

第 3 章 c : 向量组的线性相关性

数学系 梁卓滨

2020-2021 学年 I

向量组的线性相关性

$$\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n$$

向量组的线性相关性

定义 如果存在不全为零的一组数 k_1, k_2, \dots, k_n 使得:

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$$

向量组的线性相关性

定义 如果存在不全为零的一组数 k_1, k_2, \dots, k_n 使得：

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n = 0$$

则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ **线性相关性**

向量组的线性相关性

定义 如果存在不全为零的一组数 k_1, k_2, \dots, k_n 使得：

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n = 0$$

则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ **线性相关性**；否则，称为**线性无关**。

向量组的线性相关性

定义 如果存在不全为零的一组数 k_1, k_2, \dots, k_n 使得：

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n = 0$$

则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ **线性相关性**；否则，称为**线性无关**。

注 “ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关”，等价于：

$$"k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0".$$

向量组的线性相关性

定义 如果存在不全为零的一组数 k_1, k_2, \dots, k_n 使得：

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n = 0$$

则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ **线性相关性**；否则，称为**线性无关**。

注 “ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关”，等价于：

$$"k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0".$$

例

- $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ 与 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ 是线性相关：

向量组的线性相关性

定义 如果存在不全为零的一组数 k_1, k_2, \dots, k_n 使得：

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n = 0$$

则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ **线性相关性**；否则，称为**线性无关**。

注 “ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关”，等价于：

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$$

例

• $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ 与 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ 是线性相关： $2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0$

向量组的线性相关性

定义 如果存在不全为零的一组数 k_1, k_2, \dots, k_n 使得：

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n = 0$$

则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ **线性相关性**；否则，称为**线性无关**。

注 “ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关”，等价于：

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0.$$

例

- $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ 与 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ 是线性相关： $2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0$
- $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 与 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是

向量组的线性相关性

定义 如果存在不全为零的一组数 k_1, k_2, \dots, k_n 使得：

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n = 0$$

则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ **线性相关性**；否则，称为**线性无关**。

注 “ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关”，等价于：

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0.$$

例

- $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ 与 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ 是线性相关： $2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0$
- $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 与 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是线性无关：

向量组的线性相关性

定义 如果存在不全为零的一组数 k_1, k_2, \dots, k_n 使得：

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n = 0$$

则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ **线性相关性**；否则，称为**线性无关**。

注 “ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关”，等价于：

$$"k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0".$$

例

- $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ 与 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ 是线性相关： $2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0$
- $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 与 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是线性无关：

$$0 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 =$$

向量组的线性相关性

定义 如果存在不全为零的一组数 k_1, k_2, \dots, k_n 使得：

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n = 0$$

则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ **线性相关性**；否则，称为**线性无关**。

注 “ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关”，等价于：

$$"k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0".$$

例

• $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ 与 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ 是线性相关： $2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0$

• $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 与 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是线性无关：

$$0 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

向量组的线性相关性

定义 如果存在不全为零的一组数 k_1, k_2, \dots, k_n 使得：

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n = 0$$

则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ **线性相关性**；否则，称为**线性无关**。

注 “ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关”，等价于：

$$"k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0".$$

例

• $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ 与 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ 是线性相关： $2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0$

• $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 与 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是线性无关：

$$0 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ 2k_1 + k_2 \end{pmatrix}$$

向量组的线性相关性

定义 如果存在不全为零的一组数 k_1, k_2, \dots, k_n 使得：

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n = 0$$

则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ **线性相关性**；否则，称为**线性无关**。

注 “ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关”，等价于：

$$"k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0".$$

例

• $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ 与 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ 是线性相关： $2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0$

• $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 与 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是线性无关：

$$0 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ 2k_1 + k_2 \end{pmatrix} \Rightarrow k_1 = k_2 = 0$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关

$$\begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_n \\ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关

$$k_1 \begin{matrix} \alpha_1 \\ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \end{matrix} + k_2 \begin{matrix} \alpha_2 \\ \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \end{matrix} + \dots + k_n \begin{matrix} \alpha_n \\ \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \end{matrix} = 0$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关

$$\Leftrightarrow k_1 \overset{\alpha_1}{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}} + k_2 \overset{\alpha_2}{\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}} + \cdots + k_n \overset{\alpha_n}{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}} = 0 \text{ 只有解 } k_1 = \cdots = k_n = 0$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关

$$\Leftrightarrow k_1 \overset{\alpha_1}{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}} + k_2 \overset{\alpha_2}{\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}} + \dots + k_n \overset{\alpha_n}{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}} = 0 \text{ 只有解 } k_1 = \dots = k_n = 0$$

$$\begin{pmatrix} \overset{\alpha_1}{a_{11}} & \overset{\alpha_2}{a_{12}} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关

$$\Leftrightarrow k_1 \overset{\alpha_1}{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}} + k_2 \overset{\alpha_2}{\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}} + \dots + k_n \overset{\alpha_n}{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}} = 0 \text{ 只有解 } k_1 = \dots = k_n = 0$$

$$\begin{pmatrix} \overset{\alpha_1}{a_{11}} & \overset{\alpha_2}{a_{12}} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \overset{\beta}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关

$$\Leftrightarrow k_1 \overset{\alpha_1}{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}} + k_2 \overset{\alpha_2}{\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}} + \dots + k_n \overset{\alpha_n}{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}} = 0 \text{ 只有解 } k_1 = \dots = k_n = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \overset{\alpha_1}{a_{11}} & \overset{\alpha_2}{a_{12}} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \overset{\beta}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}} \text{ 只有解 } k_1 = \dots = k_n = 0$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关

$$\Leftrightarrow k_1 \overset{\alpha_1}{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}} + k_2 \overset{\alpha_2}{\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}} + \dots + k_n \overset{\alpha_n}{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}} = 0 \text{ 只有解 } k_1 = \dots = k_n = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \overset{\alpha_1}{a_{11}} & \overset{\alpha_2}{a_{12}} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}}_x = \overset{\beta}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}} \text{ 只有解 } k_1 = \dots = k_n = 0$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关

$$\Leftrightarrow k_1 \overset{\alpha_1}{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}} + k_2 \overset{\alpha_2}{\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}} + \dots + k_n \overset{\alpha_n}{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}} = 0 \text{ 只有解 } k_1 = \dots = k_n = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \overset{\alpha_1}{a_{11}} & \overset{\alpha_2}{a_{12}} & \dots & \overset{\alpha_n}{a_{1n}} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}}_x = \overset{\beta}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}} \text{ 只有解 } k_1 = \dots = k_n = 0$$

\Leftrightarrow 方程 $Ax = 0$ 只有零解

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关

$$\Leftrightarrow k_1 \overset{\alpha_1}{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}} + k_2 \overset{\alpha_2}{\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}} + \dots + k_n \overset{\alpha_n}{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}} = 0 \text{ 只有解 } k_1 = \dots = k_n = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \overset{\alpha_1}{a_{11}} & \overset{\alpha_2}{a_{12}} & \dots & \overset{\alpha_n}{a_{1n}} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}}_x = \overset{\beta}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}} \text{ 只有解 } k_1 = \dots = k_n = 0$$

\Leftrightarrow 方程 $Ax = 0$ 只有零解

$\Leftrightarrow r(A) = n$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关

$$\Leftrightarrow k_1 \overset{\alpha_1}{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}} + k_2 \overset{\alpha_2}{\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}} + \dots + k_n \overset{\alpha_n}{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}} = 0 \text{ 只有解 } k_1 = \dots = k_n = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \overset{\alpha_1}{a_{11}} & \overset{\alpha_2}{a_{12}} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}}_x = \overset{\beta}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}} \text{ 只有解 } k_1 = \dots = k_n = 0$$

\Leftrightarrow 方程 $Ax = 0$ 只有零解

$\Leftrightarrow r(A) = n$

定理

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow r(A) = n$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关

$$\Leftrightarrow k_1 \begin{matrix} \alpha_1 \\ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \end{matrix} + k_2 \begin{matrix} \alpha_2 \\ \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \end{matrix} + \dots + k_n \begin{matrix} \alpha_n \\ \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \end{matrix} = 0 \text{ 只有解 } k_1 = \dots = k_n = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}}_x = \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ 只有解 } k_1 = \dots = k_n = 0$$

\Leftrightarrow 方程 $Ax = 0$ 只有零解

$\Leftrightarrow r(A) = n$

定理

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow r(A) = n$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关

$$\Leftrightarrow k_1 \overset{\alpha_1}{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}} + k_2 \overset{\alpha_2}{\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}} + \dots + k_n \overset{\alpha_n}{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}} = 0 \text{ 只有解 } k_1 = \dots = k_n = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \overset{\alpha_1}{a_{11}} & \overset{\alpha_2}{a_{12}} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}}_x = \overset{\beta}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}} \text{ 只有解 } k_1 = \dots = k_n = 0$$

\Leftrightarrow 方程 $Ax = 0$ 只有零解

$\Leftrightarrow r(A) = n$

定理

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow r(A) = n$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow r(A) < n$

线性相关性的判别法则

定理 设

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_A$$

则

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow r(A) < n$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow r(A) = n$

线性相关性的判别法则

定理 设

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_A$$

则

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow r(A) < n$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow r(A) = n$

推论 1 如果 $m = n$ (向量维数 = 向量个数), 则

线性相关性的判别法则

定理 设

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_A$$

则

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \text{ 线性相关} \iff r(A) < n$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \text{ 线性无关} \iff r(A) = n$$

推论 1 如果 $m = n$ (向量维数 = 向量个数), 则

$$\text{线性相关} \iff |A| = 0, \quad \text{线性无关} \iff |A| \neq 0$$

线性相关性的判别法则

定理 设

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_A$$

则

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \text{ 线性相关} \iff r(A) < n$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \text{ 线性无关} \iff r(A) = n$$

推论 1 如果 $m = n$ (向量维数 = 向量个数), 则

$$\text{线性相关} \iff |A| = 0, \quad \text{线性无关} \iff |A| \neq 0$$

推论 2 如果 $m < n$ (向量维数 < 向量个数), 则一定线性相关。

线性相关性的判别法则

定理 设

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_A$$

则

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \text{ 线性相关} \iff r(A) < n$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \text{ 线性无关} \iff r(A) = n$$

推论 1 如果 $m = n$ (向量维数 = 向量个数), 则

$$\text{线性相关} \iff |A| = 0, \quad \text{线性无关} \iff |A| \neq 0$$

推论 2 如果 $m < n$ (向量维数 < 向量个数), 则一定线性相关。这是:

$$r(A) \leq m < n.$$

例 1 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}$ 是否线性相关性? 如果

是, 求出一个“线性相关性表达式”

例 1 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}$ 是否线性相关性? 如果

是, 求出一个“线性相关性表达式”

解

$$\begin{matrix} & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 11 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

例 1 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}$ 是否线性相关性? 如果

是, 求出一个“线性相关性表达式”

解

$$\begin{array}{ccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 11 \end{pmatrix} & \xrightarrow{\begin{array}{l} r_2 - 2r_1 \\ r_3 + r_1 \\ r_4 - 5r_1 \end{array}} & \end{array}$$

例 1 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}$ 是否线性相关性? 如果

是, 求出一个“线性相关性表达式”

解

$$\begin{array}{ccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 11 \end{pmatrix} & \xrightarrow{\begin{array}{l} r_2 - 2r_1 \\ r_3 + r_1 \\ r_4 - 5r_1 \end{array}} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \end{array}$$

例 1 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}$ 是否线性相关性? 如果

是, 求出一个“线性相关性表达式”

解

$$\begin{array}{ccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 11 \end{pmatrix} & \xrightarrow{\begin{array}{l} r_2 - 2r_1 \\ r_3 + r_1 \\ r_4 - 5r_1 \end{array}} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -4 & -9 \end{pmatrix} \end{array}$$

例 1 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}$ 是否线性相关性? 如果

是, 求出一个“线性相关性表达式”

解

$$\begin{array}{ccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 11 \end{pmatrix} & \xrightarrow{\begin{array}{l} r_2 - 2r_1 \\ r_3 + r_1 \\ r_4 - 5r_1 \end{array}} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

例 1 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}$ 是否线性相关性? 如果

是, 求出一个“线性相关性表达式”

解

$$\begin{array}{ccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 11 \end{pmatrix} & \xrightarrow{\begin{array}{l} r_2 - 2r_1 \\ r_3 + r_1 \\ r_4 - 5r_1 \end{array}} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -9 & -9 \end{pmatrix} \end{array}$$

例 1 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}$ 是否线性相关性? 如果

是, 求出一个“线性相关性表达式”

解

$$\begin{array}{ccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 11 \end{pmatrix} & \xrightarrow[r_4-5r_1]{\begin{matrix} r_2-2r_1 \\ r_3+r_1 \end{matrix}} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -9 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{matrix} \frac{1}{3} \times r_3 \\ -\frac{1}{9} \times r_4 \end{matrix}]{-\frac{1}{5} \times r_2} \end{array}$$

例 1 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}$ 是否线性相关性? 如果

是, 求出一个“线性相关性表达式”

解

$$\begin{array}{ccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 11 \end{pmatrix} & \xrightarrow[r_4-5r_1]{\begin{matrix} r_2-2r_1 \\ r_3+r_1 \end{matrix}} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -9 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{matrix} \frac{1}{3} \times r_3 \\ -\frac{1}{9} \times r_4 \end{matrix}]{-\frac{1}{5} \times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

例 1 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}$ 是否线性相关性? 如果

是, 求出一个“线性相关性表达式”

解

$$\begin{array}{ccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 11 \end{pmatrix} & \xrightarrow[r_4-5r_1]{\begin{matrix} r_2-2r_1 \\ r_3+r_1 \end{matrix}} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -9 & -9 \end{pmatrix} & \xrightarrow[\begin{matrix} \frac{1}{3} \times r_3 \\ -\frac{1}{9} \times r_4 \end{matrix}]{-\frac{1}{5} \times r_2} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\xrightarrow[r_4-r_2]{r_3-r_2}$$

例 1 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}$ 是否线性相关性? 如果

是, 求出一个“线性相关性表达式”

解

$$\begin{array}{ccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 11 \end{pmatrix} & \xrightarrow[r_4-5r_1]{\begin{matrix} r_2-2r_1 \\ r_3+r_1 \end{matrix}} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -9 & -9 \end{pmatrix} & \xrightarrow[-\frac{1}{9} \times r_4]{\begin{matrix} -\frac{1}{5} \times r_2 \\ \frac{1}{3} \times r_3 \end{matrix}} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ & & \xrightarrow[r_4-r_2]{r_3-r_2} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

例 1 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}$ 是否线性相关性? 如果

是, 求出一个“线性相关性表达式”

解

$$\begin{array}{ccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 11 \end{pmatrix} & \xrightarrow[r_4-5r_1]{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3+r_1}} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -9 & -9 \end{pmatrix} & \xrightarrow[-\frac{1}{5} \times r_2]{\substack{\frac{1}{3} \times r_3 \\ -\frac{1}{9} \times r_4}} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ & & \xrightarrow[r_4-r_2]{r_3-r_2} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \xrightarrow{r_1-2r_2} & \end{array}$$

例 1 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}$ 是否线性相关性? 如果

是, 求出一个“线性相关性表达式”

解

$$\begin{array}{ccc}
 \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\
 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 11 \end{pmatrix} & \xrightarrow[r_4-5r_1]{\begin{matrix} r_2-2r_1 \\ r_3+r_1 \end{matrix}} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -9 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{matrix} \frac{1}{3} \times r_3 \\ -\frac{1}{9} \times r_4 \end{matrix}]{-\frac{1}{5} \times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 & & \xrightarrow[r_4-r_2]{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

例 1 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}$ 是否线性相关性? 如果

是, 求出一个“线性相关性表达式”

解

$$\begin{array}{ccc}
 \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\
 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 11 \end{pmatrix} & \xrightarrow[r_4-5r_1]{\begin{matrix} r_2-2r_1 \\ r_3+r_1 \end{matrix}} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -9 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{matrix} \frac{1}{3} \times r_3 \\ -\frac{1}{9} \times r_4 \end{matrix}]{-\frac{1}{5} \times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 & & \xrightarrow[r_4-r_2]{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

例 1 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}$ 是否线性相关性? 如果

是, 求出一个“线性相关性表达式”

解

$$\begin{array}{ccc}
 \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\
 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 11 \end{pmatrix} & \xrightarrow[r_4-5r_1]{\begin{matrix} r_2-2r_1 \\ r_3+r_1 \end{matrix}} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -9 & -9 \end{pmatrix} & \xrightarrow[r_4-\frac{1}{3}r_3]{\begin{matrix} -\frac{1}{5} \times r_2 \\ \frac{1}{3} \times r_3 \end{matrix}} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 & & \xrightarrow[r_4-r_2]{r_3-r_2} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \xrightarrow{r_1-2r_2} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

可见 $r(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) = 2 < 3$, 线性相关性;

例 1 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}$ 是否线性相关性? 如果

是, 求出一个“线性相关性表达式”

解

$$\begin{array}{ccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 11 \end{pmatrix} & \xrightarrow[r_4-5r_1]{\begin{matrix} r_2-2r_1 \\ r_3+r_1 \end{matrix}} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -9 & -9 \end{pmatrix} & \xrightarrow[\begin{matrix} \frac{1}{3} \times r_3 \\ -\frac{1}{9} \times r_4 \end{matrix}]{-\frac{1}{5} \times r_2} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ & & \xrightarrow[r_4-r_2]{r_3-r_2} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \xrightarrow{r_1-2r_2} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

可见 $r(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) = 2 < 3$, 线性相关性; 且

$$\alpha_3 = 2\alpha_1 + \alpha_2$$

例 1 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}$ 是否线性相关性? 如果

是, 求出一个“线性相关性表达式”

解

$$\begin{array}{ccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 11 \end{pmatrix} & \xrightarrow[r_4-5r_1]{\begin{matrix} r_2-2r_1 \\ r_3+r_1 \end{matrix}} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -9 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{matrix} \frac{1}{3} \times r_3 \\ -\frac{1}{9} \times r_4 \end{matrix}]{-\frac{1}{5} \times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow[r_4-r_2]{r_3-r_2} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

可见 $r(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) = 2 < 3$, 线性相关性; 且

$$\alpha_3 = 2\alpha_1 + \alpha_2 \quad \Rightarrow \quad 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0$$

例 2 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是否线性相关性? 如果是,

求出一个“线性相关性表达式”

例 2 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是否线性相关性? 如果是,

求出一个“线性相关性表达式”

解

α_1	α_2	α_3
0	6	3
4	0	-1
0	4	2
2	1	0

例 2 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是否线性相关性? 如果是,

求出一个“线性相关性表达式”

解

$$\begin{array}{ccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4} & \end{array}$$

例 2 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是否线性相关性? 如果是,

求出一个“线性相关性表达式”

解 $\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

例 2 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是否线性相关性? 如果是,

求出一个“线性相关性表达式”

解 $\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1}$$

例 2 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是否线性相关性? 如果是,

求出一个“线性相关性表达式”

解 $\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

例 2 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是否线性相关性? 如果是,

求出一个“线性相关性表达式”

解 α_1 α_2 α_3

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} r_3 + 2r_2 \\ r_4 + 3r_2 \end{matrix}}$$

例 2 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是否线性相关性? 如果是,

求出一个“线性相关性表达式”

解 $\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4 + 3r_2]{r_3 + 2r_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 2 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是否线性相关性? 如果是,

求出一个“线性相关性表达式”

解 $\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4 + 3r_2]{r_3 + 2r_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{2} \times r_2]{\frac{1}{2} \times r_1}$$

例 2 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是否线性相关性? 如果是,

求出一个“线性相关性表达式”

解 $\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4 + 3r_2]{r_3 + 2r_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{2} \times r_2]{\frac{1}{2} \times r_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 2 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是否线性相关性? 如果是,

求出一个“线性相关性表达式”

解 α_1 α_2 α_3

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4 + 3r_2]{r_3 + 2r_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{2} \times r_2]{\frac{1}{2} \times r_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - \frac{1}{2}r_2}$$

例 2 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是否线性相关性? 如果是,

求出一个“线性相关性表达式”

解 $\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4 + 3r_2]{r_3 + 2r_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{2} \times r_2]{\frac{1}{2} \times r_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - \frac{1}{2}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 2 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是否线性相关性? 如果是,

求出一个“线性相关性表达式”

解 $\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4 + 3r_2]{r_3 + 2r_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{2} \times r_2]{\frac{1}{2} \times r_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - \frac{1}{2}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 2 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是否线性相关性? 如果是,

求出一个“线性相关性表达式”

解 $\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4 + 3r_2]{r_3 + 2r_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{2} \times r_2]{\frac{1}{2} \times r_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - \frac{1}{2}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可见 $r(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) = 2 < 3$, 线性相关性;

例 2 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是否线性相关性? 如果是,

求出一个“线性相关性表达式”

解 $\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4 + 3r_2]{r_3 + 2r_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{2} \times r_2]{\frac{1}{2} \times r_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - \frac{1}{2}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可见 $r(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) = 2 < 3$, 线性相关性;

例 2 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是否线性相关性? 如果是,

求出一个“线性相关性表达式”

解 $\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4 + 3r_2]{r_3 + 2r_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{2} \times r_2]{\frac{1}{2} \times r_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - \frac{1}{2}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可见 $r(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) = 2 < 3$, 线性相关性; 且

$$\alpha_3 = -\frac{1}{4}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2$$

例 2 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是否线性相关性? 如果是,

求出一个“线性相关性表达式”

解 $\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4 + 3r_2]{r_3 + 2r_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{2} \times r_2]{\frac{1}{2} \times r_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - \frac{1}{2}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可见 $r(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) = 2 < 3$, 线性相关性; 且

$$\alpha_3 = -\frac{1}{4}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 \Rightarrow -\frac{1}{4}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 - \alpha_3 = 0$$

例 设向量组 α, β, γ 线性无关，证明 $\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha$ 也是线性无关。

例 设向量组 α, β, γ 线性无关, 证明 $\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha$ 也是线性无关。

证明 设

$$0 = k_1(\alpha + \beta) + k_2(\beta + \gamma) + k_3(\gamma + \alpha)$$

例 设向量组 α, β, γ 线性无关, 证明 $\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha$ 也是线性无关。

证明 设

$$\begin{aligned} 0 &= k_1(\alpha + \beta) + k_2(\beta + \gamma) + k_3(\gamma + \alpha) \\ &= (\quad)\alpha + (\quad)\beta + (\quad)\gamma \end{aligned}$$

例 设向量组 α, β, γ 线性无关, 证明 $\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha$ 也是线性无关。

证明 设

$$\begin{aligned} 0 &= k_1(\alpha + \beta) + k_2(\beta + \gamma) + k_3(\gamma + \alpha) \\ &= (k_1 + k_3)\alpha + (\quad) \beta + (\quad) \gamma \end{aligned}$$

例 设向量组 α, β, γ 线性无关, 证明 $\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha$ 也是线性无关。

证明 设

$$\begin{aligned} 0 &= k_1(\alpha + \beta) + k_2(\beta + \gamma) + k_3(\gamma + \alpha) \\ &= (k_1 + k_3)\alpha + (k_1 + k_2)\beta + (\quad)\gamma \end{aligned}$$

例 设向量组 α, β, γ 线性无关, 证明 $\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha$ 也是线性无关。

证明 设

$$\begin{aligned} 0 &= k_1(\alpha + \beta) + k_2(\beta + \gamma) + k_3(\gamma + \alpha) \\ &= (k_1 + k_3)\alpha + (k_1 + k_2)\beta + (k_2 + k_3)\gamma \end{aligned}$$

例 设向量组 α, β, γ 线性无关, 证明 $\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha$ 也是线性无关。

证明 设

$$\begin{aligned} 0 &= k_1(\alpha + \beta) + k_2(\beta + \gamma) + k_3(\gamma + \alpha) \\ &= (k_1 + k_3)\alpha + (k_1 + k_2)\beta + (k_2 + k_3)\gamma \end{aligned}$$

所以

$$\begin{cases} k_1 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \end{cases}$$

例 设向量组 α, β, γ 线性无关, 证明 $\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha$ 也是线性无关。

证明 设

$$\begin{aligned} 0 &= k_1(\alpha + \beta) + k_2(\beta + \gamma) + k_3(\gamma + \alpha) \\ &= (k_1 + k_3)\alpha + (k_1 + k_2)\beta + (k_2 + k_3)\gamma \end{aligned}$$

所以

$$\begin{cases} k_1 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

例 设向量组 α, β, γ 线性无关, 证明 $\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha$ 也是线性无关。

证明 设

$$\begin{aligned} 0 &= k_1(\alpha + \beta) + k_2(\beta + \gamma) + k_3(\gamma + \alpha) \\ &= (k_1 + k_3)\alpha + (k_1 + k_2)\beta + (k_2 + k_3)\gamma \end{aligned}$$

所以

$$\begin{cases} k_1 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

例 设向量组 α, β, γ 线性无关, 证明 $\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha$ 也是线性无关。

证明 设

$$\begin{aligned} 0 &= k_1(\alpha + \beta) + k_2(\beta + \gamma) + k_3(\gamma + \alpha) \\ &= (k_1 + k_3)\alpha + (k_1 + k_2)\beta + (k_2 + k_3)\gamma \end{aligned}$$

所以

$$\begin{cases} k_1 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Ax = 0$$

例 设向量组 α, β, γ 线性无关, 证明 $\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha$ 也是线性无关。

证明 设

$$\begin{aligned} 0 &= k_1(\alpha + \beta) + k_2(\beta + \gamma) + k_3(\gamma + \alpha) \\ &= (k_1 + k_3)\alpha + (k_1 + k_2)\beta + (k_2 + k_3)\gamma \end{aligned}$$

所以

$$\begin{cases} k_1 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Ax = 0$$

$$\text{而 } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

例 设向量组 α, β, γ 线性无关, 证明 $\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha$ 也是线性无关。

证明 设

$$\begin{aligned} 0 &= k_1(\alpha + \beta) + k_2(\beta + \gamma) + k_3(\gamma + \alpha) \\ &= (k_1 + k_3)\alpha + (k_1 + k_2)\beta + (k_2 + k_3)\gamma \end{aligned}$$

所以

$$\begin{cases} k_1 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Ax = 0$$

$$\text{而 } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

例 设向量组 α, β, γ 线性无关, 证明 $\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha$ 也是线性无关。

证明 设

$$\begin{aligned} 0 &= k_1(\alpha + \beta) + k_2(\beta + \gamma) + k_3(\gamma + \alpha) \\ &= (k_1 + k_3)\alpha + (k_1 + k_2)\beta + (k_2 + k_3)\gamma \end{aligned}$$

所以

$$\begin{cases} k_1 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Ax = 0$$

$$\text{而 } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

例 设向量组 α, β, γ 线性无关, 证明 $\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha$ 也是线性无关。

证明 设

$$\begin{aligned} 0 &= k_1(\alpha + \beta) + k_2(\beta + \gamma) + k_3(\gamma + \alpha) \\ &= (k_1 + k_3)\alpha + (k_1 + k_2)\beta + (k_2 + k_3)\gamma \end{aligned}$$

所以

$$\begin{cases} k_1 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Ax = 0$$

$$\text{而 } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

所以只有零解: $k_1 = k_2 = k_3 = 0$,

例 设向量组 α, β, γ 线性无关, 证明 $\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha$ 也是线性无关。

证明 设

$$\begin{aligned} 0 &= k_1(\alpha + \beta) + k_2(\beta + \gamma) + k_3(\gamma + \alpha) \\ &= (k_1 + k_3)\alpha + (k_1 + k_2)\beta + (k_2 + k_3)\gamma \end{aligned}$$

所以

$$\begin{cases} k_1 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Ax = 0$$

$$\text{而 } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

所以只有零解: $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, 所以线性无关

例 设向量组 α, β, γ 线性无关，证明 $\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha$ 也是线性无关。

例 设向量组 α, β, γ 线性无关, 证明 $\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha$ 也是线性无关。

另证 注意到

$$(\alpha + \beta \quad \beta + \gamma \quad \gamma + \alpha) = (\alpha \quad \beta \quad \gamma) \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

例 设向量组 α, β, γ 线性无关, 证明 $\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha$ 也是线性无关。

另证 注意到

$$(\alpha + \beta \quad \beta + \gamma \quad \gamma + \alpha) = (\alpha \quad \beta \quad \gamma) \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

例 设向量组 α, β, γ 线性无关, 证明 $\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha$ 也是线性无关。

另证 注意到

$$(\alpha + \beta \quad \beta + \gamma \quad \gamma + \alpha) = (\alpha \quad \beta \quad \gamma) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例 设向量组 α, β, γ 线性无关, 证明 $\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha$ 也是线性无关。

另证 注意到

$$(\alpha + \beta \quad \beta + \gamma \quad \gamma + \alpha) = (\alpha \quad \beta \quad \gamma) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

例 设向量组 α, β, γ 线性无关, 证明 $\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha$ 也是线性无关。

另证 注意到

$$\underbrace{(\alpha + \beta \quad \beta + \gamma \quad \gamma + \alpha)}_Q = \underbrace{(\alpha \quad \beta \quad \gamma)}_P \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_A$$

例 设向量组 α, β, γ 线性无关, 证明 $\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha$ 也是线性无关。

另证 注意到

$$\underbrace{(\alpha + \beta \quad \beta + \gamma \quad \gamma + \alpha)}_Q = \underbrace{(\alpha \quad \beta \quad \gamma)}_P \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_A \Rightarrow Q = PA$$

例 设向量组 α, β, γ 线性无关, 证明 $\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha$ 也是线性无关。

另证 注意到

$$\underbrace{(\alpha + \beta \quad \beta + \gamma \quad \gamma + \alpha)}_Q = \underbrace{(\alpha \quad \beta \quad \gamma)}_P \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_A \Rightarrow Q = PA$$

$$r(Q) = r(PA)$$

例 设向量组 α, β, γ 线性无关, 证明 $\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha$ 也是线性无关。

另证 注意到

$$\underbrace{(\alpha + \beta \quad \beta + \gamma \quad \gamma + \alpha)}_Q = \underbrace{(\alpha \quad \beta \quad \gamma)}_P \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_A \Rightarrow Q = PA$$

$$\text{而 } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0, \text{ 所以 } A \text{ 可逆,}$$

$$r(Q) = r(PA)$$

例 设向量组 α, β, γ 线性无关, 证明 $\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha$ 也是线性无关。

另证 注意到

$$\underbrace{(\alpha + \beta \quad \beta + \gamma \quad \gamma + \alpha)}_Q = \underbrace{(\alpha \quad \beta \quad \gamma)}_P \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_A \Rightarrow Q = PA$$

$$\text{而 } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0, \text{ 所以 } A \text{ 可逆, 从而}$$

$$r(Q) = r(PA) = r(P)$$

例 设向量组 α, β, γ 线性无关, 证明 $\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha$ 也是线性无关。

另证 注意到

$$\underbrace{(\alpha + \beta \quad \beta + \gamma \quad \gamma + \alpha)}_Q = \underbrace{(\alpha \quad \beta \quad \gamma)}_P \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_A \Rightarrow Q = PA$$

$$\text{而 } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0, \text{ 所以 } A \text{ 可逆, 从而}$$

$$r(Q) = r(PA) = r(P) = 3$$

例 设向量组 α, β, γ 线性无关, 证明 $\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha$ 也是线性无关。

另证 注意到

$$\underbrace{(\alpha + \beta \quad \beta + \gamma \quad \gamma + \alpha)}_Q = \underbrace{(\alpha \quad \beta \quad \gamma)}_P \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_A \Rightarrow Q = PA$$

$$\text{而 } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0, \text{ 所以 } A \text{ 可逆, 从而}$$

$$r(Q) = r(PA) = r(P) = 3$$

所以 $\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha$ 线性无关。

例 1 一个向量 α 线性相关当且仅当 $\alpha = 0$ 。

例 1 一个向量 α 线性相关当且仅当 $\alpha = 0$ 。这是：

$$\text{线性相关} \iff \exists k \neq 0 \text{ 使得 } k\alpha = 0$$

例 1 一个向量 α 线性相关当且仅当 $\alpha = 0$ 。这是：

$$\text{线性相关} \iff \exists k \neq 0 \text{ 使得 } k\alpha = 0 \iff \alpha = 0$$

例 1 一个向量 α 线性相关当且仅当 $\alpha = 0$ 。这是：

$$\text{线性相关} \iff \exists k \neq 0 \text{ 使得 } k\alpha = 0 \iff \alpha = 0$$

例 2 两个向量 α, β 线性相关当且仅当它们成比例。

例 1 一个向量 α 线性相关当且仅当 $\alpha = 0$ 。这是：

$$\text{线性相关} \iff \exists k \neq 0 \text{ 使得 } k\alpha = 0 \iff \alpha = 0$$

例 2 两个向量 α, β 线性相关当且仅当它们成比例。

证明

1. 设 α, β 线性相关：

2. 设 α, β 成比例：

例 1 一个向量 α 线性相关当且仅当 $\alpha = 0$ 。这是：

$$\text{线性相关} \iff \exists k \neq 0 \text{ 使得 } k\alpha = 0 \iff \alpha = 0$$

例 2 两个向量 α, β 线性相关当且仅当它们成比例。

证明

1. 设 α, β 线性相关：存在不全为零的 k_1, k_2 使 $k_1\alpha + k_2\beta = 0$ 。

2. 设 α, β 成比例：

例 1 一个向量 α 线性相关当且仅当 $\alpha = 0$ 。这是：

$$\text{线性相关} \iff \exists k \neq 0 \text{ 使得 } k\alpha = 0 \iff \alpha = 0$$

例 2 两个向量 α, β 线性相关当且仅当它们成比例。

证明

1. 设 α, β 线性相关：存在不全为零的 k_1, k_2 使 $k_1\alpha + k_2\beta = 0$ 。不妨设 $k_1 \neq 0$ ，则

$$\alpha = -\frac{k_2}{k_1}\beta$$

2. 设 α, β 成比例：

例 1 一个向量 α 线性相关当且仅当 $\alpha = 0$ 。这是：

$$\text{线性相关} \iff \exists k \neq 0 \text{ 使得 } k\alpha = 0 \iff \alpha = 0$$

例 2 两个向量 α, β 线性相关当且仅当它们成比例。

证明

1. 设 α, β 线性相关：存在不全为零的 k_1, k_2 使 $k_1\alpha + k_2\beta = 0$ 。不妨设 $k_1 \neq 0$ ，则

$$\alpha = -\frac{k_2}{k_1}\beta$$

所以 α, β 成比例

2. 设 α, β 成比例：

例 1 一个向量 α 线性相关当且仅当 $\alpha = 0$ 。这是：

$$\text{线性相关} \iff \exists k \neq 0 \text{ 使得 } k\alpha = 0 \iff \alpha = 0$$

例 2 两个向量 α, β 线性相关当且仅当它们成比例。

证明

1. 设 α, β 线性相关：存在不全为零的 k_1, k_2 使 $k_1\alpha + k_2\beta = 0$ 。不妨设 $k_1 \neq 0$ ，则

$$\alpha = -\frac{k_2}{k_1}\beta$$

所以 α, β 成比例

2. 设 α, β 成比例：不妨设 $\alpha = k\beta$

例 1 一个向量 α 线性相关当且仅当 $\alpha = 0$ 。这是：

$$\text{线性相关} \iff \exists k \neq 0 \text{ 使得 } k\alpha = 0 \iff \alpha = 0$$

例 2 两个向量 α, β 线性相关当且仅当它们成比例。

证明

1. 设 α, β 线性相关：存在不全为零的 k_1, k_2 使 $k_1\alpha + k_2\beta = 0$ 。不妨设 $k_1 \neq 0$ ，则

$$\alpha = -\frac{k_2}{k_1}\beta$$

所以 α, β 成比例

2. 设 α, β 成比例：不妨设 $\alpha = k\beta$ ，则

$$1 \cdot \alpha - k\beta = 0$$

例 1 一个向量 α 线性相关当且仅当 $\alpha = 0$ 。这是：

$$\text{线性相关} \iff \exists k \neq 0 \text{ 使得 } k\alpha = 0 \iff \alpha = 0$$

例 2 两个向量 α, β 线性相关当且仅当它们成比例。

证明

1. 设 α, β 线性相关：存在不全为零的 k_1, k_2 使 $k_1\alpha + k_2\beta = 0$ 。不妨设 $k_1 \neq 0$ ，则

$$\alpha = -\frac{k_2}{k_1}\beta$$

所以 α, β 成比例

2. 设 α, β 成比例：不妨设 $\alpha = k\beta$ ，则

$$1 \cdot \alpha - k\beta = 0$$

所以 α, β 线性相关

例 3 \mathbb{R}^3 中三个向量 α, β, γ 线性相关当且仅当它们共面。

例 3 \mathbb{R}^3 中三个向量 α, β, γ 线性相关当且仅当它们共面。

证明 不妨设

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

例 3 \mathbb{R}^3 中三个向量 α, β, γ 线性相关当且仅当它们共面。

证明 不妨设

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

则

$$\alpha, \beta, \gamma \text{ 线性相关} \iff \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \text{ 秩小于 } 3$$

例 3 \mathbb{R}^3 中三个向量 α, β, γ 线性相关当且仅当它们共面。

证明 不妨设

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

则

$$\begin{aligned} \alpha, \beta, \gamma \text{ 线性相关} &\iff \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \text{ 秩小于 } 3 \\ &\iff \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

例 3 \mathbb{R}^3 中三个向量 α, β, γ 线性相关当且仅当它们共面。

证明 不妨设

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

则

$$\begin{aligned} \alpha, \beta, \gamma \text{ 线性相关} &\iff \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \text{ 秩小于 3} \\ &\iff \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \iff \alpha, \beta, \gamma \text{ 共面} \end{aligned}$$

定理 1 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中有一部分向量线性相关性, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关。

定理 1 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中有一部分向量线性相关性, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关。

证明 设

$$\underbrace{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r}_{\text{线性相关}}, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_s$$

定理 1 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中有一部分向量线性相关性, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关。

证明 设

$$\underbrace{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r}_{\text{线性相关}}, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_s$$

则存在不全为零的数 k_1, k_2, \dots, k_r 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_r\alpha_r = 0$$

定理 1 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中有一部分向量线性相关性, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关。

证明 设

$$\underbrace{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r}_{\text{线性相关}}, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_s$$

则存在不全为零的数 k_1, k_2, \dots, k_r 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_r\alpha_r = 0$$

所以

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_r\alpha_r + 0\alpha_{r+1} + \dots + 0\alpha_s = 0$$

定理 1 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中有一部分向量线性相关性, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关。

证明 设

$$\underbrace{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r}_{\text{线性相关}}, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_s$$

则存在不全为零的数 k_1, k_2, \dots, k_r 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_r\alpha_r = 0$$

所以

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_r\alpha_r + 0\alpha_{r+1} + \dots + 0\alpha_s = 0$$

其中系数不全为零,

定理 1 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中有一部分向量线性相关性, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关。

证明 设

$$\underbrace{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r}_{\text{线性相关}}, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_s$$

则存在不全为零的数 k_1, k_2, \dots, k_r 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_r\alpha_r = 0$$

所以

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_r\alpha_r + 0\alpha_{r+1} + \dots + 0\alpha_s = 0$$

其中系数不全为零, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关。

定理 2 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关 \Leftrightarrow 某一向量是其余向量线性组合。

定理 2 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关 \Leftrightarrow 某一向量是其余向量线性组合。

证明

1. “ \Rightarrow ”

2. “ \Leftarrow ”

定理 2 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关 \Leftrightarrow 某一向量是其余向量线性组合。

证明

1. “ \Rightarrow ” 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关,

2. “ \Leftarrow ”

定理 2 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关 \Leftrightarrow 某一向量是其余向量线性组合。

证明

1. “ \Rightarrow ” 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 存在不全为零 k_1, k_2, \dots, k_s 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$$

2. “ \Leftarrow ”

定理 2 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关 \Leftrightarrow 某一向量是其余向量线性组合。

证明

1. “ \Rightarrow ” 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 存在不全为零 k_1, k_2, \dots, k_s 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$$

不妨设 $k_1 \neq 0$,

2. “ \Leftarrow ”

定理 2 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关 \Leftrightarrow 某一向量是其余向量线性组合。

证明

1. “ \Rightarrow ” 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 存在不全为零 k_1, k_2, \dots, k_s 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$$

不妨设 $k_1 \neq 0$, 则 $\alpha_1 = -\frac{k_2}{k_1}\alpha_2 - \dots - \frac{k_s}{k_1}\alpha_s$

2. “ \Leftarrow ”

定理 2 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关 \Leftrightarrow 某一向量是其余向量线性组合。

证明

1. “ \Rightarrow ” 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 存在不全为零 k_1, k_2, \dots, k_s 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$$

不妨设 $k_1 \neq 0$, 则
$$\alpha_1 = -\frac{k_2}{k_1}\alpha_2 - \dots - \frac{k_s}{k_1}\alpha_s$$

所以 α_1 为 $\alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的线性组合

2. “ \Leftarrow ”

定理 2 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关 \Leftrightarrow 某一向量是其余向量线性组合。

证明

1. “ \Rightarrow ” 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 存在不全为零 k_1, k_2, \dots, k_s 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$$

不妨设 $k_1 \neq 0$, 则
$$\alpha_1 = -\frac{k_2}{k_1}\alpha_2 - \dots - \frac{k_s}{k_1}\alpha_s$$

所以 α_1 为 $\alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的线性组合

2. “ \Leftarrow ” 假设 α_1 为 $\alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的线性组合,

定理 2 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关 \Leftrightarrow 某一向量是其余向量线性组合。

证明

1. “ \Rightarrow ” 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 存在不全为零 k_1, k_2, \dots, k_s 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$$

不妨设 $k_1 \neq 0$, 则
$$\alpha_1 = -\frac{k_2}{k_1}\alpha_2 - \dots - \frac{k_s}{k_1}\alpha_s$$

所以 α_1 为 $\alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的线性组合

2. “ \Leftarrow ” 假设 α_1 为 $\alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的线性组合,

$$\alpha_1 = k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s$$

定理 2 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关 \Leftrightarrow 某一向量是其余向量线性组合。

证明

1. “ \Rightarrow ” 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 存在不全为零 k_1, k_2, \dots, k_s 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$$

不妨设 $k_1 \neq 0$, 则
$$\alpha_1 = -\frac{k_2}{k_1}\alpha_2 - \dots - \frac{k_s}{k_1}\alpha_s$$

所以 α_1 为 $\alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的线性组合

2. “ \Leftarrow ” 假设 α_1 为 $\alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的线性组合,

$$\alpha_1 = k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s$$

所以

$$-\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$$

定理 2 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关 \Leftrightarrow 某一向量是其余向量线性组合。

证明

1. “ \Rightarrow ” 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 存在不全为零 k_1, k_2, \dots, k_s 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$$

不妨设 $k_1 \neq 0$, 则
$$\alpha_1 = -\frac{k_2}{k_1}\alpha_2 - \dots - \frac{k_s}{k_1}\alpha_s$$

所以 α_1 为 $\alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的线性组合

2. “ \Leftarrow ” 假设 α_1 为 $\alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的线性组合,

$$\alpha_1 = k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s$$

所以

$$-\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$$

且系数不全为零, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关。

定理 3 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关，但 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 线性相关，则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示，且表示法唯一。

定理 3 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 但 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 线性相关, 则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示, 且表示法唯一。

证明

1. 存在不全为零的 k_1, k_2, \dots, k_s, k 使

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_s\alpha_s + k\beta = 0$$

定理 3 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 但 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 线性相关, 则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示, 且表示法唯一。

证明

1. 存在不全为零的 k_1, k_2, \dots, k_s, k 使

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_s\alpha_s + k\beta = 0 \xrightarrow{\text{可证 } k \neq 0}$$

定理 3 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 但 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 线性相关, 则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示, 且表示法唯一。

证明

1. 存在不全为零的 k_1, k_2, \dots, k_s, k 使

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_s\alpha_s + k\beta = 0 \xrightarrow{\text{可证 } k \neq 0} \beta = -\frac{k_1}{k}\alpha_1 - \dots - \frac{k_s}{k}\alpha_s$$

定理 3 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 但 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 线性相关, 则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示, 且表示法唯一。

证明

1. 存在不全为零的 k_1, k_2, \dots, k_s, k 使

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_s\alpha_s + k\beta = 0 \xrightarrow{\text{可证 } k \neq 0} \beta = -\frac{k_1}{k}\alpha_1 - \dots - \frac{k_s}{k}\alpha_s$$

(证明 $k \neq 0$:

定理 3 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 但 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 线性相关, 则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示, 且表示法唯一。

证明

1. 存在不全为零的 k_1, k_2, \dots, k_s, k 使

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_s\alpha_s + k\beta = 0 \xrightarrow{\text{可证 } k \neq 0} \beta = -\frac{k_1}{k}\alpha_1 - \dots - \frac{k_s}{k}\alpha_s$$

(证明 $k \neq 0$: 否则 ($k = 0$))

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$$

定理 3 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 但 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 线性相关, 则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示, 且表示法唯一。

证明

1. 存在不全为零的 k_1, k_2, \dots, k_s, k 使

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_s\alpha_s + k\beta = 0 \xrightarrow{\text{可证 } k \neq 0} \beta = -\frac{k_1}{k}\alpha_1 - \dots - \frac{k_s}{k}\alpha_s$$

(证明 $k \neq 0$: 否则 ($k = 0$), k_1, k_2, \dots, k_s 不全为零, 且

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$$

定理 3 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 但 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 线性相关, 则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示, 且表示法唯一。

证明

1. 存在不全为零的 k_1, k_2, \dots, k_s, k 使

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_s\alpha_s + k\beta = 0 \xrightarrow{\text{可证 } k \neq 0} \beta = -\frac{k_1}{k}\alpha_1 - \dots - \frac{k_s}{k}\alpha_s$$

(证明 $k \neq 0$: 否则 ($k = 0$), k_1, k_2, \dots, k_s 不全为零, 且

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$$

推出 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 矛盾。)

定理 3 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 但 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 线性相关, 则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示, 且表示法唯一。

证明

1. 存在不全为零的 k_1, k_2, \dots, k_s, k 使

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_s\alpha_s + k\beta = 0 \xrightarrow{\text{可证 } k \neq 0} \beta = -\frac{k_1}{k}\alpha_1 - \dots - \frac{k_s}{k}\alpha_s$$

(证明 $k \neq 0$: 否则 ($k = 0$), k_1, k_2, \dots, k_s 不全为零, 且

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$$

推出 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 矛盾。)

2. 设

$$\beta = h_1\alpha_1 + \dots + h_s\alpha_s$$

$$\beta = l_1\alpha_1 + \dots + l_s\alpha_s$$

定理 3 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 但 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 线性相关, 则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示, 且表示法唯一。

证明

1. 存在不全为零的 k_1, k_2, \dots, k_s, k 使

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_s\alpha_s + k\beta = 0 \xrightarrow{\text{可证 } k \neq 0} \beta = -\frac{k_1}{k}\alpha_1 - \dots - \frac{k_s}{k}\alpha_s$$

(证明 $k \neq 0$: 否则 ($k = 0$), k_1, k_2, \dots, k_s 不全为零, 且

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$$

推出 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 矛盾。)

2. 设

$$\begin{array}{l} \beta = h_1\alpha_1 + \dots + h_s\alpha_s \\ \beta = l_1\alpha_1 + \dots + l_s\alpha_s \end{array} \xrightarrow{\text{相减}} (h_1 - l_1)\alpha_1 + \dots + (h_s - l_s)\alpha_s = 0$$

定理 3 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 但 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 线性相关, 则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示, 且表示法唯一。

证明

1. 存在不全为零的 k_1, k_2, \dots, k_s, k 使

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_s\alpha_s + k\beta = 0 \xrightarrow{\text{可证 } k \neq 0} \beta = -\frac{k_1}{k}\alpha_1 - \dots - \frac{k_s}{k}\alpha_s$$

(证明 $k \neq 0$: 否则 ($k = 0$), k_1, k_2, \dots, k_s 不全为零, 且

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$$

推出 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 矛盾。)

2. 设

$$\begin{array}{l} \beta = h_1\alpha_1 + \dots + h_s\alpha_s \\ \beta = l_1\alpha_1 + \dots + l_s\alpha_s \end{array} \xrightarrow{\text{相减}} (h_1 - l_1)\alpha_1 + \dots + (h_s - l_s)\alpha_s = 0$$

由线性无关性, $h_1 = l_1, \dots, h_s = l_s$ 。

定理 4 两个向量组

$$(A): \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$$

$$(B): \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$$

定理 4 两个向量组

$$(A): \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$$

$$(B): \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$$

若 (B) 可由 (A) 线性表示, 且 $t > s$,

定理 4 两个向量组

$$(A): \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$$

$$(B): \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$$

若 (B) 可由 (A) 线性表示, 且 $t > s$, 则向量组 (B) 线性相关。

定理 4 两个向量组

$(A): \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$

$(B): \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$

若 (B) 可由 (A) 线性表示, 且 $t > s$, 则向量组 (B) 线性相关。

证明 要找不全为零的 k_1, \dots, k_t 使下式为零:

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \dots + k_t\beta_t$$

定理 4 两个向量组

$$(A): \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$$

$$(B): \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$$

若 (B) 可由 (A) 线性表示, 且 $t > s$, 则向量组 (B) 线性相关。

证明 要找不全为零的 k_1, \dots, k_t 使下式为零:

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \dots + k_t\beta_t = (\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_t) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_t \end{pmatrix}$$

定理 4 两个向量组

$$(A): \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$$

$$(B): \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$$

若 (B) 可由 (A) 线性表示, 且 $t > s$, 则向量组 (B) 线性相关。

证明 要找不全为零的 k_1, \dots, k_t 使下式为零:

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \dots + k_t\beta_t = (\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_t) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_t \end{pmatrix}$$
$$= (\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_s) \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_t \end{pmatrix}$$

定理 4 两个向量组

$$(A): \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$$

$$(B): \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$$

若 (B) 可由 (A) 线性表示, 且 $t > s$, 则向量组 (B) 线性相关。

证明 要找不全为零的 k_1, \dots, k_t 使下式为零:

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \dots + k_t\beta_t = (\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_t) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_t \end{pmatrix}$$
$$= (\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_s) \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_t \end{pmatrix}$$

定理 4 两个向量组

$$(A): \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$$

$$(B): \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$$

若 (B) 可由 (A) 线性表示, 且 $t > s$, 则向量组 (B) 线性相关。

证明 要找不全为零的 k_1, \dots, k_t 使下式为零:

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \dots + k_t\beta_t = (\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_t) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_t \end{pmatrix}$$
$$= (\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_s) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_t \end{pmatrix}$$

定理 4 两个向量组

$$(A): \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$$

$$(B): \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$$

若 (B) 可由 (A) 线性表示, 且 $t > s$, 则向量组 (B) 线性相关。

证明 要找不全为零的 k_1, \dots, k_t 使下式为零:

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \dots + k_t\beta_t = (\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_t) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_t \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_s) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1t} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{st} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_t \end{pmatrix}$$

定理 4 两个向量组 $(A): \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$
 $(B): \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$

若 (B) 可由 (A) 线性表示, 且 $t > s$, 则向量组 (B) 线性相关。

证明 要找不全为零的 k_1, \dots, k_t 使下式为零:

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \dots + k_t\beta_t = (\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_t) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_t \end{pmatrix}$$
$$= (\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_s) \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1t} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{st} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_t \end{pmatrix}}_k$$

定理 4 两个向量组

$$(A): \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$$

$$(B): \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$$

若 (B) 可由 (A) 线性表示, 且 $t > s$, 则向量组 (B) 线性相关。

证明 要找不全为零的 k_1, \dots, k_t 使下式为零:

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \dots + k_t\beta_t = (\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_t) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_t \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_s) \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1t} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{st} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_t \end{pmatrix}}_k \quad \begin{matrix} \because r(A) \leq s < t \\ \therefore \end{matrix}$$

定理 4 两个向量组

$$(A): \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$$

$$(B): \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$$

若 (B) 可由 (A) 线性表示, 且 $t > s$, 则向量组 (B) 线性相关。

证明 要找不全为零的 k_1, \dots, k_t 使下式为零:

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \dots + k_t\beta_t = (\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_t) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_t \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_s) \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1t} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{st} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_t \end{pmatrix}}_k$$

$\because r(A) \leq s < t$
 \therefore 存在 $k \neq 0$
使得 $Ak = 0$

定理 4 两个向量组

$$(A): \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$$

$$(B): \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$$

若 (B) 可由 (A) 线性表示, 且 $t > s$, 则向量组 (B) 线性相关。

证明 要找不全为零的 k_1, \dots, k_t 使下式为零:

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \dots + k_t\beta_t = (\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_t) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_t \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_s) \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1t} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{st} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_t \end{pmatrix}}_k$$

$\because r(A) \leq s < t$
 \therefore 存在 $k \neq 0$
使得 $Ak = 0$

$$= 0$$

所以向量组 (B) 线性相关。

定理 4” 两个向量组 $(A): \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$
 $(B): \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$

假设向量组 (B) 可由 (A) 线性表示，结论：

1. 若 $t > s$ ，则向量组 (B) 线性相关。
-

定理 4” 两个向量组 $(A): \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$
 $(B): \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$

假设向量组 (B) 可由 (A) 线性表示，结论：

1. 若 $t > s$ ，则向量组 (B) 线性相关。
 2. 若向量组 (B) 线性无关，则 $t \leq s$ 。
-

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$$

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$$

定理 4” 两个向量组 $(A): \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$
 $(B): \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$

假设向量组 (B) 可由 (A) 线性表示，结论：

1. 若 $t > s$ ，则向量组 (B) 线性相关。
2. 若向量组 (B) 线性无关，则 $t \leq s$ 。

推论 两个向量组 $(A): \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$
 $(B): \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$

定理 4” 两个向量组 $(A): \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$
 $(B): \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$

假设向量组 (B) 可由 (A) 线性表示，结论：

1. 若 $t > s$ ，则向量组 (B) 线性相关。
2. 若向量组 (B) 线性无关，则 $t \leq s$ 。

推论 两个向量组 $(A): \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$
 $(B): \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$

如果向量组 (A) 与 (B) 等价，且均线性无关，

定理 4” 两个向量组 $(A): \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$
 $(B): \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$

假设向量组 (B) 可由 (A) 线性表示，结论：

1. 若 $t > s$ ，则向量组 (B) 线性相关。
 2. 若向量组 (B) 线性无关，则 $t \leq s$ 。
-

推论 两个向量组 $(A): \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$
 $(B): \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$

如果向量组 (A) 与 (B) 等价，且均线性无关，则 $s = t$ 。

定理 4" 两个向量组 $(A): \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$
 $(B): \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$

假设向量组 (B) 可由 (A) 线性表示, 结论:

1. 若 $t > s$, 则向量组 (B) 线性相关。
2. 若向量组 (B) 线性无关, 则 $t \leq s$ 。

推论 两个向量组 $(A): \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$
 $(B): \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$

如果向量组 (A) 与 (B) 等价, 且均线性无关, 则 $s = t$ 。

证明

- (B) 由 (A) 线性表示, 且 (B) 线性无关

定理 4" 两个向量组 $(A): \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$
 $(B): \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$

假设向量组 (B) 可由 (A) 线性表示, 结论:

1. 若 $t > s$, 则向量组 (B) 线性相关。
2. 若向量组 (B) 线性无关, 则 $t \leq s$ 。

推论 两个向量组 $(A): \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$
 $(B): \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$

如果向量组 (A) 与 (B) 等价, 且均线性无关, 则 $s = t$ 。

证明

- (B) 由 (A) 线性表示, 且 (B) 线性无关 $\Rightarrow t \leq s$

定理 4” 两个向量组

$$(A): \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$$
$$(B): \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$$

假设向量组 (B) 可由 (A) 线性表示, 结论:

1. 若 $t > s$, 则向量组 (B) 线性相关。
2. 若向量组 (B) 线性无关, 则 $t \leq s$ 。

推论 两个向量组

$$(A): \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$$
$$(B): \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$$

如果向量组 (A) 与 (B) 等价, 且均线性无关, 则 $s = t$ 。

证明

- (B) 由 (A) 线性表示, 且 (B) 线性无关 $\Rightarrow t \leq s$
- (A) 由 (B) 线性表示, 且 (A) 线性无关

定理 4” 两个向量组 $(A): \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$
 $(B): \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$

假设向量组 (B) 可由 (A) 线性表示, 结论:

1. 若 $t > s$, 则向量组 (B) 线性相关。
2. 若向量组 (B) 线性无关, 则 $t \leq s$ 。

推论 两个向量组 $(A): \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$
 $(B): \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$

如果向量组 (A) 与 (B) 等价, 且均线性无关, 则 $s = t$ 。

证明

- (B) 由 (A) 线性表示, 且 (B) 线性无关 $\Rightarrow t \leq s$
- (A) 由 (B) 线性表示, 且 (A) 线性无关 $\Rightarrow s \leq t$

定理 4" 两个向量组

$$(A): \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$$
$$(B): \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$$

假设向量组 (B) 可由 (A) 线性表示, 结论:

1. 若 $t > s$, 则向量组 (B) 线性相关。
2. 若向量组 (B) 线性无关, 则 $t \leq s$ 。

推论 两个向量组

$$(A): \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$$
$$(B): \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$$

如果向量组 (A) 与 (B) 等价, 且均线性无关, 则 $s = t$ 。

证明

- (B) 由 (A) 线性表示, 且 (B) 线性无关 $\Rightarrow t \leq s$
- (A) 由 (B) 线性表示, 且 (A) 线性无关 $\Rightarrow s \leq t$

所以 $s = t$