§3.5 线性方程组解的结构

数学系 梁卓滨

2018 - 2019 学年上学期



例解齐次线性方程组:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

例解齐次线性方程组:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

⇒
$$(A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{77.5}} \frac{\text{77.5}}{\text{77.5}}$$

例 解齐次线性方程组:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{inspan}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta \oplus}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

例 解齐次线性方程组:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta g}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

自由变量 *X*3, *X*4



⇒
$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta} \neq +} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$
 $r(A) = 2$

⇒ $\begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$

例 解齐次线性方程组: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

⇒
$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\text{figh}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$
 $r(A) = 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$
 自由变量

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - & x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

 X_3, X_4

例 解齐次线性方程组:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

⇒
$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta} \neq +} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$
 $r(A) = 2$
⇒ $\begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$ ⇒ $\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$ $= \frac{1}{2}$ $= \frac{1$

$$\Rightarrow (A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{iffigh}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \qquad \text{in the entire in the e$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \\ x_2 = \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\eta \neq +} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \qquad \text{alhow}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \qquad x_3, x_4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$



$$\Rightarrow (A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{iffigh}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \qquad \text{althous}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$



$$\Rightarrow (A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{iffigh}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \qquad \text{althous}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A : 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\text{trey}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \xrightarrow{\text{Eline2}} \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 - 2c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 = c_1 - 2c_2 \\ x_4 = c_1 - 2c_2 \\ x_5 = c_1 - 2c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 = c_1 - 2c_2 \\$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c_1 \\ c_1 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3c_2 \\ -2c_2 \\ 0 \\ c_2 \end{pmatrix}$$



$$\Rightarrow (A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\text{frey}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \qquad \text{althous}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



⇒
$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta} \not \oplus} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$
 $r(A) = 2$

$$\begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 & \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 & \text{自由变量} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 & \text{ and } \\ x_2 = x_3 - 2x_4 & x_3, x_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 & (x_1) & (-2) & (3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$



$$\Rightarrow (A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta} \not \oplus} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - & x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{自由变量} \\ x_3, x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$$



例 解齐次线性方程组: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\text{freph}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - & x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{自由变量} \\ x_3, x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow x = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$$

 ξ_1 , ξ_2 基础解系



例 解齐次线性方程组: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\text{freph}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

⇒
$$\begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - & x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$
 ⇒ $\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$ \text{\text{\text{\text{along}}}} \text{\text{\text{\text{\$\

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

 $\Rightarrow x = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$

 ξ_1 , ξ_2 基础解系

$$\Rightarrow (A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta \oplus \mu}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

例 解齐次线性方程组:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta} \not \oplus} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

自由变量 *X*₂, *X*₄



例解齐次线性方程组: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

⇒
$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\text{freph}}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$
 $r(A) = 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 & + x_4 = 0 \end{cases}$$
 自由变量

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

 X_2, X_4

例 解齐次线性方程组:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

⇒
$$(A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta g}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$
 $r(A) = 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 & + x_4 = 0 \end{cases}$$
 自由变量

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

 X_2, X_4

例 解齐次线性方程组:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta} \not \oplus} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 & + x_4 = 0 \\ - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \qquad \text{althous}$$

$$\Rightarrow (A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta} \not \oplus} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 & + x_4 = 0 \\ - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \qquad \text{lange}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 = x_4 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_4 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_4 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_4 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_4 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_4 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_4 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_4 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_4 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_4 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_4 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_4 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_4 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_4 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_4 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_4 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_4 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_4 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_4 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_4 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_4 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_4 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_4 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_4 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_4 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_4 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_4 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_4 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_4 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_4 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_4 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_4 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_4 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_4 - x_4 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_4 - x$$



$$\Rightarrow (A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta} \not \oplus} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 & + x_4 = 0 \\ - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \qquad \text{althous}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2c_1 - c_2 \\ x_1 = -2c_1 - c_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$



$$\Rightarrow (A : 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\eta \not \Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 & + x_4 = 0 \\ - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \qquad \text{althous}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_1 + 2c_2 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$



$$\Rightarrow (A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta} \not \oplus} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 & + x_4 = 0 \\ - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \qquad \text{althous}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2c_1 - c_2 \\ x_2 = -c_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_1 + 2c_2 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$



例 解齐次线性方程组: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta} \not \oplus} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 & + x_4 = 0 \\ - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \qquad \text{in the properties of the prop$$

整局大學
 基局大學
 基局大學
 基局
 基局
 基局
 基局
 表
 基局
 表
 基局
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表
 表

$$\Rightarrow (A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\eta \neq} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 & + x_4 = 0 \\ - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \qquad \text{laby}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_1 + 2c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_1 + 2c_2 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$\Rightarrow (A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta} \not \oplus} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 & + x_4 = 0 \\ - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases} \qquad \text{althous}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_1 + 2c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_1 + 2c_2 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$



$$\Rightarrow (A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\text{freph}}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases}$$
 \text{\text{\text{\text{bigs}}}} \text{\text{\text{\$\$\text{\$\exitit{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\text{\$\tex{\$\text{\$\text{\$\text{\$\te

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_1 + 2c_2 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$$



例 解齐次线性方程组: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta} \not \oplus} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases}$$
 \text{\text{\text{bin \text{\$\sigma_2\$}}} \text{\text{\$\sigma_2\$}}, \text{\$\chi_4\$}

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_1 + 2c_2 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ \xi_2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow x = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$$



例 解齐次线性方程组: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\text{freph}}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_1 + 2c_2 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

 $\Rightarrow x = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$

 ξ_1 , ξ_2 基础解系

齐次线性方程组的基础解系

定义 如果 $ξ_1$, $ξ_2$, ..., $ξ_s$ 是齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

的解,线性无关,并且任意解均可表示成它们的线性组合,则称

$$\xi_1,\,\xi_2,\,\ldots,\,\xi_s$$

是齐次方程组的一个基础解系。

齐次线性方程组的基础解系

定义 如果 ξ_1 , ξ_2 , ..., ξ_s 是齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

的解,线性无关,并且任意解均可表示成它们的线性组合,则称

$$\xi_1, \, \xi_2, \, \ldots, \, \xi_s$$

是齐次方程组的一个基础解系。

定理 若齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

满足

$$r(A) = r < n$$

则方程组的基础解系存在,且每个基础解系恰恰有 n-r 个向量组成:

$$\xi_1, \, \xi_2, \, \ldots, \, \xi_s, \, (s = n - r)$$

齐次线性方程组的基础解系

定义 如果 ξ_1 , ξ_2 , ..., ξ_s 是齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

的解,线性无关,并且任意解均可表示成它们的线性组合,则称

$$\xi_1, \, \xi_2, \, \ldots, \, \xi_s$$

是齐次方程组的一个基础解系。

定理 若齐次线性方程组

满足

$$Ax = 0$$

$$r(A) = r < n$$

也是自由变量个数

则方程组的基础解系存在,且每个基础解系恰恰有<mark>'n-r</mark>个向量组成:

$$\xi_1, \, \xi_2, \, \ldots, \, \xi_s, \, (s = n - r)$$

齐次线性方程组的基础解系

定义 如果 $ξ_1$, $ξ_2$, ..., $ξ_s$ 是齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

的解,线性无关,并且任意解均可表示成它们的线性组合,则称

$$\xi_1,\,\xi_2,\,\ldots,\,\xi_s$$

是齐次方程组的一个基础解系。

定理 若齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

满足

$$r(A) = r < n$$

人也是自由变量个数 ____

则方程组的基础解系存在,且每个基础解系恰恰有 $\binom{r}{n-r}$ 个向量组成: $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s, \qquad (s=n-r)$

并且,方程组的任意解x,均可由基础解系线性表示:

$$x = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_s \xi_s$$

- 1. (A:0) ^{初等行变换} 简化的阶梯型矩阵;
- 2. 确定自由变量, 写出同解的方程组;
- 3. 求基础解系:

4. 通解就是:基础解系的线性组合

- 1. (A:0) ^{初等行变换} 简化的阶梯型矩阵;
- 2. 确定自由变量, 写出同解的方程组;
- 3. 求基础解系:
 - 将一个自由变量取值为 1, 其余取 0, 得到一个解向量;
 - 对所有 n-r(A) 个自由变量作类似操作,便得 n-r(A) 个解向量,构成基础解系
- 4. 通解就是: 基础解系的线性组合

- 1. (A:0) ^{初等行变换} 简化的阶梯型矩阵;
- 2. 确定自由变量, 写出同解的方程组;
- 3. 求基础解系:
 - 将一个自由变量取值为 1, 其余取 0, 得到一个解向量;
 - 对所有 n-r(A) 个自由变量作类似操作,便得 n-r(A) 个解向量,构成基础解系
- 4. 诵解就是: 基础解系的线性组合

例

- 1. (A:0) ^{初等行变换} 简化的阶梯型矩阵;
- 2. 确定自由变量, 写出同解的方程组;
- 3. 求基础解系:
 - 将一个自由变量取值为 1, 其余取 0, 得到一个解向量;
 - 对所有 n-r(A) 个自由变量作类似操作,便得 n-r(A) 个解向量,构成基础解系
- 4. 通解就是:基础解系的线性组合

例

- 1. (A:0) ^{初等行变换} 简化的阶梯型矩阵;
- 2. 确定自由变量, 写出同解的方程组;
- 3. 求基础解系:
 - 将一个自由变量取值为 1, 其余取 0, 得到一个解向量;
 - 对所有 n-r(A) 个自由变量作类似操作,便得 n-r(A) 个解向量,构成基础解系
- 4. 通解就是:基础解系的线性组合

例

2. 基础解系
$$\xi_1$$
, ξ_2 : $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} =$



- 1. (A:0) ^{初等行变换} 简化的阶梯型矩阵;
- 2. 确定自由变量, 写出同解的方程组;
- 3. 求基础解系:
 - 将一个自由变量取值为 1, 其余取 0, 得到一个解向量;
 - 对所有 n-r(A) 个自由变量作类似操作,便得 n-r(A) 个解向量,构成基础解系
- 4. 通解就是:基础解系的线性组合

例

2. 基础解系
$$\xi_1$$
, ξ_2 : $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



- 1. (A:0) ^{初等行变换} 简化的阶梯型矩阵;
- 2. 确定自由变量, 写出同解的方程组;
- 3. 求基础解系:
 - 将一个自由变量取值为 1, 其余取 0, 得到一个解向量;
 - 对所有 n-r(A) 个自由变量作类似操作,便得 n-r(A) 个解向量,构成基础解系
- 4. 通解就是:基础解系的线性组合

例

2. 基础解系
$$\xi_1$$
, ξ_2 : $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$



- 1. (A:0) ^{初等行变换} 简化的阶梯型矩阵;
- 2. 确定自由变量, 写出同解的方程组;
- 3. 求基础解系:
 - 将一个自由变量取值为 1, 其余取 0, 得到一个解向量;
 - 对所有 n-r(A) 个自由变量作类似操作,便得 n-r(A) 个解向量,构成基础解系
- 4. 通解就是:基础解系的线性组合

例

2. 基础解系
$$\xi_1$$
, ξ_2 : $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



- 1. (A:0) ^{初等行变换} 简化的阶梯型矩阵;
- 2. 确定自由变量, 写出同解的方程组;
- 3. 求基础解系:
 - 将一个自由变量取值为 1, 其余取 0, 得到一个解向量;
 - 对所有 n-r(A) 个自由变量作类似操作,便得 n-r(A) 个解向量,构成基础解系
- 4. 通解就是:基础解系的线性组合

例

2. 基础解系
$$\xi_1$$
, ξ_2 : $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



- 1. (A:0) ^{初等行变换} 简化的阶梯型矩阵;
- 2. 确定自由变量, 写出同解的方程组;
- 3. 求基础解系:
 - 将一个自由变量取值为 1, 其余取 0, 得到一个解向量;
 - 对所有 n r(A) 个自由变量作类似操作,便得 n r(A) 个解向量,构成基础解系
- 4. 通解就是:基础解系的线性组合

例

1. 假设自由变量为 x_3 , x_4 , 写出同解方程组: $\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$

2. 基础解系
$$\xi_1$$
, ξ_2 : $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. 通解: $X = C_1\xi_1 + C_2\xi_2$



$$(A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \frac{r_2 - 2r_1}{r_3 - 3r_1}$$

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

例 1 用基础解系表示
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$
的通解
$$3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 7x_4 = 0$$

$$(A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$r_1-r_2$$

例 1 用基础解系表示
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$
的通解
$$3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 7x_4 = 0$$

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 - r_2}_{r_3 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



例 1 用基础解系表示
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$
的通解
$$3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 7x_4 = 0$$

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

自由变量 X_3, X_4 ,

例 1 用基础解系表示
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$
的通解
$$3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 7x_4 = 0$$

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

自由变量 x_3 , x_4 , 所以同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + & 7x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$$

例 1 用基础解系表示
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$
的通解
$$3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 7x_4 = 0$$

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

自由变量 x_3 , x_4 , 所以同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + & 7x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$



例 1 用基础解系表示
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$
的通解
$$3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 7x_4 = 0$$

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[r_3 - 2r_2]{r_3 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

自由变量 x_3 , x_4 , 所以同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + & 7x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -7x_3 + 4x_4 \\ x_2 = 3x_3 - x_4 \end{cases}$$



例 1 用基础解系表示
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$
的通解
$$3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 7x_4 = 0$$

$$(A:0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

1. 自由变量
$$x_3$$
, x_4 , 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -7x_3 + 4x_4 \\ x_2 = 3x_3 - x_4 \end{cases}$



例 1 用基础解系表示
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$
的通解
$$3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 7x_4 = 0$$

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. 自由变量
$$x_3$$
, x_4 , 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -7x_3 + 4x_4 \\ x_2 = 3x_3 - x_4 \end{cases}$

2. 基础解系 ξ1, ξ2:



例 1 用基础解系表示
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$
的通解
$$3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 7x_4 = 0$$

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. 自由变量
$$x_3$$
, x_4 , 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -7x_3 + 4x_4 \\ x_2 = 3x_3 - x_4 \end{cases}$

2. 基础解系
$$\xi_1$$
, ξ_2 : $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



例 1 用基础解系表示
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$
的通解
$$3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 7x_4 = 0$$

$$(A:0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

1. 自由变量
$$x_3$$
, x_4 , 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -7x_3 + 4x_4 \\ x_2 = 3x_3 - x_4 \end{cases}$

2. 基础解系
$$\xi_1$$
, ξ_2 : $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

例 1 用基础解系表示
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$
的通解
$$3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 7x_4 = 0$$

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. 自由变量
$$x_3$$
, x_4 , 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -7x_3 + 4x_4 \\ x_2 = 3x_3 - x_4 \end{cases}$

2. 基础解系
$$\xi_1$$
, ξ_2 : $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

例 1 用基础解系表示
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$
的通解
$$3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 7x_4 = 0$$

$$(A:0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

1. 自由变量
$$x_3$$
, x_4 , 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -7x_3 + 4x_4 \\ x_2 = 3x_3 - x_4 \end{cases}$

2. 基础解系
$$\xi_1$$
, ξ_2 : $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

例 1 用基础解系表示
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$
的通解
$$3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 7x_4 = 0$$

$$(A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. 自由变量
$$x_3$$
, x_4 , 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -7x_3 + 4x_4 \\ x_2 = 3x_3 - x_4 \end{cases}$

2. 基础解系
$$\xi_1$$
, ξ_2 : $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

例 1 用基础解系表示
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$
的通解
$$3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 7x_4 = 0$$

$$(A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. 自由变量
$$x_3$$
, x_4 , 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -7x_3 + 4x_4 \\ x_2 = 3x_3 - x_4 \end{cases}$

2. 基础解系
$$\xi_1$$
, ξ_2 : $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. 通解: $x = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$

$$(A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{pmatrix}$$



$$(A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \xrightarrow{r_3 - 3r_1}$$



$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$



$$(A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{r_1 + r_2}{r_3 - 2r_2}$$



例 2 用基础解系表示 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 7x_4 = 0 \text{ 的通解} \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 - 11x_4 = 0 \end{cases}$

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_2]{r_1+r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

例 2 用基础解系表示
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 7x_4 = 0 \text{ 的通解} \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 - 11x_4 = 0 \end{cases}$$

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

自由变量 x_2, x_4 ,

例 2 用基础解系表示
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 7x_4 = 0 \text{ 的通解} \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 - 11x_4 = 0 \end{cases}$$

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_2]{r_1+r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

自由变量 x_2 , x_4 , 所以同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_4 = 0 \end{cases}$$

例 2 用基础解系表示
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 7x_4 = 0 \text{ 的通解} \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 - 11x_4 = 0 \end{cases}$$

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_2]{\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}}$$

自由变量 x_2 , x_4 , 所以同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

例 2 用基础解系表示 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 7x_4 = 0 \text{ 的通解} \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 - 11x_4 = 0 \end{cases}$

解

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_2]{\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}}$$

自由变量 x_2 , x_4 , 所以同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 & -4x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$$



例 2 用基础解系表示
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$$
的通解
$$3x_1 + 6x_2 - x_3 - 11x_4 = 0$$

$$(A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. 自由变量
$$x_2$$
, x_4 , 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$



例 2 用基础解系表示
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$$
的通解
$$3x_1 + 6x_2 - x_3 - 11x_4 = 0$$

$$(A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. 自由变量
$$x_2$$
, x_4 , 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$

2. 基础解系 ξ1, ξ2:



例 2 用基础解系表示
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$$
的通解
$$3x_1 + 6x_2 - x_3 - 11x_4 = 0$$

$$(A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. 自由变量
$$x_2$$
, x_4 , 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$

2. 基础解系
$$\xi_1$$
, ξ_2 : $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$



例 2 用基础解系表示
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$$
的通解
$$3x_1 + 6x_2 - x_3 - 11x_4 = 0$$

$$(A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & | & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & | & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & | & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

- 1. 自由变量 x_2 , x_4 , 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$
- 2. 基础解系 ξ_1 , ξ_2 : $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$



例 2 用基础解系表示
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$$
的通解
$$3x_1 + 6x_2 - x_3 - 11x_4 = 0$$

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & | & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & | & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & | & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

1. 自由变量
$$x_2$$
, x_4 , 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$

2. 基础解系
$$\xi_1$$
, ξ_2 : $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$



例 2 用基础解系表示
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$$
的通解
$$3x_1 + 6x_2 - x_3 - 11x_4 = 0$$

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & | & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & | & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & | & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

- 1. 自由变量 x_2 , x_4 , 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$
- 2. 基础解系 ξ_1 , ξ_2 : $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



例 2 用基础解系表示
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$$
的通解
$$3x_1 + 6x_2 - x_3 - 11x_4 = 0$$

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & | & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & | & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & | & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

1. 自由变量
$$x_2$$
, x_4 , 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$

2. 基础解系
$$\xi_1$$
, ξ_2 : $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$



例 2 用基础解系表示
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$$
的通解
$$3x_1 + 6x_2 - x_3 - 11x_4 = 0$$

$$(A:0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & | & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & | & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & | & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

1. 自由变量
$$x_2$$
, x_4 , 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$

2. 基础解系
$$\xi_1$$
, ξ_2 : $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$



例 2 用基础解系表示 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$ 的通解 $3x_1 + 6x_2 - x_3 - 11x_4 = 0$

$$(A \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 1. 自由变量 x_2 , x_4 , 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$
- 2. 基础解系 ξ_1 , ξ_2 : $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- 3. 通解: $x = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$



$$Ax = 0$$

的解有下列性质:

1. 若 ξ_1 , ξ_2 是解, 则 $\xi_1 + \xi_2$ 也是解

$$Ax = 0$$

- 1. 若 ξ_1 , ξ_2 是解, 则 $\xi_1 + \xi_2$ 也是解
- 2. 若 ξ 是解,则对 $\forall c \in \mathbb{R}$, cξ 也是解

$$Ax = 0$$

- 1. 若 ξ_1 , ξ_2 是解, 则 $\xi_1 + \xi_2$ 也是解
- 2. 若 ξ 是解,则对 $\forall c \in \mathbb{R}$, cξ 也是解
- 3. 更一般地,若 ξ_1 , ξ_2 , ..., ξ_s 是解, c_1 , c_2 , ..., c_s 是任意常数,则解的线性组合

也是解
$$\xi = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_s \xi_s$$

$$Ax = 0$$

的解有下列性质:

- 1. 若 ξ_1 , ξ_2 是解, 则 $\xi_1 + \xi_2$ 也是解
- 2. 若 ξ 是解,则对 $\forall c \in \mathbb{R}$, cξ 也是解
- 3. 更一般地,若 ξ_1 , ξ_2 , ..., ξ_s 是解, c_1 , c_2 , ..., c_s 是任意常数,则解的线性组合

$$\xi = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_s \xi_s$$

证明

Αξ

$$Ax = 0$$

的解有下列性质:

- 1. 若 ξ_1 , ξ_2 是解, 则 $\xi_1 + \xi_2$ 也是解
- 2. 若 ξ 是解,则对 $\forall c \in \mathbb{R}$, cξ 也是解
- 3. 更一般地,若 ξ_1 , ξ_2 , ..., ξ_s 是解, c_1 , c_2 , ..., c_s 是任意常数,则解的线性组合

也是解
$$\xi = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_s \xi_s$$
$$A\xi = A(c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_s \xi_s)$$

证明



$$Ax = 0$$

- 1. 若 ξ_1 , ξ_2 是解, 则 $\xi_1 + \xi_2$ 也是解
- 2. 若 ξ 是解,则对 $\forall c \in \mathbb{R}$, cξ 也是解
- 3. 更一般地,若 ξ_1 , ξ_2 , ..., ξ_s 是解, c_1 , c_2 , ..., c_s 是任意常数,则解的线性组合

$$\xi = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_s \xi_s$$

$$A\xi = A(c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \dots + c_s\xi_s)$$
$$= c_1A\xi_1 + c_2A\xi_2 + \dots + c_sA\xi_s$$



$$Ax = 0$$

- 1. 若 ξ_1 , ξ_2 是解, 则 $\xi_1 + \xi_2$ 也是解
- 2. 若 ξ 是解,则对 $\forall c \in \mathbb{R}$, cξ 也是解
- 3. 更一般地,若 ξ_1 , ξ_2 , ..., ξ_s 是解, c_1 , c_2 , ..., c_s 是任意常数,则解的线性组合

$$\xi = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_s \xi_s$$

$$A\xi = A(c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \dots + c_s\xi_s)$$

$$= c_1A\xi_1 + c_2A\xi_2 + \dots + c_sA\xi_s$$

$$= c_10 + c_20 + \dots + c_s0$$

$$Ax = 0$$

- 1. 若 ξ_1 , ξ_2 是解, 则 ξ_1 + ξ_2 也是解
- 2. 若 ξ 是解,则对 $\forall c \in \mathbb{R}$, cξ 也是解
- 3. 更一般地,若 ξ_1 , ξ_2 , ..., ξ_s 是解, c_1 , c_2 , ..., c_s 是任意常数,则解的线性组合

$$\xi = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_s \xi_s$$

$$A\xi = A(c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \dots + c_s\xi_s)$$

$$= c_1A\xi_1 + c_2A\xi_2 + \dots + c_sA\xi_s$$

$$= c_10 + c_20 + \dots + c_s0 = 0$$

- 1. ξ_1 , $\xi_2 + \xi_3$
- 2. ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 , $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3$
- 3. $\xi_1 \xi_2$, $\xi_2 \xi_3$, $\xi_1 \xi_3$
- 4. $\xi_1 + \xi_2$, $\xi_2 + \xi_3$, $\xi_3 + \xi_1$

- 1. ξ_1 , $\xi_2 + \xi_3$
- 2. ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 , $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3$
- 3. $\xi_1 \xi_2$, $\xi_2 \xi_3$, $\xi_1 \xi_3$
- 4. $\xi_1 + \xi_2$, $\xi_2 + \xi_3$, $\xi_3 + \xi_1$

提示 判断

1. 是否为解

- 1. ξ_1 , $\xi_2 + \xi_3$
- 2. ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 , $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3$
- 3. $\xi_1 \xi_2$, $\xi_2 \xi_3$, $\xi_1 \xi_3$
- 4. $\xi_1 + \xi_2$, $\xi_2 + \xi_3$, $\xi_3 + \xi_1$

提示判断

- 1. 是否为解
- 2. 是否包含 3 个解(基础解系包含向量的个数是定值)

- 1. ξ_1 , $\xi_2 + \xi_3$
- 2. ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 , $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3$
- 3. $\xi_1 \xi_2$, $\xi_2 \xi_3$, $\xi_1 \xi_3$
- 4. $\xi_1 + \xi_2$, $\xi_2 + \xi_3$, $\xi_3 + \xi_1$

提示判断

- 1. 是否为解
- 2. 是否包含 3 个解(基础解系包含向量的个数是定值)
- 3. 是否为线性无关



$$\Rightarrow (A : b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (A \dot{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{figs}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (A:b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{figs}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} r(A) = r(A:b) = 2$$

$$\Rightarrow (A \vdots b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta g}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r(A) = r(A \vdots b)} = 2$$

自由变量 *X*₃, *X*₄



$$\Rightarrow (A:b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{iff}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} r(A) = r(A:b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ & x_3, x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A \vdots b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{iff}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} r(A) = r(A \vdots b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases}$$
 自由变量 x_3, x_4

$$\Rightarrow (A \vdots b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{iff}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} r(A) = r(A \vdots b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_2 - & x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 3x_4 & \text{自由变量} \\ x_2 = -5 & +x_3 - 2x_4 & x_3, x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A:b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{iff}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} r(A) = r(A:b)$$

$$= 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 3x_4 & \text{自由变量} \\ x_2 = -5 & +x_3 - 2x_4 & x_3, x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$



⇒
$$(A : b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$
 $\xrightarrow{\overline{\eta g}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $r(A) = r(A : b)$ $= 2$
⇒ $\begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases}$ ⇒ $\begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 3x_4 & \text{ in } \frac{1}{2} \\ x_2 = -5 & +x_3 - 2x_4 & x_3, x_4 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$



$$\Rightarrow (A \vdots b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{figh}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} r(A) = r(A \vdots b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 3x_4 \text{ } \underline{\textbf{a}}\underline{\textbf{a}}\underline{\textbf{b}}\underline{\textbf{g}}\underline{\textbf{g}} \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 + x_3, x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2c_1 \\ c_1 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3c_2 \\ -2c_2 \\ 0 \\ c_2 \end{pmatrix}$$



$$\Rightarrow (A:b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & | & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & | & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta} \neq +} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} r(A) = r(A:b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 3x_4 & \text{lehegh} \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 3x_4 & \text{lehegh} \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 & x_3, x_4 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (A:b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta} \neq +} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} r(A) = r(A:b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_2 - & x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 3x_4 & \text{自由变量} \\ x_2 = -5 & +x_3 - 2x_4 & x_3, x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 3x_4 & \text{ and } \text{$$

$$\Rightarrow (A:b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta} \not\equiv +} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} r(A) = r(A:b) = 2$$

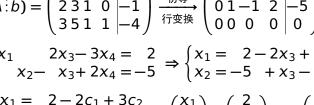
$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 3x_4 & \text{自由变量} \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 & x_3, x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 3x_4 \text{ EMSE} \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 + x_3, x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = n + c_1 \mathcal{E}_1 + c_2 \mathcal{E}_2$$

$$x_4 = 2$$
 $x_4 = -5$
 $\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 3x_4 & \text{alpha} \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 & x_3, x_4 \end{cases}$



 $\Rightarrow x = \eta + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$

⇒
$$(A:b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{infix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} r(A) = r(A:b)$$

$$= 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 3x_4 \text{ } \underline{\text{a}}\underline{\text{a}}\underline{\text{a}}\underline{\text{g}}\underline{\text{g}}\underline{\text{g}} \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 + x_3, x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 & x_3, x_4 \\ x_1 = 2 - 2c_1 + 3c_2 & x_2 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 & x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{cases} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ \eta \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} + c_2$$
$$\Rightarrow x = \eta + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$$

n: Ax = b一个解

⇒
$$(A:b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{inspec}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} r(A) = r(A:b)$$

$$= 2$$

 $\Rightarrow x = \eta + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$ n: Ax = b一个解



⇒
$$(A:b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{figs}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} r(A) = r(A:b)$$

$$= 2$$

⇒ $\begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_2 - & x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases}$ ⇒ $\begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 3x_4 \text{ 自由变量} \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 & x_3, x_4 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{2} - x_{3} + 2x_{4} = -5 \\ x_{2} = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{2} = -5 \\ x_{3} - 2x_{4} \end{cases} \xrightarrow{x_{3}, x_{4}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{1} = 2 - 2c_{1} + 3c_{2} \\ x_{2} = -5 + c_{1} - 2c_{2} \\ x_{3} = c_{1} \\ x_{4} = c_{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} \\ x_{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_{1} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_{2} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

 $\Rightarrow x = \eta + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$

 $\eta: Ax = b$ 一个解



$$\Rightarrow (A : b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{\eta} \neq +} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} r(A) = r(A : b)$$

$$= 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 3x_4 & \text{自由变量} \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 & x_3, x_4 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_1 = 2 - 2c_1 + 3c_2 & (x_1) & (2) & (-2) & (3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_2 = -5 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -5 \\ x_2 = -5 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = -5 \\ x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 = c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ \eta \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow x = \eta + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$$

 $\eta: Ax = b$ 一个解 $\xi_1, \, \xi_2$:



⇒
$$(A:b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{iff}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} r(A) = r(A:b)$$

$$= 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 3x_4 \text{ } \underline{\text{a}}\underline{\text{a}}\underline{\text{b}}\underline{\text{g}}\underline{\text{g}} \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 + x_3, x_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 2c_1 + 3c_2 & (x_1) & (2) & (-2) & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 & (x_2 = -5) + x_3 - 2x_4 & x_3, x_4 \\ x_1 = 2 - 2c_1 + 3c_2 & (x_1 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 & x_3 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

 $\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{cases} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ \eta \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} + c_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \xi_1 \end{pmatrix}$$

 $\xi_1, \, \xi_2$:

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 3x_4 & \text{ eline} \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 & x_3, x_4 \end{cases}$$

$$(x_1 = 2 - 2c_1 + 3c_2 \quad (x_1) \quad (2) \quad (-2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{2} - x_{3} + 2x_{4} = -5 \\ x_{2} = -5 \\ x_{3} = 2x_{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} = 2 - 2c_{1} + 3c_{2} \\ x_{2} = -5 + c_{1} - 2c_{2} \\ x_{3} = c_{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} = c_{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} = c_{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} = c_{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} = c_{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} = c_{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{2} = -5 \\ x_{3} = c_{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} = c_{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} = c_{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} = c_{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} = c_{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} = c_{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} = c_{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} = c_{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} = c_{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} = c_{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} = c_{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} = c_{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} = c_{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} = c_{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} = c_{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} = c_{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} = c_{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} = c_{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} = c_{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} = c_{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} = c_{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} = c_{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} = c_{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} = c_{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} = c_{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} = c_{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} = c_{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} = c_{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} = c_{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} = c_{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} = c_{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} = c_{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} = c_{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} = c_{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} = c_{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} = c_{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} = c_{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} = c_{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} = c_{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} = c_{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} = c_{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} = c_{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} = c_{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} \\ x_{1} \\ x_{2} = c_{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} \\ x_{1} \\ x_{2} = c_{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} \\ x_{1} \\ x_{2} = c_{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} \\ x_{1} \\ x_{2} = c_{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} \\ x_{1} \\ x_{2} = c_{$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

 $\Rightarrow x = \eta + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$ $\eta: Ax = b$ 一个解 $\xi_1, \, \xi_2$:

⇒
$$(A:b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{NF}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} r(A) = r(A:b)$$

$$= 2$$

$$\begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 2 \end{cases} \begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 3x_4 & \text{自由变量} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 3x_4 & \text{自由变量} \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 & x_3, x_4 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_1 = 2 - 2c_1 + 3c_2 & (x_1) & (2) & (-2) & (3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{2} - x_{3} + 2x_{4} = -5 \Rightarrow \begin{cases} x_{2} = -5 + x_{3} - 2x_{4} & x_{3}, x_{4} \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} x_{1} = 2 - 2c_{1} + 3c_{2} \\ x_{2} = -5 + c_{1} - 2c_{2} \\ x_{3} = c_{1} \\ x_{4} = c_{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} \\ x_{4} \end{cases} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_{1} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_{2} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

 $\Rightarrow x = \eta + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$ $\eta: Ax = b$ 一个解 $\xi_1, \, \xi_2$:

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 3x_4 & \text{ and } \text{$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{2} - x_{3} + 2x_{4} = -5 \Rightarrow \begin{cases} x_{2} = -5 + x_{3} - 2x_{4} & x_{3}, x_{4} \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} x_{1} = 2 - 2c_{1} + 3c_{2} \\ x_{2} = -5 + c_{1} - 2c_{2} \\ x_{3} = c_{1} \\ x_{4} = c_{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} \\ x_{4} \end{cases} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_{1} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_{2} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

 $\Rightarrow x = \eta + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$ $\eta: Ax = b$ 一个解 $\xi_1, \, \xi_2 : Ax = 0$ 基础解系

定义 在非齐次线性方程组

$$Ax = b$$

中,用0代替b,所得到的齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

称为原方程组 Ax = b 的导出组。

定义 在非齐次线性方程组

$$Ax = b$$

中,用0代替b,所得到的齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

称为原方程组 Ax = b 的导出组。

如
$$\begin{cases} x_1 -2x_2 +4x_3 -7x_4 = 1 \\ 2x_1 +x_2 -2x_3 +x_4 = 4 & \text{的导出组是} \\ 3x_1 -x_2 +2x_3 -6x_4 = -9 \end{cases}$$

定义 在非齐次线性方程组

$$Ax = b$$

中,用0代替b,所得到的齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

称为原方程组 Ax = b 的导出组。

如
$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & +4x_3 & -7x_4 & = 1 \\ 2x_1 & +x_2 & -2x_3 & +x_4 & = 4 & \text{的导出组是} \\ 3x_1 & -x_2 & +2x_3 & -6x_4 & = -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & +4x_3 & -7x_4 & = 0 \\ 2x_1 & +x_2 & -2x_3 & +x_4 & = 0 \\ 3x_1 & -x_2 & +2x_3 & -6x_4 & = 0 \end{cases}$$

定理 如果 η 是非齐次线性方程组

$$Ax = b$$

的一个解,则原方程组的任意解 x 可以表示成

$$x = \eta + \xi$$

其中 ξ 是导出组 Ax = 0 的解。

$$Ax = b$$

的一个解,则原方程组的任意解 x 可以表示成

$$x = \eta + \xi$$

其中 ξ 是导出组 Ax = 0 的解。

进一步,设导出组Ax = 0的基础解系是

$$\xi_1,\,\xi_2,\,\ldots,\,\xi_s$$

$$Ax = b$$

的一个解,则原方程组的任意解 x 可以表示成

$$x = \eta + \xi$$

其中 ξ 是导出组 Ax = 0 的解。

进一步,设导出组 Ax = 0 的基础解系是

$$\xi_1,\,\xi_2,\,\ldots,\,\xi_s$$

$$\underline{\varsigma}_1 \xi_1 + \varsigma_2 \xi_2 + \cdots + \varsigma_s \xi_s$$

$$Ax = b$$

的一个解,则原方程组的任意解 x 可以表示成

$$x = \eta + \xi$$

其中 ξ 是导出组 Ax = 0 的解。

进一步,设导出组Ax = 0的基础解系是

$$\xi_1,\,\xi_2,\,\ldots,\,\xi_s$$

则原方程组的任意解 x 可以表示成

$$x = \eta + \underline{\xi} = \eta + \underline{c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_s \xi_s}$$

$$Ax = b$$

的一个解,则原方程组的任意解 x 可以表示成

$$x = \eta + \xi$$

其中 ξ 是导出组 Ax = 0 的解。

进一步,设导出组 Ax = 0 的基础解系是

$$\xi_1,\,\xi_2,\,\ldots,\,\xi_s$$

则原方程组的任意解 x 可以表示成

$$x = \eta + \underline{\xi} = \eta + \underline{c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_s \xi_s}$$

证明 因为

$$Ax = b$$
, $A\eta = b$

$$Ax = b$$

的一个解,则原方程组的任意解 x 可以表示成

$$x = \eta + \xi$$

其中 ξ 是导出组 Ax = 0 的解。

进一步,设导出组Ax = 0的基础解系是

$$\xi_1,\,\xi_2,\,\ldots,\,\xi_s$$

则原方程组的任意解 x 可以表示成

$$x = \eta + \underline{\xi} = \eta + \underline{c_1}\xi_1 + \underline{c_2}\xi_2 + \dots + \underline{c_s}\xi_s$$

证明 因为

$$Ax = b$$
, $A\eta = b$

所以 $A(x-\eta) = Ax - A\eta = b - b = 0$

$$Ax = b$$

的一个解,则原方程组的任意解x可以表示成

$$x = \eta + \xi$$

其中 ξ 是导出组 Ax = 0 的解。

进一步,设导出组 Ax = 0 的基础解系是

$$\xi_1, \, \xi_2, \, \ldots, \, \xi_s$$

则原方程组的任意解x可以表示成

$$x = \eta + \underline{\xi} = \eta + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_s \xi_s$$

证明 因为

$$Ax = b$$
, $An = b$

所以 $A(x-\eta) = Ax - A\eta = b - b = 0$,说明 $x - \eta$ 是导出组 Ax = 0

$$Ax = b$$

的一个解,则原方程组的任意解x可以表示成

$$x = \eta + \xi$$

其中 ξ 是导出组 Ax = 0 的解。

进一步,设导出组 Ax = 0 的基础解系是

$$\xi_1, \, \xi_2, \, \ldots, \, \xi_s$$

则原方程组的任意解 x 可以表示成

$$x = \eta + \xi = \eta + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_s \xi_s$$

证明 因为

$$Ax = b$$
, $An = b$

所以 $A(x-\eta) = Ax - A\eta = b - b = 0$,说明 $x - \eta$ 是导出组 Ax = 0

用基础解系表示 Ax = b 通解

先是

- 将增广矩阵 (A, b) 化为简化的阶梯形矩阵;
- 确定自由变量,写出同解方程组;

然后

- 求出一个特解 η: 可取自由未知量全为 0 得到
- 求出导出组 Ax = 0 的基础解系: $ξ_1, ξ_2, ..., ξ_s$

则 Ax = b 的通解是



用基础解系表示 Ax = b 通解

先是

- 将增广矩阵 (A, b) 化为简化的阶梯形矩阵;
- 确定自由变量,写出同解方程组;

然后

- 求出一个特解 η: 可取自由未知量全为 0 得到
- 求出导出组 Ax = 0 的基础解系: $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$

则 Ax = b 的通解是

$$x = \eta + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \cdots + c_s \xi_s$$



例用"特解+基础解系的线性组合"的形式,求出 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$ 的通解。 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 3 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & | b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 & | & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
A \mid b
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
1 & 2 & 1 & 1 & -1 \mid 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 \mid 1 \\
2 & 3 & 1 & 2 & -1 \mid 3
\end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_1}$$

$$\begin{pmatrix}
\mathbf{A} \mid b
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
1 & 2 & 1 & 1 & -1 \mid 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 \mid 1 \\
2 & 3 & 1 & 2 & -1 \mid 3
\end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix}
1 & 2 & 1 & 1 & -1 \mid 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 \mid 1 \\
0 & -1 & -1 & 0 & 1 \mid 1
\end{pmatrix}$$

$$r_3 + r_2$$

$$\begin{pmatrix}
A \mid b
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
2 & 3 & 1 & 2 & -1 & 3
\end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix}
1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
A \mid b
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
1 & 2 & 1 & 1 & -1 \mid 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 \mid 1 \\
2 & 3 & 1 & 2 & -1 \mid 3
\end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix}
1 & 2 & 1 & 1 & -1 \mid 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 \mid 1 \\
0 & -1 & -1 & 0 & 1 \mid 1
\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2} \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[r_1-r_3]{r_2-r_3}$$

例用"特解+基础解系的线性组合"的形式,求出 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$ 的通解。 $2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 3$



例 用"特解+基础解系的线性组合"的形式,求出 $\left\{ \begin{array}{ccccc} x_1+ & 2x_2+ & x_3+ & x_4- & x_5=1 \\ & x_2+ & x_3+ & x_4 & =1 & \text{hi} \\ 2x_1+ & 3x_2+ & x_3+ & 2x_4- & x_5=3 \end{array} \right.$

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \text{ bidf} \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R & \text{if } A \mid b \text{ if } b \text{$$

$$r_1-2r_2$$



$$\xrightarrow{r_3+r_2} \begin{pmatrix}
1 & 2 & 1 & 1 & -1 & | & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & | & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & 2
\end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-r_3} \begin{pmatrix}
1 & 2 & 1 & 0 & -2 & | & -1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & -1 & | & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & 2
\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-2r_2} \begin{pmatrix}
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & | & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & -1 & | & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & 2
\end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2
\end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{pmatrix}
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2
\end{pmatrix}$$



例 用 "特解+基础解系的线性组合"的形式,求出 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$ 的通解。 $2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 3$

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{H}} \\
\left(\begin{array}{cccc|c} A \mid b\end{array}\right) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
\xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-2r_2} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

1. 自由变量: X3, X5;



例用"特解+基础解系的线性组合"的形式,求出 $\left\{ \begin{array}{ccccc} x_1+ & 2x_2+ & x_3+ & x_4- & x_5=1 \\ & x_2+ & x_3+ & x_4 & =1 & \text{的} \mathbb{A} \text{m} \\ 2x_1+ & 3x_2+ & x_3+ & 2x_4- & x_5=3 \end{array} \right.$

$$\xrightarrow{r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. 自由变量: *X*₃, *X*₅; 方程同解于: $\begin{cases} x_1 & -x_3 & = 1 \\ x_2 & +x_3 & -x_5 & = -1 \\ x_4 & +x_5 & = 2 \end{cases}$



例用"特解+基础解系的线性组合"的形式,求出 $\begin{cases} x_1 + & 2x_2 + & x_3 + & x_4 - & x_5 = 1 \\ & x_2 + & x_3 + & x_4 & = 1 \end{cases}$ 的通解。 $2x_1 + & 3x_2 + & x_3 + & 2x_4 - & x_5 = 3$

$$\xrightarrow{r_1-2r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

\ 0 0 0 <mark>1</mark>
1. 自由变量: *x*₃, *x*₅; 方程同解于:

 $\begin{cases} x_1 & -x_3 & = 1 \\ x_2 + x_3 & -x_5 = -1 \\ x_4 + x_5 & = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 + x_5 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 & -x_3 & = 1 \\ x_2 & +x_3 & -x_5 & = -1 \\ x_4 & +x_5 & = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 + x_5 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 & -x_3 & = 1 \\ x_2 & +x_3 & -x_5 & = -1 \\ x_4 & +x_5 & = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 + x_5 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$$

2. 原方程组特解: 取自由变量
$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
,

$$\begin{cases} x_1 & -x_3 & = 1 \\ x_2 & +x_3 & -x_5 & = -1 \\ x_4 & +x_5 & = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 + x_5 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$$

2. 原方程组特解:取自由变量
$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
,得特解 $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 。



$$\begin{cases} x_1 & -x_3 & = 1 \\ x_2 & +x_3 & -x_5 & = -1 \\ x_4 & +x_5 & = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 + x_5 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$$

2. 原方程组特解:取自由变量
$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
,得特解 $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 。

3. 导出组
$$Ax = 0$$



$$\begin{cases} x_1 & -x_3 & = 1 \\ x_2 + x_3 & -x_5 = -1 \\ x_4 + x_5 & = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 + x_5 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$$

2. 原方程组特解:取自由变量
$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
,得特解 $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 。

3. 导出组
$$Ax = 0$$
同解于
$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_3 + x_5 \\ x_4 = -x_5 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x_1 & -x_3 & = 1 \\ x_2 + x_3 & -x_5 = -1 \\ x_4 + x_5 & = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 + x_5 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$$

2. 原方程组特解:取自由变量
$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
,得特解 $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 。

3. 导出组
$$Ax = 0$$
同解于 $\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_3 + x_5 \\ x_4 = -x_5 \end{cases}$.分别取 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, 得基础解系 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$$

$$\begin{cases} x_1 & -x_3 & = 1 \\ x_2 & +x_3 & -x_5 & = -1 \\ x_4 & +x_5 & = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 + x_5 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$$

2. 原方程组特解:取自由变量
$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
,得特解 $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 。

3. 导出组
$$Ax = 0$$
同解于 $\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_3 + x_5 \end{cases}$.分别取 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 得基础解系 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

4. 通解:
$$X = \eta + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$$
 其中 c_1 , c_2 为任意常数。

