

第 04 周作业解答

练习 1. 在 6 阶行列式中, 乘积 $a_{51}a_{32}a_{13}a_{44}a_{65}a_{26}$ 前应冠以正号还是负号, 以构成一般项?

解先将行标按顺序排列:

$$a_{51}a_{32}a_{13}a_{44}a_{65}a_{26} = a_{13}a_{26}a_{32}a_{44}a_{51}a_{65}$$

此时列标的排列是 362415, 逆序数是 8, 为偶排列, 所以乘积前应冠以正号 +。

练习 2. 判断行列式

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1000 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 1000 & 7 & 8 \\ 1000 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1000 \\ 1 & 2 & 3 & 1000 & 4 \end{vmatrix}$$

的值是正数还是负数? 说明你的理由。

解由行列式的公式 $|A| = \sum (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$, 可见 $(-1)^{N(23154)} a_{12} a_{23} a_{31} a_{45} a_{54} = (-1)^{N(23154)} 1000^4$ 远远超过其他项, 所行列式的正负由该项的正负决定。因为 $N(23154) = 3$, 该项为负, 所以行列式为负数。

练习 3. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, 计算 $B+C$, AB , BA , AC , CA 和 $A(2B-3C)$ 。

解

$$\begin{aligned} B+C &= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}, & AB &= \begin{pmatrix} 15 & -14 \\ -15 & 14 \end{pmatrix}, & BA &= \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -4 & 16 & -8 \\ 7 & -28 & 14 \end{pmatrix} \\ AC &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & CA &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -8 & 4 \\ 4 & -16 & 8 \end{pmatrix}, & A(2B-3C) &= \begin{pmatrix} 30 & -28 \\ -30 & 28 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

练习 4. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 计算 AA^T 及 $A^T A$ 。

解

$$\begin{aligned} AA^T &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 2 \\ 2 & 13 \end{pmatrix} \\ A^T A &= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 20 \end{pmatrix} \end{aligned}$$