}\subset\{驻点\}$

例 1 点 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点，从而也是驻点。

例 1 点 (0, 0) 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点，从而也是驻点。直接验证 (0, 0) 是驻点，则如下：

$$\begin{cases} z_x = \\ z_y = \end{cases}$$

例 1 点 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点，从而也是驻点。直接验证 $(0, 0)$ 是驻点，则如下：

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases}$$

例 1 点 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点，从而也是驻点。直接验证 $(0, 0)$ 是驻点，则如下：

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_x(0, 0) = 0 \\ z_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

例 1 点 $(0,\ 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点，从而也是驻点。直接验证 $(0,\ 0)$ 是驻点，则如下：

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \implies \begin{cases} z_x(0,\ 0) = 0 \\ z_y(0,\ 0) = 0 \end{cases}$$

例 2 点 $(0,\ 0)$ 是 $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ 的极大值点，但不是驻点：

例 1 点 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点，从而也是驻点。直接验证 $(0, 0)$ 是驻点，则如下：

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_x(0, 0) = 0 \\ z_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

例 2 点 $(0, 0)$ 是 $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ 的极大值点，但不是驻点：一阶偏导

$$z_x(0, 0), \quad z_y(0, 0)$$

不存在。

例 1 点 $(0,0)$ 是 $z=x^2+y^2$ 的极小值点，从而也是驻点。直接验证 $(0,0)$ 是驻点，则如下：

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_x(0,0) = 0 \\ z_y(0,0) = 0 \end{cases}$$

例 2 点 $(0,0)$ 是 $z=-\sqrt{x^2+y^2}$ 的极大值点，但不是驻点：一阶偏导

$$z_x(0,0), \quad z_y(0,0)$$

不存在。（ $\frac{d}{dx}z(x,0)\Big|_{x=0} =$ ）

例 1 点 $(0,0)$ 是 $z=x^2+y^2$ 的极小值点，从而也是驻点。直接验证 $(0,0)$ 是驻点，则如下：

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_x(0,0) = 0 \\ z_y(0,0) = 0 \end{cases}$$

例 2 点 $(0,0)$ 是 $z=-\sqrt{x^2+y^2}$ 的极大值点，但不是驻点：一阶偏导

$$z_x(0,0), \quad z_y(0,0)$$

不存在。（$z(x,0)=$ $\frac{d}{dx}z(x,0)\big|_{x=0}=$ ）

例 1 点 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点，从而也是驻点。直接验证 $(0, 0)$ 是驻点，则如下：

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_x(0, 0) = 0 \\ z_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

例 2 点 $(0, 0)$ 是 $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ 的极大值点，但不是驻点：一阶偏导

$$z_x(0, 0), \quad z_y(0, 0)$$

不存在。（$z(x, 0) = \sqrt{x^2} =$ $\frac{d}{dx} z(x, 0)\Big|_{x=0} =$ ）

例 1 点 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点，从而也是驻点。直接验证 $(0, 0)$ 是驻点，则如下：

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_x(0, 0) = 0 \\ z_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

例 2 点 $(0, 0)$ 是 $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ 的极大值点，但不是驻点：一阶偏导

$$z_x(0, 0), \quad z_y(0, 0)$$

不存在。（$z(x, 0) = \sqrt{x^2} = |x|$，$\frac{d}{dx} z(x, 0)\Big|_{x=0} =$ ）

例 1 点 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点，从而也是驻点。直接验证 $(0, 0)$ 是驻点，则如下：

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_x(0, 0) = 0 \\ z_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

例 2 点 $(0, 0)$ 是 $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ 的极大值点，但不是驻点：一阶偏导

$$z_x(0, 0), \quad z_y(0, 0)$$

不存在。（$z(x, 0) = \sqrt{x^2} = |x|$，$\frac{d}{dx} z(x, 0)\Big|_{x=0} = \frac{d}{dx}|x|\Big|_{x=0}$　　）

例 1 点 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点，从而也是驻点。直接验证 $(0, 0)$ 是驻点，则如下：

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \implies \begin{cases} z_x(0, 0) = 0 \\ z_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

例 2 点 $(0, 0)$ 是 $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ 的极大值点，但不是驻点：一阶偏导

$$z_x(0, 0), \quad z_y(0, 0)$$

不存在。（$z(x, 0) = \sqrt{x^2} = |x|$，$\frac{d}{dx} z(x, 0)\Big|_{x=0} = \frac{d}{dx}|x|\Big|_{x=0}$ 不存在）

例 1 点 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点，从而也是驻点。直接验证 $(0, 0)$ 是驻点，则如下：

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_x(0, 0) = 0 \\ z_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

例 2 点 $(0, 0)$ 是 $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ 的极大值点，但不是驻点：一阶偏导

$$z_x(0, 0), \quad z_y(0, 0)$$

不存在。（$z(x, 0) = \sqrt{x^2} = |x|$，$\frac{d}{dx}z(x, 0)\big|_{x=0} = \frac{d}{dx}|x|\big|_{x=0}$ 不存在）

例 3（驻点不一定是极值点） 设 $z = xy$。

例 1 点 (0, 0) 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点，从而也是驻点。直接验证 (0, 0) 是驻点，则如下：

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \implies \begin{cases} z_x(0, 0) = 0 \\ z_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

例 2 点 (0, 0) 是 $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ 的极大值点，但不是驻点：一阶偏导

$$z_x(0, 0), \quad z_y(0, 0)$$

不存在。（$z(x, 0) = \sqrt{x^2} = |x|$，$\frac{d}{dx} z(x, 0)\Big|_{x=0} = \frac{d}{dx}|x|\Big|_{x=0}$ 不存在）

例 3（驻点不一定是极值点） 设 $z = xy$。点 (0, 0) 是驻点：

例 1 点 (0, 0) 是 $z=x^2+y^2$ 的极小值点，从而也是驻点。直接验证 (0, 0) 是驻点，则如下：

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_x(0,0) = 0 \\ z_y(0,0) = 0 \end{cases}$$

例 2 点 (0, 0) 是 $z=-\sqrt{x^2+y^2}$ 的极大值点，但不是驻点：一阶偏导

$$z_x(0,0), \quad z_y(0,0)$$

不存在。（$z(x,0)=\sqrt{x^2}=|x|$，$\frac{d}{dx}z(x,0)\Big|_{x=0}=\frac{d}{dx}|x|\Big|_{x=0}$ 不存在）

例 3（驻点不一定是极值点） 设 $z=xy$。点 (0, 0) 是驻点：

$$\begin{cases} z_x = y \\ z_y = x \end{cases}$$

例 1 点 $(0,0)$ 是 $z=x^2+y^2$ 的极小值点，从而也是驻点。直接验证 $(0,0)$ 是驻点，则如下：

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_x(0,0) = 0 \\ z_y(0,0) = 0 \end{cases}$$

例 2 点 $(0,0)$ 是 $z=-\sqrt{x^2+y^2}$ 的极大值点，但不是驻点：一阶偏导

$$z_x(0,0), \quad z_y(0,0)$$

不存在。（$z(x,0)=\sqrt{x^2}=|x|$，$\frac{d}{dx}z(x,0)\big|_{x=0}=\frac{d}{dx}|x|\big|_{x=0}$ 不存在）

例 3（驻点不一定是极值点） 设 $z=xy$。点 $(0,0)$ 是驻点：

$$\begin{cases} z_x = y \\ z_y = x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_x(0,0) = 0 \\ z_y(0,0) = 0 \end{cases}$$

例 1 点 $(0, 0)$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的极小值点，从而也是驻点。直接验证 $(0, 0)$ 是驻点，则如下：

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_x(0, 0) = 0 \\ z_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

例 2 点 $(0, 0)$ 是 $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ 的极大值点，但不是驻点：一阶偏导

$$z_x(0, 0), \quad z_y(0, 0)$$

不存在。（$z(x, 0) = \sqrt{x^2} = |x|$，$\frac{d}{dx} z(x, 0)\big|_{x=0} = \frac{d}{dx}|x|\big|_{x=0}$ 不存在）

例 3（驻点不一定是极值点） 设 $z = xy$。点 $(0, 0)$ 是驻点：

$$\begin{cases} z_x = y \\ z_y = x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_x(0, 0) = 0 \\ z_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

但点 $(0, 0)$ 不是极值点。

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$，求驻点。

例 设 $z=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = \\ z_y = \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \\ \end{cases}$$

例 设 $z=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x=3x^2+6x-9 \\ z_y=-3y^2+6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x=3x^2+6x-9=0 \\ z_y=-3y^2+6y=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3(x+3)(x-1)=0 \\ \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3(x+3)(x-1) = 0 \\ -3y(y-2) = 0 \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3(x+3)(x-1) = 0 \\ -3y(y-2) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \\ y = \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3(x+3)(x-1) = 0 \\ -3y(y-2) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -3,\ 1 \\ y = \end{cases}$$

例 设 $z=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2+6x-9 \\ z_y = -3y^2+6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2+6x-9=0 \\ z_y = -3y^2+6y=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3(x+3)(x-1)=0 \\ -3y(y-2)=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=-3,\ 1 \\ y=0,\ 2 \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3(x+3)(x-1) = 0 \\ -3y(y-2) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -3,\ 1 \\ y = 0,\ 2 \end{cases}$$

所以驻点为

$y=2$		
$y=0$		
	$x=-3$	$x=1$

例 设 $z=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2+6x-9 \\ z_y = -3y^2+6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2+6x-9=0 \\ z_y = -3y^2+6y=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3(x+3)(x-1)=0 \\ -3y(y-2)=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=-3,\ 1 \\ y=0,\ 2 \end{cases}$$

所以驻点为

$y=2$		
$y=0$	$(-3,0)$	
	$x=-3$	$x=1$

例 设 $z=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2+6x-9 \\ z_y = -3y^2+6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2+6x-9=0 \\ z_y = -3y^2+6y=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3(x+3)(x-1)=0 \\ -3y(y-2)=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=-3,\ 1 \\ y=0,\ 2 \end{cases}$$

所以驻点为

$y=2$	$(-3,2)$	
$y=0$	$(-3,0)$	
	$x=-3$	$x=1$

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3(x+3)(x-1) = 0 \\ -3y(y-2) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -3,\ 1 \\ y = 0,\ 2 \end{cases}$$

所以驻点为

$y = 2$	$(-3, 2)$	
$y = 0$	$(-3, 0)$	$(1, 0)$
	$x = -3$	$x = 1$

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3(x+3)(x-1) = 0 \\ -3y(y-2) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -3,\ 1 \\ y = 0,\ 2 \end{cases}$$

所以驻点为

$y=2$	$(-3, 2)$	$(1, 2)$
$y=0$	$(-3, 0)$	$(1, 0)$
	$x=-3$	$x=1$

例 设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 \\ z_y = -3y^2 + 6y \end{cases}$$

求解方程组

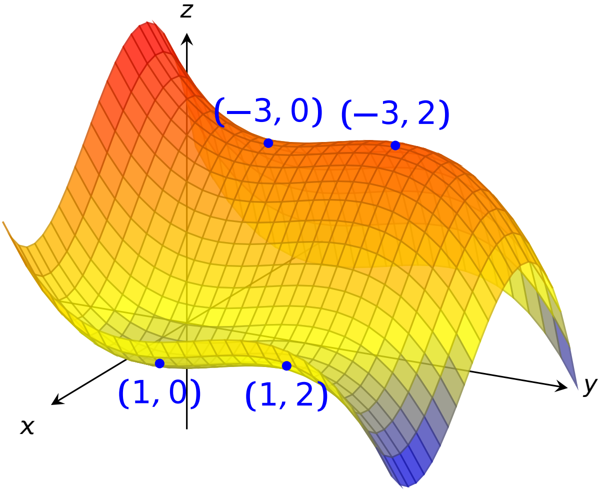
$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ z_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3(x+3)(x-1) = 0 \\ -3y(y-2) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -3,\ 1 \\ y = 0,\ 2 \end{cases}$$

所以驻点为

$y = 2$	$(-3, 2)$	$(1, 2)$
$y = 0$	$(-3, 0)$	$(1, 0)$
	$x = -3$	$x = 1$

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$，求驻点。

$$z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$$



例 设 $z = x^3 + y^3 - 3xy$，求驻点。

例 设 $z = x^3 + y^3 - 3xy$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = \\ z_y = \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 + y^3 - 3xy$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y \\ z_y = \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 + y^3 - 3xy$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y \\ z_y = 3y^2 - 3x \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 + y^3 - 3xy$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y \\ z_y = 3y^2 - 3x \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ z_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 + y^3 - 3xy$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y \\ z_y = 3y^2 - 3x \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ z_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \\ \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 + y^3 - 3xy$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y \\ z_y = 3y^2 - 3x \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ z_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 + y^3 - 3xy$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y \\ z_y = 3y^2 - 3x \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ z_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 + y^3 - 3xy$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y \\ z_y = 3y^2 - 3x \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ z_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases} \Longrightarrow x^4 = x$$

例 设 $z = x^3 + y^3 - 3xy$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y \\ z_y = 3y^2 - 3x \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ z_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases} \Longrightarrow x^4 = x \quad \Longrightarrow x = 0,\ 1$$

例 设 $z = x^3 + y^3 - 3xy$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y \\ z_y = 3y^2 - 3x \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ z_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases} \Longrightarrow x^4 = x \quad \Longrightarrow x = 0,\ 1$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 + y^3 - 3xy$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y \\ z_y = 3y^2 - 3x \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ z_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases} \Longrightarrow x^4 = x \quad \Longrightarrow x = 0, 1$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

例 设 $z = x^3 + y^3 - 3xy$，求驻点。

解 求一阶偏导

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y \\ z_y = 3y^2 - 3x \end{cases}$$

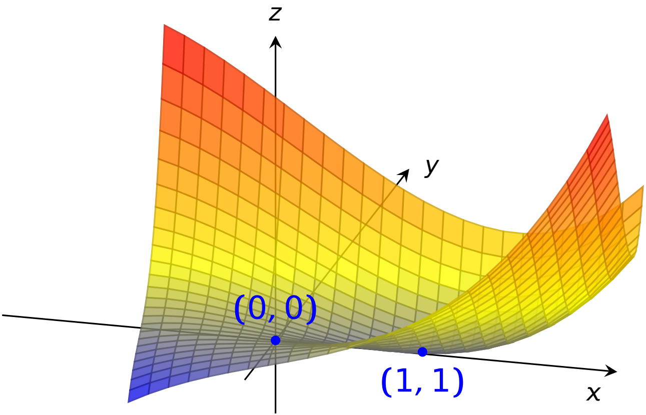
求解方程组

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ z_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases} \Longrightarrow x^4 = x \quad \Longrightarrow x = 0,\ 1$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

所以驻点为 $(1,\ 1)$，$(0,\ 0)$

$$z = x^3 + y^3 - 3xy$$



- 问题 如何从驻点中判别哪些是极值点？

- 问题 如何从驻点中判别哪些是极值点？

定理（极值的充分条件） 设 $z=f(x,y)$ 具有直到二阶的连续偏导数，(x_0,y_0) 是驻点。

- 问题 如何从驻点中判别哪些是极值点？

定理（极值的充分条件） 设 $z = f(x, y)$ 具有直到二阶的连续偏导数，(x_0, y_0) 是驻点。定义判别式

$$P(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$$

结论是：

- 问题 如何从驻点中判别哪些是极值点？

定理（极值的充分条件） 设 $z = f(x, y)$ 具有直到二阶的连续偏导数，(x_0, y_0) 是驻点。定义判别式

$$P(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$$

结论是：

3. 若 $P(x_0, y_0) < 0$，则 (x_0, y_0) 一定不是极值点；

- 问题 如何从驻点中判别哪些是极值点？

定理（极值的充分条件） 设 $z = f(x, y)$ 具有直到二阶的连续偏导数，(x_0, y_0) 是驻点。定义判别式

$$P(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$$

结论是：

3. 若 $P(x_0, y_0) < 0$，则 (x_0, y_0) 一定不是极值点；
4. 若 $P(x_0, y_0) = 0$，则此判定法失效，结论不确定。

- 问题 如何从驻点中判别哪些是极值点？

定理（极值的充分条件） 设 $z=f(x,y)$ 具有直到二阶的连续偏导数，(x_0,y_0) 是驻点。定义判别式

$$P(x,y)=f_{xx}(x,y)\cdot f_{yy}(x,y)-f_{xy}(x,y)^2$$

结论是：

1. 若 $P(x_0,y_0)>0$，
2. 若 $P(x_0,y_0)>0$，
3. 若 $P(x_0,y_0)<0$，则 (x_0,y_0) 一定不是极值点；
4. 若 $P(x_0,y_0)=0$，则此判定法失效，结论不确定。

- 问题 如何从驻点中判别哪些是极值点？

定理（极值的充分条件） 设 $z=f(x,y)$ 具有直到二阶的连续偏导数，(x_0,y_0) 是驻点。定义判别式

$$P(x,y)=f_{xx}(x,y)\cdot f_{yy}(x,y)-f_{xy}(x,y)^2$$

结论是：

1. 若 $P(x_0,y_0)>0$，且 $f_{xx}(x_0,y_0)<0$，则 (x_0,y_0) 是极大值点；
2. 若 $P(x_0,y_0)>0$，
3. 若 $P(x_0,y_0)<0$，则 (x_0,y_0) 一定不是极值点；
4. 若 $P(x_0,y_0)=0$，则此判定法失效，结论不确定。

- 问题 如何从驻点中判别哪些是极值点？

定理（极值的充分条件） 设 $z = f(x, y)$ 具有直到二阶的连续偏导数，(x_0, y_0) 是驻点。定义判别式

$$P(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$$

结论是：

1. 若 $P(x_0, y_0) > 0$，且 $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$，则 (x_0, y_0) 是极大值点；
2. 若 $P(x_0, y_0) > 0$，且 $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$，则 (x_0, y_0) 是极小值点；
3. 若 $P(x_0, y_0) < 0$，则 (x_0, y_0) 一定不是极值点；
4. 若 $P(x_0, y_0) = 0$，则此判定法失效，结论不确定。

- 问题 如何从驻点中判别哪些是极值点？

定理（极值的充分条件） 设 $z=f(x,y)$ 具有直到二阶的连续偏导数，(x_0,y_0) 是驻点。定义判别式

$$P(x,y)=f_{xx}(x,y)\cdot f_{yy}(x,y)-f_{xy}(x,y)^2$$

结论是：

1. 若 $P(x_0,y_0)>0$，且 $f_{xx}(x_0,y_0)<0$，则 (x_0,y_0) 是极大值点；
2. 若 $P(x_0,y_0)>0$，且 $f_{xx}(x_0,y_0)>0$，则 (x_0,y_0) 是极小值点；
3. 若 $P(x_0,y_0)<0$，则 (x_0,y_0) 一定不是极值点；
4. 若 $P(x_0,y_0)=0$，则此判定法失效，结论不确定。

- 总结 求 $z=f(x,y)$ 极值点的步骤：

  1. 求驻点：

- 问题 如何从驻点中判别哪些是极值点？

定理（极值的充分条件） 设 $z=f(x,y)$ 具有直到二阶的连续偏导数，(x_0,y_0) 是驻点。定义判别式

$$P(x,y)=f_{xx}(x,y)\cdot f_{yy}(x,y)-f_{xy}(x,y)^2$$

结论是：

1. 若 $P(x_0,y_0)>0$，且 $f_{xx}(x_0,y_0)<0$，则 (x_0,y_0) 是极大值点；
2. 若 $P(x_0,y_0)>0$，且 $f_{xx}(x_0,y_0)>0$，则 (x_0,y_0) 是极小值点；
3. 若 $P(x_0,y_0)<0$，则 (x_0,y_0) 一定不是极值点；
4. 若 $P(x_0,y_0)=0$，则此判定法失效，结论不确定。

- 总结 求 $z=f(x,y)$ 极值点的步骤：

  1. 求驻点：解方程 $\begin{cases} z_x(x,y)=0 \\ z_y(x,y)=0 \end{cases}$，设解为 (x_0,y_0)

- 问题 如何从驻点中判别哪些是极值点？

定理（极值的充分条件） 设 $z = f(x, y)$ 具有直到二阶的连续偏导数，(x_0, y_0) 是驻点。定义判别式

$$P(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$$

结论是：

1. 若 $P(x_0, y_0) > 0$，且 $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$，则 (x_0, y_0) 是极大值点；
2. 若 $P(x_0, y_0) > 0$，且 $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$，则 (x_0, y_0) 是极小值点；
3. 若 $P(x_0, y_0) < 0$，则 (x_0, y_0) 一定不是极值点；
4. 若 $P(x_0, y_0) = 0$，则此判定法失效，结论不确定。

- 总结 求 $z = f(x, y)$ 极值点的步骤：
  1. 求驻点：解方程 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$，设解为 (x_0, y_0)
  2. 通过 $P(x_0, y_0)$ 辨别驻点 (x_0, y_0) 是否极值点

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

例 求 $z=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = \qquad\qquad\qquad , \qquad z_y =$$

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \qquad z_y =$$

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \qquad z_y = -3y^2 + 6y$$

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \qquad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \qquad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \qquad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$P(x, y) =$$

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \qquad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = \\ z_{xy} = \\ z_{yy} = \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) =$$

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \qquad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = \\ z_{yy} = \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) =$$

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \qquad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) =$$

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \qquad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = -6y + 6 \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) =$$

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \qquad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = -6y + 6 \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = -36(x+1)(y-1)$$

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \qquad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = -6y + 6 \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = -36(x+1)(y-1)$$

3. 结论

	$(-3, 0)$	$(-3, 2)$	$(1, 0)$	$(1, 2)$
$P(x_0, y_0)$				
$z_{xx}(x_0, y_0)$				
是否极值点				

例 求 $z=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x=3x^2+6x-9,\qquad z_y=-3y^2+6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x,y)=0 \\ z_y(x,y)=0 \end{cases}$ 得：$(-3,0),(-3,2),(1,0),(1,2)$

2. 再求判别式 $P(x,y)$

$$\begin{cases} z_{xx}=6x+6 \\ z_{xy}=0 \\ z_{yy}=-6y+6 \end{cases} \Longrightarrow P(x,y)=-36(x+1)(y-1)$$

3. 结论

	$(-3,0)$	$(-3,2)$	$(1,0)$	$(1,2)$
$P(x_0,y_0)$	$-72<0$			
$z_{xx}(x_0,y_0)$				
是否极值点				

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \qquad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = -6y + 6 \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = -36(x+1)(y-1)$$

3. 结论

	$(-3, 0)$	$(-3, 2)$	$(1, 0)$	$(1, 2)$
$P(x_0, y_0)$	$-72 < 0$			
$z_{xx}(x_0, y_0)$				
是否极值点	×			

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \qquad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = -6y + 6 \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = -36(x+1)(y-1)$$

3. 结论

	$(-3, 0)$	$(-3, 2)$	$(1, 0)$	$(1, 2)$
$P(x_0, y_0)$	$-72 < 0$	$72 > 0$		
$z_{xx}(x_0, y_0)$				
是否极值点	×			

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \qquad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = -6y + 6 \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = -36(x+1)(y-1)$$

3. 结论

	$(-3, 0)$	$(-3, 2)$	$(1, 0)$	$(1, 2)$
$P(x_0, y_0)$	$-72 < 0$	$72 > 0$		
$z_{xx}(x_0, y_0)$		$-12 < 0$		
是否极值点	×			

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \qquad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = -6y + 6 \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = -36(x+1)(y-1)$$

3. 结论

	$(-3, 0)$	$(-3, 2)$	$(1, 0)$	$(1, 2)$
$P(x_0, y_0)$	$-72 < 0$	$72 > 0$		
$z_{xx}(x_0, y_0)$		$-12 < 0$		
是否极值点	×	极大值点		

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \qquad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = -6y + 6 \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = -36(x+1)(y-1)$$

3. 结论

	$(-3, 0)$	$(-3, 2)$	$(1, 0)$	$(1, 2)$
$P(x_0, y_0)$	$-72 < 0$	$72 > 0$	$72 > 0$	
$z_{xx}(x_0, y_0)$		$-12 < 0$		
是否极值点	×	极大值点		

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \qquad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = -6y + 6 \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = -36(x+1)(y-1)$$

3. 结论

	$(-3, 0)$	$(-3, 2)$	$(1, 0)$	$(1, 2)$
$P(x_0, y_0)$	$-72 < 0$	$72 > 0$	$72 > 0$	
$z_{xx}(x_0, y_0)$		$-12 < 0$	$12 > 0$	
是否极值点	×	极大值点		

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \qquad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = -6y + 6 \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = -36(x+1)(y-1)$$

3. 结论

	$(-3, 0)$	$(-3, 2)$	$(1, 0)$	$(1, 2)$
$P(x_0, y_0)$	$-72 < 0$	$72 > 0$	$72 > 0$	
$z_{xx}(x_0, y_0)$		$-12 < 0$	$12 > 0$	
是否极值点	×	极大值点	极小值点	

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \qquad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = -6y + 6 \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = -36(x+1)(y-1)$$

3. 结论

	$(-3, 0)$	$(-3, 2)$	$(1, 0)$	$(1, 2)$
$P(x_0, y_0)$	$-72 < 0$	$72 > 0$	$72 > 0$	$-72 < 0$
$z_{xx}(x_0, y_0)$		$-12 < 0$	$12 > 0$	
是否极值点	$\times$	极大值点	极小值点	

例 求 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 + 6x - 9, \qquad z_y = -3y^2 + 6y$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$

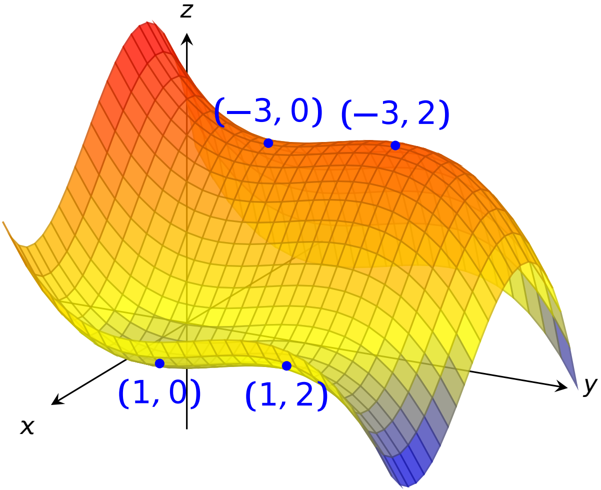
2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x + 6 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = -6y + 6 \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = -36(x+1)(y-1)$$

3. 结论

	$(-3, 0)$	$(-3, 2)$	$(1, 0)$	$(1, 2)$
$P(x_0, y_0)$	$-72 < 0$	$72 > 0$	$72 > 0$	$-72 < 0$
$z_{xx}(x_0, y_0)$		$-12 < 0$	$12 > 0$	
是否极值点	×	极大值点	极小值点	×

$$z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$$



例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = \qquad\qquad , \qquad z_y =$$

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \qquad z_y =$$

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \qquad z_y = 3y^2 - 3x$$

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \qquad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \qquad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(1, 1)$，$(0, 0)$

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \qquad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(1, 1)$，$(0, 0)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$P(x, y) =$$

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \qquad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：(1, 1)，(0, 0)

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = \\ z_{xy} = \\ z_{yy} = \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) =$$

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \qquad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：(1, 1)，(0, 0)

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x \\ z_{xy} = \\ z_{yy} = \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) =$$

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \qquad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：(1, 1)，(0, 0)

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x \\ z_{xy} = -3 \\ z_{yy} = \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) =$$

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \qquad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(1, 1)$，$(0, 0)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x \\ z_{xy} = -3 \\ z_{yy} = 6y \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) =$$

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \qquad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：(1, 1)，(0, 0)

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x \\ z_{xy} = -3 \\ z_{yy} = 6y \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = 36xy - 9$$

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \qquad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(1, 1)$，$(0, 0)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x \\ z_{xy} = -3 \\ z_{yy} = 6y \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = 36xy - 9$$

3. 结论

	$(1, 1)$	$(0, 0)$
$P(x_0, y_0)$		
$z_{xx}(x_0, y_0)$		
是否极值点		

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \qquad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(1, 1)$，$(0, 0)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x \\ z_{xy} = -3 \\ z_{yy} = 6y \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = 36xy - 9$$

3. 结论

	$(1, 1)$	$(0, 0)$
$P(x_0, y_0)$	$27 > 0$	
$z_{xx}(x_0, y_0)$		
是否极值点		

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \qquad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(1, 1)$，$(0, 0)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x \\ z_{xy} = -3 \\ z_{yy} = 6y \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = 36xy - 9$$

3. 结论

	$(1, 1)$	$(0, 0)$
$P(x_0, y_0)$	$27 > 0$	
$z_{xx}(x_0, y_0)$	$6 > 0$	
是否极值点		

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \qquad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(1, 1)$，$(0, 0)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x \\ z_{xy} = -3 \\ z_{yy} = 6y \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = 36xy - 9$$

3. 结论

	$(1, 1)$	$(0, 0)$
$P(x_0, y_0)$	$27 > 0$	
$z_{xx}(x_0, y_0)$	$6 > 0$	
是否极值点	极小值点	

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \qquad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：$(1, 1)$，$(0, 0)$

2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x \\ z_{xy} = -3 \\ z_{yy} = 6y \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = 36xy - 9$$

3. 结论

	$(1, 1)$	$(0, 0)$
$P(x_0, y_0)$	$27 > 0$	$-9 < 0$
$z_{xx}(x_0, y_0)$	$6 > 0$	
是否极值点	极小值点	

例 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点。

解 1. 求一阶偏导

$$z_x = 3x^2 - 3y, \qquad z_y = 3y^2 - 3x$$

求解方程组 $\begin{cases} z_x(x, y) = 0 \\ z_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得：(1, 1)，(0, 0)

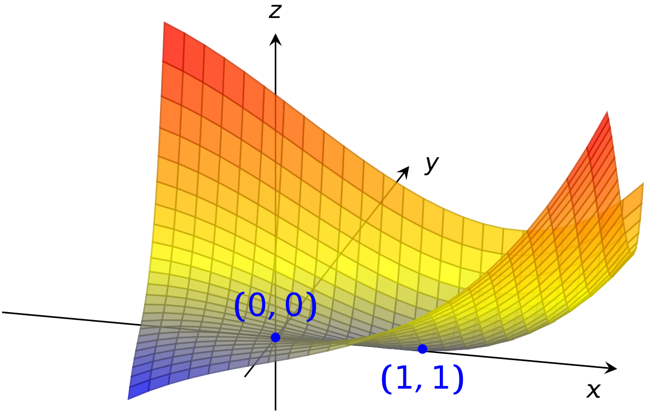
2. 再求判别式 $P(x, y)$

$$\begin{cases} z_{xx} = 6x \\ z_{xy} = -3 \\ z_{yy} = 6y \end{cases} \Longrightarrow P(x, y) = 36xy - 9$$

3. 结论

	(1, 1)	(0, 0)
$P(x_0, y_0)$	$27 > 0$	$-9 < 0$
$z_{xx}(x_0, y_0)$	$6 > 0$	
是否极值点	极小值点	×

$$z = x^3 + y^3 - 3xy$$



三元函数的极值点

- 设 $u = f(x, y, z)$。
- (x_0, y_0, z_0) 是驻点指在该点处偏导数全为零:

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f_z(x_0, y_0, z_0) = 0$$

三元函数的极值点

- 设 $u = f(x, y, z)$。
- (x_0, y_0, z_0) 是驻点指在该点处偏导数全为零：

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f_z(x_0, y_0, z_0) = 0$$

- 设 (x_0, y_0, z_0) 是 $u = f(x, y, z)$ 的极值点，则 (x_0, y_0, z_0) 一定是驻点

三元函数的极值点

- 设 $u = f(x, y, z)$。
- (x_0, y_0, z_0) 是驻点指在该点处偏导数全为零：

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f_z(x_0, y_0, z_0) = 0$$

- 设 (x_0, y_0, z_0) 是 $u = f(x, y, z)$ 的极值点，则 (x_0, y_0, z_0) 一定是驻点
- 如何进一步判别哪些驻点为极值点？

三元函数的极值点

- 设 $u = f(x, y, z)$。
- (x_0, y_0, z_0) 是**驻点**指在该点处偏导数全为零：

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f_z(x_0, y_0, z_0) = 0$$

- 设 (x_0, y_0, z_0) 是 $u = f(x, y, z)$ 的**极值点**，则 (x_0, y_0, z_0) 一定是驻点
- 如何进一步判别哪些驻点为极值点？考虑矩阵

$$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}_{(x_0, y_0, z_0)}$$

三元函数的极值点

- 设 $u=f(x,y,z)$。
- (x_0,y_0,z_0) 是驻点指在该点处偏导数全为零：

$$f_x(x_0,y_0,z_0)=0,\quad f_y(x_0,y_0,z_0)=0,\quad f_z(x_0,y_0,z_0)=0$$

- 设 (x_0,y_0,z_0) 是 $u=f(x,y,z)$ 的极值点，则 (x_0,y_0,z_0) 一定是驻点
- 如何进一步判别哪些驻点为极值点？考虑矩阵

$$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}_{(x_0,y_0,z_0)}$$

  - 如果是正定矩阵，则 (x_0,y_0,z_0) 是极小值点
  - 如果是负定矩阵，则 (x_0,y_0,z_0) 是极大值点

We are here now...

1. 多元函数的极值点

2. 条件极值

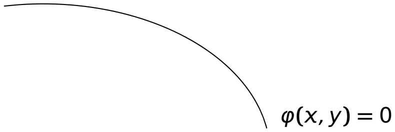
3. 求解多元函数的最值

条件极值（二元函数 + 一个附加条件）

问题 求解二元函数 $u = f(x, y)$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的极值点。

条件极值（二元函数 + 一个附加条件）

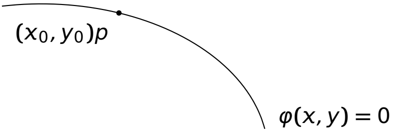
问题 求解二元函数 $u = f(x, y)$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的极值点。



条件极值（二元函数 + 一个附加条件）

问题 求解二元函数 $u = f(x, y)$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的极值点。

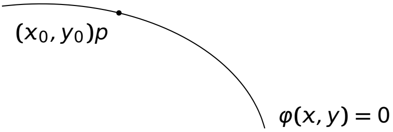
$p(x_0, y_0)$是条件极值点



条件极值（二元函数 + 一个附加条件）

问题 求解二元函数 $u=f(x,y)$ 在附加条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值点。假设 $\nabla\varphi\neq 0$。

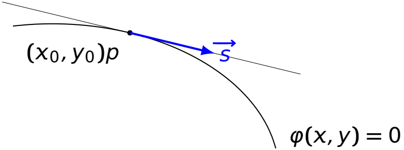
$p(x_0,y_0)$是条件极值点



条件极值（二元函数 + 一个附加条件）

问题 求解二元函数 $u = f(x, y)$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的极值点。假设 $\nabla\varphi \neq 0$。

$p(x_0, y_0)$是条件极值点

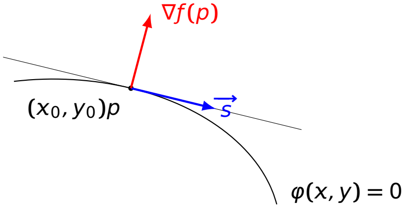


条件极值（二元函数 + 一个附加条件）

问题 求解二元函数 $u = f(x, y)$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的极值点。假设 $\nabla\varphi \neq 0$。

$p(x_0, y_0)$是条件极值点

$\Rightarrow \nabla f(x_0, y_0) \perp \overrightarrow{s}$



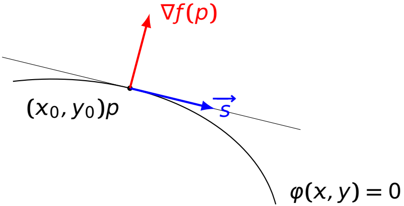
条件极值（二元函数 + 一个附加条件）

问题 求解二元函数 $u = f(x, y)$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的极值点。

假设 $\nabla\varphi \neq 0$。

$p(x_0, y_0)$是条件极值点

$\Rightarrow \nabla f(x_0, y_0) \perp \overrightarrow{s}$



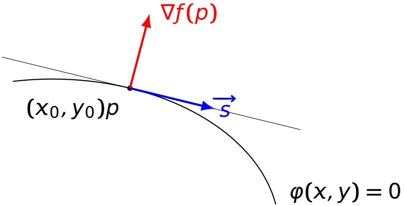
$f(x, y(x))$

条件极值（二元函数 + 一个附加条件）

问题 求解二元函数 $u = f(x, y)$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的极值点。假设 $\nabla\varphi \neq 0$。

$p(x_0, y_0)$是条件极值点

$\Rightarrow \nabla f(x_0, y_0) \perp \vec{s}$



$$0 = \frac{d}{dx} f(x, y(x))\Big|_{x=x_0}$$

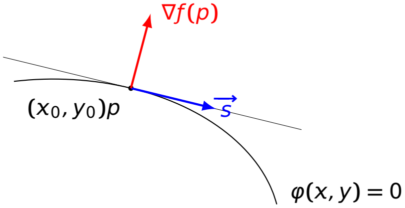
条件极值（二元函数 + 一个附加条件）

问题 求解二元函数 $u = f(x, y)$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的极值点。

假设 $\nabla\varphi \neq 0$。

$p(x_0, y_0)$是条件极值点

$\Rightarrow \nabla f(x_0, y_0) \perp \vec{s}$



$$0 = \frac{d}{dx} f(x, y(x))\bigg|_{x=x_0} = f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0) y'(x_0)$$

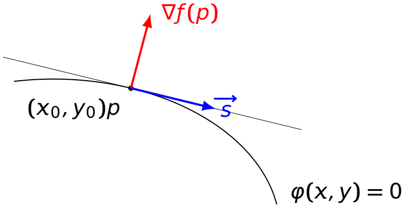
条件极值（二元函数 + 一个附加条件）

问题 求解二元函数 $u = f(x, y)$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的极值点。

假设 $\nabla\varphi \neq 0$。

$p(x_0, y_0)$是条件极值点

$\Rightarrow \nabla f(x_0, y_0) \perp \overrightarrow{s}$



$$0 = \frac{d}{dx} f(x, y(x))\Big|_{x=x_0} = f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0)y'(x_0)$$

$$-\frac{\varphi_x(x_0, y_0)}{\varphi_y(x_0, y_0)}$$

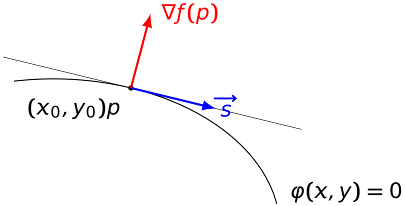
条件极值（二元函数 + 一个附加条件）

问题 求解二元函数 $u = f(x, y)$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的极值点。

假设 $\nabla\varphi \neq 0$。

$p(x_0, y_0)$是条件极值点

$\Rightarrow \nabla f(x_0, y_0) \perp \overrightarrow{s}$



$$0 = \frac{d}{dx} f(x, y(x))\bigg|_{x=x_0} = f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0)y'(x_0)$$

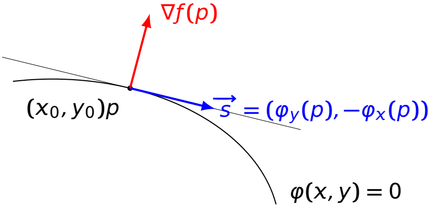
$$= \nabla f(x_0, y_0) \cdot \left(1, -\frac{\varphi_x(x_0, y_0)}{\varphi_y(x_0, y_0)}\right)$$

条件极值（二元函数 + 一个附加条件）

问题 求解二元函数 $u=f(x,y)$ 在附加条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值点。假设 $\nabla\varphi\neq 0$。

$p(x_0,y_0)$是条件极值点

$\Rightarrow\ \nabla f(x_0,y_0)\perp\overrightarrow{s}$



$$0=\frac{d}{dx}f(x,y(x))\Big|_{x=x_0}=f_x(x_0,y_0)+f_y(x_0,y_0)y'(x_0)$$

$$=\nabla f(x_0,y_0)\cdot\left(1,-\frac{\varphi_x(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)}\right)$$

条件极值（二元函数 + 一个附加条件）

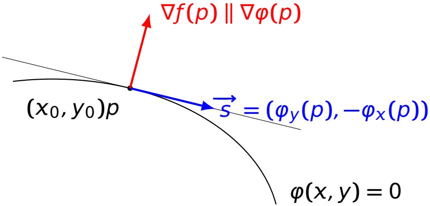
问题 求解二元函数 $u = f(x, y)$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的极值点。

假设 $\nabla\varphi \neq 0$。

$$p(x_0, y_0)\text{是条件极值点}$$

$$\Rightarrow \nabla f(x_0, y_0) \perp \overrightarrow{s}$$

$$\Rightarrow \nabla f(x_0, y_0) \parallel \nabla\varphi(x_0, y_0)$$



$$0 = \frac{d}{dx} f(x, y(x))\Big|_{x=x_0} = f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0)y'(x_0)$$

$$= \nabla f(x_0, y_0) \cdot (1, -\frac{\varphi_x(x_0, y_0)}{\varphi_y(x_0, y_0)})$$

条件极值（二元函数 + 一个附加条件）

问题 求解二元函数 $u = f(x, y)$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的极值点。

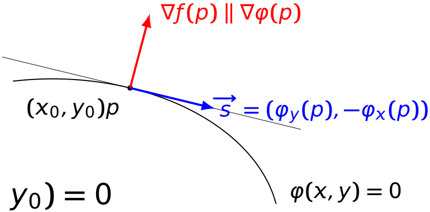
假设 $\nabla\varphi \neq 0$。

$p(x_0, y_0)$是条件极值点

$\Rightarrow \nabla f(x_0, y_0) \perp \overrightarrow{s}$

$\Rightarrow \nabla f(x_0, y_0) \parallel \nabla\varphi(x_0, y_0)$

$\Rightarrow \exists\lambda$ 使得：$\lambda\nabla\varphi(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) = 0$



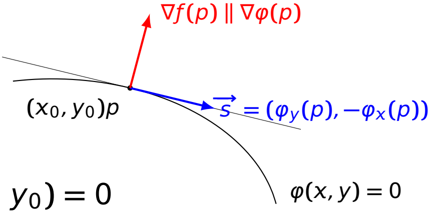
$$0 = \frac{d}{dx} f(x, y(x))\Big|_{x=x_0} = f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0)y'(x_0)$$

$$= \nabla f(x_0, y_0) \cdot \left(1, -\frac{\varphi_x(x_0, y_0)}{\varphi_y(x_0, y_0)}\right)$$

条件极值（二元函数 + 一个附加条件）

问题 求解二元函数 $u = f(x, y)$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的极值点。

假设 $\nabla\varphi \neq 0$。



$p(x_0, y_0)$是条件极值点

$\Rightarrow$ $\nabla f(x_0, y_0) \perp \overrightarrow{s}$

$\Rightarrow$ $\nabla f(x_0, y_0) \parallel \nabla\varphi(x_0, y_0)$

$\Rightarrow$ $\exists\lambda$ 使得：$\lambda\nabla\varphi(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) = 0$

$\Rightarrow$ $\exists\lambda$ 使得：$\nabla(f + \lambda\varphi)(x_0, y_0) = 0$

$$0 = \frac{d}{dx}f(x, y(x))\Big|_{x=x_0} = f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0)y'(x_0)$$

$$= \nabla f(x_0, y_0) \cdot (1, -\frac{\varphi_x(x_0, y_0)}{\varphi_y(x_0, y_0)})$$

问题 求解二元函数 $u = f(x, y)$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的极值点。

假设 $\nabla\varphi \neq 0$。

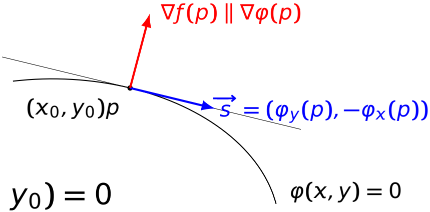
$p(x_0, y_0)$是条件极值点

$\Rightarrow$ $\nabla f(x_0, y_0) \perp \overrightarrow{s}$

$\Rightarrow$ $\nabla f(x_0, y_0) \parallel \nabla\varphi(x_0, y_0)$

$\Rightarrow$ $\exists\lambda$ 使得：$\lambda\nabla\varphi(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) = 0$

$\Rightarrow$ $\exists\lambda$ 使得：$\nabla(f + \lambda\varphi)(x_0, y_0) = 0$



注 $L := f + \lambda\varphi$ 称为拉格朗日函数。

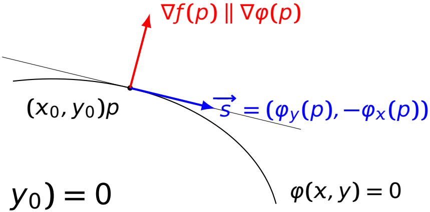
$$0 = \frac{d}{dx} f(x, y(x))\Big|_{x=x_0} = f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0)y'(x_0)$$

$$= \nabla f(x_0, y_0) \cdot \left(1, -\frac{\varphi_x(x_0, y_0)}{\varphi_y(x_0, y_0)}\right)$$

条件极值（二元函数 + 一个附加条件）

问题 求解二元函数 $u = f(x, y)$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的极值点。

假设 $\nabla\varphi \neq 0$。



$p(x_0, y_0)$是条件极值点

$\Rightarrow$ $\nabla f(x_0, y_0) \perp \vec{s}$

$\Rightarrow$ $\nabla f(x_0, y_0) \parallel \nabla\varphi(x_0, y_0)$

$\Rightarrow$ $\exists\lambda$ 使得：$\lambda\nabla\varphi(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) = 0$

$\Rightarrow$ $\exists\lambda$ 使得：$\nabla(f + \lambda\varphi)(x_0, y_0) = 0$

注 $L := f + \lambda\varphi$ 称为拉格朗日函数。条件极值点蕴含在 $\begin{cases} \nabla L = 0 \\ \varphi = 0 \end{cases}$ 的解中

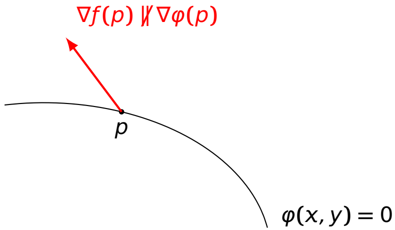
$$0 = \frac{d}{dx} f(x, y(x))\Big|_{x=x_0} = f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0)y'(x_0)$$

$$= \nabla f(x_0, y_0) \cdot \left(1, -\frac{\varphi_x(x_0, y_0)}{\varphi_y(x_0, y_0)}\right)$$

条件极值（二元函数 + 一个附加条件）

图示：为什么在条件极值点 $p(x_0, y_0)$ 处，成立 $\nabla f(p) \parallel \nabla \varphi(p)$。

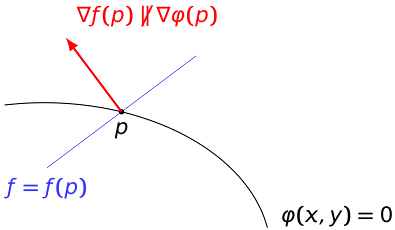
反证法。



条件极值（二元函数 + 一个附加条件）

图示：为什么在条件极值点 $p(x_0, y_0)$ 处，成立 $\nabla f(p) \parallel \nabla\varphi(p)$。

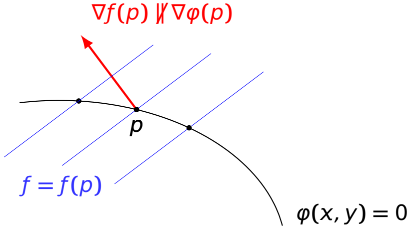
反证法。



条件极值（二元函数 + 一个附加条件）

图示：为什么在条件极值点 $p(x_0, y_0)$ 处，成立 $\nabla f(p) \parallel \nabla \varphi(p)$。

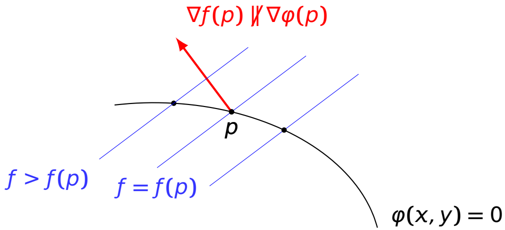
反证法。



条件极值（二元函数 + 一个附加条件）

图示：为什么在条件极值点 $p(x_0, y_0)$ 处，成立 $\nabla f(p) \parallel \nabla\varphi(p)$。

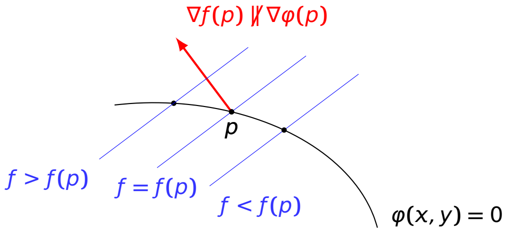
反证法。



条件极值（二元函数 + 一个附加条件）

图示：为什么在条件极值点 $p(x_0, y_0)$ 处，成立 $\nabla f(p) \parallel \nabla\varphi(p)$。

反证法。



条件极值（二元函数 + 一个附加条件）

问题 求解二元函数 $u = f(x, y)$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的极值点。

求解步骤（拉格朗日乘数法）

1. 构造拉格朗日函数 $L = f + \lambda\varphi$，其中 λ 是待定常数。
2. 求解方程组

$$\begin{cases} \nabla L = 0 \\ \varphi = 0 \end{cases}$$

3. 条件极值点（如果存在的话）包含在上述解 $\{(x, y)\}$ 中。

（至于如何判断解是否条件极值点，需具体问题具体分析。）

条件极值（二元函数 + 一个附加条件）

问题 求解二元函数 $u = f(x, y)$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的极值点。

求解步骤（拉格朗日乘数法）

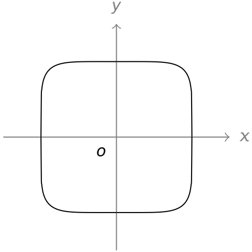
1. 构造拉格朗日函数 $L = f + \lambda\varphi$，其中 λ 是待定常数。
2. 求解方程组

$$\begin{cases} \nabla L = 0 \\ \varphi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_x = f_x + \lambda\varphi_x = 0 \\ L_y = f_y + \lambda\varphi_y = 0 \\ \varphi = 0 \end{cases}$$

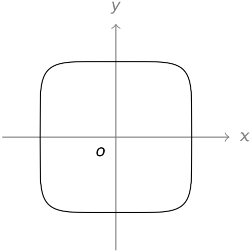
3. 条件极值点（如果存在的话）包含在上述解 $\{(x, y)\}$ 中。

   （至于如何判断解是否条件极值点，需具体问题具体分析。）

例 求平面曲线 $x^6 + y^6 = 1$ 上的点，到原点的距离分别是最远和最近。

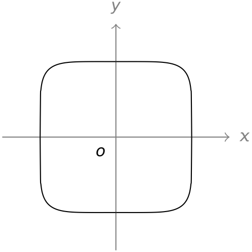


例 求平面曲线 $x^6 + y^6 = 1$ 上的点，到原点的距离分别是最远和最近。



解 等价求：$z = f(x, y) = x^2 + y^2$ 在条件 $\varphi(x, y) = x^6 + y^6 - 1 = 0$ 下的最值。

例 求平面曲线 $x^6 + y^6 = 1$ 上的点，到原点的距离分别是最远和最近。



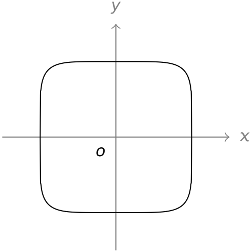
解 等价求：$z = f(x, y) = x^2 + y^2$ 在条件 $\varphi(x, y) = x^6 + y^6 - 1 = 0$ 下的最值。

1. 构造拉格朗日函数：

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y) =$$

2. 求解方程组：
$$\begin{cases} L_x & = 0 \\ L_y & = 0 \\ \varphi = x^6 + y^6 - 1 & = 0 \end{cases}$$

例 求平面曲线 $x^6 + y^6 = 1$ 上的点，到原点的距离分别是最远和最近。



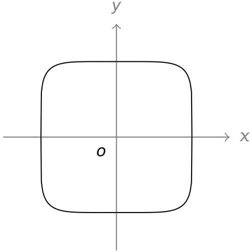
解 等价求：$z = f(x, y) = x^2 + y^2$ 在条件 $\varphi(x, y) = x^6 + y^6 - 1 = 0$ 下的最值。

1. 构造拉格朗日函数：

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(x^6 + y^6 - 1)$$

2. 求解方程组：
$$\begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ \varphi = x^6 + y^6 - 1 = 0 \end{cases}$$

例 求平面曲线 $x^6+y^6=1$ 上的点，到原点的距离分别是最远和最近。



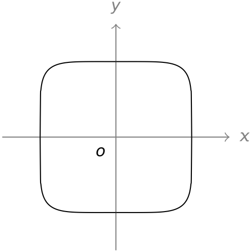
解 等价求：$z=f(x,y)=x^2+y^2$ 在条件 $\varphi(x,y)=x^6+y^6-1=0$ 下的最值。

1. 构造拉格朗日函数：

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)=x^2+y^2+\lambda(x^6+y^6-1)$$

2. 求解方程组：
$$\begin{cases} L_x=2x+6\lambda x^5=0 \\ L_y \qquad\qquad\qquad =0 \\ \varphi=x^6+y^6-1=0 \end{cases}$$

例 求平面曲线 $x^6+y^6=1$ 上的点，到原点的距离分别是最远和最近。



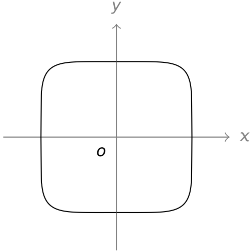
解 等价求：$z=f(x,y)=x^2+y^2$ 在条件 $\varphi(x,y)=x^6+y^6-1=0$ 下的最值。

1. 构造拉格朗日函数：

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)=x^2+y^2+\lambda(x^6+y^6-1)$$

2. 求解方程组：
$$\begin{cases} L_x=2x+6\lambda x^5=0 \\ L_y=2y+6\lambda y^5=0 \\ \varphi=x^6+y^6-1=0 \end{cases}$$

例 求平面曲线 $x^6 + y^6 = 1$ 上的点，到原点的距离分别是最远和最近。



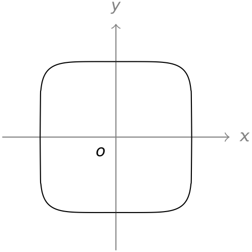
解 等价求：$z = f(x, y) = x^2 + y^2$ 在条件 $\varphi(x, y) = x^6 + y^6 - 1 = 0$ 下的最值。

1. 构造拉格朗日函数：

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(x^6 + y^6 - 1)$$

2. 求解方程组：$\begin{cases} L_x = 2x + 6\lambda x^5 = 0 \\ L_y = 2y + 6\lambda y^5 = 0 \\ \varphi = x^6 + y^6 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1 + 3\lambda x^4) = 0 \\ y(1 + 3\lambda y^4) = 0 \\ x^6 + y^6 - 1 = 0 \end{cases}$

例 求平面曲线 $x^6 + y^6 = 1$ 上的点，到原点的距离分别是最远和最近。



解 等价求：$z = f(x, y) = x^2 + y^2$ 在条件 $\varphi(x, y) = x^6 + y^6 - 1 = 0$ 下的最值。

1. 构造拉格朗日函数：

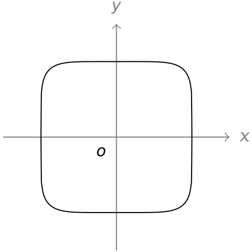
$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(x^6 + y^6 - 1)$$

2. 求解方程组：

$$\begin{cases} L_x = 2x + 6\lambda x^5 = 0 \\ L_y = 2y + 6\lambda y^5 = 0 \\ \varphi = x^6 + y^6 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1 + 3\lambda x^4) = 0 \\ y(1 + 3\lambda y^4) = 0 \\ x^6 + y^6 - 1 = 0 \end{cases}$$

所以 $\begin{cases} x = 0 \\ 1 + 3\lambda y^4 = 0 \\ y^6 - 1 = 0 \end{cases}$

例 求平面曲线 $x^6+y^6=1$ 上的点，到原点的距离分别是最远和最近。



解 等价求：$z=f(x,y)=x^2+y^2$ 在条件 $\varphi(x,y)=x^6+y^6-1=0$ 下的最值。

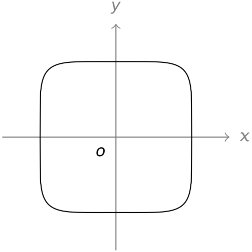
1. 构造拉格朗日函数：

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)=x^2+y^2+\lambda(x^6+y^6-1)$$

2. 求解方程组：
$$\begin{cases} L_x=2x+6\lambda x^5=0 \\ L_y=2y+6\lambda y^5=0 \\ \varphi=x^6+y^6-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1+3\lambda x^4)=0 \\ y(1+3\lambda y^4)=0 \\ x^6+y^6-1=0 \end{cases}$$

所以 $\begin{cases} x=0 \\ 1+3\lambda y^4=0 \\ y^6-1=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 1+3\lambda x^4=0 \\ y=0 \\ x^6-1=0 \end{cases}$

例 求平面曲线 $x^6+y^6=1$ 上的点，到原点的距离分别是最远和最近。



解 等价求：$z=f(x,y)=x^2+y^2$ 在条件 $\varphi(x,y)=x^6+y^6-1=0$ 下的最值。

1. 构造拉格朗日函数：

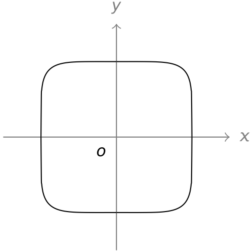
$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)=x^2+y^2+\lambda(x^6+y^6-1)$$

2. 求解方程组：

$$\begin{cases} L_x=2x+6\lambda x^5=0 \\ L_y=2y+6\lambda y^5=0 \\ \varphi=x^6+y^6-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1+3\lambda x^4)=0 \\ y(1+3\lambda y^4)=0 \\ x^6+y^6-1=0 \end{cases}$$

所以 $\begin{cases} x=0 \\ 1+3\lambda y^4=0 \\ y^6-1=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 1+3\lambda x^4=0 \\ y=0 \\ x^6-1=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 1+3\lambda x^4=0 \\ 1+3\lambda y^4=0 \\ x^6+y^6-1=0 \end{cases}$

例 求平面曲线 $x^6 + y^6 = 1$ 上的点，到原点的距离分别是最远和最近。



解 等价求：$z = f(x, y) = x^2 + y^2$ 在条件 $\varphi(x, y) = x^6 + y^6 - 1 = 0$ 下的最值。

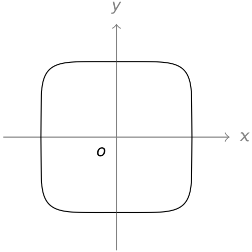
1. 构造拉格朗日函数：

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(x^6 + y^6 - 1)$$

2. 求解方程组：$\begin{cases} L_x = 2x + 6\lambda x^5 = 0 \\ L_y = 2y + 6\lambda y^5 = 0 \\ \varphi = x^6 + y^6 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1 + 3\lambda x^4) = 0 \\ y(1 + 3\lambda y^4) = 0 \\ x^6 + y^6 - 1 = 0 \end{cases}$

所以 $\begin{cases} x = 0 \\ 1 + 3\lambda y^4 = 0 \\ y^6 - 1 = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 1 + 3\lambda x^4 = 0 \\ y = 0 \\ x^6 - 1 = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 1 + 3\lambda x^4 = 0 \\ 1 + 3\lambda y^4 = 0 \\ x^6 + y^6 - 1 = 0 \end{cases}$

解 (x, y)			



例 求平面曲线 $x^6+y^6=1$ 上的点，到原点的距离分别是最远和最近。

解 等价求：$z=f(x,y)=x^2+y^2$ 在条件 $\varphi(x,y)=x^6+y^6-1=0$ 下的最值。

1. 构造拉格朗日函数：

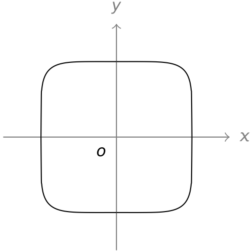
$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)=x^2+y^2+\lambda(x^6+y^6-1)$$

2. 求解方程组：$\begin{cases} L_x=2x+6\lambda x^5=0 \\ L_y=2y+6\lambda y^5=0 \\ \varphi=x^6+y^6-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1+3\lambda x^4)=0 \\ y(1+3\lambda y^4)=0 \\ x^6+y^6-1=0 \end{cases}$

所以 $\begin{cases} x=0 \\ 1+3\lambda y^4=0 \\ y^6-1=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 1+3\lambda x^4=0 \\ y=0 \\ x^6-1=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 1+3\lambda x^4=0 \\ 1+3\lambda y^4=0 \\ x^6+y^6-1=0 \end{cases}$

解 (x,y)	$(0,\pm 1)$		

例 求平面曲线 $x^6 + y^6 = 1$ 上的点，到原点的距离分别是最远和最近。



解 等价求：$z = f(x, y) = x^2 + y^2$ 在条件 $\varphi(x, y) = x^6 + y^6 - 1 = 0$ 下的最值。

1. 构造拉格朗日函数：

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(x^6 + y^6 - 1)$$

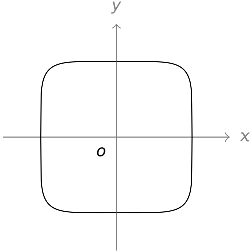
2. 求解方程组：

$$\begin{cases} L_x = 2x + 6\lambda x^5 = 0 \\ L_y = 2y + 6\lambda y^5 = 0 \\ \varphi = x^6 + y^6 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1 + 3\lambda x^4) = 0 \\ y(1 + 3\lambda y^4) = 0 \\ x^6 + y^6 - 1 = 0 \end{cases}$$

所以 $\begin{cases} x = 0 \\ 1 + 3\lambda y^4 = 0 \\ y^6 - 1 = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 1 + 3\lambda x^4 = 0 \\ y = 0 \\ x^6 - 1 = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 1 + 3\lambda x^4 = 0 \\ 1 + 3\lambda y^4 = 0 \\ x^6 + y^6 - 1 = 0 \end{cases}$

解 (x, y)	$(0, \pm 1)$	$(\pm 1, 0)$	

例 求平面曲线 $x^6 + y^6 = 1$ 上的点，到原点的距离分别是最远和最近。



解 等价求：$z = f(x, y) = x^2 + y^2$ 在条件 $\varphi(x, y) = x^6 + y^6 - 1 = 0$ 下的最值。

1. 构造拉格朗日函数：

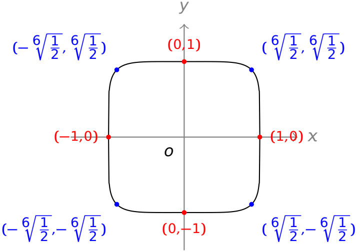
$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(x^6 + y^6 - 1)$$

2. 求解方程组：$\begin{cases} L_x = 2x + 6\lambda x^5 = 0 \\ L_y = 2y + 6\lambda y^5 = 0 \\ \varphi = x^6 + y^6 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1 + 3\lambda x^4) = 0 \\ y(1 + 3\lambda y^4) = 0 \\ x^6 + y^6 - 1 = 0 \end{cases}$

所以 $\begin{cases} x = 0 \\ 1 + 3\lambda y^4 = 0 \\ y^6 - 1 = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 1 + 3\lambda x^4 = 0 \\ y = 0 \\ x^6 - 1 = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 1 + 3\lambda x^4 = 0 \\ 1 + 3\lambda y^4 = 0 \\ x^6 + y^6 - 1 = 0 \end{cases}$

解 (x, y)	$(0, \pm 1)$	$(\pm 1, 0)$	$(\pm \sqrt[6]{1/2}, \pm \sqrt[6]{1/2})$

例 求平面曲线 $x^6+y^6=1$ 上的点，到原点的距离分别是最远和最近。



解 等价求：$z=f(x,y)=x^2+y^2$ 在条件 $\varphi(x,y)=x^6+y^6-1=0$ 下的最值。

1. 构造拉格朗日函数：

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)=x^2+y^2+\lambda(x^6+y^6-1)$$

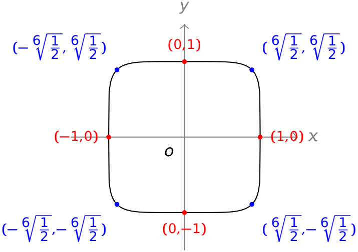
2. 求解方程组：

$$\begin{cases} L_x=2x+6\lambda x^5=0 \\ L_y=2y+6\lambda y^5=0 \\ \varphi=x^6+y^6-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1+3\lambda x^4)=0 \\ y(1+3\lambda y^4)=0 \\ x^6+y^6-1=0 \end{cases}$$

所以 $\begin{cases} x=0 \\ 1+3\lambda y^4=0 \\ y^6-1=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 1+3\lambda x^4=0 \\ y=0 \\ x^6-1=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 1+3\lambda x^4=0 \\ 1+3\lambda y^4=0 \\ x^6+y^6-1=0 \end{cases}$

解 (x,y)	$(0,\pm1)$	$(\pm1,0)$	$(\pm\sqrt[6]{1/2},\pm\sqrt[6]{1/2})$

例 求平面曲线 $x^6+y^6=1$ 上的点，到原点的距离分别是最远和最近。



解 等价求：$z=f(x,y)=x^2+y^2$ 在条件 $\varphi(x,y)=x^6+y^6-1=0$ 下的最值。

1. 构造拉格朗日函数：

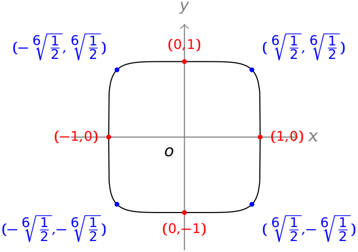
$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)=x^2+y^2+\lambda(x^6+y^6-1)$$

2. 求解方程组：
$$\begin{cases} L_x=2x+6\lambda x^5=0 \\ L_y=2y+6\lambda y^5=0 \\ \varphi=x^6+y^6-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1+3\lambda x^4)=0 \\ y(1+3\lambda y^4)=0 \\ x^6+y^6-1=0 \end{cases}$$

所以 $\begin{cases} x=0 \\ 1+3\lambda y^4=0 \\ y^6-1=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 1+3\lambda x^4=0 \\ y=0 \\ x^6-1=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 1+3\lambda x^4=0 \\ 1+3\lambda y^4=0 \\ x^6+y^6-1=0 \end{cases}$

解 (x,y)	$(0,\pm1)$	$(\pm1,0)$	$(\pm\sqrt[6]{1/2},\pm\sqrt[6]{1/2})$
函数值 $f(x,y)$	1	1	$2\sqrt[3]{1/2}$

例 求平面曲线 $x^6 + y^6 = 1$ 上的点，到原点的距离分别是最远和最近。



解 等价求：$z = f(x, y) = x^2 + y^2$ 在条件 $\varphi(x, y) = x^6 + y^6 - 1 = 0$ 下的最值。

1. 构造拉格朗日函数：

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(x^6 + y^6 - 1)$$

2. 求解方程组：$\begin{cases} L_x = 2x + 6\lambda x^5 = 0 \\ L_y = 2y + 6\lambda y^5 = 0 \\ \varphi = x^6 + y^6 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1 + 3\lambda x^4) = 0 \\ y(1 + 3\lambda y^4) = 0 \\ x^6 + y^6 - 1 = 0 \end{cases}$

所以 $\begin{cases} x = 0 \\ 1 + 3\lambda y^4 = 0 \\ y^6 - 1 = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 1 + 3\lambda x^4 = 0 \\ y = 0 \\ x^6 - 1 = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 1 + 3\lambda x^4 = 0 \\ 1 + 3\lambda y^4 = 0 \\ x^6 + y^6 - 1 = 0 \end{cases}$

解 (x, y)	$(0, \pm 1)$	$(\pm 1, 0)$	$(\pm\sqrt[6]{1/2}, \pm\sqrt[6]{1/2})$
函数值 $f(x, y)$	1	1	$2\sqrt[3]{1/2} \approx 1.59$

条件极值（三元函数 + 一个附加条件）

问题 求解三元函数 $u = f(x, y, z)$ 在附加条件 $\varphi(x, y, z) = 0$ 下的极值点。

求解步骤（拉格朗日乘数法）

1. 构造拉格朗日函数 $L = f + \lambda\varphi$，其中 λ 是待定常数。
2. 求解方程组

$$\begin{cases} L_x = f_x + \lambda\varphi_x = 0 \\ L_y = f_y + \lambda\varphi_y = 0 \\ L_z = f_z + \lambda\varphi_z = 0 \\ \varphi = 0 \end{cases}$$

3. 条件极值点（如果存在的话）包含在上述解 $\{(x, y, z)\}$ 中。

（至于如何判断解是否条件极值点，需具体问题具体分析。）

例 设球壳 $x^2+y^2+z^2=4$ 的密度函数是 $\rho=3+xz+y^2$。求出密度最大和最小的点。

例 设球壳 $x^2+y^2+z^2=4$ 的密度函数是 $\rho=3+xz+y^2$。求出密度最大和最小的点。

解 求：$\rho(x,y)=3+xz+y^2$ 在条件 $\varphi(x,y)=x^2+y^2+z^2-4=0$ 下的最值。

例 设球壳 $x^2+y^2+z^2=4$ 的密度函数是 $\rho=3+xz+y^2$。求出密度最大和最小的点。

解 求：$\rho(x,y)=3+xz+y^2$ 在条件 $\varphi(x,y)=x^2+y^2+z^2-4=0$ 下的最值。

1. 拉格朗日函数：$L=\rho+\lambda\varphi=$

2. 求解：$\begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ L_z = 0 \\ \varphi = x^2+y^2+z^2-4=0 \end{cases}$

例 设球壳 $x^2+y^2+z^2=4$ 的密度函数是 $\rho=3+xz+y^2$。求出密度最大和最小的点。

解 求：$\rho(x,y)=3+xz+y^2$ 在条件 $\varphi(x,y)=x^2+y^2+z^2-4=0$ 下的最值。

1. 拉格朗日函数：$L=\rho+\lambda\varphi=3+xz+y^2+\lambda(x^2+y^2+z^2-4)$

2. 求解：$\begin{cases} L_x \qquad\qquad = 0 \\ L_y \qquad\qquad = 0 \\ L_z \qquad\qquad = 0 \\ \varphi = x^2+y^2+z^2-4=0 \end{cases}$

例 设球壳 $x^2+y^2+z^2=4$ 的密度函数是 $\rho=3+xz+y^2$。求出密度最大和最小的点。

解 求：$\rho(x,y)=3+xz+y^2$ 在条件 $\varphi(x,y)=x^2+y^2+z^2-4=0$ 下的最值。

1. 拉格朗日函数：$L=\rho+\lambda\varphi=3+xz+y^2+\lambda(x^2+y^2+z^2-4)$

2. 求解：$\begin{cases} L_x=z+2\lambda x=0 \\ L_y \qquad\qquad\qquad =0 \\ L_z \qquad\qquad\quad =0 \\ \varphi=x^2+y^2+z^2-4=0 \end{cases}$

例 设球壳 $x^2+y^2+z^2=4$ 的密度函数是 $\rho=3+xz+y^2$。求出密度最大和最小的点。

解 求：$\rho(x,y)=3+xz+y^2$ 在条件 $\varphi(x,y)=x^2+y^2+z^2-4=0$ 下的最值。

1. 拉格朗日函数：$L=\rho+\lambda\varphi=3+xz+y^2+\lambda(x^2+y^2+z^2-4)$

2. 求解：$\begin{cases} L_x=z+2\lambda x=0 \\ L_y=2y+2\lambda y=0 \\ L_z \qquad\qquad\quad =0 \\ \varphi=x^2+y^2+z^2-4=0 \end{cases}$

例 设球壳 $x^2+y^2+z^2=4$ 的密度函数是 $\rho=3+xz+y^2$。求出密度最大和最小的点。

解 求：$\rho(x,y)=3+xz+y^2$ 在条件 $\varphi(x,y)=x^2+y^2+z^2-4=0$ 下的最值。

1. 拉格朗日函数：$L=\rho+\lambda\varphi=3+xz+y^2+\lambda(x^2+y^2+z^2-4)$

2. 求解：$\begin{cases} L_x=z+2\lambda x=0 \\ L_y=2y+2\lambda y=0 \\ L_z=x+2\lambda z=0 \\ \varphi=x^2+y^2+z^2-4=0 \end{cases}$

例 设球壳 $x^2+y^2+z^2=4$ 的密度函数是 $\rho=3+xz+y^2$。求出密度最大和最小的点。

解 求：$\rho(x,y)=3+xz+y^2$ 在条件 $\varphi(x,y)=x^2+y^2+z^2-4=0$ 下的最值。

1. 拉格朗日函数：$L=\rho+\lambda\varphi=3+xz+y^2+\lambda(x^2+y^2+z^2-4)$

2. 求解：
$$\begin{cases} L_x=z+2\lambda x=0 \\ L_y=2y+2\lambda y=0 \\ L_z=x+2\lambda z=0 \\ \varphi=x^2+y^2+z^2-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=-2\lambda x \\ y(1+\lambda)=0 \\ x=-2\lambda z \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases}$$

例 设球壳 $x^2+y^2+z^2=4$ 的密度函数是 $\rho=3+xz+y^2$。求出密度最大和最小的点。

解 求：$\rho(x,y)=3+xz+y^2$ 在条件 $\varphi(x,y)=x^2+y^2+z^2-4=0$ 下的最值。

1. 拉格朗日函数：$L=\rho+\lambda\varphi=3+xz+y^2+\lambda(x^2+y^2+z^2-4)$

2. 求解：
$$\begin{cases} L_x=z+2\lambda x=0 \\ L_y=2y+2\lambda y=0 \\ L_z=x+2\lambda z=0 \\ \varphi=x^2+y^2+z^2-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=-2\lambda x \quad \Rightarrow \quad z=4\lambda^2 z \\ y(1+\lambda)=0 \\ x=-2\lambda z \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases}$$

例 设球壳 $x^2+y^2+z^2=4$ 的密度函数是 $\rho=3+xz+y^2$。求出密度最大和最小的点。

解 求：$\rho(x,y)=3+xz+y^2$ 在条件 $\varphi(x,y)=x^2+y^2+z^2-4=0$ 下的最值。

1. 拉格朗日函数：$L=\rho+\lambda\varphi=3+xz+y^2+\lambda(x^2+y^2+z^2-4)$

2. 求解：$\begin{cases} L_x=z+2\lambda x=0 \\ L_y=2y+2\lambda y=0 \\ L_z=x+2\lambda z=0 \\ \varphi=x^2+y^2+z^2-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=-2\lambda x \quad \Rightarrow \quad z=4\lambda^2 z \\ y(1+\lambda)=0 \\ x=-2\lambda z \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases}$

- 若 $z=0$，则

例 设球壳 $x^2+y^2+z^2=4$ 的密度函数是 $\rho=3+xz+y^2$。求出密度最大和最小的点。

解 求：$\rho(x,y)=3+xz+y^2$ 在条件 $\varphi(x,y)=x^2+y^2+z^2-4=0$ 下的最值。

1. 拉格朗日函数：$L=\rho+\lambda\varphi=3+xz+y^2+\lambda(x^2+y^2+z^2-4)$

2. 求解：
$$\begin{cases} L_x=z+2\lambda x=0 \\ L_y=2y+2\lambda y=0 \\ L_z=x+2\lambda z=0 \\ \varphi=x^2+y^2+z^2-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=-2\lambda x \quad \Rightarrow \quad z=4\lambda^2 z \\ y(1+\lambda)=0 \\ x=-2\lambda z \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases}$$

- 若 $z=0$，则$x=0$，

例 设球壳 $x^2+y^2+z^2=4$ 的密度函数是 $\rho=3+xz+y^2$。求出密度最大和最小的点。

解 求：$\rho(x,y)=3+xz+y^2$ 在条件 $\varphi(x,y)=x^2+y^2+z^2-4=0$ 下的最值。

1. 拉格朗日函数：$L=\rho+\lambda\varphi=3+xz+y^2+\lambda(x^2+y^2+z^2-4)$
2. 求解：
$$\begin{cases} L_x=z+2\lambda x=0 \\ L_y=2y+2\lambda y=0 \\ L_z=x+2\lambda z=0 \\ \varphi=x^2+y^2+z^2-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=-2\lambda x \quad\Rightarrow\quad z=4\lambda^2 z \\ y(1+\lambda)=0 \\ x=-2\lambda z \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases}$$

- 若 $z=0$，则$x=0$，$y=\pm2$，

例 设球壳 $x^2+y^2+z^2=4$ 的密度函数是 $\rho=3+xz+y^2$。求出密度最大和最小的点。

解 求：$\rho(x,y)=3+xz+y^2$ 在条件 $\varphi(x,y)=x^2+y^2+z^2-4=0$ 下的最值。

1. 拉格朗日函数：$L=\rho+\lambda\varphi=3+xz+y^2+\lambda(x^2+y^2+z^2-4)$

2. 求解：$\begin{cases} L_x=z+2\lambda x=0 \\ L_y=2y+2\lambda y=0 \\ L_z=x+2\lambda z=0 \\ \varphi=x^2+y^2+z^2-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=-2\lambda x \quad \Rightarrow \quad z=4\lambda^2 z \\ y(1+\lambda)=0 \\ x=-2\lambda z \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases}$

- 若 $z=0$，则$x=0$，$y=\pm 2$，所以此时 $(x,y,z)=(0,\pm 2,0)$

例 设球壳 $x^2+y^2+z^2=4$ 的密度函数是 $\rho=3+xz+y^2$。求出密度最大和最小的点。

解 求：$\rho(x,y)=3+xz+y^2$ 在条件 $\varphi(x,y)=x^2+y^2+z^2-4=0$ 下的最值。

1. 拉格朗日函数：$L=\rho+\lambda\varphi=3+xz+y^2+\lambda(x^2+y^2+z^2-4)$

2. 求解：$\begin{cases} L_x=z+2\lambda x=0 \\ L_y=2y+2\lambda y=0 \\ L_z=x+2\lambda z=0 \\ \varphi=x^2+y^2+z^2-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=-2\lambda x \quad \Rightarrow \quad z=4\lambda^2 z \\ y(1+\lambda)=0 \\ x=-2\lambda z \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases}$

- 若 $z=0$，则$x=0$，$y=\pm 2$，所以此时 $(x,y,z)=(0,\pm 2,0)$
- 若 $z\neq 0$，则

例 设球壳 $x^2+y^2+z^2=4$ 的密度函数是 $\rho=3+xz+y^2$。求出密度最大和最小的点。

解 求：$\rho(x,y)=3+xz+y^2$ 在条件 $\varphi(x,y)=x^2+y^2+z^2-4=0$ 下的最值。

1. 拉格朗日函数：$L=\rho+\lambda\varphi=3+xz+y^2+\lambda(x^2+y^2+z^2-4)$

2. 求解：$\begin{cases} L_x=z+2\lambda x=0 \\ L_y=2y+2\lambda y=0 \\ L_z=x+2\lambda z=0 \\ \varphi=x^2+y^2+z^2-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=-2\lambda x \quad \Rightarrow \quad z=4\lambda^2 z \\ y(1+\lambda)=0 \\ x=-2\lambda z \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases}$

- 若 $z=0$，则$x=0$，$y=\pm 2$，所以此时 $(x,y,z)=(0,\pm 2,0)$
- 若 $z\neq 0$，则$\lambda=\pm\frac{1}{2}$，

例 设球壳 $x^2+y^2+z^2=4$ 的密度函数是 $\rho=3+xz+y^2$。求出密度最大和最小的点。

解 求：$\rho(x,y)=3+xz+y^2$ 在条件 $\varphi(x,y)=x^2+y^2+z^2-4=0$ 下的最值。

1. 拉格朗日函数：$L=\rho+\lambda\varphi=3+xz+y^2+\lambda(x^2+y^2+z^2-4)$

2. 求解：$\begin{cases} L_x=z+2\lambda x=0 \\ L_y=2y+2\lambda y=0 \\ L_z=x+2\lambda z=0 \\ \varphi=x^2+y^2+z^2-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=-2\lambda x \quad \Rightarrow \quad z=4\lambda^2 z \\ y(1+\lambda)=0 \\ x=-2\lambda z \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases}$

- 若 $z=0$，则$x=0$，$y=\pm2$，所以此时 $(x,y,z)=(0,\pm2,0)$
- 若 $z\neq0$，则$\lambda=\pm\frac{1}{2}$，$y=0$，

例 设球壳 $x^2+y^2+z^2=4$ 的密度函数是 $\rho=3+xz+y^2$。求出密度最大和最小的点。

解 求：$\rho(x,y)=3+xz+y^2$ 在条件 $\varphi(x,y)=x^2+y^2+z^2-4=0$ 下的最值。

1. 拉格朗日函数：$L=\rho+\lambda\varphi=3+xz+y^2+\lambda(x^2+y^2+z^2-4)$

2. 求解：
$$\begin{cases} L_x=z+2\lambda x=0 \\ L_y=2y+2\lambda y=0 \\ L_z=x+2\lambda z=0 \\ \varphi=x^2+y^2+z^2-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=-2\lambda x \quad \Rightarrow \quad z=4\lambda^2 z \\ y(1+\lambda)=0 \\ x=-2\lambda z \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases}$$

- 若 $z=0$，则$x=0$，$y=\pm 2$，所以此时 $(x,y,z)=(0,\pm 2,0)$
- 若 $z\neq 0$，则$\lambda=\pm\frac{1}{2}$，$y=0$，$x=\mp z$，所以此时 $(x,y,z)=(\pm\sqrt{2},0,\pm\sqrt{2}),(\pm\sqrt{2},0,\mp\sqrt{2})$

例 设球壳 $x^2+y^2+z^2=4$ 的密度函数是 $\rho=3+xz+y^2$。求出密度最大和最小的点。

解 求：$\rho(x,y)=3+xz+y^2$ 在条件 $\varphi(x,y)=x^2+y^2+z^2-4=0$ 下的最值。

1. 拉格朗日函数：$L=\rho+\lambda\varphi=3+xz+y^2+\lambda(x^2+y^2+z^2-4)$

2. 求解：$\begin{cases} L_x=z+2\lambda x=0 \\ L_y=2y+2\lambda y=0 \\ L_z=x+2\lambda z=0 \\ \varphi=x^2+y^2+z^2-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=-2\lambda x \quad\Rightarrow\quad z=4\lambda^2 z \\ y(1+\lambda)=0 \\ x=-2\lambda z \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases}$

- 若 $z=0$，则$x=0$，$y=\pm2$，所以此时 $(x,y,z)=(0,\pm2,0)$
- 若 $z\neq0$，则$\lambda=\pm\frac{1}{2}$，$y=0$，$x=\mp z$，所以此时 $(x,y,z)=(\pm\sqrt{2},0,\pm\sqrt{2}),(\pm\sqrt{2},0,\mp\sqrt{2})$

解 (x,y,z)	$(0,\pm2,0)$	$(\pm\sqrt{2},0,\pm\sqrt{2})$	$(\pm\sqrt{2},0,\mp\sqrt{2})$
$\rho(x,y,z)$			

例 设球壳 $x^2+y^2+z^2=4$ 的密度函数是 $\rho=3+xz+y^2$。求出密度最大和最小的点。

解 求：$\rho(x,y)=3+xz+y^2$ 在条件 $\varphi(x,y)=x^2+y^2+z^2-4=0$ 下的最值。

1. 拉格朗日函数：$L=\rho+\lambda\varphi=3+xz+y^2+\lambda(x^2+y^2+z^2-4)$

2. 求解：$\begin{cases} L_x=z+2\lambda x=0 \\ L_y=2y+2\lambda y=0 \\ L_z=x+2\lambda z=0 \\ \varphi=x^2+y^2+z^2-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=-2\lambda x \quad \Rightarrow \quad z=4\lambda^2 z \\ y(1+\lambda)=0 \\ x=-2\lambda z \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases}$

- 若 $z=0$，则$x=0$，$y=\pm 2$，所以此时 $(x,y,z)=(0,\pm 2,0)$
- 若 $z\neq 0$，则$\lambda=\pm\frac{1}{2}$，$y=0$，$x=\mp z$，所以此时 $(x,y,z)=(\pm\sqrt{2},0,\pm\sqrt{2}),(\pm\sqrt{2},0,\mp\sqrt{2})$

解 (x,y,z)	$(0,\pm 2,0)$	$(\pm\sqrt{2},0,\pm\sqrt{2})$	$(\pm\sqrt{2},0,\mp\sqrt{2})$
$\rho(x,y,z)$	7		

例 设球壳 $x^2+y^2+z^2=4$ 的密度函数是 $\rho=3+xz+y^2$。求出密度最大和最小的点。

解 求：$\rho(x,y)=3+xz+y^2$ 在条件 $\varphi(x,y)=x^2+y^2+z^2-4=0$ 下的最值。

1. 拉格朗日函数：$L=\rho+\lambda\varphi=3+xz+y^2+\lambda(x^2+y^2+z^2-4)$

2. 求解：$\begin{cases} L_x=z+2\lambda x=0 \\ L_y=2y+2\lambda y=0 \\ L_z=x+2\lambda z=0 \\ \varphi=x^2+y^2+z^2-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=-2\lambda x \quad \Rightarrow \quad z=4\lambda^2 z \\ y(1+\lambda)=0 \\ x=-2\lambda z \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases}$

- 若 $z=0$，则$x=0$，$y=\pm 2$，所以此时 $(x,y,z)=(0,\pm 2,0)$
- 若 $z\neq 0$，则$\lambda=\pm\frac{1}{2}$，$y=0$，$x=\mp z$，所以此时 $(x,y,z)=(\pm\sqrt{2},0,\pm\sqrt{2}),(\pm\sqrt{2},0,\mp\sqrt{2})$

解 (x,y,z)	$(0,\pm 2,0)$	$(\pm\sqrt{2},0,\pm\sqrt{2})$	$(\pm\sqrt{2},0,\mp\sqrt{2})$
$\rho(x,y,z)$	7	5	

例 设球壳 $x^2+y^2+z^2=4$ 的密度函数是 $\rho=3+xz+y^2$。求出密度最大和最小的点。

解 求：$\rho(x,y)=3+xz+y^2$ 在条件 $\varphi(x,y)=x^2+y^2+z^2-4=0$ 下的最值。

1. 拉格朗日函数：$L=\rho+\lambda\varphi=3+xz+y^2+\lambda(x^2+y^2+z^2-4)$

2. 求解：
$$\begin{cases} L_x=z+2\lambda x=0 \\ L_y=2y+2\lambda y=0 \\ L_z=x+2\lambda z=0 \\ \varphi=x^2+y^2+z^2-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=-2\lambda x \quad \Rightarrow \quad z=4\lambda^2 z \\ y(1+\lambda)=0 \\ x=-2\lambda z \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases}$$

- 若 $z=0$，则$x=0$，$y=\pm 2$，所以此时 $(x,y,z)=(0,\pm 2,0)$
- 若 $z\neq 0$，则$\lambda=\pm\frac{1}{2}$，$y=0$，$x=\mp z$，所以此时 $(x,y,z)=(\pm\sqrt{2},0,\pm\sqrt{2}),(\pm\sqrt{2},0,\mp\sqrt{2})$

解 (x,y,z)	$(0,\pm 2,0)$	$(\pm\sqrt{2},0,\pm\sqrt{2})$	$(\pm\sqrt{2},0,\mp\sqrt{2})$
$\rho(x,y,z)$	7	5	1

条件极值（三元函数 + 两个附加条件）

问题 求解三元函数 $u = f(x, y, z)$ 在附加条件 $\begin{cases} \varphi(x, y, z) = 0 \\ \psi(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 下的极值点。

求解步骤（拉格朗日乘数法）

1. 构造拉格朗日函数 $L = f + \lambda\varphi + \mu\psi$，其中 λ, μ 是待定常数。
2. 求解方程组
$$\begin{cases} L_x = f_x + \lambda\varphi_x + \mu\psi_x = 0 \\ L_y = f_y + \lambda\varphi_y + \mu\psi_y = 0 \\ L_z = f_z + \lambda\varphi_z + \mu\psi_z = 0 \\ \varphi = 0 \\ \psi = 0 \end{cases}$$
3. 条件极值点（如果存在的话）包含在上述解 $\{(x, y, z)\}$ 中。

（至于如何判断解是否条件极值点，需具体问题具体分析。）

We are here now...

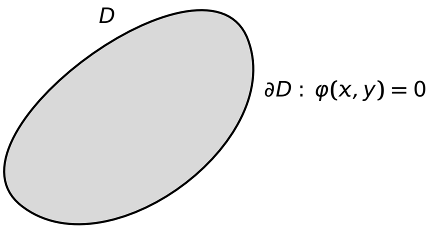
1. 多元函数的极值点

2. 条件极值

3. 求解多元函数的最值

计算二元函数的最大值和最小值

问题 寻找连续函数 $z = f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上的最大、最小值点。

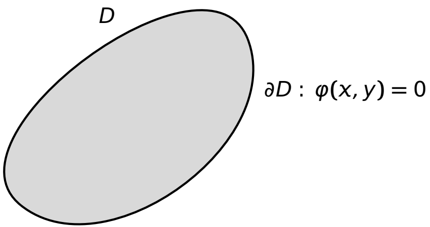


计算二元函数的最大值和最小值

问题 寻找连续函数 $z = f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上的最大、最小值点。

分析

- 连续函数在有界闭区域上一定能取到最大、最小值。所以最大、最小值点一定存在。

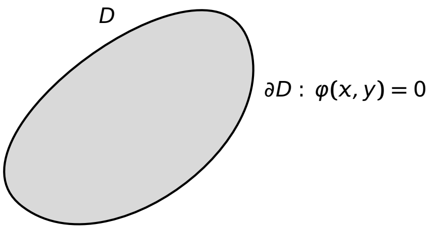


计算二元函数的最大值和最小值

问题 寻找连续函数 $z = f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上的最大、最小值点。

分析

- 连续函数在有界闭区域上一定能取到最大、最小值。所以最大、最小值点一定存在。记 $p \in D$ 为最值点。

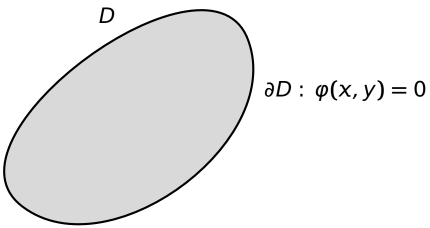


计算二元函数的最大值和最小值

问题 寻找连续函数 $z = f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上的最大、最小值点。

分析

- 连续函数在有界闭区域上一定能取到最大、最小值。所以最大、最小值点一定存在。记 $p \in D$ 为最值点。
- 若 p 是 D 的内点，
- 若 p 是 D 的边界点，

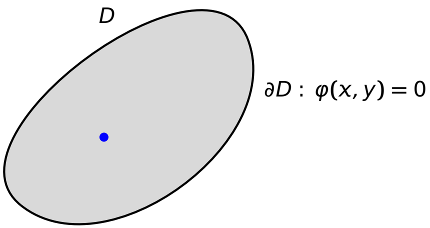


计算二元函数的最大值和最小值

问题 寻找连续函数 $z = f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上的最大、最小值点。

分析

- 连续函数在有界闭区域上一定能取到最大、最小值。所以最大、最小值点一定存在。记 $p \in D$ 为最值点。
- 若 p 是 D 的内点，
- 若 p 是 D 的边界点，

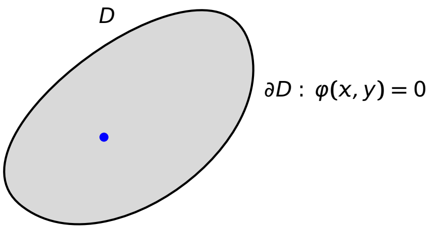


计算二元函数的最大值和最小值

问题 寻找连续函数 $z = f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上的最大、最小值点。

分析

- 连续函数在有界闭区域上一定能取到最大、最小值。所以最大、最小值点一定存在。记 $p \in D$ 为最值点。
- 若 p 是 D 的内点，则 p 是 $z = f(x, y)$ 的极值点，
- 若 p 是 D 的边界点，

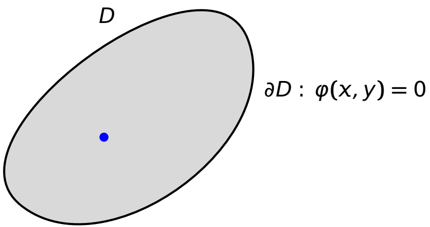


计算二元函数的最大值和最小值

问题 寻找连续函数 $z = f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上的最大、最小值点。

分析

- 连续函数在有界闭区域上一定能取到最大、最小值。所以最大、最小值点一定存在。记 $p \in D$ 为最值点。
- 若 p 是 D 的内点，则 p 是 $z = f(x, y)$ 的极值点，从而是驻点：$f_x(p) = f_y(p) = 0$
- 若 p 是 D 的边界点，

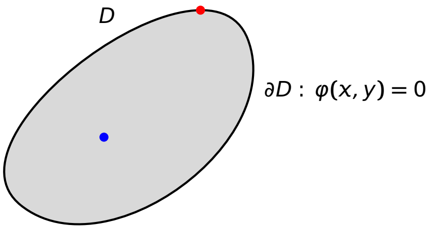


计算二元函数的最大值和最小值

问题 寻找连续函数 $z = f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上的最大、最小值点。

分析

- 连续函数在有界闭区域上一定能取到最大、最小值。所以最大、最小值点一定存在。记 $p \in D$ 为最值点。
- 若 p 是 D 的内点，则 p 是 $z = f(x, y)$ 的极值点，从而是驻点：$f_x(p) = f_y(p) = 0$
- 若 p 是 D 的边界点，

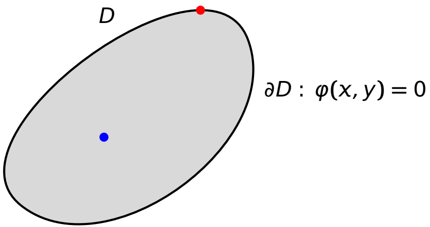


计算二元函数的最大值和最小值

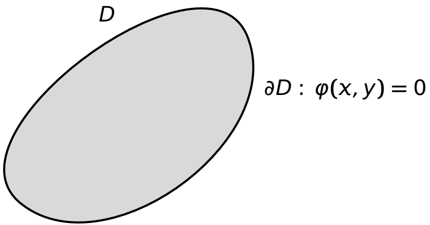
问题 寻找连续函数 $z = f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上的最大、最小值点。

分析

- 连续函数在有界闭区域上一定能取到最大、最小值。所以最大、最小值点一定存在。记 $p \in D$ 为最值点。
- 若 p 是 D 的内点，则 p 是 $z = f(x, y)$ 的极值点，从而是驻点：$f_x(p) = f_y(p) = 0$
- 若 p 是 D 的边界点，则 p 是 $z = f(x, y)$ 在条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的条件极值点

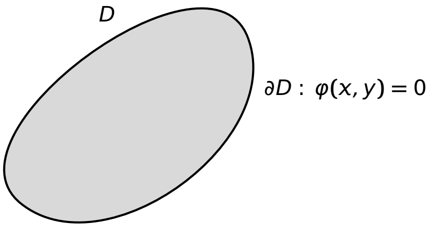


问题 寻找连续函数 $z = f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上的最大、最小值点。



求解步骤

问题 寻找连续函数 $z = f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上的最大、最小值点。

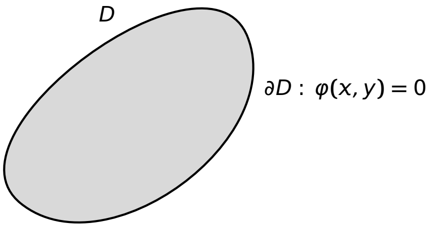


求解步骤

1. 求驻点：

2. 求条件极值：

问题 寻找连续函数 $z=f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上的最大、最小值点。

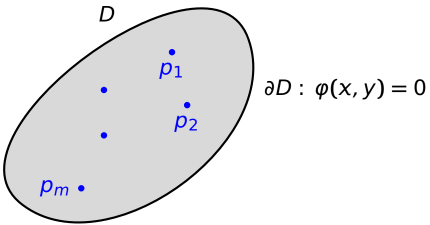


求解步骤

1. 求驻点：在 D 内部求解方程组 $\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases}$ 。

2. 求条件极值：

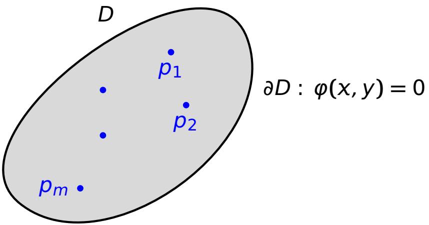
问题 寻找连续函数 $z=f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上的最大、最小值点。



求解步骤

1. 求驻点：在 D 内部求解方程组 $\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases}$。设驻点为 $p_1, p_2, \ldots, p_m$
2. 求条件极值：

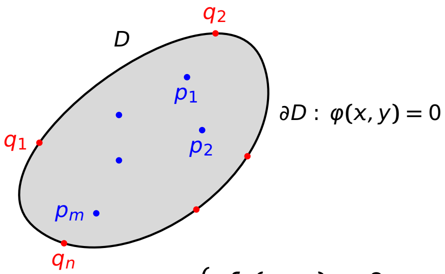
问题 寻找连续函数 $z = f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上的最大、最小值点。



求解步骤

1. 求驻点：在 D 内部求解方程组 $\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$。设驻点为 $p_1, p_2, \ldots, p_m$
2. 求条件极值：$z = f(x, y)$ 在条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的条件极值。

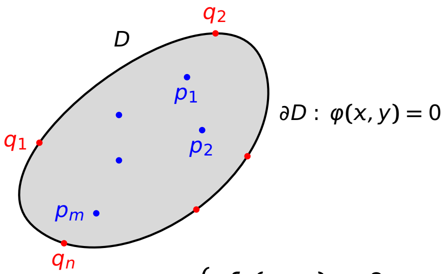
问题 寻找连续函数 $z = f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上的最大、最小值点。



求解步骤

1. 求驻点：在 D 内部求解方程组 $\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 。设驻点为 $p_1, p_2, \ldots, p_m$
2. 求条件极值：$z = f(x, y)$ 在条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的条件极值。设条件极值点为 $q_1, q_2, \ldots, q_n$

问题 寻找连续函数 $z = f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上的最大、最小值点。



求解步骤

1. 求驻点：在 D 内部求解方程组 $\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$。设驻点为 $p_1, p_2, \ldots, p_m$
2. 求条件极值：$z = f(x, y)$ 在条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的条件极值。设条件极值点为 $q_1, q_2, \ldots, q_n$
3. 比较 $p_1, p_2, \ldots, p_m$; $q_1, q_2, \ldots, q_n$ 的函数值，最大者对应最大值点，最小者对应最小值点。

例 求函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 在区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 3\}$ 内的最值。

例 求函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 在区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 3\}$ 内的最值。

解 1. 求驻点：

2. 求 $f=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 在条件 $\varphi(x,y)=x^2+y^2-3=0$ 下的条件极值：

3. 比较函数值：

例 求函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 在区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 3\}$ 内的最值。

解 1. 求驻点：

$$\begin{cases} z_x=3x^2+6x-9=0 \\ z_y=-3y^2+6y=0 \end{cases}$$

2. 求 $f=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 在条件 $\varphi(x,y)=x^2+y^2-3=0$ 下的条件极值：

3. 比较函数值：

例 求函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 在区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 3\}$ 内的最值。

解 1. 求驻点：

$$\begin{cases} z_x = 3x^2+6x-9=0 \\ z_y = -3y^2+6y=0 \end{cases} \Rightarrow (x,y)=(1,0),\,(1,2),\,(-3,0),\,(-3,2)$$

2. 求 $f=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 在条件 $\varphi(x,y)=x^2+y^2-3=0$ 下的条件极值：

3. 比较函数值：

例 求函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 在区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 3\}$ 内的最值。

解 1. 求驻点：

$$\begin{cases} z_x=3x^2+6x-9=0 \\ z_y=-3y^2+6y=0 \end{cases} \Rightarrow (x,y)=(1,0),\,(1,2),\,(-3,0),\,(-3,2)$$

只有驻点 $(1,0)$ 是 D 的内点。

2. 求 $f=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 在条件 $\varphi(x,y)=x^2+y^2-3=0$ 下的条件极值：

3. 比较函数值：

例 求函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 在区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 3\}$ 内的最值。

解 1. 求驻点：

$$\begin{cases} z_x=3x^2+6x-9=0 \\ z_y=-3y^2+6y=0 \end{cases} \Rightarrow (x,y)=(1,0),\ (1,2),\ (-3,0),\ (-3,2)$$

只有驻点 $(1,0)$ 是 D 的内点。

2. 求 $f=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x=x^3-y^3-9x+9$在条件 $\varphi(x,y)=x^2+y^2-3=0$ 下的条件极值：

3. 比较函数值：

例 求函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 在区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 3\}$ 内的最值。

解 1. 求驻点：

$$\begin{cases} z_x=3x^2+6x-9=0 \\ z_y=-3y^2+6y=0 \end{cases} \Rightarrow (x,y)=(1,0),\ (1,2),\ (-3,0),\ (-3,2)$$

只有驻点 $(1,0)$ 是 D 的内点。

2. 求 $f=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x=x^3-y^3-9x+9$在条件 $\varphi(x,y)=x^2+y^2-3=0$ 下的条件极值：令 $L=f+\lambda\varphi$，求解

3. 比较函数值：

例 求函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 在区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 3\}$ 内的最值。

解 1. 求驻点：

$$\begin{cases} z_x=3x^2+6x-9=0 \\ z_y=-3y^2+6y=0 \end{cases} \Rightarrow (x,y)=(1,0),(1,2),(-3,0),(-3,2)$$

只有驻点 $(1,0)$ 是 D 的内点。

2. 求 $f=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x=x^3-y^3-9x+9$在条件 $\varphi(x,y)=x^2+y^2-3=0$ 下的条件极值：令 $L=f+\lambda\varphi$，求解

$$\begin{cases} L_x=3x^2-9+2\lambda x=0 \\ L_y=-3y^2+2\lambda y=0 \\ \varphi=x^2+y^2-3=0 \end{cases}$$

3. 比较函数值：

例 求函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 在区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 3\}$ 内的最值。

解 1. 求驻点：

$$\begin{cases} z_x=3x^2+6x-9=0 \\ z_y=-3y^2+6y=0 \end{cases} \Rightarrow (x,y)=(1,0),\ (1,2),\ (-3,0),\ (-3,2)$$

只有驻点 $(1,0)$ 是 D 的内点。

2. 求 $f=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x=x^3-y^3-9x+9$在条件 $\varphi(x,y)=x^2+y^2-3=0$ 下的条件极值：令 $L=f+\lambda\varphi$，求解

$$\begin{cases} L_x=3x^2-9+2\lambda x=0 \\ L_y=-3y^2+2\lambda y=0 \\ \varphi=x^2+y^2-3=0 \end{cases} \Rightarrow (x,y)=\begin{array}{l}(\pm\sqrt{3},0),\ (\sqrt{3/2},\ \sqrt{3/2}),\\ (-\sqrt{3/2},-\sqrt{3/2})\end{array}$$

3. 比较函数值：

例 求函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 在区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 3\}$ 内的最值。

解 1. 求驻点：

$$\begin{cases} z_x=3x^2+6x-9=0 \\ z_y=-3y^2+6y=0 \end{cases} \Rightarrow (x,y)=(1,0),\ (1,2),\ (-3,0),\ (-3,2)$$

只有驻点 $(1,0)$ 是 D 的内点。

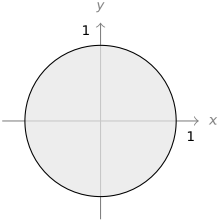
2. 求 $f=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x=x^3-y^3-9x+9$在条件 $\varphi(x,y)=x^2+y^2-3=0$ 下的条件极值：令 $L=f+\lambda\varphi$，求解

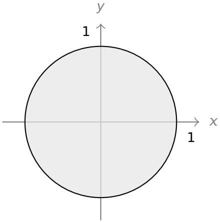
$$\begin{cases} L_x=3x^2-9+2\lambda x=0 \\ L_y=-3y^2+2\lambda y=0 \\ \varphi=x^2+y^2-3=0 \end{cases} \Rightarrow (x,y)= \begin{array}{l} (\pm\sqrt{3},0),\ (\sqrt{3/2},\ \sqrt{3/2}), \\ (-\sqrt{3/2},-\sqrt{3/2}) \end{array}$$

3. 比较函数值：

(x,y)	$(1,0)$	$(\sqrt{3},0)$	$(-\sqrt{3},0)$	$(\sqrt{1.5},\sqrt{1.5})$	$(-\sqrt{1.5},-\sqrt{1.5})$
$f(x,y)$	-5	≈ -1.4	≈ 19.4	≈ 20.0	≈ -2.0

例 求 $z=(1+2x^2+3y^2)e^{1-x^2-y^2}$ 在 $\overline{D}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$ 上的最大最小值。



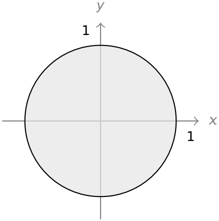


例 求 $z = (1 + 2x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2}$ 在 $\overline{D} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上的最大最小值。

解 1. 求驻点：

$$\begin{cases} z_x = \\ z_y = \end{cases}$$

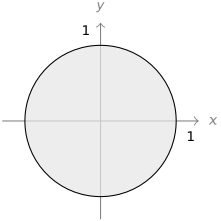
例 求 $z=(1+2x^2+3y^2)e^{1-x^2-y^2}$ 在 $\overline{D}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leq 1\}$ 上的最大最小值。



解 1. 求驻点：

$$\begin{cases} z_x = 2x(1-2x^2-3y^2)e^{1-x^2-y^2} \\ z_y = \end{cases}$$

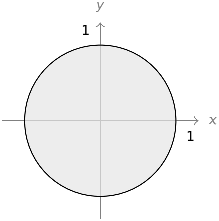
例 求 $z = (1 + 2x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2}$ 在 $\overline{D} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$ 上的最大最小值。



解 1. 求驻点：

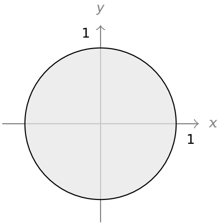
$$\begin{cases} z_x = 2x(1 - 2x^2 - 3y^2)e^{1-x^2-y^2} \\ z_y = 2y(2 - 2x^2 - 3y^2)e^{1-x^2-y^2} \end{cases}$$

例 求 $z = (1 + 2x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2}$ 在 $\overline{D} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$ 上的最大最小值。



解 1. 求驻点：

$$\begin{cases} z_x = 2x(1 - 2x^2 - 3y^2)e^{1-x^2-y^2} = 0 \\ z_y = 2y(2 - 2x^2 - 3y^2)e^{1-x^2-y^2} = 0 \end{cases}$$

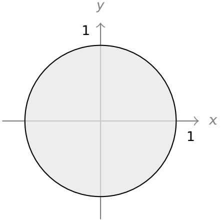


例 求 $z=(1+2x^2+3y^2)e^{1-x^2-y^2}$ 在 $\overline{D}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$ 上的最大最小值。

解 1. 求驻点：

$$\begin{cases} z_x = 2x(1-2x^2-3y^2)e^{1-x^2-y^2} = 0 \\ z_y = 2y(2-2x^2-3y^2)e^{1-x^2-y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1-2x^2-3y^2) = 0 \\ y(2-2x^2-3y^2) = 0 \end{cases}$$

例 求 $z=(1+2x^2+3y^2)e^{1-x^2-y^2}$ 在 $\overline{D}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$ 上的最大最小值。

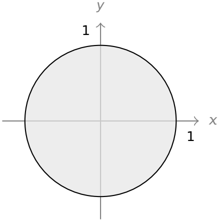


解 1. 求驻点：

$$\begin{cases} z_x = 2x(1-2x^2-3y^2)e^{1-x^2-y^2} = 0 \\ z_y = 2y(2-2x^2-3y^2)e^{1-x^2-y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1-2x^2-3y^2) = 0 \\ y(2-2x^2-3y^2) = 0 \end{cases}$$

所以有如下四种情况

例 求 $z=(1+2x^2+3y^2)e^{1-x^2-y^2}$ 在 $\overline{D}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$ 上的最大最小值。



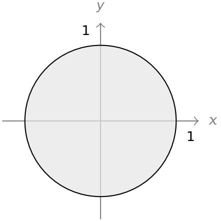
解 1. 求驻点：

$$\begin{cases} z_x = 2x(1-2x^2-3y^2)e^{1-x^2-y^2} = 0 \\ z_y = 2y(2-2x^2-3y^2)e^{1-x^2-y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1-2x^2-3y^2)=0 \\ y(2-2x^2-3y^2)=0 \end{cases}$$

所以有如下四种情况

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}, \begin{cases} x=0 \\ 2-2x^2-3y^2=0 \end{cases}, \begin{cases} 1-2x^2-3y^2=0 \\ y=0 \end{cases}, \begin{cases} 1-2x^2-3y^2=0 \\ 2-2x^2-3y^2=0 \end{cases}$$

例 求 $z=(1+2x^2+3y^2)e^{1-x^2-y^2}$ 在 $\overline{D}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$ 上的最大最小值。



解 1. 求驻点：

$$\begin{cases} z_x=2x(1-2x^2-3y^2)e^{1-x^2-y^2}=0 \\ z_y=2y(2-2x^2-3y^2)e^{1-x^2-y^2}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1-2x^2-3y^2)=0 \\ y(2-2x^2-3y^2)=0 \end{cases}$$

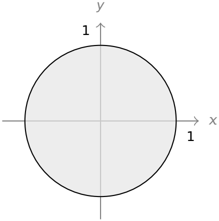
所以有如下四种情况

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}, \begin{cases} x=0 \\ 2-2x^2-3y^2=0 \end{cases}, \begin{cases} 1-2x^2-3y^2=0 \\ y=0 \end{cases}, \begin{cases} 1-2x^2-3y^2=0 \\ 2-2x^2-3y^2=0 \end{cases}$$

解得

$$(x,y)=(0,0)$$

例 求 $z=(1+2x^2+3y^2)e^{1-x^2-y^2}$ 在 $\overline{D}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$ 上的最大最小值。



解 1. 求驻点：

$$\begin{cases} z_x=2x(1-2x^2-3y^2)e^{1-x^2-y^2}=0 \\ z_y=2y(2-2x^2-3y^2)e^{1-x^2-y^2}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1-2x^2-3y^2)=0 \\ y(2-2x^2-3y^2)=0 \end{cases}$$

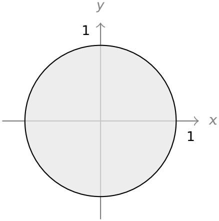
所以有如下四种情况

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases},\ \begin{cases} x=0 \\ 2-2x^2-3y^2=0 \end{cases},\ \begin{cases} 1-2x^2-3y^2=0 \\ y=0 \end{cases},\ \begin{cases} 1-2x^2-3y^2=0 \\ 2-2x^2-3y^2=0 \end{cases}$$

解得

$$(x,y)=(0,0) \quad \text{或} \quad (0,\pm\sqrt{2/3})$$

例 求 $z=(1+2x^2+3y^2)e^{1-x^2-y^2}$ 在 $\overline{D}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$ 上的最大最小值。



解 1. 求驻点：

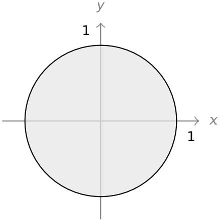
$$\begin{cases} z_x = 2x(1-2x^2-3y^2)e^{1-x^2-y^2} = 0 \\ z_y = 2y(2-2x^2-3y^2)e^{1-x^2-y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1-2x^2-3y^2) = 0 \\ y(2-2x^2-3y^2) = 0 \end{cases}$$

所以有如下四种情况

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}, \begin{cases} x=0 \\ 2-2x^2-3y^2=0 \end{cases}, \begin{cases} 1-2x^2-3y^2=0 \\ y=0 \end{cases}, \begin{cases} 1-2x^2-3y^2=0 \\ 2-2x^2-3y^2=0 \end{cases}$$

解得 $$(x,y)=(0,0) \quad 或 \quad (0,\pm\sqrt{2/3}) \quad 或 \quad (\pm\sqrt{1/2},\,0)$$

例 求 $z=(1+2x^2+3y^2)e^{1-x^2-y^2}$ 在 $\overline{D}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$ 上的最大最小值。



解 1. 求驻点：

$$\begin{cases} z_x=2x(1-2x^2-3y^2)e^{1-x^2-y^2}=0 \\ z_y=2y(2-2x^2-3y^2)e^{1-x^2-y^2}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1-2x^2-3y^2)=0 \\ y(2-2x^2-3y^2)=0 \end{cases}$$

所以有如下四种情况

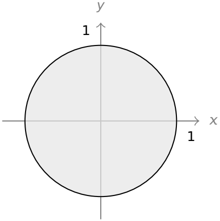
$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases},\ \begin{cases} x=0 \\ 2-2x^2-3y^2=0 \end{cases},\ \begin{cases} 1-2x^2-3y^2=0 \\ y=0 \end{cases},\ \begin{cases} 1-2x^2-3y^2=0 \\ 2-2x^2-3y^2=0 \end{cases}$$

解得

$$(x,y)=(0,0) \quad 或 \quad (0,\pm\sqrt{2/3}) \quad 或 \quad (\pm\sqrt{1/2},0)$$

驻点 (x,y)	$(0,0)$	$(0,\pm\sqrt{2/3})$	$(\pm\sqrt{1/2},0)$
函数值 $z(x,y)$			

例 求 $z=(1+2x^2+3y^2)e^{1-x^2-y^2}$ 在 $\overline{D}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$ 上的最大最小值。



解 1. 求驻点：

$$\begin{cases} z_x=2x(1-2x^2-3y^2)e^{1-x^2-y^2}=0 \\ z_y=2y(2-2x^2-3y^2)e^{1-x^2-y^2}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1-2x^2-3y^2)=0 \\ y(2-2x^2-3y^2)=0 \end{cases}$$

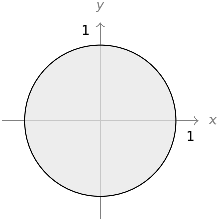
所以有如下四种情况

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases},\ \begin{cases} x=0 \\ 2-2x^2-3y^2=0 \end{cases},\ \begin{cases} 1-2x^2-3y^2=0 \\ y=0 \end{cases},\ \begin{cases} 1-2x^2-3y^2=0 \\ 2-2x^2-3y^2=0 \end{cases}$$

解得

$$(x,y)=(0,0) \quad 或 \quad (0,\pm\sqrt{2/3}) \quad 或 \quad (\pm\sqrt{1/2},0)$$

驻点 (x,y)	$(0,0)$	$(0,\pm\sqrt{2/3})$	$(\pm\sqrt{1/2},0)$
函数值 $z(x,y)$	$e\approx 2.72$		



例 求 $z=(1+2x^2+3y^2)e^{1-x^2-y^2}$ 在 $\overline{D}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$ 上的最大最小值。

解 1. 求驻点:

$$\begin{cases} z_x = 2x(1-2x^2-3y^2)e^{1-x^2-y^2} = 0 \\ z_y = 2y(2-2x^2-3y^2)e^{1-x^2-y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1-2x^2-3y^2) = 0 \\ y(2-2x^2-3y^2) = 0 \end{cases}$$

所以有如下四种情况

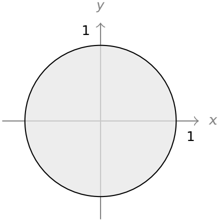
$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases},\ \begin{cases} x=0 \\ 2-2x^2-3y^2=0 \end{cases},\ \begin{cases} 1-2x^2-3y^2=0 \\ y=0 \end{cases},\ \begin{cases} 1-2x^2-3y^2=0 \\ 2-2x^2-3y^2=0 \end{cases}$$

解得

$$(x,y)=(0,0) \quad 或 \quad (0,\pm\sqrt{2/3}) \quad 或 \quad (\pm\sqrt{1/2},0)$$

驻点 (x,y)	$(0,0)$	$(0,\pm\sqrt{2/3})$	$(\pm\sqrt{1/2},0)$
函数值 $z(x,y)$	$e\approx 2.72$	$3e^{\frac{1}{3}}\approx 4.19$	

例 求 $z=(1+2x^2+3y^2)e^{1-x^2-y^2}$ 在 $\overline{D}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$ 上的最大最小值。



解 1. 求驻点：

$$\begin{cases} z_x=2x(1-2x^2-3y^2)e^{1-x^2-y^2}=0 \\ z_y=2y(2-2x^2-3y^2)e^{1-x^2-y^2}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1-2x^2-3y^2)=0 \\ y(2-2x^2-3y^2)=0 \end{cases}$$

所以有如下四种情况

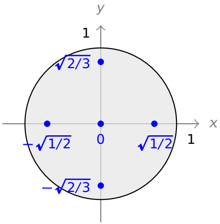
$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}, \begin{cases} x=0 \\ 2-2x^2-3y^2=0 \end{cases}, \begin{cases} 1-2x^2-3y^2=0 \\ y=0 \end{cases}, \begin{cases} 1-2x^2-3y^2=0 \\ 2-2x^2-3y^2=0 \end{cases}$$

解得

$$(x,y)=(0,0) \quad 或 \quad (0,\pm\sqrt{2/3}) \quad 或 \quad (\pm\sqrt{1/2},0)$$

驻点 (x, y)	$(0, 0)$	$(0, \pm\sqrt{2/3})$	$(\pm\sqrt{1/2}, 0)$
函数值 $z(x, y)$	$e \approx 2.72$	$3e^{\frac{1}{3}} \approx 4.19$	$2e^{\frac{1}{2}} \approx 3.30$

例 求 $z=(1+2x^2+3y^2)e^{1-x^2-y^2}$ 在 $\overline{D}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$ 上的最大最小值。



解 1. 求驻点：

$$\begin{cases} z_x = 2x(1-2x^2-3y^2)e^{1-x^2-y^2} = 0 \\ z_y = 2y(2-2x^2-3y^2)e^{1-x^2-y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1-2x^2-3y^2) = 0 \\ y(2-2x^2-3y^2) = 0 \end{cases}$$

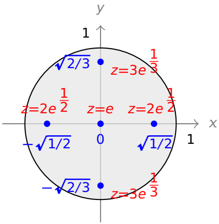
所以有如下四种情况

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases},\ \begin{cases} x=0 \\ 2-2x^2-3y^2=0 \end{cases},\ \begin{cases} 1-2x^2-3y^2=0 \\ y=0 \end{cases},\ \begin{cases} 1-2x^2-3y^2=0 \\ 2-2x^2-3y^2=0 \end{cases}$$

解得

$$(x,y)=(0,0) \quad \text{或} \quad (0,\pm\sqrt{2/3}) \quad \text{或} \quad (\pm\sqrt{1/2},0)$$

驻点 (x,y)	$(0,0)$	$(0,\pm\sqrt{2/3})$	$(\pm\sqrt{1/2},0)$
函数值 $z(x,y)$	$e\approx 2.72$	$3e^{\frac{1}{3}}\approx 4.19$	$2e^{\frac{1}{2}}\approx 3.30$



例 求 $z=(1+2x^2+3y^2)e^{1-x^2-y^2}$ 在 $\overline{D}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$ 上的最大最小值。

解 1. 求驻点：

$$\begin{cases} z_x=2x(1-2x^2-3y^2)e^{1-x^2-y^2}=0 \\ z_y=2y(2-2x^2-3y^2)e^{1-x^2-y^2}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1-2x^2-3y^2)=0 \\ y(2-2x^2-3y^2)=0 \end{cases}$$

所以有如下四种情况

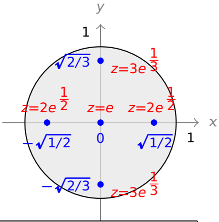
$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases},\ \begin{cases} x=0 \\ 2-2x^2-3y^2=0 \end{cases},\ \begin{cases} 1-2x^2-3y^2=0 \\ y=0 \end{cases},\ \begin{cases} 1-2x^2-3y^2=0 \\ 2-2x^2-3y^2=0 \end{cases}$$

解得

$$(x,y)=(0,0) \quad 或 \quad (0,\pm\sqrt{2/3}) \quad 或 \quad (\pm\sqrt{1/2},0)$$

驻点 (x,y)	$(0,0)$	$(0,\pm\sqrt{2/3})$	$(\pm\sqrt{1/2},0)$
函数值 $z(x,y)$	$e\approx 2.72$	$3e^{\frac{1}{3}}\approx 4.19$	$2e^{\frac{1}{2}}\approx 3.30$

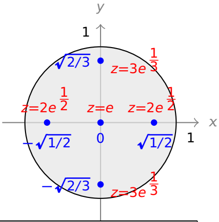
例 求 $z = (1 + 2x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2}$ 在 $\overline{D} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$ 上的最大最小值。



解 1. 求驻点：

驻点 (x, y)	$(0, 0)$	$(0, \pm\sqrt{2/3})$	$(\pm\sqrt{1/2}, 0)$
函数值 $z(x, y)$	$e \approx 2.72$	$3e^{\frac{1}{3}} \approx 4.19$	$2e^{\frac{1}{2}} \approx 3.30$

例 求 $z=(1+2x^2+3y^2)e^{1-x^2-y^2}$ 在 $\overline{D}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$ 上的最大最小值。

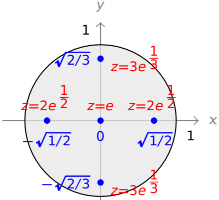


解 1. 求驻点：

驻点 (x,y)	$(0,0)$	$(0,\pm\sqrt{2/3})$	$(\pm\sqrt{1/2},0)$
函数值 $z(x,y)$	$e\approx 2.72$	$3e^{\frac{1}{3}}\approx 4.19$	$2e^{\frac{1}{2}}\approx 3.30$

2. 求在边界 $x^2+y^2=1$ 上的最值

例 求 $z=(1+2x^2+3y^2)e^{1-x^2-y^2}$ 在 $\overline{D}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$ 上的最大最小值。

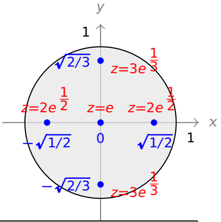


解 1. 求驻点：

驻点 (x,y)	$(0,0)$	$(0,\pm\sqrt{2/3})$	$(\pm\sqrt{1/2},0)$
函数值 $z(x,y)$	$e\approx 2.72$	$3e^{\frac{1}{3}}\approx 4.19$	$2e^{\frac{1}{2}}\approx 3.30$

2. 求在边界 $x^2+y^2=1$ 上的最值：此时

$$z=(1+2x^2+3y^2)e^{1-x^2-y^2}$$



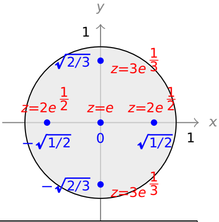
例 求 $z=(1+2x^2+3y^2)e^{1-x^2-y^2}$ 在 $\overline{D}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$ 上的最大最小值。

解 1. 求驻点：

驻点 (x,y)	$(0,0)$	$(0,\pm\sqrt{2/3})$	$(\pm\sqrt{1/2},0)$
函数值 $z(x,y)$	$e\approx 2.72$	$3e^{\frac{1}{3}}\approx 4.19$	$2e^{\frac{1}{2}}\approx 3.30$

2. 求在边界 $x^2+y^2=1$ 上的最值：此时

$$z=(1+2x^2+3y^2)e^{1-x^2-y^2}=3+y^2$$



例 求 $z=(1+2x^2+3y^2)e^{1-x^2-y^2}$ 在 $\overline{D}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$ 上的最大最小值。

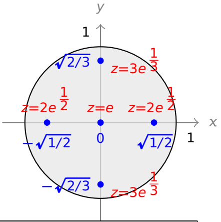
解 1. 求驻点：

驻点 (x,y)	$(0,0)$	$(0,\pm\sqrt{2/3})$	$(\pm\sqrt{1/2},0)$
函数值 $z(x,y)$	$e\approx 2.72$	$3e^{\frac{1}{3}}\approx 4.19$	$2e^{\frac{1}{2}}\approx 3.30$

2. 求在边界 $x^2+y^2=1$ 上的最值：此时

$$z=(1+2x^2+3y^2)e^{1-x^2-y^2}=3+y^2 \quad\Rightarrow\quad 3\le z\le 4$$

例 求 $z=(1+2x^2+3y^2)e^{1-x^2-y^2}$ 在 $\overline{D}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$ 上的最大最小值。



解 1. 求驻点：

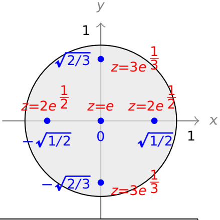
驻点 (x,y)	$(0,0)$	$(0,\pm\sqrt{2/3})$	$(\pm\sqrt{1/2},0)$
函数值 $z(x,y)$	$e\approx 2.72$	$3e^{\frac{1}{3}}\approx 4.19$	$2e^{\frac{1}{2}}\approx 3.30$

2. 求在边界 $x^2+y^2=1$ 上的最值：此时

$$z=(1+2x^2+3y^2)e^{1-x^2-y^2}=3+y^2 \quad\Rightarrow\quad 3\le z\le 4$$

可见在边界上，在 $(\pm1,0)$ 处取得最小值 $z=3$；

例 求 $z = (1+2x^2+3y^2)e^{1-x^2-y^2}$ 在 $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1\}$ 上的最大最小值。



解 1. 求驻点：

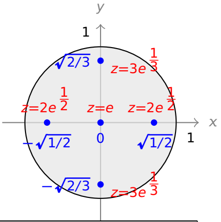
驻点 (x, y)	$(0, 0)$	$(0, \pm\sqrt{2/3})$	$(\pm\sqrt{1/2}, 0)$
函数值 $z(x, y)$	$e \approx 2.72$	$3e^{\frac{1}{3}} \approx 4.19$	$2e^{\frac{1}{2}} \approx 3.30$

2. 求在边界 $x^2 + y^2 = 1$ 上的最值：此时

$$z = (1+2x^2+3y^2)e^{1-x^2-y^2} = 3 + y^2 \quad \Rightarrow \quad 3 \le z \le 4$$

可见在边界上，在 $(\pm 1, 0)$ 处取得最小值 $z = 3$；在 $(0, \pm 1)$ 处取得最大值 $z = 4$

例 求 $z=(1+2x^2+3y^2)e^{1-x^2-y^2}$ 在 $\overline{D}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$ 上的最大最小值。



解 1. 求驻点：

驻点 (x,y)	$(0,0)$	$(0,\pm\sqrt{2/3})$	$(\pm\sqrt{1/2},0)$
函数值 $z(x,y)$	$e\approx 2.72$	$3e^{\frac{1}{3}}\approx 4.19$	$2e^{\frac{1}{2}}\approx 3.30$

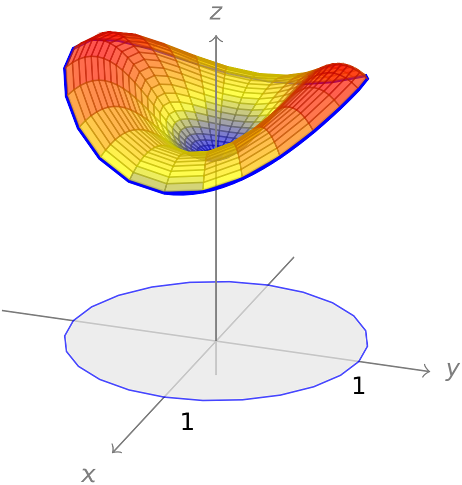
2. 求在边界 $x^2+y^2=1$ 上的最值：此时

$$z=(1+2x^2+3y^2)e^{1-x^2-y^2}=3+y^2 \quad\Rightarrow\quad 3\le z\le 4$$

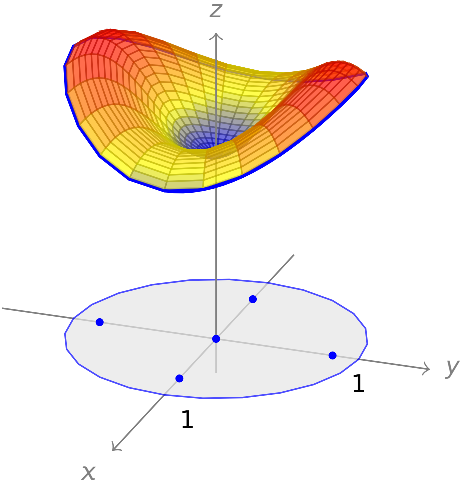
可见在边界上，在 $(\pm1,0)$ 处取得最小值 $z=3$；在 $(0,\pm1)$ 处取得最大值 $z=4$

3. 点 $(0,0)$ 处得最小值 $z=e$，点 $(0,\pm\sqrt{2/3})$ 处得最大值 $z=3e^{\frac{1}{3}}$

$$z=(1+2x^2+3y^2)e^{1-x^2-y^2}$$



$$z=(1+2x^2+3y^2)e^{1-x^2-y^2}$$



$$z=(1+2x^2+3y^2)e^{1-x^2-y^2}$$